LA RESOLUCIÓN DE MONTMORT (1708 Y 1713) DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL JUEGO DE MESA CONOCIDO COMO TRICTRAC

MARIA DOLORES PÉREZ HIDALGO

JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ

JESÚS BASULTO SANTOS

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla
Avenida Ramón y Cajal, 1, 41018-Sevilla

e-mail: mdperez@us.es
Teléfono: 954557541

Resumen

En 1708 aparece la primera edición del Essay D'Analyse sur Les Jeux de Hazard del autor francés P. R. Montmort, y en 1713, la segunda edición ampliada y revisada del mismo texto. Es considerado el primer texto que en la historia aparece con una dedicación exclusiva al cálculo de probabilidades en juegos de azar. Dentro de este amplio texto encontramos problemas propuestos, con resolución de algunos de ellos, sobre una amplia variedad de juegos relacionados con dados y naipes, de los que se practicaban en la época. En el texto sólo encontramos un juego de tablas, al estilo de backgammon, bajo el nombre de Trictrac. También encontramos precedentes del mismo, en el libro de Ajedrez, Dados y Tablas que mandó redactar Alfonso X el Sabio, y que apareció en 1283. Este juego se ha manifestado posteriormente bajo ese nombre y otros, tanto en Francia como en otros países europeos. En ese contexto, Montmort plantea y resuelve tres problemas sobre cálculo de probabilidades en tres situaciones específicas de dicho juego. En este trabajo, en primer lugar describimos las que creemos eran reglas del juego en el contexto en el que el autor redactó este fragmento, dado que el mismo no es muy explícito en esta ocasión, y analizamos y describimos con lenguaje actual la resolución de los mismos y las posibles relaciones posteriores.

Palabras clave: Montmort, Trictrac, Cálculo de probabilidades, Reparto justo de una apuesta.

Área Temática: Evolución histórica en la Producción y Análisis de la Información.

Abstract

The first edition of the *Essai sur Les Jeux D'Analyse Hazard* French author P. R. Montmort, and in 1708, the second expanded and revised edition of the same text appears in 1713. It is considered the first text that appears in history with an exclusive dedication to calculating odds in gambling. Within this broad text are proposed problems, with resolution of some of them, on a wide variety of games related to dice and cards, of those who practiced at the time. In the text only we found a set of tables, style backgammon, under the name Trictrac. We also found the same precedents in the Book of Chess, Dice and Tables sent compose Alfonso X the Wise, and which appeared in 1283. This game has subsequently expressed under that name and others, both in France and in other European countries. In this context, Montmort raises and solves three problems on calculation of probabilities in three specific situations of the game. In this paper, first we describe what we believe were rules of the game in the context in which the author wrote this piece, since it is not very explicit on this occasion, and analyze and describe with current language resolving themselves and possible subsequent relationships.

Key Words: Montmort, Trictrac, Calculation of probability, Just cast a bet.

Thematic Area: Historical Evolution in Production and Information Analysis.

1. INTRODUCCIÓN

Es conocida la trascendencia que tuvo el análisis de los problemas asociados a juegos de azar en el nacimiento del cálculo de probabilidades. Los trabajos pioneros en este campo así lo atestiguan. Por citar algunos, Cardano durante el Renacimiento italiano, con un texto sobre juegos en los que incluye tanto reflexiones personales sobre la moral del juego, como intentos de resolución de problemas asociados a algunos de los que se practicaban en su época; Pascal, Fermat, Huygens, Caramuel, en el siglo XVII, dedicados todos ellos a resolver problemas específicos relacionados con juegos de azar, principalmente el problema de los puntos (y de paso, estableciendo los principios sobre los que construir la nueva teoría); y a principios del XVIII, Jakob Bernoulli y familia, de Moivre, Arbuthnot, y Montmort, con avances muy importantes tanto en el álgebra asociado, como en la formalización de conceptos. Eso sí, todos ellos incorporan en sus obras juegos de azar que sirven de justificación e hilo conductor para la construcción del que era conocido como nuevo cálculo.

