

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II



Conexiones Globales y Comportamientos Periódicos
en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos.

Elisabeth García Medina

TESIS DOCTORAL

Conexiones Globales y Comportamientos Periódicos en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos.

Memoria presentada por Elisabeth García Medina para optar
al Título de Doctora por la Universidad de Sevilla.

Fdo. Elisabeth García Medina

Vº Bº de los Directores:

Fdo. Victoriano Carmona Centeno
Profesor Titular de Universidad
Dpto. Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

Fdo. Fernando Fernández Sánchez
Profesor Titular de Universidad
Dpto. Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

Sevilla, 13 de Abril de 2011

A mi abuela Elisa.

A mis padres.

A mi hermano.

Agradecimientos

Muchas veces me he planteado la opción de comenzar y acabar esta sección únicamente con la palabra “Gracias”... y nada más. Sencillamente por evitar el resumir en una sola página la mención de tantas personas a las que debo mucho:

En primer lugar, un sincero agradecimiento a mis directores, Victoriano Carmona y Fernando Fernández, por introducirme en el campo de los sistemas dinámicos, por todo el tiempo que me han dado, por su respaldo y su amistad, y por haberme ayudado en mi aprendizaje y la realización de este trabajo.

También debo añadir al profesor Antonio E. Teruel por la estrecha colaboración durante la realización de esta memoria y por haberme acogido en mi estancia en la Universidad de las Islas Baleares.

A los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla por la acogida y la ayuda recibida, tanto moral como material, a lo largo de todos estos años. En especial a los compañeros del Grupo de Investigación en Sistemas Dinámicos por su participación, directa o indirecta, en mi formación. También debo un especial reconocimiento a los profesores de la Escuela Politécnica Superior que me han ayudado con la docencia en la recta final de este trabajo.

No puedo olvidar a mis compañeras y amigas con las cuales he compartido despacho e incontables horas de trabajo. Gracias por los buenos y malos momentos, por aguantarme y por escucharme.

Todo esto nunca hubiera sido posible sin el amparo incondicional de mis padres, mi hermano y mi abuela, que han vivido de cerca el desarrollo de este trabajo. Siempre me dijeron que lo conseguiría, que ya quedaba menos para terminar. La finalización de este trabajo es también vuestro premio.

Gracias a todos los que me habéis ayudado a que este trabajo llegue a buen puerto.

Elisabeth García Medina

Índice general

Introducción	VII
1 Sistemas dinámicos continuos lineales a trozos: Generalidades.	1
1.1 Definición y primeras propiedades.	2
1.2 Existencia y unicidad de solución.	4
1.3 Controlabilidad y observabilidad. Formas canónicas.	6
1.4 Semiaplicaciones de Poincaré.	9
2 Versión lineal a trozos del sistema de Michelson.	17
2.1 Primeras propiedades de la versión lineal a trozos del sistema de Michelson.	19
2.2 Variedades invariantes.	23
2.3 Solución del sistema continuo lineal a trozos en cada subespacio.	28
3 Existencia de conexiones globales en la versión lineal a trozos	33
3.1 Condiciones para la existencia de órbitas homoclinas directas.	35
3.2 Condiciones para la existencia de un ciclo heteroclinico tipo punto-T directo.	39
3.3 Procedimiento común para probar la existencia de las conexiones globales.	43
3.4 Existencia de conexiones homoclinas directas.	48
3.5 Existencia de un ciclo heteroclinico tipo punto-T directo.	58
3.6 Otras conexiones globales.	74
3.6.1 Conexiones homoclinas directas.	74
3.6.2 Ciclo heteroclinico tipo punto-T directo.	81

4	Órbitas periódicas reversibles de dos cortes en la versión lineal a trozos	87
4.1	Existencia de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con el plano de separación.	88
4.2	Bifurcaciones en la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes.	116
4.3	Órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes.	121
5	Continuación numérica de órbitas periódicas.	133
5.1	Órbitas periódicas cerca de una conexión homoclina directa.	134
5.2	Órbitas periódicas en las cercanías de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo.	148
5.3	Órbitas periódicas que nacen de las bifurcaciones.	156
5.3.1	Curva de órbitas periódicas que nace de la bifurcación pitchfork.	157
5.3.2	Curvas de órbitas periódicas que nacen de las bifurcaciones de duplicación de periodo de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes.	163
5.3.3	Curva de órbitas periódicas que nace de una bifurcación de duplicación de periodo de la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes.	176
	Conclusiones y Trabajos Futuros	189
	Bibliografía	193

Introducción

Durante los últimos años del siglo XX y los primeros del siglo XXI hemos sido testigos de un fuerte impulso en la investigación de los sistemas dinámicos definidos a trozos, que se han convertido así en una de las ramas más activas y fructíferas dentro del marco global de los sistemas dinámicos en ecuaciones diferenciales.

Al contrario de lo que pudiera parecer por este interés actual, los sistemas definidos por funciones a trozos no son un hallazgo reciente sino que ya fueron utilizados en las primeras décadas del siglo XX para modelar algunos dispositivos no lineales que surgen en diversos campos de la ingeniería. Una referencia básica al respecto es el libro clásico “Teoría de Osciladores” de Andronov, Vitt y Khaikin [2], publicado originalmente en 1937. Desde entonces, han sido una herramienta idónea en el ámbito de la ingeniería para describir fielmente multitud de sistemas físicos en los que se producen no linealidades con transiciones no regulares entre distintos estados (funciones de saturación, limitadores de pendiente, impactos, ...).

Históricamente, en el análisis teórico de algunos de estos fenómenos, a veces se ha optado por regularizar previamente el sistema de ecuaciones diferenciales (cambiando una función escalón por una arcotangente adecuada o reemplazando alguna función a trozos por un polinomio) para poder así disponer de la ventaja que supone el uso de la fuerte artillería conocida para funciones diferenciables. Es obvio que en este proceso se puede desvirtuar el problema original y perder algunos comportamientos interesantes que pudiesen ser motivados directamente por la falta de derivabilidad. Aunque, de manera general, es previsible que a mayor precisión en la regularización se dé una mayor concordancia entre los resultados del sistema original y los del regularizado, para que el enfoque sea más directo y seguro, se ha hecho necesario empezar una teoría propia para sistemas definidos a trozos que, por un lado, suple a la ya existente para sistemas diferenciables y, por otro, tiene en consideración las particularidades que pudiesen hacer especiales a estos sistemas. En el libro [8],

del año 2008, se puede consultar una buena muestra del estado del arte así como una cuidada y exhaustiva lista de referencias al respecto.

Un tipo particular de sistemas definidos a trozos que posee importancia propia es el de los sistemas continuos lineales a trozos, es decir, aquellos sistemas en los cuales las funciones empleadas son lineales en cada región del espacio y se unen con continuidad en las variedades que las separan. Gran parte de la importancia que tienen este tipo de sistemas se debe a que modelan a la perfección numerosas aplicaciones reales (circuito de Chua [57], oscilador de Colpitts [48], oscilador en Puente de Wien [40, 54]), aunque además poseen otras tres características que los hacen especialmente atractivos: por un lado, son capaces de reproducir las bifurcaciones más habituales de los sistemas diferenciables (con algunas particularidades evidentes) [13]; por otro lado, muestran nuevos comportamientos que son imposibles de obtener con diferenciables (a modo de ejemplo, comentemos que un equilibrio puede no ser estable aún cuando las partes reales de los autovalores de las correspondientes matrices del sistema sean todas estrictamente negativas [15]); por último, el carácter lineal a trozos del sistema permite obtener las ecuaciones de algunos elementos geométricos y dinámicos relevantes (variedades invariantes), así como integrar explícitamente el flujo del sistema en cada zona de linealidad. Nótese que este último punto, a pesar de ser una ventaja innegable, no permite obtener la solución general del sistema a menos que los flujos obtenidos se unan apropiadamente en las variedades de separación.

La posibilidad de integración en cada zona de linealidad que tienen los sistemas lineales a trozos permite considerar problemas que son prácticamente inabordables en sistemas diferenciables. El mero hecho de probar analíticamente la existencia de una órbita periódica en un sistema diferenciable genérico se puede volver, más allá de razonamientos locales a partir de degeneraciones de equilibrios, una tarea ardua y, a veces, inalcanzable; ni que decir tiene la dificultad que se encuentra al tratar la existencia de conexiones globales y la dinámica que despliegan. De hecho, aparte de las técnicas locales comentadas, la mayoría de las veces se recurre, incluso en sistemas lineales a trozos, a técnicas computacionales para abordar estos problemas [49, 67–69]. Nosotros hemos querido desmarcarnos un poco de esta línea y, aunque al final del trabajo recurrimos al ordenador para ilustrar y extender alguno de los resultados obtenidos, el objetivo primordial que nos planteamos en la memoria es utilizar las particularidades de los sistemas lineales a trozos para obtener pruebas analíticas de la existencia de órbitas periódicas y bifurcaciones globales en tres dimensiones.

Antes de nada, debemos comenzar la memoria haciendo un repaso por alguno de los conceptos fundamentales relativos a sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas de

linealidad (que, sin pérdida de generalidad, podemos considerar separadas por un plano, llamado plano de separación). A este fin dedicamos el primer capítulo de la memoria. En primer lugar, determinamos la existencia y unicidad global de solución para el problema de valor inicial asociado. Después, nos planteamos cómo escribir el sistema en algún tipo de forma canónica y distinguir cuándo el sistema puede o no desacoplarse basándonos en las condiciones de controlabilidad y observabilidad. Para terminar, nos centramos en cómo se construyen las semiaplicaciones de Poincaré (obtenidas a partir de dos puntos consecutivos de intersección entre una órbita y el plano de separación) y en la manera de calcular, a partir de ellas, los multiplicadores característicos asociados a una órbita periódica. La correcta manipulación de las semiaplicaciones de Poincaré nos permitirá llegar, en capítulos posteriores, a ecuaciones e inecuaciones que caractericen a las distintas órbitas periódicas y conexiones globales que queremos estudiar.

Aunque gran parte del trabajo realizado en la memoria se puede extender de forma genérica a otros sistemas, en el segundo capítulo nos centramos en una familia uniparamétrica particular de sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos que además poseen reversibilidad al cambio de signo en dos variables espaciales, divergencia nula y no se pueden desacoplar. Entre todos los miembros de la familia, elegimos un representante que podemos considerar como una versión lineal a trozos del conocido sistema de Michelson [31, 42, 55], ya que se puede obtener de éste tras unas simples manipulaciones. El resto del capítulo se dedica a analizar las propiedades geométricas principales del flujo del sistema, de donde destacamos, por su uso en posteriores resultados, el estudio del sentido del flujo en el plano de separación y la obtención local de las variedades invariantes de los equilibrios. Finalizamos con las expresiones de la solución de los sistemas lineales en cada zona.

En cuanto contamos con la mayoría de elementos teóricos necesarios para abordar los problemas propuestos, nos embarcamos en la prueba de la existencia de dos conexiones globales para ciertos valores del parámetro del sistema. Más concretamente, consideramos sólo conexiones directas, es decir, órbitas homoclinas que sólo intersecan dos veces al plano de separación y ciclos heteroclinos tipo punto-T que intersecan en cuatro puntos. Mediante las semiaplicaciones de Poincaré, obtenemos unas condiciones (escritas como un conjunto de ecuaciones e inecuaciones) que caracterizan a cada uno de los dos objetos y comprobamos que, a pesar de ser distintos, las dos pruebas de existencia son análogas: ambas tienen una parte común, donde nos planteamos la existencia de solución de un sistema genérico de ecuaciones cuya forma engloba a los casos anteriores, así como unos detalles específicos de cada tipo de conexión, que abordamos en dos secciones consecutivas del capítulo. Como final del capítulo mostramos que, para ciertos valores del parámetro, aparecen dos tipos distintos de

conexiones homoclinas directas así como otros dos tipos de ciclos heteroclinos tipo punto-T.

El capítulo cuarto se dedica al análisis de comportamientos periódicos y nos centramos fundamentalmente en el estudio de la configuración conocida como bifurcación *noose* (lazo), cuya aparición ya es conocida en el sistema de Michelson diferenciable, véase [38, 39]. Esta estructura del diagrama de bifurcaciones relaciona las dos bifurcaciones más básicas de órbitas periódicas (silla-nodo y duplicación de periodo) de tal modo que la familia sufre, para un valor del parámetro, una bifurcación de duplicación de periodo y, posteriormente, ambas órbitas (la original y la de periodo doble) desaparecen al colisionar en una bifurcación silla-nodo. En el proceso que sigue la órbita de periodo doble antes de llegar al pliegue podemos comprobar como una de las dos vueltas originales va disminuyendo progresivamente su tamaño hasta desaparecer, a medida que decrece el periodo. Este hecho, que en el sistema de Michelson diferenciable no tiene casi ninguna relevancia en el estudio, es fundamental en la versión lineal a trozos, ya que involucra una tangencia transversal (cúbica) de la órbita periódica con el plano de separación y esto fuerza a distinguir entre órbitas que intersecan dos veces con el plano de separación y órbitas que lo hacen cuatro veces. La implicación de este fenómeno en nuestro análisis es fundamental por dos motivos: por un lado, porque obliga a manejar distintas ecuaciones para cada tipo de órbita y, por el otro, porque el punto de tangencia tiene algunas características y propiedades que lo hacen tener un papel central en los diagramas de bifurcación de las familias de órbitas periódicas.

Cabe destacar que, en el capítulo cuarto, llevamos a cabo una prueba analítica de existencia de la familia de órbitas periódicas reversibles y de dos cortes con el plano de separación que está involucrada en la bifurcación lazo. Esta familia no se puede considerar como local (en el sentido de que se debe a una degeneración de equilibrios y, por tanto, sólo se puede estar seguro de su existencia en un entorno de la misma), sino que existe en todo un intervalo de valores del parámetro y termina en la tangencia transversal antes mencionada. Las técnicas utilizadas se basan en las ecuaciones e inecuaciones obtenidas a partir de las semiaplicaciones de Poincaré. Para terminar el capítulo usamos métodos numéricos para continuar la familia de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que surge de la tangencia así como para detectar y caracterizar las bifurcaciones principales que aparecen.

El algoritmo de continuación numérica desarrollado (basado en la pseudo-longitud de arco, véase capítulo 10 de [43]) nos sirve también para obtener las ramas principales de órbitas periódicas que surgen de cada una de las degeneraciones principales que se dan sobre el lazo, trabajo que abordamos en el capítulo quinto. Esto permite observar que alguna de dichas ramas tiende, a medida que aumenta el periodo, a ciertas conexiones globales (alguna de ellas estudiada en el capítulo tercero). Veremos

también que, de modo genérico, todas estas familias pasan por tangencias de distinto tipo entre las órbitas periódicas y el plano de separación. Por ello, van ganando y perdiendo puntos de corte con dicho plano, así que necesitamos desarrollar y manipular condiciones para órbitas periódicas reversibles y no reversibles de dos, cuatro, seis y ocho cortes.

Para terminar la memoria añadimos unas líneas a modo de resumen, donde escribimos algunas conclusiones de nuestro análisis y, además, planteamos algunos trabajos que se han abierto durante la investigación y que sería interesante considerar en el futuro.

Sistemas dinámicos continuos lineales a trozos: Generalidades.

Los sistemas dinámicos continuos lineales a trozos se consideran, en el ámbito de la ingeniería, como las aproximaciones más adecuadas a ciertos comportamientos no lineales. Aparecen con frecuencia en el modelado matemático de fenómenos en los que se producen saturaciones, como dispositivos electrónicos, mecánicos y de control.

En estos sistemas se pueden distinguir regiones del espacio donde la dinámica es lineal y, por tanto, el flujo es integrable explícitamente en cada una de ellas. La mayor dificultad al realizar su análisis dinámico surge cuando nos planteamos unir dichos flujos lineales a lo largo de las fronteras comunes a las correspondientes regiones.

Por otra parte, la falta de diferenciabilidad hace que, para la detección y caracterización de sus posibles bifurcaciones, no se puedan aplicar, en principio, los resultados y técnicas de la dinámica diferenciable y haya que desarrollar herramientas específicas para el estudio del comportamiento del sistema.

Un conjunto de sistemas lineales a trozos que presenta un especial interés lo conforman aquellos que poseen dos o tres variables de estado y dos o tres zonas de linealidad, separadas por variedades lineales paralelas. Como ejemplos de tales sistemas podemos destacar, entre otros, el oscilador de Goodwin [18] como sistema bizonal plano, el circuito de Chua [12, 53] como sistema trizonal tridimensional y el oscilador de Colpitts [48] como sistema tridimensional con dos zonas de linealidad.

En este capítulo, se analizarán algunas propiedades de los sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas de linealidad y, por tanto, una única frontera. Mediante una transformación adecuada podemos conseguir que la frontera pase por el origen de coordenadas, obteniéndose así un sistema equivalente al inicial. Esto nos permitirá, entre otras cosas, probar la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales asociado.

Con el objetivo de buscar sistemas equivalentes al dado, con un menor número de parámetros y que resulten más fáciles de analizar, se realizará un estudio de las formas canónicas para sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas.

Finalmente, terminaremos el capítulo definiendo las semiaplicaciones de Poincaré para sistemas continuos lineales a trozos y la aplicación de Poincaré como composición de éstas.

1.1. Definición y primeras propiedades.

Para definir el tipo de sistema dinámico que consideramos en el resto de la memoria, vamos a introducir la siguiente notación:

En todo lo que sigue, $\dot{\mathbf{x}}$ denota la derivada de \mathbf{x} respecto de la variable temporal t , \mathbf{e}_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n y $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con elementos en \mathbb{R} . En particular, designamos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices cuadradas de orden n cuyos elementos son números reales. Mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotamos al producto escalar usual de \mathbb{R}^n y por $\| \cdot \|$ a la norma euclídea, asociada a dicho producto escalar.

A continuación, definimos el tipo de sistema dinámico que analizamos en esta memoria.

Definición 1.1 Decimos que la ecuación diferencial autónoma $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función continua, define un *sistema dinámico continuo lineal a trozos bizonal* en \mathbb{R}^3 si existen tres vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dos matrices $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y un escalar $\delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 & \text{si } \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \delta < 0, \\ A_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 & \text{si } \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \delta \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

El plano de ecuación $\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \delta = 0\}$ se denomina *plano de separación*.

El plano de separación divide al espacio en dos regiones en cada una de las cuales el sistema (1.1) es lineal. Además, por ser el campo vectorial del sistema una función continua se verifica la igualdad $A_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 = A_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2$, para todo punto \mathbf{x} del plano de separación.

Veremos, en la siguiente proposición, que realizando un cambio de variables podemos transformar el plano de separación en el plano de ecuación $\{x = 0\}$.

Proposición 1.2 El sistema continuo lineal a trozos (1.1) puede escribirse en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} A^- \mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{si } x < 0, \\ A^+ \mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ y las matrices $A^-, A^+ \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ satisfacen la condición

$$A^+ - A^- = (A^+ - A^-) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \quad \text{con } \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3.$$

Demostración:

Consideremos la matriz de Householder H que verifica la condición $H\mathbf{v} = (\|\mathbf{v}\|, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$. El cambio de variable $\tilde{\mathbf{x}} = H(\mathbf{x} + \delta\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|^{-2})$ nos permite escribir el sistema (1.1) en la forma

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{cases} HA_1H\tilde{\mathbf{x}} + H(\mathbf{b}_1 - A_1\delta\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|^{-2}) & \text{si } \tilde{x} \leq 0, \\ HA_2H\tilde{\mathbf{x}} + H(\mathbf{b}_2 - A_2\delta\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|^{-2}) & \text{si } \tilde{x} > 0. \end{cases}$$

De la continuidad del campo vectorial se deduce, por un lado, la coincidencia de las dos últimas columnas de las matrices HA_1H y HA_2H y, por otro lado, la igualdad

$$H(\mathbf{b}_1 - A_1\delta\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|^{-2}) = H(\mathbf{b}_2 - A_2\delta\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|^{-2}).$$

Tomando $A^- = HA_1H$, $A^+ = HA_2H$, $\mathbf{b} = H(\mathbf{b}_1 - A_1\delta\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|^{-2})$ y renombrando la variable $\tilde{\mathbf{x}}$ por \mathbf{x} concluimos la demostración. \square

Definición 1.3 El plano de separación $\{x = 0\}$ divide al espacio en dos semiespacios, que denotamos por Σ_- y Σ_+ y denominamos *semiespacio izquierdo* y *derecho* respectivamente; esto es,

$$\Sigma_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\},$$

$$\Sigma_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}.$$

El plano de separación $\{x = 0\}$ se denotará por $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

En general, la dinámica del sistema (1.2) en cada uno de los semiespacios está determinada por

el tipo topológico del equilibrio, cuando existe, del sistema lineal correspondiente. Este punto de equilibrio puede estar en el plano de separación o bien en uno de los semiespacios de linealidad. En el caso de que el equilibrio de uno de los sistemas lineales pertenezca al semiespacio que lo gobierna o bien al plano de separación será un equilibrio del sistema (1.2) y se denomina *equilibrio real*; en caso contrario, se dice que es un *equilibrio virtual*.

1.2. Existencia y unicidad de solución.

La existencia y unicidad de solución de un problema de valores iniciales asociado a un sistema dinámico definido a trozos puede no estar siempre garantizada. Véase, por ejemplo, el trabajo de Kahlert [32].

No obstante, veremos que el problema de valores iniciales asociado al sistema (1.2) posee una única solución definida en toda la recta real. Para ello, recordamos previamente algunos conceptos y resultados sobre la existencia y unicidad de solución en sistemas autónomos, véase [56].

Definición 1.4 Dados $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua, una función $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida en todo \mathbb{R} es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

si es una función diferenciable, verifica $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y cumple la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Con objeto de enunciar el resultado clásico de existencia y unicidad de solución para el sistema lineal (1.3) recordaremos el concepto de función lipschitziana.

Definición 1.5 Decimos que una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es *globalmente lipschitziana* si existe una constante $k > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ se verifica $\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \leq k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$.

A continuación, se enuncia el resultado clásico de existencia y unicidad de solución para un problema de valores iniciales. Los detalles de su prueba pueden consultarse, por ejemplo, en [56].

Teorema 1.6 Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función globalmente lipschitziana, entonces el problema de valores iniciales (1.3) tiene una única solución definida en todo \mathbb{R} .

Podemos aplicar el resultado anterior al caso en que el problema de valores iniciales esté asociado a un sistema continuo lineal a trozos. Más concretamente, vamos a demostrar, en la siguiente proposición, que la solución de un problema de valores iniciales para el sistema (1.2) existe y es única. Para ello, utilizando el Teorema 1.6, bastará comprobar que el campo vectorial de dicho sistema es una función globalmente lipschitziana.

Proposición 1.7 Sea \mathbf{x}_0 un vector cualquiera perteneciente a \mathbb{R}^3 , entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} A^- \mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{si } x < 0, \\ A^+ \mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

tiene una única solución definida en todo \mathbb{R} .

Demostración:

Para probar la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales (1.4) es suficiente comprobar que el campo vectorial f del sistema (1.2) verifica la condición global de Lipschitz. Es decir, existe $k > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ se verifica $\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \leq k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$.

La prueba depende de la posición relativa de $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ con respecto al plano de separación. Se distinguen las siguientes posibilidades:

a) Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Sigma_+ \cup \Sigma$, entonces

$$\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| = \|A^+ \mathbf{x}_1 - A^+ \mathbf{x}_2\| \leq \|A^+\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

donde se entiende que la norma matricial es la subordinada a la norma euclídea.

b) Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Sigma_- \cup \Sigma$, entonces

$$\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| = \|A^- \mathbf{x}_1 - A^- \mathbf{x}_2\| \leq \|A^-\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

c) Si $\mathbf{x}_1 \in \Sigma_+$ y $\mathbf{x}_2 \in \Sigma_-$, tomemos \mathbf{x}_3 el punto del segmento que une \mathbf{x}_1 con \mathbf{x}_2 y que está en el plano de separación. Obviamente, la expresión de \mathbf{x}_3 es

$$\mathbf{x}_3 = \frac{x_2}{x_2 - x_1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| &\leq \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_3)\| + \|f(\mathbf{x}_3) - f(\mathbf{x}_2)\| = \\ &= \|A^+\mathbf{x}_1 - A^+\mathbf{x}_3\| + \|A^-\mathbf{x}_3 - A^-\mathbf{x}_2\| \leq \\ &\leq \|A^+\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\| + \|A^-\| \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\| \leq \\ &\leq (\|A^+\| + \|A^-\|) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \end{aligned}$$

Siguiendo las desigualdades anteriores y tomando $k = \|A^+\| + \|A^-\|$ se tiene

$$\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \leq k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \text{para todo } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3.$$

De ese modo, la función f es globalmente lipschitziana y, por tanto, el problema de valores iniciales (1.4) posee una única solución definida en todo \mathbb{R} . \square

1.3. Controlabilidad y observabilidad. Formas canónicas.

En teoría de control es posible encontrar técnicas, conceptos y terminología de aplicación directa a los sistemas lineales a trozos, ya que éstos aparecen con frecuencia en dicho campo [5, 14, 16, 34, 70]. En particular, las nociones de observabilidad y controlabilidad se aplican a los sistemas lineales a trozos con el objetivo de simplificar sus ecuaciones.

A continuación, enunciamos los conceptos de controlabilidad y observabilidad [36] para los sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas.

Definición 1.8 Decimos que el sistema (1.2) es *controlable* si la *matriz de controlabilidad*

$$\mathcal{C} = \left(\mathbf{a} \mid A^-\mathbf{a} \mid (A^-)^2\mathbf{a} \right), \quad (1.5)$$

donde $\mathbf{a} = (A^+ - A^-)\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^3$, tiene rango máximo.

Definición 1.9 Decimos que el sistema continuo lineal a trozos (1.2) es *observable* si la matriz

$$\mathcal{O} = \left(\mathbf{e}_1 \mid (A^-)^T \mathbf{e}_1 \mid \left((A^-)^T \right)^2 \mathbf{e}_1 \right)^T, \quad (1.6)$$

denominada *matriz de observabilidad*, tiene rango máximo.

Notemos que los rangos de las matrices de observabilidad y controlabilidad son invariantes frente a cambios lineales de variables [5].

El primer paso en el análisis de un sistema continuo lineal a trozos suele ser su reducción a una forma canónica. En este proceso utilizamos el símbolo \pm para denotar los superíndices $+$ ó $-$. De esta forma, el sistema (1.2) se escribe por bloques como

$$\dot{\mathbf{x}} = A^\pm \mathbf{x} + \mathbf{b} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}^\pm & A_{12} \\ \hline A_{21}^\pm & A_{22} \end{array} \right) \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (1.7)$$

donde $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $a_{11}^\pm \in \mathbb{R}$, $A_{12} \in \mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$, $A_{21}^\pm \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ y $A_{22} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En la siguiente proposición, cuya prueba aparece en [9], obtenemos una forma canónica para el sistema (1.7), bajo el supuesto de que dicho sistema es observable. Llamaremos a la forma canónica obtenida *forma generalizada de Lienard*.

Proposición 1.10 El sistema continuo lineal a trozos (1.7) es observable si, y sólo si, el conjunto de vectores $\{A_{12}, A_{12}A_{22}\} \subset \mathbb{R}^2$ es una base de \mathbb{R}^2 . Además, en dicho caso, existe un cambio lineal de variables que lleva el sistema a la *forma generalizada de Lienard*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} t^\pm & -1 & 0 \\ m^\pm & 0 & -1 \\ d^\pm & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} - a \mathbf{e}_3, \quad (1.8)$$

donde $t^\pm = \text{tr}(A^\pm)$, m^\pm es la suma de los menores diagonales de orden dos de A^\pm , $d^\pm = \det(A^\pm)$ y $a \in \mathbb{R}$.

Notemos que la pérdida de observabilidad en el sistema (1.7) nos permite desacoplar las ecuaciones del mismo. Por ejemplo, si $A_{12} = \mathbf{0}$ el sistema (1.7) es, según la Proposición 1.10,

no observable y sus ecuaciones son de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= a_{11}^{\pm}x + b_1, \\ \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= A_{21}^{\pm}x + A_{22} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

donde la variable x evoluciona de forma independiente.

Si $A_{12} \neq \mathbf{0}$ y el conjunto de vectores $\{A_{12}, A_{12}A_{22}\} \subset \mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente, entonces tras cambios de variable directos, véanse los trabajos [9, 14], el sistema (1.7) adopta la forma

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{\pm} & a_{12} \\ a_{21}^{\pm} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \\ \dot{z} &= a_{31}^{\pm}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3, \end{cases}$$

y las variables x e y evolucionan de forma independiente de z .

Aún en el caso en que un sistema sea observable, la pérdida de controlabilidad también permite desacoplar el sistema. Así, cuando el sistema (1.7) es observable, siguiendo los razonamientos dados en [9, 14], será no controlable si, y sólo si, las matrices A^- y A^+ comparten algún autovalor. Si el autovalor compartido es real, pongamos λ , entonces el sistema adopta la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= (t^{\pm} - \lambda)x - y, \\ \dot{y} &= (m^{\pm} - t^{\pm}\lambda + \lambda^2)x - z, \\ \dot{z} &= \lambda z - a, \end{cases}$$

donde la variable z evoluciona de forma independiente.

Cuando el autovalor compartido es complejo, pongamos $\alpha \pm \beta i$, entonces el sistema puede llevarse a la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= (t^{\pm} - 2\alpha)x - y, \\ \dot{y} &= 2\alpha y - z, \\ \dot{z} &= (\alpha^2 + \beta^2)y - a, \end{cases}$$

donde las variables y y z evolucionan de forma independiente de x .

1.4. Semiaplicaciones de Poincaré.

Una técnica habitual en el análisis del comportamiento dinámico de los sistemas lineales consiste en la construcción de una aplicación de Poincaré adecuada. Para los sistemas continuos lineales a trozos esta definición implica comúnmente la composición de diferentes aplicaciones de transición o semiaplicaciones de Poincaré. Véanse los trabajos de Kahlert [33, 35], donde se desarrollan algunas propiedades analíticas de estas semiaplicaciones y se evidencia su complejo comportamiento.

En particular, las semiaplicaciones de Poincaré asociadas a sistemas planos bizonales y trizonales con simetría han sido analizadas por Freire et al. [25, 26], Rodrigo [58] y Teruel [64]. En estos trabajos se encuentran parametrizaciones de tales semiaplicaciones que permiten describir las bifurcaciones que presentan estos sistemas y dar resultados sobre la existencia y estabilidad de ciclos límite, homoclinas y heteroclinas. En el caso tridimensional, un estudio parcial de las semiaplicaciones de Poincaré con aplicación al análisis de bifurcaciones de ciclos límites en sistemas bizonales y trizonales puede encontrarse en los trabajos [12, 59]. En esta sección se definirán las semiaplicaciones de Poincaré asociadas al sistema continuo lineal a trozos (1.2) y la aplicación de Poincaré como composición de éstas. Para enunciar las definiciones de las citadas aplicaciones utilizaremos la siguiente notación:

Dado un punto $\mathbf{p} = (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^3$, denotamos por $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t) = (x_{\mathbf{p}}(t), y_{\mathbf{p}}(t), z_{\mathbf{p}}(t))$ a la solución del sistema (1.2) que verifica la condición inicial $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{p}$ y por $\gamma_{\mathbf{p}}$ a la órbita definida por $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t)$ que pasa a través del punto \mathbf{p} .

Supongamos que \mathbf{p} pertenece al plano de separación Σ , decimos que la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ es transversal al plano en el punto \mathbf{p} si el vector tangente a la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ en \mathbf{p} no está contenido en Σ , es decir, si se verifica la condición

$$\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle \neq 0. \quad (1.9)$$

Observemos que, por ser el campo vectorial del sistema (1.2) una función continua se verifica la igualdad $\langle \mathbf{e}_1, A^{-} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{e}_1, A^{+} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle$, para todo punto \mathbf{p} perteneciente al plano de separación. En particular, si $\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle > 0$, entonces el vector tangente a la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ en \mathbf{p} apunta hacia la dirección creciente de la variable x y, por tanto, la órbita atraviesa transversalmente al plano de separación desde el semiespacio izquierdo hacia el semiespacio derecho. Por otro lado, si $\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle < 0$, entonces $\gamma_{\mathbf{p}}$ cruza transversalmente al plano de separación desde el semiespacio derecho hacia el semiespacio izquierdo.

Hagamos notar que si no se verifica la condición (1.9), entonces \mathbf{p} es un *punto de tangencia* de la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ con el plano de separación. En este caso, el vector tangente a la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ en \mathbf{p} está

contenido en dicho plano.

Definimos ahora la semiaplicación de Poincaré izquierda asociada al sistema (1.2).

Definición 1.11 Supongamos que un punto $\mathbf{p} = (0, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$, perteneciente al plano de separación Σ , verifica la condición $\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle \leq 0$. Si existe $\tau > 0$ tal que $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\tau) \in \Sigma$, entonces denominamos *semitiempo de vuelo izquierdo* al valor positivo $\tau_{\mathbf{p}}^{-}$ tal que $x_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{p}}^{-}) = 0$ y $x_{\mathbf{p}}(t) < 0$ para todo t en $(0, \tau_{\mathbf{p}}^{-})$. En este caso, se define la *semiaplicación de Poincaré izquierda en el punto \mathbf{p}* como $\Pi_{-}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{p}}^{-})$.

En la Figura 1.1 se muestra un esquema gráfico de la semiaplicación de Poincaré izquierda Π_{-} asociada al sistema (1.2). Observemos que la semiaplicación de Poincaré izquierda sólo depende del sistema lineal definido en el semiespacio Σ_{-} .

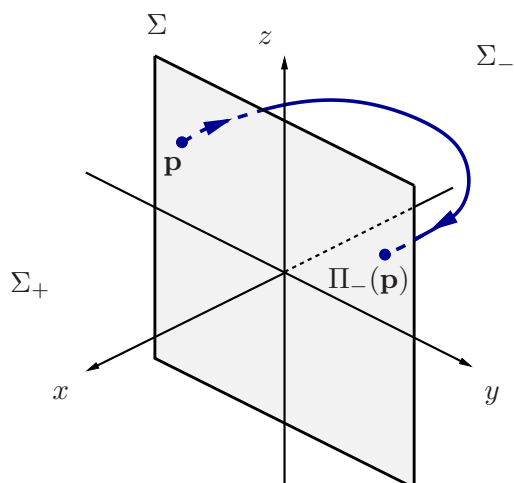


Figura 1.1: Esquema gráfico de la semiaplicación de Poincaré izquierda asociada al sistema (1.2) en un punto $\mathbf{p} \in \Sigma$ que verifica $\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle \leq 0$.

Dado un punto \mathbf{p} en el que está definido la semiaplicación de Poincaré izquierda y tal que tanto el punto \mathbf{p} como su imagen no son puntos de tangencia, entonces la semiaplicación de Poincaré izquierda está definida en un entorno del punto \mathbf{p} y, además, es continuamente diferenciable, véase el trabajo [64].

A continuación, definimos la semiaplicación de Poincaré derecha asociada al sistema (1.2).

Definición 1.12 Supongamos que un punto $\mathbf{p} = (0, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$, que pertenece al plano de separación Σ , verifica la condición $\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle \geq 0$. Si existe $\tau > 0$ tal que $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\tau) \in \Sigma$, entonces denominamos *semitiempo de vuelo derecho* al valor positivo $\tau_{\mathbf{p}}^+$ tal que $x_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{p}}^+) = 0$ y $x_{\mathbf{p}}(t) > 0$ para todo t en $(0, \tau_{\mathbf{p}}^+)$. En dicho caso, se define la *semiaplicación de Poincaré derecha en \mathbf{p}* como $\Pi_+(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{p}}^+)$.

En la Figura 1.2 se muestra un esquema gráfico de la semiaplicación de Poincaré Π_+ asociada al sistema (1.2). La semiaplicación de Poincaré derecha sólo depende del sistema lineal definido en el semiespacio derecho.

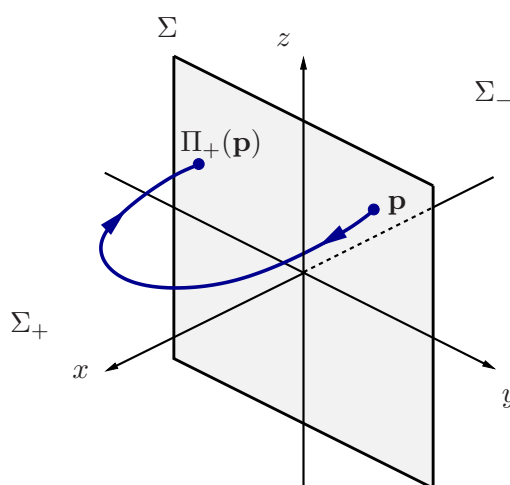


Figura 1.2: Esquema gráfico de la semiaplicación de Poincaré derecha asociada al sistema (1.2) en un punto $\mathbf{p} \in \Sigma$ que verifica $\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm} \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle \geq 0$.

Análogamente, dado un punto \mathbf{p} en el que está definido la semiaplicación de Poincaré derecha y tal que tanto el punto \mathbf{p} como su imagen no son puntos de tangencia, entonces la semiaplicación de Poincaré derecha está definida en un entorno del punto \mathbf{p} y, además, es continuamente diferenciable.

A partir de las semiaplicaciones de Poincaré asociadas al sistema (1.2) definimos la aplicación de Poincaré asociada a dicho sistema continuo lineal a trozos.

Definición 1.13 La *aplicación de Poincaré* $\Pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ asociada al sistema continuo lineal a trozos (1.2) vendrá dada mediante la composición de ambas semiaplicaciones de Poincaré,

$$\Pi = \Pi_+ \circ \Pi_-.$$

Obsérvese que para que esté definida la aplicación de Poincaré asociada al sistema (1.2) en un punto $\mathbf{p} \in \Sigma$ que verifica $\langle \mathbf{e}_1, A^\pm \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle \leq 0$, han de estar definidas la semiaplicación de Poincaré izquierda en \mathbf{p} y la semiaplicación de Poincaré derecha en el punto $\Pi_-(\mathbf{p})$. En este caso, existen dos valores positivos $\tau_{\mathbf{p}}^-$ y $\tau_{\Pi_-(\mathbf{p})}^+$ tales que $x_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{p}}^-) = 0$, $x_{\Pi_-(\mathbf{p})}(\tau_{\Pi_-(\mathbf{p})}^+) = 0$, $x_{\mathbf{p}}(t) < 0$ para todo $t \in (0, \tau_{\mathbf{p}}^-)$ y $x_{\Pi_-(\mathbf{p})}(t) > 0$ para todo $t \in (0, \tau_{\Pi_-(\mathbf{p})}^+)$. Llamamos *tiempo de vuelo* al valor positivo $\tau_{\mathbf{p}}$ que se obtiene al sumar los dos semitiempos de vuelos, es decir, $\tau_{\mathbf{p}} = \tau_{\mathbf{p}}^- + \tau_{\Pi_-(\mathbf{p})}^+$. Así, la aplicación de Poincaré asociada al sistema (1.2) en el punto \mathbf{p} está dada por

$$\Pi(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_{\Pi_-(\mathbf{p})}(\tau_{\Pi_-(\mathbf{p})}^+) = \mathbf{x}_{\mathbf{p}}(\tau_{\mathbf{p}}).$$

En la Figura 1.3 se muestra un esquema gráfico de la aplicación de Poincaré Π .

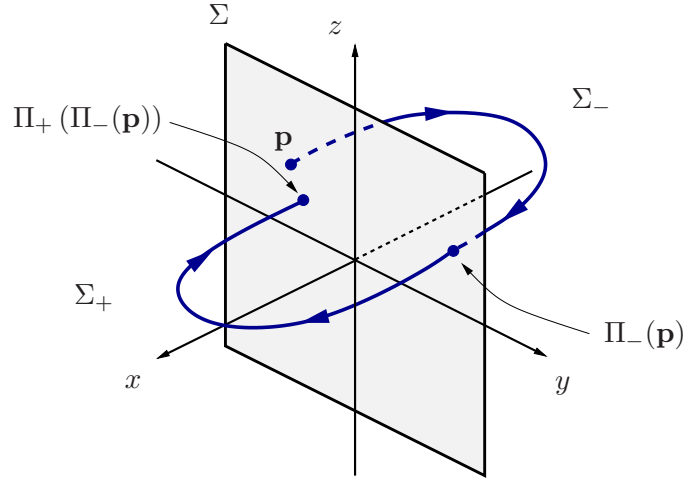


Figura 1.3: Esquema gráfico de la aplicación de Poincaré asociada a (1.2) en un punto $\mathbf{p} \in \Sigma$ que verifica la condición $\langle \mathbf{e}_1, A^\pm \mathbf{p} + \mathbf{b} \rangle \leq 0$.

Dado un punto \mathbf{p} para el que está definido $\Pi(\mathbf{p})$ y tal que \mathbf{p} , $\Pi_-(\mathbf{p})$ y $\Pi(\mathbf{p})$ no son puntos de tangencia, entonces la aplicación de Poincaré y el tiempo de vuelo están definidas en un entorno de \mathbf{p} y ambas son funciones continuamente diferenciables. Por otro lado, las órbitas periódicas del sistema (1.2), con exactamente dos cortes con el plano de separación, se corresponden con los puntos fijos de la aplicación de Poincaré Π .

Algunas veces, por comodidad, conviene utilizar la aplicación de Poincaré como aquella que transforma puntos de \mathbb{R}^2 en puntos de \mathbb{R}^2 y el tiempo de vuelo como aquel que está definido en \mathbb{R}^2

y con valores en \mathbb{R} . Para su definición utilizamos la proyección estándar

$$\begin{aligned}\pi_1 : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, \bar{\mathbf{x}}) &\longrightarrow \bar{\mathbf{x}}, \quad \text{donde } \bar{\mathbf{x}} = (x_2, x_3).\end{aligned}$$

De ese modo, tenemos el semitiempo de vuelo izquierdo

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^- : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{q} &\longmapsto \tilde{\tau}^-(\mathbf{q}) = \tau^-(0, \mathbf{q}),\end{aligned}$$

y la semiaplicación de Poincaré izquierda

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_- : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{q} &\longmapsto \tilde{\Pi}_-(\mathbf{q}) = \pi_1(\Pi_-(0, \mathbf{q})).\end{aligned}$$

Análogamente, consideramos el semitiempo de vuelo derecho

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^+ : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{q} &\longmapsto \tilde{\tau}^+(\mathbf{q}) = \tau^+(0, \mathbf{q}),\end{aligned}$$

la semiaplicación de Poincaré derecha

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_+ : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{q} &\longmapsto \tilde{\Pi}_+(\mathbf{q}) = \pi_1(\Pi_+(0, \mathbf{q})),\end{aligned}$$

el tiempo de vuelo

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{q} &\longmapsto \tilde{\tau}(\mathbf{q}) = \tau(0, \mathbf{q})\end{aligned}$$

y la aplicación de Poincaré $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_+ \circ \tilde{\Pi}_-$.

Por tanto, se sigue que todo punto fijo de la aplicación de Poincaré Π es también un punto fijo de la aplicación $\tilde{\Pi}$ y viceversa.

Con esta notación, estudiar la estabilidad de una órbita periódica del sistema (1.2) equivale a analizar la estabilidad de los puntos fijos de la aplicación de Poincaré $\tilde{\Pi}$. Para ello, tenemos que calcular los autovalores de la matriz $D\tilde{\Pi}(\mathbf{q}_0)$, siendo \mathbf{q}_0 un punto fijo de la aplicación de Poincaré $\tilde{\Pi}$. Si todo autovalor de la matriz $D\tilde{\Pi}(\mathbf{q}_0)$ tiene módulo estrictamente menor que uno, entonces la órbita

periódica que pasa a través del punto fijo $\mathbf{p}_0 = (0, \mathbf{q}_0)$ es asintóticamente estable. Si uno de ellos es estrictamente mayor que uno, entonces la órbita periódica es inestable.

Para determinar los autovalores de la matriz $D\tilde{\Pi}(\mathbf{q}_0)$ utilizamos la semejanza de matrices que se enuncia en el siguiente resultado:

Proposición 1.14 Supongamos que el sistema (1.2) posee una órbita periódica que corta al plano de separación en los puntos $\mathbf{p}_0 = (0, \mathbf{q}_0)$ y $\mathbf{p}_1 = (0, \mathbf{q}_1)$, con $\langle \mathbf{e}_1, A^\pm \mathbf{p}_0 + \mathbf{b} \rangle < 0$ y $\langle \mathbf{e}_1, A^\pm \mathbf{p}_1 + \mathbf{b} \rangle > 0$, de forma que se verifica $\tilde{\Pi}_-(\mathbf{q}_0) = \mathbf{q}_1$ y $\tilde{\Pi}_+(\mathbf{q}_1) = \mathbf{q}_0$. Entonces, la matriz

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \nabla \tilde{\tau}(\mathbf{q}_0) \\ \hline \mathbf{0} & D\tilde{\Pi}(\mathbf{q}_0) \end{array} \right)$$

es semejante a la matriz $\mathcal{M} = \exp(A^+ \tilde{\tau}^+(\mathbf{q}_1)) \cdot \exp(A^- \tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0))$.

Demostración:

En la prueba de esta proposición conviene denotar $\mathbf{x}(t; \mathbf{p}) = \mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t)$.

La condición de transversalidad $\langle \mathbf{e}_1, A^\pm \mathbf{p}_0 + \mathbf{b} \rangle < 0$ asegura que la semiaplicación de Poincaré izquierda $\tilde{\Pi}_-$ asociada al sistema (1.2) está definida en un entorno abierto U del punto \mathbf{q}_0 y, por definición, verifica

$$\mathbf{x}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}); (0, \mathbf{q})) = (0, \tilde{\Pi}_-(\mathbf{q})), \text{ para todo } \mathbf{q} \in U.$$

Derivando con respecto a \mathbf{q} en la expresión anterior queda

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}); (0, \mathbf{q})) \cdot \nabla \tilde{\tau}^-(\mathbf{q}) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}); (0, \mathbf{q})) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ D\tilde{\Pi}_-(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

Evaluando ahora la expresión obtenida con $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ y teniendo en cuenta la relación

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0); \mathbf{p}_0) = f(\mathbf{p}_1)$$

se tiene

$$f(\mathbf{p}_1) \cdot \nabla \tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0); \mathbf{p}_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ D\tilde{\Pi}_-(\mathbf{q}_0) \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

A partir de la igualdad (1.10) se deduce trivialmente

$$\left(f(\mathbf{p}_1) \left| f(\mathbf{p}_1) \cdot \nabla \tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0) - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ D\tilde{\Pi}_-(\mathbf{q}_0) \end{pmatrix} \right. \right) = \left(f(\mathbf{p}_1) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0); \mathbf{p}_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \right) = B_1 Q^-,$$

donde

$$B_1 = \left(f(\mathbf{p}_1) \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right. \right) \quad y \quad Q^- = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{0} \end{array} \left| \begin{array}{c} \nabla \tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0) \\ D\tilde{\Pi}_-(\mathbf{q}_0) \end{array} \right. \right).$$

Aún más, considerando la ecuación variacional de la órbita periódica,

$$f(\mathbf{p}_1) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0); \mathbf{p}_0) \cdot f(\mathbf{p}_0),$$

se deduce la relación

$$B_1 \cdot Q^- = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0); \mathbf{p}_0) \cdot B_0, \quad (1.11)$$

donde la matriz

$$B_0 = \left(f(\mathbf{p}_0) \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right. \right)$$

es no singular debido a la condición de transversalidad.

Análogamente, definiendo la matriz

$$Q^+ = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{0} \end{array} \left| \begin{array}{c} \nabla \tilde{\tau}^+(\mathbf{q}_1) \\ D\tilde{\Pi}_+(\mathbf{p}_1) \end{array} \right. \right)$$

se puede probar la relación

$$B_0 \cdot Q^+ = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^+(\mathbf{q}_1); \mathbf{p}_1) \cdot B_1. \quad (1.12)$$

Por último, teniendo en cuenta que se verifica la igualdad matricial $Q = Q^+ \cdot Q^-$ y las

relaciones (1.11) y (1.12) tenemos

$$B_0 \cdot Q = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^+(\mathbf{q}_1); \mathbf{p}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0); \mathbf{p}_0) \cdot B_0,$$

de donde se obtiene directamente el resultado ya que

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0); \mathbf{p}_0) = \exp(A^- \tilde{\tau}^-(\mathbf{q}_0)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\tau}^+(\mathbf{q}_1); \mathbf{p}_1) = \exp(A^+ \tilde{\tau}^+(\mathbf{q}_1)).$$

□

Hagamos notar que, la Proposición 1.4 tiene una extensión natural al caso en que la órbita periódica corte transversalmente más de dos veces al plano de separación; en esta situación, aparecerán sucesivos productos de matrices exponenciales.

Versión lineal a trozos del sistema de Michelson.

En este capítulo presentamos el sistema que constituirá el eje fundamental de esta memoria y analizamos algunas de sus propiedades básicas, con la finalidad de determinar en sucesivos capítulos parte de su comportamiento periódico así como algunos fenómenos globales. Este sistema viene dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = 1 - y - c|x|, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde c es un parámetro real positivo, y puede ser considerado como un representante de una clase más amplia de sistemas lineales a trozos. Más concretamente, nos referimos a sistemas tridimensionales, continuos, lineales a trozos con dos zonas, observables, reversibles, con divergencia nula y exactamente dos puntos de equilibrio de tipo silla-foco.

Un sistema con las características descritas en el párrafo anterior, cuyo plano de separación sea $\Sigma = \{x = 0\}$ se puede escribir, usando la hipótesis de observabilidad, en la forma de Lienard

$$\begin{cases} \dot{x} = t^\pm x - y, \\ \dot{y} = m^\pm x - z, \\ \dot{z} = d^\pm x - 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $t^\pm = \text{tr}(A^\pm)$, m^\pm es la suma de los menores diagonales de orden dos de A^\pm y $d^\pm = \det(A^\pm)$. Nótese que la forma (2.2) se puede obtener a partir del sistema (1.8), teniendo en cuenta que el parámetro a de dicho sistema es distinto de cero (ya que los puntos de equilibrio del sistema no pertenecen al plano de separación) y que puede suponerse positivo sin pérdida de generalidad.

Imponiendo la reversibilidad

$$R : (x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z), \quad (2.3)$$

es decir, la invariancia del sistema (2.2) bajo la transformación $(x, y, z, t) \rightarrow (-x, y, -z, -t)$, se obtiene $t^+ = -t^-$, $m^+ = m^-$ y $d^+ = -d^-$. Ahora, imponiendo divergencia nula, se verifica que $t^+ = -t^- = 0$. Además, la existencia de dos puntos de equilibrio no virtuales de tipo silla-foco fuerza a que los parámetros d^+ y m^+ sean estrictamente positivos. Así pues, la expresión del sistema (2.2) es

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = mx - z, \\ \dot{z} = d|x| - 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $d = d^+ > 0$ y $m = m^+ > 0$. Realizando en el sistema anterior el cambio de variable $X = -m^{3/2}x$, $Y = my$, $Z = m^{1/2}(mx - z)$, $\tau = m^{1/2}t$, transformamos (2.4) en el sistema

$$\begin{cases} X' = Y, \\ Y' = Z, \\ Z' = 1 - Y - c|X|, \end{cases}$$

donde el símbolo prima indica que estamos tomando la derivada con respecto a la variable τ y $c = d/m^{3/2}$ es real estrictamente positivo. Obsérvese que el sistema que acabamos de obtener coincide con el sistema (2.1).

Las propiedades que hemos exigido a esta clase de sistemas lineales a trozos pueden también ser observadas en un sistema diferenciable cuyo estudio ha dado y sigue dando lugar a multitud de publicaciones. Hablamos del conocido sistema de Michelson

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = \rho^2 - y - \frac{1}{2}x^2, \end{cases} \quad (2.5)$$

con parámetro ρ estrictamente mayor que cero, que aparece originariamente al buscar un tipo particular de soluciones de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky [55], $u_t + u_{xxxx} + u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 = 0$; por este motivo también se conoce a (2.5) como sistema de Kuramoto-Sivashinsky. Un análisis de la

dinámica y bifurcaciones de dicho sistema puede consultarse en [31, 37–39, 42, 55, 63]. Es remarcable que el sistema (2.5) también aparece al estudiar la degeneración triple cero, ver [20] y [24].

Las similitudes existentes entre el sistema diferenciable (2.5) y el sistema continuo lineal a trozos (2.1) nos motivan a llamar a este último *versión lineal a trozos del sistema de Michelson*. Más aún, realizando el cambio de variable

$$X = \frac{x}{\rho^2}, \quad Y = \frac{y}{\rho^2}, \quad Z = \frac{z}{\rho^2} \quad (2.6)$$

sobre el sistema (2.5) llegamos a

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = Z, \\ \dot{Z} = 1 - Y - cX^2, \end{cases}$$

donde $c = \rho^2/2$, cambiando X^2 por $|X|$ y renombrando las variables como al principio obtenemos el sistema (2.1).

Nótese que si hubiésemos realizado el cambio x^2 por $|x|$ directamente sobre (2.5), habríamos obtenido el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = \rho^2 - y - \frac{1}{2}|x|, \end{cases}$$

cuyo parámetro desaparece al aplicarle el mismo cambio de variable (2.6). De este modo, el estudio del sistema perdería su interés.

2.1. Primeras propiedades de la versión lineal a trozos del sistema de Michelson.

Observemos en primer lugar que el sistema (2.1) puede escribirse matricialmente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A^- \mathbf{x} + \mathbf{e}_3 & \text{si } x < 0, \\ A^+ \mathbf{x} + \mathbf{e}_3 & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

siendo

$$\mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Este sistema posee un único plano de separación $\Sigma = \{x = 0\}$ y, por tanto, dos semiespacios de linealidad $\Sigma_- = \{x < 0\}$ y $\Sigma_+ = \{x > 0\}$.

Por construcción, el sistema (2.7) pertenece a la clase de sistemas reversibles bajo la transformación (2.3), es decir, $f(R(\mathbf{x})) = -R(f(\mathbf{x}))$, donde f representa al campo vectorial de dicho sistema. Nótese que si $\mathbf{x}(t)$ es una solución del sistema (2.7) también lo es $R(\mathbf{x}(-t))$. Los puntos fijos de la transformación (2.3) se corresponden con el eje y , que denominaremos *eje de reversibilidad*. Así pues, cualquier órbita que interseque a este eje es invariante bajo la reversibilidad. Véase, por ejemplo, [44] para otros resultados de los sistemas reversibles.

También por construcción el sistema posee exactamente dos puntos de equilibrio no virtuales, que son $\mathbf{p}_- = (-1/c, 0, 0) \in \Sigma_-$ y $\mathbf{p}_+ = (1/c, 0, 0) \in \Sigma_+$, que se transforman uno en el otro por la reversibilidad. Estos dos equilibrios son de tipo silla-foco y, como veremos a continuación, poseen configuraciones de estabilidad intercambiadas, es decir, el punto de equilibrio \mathbf{p}_- tiene asociado una variedad inestable unidimensional y una variedad estable bidimensional, mientras que el punto \mathbf{p}_+ tiene asociado una variedad estable unidimensional y una variedad inestable bidimensional.

El polinomio característico de A^- , dado por $p_{A^-}(\xi) = -\xi^3 - \xi + c$, tiene grado impar y coeficientes reales por lo que al menos tiene una raíz real λ . A continuación, confirmaremos que los demás autovalores de la matriz A^- son complejos y determinaremos éstos en función del autovalor real.

Para ello, consideramos la derivada del polinomio característico, $p'_{A^-}(\xi) = -3\xi^2 - 1$, que es estrictamente negativa para cualquier valor ξ . Por tanto, p_{A^-} es una función decreciente y, en consecuencia, λ es la única raíz real. Obsérvese que es posible expresar c en función de λ , $c = \lambda(\lambda^2 + 1)$. Al ser c estrictamente mayor que cero, del razonamiento anterior, se deduce que λ es estrictamente mayor que cero.

Para determinar las raíces complejas del polinomio p_{A^-} , $\alpha \pm \beta i$, utilizamos algunas propiedades de los autovalores asociados a la matriz A^- . En primer lugar, sabemos que la traza de la matriz A^- , que es nula, tiene que coincidir con la suma de los autovalores, $\lambda + 2\alpha$. De esto se deduce que $\alpha = -\lambda/2$. Por otro lado, determinamos la parte imaginaria de los autovalores complejos utilizando que el determinante de A^- , cuyo valor es $c = \lambda(\lambda^2 + 1)$, ha de coincidir con el producto de los

autovalores, $\lambda(\alpha^2 + \beta^2)$. Por tanto, $\det(A^-) = \lambda(\lambda^2 + 1) = \lambda(\alpha^2 + \beta^2)$. Sustituyendo $\alpha = -\lambda/2$ en la expresión anterior se obtiene fácilmente $\beta = \sqrt{3\lambda^2 + 4}/2$. De ese modo, los autovalores complejos de la matriz A^- quedan completamente determinados en función de λ y son

$$-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{2}i \quad \text{y} \quad -\frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{2}i.$$

Por la reversibilidad del sistema, los autovalores asociados a A^+ son

$$-\lambda, \quad -\alpha + \beta i = \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{2}i, \quad \text{y} \quad -\alpha - \beta i = \frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{2}i.$$

De ahora en adelante, teniendo en cuenta que hemos obtenido α , β y c en función de λ , usaremos λ como parámetro principal del sistema (2.1). De ese modo, el sistema queda

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = 1 - y - \lambda(\lambda^2 + 1)|x|, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde λ es estrictamente mayor que cero. También podemos expresar los puntos de equilibrio del sistema (2.7) en función de λ , quedando

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_- &= (-1/c, 0, 0) = \left(\frac{-1}{\lambda(\lambda^2 + 1)}, 0, 0 \right), \\ \mathbf{p}_+ &= (1/c, 0, 0) = \left(\frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Las matrices de observabilidad y controlabilidad del sistema (2.8), definidas por (1.5) y (1.6), son

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = 2\lambda(\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que ambas tienen rango máximo, el sistema (2.8) es observable, como ya sabíamos, y controlable. Recordemos que esto implica que el sistema no se puede desacoplar mediante cambios lineales.

Nótese que por la reversibilidad del sistema (2.8) se deduce que si \mathbf{p} está en el plano de separación,

entonces se verifica la relación

$$R\Pi_+(\mathbf{p}) = \Pi_-^{-1}(R\mathbf{p}), \quad (2.9)$$

donde Π_+ y Π_- son las semiaplicaciones de Poincaré asociadas a dicho sistema. En la Figura 2.1 se muestra un esquema que reproduce geoméricamente esta relación.

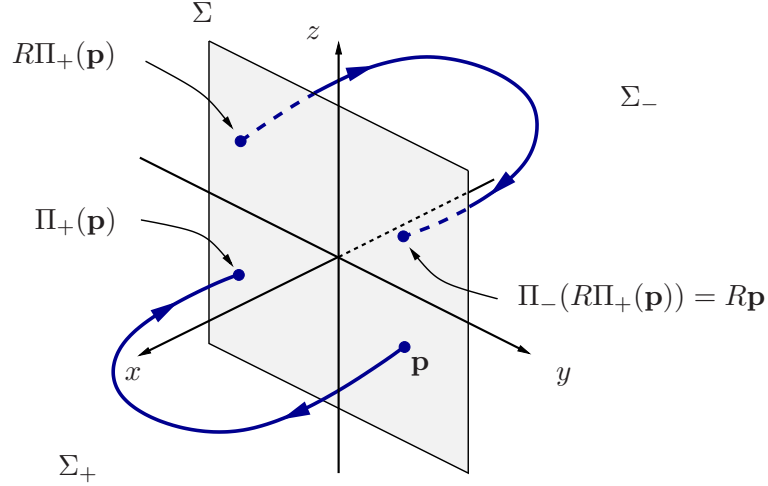


Figura 2.1: Esquema que muestra geoméricamente la relación (2.9).

A continuación, analizamos algunas propiedades sobre la transversalidad de una órbita del sistema (2.8) respecto al plano de separación. Para ello, utilizaremos la siguiente notación:

Dado un punto $\mathbf{p} = (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^3$, recordemos que $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t) = (x_{\mathbf{p}}(t), y_{\mathbf{p}}(t), z_{\mathbf{p}}(t))$ denota a la solución de (2.8) que verifica la condición inicial $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{p}$. Para simplificar la notación hemos prescindido del parámetro λ en los argumentos de la solución. Denotamos por $\gamma_{\mathbf{p}}$ a la órbita definida por $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t)$ que pasa a través del punto \mathbf{p} .

Dado un punto $\mathbf{p} = (0, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$, perteneciente al plano de separación, supongamos que la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ es transversal a dicho plano en \mathbf{p} , es decir, se verifica la condición $\langle \mathbf{e}_1, A^{\pm}\mathbf{p} + \mathbf{e}_3 \rangle \neq 0$ y, por tanto, $y_{\mathbf{p}} \neq 0$. En particular si $y_{\mathbf{p}}$ es estrictamente mayor que cero, entonces el vector tangente a la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ en \mathbf{p} apunta hacia la dirección creciente de la variable x y, por tanto, la órbita cruza transversalmente al plano de separación desde el semiespacio Σ_- hacia Σ_+ . Por otro lado, si $y_{\mathbf{p}}$ es estrictamente menor que cero la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ cruza transversalmente al plano de separación desde el semiespacio Σ_+ hacia Σ_- .

Nótese que si $y_{\mathbf{p}} = 0$, entonces el punto \mathbf{p} es un *punto de tangencia* de la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ con el

plano de separación. En este caso, el conjunto de todos los puntos de tangencia es el eje z , que denominamos *eje de tangencia*. En la siguiente proposición se describe el comportamiento de una órbita del sistema (2.8) cuando pasa por un punto del eje z .

Proposición 2.1 Dado un punto $\mathbf{p} = (0, 0, z_{\mathbf{p}})$ perteneciente al plano de separación, la órbita del sistema (2.8) que pasa por \mathbf{p} es tangente al plano de separación en \mathbf{p} . Además, se verifica que

- Si $z_{\mathbf{p}} < 0$, entonces $\gamma_{\mathbf{p}}$ está localmente contenida en el semiespacio derecho.
- Si $z_{\mathbf{p}} > 0$, entonces $\gamma_{\mathbf{p}}$ está localmente contenida en el semiespacio izquierdo.
- Si $z_{\mathbf{p}} = 0$, entonces $\gamma_{\mathbf{p}}$ cruza al plano de separación desde el semiespacio Σ_- hacia Σ_+ .

Demostración:

Sea $\mathbf{p} = (0, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$, con $y_{\mathbf{p}} = 0$, un punto perteneciente al plano de separación. Como hemos mencionado anteriormente, si $y_{\mathbf{p}} = 0$, entonces el punto \mathbf{p} es un punto de tangencia y, por tanto, la órbita $\gamma_{\mathbf{p}}$ es tangente al plano de separación en \mathbf{p} .

Para ver la posición relativa de dicha órbita con respecto a dicho plano consideramos el desarrollo de Taylor hasta tercer orden en $t = 0$ de su primera componente,

$$x_{\mathbf{p}}(t) = x_{\mathbf{p}}(0) + t \dot{x}_{\mathbf{p}}(0) + \frac{t^2}{2} \ddot{x}_{\mathbf{p}}(0) + \frac{t^3}{3!} \dddot{x}_{\mathbf{p}}(0) + \mathcal{O}(t^4).$$

Sustituyendo en dicho desarrollo el valor de cada una de las derivadas evaluadas en $t = 0$ se tiene

$$x_{\mathbf{p}}(t) = \frac{t^2}{2} z_{\mathbf{p}} + \frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^4).$$

De la igualdad anterior se deducen los comportamientos descritos en el enunciado. □

2.2. Variedades invariantes.

A continuación vamos a determinar localmente las variedades invariantes de los puntos de equilibrio del sistema (2.8). Teniendo en cuenta el carácter lineal a trozos del sistema, dichas variedades serán localmente lineales. Por ello, calcularemos las ecuaciones de los planos y rectas que la determinan.

En primer lugar, obtendremos las ecuaciones de las variedades invariantes en el semiespacio izquierdo. Recordemos que A^- posee un autovalor real positivo y un par de autovalores complejos con parte real negativa. Por tanto, el punto de equilibrio \mathbf{p}_- tiene asociado una variedad inestable unidimensional y una estable bidimensional, que denotaremos por $W^u(\mathbf{p}_-)$ y $W^s(\mathbf{p}_-)$ respectivamente.

La variedad inestable $W^u(\mathbf{p}_-)$ de \mathbf{p}_- contiene a la semirrecta

$$\mathcal{L}_- = \left\{ \mathbf{p}_- - \mu \mathbf{v}_\lambda = \left(\frac{-1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} - \mu, -\mu\lambda, -\mu\lambda^2 \right) : \frac{-1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \leq \mu < \infty \right\}$$

generada por el autovector $\mathbf{v}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2)$ asociado al autovalor λ de la matriz A^- . Esta semirrecta interseca al plano de separación en el punto

$$\mathbf{m}_- = \left(0, \frac{1}{\lambda^2 + 1}, \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right).$$

Por otra parte, la variedad estable $W^s(\mathbf{p}_-)$ de \mathbf{p}_- está contenida localmente en el plano que pasa por el punto de equilibrio \mathbf{p}_- y que está generado por los autovectores de A^- asociados a los autovalores complejos. Este plano, restringido al semiespacio izquierdo, se denomina *semiplano focal izquierdo* del sistema (2.8) y lo denotaremos por \mathcal{P}_- . Los vectores ortogonales a este plano son los autovectores de la matriz $(A^-)^T$ asociados a su autovalor real λ , es decir, las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \lambda(\lambda^2 + 1) \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

De este modo, el vector $\mathbf{n}_\lambda = (1 + \lambda^2, \lambda, 1)$ es ortogonal a \mathcal{P}_- y así,

$$\mathcal{P}_- = \{ \lambda(\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 y + \lambda z = -1, x \leq 0 \}.$$

La intersección de \mathcal{P}_- con el plano de separación es la recta dada por $\mathcal{D}_- = \{ \lambda^2 y + \lambda z = -1, x = 0 \}$.

Destaquemos que la variedad estable $W^s(\mathbf{p}_-)$ de \mathbf{p}_- está contenida localmente en \mathcal{P}_- y que no todos los puntos de \mathcal{D}_- pertenecen a dicha variedad, ya que puede suceder que la trayectoria que pase por uno de sus puntos vuelva a cortar al plano de separación en vez de acabar tendiendo al equilibrio. En la Figura 2.2 se muestran los diferentes comportamientos que podría presentar la

órbita del sistema (2.8) asociada al punto de equilibrio \mathbf{p}_- cuando cruza al plano de separación.

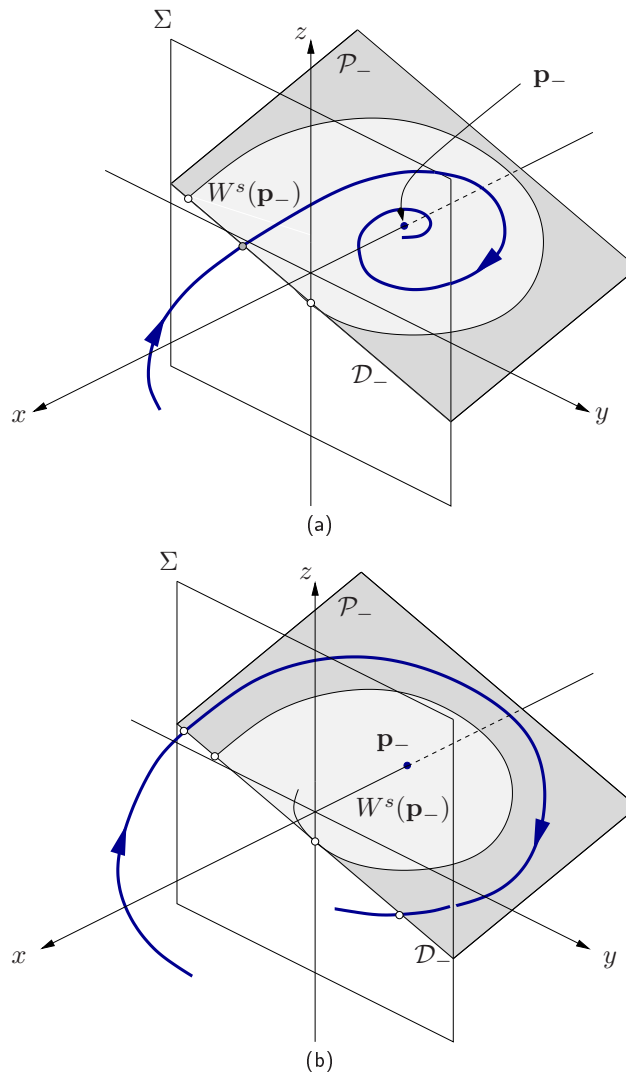


Figura 2.2: En el caso (a) la órbita tiende al punto de equilibrio \mathbf{p}_- cuando $t \rightarrow +\infty$. En el caso (b) no podemos garantizar este comportamiento.

El segmento $\mathcal{S}_- \subset \mathcal{D}_-$, delimitado por la intersección de \mathcal{D}_- con el eje de tangencia, $\mathbf{q}_- = (0, 0, -1/\lambda)$, y por su imagen inversa mediante la semiaplicación de Poincaré izquierda, $\Pi_-^{-1}(\mathbf{q}_-)$, está incluido en la variedad estable $W^s(\mathbf{p}_-)$. Alguno de los puntos de $\mathcal{D}_- \setminus \mathcal{S}_-$ también podría pertenecer a $W^s(\mathbf{p}_-)$, pero la órbita positiva de dicho punto tendría que salir del semiespacio

izquierdo. En la Figura 2.3 podemos observar algunos de los elementos geométricos del sistema (2.8) descritos anteriormente.

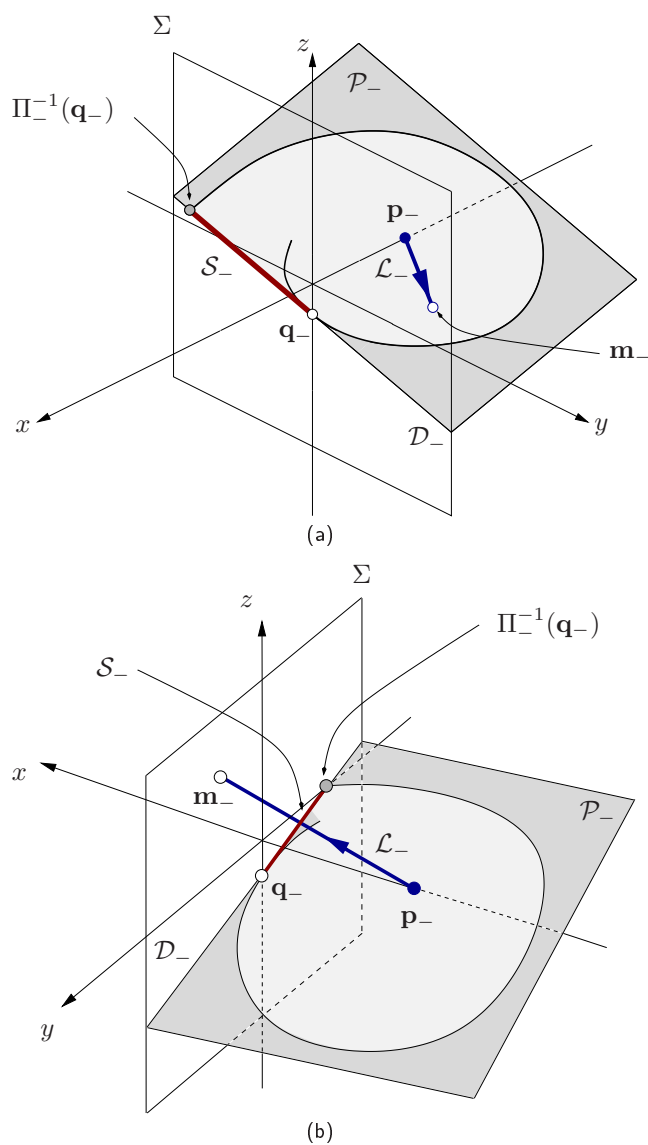


Figura 2.3: Esquema gráfico de las variedades invariantes del punto de equilibrio p_- en el semiespacio $\Sigma_- = \{x < 0\}$ desde dos puntos de vista diferentes.

A partir de las ecuaciones de las variedades invariantes en el subespacio izquierdo podemos

que pase por uno de sus puntos vuelva a cortar al plano de separación en vez de acabar tendiendo al equilibrio.

El segmento $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{D}_+$, delimitado por la intersección de \mathcal{D}_+ con el eje de tangencia, $\mathbf{q}_+ = (0, 0, 1/\lambda)$, y por su imagen mediante la semiaplicación de Poincaré derecha, $\Pi_+(\mathbf{q}_+)$, está contenido en la variedad inestable $W^u(\mathbf{p}_+)$. Alguno de los puntos de $\mathcal{D}_+ \setminus \mathcal{S}_+$ también podría pertenecer a $W^u(\mathbf{p}_+)$, pero la órbita negativa de dicho punto tendría que salir una o más veces del semiespacio Σ_+ . En la Figura 2.4 podemos observar algunos de los elementos geométricos del sistema (2.8) descritos anteriormente.

2.3. Solución del sistema continuo lineal a trozos en cada subespacio.

En este apartado determinaremos la solución del problema de valores iniciales asociado a cada uno de los sistemas lineales que define el sistema (2.8), particularizando al caso en que la condición inicial está en el plano de separación, ya que estamos interesados en manejar las semiaplicaciones de Poincaré.

En primer lugar, calculamos la solución del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal correspondiente al semiespacio derecho,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = 1 - y - \lambda(\lambda^2 + 1)x, \end{cases} \quad (2.10)$$

con la condición inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{x}_0 = (0, y_0, z_0)$, perteneciente al plano de separación. Para ello, consideramos la ecuación diferencial lineal no homogénea de tercer orden asociada,

$$\ddot{x} + \dot{x} + \lambda(\lambda^2 + 1)x - 1 = 0. \quad (2.11)$$

Podemos expresar la solución general de esta ecuación en la forma $x(t, \lambda) = x_p(t, \lambda) + x_h(t, \lambda)$, donde x_p es una solución particular de la ecuación diferencial y x_h es la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada a (2.11), $x_h(t, \lambda) = c_1 e^{-t\lambda} + c_2 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + c_3 e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$.

