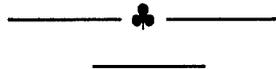


UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II



COMPORTAMIENTO DINÁMICO
DE OSCILADORES ELECTRÓNICOS
DEL TIPO
VAN DER POL-DUFFING



FRANCISCO RODRIGO MUÑOZ
TESIS DOCTORAL

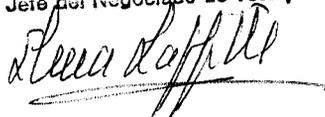
T-160

**Comportamiento Dinámico de Osciladores Electrónicos
del Tipo Van der Pol-Duffing**

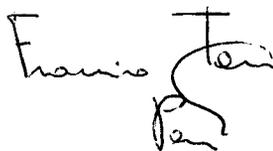
Memoria presentada por FRANCISCO RODRIGO MUÑOZ para optar al grado
de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Sevilla.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
CATEDRÁTICO DE ESCUELA UNIVERSITARIA
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA II
Sevilla, el día 30 de Septiembre de 1997
concedido el número 34

El Jefe del Negociado de Tesis,



Vº Bº de los Directores:

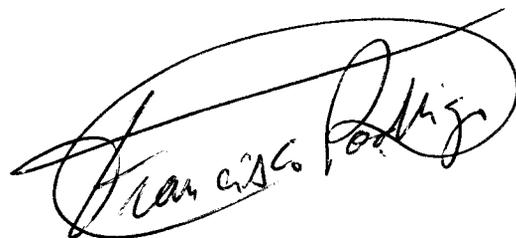


Fdo: EMILIO FREIRE MACÍAS
Catedrático de Universidad
Dpto. de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

Fdo: FRANCISCO J. TORRES PERAL
Catedrático de Escuela Universitaria
Dpto. de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

En Sevilla, a 26 de Septiembre de 1997

_____ • _____



Fdo: Francisco Rodríguez Muñoz

Índice

Introducción	ii
1 Sistemas lineales a trozos continuos con una sola frontera.	1
1.1 Generalidades.	1
1.2 Formas canónicas.	13
1.3 Forma de Van der Pol-Duffing.	15
1.3.1 Simetrías.	16
1.3.2 Número, tipos y estabilidades de los equilibrios.	18
1.4 Semiaplicaciones de Poincaré.	22
1.4.0.1 La semiaplicación f .	33
1.4.0.2 La semiaplicación g .	38
1.5 Los conjuntos de bifurcaciones.	47
1.5.1 Caso 1.- $a = 0$ y $0 \leq b$.	50
1.5.2 Caso 2.- $a > 0$ y $0 \leq b < 1$.	51
1.5.3 Caso 3.- $a \geq 0$ y $1 \leq b$.	69
1.6 Descripción de las bifurcaciones.	71
1.6.1 Bifurcación de Hopf del infinito.	73
1.6.2 Bifurcación de Hopf con centro.	73
1.6.3 Desaparición de órbita periódica por la transición de foco a nodo.	74
1.6.4 Bifurcación homoclina.	75
1.6.5 Otras bifurcaciones.	75
2 Sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras y simétricos.	77
2.1 Introducción.	77
2.2 Formas canónicas.	92
2.3 Forma de Van der Pol-Duffing.	96
2.3.1 Simetrías.	97
2.3.2 Número, tipos y estabilidades de los equilibrios.	98
2.4 Las semiaplicaciones de Poincaré.	102
2.4.1 La semiaplicación f .	107
2.4.2 La semiaplicación g .	114

2.4.3	La semiaplicación h .	117
2.5	Conjuntos de bifurcaciones.	125
2.5.1	Caso 1.- $b = 0$.	126
2.5.2	Caso 2.- $0 < b < 1$.	128
2.5.3	Caso 3.- $b \leq 1$.	151
2.6	Descripción de las bifurcaciones.	156
2.6.1	Bifurcación heteroclina.	156
2.6.2	Bifurcación de Hopf del infinito.	156
2.6.3	Bifurcación de Hopf con centro.	157
2.6.4	Bifurcación homoclina.	158
2.6.5	Bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.	158
2.6.6	Desaparición de una órbita periódica por el nacimiento de nodos.	158
3	Dinámica de osciladores electrónicos del tipo Van der Pol-Duffing.	160
3.1	Puente de Wien.	160
3.2	Circuito de Keener.	165
3.3	Sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras casi simétricos.	172
3.3.1	Dos equilibrios.	175
3.3.2	Homoclinas dobles.	178
3.3.3	Un solo equilibrio sobre una frontera.	181
 Apéndices		
A	Integración de las ecuaciones del sistema.	186
B	Las semiaplicaciones de Poincaré.	188
B.1	Cálculo de algunas semiaplicaciones.	189
B.2	Ecuaciones paramétricas de las semiaplicaciones de Poincaré.	194
C	Las funciones ϕ, ψ y σ.	198
C.1	La función ϕ .	198
C.2	La función ψ .	200
C.3	La función σ .	202
Bibliografía		203

Introducción

El trabajo que presentamos tiene su marco en los sistemas dinámicos autónomos planos y su origen y motivación está en el estudio de ciertos osciladores electrónicos. Se trataba de analizar el comportamiento periódico (oscilaciones automantenido) de circuitos autónomos que son variantes del clásico oscilador de Rayleigh-Van der Pol.

Para concretar las ideas, consideremos un circuito básico formado por tres ramas en paralelo: una conductancia no lineal G , un condensador de capacidad C y una tercera rama donde se conectan en serie una bobina de inducción L con una resistencia lineal R y una fuente de tensión continua V_{cc} . Si denotamos por $x(t)$ la variable de estado correspondiente a la tensión del nodo común y por $y(t)$ la variable de estado correspondiente a la intensidad que circula por la bobina, se obtienen las ecuaciones de estado

$$Cx'(t) = -i(x) - y$$

$$ly' = x - Ry - V_{cc}$$

donde $i(x)$ denota la característica tensión-intensidad de la conductancia no lineal G .

Al modelar dicha característica por un polinomio cúbico

$$i(x) = -a_1x + a_3x^3 \quad \text{con } a_1 > 0, a_3 > 0$$

y anular la fuente de tensión V_{cc} y la resistencia R , nos encontramos con que el sistema plano anterior resulta ser el clásico oscilador de Rayleigh-Van der Pol. Dicho oscilador de segundo orden fue propuesto por Lord Rayleigh como un modelo matemático para el estudio de vibraciones en acústica [1, Rayleigh, 1896]; en este contexto, $i(x)$ representaría la característica no lineal de un triodo. El circuito básico que hemos introducido vendría a ser una versión en paralelo del circuito original de Van der Pol, y además la conductancia no lineal G representaría, modernamente, un dispositivo activo de estado sólido (por ejemplo un amplificador operacional realimentado).

Escribamos el sistema plano anterior como una ecuación de segundo orden

$$LCx'' + \left[RC + L \frac{di(x)}{dx} \right] x' + [x + Ri(x)] = V_{cc}$$

Reconocemos esta ecuación como una del tipo Lienard y podemos ver asimismo, el efecto de la resistencia lineal R que hemos introducido en el esquema original de

Rayleigh-Van der Pol: En el lenguaje de los sistemas mecánicos, se trata de una fuerza de recuperación no lineal del tipo muelle rígido

$$x + Ri(x) = (1 - Ra_1)x + Ra_3x^3$$

situación ésta inicialmente estudiada por Duffing [2, Duffing, 1918]. Por tanto, es natural la denominación usual del sistema bidimensional anterior (o de la ecuación escalar equivalente) como de Van der Pol-Duffing.

En este punto nos interesa poner de manifiesto que el sistema de Van der Pol-Duffing, aparece como modelo matemático de fenómenos de evolución temporal en campos muy diversos.

En primer lugar, veamos como surge en el dominio de la biología matemática. Hay que recordar que fue el propio Van der Pol en unión de Van der Mark, quien propuso un modelo cualitativo del latido cardíaco, acoplando osciladores de relajación basados en el sistema de su nombre [3, Van der Pol, 1928]. Años después, Fitzhugh se plantea una simplificación de las ecuaciones de Hodgkin-Huxley que modelan la transmisión del impulso nervioso. Para ello, como pasamos a reseñar, se basa en el oscilador original de Van der Pol.

Las ecuaciones de la conducción nerviosa son del tipo reacción-difusión no lineal

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(\mathbf{u}, v)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, v)$$

donde la variable x representa la dimensión espacial, $v(x, t)$ el potencial de membrana y $\mathbf{u}(x, t) = (\mathbf{u}_1(x, t), \dots, \mathbf{u}_n(x, t))$ un conjunto de variables auxiliares. En el modelo original de Hodgkin-Huxley, $n = 3$ y $f(x, t)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{u}, v)$ son determinadas empíricamente a partir de los datos obtenidos del axon gigante del calamar [30, Hodgkin, 1952]

Fitzhugh propuso un modelo aproximado que recogiera los aspectos cualitativos de la dinámica de las ecuaciones de Hodgkin-Huxley [29, Fitzhugh, 1961]. Para ello tomó $n = 1$, y para las no linealidades f y g , la cinética de Bonhoeffer-Van der Pol

$$\begin{aligned} f(u, v) &= v(1 - v)(v - a) - u \\ g(u, v) &= bv - cu \end{aligned}$$

con las restricciones $0 < a < 1$, $b > 0$, $c > 0$.

El análogo físico para un axon teórico sería una línea de transmisión eléctrica no lineal. Motivado por el modelo de Fitzhugh, Nagumo y sus colaboradores [4, Nagumo, 1962] construyeron una línea cuyo comportamiento viniera descrito por dicho modelo; tales ecuaciones habitualmente se denominan de Fitzhugh-Nagumo.

En el caso de no haber dependencia espacial, se obtendrían las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}u' &= bv - cu \\v' &= v(1 - v)(v - a) - u\end{aligned}$$

Hagamos notar que la no dependencia espacial es de interés en la experimentación fisiológica como pusieron de manifiesto los trabajos pioneros de Hodgkin y Huxley.

Efectuando una traslación en la variable v correspondiente al punto de inflexión de la cúbica, y un posterior escalado de las variables de estado y del tiempo, el anterior sistema se transforma en

$$\begin{aligned}x' &= \lambda + y + x - \frac{x^3}{3} \\y' &= -\rho(x + by)\end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $\beta > 0$, como nuevos parámetros directamente relacionados con los anteriores a , b y c . Este último sistema plano es la forma habitual en la que se estudian las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo en ausencia de la dependencia espacial [5, Hsü, 1976], [6, Göbber, 1979], [7, Golubitsky, 1981].

Si escalamos el tiempo $t \rightarrow \frac{t}{\rho}$ y trasladamos la variable $y \rightarrow -y - \lambda$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\rho x' &= x - \frac{x^3}{3} \\y' &= x - \beta y - \lambda\beta\end{aligned}$$

que coincide con el de Van der Pol-Duffing, con la identificación inmediata

$$C = \rho \quad L = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad R = \beta \quad V_{cc} = \lambda\beta$$

Presentamos seguidamente un último ejemplo de aparición de la dinámica de Van der Pol-Duffing, ahora en el contexto de las reacciones químicas. Se trata del modelo introducido por Boissonade y De Kepper [8, Boissonade, 1980] para estudiar las relaciones entre biestabilidad y oscilaciones en un reactor químico. Concretamente, dichos autores plantean el siguiente sistema

$$\begin{aligned}x' &= -(x^3 - \mu_0 x + \lambda) - ky \\y' &= \frac{x - y}{\tau}\end{aligned}$$

con $\mu_0 > 0$, $k > 0$ y $\tau > 0$. La variable x representaría una sustancia química cuya concentración tiene dos estados de equilibrio estables localizados en las raíces de la

ecuación $x^3 - \mu_0 x + \lambda = 0$, cuando $k = 0$. La variable y representaría una segunda sustancia química que proporciona una realimentación sobre la dinámica de la primera.

Mediante los escalados

$$x \longrightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{3}} x \quad y \longrightarrow -\frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{3}} y \quad t \longrightarrow \frac{t}{\mu_0}$$

se transforma el sistema de Boissonade-De Kepper en las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo con la identificación de parámetros

$$\lambda = -\frac{\mu}{\mu_0 k} \quad \rho = \frac{k}{\mu_0^2 \tau} \quad \beta = \frac{\mu_0}{k}$$

Así pues, tenemos en ambos casos la misma dinámica, que además coincide con la del oscilador de Van der Pol-Duffing como hemos evidenciado anteriormente.

De los comentarios precedentes podemos inferir el interés que presenta realizar un estudio lo más completo posible del comportamiento dinámico y de bifurcaciones del sistema plano de Van der Pol-Duffing.

En el estudio de los sistemas dinámicos se hace énfasis en las conductas a largo plazo (comportamientos límite o movimientos finales). En muchas situaciones experimentales, son los atractores las únicas características observables del espacio de fases.

En los sistemas planos autónomos, los posibles conjuntos límite son: los equilibrios (puntos fijos, críticos, estacionarios, singularidades); las órbitas periódicas (órbitas cerradas) y los formados por la unión de equilibrios y órbitas que los conectan (homoclinas o heteroclinas) que cuando constituyen curvas cerradas se llaman policiclos. En el estudio de los osciladores planos no lineales, un objetivo primordial es la detección, caracterización y control de los comportamientos periódicos.

Así pues, para una familia parametrizada de sistemas autónomos bidimensionales, deseáramos delimitar las regiones del espacio de parámetros de control en las que existen órbitas periódicas. En las fronteras de dichas regiones, las órbitas periódicas surgen (o desaparecen), es decir, se producen fenómenos de bifurcación. Una órbita cerrada, en la situación de bifurcación, interaccionará con otro conjunto límite (equilibrio, policiclo u otra órbita cerrada).

Volviendo al oscilador de Van der Pol-Duffing, podemos afirmar que es uno de los sistemas planos más ampliamente estudiados en una u otra de sus formulaciones (y modificaciones) desde la original de Rayleigh-Van der Pol. En la inmensa mayoría de los trabajos se supone que la no linealidad presente es modelada por un polinomio cúbico, y así se utilizan con provecho las técnicas y resultados de la dinámica diferenciable y de la teoría local de bifurcaciones. Citemos, entre las referencias recientes, los estudios

de [5, Hsü, 1976], [6, Göbber, 1979] y [7, Golubitsky, 1981] sobre la aparición de bifurcaciones de Hopf y sus posibles degeneraciones. También es de interés en este sentido [9, Gamero, 1990].

El análisis de una bifurcación triparamétrica que despliega una degeneración de codimensión tres de un equilibrio, ha sido llevado a cabo por [10, Guckenheimer, 1986] y [11, Dangelmayr, 1987]; el correspondiente conjunto de bifurcaciones recibe el nombre de *diagrama en forma de cruz* (*cross shaped*), y en algunos aspectos todavía precisa de una justificación rigurosa.

Una alternativa al modelado de la no linealidad del sistema de Van der Pol-Duffing es el uso de una función lineal a trozos continua. En el caso del oscilador electrónico introducido al principio, la realización de la conductancia no lineal corre a cargo de un dispositivo que en su zona activa presenta valores muy altos de la ganancia, lo que hace plausible considerar su característica tensión-intensidad como una función lineal a trozos. Los resultados que se obtienen con tal sistema lineal a trozos se ajustan mejor, cualitativa y cuantitativamente a la observación experimental que los del sistema polinomial [13, Andronov, 1987] [14, Salas, 1995] [27, Kriegsman, 1987] [28, Keener, 1983].

El modelado de las no linealidades por funciones lineales a trozos aparece justificado, además de en el campo de los sistemas electrónicos, en otros dominios como la mecánica y la teoría del control [13, Andronov, 1987]. Citemos a este respecto, el modelado lineal a trozos de la cinética del sistema de Fitzhugh-Nagumo [33, Linares, 1990]

Los estudios teóricos sobre sistemas lineales a trozos continuos han sido poco abundantes, desde los trabajos pioneros de Andronov et al., continuados por la escuela rusa [15, Butenin, 1990]. Citemos como una referencia más reciente a [24, Llibre, 1996] acerca de un sistema plano de control.

Revisando los trabajos existentes sobre sistemas planos lineales a trozos, es de notar la ausencia de resultados sobre gran parte de los variados comportamientos dinámicos que presentan tales sistemas. Incluso encontramos algunos resultados en [13, Andronov, 1987] y [16, Ye, 1986] cuyas pruebas están lejos de ser completas.

Así pues, nos planteamos como un objetivo básico de esta Tesis Doctoral, el realizar un estudio, lo más completo posible, de las conductas dinámicas y de bifurcaciones de sistemas lineales a trozos, bidimensionales y continuos, en dos situaciones: sistemas con dos regiones (o una frontera, vid. Capítulo 1) y sistemas con tres regiones (o dos fronteras, vid. Capítulo 2) que presentan simetría con respecto al cambio de signo en las variables de estado.

Estas dos situaciones, aún siendo las más simples que podemos formular, son lo

bastante generales para contener los sistemas osciladores de interés en las aplicaciones: La configuración de una frontera da cuenta de los elementos no lineales que presentan dos zonas de trabajo, por ejemplo una activa y otra de corte o saturación en el caso de dispositivos electrónicos. La otra situación de dos fronteras con simetría captura la generación de oscilaciones periódicas simétricas.

Un primer resultado de interés es el carácter de forma canónica del sistema de Van der Pol-Duffing en el contexto de los sistemas lineales a trozos. Como mostramos en los Capítulos 1 y 2 (Teoremas 1.12 y 2.16), un sistema plano lineal a trozos y continuo, tanto en el caso de una sola frontera como en el de dos fronteras con simetría, puede escribirse, en condiciones genéricas, como un sistema de Van der Pol-Duffing. Dichas condiciones genéricas incluyen, naturalmente, a los sistemas que presentan oscilaciones periódicas aisladas.

A partir de este hecho, dedicamos los Capítulos 1 y 2 a la obtención de resultados sobre la diversidad de comportamientos dinámicos que presentan los sistemas lineales a trozos en la forma de Van der Pol-Duffing, con una frontera y con dos fronteras y simetría. Las técnicas de análisis utilizadas desarrollan las introducidas por Andronov y su escuela: computación de aplicaciones de Poincaré tomando como secciones las fronteras, a partir de los flujos lineales de las regiones adyacentes.

Finalmente, en el Capítulo 3 aplicamos los conocimientos adquiridos hasta aquí, al análisis de dos circuitos electrónicos: el puente de Wien no lineal, y un circuito debido a Keener diseñado para modelar las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo. A partir de este último, se hace una pequeña incursión, que se completará en investigaciones posteriores, en el campo de los sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras, pero sin simetría.

Capítulo 1

Sistemas lineales a trozos continuos con una sola frontera.

1.1 Generalidades.

En \mathbb{R}^2 diremos que un sistema dinámico es **lineal a trozos** si existen curvas L_1, L_2, \dots de ecuaciones $h_1(x, y) = 0, h_2(x, y) = 0, \dots$ que constituyen fronteras de regiones, en cada una de las cuales el sistema es lineal.

Nos limitaremos al estudio de sistemas autónomos de coeficientes constantes, que como es bien sabido, son de la forma

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

son respectivamente, el vector columna de las variables de estado, la matriz de coeficientes del sistema, y un vector columna constante. El símbolo ' indica derivada temporal. Dado que el sistema es autónomo, ni A ni B dependen de la variable independiente t , aunque usualmente dependerán de ciertos parámetros $\mu_1, \mu_2 \dots$ cuyas variaciones determinarán las posibles *bifurcaciones* del sistema. Son los llamados **parámetros de bifurcación**.

Supongamos para aclarar ideas, que sólo hay tres curvas L_1, L_2 y L_3 que separan cuatro regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 , en el plano, según se muestra en la Figura 1.1.

En este caso, un sistema lineal a trozos, tiene la forma

$$X'(t) = A_i \cdot X(t) + B_i \quad \text{si } X \in R_i \quad i = 1, 2, 3 \text{ ó } 4$$

El paso de una a otra región implica a priori, cambios en el comportamiento del sistema dinámico. La investigación del alcance y la diversidad de estos cambios constituyen parte fundamental del presente trabajo. Pero impondremos una limitación:

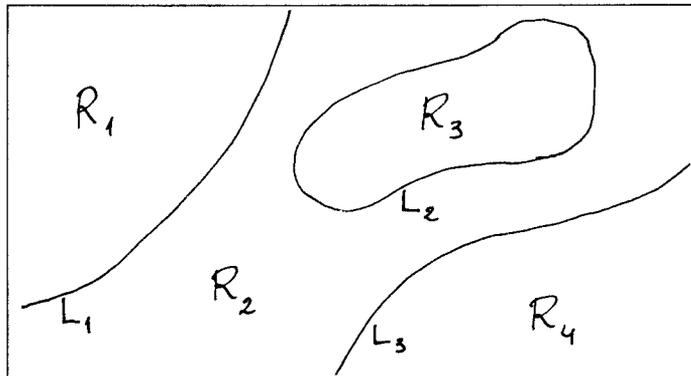


Figura 1.1:

que ese paso se haga de forma continua. Exigiremos, por tanto, a estos sistemas el cumplimiento de estas *condiciones de continuidad* sobre las fronteras

$$A_{k_i} \cdot X + B_{k_i} = A_{k_j} \cdot X + B_{k_j} \quad \forall X \in L_k \quad k = 1, 2, 3$$

donde las matrices $A_{k_i}, B_{k_i}, A_{k_j}, B_{k_j}$ son las matrices del sistema en las regiones contiguas que tienen a L_k por frontera.

Para entender bien la dinámica de los sistemas planos lineales a trozos, vamos a hacer algunas consideraciones. En los sistemas planos lineales, los equilibrios juegan un papel fundamental en la organización de la dinámica, dado que estos sistemas no poseen genéricamente otro tipo de conjuntos límite. Así pues, en un sistema lineal a trozos, si nos situamos en una de las regiones en que está dividido el plano, mientras no salgamos de ella, el sistema es a todos los efectos lineal, lo que implica que la dinámica en esa región estará determinada por el correspondiente equilibrio, sin que importe para nada como sea la dinámica en las otras regiones. Ahora bien, ese equilibrio puede estar situado en esa región o en otra distinta. En el primer caso, constituye un equilibrio del sistema lineal a trozos, y lo llamaremos **equilibrio real**. En el segundo no, y entonces lo llamaremos **equilibrio virtual**. Pero tanto si el equilibrio es real, como si es virtual, actúa, y esto es fundamental, como organizador de la dinámica en esa región.

En el presente Capítulo, nos limitaremos a considerar el plano de fases dividido en dos regiones que llamaremos I y II, constituidas respectivamente por los semiplanos $x > 0$ y $x < 0$. El eje OY constituye por tanto la frontera común (véase la Figura 1.2).

$$\text{Región I} \quad : \quad R_I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

$$\text{Región II} \quad : \quad R_{II} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$$

$$\text{Frontera} \quad : \quad L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

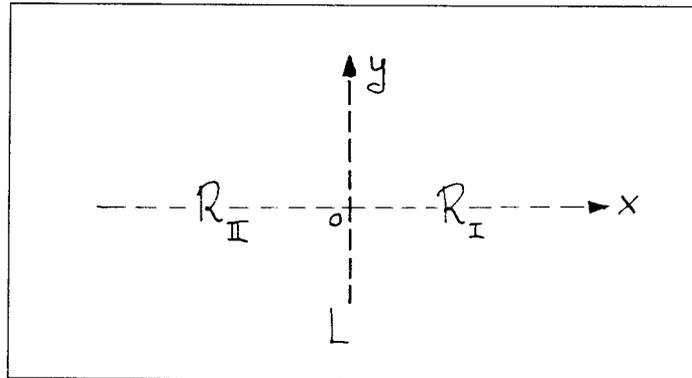


Figura 1.2:

En este planteamiento, podría pensarse que el considerar una frontera rectilínea es una pérdida de generalidad, pero por otra parte, parece *natural* tratar con fronteras lineales en problemas que a uno y otro lado de la misma son lineales. En cuanto a que esa frontera coincida con el eje vertical, siempre es posible, ya que mediante un giro y una traslación, podemos hacer coincidir la frontera con la línea $x = 0$.

Así pues, el sistema lineal a trozos más general que puede darse en esta situación es de la forma

$$X' = A_I \cdot X + B_I \quad \text{si } X \in R_I \cup L$$

$$X' = A_{II} \cdot X + B_{II} \quad \text{si } X \in R_{II}$$

donde

$$A_I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B_I = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad A_{II} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad B_{II} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

La condición de continuidad sobre la frontera L exige que

$$A_I \cdot X + B_I = A_{II} \cdot X + B_{II} \quad \forall X \in L$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} a_{12}y + b_1 &= c_{12}y + d_1 \\ a_{22}y + b_2 &= c_{22}y + d_2 \end{aligned} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} a_{12} &= c_{12} & b_1 &= d_1 \\ a_{22} &= c_{22} & b_2 &= d_2 \end{aligned}$$

de modo que la condición de continuidad sobre la frontera deja al sistema lineal a trozos esta de forma

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{si } x \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= c_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= c_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{si } x < 0$$

que puede escribirse usando notación matricial de este modo

$$X' = F(X) = \begin{cases} A_I \cdot X + B_I & \text{si } X \in R_I \cup L \\ A_{II} \cdot X + B_I & \text{si } X \in R_{II} \end{cases}$$

Comprobemos ante todo que nuestro sistema dinámico cumple un Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Para ello debemos demostrar previamente que la función $F(X)$ es lipschitziana con respecto a las variables de estado x e y . Es lo que hacemos en el siguiente Lema.

Lema 1.1 *La función F es globalmente lipschitziana en \mathbb{R}^2 .*

DEMOSTRACIÓN: La restricción de F a cada una de las regiones $R_I \cup L$ o R_{II} , es lipschitziana, ya que es una función lineal, así que vamos a situarnos en el caso más general de que $X_1 \in R_I \cup L$ y $X_2 \in R_{II}$, entonces, si

$$X_1 = (x_1, y_1)^T \quad X_2 = (x_2, y_2)^T$$

habrá de cumplirse que $x_2 < 0 \leq x_1$, de donde se deduce que

$$|x_2| \leq |x_1 - x_2| \leq \|X_1 - X_2\|$$

A continuación escribimos

$$\begin{aligned} \|F(X_1) - F(X_2)\| &= \left\| A_I \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - A_{II} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 - c_{11}x_2 - a_{12}y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 - c_{21}x_2 - a_{22}y_2 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 - a_{11}x_2 + a_{11}x_2 - c_{11}x_2 \\ a_{21}x_1 - a_{21}x_2 + a_{21}x_2 - c_{21}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}(y_1 - y_2) \\ a_{22}(y_1 - y_2) \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{11} - c_{11} \\ a_{21} - c_{21} \end{pmatrix} \right\| \leq \\ &\leq \|A_I\| \cdot \|X_1 - X_2\| + \left\| \begin{pmatrix} a_{11} - c_{11} \\ a_{21} - c_{21} \end{pmatrix} \right\| \cdot |x_2| \leq \\ &\leq \|A_I\| \cdot \|X_1 - X_2\| + \left\| \begin{pmatrix} a_{11} - c_{11} \\ a_{21} - c_{21} \end{pmatrix} \right\| \cdot \|X_1 - X_2\| = K \cdot \|X_1 - X_2\| \end{aligned}$$

donde se ha usado, en calidad de norma matricial, una subordinada a la norma vectorial empleada. Por último, si tomamos como constante de Lipschitz, la mayor entre K y las correspondientes a las restricciones de F a cada región, queda demostrado el carácter globalmente lipschitziano de F . \square

Como en nuestro sistema las variables de estado están definidas en todo \mathbb{R}^2 , el carácter globalmente lipschitziano de F implica:

Teorema 1.2 *El problema de valores iniciales*

$$X'(t) = F(X(t)) \quad X(t_0) = X_0$$

tiene solución única definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Hagamos ahora unas consideraciones generales acerca de los posibles equilibrios que puede presentar el sistema. Con objeto de sistematizar el estudio, comenzaremos suponiendo que las dos matrices A_I y A_{II} son regulares. Más tarde veremos el caso de que haya singularidad.

Una primera consecuencia de ello es que no hay autovalores nulos. Otra consecuencia es que el sistema tiene dos equilibrios reales o virtuales. Si los dos equilibrios son virtuales, el sistema no tiene equilibrios. Si sólo lo es uno de ellos, el sistema tiene un equilibrio. En cualquier caso, las coordenadas de los equilibrios son

$$\bar{x}_I = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A_I} \quad \bar{y}_I = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}}{\det A_I}$$

$$\bar{x}_{II} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A_{II}} \quad \bar{y}_{II} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_{11} \\ b_2 & c_{21} \end{vmatrix}}{\det A_{II}}$$

Estas expresiones nos proporcionan información acerca del número de equilibrios del sistema según se demuestra en las siguientes Proposiciones.

Proposición 1.3 *Si las matrices A_I y A_{II} son regulares, entonces*

a) *el sistema tiene un solo equilibrio en alguna de las dos regiones si y sólo si $\det A_I \cdot \det A_{II} > 0$;*

b) *el sistema tiene un solo equilibrio en la frontera si y sólo si $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = 0$*

DEMOSTRACIÓN: a) De la igualdad

$$\bar{x}_I \cdot \bar{x}_{II} = \left| \begin{array}{cc} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{array} \right|^2 \cdot \frac{1}{\det A_I \cdot \det A_{II}}$$

se deduce que si $\det A_I \cdot \det A_{II} > 0$, entonces $\bar{x}_I \cdot \bar{x}_{II} > 0$, lo que implica que ambos equilibrios están al mismo lado de la frontera, y por consiguiente que sólo uno de ellos puede ser real.

b) Por otra parte, si $\left| \begin{array}{cc} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{array} \right| = 0$, entonces $\bar{x}_I = 0$ y $\bar{x}_{II} = 0$, y en consecuencia, las coordenadas de los dos equilibrios son $(0, \bar{y}_I)$ y $(0, \bar{y}_{II})$, pero como deben verificar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{y}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \quad \text{y también} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{y}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$$

resulta que $\bar{y}_I = \bar{y}_{II}$, ya que estamos tratando con sistemas compatibles y determinados. Así pues, hay un solo equilibrio que está situado en la frontera. □

Proposición 1.4 *Si las matrices A_I y A_{II} verifican $\det A_I \cdot \det A_{II} < 0$, entonces*

a) *el sistema tiene dos equilibrios si y sólo si $\left| \begin{array}{cc} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{array} \right| \cdot \det A_I > 0$;*

b) *el sistema no tiene equilibrios si y sólo si $\left| \begin{array}{cc} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{array} \right| \cdot \det A_I < 0$.*

DEMOSTRACIÓN: a) Puesto que $\det A_I \cdot \det A_{II} < 0$, argumentando como en la demostración de la Proposición 1.3, tendremos que $\bar{x}_I \cdot \bar{x}_{II} < 0$, es decir que hay un equilibrio, real o virtual en cada región. Pero como el signo de \bar{x}_I coincide con el de $\left| \begin{array}{cc} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{array} \right| \cdot \det A_I$, resultará que si $\left| \begin{array}{cc} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{array} \right| \cdot \det A_I > 0$, entonces $\bar{x}_I > 0$, y por tanto $\bar{x}_{II} < 0$, lo que implica que los dos equilibrios son reales porque cada uno está en su región.

b) Si $\left| \begin{array}{cc} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{array} \right| \cdot \det A_I < 0$, resultará $\bar{x}_I < 0$ y por tanto $\bar{x}_{II} > 0$, con lo que ambos equilibrios son virtuales y el sistema, por consiguiente, carece de ellos. □

Consideremos ahora el caso de que alguna de las dos matrices A_I y A_{II} sea singular. Descartamos, de acuerdo con la Proposición 1.7, el caso trivial de que alguna de las

dos matrices sea la matriz nula, de modo que el rango de las mismas es al menos 1. Supongamos para fijar ideas que $\det A_I = 0$. Entonces caben dos posibilidades

$$\text{rango } A_I = 1 \quad \text{rango } (A_I|B_I) = 2 \quad \text{o bien} \quad \text{rango } A_I = \text{rango } (A_I|B_I) = 1$$

verificándose entonces la siguiente Proposición

Proposición 1.5 *a) Si $\text{rango } A_I = 1$ y $\text{rango } (A_I|B_I) = 2$, entonces el número y la situación de los equilibrios es como sigue*

a1) si $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \cdot \det A_{II} < 0$, el sistema tiene un solo equilibrio que está situado en la región II;

a2) si $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \cdot \det A_{II} > 0$ o bien $\det A_{II} = 0$, no hay ningún equilibrio.

b) Si $\text{rango } A_I = \text{rango } (A_I|B_I) = 1$ entonces

b1) si $\det A_{II} \neq 0$ hay infinitos equilibrios en la región I y otro en la frontera, situados todos ellos en la semirrecta $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ ($x \geq 0$)

b2) si $\det A_{II} = 0$ hay infinitos equilibrios situados

$$\begin{array}{ll} \text{en la región I sobre la semirrecta} & a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (x > 0) \\ \text{en la región II sobre la semirrecta} & c_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (x < 0) \end{array}$$

y un equilibrio en la frontera.

DEMOSTRACIÓN: *a) Si $\text{rango } A_I = 1$ y $\text{rango } (A_I|B_I) = 2$, el Teorema de Rouché niega la existencia de equilibrios tanto reales como virtuales en la región I, de modo que de haber algún equilibrio, estará en la región II. Consideremos seguidamente los subcasos a1) y a2).*

a1) A partir de las expresiones de las coordenadas de los equilibrios, se deduce que el signo de \bar{x}_{II} y el de $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \cdot \det A_{II}$ coinciden, de modo que cuando este signo es negativo, el único equilibrio del sistema está en la región II.

a2) Si $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \cdot \det A_{II} > 0$ no hay equilibrios, ya que el equilibrio de la región II es ahora virtual. En el caso de ser $\det A_{II} = 0$, tendríamos $\text{rango } A_{II} = 1$, y como $\text{rango } (A_{II}|B_{II}) = \text{rango } (A_I|B_I) = 2$, de nuevo el Teorema de Rouché impide la existencia de equilibrios en la región II.

b) Supongamos ahora que $\text{rango } A_I = \text{rango } (A_I|B_I) = 1$ y consideremos los subcasos:

b1) Si $\text{rango}(A_I|B_I) = 1$, entonces $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = 0$ y como $\det A_{II} \neq 0$, de las expresiones de las coordenadas de los equilibrios se deduce que $\bar{x}_{II} = 0$, es decir, que el único equilibrio de la región II está en la frontera. Por otra parte, es evidente que la doble igualdad $\text{rango } A_I = \text{rango}(A_I|B_I) = 1$ indica que el sistema $A_I \cdot X + B_I = 0$ es compatible indeterminado, es decir, que tiene infinitas soluciones situadas en la semirrecta

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (x > 0)$$

b2) Pero cuando $\det A_{II} = 0$, $\text{rango } A_{II} = \text{rango}(A_{II}|B_{II}) = 1$, de modo que en la región II la situación es idéntica a la que acabamos de describir en la región I. Hay pues, además de los infinitos equilibrios anteriores, otros infinitos equilibrios en la región II situados en la semirrecta

$$c_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (x < 0)$$

Por último, observar que el punto de la frontera $\left(0, \frac{-b_1}{a_{12}}\right)$ en el que las dos semirrectas tocan a la misma, también es un equilibrio del sistema □

Hay una Proposición completamente análoga a la que acabamos de exponer, en la que los papeles de las matrices A_I y A_{II} (y los de las correspondientes regiones), están intercambiados y que a continuación se enuncia.

Proposición 1.6 a) Si $\text{rango } A_{II} = 1$ y $\text{rango}(A_{II}|B_{II}) = 2$, entonces el número y la situación de los equilibrios es como sigue

a1) si $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \cdot \det A_I < 0$, el sistema tiene un solo equilibrio que está situado en la región I;

a2) si $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \cdot \det A_I > 0$ o bien $\det A_I = 0$, no hay ningún equilibrio.

b) Si $\text{rango } A_{II} = \text{rango}(A_{II}|B_{II}) = 1$ entonces

b1) si $\det A_I \neq 0$ hay infinitos equilibrios en la región II y otro en la frontera, situados todos ellos en la semirrecta $c_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (x \leq 0)$

b2) si $\det A_I = 0$ hay infinitos equilibrios situados

$$\begin{array}{ll} \text{en la región I sobre la semirrecta} & a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (x > 0) \\ \text{en la región II sobre la semirrecta} & c_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (x < 0) \end{array}$$

y un equilibrio en la frontera.

Pasemos ahora al estudio de las órbitas periódicas y otras curvas cerradas que sean unión de trayectorias. Ante todo, recordemos que por ser el sistema lineal por regiones, no es posible la existencia de tales curvas que estén totalmente contenidas en una región. Es decir, de haberlas, han de tener partes en las dos regiones y por consiguiente han de cortar transversalmente a la frontera entre ambas.

Pero de esta afirmación queda excluido el caso de que algún equilibrio sea un centro, ya que entonces estará rodeado de un continuo de órbitas periódicas. Pero es de destacar, que ahora contrariamente a la afirmación anterior, casi siempre ocurrirá que todas estas órbitas periódicas estén contenidas exclusivamente en la región a la que pertenece el centro, de modo que la más *grande* de ellas sea tangente a la frontera. Ello es así debido a que un cambio de región implica un cambio en la dinámica, y por tanto el centro sólo ejerce su dominio sobre la región a la que pertenece. No obstante, y en contraposición a este tipo de centros que llamaremos **regionales**, hay ocasiones en que las dinámicas a ambos lados de la frontera se complementan dando como resultado un comportamiento de centro con su continuo de órbitas periódicas extendiéndose por todo el plano de fases. Llamaremos **centro global** a uno que presente estas características.

El análisis de los centros tanto regionales como globales, no suele presentar dificultades analíticas; incluso si hubiera que calcular aplicaciones de Poincaré para el estudio del continuo de órbitas periódicas, éstas resultan ser particularmente sencillas.

Pasaremos a continuación a considerar la posible existencia de curvas de Jordan en el plano de fases que sean unión de trayectorias del sistema dinámico. Las más simples de estas curvas son las órbitas periódicas pero también entran en esta categoría las órbitas homoclinas junto con el equilibrio en el que nacen y mueren, y las parejas de órbitas heteroclinas que conectan un par de puntos de equilibrio junto con esos mismos puntos. Para referirnos de forma genérica a este tipo de curvas, usaremos el término **policiclo**.

Proposición 1.7 *Una condición necesaria para que el sistema dinámico tenga policiclos es que $a_{12} \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $a_{12} = 0$, entonces los autovalores de A_I y A_{II} son reales, de modo que los equilibrios (reales o virtuales) son sillas o nodos, lo que excluye la existencia de cualquier tipo de policiclos que esté contenido totalmente en una región, ya que en un sistema lineal, y el presente lo es si nos restringimos a una sola región, el único equilibrio que admite policiclos es el centro. Pero pueden existir policiclos que tengan partes en las dos regiones. Si eso es así, entonces han de cortar necesariamente a la frontera.

Si nos situamos en un punto cualquiera $(0, y)$ de la misma, la trayectoria que pasa por él, lo hace con una componente horizontal de la velocidad $x' = b_1$. Entonces, si

$b_1 \neq 0$, todas las órbitas que cruzan la frontera lo hacen en el mismo sentido. mientras que si $b_1 = 0$, la propia frontera es una trayectoria. En ninguno de estos casos puede haber trayectorias que partiendo de una región, regresen de nuevo a la misma. En estas circunstancias es imposible la existencia de policiclos. \square

Los sistemas que carecen de policiclos resultan poco interesantes bajo el punto de vista dinámico, por lo que prescindiremos de ellos a lo largo de este trabajo. Así pues, supondremos siempre que $a_{12} \neq 0$.

Puesto que los policiclos que pueda tener el sistema cortan a la frontera (excluido, claro está, el caso de un centro regional), nos interesa conocer el comportamiento de las trayectorias al cruzarla. Para ello disponemos de la siguiente Proposición.

Proposición 1.8 *Si $a_{12} \neq 0$, por cada punto $(0, y)$ de la frontera entre las dos regiones, pasa una trayectoria que la cruza en un sentido si $y > \frac{-b_1}{a_{12}}$ y en el sentido contrario si $y < \frac{-b_1}{a_{12}}$*

DEMOSTRACIÓN: Tomando $x(0) = 0$ e $y(0) = y$, el Teorema de existencia y unicidad asegura que existe una única solución que pasa por dicho punto, y por tanto, una única trayectoria que pasa por él. Por otra parte, tenemos $x'(0, y) = a_{12}y + b_1$, y como es sabido, el sentido de recorrido de la trayectoria que pasa por $(0, y)$, viene dado por el signo de $x'(0, y)$. \square

La siguiente Proposición da condiciones suficientes para la ausencia de órbitas periódicas acotadas y se basa en dos hechos bien conocidos: primero, en un sistema lineal (y el nuestro lo es si nos restringimos a una región) los equilibrios con autovalores reales llevan asociadas unas trayectorias rectilíneas que constituyen sus *variedades lineales invariantes* y segundo, en un sistema continuo plano, toda órbita periódica ha de contener en su interior un equilibrio del sistema [23, Hartman, 1982 pp. 150-151].

Proposición 1.9 *Son condiciones suficientes para la no existencia de órbitas periódicas con partes en las dos regiones*

- a) *Que algún equilibrio sea un nodo y no esté en la frontera.*
- b) *Que haya un punto de silla virtual.*
- c) *Que haya un equilibrio en la frontera y que alguna de las dos matrices del sistema tenga autovalores reales.*
- d) *Que haya infinitos equilibrios.*

e) *Que no haya equilibrios.*

DEMOSTRACIÓN: a) Si hay un equilibrio tipo nodo en alguna de las dos regiones, hay dos (una si el nodo es impropio) trayectorias rectilíneas que comienzan (o terminan) en ese equilibrio y que no están acotadas, De haber alguna órbita periódica tendría que rodear al equilibrio lo que la obligaría a cortar a esas trayectorias rectilíneas, cosa que no puede ocurrir. No hay pues órbitas periódicas.

b) Supongamos que en una región, digamos la I, hay un equilibrio virtual tipo silla. Entonces hay dos puntos en la frontera en los que las variedades invariantes (estable e inestable) la cortan, internándose en la región I. En estas condiciones, cualquier trayectoria que entre en la región I, viajará por la misma bajo la influencia de la variedad inestable, tendiendo a situarse paralelamente a la misma y alejándose indefinidamente de la frontera. No existen por tanto órbitas periódicas.

c) Si alguna de las matrices del sistema tiene autovalores reales, en la correspondiente región hay dos (o una) trayectorias rectilíneas no acotadas que comienzan (o terminan) en el equilibrio de la frontera cuyas coordenadas son $\left(0, \frac{-b_1}{a_{12}}\right)$. Pero entonces, de acuerdo con la Proposición 1.8 toda trayectoria que entre en esa región, ha de hacerlo por debajo (o por encima) del equilibrio, y a partir de ahí ya no puede regresar a la región de la que procede pues para ello tendría que viajar de nuevo hasta la frontera a un punto por encima (o por debajo) del equilibrio, lo que la obligaría a cortar a las trayectorias rectilíneas. Imposible pues que haya órbitas periódicas.

d) De las Proposiciones 1.5 y 1.6 se deduce que si el sistema tiene infinitos equilibrios, éstos están situados sobre semirrectas que cortan a la frontera en el punto $\left(0, \frac{-b_1}{a_{12}}\right)$. Luego cualquier órbita que entre en una de las dos regiones en la que haya una de estas semirrectas, ha de hacerlo por encima (o por debajo) de ese punto, según se demostró en la Proposición 1.8. Pero para que esa órbita sea periódica ha de regresar a la frontera y salir de esa región, cosa que sólo puede hacer por un punto situado por debajo (o por encima) de $\left(0, \frac{-b_1}{a_{12}}\right)$, y eso la obligaría a cortar a la semirrecta de equilibrios.

e) Por último, si el sistema carece de equilibrios, no puede haber órbitas periódicas que los rodeen. \square

Proseguimos dando condiciones necesarias para la existencia de policiclos. Sea Γ un policiclo. Introducimos la notación

$$\text{int}_I(\Gamma) = \text{int}(\Gamma) \cap R_I \quad S_I = \text{área}(\text{int}_I(\Gamma))$$

$$\text{int}_{II}(\Gamma) = \text{int}(\Gamma) \cap R_{II} \quad S_{II} = \text{área}(\text{int}_{II}(\Gamma))$$

y ahora enunciaremos el siguiente Lema

Lema 1.10 *Si el sistema dinámico tiene un políciclo con partes en las dos regiones, entonces*

$$\text{traza } A_I \cdot S_I + \text{traza } A_{II} \cdot S_{II} = 0$$

DEMOSTRACIÓN: Consúltese la Proposición 3 de [24, Llibre, 1996] □

a partir del cual, formulamos la Proposición

Proposición 1.11 *Si el sistema dinámico tiene algún políciclo, entonces*

$$\text{traza } A_I \cdot \text{traza } A_{II} \leq 0$$

DEMOSTRACIÓN: Sea Γ un políciclo y supongamos que tiene partes en las dos regiones. Entonces, de acuerdo con el Lema anterior tendremos

$$\text{traza } A_I \cdot S_I + \text{traza } A_{II} \cdot S_{II} = 0$$

de donde se deduce que $\text{traza } A_I \cdot \text{traza } A_{II} < 0$ o bien, que $\text{traza } A_I = \text{traza } A_{II} = 0$.

Ahora supongamos que Γ está totalmente contenido en una región. Entonces, como la restricción del sistema dinámico a esa región es lineal, los únicos políciclos posibles son las órbitas periódicas que rodean a un centro, luego ha de ser $\text{traza } A_i = 0$ donde $i = I$ ó II . □

Hemos establecido hasta aquí algunas Proposiciones de carácter general acerca de la existencia y número de los equilibrios, así como de la existencia o inexistencia de políciclos, y en particular de órbitas periódicas. Pero sólo algunas de las Proposiciones expuestas son condiciones necesarias y suficientes, y concretamente para políciclos sólo disponemos de condiciones bien necesarias, bien suficientes de alcance limitado. El problema del estudio del sistema dinámico lineal a trozos que nos ocupa, todavía dista mucho de estar resuelto. En el resto de este Capítulo abordaremos dicho estudio, para lo que comenzaremos reduciendo lo más posible la casuística que presenta. En efecto, entre las matrices A_I, A_{II} y B_I , tenemos un total de ocho coeficientes, que pueden tomar en principio cualesquiera valores reales. Ahora bien, muchos de estos valores presentan poco interés porque dan origen a sistemas con un comportamiento dinámico poco relevante. Por ejemplo, cada vez que el sistema carezca de equilibrios, o tenga alguno en una de las dos regiones con autovalores reales, no habrá órbitas periódicas con partes en las dos regiones, de acuerdo con la Proposición 1.9.

Sería deseable poder descartar estos casos poco interesantes. También parece conveniente, si ello es posible, reducir el número de coeficientes al mínimo. Recordemos

que estos coeficientes dependen de los parámetros de bifurcación, y es evidente que el estudio se verá facilitado mientras menor sea el número de éstos. Procederemos pues en la siguiente Sección a reducir el sistema dinámico mediante cambios *ad hoc* en las variables de estado y en la variable temporal, a unas expresiones más simples denominadas **formas canónicas**.

1.2 Formas canónicas.

Teorema 1.12 *Si traza $A_I \neq$ traza A_{II} , $a_{12} \neq 0$ y el sistema tiene alguna órbita periódica, entonces existe una transformación lineal de las variables de estado y un reescalado de la variable temporal que lo reduce a la forma*

$$\begin{aligned} x' &= -f(x) - y \\ y' &= x - by - a \end{aligned} \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} -\mu x & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{siendo } \lambda \neq -\mu$$

llamada **forma canónica de Van der Pol-Duffing**.

DEMOSTRACIÓN: La desigualdad traza $A_I \neq$ traza A_{II} equivale a $a_{11} \neq c_{11}$, lo que unido a $a_{12} \neq 0$ permite efectuar la siguiente transformación en las variables de estado

$$x \longrightarrow x \quad y \longrightarrow dx + ey + f$$

donde los coeficientes d, e y f son

$$d = \frac{a_{21} - c_{21}}{a_{11} - c_{11}} \quad e = \frac{-1}{a_{12}} \quad f = \frac{-b_1}{a_{12}}$$

el sistema bajo esta transformación queda así

$$\begin{aligned} x' &= -\bar{f}(x) - y \\ y' &= \bar{p}x - \bar{b}y - \bar{a} \end{aligned} \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} -\bar{\mu}x & \text{si } x \geq 0 \\ \bar{\lambda}x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y los coeficientes $\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{p}, \bar{b}$ y \bar{a} son

$$\bar{\mu} = -(a_{11} + a_{12}d) \quad \bar{\lambda} = c_{11} + a_{12}d$$

$$\bar{p} = a_{12}(a_{12}d^2 + (a_{11} - a_{22})d - a_{21})$$

$$\bar{b} = a_{12}d - a_{22} \quad \bar{a} = a_{12}b_2 - a_{22}b_1$$

Ahora bien, si $\bar{p} = 0$, las matrices A_I y A_{II} tienen sus autovalores reales, como es fácil comprobar, de modo que según la Proposición 1.9 no pueden existir órbitas periódicas. Como estamos en la hipótesis de que las hay, tendremos que concluir que $\bar{p} \neq 0$, en

cuyo caso podemos efectuar un segundo cambio, incluyendo un reescalado de la variable temporal

$$x \longrightarrow x \quad y \longrightarrow \sqrt{|\bar{p}|} y \quad t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|\bar{p}|}} t$$

que reduce el sistema a la forma canónica de Van der Pol, en la que los coeficientes μ, λ, b y a son

$$\mu = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{|\bar{p}|}} \quad \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{|\bar{p}|}} \quad b = \frac{\bar{b}}{\sqrt{|\bar{p}|}} \quad a = \frac{\bar{a}}{|\bar{p}|}$$

□

NOTA: Si $b = 0$ nos encontramos con el sistema clásico de Rayleigh-Van der Pol.

En la forma canónica anterior se supone que la traza de la matriz del sistema a uno y otro lado de la frontera son distintas, lo que implica que $a_{11} \neq c_{11}$. Pero si no es ese el caso, los cambios de variables realizados no son válidos, de modo que si $a_{11} = c_{11}$, tenemos este otro Teorema

Teorema 1.13 Si traza $A_I = \text{traza } A_{II}$ y $a_{12} \neq 0$, entonces existe una transformación lineal de las variables de estado que reduce el sistema a la forma

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= g(x) - by - a \end{aligned} \quad \text{donde } g(x) = \begin{cases} -\det A_I x & \text{si } x \geq 0 \\ -\det A_{II} x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

llamada **forma canónica de Duffing**.

DEMOSTRACIÓN: Empleamos una transformación formalmente idéntica a la del Teorema 1.12

$$x \longrightarrow x \quad y \longrightarrow dx + ey + f$$

pero ahora con los coeficientes

$$d = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad e = \frac{1}{a_{12}} \quad f = -\frac{b_1}{a_{12}}$$

que reduce el sistema dinámico a la forma propuesta. El coeficiente a resulta ser:

$$a = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

□

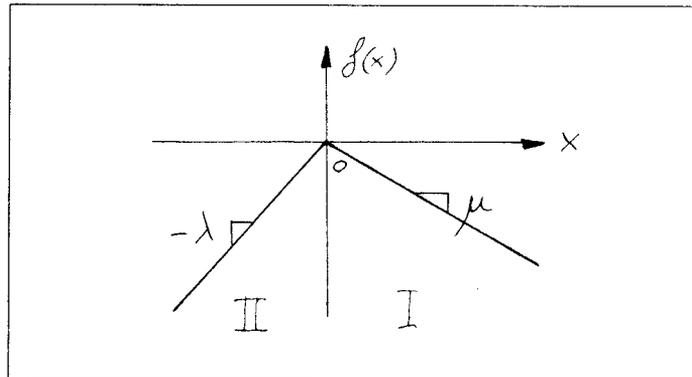


Figura 1.3:

De las dos formas canónicas mutuamente excluyentes a que podemos reducir nuestro sistema dinámico, la que presenta un comportamiento más variado e interesante es, debido a las Proposiciones anteriores, la primera de ellas. A su estudio dedicaremos el resto del presente Capítulo.

Pero hay además otra razón más profunda. En efecto, debemos destacar el hecho, que se deduce de los dos últimos Teoremas, de que un sistema plano continuo lineal a trozos y con una sola frontera es, en condiciones genéricas, un sistema del tipo Van der Pol-Duffing.

1.3 Forma de Van der Pol-Duffing.

Vamos a estudiar el sistema lineal a trozos

$$\begin{aligned}x' &= -f(x) - y \\y' &= x - by - a\end{aligned}$$

donde la función f es

$$f(x) = \begin{cases} \mu x & \text{si } x \geq 0 \\ -\lambda x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{siendo } \mu \neq -\lambda$$

La función f tiene como representación gráfica la de la Figura 1.3 y puede expresarse en términos de valores absolutos de forma más compacta

$$f(x) = \frac{\mu - \lambda}{2}x + \frac{\mu + \lambda}{2}|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3.1 Simetrías.

El estudio de las bifurcaciones de este sistema se efectúa variando en un amplio rango de valores, los parámetros a, b, λ y μ , lo que lleva a una casuística quizá muy compleja. Ello puede minimizarse en parte analizando previamente la existencia de cambios en las variables de estado x, y , en la variable independiente t , y en los parámetros de bifurcación a, b, λ y μ , que dejen invariante al sistema: son las **simetrías**.

Para el sistema que nos ocupa, hay tres simetrías, que llamaremos S_1, S_2 y S_3 :

Simetría S_1 : al cambiar

$$\begin{array}{rcc|ccc} x & \text{por} & -x & a & \text{por} & -a \\ y & \text{por} & y & b & \text{por} & -b \\ t & \text{por} & -t & \lambda & \text{por} & \mu \\ & & & \mu & \text{por} & \lambda \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Simetría S_2 : al cambiar

$$\begin{array}{rcc|ccc} x & \text{por} & -x & a & \text{por} & -a \\ y & \text{por} & -y & b & \text{por} & b \\ t & \text{por} & t & \lambda & \text{por} & -\mu \\ & & & \mu & \text{por} & -\lambda \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Simetría S_3 : al cambiar

$$\begin{array}{rcc|ccc} x & \text{por} & x & a & \text{por} & a \\ y & \text{por} & -y & b & \text{por} & -b \\ t & \text{por} & -t & \lambda & \text{por} & -\lambda \\ & & & \mu & \text{por} & -\mu \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Consideraremos una cuarta simetría S_0 que consiste en dejar inalterados las variables de estado, la variable temporal y los parámetros de bifurcación (la identidad). Podemos definir la composición de dos simetrías $S_i * S_j$ ($i, j = 0, 1, 2, 3$) como el resultado de aplicar al sistema sucesivamente y en este orden, S_j y S_i . Es evidente que se trata de una ley de composición interna, para la que es fácil comprobar que se verifica la siguiente Tabla

*	S_0	S_1	S_2	S_3
S_0	S_0	S_1	S_2	S_3
S_1	S_1	S_0	S_3	S_2
S_2	S_2	S_3	S_0	S_1
S_3	S_3	S_2	S_1	S_0

a	b	λ	μ	Caso	Aplicando la simetría...	se reduce al caso...
+	+	+	+	1	S_0	1
+	+	+	-	2	S_0	2
+	+	-	+	3	S_0	3
+	+	-	-	4	S_0	4
+	-	+	+	5	S_3	4
-	+	+	+	6	S_2	4
+	-	+	-	7	S_3	3
+	-	-	+	8	S_3	2
-	-	+	+	9	S_1	1
-	+	+	-	10	S_2	2
-	+	-	+	11	S_2	3
+	-	-	-	12	S_3	1
-	+	-	-	13	S_2	1
-	-	+	-	14	S_1	3
-	-	-	+	15	S_1	2
-	-	-	-	16	S_1	4

Tabla 1.1: La simetrías reducen el número de casos a estudiar.

en la que una observación detallada permite concluir que el conjunto de las cuatro simetrías con esta ley de composición es un grupo abeliano.

Apliquemos las simetrías para reducir el rango de variación de los parámetros de bifurcación a , b , λ y μ . En principio, los cuatro pueden tomar cualesquiera valores reales y por tanto pueden ser no negativos o negativos. Indiquemos con el signo $+$ el hecho de que un parámetro tome valores no negativos, y con el signo $-$ el que tome valores negativos. De acuerdo con este convenio, se presentan $2^4 = 16$ casos al combinar de todas las maneras posibles los signos $+$ y $-$. Vamos a centrarnos, para fijar ideas en uno de esos casos, digamos aquel en el que los signos de a , b , λ y μ son respectivamente, $+, -, -, +$ (recordemos que $+$ no indica positivo, sino no negativo). Si a este caso le aplicamos la simetría S_3 , se reduce, como es fácil comprobar, al caso en que los signos son $+, +, +, -$. Resulta pues que las simetrías reducen unos casos a otros, pero de tal manera que los dieciséis casos pueden reducirse sólo a cuatro, como se expone en la Tabla 1.1

Así hemos limitado notablemente la casuística a estudiar. Resulta obvio que la reducción de todos los casos a los cuatro numerados como 1, 2, 3 y 4 es completamente

arbitraria. Igualmente se podrían haber elegido otros cuatro. La razón de haber preferido estos es que en ellos los parámetros a y b se mantienen en valores no negativos.

Pero aún es posible reducir más la casuística aunque ahora no mediante las simetrías, sino haciendo uso del especial papel que ocupa el parámetro a en el sistema dinámico. En efecto, si suponemos $a > 0$ (de acuerdo con las consideraciones anteriores sobre el efecto de las simetrías, ya no tomaremos en cuenta la posibilidad de que $a < 0$), podemos escalar las variables de estado de este modo

$$x \longrightarrow ax \qquad y \longrightarrow ay$$

lo que reduce el sistema dinámico a la forma

$$\begin{aligned} x' &= -f(x) - y \\ y' &= x - by - 1 \end{aligned}$$

Evidentemente, si $a = 0$, no podemos hacer tal escalado, pero entonces el sistema dinámico es

$$\begin{aligned} x' &= -f(x) - y \\ y' &= x - by \end{aligned}$$

Así pues, en cualquier caso, el valor del parámetro a es irrelevante, importando sólo si es positivo o cero, lo que en la práctica reduce el número de parámetros a tres. Sólo si estamos interesados en estudiar la transición del caso $a = 0$ al caso $a > 0$, puede ser necesario considerar valores pequeños de a .

En lo sucesivo, no haremos uso del escalado anterior, y mantendremos el parámetro a en todas las ecuaciones, pero sabiendo, eso sí, que su valor numérico no es relevante.

1.3.2 Número, tipos y estabilidades de los equilibrios.

Procedamos a continuación a calcular el número y la posición de los equilibrios. Para ello consideremos en primer lugar que las dos matrices A_I y A_{II} son regulares, y por tanto sus determinantes

$$\det A_I = \mu b + 1 \neq 0 \qquad \det A_{II} = 1 - \lambda b \neq 0$$

Entonces, las coordenadas de los equilibrios, reales o virtuales, vienen dadas por

$$\begin{aligned} \bar{x}_I &= \frac{a}{\mu b + 1} & \bar{y}_I &= \frac{-\mu a}{\mu b + 1} \\ \bar{x}_{II} &= \frac{a}{1 - \lambda b} & \bar{y}_{II} &= \frac{\lambda a}{1 - \lambda b} \end{aligned}$$

Para que el primero de estos equilibrios esté situado en la región I, y por tanto sea un equilibrio real, ha de ser $\bar{x}_I > 0$, lo que ocurrirá cuando

$$a > 0 \quad \text{si} \quad \mu b + 1 > 0$$

Del mismo modo, para que el segundo equilibrio esté situado en la región II y sea por consiguiente un equilibrio real del sistema, ha de ser $\bar{x}_{II} < 0$, y eso ocurrirá cuando

$$a > 0 \quad \text{si} \quad 1 - \lambda b < 0$$

Y ahora, para que ambos equilibrios coincidan sobre la frontera (condición de continuidad) ha de ser $\bar{x}_I = \bar{x}_{II} = 0$, lo que implica que $a = 0$.

Resumiendo lo anterior, cuando $\mu b + 1 \neq 0$ y $1 - \lambda b \neq 0$, el sistema tiene dos equilibrios que podrán ser ambos reales, ambos virtuales, uno de cada clase, o bien un sólo equilibrio situado en la frontera. Recordemos que el equilibrio \bar{x}_I es real (virtual) cuando se encuentra en la región I (en la región II).

Es de señalar que cuando sólo hay un equilibrio (excepto cuando es el de la frontera), es porque el otro es virtual, y por consiguiente ambos están situados en la misma región. Asimismo, cuando no hay ningún equilibrio, es porque ambos son virtuales, y por tanto \bar{x}_I está situado en la región II y \bar{x}_{II} en la I.

Proseguimos estudiando el número y la situación de los equilibrios, pero ahora cuando uno de los dos determinantes de A_I o A_{II} se anulan. Es de destacar que ambos determinantes no pueden anularse simultáneamente, porque entonces tendríamos la doble igualdad $\mu b + 1 = 0 = 1 - \lambda b$ que sólo se da si $b \neq 0$, pero en tal caso sería $\lambda = -\mu$, o lo que es lo mismo, traza $A_I = \text{traza } A_{II}$, y ello no puede ocurrir cuando el sistema dinámico está reducido, como ocurre ahora, a la forma de Van der Pol-Duffing.

Nos quedamos pues con que sólo uno de los dos determinantes se anula. Comencemos suponiendo que $\det A_I = 0$. Los equilibrios (si los hay) situados en la región I, se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que para ser compatible debe cumplir que los menores de orden dos de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -\mu a \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -b & a \end{vmatrix} = -a$$

sean simultáneamente nulos. Ello ocurrirá cuando $a = 0$, en cuyo caso el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, hay infinitos equilibrios reales en la región I situados todos ellos sobre la semirrecta

$$y = \mu x \quad \forall x > 0$$

Pero al mismo tiempo $\det A_{II} = 1 - \lambda b \neq 0$ por lo que el sistema

$$A_{II} \cdot X + B_{II} = 0$$

que con la condición $a = 0$ se convierte en

$$A_{II} \cdot X = 0$$

tiene como única solución la trivial $(0, 0)$, es decir, hay un equilibrio real situado en la frontera.

En el caso de que $a > 0$, no hay ningún equilibrio en la región I, pero como sigue siendo $\det A_{II} \neq 0$, el sistema

$$A_{II} \cdot X + B_{II} = 0$$

tiene la solución única

$$\bar{x}_{II} = \frac{a}{1 - \lambda b} \quad \bar{y}_{II} = \frac{\lambda a}{1 - \lambda b}$$

que corresponde a un equilibrio real si

$$a > 0 \quad \text{y} \quad 1 - \lambda b < 0$$

Consideraciones análogas pueden hacerse cuando el otro determinante $\det A_{II}$ es cero, y concluir que como antes hay infinitos equilibrios en la región II situados sobre la semirrecta

$$y = \lambda x \quad \forall x < 0$$

cuando los dos menores

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = \lambda a \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -b & a \end{vmatrix} = -a$$

sean simultáneamente cero lo que equivale a la igualdad $a = 0$. Además de estos equilibrios de la región II, hay otro situado en la frontera.

Pero como antes, si estos menores no se anulan, dado que $\det A_I \neq 0$, el sistema

$$A_I \cdot X + B_I = 0$$

tiene la solución única

$$\bar{x}_I = \frac{a}{\mu b + 1} \quad \bar{y}_I = \frac{-\mu a}{\mu b + 1}$$

que corresponde a un equilibrio real si

$$a > 0 \quad \text{y} \quad \mu b + 1 > 0$$

Como resumen de los hechos analizados hasta aquí, y para ordenar los resultados obtenidos, vamos a mostrar el número y situación de los equilibrios reales de acuerdo con los valores no negativos de a y de los determinantes de A_I y A_{II} en la Tabla 1.2.

a	$1 - \lambda b$	$\mu b + 1$	n° de equilibrios	Situación
> 0	> 0	> 0	1	en la región I
	> 0	< 0	0	-
	> 0	$= 0$	0	-
	< 0	> 0	2	uno en cada región
	< 0	< 0	1	en la región II
	< 0	$= 0$	1	en la región II
	$= 0$	> 0	1	en la región I
	$= 0$	< 0	0	-
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	1	en la frontera
	$\neq 0$	$= 0$	infinito	uno en la frontera y los demás en la región I
	$= 0$	$\neq 0$	infinito	uno en la frontera y los demás en la región II

Tabla 1.2: Número y situación de los equilibrios.

Determinados el número y la situación de estos equilibrios, pasamos a estudiar sus tipos y estabildades. Para ello investigaremos los autovalores de las matrices A_I y A_{II} .

Los autovalores de la matriz A_I son

$$w_1 = \frac{-(\mu + b) + \sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \quad w_2 = \frac{-(\mu + b) - \sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2}$$

y los de la matriz A_{II}

$$z_1 = \frac{\lambda - b + \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \quad z_2 = \frac{\lambda - b - \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2}$$

Obsérvese que los autovalores de A_{II} son idénticos a los de A_I , si cambiamos λ por $-\mu$, lo que permite que limitemos nuestro estudio al de los autovalores de A_I . Las conclusiones que obtengamos serán válidas también para los de A_{II} sin más que hacer el cambio de μ por $-\lambda$.

Así pues, comencemos señalando que los autovalores de A_I serán reales si el discriminante es no negativo

$$(\mu - b)^2 - 4 \geq 0$$

o lo que es lo mismo, si

$$|\mu - b| \geq 2$$

en tanto que serán complejos si

$$|\mu - b| < 2$$

Autovalores	$\mu b + 1$	$\mu + b$	Signo
reales y distintos $ \mu - b > 2$	> 0	> 0	$w_1 < 0 \ w_2 < 0$
		< 0	$w_1 > 0 \ w_2 > 0$
	< 0	$\neq 0$	$w_1 > 0 \ w_2 < 0$
		$= 0$	$w_1 = -w_2 > 0$
	$= 0$	> 0	$w_1 = 0 \ w_2 < 0$
		< 0	$w_1 < 0 \ w_2 = 0$
reales e iguales $ \mu - b = 2$	> 0	> 0	$w_1 = w_2 < 0$
		< 0	$w_1 = w_2 > 0$
	$= 0$	$= 0$	$w_1 = w_2 = 0$
complejos $ \mu - b < 2$	> 0	> 0	$Re(w_1) = Re(w_2) < 0$
		< 0	$Re(w_1) = Re(w_2) > 0$
		$= 0$	$Re(w_1) = Re(w_2) = 0$

Tabla 1.3: Los autovalores de la matriz A_I .

Interesa ahora conocer el signo de los autovalores cuando éstos son reales o el signo de su parte real cuando son complejos para poder así establecer la estabilidad o inestabilidad de los equilibrios tanto reales como virtuales.