Pierre Rémond de Montmort nació en París en 1678 y falleció en esta misma ciudad, de viruela, en 1719. En su formación tuvo una fuerte influencia su guía y amigo Malebranche, con el que estudió religión, filosofía y matemáticas. Su aportación al campo del cálculo de probabilidades fue su libro *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, publicado en 1708. Se trata de un texto sobre juegos de azar propiamente dicho en el que se abordan diversos problemas, todos ellos inmersos en los juegos "reales" que se practicaban en su época. Así, nos encontramos tanto juegos de naipes como de dados. Así, juegos como el Pharaon, la Bassete, el Lansquenet, el Treize, en los que, según él mismo escribe, "he determinado cuál es la ventaja o desventaja de los jugadores en todas las circunstancias posibles de estos juegos", o juegos como el Hombre, el Piquet, el Imperial, el Brelan, el Quinquenove, el Juego de los Tres Dados, el Juego del Hazard (dice que éste, no practicado en Francia, era muy conocido en Inglaterra), el Her, la Tontine, el que él mismo llama el Juego de la Esperanza, o el que juegan los "Salvajes" del Canadá. En todos estos introduce y resuelve diversos problemas, mostrando claramente que el texto es de una diversidad inusual hasta el momento. Sólo el precedente libro de Cardano se le parece un poco, pero el que nos ocupa es mucho más extenso y, desde luego, nada personal, en el sentido de que Montmort no incluye reflexiones particulares sobre la moral del juego o sobre sus propias experiencias como jugador, como sí lo hiciera Cardano.

La primera edición contiene 189 páginas además de un prefacio de 24 páginas. En 1713 aparece una segunda edición, revisada y aumentada, con 414 páginas y con un prefacio e introducción de 42 páginas. El incremento de páginas en ésta se debe, principalmente, a la introducción de un tratado sobre combinaciones y de una serie de cartas que intercambiaron el autor y Nicholas Bernoulli, además de una carta de Jean Bernoulli.

Esta segunda edición destaca por su cuidada presentación, con grabados maravillosos en las cabeceras de los capítulos y, también, porque el nombre del autor no aparece en la página inicial que incluye el título, lugar, editor y fecha.

El único juego de mesa que Montmort aborda en su texto, el Trictrac, ocupa un pequeño fragmento en las páginas 189-195 de la segunda edición, y en él se aborda la resolución de tres problemas contextualizados en tres situaciones diferentes del juego, y a cuyo análisis dedicamos este trabajo.

2. SOBRE EL JUEGO TRICTRAC

Presentamos una breve descripción del juego en base a la información que hemos recogido en *L'Académie universelle des jeux* (1802). Aunque hay bastantes reglas y alguna excepciones, citaremos sólo las que ayuden a comprender la resolución de los tres problemas de Montmort.

El Trictrac es un juego de sociedad que estaba muy en boga en la corte y en los salones aristócratas, en Francia, y sobre todo, durante los siglos XVII y XVIII. Es un juego en el que intervienen dos jugadores, y en el que los mismos mueven fichas en un tablero, anotándose puntos en función de diversas jugadas y posiciones. Gana el juego el primero que consigue ganar doce partidas de doce puntos cada una. El tablero en el que se juega es similar a uno de backgammon que consta de 24 flechas, enfrentadas las puntas, 12 contra 12, divididas cada una de esas 12, además, por una barra que deja 6 flechas a cada lado de la misma. Cada jugador dispone de 15 fichas (damas), 2 dados y un cubilete. Los puntos se anotan con tres discos, llamados en el argot del juego “jetons de bredouille”, y cada partida que se gana es anotada mediante una clavija (“fichet”), pequeña banderola, que se introduce en uno de los 12 agujeros, “trous” en este argot, que hay en los dos bordes del tablero correspondientes a los dos jugadores que compiten.