Es directo observar que la ecuación diferencial (2.11) posee como solución particular una constante c_4 . Para determinar el valor de la constante c_4 sustituimos $x(t, \lambda) = c_4$ en la ecuación

diferencial no homogénea de tercer orden. De ese modo, obtenemos la condición $\lambda(\lambda^2 + 1)c_4 = 1$, lo que implica que

$$c_4 = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)}.$$

Así, la solución general de la ecuación diferencial (2.11) vendrá dada por

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} + c_1 e^{-t\lambda} + c_2 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + c_3 e^{-\alpha t} \sin(\beta t). \quad (2.12)$$

Por tanto, el problema de hallar la solución de la ecuación diferencial (2.11) con condición inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = (0, y_0, z_0)$ se reduce a calcular cada una de las constantes c_i , con $i = 1, 2, 3$, de la ecuación (2.12).

Realizando las derivadas sucesivas para $x(t, \lambda)$ dada por la expresión (2.12), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \lambda) &= -\lambda c_1 e^{-t\lambda} + e^{-\alpha t} [(\beta c_3 - \alpha c_2) \cos(\beta t) - (\beta c_2 + \alpha c_3) \sin(\beta t)], \\ \ddot{x}(t, \lambda) &= \lambda^2 c_1 e^{-t\lambda} + e^{-\alpha t} \{[(\alpha^2 - \beta^2)c_2 - 2\alpha\beta c_3] \cos(\beta t) - [(\alpha^2 - \beta^2)c_3 + 2\alpha\beta c_2] \sin(\beta t)\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

e, imponiendo la condición inicial, se obtiene el siguiente sistema dependiente de λ

$$\begin{cases} x(0, \lambda) = c_1 + c_2 + \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} = 0, \\ \dot{x}(0, \lambda) = -\lambda c_1 - \alpha c_2 + \beta c_3 = y(0, \lambda) = y_0, \\ \ddot{x}(0, \lambda) = \lambda^2 c_1 + (\alpha^2 - \beta^2)c_2 - 2\alpha\beta c_3 = z(0, \lambda) = z_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Sustituyendo los valores de α y β , y realizando diversas manipulaciones entre las ecuaciones segunda y tercera del sistema anterior se obtiene

$$2\lambda^2 c_1 - (\lambda^2 + 1)c_2 = z_0 - \lambda y_0. \quad (2.15)$$

Despejando de esta relación el valor de c_2 y reemplazándolo en la primera ecuación del sistema (2.14) obtenemos fácilmente que el valor de c_1 es

$$c_1 = -\frac{\lambda^2 y_0 - \lambda z_0 + 1}{\lambda(3\lambda^2 + 1)}.$$

Sin más que sustituir en la ecuación (2.15) el valor de c_1 obtenido determinamos la constante c_2 ,

$$c_2 = \frac{1}{3\lambda^2 + 1} \left(\lambda y_0 - z_0 - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right).$$

Falta calcular el valor de la constante c_3 , que deducimos llevando a la segunda ecuación del sistema (2.14) los valores de c_1 y c_2 calculados. Realizando sencillas operaciones, obtenemos que c_3 viene dado por

$$c_3 = \frac{1}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left((3\lambda^2 + 2)y_0 + 3\lambda z_0 - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right).$$

Por tanto, reemplazando en (2.12) cada uno de los valores obtenidos para las constantes, determinamos la solución de la ecuación diferencial (2.11) con condiciones iniciales $x(0, \lambda) = 0$, $\dot{x}(0, \lambda) = y_0$, $\ddot{x}(0, \lambda) = z_0$,

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} + \frac{e^{-t\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[-\frac{(\lambda^2 y_0 - \lambda z_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda} + e^{\frac{3t\lambda}{2}} \cdot \left[\sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(\lambda y_0 - z_0 - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) \cos(\beta t) + \left((3\lambda^2 + 2)y_0 + 3\lambda z_0 - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right) \sin(\beta t) \right] \right]. \quad (2.16)$$

Ya sólo queda determinar las expresiones de las otras dos componentes de la solución del sistema (2.10). Para ello, utilizando que $y(t, \lambda) = \dot{x}(t, \lambda)$ y $z(t, \lambda) = \ddot{x}(t, \lambda)$, concluimos que

$$y(t, \lambda) = \frac{e^{-t\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[\sqrt{3\lambda^2 + 4}(\lambda^2 y_0 - \lambda z_0 + 1) + \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left((1 + 2\lambda^2)y_0 + \lambda z_0 - 1 \right) e^{\frac{3\lambda}{2}t} \cos(\beta t) - \left(\lambda y_0 - (3\lambda^2 + 2)z_0 - 3\lambda \right) e^{\frac{3\lambda}{2}t} \sin(\beta t) \right], \quad (2.17)$$

$$z(t, \lambda) = \frac{e^{-t\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[-\lambda(\lambda^2 y_0 - \lambda z_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \left(\lambda^3 y_0 + (2\lambda^2 + 1)z_0 + \lambda \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{3\lambda}{2}t} \cos(\beta t) - \left((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_0 + \lambda z_0 - (3\lambda^2 + 2) \right) e^{\frac{3\lambda}{2}t} \sin(\beta t) \right]. \quad (2.18)$$

Por tanto, hemos obtenido la solución del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal correspondiente al semiespacio derecho, cuando la condición inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = (0, y_0, z_0)$ pertenece al

plano de separación.

En lo que respecta a la solución del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal que define (2.8) en el semiespacio izquierdo con condición inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = (0, y_0, z_0)$, esta solución puede determinarse aplicando la transformación de reversibilidad (2.3) y una inversión temporal a cada una de las expresiones (2.16), (2.17) y (2.18). De ese modo, la solución viene dada por

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} + \frac{e^{t\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[\frac{(\lambda^2 y_0 + \lambda z_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda} - e^{-\frac{3t\lambda}{2}} \cdot \left[\sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(\lambda y_0 + z_0 - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) \cos(\beta t) - \left((3\lambda^2 + 2)y_0 - 3\lambda z_0 - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right) \text{sen}(\beta t) \right] \right], \quad (2.19)$$

$$y(t, \lambda) = \frac{e^{t\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[(\lambda^2 y_0 + \lambda z_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{-\frac{3t\lambda}{2}} \cdot \left[\sqrt{3\lambda^2 + 4} \left((2\lambda^2 + 1)y_0 - \lambda z_0 - 1 \right) \cos(\beta t) + \left(\lambda y_0 + (3\lambda^2 + 2)z_0 - 3\lambda \right) \text{sen}(\beta t) \right] \right] \quad (2.20)$$

y

$$z(t, \lambda) = \frac{e^{t\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[\lambda(\lambda^2 y_0 + \lambda z_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} - \left(\lambda^3 y_0 - (2\lambda^2 + 1)z_0 + \lambda \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{-\frac{3t\lambda}{2}} \cos(\beta t) + \left((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_0 - \lambda z_0 - (3\lambda^2 + 2) \right) e^{-\frac{3t\lambda}{2}} \text{sen}(\beta t) \right]. \quad (2.21)$$

Existencia de conexiones globales en la versión lineal a trozos del sistema de Michelson.

En este capítulo probamos analíticamente la existencia de ciertas conexiones globales en la versión lineal a trozos del sistema de Michelson (2.8). Las conexiones globales que tratamos son dos conexiones homoclinas directas y un ciclo heteroclinto tipo punto-T directo. Dichas conexiones se construyen sobre los puntos de equilibrio de tipo silla-foco con configuraciones de estabilidad intercambiadas.

Nótese que, en sistemas parametrizados de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, una *conexión homoclina* es una trayectoria del sistema que tiende al mismo punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a más infinito y a menos infinito. En particular, el tipo de conexión homoclina que consideramos en este trabajo se puede entender como el más simple en un sistema continuo lineal a trozos con dos zonas, pues buscamos aquellas que cortan sólo dos veces al plano de separación. Denominamos *conexión homoclina directa* a una órbita de este tipo. Por otro lado, una *conexión heteroclina* es una trayectoria del sistema que tiende a dos puntos de equilibrio distintos, a uno cuando el tiempo tiende a menos infinito y al otro cuando el tiempo tiende a más infinito. El conjunto de conexiones heteroclinas que unen, sucesivamente, varios puntos de equilibrio del sistema volviendo al punto inicial se denomina *ciclo heteroclinto*. El tipo de ciclo heteroclinto que se considera en este trabajo conecta los dos puntos de equilibrio del sistema. Recordemos que los dos equilibrios son de tipo silla-foco de tal modo que uno tiene una variedad invariante unidimensional estable y una variedad invariante bidimensional inestable, mientras que el otro posee una variedad invariante unidimensional inestable y una variedad invariante bidimensional estable. En el ciclo heteroclinto considerado las variedades invariantes unidimensionales coinciden y cortan al plano de separación exactamente en tres puntos, mientras que las variedades invariantes bidimensionales se cortan transversalmente en

una órbita que interseca al plano de separación en un único punto. La configuración que acabamos de describir se denomina habitualmente ciclo heteroclino tipo punto-T y, teniendo en cuenta que, en nuestro sistema, es el que posee el menor número de cortes con el plano de separación, lo llamaremos *ciclo heteroclino tipo punto-T directo*.

Las conexiones globales aparecen en sistemas dinámicos tan diversos como las ecuaciones de Lorenz, las ecuaciones de Rössler y algunos modelos de osciladores electrónicos no lineales. En particular, en el sistema de Michelson (2.5) aparecen tanto conexiones homoclinas como ciclos heteroclinos tipo punto-T. Para un análisis de algunas de las conexiones globales que aparecen en el sistema de Michelson véanse, por ejemplo, los trabajos [21, 31, 45, 46, 66].

La aparición de conexiones globales en un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales a menudo fuerza la existencia de una dinámica rica y compleja en un entorno de tales conexiones, véanse [20–23, 29–31, 60, 61]. Además, implica la presencia de conexiones subsidiarias para ciertas perturbaciones del sistema. Un análisis de algunos comportamientos de bifurcación relacionados con la aparición de conexiones homoclinas, ciclos heteroclinos o conexiones subsidiarias puede encontrarse, por ejemplo, en [22, 30].

Por otra parte, suele ser una tarea difícil probar que un determinado sistema dinámico posee una conexión global y, en consecuencia, es frecuente usar apoyo computacional para mostrar su existencia (véanse, por ejemplo, los trabajos [49, 67–69]).

En el caso concreto de los sistemas continuos lineales a trozos las conexiones globales siguen teniendo la misma relevancia y análogamente la prueba de su existencia continúa siendo genéricamente una tarea complicada. Los trabajos [3, 4, 17, 19, 47, 49, 50, 52, 53] estudian las conexiones globales en sistemas lineales a trozos, aunque muchos de ellos utilizan herramientas numéricas para probar su existencia. En el trabajo [47] se prueba analíticamente la existencia de una conexión homoclina en un sistema continuo lineal a trozos; no obstante, los autores de este trabajo parten de una situación degenerada. En esta memoria probamos analíticamente tanto la existencia de dos conexiones homoclinas directas como la existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo en el sistema (2.8) empleando una técnica que se basa en la integración explícita del sistema en cada zona de linealidad y que se puede generalizar a otros sistemas lineales a trozos.

En la primera y segunda sección detallamos, respectivamente, las condiciones analíticas de existencia de conexiones homoclinas directas y ciclos heteroclinos tipo punto-T directos cuyo estudio nos llevará a los resultados principales de este capítulo. En la tercera sección evidenciamos las analogías entre las condiciones para ambos tipos de conexiones globales y desarrollamos las ideas

y procedimientos básicos que se aplicarán en las secciones cuarta y quinta para las pruebas de dichos resultados principales. El capítulo concluye con un análisis numérico en el que se evidencian la existencia de otras posibles conexiones globales. Algunos de estos resultados aparecen publicados en los trabajos [10, 11].

3.1. Condiciones para la existencia de órbitas homoclinas directas.

En esta sección determinamos bajo qué condiciones existe una conexión homoclina directa en el sistema (2.8). Recordemos que dicho sistema posee dos puntos de equilibrio $\mathbf{p}_- = (-1/(\lambda(\lambda^2 + 1)), 0, 0)$ y $\mathbf{p}_+ = (1/(\lambda(\lambda^2 + 1)), 0, 0)$ y, debido a la reversibilidad del sistema, si existe una conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_- , entonces existirá otra asociada al punto \mathbf{p}_+ . En nuestro caso, consideramos la conexión homoclina directa correspondiente al punto de equilibrio \mathbf{p}_- .

En el capítulo 2 vimos que en el semiespacio izquierdo $\Sigma_- = \{x < 0\}$ la variedad invariante unidimensional de \mathbf{p}_- contiene a la semirrecta

$$\mathcal{L}_- = \left\{ \mathbf{p}_- - \mu (1, \lambda, \lambda^2) : \frac{-1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \leq \mu < +\infty \right\},$$

la cual corta al plano de separación $\Sigma = \{x = 0\}$ en el punto $\mathbf{m}_- = (0, 1/(\lambda^2 + 1), \lambda/(\lambda^2 + 1))$. Así pues, la conexión homoclina directa ha de pasar a través de \mathbf{m}_- y continuar, en el semiespacio derecho $\Sigma_+ = \{x > 0\}$, como la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = (x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda), y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda), z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda))$ del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A^+ \mathbf{x} + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{m}_-. \end{cases} \quad (3.1)$$

Además, la órbita correspondiente debe intersectar de nuevo al plano de separación en un punto del segmento \mathcal{S}_- , contenido en la recta $\mathcal{D}_- = \{\lambda^2 y + \lambda z = -1, x = 0\}$ y delimitado por los puntos $\mathbf{q}_- = (0, 0, -1/\lambda)$ y $\Pi_-^{-1}(\mathbf{q}_-)$. De este modo, la órbita pertenecerá a la variedad invariante bidimensional estable de \mathbf{p}_- . Por tanto, existe una conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_- si

$$\Pi_+(\mathbf{m}_-) \in \mathcal{S}_-. \quad (3.2)$$

En la Figura 3.1 se muestra un esquema gráfico de una de las conexiones homoclinas directas que

pueden aparecer en el sistema (2.8).

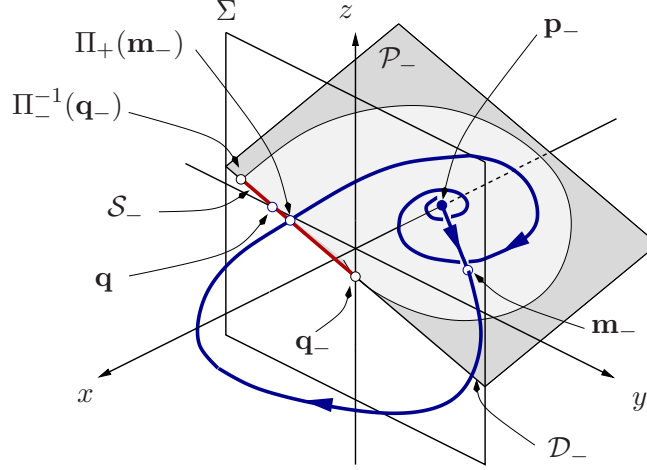


Figura 3.1: Esquema gráfico de una conexión homoclina directa del punto de equilibrio p_- .

Ahora bien, para probar la existencia de dicha conexión homoclina directa es conveniente dividir la condición (3.2) en otras tres:

H1: Existen t_h y λ_h estrictamente positivos tales que el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ pertenece a la recta \mathcal{D}_- .

H2: La función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_h)$.

H3: El punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ pertenece al segmento \mathcal{S}_- .

A continuación, determinamos las ecuaciones explícitas de la condición H1. Para ello, es necesario obtener la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ del problema de valores iniciales (3.1), la cual se deduce de las expresiones (2.16)–(2.18) sin más que sustituir y_0 y z_0 por la segunda y tercera coordenadas de \mathbf{m}_- . De este modo, obtenemos que las componentes de la solución vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} - \frac{e^{-t\lambda}}{3\lambda^2 + 1} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{e^{\frac{3t\lambda}{2}}}{\lambda^2 + 1} \left(2\lambda \cos(\beta t) - \frac{6\lambda^2}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \sin(\beta t) \right) \right], \quad (3.3)$$

$$y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = \frac{e^{-\lambda t}}{3\lambda^2 + 1} \left[1 + \frac{2\lambda e^{\frac{3t\lambda}{2}}}{\lambda^2 + 1} \left(\lambda \cos(\beta t) + \frac{3\lambda^2 + 2}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \sin(\beta t) \right) \right], \quad (3.4)$$

$$z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{3\lambda^2 + 1} \left[-1 + \frac{2e^{\frac{3t\lambda}{2}}}{\lambda^2 + 1} \left((2\lambda^2 + 1) \cos(\beta t) - \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \sin(\beta t) \right) \right], \quad (3.5)$$

con $\beta = \sqrt{3\lambda^2 + 4}/2$.

El punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ pertenece a la recta \mathcal{D}_- si (t_h, λ_h) verifica el sistema

$$\begin{cases} x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = 0, \\ \lambda^2 y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) + \lambda z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) + 1 = 0 \end{cases}$$

que, tras adecuadas manipulaciones, se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} E_1(t, \lambda) = 0, \\ E_2(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

siendo

$$E_1(t, \lambda) = 2\lambda^2 e^{\frac{3t\lambda}{2}} (\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) - 3\lambda \operatorname{sen}(\beta t)) + (\lambda^2 - (3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}. \quad (3.7)$$

y

$$E_2(t, \lambda) = 2\lambda^2 e^{\frac{t\lambda}{2}} (\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) + \lambda \operatorname{sen}(\beta t)) + (\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}. \quad (3.8)$$

En la Figura 3.2 se representan las curvas solución de las ecuaciones del sistema (3.6). Como puede apreciarse en dicha figura, ambas curvas se intersecan para diferentes valores de t y λ estrictamente positivos. De ese modo, se tiene una evidencia numérica de la existencia de soluciones del sistema (3.6).

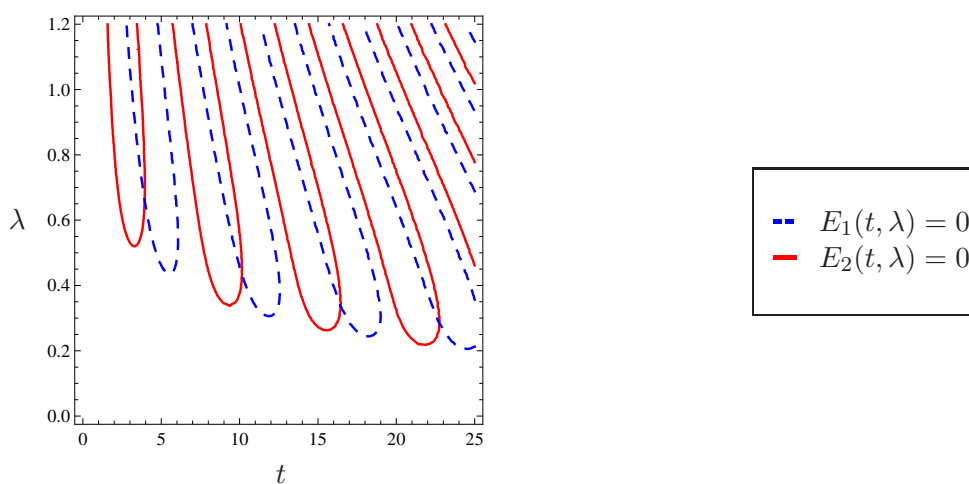


Figura 3.2: Representación de los ceros de las funciones $E_1(t, \lambda)$ y $E_2(t, \lambda)$.

La condición H2, $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h) > 0$ para todo $t \in (0, t_h)$, asegura que el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ es la imagen por la semiaplicación de Poincaré derecha del punto \mathbf{m}_- . Para ver que esta condición se satisface, tendremos en cuenta que $x_{\mathbf{m}_-}(0, \lambda_h) = x_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = 0$ y haremos uso de la derivada

$$\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h) = y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h) = c_1 e^{-t\lambda_h} + e^{\frac{t\lambda_h}{2}} (c_2 \cos(\beta_h t) + c_3 \sin(\beta_h t)),$$

con

$$\beta_h = \frac{\sqrt{3\lambda_h^2 + 4}}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{3\lambda_h^2 + 1}, \quad c_2 = \frac{2\lambda_h^2 c_1}{\lambda_h^2 + 1} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{(3\lambda_h^2 + 2) c_2}{\lambda_h \sqrt{3\lambda_h^2 + 4}}.$$

Para probar la condición H3 es suficiente ver que el punto \mathbf{q} , intersección de las rectas \mathcal{D}_- y \mathcal{D}_+ , pertenece al segmento \mathcal{S}_- , ya que al estar el punto \mathbf{m}_- por debajo del semiplano focal derecho \mathcal{P}_+ también el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ ha de estarlo (véase la Figura 3.3). Así pues, denotamos por H3' a la condición siguiente:

H3': El punto \mathbf{q} pertenece al segmento \mathcal{S}_- .

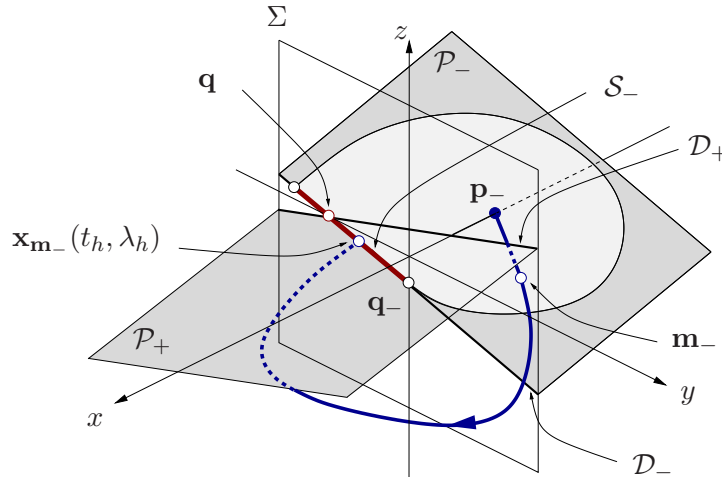


Figura 3.3: Esquema gráfico que recoge una interpretación geométrica de las condiciones H2 y H3.

3.2. Condiciones para la existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

En la introducción de este capítulo se ha descrito la configuración de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo del sistema (2.8), en el cual las variedades invariantes unidimensionales coinciden y cortan al plano de separación exactamente en tres puntos, mientras que las variedades invariantes bidimensionales se cortan transversalmente en una órbita que interseca al plano de separación en un único punto. De estas dos órbitas, llamaremos *conexión heteroclina unidimensional directa*, y la denotaremos por ρ_{\mp} , a la órbita que resulta de la coincidencia de las variedades invariantes unidimensionales en el ciclo heteroclino y *conexión heteroclina bidimensional directa*, que denotaremos por ρ_{\pm} , a la órbita contenida en la intersección de las variedades invariantes bidimensionales. Denotamos por $\Gamma = \{\mathbf{p}_-\} \cup \rho_{\mp} \cup \{\mathbf{p}_+\} \cup \rho_{\pm}$ al ciclo heteroclino tipo punto-T directo que resulta de la unión de ambas conexiones heteroclinas y de los puntos de equilibrio $\mathbf{p}_- = (-1/(\lambda(\lambda^2 + 1)), 0, 0)$ y $\mathbf{p}_+ = (1/(\lambda(\lambda^2 + 1)), 0, 0)$.

En primer lugar, vamos a determinar las condiciones que han de satisfacerse para que exista una conexión heteroclina unidimensional directa en el sistema (2.8). En el capítulo 2 vimos que en el semiespacio izquierdo $\Sigma_- = \{x < 0\}$ la variedad invariante unidimensional de \mathbf{p}_- contiene a la semirrecta

$$\mathcal{L}_- = \left\{ \mathbf{p}_- - \mu (1, \lambda, \lambda^2) : \frac{-1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \leq \mu < +\infty \right\},$$

que interseca al plano de separación $\Sigma = \{x = 0\}$ en el punto $\mathbf{m}_- = (0, 1/(\lambda^2 + 1), \lambda/(\lambda^2 + 1))$, y que en el semiespacio derecho $\Sigma_+ = \{x > 0\}$ la variedad invariante unidimensional de \mathbf{p}_+ contiene a la semirrecta

$$\mathcal{L}_+ = \left\{ \mathbf{p}_+ + \mu (1, -\lambda, \lambda^2) : \frac{-1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \leq \mu < +\infty \right\},$$

la cual corta al plano de separación en el punto $\mathbf{m}_+ = (0, 1/(\lambda^2 + 1), -\lambda/(\lambda^2 + 1))$. De esta manera, dos de los puntos de corte de la conexión heteroclina unidimensional directa con el plano de separación son necesariamente \mathbf{m}_- y \mathbf{m}_+ . Por otro lado, para que esta conexión heteroclina interseque al plano de separación exactamente en tres puntos se tiene que dar la igualdad

$$\Pi_+(\mathbf{m}_-) = \Pi_-^{-1}(\mathbf{m}_+).$$

Debido a la reversibilidad del sistema, la igualdad anterior es cierta si, y sólo si, el punto $\Pi_+(\mathbf{m}_-)$

pertenece al eje y (eje de reversibilidad). Así pues, existe una conexión heteroclina unidimensional directa si, y sólo si, el punto

$$\Pi_+(\mathbf{m}_-) \in \text{eje } y. \quad (3.9)$$

En la Figura 3.4 se muestra un esquema gráfico de una conexión heteroclina unidimensional directa del sistema (2.8).

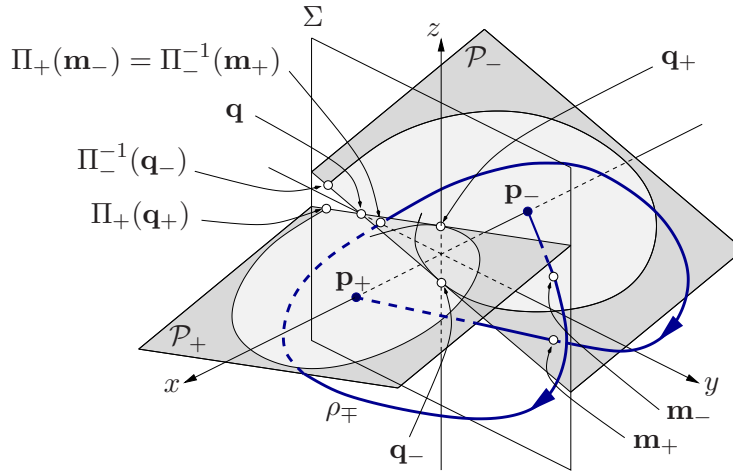


Figura 3.4: Esquema gráfico de una conexión heteroclina unidimensional directa en el sistema (2.8).

Del mismo modo que en la sección anterior, es conveniente dividir la condición (3.9) en otras dos:

T1: Existen t_0 y λ_0 estrictamente positivos tales que el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)$ pertenece al eje y .

T2: La función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_0)$.

La condición T1 es equivalente a que existan t_0 y λ_0 estrictamente positivos tales que (t_0, λ_0) es una solución del sistema

$$\begin{cases} x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = 0, \\ z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ y $z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ son las componente primera y tercera de la solución del problema de valores iniciales (3.1) y están dadas, respectivamente, por las expresiones (3.3) y (3.5). Haciendo adecuadas manipulaciones en (3.10), llegamos al sistema

$$\begin{cases} E_1(t, \lambda) = 0, \\ F_1(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

con

$$F_1(t, \lambda) = 2e^{\frac{3t\lambda}{2}} ((2\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) - \lambda \operatorname{sen}(\beta t)) - (\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \quad (3.12)$$

y $E_1(t, \lambda)$ está dada por la expresión (3.7) y, por tanto, es idéntica a la ecuación antes obtenida para la conexión homoclina. En la Figura 3.5 se representan las curvas solución de las ecuaciones del sistema (3.11). Como puede apreciarse en esta figura, ambas curvas se intersecan para diferentes valores de t y λ estrictamente positivos. De ese modo, se tiene una evidencia numérica de la existencia de soluciones del sistema (3.11).

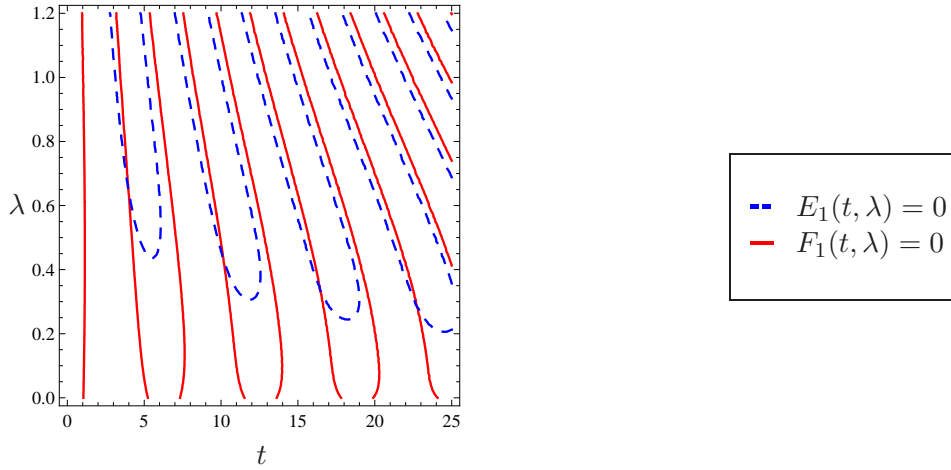


Figura 3.5: Representación de los ceros de las funciones $E_1(t, \lambda)$ y $F_1(t, \lambda)$.

La condición T2, $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0) > 0$ para todo $t \in (0, t_0)$, asegura que el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)$ es la imagen mediante la semiaplicación de Poincaré derecha del punto \mathbf{m}_- . Para ver que esta condición se satisface, tendremos en cuenta que $x_{\mathbf{m}_-}(0, \lambda_0) = x_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) = 0$ y haremos uso de la derivada

$$\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0) = y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0) = c_1 e^{-t\lambda_0} + (c_2 \cos(\beta_0 t) + c_3 \operatorname{sen}(\beta_0 t)) e^{\frac{t\lambda_0}{2}},$$

con

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{3\lambda_0^2 + 4}}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{3\lambda_0^2 + 1}, \quad c_2 = \frac{2\lambda_0^2 c_1}{\lambda_0^2 + 1} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{(3\lambda_0^2 + 2) c_2}{\lambda_0 \sqrt{3\lambda_0^2 + 4}}.$$

A continuación, describimos las condiciones que han de satisfacerse para que exista una conexión heteroclina bidimensional directa en el sistema (2.8). Dicha conexión heteroclina debe estar contenida en las variedades invariantes bidimensionales y cortar al plano de separación en un único punto, que denotamos por $\bar{\mathbf{q}}$. Este punto, necesariamente, ha de ser el punto de intersección de las rectas \mathcal{D}_- y \mathcal{D}_+ , determinadas por la intersección de los semiplanos focales \mathcal{P}_- y \mathcal{P}_+ con el plano de separación. Además, para asegurar que la órbita que pasa por el punto $\bar{\mathbf{q}}$ llegue a los puntos de equilibrio sin cortar otra vez al plano de separación, hay que imponer que $\bar{\mathbf{q}}$ pertenezca a $\mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_+$.

Por la reversibilidad del sistema (2.8), el punto $\bar{\mathbf{q}}$ pertenece a $\mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_+$ si, y sólo si, pertenece a la intersección $\mathcal{D}_- \cap \mathcal{D}_+$ y, además, es un punto del segmento \mathcal{S}_- . Así pues, el punto $\bar{\mathbf{q}}$ coincide necesariamente con $\mathbf{q} = (0, -1/\lambda^2, 0)$, ya que éste es la única intersección entre las rectas \mathcal{D}_- y \mathcal{D}_+ . Por tanto, para asegurar la existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo es necesario añadir la siguiente condición:

T3: El punto \mathbf{q} pertenece al segmento \mathcal{S}_- .

Hagamos notar que esta condición coincide con la condición H3' para la existencia de una conexión homoclina directa.

En la Figura 3.6 se muestra un esquema gráfico de una conexión heteroclina bidimensional directa en el sistema (2.8).

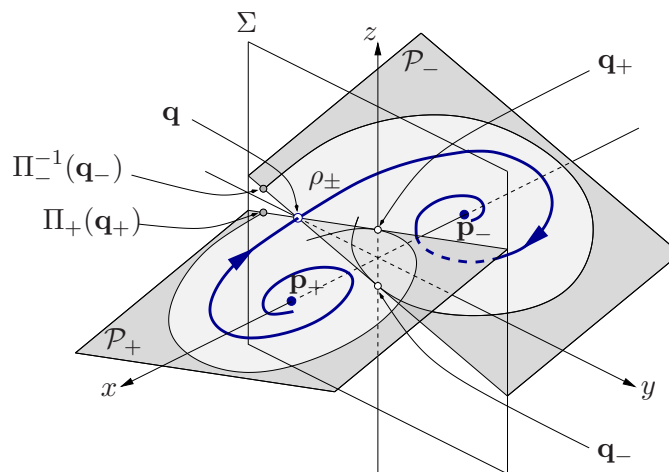


Figura 3.6: Esquema gráfico de una conexión heteroclina bidimensional directa en el sistema (2.8).

3.3. Procedimiento común para probar la existencia de las conexiones globales.

En las dos secciones anteriores se ponen de manifiesto las analogías existentes entre las condiciones que han de satisfacerse para que exista una conexión homoclina directa y las condiciones de existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo en el sistema (2.8).

Las condiciones H1 y T1 llevan, respectivamente, a los sistemas (3.6) y (3.11), que tienen una estructura análoga. Por otro lado, las condiciones H2 y T2 se expresan de la misma manera: una cierta función debe ser estrictamente positiva en un cierto intervalo. Teniendo en cuenta que en ambos casos la función se corresponde con la primera componente del flujo, las dos condiciones se abordarán de manera análoga. Por último, ya hemos comentado que las condiciones H3' y T3 son idénticas.

Esta sección se divide en dos partes. En la primera determinaremos unas condiciones para que un sistema genérico que engloba a los sistemas (3.6) y (3.11) tenga solución. En la segunda parte probaremos un resultado que, como veremos en secciones posteriores, asegura que se cumplan las condiciones H2 y T2.

Comenzamos con un lema relativo a las condiciones H1 y T1.

Lema 3.1 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} A_1(t, \lambda) \cos(\beta t) + B_1(t, \lambda) \operatorname{sen}(\beta t) = C_1(t, \lambda), \\ A_2(t, \lambda) \cos(\beta t) + B_2(t, \lambda) \operatorname{sen}(\beta t) = C_2(t, \lambda), \end{cases} \quad (3.13)$$

en las incógnitas (t, λ) y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

- (a) $A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda) \neq 0$, y
- (b) $\frac{A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)} < 0$.

Entonces, el sistema (3.13) es equivalente a

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = 0, \\ p(t, \lambda) = 0, \\ \operatorname{sen}(\beta t) < 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

donde

$$E(t, \lambda) = A_3(t, \lambda) \cos(\beta t) + B_3(t, \lambda) \operatorname{sen}(\beta t), \quad (3.15)$$

con $A_3(t, \lambda) = A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)$ y $B_3(t, \lambda) = B_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - C_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda)$,
y

$$p(t, \lambda) = \frac{(B_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda) - B_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda))^2 + (A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda))^2}{(A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda))^2} - 1. \quad (3.16)$$

Demostración:

Para probar la equivalencia comenzaremos viendo que una solución del sistema (3.13) también lo es de (3.14). Es inmediato observar que la primera ecuación del sistema (3.14) es simplemente una combinación lineal de las dos ecuaciones del sistema (3.13).

En lo que respecta a las otras dos ecuaciones del sistema (3.14), denotamos $X = \cos(\beta t)$ e $Y = \operatorname{sen}(\beta t)$. Por un lado, es obvio que se verifica

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0. \quad (3.17)$$

Por otro lado, el sistema de ecuaciones (3.13) en las variables X e Y queda de la forma

$$\begin{cases} A_1(t, \lambda)X + B_1(t, \lambda)Y = C_1(t, \lambda), \\ A_2(t, \lambda)X + B_2(t, \lambda)Y = C_2(t, \lambda). \end{cases} \quad (3.18)$$

Las ecuaciones que componen el sistema anterior pueden considerarse, desde el punto de vista geométrico, como las ecuaciones de dos rectas secantes, ya que el sistema tiene una única solución al ser el determinante asociado distinto de cero por la primera condición del lema. Dicha solución viene dada por

$$X = -\frac{B_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - B_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)}, \quad (3.19)$$

$$Y = \frac{A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)}. \quad (3.20)$$

Para llegar a la segunda ecuación del sistema (3.14) basta sustituir las expresiones (3.19) y (3.20) en la ecuación (3.17). Por otro lado, de la segunda condición del lema se deduce que Y es negativa,

lo que se corresponde con la última condición del sistema (3.14). Esto concluye que las soluciones del sistema (3.13) también lo son de (3.14).

Para probar el recíproco, consideramos el sistema de ecuaciones (3.14) en las variables X e Y ,

$$\begin{cases} A_3(t, \lambda)X + B_3(t, \lambda)Y = 0, \\ X^2 + Y^2 - 1 = 0, \\ Y < 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Geométricamente, las dos primeras ecuaciones del sistema anterior representan una recta que pasa por el origen de coordenadas y la circunferencia goniométrica. Es obvio que ambas curvas se cortan en dos puntos diametralmente opuestos. Por la segunda condición del lema sabemos que $A_3(t, \lambda) \neq 0$, con lo que ambos puntos de corte tiene sus segundas coordenadas de distinto signo. Obsérvese que uno de estos dos puntos no es solución de este sistema, ya que no verifica la desigualdad $Y < 0$. Por ello, el sistema (3.21) tiene una única solución.

Supongamos que (t, λ) es solución del sistema (3.14), entonces el par $(\cos(\beta t), \sin(\beta t))$ es solución del sistema de ecuaciones (3.21). Por otro lado, el par

$$\left(-\frac{B_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - B_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)}, \frac{A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)} \right)$$

es también solución de (3.21). En efecto, este par es solución del sistema (3.18) y verifica la primera ecuación de (3.21), por ser ésta combinación lineal de las dos ecuaciones de dicho sistema (3.18). Las otras dos condiciones de (3.21) son inmediatas. De este modo, ambas soluciones del sistema (3.21) deben coincidir; esto es,

$$(\cos(\beta t), \sin(\beta t)) = \left(-\frac{B_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - B_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)}, \frac{A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)} \right),$$

lo que es equivalente a decir que (t, λ) es solución de (3.13).

En consecuencia, concluimos que los sistemas (3.13) y (3.14) tienen la misma solución y, por tanto, son equivalentes. \square

A continuación establecemos un resultado que asegura la existencia de solución del sistema (3.14) bajo determinadas condiciones. En su prueba utilizaremos el *Teorema de Poincaré-Miranda*, que se puede considerar como una generalización del Teorema de Bolzano a mayor dimensión, y que enunciamos para dos variables sin demostración (ver [41]).

Teorema 3.2 Sean f_1 y f_2 dos funciones reales de dos variables, definidas en el rectángulo $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ y continuas en dicho compacto, tales que

$$(a) \quad f_1(a, y) < 0 < f_1(b, y) \text{ para todo } y \text{ en } [c, d], \text{ y}$$

$$(b) \quad f_2(x, c) < 0 < f_2(x, d) \text{ para todo } x \text{ en } [a, b].$$

Entonces, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

tiene al menos una solución perteneciente al interior de Ω .

Lema 3.3 Sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos $I_k = [a_k(\lambda), b_k(\lambda)]$ con

$$a_k(\lambda) = \frac{2(2k-1)\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \quad \text{y} \quad b_k(\lambda) = \frac{4k\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}.$$

Supongamos que existen λ_1 y λ_2 estrictamente positivos tales que

$$(a) \quad A_3(a_k(\lambda), \lambda) \cdot A_3(b_k(\lambda), \lambda) > 0 \text{ para todo } \lambda \text{ perteneciente a } [\lambda_1, \lambda_2], \text{ y}$$

$$(b) \quad p(t, \lambda_1) \cdot p(t, \lambda_2) < 0 \text{ para todo } t \text{ perteneciente al intervalo } I_k,$$

siendo $A_3(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ las funciones definidas en el Lema 3.1. Entonces, el sistema (3.13) y, equivalentemente, el sistema (3.14) tienen solución en el interior de la región

$$\Omega_k = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : a_k(\lambda) \leq t \leq b_k(\lambda), \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}.$$

Demostración:

La demostración se llevará a cabo aplicando el Teorema de Poincaré-Miranda en un sistema adecuado equivalente a (3.14). Realizando el cambio de variables

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda^2, \\ \tau &= \frac{\sqrt{3\lambda^2+4}}{2}t, \end{aligned}$$

sobre el sistema (3.14) obtenemos

$$\begin{cases} \tilde{E}(\tau, \mu) = 0, \\ \tilde{p}(\tau, \mu) = 0, \\ \text{sen}(\tau) < 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

donde $\tilde{E}(\tau, \mu) = E(2\tau/\sqrt{3\mu+4}, \sqrt{\mu})$, $\tilde{p}(\tau, \mu) = p(2\tau/\sqrt{3\mu+4}, \sqrt{\mu})$ y las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ están dadas, respectivamente, por las expresiones (3.15) y (3.16).

A continuación, probaremos que las funciones $\tilde{E}(\tau, \mu)$ y $\tilde{p}(\tau, \mu)$, definidas en el rectángulo $\tilde{\Omega}_k = [(2k-1)\pi, 2k\pi] \times [\lambda_1^2, \lambda_2^2]$ y continuas en dicho compacto, satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2. Por un lado, es fácil deducir que $\tilde{E}(\tau, \mu)$ toma diferente signo en los lados verticales de dicho rectángulo, ya que

$$\begin{aligned} \tilde{E}((2k-1)\pi, \mu) &= E(a_k(\lambda), \sqrt{\mu}) = -A_3(a_k(\lambda), \lambda), \\ \tilde{E}(2k\pi, \mu) &= E(b_k(\lambda), \sqrt{\mu}) = A_3(b_k(\lambda), \lambda) \end{aligned}$$

y, por hipótesis, el producto $A_3(a_k(\lambda), \lambda) \cdot A_3(b_k(\lambda), \lambda)$ es estrictamente positivo en $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Por otro lado, como la función $p(t, \lambda)$ verifica la desigualdad $p(t, \lambda_1) \cdot p(t, \lambda_2) < 0$ para todo t perteneciente al intervalo I_k , se deduce trivialmente que $\tilde{p}(\tau, \mu)$ tiene diferente signo en los lados horizontales del rectángulo $\tilde{\Omega}_k$. Además, nótese que $\text{sen}(\tau)$ es negativo cuando τ pertenece al intervalo $((2k-1)\pi, 2k\pi)$.

En consecuencia, concluimos que el sistema (3.22) posee solución en el interior del rectángulo $\tilde{\Omega}_k$ y, por tanto, el sistema (3.14) posee solución en el interior de la región Ω_k . □

Terminamos la sección probando un resultado relativo a las condiciones H2 y T2.

Lema 3.4 Sea $\lambda > 0$ y consideremos una función $f(t)$ tal que

$$\dot{f}(t) = c_1 e^{-t\lambda} + (c_2 \cos(\beta t) + c_3 \text{sen}(\beta t)) e^{\frac{t\lambda}{2}},$$

con $c_1 \cdot c_2 > 0$. Supongamos que existe $t_* \in (0, 2\pi/\beta)$ tal que $f(0) = f(t_*) = 0$, $\dot{f}(0) > 0$ y $\dot{f}(t_*) < 0$. Entonces, la función $f(t)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_*)$.

Demostración:

Probaremos la tesis del lema viendo que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, t_*)$. Esto, unido a que $f(0) = 0$ y $\dot{f}(0) > 0$, implica que $f(t)$ es estrictamente positiva en el intervalo $(0, t_*)$.

Supongamos que la función $f(t)$ se anula en el intervalo $(0, t_*)$. Por las hipótesis del lema, su derivada ha de anularse al menos tres veces en dicho intervalo abierto. Es decir, la ecuación $c_1 e^{-t\lambda} + (c_2 \cos(\beta t) + c_3 \operatorname{sen}(\beta t)) e^{\frac{t\lambda}{2}} = 0$ debe tener al menos tres soluciones en $(0, t_*)$. Realizando el cambio de variable $\tau = \beta t$ y utilizando que $t_* < 2\pi/\beta$ deducimos que la ecuación $h(\tau) = -1$, con

$$h(\tau) = \frac{(c_2 \cos(\tau) + c_3 \operatorname{sen}(\tau)) e^{\frac{3\tau\lambda}{2\beta}}}{c_1},$$

debe tener tres soluciones en el intervalo $(0, 2\pi)$. Como $h(0) = c_2/c_1 > 0$, es fácil probar que la función $h(\tau)$ tiene tres ceros en el intervalo $(0, 2\pi)$ y esto es claramente imposible, lo que concluye la demostración. □

3.4. Existencia de conexiones homoclinas directas.

En esta sección probamos la existencia de una conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_- en el sistema (2.8). Recordemos que probar la existencia de tal conexión homoclina es equivalente a verificar las condiciones H1, H2 y H3, para lo que basta demostrar que el sistema (3.6) tiene solución y se satisfacen las condiciones H2 y H3'.

El sistema (3.6) se puede escribir en la forma (3.13) con

$$\begin{pmatrix} A_1(t, \lambda) & B_1(t, \lambda) & C_1(t, \lambda) \\ A_2(t, \lambda) & B_2(t, \lambda) & C_2(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 e^{\frac{3t\lambda}{2}} \sqrt{3\lambda^2 + 4} & -6\lambda^3 e^{\frac{3t\lambda}{2}} & -(\lambda^2 - (3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + 1) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \\ 2\lambda^2 e^{\frac{t\lambda}{2}} \sqrt{3\lambda^2 + 4} & 2\lambda^3 e^{\frac{t\lambda}{2}} & -(\lambda^2 + 1) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que el sistema (3.6) está en las condiciones del Lema 3.1, ya que se satisface, para t y λ estrictamente positivos,

$$\circ A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda) = 16\lambda^5 e^{2t\lambda} \sqrt{3\lambda^2 + 4} \neq 0, \text{ y}$$

$$\circ \frac{A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)} = \frac{-((\lambda^2 + 1)(2e^{t\lambda} - 1) + 2\lambda^2 e^{t\lambda})\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{8\lambda^3 e^{\frac{3t\lambda}{2}}} < 0.$$

Por tanto, aplicando el Lema 3.1, sabemos que el sistema (3.6) es equivalente a

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = 0, \\ p(t, \lambda) = 0, \\ \text{sen}(\beta t) < 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

donde

$$E(t, \lambda) = 2\lambda^2 e^{\frac{t\lambda}{2}} \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left[-((\lambda^2 + 1)(2e^{\lambda t} - 1) + 2\lambda^2 e^{\lambda t}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) + \right. \quad (3.24) \\ \left. + \lambda(\lambda^2 + 2e^{t\lambda} + 1) \text{sen}(\beta t) \right]$$

y

$$p(t, \lambda) = \frac{e^{-3t\lambda}}{16\lambda^6} \left[-16\lambda^6 e^{3t\lambda} + (\lambda^2 + 1)^2 (4(3\lambda^2 + 1)e^{2t\lambda} - 2(3\lambda^2 + 2)e^{t\lambda} + \lambda^2 + 1) \right]. \quad (3.25)$$

En la Figura 3.7 se representan gráficamente las zonas donde $\text{sen}(\beta t) < 0$ y las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$.

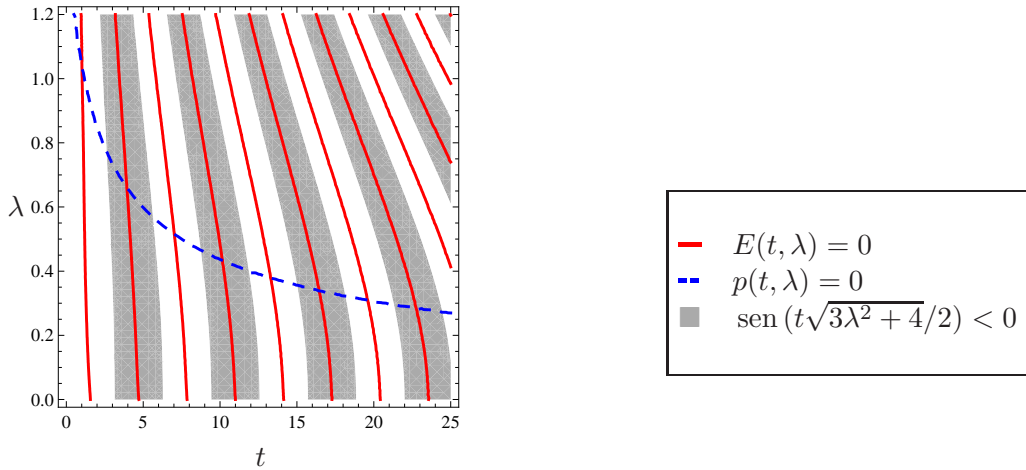


Figura 3.7: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$. Se han sombreado las regiones donde el valor de $\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3\lambda^2+4}t}{2}\right)$ es estrictamente menor que cero.

Hagamos notar que los valores de t y λ para los cuales dichas curvas se intersecan son soluciones del sistema (3.23) y, equivalentemente, del sistema (3.6), si además verifican la desigualdad $\sin(\beta t) < 0$. A partir de esta representación gráfica deducimos que el sistema (3.6) posee solución. Sin embargo, pretendemos probar esto de forma analítica usando el Lema 3.3 donde, en este caso,

$$A_3(t, \lambda) = -2\lambda^2(3\lambda^2 + 4)((\lambda^2 + 1)(2e^{\lambda t} - 1) + 2\lambda^2 e^{\lambda t})e^{\frac{t\lambda}{2}}, \quad (3.26)$$

y la función $p(t, \lambda)$ está dada por la expresión (3.25).

Lema 3.5 El sistema de ecuaciones (3.6) tiene al menos una solución en el interior de la región

$$\Omega_h = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \leq t \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \sqrt{3} \right\}.$$

Demostración:

Es inmediato ver que la función $A_3(t, \lambda)$ dada por la expresión (3.26) verifica

$$A_3\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) \cdot A_3\left(\frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) > 0, \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

A continuación vamos a analizar el signo de la función $p(t, \lambda)$ dada por (3.25). Para ello, basta estudiar la función $p_h(t, \lambda) = -16\lambda^6 e^{3t\lambda} + (\lambda^2 + 1)^2 [4(3\lambda^2 + 1)e^{2t\lambda} - 2(3\lambda^2 + 2)e^{t\lambda} + \lambda^2 + 1]$. Realizando el cambio de variables $\mu = \lambda^2$, $s = \exp(\sqrt{\mu}t)$ sobre $p_h(t, \lambda)$, para todo t y λ estrictamente positivos, obtenemos la función polinómica

$$\tilde{p}_h(s, \mu) = -16\mu^3 s^3 + (\mu + 1)^2 [4(3\mu + 1)s^2 - 2(3\mu + 2)s + \mu + 1], \quad (3.27)$$

definida para $s \geq 1$ y $\mu \geq 0$.

Fijando $\mu = 3$ en (3.27), tenemos el polinomio $\tilde{p}_h(s, 3) = -16(27s^3 - 40s^2 + 22s - 4)$. Como la derivada del polinomio anterior respecto a la variable s no tiene raíces reales y siempre es negativa, deducimos que la función $\tilde{p}_h(s, 3)$ es decreciente y, por tanto, alcanza su máximo absoluto en $s = 1$, siendo su valor $\tilde{p}_h(1, 3) = -80 < 0$. De donde concluimos que $\tilde{p}_h(s, 3)$ es estrictamente menor que cero para todo $s \geq 1$.

Por otro lado, fijando $\mu = 1/4$ en (3.27) se obtiene

$$\tilde{p}_h(s, 1/4) = -\frac{1}{32} \left(8s^3 - 350s^2 + 275s - \frac{125}{2} \right).$$

Vamos a comprobar que el polinomio $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ es estrictamente positivo en un intervalo conveniente para la variable s . Puesto que el parámetro t pertenece al intervalo $[2\pi/\sqrt{3\mu+4}, 4\pi/\sqrt{3\mu+4}]$, para $\mu = 1/4$ la variable s pertenece al intervalo $[e^{\frac{2\pi}{\sqrt{19}}}, e^{\frac{4\pi}{\sqrt{19}}}]$. Este intervalo está contenido en $[1, 27]$ ya que

$$\left(\frac{4\pi}{\sqrt{19}} \right)^2 = \frac{(4\pi)^2}{19} < \frac{(4 \cdot 3.15)^2}{19} = \frac{(12.60)^2}{19} < \frac{13^2}{19} = \frac{169}{19} < 9$$

y, por tanto, $e^{\frac{4\pi}{\sqrt{19}}} < e^3 < 3^3 = 27$.

Ahora vamos a comprobar que el polinomio $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ es estrictamente positivo para todo valor s perteneciente al intervalo $[1, 27]$.

La derivada de $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ respecto a la variable s ,

$$q_h(s) = \left. \frac{\partial \tilde{p}_h}{\partial s}(s, \mu) \right|_{\mu=1/4} = -\frac{1}{32} (24s^2 - 700s + 275),$$

tiene una única raíz real mayor que uno, $s_0 = \frac{5}{12} (35 + \sqrt{1159}) > 27$. Por tanto, la función $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ no tiene puntos críticos en el intervalo $[1, 27]$ y es estrictamente creciente en dicho intervalo, puesto que $q_h(1) = 401/32 > 0$. De ese modo, la función restringida al intervalo $[1, 27]$ alcanza su mínimo absoluto en $s = 1$. Como $\tilde{p}_h(1, 1/4) = 259/64 > 0$, deducimos que $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ es estrictamente positiva para todo $1 \leq s \leq 27$ y, en particular, en $[e^{\frac{2\pi}{\sqrt{19}}}, e^{\frac{4\pi}{\sqrt{19}}}]$.

Deshaciendo el cambio de variables realizado, tenemos que la función $p_h(t, \sqrt{3})$ es estrictamente negativa para todo $t > 0$ y que $p_h(t, 1/2)$ toma valores estrictamente positivos para todo t perteneciente al intervalo $I_1 = [4\pi/\sqrt{19}, 8\pi/\sqrt{19}]$, por lo que $p_h(t, 1/2) \cdot p_h(t, \sqrt{3}) < 0$ para todo $t \in I_1$.

Hemos probado que se verifican las hipótesis del Lema 3.3. Así pues, el sistema (3.23) y, equivalentemente, el sistema (3.6) poseen al menos una solución en el interior de la región Ω_h .

□

En la Figura 3.8 se representan las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$ del sistema (3.23), así como la región Ω_h . En el interior de la región Ω_h dichas curvas se cortan en un punto (t_h, λ_h) , con t_h y λ_h estrictamente positivos, el cual es una solución del sistema (3.6).

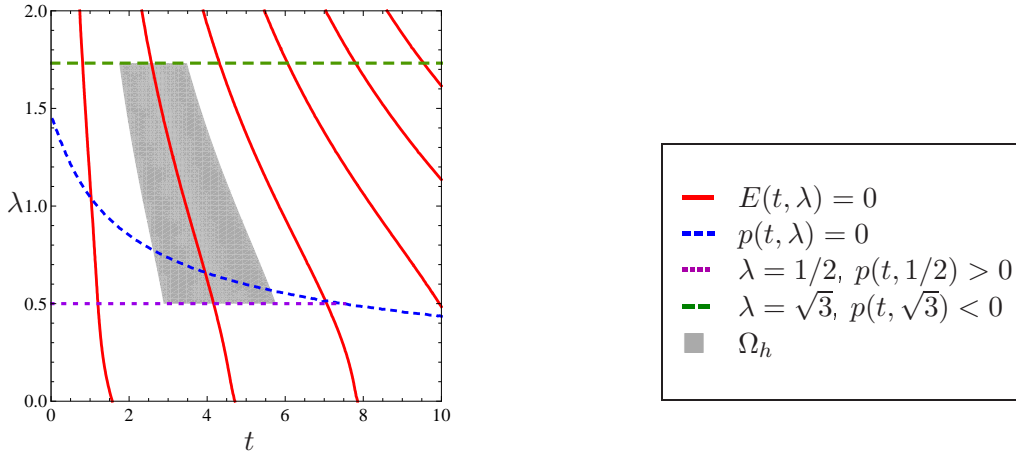


Figura 3.8: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas por (3.24) y (3.25), respectivamente. Se ha sombreado la región $\Omega_h = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\pi}{\sqrt{3}\lambda^2+4} \leq t \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3}\lambda^2+4}, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \sqrt{3} \right\}$.

Acabamos de probar que el sistema (3.6) tiene al menos una solución (t_h, λ_h) , con t_h y λ_h estrictamente positivos, por lo que se satisface la condición H1. Para probar que existe la conexión homoclina directa es necesario verificar también las condiciones H2 y H3. Para la condición H2 damos el siguiente resultado que se basa en el Lema 3.4.

Lema 3.6 Sea (t_h, λ_h) una solución del sistema (3.6) que pertenece a la región Ω_h , definida en el lema anterior. Entonces, la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_h)$.

Demostración:

Probaremos la tesis del lema comprobando que la función $f(t) = x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$ está en las hipótesis del Lema 3.4.

Teniendo en cuenta las ecuaciones del sistema (2.8), sabemos que $\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h) = y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$, donde

$$y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h) = c_1 e^{-t\lambda_h} + (c_2 \cos(\beta_h t) + c_3 \operatorname{sen}(\beta_h t)) e^{\frac{t\lambda_h}{2}}, \quad (3.28)$$

con

$$\beta_h = \frac{\sqrt{3\lambda_h^2 + 4}}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{3\lambda_h^2 + 1} > 0, \quad c_2 = \frac{2\lambda_h^2 c_1}{\lambda_h^2 + 1} > 0, \quad c_3 = \frac{(3\lambda_h^2 + 2) c_2}{\lambda_h \sqrt{3\lambda_h^2 + 4}} > 0.$$

La función $f(t) = x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$ se anula en $t = 0$, ya que $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(0, \lambda_h)$ pertenece al plano de separación, y en el instante de tiempo t_h , por ser (t_h, λ_h) una solución del sistema (3.6). Por otro lado, $\dot{f}(0) = y_{\mathbf{m}_-}(0, \lambda_h) = c_1 + c_2$ es estrictamente mayor que cero, pues c_1 y c_2 son estrictamente positivas. Además, al ser (t_h, λ_h) una solución del sistema (3.6) entonces

$$\cos(\beta_h t_h) = - \left. \frac{\lambda^2 + 2e^{t\lambda} + 1}{8\lambda^2 e^{\frac{3t\lambda}{2}}} \right|_{(t_h, \lambda_h)} \quad (3.29)$$

y

$$\text{sen}(\beta_h t_h) = - \left. \frac{((\lambda^2 + 1)(2e^{\lambda t} - 1) + 2\lambda^2 e^{\lambda t}) \sqrt{3\lambda^2 + 4}}{8\lambda^3 e^{\frac{3t\lambda}{2}}} \right|_{(t_h, \lambda_h)}. \quad (3.30)$$

Sin más que sustituir en (3.28) las expresiones dadas por (3.29) y (3.30) tenemos la expresión

$$y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = \frac{e^{-t_h \lambda_h} - 2}{2\lambda_h^2}, \quad (3.31)$$

que es estrictamente menor que cero y, por tanto, la derivada $\dot{f}(t_h) = \dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ es estrictamente negativa.

En consecuencia, aplicando el Lema 3.4, deducimos que la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$ es estrictamente positiva en el intervalo $(0, t_h)$.

□

En la Figura 3.9 se representan las curvas solución de las dos ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$ del sistema (3.23), así como las zonas donde la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ es estrictamente menor que cero. Como se puede apreciar en esta figura, ambas curvas se intersecan para diferentes valores de t y λ estrictamente positivos. El segundo punto de corte de ambas curvas empezando por la izquierda se corresponde con la solución $(t_h, \lambda_h) \in \Omega_h$ del sistema (3.6). A partir de esta figura evidenciamos también que, para el valor del parámetro λ_h , la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_h)$, como sabíamos por el Lema 3.6, por lo que se satisface la condición H2.

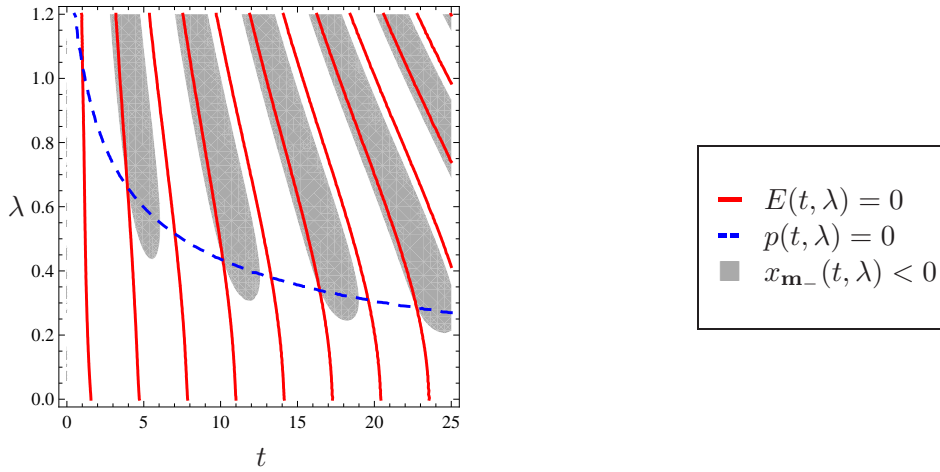


Figura 3.9: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas, respectivamente, por las expresiones (3.24) y (3.25). Se han sombreado las regiones donde la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) < 0$.

Para concluir la prueba de la existencia de la conexión homoclina directa sólo falta verificar la condición H3', esto lo haremos cuando abordemos, en una sección posterior, la existencia de la conexión heteroclina bidimensional directa del ciclo heteroclino tipo punto-T directo. No obstante, antes de finalizar esta sección, vamos a tratar el tema de la unicidad local para cada solución $(t_h, \lambda_h) \in \Omega_h$ del sistema (3.6).

Para asegurar la unicidad local de la conexión homoclina, es suficiente garantizar que la distancia del punto $\Pi_+(\mathbf{m}_-)$ al semiplano focal izquierdo, $\mathcal{P}_- = \{\lambda(\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 y + \lambda z = -1, x \leq 0\}$, es difeomorfa a $\mu = \lambda - \lambda_h$ en un entorno de λ_h . Tengamos en cuenta que dicha distancia es difeomorfa a la función

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 y_{\mathbf{m}_-}(t^+(\lambda), \lambda) + \lambda z_{\mathbf{m}_-}(t^+(\lambda), \lambda) + 1, \quad (3.32)$$

donde $t^+(\lambda)$ es el semitiempo de vuelo derecho del punto \mathbf{m}_- para cada λ en un entorno de λ_h . La función $\Delta(\lambda)$ se obtiene sustituyendo la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ en la ecuación de la recta \mathcal{D}_- , que recordemos es la intersección del semiplano focal izquierdo con el plano de separación.

Nótese que si $\lambda = \lambda_h$, entonces $t^+(\lambda_h)$ coincide con t_h y, por tanto, se satisface la igualdad $\Delta(\lambda_h) = 0$. Además, la función $\Delta(\lambda)$ es analítica en un entorno de λ_h , ya que la solución sólo depende del sistema lineal que gobierna el semiespacio derecho y $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_h)$ interseca transversalmente al plano de separación para $t = t_h$. Así pues, para determinar si $\Delta(\lambda)$ es difeomorfa a $\mu = \lambda - \lambda_h$ es suficiente comprobar que $\Delta'(\lambda_h) \neq 0$.

Lema 3.7 Sea (t_h, λ_h) una solución del sistema (3.6) que pertenece a la región Ω_h , definida en el Lema 3.5. Entonces, la función $\Delta(\lambda)$ dada por la expresión (3.32), satisface $\Delta'(\lambda_h) < 0$.

Demostración:

La derivada $\Delta'(\lambda_h)$ está dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_h} &= 2\lambda_h y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) + \lambda_h^2 \dot{y}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) \left. \frac{dt^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_h} + \lambda_h^2 \left. \frac{\partial y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} + \\ &+ z_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) + \lambda_h \dot{z}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) \left. \frac{dt^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_h} + \lambda_h \left. \frac{\partial z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde las componentes de la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ vienen dadas por las expresiones (3.3)–(3.5), respectivamente. Recordemos que si $(t, \lambda) = (t_h, \lambda_h)$, entonces el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ pertenece a la recta \mathcal{D}_- , por lo que $x_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ es nula mientras que $y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ y $z_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ satisfacen la ecuación $\lambda_h^2 y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) + \lambda_h z_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = -1$. Sin más que despejar en dicha ecuación obtenemos

$$z_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = - \left(\frac{1}{\lambda_h} + \lambda_h y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) \right), \quad (3.34)$$

donde $y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$ está dada por la expresión (3.31).

Observemos que la función $t^+(\lambda)$ es analítica en un entorno de λ_h y está definida de forma implícita por la ecuación $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = 0$, por lo tanto, hallamos su derivada en el punto (t_h, λ_h) derivando implícitamente la ecuación anterior con respecto a λ y evaluando la derivada en ese punto. De ese modo, obtenemos

$$\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) \left. \frac{dt^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_h} + \left. \frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} = 0.$$

Como $\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)$, deducimos que la derivada de la función $t^+(\lambda)$ evaluada en el punto (t_h, λ_h) es

$$\left. \frac{dt^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_h} = - \frac{\left. \frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)}}{y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h)}. \quad (3.35)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta también las ecuaciones del sistema (2.8), sabemos que la derivada

de las funciones $y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ y $z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ evaluadas en el punto (t_h, λ_h) satisfacen

$$\dot{y}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = z_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h), \quad (3.36)$$

$$\dot{z}_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = 1 - y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) + \lambda_h(\lambda_h^2 + 1)x_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) = 1 - y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h). \quad (3.37)$$

Así pues, reemplazando en (3.33) las expresiones dadas por (3.34)–(3.37) obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_h} &= -\frac{1}{\lambda_h} + \lambda_h y_{\mathbf{m}_-}(t_h, \lambda_h) + \lambda_h(\lambda_h^2 + 1) \left. \frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} + \\ &+ \lambda_h^2 \left. \frac{\partial y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} + \lambda_h \left. \frac{\partial z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por último, calculamos explícitamente la derivada de la función $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ con respecto a λ . Observemos que en la expresión de la función aparecen expresiones de senos y cosenos y, por tanto, su derivada con respecto de λ también dependerá de ambas funciones trigonométricas. En particular, sabemos que si (t_h, λ_h) es una solución del sistema (3.6), entonces los valores del seno y del coseno vienen dados por (3.29) y (3.30), respectivamente. De ese modo, obtenemos la derivada parcial de cada una de las componentes de la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ con respecto a λ evaluada en el punto (t_h, λ_h) ,

$$\left. \frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} = -\frac{[(9\lambda^4 + 12\lambda^2 + 11)t\lambda + 2(9\lambda^2 + 7)](2e^{t\lambda} - 1) - 4(4t\lambda + 1)}{2\lambda^2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)e^{t\lambda}} \Bigg|_{(t_h, \lambda_h)}, \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} = -\frac{2[\lambda(3\lambda^2 + 1)(t - 3\lambda) + 2](2e^{t\lambda} - 1) + 3\lambda^2[(3\lambda^2 + 5)t\lambda + 4]}{2\lambda^3(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)e^{t\lambda}} \Bigg|_{(t_h, \lambda_h)} \quad (3.40)$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_h, \lambda_h)} &= \frac{[3(4\lambda^2 + 1)t\lambda + 2(-3\lambda^2 + 1)](2e^{t\lambda} - 1) - 2(t\lambda + 2)}{2\lambda^2(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)e^{t\lambda}} \Bigg|_{(t_h, \lambda_h)} + \\ &+ \frac{9\lambda[t + \lambda(1 + 2t\lambda e^{t\lambda})] + 3}{2(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)e^{t\lambda}} \Bigg|_{(t_h, \lambda_h)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sin más que reemplazar en (3.38) las derivadas parciales dadas por las expresiones (3.39)–(3.41)

obtenemos que la derivada de la función $\Delta(\lambda)$ en λ_h es

$$\left. \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_h} = - \left. \frac{2\omega_1(t, \lambda)}{\lambda(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)e^{t\lambda}} \right|_{(t_h, \lambda_h)},$$

con

$$\omega_1(t, \lambda) = 3(2e^{t\lambda} - 1)t\lambda^3 + 6(4e^{t\lambda} - 1)\lambda^2 + (2e^{t\lambda} - 3)t\lambda + 6(2e^{t\lambda} - 1).$$

Como $(t_h, \lambda_h) \in \Omega_h$, sabemos que $\frac{1}{2} \leq \lambda_h \leq \sqrt{3}$ y $\frac{2\pi}{\sqrt{13}} \leq t_h \leq \frac{8\pi}{\sqrt{19}}$ de tal forma que se satisfacen las desigualdades $\frac{\pi}{\sqrt{13}} \leq t_h \lambda_h \leq \frac{8\pi\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ y $e^{t_h \lambda_h} > 3/2$. Esto implica que la función $\omega_1(t_h, \lambda_h)$ es estrictamente positiva, lo que prueba el lema. \square

Ahora, estamos en condiciones de enunciar, salvo por la prueba de la condición H3', el siguiente teorema:

Teorema 3.8 Existe un valor $\lambda_h \in (1/2, \sqrt{3})$ único localmente, de forma que el sistema continuo lineal a trozos (2.8) para $\lambda = \lambda_h$ posee una conexión homoclina directa. Más aún, la reversibilidad del sistema asegura la existencia de otra conexión homoclina directa para el mismo valor del parámetro λ .

Mediante cálculos numéricos estimamos que el valor $\lambda_h \simeq 0.660759953$. En la Figura 5.1 se representan unas proyecciones del par simétrico de conexiones homoclinas directas en el sistema (2.8), para $\lambda = \lambda_h$.

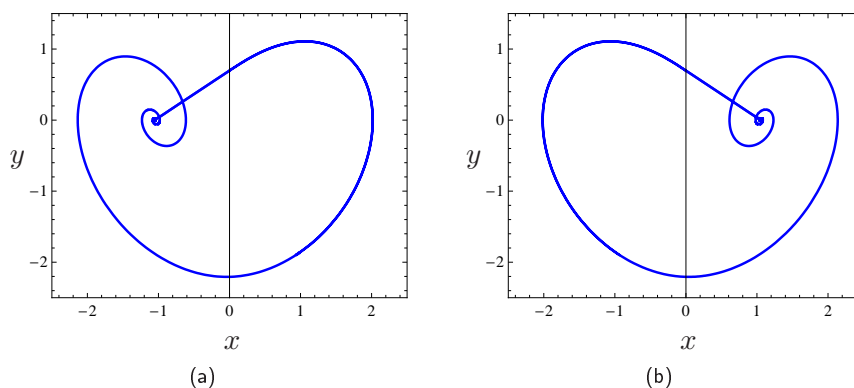


Figura 3.10: Proyección en el plano de coordenadas (x, y) de: (a) la conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_- . (b) la conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_+ .

3.5. Existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

En esta sección probaremos la existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo, $\Gamma = \{\mathbf{p}_-\} \cup \rho_{\mp} \cup \{\mathbf{p}_+\} \cup \rho_{\pm}$, en el sistema (2.8). Para ello, demostraremos que existe una conexión heteroclina unidimensional directa y una conexión heteroclina bidimensional directa al mismo instante. Por último, al considerar la unicidad local, probaremos que la distancia entre las variedades invariantes unidimensionales $W^u(\mathbf{p}_-)$ y $W^s(\mathbf{p}_+)$ medida en un plano transversal es difeomorfa a $\mu = \lambda - \lambda_0$.

Recordemos que existe una conexión heteroclina unidimensional directa en el sistema (2.8) si, y sólo si, se satisfacen las condiciones T1 y T2. Es decir, si y sólo si, existen t_0 y λ_0 estrictamente mayores que cero tales que (t_0, λ_0) es una solución del sistema (3.11) y la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_0)$.

El sistema (3.11) se puede escribir en la forma (3.13) con

$$\begin{pmatrix} A_1(t, \lambda) & B_1(t, \lambda) & C_1(t, \lambda) \\ A_2(t, \lambda) & B_2(t, \lambda) & C_2(t, \lambda) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 e^{\frac{3t\lambda}{2}} \sqrt{3\lambda^2 + 4} & -6\lambda^3 e^{\frac{3t\lambda}{2}} & -(\lambda^2 - (3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \\ 2(2\lambda^2 + 1)e^{\frac{3t\lambda}{2}} \sqrt{3\lambda^2 + 4} & -2\lambda e^{\frac{3t\lambda}{2}} & (\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \end{pmatrix},$$

y está en las hipótesis del Lema 3.1, ya que se satisface

$$\begin{aligned} \circ A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda) &= 8\lambda^3(3\lambda^2 + 1)e^{3t\lambda}\sqrt{3\lambda^2 + 4} \neq 0 \text{ y} \\ \circ \frac{A_1(t, \lambda)C_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)C_1(t, \lambda)}{A_1(t, \lambda)B_2(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)B_1(t, \lambda)} &= -\frac{((\lambda^2 + 1)(e^{t\lambda} - 1) + \lambda^2 e^{t\lambda})\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{4\lambda^3 e^{\frac{3t\lambda}{2}}} < 0, \end{aligned}$$

para todo valor de t y λ estrictamente positivos. Por tanto, aplicando el Lema 3.1, sabemos que el sistema (3.11) es equivalente a

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = 0, \\ p(t, \lambda) = 0, \\ \text{sen}(\beta t) < 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

donde

$$E(t, \lambda) = -2(3\lambda^2 + 1)e^{\frac{3t\lambda}{2}} \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left[((\lambda^2 + 1)(e^{t\lambda} - 1) + \lambda^2 e^{t\lambda}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) + \lambda(\lambda^2 - e^{t\lambda} + 1) \operatorname{sen}(\beta t) \right], \quad (3.43)$$

y

$$p(t, \lambda) = \frac{e^{-3t\lambda}}{4\lambda^6} \left[-4\lambda^6 e^{3t\lambda} + (\lambda^2 + 1)^2 \left((3\lambda^2 + 1)e^{2t\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} - 3(\lambda^2 + 1) \right) e^{t\lambda} + \lambda^2 + 1 \right) \right]. \quad (3.44)$$

En la Figura 3.11 se representan gráficamente las zonas donde $\operatorname{sen}(\beta t) < 0$ y las curvas solución de las dos ecuaciones del sistema (3.42). Los valores de t y λ para los cuales dichas curvas se intersecan son soluciones del sistema (3.42) y, por tanto, del sistema (3.11), si verifican la relación $\operatorname{sen}(\beta t) < 0$.

