# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

# CONCEPTOS DE SOLUCIÓN PARA JUEGOS SOBRE ESPACIOS DE CLAUSURA

MARÍA DE LAS NIEVES JIMÉNEZ JIMÉNEZ

TESIS DOCTORAL

Memoria presentada por María de las Nieves Jiménez Jiménez
para optar al grado de *Doctor en Ciencias Matemáticas* por la
UNIVERSIDAD DE SEVILLA.

Nieves Jiménez

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ de los Directores:

Fdo: J. Mario Bilbao Arrese

Fdo: Esperanza Lebrón Rueda

Sevilla, Febrero de 1998

*A Juan Carlos y Ana*

# Índice

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1 Juegos cooperativos

Los primeros fundamentos de la teoría de juegos fueron expuestos por John von Neumann en 1928 aunque fue más tarde, en 1944, cuando se establecieron las bases de esta teoría con la publicación del tratado titulado *Theory of Games and Economic Behaviour,* escrito por Oskar Morgenstern y John von Neumann. En él se mostraba cómo muchas situaciones sociales y económicas podían ser descritas mediante juegos de estrategia y que estos juegos eran susceptibles de un análisis matemático.

De forma general, puede decirse que la teoría de juegos estudia modelos de cooperación y conflicto, usando métodos matemáticos; así, ésta puede ser dividida, básicamente, en dos líneas fundamentales: la teoría de juegos cooperativos y la teoría de juegos no cooperativos. Este trabajo de investigación se enmarca en la primera clase de juegos y, dentro de ella, en los denominados juegos de utilidad transferible.

Un *juego cooperativo* de *utilidad transferible* es un par $(N, v)$, donde $N$ es un conjunto finito y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que asigna a cada $S \subseteq N$ un número real, verificando que $v(\emptyset) = 0$.

Los elementos de $N = \{1, \ldots, n\}$ se denominan *jugadores*, los subconjuntos $S \in 2^N$ *coaliciones* y $v(S)$ es el *valor* de la coalición $S$. Para cada $S$, $v(S)$ puede ser interpretada como la ganancia máxima o el mínimo coste que los jugadores que componen la coalición $S$ pueden lograr cuando ellos deciden cooperar y formar una coalición. A lo largo de este trabajo, se interpretará la función $v$ como aquélla que determina la ganancia máxima de cada coalición. La función $v$ se denomina *función característica* del juego y, generalmente, se identifica el juego cooperativo $(N, v)$ con su función característica $v$.

Muchas situaciones interesantes, desde el punto de vista del comportamiento económico, pueden ser modeladas convenientemente como un juego en forma de función característica. Ello, puede observarse en el siguiente ejemplo cuya formulación original es debida a Driessen [20].

**Ejemplo 1.1** *Considérese una situación económica en la que existen diferentes empresas que fabrican dos tipos de artículos, $A$ y $B$, los cuales son complementarios y utilizables sólo en iguales cantidades. Supóngase que el conjunto de empresas se divide en dos subconjuntos disjuntos no vacíos $P$ y $Q$, de forma que cada una de las empresas que constituyen el conjunto $P$ fabrican únicamente una unidad diaria del producto $A$. Análogamente, cada una de las empresas incluidas en $Q$ producen únicamente $\alpha$ unidades diarias del artículo $B$. Por último, se supone que la mercancía que se produce con una unidad de ambos artículos puede ser vendida obteniéndose una ganancia neta de una unidad monetaria.*

*Con las consideraciones anteriores, la función de ganancia neta $v$ que describe el valor monetario más grande posible de la producción diaria de los artículos por un grupo $S$ de empresas, está dada por*

$$v(S) = min\{|S \cap P|\,,\ \alpha\,|S \cap Q|\}.$$

*Esta situación económica puede ser modelada como un juego cooperativo $(N, v)$ donde su conjunto de jugadores es $N = P \cup Q$, y su función característica $v$ es precisamente la función de ganancia neta diaria.*

Dado que, como se indicó antes, un juego $(N, v)$ se identifica con su función característica, las diferentes propiedades de la función $v$ dan lugar a distintos tipos de juegos. Una descripción bastante completa de éstos puede verse en [20]. Aquí sólo se definen aquéllos que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

Si $v(S) \leq v(T)$, para todo $S \subseteq T \subseteq N$, entonces el juego $v$ es *monótono.* Si, además, $v(S)$ sólo toma valores en el conjunto $\{0, 1\}$ para toda coalición $S \subseteq N$, entonces el juego es *simple.*

Un juego $v$ es *superaditivo* si, para cualesquiera coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$, se verifica la siguiente desigualdad

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Una clase especial de juegos superaditivos son los llamados juegos convexos. Un juego $v$ es *convexo* o *supermodular* si, para cualesquiera $S, T \subseteq N$, se verifica

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Equivalentemente, un juego $v$ es convexo si, y sólo si, para cualesquiera coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $S \subseteq T$, y para todo $i \in N \setminus T$, se tiene

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Así, para juegos convexos la contribución marginal de un jugador a una coalición no es nunca inferior a la contribución marginal del jugador a cualquier coalición contenida en aquélla. Los juegos convexos fueron introducidos por Shapley [57] y se aplican para modelar diversas situaciones que estudian las ciencias económicas.

En general, se denotará por $\Gamma^N$ al conjunto de todos los juegos $(N, v)$. En este conjunto, se introducen las operaciones

$$\begin{aligned} +: \quad & \Gamma^N \times \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N, \qquad (v, w) \longmapsto v + w \\ \cdot: \quad & \mathbb{R} \times \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N, \qquad (\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v \end{aligned}$$

definidas por

$$(v+w)(S) = v(S) + w(S), \quad (\alpha \cdot v) = \alpha \cdot v(S),$$

para cualquier $S \subseteq N$. Con respecto a estas operaciones, $\Gamma^N$ es un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$. Una base está formada por el conjunto

$$\{u_T : T \subseteq N, T \neq \emptyset\},$$

donde

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estos juegos $u_T$ se denominan *juegos de unanimidad.*

Desde la introducción de los juegos cooperativos, el problema más extensamente estudiado ha sido cómo dividir los beneficios totales entre todos los jugadores, ya que una de las principales reglas, en un juego cooperativo, es suponer que todos los jugadores que participan en un juego deciden cooperar entre ellos y formar la gran coalición $N$. Esto conduce al problema de distribuir la cantidad $v(N)$ entre ellos y, como consecuencia, a definir el concepto de vector de pago eficiente.

Cada vector $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ se denomina *distribución* o *vector de pago,* ya que la coordenada $x_i$ representa el pago al jugador $i$. En un juego $v$, un vector de pago $x$ se llama *eficiente* si distribuye exactamente el valor de la coalición $N$ entre los jugadores, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

Los vectores de pago que cumplen este *principio de eficiencia* se llaman *preimputaciones* y, atendiendo a la idea expuesta en el párrafo anterior, una *solución* o *concepto de solución* sobre una colección no vacía de juegos es una aplicación $\psi$ que asocia a cada juego cooperativo $v$ de dicha colección un subconjunto $\psi(v)$ del conjunto de preimputaciones.

La mayoría de los conceptos de solución propuestos para juegos cooperativos requieren que los vectores de pago eficientes cumplan el llamado *principio de individualidad racional* que exige que el pago a cada jugador $i$ mediante el vector de pago $x$ sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego; esto es, para todo $i \in N$,

$$x_i \geq v(\{i\}).$$

Las preimputaciones que verifican este principio de individualidad racional se llaman *imputaciones* para el juego $v$.

Además, un criterio de distribución satisfactoria podría ser que no sólo cada jugador, sino también cada coalición $S \in 2^N$ recibiera al menos la cantidad que ésta puede obtener por sí sola; es decir, que para toda $S \subseteq N$, el vector de pago $x$ verifique

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

El conjunto constituido por todos los vectores de pago eficientes que satisfacen estas desigualdades da lugar al concepto de solución denominado *core* del juego $v$. Formalmente:

$$Core(v) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S) \text{ para toda } S \in 2^N\right\},$$

donde $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ y $x(\emptyset) = 0$.

El core fue introducido por Gillies [27] en 1953 y se considera un concepto muy natural de solución, aunque tiene el inconveniente de que, en muchos casos, es vacío. Para la clase de juegos convexos se puede afirmar que éste es no vacío; no obstante, aún cuando el core sea no vacío, podría ser pequeño para conseguir dar soluciones razonables a ciertos juegos. Esto conduce a la consideración de otros conceptos de solución.

Desde la fundación de la teoría de juegos, han sido propuestos muchos conceptos de solución. En 1944, von Neumann y Morgenstern [65] introdujeron el concepto de conjunto estable (obsérvese que es un concepto anterior al core). Los conjuntos estables son descritos en términos de una relación entre imputaciones llamada dominación y, por tanto, requieren que el conjunto de imputaciones sea no vacío.

Si $x$ e $y$ son imputaciones para un juego $v$ y $S$ un subconjunto no vacío de $N$, entonces se dice que $x$ *domina a* $y$ *a través de la coalición* $S$ si se verifica

$$x(S) \leq v(S) \quad \text{y además} x_i > y_i \quad \text{para todo } i \in S.$$

En este caso, la coalición $S$ prefiere la distribución $x$ sobre la $y$ porque cada miembro de $S$ obtiene más, y $S$ no sobrepasa su valor con esta imputación.

Un subconjunto $E$ del conjunto de imputaciones es un *conjunto estable* si ningún elemento en $E$ es dominado por otro elemento de $E$ (*estabilidad interna*) y si cada elemento que no esté en $E$ es dominado por alguno del conjunto $E$ (*estabilidad externa*).

En la mayoría de los casos, el cómputo de los conjuntos estables es muy complicado ya que hay juegos con infinitos conjuntos estables. En contraposición, hay juegos para los cuales no existen conjuntos estables (Lucas [41]).

Otro concepto de solución es el llamado conjunto de negociación, propuesto por Aumann y Maschler [1]. Este conjunto es una extensión del core y está unido a los procesos de negociación ya que, en ellos se tienen en cuenta las posibles acciones y respuestas hechas por las coaliciones. Actualmente hay varias versiones del conjunto de negociación, pero aquí se considera la más clásica.

Si $x$ es una imputación para un juego $v$, una *objeción* de un jugador $i \in N$ contra otro jugador $j \in N$ con respecto a la imputación $x$ es un par $(y, S)$ donde $S \subset N$ es una coalición que contiene al jugador $i$ pero no al $j$, y el vector $y \in \mathbb{R}^{|S|}$ satisface

$$y(S) = v(S) \quad \text{y además } y_k > x_k \text{ para cada } k \in S.$$

Una *contraobjeción* a la objeción $(y, S)$ es un par $(z, T)$ donde $T \subset N$ es una coalición conteniendo al jugador $j$ pero no al $i$, y el vector $z \in \mathbb{R}^{|T|}$ verifica que

$$z(T) = v(T) \quad \text{y, además,} \quad \begin{cases} z_k \geq x_k & \text{para } k \in T \setminus S, \\ z_k \geq y_k & \text{para } k \in T \cap S. \end{cases}$$

Una objeción está *justificada* si no existe contraobjeción. El *conjunto de negociación de Aumann y Maschler* es el conjunto de todas las imputaciones $x$ para las cuales no existen objeciones justificadas respecto de $x$.

En 1978, Weber [66] propuso como concepto de solución un conjunto que contiene al core, y es más fácil de computar. Además, este conjunto es siempre no vacío. La definición del conjunto de Weber se basa en los vectores de contribución marginal.

Se suponen ordenados los jugadores en un juego $(N, v)$ y se tienen en cuenta todos los posibles órdenes del conjunto de jugadores; es decir, se considera el conjunto $\Pi_n$ de todas las permutaciones de $N$. Para cada orden $\pi \in \Pi_n$, se define el *vector de contribución marginal* $a^{\pi}(v) \in \mathbb{R}^n$ como la preimputación cuyas coordenadas satisfacen

$$a_i^{\pi}(v) = v\left(\pi^i \cup \{i\}\right) - v\left(\pi^i\right) \qquad \text{para todo } i \in N,$$

donde $\pi^i$ es el conjunto de los predecesores del jugador $i$ en el orden $\pi$. El vector $a^{\pi}(v)$ asigna a cada jugador su contribución marginal en el orden $\pi$.

El *conjunto de Weber* del juego $v$ es la envoltura convexa de los vectores de contribución marginal; esto es

$$Weber(v) = conv\left\{a^{\pi}(v) : \pi \in \Pi_n\right\}.$$

En la mayoría de los casos, los conceptos de solución citados no asignan al juego una única distribución, sino un conjunto de distribuciones. También se han definido soluciones que asignan a cada juego un único vector de pago que son los llamados valores. Entre estos valores, el más conocido es el valor de Shapley, introducido en 1953 por Shapley [56]. Hay varias interpretaciones de este concepto. Una de ellas, permite indicar que el *valor de Shapley* $\Phi(v) \in \mathbb{R}^n$ de un juego $v$ es una media ponderada de las contribuciones marginales de los jugadores a las distintas coaliciones, definido, para todo $i \in N$, por

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!\,(n-1-s)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right],$$

donde $s = |S|$ y $n = |N|$.

Otra manera de introducir el valor de Shapley se basa en los vectores de contribución marginal y corresponde a la siguiente interpretación. Se supone que los jugadores entran en una habitación uno a uno en un orden elegido aleatoriamente. Cada jugador consigue la cantidad que él contribuye a la coalición $S$ ya formada en el interior de la habitación cuando el jugador $i$ entra en la habitación; es decir, $i$ consigue $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. El valor de Shapley $\Phi(v)$ distribuye a cada jugador $i \in N$, la cantidad esperada que él obtiene por este procedimiento; esto es,

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_n} \left[v\left(\pi^i \cup \{i\}\right) - v\left(\pi^i\right)\right].$$

Por último, habría que indicar que existen otros conceptos de solución como son el *núcleo* (Davis y Maschler [17]), el *prenúcleo* (Maschler, Peleg y Shapley [45]), el *nucleolus* (Schmeidler [60]) y el $\tau$-*value* (Tijs [63]) entre otros, cuyas definiciones se omiten por no ser objeto de estudio en este trabajo de investigación.

## 1.2 Cooperación parcial

En el modelo general de juegos cooperativos se supone que no hay restricciones a la cooperación entre los jugadores y, por tanto, cada subgrupo de jugadores puede unirse formando una coalición. Sin embargo, hay situaciones en las que la cooperación entre los jugadores no es completa por ciertas razones. Por ejemplo, puede haber jugadores que no quieran coaligarse por no ser afines, no tener intereses comunes o simplemente por existir algún tipo de veto.

Una de las primeras aproximaciones a la cooperación parcial, incorporando condiciones restrictivas a la formación de coaliciones entre los jugadores, es el modelo de Aumann y Maschler [1] sobre *juegos con estructuras de coalición*. En este modelo, los jugadores se subdividen en clases formando una partición del conjunto total. Es decir, una estructura de coalición es una partición $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ del conjunto $N$ de jugadores de tal forma que la cooperación es únicamente posible entre los jugadores que pertenecen a un elemento $B_i$ de la estructura de coalición y ahí es total. Posteriormente, en 1974, Aumann y Dréze [3] introducen de forma axiomática el concepto de valor de un juego restringido por una estructura de coalición.

Otros trabajos que han desarrollado esta línea de investigación sobre juegos cooperativos con estructuras de coalición son debidos a Owen [52], Hart y Kurz [34], Levy y Mc Lean [39], Winter [69] [70] [71] y Mc Lean [46]. En estos trabajos se considera el estudio de la cooperación parcial cuando la estructura de coalición ya viene dada de antemano; es decir, de forma exógena. En una línea paralela, la formación endógena de estructuras de coalición, implícita en la teoría de conjuntos estables de John von Neumann y Oskar Morgenstern, es estudiada por investigadores como Shenoy [59], Hart y Kurz [33] [38].

El hecho de que, en cada elemento de la estructura de coalición, la cooperación sea total, exige que las relaciones entre los jugadores, en el caso de darse, sean transitivas. Ello impone una limitación a la aplicación de este modelo. Debido a esto, Myerson [47], en 1977, en su trabajo seminal *Graph and Cooperation in Games,* propone un modelo diferente para estudiar la cooperación parcial.

En el modelo propuesto por Myerson, las relaciones bilaterales entre los jugadores se representan mediante un grafo no dirigido y se entiende que una coalición de jugadores es factible si el correspondiente subgrafo inducido por ella es conexo. Así, un juego con cooperación parcial entre los jugadores se denota mediante una terna $(N, v, G)$ donde $(N, v)$ es un juego cooperativo de utilidad transferible y $G = (N, E)$ es un grafo de cooperación cuyo conjunto de vértices es el conjunto $N$ de los jugadores y cuyo conjunto de aristas no ordenadas $E$ simboliza las relaciones entre parejas de jugadores. Con ello, la función característica $v$, asociada al juego, se modifica ya que la cooperación es ahora parcial y se tiene el *juego restringido por el grafo de cooperación* el cual se representa por $(N, v^G)$ donde $v^G : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definido, para toda $S \subseteq N$, por

$$v^G(S) = \sum_{S_i \in S/G} v(S_i).$$

Es decir, el valor de una coalición en el juego restringido por el grafo de cooperación es una suma de valores sobre las componentes conexas del subgrafo inducido por la coalición $S$.

En general, a la terna $(N, v, G)$ se la denomina *situación de comunicación* y, para este modelo de cooperación parcial, Myerson estudia, como concepto de solución, reglas de asignación de pagos que sean eficientes en las componentes conexas de la gran coalición $N$, justas y estables. Esto es, si se denota por $SC^N$ el conjunto de todas las situaciones de comunicación definidas sobre el conjunto $N$,

$$SC^N = \{(N, v, G) : G \text{ es un grafo } (N, E)\},$$

se investigan aquellas funciones

$$Y : SC^N \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (N, v, G) \longmapsto (Y_1(N, v, G), \ldots, Y_n(N, v, G)),$$

que verifican las siguientes propiedades:

1. *Eficiente*: $\forall\,(N, v, G) \in SC^N$, $\forall S \in N/G$,
$$\sum_{i \in S} Y_i(N, v, G) = v(S).$$

2. *Justa*: $\forall\,(N, v, G) \in SC^N$, $\forall \{ij\} \in E$,
$$Y_i(N, v, G) - Y_i(N, v, G \setminus \{ij\}) = Y_j(N, v, G) - Y_j(N, v, G \setminus \{ij\})$$

3. *Estable*: $\forall\,(N, v, G) \in SC^N$, $\forall \{ij\} \in E$,
$$Y_i(N, v, G) \geq Y_i(N, v, G \setminus \{ij\}), \quad Y_j(N, v, G) \geq Y_j(N, v, G \setminus \{ij\}),$$

Myerson prueba que existe una única regla de asignación de pagos que verifica las condiciones de eficiencia y justicia: el valor de Shapley correspondiente al juego restringido $(N, v^G)$. Esta regla de asignación de pagos se la conoce por el nombre de *valor de Myerson*:

$$\mu(N, v, G) = \Phi(N, v^G).$$

El modelo de cooperación parcial introducido por Myerson ha motivado una línea de investigación con los trabajos de Owen [53], Nouweland y Borm [49], Carreras [15], Nouweland, Borm y Tijs [50] entre otros. Por otra parte, la formación endógena de situaciones de comunicación es analizada por Aumann y Myerson [2] y Nouweland [51]. Finalmente, otros modelos que guardan una estrecha relación con el planteado inicialmente por Myerson, en tanto que las relaciones entre los jugadores se modela mediante un grafo no dirigido, son estudiados por Bergantiños, Carreras y García Jurado [5], Calvo y Lasaga [14].

En 1980, en su trabajo *Conference Structures and Fair Allocation Rules* [48], Myerson plantea la generalización de su modelo de cooperación parcial con la utilización de hipergrafos de comunicación ya que, por ejemplo, si la cooperación se constituyera únicamente por coaliciones de tres o más jugadores, el modelo de representación mediante un grafo de cooperación no se podría utilizar. Por otro lado, y motivados por problemas de optimización combinatoria, surgen otros modelos más generales de cooperación restringida como los de Faigle y Kuipers, que serán comentados mas adelante.

La idea que subyace en la generalización de Myerson y que recoge Nouweland en su tesis doctoral es la de establecer un marco más amplio donde la relación entre los jugadores no tenga porqué estar representada por un grafo no orientado, sino que se haga la distinción simplemente entre coaliciones factibles y no factibles, aunque éstas tengan algún tipo de estructura predeterminada. Siguiendo esta línea de investigación, Bilbao [8] y López [40] comienzan a desarrollar un modelo de cooperación parcial basado en los denominados *sistemas de coaliciones factibles y sistemas de partición,* los cuales generalizan las situaciones de comunicación. Los sistemas de coaliciones factibles son colecciones $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $N$ que contienen al conjunto vacío y a las coaliciones unitarias. Los sistemas de partición son sistemas de coaliciones factibles en los que cualquier coalición $S \subseteq N$ puede expresarse como una unión disjunta de coaliciones factibles contenidas en $S$ y maximales para la inclusión.

Entonces, si se considera la terna $(N, v, \mathcal{F})$ en la que $(N, v)$ es un juego de utilidad transferible y $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles o un sistema de partición, los correspondientes juegos restringidos por el sistema $\mathcal{F}$ están definidos de la siguiente forma:

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \max\left\{\sum v(S_i) : \{S_i\} \in P_{\mathcal{F}}(S)\right\}, \quad \forall S \subseteq N,$$

$$v^{\mathcal{F}} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{S_i \in \Pi_S} v(S_i), \quad \forall S \subseteq N,$$

donde $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ representa al conjunto de todas las posibles particiones de la coalición $S$ en coaliciones factibles y $\Pi_S$ simboliza la partición de la coalición $S$ en coaliciones factibles maximales contenidas en $S$. Obviamente, son dos modelos diferentes de función característica asociada a la cooperación parcial aunque ambas están estrechamente relacionadas siempre que se trabaje en el contexto de un sistema de partición y el juego original $(N, v)$ sea superaditivo. Por otro lado, se prueba que una situación de comunicación $(N, v, G)$ es un caso particular de sistema de partición.

El estudio de los sistemas de coaliciones factibles, de los sistemas de partición y de sus respectivos juegos restringidos se ha continuado con el análisis y caracterización de los diferentes conceptos de solución que existen para cualquier juego cooperativo. En dicho estudio se pone de manifiesto la importancia del conjunto de coaliciones factibles $\mathcal{F}$ y de su estructura para la determinación de los mismos, así como para la transmisión de propiedades de la función característica $v$ a las funciones $\tilde{v}^{\mathcal{F}}$ y $v^{\mathcal{F}}$. Además, el conjunto de juegos de unanimidad cuyo soporte es una coalición factible constituye una base para el conjunto de juegos restringidos por la cooperación parcial, el *core* queda caracterizado (bajo ciertas hipótesis) por las coaliciones factibles, y el valor de Shapley del juego restringido se puede calcular a través de los dividendos de Harsanyi para las coaliciones factibles.

Los anteriores comentarios implican que sea especialmente interesante estudiar los valores del juego $(N, v)$ únicamente sobre las coaliciones factibles. Es decir, definir el juego $(\mathcal{F}, v)$ con

$$v : \mathcal{F} \subseteq 2^N \longrightarrow \mathbb{R},$$

y considerar posteriormente, si procede y tiene sentido, el juego restringido $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ o $(N, v^{\mathcal{F}})$ como una extensión de la función característica $v$ o del juego $(\mathcal{F}, v)$ a todos los subconjuntos de $N$.

Estas últimas consideraciones conectan con otro modelo de cooperación parcial, iniciado fundamentalmente por Faigle [24] y Kuipers [37]. En dicho modelo, se define el juego cooperativo sobre un conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto de jugadores y las coaliciones que pertenecen a este conjunto se denominan *factibles*, no poseyendo ninguna estructura determinada. Posteriormente, se extiende el juego a todas aquellas coaliciones de $N$ que puedan expresarse como unión, no necesariamente única, de coaliciones factibles disjuntas dos a dos.

Por otro lado, se ha indicado anteriormente que es importante la estructura combinatoria de $\mathcal{F}$. Así, la convexidad del juego $(N, v)$ no es transmitida a los juegos $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, $(N, v^{\mathcal{F}})$ a menos que la familia $\mathcal{F}$ sea intersectante, es decir

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \text{ con } A \cap B \neq \emptyset \implies A \cap B \in \mathcal{F}, \quad A \cup B \in \mathcal{F},$$

y el cálculo efectivo del valor de Shapley para el juego restringido se computa con mayor facilidad si $\mathcal{F}$ es una geometría convexa, ya que ésta posee las propiedades características de los grafos denominados *árboles* para los que el cálculo del valor de Myerson es más sencillo.

Enlazando las reflexiones realizadas en los párrafos anteriores, se ha abierto en los últimos años una línea de investigación (véase Bilbao [6] y Bilbao y Edelman [9]) en la que se asume el modelo propuesto por Faigle y se estudia un juego cooperativo definido como un par $(\mathcal{F}, v)$, donde

$$v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\emptyset) = 0,$$

y $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ es una familia de coaliciones factibles, en el sentido de Faigle, con una estructura combinatoria determinada como retículo, espacio de clausura, familia intersectante, geometría convexa, matroide y greedoide, entre otras.

El objetivo central de esta tesis es introducir y analizar los conceptos de solución citados en la sección anterior para juegos definidos sobre familias de coaliciones que, en algunas ocasiones, verificarán propiedades adicionales que la dotarán de una estructura u otra.

Este objetivo de generalización y estudio de conceptos de solución para juegos cooperativos $(\mathcal{F}, v)$ se sitúa como un primer paso de un amplio proceso investigador que intentaría, en su desarrollo más completo, contestar a las siguientes cuestiones abiertas:

- Los nuevos conceptos de solución, ¿tienen las mismas características y verifican las mismas propiedades que sus análogos en el contexto de una cooperación universal? ¿Se mantienen, entre ellos, las mismas relaciones que las que existen para los juegos cooperativos de utilidad transferible $(N, v)$?

- ¿Qué relación hay entre los conceptos de solución introducidos y sus homónimos, en una cooperación parcial modelada mediante sistemas de coaliciones factibles, sistemas de partición, u otro modelo que exija una extensión de la función característica $v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ a otra función $\tilde{v} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre cualquier coalición?

- Sabiendo que un concepto de solución determinado, en juegos cooperativos, puede no ser siempre el adecuado para un problema o situación; ¿aportan los nuevos conceptos introducidos soluciones más razonables o adecuadas a situaciones en las que las soluciones clásicas de cooperación parcial fueran vacías o carecieran de sentido lógico en dicho contexto?

- ¿Cómo afecta la estructura del sistema de coaliciones factibles a todas las cuestiones planteadas anteriormente?, ¿y el tipo de función característica $v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ que da lugar a una u otra clase de juego cooperativo?

## 1.3 Conceptos básicos

En cualquier juego cooperativo $(N, v)$, las diferentes coaliciones que se pueden formar a partir del conjunto de jugadores $N$ junto con la relación de inclusión forman un conjunto parcialmente ordenado. Debido a ello, es necesario presentar algunos conceptos referentes a estos conjuntos, utilizando, en lo que sigue, las notaciones de Stanley [62] y Birkhoff [12]. En esta sección, la exposición de conceptos y resultados relativos a conjuntos parcialmente ordenados, se limitará a aquéllos que se utilizan a lo largo de los siguientes capítulos.

Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $(P, \leq)$ donde $P$ es un conjunto y $\leq$ una relación binaria que satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice que $\hat{1} \in P$ es *último elemento* de $P$ si $x \leq \hat{1}$ para todo $x \in P$. Similarmente, se dice que $\hat{0} \in P$ es *primer elemento* de $P$ si $\hat{0} \leq x$ para todo $x \in P$.

Como se ha indicado antes, un ejemplo de conjunto parcialmente ordenado es el conjunto $2^N$ de todos los subconjuntos del conjunto $N$, ordenado por inclusión; es decir si $A, B \in 2^N$, entonces $A \leq B$ en $2^N$ si y sólo si $A \subseteq B$. Si $N$ es finito, entonces $\left(2^N, \subseteq\right)$ es también finito.

Si $Q \subseteq P$, se define un orden parcial en $Q$ denominado *orden inducido* de la siguiente forma: para $x, y \in Q$, $x \leq y$ en $Q$ si y sólo si $x \leq y$ en $P$. Al conjunto $Q$ se le llama *subconjunto parcialmente ordenado* inducido por el orden de $P$. Dos clases de subconjuntos parcialmente ordenados son los intervalos y las cadenas.

Si $x$ e $y$ son elementos del conjunto parcialmente ordenado $P$ y si, además $x \leq y$, entonces el conjunto

$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$$

se llama *intervalo*. Si cualquier intervalo de $(P, \leq)$ es finito se dice que $(P, \leq)$ es *localmente finito*.

Se dice que dos elementos $x, y \in P$ son *comparables* si $x \leq y$ o bien $y \leq x$; en otro caso, $x$ e $y$ son *incomparables*. Una *cadena* $C$ de $P$ es un subconjunto parcialmente ordenado inducido por el orden de $P$, en el cual no hay elementos incomparables; es decir,

$C \subseteq P$ es una cadena si $x \leq y$ o bien $y \leq x$ para todo $x, y \in C$.

Una *anticadena* es un subconjunto $A$ de un conjunto parcialmente ordenado $P$ tal que cualquier par de elementos distintos de $A$ son incomparables.

La *longitud* $l(C)$ de una cadena finita se define por $l(C) = |C| - 1$. La *longitud* o *rango* de un conjunto parcialmente ordenado y finito $P$ es $l(P) = \max\{l(C) : C \text{ es una cadena de } P\}$.

Otra clase particular de subconjuntos parcialmente ordenados inducidos por $P$, lo forman los llamados ideales del orden de P. Se dice que $I \subseteq P$ es un *ideal del orden* de $P$ cuando

$$\forall x \in I, \text{ si } y \leq x \Longrightarrow y \in I.$$

En particular si $x \in P$, el conjunto

$$\langle x \rangle = \{y \in P : y \leq x\},$$

se denomina *ideal principal* del orden generado por $x$.

Si $x, y \in P$, se dice que $y$ *cubre* a $x$ si $x < y$ y no hay ningún elemento $z \in P$ que cumpla la condición $x < z < y$. Esto es, $y$ cubre a $x$ si y sólo si

$$x < y \quad \text{y} \quad [x, y] = \{x, y\}.$$

Un elemento $x \in P$ se llama *átomo* si $x$ cubre al primer elemento de $P$. Un elemento *maximal* de un subconjunto $X$ de $P$ es un elemento $a$ tal que no existe $x \in X$ verificando $a < x$.

Se denomina *diagrama de Hasse* de un conjunto parcialmente ordenado y finito $P$ a un grafo cuyos vértices son los elementos de $P$, y las aristas vienen determinadas por la relación de cubrir.

Una *cota superior* de un subconjunto $X$ de un conjunto parcialmente ordenado $P$ es un elemento $a \in P$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in X$. Si además, para cada $y$ cota superior de $X$, se verifica $a \leq y$, entonces el elemento $a \in P$ es el *supremo* de $X$. Análogamente se definen los conceptos de *cota inferior* y de *ínfimo* del conjunto $X$. Un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado

$P$ para el que cualquier pareja de elementos de $P$ tiene supremo e ínfimo. Usualmente, se denota:

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \qquad a \vee b = \sup\{a, b\}.$$

Un retículo es *completo* si cualquier subconjunto suyo no vacío tiene supremo e ínfimo.

Una clase importante de retículos desde el punto de vista combinatorio son los *retículos distributivos.* Un retículo es distributivo si verifica

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Un tipo especial de retículo distributivo es el booleano; es decir, el retículo $2^N$ de todos los subconjuntos de un conjunto arbitrario $N$. Cualquier cadena es también un retículo distributivo.

A continuación se exponen algunos conceptos relativos al *álgebra de incidencia* de un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y a la *fórmula de inversión de Möbius.*

Sea $P$ un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y $\mathbb{K}$ un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Se dice que

$$f : P \times P \longrightarrow \mathbb{K}$$

es una *función de incidencia* de $P$ sobre $\mathbb{K}$ si $f(x, y) = 0$ cuando $x \not\leq y$. Esta definición implica que una función de incidencia es forzosamente nula cuando se evalúa sobre pares que no constituyen intervalos de $P$. Se denotará por $I(P, \mathbb{K})$ al conjunto formado por las funciones de incidencia de $P$ sobre $\mathbb{K}$. Este conjunto tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y producto por un escalar. Además, puede definirse una segunda operación interna denominada producto o *convolución* de la siguiente forma:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{\{z : x \leq z \leq y\}} f(x, z)\, g(z, y)$$

para cualquier $(x, y) \in P \times P$. Esta operación interna $*$ tiene como elemento neutro a la función $\delta$ de Kronecker

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El conjunto $I(P, \mathbb{K})$ junto con las operaciones suma, producto por escalar y convolución constituye un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ designada habitualmente por *álgebra de incidencia* $I(P, \mathbb{K})$.

Una función de $I(P, \mathbb{K})$ es la *función zeta* $\zeta$, definida por

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para el conjunto parcialmente ordenado y localmente finito de todos los subconjuntos de un conjunto finito $N$, fijado cualquier $S \in 2^N, S \neq \emptyset$, la función zeta daría lugar a la función

$$\zeta_S : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta_S(T) = \zeta(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que puede reconocerse como un *juego de unanimidad.* Esta forma de interpretar los juegos de unanimidad es utilizada por Faigle y Kern [25].

Dada $f \in I(P, \mathbb{K})$, la función inversa para la convolución existe si y sólo si $f(x, x) \neq 0$, para todo $x \in P$. Ello implica, que la función zeta $\zeta$ posee inversa a la que se denomina *función de Möbius* de $P$ y se simboliza por $\mu$. Su cálculo puede realizarse mediante las siguientes fórmulas recurrentes

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ -\sum_{\{z : x \leq z < y\}} \mu(x, z) & \text{si } x < y \text{ en } P. \end{cases}$$

Como resultado fundamental relacionado con la función de Möbius hay que resaltar la *fórmula de inversión de Möbius,* la cual establece que si $P$ es un conjunto parcialmente ordenado en donde cualquier ideal principal del orden es finito y si $f, g : P \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces para todo $x \in P$ :

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x)\, g(y).$$

Si $P$ es el álgebra booleana $2^N$, la función de Möbius de $P$ viene dada por

$$\mu(T, S) = (-1)^{|S|-|T|}.$$

De aquí, que la fórmula de inversión de Möbius para $2^N$ establezca lo siguiente: si $f, g : P \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) \Longleftrightarrow f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|}\, g(T).$$

## 1.4 Síntesis de contenidos

En el capítulo segundo, siguiendo la línea de Faigle ya comentada, se modela la cooperación parcial definiendo la función característica del juego sólo sobre las coaliciones factibles. La familia de coaliciones factibles no tendrá en principio ninguna estructura determinada, sólo se exigirá que la coalición formada por todos los jugadores y la coalición vacía sean factibles. Se considerará el espacio vectorial constituido por todos los juegos definidos sobre una familia de coaliciones factibles y se demostrará que el conjunto de juegos de unanimidad así como el de juegos de identidad, redefinidos en este modelo de cooperación, forman bases de dicho espacio vectorial.