De las igualdades

$$w_1 \cdot w_2 = \det A_I = \mu b + 1 \quad \text{y} \quad w_1 + w_2 = \text{traza } A_I = -(\mu + b)$$

es fácil deducir que si $\mu b + 1 < 0$, los dos autovalores han de ser reales y de signos opuestos, siendo además $w_2 < 0 < w_1$. Pero si $\mu b + 1 > 0$, pueden ser reales o complejos. En ambos casos, sus partes reales tienen el mismo signo que $-(\mu + b)$. Por último, si $\mu b + 1 = 0$, siendo $b \neq 1$, un autovalor es cero, y el otro tiene el signo de $-(\mu + b)$. Únicamente en el caso de que $\mu = b = 1$, los dos autovalores serán nulos. Como resumen de lo dicho, tenemos la Tabla 1.3.

El estudio de los autovalores de A_{II} , como ya hemos señalado, es completamente análogo de modo que no lo repetiremos. La Tabla 1.4 similar a la 1.3 muestra las conclusiones relativas a los autovalores de la matriz A_{II} .

1.4 Semiaplicaciones de Poincaré.

Estudiaremos las bifurcaciones de la dinámica haciendo variar los valores de los parámetros a, b, λ y μ , de modo que el sistema exhiba distintos comportamientos. Para dar cuenta de tales cambios, trazaremos sobre unos diagramas, regiones tales que al pasar de unas a otras, se produzcan cambios cualitativos en la conducta del sistema.

Autovalores	$1 - \lambda b$	$\lambda - b$	Signo
reales y distintos $ \lambda + b > 2$	> 0	> 0	$z_1 > 0 \ z_2 > 0$
		< 0	$z_1 < 0 \ z_2 < 0$
	< 0	$\neq 0$	$z_1 > 0 \ z_2 < 0$
		$= 0$	$z_1 = -z_2 > 0$
	$= 0$	> 0	$z_1 > 0 \ z_2 = 0$
		< 0	$z_1 = 0 \ z_2 > 0$
reales e iguales $ \lambda + b = 2$	> 0	> 0	$z_1 = z_2 > 0$
		< 0	$z_1 = z_2 < 0$
	$= 0$	$= 0$	$z_1 = z_2 = 0$
complejos $ \lambda + b < 2$	> 0	> 0	$Re(z_1) = Re(z_2) > 0$
		< 0	$Re(z_1) = Re(z_2) < 0$
		$= 0$	$Re(z_1) = Re(z_2) = 0$

Tabla 1.4: Los autovalores de la matriz A_{II} .

Estos diagramas se conocen como **conjuntos de bifurcaciones**, y usualmente son representaciones cartesianas bi o tridimensionales en cuyos ejes se sitúan los valores de los parámetros de bifurcación que se estimen más relevantes.

En el sistema bajo la forma de Van der Pol-Duffing que nos ocupa, se presentan los cuatro parámetros citados antes, pero a raíz del estudio de las simetrías efectuado en la Sección 1.3.1, podemos tomar $a \geq 0$ y $b \geq 0$, y si además tenemos en cuenta los comentarios hechos al final de esa misma Sección acerca del parámetro a , podremos trazar dos grupos de conjuntos bidimensionales de bifurcaciones, uno para $a = 0$ y otro para $a > 0$. A su vez, en cada uno de ellos consideraremos distintos valores del parámetro b . Los otros dos parámetros λ y μ , figurarán sobre los ejes de estos diagramas.

En la Sección 1.1 de introducción a este Capítulo, hemos establecido algunos resultados generales acerca del número de equilibrios y de la existencia o inexistencia de policiclos y órbitas periódicas. Si bien es verdad que tales resultados son muy generales y no completan ni mucho menos el estudio de los sistemas con una sola frontera, sí permiten trazar zonas sobre los conjuntos de bifurcaciones, en las cuales conocemos el número de equilibrios, y en algunas de ellas podemos incluso descartar la existencia de órbitas periódicas. Ello facilita grandemente el trabajo, ya que en las zonas donde no hay tales órbitas, aparte de presentar poco interés, el diagrama de fases queda totalmente determinado conociendo la posición, tipo, número y estabilidad de los equilibrios, información que ha sido obtenida con detalle en la Sección 1.3.2.

En las Figuras 1.4 a 1.11, se muestran unos primeros esbozos de los distintos conjuntos de bifurcaciones, que se irán completando progresivamente a lo largo del Capítulo,

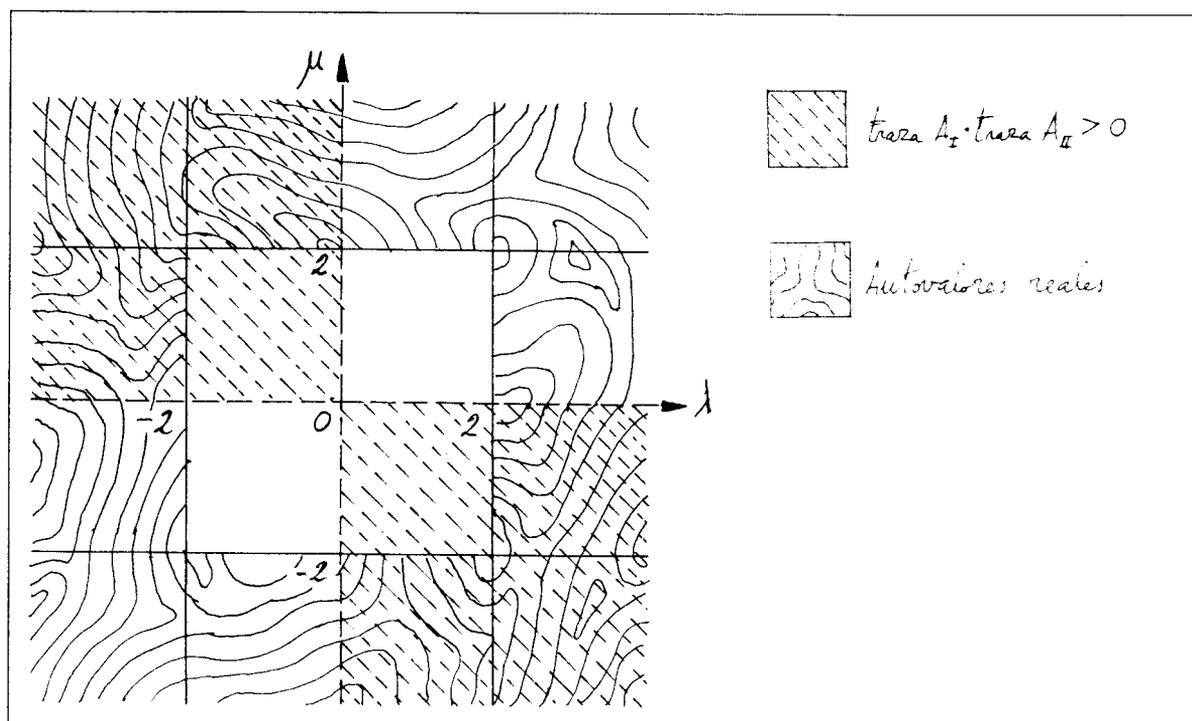


Figura 1.4: $a = 0$. $b = 0$

conforme vayamos reuniendo más información acerca del comportamiento del sistema. Las zonas rayadas corresponden a valores de los parámetros de bifurcación para los que el sistema no presenta órbitas periódicas. En las zonas no rayadas, la existencia o no de polímeros está por determinar, cosa que haremos construyendo las aplicaciones de Poincaré y estudiando sus puntos fijos.

Para construir dichas aplicaciones necesitamos una curva en el plano de fases que sea transversal a las órbitas para que actúe como sección de Poincaré. Dada la índole del sistema bajo estudio, parece indicado tomar en calidad de tal, la frontera entre las regiones, ya que cualquier órbita periódica (excepto las que corresponden a centros regionales, es decir que afectan sólo a la región en la que se encuentran), ha de tener partes en las dos regiones, y cortar por tanto a la frontera común.

Pero además, ya que el sistema es lineal a cada lado, puede integrarse de forma exacta como se describe en el Apéndice A, y a partir de las soluciones halladas pueden obtenerse tal como se hace en el Apéndice B, las funciones f y g conocidas como **semiaplicaciones de Poincaré**.

Estas funciones fueron introducidas en [13. Andronov, 1987], aunque no con el nombre que le hemos dado aquí, y consideradas también en [17. Minorsky, 1974].

A continuación vamos a describir estas funciones. De la Proposición 1.8, se deduce

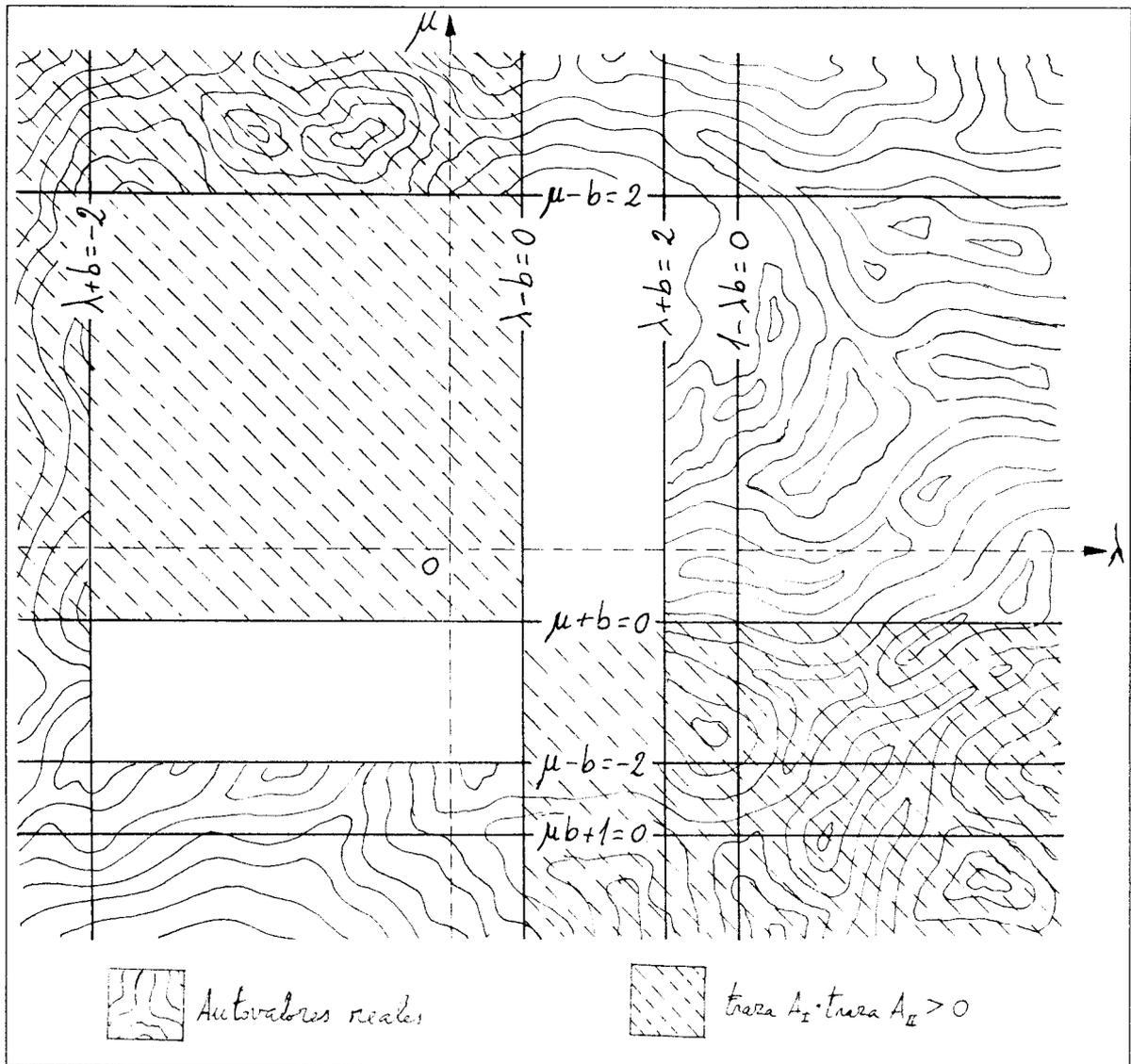


Figura 1.5: $a = 0$, $0 < b < 1$

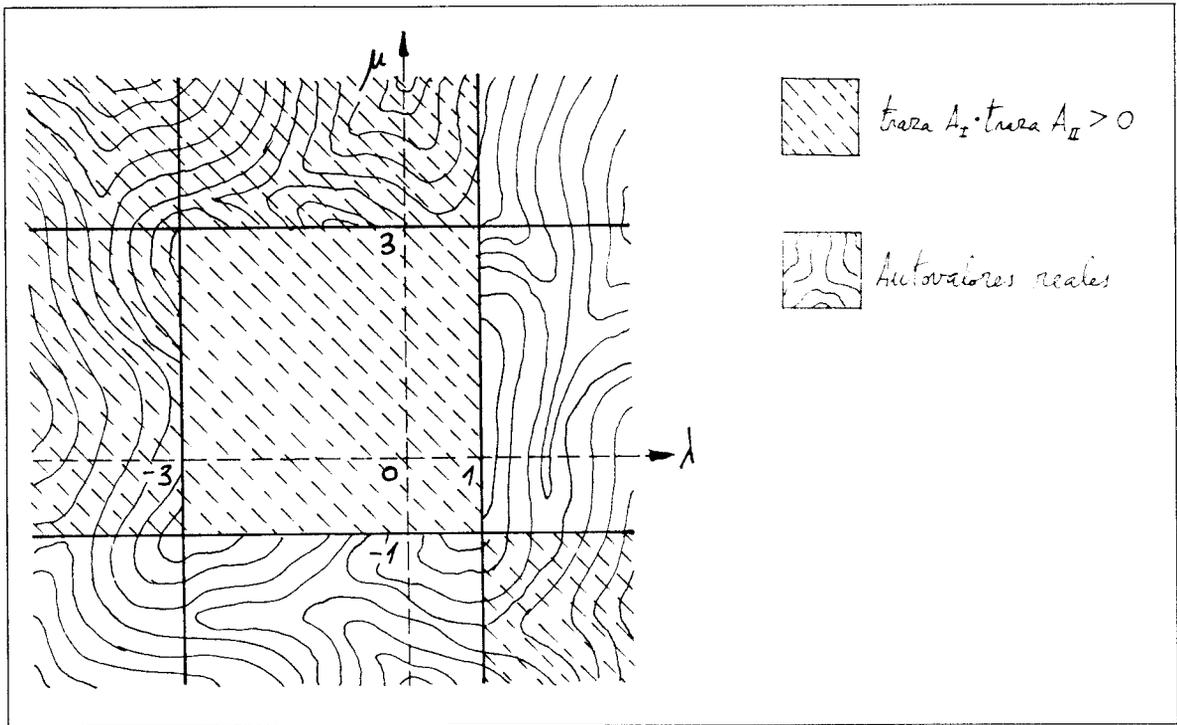


Figura 1.6: $a = 0, b = 1$

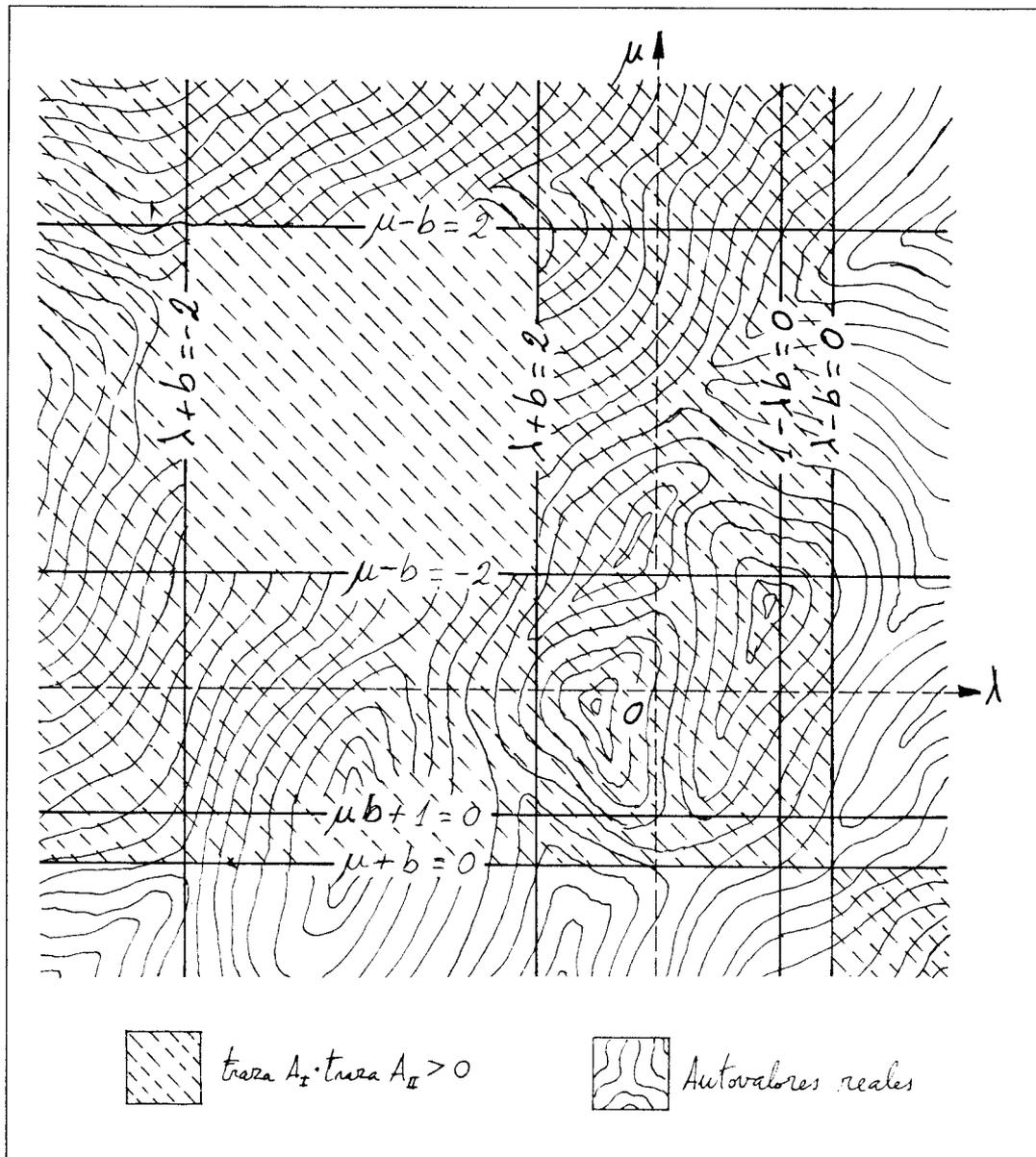
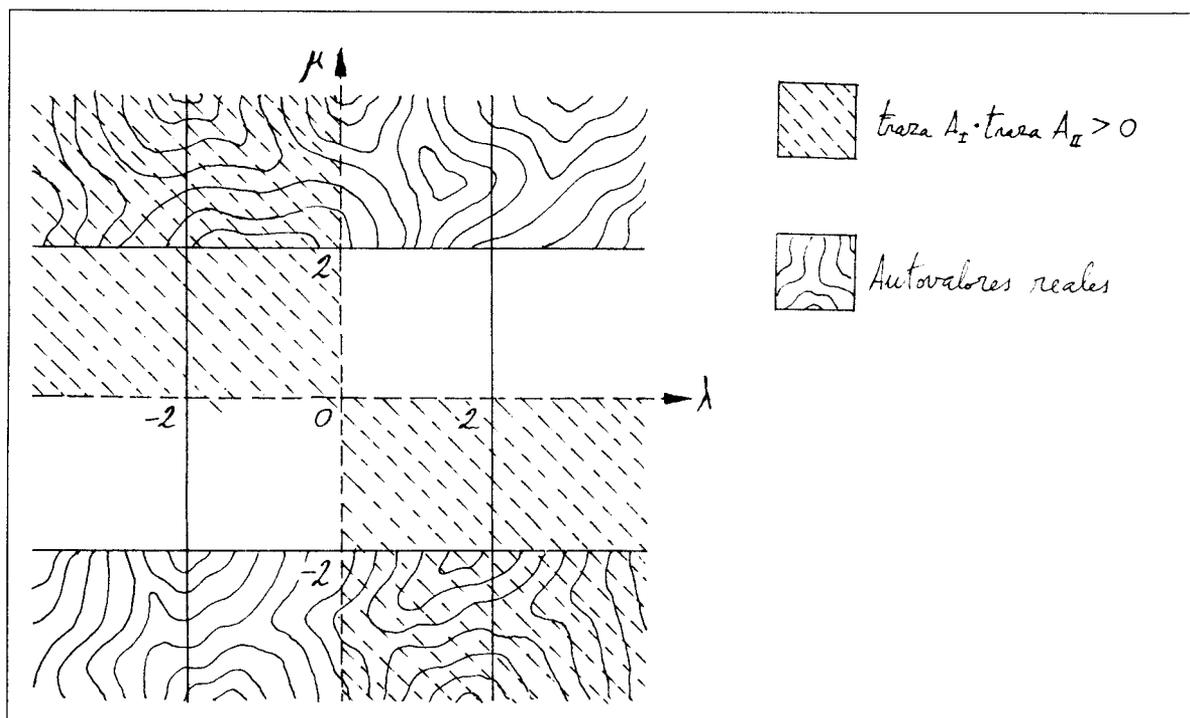


Figura 1.7: $a = 0, 1 < b$

Figura 1.8: $a > 0$, $b = 0$

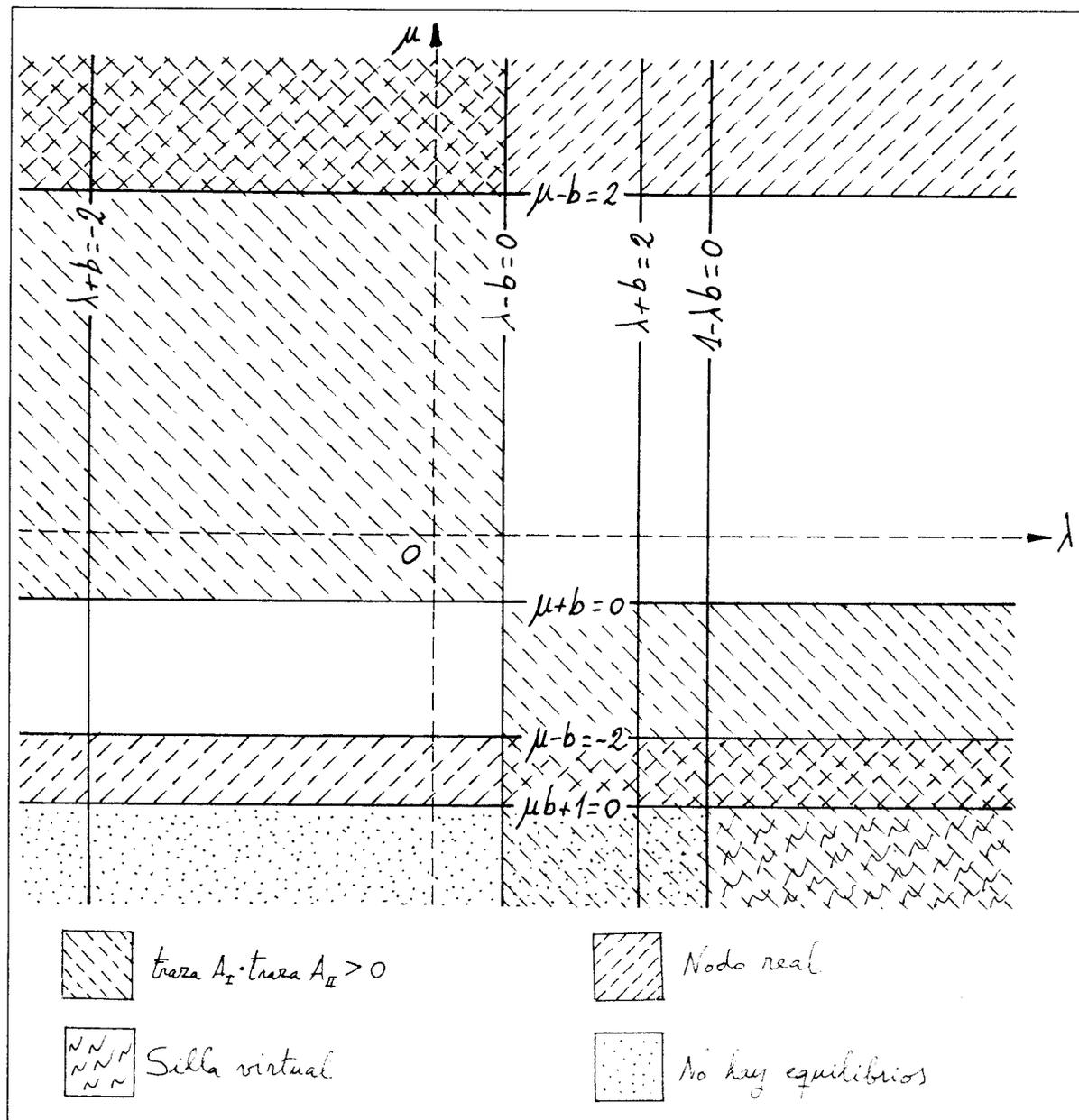
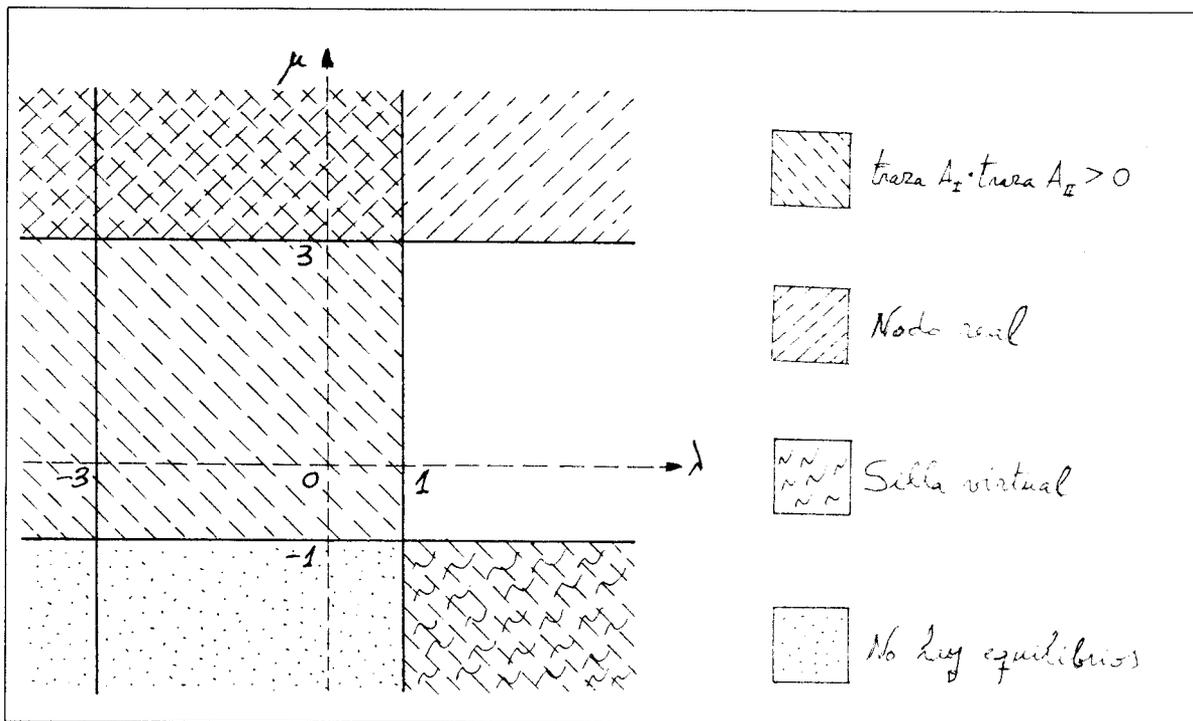


Figura 1.9: $a > 0$, $0 < b < 1$

Figura 1.10: $a > 0$, $b = 1$

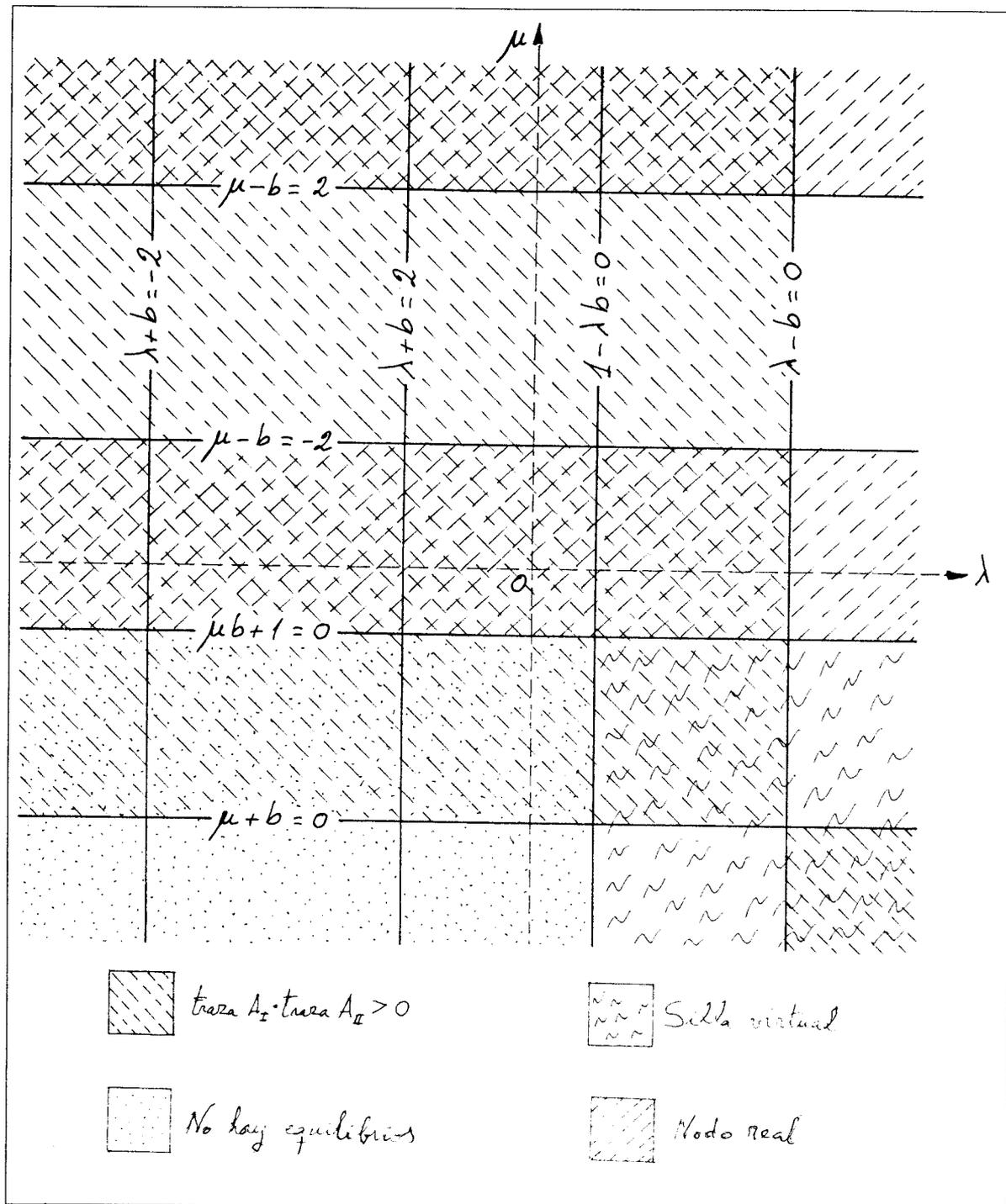


Figura 1.11: $a > 0, 1 < b$

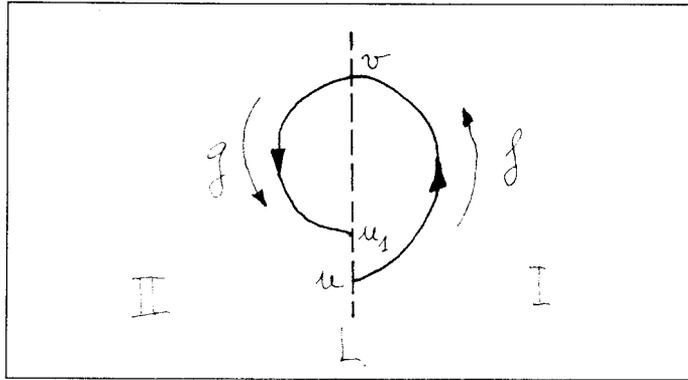


Figura 1.12:

que las trayectorias que entran en la región I lo hacen por puntos de la frontera con ordenada $u < 0$, en tanto que las que salen de esa región lo hacen por puntos de ordenada $v > 0$. Así pues, definimos la semiaplicación f como la función que a cada ordenada $v > 0$ del punto de salida de una trayectoria de la región I, le hace corresponder la ordenada $u < 0$ del punto de entrada de esa misma trayectoria.

Pero en la región II, las trayectorias que entran lo hacen por puntos de la frontera con ordenada $v > 0$, y las que salen, por puntos de ordenada $u_1 < 0$. Así pues definimos la semiaplicación g como la función que a cada ordenada $v > 0$ del punto de entrada de una trayectoria en la región II, le hace corresponder la ordenada $u < 0$ del punto de salida de esa misma trayectoria. En la Figura 1.12 se esquematizan las dos semiaplicaciones descritas.

Resulta ahora evidente que la aplicación de Poincaré P que tiene por sección la frontera, es la composición de g con f^{-1} , es decir

$$P = g \circ f^{-1} \quad \text{o bien} \quad P(u) = g(f^{-1}(u))$$

El comportamiento de P que en última instancia nos informará de la existencia y estabilidad de las órbitas periódicas, dependerá de como sean f y g , y éstas a su vez de la dinámica del sistema en una y otra región. Por consiguiente, el estudio que sigue se ha desglosado de acuerdo con el tipo de los autovalores de las matrices A_I y A_{II} . De toda la casuística posible, que es muy variada, sólo se han analizado aquellos casos en los que según los esbozos previos de las Figuras 1.4 a 1.11, pueden existir órbitas periódicas.

Para mayor claridad, reunimos esos casos en la Tabla 1.5

Semiaplicación	Tipo del equilibrio	Situación
f	foco o centro	En la región I (real) o en la frontera
g	foco o centro	En la región I (virtual) o en la frontera
	nodo	En la región I (virtual)
	silla	En la región II (real)

Tabla 1.5: Distintos tipos de semiaplicaciones de Poincaré.

1.4.0.1 La semiaplicación f .

El equilibrio de la región I es un foco o un centro real, o un foco situado en la frontera. El estudio de esta semiaplicación varía según que el equilibrio sea

- a) Un foco o un centro situado en la frontera o un centro (real) en la región I.
- b) Un foco (real) situado en la región I

La razón es que en *a)* es posible determinar la forma explícita de la semiaplicación, que es, por cierto, una función lineal, y por tanto muy sencilla de estudiar, mientras que en *b)* no es posible obtener tal forma explícita dado que la eliminación del parámetro τ_1 entre las dos ecuaciones paramétricas que definen a f , y que se han obtenido en el Apéndice B, nos lleva a una relación implícita entre las variables u y v que no es cómoda de manejar. La diferencia es pues únicamente de procedimiento, por lo que abordaremos por separado su estudio.

Pero en cualquier caso, debemos tener en cuenta las ecuaciones paramétricas citadas, que de acuerdo con el Apéndice B, son

$$u(\tau_1) = \frac{\beta_1 a}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \frac{-\beta_1 a}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

donde los coeficientes β_1 y γ_1 son

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}{2} \quad \gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}$$

y la función ϕ se ha descrito en el Apéndice C. Nótese que el signo de γ_1 es el de la parte real de los autovalores de A_I , así que la estabilidad del equilibrio depende del signo de ese coeficiente.

Otros datos de interés en el análisis que sigue son el dominio y el recorrido de la función f , que de acuerdo con la Figura 1.13 son

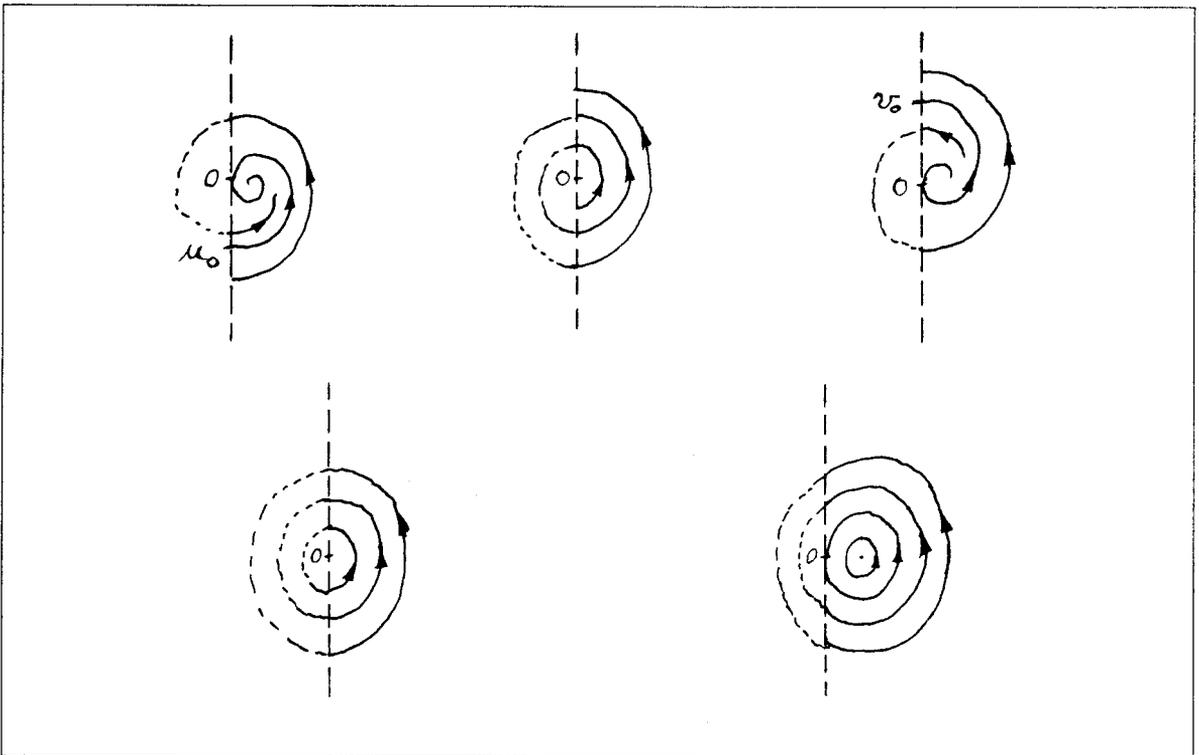


Figura 1.13: Foco o centro en la frontera o en la región I.

- a) Si el equilibrio es un foco o un centro situado en la frontera, o un centro (real) en la región I:

$$f : [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0]$$

- b) Si el equilibrio es un foco (real) situado en la región I:

$$f : [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, u_0] \quad \text{si } \gamma_1 < 0$$

$$f : [v_0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0] \quad \text{si } \gamma_1 > 0$$

Cuando $\gamma_1 < 0$, el valor u_0 es la ordenada del punto de la frontera del que parte la trayectoria que tras viajar por la región I, vuelve a la frontera al punto $(0, 0)$. Nótese que por ser ese punto, el que marca la separación entre las trayectorias que cruzan en uno u otro sentido la frontera, la trayectoria que parte de u_0 , es tangente en el origen a dicha frontera. El valor v_0 juega un papel parecido cuando $\gamma_1 > 0$

Comencemos con el primero de los dos casos citados.

Proposición 1.14 *Si el sistema dinámico en la forma de Van der Pol tiene un centro en la frontera o en la región I, la semiaplicación f es*

$$f(v) = -v$$

y si tiene un foco en la frontera, entonces la semiaplicación f es

$$f(v) = -e^{-\gamma_1 \pi} v$$

DEMOSTRACIÓN: Comencemos suponiendo que el equilibrio es un centro. Entonces, tanto si está en la frontera como en la región I, tendremos traza $A_I = -(\mu + b) = 0$ y por tanto $\gamma_1 = 0$, lo que permite eliminar el parámetro τ_1 entre las dos ecuaciones paramétricas de f , resultando $u = f(v) = -v$.

Ahora supongamos que el equilibrio es un foco situado en la frontera. Entonces las citadas ecuaciones paramétricas carecen de sentido, ya que entonces, al ser $a = 0$, se tendría $u = v = 0$, que no define ninguna función. Así que vamos a obtener directamente la semiaplicación f . Para ello recurriremos a la solución general de las ecuaciones diferenciales del sistema dinámico que ha sido obtenida en el Apéndice A:

$$x(t) = e^{\alpha_1 t} (-k_2 \cos \beta_1 t - k_1 \operatorname{sen} \beta_1 t)$$

$$y(t) = e^{\alpha_1 t} [(k_1 \beta_1 + k_2(\mu + \alpha_1)) \cos \beta_1 t + (k_1(\mu + \alpha_1) - k_2 \beta_1) \operatorname{sen} \beta_1 t]$$

y la sometemos a las condiciones iniciales

$$x(0) = 0 \quad y(0) = u$$

que proporcionan las constantes de integración

$$k_1 = \frac{u}{\beta_1} \quad k_2 = 0$$

de donde se deduce que la trayectoria que entra en la región I desde la II por el punto de la frontera de coordenadas $(0, u)$, con $u < 0$ (Proposición 1.8), contiene una solución del sistema dinámico cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = -\frac{u}{\beta_1} e^{\alpha_1 t} \operatorname{sen} \beta_1 t$$

$$y(t) = e^{\alpha_1 t} \left(u \cos \beta_1 t + \frac{u}{\beta_1} (\mu + \alpha_1) \operatorname{sen} \beta_1 t \right)$$

Después de viajar por la región I rodeando al origen durante un tiempo de vuelo t_1 , la trayectoria vuelve a tocar la frontera, pero ahora en un punto de coordenadas $(0, v)$, con $v > 0$ (Proposición 1.8), por lo que debe verificarse

$$x(t_1) = 0 \quad y(t_1) = v$$

Puesto que u no puede ser nulo para todos los valores de t , de la primera de estas igualdades se deduce que

$$\operatorname{sen} \beta_1 t_1 = 0 \quad \text{y por tanto} \quad t_1 = \frac{k\pi}{\beta_1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

El valor $k = 0$ corresponde a un tiempo de vuelo $t_1 = 0$, es decir, al propio equilibrio. El valor $k = 1$, al tiempo de vuelo $t_1 = \frac{\pi}{\beta_1}$ necesario para que la trayectoria alcance por primera vez la frontera, así que al sustituir en la segunda de las igualdades, queda

$$v = -e^{\alpha_1 \frac{\pi}{\beta_1}} u$$

de donde se deduce

$$u = f(v) = -e^{-\gamma_1 \pi} v$$

Por último, observar que esta expresión coincide, si $\gamma_1 = 0$, con la que hemos obtenido para el caso de ser el equilibrio un centro. \square

Proseguimos con el estudio de la función f cuando el equilibrio es un foco real situado en la región I.

Proposición 1.15 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol, tiene un foco real situado en la región I, entonces la semiaplicación f verifica*

a) es decreciente, y su derivada f' cumple

$$f'(0) = 0 \quad \text{si el foco es estable,}$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} f'(v) = -\infty \quad \text{si el foco es inestable;}$$

b) su gráfica es una curva convexa desde arriba si el foco es estable, y cóncava si es inestable;

c) su gráfica tiene por asíntota en el plano v, u la recta de ecuación

$$u = -e^{-\gamma_1 \pi} v - \frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1} \cdot (1 + e^{-\gamma_1 \pi})$$

DEMOSTRACIÓN: Si el foco es estable, para calcular u_0 debemos hallar el valor τ_{10} del parámetro τ_1 para el que $v(\tau_{10}) = 0$, lo que equivale a resolver la ecuación $\phi(\tau_1; -\gamma_1) = 0$ con $\gamma_1 < 0$, y de ahí calcular $u_0 = u(\tau_{10})$.

De igual modo, si el foco es inestable, para calcular v_0 debemos hallar el valor τ'_{10} para el que $u(\tau'_{10}) = 0$ o lo que es lo mismo, resolver la ecuación $\phi(\tau_1; \gamma_1) = 0$ con $\gamma_1 > 0$ y calcular $v_0 = v(\tau'_{10})$. Las soluciones de estas ecuaciones están representadas en la Figura C.1 del Apéndice C.

Por otra parte, los límites

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} u(\tau_1) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} v(\tau_1) = +\infty$$

son independientes del signo de γ_1 . De modo que podemos concluir que el intervalo de variación del parámetro τ_1 es $(\pi, \tau_0]$, donde $\tau_0 \in (\pi, 2\pi)$ representa a τ_{10} o a τ'_{10} .

a) La derivada de f es

$$f'(v) = \frac{u'(\tau_1)}{v'(\tau_1)} = -\frac{\phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\phi(\tau_1; \gamma_1)} \quad \forall \tau_1 \in (\pi, \tau_0]$$

y de ella se deduce que $f'(v) < 0 \quad \forall \tau_1 \in (\pi, \tau_{10}]$, dado el comportamiento de la función $\phi(\tau_1; \gamma_1)$ estudiado en el Apéndice C. Pero además

$$f'(0) = f'(v(\tau_{10})) = -\frac{\phi(\tau_{10}; -\gamma_1)}{\phi(\tau_{10}; \gamma_1)} = 0 \quad \text{si} \quad \gamma_1 < 0$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} f'(v) = \lim_{\tau_1 \rightarrow \tau'_{10}^+} \left[-\frac{\phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\phi(\tau_1; \gamma_1)} \right] = -\infty \quad \text{si} \quad \gamma_1 > 0$$

b) Al calcular la derivada segunda obtenemos

$$f''(v) = \frac{16(1 + \mu b)}{a[4 - (\mu - b)^2]^{3/2}} \cdot \frac{\text{sen}^3 \tau_1}{[\phi(\tau_1; \gamma_1)]^3} \cdot (\gamma_1 \text{sen} \tau_1 - \text{Sh} \gamma_1 \tau_1) \quad \forall \tau_1 \in (\pi, \tau_0]$$

Dado que $\sin \tau_1 < 0$ y que $\phi(\tau_1; \gamma_1) > 0$ cuando $\tau_1 \in (\pi, \tau_0]$ (véase el Apéndice C), el signo de $f''(v)$ será el contrario al del factor $\gamma_1 \sin \tau_1 - \text{Sh } \gamma_1 \tau_1$, ya que los demás factores y divisores son positivos. Estudiemos tal signo:

$$(\gamma_1 \sin \tau_1 - \text{Sh } \gamma_1 \tau_1)_{\tau_1=\tau_0} \begin{cases} > 0 & \text{si } \gamma_1 < 0 \\ < 0 & \text{si } \gamma_1 > 0 \end{cases}$$

pero la derivada del factor en cuestión

$$\frac{d}{d\tau_1} (\gamma_1 \sin \tau_1 - \text{Sh } \gamma_1 \tau_1) = \gamma_1 (\cos \tau_1 - \text{Ch } \gamma_1 \tau_1) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \gamma_1 < 0 \\ \leq 0 & \text{si } \gamma_1 > 0 \end{cases}$$

de modo que podemos concluir

$$\gamma_1 \sin \tau_1 - \text{Sh } \gamma_1 \tau_1 \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \gamma_1 < 0 \\ \leq 0 & \text{si } \gamma_1 > 0 \end{cases}$$

lo que implica que la gráfica de la semiaplicación f es

$$\begin{aligned} &\text{convexa vista desde arriba si } \gamma_1 < 0 \\ &\text{cóncava vista desde arriba si } \gamma_1 > 0 \end{aligned}$$

c) Para estudiar la existencia de asíntotas, calculamos los límites

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} \frac{u(\tau_1)}{v(\tau_1)} = \lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} \left[-\frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)} \right] = -e^{-\gamma_1 \pi} < -1$$

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} [u(\tau_1) - e^{-\gamma_1 \pi} v(\tau_1)] = -\frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1} \cdot (1 + e^{-\gamma_1 \pi}) < 0$$

que no dependen del signo de γ_1 y de los que se deduce que la recta que tiene por ecuación

$$u = -e^{-\gamma_1 \pi} v - \frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1} \cdot (1 + e^{-\gamma_1 \pi})$$

es una asíntota oblicua de la gráfica de f . □

NOTA: En la Figura 1.14 se muestran las gráficas de la semiaplicación f que hemos estudiado.

1.4.0.2 La semiaplicación g .

El equilibrio de la región II es un foco o un centro virtual, o un foco situado en la frontera. El análisis que sigue es muy similar al que acabamos de hacer con la semiaplicación f . De nuevo distinguiremos entre los dos casos:

a) El equilibrio es un foco o un centro situados en la frontera o un centro (virtual).

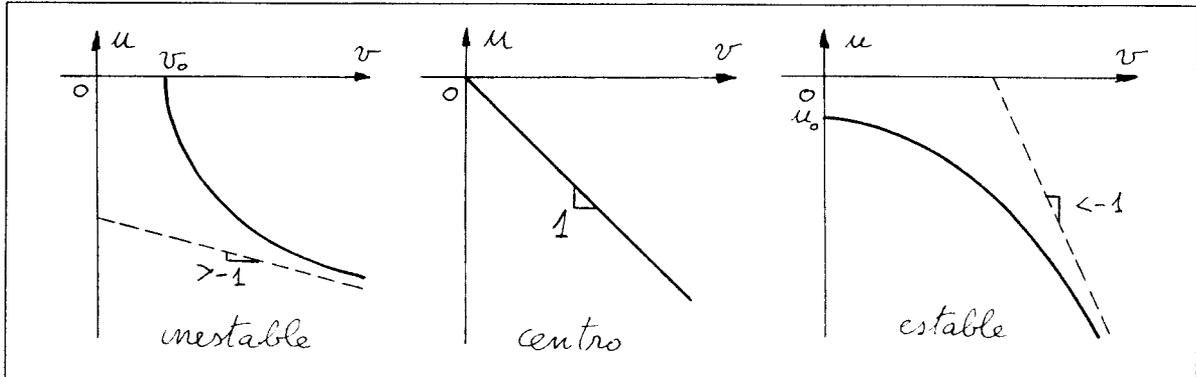


Figura 1.14: Foco o centro. La semiaplicación f .

b) El equilibrio es un foco (virtual).

De acuerdo con el Apéndice B, las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación g son,

$$u_1(\tau_2) = -\frac{a\beta_2}{1-\lambda b} \cdot \frac{e^{\gamma_2\tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \frac{a\beta_2}{1-\lambda b} \cdot \frac{e^{-\gamma_2\tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

donde los coeficientes β_2 y γ_2 son

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}{2} \quad \gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}$$

y la función ϕ es la misma que la de la Proposición 1.15. Como antes, el signo de γ_2 indica la estabilidad del equilibrio.

En cuanto al dominio y al recorrido de g , que se muestran en la Figura 1.15, son respectivamente, los intervalos $[0, +\infty)$ y $(-\infty, 0]$.

Consideremos cada uno de los casos citados

Proposición 1.16 Si el sistema dinámico en la forma de Van der Pol tiene un centro en la frontera o en la región II, la semiaplicación g es

$$g(v) = -v$$

y si tiene un foco en la frontera, entonces la semiaplicación g es

$$g(v) = -e^{\gamma_2\pi} v$$

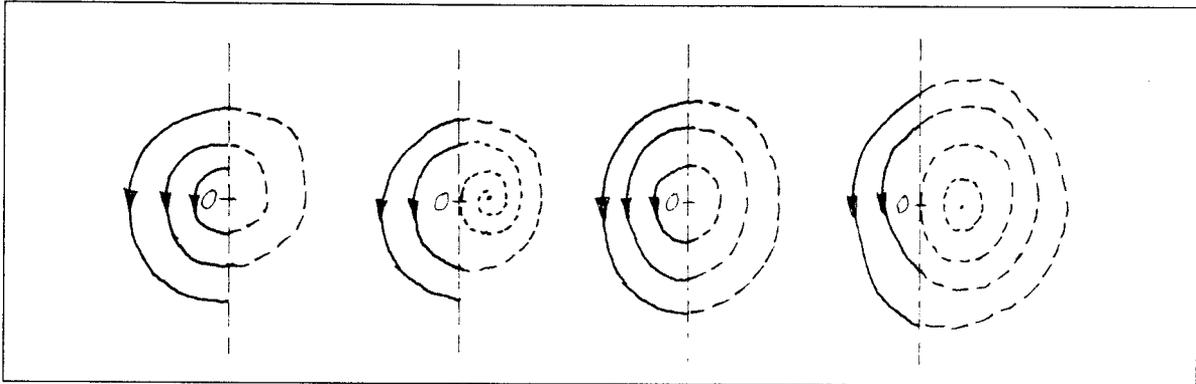


Figura 1.15: Foco o centro en la frontera o en la región II.

DEMOSTRACIÓN: Es completamente análoga a la de la Proposición 1.14 □

Proposición 1.17 Si el sistema dinámico en la forma de Van der Pol, tiene un equilibrio virtual en la región II que es un foco, entonces la semiaplicación g verifica

- es decreciente y $\lim_{v \rightarrow 0^+} g'(v) = -1$;
- su gráfica es una curva cóncava desde arriba si el foco es estable, y convexa si es inestable;
- su gráfica tiene por asíntota en el plano v, u_1 la recta de ecuación

$$u_1 = -e^{\gamma_2 \pi} v + \frac{a(\lambda - b)}{1 - \lambda b} \cdot (1 + e^{-\gamma_2 \pi})$$

DEMOSTRACIÓN: Haciendo uso de las ecuaciones paramétricas de g podemos comprobar que

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pi^-} u_1(\tau_2) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\tau_2 \rightarrow \pi^-} v(\tau_2) = +\infty$$

y además, teniendo en cuenta que $u_1(0) = v(0) = 0$, resulta que el intervalo de variación del parámetro τ_2 es $[0, \pi)$.

- Calculemos la derivada de g

$$g'(v) = \frac{u_1'(\tau_2)}{v'(\tau_2)} = -\frac{\phi(\tau_2; \gamma_2)}{\phi(\tau_2; -\gamma_2)} \quad \forall \tau_2 \in (0, \pi)$$

De acuerdo con el estudio de la función $\phi(\tau_2; \gamma_2)$ efectuado en el Apéndice C, resulta que $g'(v) < 0 \quad \forall \tau_2 \in (0, \pi)$, y también

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} g'(v) = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\phi(\tau_2; \gamma_2)}{\phi(\tau_2; -\gamma_2)} \right] = -1$$

independientemente del signo de γ_2 .

b) Procedamos al cálculo de la derivada segunda

$$g''(v) = \frac{16(1 - \lambda b)^2}{a[4 - (\lambda + b)^2]^{3/2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}^3 \tau_2}{[\phi(\tau_2; -\gamma_2)]^3} \cdot (\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2 - \operatorname{Sh} \gamma_2 \tau_2) \quad \forall \tau_2 \in (0, \pi)$$

El signo de esta derivada coincide con el de $\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2 - \operatorname{Sh} \gamma_2 \tau_2$ ya que los demás factores y divisores son positivos. Observemos que

$$(\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2 - \operatorname{Sh} \gamma_2 \tau_2)_{\tau_2=0} = 0$$

y también

$$\frac{d}{d\tau_2}(\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2 - \operatorname{Sh} \gamma_2 \tau_2) = \gamma_2(\cos \tau_2 - \operatorname{Ch} \gamma_2 \tau_2) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \gamma_2 < 0 \\ \leq 0 & \text{si } \gamma_2 > 0 \end{cases}$$

Así que $\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2 - \operatorname{Sh} \gamma_2 \tau_2$ crece o decrece a partir de cero, lo que hace que esta expresión sea positiva o negativa según el signo de γ_2 . En conclusión, la gráfica de g es una curva

cóncava vista desde arriba si $\gamma_2 < 0$

convexa vista desde arriba si $\gamma_2 > 0$

c) Para estudiar la existencia de asíntotas calculamos los límites

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pi^-} \frac{u_1(\tau_2)}{v(\tau_2)} = -e^{\gamma_2 \pi} > -1$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pi^-} [u_1(\tau_2) + e^{\gamma_2 \pi} v(\tau_2)] = \frac{a(\lambda - b)}{1 - \lambda b} \cdot (1 + e^{\gamma_2 \pi}) < 0$$

que no dependen del signo de γ_2 . De modo que la recta de ecuación

$$u_1 = -e^{\gamma_2 \pi} v + \frac{a(\lambda - b)}{1 - \lambda b} \cdot (1 + e^{\gamma_2 \pi})$$

es una asíntota oblicua de la gráfica de la semiaplicación g . □

NOTA: en la Figura 1.16 se muestran las gráficas de la semiaplicación g

El equilibrio de la región II es un nodo virtual. Cuando los autovalores de la matriz A_{II} son reales, como ocurre en el caso de ser el equilibrio de la región II un nodo (o una silla, pero ese caso lo estudiaremos en la página 44), las ecuaciones paramétricas de g calculadas en el Apéndice B son

$$u_1(\tau_2) = -\frac{a}{1 - \lambda b} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; -\gamma_2)}{\operatorname{Sh} \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \frac{a}{1 - \lambda b} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; \gamma_2)}{\operatorname{Sh} \tau_2}$$

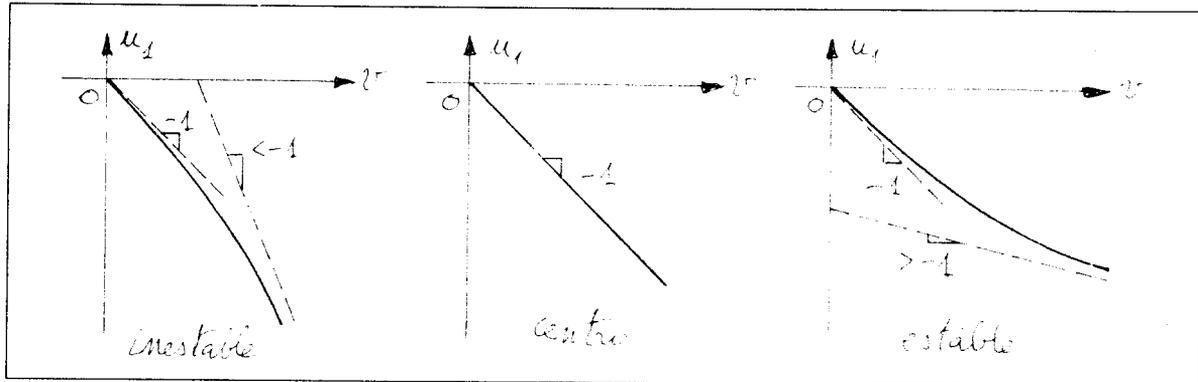


Figura 1.16: Foco o centro. La semiaplicación g .

donde el coeficiente

$$\gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}$$

y la función ψ se ha estudiado en el Apéndice C. Como el signo de γ_2 coincide con el de los autovalores de A_{II} , determina la estabilidad del equilibrio. Como el equilibrio de la región II es un nodo, de la Tabla 1.4 se deduce que ha de ser $1 - \lambda b > 0$, y de ahí, con unos sencillos cálculos podemos comprobar que $|\gamma_2| > 1$.

En la Figura 1.17 se observa que si el equilibrio es un nodo virtual, el dominio y el recorrido de g son

$$g : (0, +\infty) \longrightarrow (\lambda_1, 0) \quad \text{si } \gamma_2 < 0$$

$$g : (0, \lambda_2) \longrightarrow (-\infty, 0) \quad \text{si } \gamma_2 > 0$$

siendo λ_1 y λ_2 las ordenadas de los puntos en los que las variedades invariantes del equilibrio cortan a la frontera. Un sencillo cálculo permite determinarlas

$$\lambda_1 = \frac{az_1}{1 - \lambda b} \quad \lambda_2 = \frac{az_2}{1 - \lambda b}$$

donde z_1 y z_2 son los autovalores de la matriz A_{II} . Por otra parte, como $1 - \lambda b > 0$, se deduce que si el nodo es estable, $z_2 < z_1 < 0$, y si es inestable $0 < z_2 < z_1$.

Las propiedades de la semiaplicación g se establecen en la siguiente Proposición.

Proposición 1.18 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol, tiene un equilibrio virtual en la región II que es un nodo, entonces la semiaplicación g verifica*

a) *es decreciente y su derivada g' cumple $\lim_{\nu \rightarrow 0^+} g'(0) = -1$:*

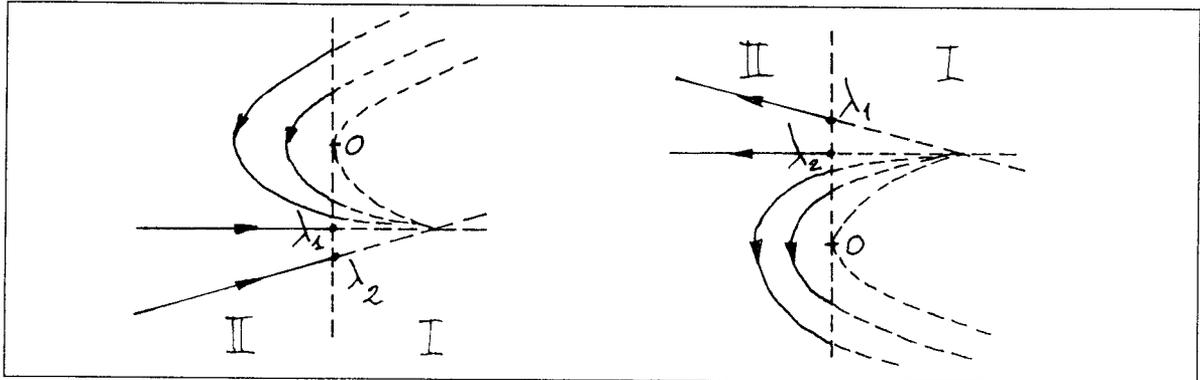


Figura 1.17: Nodo virtual en la región II.

- b) su gráfica es una curva cóncava desde arriba si el nodo es estable, y convexa si es inestable;
- c) su gráfica tiene por asíntota horizontal en el plano v, u_1 la recta de ecuación $u_1 = \lambda_1$, si el nodo es estable, y por asíntota vertical la recta de ecuación $v = \lambda_2$ si es inestable.

DEMOSTRACIÓN: Usando las ecuaciones paramétricas de g podemos escribir

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} u_1(\tau_2) = 0 = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} v(\tau_2)$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} u_1(\tau_2) = \begin{cases} \frac{az_1}{1 - \lambda b} = \lambda_1 & \text{si } \gamma_2 < 0 \\ -\infty & \text{si } \gamma_2 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} v(\tau_2) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma_2 < 0 \\ \frac{az_2}{1 - \lambda b} = \lambda_2 & \text{si } \gamma_2 > 0 \end{cases}$$

lo que implica que el intervalo de variación del parámetro τ_2 es $(0, +\infty)$.

a) Al calcular la derivada de g obtenemos

$$g'(v) = \frac{u_1'(\tau_2)}{v'(\tau_1)} = -\frac{\psi(\tau_2; \gamma_2)}{\psi(\tau_2; -\gamma_2)} \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$$

pero teniendo en cuenta el comportamiento de la función $\psi(\tau_2; \gamma_2)$ estudiada en el Apéndice C, tenemos $g'(v) < 0 \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$. Por otra parte

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} g'(v) = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\psi(\tau_2; \gamma_2)}{\psi(\tau_2; -\gamma_2)} \right] = -1$$

b) Ahora estudiamos la derivada segunda

$$g''(v) = -\frac{16(1 - \lambda b)^2}{a[(\lambda + b)^2 - 4]^{3/2}} \cdot \frac{\text{Sh}^3 \tau_2}{[\psi(\tau_2; -\gamma_2)]^3} \cdot (\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2) \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$$

En esta expresión, todos los factores excepto el último son positivos, por lo que su signo será el contrario al de dicho factor. Para estudiar este signo, observemos que

$$(\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2)_{\tau_2=0} = 0$$

y también

$$\frac{d}{d\tau_2} (\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2) = \gamma_2 (\text{Ch} \gamma_2 \tau_2 - \text{Ch} \tau_2)$$

pero esta derivada tiene el signo de γ_2 , ya que $\text{Ch} \gamma_2 \tau_2 - \text{Ch} \tau_2 > 0$ independientemente de γ_2 , luego $\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2$ es una función de τ_2 monótona que parte de cero. Tenemos pues que

$$\begin{aligned} g''(v) &> 0 & \forall v > 0 & \text{ si } \gamma_2 < 0 \\ g''(v) &< 0 & \forall v > 0 & \text{ si } \gamma_2 > 0 \end{aligned}$$

de modo que la semiaplicación g tiene una gráfica cóncava vista desde arriba si el nodo es estable y convexa en caso contrario.

c) Por último, las igualdades

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} g(v) = \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} u_1(\tau_2) = \lambda_1 \quad \text{si } \gamma_2 < 0$$

$$\lim_{v \rightarrow \lambda_2^-} g(v) = \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} u_1(\tau_2) = -\infty \quad \text{si } \gamma_2 > 0$$

que hemos obtenido más atrás, indican que la gráfica de la función g tiene una asíntota horizontal si $\gamma_2 < 0$ y vertical si $\gamma_2 > 0$. \square

NOTA: Las gráficas de la semiaplicación g que acabamos de analizar se muestran en la Figura 1.18

El equilibrio de la región II es una silla real. Puesto que los autovalores de A_{II} siguen siendo reales, las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación g son las mismas que en el caso que acabamos de estudiar en que el equilibrio era un nodo (página 41). Pero ahora varían el dominio y el recorrido de la misma, ya que de acuerdo con la Figura 1.19, tenemos

$$g : [0, \lambda_i) \longrightarrow (\lambda_\epsilon, 0]$$

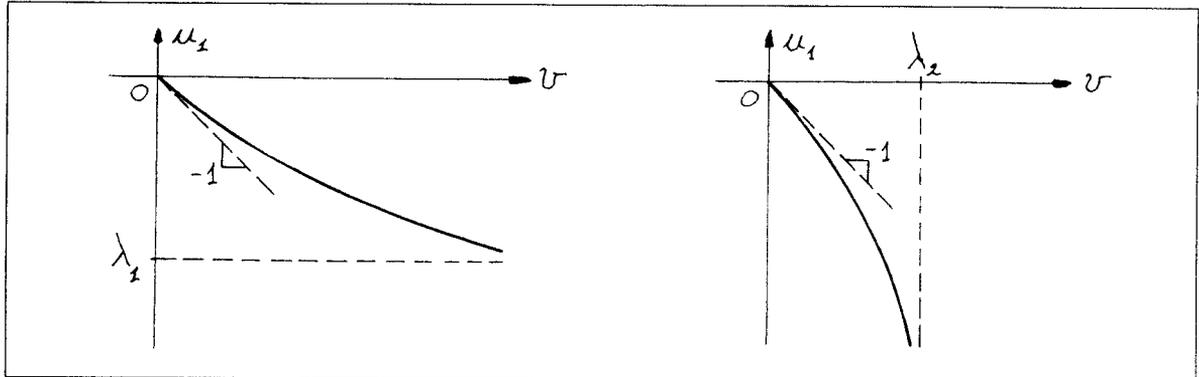


Figura 1.18: Nodo virtual. La semiaplicación g .