Añadimos una imagen que intenta representar lo mejor posible lo que era un tablero de trictrac. Los dos contendientes usan fichas blancas o negras. La atribución del color de las fichas a los jugadores se hace por común acuerdo, aunque también podría intervenir un sorteo. En la parte superior las doce flechas (a las que también se les llama “case”, que podríamos traducir como “compartimento”), con punta hacia abajo, que corresponde al jugador que juega con fichas negras y que representan las 12 casillas donde se mueven, y que han sido numeradas desde N1 hasta N12. De igual forma, en la parte inferior y con flechas con puntas hacia arriba, las 12 flechas o compartimentos correspondientes a las fichas blancas, y numeradas desde B1 hasta B12. El tablero, a su vez se divide en cuatro cuadrantes donde alguno de ellos tiene dos denominaciones, según el punto de vista de cada jugador. Así,

- Desde N1 hasta N6, para el jugador con negras se llama “petit jan” y para el jugador con blancas “jan de retour” (se cree que la palabra “jan” fue tomada del dios romano Janus, dios de dos caras)
- Desde N7 hasta N12, “grand jan” para el jugador con negras.
- Desde B1 hasta B6, “jan de retour” para el jugador con negras, y “petit jan” para el jugador con blancas.
- Desde B7 hasta B12, “grand jan” para el jugador con blancas.

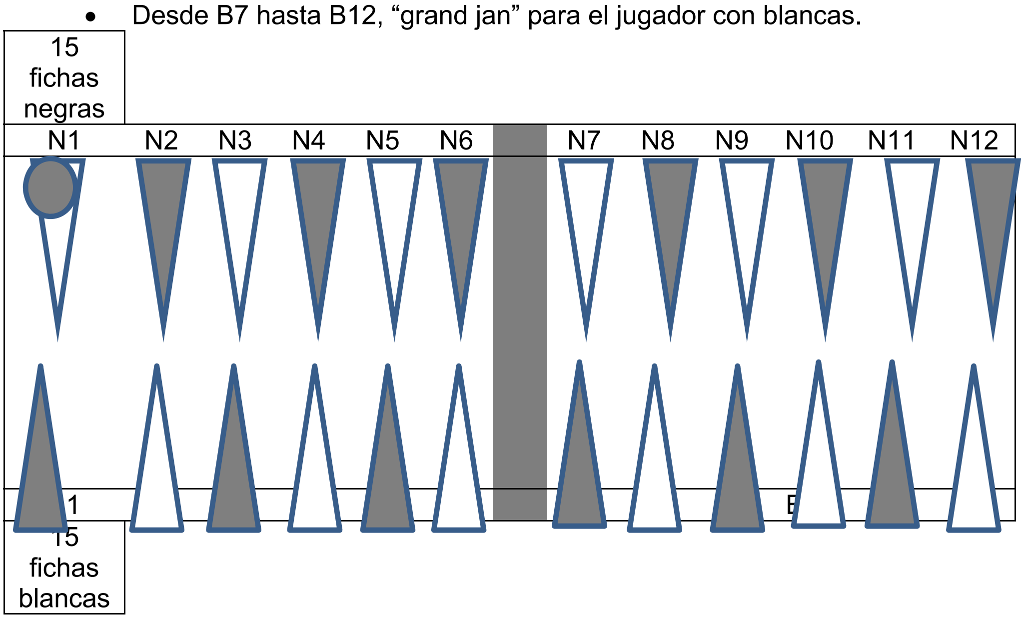

Figura 1. Imitación de tablero de trictrac.

Para cada jugador, el punto o flecha 1 es el talón o stock. El juego se inicia con todas las fichas o damas (15 en total) de cada jugador en su talón. El punto 12 es el “coin de repos” (rincón de reposo). Es el punto más difícil de alcanzar dado que hay reglas especiales que limitan el movimiento de las fichas a este punto. El punto 8 es el del “diablo”, dado que por experiencia es el segundo punto más difícil de conseguir. Y el punto 11 el del “colegial” porque los jugadores novatos tienden a conseguirlo demasiado pronto, lo cual les perjudica.