En la segunda sección se definen distintos conceptos de solución para estos juegos como son el conjunto de imputaciones, el core, los conjuntos estables y el conjunto de negociación de Aumann y Maschler. Se establecen diferentes relaciones entre ellos, generalizandóse resultados conocidos para juegos cooperativos de utilidad transferible. Además, cuando la familia de coaliciones factibles es atómica, se introduce otro concepto de solución denominado *selectope* cuya definición se basa en los dividendos de Harsanyi; se determinan algunas relaciones entre este conjunto y el core observando que, a diferencia de lo que sucede para los juegos cooperativos $(N, v)$, el selectope no contiene al core. Por otro lado, se caracterizarán los juegos para los que el selectope es un subconjunto del core que serán los llamados juegos *casipositivos.*

En la tercera sección, se dota a la familia de coaliciones factibles de estructura de espacio de clausura y, en particular, de familia intersectante atómica. En el caso de que la familia de coaliciones factibles sea una familia intersectante, se prueba que el core siempre es un subconjunto del selectope.

En la última sección, con la idea de generalizar resultados relativos a los conjuntos estables, core y conjunto de negociación de Aumann y Maschler se introducen los juegos supermodulares. Así, se prueba que, si la familia de coaliciones factibles es una familia intersectante atómica, el juego es supermodular sobre esta familia y cumple una condición adicional, entonces el core es el único conjunto estable y, además, coincide con el conjunto de negociación.

En el tercer capítulo se introduce una clase especial de espacios de clausura, las denominadas geometrías convexas y, en la primera sección, se establecen algunas de sus propiedades y se definen los conceptos más relevantes. La familia $2^N$ de los subconjuntos del conjunto de todos los jugadores es una geometría convexa y, por tanto, los juegos cooperativos son un caso particular de los juegos definidos sobre estas familias de conjuntos.

En la segunda sección, se incluye un nuevo concepto de solución para juegos definidos sobre geometrías convexas: el conjunto de Weber. Se estudia este concepto con la intención de establecer su relación con el core. En un juego cooperativo, el conjunto de Weber siempre contiene al core; sin embargo, esto no es cierto si la geometría convexa es distinta de $2^N$.

En la relación conjunto de Weber–core jugarán un papel importante los juegos casisupermodulares, los cuales serán definidos en la tercera sección. Se prueba que los juegos casisupermodulares son los únicos para los que su conjunto de Weber es un subconjunto del core, estableciendo así una caracterización de dichos juegos.

Finalmente, en la última parte del capítulo, se prueba que, para todo juego sobre una geometría convexa atómica, el conjunto de Weber es un subconjunto del selectope, estableciendo las relaciones existentes entre sus vértices.

En el cuarto capítulo, se extiende el trabajo de Weber [67] sobre valores probabilísticos a juegos definidos sobre geometrías convexas (véase Bilbao, Lebrón y Jiménez [10]). La primera parte de este capítulo se centra en estudiar valores individuales, mediante los que cada jugador evalúa sus posibilidades de participar en diferentes juegos. Se introducen los valores probabilísticos y se observan con detalle los axiomas que caracterizan a tales valores. Estos axiomas se van introduciendo secuencialmente observando cómo repercuten en la expresión del valor probabilístico.

En la segunda parte del capítulo se estudian los valores de grupo, es decir, funciones que asocian a cada juego un vector cuyas componentes representan el valor que tiene cada jugador en la participación del juego. Se prueba la relación existente entre los valores de grupo eficientes y aquellos vectores cuyas componentes sean valores probabilísticos. Se introducen los valores de orden compatible, se estudia su relación con los anteriores y se llega a la conclusión de que el conjunto de preimputaciones asociado a un juego por la familia de valores de orden compatible es su conjunto de Weber. Finalmente, se obtiene el valor de Shapley usando los axiomas introducidos a lo largo del capítulo.

En el capítulo quinto, se estudiará una clase especial de juegos que son los denominados juegos simples. Estos juegos fueron introducidos por von Neumann y Morgenstern (1944) y permiten modelar distintas situaciones económicas, sociales y políticas. En este capítulo, se extienden resultados ya conocidos en juegos con cooperación total, referentes a los conceptos de solución para esta clase de juegos. En concreto, se dan caracterizaciones del conjunto de imputaciones, el core y el conjunto de Weber para ciertos tipos de familias de coaliciones factibles. Se prueba que todo juego simple sobre una familia atómica tiene al menos un conjunto estable y se determinan cuáles son los juegos simples sobre geometrías convexas atómicas que tiene como único conjunto estable al core.

En la última parte del capítulo, se estudian varias nociones de conjuntos de negociación para juegos simples y se establecen las relaciones entre éstos, el core y el conjunto de Weber.

En el apéndice, se presentan dos algoritmos, implementados con el programa de cálculo simbólico MATHEMATICA [72], en los que se computan los vectores del conjunto de Weber y del selectope para juegos definidos sobre familias de coaliciones factibles.

# Capítulo 2

# Juegos sobre familias de conjuntos

En el capítulo primero se ha justificado la necesidad de estudiar modelos más generales de juegos cooperativos en los que haya restricciones en la cooperación entre los jugadores, ya que algunas aplicaciones requieren establecer posibilidades intermedias entre la cooperación total y la no cooperación.

En el modelo que aquí se presenta, se estudian situaciones en las que la comunicación entre los jugadores está representada por una familia $\mathcal{L}$ de subconjuntos del conjunto de jugadores $N$, a cuyos elementos se les denominará *coaliciones factibles.* Una forma de modelar la cooperación parcial, ya comentada en la introducción, ha sido mediante la modificación de la función característica del juego $(N, v)$ dando lugar a un nuevo juego llamado, en Bilbao [7] y López [40], *juego restringido por el sistema de coaliciones factibles.* Este modo de interpretar la cooperación parcial es una posibilidad frente a otras varias. Una alternativa, sugerida por Faigle en *Cores of Games with Restricted Cooperation* (1989) es considerar que la función característica del juego con cooperación parcial sólo debe ser definida para las coaliciones factibles. En este capítulo y en los sucesivos, se seguirá el modelo de Faigle y se observará cómo la cooperación total surge, entonces, como un caso particular.

Aunque sería deseable que el conjunto de coaliciones factibles no tuviese ningún condicionante, aquí se exigirá que el conjunto formado por todos los jugadores $N$ y el conjunto vacío sean coaliciones factibles. Además, en algunos casos, la familia de coaliciones factibles tendrá una estructura determinada, dependiendo ésta de las reglas de cooperación que se establezcan, pero en todos los casos se generalizarán resultados conocidos para un juego cooperativo $(N, v)$.

## 2.1 Juegos sobre coaliciones factibles

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y admitiendo que existen situaciones en las que hay restricciones en la cooperación entre los jugadores y que, por tanto, puede darse el hecho de que no todas las coaliciones sean posibles, es lógico pensar que sólo van a tener un valor aquellas coaliciones que puedan formarse en el juego. Por tanto, se definirán los juegos mediante funciones que asignen valores sólo a las coaliciones factibles.

**Definición 2.1** *Un juego es una terna $(N, v, \mathcal{L})$, donde $N$ es un conjunto finito, $\mathcal{L}$ una familia de subconjuntos de $N$ tal que $\emptyset, N \in \mathcal{L}$, y $v$ es una función $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(\emptyset) = 0$.*

En toda esta memoria se considera $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sus elementos se denominan *jugadores* y los de la familia $\mathcal{L}$ *coaliciones factibles.* Si $\{i\} \in \mathcal{L}$ para todo $i \in N$, la familia $\mathcal{L}$ se denomina *atómica.* Al igual que para los juegos cooperativos de utilidad transferible $(N, v)$, se identificará el juego $(N, v, \mathcal{L})$ con la función $v$ y se dirá que $v$ es un juego definido sobre la familia $\mathcal{L}$. Nótese que la definición de juego cooperativo es un caso particular de ésta, en la que se considera como $\mathcal{L}$ el conjunto $2^N$ de los subconjuntos de $N$.

Se denotará por $\Gamma(\mathcal{L})$ el conjunto de todos los juegos definidos sobre la familia $\mathcal{L}$ de subconjuntos de $N$, que siempre incluye entre sus elementos a los conjuntos $\emptyset$ y $N$. En el conjunto $\Gamma(\mathcal{L})$ se introducen dos operaciones

$$\begin{array}{rrl} + : & \Gamma(\mathcal{L}) \times \Gamma(\mathcal{L}), & (v, w) \longmapsto v + w \\ \cdot : & \mathbb{R} \times \Gamma(\mathcal{L}), & (\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot w \end{array}$$

definidas, para todo $S \in \mathcal{L}$, por

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S), \qquad (\alpha \cdot v)(S) = \alpha \cdot v(S).$$

El conjunto $\Gamma(\mathcal{L})$ dotado de esta suma y producto por escalar es un espacio vectorial. Dentro de este conjunto existen dos colecciones especiales de juegos con valores en $\{0, 1\}$, los *juegos de unanimidad* y los *juegos de identidad* que se definen a continuación.

Para cualquier coalición no vacía $T \in \mathcal{L}$, el correspondiente *juego de unanimidad*, que se representa por $\zeta_T$, está definido como $\zeta_T : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\zeta_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada coalición $S \in \mathcal{L}$.

El *juego de identidad* $\delta_T : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$\delta_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T, \\ 0 & \text{si } S \neq T, \end{cases}$$

para cada coalición $S \in \mathcal{L}$.

La relevancia de estas dos colecciones de juegos se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

**Proposición 2.2** *La dimensión del espacio vectorial* $\Gamma(\mathcal{L})$ *es* $|\mathcal{L}| - 1$, *y las colecciones*

$$\{\zeta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\} \quad y \quad \{\delta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$$

*son dos bases de* $\Gamma(\mathcal{L})$.

**Demostración:** Es evidente que la colección $\{\delta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$ es una base de $\Gamma(\mathcal{L})$ ya que cualquier $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ puede ser escrito como

$$v = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} v(T)\, \delta_T,$$

y además, si $\sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} \alpha_T \delta_T = \theta$, donde $\theta$ denota al juego nulo ($\theta(S) = 0$, para toda $S \in \mathcal{L}$), es inmediato que $\alpha_T = 0$, para toda coalición no vacía $T \in \mathcal{L}$.

Para ver que el conjunto $\{\zeta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$ es una base de $\Gamma(\mathcal{L})$ es suficiente probar que es un conjunto linealmente independiente. Si se considera $\sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} \alpha_T \zeta_T = \theta$ y se aplica dicha combinación lineal nula a las distintas coaliciones de $\mathcal{L}$, se obtiene un sistema lineal homogéneo que tiene a la solución trivial como única solución. □

Como consecuencia de esta proposición, cualquier juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es combinación lineal de los juegos de unanimidad. Los coeficientes de esta combinación lineal pueden calcularse utilizando la función de Möbius. En efecto, supóngase $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ tal que

$$v = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} \alpha_T \zeta_T.$$

Para toda coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$, se tendrá

$$v(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset, T \subseteq S\}} \alpha_T.$$

Al ser $(\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$ un conjunto parcialmente ordenado finito, y considerar $v : \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{R}$ y la función $f : \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(T) = \alpha_T$, se puede aplicar la fórmula de inversión de Möbius (ver pág. 21), obteniendo

$$\alpha_S = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset, T \subseteq S\}} \mu(T, S)\, v(T).$$

□

## 2.2 Conceptos de solución

Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, uno de los problemas más estudiados en la teoría de juegos cooperativos ha sido cómo repartir la ganancia $v(N)$ entre todos los jugadores que participan en el juego $v$ cuando éstos deciden cooperar y formar la gran coalición $N$.

En esta sección, se generalizan algunos conceptos de solución para juegos definidos sobre una familia $\mathcal{L}$, entendiendo como concepto de solución cualquier subconjunto de vectores eficientes en $\mathbb{R}^n$; esto es, cualquier subconjunto del conjunto de *preimputaciones*. El conjunto de *preimputaciones* de un juego $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, que se denotará $I^*(\mathcal{L}, v)$, es el conjunto

$$I^*(\mathcal{L}, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

Las *imputaciones* son las preimputaciones que satisfacen el principio de individualidad racional, para aquellos jugadores que puedan participar en el juego $v$ formando una coalición unitaria; es decir,

$$I(\mathcal{L}, v) = \{ x \in I^*(\mathcal{L}, v) \ : \ x_i \geq v(\{i\}) \ \text{ si } \ \{i\} \in \mathcal{L} \}.$$

Por definición se tiene que $I(\mathcal{L}, v) \subseteq I^*(\mathcal{L}, v)$, pero aunque $I^*(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$, el conjunto $I(\mathcal{L}, v)$ puede ser vacío. Sin embargo, se puede observar que si la familia $\mathcal{L}$ no contiene ninguna coalición unitaria, entonces $I(\mathcal{L}, v) = I^*(\mathcal{L}, v)$, con lo cual $I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$. Por otro lado, si la familia $\mathcal{L}$ contiene al menos una coalición unitaria, se pueden dar los siguientes casos:

1. Si $\mathcal{L}$ no es atómica (es decir, si existe $j \in N$ tal que $\{j\} \notin \mathcal{L}$), entonces $I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$, ya que se puede definir el vector $x = (x_i)_{i \in N}$ de la siguiente forma
$$x_i = \begin{cases} v(\{i\}) & \text{si } \{i\} \in \mathcal{L}, \\ v(N) - \sum\limits_{\{k\} \in \mathcal{L}} v(\{k\}) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que cumple las condiciones que permiten afirmar que $x \in I(\mathcal{L}, v)$.

2. Si, para todo $i \in N$, se tiene que $\{i\} \in \mathcal{L}$, es decir, $\mathcal{L}$ es atómica, entonces

$$I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

A diferencia del conjunto de imputaciones de un juego cooperativo $v$, el conjunto de imputaciones de un juego sobre una familia $\mathcal{L}$ puede ser o no acotado, dependiendo de la familia $\mathcal{L}$. Obsérvese que el conjunto $I(\mathcal{L}, v)$ viene determinado por un número finito de desigualdades y por tanto constituye un poliedro. La teoría de poliedros (Schrijver [61]) proporciona algunas definiciones y resultados útiles para establecer una condición suficiente sobre la familia $\mathcal{L}$ para que el conjunto de imputaciones sea acotado. Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama un *poliedro* si existe una matriz $A$ y un vector columna $b$ tal que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

El poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ está acotado si y sólo si

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\} = \{0\}.$$

Además, un poliedro no vacío $P$ es acotado si, y sólo si, es la envoltura convexa de un número finito de vectores; es decir, si existen $x_1, \ldots, x_t$ tal que $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_t\}$.

**Proposición 2.3** *Dado $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, son equivalentes:*

*(a) La familia $\mathcal{L}$ es atómica.*

*(b) El conjunto $I(\mathcal{L}, v)$ está acotado.*

**Demostración:** Al ser $I(\mathcal{L}, v)$ acotado si y sólo si

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i \in N} x_i = 0, \ x_i \geq 0, \text{ para todo } \{i\} \in \mathcal{L} \right\} = \{0\},$$

es evidente que, para ello, es condición necesaria y suficiente que la familia $\mathcal{L}$ sea atómica. □

De la definición de imputación es inmediato deducir que cuando la familia $\mathcal{L}$ es atómica y $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$, el conjunto de imputaciones se reduce a una única distribución.

**Proposición 2.4** *Dado $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, donde la familia $\mathcal{L}$ es atómica, se verifica $I(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))\}$ si y sólo si $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$.*

Dado un juego cooperativo $(N, v)$, uno de los conceptos de solución más estudiado ha sido el *core*. En este contexto de juegos con cooperación parcial, es natural considerar en la definición del core sólo las coaliciones factibles en la familia $\mathcal{L}$.

**Definición 2.5** *Dado $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, el core del juego $v$ es el conjunto*

$$Core(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x(N) = v(N), \ x(S) \geq v(S), \ \ \textit{para toda } S \in \mathcal{L}\},$$

*donde $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ para cada $S \in \mathcal{L}$, $x(\emptyset) = 0$.*

Obviamente, todos los vectores del core son imputaciones y así, el core puede ser un conjunto vacío. Si $\mathcal{L}$ es atómica, entonces el conjunto de imputaciones $I(\mathcal{L}, v)$ es acotado; luego, es inmediata la siguiente proposición.

**Proposición 2.6** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Si la familia $\mathcal{L}$ es atómica, entonces el poliedro $Core(\mathcal{L}, v)$ está acotado.*

En general, el recíproco de esta proposición no es cierto. Basta considerar $N = \{1,2,3\}$, la familia $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ y el juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ definido como $v(S) = |S| - 1$, para toda coalición no vacía. En este caso,

$$Core(\mathcal{L}, v) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 1,\ x_3 \leq 2\right\}$$

es un conjunto acotado y, sin embargo, la familia $\mathcal{L}$ no es atómica.

Para poder asegurar que se verifica el recíproco, hay que establecer una condición adicional sobre la familia $\mathcal{L}$, la cual se introducirá en la sección siguiente.

Cuando el conjunto de imputaciones es no vacío, puede definirse un nuevo concepto de solución; los denominados *conjuntos estables.* Para ello, se introduce previamente la noción de *dominancia* entre imputaciones.

**Definición 2.7** *Sean $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, $x, y \in I(\mathcal{L}, v)$. La imputación $y$ domina a la imputación $x$, $y \operatorname{dom} x$, si existe una coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$ tal que*

$$y(S) \leq v(S) \quad \textit{y, además,} \quad y_i > x_i \ \textit{ para todo } i \in S.$$

Nótese que estas condiciones excluyen la dominancia a través de la gran coalición $N$ y de aquellas coaliciones unitarias de $\mathcal{L}$. Análogamente, se define la relación de dominancia para preimputaciones.

**Definición 2.8** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Un conjunto $E \subseteq I(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable para el juego $v$ cuando satisface las dos condiciones siguientes:*

*(1) Estabilidad interna: dados cualesquiera $x, y \in E$, $x$ no domina a $y$.*

*(2) Estabilidad externa: si $x \in I(\mathcal{L}, v) \setminus E$, entonces existe $y \in E$ tal que $y \operatorname{dom} x$.*

El siguiente resultado caracteriza al core como el conjunto de todas las preimputaciones que no son dominadas por ninguna otra preimputación.

**Proposición 2.9** *Dado $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se verifica*

$$Core(\mathcal{L}, v) = \{x \in I^*(\mathcal{L}, v) \ : \ \textit{no existe} \ y \in I^*(\mathcal{L}, v) \ \textit{tal que} \ \ y \operatorname{dom} x\}$$

**Demostración:** Sea $x \in Core(\mathcal{L}, v)$ y sea $y \in I^*(\mathcal{L}, v)$ tal que $y \operatorname{dom} x$. Entonces, existe una coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$, que verifica $x(S) < y(S) \leq v(S)$; ahora bien, esto es una contradicción con el hecho de que $x \in Core(\mathcal{L}, v)$.

Para probar la otra inclusión, supóngase que $x \in I^*(\mathcal{L}, v) \setminus Core(\mathcal{L}, v)$. Entonces, existe una coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$, $S \neq N$ tal que $x(S) < v(S)$. Si se define el vector $y \in \mathbb{R}^n$ por

$$y_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{1}{|S|}\left[v(S) - x(S)\right] & \text{si } i \in S, \\ \dfrac{1}{|N \setminus S|}\left[v(N) - v(S)\right] & \text{si } i \notin S, \end{cases}$$

resulta que, este vector, satisface $y(N) = v(N)$, $\ y(S) = v(S)$ y, además, $y_i > x_i$ para todo $i \in S$. De aquí $y \operatorname{dom} x$. □

A continuación, se analiza la dominancia entre imputaciones y se estudia su relación con el core. Además, se probará que si el core de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es estable, entonces es el único conjunto estable para el juego. En el caso $\mathcal{L} = 2^N$, estos resultados son conocidos (véase Driessen [20]). La siguiente proposición es una extensión directa y, por tanto, su demostración se omite.

**Proposición 2.10** *Dado $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se verifica:*

$$Core(\mathcal{L}, v) \subseteq \{x \in I(\mathcal{L}, v) \ : \ \textit{no existe} \ y \in I(\mathcal{L}, v) \ \textit{tal que} \ \ y \operatorname{dom} x\}.$$

**Teorema 2.11** *Si $E$ es un conjunto estable para $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, entonces se verifican:*

*(1) $Core(\mathcal{L}, v) \subseteq E$.*

*(2) Si $Core(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable, entonces $E = Core(\mathcal{L}, v)$.*

**Demostración:** Sea $E$ un conjunto estable para el juego $v$.

(1) Supóngase que existe $x \in Core(\mathcal{L}, v) \setminus E$. Por ser $E$ un conjunto estable, existe $y \in E$ tal que $y \operatorname{dom} x$, pero esto contradice la Proposición 2.10.

(2) Teniendo en cuenta el apartado anterior, es sufiente demostrar la inclusión contraria. Supóngase que existe $x \in E \setminus Core(\mathcal{L}, v)$. Como $Core(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable, existe $y \in Core(\mathcal{L}, v)$ tal que $y \operatorname{dom} x$. Por tanto $\{x, y\} \subseteq E$ y se cumple que $y \operatorname{dom} x$, lo cual es una contradicción con la estabilidad de $E$. □

Otro concepto de solución es el que se denominará *conjunto de negociación de Aumann y Maschler.* Su definición se basa en las *objeciones* y *contraobjeciones* de unos jugadores contra otros, y al igual que el core y los conjuntos estables se introducen cuando el conjunto de imputaciones es no vacío.

Considérese la familia $\mathcal{L}$ de coaliciones factibles, y sean $i, j \in N$ con $i \neq j$. Se denotará por $\Lambda_{ij}$ el conjunto de todas las coaliciones factibles de $\mathcal{L}$ que contienen al jugador $i$ pero no al jugador $j$; es decir,

$$\Lambda_{ij} = \{S \in \mathcal{L} : i \in S,\ j \notin S\}.$$

Obsérvese que el conjunto $\Lambda_{ij}$ puede ser vacío. Una condición suficiente para que no lo sea es que la familia de coaliciones factibles $\mathcal{L}$ sea atómica.

**Definición 2.12** *Sean $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ y $x \in I(\mathcal{L}, v)$. Una objeción del jugador $i$ contra el jugador $j$ con respecto a la imputación $x$ en el juego $v$ es un par*

*$(y, S)$, donde $S \in \Lambda_{ij}$ y el vector $y = (y_k)_{k \in S}$ satisface*

$$y(S) = v\,(S) \quad \text{y, además,} \quad y_k > x_k \;\; \text{para cada } k \in S.$$

*Una contraobjección de $j$ contra el par $(y, S)$ es un par $(z, T)$, donde $T \in \Lambda_{ji}$ y $z = (z_k)_{k \in T}$ satisfacen*

$$z(T) = v\,(T) \quad \text{y, además,} \quad \begin{cases} z_k \geq x_k & \text{para } k \in T \setminus S, \\ z_k \geq y_k & \text{para } k \in T \cap S. \end{cases}$$

*Una objeción se dice justificada si no existe contraobjeción.*

En el caso de que $\Lambda_{ij}$ fuese vacío para algunos $i, j \in N$, esto significaría que el jugador $i$ no podría hacer ninguna objeción ni contraobjeción contra el jugador $j$ con respecto a una imputación $x$. En esta circunstancia, cualquier objeción del jugador $j$ contra $i$ (si la hubiera) estaría justificada.

**Definición 2.13** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Una imputación $x \in I(\mathcal{L}, v)$ se dice que pertenece al conjunto de negociación $\mathcal{B}(\mathcal{L}, v)$ si para cualquier objeción de un jugador contra otro con respecto a $x$, existe una contraobjeción; es decir,*

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}, v) = \{x \in I(\mathcal{L}, v) \;:\; \text{no existe objeción justificada respecto a } x\}.$$

Nótese que $Core\,(\mathcal{L}, v) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{L}, v)$ ya que no puede haber objeciones con respecto a ningún elemento del core.

Como ya se ha indicado antes, todos los conceptos de solución anteriores, se definen sobre el conjunto de imputaciones y por tanto requieren que éste sea no vacío. Se introduce ahora un nuevo concepto de solución, el *selectope*, para el cual no es necesario que $I(\mathcal{L}, v)$ sea no vacío. Este concepto de solución fue introducido por Hammer, Peleg y Sorensen [31] e investigado por Derks, Haller y Peters [19] en el caso de juegos cooperativos de utilidad transferible. Aquí, se extenderá este concepto para juegos $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, y se considerará que la familia $\mathcal{L}$ de coaliciones factibles es atómica. La definición del selectope se basa en los dividendos de Harsanyi [32].

Se definen recursivamente, para cada $S \in \mathcal{L}$, los *dividendos del juego* $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ de la siguiente forma

$$\triangle_v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \emptyset, \\ v(S) - \sum\limits_{\{T \in \mathcal{L}, T \subset S\}} \triangle_v(T) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ y $S \in \mathcal{L}$, se verifica

$$v(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq S\}} \triangle_v(T).$$

De aquí se deduce que cada $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ se puede escribir de manera única como

$$v = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} \triangle_v(T)\, \zeta_T.$$

**Definición 2.14** *Un selector sobre una familia atómica $\mathcal{L}$ es una aplicación $\alpha : \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow N$ tal que $\alpha(S) \in S$ para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$.*

Se denota por $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ el conjunto de todos los selectores sobre $\mathcal{L}$. Nótese que el número de selectores sobre $\mathcal{L}$ es igual a $\prod_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} |T|$.

**Definición 2.15** *La selección correspondiente al selector $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$ es el vector $m^{\alpha}(v) \in \mathbb{R}^n$ definido por*

$$m_i^{\alpha}(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : \alpha(S) = i\}} \triangle_v(S),$$

*para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ y para todo $i \in N$. El selectope para un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ se define como*

$$Sel(\mathcal{L}, v) = conv\{m^{\alpha}(v) \in \mathbb{R}^n \ : \ \alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})\}.$$

Es evidente que, para cada $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, y para cualquier $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$, se verifica que $m^{\alpha}(v) \in I^{*}(\mathcal{L}, v)$ y, por tanto,

$$Sel(\mathcal{L}, v) \subseteq I^{*}(\mathcal{L}, v).$$

Al final de este trabajo se incluye un apéndice en el que se presenta un algoritmo, implementado con el programa de cálculo simbólico MATHEMATICA donde se computan los posibles selectores sobre una familia $\mathcal{L}$ de coaliciones factibles y las selecciones correspondientes para un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.

**Ejemplo 2.16** *Sea $N = \{1,2,3\}$ y considérese la siguiente familia*

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}.$$

*Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ el juego definido por*

$$v(S) = \begin{cases} |S| & si\ |S| \geq 2, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

*Hay 6 posibles selectores y las correspondientes selecciones para este juego están dadas en la siguiente tabla en la que no se reflejan las coaliciones unitarias porque $\triangle_v(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$.*

| $\alpha$ | $\{1,2\}$ | $\{1,2,3\}$ | $m_1^{\alpha}(v)$ | $m_2^{\alpha}(v)$ | $m_3^{\alpha}(v)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 0 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 5 | 2 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| 6 | 2 | 3 | 0 | 2 | 1 |

TABLA 2.1

*En consecuencia, se tiene*

$$Sel(\mathcal{L}, v) = conv\{(3,0,0), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (0,3,0), (0,2,1)\}.$$

*Además, nótese que, en relación con el core, se verifica*

$$Core\,(\mathcal{L}, v) = Sel\,(\mathcal{L}, v)$$

*como muestra la siguiente figura.*

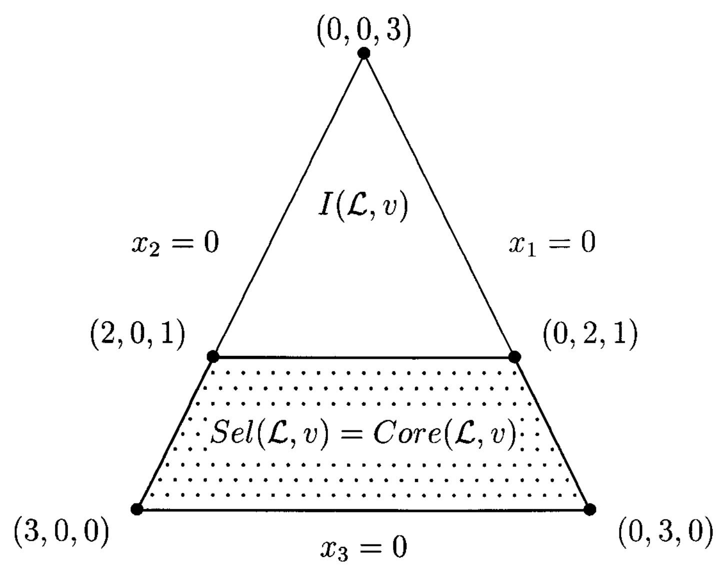


FIGURA 2.1

La inclusión $Core\,(\mathcal{L}, v) \subseteq Sel\,(\mathcal{L}, v)$ se verifica siempre que $\mathcal{L} = 2^N$ (Hammer, Peleg y Sorensen, [31]). Sin embargo, este resultado no es cierto, en general, si la familia de coaliciones factibles $\mathcal{L}$ es distinta de $2^N$. La otra inclusión, $Sel\,(\mathcal{L}, v) \subseteq Core\,(\mathcal{L}, v)$, es debida a una propiedad de la función característica del juego $v$. Para comprobar que estas dos inclusiones no son ciertas en general, basta considerar el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.17** *Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y considérese la siguiente familia*

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

*Se define el juego $v \in \Gamma\,(\mathcal{L})$, para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$, por*

$$v\,(S) = \begin{cases} -1 & si\ |S| = 1, \\ 2 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

*Si se calculan los dividendos del juego, se obtiene*

$$\triangle_v(S) = \begin{cases} -1 & si \ |S| = 1, \\ 4 & si \ |S| = 2, \\ -2 & si \ \ S = N. \end{cases}$$

*Existen 16 posibles selectores sobre $\mathcal{L}$ y las distintas selecciones están dadas en la siguiente tabla:*

| $\alpha$ | $\{1,2\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3,4\}$ | $m_1^\alpha(v)$ | $m_2^\alpha(v)$ | $m_3^\alpha(v)$ | $m_4^\alpha(v)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | $-1$ | $-1$ |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | $-3$ | $-1$ |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 3 | 3 | $-1$ | $-3$ |
| 5 | 1 | 3 | 1 | 1 | $-1$ | 3 | $-1$ |
| 6 | 1 | 3 | 2 | 3 | $-3$ | 3 | $-1$ |
| 7 | 1 | 3 | 3 | 3 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| 8 | 1 | 3 | 4 | 3 | $-1$ | 3 | $-3$ |
| 9 | 2 | 2 | 1 | $-3$ | 7 | $-1$ | $-1$ |
| 10 | 2 | 2 | 2 | $-1$ | 5 | $-1$ | $-1$ |
| 11 | 2 | 2 | 3 | $-1$ | 7 | $-3$ | $-1$ |
| 12 | 2 | 2 | 4 | $-1$ | 7 | $-1$ | $-3$ |
| 13 | 2 | 3 | 1 | $-3$ | 3 | 3 | $-1$ |
| 14 | 2 | 3 | 2 | $-1$ | 1 | 3 | $-1$ |
| 15 | 2 | 3 | 3 | $-1$ | 3 | 1 | $-1$ |
| 16 | 2 | 3 | 4 | $-1$ | $-3$ | 3 | $-3$ |

TABLA 2.2

*Por otro lado, $Core(\mathcal{L}, v)$ viene dado por los vectores de $\mathbb{R}^4$ tales que*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2, \\ x_1 + x_2 & \geq & 2, \\ x_2 + x_3 & \geq & 2, \end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq -1.$$

*En este ejemplo, se verifica que*

$$Sel\,(\mathcal{L},v) \not\subseteq Core\,(\mathcal{L},v) \quad y \quad Core\,(\mathcal{L},v) \not\subseteq Sel\,(\mathcal{L},v)\,,$$

*ya que el vector* $(3,3,-3,-1) \in Sel\,(\mathcal{L},v) \setminus Core\,(\mathcal{L},v)$ *pues* $x_3 < -1$ *y, por otra parte, el vector* $(0,2,0,0) \in Core\,(\mathcal{L},v) \setminus Sel\,(\mathcal{L},v)$ *porque no se puede expresar como combinación convexa de los vectores* $m^{\alpha}(v)$*, con* $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$*.*

Como se ha indicado antes, la inclusión $Sel\,(\mathcal{L},v) \subseteq Core\,(\mathcal{L},v)$ caracteriza una clase de juegos denominados *casipositivos.*

**Definición 2.18** *Un juego* $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ *se dice casipositivo si todos los dividendos de las coaliciones factibles no unitarias son no negativos; es decir,*

$$\triangle_v(S) \geq 0, \quad \text{para toda } S \in \mathcal{L} \text{ con } |S| \geq 2.$$

**Teorema 2.19** *Dado* $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ *un juego sobre una familia atómica, son equivalentes:*

*(a)* $Sel\,(\mathcal{L},v) \subseteq Core\,(\mathcal{L},v)$*.*

*(b)* $Sel\,(\mathcal{L},v) \subseteq I\,(\mathcal{L},v)$*.*

*(c) El juego* $v$ *es casipositivo.*

**Demostración:** Es evidente que $(a)$ implica $(b)$, ya que por definición, $Core\,(\mathcal{L},v) \subseteq I\,(\mathcal{L},v)$.