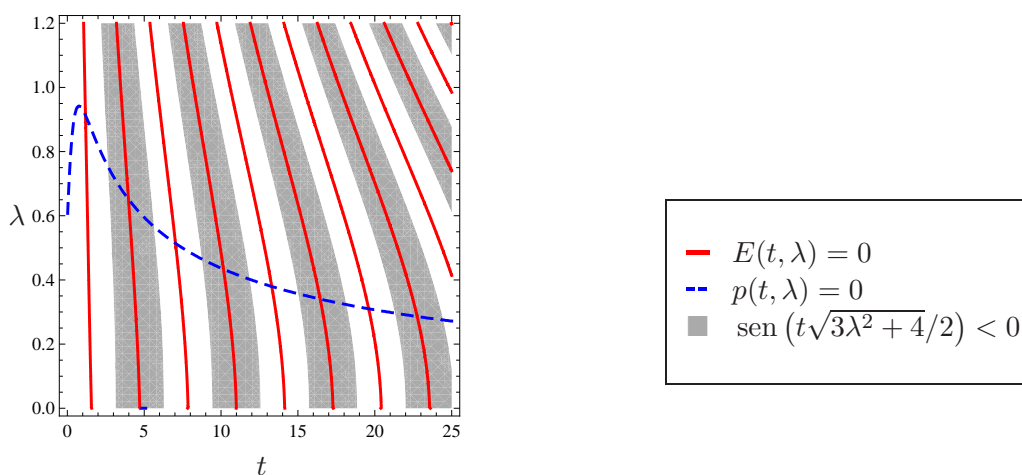


Figura 3.11: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas, respectivamente, por las expresiones (3.43) y (3.44). Se han sombreado las zonas donde el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3\lambda^2+4}t}{2}\right)$ es estrictamente menor que cero.

A partir de esta representación gráfica evidenciamos que el sistema (3.11) posee más de una solución. Sin embargo, pretendemos probar esto de forma analítica usando el Lema 3.3 donde, en este caso,

$$A_3(t, \lambda) = -2(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)((\lambda^2 + 1)(e^{t\lambda} - 1) + \lambda^2 e^{t\lambda}) e^{\frac{3t\lambda}{2}} \quad (3.45)$$

y la función $p(t, \lambda)$ está dada por la expresión (3.44).

Lema 3.9 El sistema de ecuaciones (3.11) tiene al menos una solución (t_0, λ_0) en el interior de la región

$$\Omega_1 = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \leq t \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Demostración:

Es inmediato ver que la función $A_3(t, \lambda)$ dada por la expresión (3.45) verifica

$$A_3\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) \cdot A_3\left(\frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) > 0, \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

A continuación vamos a analizar el signo de la función $p(t, \lambda)$ dada por (3.44). Para ello, basta estudiar la función

$$p_h(t, \lambda) = -\frac{4\lambda^6}{\lambda^2 + 1}e^{3t\lambda} + (\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)e^{2t\lambda} + (1 - 3(\lambda^2 + 1)^2)e^{t\lambda} + (\lambda^2 + 1)^2.$$

Realizando el cambio de variables $\mu = \lambda^2$, $s = \exp(\sqrt{\mu}t) \geq 1$ sobre $p_h(t, \lambda)$, para todo t y λ estrictamente positivos, obtenemos la función polinómica

$$\tilde{p}_h(s, \mu) = -\frac{4\mu^3}{\mu + 1}s^3 + (\mu + 1)(3\mu + 1)s^2 + (1 - 3(\mu + 1)^2)s + (\mu + 1)^2, \quad (3.46)$$

definida para $s \geq 1$ y $\mu \geq 0$.

Fijando $\mu = 1$ en (3.46), tenemos el polinomio $\tilde{p}_h(s, 1) = -2s^3 + 8s^2 - 11s + 4$. Como la derivada del polinomio anterior respecto a la variable s no tiene raíces reales y es siempre negativa, deducimos que la función $\tilde{p}_h(s, 1)$ es decreciente y, por tanto, alcanza su máximo absoluto en $s = 1$, siendo su valor $\tilde{p}_h(1, 1) = -1 < 0$. De donde concluimos que $\tilde{p}_h(s, 1)$ es estrictamente menor que cero para todo $s \geq 1$.

Por otro lado, fijando $\mu = 1/4$ en (3.46) se obtiene $\tilde{p}_h(s, 1/4) = -\frac{1}{80}(4s^3 - 175s^2 + 295s - 125)$. Vamos a comprobar que el polinomio $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ es estrictamente positivo en un intervalo conveniente para la variable s . Puesto que el parámetro t pertenece al intervalo $[2\pi/\sqrt{3\mu + 4}, 4\pi/\sqrt{3\mu + 4}]$, para $\mu = 1/4$ la variable s pertenece al intervalo $[e^{\frac{2\pi}{\sqrt{19}}}, e^{\frac{4\pi}{\sqrt{19}}}]$. Este intervalo está contenido en $[1, 27]$, como hemos visto en la prueba del Lema 3.5.

Ahora vamos a comprobar que el polinomio $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ es estrictamente positivo para todo valor s perteneciente al intervalo $[1, 27]$.

La derivada de $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ respecto a la variable s ,

$$q_h(s) = \left. \frac{\partial \tilde{p}_h(s, \mu)}{\partial s} \right|_{\mu=1/4} = -\frac{1}{80} (12s^2 - 350s + 295),$$

tiene una única raíz real mayor que uno, $s_0 = \frac{1}{12} (175 + \sqrt{27085}) > 27$. Por tanto, la función $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ no tiene puntos críticos en $[1, 27]$ y es estrictamente creciente en dicho intervalo, puesto que $q_h(1) = 43/80 > 0$. De ese modo, la función restringida al intervalo $[1, 27]$ alcanza su mínimo absoluto en $s = 1$. Como $\tilde{p}_h(1, 1/4) = 1/80 > 0$, deducimos que $\tilde{p}_h(s, 1/4)$ es estrictamente positiva para todo $1 \leq s \leq 27$ y, en particular, en $[e^{\frac{2\pi}{\sqrt{19}}}, e^{\frac{4\pi}{\sqrt{19}}}]$.

Deshaciendo el cambio de variables realizado, tenemos que la función $p_h(t, 1)$ es estrictamente negativa para todo $t > 0$ y que $p_h(t, 1/2)$ toma valores estrictamente positivos para todo t perteneciente al intervalo $I_1 = [4\pi/\sqrt{19}, 8\pi/\sqrt{19}]$, por lo que $p_h(t, 1/2) \cdot p_h(t, 1) < 0$ en I_1 .

Hemos probado que se verifican las hipótesis del Lema 3.3. Así pues, el sistema (3.42) y, equivalentemente, el sistema (3.11) tienen solución en el interior de la región Ω_1 . \square

En la Figura 3.12 se representan las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$ del sistema (3.42), así como la región Ω_1 . En el interior de la región Ω_1 ambas curvas se cortan

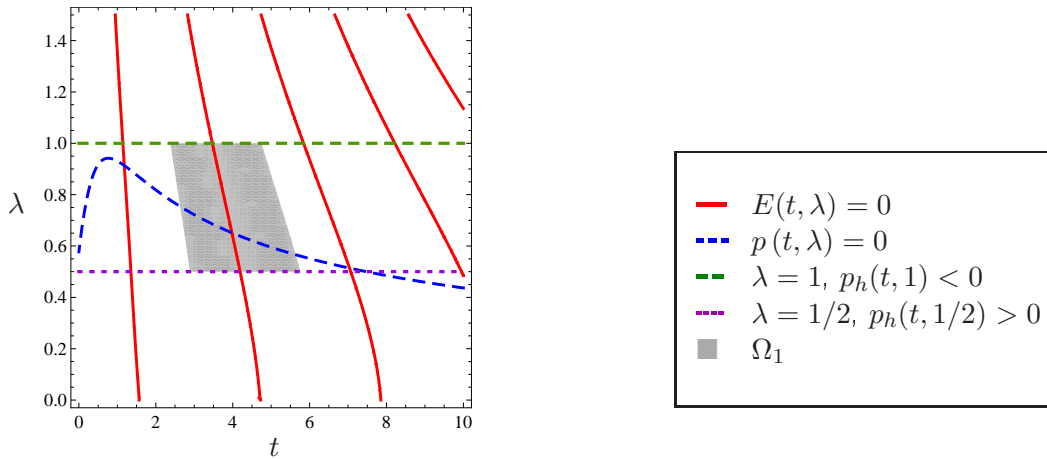


Figura 3.12: Representación gráfica de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas, respectivamente, por las expresiones (3.43) y (3.44). La zona sombreada corresponde a la región $\Omega_1 = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \leq t \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \right\}$.

en un punto (t_0, λ_0) , con t_0 y λ_0 estrictamente positivos, que se corresponde con una solución del sistema (3.11).

Acabamos de probar que el sistema (3.11) tiene al menos una solución (t_0, λ_0) , con t_0 y λ_0 estrictamente positivos, por lo que se satisface la condición T1. Para probar que existe un ciclo heteroclino tipo punto-T directo es necesario verificar además las condiciones T2 y T3. Para la condición T2 damos el siguiente resultado que se basa en el Lema 3.4.

Lema 3.10 Sea (t_0, λ_0) una solución del sistema (3.11) que pertenece a la región Ω_1 , definida en el lema anterior. Entonces, la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_0)$.

Demostración:

Probaremos la tesis del lema comprobando que la función $f(t) = x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$ está en las hipótesis del Lema 3.4.

Teniendo en cuenta las ecuaciones del sistema (2.8), sabemos que $\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0) = y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$, donde

$$y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0) = c_1 e^{-t\lambda_0} + (c_2 \cos(\beta_0 t) + c_3 \sen(\beta_0 t)) e^{\frac{t\lambda_0}{2}}, \quad (3.47)$$

con

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{3\lambda_0^2 + 4}}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{3\lambda_0^2 + 1} > 0, \quad c_2 = \frac{2\lambda_0^2 c_1}{\lambda_0^2 + 1} > 0 \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{(3\lambda_0^2 + 2) c_2}{\lambda_0 \sqrt{3\lambda_0^2 + 4}} > 0.$$

La función $f(t) = x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$ se anula en $t = 0$, ya que $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(0, \lambda_0)$ pertenece al plano de separación, y en el instante de tiempo t_0 , por ser (t_0, λ_0) una solución del sistema (3.11). Por otro lado, $\dot{f}(0) = y_{\mathbf{m}_-}(0, \lambda_0) = c_1 + c_2$ es estrictamente mayor que cero, pues c_1 y c_2 son estrictamente positivas. Además, al ser (t_0, λ_0) una solución del sistema (3.11) entonces

$$\cos(\beta_0 t_0) = \left. \frac{\lambda^2 - e^{t\lambda} + 1}{4\lambda^2 e^{\frac{3t\lambda}{2}}} \right|_{(t_0, \lambda_0)} \quad (3.48)$$

y

$$\sen(\beta_0 t_0) = - \left. \frac{((\lambda^2 + 1)(e^{t\lambda} - 1) + \lambda^2 e^{t\lambda}) \sqrt{3\lambda^2 + 4}}{4\lambda^3 e^{\frac{3t\lambda}{2}}} \right|_{(t_0, \lambda_0)}. \quad (3.49)$$

Sin más que sustituir en (3.47) las expresiones dadas por (3.48) y (3.49) tenemos

$$y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) = \frac{e^{-t_0\lambda_0} - 1}{\lambda_0^2}, \quad (3.50)$$

que es estrictamente menor que cero y, por tanto, la derivada $\dot{f}(t_0)$ es estrictamente negativa.

En consecuencia, aplicando el Lema 3.4, deducimos que la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$ es estrictamente positiva en el intervalo $(0, t_0)$.

□

En la Figura 3.13 se representan las curvas solución de las dos ecuaciones del sistema (3.42) y las zonas donde $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ es estrictamente menor que cero. Como se aprecia en la figura, ambas curvas se intersecan para diferentes valores de t y λ estrictamente positivos. El segundo punto de corte empezando por la izquierda se corresponde con la solución $(t_0, \lambda_0) \in \Omega_1$ del sistema (3.11).

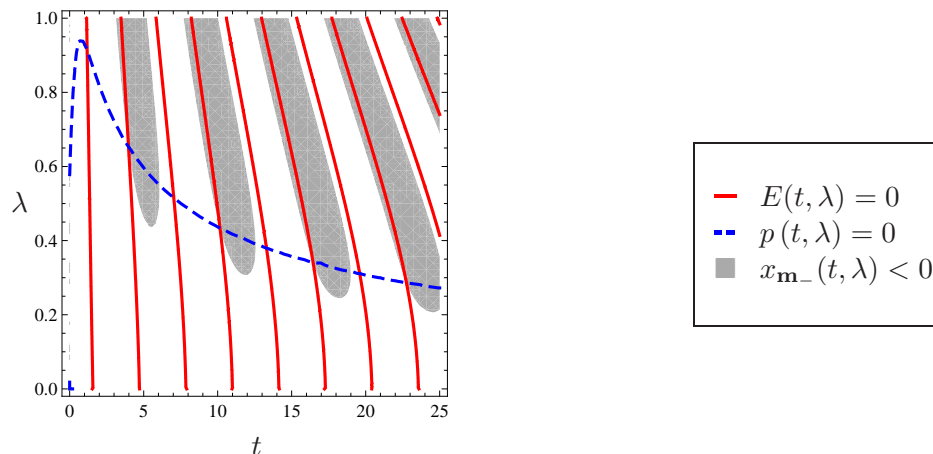


Figura 3.13: Representación gráfica de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas, respectivamente, por las expresiones (3.43) y (3.44). Se han sombreado las regiones donde la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ es estrictamente menor que cero.

En esta figura evidenciamos también que fijando $\lambda = \lambda_0$, la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ es estrictamente positiva para todo t perteneciente al intervalo $(0, t_0)$, como sabíamos por el Lema 3.10, por lo que se satisface la condición T2. Aún más, a partir de los Lemas 3.9 y 3.10 concluimos que el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) = \Pi_+(\mathbf{m}_-)$ pertenece al eje de reversibilidad y, por tanto, existe una conexión heteroclina unidimensional directa para cada solución $(t_0, \lambda_0) \in \Omega_1$ del sistema (3.11).

Para finalizar la prueba de la existencia del ciclo heteroclino tipo punto-T directo, tenemos que demostrar que junto a la conexión heteroclina unidimensional directa existe una conexión heteroclina bidimensional directa, esto es, hemos de demostrar la condición T3.

Recordemos que dicha condición T3 coincide con la condición H3' para la existencia de una conexión homoclina directa. Por tanto, el único detalle que nos falta para concluir, por un lado, la demostración de la existencia de tal ciclo heteroclino y, por el otro, la demostración del Teorema 3.8 es la prueba de la condición T3. Para ello, probaremos que el punto $\mathbf{q} = (0, -1/\lambda^2, 0)$ pertenece al segmento \mathcal{S}_- , delimitado por los puntos $\mathbf{q}_- = (0, 0, -1/\lambda)$ y $\Pi_-^{-1}(\mathbf{q}_-)$, para todo valor de λ perteneciente al intervalo $(\lambda_*, +\infty)$, siendo $\lambda_* < 1/2$. Nótese que el intervalo $(\lambda_*, +\infty)$ contiene a los valores de λ que hemos probado que satisfacen las condiciones H1-H2 y T1-T2.

Ahora bien, como la tercera coordenada de \mathbf{q}_- es negativa y la tercera coordenada de \mathbf{q} es nula, el punto \mathbf{q} pertenece al segmento \mathcal{S}_- si, y sólo si, la tercera coordenada de $\Pi_-^{-1}(\mathbf{q}_-)$ es estrictamente positiva y existen t_1 y λ_1 estrictamente positivos tales que $\mathbf{x}_{\mathbf{q}_-}(-t_1, \lambda_1) = \Pi_-^{-1}(\mathbf{q}_-)$. Es decir, si y sólo si, existen t_1 y λ_1 estrictamente positivos tales que (t_1, λ_1) es una solución del sistema

$$\begin{cases} x_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda) = 0, \\ z_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda) \geq 0, \end{cases} \quad (3.51)$$

con

$$x_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda_1) < 0 \text{ para todo } t \in (0, t_1). \quad (3.52)$$

La desigualdad anterior asegura que el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{q}_-}(-t_1, \lambda_1)$ es la preimagen mediante la inversa de la semiaplicación de Poincaré izquierda de \mathbf{q}_- .

Para obtener las ecuaciones explícitas determinadas por las condiciones dadas en el sistema (3.51) y en la relación (3.52), calculamos la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{q}_-}(t, \lambda)$ del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A^- \mathbf{x} + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{q}_-, \end{cases}$$

sin más que sustituir en las expresiones (2.19)-(2.21) los valores y_0 y z_0 por la segunda y tercera coordenadas de \mathbf{q}_- . De este modo, obtenemos que las componentes de la solución vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$x_{\mathbf{q}_-}(t, \lambda) = -\frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \left[1 - e^{-\frac{t\lambda}{2}} \left(\cos(\beta t) + \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \operatorname{sen}(\beta t) \right) \right],$$

$$y_{\mathbf{q}_-}(t, \lambda) = -\frac{2e^{-\frac{t\lambda}{2}}}{\lambda\sqrt{3\lambda^2+4}} \operatorname{sen}(\beta t),$$

$$z_{\mathbf{q}_-}(t, \lambda) = -\frac{e^{-\frac{t\lambda}{2}}}{\lambda} \left(\cos(\beta t) - \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \operatorname{sen}(\beta t) \right),$$

con $\beta = \sqrt{3\lambda^2+4}/2$.

Así, tras adecuadas manipulaciones, el sistema (3.51) y la relación (3.52) se pueden escribir en la forma

$$\begin{cases} 1 - e^{\frac{t\lambda}{2}} \left(\cos(\beta t) - \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \operatorname{sen}(\beta t) \right) = 0, \\ -e^{\frac{t\lambda}{2}} \left(\cos(\beta t) + \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \operatorname{sen}(\beta t) \right) \geq 0, \end{cases} \quad (3.53)$$

con

$$1 - e^{\frac{t\lambda_1}{2}} \left(\cos(\beta_1 t) - \frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+4}} \operatorname{sen}(\beta_1 t) \right) > 0 \quad \text{para todo } t \in (0, t_1), \quad (3.54)$$

siendo $\beta_1 = \sqrt{3\lambda_1^2+4}/2$. En la Figura 3.14 se representan las curvas solución de la ecuación $x_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda) = 0$ y las zonas donde la función $z_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda)$ es estrictamente negativa. Un cero de la función $x_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda)$ será solución del sistema (3.53) si además satisface la desigualdad $z_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda) > 0$.

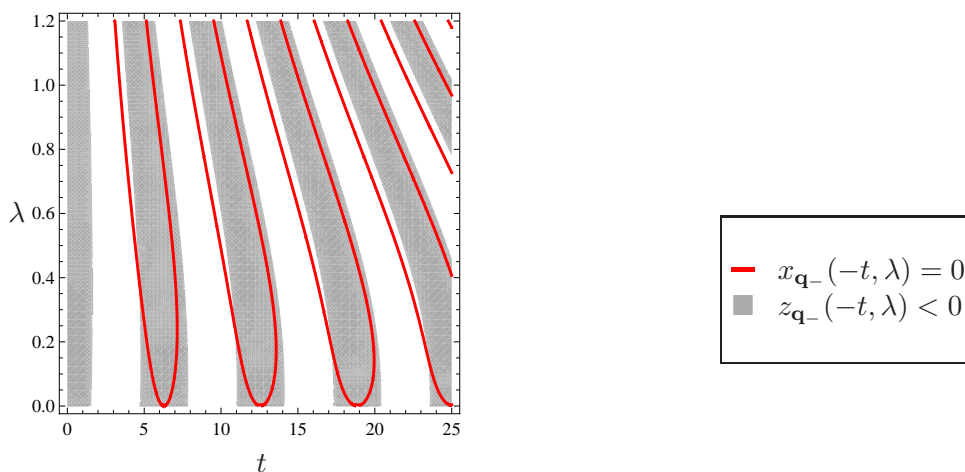


Figura 3.14: Representación de los ceros de la función $x_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda)$. Se han sombreado las regiones donde $z_{\mathbf{q}_-}(-t, \lambda)$ es estrictamente menor que cero.

A partir de esta representación gráfica se tiene una evidencia numérica de la existencia de soluciones

del sistema (3.53). Sin embargo, pretendemos probar esto de forma analítica. Para ello, usamos la función auxiliar de Andronov definida por

$$\varphi(\tau, \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \operatorname{sen} \tau), \quad (3.55)$$

véase [2, pp. 450–457].

Usando la función $\varphi(\tau, \gamma)$, el sistema (3.53) posee una solución (t_1, λ_1) , con t_1 y λ_1 estrictamente positivos, que satisface la desigualdad (3.54) si, y sólo si, es solución del sistema

$$\begin{cases} \varphi\left(\beta t, \frac{\lambda}{2\beta}\right) = 0, \\ \varphi\left(\beta t, -\frac{\lambda}{2\beta}\right) \geq 1, \end{cases} \quad (3.56)$$

con

$$\varphi\left(\beta_1 t, \frac{\lambda_1}{2\beta_1}\right) > 0, \quad \text{para todo } t \in (0, t_1). \quad (3.57)$$

En el siguiente lema, cuya prueba es directa, se desarrollan algunas propiedades elementales de la función $\varphi(\tau, \gamma)$ que nos serán de utilidad para probar la existencia de solución del sistema (3.56).

Lema 3.11 La función $\varphi(\tau, \gamma)$ satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\varphi(-\tau, -\gamma) = \varphi(\tau, \gamma)$.
- (b) $\partial\varphi/\partial\tau = (\gamma^2 + 1)e^{\gamma\tau} \operatorname{sen} \tau$ y $\partial^2\varphi/\partial^2\tau = (\gamma^2 + 1)e^{\gamma\tau}(\cos \tau + \gamma \operatorname{sen} \tau)$.
- (c) $\partial\varphi/\partial\gamma = e^{\gamma\tau}(-\tau \cos \tau + (\gamma\tau + 1) \operatorname{sen} \tau)$.
- (d) Para cada valor fijo $\gamma > 0$, la función φ alcanza sus máximos relativos en $\tau_{2k+1} = (2k + 1)\pi$ y sus mínimos relativos en $\tau_{2k} = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Además, $\varphi(\tau_{2k+1}, \gamma) = 1 + e^{\gamma\tau_{2k+1}}$ y $\varphi(\tau_{2k}, \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau_{2k}}$.
- (e) Existe una única función $\hat{\tau}_1 : (0, +\infty) \rightarrow (\pi, 2\pi)$ tal que $\varphi(\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) = 0$, $\varphi(\tau, \gamma) > 0$ para todo $\tau \in (0, \hat{\tau}_1(\gamma))$ y $\varphi(\tau, \gamma) < 0$ para todo $\tau \in (\hat{\tau}_1(\gamma), 2\pi)$.
- (f) Existe una única función $\hat{\tau}_2 : (0, +\infty) \rightarrow (-2\pi, -\pi)$ tal que $\varphi(\hat{\tau}_2(\gamma), \gamma) = 1$ y $\varphi(\tau, \gamma) > 1$ para todo $\tau \in (\hat{\tau}_2(\gamma), -\pi)$.

En el siguiente resultado describimos algunas propiedades elementales de las funciones $\hat{\tau}_1$ y $\hat{\tau}_2$, introducidas en el lema anterior.

Lema 3.12 Las funciones $\hat{\tau}_1$ y $\hat{\tau}_2$ satisfacen las siguientes propiedades:

- (a) La función $\hat{\tau}_1$ es derivable, estrictamente decreciente, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \hat{\tau}_1(\gamma) = 2\pi$ y $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \hat{\tau}_1(\gamma) = \pi$.
- (b) La función $\hat{\tau}_2$ es derivable, estrictamente decreciente, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \hat{\tau}_2(\gamma) = -3\pi/2$ y $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \hat{\tau}_2(\gamma) = -2\pi$.
- (c) Existe un único valor $\gamma_* > 0$ tal que $\hat{\tau}_1(\gamma_*) = -\hat{\tau}_2(\gamma_*)$. Más aún, se satisface que $\gamma_* \in (0, 1/\sqrt{19})$, $-\hat{\tau}_2(\gamma) < \hat{\tau}_1(\gamma)$ para todo $\gamma \in (0, \gamma_*)$ y $-\hat{\tau}_2(\gamma) > \hat{\tau}_1(\gamma)$ para todo $\gamma \in (\gamma_*, +\infty)$.
- (d) Si $\gamma \in (0, \gamma_*)$, entonces $\varphi(-\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) < 1$ y $\varphi(-\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) > 1$ si $\gamma > \gamma_*$.

Demostración:

- (a) La función $\varphi(\tau, \gamma)$ es nula cuando $\tau = \hat{\tau}_1(\gamma)$ y su derivada parcial respecto a τ en $\tau = \hat{\tau}_1(\gamma)$ no se anula, ya que $\hat{\tau}_1(\gamma)$ pertenece al intervalo $(\pi, 2\pi)$. Entonces, usando el teorema de la función implícita, deducimos que $\hat{\tau}_1(\gamma)$ es una función derivable y su derivada es

$$\hat{\tau}'_1(\gamma) = \frac{\hat{\tau}_1(\gamma)e^{-\gamma\hat{\tau}_1(\gamma)} - \text{sen}(\hat{\tau}_1(\gamma))}{(1 + \gamma^2)\text{sen}(\hat{\tau}_1(\gamma))} < 0.$$

Tomando límite cuando γ tiende a cero en la ecuación implícita $\varphi(\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) = 0$,

$$0 = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \varphi(\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[1 - e^{\gamma\hat{\tau}_1(\gamma)} (\cos(\hat{\tau}_1(\gamma)) - \gamma \text{sen}(\hat{\tau}_1(\gamma))) \right] = 1 - \lim_{\gamma \rightarrow 0} \cos(\hat{\tau}_1(\gamma)),$$

se tiene que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \cos(\hat{\tau}_1(\gamma)) = 1$. Análogamente, es fácil probar que $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \text{sen}(\hat{\tau}_1(\gamma)) = 0$. De ese modo, como $\hat{\tau}_1(\gamma)$ es estrictamente decreciente y su recorrido es el intervalo $(\pi, 2\pi)$, concluimos que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \hat{\tau}_1(\gamma) = 2\pi$ y $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \hat{\tau}_1(\gamma) = \pi$.

- (b) Se deduce de manera análoga al apartado anterior.
- (c) Sea $\gamma_0 = 1/\sqrt{19}$. Sabemos, por el apartado anterior, que $\hat{\tau}_2(\gamma_0) \in (-2\pi, -3\pi/2)$. Por un lado, a partir de la definición de la función $\varphi(\tau, \gamma)$ y usando la ecuación $\varphi(\hat{\tau}_2(\gamma), \gamma) = 1$, obtenemos la igualdad $\cos(\hat{\tau}_2(\gamma)) = \gamma \text{sen}(\hat{\tau}_2(\gamma))$, para todo $\gamma > 0$. En particular, para

$\gamma = \gamma_0$ tenemos $\cos(\hat{\tau}_2(\gamma_0)) = 1/(2\sqrt{5})$ y $\sin(\hat{\tau}_2(\gamma_0)) = 1/(2\sqrt{5}\gamma_0)$. De ese modo, el valor de la función $\varphi(\tau, \gamma)$ en el punto $(-\hat{\tau}_2(\gamma_0), \gamma_0)$ es

$$\varphi(-\hat{\tau}_2(\gamma_0), \gamma_0) = 1 - e^{-\gamma_0 \hat{\tau}_2(\gamma_0)} [\cos(\hat{\tau}_2(\gamma_0)) + \gamma_0 \sin(\hat{\tau}_2(\gamma_0))] = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-\gamma_0 \hat{\tau}_2(\gamma_0)}.$$

Como $-\hat{\tau}_2(\gamma_0) \in (3\pi/2, 2\pi)$, es inmediato ver que se satisface $e^{-\gamma_0 \hat{\tau}_2(\gamma_0)} > e^{\frac{3\pi}{2}\gamma_0} > e > \sqrt{5}$ y, por tanto, el valor de $\varphi(-\hat{\tau}_2(\gamma_0), \gamma_0)$ es estrictamente menor que cero. Por otro lado, por los apartados (d) y (e) del lema anterior, sabemos que la función $\varphi(\tau, \gamma_0)$ es estrictamente decreciente para todo $\tau \in (\pi, 2\pi)$ y que se verifica la ecuación $\varphi(\hat{\tau}_1(\gamma_0), \gamma_0) = 0$. Se concluye, entonces, que $\hat{\tau}_1(\gamma_0) < -\hat{\tau}_2(\gamma_0)$.

Consideremos ahora la función $\hat{\tau}(\gamma) = \hat{\tau}_1(\gamma) + \hat{\tau}_2(\gamma)$ definida para todo $\gamma > 0$. Por los apartados (a) y (b) de este lema, se sigue que $\hat{\tau}(\gamma)$ es continua, estrictamente decreciente y que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \hat{\tau}(\gamma) = \pi/2 > 0$. Además, es obvio que $\hat{\tau}(\gamma_0) < 0$ ya que $\hat{\tau}_1(\gamma_0) < -\hat{\tau}_2(\gamma_0)$. En consecuencia, existe un único valor γ_* que satisface la ecuación $\hat{\tau}(\gamma_*) = 0$ y además pertenece al intervalo $(0, \gamma_0)$. Más aún, deducimos que $\hat{\tau}(\gamma) > 0$ para todo $\gamma \in (0, \gamma_*)$ y $\hat{\tau}(\gamma) < 0$ para todo $\gamma \in (\gamma_*, +\infty)$, lo que concluye la demostración.

(d) Comencemos probando que si $\gamma \in (0, \gamma_*)$, entonces $\varphi(-\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) < 1$.

Por el apartado anterior, sabemos que $-\hat{\tau}_1(\gamma) < \hat{\tau}_2(\gamma)$ para todo $\gamma \in (0, \gamma_*)$. Aún más, por los apartados (a) y (b) del lema anterior, $-2\pi < -\hat{\tau}_1(\gamma) < \hat{\tau}_2(\gamma) < -3\pi/2 < -\pi$, para todo $\gamma \in (0, \gamma_*)$, y al ser $\varphi(\tau, \gamma)$ estrictamente creciente para todo $\tau \in (-2\pi, -\pi)$ se deduce trivialmente que

$$\varphi(-\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) < \varphi(\hat{\tau}_2(\gamma), \gamma) = 1, \text{ para todo } \gamma \in (0, \gamma_*).$$

Análogamente, se prueba que si $\gamma > \gamma_*$, entonces $\varphi(-\hat{\tau}_1(\gamma), \gamma) > 1$. Observemos que, en este caso, se verifica la desigualdad $-2\pi < \hat{\tau}_2(\gamma) < -\hat{\tau}_1(\gamma) < -\pi$ para todo $\gamma > \gamma_*$ y que $\varphi(\tau, \gamma)$ es estrictamente creciente, para todo $\tau \in (-2\pi, -\pi)$.

□

En la Figura 3.15 se muestra un esbozo del comportamiento de las funciones $\hat{\tau}_1(\gamma)$ y $\hat{\tau}_2(\gamma)$, introducidas en el lema anterior. Hagamos notar que el valor $\gamma_0 = 1/\sqrt{19}$ que hemos tomado en el

apartado (c) de este lema tiene únicamente significado computacional. De hecho, lo hemos escogido para obtener el valor límite $\lambda = 1/2$ del resultado establecido en el Lema 3.9.

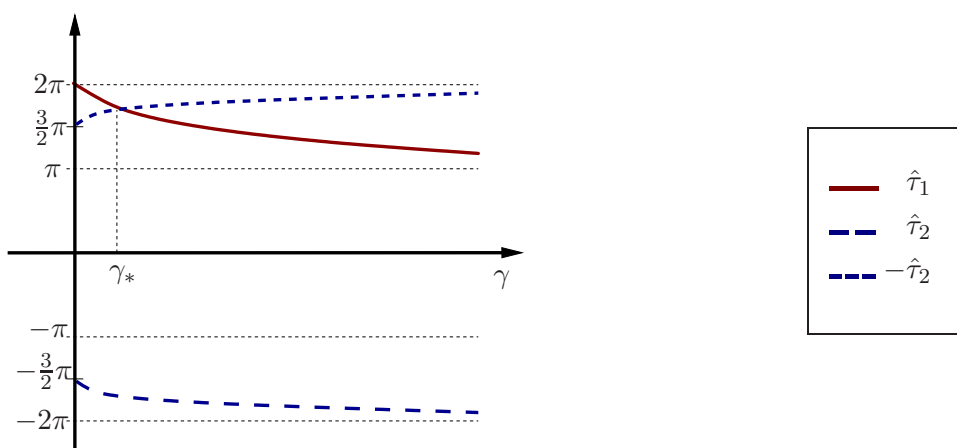


Figura 3.15: Esbozo de las funciones $\hat{\tau}_1$ y $\hat{\tau}_2$.

En el siguiente lema probamos, utilizando los lemas previos, la existencia de una conexión heteroclina bidimensional directa para todo valor del parámetro λ mayor que un cierto valor λ_* . Es decir, probamos que se satisface la condición T3.

Lema 3.13 Existe un único valor $\lambda_* \in (0, 1/2)$ tal que:

- (a) Si $\lambda \geq \lambda_*$, entonces existe una conexión heteroclina bidimensional directa en el sistema (2.8).
- (b) Si $\lambda < \lambda_*$, entonces el sistema (2.8) no tiene una conexión heteroclina bidimensional directa.

Demostración:

Recordemos que existe una conexión heteroclina bidimensional directa en el sistema (2.8) si, y sólo si, existen t_1 y λ_1 estrictamente positivos tales (t_1, λ_1) es una solución del sistema (3.56) que satisface la desigualdad (3.57). Haciendo el cambio de variables $\tau = \beta t$, $\gamma = \lambda/(2\beta)$, expresamos el sistema (3.56) y la condición (3.57) en estas nuevas variables como

$$\begin{cases} \varphi(\tau, \gamma) = 0, \\ \varphi(\tau, -\gamma) \geq 1, \\ \varphi(\bar{\tau}, \gamma) > 0, \end{cases} \quad \text{para todo } \bar{\tau} \in (0, \tau). \quad (3.58)$$

La prueba del lema se reduce a analizar la existencia de una solución del sistema (3.58). Para ello, consideramos $\lambda_* = 2\gamma_*/\sqrt{1-3\gamma_*^2}$, siendo γ_* el valor definido en el apartado (c) del lema anterior. Es obvio que λ_* es una constante real, positiva y estrictamente menor que $1/2$, ya que $0 < \gamma_* < 1/\sqrt{19}$.

A continuación, vamos a demostrar que éste es el valor λ_* para el cual se satisfacen los dos apartados del lema.

- (a) Sea λ_1 un número real tal que $\lambda_1 \geq \lambda_*$. Tenemos que probar que existe un valor $t_1 > 0$ tal que (t_1, λ_1) es una solución del sistema (3.56) que verifica la condición (3.57). Esto equivale a probar que existe un valor $\tau_1 > 0$ tal que (τ_1, γ_1) es una solución del sistema (3.58), siendo $\gamma_1 = \lambda_1/\sqrt{3\lambda_1^2 + 4}$.

Por el apartado (e) del Lema 3.11, sabemos que existe una única función $\hat{\tau}_1$ tal que $\varphi(\hat{\tau}_1(\gamma_1), \gamma_1) = 0$ y $\varphi(\tau, \gamma_1) > 0$ para todo $\tau \in (0, \hat{\tau}_1(\gamma_1))$. Por otro lado, aplicando el Lema 3.11 (a) y el Lema 3.12 (d) y teniendo en cuenta que $\gamma_1 > \gamma_*$, deducimos que $\varphi(\hat{\tau}_1(\gamma_1), -\gamma_1) \geq 1$. De ese modo, $(\hat{\tau}_1(\gamma_1), \gamma_1)$ es una solución del sistema (3.58) y, por tanto, tomando $t_1 = \hat{\tau}_1(\gamma_1)/\beta_1$ concluimos que (t_1, λ_1) es una solución del sistema (3.56) que satisface la relación (3.57).

- (b) Supongamos que $\lambda_1 < \lambda_*$ tal que $\hat{\tau}_1(\gamma_1)$ es el único cero de la función $\varphi(\tau, \gamma_1)$ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$, véase el apartado (e) del Lema 3.11. Como $\gamma_1 < \gamma_*$ deducimos, aplicando el apartado (d) del Lema 3.12 y el apartado (a) del Lema 3.11, que $\varphi(\hat{\tau}_1(\gamma_1), -\gamma_1) < 1$, en contradicción con la condición (3.57). En consecuencia, concluimos que el sistema (3.56) no tiene solución para un valor de $\lambda < \lambda_*$.

□

En el lema anterior hemos probado que existe un único valor $\lambda_* \in (0, 1/2)$ tal que si $\lambda \geq \lambda_*$, entonces el sistema (2.8) posee una conexión heteroclina bidimensional directa, por lo que la órbita definida por $\mathbf{x}_q(t, \lambda)$ satisface $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_q(t, \lambda) = \mathbf{p}_-$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}_q(t, \lambda) = \mathbf{p}_+$. Más aún, estimamos mediante cálculos numéricos que el valor $\lambda_* \simeq 0.41527324$. Tras este último resultado ya podemos asegurar la existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo para $\lambda = \lambda_0$ y un par simétrico de conexiones homoclinas directas para $\lambda = \lambda_h$.

Por último para garantizar la unicidad local del ciclo heteroclino tipo punto-T directo, cuya existencia ha sido probada, es suficiente probar que la diferencia entre la tercera coordenada de los

puntos $\Pi_+(\mathbf{m}_-)$ y $\Pi_-^{-1}(\mathbf{m}_-)$ es difeomorfa a $\mu = \lambda - \lambda_0$. Obsérvese que la distancia entre dos puntos del plano de separación simétricos con respecto al eje y es igual a dos veces el valor absoluto de la tercera coordenada de cualquiera de ellos. Por ello, únicamente tenemos que probar que la tercera coordenada del punto $\Pi_+(\mathbf{m}_-)$ es difeomorfa a $\mu = \lambda - \lambda_0$. Denotaremos a esta tercera coordenada por $\Delta_2(\lambda) = z_{\mathbf{m}_-}(t^+(\lambda), \lambda)$, donde $t^+(\lambda)$ es el semitiempo de vuelo derecho del punto \mathbf{m}_- para cada λ en un entorno de λ_0 .

Nótese que si $\lambda = \lambda_0$, entonces $t^+(\lambda_0)$ coincide con t_0 , definido en el Lema 3.9, y, por tanto, se satisface la igualdad $\Delta_2(\lambda_0) = 0$. La función $\Delta_2(\lambda)$ es analítica en un entorno de λ_0 , ya que la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_0)$ interseca transversalmente al plano de separación cuando $t = t_0$. En consecuencia, para que $\Delta_2(\lambda)$ sea difeomorfa a $\mu = \lambda - \lambda_0$ es suficiente probar que $\Delta_2'(\lambda_0) \neq 0$.

Lema 3.14 Sea (t_0, λ_0) una solución del sistema (3.11) que pertenece a la región Ω_1 , definida en el Lema 3.9. Entonces, la función $\Delta_2(\lambda) = z_{\mathbf{m}_-}(t^+(\lambda), \lambda)$ satisface $\Delta_2'(\lambda_0) < 0$.

Demostración:

La derivada $\Delta_2'(\lambda_0)$ está dada por

$$\left. \frac{d\Delta_2(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = \dot{z}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) \left. \frac{dt^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} + \left. \frac{\partial z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_0, \lambda_0)}, \quad (3.59)$$

donde las componentes de la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = (x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda), y_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda), z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda))$ vienen dadas por las expresiones (3.3)–(3.5). Recordemos que si $(t, \lambda) = (t_0, \lambda_0)$, entonces el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)$ pertenece al eje y , por lo que $x_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)$ y $z_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)$ son nulas mientras que $y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)$ está dada por la expresión (3.50).

Observemos que la función $t^+(\lambda)$ es analítica en un entorno de λ_0 y está definida de forma implícita por la ecuación $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) = 0$, por lo tanto, derivando implícitamente la ecuación anterior respecto a λ y evaluando dicha derivada en el punto (t_0, λ_0) obtenemos

$$\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) \left. \frac{dt^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} + \left. \frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_0, \lambda_0)} = 0.$$

Como $\dot{x}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) = y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)$, deducimos que la derivada de la función $t^+(\lambda)$ en el punto (t_0, λ_0)

es

$$\left. \frac{dt^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = - \left. \frac{\frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda}}{y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)} \right|_{(t_0, \lambda_0)}. \quad (3.60)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las ecuaciones del sistema (2.8) y que $x_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) = 0$, tenemos que la derivada de la función $z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ evaluada en el punto (t_0, λ_0) es

$$\dot{z}_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) = 1 - y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) - \lambda_0(\lambda_0^2 + 1)x_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) = 1 - y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0). \quad (3.61)$$

Así pues, reemplazando en (3.59) las expresiones dadas por (3.60) y (3.61) obtenemos

$$\left. \frac{d\Delta_2(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = \frac{y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0) - 1}{y_{\mathbf{m}_-}(t_0, \lambda_0)} \left. \frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_0, \lambda_0)} + \left. \frac{\partial z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_0, \lambda_0)}. \quad (3.62)$$

Por último, calculamos explícitamente la derivada de las componentes primera y tercera de la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ respecto a λ . Observemos que en dicha solución aparecen expresiones de senos y cosenos y, por tanto, su derivada respecto a λ también dependerá de ambas funciones trigonométricas. En particular, sabemos que (t_0, λ_0) es una solución del sistema (3.11), entonces las expresiones del seno y del coseno vienen dadas por (3.48) y (3.49), respectivamente. De ese modo, obtenemos la derivada parcial de las componentes primera y tercera de la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ con respecto a λ evaluada en el punto (t_0, λ_0) , éstas son

$$\left. \frac{\partial x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_0, \lambda_0)} = \left. \frac{(9(\lambda^2 + 1)^2 t \lambda + 2(6\lambda^2 + 7))(e^{-t\lambda} - 1) + 2\lambda(2t - 3\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)} \right|_{(t_0, \lambda_0)} \quad (3.63)$$

$$\left. \frac{\partial z_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{(t_0, \lambda_0)} = \left. \frac{\lambda^2(9(\lambda^2 + 1)^2 t \lambda + 2) + (3(\lambda^2 + 1)^2 t \lambda + 2(-3\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1))(1 - e^{-t\lambda})}{\lambda^2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)} \right|_{(t_0, \lambda_0)} \quad (3.64)$$

Sin más que reemplazar en (3.62) las derivadas parciales dadas por las expresiones (3.63) y (3.64) obtenemos que la derivada de la función $\Delta_2(\lambda)$ en λ_0 es

$$\left. \frac{d\Delta_2(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = - \left. \frac{2\omega_2(t, \lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)(e^{t\lambda} - 1)} \right|_{(t_0, \lambda_0)}$$

donde

$$\begin{aligned}\omega_2(t, \lambda) = & 3(e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 2)\lambda^5 t + 3(4e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 4)\lambda^4 + 2(2e^{t\lambda} + 3e^{-t\lambda} - 6)\lambda^3 t + \\ & + 9(2e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 3)\lambda^2 + (e^{t\lambda} + 3e^{-t\lambda} - 4)t\lambda + 6(e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 2).\end{aligned}$$

Como $(t_0, \lambda_0) \in \Omega_1$ sabemos que $\frac{1}{2} \leq \lambda_0 \leq 1$ y $\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \leq t_0 \leq \frac{8\pi}{\sqrt{19}}$, de tal forma que se satisfacen las desigualdades $\frac{\pi}{\sqrt{7}} \leq t_0 \lambda_0 \leq \frac{8\pi}{\sqrt{19}}$ y $3 < e^{t_0 \lambda_0}$. Esto implica que los coeficientes de λ^5 , λ^4 , λ^3 y λ^2 en la expresión $\omega_2(t_0, \lambda_0)$ son todos positivos. Más aún, $(e^{t_0 \lambda_0} + 3e^{-t_0 \lambda_0} - 4)t_0 \lambda_0 > -t_0 \lambda_0 > -\frac{8\pi}{\sqrt{19}}$ y $e^{t_0 \lambda_0} + e^{-t_0 \lambda_0} - 2 > 1$. Como $6\sqrt{19} > 8\pi$, se sigue que $\omega_2(t_0, \lambda_0) > 0$, lo que prueba el lema. \square

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema cuya prueba se concluye a partir de los Lemas 3.9, 3.10, 3.13, 3.14.

Teorema 3.15 Existe un valor $\lambda_0 \in (1/2, 1)$ único localmente, de forma que el sistema continuo lineal a trozos (2.8) para $\lambda = \lambda_0$ posee un ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

Obsérvese que los valores límite $1/2$ y 1 no tienen ningún significado dinámico y se han elegido para simplificar los cálculos utilizados en la prueba. Además, mediante cálculos numéricos estimamos que el valor $\lambda_0 \simeq 0.65153556$. En la Figura 3.16 se muestra una proyección del ciclo heteroclino tipo punto-T directo cuya existencia acabamos de probar. En dicha figura, la línea continua corresponde a la variedad invariante unidimensional de los equilibrios mientras que la línea discontinua es una intersección transversal de las variedades invariantes bidimensionales.

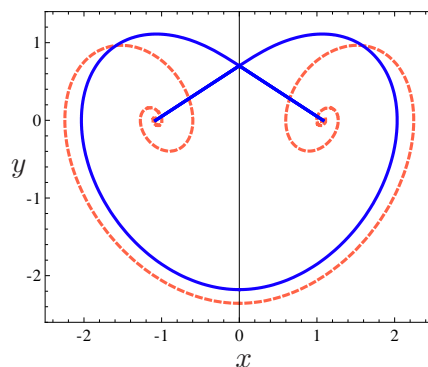


Figura 3.16: Proyección en el plano (x, y) del ciclo heteroclino tipo punto-T directo para $\lambda = \lambda_0$.

3.6. Otras conexiones globales.

En las secciones anteriores hemos probado la existencia de un par de conexiones homoclinas directas para un cierto valor $\lambda = \lambda_h \in (1/2, \sqrt{3})$ y la existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo para $\lambda = \lambda_0 \in (1/2, 1)$. Mediante cálculos numéricos estimamos que los valores del parámetro λ para los cuales existen estas conexiones globales son $\lambda_h \simeq 0.660759953$ y $\lambda_0 \simeq 0.65153556$. En esta sección justificamos que existe otro par simétrico de conexiones homoclinas directas y otro ciclo heteroclino tipo punto-T directo en el sistema (2.8) para ciertos valores de λ distintos a los anteriores.

3.6.1. Conexiones homoclinas directas.

El primer paso que hemos dado para probar la existencia de la conexión homoclina directa para $\lambda = \lambda_h$ es comprobar que el sistema (3.6) tiene solución, esto es, comprobar que se satisface la condición H1. Dicha solución se corresponde con la intersección de las curvas solución de las dos ecuaciones del sistema que pertenece al interior de la región Ω_h , véase la Figura 3.8.

En esta subsección probaremos, usando el Lema 3.3, que en el interior de la región

$$\Omega_{h_2} = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{6\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \leq t \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \frac{1}{3} \leq \lambda \leq \sqrt{3} \right\} \quad (3.65)$$

el sistema (3.6) posee otra solución y justificaremos que para el valor de λ correspondiente existe otro par simétrico de conexiones homoclinas directas, por lo que se tienen también que satisfacer las condiciones H2 y H3.

Lema 3.16 El sistema de ecuaciones (3.6) tiene solución en el interior de la región Ω_{h_2} .

Demostración:

Es inmediato ver que la función $A_3(t, \lambda)$ dada por la expresión (3.26) verifica

$$A_3\left(\frac{6\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) \cdot A_3\left(\frac{8\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) > 0 \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

A continuación vamos a analizar el signo de la función $p(t, \lambda)$ dada por la expresión (3.25). Para ello, basta estudiar la función $p_h(t, \lambda) = -16\lambda^6 e^{3t\lambda} + (\lambda^2 + 1)^2 [4(3\lambda^2 + 1)e^{2t\lambda} - 2(3\lambda^2 + 2)e^{t\lambda} + \lambda^2 + 1]$. Realizando el cambio de variables $\mu = \lambda^2$, $s = \exp(\sqrt{\mu}t)$ sobre $p_h(t, \lambda)$, para t y λ estrictamente

positivos, obtenemos la función polinómica

$$\tilde{p}_h(s, \mu) = -16\mu^3 s^3 + (\mu + 1)^2 [4(3\mu + 1)s^2 - 2(3\mu + 2)s + \mu + 1], \quad (3.66)$$

definida para $s \geq 1$ y $\mu \geq 0$.

Por el Lema 3.5 sabemos que $\tilde{p}_h(s, 3)$ es estrictamente menor que cero para todo $s \geq 1$. Por otro lado, fijando $\mu = 1/9$ en (3.66) obtenemos $\tilde{p}_h(s, 1/9) = -\frac{8}{729} (2s^3 - 25(24s^2 + 21s - 5))$. Vamos a comprobar que el polinomio anterior es estrictamente positivo en un intervalo conveniente para la variable s . Puesto que el parámetro t pertenece al intervalo $[6\pi/\sqrt{3\mu+4}, 8\pi/\sqrt{3\mu+4}]$, para $\mu = 1/9$ la variable s pertenece al intervalo $[e^{\frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}, e^{\frac{8\pi}{\sqrt{39}}}]$. Este intervalo está contenido en $[1, 175]$ ya que

$$\left(\frac{8\pi}{\sqrt{39}}\right)^2 < \frac{(8\pi)^2}{36} = \frac{16\pi^2}{9} < \frac{(4 \cdot 3.15)^2}{9} = \frac{(12.6)^2}{9} < \frac{15^2}{9} = 5^2$$

y, por tanto, $e^{\frac{8\pi}{\sqrt{39}}} < e^5 < (2.8)^5 = 172.104 < 175$.

Ahora vamos a comprobar que el polinomio $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ es estrictamente positivo para todo valor de s perteneciente al intervalo $[1, 175]$.

La derivada de $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ respecto a la variable s ,

$$q_h(s) = \left. \frac{\partial \tilde{p}_h}{\partial s}(s, \mu) \right|_{\mu=1/9} = -\frac{8}{243} (2s^2 - 400s + 175),$$

tiene una única raíz real mayor que uno, $s_0 = \frac{5}{2}(40 + \sqrt{1586}) > 175$. Por tanto, la función $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ no tiene puntos críticos en $[1, 175]$ y es estrictamente creciente en dicho intervalo, puesto que $q_h(1) = 1784/243 > 0$. De ese modo, la función restringida al intervalo $[1, 175]$ alcanza su mínimo absoluto en $s = 1$. Como $\tilde{p}_h(1, 1/9) = 176/81 > 0$, concluimos que $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ es estrictamente positiva en el intervalo $[1, 175]$ y, en particular, en $[e^{\frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}, e^{\frac{8\pi}{\sqrt{39}}}]$.

Deshaciendo el cambio de variables realizado, tenemos que la función $p_h(t, \sqrt{3})$ es estrictamente negativa para todo $t > 0$ y que $p_h(t, 1/3)$ toma valores estrictamente positivos para todo t perteneciente al intervalo $I_2 = \left[\frac{6\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \frac{24\pi}{\sqrt{39}}\right]$, por lo que $p_h(t, 1/3) \cdot p_h(t, \sqrt{3}) < 0$ para todo $t \in I_2$.

Hemos probado que se verifican las hipótesis del Lema 3.3. Así pues, el sistema (3.6) tiene solución en el interior de la región Ω_{h_2} .

□

En la Figura 3.17 se representan las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$

del sistema (3.23) y la región Ω_{h_2} . En el interior de la región ambas curvas se cortan en un punto (t_{h_2}, λ_{h_2}) , con t_{h_2} y λ_{h_2} estrictamente positivos, que se corresponde con una solución del sistema (3.6). Mediante cálculos numéricos estimamos que $t_{h_2} \simeq 10.154$ y $\lambda_{h_2} \simeq 0.433912$.

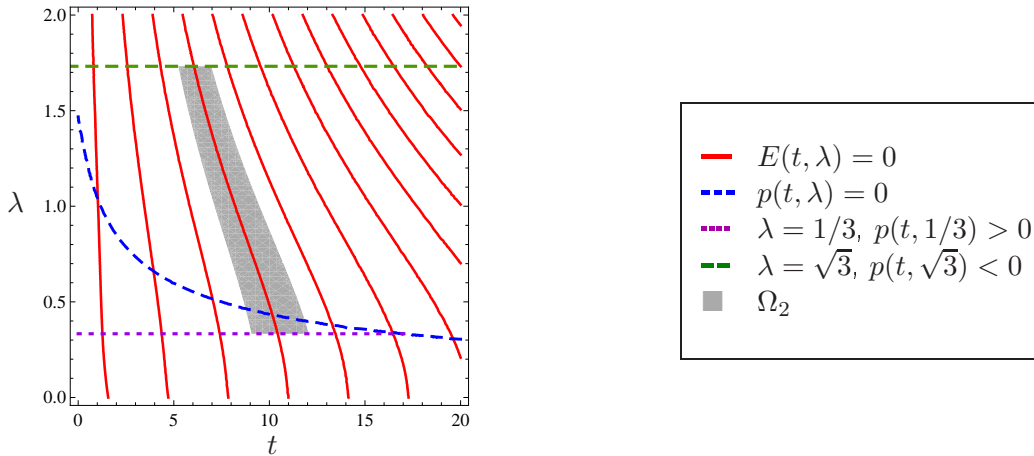


Figura 3.17: Representación gráfica de los zeros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$. Se ha sombreado la región $\Omega_{h_2} = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{6\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \leq t \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}, \frac{1}{3} \leq \lambda \leq \sqrt{3} \right\}$.

Acabamos de probar que el sistema (3.6) tiene una solución (t_{h_2}, λ_{h_2}) , con $t_{h_2} > 0$ y $\lambda_{h_2} > 0$, que pertenece al interior de la región Ω_{h_2} , por lo que se satisface la condición H1. Para que exista una conexión homoclina directa para estos valores de los parámetros, es necesario comprobar también las condiciones H2 y H3, como hicimos con el otro par de conexiones homoclinas directas.

Para ver que se satisface la condición H2, $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_2}) > 0$ para todo $t \in (0, t_{h_2})$, podríamos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_2})$, para lo cual tendríamos que analizar el signo de su derivada,

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_2}) = \mathbf{y}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_2}) = c_1 e^{-t\lambda_{h_2}} + (c_2 \cos(\beta_{h_2} t) + c_3 \operatorname{sen}(\beta_{h_2} t)) e^{\frac{t\lambda_{h_2}}{2}},$$

con

$$\beta_{h_2} = \frac{\sqrt{3\lambda_{h_2}^2 + 4}}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{3\lambda_{h_2}^2 + 1}, \quad c_2 = \frac{2\lambda_{h_2}^2 c_1}{\lambda_{h_2}^2 + 1} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{(3\lambda_{h_2}^2 + 2) c_2}{\lambda_{h_2} \sqrt{3\lambda_{h_2}^2 + 4}}.$$

En vez de realizar este análisis, evidenciamos que la función $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_2})$ es estrictamente positiva en el intervalo $(0, t_{h_2})$ a partir de su representación gráfica, véase la Figura 3.18.

Por otro lado, a partir de la representación gráfica de las zonas donde $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) < 0$, véase la

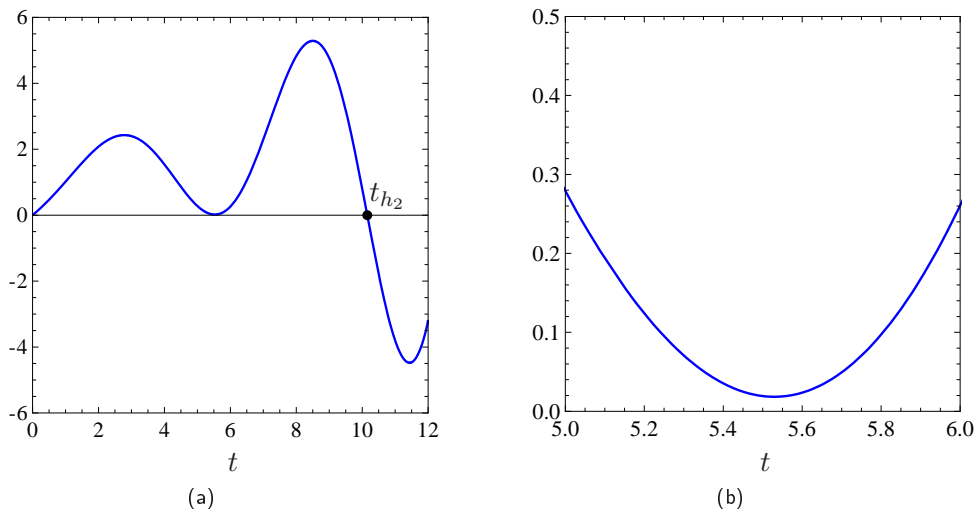


Figura 3.18: En el caso (a) se ha representado gráficamente la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_2})$ y en (b) se ha realizado una ampliación de la representación gráfica anterior.

Figura 3.19, es fácil deducir que existe un valor mínimo $\mathbf{m}_h = (t_{\mathbf{m}_h}, \lambda_{\mathbf{m}_h}) \in \Omega_h$ tal que $\lambda_{\mathbf{m}_h} > \lambda_{h_2}$, por lo que se concluye también que la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_2}) > 0$ en el intervalo $(0, t_{h_2})$.

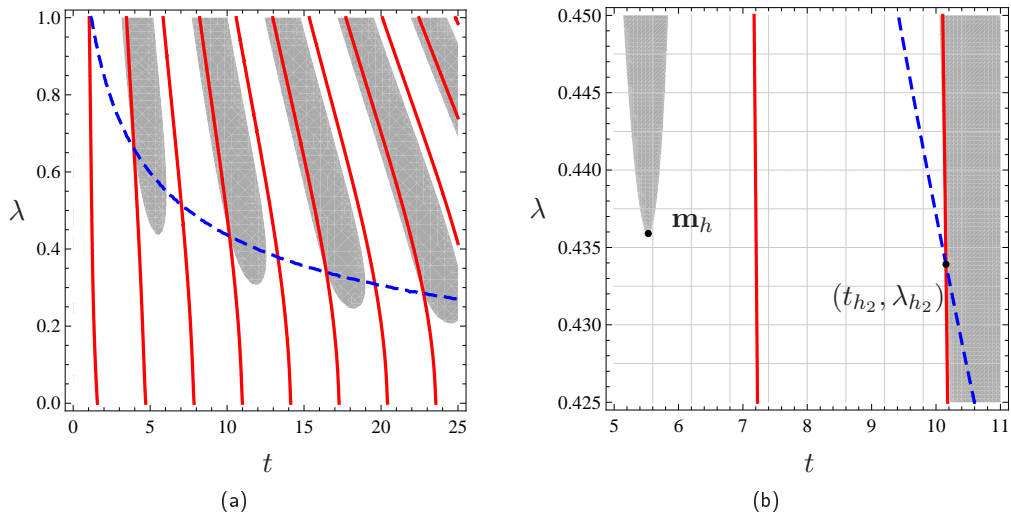


Figura 3.19: La línea continua corresponde a los ceros de $E(t, \lambda)$, mientras que la línea discontinua corresponde a los ceros de $p(t, \lambda)$. Se han sombreado las regiones donde $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) < 0$. En (b) se ha realizado una ampliación de la figura representada en (a).

Para justificar la existencia de una conexión homoclina directa para los valores de los parámetros $(t_{h_2}, \lambda_{h_2}) \in \Omega_{h_2}$, sólo falta verificar la condición H3' o bien, equivalentemente, la condición T3.

Como $\lambda_{h_2} > \lambda_*$, sabemos aplicando el Lema 3.13 que existe una conexión heteroclina bidimensional directa en el sistema (2.8), por lo que se satisface la condición T3. Por tanto, ya podemos asegurar la existencia de un par de conexiones homoclinas directas para $\lambda = \lambda_{h_2}$. Aún más, podemos garantizar la unicidad local de este par de conexiones homoclinas directas. Para ello, es suficiente comprobar que $\Delta'(\lambda_{h_2}) \neq 0$, donde $\Delta(\lambda)$ está dada por la expresión (3.32), como hicimos con el otro par de conexiones homoclinas directas.

Lema 3.17 Sea $(t_{h_2}, \lambda_{h_2}) \in \Omega_{h_2}$ una solución del sistema (3.6). Entonces, la función $\Delta(\lambda)$ dada por la expresión (3.32), satisface $\Delta'(\lambda_{h_2}) < 0$.

Demostración:

Por el Lema 3.7 sabemos que la derivada $\Delta'(\lambda_{h_2})$ es

$$\left. \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_{h_2}} = - \left. \frac{2\omega_1(t, \lambda)}{\lambda(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)e^{t\lambda}} \right|_{(t_{h_2}, \lambda_{h_2})},$$

donde

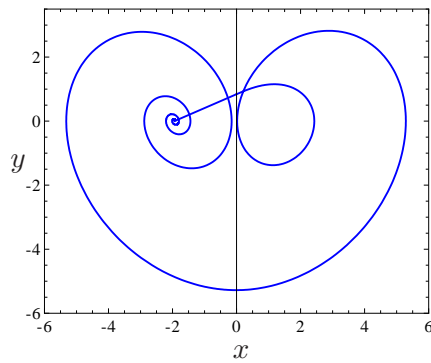
$$\omega_1(t, \lambda) = 3(2e^{t\lambda} - 1)t\lambda^3 + 6(4e^{t\lambda} - 1)\lambda^2 + (2e^{t\lambda} - 3)t\lambda + 6(2e^{t\lambda} - 1).$$

Como $(t_{h_2}, \lambda_{h_2}) \in \Omega_{h_2}$ sabemos que $\frac{1}{3} \leq \lambda_{h_2} \leq \sqrt{3}$ y $\frac{6\pi}{\sqrt{13}} \leq t_{h_2} \leq \frac{8\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ de tal forma que se satisfacen las desigualdades $\frac{2\pi}{\sqrt{13}} \leq t_{h_2}\lambda_{h_2} \leq \frac{24\pi}{\sqrt{13}}$ y $e^{\frac{2\pi}{\sqrt{13}}} > e^{\sqrt{2}} > 2$. Esto implica que la función $\omega_1(t_{h_2}, \lambda_{h_2})$ es estrictamente positiva, lo que prueba el lema. □

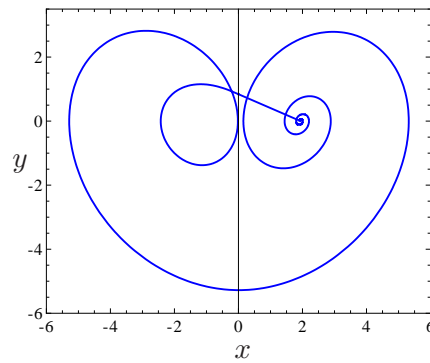
Ahora, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema, salvo por la prueba analítica de la condición H2 así como la de la desigualdad $\lambda_{h_2} > \lambda_*$.

Teorema 3.18 Existe un valor $\lambda_{h_2} \in (1/3, \sqrt{3})$ único localmente, de forma que el sistema continuo lineal a trozos (2.8) para $\lambda = \lambda_{h_2}$ posee una conexión homoclina directa. Más aún, la reversibilidad del sistema asegura la existencia de otra conexión homoclina directa para el mismo valor del parámetro λ .

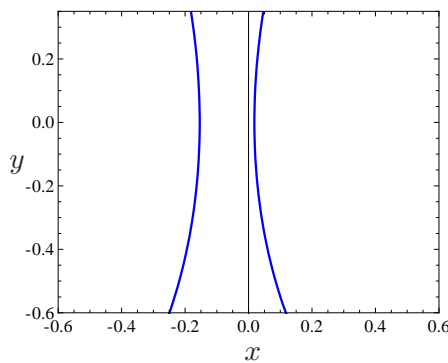
En la Figura 3.20 se representan unas proyecciones de las conexiones homoclinas directas en el sistema (2.8), para $\lambda = \lambda_{h_2}$.



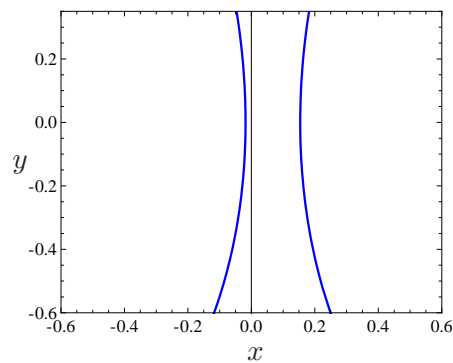
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.20: Proyección en el plano de coordenadas (x, y) de: (a) la conexión homoclina directa correspondiente al punto de equilibrio \mathbf{p}_- . (b) la conexión homoclina directa asociada al punto de equilibrio \mathbf{p}_+ . En (c) y en (d) se ha realizado una ampliación de las proyecciones representadas en (a) y (b).

Obsérvese que este de par de conexiones homoclinas son directas a pesar de que dan una vuelta alrededor de la variedad invariante unidimensional del correspondiente punto de equilibrio.

Por último, como se puede apreciar en la Figura 3.19, las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$ se intersecan para diferentes valores de t y λ estrictamente positivos. Estos valores son soluciones del sistema (3.6) si además satisfacen la relación $\sin(\beta t) < 0$.

Por lo que si (t_{h_k}, λ_{h_k}) es una solución del sistema (3.6), entonces t_{h_k} pertenece al intervalo $I_k = \left[2(2k-1)\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}, 4k\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}\right]$, con $k \in \mathbb{N}$. Hemos probado que en el interior de las regiones $\Omega_h = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : t \in I_1, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \sqrt{3}\}$ y $\Omega_{h_2} = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : t \in I_2, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \sqrt{3}\}$ el sistema (3.6) posee una solución, véanse los Lemas 3.5, 3.16, que se corresponde con el segundo y cuarto punto de corte, respectivamente, entre las curvas empezando por la izquierda. Además, por los teoremas 3.8 y 3.18, sabemos que estas soluciones se corresponden cada una con un par de conexiones homoclinas directas.

El sexto punto de corte entre las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$ empezando por la izquierda es también una solución del sistema (3.6), que denotaremos por $h_3 = (t_{h_3}, \lambda_{h_3})$, ya que t_{h_3} pertenece al intervalo $I_3 = \left[10\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}, 12\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}\right]$ y, por tanto, verifica la relación $\text{sen}(\beta t_{h_3}) < 0$. Sin embargo, no se corresponde con una conexión homoclina directa al no satisfacerse la condición H2. Esto es debido a que el mínimo denotado por \mathbf{m}_2 en la Figura 3.21 está por debajo de la solución $h_3 = (t_{h_3}, \lambda_{h_3})$ y, por tanto, la órbita definida por $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_{h_3})$ interseca al plano de separación para un valor de t perteneciente al intervalo $(0, t_{h_3})$

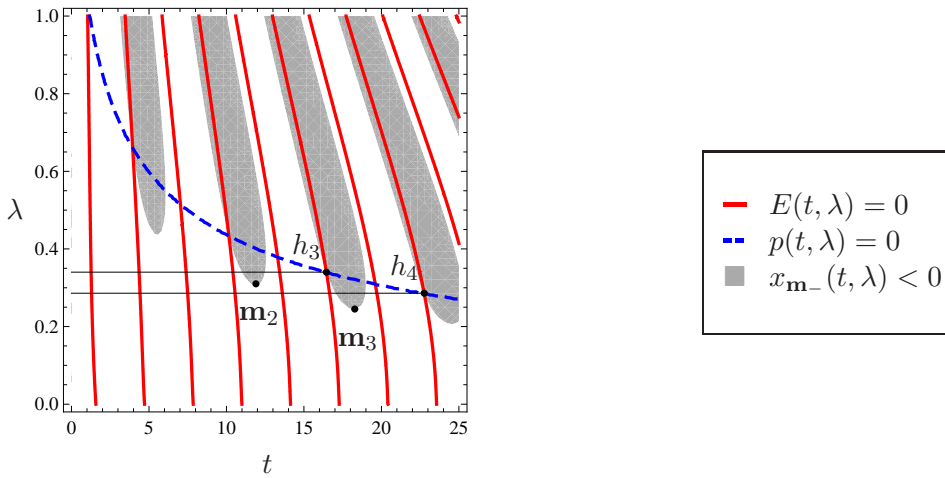


Figura 3.21: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas, respectivamente, por las expresiones (3.24) y (3.25). Se han sombreado las regiones donde la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) < 0$.

A partir de la representación gráfica anterior deducimos también que el octavo punto de corte entre las curvas es una solución $h_4 = (t_{h_4}, \lambda_{h_4})$ del sistema (3.6), con t_{h_4} perteneciente al intervalo $I_4 = \left[14\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}, 16\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}\right]$, pero no se corresponde con una conexión homoclina directa

al no satisfacerse tampoco la condición H2. De hecho, conjeturamos que para $0 < \lambda < \lambda_{h_2}$ el sistema (2.8) no posee conexiones homoclinas directas.

3.6.2. Ciclo heteroclinico tipo punto-T directo.

En esta subsección veremos que existe otro ciclo heteroclinico tipo punto-T directo en el sistema (2.8). Para ello, justificaremos que existe una conexión heteroclinica unidimensional directa y una conexión heteroclinica bidimensional directa al mismo instante.

Recordemos que existe tal conexión heteroclinica unidimensional directa si, y sólo si, se satisfacen las condiciones T1 y T2. Es decir, si y sólo si, existen t_2 y λ_2 estrictamente positivos tales que (t_2, λ_2) es una solución del sistema (3.11) y la función $x_{m-}(t, \lambda_2)$ es estrictamente positiva para todo $t \in (0, t_2)$.

En el siguiente lema probamos analíticamente la existencia de una solución del sistema (3.11) haciendo uso del Lema 3.3.

Lema 3.19 El sistema de ecuaciones (3.11) posee solución en el interior de la región

$$\Omega_2 = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{6\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \leq t \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

Demostración:

Es inmediato ver que la función $A_3(t, \lambda)$ dada por la expresión (3.45) verifica

$$A_3\left(\frac{6\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) \cdot A_3\left(\frac{8\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) > 0, \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

A continuación vamos a analizar el signo de la función $p(t, \lambda)$ dada por (3.44). Para ello, basta estudiar la función

$$p_h(t, \lambda) = -\frac{4\lambda^6}{\lambda^2 + 1} e^{3t\lambda} + (\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)e^{2t\lambda} + (1 - 3(\lambda^2 + 1)^2) e^{t\lambda} + (\lambda^2 + 1)^2.$$

Realizando el cambio de variables $\mu = \lambda^2$, $s = \exp(\sqrt{\mu}t) \geq 1$, para t y λ estrictamente positivos, obtenemos la función polinómica $\tilde{p}_h(s, \mu)$, dada por (3.46) y definida para $s \geq 1$ y $\mu \geq 0$.

Por el Lema 3.9, sabemos que $\tilde{p}_h(s, 1)$ es estrictamente menor que cero para todo $s \geq 1$. Por otro lado, fijando $\mu = 1/9$ en (3.46) se obtiene $\tilde{p}_h(s, \frac{1}{9}) = -\frac{2}{729} (2s^3 - 600s^2 + 1095s - 500)$. Vamos

a comprobar que el polinomio anterior es estrictamente positivo en un intervalo conveniente para la variable s . Puesto que el parámetro t pertenece al intervalo $[6\pi/\sqrt{3\mu+4}, 8\pi/\sqrt{3\mu+4}]$, para $\mu = 1/9$ la variable s pertenece al intervalo $[e^{\frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}, e^{\frac{8\pi}{\sqrt{39}}}]$. Este intervalo está contenido en $[1, 175]$, como hemos visto en la prueba del Lema 3.16.

Ahora vamos a comprobar que el polinomio $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ es estrictamente positivo para todo valor s perteneciente al intervalo $(1, 175)$.

La derivada de $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ respecto a la variable s ,

$$q_h(s) = \left. \frac{\partial \tilde{p}_h(s, \mu)}{\partial s} \right|_{\mu=1/9} = -\frac{2}{729} (6s^2 - 1200s + 1095),$$

tiene una única raíz real mayor que uno, $s_0 = \frac{1}{2} (200 + \sqrt{39270}) > 175$. Por tanto, la función $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ no tiene puntos críticos en el intervalo $[1, 175]$ y es estrictamente creciente en dicho intervalo, puesto que $q_h(1) = 22/81 > 0$. De ese modo, la función $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ restringida al intervalo $[1, 175]$ alcanza su mínimo absoluto en $s = 1$. Como $\tilde{p}_h(1, 1/9) = 2/243 > 0$, concluimos que $\tilde{p}_h(s, 1/9)$ es estrictamente positiva para todo $1 \leq s \leq 175$ y, en particular, en $[e^{\frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}, e^{\frac{8\pi}{\sqrt{39}}}]$.

Deshaciendo el cambio de variable realizado, tenemos que la función $p_h(t, 1)$ es estrictamente negativa para todo $t > 0$ y que $p_h(t, 1/3)$ toma valores estrictamente positivos para todo t perteneciente al intervalo $I_2 = [\frac{6\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \frac{24\pi}{\sqrt{39}}]$, por lo que $p_h(t, 1/3) \cdot p_h(t, 1) < 0$ para todo $t \in I_2$.

Hemos probado que se verifican las hipótesis del Lema 3.3. Así pues, el sistema (3.11) posee al menos una solución en el interior de la región Ω_2 . \square

En la Figura 3.22 se representan las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$ del sistema (3.11) y la región Ω_2 . En el interior de la región dichas curvas se cortan en un punto (t_2, λ_2) , con t_2 y λ_2 estrictamente positivos, que se corresponde con una solución del sistema (3.11). Mediante cálculos numéricos estimamos que $t_2 = 10.158165$ y $\lambda_2 = 0.43327834$.

Acabamos de probar que el sistema (3.11) tiene una solución en el interior de la región Ω_2 , por lo que se satisface la condición T1. Para asegurar la existencia de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo falta comprobar las condiciones T2 y T3, como hicimos con el otro ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

Para ver que se satisface la condición T2, $x_{m-}(t, \lambda_2) > 0$ para todo $t \in (0, t_2)$, representamos gráficamente las zonas donde la función $x_{m-}(t, \lambda)$ es estrictamente menor que cero, véase la Figura 3.23.