Añadimos al vocabulario del Trictrac estas otras expresiones:

Jeu ordinaire y *jeu de retour*: las fichas recorren un circuito que les hace ir desde su talón hasta su “coin de repos”, y después desde el coin de repos del adversario hasta llegar hasta su talón. A la primera parte del recorrido se le llama Jeu ordinaire, y a la segunda jeu de retour.

Tener un *case*: tener al menos dos damas sobre la misma flecha. Tener un *semi-case*: tener una dama en unas flecha (esta es una situación vulnerable). Y tener un *surcase*: es toda dama añadida a una flecha. Una flecha puede llegar a tener hasta 13 surcases.

El jugador que lanza los dados anuncia en voz alta los puntos que resultan del lanzamiento y juega sus damas en función de los mismos. El jugador mueve las fichas un número de cases que coincide con el resultado del lanzamiento de los dos dados. Por ejemplo, si el jugador que tiene negras lanza 3-2, dicho jugador puede mover una ficha desde el case 1 al 4, y otra desde case 1 al 3. Al sacar dos fichas o damas del talón se dice que este jugador ha jugado “tout à bas”. También podría haber jugado de esta otra forma: mover una dama desde el case hasta el case 6, conocido como jugar “tout d’une”.

El resultado de un lanzamiento de dados es un “doublet” si los dos números son iguales, y es un lanzamiento simple si los dos números son distintos. Los nombres que reciben los doublet son los que siguen:

- As-as: bezet.
- 2-2: doble dos.
- 3-3: ternes.
- 4-4: carmes.
- 5-5: quines.
- 6-6: sonnez.

Como se ha dicho, cada dado puede permitir desplazar una dama un número de flechas igual al número de puntos que muestra. Ahora bien, para que el desplazamiento sea posible es necesario que la flecha de llegada no esté bloqueada, es decir, que no contenga una dama del adversario.

Varias leyes para el movimiento de fichas:

Lois du Coin: Un jugador no puede mover ficha alguna al “coin de repos” del oponente, aunque puede pasar sobre él. Tampoco puede mover una única ficha a su propio “coin de repos”, si está vacío. El “coin de repos” debe ser ocupado con dos fichas en un solo lanzamiento.

Lois du Plein: Si un jugador tiene al menos dos damas en cada uno de los seis puntos en el petit jan (en las flechas desde una hasta seis), en el grand jan (siete hasta doce) o en el jan de retour (puntos uno hasta seis del oponente) se dice que el jugador llena una tabla (faire un plein o remplir). Un jugador no puede llenar la cuarta tabla (el grand jan del oponente) porque no puede ocupar el coin de repos del oponente.

Lois de Retour: Una ficha no puede parar en una flecha del grand o petit jan del oponente si el oponente es aún capaz de llenarla. Una ficha puede pasar desde un punto vacío del grand jan del oponente a un punto vacío en el petit jan incluso si el oponente es aún capaz de llenar el grand jan.

Lois de la Sortie: Cuando un jugador tiene todas las fichas en el Jan de retour, el jugador puede comenzar a quitar fichas del tablero. El jugador puede retirar una ficha desde el punto de seis con un seis, y así sucesivamente.Un jugador no puede mover una ficha con un número si el número se puede jugar en el interior del Jan de retour. Así no se puede quitar una ficha desde el punto cinco con un cinco si hay una ficha en el punto seis que se puede jugar hasta el punto uno. Se puede quitar una ficha desde un punto más bajo con un número alto si no hay fichas en el punto que corresponde al número más alto. Por ejemplo, sin fichas en el punto seis y fichas en el punto cinco, un jugador puede retirar una ficha desde el punto cinco lanzando un seis.

