

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

**BIFURCACIONES  
MÚLTIPLES EN  
SISTEMAS DINÁMICOS  
PLANOS**

LUIS PIZARRO SOLANO

Tesis Doctoral

T. 133

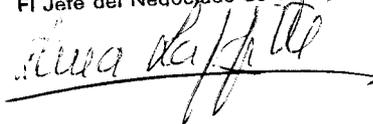


UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARIA GENERAL

---

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 184 número 117 del libro  
correspondiente, **5 OCT. 1995**  
Sevilla, \_\_\_\_\_

El Jefe del Negociado de Tesis,



Memoria que presenta  
D. Luis Pizarro Solano  
para optar al grado de Doctor  
en Ciencias Matemáticas.

Luis Pizarro

Fdo: Luis Pizarro Solano

Emilio Freire Macías, catedrático del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla, y Alejandro J. Rodríguez Luis, profesor titular del mismo Departamento,

**CERTIFICAN:** Que la presente memoria “Bifurcaciones Múltiples en Sistemas Dinámicos Planos”, ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Ciencias Matemáticas Luis Pizarro Solano, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

*V°B°* : Directores de tesis.



Fdo: Emilio Freire Macías



Fdo: Alejandro J. Rodríguez Luis

Sevilla, Julio de 1995

*Quiero dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a los profesores Dr. D. Emilio Freire Macías y Dr. D. Alejandro J. Rodríguez Luis, directores de esta memoria, que supieron transmitirme su interés y conocimientos en este área, y cuya dedicación ha hecho posible la realización de esta memoria.*

*Debo mencionar también a los profesores Dr. D. Enrique Ponce Núñez, Dr. D. Estanislao Gamero Gutiérrez, D. Antonio Algaba Durán y D. Fernando Fernández Sánchez por su colaboración y sugerencias.*

*A Lorenza*

*A mis padres*

# Contenido

<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2 CONTINUACIÓN Y BIFURCACIONES DE CON- JUNTOS LÍMITE DE SISTEMAS DINÁMICOS</b>	<b>8</b>
2.1 Introducción . . . . .	8
2.2 Una Aproximación a los Métodos de Continuación . . . . .	13
2.2.1 Continuación y Equilibrios . . . . .	14
2.2.2 Un Método de Continuación de Órbitas Periódicas y sus Bifurcaciones . . . . .	19
2.3 Métodos de Continuación de Órbitas Homoclinas . . . . .	24
2.4 Estabilidad de Órbitas Homoclinas con Traza Cero . . . . .	28
2.5 Procedimiento Numérico para el Cálculo de la Integral de la Di- vergenia . . . . .	35
2.6 Dualidad con la Bifurcación de Hopf . . . . .	41
2.7 Estabilidad de Homoclinas Cuspidales . . . . .	43
2.8 Un Sistema con Homoclinas Cuspidales Degeneradas . . . . .	50
<b>3 DEGENERACIONES DE SINGULARIDADES PLANAS CON UN DOBLE CERO</b>	<b>65</b>
3.1 Introducción . . . . .	65
3.1.1 Algunos conceptos preliminares . . . . .	66
3.1.2 El método de Melnikov . . . . .	70
3.2 La Cúspide de Orden Seis . . . . .	77
3.3 Las Cúspides Simétricas de Órdenes Cuatro y Cinco . . . . .	83
3.3.1 La Cúspide con Simetría de Orden Cuatro . . . . .	88
3.3.2 La Cúspide con Simetría de Orden Cinco . . . . .	117

3.4	Un Caso de Takens–Bogdanov con un Foco Débil Degenerado . . .	126
3.5	Un Caso de Degeneración de un Doble Cero Diagonalizable . . . . .	144
<b>4</b>	<b>BIFURCACIONES EN CIRCUITOS DE VAN DER POL–DUFFING</b>	<b>150</b>
4.1	Introducción . . . . .	150
4.2	El Diagrama <i>en Forma de Cruz</i> . . . . .	151
4.2.1	Génesis del Sistema . . . . .	152
4.2.2	Análisis de Bifurcaciones . . . . .	154
4.3	Un Modelo Tridimensional para un Circuito de Van der Pol–Duffing.	162
4.4	Degeneraciones de la Bifurcación de Hopf del Origen . . . . .	169
4.4.1	Conceptos Preliminares . . . . .	174
4.4.2	Singularidades con $\mathbb{Z}_2$ –Codimensión Dos . . . . .	177
4.4.3	Singularidades con $\mathbb{Z}_2$ –Codimensión Topológica Dos . . .	185
4.4.4	Caso Límite: Singularidades con $\mathbb{Z}_2$ –Codimensión Tres . .	196
<b>5</b>	<b>BIFURCACIONES MULTIPARÁMETRICAS EN UN SISTEMA ENZIMÁTICO</b>	<b>201</b>
5.1	Introducción . . . . .	201
5.2	Origen del Sistema . . . . .	204
5.3	Bifurcaciones de Silla–nodo y Cúspide de Equilibrios . . . . .	206
5.4	Bifurcación de Hopf y Degeneraciones Relacionadas . . . . .	210
5.4.1	Bifurcación de Hopf con $\mathbb{Z}_2$ –Codimensión Topológica Dos	214
5.5	Bifurcaciones de Takens–Bogdanov . . . . .	219
5.6	Bifurcaciones Homoclinas . . . . .	232
5.7	El Caso $\alpha = 1$ . . . . .	261
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>264</b>
	<b>Referencias</b>	<b>268</b>

# Capítulo I

## INTRODUCCIÓN

La investigación desarrollada en esta memoria se enmarca en la teoría geométrica y de bifurcaciones de sistemas dinámicos. La teoría cualitativa o geométrica, iniciada por Poincaré, contempla las soluciones de un sistema como curvas y se preocupa de la configuración del conjunto de dichas curvas, que recibe el nombre de *espacio de órbitas* o *de fases*. Los cambios en la topología del espacio de fases, que surgen en un sistema dinámico parametrizado al variar uno de sus parámetros de control, son los denominados *fenómenos de bifurcación*. Aunque existen precedentes históricos, el origen de la teoría de bifurcaciones se encuentra en los trabajos de Poincaré sobre las masas fluidas en rotación.

Como afirman Abraham y Marsden (vid. [1]), *el estudio de las bifurcaciones puede ser considerado como la rama experimental de la dinámica diferenciable. [...] traslada resultados desde la teoría al dominio empírico y, en sentido inverso, es el camino por el que los resultados experimentales plantean cuestiones a la teoría de la estabilidad estructural.*

La teoría de los sistemas dinámicos hace énfasis desde sus inicios en las conductas a largo plazo (comportamientos límites o movimientos finales). En muchas situaciones experimentales, son los atractores las únicas características observables del espacio de fases.

En esta memoria nos centraremos principalmente en los sistemas dinámicos planos y autónomos. Para tales sistemas los posibles conjuntos límites son: los

*equilibrios* (puntos críticos, fijos, estacionarios o singularidades), las *órbitas periódicas* (órbitas cerradas) y los *políciclos*, formados por la unión de equilibrios y órbitas que los conectan (homoclinas y heteroclinas). En el estudio de osciladores planos no lineales un objetivo primordial es la detección, caracterización y control de los comportamientos periódicos.

Así pues, para una familia parametrizada de sistemas autónomos planos deseáramos delimitar las regiones del espacio de parámetros de control en las que existen órbitas periódicas. En las fronteras de dichas regiones las órbitas periódicas *nacen o mueren*, es decir, producen bifurcaciones. Por tanto, debemos acudir a los resultados y métodos de la teoría de bifurcaciones si pretendemos describir y controlar los comportamientos oscilatorios periódicos.

Para los sistemas planos parametrizados, los fenómenos de bifurcación asociados a pérdidas de estabilidad estructural son, bien de carácter local (en un entorno de equilibrios y órbitas cerradas degenerados), bien de carácter global (en presencia de conexiones homoclinas y heteroclinas no transversales), o bien de carácter local-global (conexiones homoclinas y heteroclinas que involucran equilibrios degenerados).

En el espacio de parámetros nos encontramos, en condiciones genéricas, con hipersuperficies de codimensión uno que conforman la descripción inicial de las fronteras de las regiones de existencia de órbitas periódicas. Las correspondientes a la bifurcación de Hopf de un equilibrio y a la bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas son de carácter local. En el caso de la bifurcación clásica de Hopf (conocida ya por Poincaré, Van der Pol y Andronov) podemos hablar del *nacimiento* de una órbita periódica cuya amplitud crece desde cero y con frecuencia no nula. En el caso de la bifurcación silla-nodo, hablaremos de la *muerte* de una órbita periódica (en realidad, de una pareja formada por una estable u observable y otra inestable que colapsan) con amplitud y frecuencia no nulas (siguiendo con el símil biológico, podríamos hablar de *muerte con las constantes vitales normalizadas*).

En los restantes casos de codimensión uno se trata de situaciones de carác-

ter global: bifurcación homoclina de equilibrio silla hiperbólico; y de carácter local-global: bifurcación silla-nodo de equilibrios con homoclinas transversales. En ambos casos podemos describir el fenómeno de bifurcación en términos de la *muerte* de una órbita periódica (una órbita cerrada degenera en un ciclo homoclinico) con amplitud finita no nula y frecuencia cero.

Si queremos profundizar en la descripción de las fronteras de las regiones de existencia de conductas periódicas en el espacio de parámetros, debemos considerar las intersecciones de las anteriores hipersuperficies de codimensión uno: en condiciones genéricas, dichas intersecciones son hipersuperficies de codimensión dos (curvas en el caso de un espacio de parámetros tridimensional). Las correspondientes situaciones de carácter local vienen dadas por la bifurcación de Hopf degenerada, la bifurcación de Takens-Bogdanov (equilibrio con doble cero) y la bifurcación cúspide de órbitas periódicas.

Entre los restantes casos de codimensión dos encontramos fenómenos de carácter global: bifurcación homoclina de equilibrio silla hiperbólico con traza cero, bifurcación homoclina doble de equilibrio silla hiperbólico; y de carácter local-global: bifurcación silla-nodo de equilibrios con homoclina no transversal.

Hemos citado las situaciones que involucran un solo equilibrio, es decir, los casos de políciclos homoclinos de codimensión dos. Si consideramos dos equilibrios, aparecen cuatro casos de políciclos heteroclinos que completan las posibles situaciones de codimensión dos.

El paso siguiente en el estudio de las fronteras de los dominios de existencia del comportamiento periódico sería, lógicamente, preguntarnos por las intersecciones de las anteriores hipersuperficies de codimensión dos: en condiciones genéricas, dichas intersecciones son hipersuperficies de codimensión tres (puntos en el caso de un espacio de parámetros tridimensional).

Citaremos sólo algunos de los diversos casos que se pueden presentar. Nos encontramos con situaciones de carácter local tales como: Hopf doblemente degenerada, Takens-Bogdanov degenerada, catástrofe de *swallowtail* de órbitas periódicas; entre las de carácter global destacamos la bifurcación homoclina de

equilibrio con traza e *integral de la divergencia* (definida en el capítulo II de esta memoria) iguales a cero; por último, entre las de carácter local–global citamos la bifurcación homoclina de equilibrio cuspidal.

Una clasificación completa de las posibles bifurcaciones de codimensión menor o igual que tres que presentan, en condiciones genéricas, las familias parametrizadas de sistemas dinámicos planos, está contenida en el denominado *zoo de Kotova* (vid. [56]). Una gran parte de los tipos presentes en dicha clasificación están siendo activamente investigados en la actualidad, con el objeto de describir y caracterizar los correspondientes comportamientos dinámicos, principalmente los periódicos.

Podríamos seguir relacionando degeneraciones mayores (codimensión más alta) de equilibrios, órbitas cerradas y políciclos, cuyo análisis, en la mayoría de los casos, no ha sido abordado. Uno de los objetivos de la teoría es ir completando la guía o catálogo de las diversas situaciones de bifurcación que cabe esperar encontrar en el estudio de un sistema dinámico parametrizado.

Todas las ideas expuestas hasta ahora justifican el interés en el estudio de situaciones muy degeneradas (codimensión alta) tanto de equilibrios como de órbitas periódicas y políciclos, ya que ello nos proporciona información sobre los casos de menor degeneración (codimensión baja), así como de las diversas regiones, y de sus fronteras, en el espacio de parámetros donde ocurre el comportamiento periódico. Para llevar a cabo este estudio hacemos uso de técnicas y métodos de carácter tanto analítico como numérico.

Con respecto a las técnicas numéricas, perseguimos esencialmente dos objetivos: en primer lugar, detectar puntos en el espacio de parámetros para los que ocurren homoclinas, heteroclinas o políciclos en general; en segundo lugar, *continuar* en el espacio de parámetros, y a partir de los puntos iniciales detectados, aquellas hipersuperficies para las que ocurren homoclinas, heteroclinas o políciclos. Estas hipersuperficies constituirán las fronteras entre regiones con *retratos de fases* (estructura de las órbitas en el espacio de fases) cualitativamente diferentes. El tránsito de una de estas regiones a otra dará lugar, por tanto, a una bifur-

cación. La representación, en el espacio de parámetros, de estas regiones junto con sus fronteras (tanto si éstas corresponden a políclcos como a equilibrios u órbitas periódicas degenerados) suele ser denominada *conjunto de bifurcaciones*.

En el contexto de las técnicas numéricas se enmarca el contenido del capítulo II de esta memoria. En dicho capítulo, y tras repasar las ideas involucradas en los métodos de continuación de equilibrios y órbitas periódicas, nos centramos en implementar diferentes códigos numéricos con el objeto de continuar diversas órbitas homoclinas de codimensión menor o igual que cuatro: las mencionadas anteriormente en esta introducción (de codimensión menor o igual que tres) y aquella de equilibrio hiperbólico con traza, integral de la divergencia y *coeficiente resonante* (definido en el capítulo II) iguales a cero. Para el caso particular de las homoclinas de equilibrio hiperbólico con traza cero, se hace necesario diseñar un algoritmo que permita el cálculo de la integral de la divergencia del campo vectorial, puesto que su valor, caso de no ser nulo, nos indicará la estabilidad de la conexión homoclina; si dicho valor se hace cero, estaremos ante una órbita homoclina con traza nula degenerada de codimensión tres, que podremos detectar y continuar. Exponemos dos versiones (una mejora a la otra) de tal algoritmo. Finalizamos el capítulo estudiando la estabilidad de las homoclinas cuspidales y exponiendo un ejemplo de un sistema con cinco parámetros que presenta homoclinas cuspidales degeneradas de codimensión cuatro, del que obtenemos el conjunto de bifurcaciones en las proximidades de dicha homoclina.

Con respecto a las técnicas analíticas, dos de ellas, procedentes de la teoría de bifurcaciones, posibilitan el estudio de las bifurcaciones locales de equilibrios degenerados: la teoría de *formas normales* (con la que obtenemos información sobre aquellos términos no lineales esenciales para la conducta de bifurcación) y los cambios de variables de tipo *blow-up* (que nos permiten determinar el retrato de fases en un entorno del equilibrio). El estudio analítico de la conducta local de bifurcaciones de un equilibrio degenerado nos conduce a la obtención de su *desplegamiento* (es decir, del conjunto de bifurcaciones en un entorno de aquel punto del espacio de parámetros en el que ocurre dicho equilibrio). A partir de la

aplicación de las técnicas numéricas mencionadas antes, se deduce con frecuencia que los resultados del análisis local se conservan *lejos* de las situaciones de bifurcación, *extendiendo*, por tanto, la información que nos proporciona aquél. Esto justifica, en consecuencia, el interés en los códigos de continuación.

En el capítulo III nos planteamos, desde este punto de vista de las técnicas analíticas, el estudio de las bifurcaciones locales de varios equilibrios degenerados. En el primer caso tratado, la *cúspide de orden seis*, nos centramos exclusivamente en las conexiones homoclinas degeneradas de codimensión menor o igual que cuatro, obteniendo curvas numéricas de tales homoclinas mediante el uso de los códigos de continuación diseñados en el capítulo II. Para los restantes equilibrios degenerados estudiados (las *cúspides con simetría de órdenes cuatro y cinco*, un *foco débil degenerado* y un *doble cero diagonalizable*) obtenemos sus correspondientes desplegamientos (parcialmente en algún caso). Para aquellas conexiones homoclinas más interesantes (codimensión al menos tres), comparamos las curvas numéricas obtenidas con aquéllas que nos proporciona el cálculo de la *función de Melnikov*. En todos los casos considerados, la información analítica será completada con resultados numéricos adicionales.

Los capítulos IV y V están dedicados a la aplicación de los resultados obtenidos en los dos capítulos anteriores. En el capítulo IV abordamos el estudio de dos circuitos electrónicos de tipo Van der Pol–Duffing (uno plano y otro tridimensional). Del modelo plano exponemos su conjunto de bifurcaciones completo, el conocido como *cross-shaped diagram* (es decir, *diagrama en forma de cruce*). El modelo tridimensional presenta una gran riqueza de bifurcaciones (que aún siguen siendo objeto de intensa investigación). Tras describir las diferentes degeneraciones lineales que presenta (de codimensión menor o igual que tres), nos centramos exclusivamente en el estudio de la bifurcación de Hopf de su equilibrio en el origen, de la que aparecen diversas degeneraciones en el contexto de la  $\mathbb{Z}_2$ -simetría (degeneraciones de hasta  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión tres, alguna involucrando parámetros modales en su desplegamiento, que nos permitirán encontrar islas de órbitas periódicas y otros interesantes fenómenos).

En el capítulo V, por último, realizamos un estudio detallado de una reacción bioquímica enzimáticamente catalizada, modelada por un sistema plano, polinomial y multiparamétrico. El carácter polinomial del sistema hace posible llegar muy lejos al aplicar las técnicas analíticas en el estudio local de las bifurcaciones de codimensión alta de los equilibrios. Los diversos autores que han abordado previamente el estudio de este sistema enzimático (Doedel, Kernevez, Hassard *et alii* en [25], [27], [28], [54], [55], [65] y [66]), presentan resultados muy pobres (todos de carácter numérico y ninguna información analítica) sobre la dinámica y el comportamiento de bifurcaciones de dicho sistema (detectando y/o continuando, a lo más, bifurcaciones de Hopf, junto a algunas de sus posibles degeneraciones, y de sillan-nodo de equilibrios y de órbitas periódicas). La información que proporcionamos en este capítulo, incomparablemente más rica, ha sido obtenida haciendo uso de técnicas tanto analíticas como numéricas, y es por ello un ejemplo excelente de aplicación de las ideas y objetivos marcados a lo largo de esta introducción.

# Capítulo II

## CONTINUACIÓN Y BIFURCACIONES DE CONJUNTOS LÍMITE DE SISTEMAS DINÁMICOS PLANOS

### 2.1 Introducción

Los métodos de continuación constituyen una herramienta de especial interés en la determinación numérica de ciertos diagramas que aportan valiosa información para el análisis cualitativo y de bifurcaciones de sistemas dinámicos.

Como haremos uso frecuente de implementaciones específicas de estos métodos en éste y en sucesivos capítulos de esta memoria, creemos oportuno incluir en la segunda sección de este capítulo un breve repaso de las ideas que hay involucradas en su utilización. Para ello seguimos a Rodríguez Luis en [88]. Hemos de señalar que nuestro punto de mira, por lo que a diseño de métodos de continuación se refiere, ha sido puesto en diversos tipos de conexiones homoclinas (que más adelante, y en esta misma sección, especificaremos), y no en las órbitas periódicas y sus degeneraciones. No obstante, hemos creído conveniente resumir las ideas subyacentes en el método de continuación de órbitas periódicas elaborado en [88] (que nosotros, sin embargo, no hemos utilizado; en su momento serán indicados

los códigos utilizados para continuar órbitas periódicas y alguna de sus degeneraciones), y ello por dos razones: la primera porque sirven de fundamento para el diseño de los códigos de continuación de conexiones homoclinas que más tarde expondremos, y que serán ampliamente usados a lo largo de esta memoria; la segunda razón viene dada por el hecho de que se encuentra entre nuestros objetivos el desarrollo de un código de continuación de bifurcaciones de cúspides de órbitas periódicas.

Las órbitas homoclinas surgen, para un sistema dinámico dado, como la intersección de las variedades estable e inestable de un equilibrio o de una órbita periódica de tipo silla. En sistemas planos (caso que a nosotros nos interesa en esta memoria) pueden definirse también órbitas homoclinas para equilibrios semihiperbólicos (con un autovalor cero) en dos formas: bien como la intersección de la variedad de centros del equilibrio y el interior del sector nodal de éste, dando lugar a homoclinas *silla-nodo transversales*, bien como la intersección de las variedades estable (o inestable) y de centros del equilibrio, dando lugar a homoclinas *silla-nodo no transversales*; y para equilibrios de tipo *cúspide* (dos autovalores cero y linealización no diagonalizable) como la intersección de las separatrices estable e inestable del equilibrio, dando lugar a homoclinas *de punto de cúspide* o *cuspidales*.

En el estudio que realizaremos de los desplegamientos de ciertas singularidades (vid. capítulo III) así como en el desarrollo de determinados ejemplos (vid. capítulos IV y V), vamos a utilizar un algoritmo para la continuación de órbitas homoclinas de sistemas planos, que implementaremos siguiendo las ideas de Rodríguez Luis (vid. [88]). Ello nos permitirá localizar y continuar, con las modificaciones necesarias en cada caso, los diversos tipos de homoclinas que aparecen en la tabla 2.1.1 (vid. [82]) (excepto el señalado con (\*), que ha sido continuado haciendo uso de la función de Melnikov).

Las conexiones homoclinas de codimensión menor o igual que tres que aparecen en la tabla 2.1.1 pueden ser encontradas como elementos de la clasificación general de todos los *políciclos* planos (salvo difeomorfismo) que aparecen en fa-

Codimensión	Equilibrio	Linealización	Tipo Homoclina
1	hiperbólico	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ $\lambda, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu$	no degenerada
	semihiperbólico	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0,$	silla-nodo transversal
2	hiperbólico	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$	con traza cero
	semihiperbólico	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$	silla-nodo no transversal
	hiperbólico	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ $\lambda, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu$	doble
3	hiperbólico	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$	con traza cero y EID=1
	no hiperbólico	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	cuspidal
4	hiperbólico	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ $\lambda, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu$	con traza cero, EID=1 y RES=0
	no hiperbólico	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ +deg. no lineal	cuspidal degenerada (*)

Tabla 2.1.1: Homoclinas planas que aparecen a lo largo de esta memoria.

milias genéricas de sistemas dinámicos  $n$ -paramétricos, con  $n \leq 3$ , clasificación dada por Ilyashenko en [56] y que aparece en la tabla 2.1.2 (denominada *Zoo de Kotova*; para los símbolos dados en esta tabla, vid. [56]).

En la sección 3 describiremos el método que utilizaremos para continuar las órbitas homoclinas.

En la sección 4 caracterizaremos la estabilidad de una homoclina con traza cero mediante la exponencial de la integral de la divergencia (*EID*) del campo sobre la homoclina, cantidad que calcularemos de una forma sencilla mediante un algoritmo apropiado que diseñaremos en la sección 5.

La anulación del exponente del coeficiente *EID* dará un cambio en la estabilidad de la homoclina con traza cero y nos permitirá detectar y, en su caso, continuar este tipo de órbitas homoclinas de codimensión 3.

En la sección 6, estableciendo la dualidad de las bifurcaciones generalizadas de homoclinas y de Hopf, expondremos el valor del coeficiente (*RES*) que determina la estabilidad en el caso en que tengamos una órbita homoclina con traza cero y *EID* igual a 1. De nuevo, como en el caso anterior, la anulación de este coeficiente, *RES*, permitirá detectar y continuar estas homoclinas de codimensión 4.

Hacemos resaltar el hecho de que la localización y continuación de las homoclinas de codimensiones 3 y 4, a lo largo de esta memoria, las realizamos sin hacer uso de la *función de Melnikov* y sus derivadas (excepto la señalada con asterisco en la tabla 2.1.1), procedimiento que es, sin embargo, el único que hemos encontrado en la literatura existente para detectar y continuar este tipo de homoclinas, y que será comentado en el capítulo III. La existencia de sistemas dinámicos que modelan procesos reales, como el estudiado en el capítulo V, que no pueden ser expresados como la perturbación de algún sistema conservativo, justifican la búsqueda de métodos alternativos para detectar y continuar las bifurcaciones homoclinas degeneradas.

En la sección 7 estudiaremos la estabilidad y la clasificación de las homoclinas de punto de cúspide, homoclinas que localizaremos y continuaremos, junto a sus degeneraciones, en el desplegamiento de una cierta bifurcación de Takens-

1 parámetro

$\sigma$ $\neq 0$		
----------------------	--	--

2 parámetros

2.1 [T]  & degen.	2.2 [Ch]  ⊕	2.3 [G]  ⊕	2.4 [K]  ⊕	2.5 [L] 
2.6 [LR]  & res. or $f=0$	2.7 [R] 	2.8 [S]  ⊕	2.9 [BT] 	

3 parámetros

3.1 [T]  & 2 degen.	3.2  & res.	3.3 	3.4 	3.5 
3.6 	3.7 	3.8  res.	3.9 	3.10 
3.11 	3.12 	3.13 [K]  ⊕	3.14 	3.15 [Li]  ⊕ $\dot{x} = x^3 + \dots$
3.16 [LR]  & 2 degen.	3.17  res. nomres.	3.18  res.	3.19 [R] 	
3.20 	3.21 [DRS] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ & degen.	3.23 [K]  ⊕ $\dot{x} = x^4 + \dots$	3.24  an infinite series	
3.22 	3.25 			

Tabla 2.1.2: Zoo de Kotova.

Bogdanov degenerada, que ocupará la sección 8, y última, de este capítulo.

## 2.2 Una Introducción a los Métodos de Continuación

Los métodos de continuación, inicialmente desarrollados como una vía alternativa en la resolución de sistemas no lineales de ecuaciones, encajan de forma natural en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos parametrizados. Para su introducción, recurrimos a un contexto algo más general. Supóngase que se quiere resolver el sistema (no lineal en general)

$$F(x) = 0 \tag{2.2.1}$$

con  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , suficientemente diferenciable y que posee al menos una solución  $\bar{x}$ .

Para ello, formulamos un problema más general que engloba al anterior como caso particular. En concreto, se define una función de homotopía  $H(x, t)$  suficientemente diferenciable de forma tal que, por ejemplo,

$$H(\cdot, 0) = H_0 \text{ (prefijada)}, \quad H(\cdot, 1) = F(\cdot)$$

y tal que la elección de  $H_0$  permita identificar fácilmente la solución del sistema

$$H_0(x) = 0 \tag{2.2.2}$$

Así, si elegimos (se trata de una posibilidad entre otras),

$$\begin{aligned} H_0(x) &= F(x) - F(x_0) \\ H(x, t) &= F(x) + (t - 1)F(x_0), \quad x_0 \text{ arbitrario,} \end{aligned}$$

es obvio que el problema (2.2.2) tiene a  $x_0$  como solución.

Ahora, la idea clave estriba en diseñar un mecanismo que permita pasar de la solución conocida  $x_0$  de  $H(x, 0) = 0$  a la solución requerida de (2.2.1) o, equivalentemente, de  $H(x, 1) = 0$ , mediante la variación de  $t$  en  $[0, 1]$ .

Si admitimos la existencia de una curva en  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  que une el punto de partida  $(x_0, 0)$  con  $(\bar{x}, 1)$ , que suponemos además con una parametrización diferenciable  $(x(t), t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , se tendrá que  $H(x(t), t) = 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  y podremos, siguiendo a Davidenko [20], derivar respecto de  $t$  la condición anterior y obtener una ecuación diferencial que tiene a dicha curva como solución. Para hallar la solución bastará recorrer el camino necesario hasta  $\bar{x}$  resolviendo el problema de valor inicial de tipo implícito

$$\begin{cases} D_x H(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} + D_t H(x(t), t) = 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

que deberá integrarse hasta  $t = 1$ .

Como se ve, con las hipótesis anteriores, y usando métodos estandarizados de integración de ecuaciones diferenciales, es posible localizar las soluciones del problema planteado. Observamos, circunstancialmente, que una de las características del método es su versatilidad, como lo prueba el hecho de que, seleccionando adecuadamente la función  $H$ , pueden plantearse algoritmos que permiten abordar de forma no clásica la resolución de problemas variados: el cálculo de las raíces de un polinomio (vid. [106]), problemas de contorno (vid. [107]), o la inversión de matrices (vid. [15]).

Con una técnica similar, son abordables ciertos problemas de interés en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos, si bien, en dicho caso, la introducción del parámetro  $t$ , a través de la función  $H$ , se hace innecesaria. Para fijar ideas, analizaremos ahora cómo puede ser utilizado un enfoque similar en el análisis de la dinámica de equilibrios de un sistema dinámico. Posteriormente se abordarán otras aplicaciones de los métodos de continuación, siempre en el contexto de los sistemas dinámicos. Para un tratamiento de ámbito más general, puede consultarse el texto de Allgower & Georg (vid. [3]).

### 2.2.1 Continuación y Equilibrios

Frecuentemente, en el análisis de sistemas dinámicos, aparecen involucrados ciertos parámetros que responden a la naturaleza del problema. En otros casos, su presencia proviene de que ciertas magnitudes son susceptibles de ser modificadas e interesa conocer si existe diferencia cualitativa en el comportamiento del modelo al variar dichos parámetros. Su uso es también natural cuando se desea explicar ciertos fenómenos mediante la teoría de bifurcaciones. Sea como fuere, es usual enfrentarse a sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

donde  $f$  es una función no lineal en general,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  ( $k = 1$  o  $2$  en los casos más simples).

Es de gran interés, como un primer estadio en el análisis, obtener la distribución de los diferentes equilibrios del sistema con relación a los diferentes valores de  $\lambda$ . Así, si para diferentes valores del parámetro es diverso el número de equilibrios del sistema, conviene delimitar los rangos de valores en los que no se altera dicho número. Por tanto, necesitamos resolver para diferentes valores de  $\lambda$  la ecuación

$$f(x, \lambda) = 0$$

Hasta hace no mucho tiempo, la manera tradicional de abordar el problema era fijar en cada caso los diferentes valores de  $\lambda$  e intentar localizar todas las soluciones del correspondiente sistema para el vector de estados  $x$ . Aunque el problema es bien conocido, se comprende que el hecho de ser  $f$  no lineal supone ciertas limitaciones que obligan a resolver la correspondiente ecuación con gran cuidado, evitando dejar sin calcular alguna de las múltiples soluciones que eventualmente pueden estar presentes.

En la actualidad es conocido que es mucho más rentable abordar el análisis de la dependencia de los equilibrios respecto a los parámetros usando las ideas inherentes a los métodos de continuación. Para ello basta exigir diferenciabilidad a  $f$  y la existencia de una parametrización (al menos local), también diferenciable,

del lugar geométrico de los equilibrios. Asumiendo que ello es así en un entorno de un determinado par  $(x_0, \lambda_0)$  de valores solución, podríamos escribir

$$f(x(t), \lambda(t)) = 0$$

y, derivando respecto a  $t$ , llegaríamos a

$$D_x f \frac{dx}{dt} + D_\lambda f \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

que puede escribirse de forma algo más compacta como

$$\left[ D_x f \mid D_\lambda f \right] \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ -\frac{d\lambda}{dt} \end{bmatrix} = 0$$

Suponiendo que  $k = 1$ , el sistema anterior, junto con alguna condición de normalización del vector tangente, constituye, pues, un problema de valor inicial de tipo implícito cuya resolución permitiría *seguir* la curva de equilibrios (o más exactamente de pares  $(x, \lambda)$  en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ), lo que constituye el objetivo deseado (en el contexto de sistemas dinámicos suele denominarse a la representación geométrica de dicha curva *diagrama de bifurcaciones*).

Para la integración numérica a efectuar, no tiene demasiado sentido usar métodos sofisticados cuando se conoce (como es nuestro caso) la función  $f$  y, por tanto, en todo punto  $(x, \lambda)$  de la curva debe cumplirse  $f(x, \lambda) = 0$ . Por ello es usual la adopción de un esquema predictor–corrector usando el método de Euler y corrigiendo mediante el método de Newton o alguna de sus variantes.

Como condición de normalización, entre otras alternativas (vid. Keller [64]), puede exigirse que

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 1 = 0$$

(es decir, que el vector tangente tenga norma euclídea igual a la unidad), de manera que el parámetro  $t$  pasa a desempeñar el papel de la longitud de arco recorrida. La parametrización resultante tiene la virtualidad de ser regular en los

llamados puntos *límite* (conocidos también como *turning points*) para los cuales se tiene que

$$\dim ( Ker (D_x f)) = 1, \quad D_\lambda f \notin \text{Rango} (D_x f)$$

En los puntos en que la matriz  $D_x f$  es singular, con  $\dim ( Ker (D_x f)) > 1$  o, cuando siendo dicha dimensión igual a la unidad, falla la segunda de las condiciones anteriores), es de esperar, a la luz del teorema de la función implícita, que estemos en presencia de puntos de ramificación donde intersecan dos o más curvas (o de otros puntos no regulares). Consiguientemente, la integración numérica del problema planteará dificultades en las proximidades de dichos puntos. Varias estrategias han sido propuestas para *regularizar* el problema en alguno de estos casos, en especial para la aproximación numérica de los puntos de ramificación simple. Los trabajos de Beyn (vid. [6]), Jepson y Keller (vid. [59]), Moore (vid. [78]), Mittelman (vid. [77]), Werner (vid. [108]) (vid. también las referencias que contienen) deben ser citados en este contexto. Básicamente, la idea más común es construir un sistema ampliado cuyas soluciones se corresponden con los puntos en que es singular la matriz  $D_x f$  y que, sin embargo, resulta ser un sistema regular. En esta línea, el trabajo de Zhen (vid. [109]) resulta interesante al rebajar considerablemente el coste computacional.

Centrándonos ahora en la implementación de estas ideas, son numerosos los códigos de continuación existentes; describir cada uno de ellos escapa a nuestros objetivos. Un buen número de ellos son referenciados en el trabajo de Rheinboldt, Roose & Seydel (vid. [87]), pero aún existen otros como los elaborados por Jansen & Feudel (CANDYS/QA, vid. [58]), Khibnik (LINLBF, vid. [67]) y por el activo grupo de Kubíček (vid. [70] y [57]).

Para cumplir los objetivos de esta memoria, hemos utilizado la versión 6.0 de PITCON, que es de los más ampliamente documentados (vid. [84], [85] y [86]), al que hemos incorporado en cada caso rutinas específicamente desarrolladas para cada problema de continuación de nuestro interés. Se trata de un método de continuación básico (en el sentido de estar formulado exclusivamente para resolver sistemas no lineales de ecuaciones) que lleva incorporado un sofisti-

cado mecanismo de control de la longitud del paso de continuación (vid. [21]). Para la condición de normalización antes mencionada, PITCON usa la siguiente estrategia. Supongamos que estamos situados en un punto  $(x^k, \lambda^k)$  que satisface  $f(x, \lambda) = 0$  y que nos planteamos calcular un nuevo punto  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  sobre la curva.

Sea  $j$  el índice de la coordenada de mayor valor absoluto del vector tangente en el paso anterior; se plantea entonces el sistema de ecuaciones

$$\left[ \begin{array}{c} D_x f(x^k, \lambda^k) \mid D_\lambda f(x^k, \lambda^k) \\ e_j^T \end{array} \right] x_t^k = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

de manera que  $x_t^k \in \mathbb{R}^{n+1}$  representa el vector tangente, incluyendo en la última coordenada a la derivada de  $\lambda$ , al que se le impone que su coordenada  $j$  sea la unidad.

Una vez obtenido, se normaliza para que su norma euclídea sea la unidad (imponiendo así que la parametrización que implícitamente se usa tenga el significado de longitud de arco recorrida sobre la curva). A continuación se reevaluaría  $j$  para el paso siguiente.

En cuanto a la predicción, PITCON usa el método de Euler. Así, suponiendo definido  $h$ , longitud del paso a dar, que se calcula mediante la información (también la relativa a la convergencia) de los pasos previos de continuación, como nuevo punto se ensaya

$$\left[ \begin{array}{c} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} x^k \\ \lambda^k \end{array} \right] + h x_t^k$$

que constituye el punto de partida para un proceso de corrección tipo Newton, mediante la iteración de la expresión siguiente:

$$\left[ \begin{array}{c} D_x f(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \mid D_\lambda f(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \\ e_j^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta x^{k+1} \\ \Delta \lambda^{k+1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} -f(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \\ 0 \end{array} \right]$$

donde se efectúa, en cada paso, la actualización

$$\left[ \begin{array}{c} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{array} \right] \leftarrow \left[ \begin{array}{c} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \Delta x^{k+1} \\ \Delta \lambda^{k+1} \end{array} \right]$$

Se observa, pues, que PITCON efectúa las correcciones siguiendo un hiperplano paralelo a uno de los coordenados (precisamente, sobre el que se mantiene

constante la coordenada que se modifica más rápidamente en las proximidades del punto en cuestión).

Otra observación de interés es constatar que este esquema hace que, localmente, podamos identificar el parámetro de continuación  $t$  con una de las coordenadas (tanto del vector de estados  $x$  como  $\lambda$ ) lo que permite que contemos con un mecanismo adaptativo de variación del parámetro de continuación, usando en cada caso el más conveniente desde el punto de vista de la resolución numérica de los sistemas lineales involucrados. Además, queda garantizada la ausencia de dificultades para sobrepasar los posibles puntos límite de la curva.

Usando este código de continuación como base, pasamos en lo que sigue a describir cómo puede formularse un método de continuación de órbitas periódicas.

### 2.2.2 Un Método de Continuación de Órbitas Periódicas y sus Bifurcaciones

El problema de continuación de órbitas periódicas ya ha sido abordado previamente por varios autores. Para ello se hace preciso definir una función cuyos ceros se correspondan con las soluciones periódicas del sistema. Básicamente son dos los enfoques seguidos para ello; si bien ambos pueden formularse de forma equivalente, unos prefieren plantear el problema de acuerdo con el establecimiento de un problema de contorno, mientras que otros utilizan la llamada aplicación de Poincaré para cubrir el mismo objetivo.

Como ya se ha indicado, nuestro trabajo se concretará ahora en definir, para la continuación de órbitas periódicas y de sus bifurcaciones, una función apropiada a utilizar conjuntamente con el programa de continuación PITCON, ya reseñado.

Recurriremos para ello a la aplicación de Poincaré, que proporciona el camino más natural y geométrico de los dos enfoques posibles, además de permitir un tratamiento homogéneo tanto para la órbita periódica principal (por ejemplo, la que *nace* de una bifurcación de Hopf) como para posibles órbitas periódicas aparecidas en posteriores bifurcaciones secundarias.

Siguiendo este mismo acercamiento al problema, goza de cierta difusión el

código de Kaas–Petersen denominado PATH (vid. [63]) aunque, por desgracia, no bien documentado. Otros autores usan, como se ha mencionado, una formulación propia de problemas de valores de contorno. Quizá el código más difundido en esta línea sea el llamado AUTO de Doedel (vid. [22], [25], [26], [27] y [28]) con sus dos versiones: AUTO86 para VAX y AUTO94 para Workstation, ambas usadas en esta memoria. También entran aquí el método propuesto por Kubíček & Holodniok (vid. [69]) y la formulación de Seydel (vid. [102]). En todos los casos citados se acostumbra a normalizar el periodo de las órbitas y se formula un problema de contorno en el intervalo  $[0, 1]$ , introduciendo una incógnita auxiliar correspondiente a dicho periodo.

Consideraremos desde el primer momento sistemas autónomos con dos parámetros; esto permite abordar con un mismo tratamiento el problema de la continuación de órbitas periódicas y el de sus eventuales bifurcaciones, como se verá a continuación.