A partir de esta representación gráfica deducimos que el mínimo que hemos denotado por

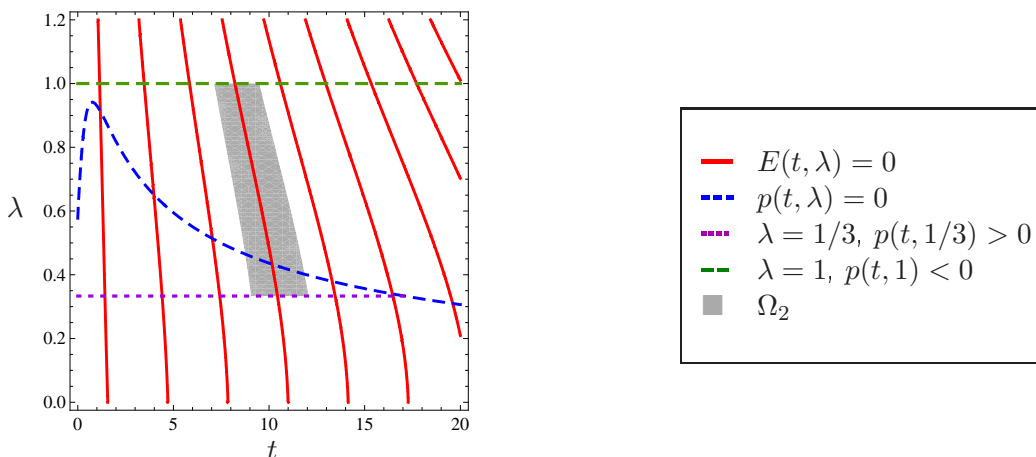


Figura 3.22: Representación gráfica de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas por (3.43) y (3.44). Se ha sombreado la región $\Omega_2 = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{6\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \leq t \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}, \frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1 \right\}$.

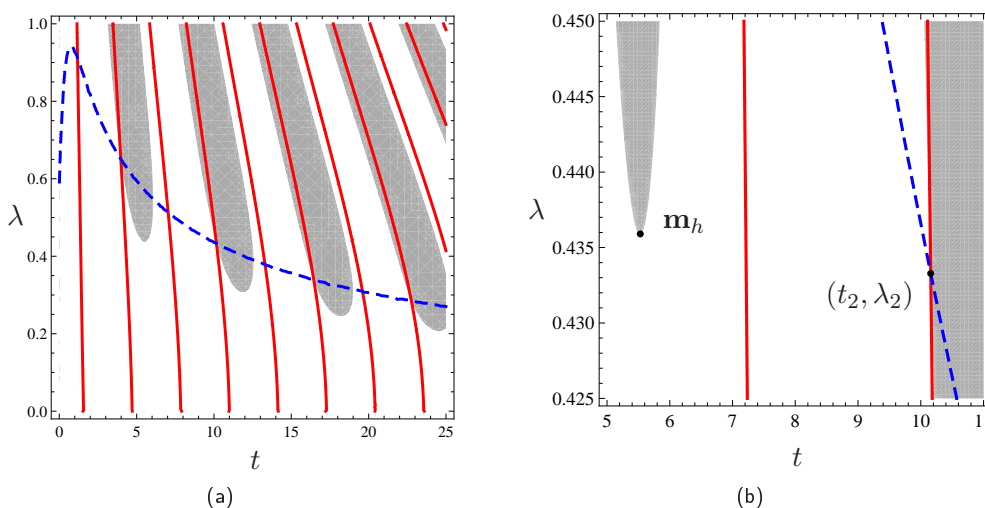


Figura 3.23: La línea continua corresponde a los ceros de la función $E(t, \lambda)$, mientras que la línea discontinua corresponde a los ceros de la función $p(t, \lambda)$. Se han sombreado las regiones donde $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) < 0$. En (b) se ha realizado una ampliación de la figura representada en (a).

$\mathbf{m}_h = (t_{\mathbf{m}_h}, \lambda_{\mathbf{m}_h})$, está por encima del punto (t_2, λ_2) . Es decir, se satisface que $\lambda_{\mathbf{m}_h} > \lambda_2$ y, por tanto, la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda_2)$ es estrictamente positiva en el intervalo $(0, t_2)$.

Ahora estamos en condiciones de afirmar que el punto $\mathbf{x}_{\mathbf{m}_-}(t_2, \lambda_2) = \Pi_+(\mathbf{m}_-)$ pertenece al eje de reversibilidad y, por tanto, existe una conexión heteroclina unidimensional directa para cada

solución $(t_2, \lambda_2) \in \Omega_2$.

Para asegurar la existencia del ciclo heteroclino tipo punto-T directo, es necesario demostrar también que existe una conexión heteroclina bidimensional directa, esto es, tenemos que demostrar la condición T3. Como $\lambda_2 > \lambda_{*1}$, sabemos aplicando el Lema 3.13 que existe una conexión heteroclina bidimensional directa en el sistema (2.8), por lo que se satisface la condición T3. Nótese que tras este último resultado ya podemos afirmar, salvo por la prueba analítica de la condición T2, que existe un ciclo heteroclino tipo punto-T directo para $\lambda = \lambda_2$.

Por último, para aseverar la unicidad local de este ciclo heteroclino comprobaremos que $\Delta'_2(\lambda_2) \neq 0$, donde $\Delta_2(\lambda) = z_{\mathbf{m}_-}(t^+(\lambda), \lambda)$, como hicimos con el otro ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

Lema 3.20 Sea (t_2, λ_2) una solución del sistema (3.11) que pertenece a la región Ω_2 , definida en el lema anterior. Entonces, la función $\Delta_2(\lambda) = z_{\mathbf{m}_-}(t^+(\lambda), \lambda)$ satisface $\Delta'_2(\lambda_2) < 0$.

Demostración:

Por el Lema 3.14 sabemos que la derivada $\Delta'_2(\lambda_2)$ es

$$\left. \frac{d\Delta_2(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_2} = - \left. \frac{2\omega_2(t, \lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)(e^{t\lambda} - 1)} \right|_{(t_2, \lambda_2)}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_2(t, \lambda) = & 3(e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 2)\lambda^5 t + 3(4e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 4)\lambda^4 + 2(2e^{t\lambda} + 3e^{-t\lambda} - 6)\lambda^3 t + \\ & + 9(2e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 3)\lambda^2 + (e^{t\lambda} + 3e^{-t\lambda} - 4)t\lambda + 6(e^{t\lambda} + e^{-t\lambda} - 2). \end{aligned}$$

Como $(t_2, \lambda_2) \in \Omega_2$ sabemos que $\frac{1}{3} \leq \lambda_2 \leq 1$ y $\frac{6\pi}{\sqrt{7}} \leq t_2 \leq \frac{8\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, de tal forma que se satisfacen las desigualdades $\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \leq t_2 \lambda_2 \leq \frac{8\pi\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ y $e^{\frac{2\pi}{\sqrt{7}}} > e^2 > 4$. Esto implica que el valor de $\omega_2(t_2, \lambda_2)$ es estrictamente positivo, lo que prueba el lema. □

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema, salvo la prueba analítica de la condición T2 así como la de la desigualdad $\lambda_2 > \lambda_{*}$.

Teorema 3.21 Existe un valor $\lambda_2 \in (1/3, 1)$ único localmente, de forma que el sistema continuo lineal a trozos (2.8) para $\lambda = \lambda_2$ posee un ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

En la Figura 3.24 se muestra una proyección del ciclo heteroclino tipo punto-T directo cuya existencia acabamos de probar. En dicha figura, la línea continua corresponde a la variedad invariante unidimensional de los equilibrios mientras que la línea discontinua es una intersección transversal de las variedades invariantes bidimensionales.

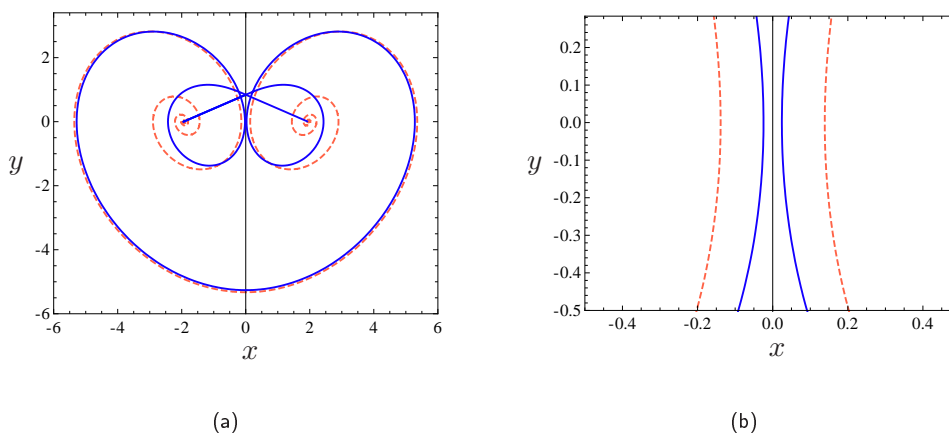


Figura 3.24: (a) Proyección en el plano de coordenadas (x, y) del ciclo heteroclino tipo punto-T directo para $\lambda = \lambda_2$. (b) Ampliación de (a), a partir de esta representación gráfica observamos que el ciclo heteroclino no interseca al eje $x = 0$.

Por último, como se puede apreciar en la Figura 3.23(a), las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$, dadas por (3.43) y (3.44), se intersecan para diferentes valores de t y λ estrictamente positivos. Estos valores son soluciones del sistema (3.11) si además satisfacen la relación $\sin(\beta t) < 0$. Por lo que si (t_k, λ_k) es una solución del sistema (3.11), entonces t_k pertenece al intervalo $I_k = \left[2(2k-1)\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}, 4k\pi/\sqrt{3\lambda^2+4}\right]$, con $k \in \mathbb{N}$.

Hemos probado que en el interior de las regiones $\Omega_1 = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : t \in I_1, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1\}$ y $\Omega_2 = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : t \in I_2, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1\}$ el sistema (3.11) posee una solución, véanse los Lemas 3.9 y 3.19, que se corresponde con el segundo y cuarto punto de corte, respectivamente, entre las curvas empezando por la izquierda. Además, por los teoremas 3.15 y 3.21, sabemos que el sistema (2.8) posee un ciclo heteroclino tipo punto-T directo para los valores de los parámetros dados por cada

una de estas dos soluciones.

Obsérvese que el sexto punto de corte entre las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $p(t, \lambda) = 0$ empezando por la izquierda es también una solución del sistema (3.11), que denotaremos por $h_3 = (t_3, \lambda_3)$, ya que t_3 pertenece al intervalo $I_3 = \left[10\pi/\sqrt{3\lambda^2 + 4}, 12\pi/\sqrt{3\lambda^2 + 4}\right]$ y, por tanto, verifica la relación $\text{sen}(\beta t_3) < 0$. Sin embargo, no se corresponde con un ciclo heteroclino tipo punto-T directo del sistema al no satisfacerse la condición T2. Esto se debe a que el mínimo \mathbf{m}_2 representado en la Figura 3.25 está por debajo de la solución h_3 y, por tanto, la órbita definida por $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda)$ interseca al plano de separación para un valor de t perteneciente al intervalo $(0, t_3)$.

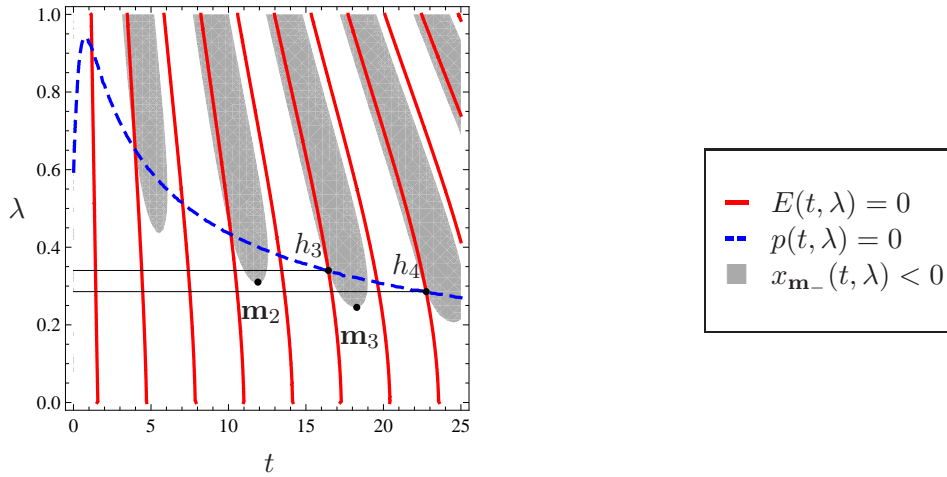


Figura 3.25: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $p(t, \lambda)$ dadas, respectivamente, por las expresiones dadas por (3.43) y (3.44). Se han sombreado las regiones donde la función $x_{\mathbf{m}_-}(t, \lambda) < 0$.

A partir de la representación gráfica anterior deducimos también que el octavo punto de corte entre ambas curvas es una solución $h_4 = (t_4, \lambda_4)$ del sistema (3.11), con t_4 perteneciente al intervalo $I_4 = \left[14\pi/\sqrt{3\lambda^2 + 4}, 16\pi/\sqrt{3\lambda^2 + 4}\right]$, pero esta solución tampoco se corresponde con un ciclo heteroclino tipo punto-T directo, ya que no se satisface la condición T2. De hecho, conjeturamos que el sistema (2.8) no posee ciclos heteroclinos tipo punto-T para $0 < \lambda < \lambda_2$.

Órbitas periódicas reversibles de dos cortes en la versión lineal a trozos del sistema de Michelson.

La presencia de conexiones globales en un sistema dinámico autónomo tridimensional fuerza a menudo la aparición de soluciones periódicas en un entorno de tales conexiones. Hay numerosos trabajos en los que se evidencian la existencia de ciertas trayectorias periódicas en un entorno de una conexión global. Véase, por ejemplo, los trabajos [1, 6, 7, 20–23, 27–31, 39, 51, 60–62].

Por ello, cabe esperar que la presencia de conexiones globales en el sistema (2.8), en particular de conexiones homoclinas directas y ciclos heteroclinos tipo punto-T directo cuya existencia hemos probado en el Capítulo 3, sea la responsable de la aparición de un conjunto infinito numerable de órbitas periódicas.

En el capítulo anterior se ha demostrado analíticamente que existe un cierto valor del parámetro $\lambda_h > 1/2$ de forma que el sistema continuo lineal a trozos (2.8) para $\lambda = \lambda_h$ posee dos homoclinas directas de tipo Shil'nikov. Como es bien conocido, el que la homoclina sea de tipo Shil'nikov hace que aparezca una gran riqueza de comportamiento dinámico, en concreto de órbitas periódicas, véase [62]. Por ejemplo, en los trabajos de Shil'nikov [61, 62] se asegura la existencia de órbitas periódicas de tipo silla acumulándose alrededor de la conexión homoclina.

En este capítulo se realiza un estudio detallado de la existencia de órbitas periódicas en la versión lineal a trozos del sistema de Michelson (2.8). Más concretamente, se estudiarán las órbitas periódicas reversibles con dos o cuatro cortes con el plano de separación $\Sigma = \{x = 0\}$ en dicho sistema. Este estudio se realizará combinando herramientas analíticas y numéricas, lo que nos servirá como una guía para la determinación de las bifurcaciones en la versión lineal a trozos del sistema de Michelson. Además, se evidenciarán ciertas similitudes con el sistema de Michelson diferenciable, véase por ejemplo [1, 37, 51].

Las continuaciones numéricas se han realizado, usando el programa Mathematica y una implementación propia en dicho lenguaje del método de pseudo-longitud de arco, véase [43].

4.1. Existencia de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con el plano de separación.

En esta sección probamos analíticamente la existencia de ciertas órbitas periódicas en la versión lineal a trozos del sistema de Michelson (2.8). Teniendo en cuenta que dicho sistema es continuo lineal a trozos con dos zonas y que sus equilibrios son de tipo silla-foco, es obvio que no puede haber ninguna órbita periódica contenida en una de las dos regiones de linealidad. Luego, cada una de las órbitas periódicas del sistema ha de pertenecer tanto al semiespacio derecho como al semiespacio izquierdo, por lo que ha de cortar al plano de separación, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, al menos en dos puntos. Además, como el sistema (2.8) es reversible, las órbitas periódicas que intersecan al eje de reversibilidad son invariantes respecto a la transformación de reversibilidad R dada por (2.3). Las órbitas periódicas que estamos buscando cortan únicamente en dos puntos al plano de separación, de tal modo que dichos puntos pertenecen al eje de reversibilidad. En la Figura 4.1 se muestra un esquema de una órbita periódica reversible que corta al plano de separación únicamente en dos puntos.

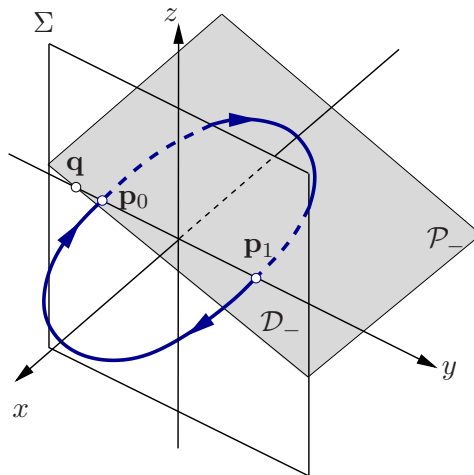


Figura 4.1: Órbita periódica de dos cortes en el sistema continuo lineal a trozos

A continuación determinamos bajo qué condiciones existe una órbita periódica reversible que

interseca únicamente en dos puntos al plano de separación. Debido al sentido del campo vectorial asociado al sistema (2.8), véase la sección 2.1, los puntos de intersección de cada una de estas órbitas periódicas con el plano de separación han de pertenecer a la semirrecta de extremo el punto $\mathbf{q} = (0, -1/\lambda^2, 0)$ que contiene al origen de coordenadas, pues si éstos no pertenecieran a dicha semirrecta la órbita periódica no podría cortar nuevamente al eje de reversibilidad. Recordemos que el punto \mathbf{q} es la intersección del semiplano focal izquierdo, $\mathcal{P}_- = \{\lambda(\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 y + \lambda z = -1, x \leq 0\}$, con el eje de reversibilidad.

Así pues, existe una órbita periódica reversible que corta únicamente dos veces al plano de separación si y sólo si, la imagen mediante la semiaplicación de Poincaré izquierda en un punto $\mathbf{p}_0 = (0, y_0, 0)$, con $y_0 < 0$, pertenece al eje de reversibilidad. Es decir, se tiene que verificar la condición

$$\Pi_-(\mathbf{p}_0) \in \text{Fix}(R). \quad (4.1)$$

Ahora bien, para probar la existencia de dicha órbita periódica reversible dividimos la condición anterior en las tres siguientes:

O1: Existen $\hat{t}, \hat{\lambda}$ estrictamente positivos tales que $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(\hat{t}, \hat{\lambda}) \in \text{Fix}(R)$, es decir, $(t, \lambda) = (\hat{t}, \hat{\lambda})$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} x_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = 0, \\ z_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

O2: $y_{\mathbf{p}_0}(\hat{t}, \hat{\lambda}) \geq 0$,

O3: $x_{\mathbf{p}_0}(t, \hat{\lambda}) < 0$ para todo $t \in (0, \hat{t})$,

donde $\mathbf{p}_0 = (0, y_0, 0)$, con $y_0 < 0$, y $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = (x_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda), y_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda), z_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda))$ es la solución del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal que define (2.8) en el semiespacio izquierdo con la condición inicial $\mathbf{x}(0, \hat{\lambda}) = \mathbf{p}_0$. Nótese que siempre se verifica la desigualdad

$$-\frac{1}{\lambda^2} < y_0. \quad (4.3)$$

Observemos que si se satisfacen las condiciones O1–O3, entonces el sistema (2.8) posee una órbita periódica reversible para $\lambda = \hat{\lambda}$ cuyo semiperiodo es \hat{t} , de tal modo que interseca al plano de separación únicamente en los puntos \mathbf{p}_0 y $\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(\hat{t}, \hat{\lambda}) = (0, y_1, 0)$. En particular, si \mathbf{p}_1 coincide con el origen de coordenadas, entonces la órbita periódica reversible interseca transversalmente al

plano se separación desde el semiespacio izquierdo hacia el semiespacio derecho. En este caso, el origen es un punto de tangencia de la órbita definida por $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t, \hat{\lambda})$ con el plano de separación.

A continuación, determinamos las ecuaciones explícitas de la condición O1. Para ello, es necesario obtener la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda)$ del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal que define (2.8) en el semiespacio izquierdo con la condición inicial $\mathbf{x}(0, \hat{\lambda}) = \mathbf{p}_0$. Esta solución se deduce de las expresiones (2.19)–(2.21) sin más que sustituir la variable z_0 por cero. De ese modo, obtenemos que las componentes de la solución vienen dadas por las expresiones

$$x_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = -\frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} + \frac{e^{-\frac{t\lambda}{2}}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[\frac{(\lambda^2 y_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{3}{2}t\lambda}}{\lambda} - \lambda \left(y_0 - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) + \left((3\lambda^2 + 2)y_0 - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right) \text{sen}(\beta t) \right], \quad (4.4)$$

$$y_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = \frac{e^{-\frac{t\lambda}{2}}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[(\lambda^2 y_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{3}{2}t\lambda} + ((2\lambda^2 + 1)y_0 - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) + \lambda(y_0 - 3) \text{sen}(\beta t) \right] \quad (4.5)$$

y

$$z_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = \frac{-e^{-\frac{t\lambda}{2}}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[\lambda(\lambda^2 y_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} (\cos(\beta t) - e^{\frac{3}{2}t\lambda}) + ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_0 - 3\lambda^2 - 2) \text{sen}(\beta t) \right], \quad (4.6)$$

con $\beta = \sqrt{3\lambda^2 + 4}/2$.

Tras adecuadas manipulaciones, el sistema (4.2) se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} E_1(t, \lambda, y_0) = 0, \\ E_2(t, \lambda, y_0) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

con

$$E_1(t, \lambda, y_0) = ((\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_0 + 1)e^{t\lambda} - 3\lambda^2 - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t\lambda}{2}} + \lambda((\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2)y_0 - 2) \text{sen}(\beta t) - \lambda^2((\lambda^2 + 1)y_0 - 2)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t)$$

y

$$E_2(t, \lambda, y_0) = \lambda(\lambda^2 y_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}(e^{\frac{3}{2}t\lambda} - \cos(\beta t)) - ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_0 - 3\lambda^2 - 2) \text{sen}(\beta t).$$

El sistema (4.7) consta de dos ecuaciones en las incógnitas (t, λ, y_0) y es lineal respecto de la

variable y_0 . Por tanto, despejando de la segunda ecuación del sistema, obtenemos y_0 en función de las variables (t, λ) ,

$$y_0(t, \lambda) = \frac{(3\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta t) + \lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4}(e^{\frac{3}{2}t\lambda} - \cos(\beta t))}{(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta t) - \lambda^3\sqrt{3\lambda^2 + 4}(e^{\frac{3}{2}t\lambda} - \cos(\beta t))}, \quad (4.8)$$

definida para los valores t y λ estrictamente positivos tal que

$$D(t, \lambda) = (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta t) - \lambda^3\sqrt{3\lambda^2 + 4}(e^{\frac{3}{2}t\lambda} - \cos(\beta t))$$

no se anule. Sin más que sustituir en la primera ecuación del sistema (4.7) el valor de $y_0(t, \lambda)$ obtenido, reducimos el sistema a la ecuación

$$E(t, \lambda) = 0, \quad (4.9)$$

donde

$$E(t, \lambda) = \lambda^3\sqrt{3\lambda^2 + 4}((e^{2t\lambda} + 1) - (e^{t\lambda} + 1)\cos(\beta t)e^{\frac{t\lambda}{2}}) + (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)(e^{t\lambda} - 1)\operatorname{sen}(\beta t)e^{\frac{t\lambda}{2}}.$$

En el siguiente resultado probamos que las funciones $E(t, \lambda)$ y $D(t, \lambda)$ no se anulan simultáneamente para valores de t y λ estrictamente positivos. De esta forma, si existen \hat{t} y $\hat{\lambda}$ estrictamente positivos tales que $(t, \lambda) = (\hat{t}, \hat{\lambda})$ es una solución de la ecuación (4.9), entonces $D(\hat{t}, \hat{\lambda}) \neq 0$ y $(t, \lambda, y_0) = (\hat{t}, \hat{\lambda}, y_0(\hat{t}, \hat{\lambda}))$ es una solución del sistema (4.7). De esto, deducimos la equivalencia entre el sistema (4.7) y el sistema formado por las ecuaciones (4.8) y (4.9).

Lema 4.1 Para todo t y λ estrictamente positivos, el sistema (4.7) es equivalente al sistema formado por las ecuaciones (4.8) y (4.9).

Demostración: La demostración se llevará a cabo comprobando que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = 0, \\ D(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

no tiene solución para cualesquiera t y λ estrictamente positivos.

Supongamos que existen t_* y λ_* estrictamente positivos tales que (t_*, λ_*) es una solución del sistema (4.10), entonces realizando diversas transformaciones entre sus ecuaciones despejamos fácilmente las expresiones del seno y coseno,

$$\operatorname{sen}(\beta_* t_*) = \frac{\lambda^3 \sqrt{3\lambda^2 + 4} (e^{3t\lambda} - 1) e^{-\frac{3}{2}t\lambda}}{2(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)} \Bigg|_{(t_*, \lambda_*)}, \quad \operatorname{cos}(\beta_* t_*) = \frac{(e^{3t\lambda} + 1) e^{-\frac{3}{2}t\lambda}}{2} \Bigg|_{(t_*, \lambda_*)},$$

con $\beta_* = \sqrt{3\lambda_*^2 + 4}/2$.

A partir de las expresiones del seno y coseno obtenidas se tiene la relación

$$\operatorname{sen}^2(\beta_* t_*) + \operatorname{cos}^2(\beta_* t_*) - 1 = \frac{(\lambda^2 + 1)^3 (3\lambda^2 + 1) (e^{3t\lambda} - 1)^2 e^{-3t\lambda}}{(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)^2} \Bigg|_{(t_*, \lambda_*)} > 0$$

para cualquier valor de t_* y λ_* estrictamente mayor que cero. En consecuencia, el sistema (4.10) no posee solución y esto concluye la demostración. \square

En la Figura 4.2 se representan las curvas solución de las ecuaciones $E(t, \lambda) = 0$ y $D(t, \lambda) = 0$. Como puede apreciarse en una ampliación de dicha representación gráfica, véase la Figura 4.2(b), ambas curvas no se intersecan para valores de t y λ estrictamente positivos.

Observemos que, a pesar de que el parámetro λ debe ser estrictamente positivo, el conjunto de soluciones de la ecuación (4.9) tiene algunas propiedades de simetría por lo que resulta interesante analizarlo para valores no positivos del parámetro. Nótese que como $E(t, 0) = 0$ para todo t , eliminamos este cero de la función $E(t, \lambda)$ definiendo la función de clase C^∞

$$F(t, \lambda) = \begin{cases} \frac{E(t, \lambda)}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0, \\ 2t \operatorname{sen}(t) & \text{si } \lambda = 0, \end{cases}$$

en la cual el valor $F(t, 0)$ se ha obtenido imponiendo que la función sea continua en todo \mathbb{R}^2 .

Para estudiar esta función es conveniente realizar el cambio de variables $\tau = \sqrt{3\lambda^2 + 4} t/2$ de forma que obtenemos

$$G(\tau, \lambda) = F\left(\frac{2\tau}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right). \quad (4.11)$$

En el siguiente resultado se desarrollan algunas propiedades fundamentales de la función G .

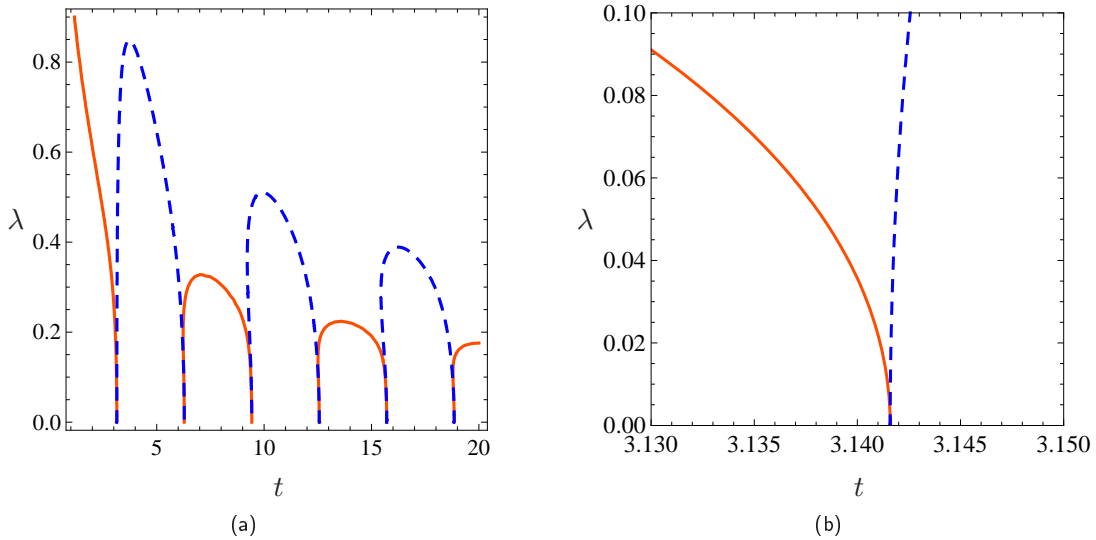


Figura 4.2: (a) Representación gráfica de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $D(t, \lambda)$. La línea discontinua corresponde a las soluciones de la ecuación $E(t, \lambda) = 0$, mientras que la línea continua es el conjunto de soluciones de la ecuación $D(t, \lambda) = 0$. En (b) se representa una ampliación de una zona de (a).

Lema 4.2 La función G satisface las siguientes propiedades:

- (a) La función $G(\tau, \lambda)$ se anula cuando $(\tau, \lambda) = (k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Más aún, si $\tau \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{N}^*$, entonces $\text{sign}(G(\tau, 0)) = (-1)^k$.
- (b) En cada punto $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{N}^*$, hay una bifurcación de tipo silla-nodo en el conjunto de ceros de la función G , es decir, se satisface que $G(k\pi, 0) = \frac{\partial G}{\partial \lambda}(k\pi, 0) = 0$, $\frac{\partial G}{\partial \tau}(k\pi, 0) \neq 0$ y $\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(k\pi, 0) \neq 0$.
- (c) La función $G(\tau, \lambda)$ satisface $G(\tau, \lambda) = \exp\left(\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}\right) \cdot G(\tau, -\lambda)$ para todo $(\tau, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.
- (d) Si $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, entonces $G(\tau, \lambda) > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (e) Dado $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ existe un único valor $\tilde{\lambda}(\tau) \geq 0$ tal que $G(\tau, \tilde{\lambda}(\tau)) = G(\tau, -\tilde{\lambda}(\tau)) = 0$. Más aún, si $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ entonces $\tilde{\lambda}(\tau) > 0$, $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\tau, \tilde{\lambda}(\tau)) > 0$ y $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\tau, -\tilde{\lambda}(\tau)) < 0$.
- (f) Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un único par $(\tau_k, \lambda_k) \in ((2k-1)\pi, 2k\pi) \times (0, +\infty)$ tal que $G(\tau_k, \lambda_k) = G(\tau_k, -\lambda_k) = 0$ y $\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau_k, \lambda_k) = \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau_k, -\lambda_k) = 0$. Más aún, se tiene que

$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau_k, \lambda_k) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau_k, -\lambda_k) \neq 0$ y así (τ_k, λ_k) y $(\tau_k, -\lambda_k)$ son puntos de silla del conjunto de ceros de la función G .

Demostración:

La prueba del apartado (a) es inmediata y la del apartado (c) es consecuencia directa de la relación $E(t, \lambda) = -e^{2t\lambda}E(t, -\lambda)$.

Por otro lado, es fácil comprobar que cuando $\lambda = 0$ se cumplen que $G(\tau, 0) = 2\tau \sin(\tau)$,

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\tau, 0) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau, 0) = 2(\tau \cos(\tau) + \sin(\tau)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(\tau, 0) = -\frac{3}{2}\tau(\tau \cos(\tau) + \sin(\tau)).$$

En particular, si $(\tau, 0) = (k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{N}^*$, se tiene

$$G(k\pi, 0) = \frac{\partial G}{\partial \lambda}(k\pi, 0) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \tau}(k\pi, 0) = 2k\pi(-1)^k \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(k\pi, 0) = -\frac{3}{2}k^2\pi^2(-1)^k \neq 0,$$

con esto se concluye la prueba del apartado (b).

Observemos que la prueba del apartado (d) cuando $\lambda = 0$ es inmediata, pues $G(\tau, 0) = 2\tau \sin(\tau)$ es estrictamente mayor que cero para todo $\tau \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, con $k \in \mathbb{N}^*$. En el caso en que $\lambda \neq 0$, para probar que $G(\tau, \lambda) > 0$ para todo $\tau \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, con $k \in \mathbb{N}^*$, escribimos la ecuación $G(\tau, \lambda) = 0$ como un sistema cuyas ecuaciones pueden considerarse, desde el punto de vista geométrico, como la ecuación de una recta y la de la circunferencia unidad. Más concretamente, haciendo el cambio de variables $X = \cos(\tau)$ e $Y = \sin(\tau)$ la ecuación $G(\tau, \lambda) = 0$ en las variables X e Y puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} r \equiv A(\tau, \lambda) + B(\tau, \lambda)X + C(\tau, \lambda)Y = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

donde, para todo $\lambda \neq 0$, los coeficientes están dados por

$$A(\tau, \lambda) = \lambda^2 \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right), \quad (4.13)$$

$$B(\tau, \lambda) = -\lambda^2 \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}, \quad (4.14)$$

$$C(\tau, \lambda) = \frac{1}{\lambda} (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}. \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\lambda} \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) > 0 \quad \text{para todo } \lambda \neq 0, \quad (4.16)$$

es directo ver que un punto $(X, Y) = (\cos(\tau), \sen(\tau))$ está por encima de cada recta r si, y sólo si, $G(\tau, \lambda) > 0$ y está por debajo de cada una de las rectas r si, y sólo si, $G(\tau, \lambda) < 0$.

La primera coordenada del punto de intersección de cada recta r con el eje de abscisas es

$$\tilde{X}(\tau, \lambda) = -\frac{A(\tau, \lambda)}{B(\tau, \lambda)} = \frac{e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1}{\left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}}, \quad (4.17)$$

que satisface

$$\tilde{X}(\tau, \lambda) - 1 = \frac{\left(e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right)^2 \left(\left(e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right)}{\left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}} > 0 \quad \text{para todo } \tau, \lambda > 0. \quad (4.18)$$

Por otro lado, la segunda coordenada del punto de intersección de cada recta r con el eje de ordenadas $X = 0$ es

$$\tilde{Y}(\tau, \lambda) = -\frac{A(\tau, \lambda)}{C(\tau, \lambda)} = -\frac{\lambda^3 \sqrt{3\lambda^2+4} \left(e^{\frac{4\lambda\tau}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) e^{-\frac{\lambda\tau}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}}{(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \left(e^{\frac{2\lambda\tau}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right)} \quad (4.19)$$

y la pendiente de cada recta r es

$$\tilde{m}(\tau, \lambda) = -\frac{B(\tau, \lambda)}{C(\tau, \lambda)} = \frac{\lambda^3 \sqrt{3\lambda^2+4} \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right)}{(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right)}. \quad (4.20)$$

Es obvio, por la desigualdad (4.16), que $\tilde{m}(\tau, \lambda)$ es estrictamente positiva, para todo $\tau, \lambda > 0$. De ese modo, cualquier solución $(X, Y) = (\cos(\tau), \sen(\tau))$ del sistema (4.12) satisface que $Y < 0$.

Si $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, es obvio que $Y = \sen \tau > 0$. Así pues, la función $G(\tau, \lambda)$ es estrictamente positiva, por lo que se concluye la prueba del apartado (d).

Para probar el apartado (e) nos apoyaremos también en la idea geométrica descrita anteriormente.

En el caso particular de que $\tau = k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$G(k\pi, \lambda) = A(k\pi, \lambda) + (-1)^k B(k\pi, \lambda),$$

con $A(\tau, \lambda)$ y $B(\tau, \lambda)$ dadas por las expresiones (4.13) y (4.14). De esta igualdad es inmediato probar que $G(k\pi, \lambda) = 0$ si, y sólo si, $\lambda = 0$.

Fijamos ahora $\tau \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{N}$. Por el apartado (a), tenemos que $G(\tau, 0) < 0$. Por otro lado, como

$$\tilde{X}_\infty(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \tilde{X}(\tau, \lambda) = \frac{e^{\frac{4\tau}{\sqrt{3}}} + 1}{e^{\sqrt{3}\tau} + e^{\frac{\tau}{\sqrt{3}}}} \quad \text{y} \quad \tilde{Y}_\infty(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \tilde{Y}(\tau, \lambda) = -\frac{e^{-\frac{\tau}{\sqrt{3}}} (e^{\frac{4\tau}{\sqrt{3}}} + 1)}{\sqrt{3} (e^{\frac{2\tau}{\sqrt{3}}} - 1)},$$

es inmediato deducir que el límite de la recta r cuando $\lambda = +\infty$ está por debajo de la circunferencia unidad. Esto es una consecuencia directa de la desigualdad

$$\frac{1}{(\tilde{X}_\infty(\tau))^2} + \frac{1}{(\tilde{Y}_\infty(\tau))^2} - 1 = -\frac{(e^{\frac{2\tau}{\sqrt{3}}} - 1)^4}{(e^{\frac{4\tau}{\sqrt{3}}} + 1)^2} < 0 \quad \text{para todo } \tau > 0.$$

Así pues, la función $G(\tau, \lambda)$ es estrictamente positiva para todo λ suficientemente grande. Por consiguiente, debe existir al menos un valor positivo $\tilde{\lambda}(\tau)$ de tal modo que $G(\tau, \tilde{\lambda}(\tau)) = 0$.

Para probar la unicidad de $\tilde{\lambda}(\tau)$ vamos a analizar la derivada de las funciones $\tilde{X}(\tau, \lambda)$ y $\tilde{m}(\tau, \lambda)$ con respecto al parámetro λ . Por un lado, es inmediato ver que la derivada

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \lambda}(\tau, \lambda) = \frac{4\tau \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) \left(\left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 4 \right) e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right)}{(3\lambda^2 + 4)^{3/2} \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right)^2 e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}}$$

es estrictamente positiva para todo $\lambda > 0$. Por otro lado, la derivada de la función \tilde{m} respecto a λ puede escribirse como

$$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial \lambda}(\tau, \lambda) = \frac{4\lambda^2 \left(3(\lambda^2 + 1)^2 \sqrt{3\lambda^2 + 4} \sinh \left(\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \right) - \tau\lambda(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \right)}{(3\lambda^2 + 4)(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)^2 \sinh^2 \left(\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \right)}$$

cuyo signo está determinado por la función

$$H(\tau, \lambda) = 3(\lambda^2 + 1)^2 \sqrt{3\lambda^2 + 4} \sinh\left(\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}\right) - \tau\lambda(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2).$$

Realizando el cambio de variables $\tilde{\tau} = 2\tau\lambda/\sqrt{3\lambda^2 + 4}$, sobre la función H obtenemos

$$\tilde{H}(\tilde{\tau}, \lambda) = H\left(\frac{\sqrt{3\lambda^2 + 4}\tilde{\tau}}{2\lambda}, \lambda\right) = \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(\frac{3}{2}\lambda^2(\lambda^2 + 2)(2\sinh(\tilde{\tau}) - \tilde{\tau}) + 3\sinh(\tilde{\tau}) - \tilde{\tau}\right),$$

que es estrictamente positiva para todo $\tilde{\tau} > 0$. Así pues, la derivada de \tilde{m} respecto de λ es estrictamente positiva para todo $\lambda > 0$. En consecuencia, existe un único valor $\tilde{\lambda}(\tau) > 0$ de tal modo que $G(\tau, \tilde{\lambda}(\tau)) = 0$. Otra consecuencia directa es que la derivada parcial de la función G respecto a λ es positiva en $(\tau, \tilde{\lambda}(\tau))$. Usando el apartado (c) tenemos que $G(\tau, -\tilde{\lambda}(\tau)) = 0$ y $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\tau, -\tilde{\lambda}(\tau)) < 0$, con esto concluimos la prueba del apartado (e).

Nótese que a partir del apartado (e) podemos definir una única función

$$\tilde{\lambda} : \tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [(2k - 1)\pi, 2k\pi] \rightarrow [0, +\infty)$$

tal que $G(\tau, \tilde{\lambda}(\tau)) = 0$. Debido a que G es una función analítica y satisface los apartados (a)–(e), entonces $\tilde{\lambda}$ es continua en cada uno de los intervalos $[(2k - 1)\pi, 2k\pi]$, analítica en cada intervalo abierto $((2k - 1)\pi, 2k\pi)$ y $\tilde{\lambda}(k\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De ese modo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe al menos un valor $\tau_k \in ((2k - 1)\pi, 2k\pi)$ tal que $\tilde{\lambda}'(\tau_k) = 0$.

Para probar el apartado (f) tenemos que asegurar la unicidad de cada τ_k . Para ello, es suficiente comprobar que $\tilde{\lambda}''(\tau)$ es negativa cuando $\tilde{\lambda}'(\tau) = 0$. Más concretamente, teniendo en cuenta que

$$\tilde{\lambda}''(\tau) = -\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau, \tilde{\lambda}(\tau)) \Big/ \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\tau, \tilde{\lambda}(\tau))$$

cuando $\tilde{\lambda}'(\tau) = 0$, es suficiente probar que la derivada segunda $\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau, \lambda)$ es positiva cuando $G(\tau, \lambda)$ y $\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau, \lambda)$ se anulan.

Nótese que para $\lambda \neq 0$, el sistema $G(\tau, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau, \lambda) = 0$ puede escribirse como

$$\begin{cases} A(\tau, \lambda) + B(\tau, \lambda) \cos(\tau) + C(\tau, \lambda) \sin(\tau) = 0, \\ \bar{A}(\tau, \lambda) + \bar{B}(\tau, \lambda) \cos(\tau) + \bar{C}(\tau, \lambda) \sin(\tau) = 0, \end{cases} \quad (4.21)$$

donde las funciones A , B y C están dadas por las expresiones (4.13)–(4.15) y

$$\begin{aligned}\bar{A}(\tau, \lambda) &= 4\lambda^3 e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}, \\ \bar{B}(\tau, \lambda) &= -\frac{2}{\lambda} \left(2\lambda^4 + 3\lambda^2 - (3\lambda^2 + 1)e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}, \\ \bar{C}(\tau, \lambda) &= \frac{2}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \left((6\lambda^4 + 11\lambda^2 + 3)e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - \lambda^2 - 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}.\end{aligned}$$

El determinante de la matriz de coeficientes $(\cos(\tau), \sin(\tau))$ en el sistema (4.21) es

$$\begin{aligned}K(\tau, \lambda) &= \det \begin{pmatrix} B(\tau, \lambda) & C(\tau, \lambda) \\ \bar{B}(\tau, \lambda) & \bar{C}(\tau, \lambda) \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \left[2\lambda^4(3\lambda^4 + 5\lambda^2 + 1)e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + (\lambda^2 + 1)^3(3\lambda^2 + 1) \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) \right]^2 e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}},\end{aligned}$$

que es negativo para todo $\lambda \neq 0$. Además, al ser (τ, λ) una solución del sistema (4.21) entonces

$$\sin(\tau) = \frac{2\lambda\sqrt{3\lambda^2+4} \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) \left((\lambda^2 + 1)(2\lambda^2 + 1) \left(e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) + 2\lambda^4 e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}}{K(\tau, \lambda)}$$

y

$$\cos(\tau) = \frac{2\lambda^2 \left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) \left((\lambda^2 + 1) \left(e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) - 2(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}}{K(\tau, \lambda)}.$$

Más aún, sustituyendo las expresiones de $\sin(\tau)$ y $\cos(\tau)$ en la expresión de la derivada $\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}$ y haciendo algunas manipulaciones, obtenemos

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau, \lambda) = -\frac{(3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} L(\tau, \lambda)}{\sqrt{3\lambda^2+4} K(\tau, \lambda)} \quad (4.22)$$

con

$$\begin{aligned}L(\tau, \lambda) &= (\lambda^2 + 1)^2 \left((\lambda^2 + 1) \left(e^{\frac{8\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) + 2(3\lambda^2 + 1)e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} \right) + \\ &+ 2(\lambda^6 - 3\lambda^2 - 1) \left(e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}.\end{aligned}$$

A partir de la expresión (4.22) tenemos que el signo de la derivada segunda de $G(\tau, \lambda)$ coincide con el signo de $L(\tau, \lambda)$. Realizando el cambio de variable $u = \exp(2\tau\lambda/\sqrt{3\lambda^2+4}) > 1$ sobre la función

$L(\tau, \lambda)$ obtenemos el polinomio

$$\begin{aligned} \tilde{L}(u, \lambda) = & (u^4 + 2u^3 + 6u^2 + 2u + 1) \lambda^6 + (3u^4 + 14u^2 + 3) \lambda^4 + \\ & + [3(u^2 + 1)(u - 1)^2 + 4u^2] \lambda^2 + (u - 1)^2 (u^2 + 1). \end{aligned}$$

Como todos los coeficientes de \tilde{L} son positivos para todo $u > 1$, deducimos que $L(\tau, \lambda) > 0$ para todo $\tau, \lambda > 0$. En consecuencia, concluimos que la derivada $\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau, \lambda)$ es positiva para todo $\tau, \lambda > 0$ y con esto finalizamos la prueba. □

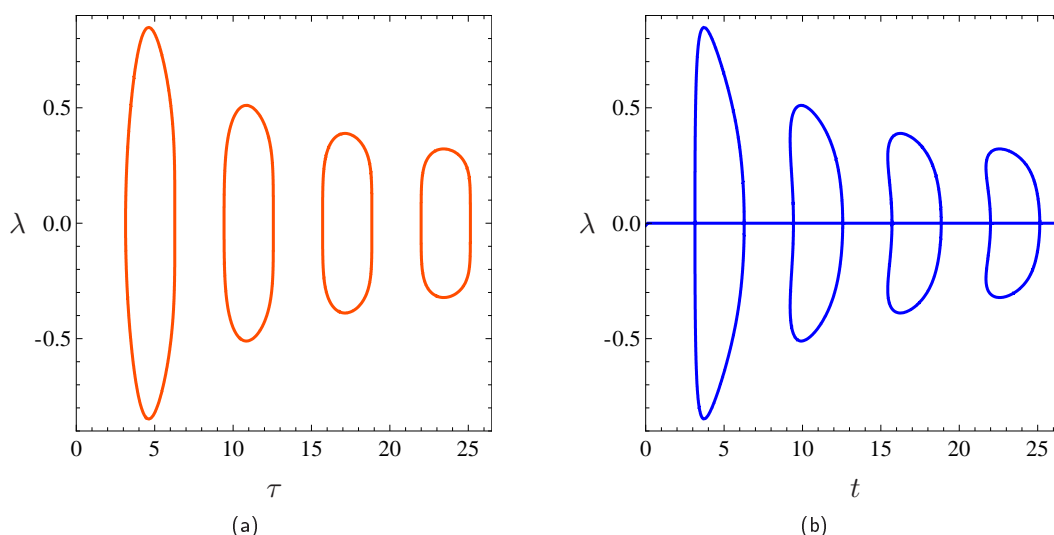


Figura 4.3: Representación gráfica de: (a) ceros de la función $G(\tau, \lambda)$ para todo τ y λ ; (b) ceros de la función $E(t, \lambda)$ para todo t y λ .

El Lema 4.2 describe el conjunto de ceros de la función $G(\tau, \lambda)$, dada por la expresión (4.11). Este conjunto está formado por infinitas curvas cerradas y aisladas. De tal modo que, $G(\tau, \lambda)$ es negativa en las regiones encerradas por la curva $G(\tau, \lambda) = 0$ y positiva en el exterior de dichas regiones. En la Figura 4.3(a) se muestra algunas de las curvas cerradas correspondientes al conjunto de ceros de la función $G(\tau, \lambda)$. En particular, para cada una de estas curvas se distinguen dos tipos de puntos de silla. Los que se dan en el apartado (e) del Lema 4.2, que corresponden al máximo (respectivamente al mínimo) valor del parámetro λ . Por otro lado, los puntos de la curva donde $\lambda = 0$ son los puntos

de silla dados en el apartado (b). Nótese que estos puntos son singularidades de tipo pitchfork para el conjunto de ceros de la función E donde $E(t, 0) = 0$ para cada t . En la Figura 4.3(b) se muestra una parte del conjunto de ceros de la función E . Nótese que este conjunto corresponde a la imagen mediante $t = 2\tau/\sqrt{3\lambda^2 + 4}$ de las curvas que representamos en la Figura 4.3(a) junto con la recta $\lambda = 0$.

Ahora analizamos las órbitas periódicas reversibles de dos cortes cuyo periodo es menor que 4π , es decir, $t < 2\pi$. Nótese que la órbita periódica correspondiente a la curva con $\tau \in [\pi, 2\pi]$ en la Figura 4.3(a) tiene periodo menor que 4π con $t = 2\tau/\sqrt{3\lambda^2 + 4} \leq \tau$. A continuación probaremos que las posibles órbitas periódicas correspondientes a las otras curvas, con $\tau \geq 3\pi$, no pueden tener el periodo menor que 4π . Más concretamente, veremos que todas estas curvas pertenecen a la región $\Gamma_\tau = \{(\tau, \lambda) \in [3\pi, +\infty) \times (-1, 1)\}$, cuya imagen mediante el cambio $t = 2\tau/\sqrt{3\lambda^2 + 4}$ está en $\{(t, \lambda) \in (2\pi, +\infty) \times (-1, 1)\}$.

Lema 4.3 La imagen del conjunto $\{(\tau, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : G(\tau, \lambda) = 0, \tau \geq 3\pi\}$ mediante el cambio de variables $t = 2\tau/\sqrt{3\lambda^2 + 4}$ está contenida en la región $\Gamma_t = \{(t, \lambda) \in (2\pi, +\infty) \times (-1, 1)\}$.

Demostración:

Comenzamos la demostración probando que la función G es positiva para todo $\tau \geq 3\pi$ y $\lambda \geq 1$. Para ello, siguiendo la idea geométrica de la prueba del Lema 4.2, es suficiente ver que la recta r definida por (4.12) está por debajo de la circunferencia unidad cuando $\tau \geq 3\pi$ y $\lambda \geq 1$.

Como las funciones \tilde{X} and \tilde{m} , dadas por las expresiones (4.17) y (4.20), son crecientes respecto a λ para cada τ fijo, es suficiente probar que la recta r queda por debajo de la circunferencia para $\tau \geq 3\pi$ y $\lambda = 1$.

Cuando $\lambda = 1$, los puntos de intersección de la recta r con los ejes coordenados son $(\tilde{X}(\tau, 1), 0)$ e $(0, \tilde{Y}(\tau, 1))$, con

$$\tilde{X}(\tau, 1) = \frac{e^{\frac{4\tau}{\sqrt{7}}} + 1}{(e^{\frac{2\tau}{\sqrt{7}}} + 1)e^{\frac{\tau}{\sqrt{7}}}} \quad \text{e} \quad \tilde{Y}(\tau, 1) = -\frac{\sqrt{7}(e^{\frac{4\tau}{\sqrt{7}}} + 1)}{11(e^{\frac{2\tau}{\sqrt{7}}} - 1)e^{\frac{\tau}{\sqrt{7}}}}.$$

Observemos que la recta está por debajo de la circunferencia unidad si se satisface la desigualdad

$\tilde{X}^{-2}(\tau, 1) + \tilde{Y}^{-2}(\tau, 1) - 1 < 0$. Como

$$\frac{1}{\left(\tilde{X}(\tau, 1)\right)^2} + \frac{1}{\left(\tilde{Y}(\tau, 1)\right)^2} - 1 = -\frac{\left(e^{\frac{2\tau}{\sqrt{7}}} - 1\right)^2 \left(7e^{\frac{4\tau}{\sqrt{7}}} - 114e^{\frac{2\tau}{\sqrt{7}}} + 7\right)}{7\left(e^{\frac{4\tau}{\sqrt{7}}} + 1\right)^2},$$

es necesario probar que la función $p(\tau) = 7e^{\frac{4\tau}{\sqrt{7}}} - 114e^{\frac{2\tau}{\sqrt{7}}} + 7$ es positiva para todo $\tau \geq 3\pi$. Realizando el cambio de variable $s = e^{\frac{2\tau}{\sqrt{7}}}$ sobre p obtenemos el polinomio $q(s) = 7s^2 - 114s + 7$, que es positivo para todo $s \geq e^{\frac{6\pi}{\sqrt{7}}}$. En consecuencia, el conjunto $\{(\tau, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : G(\tau, \lambda) = 0, \tau \geq 3\pi\}$ está contenido en la región $\Gamma_\tau = \{(\tau, \lambda) \in [3\pi, +\infty) \times (-1, 1)\}$.

Por otro lado, la imagen de cada semirrecta $\{(\tau, \lambda) \in \mathbf{R}^2 : \tau = \text{cte}, \lambda > 0\}$, mediante la transformación $t = 2\tau/\sqrt{3\lambda^2 + 4}$, es una curva decreciente respecto a λ . La prueba concluye teniendo en cuenta que la imagen del punto $(\tau, \lambda) = (3\pi, 1)$ pertenece a $\Gamma_t = \{(t, \lambda) \in (2\pi, +\infty) \times (-1, 1)\}$. \square

En la siguiente proposición aseguramos que se satisface la desigualdad $\hat{y}_0 < 0$ para cada $\hat{t}, \hat{\lambda}$ y $\hat{\mathbf{p}}_0 = (0, \hat{y}_0, 0)$ que verifican la condición O1. Obsérvese que si la terna $(t, \lambda, y_0) = (\hat{t}, \hat{\lambda}, \hat{y}_0)$ satisface la condición O1, entonces (t, λ) es un cero de la función $E(t, \lambda)$ e y_0 está dado por la expresión (4.8). Por otro lado, si existen $\hat{t}, \hat{\lambda} > 0$ estrictamente positivos tales que $(t, \lambda) = (\hat{t}, \hat{\lambda})$ es una solución de la ecuación $E(t, \lambda) = 0$, entonces por el Lema 4.2 se tiene que $\sin(\beta t) < 0$ y el denominador de (4.8) es negativo. De esto deducimos que el signo de y_0 coincide con el signo de

$$H(t, \lambda) = (3\lambda^2 + 2) \sin(\beta t) + \lambda \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(e^{\frac{3\lambda}{2}t} - \cos(\beta t) \right). \quad (4.23)$$

Realizando el cambio de variable

$$\tau = \frac{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{2} t,$$

sobre H obtenemos la función

$$J(\tau, \lambda) = (3\lambda^2 + 2) \sin(\tau) + \lambda \left(e^{\frac{3\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}} - \cos(\tau) \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4}. \quad (4.24)$$

En el siguiente lema se detallan algunas propiedades fundamentales de la función J que son análogas a las descritas en el Lema 4.2 para la función G , por lo que omitimos su prueba.

Lema 4.4 La función J satisface las siguientes propiedades:

- (a) Si $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, entonces $J(\tau, \lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$.
- (b) Dado $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$, existe un único valor $\bar{\lambda}(\tau) \geq 0$ tal que $J(\tau, \bar{\lambda}(\tau)) = 0$. Este valor $\bar{\lambda}(\tau)$ se anula en $\tau = k\pi$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Más aún, si $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, entonces $\bar{\lambda}(\tau) > 0$ y $\frac{\partial J}{\partial \lambda}(\tau, \bar{\lambda}(\tau)) > 0$.
- (c) Si $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, entonces $J(\tau, \lambda) < 0$ cuando $0 < \lambda < \bar{\lambda}(\tau)$ y $J(\tau, \lambda) > 0$ para todo $\lambda > \bar{\lambda}(\tau)$.
- (d) La función $\bar{\lambda}(\tau)$ posee un único máximo para cada $\tau \in ((2k-1)\pi, 2\pi)$, con $k \geq 1$.

Proposición 4.5 Supongamos que existen $t, \lambda > 0$ tales que (t, λ, y_0) es una solución del sistema (4.2), entonces $y_0 < 0$.

Demostración:

Para probar la tesis de esta proposición es suficiente demostrar que $J(\tau, \lambda) > 0$ para cualquier (τ, λ) , con $\tau, \lambda > 0$, del conjunto de ceros de la función G (véase la Figura 4.4). Es decir, se tiene que verificar la desigualdad $\bar{\lambda}(\tau) < \tilde{\lambda}(\tau)$ para todo $\tau \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, donde $\tilde{\lambda}$ y $\bar{\lambda}$ son las funciones definidas en los lemas 4.2 y 4.4. Para ello, veremos que si $X \geq -1$ e $Y \leq 0$, entonces la recta

$$\bar{r} \equiv (3\lambda^2 + 2)Y + \lambda \left(e^{\frac{3\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - X \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} = 0, \quad (4.25)$$

obtenida substituyendo $X = \cos \tau$ e $Y = \sin \tau$ en (4.24), está por debajo de la recta r dada en (4.12), para cada $\tau \geq \pi$ y $\lambda > 0$, véase la Figura 4.5. La idea es comparar la posición relativa de las rectas r y \bar{r} cuando cortan a $Y = 0$ y $X = -1$.

La primera coordenada del punto de corte de la recta \bar{r} con el eje horizontal $Y = 0$ es $\bar{X}(\tau, \lambda) = \exp\left(\frac{3\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}\right)$. Por otro lado, la intersección entre la recta r e $Y = 0$ es $\tilde{X}(\tau, \lambda)$ dado en (4.17). Obsérvese que

$$\bar{X}(\tau, \lambda) - \tilde{X}(\tau, \lambda) = \frac{e^{\frac{4\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1}{\left(e^{\frac{2\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1\right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}} > 0 \quad \text{para todo } \tau, \lambda > 0,$$

por lo que $\bar{X}(\tau, \lambda) > \tilde{X}(\tau, \lambda)$ cuando $\tau, \lambda > 0$.

Por otro lado, la segunda coordenada de los puntos de intersección de las rectas r, \bar{r} con $X = -1$ están dadas por

$$\tilde{Y}_1(\tau, \lambda) = -\frac{\lambda^3 \left(e^{\frac{3\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) \sqrt{3\lambda^2+4} e^{-\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}}{(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \left(e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right)} \quad \text{e} \quad \bar{Y}_1(\tau, \lambda) = -\frac{\lambda \left(e^{\frac{3\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) \sqrt{3\lambda^2+4}}{3\lambda^2 + 2},$$

respectivamente. Por lo tanto, el signo de

$$\bar{Y}_1(\tau, \lambda) - \tilde{Y}_1(\tau, \lambda) = \frac{-\lambda \left(e^{\frac{3\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} + 1 \right) \left((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \left(e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 3\lambda^4 - 2\lambda^2 \right) \sqrt{3\lambda^2+4}}{(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 2) \left(e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}}}$$

está determinado, para todo $\tau, \lambda > 0$, por el signo de la función

$$\begin{aligned} P(\tau, \lambda) &= (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \left(e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 3\lambda^4 - 2\lambda^2 = \\ &= (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \left(\left(e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} - 1 \right) + 2(2\lambda^2 + 1). \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $s = \exp(\tau\lambda/\sqrt{3\lambda^2+4})$ transformamos $P(\tau, \lambda)$ en el polinomio

$$Q(s, \lambda) = (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)((s-1)s-1) + 2(2\lambda^2 + 1).$$

Obsérvese que para $\lambda > 0$ y $\tau \geq \pi$ tenemos

$$s = e^{\frac{\tau\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} \geq e^{\frac{\pi\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} > e^{\frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} > 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+4}} + \frac{\lambda^2}{6\lambda^2+8} := \tilde{s}. \quad (4.26)$$

Teniendo en cuenta que $Q(\tilde{s}, \lambda) > 0$ y $\frac{\partial Q}{\partial s}(\tilde{s}, \lambda) > 0$, deducimos que $P(\tau, \lambda) > 0$ para $\lambda > 0$ y $\tau \geq \pi$ por lo que $\bar{Y}_1(\tau, \lambda) < \tilde{Y}_1(\tau, \lambda)$, de donde se concluye la prueba. \square

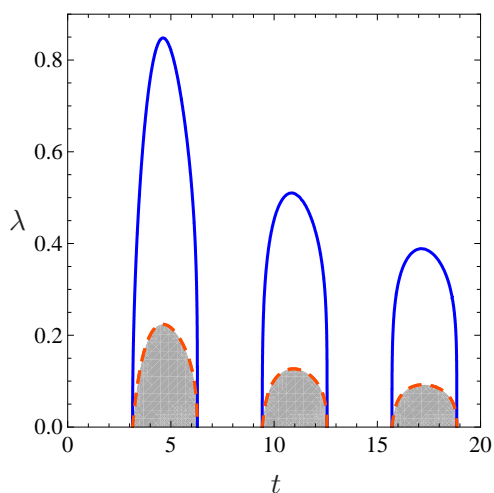


Figura 4.4: Representación gráfica de los ceros de la función $G(\tau, \lambda)$ (en trazo continuo) y de los ceros de $J(t, \lambda)$ (en trazo discontinuo), para todo $t, \lambda > 0$. Se ha sombreado la zona donde la función $J(t, \lambda)$ es estrictamente menor que cero, para todo $t, \lambda > 0$.

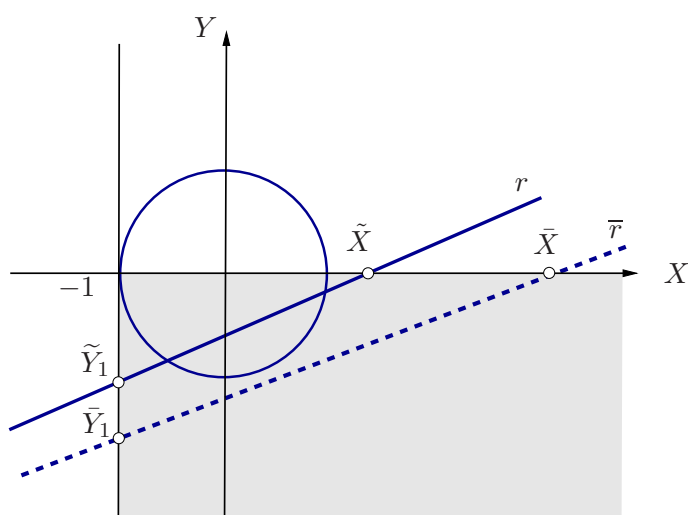


Figura 4.5: Representación gráfica de las rectas r y \bar{r} , dadas por (4.12) y (4.25) respectivamente, en el plano de coordenadas (X, Y) . Se ha sombreado la zona donde $X \geq -1$ e $Y \leq 0$. Se observa que \bar{r} está por debajo de r cuando $X \geq -1$ e $Y \leq 0$.

Observemos que para que exista una órbita periódica reversible de dos cortes se tiene que satisfacer la condición (4.3). Esto también puede comprobarse viendo que

$$y_0 + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2(3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1) \operatorname{sen}(\beta t)}{\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) \lambda^5 - e^{\frac{3t\lambda}{2}} \sqrt{3\lambda^2 + 4} \lambda^5 + (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta t) \lambda^2} > 0 \quad (4.27)$$

para $y_0 = y_0(t, \lambda)$ dado por (4.8) y (t, λ) es solución de $E(t, \lambda) = 0$ con $t, \lambda > 0$.

Consideremos ahora la condición O2 cuando $\pi \leq \tau = \sqrt{3\lambda^2 + 4}t/2 \leq 2\pi$. Obsérvese que la segunda componente de la solución del sistema en el semiespacio $\{x < 0\}$ con punto inicial $\mathbf{p}_0 = (0, y_0, 0)$ está dada por

$$y_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = \frac{e^{-\frac{t\lambda}{2}}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left\{ \sqrt{3\lambda^2 + 4} (\lambda^2 y_0 + 1) e^{\frac{3\lambda t}{2}} + \right. \\ \left. + \sqrt{3\lambda^2 + 4} [(1 + 2\lambda^2)y_0 - 1] \cos(\beta t) + \lambda (y_0 - 3) \operatorname{sen}(\beta t) \right\}, \quad (4.28)$$

De ese modo, si (t, λ) es una solución de la ecuación (4.9) con $t, \lambda > 0$ tal que $\pi \leq \tau = \sqrt{3\lambda^2 + 4}t/2 \leq 3\pi/2$ e y_0 es el valor definido en (4.8), entonces $y_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda)$ es estrictamente positivo, ya que de la Proposición 4.5, $y_0 < 0$ y, siguiendo la desigualdad (4.27), $1 + \lambda^2 y_0 > 0$. Así, si no se satisface la condición O2, entonces $\sqrt{3\lambda^2 + 4}t/2 > 3\pi/2$.

Ahora vamos a analizar la condición O1 junto con la igualdad $y_{\mathbf{p}_0}(\hat{t}, \hat{\lambda}) = 0$, donde $\mathbf{p}_0 = (0, y_0, 0)$ e y_0 viene dado por la expresión (4.8). Esto es, estudiamos la posibilidad de aparición de una órbita periódica reversible de dos cortes con tangencia transversal.

Despejando del sistema (4.7) podemos obtener los valores de las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\beta t) = -\frac{(\lambda^2 y_0 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}(e^{t\lambda} - 1)e^{\frac{t\lambda}{2}}}{2\lambda \left(1 - (\lambda^2 + 2)y_0 + (\lambda^2 + 1)^2 y_0^2\right)}, \quad (4.29)$$

$$\operatorname{cos}(\beta t) = \frac{e^{\frac{t\lambda}{2}} \left(2 + 3\lambda^2 - (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_0 + e^{t\lambda} (\lambda^2 y_0 + 1) (2 - \lambda^2 + 2(\lambda^2 + 1)^2 y_0)\right)}{2\lambda^2 \left(1 - (\lambda^2 + 2)y_0 + (\lambda^2 + 1)^2 y_0^2\right)}. \quad (4.30)$$

Obsérvese que el denominador de ambas expresiones es estrictamente positivo ya que $y_0 < 0$, véase la Proposición 4.5.

Sustituyendo las expresiones del seno y coseno dadas, respectivamente, por (4.29) y (4.30) en

(4.28) se obtiene

$$y_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda, y_0) = \frac{e^{t\lambda} (\lambda^2 y_0 + 1) - 1}{\lambda^2}, \quad (4.31)$$

donde $y_0 = y_0(t, \lambda)$ está dada por la expresión (4.8).

Reemplazando en (4.31) el valor de y_0 , dado por (4.8), se tiene la expresión

$$y_1(t, \lambda) = \frac{((\lambda^2 + 1) ((6\lambda^2 + 2)e^{t\lambda} - 3\lambda^2 - 2) - \lambda^2) \operatorname{sen}(\beta t) + \lambda^3 (e^{\frac{3}{2}\lambda t} - \cos(\beta t)) \sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda^2 \left((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta t) - \lambda^3 \sqrt{3\lambda^2 + 4} (e^{\frac{3}{2}\lambda t} - \cos(\beta t)) \right)} \quad (4.32)$$

Debemos centrarnos por tanto en el estudio de la existencia de solución del sistema

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = 0, \\ y_1(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (4.33)$$

donde $E(t, \lambda)$ está dada por (4.9) e $y_1(t, \lambda)$ está dada (4.32).

Seguidamente vamos a construir un sistema equivalente a (4.33), realizando diversas combinaciones y simplificaciones entre sus ecuaciones, que nos permita determinar la existencia de solución del sistema (4.33).

Comenzamos multiplicando la ecuación (4.9) por $e^{\frac{3\lambda}{2}t}$ y la segunda ecuación del sistema (4.33) por $(1 + e^{2t\lambda})e^{-\frac{\lambda}{2}t}$. Sumando el resultado de ambas operaciones obtenemos la ecuación en senos y cosenos siguiente:

$$-e^{-\frac{t\lambda}{2}} \left\{ [-2 - 3\lambda^2(\lambda^2 + 2) + 2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + \lambda^2(3\lambda^2 + 2)e^{3t\lambda}] \operatorname{sen}(\beta t) + \lambda^3 \sqrt{3\lambda^2 + 4} (e^{3t\lambda} - 1) \cos(\beta t) \right\} = 0,$$

que es equivalente a la ecuación

$$\widehat{E}(t, \lambda) = 0, \quad (4.34)$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{E}(t, \lambda) &= \lambda^3 \sqrt{3\lambda^2 + 4} (e^{3t\lambda} - 1) \cos(\beta t) \\ &+ [-2 - 3\lambda^2(\lambda^2 + 2) + 2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + \lambda^2(3\lambda^2 + 2)e^{3t\lambda}] \operatorname{sen}(\beta t). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por otro lado, una combinación entre las ecuaciones (4.9) y (4.34) nos permiten despejar las

expresiones del seno y del coseno

$$\text{sen}(\beta t) = \frac{\lambda^3 \sqrt{3\lambda^2 + 4} (e^{3t\lambda} - 1) e^{-\frac{3t\lambda}{2}}}{2 [1 + 2\lambda^2 - (\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda}]}, \quad (4.36)$$

$$\text{cos}(\beta t) = \frac{e^{-\frac{3t\lambda}{2}} [2 + 6\lambda^2 + 3\lambda^4 - 2(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} - \lambda^2(2 + 3\lambda^2)e^{3t\lambda}]}{2 [1 + 2\lambda^2 - (\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)e^{t\lambda}]}. \quad (4.37)$$

A partir, de las expresiones del seno y coseno, dadas por (4.36) y (4.37), y utilizando la fórmula fundamental de trigonometría se obtiene la expresión

$$\frac{(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)(e^{t\lambda} - 1)^2 [1 + e^{t\lambda}(1 + e^{t\lambda})][(\lambda^2 + 1)^2 - (2\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + \lambda^4 e^{2t\lambda}]}{[1 + 2\lambda^2 - (3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)e^{t\lambda}]^2 e^{3t\lambda}} = 0. \quad (4.38)$$

Después de eliminar denominadores en (4.38) se tiene la ecuación $\widehat{p}(t, \lambda) = 0$, donde

$$\widehat{p}(t, \lambda) = (\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 1)(e^{t\lambda} - 1)^2 [1 + e^{t\lambda}(1 + e^{t\lambda})][(\lambda^2 + 1)^2 - (2\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + \lambda^4 e^{2t\lambda}]. \quad (4.39)$$

Obsérvese que el signo de (4.39) coincide con el signo que toma el polinomio

$$\psi(t, \lambda) = (\lambda^2 + 1)^2 - (2\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} + \lambda^4 e^{2t\lambda}, \quad (4.40)$$

ya que los factores $(\lambda^2 + 1)$, $(3\lambda^2 + 1)$, $(e^{t\lambda} - 1)^2$ y $[1 + e^{t\lambda}(1 + e^{t\lambda})]$ son positivos y distintos de cero para $t, \lambda > 0$.

En consecuencia, a partir del sistema de ecuaciones (4.33) hemos obtenido el sistema

$$\begin{cases} \widehat{E}(t, \lambda) = 0, \\ \psi(t, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Para que ambos sistemas sean equivalentes bastará añadir la condición $\text{sen}(\beta t) < 0$, para valores de t y λ estrictamente mayores que cero.

En la Figura 4.6 se muestran los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ e $y_1(t, \lambda)$, dadas respectivamente por las expresiones (4.9) y (4.32). A partir de esta representación gráfica podemos observar la existencia de solución del sistema (4.33). En el Lema 4.6 probaremos analíticamente la existencia de al menos una solución del sistema (4.33).

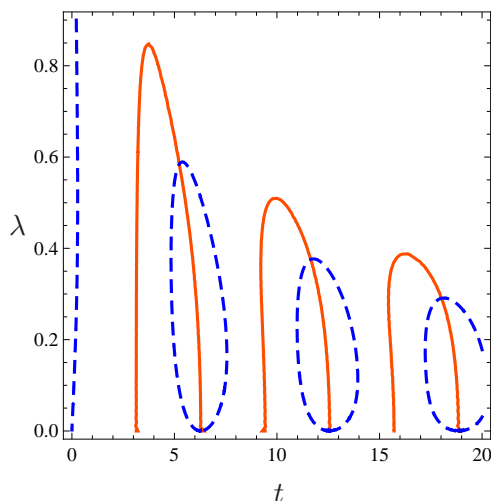


Figura 4.6: Representación gráfica de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ e $y_1(t, \lambda)$ para todo t y λ . La línea continua corresponde a las soluciones de la ecuación $E(t, \lambda) = 0$, mientras que la línea discontinua es el conjunto de soluciones de la ecuación $y_1(t, \lambda) = 0$.

Lema 4.6 El sistema (4.33) tiene al menos una solución en el interior de la región

$$\Omega_T = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1, \frac{3\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \leq t \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \right\}.$$

Demostración:

Sabemos que los sistemas de ecuaciones (4.33) y (4.41) son equivalentes cuando se añade la condición $\sin(\beta t) < 0$. Por tanto, para probar que el sistema (4.33) tiene al menos una solución demostraremos, aplicando el Teorema de Poincaré-Miranda (véase Teorema 3.2), que existe al menos $t_T > 0$ y $\lambda_T > 0$ tal que $(t, \lambda) = (t_T, \lambda_T)$ es una solución del sistema (4.41).

Para ello, probaremos que las funciones $\widehat{E}(t, \lambda)$ y $\psi(t, \lambda)$, dadas respectivamente por las expresiones (4.35) y (4.40), satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.

Es fácil deducir que la función $\widehat{E}\left(\frac{3\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right)$ es negativa para todo $\lambda \geq 0$, ya que

$$\begin{aligned} \widehat{E}\left(\frac{3\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) &= (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) - (6\lambda^4 + 8\lambda^2 + 2)e^{t\lambda} - \lambda^2(3\lambda^2 + 2)e^{3t\lambda} \Big|_{t=\frac{3\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}} \\ &= (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)(1 - e^{t\lambda}) - \lambda^2(3\lambda^2 + 2)(1 + e^{2t\lambda})e^{t\lambda} \Big|_{t=\frac{3\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}} < 0, \end{aligned}$$

y $\widehat{E}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}, \lambda\right)$ es positiva para todo $\lambda > 0$, ya que

$$\widehat{E}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}, \lambda\right) = \lambda^3 \sqrt{3\lambda^2+4} (e^{3t\lambda} - 1) \Big|_{t=\frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}} > 0.$$

A continuación, vamos a analizar el signo de la función $\psi(t, \lambda)$ para ciertos valores fijos de λ . Para ello, realizamos previamente el cambio de variable

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda^2 \\ s &= e^{\sqrt{\mu}t}. \end{aligned}$$

Así, realizando dicho cambio de variable, la función $\psi(t, \lambda)$ se reduce al polinomio

$$\psi(s, \mu) = (1 + \mu)^2 - (1 + 4\mu + 2\mu^2)s + \mu^2 s^2,$$

el cual analizaremos para dos valores fijos de μ .