La relación $(b)$ obliga a que el juego $v$ sea casipositivo pues, si existiera una coalición $S \in \mathcal{L}$ con $|S| \geq 2$ y $\triangle_v(S) < 0$, se podría considerar $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$ tal que $\alpha(S) = i$ y $\alpha(T) \neq i$ para todo $T \in \mathcal{L}$, $T \neq S, \{i\}$. Entonces $m_i^{\alpha}(v) = v(\{i\}) + \triangle_v(S) < v(\{i\})$ y esto está en contradicción con $(b)$.

Finalmente, si $v$ es un juego casipositivo, para cada selector $\alpha$, se tiene que $m^{\alpha}(v) \in Core(\mathcal{L}, v)$. En efecto, para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$, se verifica

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} m_i^{\alpha}(v) &= \sum_{i\in S}\ \sum_{\{T\in\mathcal{L}:\alpha(T)=i\}} \triangle_v(T)\\ &\geq \sum_{\{T\in\mathcal{L},T\subseteq S\}} \triangle_v(T)\\ &= v(S),\end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de que todos los dividendos del juego $v$, para las coaliciones no unitarias, son no negativos. □

Nótese que, de este teorema, se deduce que los juegos casipositivos definidos sobre familias atómicas tienen core no vacío.

Como se ha visto en el ejemplo 2.17, la inclusión $Core(\mathcal{L}, v) \subseteq Sel(\mathcal{L}, v)$ no se verifica en general si $\mathcal{L}$ es una familia atómica distinta de $2^N$. Este resultado sí es cierto siempre que se le exija a la familia $\mathcal{L}$ algunas condiciones adicionales.

## 2.3 Juegos sobre espacios de clausura

En lo que sigue, se supondrá que se ha establecido sobre la familia de coaliciones factibles $\mathcal{L}$ una regla fundamental de cooperación: cuando dos coaliciones sean factibles, también su intersección lo será. Este requisito que se impone a la cooperación entre los jugadores tiene una interpretación que hace útil el estudio que se va a realizar en muchos casos reales. Se supone que los jugadores encuentran algún beneficio cuando todos se unen, pero además es lógico pensar que las posibles coaliciones entre ellos se hacen atendiendo a intereses comunes (comparten ciertas ideas, son de la misma nacionalidad, pertenecen a una cierta empresa) y de ahí que aquellos jugadores comunes a dos coaliciones formen también una coalición para defender en común un conjunto, presumiblemente, más amplio de intereses. Esta regla de cooperación es la que dota a la familia $\mathcal{L}$ de una determinada estructura, que se introduce a continuación.

**Definición 2.20** *Un espacio de clausura en $N$ es una familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ que verifica las siguientes propiedades:*

*(1)* $\emptyset \in \mathcal{L}$ *y* $N \in \mathcal{L}$,

*(2) Si* $A \in \mathcal{L}$ *y* $B \in \mathcal{L}$, *entonces* $A \cap B \in \mathcal{L}$.

Los elementos de un espacio de clausura se denominan *cerrados*.

En lo que sigue, se supondrá que todo espacio de clausura lo es en el conjunto de jugadores $N$.

Cuando una familia $\mathcal{L}$ es un espacio de clausura, a cada conjunto $A \in 2^N$ se le puede asociar el conjunto $\overline{A} \in \mathcal{L}$, definido por

$$\overline{A} = \bigcap \{S \in \mathcal{L} : A \subseteq S\},$$

de modo que se verifica

(C1) $A \subseteq \overline{A}$,

(C2) $\overline{A} = A$ si, y sólo si, $A \in \mathcal{L}$,

(C3) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Obsérvese que esto permite indicar que la aplicación $- : 2^N \longrightarrow 2^N$ es un operador clausura [21] con la propiedad adicional $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Recíprocamente, a partir de cualquier operador clausura como el anterior, se puede construir el espacio de clausura $\mathcal{L}$ determinado por los cerrados del operador.

Teniendo en cuenta este razonamiento, es inmediato comprobar que $(\mathcal{L}, \subseteq)$ es un retículo completo. En efecto, para todo $A, B \in \mathcal{L}$, se tiene

$$\begin{aligned} A \wedge B &= \inf\{A, B\} = A \cap B, \\ A \vee B &= \sup\{A, B\} = \overline{A \cup B}. \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de espacios de clausura en $N$ son los siguientes:

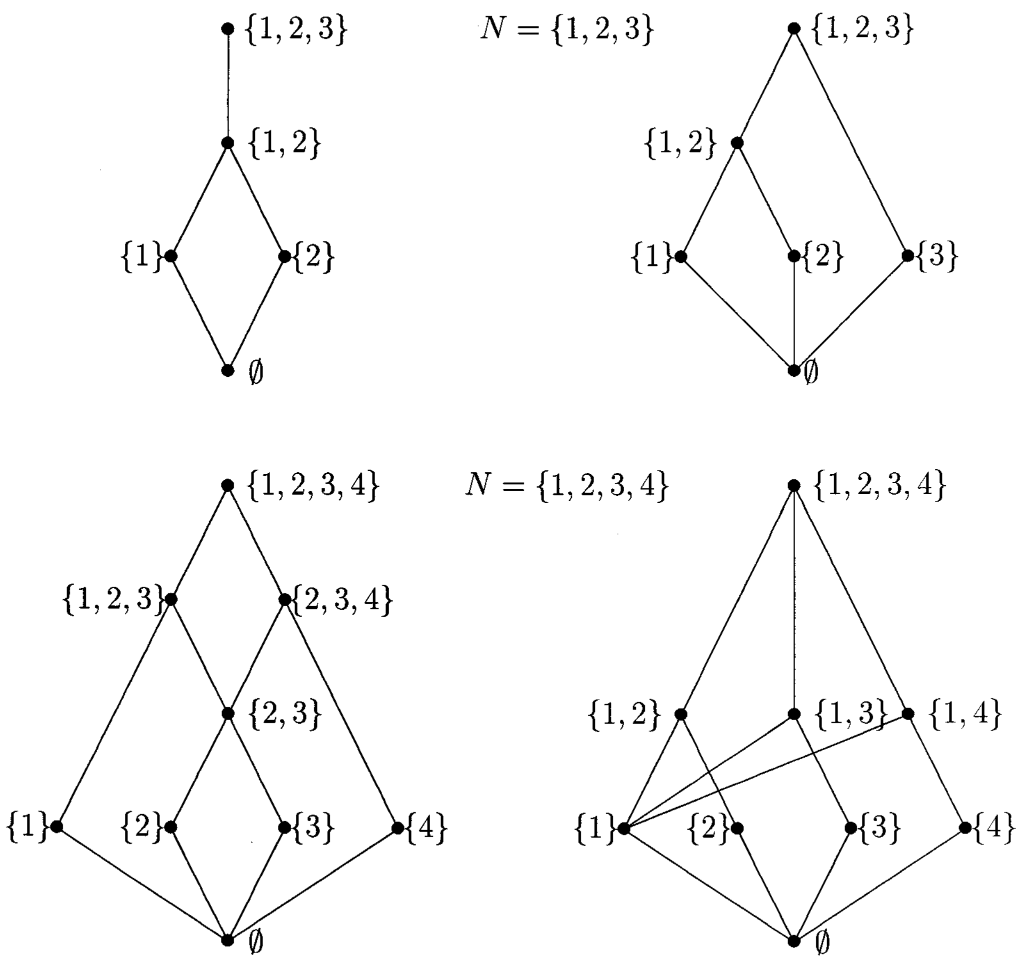


FIGURA 2.2

Uno de los objetivos por el que se introducen condiciones adicionales sobre la familia de coaliciones factibles es el de establecer hipótesis suficientes sobre $\mathcal{L}$ para que la inclusión $Core\,(\mathcal{L}, v) \subseteq Sel\,(\mathcal{L}, v)$ sea cierta. Nótese que el selectope de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ está definido sobre familias atómicas y es siempre un conjunto acotado. Para que tenga sentido plantearse la inclusión anterior, $Core\,(\mathcal{L}, v)$ también ha de ser un poliedro acotado y, como ya se ha indicado, el core de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es acotado si la familia $\mathcal{L}$ es atómica. Aunque no tenga relevancia en la relación entre el core y el selectope, se puede observar que, cuando $\mathcal{L}$ es un espacio de clausura, esta condición suficiente se hace también necesaria.

**Proposición 2.21** *Sean $\mathcal{L}$ un espacio de clausura y $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego, tal que $Core\,(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$. Son equivalentes:*

*(a) El core del juego $v$ es un poliedro acotado.*

*(b) La familia $\mathcal{L}$ es atómica.*

**Demostración:** La Proposición 2.6 establece que si la familia $\mathcal{L}$ es atómica, no necesariamente espacio de clausura, el core es un poliedro acotado. Por tanto, sólo falta probar la otra implicación. Si existiera $j \in N$ tal que $\{j\} \notin \mathcal{L}$, considérese $\overline{\{j\}} \in \mathcal{L}$ y sea $k \in \overline{\{j\}}$ con $k \neq j$. Se define el vector $x \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma

$$x_i = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica $x(N) = 0$. Además $x(S) \geq 0$, para toda $S \in \mathcal{L}$, ya que si $j \in S$ entonces $\overline{\{j\}} \subseteq S$ y de aquí $k \in S$. Esto prueba que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = 0,\ x(S) \geq 0 \text{ para toda } S \in \mathcal{L}\} \neq \{0\},$$

y así se llega a una contradicción porque el poliedro $Core\,(\mathcal{L}, v)$ no sería acotado. $\square$

Dos casos especiales de espacios de clausura son las *familias intersectantes* [30] y las *geometrías convexas* [21]. En esta sección sólo se definen las familias intersectantes, ya que las geometrías convexas serán objeto de un detallado estudio en el capítulo siguiente.

**Definición 2.22** *Una familia intersectante es un espacio de clausura $\mathcal{L}$ en el que se verifica*

$$S, T \in \mathcal{L} \text{ con } S \cap T \neq \emptyset \Longrightarrow S \cup T \in \mathcal{L}.$$

Obsérvese que todos los espacios de clausura sobre un conjunto de tres jugadores son familias intersectantes.

Antes de establecer el siguiente teorema, es necesario presentar algunos conceptos referentes a la construcción de los llamados *cerrados maximales* de una coalición $S \subseteq N$. Para ello, se considerará que la familia de coaliciones factibles $\mathcal{L}$ es una familia intersectante atómica.

Dado cualquier $S \subseteq N$, se denota por $\mathcal{L}_S$ el conjunto de todos los cerrados de $\mathcal{L}$ contenidos en $S$, esto es

$$\mathcal{L}_S = \{T \in \mathcal{L} : T \subseteq S\}.$$

Obviamente, $\mathcal{L}_S \neq \emptyset$ ya que $\emptyset, \{i\} \in \mathcal{L}_S$ para todo $i \in S$. Además $\mathcal{L}_S$ es una familia intersectante atómica sobre $S$.

Si se considera en el conjunto $\mathcal{L}_S$ la relación de inclusión, entonces $(\mathcal{L}_S, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado cuyo primer elemento es $\emptyset$. Sea $\Pi_{\mathcal{L}}(S)$ el conjunto de todos los elementos maximales de la relación $(\mathcal{L}_S, \subseteq)$. A cada uno de los elementos de $\Pi_{\mathcal{L}}(S)$ se le llamará *cerrado maximal* de $S$.

**Proposición 2.23** *Sea $\mathcal{L}$ una familia intersectante atómica. Para cualquier $S \subseteq N$, las coaliciones de $\Pi_{\mathcal{L}}(S)$ forman una partición de $S$ y, además, esta partición es única.*

**Demostración:** Obsérvese que si $S \in \mathcal{L}$, entonces $\Pi_{\mathcal{L}}(S) = \{S\}$ y por tanto se verifica la afirmación del enunciado. Si $S \notin \mathcal{L}$ y se supone que $\Pi_{\mathcal{L}}(S) = \{S_1, \ldots, S_k\}$, entonces $k \geq 2$ y $\cup_{i=1}^{k} S_i \subseteq S$. Además, por ser $\mathcal{L}$ atómica, también se verifica que $S \subseteq \cup_{i=1}^{k} S_i$.

Para demostrar que las coaliciones de $\Pi_{\mathcal{L}}(S)$ forman una partición de $S$, falta probar que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$. En efecto, si fuese $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ entonces $S_i \cup S_j \in \mathcal{L}$ por ser $\mathcal{L}$ una familia intersectante y $S_i \cup S_j \subseteq S$, con lo cual $S_i \cup S_j \in \mathcal{L}_S$; ahora bien, esto es una contradicción ya que $S_i$ y $S_j$ son cerrados maximales de $S$. Obviamente, por construcción $\Pi_{\mathcal{L}}(S)$ es único. $\square$

En la sección precedente, se definía el concepto de solución denominado selectope y se establecían condiciones necesarias y suficientes para que $Sel(\mathcal{L}, v) \subseteq Core(\mathcal{L}, v)$. La inclusión contraria es cierta para cualquier $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, si la familia atómica de coaliciones factibles $\mathcal{L}$ es una familia intersectante.

**Teorema 2.24** *Sean $\mathcal{L}$ una familia intersectante atómica y $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Entonces*

$$Core(\mathcal{L}, v) \subseteq Sel(\mathcal{L}, v).$$

**Demostración:** Si existiera $x \in Core(\mathcal{L}, v)$ tal que $x \notin Sel(\mathcal{L}, v)$, entonces al ser $Sel(\mathcal{L}, v)$ un conjunto cerrado y convexo, existirá $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$z \cdot y > x \cdot y \qquad \text{para todo } z \in Sel(\mathcal{L}, v)$$

aplicando el teorema de separación (véase Rockafellar [55]). En particular, se cumplirá la desigualdad para $z = m^{\alpha}(v)$ con $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$. Si se ordenan las componentes del vector $y$ en orden decreciente,

$$y_{i_1} \geq y_{i_2} \geq \cdots \geq y_{i_{n-1}} \geq y_{i_n},$$

entonces

$$\begin{aligned}
x\cdot y &= \sum_{j=1}^{n} x_{i_j} y_{i_j} = y_{i_n}\sum_{j=1}^{n} x_{i_j} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(y_{i_k}-y_{i_{k+1}}\right)\sum_{j=1}^{k} x_{i_j} \\
&\geq y_{i_n} v\left(N\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(y_{i_k}-y_{i_{k+1}}\right)\sum_{S\in\Pi_{\mathcal{L}}(\{i_1,i_2,\ldots,i_k\})} v\left(S\right) \\
&= y_{i_1} v\left(\{i_1\}\right) + \sum_{j=2}^{n} y_{i_j}\left(\sum_{S\in\Pi_{\mathcal{L}}(\{i_1,i_2,\ldots,i_j\})} v\left(S\right) - \sum_{S\in\Pi_{\mathcal{L}}(\{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1}\})} v\left(S\right)\right) \\
&= y_{i_1}\triangle_v\left(\{i_1\}\right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n} y_{i_j}\left(\sum_{S\in\Pi_{\mathcal{L}}(\{i_1,i_2,\ldots,i_j\})}\sum_{T\subseteq S}\triangle_v\left(T\right) - \sum_{S\in\Pi_{\mathcal{L}}(\{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1}\})}\sum_{T\subseteq S}\triangle_v\left(T\right)\right) \\
&= y_{i_1}\triangle_v\left(\{i_1\}\right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n} y_{i_j}\left(\sum_{\{T\in\mathcal{L},T\subseteq\{i_1,i_2,\ldots,i_j\}\}}\triangle_v\left(T\right) - \sum_{\{T\in\mathcal{L},T\subseteq\{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1}\}\}}\triangle_v\left(T\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_{i_j}\left(\sum_{\{T\in\mathcal{L},T\subseteq\{i_1,i_2,\ldots,i_j\},i_j\in T\}}\triangle_v\left(T\right)\right),
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de la Proposición 2.23. Obviamente, basta tomar el selector $\alpha\in\mathcal{A}\left(\mathcal{L}\right)$ tal que

$$m_{i_j}^{\alpha}\left(v\right) = \sum_{\{T\in\mathcal{L},T\subseteq\{i_1,i_2,\ldots,i_j\},i_j\in T\}}\triangle_v\left(T\right)$$

para todo $1\leq j\leq n$ y se llega así a una contradicción. Este selector $\alpha\in\mathcal{A}\left(\mathcal{L}\right)$ está definido por

$$\alpha\left(S\right) = i_k,\ \text{donde } k = \max\left\{p : i_p\in S\right\}$$

para toda $S\in\mathcal{L}$. □

Como se puso de manifiesto al definir los dividendos de Harsanyi, cada juego $v\in\Gamma\left(\mathcal{L}\right)$ puede escribirse de manera única como una combinación lineal de los juegos de unanimidad donde los coeficientes son los dividendos de las coaliciones en $\mathcal{L}$. Si se define ahora

$$v^{+} = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: \triangle_v(S)>0\}} \triangle_v(S)\,\zeta_S \quad \text{y} \quad v^{-} = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: \triangle_v(S)<0\}} -\triangle_v(S)\,\zeta_S,$$

entonces $v = v^{+} - v^{-}$.

Utilizando esta descomposición del juego $v$, se puede establecer el siguiente resultado.

**Teorema 2.25** *Sean $\mathcal{L}$ una familia intersectante atómica y $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Entonces*

*(a)* $Sel(\mathcal{L}, v^{+}) = Core(\mathcal{L}, v^{+})$ *y* $Sel(\mathcal{L}, v^{-}) = Core(\mathcal{L}, v^{-})$.

*(b)* $Sel(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v^{+}) - Core(\mathcal{L}, v^{-})$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : x = y - z,\ y \in Core(\mathcal{L}, v^{+}),\ z \in Core(\mathcal{L}, v^{-})\}.$$

**Demostración:** $(a)$ Es una consecuencia directa del Teorema 2.19 y del Teorema 2.24.

$(b)$ Para cada $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$, se tiene que $m^{\alpha}(v) = m^{\alpha}(v^{+}) - m^{\alpha}(v^{-})$, y de aquí, por el apartado $(a)$, $m^{\alpha}(v) \in Core(\mathcal{L}, v^{+}) - Core(\mathcal{L}, v^{-})$, con lo cual

$$Sel(\mathcal{L}, v) \subseteq Core\left(\mathcal{L}, v^{+}\right) - Core\left(\mathcal{L}, v^{-}\right).$$

Para probar la inclusión contraria, aplicando el apartado $(a)$, es suficiente probar que para dos selectores cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$, se tiene que $m^{\alpha}(v^{+}) - m^{\beta}(v^{-}) \in Sel(\mathcal{L}, v)$. Obsérvese que si se define $\gamma \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$, para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$, por

$$\gamma(S) = \begin{cases} \alpha(S) & \text{si } \triangle_v(S) \geq 0, \\ \beta(S) & \text{si } \triangle_v(S) < 0, \end{cases}$$

entonces $m^{\gamma}(v) = m^{\alpha}(v^{+}) - m^{\beta}(v^{-})$ y, así, $m^{\gamma}(v) \in Sel(\mathcal{L}, v)$. $\square$

Nótese que si sólo se exige que la familia $\mathcal{L}$ sea una familia atómica, no necesariamente una familia intersectante, entonces se puede afirmar sólo una de las inclusiones en los apartados $(a)$ y $(b)$.

## 2.4 Juegos supermodulares

En esta sección, se estudiarán los conceptos de solución citados anteriormente: core, conjuntos estables y conjunto de negociación para un juego definido sobre una familia intersectante, exigiéndole al juego algunas condiciones adicionales. Una de estas condiciones será que el juego sea *supermodular* sobre la familia de coaliciones factibles.

Faigle y Kern [26] introducen la propiedad de supermodularidad para un juego sobre un retículo distributivo. En el modelo introducido en la sección anterior, un espacio de clausura $\mathcal{L}$ es un retículo con

$$S \vee T = \overline{S \cup T} \qquad \text{y} \qquad S \wedge T = S \cap T,$$

para toda $S, T \in \mathcal{L}$. Entonces, se propone la siguiente definición de supermodularidad para un juego sobre $\mathcal{L}$.

**Definición 2.26** *Sea $\mathcal{L}$ un espacio de clausura. Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es supermodular si, para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$, se verifica*

$$v(\overline{S \cup T}) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Obsérvese que en el caso de ser $\mathcal{L} = 2^N$ se obtiene la definición clásica de juego convexo o supermodular. Si la familia $\mathcal{L}$ es una familia intersectante, Faigle [24] define la supermodularidad para un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ debilitando la exigencia anterior sobre la función característica, dando lugar a la siguiente definición.

**Definición 2.27** *Sea $\mathcal{L}$ una familia intersectante. Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es supermodular intersectante si, cada par $S, T \in \mathcal{L}$ con $S \cap T \neq \emptyset$, verifica*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Faigle [24] considera una familia cualquiera $\mathcal{L}$ de subconjuntos de $N$ (no se le exige nada a esta familia) y denomina $\tilde{\mathcal{L}}$ al conjunto de coaliciones de $N$ que pueden expresarse como uniones disjuntas de elementos de $\mathcal{L}$; esto es, si $A \in \tilde{\mathcal{L}}$ entonces

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p,$$

donde $A_i \in \mathcal{L}$, para todo $i = 1, \ldots, p$, y además, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Nótese que, en general, $\tilde{\mathcal{L}} \neq 2^N$. Por otro lado, se define la función

$$\tilde{v} : \tilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{v}(A) = \max\left\{\sum_i v(A_i)\right\},$$

donde el máximo se toma entre todas las particiones de $A$ en elementos de $\mathcal{L}$; es decir, entre todas las denominadas *$\mathcal{L}$-particiones* de $A$.

Con esta idea, Faigle demuestra que si el juego $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un juego supermodular intersectante, entonces el juego $\tilde{v} : \tilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es supermodular. La siguiente proposición es un corolario de este resultado para una familia $\mathcal{L}$ atómica ya que, en este caso, $\tilde{\mathcal{L}} = 2^N$.

**Proposición 2.28** *Sea $\mathcal{L}$ una familia intersectante atómica. Si $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es un juego supermodular intersectante entonces $\tilde{v} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es un juego supermodular.*

La siguiente proposición establece una relación entre el core de $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ y el core de la extensión $\tilde{v} \in \Gamma(2^N)$ y se utiliza en la prueba del teorema posterior.

**Proposición 2.29** *Sea $\mathcal{L}$ una familia atómica. Si $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ satisface que $v(N) = \tilde{v}(N)$, entonces $Core(\mathcal{L}, v) = Core\left(2^N, \tilde{v}\right)$.*

**Demostración:** Si $x \in Core\left(2^N, \widetilde{v}\right)$, entonces $x(N) = \widetilde{v}(N) = v(N)$, y además $x(S) \geq \widetilde{v}(S)$, para todo $S \subseteq N$. Si $S \in \mathcal{L}$, entonces $\{S\}$ es una partición de $S$, y de aquí $x(S) \geq \widetilde{v}(S) \geq v(S)$.

Para probar la inclusión contraria, sea $\{S_k\}$ una $\mathcal{L}$-partición de $S$. Se tiene

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_k \left[\sum_{i \in S_k} x_i\right] = \sum_k x(S_k) \geq \sum_k v(S_k),$$

y de aquí se sigue

$$x(S) \geq \max\left\{\sum_i v(T_i) \ : \ \{T_i\} \text{ es una } \mathcal{L}\text{-partición de } S\right\} = \widetilde{v}(S).$$

□

Obsérvese que si $v(N) \neq \tilde{v}(N)$, entonces $Core(\mathcal{L}, v) \bigcap Core\left(2^N, \tilde{v}\right) = \emptyset$.

Es inmediato comprobar que la condición $v(N) = \tilde{v}(N)$ es equivalente a que para cada $\mathcal{L}$-partición de $N$, $\{P_1, \ldots, P_r\} \subseteq \mathcal{L}$, se verifique la desigualdad

$$v(P_1) + \cdots + v(P_r) \leq v(N).$$

A la vista de esta observación, y haciendo uso de la proposición anterior, se puede establecer la relación existente entre el core, los conjuntos estables y el conjunto de negociación para juegos supermodulares intersectantes.

**Teorema 2.30** *Sea $\mathcal{L}$ una familia intersectante atómica y sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego supermodular intersectante verificando que, para cada $\mathcal{L}$-partición de $N$, $\{P_1, \ldots, P_r\} \subseteq \mathcal{L}$,*

$$v(P_1) + \cdots + v(P_r) \leq v(N).$$

*Se verifica:*

*(1) $Core(\mathcal{L}, v)$ es estable (y por tanto, el único conjunto estable).*

*(2) $Core(\mathcal{L}, v) = \mathcal{B}(\mathcal{L}, v)$.*

**Demostración:** En primer lugar, obsérvese que, con las hipótesis del teorema y, aplicando las Proposiciones 2.28 y 2.29, para el juego $\tilde{v} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene que $I(\mathcal{L}, v) = I\left(2^N, \tilde{v}\right)$, $Core(\mathcal{L}, v) = Core\left(2^N, \tilde{v}\right)$ y, además, el juego $\tilde{v} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es supermodular y, por tanto, $Core\left(2^N, \tilde{v}\right) \neq \emptyset$.

(1) Hay que probar que el $Core(\mathcal{L}, v)$ es estable. Por la Proposición 2.10, el core es siempre internamente estable, con lo cual sólo se demuestra la estabilidad externa; es decir, cada imputación que no esté en el core está dominada por una imputación del core. Si $x \in I(\mathcal{L}, v) \setminus Core(\mathcal{L}, v)$, entonces $x \in I\left(2^N, \tilde{v}\right) \setminus Core\left(2^N, \tilde{v}\right)$ y por ser el juego $\tilde{v}$ supermodular, $Core\left(2^N, \tilde{v}\right)$ es estable. Así, existe $y \in Core\left(2^N, \tilde{v}\right)$ tal que $y \operatorname{dom} x$ en el juego $\tilde{v}$. Entonces, para alguna coalición no vacía $S \in 2^N$, se tiene que $y(S) \leq \tilde{v}(S)$ y además $y_i > x_i$ para todo $i \in S$.

Sea $\{S_1, \ldots, S_k\}$ una $\mathcal{L}$-partición de $S$ para la que se obtenga el máximo $\tilde{v}(S)$, es decir

$$\tilde{v}(S) = \sum_{j=1}^{k} v\left(S_j\right).$$

Para esta $\mathcal{L}$-partición de $S$, se verifica que $y_i > x_i$, para todo $i \in S_j$, con $1 \leq j \leq k$, y además,

$$\sum_{i \in S} y_i = \sum_{j=1}^{k} \left( \sum_{i \in S_j} y_i \right) \leq \sum_{j=1}^{k} v\left(S_j\right).$$

De aquí, se deduce que se puede encontrar al menos una coalición $S_j \in \mathcal{L}$ verificando $y\left(S_j\right) \leq v\left(S_j\right)$ y, por tanto, $y \operatorname{dom} x$ usando la coalición $S_j$ en el juego $v$.

(2) Al ser $\tilde{v} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ un juego supermodular, el resultado clásico para juegos cooperativos [44] afirma que $Core\left(2^N, \tilde{v}\right) = \mathcal{B}\left(2^N, \tilde{v}\right)$.

Como $Core\,(\mathcal{L}, v) \subseteq \mathcal{B}\,(\mathcal{L}, v)$ para todo $v \in \Gamma\,(\mathcal{L})$, sólo es necesario probar la inclusión contraria. Para ello se probará que $I\,(\mathcal{L}, v) \setminus Core\,(\mathcal{L}, v) \subseteq I\,(\mathcal{L}, v) \setminus \mathcal{B}\,(\mathcal{L}, v)$. Si $x \in I\,(\mathcal{L}, v) \setminus Core\,(\mathcal{L}, v)$, entonces un jugador $i$ puede objectar contra otro jugador $j$ con respecto a la imputación $x$. Esto es, existe una coalición $S \in \Lambda_{ij}$ y un vector $y = (y_k)_{k \in S}$ tal que $y(S) = v\,(S)$ y además $y_k > x_k$, para cada $k \in S$.

Esta objeción está justificada. En efecto, supóngase que existen $T \in \Lambda_{ji}$ y un vector $z = (z_k)_{k \in T}$ satisfaciendo las condiciones

$$z(T) = v\,(T)\,, \ z_k \geq x_k \text{ para } k \in T \setminus S \ \text{ y } z_k \geq y_k \text{ para } k \in T \cap S.$$

Como $x \in I\left(2^N, \tilde{v}\right) \setminus Core\left(2^N, \tilde{v}\right)$, el jugador $i$ puede objetar contra el jugador $j$ usando la coalición anterior $S \in \Lambda_{ij}$ en el juego $\tilde{v}$, y el vector $y^* = (y_k^*)_{k \in S}$ que se define

$$y_k^* = \begin{cases} y_k + \dfrac{1}{|S \setminus T|}\left(\tilde{v}\,(S) - v\,(S)\right) & \text{si } k \in S \setminus T, \\ y_k & \text{si } k \in T \cap S, \end{cases}$$

ya que $y^*\,(S) = y\,(T \cap S) + y\,(S \setminus T) + \tilde{v}\,(S) - v\,(S) = \tilde{v}\,(S)$ y también $y_k^* \geq y_k > x_k$ para cada $k \in S$.

Además, existe una contraobjeción a la objeción anterior $(y^*, S)$ usando la coalición $T$ ya que se puede definir el vector $z^* = (z_k)_{k \in T}$ mediante

$$z_k^* = \begin{cases} z_k + \dfrac{1}{|T \setminus S|}\left(\tilde{v}\,(T) - v\,(T)\right) & \text{si } k \in T \setminus S, \\ z_k & \text{si } k \in T \cap S. \end{cases}$$

Claramente $z^*\,(T) = \tilde{v}\,(T)$, y también $z_k^* \geq z_k \geq x_k$ para todo $k \in T$ y $z_k^* = z_k \geq y_k = y_k^*$ para todo $k \in T \cap S$. Ahora bien, esto es una contradicción porque $x \notin Core\left(2^N, \tilde{v}\right) = \mathcal{B}\left(2^N, \tilde{v}\right)$. Por tanto, $x \in I\,(\mathcal{L}, v) \setminus \mathcal{B}\,(\mathcal{L}, v)$. $\square$

# Capítulo 3

# Juegos sobre geometrías convexas

Este capítulo se dedica a estudiar juegos definidos sobre una clase especial de espacios de clausura, las denominadas *geometrías convexas.* Por ello, se presenta en la primera sección, el modelo general establecido por Edelman y Jamison en *The theory of convex geometries* [21], definiendo algunos de los conceptos y propiedades más relevantes.

El interés del estudio particular de los juegos definidos sobre familias de coaliciones factibles que tengan estructura de geometría convexa se deriva, inicialmente, de las observaciones indicadas por G. Owen [53] al analizar las simplificaciones que se producen en el cómputo del valor de Myerson cuando, en la situación de comunicación $(N, v, G)$, el grafo que modela la cooperación parcial existente entre los jugadores es un árbol. Posteriormente, las características especiales de estas singulares situaciones de comunicación $(N, v, G)$, en las que $G = (N, E)$ es un árbol han sido puestas de manifiesto en los trabajos, entre otros, de Borm, Nouweland, Owen y Tijs [13] cuando analizan problemas de asignación de costos y encuentran fórmulas integrales para el cálculo del valor de Myerson; de Grafe, Mauleon e Iñarra [28] en la búsqueda de un procedimiento para computar el nucleolus; y de Potters y

Reijnierse [54] en el estudio del carácter equilibrado de los juegos restringidos por grafos de comunicación, su nucleolus así como las relaciones entre el conjunto de negociación y el core.

En general, las propiedades específicas de los árboles, en relación con otros tipos de grafos, radican en su carácter conexo, en que la intersección de subgrafos conexos da lugar a un subgrafo conexo y que en cualquier subgrafo conexo es el grafo originado por la envoltura convexa de sus puntos extremales. Estas características y los resultados obtenidos en los trabajos anteriormente indicados hacen que sea interesante plantearse, en este modelo de cooperación parcial, el estudio de juegos definidos sobre familias de coaliciones factibles que posean una estructura combinatoria con propiedades análogas a las comentadas. Ello obliga a considerar las geometrías convexas.

## 3.1 Geometrías convexas

En esta sección se define el concepto de geometría convexa, se establecen algunas propiedades elementales y se presentan algunos ejemplos.

**Definición 3.1** *Una geometría convexa en $N$ es una familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ que satisface las siguientes propiedades:*

*(G1)* $\emptyset \in \mathcal{L}$,

*(G2) Si* $A, B \in \mathcal{L}$, *entonces* $A \cap B \in \mathcal{L}$,

*(G3) Si* $A \in \mathcal{L}$ *y* $A \neq N$, *existe* $j \in N \setminus A$ *tal que* $A \cup \{j\} \in \mathcal{L}$.

Los elementos de una geometría convexa se llaman *convexos.* Nótese que las propiedades $(G1)$ y $(G3)$ aseguran que $N \in \mathcal{L}$. Por otro lado, $\mathcal{L} = 2^N$ es una geometría convexa.

De nuevo, en lo que sigue se supondrá que toda geometría convexa lo es en el conjunto $N$ de jugadores.

Como ya se ha indicado anteriormente, la propiedad $(G2)$, que caracteriza a los espacios de clausura, es lógica no sólo desde el punto de vista matemático, sino también desde el punto de vista real. La propiedad $(G3)$ se puede interpretar de la siguiente manera: la coalición formada por todos los jugadores se alcanza mediante procesos secuenciales de incorporación, uno a uno, de los participantes en el juego.

En relación con la interpretación de la propiedad $(G3)$, Edelman y Jamison [21] definen un *orden compatible* con una geometría convexa $\mathcal{L}$ como un orden total de los elementos de $N$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, de forma que

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{L}, \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Un orden compatible con $\mathcal{L}$ corresponde exactamente a una *cadena maximal* en $\mathcal{L}$. Una cadena maximal $C$ de $\mathcal{L}$ es una colección ordenada de conjuntos convexos

$$\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_{n-1} \subset C_n = N,$$

de manera que no existe un conjunto convexo $M$ ni un índice $0 \leq j \leq n-1$ tales que $C_j \subset M \subset C_{j+1}$. Esto es, $C$ es una cadena que no está contenida en ninguna cadena más larga. Se denotará por $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ el conjunto de todas las cadenas maximales de $\mathcal{L}$.