3. PROBLEMA UNO DE MONTMORT

Montmort comienza a tratar este juego en la sección 148 (pág. 189) de su segunda edición. Comienza con este párrafo en el que nos avisa de la ventaja que puede suponer para un jugador conocer las probabilidades asociadas a cada jugada:

> *Es muy útil, para jugar al Trictrac de manera agradable y con ventaja, saber en cada lanzamiento del dado, la esperanza que se tiene o de batir, o de llenar, o de cubrir alguna de sus damas por el lanzamiento que se va a efectuar. Esto es también lo que conocen bien los buenos jugadores; pero no es más que por una gran aplicación y mucho ejercicio que se pueda adquirir la costumbre para el caso en que es un poco complicado. Por ejemplo, hay pocas personas que puedan comprobar de un vistazo que estando dispuesto su “petit Jan”, así que en el lado A del Trictrac, tienen un lanzamiento para ganar doce puntos, diez lanzamientos para ganar ocho, tres lanzamientos para ganar seis, dieciséis lanzamientos para*

ganar cuatro y, por fin, seis lanzamientos para no llenar. Pero lo que sobrepasa extremadamente los conocimientos ordinarios de los Jugadores, y lo que sin embargo les sería muy importante para jugar bien las damas, y hacer conclusiones a propósito, es poder conocer con exactitud la esperanza que se dispone de tener un cierto número de lanzamientos sin romper, o de arreglar su juego de tal o tal manera, en dos o varios lanzamientos.

Hay que tener en cuenta que el llenado del petit jan le aporta al jugador cuatro puntos en cada sentido con lanzamientos simples, y seis puntos también en cada sentido para los doublet. La imagen que se muestra es la que incorpora Montmort en su tratado. Las referencias que hace en la introducción anterior corresponden con las fichas negras. Lo que nos dice Montmort se puede resumir en la tabla que sigue:

Tabla 1. Cálculo de chances en un primer planteamiento.

Lanzamientos	Número de lanzamientos	Número de puntos
2-2	1	12
5-4, 5-2, 4-2, 4-1, 3-2, 4-5, 2-5, 2-4, 1-4, 2-3	10	8
5-5, 4-4, 1-1	3	6
6-5, 6-4, 6-2, 5-3, 5-1, 4-3, 3-1, 2-1, 5-6, 4-6, 2-6, 3-5, 1-5, 3-4, 1-3, 1-2	16	4
6-6, 3-3, 6-3, 6-1, 1-6, 3-6	6	0

Con esta introducción, Montmort plantea y resuelve sus tres problemas:

El primero de ellos aparece de esta forma:

PROBLEMA.

PROPOSICIÓN XXII.

Pedro apuesta que cogerá su "grand coin" en dos lanzamientos. Se pide lo que debe apostar para que la partida le sea igual.

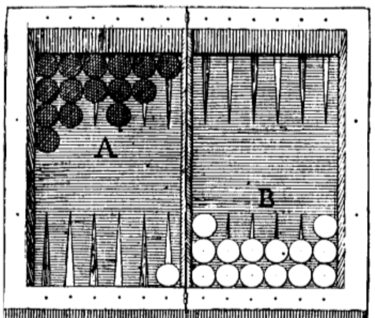

Figura 2. Única imagen que presenta Montmort en su texto sobre este juego.

Aquí Montmort se plantea que chances ha de conseguir su "coin de repos" con dos primeros lanzamientos del juego. Según las reglas del juego, el coin de repos sólo se puede hacer con dos damas juntas, y que también se puede hacer consiguiendo que las dos fichas caigan en el coin vacío del adversario (se dice en este caso que se consigue "par puissance").

Entonces, el autor señala que hay tres secuencias de dos lanzamientos que permiten hacer el coin de repos:

- 6-5 seguido de 6-5.
- 5-5 seguido de 6-6.
- 6-6 seguido o bien de 5-5 o bien de 6-6 (en este último caso, "par puissance").

Entonces la probabilidad asociada es: $\frac{2}{36}\cdot\frac{2}{36}+\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\cdot\frac{2}{36}=\frac{7}{1296}$.

4. PROBLEMA DOS DE MONTMORT

En este caso Montmort se fija en las fichas blancas situadas en la ilustración anterior, suponiendo dicha posición. Y plantea:

PROBLEMA.

PROPOSICIÓN XXIII.

Estando dispuestas mis damas así como parece en el lado B del Trictrac, quiero saber cuánto podría apostar por tener dos lanzamientos sin romper.