Sea, pues, el sistema de ecuaciones diferenciales biparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^2 \quad (2.2.3)$$

donde  $f$  es suficientemente diferenciable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ . Sea  $F(y, \mu, t)$  el flujo solución del sistema (2.2.3) con  $F(y, \mu, 0) = y$ . Admitiremos, para el sistema (2.2.3), la existencia de una familia (dependiente de  $\mu$  y para un cierto rango de valores de dicho vector de parámetros) de soluciones periódicas  $g(t, \mu)$  con periodo  $T(\mu)$ ; es decir, si  $x = g(0, \mu)$  se tendrá que

$$g(t, \mu) = F(x, \mu, t) \quad \text{con} \quad g(t, \mu) = g(t + T(\mu), \mu), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Supongamos ahora un valor prefijado  $\mu^0$ , en el rango anterior, de forma que  $x^0 = g(0, \mu^0)$  y elijamos  $S$  un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que sea transversal en  $x^0$  a  $g(t, \mu^0)$ . En estas condiciones podemos afirmar (cf. Hartman [53]), exigiendo hiperbolicidad a la órbita periódica, que existe un entorno  $U \times L$  de  $(x^0, \mu^0)$  en  $S \times \mathbb{R}^2$  y una función única  $\tau : U \times L \rightarrow \mathbb{R}^+$ , diferenciable, que cumple:

$$(i) \quad F(y, \mu, \tau(y, \mu)) \in S, \quad \forall (y, \mu) \in U \times L;$$

$$(ii) \tau(x^0, \mu^0) = T(\mu^0)$$

La función  $\tau$  proporcionaría así, para los puntos  $y \in U$ , y dependiendo del valor del vector de parámetros, el tiempo que invierte la correspondiente órbita en volver al hiperplano  $S$  en las proximidades de  $x^0$  (también llamado por algunos autores *tiempo de vuelo*). Para esos puntos queda definida entonces una familia de aplicaciones de Poincaré  $P(y, \mu)$  sin más que asociarles como imagen el punto de retorno a  $S$ . Es decir:

$$P : U \times L \longrightarrow S \quad \text{con} \quad (y, \mu) \longrightarrow P(y, \mu) = F(y, \mu, \tau(y, \mu)) .$$

Obtener el conjunto de soluciones periódicas es equivalente, pues, a resolver (vid. figura 2.2.1) la ecuación

$$Q(y, \mu) \equiv P(y, \mu) - y = 0$$

es decir, hallar los ceros de la función *residual*  $Q$ . Aunque tanto  $F$  como  $\tau$  son desconocidos *a priori*, la incorporación de una rutina de integración de la órbita que parte de  $y$  hasta completar una *vuelta* permite pasar a PITCON el valor de  $Q$  correspondiente a cada par  $(y, \mu)$ . Nótese que la ecuación anterior define una variedad bidimensional en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$  sobre la que podríamos definir *camino*s concretos de especial interés. Para ello bastaría, por ejemplo, definir una relación diferenciable entre las dos componentes del vector de parámetros y añadir dicha relación a la ecuación anterior: tendríamos entonces un problema de continuación que permitiría seguir la evolución de la órbita sobre una determinada curva en el plano de parámetros. Aquí quedaría englobado como un caso trivial el de continuación uniparamétrica de órbitas periódicas sin más que considerar una ecuación adicional del tipo  $\mu_i = \text{cte}$ ,  $i = 1$  o  $2$ .

Pero también admite esta formulación una extensión inmediata a la continuación de curvas de bifurcación en el plano de parámetros, como veremos más adelante.

Surge, en cualquier caso, la cuestión de calcular las derivadas de la función  $P$ , no sólo para la resolución numérica por continuación del problema (advirtamos

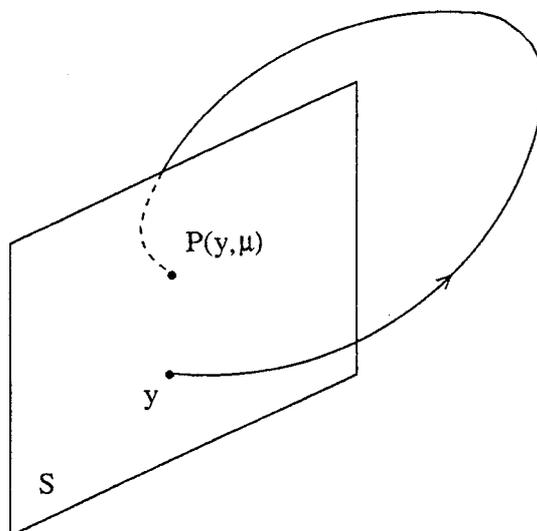


Figura 2.2.1: Construcción de la aplicación de Poincaré.

que ello no sería gran obstáculo, pues PITCON cuenta con la opción de aproximación numérica de la derivada) sino, sobre todo, para contar en todo momento con la información más precisa posible acerca de la estabilidad de la órbita y facilitar la detección de eventuales bifurcaciones, ya que los autovalores de  $D_y P$  se corresponden con los multiplicadores característicos de las soluciones periódicas. El cálculo de  $D_y P$  y de  $D_\mu P$  puede hacerse básicamente mediante integración de las llamadas ecuaciones variacionales. El siguiente resultado, demostrado en [88], nos proporciona su expresión.

**Proposición 2.2.1** *En las condiciones anteriores, y dado el hiperplano transversal  $S$  definido por  $S = \{y \in \mathbb{R}^n : p \cdot y = q, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad q \in \mathbb{R}\}$ , se verifica, para  $k \neq i, j = 1, \dots, n$ ,*

$$D_j P_i = D_j F_i - \frac{p_j}{p_k} D_k F_i - \frac{f_i}{\sum_{l=1}^n p_l f_l} \sum_{l=1}^n p_l \left( D_j F_l - \frac{p_j}{p_k} D_k F_l \right).$$

Volviendo a considerar la ecuación  $Q(y, \mu) = 0$ , hacemos las siguientes observaciones. Como se indicó, puede añadirse una ecuación adicional que defina una curva de interés sobre la variedad bidimensional aludida. Si, por ejemplo,

consideramos el problema de continuación

$$\begin{aligned} P(y, \mu) - y &= 0 \\ \det\{D_y P + I\} &= 0 \end{aligned}$$

entre sus soluciones estarían las órbitas periódicas con un multiplicador característico igual a  $-1$ , es decir, podríamos seguir sobre el plano de parámetros las curvas donde eventualmente se producirán bifurcaciones de tipo *flip* (duplicación de periodo). Alternativamente, el problema  $(2n)$ -dimensional

$$\begin{aligned} P(y, \mu) - y &= 0 \\ (D_y P + I)v &= 0 \\ \phi \cdot v - 1 &= 0, \phi \text{ prefijado} \end{aligned}$$

también serviría para el mismo propósito. Está asegurada (vid. [59]) la regularidad de las soluciones de dicho problema y, por tanto, la de la primera alternativa (especialmente cómoda para el caso  $n = 3$ ; en general, resulta muy superior desde el punto de vista numérico la considerada en segundo lugar).

Limitándonos al caso de menor dimensión, el problema de continuación:

$$\begin{aligned} P(y, \mu) - y &= 0 \\ \det\{D_y P - I\} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

nos permite seguir genéricamente las curvas de bifurcación silla-nodo de forma regular.

No ocurre así para otras bifurcaciones que también se corresponden con un multiplicador de la órbita igual a  $+1$ , como es el caso de las bifurcaciones pitchfork y transcíticas, en las que el sistema (2.2.4) es claramente no regular. Se hace necesario entonces recurrir a sistemas de mayor dimensión, que no abordaremos aquí.

Queremos resaltar el importante hecho de que, mediante iteración de la aplicación  $P$ , es posible continuar tanto las órbitas subarmónicas como sus posibles curvas de bifurcación siguiendo estrictamente el mismo esquema.

Para una interpretación geométrica de estos resultados a la luz de la teoría de Floquet, vid. [88].

## 2.3 Métodos de Continuación de Órbitas Homoclinas

En relación al diseño de un método de continuación para conexiones homoclinas y heteroclinas, encontramos en la literatura, al igual que sucedía en el caso de los códigos de continuación de las órbitas periódicas, dos filosofías muy distintas. Por un lado, autores como Beyn (vid. [7] y [8]), Friedman, Doedel y Monteiro (vid. [23], [24], [42], [43] y [44]), Canale (vid. [11]), Schecter (vid. [99], [100] y [101]) o Champneys, Kuznetsov y Sandstede (vid. [13], [14], [97] y [98]) prefieren buscar las conexiones homoclinas mediante la resolución de un problema de contorno en la recta real, que han truncado previamente a un intervalo finito. Por otro lado, usando ideas más geométricas, aparecen otros métodos como los propuestos por Kuznetsov (vid. [71] y [72]) —que se interesa también por la orientabilidad de las trayectorias homoclinas—, por Gaspard (vid. [46]) o por Rodríguez Luis *et alii* (vid. [88], [92] y [91]), en los que se introduce una sección transversal (un plano normalmente) sobre el que se mide la separación entre las variedades estable e inestable (una de las cuales, al menos, se ha integrado numéricamente).

Pasamos, a continuación, siguiendo las ideas de Rodríguez Luis en [88], a describir el método que implementaremos para realizar la continuación de las órbitas homoclinas. Comencemos considerando el sistema autónomo uniparamétrico plano

$$\dot{x} = X(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^2, \mu \in I \subseteq \mathbb{R} \quad (2.3.1)$$

donde  $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$  es una familia de campos vectoriales e  $I$  es un cierto entorno de  $\mu_0$ .

Supongamos que el origen,  $x = 0$ , es un equilibrio hiperbólico,  $X(0, \mu) = 0$  para todo  $\mu \in I$ , de tipo silla; sin pérdida de generalidad supongamos que la

matriz de la linealización es de la forma

$$D_x X(0, \mu) = \begin{pmatrix} -\lambda_1(\mu) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\mu) \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda_1(\mu)$  y  $\lambda_2(\mu)$  son escalares positivos, para  $\mu \in I$ .

Tenemos, en estas condiciones, que las variedades estable  $W_\mu^s$  e inestable  $W_\mu^u$  del origen pueden ser descritas respectivamente, para un entorno de dicho punto, como

$$x_2 = h^s(x_1, \mu)$$

y como

$$x_1 = h^u(x_2, \mu)$$

donde  $W_\mu^s$  es tangente en el origen al eje  $OX_1$  y  $W_\mu^u$  es tangente en el origen al eje  $OX_2$ .

Supongamos ahora que para  $\mu = \mu_0$  el sistema posee una órbita homoclina  $\Gamma_0 \subset W_{\mu_0}^s \cap W_{\mu_0}^u$ . Sea  $S$  una sección transversal a dicha homoclina en el punto  $q_0 \in \Gamma_0$ ; supongamos que

$$S \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = c\}$$

es decir, que está contenida en una recta (vid. figura 2.3.1). Bajo esta hipótesis, la característica de transversalidad viene expresada por la no anulación del producto escalar  $(0, 1) \cdot X(q_0, \mu_0)$ .

Sean  $p_0^s, p_0^u$  dos puntos pertenecientes a la homoclina  $\Gamma_0$ , próximos al origen, verificando

$$\|p_0^s\|^2 = \|p_0^u\|^2 = \varepsilon$$

y tales que  $p_0^s \in W_{\mu_0}^s$  y  $p_0^u \in W_{\mu_0}^u$ .

Para  $\mu$  próximo a  $\mu_0$  se tiene que la órbita de  $p^s$ , punto próximo a  $p_0^s$  y que también verifica  $\|p^s\|^2 = \varepsilon$ , cortará a  $S$  en un punto  $q^s$  próximo a  $q_0$ ; análogamente, la órbita de  $p^u$ , punto próximo a  $p_0^u$  que también verifica  $\|p^u\|^2 = \varepsilon$ , cortará a  $S$  en un punto  $q^u$  próximo a  $q_0$  (vid. figura 2.3.1).

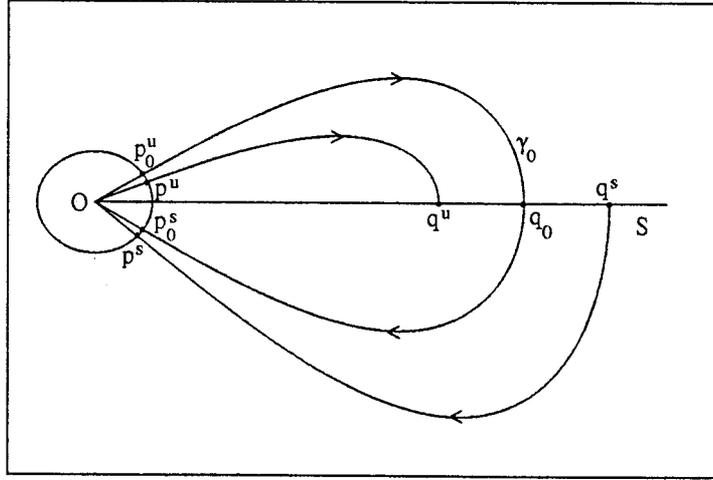


Figura 2.3.1: Geometría asociada a la aplicación  $F(p^s, p^u, \mu)$ .

Si denotamos por  $\phi(x, \mu, t)$  el flujo del sistema (2.3.1), podemos escribir las primeras componentes de los puntos  $q^s$  y  $q^u$  como:

$$q_1^s = \phi_1(p^s, \mu, \tau^s(p^s, \mu))$$

$$q_1^u = \phi_1(p^u, \mu, \tau^u(p^u, \mu))$$

Las funciones  $\tau^s(p^s, \mu)$  y  $\tau^u(p^u, \mu)$ , conocidas como función *tiempo de vuelo*, vienen determinadas por

$$\phi_2(p^s, \mu, \tau^s(p^s, \mu)) = c, \quad \tau^s(p_0^s, \mu_0) = \tau_0^s$$

$$\phi_2(p^u, \mu, \tau^u(p^u, \mu)) = c, \quad \tau^u(p_0^u, \mu_0) = \tau_0^u$$

con

$$\phi(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s) = q_0, \quad \phi(p_0^u, \mu_0, \tau_0^u) = q_0$$

Definimos la función

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

de la siguiente manera:

$$F(p^s, p^u, \mu) = \begin{pmatrix} q_1^s - q_1^u \\ p_2^s - h^s(p_1^s, \mu) \\ p_1^u - h^u(p_2^u, \mu) \\ \|p^s\|^2 - \varepsilon \\ \|p^u\|^2 - \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

Es claro que, en estas condiciones,  $F(p_0^s, p_0^u, \mu_0) = 0$ , es decir, la anulación de  $F(p^s, p^u, \mu)$  indicará la presencia de una órbita homoclina. Rodríguez Luis (vid. [88] y [92]) demuestra que, bajo ciertas condiciones,  $(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$  es un cero regular de  $F$  (en particular, un cero aislado); es decir, comprueba que, bajo ciertas hipótesis,  $DF(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$  es no singular. Por tanto, tendremos como conclusión que la resolución de la ecuación  $F(p^s, p^u, \mu) = 0$  es un problema bien planteado con vistas a computar la órbita homoclina  $\gamma_0$ .

Comencemos introduciendo la ecuación variacional

$$\dot{y} = D_x X(\varphi_0(t), \mu_0)y + D_\mu X(\varphi_0(t), \mu_0)\lambda \tag{2.3.3}$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\gamma_0(t) = \phi(q_0, \mu_0, t)$  es una parametrización de la órbita homoclina  $\Gamma_0$ . Siguiendo a Beyn (vid. [7] y [8]) introducimos la siguiente definición.

**Definición 2.3.1** *Una órbita homoclina  $\gamma_0$  se dice que es no degenerada si las únicas soluciones acotadas del sistema variacional (2.3.3) son  $\lambda = 0$ ,  $y = k\dot{\gamma}_0$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ .*

Bajo la condición de no degeneración, en [88] se prueba el siguiente teorema, que establece el carácter no singular de la matriz  $DF(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$ .

**Teorema 2.3.1** *Si la órbita homoclina  $\Gamma_0$  es no degenerada entonces  $(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$  es un cero regular de  $F$ .*

Consideremos ahora el sistema biparamétrico

$$\dot{x} = X(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.3.4}$$

Supondremos también que, para un cierto valor del parámetro  $\mu_0 = (\mu_1^0, \mu_2^0)$ , el sistema (2.3.4) tiene una conexión homoclina  $\Gamma_0$ . Ahora nos encontramos con un problema de continuación. Definimos, análogamente a como hicimos en (2.3.2),

$F : V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ , donde  $V$  es un entorno de  $(p_0^s, p_0^u, \mu_1^0, \mu_2^0)$ ; es evidente que  $F(p_0^s, p_0^u, \mu_1^0, \mu_2^0) = 0$ .

Así, la continuación de homoclinas es equivalente a la continuación de soluciones de

$$F(p^s, p^u, \mu_1, \mu_2) = 0$$

En este caso, el carácter *no degenerado* de  $\Gamma_0$  con respecto a  $\mu_1$  o a  $\mu_2$  garantiza la no singularidad de la matriz  $D_{w_i} F(p_0^s, p_0^u, \mu_1^0, \mu_2^0)$ , en la que  $w_i = (p^s, p^u, \mu_i)$ ,  $i = 1$  o  $2$ . En consecuencia tenemos garantía, usando el teorema de la función implícita, de que estamos ante una curva regular de conexiones homoclinas en el plano de parámetros  $(\mu_1, \mu_2)$ .

A la hora de programar en un código el método anterior necesitamos aproximar las variedades estable e inestable del equilibrio. Dependiendo del sistema en estudio y de la precisión requerida puede ser suficiente aproximarlas por sus espacios tangentes (aproximación lineal) en el equilibrio hiperbólico. Si no basta con esta aproximación, se pueden usar aproximaciones de orden superior calculadas, por ejemplo, por los procedimientos descritos en [39], [40] y [45]. Se trata entonces de integrar numéricamente a partir de  $p^u$  y de  $p^s$  (vid. figura 2.3.1), detectar las intersecciones de esas órbitas con la sección  $S$  (normalmente una recta paralela a un eje coordenado), interpolar y anular la primera componente de  $F(p^s, p^u, \mu)$  (puesto que las restantes suponemos que son nulas por la aproximación hecha de las variedades).

Así, el problema de la continuación de la conexión homoclina del sistema (2.3.1) en un plano de dos parámetros se convierte en la anulación de una función de una componente y dos variables independientes, tarea que es encomendada al código de continuación PITCON, mencionado en la sección anterior.

## 2.4 Estabilidad de Órbitas Homoclinas con Traza Cero

Sea  $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  un campo vectorial plano y consideremos el sistema dinámico

$$\dot{u} = X(u), \quad u \in \mathbb{R}^2 \quad (2.4.1)$$

Sea  $u_0 \in \mathbb{R}^2$  un punto de silla hiperbólico del sistema (2.4.1), del que suponemos se intersecan sus variedades estable e inestable formando una órbita homoclina,  $\Gamma$ , que supondremos parametrizada por la función  $\gamma(t)$ , para  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Si representamos por  $\sigma_0$  la *traza* del punto de silla, es conocido que la estabilidad de  $\Gamma$  viene determinada por el signo de  $\sigma_0$ , cuando éste es no nulo (vid. [5]).

**Teorema 2.4.1** (*condición suficiente de estabilidad*)

La órbita homoclina  $\Gamma$  es asintóticamente estable (resp. inestable) si  $\sigma_0 > 0$  (resp.  $\sigma_0 < 0$ ).

Observemos, por tanto, que es una *condición local* la determinante de la estabilidad de  $\Gamma$ , de forma que en ésta no interviene el *comportamiento global* a lo largo de la parte regular de la homoclina.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos secciones semitransversales a las variedades locales estable e inestable, respectivamente, de  $\Gamma$  (vid. figura 2.4.1). Parametrizamos  $\alpha$  por  $x$  y  $\beta$  por  $s$  (con  $x = 0$  y  $s = 0$  correspondientes a los puntos de corte respectivos de  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\Gamma$ ). Sea  $P(x)$  la *aplicación retorno de Poincaré* a lo largo de  $\Gamma$  sobre  $\alpha$ , que puede ser expresada como la composición de dos aplicaciones (vid. [33] y [47]): la *aplicación de Dulac*  $D(x)$ , definida de  $\alpha$  a  $\beta$  por el flujo de  $X$ , y la *aplicación de transición regular*,  $R(s)$ , definida, también por el flujo de  $X$ , de  $\beta$  a  $\alpha$  (vid. figura 2.4.1), es decir,  $P(x) = (R \circ D)(x)$ .

Si  $-\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , con  $\lambda_i > 0$ , son los autovalores de  $DX(u_0)$  y definimos la *razón de hiperbolicidad* del punto de silla  $u_0$  por  $r = \lambda_1/\lambda_2$ , la aplicación de Dulac puede escribirse mediante la siguiente expresión asintótica (vid. [79]).

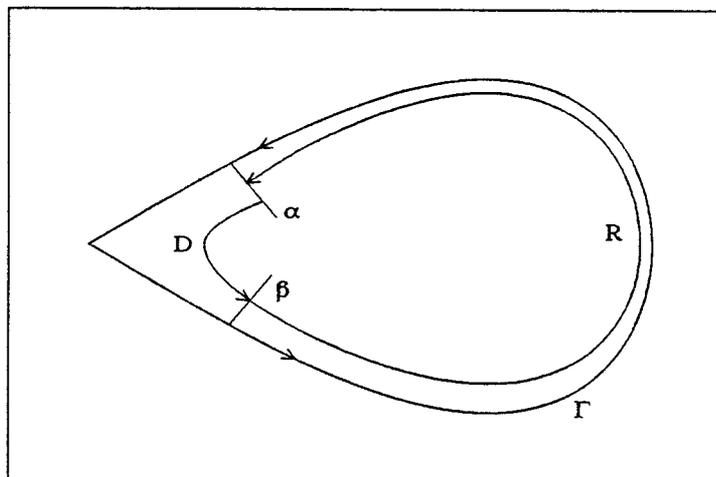


Figura 2.4.1: Aplicaciones de Dulac, regular y de Poincaré asociadas a  $\Gamma$ .

**Proposición 2.4.1** *Existe un  $\varepsilon > 0$  tal que la aplicación de Dulac se escribe*

$$D(x) = x^r (1 + d(x)), \quad \forall x \in (0, \varepsilon)$$

donde  $d$  es analítica en  $(0, \varepsilon)$  y verifica la propiedad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{d^n}{dx^n} d(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aunque válida para el caso  $r = 1$ , la expresión asintótica dada en la proposición anterior puede ser refinada para obtener otra expresión que nos permita estudiar la estabilidad de la órbita homoclina  $\Gamma$  en el caso en que la traza del punto de silla valga cero, que es la situación que nos interesa en esta sección. En lo que sigue, por tanto, supondremos que  $\sigma_0 = 0$ . La siguiente proposición nos da la nueva expresión para  $D$  (vid. [94]).

**Proposición 2.4.2** *Existe un  $\varepsilon_1 > 0$  tal que la aplicación de Dulac se escribe*

$$D(x) = x + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i x^i \log x (1 + \phi_i(x)), \quad \forall x \in (0, \varepsilon_1)$$

donde las funciones  $\phi_i$  son combinaciones lineales finitas de monomios de la forma  $x^k (\log x)^l$ ,  $l \leq k$ .

Por su parte, la aplicación de transición regular  $R(s)$  admite un desarrollo en serie de Taylor en un entorno de  $x = 0$  (vid. [94]).

**Proposición 2.4.3** *Existe un  $\varepsilon_2 > 0$  tal que  $R(s)$  se escribe*

$$R(s) = (1 + \beta_1)s + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i s^i, \quad \forall x \in (0, \varepsilon_2)$$

(con  $\beta_1 > -1$  pues  $R$  conserva la orientación).

De donde resulta que la aplicación de Poincaré tiene la forma dada en el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.1** *Existe un  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$P(x) = (1 + \beta_1)x + (1 + \beta_1)\alpha_2 x^2 \log x + o(x^2 \log x), \quad \forall x \in (0, \varepsilon)$$

Veamos que el signo del coeficiente  $\beta_1$  determina la estabilidad de  $\Gamma$ . Es decir, en presencia de traza cero, es el *comportamiento global* (de la parte regular de la homoclina) el que determina ahora la estabilidad de  $\Gamma$ , y no ya la *condición local*. Algunos resultados preliminares son necesarios.

**Lema 2.4.1** *La derivada de la aplicación  $R$  viene dada por*

$$R'(s) = K e^{\int_0^{T(s)} \text{div} X(\gamma(t)) dt} \tag{2.4.2}$$

con  $K = \frac{X \wedge Y(s)}{X \wedge Z(R(s))}$ , donde  $Y$  y  $Z$  representan los campos vectoriales tangentes a  $\beta$  y  $\alpha$ , respectivamente (con  $\wedge$  el producto vectorial);  $\text{div} X$  denota la divergencia del campo vectorial  $X$  y  $T(s)$  representa la función tiempo de vuelo que asigna a cada  $s$  en  $\beta$  el tiempo requerido para la transición de  $s$  a  $R(s)$  en  $\alpha$ .

DEMOSTRACIÓN: vid. [16]. ■

**Lema 2.4.2** *La constante  $K$  en (2.4.2) del lema anterior puede elegirse igual a uno.*

DEMOSTRACIÓN: Basta elegir  $\alpha$  y  $\beta$  para que los vectores  $X^\perp(s)$  y  $X^\perp(R(s))$  (donde  $\perp$  denota ortogonal) sean paralelos a  $Y(s)$  y  $Z(R(s))$ , respectivamente, y verificando, además

$$\|X^\perp(s)\| \|Y(s)\| = \|X^\perp(R(s))\| \|Z(R(s))\|$$

De esto se sigue el resultado. ■

Consideremos el sistema variacional a lo largo de la órbita homoclina  $\Gamma$

$$\dot{y} = A(t)y \tag{2.4.3}$$

donde  $A(t) = DX(\gamma(t))$ . Sea  $Y(t)$  una matriz fundamental de soluciones de (2.4.3) verificando  $Y(0) = I$ . Por la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias, sabemos que

$$\det Y(t) = e^{\int_0^t \operatorname{div} X(\gamma(s)) ds}$$

Sea  $\psi(t)$  una solución acotada del sistema variacional adjunto

$$\dot{y} = -A^\top(t)y$$

(donde  $\top$  significa transpuesto). Llamemos  $\varphi(t)$  al vector  $\dot{\gamma}(t)$ . Los vectores  $\psi(t)$  y  $\varphi(t)$  son ortogonales, verificando, además

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\det Y(t)} \tag{2.4.4}$$

Sea la matriz  $A_0 = DX(u_0)$  con autovalores  $-\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (con  $\lambda_i > 0$ ). Consideremos  $v_s$  y  $v_u$  autovectores derechos de  $A_0$  asociados a  $-\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente, y  $w_s$  y  $w_u$  autovectores izquierdos de  $A_0$  asociados a  $\lambda_2$  y  $-\lambda_1$ , respectivamente,

es decir

$$\begin{aligned} A_0 v_s &= -\lambda_1 v_s \\ A_0 v_u &= \lambda_2 v_u \\ -A_0^\top w_s &= -\lambda_2 w_s \\ -A_0^\top w_u &= \lambda_1 w_u \end{aligned}$$

donde  $(v_s, w_s) = (v_u, w_u) = 0$  (con  $(\cdot, \cdot)$  denotando producto escalar). Las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  tienen el siguiente comportamiento asintótico (vid. [18]).

**Lema 2.4.3** *Existen vectores  $v_{+\infty}, v_{-\infty}, w_{+\infty}$  y  $w_{-\infty}$ , no nulos, y constantes  $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ , no nulas, tales que*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} \varphi(t) &= v_{+\infty} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_2 t} \psi(t) &= w_{+\infty} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\lambda_2 t} \varphi(t) &= v_{-\infty} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\lambda_1 t} \psi(t) &= w_{-\infty} \end{aligned}$$

verificando, además

$$\begin{aligned} v_{+\infty} &= k_1 v_s \\ w_{+\infty} &= k_2 w_s \\ v_{-\infty} &= k_3 v_u \\ w_{-\infty} &= k_4 w_u \end{aligned}$$

Andronov *et alii* demuestran en [5] que la traza cero es condición necesaria para que la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt$  sea convergente y no nula. Si no exigimos la no nulidad, también es condición suficiente.

**Lema 2.4.4** *Si  $\sigma_0 = 0$ , la integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \tag{2.4.5}$$

*es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Del lema anterior, es inmediato que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} (\gamma(t) - u_0) \neq 0 \quad (2.4.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\lambda_2 t} (\gamma(t) - u_0) \neq 0 \quad (2.4.7)$$

Haciendo uso de (2.4.6) se tiene

$$\begin{aligned} e^{\int_0^{+\infty} \operatorname{div} X(\gamma(\tau)) d\tau} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_0^t \operatorname{div} X(\gamma(\tau)) d\tau} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_0^t |\operatorname{div} X(\gamma(\tau))| d\tau} \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_0^t C \|\gamma(\tau) - u_0\| d\tau} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_0^T C' d\tau + \int_T^t C'' e^{-\lambda_1 \tau} d\tau} = \\ &= e^{C'T + \frac{C''}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 T}} \neq 0 \end{aligned}$$

donde  $C, C'$  y  $C''$  son constantes positivas adecuadas y  $T > 0$  es suficientemente grande. Un razonamiento análogo, a partir de (2.4.7), prueba que

$$e^{\int_{-\infty}^0 \operatorname{div} X(\gamma(\tau)) d\tau} \neq 0$$

de donde se sigue el resultado. ■

A la integral dada en (2.4.5) la llamaremos *integral de la divergencia*. Su exponencial será representada a lo largo de esta memoria por *EID*, es decir,

$$EID \stackrel{\text{def}}{=} e^{\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma)} \quad (2.4.8)$$

El signo de la integral de la divergencia determina la estabilidad de  $\Gamma$ , caso de ser no nula.

**Teorema 2.4.2** *Supongamos que  $\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma) \neq 0$ . La órbita homoclina  $\Gamma$  es asintóticamente estable (resp. inestable) si y sólo si  $\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma) < 0$  (resp.  $\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma) > 0$ ).*

DEMOSTRACIÓN: Al ser la integral

$$\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt$$

convergente, podemos elegir un entorno  $V$  de  $u_0$  suficientemente pequeño para que las semitransversales  $\alpha$  y  $\beta$  estén contenidas en  $V$  y para que  $\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma)$  y  $\int_{\gamma^*} \operatorname{div} X(\gamma)$  tengan el mismo signo, siendo  $\gamma^*(t)$  la parametrización que describe el arco de  $\Gamma$  recorrido por la aplicación  $R(s)$ . Observemos que  $P'$  y  $R'$  son equivalentes cuando  $x$  tiende a 0, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} P'(x) = R'(0) = 1 + \beta_1$$

Por otra parte

$$R'(0) = e^{\int_{\gamma^*} \operatorname{div} X(\gamma)} \neq 1$$

(y por tanto  $\beta_1 \neq 0$ ) de donde

$$\lim_{x \rightarrow 0} P'(x) < 1 \quad (\text{resp. } > 1)$$

si y sólo si

$$\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma) < 0 \quad (\text{resp. } > 0)$$

y se tiene el resultado. ■

Los siguientes corolarios son inmediatos a partir del teorema precedente.

**Corolario 2.4.2** *Si  $\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma) \neq 0$  entonces*

$$1 + \beta_1 = e^{\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma)}$$

**Corolario 2.4.3** *La órbita homoclina  $\Gamma$  es asintóticamente estable (resp. inestable) si y sólo si  $\beta_1 < 0$  (resp.  $\beta_1 > 0$ ).*

**Corolario 2.4.4** *(condición necesaria de bifurcación)*

*Si  $\beta_1 = 0$  entonces  $\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma) = 0$ .*

Al existir  $\lim_{x \rightarrow 0} P'(x)$ , podemos ampliar el dominio de definición de  $P'(x)$  a  $x = 0$  en la forma

$$P'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} P'(x)$$

Observemos que  $\int_{\gamma} \text{div} X(\gamma) = 0$  no implica  $\beta_1 = 0$ , pero garantiza, debido a la proximidad arbitraria de  $\gamma^*$  a  $\gamma$ , que  $\beta_1$  está todo lo cerca de cero que queramos, lo que hará necesario el estudio del coeficiente  $\alpha_2$  de la aplicación de Poincaré para determinar la estabilidad de la órbita homoclina, es decir, volvemos de nuevo a una *condición local*.

## 2.5 Procedimiento Numérico para el Cálculo de la Integral de la Divergencia

Nos proponemos en esta sección diseñar un procedimiento numérico para el cálculo de  $\int_{\gamma} \text{div} X(\gamma)$ , con la notación y las condiciones de la sección anterior.

De (2.4.4) se tiene

$$\det Y(t) = \frac{-\varphi_2}{\psi_1} = \frac{\varphi_1}{\psi_2} \quad (2.5.1)$$

(donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia a las componentes primera y segunda, respectivamente, de un vector).

De (2.5.1) y del lema 2.4.3 se deduce, al ser  $\sigma_0 = 0$ , el siguiente resultado.

### Lema 2.5.1

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \det Y(t) = \frac{v_{+\infty 1}}{w_{+\infty 2}} = -\frac{v_{+\infty 2}}{w_{+\infty 1}} \quad (2.5.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \det Y(t) = \frac{v_{-\infty 1}}{w_{-\infty 2}} = -\frac{v_{-\infty 2}}{w_{-\infty 1}} \quad (2.5.3)$$

Con estos resultados podemos expresar de una forma simple la exponencial de la integral de la divergencia:

### Teorema 2.5.1 *Se verifica*

$$e^{\int_{\gamma} \text{div} X(\gamma)} = \frac{v_{+\infty 1} w_{-\infty 2}}{v_{-\infty 1} w_{+\infty 2}} = \frac{v_{+\infty 2} w_{-\infty 1}}{v_{-\infty 2} w_{+\infty 1}} \quad (2.5.4)$$

DEMOSTRACIÓN: Se tiene

$$\begin{aligned}
 e^{\int_{\gamma} \operatorname{div} X(\gamma)} &= e^{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt} = \\
 &= e^{\int_0^{+\infty} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt} e^{\int_{-\infty}^0 \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt} = \\
 &= \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_0^t \operatorname{div} X(\gamma(s)) ds} \right) \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_{-t}^0 \operatorname{div} X(\gamma(s)) ds} \right) = \\
 &= \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\int_0^t \operatorname{div} X(\gamma(s)) ds} \right) \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\int_0^t \operatorname{div} X(\gamma(s)) ds} \right) = \\
 &= \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \det Y(t)}{\lim_{t \rightarrow -\infty} \det Y(t)}
 \end{aligned}$$

de donde, por (2.5.2) y (2.5.3), se verifica el teorema. ■

Este resultado nos permite diseñar un algoritmo sencillo para el cálculo de la exponencial de la integral de la divergencia.

**Algoritmo EID**

Para  $t \rightarrow +\infty$ :

1. Sea  $t = t_0$  un tiempo inicial.
2. Integramos numéricamente el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) &= -\operatorname{div} X(\gamma(t)) \rho(t) \\ \rho(t_0) &= 1 \end{cases}$$

3. Evaluamos

$$\varphi(t) = X(\gamma(t))$$

4. Calculamos

$$\begin{cases} A(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda_2 t} \psi(t) &= e^{\lambda_2 t} \varphi^\perp(t) \rho(t) \\ B(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda_1 t} \varphi(t) & \end{cases}$$

## 5. Test de detención.

Tenemos dos posibles criterios para detener el proceso:

- (a) comparar la colinealidad de  $A(t)$  y  $w_s$  y de  $B(t)$  y  $v_s$ ;
- (b) determinar la ortogonalidad de  $A(t)$  y  $B(t)$ .

## 6. Si el test elegido

- (a) se satisface, tomamos  $t_+ \stackrel{def}{=} t$  y hacemos la aproximación

$$\begin{cases} w_{+\infty} \approx A(t_+) \\ v_{+\infty} \approx B(t_+) \end{cases}$$

- (b) no se satisface, hacemos  $t = t + h$ , para  $h > 0$ , y volvemos a 2.

Para  $t \rightarrow -\infty$ :

1. Sea  $t = t_0$  un tiempo inicial.
2. Integramos numéricamente el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) = -\text{div} X(\gamma(t)) \rho(t) \\ \rho(t_0) = 1 \end{cases}$$

3. Evaluamos

$$\varphi(t) = X(\gamma(t))$$

4. Calculamos

$$\begin{cases} A(t) \stackrel{def}{=} e^{-\lambda_1 t} \psi(t) = e^{-\lambda_1 t} \varphi^\perp(t) \rho(t) \\ B(t) \stackrel{def}{=} e^{-\lambda_2 t} \varphi(t) \end{cases}$$

## 5. Test de detención.

Tenemos dos posibles criterios para detener el proceso:

- (a) comparar la colinealidad de  $A(t)$  y  $w_u$  y de  $B(t)$  y  $v_u$ ;
- (b) determinar la ortogonalidad de  $A(t)$  y  $B(t)$ .

6. Si el test elegido

(a) se satisface, tomamos  $t_- \stackrel{def}{=} t$  y hacemos la aproximación

$$\begin{cases} w_{-\infty} \approx A(t_-) \\ v_{-\infty} \approx B(t_-) \end{cases}$$

(b) no se satisface, hacemos  $t = t - h$ , para  $h < 0$ , y volvemos a 2.

El coeficiente  $EID$  puede ser utilizado tanto para el cálculo de la estabilidad de una órbita homoclina con traza cero, como en el contexto de un problema de continuación (bien para detectar el cambio de estabilidad de homoclinas con traza cero, bien para continuar homoclinas con traza cero y  $EID = 1$ ). Si estamos ante un problema de continuación, el algoritmo EID puede modificarse para mejorar la precisión y ahorrar tiempo de cálculo. El algoritmo EID realiza los cálculos utilizando los valores de los parámetros en los que existe una conexión homoclina, valores que han sido proporcionados por un programa de continuación que los ha calculado previamente. La modificación que proponemos consiste en realizar los cálculos del algoritmo al mismo tiempo que el programa de continuación está calculando los valores de los parámetros para los que existe una homoclina. En el programa de continuación, la subrutina que realiza la integración numérica del sistema parte de puntos iniciales  $Q$  y  $R$  (vid. figura 2.5.1), suficientemente próximos a  $O$ , e integra hasta cerrar (según sea la precisión elegida) la homoclina en  $P$ . Después se integra el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) = -\operatorname{div} X(\gamma(t)) \rho(t) \\ \rho(0) = 1 \end{cases}$$

desde  $P$  hasta  $R$  y  $Q$ , para conocer  $\rho(T)$  y  $\rho(-\tilde{T})$ , respectivamente. En el algoritmo modificado procedemos:

**Algoritmo EID-M**

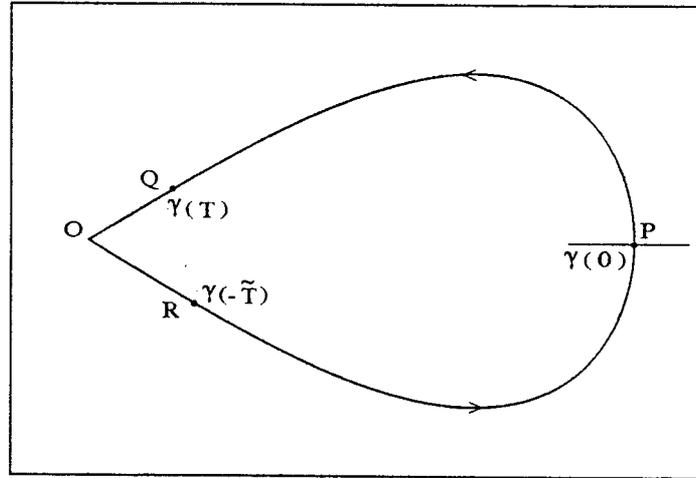


Figura 2.5.1: Conexión homoclina.

1. Para el cálculo de  $\rho(T)$ , definimos  $\Gamma(t)$  tal que  $\gamma(t) = \Gamma(t - T)$ , con  $\Gamma(0) = Q$  y  $\Gamma(-T) = P$ . Sea  $\Lambda(t) = DX(\Gamma(t))$ . Se tiene

$$DX(\gamma(t)) = DX(\Gamma(t - T)) = \Lambda(t - T)$$

Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -\text{div} X(\Gamma(t)) R(t) \\ R(0) = 1 \end{cases}$$

Se verifica, por tanto,

$$\dot{R}(t - T) = -\text{div} X(\Gamma(t - T)) R(t - T) = -\text{div} X(\gamma(t)) R(t - T)$$

de donde  $R(t - T) = \lambda \rho(t)$ , para cierta constante  $\lambda$ . En  $t = 0$  se tiene  $R(-T) = \lambda$ . Así,  $R(0) = \lambda \rho(T)$ , verificándose

$$\rho(T) = \frac{R(0)}{R(-T)} = \frac{1}{R(-T)}$$

El cálculo de  $R(-T)$  lo hacemos integrando el sistema

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -\text{div} X(\gamma(t + T)) R(t) \\ R(0) = 1 \end{cases}$$

integración que será realizada junto a la de la órbita homoclina en la subrutina de integración, definiendo para ello el sistema ampliado

$$\begin{cases} \dot{x}(\gamma(t)) &= X(\gamma(t)) \\ \dot{R}(t) &= -\operatorname{div} X(\gamma(t+T)) R(t) \\ R(0) &= 1 \end{cases}$$

2. Para el cálculo de  $\rho(-\tilde{T})$ , siguiendo un razonamiento análogo al anterior, se llega a

$$\rho(-\tilde{T}) = \frac{1}{R(\tilde{T})}$$

donde  $R(\tilde{T})$  se calcula mediante la integración del sistema

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -\operatorname{div} X(\gamma(t-\tilde{T})) R(t) \\ R(0) = 1 \end{cases}$$

que se amplía de nuevo a un sistema en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.6 Dualidad con la Bifurcación de Hopf

En esta sección damos una expresión para el coeficiente  $\alpha_2$  de la aplicación de Dulac (vid. Proposición 2.4.2), que será necesario conocer en el caso en que nos encontremos ante una órbita homoclina con traza e integral de la divergencia iguales a cero, si queremos determinar su estabilidad.

Consideremos un sistema con un punto de silla hiperbólico con razón de hiperbolicidad  $r$ . Si  $r$  es racional (resp. irracional) diremos que el punto de silla es (resp. no es) *resonante*. Este sistema se puede escribir en la *forma normal de Dulac* dada en el siguiente teorema (vid. [79]).