Otro concepto relevante en una geometría convexa es el de punto extremal. Dado un convexo $A \in \mathcal{L}$, un elemento $a \in A$ es un *punto extremal* de $A$ cuando $A \setminus \{a\} \in \mathcal{L}$. Por simplicidad en la notación, se escribirá $A \setminus a$ en lugar de $A \setminus \{a\}$. Se denotará por $ex(A)$ al conjunto de todos los puntos extremales de $A$.

A continuación se ejemplifican las nociones anteriores para una geometría convexa determinada.

**Ejemplo 3.2** *Considérese* $N = \{1, 2, 3\}$ *y la geometría convexa*

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, N\},$$

*cuyo diagrama de Hasse es*

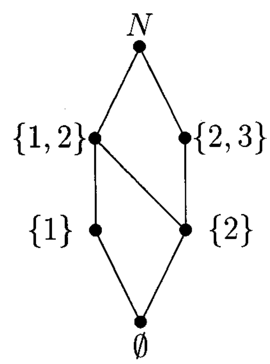


FIGURA 3.1

*Hay tres cadenas maximales en* $\mathcal{L}$*,*

$$\begin{aligned} C_1 &: \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}, \\ C_2 &: \emptyset \subset \{2\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}, \\ C_3 &: \emptyset \subset \{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

*Por otro lado,* $ex(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$, $ex(\{2, 3\}) = \{3\}$ *y* $ex(\{1, 2, 3\}) = \{1, 3\}$.

Obsérvese que cuando $\mathcal{L} = 2^N$ hay $n!$ cadenas maximales correspondientes a todos los posibles órdenes de jugadores. Además, para cualquier $S \in 2^N$, todos sus puntos son extremales.

Los puntos extremales permiten identificar las geometrías convexas con los espacios de clausura que verifican la propiedad finita de Minkowski-Krein-Milman: *cada conjunto cerrado es la clausura de sus puntos extremales.*

Las geometrías convexas también se pueden definir como los espacios de clausura que satisfacen la denominada propiedad *anticambio*: dado un conjunto cerrado $A$ y dos elementos $x$ e $y$, $x \neq y$, pertenecientes a $N \setminus A$, entonces $y \in \overline{A \cup \{x\}}$ implica $x \notin \overline{A \cup \{y\}}$.

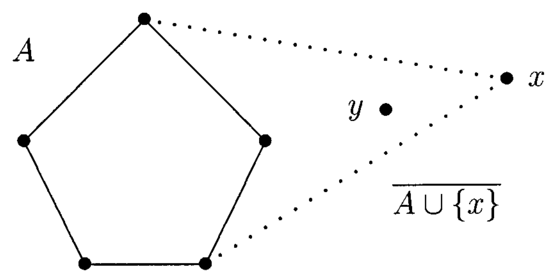


FIGURA 3.2

Estas equivalencias en la identificación de una geometría convexa se recogen en el siguiente teorema cuya demostración es debida a Edelman [21, Teorema 2.1].

**Teorema 3.3** *Si la familia $\mathcal{L}$ es un espacio de clausura, entonces son equivalentes:*

*(a) La familia $\mathcal{L}$ es una geometría convexa.*

*(b) La familia $\mathcal{L}$ satisface la propiedad anticambio.*

*(c) Para cada conjunto $C \in \mathcal{L}$, se verifica que $C = \overline{ex(C)}$.*

Como se indicó en la introducción a este capítulo, el interés del estudio de las geometrías convexas proviene de la búsqueda de estructuras combinatorias que generalicen, si es posible, los resultados obtenidos con otras estructuras de cooperación utilizadas en la teoría de juegos. Así, se muestran algunos ejemplos de familias de conjuntos con estructura de geometría convexa que han aparecido en la literatura relacionada con la cooperación parcial.

**Ejemplo 3.4** *Una situación de comunicación es una terna $(N, v, G)$, donde $(N, v)$ es un juego y $G = (N, E)$ un grafo. Si $G$ es un grafo conexo y ciclo-completo, entonces la familia de todas las coaliciones de $N$ que inducen subgrafos conexos, esto es*

$$\mathcal{L} = \{S \subseteq N \ : \ (S, E(S)) \text{ es conexo}\},$$

*es una geometría convexa [21, Teorema 3.7].*

**Ejemplo 3.5** *La familia de subconjuntos convexos de un conjunto finito parcialmente ordenado* $(P, \leq)$ *es una geometría convexa (Birkhoff y Bennett [11, Teorema 3]). En este contexto, se ha de entender que un conjunto* $S$ *de* $P$ *es convexo si* $a \in S$, $b \in S$ *y* $a \leq b$ *implican* $[a, b] \subseteq S$. *Se denotará por* $Co(N)$ *la correspondiente geometría convexa al considerar* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *con el orden natural de sus elementos. Así, los elementos de* $Co(N)$ *son*

$$[i, j] = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}, \quad para\ 1 \leq i \leq j \leq n,$$

*y este modelo, que tiene un antecedente en el policy order de Axelrod [4], ha sido utilizado por Edelman [22] para el estudio de índices de poder en juegos de votación.*

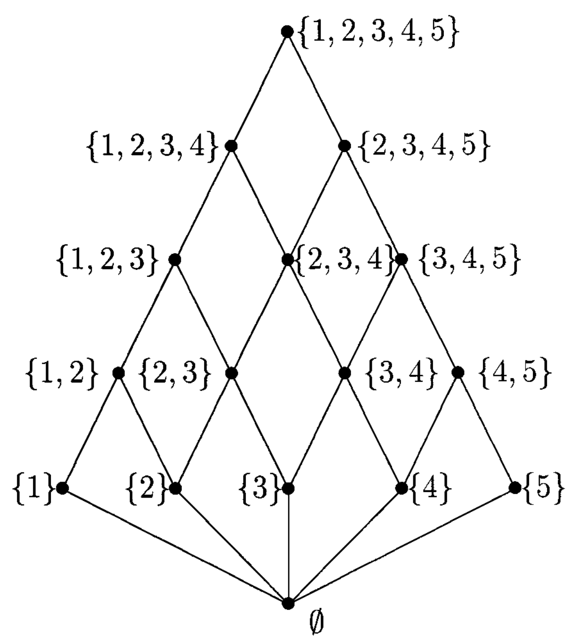


FIGURA 3.3. *La geometría convexa* $Co(\{1, 2, 3, 4, 5\})$.

**Ejemplo 3.6** *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El operador definido, para cualquier $X \subseteq P$, por*

$$X \longrightarrow \overline{X} = \{y \in P : y \leq x \text{ para algún } x \in X\},$$

*es un operador clausura sobre $P$ y sus conjuntos cerrados son los ideales de orden de $P$. Este retículo se denota por $J(P)$. Como la unión y la intersección de ideales de orden es un ideal de orden, se sigue que $J(P)$ es un subretículo distributivo de $2^P$. Además $J(P)$ es una geometría convexa cerrada bajo la unión y el conjunto de puntos extremales de $S \in J(P)$ es el conjunto de todos los puntos maximales $Max(S)$. Cuando el conjunto $P$ es finito, hay una correspondencia, uno a uno, entre las anticadenas de $P$ y los ideales de orden. Faigle y Kern [25][26], estudian juegos definidos sobre retículos distributivos: $(\mathcal{C}, v)$ y $(\mathcal{A}, v)$, donde $\mathcal{C}$ es $J(P)$ y $\mathcal{A}$ es el conjunto de anticadenas de una jerarquía (conjunto parcialmente ordenado en el que cada elemento tiene a lo sumo un elemento que lo cubre).*

## 3.2 El conjunto de Weber

En 1978, Weber [66] propuso como concepto de solución para un juego cooperativo un subconjunto del conjunto de preimputaciones cuya definición se basa en los vectores de contribución marginal. Si se consideran todas las posibles permutaciones del conjunto de jugadores $N$, cada permutación $i_1, i_2, \ldots, i_n$ se puede entender como un proceso secuencial de formación de la gran coalición. Partiendo del conjunto vacío, primero se incorpora el jugador $i_1$, a continuación el $i_2$ y así sucesivamente hasta que la incorporación del jugador $i_n$ origina la coalición $N$. En cada uno de estos procesos, cada jugador puede evaluar su contribución a la coalición a la que se ha incorporado, lo cual se refleja en un vector que se denomina *vector de contribución marginal.* La componente $j$-ésima de dicho vector representa la contribución del jugador $j$ a la coalición de sus predecesores.

Para extender la idea de Weber a un juego $v$ definido sobre una familia $\mathcal{L} \subseteq 2^N$, se considera que la familia de coaliciones factibles es una geometría convexa.

Cuando $\mathcal{L}$ es una geometría convexa, cada una de sus cadenas maximales determina una permutación del conjunto de jugadores y en definitiva, un orden secuencial de formación de la gran coalición (un orden compatible según la definición de Edelman). Dados $i \in N$, y una cadena maximal $C$, el conjunto

$$C(i) = \{j \in N \ : \ j \leq i \text{ en la cadena } C\},$$

representará la coalición de $\mathcal{L}$ formada por el jugador $i$ y sus predecesores en la cadena $C$. Evidentemente, $i \in ex(C(i))$ ya que $C(i) \setminus i \in \mathcal{L}$.

**Definición 3.7** *Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal. Si $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, el vector de contribución marginal con respecto a la cadena $C$ en el juego $v$ es el vector $a^C(v) \in \mathbb{R}^n$, cuyas componentes son*

$$a_i^C(v) = v(C(i)) - v(C(i) \setminus i).$$

En el apéndice, se presenta un algoritmo para computar los vectores de contribución marginal.

De la siguiente proposición se deduce que los vectores de contribución marginal asociados a las cadenas maximales $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ son preimputaciones para el juego $v$.

**Proposición 3.8** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa. Entonces, se verifica*

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) = v(S),$$

*para cada cadena $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, y para todo convexo $S$ de la cadena $C$.*

**Demostración:** Dada $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, para cada $k \in N$, se denota por $S_k$ la coalición de la cadena maximal $C$ de cardinal $k$. Si $S_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, para todo $1 \leq k \leq n$, y $S_0 = \emptyset$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S_k} a_j^C(v) &= \sum_{j=1}^{k} a_{i_j}^C(v) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left[v\left(C\left(i_j\right)\right) - v\left(C\left(i_j\right) \setminus i_j\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left[v\left(S_j\right) - v\left(S_{j-1}\right)\right] \\
&= v\left(S_k\right).
\end{aligned}$$

Nótese que para $S_n = N$ se verifica $\sum_{j \in N} a_j^C(v) = v(N)$. □

De acuerdo con este resultado, cualquier vector de contribución marginal es un vector eficiente que satisface al menos $n$ igualdades de entre las desigualdades que definen el core del juego. De ahí que se pueda afirmar que cualquier vector de contribución marginal es o bien un punto exterior al core o bien un vértice del core, ya que un punto de un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es un vértice del mismo si y sólo si verifican $n$ igualdades independientes de $Ax = b$.

**Corolario 3.9** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa. Si el vector $a^C(v) \in Core(\mathcal{L}, v)$, entonces $a^C(v)$ es un vértice del poliedro $Core(\mathcal{L}, v)$.*

**Definición 3.10** *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. El conjunto de Weber de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es la envoltura convexa de los vectores de contribución marginal; esto es,*

$$Weber(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\left\{a^C(v) \; : \; C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\right\}.$$

Puesto que el conjunto de preimputaciones es convexo y los vectores de contribución marginal son preimputaciones, se verifica

$$Weber\,(\mathcal{L}, v) \subseteq I^*\,(\mathcal{L}, v)\,.$$

Sin embargo, en general, los vectores del conjunto de Weber no son imputaciones. Es fácil observar, teniendo en cuenta que $I\,(\mathcal{L}, v)$ es convexo, que $Weber\,(\mathcal{L}, v) \subseteq I\,(\mathcal{L}, v)$ si todo vector de contribución marginal es una imputación. Para ello, es condición suficiente que el juego $v$ sea *cero-monótono*, concepto que se define seguidamente.

**Definición 3.11** *Un juego $v \in \Gamma\,(\mathcal{L})$ es monótono cuando para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$, con $S \subseteq T$, se verifica $v\,(S) \leq v\,(T)$.*

**Definición 3.12** *La cero-normalización de un juego $v \in \Gamma\,(\mathcal{L})$ es el juego $v_0 \in \Gamma\,(\mathcal{L})$ definido por*

$$v_0\,(S) = v\,(S) - \sum_{\{j \in S : \{j\} \in \mathcal{L}\}} v\,(\{j\})\,, \quad \textit{para todo } S \in \mathcal{L}.$$

**Definición 3.13** *Un juego $v \in \Gamma\,(\mathcal{L})$ es cero-monótono si es monótona su cero-normalización.*

**Proposición 3.14** *Sea $v \in \Gamma\,(\mathcal{L})$ un juego cero-monótono sobre una geometría convexa. Entonces, para cada $C \in \mathcal{C}\,(\mathcal{L})$, el vector de contribución marginal asociado a $C$ es una imputación en el juego $v$.*

**Demostración:** Sea $C \in \mathcal{C}\,(\mathcal{L})$. Puesto que el vector $a^C\,(v)$ es eficiente, se trata de probar que $a_i^C\,(v) \geq v\,(\{i\})$, para todo $\{i\} \in \mathcal{L}$. En efecto,

$$a_i^C\,(v) \;=\; v\,(C\,(i)) - v\,(C\,(i) \setminus i)$$

$$\begin{aligned}
&= v_0(C(i)) + \sum_{\{j \in C(i):\{j\}\in\mathcal{L}\}} v(\{j\}) \\
&\quad -v_0(C(i)\setminus i) - \sum_{\{j \in C(i)\setminus i:\{j\}\in\mathcal{L}\}} v(\{j\}) \\
&= v_0(C(i)) - v_0(C(i)\setminus i) + v(\{i\}) \\
&\geq v(\{i\}),
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de la cero-monotonía del juego $v$. □

En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto que hay situaciones en las que, aunque el core del juego es no vacío, éste no ofrece soluciones razonables. Sin embargo, se puede observar que hay vectores del conjunto de Weber que proporcionan distribuciones más apropiadas.

**Ejemplo 3.15** *Considérese* $N = \{1,2,3,4\}$ *y la geometría convexa*

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, N\}.$$

*Para el juego* $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$v(S) = \begin{cases} |S| - 1 & si\ S \neq N, \emptyset, \\ 2 & si\ S = N, \end{cases}$$

*se tiene*

$$Core(\mathcal{L}, v) = \{(1,1,0,0)\}$$

$$Weber(\mathcal{L}, v) = conv\{(1,1,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0)\}$$

*Obsérvese que* $Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq I(\mathcal{L}, v)$, *y que el reparto que proporciona el único vector del core parece menos apropiado como solución que, por ejemplo, el vector* $(1, 1/2, 1/4, 1/4) \in Weber(\mathcal{L}, v)$.

Weber [67] y Derks [18] probaron que si $\mathcal{L} = 2^N$ siempre se tiene la relación $Core(\mathcal{L}, v) \subseteq Weber(\mathcal{L}, v)$. Sin embargo, esta inclusión no es cierta, en general, si $\mathcal{L} \neq 2^N$. A continuación, se muestran varios ejemplos en los cuales se comprueba esta afirmación. En ellos, se considerará $N = \{1,2,3\}$ y la geometría convexa

$$Co(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\},$$

cuyo diagrama de Hasse es el siguiente

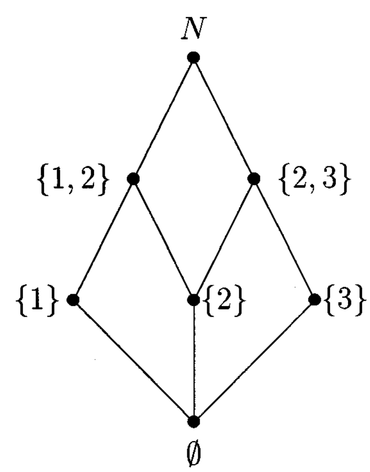


FIGURA 3.4

Nótese que hay cuatro cadenas maximales en $\mathcal{L}$,

$$\begin{array}{ll}
C_1: & \emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}, \\
C_2: & \emptyset \subset \{2\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}, \\
C_3: & \emptyset \subset \{2\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\}, \\
C_4: & \emptyset \subset \{3\} \subset \{2,3\} \subset \{1,2,3\}.
\end{array}$$

**Ejemplo 3.16** *Sea el juego $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$v(S) = \begin{cases} |S| & si\ |S| \geq 2, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

*Los vectores de contribución marginal en el juego v son*

$$
\begin{aligned}
a^{C_1}(v) &= (v(\{1\}) - v(\emptyset),\, v(\{1,2\}) - v(\{1\}),\, v(N) - v(\{1,2\})) = (0,2,1)\,,\\
a^{C_2}(v) &= (v(\{1,2\}) - v(\{2\}),\, v(\{2\}) - v(\emptyset),\, v(N) - v(\{1,2\})) = (2,0,1)\,,\\
a^{C_3}(v) &= (v(N) - v(\{2,3\}),\, v(\{2\}) - v(\emptyset),\, v(\{2,3\}) - v(\{2\})) = (1,0,2)\,,\\
a^{C_4}(v) &= (v(N) - v(\{2,3\}),\, v(\{2,3\}) - v(\{3\}),\, v(\{3\}) - v(\emptyset)) = (1,2,0)\,,
\end{aligned}
$$

*y, de aquí, se tiene*

$$Weber\,(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\{(0,2,1)\,,(2,0,1)\,,(1,0,2)\,,(1,2,0)\}\,.$$

*Por otro lado, el core del juego v es el conjunto*

$$
\begin{aligned}
Core\,(\mathcal{L}, v) &= \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \, x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ x_3 \leq 1,\ x_1 \leq 1\right\}\\
&= \operatorname{conv}\{(0,2,1)\,,(1,2,0)\,,(0,3,0), (1,1,1)\}\,.
\end{aligned}
$$

*En la siguiente figura se reflejan las relaciones entre ambos conjuntos.*

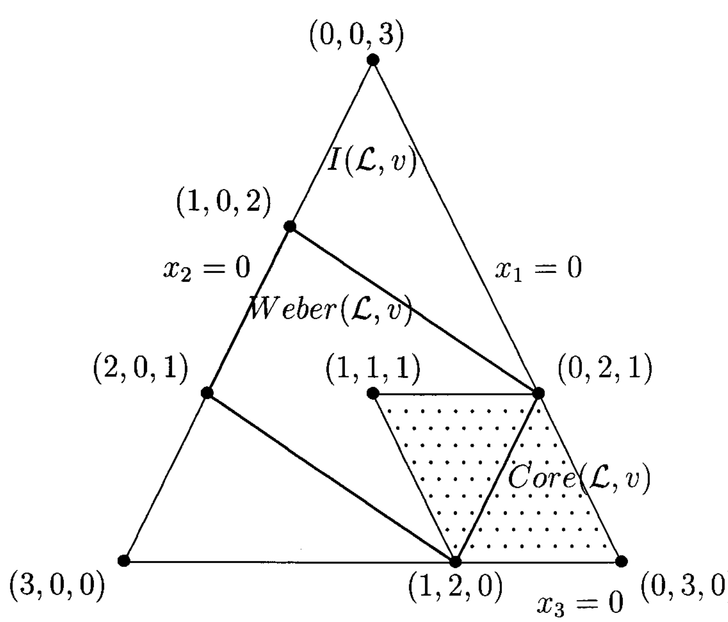


FIGURA 3.5

*Obsérvese que*

$$Core(\mathcal{L}, v) \nsubseteq Weber(\mathcal{L}, v) \quad y \quad Weber(\mathcal{L}, v) \nsubseteq Core(\mathcal{L}, v).$$

**Ejemplo 3.17** *Sea $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ el juego definido por*
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\ v(\{1,2\}) = 1,\ v(\{2,3\}) = 0$ *y* $v(N) = 3.$
*Los vectores de contribución marginal para este juego $v$ son*

$$a^{C_1}(v) = (0,1,2),\ a^{C_2}(v) = (1,0,2),\ a^{C_3}(v) = (3,0,0),\ a^{C_4}(v) = (3,0,0),$$

*y así,*

$$Weber(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\{(0,1,2),(1,0,2),(3,0,0)\}.$$

*Por otra parte, el core del juego viene dado por el conjunto*

$$\begin{aligned} Core(\mathcal{L}, v) &= \left\{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ x_3 \leq 2,\ x_1 \leq 3\right\} \\ &= \operatorname{conv}\{(0,1,2),(1,0,2),(3,0,0),(0,3,0)\}, \end{aligned}$$

*y la representación de ambos conjuntos sería*

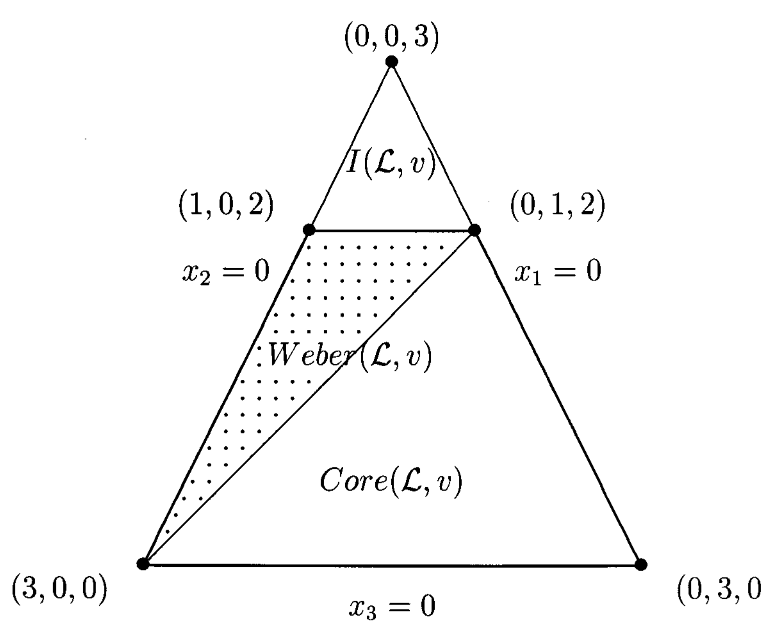


FIGURA 3.6

*En este juego, todos los vectores de contribución marginal coinciden con alguno de los vértices del core y, por tanto, se verifica*

$$Weber\left(\mathcal{L},v\right) \subset Core\left(\mathcal{L},v\right).$$

*Como se estudiará seguidamente, esta inclusión se debe a una característica del juego: su convexidad.*

## 3.3 Juegos casisupermodulares

En 1971, Shapley [57] probó que en un juego cooperativo convexo, el core coincide con el conjunto de Weber y, en 1981, Ichiishi [35] demostró el recíproco; esto es, un juego cooperativo para el cual, el core coincide con el conjunto de Weber es un juego convexo. Por tanto,

$$Core\left(2^N,v\right) = Weber\left(2^N,v\right) \text{ si y sólo si } v \text{ es un juego convexo.}$$

En los ejemplos anteriores, se comprobó que la inclusión

$$Core\left(\mathcal{L},v\right) \subseteq Weber\left(\mathcal{L},v\right)$$

no se verifica en general si $\mathcal{L}$ es una geometría convexa distinta de $2^N$. No obstante, tiene sentido preguntarse si la inclusión contraria es cierta en el caso de juegos supermodulares.

Para la clase de juegos supermodulares, es lógico pensar que sí va a ser cierta la inclusión

$$Weber\left(\mathcal{L},v\right) \subseteq Core\left(\mathcal{L},v\right)$$

ya que se puede argumentar del siguiente modo: si $v \in \Gamma\left(\mathcal{L}\right)$ y se considera cualquier extensión $\tilde{v} \in \Gamma\left(2^N\right)$ de este juego $v$; es decir,

$$\tilde{v}: 2^N \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que } \tilde{v}\left(S\right) = v\left(S\right) \text{ para toda } S \in \mathcal{L},$$

entonces se tendrá
$$Core\left(2^N,\tilde{v}\right)\subseteq Core\left(\mathcal{L},v\right),$$
ya que los vectores del $Core\left(2^N,\tilde{v}\right)$ verifican todas las restricciones del $Core\left(\mathcal{L},v\right)$ y en general, algunas más. Si se comparan ahora los conjuntos $Weber\left(\mathcal{L},v\right)$ y $Weber\left(2^N,\tilde{v}\right)$, se tiene
$$Weber\left(\mathcal{L},v\right)\subseteq Weber\left(2^N,\tilde{v}\right).$$

Esto se sigue sin más que observar que la geometría convexa $2^N$ consta de todas las cadenas maximales de $\mathcal{L}$ y, en general, de algunas más. Aplicando ahora la caracterización de los juegos cooperativos convexos, si $\tilde{v}\in\Gamma\left(2^N\right)$ es un juego convexo o supermodular, se tiene
$$Weber\left(\mathcal{L},v\right)\subseteq Weber\left(2^N,\tilde{v}\right)=Core\left(2^N,\tilde{v}\right)\subseteq Core\left(\mathcal{L},v\right).$$

Para formalizar este razonamiento, se generalizará previamente la definición de juego convexo o supermodular al caso de juegos sobre geometrías convexas, en una dirección diferente a la mencionada en el capítulo segundo. Así, con idea de estudiar la relación entre el core y el conjunto de Weber, se introduce el concepto de juego *casisupermodular* sobre un espacio de clausura. Más tarde se verá que las dos generalizaciones de juego cooperativo convexo determinan clases diferentes de juegos.

**Definición 3.18** *Sea $\mathcal{L}$ un espacio de clausura. Un juego $v\in\Gamma\left(\mathcal{L}\right)$ se dice casisupermodular si, para cualesquiera $S,T\in\mathcal{L}$ con $S\cup T\in\mathcal{L}$, se verifica*
$$v(S\cup T)+v\left(S\cap T\right)\geq v\left(S\right)+v\left(T\right).$$

Análogamente se define la *casisupermodularidad estricta* utilizando la desigualdad estricta.

Es evidente que todo juego supermodular es casisupermodular. El recíproco no es cierto; por ejemplo, considérese $N=\{1,2,3\}$, $\mathcal{L}=Co\left(\{1,2,3\}\right)$

y el juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ definido por $v(\{1\}) = v(\{3\}) = 1$, $v(\{2\}) = -1$, $v(\{1,2\}) = 0$, $v(\{2,3\}) = 0$ y $v(\{1,2,3\}) = 1$.

Este juego es casisupermodular pero no es supermodular ya que para $S = \{1\}$ y $T = \{3\}$, se tiene $S \cap T = \emptyset$, $\overline{S \cup T} = N$, y

$$1 = v(N) + v(\emptyset) < v(\{1\}) + v(\{3\}) = 2.$$

Obsérvese que si $\mathcal{L}$ es una geometría convexa constituida por una única cadena maximal, dadas dos coaliciones $S, T \in \mathcal{L}$, se tiene que o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$ y así, cualquier juego que se defina sobre $\mathcal{L}$ es supermodular y casisupermodular porque se tendría la igualdad

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) = v(S) + v(T).$$

Esto es, ambas nociones coinciden en este tipo de geometrías convexas.

La siguiente proposición, que caracteriza los juegos casisupermodulares sobre geometrías convexas, será utilizada en las pruebas de resultados posteriores.

**Proposición 3.19** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa. El juego $v$ es casisupermodular si y sólo si para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ tal que $T \subseteq S$ y para todo $i \in ex(S) \cap T$, se verifica*

$$v(S) - v(S \setminus i) \geq v(T) - v(T \setminus i).$$

**Demostración:** *Condición necesaria.* Sean $S, T \in \mathcal{L}$ tal que $T \subseteq S$ y sea $i \in ex(S) \cap T$. Si $S' = S \setminus i$ y $T' = T$ , se tiene que

$$\begin{aligned} S' \cap T' &= (S \setminus i) \cap T = T \setminus i \in \mathcal{L}, \\ S' \cup T' &= (S \setminus i) \cup T = S \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

y aplicando la definición de casisupermodularidad a $S'$ y $T'$, se sigue que

$$v(S) + v(T \setminus i) \geq v(S \setminus i) + v(T).$$

*Condición suficiente.* Sean $S, T \in \mathcal{L}$ tal que $S \cup T \in \mathcal{L}$. Si $T \subseteq S$ o $S \subseteq T$, se obtiene la igualdad trivialmente. Se considera, por tanto, el caso $S \cap T \neq S$ y $S \cap T \neq T$.

Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal que contenga a las coaliciones $T$ y $S \cup T$. Como $S \setminus T \neq \emptyset$, se puede suponer que $|S \setminus T| = k$ y por tanto, se puede escribir $S \setminus T = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, donde se supone que los jugadores están ordenados siguiendo el orden de incorporación en la cadena $C$; es decir

$$C(i_1) \subset C(i_2) \subset \cdots \subset C(i_k).$$

Entonces, la cadena $C$ viene dada por

$$\emptyset \subset \cdots \subset T \subset T \cup \{i_1\} \subset \cdots \subset T \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = T \cup S \subset \cdots \subset N.$$

Se denotará $S_j = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$, para todo $1 \leq j \leq k$, y $S_0 = \emptyset$. Entonces, para todo $1 \leq j \leq k$, se tiene que $T \cup S_j \in \mathcal{L}$. Además, si $R = S \cap T$, entonces $R \cup S_j \in \mathcal{L}$ por ser intersección de coaliciones de $\mathcal{L}$ (ver figura 3.7). En efecto, $R \cup S_j = (S \cap T) \cup S_j = (S \cup S_j) \cap (T \cup S_j) = S \cap (T \cup S_j)$.

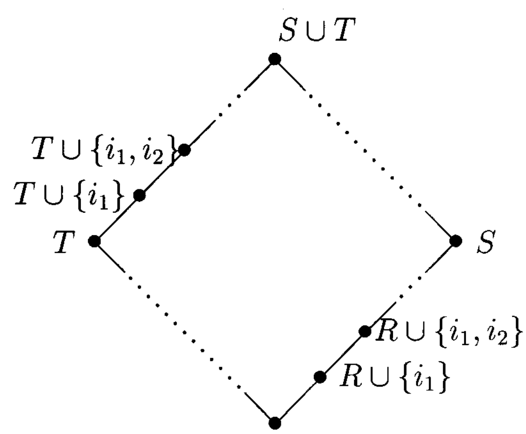


FIGURA 3.7

Aplicando la hipótesis a los convexos $T \cup S_j$ y $R \cup S_j$, se obtiene

$$v(R \cup S_j) - v(R \cup S_{j-1}) \leq v(T \cup S_j) - v(T \cup S_{j-1}),$$

ya que $R \cup S_j \subset T \cup S_j$ y, además, $i_j \in ex\,(R \cup S_j) \cap (T \cup S_j)$. De aquí se deduce

$$\begin{aligned} v(S) - v(S \cap T) &= v(R \cup S_k) - v(R) \\ &= \sum_{j=1}^{k} [v(R \cup S_j) - v(R \cup S_{j-1})] \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} [v(T \cup S_j) - v(T \cup S_{j-1})] \\ &= v(T \cup S) - v(T). \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado permite identificar los juegos para los que los vectores de contribución marginal son vectores del core.

**Teorema 3.20** *Sea $\mathcal{L}$ una geometría convexa. Una condición necesaria y suficiente para que todos los vectores de contribución marginal de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ sean vectores del core es que el juego $v$ sea casisupermodular.*

**Demostración:** *Condición suficiente.* Sea $C$ una cadena maximal en $\mathcal{L}$. Ya se sabe que $a^C(v)$ es eficiente y que, para toda coalición $S$ de la cadena $C$, se verifica

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) = v(S).$$

Para ver que $a^C(v) \in Core\,(\mathcal{L}, v)$, hay que probar que, para toda coalición $S$ que no esté en la cadena $C$, se tiene

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) \geq v(S).$$

En efecto, sea $S \in \mathcal{L}$ una coalición que no pertenece a $C$, y supóngase que $|S| = s$. Se puede denotar $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ donde los elementos se escriben siguiendo el orden de incorporación en la cadena $C$; esto es,

$$C(i_1) \subset C(i_2) \subset \cdots \subset C(i_s).$$

Si se denota por $S_j$ al conjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$, para toda $1 \leq j \leq s$, y $S_0 = \emptyset$, se puede observar que, para todo $1 \leq j \leq s$, se tiene que $S_j \in \mathcal{L}$ ya que $S_j = S \cap C(i_j)$. Además, $i_j \in ex(C(i_j))$, y también $i_j \in S_j$. Por ser $v$ un juego casisupermodular, la Proposición 3.19 implica que, para todo $1 \leq j \leq s$,

$$v(C(i_j)) - v(C(i_j) \setminus i_j) \geq v(S_j) - v(S_{j-1}),$$

y de aquí se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} a_j^C(v) &= \sum_{j=1}^{s} a_{i_j}^C(v) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \left[ v(C(i_j)) - v(C(i_j) \setminus i_j) \right] \\
&\geq \sum_{j=1}^{s} \left[ v(S_j) - v(S_{j-1}) \right] \\
&= v(S).
\end{aligned}$$

*Condición necesaria.* Para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ con $S \cup T \in \mathcal{L}$, se considera una cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ que contenga a $S \cap T$ y $S \cup T$. Al ser los vectores de contribución marginal elementos del $Core(\mathcal{L}, v)$, se tiene

$$\sum_{j \in S} a_j^C(v) \geq v(S) \quad \text{y} \quad \sum_{j \in T} a_j^C(v) \geq v(T).$$

Por la elección de la cadena maximal $C$, se verifica también que

$$\sum_{j \in S \cup T} a_j^C(v) = v(S \cup T) \quad \text{y} \quad \sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v) = v(S \cap T).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
v(S) + v(T) &\leq \sum_{j \in S} a_j^C(v) + \sum_{j \in T} a_j^C(v) \\
&= \sum_{j \in S \cup T} a_j^C(v) + \sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v)
\end{aligned}$$

$$= v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

$\square$

Al ser el core de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un conjunto convexo, una consecuencia inmediata de este teorema es la siguiente.

**Corolario 3.21** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa. Una condición necesaria y suficiente para que $Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq Core(\mathcal{L}, v)$ es que el juego $v$ sea casisupermodular.*

Se probará que la clase de juegos casisupermodulares se identifica con la de los juegos supermodulares dentro del conjunto de juegos monótonos.