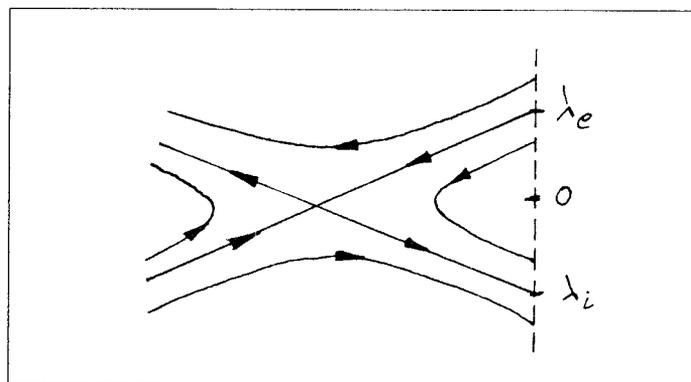


Figura 1.19: Silla en la región II.

Ahora bien, los valores λ_i y λ_e , son las ordenadas de los puntos en los que las variedades inestable y estable respectivamente del equilibrio, cortan a la frontera. Un sencillo cálculo permite determinarlas

$$\lambda_i = \frac{az_1}{1 - \lambda b} \quad \lambda_e = \frac{az_2}{1 - \lambda b}$$

donde z_1 y z_2 son los autovalores de la matriz A_{II} . Debemos observar que puesto que el equilibrio es una silla, la Tabla 1.4 indica que $1 - \lambda b < 0$ y $z_1 > 0$, lo que implica que $\lambda_i < 0 < \lambda_e$. Por otra parte, a partir de la expresión de γ_2 dada en la página 42 puede comprobarse fácilmente que por ser $1 - \lambda b < 0$, resulta $|\gamma_2| < 1$, y como además, de las Figuras 1.9 a 1.11, se infiere que cuando el equilibrio de la región II es una silla, únicamente pueden existir policiclos si $\lambda - b > 0$, así que nos limitaremos a estudiar las propiedades de la semiaplicación g cuando $0 < \gamma_2 < 1$.

Proposición 1.19 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol, tiene un equilibrio real en la región II que es una silla, y $0 < \gamma_2 < 1$, entonces la semiaplicación g verifica*

a) *es decreciente y su derivada g' cumple*

$$g'(0) = -1 \quad y \quad \lim_{v \rightarrow \lambda_e^-} g'(v) = -\infty$$

b) *su gráfica es una curva convexa vista desde arriba.*

DEMOSTRACIÓN: Comenzamos calculando los límites

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} u_1(\tau_2) = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} v(\tau_2) = 0$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} u_1(\tau_2) = \frac{az_1}{1 - \lambda b} = \lambda_i$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} v(\tau_2) = \frac{az_2}{1 - \lambda b} = \lambda_e$$

de los que se deduce que el intervalo de variación del parámetro τ_2 es $(0, +\infty)$

a) Ahora calculamos la derivada g'

$$g'(v) = \frac{u_1'(\tau_2)}{v'(\tau_2)} = -\frac{\psi(\tau_2; \gamma_2)}{\psi(\tau_2; -\gamma_2)} \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$$

en la que si tenemos en cuenta las propiedades de la función ψ estudiada en el Apéndice C, podemos comprobar que verifica $g'(v) < 0 \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$. Pero además

$$g'(0) = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\psi(\tau_2; \gamma_2)}{\psi(\tau_2; -\gamma_2)} \right] = -1$$

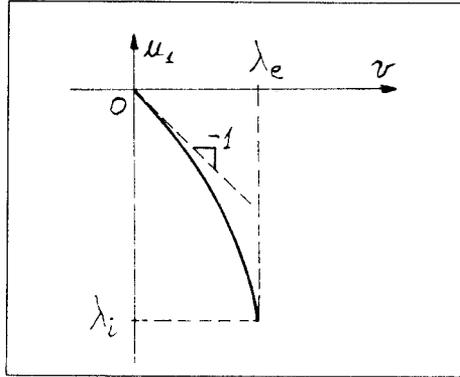


Figura 1.20: Silla en la región II. La semiaplicación g .

$$\lim_{v \rightarrow \lambda_e^-} g'(v) = \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\psi'(\tau_2; \gamma_2)}{\psi(\tau_2; -\gamma_2)} \right] = -\infty$$

b) La derivada segunda es

$$g''(v) = -\frac{16(1 - \lambda b)^2}{a[(\lambda + b)^2 - 4]^{3/2}} \cdot \frac{\text{Sh}^3 \tau_2}{[\psi(\tau_2; -\gamma_2)]^3} \cdot (\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2) \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$$

Obsérvese que el signo de esta expresión es el mismo que el del tercero de sus factores, ya que el resto de la expresión es positivo. Vamos pues a analizar el signo de ese factor. En primer lugar, si $\tau_2 = 0$, tenemos

$$(\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2)_{\tau_2=0} = 0$$

Como $0 < \gamma_2 < 1$, resulta que $\text{Ch} \gamma_2 \tau_2 < \text{Ch} \tau_2$ y por tanto

$$\frac{d}{d\tau_2} (\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2) = \gamma_2 (\text{Ch} \gamma_2 \tau_2 - \text{Ch} \tau_2) < 0$$

así que $\text{Sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh} \tau_2$ es decreciente, y como en $\tau_2 = 0$ vale cero, resulta ser negativo. Así pues, la gráfica de la semiaplicación g es convexa vista desde arriba. \square

NOTA: en la Figura 1.20 se muestra la gráfica de la función g .

1.5 Los conjuntos de bifurcaciones.

En esta Sección vamos a justificar la configuración de los conjuntos de bifurcaciones del sistema dinámico que fueron introducidos al inicio de la Sección 1.4. Ahora bien, dado que la casuística que se presenta es muy variada, a pesar de haber quedado notablemente reducida por el uso de las simetrías, nos vemos obligados a sistematizar

su estudio, considerando distintos rangos de variación del parámetro b . Asimismo, debemos tener en cuenta que el parámetro a puede ser cero o positivo, lo que nos llevará a distinguir también entre estas dos posibilidades.

Como tendremos ocasión de comprobar, la dinámica más rica se da cuando $a > 0$ y $0 \leq b < 1$, con la aparición de diversos comportamientos periódicos y sus bifurcaciones. En los demás casos, es decir, cuando $1 \leq b$ con $a \geq 0$, salvo en situaciones en las que aparecen continuos de órbitas periódicas u homoclinas, que comentaremos más tarde, la dinámica del sistema queda totalmente determinada por los equilibrios.

En las zonas en las que es posible que haya órbitas periódicas, su existencia y unicidad quedará de manifiesto al estudiar las correspondientes aplicaciones de Poincaré.

En los conjuntos de bifurcaciones hay curvas, que presentan particular interés. Una de ellas es la que tiene por ecuación $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, que cuando $a = 0$, está asociada con la aparición de un centro global, mientras que si $a > 0$, indica la presencia de una bifurcación de Hopf del infinito. Ambas cuestiones serán investigadas más tarde, pero por ahora vamos a estudiar esa ecuación.

Proposición 1.20 *Si las matrices A_I y A_{II} tienen autovalores complejos cuyas partes imaginarias son no nulas y sus partes reales tienen signos opuestos, entonces la condición $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ donde*

$$\gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}} \quad \gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}$$

sólo se cumple si $|b| < 1$ y define a μ como función continua y creciente de λ de la forma

$$\mu_{HP}(\lambda) = \frac{b^3 - 2b + \lambda}{1 - \lambda b} \quad \lambda \in (-2 - b, 2 - b)$$

DEMOSTRACIÓN: Si los autovalores de las matrices A_{Ii} y A_{II} son complejos con partes imaginarias no nulas, la igualdad $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ adopta la forma

$$\frac{-(\mu + b)}{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}} + \frac{\lambda - b}{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}} = 0$$

Ante todo observemos que los denominadores imponen las condiciones

$$-2 < \mu - b < 2 \quad \text{y} \quad -2 < \lambda + b < 2$$

mientras que los numeradores han de tener signos opuestos. Sólo trataremos el caso de que

$$-(\mu + b) > 0 \quad \text{y} \quad \lambda - b < 0$$

ya que cuando los signos sean los contrarios, basta con multiplicar por -1 , y siguen válidos los mismos argumentos.

Las últimas desigualdades equivalen a estas otras

$$\mu - b < -2b \quad \text{y} \quad \lambda + b < 2b$$

y para que la primera de ellas sea compatible con $-2 < \mu - b < 2$, ha de ser $-1 < b < 1$.

Al despejar μ en términos de λ , obtenemos

$$\mu = \mu_{HP}(\lambda) = \frac{b^3 - 2b + \lambda}{1 - \lambda b}$$

Así pues, μ como función de λ es continua ya que el único valor de λ que anula al denominador es $\lambda = \frac{1}{b}$, que no verifica (dado que $b < 1$) la doble desigualdad $-2 < \lambda + b < 2$ que hemos impuesto antes a λ . Observemos de paso que el dominio y el recorrido de esta función son respectivamente

$$-2 - b < \lambda < 2 - b \quad \text{y} \quad -2 + b < \mu < 2 + b$$

Si factorizamos la expresión de μ en función de λ

$$\left(\mu + \frac{1}{b}\right) \left(\lambda - \frac{1}{b}\right) = -\left(b - \frac{1}{b}\right)^2$$

podemos observar que la gráfica de tal función es una hipérbola, que en el caso límite $b = 0$ se reduce a una recta. En la Figura 1.21 se muestra la gráfica en cuestión. \square

NOTA 1: En la demostración del Teorema 1.25, haremos uso de la curva $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ en el plano de bifurcaciones (μ, λ) , pero por conveniencia de la demostración, escribiremos λ como función de μ cuya expresión es

$$\lambda_{HP}(\mu) = \frac{\mu + 2b - b^3}{\mu b + 1}$$

Destaquemos también que

$$\begin{aligned} \lambda > \lambda_{HP}(\mu) & \quad \text{equivale a} \quad \gamma_1 + \gamma_2 > 0 \\ \lambda < \lambda_{HP}(\mu) & \quad \text{equivale a} \quad \gamma_1 + \gamma_2 < 0 \end{aligned}$$

NOTA 2: Debido a las simetrías que presenta el sistema (véase la Sección 1.3.1), sólo es necesario considerar valores no negativos del parámetro b , de modo que la condición $|b| < 1$ queda reducida a $0 \leq b < 1$.

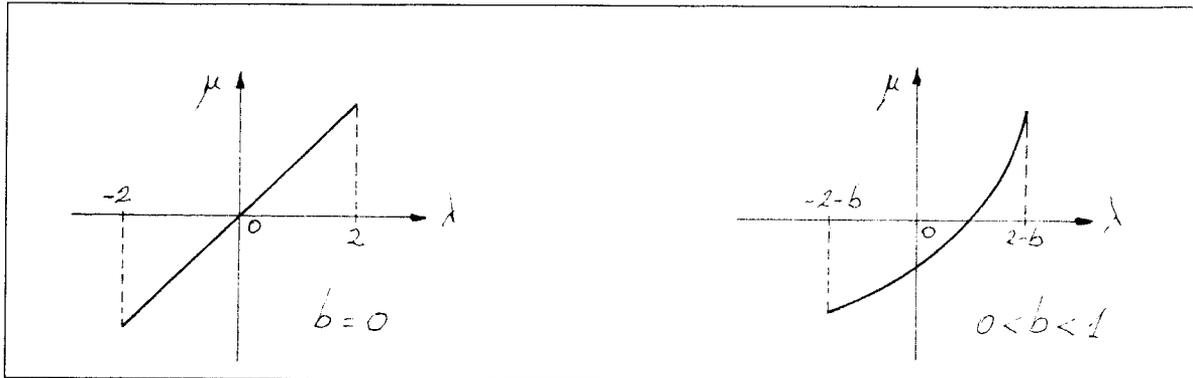


Figura 1.21: La curva de ecuación $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$.

1.5.1 Caso 1.- $a = 0$ y $0 \leq b$.

La característica más notable del sistema cuando $a = 0$, es que sólo tiene un equilibrio que se encuentra en la frontera entre las dos regiones (exactamente en el origen del plano de fases). Esta particular situación hace que el equilibrio sea al mismo tiempo de uno u otro tipo según desde que región se mire. En cuanto a otros comportamientos dinámicos, sólo presentan un cierto interés la aparición de un centro global con su continuo de órbitas periódicas que cubren todo el plano de fases, y el continuo, esta vez de homoclinas que nacen y mueren en el equilibrio. Al análisis de estos casos dedicamos las dos Proposiciones que siguen.

Proposición 1.21 *Si el sistema dinámico tiene un equilibrio en la frontera, los autovalores de A_I y A_{II} son complejos con partes imaginarias no nulas, partes reales opuestas y se verifica $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, entonces el equilibrio es un centro global y el plano de fases se halla cubierto por un continuo de órbitas periódicas.*

DEMOSTRACIÓN: Cuando los autovalores de las matrices A_I y A_{II} son complejos con partes imaginarias no nulas, y el equilibrio está en la frontera, como es el caso que nos ocupa, las semiaplicaciones de Poincaré que se analizaron en las Proposiciones 1.14 y 1.16 son

$$u = f(v) = -ve^{-\gamma_1\pi} \quad u_1 = g(v) = -ve^{\gamma_2\pi}$$

de modo que la aplicación de Poincaré es

$$P(u) = g\left(f^{-1}(u)\right) = ue^{(\gamma_1 + \gamma_2)\pi}$$

Es evidente que si $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, la aplicación P tiene infinitos puntos fijos que corresponden a otras tantas órbitas periódicas. El equilibrio es, en estas condiciones, un centro global. \square

Proposición 1.22 *Si el sistema dinámico tiene un equilibrio en la frontera, los autovalores de A_I son reales y de igual signo, y los autovalores de A_{II} son también reales y de igual signo pero opuesto al de los de A_I , entonces existe un continuo de trayectorias homoclinas que nacen y mueren en el equilibrio.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que los autovalores de A_I son negativos y los de A_{II} positivos. En tal caso, el equilibrio (que está situado en el origen), es un nodo estable desde la región I y un nodo inestable desde la II. Si nos situamos en un punto cualquiera de la frontera $(0, y)$, con $y < 0$, de la Proposición 1.8 se deduce que la trayectoria que pasa por él, lo hace de la región II a la I. Ahora bien, en la región II, esta trayectoria ha de proceder necesariamente del equilibrio, y al entrar en la región I ha de ir a parar necesariamente al equilibrio. Así pues, toda trayectoria que pase por el punto $(0, y)$ con $y < 0$, de la frontera, es una homoclina. \square

NOTA 1: La argumentación expuesta es válida, sean simples o dobles los autovalores de A_I y A_{II} .

NOTA 2: Si tomamos las estabildades cambiadas, las homoclinas pasarán ahora por puntos de la frontera de ordenada positiva.

Continuando con $a = 0$, pero siendo ahora $1 \leq b$, el estudio previo que hicimos en la Sección 1.4 de los conjuntos de bifurcaciones, (Figuras 1.4 a 1.7), nos informa de la ausencia de todo tipo de policiclos, por lo que el conjunto de bifurcaciones se reduce a un catálogo de los diversos equilibrios que presenta el sistema según los valores de los parámetros.

En las Figuras 1.22 a 1.25 se muestran estos conjuntos en el Caso 1.- que acabamos de estudiar.

1.5.2 Caso 2.- $a > 0$ y $0 \leq b < 1$.

Llegamos a la parte más importante de este Capítulo que constituye el núcleo del mismo. Estudiaremos el conjunto de bifurcaciones en el caso de que $a > 0$ y $0 \leq b < 1$, que es cuando el comportamiento dinámico es más variado. Como en el Caso 1.- que acabamos de estudiar, la curva $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ tiene un papel destacado, pero ahora aún más, ya que como veremos, corresponde a una bifurcación de Hopf del infinito.

Pero hay otra curva, asociada a la aparición de trayectorias homoclinas, que exige un estudio detallado. La dependencia entre μ y λ que implica esta curva, no es posible conocerla en forma explícita, de modo que tendremos que conformarnos con el estudio de la ecuación implícita de la misma, lo que nos llevará a investigar las condiciones de existencia de μ como función de λ , y al mismo tiempo a conocer la geometría de dicha curva. Al estudio de estos asuntos están dedicadas las Proposiciones que siguen.

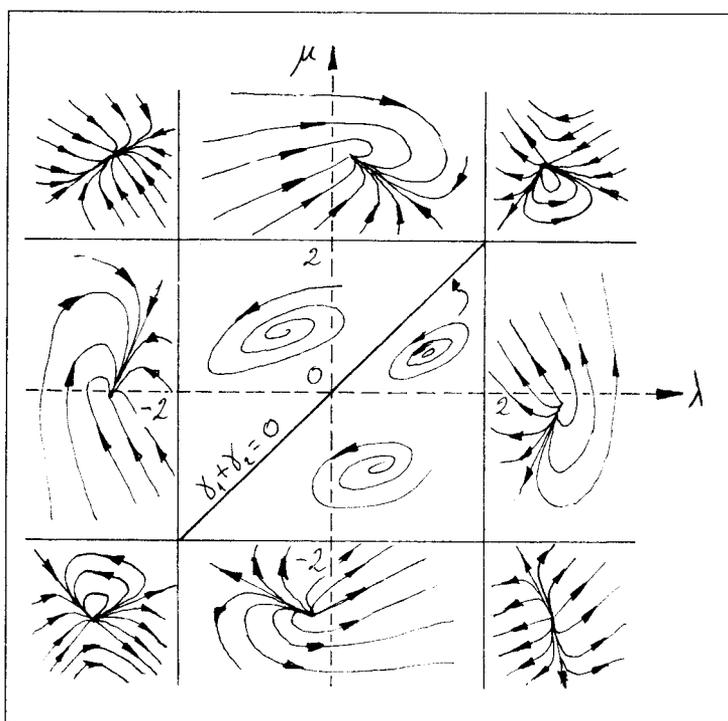


Figura 1.22: Conjunto de bifurcaciones. $a = 0, b = 0$.

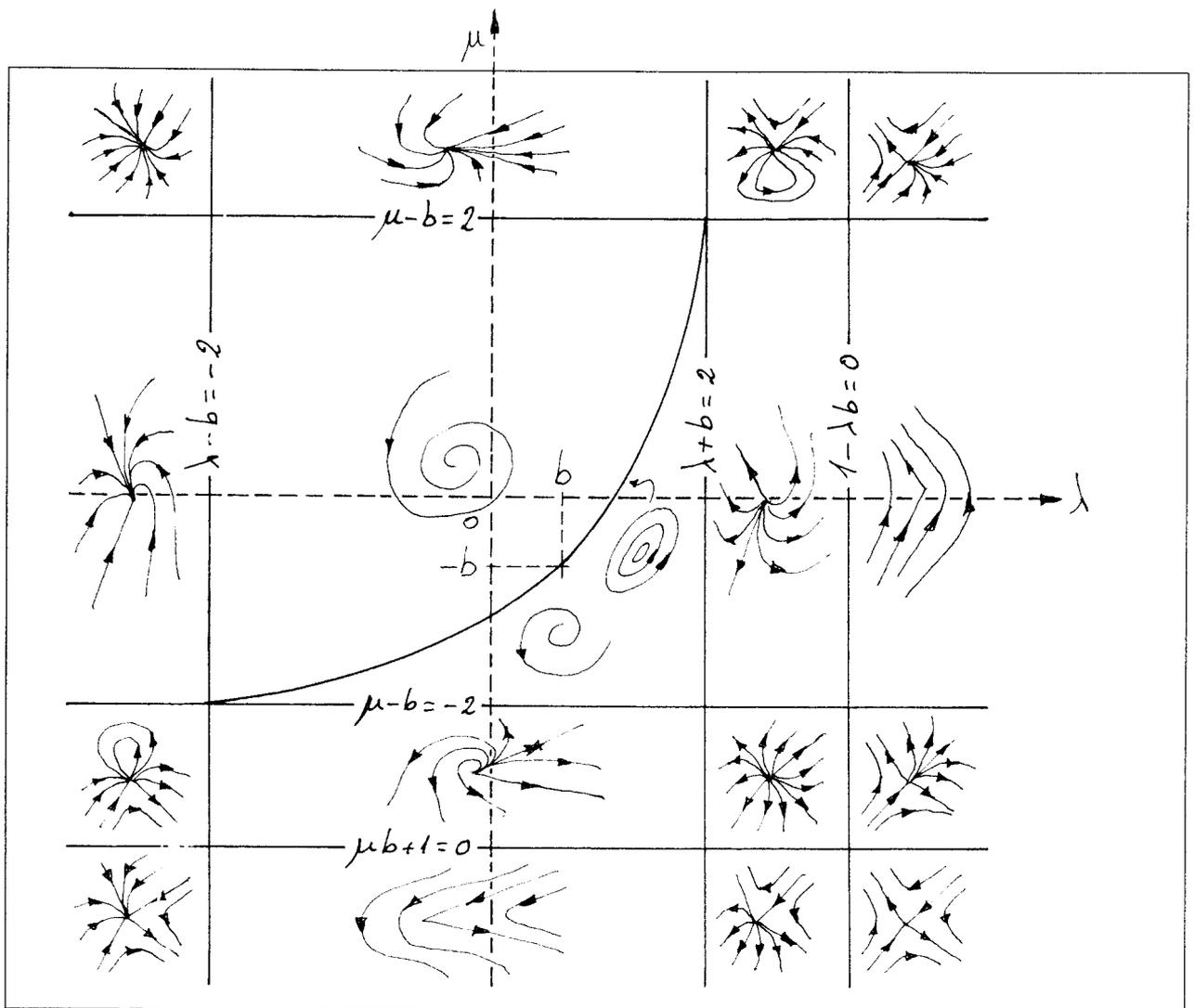


Figura 1.23: Conjunto de bifurcaciones. $a = 0, 0 < b < 1$.

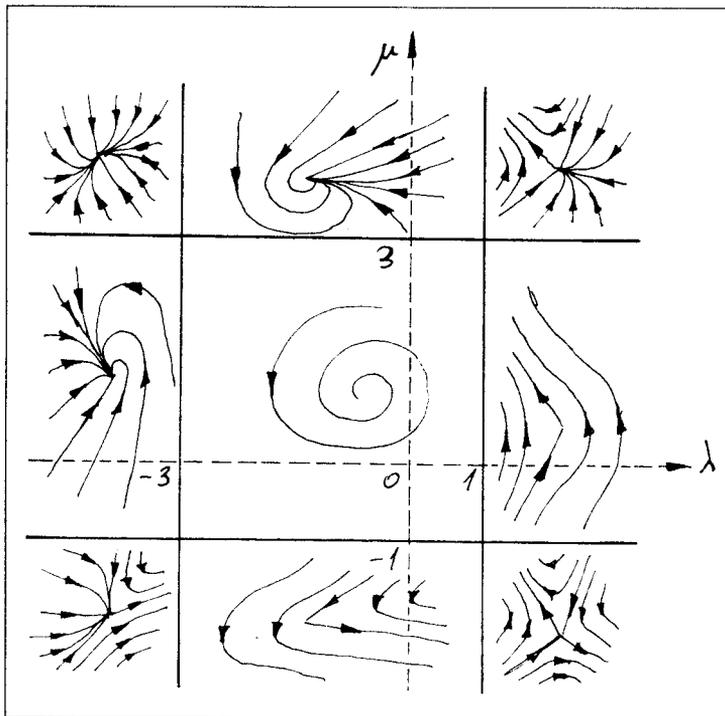


Figura 1.24: Conjunto de bifurcaciones. $a = 0, b = 1$.

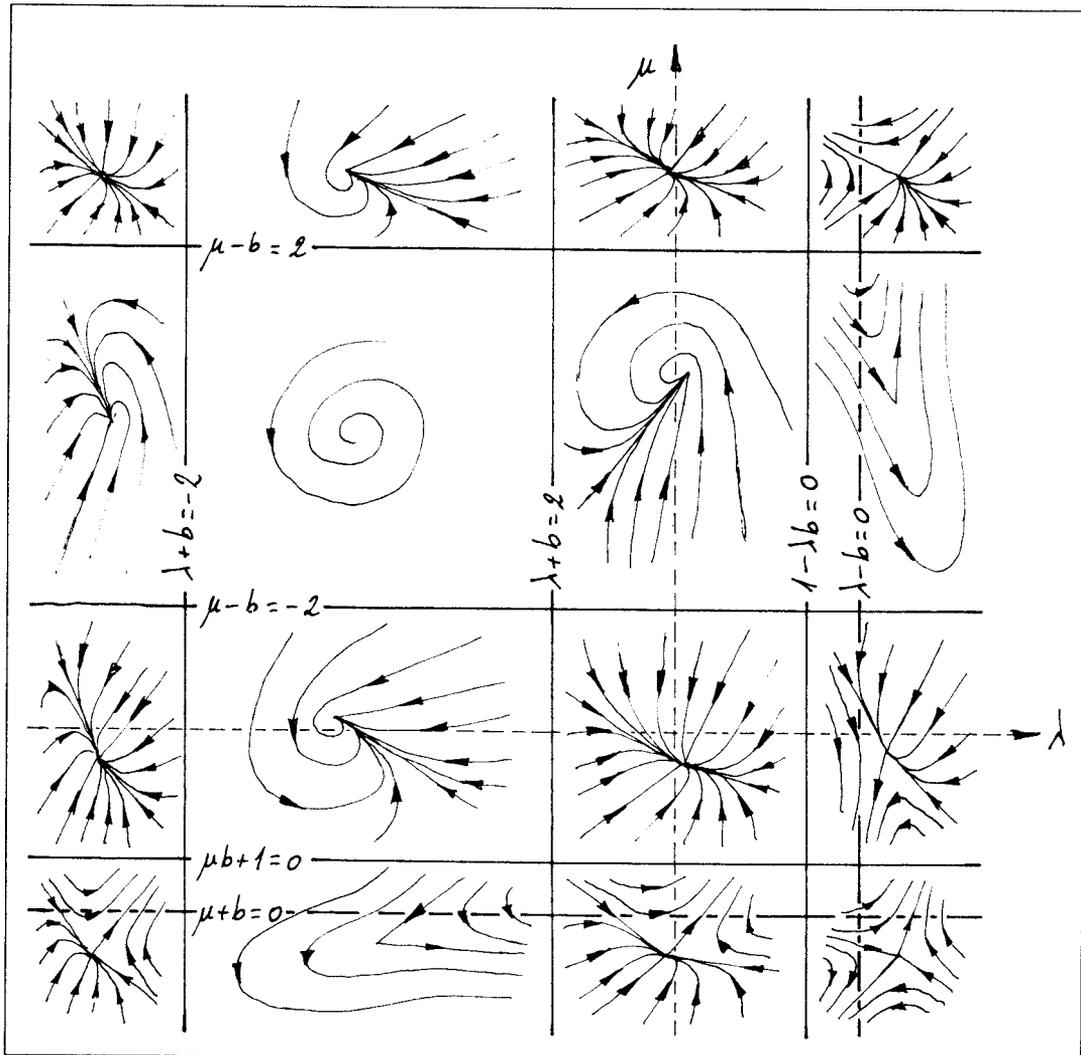


Figura 1.25: Conjunto de bifurcaciones. $a = 0.1 < b$.

Proposición 1.23 *En el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, consideremos que los parámetros $a > 0$ y $0 < b < 1$ tienen valores prefijados. Entonces, para cada valor del parámetro $\lambda \in \left(\frac{1}{b}, +\infty\right)$, existe un único valor del parámetro $\mu \in (-b, 2 + b)$ para los que el sistema tiene una trayectoria homoclina.*

DEMOSTRACIÓN: Para que el sistema dinámico tenga una trayectoria homoclina, ha de tener un equilibrio tipo silla en una de las dos regiones, y puesto que $a > 0$, de las Tablas 1.2 y 1.4 se deduce que esa región es la II, y además esto sucederá cuando $\frac{1}{b} < \lambda$. Pero como $0 < b < 1$, tenemos traza $A_{II} = \lambda - b > 0$, luego para que exista homoclina, que por supuesto ha de tener partes en las dos regiones, la Proposición 1.11 obliga a que sea traza $A_I = -(\mu + b) < 0$.

Pero si eso es así, la desigualdad $0 < b < 1$ junto con $-(\mu + b) < 0$ implica que $\det A_I = \mu b + 1 > 0$ y por tanto $\det A_I \cdot \det A_{II} = (\mu b + 1)(1 - \lambda b) < 0$, así que de acuerdo con la Proposición 1.4 el sistema tiene dos equilibrios, de los cuales, el de la región II es una silla como hemos señalado, y el de la región I, de acuerdo con la Tabla 1.3, un foco o un nodo.

Sin embargo debemos descartar el último de ellos porque entonces, todas las trayectorias que entren en la región I se precipitan hacia el nodo ya que éste es estable, no regresando jamás a la frontera. En estas condiciones, no es posible la existencia de trayectorias homoclinas. Al haber excluído este caso, la Tabla 1.3 nos obliga a tomar $\mu < 2 + b$.

Hemos así acotado, mediante las desigualdades

$$-b < \mu < 2 + b \quad \text{y} \quad \frac{1}{b} < \lambda$$

la zona del plano de bifurcaciones en la que puede haber trayectorias homoclinas. Obsérvese que en esta zona, el equilibrio de la región I es un foco estable, con lo cual, los autovalores de la matriz A_I son $\alpha_1 \pm i\beta_1$ con $\alpha_1\beta_1 \neq 0$ y $\alpha < 0$.

Vamos a efectuar una transformación lineal en las variables de estado que traslade el equilibrio de la región I al origen y que reduzca la matriz A_I a la forma canónica de Jordan. Esa transformación se expresa matricialmente de este modo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}{2} & \frac{\mu - b}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{a}{\mu b + 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix}$$

de manera que el sistema en la región I queda

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y \\ y' &= \beta x + \alpha y \end{aligned}$$

Si dividimos la segunda ecuación entre la primera y efectuamos un cambio a coordenadas polares r, θ , nos queda la ecuación

$$\frac{dr}{d\theta} = \gamma_1 r \quad \text{donde} \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = -\frac{\mu + b}{\sqrt{4 - (\mu + b)^2}}$$

cuya solución general $r(\theta) = Ke^{\gamma_1 \theta}$ es la ecuación de una familia doblemente parametrizada por K y γ_1 de espirales logarítmicas.

Pero hagamos notar una interesante propiedad de estas espirales: Sean (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) dos puntos cualesquiera de la frontera. Al sustituir sus coordenadas obtenemos

$$r_1 = Ke^{\gamma_1 \theta_1} \quad \text{y} \quad r_2 = Ke^{\gamma_1 \theta_2}$$

que es un sistema de ecuaciones en K y γ_1 que tiene, como es fácil verificar, solución única. Ello significa que dados dos puntos cualesquiera de la frontera, existe un único valor de γ_1 y por tanto de μ , ya que consideramos a b fijo, para el cual hay una única espiral logarítmica que pasa por los dos. Pero si añadimos la condición $\pi < \theta_1 - \theta_2 < 2\pi$, el arco de espiral que los une, estará totalmente contenido en la región I. Al deshacer la transformación efectuada, es evidente que esta propiedad se transmite al sistema original.

Regresando al sistema de partida, consideremos un valor dado de $\lambda \in \left(\frac{1}{b}, +\infty\right)$, pero manteniendo como queda dicho, a y b fijos. Los valores de las ordenadas λ_e y λ_i de los puntos en los que las variedades estable e inestable de la silla de la región II cortan a la frontera, son (véase la página 46)

$$\lambda_e = \frac{a}{1 - \lambda b} \cdot \frac{\lambda - b - \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_i = \frac{a}{1 - \lambda b} \cdot \frac{\lambda - b + \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2}$$

que para a y b fijos sólo dependen de λ . Pero de acuerdo con la propiedad estudiada, existe una sola trayectoria en la región I que conecte ambos puntos, luego concluimos que estando fijados a y b tal como se establece en el enunciado de esta Proposición, para cada valor de $\lambda \in \left(\frac{1}{b}, +\infty\right)$ hay una única trayectoria homoclina que corresponde a un único valor del parámetro μ en el intervalo $(-b, 2 + b)$. \square

En la demostración que acabamos de hacer, se pone de manifiesto que existe una función μ_H definida en el intervalo $\left(\frac{1}{b}, +\infty\right)$ tal que, si para los valores λ_0 y μ_0 de los parámetros λ y μ , el sistema tiene una trayectoria homoclina, entonces $\mu_H(\lambda_0) = \mu_0$. Al estudio de esta función, así como a la obtención de su expresión analítica, aunque en forma implícita, se dedica la siguiente Proposición.

Proposición 1.24 *En el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, consideremos que los parámetros $a > 0$ y $0 < b < 1$ tienen valores prefijados. Entonces existe una función $\mu_H : \left(\frac{1}{b}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que si λ_0 y μ_0 son valores de los parámetros λ y μ para los que el sistema tiene una trayectoria homoclina, se verifica $\mu_0 = \mu_H(\lambda_0)$. Esa función está definida implícitamente por la ecuación*

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \left(\frac{4 + (\lambda + b)(\mu - b)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4} \cdot \sqrt{4 - (\mu - b)^2}} \right) + \\ + \frac{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}{2(\mu + b)} \cdot \ln \left(\frac{(b^2 + 1)(\lambda + b) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(\lambda + b) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} \right) = 0 \end{aligned}$$

es estrictamente decreciente, y su gráfica tiene por asíntota horizontal, la recta de ecuación $\mu = \mu_a$, donde μ_a es la única solución que para cada valor de $0 < b < 1$ tiene la ecuación

$$\frac{3\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{\mu_a - b}{\sqrt{4 - (\mu_a - b)^2}} + \frac{\sqrt{4 - (\mu_a - b)^2}}{(\mu_a + b)} \cdot \ln b = 0$$

DEMOSTRACIÓN: La existencia de la función μ_H ha quedado establecida en la Proposición 1.23. Vamos ahora a obtener su expresión analítica.

Si f es la semiaplicación de Poincaré en la región I, la condición necesaria y suficiente para la existencia de una trayectoria homoclina es evidentemente $f(\lambda_e) = \lambda_i$. Si usamos las ecuaciones paramétricas de f que aparecen en la página 33, esta condición se expresa mediante las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{a\beta_1}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \operatorname{sen} \tau_1}{\operatorname{sen} \tau_1} &= \lambda_i \\ -\frac{a\beta_1}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \operatorname{sen} \tau_1}{\operatorname{sen} \tau_1} &= \lambda_e \end{aligned}$$

Vamos a eliminar el parámetro τ_1 entre estas dos ecuaciones, para lo cual, las reescribimos así

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1}}{\operatorname{sen} \tau_1} &= \operatorname{Ctg} \tau_1 + \lambda_i \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \\ \frac{e^{\gamma_1 \tau_1}}{\operatorname{sen} \tau_1} &= \operatorname{Ctg} \tau_1 - \lambda_e \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} + \gamma_1 \end{aligned}$$

Multiplicamos ahora ambas igualdades de modo que se eliminen las exponenciales, lo

que permite obtener $\text{Ctg } \tau_1$, resultando

$$\text{Ctg } \tau_1 = \frac{1 + \left(\lambda_i \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right) \left(\lambda_e \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right)}{(\lambda_i - \lambda_e) \frac{\mu b + 1}{a\beta_1}}$$

A continuación dividimos esas igualdades, lo que elimina $\text{sen } \tau_1$, y permite sustituir $\text{Ctg } \tau_1$ por el valor ya obtenido, de modo que

$$e^{2\gamma_1 \tau_1} = \frac{1 + \left(\lambda_e \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right)^2}{1 + \left(\lambda_i \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right)^2}$$

Por último, eliminamos τ_1 , pero antes unas palabras de precaución: dado que el parámetro τ_1 toma valores en el intervalo $(\pi, \tau_{10}]$, donde τ_{10} está comprendido entre π y 2π , resultará que τ_1 puede tomar valores entre π y 2π , lo que nos obliga a escribir

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \pi + \text{ArcCtg} \frac{1 + \left(\lambda_i \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right) \left(\lambda_e \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right)}{(\lambda_i - \lambda_e) \frac{\mu b + 1}{a\beta_1}} = \\ &= \frac{3\pi}{2} - \text{Arctg} \frac{1 + \left(\lambda_i \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right) \left(\lambda_e \frac{\mu b + 1}{a\beta_1} - \gamma_1 \right)}{(\lambda_i - \lambda_e) \frac{\mu b + 1}{a\beta_1}} \end{aligned}$$

la otra igualdad no precisa de ninguna precaución especial, de modo que al eliminar τ_1 y sustituir $\lambda_i, \lambda_e, \gamma_1$ y β_1 por sus valores, que figuran en las páginas 46 y 33, obtenemos finalmente la ecuación del enunciado. En lo sucesivo designaremos a esta ecuación, para abreviar, con la notación $G(\lambda, \mu) = 0$.

Llamemos $\text{Im}(\mu_H)$ al recorrido de la función μ_H . Entonces, si $\mu_1 \in \text{Im}(\mu_H)$ ha de existir al menos un valor $\lambda_1 \in \left(\frac{1}{b}, +\infty \right)$ tal que $G(\lambda_1, \mu_1) = 0$. Demostremos que tal valor es único, para lo cual supongamos lo contrario, es decir, que hay dos valores λ_1 y λ_2 tales que $G(\lambda_1, \mu_1) = G(\lambda_2, \mu_1) = 0$. Entonces podemos aplicar el Teorema de Rolle a la función $G(\lambda, \mu_1)$ en el intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ y concluir que debe existir al menos un punto en ese intervalo que anule a la derivada.

Ahora bien, al calcular tal derivada

$$G'(\lambda, \mu_1) = \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} \right)_{\mu=\mu_1} = -\frac{\lambda - b}{(\mu_1 + b)(\lambda + \mu_1)} \cdot \frac{\mu_1 b + 1}{1 - \lambda b} \cdot \frac{\sqrt{4 - (\mu_1 - b)^2}}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}$$

podemos comprobar con una simple inspección que no se anula en todo el intervalo $\left(\frac{1}{b}, +\infty\right)$, luego no existe mas que un valor de λ que para un valor dado de μ , verifique $G(\lambda, \mu) = 0$.

De este modo queda demostrado que la función μ_H admite inversa a la que llamaremos λ_H y por consiguiente, que ambas son estrictamente monótonas. Para probar que son decrecientes, recordemos que de acuerdo con la Proposición 1.23, para la existencia de trayectorias homoclinas es necesario que, entre otras cosas, sea $\mu < 2 + b$, y por lo tanto $\sup(Im(\mu_H)) \leq 2 + b$. Ahora bien, como ha de ser $G(\lambda, \mu) = 0$, si calculamos

$$\lim_{\lambda \rightarrow (1/b)^-} G(\lambda, \mu) = \pi + \left(\lim_{\lambda \rightarrow (1/b)^-} \frac{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}{2(\mu + b)} \right) \cdot (+\infty)$$

podemos ver que la única forma de que se cumpla $\lim_{\lambda \rightarrow (1/b)^-} G(\lambda, \mu) = 0$ es que $\lim_{\lambda \rightarrow (1/b)^-} \mu = 2 + b$. De modo que la función μ_H tiende a su supremo cuando λ tiende al extremo izquierdo de su dominio. Se trata pues de una función decreciente.

Finalmente, observemos que por ser μ_H decreciente y acotada inferiormente por $-b$, ha de tener límite mayor o igual que la cota al que llamaremos μ_a . Para obtenerlo calculamos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G(\lambda, \mu_a) = \frac{3\pi}{2} - \text{Arctg} \frac{\mu_a - b}{\sqrt{4 - (\mu_a - b)^2}} + \frac{\sqrt{4 - (\mu_a - b)^2}}{(\mu_a + b)} \cdot \ln b = 0$$

□

NOTA 1: Tal y como se ha obtenido la función μ_H o su inversa λ_H , es evidente que las igualdades $\mu = \mu_H(\lambda)$ o $\lambda = \lambda_H(\mu)$ equivalen a $f(\lambda_e) = \lambda_i$ y en consecuencia

$$\begin{array}{llll} \mu < \mu_H(\lambda) & \text{ó} & \lambda < \lambda_H(\mu) & \text{equivalen a} & f(\lambda_e) > \lambda_i \\ \mu > \mu_H(\lambda) & \text{ó} & \lambda > \lambda_H(\mu) & \text{equivalen a} & f(\lambda_e) < \lambda_i \end{array}$$

NOTA 2: En la Figura 1.26 se muestra la gráfica de la función μ_H que acabamos de estudiar.

Estamos ya en condiciones de describir, justificando convenientemente el comportamiento del sistema en cada una de sus diferentes zonas, el conjunto de bifurcaciones. Pero dada su complejidad, se ha juzgado oportuno dividirlo en dos partes de acuerdo con el signo del $\det A_{II} = 1 - \lambda b$. A ello se dedican los dos Teoremas que siguen, pero antes señalar que para la demostración de la unicidad de las órbitas periódicas, hemos seguido, corrigiendo las deficiencias que presentan, los argumentos de [13, Andronov, 1987] y [16, Ye, 1996].

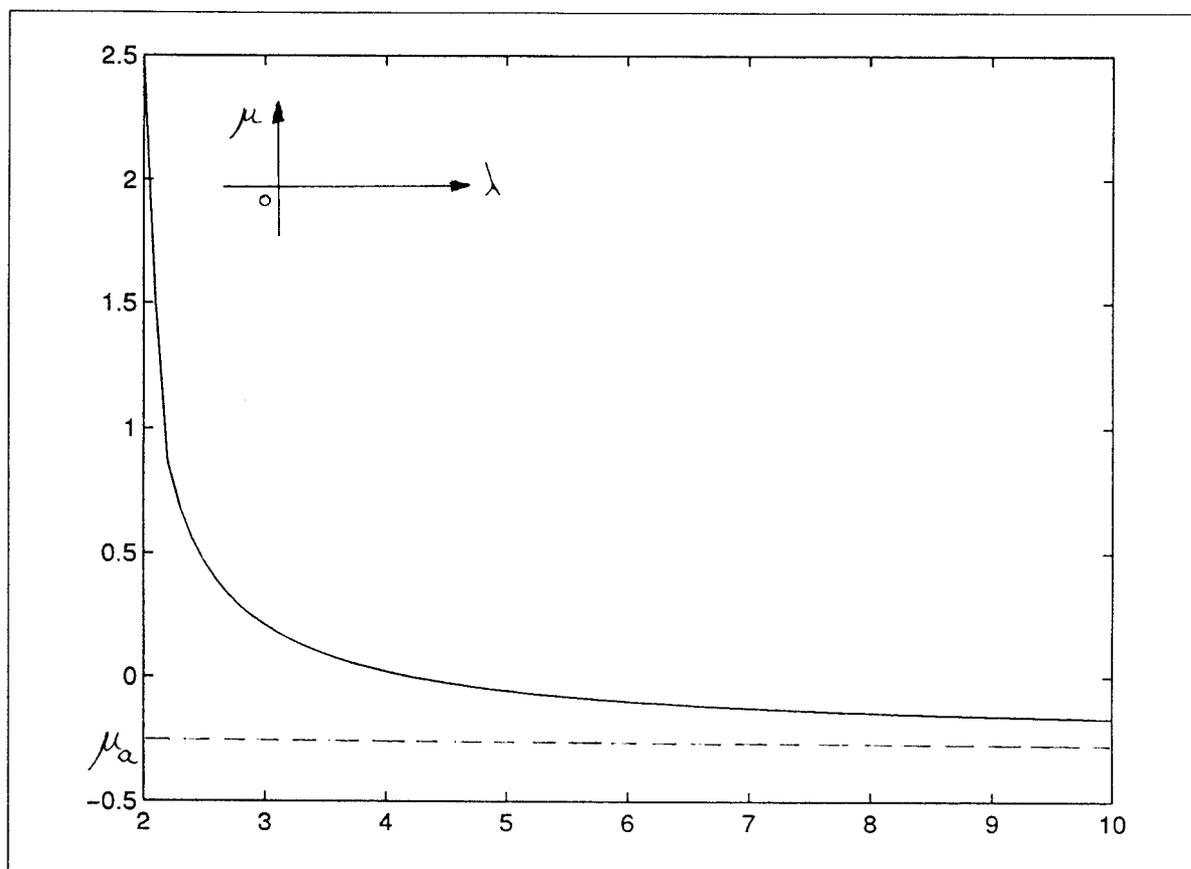


Figura 1.26: Curva de homoclinas en el plano de bifurcaciones.

Teorema 1.25 *Consideremos el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, en el que los parámetros satisfacen las condiciones*

$$0 < a \quad 0 \leq b < 1 \quad 0 < 1 - \lambda b$$

entonces:

- a) si $|\mu - b| \geq 2$, no hay policiclos;
- b) si $|\mu - b| < 2$, hay un solo equilibrio situado en la región I, de tal manera que si λ_{HP} es la función estudiada en la Proposición 1.20, se verifica
 - b1) si $b - 2 < \mu < -b$ y $\lambda > \lambda_{HP}(\mu)$, o bien $-b < \mu < b + 2$ y $\lambda < \lambda_{HP}(\mu)$, no existen policiclos.
 - b2) Si $b - 2 < \mu < -b$ y $\lambda < \lambda_{HP}(\mu)$, el equilibrio es inestable y está rodeado por una única órbita periódica estable;
 - b3) Si $-b < \mu < b + 2$ y $\lambda > \lambda_{HP}(\mu)$, el equilibrio es estable y está rodeado por una única órbita periódica inestable;
 - b4) si $\mu = -b$ el equilibrio es un centro regional.

DEMOSTRACIÓN: Para un seguimiento adecuado de los argumentos que se van a exponer, es conveniente consultar de vez en cuando la Figura 1.28.

a) La desigualdad $|\mu - b| \geq 2$ implica $\mu - b \geq 2$ o bien $\mu - b \leq -2$. De la primera de ellas se deduce que $\mu b + 1 > 0$ y como $a > 0$ y $1 - \lambda b > 0$, de la Tabla 1.2 resulta que el sistema tiene un solo equilibrio, que según la Tabla 1.3, es un nodo. En tal caso, la Proposición 1.9 niega la existencia de órbitas periódicas.

Con la otra desigualdad $\mu - b \leq -2$, puede ocurrir que $\mu b + 1 > 0$, con lo cual estamos en el mismo caso, o bien darse la desigualdad contraria $\mu b + 1 \leq 0$, y entonces el sistema no tiene equilibrios, y por tanto tampoco órbitas periódicas como así lo aseguran la Tabla 1.2 y la Proposición 1.9.

b) Si $|\mu - b| < 2$, necesariamente ha de ser $\mu b + 1 > 0$, luego el sistema tiene un solo equilibrio que según la Tabla 1.3 es un foco o un centro y está situado en la región I.

b1) Supongamos que $b - 2 < \mu < -b$ y $\lambda \geq \lambda_{HP}(\mu)$. Entonces debemos distinguir dos casos

$$\lambda_{HP}(\mu) \leq \lambda \leq b \quad \text{y} \quad b < \lambda$$

En ambos, el equilibrio del sistema es, según la Tabla 1.3 un foco inestable. En el segundo caso, no hay, de acuerdo con la Proposición 1.11 ningún tipo de policiclo, ya que $\text{traza } A_I \cdot \text{traza } A_{II} = -(\mu + b)(\lambda - b) > 0$.

En cuanto al primero, demostraremos que no existen órbitas periódicas probando que la aplicación de Poincaré $P(u) = g(f^{-1}(u))$ carece de puntos fijos. Para ello

recordemos de la Proposición 1.15 que la semiaplicación f tiene por asíntota

$$u_a(v) = -e^{-\gamma_1\pi}v - \frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1}(1 + e^{\gamma_1\pi})$$

pero como f es cóncava vista desde arriba, ha de verificar

$$u_a(v) < f(v) \quad \text{para todo } v \in [v_0, \infty)$$

Véase en la Figura 1.14 la gráfica de la semiaplicación f . Por otra parte, en la Proposición 1.17, estudiamos la semiaplicación g y como consecuencia de ello, podemos escribir

$$-1 \leq g'(v) < -e^{\gamma_2\pi} \leq -e^{-\gamma_1\pi} = u'_a(v)$$

la última desigualdad se deriva de que $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$, y ésta equivale a la condición $\lambda_{HP}(\mu) \leq \lambda$ que estamos considerando. En cuanto a la igualdad $g'(v) = -1$, se daría si fuera $\lambda = b$, en cuyo caso el equilibrio virtual de la región II sería un centro. La correspondiente semiaplicación g se estudió en la Proposición 1.16.

Resulta pues que $u'_a(v) - g'(v) > 0$. Por otro lado

$$u_a(0) - g(0) = -\frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1}(1 + e^{\gamma_1\pi}) > 0$$

puesto que en la zona del plano de bifurcaciones que estamos estudiando en este apartado, se verifican $-(\mu + b) > 0$ y $\mu b + 1 > 0$. Así que $u_a(v) - g(v)$ es una función creciente que en el origen es positiva, lo que implica que

$$g(v) < u_a(v) \quad \forall v \in [0, +\infty)$$

Como consecuencia de todo esto, podemos escribir

$$P(u) - u = g(f^{-1}(u)) - u = g(v) - f(v) < 0$$

lo que impide que P tenga puntos fijos, y por tanto el sistema órbitas periódicas.

La demostración de que en el caso $-b < \mu < b + 2$ y $\lambda < \lambda_{HP}(\mu)$ tampoco hay órbitas periódicas es muy similar a la que acabamos de efectuar por lo que la omitimos.

b2) Situándonos ahora en las desigualdades $b - 2 < \mu < -b$ y $\lambda < \lambda_{HP}(\mu)$, debemos distinguir dos casos

$$\lambda \leq -2 - b \quad \text{y} \quad -2 - b < \lambda < \lambda_{HP}(\mu)$$

en el primero de ellos, el equilibrio virtual es un nodo establey en el segundo un foco estable (consúltese la Tabla 1.4). Vamos a detenernos únicamente en el primero, ya que el segundo es completamente análogo. En lo que sigue, vamos a emplear las semiaplicaciones f y g haciendo uso de varias de sus propiedades para lo que nos remitiremos a las Proposiciones 1.15 y 1.18, donde se analizaron las mismas.

La aplicación de Poincaré es

$$P(u) = g(f^{-1}(u)) \quad \text{siendo } u \in [\lambda_1), 0]$$

y verifica

$$P(\lambda_1) - \lambda_1 > 0 \quad \text{y} \quad P(0) - 0 = g(v_0) < 0$$

donde λ_1 es la ordenada del punto en el que la variedad estable asociada al autovalor z_1 del nodo virtual de la región II, corta a la frontera, y v_0 es la ordenada del punto de la frontera al que va a parar la trayectoria que parte del origen, viajando por la región I. Ambas se muestran en las Figuras 1.13 y 1.17. Así que P tiene al menos un punto fijo. Vamos a demostrar que es único para lo cual comenzamos escribiendo la derivada de la aplicación de Poincaré de esta forma

$$P'(u) = \frac{g'(v)}{f'(v)} = \frac{u(\tau_1)}{u_1(\tau_2)} \cdot e^{2(\gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2)} \quad \tau_1 \in (\pi, \tau'_{10}) \quad \tau_2 \in (0, +\infty)$$

Si u^* es un punto fijo de P , ha de cumplir $u^* = u_1^*$, luego

$$P'(u^*) = e^{2(\gamma_1 \tau_1^* + \gamma_2 \tau_2^*)}$$

donde τ_1^* y τ_2^* son los valores de los parámetros τ_1 y τ_2 para los que se da ese punto fijo.

Para demostrar la unicidad de u^* , procedamos por reducción al absurdo: sea u^{**} un segundo punto fijo de P correspondiente a los valores de los parámetros τ_1^{**} y τ_2^{**} , cumpliendo además que $u^{**} < u^*$ sin que exista otro punto fijo entre ellos. Entonces, dado que la función $u(\tau_1)$ es estrictamente creciente y $u_1(\tau_2)$ estrictamente decreciente como es fácil comprobar estudiando el signo de sus derivadas, tendremos que las desigualdades

$$u(\tau_1^{**}) < u(\tau_1^*) \quad \text{y} \quad u_1(\tau_2^{**}) < u_1(\tau_2^*)$$

considerando que $\gamma_1 > 0$ y $\gamma_2 < 0$ implican esta otra

$$P'(u^{**}) < P'(u^*)$$

Sea ahora $u^* = f(v^*)$ y consideremos el intervalo $[\bar{v}, v^*]$ donde $v_0 < \bar{v} < v^*$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que de los eventuales puntos fijos de P , u^* es el mayor, es decir, que en el intervalo $[u^*, 0]$ no hay ningún otro punto fijo. Entonces de la desigualdad $f(v_0) = 0 > g(v_0)$ se deduce que $f(\bar{v}) > g(\bar{v})$ ya que si ocurriera lo contrario, habría un punto $v' \in (v_0, \bar{v}]$ tal que $f(v') = g(v')$, con lo que $u' = f(v')$ sería un punto fijo de P . Ahora bien, como f es una función decreciente, tendríamos que $u^* < u'$ lo que contradice la suposición de que u^* es el mayor de los puntos fijos de P . A continuación aplicamos el Teorema de Cauchy a las funciones f y g en el intervalo $[\bar{v}, v^*]$:

$$\frac{g(\bar{v}) - g(v^*)}{f(\bar{v}) - f(v^*)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} \quad \text{donde } \xi \in (\bar{v}, v^*)$$

Si tomamos límites teniendo en cuenta que, según acabamos de ver, $f(\bar{v}) > g(\bar{v})$ y $f(u^*) = g(u^*)$, resulta

$$\lim_{\bar{v} \rightarrow v^*} \frac{g(\bar{v}) - g(v^*)}{f(\bar{v}) - f(v^*)} = \lim_{\xi \rightarrow v^*} \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{g'(v^*)}{f'(v^*)} = P'(u^*) \leq 1$$

Un razonamiento similar en el otro punto fijo u^{**} permite concluir que $P'(u^{**}) \geq 1$ con lo que resulta $P'(u^*) \leq P'(u^{**})$. Pero ello contradice a la desigualdad $P'(u^*) > P'(u^{**})$ que hemos establecido más atrás. Concluimos que sólo existe un punto fijo de P .

Finalmente, dado que el punto fijo es único, ha de ser necesariamente u^* y no u^{**} , ya que el segundo presupone la existencia del primero. Así que ha de ser $P'(u^*) \leq 1$ lo que demuestra que la órbita periódica correspondiente a este punto fijo es estable.

b3) La demostración de este apartado es casi idéntica a la del apartado anterior *b2)* por lo que la omitimos. Señalemos no obstante, que por ser ahora la órbita periódica inestable, se verifica $P'(u^*) \geq 1$

b4) La condición $\mu = -b$ indica, de acuerdo con la Tabla 1.3 que el equilibrio de la región I es un centro. El equilibrio virtual de la región II puede ser un foco o un nodo según que $|\lambda + b| < 2$ o $|\lambda + b| \geq 2$. Como en la forma de Van der Pol-Duffing, ha de ser $\lambda \neq -\mu$, el equilibrio de la región II no puede ser un centro.

Sólo analizaremos el caso de que el equilibrio virtual sea un foco, ya que si fuera un nodo el estudio sería muy parecido. Refiriéndonos a las Proposiciones 1.14 y 1.17 donde se estudiaron las semiaplicaciones f y g , podemos escribir

$$\begin{aligned} -e^{\gamma_2 \pi} &< g'(v) < -1 && \text{si } \gamma_2 > 0 \\ -1 &< g'(v) < -e^{\gamma_2 \pi} && \text{si } \gamma_2 < 0 \\ f'(v) &= -1 && \end{aligned}$$

luego la aplicación de Poincaré

$$P(u) = g(f^{-1}(u)) \quad \forall u \in (-\infty, 0]$$

verificará

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (P(u) - u) = \lim_{v \rightarrow +\infty} (g(v) - f(v)) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(v)}{f(v)} - 1 \right) f(v) =$$

$$= \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{g'(v)}{f'(v)} - 1 \right) f(v) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \gamma_2 > 0 \\ +\infty & \text{si } \gamma_2 < 0 \end{cases}$$

$$P(0) - 0 = g(f^{-1}(0)) = g(0) = 0$$

$$P'(u) - 1 = \frac{g'(v)}{f'(v)} - 1 \quad \begin{cases} > 0 & \text{si } \gamma_2 > 0 \\ < 0 & \text{si } \gamma_2 < 0 \end{cases}$$

Así que $P(u) - u$ es una función estrictamente monótona que sólo se anula en el origen. No hay pues órbitas periódicas que corten a la frontera. El centro de la región I es por

lo tanto, un centro regional. □

Teorema 1.26 *Consideremos el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, en el que los parámetros satisfacen las condiciones*

$$0 < a \quad 0 \leq b < 1 \quad 1 - \lambda b < 0$$

entonces hay un equilibrio tipo silla en la región II y además

- a) si $\mu < -b$, no hay policiclos;
- b) si $\mu = -b$, hay un centro regional en la región I;
- c) si $-b < \mu < \mu_H(\lambda)$ donde μ_H es la función estudiada en la Proposición 1.24, hay un foco estable en la región I rodeado por una única órbita periódica inestable;
- d) si $\mu_H(\lambda) < \mu$, no hay policiclos.

DEMOSTRACIÓN: Para un seguimiento adecuado de los argumentos que se van a exponer, es conveniente consultar de vez en cuando la Figura 1.28.

La condición $1 - \lambda b < 0$ implica, según la Tabla 1.2, que al menos hay un equilibrio en la región II, y según la Tabla 1.4, que ese equilibrio es una silla.

a) De las condiciones $0 \leq b < 1$ y $1 - \lambda b < 0$ se deduce que traza $A_I = \lambda - b > 0$, luego si $\mu < -b$, resulta traza $A_I = -(\mu + b) > 0$, de modo que según la Proposición 1.11, no existen policiclos.

b) La condición $0 \leq b < 1$ y la igualdad $\mu = -b$ implican que $|\mu - b| < 2$, que traza $A_I = -(\mu + b) = 0$ y que $\det A_I = \mu b + 1 > 0$. Como además tenemos que $a > 0$, de la Proposición 1.4 se infiere que hay dos equilibrios, y de la Tabla 1.3, que el de la región I, es un centro.

Para demostrar que ninguna de las órbitas periódicas asociadas a ese centro, corta a la frontera, vamos a verificar que la aplicación de Poincaré no tiene mas punto fijo que el origen.

Las variedades estable e inestable de la silla, cortan a la frontera en puntos de ordenada λ_e y λ_i , según se explicó en la página 46, con lo cual, la aplicación de Poincaré $P(u) = g(f^{-1}(u))$, tiene como dominio el intervalo $(f(\lambda_e), 0]$.

Consultando ahora las Proposiciones 1.14 y 1.19 en las que se detallan las propiedades de las semiaplicaciones f y g , podemos escribir

$$\lim_{u \rightarrow f(\lambda_e)^+} [P(u) - u] = \lim_{v \rightarrow \lambda_e^-} [g(v) - f(v)] = \lambda_i + \lambda_e = \frac{a(\lambda - b)}{1 - \lambda b} < 0$$

$$P(0) - 0 = 0$$

$$(P(u) - u)' = P'(u) - 1 = \frac{\psi(\tau_2; \gamma_2)}{\psi(\tau_2; -\gamma_2)} - 1 > 0$$

la última desigualdad se explica porque $\gamma_2 > 0$ y por las propiedades de la función ψ , analizadas en el Apéndice C.

Resulta pues que la función $P(u) - u$ es estrictamente creciente y sólo se anula en el extremo derecho $u = 0$ de su dominio, luego ése es su único punto fijo, que no corresponde a ninguna órbita periódica que corte a la frontera. El equilibrio de la región I es pues, un centro regional.

c) Al estudiar la función μ_H en la Proposición 1.23, se estableció que $\mu_H(\lambda) < 2 + b$, luego las desigualdades $-\mu < b < \mu_H(\lambda)$ implican, como en el apartado anterior, que el equilibrio de la región I tiene autovalores complejos, pero como ahora tenemos que $\text{traza } A_I = -(\mu + b) < 0$, se trata de un foco estable.

Para demostrar que hay una órbita periódica que rodea a este equilibrio, consideramos de nuevo la aplicación de Poincaré $P(u) = g(f^{-1}(u))$ cuyo dominio es ahora el intervalo $(f(\lambda_e), u_0]$, donde u_0 se muestra en la figura 1.13. Como en el apartado anterior, calculamos

$$\lim_{u \rightarrow f(\lambda_e)^+} [P(u) - u] = \lim_{v \rightarrow \lambda_e^-} [g(v) - f(v)] = \lambda_i - f(\lambda_e)$$

$$P(u_0) - u_0 = 0 - u_0 < 0$$

Ahora bien de acuerdo con la Nota 1 de la Proposición 1.24, la desigualdad $\mu < \mu_H(\lambda)$ equivale a $f(\lambda_e) > \lambda_i$, luego la función $P(u) - u$ se anula al menos una vez en el intervalo $(f(\lambda_e), u_0]$. Existe pues, al menos, una órbita periódica.

La demostración de que esta órbita es única e inestable, sigue, salvo pequeños matices, los mismos pasos que la demostración del apartado b2) del Teorema 1.25, por lo que no consideramos necesario exponerla.

d) La desigualdad $\mu_H(\lambda) < \mu$ equivale según la Nota 1 de la Proposición 1.24 a $f(\lambda_e) < \lambda_i$ luego de haber policiclos, ninguno de ellos estará constituido por una homoclina, en todo caso serán órbitas periódicas. Para demostrar que no hay tal, procederemos por reducción al absurdo suponiendo que hay órbitas periódicas y por tanto, puntos fijos de la aplicación de Poincaré $P(u) = g(f^1(u))$, cuyo dominio es el intervalo $[\lambda_i, u_0]$ como se aprecia en la Figura 1.27.

Llamemos u^* al menor de los puntos fijos de P . Entonces ha de ser $u < P(u)$ para todo $u \in [\lambda_i, u^*)$, ya que si fuera $\bar{u} \geq P(\bar{u})$ para algún $\bar{u} \in [\lambda_i, u^*)$, entonces, dado que $P(\lambda_i) = \hat{u} > \lambda_i$ (Figura 1.27), habría alguna solución de la ecuación $P(u) - u = 0$ en el intervalo $(\lambda_i, \bar{u}]$ contra la suposición de que u^* es el más pequeño de los puntos fijos de P . Así pues, si $u < u^{**}$ podemos escribir

$$P'(u^*) = \lim_{u \rightarrow (u^*)^-} \frac{P(u) - P(u^*)}{u - u^*} = \lim_{u \rightarrow (u^*)^-} \frac{P(u) - u^*}{u - u^*} \leq 1$$

Supongamos que haya un segundo punto fijo u^{**} que forzosamente ha de ser $u^* < u^{**}$. Entonces $P'(u^{**}) \geq 1$ ya que dos ciclos límite consecutivos no pueden tener la misma estabilidad.

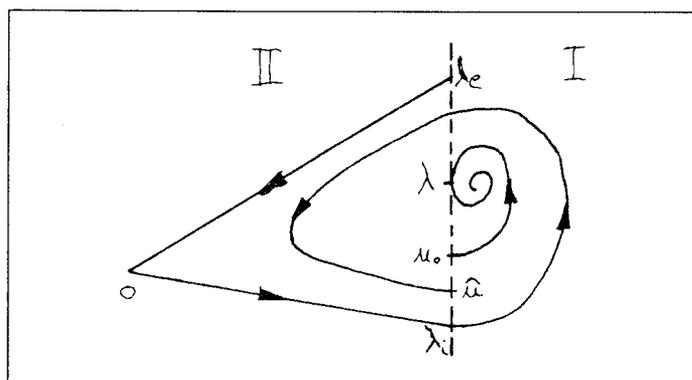


Figura 1.27:

Por otra parte, de las ecuaciones paramétricas de las semiaplicaciones f y g (páginas 34 y 42 respectivamente), se deduce, al estudiar sus derivadas y teniendo en cuenta que $\gamma_1 < 0$ y $\gamma_2 > 0$, que $\gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2$, es una función creciente de v y por tanto decreciente de u , de modo que si escribimos la derivada de la aplicación de Poincaré, de la misma forma que en la demostración del apartado b2) del Teorema 1.25, tendremos

$$P'(u^{**}) = e^{2(\gamma_1 \tau_1^{**} + \gamma_2 \tau_2^{**})} < e^{2(\gamma_1 \tau_1^* + \gamma_2 \tau_2^*)} = P'(u^*)$$

de modo que $P'(u^{**}) < 1$, con lo que llegamos a una contradicción que pone de manifiesto la inexistencia de u^{**} . Concluimos que de haber punto fijo, es único, y en él se verifica que $P'(u^*) \leq 1$.