**Teorema 2.6.1** *Sea  $u_0$  un punto de silla hiperbólico de un sistema plano*

$$\dot{u} = X(u), \quad u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.6.1}$$

con razón de hiperbolicidad  $r$ . Este sistema es  $C^\infty$ -equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -ry \end{cases}$$

si  $r$  es irracional, o al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -ry + \sum_{k=1}^n \alpha_{k+1} (x^p y^q)^k y + O(|x, y|^{2n+3}) \end{cases}$$

si  $r = \frac{p}{q}$  es racional.

En el caso que nos interesa, en el que la traza del punto de silla es cero, estamos en una situación de resonancia, y se verifica el siguiente corolario.

**Corolario 2.6.1** Sea  $u_0$  un punto de silla hiperbólico del sistema (2.6.1), con  $\operatorname{div} X(u_0) = 0$ . En estas condiciones, (2.6.1) es  $C^\infty$ -equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + \sum_{k=1}^n \alpha_{k+1} x^k y^{k+1} + O(|x, y|^{2n+3}) \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Los coeficientes  $\alpha_{k+1}$  dados en el corolario son los mismos coeficientes de la aplicación de Dulac dada en la Proposición 2.4.2 (vid. [94]), cuyo cálculo es complicado en la práctica. Con el objeto de simplificar la obtención de  $\alpha_2$ , único coeficiente de los  $\alpha_k$  cuyo valor nos interesa, suponemos que  $u_0 = 0$  es un equilibrio hiperbólico de (2.6.1), y escribimos este sistema en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.6.3)$$

donde  $f(x, y), g(x, y) = O(|x, y|^2)$ .

Una forma normal para (2.6.3) es (vid. [60])

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^n (x^2 - y^2)^k \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(|x, y|^{2n+2}) \quad (2.6.4)$$

Para la obtención de  $a_k, b_k$ , podemos seguir un proceso paralelo al que se seguiría en el caso en que tuviéramos una bifurcación de Hopf. Así, en el sistema (2.6.3), hacemos el cambio

$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ \bar{z} &= x - jy \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

donde  $j$  es un símbolo formal que indica un número tal que  $j^2 = -1$ , es decir,  $j = \pm 1$ . Tras este cambio, obtenemos el sistema transformado

$$\begin{cases} \dot{z} = \omega_0 j z + F(z, \bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} = -\omega_0 j \bar{z} + \overline{F(z, \bar{z})} \end{cases} \tag{2.6.6}$$

donde la barra denota *conjugación* ( $\overline{a + jb} = a - jb$ ). La forma normal para el sistema (2.6.6) es (vid. [45])

$$\begin{cases} \dot{z} = \omega_0 j z + \sum_{k=1}^n (a_k + jb_k) z (z\bar{z})^k + O(|z, \bar{z}|^{2n+2}) \\ \dot{\bar{z}} = -\omega_0 j \bar{z} + \sum_{k=1}^n (a_k - jb_k) \bar{z} (z\bar{z})^k + O(|z, \bar{z}|^{2n+2}) \end{cases}$$

y, a partir de aquí, obtenemos la forma normal (2.6.4), deshaciendo el cambio (2.6.5).

Gamero en [45] (cf. [62]) proporciona la siguiente expresión para  $a_1$ , coeficiente resonante que denotaremos a lo largo de esta memoria por *RES*.

$$\begin{aligned} RES \stackrel{def}{=} a_1 &= (f_{yy}g_{yy} + f_{yy}f_{xy} + g_{yy}g_{xy} - f_{xy}f_{xx} - g_{xy}g_{xx} - \\ &\quad - f_{xx}g_{xx} - g_{yyy} - f_{xyy} + g_{xxy} + f_{xxx})/16 \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

La relación entre  $\alpha_{k+1}$  y  $a_k$  viene dada en el lema siguiente (vid. [62]).

**Lema 2.6.1** *El primer  $\alpha_{k+1}$  no nulo está dado por*

$$\alpha_{k+1} = 2a_k$$

y, por tanto, si  $\alpha_2 \neq 0$ , tenemos  $\alpha_2 = 2a_1$ .

## 2.7 Estabilidad de Homoclinas Cuspidales

Sea  $X$  un campo vectorial plano,  $X \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , y sea el sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) \\ \dot{y} = X_2(x, y) \end{cases} \quad (2.7.1)$$

con un equilibrio en el origen de tipo *cúspide*, es decir, el equilibrio tiene separatrices locales estable e inestable,  $\gamma^s$  y  $\gamma^u$ , respectivamente, formando una cúspide (vid. figura 2.7.1). Es conocido que el sistema dado en (2.7.1) es  $C^\infty$ -equivalente a un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + O(|x, y|^{k+1}) \\ \dot{y} = \sum_{j=2}^k a_j x^j + b_j x^{j-1} y + O(|x, y|^{k+1}) \end{cases} \quad (2.7.2)$$

En el caso en que  $a_2 \neq 0$ , el tipo topológico de (2.7.2) está determinado por el sistema cortado a segundo orden

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^2 + bxy \end{cases} \quad (2.7.3)$$

(donde  $a = a_2$  y  $b = b_2$ ). Supongamos que las separatrices  $\gamma^s$  y  $\gamma^u$  intersecan formando una órbita homoclina de punto de cúspide u homoclina cuspidal (vid. figura 2.7.1). El estudio de la estabilidad en el caso de una homoclina cuspidal es más complejo que en el caso de una homoclina para un punto de silla hiperbólico con traza cero, pues ahora se produce una interacción entre los comportamientos local (en las cercanías del equilibrio) y global (a lo largo de la parte regular de la trayectoria homoclina). Para llevar a cabo este análisis, tomamos dos secciones de corte locales,  $\alpha$  y  $\beta$ , simétricas con respecto al eje  $OX$  y paralelas, situadas a distancia  $\eta > 0$  del origen, y elegimos una condición inicial,  $x_0 > 0$  (análogo para  $x_0 < 0$ ), en el eje  $OX$  cerca del origen (vid. figura 2.7.2).

Escribimos el sistema (2.7.3) en la forma del problema de Cauchy

$$\begin{cases} (ax^2 + bxy) \frac{dx}{dy} = y \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7.4)$$

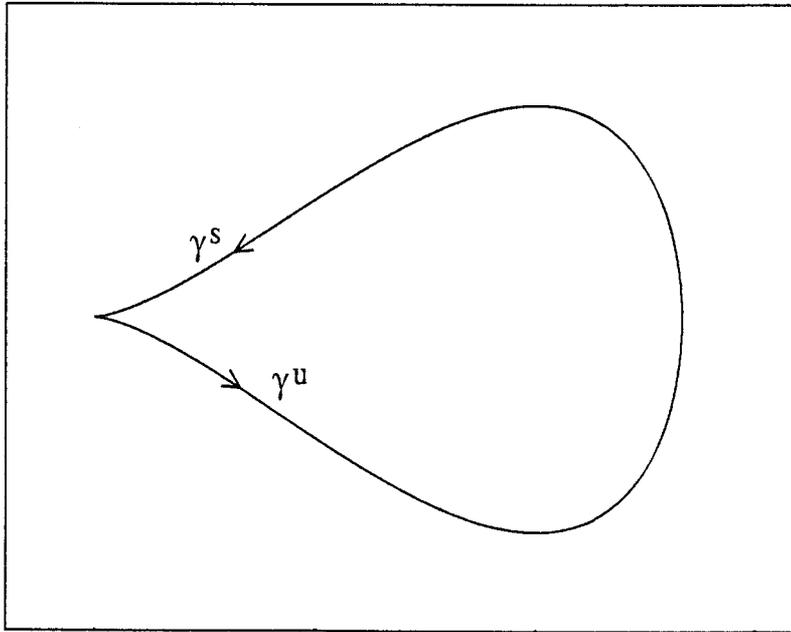


Figura 2.7.1: Homoclina de punto de cúspide.

Mediante el escalado

$$x \mapsto \varepsilon^2 x, y \mapsto \varepsilon^3 y, x_0 \mapsto \varepsilon^2 x_0 \quad (2.7.5)$$

(2.7.4) se convierte en

$$\begin{cases} (ax^2 + \varepsilon bxy) \frac{dx}{dy} = y \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7.6)$$

Consideremos el desarrollo asintótico en  $\varepsilon$

$$x(y) = \varphi_0(y) + \varepsilon \varphi_1(y) + o(\varepsilon) \quad (2.7.7)$$

donde  $\varphi_0(0) = x_0$  y  $\varphi_1(0) = 0$ . Sustituyendo (2.7.7) en (2.7.6) se tiene

$$(a\varphi_0(y)^2 + 2a\varphi_0(y)\varphi_1(y)\varepsilon + b\varphi_0(y)y\varepsilon + o(\varepsilon))(\varphi_0'(y) + \varepsilon\varphi_1'(y) + o(\varepsilon)) = y$$

Identificando coeficientes tenemos, para:

( $\varepsilon^0$ )

$$\begin{cases} a\varphi_0^2(y)\varphi_0'(y) = y \\ \varphi_0(0) = x_0 \end{cases}$$

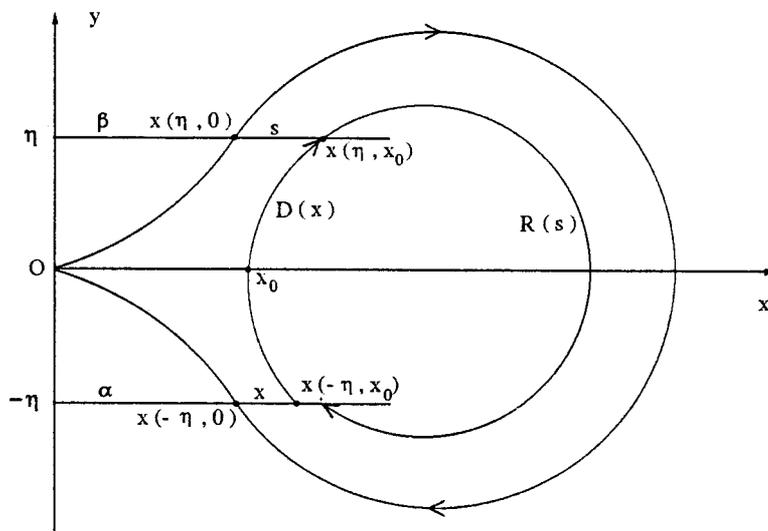


Figura 2.7.2: Aplicaciones de Dulac y regular asociadas a la homoclina cuspidal.

de donde

$$\varphi_0(y) = \left( \frac{3}{2a}y^2 + x_0^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.7.8)$$

( $\varepsilon^1$ )

$$\begin{cases} a \varphi_0^2(y) \varphi_1'(y) + 2a \varphi_0(y) \varphi_0'(y) \varphi_1(y) + b \varphi_0(y) \varphi_0'(y) y = 0 \\ \varphi_1(0) = 0 \end{cases} \quad (2.7.9)$$

La ecuación diferencial del problema de Cauchy (2.7.9) se puede expresar en la forma

$$a \left( \varphi_0^2(y) \varphi_1(y) \right)' = -b \varphi_0(y) \varphi_0'(y) y$$

Escribiendo  $\varphi_0(y) \varphi_0'(y) y = \left( \frac{\varphi_0^2(y)}{2} y \right)' - \frac{\varphi_0^2(y)}{2}$ , se tiene

$$\varphi_1(y) = -\frac{b}{2a} \left( y - \frac{1}{\varphi_0^2(y)} \int_0^y \varphi_0^2(s) ds \right) \quad (2.7.10)$$

De (2.7.8) y (2.7.10) obtenemos la siguiente expresión para  $x(y)$

$$x(y) = A(y) + o(\varepsilon)$$

donde

$$A(y) = \varphi_0(y) - \frac{b}{2a} \left( y - \frac{1}{\varphi_0^2(y)} \int_0^y \varphi_0^2(s) ds \right)$$

Consideremos, de forma análoga a como lo hicimos en el caso de las homoclinas con traza cero, las tres aplicaciones siguientes (vid. figura 2.7.2):

- La aplicación de Dulac  $D(x)$ , definida de  $\alpha$  a  $\beta$ . Su variable se puede expresar

$$x = x(-\eta, x_0) - x(-\eta, 0)$$

con  $x(y, \tilde{x}) \stackrel{def}{=} x(y)$ , donde  $x(y)$  es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} (ax^2 + \varepsilon bxy) \frac{dx}{dy} = y \\ x(0) = \tilde{x} \end{cases}$$

- La aplicación de transición regular a lo largo de la homoclina,  $R(s)$ , definida de  $\beta$  a  $\alpha$ , que admite un desarrollo en serie de Taylor

$$R(s) = (1 + \omega)s + o(s) \quad (\text{con } \omega > -1)$$

donde  $s$  puede ser expresada como

$$s = x(\eta, x_0) - x(\eta, 0)$$

- La aplicación de Poincaré,  $P(x)$ , definida de  $\alpha$  a  $\alpha$ , que viene dada como la composición de  $R$  y  $D$

$$P(x) = R(D(x)) = (1 + \omega)D(x) + \dots = (1 + \omega)(x(\eta, x_0) - x(\eta, 0)) + \dots$$

Consideremos el desarrollo de Taylor de la función  $A(y)$  hasta orden seis

$$x(y) = \left( \frac{1}{2} \frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} - \frac{2by}{7a} \varepsilon \right) + \left( \frac{1}{9} \frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} + \frac{4b}{7y} \varepsilon \right) x_0^3 + O(x_0^6) \quad (2.7.11)$$

Esto nos permite expresar la aplicación de Dulac,  $s = D(x)$ , en forma de una curva parametrizada por  $x_0$

$$\begin{cases} s = x(\eta, x_0) - x(\eta, 0) & \approx \left( \frac{1}{9} \frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}} + \frac{4b}{7\eta} \varepsilon \right) x_0^3 \\ x = x(-\eta, x_0) - x(-\eta, 0) & \approx \left( \frac{1}{9} \frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}} - \frac{4b}{7\eta} \varepsilon \right) x_0^3 \end{cases} \quad (2.7.12)$$

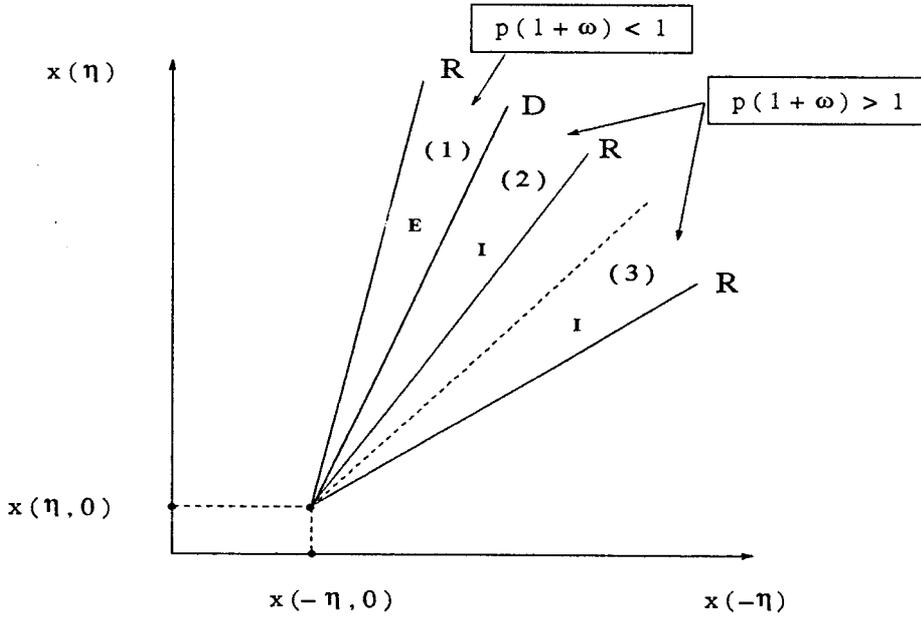


Figura 2.7.3: Aproximaciones lineales en  $x_0 = 0$  de las aplicaciones  $D$  y  $R$ .  $E =$  Estable;  $I =$  Inestable. Los números hacen referencia a la clasificación dada en el texto.

para  $x_0 \in (0, \delta)$ , con  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, obteniendo como aproximación una línea recta de pendiente

$$p \stackrel{def}{=} D'(x) = \frac{ds/dx_0}{dx/dx_0} = \frac{\xi + \frac{4}{7}b\eta^{\frac{1}{3}}\varepsilon}{\xi - \frac{4}{7}b\eta^{\frac{1}{3}}\varepsilon}$$

donde

$$\xi = \frac{2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}}$$

Vamos a distinguir dos casos, según sean los signos de  $a$  y  $b$ :

1.  $a > 0, b > 0$  (caso topológicamente equivalente a  $a < 0, b < 0$ ). Se tiene

$$x(\eta, 0) = \frac{1}{2} \frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{7} \frac{b\eta}{a} \varepsilon$$

$$x(-\eta, 0) = \frac{1}{2} \frac{3^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{7} \frac{b\eta}{a} \varepsilon$$

de donde  $x(-\eta, 0) > x(\eta, 0)$ . Representamos en el plano  $(x(-\eta), x(\eta))$  (vid. figura 2.7.3) la curva paramétrica dada en (2.7.12), aproximación lineal de  $D$  en  $x_0 = 0$ , y la aproximación lineal a  $R$  en  $s = 0$ , dada por la

línea recta de pendiente  $1 + \omega$ . La línea discontinua representa la paralela a la bisectriz que pasa por el punto  $(x(-\eta, 0), x(\eta, 0))$ . Obsérvese que la pendiente de  $R$ ,  $1 + \omega$ , está medida con respecto al eje  $x(\eta)$ . La pendiente de  $D$ , en este caso, es mayor que 1, lo que nos indica que el comportamiento local, en las proximidades del punto de cúspide, es asintóticamente inestable. El comportamiento global, a lo largo del arco regular de la homoclina, viene dado por el valor de  $\omega$ , que depende de las tres posiciones relativas que puede adoptar  $R$ , a saber:

- (1)  $\omega < 0$  y  $\frac{1}{1+\omega} > p$ , lo que nos indica que el comportamiento global es asintóticamente estable. Al ser  $\frac{1}{1+\omega} > p$  el efecto resultante es asintóticamente estable.
- (2)  $\omega < 0$  y  $1 < \frac{1}{1+\omega} < p$ . No hay cambios en los comportamientos local y global pero, al ser  $\frac{1}{1+\omega} < p$ , la homoclina es asintóticamente inestable.

La situación límite,  $\frac{1}{1+\omega} = p$ , corresponde, por tanto, a una degeneración de codimensión 4, al haberse producido un cambio en la estabilidad de la homoclina.

- (3)  $\omega > 0$  y por tanto  $\frac{1}{1+\omega} < 1 < p$ . En este último caso, ambos comportamientos, local y global, son asintóticamente inestables siendo, por tanto, la homoclina asintóticamente inestable.

Ahora la situación límite,  $\frac{1}{1+\omega} = 1$ , es decir,  $\omega = 0$ , no supone una degeneración adicional al no producirse en la homoclina un cambio de estabilidad. Los casos (2) y (3), topológicamente equivalentes, corresponden al tipo más simple de homoclinas cuspidales. En ambos casos la homoclina que nace del punto de Takens–Bogdanov y la homoclina cuspidal tienen la misma estabilidad (un ejemplo de homoclina cuspidal del tipo (2) ocurre en el sistema enzimático estudiado en el capítulo V; del tipo (3) tenemos un ejemplo en el desplegamiento de una Takens–Bogdanov degenerada en los dos términos cuadráticos de su forma normal, caso estudiado en [19] y que mencionaremos

en la próxima sección). Lo contrario ocurre en el caso (1), más complejo, en el que estas estabilidades son opuestas, dando lugar, en el correspondiente desplegamiento, a una conducta dinámica más rica (un ejemplo de este tipo de homoclinas cuspidales lo encontramos en el *continuous flow stirred tank reactor* [CSTR], vid. [49], que constituye un modelo simple de una reacción exotérmica en un reactor químico espacialmente homogéneo, y cuyo estudio abordaremos en posteriores trabajos).

2.  $a > 0, b < 0$  (caso topológicamente equivalente a  $a < 0, b > 0$ ). Razonando de forma análoga al caso anterior, se obtienen  $p < 1$  (por tanto, comportamiento local asintóticamente estable) y los siguientes resultados que resumimos:

- (1)  $\omega > 0$  y  $\frac{1}{1+\omega} < p$ : comportamiento global asintóticamente inestable; homoclina asintóticamente inestable. Caso más complejo.
- (2)  $\omega > 0$  y  $p < \frac{1}{1+\omega}$ : comportamiento global asintóticamente inestable; homoclina asintóticamente estable. Caso simple.
- (3)  $\omega < 0$  y por tanto  $p < 1 < \frac{1}{1+\omega}$ : comportamiento global asintóticamente estable; homoclina asintóticamente estable. Caso simple.

La estabilidad de la órbita homoclina depende, por lo tanto, de los coeficientes  $p$  y  $\omega$ . Se verifica, así, el siguiente resultado.

**Teorema 2.7.1** *En las condiciones anteriores, si  $p(1 + \omega) < 1$  (resp.  $> 1$ ) entonces*

$$P'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} P'(x) < 1 \quad (\text{resp. } > 1).$$

## 2.8 Un Sistema con Homoclinas Cuspidales Degeneradas

Finalizamos este capítulo mostrando un sistema que presenta homoclinas de punto de cúspide que cambian su estabilidad, dando lugar a la aparición de ho-

moquinas cuspidales degeneradas. Comenzaremos, en primer lugar, considerando el desplegamiento de una singularidad de tipo Takens–Bogdanov con degeneraciones en los dos términos cuadráticos de la forma normal, dado en el siguiente sistema con cuatro parámetros

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 x^2 + \mu_4 xy - x^3 + bx^2 y \end{cases} \quad (2.8.1)$$

En [19] se muestran las diferentes curvas de codimensión tres que nacen de la singularidad para el caso  $b < 0$  (el escalado  $x \mapsto -x, t \mapsto -t, \mu_i \mapsto -\mu_i, i = 1, 2, 3$ , transforma (2.8.1) en el mismo sistema pero con  $b > 0$ , con lo que en ambos casos se tienen las mismas propiedades sin más que cambiar las estabildades). Entre estas curvas se encuentra una de homoclinas de punto de cúspide no degeneradas (vid. figura 2.8.8, al final de la sección) y correspondientes al caso (3) de la clasificación dada en la sección anterior. La búsqueda de una degeneración en estas homoclinas hace necesario introducir en (2.8.1) degeneraciones adicionales. Sea, pues, el sistema con cinco parámetros

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 x^2 + \mu_4 xy - x^3 + \mu_5 x^2 y + Kx^4 y \end{cases} \quad (2.8.2)$$

(con  $K = \pm 1$ ).

Vamos a considerar el sistema (2.8.2) para los valores de los parámetros donde ocurre un punto de cúspide ( $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ), obteniendo el sistema sobre el punto de cúspide dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_3 x^2 + \mu_4 xy - x^3 + \mu_5 x^2 y + Kx^4 y \end{cases} \quad (2.8.3)$$

Este sistema presenta dos equilibrios: el de cúspide en  $(0, 0)$  y otro situado en el punto  $(\mu_3, 0)$ .

Mediante el escalado

$$\begin{aligned} x &\mapsto \varepsilon^{\frac{1}{3}} x & \mu_3 &= \varepsilon^{\frac{1}{3}} \varepsilon_3 \\ y &\mapsto \varepsilon^{\frac{2}{3}} y & \mu_4 &= \varepsilon \varepsilon_4 \\ t &\mapsto \varepsilon^{\frac{1}{3}} t & \mu_5 &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \varepsilon_5 \end{aligned}$$

(2.8.3) se transforma en

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_3 x^2 - x^3 + \varepsilon (\varepsilon_4 xy + \varepsilon_5 x^2 y + K x^4 y) \end{cases} \quad (2.8.4)$$

sistema que está expresado como la perturbación del sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_3 x^2 - x^3 \end{cases} \quad (2.8.5)$$

para la función de Hamilton

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \varepsilon_3 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \quad (2.8.6)$$

La órbita  $\gamma_0$  dada por  $H(x, y) = 0$  resulta ser una homoclina cuspidal para el sistema (2.8.5) (vid. figura 2.8.1) con ecuación

$$y(x) = \pm \sqrt{2x^3 \left( \frac{\varepsilon_3}{3} - \frac{x}{4} \right)} \quad (2.8.7)$$

Llamando  $\gamma$  a la órbita de (2.8.4) obtenida al perturbar  $\gamma_0$ ,  $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon h$ , se verifica

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon \int \int_{\text{int } \gamma} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_4 xy + \varepsilon_5 x^2 y + K x^4 y) dx dy = \\ &= \varepsilon \int \int_{\text{int } \gamma_0} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_4 xy + \varepsilon_5 x^2 y + K x^4 y) dx dy + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

( $\text{int } \gamma$  es el interior de la región limitada por la curva  $\gamma$ ), de donde, introduciendo la función de Melnikov (vid. capítulo III),  $M(\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ , se tiene la aproximación a orden  $\varepsilon$

$$M(\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = \int \int_{\text{int } \gamma_0} (\varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + K x^4) dx dy \approx 0$$

El desarrollo de esta última integral nos lleva a

$$\begin{aligned} M(\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= \int_0^{\frac{4\varepsilon_3}{3}} \int_{-y(x)}^{y(x)} (\varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + K x^4) dx dy = \\ &= \int_0^{\frac{4\varepsilon_3}{3}} 2y(x) (\varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + K x^4) dx \approx 0 \end{aligned}$$

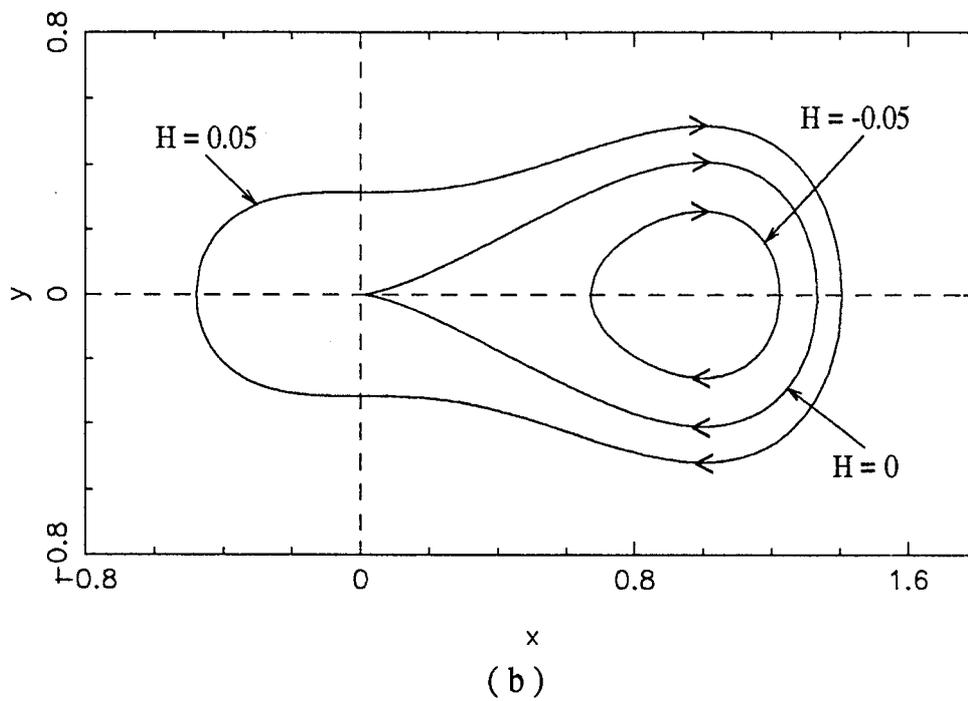
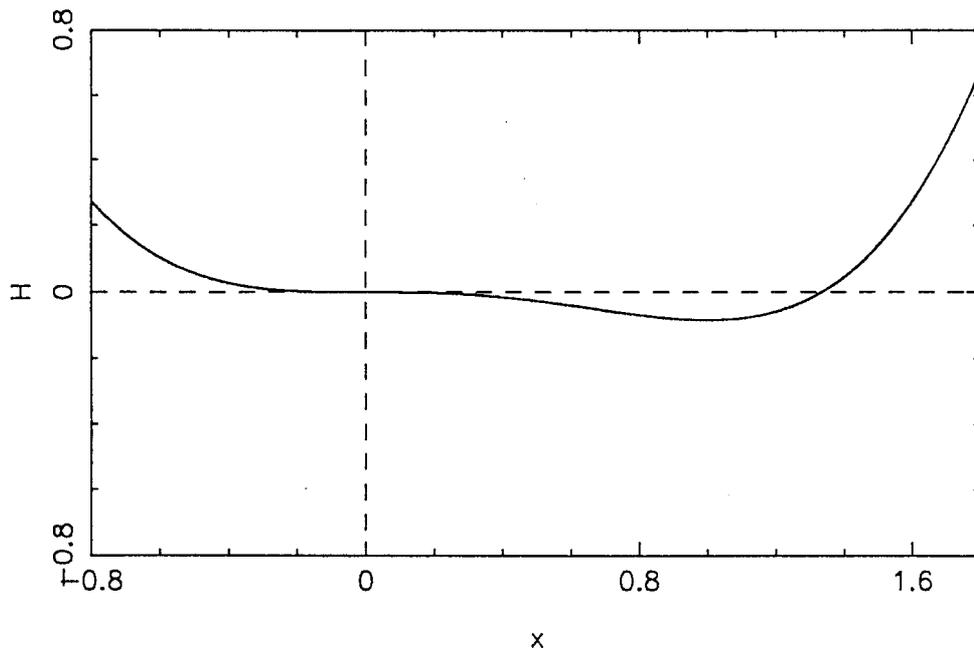


Figura 2.8.1: (a) Corte de la superficie  $z = H(x, y)$  con el plano  $y = 0$ ; (b) Retrato de fases del sistema hamiltoniano. Ambas figuras obtenidas para  $\varepsilon_3 = 1$ .

y, por tanto,

$$\varepsilon_4 \approx \frac{-\int_0^{\frac{4\varepsilon_3}{3}} y(x) (\varepsilon_5 x^2 + K x^4) dx}{\int_0^{\frac{4\varepsilon_3}{3}} xy(x) dx}$$

expresión de la cual obtenemos, introduciendo (2.8.7), la aproximación de la superficie en el espacio de parámetros de homoclinas de punto de cúspide del sistema (2.8.4), dada por la ecuación

$$\varepsilon_4 = -\frac{14}{15}\varepsilon_3\varepsilon_5 - \frac{44}{45}K\varepsilon_3^3$$

o, en términos de los parámetros originales,

$$\mu_4 = -\frac{14}{15}\mu_3\mu_5 - \frac{44}{45}K\mu_3^3 \quad (2.8.8)$$

(vid. figura 2.8.7, al final de la sección).

A continuación vamos a realizar el estudio de la estabilidad de la parte local de la homoclina (en las proximidades del punto de cúspide) en forma análoga a como lo hicimos en la sección anterior, mediante la estimación del coeficiente  $p$  (la derivada de la aplicación de Dulac).

En lo que sigue vamos a suponer el caso  $K = +1$ , pues el sistema es invariante al cambio

$$(x, y, t, \mu_3, \mu_5) \longrightarrow (-x, y, -t, -\mu_3, -\mu_5)$$

con lo que el conjunto de bifurcaciones será similar en el caso  $K = -1$  (si bien habrá un cambio en la estabilidad).

Expresamos el sistema (2.8.4) en la forma del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon_3 x^2 - x^3}{y} + \varepsilon (\varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + x^4) \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.8.9)$$

con solución  $y(x, x_0)$ .

Sea el desarrollo asintótico en  $\varepsilon$

$$y(x, x_0) = \varphi_0(x, x_0) + \varepsilon\varphi_1(x, x_0) + o(\varepsilon) \quad (2.8.10)$$

con  $\varphi_0(x, x_0)$  solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon_3 x^2 - x^3}{y} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

de donde se obtiene

$$\varphi_0(x, x_0) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}(x^3 - x_0^3) - \frac{1}{2}(x^4 - x_0^4)} \quad (2.8.11)$$

Introduciendo (2.8.10) en (2.8.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dx} + \varepsilon \frac{d\varphi_1}{dx} + o(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon_3 x^2 - x^3}{\varphi_0(x, x_0) + \varepsilon \varphi_1(x, x_0) + o(\varepsilon)} + \varepsilon (\varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + x^4) = \\ &= \frac{\varepsilon_3 x^2 - x^3}{\varphi_0(x, x_0)} + \varepsilon \left( \varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + x^4 - (\varepsilon_3 x^2 - x^3) \frac{\varphi_1(x, x_0)}{\varphi_0(x, x_0)^2} \right) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $\varphi_1(x, x_0)$  es solución de

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dx}(x, x_0) = \varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + x^4 - (\varepsilon_3 x^2 - x^3) \frac{\varphi_1(x, x_0)}{\varphi_0(x, x_0)^2} \\ \varphi_1(x_0, x_0) = 0 \end{cases}$$

Escribimos este último problema de Cauchy en la forma de la ecuación lineal no homogénea

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dx}(x, x_0) = a(x) \varphi_1 + b(x) \\ \varphi_1(x_0, x_0) = 0 \end{cases}$$

donde

$$a(x) = \frac{x^3 - \varepsilon_3 x^2}{\varphi_0(x, x_0)^2} \quad \text{y} \quad b(x) = \varepsilon_4 x + \varepsilon_5 x^2 + x^4$$

y que tiene por solución

$$\varphi_1(x, x_0) = \int_{x_0}^x e^{\int_s^x a(\sigma) d\sigma} b(s) ds = \int_{x_0}^x \frac{b(s) h(s, x_0)}{h(x, x_0)} ds \quad (2.8.12)$$

siendo la función

$$h(v, w) = 4\varepsilon_3 (v^3 - w^3) - 3(v^4 - w^4)$$

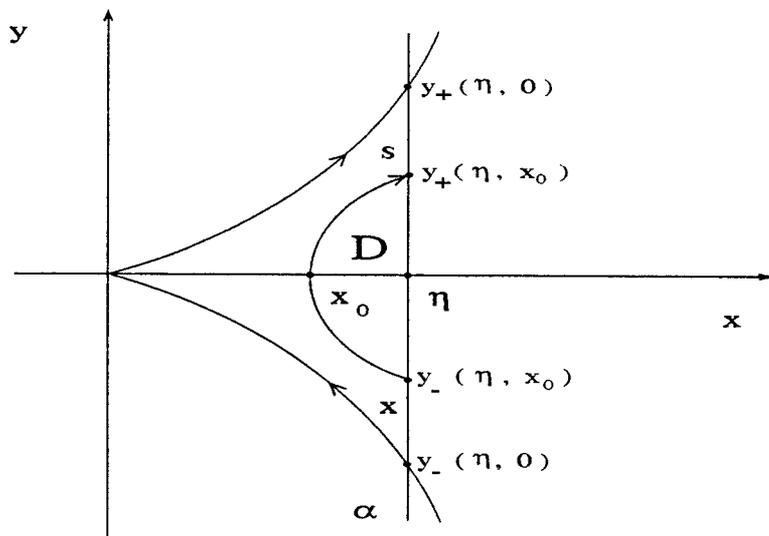


Figura 2.8.2: Aplicación de Dulac en las proximidades del punto de cúspide.

Para evaluar la derivada de la aplicación de Dulac, sea una sección de corte local,  $\alpha$ , dada por la ecuación  $x = \eta$  (vid. figura 2.8.2), y sea una condición inicial  $0 < x_0 < \eta$  (análogo para  $x_0 < 0$ ). Así, la aplicación de Dulac,  $s = D(x)$ , está parametrizada por

$$\begin{cases} s = y_+(\eta, 0) - y_+(\eta, x_0) \\ x = y_-(\eta, x_0) - y_+(\eta, 0) \end{cases}$$

donde los subíndices  $+$  y  $-$  indican los signos respectivos en la expresión de  $y(x, x_0)$  dada en (2.8.7). De esta forma, el coeficiente  $p$  viene dado por

$$\begin{aligned} p &= \frac{y_+(\eta, 0) - y_+(\eta, x_0)}{y_-(\eta, x_0) - y_+(\eta, 0)} = \\ &= \frac{\varphi_0^+(\eta, 0) + \varepsilon\varphi_1(\eta, 0) - \varphi_0^+(\eta, x_0) - \varepsilon\varphi_1(\eta, x_0)}{\varphi_0^-(\eta, x_0) + \varepsilon\varphi_1(\eta, x_0) - \varphi_0^-(\eta, 0) - \varepsilon\varphi_1(\eta, 0)} \end{aligned}$$

(con la misma convención de antes para los superíndices  $+$  y  $-$ ).

Los siguientes desarrollos de Taylor en  $x_0$

$$\begin{aligned} \varphi_0^\pm(\eta, x_0) &= \varphi_0^\pm(\eta, 0) + (\varphi_0^\pm)'''(\eta, 0)x_0^3 + O(x_0^4) \\ \varphi_1(\eta, x_0) &= \varphi_1(\eta, 0) + \varphi_1'(\eta, \xi)x_0 \end{aligned}$$

(donde  $' = \frac{d}{dx_0}$ ), para  $\xi \in (0, x_0)$ , nos permiten hacer la aproximación

$$p \approx \frac{-\left(\varphi_0^+\right)'(\eta, 0) x_0^3 - \varepsilon \varphi_1'(\eta, \xi) x_0}{\left(\varphi_0^-\right)'(\eta, 0) x_0^3 + \varepsilon \varphi_1'(\eta, \xi) x_0}$$

para  $x_0$  suficientemente pequeño.

Un cálculo directo sobre (2.8.11) y (2.8.12) muestra que

$$A \stackrel{def}{=} -\left(\varphi_0^+\right)'(\eta, 0) = \left(\varphi_0^-\right)'(\eta, 0) = \frac{2\varepsilon_3 x_0^3}{\sqrt{24\varepsilon_3 \eta^3 - 18\eta^4}}$$

$$I \stackrel{def}{=} \varphi_1'(\eta, 0) = -6 \int_{x_0}^x b(s) x_0^2 (\varepsilon_3 - x_0) \frac{h(x, s)}{h(x, x_0)^{\frac{3}{2}} h(s, x_0)^{\frac{1}{2}}} ds$$

Al ser  $s, \eta, \xi$  y  $x_0$  suficientemente pequeños y  $\varepsilon_3, \varepsilon_4$  y  $\varepsilon_5$  del tamaño de la unidad, se sigue que el signo de  $A$  es el signo de  $\varepsilon_3$  y el signo de  $I$  es el signo de  $-\varepsilon_4$ . Por tanto, distinguimos los casos:

1.  $\varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4 > 0$  (topológicamente equivalente a  $\varepsilon_3 < 0, \varepsilon_4 < 0$ ):

$$p = \frac{A + \varepsilon|I|}{A - \varepsilon|I|} > 1$$

y, por tanto, el comportamiento local, en las proximidades del punto de cúspide, es asintóticamente inestable;

2.  $\varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4 < 0$  (topológicamente equivalente a  $\varepsilon_3 < 0, \varepsilon_4 > 0$ ):

$$p = \frac{A - \varepsilon|I|}{A + \varepsilon|I|} < 1$$

y, por tanto, el comportamiento local es ahora asintóticamente estable.

Vamos, por último, a aproximar mediante la función de Melnikov una curva en el espacio de parámetros  $(\mu_3, \mu_4, \mu_5)$  en la que ocurre un cambio de estabilidad de las homoclinas cuspidales, apareciendo, en consecuencia, una degeneración de codimensión cuatro. En primer lugar, mostramos en las figuras 2.8.3 y 2.8.4 los cortes con el plano  $\mu_3 = 1$  de los conjuntos de bifurcaciones cualitativo y real, respectivamente, del sistema (2.8.3) en las proximidades de la curva de homoclinas

cuspidales (en la representación cualitativa hemos incluido los diferentes retratos de fases del sistema; en ellos aparecen órbitas periódicas de pequeña amplitud, rodeando un único equilibrio, que serán denominadas órbitas periódicas *pequeñas* a lo largo de esta memoria; análogamente las de gran amplitud, que rodean más de un equilibrio, serán denominadas en lo sucesivo órbitas periódicas *grandes*).

Para obtener la curva de bifurcación de Hopf, trasladamos al origen el equilibrio de (2.8.3),  $(\mu_3, 0)$ , obteniendo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu_3^2 x - 2\mu_3 x^2 + (\mu_4 + 2\mu_3\mu_5 + 4\mu_3^3) xy - \\ \quad - x^3 + (\mu_5 + 6\mu_3^2) x^2 y + 4\mu_3 x^3 y + x^4 y \end{cases} \quad (2.8.13)$$

donde hemos introducido la condición de Hopf (traza igual a cero) dada por

$$\mu_4\mu_3 + \mu_5\mu_3^2 + \mu_3^4 = 0$$

Mediante el escalado  $y \mapsto -\omega_0 y$  (con  $\omega_0 = \mu_3$ ), (2.8.13) se transforma en

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_0 y \\ \dot{y} = \omega_0 x + 2x^2 + (\mu_4 + 2\mu_3\mu_5 + 4\mu_3^3) xy + \\ \quad + \frac{1}{\omega_0} x^3 + (\mu_5 + 6\mu_3^2) x^2 y + 4\mu_3 x^3 y + x^4 y \end{cases}$$

al que podemos aplicarle el algoritmo desarrollado en [38] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf, obteniendo en este caso los coeficientes cúbico y de orden cinco siguientes:

$$a_3 = -\frac{\mu_5}{8}$$

$$a_5 = -\frac{7}{48}$$

Puesto que  $a_3$  se anula para  $\mu_5 = 0$ , concluimos que la bifurcación de Hopf es supercrítica cuando  $\mu_5 > 0$ , subcrítica cuando  $\mu_5 < 0$  y degenerada para  $\mu_5 = 0$ . El coeficiente  $a_5 \neq 0$  nos indica la ausencia de degeneraciones adicionales.