Se está preguntando cuál es la probabilidad de que las blancas puedan jugar dos lanzamientos sin romper el "grand jan"

Supongamos que las blancas no pueden pasar al otro lado del tablero (ver Lois de retour). Si el resultado de las blancas es 6-6, el único movimiento es de B6 a B12. Los otros seis no pueden ser jugados.

Montmort comienza haciendo esta advertencia en la resolución de este problema:

> *Los azares de los dos lanzamientos son aquí mezclados juntos, y no se deben considerar independientemente el uno del otro. Tan ventajoso que pueda ser mi primer lanzamiento, es claro que mi segundo puede hacerme perder; y al contrario tan desventajoso como sea, no me quita la esperanza de tener en el segundo lanzamiento. La mayor parte de los lanzamientos de dados que pueda conseguir en el primer lanzamiento, diversifican mi expectativa para el acontecimiento del segundo; pero hay quien me deja una igual esperanza. Por ejemplo, me es indiferente conseguir en el primer lanzamiento sonnés o cinco y as, o cuatro y dos, seis tres o cinco y cuatro, y así. Para desenredar todo esto, es necesario buscar cuál es mi esperanza de tener en el segundo lanzamiento en todos los diferentes supuestos de los diferentes lanzamientos del dado que yo pueda conseguir en el primer lanzamiento. La suma de todos estos azares expresará mi suerte.*

Podemos construir la tabla 2 que resume todo lo que Montmort explica en la resolución de este problema:

Por tanto, el jugador que juega con blancas puede preservar el grand jan en 565 chances de un total de 1296.

Tabla 2. Cálculo de chances en el problema dos de Montmort.

Flecha	Primer resultado	Chances de un total de 36	Localización de las dos fichas después del primer resultado	Segundo resultado	Chances de un total de 36	Producto de ambas chances
1	6-5, 5-6	2	B12-B12	6-6	1	2
2	6-4, 5-5, 4-6	3	B11-B12	6-6, 6-1, 1-6	3	9
3	6-3, 3-6, 5-4, 4-5	4	B10-B12	6-6, 6-2, 2-6, 1-1, 6-1, 1-6	6	24
4	6-2, 2-6, 5-3, 3-5	4	B9-B12	6-6, 6-3, 3-6, 6-2, 2-6, 6-1, 1-6, 1-1, 2-1, 1-2	10	40
5	4-3, 3-4	2	B9-B11	6-6, 6-3, 3-6, 6-2, 2-6, 6-1, 3-1, 1-3, 1-6, 1-1, 2-1, 1-2	12	24
6	6-1, 1-6, 5-2, 2-5	4	B8-B12	6-6, 6-4, 4-6, 6-3, 3-6, 6-2, 2-6, 6-1, 3-1, 1-3, 1-6, 1-1, 2-1, 1-2, 2-2	15	60
7	6-6, 5-1, 1-5, 4-2, 2-4, 3-3	6	B7-B12	6-6, 6-5, 5-6, 6-4, 4-6, 6-3, 3-6, 6-2, 2-6, 6-1, 1-6, 4-1, 1-4, 3-2, 2-3, 3-1, 1-3, 2-1, 1-2, 2-2, 1-1	21	126
8	4-1, 1-4, 3-2, 2-3	4	B7-B11	6-6, 6-5, 5-6, 6-4, 4-6, 6-3, 3-6, 6-2, 2-6, 6-1, 1-6, 5-1 1-5, 4-1, 1-4, 3-2, 2-3, 3-1, 1-3, 2-1, 1-2, 2-2, 1-1	23	92
9	4-4	1	B10-B11	6-6, 6-2, 2-6, 6-1, 1-6, 2-1, 1-2, 1-1	8	8
10	3-1, 1-3, 2-2	3	B7-B10	6-6, 6-5, 5-6, 6-4, 4-6, 6-3, 3-6, 6-2, 2-6, 6-1, 1-6, 5-2, 2-5, 5-1 1-5, 4-2, 2-4, 4-1, 1-4, 3-2, 2-3, 3-1, 1-3, 2-1, 1-2, 2-2, 1-1	27	81
11	2-1, 1-2	2	B7-B9	6-6, 6-5, 5-6, 6-4, 4-6, 6-3, …	32	64
12	1-1	1	B7-B8	6-6, 6-5, 5-6, 6-4, 4-6, 6-3, …	35	35
Total	**36**					**565**