Continuemos la demostración observando la Figura 1.27 de la que se deducen $P(u_0) - u_0 = -u_0 > 0$ y $P(\lambda_i) - \lambda_i = \hat{u} - \lambda_i > 0$ lo que junto a la unicidad del supuesto punto fijo, permite escribir $P(u) - u > 0$ para todo $u \in [\lambda_i, u_0]$ salvo naturalmente para $u = u^*$, lo que es equivalente a

$$u_1(\tau_2) \geq u(\tau_1) \quad \forall \tau_1 \in (\pi, \tau_{10}] \quad \text{y} \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$$

Así que empleando la expresión de la derivada $P'(u)$ obtenida en el Teorema 1.25 resulta

$$P'(u) = \frac{u(\tau_1)}{u_1(\tau_2)} e^{2(\gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2)} \geq 1 \quad \forall u \in (\lambda_i, u_0)$$

Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio a la función P en el intervalo $[\lambda_i, u^*]$

$$P(\lambda_i) - P(u^*) = \hat{u} - u^* = P'(\xi)(\lambda_i - u^*) \leq \lambda_i - u^* \quad \xi \in (\lambda_i, u^*)$$

pero esta desigualdad es imposible. Concluimos que no puede haber puntos fijos de P y por consiguiente tampoco órbitas periódicas. \square

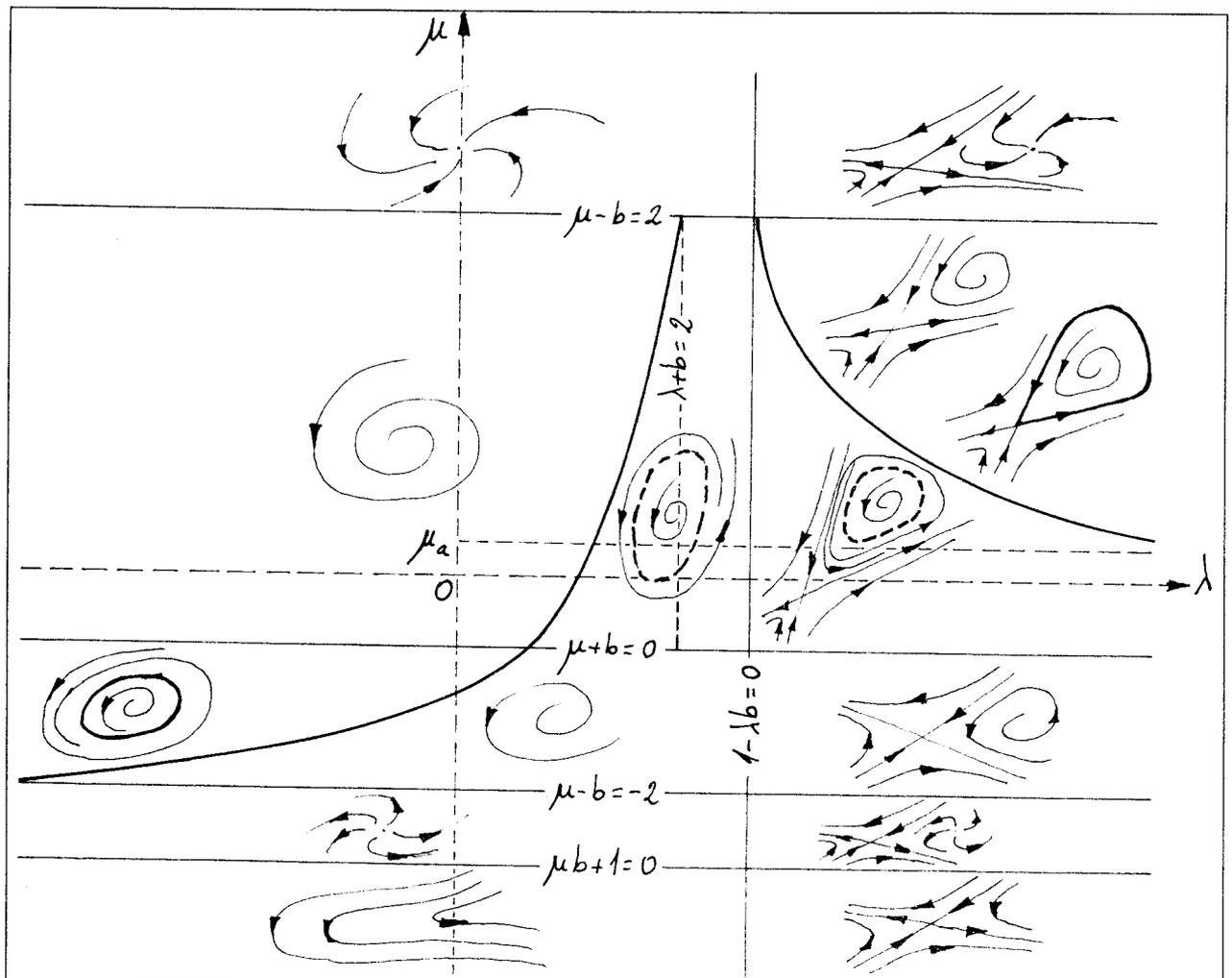


Figura 1.28: Conjunto de bifurcaciones. $a > 0$ y $0 \leq b < 1$.

NOTA: En la Figura 1.28 se muestra el conjunto de bifurcaciones en el Caso 2.- que acabamos de estudiar.

1.5.3 Caso 3.- $a \geq 0$ y $1 \leq b$.

En este último caso, con $1 \leq b$, la característica más notoria que presenta el sistema es la ausencia de polímeros. La demostración de este hecho, se lleva a cabo en el siguiente Teorema.

Teorema 1.27 *Si en el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, se verifica $1 \leq b$, entonces el sistema carece de policiclos.*

DEMOSTRACIÓN: Como ya es habitual, sólo consideraremos el caso de que $a \geq 0$. De acuerdo con las Figuras 1.6 y 1.7 no hay ningún tipo de policiclo cuando $a = 0$, y cuando $a > 0$, las Figuras 1.10 y 1.11 indican que podría haberlos si se verificaran simultáneamente las desigualdades

$$\text{traza } A_I = -(\mu + b) < 0 \quad \text{traza } A_{II} = \lambda - b > 0 \quad \mu - b < 2$$

pero vamos a demostrar que no es así. Procedamos por reducción al absurdo, suponiendo que existen policiclos. Entonces, dado que $b \geq 1$, las anteriores desigualdades implican $\mu b + 1 > 0$ y $1 - \lambda b < 0$, y según las Tablas 1.3 y 1.4, que el equilibrio de la región I es un foco estable, y el de la región II una silla con traza positiva. Entonces, los supuestos policiclos sólo pueden ser ciclos límite situados entre las variedades estable e inestable de la silla, o una trayectoria homoclina junto con la silla en la que nace y muere.

En el apartado *d*) del Teorema 1.26 hemos demostrado que si $\mu_H(\lambda) < \mu$, no hay policiclos. Aunque entre las hipótesis del Teorema se encuentra $0 \leq b < 1$, en ese apartado en particular no hemos hecho uso de la misma. Lo verdaderamente importante en la demostración ha sido el hecho de que en la región II hay una silla con traza positiva, y en la región I un foco estable. Pero precisamente esa es la situación que nos ocupa ahora, así que podemos concluir que si hay policiclos como estamos suponiendo, ha de ser $\mu_H(\lambda) \geq \mu$, y esta desigualdad equivale, de acuerdo con la Nota 1 de la Proposición 1.24 a $f(\lambda_e) \geq \lambda_i$, donde λ_e y λ_i (véase la página 46) son las ordenadas de los puntos en los que las variedades estable e inestable de la silla, cortan a la frontera.

Regresemos a la página 33 para tomar las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación f y escribamos

$$u + v = \frac{a\beta_1}{\mu b + 1} \cdot \frac{2(\gamma_1 \sin \tau_1 - \text{Sh } \gamma_1 \tau_1)}{\sin \tau_1} = -\frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1} \left(1 - \frac{\text{Sh } \gamma_1 \tau_1}{\gamma_1 \sin \tau_1} \right) < -\frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1}$$

La última desigualdad se debe a que $\gamma_1 < 0$ y a que $\tau_1 \in (\pi, \tau_0]$ con $\pi < \tau_0 < 2\pi$.

De modo que si $v = \lambda_e$ y $u = f(\lambda_e)$ tenemos

$$\lambda_e < -f(\lambda_e) - \frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1} \leq -\lambda_i - \frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1}$$

pero como $\lambda_e + \lambda_i = \frac{a(\lambda - b)}{1 - \lambda b}$, resulta que $\frac{a(\lambda - b)}{1 - \lambda b} < -\frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1}$, o lo que es lo mismo

$$\frac{\lambda - b}{1 - \lambda b} + \frac{\mu + b}{\mu b + 1} = \frac{(1 - b^2)(\lambda + \mu)}{(1 - \lambda b)(\mu b + 1)} < 0$$

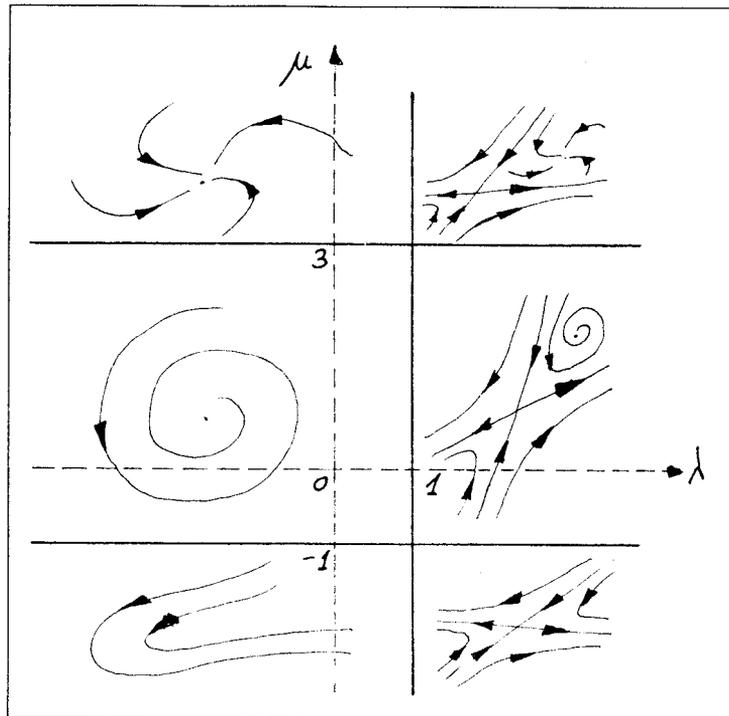


Figura 1.29: Conjunto de bifurcaciones. $a > 0$ y $b = 1$.

Ahora bien, $-(\mu + b) < 0$ y $\lambda - b > 0$ implican que $\lambda + \mu > 0$, de modo que la desigualdad que acabamos de establecer sólo puede mantenerse si $1 - b^2 > 0$, lo que contradice la hipótesis $b \geq 1$ del enunciado. No es posible pues la existencia de policiclos. \square

La ausencia de policiclos cuando $1 \leq b$, deja a los equilibrios la responsabilidad del gobierno de la dinámica del sistema, de modo que las posibles bifurcaciones se reducen a cambios en el número, tipo y estabilidad de los mismos. Pero como en la Sección 1.3.2 obtuvimos toda la información al respecto, estamos en condiciones de trazar en las Figuras 1.29 y 1.30 los correspondientes conjuntos de bifurcaciones.

1.6 Descripción de las bifurcaciones.

En esta última Sección, vamos a describir las bifurcaciones del sistema que hemos encontrado en la Sección anterior. Sólo consideraremos el caso de que $0 \leq b < 1$ y $a > 0$ pues como hemos visto es el que tiene mayor riqueza, no obstante, al final también

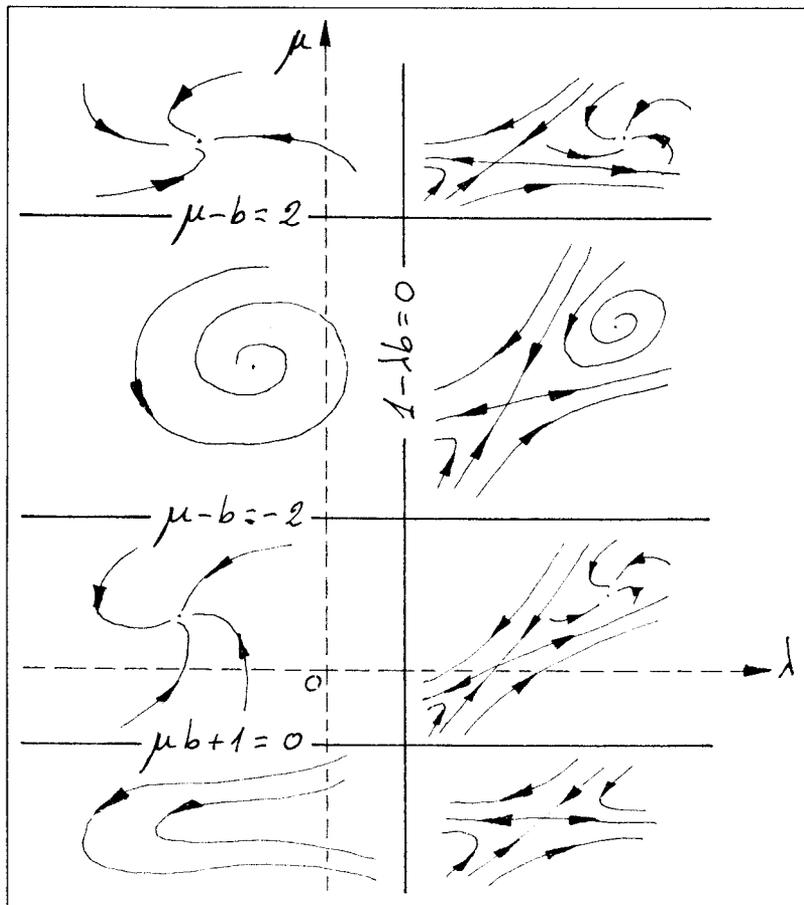


Figura 1.30: Conjunto de bifurcaciones. $a > 0$ y $b > 1$.

tomaremos en cuenta el caso de que $a < 0$ para poder describir el paso del parámetro a por el valor cero. Las bifurcaciones que describiremos son aquellas que implican la aparición o desaparición, a través de diversos mecanismos, de órbitas periódicas.

Para un correcto entendimiento de las descripciones que siguen, es conveniente acompañar su lectura con la observación de la Figura 1.28.

1.6.1 Bifurcación de Hopf del infinito.

Centremos nuestra atención en la curva del plano de bifurcaciones

$$\mu = \mu_{HP}(\lambda) = \frac{b^3 - 2b + \lambda}{1 - \lambda b} \quad -2 - b < \lambda < 2 - b$$

que se analizó en la Proposición 1.20.

a) Si $-2 - \lambda < \lambda < b$ entonces

a1) si $-\frac{1}{b} < \mu < \mu_{HP}(\lambda)$ hay un único equilibrio que es inestable;

a2) si $\mu = \mu_{HP}(\lambda)$ el único equilibrio es un centro global;

a3) si $\mu_{HP}(\lambda) < \mu < -b$ hay un único equilibrio que es inestable y está rodeado por una órbita periódica estable.

b) Si $b < \lambda < 2 - b$ entonces

b1) si $-b < \mu < \mu_{HP}(\lambda)$ hay un solo equilibrio que es estable y está rodeado por una órbita periódica inestable;

b2) si $\mu = \mu_{HP}(\lambda)$ el único equilibrio del sistema es un centro global;

b3) si $\mu_{HP}(\lambda) < \mu$ sólo hay un equilibrio que es estable.

Esta bifurcación se caracteriza porque el cruce de la línea $\mu = \mu_{HP}(\lambda)$ no implica cambio en la estabilidad del equilibrio, pero nace una órbita periódica cuya estabilidad es la opuesta. La órbita naciente tiene una amplitud tanto mayor cuanto más cerca se sitúen los parámetros λ y μ de la curva de bifurcación $\mu = \mu_{HP}(\lambda)$. Podemos interpretar el fenómeno como un cambio de estabilidad del punto del infinito asociado al nacimiento de una órbita periódica, y se conoce en la literatura como *bifurcación de Hopf del infinito*. Como la órbita naciente es estable si $\lambda < b$ e inestable si $\lambda > b$, diremos que la bifurcación es respectivamente supercrítica y subcrítica.

1.6.2 Bifurcación de Hopf con centro.

Ahora nos situamos en la recta

$$\text{traza } A_I = -(\mu + b) = 0$$

del plano de bifurcaciones.

a) Si $\lambda < b$ entonces

a1) si $\mu_{HP}(\lambda) < \mu < -b$ hay un único equilibrio que es inestable y está rodeado por una órbita periódica estable;

a2) si $\mu = -b$ el único equilibrio es un centro regional;

a3) si $-b < \mu$ sólo hay un equilibrio que es estable.

b) Si $b < \lambda \leq \frac{1}{b}$ entonces

b1) si $-\frac{1}{b} < \mu < -b$ hay un solo equilibrio que es inestable;

b2) si $\mu = -b$ el único equilibrio es un centro regional;

b3) si $\mu < \min(\mu_{HP}(\lambda), 2 + b)$ existe un único equilibrio estable rodeado por una órbita periódica inestable.

c) Si $\frac{1}{b} < \lambda$ entonces

c1) si $-\frac{1}{b} < \mu < -b$ hay dos equilibrios, uno de ellos foco o nodo inestable, y el otro punto de silla;

c2) si $\mu = -b$ hay un centro regional y un punto de silla;

c3) si $-b < \mu < \mu_H(\lambda)$ donde $\mu = \mu_H(\lambda)$ es la curva descrita en la Proposición 1.24 (curva de homoclinas), hay un foco estable rodeado por una órbita periódica inestable, y un punto de silla.

El cruce de la línea $\mu + b = 0$ provoca el cambio en la estabilidad de uno de los equilibrios y el nacimiento de una órbita periódica con la estabilidad opuesta rodeándolo. El otro equilibrio, cuando lo hay, no se altera. En la línea $\mu + b = 0$ hay un centro regional cuya órbita de mayor amplitud es tangente a la frontera. La órbita periódica que nace con el cambio de estabilidad del equilibrio tiene la misma amplitud. Esta conducta del sistema justifica que se le de el nombre de *bifurcación de Hopf con centro*. Como antes, según que $\lambda < b$ o $\lambda > b$, la bifurcación es supercrítica o subcrítica.

1.6.3 Desaparición de órbita periódica por la transición de foco a nodo.

Nos situamos en el segmento del plano de bifurcaciones

$$\mu = 2 + b \quad 2 - b < \lambda < \frac{1}{b}$$

a) Si $-b < \mu < 2 + b$ hay un único foco estable rodeado por una órbita periódica inestable.

b) Si $2 + b \leq \mu$ el único equilibrio es un nodo estable (impropio si $\mu = 2 + b$).

A continuación nos situamos sobre la semirrecta

$$\mu = -2 - b \quad \lambda < -2 - b$$

c) Si $\mu \leq -2 + b$ hay un solo equilibrio que es un nodo inestable (impropio si $\mu = -2 + b$).

d) Si $-2 + b < \mu$ el único equilibrio es un foco inestable y está rodeado por una órbita periódica estable.

El paso a través de la semirrecta o el segmento citados, implica la transformación del foco en un nodo. Entonces, la aparición de las variedades invariantes del nodo son incompatibles con la órbita periódica que rodeaba al foco, provocando su desaparición. Puesto que en esta transición, la parte imaginaria de los autovalores tiende a cero, el período de la órbita periódica tiende a infinito. Simultáneamente, hay puntos de la misma que se van alejando indefinidamente del origen mientras que otros, limitados por las variedades inestables del nodo, permanecen a una distancia finita. Creemos que esta bifurcación no se encuentra documentada en la literatura.

1.6.4 Bifurcación homoclina.

La curva del plano de bifurcaciones en la que vamos a centrarnos es

$$\mu = \mu_H(\lambda) \quad \frac{1}{b} < \lambda$$

que se estudió en la Proposición 1.24.

a) Si $-b < \mu < \mu_H(\lambda)$ hay un foco estable rodeado por una órbita periódica inestable, y un punto de silla.

b) Si $\mu = \mu_H(\lambda)$ hay una trayectoria homoclina rodeando a un foco estable, que nace y muere en el punto de silla.

c) Si $\mu_H(\lambda) < \mu$ hay un punto de silla y un equilibrio estable.

Esta bifurcación se caracteriza porque el cruce de la curva $\mu = \mu_H(\lambda)$ implica la desaparición de una órbita periódica, de modo que al aproximarnos a dicha curva, el período aumenta ilimitadamente, pero la órbita permanece confinada hasta su desaparición en una región acotada del plano de fases.

1.6.5 Otras bifurcaciones.

Como consecuencia del estudio de las simetrías de la Sección 1.3.1 hemos considerado siempre valores no negativos del parámetro a . Ello ha facilitado grandemente el análisis del sistema dinámico, pero en la descripción de las bifurcaciones que estamos haciendo, no podemos ignorar que el paso de los valores negativos a los positivos de a origina bifurcaciones del sistema. Para tenerlas en cuenta observemos que de la simetría S_2 se deduce que el plano de bifurcaciones (λ, μ) para $a < 0$, se obtiene tomando el mismo plano para $a > 0$ y efectuando una simetría respecto de la recta $\mu + \lambda = 0$. Es fácil darse cuenta de la diversidad de bifurcaciones que surgen, y que sería muy prolijo des-

cribir. Nos limitaremos pues a título de ejemplo, a una sola de ellas.

Supongamos que estamos en la zona del plano de bifurcaciones determinada por

$$\lambda < \lambda_{HP}(\mu) \quad -2 - b < \mu < -b$$

donde λ_{HP} aparece en la Nota 1 de la Proposición 1.20, entonces

a) si $a > 0$ hay un solo equilibrio inestable rodeado por una órbita periódica estable.

b) si $a \leq 0$ hay un único equilibrio estable.

Esta situación corresponde a una bifurcación de Hopf, pero a diferencia de la Hopf clásica, el período del ciclo límite es constante y la amplitud depende linealmente del parámetro a .

Capítulo 2

Sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras y simétricos.

2.1 Generalidades.

El capítulo que comienza lo vamos a dedicar al estudio de los sistemas dinámicos continuos y lineales a trozos en dos dimensiones, en los que el plano de fases se encuentra dividido en tres regiones mediante dos fronteras rectilíneas paralelas. No hay pérdida de generalidad en admitir que esas dos fronteras son

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$$

$$L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}$$

ya que siempre es posible, mediante giros, traslaciones y homotecias, situar cualquier par de rectas paralelas en las posiciones indicadas por L_1 y L_2 . De este modo, las tres regiones en que queda dividido el plano de fases son

$$\text{Región I} \quad : \quad R_I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x\}$$

$$\text{Región II} \quad : \quad R_{II} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$$

$$\text{Región III} \quad : \quad R_{III} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$$

Como en el Capítulo anterior, nos limitaremos a sistemas autónomos, es decir a sistemas de la forma:

$$X'(t) = A_I \cdot X(t) + B_I \quad \text{en la región I}$$

$$X'(t) = A_{II} \cdot X(t) + B_{II} \quad \text{en la región II}$$

$$X'(t) = A_{III} \cdot X(t) + B_{III} \quad \text{en la región III}$$

donde A_I , A_{II} y A_{III} son matrices 2×2 cuyos elementos sólo dependen de los parámetros de bifurcación, y B_I , B_{II} y B_{III} son vectores columna que dependen de esos mismos parámetros. $X(t)$ es el vector columna de las variables de estado.

Introducimos ahora una hipótesis de simetría: Vamos a centrarnos en sistemas dinámicos cuyo plano de fases sea simétrico alrededor del origen. Ello implica que si $(x(t), y(t))^T$ es una trayectoria del sistema en el plano de fases, entonces $(-x(t), -y(t))^T$ ha de ser también una trayectoria del mismo sistema.

Pero precisemos más esta idea. Si suponemos que $x > 1$ y por tanto $-x < -1$, entonces han de cumplirse las igualdades

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A_I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B_I \\ \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \end{pmatrix} &= A_{III} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + B_{III} \end{aligned} \right\} \quad x > 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

que equivalen a

$$A_I = A_{III} \quad B_I = -B_{III}$$

Ahora supongamos que $0 < x < 1$ y por tanto $-1 < -x < 0$. Entonces han de cumplirse estas otras igualdades

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A_{II} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B_{II} \\ \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \end{pmatrix} &= A_{II} \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + B_{II} \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

que equivalen a

$$B_{II} = 0$$

Resulta pues que de la hipótesis de simetría se deduce que el sistema dinámico ha de ser de la forma

$$\begin{aligned} X'(t) &= A_I \cdot X(t) + B_I && \text{en la región I} \\ X'(t) &= A_{II} \cdot X(t) && \text{en la región II} \\ X'(t) &= A_I \cdot X(t) - B_I && \text{en la región III} \end{aligned}$$

Continuemos ahora imponiéndole al sistema una hipótesis de continuidad sobre las fronteras igual que hicimos en el Capítulo anterior. Debido a la simetría sólo es necesario exigir la continuidad sobre la frontera L_1 :

$$A_I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + B_I = A_{II} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Si llamamos

$$A_I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_{II} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad B_I = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

entonces la igualdad anterior se escribe así

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + a_{12}y + b_1 &= c_{11} + c_{12}y \\ a_{21} + a_{22}y + b_2 &= c_{21} + c_{22}y \end{aligned} \right\} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} a_{12} &= c_{12} & b_1 &= c_{11} - a_{11} \\ a_{22} &= c_{22} & b_2 &= c_{21} - a_{21} \end{aligned}$$

Así pues, como consecuencia de la hipótesis de continuidad en las fronteras, el sistema dinámico queda de esta forma

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + c_{11} - a_{11} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + c_{21} - a_{21} \end{aligned} \right\} & \text{si} & \quad 1 \leq x \\ \\ \left. \begin{aligned} x' &= c_{11}x + a_{12}y \\ y' &= c_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \right\} & \text{si} & \quad -1 < x < 1 \\ \\ \left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y - (c_{11} - a_{11}) \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y - (c_{21} - a_{21}) \end{aligned} \right\} & \text{si} & \quad x \leq -1 \end{aligned}$$

que puede escribirse, usando notación matricial, de este modo

$$X' = F(X) = \begin{cases} A_I \cdot X + B_I & \text{si } X \in R_I \cup L_1 \\ A_{II} \cdot X & \text{si } X \in R_{II} \\ A_I \cdot X - B_I & \text{si } X \in R_{III} \cup L_2 \end{cases}$$

Si a las ecuaciones diferenciales de nuestro sistema dinámico les adjuntamos unas condiciones iniciales, tenemos un problema de valores iniciales. Vamos a establecer que tal problema tiene solución única. Como requisito previo demostraremos el siguiente Lema

Lema 2.1 *La función F es globalmente lipschitziana en \mathbb{R}^2 .*

DEMOSTRACIÓN: La restricción de F a cada región es lineal, y por tanto lipschitziana, como quedó de manifiesto en el Lema 1.1 del Capítulo anterior. Por lo tanto, supongamos que $X_1 \in R_I \cup L_1$, y $X_2 \in R_{II}$; entonces, si llamamos

$$X_1 = (x_1, y_1)^T \quad \text{y} \quad X_2 = (x_2, y_2)^T$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|F(X_1) - F(X_2)\| &= \|A_I X_1 + B_I - A_{II} X_2\| = \\
&= \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + c_{11} - a_{11} - c_{11}x_2 - a_{12}y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + c_{21} - a_{21} - c_{21}x_2 - a_{22}y_2 \end{pmatrix} \right\| = \\
&= \left\| \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 - 1) + a_{12}y_1 \\ a_{21}(x_1 - 1) + a_{22}y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{11}(x_2 - 1) + a_{12}y_2 \\ c_{21}(x_2 - 1) + a_{22}y_2 \end{pmatrix} \right\| = \\
&= \left\| A_I \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 \end{pmatrix} - A_{II} \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

pero como $x_2 - 1 < 0 < x_1 - 1$, podemos continuar empleando el mismo método que en la demostración del citado Lema, lo que nos permite concluir

$$\left\| A_I \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 \end{pmatrix} - A_{II} \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| \leq K \left\| \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = K \|X_1 - X_2\|$$

donde como allí,

$$K = \|A_I\| + \left\| \begin{pmatrix} a_{11} - c_{11} \\ a_{21} - c_{21} \end{pmatrix} \right\|$$

Igual resultado obtendríamos con $X_2 \in R_{II}$ y $X_3 \in R_{III} \cup L_2$. La norma matricial ha de ser, desde luego, una norma subordinada a la norma vectorial.

Prosigamos con $X_1 \in R_I \cup L_1$ y $X_3 \in R_{III} \cup L_2$, entonces, si llamamos

$$X_3 = (x_3, y_3)^T$$

podemos escribir

$$\|F(X_1) - F(X_3)\| = \|A_I X_1 + B_I - A_I X_3 + B_I\| \leq \|A_I(X_1 - X_3)\| + 2\|B_I\|$$

pero como $x_1 \geq 1$ y $x_3 \leq -1$, resulta

$$2 \leq x_1 - x_3 = |x_1 - x_3| \leq \|X_1 - X_3\|$$

con lo cual

$$\|A_I(X_1 - X_3)\| + 2\|B_I\| \leq K\|X_1 - X_3\|$$

donde $K = \|A_I\| + \|B_I\|$. Si ahora tomamos como constante de Lipschitz, la mayor entre las distintas K obtenidas y las correspondientes a las restricciones de F a cada región, queda demostrado el carácter globalmente lipschitziano de F . \square

Como en nuestro sistema las variables de estado están definidas en todo \mathbb{R}^2 , y la variable temporal t , en todo \mathbb{R} , el carácter globalmente lipschitziano de F implica

Teorema 2.2 *El problema de valores iniciales*

$$X'(t) = F(X(t)) \quad X(t_0) = X_0$$

tiene solución única definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Vamos a hacer ahora unas consideraciones generales acerca de los equilibrios de estos sistemas, para lo que comenzamos suponiendo que las dos matrices A_I y A_{II} son regulares. Ello implica que no hay autovalores nulos y que el sistema tiene tres equilibrios, bien sean reales o virtuales. Sea cual sea el caso, las coordenadas de estos equilibrios son

$$\begin{aligned} \bar{x}_I &= 1 - \frac{\det A_{II}}{\det A_I} & \bar{y}_I &= -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_{11} \\ a_{21} & c_{21} \end{vmatrix}}{\det A_I} \\ \bar{x}_{II} &= 0 & \bar{y}_{II} &= 0 \\ \bar{x}_{III} &= -1 + \frac{\det A_{II}}{\det A_I} & \bar{y}_{III} &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_{11} \\ a_{21} & c_{21} \end{vmatrix}}{\det A_I} \end{aligned}$$

El equilibrio situado en el origen es, por consiguiente, real, en tanto que los otros dos pueden ser reales o virtuales. Pero de la simetría se desprende que los dos han de ser reales o los dos virtuales. En consecuencia, si las matrices A_I y A_{II} son regulares, el sistema tiene uno o tres equilibrios, de los cuales uno está siempre en el origen, y los otros dos situados simétricamente con respecto al mismo. Observemos además que no hay equilibrios en las fronteras.

Proposición 2.3 *La condición necesaria y suficiente para que el sistema dinámico tenga*

- a) *un equilibrio, es que $\det A_I \cdot \det A_{II} > 0$*
- b) *tres equilibrios, es que $\det A_I \cdot \det A_{II} < 0$*

DEMOSTRACIÓN: La diferencia entre que haya uno o tres equilibrios, es que el equilibrio de la región I (y por simetría el de la III), sea virtual o real. Es decir, habrá un equilibrio si y sólo si $\bar{x}_I < 1$, desigualdad que equivale a $\det A_I \cdot \det A_{II} > 0$, en tanto que habrá tres equilibrios cuando $\bar{x}_I > 1$, es decir cuando $\det A_I \cdot \det A_{II} < 0$. \square

Cuando las matrices A_I y A_{II} son singulares, el sistema puede llegar a tener infinitos equilibrios que vamos a estudiar. Ahora bien, como veremos más adelante en la Proposición 2.7, las citadas matrices tienen rango 1 por lo menos, ya que sólo consideraremos el caso de que $a_{12} \neq 0$.

Proposición 2.4 *Si $\det A_I = 0$ y $\det A_{II} \neq 0$, el sistema sólo tiene un equilibrio que está situado en el origen.*

DEMOSTRACIÓN: Los posibles equilibrios del sistema en la región II son las soluciones del sistema homogéneo $A_{II} \cdot X = 0$, que por tener matriz regular, sólo tiene la solución trivial. El origen es pues un equilibrio del sistema.

Por otro lado

$$\det A_{II} = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11} & a_{12} \\ c_{21} - a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11} & a_{12} \\ c_{21} - a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

pero la última desigualdad implica que $\text{rango}(A_I|B_I) = 2$, ya que $\text{rango}(A_I) = 1$. Ello trae como consecuencia que los sistemas $A_I \cdot X + B_I = 0$ y $A_I \cdot X - B_I = 0$ que proporcionan los posibles equilibrios en las regiones I y III, sean incompatibles. No existe pues otro equilibrio que el origen. \square

Proposición 2.5 *Si $\det A_I \neq 0$ y $\det A_{II} = 0$, el sistema tiene infinitos equilibrios en la región II, y un equilibrio en cada frontera. El lugar geométrico de todos estos equilibrios es el segmento*

$$c_{11}x + a_{12}y = 0 \quad -1 \leq x \leq 1$$

DEMOSTRACIÓN: Los equilibrios de las regiones I y III vienen dados por las expresiones anteriores, pero como $\det A_{II} = 0$, estos equilibrios son $\left(1, -\frac{c_{11}}{a_{12}}\right)$ y $\left(-1, \frac{c_{11}}{a_{12}}\right)$, es decir, que los equilibrios correspondientes a las regiones I y III se encuentran cada uno en una frontera.

Por otra parte, al ser $\det A_{II} = 0$, el sistema homogéneo $A_{II} \cdot X = 0$ que proporciona los equilibrios de la región II, tiene infinitas soluciones que se encuentran alineadas sobre el segmento

$$c_{11}x + a_{12}y = 0 \quad -1 < x < 1$$

Obsérvese que los puntos donde este segmento toca a las fronteras, son precisamente los equilibrios que hay sobre las mismas. \square

Proposición 2.6 *Si $\det A_I = 0$ y $\det A_{II} = 0$, el sistema tiene infinitos equilibrios. El lugar geométrico de todos estos equilibrios es la quebrada*

$$\begin{array}{ll} a_{11}x + a_{12}y + c_{11} - a_{11} = 0 & \text{si } 1 \leq x \\ c_{11}x + a_{12}y = 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ a_{11}x + a_{12}y - (c_{11} - a_{11}) = 0 & \text{si } x \leq -1 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\det A_{II} = 0$, la proposición 2.5 asegura que el sistema tiene infinitos equilibrios en el segmento

$$c_{11}x + a_{12}y = 0 \quad -1 \leq x \leq 1$$

Pero además, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & c_{11} - a_{11} \\ a_{21} & c_{21} - a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_{11} \\ a_{21} & c_{21} \end{vmatrix} = 0$$

de modo que $\text{rango}(A_I|B_I) = 1$, y por ser $\det A_I = 0$, también es $\text{rango}(A_I) = 1$.

Así pues, el sistema $A_I \cdot X + B_I = 0$ que proporciona los equilibrios de la región I, es compatible e indeterminado, de modo que de sus infinitas soluciones, las situadas en la región I han de verificar

$$a_{11}x + a_{12}y + c_{11} - a_{11} = 0 \quad \text{si } 1 \leq x$$

Un razonamiento análogo en la región III permite concluir la demostración. \square

Estamos interesados en el estudio de los comportamientos dinámicos del sistema que exhiban una cierta complejidad, así como en el análisis de posibles bifurcaciones. Ello nos lleva a ocuparnos de la existencia en el plano de fases de curvas de Jordan que sean unión de trayectorias del sistema. Dentro de este tipo de curvas se encuentran las órbitas periódicas, las homoclinas junto con el equilibrio en que nacen y mueren, y las parejas de heteroclinas que conectan dos equilibrios, junto con esos equilibrios. Usaremos el nombre común de **policiclos**, como hicimos en el Capítulo anterior, para designar a estas curvas.

En lo que respecta a las órbitas periódicas, éstas han de rodear necesariamente a un equilibrio, [23, Hartman, 1982] y han de tener partes en al menos dos regiones. Esto último es así debido a que en cada región el sistema es lineal, y por tanto no puede tener órbitas periódicas totalmente contenidas en esa región, excepto naturalmente si el equilibrio es un centro. Valen aquí los comentarios hechos en la página 9 del Capítulo anterior, acerca de los centros regionales y globales.

El primer resultado de carácter general que tenemos acerca de los policiclos es el siguiente.

Proposición 2.7 *Una condición necesaria para que el sistema dinámico tenga policiclos es que $a_{12} \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Se siguen los mismos pasos que en la demostración de la Proposición 1.7 del Capítulo anterior. \square

En todo lo que sigue excluirémos, a no ser que se diga expresamente lo contrario, el caso de que $a_{12} = 0$.

Por otra parte, interesa conocer, para el posterior estudio de las semiaplicaciones de Poincaré, la forma en que las trayectorias cruzan las fronteras entre las regiones. A este respecto tenemos la siguiente Proposición.

Proposición 2.8 *Si $a_{12} \neq 0$, entonces*

a) *Por cada punto $(1, y)$ de la frontera L_1 pasa una trayectoria que la cruza en un sentido si $y > -\frac{c_{11}}{a_{12}}$, en el sentido contrario si $y < -\frac{c_{11}}{a_{12}}$, y es tangente a la frontera si $y = -\frac{c_{11}}{a_{12}}$.*

b) *Por cada punto $(-1, y)$ de la frontera L_2 pasa una trayectoria que la cruza en un sentido si $y > \frac{c_{11}}{a_{12}}$, en el sentido contrario si $y < \frac{c_{11}}{a_{12}}$, y es tangente a la frontera si $y = \frac{c_{11}}{a_{12}}$.*

DEMOSTRACIÓN: a) Se procede como en la demostración de la Proposición 1.8 del Capítulo anterior.

b) Por la simetría respecto del origen del plano de fases, este apartado se reduce al anterior. \square

Vamos a establecer a continuación unos resultados generales acerca de la forma y la existencia de policiclos. Observemos en primer lugar que la simetría obliga a que si hay un policiclo con partes en dos regiones, digamos la I y la II, ha de haber otro simétrico respecto del origen que tendrá por tanto partes en las regiones II y III. Por la misma razón, si un policiclo tiene partes en las tres regiones, ha de ser también simétrico respecto al origen del plano de fases. La demostración de estas afirmaciones la tenemos en las siguientes Proposiciones.

Proposición 2.9 *Si un policiclo tiene partes en las tres regiones, ha de ser simétrico con respecto al origen, y contenerlo en su interior.*

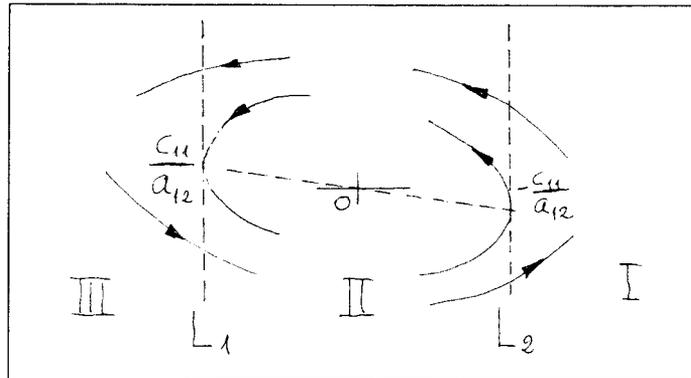


Figura 2.1:

DEMOSTRACIÓN: Procedamos por reducción al absurdo, suponiendo que hay un políciclo A que no es simétrico respecto del origen de coordenadas. En tal caso, la simetría del plano de fases obliga a que exista un segundo políciclo B simétrico del primero.

Por otro lado, la proposición 2.8 asegura que sobre la frontera hay un único punto de ordenada $-\frac{c_{11}}{a_{12}}$ que separa las trayectorias que pasan de la región I a la II, de las que lo hacen en sentido contrario (véase la Figura 2.1).

En consecuencia, los dos políciclos simétricos que estamos considerando, entran ambos en la región I por puntos $(1, u_A)$ y $(1, u_B)$ de la frontera L_1 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_B < u_A < -\frac{c_{11}}{a_{12}}$. Al salir de la región I para regresar a la II lo harán por puntos $(1, v_A)$ y $(1, v_B)$ de la misma frontera, que necesariamente han de verificar $-\frac{c_{11}}{a_{12}} < v_A < v_B$, porque si $v_B \leq v_A$, se cortarían.

Ahora bien, la simetría de estos dos políciclos obliga a que en la frontera L_2 , los puntos de entrada en la región III sean $(-1, -u_A)$ y $(-1, -u_B)$ con $\frac{c_{11}}{a_{12}} < -u_B < -u_A$, lo que sólo puede ocurrir si los dos políciclos se cortan en la región II, y eso es imposible por ser autónomo nuestro sistema dinámico.

Concluimos pues que de haber un políciclo que tenga partes en las tres regiones, ha de ser simétrico respecto del origen del plano de fases, y contenerlo por tanto en su interior. \square

Proposición 2.10 *Si un políciclo no es simétrico respecto del origen del plano de fases, entonces existe otro políciclo de modo que ambos son simétricos respecto de ese origen. Cada uno de estos políciclos tiene partes sólo en dos regiones contiguas, o bien uno de ellos está totalmente contenido en la región I y el otro en la III. Además, ninguno de los dos contiene en su interior al origen del plano de fases.*

DEMOSTRACIÓN: Para que se cumpla la simetría del plano de fases, la existencia de un policiclo no simétrico respecto del origen, implica la existencia de otro, de tal modo que ambos sean mutuamente simétricos.

Ninguno de estos policiclos puede tener partes en las tres regiones, porque entonces, según la Proposición 2.9 deberían ser cada uno de ellos simétrico, y precisamente estamos suponiendo lo contrario. Así pues, sólo pueden tener partes en dos regiones (naturalmente contiguas) o en una sola. Si se da este último caso, dado que en cada región el sistema es lineal, los policiclos sólo pueden ser las órbitas periódicas que rodean a un centro. Como estamos suponiendo que estas órbitas no son simétricas con respecto al origen, han de estar contenidas en las regiones I y III, porque de estarlo en la II, lo serían.

Si los policiclos tienen partes en dos regiones, una de ellas ha de ser la II, pero ninguno de los dos contiene en su interior al origen, porque de contenerlo uno, también lo haría el otro (de nuevo por la simetría), lo que les obligaría a cortarse, y ello como sabemos es imposible porque nuestro sistema dinámico es autónomo. \square

Proposición 2.11 *Una condición necesaria para que el sistema posea órbitas periódicas que tengan partes en dos regiones, es que existan tres equilibrios.*

DEMOSTRACIÓN: Una órbita periódica ha de rodear necesariamente a un equilibrio, pero si esa órbita periódica tiene partes en dos regiones no puede rodear al origen de acuerdo con la Proposición 2.10. Por consiguiente, para que exista alguna órbita periódica de estas características, ha de haber más equilibrios. Supongamos que haya infinitos, entonces según las Proposiciones 2.5 y 2.6, todos ellos están situados en un segmento o en una quebrada, pero en ambos casos hay un segmento cuyos puntos son todos equilibrios que atraviesa la región II y que tiene sus extremos en los puntos de las fronteras $\left(1, -\frac{c_{11}}{a_{12}}\right)$ y $\left(-1, \frac{c_{11}}{a_{12}}\right)$.

Una órbita periódica que tenga partes en las regiones I y II entrará en esta última por un punto de la frontera situado encima (o debajo) del punto $\left(1, -\frac{c_{11}}{a_{12}}\right)$ y saldrá por debajo (o por encima) del mismo (ver Proposición 2.8) lo que la obliga a cortar al segmento en cuestión. Pero ello no es posible porque en un sistema autónomo, dos trayectorias, y un equilibrio lo es, no pueden cortarse.

Concluimos que si el sistema tiene una órbita periódica (y su simétrica) que tenga partes en dos regiones contiguas, no puede tener ni un equilibrio, ni infinitos equilibrios. De las Proposiciones 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 se deduce que ha de tener tres equilibrios. \square

Veamos ahora algunas condiciones suficientes para la no existencia de órbitas periódicas con partes en más de una región.

Proposición 2.12 *Son condiciones suficientes para la no existencia de órbitas periódicas con partes en más de una región,:*

- a) *Que haya equilibrios reales tipo nodo en las regiones I y III.*
- b) *Que haya equilibrios virtuales tipo silla en las regiones I y III.*
- c) *Que haya equilibrios en las fronteras y que la matriz A_I tenga autovalores reales.*

DEMOSTRACIÓN: Argumentando como en los apartados a) y b) y c) de la Proposición 1.9 del Capítulo anterior, queda demostrada. \square

Vamos a establecer a continuación una condición necesaria para la existencia de polípiclos. Como en el Capítulo anterior, introducimos la notación

$$\text{int}_I(\Gamma) = \text{int}(\Gamma) \cap R_I \quad S_I = \text{área}(\text{int}_I(\Gamma))$$

$$\text{int}_{II}(\Gamma) = \text{int}(\Gamma) \cap R_{II} \quad S_{II} = \text{área}(\text{int}_{II}(\Gamma))$$

y ahora enunciamos el siguiente Lema

Lema 2.13 *Si el sistema dinámico tiene un polípiclo con partes en las tres regiones, entonces*

$$2 \text{traza } A_I \cdot S_I + \text{traza } A_{II} \cdot S_{II} = 0$$

y si tiene partes en dos regiones

$$\text{traza } A_I \cdot S_I + \text{traza } A_{II} \cdot S_{II} = 0$$

DEMOSTRACIÓN: Consúltese la Proposición 3 de [24, Llibre, 1996]. \square

Proposición 2.14 *Si el sistema dinámico tiene algún polípiclo, entonces*

$$\text{traza } A_I \cdot \text{traza } A_{II} \leq 0$$

DEMOSTRACIÓN: Sea Γ un polípiclo y supongamos que tiene partes en dos o en tres regiones. Entonces, de acuerdo con el Lema anterior tendremos

$$2 \text{traza } A_I \cdot S_I + \text{traza } A_{II} \cdot S_{II} = 0$$

o bien

$$\text{traza } A_I \cdot S_I + \text{traza } A_{II} \cdot S_{II} = 0$$

de donde se deduce que $\text{traza } A_I \cdot \text{traza } A_{II} < 0$ o bien, que $\text{traza } A_I = \text{traza } A_{II} = 0$.

Ahora supongamos que Γ está totalmente contenido en una región. Entonces, como la restricción del sistema dinámico a esa región es lineal, los únicos polípiclos posibles son las órbitas periódicas que rodean a un centro, luego ha de ser $\text{traza } A_i = 0$ donde $i = I, II$ ó III . \square

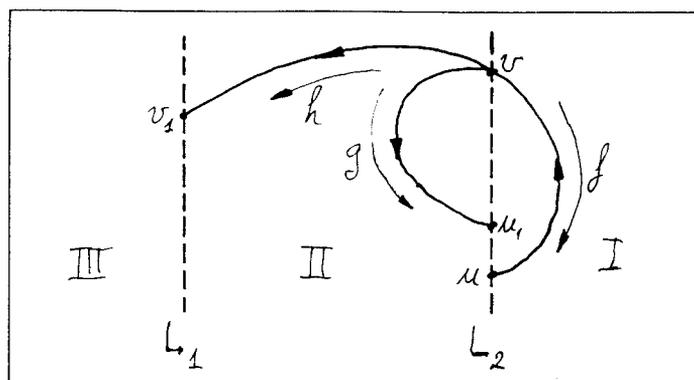


Figura 2.2: Las semiaplicaciones f, g y h .

Las Proposiciones anteriores constituyen resultados generales acerca de la dinámica del sistema lineal a trozos, en lo que a equilibrios y políciclos se refiere. Dado que casi todos ellos son condiciones necesarias o suficientes para la existencia o la inexistencia de equilibrios y políciclos, son una primera guía para dirigir nuestros esfuerzos hacia aquellos casos *dinámicamente interesantes*, descartando comportamientos poco relevantes.

Pero precisamente por su generalidad profundizan poco en el estudio del comportamiento dinámico y de bifurcaciones, de modo que si queremos llegar más allá, necesitamos otros instrumentos analíticos. El más importante de todos y al que dedicaremos casi todo lo que resta del capítulo es la bien conocida aplicación de Poincaré.

Del análisis anterior, se deduce que son dos los tipos de órbitas periódicas que debemos investigar: las que tienen partes en dos regiones (que siempre se presentan por parejas) y las que tienen partes en las tres regiones. De las primeras sólo estudiaremos la que tiene partes en las regiones I y II, ya que la simetría nos exige de estudiar a su compañera. En cuanto a las segundas, también por la simetría, solo hay que estudiar la parte de ellas que cae en la región I y una de las dos partes que caen en la región II.

Para el estudio de las órbitas periódicas con partes en dos regiones, vamos a emplear la misma técnica que en el Capítulo anterior (página 24). Como allí, definiremos las funciones f y g que se ilustran en la Figura 2.2. A partir de la misma, es evidente que habrá una órbita periódica cada vez que $u = u_1$, es decir, habrá una órbita periódica por cada solución de la ecuación $f(v) = g(v)$.

De esta forma podemos investigar cuántas órbitas periódicas tiene el sistema, pero este procedimiento no nos informa acerca de sus estabilidades. Para ello recurriremos a la técnica clásica del estudio de la derivada de la aplicación de Poincaré en sus puntos fijos.

La construcción de una aplicación de Poincaré para el estudio de las órbitas periódicas que tienen partes en dos regiones puede hacerse de manera completamente similar a como lo hicimos en el Capítulo anterior (página 32), empleando como sección la frontera L_1 entre las regiones I y II. En efecto, todas las órbitas periódicas de esta clase, cortan a una de las dos fronteras. Pero por la simetría con respecto al origen, sólo es necesario estudiar una de ellas. Nos centraremos en la frontera L_1 . De acuerdo con la definición de las funciones f y g , y a la vista de la Figura 2.2, resulta evidente que podemos definir una aplicación de Poincaré de esta forma

$$P = g \circ f^{-1}$$

En vista de como se ha definido P , es costumbre llamar a las funciones f (ó f^{-1}) y g , **semiaplicaciones de Poincaré**.

Supongamos que ahora queremos investigar la existencia de órbitas periódicas que se extiendan por las tres regiones. Entonces comenzamos calculando la función f exactamente igual que antes, y a continuación, partiendo del punto de coordenadas $(1, v)$ (véase la figura 2.2), calculamos las coordenadas $(-1, v_1)$ del primer punto de encuentro de la trayectoria con la frontera entre las regiones II y III, después de viajar por la región II, lo que nos permite definir una función h , que a cada v le hace corresponder un v_1 .

Queda ahora patente que debido a la simetría, habrá una órbita periódica en las tres regiones cada vez que $u = -v_1$, o lo que es lo mismo, por cada solución de la ecuación $f(v) = -h(v)$, habrá una órbita periódica de estas características.

Ahora podemos estudiar las órbitas periódicas que tienen partes en las tres regiones, tomando como sección de Poincaré la misma frontera L_1 , puesto que de haber tales órbitas, habrán de cortarla. Pero ahora la situación se presenta algo más complicada. En efecto, si observamos la Figura 2.3 veremos que para regresar a la frontera después de haber partido de ella, y rodear al origen, es preciso considerar un arco de trayectoria AB en la región I, otro CD en la III, y dos BC y DE en la II, de modo que para escribir la aplicación de Poincaré, sería necesario componer cuatro funciones, señaladas en esa Figura con las letras f^{-1} , h , k y h_1 , de tal manera que tendríamos

$$P = h_1 \circ k \circ h \circ f^{-1}$$

Afortunadamente, la simetría del plano de fases con respecto al origen de coordenadas simplifica notablemente los cálculos. En efecto, si hubiera una órbita periódica, los puntos A y E coincidirían, y por tanto sus ordenadas u y u_1 también. Pero como entonces los arcos de trayectoria ABC y CDE habrían de ser simétricos uno del otro, tendríamos que $v_1 = -u_1 = -u$. Ello sugiere el que consideremos la aplicación P_1 definida así

$$P_1 = -h \circ f^{-1}$$

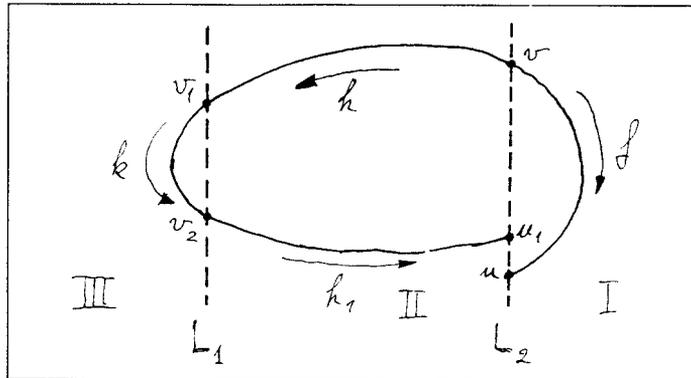


Figura 2.3: La aplicación de Poincaré en las tres regiones.

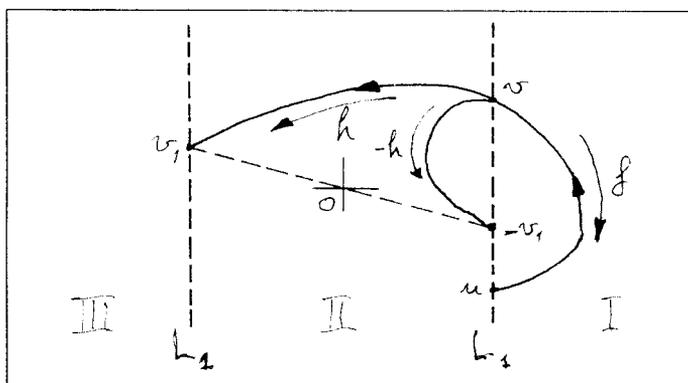


Figura 2.4: La aplicación P_1 .

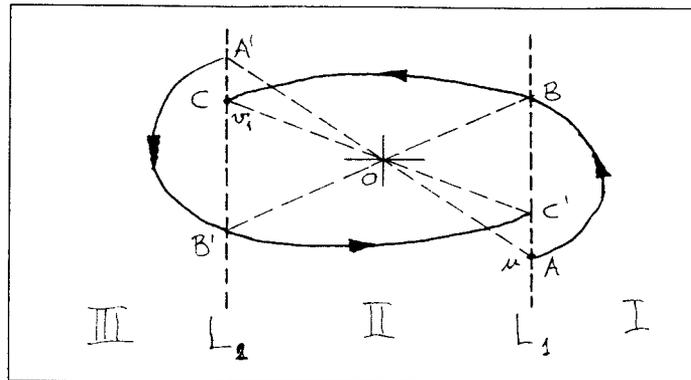


Figura 2.5:

que se esquematiza en la figura 2.4

Es evidente que P_1 es más fácil de construir que P , pero no es una aplicación de Poincaré. No obstante, tiene propiedades que la hacen útil para reemplazar en cierto sentido a P , como veremos en la siguiente Proposición.

Proposición 2.15 Las aplicaciones $P = h_1 \circ k \circ h \circ f^{-1}$ y $P_1 = -h \circ f^{-1}$ verifican

- $P = P_1 \circ P_1$;
- P y P_1 tienen los mismos puntos fijos;
- si u^* es un punto fijo de P y de P_1 , entonces se verifica la igualdad

$$\text{signo}(P'(u^*) - 1) = \text{signo}(P_1'(u^*) - 1)$$

DEMOSTRACIÓN: a) De acuerdo con la Figura 2.5

$$v_1 = h(f^{-1}(u)) \quad \text{y por tanto} \quad P_1(u) = v_1$$

Pero el arco $A'B'C'$ es simétrico del arco ABC , luego las ordenadas de A y A' , las de B y B' , y las de C y C' son opuestas, lo que permite escribir

$$-v_1 = h_1(k(-u)) \quad \text{y por tanto} \quad P_1(u) = h_1(k(-u))$$

y como consecuencia de todo ello

$$P_1(P_1(u)) = P_1(-h(f^{-1}(u))) = h_1(k(h(f^{-1}(u)))) = P(u)$$

b) Supongamos que u^* es un punto fijo de P , entonces

$$u^* = P(u^*) = P_1(P_1(u^*)) \quad \text{de donde se deduce que} \quad P_1(u^*) = P_1^{-1}(u^*)$$

pero la última igualdad sólo es posible si $P_1(u^*) = u^*$.

Recíprocamente, sea u^* un punto fijo de P_1 , entonces

$$u^* = P_1(u^*) = P_1(P_1(u^*)) = P(u^*).$$

c) La derivada de P en un punto fijo puede escribirse así

$$P'(u^*) = P'_1(P_1(u^*)) \cdot P'_1(u^*) = P'_1(u^*) \cdot P'_1(u^*) = (P'_1(u^*))^2$$

Pero como la aplicación P_1 es creciente por ser composición de dos funciones $-h$ y f^{-1} decrecientes, si para simplificar llamamos $\eta = P'_1(u^*) > 0$, tendremos

$$(P'(u^*) - 1)(P'_1(u^*) - 1) = ((-\eta)^2 - 1)(\eta - 1) = (\eta - 1)^2(\eta + 1) > 0$$

lo que demuestra que $(P'(u^*) - 1)$ y $(P'_1(u^*) - 1)$ tienen el mismo signo. □

Como consecuencia de todo esto, utilizaremos para el estudio de las órbitas periódicas que tienen partes en las tres regiones, en vez de la aplicación de Poincaré P , la *pseudoaplicación* P_1 más sencilla de construir. No obstante, para hacer más inteligible la exposición, la seguiremos llamando aplicación de Poincaré y la designaremos con la misma letra P .

2.2 Formas canónicas.

Si observamos las ecuaciones del sistema dinámico objeto de nuestro estudio, veremos que en ellas participan seis coeficientes. Cualquier estudio de bifurcaciones que emprendamos, ha de tomar en cuenta las posibles variaciones de todos ellos, lo cual parece ser a priori complicado. Sería deseable poder rebajar el número de estos coeficientes como hicimos en el Capítulo anterior, para lo que vamos a llevar a cabo una serie de transformaciones lineales que reduzcan el sistema a ciertas **formas canónicas** en las que los coeficientes, en menor número, se tomarán como parámetros en el estudio de las bifurcaciones.

Continuaremos, como consecuencia de la Proposición 2.7, manteniendo la desigualdad $a_{12} \neq 0$.

Teorema 2.16 *Si traza $A_I \neq$ traza A_{II} , y $a_{12} \neq 0$, y el sistema tiene órbitas periódicas, entonces existe una transformación lineal de las variables de estado y un reescalado de la variable temporal que lo reduce a la forma*

$$\begin{aligned} x' &= -f(x) - y \\ y' &= x - by \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \mu x - (\mu + \lambda) & \text{si } 1 \leq x \\ -\lambda x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \mu x + (\mu + \lambda) & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad \text{y siendo } \mu \neq -\lambda$$

llamada forma canónica de Van der Pol-Duffing.

DEMOSTRACIÓN : La desigualdad traza $A_I \neq$ traza A_{II} equivale a $a_{11} \neq c_{11}$ lo que permite efectuar la siguiente transformación en las variables de estado

$$x \longrightarrow x \quad y \longrightarrow dx + ey$$

donde $d = \frac{a_{21} - c_{21}}{a_{11} - c_{11}}$ y $e = \frac{-1}{a_{12}}$. Es fácil comprobar que reduce el sistema a la forma

$$\begin{aligned} x' &= -\bar{f}(x) - y \\ y' &= \bar{p}x - \bar{b}y \end{aligned} \quad \text{donde } \bar{f}(x) = \begin{cases} \bar{\mu}x - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) & \text{si } 1 \leq x \\ -\bar{\lambda}x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \bar{\mu}x + (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

los parámetros $\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{b}$ y \bar{p} resultan ser

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= -(a_{11} + da_{12}) & \bar{\lambda} &= c_{11} + da_{12} \\ \bar{p} &= a_{12}(a_{12}d^2 + (a_{11} - a_{22})d - a_{21}) & \bar{b} &= a_{12}d - a_{22} \end{aligned}$$

Estamos en la hipótesis de que el sistema tiene órbitas periódicas, que necesariamente han de rodear a algún equilibrio. Pero si $\bar{p} = 0$, es fácil verificar que la recta de ecuación $y = 0$ es unión de trayectorias del sistema y pasa por los tres equilibrios del mismo. Entonces las órbitas periódicas tendrían que cortar a esa recta, lo cual es imposible. Así pues, si el sistema tiene órbitas periódicas ha de ser $\bar{p} \neq 0$.

Podemos entonces efectuar un segundo cambio en las variables de estado, y un reescalado de la variable temporal

$$x \longrightarrow x \quad y \longrightarrow \sqrt{|\bar{p}|} y \quad t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|\bar{p}|}} t$$

mediante el cual el sistema queda en la forma de Van der Pol-Duffing. Los coeficientes μ, λ y b son

$$\mu = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{|\bar{p}|}} \quad \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{|\bar{p}|}} \quad b = \frac{\bar{b}}{\sqrt{|\bar{p}|}}$$

□

NOTA: Como en el Capítulo anterior debemos señalar que si $b = 0$ nos encontramos con el sistema clásico de Rayleigh-Van der Pol, que aparecerá de nuevo en el Capítulo 3 a propósito del estudio del oscilador en puente de Wien.

La posibilidad de reducir el sistema dinámico a la forma de Van der Pol-Duffing, está ligada al hecho de que las trazas de las matrices A_I y A_{II} , han de ser distintas. Precisamente por ello, en esa forma, los dos parámetros μ y λ han de verificar $\mu \neq -\lambda$.

Pero no siempre se da esa circunstancia, y ocurre que para determinados valores de los parámetros, traza $A_I =$ traza A_{II} . En tal caso, procederemos a otra transformación de las variables de estado que vamos a exponer en el siguiente Teorema.

Teorema 2.17 *Si traza $A_I =$ traza A_{II} y $a_{12} \neq 0$, entonces existe una transformación lineal de las variables de estado que reduce el sistema a la forma*

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= g(x) - \text{traza } A_I y \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} -\det A_I x + \det A_I + \det A_{II} & \text{si } 1 \leq x \\ -\det A_{II} x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\det A_I x + \det A_I + \det A_{II} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

llamada **forma canónica de Duffing**.

DEMOSTRACIÓN : Empleamos una transformación de las variables formalmente idéntica a la del teorema 2.16

$$x \longrightarrow x \qquad y \longrightarrow dx + ey$$

pero ahora con los coeficientes $d = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$ y $e = \frac{1}{a_{12}}$. Es inmediato comprobar que el sistema bajo esta transformación, se reduce a la forma indicada. □

De las dos formas canónicas mutuamente excluyentes a que podemos reducir nuestro sistema dinámico, la que presenta un comportamiento más variado e interesante es, debido a las Proposiciones anteriores, la primera de ellas. A su estudio dedicaremos el resto del presente Capítulo.

Pero no sólo es eso, además debemos destacar el hecho, que se deduce de los dos últimos Teoremas, de que un sistema plano continuo lineal a trozos y con una sola frontera es, en condiciones genéricas, un sistema del tipo Van der Pol-Duffing.

Hay una tercera forma canónica a la que se llega mediante transformaciones en las variables de estado similares a las anteriores, pero sin que sea necesaria suposición alguna acerca de las trazas de las matrices del sistema.

Teorema 2.18 *Si $a_{12} \neq 0$, existe una transformación lineal de las variables de estado que reduce el sistema a la forma*

$$\begin{aligned}x' &= y - F(x) \\y' &= -g(x)\end{aligned}$$

donde las funciones F y g son

$$F(x) = \begin{cases} -\text{traza } A_I \cdot x + (\text{traza } A_I - \text{traza } A_{II}) & \text{si } 1 \leq x \\ -\text{traza } A_{II} \cdot x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\text{traza } A_I \cdot x - (\text{traza } A_I - \text{traza } A_{II}) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \det A_I \cdot x - (\det A_I - \det A_{II}) & \text{si } 1 \leq x \\ \det A_{II} \cdot x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \det A_I \cdot x + (\det A_I - \det A_{II}) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

llamada **forma canónica de Lienard**.

DEMOSTRACIÓN: Como en los teoremas 2.16 y 2.17, aplicamos una transformación lineal de la forma

$$x \longrightarrow x \qquad y \longrightarrow dx + ey$$

siendo los coeficientes $d = \frac{a_{22}}{a_{12}}$ y $e = \frac{1}{a_{12}}$. Puede comprobarse fácilmente que el sistema bajo esta transformación, se reduce a la forma indicada. \square

Con el sistema reducido a la forma canónica de Lienard, podemos aplicar el Teorema del mismo autor [26, Lienard, 1928]), lo que nos permitirá establecer, bajo ciertas hipótesis, la existencia y unicidad de ciclos límite.

Teorema 2.19 *Si $a_{12} \neq 0$, $\det A_I \geq 0$ y $\det A_{II} > 0$, entonces*

- a) *si $\text{traza } A_I < 0$ y $\text{traza } A_{II} > 0$, el sistema dinámico tiene un único ciclo límite estable;*
- b) *si $\text{traza } A_I > 0$ y $\text{traza } A_{II} < 0$, el sistema dinámico tiene un único ciclo límite inestable.*

DEMOSTRACIÓN: a) Vamos a comprobar que con nuestras hipótesis se puede aplicar el Teorema de Lienard tal como se expone en [25, Perko, 1991]. En efecto, las funciones F y g que hemos introducido en el Teorema 2.18 son continuas con derivada continua salvo en los puntos $x = \pm 1$, en los que existen y son finitas las derivadas laterales. Esto es suficiente para garantizar la validez de la demostración, ya que un análisis cuidadoso de la misma, evidencia que no es necesaria la continuidad de las derivadas de estas funciones.

Por otra parte, de su propia definición se deduce que F y g son impares y además $xg(x) > 0$ cuando $x > 0$, ya que $\det A_I \geq 0$ y $\det A_{II} > 0$. También se verifica $F'(0) = -\text{traza } A_{II} < 0$.

Las igualdades

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$$

se deducen de la desigualdad $\text{traza } A_I < 0$. Además, F tiene un único cero en el punto

$$a = 1 - \frac{\text{traza } A_{II}}{\text{traza } A_I} > 1$$

Por último, como $F'(x) = -\text{traza } A_I > 0$ para todo $x > 1$, resulta que F es monótona creciente para todo $x > a$.

Se cumplen pues todas las hipótesis del teorema de Lienard, lo que permite concluir que el sistema posee un único ciclo límite estable.

b) Si en el Teorema 2.18, además de la transformación lineal de las variables de estado que allí se explica, cambiamos la variable temporal t por $-t$, el sistema dinámico queda así

$$\begin{aligned} x' &= -y + F(x) \\ y' &= g(x) \end{aligned}$$

Siguiendo ahora un razonamiento paralelo al del apartado a), podemos comprobar que el sistema bajo esta forma y con las condiciones $\text{traza } A_I > 0$ y $\text{traza } A_{II} < 0$, cumple todas las hipótesis del teorema de Lienard, luego tiene un único ciclo límite estable. Deshaciendo el cambio de t por $-t$, regresamos al sistema original, quedando demostrado que éste también posee un único ciclo límite, pero inestable. □

2.3 Forma de Van der Pol-Duffing.

Vamos a estudiar el sistema lineal a trozos escrito en la forma de Van der Pol-Duffing

$$\begin{aligned} x' &= -f(x) - y \\ y' &= x - by \end{aligned}$$

donde la función f es

$$f(x) = \begin{cases} \mu x + (\mu + \lambda) & \text{si } x \leq -1 \\ -\lambda x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \mu x - (\mu + \lambda) & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad \text{y siendo } \mu \neq -\lambda$$

La función f tiene como representación gráfica la que se muestra en la Figura 2.6, y puede expresarse de una forma más compacta así

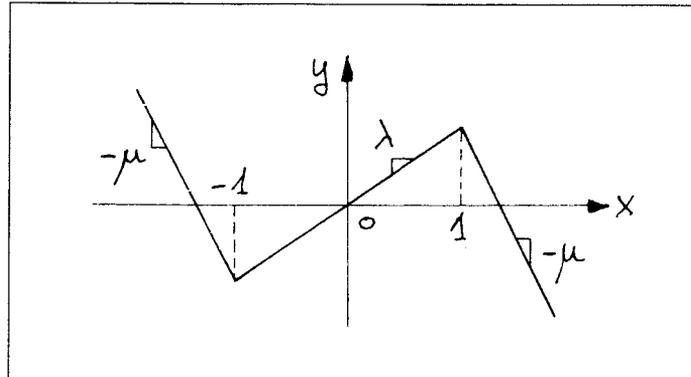


Figura 2.6:

$$f(x) = \mu x - \frac{\mu + \lambda}{2} \cdot (|x + 1| - |x - 1|) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Empleando notación matricial, el sistema puede escribirse de esta manera

$$\begin{aligned} X'(t) &= A_I \cdot X(t) + B_I & \text{si} & \quad 1 \leq x \\ X'(t) &= A_{II} \cdot X(t) & \text{si} & \quad -1 < x < 1 \\ X'(t) &= A_I \cdot X(t) - B_I & \text{si} & \quad x \leq -1 \end{aligned}$$

siendo las matrices A_I, A_{II} y B_I

$$A_I = \begin{pmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \quad A_{II} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \quad B_I = \begin{pmatrix} -\mu - \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Simetrías.