Fijemos $\mu = 1$ entonces se tiene el polinomio $\psi(s, 1) = 4 - 7s + s^2$, que es positivo para todo valor de s perteneciente al intervalo $((7 + \sqrt{33})2^{-1}, +\infty)$. De ese modo, $\psi(t, 1)$ es positivo para todo valor de $t \in [2, +\infty) \supset (\ln \frac{7+\sqrt{33}}{2}, +\infty)$.

Por otro lado, fijemos $\mu = 1/4$ se tiene que $\psi(s, \frac{1}{4}) = \frac{1}{16}(25 - 34s + s^2)$ es negativo para todo s perteneciente al intervalo $[1, 17 + 2\sqrt{66}]$, y, por tanto, $\psi(t, \lambda)$ es negativo para todo valor de $t \in (0, 7] \subset (0, 2\ln(17 + 2\sqrt{66}))$.

En consecuencia hemos deducido que las funciones $\widehat{E}(t, \lambda)$ y $\psi(t, \lambda)$, definidas en la región

$$\Omega_T = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}} \leq t \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2+4}}, \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

y continuas en dicho compacto, satisfacen las hipótesis del Teorema de Poincaré-Miranda. Además, la función $\text{sen}(\beta t)$ es estrictamente menor que cero en el interior de este compacto. Por tanto, el sistema (4.33) tiene al menos una solución en el interior de la región Ω_T . □

En la Figura 4.7 hemos sombreado el interior de la región Ω_T , definida en el Lema 4.6, y los puntos (t, λ) donde se anulan las funciones $\widehat{E}(t, \lambda)$ y $\psi(t, \lambda)$. En el interior de Ω_T las curvas $\widehat{E}(t, \lambda)$ y $\psi(t, \lambda)$ se cortan para el valor (t_T, λ_T) , que corresponde a una solución del sistema (4.33). Cálculo numéricos permiten estimar el valor $(t_T, \lambda_T) \simeq (5.24345, 0.585119) \in \text{int}(\Omega_T)$.

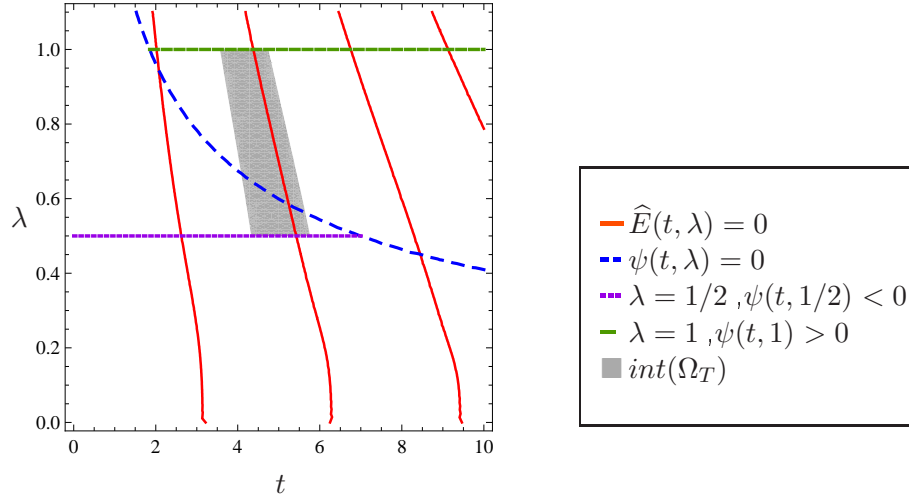


Figura 4.7: Representación de los ceros de las funciones $\widehat{E}(t, \lambda)$ y $\psi(t, \lambda)$. Se ha sombreado el interior de la región Ω_T .

A partir de la Figura 4.7 evidenciamos que el punto de intersección de las funciones $\widehat{E}(t, \lambda)$ y $\psi(t, \lambda)$ es único en la región Ω_T . Nuevo objetivo a partir de ahora es demostrar la unicidad de esta solución. Esto nos ayudará a probar que $x_{\mathbf{p}_0}(t, \hat{\lambda}) < 0$ para todo $t \in (0, \hat{t})$ siendo $(\hat{t}, \hat{\lambda})$ la solución que está en $\text{int}(\Omega_T)$.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar la unicidad del punto (t_T, λ_T) en Ω_T y verificar la condición O3. Para ello, comenzamos estudiando como el flujo del sistema (2.8) lleva puntos del eje de reversibilidad al eje de tangencia. Nos apoyamos en primer lugar en el siguiente resultado:

Lema 4.7 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = 0, \\ y_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

donde $x_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda)$ y $y_{\mathbf{p}_0}(t, \lambda)$ están dadas, respectivamente, por las expresiones (4.4) y (4.6). Si $H(t, \lambda) \neq 0$, donde $H(t, \lambda)$ está dada en (4.23), entonces el sistema (4.42) es equivalente a

$$\begin{cases} \tilde{E}(t, \lambda) = 0, \\ y_0(t, \lambda) = \frac{2\lambda \sin(\beta t) - \left(2\lambda^2 \cos(\beta t) + \left((\lambda^2 + 1)e^{t\lambda} - 3\lambda^2 - 1\right)e^{\frac{t\lambda}{2}}\right) \sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda(\lambda^2 + 1)H(t, \lambda)}, \end{cases} \quad (4.43)$$

con

$$\tilde{E}(t, \lambda) = (e^{t\lambda} - 1) \left((2\lambda^2 + 1) \cos(\beta t) - \lambda^2 (e^{t\lambda} + 1) e^{-\frac{t\lambda}{2}} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \lambda (e^{t\lambda} + 1) \sin(\beta t). \quad (4.44)$$

Demostración: Tras adecuadas manipulaciones, el sistema (4.42) se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} \tilde{E}_1(t, \lambda, y_0) = 0, \\ \tilde{E}_2(t, \lambda, y_0) = 0, \end{cases} \quad (4.45)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(t, \lambda, y_0) &= ((\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_0 + 1) e^{t\lambda} - 3\lambda^2 - 1) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t\lambda}{2}} + \\ &+ \lambda((\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2)y_0 - 2) \sin(\beta t) - \lambda^2((\lambda^2 + 1)y_0 - 2) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t) \end{aligned}$$

y

$$\tilde{E}_2(t, \lambda, y_0) = ((\lambda^2 y_0 + 1) e^{\frac{3t\lambda}{2}} + ((2\lambda^2 + 1)y_0 - 1) \cos(\beta t)) \sqrt{3\lambda^2 + 4} - \lambda(y_0 - 3) \sin(\beta t).$$

El sistema (4.45) consta de dos ecuaciones en las incógnitas (t, λ, y_0) y es lineal respecto de la variable y_0 . Por tanto, despejando de la primera ecuación del sistema, obtenemos y_0 en función de las variables (t, λ) ,

$$y_0(t, \lambda) = \frac{2\lambda \sin(\beta t) - \left(2\lambda^2 \cos(\beta t) + \left((\lambda^2 + 1) e^{t\lambda} - 3\lambda^2 - 1 \right) e^{\frac{t\lambda}{2}} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda(\lambda^2 + 1)H(t, \lambda)}, \quad (4.46)$$

definida para los valores t y λ estrictamente positivos que no anulan a la función

$$H(t, \lambda) = (3\lambda^2 + 2) \sin(\beta t) + \lambda \left(e^{\frac{3t\lambda}{2}} - \cos(\beta t) \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema (4.45) el valor de $y_0(t, \lambda)$ obtenido, reducimos el sistema a la ecuación $\tilde{E}(\tau, \lambda) = 0$ con

$$\tilde{E}(t, \lambda) = \lambda^3 \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left((e^{2t\lambda} + 1) - (e^{t\lambda} + 1) \cos(\beta t) e^{\frac{t\lambda}{2}} \right) + (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) (e^{t\lambda} - 1) \sin(\beta t) e^{\frac{t\lambda}{2}},$$

de donde se concluye la prueba. □

En el siguiente resultado analizamos el conjunto de ceros de la función \tilde{E} a través de la función

$$\tilde{G}(\tau, \lambda) = \tilde{F}\left(\frac{2\tau}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}}, \lambda\right) \quad (4.47)$$

siendo

$$\tilde{F}(t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\tilde{E}(t, \lambda)}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -4t \cos(t) + 4 \operatorname{sen}(t) & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

La prueba de este resultado sigue razonamientos análogos a los realizados en la demostración del Lema 4.2. En este caso, es necesario hacer el cambio de variable $\tau = \tau - \phi$, con ϕ satisfaciendo $\operatorname{tg}(\phi) = \tau$, que surge de manera natural al considerar los ceros de $-4\tau \cos(\tau) + 4 \operatorname{sen}(\tau) = 0$.

Lema 4.8 Denotemos $\tau_1 < \tau_2$ como las únicas soluciones en $(0, \frac{5\pi}{2})$ de la ecuación $\operatorname{tg}(\tau) = \tau$. La función \tilde{G} definida en (4.8) satisface las siguientes propiedades:

- (a) Si $\lambda > 0$ y $\tau \in (0, \tau_1)$, entonces $\tilde{G}(\tau, \lambda) > 0$.
- (b) $\tilde{G}(\tau_1, 0) = \tilde{G}(\tau_2, 0) = 0$.
- (c) Si $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, entonces existe un único valor $\lambda^*(\tau) \geq 0$, de forma que $\tilde{G}(\tau, \lambda^*(\tau)) = 0$. Además, si $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ entonces $\lambda^*(\tau) > 0$ y $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \lambda}(\tau, \lambda^*(\tau)) > 0$.
- (d) Si $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ y $0 < \lambda < \lambda^*(\tau)$, entonces $\tilde{G}(\tau, \lambda) < 0$ y $\tilde{G}(\tau, \lambda) > 0$ si $\lambda > \lambda^*(\tau)$.
- (e) La función $\lambda^* : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow [0, +\infty)$ posee un único extremo relativo $\tau^* \in (\tau_1, \tau_2)$. Además, en este valor se alcanza el máximo absoluto de la función λ^* en $[\tau_1, \tau_2]$.

En la Figura 4.8 representamos el conjunto de ceros de $\tilde{G}(\tau, \lambda)$ para $\tau \in [0, \tau_2]$ y $\lambda > 0$ y el correspondiente conjunto solución de $\tilde{E}(t, \lambda)$ para $t, \lambda > 0$.

Es evidente que el conjunto de ceros de $\tilde{E}(t, \lambda)$ no proporciona información cuando $H(t, \lambda) = 0$. Aunque el sistema $\tilde{E}(t, \lambda) = H(t, \lambda) = 0$ puede tener solución como se evidencia en la Figura 4.8, esto sucede en un conjunto que no afecta a nuestra conclusión que enunciamos en el siguiente resultado.

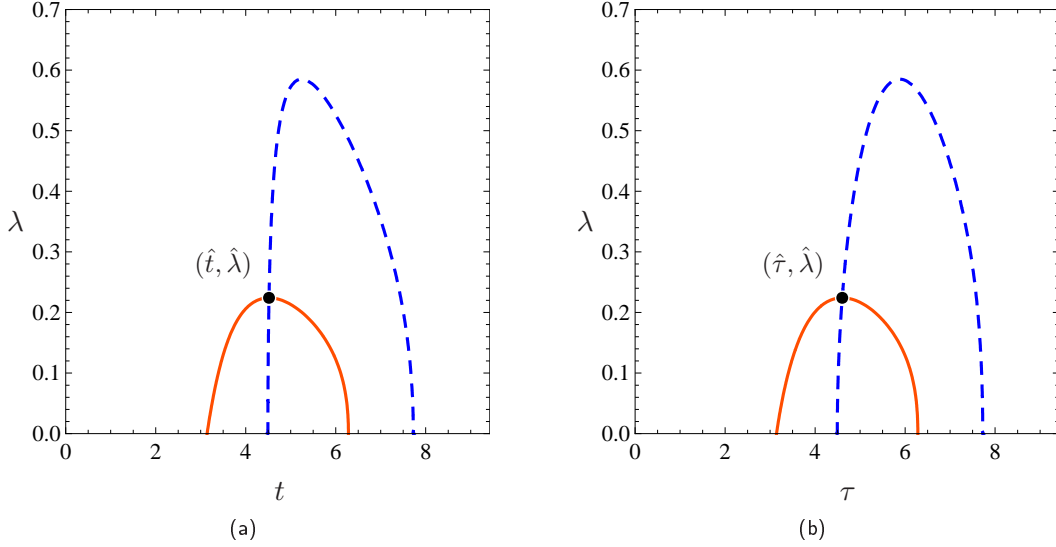


Figura 4.8: Representación de los ceros de las funciones $H(t, \lambda)$, $\tilde{E}(t, \lambda)$, $J(\tau, \lambda)$ y $\tilde{G}(\tau, \lambda)$. En (a) se representa en trazo continuo los ceros de la función $H(t, \lambda)$ y en trazo discontinuo los ceros de la función $\tilde{E}(t, \lambda)$. En (b) se han representado los ceros de la función $J(\tau, \lambda)$ en trazo continuo, mientras que en trazo discontinuo se muestran los ceros de la función $\tilde{G}(\tau, \lambda)$.

Teorema 4.9 El sistema (4.33) posee una única solución en el interior de la región

$$\Omega_T = \left\{ (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1, \frac{3\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \leq t \leq \frac{4\pi}{\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \right\}.$$

Demostración:

Aunque la existencia ya ha sido probada en el Lema 4.6, aquí también la probaremos junto con la unicidad. Observemos que el par $(\tau^*, \lambda^*(\tau^*))$ definido en el Lema 4.8 está caracterizado por ser la única solución del sistema

$$\begin{cases} \tilde{G}(\tau, \lambda) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tau}(\tau, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

para $\lambda > 0$ y $\tau \in [0, \tau_2]$. Es directo ver que este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} \tilde{G}(\tau, \lambda) = 0, \\ G(\tau, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

De aquí, se deduce que el sistema (4.49) posee una única solución para $\lambda > 0$ y $\tau \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ que coincide con el máximo de la función λ^* . Nótese, además, que de la prueba de la Proposición 4.5 se tiene que $J(\tau^*, \lambda^*(\tau^*)) > 0$ puesto que $G(\tau^*, \lambda^*(\tau^*)) = 0$, lo que concluye la demostración. \square

En la Figura 4.9 se representa el conjunto de ceros de $G(\tau, \lambda)$, $\tilde{G}(\tau, \lambda)$ para $\tau \in [0, \tau_2]$ y $\lambda > 0$, y $E(t, \lambda)$ y $\tilde{E}(t, \lambda)$ para $t, \lambda > 0$. Se observa que el máximo del valor de λ para \tilde{G} y \tilde{E} se encuentra sobre el conjunto de ceros de G y E , respectivamente.

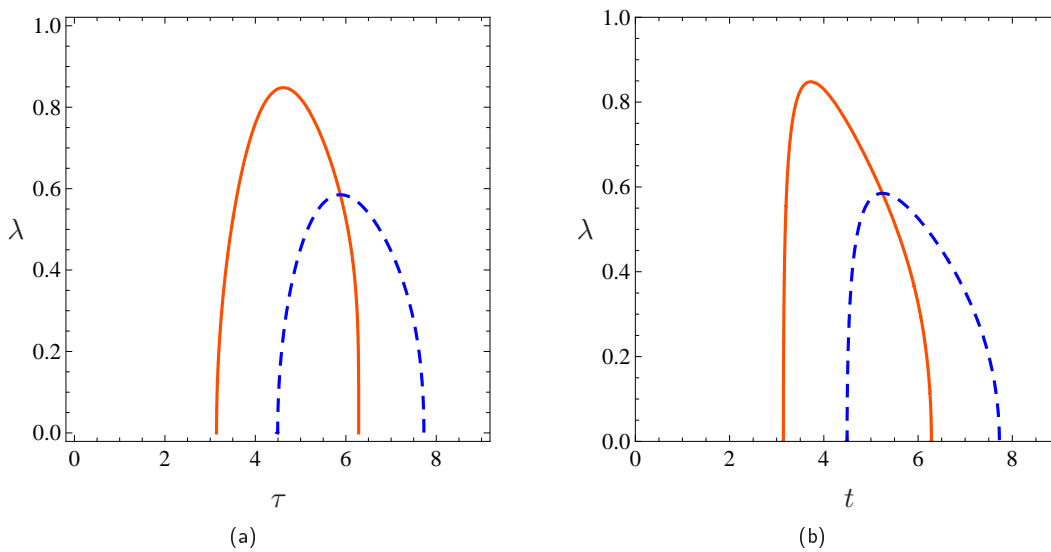


Figura 4.9: Representación de los ceros de las funciones $G(\tau, \lambda)$, $\tilde{G}(\tau, \lambda)$, $E(t, \lambda)$ y $\tilde{E}(t, \lambda)$. En (a) se representa en trazo continuo los ceros de la función $G(\tau, \lambda)$ y en trazo discontinuo los ceros de la función $\tilde{G}(\tau, \lambda)$. En (b) se han representado los ceros de la función $E(t, \lambda)$ en trazo continuo, mientras que en trazo discontinuo se muestran los ceros de la función $\tilde{E}(t, \lambda)$.

Ahora, para probar que todos los puntos sobre el conjunto solución de $E(t, \lambda) = 0$, con $\lambda > 0$ y $\pi < \tau = \frac{\sqrt{3\lambda^2+4}}{2}t \leq \tau^*$, se corresponden con órbitas periódicas, debemos ver que se satisface la condición O3.

En primer lugar, debemos comentar que es fácil ver que todos los puntos de $E(t, \lambda) = 0$, con $\lambda > 0$ y $\tau = \frac{\sqrt{3\lambda^2+4}}{2}t$ suficientemente cercano a π satisfacen la condición O3, es decir, son órbitas periódicas reversibles de dos cortes.

En segundo lugar, es inmediato ver que el punto $(\tau^*, \lambda^*(\tau^*))$ debe encontrarse en la parte decreciente de la curva determinada por los ceros de la función G (por la unicidad de τ^* y la

equivalencia entre las sistemas (4.48) y (4.49)). Por ello, es directo concluir que se satisface la condición O3 para todos los puntos del conjunto de ceros de E que hemos mencionado anteriormente.

Podemos resumir los resultados dados hasta ahora en el siguiente teorema:

Teorema 4.10 Existen dos valores $0 < \lambda_{pt} < \lambda_{sn}$ para los que se satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) Si $\lambda \in (0, \lambda_{pt})$, entonces el sistema (2.8) posee una única órbita periódica reversible de dos cortes con periodo menor que 4π .
- (b) Para $\lambda = \lambda_{pt}$ el sistema (2.8) posee exactamente dos órbitas periódicas reversibles de dos cortes con periodo menor que 4π . Además, sus periodos son diferentes y la que tiene mayor periodo cruza el plano de separación $\{x = 0\}$ de forma tangencial.
- (c) Si $\lambda \in (\lambda_{pt}, \lambda_{sn})$, entonces el sistema (2.8) posee exactamente dos órbitas periódicas reversibles de dos cortes con periodo menor que 4π .
- (d) Para $\lambda = \lambda_{sn}$, el sistema (2.8) posee una única órbita periódica reversible de dos cortes con periodo menor que 4π .
- (e) Si $\lambda > \lambda_{sn}$, entonces el sistema (2.8) no posee órbitas periódicas reversibles de dos cortes con periodo menor que 4π .

En la Figura 4.10 se representan dos órbitas periódicas reversibles de dos cortes para el sistema continuo lineal a trozos (2.8). En una de ellas, los dos cortes con el plano de separación son transversales, mientras que en la otra aparece un punto de corte con cruce tangencial. Cálculos numéricos nos permiten estimar que $\lambda_{sn} \simeq 0.84812$ y $\lambda_{pt} \simeq 0.58512$. Nótese que el punto λ_{sn} se corresponde con una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.

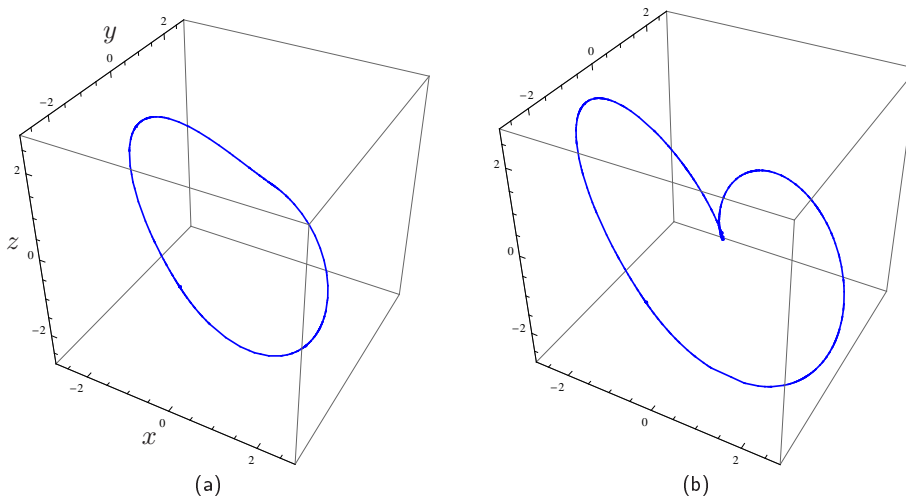


Figura 4.10: (a) Una órbita periódica reversible de dos cortes transversales con el plano de separación. (b) Órbita periódica reversible que cruza tangencialmente al plano de separación.

4.2. Bifurcaciones en la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes.

En esta sección vamos a analizar la estabilidad y bifurcaciones de las órbitas periódicas reversibles de dos cortes cuya existencia acabamos de probar.

Como hemos mencionado en la sección 1.4, estudiar la estabilidad de una órbita periódica de un sistema continuo lineal a trozos equivale a analizar la estabilidad del correspondiente punto fijo \mathbf{q}_0 de la aplicación de Poincaré $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_+ \circ \tilde{\Pi}_-$. Para ello, es necesario calcular los autovalores de la matriz $D\tilde{\Pi}(\mathbf{q}_0)$, denominados multiplicadores característicos de la respectiva órbita periódica.

Consideremos una órbita periódica reversible correspondiente a una solución (t_*, λ_*) de la ecuación (4.9) y tal que no tenga ningún punto de tangencia con el plano de separación. Por la proposición 1.14 sabemos que sus multiplicadores característicos son los autovalores de la matriz

$$\mathcal{M} = \exp(A_*^+ t) \cdot \exp(A_*^- t), \quad (4.50)$$

donde A_*^+ y A_*^- se obtienen a partir de A^+ y A^- sin más que sustituir el valor del parámetro $\lambda = \lambda_*$ y t_* es el semitiempo de vuelo en cualquiera de los semiespacios de linealidad.

Obsérvese que uno de los autovalores de esta matriz es siempre uno, por ser ésta una característica de las órbitas periódicas. Además, en la siguiente proposición, demostramos que los otros dos autovalores son uno el inverso del otro.

Proposición 4.11 Supongamos que existe la órbita periódica reversible de dos cortes correspondiente a una solución (t_*, λ_*) de la ecuación (4.9) y que no posee ningún punto de tangencia con el plano de separación. Entonces, un multiplicador característico es el valor trivial uno y los otros dos son uno el inverso del otro.

Demostración:

Es inmediato comprobar que

$$\det(\mathcal{M}) = \det(e^{A_*^+ t}) \cdot \det(e^{A_*^- t}) = e^{\text{tr}(A_*^+)t} \cdot e^{\text{tr}(A_*^-)t} = 1, \quad (4.51)$$

ya que las trazas de A_*^+ y A_*^- son nulas. Como un autovalor de \mathcal{M} tiene que ser uno, los otros dos autovalores han de ser uno el inverso del otro. □

En la Figura 4.11 se representan, frente al semiperiodo, el logaritmo del módulo y el argumento de los autovalores de esta matriz de monodromía para cada una de las soluciones de la ecuación (4.9) que corresponde a una órbita periódica reversible de dos cortes. A partir de esta figura se pueden extraer algunas conclusiones sobre las estabilidades y bifurcaciones de estas soluciones periódicas. En primer lugar, vemos que desde $t = \pi$, donde comienza la familia, hasta llegar al punto A los multiplicadores no triviales tienen módulo uno, pues el logaritmo es cero, y sus argumentos van de cero a $\pm\pi$. De ese modo, ambos multiplicadores característicos recorren la circunferencia unidad y, por tanto, la órbita es de tipo elíptico. Para más detalle al respecto, véase el capítulo 5 de [43] y las referencias que allí se citan.

En el punto A ambos multiplicadores característicos valen -1 y al pasar ese valor ambos se hacen reales negativos: uno con módulo mayor que uno y el otro su inverso. Por tanto, en A hay una bifurcación de duplicación de periodo y las órbitas periódicas pasan a ser de tipo Möbius. Este carácter dura hasta el punto B donde se vuelve a producir una bifurcación de duplicación de periodo (aunque en sentido contrario) pasando las órbitas a ser elípticas otra vez. En C los multiplicadores valen uno y pasan a ser reales positivos. Por tanto, hay una bifurcación silla-nodo (cuya existencia ya

estaba probada en la sección anterior) y las órbitas periódicas serán de tipo hiperbólico hasta llegar al punto de tangencia.

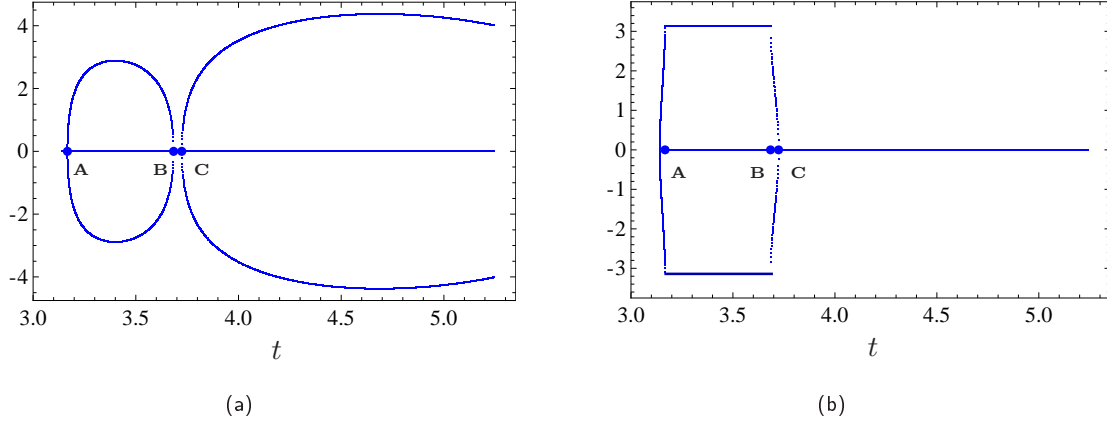


Figura 4.11: (a) Logaritmo del módulo de los multiplicadores característicos asociados a cada una de las órbitas periódicas reversibles de dos cortes frente al semiperiodo t de la correspondiente órbita periódica. (b) Argumento de dichos multiplicadores característicos.

En la Figura 4.12 se indica la estabilidad de las órbitas periódicas reversibles de dos cortes en el plano de coordenadas (t, λ) . Nótese que los puntos \bar{p}_{d_1} , \bar{p}_{d_2} , \bar{s}_n se corresponden, respectivamente, con los puntos **A**, **B** y **C**.

Para que exista una bifurcación de duplicación de periodo, es necesario que $\text{tr}(\mathcal{M}) = -1$. Esto es obvio ya que los multiplicadores característicos no triviales tienen que ser ambos -1 . Así pues, para que haya una bifurcación de duplicación de periodo han de existir t_* y λ_* estrictamente positivos tales que $(t, \lambda) = (t_*, \lambda_*)$ sea una solución del sistema

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = 0, \\ \text{tr}(e^{A^+t} \cdot e^{A^-t}) + 1 = 0, \end{cases} \quad (4.52)$$

donde $E(t, \lambda) = 0$ está dada por la expresión (4.9) y

$$\begin{aligned} \text{tr}(e^{A^+t} \cdot e^{A^-t}) + 1 &= (9\lambda^2(\lambda^2 + 1)^2 + 2)e^{\frac{3}{2}t\lambda} - 2\lambda^3(e^{3t\lambda} - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}\sin(\beta t) + \\ &+ \lambda^2(e^{3t\lambda} + 1)(6\lambda^4 + 11\lambda^2 + 4)\cos(\beta t) + 2(\lambda^2 + 1)^2(3\lambda^2 + 1)\cos(2\beta t)e^{\frac{3}{2}t\lambda}, \end{aligned}$$

con $\beta = \sqrt{3\lambda^2 + 4}/2$.

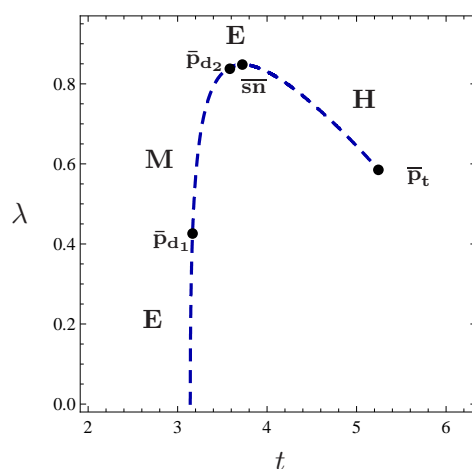


Figura 4.12: Estabilidad en la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes. Hemos denotado por **E** al tramo de la curva donde la órbita es elíptica, por **M** donde es de tipo Möbius y por **H** donde es hiperbólica.

En la Figura 4.13 se representan las curvas solución de las dos ecuaciones del sistema (4.52). Como se aprecia en la figura, ambas curvas se intersecan para diferentes valores de t y λ estrictamente positivos, dos de los cuales pertenecen a la región $\Omega_0 = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \pi < t < 2\pi, \lambda > 0\}$. Usando el método de Newton estimamos que dichas soluciones son $\bar{p}_{d_1} = (t_{p_{d_1}}, \lambda_{p_{d_1}}) \simeq (3.16689, 0.42592)$ y $\bar{p}_{d_2} = (t_{p_{d_2}}, \lambda_{p_{d_2}}) \simeq (3.68432, 0.84762)$.

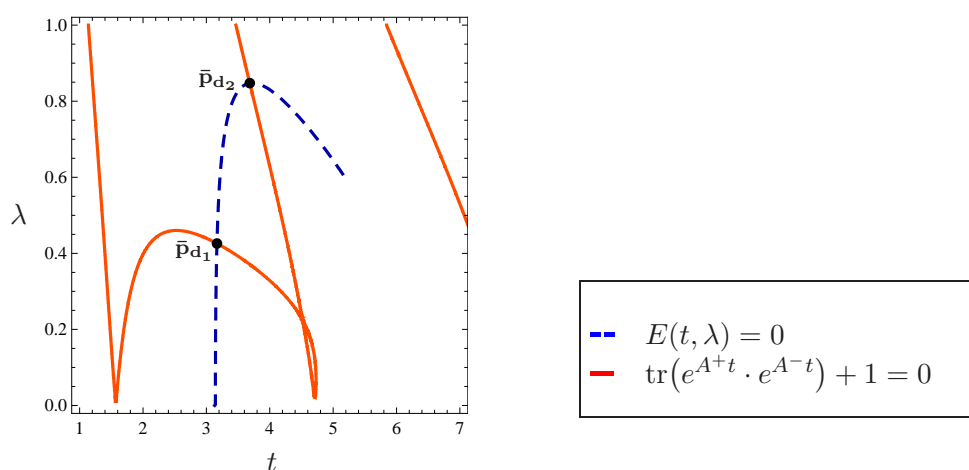


Figura 4.13: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $\text{tr}(e^{A+t} \cdot e^{A-t}) + 1$. Ambas curvas se intersecan en los puntos $\bar{p}_{d_1} \simeq (3.16689, 0.425924)$ y $\bar{p}_{d_2} \simeq (3.68432, 0.847621)$.

Aunque en el lema 4.2 ya hemos probado que hay sólo una bifurcación de tipo silla-nodo en la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes, veremos esto ahora usando ideas similares a las que acabamos de utilizar para las bifurcaciones de duplicación de periodo. Para que exista dicha bifurcación de tipo silla-nodo de órbitas periódicas, la traza de la matriz de monodromía ha de ser tres. Así pues, para que en la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes haya una bifurcación de tipo silla-nodo de órbitas periódicas han de existir t_{sn} y λ_{sn} estrictamente positivos tales que $(t, \lambda) = (t_{\text{sn}}, \lambda_{\text{sn}})$ sea una solución del sistema

$$\begin{cases} E(t, \lambda) = 0, \\ \text{tr}(e^{A^+t} \cdot e^{A^-t}) - 3 = 0, \end{cases} \quad (4.53)$$

donde $E(t, \lambda) = 0$ está dada por la expresión (4.9) y

$$\begin{aligned} \text{tr}(e^{A^+t} \cdot e^{A^-t}) - 3 = & -2(9\lambda^2(\lambda^2 + 1)^2 + 1)e^{\frac{3}{2}t\lambda} - 2\lambda^3(e^{3t\lambda} - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}\sin(\beta t) + \\ & + \lambda^2(e^{3t\lambda} + 1)(6\lambda^4 + 11\lambda^2 + 4)\cos(\beta t) + 2(\lambda^2 + 1)^2(3\lambda^2 + 1)\cos(2\beta t)e^{\frac{3}{2}t\lambda}. \end{aligned}$$

En la Figura 4.14 se representan las curvas solución de las dos ecuaciones del sistema (4.53). Como se evidencia en esta figura, el sistema posee una única solución en la región Ω_0 , $\mathbf{sn} = (t_{\text{sn}}, \lambda_{\text{sn}}) \simeq (3.72374, 0.848127)$.

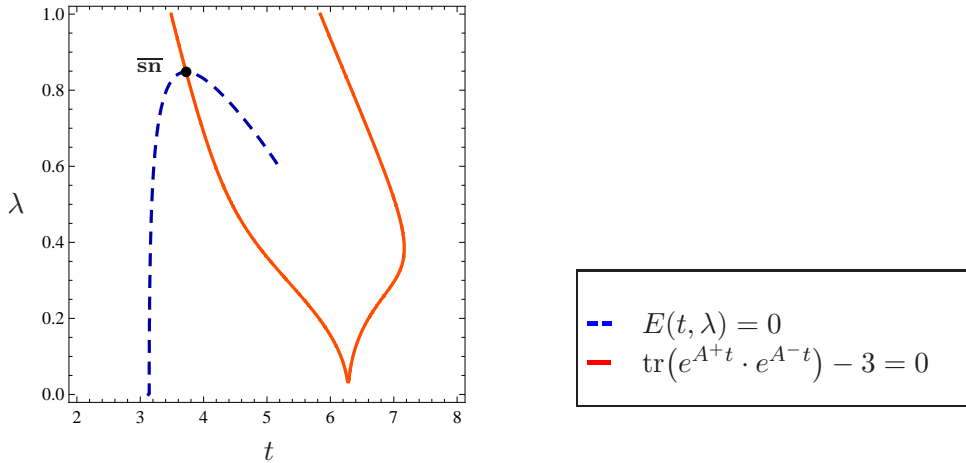


Figura 4.14: Representación de los ceros de las funciones $E(t, \lambda)$ y $\text{tr}(e^{A^+t} \cdot e^{A^-t}) - 3$. Ambas curvas se intersecan en el punto $\overline{\mathbf{sn}} \simeq (3.72374, 0.848127)$.

4.3. Órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes.

Terminamos este capítulo estudiando las órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que se obtienen tras la tangencia transversal $\bar{\mathbf{p}}_t = (t_{\mathbf{p}_t}, \lambda_{\mathbf{p}_t}) \simeq (5.24345, 0.585119)$, donde acaba la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes cuya existencia hemos probado en la sección 4.1.

Nótese que como la curva que buscamos nace de un punto que corresponde a una órbita periódica reversible de dos cortes que tiene una tangencia transversal en el origen, cada uno de sus puntos ha de proporcionar una órbita periódica reversible de cuatro cortes con el plano de separación. En la Figura 4.15 se muestra un esquema de una órbita periódica de este tipo.

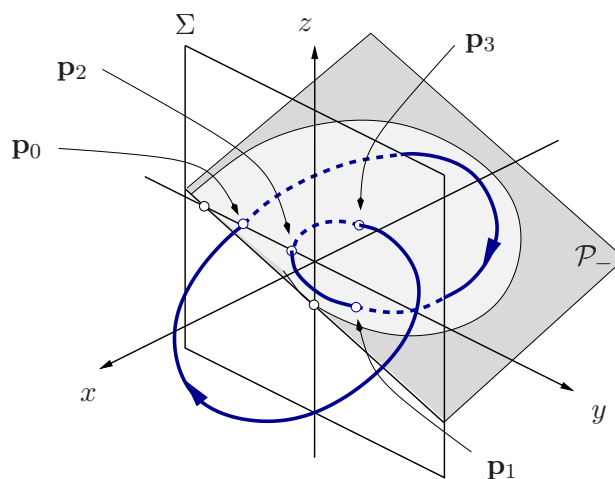


Figura 4.15: Esquema de una órbita periódica reversible que corta al plano de separación en cuatro puntos.

Es obvio que cada una de las órbitas periódicas que buscamos se corresponde con un punto fijo de la segunda iterada de la aplicación de Poincaré o, equivalentemente, con cuatro puntos $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$, $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, 0)$ y $\mathbf{p}_3 = (0, y_{\mathbf{p}_3}, z_{\mathbf{p}_3})$ del plano de separación, con $y_{\mathbf{p}_0} < 0$, $y_{\mathbf{p}_1} > 0$, $y_{\mathbf{p}_2} < 0$ e $y_{\mathbf{p}_3} > 0$, tales que $\mathbf{p}_1 = \Pi_-(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{p}_2 = \Pi_+(\mathbf{p}_1)$, $\mathbf{p}_3 = \Pi_-(\mathbf{p}_2)$ y $\mathbf{p}_0 = \Pi_+(\mathbf{p}_3)$. Por otro lado, como cada una de estas órbitas periódicas ha de ser reversible, se tiene que cumplir la relación $\mathbf{p}_3 = R(\mathbf{p}_1)$. Así pues, existe una órbita periódica reversible de cuatro cortes si, y sólo si, se satisfacen las condiciones $\mathbf{p}_1 = \Pi_-(\mathbf{p}_0)$ y $\mathbf{p}_2 = \Pi_+(\mathbf{p}_1)$, donde \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_2 pertenecen al eje de reversibilidad. Ahora bien, para manipular estas condiciones es conveniente dividir las en las tres siguientes:

O1: Existen t_*^-, t_*^+ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda) = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) = \mathbf{p}_2. \end{cases} \quad (4.54)$$

O2: $x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda_*) < 0$ para todo $t^- \in (0, t_*^-)$.

O3: $x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda_*) > 0$ para todo $t^+ \in (0, t_*^+)$.

Nótese que si $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ satisface estas condiciones, entonces $t_* = t_*^- + t_*^+$ es el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. En particular, si el punto \mathbf{p}_1 pertenece al eje de reversibilidad, entonces la órbita periódica es reversible de dos cortes y los semitiempos de vuelo t_*^- y t_*^+ deben coincidir. En este caso la solución correspondería a una órbita periódica de dos cortes recorrida dos veces.

Para determinar explícitamente las ecuaciones del sistema (4.54) es necesario obtener la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda)$ del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal que define (2.8) en el semiespacio izquierdo con la condición inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{p}_0$ y la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda)$ del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal correspondiente al semiespacio derecho con la condición inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{p}_1$. La solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda)$ viene dada por las expresiones (4.4)–(4.6), mientras que $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t^-, \lambda)$ se deduce a partir de las expresiones (2.16)–(2.18) sustituyendo las variables y_0 y z_0 por las coordenadas segunda y tercera del punto $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$,

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) &= \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} + \frac{e^{-t^+\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[-\frac{(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda} + e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\lambda y_{\mathbf{p}_1} - z_{\mathbf{p}_1} - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) + \left((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + 3\lambda z_{\mathbf{p}_1} - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right) \sin(\beta t^+) \right] \right], \\ y_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) &= \frac{e^{-t^+\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} \left[((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) - (\lambda y_{\mathbf{p}_1} - (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_1} - 3\lambda) \sin(\beta t^+) \right] \right], \\ z_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) &= \frac{e^{-t^+\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[-\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} \left[(\lambda^3 y_{\mathbf{p}_1} + (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1} + \lambda) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) - ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - (3\lambda^2 + 2)) \sin(\beta t^+) \right] \right], \end{aligned}$$

siendo $\beta = \sqrt{3\lambda^2 + 4}/2$.

El sistema (4.54), que consta de seis ecuaciones en las incógnitas $t^-, t^+, \lambda, y_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1}$ e $y_{\mathbf{p}_2}$,

tras adecuadas manipulaciones puede escribirse en la forma

$$(f_1(\mathbf{s}, \lambda), f_2(\mathbf{s}, \lambda), f_3(\mathbf{s}, \lambda), f_4(\mathbf{s}, \lambda), f_5(\mathbf{s}, \lambda), f_6(\mathbf{s}, \lambda)) = \mathbf{0}, \quad (4.55)$$

siendo $\lambda > 0$, $\mathbf{s} = (t^-, t^+, y_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1}, y_{\mathbf{p}_2})$ de tal modo que $t^- > 0$, $t^+ > 0$, $y_{\mathbf{p}_0} > 0$, $y_{\mathbf{p}_1} < 0$ e $y_{\mathbf{p}_2} > 0$, y donde cada componente $f_i : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, 6$ está dada por

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{s}, \lambda) &= ((\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1))\sqrt{3\lambda^2 + 4} - \lambda \left[\lambda((\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} - 2)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) - \right. \\ &\quad \left. - ((\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} - 2) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right] e^{-\frac{t^- \lambda}{2}}, \\ f_2(\mathbf{s}, \lambda) &= ((\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1})\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \\ &\quad + \left[((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + \lambda(y_{\mathbf{p}_0} - 3) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right] e^{-\frac{t^- \lambda}{2}}, \\ f_3(\mathbf{s}, \lambda) &= (\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1})\sqrt{3\lambda^2 + 4} - \left[\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) - \right. \\ &\quad \left. - (3\lambda^2 - (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} + 2) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right] e^{-\frac{t^- \lambda}{2}}, \\ f_4(\mathbf{s}, \lambda) &= -((\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1) + (3\lambda^2 + 1)e^{t^- \lambda})\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \left[\lambda((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_1} - z_{\mathbf{p}_1}) - 2\lambda) \right. \\ &\quad \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) + \lambda((\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + 3\lambda z_{\mathbf{p}_1}) - 2) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda}, \\ f_5(\mathbf{s}, \lambda) &= (\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_2} e^{t^+ \lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \\ &\quad + \left[((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) + (\lambda(3 - y_{\mathbf{p}_1}) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_1}) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda}, \\ f_6(\mathbf{s}, \lambda) &= -\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \left[((2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1} + \lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} + 1))\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) - \right. \\ &\quad \left. - ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda(z_{\mathbf{p}_1} - 3\lambda) - 2) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda}. \end{aligned}$$

A partir del sistema (4.55) vamos a obtener, realizando nuevas manipulaciones entre sus ecuaciones, un sistema equivalente con menos ecuaciones e incógnitas. Para ello, en primer lugar, calculamos la segunda coordenada del punto $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, 0)$ despejando su valor de la primera ecuación del sistema,

$$y_{\mathbf{p}_0} = \frac{1}{q_0(t^-, \lambda)} \left[(3\lambda^2 - (\lambda^2 + 1)e^{t^- \lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t^- \lambda}{2}} - 2\lambda(\lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) - \operatorname{sen}(\beta t^-)) \right],$$

siempre que no se anule

$$q_0(t^-, \lambda) = \lambda(\lambda^2 + 1) \left[\lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(e^{\frac{3}{2}t^- \lambda} - \cos(\beta t^-) \right) + (3\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right].$$

Sustituyendo ahora la expresión obtenida de la variable $y_{\mathbf{p}_0}$ en la segunda y tercera ecuación del

sistema (4.55) determinamos las coordenadas segunda y tercera del punto $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$,

$$y_{\mathbf{p}_1} = \frac{(e^{t^- \lambda} - 1) \left(\lambda^2 (e^{t^- \lambda} + 1) e^{-\frac{t^- \lambda}{2}} - (2\lambda^2 + 1) \cos(\beta t^-) \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \lambda (e^{t^- \lambda} + 1) \sin(\beta t^-)}{q_0(t^-, \lambda)},$$

$$z_{\mathbf{p}_1} = \frac{\lambda^3 \left((e^{2t^- \lambda} + 1) e^{-\frac{t^- \lambda}{2}} - (e^{t^- \lambda} + 1) \cos(\beta t^-) \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2) (e^{t^- \lambda} - 1) \sin(\beta t^-)}{q_0(t^-, \lambda)},$$

Falta calcular la expresión de la segunda coordenada del punto $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, 0)$, que deducimos llevando a la quinta ecuación del sistema (4.55) las expresiones de $y_{\mathbf{p}_0}$, $y_{\mathbf{p}_1}$ y $z_{\mathbf{p}_1}$ obtenidas. Tras alguna simplificación obtenemos que $y_{\mathbf{p}_2}$ viene dado por

$$y_{\mathbf{p}_2} = \frac{1}{q_1(t^-, t^+, \lambda)} \left[\lambda^2 (3\lambda^2 + 4) \left((\lambda^2 + 1) e^{2t^- \lambda} - 2\lambda^2 + (\lambda^2 (2e^{2t^- \lambda} - 1) - 1) \cos(\beta t^+) e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda} - \right. \right.$$

$$- \left. ((\lambda^2 + 1) e^{t^- \lambda} - 2\lambda^2) \cos(\beta t^-) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} \right) + \lambda \left((2\lambda^2 - (3\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 1)) (e^{t^- \lambda} - 2) \right) \sin(\beta t^-) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} +$$

$$+ \left(\lambda^2 ((3\lambda^2 + 2)(2e^{2t^- \lambda} + 1) + 1) \sin(\beta t^+) - (\lambda^2 + 1) ((3\lambda^2 + 1) e^{t^- \lambda} - 1) \sin(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} + \right.$$

$$+ \left. 2((2\lambda^2 + 1) e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1)) \sin(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} \right) e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda} \sqrt{3\lambda^2 + 4} -$$

$$- \lambda^2 (\lambda^2 + 1) ((3\lambda^2 + 1) (e^{t^- \lambda} - 2) - 3) \cos(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-) \lambda} -$$

$$\left. - 2((\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 1) (e^{t^- \lambda} - 1) + \lambda^4 (3\lambda^2 + 4) e^{t^- \lambda}) \cos(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-) \lambda} \right],$$

siempre que no se anule $q_1(t^-, t^+, \lambda) = (3\lambda^2 + 1) \sqrt{3\lambda^2 + 4} q_0(t^-, \lambda) e^{\frac{1}{2}(2t^+ + t^-) \lambda}$.

Al sustituir en las ecuaciones $f_4(\mathbf{s}, \lambda) = 0$ y $f_6(\mathbf{s}, \lambda) = 0$ del sistema (4.55) los valores $y_{\mathbf{p}_0}$, $y_{\mathbf{p}_1}$ y $z_{\mathbf{p}_1}$ obtenidos, se tiene el sistema

$$\begin{cases} E_1(t^-, t^+, \lambda) = 0, \\ E_2(t^-, t^+, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (4.56)$$

con

$$E_1(t^-, t^+, \lambda) = \lambda (3\lambda^2 + 4) \left((\lambda^2 - (3\lambda^2 + 1) e^{t^+ \lambda} + 1) e^{2t^- \lambda} - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 (e^{2t^- \lambda} + 1) \cos(\beta t^+) e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda} + \right.$$

$$+ \left. ((\lambda^2 + 1) e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1) e^{t^+ \lambda} - 2\lambda^2) \cos(\beta t^-) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} \right) +$$

$$+ \lambda (3\lambda^4 + \lambda^2 + (3\lambda^4 + 7\lambda^2 + 2) - 2) e^{t^- \lambda} \cos(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-) \lambda} +$$

$$- 2\lambda (-6\lambda^4 - 11\lambda^2 + e^{t^- \lambda} (3\lambda^4 + 7\lambda^2 + 3) - 3) \cos(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-) \lambda} +$$

$$+ \left(2\lambda^2 (3\lambda^2 e^{2t^- \lambda} - 1) \sin(\beta t^+) e^{-\frac{t^- \lambda}{2}} - \lambda^2 ((3\lambda^2 + 1) e^{t^- \lambda} - 3(\lambda^2 + 1)) \sin(\beta(t^+ - t^-)) + \right.$$

$$+ \left. ((3\lambda^4 + 5\lambda^2 + 2) (e^{t^- \lambda} - 2) - 2\lambda^2 + (9\lambda^2 (\lambda^2 + 1) + 2) e^{t^+ \lambda}) \sin(\beta t^-) e^{-\frac{3}{2}t^+ \lambda} - \right.$$

$$\left. - 2((3\lambda^2 (\lambda^2 + 1) + 1) e^{t^- \lambda} - 3\lambda^2 - 1) \sin(\beta(t^+ + t^-)) \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-) \lambda}, \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
E_2(t^-, t^+, \lambda) = & \lambda^3(3\lambda^2 + 4) \left(-((\lambda^2 + 1)e^{2t^- \lambda} - 2\lambda^2) + ((4\lambda^2 + 2)e^{2t^- \lambda} + \lambda^2 + 1) \cos(\beta t^+) e^{\frac{3t^+ \lambda}{2}} + \right. \\
& + ((\lambda^2 + 1)e^{t^- \lambda} - 2\lambda^2) \cos(\beta t^-) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} \left. \right) + \left(\lambda^2 \left((3\lambda^4 - \lambda^2(2e^{2t^- \lambda} - 5) + 2) \operatorname{sen}(\beta t^+) e^{-\frac{t^- \lambda}{2}} - \right. \right. \\
& - (3\lambda^4 + 5\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta(t^+ - t^-)) + ((3\lambda^4 + 5\lambda^2 + 2)(e^{t^- \lambda} - 2) - 2\lambda^2) \operatorname{sen}(\beta t^-) e^{-\frac{3}{2}t^+ \lambda} \left. \right) + \\
& + 2((3\lambda^6 + 8\lambda^4 + 5\lambda^2 + 1)e^{t^- \lambda} - (\lambda^2 + 1)^2(3\lambda^2 + 1)) \operatorname{sen}(\beta(t^+ + t^-)) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-)\lambda} - \\
& - 2\lambda((3\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1)^2 + (3\lambda^6 + 4\lambda^4 - \lambda^2 - 1)e^{t^- \lambda}) \cos(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-)\lambda} - \\
& - (\lambda^3 + \lambda)((6\lambda^4 + 8\lambda^2 + 2)e^{t^- \lambda} - 3\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2) \cos(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-)\lambda}. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Así pues, para probar que se satisface la condición O1 tenemos que ver que existen $\lambda_* > 0$ y $\mathbf{u}_* = (t_*^-, t_*^+)$, con $t_*^- > 0$ y $t_*^+ > 0$, de tal modo que $(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$ es una solución del sistema (4.56) y que $q_0(t_*^-, \lambda_*)$ y $q_1(t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ no se anulan. Obsérvese que este sistema posee una incógnita más que ecuaciones, por lo que su solución será genéricamente una curva. En la obtención de esta curva de soluciones usaremos un algoritmo de continuación basado en el método de pseudo-longitud de arco, véase [43], para el que es necesario disponer de al menos una solución previa del sistema (4.56).

En algunos casos para detectar esta solución basta hacer un análisis previo del sistema. Sin embargo, en este caso, debido a la complejidad de las ecuaciones del sistema, no es posible obtener de forma analítica una solución exacta que constituya el punto inicial necesario para aplicar el algoritmo de continuación. Por tal razón, para aproximar una solución tendremos que utilizar un método numérico.

Para comenzar las iteraciones del método de continuación partimos del punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}} = (t_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}, \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}) \simeq (5.24345, 0.585119)$ y tomamos un valor de $t^+ = 0.001$. Así, mediante el método de Newton obtenemos un primer punto de la curva $(\mathbf{u}_*, \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}) \simeq (5.24078, 0.002669, 0.585119)$. Esta solución corresponde a una órbita periódica reversible de cuatro cortes si además satisface las condiciones O2–O3.

Para ver que se satisfacen estas condiciones representamos gráficamente las funciones

$$\begin{aligned}
x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}) & \simeq -1.27317 + 0.03922 e^{t^- \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}} + (1.23395 \cos(\beta_{\mathbf{t}} t^-) - 2.18271 \operatorname{sen}(\beta_{\mathbf{t}} t^-)) e^{-\frac{1}{2}t^- \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}}, \\
x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}) & \simeq 1.27317 - 0.84442 e^{-t^+ \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}} - (0.42874 \cos(\beta_{\mathbf{t}} t^+) + 0.32884 \operatorname{sen}(\beta_{\mathbf{t}} t^+)) e^{\frac{t^+ \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}}{2}},
\end{aligned}$$

siendo $\mathbf{p}_0 \simeq (0, -2.78501, 0)$, $\mathbf{p}_1 \simeq (0, 2.37537 \cdot 10^{-6}, -0.00266948)$ y $\beta_{\mathbf{t}} = \sqrt{3\lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}^2 + 4}/2 \simeq 1.12106$, véase la Figura 4.16. A partir de esta representación gráfica evidenciamos que $x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda_{\mathbf{p}_{\mathbf{t}}}) < 0$ para todo $t^- \in (0, t_*^-) \simeq (0, 5.24078)$ y $x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda_*) < 0$ para todo $t^+ \in (0, t_*^+) \simeq (0, 0.002669)$.

En consecuencia, la solución obtenida corresponde una órbita periódica reversible de cuatro cortes con el plano de separación.

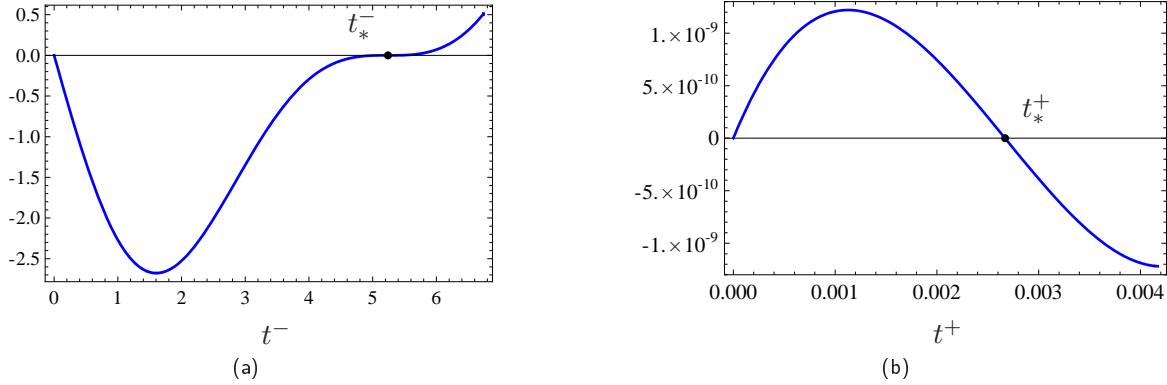


Figura 4.16: Representación gráfica de la función: (a) $x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda_h)$, (b) $x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda_h)$, donde $\mathbf{p}_0 \simeq (0, -2.78501, 0)$ y $\mathbf{p}_1 \simeq (0, 2.37537 \cdot 10^{-6}, -0.00266948)$ son puntos de intersección de la órbita periódica con el plano de separación y $\lambda_* = 0.585119 \simeq \lambda_{\mathbf{p}_t}$.

Una vez que obtengamos la curva de soluciones que comienza en el punto \mathbf{p}_t comprobamos si cada uno de sus puntos satisface las condiciones O2-O3. Podríamos realizar esta comprobación representando gráficamente las funciones $x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda)$ y $x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda)$ evaluadas en cada punto de la curva obtenida, pero resultaría una labor tediosa y lenta. Así pues, agregamos unas sentencias adicionales al algoritmo de continuación de manera que para que cada solución $(t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ del sistema (4.56) se compruebe si el máximo de $x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda_*)$ es mayor que cero para todo $t^- \in (0, t_*^-)$ y si el mínimo de $x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda_*)$ es menor que cero en el intervalo $(0, t_*^+)$. En el caso de que se satisfaga alguna de estas dos condiciones, la respectiva solución no correspondería a una órbita periódica reversible de cuatro cortes.

Aplicando ahora el algoritmo de continuación tomando dicha solución como punto inicial y un paso negativo (es decir, en la primera iteración, el tiempo de vuelo t^- decrece mientras que t^+ crece), obtenemos la curva de soluciones del sistema (4.56) que representamos en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro, véase la Figura 4.17(a). Esta curva une el punto de tangencia con $\bar{\mathbf{p}}_f \simeq (6.33377, 0.425924)$, en el que los tiempos de vuelo t^+ y t^- coinciden y, además, se corresponde con el punto \mathbf{p}_{d_1} (donde la órbita periódica reversible de dos cortes analizada en las secciones anteriores tenía una bifurcación de duplicación de periodo). Cada punto de esta curva,

excepto los puntos extremos \bar{p}_t y \bar{p}_f , corresponde a una órbita periódica reversible de cuatro cortes. Representamos en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro la curva de órbitas periódicas que acabamos de obtener junto a la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes, cuya existencia hemos probado en la sección 4.1, véase la Figura 4.17(b).

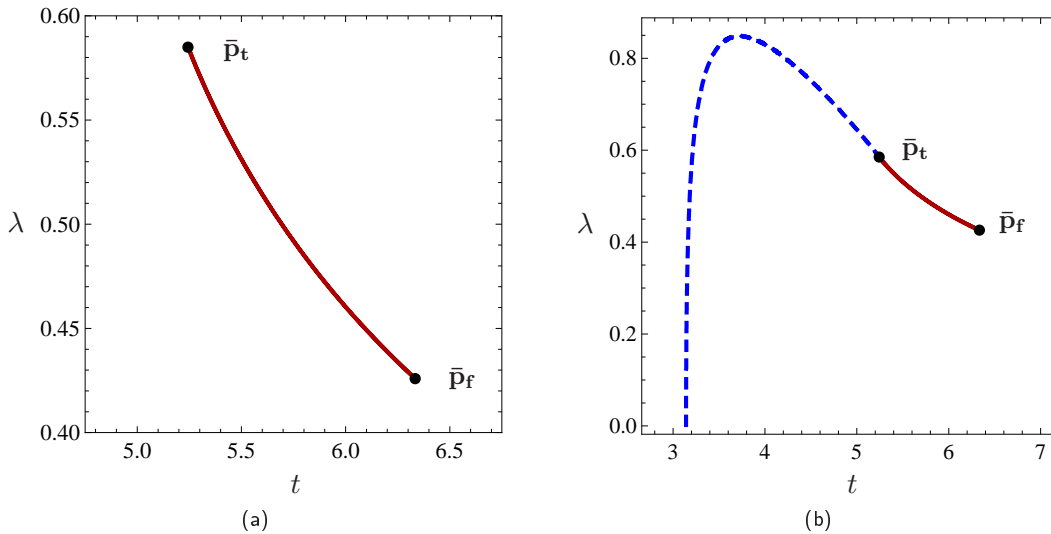


Figura 4.17: (a) Representación gráfica en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el semiperiodo de la respectiva órbita periódica, de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que comienza en el punto de tangencia $\bar{p}_t \simeq (5.24345, 0.585119)$. En (b) se representa también la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en \bar{p}_t .

Esta estructura del diagrama de bifurcaciones es conocida como bifurcación *noose* (lazo) y relaciona las dos bifurcaciones más básicas de órbitas periódicas (silla-nodo y duplicación de periodo) de tal modo que la familia sufre, para un valor del parámetro, una bifurcación de duplicación de periodo y, posteriormente, ambas órbitas (la original y la de periodo doble) desaparecen al colisionar en una bifurcación silla-nodo. Para más detalle al respecto véanse, por ejemplo, los trabajos [24, 37].

Para visualizar mejor la relación entre ambas curvas de órbitas periódicas es conveniente representarlas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) , donde $t = t^- + t^+$ es el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. En este espacio, podemos hacer corresponder la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con tres curvas de órbitas periódicas reversibles de dos cortes: una que se obtiene tomando el semiperiodo de la respectiva órbita periódica igual al tiempo de vuelo t^- y $t^+ = 0$, otra en la que el semiperiodo coincide con el tiempo de vuelo t^+ y $t^- = 0$ y

otra donde $t^- = t^+$.

En la Figura 4.18(a) se muestran estas curvas de órbitas periódicas reversibles de dos cortes junto a la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes. A partir de esta figura evidenciamos que la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes une $\mathbf{p}_{t^-} \simeq (5.24345, 0, 0.585119)$ con $\mathbf{p}_{t^+} \simeq (0, 5.24345, 0.585119)$, pasa por el punto $\mathbf{p}_{d_1} \simeq (3.16689, 3.16689, 0.425924)$ y, debido a la reversibilidad, es simétrica respecto al plano $\Gamma = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$. Observemos que todos los puntos de esta curva corresponden a órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes salvo los puntos extremos \mathbf{p}_{t^-} , \mathbf{p}_{t^+} y el punto intermedio \mathbf{p}_{d_1} . Más concretamente, en los puntos \mathbf{p}_{t^-} y \mathbf{p}_{t^+} tenemos una órbita periódica reversible de dos cortes que posee una tangencia transversal, mientras que en \mathbf{p}_{d_1} hay una órbita periódica reversible de dos cortes.

También podemos representar esta curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes en el plano Γ , véase la Figura 4.18(b). Esta curva une el punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$ con el punto $\mathbf{p}_f \simeq (6.33378, 6.33378, 0.425924)$.

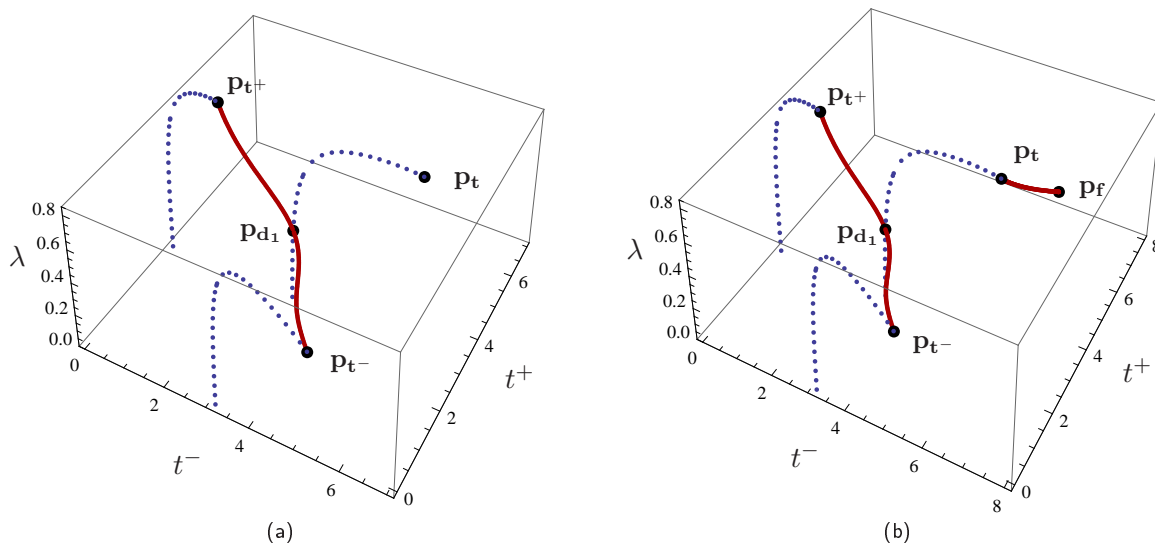


Figura 4.18: Curvas de órbitas periódicas reversibles en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) . Representamos en trazo discontinuo cada una de las curvas de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en un punto de tangencia. En el punto de tangencia $\mathbf{p}_{t^-} \simeq (5.24345, 0, 0.585119)$ comienza una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que, tras pasar por el punto $\mathbf{p}_{d_1} \simeq (3.16689, 3.16689, 0.425924)$, acaba el punto de tangencia $\mathbf{p}_{t^+} \simeq (0, 5.24345, 0.585119)$. En (b) representamos también la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que comienza en el punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$.

En la Figura 4.19 representamos las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes y sus puntos de intersección con el plano de separación. La primera proyección que se muestra corresponde a una órbita periódica reversible de cuatro cortes próxima a cualquiera de los puntos de tangencia \mathbf{p}_{t^-} , \mathbf{p}_{t^+} . La segunda proyección es un valor intermedio de la curva y la tercera proyección corresponde a una órbita periódica reversible que se obtiene cerca de \mathbf{p}_{d_1} .

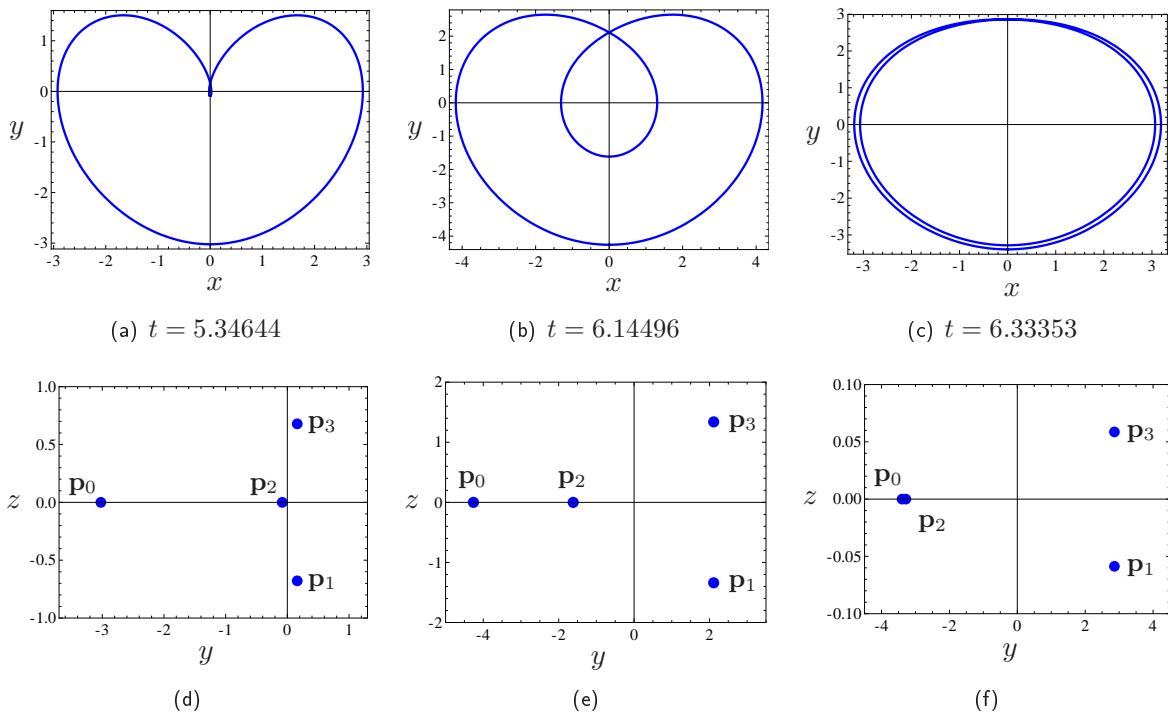


Figura 4.19: (a)–(c) Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes con el plano de separación. (d)–(f) Puntos de cortes de dichas órbitas con el plano de separación.

Para analizar la estabilidad y bifurcaciones de las órbitas periódicas que acabamos de obtener como soluciones $(t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ del sistema (4.56) y que no poseen ningún punto de tangencia con el plano de separación podemos utilizar que la estabilidad está caracterizada por los autovalores de la matriz

$$\mathcal{M} = \exp(A_*^- t_*^-) \cdot \exp(A_*^+ t_*^+) \cdot \exp(A_*^- t_*^+) \cdot \exp(A_*^+ t_*^-), \quad (4.59)$$

donde A_*^+ y A_*^- se obtienen a partir de A^+ y A^- sin más que sustituir el valor del parámetro $\lambda = \lambda_*$.

Esta caracterización se obtiene de modo análogo a como se vio en el capítulo 1. En la Figura 4.20 se representan, frente al semiperiodo, el logaritmo del módulo y el argumento de los autovalores de la matriz \mathcal{M} evaluada en cada uno de los puntos de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes.

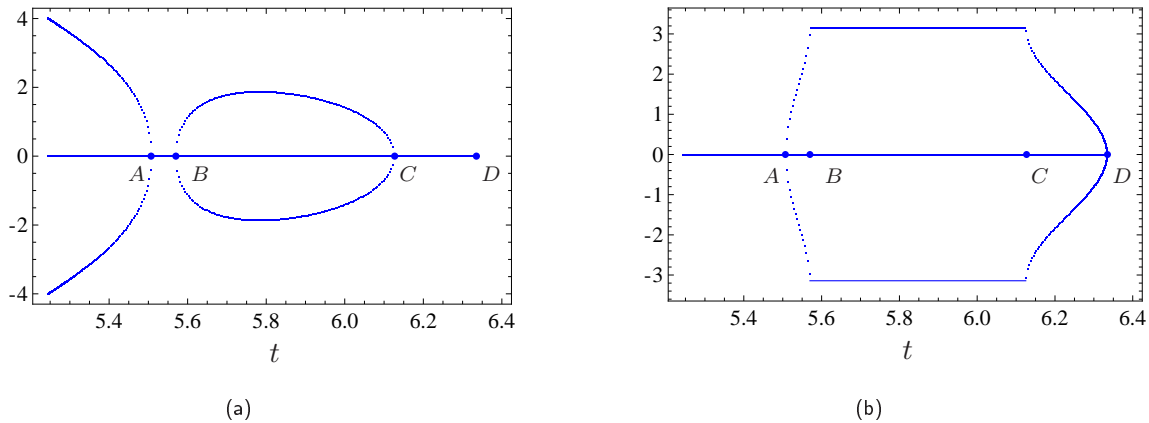


Figura 4.20: (a) Logaritmo del módulo de los multiplicadores característicos asociados a cada una de las órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes frente al semiperiodo t de la respectiva órbita periódica. (b) Argumento de dichos multiplicadores característicos.

A partir de la figura 4.20 deducimos que en la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes aparecen bifurcaciones en los puntos **A**, **B** y **C**. En primer lugar, vemos que en el punto **A** hay una bifurcación pitchfork (pues tanto el logaritmo de cada uno de los multiplicadores característicos como el argumento de dichos multiplicadores son nulos) y desde $t = t_{Pt}$ hasta el punto marcado con la letra **A** las órbitas periódicas serán de tipo hiperbólico. En el punto **B** el logaritmo de cada uno de los multiplicadores característicos es nulo y su argumento o bien es π ó $-\pi$. Por tanto, en **B** hay una bifurcación de duplicación de periodo y las órbitas en el tramo que une **A** con **B** es de tipo elíptico. En **B** pasan a ser de tipo Möbius y este carácter dura hasta el punto **C**, donde se vuelve a producir una bifurcación de duplicación de periodo (aunque en sentido contrario) pasando las órbitas a ser de tipo elíptico. En la Figura 4.21 se indica el tipo de estabilidad en cada tramo de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes.

Para precisar los valores donde se dan las bifurcaciones vamos a proceder como en la sección anterior, es decir, imponemos que $\text{tr}(\mathcal{M}) = 3$ para que exista una bifurcación pitchfork y que $\text{tr}(\mathcal{M}) = -1$ para que haya una bifurcación de duplicación de periodo. Así pues, para que haya una

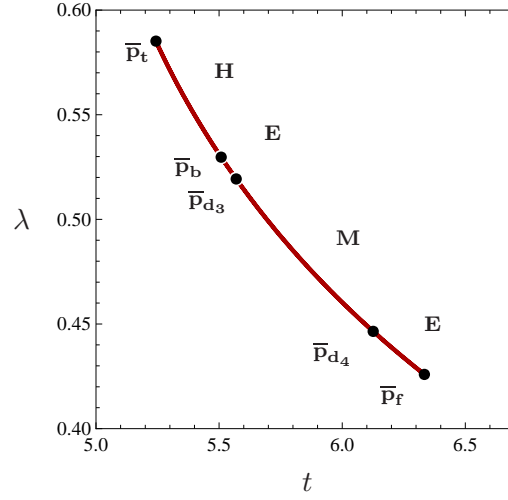


Figura 4.21: Estabilidad en la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes. Hemos denotado por **H** al tramo de la curva donde la órbita es hipérbolico, por **E** donde es elíptica y por **M** donde es de tipo Möbius.

bifurcación pitchfork en la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes han de existir t_*^- , t_*^+ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ sea una solución del sistema

$$\begin{cases} E_1(t^-, t^+, \lambda) = 0, \\ E_2(t^-, t^+, \lambda) = 0, \\ \text{tr}(\exp(A^- t^-) \cdot \exp(A^+ t^+) \cdot \exp(A^- t^+) \cdot \exp(A^+ t^-)) = 3, \end{cases} \quad (4.60)$$

donde $E_1(t^-, t^+, \lambda)$ y $E_2(t^-, t^+, \lambda)$ están dadas, respectivamente, por las expresiones (4.57)–(4.58). Usando el método de Newton obtenemos la solución $\mathbf{p}_b = (t_{\mathbf{p}_b}^-, t_{\mathbf{p}_b}^+, \lambda_{\mathbf{p}_b}) \simeq (4.38725, 1.12114, 0.529689)$.

Por otro lado, para que en la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes haya una bifurcación de duplicación de periodo de órbitas periódicas han de existir t_*^- , t_*^+ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ sea una solución del sistema

$$\begin{cases} E_1(t^-, t^+, \lambda) = 0, \\ E_2(t^-, t^+, \lambda) = 0, \\ \text{tr}(\exp(A^- t^-) \cdot \exp(A^+ t^+) \cdot \exp(A^- t^+) \cdot \exp(A^+ t^-)) = 1. \end{cases} \quad (4.61)$$

En este caso obtenemos las soluciones $\mathbf{p}_{d_3} = (t_{\mathbf{p}_{d_3}}^-, t_{\mathbf{p}_{d_3}}^+, \lambda_{\mathbf{p}_{d_3}}) \simeq (4.31221, 1.25737, 0.51929)$ y $\mathbf{p}_{d_4} = (t_{\mathbf{p}_{d_4}}^-, t_{\mathbf{p}_{d_4}}^+, \lambda_{\mathbf{p}_{d_4}}) \simeq (3.73209, 2.39387, 0.44647)$.