5. PROBLEMA TRES DE MONTMORT

Después de su segundo problema, Montmort introduce una advertencia:

Es imposible en la mayor parte de las situaciones donde dos Jugadores pueden encontrarse en el Trictrac, determinar cuál es su suerte, y estimar con precisión de qué lado está la ventaja; pues además, la variedad prodigiosa de las diferentes disposiciones posibles de las treinta damas, la manera con frecuencia arbitraria en que los Jugadores conducen su juego, es lo que decide casi siempre la ganancia de la partida. Ahora bien, todo lo que depende de la fantasía de los hombres no teniendo ninguna regla fija y certera, está claro que no se puede resolver cuestión alguna sobre el Trictrac, a menos que la manera de jugar no sea determinada.

Y entonces añade:

> *El único problema que se puede resolver de una manera general sobre el juego del Trictrac es este: Encontrar la suerte de dos Jugadores que están en el jan de retorno, cualquier número de damas que tengan aún por pasar, en cualquier lugar en que se encuentren situados. Doy aquí un ejemplo, que bastará para hacer conocer de qué manera se podría encontrar los demás casos más compuestos.*

De esta forma, entonces, el autor introduce su tercer problema sobre Trictrac:

PROBLEMA.

PROPOSICIÓN XXIV.

Pedro tiene las tres damas A, B, C por levantar, y Pablo las tres damas D, E, F; aquél que en primer lugar habrá levantado pasando todas sus damas, ganará. Se supone que está Pedro por jugar, se pide cuál es su ventaja.

Montmort resuelve al estilo de cómo lo había hecho Huygens (1657) en algunas proposiciones de su tratado. Va creando igualdades de valoración del juego en las diferentes situaciones que se van sucediendo hasta llegar a la valoración buscada. El resumen de la secuencia es el que sigue:

Cuando Pedro va a jugar, tiene veinticinco lanzamientos para pasar las dos más atrasadas B y C, ocho para pasar las damas A y C, a saber, seis y as, cinco y as, cuatro y as, tres y as; dos lanzamientos para pasar las damas A y B, y un lanzamiento solamente para pasar B, a saber, bezet.

Sea llamado *S* la suerte de Pedro cuando él va a jugar, *x* su suerte cuando lleva dos y as, e *y* su suerte cuando él lleva de primer lanzamiento bezet. Se tendrá $S = \frac{33A + 2x + y}{36}$. El dinero del juego es llamado *A*.

Se trata ahora de determinar las incógnitas *x* e *y*; para llevarlo a cabo, es necesario señalar que Pedro, no teniendo más por levantar que la Dama *C*, no puede ni perder ni ganar por el lanzamiento que jugará Pablo; pero que su suerte será diferente según todos los diferentes lanzamientos que Pablo conseguirá. Pues, por ejemplo, Pablo pasando de su primer lanzamiento las dos damas *E* y *F*, si Pedro no pasa de su segundo lanzamiento la dama *C*, ciertamente habrá perdido, en lugar de lo que él podría ganar aún si Pablo no hubiese pasado de su primer lanzamiento más que las Damas *E* y *D*, o solamente la Dama *E*.

Sea entonces llamada *u* la suerte de Pedro cuando, habiendo conseguido de primer lanzamiento dos y as, Pablo ha pasado de su segundo lanzamiento las damas *E* y *F*; *h* su suerte, cuando Pablo ha pasado las damas *D* y *E*; y *t* su suerte, cuando Pablo ha pasado la dama *E*. Se tendrá $x = \frac{33u + 2h + t}{36}$.