Bajo la forma de Van der Pol-Duffing, el sistema presenta simetrías, igual que ocurría en el Capítulo anterior (véase la Sección 1.3.1). Es decir, existen cambios en las variables de estado, en la variable temporal y en los parámetros de bifurcación, que dejan invariante al sistema dinámico, según se muestra a continuación

Simetría S_1 : al cambiar

$$\begin{array}{rcc|ccc} x & \text{por} & -x & b & \text{por} & -b \\ y & \text{por} & y & \lambda & \text{por} & -\lambda \\ t & \text{por} & -t & \mu & \text{por} & -\mu \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Simetría S_2 : al cambiar

$$\begin{array}{rcc|ccc} x & \text{por} & -x & b & \text{por} & b \\ y & \text{por} & -y & \lambda & \text{por} & \lambda \\ t & \text{por} & t & \mu & \text{por} & \mu \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Simetría S_3 : al cambiar

$$\begin{array}{rcc|ccc} x & \text{por} & x & b & \text{por} & -b \\ y & \text{por} & -y & \lambda & \text{por} & -\lambda \\ t & \text{por} & -t & \mu & \text{por} & -\mu \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Consideraremos una cuarta simetría S_0 (la identidad) que consiste en dejar inalterados las variables de estado, la variable temporal y los parámetros de bifurcación. Podemos definir la composición de dos simetrías $S_i * S_j$ ($i, j = 0, 1, 2, 3$) como el resultado de aplicar al sistema sucesivamente y en este orden, S_j y S_i . Es evidente que se trata de una ley de composición interna, para la que es fácil comprobar que se verifica la siguiente Tabla

*	S_0	S_1	S_2	S_3
S_0	S_0	S_1	S_2	S_3
S_1	S_1	S_0	S_3	S_2
S_2	S_2	S_3	S_0	S_1
S_3	S_3	S_2	S_1	S_0

en la que una observación detallada permite concluir que el conjunto de las cuatro simetrías con esta ley de composición es un grupo abeliano.

Apliquemos las simetrías para reducir el rango de variación de los parámetros de bifurcación b , λ y μ . En principio, los tres pueden tomar cualesquiera valores reales y por tanto pueden ser no negativos o negativos. Indiquemos con el signo + el hecho de que un parámetro tome valores no negativos, y con el signo - el que tome valores negativos. De acuerdo con este convenio, se presentan $2^3 = 8$ casos al combinar de todas las maneras posibles los signos + y -. Procediendo ahora como en la página 17 del Capítulo anterior, podemos observar que los 8 casos pueden reducirse sólo a cuatro, como se expone en la Tabla 2.1

Concluimos que en el estudio del sistema sólo es necesario tratar los casos en los que $b \geq 0$.

2.3.2 Número, tipos y estabilidades de los equilibrios.

A continuación vamos a estudiar los equilibrios. Comencemos suponiendo que las matrices A_I y A_{II} son regulares, en cuyo caso las coordenadas de los equilibrios, reales

b	λ	μ	Caso	Aplicando la simetría...	se reduce al caso...
+	+	+	1	S_0	1
+	+	-	2	S_0	2
+	-	+	3	S_0	3
+	-	-	4	S_0	4
-	+	+	5	S_1	4
-	+	-	6	S_1	3
-	-	+	7	S_1	2
-	-	-	8	S_1	1

Tabla 2.1:

o virtuales, vienen dadas por:

$$\bar{x}_I = \frac{b(\mu + \lambda)}{\mu b + 1} \quad \bar{y}_I = \frac{\mu + \lambda}{\mu b + 1}$$

$$\bar{x}_{II} = 0 \quad \bar{y}_{II} = 0$$

$$\bar{x}_{III} = -\frac{b(\mu + \lambda)}{\mu b + 1} \quad \bar{y}_{III} = -\frac{\mu + \lambda}{\mu b + 1}$$

Además, tenemos que $\det A_I = \mu b + 1$, y $\det A_{II} = 1 - \lambda b$, así que de acuerdo con la Proposición 2.3 el sistema tendrá sólo el equilibrio del origen cuando

$$(\mu b + 1)(1 - \lambda b) > 0$$

y tendrá tres equilibrios, uno en cada región, cuando

$$(\mu b + 1)(1 - \lambda b) < 0$$

Supongamos ahora que una de las dos matrices, A_I y A_{II} es singular. Entonces las Proposiciones 2.4 y 2.5 nos informan acerca del número y la situación de los equilibrios, según cuál de los determinantes se anule:

- Si $\mu b + 1 = 0$ y $1 - \lambda b \neq 0$, sólo hay un equilibrio que está en el origen.
- Si $\mu b + 1 \neq 0$ y $1 - \lambda b = 0$, hay infinitos equilibrios en el segmento $y = \lambda x$ ($-1 \leq x \leq 1$).

el caso de que ambos determinantes se anulen no lo consideramos, puesto que para ello, es necesario que las trazas de las matrices A_I y A_{II} sean iguales, y esa posibilidad la hemos excluído al reducir el sistema a la forma de Van der Pol-Duffing.

$1 - \lambda b$	$\mu b + 1$	n° de equilibrios	Situación
> 0	> 0	1	en la región II
> 0	< 0	3	uno en cada región
> 0	$= 0$	1	en la región II
< 0	> 0	3	uno en cada región
< 0	< 0	1	en la región II
< 0	$= 0$	1	en la región II
$= 0$	$\neq 0$	infinito	uno en cada frontera y los demás en la región II

Tabla 2.2: Situación y número de los equilibrios.

Toda la información reunida hasta aquí sobre el número y la situación de los equilibrios se recoge en la tabla 2.2

Para obtener información acerca del tipo y la estabilidad de estos equilibrios procederemos al análisis de los autovalores de las matrices A_I y A_{II} , ya que en cada región el sistema es lineal. Pero en la Sección 1.3.2 del Capítulo anterior hemos llevado a cabo ese estudio con el sistema lineal a trozos de una sola frontera, dándose la circunstancia de que las matrices A_I y A_{II} son las mismas allí y aquí. Ello nos exime de repetir el análisis, limitándonos, para mayor comodidad a reproducir las tablas 2.3 y 2.4 en las que se recogen los tipos y signos de los autovalores. Usando la misma notación, llamaremos w_1 y w_2 a los autovalores de A_I , y z_1 y z_2 a los de A_{II} .

Del análisis de las simetrías se deduce que sólo es necesario considerar valores no negativos del parámetro b . En cuanto a los parámetros μ y λ , pueden tomar cualesquiera valores reales. Para describir las bifurcaciones del sistema, trazaremos diagramas en los que vamos a señalar zonas donde el sistema exhibe diferentes comportamientos dinámicos. Estudiaremos para ello las variaciones de los tres parámetros μ , λ y b , lo que en principio nos llevará a emplear diagramas tridimensionales. Pero este tipo de gráficos resulta a veces difícil de interpretar por la complicación que supone el trazado de superficies que tengan un aspecto claro y sencillo, de modo que optaremos por diagramas planos en los que los ejes de coordenadas corresponderán a dos de los tres parámetros citados. Hay, no obstante un inconveniente al exponer así los conjuntos de bifurcaciones, y es que las variaciones del parámetro que no está representado hay que reflejarlas usando diferentes gráficos, uno para cada rango de dicho parámetro que se juzgue de interés.

En el presente capítulo se ha optado por el empleo de conjuntos de bifurcaciones en cuyos ejes están representados los parámetros μ y λ . Para cubrir toda la casuística que

Autovalores	$\mu b + 1$	$\mu + b$	Signo
reales y distintos $ \mu - b > 2$	> 0	> 0	$w_1 < 0 \ w_2 < 0$
		< 0	$w_1 > 0 \ w_2 > 0$
	< 0	$\neq 0$	$w_1 > 0 \ w_2 < 0$
		$= 0$	$w_1 = -w_2 > 0$
	$= 0$	> 0	$w_1 = 0 \ w_2 < 0$
		< 0	$w_1 < 0 \ w_2 = 0$
reales e iguales $ \mu - b = 2$	> 0	> 0	$w_1 = w_2 < 0$
		< 0	$w_1 = w_2 > 0$
	$= 0$	$= 0$	$w_1 = w_2 = 0$
complejos $ \mu - b < 2$	> 0	> 0	$Re(w_1) = Re(w_2) < 0$
		< 0	$Re(w_1) = Re(w_2) > 0$
		$= 0$	$Re(w_1) = Re(w_2) = 0$

Tabla 2.3: Los autovalores w_1 y w_2 de la matriz A_I .

Autovalores	$1 - \lambda b$	$\lambda - b$	Signo
reales y distintos $ \lambda + b > 2$	> 0	> 0	$z_1 > 0 \ z_2 > 0$
		< 0	$z_1 < 0 \ z_2 < 0$
	< 0	$\neq 0$	$z_1 > 0 \ z_2 < 0$
		$= 0$	$z_1 = -z_2 > 0$
	$= 0$	> 0	$z_1 > 0 \ z_2 = 0$
		< 0	$z_1 = 0 \ z_2 > 0$
reales e iguales $ \lambda + b = 2$	> 0	> 0	$z_1 = z_2 > 0$
		< 0	$z_1 = z_2 < 0$
	$= 0$	$= 0$	$z_1 = z_2 = 0$
complejos $ \lambda + b < 2$	> 0	> 0	$Re(z_1) = Re(z_2) > 0$
		< 0	$Re(z_1) = Re(z_2) < 0$
		$= 0$	$Re(z_1) = Re(z_2) = 0$

Tabla 2.4: Los autovalores z_1 y z_2 de la matriz A_{II} .

se produce debido a los diferentes valores de b , es preciso considerar cuatro de estas representaciones correspondientes a

$$b = 0 \qquad 0 < b < 1 \qquad b = 1 \qquad 1 < b$$

En ausencia de políciclos, la dinámica está determinada por los equilibrios. Basta con conocer el número y el tipo de los mismos para disponer de un esquema cualitativo de las trayectorias en el plano de fases. Ahora bien, tal información está disponible en las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4, por lo que en las zonas de los conjuntos de bifurcaciones en las que el sistema no tenga políciclos, el estudio puede darse por acabado, a falta únicamente de trazar sobre los correspondientes conjuntos de bifurcaciones, unos dibujos que describan de forma somera la forma de las trayectorias, cosa que haremos al final del Capítulo al completarlos. Seguimos así una tradición muy arraigada en la literatura de ilustrar los conjuntos de bifurcaciones con unos esbozos de la dinámica en cada una de las zonas de los mismos.

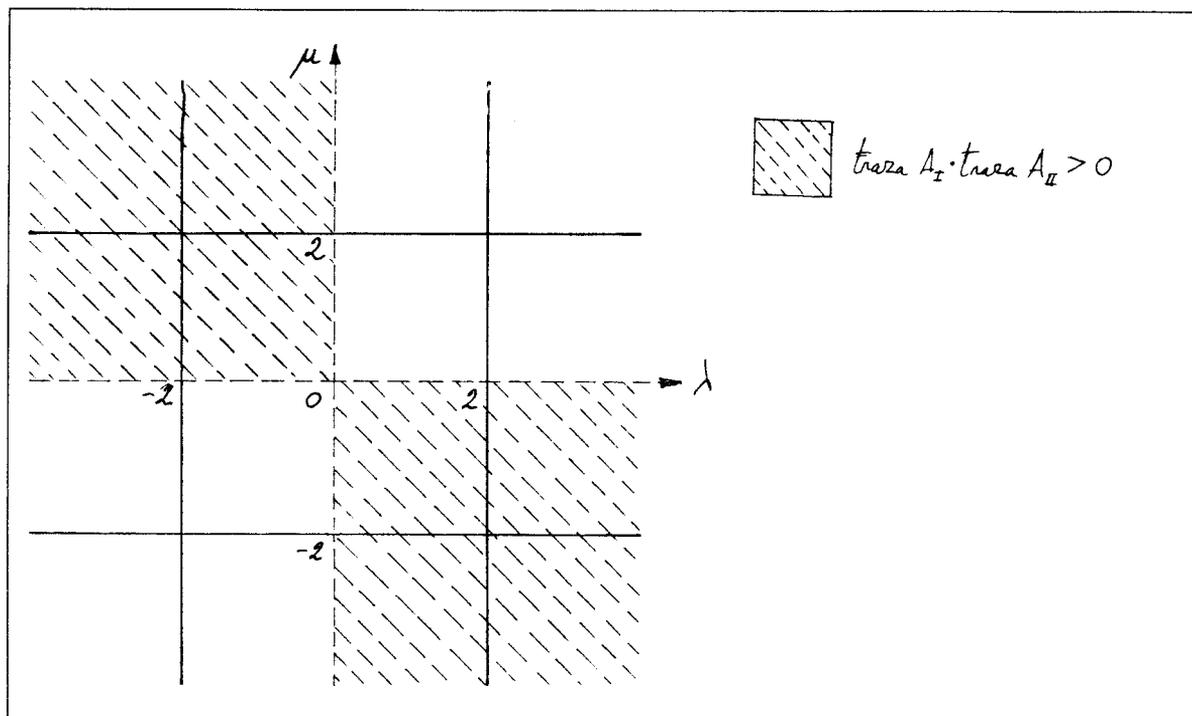
Pero también disponemos de información acerca de las zonas en las que el sistema no ostenta políciclos u órbitas periódicas. En efecto, la Proposición 2.12 da condiciones que permiten descartar la presencia de órbitas periódicas y la Proposición 2.14 excluye los políciclos. Por el contrario, el Teorema 2.19 afirma la existencia de una única órbita periódica.

Todas estas consideraciones nos llevan a trazar en las figuras 2.7 a 2.10, unos esbozos de lo que serán los conjuntos de bifurcaciones, en los que se han señalado con diversos estilos de tramas, las zonas de los diagramas en los que el sistema carece de órbitas periódicas o políciclos. En las zonas sin tramas, (salvo aquellas señaladas por el Teorema 2.19), la existencia de órbitas periódicas, homoclinas o heteroclinas, está por determinar, lo que haremos estudiando las aplicaciones de Poincaré. Pero del análisis hecho en la página 88 y siguientes, se deduce que debemos calcular antes las correspondientes semiaplicaciones. A ello está dedicada la siguiente Sección.

2.4 Las semiaplicaciones de Poincaré.

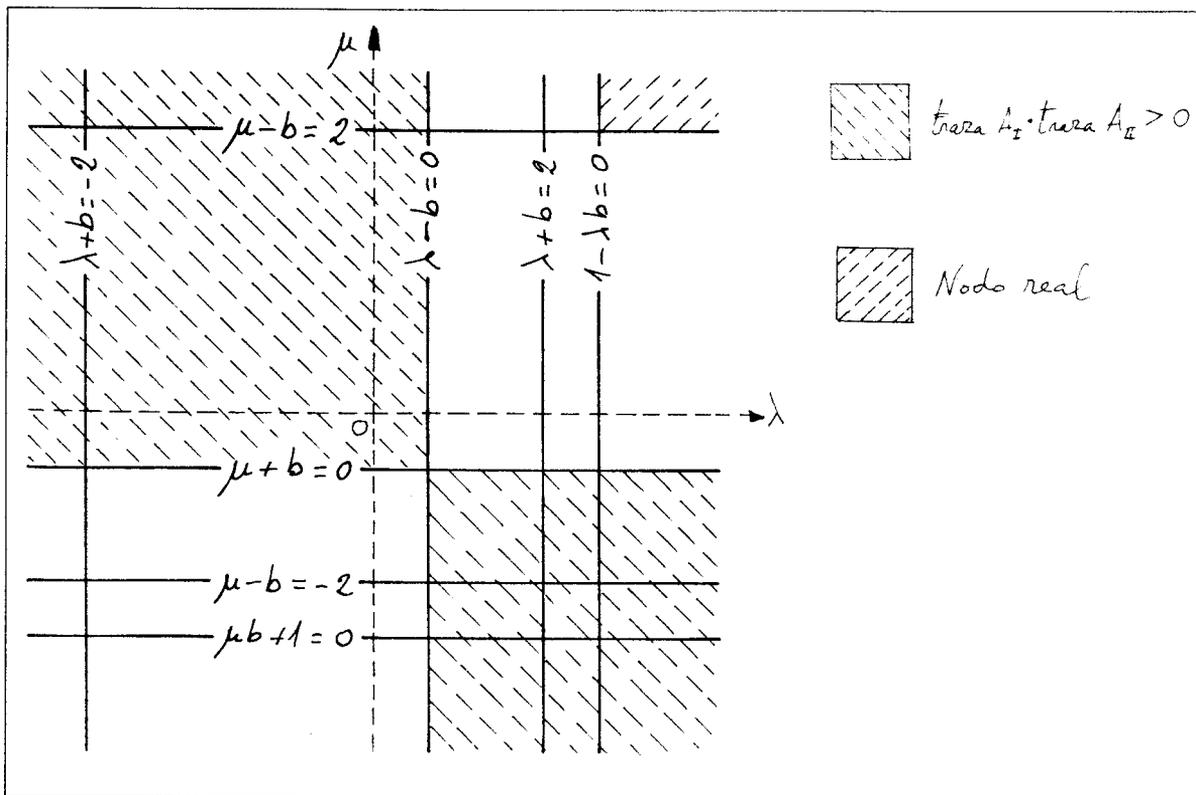
Comenzamos el análisis de las diferentes semiaplicaciones de Poincaré f, g y h (véase la Figura 2.2). Estudiaremos sus dominios, recorridos, crecimiento, concavidad y comportamientos asintóticos, propiedades que posteriormente emplearemos en el estudio de las aplicaciones de Poincaré.

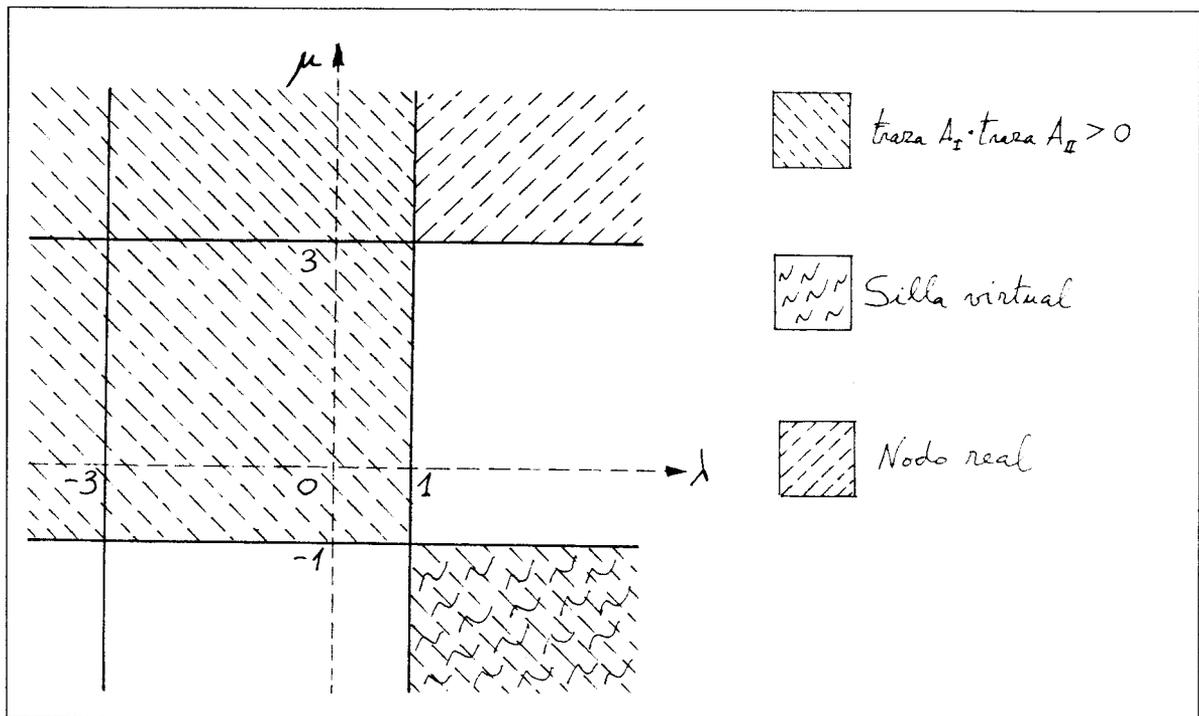
Pero este estudio presenta multitud de casos según el tipo de los equilibrios, su carácter real o virtual y su estabilidad, de modo que para reducir cuanto se pueda el número de posibilidades, nos limitaremos a considerar aquellas en las que de acuerdo con las figuras 2.7 a 2.10, puedan existir políciclos, descartando todos los demás. A modo, de resumen se presentan esos casos en la tabla 2.5.

Figura 2.7: ($b = 0$)

Semiaplicación	Tipo del equilibrio	Clase
f	foco o centro	En la región I (real o virtual) o en la frontera
	nodo	En la región I (virtual)
	silla	En la región I (real)
g	silla	En la región II (real)
h	foco o centro	En la región II (real)
	nodo	En la región II (real)
	silla	En la región II (real)

Tabla 2.5: Distintos tipos de semiaplicaciones de Poincaré.

Figura 2.8: ($0 < b < 1$)

Figura 2.9: ($b = 1$)

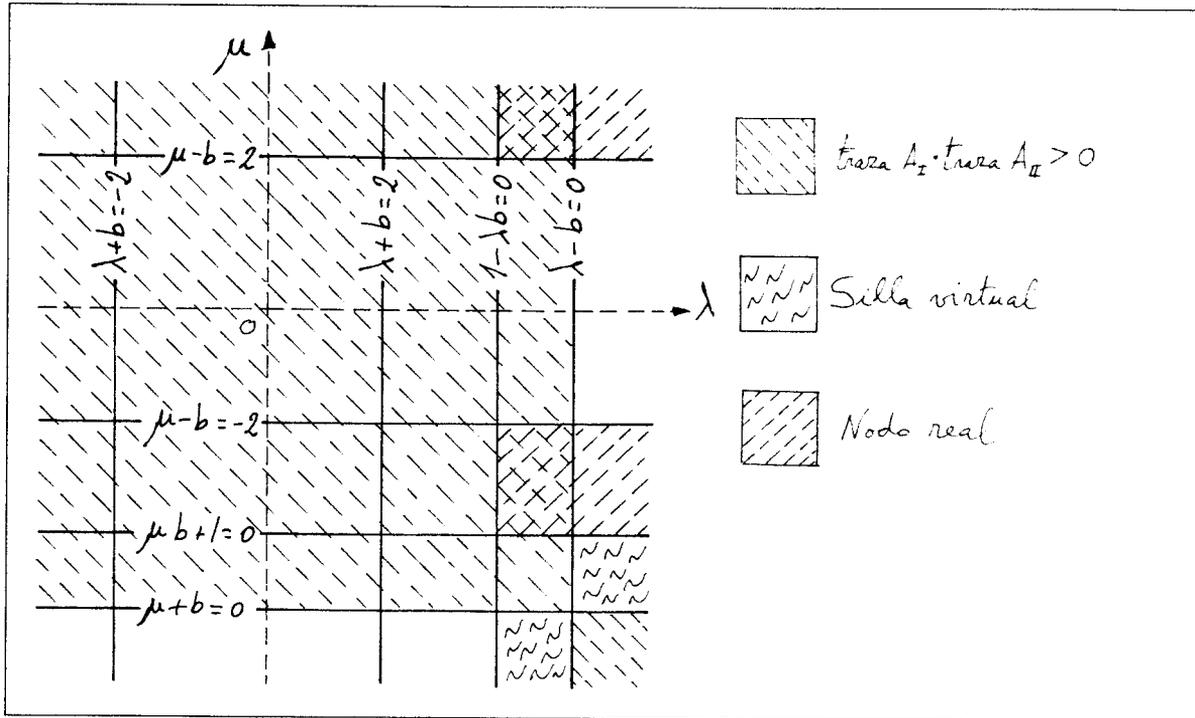


Figura 2.10: ($1 < b$)

Aún así, el estudio resulta algo tedioso, por lo que vamos a intentar reducirlo más. Para ello recordemos el Teorema 2.19 que establece la existencia de órbitas periódicas cuando $\det A_I \geq 0$ y $\det A_{II} > 0$, sin usar para nada las semiaplicaciones de Poincaré. Esas dos desigualdades de acuerdo con las Proposiciones 2.3 y 2.4 implican que el sistema sólo tiene un equilibrio en el origen, así que podemos eludir el estudio de las semiaplicaciones de Poincaré en esos casos, ya que no son necesarias para demostrar la existencia de órbitas periódicas. En concreto, no necesitamos estudiar la semiaplicación f cuando el equilibrio de la región I es un foco, un centro o un nodo virtuales.

Pero todavía podemos simplificar más el estudio, aprovechando el trabajo realizado en el Capítulo anterior al calcular allí las semiaplicaciones f y g . En efecto, como demostraremos en seguida, existe una relación entre las funciones f y g en los dos sistemas lineales a trozos: el que tiene una sola frontera estudiado en el Capítulo anterior, y el que tiene dos fronteras objeto del presente. Lo que vamos a demostrar es que cada una de esas dos semiaplicaciones en un sistema, se puede obtener a partir de su homónima en el otro sistema mediante una traslación y una homotecia. Es evidente que esta relación no se da con la semiaplicación h , ya que esta carece de análoga en el sistema con una sola frontera. Tendremos por tanto que estudiarla directamente.

Para llevar a cabo el análisis de la relación expuesta, llamaremos f_0 y g_0 a las semiaplicaciones que estudiamos en el capítulo anterior y \hat{v} , \hat{u} y \hat{u}_1 a aquellos valores que verifican $\hat{u} = f_0(\hat{v})$ y $\hat{u}_1 = g_0(\hat{v})$. Reservaremos la notación f, g, v, u y u_1 para sus homónimos en el sistema con dos fronteras.

2.4.1 La semiaplicación f .

En el Apéndice B se han obtenido las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación f en sus diversos casos, así que podemos escribir

a) Si el equilibrio de la región I es un foco:

$$u(\tau_1) = \lambda - \beta_1 \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \lambda + \beta_1 \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

donde los coeficientes γ_1 y β_1 son

$$\gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}} \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}{2}$$

b) Si el equilibrio de la región I es un nodo propio o una silla:

$$u(\tau_1) = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \lambda + \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

siendo $\gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}$.

Nótese que en los casos a) y b), el signo de γ_1 es el de la traza de la matriz A_I , así que la estabilidad del equilibrio depende del signo de ese coeficiente.

c) Si el equilibrio de la región I es un centro, o si es un foco o un centro pero situado en la frontera: entonces podemos expresar la semiaplicación f en forma explícita, para lo que procedemos como en la Proposición 1.14 del Capítulo anterior, resultando

$$u = f(v) = -v + 2\lambda \quad \text{si es un centro}$$

$$u = f(v) = -ve^{-\gamma_1 \pi} + \lambda(1 + e^{-\gamma_1 \pi}) \quad \text{si es un foco situado en la frontera}$$

Vamos ahora a establecer la relación entre f y f_0 que hemos anticipado más atrás.

Proposición 2.20 *Llamemos f_0 a la semiaplicación f del sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing con una sola frontera, y sean $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{R}$ de tal manera que $\hat{u} = f_0(\hat{v})$. Entonces, si $u, v \in \mathbb{R}$ verifican $u = f(v)$ siendo f la misma semiaplicación definida para el sistema con dos fronteras, se cumple*

$$u = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{u} \quad v = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{v}$$

DEMOSTRACIÓN: Si comparamos las anteriores ecuaciones paramétricas de f con sus homólogas del sistema con una sola frontera, mostradas en las página 33, la conclusión se sigue de inmediato. □

La última Proposición, aunque muy simple, tiene la virtud de que nos evita el estudio, algo tedioso, de la semiaplicación f en cada uno de los casos detallados en la Tabla 2.5. En efecto, basta aplicar la homotecia y la traslación descritas para obtener las propiedades de crecimiento, concavidad, etc., a partir de su homónima en el sistema con una sola frontera.

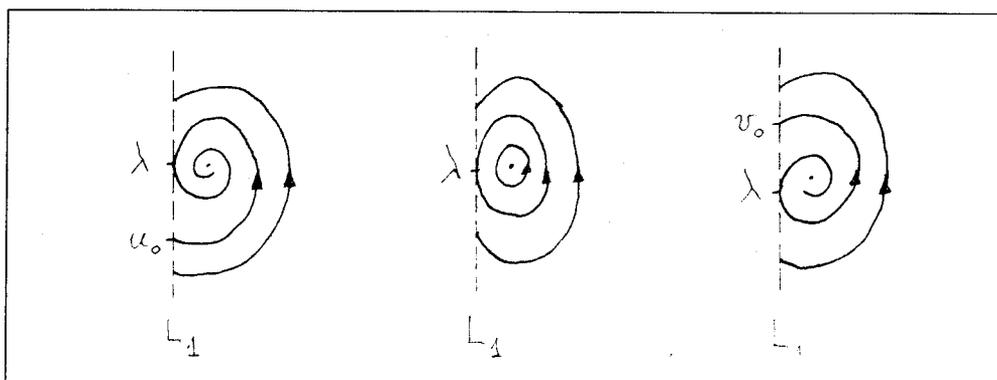


Figura 2.11: Foco o centro reales en la región I.

El equilibrio de la región I es un foco o un centro reales. Atendiendo a la Figura 2.11 podemos establecer el dominio y el recorrido de la función f de modo que tenemos

$$f : [\lambda, +\infty) \longrightarrow (-\infty, u_0] \quad \text{foco estable}$$

$$f : [\lambda, +\infty) \longrightarrow (-\infty, \lambda] \quad \text{centro}$$

$$f : [v_0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, \lambda] \quad \text{foco inestable}$$

Pasamos ahora a estudiar las propiedades de la semiaplicación f

Proposición 2.21 *Si el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing tiene un foco real en la región I, entonces la semiaplicación f verifica*

a) *es decreciente, y la derivada f' verifica*

$$\lim_{v \rightarrow \lambda^+} f'(v) = 0 \quad \text{si el foco es estable.}$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} f'(v) = -\infty \quad \text{si el foco es inestable:}$$

b) *su gráfica es una curva convexa desde arriba si el foco es estable, y cóncava desde arriba si es inestable.*

c) *su gráfica tiene por asíntota en el plano v, u , la recta de ecuación*

$$u = -e^{-\gamma_1 \pi} v + \frac{\lambda + \mu + b(1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot (1 + e^{-\gamma_1 \pi})$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a determinar en primer lugar el intervalo de variación del parámetro τ_1 . Para obtener u_0 (Figura 2.11), es preciso hallar el valor τ_{10} del parámetro τ_1 que hace $v(\tau_{10}) = \lambda$ pero eso es equivalente a hallar la solución τ_{10} de la ecuación $\phi(\tau_1; -\gamma_1) = 0$ con $\gamma_1 < 0$, y de ahí calcular $u_0 = u(\tau_{10})$. Asimismo, para obtener v_0 debemos hallar τ'_{10} tal que $u_1(\tau'_0) = \lambda$, o lo que es lo mismo, hallar la solución τ'_{10} de $\phi(\tau_1; \gamma_1) = 0$ con $\gamma_1 > 0$, y hallar $v_0 = v(\tau'_{10})$. Pero estas dos ecuaciones son las mismas que las de la Proposición 1.15 del Capítulo anterior, y por tanto también sus soluciones.

Por otra parte, al haber tres equilibrios, ha de ser $(\mu b + 1)(1 - \lambda b) < 0$ (Proposición 2.3), pero como el equilibrio de la región I es un foco, $\mu b + 1 > 0$ según la Tabla 2.3 y por tanto $1 - \lambda b < 0$. Así pues, como de la Proposición 1.15 sabemos que $\lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} \hat{u}(\tau_1) = -\infty$, y también $\lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} \hat{v}(\tau_1) = +\infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} u(\tau_1) &= \lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} \left[\lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{u}(\tau_1) \right] = -\infty \\ \lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} v(\tau_1) &= \lim_{\tau_1 \rightarrow \pi^+} \left[\lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{v}(\tau_1) \right] = +\infty \end{aligned}$$

Concluimos que cuando el foco es real, el intervalo de variación del parámetro τ_1 es (π, τ_0) , donde τ_0 representa a τ_{10} o a τ'_{10} . Obsérvese que este intervalo es el mismo que se obtuvo en la Proposición 1.15 del Capítulo anterior para la semiaplicación f_0 .

a) Vamos a estudiar la derivada. Usando de nuevo la Proposición 2.20 podemos escribir

$$\begin{aligned} f(v(\tau_1)) &= u(\tau_1) = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{u}(\tau_1) = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot f_0(v(\tau_1)) = \\ &= \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot f_0 \left(\frac{a}{1 - \lambda b} (\lambda - \hat{v}(\tau_1)) \right) \end{aligned}$$

de modo que al derivar obtenemos

$$f'(v) = f'_0(\hat{v})$$

y como en la Proposición 1.15 se demostró que la derivada del segundo miembro de esta igualdad es negativa en todo su dominio, resulta ser f decreciente en el suyo.

Pero además, y con referencia a esa misma Proposición, tenemos

$$f'(\lambda) = f'(v(\tau_{10})) = f'_0(\hat{v}(\tau_{10})) = f'_0(0) = 0 \quad \text{si } \gamma_1 < 0$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} f'(v) = \lim_{\tau_1 \rightarrow \tau'_{10}} f'(v(\tau_1)) = \lim_{\tau_1 \rightarrow \tau'_{10}} f'_0(\hat{v}(\tau_1)) = \lim_{\hat{v} \rightarrow \hat{v}_0^+} f'_0(\hat{v}) = -\infty \quad \text{si } \gamma_1 > 0$$

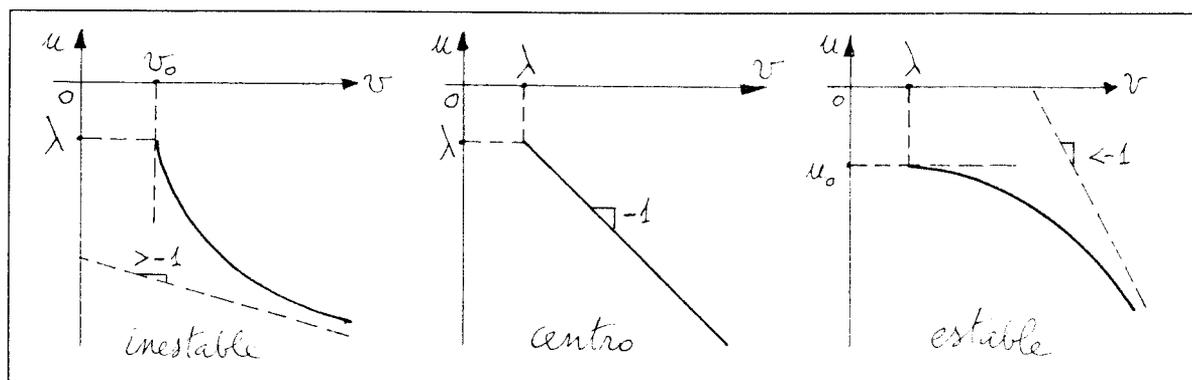


Figura 2.12: Foco o centro en la región I. La semiaplicación f

b) Para el estudio de la concavidad, calculamos la derivada segunda que es

$$f''(v) = -\frac{a}{1 - \lambda b} \cdot f_0''(\hat{v})$$

pero como $a > 0$ debido a las consideraciones acerca de la simetría que se hicieron en la página 17, y $1 - \lambda b < 0$ por tener el sistema tres equilibrios y ser focos los de las regiones I y III (véanse la Proposición 2.3 y la Tabla 2.3), resulta que $\text{signo } f''(v) = \text{signo } f_0''(\hat{v})$, por lo que de la Proposición 1.15 del Capítulo anterior, se deduce la conclusión propuesta.

c) De nuevo recurrimos a la misma Proposición, y si a la ecuación de la asíntota

$$\hat{u} = -e^{-\gamma_1 \pi} \hat{v} - \frac{a(\mu + b)}{\mu b + 1} \cdot (1 + e^{-\gamma_1 \pi})$$

que allí se expone, le aplicamos la traslación y la homotecia dadas en la Proposición 2.20 obtenemos la ecuación de la asíntota propuesta. \square

NOTA: En la Figura 2.12 se muestran las gráficas de la semiaplicación f estudiadas.

El equilibrio de la región I es una silla. Regresando a la Tabla 2.5 nos queda por analizar la semiaplicación f en el caso de que el equilibrio de la región I sea un punto de silla real. Las ecuaciones paramétricas de f son las de la página 108. Observando las Figuras 2.7 a 2.10, podemos concluir que para la existencia de policiclos, ha de ser $\text{traza } A_I = -(\mu + b) > 0$, lo que implica que $\gamma_1 > 0$. Nos limitaremos pues a considerar sólo ese caso.

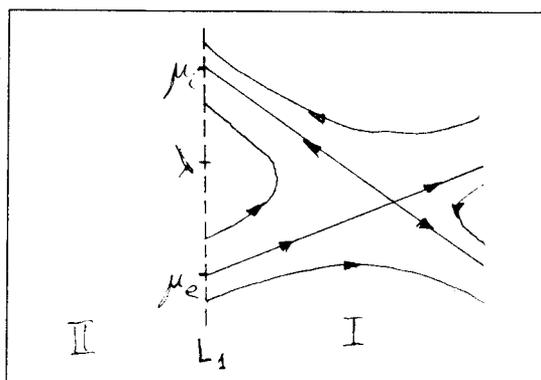


Figura 2.13: Silla en la región I.

Sean w_1 y w_2 los autovalores de la matriz A_I , que de acuerdo con la tabla 2.3 verifican $w_2 < 0 < w_1$. Las dos variedades invariantes del equilibrio de la región I, cortan a la frontera L_1 en puntos cuyas ordenadas μ_i y μ_e son

$$\mu_i = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot w_1 \qquad \mu_e = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot w_2$$

y es fácil comprobar que $\mu_e < \lambda < \mu_i$. Así, podemos trazar en la Figura 2.13 un esquema de la dinámica en la región I cerca de la frontera, a partir del cual queda de manifiesto cuál es el dominio y el recorrido de la semiaplicación f

$$f : [\lambda, \mu_i] \longrightarrow (\mu_e, \lambda]$$

A continuación pasaremos a describir, en la Proposición que sigue, las propiedades de dicha semiaplicación.

Proposición 2.22 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol-Duffing tiene una silla real en la región I con traza $A_I = -(\mu + b) > 0$, entonces la semiaplicación f verifica*

a) *es decreciente, y su derivada f' es tal que*

$$\lim_{v \rightarrow \lambda^+} f'(v) = -1 \qquad \lim_{v \rightarrow \mu_i^-} f'(v) = 0$$

b) *su gráfica es una curva cóncava desde arriba.*

DEMOSTRACIÓN: Comencemos estableciendo el intervalo de variación del parámetro τ_1 (véanse las ecuaciones paramétricas de f en la página 108) para lo que calculamos los límites

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0^+} u(\tau_1) = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0^+} v(\tau_1) = \lambda$$

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow +\infty} u(\tau_1) = \mu_e \quad \lim_{\tau_1 \rightarrow +\infty} v(\tau_1) = \mu_i$$

Así pues, $\tau_1 \in (0, +\infty)$.

a) La derivada de f es

$$f'(v) = \frac{du}{dv} = -\frac{\psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\psi(\tau_1; \gamma_1)} \quad \tau_1 \in (0, +\infty)$$

pero de acuerdo con el estudio de la función ψ que hemos hecho en el Apéndice C, resulta ser $f'(v) < 0$. Además

$$\lim_{v \rightarrow \lambda^+} f'(v) = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\psi(\tau_1; \gamma_1)} \right) = -1$$

$$\lim_{v \rightarrow \mu_i^-} f'(v) = \lim_{\tau_1 \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\psi(\tau_1; \gamma_1)} \right) = 0$$

b) La derivada segunda de f es

$$f''(v) = \frac{d^2u}{dv^2} = \frac{16(\mu b + 1)^2}{1 - \lambda b} \cdot \frac{\text{Sh}^3 \tau_1}{(\psi(\tau_1; \gamma_1))^3} \cdot \frac{\text{Sh} \gamma_1 \tau_1 - \gamma_1 \text{Sh} \tau_1}{[(\mu - b)^2 - 4]^{3/2}} \quad \tau_1 \in (0, +\infty)$$

En esta expresión, todos los factores salvo el último cuyo signo está por determinar, son positivos, excepto $\psi(\tau_1; \gamma_1)$ que es negativo. Por lo tanto, el signo de la derivada segunda es el contrario al del último factor, que vamos a establecer. Para ello calculamos

$$(\text{Sh} \gamma_1 \tau_1 - \gamma_1 \text{Sh} \tau_1)_{\tau_1=0} = 0$$

$$(\text{Sh} \gamma_1 \tau_1 - \gamma_1 \text{Sh} \tau_1)' = \gamma_1 (\text{Ch} \gamma_1 \tau_1 - \text{Ch} \tau_1) < 0$$

de donde se deduce que el citado factor es una función decreciente de τ_1 que comienza valiendo cero, luego es negativa en todo el dominio del parámetro τ_1 . Resulta pues que $f''(v) > 0$, y por tanto que la gráfica de f es una curva cóncava desde arriba. \square

NOTA: En la Figura 2.14 está representada la semiaplicación f que acabamos de estudiar.

2.4.2 La semiaplicación g .

De acuerdo con la tabla 2.5, el único caso en que hay que estudiar la semiaplicación g , es aquel en que el equilibrio del origen es una silla. Entonces, las ecuaciones paramétricas de la función g , calculadas en el Apéndice B son

$$u_1(\tau_2) = \lambda + \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{Sh} \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \lambda - \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{Sh} \tau_2}$$

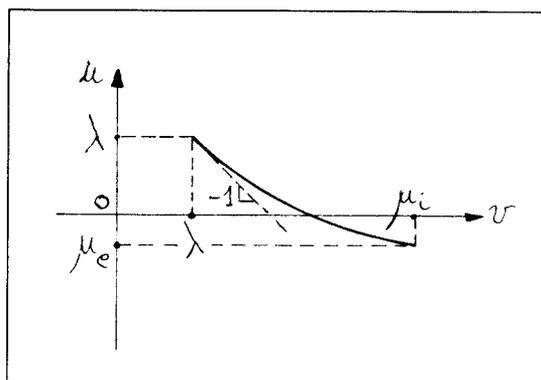


Figura 2.14: Silla en la región I. La semiaplicación f .

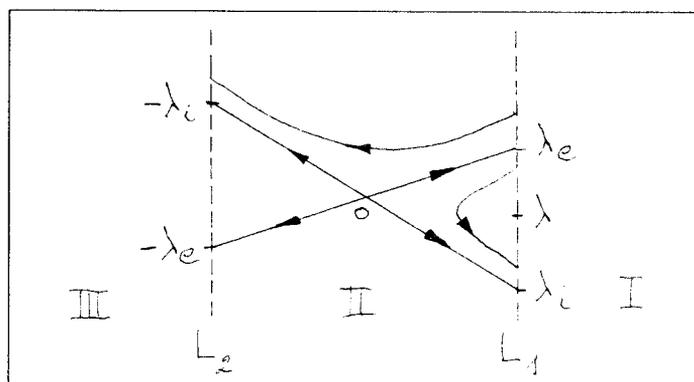


Figura 2.15: Silla en la región II.

donde $\gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}$. La función ψ se ha descrito en el Apéndice C.

El equilibrio del origen es un punto de silla. Sean z_1 y z_2 los autovalores de la matriz A_{II} . Por tratarse el equilibrio de una silla, se verifica $z_2 < 0 < z_1$. Al calcular las ordenadas λ_e y λ_i de los puntos en los que las variedades estable e inestable del origen, cortan a la frontera L_1 , obtenemos

$$\lambda_i = \lambda - z_1 \qquad \lambda_e = \lambda - z_2$$

de modo que $0 < \lambda_i < \lambda < \lambda_e$. Conforme con todo esto, podemos trazar en la figura 2.15 un croquis de la dinámica en la región II

De acuerdo con la Proposición 2.8, las trayectorias entran en la región II a través de la frontera L_1 por puntos $(1, v)$, donde $v > \lambda$, y las que salen por la misma frontera, lo hacen por puntos $(1, u_1)$ donde $u_1 < \lambda$

Las trayectorias que entran por puntos de L_1 con ordenada que verifica $\lambda < v < \lambda_e$ (Figura 2.15), regresan a L_1 después de viajar por la región II entre las variedades estable e inestable del origen en puntos de coordenadas $(1, u_1)$. Para estas trayectorias definimos la semiaplicación g como la función $u_1 = g(v)$.

Por otra parte, las trayectorias que entran en la región II desde puntos de la frontera L_1 de ordenada $v > \lambda_e$ viajan por la región II hasta dar en la otra frontera en puntos de coordenadas $(-1, v_1)$ (Figura 2.15). Para estas trayectorias definimos la semiaplicación h como la función $v_1 = h(v)$.

Dejamos la semiaplicación h para la próxima sección, pasando a continuación a considerar la semiaplicación g , que también puede reducirse a su homónima del sistema con una sola frontera, mediante una traslación y una homotecia. Ello se explica en la siguiente Proposición.

Proposición 2.23 *Llamemos g_0 a la semiaplicación g del sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing con una sola frontera, y sean $\hat{u}_1, \hat{v} \in \mathbb{R}$ tales que $\hat{u}_1 = g_0(\hat{v})$. Entonces, si $u_1, v \in \mathbb{R}$ verifican $u_1 = g(v)$ siendo g la misma semiaplicación definida para el sistema con dos fronteras, se cumple*

$$u_1 = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{u}_1 \qquad v = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{v}$$

DEMOSTRACIÓN: Si comparamos las ecuaciones paramétricas de g con sus homólogas en el sistema con una sola frontera, mostradas en la página 39, la conclusión se sigue de inmediato. \square

Deducir ahora las propiedades de la semiaplicación g resulta muy fácil. Lo hacemos en la siguiente Proposición.

Proposición 2.24 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol-Duffing, tiene un equilibrio real en el origen que es una silla, entonces la semiaplicación g está definida en el intervalo $[\lambda, \lambda_e)$ donde $\lambda_e = \lambda - z_2$, y z_2 es el autovalor negativo de la matriz A_{II} , verificándose*

- a) *es decreciente y su derivada g' verifica $\lim_{v \rightarrow \lambda^+} g'(v) = -1$ y $\lim_{v \rightarrow \lambda_e^-} g'(v) = 0$;*
- b) *su gráfica es una curva cóncava desde arriba.*

DEMOSTRACIÓN: De la Figura 2.15 se deduce que el dominio y el recorrido de g son respectivamente, los intervalos $[\lambda, \lambda_e)$ y $(\lambda_i, \lambda]$. Vamos a comprobar que pueden obtenerse a partir de los correspondientes de g_0 , mediante la transformación descrita en la Proposición 2.23.

En efecto, si $\hat{v} = 0$, entonces $v = \lambda$, y si $\hat{u}_1 = 0$ entonces $u_1 = \lambda$. Pero también, si

$$\hat{v} = \hat{\lambda}_e = \frac{az_2}{1 - \lambda b}, \quad \text{entonces} \quad v = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{z_2} \cdot \frac{az_2}{1 - \lambda b} = \lambda - z_2 = \lambda_e,$$

y si

$$\hat{u}_1 = \hat{\lambda}_i = \frac{az_1}{1 - \lambda b}, \quad \text{entonces} \quad u_1 = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{z_1} \cdot \frac{az_1}{1 - \lambda b} = \lambda - z_1 = \lambda_i$$

Asimismo, las igualdades

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} u_1(\tau_2) &= \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[\lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{u}_1(\tau_2) \right] = \\ &= \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[\lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{v}(\tau_2) \right] = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} v(\tau_2) = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} u_1(\tau_2) &= \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} \left[\lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{u}_1(\tau_2) \right] = \\ &= \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} \left[\lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{v}(\tau_2) \right] = \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} v(\tau_2) = +\infty \end{aligned}$$

indican que, al igual que para g_0 , el intervalo de variación del parámetro τ_2 para g , es $(0, +\infty)$.

a) Es inmediato a partir de las igualdades

$$g'(v) = -\frac{1 - \lambda b}{a} g'_0 \left(\frac{a}{1 - \lambda b} (\lambda - v) \right) \cdot \frac{-a}{1 - \lambda b} = g'_0 \left(\frac{a}{1 - \lambda b} (\lambda - v) \right) = g'_0(\hat{v})$$

b) Derivando por segunda vez,

$$g''(v) = -\frac{a}{1 - \lambda b} \cdot g''_0(\hat{v})$$

pero como el equilibrio de la región II es una silla, resulta (Tabla 2.4) que $1 - \lambda b < 0$, luego $\text{signo}(g''(v)) = \text{signo}(g''_0(\hat{v}))$. □

NOTA: En la figura 2.16 se muestran las gráficas de la semiaplicación g .

2.4.3 La semiaplicación h .

Vamos a estudiar la semiaplicación h en los distintos casos expuestos en la tabla 2.5. A diferencia de las otras semiaplicaciones, ésta carece de análoga en el sistema con una sola frontera, por lo que habremos de investigarla directamente.

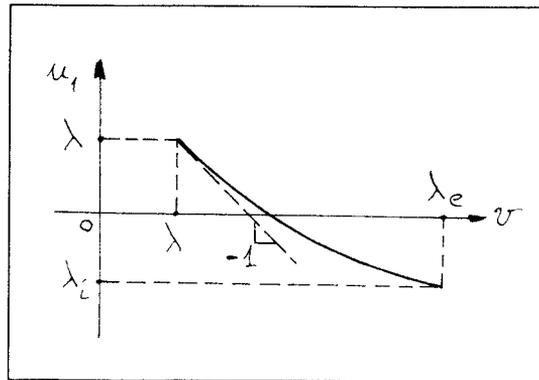


Figura 2.16: Silla en la región II. La semiaplicación g

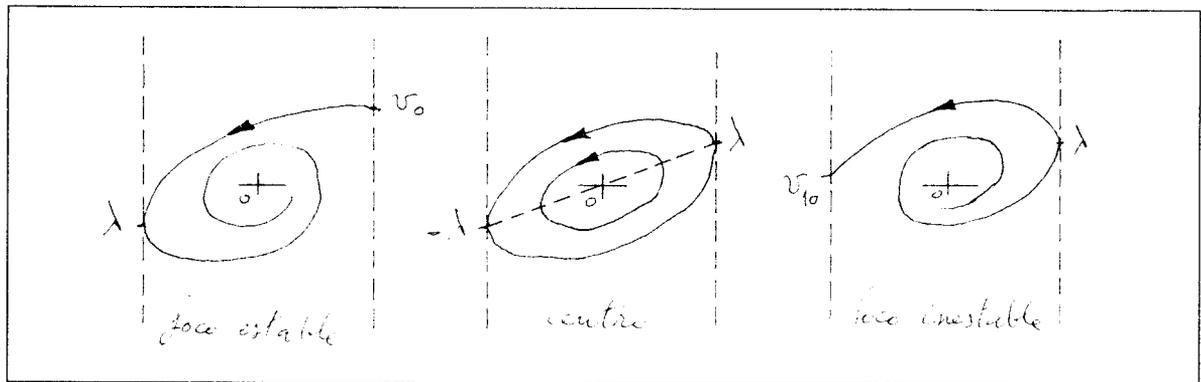


Figura 2.17: Foco o centro en la región II.

En la página 115 se ha hecho notar, la existencia de trayectorias que cruzan la región II desde la frontera L_1 a la L_2 en el caso de que el equilibrio del origen fuera una silla. En las Figuras 2.17 y 2.20, podemos observar que esta clase de trayectorias también se dan cuando el equilibrio del origen es un foco, un centro o un nodo.

El equilibrio del origen es un foco o un centro. Observemos en la Figura 2.17 que de las trayectorias que entran en la región II desde la región I, la que entra por el punto de la frontera de ordenada más pequeña, lo hace por el punto $(1, v)$, donde $v = v_0 > \lambda$ si el equilibrio del origen es un foco estable ó $v = \lambda$, si es un foco inestable o un centro.

La ordenada del punto de la frontera L_2 al que llega esta trayectoria es $v_1 = -\lambda$ en el caso de foco estable o centro, y $v_1 = v_{10} > -\lambda$ en el caso de foco inestable. Tenemos

pues para la función h

$$f : [v_0, +\infty) \longrightarrow [-\lambda, +\infty) \quad \text{foco estable}$$

$$f : [\lambda, +\infty) \longrightarrow [-\lambda, +\infty) \quad \text{centro}$$

$$f : [\lambda, +\infty) \longrightarrow [v_{10}, +\infty) \quad \text{foco inestable}$$

Las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación h , según se han calculado en el Apéndice B son

$$v_1 = -\lambda + \beta_2 \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} [2 - \phi(\tau_2; -\gamma_2)]}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v = \lambda + \beta_2 \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} [2 - \phi(\tau_2; \gamma_2)]}{\text{sen } \tau_2}$$

donde los coeficientes β_2 y γ_2 son

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}{2} \quad \gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}$$

de modo que el foco es estable o inestable según que $\gamma_2 < 0$ ó $\gamma_2 > 0$. El caso de que $\gamma_2 = 0$, que corresponde a que el equilibrio sea un centro es particularmente sencillo, ya que entonces es muy fácil eliminar el parámetro τ_2 entre las dos ecuaciones, obteniéndose la función h en forma explícita

$$v_1 = h(v) = v - 2b \quad v \in [\lambda, +\infty)$$

En la siguiente Proposición, describimos las propiedades de la semiaplicación h

Proposición 2.25 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol-Duffing, tiene un foco real en el origen, entonces la semiaplicación de Poincaré h , verifica*

a) *es creciente, y su derivada h' verifica*

$$\lim_{v \rightarrow \lambda^+} h'(v) = 0 \quad \text{si el foco es inestable}$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} h'(v) = +\infty \quad \text{si el foco es estable}$$

b) *su gráfica es una curva convexa desde arriba si el foco es estable, y cóncava si es inestable*

c) *su gráfica tiene por asíntota en el plano v, v_1 la recta de ecuación $v_1 = v - 2b$.*

DEMOSTRACIÓN: Comencemos determinando el intervalo de valores del parámetro τ_2 . Para ello, hay que tener en cuenta que el cálculo de v_0 y v_{10} se efectúa buscando aquellos valores del parámetro τ_2 que hacen respectivamente que

$$v_1(\tau_2) = -\lambda \quad \text{si } \gamma_2 < 0 \quad \text{y} \quad v(\tau_2) = \lambda \quad \text{si } \gamma_2 > 0$$

Pero observando las expresiones de $v(\tau_2)$ y $v_1(\tau_2)$, estas dos ecuaciones resultan ser equivalentes a

$$2 - \phi(\tau_2; -\gamma_2) = 0 \quad \text{si } \gamma_2 < 0 \quad \text{y} \quad 2 - \phi(\tau_2; \gamma_2) = 0 \quad \text{si } \gamma_2 > 0$$

Así pues, llamando τ_{20} y τ'_{20} a las soluciones, que se encuentran dibujadas en la Figura C.1 del Apéndice C, tenemos

$$v(\tau_{20}) = v_0 \quad v_1(\tau'_{20}) = v_{10}$$

Ahora calculamos los límites

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[-\lambda + \beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} [2 - \phi(\tau_2; -\gamma_2)]}{\text{sen } \tau_2} \right] = +\infty$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[\lambda + \beta_2 \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} [2 - \phi(\tau_2; \gamma_2)]}{\text{sen } \tau_2} \right] = +\infty$$

con lo que concluimos que el parámetro τ_2 toma valores en el intervalo $(0, \tau_0)$ donde τ_0 designa a τ_{20} o a τ'_{20} .

a) La derivada de h es

$$h'(v) = \frac{dv_1}{dv} = \frac{2 - \phi(\tau_2; \gamma_2)}{2 - \phi(\tau_2; -\gamma_2)} \quad \forall \tau_2 \in (0, \tau_0)$$

Pero debido a las propiedades de la función ϕ estudiadas en el Apéndice C, resulta ser $h'(v) > 0$ en todo su dominio, y ello tanto si el foco es estable como inestable. Además también tenemos

$$h'(\lambda) = \left(\frac{dv_1}{dv} \right)_{v=\lambda} = \frac{2 - \phi(\tau_{20}; \gamma_2)}{2 - \phi(\tau_{20}; -\gamma_2)} = 0 \quad \text{si } \gamma_2 > 0$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} \left(\frac{dv_1}{dv} \right) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_{20}^+} \frac{2 - \phi(\tau_2; \gamma_2)}{2 - \phi(\tau_2; -\gamma_2)} = +\infty \quad \text{si } \gamma_2 < 0$$

b) Para estudiar la concavidad, calculamos la derivada segunda

$$h''(v) = \frac{d^2 v_1}{d^2 v} = \frac{1 + \gamma_2^2}{\beta_2} \cdot \frac{2 \text{sen}^3 \tau_2}{[2 - \phi(\tau_2; -\gamma_2)]^3} \cdot (\text{Sh } \gamma_2 \tau_2 + \gamma_2 \text{sen } \tau_2)$$

El signo de esta derivada es el mismo que el de la expresión $\text{Sh } \gamma_2 \tau_2 + \gamma_2 \text{sen } \tau_2$ y éste es el mismo, para $\tau_2 \in (0, \tau_0)$, que el de γ_2 , con lo cual, si el equilibrio del origen es estable, la gráfica de h es convexa vista desde arriba, y cóncava si es inestable.

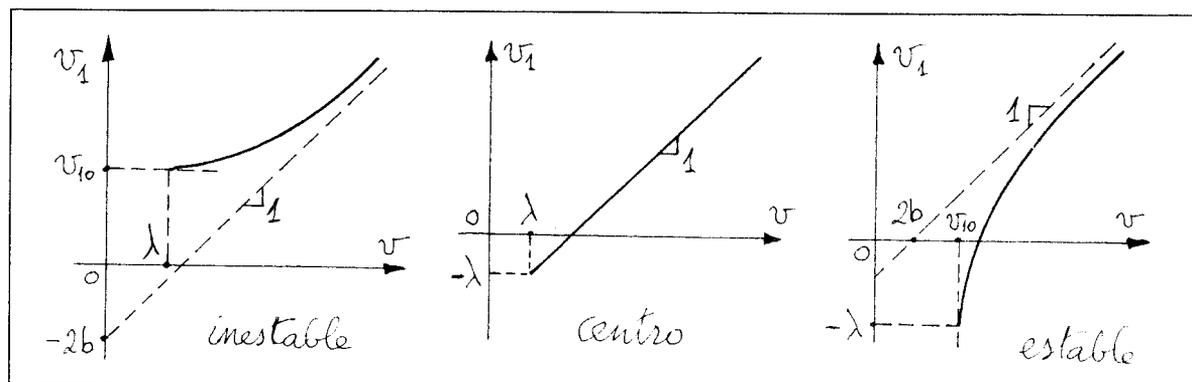


Figura 2.18: Foco o centro en la región II. La semiaplicación h

c) La posible existencia de asíntotas, se pone de manifiesto al calcular los límites

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)} = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\lambda}{\beta_2} \operatorname{sen} \tau_2 + e^{\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 + \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\frac{\lambda}{\beta_2} \operatorname{sen} \tau_2 + e^{-\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2} = 1$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} [v_1(\tau_2) - v(\tau_2)] = \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \left[-2\lambda + \beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - e^{-\gamma_2 \tau_2} + 2\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\operatorname{sen} \tau_2} \right] = -2b$$

que indican que la recta de ecuación

$$v_1 = v - 2b$$

es asíntota oblicua de la gráfica de h y ello independientemente de que el foco sea estable o inestable. □

NOTA: Las gráficas de la semiaplicación h que acabamos de estudiar, son las que aparecen en la Figura 2.18.

El equilibrio del origen es un nodo. Si llamamos z_1 y z_2 a los autovalores reales y de igual signo de la matriz A_{II} , un cálculo sencillo proporciona las ordenadas λ_1 y λ_2 de los puntos en los que las variedades invariantes del origen cortan a la frontera L_1

$$\lambda_1 = \lambda - z_1 \qquad \lambda_2 = \lambda - z_2$$

De la desigualdad $z_1 - z_2 = \sqrt{(\lambda + b)^2 - 1} > 0$ se deducen $z_1 > z_2$ y también $\lambda_1 < \lambda_2$.

Hagamos ahora una importante observación. De las igualdades triviales

$$\lambda - (\lambda - z_1) = z_1$$

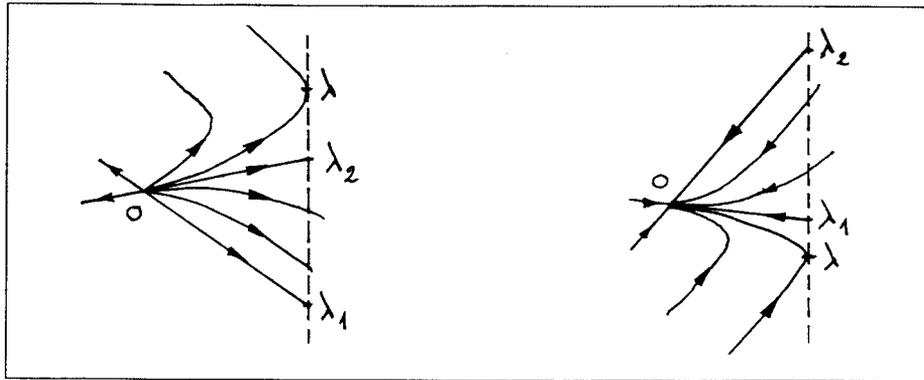


Figura 2.19:

$$\lambda - (\lambda - z_2) = z_2$$

se deduce que si los autovalores son positivos, el punto de la frontera de ordenada λ está por encima de los puntos de ordenadas λ_1 y λ_2 , mientras que si son negativos, el punto de ordenada λ está por debajo de ambos. Pero recordando que el punto de ordenada λ , marca la separación entre aquellos puntos de la frontera en los que las trayectorias entran en la región II, y aquellos en los que salen, podemos dibujar en la Figura 2.19 un croquis de la situación. A continuación analizaremos los dos casos representados en esa Figura.

Cuando los dos autovalores de la matriz A_{II} son positivos, cualquier trayectoria que partiendo de un punto de la frontera L_1 , entre en la región II, va a dar a la otra frontera, ya que no puede regresar a aquella de la que procede, pues para ello tendría que cortar a las variedades inestables del origen, lo que es imposible, pero tampoco puede permanecer en esta región puesto que el único equilibrio que hay en ella es inestable y tiende a expulsarla.

Así pues, cuando el origen es un nodo inestable, todas las trayectorias que entran en la región II, que lo hacen por puntos de la frontera L_1 de ordenada $v > \lambda$, la cruzan, y van a salir por la otra frontera en puntos de ordenada $v_1 > v_{10}$ (Figura 2.20).

Pero cuando los autovalores de la matriz A_{II} son negativos, no todas las trayectorias que entran en la región II desde la frontera L_1 , van a la otra frontera, ya que muchas de ellas quedan atrapadas por el equilibrio del origen. Pero las que cruzan esta región, lo hacen entrando por puntos de la frontera L_1 de ordenada $v > v_0$ y saliendo por puntos de la otra frontera de ordenada $v_1 > -\lambda$ (Figura 2.20).

Si el nodo es impropio, entonces ambas variedades coinciden, cortando a la frontera L_1 en el punto de ordenada $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Aparte de esto, la disposición de las trayectorias en la región II y la de los puntos de ordenadas v_0 y v_{10} se mantiene igual.

Podemos pues establecer el dominio y el recorrido de la semiaplicación h de esta

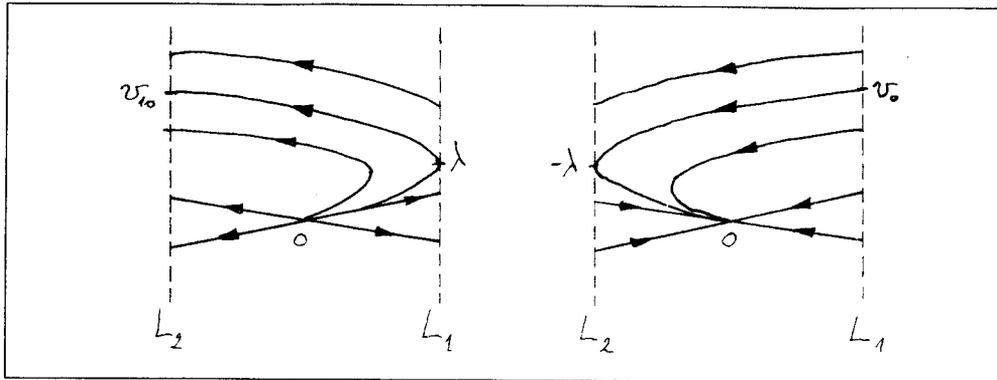


Figura 2.20: Nudo en la región II.

forma

$$f : [v_0, +\infty) \longrightarrow [-\lambda, +\infty) \quad \text{nodo estable}$$

$$f : [\lambda, +\infty) \longrightarrow [v_{10}, +\infty) \quad \text{nodo inestable}$$

Las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación h , según el Apéndice B son

$$v_1(\tau_2) = -\lambda + \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} (2 - \psi(\tau_2; -\gamma_2))}{\text{Sh } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \lambda + \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} (2 - \psi(\tau_2; -\gamma_2))}{\text{Sh } \tau_2}$$

si el nodo es propio, ya que si es impropio, estas ecuaciones son

$$v_1(t_2) = -\lambda + \frac{e^{z_1 t_2} (2 - \sigma(t_2; -z_1))}{t_2}$$

$$v(t_2) = \lambda + \frac{e^{-z_1 t_2} (2 - \sigma(t_2; z_1))}{t_2}$$

El coeficiente γ_2 es

$$\gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}$$

de modo que el nodo propio será estable si $\gamma_2 < 0$ e inestable si $\gamma_2 > 0$. La estabilidad del nodo impropio, dependerá del signo del autovalor z_1 de la matriz A_{II} . En cuanto a las funciones ψ y σ han sido descritas en el Apéndice C.

En la siguiente Proposición, estudiamos la semiaplicación h .

Proposición 2.26 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol-Duffing, tiene un nodo real en el origen, entonces la semiaplicación de Poincaré h , verifica*

a) es creciente, y su derivada h' verifica

$$\lim_{v \rightarrow \lambda^+} h'(v) = 0 \quad \text{si el nodo es inestable}$$

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} h'(v) = +\infty \quad \text{si el nodo es estable;}$$

b) su gráfica es una curva convexa desde arriba si el foco es estable, y cóncava si es inestable;

c) su gráfica tiene por asíntota en el plano v, v_1 la recta de ecuación $v_1 = v - 2b$ si el nodo es propio, y la recta de ecuación $v_1 = v - 2$ si el nodo es impropio.