En la Figura 4.22 representamos las curvas de órbitas periódicas obtenidas y todas las bifurcaciones que aparecen en ambas curvas órbitas periódicas frente al semiperiodo. Los puntos $\bar{\mathbf{p}}_b \simeq (5.50839, 0.529689)$, $\bar{\mathbf{p}}_{d_3} \simeq (5.56959, 0.51929)$ y $\bar{\mathbf{p}}_{d_4} \simeq (6.12596, 0.44647)$ se corresponden, en el plano de coordenadas $(t, \lambda) = (t^- + t^+, \lambda)$, con los puntos \mathbf{p}_b , \mathbf{p}_{d_3} , \mathbf{p}_{d_4} , respectivamente.

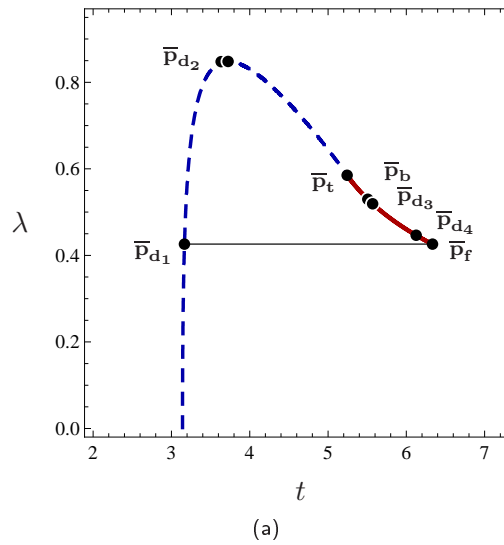


Figura 4.22: Representación gráfica de las curvas de órbitas periódicas reversibles de dos y cuatro cortes en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. La rama en trazo discontinuo es la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (5.24345, 0.585119)$. A partir del cual comienza la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes, que termina en el punto $\bar{\mathbf{p}}_f \simeq (6.33377, 0.425924)$.

Observemos que para la versión lineal a trozos la configuración de estabilidades de las órbitas periódicas involucradas en el lazo es idéntica a la del sistema original de Michelson [24, 37], salvo por el punto de tangencia que en este sistema diferenciable no tiene ninguna relevancia.

Continuación numérica de órbitas periódicas.

La presencia de conexiones globales en un sistema de ecuaciones diferenciales usualmente hace que aparezcan órbitas periódicas en un entorno de estas conexiones. Véanse, por ejemplo, los trabajos [60, 61].

En este capítulo mostramos la existencia de órbitas periódicas relacionadas con las dos conexiones globales cuya existencia hemos probado en el capítulo 3. Más concretamente, se observa que una curva de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes y una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes están relacionadas, respectivamente, con la conexión homoclina directa y con el ciclo heteroclino tipo punto-T directo. Como veremos, estas curvas de órbitas periódicas surgen tras una pérdida de transversalidad.

Asimismo, describimos cómo se forman y desaparecen las curvas de órbitas periódicas que provienen de las bifurcaciones locales existentes en la curva de órbitas periódicas reversibles de dos y cuatro cortes analizadas en el capítulo anterior. Una vez obtenidas estas curvas, veremos si hay alguna relación con las curvas que aparecen en las cercanías de las conexiones globales y si a partir de ellas surgen otras curvas de órbitas periódicas de más cortes con el plano de separación.

Para detectar cada una de las órbitas periódicas es necesario combinar técnicas analíticas y numéricas. Basándonos en la aplicación de Poincaré obtendremos las ecuaciones de cierre que caracterizan a cada una de las órbitas periódicas. Una vez obtenidas, usamos un método de continuación basado en el algoritmo de pseudo-longitud de arco representando el diagrama de bifurcaciones correspondiente. De este modo, completamos los resultados teóricos que se desarrollan en el capítulo anterior.

5.1. Órbitas periódicas cerca de una conexión homoclina directa.

Como hemos mencionado anteriormente, la existencia de una conexión homoclina en un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales a menudo fuerza la aparición de órbitas periódicas en un entorno de dicha conexión. Véanse, por ejemplo, los trabajos [6, 7, 27, 28, 30, 60, 61]. Concretamente, en [60] se evidencia la presencia de una familia uniparamétrica de órbitas periódicas cerca de una conexión homoclina de tipo silla-foco.

Al representar dicha familia en un diagrama de bifurcación periodo-parámetro, la forma de la curva de órbitas periódicas depende del valor absoluto del cociente entre la parte real de los autovalores complejos $\alpha \pm \beta i$ y el autovalor real λ , donde $\alpha \cdot \lambda < 0$, que se denomina *índice silla* y se denota por $\delta = |\alpha/\lambda|$. A medida que aumenta el periodo, en el caso $\delta > 1$ la curva de órbitas periódicas se aproxima sin oscilar al valor del parámetro para el cual existe una conexión homoclina, mientras que si $\delta < 1$ la curva de órbitas periódicas se aproxima contoneándose (*wiggle*) alrededor de dicho valor crítico, véase la Figura 5.1.

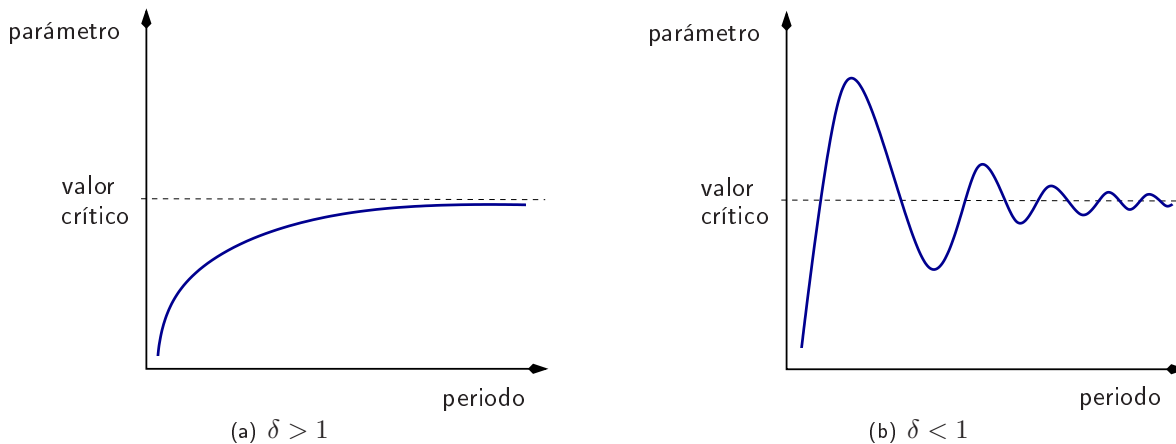


Figura 5.1: Curva de órbitas periódicas en un entorno de una conexión homoclina de tipo silla-foco.

A partir de este estudio evidenciamos que si el periodo es alto, entonces hay una curva de órbitas periódicas en cualquier entorno del valor del parámetro para el cual existe la conexión homoclina. En particular, en el caso $\delta < 1$ el sistema posee para el valor crítico del parámetro infinitas órbitas periódicas que coexisten con la conexión homoclina, mientras que si nos apartamos del valor crítico existe un número finito de órbitas periódicas. Además, existe un conjunto infinito de bifurcaciones

de tipo silla-nodo de órbitas periódicas, las cuales se sitúan en los extremos relativos de la curva de órbitas periódicas. Para más detalle al respecto, véanse los trabajos [27, 28, 60, 61].

Esta riqueza dinámica que se produce en sistemas diferenciables en las cercanías de una conexión homoclina, puede presentarse también en sistemas continuos lineales a trozos, véase [65]. En esta sección mostramos la existencia de una familia uniparamétrica de órbitas periódicas cerca de una conexión homoclina directa en el sistema (2.8), cuya existencia está probada en el capítulo 3.

Como ya hemos mencionado en la sección 3.1, debido a la reversibilidad del sistema (2.8), si existe una conexión homoclina directa del punto de equilibrio $\mathbf{p}_- = (-1/(\lambda^3 + \lambda), 0, 0)$, entonces existirá otra asociada al punto de equilibrio $\mathbf{p}_+ = (1/(\lambda^3 + \lambda), 0, 0)$, de tal modo que ambas conexiones homoclinas son simétricas respecto a la transformación de reversibilidad dada por (2.3). A causa de esta reversibilidad, si hay una órbita periódica cerca de una conexión homoclina directa del punto \mathbf{p}_- , entonces habrá otra órbita periódica para la conexión homoclina directa del punto \mathbf{p}_+ . Además, al igual que ocurre con las conexiones homoclinas directas del sistema, estas dos órbitas periódicas son simétricas respecto a la transformación de reversibilidad.

En nuestro caso, buscamos las órbitas periódicas más simples que pueden aparecer en las cercanías de la conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_- , que existe para $\lambda_h \simeq 0.660759953$ y cuyo semitiempo de vuelo derecho es $t_h \simeq 3.94742$. Obsérvese que cada una de éstas órbitas periódicas ha de ser no reversible, pues las conexiones homoclinas no lo son, y ha de cortar al plano de separación en sólo dos puntos, ya que buscamos órbitas periódicas en las cercanías de las conexiones homoclinas directas del sistema. De todos modos, estas órbitas periódicas no reversibles provienen habitualmente de bifurcaciones de órbitas periódicas reversibles, como una ruptura de simetría (bifurcación pitchfork).

Por otro lado, nótese que una órbita periódica cercana a una conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_- ha de dar varias vueltas alrededor de su variedad invariante unidimensional antes de volver a cortar al plano de separación. Como consecuencia, el correspondiente semitiempo de vuelo izquierdo ha de ser alto al aproximar a la conexión homoclina. En la Figura 5.2 se muestra un esquema de una órbita periódica cercana a la conexión homoclina directa del punto \mathbf{p}_- .

Una vez que hemos descrito el tipo de órbitas periódicas que buscamos en las cercanías de una conexión homoclina directa del sistema (2.8), vamos a establecer las condiciones que las caracterizan. Observemos que como cada una de estas órbitas periódicas corta al plano de separación en sólo dos puntos, es obvio que cada una de ellas se corresponde con un punto fijo de la aplicación de Poincaré Π o, equivalentemente, con dos puntos $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, z_{\mathbf{p}_0})$ y $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$ del plano de separación,

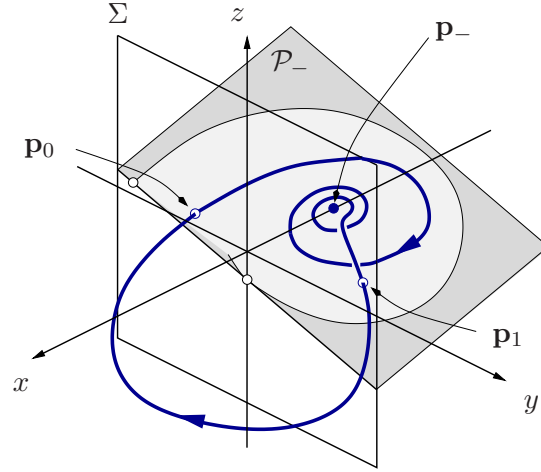


Figura 5.2: Esquema de una órbita periódica no reversible de dos cortes con el plano de separación cercana a la conexión homoclina directa del punto de equilibrio \mathbf{p}_- .

con $y_{\mathbf{p}_0} < 0$ e $y_{\mathbf{p}_1} > 0$, tales que $\mathbf{p}_1 = \Pi_-(\mathbf{p}_0)$ y $\mathbf{p}_0 = \Pi_+(\mathbf{p}_1)$. Ahora bien, para manipular estas condiciones es conveniente dividir las en las tres siguientes:

O1: Existen t_*^-, t_*^+ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda) = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) = \mathbf{p}_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

O2: $x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda_*) < 0$ para todo t^- perteneciente al intervalo $(0, t_*^-)$.

O3: $x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda_*) > 0$ para todo t^+ perteneciente al intervalo $(0, t_*^+)$.

Nótese que si $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ satisface las condiciones O1–O3, entonces t_*^- se corresponde con el semitiempo de vuelo izquierdo, mientras que t_*^+ es el semitiempo de vuelo derecho. Así, obtenemos el periodo de la órbita periódica sumando ambos semitiempos de vuelo, $t_* = t_*^- + t_*^+$. En particular, si los puntos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 pertenecen al eje de reversibilidad, entonces la órbita periódica es reversible y los correspondientes semitiempos de vuelo t_*^- y t_*^+ deben coincidir.

Para determinar las ecuaciones explícitas de la condición O1 es necesario obtener la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda)$ del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal que define (2.8) en el semiespacio izquierdo con la condición inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{p}_0$ y la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda)$ del problema de valores iniciales asociado al sistema lineal correspondiente al semiespacio derecho con la condición

inicial $\mathbf{x}(0, \lambda) = \mathbf{p}_1$. Deducimos la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda)$ a partir de las expresiones (2.19)–(2.21) sin más que sustituir y_0 y z_0 por la segunda y tercera coordenada, respectivamente, del punto $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, z_{\mathbf{p}_0})$,

$$x_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda) = \frac{-1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} + \frac{e^{t^-\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[\frac{(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda} - e^{-\frac{3}{2}t^-\lambda} \right. \\ \left. \left[\left(\lambda y_{\mathbf{p}_0} + z_{\mathbf{p}_0} - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) - \left((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} - 3\lambda z_{\mathbf{p}_0} - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right] \right], \quad (5.2)$$

$$y_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda) = \frac{e^{t^-\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{-\frac{3}{2}t^-\lambda} \left[((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} - \lambda z_{\mathbf{p}_0} - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + (\lambda y_{\mathbf{p}_0} + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_0} - 3\lambda) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right] \right], \quad (5.3)$$

$$z_{\mathbf{p}_0}(t^-, \lambda) = \frac{e^{t^-\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} - e^{-\frac{3}{2}t^-\lambda} \left[(\lambda^3 y_{\mathbf{p}_0} - (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} + \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} - \lambda z_{\mathbf{p}_0} - (3\lambda^2 + 2)) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right] \right], \quad (5.4)$$

siendo $\beta = \sqrt{3\lambda^2 + 4}/2$.

Por otro lado, obtenemos la solución $\mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda)$ sustituyendo en (2.16)–(2.18) las variables y_0 y z_0 por la segunda y tercera coordenada de $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$,

$$x_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} + \frac{e^{-t^+\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[-\frac{(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}}{\lambda} + e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} \right. \\ \left. \left[\left(\lambda y_{\mathbf{p}_1} - z_{\mathbf{p}_1} - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) + \left((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + 3\lambda z_{\mathbf{p}_1} - \frac{2}{\lambda^2 + 1} \right) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] \right], \quad (5.5)$$

$$y_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) = \frac{e^{-t^+\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} \left[((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) - (\lambda y_{\mathbf{p}_1} - (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_1} - 3\lambda) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] \right], \quad (5.6)$$

$$z_{\mathbf{p}_1}(t^+, \lambda) = \frac{e^{-t^+\lambda}}{(3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}} \left[-\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} \left[(\lambda^3 y_{\mathbf{p}_1} + (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1} + \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) - ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - (3\lambda^2 + 2)) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] \right]. \quad (5.7)$$

El sistema (5.1), que consta de seis ecuaciones en las incógnitas $t^-, t^+, \lambda, y_{\mathbf{p}_0}, z_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1}$, tras adecuadas manipulaciones se puede escribir en la forma

$$(f_1(\mathbf{s}, \lambda), f_2(\mathbf{s}, \lambda), f_3(\mathbf{s}, \lambda), f_4(\mathbf{s}, \lambda), f_5(\mathbf{s}, \lambda), f_6(\mathbf{s}, \lambda)) = \mathbf{0}, \quad (5.8)$$

siendo $\lambda > 0$, $\mathbf{s} = (t^-, t^+, y_{\mathbf{p}_0}, z_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$, de tal modo que $t^- > 0$, $t^+ > 0$, $y_{\mathbf{p}_0} < 0$ e $y_{\mathbf{p}_1} > 0$, y donde cada componente $f_i : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, 6$, está dada por

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{s}, \lambda) &= \left((\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^-\lambda} - 3\lambda^2 - 1 \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t^-\lambda}{2}} - \lambda \left((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_0} + z_{\mathbf{p}_0}) - 2\lambda \right) \\
&\quad \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + \lambda \left((\lambda^2 + 1) \left((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} - 3\lambda z_{\mathbf{p}_0} \right) - 2 \right) \operatorname{sen}(\beta t^-), \\
f_2(\mathbf{s}, \lambda) &= \left((\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^-\lambda} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t^-\lambda}{2}} + \left((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} - \lambda z_{\mathbf{p}_0} - 1 \right) \\
&\quad \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + \left(\lambda(y_{\mathbf{p}_0} - 3) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_0} \right) \operatorname{sen}(\beta t^-), \\
f_3(\mathbf{s}, \lambda) &= \left(\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^-\lambda} - (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t^-\lambda}{2}} - \left(\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1) - (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} \right) \\
&\quad \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + \left(-(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 3\lambda^2 + 2 \right) \operatorname{sen}(\beta t^-), \\
f_4(\mathbf{s}, \lambda) &= \left((3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1) \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \lambda \left[\left((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_1} - z_{\mathbf{p}_1}) - 2\lambda \right) \right. \\
&\quad \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) + \left((\lambda^2 + 1) \left((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + 3\lambda z_{\mathbf{p}_1} \right) - 2 \right) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+\lambda}, \\
f_5(\mathbf{s}, \lambda) &= \left(-(3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} e^{t^+\lambda} + \lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1 \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \left[\left((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - 1 \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \right. \\
&\quad \left. \cos(\beta t^+) + \left(\lambda(3 - y_{\mathbf{p}_1}) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_1} \right) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+\lambda}, \\
f_6(\mathbf{s}, \lambda) &= - \left(\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1) + (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} e^{t^+\lambda} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \left[\left(\lambda(\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} + (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1} \right) \right. \\
&\quad \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) - \left((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - 3\lambda^2 - 2 \right) \operatorname{sen}(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+\lambda}.
\end{aligned}$$

A partir del sistema (5.8) vamos a obtener, realizando algunas manipulaciones entre sus ecuaciones, un sistema equivalente con menos ecuaciones e incógnitas. Para ello, en primer lugar, calculamos la segunda coordenada del punto $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, z_{\mathbf{p}_0})$ despejando su valor de la primera ecuación del sistema,

$$\begin{aligned}
y_{\mathbf{p}_0} &= \frac{1}{q_0(t^-, \lambda)} \left[\left(3\lambda^2 - (\lambda^2 + 1)(\lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^-\lambda} + 1 \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t^-\lambda}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left((\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} - 2\lambda \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + \lambda \left(3\lambda(\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} + 2 \right) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right], \tag{5.9}
\end{aligned}$$

siempre que no se anule

$$q_0(t^-, \lambda) = \lambda(\lambda^2 + 1) \left[\lambda \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(e^{\frac{3}{2}t^-\lambda} - \cos(\beta t^-) \right) + (3\lambda^2 + 2) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right]. \tag{5.10}$$

Sustituyendo ahora la expresión obtenida de la variable $y_{\mathbf{p}_0}$ en las ecuaciones segunda y tercera

del sistema (5.8) determinamos las coordenadas del punto $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$,

$$y_{\mathbf{p}_1} = \frac{1}{q_0(t^-, \lambda)} \left[\lambda((\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} + \lambda(e^{2t^- \lambda} - 1))\sqrt{3\lambda^2 + 4}e^{-\frac{t^- \lambda}{2}} - ((2\lambda^2 + 1)(e^{t^- \lambda} - 1) + (\lambda^3 + \lambda)z_{\mathbf{p}_0}e^{t^- \lambda}) \right. \\ \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + \lambda((3\lambda(\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^- \lambda} + 1) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right], \quad (5.11)$$

$$z_{\mathbf{p}_1} = \frac{1}{q_0(t^-, \lambda)} \left[\lambda^2(\lambda(e^{2t^- \lambda} + 1) - (\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0})\sqrt{3\lambda^2 + 4}e^{-\frac{t^- \lambda}{2}} - \lambda^2(\lambda(e^{t^- \lambda} + 1) - (\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0}e^{t^- \lambda}) \right. \\ \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + ((\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2)((\lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t^- \lambda} - 1) + \lambda^2(e^{t^- \lambda} - 1)) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right]. \quad (5.12)$$

Falta calcular la expresión de la tercera coordenada del punto \mathbf{p}_0 , que deducimos llevando a la cuarta ecuación del sistema (5.8) las expresiones de $y_{\mathbf{p}_1}$ y $z_{\mathbf{p}_1}$ obtenidas. Realizando algunas manipulaciones obtenemos que $z_{\mathbf{p}_0}$ viene dado por

$$z_{\mathbf{p}_0} = \frac{1}{q_1(t^-, t^+, \lambda)} \left[\left[\lambda(3\lambda^2 + 4) \left[((\lambda^2 - (3\lambda^2 + 1)e^{t^+ \lambda} + 1)e^{2t^- \lambda} - 2\lambda^2) + 2\lambda^2(e^{2t^- \lambda} + 1) \cos(\beta t^+) e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - ((\lambda^2 + 1)e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)e^{t^+ \lambda} - 2\lambda^2) \cos(\beta t^-) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} \right] - \left[2\lambda^2(3\lambda^2 e^{2t^- \lambda} - 1) \operatorname{sen}(\beta t^+) e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda} + \right. \right. \\ \left. \left. + ((3\lambda^2 + 2)((\lambda^2 + 1)(e^{t^- \lambda} + e^{t^+ \lambda} - 2) + 2\lambda^2 e^{t^+ \lambda}) - 2\lambda^2) \operatorname{sen}(\beta t^-) e^{\frac{t^- \lambda}{2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda^2((3\lambda^2 + 1)e^{t^- \lambda} - 3(\lambda^2 + 1)) \operatorname{sen}(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-)\lambda} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2((3\lambda^2(\lambda^2 + 1) + 1)e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)) \operatorname{sen}(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-)\lambda} \right] \sqrt{3\lambda^2 + 4} - \right. \\ \left. - \lambda((\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 - 2) + (\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 1)e^{t^- \lambda}) \cos(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-)\lambda} + \right. \\ \left. + 2\lambda((3\lambda^4 + 7\lambda^2 + 3)e^{t^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)(2\lambda^2 + 3)) \cos(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{1}{2}(3t^+ + t^-)\lambda} \right], \quad (5.13)$$

siempre que no se anule

$$q_1(t^-, t^+, \lambda) = 2(\lambda^2 + 1)\lambda \left[(3\lambda^2 + 4)\lambda \left(\cos(\beta t^-) e^{\frac{3}{2}t^- \lambda} + \cos(\beta t^+) e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \lambda((3\lambda^2 + 1) \cos(\beta(t^+ - t^-)) - (6\lambda^2 + 5) \cos(\beta(t^+ + t^-))) e^{\frac{3}{2}(t^+ + t^-)\lambda} + \right. \\ \left. + \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(\operatorname{sen}(\beta t^-) e^{\frac{3}{2}t^- \lambda} + \operatorname{sen}(\beta t^+) e^{\frac{3}{2}t^+ \lambda} - \operatorname{sen}(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{3}{2}(t^+ + t^-)\lambda} \right) \right].$$

Al sustituir en las dos últimas ecuaciones del sistema (5.8) los valores de $y_{\mathbf{p}_0}$, $z_{\mathbf{p}_0}$, $y_{\mathbf{p}_1}$ y $z_{\mathbf{p}_1}$ obtenidos, se tiene el sistema

$$\begin{cases} E_1(t^-, t^+, \lambda) = 0, \\ E_2(t^-, t^+, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

con

$$\begin{aligned}
E_1(t^-, t^+, \lambda) = & \lambda \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left[(3\lambda^2 + 1) \left((3\lambda^2 + 4)(e^{t^+\lambda} - e^{t^-\lambda})e^{(2t^- + t^+)\lambda} + (3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} + 2(\lambda^2 + 1) \right) + \right. \\
& + (9\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4)e^{(t^- + 2t^+)\lambda} + (\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 4)e^{2t^-\lambda} - 3(3\lambda^2 + 1))e^{t^-\lambda} + e^{\frac{1}{2}t^+\lambda} \left[((18\lambda^4 + 33\lambda^2 + 13) + \right. \\
& + 2\lambda^2(3\lambda^2 + 4)e^{(t^+ + 2t^-)\lambda})e^{t^-\lambda} - (3\lambda^2 + 1) \left((6(\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} + (3\lambda^2 + 4)e^{t^-\lambda})e^{t^-\lambda} + (5\lambda^2 + 3)e^{t^+\lambda} \right) \left. \right] \cos(\beta t^+) + \\
& + \left[(3\lambda^2 + 1)((\lambda^2 - 1) + (3\lambda^2 + 2)e^{t^+\lambda})e^{t^-\lambda} + (6\lambda^4 + 5\lambda^2 - 1)e^{t^+\lambda} \right] \cos(\beta(t^+ - 2t^-)) - \left[\lambda^2((15\lambda^2 + 17)e^{t^+\lambda} - \right. \\
& - (3\lambda^2 + 7)e^{t^-\lambda})e^{2t^-\lambda} + (3\lambda^2 + 1)((\lambda^2 + 1)(2 - 3e^{t^+\lambda}) + (3\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda}) \left. \right] \cos(\beta(t^+ - t^-)) + \left[(3\lambda^2 + 1)(e^{t^+\lambda} + \right. \\
& + 4(\lambda^2 + 1)e^{(t^+ + 2t^-)\lambda} - 2(\lambda^2 + 2)(1 + e^{3t^-\lambda}) + (6\lambda^2 + 5)e^{t^-\lambda} - 2 \left. \right] \cos(\beta(t^+ + t^-)) \left. \right] e^{-\frac{\lambda}{2}t^-} - (3\lambda^2 + 4) \cdot \\
& \cdot \left[(\lambda^2(2e^{3t^-\lambda} - 1) - 1)e^{2t^+\lambda} + ((3\lambda^2 + 1)(e^{2t^+\lambda} - (e^{t^-\lambda} + 2e^{t^+\lambda})e^{t^-\lambda}) + (5\lambda^2 + 3)e^{t^-\lambda})e^{t^-\lambda} \right] \cos(\beta t^-) e^{-\frac{\lambda}{2}t^-} - \\
& - \left[(3\lambda^2 + 1)((2\lambda^2 e^{2t^+\lambda} + 1)e^{t^-\lambda} + (6\lambda^2 + 5)e^{t^+\lambda}) - 2(3\lambda^4 + 7\lambda^2 + 3) \right] \cos(2\beta t^-) + 2\lambda^2(3\lambda^2 + 1)(e^{t^+\lambda} - e^{t^-\lambda}) \cdot \\
& \cdot \cos(\beta(t^+ + 2t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}} + (3\lambda^2 + 4) \left[\left[6\lambda^4 e^{(2t^+ + 3t^-)\lambda} - (3\lambda^2 + 1)(\lambda^2 e^{t^-\lambda} + 2e^{t^+\lambda})e^{2t^-\lambda} + 2(e^{t^-\lambda} + e^{2t^+\lambda})e^{t^-\lambda} + \right. \right. \\
& + (\lambda^2 + 1) \left(3\lambda^2(e^{t^-\lambda} + 3e^{2t^+\lambda})e^{t^-\lambda} - (3\lambda^2 + 2)e^{2t^+\lambda} \right) + 2(e^{t^-\lambda} + e^{2t^+\lambda})e^{t^-\lambda} \left. \right] \operatorname{sen}(\beta t^-) e^{-\frac{\lambda}{2}t^-} + 2 \left[(3\lambda^2 + 1)(e^{t^+\lambda} - \right. \\
& - 2\lambda^2 e^{(2t^+ + t^-)\lambda} + (2\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda}) - 2(3\lambda^2(\lambda^2 + 1) + 1) \left. \right] \cos(\beta t^-) \operatorname{sen}(\beta t^-) + \left[(2\lambda^2 e^{(t^+ + 3t^-)\lambda} + (3\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda} - \right. \\
& - (\lambda^2 + 1)(e^{t^+\lambda} - 2)) \left(3\lambda^2 + 1 \right) + \lambda^2(3(\lambda^2 - 1)e^{t^+\lambda} + (3\lambda^2 - 1)e^{t^-\lambda})e^{2t^-\lambda} \left. \right] \operatorname{sen}(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{1}{2}(t^+ - t^-)\lambda} - \\
& - \left[(3\lambda^2 + 1)((1 - 2\lambda^2 e^{2t^-\lambda})e^{t^-\lambda} + (2\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda}) - 2(3\lambda^2(\lambda^2 + 1) + 1) \right] \operatorname{sen}(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{1}{2}(t^+ - t^-)\lambda} \left. \right] - \\
& - \lambda^2 \left[-9(\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} + (3\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 4)(e^{t^+\lambda} + 1) + 1)e^{t^-\lambda} \right] \operatorname{sen}(\beta(t^+ - 2t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} - \left[6\lambda^4(3\lambda^2 + 4)e^{(t^+ + 3t^-)\lambda} + \right. \\
& + (3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2(3\lambda^2 + 4)e^{2t^-\lambda} + (3\lambda^4 + 9\lambda^2 + 4)e^{t^+\lambda}) - (27\lambda^4 + 33\lambda^2 + 4)e^{t^-\lambda} \left. \right] \operatorname{sen}(\beta t^+) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} - \\
& - 2(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)(e^{t^-\lambda} - e^{t^+\lambda}) \operatorname{sen}(\beta(t^+ + 2t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2(t^-, t^+, \lambda) = & \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left[\lambda^2 \left((3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 4)(e^{t^+\lambda} + e^{t^-\lambda})e^{t^-\lambda} + (9\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4)\lambda^2 e^{t^+\lambda} \right) e^{(t^+ + t^-)\lambda} + \right. \\
& + 2(9\lambda^6 + 12\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda} + (\lambda^2 + 1) \left(2(3\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - (\lambda^2 + 2)) - \lambda^2(3\lambda^2 + 4)e^{3t^-\lambda} \right) - \\
& - \lambda^2 \left[(\lambda^2 + 1)(2(3\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda} - (3\lambda^2 + 4)e^{t^+\lambda}) + (\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 1)e^{(t^+ + t^-)\lambda} \right] \cos(\beta(t^+ - 2t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} - \\
& - \left[\lambda^2(3\lambda^2 + 4)(2\lambda^2 e^{(t^+ + t^-)\lambda} + (3\lambda^2 + 1))e^{2t^-\lambda} + (\lambda^2 - 1)(9\lambda^4 + 12\lambda^2 + 2)e^{t^-\lambda} + 2(\lambda^2 + 1)((2\lambda^2 - 1)(3\lambda^2 + 1) + \right. \\
& + (9\lambda^4 + 3\lambda^2 + 2)e^{t^-\lambda})e^{t^+\lambda} \left. \right] \cos(\beta t^+) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} + \left[(\lambda^2 + 1) \left((3\lambda^2 - 2)\lambda^2 e^{3t^-\lambda} + 2(3\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda} - (\lambda^2 + 2)) + \right. \right. \\
& + 2(3\lambda^4 + \lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} \left. \right) + \left(2(\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda} + (15\lambda^4 + 11\lambda^2 - 2) \right) \lambda^2 e^{(t^+ + 2t^-)\lambda} \left. \right] \cos(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{1}{2}(t^+ - t^-)\lambda} - \\
& - \lambda^2(3\lambda^2 + 4) \left[\left((2\lambda^2 e^{2t^-\lambda} + 3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} + (6\lambda^2 + 2)e^{t^-\lambda} \right) e^{(t^+ + t^-)\lambda} + (\lambda^2 - 1)(1 + e^{t^-\lambda})e^{2t^-\lambda} - (\lambda^2 + 1)e^{2t^+\lambda} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\lambda^2 \Big] \cos(\beta t^-) e^{-\frac{\lambda}{2}} - \left[(3\lambda^2 + 1) \left((2e^{2t^+ \lambda} + 1)\lambda^4 + 2\lambda^2 + 2 \right) e^{t^- \lambda} + (3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 2) e^{t^+ \lambda} \right] - 2(6\lambda^6 + 14\lambda^4 + 9\lambda^2 + \\
& + 2) \Big] \cos(2\beta t^-) + \left[(3\lambda^2 + 1) \left((2\lambda^2((\lambda^2 + 3)e^{t^+ \lambda} + (\lambda^2 + 3)e^{t^- \lambda}) - 3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 2) e^{2t^- \lambda} - (\lambda^4 + 2\lambda^2 + 2) e^{t^+ \lambda} \right) - \right. \\
& - 4\lambda^2(3\lambda^4 + 7\lambda^2 + 3) e^{(t^+ + 3t^-)\lambda} + 2(6\lambda^6 + 14\lambda^4 + 9\lambda^2 + 2) \Big] \cos(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}(t^+ - t^-)\lambda} - \\
& - 2(3\lambda^2 + 1) \left[(\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1)(e^{t^+ \lambda} + e^{t^- \lambda}) - 2(\lambda^2 + 1)(2\lambda^2 + 1) e^{(t^+ + t^-)\lambda} \right] \cos(\beta(t^+ + 2t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} + \\
& + \lambda \left[(3\lambda^2 + 1) \left((3\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 4) e^{2t^- \lambda} - 6(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2) e^{t^+ \lambda} \right) + (2(27\lambda^6 + 72\lambda^4 + 57\lambda^2 + 16) e^{t^+ \lambda} + \right. \\
& + 6\lambda^4(3\lambda^2 + 4) e^{(t^+ + 2t^-)\lambda} - (27\lambda^6 + 99\lambda^4 + 102\lambda^2 + 28) e^{t^- \lambda} \Big] \operatorname{sen}(\beta t^+) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} - \left[(\lambda^2 + 1) \left((9\lambda^4 + 6\lambda^2 - 2) e^{t^+ \lambda} - \right. \right. \\
& - 2(3\lambda^2 + 1) e^{t^- \lambda} \Big) + (\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 2)(3\lambda^2 + 1) e^{(t^+ + t^-)\lambda} \Big] \operatorname{sen}(\beta(t^+ - 2t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} + (3\lambda^2 + 4) \left[(\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 e^{3t^- \lambda} + \right. \\
& + 2e^{t^+ \lambda} - 6\lambda^2 - 2) - \lambda^2(3\lambda^2 + 5) e^{(t^+ + 2t^-)\lambda} \Big] \operatorname{sen}(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} + (3\lambda^2 + 4) \left[6\lambda^4 e^{(2t^+ + 3t^-)\lambda} + 12\lambda^4 + 8\lambda^2 - \right. \\
& - (\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2) e^{2t^+ \lambda} + (3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2) e^{(2t^+ + t^-)\lambda} + 2(3\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2) e^{(t^+ + 2t^-)\lambda} - (9\lambda^4 + 17\lambda^2 + 6) e^{2t^- \lambda} + \\
& + e^{3t^- \lambda} (3(\lambda^4 + \lambda^2) + 2) \Big] e^{-\frac{\lambda}{2}t^-} - 2 \left[(3\lambda^2 + 1) (\lambda^2(2e^{2t^+ \lambda} + 1) e^{t^- \lambda} + (3\lambda^2 + 2) e^{t^+ \lambda}) - 4\lambda^2 - 2 \right] \cos(\beta t^-) \Big] \operatorname{sen}(\beta t^-) + \\
& + 2(3\lambda^2 + 1) \left[(3\lambda^4 + 5\lambda^2 + 1)(e^{t^+ \lambda} + e^{t^- \lambda}) - 2(\lambda^2 + 1) e^{(t^+ + t^-)\lambda} \right] \operatorname{sen}(\beta(t^+ + 2t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} - (3\lambda^2 + 4) \left[4(3(\lambda^4 + \lambda^2) + \right. \\
& + 1) e^{(t^+ + 3t^-)\lambda} - 4\lambda^2 + (3\lambda^2 + 1) \left((\lambda^2 + 2(\lambda^2 - 1) e^{2t^- \lambda}) e^{t^+ \lambda} + (3\lambda^2 + 2 - 2e^{2t^- \lambda}) e^{t^- \lambda} \right) - 2 \Big] \operatorname{sen}(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{\lambda}{2}t^+} \Big]
\end{aligned}$$

Así pues, para probar que se satisface la condición O1 tenemos que ver que existen $\lambda_* > 0$ y $\mathbf{u}_* = (t_*^-, t_*^+)$, con $t_*^- > 0$ y $t_*^+ > 0$, de tal modo que $(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$ es una solución del sistema (5.14), siempre y cuando $q_0(t_*^-, \lambda_*)$ y $q_1(t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ no se anulen. Obsérvese que este sistema posee una incógnita más que ecuaciones, por lo que su solución será genéricamente una curva.

Como en el capítulo anterior, en la obtención de esta curva de soluciones usaremos un algoritmo de continuación.

Para aplicar el método de continuación necesitamos un punto inicial, que obtenemos aplicando el método de Newton al sistema (5.14), en el que hemos fijado previamente el valor del parámetro $\lambda = 0.660759953 \simeq \lambda_h$, correspondiente al valor crítico para el cual existe la conexión homoclina. Para comenzar el método de Newton tomamos el punto $\mathbf{u}_0 = (t_0^-, t_0^+) = (25, 3.94742)$, en el que hemos considerado un valor alto para el semitiempo de vuelo izquierdo (de modo que aproxime al de la conexión homoclina en el semiespacio que contiene a su equilibrio) y el semitiempo de vuelo derecho aproximadamente igual al de la conexión homoclina directa. De este modo, se obtiene un primer punto de la curva de soluciones del sistema (5.14), $(\mathbf{s}_*, \lambda_*) \simeq (24.6865, 3.9465, 0.660759953)$, para el que se verifican las condiciones O2 y O3, al mismo tiempo que no se anulan q_0 y q_1 .

Sustituyendo la solución obtenida en (5.9)–(5.13) obtenemos los puntos de corte de la órbita

periódica con el plano de separación, $\mathbf{p}_0 \simeq (0, -2.20597, -0.05579)$ y $\mathbf{p}_1 \simeq (0, 0.69689, 0.45993)$. Estos dos puntos están próximos a los puntos de intersección de la conexión homoclina directa con el plano de separación, $\mathbf{m}_- = (0, 1/(\lambda_h^2 + 1), \lambda_h/(\lambda_h^2 + 1))$ y $\Pi_+(\mathbf{m}_-)$. En la Figura 5.3 se representa una proyección de dicha órbita periódica, donde se aprecia su parecido con la conexión homoclina directa.

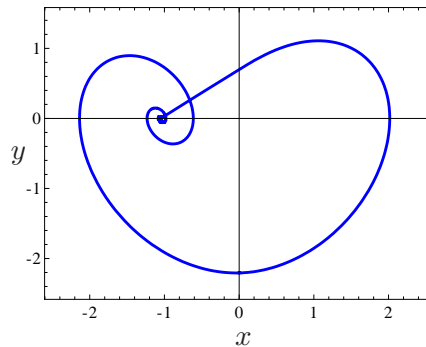


Figura 5.3: Proyección en el plano de coordenadas (x, y) de la órbita periódica no reversible de dos cortes para la solución $(24.6865, 3.9465, 0.660759953)$.

Al igual que en el capítulo anterior, para asegurar que las soluciones obtenidas por el método de continuación se corresponden realmente con órbitas periódicas del tipo buscado, hemos añadido al algoritmo unas sentencias adicionales en las que se comprueban las condiciones O1–O3.

Aplicamos ahora el algoritmo de continuación tomando la solución obtenida como punto inicial y un paso positivo (es decir, aumentando el semitiempo de vuelo izquierdo en la primera iteración). Así obtenemos una curva de soluciones de tal modo que cada uno de sus puntos se corresponde con una órbita periódica del tipo que buscamos, pues hemos comprobado que en cada punto se satisface las condiciones O1–O3. Al representar esta curva de órbitas periódicas en un diagrama de bifurcación periodo-parámetro, véase la Figura 5.4(a), evidenciamos que, a medida que aumenta el periodo, la curva se aproxima oscilando al valor del parámetro para el cual existe la conexión homoclina directa.

Por otro lado, usando el método de continuación con el mismo punto inicial pero tomando un paso negativo, obtenemos la curva de soluciones que se representa en la Figura 5.4(b). Nótese que esta curva llega al punto $(10.4869, 0.585119)$ del plano de coordenadas (t, λ) , donde t es el periodo (obtenido como suma de los semitiempos de vuelo t^- y t^+) de la órbita periódica no reversible de dos cortes. Este punto se corresponde con el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t = (t_{p_t}, \lambda_{p_t}) \simeq (5.24345, 0.585119)$

cuya existencia se probó en el capítulo 4 y que aparece representado en la Figura 4.17, pero considerando el periodo en vez del semiperiodo de la órbita. En este caso, la órbita periódica reversible de dos cortes se está recorriendo dos veces. Sobre la curva obtenida encontramos algunas soluciones que no verifican alguna de las condiciones O1–O3, por lo que no proporcionan órbitas periódicas no reversibles de dos cortes. Concretamente, ningún punto del trozo de la curva que une el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t$ con $\mathbf{q}_0 = (t_{\mathbf{q}_0}, \lambda_{\mathbf{q}_0}) \simeq (11.105, 0.528171)$ se corresponde con una órbita periódica del tipo que estamos considerando, mientras que las soluciones con periodo mayor que $t_{\mathbf{q}_0}$ sí. Además, debido a la reversibilidad del sistema, para cada una de estas soluciones coexisten dos órbitas periódicas: una relacionada con la conexión homoclinina directa de \mathbf{p}_- y la otra con la conexión homoclinina directa de \mathbf{p}_+ .

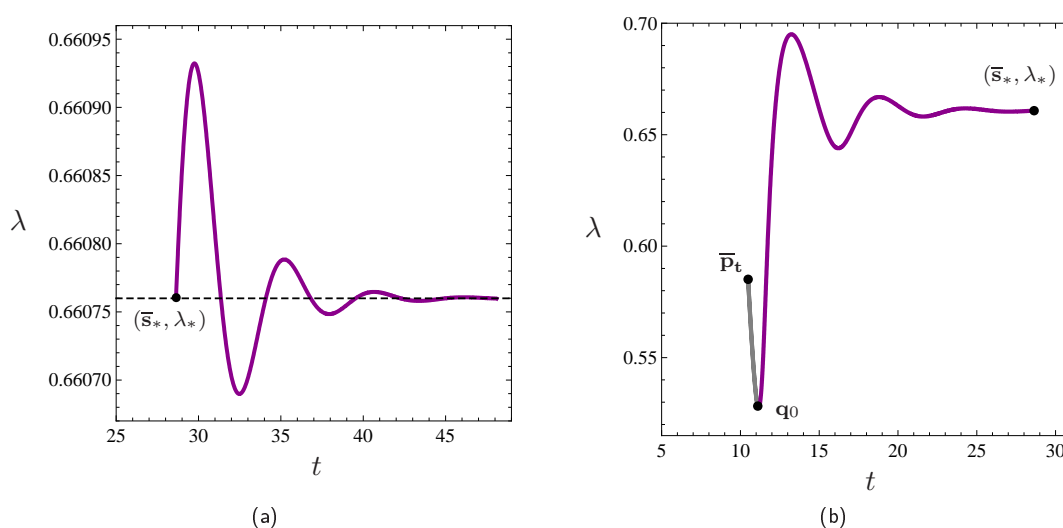


Figura 5.4: Representación gráfica en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica la suma de los semitiempos de vuelo de cada solución, de: (a) curva de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes obtenida tomando la solución $(\bar{s}_*, \lambda_*) = (t_*^- + t_*^+, \lambda_*) \simeq (28.633, 0.660759953)$ como punto inicial y un paso positivo; (b) curva de soluciones del sistema (5.14) obtenida tomando el mismo punto inicial y un paso negativo. Los puntos de la curva que une el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$ con el punto $\mathbf{q}_0 \simeq (11.105, 0.528171)$ no se corresponden con órbitas periódicas.

Representando gráficamente las soluciones del sistema (5.14) en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) , donde t^- es el semitiempo de vuelo izquierdo y t^+ el semitiempo de vuelo derecho, véase la Figura 5.5, evidenciamos que la curva de soluciones pasa por el punto

de tangencia $\mathbf{p}_t = (t_{\mathbf{p}_t}, t_{\mathbf{p}_t}, \lambda_{\mathbf{p}_t})$ y, debido a la reversibilidad, es simétrica respecto al plano $T = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$. Notemos que si un punto de la curva corresponde a una órbita periódica, entonces su simétrico respecto de T proporciona otra órbita periódica, simétrica bajo la transformación de reversibilidad.

Cada una de las ramas simétricas de la curva de soluciones tiende, al aumentar el periodo, a la conexión homoclina correspondiente. Observemos que todos los puntos de esta curva son órbitas periódicas salvo los tramos comprendidos entre $\mathbf{q}_1 \simeq (6.90258, 4.19897, 0.528251)$ y \mathbf{p}_t y entre \mathbf{p}_t y $\mathbf{q}_2 \simeq (4.19897, 6.90258, 0.528251)$. Estos tres puntos extremos sí proporcionan órbitas periódicas. Más concretamente, en \mathbf{p}_t tenemos una órbita periódica reversible de dos cortes con el plano de separación, mientras que en \mathbf{q}_1 y en \mathbf{q}_2 hay una órbita periódica no reversible de tres cortes, uno de los cuales es un punto de tangencia no transversal con el plano de separación.

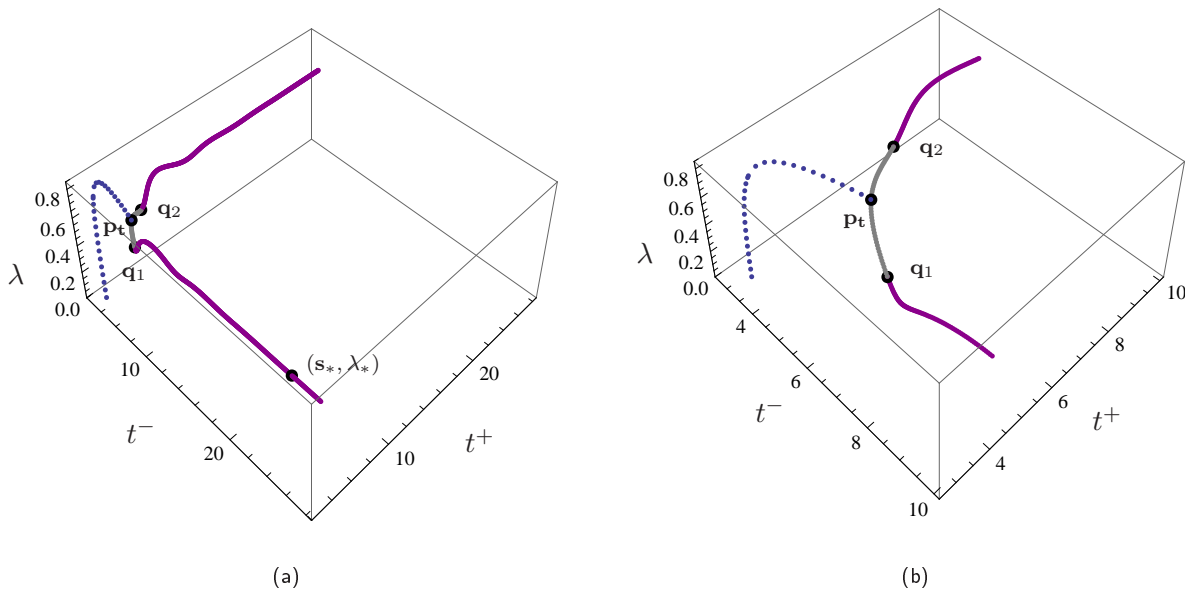


Figura 5.5: Curvas de órbitas periódicas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) . La línea discontinua corresponde a la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en el punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$. Por este punto de tangencia pasa también la curva de soluciones del sistema (5.14). En particular, la curva de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes con el plano de separación conecta los puntos $\mathbf{q}_1 \simeq (6.90258, 4.19897, 0.528251)$ y $\mathbf{q}_2 \simeq (4.19897, 6.90258, 0.528251)$, con las respectivas conexiones homoclinas. En (b) se muestra una ampliación de (a).

En la Figura 5.6 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas no reversibles de dos cortes de la curva que acabamos de obtener, comenzando con un punto próximo a q_1 (donde se intuye la tangencia) y avanzando por la curva a medida que el periodo crece.

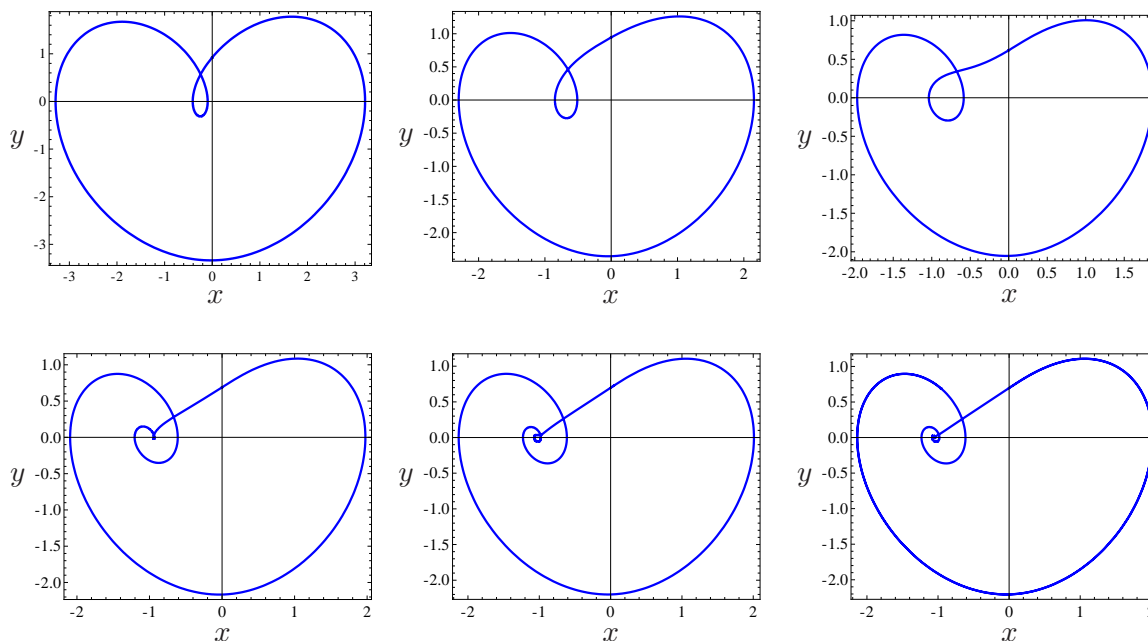


Figura 5.6: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de algunas órbitas periódicas no reversibles de dos cortes con el plano de separación relacionadas con la conexión homoclina directa de p_- .

Como hemos mencionado previamente la órbita periódica no reversible dada por el punto q_1 interseca al plano de separación en tres puntos, que en este caso son $p_0 \simeq (0, -3.38417, -0.01745)$, $p_1 \simeq (0, 0, -0.72352)$ y $p_2 \simeq (0, 0.70676, 1.13521)$. El punto p_1 es un punto de tangencia no transversal con el plano de separación, como puede evidenciarse en la Figura 5.7.

En la Figuras 5.8 y 5.9 se muestran las órbitas periódicas simétricas a las de la Figura 5.6, correspondientes a la curva de soluciones que une q_2 con su respectiva conexión homoclina.

A partir de las Figuras 5.6 y 5.8, evidenciamos que conforme aumenta el periodo más se parece la órbita periódica no reversible de dos cortes a la conexión homoclina directa del punto de equilibrio correspondiente, por lo que puede considerarse a la conexión homoclina directa como el límite de una órbita periódica no reversible de dos cortes con el plano de separación cuando su periodo tiende

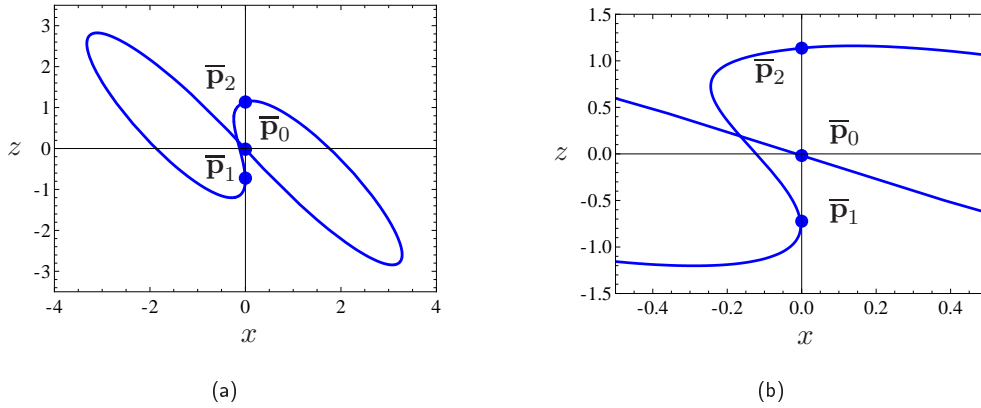


Figura 5.7: (a) Proyección en plano de coordenadas (x, z) de la órbita periódica no reversible que proporciona $\mathbf{q}_1 \simeq (6.90258, 4.19897, 0.528251)$. Los puntos $\bar{\mathbf{p}}_i$, con $i = 0, 1, 2$, son las proyecciones de los puntos de intersección de esta órbita periódica con el plano de separación, $\mathbf{p}_0 \simeq (0, -3.38417, -0.01745)$, $\mathbf{p}_1 \simeq (0, 0, -0.72352)$ y $\mathbf{p}_2 \simeq (0, 0.70676, 1.13521)$. Nótese que \mathbf{p}_1 es un punto de tangencia no transversal de esta órbita periódica con el plano de separación. En (b) se muestra una ampliación de (a).

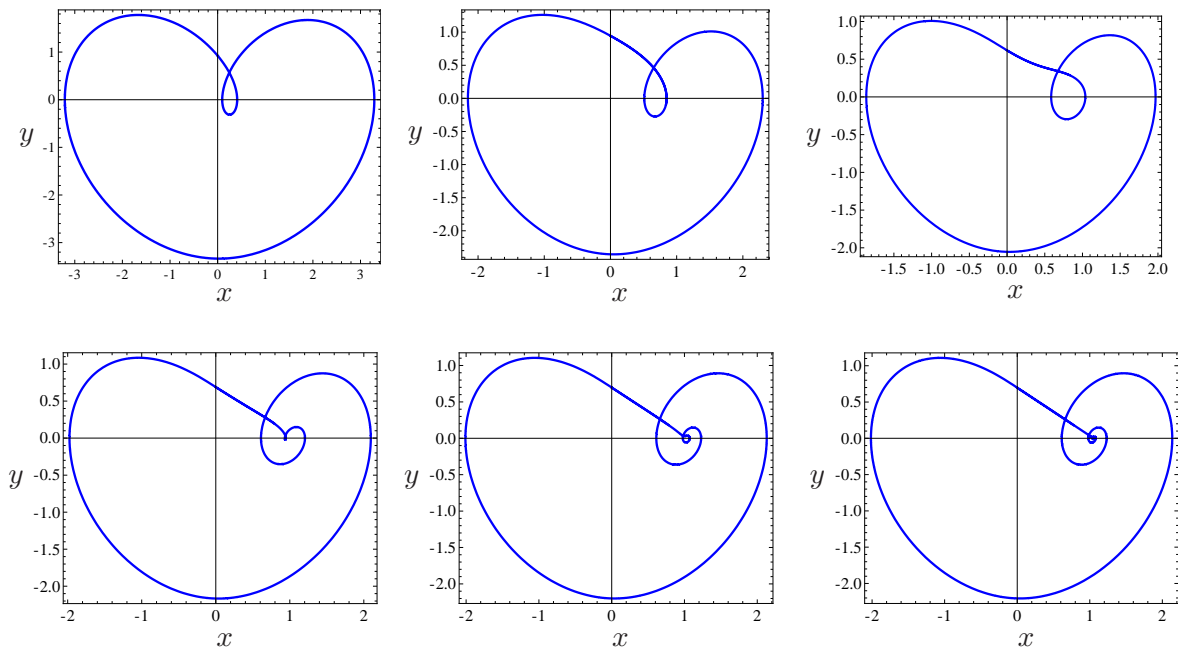


Figura 5.8: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de algunas órbitas periódicas no reversibles de dos cortes relacionadas con la conexión homoclina directa de \mathbf{p}_+

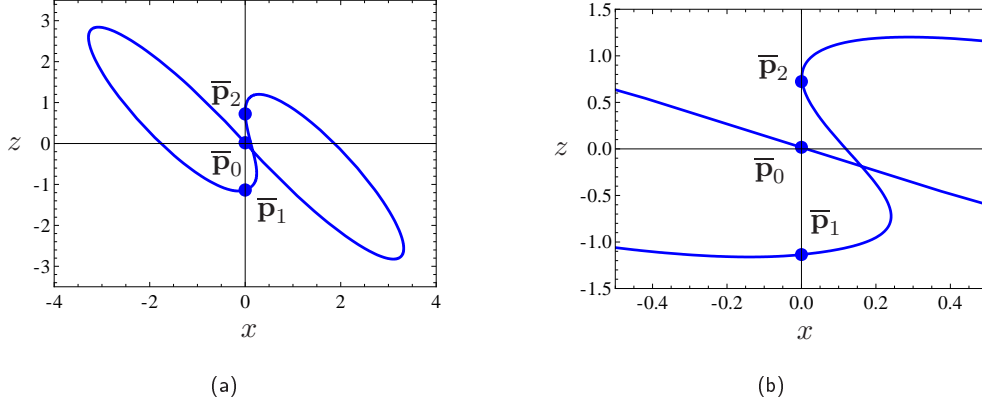


Figura 5.9: Proyección en el plano de coordenadas (x, z) de la órbita periódica no reversible que proporciona el punto $\mathbf{q}_2 \simeq (4.19897, 6.90258, 0.528251)$. Los puntos $\bar{\mathbf{p}}_i$, con $i = 0, 1, 2$, son las proyecciones de los puntos de intersección de esta órbita periódica con el plano de separación, $\tilde{\mathbf{p}}_0 \simeq (0, -3.38417, 0.01745)$, $\tilde{\mathbf{p}}_1 \simeq (0, 0.70676, -1.13521)$ y $\tilde{\mathbf{p}}_2 \simeq (0, 0, 0.72352)$. Nótese que $\tilde{\mathbf{p}}_2$ es un punto de tangencia no transversal de esta órbita periódica con el plano de separación. En (b) se muestra una ampliación de (a).

a infinito. Así pues, otra forma de encontrar una conexión homoclina directa en el sistema (2.8) es a partir de una curva de órbitas periódicas del tipo que hemos considerado.

Una vez que hemos obtenido dichas curvas de órbitas periódicas, el siguiente problema que abordamos es analizar la estabilidad y las bifurcaciones de estas soluciones periódicas.

Como vimos en el capítulo 1, la estabilidad de la órbita periódica no reversible correspondiente a una solución $(t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ del sistema (5.14) que no tiene ningún punto de tangencia con el plano de separación, está caracterizada por los autovalores de la matriz $\mathcal{M} = \exp(A_*^+ t) \cdot \exp(A_*^- t)$, donde A_*^+ y A_*^- son las matrices que se obtienen a partir de A^+ y A^- sin más que sustituir el valor del parámetro $\lambda = \lambda_*$. Recuérdese que uno de dichos autovalores debe ser uno y que los otros dos son uno el inverso del otro.

En la Figura 5.10 se representan, frente al periodo, el logaritmo del módulo y el argumento de los autovalores de la matriz \mathcal{M} evaluada en cada uno de los puntos de la curva de órbitas periódicas no reversible de dos cortes. A partir de esta figura, intuimos que en la curva de órbitas periódicas no reversibles que hemos obtenido existirá un conjunto infinito de bifurcaciones de tipo silla-nodo de órbitas periódicas y de bifurcaciones de duplicación de periodo. Así pues, la estructura de bifurcaciones de esta curva de órbitas periódicas no reversibles es análoga a la de una curva de órbitas periódicas

cercana a una conexión homoclina en el caso diferenciable. Para más detalle al respecto, véase por ejemplo el trabajo [28].

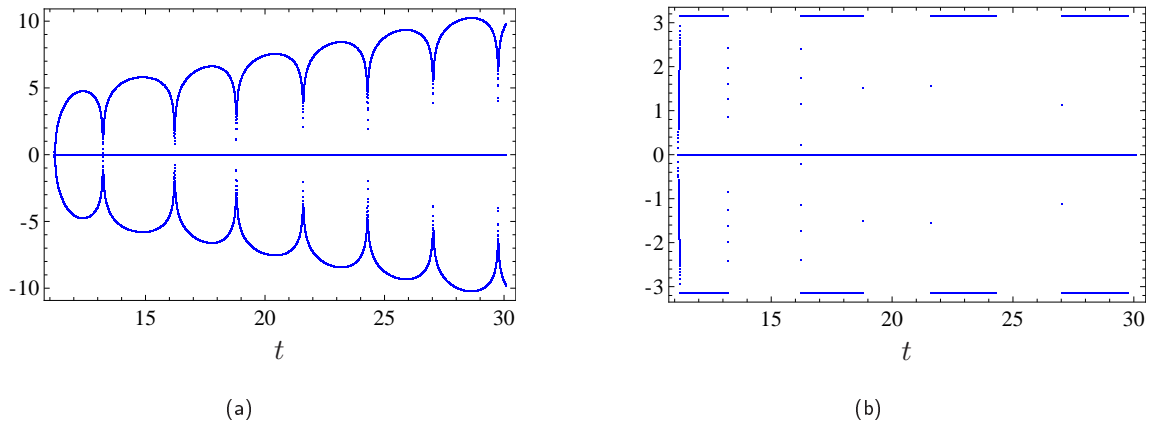


Figura 5.10: (a) Logaritmo del módulo de los multiplicadores característicos asociados a cada una de las órbitas periódicas no reversibles de dos cortes frente al periodo t de la correspondiente órbita periódica. (b) Argumento de dichos multiplicadores característicos.

5.2. Órbitas periódicas en las cercanías de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

Como ya hemos mencionado en la sección anterior, la existencia de una conexión homoclina de tipo silla-foco en un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales a menudo fuerza la aparición de órbitas periódicas cerca de dicha conexión. Esta riqueza dinámica que se produce en las cercanías de una conexión homoclina de tipo silla-foco, puede presentarse también en una región suficientemente cercana a un ciclo heteroclino tipo punto-T, véase [21, 22, 45].

En esta sección mostramos la existencia de una familia uniparamétrica de órbitas periódicas cerca de un ciclo heteroclino tipo punto-T directo en el sistema continuo lineal a trozos (2.8). Concretamente, buscamos las órbitas periódicas más simples que pueden aparecer en las cercanías del ciclo heteroclino tipo punto-T directo del sistema (2.8) que existe para el valor del parámetro $\lambda_0 \simeq 0.651539336$ y tiene un semitiempo de vuelo $t_0 \simeq 3.978319$.

Observemos que es necesario buscar órbitas periódicas reversibles que cortan al plano de

separación en cuatro puntos, pues el ciclo heteroclino es simétrico respecto a la transformación de reversibilidad y corta al plano de separación en cuatro puntos. Debido al tipo de ciclo heteroclino que hemos considerado, dos de estos puntos de corte han de pertenecer a la parte negativa del eje de reversibilidad y los otros dos al semiplano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y > 0\}$. Además, estos dos últimos puntos han de ser simétricos respecto al eje de reversibilidad. Cabe destacar también que toda órbita periódica cercana a un ciclo heteroclino tipo punto-T directo debe dar varias vueltas alrededor de la variedad invariante unidimensional de cada uno de los puntos de equilibrio en la cercanía de éstos antes de volver a cortar al plano de separación. En la Figura 5.11 se muestra un esquema de una órbita periódica del tipo que estamos buscando.

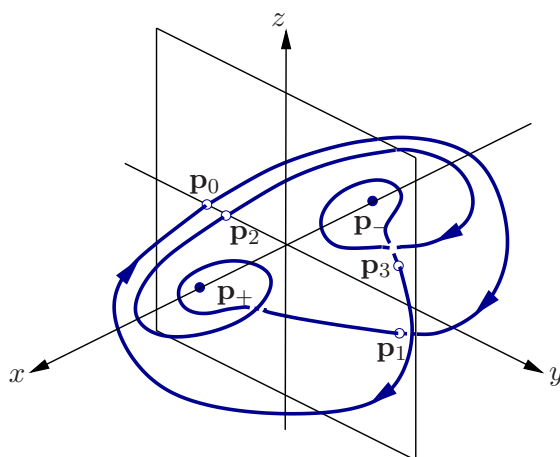


Figura 5.11: Esquema de una órbita periódica reversible de cuatro cortes con el plano de separación cercana al ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

Las condiciones que caracterizan a las órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes, así como las correspondientes ecuaciones en función del parámetro λ y los respectivos tiempos de vuelo, se han determinado en la sección 4.3. Para determinar las curvas de dichas órbitas periódicas vamos a usar el mismo algoritmo de continuación allí descrito, pero partiendo de otro punto inicial, que obtenemos con un técnica similar al caso de las conexiones homoclinas. Concretamente, tomamos como punto inicial $(\mathbf{u}_0, \lambda_0) = (t_0^-, t_0^+, \lambda_0) \simeq (3.9441, 13.8544, 0.651539336)$, que se ha obtenido mediante el método de Newton tras fijar en el sistema (4.56) el valor del parámetro igual al del ciclo heteroclino, y partiendo de un valor de t^- cercano al del ciclo heteroclino y un valor alto para el tiempo t^+ .

La órbita periódica correspondiente a este punto inicial interseca al plano de separación en los puntos $\mathbf{p}_0 \simeq (0, -2.17256, 0)$, $\mathbf{p}_1 \simeq (0, 0.733825, -0.454326)$, $\mathbf{p}_2 \simeq (0, -2.35524, 0)$ y $\mathbf{p}_3 \simeq (0, 0.733825, 0.454326)$, obviamente cercanos a los puntos de intersección del ciclo heteroclino correspondiente. En la Figura 5.12 se muestra una proyección de dicha órbita periódica, donde se aprecia su parecido con el ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

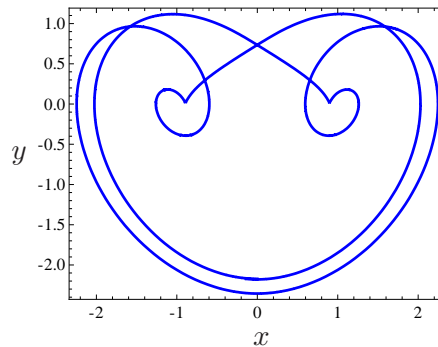


Figura 5.12: Proyección en el plano de coordenadas (x, y) de la órbita periódica reversible de cuatro cortes obtenida para la solución $(\mathbf{u}_0, \lambda_0) = (t_0^-, t_0^+, \lambda_0) \simeq (3.9441, 13.8544, 0.651539336)$.

Aplicando ahora el algoritmo de continuación a partir de la solución $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ y con paso positivo (es decir, el semiperiodo crece en la primera iteración), obtenemos una curva de soluciones del sistema (4.56) en la que cada punto corresponde a una órbita periódica reversible de cuatro cortes. Al representar esta curva de órbitas periódicas en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro, véase la Figura 5.13(a), evidenciamos que, a medida que aumenta el semiperiodo, la curva se acerca oscilando al valor del parámetro para el cual existe el ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

Por otro lado, usando el método de continuación con el mismo punto inicial pero tomando un paso negativo, tenemos la curva de soluciones que se representa en la Figura 5.13(b). Nótese que esta curva llega al punto $(10.4869, 0.585119)$ del plano de coordenadas (t, λ) , donde t es el semiperiodo (obtenido como suma de los semitiempos de vuelo t^- y t^+) de la órbita periódica reversible de cuatro cortes. Este punto se corresponde con el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t = (t_{\mathbf{p}_t}, \lambda_{\mathbf{p}_t}) \simeq (5.24345, 0.585119)$ cuya existencia se probó en el capítulo 4 y que aparece representado en la Figura 4.17, pero considerando el periodo en vez del semiperiodo de la órbita. En este caso, la órbita periódica reversible de dos cortes se está recorriendo dos veces. Sobre la curva obtenida encontramos algunas soluciones que no se corresponden con órbitas periódicas reversibles de cuatro

cortes. Concretamente, ningún punto del trozo de la curva que une el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t$ con $\mathbf{q}_h = (t_{\mathbf{q}_h}, \lambda_{\mathbf{q}_h}) \simeq (11.2549, 0.519006)$ proporciona una órbita periódica del tipo que estamos considerando, mientras que las soluciones con semiperiodo mayor que $t_{\mathbf{q}_h}$ sí.

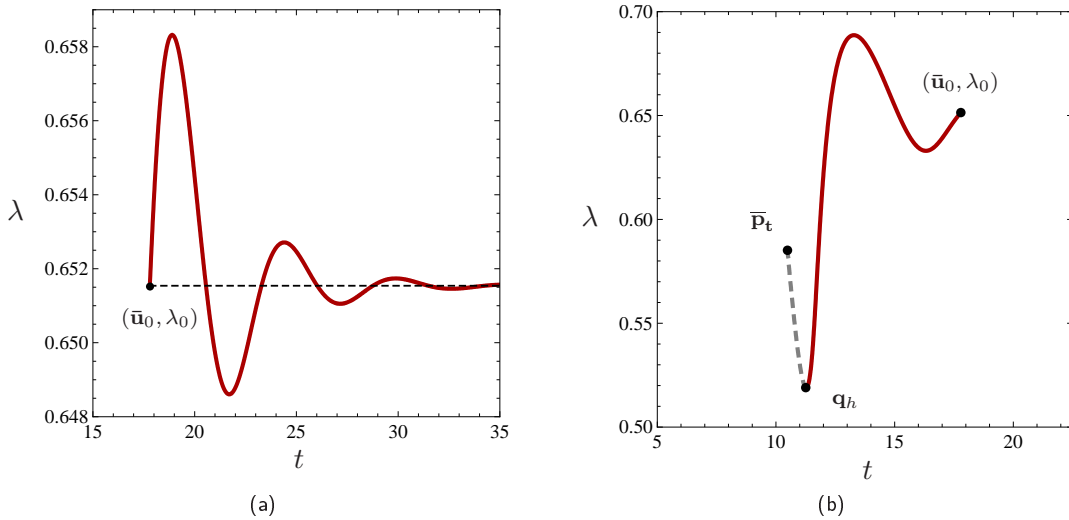


Figura 5.13: Representación gráfica en el plano de coordenadas (t, λ) , siendo $t = t^- + t^+$ el semiperiodo, de: (a) curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes obtenida tomando la solución $(\bar{\mathbf{u}}_0, \lambda_0) = (t_0^- + t_0^+, \lambda_0) \simeq (17.7985, 0.651539336)$ como punto inicial y un paso positivo; (b) curva de soluciones del sistema (4.56) obtenida con el mismo punto inicial y un paso negativo. Los puntos de la curva que une el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$ con el punto $\mathbf{q}_h \simeq (11.2549, 0.519006)$ no se corresponden con órbitas periódicas.

Representando gráficamente las soluciones del sistema (4.56) en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) , donde $t = t^- + t^+$ es el semiperiodo, véase la Figura 5.14, evidenciamos que la curva de soluciones pasa por el punto de tangencia $\mathbf{p}_t = (t_{\mathbf{p}_t}, t_{\mathbf{p}_t}, \lambda_{\mathbf{p}_t})$ y, debido a la reversibilidad, es simétrica respecto al plano $\mathbb{T} = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$. Observemos que si un punto de la curva proporciona una órbita periódica reversible de cuatro cortes, entonces su simétrico respecto de \mathbb{T} se corresponde con la misma órbita periódica. En particular, los puntos $\mathbf{q}_{h_1} \simeq (7.14454, 4.10916, 0.51902)$ y $\mathbf{q}_{h_2} \simeq (4.10916, 7.14454, 0.51902)$ son soluciones del sistema (4.56) y ambos son simétricos respecto al plano \mathbb{T} . La proyección de ambos en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el semiperiodo, es el punto \mathbf{q}_h y el tramo de la curva que los une se corresponde en el plano de coordenadas (t, λ) con la curva que conecta el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t$ con \mathbf{q}_h .

Cada una de las ramas simétricas de la curva de soluciones tiende, al aumentar el semiperiodo, al ciclo heteroclino tipo punto-T directo. Observemos que cada uno de los puntos de esta curva proporciona una órbita periódica reversible salvo los tramos comprendidos entre \mathbf{q}_{h_1} y el punto de tangencia \mathbf{p}_t y entre este punto de tangencia y \mathbf{q}_{h_2} . Estos tres puntos extremos sí corresponden a órbitas periódicas. Concretamente, en \mathbf{p}_t hay una órbita periódica reversible de dos cortes con el plano de separación, mientras que en \mathbf{q}_{h_1} y \mathbf{q}_{h_2} tenemos una órbita periódica reversible de seis cortes, dos de los cuales son puntos de tangencia no transversal con el plano de separación.

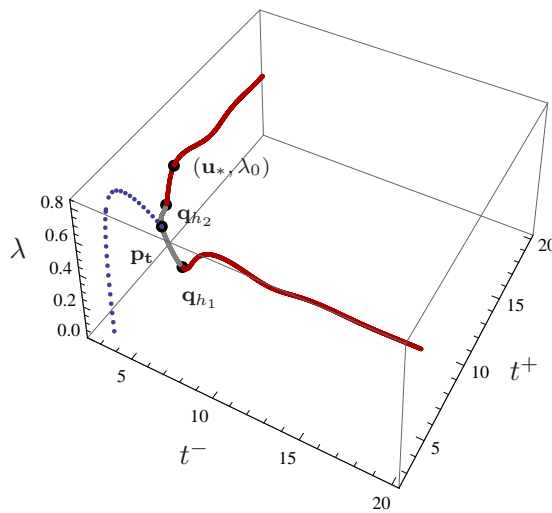


Figura 5.14: Curvas de órbitas periódicas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) . La línea discontinua corresponde a la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en el punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$. Por este punto de tangencia pasa también la curva de soluciones del sistema (4.56). En particular, la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes con el plano de separación conecta los puntos $\mathbf{q}_{h_1} \simeq (7.14454, 4.10916, 0.51902)$ y $\mathbf{q}_{h_2} \simeq (4.10916, 7.14454, 0.51902)$, con el ciclo heteroclino tipo punto-T directo.