Para conocer el valor de *u*, se señalará que Pedro, no teniendo más que la Dama *C* por pasar, jugando su segundo lanzamiento, tiene treinta y cinco lanzamientos para ganar.

Para conocer el valor de *h*, se observará que Pedro no teniendo más que la dama *C* por pasar, y Pablo no teniendo más que la dama *F*, Pedro al jugar de nuevo tiene treinta y cinco lanzamientos para ganar, y un lanzamiento para tener $\frac{1}{36}A$: pues supuesto que Pedro jugando por segunda vez, consigue bezet que es el único lanzamiento que puede impedirle ganar, Pablo no ha ganado por esto; podría también conseguir bezet, en cuyo caso Pedro habría ganado.

Para conocer el valor de *t*, se tiene cuidado de que Pedro no tenga más que la Dama *C*, y Pablo las dos damas *D* y *F* por levantar, Pedro jugando por segunda vez, treinta y cinco lanzamientos para ganar, y un lanzamiento para tener $\frac{4}{36}A$: pues Pedro, no ganando de su segundo lanzamiento, Pablo tiene paralelamente cuatro lanzamientos para no levantar todas sus damas, a saber, bezet, doble dos, dos y as. Se tendrá entonces $t=\frac{35}{36}A+\frac{4}{36\times 36}A$.

Teniendo así determinadas las incógnitas *u*, *h*, *t*, si se sustituyen los valores encontrados en la ecuación $x=\frac{33u+2h+t}{36}$, se tendrá $x=\frac{45366}{46656}A$.

Ahora es necesario determinar el valor de *y*.

Sea llamada *q* la suerte de Pedro cuando va a jugar su segundo lanzamiento, y le quedan las damas *A* y *C* por levantar, y a Pablo la única dama *D*; *p* su suerte cuando le queda por levantar las damas *A* y *C*, y a Pablo la dama *F*; *n* su suerte cuando le queda por levantar las damas *A* y *C*, y a Pablo las damas *D* y *F*. Se tendrá $y=\frac{33q+2p+n}{36}$.

Se encontrará, por razonamientos parecidos a los que se han hecho para encontrar el valor de *x*, $q=\frac{32}{36}A$, $p=\frac{32}{36}A+\frac{4}{36\times 36}A$, $n=\frac{32}{36}A+\frac{4\times 4}{36\times 36}A$; y por consiguiente, $y=\frac{41496}{46656}A$.

Habiendo así determinado los valores de *x* y de *y*, se encontrará $S=\frac{46641}{46656}A$.

6. CONCLUSIÓN

Montmort, siendo fiel a sí mismo en toda su obra, aborda con una valentía impresionante la resolución de problemas asociados a un juego de tablas en el que la diversidad de posibilidades es tan amplia. Lógicamente, siendo consciente de ello, aborda sólo tres problemas, que es lo que su capacidad de cálculo le permite. La idea de las chance de dos dados estaba ya perfectamente consolidada, y la de valoración de un juego a través de lo que se debe apostar de manera justa ya venía de la época de Pascal. Con estas ideas y con un álgebra adecuado, habiendo ya leído, obviamente, el tratado de Huygens, Montmort se atreve con estos problemas y sale victorioso en el intento.

REFERENCIAS

L'Académie universelle des jeux, à Paris chez A. Coste et à Lyon chez A. Leroy, 1802, t. 3, sur Gallica. p. 48-143 : texte du *Jeu du trictrac*, Charpentier, Paris, 1715.

MONTMORT, P. R. DE (1713). *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Seconde Edition. Revûe et augmentée de plusieurs Lettre. Quillau Paris. Reprinted 1714. Published anonymously. Reprinted by Chelsea, New York, 1980.

PÉREZ-HIDALGO, M. D., BASULTO-SANTOS, J., CAMUÑEZ-RUIZ, J. A. (2014). Le Jeu du Treize: las soluciones tempranas de Montmort y Nicolás Bernoulli al problema de las coincidencias. *Historia de la probabilidad y la estadística (VII).* Delta publicaciones, Madrid.

TODHUNTER, I. (1865). *A History of the of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.