DEMOSTRACIÓN: Es completamente análoga a la de la Proposición 2.25 □

NOTA: Comparando las Proposiciones 2.25 y 2.26 podemos comprobar que la semiaplicación h cuando el equilibrio del origen es un foco estable, resulta ser, hablando en términos cualitativos, igual que esa misma semiaplicación pero cuando el equilibrio es un nodo estable. Lo mismo ocurre en el caso de inestabilidad. Así pues, las gráficas de la función h en el caso de ser nodo el equilibrio del origen, tienen una forma similar a las de la Figura 2.18 (naturalmente excluyendo el centro que no tiene análogo en los nodos).

El equilibrio del origen es un punto de silla. De acuerdo con la Figura ??, el dominio y el recorrido de la función h son respectivamente los intervalos $(\lambda_e, +\infty)$ y $(-\lambda_i, +\infty)$, donde λ_i y λ_e cuyas expresiones figuran en la página 114, son las ordenadas de los puntos en los que las variedades inestable y estable respectivamente de la silla del origen, cortan a la frontera L_1 . Sus ecuaciones paramétricas estudiadas en el Apéndice C son

$$v_1(\tau_2) = -\lambda + \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} (2 - \psi(\tau_2; -\gamma_2))}{\text{Sh } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \lambda + \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} (2 - \psi(\tau_2; \gamma_2))}{\text{Sh } \tau_2}$$

siendo γ_2 y ψ como en la página 114. Es de destacar que si $\lambda - b \leq 0$, o lo que es lo mismo, si $\gamma_2 \leq 0$, de las Figuras 2.8, 2.9 y 2.10, se infiere que no existen policiclos, así que sólo consideraremos el caso $\gamma_2 > 0$. Las propiedades de la semiaplicación h se describen en la siguiente Proposición.

Proposición 2.27 *Si el sistema dinámico escrito en la forma de Van der Pol-Duffing, tiene un punto de silla real en el origen con traza $A_{II} = \lambda - b > 0$, entonces la semiaplicación de Poincaré h , verifica*

- a) *es creciente, siendo $\lim_{v \rightarrow \lambda_e^+} h'(v) = +\infty$;*
- b) *su gráfica es una curva convexa desde arriba;*
- c) *su gráfica tiene por asíntota en el plano v, v_1 la recta de ecuación $v_1 = v - 2b$.*

DEMOSTRACIÓN: Comenzamos estableciendo el intervalo de variación del parámetro τ_2 , lo que se consigue calculando los siguientes límites

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} v_1(\tau_2) &= +\infty & \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} v(\tau_2) &= +\infty \\ \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} v_1(\tau_2) &= -\lambda_i & \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} v(\tau_2) &= \lambda_e \end{aligned}$$

Así pues, τ_2 toma valores en el intervalo $(0, +\infty)$.

- a) Para estudiar el crecimiento, observamos que

$$\frac{dv_1}{dv} = \frac{\psi(\tau_2; \gamma_2) - 2}{\psi(\tau_2; -\gamma_2) - 2} > 0 \quad \forall \tau_2 \in (0, +\infty)$$

de acuerdo con las propiedades de la función ψ estudiadas en el Apéndice C. Por tanto, h es una función estrictamente creciente.

En el punto inicial de la curva, la derivada es

$$\left(\frac{dv_1}{dv}\right)_{v=\lambda_e} = \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\tau_2; \gamma_2) - 2}{\psi(\tau_2; -\gamma_2) - 2} = \lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} e^{2\gamma_2 \tau_2} = +\infty \quad \text{si } \lambda - b > 0$$

- b) Para analizar la concavidad, calculamos la derivada segunda

$$h''(v) = -\frac{16(1 - \lambda b)}{[(\lambda + b)^2 - 4]^{3/2}} \cdot \frac{\text{Sh}^3 \tau_2}{[\psi(\tau_2; -\gamma_2) - 2]^3} \cdot (\gamma_2 \text{Sh} \tau_2 + \text{Sh} \gamma_2 \tau_2)$$

Para ver cuál es el signo de esta derivada, observemos que por tener el sistema tres equilibrios, $1 - \lambda b < 0$, y también $\psi(\tau_2; -\gamma_2) - 2 < 0$. Por otro lado, $\text{Sh} \tau_2 > 0$ para todo $\tau_2 \in (0, +\infty)$, y por último, el signo del factor $\gamma_2 \text{Sh} \tau_2 + \text{Sh} \gamma_2 \tau_2$ es el mismo que el de γ_2 , y éste es el mismo que el de $\lambda - b$, así que reuniendo toda esta información, podemos concluir que la semiaplicación h tiene una gráfica que es una curva convexa vista desde arriba.

- c) Por último, para el estudio de las posibles asíntotas, calculamos los límites

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} \frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\tau_2 \rightarrow 0^+} [v_1(\tau_2) - v(\tau_2)] = -2b$$

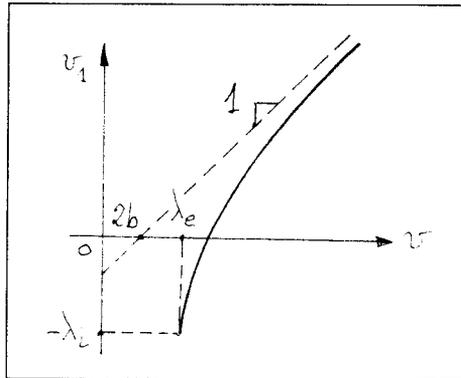


Figura 2.21: Silla en la región II. La semiaplicación h .

de los que se deduce que la recta de ecuación

$$v_1 = v - 2b$$

es asíntota de la gráfica de la función h . □

NOTA: La gráfica de h es la que aparece en la Figura 2.21

2.5 Conjuntos de bifurcaciones.

La última Sección de este Capítulo está dedicada como en el anterior al estudio de los conjuntos de bifurcaciones del sistema dinámico, para lo que emplearemos toda la información que hemos ido reuniendo en las Secciones precedentes.

De acuerdo con las características del sistema, parece adecuado dividir el estudio en tres apartados según los valores del parámetro b

$$b = 0 \qquad 0 < b < 1 \qquad 1 \leq b$$

Recordemos que a raíz de las consideraciones hechas acerca de las simetrías, (Sección 2.3.1) basta con tomar para b valores no negativos.

De los tres casos indicados, el segundo es con diferencia el más interesante, ya que en dicho caso el sistema presenta comportamientos dinámicos muy diversos. Pasamos a estudiar el primero de ellos.

2.5.1 Caso 1.- $b = 0$.

Cuando $b = 0$, el sistema dinámico corresponde a un oscilador clásico del tipo Rayleigh-Van der Pol. En el Capítulo 3, al estudiar el puente de Wien, tendremos ocasión de volver sobre el mismo.

Teorema 2.28 *Consideremos el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, y sea $b = 0$, entonces hay un solo equilibrio situado en el origen de tal manera que*

- a) si $\mu > 0$ y $\lambda > 0$ el equilibrio es inestable y está rodeado por una única órbita periódica estable;*
- b) si $\mu < 0$ y $\lambda < 0$ el equilibrio es estable y está rodeado por una única órbita periódica inestable;*
- c) si $\mu\lambda \leq 0$ pero $\lambda \neq 0$ no hay políciclos;*
- d) si $\lambda = 0$ pero $\mu \neq 0$, el equilibrio es un centro regional.*

DEMOSTRACIÓN: Puesto que $\det A_I = \det A_{II} = 1$, la Proposición 2.3 asegura que el sistema tiene un solo equilibrio, que por la simetría estará situado en el origen.

a) Tenemos que traza $A_I = -\mu/2 < 0$ y que traza $A_{II} = \lambda/2 > 0$ así que el equilibrio, que por ser el único está situado en el origen, es inestable, y si aplicamos el Teorema 2.19 resulta que hay una única órbita periódica estable que necesariamente ha de rodearlo.

b) Las trazas tiene ahora signos contrarios a los del apartado a) por lo que el equilibrio será estable, y según el mismo Teorema, estará rodeado de una única órbita periódica inestable.

c) Si $\mu\lambda \leq 0$ pero $\lambda \neq 0$, las trazas de las dos matrices tienen el mismo signo, o bien la traza de A_I es nula. Por tanto, la Proposición 2.14 asegura que no puede haber políciclos con partes en más de una región, ni tampoco que estén totalmente contenidos en la región II pues para ello, el equilibrio del origen habría de ser un centro, pero esa posibilidad queda excluída al ser traza $A_{II} = \lambda/2 \neq 0$. Sin embargo, traza $A_I = -\mu/2$ puede anularse, pero al no haber equilibrios en las regiones I y III, no puede haber tampoco órbitas periódicas en esas regiones.

d) Cuando $\lambda = 0$, el equilibrio de la región II es un centro, pero el continuo de órbitas periódicas que lo rodea está totalmente contenido en esa región, sin que haya ninguna órbita periódica con partes en las tres regiones. En efecto, sean f y h las semiaplicaciones de Poincaré en las regiones I y II, y supongamos que el equilibrio virtual de la región I es un foco (el caso de que sea un nodo es completamente análogo y no lo trataremos). La condición para que existan órbitas periódicas con partes en las tres regiones es que haya soluciones de la ecuación $f(v) = -h(v)$ distintas de $v = 0$ (véase la página 89), pero como $h(v) = v$ según se estableció en la página 118, resulta que dicha ecuación es equivalente a $f(v) = -v$.

A continuación tomamos de la página 107 las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación f

$$u(\tau_1) = -\beta_1 \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_1} \qquad v(\tau_1) = \beta_1 \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

donde $\gamma_1 = \frac{-\mu}{\sqrt{4-\mu^2}}$ y $\beta_1 = \frac{\sqrt{4-\mu^2}}{2}$, ya que $\lambda = b = 0$, y las sumamos, resultando después de simplificar

$$u(\tau_1) + v(\tau_1) = \mu \left(1 - \frac{\text{Sh } \gamma_1 \tau_1}{\gamma_1 \text{sen } \tau_1} \right)$$

La única posibilidad de que $u(\tau_1) + v(\tau_1) = 0$ (o lo que es lo mismo $f(v) + v = 0$), es que $\text{Sh } \gamma_1 \tau_1 = \gamma_1 \text{sen } \tau_1$ para todos los valores de τ_1 , pero eso sólo puede ocurrir si $\gamma_1 = 0$, lo que está expresamente excluido al ser $\mu \neq 0$. Por lo tanto, la ecuación $f(v) + v = 0$ no tiene soluciones (salvo $v = 0$ que se da cuando $\tau_1 = 0$), con lo que no hay órbitas periódicas con partes en las tres regiones. \square

NOTA 1: En el caso de que $\lambda = \mu = b = 0$, los equilibrios virtuales de las regiones I y III son centros, igual que el equilibrio del origen. En este caso, el sistema tiene un centro global, de modo que el plano de fases está cubierto por un continuo de órbitas periódicas. Pero hemos excluido este caso del Teorema porque entonces sería $\mu = -\lambda$, es decir, las trazas de las matrices A_I y A_{II} coincidirían lo que es incompatible con la forma de Van der Pol-Duffing.

NOTA 2: En la Figura 2.22 se muestra el correspondiente conjunto de bifurcaciones.

2.5.2 Caso 2.- $0 < b < 1$.

El estudio del comportamiento dinámico del sistema es en este caso más complicado debido a que presenta una mayor riqueza. Un antecedente de estos trabajos se encuentran en [24, Llibre, 1996].

Con idea de hacer la exposición lo más clara posible, se ha considerado oportuno analizar por separado determinadas curvas en el plano de bifurcaciones que presentan un interés particular. Comenzamos estableciendo la existencia para ciertos valores de λ y μ de policiclos constituidos por pares de trayectorias heteroclinas que conectan equilibrios tipo silla en las regiones I y III.

Proposición 2.29 *En el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, consideremos que el parámetro $0 < b < 1$ tiene un valor prefijado. Si existen policiclos constituidos por dos equilibrios tipo silla en las regiones I y III, y dos trayectorias heteroclinas que los conectan, ello ha de ocurrir para valores de los parámetros*

$$(\mu, \lambda) \in \left(-\infty, -\frac{1}{b} \right) \times (-\infty, b)$$

Además, la condición necesaria y suficiente para la existencia de tales policiclos es que se verifique alguna de las igualdades

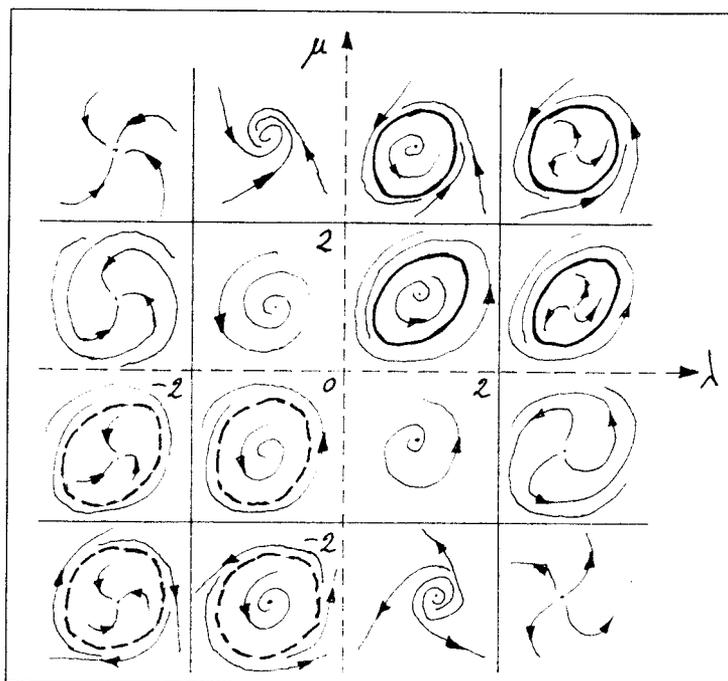


Figura 2.22: El conjunto de bifurcaciones. ($b = 0$)

a) si $\lambda \in (-\infty, -2 - b)$

$$\text{ArgCth} \frac{4 + (\mu - b)(\lambda + b)}{(\sqrt{(\mu - b)^2 - 4})(\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4})} - \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2(\lambda - b)} \cdot \ln \frac{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} = 0$$

b) si $\lambda = -2 - b$

$$\frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{b - \mu + 2} + \frac{1}{2(b + 1)} \cdot \ln \frac{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} = 0$$

c) si $\lambda \in (-2 - b, b)$

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctg} \frac{4 + (\mu - b)(\lambda + b)}{(\sqrt{(\mu - b)^2 - 4})(\sqrt{4 - (\lambda + b)^2})} - \frac{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}{2(\lambda - b)} \cdot \ln \frac{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} = 0$$

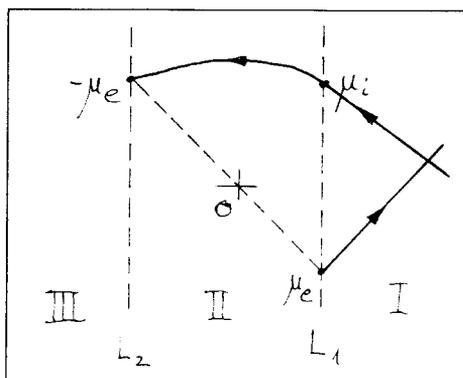


Figura 2.23:

DEMOSTRACIÓN: De existir un políciclo así que tiene partes en las tres regiones, ha de ser simétrico con respecto al origen (Proposición 2.9), luego de las dos trayectorias heteroclinas, una va de la región I a la III, y la otra de la III a la I, lo que implica que los equilibrios de las regiones I y III, que por la simetría han de ser iguales, son sillas.

Pero los tres equilibrios no pueden ser sillas, porque para ello habría de cumplirse que $\mu b + 1 < 0$ y $1 - \lambda b < 0$ (Tablas 2.3 y 2.1) y entonces, de acuerdo con la Proposición 2.3, los equilibrios de las regiones I y III serían virtuales, de modo que no existirían las heteroclinas citadas. Así pues, el equilibrio de la región II es un foco, un centro o un nodo.

En términos de los parámetros de bifurcación, las condiciones descritas se expresan mediante las desigualdades $\mu b + 1 < 0$ y $1 - \lambda b > 0$, pero además, de acuerdo con la Proposición 2.14, para la existencia de políciclos es necesario que las trazas de las matrices A_I y A_{III} , es decir, $-(\mu + b)$ y $\lambda - b$, tengan signos opuestos. La desigualdad $\mu b + 1 < 0$ implica $-(\mu + b) > 0$, ya que $0 < b < 1$, lo que obliga a que $\lambda - b < 0$. Así pues, nos limitaremos a la zona del conjunto de bifurcaciones definida por

$$(\mu, \lambda) \in \left(-\infty, -\frac{1}{b} \right) \times (-\infty, b)$$

Sean μ_e y μ_i las ordenadas de los puntos en los que las variedades estable e inestable de la silla situada en la región I cortan a la frontera L_1 . Si h es la semiaplicación de Poincaré en la región II, de la simetría con respecto al origen del plano de fases, se deduce que la condición necesaria y suficiente para que exista una trayectoria heteroclinica y su correspondiente simétrica, que enlacen los equilibrios tipo silla de las regiones I y III, es $h(\mu_i) = -\mu_e$ (Figura 2.23).

Vamos a expresar esa condición en términos de los parámetros de bifurcación μ , λ y b , para lo que debemos distinguir, debido a la distinta forma de la semiaplicación h ,

entre tres situaciones:

a) $\lambda \in (-\infty, -2 - b)$ *El equilibrio del origen es un nodo propio:*

Usando las ecuaciones paramétricas de h , mostradas en la página 122, la condición se expresa mediante las igualdades

$$\left. \begin{aligned} \lambda + \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} + \text{Ch } \tau_2 - \gamma_2 \text{Sh } \tau_2}{\text{Sh } \tau_2} &= \mu_i \\ \lambda - \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} + \text{Ch } \tau_2 + \gamma_2 \text{Sh } \tau_2}{\text{Sh } \tau_2} &= \mu_e \end{aligned} \right\} \tau_2 \in (0, +\infty)$$

Seguimos ahora un proceso muy parecido al empleado en la demostración de la Proposición 1.24 del Capítulo anterior, consistente recordemos, en eliminar el parámetro τ_2 entre las anteriores igualdades, para lo que comenzamos reescribiéndolas de esta forma

$$\frac{e^{-\gamma_2 \tau_2}}{\text{Sh } \tau_2} = \gamma_2 + \frac{2(\mu_i - \lambda)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} - \text{Cth } \tau_2$$

$$\frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{\text{Sh } \tau_2} = -\gamma_2 - \frac{2(\mu_i - \lambda)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} - \text{Cth } \tau_2$$

Ahora las multiplicamos, de modo que al desaparecer las exponenciales, podemos despejar la cotangente hiperbólica

$$\text{Cth } \tau_2 = \frac{1 - \left(\gamma_2 + \frac{2(\mu_e - \lambda)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} \right) \left(\gamma_2 + \frac{2(\mu_i - \lambda)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} \right)}{\frac{2(\mu_i - \mu_e)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}}$$

A continuación dividimos las citadas igualdades, con lo que desaparecen los senos hiperbólicos, de modo que al sustituir la cotangente hiperbólica que acabamos de obtener, podemos despejar la exponencial

$$e^{2\gamma_2 \tau_2} = \frac{\left(\gamma_2 + \frac{2(\mu_e - \lambda)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} \right)^2 - 1}{\left(\gamma_2 + \frac{2(\mu_i - \lambda)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} \right)^2 - 1}$$

Al sustituir los coeficientes γ_2, μ_e y μ_i por sus valores (que aparecen en las páginas 122

y 111), las dos igualdades que acabamos de obtener quedan así

$$\text{Cth } \tau_2 = \frac{4 + (\mu - b)(\lambda + b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}$$

$$e^{2\gamma_2\tau_2} = \frac{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}$$

Comprobemos que estas dos expresiones tienen sentido: En la primera de ellas, el segundo miembro ha de ser en valor absoluto, mayor que 1. Para demostrarlo, observemos que en la zona del plano de bifurcaciones que estamos considerando, se verifican $\mu + b < 0$ y $\lambda + b < -2$. De la primera se deduce que $\mu - b < 0$, ya que $0 < b$, y de la segunda que $\lambda + b < 0$, resultando que $(\mu - b)(\lambda + b) > 0$. Empleando ahora las desigualdades evidentes

$$\sqrt{(\mu - b)^2 - 4} < |\mu - b| \quad \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4} < |\lambda + b|$$

resulta

$$\frac{4 + (\mu - b)(\lambda + b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} > \frac{4 + (\mu - b)(\lambda + b)}{|\mu - b| \cdot |\lambda + b|} > 1$$

En la segunda expresión, debemos comprobar que el miembro de la derecha es estrictamente positivo, para lo que multiplicamos su numerador y su denominador, obteniéndose $4(\mu b + 1)^2$.

Finalmente, despejamos τ_2 en las dos expresiones e igualamos, resultando la igualdad del enunciado.

b) $\lambda = -2 - b$ El equilibrio del origen es un nodo impropio:

Si usamos las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación h que aparecen en la página 122, la condición de existencia de un policiclo constituido por dos heteroclinas se expresa mediante las igualdades

$$\left. \begin{aligned} -\lambda + \frac{e^{zt_2} + zt_2 + 1}{t_2} &= -\mu_e \\ \lambda + \frac{e^{-zt_2} - zt_2 + 1}{t_2} &= -\mu_i \end{aligned} \right\} t_2 \in (0, +\infty)$$

Procediendo como en el caso anterior, reformulamos estas expresiones así

$$\frac{e^{zt_2}}{t_2} = -(\mu_c - \lambda) - z - \frac{1}{t_2} \quad \frac{-e^{zt_2}}{t_2} = \mu_i - \lambda + z - \frac{1}{t_2}$$

Ahora las multiplicamos, lo que permite despejar t_2

$$t_2 = \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{b - \mu + 2}$$

donde hemos sustituido μ_e y μ_i por sus valores, así como el único autovalor z de la matriz A_{II} por su valor $-1 - b$.

A continuación dividimos las citadas igualdades, sustituyendo t_2 por el valor que acabamos de obtener, de modo que al despejar el exponente de la exponencial, resulta

$$t_2 = -\frac{1}{2(b+1)} \cdot \ln \frac{(b^2+1)(b-\mu) - 4b + (b^2-1)\sqrt{(\mu-b)^2-4}}{(b^2+1)(b-\mu) - 4b - (b^2-1)\sqrt{(\mu-b)^2-4}}$$

con lo que, igualando, llegamos a la ecuación del enunciado.

c) $\lambda \in (-2 - b, b)$ El equilibrio del origen es un foco:

En este caso, de acuerdo con las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación h mostradas en la página 118, la condición de existencia de policiclo formado por una pareja de heteroclinas es

$$\left. \begin{aligned} -\lambda + \beta_2 \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 + \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\operatorname{sen} \tau_2} &= -\mu_e \\ \lambda + \beta_2 \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\operatorname{sen} \tau_2} &= \mu_i \end{aligned} \right\} \tau_2 \in (0, \tau_{20}]$$

donde τ_{20} se ha obtenido en la Proposición 2.25.

Procedemos ahora como en los casos anteriores y obtenemos las igualdades

$$\operatorname{Ctg} \tau_2 = \frac{4 + (\mu - b)(\lambda + b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}$$

$$e^{2\gamma_2 \tau_2} = \frac{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}$$

de las que podemos despejar τ_2 e igualar obteniéndose la igualdad del enunciado. La presencia del término $\frac{\pi}{2}$ en la misma se debe a que el parámetro τ_2 toma valores en el intervalo $(0, \tau_{20}]$, donde $0 < \tau_{20} < \pi$ según se muestra en la Figura C.1 del Apéndice C, de modo que $0 < \tau_2 < \pi$. □

Acabamos de establecer una condición necesaria y suficiente para la existencia de policiclos heteroclinos. En la siguiente Proposición demostraremos que tal condición efectivamente se da para determinados valores de los parámetros de bifurcación. Ello nos permitirá definir una función que relaciona a esos parámetros, de modo que la gráfica de la misma es el lugar geométrico de los puntos del conjunto de bifurcaciones en los que el sistema dinámico tiene un policiclo heteroclineo.

Proposición 2.30 *En el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, consideremos que el parámetro $0 < b < 1$ tiene un valor prefijado. Entonces existe una única función $\mu_{HT} : (-\infty, \lambda_a) \rightarrow \mathbb{R}$ (λ_a se define más abajo) tal que si λ_0 y μ_0 son valores de los parámetros para los que el sistema tiene un políciclo constituido por dos equilibrios tipo silla en las regiones I y III, y dos trayectorias heteroclinas que los conectan, entonces se verifica $\mu_0 = \mu_{HT}(\lambda_0)$. Esta función está definida implícitamente por las tres igualdades de la Proposición 2.29, y su gráfica tiene por asíntota vertical la recta de ecuación $\lambda = \lambda_a$ donde λ_a es la única solución de la ecuación*

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{-(\lambda + b)}{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}} - \frac{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}{\lambda - b} \ln b = 0 \quad \text{si } b > b_0$$

$$\operatorname{ArgCth} \frac{-(\lambda + b)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} - \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{\lambda - b} \ln b = 0 \quad \text{si } b < b_0$$

$$\text{o bien,} \quad \lambda_a = -b - 2 \quad \text{si } b = b_0$$

en la que $b_0 = 0.278464\dots$ es la única solución de la ecuación

$$-\sqrt{\ln b(b^2 \ln b + 4b^2 - 4)} + b \ln b + 2b + 2 = 0$$

y por asíntota horizontal la recta de ecuación $\mu = \mu_a$ donde μ_a es la única solución de la ecuación

$$\operatorname{ArgCth} \frac{-(\mu - b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} + \frac{1}{2} \ln \frac{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} = 0$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a estudiar las tres igualdades de la Proposición 2.29. Usaremos la notación común $G(\mu, \lambda) = 0$ para designar a cualquiera de ellas.

a) $-b - 2 < \lambda < b$, el equilibrio del origen es un foco estable

Comenzamos calculando los límites

$$\lim_{\mu \rightarrow -(1/b)^-} G(\mu, \lambda) = -\infty$$

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} G(\mu, \lambda) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{-(\lambda + b)}{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}} - \frac{\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}{\lambda - b} \ln b = F(\lambda)$$

y la derivada

$$\frac{\partial G}{\partial \mu} = -\frac{(\mu + b)(1 - \lambda b)\sqrt{4 - (\lambda + b)^2}}{(\lambda - b)(\mu + \lambda)(\mu b + 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} < 0$$

de los que se deduce que existirá un único policiclo de las características que estamos investigando, si y sólo si $F(\lambda) > 0$, de modo que vamos a estudiar el signo de $F(\lambda)$, y para ello analizamos el signo de la derivada

$$F'(\lambda) = \frac{-2(b^2 + \lambda b - 2) \ln b + (\lambda - b)^2}{(\lambda - b)^2 \sqrt{4 - (\lambda - b)^2}}$$

que se anulará en las raíces del numerador:

$$\bar{\lambda}_1 = \sqrt{\ln b(b^2 \ln b + 4b^2 - 4)} + b \ln b + b$$

$$\bar{\lambda}_2 = -\sqrt{\ln b(b^2 \ln b + 4b^2 - 4)} + b \ln b + b$$

La primera de estas dos raíces se puede comprobar que es siempre mayor que b , por lo que queda fuera de nuestro dominio, en cuanto a la otra, siempre es menor que b , pero puede ser mayor o menor que $-b - 2$, según que b sea mayor o menor respectivamente que la única solución $b_0 = 0.278464\dots$ de la ecuación

$$-\sqrt{\ln b(b^2 \ln b + 4b^2 - 4)} + b \ln b + 2b + 2 = 0$$

Luego si $b < b_0$, la derivada $F'(\lambda)$ nunca se anula, por tanto F es monótona, pero si calculamos los límites

$$\lim_{\lambda \rightarrow -(b+2)^+} F(\lambda) = 0 \qquad \lim_{\lambda \rightarrow -b^-} F(\lambda) = -\infty$$

concluimos que ha de ser negativa, por consiguiente no existen policiclos heteroclinos cuando $\lambda \in (-b - 2, b)$ y $0 < b < b_0$.

Pero si $b > b_0$, la derivada se anula en el único punto $\bar{\lambda}_2$. Ahora bien,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -(b+2)^+} F'(\lambda) = +\infty \cdot \text{signo} \left(\frac{\ln b}{b+1} + 1 \right)$$

y puede comprobarse, analizando la ecuación $\frac{\ln b}{b+1} + 1 = 0$ que $\text{signo} \left(\frac{\ln b}{b+1} + 1 \right) = \text{signo}(b - b_0) = 1$. Luego F es positiva a la derecha de $-b - 2$. Si fuera $F(\bar{\lambda}_2) \leq 0$, entonces debería haber un punto $\alpha \in (-b - 2, \bar{\lambda}_2]$ tal que $F(\alpha) = 0$, pero entonces, aplicando el Teorema de Rolle en el intervalo $(-b - 2, \alpha]$, llegaríamos a que la derivada F' se anula en un punto distinto de $\bar{\lambda}_2$, pero eso no puede ocurrir, porque hemos establecido más atrás que F' sólo se anula en $\bar{\lambda}_2$. En conclusión, ha de ser $F(\bar{\lambda}_2) > 0$.

Por lo tanto, al ser F monótona en $(\bar{\lambda}_2, b)$ y tener signos distintos en los extremos de ese intervalo, ha de existir un único punto λ_a en el que $F(\lambda_a) = 0$. Así pues, cuando $b > b_0$ habrá un único policiclo heterocliño si $\lambda \in (-b - 2, \lambda_a)$, y no habrá ninguno si $\lambda \in (\lambda_a, b)$.

b) $-\infty < \lambda < -b - 2$, el equilibrio del origen es un nodo propio estable

Procedemos de manera análoga al apartado anterior, calculando los límites

$$\lim_{\mu \rightarrow -(1/b)^-} G(\mu, \lambda) = -\infty$$

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} G(\mu, \lambda) = \text{ArgCth} \frac{-(\lambda + b)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} - \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{\lambda - b} \ln b = F(\lambda)$$

y la derivada

$$\frac{\partial G}{\partial \mu} = -\frac{(\mu + b)(1 - \lambda b)\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{(\lambda - b)(\mu + \lambda)(\mu b + 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} < 0$$

de modo que como antes, existirá un único policiclo heteroclino si y sólo si $F(\lambda) > 0$, así que vamos a estudiar el signo de $F(\lambda)$, y para ello analizamos el signo de

$$F'(\lambda) = \frac{2(b^2 + \lambda b - 2) \ln b - (\lambda - b)^2}{(\lambda - b)^2 \sqrt{(\lambda - b)^2 - 4}}$$

que como es evidente, se anula en los mismos puntos $\bar{\lambda}_1$ y $\bar{\lambda}_2$ que la derivada $F'(\lambda)$ del apartado anterior, lo que permite afirmar que si $b > b_0$, la derivada $F'(\lambda)$ nunca se anula, por tanto F es monótona, pero si calculamos los límites

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = +\infty \quad \lim_{\lambda \rightarrow -(b+2)^-} F(\lambda) = 0$$

concluimos que ha de ser positiva, luego existe un único policiclo heteroclino para todo $\lambda \in (-\infty, -b - 2)$ y $b > b_0$.

Pero si $b < b_0$, la derivada se anula en el único punto $\bar{\lambda}_2$ en el que $F(\lambda)$ ha de ser negativa, lo que se demuestra con argumentos similares a los empleados en el apartado a). De modo que al ser monótona en $(-\infty, \bar{\lambda}_2)$ y tener signos distintos en los extremos de ese intervalo, ha de existir un único punto λ_a en el que $F(\lambda_a) = 0$. Así pues, cuando $b < b_0$ habrá un único policiclo heteroclino si $\lambda \in (-\infty, \lambda_a)$, y no habrá ninguno si $\lambda \in (\lambda_a, -b - 2)$.

c) $\lambda = -b - 2$, el equilibrio del origen es un nodo impropio estable

El análisis ahora es algo más sencillo y como antes calculamos los límites

$$\lim_{\mu \rightarrow -(1/b)^-} G(\mu, \lambda) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\mu \rightarrow -\infty} G(\mu, \lambda) = 1 + \frac{\ln b}{b + 1}$$

y la derivada

$$\frac{\partial G}{\partial \mu} = -\frac{(\mu + b)(b + 1)}{(b - \mu + 2)(\mu b + 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} < 0$$

de los que se deduce que para $\lambda = -b - 2$ habrá un único policiclo heteroclino si y sólo si $1 + \frac{\ln b}{b+1} > 0$. Pero es fácil comprobar que la ecuación $1 + \frac{\ln b}{b+1} = 0$ tiene como única solución el valor b_0 encontrado en el apartado a), luego si $b > b_0$ hay un único policiclo heteroclino, y si $b < b_0$ no hay ninguno.

De los análisis efectuados en estos tres apartados, se deduce que existe un único valor $\lambda_a \in (\infty, b)$ tal que si $\lambda < \lambda_a$ el sistema tiene un único policiclo heteroclino y si $\lambda > \lambda_a$ no tiene ninguno. Ello permite definir una función μ_{HT} cuyo dominio es el intervalo $(-\infty, \lambda_a)$ de tal forma que si para los valores λ_0 y μ_0 de los parámetros λ y μ , el sistema dinámico tiene un policiclo heteroclino, entonces $\mu_0 = \mu_{HT}(\lambda_0)$. La recta de ecuación $\lambda = \lambda_a$ es por propia naturaleza, asíntota vertical de la gráfica de la función μ_{HT} .

Por último, investiguemos la posible existencia de asíntotas horizontales. En los tres apartados anteriores hemos calculado

$$\lim_{\mu \rightarrow -(1/b)^-} G(\mu, \lambda) = -\infty \quad \forall \lambda \in (-\infty, b)$$

lo que indica que para todos los valores de λ que estamos considerando, la función $G(\mu, \lambda)$ es negativa cuando μ está próximo (aunque menor) a $-\frac{1}{b}$. Pero veamos ese signo para otros valores de μ , calculando el límite

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\mu, \lambda) = \\ & = \text{ArgCth} \frac{-(\mu - b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} + \frac{1}{2} \ln \frac{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} = \\ & = H(\mu) \end{aligned}$$

y también

$$\lim_{\mu \rightarrow -(1/b)^-} H(\mu) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\mu \rightarrow -\infty} H(\mu) = +\infty$$

$$H'(\mu) = \frac{-(\mu + b)b}{(\mu b + 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} < 0$$

de modo que podemos afirmar que $H(\mu)$ se anula una sola vez en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{b}\right)$. Si ahora llamamos μ_a al valor de μ en el que tal cosa ocurre, tendremos que cuando $\mu_a < \mu < -\frac{1}{b}$, la función $G(\mu, \lambda)$ permanece negativa, luego no hay policiclos heteroclinos. Pero si $-\infty < \mu < \mu_a$ ocurre lo contrario, con lo que la recta de ecuación $\mu = \mu_a$ marca la separación entre ambos comportamientos. Se trata de una asíntota horizontal de la gráfica de μ_{HT} . □

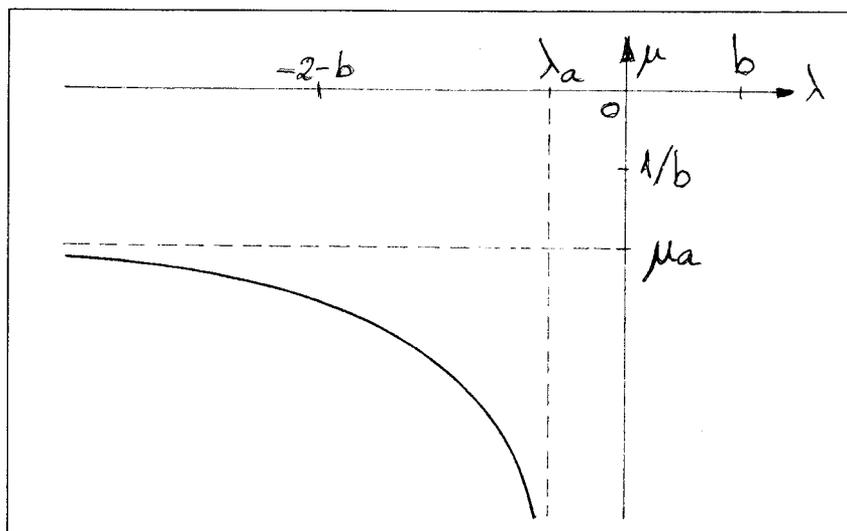


Figura 2.24: Curva de policiclos heteroclinos en el plano de bifurcaciones.

NOTA 1: Tal y como se ha obtenido la función μ_{HT} , es evidente que la igualdad $\mu = \mu_{HT}(\lambda)$ equivale a $h(\mu_i) = -\mu_e$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} \mu < \mu_{HT}(\lambda) & \text{ equivale a } h(\mu_i) < -\mu_e \\ \mu > \mu_{HT}(\lambda) & \text{ equivale a } h(\mu_i) > -\mu_e \end{aligned}$$

NOTA 2: En la Figura 2.24 se muestra la gráfica de la función μ_{HT} .

Pero el sistema también presenta trayectorias homoclinas. La situación es muy parecida a la que encontramos en el Capítulo anterior, con la única diferencia de que ahora la simetría con respecto al origen del plano de fases obliga a que las homoclinas sean dos y simétricas. Por lo demás el comportamiento es tan parecido que en las dos Propositiones que siguen, nos remitimos a las Propositiones 1.23 y 1.24 del Capítulo anterior.

Proposición 2.31 *En el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, consideremos que el parámetro $0 < b < 1$ tiene un valor prefijado. Entonces para cada valor del parámetro $\lambda \in \left(\frac{1}{b}, +\infty\right)$, existe un único valor del parámetro $\mu \in (-b, 2+b)$ para el que el sistema tiene dos trayectorias homoclinas que comienzan y terminan en el equilibrio del origen y son simétricas respecto del mismo.*

DEMOSTRACIÓN: Para que el sistema dinámico tenga trayectorias homoclinas, es necesario que al menos uno de los equilibrios sea una silla. Si lo es el de la región I, entonces

por la simetría con respecto al origen del plano de fases, también lo será el de la región III. Ahora bien, una trayectoria homoclina que comience y termine en uno de estos equilibrios no es, evidentemente, simétrica con respecto al origen del plano de fases, luego de acuerdo con la Proposición 2.10 sólo tiene partes en dos regiones. Pero en tal caso, el arco de homoclina que cae en la región II, entra y sale de ella por la misma frontera y no rodea al origen. Trayectorias que presenten este comportamiento en la región II sólo son posibles si el equilibrio de la misma es una silla. Llegamos a que los tres equilibrios han de ser sillas, lo que según las Tablas 2.3 y 2.4 sólo puede ocurrir si $\det A_I = \mu b + 1 < 0$ y $\det A_{II} = 1 - \lambda b < 0$. Pero de acuerdo con la Proposición 2.3 en tal caso los equilibrios de las regiones I y III serían virtuales y no podrían por tanto ser origen y final de trayectorias homoclinas.

Así pues, para la existencia de homoclinas es necesario que el equilibrio del origen sea una silla, en tanto que los equilibrios de las regiones I y III pueden ser focos, centros o nodos. Pero argumentando como en la demostración de la Proposición 1.23 del Capítulo anterior, descartaremos los dos últimos casos. Igualmente, siguen siendo válidos los argumentos allí empleados que indican que para la existencia de homoclinas, han de ser $\frac{1}{b} < \lambda$ y $-b < \mu < 2 + b$.

Vamos a efectuar una transformación lineal en las variables de estado, dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

que traslada la frontera L_1 paralelamente a sí misma hasta el origen, y que transforma el sistema dinámico en las regiones I y II en

$$\left. \begin{array}{l} x' = -\mu x - y \\ y' = x - by + 1 - \lambda b \end{array} \right\} \quad \text{si} \quad 0 \leq x$$

$$\left. \begin{array}{l} x' = \lambda x - y \\ y' = x - by + 1 - \lambda b \end{array} \right\} \quad \text{si} \quad -2 < x < 0$$

Nos despreocuparemos de la región III, puesto que por la simetría es suficiente estudiar el comportamiento dinámico del sistema a uno y otro lado de la frontera L_1 .

Observemos el hecho notable de que el sistema transformado es formalmente idéntico al sistema con una sola frontera estudiado en el Capítulo anterior, sin más que hacer $a = \lambda b - 1$. Ello permite que podamos argumentar como en la demostración de la Proposición 1.23 y llegar a las mismas conclusiones. □

Proposición 2.32 *En el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, consideremos que el parámetro $0 < b < 1$ tienen un valor prefijado. Entonces existe una*

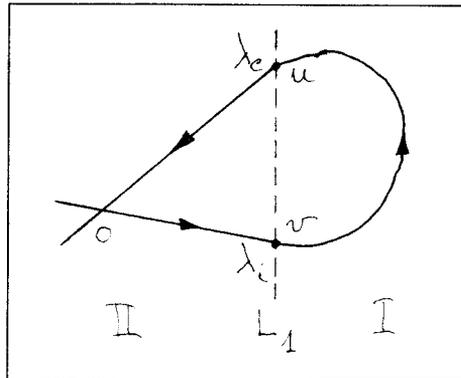


Figura 2.25:

única función $\mu_H : \left(\frac{1}{b}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que si λ_0 y μ_0 son valores de los parámetros λ y μ para los que el sistema tiene un par de trayectorias homoclinas que comienzan y terminan en el equilibrio del origen y son simétricas respecto del mismo, se verifica $\mu_0 = \mu_H(\lambda_0)$. Esa función está definida implícitamente por la ecuación

$$\frac{3\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \left(\frac{4 + (\lambda + b)(\mu - b)}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4} \cdot \sqrt{4 - (\mu - b)^2}} \right) + \frac{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}{2(\mu + b)} \cdot \ln \left(\frac{(b^2 + 1)(\lambda + b) - 4b + (b^2 - 1)\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{(b^2 + 1)(\lambda + b) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}} \right) = 0$$

es estrictamente decreciente, y su gráfica tiene por asíntota horizontal, la recta de ecuación $\mu = \mu_a$, donde μ_a es la única solución que para cada valor de $0 < b < 1$ tiene la ecuación

$$\frac{3\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{\mu_a - b}{\sqrt{4 - (\mu_a - b)^2}} + \frac{\sqrt{4 - (\mu_a - b)^2}}{(\mu_a + b)} \cdot \ln b = 0$$

DEMOSTRACIÓN: La existencia de la función μ_H ha quedado establecida en la Proposición 2.31. Para obtener su expresión analítica observemos que por ser focos los equilibrios de las regiones I y III, y con referencia a las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación f que aparecen en la página 107, la condición necesaria y suficiente para la existencia de homoclinas, ilustrada en la Figura 2.25 es que se cumplan las dos igualdades

$$u(\tau_1) = \lambda_i \quad \text{y} \quad v(\tau_1) = \lambda_c$$

donde λ_i y λ_e están dadas en la página 114. Ahora bien, de acuerdo con las Proposiciones 2.20 y 2.24, entre $u, v, \lambda_i, \lambda_e$, y sus homólogas $\hat{u}, \hat{v}, \hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_e$ del sistema con una sólo frontera, se dan las relaciones

$$\begin{aligned} u &= \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{u} & \lambda_i &= \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{\lambda}_i \\ v &= \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{v} & \lambda_e &= \lambda - \frac{1 - \lambda b}{a} \cdot \hat{\lambda}_e \end{aligned}$$

de las que se deduce que la condición necesaria y suficiente de existencia de homoclinas, queda de esta forma

$$\hat{u}(\tau_1) = \hat{\lambda}_i \quad y \quad \hat{v}(\tau_1) = \hat{\lambda}_e$$

Pero estas dos igualdades son exactamente las mismas que las que figuran en la Proposición 1.24 del Capítulo anterior, así que nos remitimos allí para el resto de la demostración. □

NOTA 1: Tras esta demostración, es evidente que la función μ_H y su homónima de la Proposición 1.24 son completamente idénticas. Como allí podemos escribir

$$\begin{aligned} \mu < \mu_H(\lambda) & \quad \text{ó} \quad \lambda < \lambda_H(\mu) & \text{equivalen a} & \quad f(\lambda_e) > \lambda_i \\ \mu > \mu_H(\lambda) & \quad \text{ó} \quad \lambda > \lambda_H(\mu) & \text{equivalen a} & \quad f(\lambda_e) < \lambda_i \end{aligned}$$

NOTA 2: En la Figura 1.26 (página 61) se muestra la gráfica de la función μ_H que acabamos de estudiar.

A continuación vamos a estudiar el sistema en la curva de ecuación $1 - \lambda b = 0$. Destacamos esta curva porque en ella, el sistema presenta la singularidad de exhibir infinitos equilibrios.

Proposición 2.33 *Consideremos el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, y sean*

$$1 - \lambda b = 0 \quad y \quad 0 < b < 1$$

En tal caso, hay infinitos equilibrios que son los puntos del segmento

$$y = \lambda x \quad -1 \leq x \leq 1$$

y además se cumple

- a) *si $2 + b \leq \mu$ hay un continuo de trayectorias heteroclinas;*
- b) *si $-b < \mu < 2 + b$, hay una única órbita periódica estable que rodea a todos los equilibrios;*

c) si $\mu < -b$ pero $\mu \neq -\frac{1}{b}$, no hay policiclos.

DEMOSTRACIÓN: La existencia de los infinitos equilibrios está demostrada en la Proposición 2.5. Estudiemos ahora la dinámica en la región II: De la Tabla 2.4 se deduce que los autovalores de la matriz A_{II} son $z_1 = 0$ y $z_2 > 0$ si $0 < b < 1$, y $z_2 < 0$ si $b > 1$, mientras que $z_2 = 0$ si $b = 1$. En cualquier caso, al ser reales, la solución general del sistema dinámico, que aparece en el Apéndice A es

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= k_1 + k_2 e^{z_2 t} \\ y(t) &= \frac{k_1}{b} + k_2 \left(\frac{1}{b} - z_2 \right) e^{z_2 t} \end{aligned} \right\} \quad \text{si } b \neq 1$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t(k_1 - k_2) + k_1 \\ y(t) &= t(k_1 - k_2) + k_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{si } b = 1$$

Podemos eliminar t entre estas ecuaciones, resultando

$$y = bx + \frac{1 - b^2}{b} k_1 \quad \text{si } b \neq 1$$

$$y = x - k_1 - k_2 \quad \text{si } b = 1$$

que son las ecuaciones en el plano de las fases de las trayectorias en la región II. Se trata de familias de segmentos paralelos. Nótese que cuando $b = 1$, las trayectorias son paralelas al segmento de los equilibrios. No obstante, nos limitaremos al caso de que $0 < b < 1$

Vamos a determinar ahora la semiaplicación h . Para ello observemos que toda trayectoria que entra en la región II por la frontera L_1 , lo hace por un punto de ordenada $v > \lambda$ (Proposición 2.8). Pero si esta trayectoria pasa a la región III, es por un punto de la otra frontera de ordenada $v_1 < -\lambda$ (Figura 2.26). Es fácil comprobar que los extremos inferiores de los valores de v y v_1 son

$$\left. \begin{aligned} v_{10} &= \frac{1 - 2b^2}{b} \\ v_0 &= \frac{1}{b} \end{aligned} \right\} \quad \text{si } 0 < b < 1$$

En cuanto a los extremos superiores, no existen ya que ni v ni v_1 están acotadas superiormente. A continuación usamos las condiciones iniciales

$$x(0) = 1 \quad y(0) = v$$

para calcular las constantes de integración k_1 y k_2 , quedando las ecuaciones de las trayectorias

$$y = b(x - 1) + v \quad 0 < b$$

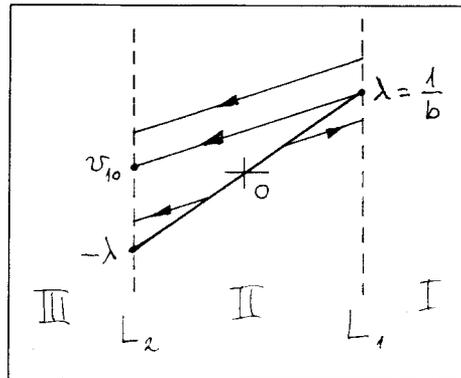


Figura 2.26:

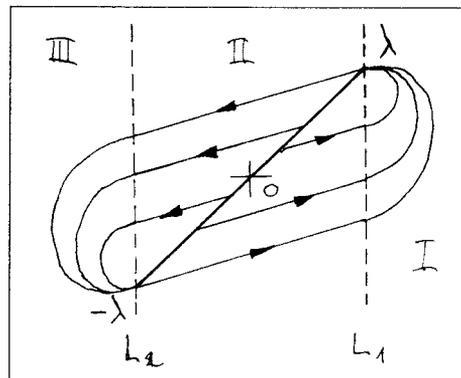


Figura 2.27:

sustituyendo ahora las coordenadas del punto $(-1, v_1)$ resulta finalmente

$$v_1 = h(v) = v - 2b$$

Determinada la semiaplicación h , prosigamos con la demostración:

a) Si $2 + b \leq \mu$, los equilibrios de las fronteras son nodos estables de modo que cualquier trayectoria que entre en las regiones I o III se precipita hacia ellos (Figura 2.27). Ahora bien, de cada uno de los infinitos equilibrios de la región II parten dos trayectorias rectilíneas que se dirigen una a cada frontera. Cuando entran en las regiones I y III se dirigen a los nodos estables citados. Se trata pues de un par de trayectorias heteroclinas.

b) En la doble desigualdad $-b < \mu < 2 + b$, la de la derecha indica que los equilibrios de las fronteras son focos, y la de la izquierda que son estables (Tabla 2.3) Si usamos

la semiaplicación f que se obtuvo en la página 108 y la semiaplicación h que se acaba de obtener, para construir la aplicación de Poincaré P , resultará

$$P(u) = \left(u - \frac{1}{b}\right) e^{\gamma_1 \pi} + 2b - \frac{1}{b} \quad u \in (-\infty, \lambda]$$

Al resolver la ecuación $P(u) = u$, obtenemos la solución única

$$u^* = \frac{1}{b} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \pi} + 1}{e^{\gamma_1 \pi} - 1} - \frac{2b}{e^{\gamma_1 \pi} - 1}$$

para la que podemos verificar que

$$u^* - \frac{1}{b} = \frac{2}{e^{\gamma_1 \pi} - 1} \left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$$

ya que $\gamma_1 < 0$ por ser los equilibrios de las fronteras estables, y $0 < b < 1$. Así pues, $u^* < \frac{1}{b} = \lambda$, con lo que se demuestra que u^* es un punto fijo de P . Como además $P'(u^*) = e^{\gamma_1 \pi} < 1$, resulta que hay una única órbita periódica que además es estable.

c) La desigualdad $\mu < -b$ implica que traza $A_I = -(\mu + b) > 0$, mientras que la igualdad $1 - \lambda b = 0$ implica que traza $A_{II} = \lambda - b = \frac{1}{b} - b > 0$ ya que $0 < b < 1$. Podemos pues aplicar la Proposición 2.14 y concluir que no existe ningún tipo de policiclo. \square

Los dos próximos Teoremas culminan el estudio del conjunto de bifurcaciones en el caso $0 < b < 1$. En el primero de ellos, tratamos el caso de que $1 - \lambda b > 0$, y en el segundo, el de que $1 - \lambda b < 0$. La única razón para esta distinción está en el intento de hacer más clara la exposición.

Teorema 2.34 *Consideremos el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing, y sean $0 < b < 1$ y $1 - \lambda b > 0$. Entonces*

- a) Si $\mu b + 1 \geq 0$, hay un único equilibrio situado en el origen que verifica
- a1) si $(\mu + b)(\lambda - b) > 0$, está rodeado por una única órbita periódica que es estable si $\lambda - b > 0$ e inestable si $\lambda - b < 0$;
 - a2) si $(\mu + b)(\lambda - b) < 0$ no hay policiclos.
- b) Si $\mu b + 1 < 0$ hay un equilibrio en cada región siendo los de las regiones I y III sillas y verificándose
- b1) si $\lambda - b > 0$ no hay policiclos

b2) si $\lambda - b < 0$ y es $\mu_{HT}(\lambda)$ la función estudiada en la Proposición 2.30, entonces

b21) si $\mu > \mu_{HT}(\lambda)$, hay una única órbita periódica inestable que rodea al equilibrio de la región II

b22) si $\mu < \mu_{HT}(\lambda)$ no hay policiclos.

DEMOSTRACIÓN: Para un seguimiento comprensivo de la demostración que comienza, es conveniente consultar frecuentemente la Figura 2.28

a) Puesto que $\det A_I = \mu b + 1$ y $\det A_{II} = 1 - \lambda b$, de las Proposiciones 2.3 y 2.4 se deduce que la condición $\mu b + 1 \geq 0$ implica que el sistema sólo tiene un equilibrio que está situado en el origen.

a1) Teniendo en cuenta que traza $A_I = -(\mu + b)$ y traza $A_{II} = \lambda - b$, la existencia de una única órbita periódica estable o inestable, se sigue del Teorema 2.19.

a2) Si $(\mu + b)(\lambda - b) < 0$, la Proposición 2.14 excluye la existencia de todo tipo de policiclos.

b) La desigualdad $\mu b + 1 < 0$ implica de acuerdo con el enunciado que se ha de verificar $\det A_I \cdot \det A_{II} < 0$, así que según la Proposición 2.3, hay tres equilibrios, uno en cada región, y tal como afirma la Tabla 2.3, los de las regiones I y II son sillars.

b1) si $\lambda - b > 0$, se verifica que traza $A_{II} = \lambda - b > 0$, y como $\mu b + 1 < 0$ junto con $0 < b < 1$ implican que traza $A_I = -(\mu + b) > 0$, estamos en el mismo caso que el apartado a2).

b2) sea $\lambda - b < 0$, y vamos a establecer una condición necesaria para la existencia de órbitas periódicas. Mediante consideraciones similares a las efectuadas al principio de la demostración de la Proposición 2.29 es fácil concluir que de haber alguna órbita periódica, ésta ha de tener partes en las tres regiones. Cuando pase de la región I a la II ha de hacerlo por un punto de la frontera L_1 de ordenada v que cumpla $\lambda < v < \mu_i$, como indica la Figura 2.29

Pero cuando esa órbita corte a la otra frontera, ha de verificarse $v_0 < v$ según la misma Figura, luego para que exista tal órbita, es necesario que $v_0 < \mu_i$.

De la página 111 podemos tomar el valor de μ_i

$$\mu_i = \lambda - \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{-(\mu + b) + \sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2}$$

de modo que si consideramos a μ_i como función de μ , es fácil comprobar que

$$\frac{d\mu_i}{d\mu} = \frac{(1 - \lambda b) \left((b^2 + 1)(b - \mu) - 4b - (b^2 - 1)\sqrt{(\mu - b)^2 - 4} \right)}{2(\mu b + 1)^2 \sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} > 0$$

pero además $\lim_{\mu \rightarrow -(1/b)^-} \mu_i = +\infty$.

Por ser la semiaplicación h creciente, también lo será su inversa, por consiguiente, fijado b y $\lambda < b$, como la igualdad $\mu = \mu_{HT}$ equivale según la Nota 1 de la Proposición

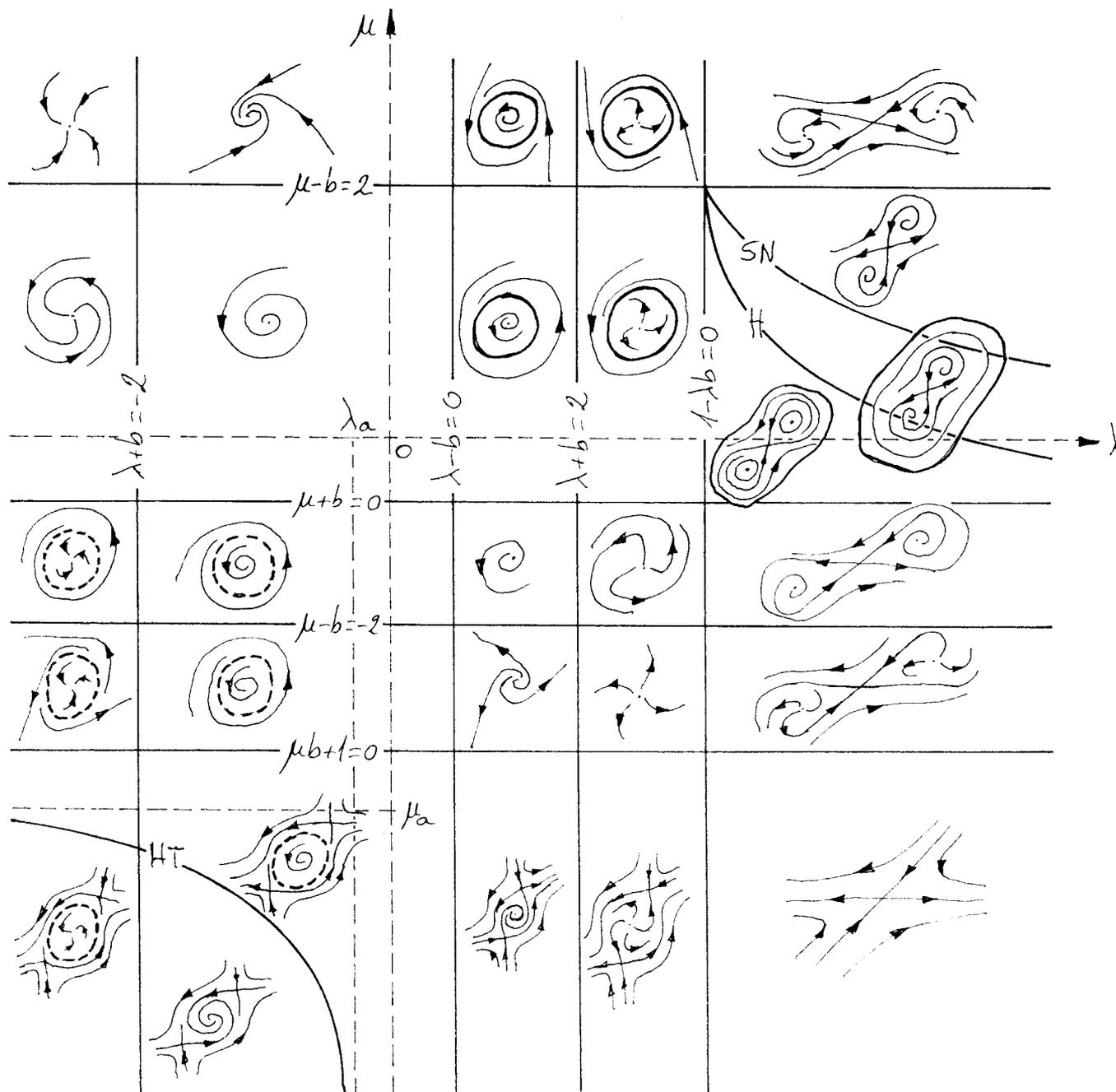


Figura 2.28: El conjunto de bifurcaciones ($0 < b < 1$).

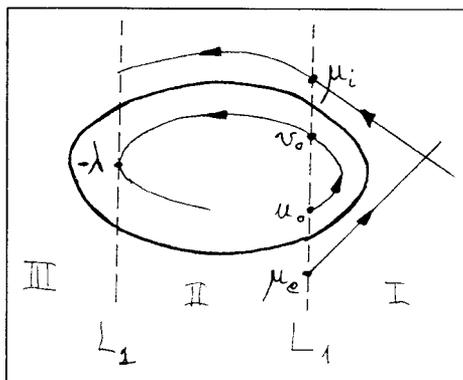


Figura 2.29:

2.30 a esta otra $h(\mu_i) = -\mu_e$ y como ha de ser forzosamente $\mu_e < \lambda$, tenemos

$$-\mu_e > -\lambda \implies h^{-1}(-\mu_e) > h^{-1}(-\lambda) \implies \mu_i > v_0$$

lo que indica que para cada b y para cada $\lambda < b$, si $\mu_{HT} \leq \mu < -\frac{1}{b}$, tenemos $\mu_i > v_0$, y por lo tanto que puede existir órbita periódica. En la Figura 2.29 se ilustra la situación que acabamos de describir.

Por otra parte, cuando la supuesta órbita periódica entra en la región I desde la II, ha de hacerlo por un punto de la frontera L_1 de ordenada u que cumpla $\mu_e < u < u_0$ donde $u_0 = f(v_0)$ (véase la Figura 2.29), en cuyo caso, tenemos que la aplicación de Poincaré $P(u) = -h(f^{-1}(u))$, tiene como dominio el intervalo $(\mu_e, u_0]$. La aplicación P es creciente por ser composición de dos funciones decrecientes, y su recorrido es

$$P((\mu_e, u_0]) = -h(f^{-1}((\mu_e, u_0])) = -h([v_0, \mu_i]) = (-h(\mu_i), \lambda]$$

Además podemos escribir

$$\lim_{u \rightarrow \mu_e^+} [P(u) - u] = -h(\mu_i) - \mu_e \quad \text{y} \quad P(u_0) - u_0 = \lambda - u_0 > 0$$

b21) La desigualdad $\mu > \mu_{HT}$ equivale, según la Nota 1 de la Proposición 2.30 a $h(\mu_i) > -\mu_e$, lo que implica, según las consideraciones que acabamos de hacer, que la ecuación $P(u) - u = 0$ tiene alguna solución u^* en el intervalo $(\mu_e, u_0]$, y por tanto que el sistema dinámico posee alguna órbita periódica. Para demostrar que es única, observemos que de acuerdo con las propiedades de las semiaplicaciones f y h estudiadas en las Proposiciones 2.22, 2.25 y 2.26 tenemos

$$-1 < f'(v_0) < f'(v) < 0 \quad \text{y} \quad -\infty < -h'(v) < -h'(\mu_i) < -1 \quad \forall v \in [v_0, \mu_i)$$

de donde se deduce que

$$P'(u) - 1 = -h'(f^{-1}(u)) (f^{-1}(u))' - 1 = -\frac{h'(v)}{f'(v)} - 1 > 0 \quad \forall u \in (\mu_e, u_0]$$

Queda demostrado que $P(u) - u$ es estrictamente creciente, y por tanto que la solución u^* es única. Existe pues una sola órbita periódica, y como además $P'(u^*) > 1$, resulta ser inestable.

b22) Sea ahora $\mu < \mu_{HT}$. Esta desigualdad equivale a $h(\mu_i) < -\mu_e$, lo que implica según las anteriores consideraciones que $P(u) - u$ no cambia de signo en su dominio, luego no hay soluciones de la ecuación $P(u) - u = 0$ y por tanto, tampoco órbitas periódicas ni policiclos constituidos por heteroclinas que conecten las sillas de las regiones I y III. \square

Teorema 2.35 *Consideremos el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing y sean $0 < b < 1$ y $1 - \lambda b < 0$. Entonces*

a) *si $\mu b + 1 \leq 0$ no hay policiclos;*

b) *si $\mu b + 1 > 0$ hay un equilibrio en cada región, de modo que*

b1) *si $-\frac{1}{b} < \mu < -b$, no hay policiclos;*

b2) *si $-b < \mu < \mu_H(\lambda)$ donde $\mu_H(\lambda)$ es la función estudiada en la Proposición 2.32, hay dos órbitas periódicas inestables que cada una rodea a un equilibrio de los situados en las regiones I y III, y una órbita periódica estable que rodea a los tres equilibrios;*

b3) *para cada $\lambda > \frac{1}{b}$ existe un conjunto no vacío $M_\lambda \subset (-b, 2 + b)$ de valores de μ de tal manera que*

* *si $\mu_H(\lambda) < \mu < \inf M_\lambda$, el sistema tiene dos órbitas periódicas, una estable que rodea a la otra inestable, que a su vez rodea a los tres equilibrios;*

* *si $\sup M_\lambda < \mu$, no hay policiclos;*

* *si $\mu \in M_\lambda$, el sistema tiene una única órbita periódica que es estable desde fuera e inestable desde dentro, y que rodea a los tres equilibrios;*

b4) *si $2 + b \leq \mu$, no hay policiclos.*

DEMOSTRACIÓN: Para un seguimiento comprensivo de la demostración que comienza, es conveniente consultar frecuentemente la Figura 2.28

a) Las dos desigualdades $\mu b + 1 < 0$ y $1 - \lambda b < 0$ implican, de acuerdo con las Tablas 2.3 y 2.4 que el sistema tiene un solo equilibrio, siendo los de las regiones I y III sillas virtuales, lo que según la Proposición 2.12 impide la existencia de policiclos.

b) Si $\mu b + 1 > 0$, como $1 - \lambda b < 0$, de la Proposición 2.3 se deduce que el sistema tiene tres equilibrios.

Estudiemos ahora la derivada P' de la aplicación de Poincaré:

$$P'(u) = \left(-h(f^{-1}(u))\right)' = -h'(f^{-1}(u)) \cdot (f^{-1})'(u) = -\frac{h'(v)}{f'(v)}$$

En primer lugar, observemos que $P'(u) > 0$, ya que P es composición de dos funciones $-h$ y f^{-1} que son decrecientes. Ahora vamos a analizar P' en los extremos de su dominio. Recurriendo a las Proposiciones 2.21 y 2.27, podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \lambda_e^+} (-h'(v)) &= -\infty & \lim_{v \rightarrow +\infty} (-h'(v)) &= -1 \\ \lim_{v \rightarrow \lambda_e^+} f'(v) &= f'(\lambda_e) < 0 & \lim_{v \rightarrow +\infty} f'(v) &= -e^{-\gamma_1 \pi} < -1 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow f(\lambda_e)^-} P'(u) &= \lim_{v \rightarrow \lambda_e^+} \frac{-h'(v)}{f'(v)} = \frac{-\infty}{f'(\lambda_e)} = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} P'(u) &= \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{-h'(v)}{f'(v)} = \frac{-1}{-e^{-\gamma_1 \pi}} = e^{\gamma_1 \pi} \begin{cases} < 1 & \text{si } \gamma_1 < 0 \\ \geq 1 & \text{si } \gamma_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora calculamos la derivada segunda

$$P''(u) = \frac{d}{dv} \left(\frac{-h'(v)}{f'(v)} \right) \cdot \frac{1}{f'(v)} = -\frac{h''(v)f'(v) - h'(v)f''(v)}{(f'(v))^3}$$

que de acuerdo con los signos de f' , f'' , h' y h'' , estudiados en las Proposiciones 2.21 y 2.27, resulta ser positiva.