En la Figura 5.15 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes de la curva que acabamos de obtener, comenzando con un punto cercano a cualquiera de los puntos \mathbf{q}_{h_1} y \mathbf{q}_{h_2} (donde se intuye la tangencia) y avanzando por la curva a medida que el semiperiodo aumenta. A partir de esta figura evidenciamos que conforme el semiperiodo crece más se parece una órbita periódica reversible de cuatro cortes al ciclo heteroclino tipo punto-T directo, por lo que podemos considerar al ciclo heteroclino tipo punto-T directo como el límite de una órbita periódica reversible de cuatro cortes cuando su semiperiodo tiende a infinito.

Así pues, otra forma de encontrar un ciclo heteroclino tipo punto-T directo en el sistema es a partir de una curva de órbitas periódicas del tipo que hemos considerado en esta sección.

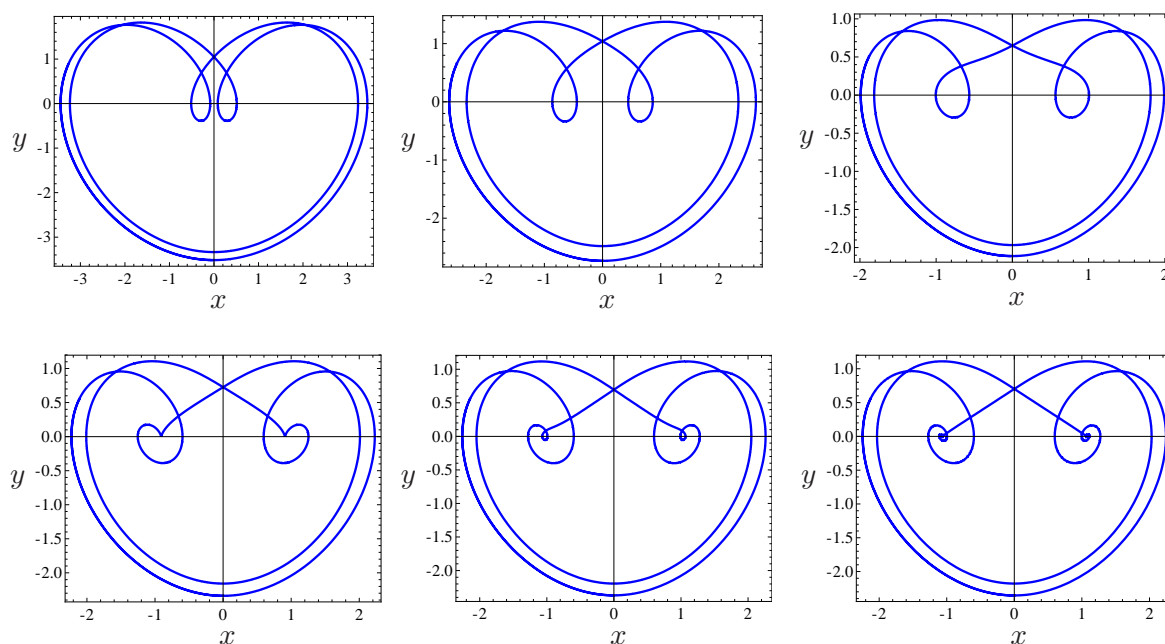


Figura 5.15: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de algunas órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes con el plano de separación.

Como hemos mencionado previamente la órbita periódica reversible correspondiente a cualquiera de los puntos \mathbf{q}_{h_1} y \mathbf{q}_{h_2} interseca al plano de separación en seis puntos, que en este caso son $\mathbf{p}_0 \simeq (0, -3.54438, 0)$, $\mathbf{p}_1 \simeq (0, 0, -0.81458)$, $\mathbf{p}_2 \simeq (0, 0.87728, 1.17746)$, $\mathbf{p}_3 \simeq (0, -3.43718, 0)$, $\mathbf{p}_4 \simeq (0, 0.87728, -1.17746)$ y $\mathbf{p}_5 \simeq (0, 0, 0.81458)$. Los puntos \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_5 son puntos de tangencia no transversal con el plano de separación, como puede verse en la Figura 5.16.

Una vez que hemos obtenido las curvas de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que están relacionadas con el ciclo heteroclino tipo punto-T directo, el siguiente problema que abordamos es analizar sus estabilidad y bifurcaciones.

De modo análogo a lo visto en el capítulo 1, la estabilidad de la órbita periódica reversible de cuatro cortes correspondiente a la solución $(t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ del sistema (4.56) que no posee ningún punto

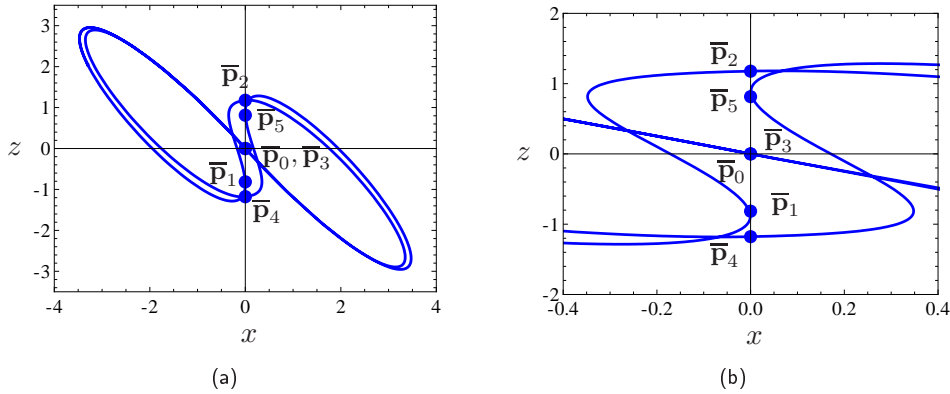


Figura 5.16: (a) Proyección en el plano de coordenadas (x, z) de la órbita periódica reversible de seis cortes correspondiente a $\mathbf{q}_{h_1} \simeq (7.14454, 4.10916, 0.51902)$ o a $\mathbf{q}_{h_2} \simeq (4.10916, 7.14454, 0.51902)$. Los puntos $\bar{\mathbf{p}}_i$, con $i = 0, \dots, 5$, son las proyecciones de los puntos de intersección de esta órbita periódica con el plano de separación. Nótese que \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_5 son puntos de tangencia no transversal. En (b) se muestra una ampliación de (a).

de tangencia con el plano de separación, está caracterizada por los autovalores de la matriz

$$\mathcal{M} = \exp(A_*^- t_*^-) \cdot \exp(A_*^+ t_*^+) \cdot \exp(A_*^- t_*^+) \cdot \exp(A_*^+ t_*^-),$$

donde A_*^+ y A_*^- se obtienen a partir de A^+ y A^- sin más que sustituir el valor del parámetro $\lambda = \lambda_*$. En la Figura 5.17 se representan, frente al semiperiodo, el logaritmo del módulo y el argumento de los autovalores de la matriz \mathcal{M} evaluada en cada uno de los puntos de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que hemos obtenido. A partir de esta figura, intuimos que en esta curva de órbitas periódicas reversibles aparecerá un conjunto infinito de bifurcaciones de tipo silla-nodo de órbitas periódicas y de bifurcaciones de duplicación de periodo. Así pues, la estructura de bifurcaciones en la curva de órbita periódicas que hemos obtenido es análoga a la de una curva de órbitas periódicas cercana a un ciclo heteroclinio tipo punto-T reversible en el caso diferenciable. Para más detalle al respecto, véanse por ejemplo los trabajos [21, 45].

En la Figura 5.18 representamos en un diagrama de bifurcación las dos curvas de órbitas periódicas que hemos obtenido hasta el momento en este capítulo, junto a la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes del capítulo 4. Como puede verse en esta figura, las dos curvas de soluciones relacionadas con las conexiones globales consideradas llegan al punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$, a pesar de no corresponderse ya con órbitas periódicas del sistema.

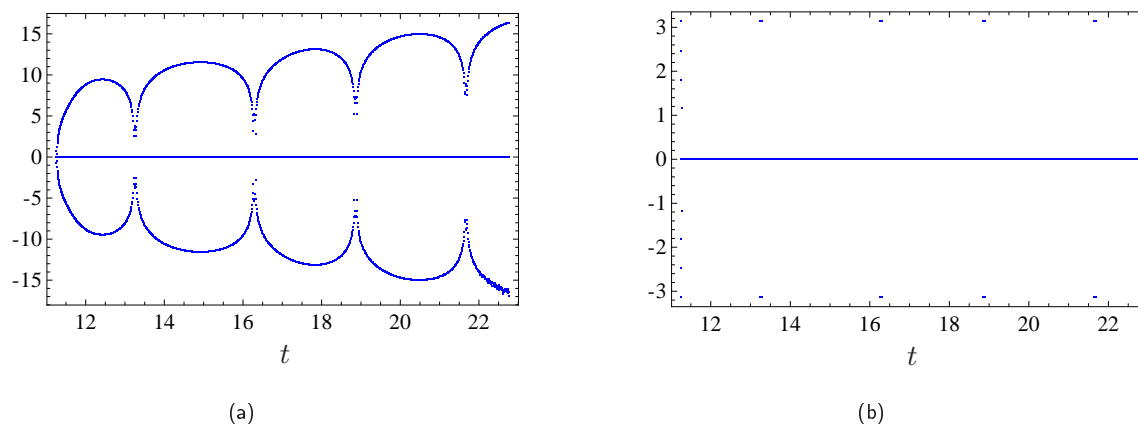


Figura 5.17: (a) Logaritmo del módulo de los multiplicadores característicos asociados a cada una de las órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes frente al semiperiodo t de la correspondiente órbita periódica. (b) Argumento de dichos multiplicadores característicos.

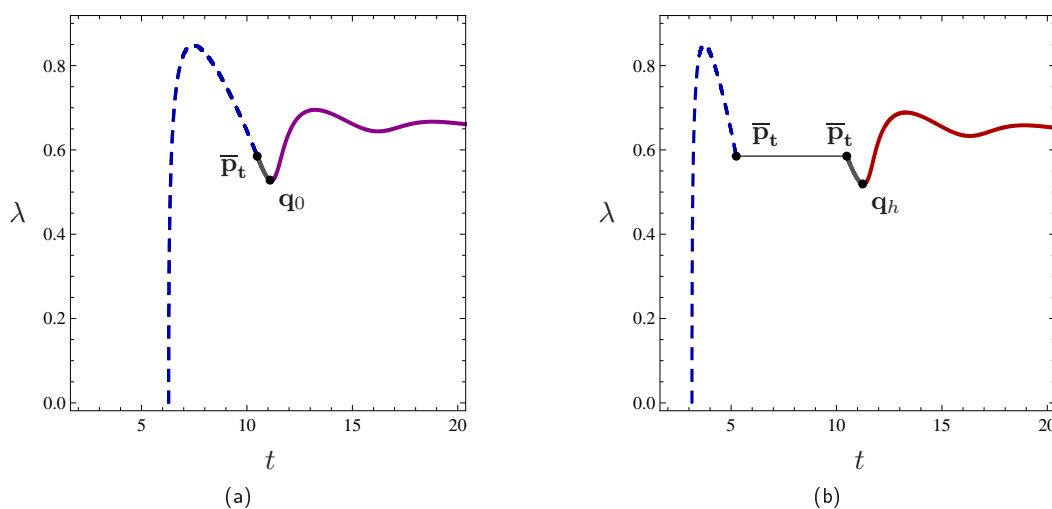


Figura 5.18: Representación en el plano de coordenadas (t, λ) de la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes (en discontinuo) y de: (a) curva de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes frente al periodo t de la respectiva órbita periódica; (b) curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes frente al semiperiodo t de la correspondiente órbita periódica.

5.3. Órbitas periódicas que nacen de las bifurcaciones.

En esta sección mostraremos las familias uniparamétricas de órbitas periódicas que nacen de las bifurcaciones existentes en la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes obtenida en el capítulo anterior. Además, veremos que algunas de estas familias uniparamétricas están relacionadas con las curvas de órbitas periódicas organizadas por las conexiones globales que hemos estudiado en las dos secciones anteriores. Por último, estudiaremos la curva de órbitas periódicas de cuatro cortes que surge de la bifurcación de duplicación de periodo $\bar{p}_{d_2} \simeq (3.68432, 0.847621)$, situada en la curva principal de órbitas periódicas reversibles de dos cortes considerada en el capítulo anterior (véase la Figura 5.19).

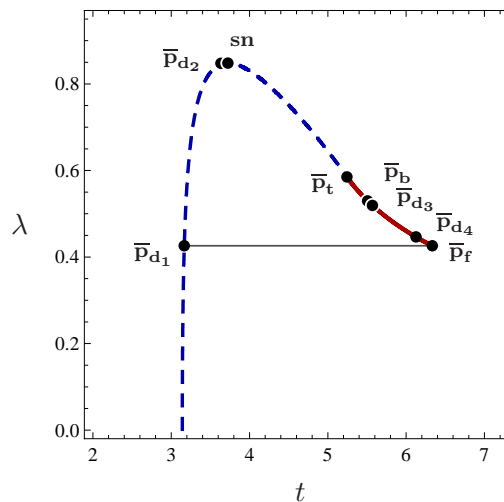


Figura 5.19: Representación gráfica de dos curvas de órbitas periódicas del sistema (2.8) en el plano (t, λ) , donde t indica el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. Se representa en trazo discontinuo la curva de órbitas periódicas reversibles que cortan al plano de separación en dos puntos. Esta familia llega al punto de tangencia $\bar{p}_t \simeq (5.24345, 0.585119)$. La curva que une este punto de tangencia con $\bar{p}_f \simeq (6.33377, 0.425924)$ es una curva de órbitas periódicas reversibles que intersecan al plano de separación en cuatro puntos.

Como ya hemos hecho en las secciones anteriores, al representar las distintas familias de órbitas periódicas en el plano optaremos, según creamos más conveniente para entender las curvas obtenidas, por utilizar el semiperiodo o el periodo de las mismas. De ese modo, por ejemplo, a veces pondremos que el punto de tangencia es $\bar{p}_t \simeq (5.24345, 0.585119)$ y a veces $\bar{p}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$. Para evitar confusiones indicaremos, en cada pie de figura y en el texto, la elección que hayamos considerado.

5.3.1. Curva de órbitas periódicas que nace de la bifurcación pitchfork.

En la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que comienza en el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$, hay una bifurcación pitchfork de órbitas periódicas en el punto $\bar{\mathbf{p}}_b \simeq (11.01678, 0.5296891)$. Observemos que este punto corresponde a $\mathbf{p}_b = (t_{\mathbf{p}_b}^-, t_{\mathbf{p}_b}^+, \lambda_{\mathbf{p}_b}) \simeq (4.38725, 1.12114, 0.5296891)$ en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica la suma de los cuatro semitiempos de vuelo, $2(t_{\mathbf{p}_b}^- + t_{\mathbf{p}_b}^+)$, es decir, el periodo. La órbita periódica que proporciona dicho punto es reversible e interseca al plano de separación en cuatro puntos, $\mathbf{p}_{b_0} \simeq (0, -3.37875, 0)$, $\mathbf{p}_{b_1} \simeq (0, 0.43932, -1.07723)$, $\mathbf{p}_{b_2} \simeq (0, -0.23607, 0)$ y $\mathbf{p}_{b_3} = R(\mathbf{p}_{b_1})$ de tal modo que dos de ellos pertenecen al eje de reversibilidad. En la Figura 5.20 se muestra un esquema de dicha órbita periódica.

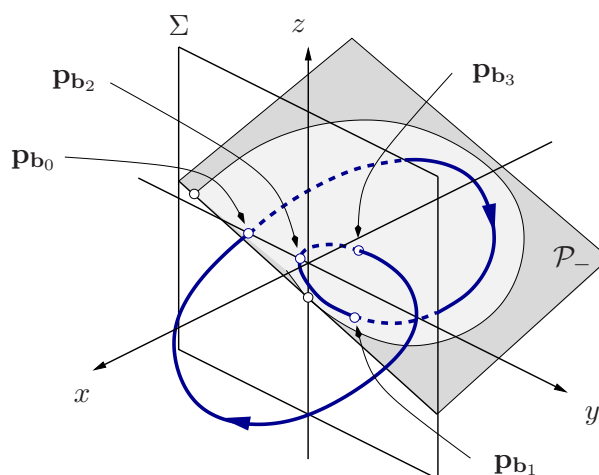


Figura 5.20: Esquema de la órbita periódica reversible de cuatro cortes con el plano de separación, correspondiente al punto $\mathbf{p}_b \simeq (4.38725, 1.12114, 0.5296891)$. Esta órbita periódica interseca al plano de separación en los puntos $\mathbf{p}_{b_0} \simeq (0, -3.37875, 0)$, $\mathbf{p}_{b_1} \simeq (0, 0.43932, -1.07723)$, $\mathbf{p}_{b_2} \simeq (0, -0.23607, 0)$ y $\mathbf{p}_{b_3} \simeq (0, 0.43932, 1.07723)$.

En esta subsección mostramos la curva de órbitas periódicas que nace de la bifurcación pitchfork $\mathbf{p}_b \simeq (4.38725, 1.12114, 0.5296891)$. Observemos que estas órbitas periódicas no tienen por qué ser reversibles, pues la curva proviene de una bifurcación de ruptura de simetría, y han de cortar al plano de separación en cuatro puntos, ya que buscamos órbitas periódicas cercanas a la órbita periódica correspondiente al punto \mathbf{p}_b . En la Figura 5.21 se muestra un esquema de una órbita periódica no reversible de cuatro cortes con el plano de separación.

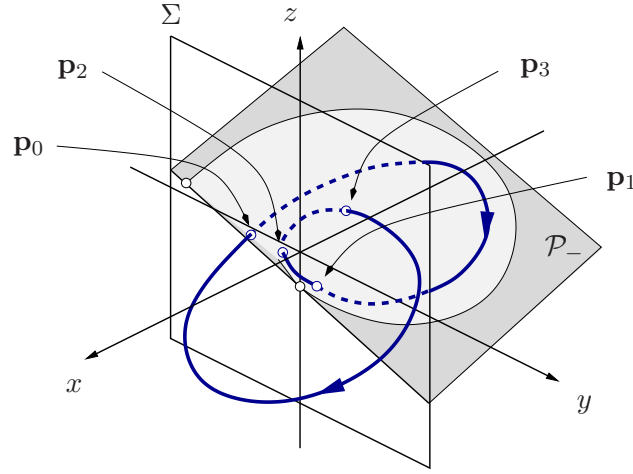


Figura 5.21: Esquema de una órbita periódica no reversible de cuatro cortes que surge de la bifurcación pitchfork.

Como cada una de éstas órbitas periódicas no reversibles ha de cortar en cuatro puntos al plano de separación, es obvio que cada una de ellas se corresponde con un punto fijo de la segunda iterada de la aplicación de Poincaré o, equivalentemente, con cuatro puntos $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, z_{\mathbf{p}_0})$, $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$, $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, z_{\mathbf{p}_2})$ y $\mathbf{p}_3 = (0, y_{\mathbf{p}_3}, z_{\mathbf{p}_3})$ del plano de separación, con $y_{\mathbf{p}_0} < 0$, $y_{\mathbf{p}_1} > 0$, $y_{\mathbf{p}_2} < 0$ e $y_{\mathbf{p}_3} > 0$, tales que $\mathbf{p}_1 = \Pi_-(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{p}_2 = \Pi_+(\mathbf{p}_1)$, $\mathbf{p}_3 = \Pi_-(\mathbf{p}_2)$ y $\mathbf{p}_0 = \Pi_+(\mathbf{p}_3)$. Ahora bien, para manipular estas condiciones es conveniente dividir las en las siguientes:

O1: Existen t_{1*}^- , t_{1*}^+ , t_{2*}^- , t_{2*}^+ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+, \lambda) = (t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, t_{2*}^+, \lambda_*)$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t_1^-, \lambda) = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t_1^+, \lambda) = \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_2}(t_2^-, \lambda) = \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_3}(t_2^+, \lambda) = \mathbf{p}_0. \end{cases} \quad (5.15)$$

O2: $x_{\mathbf{p}_0}(t_1^-, \lambda_*) < 0$ para todo $t_1^- \in (0, t_{1*}^-)$.

O3: $x_{\mathbf{p}_1}(t_1^+, \lambda_*) > 0$ para todo $t_1^+ \in (0, t_{1*}^+)$.

O4: $x_{\mathbf{p}_2}(t_2^-, \lambda_*) < 0$ para todo $t_2^- \in (0, t_{2*}^-)$.

O5: $x_{\mathbf{p}_3}(t_2^+, \lambda_*) > 0$ para todo $t_2^+ \in (0, t_{2*}^+)$.

Nótese que si $(t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+, \lambda) = (t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, t_{2*}^+, \lambda_*)$ satisface las condiciones O1–O5, entonces $t_*^- = t_{1*}^- + t_{2*}^-$ es el semitiempo de vuelo izquierdo de la correspondiente órbita periódica, mientras que $t_*^+ = t_{1*}^+ + t_{2*}^+$ es el semitiempo de vuelo derecho. Así, obtenemos el periodo de la órbita periódica sumando ambos semitiempos de vuelo, $t_* = t_*^- + t_*^+$. En particular, si los puntos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_2 pertenecen al eje de reversibilidad, entonces la órbita periódica es reversible y los correspondientes semitiempos de vuelos t_*^- y t_*^+ coinciden, pues $t_{1*}^- = t_{2*}^+$ y $t_{1*}^+ = t_{2*}^-$.

El sistema (5.15), que consta de doce ecuaciones en las incógnitas $t_k^-, t_k^+, \lambda, y_{\mathbf{p}_j}, z_{\mathbf{p}_j}$ con $k = 1, 2$ y $j = 0, 1, 2, 3$, tras adecuadas manipulaciones puede escribirse en la forma

$$(f_1(\mathbf{s}, \lambda), f_2(\mathbf{s}, \lambda), \dots, f_{12}(\mathbf{s}, \lambda)) = \mathbf{0}, \quad (5.16)$$

siendo $\lambda > 0$, $\mathbf{s} = (t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+, y_{\mathbf{p}_0}, z_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1}, y_{\mathbf{p}_2}, z_{\mathbf{p}_2}, y_{\mathbf{p}_3}, z_{\mathbf{p}_3})$, de tal modo que $t_1^- > 0$, $t_1^+ > 0$, $t_2^- > 0$, $t_2^+ > 0$, $y_{\mathbf{p}_0} < 0$, $y_{\mathbf{p}_1} > 0$, $y_{\mathbf{p}_2} < 0$, $y_{\mathbf{p}_3} > 0$ y donde cada componente $f_i : \mathbb{R}^{13} \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, 12$ está dada por

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{s}, \lambda) &= (- (3\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t_1^- \lambda}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{1}{2} t_1^- \lambda} - ((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_0} + z_{\mathbf{p}_0}) - 2\lambda) \\ &\quad \lambda \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_1^-) + \lambda ((\lambda^2 + 1) ((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} - 3\lambda z_{\mathbf{p}_0}) - 2) \operatorname{sen}(\beta t_1^-), \\ f_2(\mathbf{s}, \lambda) &= ((\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t_1^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{1}{2} t_1^- \lambda} + \\ &\quad + ((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} - (\lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_1^-) + (\lambda(y_{\mathbf{p}_0} - 3) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_0}) \operatorname{sen}(\beta t_1^-), \\ f_3(\mathbf{s}, \lambda) &= (\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + \lambda z_{\mathbf{p}_0} + 1)e^{t_1^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{1}{2} t_1^- \lambda} - (\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1) - (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0}) \\ &\quad \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_1^-) + (2 - (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} + \lambda(3\lambda + z_{\mathbf{p}_0})) \operatorname{sen}(\beta t_1^-), \\ f_4(\mathbf{s}, \lambda) &= ((3\lambda^2 + 1)e^{t_1^+ \lambda} - (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \lambda e^{\frac{3}{2} t_1^+ \lambda} \left[((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_1} - z_{\mathbf{p}_1}) - 2\lambda) \right. \\ &\quad \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_1^+) + ((\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} + 3\lambda z_{\mathbf{p}_1}) - 2) \operatorname{sen}(\beta t_1^+) \right], \\ f_5(\mathbf{s}, \lambda) &= (\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} e^{t_1^+ \lambda} + 1) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{\frac{3}{2} t_1^+ \lambda} \\ &\quad \left[\sqrt{3\lambda^2 + 4} ((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} - 1) \cos(\beta t_1^+) + (\lambda(3 - y_{\mathbf{p}_1}) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_1}) \operatorname{sen}(\beta t_1^+) \right], \\ f_6(\mathbf{s}, \lambda) &= - (\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1) + (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_2} e^{t_1^+ \lambda}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{\frac{3}{2} t_1^+ \lambda} \left[(\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} + 1) + (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1}) \right. \\ &\quad \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_1^+) - (\lambda(z_{\mathbf{p}_1} - 3\lambda) + (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} - 2) \operatorname{sen}(\beta t_1^+) \right], \\ f_7(\mathbf{s}, \lambda) &= (- (3\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_2} + \lambda z_{\mathbf{p}_2} + 1)e^{t_2^- \lambda}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{1}{2} t_2^- \lambda} - ((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_2} + z_{\mathbf{p}_2}) - 2\lambda) \\ &\quad \lambda \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_2^-) + \lambda ((\lambda^2 + 1) ((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_2} - 3\lambda z_{\mathbf{p}_2}) - 2) \operatorname{sen}(\beta t_2^-), \\ f_8(\mathbf{s}, \lambda) &= ((\lambda^2 y_{\mathbf{p}_2} + \lambda z_{\mathbf{p}_2} + 1)e^{t_2^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_3}) \sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{1}{2} t_2^- \lambda} + \\ &\quad + ((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_2} - (\lambda z_{\mathbf{p}_2} + 1)) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_2^-) + (\lambda(y_{\mathbf{p}_2} - 3) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_2}) \operatorname{sen}(\beta t_2^-), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9(\mathbf{s}, \lambda) &= (\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_2} + \lambda z_{\mathbf{p}_2} + 1)e^{t_2^- \lambda} - (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_3})\sqrt{3\lambda^2 + 4}e^{\frac{1}{2}t_2^- \lambda} - (\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_2} + 1) - (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_2}) \\
&\quad \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_2^-) + (2 - (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_2} + \lambda(3\lambda + z_{\mathbf{p}_2})) \operatorname{sen}(\beta t_2^-), \\
f_{10}(\mathbf{s}, \lambda) &= ((3\lambda^2 + 1)e^{t_2^+ \lambda} - (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_3} - \lambda z_{\mathbf{p}_3} + 1))\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \lambda e^{\frac{3}{2}t_2^+ \lambda} \left[((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_3} - z_{\mathbf{p}_3}) - 2\lambda) \right. \\
&\quad \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_2^+) + ((\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_3} + 3\lambda z_{\mathbf{p}_3}) - 2) \operatorname{sen}(\beta t_2^+) \right], \\
f_{11}(\mathbf{s}, \lambda) &= (\lambda^2 y_{\mathbf{p}_3} - \lambda z_{\mathbf{p}_3} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} e^{t_2^+ \lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \\
&\quad + e^{\frac{3}{2}t_2^+ \lambda} \left[((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_3} + \lambda z_{\mathbf{p}_3} - 1) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_2^+) + (\lambda(3 - y_{\mathbf{p}_3}) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_3}) \operatorname{sen}(\beta t_2^+) \right], \\
f_{12}(\mathbf{s}, \lambda) &= -(\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_3} - \lambda z_{\mathbf{p}_3} + 1) + (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_0} e^{t_2^+ \lambda})\sqrt{3\lambda^2 + 4} + e^{\frac{3}{2}t_2^+ \lambda} \left[(\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_3} + 1) + (2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_3}) \right. \\
&\quad \left. \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t_2^+) - (\lambda(z_{\mathbf{p}_3} - 3\lambda) + (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_3} - 2) \operatorname{sen}(\beta t_2^+) \right].
\end{aligned}$$

Así pues, para probar que se satisface la condición O1 tenemos que ver que existen $\lambda_* > 0$ y $\mathbf{s}_* = (t_{1^*}^-, t_{1^*}^+, t_{2^*}^-, t_{2^*}^+, y_{\mathbf{p}_0}^*, z_{\mathbf{p}_0}^*, y_{\mathbf{p}_1}^*, z_{\mathbf{p}_1}^*, y_{\mathbf{p}_2}^*, z_{\mathbf{p}_2}^*, y_{\mathbf{p}_3}^*, z_{\mathbf{p}_3}^*)$, con $t_{1^*}^- > 0$, $t_{1^*}^+ > 0$, $t_{2^*}^- > 0$, $t_{2^*}^+ > 0$, $y_{\mathbf{p}_0}^* < 0$, $y_{\mathbf{p}_1}^* > 0$, $y_{\mathbf{p}_2}^* < 0$, $y_{\mathbf{p}_3}^* > 0$, de tal modo que $(\mathbf{s}_*, \lambda_*)$ es una solución del sistema (5.16). Este sistema posee una incógnita más que ecuaciones, por lo que su solución será genéricamente una curva.

Observemos que $(\mathbf{s}_{\mathbf{p}_b}, \lambda_{\mathbf{p}_b}) = (t_{\mathbf{p}_b}^-, t_{\mathbf{p}_b}^+, t_{\mathbf{p}_b}^+, t_{\mathbf{p}_b}^-, \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{b}_0}, \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{b}_1}, \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{b}_2}, \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{b}_3}, \lambda_{\mathbf{p}_b})$, con $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{b}_k}$ la proyección en el plano de coordenadas (y, z) del punto de corte $\mathbf{p}_{\mathbf{b}_k}$, donde $k = 0, \dots, 3$, es una solución del sistema (5.16). Aplicando el algoritmo de continuación tomando esta solución como punto inicial y un paso positivo (es decir, aumentando el tiempo t_1^- en la primera iteración), obtenemos la curva de soluciones del sistema (5.16) que representamos en un diagrama de bifurcación periodo-parámetro, véase la Figura 5.22(a). La curva obtenida acaba en el punto $\mathbf{q}_0 \simeq (11.105, 0.528171)$, ya que a partir de ahí los puntos no verifican alguna de las condiciones O1–O5. Más aún, el punto \mathbf{q}_0 coincide con el punto donde comenzaba la curva de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes que hemos obtenido en la primera sección de este capítulo. En la Figura 5.22(b) representamos ambas curvas de órbitas periódicas no reversibles en un diagrama de bifurcación periodo-parámetro.

Para visualizar mejor la relación entre ambas curvas de órbitas periódicas es conveniente representarlas gráficamente en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) , véase la Figura 5.23(a), donde t^- es el semitiempo de vuelo izquierdo y t^+ es el semitiempo de vuelo derecho. Al representar las soluciones en el espacio de coordenadas (t^-, t^+, λ) , vemos que la curva obtenida une los puntos $\mathbf{q}_1 \simeq (6.90258, 4.19897, 0.528251)$ y $\mathbf{q}_2 \simeq (4.19897, 6.90258, 0.528251)$, donde comenzaba cada una de las ramas de órbitas periódicas de dos cortes que iban a parar a las conexiones homoclinas directas (véase la Figura 5.5 de la sección 5.1).

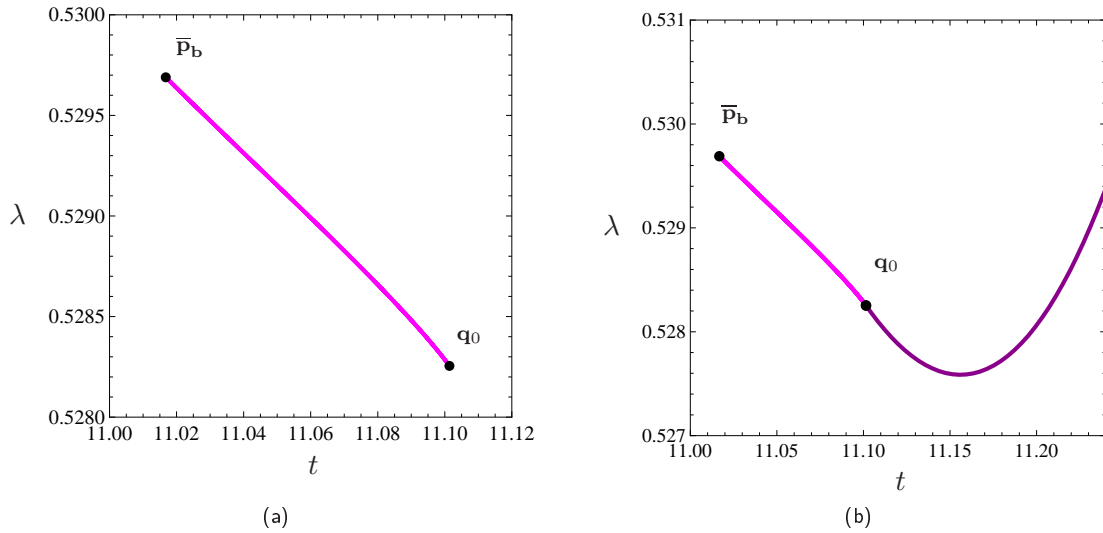


Figura 5.22: (a) Representación gráfica de la curva de órbitas periódicas no reversibles de cuatro cortes que nace a partir de la bifurcación pitchfork $\bar{p}_b \simeq (11.0168, 0.5296891)$ en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el periodo de la respectiva órbita periódica. En (b) se representa también un trozo de la curva de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes que parte del punto $q_0 \simeq (11.105, 0.528171)$, que hemos obtenido en la sección 5.1.

Debido a la reversibilidad del sistema (2.8), la curva obtenida es también simétrica respecto al plano $\Gamma = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$. Nótese que todos sus puntos corresponden a órbitas periódicas no reversibles de cuatro cortes salvo el punto p_b y los dos puntos extremos. Recordemos que en el punto p_b hay una órbita periódica reversible de cuatro cortes, mientras que en cada uno de los puntos q_1 y q_2 tenemos una órbita periódica no reversible de tres cortes, uno de los cuales corresponde a un punto de tangencia no transversal con el plano de separación, como puede evidenciarse en las Figuras 5.7 y 5.9. En cada uno de los puntos extremos comienza una rama de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes que va a parar a la conexión homoclina directa del respectivo punto de equilibrio, como hemos visto en la sección 5.1. Nótese que como cada una de estas ramas aparece tras producirse una tangencia, podemos decir que la curva de órbitas periódicas que está relacionada con una conexión homoclina directa surge de una bifurcación pitchfork tras una tangencia con el plano de separación.

Observemos que al aplicar el método de continuación sin añadir las sentencias adicionales (en las que se comprueba que los valores de $t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+$ y λ sean positivos y que se satisfacen las

condiciones O2–O5), obtenemos también una curva de soluciones del sistema (5.16) de tal modo que dichas soluciones no son órbitas periódicas porque poseen algunos de sus semitiempos de vuelo negativos. Curiosamente, representando esta curva en el espacio de coordenadas (t^-, t^+, λ) , véase la Figura 5.23(b), vemos que pasa por el punto de tangencia \mathbf{p}_t .

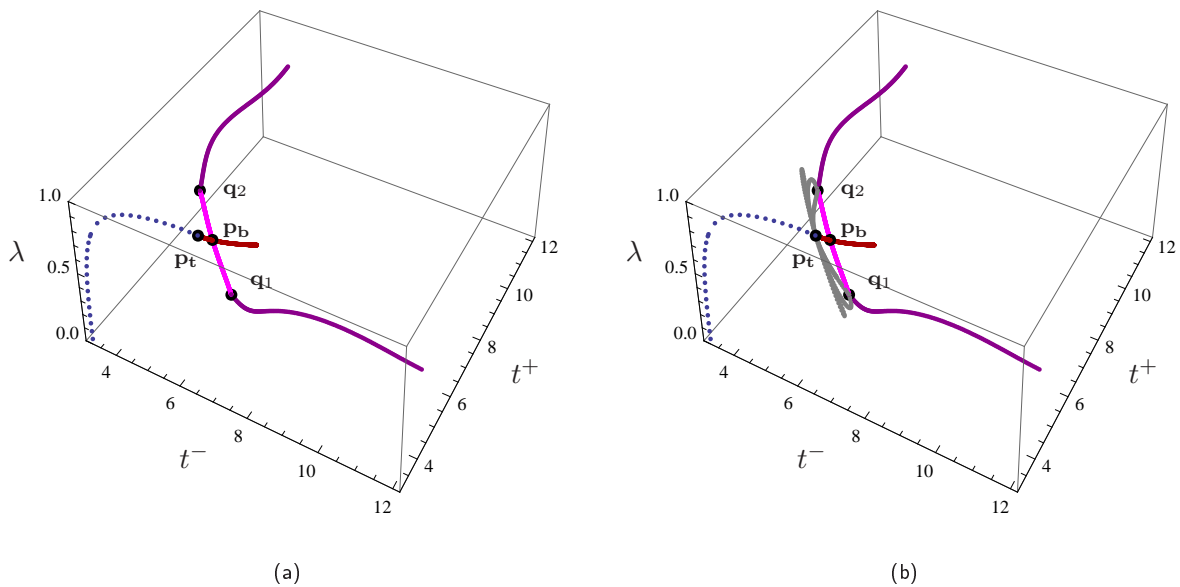


Figura 5.23: Curvas de órbitas periódicas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) . La línea discontinua corresponde a la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en el punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$. A partir del cual comienza una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes a la que pertenece el punto $\mathbf{p}_b \simeq (4.38725, 1.12114, 0.5296891)$. La curva de órbitas periódicas no reversibles de cuatro cortes que hemos obtenido es aquella que une $\mathbf{q}_1 \simeq (6.90258, 4.19897, 0.528251)$ con $\mathbf{q}_2 \simeq (4.19897, 6.90258, 0.528251)$. A partir de estos puntos nacen las curvas de órbitas periódicas no reversibles de dos cortes que tienden a la conexión homoclina directa vistas en la sección 5.1. En (b) se representa además una curva de soluciones del sistema (5.16) cuyos puntos no corresponden a órbitas periódicas reales porque alguno de los semitiempos de vuelo es negativo.

En la Figura 5.24 se representan las proyecciones sobre el plano (x, y) de varias órbitas periódicas no reversibles de cuatro cortes, comenzando con un punto cercano a \mathbf{p}_b y avanzando por la curva hasta un punto próximo a \mathbf{q}_1 .

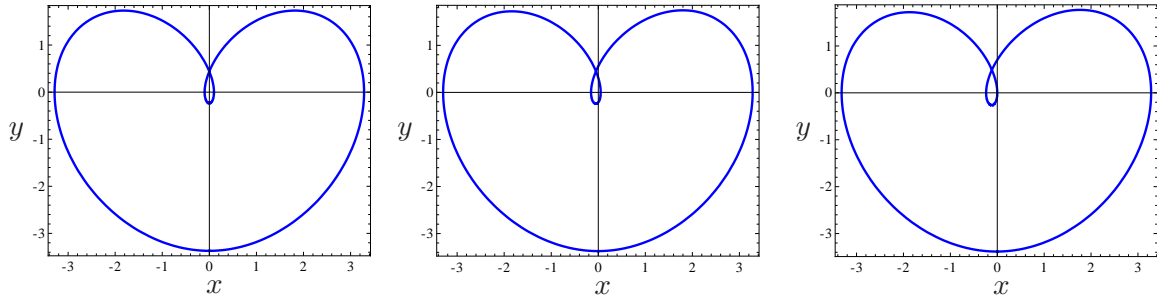


Figura 5.24: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de algunas órbitas periódicas no reversibles de cuatro cortes.

5.3.2. Curvas de órbitas periódicas que nacen de las bifurcaciones de duplicación de periodo de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes.

Como sabemos del capítulo anterior, sobre la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que comienza a partir del punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.58512)$ hay dos bifurcaciones de duplicación de periodo de órbitas periódicas, una en el punto $\bar{\mathbf{p}}_{d_3} \simeq (11.1392, 0.51929)$ y la otra en $\bar{\mathbf{p}}_{d_4} \simeq (12.2519, 0.44647)$. Observemos que estos dos puntos del plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el periodo de la respectiva órbita periódica, corresponden a los puntos $\mathbf{p}_{d_3} = (t_{d_3}^-, t_{d_3}^+, \lambda_{d_3}) \simeq (4.31221, 1.25737, 0.51929)$ y $\mathbf{p}_{d_4} = (t_{d_4}^-, t_{d_4}^+, \lambda_{d_4}) \simeq (3.73209, 2.39387, 0.44647)$.

En esta sección obtenemos las curvas de órbitas periódicas que comienzan a partir de estas bifurcaciones de duplicación de periodo. Observemos que cada una de estas órbitas periódicas ha de ser reversible y ha de cortar al plano de separación en ocho puntos, ya que nace de una bifurcación de duplicación de periodo de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes. En la Figura 5.25 se muestra una órbita periódica de este tipo.

Nótese que como cada una de estas órbitas periódicas reversibles ha de cortar al plano de separación en ocho puntos, es obvio que cada una de ellas se corresponde con un punto fijo de la cuarta iterada de la aplicación de Poincaré Π o, equivalentemente, con ocho puntos $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$, $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, z_{\mathbf{p}_2})$, $\mathbf{p}_3 = (0, y_{\mathbf{p}_3}, z_{\mathbf{p}_3})$, $\mathbf{p}_4 = (0, y_{\mathbf{p}_4}, z_{\mathbf{p}_4})$, $\mathbf{p}_5 = (0, y_{\mathbf{p}_5}, z_{\mathbf{p}_5})$, $\mathbf{p}_6 = (0, y_{\mathbf{p}_6}, z_{\mathbf{p}_6})$ y $\mathbf{p}_7 = (0, y_{\mathbf{p}_7}, z_{\mathbf{p}_7})$ del plano de separación, con $y_{\mathbf{p}_0} < 0$, $y_{\mathbf{p}_1} > 0$, $y_{\mathbf{p}_2} < 0$, $y_{\mathbf{p}_3} > 0$, $y_{\mathbf{p}_4} < 0$, $y_{\mathbf{p}_5} > 0$, $y_{\mathbf{p}_6} < 0$, $y_{\mathbf{p}_7} > 0$, tales que $\mathbf{p}_1 = \Pi_-(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{p}_2 = \Pi_+(\mathbf{p}_1)$, $\mathbf{p}_3 = \Pi_-(\mathbf{p}_2)$, $\mathbf{p}_4 = \Pi_+(\mathbf{p}_3)$, $\mathbf{p}_5 = \Pi_-(\mathbf{p}_4)$, $\mathbf{p}_6 = \Pi_+(\mathbf{p}_5)$, $\mathbf{p}_7 = \Pi_-(\mathbf{p}_6)$ y $\mathbf{p}_0 = \Pi_+(\mathbf{p}_7)$.

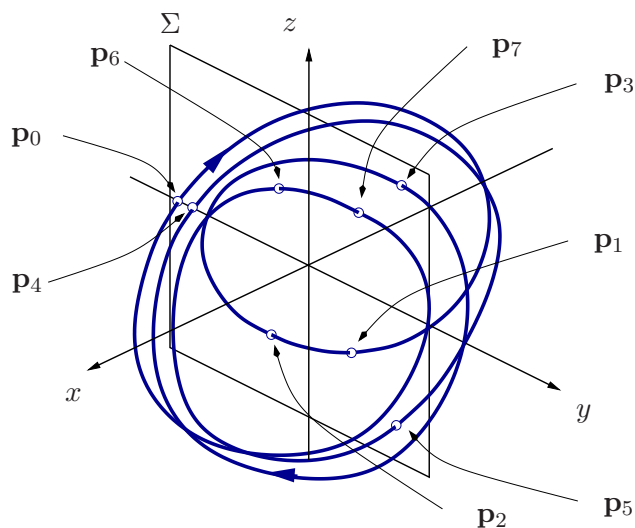


Figura 5.25: Esquema de una órbita periódica reversible de ocho cortes con el plano de separación.

Por otro lado, como cada una de estas órbitas periódicas ha de ser reversible, $\mathbf{p}_4 = (0, y_{\mathbf{p}_4}, z_{\mathbf{p}_4})$ debe pertenecer al eje de reversibilidad (es decir, $z_{\mathbf{p}_4} = 0$) y, además, $\mathbf{p}_5 = R(\mathbf{p}_3)$, $\mathbf{p}_6 = R(\mathbf{p}_2)$ y $\mathbf{p}_7 = R(\mathbf{p}_1)$. Así pues, existe una órbita periódica reversible de ocho cortes si, y sólo si, se verifican las condiciones $\Pi_-(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_1$, $\Pi_+(\mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2$, $\Pi_-(\mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_3$, $\Pi_+(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_4$, donde \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_4 pertenecen al eje de reversibilidad.

Suponiendo entonces que \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_4 están en el eje de reversibilidad, podemos reescribir las condiciones en las siguientes:

O1: Existen $t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, t_{2*}^+$ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, t_{2*}^+, \lambda_*) = (t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, t_{2*}^+, \lambda_*)$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t_{1*}^-, \lambda) = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t_{1*}^+, \lambda) = \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_2}(t_{2*}^-, \lambda) = \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_3}(t_{2*}^+, \lambda) = \mathbf{p}_4. \end{cases} \quad (5.17)$$

O2: $x_{\mathbf{p}_0}(t_{1*}^-, \lambda_*) < 0$ para todo $t_{1*}^- \in (0, t_{1*}^-)$.

O3: $x_{p_1}(t_1^+, \lambda_*) > 0$ para todo $t_1^+ \in (0, t_{1^*}^+)$.

O4: $x_{p_2}(t_2^-, \lambda_*) < 0$ para todo $t_2^- \in (0, t_{2^*}^-)$.

O5: $x_{p_3}(t_2^+, \lambda_*) > 0$ para todo $t_2^+ \in (0, t_{2^*}^+)$.

Nótese que si $(t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+, \lambda) = (t_{1^*}^-, t_{1^*}^+, t_{2^*}^-, t_{2^*}^+, \lambda_*)$ satisface las condiciones O1–O5, entonces $t_* = t_{1^*}^- + t_{1^*}^+ + t_{2^*}^- + t_{2^*}^+$ es el semiperiodo de la respectiva órbita periódica.

El sistema (5.17) consta de doce ecuaciones en las incógnitas $t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+, \lambda, y_{p_k}, z_{p_j}$ donde $k = 0, \dots, 4$ y $j = 1, 2, 3$. Tras realizar algunas manipulaciones, reducimos dicho sistema a uno de cuatro ecuaciones en las incógnitas $t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+, \lambda$, que omitimos debido a su complejidad. Observemos que $(t_{d_3}^-, t_{d_3}^+, t_{d_3}^-, t_{d_3}^+, \lambda_{d_3})$ es una solución de este sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas que satisface las condiciones O1–O5. Así pues, dicha solución corresponde a una órbita periódica reversible de cuatro cortes pero recorrida dos veces.

Aplicando ahora el algoritmo de continuación con esta solución como punto inicial y tomando un paso negativo (que en este caso consiste en aumentar los tiempos $t_{1^*}^-$ y $t_{2^*}^-$ en la primera iteración), obtenemos una curva de soluciones que representamos en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro, véase la Figura 5.26(a). El extremo inicial de la curva obtenida es el punto $\bar{p}_{d_3} \simeq (11.1392, 0.519285)$ y el extremo final es $q_h \simeq (11.2529, 0.519023)$, ya que a partir de ahí los puntos no verifican alguna de las condiciones O1–O5.

Notemos que el extremo final de la curva de órbitas periódicas reversibles de ocho cortes coincide con el extremo inicial de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes obtenida en la sección 5.2, véase la Figura 5.26(b). Luego podemos decir que de la bifurcación de duplicación de periodo \bar{p}_{d_3} nace una curva de órbitas periódicas reversibles de ocho cortes que termina en el punto q_h , a partir del cual surge la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que llegan al ciclo heteroclinio tipo punto–T directo antes estudiado.

Para visualizar mejor la relación entre ambas curvas de órbitas periódicas es conveniente representarlas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) , véase la Figura 5.27, donde $t^- = t_1^- + t_2^-$ y $t^+ = t_1^+ + t_2^+$. Nótese que también hemos representado la curva de soluciones simétricas respecto al plano $T = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$, que se obtiene aplicando el método de continuación con el mismo punto inicial pero con un paso positivo (es decir, aumentando los tiempos $t_{1^*}^+$ y $t_{2^*}^+$ en la primera iteración). Observemos que cada uno de los puntos de la curva obtenida, que une los puntos $q_{h_1} \simeq (7.26244, 4.05847, 0.519365)$ y $q_{h_2} \simeq (4.05847, 7.26244, 0.519365)$, excepto

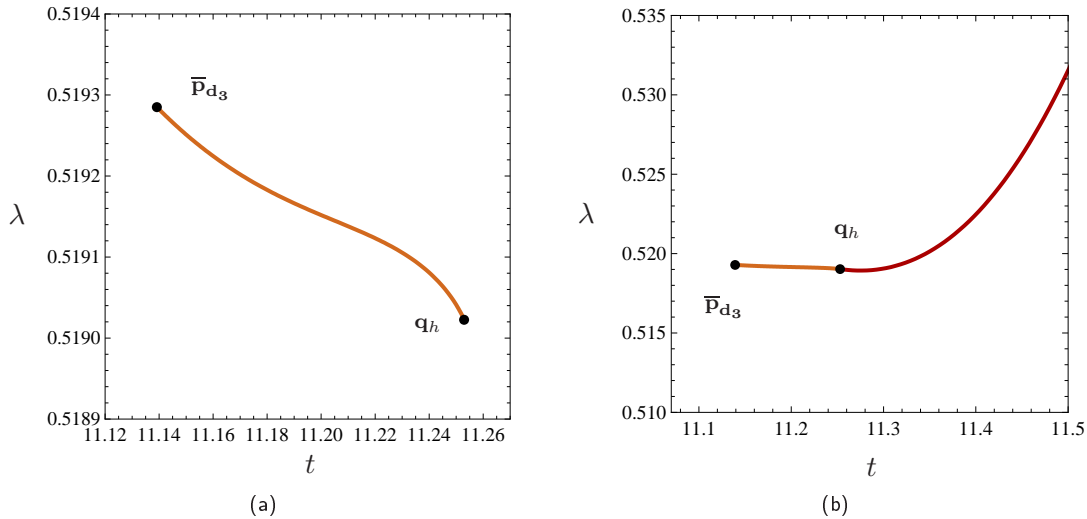


Figura 5.26: (a) Representación gráfica de la curva de órbitas periódicas reversibles de ocho cortes que nace a partir de la bifurcación de duplicación de periodo $\bar{p}_{d_3} \simeq (11.1392, 0.519285)$, en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. En (b) se representa también la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que parte de $q_h \simeq (11.2529, 0.519023)$ que hemos obtenido en la sección 5.2.

éstos dos puntos y $p_{d_3} \simeq (5.56959, 5.56959, 0.519285)$ corresponde a una órbita periódica reversible de ocho cortes.

En la Figura 5.28 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de ocho cortes de la curva que acabamos de obtener, comenzando con un punto próximo a p_{d_3} y avanzando por la curva conforme el semiperiodo crece, para llegar a un punto cercano a cualquiera de los extremos q_{h_1} y q_{h_2} .

Los puntos q_{h_1} y q_{h_2} proporcionan la misma órbita periódica reversible, pues ambos son simétricos respecto al plano \mathbb{T} . Esta órbita periódica interseca al plano de separación en seis puntos, de tal modo que cuatro de ellos son puntos de corte transversal y los dos restantes son puntos de tangencia no transversal con el plano de separación, como puede verse en la Figura 5.16. A partir de cada punto q_{h_1} y q_{h_2} nace una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que llegan al ciclo heteroclino tipo punto-T directo analizado en la sección 5.2.

A continuación, mostramos la curva de soluciones del sistema (5.17) que comienza a partir del punto $\bar{p}_{d_4} = (2(t_{d_4}^- + t_{d_4}^+), \lambda_{d_4}) \simeq (12.2518, 0.446474)$, con $t_{d_4}^- \simeq 3.73209$ y $t_{d_4}^+ \simeq 2.39387$.

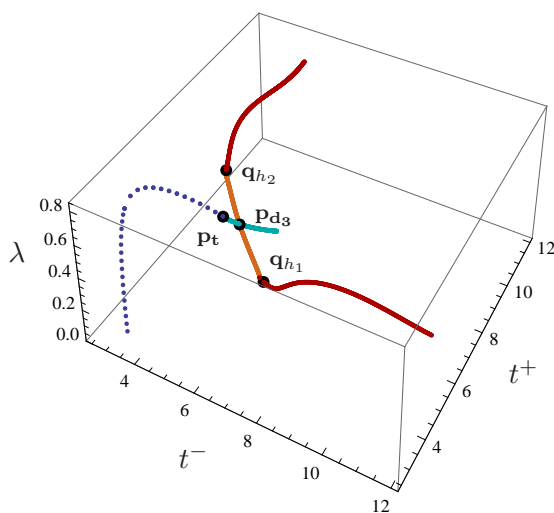


Figura 5.27: Curvas de órbitas periódicas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) . La curva en discontinuo es la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en el punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$. En este punto comienza una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes a la que pertenece la bifurcación de duplicación de periodo $\mathbf{p}_{d_3} \simeq (5.56959, 5.56959, 0.519285)$. La curva de órbitas periódicas reversibles de ocho cortes nace de \mathbf{p}_{d_3} y une los puntos $\mathbf{q}_{h_1} \simeq (7.26244, 4.05847, 0.519365)$ y $\mathbf{q}_{h_2} \simeq (4.05847, 7.26244, 0.519365)$. A partir de estos puntos nacen las curvas de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes, que tienden al ciclo heteroclinico tipo punto-T directo, vistas en la sección 5.2.

Recordemos que este punto pertenece a la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que nace del punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$ y en él hay una bifurcación de duplicación de periodo.

Observemos que $(t_{d_4}^-, t_{d_4}^+, t_{d_4}^+, t_{d_4}^-, \lambda_{d_4})$ es una solución del sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas obtenido a partir del sistema (5.17), que satisface las condiciones O1–O5. Así pues, esta solución corresponde a una órbita periódica reversible de cuatro cortes pero recorrida dos veces.

Aplicando el algoritmo de continuación tomando dicha solución como punto inicial y un paso negativo, obtenemos la curva de soluciones que representamos en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro, véase la Figura 5.29. La curva de soluciones obtenida une el punto $\bar{\mathbf{p}}_{d_4}$ con $\mathbf{q}_t \simeq (11.6602, 0.559092)$ y todos sus puntos corresponden a órbitas periódicas reversibles de ocho cortes, ya que se verifican todas las condiciones adicionales.

En la Figura 5.30 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de ocho cortes de la curva que acabamos de obtener, comenzando con

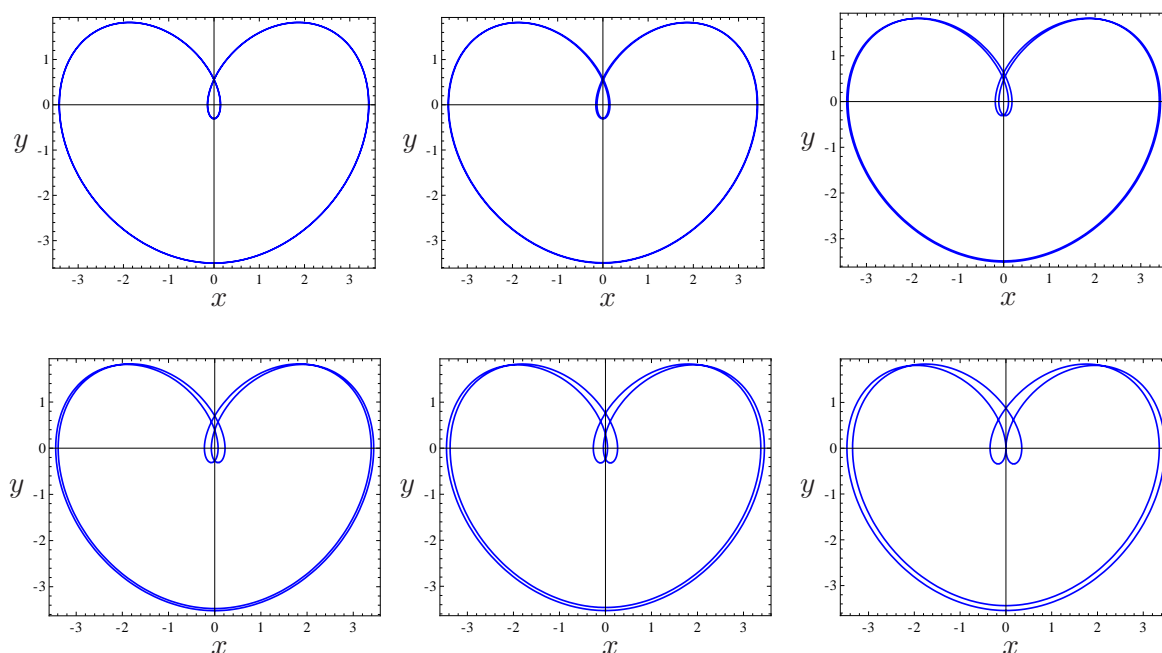


Figura 5.28: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de algunas órbitas periódicas reversibles de ocho cortes con el plano de separación.

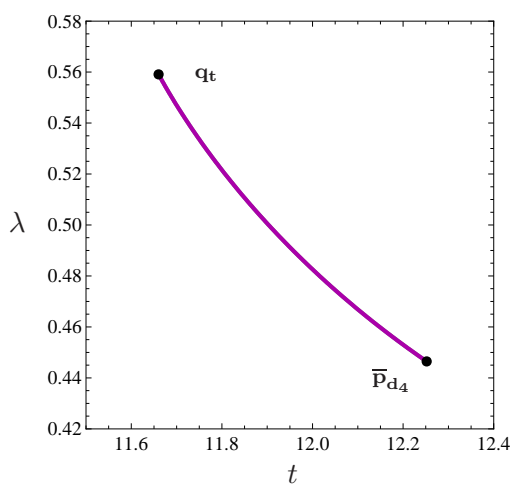


Figura 5.29: Representación gráfica, en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el semiperiodo, de la curva de órbitas periódicas de ocho cortes que nace a partir de $\bar{P}_{d_4} \simeq (12.2519, 0.446474)$.

un punto próximo a \bar{p}_{d_4} y avanzando por la curva hasta un punto cercano a q_t conforme aumenta el semiperiodo.

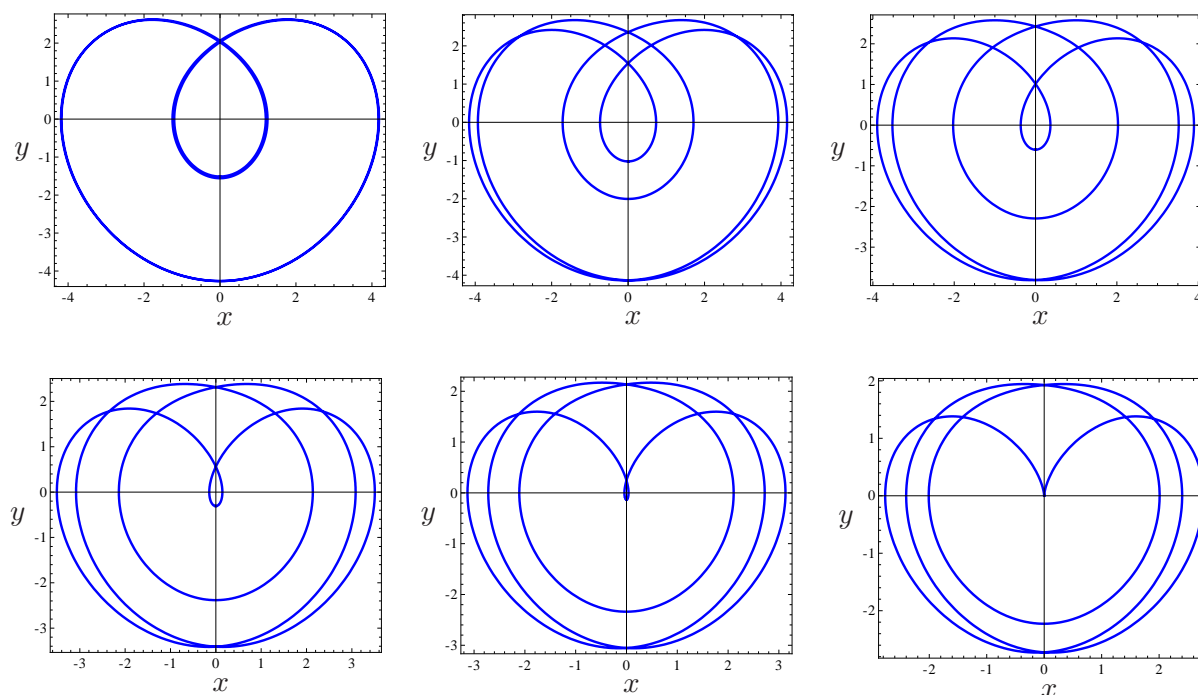


Figura 5.30: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de algunas órbitas periódicas reversibles de ocho cortes con el plano de separación.

Representando gráficamente la proyección de los puntos que resultan al intersecar cada una de las órbitas periódicas mostradas en la Figura 5.30 con el plano de separación, evidenciamos que a medida que aumenta el semiperiodo σ , equivalentemente, conforme la solución del sistema (5.17) se acerca al punto q_t , los puntos de corte p_0 , p_1 y p_5 se aproximan al eje de tangencia (eje z), véase la Figura 5.31. De ese modo, cuando la órbita periódica corresponde a q_t entonces los puntos de intersección p_0 , p_1 y p_5 pertenecen al eje z y, además, dichos puntos coinciden con el origen. Por ello, deducimos que esta órbita periódica reversible interseca al plano de separación en seis puntos, de tal modo que cinco de ellos son puntos de intersección transversal y el otro es un punto de tangencia transversal con el plano de separación.

Para continuar la curva de órbitas periódicas a partir del punto q_t tenemos que considerar ahora órbitas periódicas reversibles de seis cortes con el plano de separación.

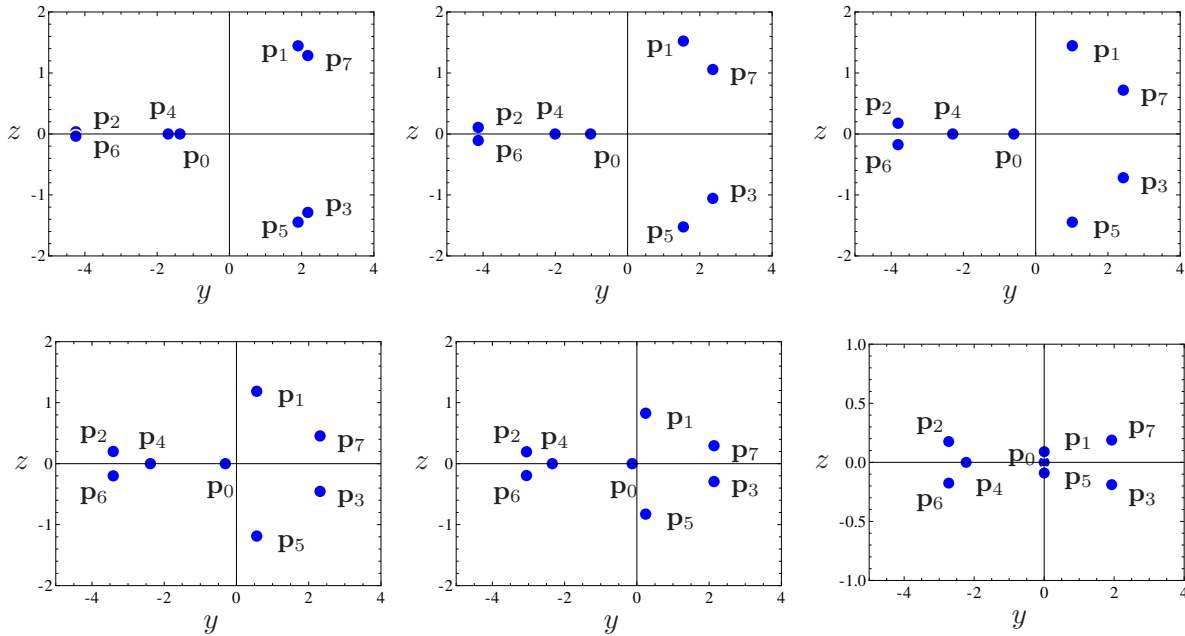


Figura 5.31: Puntos de corte que resultan al intersecar con el plano de separación cada una de las órbitas periódicas reversibles de ocho cortes representadas en la Figura 5.30.

Como cada una de estas órbitas periódicas ha de cortar al plano de separación en seis puntos, es obvio que cada una de ellas se corresponde con un punto fijo de la tercera iterada de la aplicación de Poincaré Π o, equivalentemente, con seis puntos $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$, $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, z_{\mathbf{p}_2})$, $\mathbf{p}_3 = (0, y_{\mathbf{p}_3}, z_{\mathbf{p}_3})$, $\mathbf{p}_4 = (0, y_{\mathbf{p}_4}, z_{\mathbf{p}_4})$ y $\mathbf{p}_5 = (0, y_{\mathbf{p}_5}, z_{\mathbf{p}_5})$ del plano de separación, con $y_{\mathbf{p}_0} < 0$, $y_{\mathbf{p}_1} > 0$, $y_{\mathbf{p}_2} < 0$, $y_{\mathbf{p}_3} > 0$, $y_{\mathbf{p}_4} < 0$, $y_{\mathbf{p}_5} > 0$ tales que $\mathbf{p}_1 = \Pi_-(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{p}_2 = \Pi_+(\mathbf{p}_1)$, $\mathbf{p}_3 = \Pi_-(\mathbf{p}_2)$, $\mathbf{p}_4 = \Pi_+(\mathbf{p}_3)$, $\mathbf{p}_5 = \Pi_-(\mathbf{p}_4)$ y $\mathbf{p}_0 = \Pi_+(\mathbf{p}_5)$.

Por otro lado, como cada una de estas órbitas periódicas ha de ser reversible, $\mathbf{p}_3 = (0, y_{\mathbf{p}_3}, z_{\mathbf{p}_3})$ debe pertenecer al eje de reversibilidad, es decir, $z_{\mathbf{p}_3} = 0$ y, además, $\mathbf{p}_4 = R(\mathbf{p}_2)$ y $\mathbf{p}_5 = R(\mathbf{p}_1)$. Así pues, existe una órbita periódica reversible que corta al plano de separación en seis puntos si, y sólo si, se satisfacen las igualdades $\mathbf{p}_1 = \Pi_-(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{p}_2 = \Pi_+(\mathbf{p}_1)$ y $\mathbf{p}_3 = \Pi_-(\mathbf{p}_2)$, donde \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_3 pertenecen al eje de reversibilidad.

Suponiendo entonces que \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_3 pertenecen al eje de reversibilidad, podemos reescribir las condiciones del siguiente modo:

O1: Existen $t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-$ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t_1^-, t_1^+, t_2^-, \lambda) = (t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, \lambda_*)$ es

una solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t_1^-, \lambda) = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t_1^+, \lambda) = \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_2}(t_2^-, \lambda) = \mathbf{p}_3. \end{cases} \quad (5.18)$$

O2: $x_{\mathbf{p}_0}(t_1^-, \lambda) < 0$ para todo $t_1^- \in (0, t_{1*}^-)$.

O3: $x_{\mathbf{p}_1}(t_1^+, \lambda) > 0$ para todo $t_1^+ \in (0, t_{1*}^+)$.

O4: $x_{\mathbf{p}_2}(t_2^-, \lambda) < 0$ para todo $t_2^- \in (0, t_{2*}^-)$.

Observemos que si $(t_1^-, t_1^+, t_2^-, \lambda) = (t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, \lambda_*)$ satisface las condiciones O1–O4, entonces $t_* = t_{1*}^- + t_{1*}^+ + t_{2*}^-$ es el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. En particular, si el punto \mathbf{p}_1 pertenece al eje de reversibilidad, entonces la órbita periódica es reversible de dos cortes y los correspondientes tiempos de vuelo t_{1*}^- , t_{1*}^+ y t_{2*}^- deben coincidir. En la Figura 5.32 se muestra un esquema gráfico de una órbita periódica reversible que interseca al plano de separación en seis puntos.

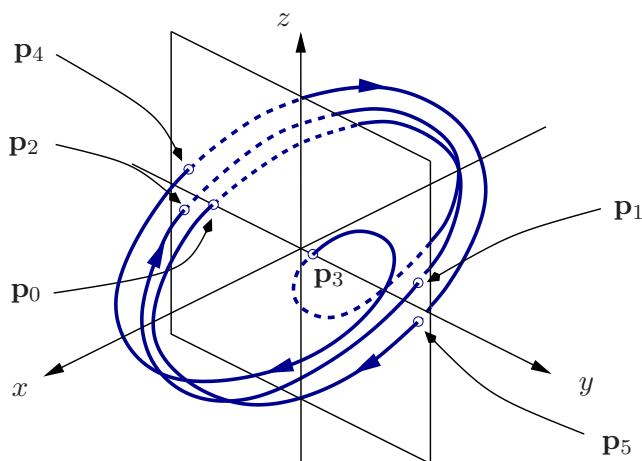


Figura 5.32: Esquema de una órbita periódica reversible que corta seis veces al plano de separación.

El sistema (5.18) consta de nueve ecuaciones en las incógnitas $t_1^-, t_1^+, t_2^-, \lambda, y_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1}, y_{\mathbf{p}_2}, z_{\mathbf{p}_2}$ e $y_{\mathbf{p}_3}$. Tras realizar algunas manipulaciones, reducimos el sistema a uno de tres ecuaciones en las incógnitas t_1^-, t_1^+, t_2^- y λ , que omitimos debido a su complejidad.

Aplicando ahora el algoritmo de continuación tomando $(\mathbf{u}_*, \lambda_{\mathbf{q}_t}) = (t_{1\mathbf{q}_t}^-, t_{1\mathbf{q}_t}^+, t_{2\mathbf{q}_t}^-, \lambda_{\mathbf{q}_t}) \simeq (3.08702, 3.22626, 5.34599, 0.55909)$ como punto inicial, que es una solución del sistema de tres

ecuaciones con cuatro incógnitas correspondiente a la órbita periódica reversible de seis cortes que se obtiene para $\mathbf{q}_t \simeq (11.6602, 0.55909)$, y un paso positivo (es decir, el semiperiodo $t = t_1^- + t_1^+ + t_2^-$ crece en la primera iteración), obtenemos una curva de soluciones del sistema (5.18) en la que todos sus puntos corresponden a órbitas periódicas reversibles de seis cortes, ya que verifican todas las condiciones O1–O4.

Representando esta curva en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro, véase la Figura 5.33(a), evidenciamos que, a medida que aumenta el semiperiodo, la curva se aproxima oscilando al valor del parámetro $\lambda_{h_3} \simeq 0.6515418663$. Mostraremos más adelante que para este valor del parámetro existe un ciclo heteroclino tipo punto-T en el sistema (2.8), el cual no coincide con ninguno de los analizados en el capítulo 3.

Por otro lado, usando el método de continuación con el mismo punto inicial pero tomando un paso negativo, tenemos la curva de soluciones que representamos en la Figura 5.33(b). Nótese que esta curva surge de \mathbf{q}_t y llega al punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$. Sin embargo, ninguno de sus puntos excepto $\bar{\mathbf{p}}_t$ y \mathbf{q}_t corresponde a una órbita periódica reversible de seis cortes.

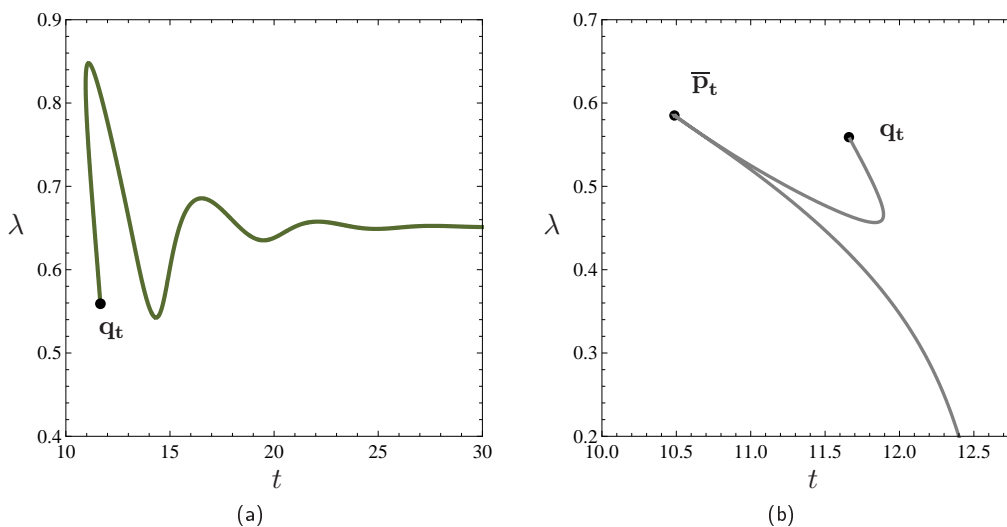


Figura 5.33: Representación gráfica, en el plano de coordenadas (t, λ) , con $t = t_1^- + t_1^+ + t_2^-$ el semiperiodo de la respectiva órbita periódica, de: (a) curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes obtenida tomando $\mathbf{q}_t \simeq (11.6602, 0.55909)$ como punto inicial y un paso positivo; (b) curva de soluciones del sistema (5.18), obtenida con el mismo punto inicial y un paso negativo.

La curva de órbitas periódicas obtenida comienza en el punto \mathbf{q}_t , donde finalizaba la curva de

órbitas periódicas reversibles de ocho cortes que nacía del punto \bar{p}_{d_4} . En la Figura 5.34 representamos ambas curvas de órbitas periódicas en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro.

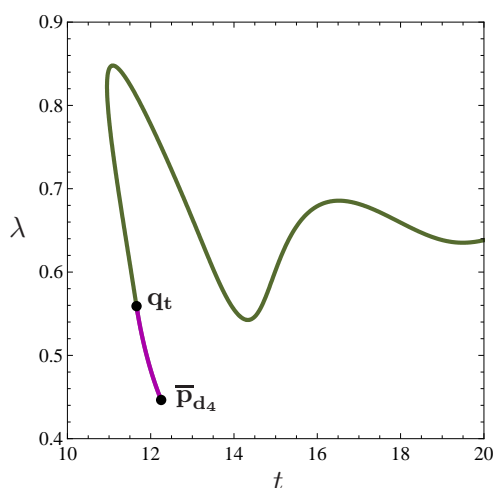


Figura 5.34: Representación gráfica de la curva de órbitas periódicas reversibles de ocho cortes que une los puntos $\bar{p}_{d_4} \simeq (12.2519, 0.446474)$ y $\mathbf{q}_t \simeq (11.6602, 0.559092)$, en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el semiperiodo. A partir de \mathbf{q}_t comienza la curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes.