Con las ideas expuestas en la sección 2.3 de este capítulo hemos realizado la continuación de la curva de homoclinas de punto de cúspide mostradas en las figuras 2.8.3 y 2.8.4, realizando para ello las modificaciones oportunas en

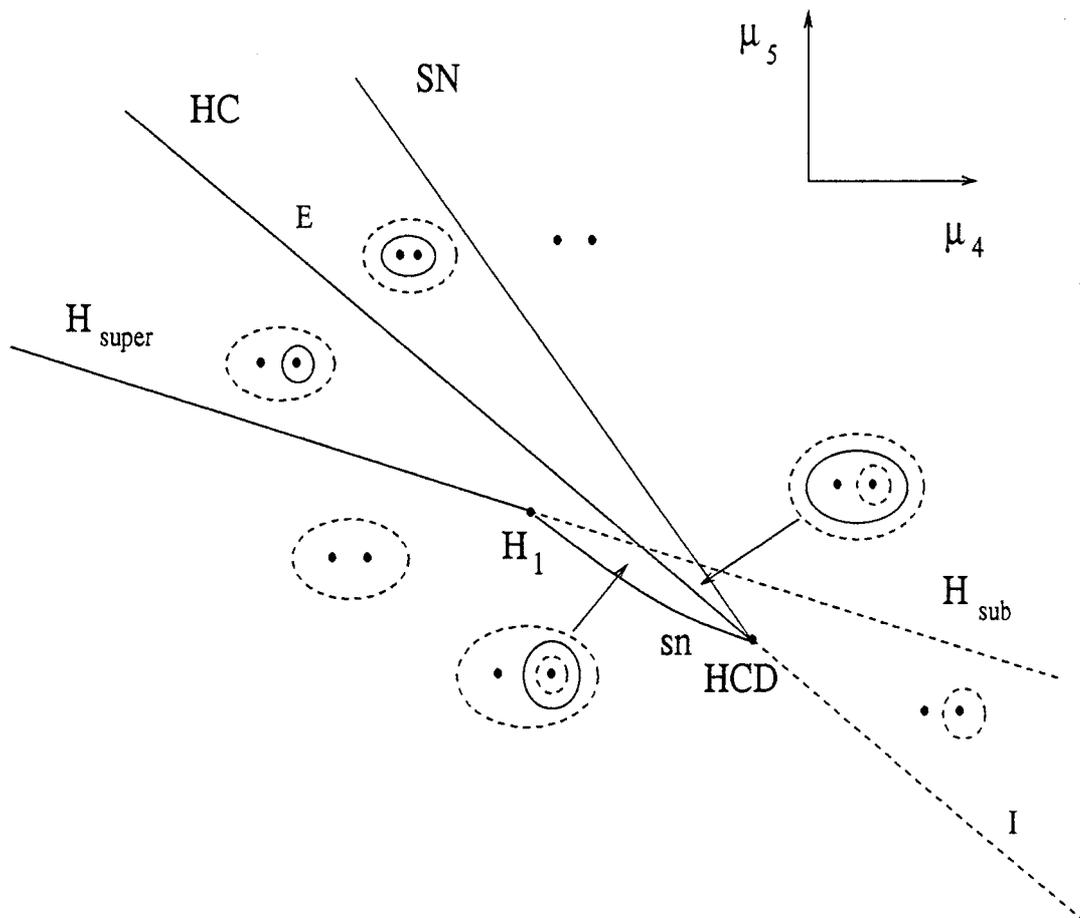


Figura 2.8.3: Conjunto de bifurcaciones cualitativo en el espacio de parámetros  $(\mu_3, \mu_4, \mu_5)$  intersecado con el plano  $\mu_3 = 1$  del sistema sobre el punto de cúspide ( $K = 1$ ). En las regiones delimitadas por las curvas de bifurcación incluimos los diferentes retratos de fases.  $H_{super}$  = curva de bifurcación de Hopf supercrítico;  $H_{sub}$  = curva de bifurcación de Hopf subcrítico;  $HC$  = curva de homoclinas cuspidales;  $SN$  = silla-nodo de órbitas periódicas grandes;  $sn$  = silla-nodo de órbitas periódicas pequeñas;  $H_1$  = Hopf degenerado;  $HCD$  = homoclina cuspidal degenerada.  $E$  = Estable;  $I$  = Inestable. En los retratos de fases, la línea continua (resp. discontinua) representa una órbita periódica estable (resp. inestable).

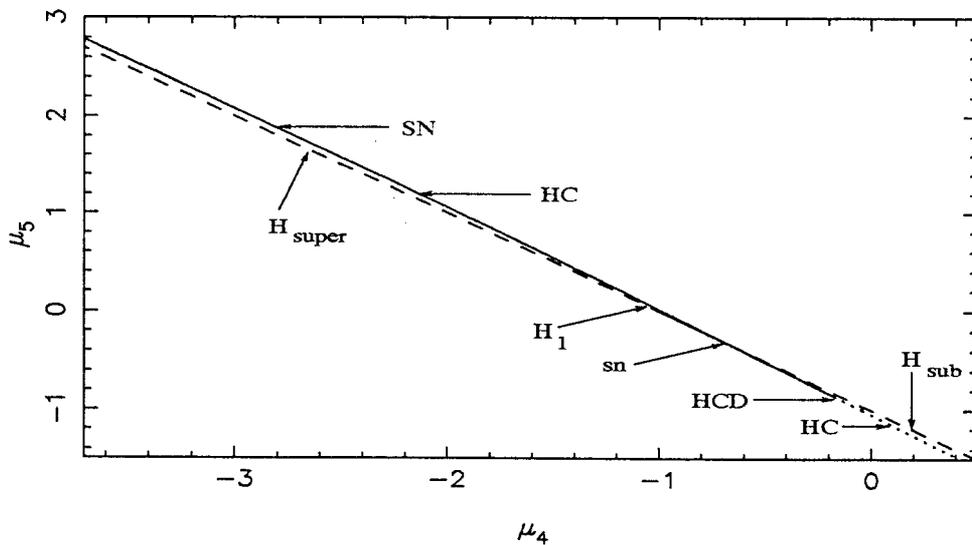


Figura 2.8.4: Conjunto real de bifurcaciones en el espacio de parámetros  $(\mu_3, \mu_4, \mu_5)$  intersecado con el plano  $\mu_3 = 1$  del sistema sobre el punto de cúspide ( $K = 1$ ). Para el significado de los símbolos, ver la representación cualitativa en la figura anterior.

los programas que hemos creado para continuar homoclinas correspondientes a puntos de silla hiperbólicos, con el objeto de aproximar las separatrices del punto singular (la aproximación dada por la semicúbica  $y = \pm \sqrt{\frac{2|\mu_3|}{3}} x^{\frac{2}{3}}$  ha sido suficiente para obtener la precisión requerida).

El código de continuación AUTO ya citado nos ha permitido continuar las dos curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas mostradas en las figuras 2.8.3 y 2.8.4:

- la que nace de la degeneración de Hopf,  $H_1$ , situada en los valores de los parámetros  $\mu_3 = 1, \mu_4 = -14$  y  $\mu_5 = 0$ , que está relacionada con las órbitas periódicas pequeñas que rodean el equilibrio no trivial;
- aquella de órbitas periódicas grandes que rodean ambos equilibrios.

Ambas curvas de bifurcación silla-nodo convergen en un mismo punto sobre la curva de homoclinas cuspidales, separando en esta curva dos zonas: la repre-

sentada con trazo continuo en las figuras, que corresponde a homoclinas estables, y la representada con trazo discontinuo, que corresponde a homoclinas inestables. El punto de convergencia de las tres curvas,  $HCD$ , corresponde, en consecuencia, a una homoclina de punto de cúspide degenerada de codimensión cuatro.

La introducción de la función de Melnikov nos ha permitido obtener una curva de aproximación teórica a la curva real de homoclinas cuspidales degeneradas, en el espacio de parámetros  $(\mu_3, \mu_4, \mu_5)$ .

La función de Melnikov para el sistema (2.8.4) viene dada por

$$M_i(e, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = \oint_{\gamma_i} (\varepsilon_4 xy + \varepsilon_5 x^2 y + x^4 y) dx, \quad i = 1, 2$$

con energía  $e \in (-\frac{\varepsilon_3^4}{12}, +\infty)$  (el nivel de energía  $e = -\frac{\varepsilon_3^4}{12}$  corresponde a la bifurcación de Hopf; el nivel  $e = 0$  corresponde a la homoclina cuspidal) y con  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  las órbitas periódicas pequeñas (para  $e \in (-\frac{\varepsilon_3^4}{12}, 0)$ ) y grandes (para  $e \in (0, +\infty)$ ), respectivamente, del sistema hamiltoniano dado en (2.8.5).

Escribimos la función de Melnikov en la forma

$$M_i(e, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = \varepsilon_4 I_{1i} + \varepsilon_5 I_{2i} + I_{4i}$$

donde

$$I_{k_i} = \oint_{\gamma_i} x^k y dx = 2 \int_{l_i(e)}^{L_i(e)} x^k y(x) dx \quad k = 1, 2, 4, \quad i = 1, 2$$

con

$$y(x) = \pm \sqrt{2e + \frac{2}{3}\varepsilon_3 x^3 - \frac{1}{2}x^4}$$

siendo  $l_i(e)$  y  $L_i(e)$  los puntos de corte de la curva  $\gamma_i$  con el eje  $OX$  (vid. figura 2.8.5).

Denotamos por  $sn$  y  $SN$  las superficies en el espacio de parámetros que aproximan a la superficies reales de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas pequeñas y grandes, respectivamente, que vienen dadas por los conjuntos de puntos solución de los sistemas

$$\begin{cases} M_i(e, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial e} M_i(e, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0 \end{cases} \quad (2.8.14)$$

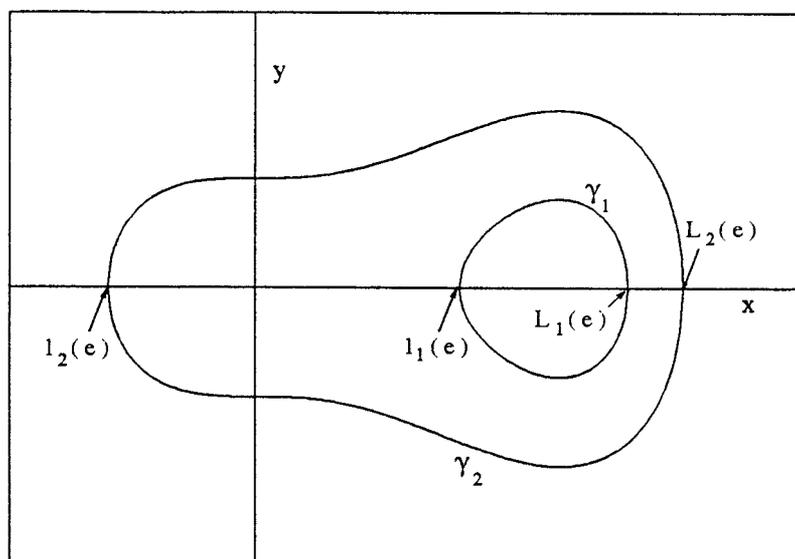


Figura 2.8.5: Órbitas periódicas grandes y pequeñas del sistema hamiltoniano.

para  $i = 1, 2$ , respectivamente.

Si en (2.8.14) hacemos  $e = 0$ , ambos sistemas coinciden en un único sistema, cuya solución es la curva intersección de las dos superficies  $sn$  y  $SN$  correspondiente a la curva buscada de homoclinas cuspidales degeneradas.

Sea, pues, el sistema

$$\begin{cases} M(0, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = \varepsilon_1 I_1 + \varepsilon_5 I_2 + I_4 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial e} M(0, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial e} I_1 + \varepsilon_5 \frac{\partial}{\partial e} I_2 + \frac{\partial}{\partial e} I_4 = 0 \end{cases}$$

con  $I_k = I_k(0)$ , de donde obtenemos la siguiente curva parametrizada por  $\varepsilon_3$

$$\begin{cases} \varepsilon_4 = \frac{I_4' I_2 - I_4 I_2'}{I_1 I_2' - I_1' I_2} \\ \varepsilon_5 = \frac{I_1' I_4 - I_1 I_4'}{I_1 I_2' - I_1' I_2} \end{cases} \quad (2.8.15)$$

(donde  $' = \frac{\partial}{\partial e}$ ).

Se tiene  $l(0) = 0$  y  $L(0) = \frac{4\varepsilon_3}{3}$ , de donde

$$I_i = \int_0^{\frac{4\varepsilon_3}{3}} x^i \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_3 x^3 - \frac{1}{2}x^4} dx$$

$$I_i' = \int_0^{\frac{4\varepsilon_3}{3}} \frac{x^i}{\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_3 x^3 - \frac{1}{2}x^4}} dx$$

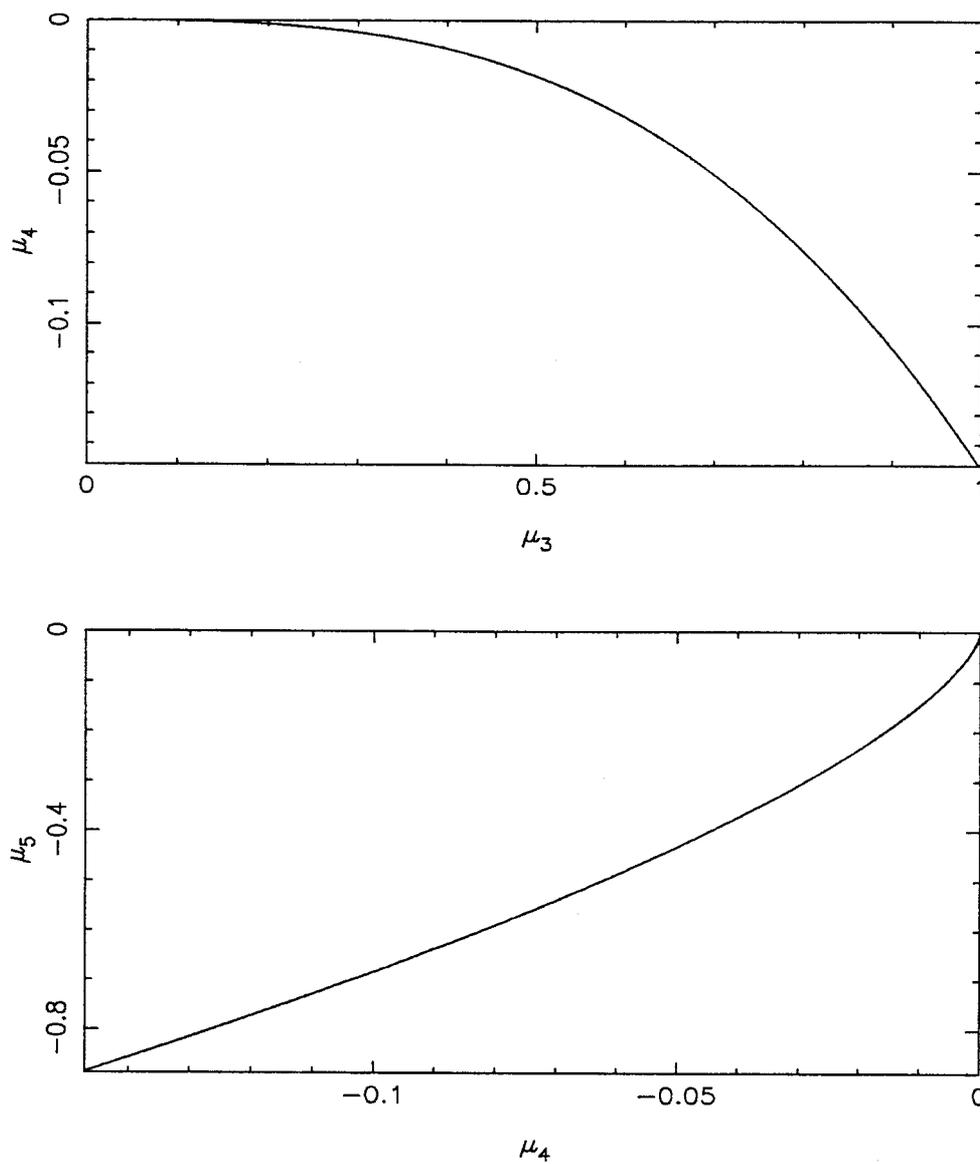


Figura 2.8.6: Homoclinas cuspidales degeneradas de codimensi3n cuatro aproximadas por Melnikov para el sistema sobre el punto de c3spide ( $K = 1$ ).

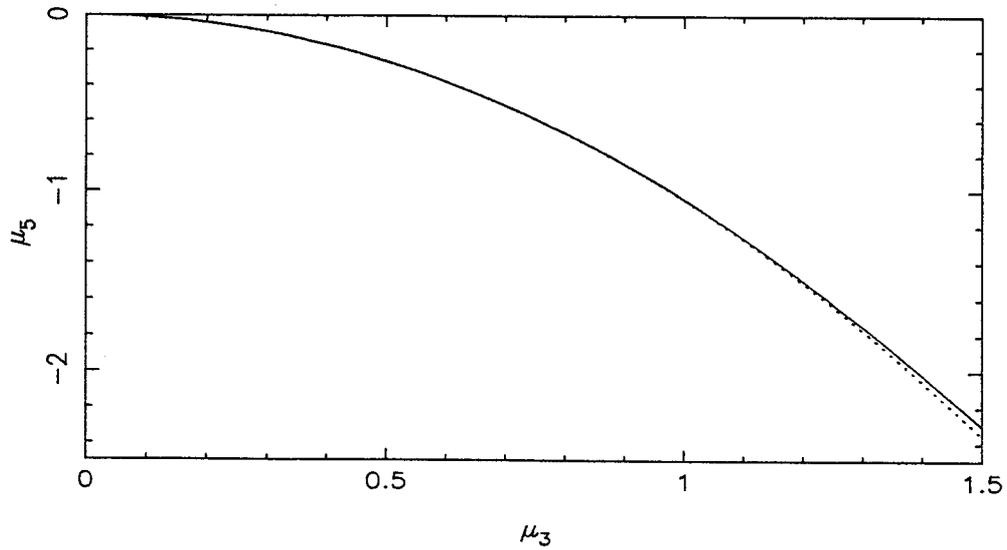


Figura 2.8.7: Homoclinas cuspidales en el plano  $\mu_4 = 0$  obtenidas numéricamente (en trazo continuo) y aproximadas por Melnikov (en trazo discontinuo) para el sistema sobre el punto de cúspide ( $K = 1$ ).

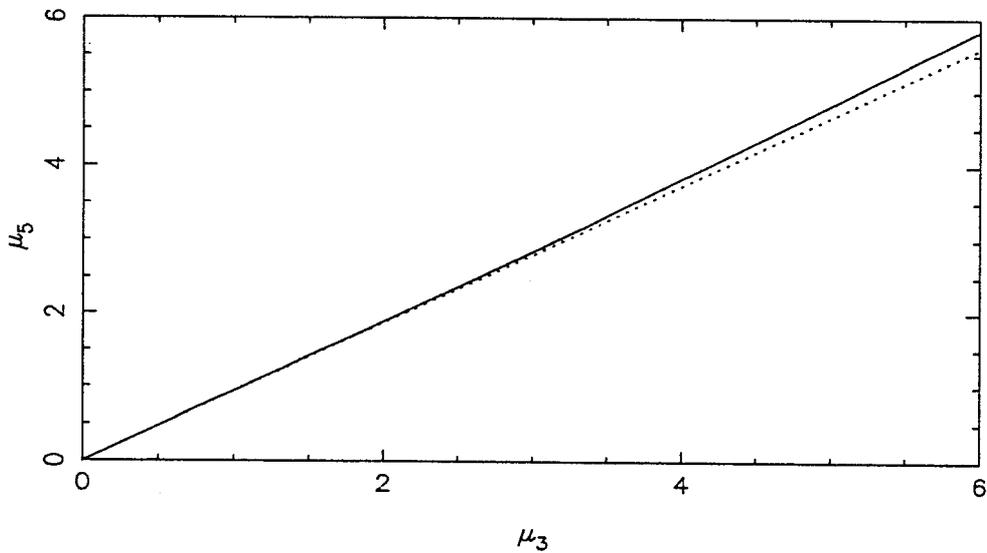


Figura 2.8.8: Homoclinas cuspidales obtenidas numéricamente (en trazo continuo) y aproximadas por Melnikov (en trazo discontinuo) para el sistema con cuatro parámetros ( $b = -1$ ).

De (2.8.15), y mediante un cálculo directo de estas integrales, obtenemos la curva aproximada de homoclinas cuspidales degeneradas siguiente

$$\begin{cases} \varepsilon_4 = -\frac{4}{27}\varepsilon_3^3 \\ \varepsilon_5 = -\frac{8}{9}\varepsilon_3^2 \end{cases}$$

o, en términos de los parámetros originales,

$$\begin{cases} \mu_4 = -\frac{4}{27}\mu_3^3 \\ \mu_5 = -\frac{8}{9}\mu_3^2 \end{cases}$$

En la figura 2.8.6 representamos dos proyecciones sobre dos planos de parámetros de la curva de homoclinas cuspidales degeneradas de codimensión cuatro.

Por último, en las figuras 2.8.7 y 2.8.8 mostramos las curvas de homoclinas de punto de cúspide obtenidas numéricamente para los sistemas (2.8.3) y (2.8.1), respectivamente, comparándolas con las curvas aproximadas previstas por la función de Melnikov. Para el sistema (2.8.1) hemos calculado la curva de aproximación de Melnikov en forma análoga a como lo hemos hecho para (2.8.4), obteniendo la expresión

$$\mu_4 = -\frac{14}{15}\mu_3 K$$

## Capítulo III

# ALGUNOS CASOS DE DEGENERACIONES DE SINGULARIDADES PLANAS CON UN DOBLE CERO

### 3.1 Introducción

En este capítulo abordaremos el estudio parcial de varias singularidades planas con determinadas degeneraciones en los términos no lineales. En todos los casos que vamos a estudiar la degeneración lineal consiste en un doble cero no diagonalizable, con excepción del último caso, en el que nos encontraremos como matriz de la linealización la matriz nula. Hemos de resaltar que hemos centrado nuestra atención, aunque no exclusivamente, en las conexiones homoclinas y sus degeneraciones, implementando las ideas desarrolladas en el capítulo II con objeto de detectarlas y continuarlas.

Comenzaremos exponiendo, como un subapartado dentro de esta introducción, una breve lista de conceptos que utilizaremos después y que están referidos esencialmente a los cambios de variable de tipo *blow-up*. Inmediatamente después, y aún dentro de esta introducción, haremos una breve descripción del método de Melnikov para el cálculo a primer orden de conexiones homoclinas y órbitas periódicas y que será utilizado en algunos de los casos estudiados comparando

sus resultados con los numéricamente obtenidos.

En la segunda sección estudiaremos las bifurcaciones de órbitas homoclinas de codimensión menor o igual que cuatro de una cúspide de orden seis, obteniendo tanto los resultados numéricos como las predicciones teóricas que proporciona el método de Melnikov.

En la sección tercera consideraremos las cúspides con simetría de órdenes cuatro y cinco, de las que realizaremos un estudio esencialmente completo. La de orden cuatro ha sido desarrollada por Rousseau en [95]. Nosotros, estudiándola independientemente, verificaremos que nuestros cálculos están de acuerdo con los suyos y, en algunos aspectos, amplían y completan su información.

En la cuarta sección estudiaremos parcialmente un caso de degeneración de una bifurcación de Takens–Bogdanov, a saber, aquella en la que se anulan los términos  $x^2$  y  $x^2y$  de su forma normal, y en el caso particular en el que la singularidad es un foco débil. En [35] se estudia el caso en el que se anula únicamente el término  $x^2$ , apareciendo homoclinas con traza cero; era de esperar, al abordar el caso más degenerado, la aparición de homoclinas de codimensión tres como resultado de la anulación de la integral de la divergencia (vid. (2.4.5)), hecho que verificamos numéricamente detectando y continuando estas homoclinas.

La quinta y última sección estará dedicada al estudio de una singularidad con un doble cero diagonalizable y degenerada en un término no lineal, de la que expondremos su conjunto de bifurcaciones, obtenido por Algaba en [2], junto a resultados numéricos adicionales que completarán su estudio.

### 3.1.1 Algunos Conceptos Preliminares

Vamos a sintetizar, en lo que sigue, aquellas definiciones y resultados principales que vamos a utilizar en el resto de este capítulo (para una información completa y detallada, vid., e.g., [5], [29], [30], [31] y [32]).

Comenzamos definiendo el importante concepto de equivalencia de campos vectoriales. Sean  $X$  e  $Y$  dos  $C^r$  campos vectoriales.

**Definición 3.1.1** Diremos que  $X$  e  $Y$  son  $C^k$ -equivalentes ( $k \leq r$ ) si existe un  $C^k$  difeomorfismo  $h$  que envía órbitas de  $X$  a órbitas de  $Y$  preservando el sentido de las órbitas pero no necesariamente la parametrización por el tiempo. Si  $h$  preserva la parametrización por el tiempo entonces diremos que es una  $C^k$ -conjugación.

Así, dos campos vectoriales  $C^k$ -equivalentes son cualitativamente iguales. En consecuencia, al abordar el estudio de algún campo vectorial, podemos remitirnos al estudio de cualquier otro campo  $C^k$ -equivalente a él. Algunos campos vectoriales pueden ser sustituidos por otros  $C^k$ -equivalentes y polinomiales. Esto se precisa en las dos definiciones que siguen.

**Definición 3.1.2** Diremos que  $Y$  es el  $k$ -jet ( $k \leq r$ ) de  $X$  en  $p \in \mathbb{R}^n$ , con  $X(p) = Y(p) = 0$ , si  $X - Y = o(\|x - p\|^k)$ , es decir, si  $Y$  es el desarrollo de Taylor de  $X$  en  $p$  cortado a orden  $k$ . El  $k$ -jet será representado por  $j_k X(p) = Y$

Sin pérdida de generalidad puede considerarse  $p = 0$ .

**Definición 3.1.3** Dado  $X^k$  un campo vectorial polinomial de grado menor o igual que  $k$ , diremos que está  $C^0$ -determinado si para todo campo vectorial  $Y$  con  $j_k Y(0) = X^k$  se tiene que  $Y$  y  $X^k$  son  $C^0$ -equivalentes. Diremos que  $X$  está finitamente determinado si existe algún  $k$  tal que  $j_k X(0)$  está  $C^0$ -determinado.

En las próximas definiciones introducimos los cambios de variable de tipo *blow-up*, que constituyen una poderosa herramienta para el estudio de la determinación de los campos vectoriales, así como para la investigación de los retratos de fases en el entorno de una singularidad degenerada.

**Definición 3.1.4** Sea  $X$  un  $C^\infty$ -campo vectorial plano con  $X(0) = 0$ . Consideremos la aplicación

$$\phi : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por  $(\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ . Si  $\hat{X}$  es el campo vectorial  $X$  escrito en coordenadas polares, es decir,  $X = \phi_* (\hat{X})$ , se verifica  $D\phi_v (\hat{X}) = X(\phi(v))$  para todo  $v \in S^1 \times \mathbb{R}$ .

El cambio de variables dado por  $\phi$  se denomina de tipo blow-up polar.

Análogamente puede definirse un cambio de variables de tipo blow-up direccional mediante la aplicación

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}, \bar{x}\bar{y})$  para  $\bar{x} \neq 0$  ( $x$ -direccional) que da lugar al nuevo campo vectorial  $\hat{X}^x$  (donde  $X = \psi_* (\hat{X}^x)$ ), o bien dada por  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}\bar{y}, \bar{y})$  para  $\bar{y} \neq 0$  ( $y$ -direccional) que da lugar al nuevo campo vectorial  $\hat{X}^y$  (donde  $X = \psi_* (\hat{X}^y)$ ).

En el caso en que el campo vectorial  $X$  sea cuasi-homogéneo de tipo  $(\alpha_1, \alpha_2)$  y grado  $k+1$ , es decir, si tiene componentes  $X_i, i = 1, 2$ , verificando

$$X_i(r^{\alpha_1}x, r^{\alpha_2}y) = r^{k+\alpha_i-1}X_i(x, y), \quad i = 1, 2$$

es conveniente utilizar el cambio de tipo blow-up cuasi-homogéneo dado por

$$\psi : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

con  $\psi((x_1, x_2), r) = (r^{\alpha_1}x_1, r^{\alpha_2}x_2)$  y  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

**Definición 3.1.5** Con la notación anterior, en el caso en que el campo vectorial  $X$  verifique  $j_k X(0) = 0$  y  $j_{k+1} X(0) \neq 0$  estudiaremos el campo vectorial

$$\bar{X} = \frac{1}{r^k} \hat{X}$$

en el caso polar o bien

$$\bar{X} = \frac{1}{\bar{x}^k} \hat{X}^x, \quad \bar{X} = \frac{1}{\bar{y}^k} \hat{X}^y$$

en los casos  $x$ -direccional e  $y$ -direccional, respectivamente.

Este proceso, que representa una  $C^\infty$ -equivalencia, se denomina desingularización.

Es fácil comprobar, para el caso *blow-up* polar, que el nuevo campo ya desingularizado viene dado por

$$\bar{X}(r, \theta) = (\eta_1, r \eta_2)$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_1(r, \theta) &= \frac{1}{r^{k+1}} (\cos\theta X_2(r \cos\theta, r \sin\theta) - \sin\theta X_1(r \cos\theta, r \sin\theta)) \\ \eta_2(r, \theta) &= \frac{1}{r^{k+1}} (\cos\theta X_1(r \cos\theta, r \sin\theta) + \sin\theta X_2(r \cos\theta, r \sin\theta)) \end{aligned}$$

En el caso del *blow-up*  $x$ -direccional (conclusiones análogas pueden derivarse para el *blow-up*  $y$ -direccional) se tiene

$$\bar{X}(\bar{x}, \bar{y}) = (\eta_1, \eta_2) \tag{3.1.1}$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_1(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{x} X_1(1, \bar{y}) \\ \eta_2(\bar{x}, \bar{y}) &= X_2(1, \bar{y}) - \bar{y} X_1(1, \bar{y}) \end{aligned}$$

**Definición 3.1.6** Diremos que un campo vectorial  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ , con  $X(0) = 0$ , tiene una órbita característica en 0 si para algún entorno  $V$  de 0 existe una curva integral  $\phi_X(y_0, t)$  (donde la función  $t \mapsto \phi_X(y_0, t)$  representa el flujo del campo vectorial  $X$  que pasa por el punto  $y_0$ ) que permanece en  $V$  para  $t \geq 0$  (o, respectivamente, para  $t \leq 0$ ) y que verifica:

1.  $\|\phi_X(y_0, t)\| > 0$ , para todo  $t \geq 0$  (resp.  $t \leq 0$ );
2.  $\phi_X(y_0, t) \rightarrow 0$ , para  $t \rightarrow \infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ );
3. la función  $t \mapsto \frac{\phi_X(y_0, t)}{\|\phi_X(y_0, t)\|}$  para  $t \geq 0$  (resp.  $t \leq 0$ ) tiende a un límite cuando  $t \rightarrow \infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ).

Podemos ya enunciar el siguiente teorema (vid. [5]), que relaciona los retratos de fases de los campos vectoriales  $X(x, y)$  y  $\tilde{X}(\bar{x}, \bar{y})$ , obtenido este último al aplicar al primero un cambio de variables de tipo *blow-up*  $x$ -direccional ( $y$ , eventualmente, una desingularización).

**Teorema 3.1.1** Sean  $O(0, 0)$  un equilibrio aislado de  $X$  y  $\phi_X(y_0, t)$  una curva integral de  $X$  que tiende al equilibrio  $O$  en la dirección  $\theta = \arctg k$  o  $\theta = \pi + \arctg k$ , con  $k \neq \infty$ . Entonces:

1. el punto  $\tilde{O}(0, k)$  en el plano  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un equilibrio del campo (3.1.1);
2. la curva integral  $\phi_X(y_0, t)$  corresponde a una curva integral de (3.1.1) en el plano cortado  $(\bar{x}, \bar{y})$  (es decir, sin el eje  $\bar{y}$ ) que tiende a  $\tilde{O}$ ;
3. recíprocamente, a cualquier curva integral de (3.1.1) en el plano cortado  $(\bar{x}, \bar{y})$  que tienda al equilibrio  $\tilde{O}$  le corresponde una curva integral de  $X$  que tiende a  $O$  en la dirección  $\theta = \arctg k$  o  $\theta = \pi + \arctg k$ .

### 3.1.2 El Método de Melnikov

En esta subsección vamos a describir someramente el método que hace uso de la función de Melnikov (más abajo definida) para detectar ciclos límite y conexiones homoclinas de cierto tipo de sistemas. Para una información más completa, vid., e.g., [9].

Consideremos un sistema plano de la forma

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon, \mu) \quad (3.1.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  y  $\mu \in \mathbb{R}^n$ , siendo  $f \in C^\omega(\mathbb{R}^2)$  y  $g \in C^\omega(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ .

Este sistema resulta ser la perturbación (consideramos  $\varepsilon$  pequeño) del sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1.3)$$

del que suponemos posee un *anillo periódico*, es decir, una familia uniparamétrica continua de trayectorias periódicas dada por  $a = \bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$ , con

$$\Gamma_\alpha : x = \gamma_\alpha(t)$$

donde las funciones  $\gamma_\alpha(t)$  tienen período  $T_\alpha$  ( $I$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ ). Suponemos que el anillo se extiende desde un centro (o desde una conexión homoclina o heteroclina) hasta una conexión homoclina o heteroclina.

El problema que nos planteamos en primer lugar consiste en determinar el número, la multiplicidad y la posición de las trayectorias periódicas situadas en el anillo periódico de las cuales surge una familia continua de órbitas periódicas al variar  $\varepsilon$  desde cero. Precisamente el número, la multiplicidad y la posición de los ceros de la función de Melnikov nos van a proporcionar esta información.

Consideramos una sección de Poincaré,  $\Sigma$ , normal al anillo periódico y suponemos que  $\alpha$  es la longitud de arco a lo largo de  $\Sigma$ . Sea la aplicación de Poincaré  $h : (\alpha, \varepsilon, \mu) \in U \mapsto h(\alpha, \varepsilon, \mu) \in \mathbb{R}$  donde  $U$  es un abierto que contiene a  $I \times \{0\} \times \mathbb{R}^n$ . A partir de  $h$  definimos la *función desplazamiento*

$$d(\alpha, \varepsilon, \mu) = h(\alpha, \varepsilon, \mu) - \alpha$$

cuyos ceros corresponden a las soluciones periódicas de (3.1.2).

Un desarrollo de Taylor en la variable  $\varepsilon$  de la función desplazamiento permite expresar ésta en la forma

$$d(\alpha, \varepsilon, \mu) = d(\alpha, 0, \mu) + \varepsilon d_\varepsilon(\alpha, 0, \mu) + O(\varepsilon^2)$$

de donde, al ser  $d(\alpha, 0, \mu) = 0$ , se tiene

$$d(\alpha, \varepsilon, \mu) = \varepsilon [d_\varepsilon(\alpha, 0, \mu) + O(\varepsilon)]$$

Así, los ceros de  $d(\alpha, \varepsilon, \mu)$  pueden ser aproximados, a primer orden, por los ceros de  $d_\varepsilon(\alpha, 0, \mu)$ . Esto nos conduce a la siguiente definición.

**Definición 3.1.7** *La función de Melnikov para el sistema (3.1.2) a lo largo de la órbita periódica*

$$\Gamma_\alpha : x = \gamma_\alpha(t), \quad 0 \leq t \leq T_\alpha$$

de (3.1.3) viene dada por la expresión

$$M(\alpha, \mu) = \frac{|f(\gamma_\alpha(0))|}{-\omega_0} d_\varepsilon(\alpha, 0, \mu)$$

donde  $\omega_0 = \pm 1$  (de acuerdo a la orientación positiva o negativa, respectivamente, de  $\gamma_\alpha(t)$ ).

El siguiente resultado justifica la elección de la función de Melnikov dada en la definición anterior.

**Lema 3.1.1** *Se verifica*

$$d_\varepsilon(\alpha, 0, \mu) = \frac{-\omega_0}{|f(\gamma_\alpha(0))|} \int_0^{T_\alpha} e^{-\int_0^t \operatorname{div} f(\gamma_\alpha(s)) ds} f \wedge g(\gamma_\alpha(t), 0, \mu) dt$$

(donde  $\wedge$  representa el producto vectorial).

El resultado básico para la bifurcación de ciclos límite desde un centro es el siguiente.

**Teorema 3.1.2** *Si existen un  $\alpha_0 \in I$  y un  $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$  tales que*

$$M(\alpha_0, \mu_0) = 0 \quad y \quad M_\alpha(\alpha_0, \mu_0) \neq 0$$

entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu_0$ , tiene un único ciclo límite hiperbólico,  $\Gamma_\varepsilon$ , en un  $O(\varepsilon)$  entorno de  $\Gamma_{\alpha_0}$  (es decir, existe una única familia uniparamétrica de ciclos límite  $\Gamma_\varepsilon$ , con parámetro

$\varepsilon$ , que bifurca del ciclo límite  $\Gamma_{\alpha_0}$  de (3.1.3) para  $\varepsilon \neq 0$ ). Este ciclo límite  $\Gamma_\varepsilon$  es estable (resp. inestable) si  $M_\alpha(\alpha_0, \mu_0) < 0$  (resp.  $M_\alpha(\alpha_0, \mu_0) > 0$ ).

Más aún, si  $M(\alpha_0, \mu_0) \neq 0$  entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu_0$ , no tiene ningún ciclo límite en un  $O(\varepsilon)$  entorno de  $\Gamma_{\alpha_0}$ .

El resultado local de este teorema puede ser extendido a un resultado global.

**Teorema 3.1.3** Si la ecuación  $M(\alpha, \mu_0) = 0$  tiene exactamente  $k$  soluciones  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$  con  $M_\alpha(\alpha_j, \mu_0) \neq 0$  para  $j = 1, \dots, k$ , entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño exactamente  $k$  familias uniparamétricas de ciclos límite hiperbólicos del sistema (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu_0$ , bifurcan de los ciclos límite del anillo periódico de (3.1.3) que pasan por los puntos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  en  $\Sigma$ .

Si  $M(\alpha, \mu_0)$  no tiene ningún cero en  $I$  entonces ninguna familia uniparamétrica de ciclos límite de (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu_0$ , bifurcan del anillo periódico para  $\varepsilon \neq 0$ .

El siguiente resultado recoge el caso de que los ciclos sean múltiples.

**Teorema 3.1.4** Si existen un  $\alpha_0 \in I$  y un  $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$  tales que

$$M(\alpha_0, \mu_0) = M_\alpha(\alpha_0, \mu_0) = \dots = M_\alpha^{(m-1)}(\alpha_0, \mu_0) = 0$$

con

$$M_\alpha^{(m)}(\alpha_0, \mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad M_{\mu_j}(\alpha_0, \mu_0) \neq 0$$

para algún  $j = 1, \dots, n$ , entonces para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño existe una función analítica  $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + O(\varepsilon)$  tal que para  $\varepsilon \neq 0$  y pequeño el sistema (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu(\varepsilon)$ , tiene un único ciclo límite de multiplicidad  $m$  en un  $O(\varepsilon)$  entorno del ciclo  $\Gamma_{\alpha_0}$  de (3.1.3).

En los dos resultados siguientes consideramos el caso en que se requiere un análisis no ya a orden  $\varepsilon$ , sino a mayor orden debido a que la función de Melnikov es idénticamente cero.

**Teorema 3.1.5** *Supongamos que existe un  $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que para algún  $k \geq 1$  se tiene*

$$d(\alpha, 0, \mu_0) \equiv d_\varepsilon(\alpha, 0, \mu_0) \equiv \cdots \equiv d_\varepsilon^{(k-1)}(\alpha, 0, \mu_0) \equiv 0$$

para todo  $\alpha \in I$  y supongamos también que existe un  $\alpha_0 \in I$  tal que

$$d_\varepsilon^{(k)}(\alpha_0, 0, \mu_0) = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\alpha d_\varepsilon^{(k)}(\alpha_0, 0, \mu_0) \neq 0$$

entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, el sistema (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu_0$ , tiene un único ciclo límite hiperbólico en un  $O(\varepsilon)$  entorno del ciclo  $\Gamma_{\alpha_0}$  de (3.1.3).