La derivada $(P(u) - u)' = P'(u) - 1$ cambia de signo en los extremos de su dominio, así que ha de pasar por cero, y como su derivada segunda $(P(u) - u)'' = P''(u)$ es positiva en todo su dominio, ha de tener un mínimo relativo en un punto \bar{u} que tiene que ser único puesto que $P'(u) - 1$ es creciente. Además ese mínimo ha de ser absoluto porque $P(u) - u$ es cóncava desde arriba.

b1) La desigualdad $\mu < -b$ implica que traza $A_I = -(\mu + b) > 0$. Pero como además es $1 - \lambda b < 0$, resulta que $\lambda > \frac{1}{b} > b$ por ser $b < 1$, de modo que traza $A_{II} = \lambda - b > 0$. Como ambas trazas tienen el mismo signo, la Proposición 2.14 impide la existencia de cualquier tipo de policiclo.

b2) Cuando $-b < \mu < \mu_H(\lambda)$, el foco de la región I es estable, ya que su traza $-(\mu + b)$ es negativa, y por tanto $\gamma_1 < 0$. Además, por ser $\mu < \mu_H(\lambda)$, se verifica $f(\lambda_e) > \lambda_i$, ya que ambas desigualdades son equivalentes de acuerdo con Nota 1 de la Proposición 2.32, así que

$$P(f(\lambda_e)) - f(\lambda_e) = \lambda_i - f(\lambda_e) < 0$$

Por otra parte

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (P(u) - u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} u \left(\frac{P(u)}{u} - 1 \right) = +\infty$$

ya que $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{P(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} P'(u) = e^{\gamma_1 \pi} < 1$. Así que la función $P(u) - u$ cambia de signo en el intervalo $(-\infty, f(\lambda_e)]$. Su mínimo absoluto $P(\bar{u}) - \bar{u}$ ha de ser por tanto negativo. Entonces, en el intervalo $(-\infty, \bar{u})$, la función es estrictamente decreciente y cambia de signo, en tanto que en el intervalo $(\bar{u}, f(\lambda_e)]$ es estrictamente creciente pero no cambia de signo. Resulta pues que la función $P(u) - u$ tiene en el intervalo $(-\infty, f(\lambda_e)]$ una única solución u^* para la cual, $P'(u) - 1 < 0$. El sistema tiene pues una órbita periódica estable.

Por otra parte, dado que la función μ_H es la misma en el sistema con una y con dos fronteras como ha quedado de manifiesto en la Proposición 2.32, resulta que la hipótesis $-b < \mu < \mu_H(\lambda)$ es idéntica a la del apartado c) del Teorema 1.26 del Capítulo anterior, y como allí se demostró la existencia de una única órbita periódica inestable rodeando al foco estable de la región I, aquí podemos afirmar exactamente lo mismo. Sólo añadir que por la simetría, ahora tiene que existir otra órbita inestable rodeando al foco estable de la región III.

b3) Si $\mu_H(\lambda) < \mu$, entonces, de acuerdo con la Nota 1 de la Proposición 2.32, se verificará $f(\lambda_e) < \lambda_i$ y por tanto $P(f(\lambda_e)) - f(\lambda_e) = \lambda_i - f(\lambda_e) > 0$. Pero si μ , aun siendo mayor, permanece próximo a $\mu_H(\lambda)$, el mínimo absoluto $P(\bar{u}) - \bar{u}$ continuará siendo negativo, así que la función $P(u) - u$ es positiva en los extremos de su dominio $(-\infty, f(\lambda_e)]$, pero en el punto interior en el que alcanza su mínimo absoluto, es negativa. Como además es cóncava, resulta que en el intervalo $(-\infty, \bar{u})$ cambia de signo y es estrictamente decreciente. Entonces tiene una solución única u_1^* en ese intervalo, con $P'(u_1^*) < 1$ que corresponde a una órbita periódica estable. Análogamente, en el intervalo $(\bar{u}, f(\lambda_e)]$ también cambia de signo, pero siendo ahora estrictamente creciente. Existe en ese intervalo una solución única u_2^* con $P'(u_2^*) > 1$ que corresponde a una órbita periódica inestable.

Obsérvese que por ser u_1^* y u_2^* las ordenadas de los puntos de la frontera L_1 por los que pasan estas órbitas de la región II a la I, y ser $u_1^* < u_2^*$, la órbita estable contiene en su interior a la inestable.

Por otra parte, estamos en la hipótesis de que $\mu_H(\lambda) < \mu$, y del comentario hecho al final del apartado anterior, se deduce que estamos en las mismas condiciones que en el

apartado *d*) del Teorema 1.26, luego como allí podemos afirmar que no existen órbitas periódicas con partes en dos regiones. Sólo existen pues las de tres regiones como se acaba de establecer.

Vamos a demostrar a continuación, que para ciertos valores de $\mu > \mu_H(\lambda)$, la aplicación de Poincaré carece de puntos fijos, lo que equivale a $P(\bar{u}) - \bar{u} > 0$. Para ello usaremos una vez más las semiaplicaciones $-h$ y f . Sabemos que $-h$ es cóncava desde arriba y tiene por asíntota en el plano v, u la recta $u + v = 2b$, si probamos que para ciertos valores de μ , la semiaplicación f verifica $f(v) + v \leq 2b$, quedará demostrado que $f(v) < -h(v)$ y por consiguiente que P carece de puntos fijos.

Usando las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación f (página 107), la desigualdad $f(v) + v \leq 2b$ puede escribirse así

$$1 - \frac{\text{Sh } \gamma_1 \tau_1}{\gamma_1 \text{sen } \tau_1} \geq -2 \frac{(\lambda - b)(\mu b + 1)}{(\mu + b)(1 - \lambda b)} \quad \tau_1 \in (\pi, \tau_{10}] \quad \text{con } \pi < \tau_{10} < 2\pi$$

Vamos a acotar inferiormente el primer miembro de esta desigualdad, para lo que observamos

$$\pi < \tau_1 \Rightarrow \gamma_1 \pi > \gamma_1 \tau_1 \Rightarrow -\text{Sh } \gamma_1 \pi < -\text{Sh } \gamma_1 \tau_1 \quad \forall \tau_1 > \pi$$

$$-1 < \text{sen } \tau_1 < 0 \Rightarrow -\gamma_1 > \gamma_1 \text{sen } \tau_1 > 0 \quad \forall \tau_1 \in (\pi, 2\pi)$$

lo que permite establecer en el intervalo $(\pi, \tau_{10}]$ la acotación

$$1 - \frac{\text{Sh } \gamma_1 \tau_1}{\gamma_1 \text{sen } \tau_1} > 1 + \frac{\text{Sh } \gamma_1 \pi}{\gamma_1}$$

Si ahora tomamos límites

$$\lim_{\mu \rightarrow (2+b)^-} \left(1 + \frac{\text{Sh } \gamma_1 \pi}{\gamma_1} \right) = \lim_{\gamma_1 \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\text{Sh } \gamma_1 \pi}{\gamma_1} \right) = +\infty$$

y hacemos lo propio con el segundo miembro de la desigualdad de la que partimos

$$\lim_{\mu \rightarrow (2+b)^-} \left(-2 \frac{(\lambda - b)(\mu b + 1)}{(\mu + b)(1 - \lambda b)} \right) = -\frac{(b + 1)(\lambda - b)}{1 - \lambda b} < +\infty \quad \forall \lambda > \frac{1}{b}$$

observamos que para valores de μ cercanos pero menores que $2 + b$, se verifica la desigualdad propuesta, luego no hay órbitas periódicas.

Como conclusión de este análisis, podemos afirmar que para cada $\lambda > \frac{1}{b}$ existe un conjunto no vacío M_λ de valores de μ tales que

* Si $\mu_H(\lambda) < \mu < \inf M_\lambda$, el sistema tiene dos órbitas periódicas, una estable que rodea a la otra inestable, que a su vez rodea a los tres equilibrios.

* Si $\sup M_\lambda < \mu$, no hay policiclos.

* Si $\mu \in M_\lambda$, entonces, para ese valor de μ , ha de verificarse que $P(\bar{u}) - \bar{u} = 0$ lo que indica que el punto \bar{u} en el que la función alcanza el mínimo, es también punto fijo de P . Como \bar{u} es único, sólo existe una órbita periódica. Pero además, $P'(\bar{u}) - 1 = 0$ y también $P(u) < 1$ si $u < \bar{u}$, y $P(u) > 1$ si $u > \bar{u}$, de donde se deduce que esa órbita periódica es inestable desde dentro y estable desde fuera. \square

NOTA: En la Figura 2.28 se muestra el conjunto de bifurcaciones correspondiente al caso $0 < b < 1$

Con los argumentos empleados en la demostración del Teorema 2.35 no podemos decir más acerca de los conjuntos M_λ . No obstante, podemos aventurar la siguiente Conjetura:

Conjetura: Para cada $\lambda > \frac{1}{b}$, el conjunto M_λ definido en el apartado b3) del Teorema 2.35, tiene un único elemento, de tal manera que es posible definir una función $\mu_{SN} : \left(\frac{1}{b}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ como aquella que a cada $\lambda > \frac{1}{b}$ le hace corresponder el único elemento de M_λ .

En apoyo de esta Conjetura mostramos en la Figura 2.30 la gráfica de la supuesta función μ_{SN} obtenida numéricamente para el valor del parámetro $b = 0.5$

2.5.3 Caso 3.- $b \leq 1$.

El último caso que vamos a analizar corresponde a un comportamiento dinámico del sistema caracterizado por la ausencia de todo tipo de policiclos. Para demostrar que es así tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.36 *Si en el sistema dinámico en la forma de Van der Pol-Duffing se verifica $|b| \geq 1$, entonces el sistema carece de policiclos.*

DEMOSTRACIÓN: Recordando las consideraciones acerca de las simetrías de la página 98, nos limitaremos al caso $b \geq 1$.

De acuerdo con las Figuras 2.9 y 2.10, la única posibilidad de que existan policiclos es que se verifiquen simultáneamente las desigualdades

$$a) \text{ traza } A_I = -(\mu + b) > 0 \quad \text{y} \quad \det A_{II} = 1 - \lambda b > 0$$

o bien estas otras

$$b) \text{ } -2 + b < \mu < 2 + b \quad \text{y} \quad \text{traza } A_{II} = \lambda - b > 0$$

así que nos centraremos en las zonas del plano de bifurcaciones delimitadas por las mismas.

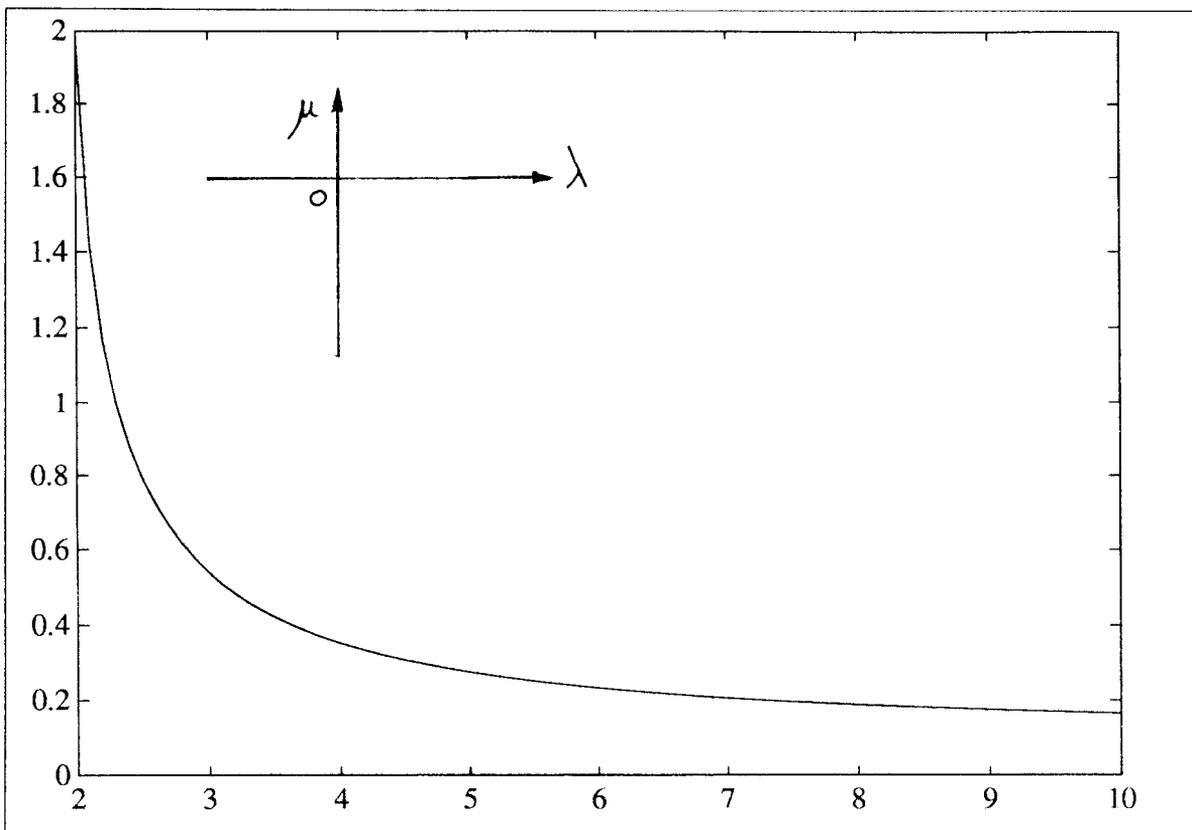


Figura 2.30: La "función" μ_{SN} .

a) La desigualdad traza $A_I = -(\mu + b) > 0$ junto a $b \geq 1$ implica que $\det A_I = \mu b + 1 < 0$, y como $\det A_{II} = 1 - \lambda b > 0$, de las Proposición 2.3 se deduce que hay tres equilibrios, y de las Tablas 2.3 y 2.4 que los de las regiones I y III son sillas y el de la región II un nodo, un foco o un centro. Pero descartamos este último caso, pues para ello tendría que ser $\lambda - b = 0$ y ello no es posible en esta zona del plano de bifurcaciones.

En estas condiciones, los únicos policiclos que podrían existir son órbitas periódicas con partes en las tres regiones comprendidas entre las variedades estable e inestable de las sillas de las regiones I y III, o bien un policiclo constituido por dos trayectorias heteroclinas que conecten los equilibrios de las regiones I y III junto con esos mismos equilibrios.

Para demostrar que no existen tales policiclos, procederemos por reducción al absurdo suponiendo que sí los hay. De acuerdo con el apartado b21) del Teorema 2.34, la condición para que los haya es que $\mu \geq \mu_{HT}(\lambda)$ lo que según la Nota 1 de la Proposición 2.30 equivale a $h(\mu_i) \geq -\mu_e$ (el signo = se da cuando hay un policiclo formado por heteroclinas) donde μ_i y μ_e son las ordenadas de los puntos en los que las variedades inestable y estable de la silla de la región I, cortan a la frontera L_1 .

Por brevedad sólo consideraremos el caso de que el equilibrio del origen sea un foco, ya que si es un nodo, los cálculos son muy similares.

Regresemos a la página 118 para tomar las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación h y escribir

$$v_1 - v = -2\lambda + \beta_2 \frac{2(\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2 + \operatorname{Sh} \gamma_2 \tau_2)}{\operatorname{sen} \tau_2} = -2\lambda + (\lambda - b) \left(1 + \frac{\operatorname{Sh} \gamma_2 \tau_2}{\gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2} \right) < -2\lambda + (\lambda - b)$$

La última desigualdad se debe a que $\gamma_2 < 0$ y a que $\tau_2 \in (0, \tau_0]$ con $0 < \tau_0 < \pi$.

De modo que si $v = \mu_i$ y $v_1 = h(\mu_i)$ tenemos

$$\mu_i > h(\mu_i) + 2\lambda - (\lambda - b) \geq -\mu_e + 2\lambda - (\lambda - b)$$

pero como $\mu_i + \mu_e = 2\lambda + \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1}(\mu + b)$, resulta que $\frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1}(\mu + b) > -(\lambda - b)$, o lo que es lo mismo

$$\frac{\lambda - b}{1 - \lambda b} + \frac{\mu + b}{\mu b + 1} = \frac{(1 - b^2)(\lambda + \mu)}{(1 - \lambda b)(\mu b + 1)} > 0$$

Ahora bien, $-(\mu + b) > 0$ y $\lambda - b < 0$ implican que $\lambda + \mu < 0$, de modo que la desigualdad que acabamos de establecer sólo puede mantenerse si $1 - b^2 > 0$, lo que contradice la hipótesis $b \geq 1$ del enunciado. No es posible pues la existencia de policiclos.

b) La desigualdad $-2 + b < \mu$, junto con $1 \leq b$ implica traza $A_I = -(\mu + b) < 0$ y también $\det A_I = \mu b + 1 > 0$. Por otra parte las desigualdades $-2 + b < \mu < 2 + b$ indican que la matriz A_I tiene sus autovalores complejos. Por último, la desigualdad

$\lambda - b > 0$ junto con $b \geq 1$ implica que $\det A_{II} = 1 - \lambda b < 0$. Con todo esto, usando la Proposición 2.3 y las Tablas 2.3 y 2.4 podemos afirmar que el sistema tiene tres equilibrios, siendo los de las regiones I y III focos estables, y el de la región II una silla con traza positiva.

En estas circunstancias, los únicos policiclos que puede haber con partes en las tres regiones son órbitas periódicas que rodeen a los tres equilibrios.

En el Teorema 1.27 del Capítulo anterior descartamos la existencia de policiclos en dos regiones mediante unos argumentos que podemos aplicar de forma idéntica al caso actual, así que centraremos nuestros esfuerzos en demostrar la inexistencia de policiclos con partes en las tres regiones.

El punto de partida para ello es la desigualdad

$$1 + \frac{\text{Sh } \gamma_1 \pi}{\gamma_1} \geq -2 \frac{(\lambda - b)(\mu b + 1)}{(\mu + b)(1 - \lambda b)} \quad \text{con} \quad \gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}} < 0$$

cuyo cumplimiento indica la inexistencia de órbitas periódicas con partes en las tres regiones, según quedó demostrado en el apartado b3) del Teorema 2.35.

Mediante un desarrollo en serie de potencias de primer orden, y teniendo en cuenta el signo de γ_1 , podemos escribir

$$1 + \frac{\text{Sh } \gamma_1 \pi}{\gamma_1} > 1 + \pi \quad \forall \mu \in (-2 + b, 2 + b)$$

Por otro lado, la derivada

$$\frac{d}{d\mu} \left[-2 \frac{(\lambda - b)(\mu b + 1)}{(\mu + b)(1 - \lambda b)} \right] = -\frac{2(b^2 + 1)(\lambda - b)}{(\mu + b)^2(1 - \lambda b)} > 0 \quad \forall \mu \in (-2 + b, 2 + b)$$

indica que el segundo miembro de la desigualdad que queremos verificar es una función creciente de μ que por tanto está acotada superiormente por el valor que toma en $\mu = 2 + b$, es decir

$$-2 \frac{(\lambda - b)(\mu b + 1)}{(\mu + b)(1 - \lambda b)} < -\frac{(b + 1)(\lambda - b)}{1 - \lambda b}$$

Pero del signo de la derivada

$$\frac{d}{d\lambda} \left[-\frac{(b + 1)(\lambda - b)}{1 - \lambda b} \right] = \frac{(b + 1)(b^2 - 1)}{(1 - \lambda b)^2} > 0$$

se deduce que la última expresión es una función creciente de λ , de modo que en el intervalo $b < \lambda < -\infty$ está acotada superiormente por

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[-\frac{(b + 1)(\lambda - b)}{1 - \lambda b} \right] = 1 + \frac{1}{b}$$

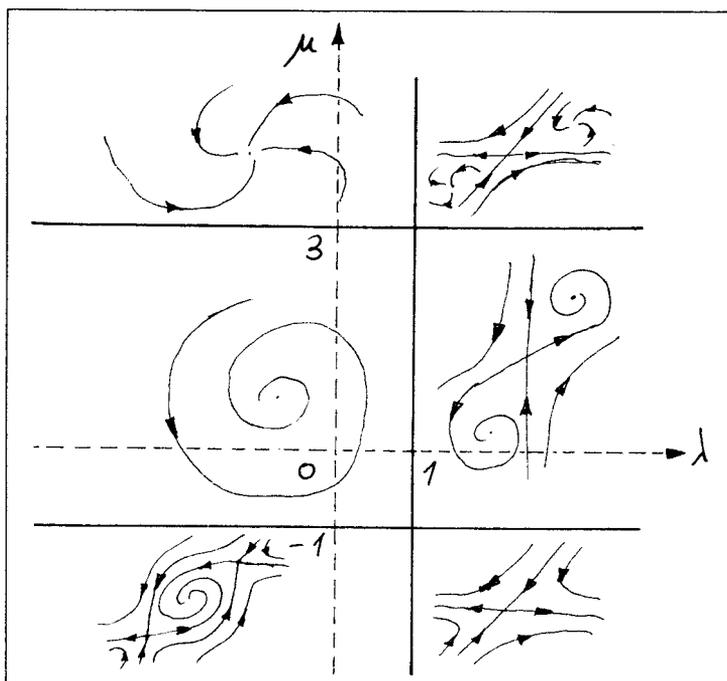


Figura 2.31: El conjunto de bifurcaciones ($b = 1$).

Reuniendo todas las desigualdades que hemos establecido, concluimos que para el cumplimiento de la desigualdad que queremos demostrar, es suficiente que se verifique

$$1 + \pi > 1 + \frac{1}{b} \quad \forall b \geq 1$$

lo cual es evidentemente cierto.

En conclusión, el sistema carece, en la zona del plano de bifurcaciones que estamos considerando, de políciclos, tanto con partes en dos regiones como en tres regiones. Evidentemente, tampoco hay órbitas periódicas contenidas totalmente en una región, porque ninguno de los tres equilibrios es un centro. \square

Por último, en las Figuras 2.31 y 2.32 se muestran los conjuntos de bifurcaciones correspondientes al Caso 3.- que acabamos de estudiar.

2.6 Descripción de las bifurcaciones.

En esta última Sección, vamos a describir las diferentes bifurcaciones del sistema que hemos encontrado en la Sección anterior. Únicamente vamos a considerar el caso de que

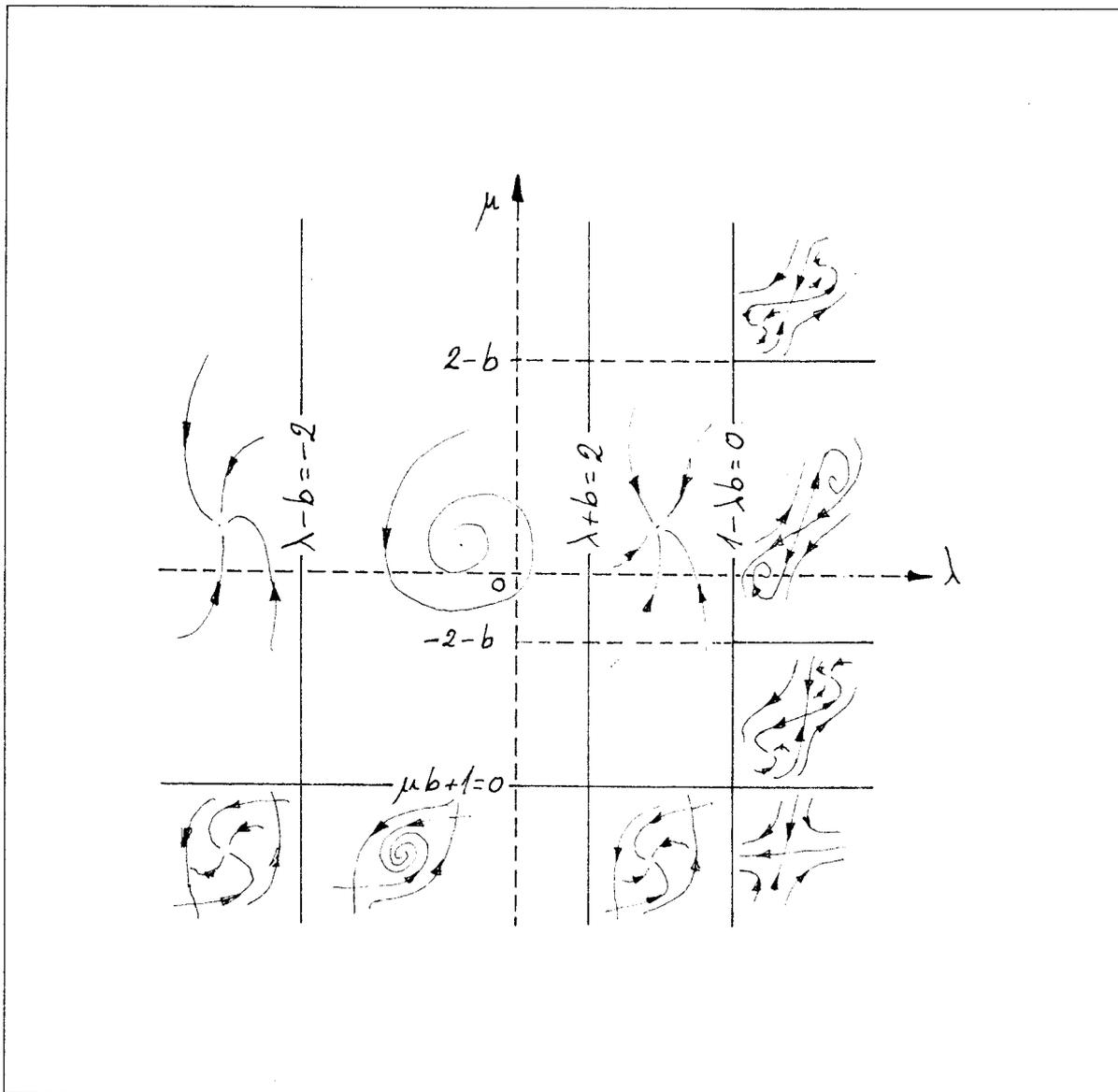


Figura 2.32: El conjunto de bifurcaciones ($1 < b$).

$0 < b < 1$ pues como hemos visto, a esta situación puede reducirse el caso $-1 < b < 0$. Sólo describiremos las bifurcaciones que implican la aparición o desaparición, a través de diversos mecanismos, de órbitas periódicas. En todo lo que sigue nos referiremos a la Figura 2.28

2.6.1 Bifurcación heteroclina.

Vamos a considerar la curva del plano de bifurcaciones (curva de heteroclinas)

$$\mu = \mu_{HT}(\lambda) \quad \lambda < \lambda_a \quad (\lambda = \lambda_a \text{ asíntota vertical de } \mu_{HT})$$

cuyo estudio se ha llevado a cabo en la Proposición 2.30.

a) Si $\mu < \mu_{HT}(\lambda)$ hay tres equilibrios, de los cuales, los de las regiones exteriores son puntos de silla.

b) Si $\mu = \mu_{HT}(\lambda)$ hay los mismos equilibrios pero acompañados de dos trayectorias heteroclinas que rodean al equilibrio del origen y que conectan los dos puntos de silla.

c) Si $\mu_{HT}(\lambda) < \mu < -\frac{1}{b}$ la distribución de los equilibrios es la misma, pero además hay una órbita periódica que rodea al equilibrio del origen.

La bifurcación está caracterizada por la desaparición de una órbita periódica de manera que el período va haciéndose ilimitadamente grande mientras que la órbita permanece en una región acotada del plano de fases, evolucionando hasta convertirse, antes de desaparecer, en un políciclo formado por la pareja de heteroclinas y los dos puntos de silla asociados.

2.6.2 Bifurcación de Hopf del infinito.

Observemos la semirrecta del plano de bifurcaciones

$$\text{traza } A_I = -(\mu + b) = 0 \quad \lambda < \frac{1}{b}$$

a) Si $\lambda < b$ entonces

a1) si $-\frac{1}{b} < \mu < -b$ hay un único equilibrio estable rodeado por una órbita periódica inestable;

a2) si $-b \leq \mu$ el único equilibrio es estable.

b) Si $b < \lambda < \frac{1}{b}$ entonces

b1) si $-\frac{1}{b} < \mu \leq -b$ hay un solo equilibrio que es inestable;

b2) si $-b < \mu$ el único equilibrio es inestable y está rodeado por una órbita periódica inestable.

Estamos en presencia de una bifurcación de Hopf del infinito como la descrita en la página 73 en el sistema con una sola frontera. Señalar que ahora la bifurcación es subcrítica si $\lambda < b$ y supercrítica si $\lambda > b$.

2.6.3 Bifurcación de Hopf con centro.

Hay dos líneas en el plano de bifurcaciones a lo largo de las cuales se da este tipo de bifurcación. La primera de ellas es

$$\text{traza } A_{II} = \lambda - b = 0$$

a) Si $\mu < -b$ entonces

a1) si $\lambda_a < \lambda < b$ siendo $\lambda = \lambda_a$ la asíntota de la curva de heteroclinas μ_{HT} (Proposición 2.30), el equilibrio del origen es estable y está rodeado por una órbita periódica inestable;

a2) si $\lambda = b$ el equilibrio del origen es un centro regional;

a3) si $b < \lambda$ el equilibrio del origen es inestable.

b) Si $-b < \mu$ entonces

b1) si $\lambda < b$ el equilibrio del origen es inestable;

b2) si $\lambda = b$ el equilibrio del origen es un centro regional;

b3) si $b < \lambda < \frac{1}{b}$ el equilibrio del origen es inestable.

Como en el sistema con una sola frontera, nos encontramos con una bifurcación de Hopf con centro del equilibrio situado en el origen. Es supercrítica si $-b < \mu$ y subcrítica si $\mu < -b$.

Pero hay una segunda línea de bifurcación de Hopf con centro. Se trata del segmento

$$\text{traza } A_I = -(\mu + b) = 0 \quad \frac{1}{b} < \lambda$$

c) Si $-\frac{1}{b} < \mu < -b$ hay un equilibrio inestable en cada región exterior y un punto de silla en el origen.

d) Si $\mu = -b$ hay dos centros regionales en las regiones I y II y un punto de silla en el origen.

e) Si $-b < \mu < \mu_H(\lambda)$ donde $\mu = \mu_H(\lambda)$ (curva de homoclinas) se estudió en la Proposición 2.32, hay dos focos estables en las regiones I y III rodeado cada uno de ellos por una órbita periódica inestable. Además hay un punto de silla en el origen.

Reconocemos aquí la bifurcación de Hopf con centro que experimentan los equilibrios de las regiones I y III. Puesto que las órbitas periódicas que nacen son inestables, la bifurcación es subcrítica.

2.6.4 Bifurcación homoclina.

Como hemos establecido en la Proposición 2.32, la curva $\mu = \mu_H(\lambda)$ del plano de fases, que corresponde a trayectorias homoclinas, es idéntica a la del sistema con una sola frontera, por la tanto, la descripción de esta bifurcación coincide con la que se hizo en la página 75. Únicamente destacar el hecho, de que la simetría con respecto al origen del plano de fases del sistema con dos fronteras, hace que tanto la homoclina como la órbita periódica estén ahora duplicadas.

2.6.5 Bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.

Llamemos

$$\mu = \mu_{SN}(\lambda) \quad \frac{1}{b} < \lambda$$

a la curva cuya existencia se ha conjeturado a raíz del Teorema 2.35 (curva de sillanodo de órbitas periódicas)

a) Si $\mu_H(\lambda) < \mu < \mu_{SN}(\lambda)$ hay dos órbitas periódicas rodeando a los tres equilibrios, siendo estable la exterior.

b) Si $\mu = \mu_{SN}(\lambda)$ hay una sola órbita periódica semiestable rodeando a los tres equilibrios.

c) Si $\mu_{SN}(\lambda) < \mu$ no hay órbitas periódicas.

La característica básica de esta bifurcación es la desaparición de dos órbitas periódicas de estabilidades opuestas.

2.6.6 Desaparición de una órbita periódica por el nacimiento de nodos.

Sea la semirrecta

$$\det A_{II} = 1 - \lambda b = 0 \quad 2 + b < \mu$$

a) Si $b < \lambda < \frac{1}{b}$ hay un único equilibrio que es inestable y que está rodeado por una órbita periódica estable.

b) Si $\lambda = \frac{1}{b}$ hay infinitos equilibrios en la región central.

c) Si $\frac{1}{b} < \lambda$ hay un punto de silla en la región II y un nodo en cada una de las regiones exteriores.

Esta bifurcación se caracteriza por la desaparición de una órbita periódica al nacer dos nodos, ya que las variedades invariantes de éstos son incompatibles con la existencia de la primera. Esta bifurcación es del mismo tipo que una de las que encontramos en el sistema con una sola frontera, y creemos que no se halla documentada en la literatura.

Capítulo 3

Dinámica de osciladores electrónicos del tipo Van der Pol-Duffing.

Los desarrollos teóricos de los Capítulos anteriores nos han llevado a un conocimiento bastante completo del comportamiento dinámico y de bifurcaciones de los sistemas lineales a trozos con una frontera rectilínea y con dos fronteras rectilíneas paralelas y simétricas con respecto al origen del plano de fases.

Hemos aprendido que estos sistemas exhiben variados comportamientos periódicos, demostrando la existencia de ciclos límite en dos o en tres regiones y de políciclos homoclinos y heteroclinos, detectando incluso el colapso de órbitas periódicas en una bifurcación silla-nodo.

En este Capítulo vamos a aplicar los conocimientos adquiridos a la investigación de determinados osciladores electrónicos del tipo Van der Pol-Duffing. El primero de ellos es una versión del muy conocido y clásico puente de Wien no lineal. El segundo [16, Keener, 1983], además de su formulación matemática que es la que nos va a ocupar, presenta el interés añadido de constituir un modelo electrónico de las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo [6, Fitzhugh, 1961] que a su vez son, como quedó de manifiesto en la introducción de este trabajo, una simplificación del modelo de Hodgkin-Huxley de la conducción nerviosa. Otro diseño experimental que también modela esas ecuaciones, utilizando tecnología CMOS se encuentra en [20, Linares, 1990]. Comenzaremos por el primero de estos circuitos

3.1 Puente de Wien.

Una realización del oscilador en puente de Wien no lineal diseñada en torno a un amplificador operacional se encuentra en [22, Mees, 1979] y [17, Kriegsmann, 1987]. El

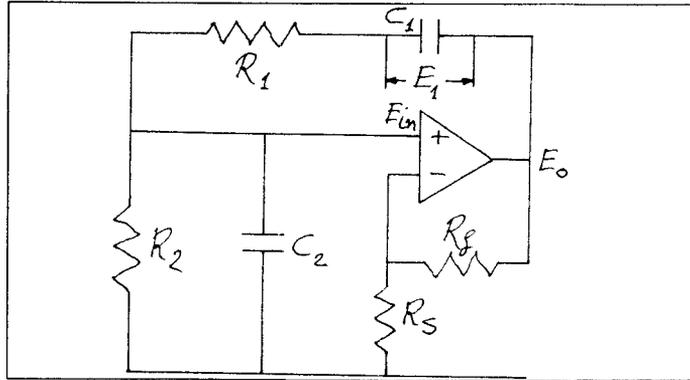


Figura 3.1: Circuito del puente de Wien no lineal.

circuito se muestra en la Figura 3.1, y un análisis del mismo mediante la segunda Ley de Kirchhoff permite escribir

$$\begin{aligned}
 E_o &= E_1 + V_{R1} + E_{in} \\
 V_{R1} &= R_1 i_{R1} = R_1 C_1 \frac{dE_1}{dt} \\
 E_{in} &= R_2 i_{R2} = R_2 (i_{R1} - i_{C2}) = R_2 \left(C_1 \frac{dE_1}{dt} - C_2 \frac{dE_{in}}{dt} \right)
 \end{aligned}$$

La salida E_o del amplificador operacional está relacionada con la entrada E_{in} mediante la ecuación

$$E_o = F_p(E_{in})$$

donde, en la hipótesis de que el amplificador operacional sea ideal, F_p suele modelarse mediante una función lineal a trozos

$$F_p(E_{in}) = \begin{cases} -E & \text{si } E_{in} \leq -\frac{E}{K} \\ KE & \text{si } -\frac{E}{K} < E_{in} < \frac{E}{K} \\ E & \text{si } \frac{E}{K} \leq E_{in} \end{cases}$$

o mediante una función arcotangente

$$F_p(E_{in}) = \frac{2E}{\pi} \text{Arctg} \frac{K\pi}{2E} E_{in}$$

en la que $K = 1 + \frac{R_F}{R_S}$ es la ganancia en bucle cerrado del amplificador operacional, y E la tensión (positiva) de alimentación.

El puente de Wien con un amplificador operacional de característica lineal a trozos, ha sido estudiado en parte por [17, Kriegsmann, 1987], detectando una bifurcación de Hopf con amplitud finita (*rapid bifurcation*) que nosotros estamos en condiciones de predecir y explicar, como veremos a continuación, a partir de los análisis de los sistemas lineales a trozos de los Capítulos anteriores. El modelo que emplea la función arcotangente fue estudiado por [22, Mees, 1979] con técnicas de la dinámica diferenciable, detectando la existencia de una bifurcación de Hopf clásica, en la que la amplitud de la órbita periódica crece desde cero de manera continua.

Para situar el sistema dinámico del puente de Wien en el contexto de nuestro trabajo, comenzamos escribiendo sus ecuaciones diferenciales, tomando como variables de estado las caídas de tensión E_1 y E_{in} en los condensadores

$$R_1 C_2 \frac{dE_{in}}{dt} = -E_1 - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) E_{in} + F_p(E_{in})$$

$$R_1 C_1 \frac{dE_1}{dt} = -E_1 - E_{in} + F_p(E_{in})$$

y naturalmente, tomando para F_p la función lineal a trozos.

La primera tarea será efectuar el cambio de las variables de estado E_{in} y E_1 por las dos nuevas variables x e y , de modo que las rectas paralelas $E_{in} = \pm \frac{E}{K}$ que dividen al plano de fases en tres regiones, se trasladen a las rectas $x = \pm 1$. Para ello basta con hacer

$$E_{in} \longrightarrow \frac{E}{K}x \quad E_1 \longrightarrow y$$

Pero con este cambio, la nueva variable de estado x es adimensional, mientras que la y tiene dimensiones de tensión, de modo que para homogeneizar el sistema bajo el punto de vista de las dimensiones, vamos a afectar a las ecuaciones del cambio de variables, de unos coeficientes de dimensiones adecuadamente elegidas para que las nuevas variables de estado y todos los coeficientes que aparecen en el sistema dinámico, carezcan de dimensiones. Ello nos obligará a cambiar también la variable temporal t , por una nueva variable independiente s adimensional.

De acuerdo con estas consideraciones, efectuaremos el cambio

$$E_{in} \longrightarrow \frac{E}{K}x \quad E_1 \longrightarrow Ey \quad t \longrightarrow R_1 C_2 s$$

con lo que el sistema dinámico queda

$$\left. \begin{aligned} x' &= - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) x - Ky + K \\ y' &= - \frac{C_2}{C_1} \frac{1}{K} x - \frac{C_2}{C_1} y + \frac{C_2}{C_1} \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad 1 \leq x$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - K \right) x - Ky \\ y' &= - \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{1}{K} - 1 \right) x - \frac{C_2}{C_1} y \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad -1 < x < 1$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) x - Ky - K \\ y' &= - \frac{C_2}{C_1} \frac{1}{K} x - \frac{C_2}{C_1} y - \frac{C_2}{C_1} \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad x \leq -1$$

Una simple inspección basta para comprobar que el sistema dinámico tiene la misma forma que el de la página 79, por lo que podemos afirmar que verifica las hipótesis de continuidad sobre las fronteras y simetría con respecto al origen del plano de fases.

Usando la misma notación que en los Capítulos anteriores, llamaremos R_I, R_{II} y R_{III} a las tres regiones en que queda dividido el plano de fases, y L_1 y L_2 a las dos fronteras que las separan. En términos matriciales el sistema puede escribirse

$$X' = F(X) = \begin{cases} A_I \cdot X + B_I & \text{si} \quad X \in R_I \cup L_1 \\ A_{II} \cdot X & \text{si} \quad X \in R_{II} \\ A_{III} \cdot X - B_I & \text{si} \quad X \in R_{III} \cup L_2 \end{cases}$$

donde las matrices A_I, A_{II} y B_I son

$$A_I = \begin{pmatrix} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) & -K \\ - \frac{C_2}{C_1} \frac{1}{K} & - \frac{C_2}{C_1} \end{pmatrix} \quad A_{II} = \begin{pmatrix} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} - K \right) & -K \\ - \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{1}{K} - 1 \right) & - \frac{C_2}{C_1} \end{pmatrix} \quad B_I = \begin{pmatrix} K \\ \frac{C_2}{C_1} \end{pmatrix}$$

A continuación reduciremos el sistema a una de las formas canónicas, y dado que $\text{traza } A_I \neq \text{traza } A_{II}$, la forma de Van der Pol-Duffing (Teorema 2.16) es la pertinente.

Para reducir el sistema a esa forma, empleamos la transformación de las variables de estado y de la variable temporal que se detalla en el citado Teorema, y que en el

caso que nos ocupa es

$$x \longrightarrow x \quad y \longrightarrow \frac{1}{K} \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} \left(\frac{C_2}{C_1} x + y \right) \quad s \longrightarrow \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} s$$

de modo que después de aplicarla, el sistema dinámico queda en la forma de Van der Pol-Duffing

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\mu x - y + (\mu + \lambda) \\ y' &= x \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad 1 \leq x$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda x - y \\ y' &= x \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad -1 < x < 1$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\mu x - y - (\mu + \lambda) \\ y' &= x \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad x \leq -1$$

en la que los parámetros μ y λ son

$$\mu = \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right) \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} \quad \lambda = - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} - K \right) \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}}$$

Una vez reducido el sistema, el parámetro b resulta ser cero, de modo que nos encontramos con las ecuaciones clásicas de Rayleigh-Van der Pol. Así pues, el puente de Wien que estamos analizando constituye un modelo electrónico de las mismas.

Por consiguiente, ya que $b = 0$, estamos en la situación descrita en la Sección 2.5.1 del Capítulo 2, cuyo diagrama de bifurcaciones se muestra en la Figura 2.22 de la página 128.

Si nos situamos en las regiones I o III, el operacional, se encuentra en saturación, por lo que se comporta como una fuente de tensión constante. En esas condiciones, el sistema no puede exhibir, en esas regiones, una conducta de tipo sinusoidal ya que sólo hay resistencias y condensadores. Dicho en otros términos, la matriz del sistema en esas regiones

$$A_I = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha de tener autovalores reales, es decir, el discriminante de su ecuación característica $\mu^2 - 4$ ha de ser no negativo. Comprobemos que efectivamente es así, para lo que empleamos la desigualdad trivial

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$$

de la que se deduce $(a + b) \frac{1}{\sqrt{ab}} > 2$. Teniendo en cuenta ahora el valor del parámetro μ , resulta

$$\mu = \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} > \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} > 2$$

Por consiguiente, del diagrama de la Figura 2.22, nos quedamos sólo con la zona en la que $\mu > 2$.

Si ahora aplicamos el Teorema 2.28, podemos establecer las siguientes conclusiones acerca del comportamiento dinámico y de bifurcaciones del puente de Wien:

- 1.- El sistema sólo tiene un equilibrio.
- 2.- Si $K < 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$ (es decir si $\lambda < 0$), el equilibrio es un foco o un nodo estable y no hay órbitas periódicas.
- 3.- Si $K = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$ (es decir si $\lambda = 0$), el equilibrio es un centro regional.
- 4.- Si $K > 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$ (es decir si $\lambda > 0$), el equilibrio es un foco o un nodo inestable y está rodeado por una única órbita periódica estable.

Ahora podemos explicar el mecanismo de la bifurcación rápida en términos de la bifurcación de Hopf con centro estudiada en el Capítulo anterior. En efecto, para el valor crítico $K_c = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$ del parámetro, hay un continuo de órbitas periódicas en la región II, de manera que la de mayor amplitud es tangente a las dos fronteras. Al aumentar el valor de K a partir de K_c , aparece una órbita periódica que en el momento de nacer tiene esa misma amplitud, y va aumentando a partir de ahí. Se explica pues la aparición de una órbita periódica con amplitud finita porque el sistema pasa por un centro regional. Pero como tal cosa ocurre para un valor aislado del parámetro, el centro no es físicamente observable. El fenómeno es típico de los sistemas lineales a trozos.

3.2 Circuito de Keener.

En [16, Keener, 1983] se propone un modelo físico en forma de circuito electrónico cuya formulación matemática coincide con las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo [6, Fitzhugh, 1961], y que por tanto corresponde asimismo a las ecuaciones de Van der Pol-Duffing.

Consiste en un montaje a base de tres amplificadores operacionales de los que el primero de ellos, actuando como seguidor de tensión, se utiliza para establecer un potencial de referencia v_0 para el segundo, que también actúa como seguidor de tensión,

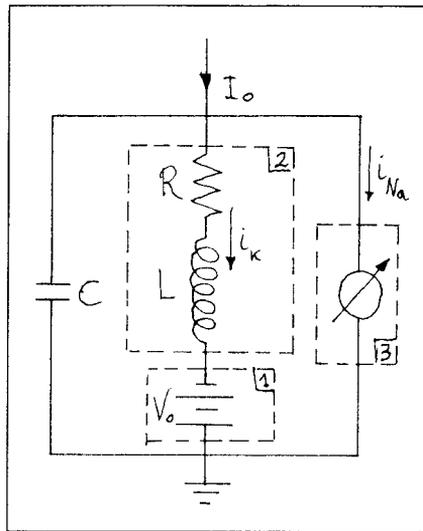


Figura 3.2: Modelo eléctrico para las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo.

pero que con el concurso de dos resistencias y un condensador, simula una autoinducción con una resistencia en serie.

Estos tres elementos, tensión v_0 , autoinducción y resistencia en serie, constituyen la *corriente del potasio* que es una de las dos corrientes iónicas que aparecen en el modelo de la conducción nerviosa de Hodgkin y Huxley [14, Hodgkin, 1952].

El tercer operacional constituye una fuente de intensidad cuya característica es una función lineal a trozos. Su misión en el circuito es proporcionar la otra corriente iónica, la *corriente del sodio*.

Un análisis del circuito de la Figura 3.2 mediante las Leyes de Kirchhoff, proporciona las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo

$$C \frac{dv}{dt} = i_0 - i_K - i_{Na}$$

$$L \frac{di_K}{dt} = v - v_0 - Ri_K$$

siendo por tanto un modelo físico de las mismas. En la Figura 3.3 se muestra la realización de ese circuito a base de operacionales cuya descripción hemos hecho más atrás. En ambas Figuras se han trazado unos bloques para que la correspondencia entre las dos quede clara.

Añadir que el escaso número de componentes, así como su bajo precio y disponibi-

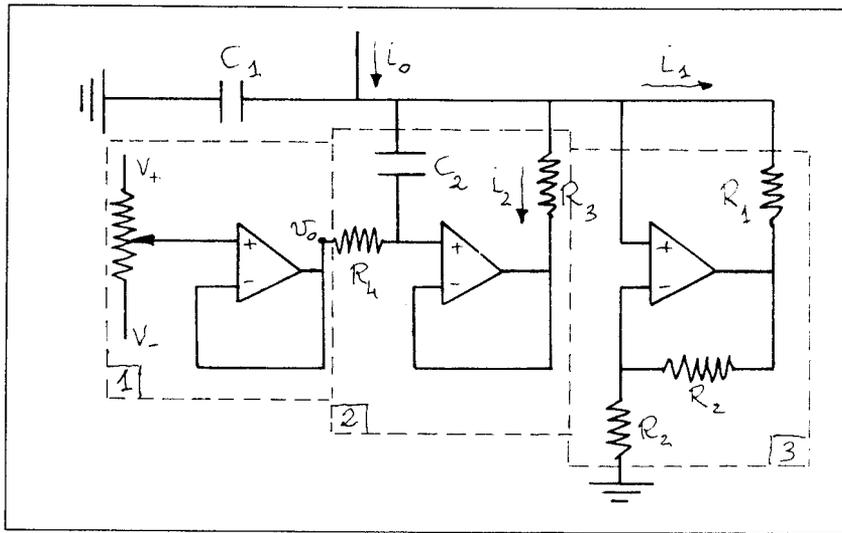


Figura 3.3: Circuito de Keener para las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo.

idad en el mercado, hacen muy asequible su construcción. El circuito puede dedicarse tanto a tareas de investigación como de enseñanza.

El análisis del circuito de Keener empleando las Leyes de Kirchhoff y teniendo en cuenta el comportamiento de los amplificadores operacionales que supondremos ideal, nos proporciona las ecuaciones

$$C_1 \frac{dv}{dt} = i_0 + f(v) - \left(1 - \frac{R_3}{R_4}\right) i_2 - \frac{v - v_0}{R_4}$$

$$C_2 R_3 R_4 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_2 = v - v_0$$

Siguiendo a [16, Keener, 1983], introducimos las variables de estado adimensionales V e I

$$V = \frac{R_1 + R_4}{R_4} \cdot \frac{v}{V_{R_4}} \quad I = \frac{R_1}{R_4} \cdot \frac{(R_4 - R_3)i_2 - v_0}{V_{R_4}}$$

la variable independiente también adimensional

$$\tau = \frac{1}{C_2 R_4} t$$

y los coeficientes

$$V_0 = \frac{R_1}{R_3} \cdot \frac{v_0}{V_{R_+}} \quad I_0 = \frac{R_1}{V_{R_+}} i_0$$

$$\epsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_4} \cdot \frac{C_1}{C_2} \quad \beta = \frac{R_1}{R_3} \cdot \frac{R_4 - R_3}{R_4 + R_1} \quad s = \frac{R_4 - R_1}{R_4 + R_1}$$

de modo que las ecuaciones diferenciales del sistema dinámico quedan

$$\epsilon \frac{dV}{d\tau} = I_0 - I - G(V)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = \beta V - I - V_0$$

siendo

$$-G(V) = \begin{cases} 1 - V & \text{si } \frac{1}{s+1} \leq V \\ sV & \text{si } -\frac{1}{s+1} < V < \frac{1}{s+1} \\ -1 - V & \text{si } V \leq -\frac{1}{s+1} \end{cases}$$

El plano de fases se divide en tres regiones bien diferenciadas separadas por las rectas paralelas $V = \pm \frac{1}{s+1}$, así que lo primero que haremos es un cambio en las variables de estado

$$V \longrightarrow \frac{1}{s+1} x \quad I \longrightarrow y$$

que traslada ambas fronteras a las rectas $x = \pm 1$. Con ello, el sistema dinámico adopta

esta forma

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\frac{1}{\epsilon}x - \frac{s+1}{\epsilon}y + \frac{s+1}{\epsilon}(1+I_0) \\ y' &= \frac{\beta}{s+1}x - y - V_0 \end{aligned} \right\} \text{ si } 1 \leq x$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\frac{s}{\epsilon}x - \frac{s+1}{\epsilon}y + \frac{s+1}{\epsilon}I_0 \\ y' &= \frac{\beta}{s+1}x - y - V_0 \end{aligned} \right\} \text{ si } -1 < x < 1$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\frac{1}{\epsilon}x - \frac{s+1}{\epsilon}y + \frac{s+1}{\epsilon}(1-I_0) \\ y' &= \frac{\beta}{s+1}x - y - V_0 \end{aligned} \right\} \text{ si } x \leq -1$$

Puede comprobarse que este sistema cumple la hipótesis de continuidad en las fronteras exigida a los sistemas dinámicos objeto de nuestro estudio, pero que sin embargo no cumple la hipótesis de simetría con respecto al origen del plano de fases. Ello hace que su estudio caiga, en principio, fuera del alcance de este trabajo, pero podemos introducir una hipótesis restrictiva sobre los parámetros que nos conduzca a la simetría. En efecto, si comparamos las últimas ecuaciones con las que aparecen en la página 78, comprobaremos que la hipótesis de simetría se verificará siempre y cuando se cumplan las tres igualdades

$$\frac{s+1}{\epsilon} I_0 = 0 \qquad \frac{s+1}{\epsilon}(1+I_0) = \frac{s+1}{\epsilon}(1-I_0) \qquad -V_0 = 0$$

es decir, siempre y cuando $I_0 = V_0 = 0$.

Ahora, como en el Capítulo 2, llamaremos R_I , R_{II} y R_{III} a las tres regiones en que está dividido el plano de fases, y L_1 y L_2 a las fronteras que las separan, con lo cual podemos escribir el sistema dinámico en forma matricial

$$X' = F(X) = \begin{cases} A_I \cdot X + B_I & \text{si } X \in R_I \cup L_1 \\ A_{II} \cdot X & \text{si } X \in R_{II} \\ A_{III} \cdot X - B_I & \text{si } X \in R_{III} \cup L_2 \end{cases}$$

donde las matrices A_I , A_{II} y B_I son

$$A_I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{s+1}{\epsilon} \\ \frac{\beta}{s+1} & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{II} = \begin{pmatrix} \frac{s}{\epsilon} & -\frac{s+1}{\epsilon} \\ \frac{\beta}{s+1} & -1 \end{pmatrix} \qquad B_I = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{\epsilon} \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

La última transformación que vamos a efectuar consiste en reducir el sistema a una de las formas canónicas, y puesto que $\text{traza } A_I \neq \text{traza } A_{II}$, obtendremos la forma de Van der Pol-Duffing.

La reducción se lleva a cabo, de acuerdo con el Teorema 2.16 a través de la transformación

$$x \longrightarrow x \quad y \longrightarrow \frac{\sqrt{\epsilon\beta}}{s+1} y \quad t \longrightarrow \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} t$$

quedando finalmente el sistema dinámico de la forma

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\mu x - y + (\mu + \lambda) \\ y' &= x - by \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad 1 \leq x$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda x - y \\ y' &= x - by \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad -1 < x < 1$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\mu x - y - (\mu + \lambda) \\ y' &= x - by \end{aligned} \right\} \quad \text{si} \quad x \leq -1$$

donde los coeficientes μ , λ y b son

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\beta}} \quad \lambda = \frac{s}{\sqrt{\epsilon\beta}} \quad b = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}$$

que pueden expresarse también en términos de los parámetros físicos, resistencias y condensadores

$$\mu = \frac{R_4 + R_1}{R_1} \sqrt{\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{R_3}{R_4 - R_3}} \quad \lambda = \frac{R_4 - R_1}{R_1} \sqrt{\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{R_3}{R_4 - R_3}} \quad b = \sqrt{\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{R_3}{R_4 - R_3}}$$

Ahora podemos abordar el estudio del comportamiento dinámico y de bifurcaciones que presenta el circuito de Keener. Ante todo, observemos que ha de ser $\epsilon\beta > 0$, pero como $\epsilon > 0$, resulta que $\beta > 0$, y por consiguiente, $R_3 < R_4$.

Vamos a trazar conjuntos de bifurcaciones en cuyos ejes figuren los parámetros s y β , dejando fijo el tercer parámetro ϵ . En los diagramas del Capítulo 2 (véase por ejemplo el de la página 145) aparecían curvas que separaban diferentes comportamientos de interés, cuyas ecuaciones eran

$$\begin{aligned} \text{traza } A_I &= -(\mu + b) = 0 & \text{traza } A_{II} &= \lambda - b = 0 \\ \det A_I &= \mu b + 1 = 0 & \det A_{II} &= 1 - \lambda b = 0 \\ \mu - b &= \pm 2 & \lambda + b &= \pm 2 \end{aligned}$$

Establezcamos ahora estas mismas ecuaciones para el sistema de Keener, en términos de sus parámetros de bifurcación s, β y ϵ . Unos cálculos sencillos prmiten escribir

$-(\mu + b) = 0$	corresponde a	$1 + \epsilon = 0$
$\lambda - b = 0$	”	$s - \epsilon = 0$
$\mu b + 1 = 0$	”	$\beta + 1 = 0$
$1 - \lambda b = 0$	”	$s - \beta = 0$
$\mu - b = \pm 2$	”	$1 - \epsilon = \pm 2\sqrt{\epsilon\beta}$
$\lambda + b) = \pm 2$	”	$s + \epsilon = \pm 2\sqrt{\epsilon\beta}$

La primera de ellas $1 + \epsilon = 0$, no se verifica nunca, puesto que $\epsilon > 0$, lo que implica que traza $A_I < 0$ y por tanto que los equilibrios de las regiones I y III son siempre estables. Asimismo, la tercera $\beta + 1 = 0$ tampoco se verifica nunca, con lo que $\det A_I > 0$, de modo que los equilibrios de las regiones I y III no son nunca sillars. La quinta $1 - \epsilon = \pm 2\sqrt{\epsilon\beta}$, puede expresarse, si despejamos β , de la forma $\beta = \frac{(1 - \epsilon)^2}{4\epsilon}$.

Hay zonas del conjunto de bifurcaciones en las que sabemos, por una u otra razón, que no existen policiclos. En efecto, el Teorema 2.36 establece que si $b \geq 1$, que corresponde a $\beta \leq \epsilon$, no hay policiclos. Además, puesto que traza $A_I < 0$, de la Proposición 2.14 se deduce que si traza $A_{II} < 0$, que corresponde a $s < \epsilon$, tampoco hay policiclos.

Prosiguiendo en esta línea, puesto que $\det A_I > 0$, entonces cuando sea $\det A_{II} < 0$, es decir, cuando $s > \beta$, el sistema tiene, de acuerdo con la Proposición 2.3, tres equilibrios, de tal modo que si además, $\beta < \frac{(1 - \epsilon)^2}{4\epsilon}$, los equilibrios de las regiones I y III son nodos, con lo que no puede haber policiclos según afirma el apartado a) de la Proposición 2.12. Añadamos también que

$$\epsilon < \frac{(1 - \epsilon)^2}{4\epsilon} \quad \text{si} \quad \epsilon < \frac{1}{3} \qquad \epsilon > \frac{(1 - \epsilon)^2}{4\epsilon} \quad \text{si} \quad \epsilon > \frac{1}{3}$$

Con toda esta información podemos conocer las zonas del diagrama de bifurcaciones en las que el sistema no posee policiclos. Si ahora aplicamos el Teorema 2.35 que nos da información completa sobre el comportamiento dinámico, podemos trazar en las Figuras 3.4 y 3.5 un esquema del conjunto de bifurcaciones.

Por último, establecemos las siguientes conclusiones:

- 1.- Si $0 < s < \beta$, de acuerdo con Keener, hay un equilibrio estable o un ciclo límite estable. Podemos añadir que la diferencia estriba en que $0 < s < \epsilon$

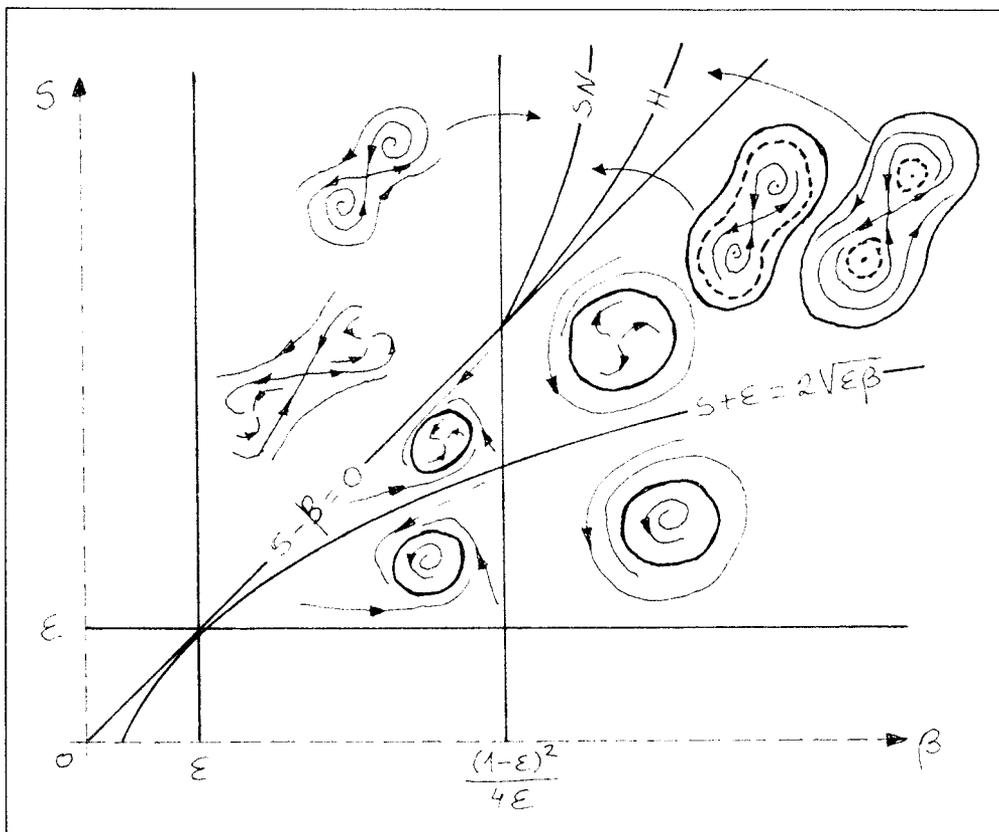


Figura 3.4: Conjunto de bifurcaciones. ($\epsilon \leq 1/3$)

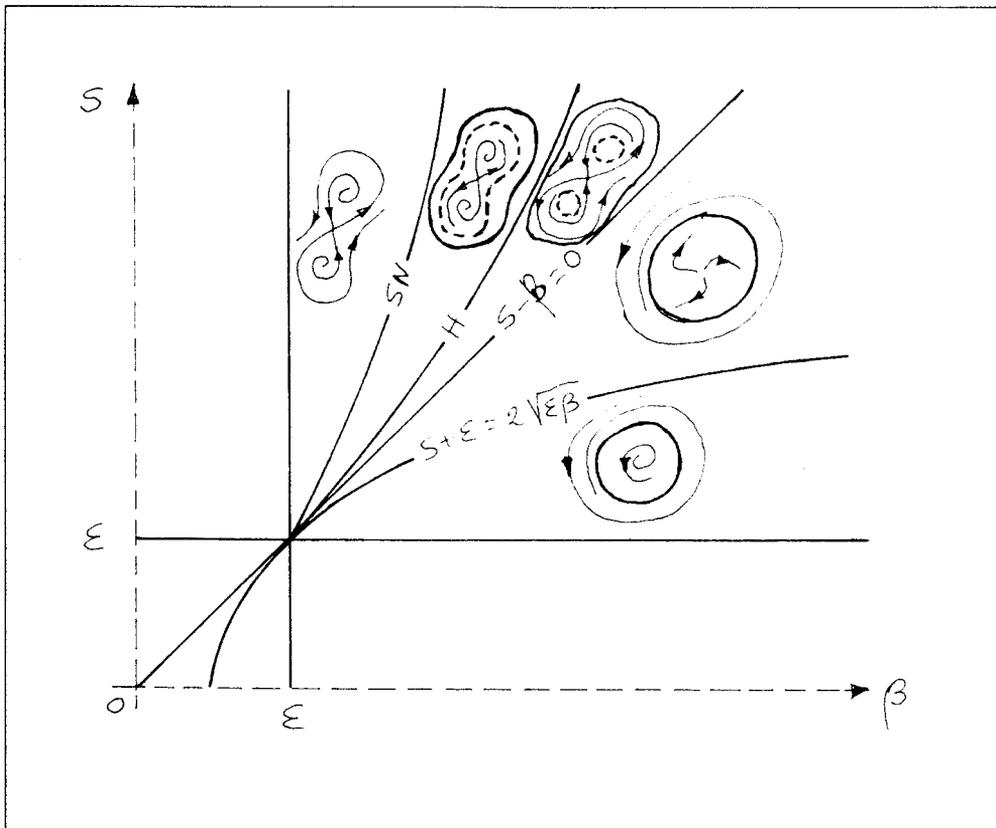


Figura 3.5: Conjunto de bifurcaciones. ($\epsilon > 1/3$)

(equilibrio estable) o en que $\epsilon < s$ (ciclo límite estable). En ambos casos se tiene $R_3 < R_1 < R_4$.

2.- Si $\frac{1}{3} \leq \epsilon$, y $\epsilon < \beta < s$, hay tres equilibrios, y al aumentar β nos encontramos sucesivamente con que no hay órbitas periódicas, después aparecen dos órbitas periódicas de estabilidades opuestas que rodean a los tres equilibrios, siendo estable la exterior, y más tarde, una estable que rodea a los tres equilibrios y dos inestables rodeando una a cada equilibrio de las regiones exteriores.

3.- Si $\epsilon < \frac{1}{3}$, la situación es la misma que en 2.-, pero ahora para valores de β que verifiquen $\frac{(1 - \epsilon)^2}{4\epsilon} < \beta < s$.

En resumen, el comportamiento dinámico del sistema es mucho más rico que lo investigado por Keener, que sólo habla de un equilibrio, y ni se plantea la posibilidad de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas u homoclinas como las que hemos descubierto en este trabajo.

3.3 Sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras casi simétricos.

El circuito de Keener es, en cierto sentido, un sistema dinámico más general que el estudiado en el Capítulo 2 de este trabajo. En efecto, en ese Capítulo impusimos a los sistemas bajo estudio, una hipótesis de simetría con respecto al origen del plano de fases, hipótesis que las ecuaciones (véase la página 169) del sistema de Keener no cumplen. De hecho, para forzar su cumplimiento y así poder aplicar la teoría del Capítulo 2, nos vimos obligados a introducir la condición adicional $I_0 = V_0$.

El estudio de los sistemas lineales a trozos continuos, con dos fronteras pero sin simetría con respecto al origen del plano de fases, queda fuera de los objetivos que nos marcamos al abordar el presente trabajo, reservándolo para futuras investigaciones. No obstante, la asimetría del sistema de Keener es sólo parcial. En efecto, si en la ecuaciones de la página 169 efectuamos la traslación $I \rightarrow I - I_0$, el sistema dinámico queda

$$\epsilon \frac{dV}{d\tau} = -I - G(V)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = \beta V - I + I_0 - V_0$$

Igualando a cero los segundos miembros obtenemos las ecuaciones de dos curvas en el plano I, V , de las que la primera de ellas $I = -G(V)$ es simétrica con respecto al

origen, y la segunda $I = \beta V + I_0 - V_0$, no lo es (lo sería si $I_0 = V_0 = 0$). En este sentido, el sistema no es completamente asimétrico, por lo que todavía goza, como veremos en lo que sigue, de algunas de las propiedades de los sistemas con simetría, y ello facilitará su estudio. Llamaremos **casi simétricos** a los sistemas de esta clase.

En las siguientes páginas vamos a proceder al análisis de los sistemas casi simétricos, pero sólo efectuaremos estudios parciales, basándonos en los conocimientos adquiridos en los Capítulos 1 y 2, aunque también avanzaremos en ciertas cuestiones que nos llevarán a descubrir comportamientos dinámicos nuevos. El estudio completo de los sistemas no simétricos queda pospuesto, como se ha dicho, para ulteriores investigaciones.

Los sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras, casi simétricos, escritos en la forma canónica de Van der Pol-Duffing son

$$\begin{aligned} x' &= -f(x) - y \\ y' &= x - by - a \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \mu x - \frac{\mu + \lambda}{2} (|x + 1| - |x - 1|)$$

y su gráfica se muestra en la Figura 2.6 (página 97). Ahora bien, la función f establece una partición del plano de fases en tres regiones exactamente igual que en el Capítulo 2, de modo que usando la misma notación que allí, tenemos

$$\text{Región I} \quad : \quad R_I \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x\}$$

$$\text{Región II} \quad : \quad R_{II} \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$$

$$\text{Región III} \quad : \quad R_{III} \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$$

La casuística de los estudios que siguen puede reducirse en parte si tenemos en cuenta que el sistema presenta las trtes simetrías. que a continuación se indican

Simetría S_1 : al cambiar

$$\begin{array}{rcc|ccc} x & \text{por} & -x & a & \text{por} & -a \\ y & \text{por} & y & b & \text{por} & -b \\ t & \text{por} & -t & \lambda & \text{por} & -\lambda \\ & & & \mu & \text{por} & -\mu \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

3.3 Sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras casi simétricos.177

Simetría S_2 : al cambiar

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & \text{por} & x & a & \text{por} & a \\ y & \text{por} & -y & b & \text{por} & -b \\ t & \text{por} & -t & \lambda & \text{por} & -\lambda \\ & & & \mu & \text{por} & -\mu \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Simetría S_3 : al cambiar

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & \text{por} & -x & a & \text{por} & -a \\ y & \text{por} & -y & b & \text{por} & b \\ t & \text{por} & t & \lambda & \text{por} & \lambda \\ & & & \mu & \text{por} & \mu \end{array}$$

queda invariante el sistema dinámico.