**Teorema 3.22** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego monótono sobre una geometría convexa. Entonces, $v$ es supermodular si y sólo si $v$ es casisupermodular.*

**Demostración:** Es suficiente probar que todo juego monótono casisupermodular es supermodular. Sean $S, T \in \mathcal{L}$, y $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ es una cadena maximal que contiene a $\overline{S \cup T}$ y $S \cap T$. Por el Teorema 3.20, el vector de contribución marginal asociado a esta cadena $a^C(v)$ es un vector perteneciente a $Core(\mathcal{L}, v)$ y, además, $a_i^C(v) = v(C(i)) - v(C(i) \setminus i) \geq 0$ para todo $i \in N$, debido a la monotonía del juego $v$. Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} a_j^C(v) &\geq v(S), \\
\sum_{j \in T} a_j^C(v) &\geq v(T), \\
\sum_{j \in \overline{S \cup T}} a_j^C(v) &= v\left(\overline{S \cup T}\right), \\
\sum_{j \in S \cap T} a_j^C(v) &= v(S \cap T).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}
v(S)+v(T) &\leq \sum_{j\in S} a_j^C(v)+\sum_{j\in T} a_j^C(v) \\
&= \sum_{j\in S\cup T} a_j^C(v)+\sum_{j\in S\cap T} a_j^C(v) \\
&\leq \sum_{j\in \overline{S\cup T}} a_j^C(v)+\sum_{j\in S\cap T} a_j^C(v) \\
&= v\left(\overline{S\cup T}\right)+v(S\cap T).
\end{aligned}$$

□

El siguiente ejemplo muestra que hay juegos casisupermodulares para los que el core y el conjunto de Weber coinciden.

**Ejemplo 3.23** *Considérese el juego $v:\mathcal{L}\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por* $v(\{1\})=v(\{3\})=1,\ v(\{2\})=-1,\ v(\{1,2\})=v(\{2,3\})=0$ *y* $v(N)=1.$

*Este juego es casisupermodular y los vectores de contribución marginal para $v$ son*

$$a^{C_1}(v)=a^{C_2}(v)=a^{C_3}(v)=a^{C_4}(v)=(1,-1,1),$$

*y de aquí resulta que $Weber(\mathcal{L},v)=\{(1,-1,1)\}$. Además, también se tiene $Core(\mathcal{L},v)=\{(1,-1,1)\}$.*

**Proposición 3.24** *Sea $v\in\Gamma(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa atómica. Se verifica que $Weber(\mathcal{L},v)=\{(v(\{1\}),\ldots,v(\{n\}))\}$ si y sólo si $v(S)=\sum_{i\in S}v(\{i\})$, para toda $S\in\mathcal{L}$.*

**Demostración:** Si $v(S)=\sum_{i\in S}v(\{i\})$, para toda $S\in\mathcal{L}$, todos los vectores de contribución marginal coinciden siendo, para toda $C\in\mathcal{C}(\mathcal{L})$, $a^C(v)=(v(\{1\}),\ldots,v(\{n\}))$.

Recíprocamente, se probará que $Weber(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))\}$ implica $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ para toda $S \in \mathcal{L}$, por inducción sobre el cardinal de $S$.

Para $S \in \mathcal{L}$ con $|S| = 2$, se tiene que $S = \{i, j\}$ con $\{i\}$, $\{j\} \in \mathcal{L}$. Entonces, siendo $C$ una cadena maximal que contiene a $S$, y $S = C(j)$, se verifica $a_j^C(v) = v(C(j)) - v(C(j) \setminus j) = v(\{j\})$ y, así, $v(S) = v(\{i\}) + v(\{j\})$.

Supóngase que la igualdad es cierta para toda $T \in \mathcal{L}$ con $|T| = r$. Para cualquier $S \in \mathcal{L}$ con $|S| = r + 1$, existe una coalición $T \in \mathcal{L}$ con $|T| = r$ tal que $S = T \cup \{k\}$ con $k \notin T$. Para una cadena maximal $C$ que contenga a $S$ y a $T$, se tiene que $a_k^C(v) = v(S) - v(T)$. Además, $a_k^C(v) = v(\{k\})$ para toda $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$. Por tanto, $v(S) = v(T) + v(\{k\})$, y como, por hipótesis de inducción, se verifica

$$v(T) = \sum_{i \in T} v(\{i\}),$$

se obtiene

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

□

Obsérvese que todo juego que verifique $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para toda $S \in \mathcal{L}$, es casisupermodular. Así, se puede afirmar que éstos son los únicos juegos sobre geometrías convexas atómicas para los que su conjunto de imputaciones, core y conjunto de Weber coinciden y tienen como única distribución el vector $(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))$.

Como se acaba de probar, los vectores de contribución marginal asociados a dos o más cadenas maximales pueden coincidir. La casisupermodularidad estricta del juego asegura que todos los vectores de contribución marginal son diferentes.

**Proposición 3.25** *Si $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es un juego estrictamente casisupermodular sobre una geometría convexa, entonces $a^{C_1}(v) \neq a^{C_2}(v)$, para cualesquiera $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$.*

**Demostración:** Sean $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ dos cadenas maximales cualesquiera de la geometría convexa $\mathcal{L}$, por ejemplo,

$$\begin{aligned} C_1 &: \emptyset \subset \{i_1\} \subset \{i_1, i_2\} \subset \ldots \subset \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \ldots \subset N, \\ C_2 &: \emptyset \subset \{j_1\} \subset \{j_1, j_2\} \subset \ldots \subset \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \ldots \subset N. \end{aligned}$$

Para todo $k$, $1 \leq k \leq n$, sean $S_k = \{i_1, \ldots, i_k\}$ y $T_k = \{j_1, \ldots, j_k\}$ los convexos de cardinal $k$ de las cadenas maximales $C_1$ y $C_2$, respectivamente. Esto es, $S_k = C_1(i_k)$ y $T_k = C_2(j_k)$.

Sea $p$ el menor índice tal que $S_p \neq T_p$ y sea $l > p$ el menor índice tal que $S_l = T_l$. Como $S_l = C_1(i_l)$, $T_l = C_2(j_l)$ y $S_{l-1} \neq T_{l-1}$, entonces $i_l \neq j_l$. De aquí que $C_1(j_l) \subset C_2(j_l)$.

Si se consideran los correspondientes vectores de contribución marginal respecto de las cadenas $C_1$ y $C_2$ , por la casisupermodularidad estricta de $v$, se obtiene

$$a_{j_l}^{C_2}(v) = v(C_2(j_l)) - v(C_2(j_{l-1})) > v(C_1(j_l)) - v(C_1(j_l) \setminus j_l) = a_{j_l}^{C_1}(v).$$

Con esto queda probado que los vectores de contribución marginal son distintos puesto que difieren al menos en una coordenada.

□

# 3.4 Selecciones y vectores de contribución marginal

Recuérdese que en el capítulo anterior se había introducido un concepto de solución para juegos definidos sobre familias atómicas, el selectope, y se establecían condiciones para que el core fuese un subconjunto de éste. Ahora, con el objetivo de relacionar el selectope y el conjunto de Weber, se considerará, a lo largo de esta sección, una geometría convexa atómica $\mathcal{L}$. Para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se muestra una relación entre las selecciones correspondientes a los selectores sobre $\mathcal{L}$ y los vectores de contribución marginal asociados a las cadenas maximales de la geometría $\mathcal{L}$.

**Proposición 3.26** *Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal de la geometría convexa atómica $\mathcal{L}$ y sea $\alpha : \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow N$ definida por*

$$\alpha(S) = j, \quad \text{donde } j \in S \text{ y } S \subseteq C(j).$$

*Entonces $\alpha$ es un selector y $m^{\alpha}(v) = a^{C}(v)$, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.*

**Demostración:** En primer lugar, se probará que $\alpha$ está bien definido. En efecto, para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$, es obvio que existe un único $j \in S$ tal que $S \subseteq C(j)$, siendo $j$ el último elemento de $S$ que entra en la cadena maximal fijada $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$; es decir, ese $j \in S$ es tal que $C(k) \subseteq C(j)$, para todo $k \in S$. Además, se verifica que $j \in ex(S)$ ya que

$$\left.\begin{array}{l} C(j) \setminus j \in \mathcal{L} \\ S \in \mathcal{L} \end{array}\right\} \Longrightarrow (C(j) \setminus j) \cap S = S \setminus j \in \mathcal{L}$$

Esto asegura que $\alpha$ está bien definido y es el selector que a cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$ le asocia aquél de sus elementos que se incorpora en último lugar a la cadena maximal $C$.

Ahora bien, para cada $i \in N$ y $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se tiene que

$$\begin{aligned} a_i^C(v) &= v(C(i)) - v(C(i) \setminus i) \\ &= \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq C(i)\}} \triangle_v(T) - \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq C(i) \setminus i\}} \triangle_v(T) \\ &= \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq C(i), i \in T\}} \triangle_v(T) \\ &= \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq C(i), i \in ex(T)\}} \triangle_v(T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\{T \in \mathcal{L}:\alpha(T)=i\}} \Delta_v (T) \\ &= m_i^\alpha (v) . \end{aligned}$$

□

Por ser el selectope de un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un conjunto convexo, de esta proposición se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

**Teorema 3.27** *Si $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es un juego sobre una geometría convexa atómica, entonces*

$$Weber (\mathcal{L}, v) \subseteq Sel (\mathcal{L}, v) .$$

Para poder asegurar el recíproco de la proposición anterior, hay que establecer una condición sobre el selector.

**Definición 3.28** *Sea la familia $\mathcal{L}$ una geometría convexa atómica. Un selector $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$ se denomina consistente cuando verifica las dos condiciones siguientes:*

*(1) Para toda $S \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, $\alpha(S) \in ex(S)$.*

*(2) Si $S \subset T$ y $\alpha(T) \in ex(S)$, entonces $\alpha(S) = \alpha(T)$.*

Nótese que si se toma una cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ y se define el selector $\alpha$ como en la proposición anterior, se comprueba fácilmente que $\alpha$ es consistente. También se puede observar que cadenas diferentes dan lugar a selectores distintos.

**Teorema 3.29** *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa atómica y $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$. Entonces, existe una cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ tal que $m^{\alpha}(v) = a^{C}(v)$ para cada $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ si y sólo si $\alpha$ es consistente. Además, la cadena maximal*

$$C : \emptyset \subset \{i_1\} \subset \{i_1, i_2\} \subset \cdots \subset \{i_1, \ldots, i_{n-1}\} \subset \{i_1, \ldots, i_n\} = N$$

*es única y se obtiene recursivamente con*

$$\begin{aligned} i_n &= \alpha(N) \\ i_k &= \alpha(N \setminus \{i_n, i_{n-1}, \ldots i_{k+1}\}) \quad \textit{para todo } 1 \leq k < n. \end{aligned}$$

**Demostración:** Antes de iniciar la prueba del teorema, obsérverse que para el juego de unanimidad $\zeta_S \in \Gamma(\mathcal{L})$, con $S \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, se tiene

$$\begin{aligned} &\triangle_{\zeta_S}(S) = 1, \\ &\triangle_{\zeta_S}(R) = 0 \quad \text{para } R \in \mathcal{L}, R \neq S, \end{aligned}$$

ya que, como se ha indicado antes, $\{\zeta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$ es una base de $\Gamma(\mathcal{L})$ y además, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ se tiene

$$v = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} \triangle_v(T)\, \zeta_T.$$

*Condición suficiente.* Sea $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$ un selector tal que existe una cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ que verifica que $m^{\alpha}(v) = a^{C}(v)$, para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Se trata de probar que $\alpha$ es consistente. Para establecer la primera condición de consistencia; es decir, para todo $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$, se tiene $\alpha(T) \in ex(T)$, considérese el juego de unanimidad $\zeta_T \in \Gamma(\mathcal{L})$. Si $\alpha(T) = i$, se verifica

$$m_i^{\alpha}(\zeta_T) = \sum_{\{R \in \mathcal{L} : \alpha(R) = i\}} \triangle_{\zeta_T}(R) = 1$$

y como, por hipótesis, $m_i^{\alpha}(\zeta_T) = a_i^{C}(\zeta_T)$ se tiene entonces

$$\zeta_T(C(i)) - \zeta_T(C(i) \setminus i) = 1.$$

De aquí se puede asegurar que $T \subseteq C(i)$ y $T \nsubseteq C(i) \setminus i$. Así, se verifica $\alpha(T) \in T$ y $T \subseteq C(\alpha(T))$, y por tanto $\alpha(T) \in ex(T)$ ya que se tiene $\alpha(T) \in ex(C(\alpha(T)))$.

Para demostrar ahora la segunda condición de consistencia, sea $S \subset T$ y $\alpha(T) = i \in ex(S)$, entonces, $S \subset C(i)$ ya que se probó que $T \subseteq C(i)$ y así, se tiene

$$a_i^C(\zeta_S) = \zeta_S(C(i)) - \zeta_S(C(i) \setminus i) = 1,$$

luego, por hipótesis

$$m_i^\alpha(\zeta_S) = \sum_{\{R \in \mathcal{L}: \alpha(R) = i\}} \triangle_{\zeta_S}(R) = 1.$$

En consecuencia se debe verificar que $i = \alpha(S)$, por lo que $\alpha$ es consistente.

*Condición necesaria.* Sea $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$ un selector consistente. En primer lugar, se probará la existencia de una cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ para la cual se verifica que $a^C(v) = m^\alpha(v)$ para cada $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Se construye la cadena maximal $C$ de la siguiente forma

$$C : \emptyset \subset \{i_1\} \subset \{i_1, i_2\} \subset \cdots \subset \{i_1, \ldots, i_{n-1}\} \subset \{i_1, \ldots, i_n\} = N,$$

esto es,

$$C : \emptyset \subset C(i_1) \subset C(i_2) \subset \cdots \subset C(i_{n-1}) \subset C(i_n) = N,$$

donde

$$\begin{aligned} &i_n = \alpha(N) \\ &i_k = \alpha(N \setminus \{i_n, i_{n-1}, \ldots i_{k+1}\}) \quad \text{para todo } 1 \leq k < n. \end{aligned}$$

Nótese que $N, N \setminus \{i_n\}, \ldots, N \setminus \{i_n, i_{n-1}, \ldots i_{k+1}\} \in \mathcal{L}$ por ser el selector $\alpha$ consistente.

Además, el selector $\alpha$ coincide con el selector definido en la proposición anterior para esta cadena así construida, es decir, si $\beta \in \mathcal{A}(\mathcal{L})$ es tal que, para toda $S \in \mathcal{L}, S \neq \emptyset$, se define como

$$\beta(S) = j, \quad \text{donde } j \in S \text{ y } S \subseteq C(j),$$

se verifica que $\alpha = \beta$. En efecto, es evidente que $\alpha(S) = \beta(S)$ para toda coalición no vacía $S$ de la cadena $C$. Si $S$ no es una coalición de la cadena $C$, entonces $\beta(S) = i \in ex(S)$ y $S \subset C(i)$ donde $C(i)$ es el menor convexo de la cadena que contiene a $i$. Por ser $S \subset C(i)$ y $\alpha(C(i)) = i \in ex(S)$ y por la consistencia del selector $\alpha$ se sigue que $\alpha(S) = i$. Por tanto $\beta(S) = \alpha(S)$ para toda coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$. Aplicando al selector $\alpha$ la proposición anterior, se verifica que $a^C(v) = m^\alpha(v)$ para cada $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.

Por último, falta probar que ésta es la única cadena para la que se verifica la igualdad $a^C(v) = m^\alpha(v)$ para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Considérese el juego de unanimidad $\zeta_N \in \Gamma(\mathcal{L})$. Para cada $j \in N$ se tiene

$$m_j^\alpha(\zeta_N) = \sum_{\{R\in\mathcal{L}:\alpha(R)=j\}} \triangle_{\zeta_N}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha(N) = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado,

$$a_j^C(\zeta_N) = \zeta_N(C(j)) - \zeta_N(C(j) \setminus j) = \begin{cases} 1 & \text{si } C(j) = N, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

luego, como $\alpha(N) = i_n$, ambos vectores coinciden si y sólo si $C(i_n) = N$.

Se considera ahora $\zeta_{N\setminus\{i_n\}} \in \Gamma(\mathcal{L})$. Para cada $j \in N$, se verifica

$$m_j^\alpha\left(\zeta_{N\setminus\{i_n\}}\right) = \sum_{\{R\in\mathcal{L}:\alpha(R)=j\}} \triangle_{\zeta_{N\setminus\{i_n\}}}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha(N\setminus\{i_n\}) = i_{n-1}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} a_j^C\left(\zeta_{N\setminus\{i_n\}}\right) &= \zeta_{N\setminus\{i_n\}}(C(j)) - \zeta_{N\setminus\{i_n\}}(C(j)\setminus j) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } C(j) \supseteq N\setminus\{i_n\} \text{ y } C(j)\setminus j \not\supseteq N\setminus\{i_n\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Obsérvese que si $C(j) \supseteq N\setminus\{i_n\}$ y $C(j)\setminus j \not\supseteq N\setminus\{i_n\}$, entonces $C(j)$ es un convexo que debe tener $n$ ó $n-1$ elementos, pero como en cada cadena maximal hay un sólo convexo con $k$ elementos, para todo $1 \leq k \leq n$, y el convexo de $n$ elementos está excluido, se tiene, por tanto

$$a_j^C\left(\zeta_{N\setminus\{i_n\}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } C(j) = N \setminus \{i_n\}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

luego, por ser $\alpha(N \setminus \{i_n\}) = i_{n-1}$, se verifica que $a^C\left(\zeta_{N\setminus\{i_n\}}\right) = m^\alpha\left(\zeta_{N\setminus\{i_n\}}\right)$ si y solo si $C(i_{n-1}) = N \setminus \{i_n\}$. Repitiendo este razonamiento sucesivamente, se obtiene una única cadena maximal $C$ que es la del enunciado. □

Debido a los resultados anteriores, se puede establecer una correspondencia biyectiva entre cadenas maximales de la geometría convexa $\mathcal{L}$ y los selectores consistentes sobre $\mathcal{L}$.

**Ejemplo 3.30** *Considérese el juego definido en el ejemplo 3.16 en el que se estudiaban las relaciones entre el conjunto de Weber y el core. Las selecciones correspondientes a este juego son*

| $\alpha$ | $\{1,2\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ | $m_1^\alpha(v)$ | $m_2^\alpha(v)$ | $m_3^\alpha(v)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | $-1$ |
| 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 5 | 1 | 3 | 2 | 2 | $-1$ | 2 |
| 6 | 1 | 3 | 3 | 2 | 0 | 1 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | $-1$ | 4 | 0 |
| 8 | 2 | 2 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| 9 | 2 | 2 | 3 | 0 | 4 | $-1$ |
| 10 | 2 | 3 | 1 | $-1$ | 2 | 2 |
| 11 | 2 | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 12 | 2 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 |

TABLA 3.1

*Obsérvese que los selectores 1,4,6 y 12 son consistentes y las selecciones correspondientes a estos selectores coinciden con los vectores de contribución marginal asociados a las cuatro cadenas maximales de $\mathcal{L}$. En la siguiente figura se muestran el conjunto de Weber, el core y el selectope de este juego.*

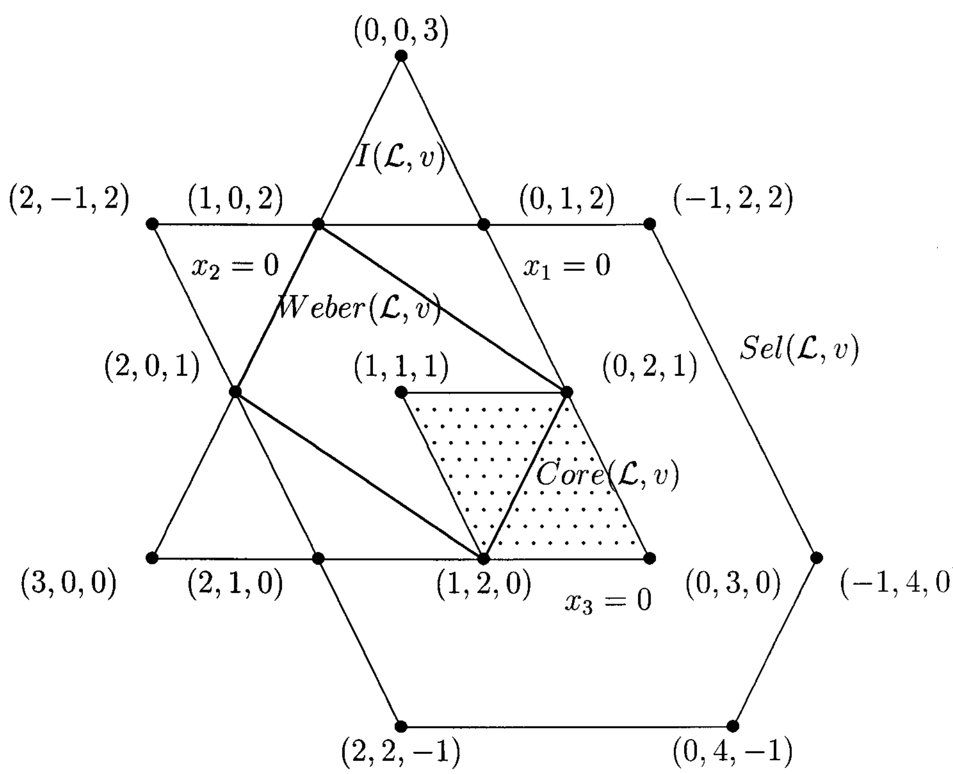


FIGURA 3.8

En este ejemplo se puede observar que la inclusión del conjunto de Weber en el selectope es una inclusión estricta,

$$Weber\,(\mathcal{L},v) \neq Sel\,(\mathcal{L},v)\,.$$

El siguiente resultado muestra una condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad y ambos conjuntos contengan una única distribución.

**Proposición 3.31** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego sobre una geometría convexa atómica. Se verifica que $Sel(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))\}$ si y sólo si $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para cada $S \in \mathcal{L}$.*

**Demostración:** Si el juego $v$ verifica $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ para toda $S \in \mathcal{L}$, entonces $\Delta_v(\{i\}) = v(\{i\})$ y $\Delta_v(S) = 0$, para cada $S \in \mathcal{L}$, $S \neq \{i\}$ para todo $i \in N$. Por tanto, $Sel(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))\}$. Recíprocamente, si se supone que $Sel(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))\}$, el Teorema 3.27 asegura que $Weber(\mathcal{L}, v) = \{(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))\}$ y por la Proposición 3.24, el juego $v$ verifica $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ para cada $S \in \mathcal{L}$. □

En el capítulo anterior, se ha probado que los juegos casipositivos son los únicos juegos tales que $Sel(\mathcal{L}, v) \subseteq Core(\mathcal{L}, v)$. Por tanto, como siempre $Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq Sel(\mathcal{L}, v)$, se deduce que para los juegos casipositivos sobre geometrías convexas atómicas, el conjunto de Weber es un subconjunto del core y, de aquí, que éstos juegos sean casisupermodulares. Esto es cierto aunque la familia $\mathcal{L}$ no sea una geometría convexa.

Se dedicará el resto del capítulo a relacionar los juegos casipositivos y los juegos casisupermodulares.

**Proposición 3.32** *Sean $\mathcal{L}$ un espacio de clausura atómico y $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Si el juego $v$ es casipositivo, entonces $v$ es casisupermodular.*

**Demostración:** Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego casipositivo. Se distinguen varios casos:

a) Sean $A, B \in \mathcal{L}$, dos coaliciones no vacías tales que $A \cup B \in \mathcal{L}$ y $A \cap B = \emptyset$. Entonces, $v(A \cup B) - v(A) - v(B)$ es igual a

$$\sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq A \cup B\}} \Delta_v(T) - \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq A\}} \Delta_v(T) - \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq B\}} \Delta_v(T),$$

y simplificando queda

$$\sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq A \cup B, T \nsubseteq A, T \nsubseteq B\}} \Delta_v(T) \geq 0,$$

ya que todas las coaliciones $T \in \mathcal{L}$ tales que $T \subseteq A \cup B$, $T \nsubseteq A$, $T \nsubseteq B$, verifican que $|T| \geq 2$ y, por tanto, $\triangle_v(T) \geq 0$.

b) Sean $A, B \in \mathcal{L}$ coaliciones no vacías tales que $A \cup B \in \mathcal{L}$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$, entonces $v(A \cup B) + v(A \cap B) - v(A) - v(B)$ es igual a

$$\sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq A \cup B\}} \triangle_v(T) + \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq A \cap B\}} \triangle_v(T) - \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq A\}} \triangle_v(T) - \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq B\}} \triangle_v(T)$$

Nótese que en las familias $\{T \in \mathcal{L} : T \subseteq A \cup B\}$ y $\{T \in \mathcal{L} : T \subseteq A \cap B\}$, se encuentran todas las coaliciones de $\{T \in \mathcal{L} : T \subseteq A\}$ y $\{T \in \mathcal{L} : T \subseteq B\}$, con lo cual los dividendos se simplifican quedando, en esta expresión únicamente áquellas coaliciones $T \in \mathcal{L}$ tales que $T \subseteq A \cup B$ y conteniendo al menos dos jugadores $i, j$ tales que $i \in A \setminus B$ y $j \in B \setminus A$. De aquí, $|T| \geq 2$, y así, todos los dividendos son no negativos. Por tanto,

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) - v(A) - v(B) \geq 0.$$

En los casos restantes, se verifica, trivialmente, que el juego $v$ es casisupermodular. □

El recíproco, en general, no es cierto. Hay juegos casisupermodulares para los cuales existen coaliciones de cardinal mayor o igual que 2 con dividendos negativos. Basta tomar el juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L} = 2^{\{1,2,3\}}$ y la función característica viene dada por $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$, $v(\{2,3\}) = 5$ y $v(\{1,2,3\}) = 6$. Este juego es casisupermodular y sin embargo $\triangle_v(N) = -1$.

Haciendo uso de la expresión de los dividendos para las coaliciones de $\mathcal{L}$, se pueden establecer condiciones sobre $\mathcal{L}$ que aseguran que todo juego casisupermodular es casipositivo.

**Proposición 3.33** *Sean $\mathcal{L}$ es una geometría convexa y $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Para cada $S \in \mathcal{L}$, se verifica*

$$\triangle_v(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L} : S \setminus ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

**Demostración:** Al ser los juegos de unanimidad $\{\zeta_T : T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}$ una base de $\Gamma(\mathcal{L})$, se verifica

$$v = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \neq \emptyset\}} \triangle_v(T) \zeta_T,$$

y, para cualquier $S \in \mathcal{L}$, se tiene

$$v(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq S\}} \triangle_v(T).$$

Dado que $(\mathcal{L}, \subseteq)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado, y considerando las funciones $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\triangle_v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, se puede aplicar la fórmula de inversión de Möbius. Entonces, para todo $S \in \mathcal{L}$,

$$v(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq S\}} \triangle_v(T) \Longleftrightarrow \triangle_v(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L}, T \subseteq S\}} \mu(T,S) v(T)$$

Al ser $\mathcal{L}$ una geometría convexa, la función de Möbius [21, Teorema 4.3] viene dada por

$$\mu(T,S) = \begin{cases} (-1)^{|S|-|T|} & \text{si } S \setminus T \subseteq ex(S), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $T \subseteq S$, entonces $S \setminus T \subseteq ex(S)$ si y sólo si $S \setminus ex(S) \subseteq T$. Por tanto,

$$\triangle_v(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L} : S \setminus ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

□

**Proposición 3.34** *Sea $\mathcal{L}$ es una geometría convexa atómica verificando que $|ex(S)| = 2$, para toda coalición $S \in \mathcal{L}$ con $|S| \geq 2$. Entonces, todo juego casisupermodular $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es casipositivo.*

**Demostración:** Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ casisupermodular y sea $S \in \mathcal{L}$ con $|S| \geq 2$. Si $ex(S) = \{i_1, i_2\}$, entonces

$$\begin{aligned}\triangle_v(S) &= \sum_{\{T \in \mathcal{L}: S \setminus \{i_1,i_2\} \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T) \\ &= v(S) - v(S \setminus \{i_1\}) - v(S \setminus \{i_2\}) + v(S \setminus \{i_1, i_2\}) \geq 0\end{aligned}$$

por la casisupermodularidad del juego $v$. □

Como consecuencia inmediata de esta proposición y del Teorema 2.24, se deduce que para aquellas geometrías convexas en las que cualquier coalición no unitaria tenga dos extremales y que, además, sean familias intersectantes atómicas, los únicos juegos en los que el selectope coincide con el core son los juegos casisupermodulares. En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto esta observación.

**Ejemplo 3.35** *Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y considérese la geometría convexa*

$$Co(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

*Nótese que $|ex(S)| = 2$, para toda $S \in \mathcal{L}$ con $|S| \geq 2$. Además, la familia $\mathcal{L}$ es intersectante. Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ el juego casisupermodular dado por $v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 1$, $v(\{2,3\}) = 0$ y $v(\{1,2,3\}) = 3$.*

*Las selecciones para este juego vienen indicadas en la siguiente tabla:*

| $\alpha$ | $\{1,2\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ | $m_1^\alpha(v)$ | $m_2^\alpha(v)$ | $m_3^\alpha(v)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| 6 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 3 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| 8 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 10 | 2 | 2 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| 11 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 0 |
| 12 | 2 | 3 | 2 | 0 | 3 | 0 |

TABLA 3.2

*En este caso,* $Core\,(\mathcal{L}, v) = Sel\,(\mathcal{L}, v)$.

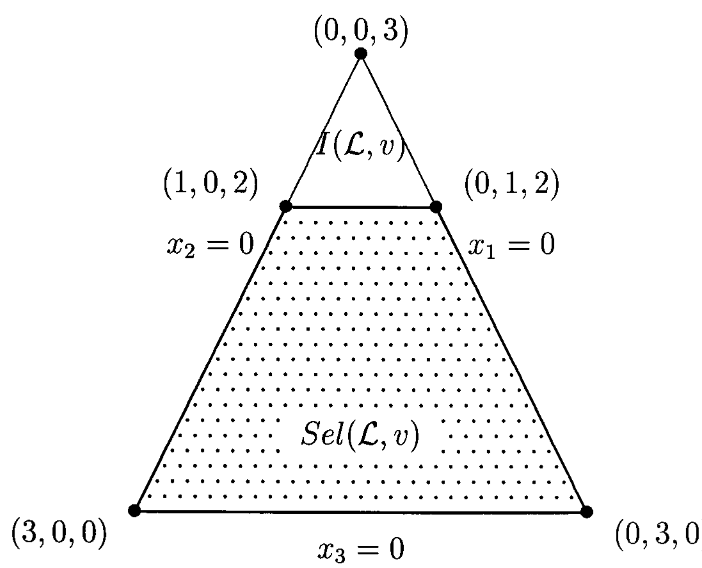


FIGURA 3.9

# Capítulo 4

# Valores sobre geometrías convexas

La primera parte de este capítulo se dedica a estudiar la valoración individual de las posibilidades de los jugadores de participar en un juego. Se definen los valores probabilísticos para juegos sobre geometrías convexas y se obtiene una caracterización de dichos valores. Dicha caracterización viene dada por una familia de axiomas que se van introduciendo secuencialmente con el fin de observar la repercusión, de cada uno de ellos, en la expresión del valor probabilístico.

La segunda parte se centra en el estudio de los valores de grupo. En un juego cooperativo se entiende que el valor $v(N)$ de la gran coalición se repartirá entre los jugadores. Cuando un valor de grupo cumple esta finalidad, se dice que verifica el axioma de eficiencia. Se mostrará la relación existente entre el hecho de que un valor de grupo sea eficiente y que sus componentes sean valores probabilísticos. Esto conducirá a definir los valores de orden compatible y a probar que son los valores de grupo eficientes cuyas componentes son valores probabilísticos. La familia de valores de orden compatible asocia un conjunto de preimputaciones a cada juego. El conjunto de preimputaciones asociadas al juego $v$ por los valores de orden compatible es precisamente su conjunto de Weber.

En la última sección se destaca en concreto un valor de orden compatible: el valor de Shapley para juegos sobre geometrías convexas. Del valor de Shapley se muestra una caracterización axiomática distinta a la obtenida por Edelman y Bilbao [7].

## 4.1 Valores individuales y valores de grupo

A lo largo de este capítulo, se considerará que la familia $\mathcal{L}$ de coaliciones factibles es una geometría convexa en el conjunto de jugadores $N$ y, en lo sucesivo, se omitirá esta circunstancia en el enunciado de los resultados para hacer más fluida su lectura.

Para cada jugador $i \in N$, un *valor* para $i$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ es una función

$$\Phi_i : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que asigna a cada juego $v$ definido sobre $\mathcal{L}$ un número real. El número $\Phi_i(v)$ asociado a un juego $v$ puede representar el valor que el juego $v$ tiene para el jugador (por ejemplo, la ganancia que obtendría el jugador $i$ en el juego $v$). De este modo, el valor individual $\Phi_i$ permite al jugador $i$ evaluar su participación en los diferentes juegos.

Un valor para el conjunto de jugadores o *valor de grupo* sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ es una función

$$\Phi : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

que asocia a cada juego $v$ un vector $(\Phi_1(v), \ldots, \Phi_n(v))$. Este vector representa el valor que tiene para cada jugador su participación en el juego $v$.

## 4.2 Valores probabilísticos

Los valores probabilísticos son valores individuales que tienen como finalidad que cada jugador calcule *a priori* sus posibilidades de participación en el juego; es decir, las expectativas que él tiene en los diferentes juegos en los que puede participar. Formalmente, su definición es como sigue.

**Definición 4.1** *Un valor $\Phi_i$ para el jugador $i$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ es un valor probabilístico, si existe una colección $\{p_S^i : S \in \mathcal{L}, i \in ex(S)\}$ de números reales no negativos, verificando $\sum_{\{S\in\mathcal{L}:i\in ex(S)\}} p_S^i = 1$, de modo que*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\,i\in ex(S)\}} p_S^i\,[v(S) - v(S\setminus i)]\,,$$

*para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.*

En lo que sigue, se utilizará esta formulación para los valores probabilísticos. No obstante, escribiendo $T = S \setminus i$ en la expresión anterior se obtiene

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{T\in\mathcal{L}\,:\,i\notin T,\,T\cup\{i\}\in\mathcal{L}\}} p_T^i\,[v(T\cup\{i\}) - v(T)]\,,$$

y todos los resultados posteriores se podrían reformular haciendo uso de esta expresión.

En la definición de valor probabilístico, se debe entender que el jugador $i$ estima su participación en el juego evaluando sus contribuciones marginales $v(S) - v(S\setminus i)$ en aquellas coaliciones factibles $S$ que se forman de otras cuando él entra a formar parte. Para cada $S \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex(S)$, $p_S^i$ es la probabilidad subjetiva que tiene el jugador $i$ de unirse a la coalición $S\setminus i$. Así, $\Phi_i(v)$ es el valor que el jugador $i$ puede esperar del juego $v$.