**Teorema 3.1.6** *Supongamos que existe un  $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que para algún  $k \geq 1$  y algún  $m \geq 1$  se tiene*

$$d(\alpha, 0, \mu_0) \equiv d_\varepsilon(\alpha, 0, \mu_0) \equiv \cdots \equiv d_\varepsilon^{(k-1)}(\alpha, 0, \mu_0) \equiv 0$$

para todo  $\alpha \in I$  y supongamos también que existe un  $\alpha_0 \in I$  tal que

$$d_\varepsilon^{(k)}(\alpha_0, 0, \mu_0) = \partial_\alpha d_\varepsilon^{(k)}(\alpha_0, 0, \mu_0) = \cdots = \partial_\alpha^{(m-1)} d_\varepsilon^{(k)}(\alpha_0, 0, \mu_0) = 0$$

con

$$\partial_\alpha^{(m)} d_\varepsilon^{(k)}(\alpha_0, 0, \mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \partial_{\mu_j} d_\varepsilon^{(k)}(\alpha_0, 0, \mu_0) \neq 0$$

para algún  $j = 1, \dots, n$ , entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño existe una función analítica  $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + O(\varepsilon)$  tal que el sistema (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu(\varepsilon)$ , tiene un único ciclo límite de multiplicidad  $m$  en un  $O(\varepsilon)$  entorno del ciclo  $\Gamma_{\alpha_0}$  de (3.1.3).

Por último, los resultados que siguen hacen referencia a las bifurcaciones de conexiones homoclínicas mediante perturbación.

**Definición 3.1.8** *La función de Melnikov para el sistema (3.1.2) a lo largo de la órbita homoclina*

$$\Gamma_0 : x = \gamma_0(t), \quad -\infty < t < +\infty \quad (3.1.4)$$

de (3.1.3) se define como

$$M(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_0^t \operatorname{div} f(\gamma_0(s)) ds} f \wedge g(\gamma_0(t), 0, \mu) dt$$

donde  $\omega_0 = \pm 1$  de acuerdo a si la conexión homoclina está positiva o negativamente orientada, respectivamente.

Definiendo la aplicación de Poincaré,  $h(\varepsilon, \mu)$ , y la función distancia,  $d(\varepsilon, \mu)$ , en forma análoga a como se hizo para el caso de los ciclos límite (eligiendo ahora una normal a  $\Gamma_0$  en el punto  $\gamma_0(0)$ ) se verifica

$$d(\varepsilon, \mu) = -\frac{\varepsilon \omega_0}{|f(\gamma_0(0))|} M(\mu) + O(\varepsilon^2)$$

de donde es inmediato que

$$d_\varepsilon(0, \mu) = -\frac{\omega_0}{|f(\gamma_0(0))|} M(\mu)$$

El siguiente resultado determina una condición suficiente para que se preserven órbitas homoclínicas bajo perturbación.

**Teorema 3.1.7** *Supongamos que el sistema no perturbado (3.1.3) tiene una órbita homoclina  $\gamma_0(t)$  en un punto de silla hiperbólico  $x_0$  y que existe un  $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$M(\mu_0) = 0 \quad \text{y} \quad M_{\mu_j}(\mu_0) \neq 0$$

para algún  $j = 1, \dots, n$ , entonces, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, existe una función analítica  $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + O(\varepsilon)$  tal que el sistema (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu(\varepsilon)$ , tiene una única conexión homoclina,  $\Gamma_\varepsilon$ , en un  $O(\varepsilon)$  entorno de  $\Gamma_0$ . Más aún, si  $M(\mu_0) \neq 0$ , entonces para todo  $\varepsilon \neq 0$  y  $|\mu - \mu_0|$  suficientemente pequeños el sistema (3.1.2) no tiene ninguna conexión homoclina en un  $O(\varepsilon)$  entorno de  $\Gamma_0$ .

Para los resultados que resta exponer hacemos la suposición adicional de que el sistema sin perturbar (3.1.3) es un sistema hamiltoniano. Además de la órbita homoclina  $\Gamma_0$  dada en (3.1.4), suponemos la existencia de una familia uniparamétrica de órbitas periódicas  $\Gamma_\alpha, \alpha \in I$ , que aproxima a  $S_0 = \Gamma_0 \cup \{x_0\}$  cuando  $\alpha$  tiende a  $\alpha_0$ , uno de los puntos terminales del intervalo  $I$ . Más aún, existe una función continua y monótona,  $\alpha(h)$ , aplicando el intervalo  $J = (h_0, h_1)$  en el intervalo  $I$ , con  $\alpha(h_0) = \alpha_0$ , de tal manera que  $\Gamma_{\alpha(h)}$  corresponde a la curva de nivel  $H(x, y) = h$ , donde  $H(x, y)$  es la función de Hamilton que define  $f(x)$  en (3.1.3). Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que  $I = (\alpha_0, \alpha_1)$  y que  $\alpha_0 = 0$ .

La función de Melnikov dada en la definición 3.1.7, que toma ahora la forma  $I(h, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} M(\alpha(h), \mu)$ , está relacionada con la función de Melnikov para conexiones homoclinas dada en (3.1.8) mediante la igualdad  $M(\mu_0) = 2M(0^+, \mu_0)$ . Puede, además, ser expresada como el desarrollo asintótico siguiente.

**Lema 3.1.2** *Existe un  $\delta > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} I(h, \mu) &= c_1(\mu) + c_2(\mu)(h - h_0) \log(h - h_0) + c_3(\mu)(h - h_0) + \\ &\quad + c_4(\mu)(h - h_0)^2 \log(h - h_0) + o\left((h - h_0)^2 \log(h - h_0)\right) \end{aligned}$$

para  $0 < h - h_0 < \delta$  y  $\mu \in \mathbb{R}^n$ .

De este desarrollo se sigue inmediatamente el próximo lema.

**Lema 3.1.3** *Para  $m \geq 1$  se verifica*

$$M(0^+, \mu_0) = M_\alpha(0^+, \mu_0) = \dots = M_\alpha^{(m-1)}(0^+, \mu_0) = 0$$

si y sólo si

$$c_1(\mu_0) = c_2(\mu_0) = \cdots = c_{2m-1}(\mu_0) = 0.$$

Más aún, si  $M(0^+, \mu_0) = M_\alpha(0^+, \mu_0) = \cdots = M_\alpha^{(m-1)}(0^+, \mu_0) = 0$ , entonces

(a)  $|M_\alpha^{(m)}(0^+, \mu_0)| = \infty$  si y sólo si  $c_{2m}(\mu_0) \neq 0$ ;

(b)  $0 < |M_\alpha^{(m)}(0^+, \mu_0)| < \infty$  si y sólo si  $c_{2m}(\mu_0) = 0$  y  $c_{2m+1}(\mu_0) \neq 0$ .

Seguidamente definimos la multiplicidad de una conexión homoclina.

**Definición 3.1.9** Si (3.1.2) posee una órbita homoclina  $\Gamma$  en  $\mu = \mu_0$ , diremos que  $\Gamma$  tiene multiplicidad  $m$  (y por tanto da lugar a una bifurcación de codimensión  $m$ ) si  $c_i(\mu_0) = 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ , y  $c_{m+1}(\mu_0) \neq 0$ , donde los coeficientes  $c_i(\mu_0)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , son aquéllos que aparecen en el desarrollo asintótico dado en el lema 3.1.2.

El siguiente resultado (y último) es una mejora del teorema 3.5 de [9] (puesto que permite establecer un valor concreto para la multiplicidad de la conexión homoclina, y no tan sólo una cota superior), obtenida a partir del teorema *GHB\** dado por Joyal en [60].

**Teorema 3.1.8** Si existe un  $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$M(\mu_0) = 0 \quad \text{y} \quad M_{\mu_j}(\mu_0) \neq 0$$

para algún  $j = 1, \dots, n$  y si para  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} M_\alpha(0^+, \mu_0) = \cdots = M_\alpha^{(m-1)}(0^+, \mu_0) = 0 \quad \text{y} \\ M_\alpha^{(m)}(0^+, \mu_0) \neq 0 \quad (\text{resp. } |M_\alpha^{(m)}(0^+, \mu_0)| = \infty) \end{aligned}$$

entonces existe una función analítica  $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + O(\varepsilon)$  tal que para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, el sistema hamiltoniano perturbado (3.1.2), particularizado para  $\mu = \mu(\varepsilon)$ , tiene una única órbita homoclina,  $\Gamma_\varepsilon$ , en un  $O(\varepsilon)$  entorno de  $\Gamma_0$ , cuya multiplicidad es  $2m$  (resp.  $2m - 1$ ).

## 3.2 La Cúspide de Orden Seis

En esta sección vamos a considerar un ejemplo estudiado por Joyal y Rousseau en [62]. En él los autores se centran en la determinación de diferentes bifurcaciones homoclinas de codimensión menor o igual que cinco experimentadas por el desplegamiento de una degeneración de Takens–Bogdanov dada mediante una cúspide de orden seis. Para ello calculan, mediante la función de Melnikov, las diferentes aproximaciones a primer orden de estas bifurcaciones. Nuestro objetivo consistirá, en lo que sigue, y centrándonos exclusivamente en las bifurcaciones homoclinas, en implementar las técnicas dadas en el capítulo II para obtener las diferentes variedades, en el correspondiente espacio de parámetros, donde ocurren bifurcaciones de órbitas homoclinas de codimensión menor o igual que cuatro, comparándolas con las que predice la función de Melnikov.

Comenzamos definiendo la cúspide de orden  $n$  (vid. [61] y [74]; en [34] y [96] aparecen estudios detallados de las cúspides de órdenes tres y cuatro, respectivamente).

**Definición 3.2.1** *Una cúspide de orden  $n \geq 2$  es una singularidad de un campo vectorial plano*

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) \\ \dot{y} = X_2(x, y) \end{cases}$$

de tal manera que, mediante un cambio de coordenadas, su  $\{K[n-1] + 1\}$ -jet puede ser expresado en la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \pm x^{K[n-1]}y \end{cases}$$

donde  $K[i]$  representa la parte entera de  $\frac{3}{2}i$ .

Un desplegamiento versal de la cúspide de orden  $n$  viene dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + \lambda_0 + \lambda_1 y + \lambda_2 xy + \lambda_3 x^3 y + \dots \pm x^{K[n-1]}y \end{cases}$$

Sea, pues, la cúspide de orden seis (eligiendo el signo positivo en el término de mayor grado)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + x^7 y \end{cases} \quad (3.2.1)$$

con desplegamiento versal dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y + x^2 + \varepsilon_3 xy + \varepsilon_4 x^3 y + \varepsilon_5 x^4 y + \varepsilon_6 x^6 y + x^7 y \end{cases} \quad (3.2.2)$$

(en un desplegamiento de (3.2.1), escrito en la forma normal de Takens–Bogdanov, los términos  $x^2 y, x^4, x^5, x^5 y, x^7$  y  $x^8$  pueden ser eliminados mediante  $C^\infty$ -conjugación, mientras que los términos  $x^3$  y  $x^6$  pueden ser eliminados mediante  $C^\infty$ -equivalencia; para detalles, vid., e.g., [45]).

Mediante el escalado

$$\begin{aligned} x &\mapsto \delta^{\frac{2}{13}} x & \varepsilon_1 &= \delta^{\frac{4}{13}} \bar{\mu}_1 & t &\mapsto \delta^{-\frac{1}{13}} t \\ y &\mapsto \delta^{\frac{3}{13}} y & \varepsilon_2 &= \delta^{\frac{14}{13}} \bar{\mu}_2 \\ & & \varepsilon_3 &= \delta^{\frac{12}{13}} \bar{\mu}_3 \\ & & \varepsilon_4 &= \delta^{\frac{8}{13}} \bar{\mu}_4 \\ & & \varepsilon_5 &= \delta^{\frac{6}{13}} \bar{\mu}_5 \\ & & \varepsilon_6 &= \delta^{\frac{2}{13}} \bar{\mu}_6 \end{aligned}$$

para  $\delta > 0$ , (3.2.2) se transforma en

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \bar{\mu}_1 + x^2 + \delta (\bar{\mu}_2 y + \bar{\mu}_3 xy + \bar{\mu}_4 x^3 y + \bar{\mu}_5 x^4 y + \bar{\mu}_6 x^6 y + x^7 y) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Este último sistema tiene dos equilibrios si  $\bar{\mu}_1 < 0$  y ninguno si  $\bar{\mu}_1 > 0$ . Puesto que estamos interesados en el estudio de las conexiones homoclinas de (3.2.3), vamos a hacer  $\bar{\mu}_1 = -1$ . Haciendo el cambio de notación en los parámetros dado por  $\bar{\mu}_i = \mu_{i-1}$ , para  $i = 2, \dots, 6$ , (3.2.3) se transforma en

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \delta (\mu_1 y + \mu_2 xy + \mu_3 x^3 y + \mu_4 x^4 y + \mu_5 x^6 y + x^7 y) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

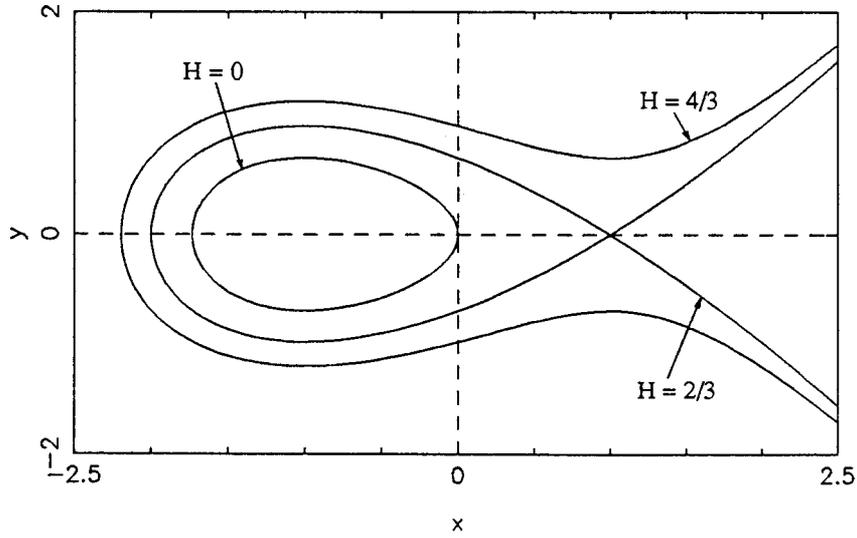


Figura 3.2.1: Retrato de fases del sistema hamiltoniano.

que resulta ser una perturbación del sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 + x^2 \end{cases}$$

para la función de Hamilton

$$H(x, y) = y^2 + x - \frac{x^3}{3}$$

que tiene órbitas periódicas para los valores de la energía  $e \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  y una órbita homoclina para  $e = \frac{2}{3}$  (vid. figura 3.2.1).

Para determinar los valores aproximados de los parámetros donde el sistema (3.2.4) tiene conexiones homoclinas múltiples de multiplicidad menor o igual que cuatro, introducimos la función de Melnikov

$$\begin{aligned} M(e) &\stackrel{def}{=} M(e, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = \\ &= \int_{H=e} \left( \mu_1 y + \mu_2 x y + \mu_3 x^3 y + \mu_4 x^4 y + \mu_5 x^6 y + x^7 y \right) dx \end{aligned}$$

y sus derivadas con respecto a la energía,  $e$ , de donde obtenemos (cfr. [62]) las condiciones para que ocurra una bifurcación de órbitas homoclinas de:

**codimensión 1:**

$$M\left(\frac{2}{3}\right) = 0, M'\left(\frac{2}{3}\right) = \infty$$

de donde

$$\mu_1 - \frac{5}{7}\mu_2 - \frac{103}{77}\mu_3 + \frac{187}{91}\mu_4 + \frac{89305}{17017}\mu_5 - \frac{23767}{2717} = 0 \quad (3.2.5)$$

**codimensión 2:**

$$M\left(\frac{2}{3}\right) = 0, M'\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$$

de donde

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + 1 = 0 \quad (3.2.6)$$

junto a (3.2.5).

(Obsérvese que (3.2.6) corresponde a la anulación de la traza de la linealización del campo en el equilibrio).

**codimensión 3:**

$$M\left(\frac{2}{3}\right) = 0, M'\left(\frac{2}{3}\right) = 0, M''\left(\frac{2}{3}\right) = \infty$$

de donde

$$5005\mu_2 + 9009\mu_3 - 5720\mu_4 - 27144\mu_5 + 62161 = 0 \quad (3.2.7)$$

junto a (3.2.5) y (3.2.6).

**codimensión 4:**

$$M\left(\frac{2}{3}\right) = 0, M'\left(\frac{2}{3}\right) = 0, M''\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$$

de donde

$$-\mu_2 + 3\mu_3 + 8\mu_4 + 24\mu_5 + 35 = 0 \quad (3.2.8)$$

junto a (3.2.5), (3.2.6) y (3.2.7).

(Obsérvese que (3.2.8) corresponde a la anulación del coeficiente de resonancia *RES* dado en (2.6.7)).

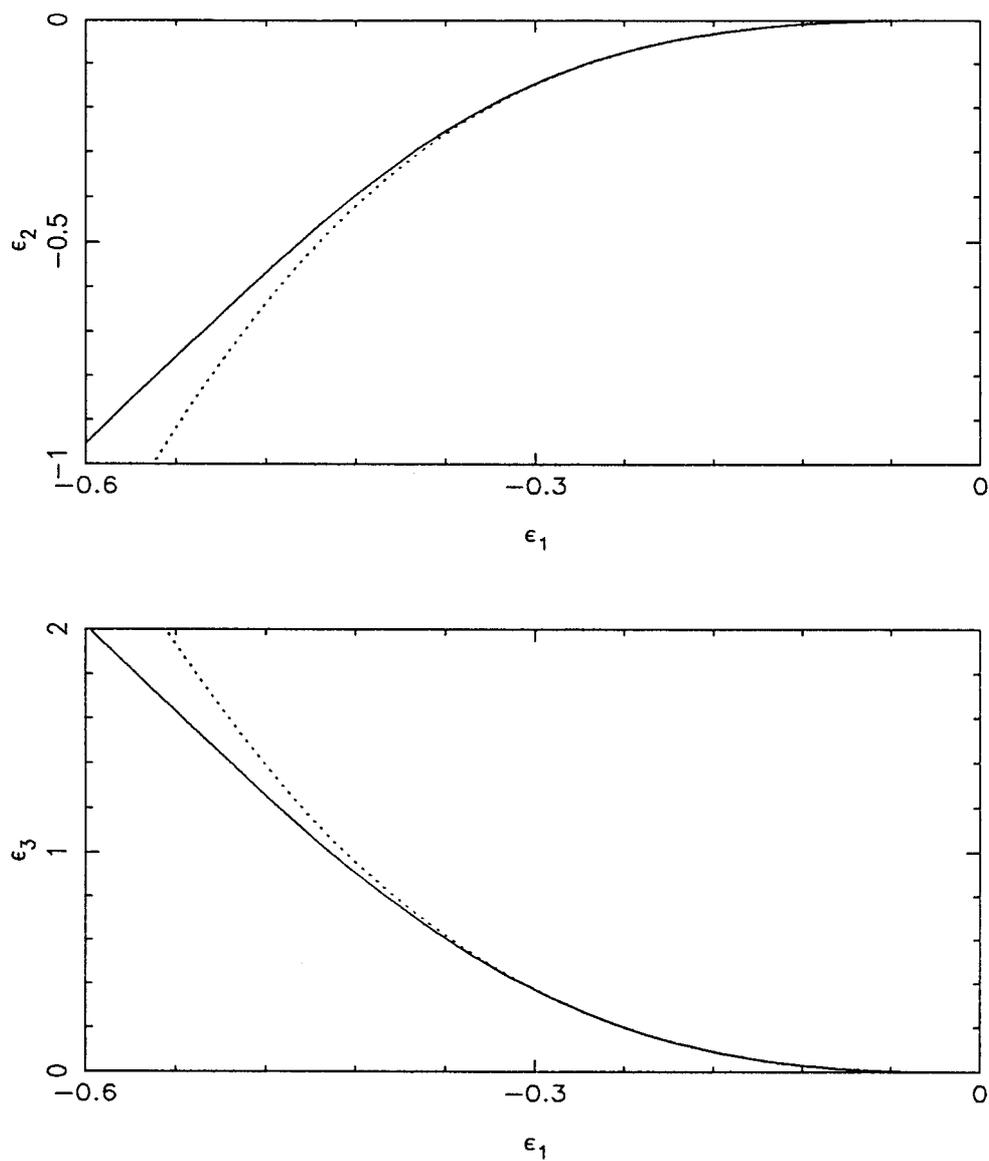


Figura 3.2.2: Curvas de homoclinas de codimensi3n cuatro para la c3spide de orden seis proyectadas en dos planos param3tricos: la predicha por Melnikov (en trazo discontinuo) y la obtenida num3ricamente (en trazo continuo).

Las condiciones dadas en (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) y (3.2.8) nos permiten obtener una parametrización de la curva de homoclinas de codimensión cuatro en el espacio de parámetros  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{694}{187}\mu_5 - \frac{840}{247} \\ \mu_2 = \frac{3256}{247} - \frac{480}{187}\mu_5 \\ \mu_3 = \frac{32}{17}\mu_5 - \frac{3183}{247} \\ \mu_4 = \frac{40}{19} - \frac{753}{187}\mu_5 \end{cases}$$

o, en términos de los parámetros originales, la superficie parametrizada dada en el espacio de parámetros  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = -\frac{694}{187}\varepsilon_6\varepsilon_1^3 - \frac{840}{247}(-\varepsilon_1)^{\frac{7}{2}} \\ \varepsilon_3 = -\frac{3256}{247}\varepsilon_1^3 - \frac{480}{187}\varepsilon_6(-\varepsilon_1)^{\frac{5}{2}} \\ \varepsilon_4 = \frac{32}{17}\varepsilon_6(-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3183}{247}(-\varepsilon_1)^2 \\ \varepsilon_5 = \frac{40}{19}(-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} + \frac{753}{187}\varepsilon_6\varepsilon_1 \end{cases}$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ . Cortando esta superficie con un hiperplano  $\varepsilon_6 = \tilde{\varepsilon}_6$  obtenemos la curva

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = -\frac{694}{187}\tilde{\varepsilon}_6\varepsilon_1^3 - \frac{840}{247}(-\varepsilon_1)^{\frac{7}{2}} \\ \varepsilon_3 = -\frac{3256}{247}\varepsilon_1^3 - \frac{480}{187}\tilde{\varepsilon}_6(-\varepsilon_1)^{\frac{5}{2}} \\ \varepsilon_4 = \frac{32}{17}\tilde{\varepsilon}_6(-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3183}{247}(-\varepsilon_1)^2 \\ \varepsilon_5 = \frac{40}{19}(-\varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} + \frac{753}{187}\tilde{\varepsilon}_6\varepsilon_1 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

En la figura 3.2.2 mostramos dos proyecciones en los planos paramétricos  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  y  $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ , respectivamente, de la curva teórica de homoclinas de codimensión cuatro dada en (3.2.9) (en trazo discontinuo) comparándola con la curva de homoclinas de codimensión cuatro obtenida numéricamente (en trazo continuo) a partir de las técnicas introducidas en el capítulo II (para ello imponemos en el programa de continuación que los coeficientes *EID*, dado en (2.4.8) y *RES*, dado en (2.6.7), tomen los valores 1 y 0, respectivamente; hemos elegido el valor  $\tilde{\varepsilon}_6 = -2.098332629329615$ , obtenido de la expresión dada en [62] para el punto correspondiente a una homoclina de codimensión 5, tomando  $\varepsilon_1 = -0.1$ ).

### 3.3 Las Cúspides Simétricas de Órdenes Cuatro y Cinco

Nos proponemos en esta sección el estudio, en dos casos particulares, del desplegamiento de una cúspide con simetría de orden  $n$ , que definimos a continuación.

**Definición 3.3.1** *Una cúspide con simetría es una singularidad de un campo vectorial plano dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + X_1(x, y) \\ \dot{y} = X_2(x, y) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

donde  $X_i(x, y) = o(|x, y|)$ , verificando además la propiedad

$$X_i(-x, -y) = -X_i(x, y)$$

Si el sistema dado en (3.3.1) puede ser escrito en la forma normal

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_3x^3 + b_2x^{2(n-1)}y + o(|x, y|^{2n-1}) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

con  $n \geq 2$ , diremos entonces que se trata de una cúspide con simetría de orden  $n$ .

Veamos los diferentes tipos topológicos que pueden aparecer para (3.3.2).

**Teorema 3.3.1** *El sistema dado en (3.3.2) está determinado por su 3-jet.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea el 3-jet de (3.3.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_3x^3 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

con equilibrio  $(0, 0)$  no hiperbólico.

Vamos a realizar el cambio de variables de tipo *blow-up*  $x$ -direccional dado por

$$\begin{aligned} x &\mapsto x \\ y &\mapsto xy \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

para  $x \neq 0$ .

Con este cambio, (3.3.3) se transforma en

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = a_3x^2 - y^2 \end{cases} \tag{3.3.5}$$

con equilibrio  $(0, 0)$  aún no hiperbólico, por lo que realizamos un nuevo cambio *blow-up*, esta vez  $y$ -direccional

$$\begin{aligned} x &\mapsto xy \\ y &\mapsto y \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

para  $y \neq 0$ , que, junto a una desingularización, transforma (3.3.5) en

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - a_3x^3 \\ \dot{y} = -y + a_3x^2y \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Las órbitas características de (3.3.7) son las soluciones no nulas de

$$xy(2a_3x^2 - 3)$$

que nos permiten distinguir dos casos:

1. Si  $a_3 < 0$ , tenemos  $(0, 0)$  equilibrio hiperbólico único (con autovalores 2 y  $-1$ ). En este caso el sistema (3.3.7) no tiene órbitas características y por tanto el equilibrio de (3.3.2) es de tipo foco (vid. figuras 3.3.1 y 3.3.2);
2. Si  $a_3 > 0$ , tenemos ahora los equilibrios hiperbólicos  $(0, 0)$  (con autovalores 2 y  $-1$ ) y  $(\pm\sqrt{\frac{2}{a_3}}, 0)$  (con autovalores  $-4$  y 1). En este caso existen dos órbitas características, dadas por  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2a_3}}$ . El retrato de fases viene dado en la figura 3.3.3. Volviendo a las variables de estado originales se tiene que la singularidad de (3.3.2) es de tipo silla (vid. figura 3.3.4).

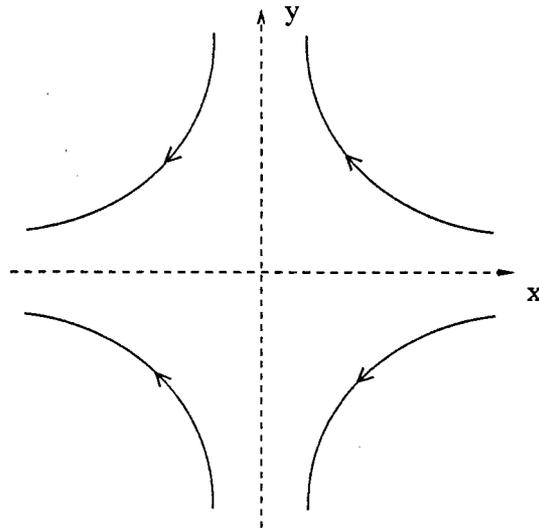


Figura 3.3.1: Retrato de fases en el plano cortado (es decir, sin los ejes) del sistema transformado mediante los dos cambios de variable *blow-up* ( $a_3 < 0$ ).

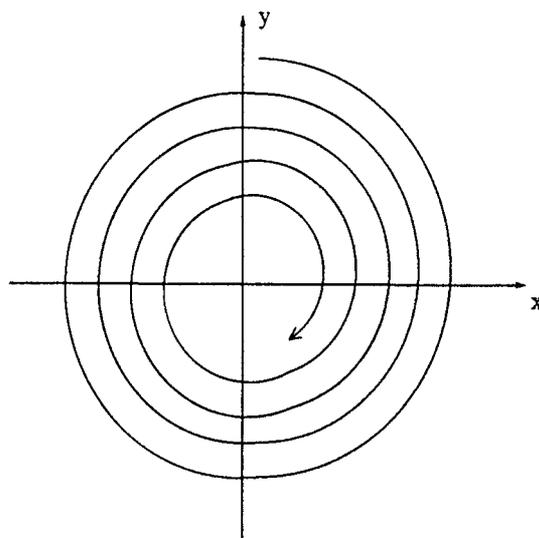


Figura 3.3.2: Retrato de fases del sistema en las variables de estado originales ( $a_3 < 0$ ). La singularidad en el origen es de tipo foco.

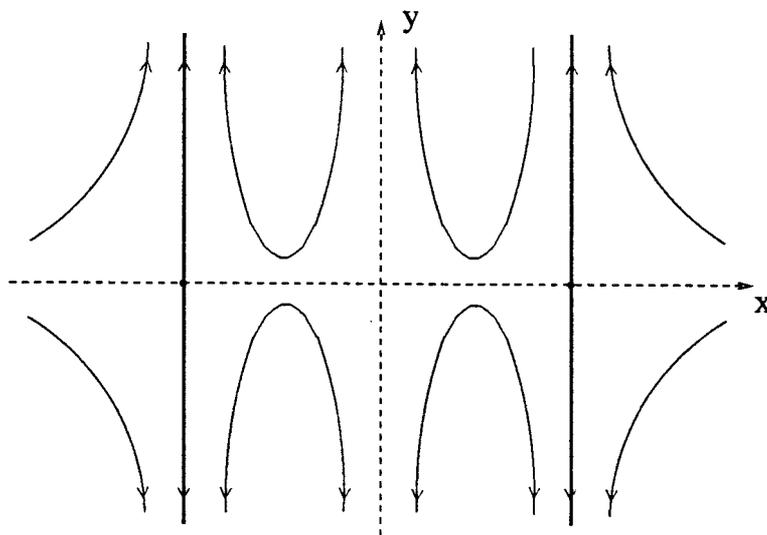


Figura 3.3.3: Retrato de fases en el plano cortado (es decir, sin los ejes) del sistema transformado mediante los dos cambios de variable *blow-up* ( $a_3 > 0$ ). En trazo grueso se muestran las órbitas características.

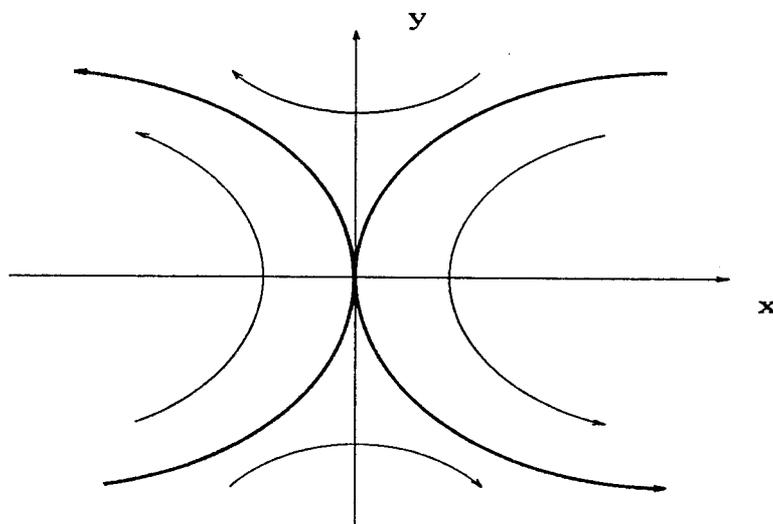


Figura 3.3.4: Retrato de fases del sistema en las variables de estado originales ( $a_3 > 0$ ). La singularidad en el origen es de tipo silla. En trazo grueso se muestran las separatrices procedentes de las órbitas características.

Por último, vamos a comprobar que, aplicando al sistema (3.3.2) los dos cambios de variable dados en (3.3.4) y (3.3.6), obtenemos un sistema que tiene los mismos equilibrios con los mismos autovalores para cada equilibrio que el sistema (3.3.7). En efecto, los únicos términos posibles de orden  $o(|x, y|^{2n-1})$  dados en (3.3.2), una vez escrito el sistema en forma normal de Takens–Bogdanov, son  $x^k$  y  $x^h y$ , para  $k > 2n - 1$  y  $h > 2n - 2$ . Los cambios mencionados transforman (3.3.2) en

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x - a_3 x^3 + o(|x, y|^{4n-5}) \\ \dot{y} &= -y + a_3 x^2 y + o(|x, y|^{4n-5}) \end{cases}$$

donde en  $o(|x, y|^{4n-5})$  sólo pueden aparecer términos de la forma:

- $x^{2n-1} y^{2n-3}$ , que procede de  $b_2 x^{2n-2} y$  en (3.3.2);
- $x^k y^{k-3}$  y  $x^{k-1} y^{k-2}$ , que proceden de  $x^k$  en (3.3.2);
- $x^{h+1} y^{h-1}$  y  $x^h y^h$ , que proceden de  $x^h y$  en (3.3.2).

En cualquier caso, las potencias de  $y$  más pequeñas que pueden aparecer son  $2n - 3, k - 3, h - 1 \geq 1$  al ser  $n \geq 2$ .

Con esto se deduce que (3.3.3) y (3.3.2) son  $C^0$ -conjugados. Ello nos indica que el sistema (3.3.2) está determinado por su 3-jet. ■

En las subsecciones siguientes vamos a particularizar el estudio para los casos  $n = 4$  y  $n = 5$ , en el supuesto adicional de que la singularidad es de tipo foco, es decir,  $a_3 < 0$ . (Un estudio del caso  $n = 3$  de tipo foco ha sido desarrollado por Rodríguez Luis *et alii* en [88], [89] y [93]).

### 3.3.1 La Cúspide con Simetría de Orden Cuatro

Consideremos la cúspide con simetría de orden cuatro, dada por

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_3 x^3 + b_2 x^6 y + o(|x, y|^7) \end{cases}$$

con el siguiente desplegamiento en forma normal de Takens–Bogdanov

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + a_3 x^3 + \varepsilon_3 x^2 y + a_5 x^5 + \\ \quad + \varepsilon_4 x^4 y + a_7 x^7 + b_2 x^6 y + o(|x, y|^7) \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Veamos que los términos  $x^5$  y  $x^7$  pueden ser eliminados.

**Lema 3.3.1** *El desplegamiento dado en (3.3.8) es  $C^\infty$ -equivalente a*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + a_3 x^3 + \varepsilon_3 x^2 y + \varepsilon'_4 x^4 y + b'_2 x^6 y + o(|x, y|^7) \end{cases} \quad (3.3.9)$$

para ciertos coeficientes  $\varepsilon'_4$  y  $b'_2$ .

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, situamos (3.3.8) sobre el punto de cúspide, haciendo  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Después realizamos la  $C^\infty$ -equivalencia dada por la reparametrización del tiempo

$$t \mapsto (1 + \alpha x^2 + \beta x^4) t$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{a_5}{2a_3} \\ \beta &= \frac{11a_5^2 - 15a_3 a_7}{24a_3^2} \end{aligned}$$

Al sistema transformado por la  $C^\infty$ -equivalencia, dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + \alpha x^2 + \beta x^4) y \\ \dot{y} = (1 + \alpha x^2 + \beta x^4) (a_3 x^3 + \varepsilon_3 x^2 y + \varepsilon_4 x^4 y + b_2 x^6 y + o(|x, y|^7)) \end{cases} \quad (3.3.10)$$

le aplicamos el algoritmo desarrollado en [45] para el cálculo de los coeficientes de la forma normal de Takens–Bogdanov, obteniendo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_3 x^3 + \varepsilon_3 x^2 y + \varepsilon'_4 x^4 y + b'_2 x^6 y + o(|x, y|^7) \end{cases} \quad (3.3.11)$$

donde los nuevos coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon'_4 &= \varepsilon_4 - \frac{5a_5\varepsilon_3}{6a_3} \\ b'_2 &= b_2 + \frac{-84a_5\varepsilon_4a_3 + 77a_5^2\varepsilon_3 - 63\varepsilon_3a_3a_7}{72a_3^2} \end{aligned}$$

con lo que el lema queda demostrado. ■

Bajo condiciones de transversalidad (vid. [95]) el desplegamiento dado en (3.3.9) es  $C^0$ -equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1x + \varepsilon_2y + a_3x^3 + \varepsilon_3x^2y + \varepsilon'_4x^4y + b'_2x^6y \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Vamos primeramente a reescalar (3.3.12) mediante

$$\begin{aligned} x &\mapsto x_0x & \varepsilon_1 &\mapsto \frac{y_0}{\omega x_0}\varepsilon_1 & t &\mapsto \omega t \\ y &\mapsto y_0y & \varepsilon_2 &\mapsto \omega\varepsilon_2 \\ & & \varepsilon_3 &\mapsto \frac{1}{\omega x_0^2}\varepsilon_3 \\ & & \varepsilon'_4 &\mapsto \frac{1}{\omega x_0^4}\varepsilon'_4 \end{aligned}$$

eligiendo

$$x_0 = -\left(\frac{-a_3}{b'_2}\right)^{\frac{1}{10}}, \quad y_0 = \frac{a_3}{|b'_2|\left(\frac{-a_3}{b'_2}\right)^{\frac{3}{10}}}, \quad \omega = \frac{1}{|b'_2|\left(\frac{-a_3}{b'_2}\right)^{\frac{3}{5}}}$$

Llegamos de este modo, suprimiendo las primas, al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1x + \varepsilon_2y - x^3 + \varepsilon_3x^2y + \varepsilon_4x^4y + Kx^6y \end{cases} \quad (3.3.13)$$

donde  $K = \pm 1$  y su signo coincide con el de  $b'_2$ .

En el estudio de este sistema bidimensional bastará considerar el caso  $K = +1$ , pues el sistema es invariante al cambio

$$(x, y, t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, K) \longrightarrow (x, -y, -t, \varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3, -\varepsilon_4, -K)$$

con lo que el conjunto de bifurcaciones será similar en el caso  $K = -1$  (si bien habrá un cambio en la estabilidad).

Nos planteamos hacer, en primer lugar, un análisis local de bifurcaciones de (3.3.13).

**Teorema 3.3.2** *El sistema (3.3.13) experimenta una bifurcación de:*

1. *pitchfork del origen en la hipersuperficie  $\varepsilon_1 = 0$ ;*
2. *Hopf del origen de codimensión:*
  - (a) *uno, en la hipersuperficie  $\varepsilon_2 = 0$ , para  $\varepsilon_1 < 0$ ,*
  - (b) *dos, en la superficie  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ , para  $\varepsilon_1 < 0$ ,*
  - (c) *tres, en la curva  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_4 = 0$ , para  $\varepsilon_1 < 0$ ;*
3. *Hopf de los equilibrios no triviales (que nacen de la bifurcación de pitchfork) de codimensión:*
  - (a) *uno, en la hipersuperficie  $\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + K\varepsilon_1^3 = 0$ , para  $\varepsilon_1 > 0$ ,*
  - (b) *dos, en la superficie  $\varepsilon_2 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + 4K\varepsilon_1^3 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 3K\varepsilon_1^2$ , para  $\varepsilon_1 > 0$ ,*
  - (c) *tres, en la curva*

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - K\varepsilon_1^3 & = 0 \\ \varepsilon_3 - 3K\varepsilon_1^2 & = 0 \\ \varepsilon_4 + 5K\varepsilon_1 & = 0 \end{cases}$$
*para  $\varepsilon_1 > 0$ ;*
4. *Takens–Bogdanov del origen de codimensión:*
  - (a) *dos, en la superficie  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,*
  - (b) *tres, en la curva  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ ,*
  - (c) *cuatro, en el punto  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (0, 0, 0, 0)$ .*

DEMOSTRACIÓN:

La matriz de la linealización en el origen, que es siempre un equilibrio del sistema, tiene la forma

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

El polinomio característico  $\lambda^2 - \varepsilon_2\lambda - \varepsilon_1 = 0$  nos proporciona los autovalores de la matriz (3.3.14), que nos indican la estabilidad del origen:

$$\lambda = \frac{\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1}}{2}$$

De esta expresión se obtiene una bifurcación pitchfork para  $\varepsilon_1 = 0$ , de donde nacen dos nuevos equilibrios situados en  $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ .

La bifurcación de Hopf aparecerá cuando se anule la traza,  $Tr$ , de la matriz (3.3.14), dada por  $Tr = \varepsilon_2 = 0$ ,  $-\varepsilon_1 > 0$ . Para analizarla tomamos como parámetro de bifurcación a  $\varepsilon_2$ , comprobando previamente que se satisface la condición de transversalidad, es decir,

$$re \left[ \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_2=0} \right] = re \left[ \frac{u^T A'_0 v}{u^T v} \right] \neq 0$$

donde  $A'_0 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} J(0,0) \right|_{\varepsilon_2=0}$  y  $u, v$  son, respectivamente, un autovector izquierdo y uno derecho de la matriz de la linealización  $J(0,0)|_{\varepsilon_2=0}$  correspondientes al autovalor  $\lambda = \omega_0 i$  (en nuestro caso  $\omega_0^2 = -\varepsilon_1$ ). Como  $A'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , si elegimos, por ejemplo,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_0 i \end{pmatrix}$  y  $u = \begin{pmatrix} \omega_0 i \\ 1 \end{pmatrix}$ , obtenemos  $\left. \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_2=0} = \frac{1}{2} \neq 0$ .