Podemos comprobar, como hicimos en la Sección 1.3.1 del Capítulo 1, que estas tres simetrías, junto con la identidad, constituyen un grupo abeliano. Además, podemos emplearlas para reducir los rangos de variación de los cuatro parámetros a , b , μ y λ . En efecto, tal como hicimos en la citada Sección, si señalamos con $+$, el que determinado parámetro sea no negativo, y con $-$, el que sea negativo, las $2^4 = 16$ variaciones posibles de signos, pueden reducirse, en virtud de las simetrías, sólo a cuatro. Elegiremos esas cuatro con el mismo criterio que en el Capítulo 1, es decir, de modo que los parámetros a y b sean no negativos. En la Tabla 3.1 se muestra esa reducción

Pero además de las simetrías emplearemos los criterios que siguen, basados en los conocimientos adquiridos en los Capítulos anteriores, para reducir aún más el rango de variación de los parámetros.

- 1.- En los Teoremas 1.27 y 2.36 quedó demostrado que los sistemas lineales a trozos con una y con dos fronteras, pero simétricos, no tienen policiclos si $|b| \geq 1$. Conjeturando que para los sistemas casi simétricos también es así, y de acuerdo con las reducciones debidas a las simetrías, nos limitaremos a valores del parámetro b en el intervalo $(0, 1)$.
- 2.- En las Proposiciones 1.9 y 2.12 se demostró que cuando la matriz A_{II} tiene autovalores reales, en muchos casos no hay comportamientos periódicos (no obstante, en otros casos sí puede haberlos, como cuando los equilibrios de las regiones I y III son nodos virtuales o sillars reales). En base a todo ello nos limitaremos a considerar autovalores complejos de la matriz A_I , lo que implica según la Tabla 2.3 que $|\mu - b| < 2$.
- 3.- La Proposición 2.14 es aplicable al sistema casi simétrico, ya que las matrices A_I y A_{II} son las mismas aquí y allí, de modo que para tratar sólo con situaciones

a	b	λ	μ	Caso	Aplicando la simetría...	se reduce al caso...
+	+	+	+	1	S_0	1
+	+	+	-	2	S_0	2
+	+	-	+	3	S_0	3
+	+	-	-	4	S_0	4
+	-	+	+	5	S_2	4
-	+	+	+	6	S_3	1
+	-	+	-	7	S_2	3
+	-	-	+	8	S_2	2
-	-	+	+	9	S_1	4
-	+	+	-	10	S_3	2
-	+	-	+	11	S_3	3
+	-	-	-	12	S_2	1
-	+	-	-	13	S_3	4
-	-	+	-	14	S_1	3
-	-	-	+	15	S_1	2
-	-	-	-	16	S_1	1

Tabla 3.1: La simetrías reducen el número de casos a estudiar.

en las que puedan existir políciclos, exigiremos que las trazas de las matrices A_I y A_{II} tengan distinto signo. Ahora bien, al reducir las ecuaciones de Keener a la forma de Van der Pol-Duffing, comprobamos (página 171) que la traza de traza $A_I = -\frac{1+\epsilon}{\sqrt{\epsilon\beta}} < 0$ de modo que tomaremos en nuestro estudio traza $A_I = -(\mu + b) > 0$ y por consiguiente traza $A_{II} = \lambda - b < 0$. De todas formas, para incluir el caso $\lambda = b$ en el cual el equilibrio de la región II es un centro, tomaremos $\lambda > 0$.

Es evidente que estos criterios excluyen valores de los parámetros que podrían ser de interés, y que habría que tomar en cuenta en un estudio más profundo de los sistemas casi simétricos, pero como hemos señalado más atrás, sólo pretendemos efectuar un estudio parcial, con lo que las limitaciones impuestas, encaminadas a reducir la casuística no resultan excesivamente restrictivas para nuestros propósitos.

En resumen, los rangos de los distintos parámetros quedan así

$$a \geq 0 \quad 0 < b < 1 \quad \lambda > 0 \quad -b < \mu < 2 + b$$

3.3.1 Dos equilibrios.

Estudiemos la dinámica del sistema cuando tiene dos equilibrios. Esta situación se dará sobre la semirrecta

$$a = \lambda b - 1 \quad \lambda > \frac{1}{b}$$

Con los valores de los parámetros que estamos considerando, Uno de los equilibrios está situado sobre la frontera L_2 y tiene de coordenadas $(-1, -\lambda)$, mientras que el otro está en la región I.

Como los autovalores de la matriz A_I son complejos con parte real negativa, y los de A_{II} reales con signos opuestos (véanse las Tablas 2.3 y 2.4), el equilibrio de la región I es un foco estable, y el de la frontera L_2 es un punto de silla con traza positiva visto desde la región II, y un foco estable desde la III. En estas condiciones pueden existir órbitas periódicas con partes en las regiones I y II, comprendidas entre las variedades estable e inestable del punto de silla de la región II, o bien órbitas periódicas con partes en las tres regiones. Incluso puede haber una trayectoria homoclina.

Vamos a investigar estas posibilidades comenzando por la órbitas con partes en las regiones I y II. Las ecuaciones paramétricas de las semiaplicaciones f y g calculadas según el procedimiento del Apéndice C son

a) *Foco en la región I. Semiaplicación f:*

$$u(\tau_1) = \lambda - 2\beta_1 \cdot \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \lambda + 2\beta_1 \cdot \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

b) *Punto de silla en la región II. Semiaplicación g:*

$$u_1(\tau_2) = \lambda + \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \lambda - \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2}$$

donde

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}}{2} \quad \gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{4 - (\mu - b)^2}} \quad \gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}$$

Estas expresiones son muy similares a sus homólogas en el sistema con una sola frontera estudiado en el Capítulo 1, y que aparecen en las páginas 33 39, lo que sugiere que debe existir alguna relación entre ellas. De hecho, puede pasarse de unas a otras

mediante una homotecia y una traslación de la misma forma que en las Proposiciones 2.20 2.23

Proposición 3.1 *Llamemos f_0 y g_0 a las semiaplicaciones f y g del sistema dinámico el la forma de Van der Pol-Duffing con una sola frontera, y sean $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{R}$ tales que $\hat{u} = f_0(\hat{v})$ y $\hat{u}_1 = g_0(\hat{v})$. Entonces, si $u, u_1, v \in \mathbb{R}$ verifican $u = f(v)$ y $u_1 = g(v)$ siendo f y g las mismas semiaplicaciones definidas para el sistema con dos fronteras casi simétrico, se cumple*

a) *Para la semiaplicación f :*

$$u = \lambda + 2\hat{u} \qquad v = \lambda + 2\hat{v}$$

b) *Para la semiaplicación g :*

$$u_1 = \lambda + 2\hat{u}_1 \qquad v = \lambda + 2\hat{v}$$

DEMOSTRACIÓN: Es trivial. □

Esta Proposición sugiere que el comportamiento dinámico del sistema en torno a la frontera L_1 es el mismo que el del sistema que tiene una sola frontera, dado que una homotecia y una traslación no cambian cualitativamente la geometría del plano de fases. Comprobemos que ello es así demostrando la existencia de una trayectoria homoclina y de una órbita periódica.

Teorema 3.2 *Consideremos el sistema dinámico casi simétrico en la forma de Van der Pol-Duffing, y sea $0 < b < 1$. Entonces para cada $\mu \in (-b, 2 + b)$, existe un único valor $\lambda_H > \frac{1}{b}$ del parámetro λ tal que*

a) *si $\lambda = \lambda_H(\mu)$, existe una trayectoria homoclina que nace y muere en el punto de silla de la región II, y que contiene en su interior al foco de la región I;*

b) *si $\frac{1}{b} < \lambda < \lambda_H(\mu)$, existe una única órbita periódica inestable que rodea al equilibrio de la región I.*

DEMOSTRACIÓN: a) La condición necesaria y suficiente para que exista una trayectoria homoclina es (Figura 2.25)

$$u(\tau_1) = \lambda_i \qquad y \qquad v(\tau_1) = \lambda_e$$

donde $\lambda_i = \lambda - 2z_1$ y $\lambda_e = \lambda - 2z_2$ son las ordenadas de los puntos en los que las variedades invariantes del punto de silla de la región II, cortan a la frontera L_1 . Si

aplicamos la homotecia y la traslación de la Proposición 3.1 podemos comprobar que estas igualdades se convierten en

$$\hat{u}(\tau_1) = \hat{\lambda}_i \quad y \quad \hat{v}(\tau_1) = \hat{\lambda}_e$$

donde hemos designado con $\hat{\lambda}_i$ y $\hat{\lambda}_e$ a los homólogos de λ_i y λ_e en el sistema con una sola frontera

Pero el último par de igualdades expresa precisamente la condición necesaria y suficiente para la existencia de una trayectoria homoclina en el sistema con una sola frontera, de modo que en ambos sistemas dicha condición viene dada mediante el mismo par de ecuaciones. Podemos entonces aplicar las Proposiciones 1.23 y 1.24 para concluir que existe el valor $\lambda_H(\mu)$ del enunciado.

b) En las Proposiciones 1.23 y 1.24 quedó completamente descrita la función $\mu_H(\lambda)$, de la que en la Figura 1.26 se muestra la gráfica para un cierto valor de b . Pues bien, de acuerdo con la Nota 1 de la Proposición 1.24 y la citada Figura, la doble desigualdad $\frac{1}{b} < \lambda < \lambda_H(\mu)$, equivale a $\mu_a < \mu < \mu_H(\lambda)$ donde $\mu = \mu_a > -b$ es la asíntota de la gráfica de μ_H (véase de nuevo la Proposición 1.24). Nos encontramos pues en las mismas condiciones que en el apartado c) del Teorema 1.26 por lo que podemos llegar a la misma conclusión y afirmar que existe una única órbita periódica inestable (con partes en las regiones I y II) que rodea el foco estable de la región I. \square

3.3.2 Homoclinas dobles.

En la Sección anterior hemos establecido la existencia de homoclinas y de órbitas periódicas, demostrando que entre las semiaplicaciones de Poincaré f y g , y sus homónimas en el sistema con una sola frontera, se dan determinadas relaciones que permiten trasladar el estudio de la dinámica en torno a la frontera L_1 , al efectuado en el Capítulo 1 con el sistema de una sola frontera.

Vamos a abundar en la misma idea, pero ahora cuando el sistema tiene tres equilibrios. De acuerdo con las limitaciones impuestas a los parámetros, esta situación se dará cuando $0 < a < \lambda b - 1$, pero como además hemos exigido que $0 < b < 1$ y $-b < \mu < 2 + b$, las Tablas 2.3 y 2.4 indican que de los tres equilibrios, el de la región II ha de ser un punto de silla con traza positiva y los de las regiones I y III, focos estables.

Así, en la región II tenemos las dos variedades invariantes de la silla que se cortan en el equilibrio, y que a su vez cortan a la frontera L_1 en puntos de ordenadas λ_i y λ_e y a la frontera L_2 en puntos de ordenadas λ'_i y λ'_e mientras que al otro lado de estas fronteras tenemos focos estables.

En estas circunstancias, aunque el sistema no es simétrico, la geometría del plano de fases es muy parecida en las cercanías de ambas fronteras, de modo que vamos a investigar la posible existencia de homoclinas y órbitas periódicas en torno de L_1 y de L_2 . Para ello, además de las muy conocidas semiaplicaciones f y g , necesitamos las dos semiaplicaciones k y g_1 , análogas a f y g , pero en la frontera L_2 , y que se esquematizan en la Figura B.1 del Apéndice B.

Si calculamos las ecuaciones paramétricas de las semiaplicaciones f y g usando las técnicas explicadas en el citado Apéndice, obtendremos las igualdades

a) *Foco en la región I. Semiaplicación f:*

$$u(\tau_1) = \lambda + \beta_1 \frac{a - (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \lambda - \beta_1 \frac{a - (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

a) *Punto de silla en la región II. Semiaplicación g:*

$$u_1(\tau_2) = \lambda - \frac{a - (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \lambda + \frac{a - (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

donde β_1, γ_1 y γ_2 son las de la página 179.

Procediendo del mismo modo pero con las semiaplicaciones k y g_1 obtendremos

a) *Foco en la región III. Semiaplicación k:*

$$v_2(\tau_3) = -\lambda - \beta_1 \frac{a + (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_3} \phi(\tau_3; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_3}$$

$$v_1(\tau_3) = -\lambda + \beta_1 \frac{a + (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_3} \phi(\tau_3; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_3}$$

a) *Punto de silla en la región II. Semiaplicación g:*

$$u_1(\tau_2) = \lambda - \frac{a - (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \lambda + \frac{a - (1 - \lambda b)}{\mu b + 1} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

donde de nuevo β_1, γ_1 y γ_2 son las de la página 179.

En cuanto a los valores de $\lambda_i, \lambda_e, \lambda'_i$ y λ'_e unos sencillos cálculos permiten determinarlos

$$\lambda_i = \lambda - \left(1 - \frac{a}{1 - \lambda b}\right) z_1 \quad \lambda_e = \lambda - \left(1 - \frac{a}{1 - \lambda b}\right) z_2$$

$$\lambda'_i = -\lambda + \left(1 + \frac{a}{1 - \lambda b}\right) z_1 \quad \lambda'_e = -\lambda + \left(1 + \frac{a}{1 - \lambda b}\right) z_2$$

Como en la Sección anterior, la semejanza entre estas semiaplicaciones y estos puntos de corte con las fronteras, con sus homónimos del sistema con una sola frontera del Capítulo 1, sugiere la existencia de una relación mutua que vamos a poner de manifiesto en la siguiente Proposición.

Proposición 3.3 *Llamemos f_0 y g_0 a las semiaplicaciones f y g del sistema dinámico el la forma de Van der Pol-Duffing con una sola frontera, y sean $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{R}$ tales que $\hat{u} = f_0(\hat{v})$ y $\hat{u}_1 = g_0(\hat{v})$. Entonces, si $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ verifican*

$$u = f(v) \quad u_1 = g(v) \quad v_2 = k(v_1) \quad u_2 = g_1(v_1)$$

siendo f, g, k y g_1 las semiaplicaciones correspondientes al sistema con dos fronteras casi simétrico, se cumple

a) *Para la semiaplicación f :*

$$u(\tau_1) = \lambda + \left(1 - \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{u}(\tau_1) \quad v(\tau_1) = \lambda + \left(1 - \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{v}(\tau_1)$$

b) *Para la semiaplicación g :*

$$u_1(\tau_2) = \lambda + \left(1 - \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{u}_1(\tau_2) \quad v(\tau_2) = \lambda + \left(1 - \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{v}(\tau_2)$$

c) *Para la semiaplicación k :*

$$v_2(\tau_1) = -\lambda + \left(1 + \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{v}(\tau_1) \quad v_1(\tau_1) = -\lambda + \left(1 + \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{u}(\tau_1)$$

d) *Para la semiaplicación g_1 :*

$$u_2(\tau_2) = -\lambda + \left(1 + \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{v}(\tau_2) \quad v_1(\tau_2) = -\lambda + \left(1 + \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{u}_1(\tau_2)$$

Sean además $\lambda_i, \lambda_e, \lambda'_i$ y λ'_e , las ordenadas de los puntos en los que las variedades inestable y estable del punto de silla de la región II cortan respectivamente a las fronteras L_1 y L_2 , y $\hat{\lambda}_i$ y $\hat{\lambda}_e$ sus homónimas en el sistema con una sola frontera. Entonces se verifican

$$\lambda_i = \lambda + \left(1 - \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{\lambda}_i \quad \lambda_e = \lambda + \left(1 - \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{\lambda}_e$$

$$\lambda'_i = -\lambda + \left(1 + \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{\lambda}_i \quad \lambda'_e = -\lambda + \left(1 + \frac{1 - \lambda b}{a}\right) \cdot \hat{\lambda}_e$$

DEMOSTRACIÓN: Usando las ecuaciones paramétricas de las semiaplicaciones f_0 y g_0 (que aparecen en las páginas 33 y 39 con la denominación de f y g), y las expresiones de $\hat{\lambda}_i$ y $\hat{\lambda}_e$ (que en la página 46 figuran con los nombres de λ_i y λ_e), junto con las ecuaciones paramétricas de f, g, k, g_1 y las expresiones de $\lambda_i, \lambda_e, \lambda'_i$ y λ'_e , anteriores, la demostración es inmediata. \square

Teorema 3.4 *Consideremos el sistema dinámico casi simétrico en la forma de Van der Pol-Duffing, y sea $0 < b < 1$. Entonces para cada $\mu \in (-b, 2 + b)$, existe un único valor $\lambda_H > \frac{1}{b}$ del parámetro λ tal que*

a) *para cada $a \in (0, \lambda_H b - 1)$, el sistema tiene dos trayectorias homoclinas que nacen y mueren en el punto de silla de la región II, y que cada una rodea a uno de los otros dos equilibrios;*

b) *si $\frac{1}{b} < \lambda < \lambda_H(\mu)$, el sistema tiene para cada $a \in (0, \lambda b - 1)$ dos órbitas periódicas inestables que cada una rodea a uno de los equilibrios de la regiones I y III.*

3.3.3 Un solo equilibrio sobre una frontera.

Supongamos que el sistema sólo tiene un equilibrio y que éste está situado sobre una frontera. Como estamos considerando sólo valores de $a \geq 0$, esa frontera ha de ser L_1 y también $a = 1 - \lambda b$.

Desde la región I, este equilibrio es un foco estable, ya que estamos suponiendo $-b < \mu < 2 + b$, pero desde la región I puede ser un foco o un nodo, ya que nos hemos situado en el caso de que $b < \lambda < \frac{1}{b}$. Pero sólo nos ocuparemos del foco, ya que el nodo tiene un tratamiento muy parecido.

Como ya es habitual, estamos interesados en la existencia de policiclos, y en ausencia de puntos de silla, éstos han de ser órbitas periódicas que rodeen al equilibrio. Así, puede haber órbitas periódicas con partes en dos o en las tres regiones.

Vamos pues a ocuparnos en primer lugar de las semiaplicaciones f y g , que por estar el equilibrio en la frontera pueden expresarse fácilmente en forma explícita:

Semiaplicación f :

$$f(v) = (\lambda - v)e^{-\gamma_1 \pi} + \lambda \quad v \in [\lambda, +\infty)$$

Semiaplicación g :

$$g(v) = (\lambda - v)e^{\gamma_2 \pi} + \lambda \quad v \in [\lambda, v_0]$$

donde v_0 es la ordenada del punto de la frontera L_1 del que parte la trayectoria que atravesando la región II, es tangente a la frontera L_2 en el punto $(-1, -\lambda)$. En la

3.3 Sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras casi simétricos.185

Figura ?? se muestra v_0 . Para determinarlo recurrimos a las ecuaciones paramétricas da la trayectoria que pasa por el punto $(1, v_0)$, que pueden obtenerse a partir de la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales (ver Apéndice A), aplicándole las condiciones iniciales $x(0) = 1$ e $y(0) = v_0$, resultando

$$x(t) = 1 + \frac{\lambda - v_0}{\beta_2} e^{\alpha_2 t} \operatorname{sen} \beta_2 t$$

$$y(t) = \lambda + (v_0 - \lambda) e^{\alpha_2 t} \left(\cos \beta_2 t + \frac{\alpha_2 - \lambda}{\beta_2} \operatorname{sen} \beta_2 t \right)$$

Entonces, para determinar v_0 , debemos eliminar t_{20} entre las igualdades

$$x'(t_{20}) = (\lambda - v_0) e^{\alpha_2 t_{20}} (\gamma_2 \operatorname{sen} \beta_2 t_{20} + \cos \beta_2 t_{20}) = 0$$

$$x(t_{20}) = 1 + \frac{\lambda - v_0}{\beta_2} e^{\alpha_2 t_{20}} \operatorname{sen} \beta_2 t_{20} = -1$$

y resolver la ecuación resultante en v_0 , quedando finalmente

$$v_0 = \lambda + 2\sqrt{1 - \lambda b} e^{\gamma_2 \operatorname{Arctg}(1/\gamma_2)}$$

Pero si $v > v_0$, la trayectoria que parte del punto $(1, v)$, atraviesa la región II y entra en la III, con lo cual la semiaplicación g no interviene, pero en cambio debemos considerar las semiaplicaciones h, k y h_1 que se muestran en la Figura B.1 del Apéndice B.

A continuación exponemos las ecuaciones paramétricas de dichas semiaplicaciones, así como sus dominios y derivadas. Omitimos los cálculos que nos llevan a esas expresiones, ya que las técnicas empleadas son las mismas que en las Secciones 1.4 y 2.4

Semiaplicación h:

$$\left. \begin{aligned} v_1(\tau_2) &= -\lambda + 2\beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} (1 - \phi(\tau_2; -\gamma_2))}{\operatorname{sen} \tau_2} \\ v(\tau_2) &= \lambda + 2\beta_2 \frac{-e^{\gamma_2 \tau_2}}{\operatorname{sen} \tau_2} \end{aligned} \right\} \tau_2 \in (0, \tau_{20}]$$

siendo τ_{20} el valor del parámetro τ_2 , para el cual se verifica $v_1(\tau_{20}) = -\lambda$. Es evidente que $v(\tau_{20}) = v_0$ donde v_0 se ha calculado más atrás. La derivada es

$$h'(v) = \frac{dv_1}{dv} = \frac{1}{1 - \phi(\tau_2; -\gamma_2)} > 1 \quad \forall \tau_2 \in (0, \tau_{20}]$$

Semniaplicación k :

$$\left. \begin{aligned} v_2(\tau_3) &= -\lambda - 2\beta_1 \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_3} \phi(\tau_3; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_3} \\ v_1(\tau_3) &= -\lambda + 2\beta_1 \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_3} \phi(\tau_3; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_3} \end{aligned} \right\} \tau_3 \in [0, \pi]$$

la derivada es

$$k'(v_1) = \frac{dv_2}{dv_1} = -\frac{\phi(\tau_3, \gamma_1)}{\phi(\tau_3, -\gamma_1)} < 0 \quad \forall \tau_3 \in [0, \pi]$$

Semniaplicación h_1 :

$$\left. \begin{aligned} u_1(\tau'_2) &= \lambda - 2\beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau'_2}}{\text{sen } \tau'_2} \\ v_2(\tau'_2) &= -\lambda - 2\beta_2 \frac{e^{-\gamma_2 \tau'_2} (1 - \phi(\tau'_2; \gamma_2))}{\text{sen } \tau'_2} \end{aligned} \right\} \tau'_2 \in (0, \tau'_{20}]$$

siendo τ'_{20} el valor del parámetro τ'_2 , para el cual se verifica $v_2(\tau'_{20}) = -\lambda$ (Figura ??).
La derivada es

$$h'_1(v_2) = \frac{du_1}{dv_2} = 1 - \phi(\tau'_2; \gamma_2) < 1 \quad \forall \tau'_2 \in (0, \tau'_{20}]$$

pero $h'_1(v_2) > 0$.

La aplicación de Poincaré, tomando como sección la frontera L_1 es

$$P(u) = \begin{cases} g(f^{-1}(u)) & \text{si } u > u_0 \\ h_1(k(h(f^{-1}(u)))) & \text{si } u \leq u_0 \end{cases}$$

donde $u_0 = f(v_0)$. Para calcular la derivada P' , empleamos la regla de la cadena, de modo que podemos escribir

$$P'(u) = \begin{cases} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)\pi} & \text{si } u > u_0 \\ e^{\gamma_1 \pi} \frac{1 - \phi(\tau'_2; \gamma_2)}{1 - \phi(\tau'_2; -\gamma_2)} \cdot \frac{\phi(\tau_3; \gamma_1)}{\phi(\tau_3; -\gamma_1)} & \text{si } u \leq u_0 \end{cases}$$

Pero los parámetros τ_2, τ'_2 y τ_3 no son independientes. Para ver que relación hay entre ellos, observemos que v_1 y v_2 han de verificar (véase la Figura ??)

$$v_1(\tau_2) = v_1(\tau_3) \quad v_2(\tau'_2) = v_2(\tau_3)$$

3.3 Sistemas lineales a trozos continuos con dos fronteras casi simétricos.187

De esta dos igualdades, podemos obtener, reordenando adecuadamente los términos, estas otras dos

$$\frac{\phi(\tau_3; \gamma_1)}{1 - \phi(\tau_2; -\gamma_2)} = \frac{\mu b + 1}{1 - \lambda b} \cdot \frac{\text{sen } \tau_3}{\text{sen } \tau_2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{e^{-\gamma_1 \tau_3}} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

$$\frac{1 - \phi(\tau'_2; \gamma_2)}{\phi(\tau_3; -\gamma_1)} = \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{\text{sen } \tau'_2}{\text{sen } \tau_3} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_3}}{e^{-\gamma_2 \tau'_2}} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

lo que permite escribir la derivada P' , en el intervalo $-\infty < u \leq u_0$ de esta otra forma

$$P'(u) = e^{\gamma_1 \pi} \frac{\text{sen } \tau'_2}{\text{sen } \tau_2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{e^{-\gamma_2 \tau'_2}} e^{2\gamma_1 \tau_3}$$

Estudiemos el comportamiento de P en los extremos de este último intervalo. Para ello observemos que si $u = u_0$, entonces $\tau_2 = \tau_{20}$ $\tau'_2 = \tau'_{20}$ y $v_1 = v_2 = -\lambda$, y por tanto, $\tau_3 = 0$. Ahora bien, de las igualdades

$$1 - \phi(\tau'_{20}; \gamma_2) = 0 \quad 0 < \tau'_{20} < \pi$$

$$1 - \phi(\tau_{20}; -\gamma_2) = 0 \quad 0 < \tau_{20} < \pi$$

o de sus equivalentes

$$\cos \tau'_{20} - \gamma_2 \text{sen } \tau'_{20} = 0$$

$$\cos \tau_{20} + \gamma_2 \text{sen } \tau_{20} = 0$$

se deduce que $\text{tg } \tau'_{20} = \frac{1}{\gamma_2}$ y que $\text{tg } \tau_{20} = -\frac{1}{\gamma_2}$. Como además τ_{20} y τ'_{20} están en el primer o en el segundo cuadrante, ha de ser $\tau_{20} + \tau'_{20} = \pi$, y por lo tanto

$$\frac{e^{\gamma_2 \tau_{20}}}{e^{-\gamma_2 \tau'_{20}}} = e^{\gamma_2 \pi} \quad \frac{\text{sen } \tau'_{20}}{\text{sen } \tau_{20}} = 1$$

así que tenemos

$$P'(u_0) = e^{(\gamma_1 + \gamma_2)\pi}$$

Vamos a calcular ahora $\lim_{u \rightarrow -\infty} P'(u)$. Recordemos que si $u \rightarrow -\infty$, entonces tenemos $v \rightarrow +\infty$, lo que implica que $v_1 \rightarrow +\infty$ y $v_2 \rightarrow -\infty$, y como consecuencia de ello,

$$\tau_2 \rightarrow 0^+ \quad \tau'_2 \rightarrow 0^+ \quad \tau_3 \rightarrow \pi^-$$

Volviendo a las igualdades

$$v_1(\tau_2) = v_1(\tau_3) \quad v_2(\tau'_2) = v_2(\tau_3)$$

y operando con ellas podemos escribir

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \tau_2} = -\alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_3} - \cos \tau_3 + \gamma_1 \operatorname{sen} \tau_3}{\operatorname{sen} \tau_3}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \tau_2'} = \alpha_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{1 - \lambda b}{\mu b + 1} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_3} - \cos \tau_3 - \gamma_1 \operatorname{sen} \tau_3}{\operatorname{sen} \tau_3}$$

A continuación calculamos el límite

$$\lim_{(\tau_2, \tau_2') \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} \tau_2'}{\operatorname{sen} \tau_2} = \lim_{(\tau_2, \tau_2') \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg} \tau_2'}{\operatorname{tg} \tau_2} =$$

$$= \lim_{\tau_3 \rightarrow \pi^-} \frac{-\alpha_2 \beta_2 (\mu b + 1) \operatorname{sen} \tau_3 + \beta_1 (1 - \lambda b) (e^{-\gamma_1 \tau_3} - \cos \tau_3 + \gamma_1 \operatorname{sen} \tau_3)}{\alpha_2 \beta_2 (\mu b + 1) \operatorname{sen} \tau_3 + \beta_1 (1 - \lambda b) (e^{\gamma_1 \tau_3} - \cos \tau_3 - \gamma_1 \operatorname{sen} \tau_3)} = e^{-\gamma_1 \pi}$$

de modo que podemos concluir

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} P'(u) = e^{2\gamma_1 \pi} < 1$$

Así pues, la derivada en los extremos del intervalo verifica

$$P'(u_0) = e^{(\gamma_1 + \gamma_2)\pi}$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} P'(u) = e^{2\gamma_1 \pi} < 1$$

de modo que según el signo de $\gamma_1 + \gamma_2$, la derivada será mayor o menor que 1 en un extremo, mientras que en el otro es siempre menor que 1.

Ahora bien, se cumple que $P(u) > u$ para valores de $u \rightarrow -\infty$, como puede comprobarse al calcular

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (P(u) - u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} u \left(\frac{P(u)}{u} - 1 \right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} u (e^{2\gamma_1 \pi} - 1) = +\infty$$

mientras que $P(u_0)$ será mayor o menor que u_0 según el signo de $\gamma_1 + \gamma_2$.

Vamos a conjeturar que la derivada segunda P'' es siempre positiva. Entonces, si $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, hay un único punto fijo de P en el intervalo $(-\infty, u_0]$, y si $\gamma_1 + \gamma_2 < 0$ no hay ninguno. Por último, si $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, todos los puntos del intervalo $[u_0, \lambda]$ son puntos fijos de P y estamos ante un centro regional.

Así pues, los valores de los parámetros de bifurcación para los que se verifica $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ marcan un cambio cualitativo en la dinámica. Algunas simulaciones numéricas nos han permitido intuir que estamos ante una bifurcación de Hopf degenerada, del que parte una rama de sillar nodo de órbitas periódicas. Esperamos que en futuras investigaciones podamos dilucidar este y otros puntos que han quedado apuntados más atrás.

Apéndice A

Integración de las ecuaciones del sistema.

Dedicamos este Apéndice a la exposición de las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales de que hemos hecho uso, según las distintas modalidades de los autovalores de las matrices.

Los sistemas empleados tienen la forma

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Supondremos que la matriz A es no singular y llamaremos (\bar{x}, \bar{y}) a la solución del sistema

$$A \cdot X(t) + B = 0$$

que en cada región proporciona las coordenadas del equilibrio de la misma.

En las regiones I y II, la matriz A es

$$A_I = \begin{pmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \quad A_{II} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

de modo que llamando k_1 y k_2 a las constantes de integración, las distintas soluciones generales son

Autovalores reales distintos y no nulos.

a) *En la región I:*

$$\begin{aligned} x_I(t) &= -k_1 e^{w_1 t} - k_2 e^{w_2 t} + \bar{x}_I \\ y_I(t) &= k_1(\mu + w_1) e^{w_1 t} + k_2(\mu + w_2) e^{w_2 t} + \bar{y}_I \end{aligned}$$

b) En la región II:

$$\begin{aligned}x_I(t) &= k_1 e^{z_1 t} + k_2 e^{z_2 t} + \bar{x}_I \\y_I(t) &= k_1(\lambda - z_1) e^{z_1 t} + k_2(\lambda - z_2) e^{z_2 t} + \bar{y}_{II}\end{aligned}$$

Autovalores reales, iguales y no nulos.

a) En la región I:

$$\begin{aligned}x_I(t) &= -e^{wt}(k_1 + k_2 + k_2 t) + \bar{x}_I \\y_I(t) &= e^{wt}[(\mu + w)(k_1 + k_2 + k_2 t) + k_2] + \bar{y}_I\end{aligned}$$

b) En la región II:

$$\begin{aligned}x_{II}(t) &= e^{zt}(k_1 + k_2 + k_2 t) + \bar{x}_{II} \\y_{II}(t) &= e^{zt}[(\lambda - z)(k_1 + k_2 + k_2 t) - k_2] + \bar{y}_{II}\end{aligned}$$

Autovalores complejos.

a) En la región I:

$$\begin{aligned}x_I(t) &= -e^{\alpha_1 t}(k_2 \cos \beta_1 t + k_1 \sin \beta_1 t) + \bar{x}_I \\y_I(t) &= e^{\alpha_1 t}([k_1 \beta_1 + k_2(\mu + \alpha_1)] \cos \beta_1 t + [k_1(\mu + \alpha_1) - k_2 \beta_1] \sin \beta_1 t) + \bar{y}_I\end{aligned}$$

b) En la región II:

$$\begin{aligned}x_{II}(t) &= e^{\alpha_2 t}(k_2 \cos \beta_2 t + k_1 \sin \beta_2 t) + \bar{x}_{II} \\y_{II}(t) &= e^{\alpha_2 t}(-[k_1 \beta_2 + k_2(\lambda - \alpha_2)] \cos \beta_2 t + [k_1(\lambda - \alpha_2) + k_2 \beta_2] \sin \beta_2 t) + \bar{y}_{II}\end{aligned}$$

Apéndice B

Las semiaplicaciones de Poincaré.

A lo largo de este trabajo, las semiaplicaciones de Poincaré han desempeñado un papel destacado, ya que gracias a ellas, y a las aplicaciones de Poincaré que se construyen componiéndolas, hemos podido investigar la dinámica de los distintos sistemas lineales a trozos considerados, en lo que a órbitas periódicas y sus bifurcaciones se refiere.

Pero la construcción de estas semiaplicaciones, unido a la diversidad de las mismas, determinada por el tipo de los autovalores de las matrices del sistema, hace tedioso su cálculo, por lo que se ha juzgado oportuno relegarlas al presente Apéndice.

Salvo en aquellos casos (pocos) en los que hay autovalores complejos con parte real nula, en los que las semiaplicaciones de Poincaré pueden expresarse en forma cartesiana explícita, en todos los demás casos, tendremos que expresarlas mediante sus ecuaciones paramétricas en las que el parámetro es el tiempo de vuelo de las órbitas en la región que corresponda, convenientemente escalado.

Procederemos sólo a efectuar los cálculos para algunas de las semiaplicaciones dado que el método empleado se aplica con ligeras modificaciones a las demás.

En la figura B.1 se muestran las distintas semiaplicaciones de las que calcularemos algunas en las siguientes páginas, para los sistemas lineales a trozos con dos y con una frontera respectivamente.

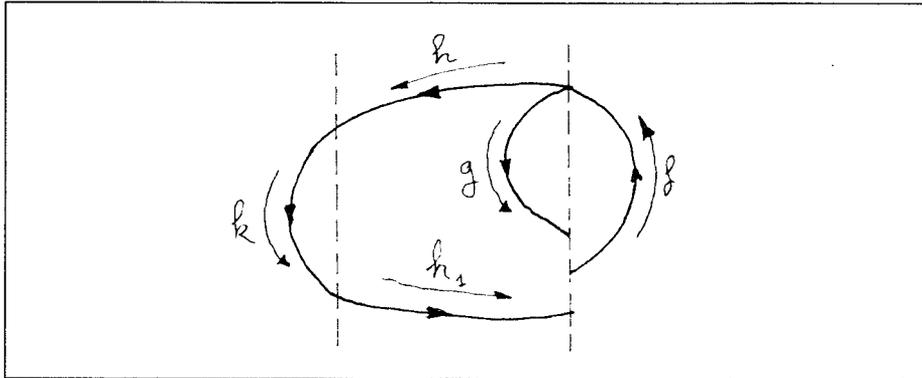


Figura B.1: Las diferentes clases de semiaplicaciones de Poincaré

B.1 Cálculo de algunas semiaplicaciones.

En esta Sección vamos a obtener las ecuaciones paramétricas de algunas de las semiaplicaciones más representativas. Los cálculos pueden servir de modelo para la deducción de las ecuaciones correspondientes a las demás semiaplicaciones.

Proposición B.1 Si los autovalores de la matriz A_I son $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ con $w_1 \cdot w_2 \neq 0$, y el sistema tiene dos fronteras, entonces las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación f , de parámetro τ_1 son

$$u(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu + (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu - (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

donde $\gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}$, las coordenadas del equilibrio de la región I son (\bar{x}_I, \bar{y}_I) , y la función ψ está descrita en el Apéndice C.

DEMOSTRACIÓN: Cuando la matriz A_I tiene autovalores reales y distintos w_1 y w_2 , la solución general del sistema en la región I (ver Apéndice A), es

$$x(t) = -k_1 e^{w_1 t} - k_2 e^{w_2 t} + \bar{x}_I$$

$$y(t) = k_1(\mu + w_1) e^{w_1 t} + k_2(\mu + w_2) e^{w_2 t} + \bar{y}_I$$

donde w_1 y w_2 son los autovalores de A_I y \bar{x}_I, \bar{y}_I las coordenadas del equilibrio de la región I.

Si una trayectoria que parte de un punto de la frontera entre las regiones I y II, de coordenadas $(1, u)$, se interna en la región I, contiene una solución del sistema que ha de verificar las condiciones iniciales

$$x(0) = 1 \quad y(0) = u$$

de las cuales pueden obtenerse los valores de las constantes de integración k_1 y k_2

$$k_1 = -\frac{(\bar{x}_I - 1)(\mu + w_2) - u + \bar{y}_I}{w_1 - w_2} \quad k_2 = \frac{(\bar{x}_I - 1)(\mu + w_1) - u + \bar{y}_I}{w_1 - w_2}$$

que al ser sustituidas en las ecuaciones paramétricas de la solución general del sistema, dan

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{w_1 - w_2} \cdot [((\bar{x}_I - 1)\mu - u + \bar{y}_I) (e^{w_1 t} - e^{w_2 t}) + \\ &\quad + (\bar{x}_I - 1) (w_2 e^{w_1 t} - w_1 e^{w_2 t})] + \bar{x}_I \\ y(t) &= \frac{-1}{w_1 - w_2} \cdot [((\bar{x}_I - 1)(\mu + w_1)(\mu + w_2) - (u - \bar{y}_I)\mu) (e^{w_1 t} - e^{w_2 t}) - \\ &\quad - (u - \bar{y}_I) (w_1 e^{w_1 t} - w_2 e^{w_2 t})] + \bar{y}_I \end{aligned}$$

Si la trayectoria que contiene esta solución, tras viajar por la región I durante un tiempo de vuelo t_1 vuelve a tocar a la frontera, lo hará en un punto de la misma de coordenadas $(1, v)$ con $v > \lambda$, de modo que habrá de verificar

$$x(t_1) = 1 \quad y(t_1) = v$$

Estas dos igualdades constituyen un sistema de ecuaciones lineales en u y v , que al resolverlo proporcionan los valores

$$\begin{aligned} u &= \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu + (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{w_1 - w_2 + w_2 e^{w_1 t_1} - w_1 e^{w_2 t_1}}{e^{w_1 t_1} - e^{w_2 t_1}} \\ v &= \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu - (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{(w_1 - w_2)e^{(w_1 + w_2)t_1} + w_2 e^{w_2 t_1} - w_1 e^{w_1 t_1}}{e^{w_1 t_1} - e^{w_2 t_1}} \end{aligned}$$

Si en estas expresiones introducimos el parámetro τ_1 y el coeficiente γ_1 :

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} t_1 \quad \gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}$$

y simplificamos adecuadamente, obtenemos

$$u(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu + (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \text{Ch } \tau_1 + \gamma_1 \text{Sh } \tau_1}{\text{Sh } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu - (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \text{Ch } \tau_1 - \gamma_1 \text{Sh } \tau_1}{\text{Sh } \tau_1}$$

o bien si empleamos la función ψ descrita en el Apéndice B:

$$u(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu + (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu - (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

□

Proposición B.2 Si los autovalores de la matriz A_{II} son $\alpha_2 \pm i\beta_2$ con $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ y $\beta_2 \neq 0$, y el sistema tiene dos fronteras, entonces las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación h , de parámetro τ_2 son

$$v_2 = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} + 1) - \beta_2(\bar{x}_{II} + 1) \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} - 1) + \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2}}{\text{sen } \tau_2}$$

donde $\gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{4 - (\lambda - b)^2}}$, las coordenadas del equilibrio de la región II son $(\bar{x}_{II}, \bar{y}_{II})$, y la función ϕ está descrita en el Apéndice C.

DEMOSTRACIÓN: Si los autovalores de la matriz A_{II} son $\alpha_2 \pm i\beta_2$ con $\beta_2 \neq 0$, entonces la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales en la región II es de acuerdo con el estudio hecho en el Apéndice A

$$x(t) = e^{\alpha_2 t} [k_2 \cos \beta_2 t + k_1 \text{sen } \beta_2 t] + \bar{x}_{II}$$

$$y(t) = e^{\alpha_2 t} [(-k_1 \beta_2 + k_2(\lambda - \alpha_2)) \cos \beta_2 t + (k_1(\lambda - \alpha_2) + k_2 \beta_2) \text{sen } \beta_2 t] + \bar{y}_{II}$$

donde $(\bar{x}_{II}, \bar{y}_{II})$ son las coordenadas del equilibrio del sistema en la región II.

Si una trayectoria entra en esta región procedente de la región I, por un punto de la frontera de coordenadas $(1, v)$, habrá de contener una solución del sistema de ecuaciones diferenciales que verifique las condiciones

$$x(0) = 1 \quad y(0) = v$$

pero estas dos igualdades permiten determinar las constantes de integración

$$k_1 = -\frac{2(v - \bar{y}_{II}) + (\bar{x}_{II} - 1)(\lambda + b)}{2\beta_2} \quad k_2 = 1 - \bar{x}_{II}$$

y éstas las ecuaciones paramétricas de la citada solución

$$x(t) = e^{\alpha_2 t} \left[(1 - \bar{x}_{II}) \cos \beta_2 t - \frac{2(v - \bar{y}_{II}) + (\bar{x}_{II} - 1)(\lambda + b)}{2\beta_2} \operatorname{sen} \beta_2 t \right] + \bar{x}_{II}$$

$$y(t) = e^{\alpha_2 t} \left[(v - \bar{y}_{II}) \cos \beta_2 t - \frac{2(\bar{x}_{II} - 1) + (v - \bar{y}_{II})(\lambda + b)}{2\beta_2} \operatorname{sen} \beta_2 t \right] + \bar{y}_{II}$$

Consideremos las trayectorias que atraviesan de parte a parte la región II, entrando desde la I y yendo a dar a la frontera con la región III en puntos de coordenadas $(-1, v_1)$. Cada una de estas trayectorias contiene una solución del sistema de ecuaciones diferenciales que ha de verificar

$$x(t_2) = -1 \quad y(t_2) = v_1$$

Pero estas dos igualdades constituyen un sistema de ecuaciones lineales en v_1 y v que al resolverlo proporciona las soluciones

$$v_2 = \frac{2\bar{y}_{II} - (\bar{x}_{II} + 1)(\lambda + b)}{2} + \beta_2(\bar{x}_{II} + 1) \frac{\cos \beta_2 t_2}{\operatorname{sen} \beta_2 t_2} - \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \frac{e^{\alpha_2 t_2}}{\operatorname{sen} \beta_2 t_2}$$

$$v = \frac{2\bar{y}_{II} - (\bar{x}_{II} - 1)(\lambda + b)}{2} - \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \frac{\cos \beta_2 t_2}{\operatorname{sen} \beta_2 t_2} + \beta_2(\bar{x}_{II} + 1) \frac{e^{-\alpha_2 t_2}}{\operatorname{sen} \beta_2 t_2}$$

De forma análoga a la Proposición anterior, introducimos el parámetro τ_2 y el coeficiente γ_2

$$\tau_2 = \beta_2 \tau_2 \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

de modo que después de simplificar estas expresiones obtenemos

$$v_2 = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} + 1) - \beta_2(\bar{x}_{II} + 1) \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 + \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\operatorname{sen} \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{\operatorname{sen} \tau_2}$$

$$v = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} - 1) + \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\operatorname{sen} \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2}}{\operatorname{sen} \tau_2}$$

que también pueden escribirse de esta otra forma usando la función ϕ del Apéndice C

$$v_2 = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} + 1) - \beta_2(\bar{x}_{II} + 1) \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} - 1) + \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2}}{\text{sen } \tau_2}$$

□

Proposición B.3 Si los autovalores de la matriz A_{II} son $\alpha_2 \pm i\beta_2$ con $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ y $\beta_2 \neq 0$, y el sistema tiene una sola frontera, entonces las ecuaciones paramétricas de la semiaplicación g , de parámetro τ_2 son

$$u_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda \bar{x}_{II} - \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda \bar{x}_{II} + \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

donde $\gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{4 - (\lambda - b)^2}}$, las coordenadas del equilibrio de la región II son $(\bar{x}_{II}, \bar{y}_{II})$, y la función ϕ está descrita en el Apéndice C.

DEMOSTRACIÓN: Si los autovalores de la matriz A_{II} son $\alpha_2 \pm i\beta_2$ con $\beta_2 \neq 0$, entonces la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales en la región II es de acuerdo con el estudio hecho en el Apéndice A

$$x(t) = e^{\alpha_2 t} [k_2 \cos \beta_2 t + k_1 \sin \beta_2 t] + \bar{x}_{II}$$

$$y(t) = e^{\alpha_2 t} [(-k_1 \beta_2 + k_2(\lambda - \alpha_2)) \cos \beta_2 t + (k_1(\lambda - \alpha_2) + k_2 \beta_2) \sin \beta_2 t] + \bar{y}_{II}$$

donde $(\bar{x}_{II}, \bar{y}_{II})$ son las coordenadas del equilibrio del sistema en la región II.

Si una trayectoria entra en esta región procedente de la región I, por un punto de la frontera de coordenadas $(0, v)$, habrá de contener una solución del sistema de ecuaciones diferenciales que verifique las condiciones

$$x(0) = 0 \quad y(0) = v$$

pero estas dos igualdades permiten determinar las constantes de integración

$$k_1 = -\frac{2(v - \bar{y}_{II}) + \bar{x}_{II}(\lambda + b)}{2\beta_2} \quad k_2 = -\bar{x}_{II}$$

y éstas las ecuaciones paramétricas de la citada solución

$$x(t) = e^{\alpha_2 t} \left[-\bar{x}_{II} \cos \beta_2 t - \frac{2(v - \bar{y}_{II}) + \bar{x}_{II}(\lambda + b)}{2\beta_2} \operatorname{sen} \beta_2 t \right] + \bar{x}_{II}$$

$$y(t) = e^{\alpha_2 t} \left[(v - \bar{y}_{II}) \cos \beta_2 t - \frac{2\bar{x}_{II} + (v - \bar{y}_{II})(\lambda + b)}{2\beta_2} \operatorname{sen} \beta_2 t \right] + \bar{y}_{II}$$

En el caso de que esta trayectoria, después de viajar por la región II durante un tiempo de vuelo t_2 , regrese a la frontera con la región I en un punto de coordenadas $(1, u_1)$, habrá de verificar

$$x(t_2) = 1 \quad y(t_2) = u_1$$

Estas dos igualdades forman un sistema de ecuaciones lineales en u_1 y v , que si lo resolvemos nos da

$$u_1 = \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{\cos \beta_2 t_2 - e^{\alpha_2 t_2}}{\operatorname{sen} \beta_2 t_2} - \frac{\bar{x}_{II}(\lambda + b) - 2\bar{y}_{II}}{2}$$

$$v = -\beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{\cos \beta_2 t_2 - e^{-\alpha_2 t_2}}{\operatorname{sen} \beta_2 t_2} - \frac{\bar{x}_{II}(\lambda + b) - 2\bar{y}_{II}}{2}$$

Introducimos una vez más el parámetro τ_2 y el coeficiente γ_2 con lo que obtenemos

$$u_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - b\bar{x}_{II} - \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 + \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\operatorname{sen} \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - b\bar{x}_{II} + \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sen} \tau_2}{\operatorname{sen} \tau_2}$$

expresiones que también pueden escribirse en términos de la función ϕ que figura en el Apéndice C

$$u_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda \bar{x}_{II} - \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\operatorname{sen} \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda \bar{x}_{II} + \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\operatorname{sen} \tau_2}$$

B.2 Ecuaciones paramétricas de las semiaplicaciones de Poincaré.

A continuación presentamos una relación de las principales semiaplicaciones que han ido apareciendo a lo largo de este trabajo. Están expresadas en forma

paramétrica, siendo el parámetro τ_1 si se trata de la semiaplicación f que afecta a la región I y τ_2 si son las semiaplicaciones g y h que se refieren a la región II.

Los coeficientes γ_1 y γ_2 dependen del tipo de los autovalores de las matrices A_I y A_{II} respectivamente, de modo que

Si los autovalores son reales y distintos:

$$\gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}} \quad \gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{(\lambda - b)^2 - 4}}$$

Si los autovalores son complejos:

$$\gamma_1 = \frac{-(\mu + b)}{4 - \sqrt{(\mu - b)^2}} \quad \gamma_2 = \frac{\lambda - b}{\sqrt{4 - (\lambda - b)^2}}$$

La semiaplicación f con una sola frontera.

1.- Autovalores de A_I reales, distintos y no nulos.

$$u(\tau_1) = \bar{y}_I + \bar{x}_I \mu + \bar{x}_I \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \bar{y}_I + \bar{x}_I \mu - \bar{x}_I \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

2.- Autovalores de A_I complejos.

$$u(\tau_1) = \bar{y}_I + \bar{x}_I \mu + \beta_1 \bar{x}_I \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \bar{y}_I + \bar{x}_I \mu - \beta_1 \bar{x}_I \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

La semiaplicación f con dos fronteras.

1.- Autovalores de A_I reales, distintos y no nulos.

$$u(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu + (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu - (\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\mu - b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \psi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{Sh } \tau_1}$$

2.- Autovalores de A_I complejos.

$$u(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu + \beta_1(\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; \gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

$$v(\tau_1) = \bar{y}_I + (\bar{x}_I - 1)\mu - \beta_1(\bar{x}_I - 1) \cdot \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \phi(\tau_1; -\gamma_1)}{\text{sen } \tau_1}$$

La semiaplicación g con una sola frontera.

1.- Autovalores de A_{II} reales, distintos y no nulos.

$$u_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \bar{x}_{II}\lambda - \bar{x}_{II} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \bar{x}_{II}\lambda + \bar{x}_{II} \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2}$$

2.- Autovalores de A_{II} complejos.

$$u_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda \bar{x}_{II} - \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda \bar{x}_{II} + \beta_2 \bar{x}_{II} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

La semiaplicación g con dos fronteras.

1.- Autovalores de A_{II} reales, distintos y no nulos.

$$u_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - (\bar{x}_{II} - 1)\lambda - (\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - (\bar{x}_{II} - 1)\lambda + (\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2}$$

2.- Autovalores de A_{II} complejos.

$$u_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda(\bar{x}_{II} - 1) - \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - \lambda(\bar{x}_{II} - 1) + \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2}$$

La semiaplicación h .

1.- Autovalores de A_{II} reales, distintos y no nulos.

$$v_1(\tau_2) = \bar{y}_{II} - (\bar{x}_{II} + 1)\lambda - (\bar{x}_{II} + 1) \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2} + \\ + \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{\text{Sh } \tau_2}$$

$$v(\tau_2) = \bar{y}_{II} - (\bar{x}_{II} - 1)\lambda + (\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{\sqrt{(\lambda + b)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \psi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{Sh } \tau_2} + \\ + \sqrt{(\lambda + b)^2 - 4} \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2}}{\text{Sh } \tau_2}$$

3.- Autovalores de A_{II} complejos.

$$v_2 = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} + 1) - \beta_2(\bar{x}_{II} + 1) \cdot \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; -\gamma_2)}{\text{sen } \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{\gamma_2 \tau_2}}{\text{sen } \tau_2}$$

$$v = \bar{y}_{II} - b(\bar{x}_{II} - 1) + \beta_2(\bar{x}_{II} - 1) \cdot \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \phi(\tau_2; \gamma_2)}{\text{sen } \tau_2} + 2\beta_2 \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2}}{\text{sen } \tau_2}$$

Las otras semiaplicaciones esquematizadas en la Figura B.1, se han usado tan poco en este trabajo (únicamente de forma parcial en algunos párrafos del Capítulo 3), que por brevedad, se ha preferido omitirlas.

Apéndice C

Las funciones ϕ , ψ y \dots

A lo largo de este trabajo, en las múltiples ocasiones en que hemos calculado las distintas semiaplicaciones de Poincaré, hemos utilizado con idea de simplificar y sistematizar los cálculos, unas funciones sencillas cuyas propiedades vamos a describir a continuación.

C.1 La función ϕ .

En el estudio de las semiaplicaciones de Poincaré en una región donde la matriz del sistema tiene autovalores complejos, con parte real no nula, hemos empleado la función

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida así

$$\phi(\tau; \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \sin \tau)$$

donde γ es un parámetro, y de la que vamos a hacer ahora un breve estudio analítico.

Observemos en primer lugar que

$$\phi(-\tau; \gamma) = \phi(\tau; -\gamma)$$

lo que implica que la función $\phi(\tau; -\gamma)$ permanece invariante frente al cambio de τ por $-\tau$ y de γ por $-\gamma$, y por consiguiente que las gráficas de las funciones $\phi(\tau; -\gamma)$ y $\phi(-\tau; \gamma)$ son simétricas con respecto al eje vertical. Ello trae como consecuencia el que sólo sea necesario estudiar la función ϕ para valores no negativos del parámetro γ . Pero como además, $\phi(\tau; 0) = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, nos limitaremos a considerar valores positivos de γ .

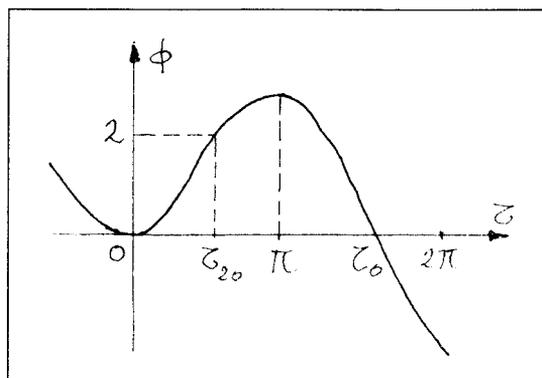


Figura C.1: La función ϕ cuando $\gamma > 0$.

La derivada de la función ϕ es

$$\phi'(\tau; \gamma) = (\gamma^2 + 1)e^{\gamma\tau} \sin \tau$$

El signo de esta derivada, que indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento es

$$\phi'(\tau; \gamma) \begin{cases} > 0 & \text{si } \tau \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ < 0 & \text{si } \tau \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \\ = 0 & \text{si } \tau = k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

de donde se deduce que la función ϕ presenta las mismas oscilaciones que la función $\cos \tau$, pero con la diferencia de que esta última lo hace alrededor del valor medio 0 y con amplitud constante 1, mientras que ϕ oscila alrededor del valor medio 1, con amplitud creciente conforme τ aumenta, como vamos a comprobar a continuación

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \phi(\tau; \gamma) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} [1 - e^{\gamma\tau}(\cos \tau - \gamma \sin \tau)] = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\phi(k\pi; \gamma)| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |1 - e^{\gamma k\pi}(-1)^k| = +\infty$$

Con la información que hemos reunido hasta aquí podemos trazar en la figura C.1 la gráfica de la función ϕ para valores positivos del parámetro γ

Debemos llamar la atención acerca de la abscisa $\tau_0 > 0$ del primer punto de corte de la gráfica de $\phi(\tau; \gamma)$ con $\gamma < 0$ y el eje horizontal, pues como hemos visto en diversas ocasiones a lo largo de este trabajo, ocupa un lugar destacado en el proceso de cálculo de los extremos de los dominios de las semiaplicaciones de Poincaré.

C.2 La función ψ .

Otra función muy parecida a ϕ , surgió en el estudio de las semiaplicaciones de Poincaré cuando en la región correspondiente, el sistema tenía una matriz con autovalores reales distintos. Como su análoga, fue introducida para facilitar determinados cálculos. Se trata de la función

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida así

$$\psi(\tau; \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau}(\text{Ch } \tau - \gamma \text{ Sh } \tau)$$

donde γ es un parámetro, y de la que vamos a hacer ahora un breve estudio analítico.

Observemos en primer lugar que

$$\psi(-\tau; \gamma) = \psi(\tau; -\gamma) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

lo que implica que la función $\psi(\tau; -\gamma)$ permanece invariante frente al cambio de τ por $-\tau$ y de γ por $-\gamma$, y por consiguiente que las gráficas de las funciones $\psi(\tau; -\gamma)$ y $\psi(-\tau; \gamma)$ son simétricas con respecto al eje vertical. Ello trae como consecuencia el que sólo sea necesario estudiar la función ψ para valores no negativos del parámetro γ . Pero como además, $\psi(\tau; 0) = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, nos limitaremos a considerar valores positivos de γ .

La derivada de la función ψ es

$$\psi'(\tau; \gamma) = (\gamma^2 - 1)e^{\gamma\tau} \text{ Sh } \tau$$

El signo de esta derivada, que indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento es

$$\psi'(\tau; \gamma) \begin{cases} > 0 & \text{si } \tau > 0 \\ < 0 & \text{si } \tau < 0 \\ = 0 & \text{si } \tau = 0 \end{cases} \quad \text{cuando } \gamma > 1$$

$$\psi'(\tau; \gamma) = 0 \quad \text{cuando } \gamma = 1$$

$$\psi'(\tau; \gamma) \begin{cases} < 0 & \text{si } \tau > 0 \\ > 0 & \text{si } \tau < 0 \\ = 0 & \text{si } \tau = 0 \end{cases} \quad \text{cuando } 0 < \gamma < 1$$

Del signo de esta derivada se deduce que cuando $\gamma = 1$, ψ es una función constante. Es fácil comprobar que $\psi(\tau, 1) = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

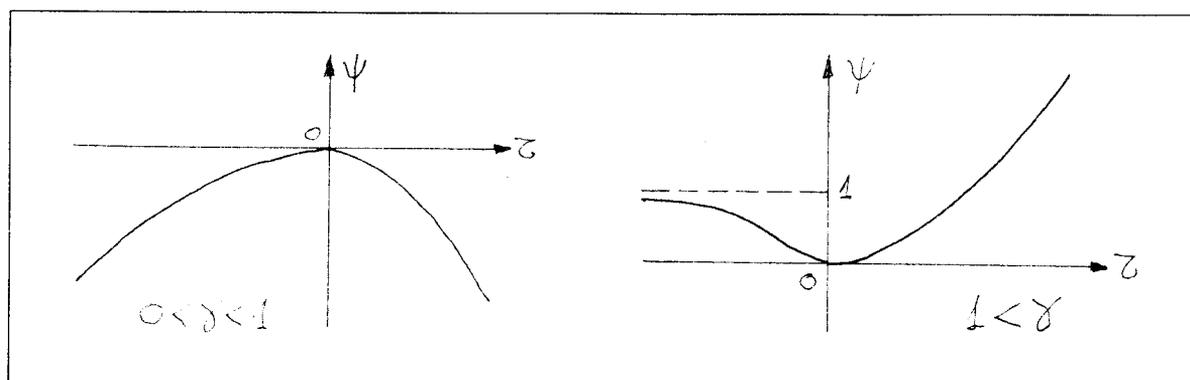


Figura C.2: La función ψ cuando $\gamma > 0$.

Otra forma de escribir la función ψ es

$$\psi(\tau; \gamma) = 1 - \frac{1}{2} \left[(1 - \gamma)e^{\tau(\gamma+1)} + (1 + \gamma)e^{\tau(\gamma-1)} \right]$$

que permite estudiar su comportamiento para valores grandes de $|\tau|$:

a) si $0 < \gamma < 1$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \psi(\tau; \gamma) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \left[(1 - \gamma)e^{\tau(\gamma+1)} + (1 + \gamma)e^{\tau(\gamma-1)} \right] \right] = -\infty$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \psi(\tau; \gamma) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \left[(1 - \gamma)e^{\tau(\gamma+1)} + (1 + \gamma)e^{\tau(\gamma-1)} \right] \right] = -\infty$$

b) si $\gamma > 1$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \psi(\tau; \gamma) &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \left[(1 - \gamma)e^{\tau(\gamma+1)} + (1 + \gamma)e^{\tau(\gamma-1)} \right] \right] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{e^{\tau(\gamma+1)}}{2} \left((1 - \gamma) + (1 + \gamma)e^{-2\tau} \right) \right] = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \psi(\tau; \gamma) &= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \left[(1 - \gamma)e^{\tau(\gamma+1)} + (1 + \gamma)e^{\tau(\gamma-1)} \right] \right] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{e^{\tau(\gamma-1)}}{2} \left((1 - \gamma)e^{2\tau} + (1 + \gamma) \right) \right] = 1 \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de trazar la gráfica de la función ψ para valores positivos del parámetro γ , según se muestra en la figura C.2

C.3 La función σ .

Cuando la matriz del sistema presentaba autovalores reales e iguales, empleábamos la función

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida así

$$\sigma(t; w) = 1 - e^{wt}(1 - wt)$$

donde w es un parámetro. Para estudiar esta función observemos en primer lugar que

$$\sigma(t; -w) = \sigma(-t; w) \quad \text{y que} \quad \sigma(t; 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

lo que permite reducir el estudio al caso de que $w > 0$. La derivada de σ es

$$\sigma'(t; w) = w^2 t e^{wt}$$

que tiene el mismo signo que t . En cuanto al comportamiento de σ para valores grandes y pequeños de t , observemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t; w) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{wt}(1 - wt)) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t; w) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 - e^{wt}(1 - wt)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1 - wt}{e^{-wt}}\right) = 1$$

Después de este breve estudio, disponemos de suficiente información como para comprobar que el comportamiento cualitativo de la función σ es el mismo que el de la función ψ cuando $1 < \gamma$.

Bibliografía

- [1] ANDRONOV, A.A.; VITT, A.A.; KHAIKIN, S.E. *Theory of oscillators*.
Dover (1987)
- [2] BOISSONADE, J.; DE KEPPER, P. *Transitions from bistability to limit cycle oscillations. Theoretical analysis and experimental evidence in a open chemical system*.
J. Phys. Chem. **84** pp 501-506 (1980)
- [3] BUTENIN, N.; NEIMARK, YU.; FUFÁEV, N. *Introducción a la teoría de osciladores no lineales*.
Mir. Moscú (1990)
- [4] DANGELMAYR, G.; GUCKENHEIMER, J. *On a four parameter family of planar vector fields*.
Arch. Rat. Mech. Anal., **97** pp 321-352 (1987)
- [5] DUFFING, G. *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz*.
Braunschweig (1918).
- [6] FITZHUGH, R. *Impulses and Physiological State in Models of Nerve Membrane*.
Biophys. J. Vol 1 pp 445-466, (1961).
- [7] GAMERO, E. *Computación simbólica y bifurcaciones de sistemas dinámicos*.
Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (1990)
- [8] GÖBBER, F.; WILLAMOWSKY, D. *Ljapunov approach to multiple Hopf bifurcation*.
J. Math. Anal. Appl. **71** pp 333-350 (1979)
- [9] GOLUBITSKY, M.; LANGFORD, W.F. *Classification and unfolding of degenerate Hopf bifurcations*.
J. Diff. Eq. **41** pp 375-415 (1981)
- [10] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*.
Appl. Math. Sci. Series, vol 42, Springer-Verlag (1983).

- [11] GUCKENHEIMER, J. *Multiple bifurcations problems for chemical reactors.* Physica D, **20** pp 1-20 (1986)
- [12] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations.* Birkhauser, Boston (1982)
- [13] HIRSCH, M. W.; SMALE, S. *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra Lineal.* Alianza Universidad Textos. Alianza Editorial (1983).
- [14] HODGKIN, A. L.; HUXLEY, A. F. *A Qualitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve.* J. Physics, Vol 177 pp 500-544, (1952).
- [15] HSÜ, I.D.; KAZARINOFF, N.D. *An applicable Hopf bifurcation formula and instability of small periodic solutions of the Field-Noyes model.* J. Math. Anal. Appl. **55** pp 61-89 (1976)
- [16] KEENER, J. P. *Analog Circuitry for the Van der Pol and Fitzhugh-Nagumo Equations.* IEEE Trans. Syst. Man and Cyber. Vol 13 n 5 pp 1010-1014, September (1983).
- [17] KRIEGSMANN, G. A. *The Rapid Bifurcation of the Wien Bridge Oscillator.* IEEE Trans. Circuits Syst., Vol CAS-34 pp 1093-1096, September (1987).
- [18] LEFSCHETZ, S. *Differential Equations: Geometric Theory.* Dover Publications Inc. (1977).
- [19] LIENARD, A. *Étude des Oscillations Entretienues.* Revue Générale d'Electricité **23** pp 901-946 (1928)
- [20] LINARES, B.; SÁNCHEZ, E.; RODRÍGUEZ, A.; HUERTAS, J.L. *A CMOS implementation of Fitzhugh-Nagumo neuron model.* Proc. Sixteenth European Solids State Circuits Conference (1990)
- [21] LLIBRE, J.; SOTOMAYOR, J. *Phase portraits of planar control systems.* Nonlinear Anal. Theory Meth. and Appl. Vol. 27, **10** pp. 1177-1197 (1996)
- [22] MEES, A. I.; CHUA, L. O. *The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications to Nonlinear Oscillations in Circuits and Systems.* IEEE Trans. Circuits Syst., Vol CAS-26 pp 235-257, (1979).
- [23] MINORSKY, N. *Nonlinear oscillations.* Robert E. Krieger Publishing Company (1974)
- [24] MOLER, C; VAN LOAN, C. *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix.* SIAM Rev., vol 20 n 4 October (1978)

- [25] NAGUMO, J.; ARIMOTO, S.; YOSHIZAWA, S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon.*
Proc. IRE, **50**, pp 2061-2070 (1962)
- [26] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems.*
Springer-Verlag (1991)
- [27] PONTRIAGUINE, L. *Equations Differentielles Ordinaires.*
Mir. Moscú (1975)
- [28] RAYLEIGH, J.W.S. *The Theory of Sound.*
Dover (reimpresión) (1896).
- [29] SALAS, F. *Estudio de la dinámica de un oscilador electrónico del tipo Van der Pol-Duffing.*
Proyecto Fin de Carrera. Escuela Superior de Ingenieros Industriales. Sevilla (1995)
- [30] TROGER, H.; STEINDL, A. *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory.*
Springer-Verlag (1991)
- [31] VAN DER POL, B.; VAN DER MARK, J. *The Heart Beat considered as a Relaxation Oscillation, an a Electrical Model of the Heart.*
Phil. Mag. (7), **6**, pp 763-775 (1928).
- [32] YE YAN-QIAN ET AL. *Theory of limit cycles.*
American Mathematical Society. Translations of mathematical monographs, Vol. 66, Providence (1996)