Con el objetivo de llegar a obtener una caracterización axiomática de los valores probabilísticos, seguidamente se partirá de un valor $\Phi_i$ para el jugador $i$, y se procederá a exigirle propiedades razonables. Por ejemplo, parece razonable que un jugador considere su ganancia de jugar el juego $v + w$ como la suma de las ganancias de jugar los juegos $v$ y $w$. Igualmente, si se considera el juego $cv$, el jugador debería esperar el cambio de escala correspondiente de sus ganancias en el juego $v$. Entonces, debido a estas consideraciones, si $\Phi_i$ es un valor para el jugador $i$, debe verificar el siguiente axioma.

*Axioma de linealidad*. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $v, w \in \Gamma(\mathcal{L})$ se verifica

$$\Phi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha\Phi_i(v) + \beta\Phi_i(w).$$

**Teorema 4.2** *Sea $\Phi_i$ un valor para el jugador $i$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$, tal que satisface el axioma de linealidad. Entonces, existe un único conjunto de números reales $\{a_S^i : S \in \mathcal{L},\ S \neq \emptyset\}$ de modo que*

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{L}} a_S^i v(S),$$

*para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.*

**Demostración:** Como la colección de juegos $\{\delta_S : S \in \mathcal{L},\ S \neq \emptyset\}$ es una base del espacio vectorial $\Gamma(\mathcal{L})$, y cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ verifica

$$v = \sum_{\{S \in \mathcal{L}, S \neq \emptyset\}} v(S)\delta_S,$$

entonces

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L}, S \neq \emptyset\}} \Phi_i(\delta_S)v(S),$$

utilizando la linealidad de $\Phi_i$. Por tanto, basta tomar $a_S^i = \Phi_i(\delta_S)$. □

Se introduce ahora el concepto de *jugador pasivo*, entendiéndose que un jugador es pasivo cuando su contribución a cada coalición que se forma por su incorporación a otra ya existente es exactamente el valor que él tiene en el juego.

**Definición 4.3** *Un jugador $i \in N$ es pasivo en el juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ si, para cada $T \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex\,(T)$, se verifica que*

$$v(T) - v(T \setminus i) = \begin{cases} v(\{i\}) & si\ \ \{i\} \in \mathcal{L}, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Nótese que también tendría sentido definir al jugador pasivo en un juego, como aquel jugador para el que todas las contribuciones marginales, a las diferentes coaliciones factibles que se formen con su incorporación, coinciden; es decir, un jugador $i \in N$ es pasivo en $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ si, para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex\,(S) \cap ex\,(T)$, se verifica que

$$v\,(T) - v\,(T \setminus i) = v\,(S) - v\,(S \setminus i)\,.$$

Se puede observar que ambas definiciones son equivalentes cuando el jugador $i$ participa individualmente en el juego, esto es, $\{i\} \in \mathcal{L}$.

Para probar resultados posteriores, se enuncian y demuestran previamente algunas propiedades de los jugadores pasivos en los juegos de unanimidad e identidad. En lo que sigue, y para simplificar la notación, se escribirá $S \cup i$ en lugar de $S \cup \{i\}$.

**Proposición 4.4** *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa y $S \in \mathcal{L}$ un convexo no vacío. Se verifica*

*(1) Si $i \notin ex(S)$, entonces $i$ es pasivo en el juego de unanimidad $\zeta_S$.*

*(2) Si $i \in S \setminus ex(S)$, entonces $i$ es pasivo en el juego de identidad $\delta_S$.*

*(3) Si $i \notin S$ y $S \cup i \notin \mathcal{L}$, entonces $i$ es pasivo en el juego de identidad $\delta_S$.*

*(4) Si $\{i\} \in \mathcal{L}$, entonces $i$ es pasivo en el juego de unanimidad $\zeta_{\{i\}}$.*

**Demostración:** Obsérvese, en primer lugar, que si $S \in \mathcal{L}$ es un convexo no vacío y el jugador $i$ es tal que $i \notin ex(S)$, entonces si $\{i\} \in \mathcal{L}$ se tiene que $S \neq \{i\}$ y, de aquí, $\zeta_S(\{i\}) = 0$ y $\delta_S(\{i\}) = 0$.

(1) Sea $i \notin ex(S)$. Si existiera una coalición $T \in \mathcal{L}$ con $i \in ex(T)$ y satisfaciendo $\zeta_S(T) \neq \zeta_S(T \setminus i)$, entonces, necesariamente, $\zeta_S(T) = 1$ y $\zeta_S(T \setminus i) = 0$. De aquí, $S \subseteq T$ , $S \nsubseteq T \setminus i$ y, por tanto, $i \in S$. Además, $S \setminus i = S \cap (T \setminus i)$ con lo cual $S \setminus i \in \mathcal{L}$ y esto está en contradicción con $i \notin ex(S)$.

(2) Sea $i \in S \setminus ex(S)$. Para cada $T \in \mathcal{L}$, con $i \in ex(T)$, se tiene que $T \neq S$ y $T \setminus i \neq S$; por tanto, $\delta_S(T) = \delta_S(T \setminus i) = 0$.

(3) Sea $i \notin S$ y $S \cup i \notin \mathcal{L}$. Si $T \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex(T)$, es inmediato que $\delta_S(T) = \delta_S(T \setminus i) = 0$.

(4) Sea $\{i\} \in \mathcal{L}$. En este caso, si $T \in \mathcal{L}$, con $i \in ex(T)$, se verifica que $\zeta_{\{i\}}(T) = 1$ y $\zeta_{\{i\}}(T \setminus i) = 0$. Además, $\zeta_{\{i\}}(\{i\}) = 1$. □

Denominar a un jugador $i$ como jugador pasivo en un juego $v$ es considerar que este jugador no tiene ningún papel estratégico en el juego, ya que sus contribuciones a las coaliciones factibles que se formen con su incorporación coinciden. Por tanto, el valor que debe esperar este jugador en el juego $v$ deberá ser exactamente su contribución. Esta consideración permite justificar la introducción del siguiente axioma.

*Axioma del jugador pasivo*. Si el jugador $i \in N$ es pasivo en $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, entonces

$$\Phi_i(v) = \begin{cases} v(\{i\}) & \text{si } \{i\} \in \mathcal{L}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el siguiente resultado se puede observar que añadiendo al axioma de linealidad el axioma de jugador pasivo, la función de valor para el jugador $i$

se expresa como una combinación lineal de las contribuciones de éste.

**Teorema 4.5** *Sea $\Phi_i$ un valor para el jugador $i$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ definido, para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, por $\Phi_i(v) = \sum_{S\in\mathcal{L}} a_S^i v(S)$, y satisfaciendo el axioma del jugador pasivo. Entonces,*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\,i\in ex(S)\}} a_S^i \left[v(S) - v(S\setminus i)\right].$$

*Además, si $\{i\} \in \mathcal{L}$ entonces* $\sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\,i\in ex(S)\}} a_S^i = 1.$

**Demostración:** Sea $E_i : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}$ un operador definido por

$$E_i(v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\,i\in ex(S)\}} a_S^i \left[v(S) - v(S\setminus i)\right],$$

para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.

Dado que los operadores $E_i$ y $\Phi_i$ son lineales y los juegos de unanimidad forman una base de $\Gamma(\mathcal{L})$, bastará demostrar que $\Phi_i(\zeta_T) = E_i(\zeta_T)$, para cada coalición no vacía $T \in \mathcal{L}$. Considerando $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$, se distinguen dos casos:

1. Si $i \notin ex(T)$, por la proposición anterior, $i$ es pasivo en el juego $\zeta_T$. Entonces, se verifica que $\zeta_T(S) - \zeta_T(S\setminus i) = 0$, para todo $S \in \mathcal{L}$ con $i \in ex(S)$, al ser $\zeta_T(\{i\}) = 0$, aún cuando $\{i\} \in \mathcal{L}$. Por tanto, por definición de $E_i$, se tendría que $E_i(\zeta_T) = 0$ y, además, por el axioma del jugador pasivo, se tiene que $\Phi_i(\zeta_T) = 0$.

2. Si $i \in ex(T)$, entonces $i \in T$ y, de aquí, $\zeta_T(S\setminus i) = 0$, para cada $S \in \mathcal{L}$ con $i \in ex(S)$. Se obtiene así la equivalencia siguiente

$$\zeta_T(S) - \zeta_T(S\setminus i) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad S \supseteq T.$$

Por estas consideraciones,

$$E_i(\zeta_T) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\,i\in ex(S),\, S\supseteq T\}} a_S^i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\{S\in\mathcal{L}:\, i\in ex(S),\, S\supseteq T\}} \Phi_i(\delta_S) \\
&= \Phi_i\left(\sum_{\{S\in\mathcal{L}\,,S\supseteq T\}} \delta_S\right) \\
&= \Phi_i(\zeta_T),
\end{aligned}
$$

donde, aplicando el axioma de jugador pasivo, se ha utilizado que $\Phi_i(\delta_S) = 0$, cuando $i \in S \setminus ex(S)$.

Finalmente, si $\{i\} \in \mathcal{L}$ entonces el jugador $i$ es un jugador pasivo en el juego $\zeta_{\{i\}}$. Así, como $\Phi_i$ satisface el axioma del jugador pasivo, de su expresión se sigue que

$$\sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\, i\in ex(S)\}} a_S^i = \Phi_i(\zeta_{\{i\}}) = \zeta_{\{i\}}(\{i\}) = 1.$$

□

Si $i \in N$ no es un elemento de la geometría convexa $\mathcal{L}$, entonces se puede comprobar que el juego de unanimidad $\zeta_{\overline{\{i\}}} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, viene definido por

$$\zeta_{\overline{\{i\}}}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i \in T, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y, en dicho juego, el jugador $i$ no es pasivo. De aquí que, si para ese jugador $i$ se tiene un valor $\Phi_i$ que cumpla las hipótesis del teorema anterior, entonces

$$\sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\, i\in ex(S)\}} a_S^i = \Phi_i\left(\zeta_{\overline{\{i\}}}\right),$$

y, de ahí, que se obtenga el siguiente resultado.

**Teorema 4.6** *Sea $\Phi_i$ un valor para el jugador i sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ que satisface los axiomas de linealidad y jugador pasivo. Entonces, existe una colección de números reales $\{a_S^i : S \in \mathcal{L},\ i \in ex(S)\}$ tal que*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\,:\, i\in ex(S)\}} a_S^i \left[v(S) - v(S \setminus i)\right],$$

*para todo* $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. *Además, si* $\Phi_i\left(\zeta_{\overline{\{i\}}}\right) = 1$ *entonces* $\sum_{\{S \in \mathcal{L}:\, i \in ex(S)\}} a_S^i = 1.$

Si se supone que un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es monótono, es decir, el valor de cada coalición es menor o igual que el valor de cualquier otra que la contenga, entonces la repercusión de cada jugador a cualquier coalición nunca es desfavorable. De aquí, que el jugador espere ser valorado no negativamente en cada juego monótono.

*Axioma de monotonía*. Si $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es un juego monótono, entonces $\Phi_i(v) \geq 0$.

Introducir este nuevo axioma en las hipótesis del teorema anterior, permitirá afirmar que los coeficientes $a_S^i$ son no negativos.

**Teorema 4.7** *Sea* $\Phi_i$ *un valor para el jugador* $i$ *sobre* $\Gamma(\mathcal{L})$ *definido, para todo juego* $v$, *por*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L}\,:\, i \in ex(S)\}} a_S^i \left[v(S) - v(S \setminus i)\right].$$

*Si el valor* $\Phi_i$ *satisface el axioma de monotonía, entonces* $a_S^i \geq 0$, *para todo* $S \in \mathcal{L}$ *tal que* $i \in ex(S)$.

**Demostración:** Para cada $T \in \mathcal{L}$, se considera el juego

$$\widehat{\zeta}_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subset S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El juego $\widehat{\zeta}_T$ es monótono; de aquí, $\Phi_i\left(\widehat{\zeta}_T\right) \geq 0$. Por otro lado, para cada $R \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex\,(R)$, se obtiene

$$\Phi_i\left(\widehat{\zeta}_{R\setminus i}\right) = \sum_{\{S \in \mathcal{L}\,:\, i \in ex(S)\}} a_S^i \left[\widehat{\zeta}_{R\setminus i}(S) - \widehat{\zeta}_{R\setminus i}(S \setminus i)\right] = a_R^i,$$

y entonces $a_R^i \geq 0$, para todo $R \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex(R)$. $\square$

Es fácil comprobar que cada valor probabilístico satisface los axiomas previos. Por tanto, se puede dar una caracterización de valor probabilístico para un jugador $i$ que resulta de la combinación de los resultados anteriores.

**Teorema 4.8** *Sea $\Phi_i$ un valor para el jugador $i$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$. Si $\{i\} \in \mathcal{L}$, entonces $\Phi_i$ es un valor probabilístico si y sólo si $\Phi_i$ satisface los axiomas de linealidad, jugador pasivo y monotonía.*

**Teorema 4.9** *Sea $\Phi_i$ un valor para el jugador $i$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$. Entonces, $\Phi_i$ es un valor probabilístico si y sólo si $\Phi_i$ satisface los axiomas de linealidad, jugador pasivo, monotonía y $\Phi_i\left(\zeta_{\overline{\{i\}}}\right) = 1$.*

## 4.3 Valores eficientes

En esta sección, se estudian aquellos valores de grupo

$$\Phi : \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(v) = (\Phi_1(v), \ldots, \Phi_n(v)),$$

que proporcionan una distribución del valor de la gran coalición entre los jugadores. Desde esta perspectiva, $\Phi$ debe satisfacer el axioma siguiente:

*Axioma de eficiencia.* Para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se verifica

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N).$$

**Teorema 4.10** *Sea $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ que satisface el axioma de eficiencia. Entonces, si su componente $\Phi_i$ cumple los axiomas de linealidad, jugador pasivo y monotonía, $\Phi_i$ es un valor probabilístico.*

**Demostración:** Por el Teorema 4.9, es suficiente probar que $\Phi_i\left(\zeta_{\overline{\{i\}}}\right) = 1$. Nótese que se verifica $ex\left(\overline{\{i\}}\right) = \{i\}$ ya que, en una geometría convexa, se tiene $ex\left(\overline{\{i\}}\right) \neq \emptyset$ y, además, si existiera algún $j \in ex\left(\overline{\{i\}}\right)$, con $j \neq i$, entonces $\overline{\{i\}} \setminus j \in \mathcal{L}$. Se obtendría así que $i \in \overline{\{i\}} \setminus j$ y, de aquí, $\overline{\{i\}} \subseteq \overline{\{i\}} \setminus j$, lo cual es una contradicción.

De la Proposición 4.4 se sigue que, para cada $j$ distinto de $i$, se satisface $\Phi_j\left(\zeta_{\overline{\{i\}}}\right) = 0$, ya que $j \notin ex\left(\overline{\{i\}}\right)$. Por tanto, el axioma de eficiencia implica que

$$\sum_{j \in N} \Phi_j\left(\zeta_{\overline{\{i\}}}\right) = \Phi_i\left(\zeta_{\overline{\{i\}}}\right) = 1.$$

□

El siguiente teorema caracteriza a los valores de grupo que son eficientes.

**Teorema 4.11** *Sea $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ definido, para cada juego $v$ y para todo $i \in N$, por*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} \,:\, i \in ex(S)\}} a_S^i \left[v(S) - v(S \setminus i)\right].$$

*Entonces, el valor $\Phi$ satisface el axioma de eficiencia si y sólo si*

$$\sum_{i \in ex(N)} a_N^i = 1, \quad y \quad \sum_{i \in ex(S)} a_S^i = \sum_{\{j \notin S \,:\, S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j, \quad \forall S \in \mathcal{L}, \quad S \neq \emptyset, N.$$

**Demostración:** Para cada $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ se tiene

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \sum_{i \in N} \sum_{\{S \in \mathcal{L} \,:\, i \in ex(S)\}} a_S^i \left[v(S) - v(S \setminus i)\right].$$

Obsérvese que, en la expresión anterior, aparecen los valores del juego $v$ sobre todas las coaliciones no vacías de $\mathcal{L}$, ya que toda coalición no vacía tiene algún punto extremal. Por ello, dicha expresión se puede escribir como una combinación lineal de los valores $v(S)$, para toda coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$. Se tiene que

$$\sum_{i\in N}\Phi_i(v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L},S\neq\emptyset,N\}} v(S)\left[\sum_{i\in ex(S)} a^i_S - \sum_{\{j\notin S\,:\,S\cup j\in\mathcal{L}\}} a^j_{S\cup j}\right] + v(N)\sum_{i\in ex(N)} a^i_N.$$

Si los coeficientes satisfacen las relaciones del enunciado del teorema, entonces $\sum_{i\in N}\Phi_i(v) = v(N)$ y, por tanto, $\Phi$ satisface el axioma de eficiencia.

Recíprocamente, fijado un conjunto convexo no vacío $T \in \mathcal{L}$, y aplicando la anterior igualdad al juego identidad $\delta_T$, resulta

$$\sum_{i\in N}\Phi_i(\delta_T) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in ex(N)} a^i_N & \text{si } T = N, \\ \displaystyle\sum_{i\in ex(T)} a^i_T - \sum_{\{j\notin T\,:\,T\cup j\in\mathcal{L}\}} a^j_{T\cup j} & \text{si } T \neq N. \end{cases}$$

Así, si $\Phi$ satisface el axioma de eficiencia, se verifican las relaciones del enunciado para los coeficientes. □

Obsérvese que en el caso de que la geometría convexa $\mathcal{L}$ esté constituida por una única cadena maximal $C$, cada jugador $i$ es extremal en una sola coalición de $\mathcal{L}$. Ésta será precisamente el convexo más pequeño de la cadena que lo contiene, denotado por $C(i)$. Así se tendría

$$\Phi_i(v) = v(C(i)) - v(C(i)\setminus i),$$

y, como se puede observar, este valor corresponde a la $i$-ésima coordenada del vector de contribución marginal $a^C(v)$ asociado a la cadena maximal $C$.

## 4.4 Valores de orden compatible

La caracterización dada en la sección anterior para los valores de grupo eficientes establece que, aún cuando los jugadores tengan distintas percepciones de su participación en las diferentes coaliciones, pueden lograr conjuntamente ser eficientes.

A continuación, se van a considerar valores de grupo que resultan de una percepción común para todos los jugadores. Se supone que todos ellos estiman que la gran coalición $N$ se forma mediante un proceso secuencial en el que en cada paso se incorpora un jugador diferente. Estos procesos secuenciales quedan reflejados al considerar las distintas cadenas maximales de la geometría convexa $\mathcal{L}$.

**Definición 4.12** *Un valor de orden compatible sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ es un valor de grupo $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$, tal que existe una colección de números no negativos $\{p_C : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$ verificando $\sum_{C\in\mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C = 1$, de modo que*

$$\Psi_i(v) = \sum_{C\in\mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C \left[v\left(C(i)\right) - v\left(C(i) \setminus i\right)\right],$$

*para todo $i \in N$ y para todo $v \in \Gamma(\mathcal{L})$.*

Un valor de orden compatible es un valor de grupo en el que cada jugador considera sus contribuciones marginales en los diferentes procesos de formación de la gran coalición. Además, todos los jugadores tienen un mismo punto de vista de la probabilidad de dichos procesos.

La relación entre valores de orden compatible y valores probabilísticos que satisfacen el axioma de eficiencia se pone de manifiesto en los teoremas siguientes.

**Teorema 4.13** *Sea* $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ *un valor de orden compatible sobre* $\Gamma(\mathcal{L})$*. Entonces,* $\Psi$ *satisface el axioma de eficiencia y cada componente de* $\Psi$ *es un valor probabilístico.*

**Demostración:** Sea $\{p_C : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$ la colección de constantes asociada a $\Psi$ de modo que, para cada $i \in N$ y $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se tiene

$$\Psi_i(v) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C \left[ v\left(C(i)\right) - v\left(C(i) \setminus i\right) \right].$$

Puesto que al variar $C$ en $\mathcal{C}(\mathcal{L})$, los convexos $C(i)$ determinan todas las coaliciones de $\mathcal{L}$ que tienen a $i$ como extremal, se puede escribir

$$\Psi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \left( \sum_{\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) = S\}} p_C \right) \left[ v(S) - v(S \setminus i) \right].$$

Así, para cada $i \in N$, y todo $S \in \mathcal{L}$ con $i \in ex(S)$, y llamando

$$p_S^i = \sum_{\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) = S\}} p_C,$$

se tiene que $p_S^i \geq 0$ y, además,

$$\sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} p_S^i = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C = 1,$$

ya que, fijado $i$, en la expresión

$$\sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \left( \sum_{\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) = S\}} p_C \right)$$

lo que se hace es examinar todos los convexos $S$ que tienen al jugador $i$ como punto extremal y, para cada $S$, aquellas cadenas donde $C(i) = S$. Al variar $S$, se toman cadenas diferentes y se llega a considerar todas las cadenas de $\mathcal{L}$, ya que en todas ellas hay una única coalición que tiene a $i$ como extremal.

Ello prueba que $\Psi_i$ es un valor probabilístico. Además, para cada juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, se verifica

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} \Psi_i(v) &= \sum_{i \in N} \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C \left[ v\left(C(i)\right) - v\left(C(i) \setminus i\right) \right] \\
&= \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C \left( \sum_{i \in N} \left[ v\left(C(i)\right) - v\left(C(i) \setminus i\right) \right] \right) \\
&= \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C \left[ v(N) - v(\emptyset) \right] \\
&= v(N).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 4.14** *Sea $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ un valor de grupo sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ que satisface el axioma de eficiencia y tal que cada componente de $\Phi$ es un valor probabilístico. Entonces, $\Phi$ es un valor de orden compatible.*

**Demostración:** Por hipótesis, para cada componente de $\Phi$, se tiene

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} \,:\, i \in ex(S)\}} p_S^i \left[ v(S) - v(S \setminus i) \right].$$

Para cada $T \in \mathcal{L}$, $i \notin T$ tal que $T \cup i \in \mathcal{L}$, se define

$$A(i,T) = \begin{cases} \dfrac{p^i_{T \cup i}}{\displaystyle\sum_{\{j \notin T:\, T \cup j \in \mathcal{L}\}} p^j_{T \cup j}} & \text{si el denominador es distinto de } 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que, en esta expresión, se está considerando un cociente entre la probabilidad asignada por el jugador a su unión a la coalición $T$ y la suma de las probabilidades de unión a dicha coalición, de todos los jugadores que puedan formar coalición con $T$.

Para cada cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ asociada a un orden compatible $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$; es decir,

$$C : \emptyset \subset C(i_1) \subset C(i_2) \subset \cdots \subset C(i_n),$$

se define

$$p_C = p^{i_1}_{\{i_1\}} A(i_2, \{i_1\})\ A(i_3, \{i_1, i_2\}) \cdots A(i_n, \{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}),$$

donde se escribirá $C = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Notése que el último factor es igual a 1. La colección $\{p_C : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$ satisface, además de ser $p_C \geq 0$, que

$$\begin{aligned}
\sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C &= \sum_{\{i_1 : \{i_1\} \in \mathcal{L}\}} \sum_{\{i_2 \notin \{i_1\} : \{i_1, i_2\} \in \mathcal{L}\}} \cdots \sum_{\{i_n : i_n \notin \{i_1, \ldots, i_{n-1}\}\}} p_{(i_1, \ldots, i_n)} \\
&= \sum_{\{i_1 : \{i_1\} \in \mathcal{L}\}} p^{i_1}_{\{i_1\}} \\
&= \sum_{i \in N} \Phi_i\left(\widehat{\zeta}_\emptyset\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del axioma de eficiencia aplicado al juego $\widehat{\zeta}_\emptyset$, definido por $\widehat{\zeta}_\emptyset(S) = 1$, para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$. De aquí $\{p_C : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$ es una distribución de probabilidad en $\mathcal{C}(\mathcal{L})$. Sea $\Psi$ el valor de orden compatible asociado a esta distribución de probabilibidad; esto es,

$$\Psi_i(v) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C \left[v(C(i)) - v(C(i) \setminus i)\right],$$

para todo $i \in N$ y para cada $v \in \Gamma(\mathcal{L})$. Como

$$\Psi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} \left( \sum_{\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) = S\}} p_C \right) \left[v(S) - v(S \setminus i)\right],$$

para todo $i \in N$, se tiene que $\Phi_i = \Psi_i$ si, para cada $S \in \mathcal{L}$ tal que $i \in ex(S)$, los coeficientes satisfacen

$$p^i_S = \sum_{\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) = S\}} p_C.$$

Se escribirá $C_1 = (i_1, \ldots, i_{s-1})$, con $s = |S|$, cada cadena $C_1 \in \mathcal{C}([\emptyset, S \setminus i])$ y $C_2 = (i_{s+1}, \ldots, i_n)$ cada cadena $C_2 \in \mathcal{C}([S, N])$. Estas cadenas pueden ser concatenadas con $i$ para obtener una cadena maximal en $\mathcal{L}$,

$$C = (i_1, \ldots, i_{s-1}, i, i_{s+1}, \ldots, i_n).$$

Entonces, se obtiene

$$\sum_{\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) = S\}} p_C$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_{s-1} \in ex(S \setminus i)} \sum_{i_{s-2} \in ex(S \setminus \{i, i_{s-1}\})} \cdots \sum_{i_1 \in ex(S \setminus \{i, i_{s-1}, \ldots, i_2\})} \sum_{\{i_{s+1} \notin S : S \cup i_{s+1} \in \mathcal{L}\}} \cdots \\
&\qquad \sum_{\{i_n \notin S \cup \{i_{s+1}, \ldots, i_{n-1}\} : S \cup \{i_{s+1}, \ldots, i_n\} \in \mathcal{L}\}} p_{(i_1, \ldots, i_{s-1}, i, i_{s+1}, \ldots, i_n)} \\
&= A(i, S \setminus i) \sum_{i_{s-1} \in ex(S \setminus i)} A(i_{s-1}, S \setminus \{i, i_{s-1}\}) \cdots \\
&\qquad \sum_{i_1 \in ex(S \setminus \{i, i_{s-1}, \ldots, i_2\})} p^{i_1}_{\{i_1\}} \cdot \sum_{\{i_{s+1} \notin S : S \cup i_{s+1} \in \mathcal{L}\}} A(i_{s+1}, S) \cdots \\
&\qquad \sum_{\{i_n \notin S \cup \{i_{s+1}, \ldots, i_{n-1}\} : S \cup \{i_{s+1}, \ldots, i_n\} \in \mathcal{L}\}} A(i_n, S \cup \{i_{s+1}, \ldots, i_{n-1}\}).
\end{aligned}$$

Los primeros $s$ factores satisfacen

$$\begin{aligned}
&\frac{p^i_S}{\sum_{\{j \notin S \setminus i :\, (S \setminus i) \cup j \in \mathcal{L}\}} p^j_{(S \setminus i) \cup j}} \\
&\cdot \sum_{i_{s-1} \in ex(S \setminus i)} \left( \frac{p^{i_{s-1}}_{S \setminus i}}{\sum_{\{j \notin S \setminus \{i, i_{s-1}\} :\, (S \setminus \{i, i_{s-1}\}) \cup j \in \mathcal{L}\}} p^j_{(S \setminus \{i, i_{s-1}\}) \cup j}} \right) \\
&\cdots \sum_{i_1 \in ex(S \setminus \{i, i_{s-1}, \ldots, i_2\})} p^{i_1}_{\{i_1\}} = p^i_S,
\end{aligned}$$

ya que, por las ecuaciones del Teorema 4.11, el denominador de un factor es igual al numerador del siguiente. Además, a partir del factor $s+1$ en adelante, todos son iguales a 1. En efecto, escribiendo $T_k = S \cup \{i_{s+1}, \ldots, i_k\}$,

$$\sum_{\{i_k \notin T_{k-1} : T_{k-1} \cup i_k \in \mathcal{L}\}} A(i_k, T_{k-1}) = \sum_{\{i_k \notin T_{k-1} : T_{k-1} \cup i_k \in \mathcal{L}\}} \left( \frac{p^{i_k}_{T_{k-1} \cup i_k}}{\sum_{\{j \notin T_{k-1} : T_{k-1} \cup j \in \mathcal{L}\}} p^{j}_{T_{k-1} \cup j}} \right)$$

e igual a 1. Por tanto, la expresión es igual a $p^i_S$. □

La familia de valores de orden compatible asocia un conjunto de preimputaciones a cada juego. Recuérdese que, para cualquier juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$, y cualquier cadena maximal $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, el vector de contribución marginal asociado a la cadena $C$ venía definido por $a^C(v) = v(C(i)) - v(C(i) \setminus i)$, para todo $i \in N$. Por tanto, al ser el conjunto de Weber del juego $v$ la envoltura convexa de estos vectores, se puede afirmar que el conjunto $Weber(\mathcal{L}, v)$ es el conjunto de las preimputaciones asociadas al juego $v$ por la familia de valores de orden compatible.

## 4.5 Valor de Shapley

La clásica caracterización del valor de Shapley [56] para juegos cooperativos, afirma que éste es el único valor de grupo $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ sobre $\Gamma(2^N)$ cuyas componentes satisfacen los siguientes axiomas:

1. *Axioma del soporte*. Si $U \in 2^N$ es un soporte de $v \in \Gamma(2^N)$; es decir, $v(S) = v(S \cap U)$, para toda $S \subseteq N$, entonces

$$\sum_{i \in U} \Phi_i(v) = v(U).$$

2. Axioma de simetría. Para cada permutación $\pi$ del conjunto de jugadores $N$,

$$\Phi_{\pi i}(\pi v) = \Phi_i(v),$$

donde $\pi v$ es el juego definido por $\pi v(\pi S) = v(S)$, para toda $S \subseteq N$.

3. Axioma de linealidad. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, w \in \Gamma\left(2^N\right)$ se verifica

$$\Phi_i(\alpha u + \beta w) = \alpha \Phi_i(u) + \beta \Phi_i(w).$$

Para el retículo distributivo $\mathcal{L} = J(P)$ de todos los ideales de orden de un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, Faigle y Kern [25] definen el concepto de *poder jerárquico* de un jugador $i$ en la coalición $S \in \mathcal{L}$ tal que $i \in S$, como

$$h_S(i) = \frac{|\{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L}) : C(i) \cap S = S\}|}{|\mathcal{C}(\mathcal{L})|},$$

es decir, $h_S(i)$ es el promedio de órdenes compatibles de $\mathcal{L}$ en los que el jugador $i$ es el último miembro de $S$ en el orden. Nótese que $h_S(i) \neq 0$ si y sólo si $i \in ex(S)$. Faigle y Kern proponen el siguiente axioma para juegos definidos sobre el retículo distributivo $\mathcal{L} = J(P)$.

Axioma del poder jerárquico. Para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$ y para cualesquiera $i, j \in S$,

$$h_S(i)\, \Phi_j(\zeta_S) = h_S(j)\, \Phi_i(\zeta_S).$$

Faigle y Kern [25, Teoremas 1 y 2] probaron la siguiente extensión del valor de Shapley a un juego $v : J(P) \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Teorema 4.15** *Existe un único valor de grupo $\Phi : \Gamma(J(P)) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cuyas componentes verifican los axiomas de linealidad, soporte y poder jerárquico. Además, para cada $i \in P$,*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{T \in J(P) : i \in Max(T)\}} \frac{e(T \setminus i)\, e(P \setminus T)}{e(P)} [v(T) - v(T \setminus i)],$$

*donde $e(\cdot)$ es el número de extensiones lineales de los correspondientes subconjuntos parcialmente ordenados de $(P, \leq)$.*

Bilbao y Edelman [9] generalizan esta fórmula del valor de Shapley para juegos sobre geometrías convexas. En este contexto, el número de extensiones lineales es el número de cadenas maximales de $\mathcal{L}$.

Para cualesquiera $T, S \in \mathcal{L}$, $T \subset S$, se denotará por $c([T, S])$ el número de cadenas maximales de $T$ a $S$. Además, $c([\emptyset, S])$ se escribirá, de forma abreviada, como $c(S)$ y así, $c(N)$ es el número total de cadenas maximales.

**Definición 4.16** *Sea $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ un juego sobre la geometría convexa $\mathcal{L}$. El valor de Shapley, para el jugador $i \in N$ y el juego $v$, está dado por*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L}: i \in ex(S)\}} \frac{c(S \setminus i)\, c([S, N])}{c(N)} [v(S) - v(S \setminus i)],$$

*donde $c([N, N]) = c(\emptyset) = 1$.*

Los resultados de las secciones precedentes permiten obtener una nueva caracterización axiomática del valor de Shapley para juegos sobre geometrías convexas. Obsérvese que si a un valor de grupo eficiente se le exige que sus componentes verifiquen los axiomas de linealidad y jugador pasivo, sus componentes no están determinadas de forma única y, estas componentes, podrían ser o no valores probabilísticos. Sin embargo, el siguiente axioma conduce a un único valor de grupo que es el valor de Shapley. En este nuevo axioma, el valor del jugador depende de la posición que ocupa en la estructura de la geometría convexa.

*Axioma de la cadena*. Para cada coalición no vacía $S \in \mathcal{L}$ y cualesquiera $i, j \in ex(S)$,

$$c(S \setminus i)\Phi_j(\delta_S) = c(S \setminus j)\Phi_i(\delta_S).$$

En geometrías convexas, el valor de Shapley queda caracterizado por cuatro axiomas. Tres de ellos aparecen en la caracterización clásica de valor de Shapley cuando cualquier coalición se considera factible. El axioma de la cadena es el que sustituye al clásico axioma de simetría.