Una vez verificada la condición de transversalidad, podemos suponer en nuestros cálculos que  $\varepsilon_2$  toma el valor crítico, o sea,  $\varepsilon_2 = 0$ . Así (3.3.13) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 + \varepsilon_3 x^2 y + \varepsilon_4 x^4 y + K x^6 y \end{pmatrix}$$

que, escalado con  $x = \bar{x}, y = -\omega_0 \bar{y}$ , se convierte en

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega_0} \bar{x}^3 + \varepsilon_3 \bar{x}^2 \bar{y} + \varepsilon_4 \bar{x}^4 \bar{y} + K \bar{x}^6 \bar{y} \end{pmatrix}$$

al que podemos aplicarle el algoritmo desarrollado en [38] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf, obteniendo en este caso, hasta orden siete

$$\begin{aligned} \dot{r} = & \frac{\varepsilon_2}{2}r + \frac{\varepsilon_3}{8}r^3 + \left(\frac{\varepsilon_4}{16} + \frac{\varepsilon_3}{32\varepsilon_1}\right)r^5 + \\ & + \left(\frac{5K}{128} + \frac{17\varepsilon_4}{512\varepsilon_1} - \frac{7\varepsilon_3^3}{3072\varepsilon_1} + \frac{5\varepsilon_3}{192\varepsilon_1^2}\right)r^7 \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Puesto que el primer coeficiente de la forma normal se anula para  $\varepsilon_3 = 0$ , concluimos que la bifurcación de Hopf del origen, que se da como ya indicamos para  $\varepsilon_2 = 0$  ( $\varepsilon_1 < 0$ ), es supercrítica cuando  $\varepsilon_3 < 0$ , subcrítica para  $\varepsilon_3 > 0$  y degenerada para  $\varepsilon_3 = 0$ , apareciendo una bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas. La condición de transversalidad para la bifurcación de codimensión dos dada por

$$\frac{\partial(T_r, a_1)}{\partial(\varepsilon_2, \varepsilon_3)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

se satisface, siendo  $a_1$  el coeficiente de  $r^3$  de la forma normal (3.3.15). La anulación adicional de  $\varepsilon_4$  nos conduce a una nueva degeneración, esta vez de codimensión tres, que dará lugar a la aparición de una bifurcación de cúspides de órbitas periódicas (es decir, de ciclos límite triples; el conjunto de bifurcaciones en un entorno de un punto del espacio de parámetros correspondiente a un ciclo límite triple es homeomorfo a la *catástrofe de cúspide*; para una introducción a la Teoría de Catástrofes, vid., e.g., [12]). De nuevo es inmediato comprobar que se verifica la condición de transversalidad, dada por

$$\frac{\partial(T_r, a_1, a_2)}{\partial(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)} \neq 0$$

donde  $a_2$  es el coeficiente de  $r^5$  en (3.3.15), supuesto  $a_1 = 0$ . El coeficiente de  $r^7$ , una vez situados en  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ , es no nulo, lo que garantiza que no existen degeneraciones adicionales.

Vamos a escribir (3.3.15) para  $\varepsilon_3$  y  $\varepsilon_4$  suficientemente pequeños, de forma que, a primer orden, tenemos la aproximación

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon_2}{2}r + \frac{\varepsilon_3}{8}r^3 + \left(\frac{\varepsilon_4}{16} + \frac{\varepsilon_3}{32\varepsilon_1}\right)r^5 + \frac{5K}{128}r^7 \quad (3.3.16)$$

El escalado

$$t \mapsto \frac{5K}{128}t, \quad \varepsilon_2 \mapsto \frac{5K}{64}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 \mapsto \frac{5K}{16}\varepsilon_3, \quad \varepsilon_4 \mapsto \frac{5K}{8}\varepsilon_4$$

transforma (3.3.16) en

$$\dot{r} = \varepsilon_2 r + \varepsilon_3 r^3 + (\varepsilon_4 + c\varepsilon_3) r^5 + r^7 \quad (3.3.17)$$

donde  $c = \frac{1}{4\varepsilon_4}$ . Si llamamos

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_4 + c\varepsilon_3 \quad (3.3.18)$$

obtenemos para (3.3.17) los conjuntos de bifurcaciones dados en la figura 3.3.5 (vid. [105]). La relación entre los parámetros dada en (3.3.18) constituye una línea recta en el plano  $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ , cuya posición relativa determina el número de puntos de cúspide de órbitas periódicas que pueden aparecer (vid. figura 3.3.6). En la figura 3.3.7 mostramos los diferentes conjuntos de bifurcaciones en el plano  $(\varepsilon_3, \varepsilon_2)$  según los valores de  $\varepsilon_4$ . Las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas  $SN, SN_1, SN_2, SN'_1$  y  $SN'_2$  y los puntos de cúspide de órbitas periódicas  $Cu_1$  y  $Cu_2$  que aparecen en esta figura vienen dados por las siguientes expresiones a primer orden:

$$SN, SN_1, SN'_1 : \varepsilon_2 = -\frac{1}{135K} \left( 2\xi^3 - 45K\xi\varepsilon_3 - 2\sqrt{(\xi^2 - 15K\varepsilon_3)^3} \right)$$

$$SN_2, SN'_2 : \varepsilon_2 = -\frac{1}{135K} \left( 2\xi^3 - 45K\xi\varepsilon_3 + 2\sqrt{(\xi^2 - 15K\varepsilon_3)^3} \right)$$

$$Cu_{1,2} = \left( \alpha_{1,2}, \frac{1}{27} (2\Lambda_{1,2}^3 - 9\alpha_{1,2}\Lambda_{1,2}) \right)$$

$$\text{donde } \alpha_{1,2} = 3 - \frac{4\varepsilon_4}{5K\varepsilon_1} \pm \sqrt{\zeta}$$

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{4\varepsilon_1} \left( 3 \pm \sqrt{\zeta} \right) + \frac{\varepsilon_4}{5K} \left( 8 - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right)$$

$$\zeta = 9 - \frac{24\varepsilon_4}{5K\varepsilon_1}$$

En el espacio de parámetros  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$  la curva donde se unen los puntos

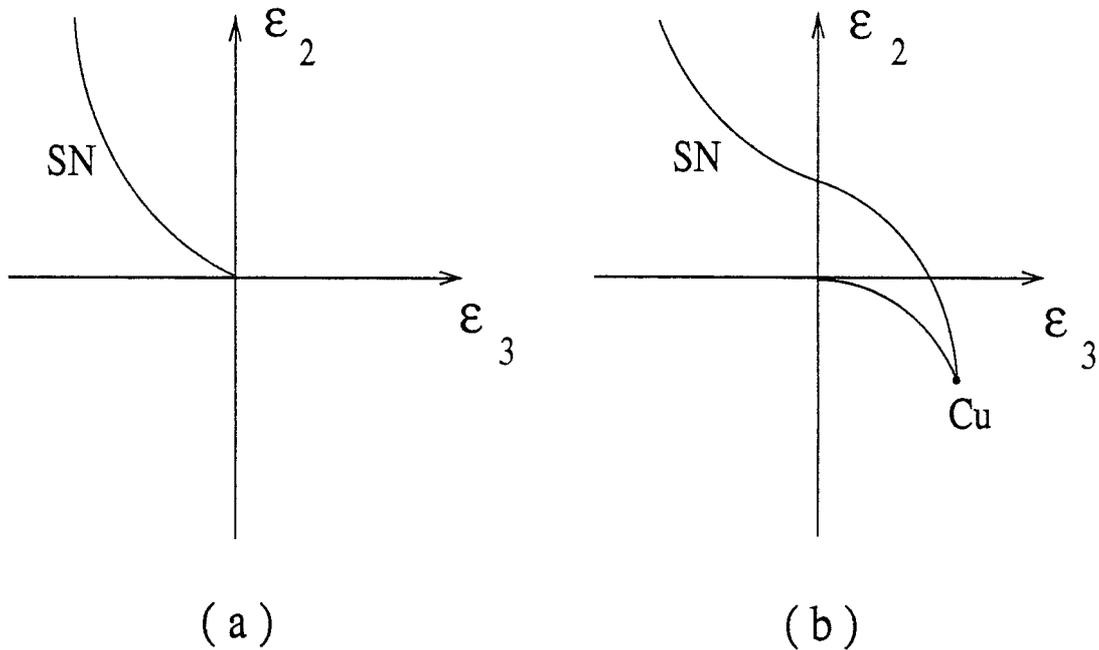


Figura 3.3.5: Conjunto de bifurcaciones en el espacio de parámetros  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_5)$  para la forma normal de la bifurcación de Hopf del origen de orden siete. Se muestran las curvas de silla-nodo ( $SN$ ) y el punto de cúspide ( $Cu$ ) para: (a)  $\varepsilon_5 > 0$  y (b)  $\varepsilon_5 < 0$ . Las coordenadas de  $Cu$  vienen dadas por  $(\frac{1}{3}\varepsilon_5^2, \frac{1}{27}\varepsilon_5^3)$ . En (c) se muestra la proyección sobre el plano  $(\varepsilon_5, \varepsilon_3)$  de la curva de cúspides, dada por la ecuación  $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}\varepsilon_5^2, \varepsilon_5 < 0$ .

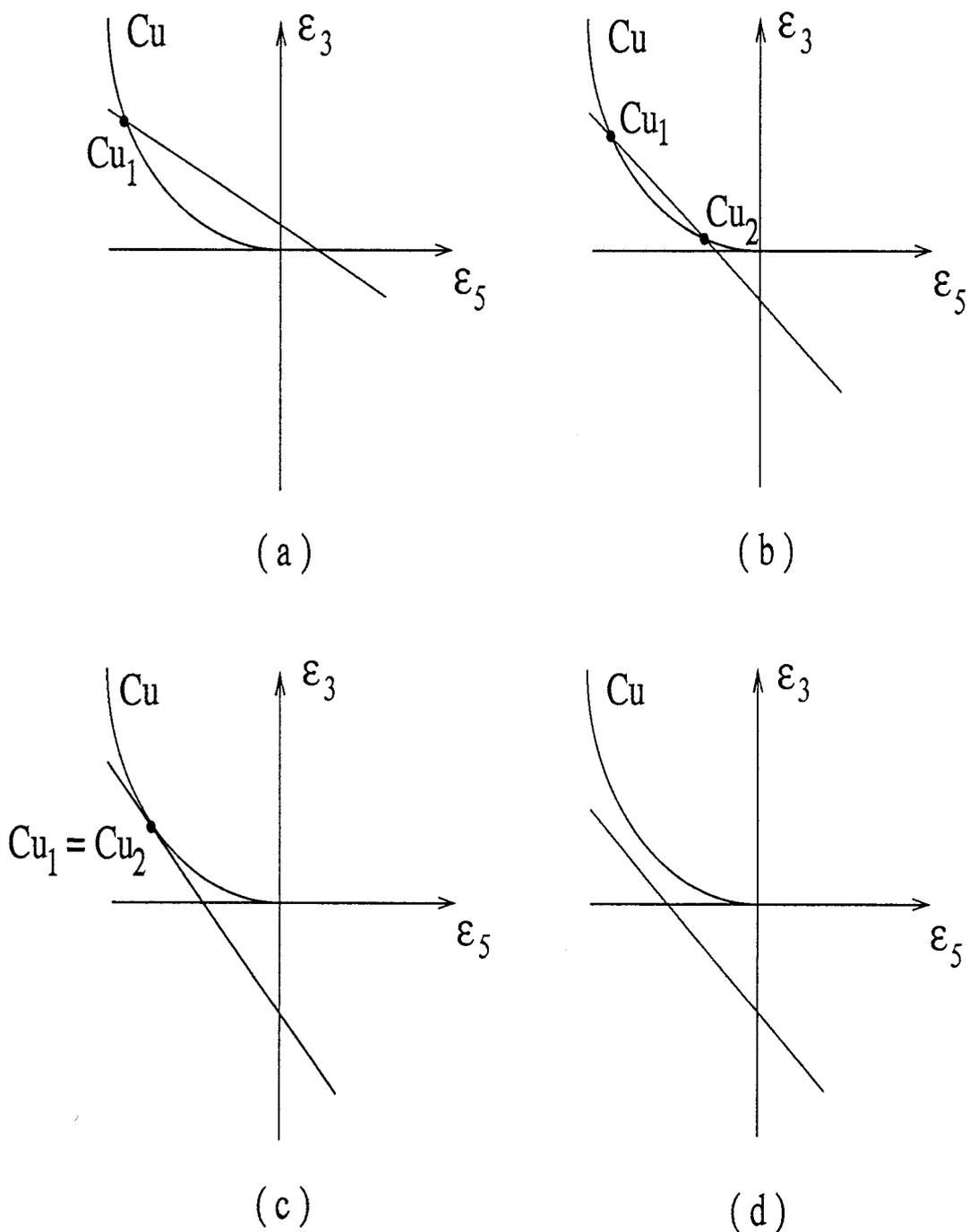


Figura 3.3.6: Posiciones relativas de la recta  $\epsilon_5 = \epsilon_4 + c\epsilon_3$  respecto de la curva de cúspides ( $Cu$ ) en el plano  $(\epsilon_3, \epsilon_5)$  para: (a)  $\epsilon_4 > 0$ ; (b)  $\frac{3}{4c} < \epsilon_4 < 0$ ; (c)  $\epsilon_4 = \frac{3}{4c}$ ; (d)  $\epsilon_4 < \frac{3}{4c}$ .

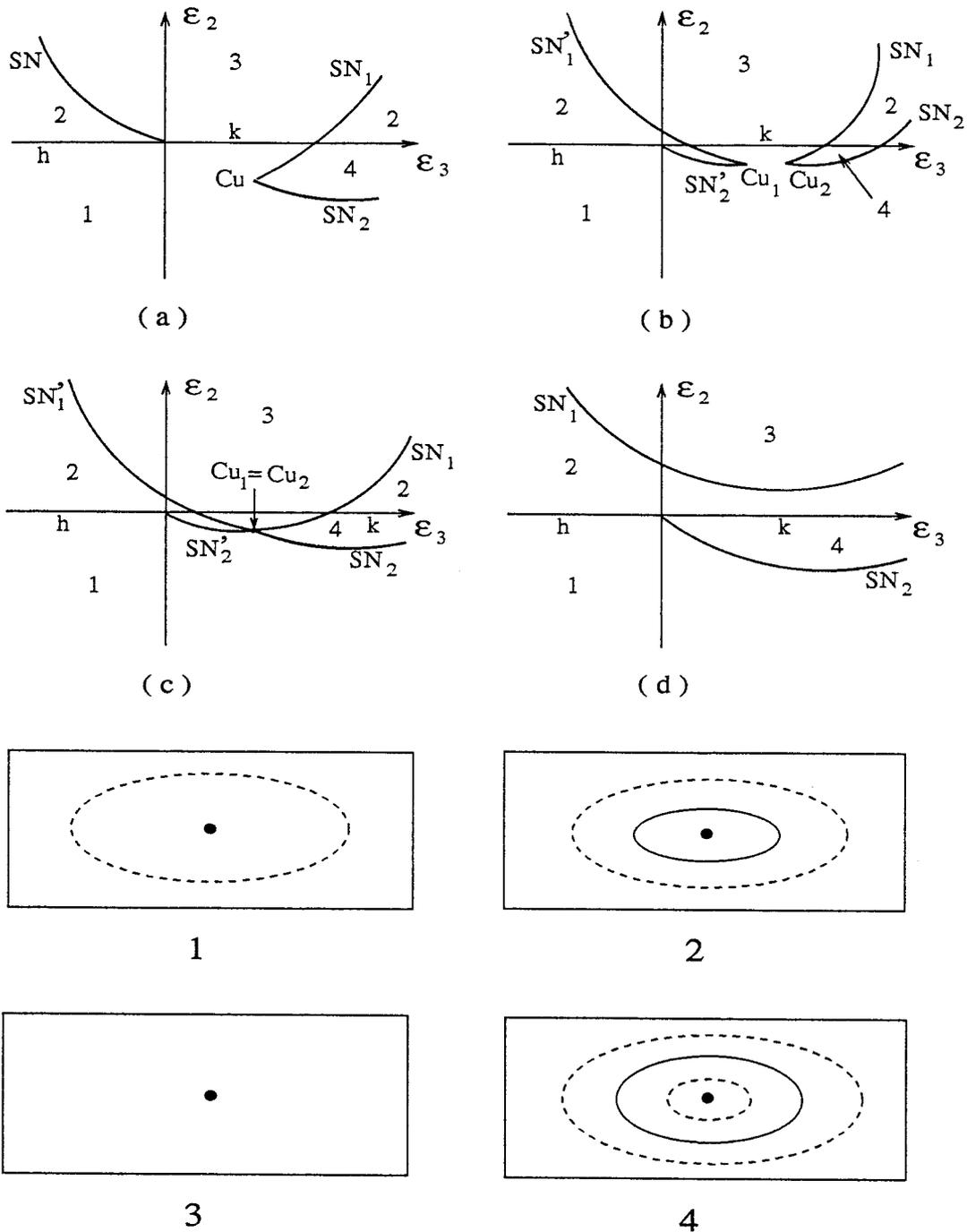


Figura 3.3.7: Conjunto de bifurcaciones en el espacio de parámetros  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$  para la forma normal de la bifurcación de Hopf del origen de orden siete. Los diferentes símbolos están explicados en el texto (a excepción de  $h$  y  $k$ , que representan las curvas de Hopf supercrítica y subcrítica, respectivamente). Los números hacen referencia a los retratos de fases mostrados en la parte inferior. (a)  $\varepsilon_4 > 0$ ; (b)  $\frac{15K}{8}\varepsilon_1 < \varepsilon_4 < 0$ ; (c)  $\varepsilon_4 = \frac{15K}{8}\varepsilon_1$ ; (d)  $\varepsilon_4 < \frac{15K}{8}\varepsilon_1$ .

de cúspide  $Cu_1$  y  $Cu_2$  viene dada por la parametrización

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \frac{27}{256} \frac{512\varepsilon_1^6 - 192\varepsilon_1^4 - 24\varepsilon_1^2 + 1}{\varepsilon_1^3} \\ \varepsilon_3 = \frac{3}{2} \\ \varepsilon_4 = \frac{15}{8} K\varepsilon_1 \end{cases}$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ .

Un estudio más completo (no local) de las bifurcaciones silla-nodo y cúspides de órbitas periódicas será llevado a cabo más adelante, cuando realicemos un análisis semiglobal.

Vamos a considerar la bifurcación que ocurre al intersecar la curva de Hopf del origen con la de pitchfork, es decir, para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Nos encontramos entonces, para el origen de coordenadas, con una matriz de la forma

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dando lugar a una bifurcación de Takens–Bogdanov, que es no degenerada si  $\varepsilon_3, \varepsilon_4 \neq 0$ . Las anulaciones de  $\varepsilon_3$ , por una parte, y  $\varepsilon_3$  y  $\varepsilon_4$ , simultáneamente, por otra, darán lugar a bifurcaciones degeneradas de Takens–Bogdanov de codimensiones tres y cuatro, respectivamente.

Por último, analizamos la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, es decir, los situados en  $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ . La matriz de la linealización en estos equilibrios adopta la forma

$$J(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon_1 & \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + K\varepsilon_1^3 \end{pmatrix}$$

con lo que el polinomio característico es en nuestro caso

$$\lambda^2 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + K\varepsilon_1^3)\lambda + 2\varepsilon_1 = 0$$

La bifurcación se dará para  $\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + K\varepsilon_1^3 = 0$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ). Para su estudio elegimos nuevamente a  $\varepsilon_2$  como parámetro de bifurcación,  $\eta = \varepsilon_2 - \varepsilon_{2c} =$

$\varepsilon_2 - (-\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_4\varepsilon_1^2 - K\varepsilon_1^3)$ , tras comprobar, de forma análoga a como hicimos para el origen, que se verifica la condición de transversalidad

$$\operatorname{re} \left[ \frac{d\lambda}{d\eta}(\eta = 0) \right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

En lo que resta, nos limitamos a analizar el equilibrio  $(-\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ , siendo análogo el estudio para  $(+\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ . Comenzamos trasladando dicho equilibrio al origen mediante  $\bar{x} = x + \sqrt{\varepsilon_1}$ ,  $\bar{y} = y$ . Teniendo en cuenta que  $\varepsilon_1 = \frac{\omega_0^2}{2}$  y que podemos suponer  $\eta = 0$ , nos basta escalar con  $\bar{x} = x^*$ ,  $\bar{y} = -\omega_0 y^*$  para llegar a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_1 x^{*2} + A_2 x^* y^* + A_3 x^{*3} + \\ + A_4 x^{*2} y^* + A_5 x^{*3} y^* + A_6 x^{*4} y^* + \\ + A_7 x^{*5} y^* + K x^{*6} y^* \end{pmatrix}$$

donde

$$A_1 = \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

$$A_2 = 2 - \sqrt{2}\omega_0 \left( \varepsilon_3 + \omega_0^2 \varepsilon_4 + \frac{3K\omega_0^4}{4} \right)$$

$$A_3 = \frac{1}{\omega_0}$$

$$A_4 = \left( \varepsilon_3 + 3\omega_0^2 \varepsilon_4 + \frac{15K\omega_0^4}{4} \right)$$

$$A_5 = -2\sqrt{2}\omega_0 \left( \varepsilon_4 + \frac{5}{2}K\omega_0^2 \right)$$

$$A_6 = \left( \varepsilon_4 + \frac{15}{2}K\omega_0^2 \right)$$

$$A_7 = -6K \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Tenemos ya el sistema en la forma estándar para poder aplicar nuevamente el algoritmo que calcula la forma normal de la bifurcación de Hopf (vid. [38]). En este caso obtenemos, hasta orden siete,

$$\dot{r} = \frac{\eta}{2}r + a_1 r^2 + a_2 r^5 + a_3 r^7$$

siendo los coeficientes

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{16}K\omega_0^4 - \frac{1}{4}\varepsilon_3 \quad (\text{en el supuesto de traza cero}), \\ a_2 &= -\frac{1}{4}\varepsilon_4 - \frac{5}{8}K\omega_0^2 \quad (\text{en el supuesto de traza cero y } a_1 = 0), \\ a_3 &= \frac{5}{16}K \quad (\text{en el supuesto de traza cero, } a_1 = 0 \text{ y } a_2 = 0). \end{aligned}$$

Por tanto, la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, que se da para

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + K\varepsilon_1^3 = 0 \quad (\varepsilon_1 > 0), \quad (3.3.19)$$

es supercrítica para  $\varepsilon_3 > 12K\varepsilon_1^4$  y subcrítica para  $\varepsilon_3 < 12K\varepsilon_1^4$ . La degeneración que aparece para  $\varepsilon_3 = 12K\varepsilon_1^4$  trae consigo la aparición de una bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas. En el caso  $\varepsilon_3 = 12K\varepsilon_1^4$  y  $\varepsilon_4 = -5K\varepsilon_1$  aparece una degeneración adicional que da lugar a la aparición de una bifurcación de cúspides de órbitas periódicas. Ambas bifurcaciones, de silla-nodo y cúspides de órbitas periódicas, admiten un estudio local análogo al realizado antes con motivo del estudio de la bifurcación de Hopf del origen. Un cálculo directo muestra que también en este caso se verifican las condiciones de transversalidad para las bifurcaciones de codimensión dos y tres, respectivamente. Al ser el coeficiente de  $r^7$  no nulo no hay posibilidad de degeneraciones adicionales.

Por último, la obtención de las variedades donde ocurren bifurcaciones de Takens-Bogdanov y sus degeneraciones (junto a la verificación de las correspondientes condiciones de transversalidad) es inmediato a partir de (3.3.13).

Esto completa la demostración. ■

Vamos a describir en el próximo teorema, mediante un análisis semiglobal, las bifurcaciones homoclinas y de órbitas periódicas del sistema (3.3.13).

Para ello realizamos previamente sobre (3.3.13) el siguiente escalado

$$\begin{aligned}
 x &\mapsto \varepsilon^{\frac{1}{5}} x & \varepsilon_1 &= \varepsilon^{\frac{2}{5}} \mu_1 & t &\mapsto \varepsilon^{-\frac{1}{5}} t \\
 y &\mapsto \varepsilon^{\frac{2}{5}} y & \varepsilon_2 &= \varepsilon^{\frac{6}{5}} \mu_2 \\
 & & \varepsilon_3 &= \varepsilon^{\frac{4}{5}} \mu_3 \\
 & & \varepsilon_4 &= \varepsilon^{\frac{2}{5}} \mu_4
 \end{aligned}
 \tag{3.3.20}$$

que lo transforma en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 x - x^3 + \varepsilon (\mu_2 y + \mu_3 x^2 y + \mu_4 x^4 y + K x^6 y) \end{cases}
 \tag{3.3.21}$$

que consta de un campo vectorial hamiltoniano y de una pequeña perturbación. Hacemos  $\mu_1 = 1$ , puesto que estamos interesados en la zona de parámetros donde existen conexiones homoclinas, con lo que vamos a perturbar el sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}
 \tag{3.3.22}$$

Este sistema procede de la función de Hamilton

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

Las curvas  $H(x, y) = e$  (con  $e$  constante) determinan las órbitas de (3.3.22), donde  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$  especifica el nivel de energía del sistema hamiltoniano. Es fácil comprobar que (3.3.22) presenta tres equilibrios: un punto de silla en el origen y dos centros en  $(\pm 1, 0)$ . Dependiendo de los valores de  $e$  tenemos una órbita cerrada rodeando a los tres equilibrios ( $e > 0$ ) o un par de órbitas cerradas rodeando cada una a uno de los equilibrios no triviales ( $-\frac{1}{4} < e < 0$ ). Para  $e = -\frac{1}{4}$  obtenemos dichos equilibrios y para  $e = 0$  el punto de silla del origen y una órbita homoclina doble que conecta dicho punto consigo mismo y que se puede parametrizar mediante

$$\begin{cases} x(t) = \pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t \\ y(t) = \pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t \operatorname{th} t \end{cases}
 \tag{3.3.23}$$

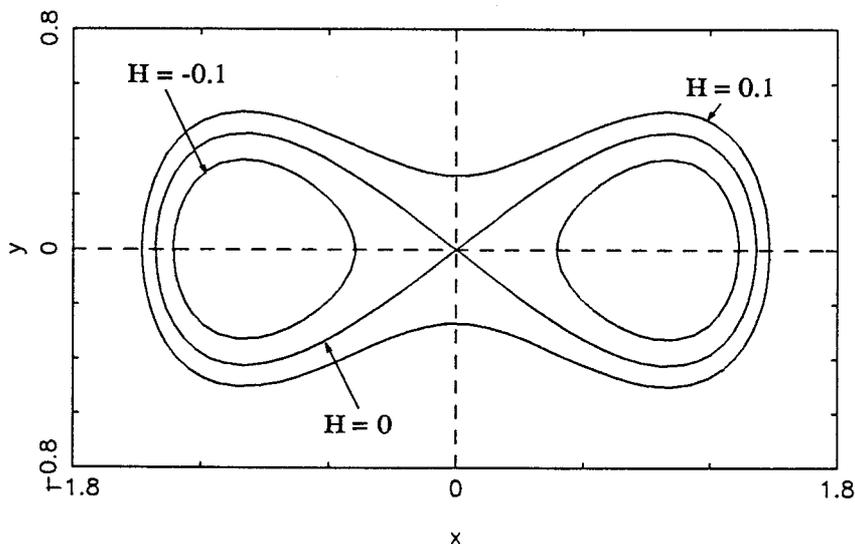


Figura 3.3.8: Retrato de fases del sistema hamiltoniano.

El retrato de fases de (3.3.22) aparece en la figura 3.3.8.

Introducimos seguidamente la función de Melnikov,  $M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ , para  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ , que verifica:

- es analítica para  $e \neq 0$ ;
- admite un desarrollo asintótico en un entorno de  $e = 0$  (vid. [94]) de la forma

$$M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = c_0 + c_1 e \log(e) + c_2 e + c_3 e^2 \log(e) + o(e^2 \log(e)) \quad (3.3.24)$$

En cualquiera de los casos anteriores, la función de Melnikov viene dada por

$$\begin{aligned} M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \mu_2 \int_{H=e} y^2(t) dt + \mu_3 \int_{H=e} x^2(t)y^2(t) dt + \\ &+ \mu_4 \int_{H=e} x^4(t)y^2(t) dt + \\ &+ K \int_{H=e} x^6(t)y^2(t) dt \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Si en vez de parametrizar las integrales de línea por el tiempo  $t$  lo hacemos

con las variables espaciales, usando  $dt = \frac{dx}{y}$ , podemos escribir (3.3.25) como

$$\begin{aligned}
 M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \mu_2 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_0 \cdot d\vec{\alpha} + \mu_3 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{\alpha} + \\
 &+ \mu_4 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_4 \cdot d\vec{\alpha} + K \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_6 \cdot d\vec{\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.26}$$

donde las funciones vectoriales cuyas integrales de línea calculamos a lo largo de las órbitas cerradas  $\gamma(e)$  ( $\gamma(e)$  es la órbita  $H = e$ ) vienen definidas por  $\vec{\omega}_i(x, y) = (x^i y, 0)$ ,  $i = 0, 2, 4, 6$ . El vector  $d\vec{\alpha}$  representa a  $(dx, dy)$ . Si llamamos

$$I_n(e) = \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_n \cdot d\vec{\alpha}, \quad n \geq 0
 \tag{3.3.27}$$

se verifica el siguiente resultado.

**Lema 3.3.2** *La función  $I_n(e)$  verifica la ley de recurrencia*

$$I_n(e) = 4 \frac{n-3}{n+3} e I_{n-4}(e) + \frac{2n}{n+3} I_{n-2}(e)$$

para  $n \geq 4$ .

DEMOSTRACIÓN:

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_n &= 4 \frac{n+3}{n-3} \vec{\omega}_{n-4} H(x, y) + 2 \frac{n}{n+3} \vec{\omega}_{n-2} - \\
 &- 2 \frac{1}{n+3} \nabla(x^{n-3}y^3) + 6 \frac{1}{n+3} x^{n-3}y \nabla(H(x, y))
 \end{aligned}$$

e integrando, se tiene el resultado. ■

Para el caso que ahora nos interesa, tenemos

$$\begin{aligned}
 I_6(e) &= \frac{4}{3} e I_2(e) + \frac{4}{3} I_4(e) \\
 I_4(e) &= \frac{4}{7} e I_0(e) + \frac{8}{7} I_2(e)
 \end{aligned}$$

de donde

$$I_6(e) = \left(\frac{4}{3}e + \frac{32}{27}\right) I_2(e) + \frac{16}{21} e I_0(e)$$

De esta forma, la función de Melnikov (3.3.26) se convierte en

$$\begin{aligned} M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \left[ \mu_2 + \frac{4}{7}e \left( \mu_4 + \frac{4}{3}K \right) \right] I_0(e) + \\ &+ \left[ \mu_3 + \frac{4}{3}K e + \frac{8}{7} \left( \mu_4 + \frac{4}{3}K \right) \right] I_2(e) \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Introducimos ahora la función

$$R(e) = \frac{I_2(e)}{I_0(e)} \quad (3.3.29)$$

(para un estudio completo de la función  $R(e)$  y sus derivadas, vid., e.g., [88] y [95]) con lo que (3.3.28) se puede escribir, puesto que  $I_0(e) \neq 0$ , como

$$\begin{aligned} M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= I_0(e) \left\{ \mu_2 + \frac{4}{7}e \left( \mu_4 + \frac{4}{3}K \right) + \right. \\ &+ \left. \left[ \mu_3 + \frac{4}{3}K e + \frac{8}{7} \left( \mu_4 + \frac{4}{3}K \right) \right] R(e) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Estamos ya en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.3** *El sistema (3.3.13) experimenta, a primer orden, una bifurcación de:*

1. *órbitas homoclinas de codimensión:*

(a) *uno, en la hipersuperficie*

$$\varepsilon_2 + \frac{4}{5}\varepsilon_1\varepsilon_3 + \frac{32}{35}\varepsilon_4\varepsilon_1^2 + \frac{128}{105}K\varepsilon_1^3 = 0$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(b) *dos, en la superficie*

$$\varepsilon_1\varepsilon_3 + \frac{8}{7}\varepsilon_4\varepsilon_1^2 + \frac{32}{21}K\varepsilon_1^3 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(c) tres, en la curva

$$\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = \frac{32}{15}\varepsilon_1^2 K, \quad \varepsilon_4 = -\frac{16}{5}\varepsilon_1 K$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ ;

2. ciclos límite múltiples de orden:

(a) dos, en la hipersuperficie

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \frac{4}{7} \left( \frac{R(e)}{R'(e)} - e \right) \varepsilon_4 \varepsilon_1^2 - \frac{4}{3} K \varepsilon_1^3 \left[ \frac{R(e)}{R'(e)} \left( \frac{4}{7} + R(e) \right) - \frac{4}{7} e \right] \\ \varepsilon_3 = -\frac{4}{7} \left( 2 + \frac{1}{R'(e)} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \\ - \frac{4}{3} K \left[ e + \frac{8}{7} + \frac{1}{R'(e)} \left( \frac{4}{7} + R(e) \right) \right] \varepsilon_1^2 \end{cases}$$

para  $e \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$ ,  $e \neq 0$  y  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(b) tres, en la superficie

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \frac{4}{3} K \left[ 2R'(e) \frac{R(e) - eR'(e)}{R''(e)} + eR(e) \right] \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_3 = \frac{4}{3} K \left[ (2R(e) - e) - \frac{2R'(e)(1 + 2R'(e))}{R''(e)} \right] \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_4 = K \left[ -\frac{4}{3} + \frac{14(R'(e))^2}{R''(e)} - \frac{7}{3} R(e) \right] \varepsilon_1 \end{cases}$$

para  $e \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$ ,  $e \neq 0$  y  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(c) cuatro, en la curva

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \mu_2^{(i)} \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_3 = \mu_3^{(i)} \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_4 = \mu_4^{(i)} \varepsilon_1 \end{cases} \quad i = 1, 2$$

para  $\varepsilon_1 < 0$  y para ciertos valores  $\mu_k^{(i)}$ ,  $k = 2, 3, 4$ ,  $i = 1, 2$ .

DEMOSTRACIÓN:

El método de Melnikov nos lleva, usando (3.3.23), a

$$\begin{aligned}
 M(0, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \left[ \mu_2 y(t) + \mu_3 x^2(t) y(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \mu_4 x^4(t) y(t) + K x^6(t) y(t) \right] dt = \\
 &= 2\mu_2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{th}^2 t dt + 4\mu_3 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 t \operatorname{th}^2 t dt + \\
 &\quad + 8\mu_4 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^6 t \operatorname{th}^2 t dt + 16K \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^8 t \operatorname{th}^2 t dt = \\
 &= \frac{4}{3} \left( \mu_2 + \frac{4}{5}\mu_3 + \frac{32}{35}\mu_4 + \frac{128}{105}K \right)
 \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\operatorname{sech}^2 t = 1 - \operatorname{th}^2 t$  y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{th}^m t dt = \frac{\operatorname{th}^{m+1} t}{m+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{m+1}$$

Anulando  $M(0, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$  (es decir, anulando el coeficiente  $c_0$  de (3.3.24)) obtenemos la siguiente curva de conexiones homoclinas en el espacio de parámetros  $(\mu_2, \mu_3, \mu_4)$  (para  $\mu_1 = 1$ )

$$\mu_2 + \frac{4}{5}\mu_3 + \frac{32}{35}\mu_4 + \frac{128}{105}K = 0$$

Usando el escalado definido en (3.3.20) llegamos a la siguiente hipersuperficie en el espacio de parámetros originales

$$\varepsilon_2 + \frac{4}{5}\varepsilon_1\varepsilon_3 + \frac{32}{35}\varepsilon_4\varepsilon_1^2 + \frac{128}{105}K\varepsilon_1^3 = 0, \quad (\varepsilon_1 > 0) \tag{3.3.31}$$

Dado que la traza de la matriz de la linealización en el origen vale  $\varepsilon_2$ , la homoclina pasará de ser repulsiva (si  $\varepsilon_2 > 0$ ) a atractiva (si  $\varepsilon_2 < 0$ ) apareciendo junto con la homoclina degenerada ( $\varepsilon_2 = 0$ ) dos superficies de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas (vid. [60] y [62]) que determinaremos más adelante.

La superficie de conexiones homoclinas degeneradas de codimensión dos viene dada por la ecuación que, en primera aproximación, obtenemos haciendo en (3.3.31)  $\varepsilon_2 = 0$  (se obtiene de manera equivalente anulando  $c_0$  y  $c_1$  de (3.3.24)).

$$\varepsilon_3 + \frac{8}{7}\varepsilon_4\varepsilon_1 + \frac{32}{21}K\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \quad (\varepsilon_1 > 0). \tag{3.3.32}$$

La bifurcación de órbitas homoclinas de codimensión tres ocurre si

$$\begin{cases} M(0, \mu_2, \mu_3, \mu_4) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial e} M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4)|_{e=0} & = 0 \end{cases} \quad (3.3.33)$$

y además  $\frac{\partial^2}{\partial e^2} M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4)|_{e=0}$  es infinita (de forma equivalente, si  $c_0, c_1, c_2 = 0$  y  $c_3 \neq 0$ ).

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado en (3.3.33) (para ello tenemos en cuenta que  $\lim_{e \rightarrow 0} R(e) = \frac{4}{5}$  y  $\lim_{e \rightarrow 0} R'(e) = -\infty$ ; vid. [88] y [95]) obtenemos la aproximación a la homoclina de codimensión tres dada por el punto  $(\mu_2, \mu_3, \mu_4) = (0, -\frac{32}{15}, \frac{16}{5})$  o, en términos de los parámetros originales, la curva parametrizada siguiente

$$\begin{cases} \varepsilon_2 & = 0 \\ \varepsilon_3 & = -\frac{32}{15}\varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_4 & = \frac{16}{5}\varepsilon_1 \end{cases} \quad (3.3.34)$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ .

En la figura 3.3.9 mostramos dos proyecciones, respectivamente, en dos planos del espacio de parámetros  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$  de la curva dada en (3.3.34) comparándola con la que hemos obtenido numéricamente introduciendo la condición  $EID = 1$  en el programa de continuación cuyas ideas describimos en el capítulo II. Obsérvese que, aunque el rango de parámetros es amplio, apenas se distingue la curva teórica de la numérica.

En cuanto a la determinación de las bifurcaciones de órbitas periódicas, teniendo en cuenta (3.3.30) la superficie de bifurcaciones silla-nodo (es decir, de

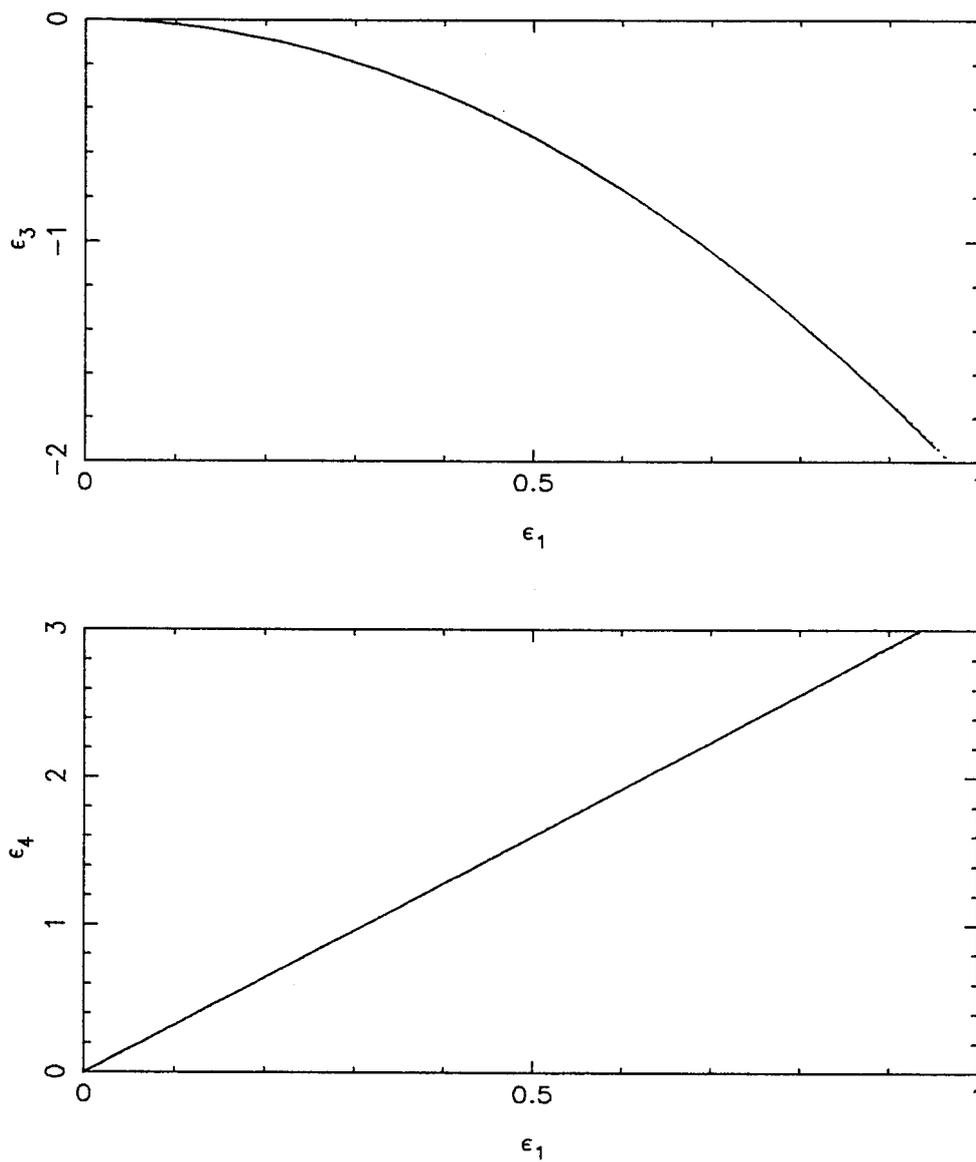


Figura 3.3.9: Proyecciones en dos planos paramétricos de las curvas de homoclinas de codimensión tres para la cúspide de orden cuatro. En trazo continuo la curva obtenida numéricamente y en trazo discontinuo la predicha por Melnikov ( $K = -1$ ).

ciclos límite dobles) viene dada por

$$\left\{ \begin{aligned} G(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \mu_2 + \left(\frac{4}{7}\mu_4 + \frac{16}{21}K\right)e + \\ &+ \left(\mu_3 + \frac{4}{3}Ke + \frac{8}{7}\mu_4 + \frac{32}{21}K\right)R(e) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial e}(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \frac{4}{7}\mu_4 + \frac{16}{21}K + \left(\mu_3 + \frac{4}{3}Ke + \frac{8}{7}\mu_4 + \frac{32}{21}K\right)R'(e) + \\ &+ \frac{4}{3}KR(e) = 0 \end{aligned} \right. \tag{3.3.35}$$

junto con la condición

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial e^2}(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \left(\mu_3 + \frac{4}{3}Ke + \frac{8}{7}\mu_4 + \frac{32}{21}K\right)R''(e) + \frac{8}{3}KR'(e) = \\ &= \frac{R''(e)}{R'(e)} [3\mu_4 + K(4 + 7R(e))] - 14KR'(e) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Por medio de (3.3.35) llegamos a la siguiente parametrización

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_3(e) &= -\left(\frac{8}{7}\mu_4 + \frac{4}{3}Ke + \frac{32}{21}K\right) - \\ &- \frac{1}{R'(e)} \left[\frac{4}{7}\mu_4 + \frac{4}{3}K\left(\frac{4}{7} + R(e)\right)\right] \\ \mu_2(e) &= \frac{R(e)}{R'(e)} \left[\frac{4}{7}\mu_4 + \frac{4}{3}K\left(\frac{4}{7} + R(e)\right)\right] - \\ &- \frac{4}{7}e\mu_4 - \frac{16}{21}Ke \end{aligned} \right. \tag{3.3.37}$$

para  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$  y válida siempre que se verifique (3.3.36). En términos de los parámetros originales, obtenemos la hipersuperficie de sillan-nodo dada en el enunciado del teorema.