Para visualizar mejor la relación entre ambas curvas de órbitas periódicas es conveniente representarlas en el espacio de coordenadas $(t^-, t^+, \lambda) = (t_1^-, t_2^+, \lambda)$, véase la Figura 5.35(a). Notemos que si un punto de cualquiera de estas curvas corresponde a una órbita periódica reversible, entonces su simétrico respecto de $T = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$ proporciona la misma órbita periódica. Las ramas simétricas de órbitas periódicas reversibles de seis cortes comienza en los puntos $\mathbf{q}_{t_1} \simeq (8.43391, 3.22626, 0.559092)$ y $\mathbf{q}_{t_2} \simeq (3.22626, 8.43391, 0.559092)$ y tienden, al aumentar el semiperiodo, a un ciclo heteroclino tipo punto-T. Los puntos del tramo que une \mathbf{q}_{t_1} con \mathbf{q}_{t_2} excepto \bar{p}_{d_4} corresponden a órbitas periódicas reversibles de ocho cortes.

Por otro lado, representando en el espacio tridimensional las soluciones que hemos obtenido usando el método de continuación con el mismo punto inicial pero tomando un paso negativo evidenciamos que cada una de las ramas que comienza en los puntos \mathbf{q}_{t_1} , \mathbf{q}_{t_2} pasa por el punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$, véase la Figura 5.35(b).

En la Figura 5.36 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de seis cortes de la curva que acabamos de obtener, comenzando en el extremo inicial de las cualquiera de las dos ramas obtenidas, es decir, en cualquiera de los puntos \mathbf{q}_{t_1} , \mathbf{q}_{t_2} , y avanzando por la curva a medida que el semiperiodo crece. Observemos que

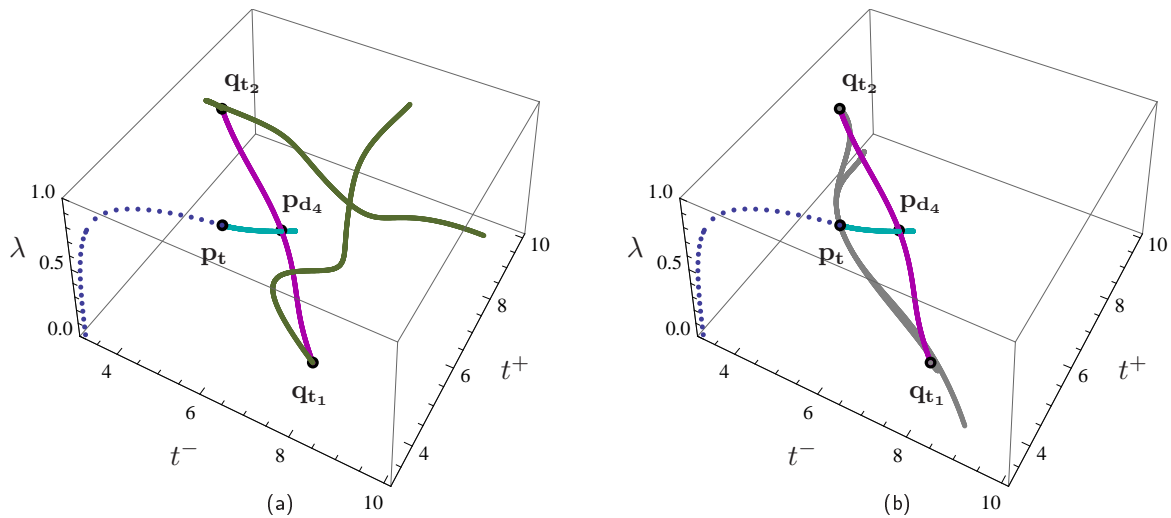


Figura 5.35: Curvas de órbitas periódicas en el espacio de coordenadas (t^-, t^+, λ) . La curva en trazo discontinuo es la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que llega al punto de tangencia $\mathbf{p}_t \simeq (5.24345, 5.24345, 0.585119)$, del que comienza una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes a la que pertenece $\mathbf{p}_{d_4} \simeq (3.73209, 2.39387, 0.44647)$. La curva de órbitas periódicas reversibles de ocho cortes nace de \mathbf{p}_{d_4} y une $\mathbf{q}_{t_1} \simeq (8.43391, 3.22626, 0.55909)$ con $\mathbf{q}_{t_2} \simeq (3.22626, 8.43391, 0.55909)$. En (a) se representan también las ramas de órbitas periódicas reversibles de seis cortes, mientras que en (b) se muestran las curvas de soluciones del sistema (5.18).

la última proyección corresponde a la órbita periódica reversible que se obtiene para la solución $(t_{1^*}^-, t_{1^*}^+, t_{2^*}^-, \lambda_*) \simeq (3.9783, 36.1116, 3.14458, 0.651542)$ del sistema (5.18).

A partir de la Figura 5.36, observamos que conforme aumenta el semiperiodo más se parece una órbita periódica reversible de seis cortes a un ciclo heteroclino tipo punto-T. En este caso, el ciclo heteroclino no es directo e interseca al plano de separación en seis puntos, por lo que no coincide con ninguno de los ciclos heteroclinos estudiados en el capítulo 3.

Por otro lado, a partir de la Figura 5.33(a) evidenciamos que, a medida que aumenta el semiperiodo, la curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes se aproxima oscilando al valor del parámetro $\lambda_{h_3} \simeq 0.651539667$. En consecuencia, podemos conjeturar que para dicho valor del parámetro existe un ciclo heteroclino tipo punto-T no directo en el sistema (2.8) que interseca al plano de separación en seis puntos y que podemos considerar como el límite de una órbita periódica reversible de seis cortes cuando su periodo tiende a infinito.

Una vez que hemos obtenido estas curvas de órbitas periódicas reversibles de seis cortes, el siguiente problema que abordamos es analizar sus estabilidades y bifurcaciones de estas soluciones

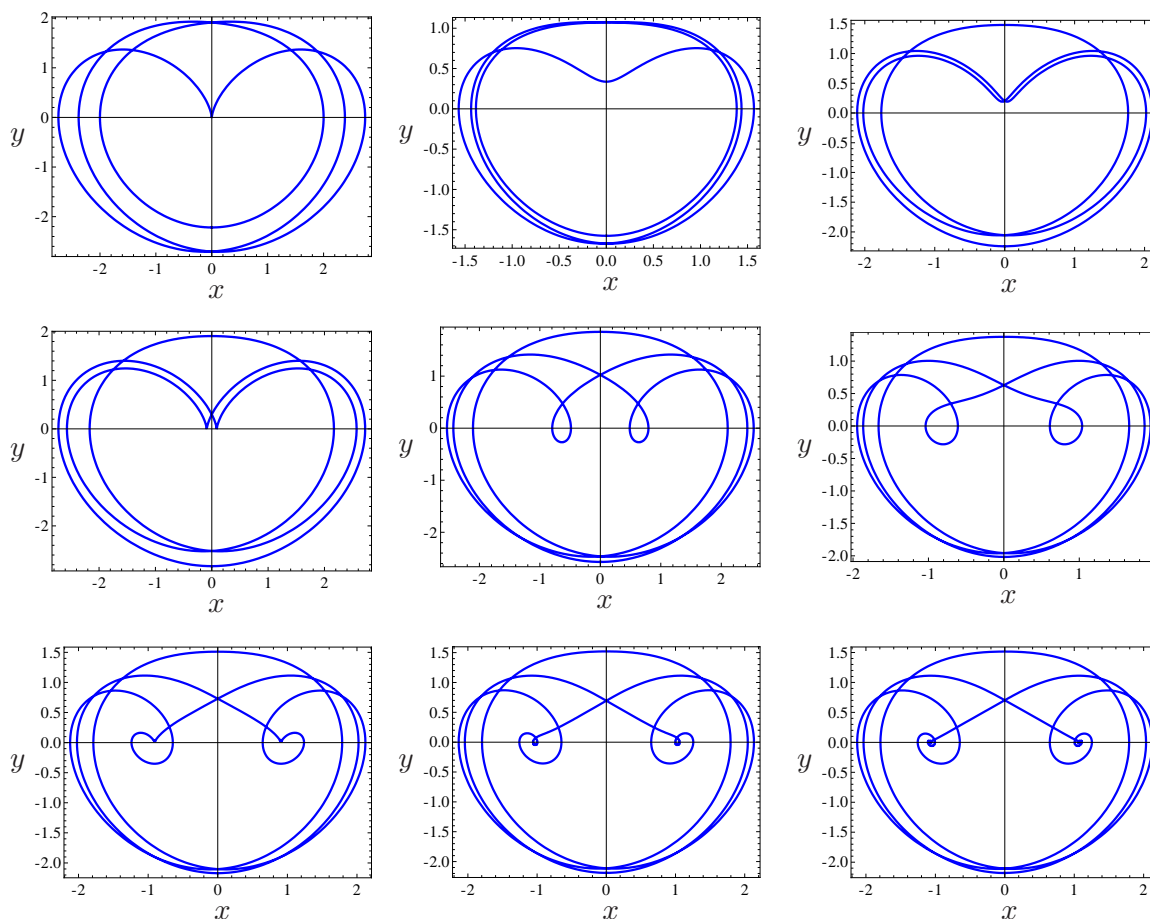


Figura 5.36: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de seis cortes con el plano de separación.

periódicas.

De modo análogo a lo visto en el capítulo 1, la estabilidad de la órbita periódica reversible de seis cortes correspondiente a una solución $(t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-, \lambda_*)$ del sistema (5.18) que no posee ningún punto de tangencia con el plano de separación, está caracterizada por los autovalores de la matriz

$$\mathcal{M} = \exp(A_*^- t_{1*}^-) \cdot \exp(A_*^+ t_{1*}^+) \cdot \exp(A_*^- t_{2*}^-) \cdot \exp(A_*^+ t_{2*}^-) \cdot \exp(A_*^- t_{1*}^+) \cdot \exp(A_*^+ t_{1*}^-),$$

donde A_*^+ y A_*^- se obtienen a partir de las matrices A^+ y A^- sin más que sustituir el valor del

parámetro $\lambda = \lambda_*$. En la Figura 5.37 se representan, frente al número de iteraciones, el logaritmo del módulo y el argumento de los autovalores de la matriz \mathcal{M} evaluada en cada uno de los puntos de la curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes que hemos obtenido. Observemos que en este caso hemos representado tanto el logaritmo de los multiplicadores característicos como el argumento de dichos autovalores frente al número de iteraciones, ya que el semiperiodo no siempre es una función estrictamente creciente. A partir de esta figura, aunque no se aprecia con todo detalle, podemos intuir que en esta curva de órbitas periódicas reversibles aparecerá un conjunto infinito de bifurcaciones de tipo silla-nodo de órbitas periódicas y de bifurcaciones de duplicación de periodo. Así pues, la estructura de bifurcaciones en la curva de órbitas periódicas reversibles que hemos obtenido es análoga a la de una curva de órbitas periódicas cercana a un ciclo heteroclino tipo punto-T en el caso diferenciable. Para más detalle al respecto, véase por ejemplo el trabajo [21].

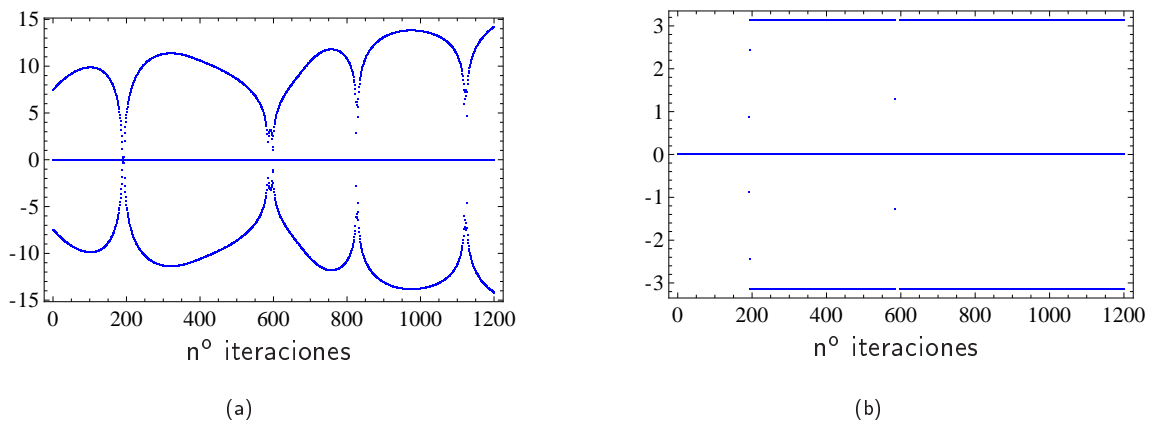


Figura 5.37: (a) Logaritmo del módulo de los multiplicadores característicos asociados a cada una de las órbitas periódicas reversibles de seis cortes frente al número de iteraciones. (b) Argumento de dichos multiplicadores característicos.

5.3.3. Curva de órbitas periódicas que nace de una bifurcación de duplicación de periodo de la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes.

En la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en el punto de tangencia $\bar{\mathbf{p}}_t \simeq (10.4869, 0.585119)$, hay una bifurcación de duplicación de periodo en $\bar{\mathbf{p}}_{d_2} \simeq (7.36864, 0.84762)$. Observemos que este punto del plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el periodo de la respectiva órbita periódica, corresponde al punto $\mathbf{p}_{d_2} = (t_{\mathbf{p}_{d_2}}^-, t_{\mathbf{p}_{d_2}}^-, \lambda_{\mathbf{p}_{d_2}}) \simeq (3.68432, 3.68432, 0.84762)$.

En esta sección obtenemos la curva de órbitas periódicas que nace a partir de esta bifurcación de duplicación de periodo. Cada una de estas órbitas periódicas ha de ser reversible y ha de cortar al plano de separación en cuatro puntos, ya que la curva que buscamos proviene de una bifurcación de duplicación de periodo de órbitas periódicas de dos cortes. En la Figura 5.21 se muestra un esquema de una órbita periódica de cuatro cortes con el plano de separación del tipo que estamos buscando.

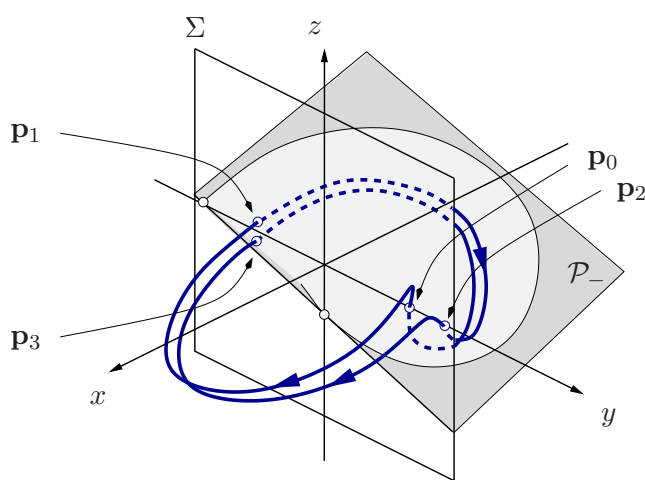


Figura 5.38: Esquema de una órbita periódica reversible que corta al plano de separación en cuatro puntos.

Nótese que como cada una de estas órbitas periódicas reversibles ha de cortar al plano de separación en cuatro puntos, es obvio que cada una de ellas se corresponde con un punto fijo de la segunda iterada de la aplicación de Poincaré o, equivalentemente, con cuatro puntos $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$, $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, z_{\mathbf{p}_2})$ y $\mathbf{p}_3 = (0, y_{\mathbf{p}_3}, z_{\mathbf{p}_3})$ del plano de separación, con $y_{\mathbf{p}_0} > 0$, $y_{\mathbf{p}_1} < 0$, $y_{\mathbf{p}_2} > 0$ e $y_{\mathbf{p}_3} < 0$, tales que $\mathbf{p}_1 = \Pi_+(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{p}_2 = \Pi_-(\mathbf{p}_1)$, $\mathbf{p}_3 = \Pi_+(\mathbf{p}_2)$ y $\mathbf{p}_0 = \Pi_-(\mathbf{p}_3)$.

Por otro lado, como cada una de estas órbitas periódicas ha de ser reversible, el punto $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, z_{\mathbf{p}_2})$ debe pertenecer al eje de reversibilidad (es decir, $z_{\mathbf{p}_2} = 0$) y, además, se tiene que cumplir la relación $\mathbf{p}_3 = R(\mathbf{p}_1)$. Así pues, existe una órbita periódica reversible que corta al plano de separación en cuatro puntos si, y sólo si, se satisfacen las condiciones $\mathbf{p}_1 = \Pi_+(\mathbf{p}_0)$ y $\mathbf{p}_2 = \Pi_-(\mathbf{p}_1)$, donde \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_2 pertenecen al eje de reversibilidad.

Suponiendo que \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_2 pertenecen al eje de reversibilidad, es conveniente reescribir las condiciones en las tres siguientes:

O1: Existen t_*^-, t_*^+ y λ_* estrictamente positivos tales que $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{p}_0}(t^+, \lambda) = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x}_{\mathbf{p}_1}(t^-, \lambda) = \mathbf{p}_2. \end{cases} \quad (5.19)$$

O2: $x_{\mathbf{p}_0}(t^+, \lambda_*) > 0$ para todo $t^+ \in (0, t_*^+)$.

O3: $x_{\mathbf{p}_1}(t^-, \lambda_*) < 0$ para todo $t^- \in (0, t_*^-)$.

Nótese que si $(t^-, t^+, \lambda) = (t_*^-, t_*^+, \lambda_*)$ satisface las condiciones O1–O3, entonces $t_* = t_*^- + t_*^+$ es el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. En particular, si el punto \mathbf{p}_1 pertenece al eje de reversibilidad, entonces la órbita periódica es reversible de dos cortes y los tiempos de vuelo t_*^- y t_*^+ coinciden.

El sistema (5.19), que consta de seis ecuaciones en las incógnitas $t^-, t^+, \lambda, y_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1}$ e $y_{\mathbf{p}_2}$, tras adecuadas manipulaciones puede escribirse en la forma

$$(f_1(\mathbf{s}, \lambda), f_2(\mathbf{s}, \lambda), f_3(\mathbf{s}, \lambda), f_4(\mathbf{s}, \lambda), f_5(\mathbf{s}, \lambda), f_6(\mathbf{s}, \lambda)) = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

siendo $\lambda > 0$, $\mathbf{s} = (t^-, t^+, y_{\mathbf{p}_0}, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1}, y_{\mathbf{p}_2})$ de tal modo que $t^- > 0$, $t^+ > 0$, $y_{\mathbf{p}_0} > 0$, $y_{\mathbf{p}_1} < 0$ e $y_{\mathbf{p}_2} > 0$, y donde cada componente $f_i : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, 6$ está dada por

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{s}, \lambda) &= ((3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1))\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \\ &\quad + \lambda \left[\lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4}((\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} - 2) \cos(\beta t^+) + ((\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0} - 2) \sin(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+\lambda}, \\ f_2(\mathbf{s}, \lambda) &= (\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} e^{t^+\lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \\ &\quad + \left[\sqrt{3\lambda^2 + 4}((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_0} - 1) \cos(\beta t^+) - \lambda(y_{\mathbf{p}_0} - 3) \sin(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+\lambda}, \\ f_3(\mathbf{s}, \lambda) &= -(\lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1) + (3\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1} e^{t^+\lambda})\sqrt{3\lambda^2 + 4} + \\ &\quad + \left[\lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4}(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_0} + 1) \cos(\beta t^+) + (3\lambda^2 + 2 - (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_0}) \sin(\beta t^+) \right] e^{\frac{3}{2}t^+\lambda}, \\ f_4(\mathbf{s}, \lambda) &= ((\lambda^2 + 1)(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)e^{t^-\lambda} - 3\lambda^2 - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t^-\lambda}{2}} - \lambda((\lambda^2 + 1)(\lambda y_{\mathbf{p}_1} + z_{\mathbf{p}_1}) - 2\lambda) \\ &\quad \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + \lambda((\lambda^2 + 1)((3\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} - 3\lambda z_{\mathbf{p}_1}) - 2) \sin(\beta t^-), \\ f_5(\mathbf{s}, \lambda) &= ((\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)e^{t^-\lambda} - (3\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_2})\sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{t^-\lambda}{2}} + \\ &\quad + ((2\lambda^2 + 1)y_{\mathbf{p}_1} - \lambda z_{\mathbf{p}_1} - 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) + (\lambda(y_{\mathbf{p}_1} - 3) + (3\lambda^2 + 2)z_{\mathbf{p}_1}) \sin(\beta t^-), \\ f_6(\mathbf{s}, \lambda) &= \lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} + \lambda z_{\mathbf{p}_1} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} e^{\frac{3}{2}t^-\lambda} + ((2\lambda^2 + 1)z_{\mathbf{p}_1} - \lambda(\lambda^2 y_{\mathbf{p}_1} + 1))\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) - \\ &\quad - ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)y_{\mathbf{p}_1} - \lambda(z_{\mathbf{p}_1} - 3\lambda) + 2) \sin(\beta t^-). \end{aligned}$$

A partir del sistema (5.20) vamos a obtener, realizando algunas manipulaciones entre sus ecuaciones, un sistema equivalente con menos ecuaciones e incógnitas. Para ello, en primer lugar, calculamos la segunda coordenada del punto $\mathbf{p}_0 = (0, y_{\mathbf{p}_0}, 0)$ despejando su valor de la primera ecuación del sistema,

$$y_{\mathbf{p}_0} = \frac{1}{\tilde{q}_0(t^+, \lambda)} \left[(\lambda^2 - (3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} + 2\lambda(\lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4}\cos(\beta t^+) + \sin(\beta t^+))e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} \right],$$

siempre que no se anule

$$\tilde{q}_0(t^+, \lambda) = \lambda(\lambda^2 + 1) \left[(\lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4}\cos(\beta t^+) + (3\lambda^2 + 2)\sin(\beta t^+))e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} - \lambda\sqrt{3\lambda^2 + 4} \right]. \quad (5.21)$$

Sustituyendo ahora la expresión obtenida de la variable $y_{\mathbf{p}_0}$ en las ecuaciones segunda y tercera del sistema (5.20) determinamos la segunda y tercera coordenada del punto $\mathbf{p}_1 = (0, y_{\mathbf{p}_1}, z_{\mathbf{p}_1})$,

$$y_{\mathbf{p}_1} = \frac{(e^{t^+\lambda} - 1) \left(\lambda^2(e^{t^+\lambda} + 1) - (2\lambda^2 + 1)\cos(\beta t^+)e^{\frac{t^+\lambda}{2}} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \lambda(e^{t^+\lambda} + 1)\sin(\beta t^+)e^{\frac{t^+\lambda}{2}}}{\tilde{q}_0(t^+, \lambda)},$$

$$z_{\mathbf{p}_1} = \frac{\lambda^3 \left((e^{2t^+\lambda} + 1) - (e^{t^+\lambda} + 1)\cos(\beta t^+)e^{\frac{t^+\lambda}{2}} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} + (3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)(e^{t^+\lambda} - 1)\sin(\beta t^+)e^{\frac{t^+\lambda}{2}}}{\tilde{q}_0(t^+, \lambda)},$$

Falta calcular la expresión de la segunda coordenada del punto $\mathbf{p}_2 = (0, y_{\mathbf{p}_2}, 0)$, que deducimos llevando a la quinta ecuación del sistema (5.20) las expresiones de $y_{\mathbf{p}_0}$, $y_{\mathbf{p}_1}$ y $z_{\mathbf{p}_1}$ obtenidas. Realizando algunas manipulaciones obtenemos que $y_{\mathbf{p}_2}$ viene dado por

$$y_{\mathbf{p}_2} = \frac{1}{q_1(t^-, t^+, \lambda)} \left[\lambda^2(3\lambda^2 + 4) \left((\lambda^2(2e^{2t^+\lambda} - 1) - 1)e^{\frac{3}{2}t^-\lambda} - (\lambda^2(2e^{t^+\lambda} - 1) - 1)\cos(\beta t^+)e^{\frac{1}{2}(t^+ + 3t^-)\lambda} + \right. \right. \\ \left. \left. + ((\lambda^2 + 1)e^{2t^+\lambda} - 2\lambda^2)\cos(\beta t^-) \right) - \lambda^2(\lambda^2 + 1)((6\lambda^2 + 5)e^{t^+\lambda} - 3\lambda^2 - 1)\cos(\beta(t^+ - t^-))e^{\frac{t^+\lambda}{2}} - \right. \\ \left. - 2((3\lambda^6 + 10\lambda^4 + 9\lambda^2 + 2)e^{t^+\lambda} - 6\lambda^6 - 14\lambda^4 - 9\lambda^2 - 2)\cos(\beta(t^+ + t^-))e^{\frac{t^-\lambda}{2}} + \right. \\ \left. + \lambda \left(\lambda^2(3(\lambda^2 + 1)e^{2t^+\lambda} + 6\lambda^2 + 4)\sin(\beta t^-) - (\lambda^2 + 1)(e^{t^+\lambda} - 3\lambda^2 - 1)\sin(\beta(t^+ - t^-))e^{\frac{t^+\lambda}{2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + ((3\lambda^4 + 6\lambda^2 + 2)(2e^{t^+\lambda} - 1) + 2\lambda^2 e^{t^+\lambda})\sin(\beta t^+)e^{\frac{1}{2}(t^+ + 3t^-)\lambda} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2((3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - 2\lambda^2 - 1)\sin(\beta(t^+ + t^-))e^{\frac{t^+\lambda}{2}} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \right],$$

siempre que no se anule $\tilde{q}_1(t^-, t^+, \lambda) = (3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}\tilde{q}_0(t^+, \lambda)e^{\frac{t^-\lambda}{2}}$.

Al sustituir en las ecuaciones $f_4(\mathbf{s}, \lambda) = 0$ y $f_6(\mathbf{s}, \lambda) = 0$ del sistema (5.20) los valores $y_{\mathbf{p}_0}$, $y_{\mathbf{p}_1}$

y z_{p_1} obtenidos, se tiene el sistema

$$\begin{cases} E_1(t^-, t^+, \lambda) = 0, \\ E_2(t^-, t^+, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (5.22)$$

con

$$\begin{aligned} E_1(t^-, t^+, \lambda) = & \left[\lambda((\lambda^2(2e^{2t^+\lambda} - 1) - 1)e^{t^-\lambda} + 3\lambda^2 + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4}e^{\frac{t^-\lambda}{2}} - \right. \\ & - 2\lambda^2 \left(\lambda(e^{2t^+\lambda} + 1)\sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^-) - (e^{2t^+\lambda} - 3\lambda^2) \operatorname{sen}(\beta t^-) \right) - \\ & - \lambda \left((2\lambda^2 e^{t^-\lambda} + 3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - (\lambda^2 + 1)e^{t^-\lambda} \right) \sqrt{3\lambda^2 + 4} \cos(\beta t^+) e^{\frac{1}{2}(t^+ + t^-)\lambda} + \\ & + \left((3\lambda^2 + 2)((\lambda^2 + 1)(2e^{t^+\lambda} - 1)e^{t^-\lambda} - (3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda}) + 2\lambda^2 e^{(t^+ + t^-)\lambda} \right) \operatorname{sen}(\beta t^+) e^{\frac{1}{2}(t^+ + t^-)\lambda} \\ & + \lambda^2(3(\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - 3\lambda^2 - 1) \operatorname{sen}(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}} - \\ & - 2((3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - 3\lambda^2(\lambda^2 + 1) - 1) \operatorname{sen}(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}} \left. \right] \sqrt{3\lambda^2 + 4} + \\ & + \lambda \left((3\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} + (3\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2) \right) \cos(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}} + \\ & + 2\lambda \left((3\lambda^2 + 1)(2\lambda^2 + 3)e^{t^+\lambda} - 3(\lambda^2 + 1)^2 - \lambda^2 \right) \cos(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(t^-, t^+, \lambda) = & \left[\lambda^3 \sqrt{3\lambda^2 + 4} \left(((2e^{2t^+\lambda} - 1)\lambda^2 - 1) \left(1 - \cos(\beta t^+) e^{\frac{1}{2}t^+\lambda} \right) e^{\frac{3}{2}t^-\lambda} + \right. \right. \\ & + (2\lambda^2 + (\lambda^2 + 1)(e^{2t^+\lambda} + 2)) \cos(\beta t^-) \left. \right) - \lambda^2((\lambda^2 + 1)(3\lambda^2 + 2)e^{2t^+\lambda} - 2\lambda^2) \operatorname{sen}(\beta t^-) + \\ & + \lambda^2 \left((3\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 1)(2e^{t^+\lambda} - 1) + 2\lambda^2 e^{t^+\lambda} \right) \operatorname{sen}(\beta t^+) e^{\frac{1}{2}(t^+ + 3t^-)\lambda} - \\ & - \lambda^2(3\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 1) \operatorname{sen}(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{3}{2}t^+\lambda} + \\ & + 2 \left(-3\lambda^6 - 8\lambda^4 - 5\lambda^2 + (\lambda^2 + 1)^2(3\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - 1 \right) \operatorname{sen}(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}} \left. \right] \sqrt{3\lambda^2 + 4} - \\ & - 2\lambda \left(\lambda^4 + (\lambda^2 + 1)(3\lambda^4 + (3\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - 1) \right) \cos(\beta(t^+ + t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}} + \\ & + \lambda(\lambda^2 + 1) \left(\lambda^4 e^{t^+\lambda} + 2(\lambda^2 + 1)((\lambda^2 + 1)e^{t^+\lambda} - 3\lambda^2 - 1) \right) \cos(\beta(t^+ - t^-)) e^{\frac{t^+\lambda}{2}} \end{aligned}$$

Así pues, para probar que se satisface la condición O1 tenemos que ver que existen $\lambda_* > 0$ y $\mathbf{u}_* = (t_*^-, t_*^+)$, con $t_*^- > 0$ y $t_*^+ > 0$, de tal modo que $(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$ es una solución del sistema (5.22), que satisface las condiciones O1–O3. Observemos que el punto $\mathbf{p}_{d_2} \simeq (3.68432, 3.68432, 0.847621)$ es una solución del sistema (5.22) que corresponde a una órbita periódica reversible de dos cortes pero recorrida dos veces.

Aplicando ahora el algoritmo de continuación con dicha solución como punto inicial y tomando un paso positivo (que en este caso consiste en aumentar el tiempo de vuelo t^-), obtenemos la

curva de soluciones que representamos en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro en la Figura 5.39(a). Esta curva une el punto $\bar{p}_{d_2} \simeq (7.36864, 0.847621)$ con $q_{t_2} = (t_{q_{t_2}}, \lambda_{q_{t_2}}) \simeq (8.46891, 0.555119)$ y todos sus puntos corresponden a órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes, ya que verifican todas las condiciones O1–O3.

En la Figura 5.39(b) representamos las soluciones que hemos obtenido y sus simétricas respecto al plano $T = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$ en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) . En particular, los puntos $q_{t_{21}} \simeq (5.36369, 3.10522, 0.555119)$ y $q_{t_{22}} \simeq (3.10522, 5.36369, 0.555119)$ son soluciones del sistema (5.22) y ambos son simétricos respecto al plano T. La curva que los une corresponde, en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t es el semiperiodo, a la curva que une $\bar{p}_{d_2} \simeq (7.36864, 0.847621)$ con $q_{t_2} \simeq (8.46891, 0.555119)$, véase la Figura 5.39(a).

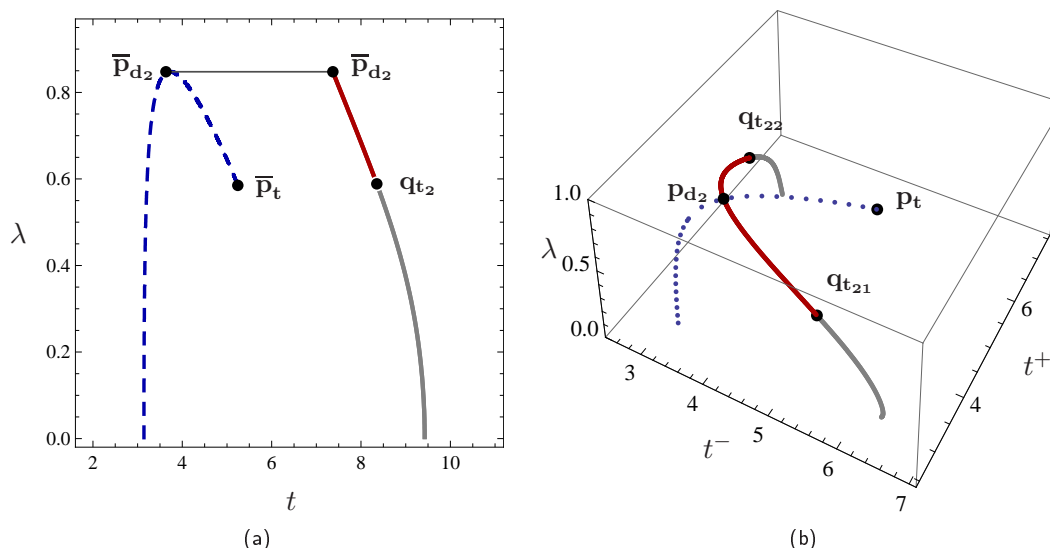


Figura 5.39: La línea discontinua corresponde a la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes que acaba en el punto de tangencia. En (a) se representa también, en el plano de coordenadas (t, λ) , la curva de soluciones del sistema (5.18) que comienza en el punto $\bar{p}_{d_2} \simeq (7.36864, 0.847621)$. Todos los puntos del tramo de esta curva que une \bar{p}_{d_2} con $q_{t_2} \simeq (8.46891, 0.555119)$ corresponden a órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes. En (b) se representan estas curvas de órbitas periódicas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) , donde t^- y t^+ indican los semitiempos de vuelo.

En la Figura 5.40 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes (véanse las Figuras 5.40(a)–(c)) y los puntos de corte de

estas órbitas periódicas con el plano de separación (véanse las Figuras 5.40(d)–(f)). Concretamente, la primera proyección que se muestra en esta figura corresponde a la órbita periódica reversible de cuatro cortes que proporciona una solución próxima a \mathbf{p}_{d_2} . En cuanto a la tercera proyección corresponde a la órbita periódica reversible de cuatro cortes que se obtiene para cualquiera de los extremos $\mathbf{q}_{t_{21}}$ y $\mathbf{q}_{t_{22}}$.

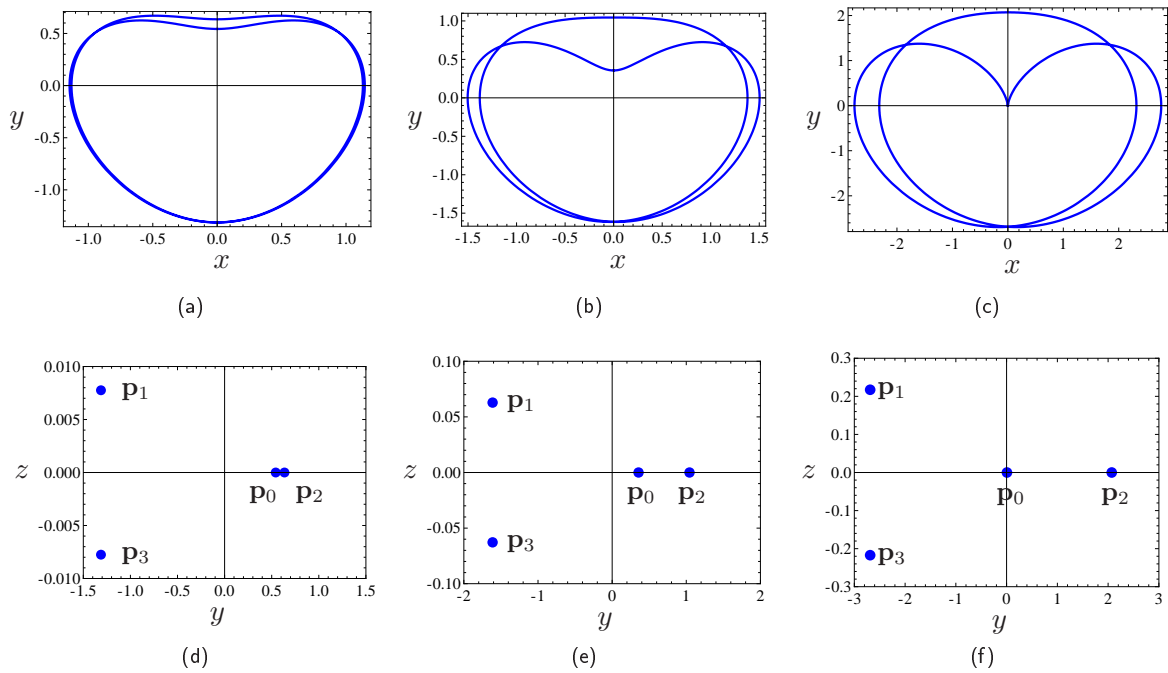


Figura 5.40: (a)–(c) Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes con el plano de separación. (d)–(f) Puntos de corte de dichas órbitas periódicas con el plano de separación.

A partir de la Figura 5.40 evidenciamos que conforme aumenta el semiperiodo σ , equivalentemente, a medida que la solución se acerca a $\mathbf{q}_{t_{21}}$ o bien a $\mathbf{q}_{t_{22}}$, el punto de corte \mathbf{p}_0 se aproxima al origen de coordenadas. De ese modo, dicho punto de corte coincide con el origen cuando el semiperiodo es $t_{\mathbf{q}_{t_2}} = t_{\mathbf{q}_{t_{21}}}^- + t_{\mathbf{q}_{t_{21}}}^+ \simeq 8.46891$. Por ello, esta órbita periódica reversible de cuatro cortes con el plano de separación tiene una tangencia transversal en el origen.

Cabe esperar que si el semiperiodo es mayor que $t_{\mathbf{q}_{t_2}} \simeq 8.46891$, entonces el punto \mathbf{p}_0 pertenecerá al semieje negativo de las y y, por tanto, la órbita periódica reversible correspondiente cortará seis veces al plano de separación. Así pues, para continuar la curva de órbitas periódicas a partir del punto

$\mathbf{q}_{t_2} = (t_{\mathbf{q}_{t_2}}, \lambda_{\mathbf{q}_{t_2}}) \simeq (8.46891, 0.555119)$ tenemos que considerar ahora órbitas periódicas reversibles de seis cortes con el plano de separación.

Recordemos que existe una órbita periódica reversible de seis cortes si existen $\lambda_* > 0$ y $\mathbf{u}_* = (t_{1*}^-, t_{1*}^+, t_{2*}^-)$, con t_{1*}^- , t_{1*}^+ y t_{2*}^- estrictamente positivos, tal que $(\mathbf{u}_*, \lambda_*)$ es una solución del sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas obtenido a partir de (5.18) y satisface las correspondientes condiciones O1–O4. Para determinar las curvas de dichas órbitas periódicas vamos a usar el algoritmo de continuación partiendo del punto inicial $(\mathbf{u}_0, \lambda_0) = (t_{1_0}^-, t_{1_0}^+, t_{2_0}^-, \lambda_0) \simeq (0.217359, 5.16642, 3.1027, 0.55)$, donde $t_{1_0}^-$ es un valor cercano a cero y $(t_{1_0}^+, t_{2_0}^-, \lambda_0)$ corresponde a $\mathbf{q}_{t_{22}} \simeq (3.10522, 5.36369, 0.555119)$.

Aplicando ahora el algoritmo de continuación con dicho punto inicial y un paso negativo (en la primera iteración los tiempos de vuelo t_{1*}^- y t_{2*}^- crecen y el tiempo de vuelo t_{1*}^+ decrece) obtenemos la curva que representamos en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro (Figura 5.41(a)). Esta curva acaba en el punto $\bar{\mathbf{p}}_{t_2} \simeq (9.28741, 0.442641)$ y todos sus puntos salvo los extremos \mathbf{q}_{t_2} y $\bar{\mathbf{p}}_{t_2}$ corresponden a órbitas periódicas reversibles de seis cortes. En la Figura 5.41(b) representamos ambas curvas de órbitas periódicas reversibles en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro.

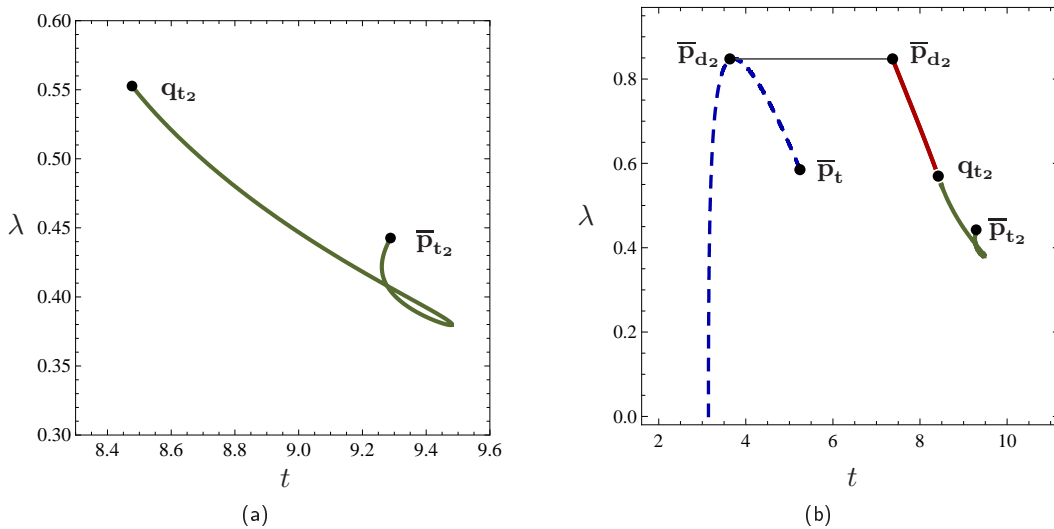


Figura 5.41: (a) Representación gráfica de la curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes que une $\mathbf{q}_{t_2} \simeq (8.46891, 0.555119)$ con $\bar{\mathbf{p}}_{t_2} \simeq (9.28741, 0.442641)$ en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t indica el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. En (b) se representa también la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que nace del punto $\bar{\mathbf{p}}_{d_2} \simeq (7.36864, 0.847621)$, así como la curva correspondiente a las órbitas periódicas reversibles de dos cortes (en trazo discontinuo).

Para visualizar mejor la relación entre ambas curvas de órbitas periódicas es conveniente representarlas en el espacio tridimensional de coordenadas $(t^-, t^+, \lambda) = (t_1^- + t_2^-, t_1^+, \lambda)$, véase la Figura 5.42. Nótese que también hemos representado la curva de soluciones simétricas respecto al plano $T = \{(t^-, t^+, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : t^- - t^+ = 0\}$. Cada una de las ramas simétricas de la curva de soluciones comienza en los puntos extremos de la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que nace de la bifurcación de duplicación de periodo $\mathbf{p}_{d_2} \simeq (3.68432, 3.68432, 0.847621)$, $\mathbf{q}_{t_{21}} \simeq (5.36369, 3.10522, 0.55512)$ y $\mathbf{q}_{t_{22}} \simeq (3.10522, 5.36369, 0.55512)$, y acaban en los puntos $\mathbf{p}_{t_{21}} \simeq (9.28741, 0, 0.44264)$ y $\mathbf{p}_{t_{22}} \simeq (0, 9.28741, 0.44264)$. Cada uno de los puntos de estas dos ramas salvo los puntos extremos $\mathbf{q}_{t_{21}}$, $\mathbf{q}_{t_{22}}$, $\mathbf{p}_{t_{21}}$ y $\mathbf{p}_{t_{22}}$ corresponde a una órbita periódica reversible de seis cortes. En los puntos $\mathbf{q}_{t_{21}}$ y $\mathbf{q}_{t_{22}}$ tenemos una órbita periódica reversible de cuatro cortes, mientras que en los puntos $\mathbf{p}_{t_{21}}$ y $\mathbf{p}_{t_{22}}$ hay una órbita periódica reversible de tres cortes, dos de los cuales son puntos de tangencia no transversal con el plano de separación.

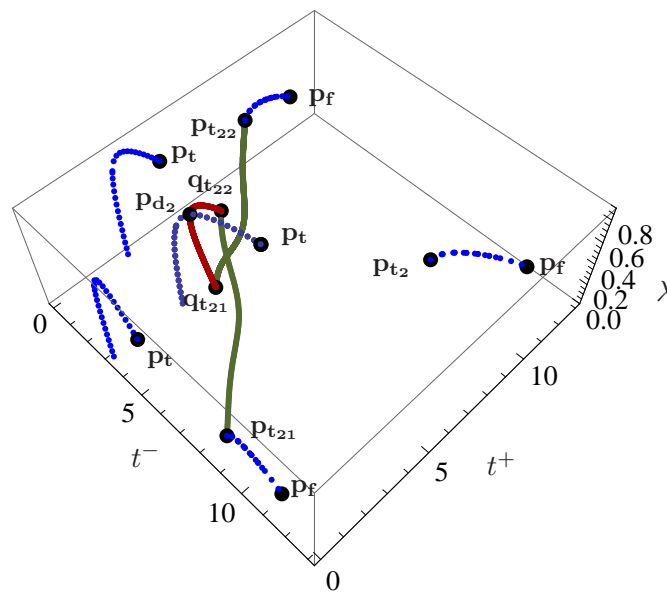


Figura 5.42: Curvas de órbitas periódicas en el espacio tridimensional de coordenadas (t^-, t^+, λ) . Las ramas en discontinuo corresponden a órbitas periódicas reversibles de dos cortes. Sobre una de ellas hay una bifurcación de duplicación de periodo en el punto $\mathbf{p}_{d_2} \simeq (3.68432, 3.68432, 0.847621)$. A partir del cual nace una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que une el punto $\mathbf{q}_{t_{21}} \simeq (5.36369, 3.10522, 0.555119)$ con $\mathbf{q}_{t_{22}} \simeq (3.10522, 5.36369, 0.555119)$. De estos dos puntos comienza una curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes, que conecta la curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que pasa por \mathbf{p}_{d_2} con una curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes.

En la Figura 5.43 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de seis cortes de la curva que obtenida, comenzando con un punto cercano a cualquiera de los puntos \mathbf{q}_{t21} y \mathbf{q}_{t22} (donde se ve la tangencia transversal) y avanzando por la curva hasta un punto próximo a \mathbf{p}_{t21} o \mathbf{p}_{t22} (donde se intuye una tangencia no transversal).

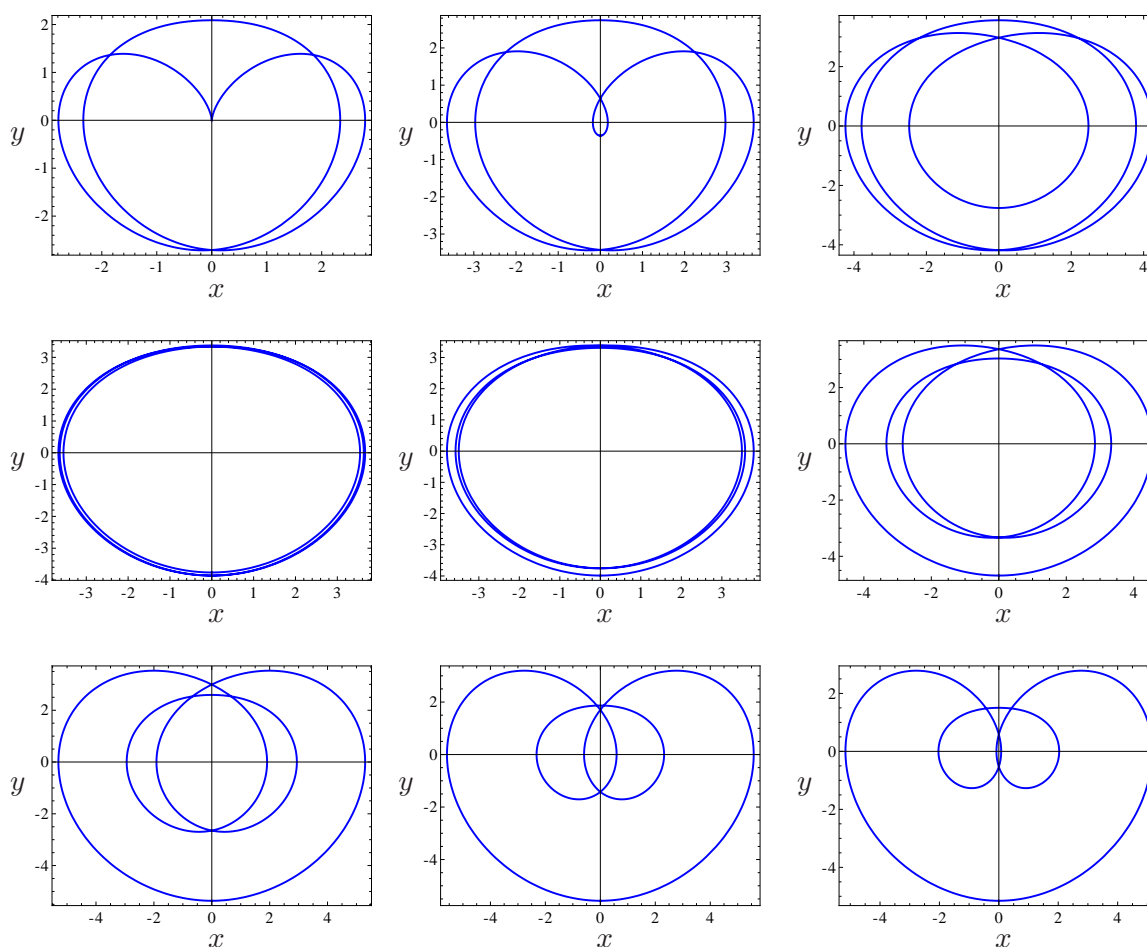


Figura 5.43: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de seis cortes con el plano de separación.

En la Figura 5.44 vemos los puntos que resultan al intersecar con el plano de separación cada una de las órbitas periódicas mostradas en la Figura 5.43

A partir de la última proyección de la Figura 5.44 intuimos que la órbita periódica reversible

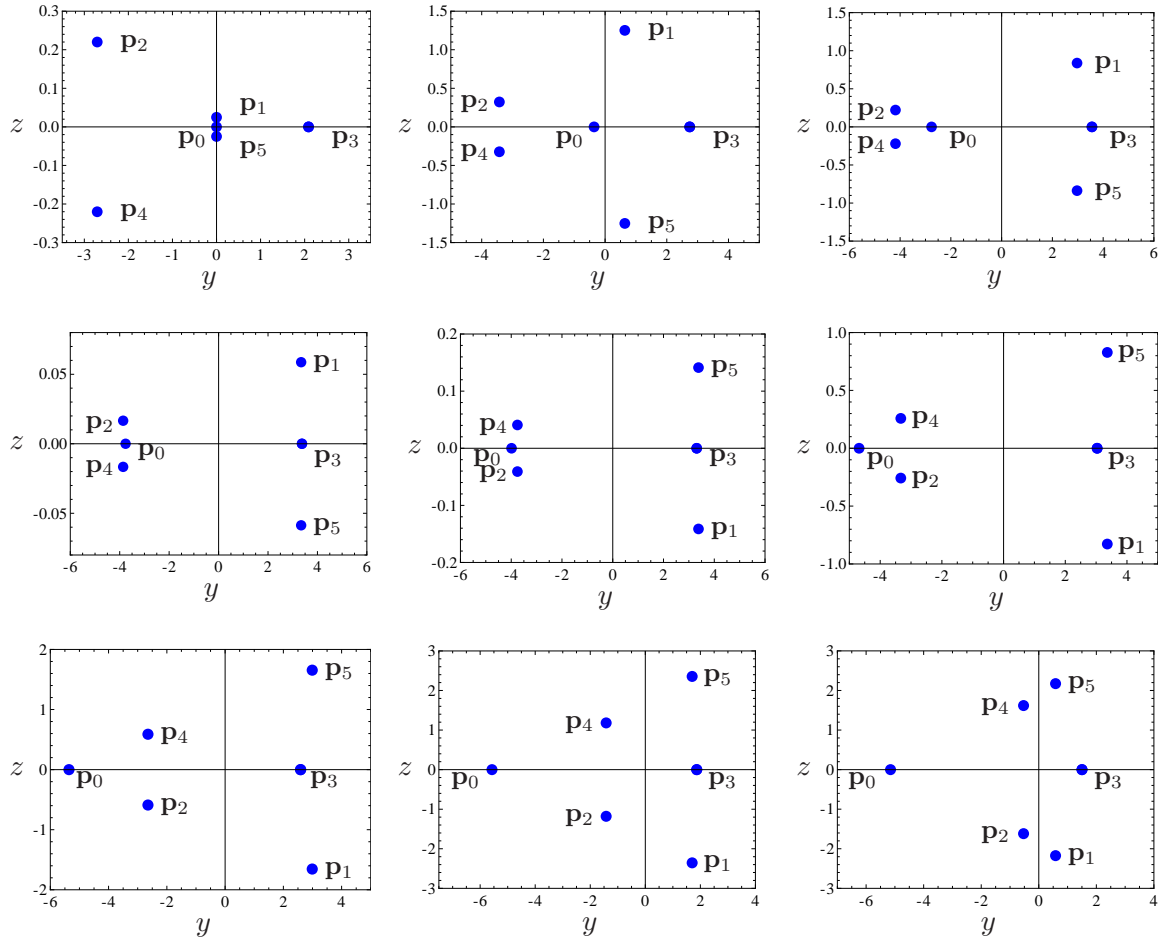


Figura 5.44: Puntos de corte con el plano de separación de las órbitas periódicas reversibles que se representan en la Figura 5.43.

correspondiente a cualquiera de los puntos $\mathbf{p}_{t_{21}}$, $\mathbf{p}_{t_{22}}$ interseca al plano de separación en cuatro puntos, de tal modo que dos de ellos son puntos de tangencia no transversal con el plano de separación. En la Figura 5.45 se representa la proyección en el plano de coordenadas (x, y) de esta órbita periódica y sus puntos de corte con el plano de separación.

Cabe destacar que la curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes acaba en el punto $\mathbf{p}_{t_2} \simeq (0, 9.28741, 0.442641)$, donde comienza la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con semiperiodo mayor que 3π . En la Figura 5.46 representamos ambas curvas de órbitas periódicas en un diagrama de bifurcación semiperiodo-parámetro. A partir de esta figura vemos que

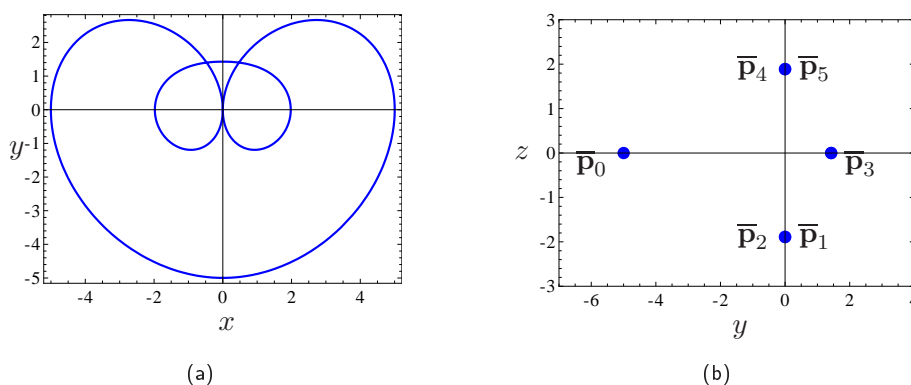


Figura 5.45: (a) Proyección en el plano de coordenadas (x, y) de la órbita periódica reversible de cuatro cortes que proporciona los puntos $\mathbf{p}_{t_{21}} \simeq (9.28741, 0, 0.442641)$, $\mathbf{p}_{t_{22}} \simeq (0, 9.28741, 0.442641)$. En (b) se muestran sus puntos de corte con el plano de separación. Nótese que en este caso $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5$ y ambos pertenecen al eje de tangencia.

la curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes que comienza en $\bar{\mathbf{p}}_{t_2} \simeq (9.28741, 0.442641)$ relaciona la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con semiperiodo menor que 2π con la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con semiperiodo mayor que 3π .

En la Figura 5.47 se representan las proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de dos cortes de la curva que une el punto $\bar{\mathbf{p}}_{t_2} \simeq (9.28741, 0.442641)$ con $\mathbf{p}_{t_f} = (11.27502, 0.424947)$, comenzando con un punto cercano a $\bar{\mathbf{p}}_{t_2}$ (donde se evidencia la tangencia transversal) y avanzando por la curva a medida que el semiperiodo crece hasta el punto \mathbf{p}_{t_f} . A partir de esta figura deducimos que la órbita periódica que proporciona el punto \mathbf{p}_{t_f} es reversible e interseca al plano de separación en cuatro puntos, de tal modo que dos de ellos son puntos de tangencia no transversal con el plano de separación.

Hemos decidido terminar aquí la continuación, aunque parece claro que del punto \mathbf{p}_{t_f} tendrá que salir ahora otra curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes, cuyo estudio dejamos para trabajos futuros.

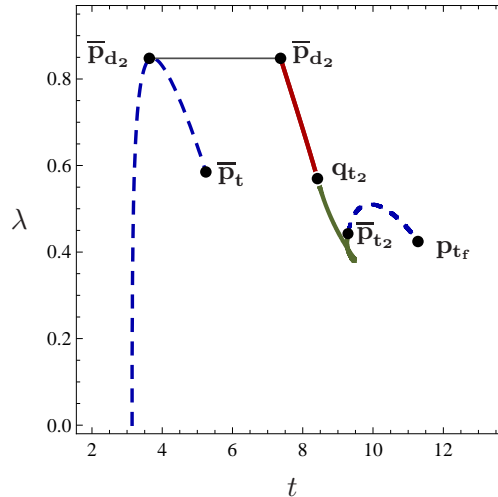


Figura 5.46: Curva de órbitas periódicas en el plano de coordenadas (t, λ) , donde t es el semiperiodo de la respectiva órbita periódica. Las ramas en discontinuo corresponden a curvas de órbitas periódicas reversibles de dos cortes. Sobre una de ellas hay una bifurcación de duplicación de periodo en $\bar{\mathbf{p}}_{d_2} \simeq (7.36864, 0.847621)$, a partir de la cual nace una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que acaba en $\mathbf{q}_{t_2} \simeq (8.46891, 0.555119)$. La curva de órbitas periódicas reversibles de seis cortes une $\mathbf{q}_{t_2} \simeq (8.46891, 0.555119)$ con $\bar{\mathbf{p}}_{t_2} \simeq (9.28741, 0.442641)$. La curva que une este punto con $\mathbf{p}_{t_f} = (11.27502, 0.424947)$ es la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con semiperiodo mayor que 3π .

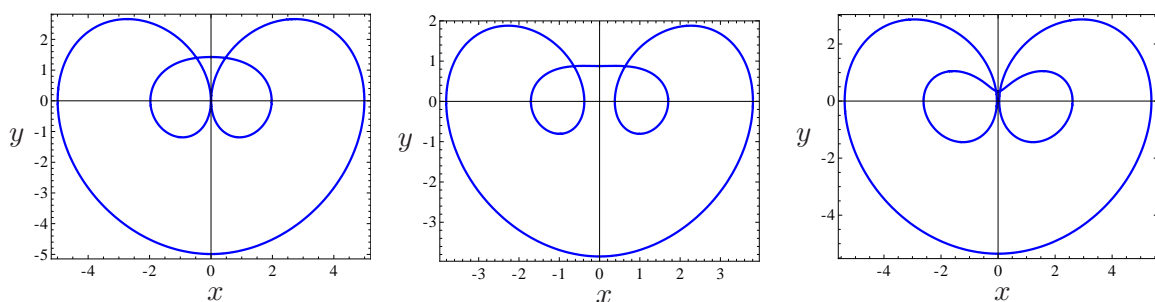


Figura 5.47: Proyecciones en el plano de coordenadas (x, y) de varias órbitas periódicas reversibles de dos cortes con el plano de separación.

Conclusiones y Trabajos Futuros

Creemos conveniente concluir esta memoria escribiendo un breve resumen de los problemas considerados, los resultados obtenidos y los procedimientos desarrollados, así como mostrando algunas ideas, enfoques e inquietudes que nos han surgido a medida que realizábamos este trabajo.

Como conclusión general destacamos dos hechos. En primer lugar, podemos afirmar que mediante razonamientos matemáticos básicos (aunque, a veces, un poco técnicos) ha sido posible probar, a partir de las ecuaciones de cierre, la existencia de objetos no triviales (órbitas periódicas y conexiones globales) en una familia de sistemas tridimensionales lineales a trozos con continuidad. Es obvio que estas demostraciones son específicas de esta familia y, a decir verdad, alguno de los razonamientos se ha visto simplificado por alguna de sus propiedades (reversibilidad o divergencia cero) pero también es evidente que las ideas utilizadas se pueden extender a otros sistemas lineales a trozos. En segundo lugar, se ha puesto de manifiesto que la versión lineal a trozos del sistema de Michelson reproduce, con las debidas puntualizaciones, mucha de la dinámica que exhibe el sistema original. De esta forma, se abre la posibilidad de encontrar nuevos fenómenos en el caso diferenciable a partir del estudio del sistema no regular.

Los resultados más interesantes que se han probado para la versión lineal a trozos del sistema de Michelson y, por extensión, para el resto de sistemas de la familia, son los siguientes:

- Probar la existencia de una conexión homoclina directa es un problema análogo a probar la existencia de un ciclo heteroclino punto-T directo.
- Existe un valor del parámetro del sistema para el que se da una conexión homoclina directa y otro para el que hay un ciclo heteroclino punto-T directo.
- Existe, para un rango amplio del parámetro, una familia de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con el plano de separación las cuales, a medida que crece el periodo, van deformándose

hasta tener una tangencia cúbica transversal con el plano de separación. Esta tangencia es única.

Mediante técnicas numéricas se ha obtenido la siguiente información:

- Junto a las dos conexiones globales cuya existencia se ha probado analíticamente, hay otro tipo de órbita homoclina directa así como de ciclo heteroclino tipo punto-T directo.
- A partir de la tangencia transversal en la que desaparece la curva de órbitas periódicas reversibles de dos cortes con el plano de separación, aparece una curva de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes.
- Sobre estas curvas de dos y cuatro cortes, se dan además cuatro bifurcaciones de duplicación de periodo, una de silla nodo (probada analíticamente) y una ruptura de simetría.
- Algunas de las ramas de órbitas periódicas que surgen de estas degeneraciones tienden, tras producirse distintas tangencias con el plano de separación, a los valores correspondientes a las conexiones globales estudiadas.

Al desarrollar la memoria han aparecido algunos temas nuevos cuyo estudio puede ser considerado en trabajos posteriores.

- Sería interesante añadir apropiadamente otros parámetros al sistema con intención de romper la reversibilidad o la divergencia nula. Podríamos entonces aplicar algunas técnicas de perturbación para saber cuáles de los objetos cuya existencia hemos probado se mantienen y describir su despliegue.
- Creemos que el problema de la prueba de existencia de las órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes es abordable con las mismas técnicas aunque, evidentemente, las ecuaciones de cierre y condiciones adicionales serían más complejas.
- En todas las pruebas realizadas así como para el análisis de bifurcaciones globales de más cortes, se ha puesto de manifiesto la importancia que tendría conocer cómo son las variedades invariantes de los equilibrios en sucesivas iteraciones.
- Hemos comprobado numéricamente que todas las curvas de soluciones de las ecuaciones de cierre consideradas para las distintas órbitas periódicas acaban llegando al punto de tangencia

transversal. En casi todos estos casos, los puntos de la curva no se corresponden ya con órbitas periódicas reales cuando se produce el contacto con este punto pero, a la vista de esta “casualidad”, nos preguntamos cuál es el papel que puede jugar este punto de tangencia en la dinámica del sistema.

Bibliografía

- [1] A. Algaba, E. Freire, E. Gamero y A. J. Rodríguez-Luis, *Resonances of periodic orbits in Rössler system in presence of a triple-zero bifurcation*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **17** (2007), no. 6, 1997–2008.
- [2] A. Andronov, A. Vitt y S. Khaikin, *Theory of oscillators*, Dover, 1987.
- [3] A. Arneodo, P. Couillet y C. Tresser, *Possible new strange attractors with spiral structure*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), no. 4, 573–579.
- [4] A. Arneodo, P. Couillet y C. Tresser, *Oscillators with chaotic behavior: an illustration of a theorem by Shil'nikov*, J. Statist. Phys. **27** (1982), 171–182.
- [5] S. Barnett y R. G. Cameron, *Introduction to mathematical control theory*, Oxford University Press, New York, 1985.
- [6] L. A. Belyakov, *The bifurcation set in a system with a homoclinic saddle curve*, Mat. Zametki **28** (1980), 911–922, 962.
- [7] L. A. Belyakov, *Bifurcations of systems with a homoclinic curve of the saddle-focus with a zero saddle value*, Mat. Zametki **36** (1984), 681–689, 798.
- [8] M. Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys y P. Kowalczyk, *Piecewise-smooth dynamical systems: Theory and applications*, Springer, 2008.
- [9] V. Carmona, *Bifurcaciones en sistemas dinámicos lineales a trozos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2002.

- [10] V. Carmona, F. Fernández-Sánchez y A. E. Teruel, *Existence of a reversible T -point heteroclinic cycle in a piecewise linear version of the Michelson system*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **7** (2008), 1032–1048.
- [11] V. Carmona, F. Fernández-Sánchez, E. García-Medina y A. E. Teruel, *Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems*, Chaos **20** (2010), 013124, 8.
- [12] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, J. Ros y F. Torres, *Limit cycle bifurcation in 3D continuous piecewise linear systems with two zones. Application to Chua's circuit*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **15** (2005), 3153–3164.
- [13] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, J. Ros y F. Torres, *Saddle-node bifurcation of invariant cones in piecewise linear systems via focus-center-limit cycle bifurcation*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SĕMA (2008), 69–78.
- [14] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce y F. Torres, *On simplifying and classifying piecewise-linear systems*, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. **49** (2002), 609–620.
- [15] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce y F. Torres, *The continuous matching of two stable linear systems can be unstable*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **16** (2006), 689–703.
- [16] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [17] L. O. Chua, M. Komuro y T. Matsumoto, *The double scroll family. II. Rigorous analysis of bifurcation phenomena*, IEEE Trans. Circuits and Systems **33** (1986), 1097–1118.
- [18] P. Le Corbeillert, *Two-stroke oscillators*, IRE Transaction on Circuit Theory **7** (1960), 387–598.
- [19] P. Coullet, C. Tresser y A. Arneodo, *Transition to stochasticity for a class of forced oscillators*, Phys. Lett. A **72** (1979), 268–270.
- [20] F. Dumortier, S. Ibáñez y H. Kokubu, *New aspects in the unfolding of the nilpotent singularity of codimension three*, Dyn. Syst. **16** (2001), 63–95.
- [21] F. Dumortier, S. Ibáñez y H. Kokubu, *Cocoon bifurcation in three-dimension reversible vector field*, Nonlinearity **19** (2006), 305–328.
- [22] F. Fernández-Sánchez, *Comportamiento dinámico y de bifurcaciones en algunas conexiones globales de equilibrios en sistemas tridimensionales*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2002.

-
- [23] F. Fernández-Sánchez, E. Freire y A. J. Rodríguez-Luis, *T-points in \mathbb{Z}_2 -symmetric electronic oscillator*, *Analysis Nonlinear Dynamics* **28** (2002), 53–69.
- [24] E. Freire, E. Gamero, A. J. Rodríguez-Luis y A. Algaba, *A note on the triple-zero linear degeneracy: normal forms, dynamical and bifurcation behaviors of an unfolding*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **12** (2002), 2799–2820.
- [25] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo y F. Torres, *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **8** (1998), 2073–2097.
- [26] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo y F. Torres, *Bifurcation sets of symmetrical continuous piecewise linear systems with three zones*, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **12** (2002), 1675–1702.
- [27] P. Gaspard, R. Kapral y G. Nicolis, *Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis*, *J. Statist. Phys.* **35** (1984), 697–727.
- [28] P. Glendinning y C. Sparrow, *Local and global behavior near homoclinic orbits*, *J. Statist. Phys.* **35** (1984), 645–696.
- [29] P. Glendinning y C. Sparrow, *T-points: A codimension two heteroclinic bifurcation*, *J. Stat Phys.* **43** (1986), 479–488.
- [30] S. V. Gonchenko, D. V. Turaev, P. Gaspard y G. Nicolis, *Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus*, *Nonlinearity* **10** (1997), 409–423.
- [31] S. Ibáñez y J. A. Rodríguez, *Shil'nikov configurations in any generic unfolding of the nilpotent singularity of codimension three on \mathbb{R}^3* , *J. Differential Equations* **208** (2005), 147–175.
- [32] C. Kahlert, *Existence and uniqueness of solutions of piecewise-defined continuous dynamical systems*, *Z. Naturforsch. A* **41** (1986), 567–568.
- [33] C. Kahlert, *The ranges of transfer and return maps in three-region piecewise-linear dynamical systems*, *Internat. J. Circuit Theory Appl.* **16** (1988), 11–23.
- [34] C. Kahlert y L. O. Chua, *A generalized canonical piecewise-linear representation*, *IEEE Trans. Circuits and Systems* **37** (1990), 373–383.
-

- [35] C. Kahlert y O. E. Rössler, *Analytical properties of Poincaré halfmaps in a class of piecewise-linear dynamical systems*, Z. Naturforsch. A **40** (1985), 1011–1025.
- [36] D. Kalman, *On transient optimization criteria*, IEEE Trans. Circuits and Systems **CAS-22** (1975), 898–900.
- [37] P. Kent y J. Elgin, *Noose bifurcation of periodic orbits*, Nonlinearity **4** (1991), 1045–1061.
- [38] P. Kent y J. Elgin, *A Shil'nikov-type analysis in a system with symmetry*, Phys. Lett. A **152** (1991), 28–32.
- [39] P. Kent y J. Elgin, *Travelling-waves of the Kuramoto-Sivashinsky equation: period-multiplying bifurcations*, Nonlinearity **5** (1992), 899–919.
- [40] G. A. Kriegsmann, *The rapid bifurcation of the Wien bridge oscillator*, IEEE Trans. Circuits and Systems **34** (1987), 1093–1096.
- [41] W. Kulpa, *The poincaré-miranda theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 545–550.
- [42] Y. Kuramoto y T. Tsuzuki, *Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium*, Prog. Theor. Phys. **55** (1976), 356–369.
- [43] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1995.
- [44] J. S. W. Lamb y J. A. G. Roberts, *Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey*, Phys. D **112** (1998), 1–39.
- [45] J. S. W. Lamb, M.-A. Teixeira y K. N. Webster, *Heteroclinic bifurcations near Hopf-zero bifurcation in reversible vector fields in \mathbb{R}^3* , J. Differential Equations **219** (2005), 78–115.
- [46] Y.-T. Lau, *The “cocoon” bifurcations in three-dimensional systems with two fixed points*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **2** (1992), 543–558.
- [47] J. Llibre, E. Ponce y A. E. Teruel, *Horseshoes near homoclinic orbits for piecewise linear differential systems in \mathbb{R}^3* , Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **17** (2007), 1171–1184.
- [48] G. M. Maggio, M. di Bernardo y M. P. Kennedy, *Nonsmooth bifurcations in a piecewise-linear model of the Colpitts oscillator*, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. **47** (2000), 1160–1177.

-
- [49] T. Matsumoto, L. O. Chua y K. Ayaki, *Reality of chaos in the double scroll circuit: a computer-assisted proof*, IEEE Trans. Circuits and Systems **35** (1988), 909–925.
- [50] T. Matsumoto, L. O. Chua y M. Komuro, *The double scroll*, IEEE Trans. Circuits and Systems **32** (1985), 797–818.
- [51] C. K. McCord, *Uniqueness of connecting orbits in the equation $Y^{(3)} = Y^2 - 1$* , J. Math. Anal. Appl. **114** (1986), 584–592.
- [52] R. O. Medrano-T., M. S. Baptista y I. L. Caldas, *Homoclinic orbits in a piecewise systems and their relation with invariant sets*, Physica D **186** (2003), 133–147.
- [53] R. O. Medrano-T., M. S. Baptista y I. L. Caldas, *Shil'nikov homoclinic orbit bifurcations in the Chua's circuit*, Chaos **16** (2006).
- [54] A. I. Mees y L. O. Chua, *The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems*, IEEE Trans. Circuits and Systems **26** (1979), 235–254.
- [55] D. Michelson, *Steady solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation*, Phys. D **19** (1986), 89–111.
- [56] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [57] Wu C. W. Pivka, L. y A. Huang, *Lorenz equation and Chua's equation*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **6** (1996), 2443–2489.
- [58] F. Rodrigo, *Comportamiento dinámico de osciladores electrónicos del tipo van der pol-duffing*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 1997.
- [59] J. Ros, *Estudio del comportamiento dinámico de sistemas autónomos tridimensionales lineales a trozos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2003.
- [60] L. P. Shil'nikov, *A case of the existence of a countable number of periodic motions*, Soviet Mathematics Doklady **16** (1963), 163–166.
- [61] L. P. Shil'nikov, *A case of the existence of a denumerable set of periodic motions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **160** (1965), 558–561.
-

- [62] L. P. Shil'nikov, *A contribution to the problem of the structure of an extended neighbourhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type*, Math. USSR Sbornik **10** (1970), 91–102.
- [63] G. I. Sivashinsky, *Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. I. Derivation of basic equations*, Acta Astronaut. **4** (1977), 1177–1206.
- [64] A. E. Teruel, *Clasificación topológica de una familia de campos vectoriales lineales a trozos simétricos en el plano*, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, 2000.
- [65] C. Tresser, *About some theorems by L. P. Shil'nikov*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **40** (1984), 441–461.
- [66] K. N. Webster y J. N. Elgin, *Asymptotic analysis of the Michelson system*, Nonlinearity **16** (2003), 2149–2162.
- [67] D. Wilczak, *Symmetric heteroclinic connections in the michelson system a computer assisted proof*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **4** (2005), 489–514 (electronic).
- [68] D. Wilczak, *The existence of shilnikov homoclinic orbits in the michelson system: a computer assisted proof*, Found. Comput. Math. **6** (2006), 495–535.
- [69] D. Wilczak y P. Zgliczynski, *Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three-body problem—a computer assisted proof*, Comm. Math. Phys. **234** (2003), 37–75.
- [70] C. W. Wu y L. O. Chua, *On the generality of the unfolded Chua's circuit*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **6** (1996), 801–832.