**Teorema 4.17** *El valor de Shapley es el único valor de grupo $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ sobre $\Gamma(\mathcal{L})$ eficiente y cuyas componentes $\Phi_i$ satisfacen los axiomas de linealidad, jugador pasivo y de la cadena.*

**Demostración:** Es evidente que el valor de Shapley satisface todas las propiedades. Recíprocamente, se sigue de los Teoremas 4.6 y 4.11 que, para cada $i \in N$, existe una colección $\{a_S^i : \; S \in \mathcal{L}, \; i \in ex(S)\}$ tal que

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in ex(S)\}} a_S^i \left[ v(S) - v(S \setminus i) \right],$$

y los coeficientes satisfacen

$$\begin{aligned} \sum_{i \in ex(N)} a_N^i &= 1, \\ \sum_{i \in ex(S)} a_S^i &= \sum_{\{j \notin S : S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j, \quad \text{para toda } S \in \mathcal{L}, \quad S \neq \emptyset, N. \end{aligned}$$

Por tanto, es suficiente probar que

$$a_S^i = \frac{c(S \setminus i)\; c([S, N])}{c(N)}, \quad \text{para toda } \; S \in \mathcal{L} \;, \; i \in ex(S).$$

Nótese que los coeficientes son $a_S^i = \Phi_i(\delta_S)$ y, por tanto, el axioma de la cadena implica que $a_S^j c(S \setminus i) = a_S^i c(S \setminus j)$ para todo $i, j \in ex(S)$. Fijado $i \in ex(S)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j \in ex(S)} a_S^j &= a_S^i + \sum_{\{j \in ex(S) : j \neq i\}} \frac{c(S \setminus j)}{c(S \setminus i)} a_S^i \\ &= \frac{a_S^i}{c(S \setminus i)} \sum_{j \in ex(S)} c(S \setminus j) \\ &= a_S^i \frac{c(S)}{c(S \setminus i)}. \end{aligned}$$

Haciendo $S = N$ en la expresión anterior, y utilizando las relaciones que verifican los coeficientes, se tiene

$$c(N \setminus i) = a_N^i \, c(N), \quad \text{para cada } i \in ex(N).$$

Así,

$$a_N^i = \frac{c(N \setminus i) \, c([N, N])}{c(N)}, \quad \text{para todo } i \in ex(N).$$

Se supone la siguiente hipótesis de inducción: Para cada $T \in \mathcal{L}$, con $|T| = k \geq 2$, se verifica

$$a_T^i = \frac{c(T \setminus i) \, c([T, N])}{c(N)}, \quad \text{para todo } i \in ex(T).$$

El caso $k = n$; esto es, $T = N$ ya ha sido probado. Sea $S \in \mathcal{L}$, tal que $|S| = k - 1 < n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in ex(S)} a_S^i &= \sum_{\{j \notin S \,:\, S \cup j \in \mathcal{L}\}} a_{S \cup j}^j \\
&= \sum_{\{j \notin S \,:\, S \cup j \in \mathcal{L}\}} \frac{c(S) \, c([S \cup j, N])}{c(N)} \\
&= \frac{c(S)}{c(N)} \sum_{\{j \notin S \,:\, S \cup j \in \mathcal{L}\}} c([S \cup j, N]) \\
&= \frac{c(S) \, c([S, N])}{c(N)},
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue de la hipótesis de inducción para $T = S \cup j$.

Finalmente, para cada $i \in ex(S)$, la identidad

$$a_S^i \frac{c(S)}{c(S \setminus i)} = \frac{c(S) \, c([S, N])}{c(N)}$$

implica

$$a_S^i = \frac{c(S \setminus i) \, c([S, N])}{c(N)}.$$

□

Obsérvese que, tomando $p_C = 1/c(N)$, para toda $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, la distribución $\{p_C : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$ es una distribución de probabilidad y, el valor de orden compatible $\Psi$ asociado a esta distribución es, precisamente, el valor de Shapley. Esto conduce a la conclusión de que el valor de Shapley para un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es siempre un elemento de su conjunto de Weber.

# Capítulo 5

# Juegos simples

En este capítulo se estudian los distintos conceptos de solución ya definidos en capítulos anteriores para una interesante clase particular de juegos: los *juegos simples.* Este tipo de juegos surge, por ejemplo, al modelar situaciones de votación en las que el resultado refleja dos posibilidades (ganar-perder, aprobar-rechazar, etc.) y han sido objeto de estudios específicos como los iniciales de Isbell [36] y Shapley [58]; los de Rafels y Marin-Solano [42], y Einy y Wettstein [23] que tienen una incidencia particular en este capítulo; y el de Carreras [15] al estudiar los juegos simples restringidos por un grafo de cooperación.

## 5.1 Preliminares

Se supondrá, en todo lo que sigue, que $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ es una familia de coaliciones factibles cualquiera tal que $\emptyset, N \in \mathcal{L}$. Sólo en determinadas ocasiones se exigirán otros requisitos a dicha familia.

**Definición 5.1** *Un juego $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ es simple si satisface las dos condiciones siguientes:*

*(1) Para cada coalición* $S \in \mathcal{L}$, $v(S) \in \{0,1\}$ *y* $v(N) = 1$.

*(2) Para cualesquiera* $S, T \in \mathcal{L}$ *con* $S \subseteq T$, *se tiene* $v(S) \leq v(T)$.

Se denotará por $\Omega(\mathcal{L})$ la clase de todos los juegos simples definidos sobre la familia $\mathcal{L}$.

En un juego simple, una coalición $S \in \mathcal{L}$ es *ganadora* si $v(S) = 1$; en otro caso, es *perdedora*. Una coalición ganadora $S$ es *minimal* si es ganadora, y no existe ninguna coalición contenida en $S$ que sea ganadora. Se denotará por $\mathcal{W}$ al conjunto de las coaliciones ganadoras minimales. Dicho conjunto es no vacío y, en general, se escribirá $\mathcal{W} = \{S_1, \ldots, S_r\}$ con $r \geq 1$. Obsérvese que todo juego simple está totalmente caracterizado por sus coaliciones ganadoras minimales. Si un juego tiene una única coalición ganadora minimal, esto es, $\mathcal{W} = \{S_1\}$, se tiene que $v$ es el juego de unanimidad $\zeta_{S_1}$.

Hay cierta clase de jugadores que, en los juegos simples, desempeñan un papel muy importante, y son los llamados jugadores veto. Un jugador $i \in N$ es un *jugador veto* en el juego $v$ si pertenece a cada coalición ganadora $S \in \mathcal{L}$, es decir,

$$v(S) = 1 \Longrightarrow i \in S.$$

Se denotará por $\mathcal{V}$ el conjunto de jugadores veto en el juego $v \in \Omega(\mathcal{L})$; esto es,

$$\mathcal{V} = \bigcap_{\{S \in \mathcal{L} \,:\, v(S)=1\}} S.$$

Si existen $\{i\}, \{j\} \in \mathcal{L}$, $i \neq j$ tales que $v(\{i\}) = v(\{j\}) = 1$, entonces $\mathcal{V} = \emptyset$. Esto quiere decir que no hay jugadores veto en todos los juegos simples. Por ello, para distinguir entre los juegos simples que tienen jugadores veto, y los que no los tienen, se introduce la siguiente definición. Un juego simple se llama *débil* si tiene al menos un jugador veto; esto es, $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Se tiene entonces que cualquier juego de unanimidad $\zeta_T$ es débil y los jugadores veto son los miembros de la coalición $T$.

En la siguiente proposición se prueba que, en la clase de juegos simples sobre espacios de clausura, el conjunto de juegos supermodulares es el conjunto de juegos de unanimidad. Este resultado es la clave para la demostración de algunos teoremas de las dos últimas secciones de este capítulo.

**Proposición 5.2** *Si $\mathcal{L}$ es un espacio de clausura y $v \in \Omega(\mathcal{L})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(a) El juego $v$ es supermodular.*

*(b) El juego $v$ es un juego de unanimidad.*

*Además, cuando la familia $\mathcal{L}$ es una geometría convexa, entonces las afirmaciones (a) y (b) son equivalentes a*

*(c) El juego $v$ es casisupermodular.*

**Demostración:** En primer lugar, se demuestra que si $v$ es un juego de unanimidad, entonces $v$ es supermodular. En efecto, considérese el juego de unanimidad $\zeta_T$, para alguna coalición $T \in \mathcal{L}$ no vacía, y dos coaliciones $A, B \in \mathcal{L}$. Se pueden distinguir tres situaciones:

1. Si se verifica $A \supseteq T$ y $B \supseteq T$, entonces

$$\zeta_T(A) = 1, \ \zeta_T(B) = 1, \ \zeta_T\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 \text{ y } \zeta_T(A \cap B) = 1.$$

2. Si se verifica que $A \supseteq T$ y $B \not\supseteq T$, entonces

$$\zeta_T(A) = 1, \ \zeta_T(B) = 0, \ \zeta_T\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 \text{ y } \zeta_T(A \cap B) = 0.$$

3. Si se verifica que $A \not\supseteq T$ y $B \not\supseteq T$, entonces

$$\zeta_T(A) = 0, \ \zeta_T(B) = 0, \ \zeta_T\left(\overline{A \cup B}\right) \geq 0 \text{ y } \zeta_T(A \cap B) = 0.$$

Por tanto, en cualquier caso, se verifica la condición de supermodularidad. Recíprocamente, sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego supermodular y sea $T \in \mathcal{L}$ tal que

$$|T| = \min\{|S| : v(S) = 1\} = \alpha.$$

Esta coalición $T$ es única ya que si hay dos coaliciones $A, T \in \mathcal{L}$, $A \neq T$ que satisfacen $v(T) = v(A) = 1$ y $|T| = |A| = \alpha$, entonces, como

$$v(T) + v(A) \leq v\left(\overline{T \cup A}\right) + v(T \cap A),$$

se llega a $v(T \cap A) = 1$. Esto contradice la elección de $T$.

Ahora, utilizando dicha coalición $T$, para cualquier otra $A \in \mathcal{L}$ tal que $A \not\supseteq T$, como se verifica que

$$v(A) + v(T) \leq v\left(\overline{A \cup T}\right) + v(A \cap T) = 1,$$

se deduce que $v(A) = 0$. Así, el juego $v$ es el juego de unanimidad correspondiente a la coalición $T$; esto es, $v = \zeta_T$.

Para finalizar la demostración, sólo hay que tener en cuenta que cuando el juego está definido sobre una geometría convexa la equivalencia entre $(a)$ y $(c)$ para juegos monótonos está probada en el Teorema 3.22. □

La equivalencia de $(a)$ y $(b)$ con la afirmación $(c)$ no es cierta si $\mathcal{L}$ no es una geometría convexa. Para comprobar esto, basta considerar $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, N\}$ y el juego $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene como coaliciones ganadoras minimales a $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Este juego es casisupermodular y no es de unanimidad.

## 5.2 Imputaciones y core

A lo largo de esta sección, se supondrá que la familia $\mathcal{L}$ de coaliciones factibles es atómica. Si se denota por $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es inmediato comprobar que para el conjunto de imputaciones $I(\mathcal{L}, v)$ de un juego $v \in \Omega(\mathcal{L})$ hay tres posibilidades:

1. $I(\mathcal{L}, v) = \emptyset$, si hay dos coaliciones ganadoras de cardinal uno.

2. $I(\mathcal{L}, v) = \{e_k\}$, si existe $k \in N$, con $v(\{k\}) = 1$, y $v(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N$, $i \neq k$.

3. $I(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_n\}$, si $v(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N$.

Por consiguiente, el conjunto de imputaciones es un conjunto amplio cuando ninguna coalición ganadora minimal es unitaria.

El core de un juego simple está completamente determinado por los jugadores veto. Como, en general,

$$Core(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), \quad x(S) \geq v(S) \text{ para toda } S \in \mathcal{L}\},$$

se puede observar que, cuando $v \in \Omega(\mathcal{L})$, hay ciertas desigualdades en la definición del core que son redundantes. En concreto, lo son las desigualdades correspondientes a coaliciones no unitarias que sean o bien perdedoras o bien ganadoras no minimales. En efecto, los vectores del core deben verificar las desigualdades $x_i \geq 0$, para todo $i \in N$, por lo que las restricciones correspondientes a coaliciones perdedoras no unitarias son redundantes. Además, si $S \in \mathcal{L}$ es ganadora pero no minimal, existe una coalición $S^*$ ganadora minimal tal que $S^* \subset S$. En este caso, se tendría

$$x(S) \geq x(S^*) \geq v(S^*) = v(S).$$

Luego la condición $x(S) \geq v(S)$ es consecuencia de $x(S^*) \geq v(S^*)$ y, por tanto, es redundante. A la vista de estas observaciones, se puede concluir que

$$Core(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \ x(N) = x(S) = 1 \text{ para todo } S \in \mathcal{W}\}.$$

**Teorema 5.3** *Sea* $v \in \Omega(\mathcal{L})$ *un juego simple sobre una familia atómica. Una condición necesaria y suficiente para que* $Core(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$ *es que el juego* $v$ *sea débil. Además,*

$$Core(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0,\ x(N) = x(\mathcal{V}) = 1\},$$

*donde* $\mathcal{V}$ *es el conjunto de jugadores veto de* $v$.

**Demostración:** *Condición suficiente.* Si $v$ es débil, entonces $\mathcal{V} \neq \emptyset$ y así existe $i \in \mathcal{V}$. Para este $i$, se considera el correspondiente vector $e_i$ de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Se tiene entonces que $e_i(N) = 1 = v(N)$ y $e_i(S) = v(S)$ para todo $S \in \mathcal{W}$ y, por tanto, $e_i \in Core(\mathcal{L}, v)$.

*Condición necesaria.* Se construye la matriz $A = (a_{ij})$ de orden $r \times n$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in S_i, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $S_1, \ldots, S_r$ son las coaliciones ganadoras minimales en el juego $v$. Entonces, $Core(\mathcal{L}, v)$ es el conjunto de vectores que verifican

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \quad 1 \leq i \leq r, \qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Si dicho conjunto es no vacío, debe tener un elemento $x \neq 0$. Entonces, si $\mathcal{V} = \emptyset$, cada columna de la matriz $A$ tendría al menos una entrada igual a 0 y, sumando todas las ecuaciones correspondientes a las filas de $Ax$, se obtendría

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = |\mathcal{W}|, \ \text{ con } \alpha_j < |\mathcal{W}| \ \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Por tanto, $(|\mathcal{W}| - \alpha_1) x_1 + \cdots + (|\mathcal{W}| - \alpha_n) x_n = 0$ y, esto, es una contradicción por ser $x_j \geq 0$, para $1 \leq j \leq n$, y algún $x_k > 0$, con $1 \leq k \leq n$. Luego, el juego es débil.

Finalmente, nótese que si $v$ es débil y se toma $i \notin \mathcal{V}$, entonces $x_i = 0$ para todo vector del core, y así $Core(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0,\ x(N) = x(\mathcal{V}) = 1\}$.

□

El teorema anterior generaliza y precisa un resultado análogo de Curiel [16] y permite identificar los vértices del poliedro $Core\,(\mathcal{L}, v)$. Como consecuencia de ello, es inmediata la siguiente proposición.

**Proposición 5.4** *Para todo juego débil $v \in \Omega(\mathcal{L})$ sobre una familia atómica, se tiene*

$$Core\,(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\{e_i : i \in \mathcal{V}\},$$

*siendo $\mathcal{V}$ el conjunto de jugadores veto de $v$.*

Aunque en esta sección se han considerado juegos simples sobre familias atómicas, se puede comprobar también que todo juego débil sobre una familia cualquiera de coaliciones factibles tiene core no vacío. Sin embargo, al considerar juegos débiles sobre familias no atómicas, la Proposición 5.4 no se verifica en general. En efecto, considerando $N = \{1, 2, 3\}$, la familia $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ y el juego de unanimidad $\zeta_{\{1,2\}}$, se tiene que su core ni siquiera está acotado.

Por otro lado, si la familia no es atómica, puede suceder que el core de un juego simple sea no vacío sin que éste sea débil. Este hecho se puede observar cuando se toma $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ y el juego simple $v$ cuyas coaliciones ganadoras minimales son $\{1, 2\}$ y $\{3\}$, ya que $(1/2, 1/2, 1, -1, 0) \in Core\,(\mathcal{L}, v)$ y $v$ no es débil.

## 5.3 El conjunto de Weber

Al considerar en esta sección el conjunto de Weber, es necesario exigir, en lo que sigue, que la familia de coaliciones factibles $\mathcal{L}$ sea una geometría convexa en $N$, no necesariamente atómica.

En primer lugar, se probará que el conjunto de Weber es un conjunto convexo cuyos vértices están determinados por los jugadores que al unirse a una coalición perdedora la convierten en ganadora.

**Proposición 5.5** *Si $v \in \Omega(\mathcal{L})$ es un juego simple sobre una geometría convexa, entonces*

$$Weber(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\left\{ e_i \,:\, i \in \bigcup_{l=1}^{r} ex(S_l) \right\},$$

*donde $\{S_1, \ldots, S_r\}$ es el conjunto de coaliciones ganadoras minimales de $v$.*

**Demostración:** Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal y sea $a^C(v) \in \mathbb{R}^n$ el vector de contribución marginal correspondiente a esta cadena. Para todo $i \in N$ se tiene que $a_i^C(v) = v(C(i)) - v(C(i) \setminus i) \in \{0,1\}$ ya que $v$ es un juego monótono y, además, $a^C(v)$ es eficiente y por tanto $\sum_{i \in N} a_i^C(v) = 1$. Entonces, el vector $a^C(v) \in \mathbb{R}^n$ tiene sólo una de sus componentes igual a 1 y el resto de ellas son iguales a 0. Si se supone que la componente $j$ es igual a 1, es decir, $v(C(j)) = 1$ y $v(C(j) \setminus j) = 0$, entonces $a^C(v) = e_j$.

Por otra parte, $C(j)$ es una coalición ganadora y, por tanto, existe una coalición ganadora minimal $S_k$ tal que $S_k \subseteq C(j)$. Nótese que $j \in S_k$, ya que en otro caso se tendría $S_k \subseteq C(j) \setminus j$ y, así, $C(j) \setminus j$ sería una coalición ganadora, lo cual no es posible ya que $v(C(j) \setminus j) = 0$. Además, $j \in ex(S_k)$ puesto que $S_k \setminus j = (C(j) \setminus j) \cap S_k \in \mathcal{L}$. Por tanto, ya se ha probado que $Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq \operatorname{conv}\{e_i : i \in \bigcup_{l=1}^{r} ex(S_l)\}$, al ser el conjunto de Weber la envoltura convexa de los vectores de contribución marginal.

Para probar la inclusión contraria, sea $i \in \bigcup_{l=1}^{r} ex(S_l)$. Entonces, existe una coalición ganadora minimal $S_l$ tal que $i \in ex(S_l)$. Si $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ es una cadena maximal tal que $S_l = C(i)$, resulta que, para esta cadena, se tendría la igualdad $a^C(v) = e_i$. □

Obsérvese que si $\mathcal{L} = 2^N$, entonces

$$Weber\,(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\left\{ e_i \,:\, i \in \bigcup_{l=1}^{r} S_l \right\},$$

y contiene al core. Sin embargo, cuando no se trabaja en dicha geometría convexa no siempre se verifica esta inclusión para juegos simples. En efecto, si $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{L} = Co(\{1, 2, 3, 4\})$, y es $v : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ el juego simple cuya única coalición ganadora minimal es $\{1, 2, 3\}$, se tiene que

$$Core\,(\mathcal{L}, v) = conv\,\{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{y} \quad Weber\,(\mathcal{L}, v) = conv\,\{e_1, e_3\}\,.$$

El siguiente resultado muestra que cualquier distribución eficiente que satisfaga el principio de individualidad racional y verifique el axioma del jugador pasivo (véase pág. 96) es un elemento del conjunto de Weber.

**Teorema 5.6** *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa atómica y $v \in \Omega\,(\mathcal{L})$. Si $J \subseteq I\,(\mathcal{L}, v)$ y las componentes de las distribuciones $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $J$ satisfacen el axioma del jugador pasivo, entonces $J \subseteq Weber\,(\mathcal{L}, v)$. El recíproco es cierto cuando $I\,(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$.*

**Demostración:** Si $I\,(\mathcal{L}, v) = \{e_i\}$ el resultado se sigue fácilmente. Así, se puede suponer que $I\,(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\,\{e_1, \ldots, e_n\}$; es decir, no hay coaliciones ganadoras de cardinal uno y, por tanto, $v\,(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$.

Si $x \in J$, entonces $x$ es una imputación y, así, $x \in \text{conv}\,\{e_1, \ldots, e_n\}$; es decir,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, e_i,$$

con $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ y $\mu_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Por el teorema anterior, probar que $x \in Weber\,(\mathcal{L}, v)$ equivale a demostrar que $\mu_k = 0$ cuando $k$ no sea extremal para ninguna coalición ganadora minimal. Por ello, sea $k \in N \setminus \bigcup_{j=1}^{r} ex\,(S_j)$. Como el juego $v$ es monótono, se tiene que $v(S) - v(S \setminus k) \geq 0$, para todo $S \in \mathcal{L}$ con $k \in ex(S)$. Además, en este caso, se puede afirmar $v(S) - v(S \setminus k) = 0$. En efecto, si fuese $v(S) - v(S \setminus k) = 1$, entonces necesariamente $v(S) = 1$ y $v(S \setminus k) = 0$ y, de aquí, existiría una coalición ganadora minimal $S_j \subseteq S$ con $k \in S_j$, ya que si $S_j \subseteq S \setminus k$ se obtendría $v(S \setminus k) = 1$, lo cual no es posible. Por tanto, $k$ es un jugador pasivo en el juego $v$ y, así, $\mu_k = x_k = v(\{k\}) = 0$.

Recíprocamente, sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple tal que $I(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$ y sea $J \subseteq Weber(\mathcal{L}, v)$. Como $Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq I(\mathcal{L}, v)$, se verifica $J \subseteq I(\mathcal{L}, v)$. Además, si $k \in N$ es un jugador pasivo en $v$ y $x \in J$, entonces, para algún $S \in \mathcal{L}$ con $k \in ex(S)$, $x_k = v(S) - v(S \setminus k)$ porque $x \in Weber(\mathcal{L}, v)$. Por tanto, $x_k = v(\{k\})$. □

## 5.4 Conjuntos estables

En el capítulo segundo, ya se introdujo la noción de dominancia y el concepto de conjunto estable. En esta sección, se estudiarán algunos resultados relativos a la estabilidad para juegos simples $v \in \Omega(\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L}$ es una familia atómica.

Se mostrará, en primer lugar, que todo juego simple cuyo conjunto de imputaciones sea no vacío tiene al menos un conjunto estable.

**Teorema 5.7** *Todo juego simple $v \in \Omega(\mathcal{L})$ sobre una familia atómica, tiene al menos un conjunto estable.*

**Demostración:** Al ser $\mathcal{L}$ atómica y el conjunto de imputaciones no vacío, sólo caben dos posibilidades para $I(\mathcal{L}, v)$. Cuando el conjunto de imputaciones se reduce a un vector, es inmediato deducir que $I(\mathcal{L}, v)$ es el único conjunto estable del juego. Por ello, supóngase $I(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_1, \ldots, e_n\}$. En este caso, se comprobará que, para cada coalición ganadora minimal $S$ en

$v$, el conjunto formado por las imputaciones que reparten la unidad entre los jugadores de $S$ es un conjunto estable. Si se denota por $E_S$ dicho conjunto; esto es,

$$E_S = \left\{ (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in S} \alpha_i = 1, \alpha_j = 0 \text{ para todo } j \notin S \right\},$$

se tienen las siguientes propiedades:

i) *Estabilidad interna.* Dados $x, y \in E_S$, no se verifica $x$ *dom* $y$. Ello es debido a que, caso de verificarse, existiría una coalición no vacía $T \in \mathcal{L}$, tal que

$$x_i > y_i \quad \text{para todo } i \in T, \qquad \sum_{j \in T} x_j \leq v(T).$$

Estas dos condiciones sólo se pueden verificar si $T \subset S$ y $v(T) = 1$, ya que $x, y \in E_S$. Pero esto es imposible por ser $S$ una coalición ganadora minimal.

ii) *Estabilidad externa.* Si $x \in I(\mathcal{L}, v) \setminus E_S$, entonces existe $y \in E_S$ tal que $y$ *dom* $x$. En efecto, teniendo en cuenta que $v(S) - x(S) > 0$, basta considerar el vector $y$ de componentes

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin S, \\ x_i + \dfrac{v(S) - x(S)}{\mid S \mid} & \text{si } i \in S. \end{cases}$$

□

El siguiente resultado indica que los juegos de unanimidad son los únicos juegos simples para los que el core es un conjunto estable.

**Teorema 5.8** *Sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple sobre una geometría convexa atómica. Entonces, $Core(\mathcal{L}, v)$ es estable si, y sólo si, el juego $v$ es un juego de unanimidad.*

**Demostración:** Si $Core(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable, entonces debe ser no vacío y, además, $Core(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\left\{ e_i \mid i \in \bigcap_{j=1}^r S_j \right\}$. Sea $\{S_1, \ldots, S_r\}$ el conjunto de coaliciones ganadoras minimales con $|S_1| \leq |S_2| \leq \ldots \leq |S_r|$. Considérense dos casos:

1. Si $|S_1| = 1$ o $|S_1| = n$, entonces $v = \zeta_{S_1}$.

2. Sea $1 < |S_1| < n$, y supóngase que $Weber(\mathcal{L}, v) \nsubseteq Core(\mathcal{L}, v)$. Entonces, existe $k \in \bigcup_{j=1}^{r} ex(S_j) \setminus \bigcap_{j=1}^{r} S_j$ y, así, $e_k \notin Core(\mathcal{L}, v)$. Como $Core(\mathcal{L}, v)$ es un conjunto estable , existe $x \in Core(\mathcal{L}, v)$ tal que $x \operatorname{dom} e_k$ usando una coalición $T \in \mathcal{L}$. Por ser $x(T) = v(T)$, $x_i > 0$ para todo $i \in T$, $i \neq k$, y $x_k > 1$ si $k \in T$, debe ser $v(T) = 1$ y $k \notin T$. Así, existe una coalición ganadora minimal $S_{j^*} \in \mathcal{L}$ tal que $S_{j^*} \subseteq T$ y $x(S_{j^*}) = v(S_{j^*}) = 1$. Por tanto, $x_i > 0$ para todo $i \in S_{j^*}$ y como $x(N \setminus S_{j^*}) = 0$, esto implica que $x(S_p \setminus S_{j^*}) = 0$ para toda coalición ganadora miminal $S_p \in \mathcal{L}$, $S_p \neq S_{j^*}$. Sin embargo, como $x \in Core(\mathcal{L}, v)$, se tiene que $v(S_p) = 1$ y, de aquí, $x(S_p \cap S_{j^*}) = 1$, para toda coalición ganadora minimal $S_p \in \mathcal{L}$. Entonces, tiene que ser $S_{j^*} \subseteq \bigcap_{j=1}^{r} S_j$. Si no fuese así, existiría una coalición ganadora minimal $S_p \in \mathcal{L}$ tal que $S_{j^*} \nsubseteq S_p$ y se tendría que

$$x(N) = x(S_{j^*} \cap S_p) + x(S_{j^*} \setminus S_p) + \ldots > 1.$$

Ahora bien, esto es imposible. Por tanto, $\bigcap_{j=1}^{r} S_j = S_{j^*}$ y, así, $v = \zeta_{j^*}$.

Se prueba ahora el recíproco. Sea $v = \zeta_T$ un juego de unanimidad. Cuando $|T| = 1$ o $|T| = n$, $Core(\mathcal{L}, v) = I(\mathcal{L}, v)$ y, por tanto, es estable. En otro caso, $Core(\mathcal{L}, v) \neq I(\mathcal{L}, v)$ y, para cada $x \in I(\mathcal{L}, v) \setminus Core(\mathcal{L}, v)$ se puede tomar $y \in Core(\mathcal{L}, v)$,

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin T, \\ x_i + \dfrac{1 - x(T)}{|T|} & \text{si } i \in T, \end{cases}$$

tal que $y \operatorname{dom} x$ usando la coalición $T$. Así, el core del juego $v$ es un conjunto estable. $\square$

**Ejemplo 5.9** *Considérese* $N = \{1,2,3\}$ *y el juego* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, *dado por*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & si \mid S \mid \geq 2, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

*Entonces,* $I(2^N, v) = conv\{e_1, e_2, e_3\}$ *y* $Core(2^N, v) = \emptyset$.

*Además, (ver Driessen [20]), hay una infinidad de conjuntos estables. Cualquier conjunto formado por imputaciones que asignen un valor constante* $c$ *a un jugador* $i$, *y determinen todos los posibles repartos del valor* $1-c$ *entre los otros dos jugadores, son conjuntos estables. Cada uno de estos conjuntos estables contienen infinidad de imputaciones; además el siguiente conjunto finito también es estable*

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

*En este ejemplo se observa con claridad que cada conjunto estable puede entenderse como un modelo de comportamiento, por el cual se eligen las imputaciones. Además, sugiere que cada conjunto estable delimita formas de reparto sobre las que los jugadores deben negociar, o bien indica un juego más pequeño entre las coaliciones.*

*Si se considera, ahora, la familia* $\mathcal{L} = Co(\{1,2,3\})$ *y el juego* $v \in \Omega(\mathcal{L})$, *definido por*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & si \mid S \mid \geq 2, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

*Tiene interés observar cuales son sus conjuntos estables y comparar con el caso de* $\mathcal{L} = 2^N$. *Teniendo en cuenta que los conjuntos* $E_S$, *con* $S \in \mathcal{W}$, *son estables, en este caso, permanecen como conjuntos estables*

$$E_{\{1,2\}} = conv\{e_1, e_2\}, \quad E_{\{2,3\}} = conv\{e_2, e_3\}.$$

*Sin embargo, ninguno de los otros conjuntos estables del caso* $\mathcal{L} = 2^N$ *lo son ahora. Además, se puede observar que, aunque el core es no vacío, éste no ofrece soluciones razonables al juego, ni tampoco es un conjunto estable.*

## 5.5 Conjuntos de negociación

Aunque existen en la literatura varios conceptos de conjuntos de negociación, se considerarán, en el contexto de juegos simples, sólo tres de ellos, y se mostrarán algunos resultados que los relacionan con el core y el conjunto de Weber.

Los diferentes conceptos de solución, denominados conjuntos de negociación, tienen en común el estudiar cómo repartir las ganancias de la cooperación (se supone ya decidida esta cooperación) teniendo en cuenta los procesos de negociación que se pueden establecer entre las diferentes coaliciones. Esto es, se tiene presente que ciertos jugadores pueden ofrecer pactos a otros con el fin de conseguir repartos más ventajosos, y que a su vez a estos pactos se pueden contraponer otros que los hagan peligrar.

Se considerará que la familia de coaliciones factibles $\mathcal{L}$ es un espacio de clausura atómico en $N$. Uno de los tres diferentes conjuntos de negociación que se van a considerar es el conjunto de negociación de Aumann y Maschler ya definido en el capítulo segundo. Recuérdese que su definición exigía que el conjunto de imputaciones fuese no vacío.

**Ejemplo 5.10** *Considérese el juego $v \in \Gamma\left(2^N\right)$ definido en el ejemplo 5.9. Para este juego, se tenía $I(2^N, v) = conv\{e_1, e_2, e_3\}$ y $Core(2^N, v) = \emptyset$. De esta forma, caso de que esté decida la cooperación entre los jugadores, ¿cómo se repartirán éstos el valor de la gran coalición $v(N) = 1$? El core, en este caso, no determina ninguna forma de reparto. Además, parece lógico pensar que cualquier imputación no sea aceptada como reparto por todos los jugadores. Por ejemplo, la imputación $(1,0,0)$ no debe satisfacer a los jugadores 2 y 3, puesto que en el juego su coalición está valorada por 1. Por otro lado, teniendo en cuenta la simetría del papel de los jugadores en dicho juego, sería razonable esperar que el reparto que se adopte los trate a todos por igual; esto es, que sea $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En este caso, $\mathcal{B}(\mathcal{L}, v) = \left\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right\}$.*

*Para comprobar esta afirmación, basta observar que cualquier jugador $i$ puede objetar contra cualquier otro $j$ con respecto a dicha imputación usando la coalición que él forma con el restante jugador $k$. Sin embargo, cualquier objeción presentada tiene contraobjeción por parte del jugador $j$ utilizando la coalición $\{j,k\}$.*

Obsérvese ahora que cuando el conjunto de imputaciones de un juego es vacío, entonces también el conjunto de negociación de Aumman y Maschler es vacío. Esto sucede, por ejemplo, en el caso del juego $v : 2^{\{1,2,3\}} \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \emptyset, \{3\}, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En casos como éste, en los que también el conjunto de imputaciones es vacío, ¿cómo se debe hacer el reparto cuando los jugadores han decidido formar la gran coalición? Se verá que los siguientes conjuntos de negociación sí pueden ofrecer soluciones.

- *El conjunto de negociación de Mas-Colell (1989) [43].*

Considérese el conjunto $X(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) = v(N)\}$, y sea $x \in X(\mathcal{L}, v)$. Una *objeción* a $x$ *en el sentido de Mas-Colell* es un par $(y, S)$ con $y \in \mathbb{R}_+^n$, $S \in \mathcal{L}$ verificando

$y(S) \leq v(S)$,
$y_k \geq x_k$ para cada $k \in S$, con al menos una desigualdad estricta.

Una *contraobjeción* contra el par $(y, S)$ es un par $(z, T)$, donde $z \in \mathbb{R}_+^n$, $T \in \mathcal{L}$, verificando

$z(T) \leq v(T)$,
$z_k \geq y_k$ para cada $k \in T \cap S$, $z_k \geq x_k$ para cada $k \in T \setminus S$, donde al menos una de estas desigualdades es estricta.

El *conjunto de negociación de Mas-Colell* del juego $v$, $\mathcal{MB}(\mathcal{L}, v)$, es el formado por los vectores $x \in X(\mathcal{L}, v)$ para los que toda objeción a $x$ tiene contraobjeción en el sentido de Mas-Colell.

- *El conjunto de negociación de Greenberg (1992) [29].*

Considérese el conjunto $X^*(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x(N) \leq v(N)\}$, y sea $x \in X^*(\mathcal{L}, v)$. Una *objeción a $x$ en el sentido de Greenberg* es un par $(y, S)$ con $y \in \mathbb{R}_+^n$, $S \in \mathcal{L}$, verificando

$$\begin{aligned} &y(S) = v(S), \\ &y_k > x_k \quad \text{para todo } k \in S, \\ &y_k = x_k \quad \text{para todo } k \in N \setminus S. \end{aligned}$$

Una *contraobjeción* contra el par $(y, S)$ es un par $(z, T)$, donde $z \in \mathbb{R}_+^n$, $T \in \mathcal{L}$, verificando

$$\begin{aligned} &z(T) = v(T), \\ &z_k > y_k \quad \text{para } k \in T, \\ &z_k = x_k \quad \text{para } k \in N \setminus T. \end{aligned}$$

El *conjunto de negociación modificado*, $\mathcal{MBS}(\mathcal{L}, v)$, consta de todos los vectores $x \in X^*(\mathcal{L}, v)$ para los cuales toda objeción a $x$ tiene contraobjeción en el sentido de Greenberg.