Por otra parte, la curva de bifurcación de cúspides de órbitas periódicas (es

decir, de ciclos límite triples) viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} G(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = \mu_2 + \left( \frac{4}{7}\mu_4 + \frac{16}{21}K \right) e + \\ \quad + \left( \mu_3 + \frac{4}{3}K e + \frac{8}{7}\mu_4 + \frac{32}{21}K \right) R(e) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial e}(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = \frac{4}{7}\mu_4 + \frac{16}{21}K \left( \mu_3 + \frac{4}{3}K e + \frac{8}{7}\mu_4 + \frac{32}{21}K \right) R'(e) + \\ \quad + \frac{4}{3}KR(e) = 0 \\ \frac{\partial^2 G}{\partial e^2}(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = \left( \mu_3 + \frac{4}{3}K e + \frac{8}{7}\mu_4 + \frac{32}{21}K \right) R''(e) + \frac{8}{3}KR'(e) = 0 \end{array} \right. \quad (3.3.38)$$

junto con la condición

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 G}{\partial e^3}(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \left( \mu_3 + \frac{4}{3}K e + \frac{8}{7}\mu_4 + \frac{32}{21}K \right) R'''(e) + 4KR''(e) = \\ &= \frac{4K}{R''(e)} \left[ 3(R''(e))^2 - 2R'(e)R'''(e) \right] \neq 0 \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

De (3.3.38) obtenemos la parametrización

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_4(e) = K \left[ -\frac{4}{3} + \frac{14(R'(e))^2}{R''(e)} - \frac{7}{3}R(e) \right] \\ \mu_3(e) = \frac{4}{3}K \left[ 2R(e) - e - \frac{2R'(e)(1+2R'(e))}{R''(e)} \right] \\ \mu_2(e) = \frac{4}{3}K \left[ 2R'(e) \frac{R(e) - eR'(e)}{R''(e)} + eR(e) \right] \end{array} \right. \quad (3.3.40)$$

para  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$  y válida siempre que se verifique (3.3.39). De nuevo, en términos de los parámetros originales, obtenemos la superficie de puntos de cúspide dada en el enunciado del teorema.

Aquellos puntos situados sobre la curva de cúspides dada en (3.3.40) que verifican, además,  $\frac{\partial^3 G}{\partial e^3}(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = 0$  y  $\frac{\partial^4 G}{\partial e^4}(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \neq 0$  constituyen los ciclos límite de orden cuatro (el conjunto de bifurcaciones en el entorno de un punto del espacio de parámetros correspondiente a un ciclo límite de orden cuatro es homeomorfo a la *catástrofe de swallowtail* [es decir, de *cola de milano*]). Para

determinar dichos puntos obtenemos numéricamente los valores aproximados

$$e_1 \approx 0.904$$

$$e_2 \approx 0.01692671$$

de donde se tienen los valores:

- para  $e = e_1$ ,

$$\begin{aligned} \mu_2^{(1)} &= -5.384684 \\ \mu_3^{(1)} &= 14.311754 \\ \mu_4^{(1)} &= -7.121543 \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

- para  $e = e_2$ ,

$$\begin{aligned} \mu_2^{(2)} &= -0.031857 \\ \mu_3^{(2)} &= 1.989132 \\ \mu_4^{(2)} &= -3.038870 \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

o, en términos de los parámetros originales, obtenemos la curva de puntos de *swallowtails* o ciclos límite de orden cuatro dada en el enunciado del teorema.

Con esto completamos la demostración. ■

Para la obtención de las diversas figuras que vamos a mostrar y a comentar a continuación, hemos hecho uso del estudio de la función  $R(e)$  y sus derivadas realizado en [88].

En primer lugar, mostramos en la figura 3.3.10 la gráfica de la función derivada segunda (con respecto de  $e$ ) de  $G(e) \stackrel{def}{=} G(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ , cuya anulación nos da los puntos de cúspide de órbitas periódicas. Exhibimos las tres posibilidades que existen: ninguna, una o dos cúspides.

En la figura 3.3.11 aparecen las curvas de cúspides proyectadas en los planos  $(e, \varepsilon_i)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , respectivamente, obtenidas al intersecar las superficies de cúspides con el hiperplano  $\varepsilon_1 = 1$ .

En las figuras 3.3.12–3.3.14 mostramos las intersecciones de la hipersuperficie de sillanudo con tres superficies:  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_4 = -9$  (en la que aparecen dos puntos

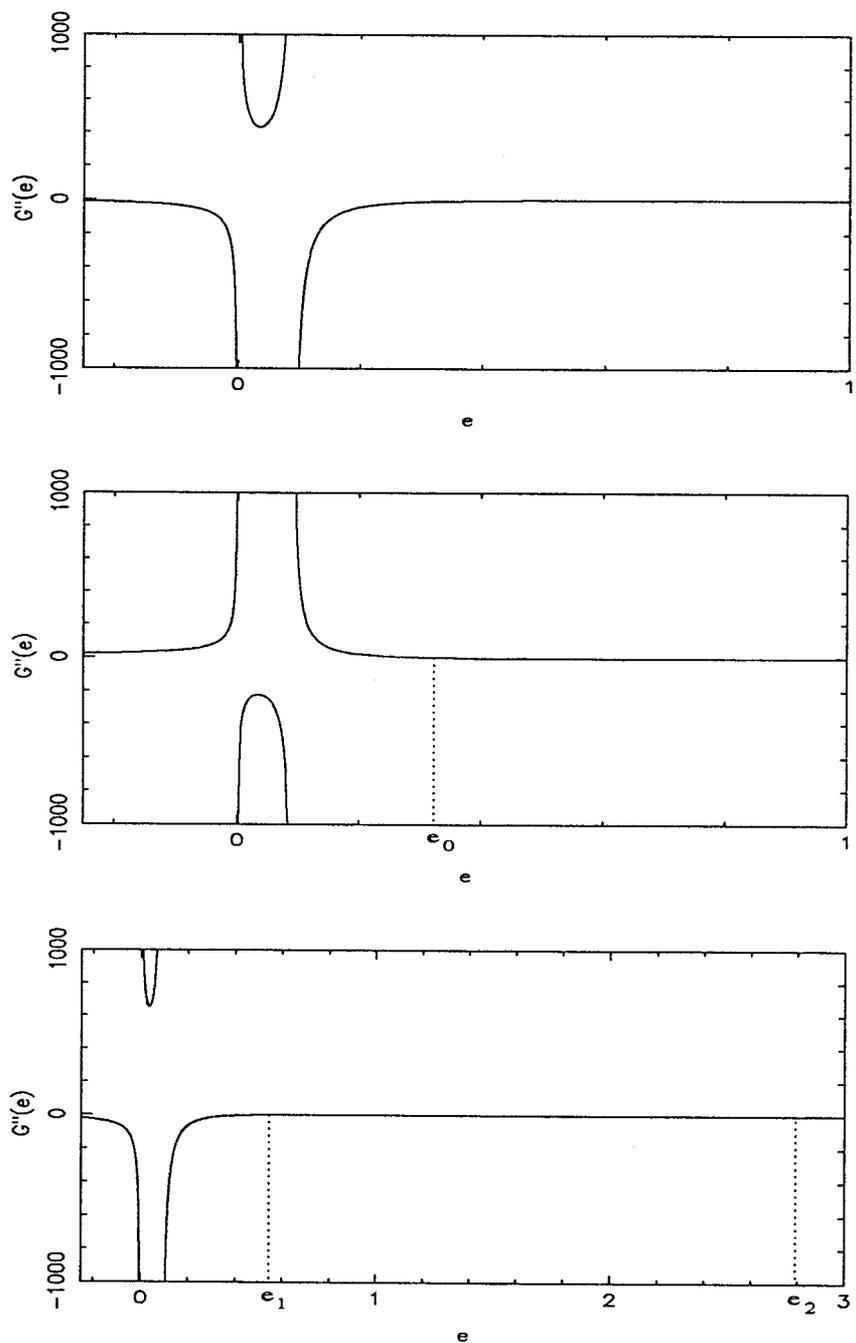


Figura 3.3.10: Gráfica de la función  $G'''(e)$  en los tres casos que se pueden presentar ( $K = 1$ ): (a) la función no tiene ningún cero (la figura ha sido obtenida tomando  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_4 = -7$ ); (b) tiene un único cero (en  $e_0 \approx 0.322$ , para  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_4 = -1$ ) y (c) tiene dos ceros (en  $e_1 \approx 0.543$  y  $e_2 \approx 2.792$ , para  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_4 = -9$ ).

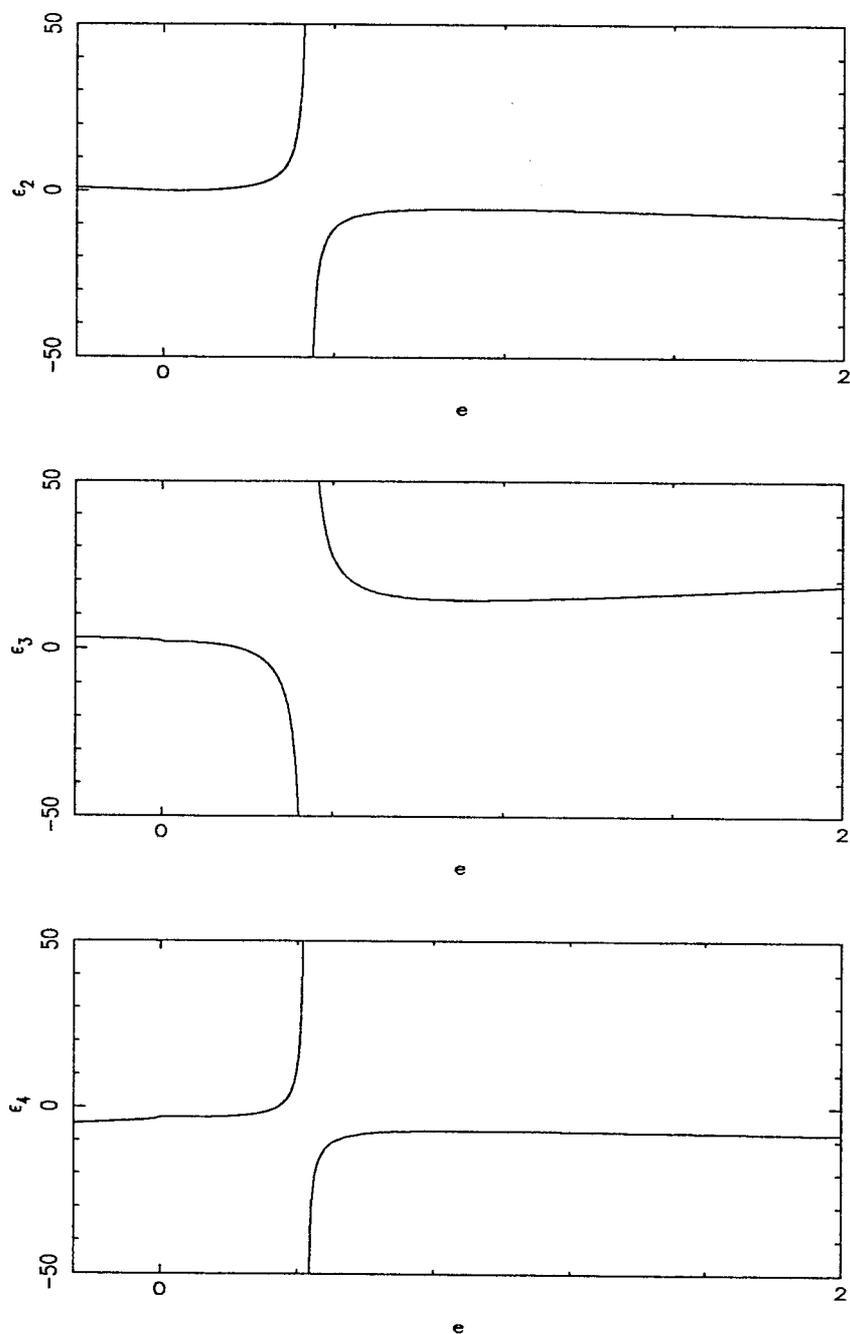


Figura 3.3.11: Diversas proyecciones de las curvas de cúspides de órbitas periódicas en el caso  $\epsilon_1 = 1$  ( $K = 1$ ).

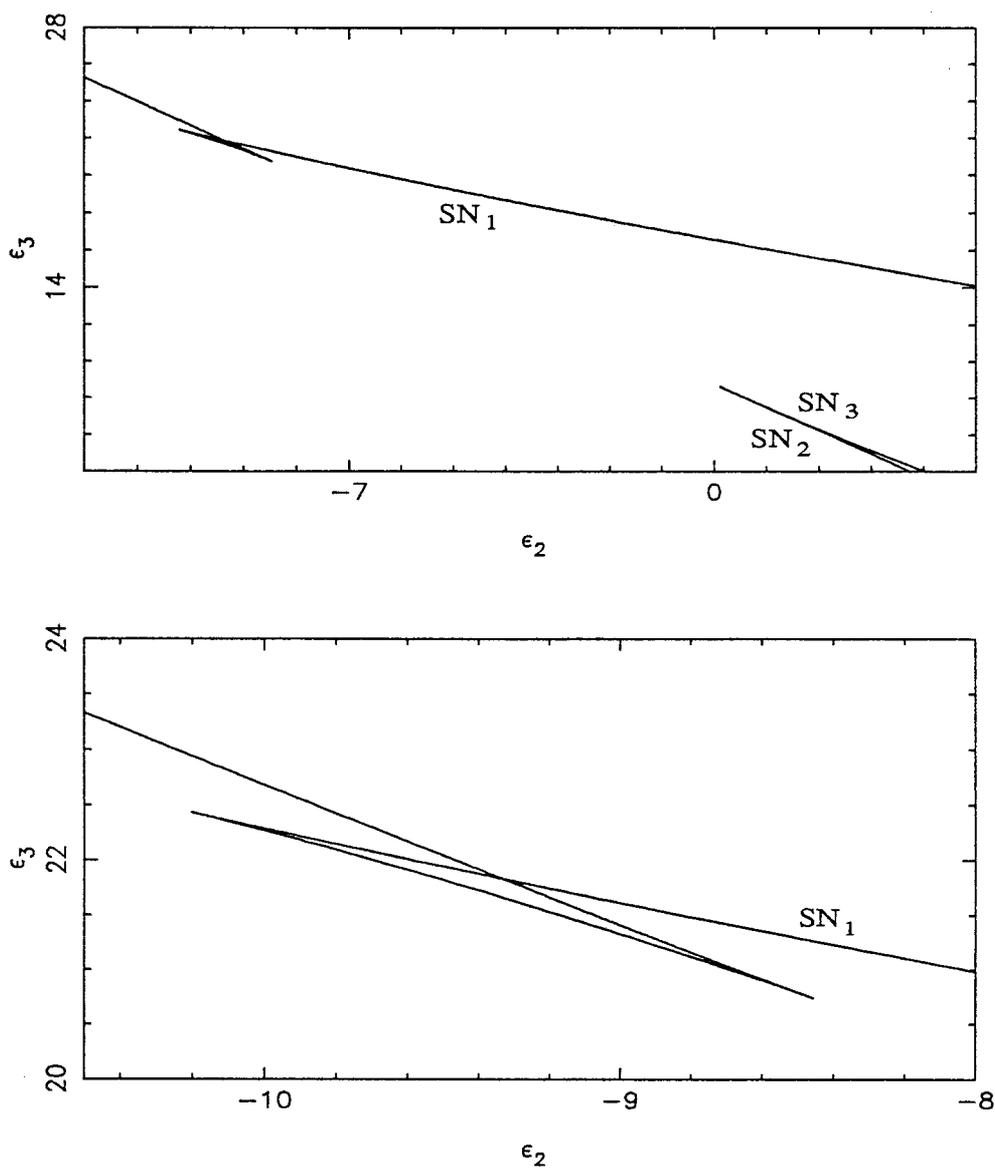


Figura 3.3.12: (a) Curvas de sillan-nodo de órbitas periódicas para  $\epsilon_1 = 1$  y  $\epsilon_4 = -9$  (aparecen dos cúspides) ( $K = 1$ ). (b) Detalle de la figura anterior.

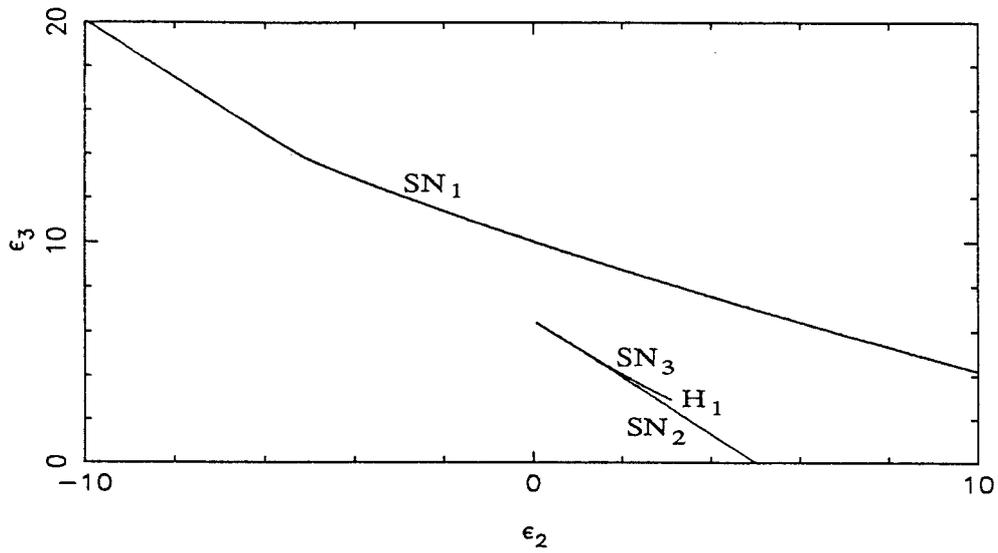


Figura 3.3.13: Curvas de sillan-nodo de órbitas periódicas para  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_4 = -7$  (no aparecen cúspides) ( $K = 1$ ).

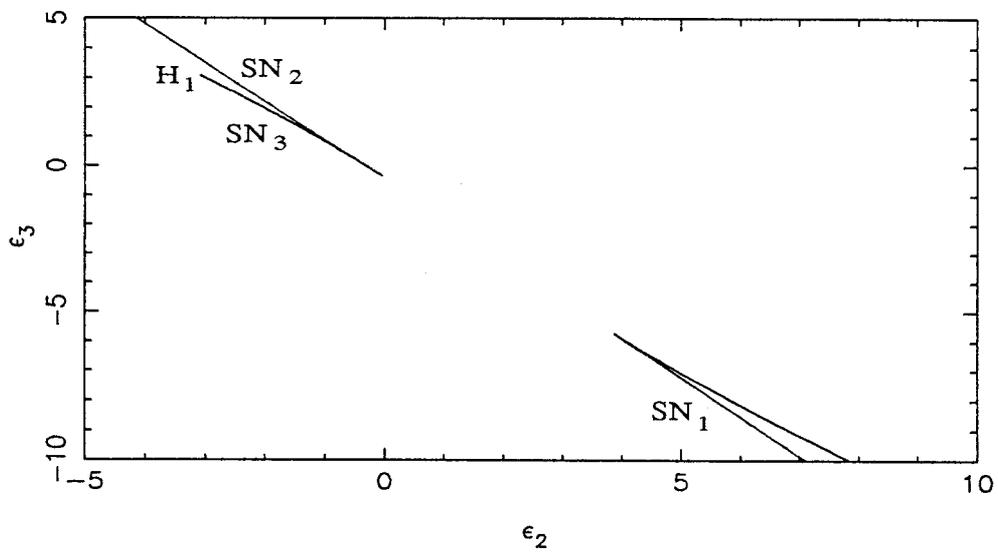


Figura 3.3.14: Curvas de sillan-nodo de órbitas periódicas para  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_4 = -1$  (aparece una única cúspide) ( $K = 1$ ).

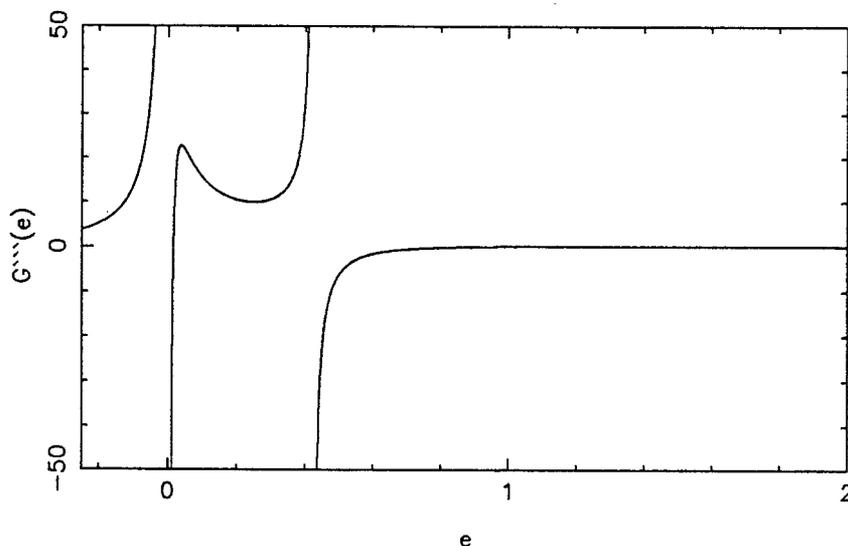


Figura 3.3.15: Gráfica de la función  $G'''(e)$  en el supuesto  $G(e) = G'(e) = G''(e) = 0$ . Sus ceros corresponden a puntos de *swallowtail*, es decir, a ciclos límite de orden cuatro ( $\varepsilon_1 = 1, K = 1$ ).

de cúspide), junto a un detalle que amplía la zona que presenta las dos cúspides, en la figura 3.3.12;  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_4 = -1$  (en la que aparece un único punto de cúspide) en la figura 3.3.13 y  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_4 = -7$  (en la que no aparece ningún punto de cúspide) en la figura 3.3.14. Podemos observar cómo la curva de sillas-nodo  $SN_1$  es, en los dos primeros casos, una sección de la catástrofe de *swallowtail*.  $SN_3$  es la curva de sillas-nodo de órbitas pequeñas que nace del punto de Hopf degenerado ( $H_1$ ). Esta curva se une con la curva de sillas-nodo de órbitas grandes,  $SN_2$ , en el punto donde la homoclina cambia de estabilidad.

En la figura 3.3.15 representamos la gráfica de la función derivada tercera de  $G(e)$ , cuya anulación nos da los puntos de *swallowtail*, es decir, los ciclos límite de orden cuatro.

Por último, en la figura 3.3.16 mostramos dos proyecciones en dos planos paramétricos respectivos de las tres curvas de codimensión tres que hemos obtenido: la de Hopf, la de homoclinas doblemente degeneradas y la de ciclos límite de orden cuatro.

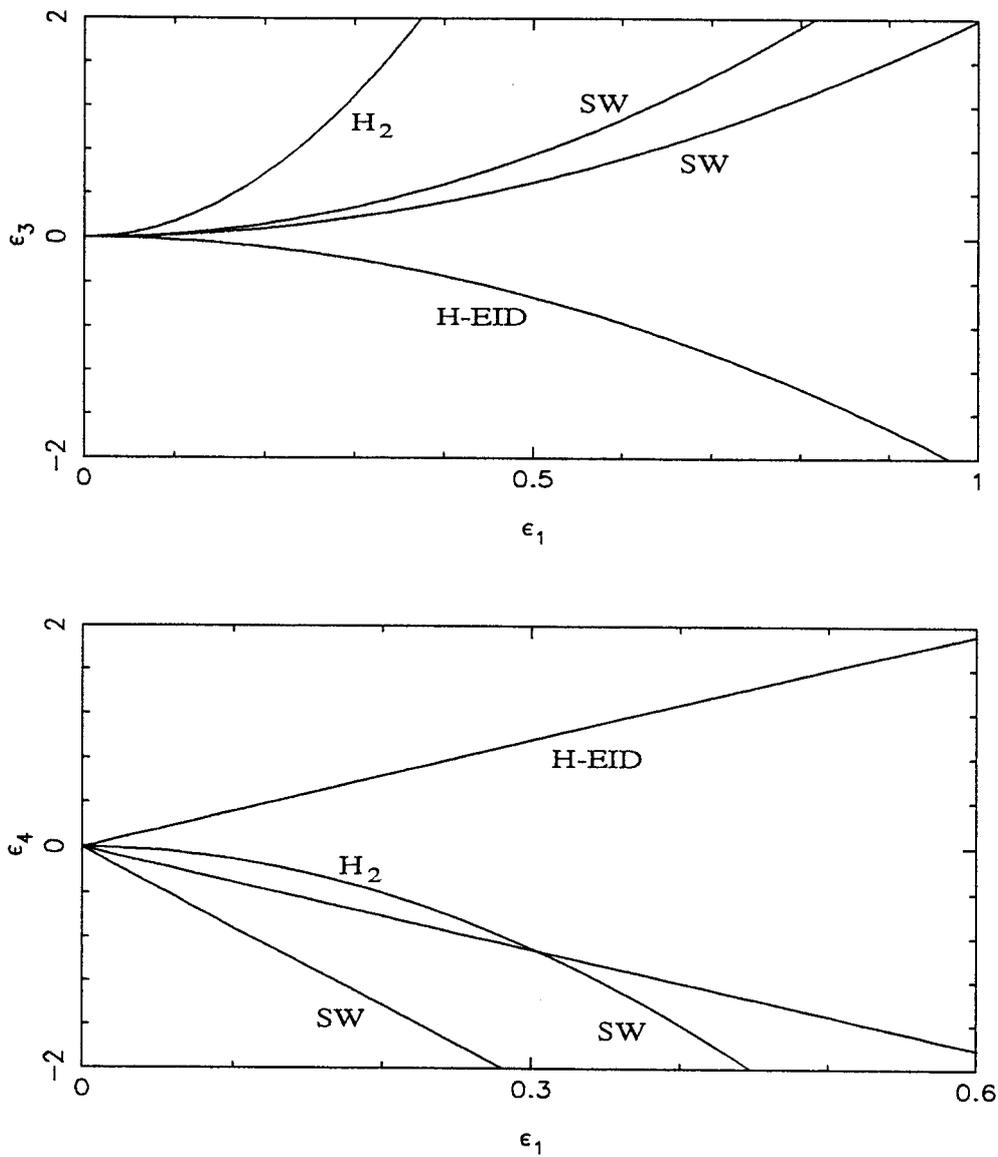


Figura 3.3.16: Proyecciones en dos planos paramétricos de las tres curvas de codimensión tres obtenidas para la cúspide de orden cuatro: Hopf de los equilibrios no triviales doblemente degenerada ( $H_2$ ), ciclos límite de orden cuatro ( $SW$ ) y homoclinas con traza cero y  $EID = 1$  ( $H - EID$ ) ( $K = 1$ ).

### 3.3.2 La Cúspide con Simetría de Orden Cinco

En esta subsección nos planteamos el estudio, análogo al realizado en la subsección anterior, de la cúspide con simetría de orden cinco dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_3x^3 + b_2x^8y + o(|x, y|^8) \end{cases} \quad (3.3.43)$$

con el siguiente desplegamiento en forma normal de Takens–Bogdanov

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1x + \varepsilon_2y + a_3x^3 + \varepsilon_3x^2y + a_5x^5 + \varepsilon_4x^4y + a_7x^7 + \\ + \varepsilon_5x^6y + a_9x^9 + b_2x^8y + o(|x, y|^9) \end{cases} \quad (3.3.44)$$

Veamos, en primer lugar, que los términos en  $x^5$ , en  $x^7$  y en  $x^9$  pueden ser eliminados.

**Lema 3.3.3** *El desplegamiento dado en (3.3.44) es  $C^\infty$ -equivalente a*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1x + \varepsilon_2y + a_3x^3 + \varepsilon_3x^2y + \varepsilon'_4x^4y + \\ + \varepsilon'_5x^6y + b'_2x^8y + o(|x, y|^9) \end{cases} \quad (3.3.45)$$

para ciertos coeficientes  $\varepsilon'_4, \varepsilon'_5$  y  $b'_2$ .

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar situamos (3.3.45) sobre el punto de cúspide, haciendo  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Después realizamos la  $C^\infty$ -equivalencia dada por la reparametrización del tiempo

$$t \mapsto (1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6) t$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{a_5}{2a_3} \\ \beta &= \frac{11a_5^2 - 15a_3a_7}{24a_3^2} \\ \gamma &= \frac{7}{10a_3} \left[ \frac{5}{21}\beta + \frac{5}{3}\frac{a_5}{a_3} \left( a_7 + \frac{113}{126}a_5\alpha \right) - a_9 \right] \end{aligned}$$

Al sistema transformado por la  $C^\infty$ -equivalencia le aplicamos el algoritmo desarrollado en [45] para el cálculo de los coeficientes de la forma normal de Takens–Bogdanov, obteniendo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_3x^3 + \varepsilon_3x^2y + \varepsilon'_4x^4y + \varepsilon'_5x^6y + b'_2x^8y + o(|x, y|^6) \end{cases} \quad (3.3.46)$$

donde los nuevos coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon'_4 &= \varepsilon_4 - \frac{5a_5\varepsilon_3}{6a_3} \\ \varepsilon'_5 &= \varepsilon_5 + \frac{-84a_5\varepsilon_4a_3 + 77a_5^2\varepsilon_3 - 63\varepsilon_3a_3a_7}{72a_3^2} \\ b'_2 &= b_2 + 3\alpha\varepsilon_5 + \frac{9}{5}\beta\varepsilon_4 + \frac{24}{7}\alpha\beta\varepsilon_3 + \\ &+ \frac{16}{5}\alpha^2\varepsilon_4 + \frac{88}{63}\alpha^3\varepsilon_3 + \frac{9}{7}\gamma\varepsilon_3 \end{aligned}$$

con lo que el lema queda demostrado. ■

Bajo condiciones de transversalidad (vid. [95]) el desplegamiento dado en (3.3.46) es  $C^0$ -equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_3x^3 + \varepsilon_3x^2y + \varepsilon'_4x^4y + \varepsilon'_5x^6y + b'_2x^8y \end{cases} \quad (3.3.47)$$

Un escalado adecuado nos lleva (3.3.47) al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon_1x + \varepsilon_2y - x^3 + \varepsilon_3x^2y + \varepsilon_4x^4y + \varepsilon_5x^6y + Kx^8y \end{cases} \quad (3.3.48)$$

donde  $K = \pm 1$  y su signo coincide con el de  $b'_2$ .

En el estudio de este sistema bidimensional bastará considerar el caso  $K = +1$ , pues el sistema es invariante al cambio

$$(x, y, t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, K) \longrightarrow (x, -y, -t, \varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3, -\varepsilon_4, -\varepsilon_5, -K)$$

con lo que el conjunto de bifurcaciones será similar en el caso  $K = -1$  (si bien habrá un cambio en la estabilidad).

En el siguiente teorema describimos el comportamiento local de bifurcaciones de (3.3.48), cuya demostración omitimos al ser análoga a la del teorema (3.3.2).

**Teorema 3.3.4** *El sistema (3.3.48) experimenta una bifurcación de:*

1. *pitchfork del origen en la hipersuperficie  $\varepsilon_1 = 0$ ;*
2. *Hopf del origen de codimensión:*
  - (a) *uno, en la hipersuperficie  $\varepsilon_2 = 0$  para  $\varepsilon_1 < 0$ ,*
  - (b) *dos, en la variedad tridimensional  $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0$  para  $\varepsilon_1 < 0$ ,*
  - (c) *tres, en la superficie  $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0, \varepsilon_4 = 0$  para  $\varepsilon_1 < 0$ ;*
  - (d) *cuatro, en la curva  $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0, \varepsilon_4 = 0, \varepsilon_5 = 0$  para  $\varepsilon_1 < 0$ ;*
3. *Hopf de los equilibrios no triviales (que nacen de la bifurcación de pitchfork) de codimensión:*
  - (a) *uno, en la hipersuperficie  $\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + \varepsilon_5\varepsilon_1^3 + K\varepsilon_1^4 = 0$  para  $\varepsilon_1 > 0$ ,*
  - (b) *dos, en la variedad tridimensional  $\varepsilon_2 + \varepsilon_4\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_5\varepsilon_1^3 + 12K\varepsilon_1^4 = 0, \varepsilon_3 = 3\varepsilon_5\varepsilon_1^2 + 8K\varepsilon_1^3$  para  $\varepsilon_1 > 0$ ,*
  - (c) *tres, en la superficie*

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - \varepsilon_5\varepsilon_1^3 - K\varepsilon_1^4 = 0 \\ \varepsilon_3 - 3\varepsilon_5\varepsilon_1^2 - 8K\varepsilon_1^3 = 0 \\ \varepsilon_4 + 5\varepsilon_5\varepsilon_1 + 10K\varepsilon_1^2 = 0 \end{cases}$$

*para  $\varepsilon_1 > 0$ ;*

- (d) *cuatro en la curva*

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = -K\varepsilon_1^4 \\ \varepsilon_3 = 8K\varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_4 = -10K\varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_5 = 0 \end{cases}$$

*para  $\varepsilon_1 > 0$ ;*

4. *Takens–Bogdanov del origen de codimensión:*

- (a) dos, en la variedad tridimensional  $\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0,$   
 (b) tres, en la superficie  $\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0,$   
 (c) cuatro, en la curva  $\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_4 = 0,$   
 (d) cinco, en el punto  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = (0, 0, 0, 0, 0).$

Describimos a continuación, mediante un análisis semiglobal, las bifurcaciones homoclinas y de órbitas periódicas del sistema (3.3.48). Para ello realizamos previamente el siguiente escalado

$$\begin{aligned} x &\mapsto \varepsilon^{\frac{1}{7}} x & \varepsilon_1 &= \varepsilon^{\frac{2}{7}} \mu_1 & t &\mapsto \varepsilon^{-\frac{1}{7}} t \\ y &\mapsto \varepsilon^{\frac{2}{7}} y & \varepsilon_2 &= \varepsilon^{\frac{8}{7}} \mu_2 \\ & & \varepsilon_3 &= \varepsilon^{\frac{6}{7}} \mu_3 \\ & & \varepsilon_4 &= \varepsilon^{\frac{4}{7}} \mu_4 \\ & & \varepsilon_5 &= \varepsilon^{\frac{2}{7}} \mu_5 \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

que lo transforma en

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 x - x^3 + \varepsilon (\mu_2 y + \mu_3 x^2 y + \mu_4 x^4 y + \mu_5 x^6 y + K x^8 y) \end{cases} \tag{3.3.50}$$

que consta de un campo vectorial hamiltoniano (ya estudiado anteriormente) y de una pequeña perturbación.

Introducimos la función de Melnikov,  $M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$ , para  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ , que verifica:

- es analítica para  $e \neq 0$ ;
- admite un desarrollo asintótico en un entorno de  $e = 0$  (vid. [94]) de la forma

$$M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = c_0 + c_1 e \log(e) + c_2 e + c_3 e^2 \log(e) + c_4 e^2 + o(e^2) \tag{3.3.51}$$

En cualquiera de los casos anteriores, la función de Melnikov viene dada por

$$\begin{aligned}
 M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) &= \mu_2 \int_{H=e} y^2(t) dt + \mu_3 \int_{H=e} x^2(t)y^2(t) dt + \\
 &+ \mu_4 \int_{H=e} x^4(t)y^2(t) dt + \mu_5 \int_{H=e} x^6(t)y^2(t) dt + \\
 &+ K \int_{H=e} x^8(t)y^2(t) dt
 \end{aligned}
 \tag{3.3.52}$$

Si en vez de parametrizar las integrales de línea por el tiempo  $t$  lo hacemos con las variables espaciales, usando  $dt = \frac{dx}{y}$ , podemos escribir (3.3.52) como

$$\begin{aligned}
 M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) &= \mu_2 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_0 \cdot d\vec{\alpha} + \mu_3 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{\alpha} + \\
 &+ \mu_4 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_4 \cdot d\vec{\alpha} + \mu_5 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_6 \cdot d\vec{\alpha} + \\
 &+ K \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_8 \cdot d\vec{\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.53}$$

Introducimos de nuevo las funciones  $I_n(e)$ , verificándose, del lema 3.3.2,

$$I_8(e) = \frac{20}{11}eI_4(e) + \frac{16}{11}I_6(e)$$

de donde

$$I_8(e) = \left(\frac{80}{77}e^2 + \frac{256}{231}e\right) I_0(e) + \left(\frac{928}{231}e + \frac{512}{231}\right) I_2(e)$$

De esta forma, la función de Melnikov (3.3.53), ya en términos de la función  $R(e)$  (vid. (3.3.29)), se convierte en

$$M(e, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = I_0(e) G(e)
 \tag{3.3.54}$$

donde

$$\begin{aligned}
 G(e) &= \left[ \mu_2 + \frac{4}{7}e \left( \mu_4 + \frac{4}{3}\mu_5 \right) + K \left( \frac{80}{77}e^2 + \frac{256}{231}e \right) \right] + \\
 &+ \left[ \mu_3 + \frac{4}{3}\mu_5 e + \frac{8}{7} \left( \mu_4 + \frac{4}{3}\mu_5 \right) + K \left( \frac{928}{231}e + \frac{512}{231} \right) \right] R(e)
 \end{aligned}$$

Estamos ya en condiciones de enunciar el siguiente teorema, cuya demostración omitimos de nuevo por ser análoga a la del teorema 3.3.3. Los coeficientes

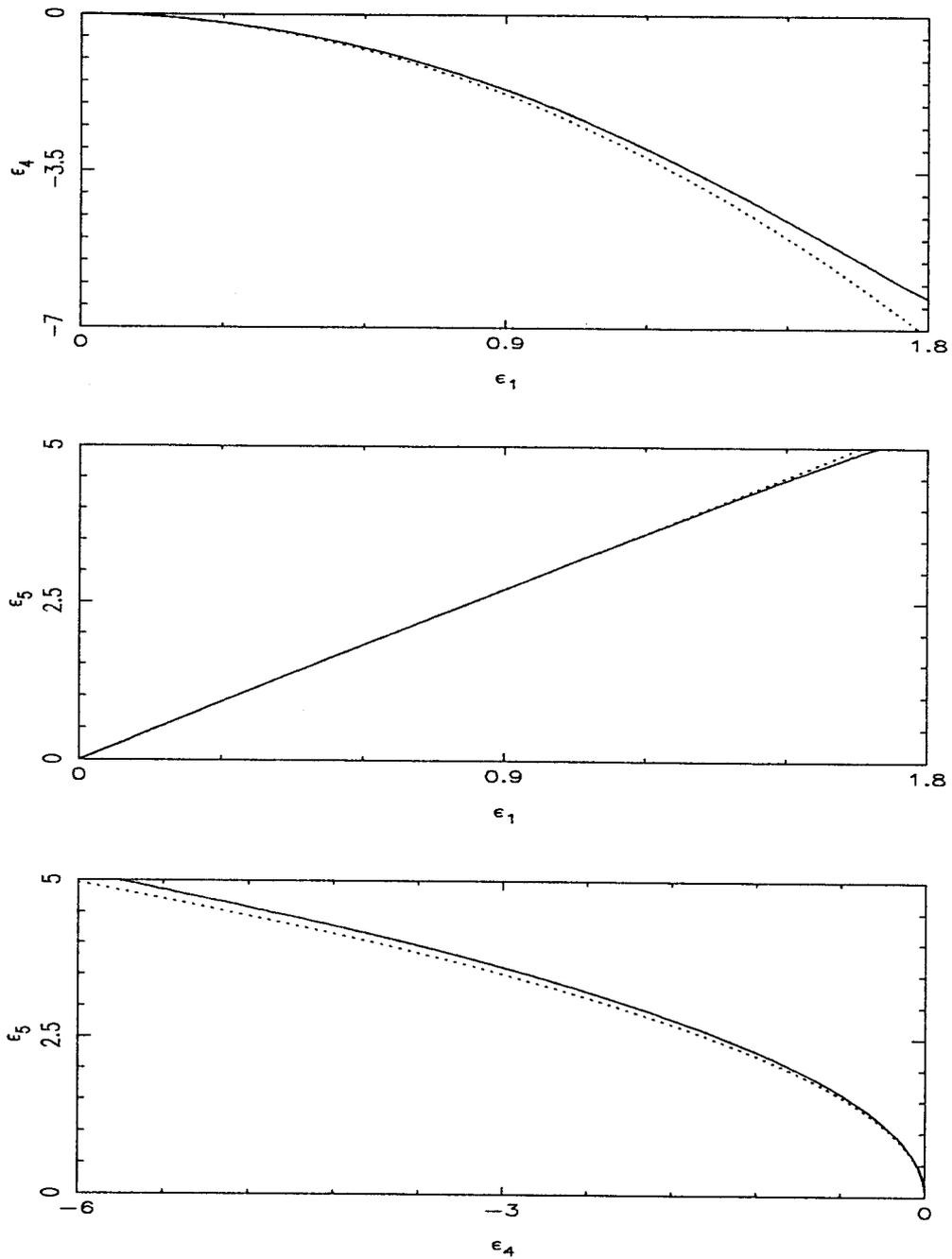


Figura 3.3.17: Proyecciones de las curvas de homoclinas de codimensión cuatro para la cúspide de orden cinco: obtenidas por Melnikov (en trazo discontinuo) y numéricamente (en trazo continuo).