Obsérvese que los dos conjuntos de negociación introducidos ahora también contienen al core del juego.

Se puede comprobar que, para el último ejemplo, se tiene que el vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ pertenece a los dos últimos conjuntos de negociación. Además, dicho vector se puede considerar un reparto razonable ya que, en este caso, se puede entender que el jugador 3 no aporta nada a las coaliciones en las que participa, y sin embargo, los jugadores 1 y 2 desempeñan el mismo papel en el juego.

Los tres conjuntos de negociación introducidos contienen al core ya que, con estas definiciones, a los vectores del core no se les puede poner objeciones.

A continuación, se estudian diversas clases de juegos simples en los que dichos conjuntos coinciden con el core.

**Teorema 5.11** *Sean $\mathcal{L}$ un espacio de clausura atómico y $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple débil. Entonces*

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}, v) = \mathcal{MB}(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v).$$

**Demostración:** Si $\mathcal{V}$ es el conjunto de jugadores veto, se tiene, por el Teorema 5.3,

$$Core(\mathcal{L}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0,\ x(N) = x(\mathcal{V}) = 1\}.$$

Primero, se probará que $\mathcal{B}(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v)$. Puesto que una inclusión es evidente, sea $x \in \mathcal{B}(\mathcal{L}, v) \setminus Core(\mathcal{L}, v)$. Entonces, $x(\mathcal{V}) < 1$ y, de aquí, $\mathcal{V} \neq N$. Por tanto, existe $i \in N \setminus \mathcal{V}$ tal que $x_i > 0$ ya que $x(N) = 1$. Si $j \in \mathcal{V}$, entonces $j$ puede objetar contra $i$ en $x$. En efecto, sea $S \in \mathcal{L}$ una coalición ganadora tal que $j \in S$ y $i \notin S$, entonces $x(S) < 1$. Sea $y = (y_k)_{k \in S}$ definido por

$$y_k = x_k + \frac{1 - x(S)}{|S|}, \text{ para todo } k \in S.$$

Este vector $y$ satisface que $y(S) = v(S)$ y, además, $y_k > x_k$ para cada $k \in S$. Por tanto $(y, S)$ es un objeción de $j$ contra $i$ en $x$. Si existiera una contraobjeción $(z, T)$ a $(y, S)$, entonces $z(T) = v(T)$, $v(T) = 0$ con $i \in T$, y por tanto $z_i = 0$. Pero esto es una contradicción ya que $z_i \geq x_i > 0$.

Se verá que $\mathcal{MB}(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v)$. Si $x \in \mathcal{MB}(\mathcal{L}, v) \setminus Core(\mathcal{L}, v)$, entonces $x(\mathcal{V}) < 1$ y, de aquí, $\mathcal{V} \neq N$. Por tanto, existe $i \in N \setminus \mathcal{V}$ tal que $x_i > 0$ y $x(N \setminus i) < 1$. Sea $T \in \mathcal{L}$ una coalición ganadora tal que $x(T) = \min\{x(S) : v(S) = 1\}$. Entonces $x(T) < 1$. Se define $y \in \mathbb{R}^n_+$ por

$$y_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{1 - x(T)}{|\mathcal{V}|} & \text{si } i \in \mathcal{V}, \\ x_i & \text{si } i \in N \setminus \mathcal{V}. \end{cases}$$

Así $y_i > x_i$ para cada $i \in \mathcal{V}$ y además

$$y(T) = x(\mathcal{V}) + 1 - x(T) + x(T \setminus \mathcal{V}) = 1 = v(T).$$

Por tanto $(y, T)$ es una objeción a $x$ en el sentido de Mas-Colell. Además $(y, T)$ está justificada. En otro caso, sea $(z, R)$ una contraobjeción a $(y, T)$. Entonces $z(R) \leq v(R) = 1$ y $z_i \geq y_i$ para cada $i \in R \cap T$ y $z_i \geq x_i$ para $i \in R \setminus T$ con al menos una desigualdad estricta. Por tanto,

$$\begin{aligned}
z(R) &= z(R \setminus T) + z(R \cap T) > x(R \setminus T) + y(R \cap T) \\
&= y(R \setminus T) + y(R \cap T) = y(R) \\
&= 1 + x(R) - x(T) \geq 1,
\end{aligned}$$

que es una contradicción. □

Este resultado anterior no es cierto si el juego $v \in \Omega(\mathcal{L})$ no es débil. Basta observar el ejemplo 5.10.

**Teorema 5.12** *Sean $\mathcal{L}$ una geometría convexa atómica y $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple débil. Entonces $\mathcal{MBS}(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v)$ si y sólo si $v$ es un juego de unanimidad.*

**Demostración:** Sea una coalición $T \in \mathcal{L}$ no vacía tal que $v = \zeta_T$ y sea $x \in \mathcal{MBS}(\mathcal{L}, v)$ tal que $x \notin Core(\mathcal{L}, v)$. Entonces $x(T) < 1$. Se define $y \in \mathbb{R}^n_+$ por

$$y_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{1 - x(T)}{|T|} & \text{si } i \in T, \\ x_i & \text{si } i \notin T. \end{cases}$$

Entonces $(y, T)$ es una objeción a $x$ en el sentido de Greenberg y además está justificada. En efecto, si $(z, S)$ es una objeción contra $(y, T)$, entonces $v(S) = 1$ y así $S \supset T$. Por tanto, $1 = z(S) > y(S) \geq y(T) = 1$, lo cual es imposible.

Para obtener el recíproco, se probará que $\mathcal{MBS}(\mathcal{L}, v) = Core(\mathcal{L}, v)$ implica que $v$ es un juego casisupermodular, ya que la Proposición 5.2 asegura que entonces $v$ es un juego de unanimidad. Razonando por reducción al absurdo, si $v$ no es casisupermodular (véase Teorema 3.20), entonces existe $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ una cadena maximal tal que $a^C(v) \notin Core(\mathcal{L}, v)$. Se tiene que $a_j^C(v) \in \{0, 1\}$ para todo $j \in N$. Además, $\sum_{i \in S} a_i^C(v) = v(S)$ para cada coalición $S$ de la cadena $C$ y de aquí $\sum_{i \in N} a_i^C(v) = 1$. Entonces, el vector $a^C(v) \in \mathbb{R}^n$ tiene todas sus componentes nulas salvo una y por tanto es igual a un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, si $\mathcal{V}$ es el conjunto de jugadores veto, entonces $\mathcal{V} \neq \emptyset, N$. El hecho de ser $\mathcal{V} \neq \emptyset$ es debido a que el juego es débil y el que $\mathcal{V} \neq N$ a que se supone $v \neq \zeta_N$. Además, $Core(\mathcal{L}, v) = \text{conv}\{e_j : j \in \mathcal{V}\}$. Por tanto, como $a^C(v) \notin Core(\mathcal{L}, v)$ entonces existe un $i \in N \setminus \mathcal{V}$ tal que $a^C(v) = e_i$. Como $a^C(v) \notin \mathcal{MBS}(\mathcal{L}, v)$, existe una objeción justificada $(x, S)$ a $a^C(v)$ en el sentido de Greenberg, donde $x \in \mathbb{R}^n$, $S \in \mathcal{L}$ y se verifica que $x \geq 0$, $x(S) = v(S)$, $x_k > a_k^C(v)$ para cada $k \in S$ y $x_k = a_k^C(v)$ para $k \in N \setminus S$. Por tanto, $x(S) = v(S) = 1$ y además $i \notin S$. Sea

$$A = \{G \in \mathcal{L} : i \notin G \text{ y existe } j \in S \text{ tal que } j \notin G\}.$$

Este conjunto es no vacío, y se pueden distinguir dos casos:

1. Existe $G \in A$ tal que $v(G) = 1$. En este caso

$$\begin{aligned} x(G) &= x(G \cap S) + x(G \cap (N \setminus S)) = x(G \cap S) \\ &= x(S) - x(S \setminus G) < 1. \end{aligned}$$

Se define $y \in \mathbb{R}^n$ por

$$y_k = \begin{cases} x_k + \dfrac{x(S \setminus G)}{|G|} & \text{si } k \in G, \\ x_k & \text{si } k \in N \setminus G, \end{cases}$$

entonces $y \geq 0$, $y_k > x_k$ para $k \in G$, $y_k = x_k$ para $k \in N \setminus G$, y además

$$y(G) = x(G) + x(S \setminus G) = x(S) = 1 = v(G).$$

Así, $(y, G)$ es una contraobjeción a $(x, S)$ y esto es una contradicción.

2. Para todo $G \in A$, $v(G) = 0$. En este caso, $v(T) = 1$ implica que $i \in T$ o bien $S \subseteq T$. Como $v \in \Omega(\mathcal{L})$ no es casisupermodular, entonces $v(\mathcal{V}) = 0$. Sea $j \in S \setminus \mathcal{V}$. Si se define $y \in \mathbb{R}_+^n$ por

$$y_k = \begin{cases} 1/(2|\mathcal{V}|) & \text{si } k \in \mathcal{V}, \\ 1/4 & \text{si } k \in \{i, j\}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces $y \notin Core(\mathcal{L}, v)$. Se prueba ahora que $y \in \mathcal{MBS}(\mathcal{L}, v)$ y se llega así a una contradicción. Sea $(z, T)$ una objeción contra $(y, S)$. Entonces $z \in \mathbb{R}^n$ y $T \in \mathcal{L}$ satisfacen $z \geq 0$, $z(T) = v(T)$, $z_k > y_k$ para $k \in T$, $z_k = y_k$ para $k \in N \setminus T$. De aquí $z(T) = v(T) = 1$ y $\mathcal{V} \subset T$. Se consideran dos posibilidades:

(a) Si $i \in T$ entonces $j \notin T$ ya que $z(T) = 1$. Así $z(N \setminus T) = y(N \setminus T) = 1/4$, $z(N) = 5/4$ y $z_i > y_i = 1/4$. Entonces $z(N \setminus i) < 1$. Por tanto, se puede construir una contraobjeción a $(z, T)$ usando una coalición ganadora $T^*$ tal que $i \notin T^*$.

(b) Si $i \notin T$ entonces $S \subseteq T$ y así $j \in T$, de aquí $z_j > y_j > 1/4$. Por tanto, se puede construir una contraobjeción a $(z, T)$ usando una coalición ganadora $T^*$ tal que $j \notin T^*$. $\square$

Los juegos de unanimidad sobre geometrías convexas son débiles. Si se considera el juego de unanimidad $v = \zeta_T$, con $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$, entonces:

(1) $\mathcal{V} = T$,

(2) $Core(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\{e_i : i \in T\} = \mathcal{B}(\mathcal{L}, v) = \mathcal{MB}(\mathcal{L}, v) = \mathcal{MBS}(\mathcal{L}, v)$,

(3) $Weber(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\{e_i : i \in ex(T)\}$,

(4) $Core(\mathcal{L}, v) = Weber(\mathcal{L}, v) \Longleftrightarrow T = ex(T) \Longleftrightarrow 2^T \subseteq \mathcal{L}$.

**Teorema 5.13** *Sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple sobre una geometría convexa atómica. Si $\mathcal{B}(\mathcal{L}, v) = Weber(\mathcal{L}, v)$, entonces $v$ es un juego de unanimidad.*

**Demostración:** Si $v$ no es un juego de unanimidad, no es casisupermodular y entonces $Weber(\mathcal{L}, v) \not\subseteq Core(\mathcal{L}, v)$. Sea $k \in \bigcup_{j=1}^{r} ex(S_j) \setminus \bigcap_{j=1}^{r} S_j$, o equivalentemente $e_k \in Weber(\mathcal{L}, v) \setminus Core(\mathcal{L}, v)$. Entonces, existe una coalición ganadora minimal $S_{j^*} \in \mathcal{L}$ tal que $k \notin S_{j^*}$. Un jugador $i \in S_{j^*}$ puede hacer una objeción contra el jugador $k$ con respecto a $e_k$ usando la coalición $S_{j^*}$. Se define $y = (y_k)_{k \in S_{j^*}}$ por

$$y_t = \frac{1}{|S_{j^*}|} \qquad \text{si } t \in S_{j^*}.$$

Está claro que $y(S_{j^*}) = v(S_{j^*}) = 1$, $y_t > 0$ para todo $t \in S_{j^*}$. Entonces, el par $(y, S_{j^*})$ es una objeción de $i$ contra $k$ respecto a $e_k \in Weber(\mathcal{L}, v) = \mathcal{B}(\mathcal{L}, v)$. No existe ninguna contraobjeción a esta objeción. En efecto, el jugador $k$ no puede hacer una contraobjeción usando $R = \{k\}$ porque en este caso, tendría que ser $v(\{k\}) = 1$ y entonces $I(\mathcal{L}, v) = Weber(\mathcal{L}, v) = \mathcal{B}(\mathcal{L}, v)$ y esto implica que $v = \zeta_{\{k\}}$.

Además, $k$ no puede hacer una contraobjeción usando $R \in \mathcal{L}$ con $|R| > 1$ y tal que $k \in R$, $i \notin R$ porque en este caso debe haber un vector $z = (z_t)_{t \in R}$ tal que $z(R) = v(R)$, $z_t \geq y_t > 0$ para todo $t \in R \cap S_{j^*}$, $z_t \geq 0$ para $t \in R \setminus S_{j^*}$, $t \neq k$ y $z_k \geq 1$ pero esto es imposible. □

**Teorema 5.14** *Sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple sobre una geometría convexa atómica. Si $Core(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$ y $\mathcal{MB}(\mathcal{L}, v) = Weber(\mathcal{L}, v)$, entonces $v$ es un juego de unanimidad.*

**Demostración:** Si $v$ no es un juego de unanimidad, entonces $Weber(\mathcal{L}, v) \not\subseteq Core(\mathcal{L}, v)$ y como $Core(\mathcal{L}, v) \neq \emptyset$, entonces $Core(\mathcal{L}, v) = \mathcal{MB}(\mathcal{L}, v)$. En consecuencia $Weber(\mathcal{L}, v) \neq \mathcal{MB}(\mathcal{L}, v)$. □

Los recíprocos de los Teoremas 5.13 y 5.14 no son ciertos. Basta tomar el juego $v = \zeta_T$, con $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$ tal que $2^T \not\subseteq \mathcal{L}$, entonces $Weber(\mathcal{L}, v) \subset \mathcal{B}(\mathcal{L}, v)$ y $Weber(\mathcal{L}, v) \subset \mathcal{MB}(\mathcal{L}, v)$.

## 5.6 El valor de Shapley

En esta sección se prueba que los únicos juegos simples sobre geometrías convexas atómicas, para los que el valor de Shapley es un vector del core son los juegos de unanimidad.

Para un juego simple $v \in \Omega(\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L}$ es una geometría convexa atómica, la expresión del valor del Shapley $\Phi(v) \in \mathbb{R}^n$ viene dada, para todo $i \in N$, por

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{W} : i \in ex(S)\}} \frac{c(S \setminus i)\, c([S,N])}{c(N)} \left[v(S) - v(S \setminus i)\right],$$

siendo $\mathcal{W}$ el conjunto de coaliciones ganadoras minimales del juego $v$.

**Teorema 5.15** *Sea $v \in \Omega(\mathcal{L})$ un juego simple sobre una geometría convexa atómica. Entonces, el valor de Shapley $\Phi(v) \in Core(\mathcal{L}, v)$ si y sólo si $v$ es un juego de unanimidad.*

**Demostración:** Supóngase que $\Phi(v) \in Core(\mathcal{L}, v) = \operatorname{conv}\{e_i : i \in \mathcal{V}\}$, entonces $\Phi_i(v) = 0$ para todo $i \in N \setminus \mathcal{V}$. Además, la fórmula del valor de Shapley implica que $\Phi_i(v) \neq 0$ para todo $i \in \bigcup_{j=1}^{r} ex(S_j)$. En orden a probar que $v$ es de unanimidad, se probará que $v$ es casisupermodular. Si no fuese así, entonces $Weber(\mathcal{L}, v) \nsubseteq Core(\mathcal{L}, v)$ y existiría $i \in \bigcup_{j=1}^{r} ex(S_j) \setminus \mathcal{V}$. Para este $i$, se tendría $\Phi_i(v) = 0$ y $\Phi_i(v) \neq 0$, pero esto es imposible.

El recíproco es evidente ya que $\Phi(v) \in Weber(\mathcal{L}, v)$ y además, cuando $v$ es un juego casisupermodular sobre una geometría convexa, $Weber(\mathcal{L}, v) \subseteq Core(\mathcal{L}, v)$. $\square$

# Apéndice A

# A.1 Algoritmo Selectope

**Entrada:** Lista $L$ de coaliciones factibles en orden creciente de su cardinal y lista $V$ de sus valores correspondientes.

**Salida:** Todos los selectores posibles con sus correspondientes selecciones.

**Paso 0. Inicialización:** Sea $N$ el número de jugadores, $C$ el número de coaliciones y $S$ el número de selectores posibles.

Sea $L2$ una lista igual a lista $L$ incluyendo el 0 cómo último elemento de cada coalición.

**Paso 1. Cálculo de dividendos:** Se crea una lista $D$ con los dividendos de cada coalición.

```
Desde i = 1 hasta C
  Si el cardinal de L(i) = 1
     Añadir V(i) a la lista D
  Sino
   dividendo = V(i)
     Desde j = 1 hasta i − 1
        Si L(i) ∩ L(j) = L(j)
           dividendo = dividendo − D(j)
        FinSi
     FinDesde
   Añadir dividendo a la lista D
  FinSi
FinDesde
```

**Paso 2. Proceso principal:** Se crea una lista $L3$ conteniendo a los posibles selectores y una lista $M2$ con las selecciones correspondientes.

Desde $i = 1$ hasta $S$
  $Laux = \{\}$
  Añadir a $Laux$ primer jugador de cada coalición de $L2$
  Añadir $Laux$ a la lista $L3$
  $M1 = \{\}$
    Desde $j = 1$ hasta $N$
      $acumulador = 0$
        Desde $k = 1$ hasta $C$
          Si $Laux(k) = j$
            $acumulador = acumulador + D(k)$
          FinSi
        FinDesde
      Añadir $acumulador$ a la lista $M1$
    FinDesde
  Añadir $M1$ a la lista $M2$
  Rotar a la izquierda última coalición de $L2$
  Si $i < S$ y el primer jugador de la última coalición de $L2 = 0$
    $índice = C$
      Hacer mientras primer jugador de $L2(índice) = 0$
        Rotar a la izquierda coalición $L2(índice)$
        $índice = índice - 1$
        Rotar a la iquierda coalición $L2(índice)$
      FinMientras
  FinSi
FinDesde

Este algoritmo ha sido implementado con el programa de cálculo simbólico MATHEMATICA. A continuación se puede observar un ejemplo de la salida de resultados, donde la opción 1 muestra todos los selectores posibles y sus correspondientes selecciones y la opción 2 muestra únicamente las selecciones no repetidas.

coal := {{1},{2},{3},{1,2},{2,3},{1,2,3}}
valores := {0,1,1,2,3,4}
Selectope[1,coal,valores]
1. {1, 2, 3, 2, 3, 1} -> {0, 2, 2}
2. {1, 2, 3, 2, 3, 2} -> {0, 2, 2}
3. {1, 2, 3, 2, 3, 3} -> {0, 2, 2}
4. {1, 2, 3, 2, 2, 1} -> {0, 3, 1}
5. {1, 2, 3, 2, 2, 2} -> {0, 3, 1}
6. {1, 2, 3, 2, 2, 3} -> {0, 3, 1}
7. {1, 2, 3, 1, 3, 1} -> {1, 1, 2}
8. {1, 2, 3, 1, 3, 2} -> {1, 1, 2}
9. {1, 2, 3, 1, 3, 3} -> {1, 1, 2}
10. {1, 2, 3, 1, 2, 1} -> {1, 2, 1}
11. {1, 2, 3, 1, 2, 2} -> {1, 2, 1}
12. {1, 2, 3, 1, 2, 3} -> {1, 2, 1}

Selectope[2,coal,valores]
1. {0, 2, 2}
2. {0, 3, 1}
3. {1, 1, 2}
4. {1, 2, 1}

## A.2 Algoritmo Weber

**Entrada:** Lista $L$ de coaliciones factibles en orden creciente de su cardinal y lista de sus valores correspondientes.

**Salida:** Todas las cadenas maximales y sus correspondientes vectores de contribución marginal.

**Paso 0. Inicialización:** Sea $N$ el número de jugadores y $C$ el número de coaliciones. Sea $L2$ una lista cuyos elementos están constituidos por coaliciones, que representarán a cada una de las cadenas maximales. Inicialmente, se parte de tantas cadenas como coaliciones unitarias existan.

**Paso 1. Calcular cadenas maximales:** Se añaden a la lista $L2$ todas las cadenas maximales posibles y se completan las iniciales.

```
Desde i = N + 1 hasta C
  Laux = {}
    Desde j = 1 hasta última cadena de L2
      Si última coalición de la cadena L2 (j) ⊂ L (i)
        Añadir L (i) a la cadena L2(j)
      Sino
        Si longitud de la cadena L2(j) = cardinal de L(i) y
        penúltima coalición de la cadena L2 (j) ⊂ L (i)
          Laux2 = L2(j) − última coalición de L2(j)
          Añadir L(i) a la cadena Laux2
          Si Laux2 ∉ Laux
            Añadir Laux2 a Laux
          FinSi
        FinSi
      FinSi
    FinDesde
  Si Laux ≠ {}
    Añadir Laux a la lista L2
  FinSi
FinDesde
```

**Paso 2: Calcular vectores de contribución marginal:** Se crea una lista $V$ con los vectores de contribución marginal correspondientes a las cadenas maximales de $L2$.

```
Desde i = 1 hasta última cadena de L2
   Laux = {}
   Desde j = 1 hasta N
      k = 1
      Hacer Mientras j ∉ a la coalición k de L2(i)
         k = k + 1
      FinMientras
      Si cardinal de la coalición k de L2(i) = 1
           Añadir Valor de la coalición k a la lista Laux
      Sino
           Añadir Valor de la coalición k − Valor
           de la coalición k − 1 a la lista Laux
      FinSi
   FinDesde
   Añadir Laux a la lista V
FinDesde
```

Se puede observar, en el siguiente ejemplo, la salida de resultados al implementar este algoritmo con el programa MATHEMATICA. La opción 1 muestra todas las cadenas maximales de la geometría convexa considerada así como los vectores de contribución marginal asociados; y la opción 2 muestra únicamente los vectores no repetidos

```
coal := {{1},{2},{3},{4},{1,2},{1,3},{1,4},{1,2,3},{1,2,4},{1,2,3,4}}
val := {0,0,0,1,2,1,2,3,1,4}
Weber[1,coal,val]
1. {{1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}} -> {0, 2, 1, 1}
2. {{2}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}} -> {2, 0, 1, 1}
3. {{3}, {1, 3}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}} -> {1, 2, 0, 1}
```

4. {{4}, {1, 4}, {1, 2, 4}, {1, 2, 3, 4}} -> {1, -1, 3, 1}
5. {{1}, {1, 3}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}} -> {0, 2, 1, 1}
6. {{1}, {1, 4}, {1, 2, 4}, {1, 2, 3, 4}} -> {0, -1, 3, 2}
7. {{1}, {1, 2}, {1, 2, 4}, {1, 2, 3, 4}} -> {0, 2, 3, -1}
8. {{2}, {1, 2}, {1, 2, 4}, {1, 2, 3, 4}} -> {2, 0, 3, -1}

Weber[2,coal,val]

1. {0, -1, 3, 2}
2. {0, 2, 1, 1}
3. {0, 2, 3, -1}
4. {1, -1, 3, 1}
5. {1, 2, 0, 1}
6. {2, 0, 1, 1}
7. {2, 0, 3, -1}

# Referencias

[1] AUMANN, R., MASCHLER, M. (1964) The bargaining set for cooperative games, en *Advances in Game Theory,* M. Dresher, L. Shapley, A. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443–471.

[2] AUMANN, R., MYERSON, R (1988) Endogenous formation of links between players and coalitions: an application of the Shapley value. *The Shapley value* (Ed. A.Roth), Cambridge, University Press Cambridge, United Kingdom, 175–191.

[3] AUMANN, R., DRÉZE, J.H. (1974) Cooperative Games with Coalition Structures, *International Journal of Game Theory* 3, 217–237.

[4] AXELROD, R, (1970) *Conflict of Interest,* Markham, Chicago.

[5] BERGANTIÑOS, G., CARRERAS, F., GARCÍA-JURADO, I. (1993) Cooperation when Some Players are Incompatible, *ZOR–Methods and Models of Operations Research* 38, 187–201.

[6] BILBAO, J.M. (1998) Axioms for the Shapley value on convex geometries, aparecerá en *European Journal of Operations Research.*

[7] BILBAO, J.M. (1998) Values and potential of games with cooperation structure, aparecerá en *International Journal of Game Theory.*

[8] BILBAO, J.M. (1998) Closure spaces and restricted games, aparecerá en *ZOR Mathematical Methods of Operations Research* 48 (1).

[9] BILBAO, J.M., EDELMAN P.H. (1998) The Shapley value on convex geometries, *preprint*.

[10] BILBAO, J.M., LEBRÓN, E., JIMÉNEZ, N. (1998) Probabilistic values on convex geometries, aparecerá en *Annals of Operations Research*.

[11] BIRKHOFF, G., BENNETT, M. K. (1985) The Convexity Lattice of a Poset, *Order* 2, 223–242.

[12] BIRKHOFF, G. (1948) *Lattice Theory,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[13] BORM, P., NOUWELAND, A., OWEN, G., TIJS, S. (1993) Cost Allocation and Communication, *Naval Research Logistics* 40, 733–744.

[14] CALVO, E., LASAGA, J. (1997) Probabilistic Graphs and Power Indices: An Application to the Spanish Parliament, *Journal of Theorical Politics* 9 (4), 477–501.

[15] CARRERAS, F. (1991) Restriction of Simple Games, *Mathematical Social Sciences* 21, 245–260.

[16] CURIEL, I. J. (1988) Cooperative game theory and applications, *Ph. Dissertation*, Universy of Nijmegen, The Netherlands.

[17] DAVIS, M., MASCHLER, M. (1965) The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly* 12, 223–259.

[18] DERKS, J. (1992) A Short Proof of the Inclusion of the Core in the Weber Set, *International Journal of Game Theory,* 21, 140–150.

[19] DERKS, J., HALLER, H., PETERS, H. (1997) The selectope for cooperative games, *METEOR Research Memoranda* RM/97/016, University of Maastricht, The Netherlands.

[20] DRIESSEN, T. (1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications,* Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

[21] EDELMAN, P.H., JAMISON, R.E. (1985) The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata* 19, 247–270.

[22] EDELMAN, P.H. (1997) A note on voting, *Mathematical Social Sciences.*

[23] EINY, E., WETTSTEIN, D. (1996). Equivalence between Bargaining sets and the Core in Simple games. *International Journal of Game Theory* 25, 65–71.

[24] FAIGLE, U. (1989) Cores of Games with Restricted Cooperation, *ZOR–Methods and Models of Operations Research* 33, 405–402.

[25] FAIGLE, U., KERN, W. (1992) The Shapley Value for Cooperative Games under Precedence Constraints, *International Journal of Game Theory* 21, 249–266.

[26] FAIGLE, U., KERN, W. (1995) Partition Games and the Core of Hierarchically Convex Cost Games, *preprint.*

[27] GILLIES, D.B. (1953) Some Theorems on $n$–Person Games, *Ph. D. Tesis,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[28] GRAFE, F., MOULEON, A., IÑARRA, E. (1995) A Simple Procedure to Compute the Nucleolus of $\Gamma$-Component Additive Games, *TOP,* Vol 3, n.2, 235–245.

[29] GREENBERG, J. (1992) On the sensitivity of van Neumann and Morgenstern abstract stable sets. The stable set and the individual stable bargaining set, *International Journal of Game Theory* 21, 41–55.

[30] GRÖTSCHEL, L., LOVÁSZ, SCHRIJVER, A. (1988) *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization,* Springer–Verlag, New York.

[31] HAMMER, P.L., PELED, U.N., SORENSEN, S. (1977) Pseudo-Boolean Functions and Game Theory. I. Core Elements and Shapley Value, *Cahiers du CERO,* 19, 159–176.

[32] HARSANYI, J.C. (1963) A Simplified Bargaining Model for the $n$–Person Cooperative Game, *International Economic Review* 4, 194–220.

[33] HART, S., KURZ, M. (1983) Endogeneus Formation of Coalitions, *Econometrica* 51, 1047–1064.

[34] HART, S., KURZ, M. (1984) Stable Coalition Structures, en *Coalitions and Collective Action,* M. Holler (ed.), Physica–Verlag, Wuerzburg, Alemania, 235–258.

[35] ICHIISHI, T. (1981) Supermodularity: applications to convex games and to the greedy algorithm for LP, *J. Economic Theory* 25, 283–286.

[36] ISBELL, J. R. (1958) A class of simple games, *Duke Math.J.* 25, 423–429.

[37] KUIPERS, J. (1994) Combinatorial Methods in Cooperative Game Theory, *Ph. D. Tesis,* University of Maastricht, The Netherlands.

[38] KURZ, M. (1988) Coalitional Value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 155–173.

[39] LEVY, A., MCLEAN, R. (1989) Weighted Coalition Structure Values, *Games and Economic Behavior* 1, 234–249.

[40] LÓPEZ, J. (1996) Cooperación parcial en juegos de $n$-personas. *Ph. D. Tesis,* Universidad de Sevilla.

[41] LUCAS, W.F. (1968) A game with no solution. *Bull. Amer. Math. Soc.* 74, 237–239.

[42] MARIN-SOLANO, J., RAFELS, C. (1997) Convexity versus Average Convexity: Potential, PMAS, the Shapley Value and Simple Games. *preprint*

[43] MAS-COLELL, A. (1989) An equivalence theorem for a bargaining set. *Journal or Mathematical Economics* 18, 129–138.

[44] MASCHLER, M., PELEG, B., SHAPLEY, L.S. (1979) Geometric properties of the kernel, nucleolus, and relates solution concepts. *Methods of Operations Research*, 4, 303–338.

[45] MASCHLER, M., PELEG, B., SHAPLEY, L.S. (1972) The kernel and bargaining set for convex games. *International Journal of Game Theory* 1, 73–93.

[46] MCLEAN, R. (1991) Random Order Coalition Structure Values, *International Journal of Game Theory* 20, 109–127.

[47] MYERSON, R.B. (1977) Graphs and Cooperation in Games, *Mathematics of Operations Research* 2, 225–229.

[48] MYERSON, R.B. (1980) Conference Structures and Fair Allocation Rules, *International Journal of Game Theory* 9, 169–182.

[49] NOUWELAND, A. VAN DEN, BORM, P. (1991) On the Convexity of Communication Games, *International Journal of Game Theory* 19, 421–430.

[50] NOUWELAND, A. VAN DEN, BORM, P., TIJS, S. (1992) Allocation Rules for Hypergraph Communication Situations, *International Journal of Game Theory* 20, 255–268.

[51] NOUWELAND, A. VAN DEN, (1993) Games and Graphs in Economics Situations, *Ph. D. Tesis,* Tilburg University, The Netherlands.

[52] OWEN, G. (1977) Values of Games with a Priori Unions, *Essays in Mathematical Economics and Game Theory,* R. Henn, O. Moeschlin (eds.), Springer–Verlag, Belin, 76–88.

[53] OWEN, G. (1986) Values of Graph–Restricted Games, *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods* 7, 210–220.

[54] POTTERS, J., REIJNIERSE, H. (1995) Γ-Component Additive Games, *International Journal of Game Theory* 24, 49–56.

[55] ROCKAFELLER, R. (1970) *Convex Analysis*, Princenton University Press, Princenton, New Yersey.

[56] SHAPLEY, L. (1953) A Value for $n$–Person Games, *Contributions to the Theory of Games,* vol. II, H.W. Khun, A.W. Tucker (eds.), Princeton, New Jersey, 307–317.

[57] SHAPLEY, L. (1971) Cores of convex games, *International Journal of Game Theory* 1, 11–26.

[58] SHAPLEY, L. S. (1962) Simples games: an outline of the descriptive theory, *Behavioral Sci.* 7, 59–66.

[59] SHENOY, P. (1979) On Coalition Formation: A Game Theoretic Approach, *International Journal of Game Theory* 8, 133–164.

[60] SCHMEIDLER, D. (1969) The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17, 1163-1170.

[61] SCHRIJVER, A. (1986) *Theory of Linear and Integer Programming,* John Wiley & Sons, New York.

[62] STANLEY, R.P. (1986) *Enumerative Combinatorics,* Vol I, Wadsworth.

[63] TIJS, S.H. (1981) Bounds for the core and $\tau$-value, *Game Theory and Mathematical Economics,* Eds. O. Moeschlin and D. Pallaschke North-Holland Publishing company, Amsterdam, 123–132.

[64] VON NEUMANN, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* 100, 295–320.

[65] VON NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[66] WEBER, R.J. (1978) Probabilistic Values for Games, *Cowles Foundation Discussion Paper* no. 471, Yale University, New Haven, Connecticut.

[67] WEBER, R.J. (1988) Probabilistic Values for Games, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 101–119.

[68] WIDGRÉN, M. (1994) Voting Power in the EC decision making and the consequences of two different enlargements, *European Economic Review* 38, 1153–1170.

[69] WINTER, E. (1988) A Value for Cooperative Games with Leves Structure of Cooperation, *International Journal of Game Theory* 18, 227-240.

[70] WINTER, E. (1991) On Non–Tranferable Utiliy Games with Coalition Structure, *International Journal of Game Theory* 20, 53–63.

[71] WINTER, E. (1992) The Consistency and Potential for Games with Coalition Structure *Games and Economic Behaviour* 4,132–144.

[72] WOLFRAM, S. (1991) *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer,* Addison–Wesley, Massachusetts.

a María de las Nieves Jiménez Jiménez.
Conceptos de solución para juegos sobre espacios de clausura.

APTO CUM LAUDE (por unanimidad)

10 Junio 98

U. Faigle

Peters

Juan E. Martínez Legaz

Nieves Jiménez