$c_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$ , que aparecen en el enunciado del teorema hacen referencia al desarrollo asintótico dado en (3.3.51).

**Teorema 3.3.5** *El sistema (3.3.48) experimenta, a primer orden, una bifurcación de:*

1. *órbitas homoclinas de codimensión:*

(a) *uno (dada por  $G(0) = 0, G'(0) = \infty$  o, equivalentemente,  $c_0 = 0, c_1 \neq 0$ ), en la hipersuperficie*

$$\varepsilon_2 + \frac{4}{5}\varepsilon_1\varepsilon_3 + \frac{32}{35}\varepsilon_4\varepsilon_1^2 + \frac{128}{105}\varepsilon_5\varepsilon_1^3 + \frac{2048}{1155}K\varepsilon_1^4 = 0$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(b) *dos (dada por  $G(0) = 0, G'(0) \neq 0$  o, equivalentemente,  $c_0 = c_1 = 0, c_2 \neq 0$ , i.e., traza cero), en la variedad tridimensional*

$$\varepsilon_1\varepsilon_3 + \frac{8}{7}\varepsilon_4\varepsilon_1^2 + \frac{32}{11}\varepsilon_5\varepsilon_1^3 + \frac{512}{231}K\varepsilon_1^4 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(c) *tres (dada por  $G(0) = G'(0) = 0, G''(0) = \infty$  o, equivalentemente,  $c_0 = c_1 = c_2 = 0, c_3 \neq 0$ , i.e., traza cero y coeficiente EID = 1), en la superficie*

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = \frac{32}{15}\varepsilon_1^2\varepsilon_5 + \frac{7472}{1155}K\varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_4 = -\frac{16}{5}\varepsilon_1\varepsilon_5 - \frac{418}{55}K\varepsilon_1^2 \end{cases}$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(d) *cuatro (dada por  $G(0) = G'(0) = 0, G''(0) \neq 0$  o, equivalentemente,  $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 \neq 0$ , i.e., traza cero y coeficientes EID = 1*

y  $RES = 0$ ), en la curva

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = 0 \\ \varepsilon_4 = \frac{170}{77} K \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_5 = -\frac{232}{77} K \varepsilon_1 \end{cases}$$

para  $\varepsilon_1 < 0$ ;

2. ciclos límite múltiples de orden:

(a) dos (i.e., silla-nodo de órbitas periódicas, dada por  $G(e) = G'(e) = 0, G''(e) \neq 0$ ), en la hipersuperficie

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \frac{4}{231 R'(e)} [33R(e)\varepsilon_4\varepsilon_1^2 + 44R(e)\varepsilon_5\varepsilon_1^3 + 120R(e)K e\varepsilon_1^4 + \\ + 64R(e)K\varepsilon_1^4 + 77R^2(e)\varepsilon_5\varepsilon_1^3 + 232R^2(e)K\varepsilon_1^4 - 33eR'(e)\varepsilon_4\varepsilon_1^2 - \\ - 44R'(e)e\varepsilon_5\varepsilon_1^3 - 60K e^2R'(e)\varepsilon_1^4 - 64R'(e)K e\varepsilon_1^4] \\ \varepsilon_3 = -\frac{4}{231 R'(e)} [33\varepsilon_4\varepsilon_1 + 44\varepsilon_5\varepsilon_1^2 + 120K e\varepsilon_1^3 + 64K\varepsilon_1^3 + \\ + 77R(e)\varepsilon_5\varepsilon_1^2 + 232R(e)K\varepsilon_1^3 + 77R'(e)\varepsilon_5\varepsilon_1^2e + 88R'(e)\varepsilon_5\varepsilon_1^2 + \\ + 66R'(e)\varepsilon_4\varepsilon_1 + 232R'(e)K e\varepsilon_1^3 + 128R'(e)K\varepsilon_1^3] \end{cases}$$

para  $e \in (-\frac{1}{4}, +\infty), e \neq 0$  y  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(b) tres (i.e., cúspide de órbitas periódicas, dada por  $G(e) = G'(e) =$

$G''(e) = 0, G'''(e) \neq 0$ , en la variedad tridimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = \frac{4}{231 R''(e)} [(232R(e)R''(e)K e + 60R''(e)K e^2 + \\ + 464R(e)R'(e)K - 464 (R'(e))^2 K e + \\ + 120R(e)K - 120R'(e)K e) \varepsilon_1^4 + 77 (R(e)R''(e)e + \\ + 2R(e)R'(e) - 2 (R'(e))^2 e) \varepsilon_5 \varepsilon_1^3] \\ \varepsilon_3 = -\frac{4}{231 R''(e)} [(120K + 704R'(e)K + 928 (R'(e))^2 K - \\ - 8R''(e)K e - 464R(e)R''(e)K) \varepsilon_1^3 + \\ + 77 (2R'(e) + 4 (R'(e))^2 - 2R(e)R''(e) + R''(e)e) \varepsilon_5 \varepsilon_1^2] \\ \varepsilon_4 = \frac{1}{33 R''(e)} [(120R'(e)K + 464 (R'(e))^2 K - \\ - 120R''(e)K e - 64R''(e)K - 232R(e)R''(e)K) \varepsilon_1^2 + \\ + (154 (R'(e))^2 - 44R''(e) - 77R(e)R''(e)) \varepsilon_5 \varepsilon_1] \end{array} \right.$$

para  $e \in (-\frac{1}{4}, +\infty), e \neq 0$  y  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(c) cuatro (dada por  $G(e) = G'(e) = G''(e) = G'''(e) = 0, G^{IV}(e) \neq 0$ ), en la superficie

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = \frac{80K}{77} \frac{1}{2R'(e)R'''(e) - 3(R''(e))^2} (-2R(e)R'''(e)e - \\ - 6R(e)R''(e) + 6R'(e)R''(e)e - \\ - 3(R''(e))^2 e^2 + 2R'(e)R'''(e)e^2) \varepsilon_1^4 \\ \varepsilon_3 = \frac{160K}{77} \frac{1}{2R'(e)R'''(e) - 3(R''(e))^2} (4R'(e)R'''(e)e + \\ + R'''(e)e + 3R''(e) + 6R'(e)R''(e) - 2R(e)R'''(e) - \\ - 6(R''(e))^2 e) \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_4 = \frac{40K}{77} \frac{1}{2R'(e)R'''(e) - 3(R''(e))^2} (4R'''(e) + 8R'(e)R'''(e) - \\ - 12(R''(e))^2 + 7R(e)R'''(e) - 14R'(e)R'''(e)e + \\ + 21(R''(e))^2 e - 21R'(e)R''(e)) \varepsilon_1^2 \end{array} \right.$$

para  $e \in (-\frac{1}{4}, +\infty), e \neq 0$  y  $\varepsilon_1 < 0$ ,

(d) cinco (dada por  $G(e) = G'(e) = G''(e) = G'''(e) = G^{IV} = 0, G^V(e) \neq 0$ ), en las curvas

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = 25.748703361407 \varepsilon_1^4 \\ \varepsilon_3 = -78.015239230795 \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_4 = 49.844569085350 \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_5 = -11.991705669136 \varepsilon_1 \end{cases}$$

para  $e \approx 1.52337291$  y  $\varepsilon_1 < 0$ , y

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = 0.164710879617 \varepsilon_1^4 \\ \varepsilon_3 = -4.723478754150 \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_4 = 9.276033894838 \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_5 = -5.448300589717 \varepsilon_1 \end{cases}$$

para  $e \approx 0.0897953184$  y  $\varepsilon_1 < 0$ .

Como vimos en la subsección anterior, los ciclos límite de orden cuatro corresponden a puntos en el espacio de parámetros en cuyo entorno el conjunto de bifurcaciones es homeomorfo a la catástrofe de *swallowtail*. Análogamente, los ciclos límite de orden cinco corresponden a puntos en el espacio de parámetros en cuyo entorno el conjunto de bifurcaciones es homeomorfo a la catástrofe de *butterfly* (es decir, de *mariposa*).

Para finalizar, mostramos en la figura 3.3.17 diversas proyecciones en planos paramétricos de la curva de homoclinas degeneradas de codimensión cuatro obtenida mediante la función de Melnikov (en trazo discontinuo) comparándola con la obtenida numéricamente (en trazo continuo).

### 3.4 Un Caso de Takens–Bogdanov con un Foco Débil Degenerado

A comienzos de esta década, Dumortier *et alii* (vid. [35]) abordan el complejo (y aún abierto en algunos detalles) problema del estudio del desplegamiento de una

bifurcación de Takens–Bogdanov con una degeneración adicional: la anulación del término cuadrático  $x^2$  de la forma normal.

En esta sección nos planteamos el estudio parcial, y sólo en uno de los casos que aparecen en [35] (el caso foco), del desplegamiento de la misma singularidad con la anulación adicional del término cúbico  $x^2y$ .

Veamos, en primer lugar, los diferentes tipos topológicos que surgen al anular el término  $x^2$  de la forma normal. Sea, pues, el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_3x^3 + b_2xy \end{cases} \quad (3.4.1)$$

El cambio de variables  $z = x^2$  transforma (3.4.1) en

$$\begin{cases} \dot{z} = 2\sqrt{z}y \\ \dot{y} = a_3\sqrt{z}z + b_2\sqrt{z}y \end{cases} \quad (3.4.2)$$

para  $z \geq 0$ .

La  $C^\infty$ -equivalencia dada por la reparametrización del tiempo  $t \mapsto \sqrt{z}t$ , lleva (3.4.2) a

$$\begin{cases} \dot{z} = 2y \\ \dot{y} = a_3z + b_2y \end{cases} \quad (3.4.3)$$

El sistema lineal dado en (3.4.3) presenta un equilibrio hiperbólico en  $(0, 0)$  con autovalores  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (b_2 \pm \sqrt{b_2^2 + 8a_3})$ , que nos permiten distinguir tres casos:

**Caso Silla:**  $a_3 > 0$  y por tanto  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , de donde el equilibrio es un punto de silla. Los retratos de fases en las variables de estado nuevas y originales vienen dados en la figura 3.4.1.

**Caso Foco:**  $a_3 < 0$  y  $b_2^2 + 8a_3 < 0$ , de donde los autovalores son complejos conjugados y, por tanto, el equilibrio es un centro. En las variables de estado originales se transforma en un foco débil (vid. figura 3.4.1).

**Caso Elíptico:**  $a_3 < 0$  y  $b_2^2 + 8a_3 > 0$ , de donde  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  y, por tanto, el equilibrio es un nodo. En las variables de estado originales corresponde al retrato de fases dado en la figura 3.4.1.

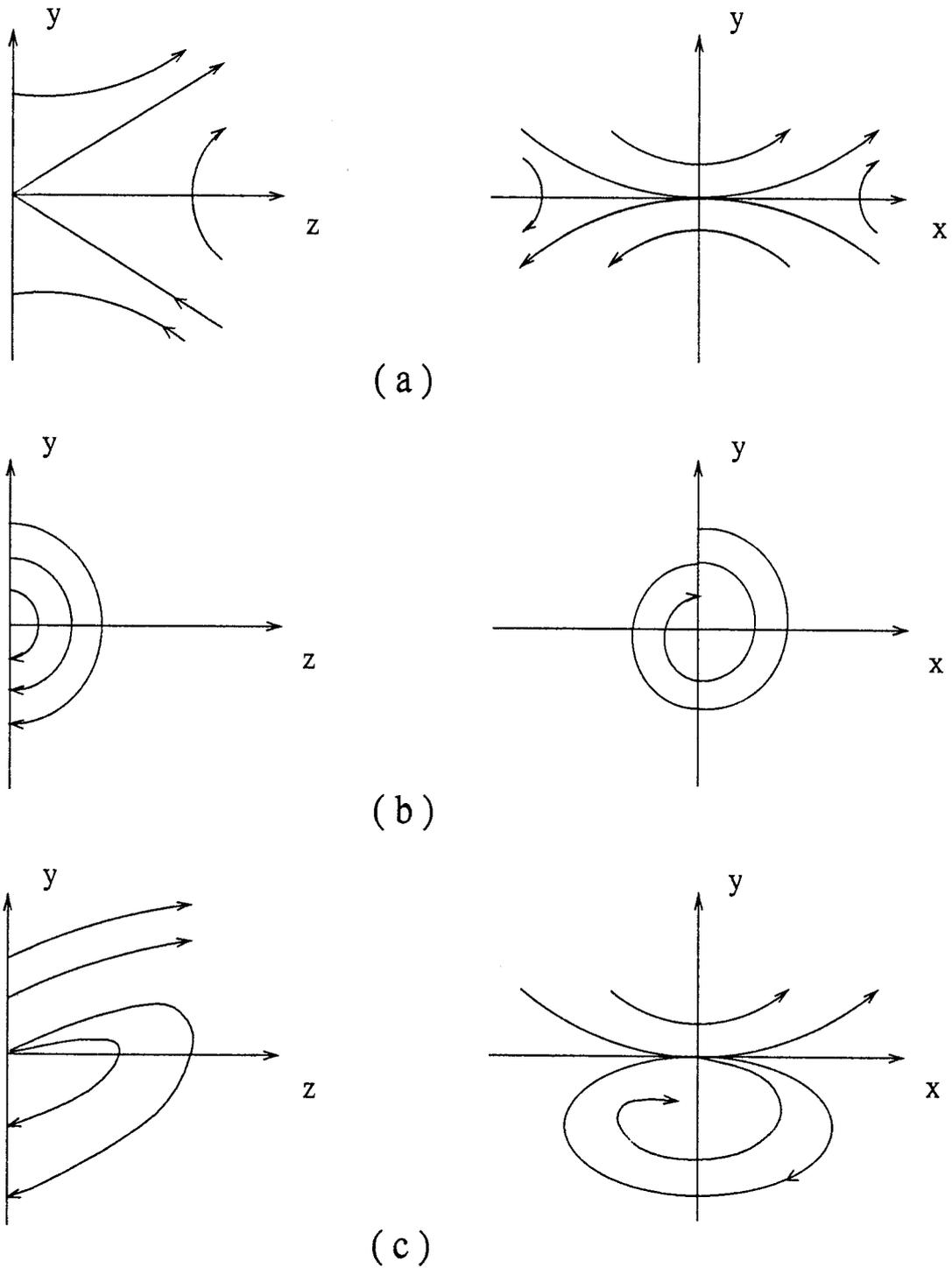


Figura 3.4.1: Retratos de fases en las nuevas variables,  $(z, y)$ , y en las originales,  $(x, y)$ , para los casos: (a) silla, (b) foco y (c) elíptico.

En lo que sigue supondremos un sistema en forma normal de Takens–Bogdanov con la anulación del término  $x^2$  y en el caso foco, es decir,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b_2xy + a_3x^3 + b_3x^2y + a_4x^4 + b_4x^3y + a_5x^5 + b_5x^4y + o(|x, y|^5) \end{cases} \quad (3.4.4)$$

donde  $a_3 < 0$  y  $b_2^2 + 8a_3 < 0$ .

Vamos a estudiar, en primer lugar, qué términos de la forma normal (3.4.4) no son esenciales.

**Lema 3.4.1** *El sistema (3.4.4) es  $C^\infty$ -equivalente a*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b_2xy + a_3x^3 + b'_3x^2y + b'_5x^4y + o(|x, y|^5) \end{cases} \quad (3.4.5)$$

para ciertos coeficientes  $b'_3$  y  $b'_5$ .

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la  $C^\infty$ -equivalencia dada por la reparametrización del tiempo

$$t \mapsto (1 + \alpha x + \beta x^2)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{2a_4}{5a_3} \\ \beta &= \frac{17a_4^2 - 25a_3a_5}{50a_3^2} \end{aligned}$$

Al sistema transformado por la  $C^\infty$ -equivalencia le aplicamos el algoritmo desarrollado en [45] para el cálculo de los coeficientes de la forma normal de Takens–Bogdanov, obteniendo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b_2xy + a_3x^3 + b'_3x^2y + b'_4x^3y + b'_5x^4y + o(|x, y|^5) \end{cases} \quad (3.4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} b'_3 &= b_3 - \frac{3b_2a_4}{5a_3} \\ b'_4 &= b_4 + \frac{12a_4^2b_2 - 50b_2a_3a_5}{75a_3^2} - \frac{1}{3}C(b_2^2 + 9a_3) \\ b'_5 &= b_5 - \frac{175a_4b_4a_3^2 + 42a_4^3b_2 - 175b_2a_4a_5a_3}{175a_3^3} \end{aligned}$$

siendo  $C$  una constante arbitraria. La hipótesis  $a_3 < 0$  y  $b_2^2 + 8a_3 < 0$  garantizan  $b_2^2 + 9a_3 \neq 0$  y, por tanto, es posible eliminar el término  $b'_4$ .

Esto completa la demostración. ■

En lo que sigue hacemos la suposición de que el término cúbico  $b'_3$  de (3.4.6) se anula, dando lugar a la degeneración adicional en cuyo estudio estamos interesados. Sea, pues

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b_2xy + a_3x^3 + b'_5x^4y + o(|x, y|^5) \end{cases} \quad (3.4.7)$$

El escalado

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{(b_5)^{\frac{1}{3}}}{|a_3|^{\frac{1}{6}}} x \\ y &\mapsto \frac{(b_5)^{\frac{2}{3}}}{|a_3|^{\frac{5}{6}}} y \\ t &\mapsto \frac{(b_5)^{\frac{1}{3}}}{|a_3|^{\frac{2}{3}}} t \end{aligned}$$

transforma (3.4.7) en

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = bxy - x^3 + Kx^4y + o(|x, y|^5) \end{cases} \quad (3.4.8)$$

donde  $b = \frac{b_2}{\sqrt{|a_3|}}$  (y por tanto  $b^2 + 8 < 0$ ) y  $K = \pm 1$ .

En el siguiente resultado realizamos un estudio de la determinación de la singularidad dada en (3.4.8).

**Lema 3.4.2** *El sistema dado en (3.4.8) está determinado por su 5-jet.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea el 5-jet de (3.4.8)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = bxy - x^3 + Kx^4y \end{cases} \quad (3.4.9)$$

con equilibrio  $(0, 0)$  no hiperbólico.

Vamos a realizar el cambio de variables de tipo *blow-up polar* dado por

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Este cambio, junto a una desingularización, transforma (3.4.9) en

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\cos\theta \operatorname{sen}\theta - r^2 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta + b r \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + K \cos^4\theta \operatorname{sen}^2\theta) \\ \dot{\theta} = -\operatorname{sen}^2\theta - r^2 \cos^4\theta + b r \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + K \cos^5\theta \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad (3.4.10)$$

que tiene por equilibrios:  $(0, 0)$  y  $(0, \pi)$ .

Un desarrollo en serie de Taylor en torno a  $(0, 0)$  nos proporciona el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r\theta + o(|r, \theta|^2) \\ \dot{\theta} = -\theta^2 - r^2 + br\theta + o(|r, \theta|^2) \end{cases} \quad (3.4.11)$$

que resulta ser un sistema cuasi-homogéneo de tipo  $(1, 1)$  y grado 2. Ello nos indica que el cambio de variables adecuado viene dado por el *blow-up*  $\theta$ -direccional

$$r = uv$$

$$\theta = u$$

Este cambio y una posterior desingularización transforma (3.4.11) en

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + buv - uv^2 + o(|u, v|^3) \\ \dot{v} = 2v - bv^2 + v^3 + o(|u, v|^3) \end{cases} \quad (3.4.12)$$

con  $(0, 0)$  como único equilibrio hiperbólico.

Un estudio análogo para el equilibrio  $(0, \pi)$  de (3.4.10) nos lleva al sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - buv - uv^2 + o(|u, v|^3) \\ \dot{v} = 2v + bv^2 + v^3 + o(|u, v|^3) \end{cases} \quad (3.4.13)$$

siendo, de nuevo,  $(0, 0)$  el único equilibrio hiperbólico.

Por último, es fácil comprobar que la introducción de términos de orden  $o(|x, y|^5)$  en (3.4.9) no genera, al realizar de nuevo los dos cambios *blow-up* anteriores, nuevos equilibrios, ni modifica los autovalores de los ya existentes en (3.4.13). Por tanto, los sistemas (3.4.8) y (3.4.9) son  $C^0$ -conjugados. Esto completa la demostración. ■

Consideremos el desplegamiento de (3.4.9) (que conjeturamos universal) dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 y + bxy - x^3 + \mu_4 x^2 y + Kx^4 y \end{cases} \quad (3.4.14)$$

En el estudio de este sistema bastará considerar el caso  $K = +1$ , pues el sistema es invariante al cambio

$$(x, y, t, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, K) \longrightarrow (-x, y, -t, -\mu_1, \mu_2, -\mu_3, -\mu_4, -K)$$

con lo que el conjunto de bifurcaciones será similar en el caso  $K = -1$  (si bien habrá un cambio en la estabilidad).

En el siguiente teorema describimos el comportamiento local de bifurcaciones de (3.4.14).

**Teorema 3.4.1** *El sistema (3.4.14) (para  $K = +1$ ) experimenta una bifurcación de:*

1. *silla-nodo de equilibrios en la hipersuperficie  $27\mu_1^2 - 4\mu_2^3 = 0$ ;*
2. *cúspide de equilibrios en la superficie  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ ;*

3. Hopf del equilibrio  $(x_0, 0)$  de codimensión:

(a) uno, en la hipersuperficie  $\mu_3 + bx_0 + \mu_4 x_0^2 + x_0^4 = 0$ , para  $\mu_2 - 3x_0^2 < 0$ ,

(b) dos, en la superficie

$$\begin{cases} \mu_1 = x_0^3 - \mu_2 x_0 \\ \mu_3 = \frac{5x_0^4 - 9x_0^6 - bx_0 \mu_2}{\mu_2 + 3x_0^2} \\ \mu_4 = \frac{6x_0^4 - 6x_0^2 \mu_2 - 3x_0 b}{\mu_2 + 3x_0^2} \end{cases}$$

para  $\mu_2 - 3x_0^2 < 0$ ,

(c) tres, en las curvas

$$\begin{cases} \mu_1 = 11x_0^3 - \varepsilon x_0 \Lambda \\ \mu_2 = -10x_0^2 + \varepsilon \Lambda \\ \mu_3 = \frac{5x_0^4 - 9x_0^6 + 10bx_0^3 - \varepsilon bx_0 \Lambda}{-7x_0^2 + \varepsilon \Lambda} \\ \mu_4 = \frac{22x_0^4 - bx_0 - 2x_0^2 \varepsilon \Lambda}{-7x_0^2 + \varepsilon \Lambda} \end{cases}$$

para  $\mu_2 - 3x_0^2 < 0$ , donde  $\varepsilon = \pm 1$  y  $\Lambda = \sqrt{89x_0^4 - 5bx_0}$ ;

4. Takens-Bogdanov del equilibrio  $(x_0, 0)$  de codimensión:

(a) dos, en la superficie

$$\begin{cases} \mu_1 = -2x_0^2 \\ \mu_2 = 3x_0^2 \\ \mu_3 = -bx_0 - \mu_4 x_0^2 - x_0^4 \end{cases}$$

(b) tres, en la curva  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\mu_3 = 0$ ,

(c) cuatro, en el punto  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (0, 0, 0, 0)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Los equilibrios del sistema vienen dados por las soluciones de

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x^3 + \mu_2 x + \mu_1 = 0 \end{cases}$$

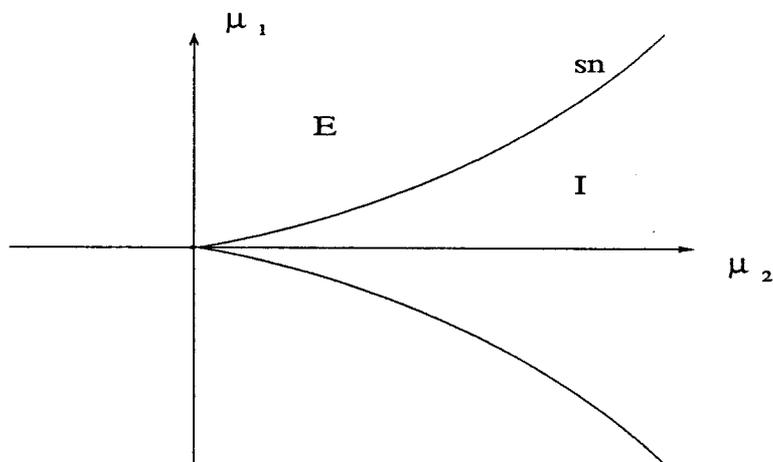


Figura 3.4.2:  $E$  = zona con un único equilibrio.  $I$  = zona con tres equilibrios.  $sn$  = curva de bifurcación de silla-nodo de equilibrios.

Sea, pues,  $(x_0, 0)$  un equilibrio de (3.4.14). La linealización de (3.4.14) en  $(x_0, 0)$  viene dada por

$$J(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 - 3x_0^2 & \mu_3 + bx_0 + \mu_4x_0^2 + x_0^4 \end{pmatrix} \quad (3.4.15)$$

Si  $\mu_2 - 3x_0^2 \neq 0$ , el equilibrio es hiperbólico. Si  $\mu_2 - 3x_0^2 = 0$ , se produce una bifurcación de silla-nodo de equilibrios dada por

$$\begin{cases} -x_0^3 + \mu_2x_0 + \mu_1 & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(-x^3 + \mu_2x + \mu_1) \Big|_{x=x_0} & = 0 \end{cases}$$

de donde, eliminando  $x_0$ , obtenemos la hipersuperficie  $27\mu_1^2 - 4\mu_2^3 = 0$ . En el plano  $(\mu_1, \mu_2)$  se obtiene una curva que separa dos regiones:  $I$  (con tres equilibrios: un silla entre dos focos o nodos) y  $E$  (con un único equilibrio foco o nodo) (vid. figura 3.4.2).

Si sobre la hipersuperficie de silla-nodo de equilibrios se verifica además  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-x^3 + \mu_2x + \mu_1) \Big|_{x=x_0} = 0$ , se tiene entonces una bifurcación de cúspides de equilibrios, dada en  $x_0 = 0$  y en la superficie  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ .

La anulación de la traza de la matriz (3.4.15),  $Tr = \mu_3 + bx_0 + \mu_4x_0^2 + x_0^4 = 0$ , junto a  $\mu_2 - 3x_0^2 < 0$ , nos dan las condiciones para que se produzca una

bifurcación de Hopf. Eligiendo  $\mu_3$  como parámetro de bifurcación, y puesto que  $x_0 = x_0(\mu_1, \mu_2)$ , se tiene

$$\frac{\partial Tr}{\partial \mu_3} = 1$$

con lo que se verifica la condición de transversalidad y, por tanto podemos suponer en lo que sigue que los parámetros toman los valores críticos dados por  $Tr = 0$ . Trasladando el equilibrio  $(x_0, 0)$  al origen y realizando el escalado  $y \mapsto \sqrt{3x_0^2 - \mu_2} y$ , (3.4.14) se transforma en

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Ax^2 + Bx^3 + Cxy + Dx^2y + Fx^3y + Gx^4y \end{pmatrix} \quad (3.4.16)$$

donde

$$A = \frac{3x_0}{\omega_0}, \quad B = \frac{1}{\omega_0}, \quad C = -\frac{b + 2x_0\mu_4 + 4x_0^3}{\omega_0},$$

$$D = -\frac{\mu_4 + 6x_0^2}{\omega_0}, \quad F = -\frac{4x_0}{\omega_0}, \quad G = -\frac{1}{\omega_0}$$

siendo  $\omega_0 = -\sqrt{3x_0^2 - \mu_2}$ .

Al sistema dado en (3.4.16) le aplicamos el algoritmo desarrollado en [38] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf, obteniendo los coeficientes de orden:

- tres, dado por

$$a_1 = -\frac{3\mu_4x_0^2 + \mu_4\mu_2 - 6x_0^4 + 6x_0^2\mu_2 + 3x_0b}{8(3x_0^2 - \mu_2)^{\frac{3}{2}}}$$

- cinco, dado por

$$a_2 = -\frac{5x_0b + 11x_0^4 + 20x_0^2\mu_2 + \mu_2^2}{16(3x_0^2 + \mu_2)(3x_0^2 - \mu_2)^{\frac{3}{2}}}$$

en el supuesto de que  $a_1 = 0$ .

Despejando los parámetros en estas expresiones obtenemos las ecuaciones para las bifurcaciones de Hopf de codimensiones dos y tres, respectivamente, dadas en el enunciado del teorema. Observemos que los denominadores obtenidos en estas expresiones,  $\mu_2 + 3x_0^2$  y  $-7x_0^2 + \varepsilon\sqrt{89x_0^4 - 5x_0b}$ , son no nulos: en efecto, si

$\mu_2 + 3x_0^2 = 0$  se tendría  $3x_0(b - 2x_0^3 + 2x_0\mu_2) = 0$  y, al ser  $x_0$  y  $\mu_2$  tan pequeños como queramos, se concluiría que  $x_0 = 0$  y por tanto  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ , lo que no es posible. Análogamente se razona para el otro denominador.

Por último, por lo que respecta a la bifurcación de Hopf, comprobamos las condiciones de transversalidad para las de codimensiones dos y tres (eligiendo adecuados parámetros de bifurcación). Tenemos

$$\frac{\partial (Tr, a_1)}{\partial (\mu_3, \mu_4)} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0^2 \\ 0 & \mu_2 + 3x_0^2 \end{pmatrix} = \mu_2 + 3x_0^2 \neq 0$$

y

$$\frac{\partial (Tr, a_1, a_2)}{\partial (\mu_3, \mu_4, x_0)} = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial Tr}{\partial \mu_4} & \frac{\partial Tr}{\partial x_0} \\ 0 & \alpha & \frac{\partial a_1}{\partial x_0} \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta \neq 0$$

para  $x_0$  y  $\mu_2$  suficientemente pequeños, siendo  $\alpha = \mu_2 + 3x_0^2$  y  $\beta = 5b + 44x_0^3 + 4x_0\mu_2$ .

La bifurcación de Takens–Bogdanov viene dada por la anulación simultánea de la traza y el determinante de la matriz (3.4.15), es decir

$$\begin{aligned} Tr &= \mu_3 + bx_0 + \mu_4x_0^2 + x_0^4 = 0 \\ Det &= \mu_2 - 3x_0^2 = 0 \end{aligned}$$

que, junto a la condición de equilibrio, nos permite obtener la siguiente superficie parametrizada

$$\begin{cases} \mu_1 &= -2x_0^2 \\ \mu_2 &= 3x_0^2 \\ \mu_3 &= -bx_0 - \mu_4x_0^2 - x_0^4 \end{cases}$$

Verificamos la condición de transversalidad, dada por

$$\frac{\partial (Tr, Det)}{\partial (\mu_3, \mu_2)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Para determinar las degeneraciones de la bifurcación de Takens–Bogdanov vamos a trasladar el equilibrio  $(x_0, 0)$  al origen, obteniendo a partir de (3.4.14) el

sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3x_0x^2 - x^3 + (b + 2\mu_4x_0 + 4x_0^3)xy + \\ \quad + (\mu_4 + 6x_0^2)x^2y + 4x_0x^3y + x^4y \end{cases} \quad (3.4.17)$$

La anulaci3n del coeficiente de  $x^2$  ocurre si  $x_0 = 0$ , lo que nos indica que en el eje  $\mu_4$  del espacio de parámetros se produce una bifurcaci3n de Takens–Bogdanov (en el origen) degenerada de codimensi3n tres del tipo estudiado en [35]. Situando (3.4.17) sobre  $x_0 = 0$  obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + bxy + \mu_4x^2y + x^4y \end{cases}$$

resultando ser la degeneraci3n de tipo foco (como ya sabíamos) atractivo si  $\mu_4 < 0$  y repulsivo si  $\mu_4 > 0$ .

La condici3n

$$\frac{\partial (Tr, Det, D)}{\partial (\mu_3, \mu_2, x_0)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$$

(donde  $D = -3x_0$ ) nos garantiza la transversalidad de la bifurcaci3n. Esto completa la demostraci3n. ■

Con respecto al análisis global de (3.4.14), vamos a deducir la existencia de homoclinas derechas, izquierdas y c3ncavas (vid. figura 3.4.3) de codimensi3n uno, basándonos en una propiedad rotacional del sistema (vid. [81]), en forma análoga a como es realizado en [35]. Las homoclinas de codimensi3n tres dadas por las condiciones de traza cero y coeficiente  $EID = 1$  serán obtenidas numéricamente.

Sea  $\lambda_i = (\mu_1, \mu_2, \mu_3^{(i)}, \mu_4)$ , para  $i = 0, 1$ , y sea

$$Z_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} y \\ \mu_1 + \mu_2x + \mu_3^{(i)}y + bxy - x^3 + \mu_4x^2y + Kx^4y \end{pmatrix}$$

para  $i = 0, 1$  ( $Z_\lambda$  representa el campo vectorial dado en (3.4.14)). Se verifica el siguiente lema.

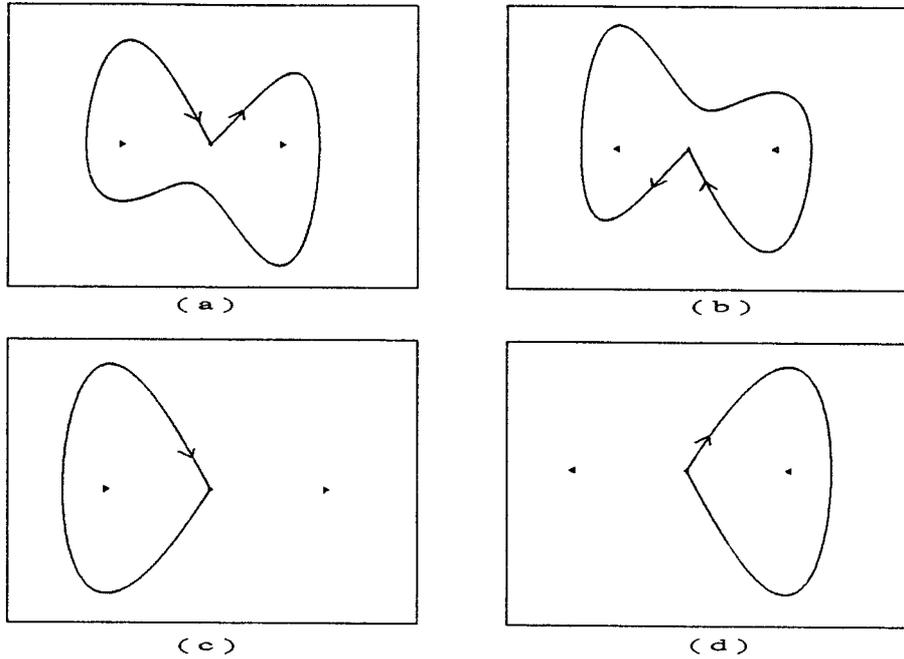


Figura 3.4.3: Diferentes tipos de homoclinas: (a) cóncava inferior; (b) cóncava superior; (c) izquierda y (d) derecha.

**Lema 3.4.3** *El vector  $Z_{\lambda_1}$  tiene una dirección obtenida de la dirección de  $Z_{\lambda_0}$  rotando ésta un ángulo  $\theta \in (0, \pi)$ .*

DEMOSTRACIÓN:

Se tiene (denotando  $(\cdot, \cdot)$  producto escalar y  $\perp$  ortogonal)

$$(Z_{\lambda_0}^\perp, Z_{\lambda_1}) = (\mu_3^{(1)} - \mu_3^{(0)}) y^2$$

Si  $\mu_3^{(1)} > \mu_3^{(0)}$  entonces  $\cos(\widehat{Z_{\lambda_0}^\perp, Z_{\lambda_1}}) > 0$  y por tanto  $(\widehat{Z_{\lambda_0}, Z_{\lambda_1}}) \in (0, \pi)$  de donde se sigue el lema. ■

Este resultado nos permite demostrar el siguiente teorema.

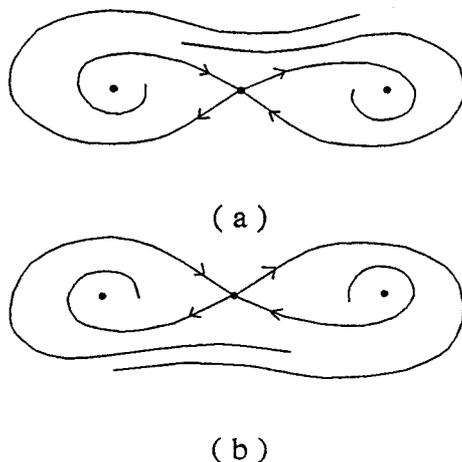


Figura 3.4.4: Retratos de fases en las proximidades de una homoclina cóncava: (a) superior y (b) inferior.

**Teorema 3.4.2** *El sistema (3.4.14) presenta homoclinas cóncavas inferiores (sólo si  $b > 0$ ), cóncavas superiores (sólo si  $b < 0$ ) y homoclinas derechas e izquierdas.*

DEMOSTRACIÓN:

Denotemos por  $T = \mu_3 + bx + \mu_4 x^2 + Kx^4$  la traza de la matriz de la linealización de (3.4.14) en un punto  $(x, y)$  del plano de fases. Al ser  $\frac{\partial T}{\partial x} = b \neq 0$  se tiene, por el teorema de la función implícita, la existencia de una función  $x = x(\mu_3, \mu_4)$  en un entorno de  $x = \mu_3 = \mu_4 = 0$ . Derivando implícitamente obtenemos el desarrollo de Taylor para la función  $x$  dado por

$$x(\mu_3, \mu_4) = -\frac{\mu_3}{b} - \frac{2}{b^3} \mu_3^2 \mu_4 + \frac{6K}{b^4} \mu_3^3 + o(|\mu_3, \mu_4|^3)$$

Para  $\mu_3$  y  $\mu_4$  suficientemente pequeños, se tiene la aproximación  $x(\mu_3, \mu_4) = -\frac{\mu_3}{b}$ , y por tanto  $T = 0$  sobre la recta del plano de fases dada por  $x = -\frac{\mu_3}{b}$ .

En lo que sigue vamos a razonar suponiendo  $b > 0$  (análogamente se razona para el caso  $b < 0$ ).

Llamando  $D = 3x^2 - \mu_2$  (el determinante de la matriz (3.4.15) calculada en un punto  $(x, y)$  del plano de fases), tenemos que  $T^2 - 4D = -4\mu_2 + o(|x, \mu_2, \mu_3, \mu_4|) < 0$ , para  $x, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  suficientemente pequeños y  $\mu_2 > 0$  (zona de posible existencia

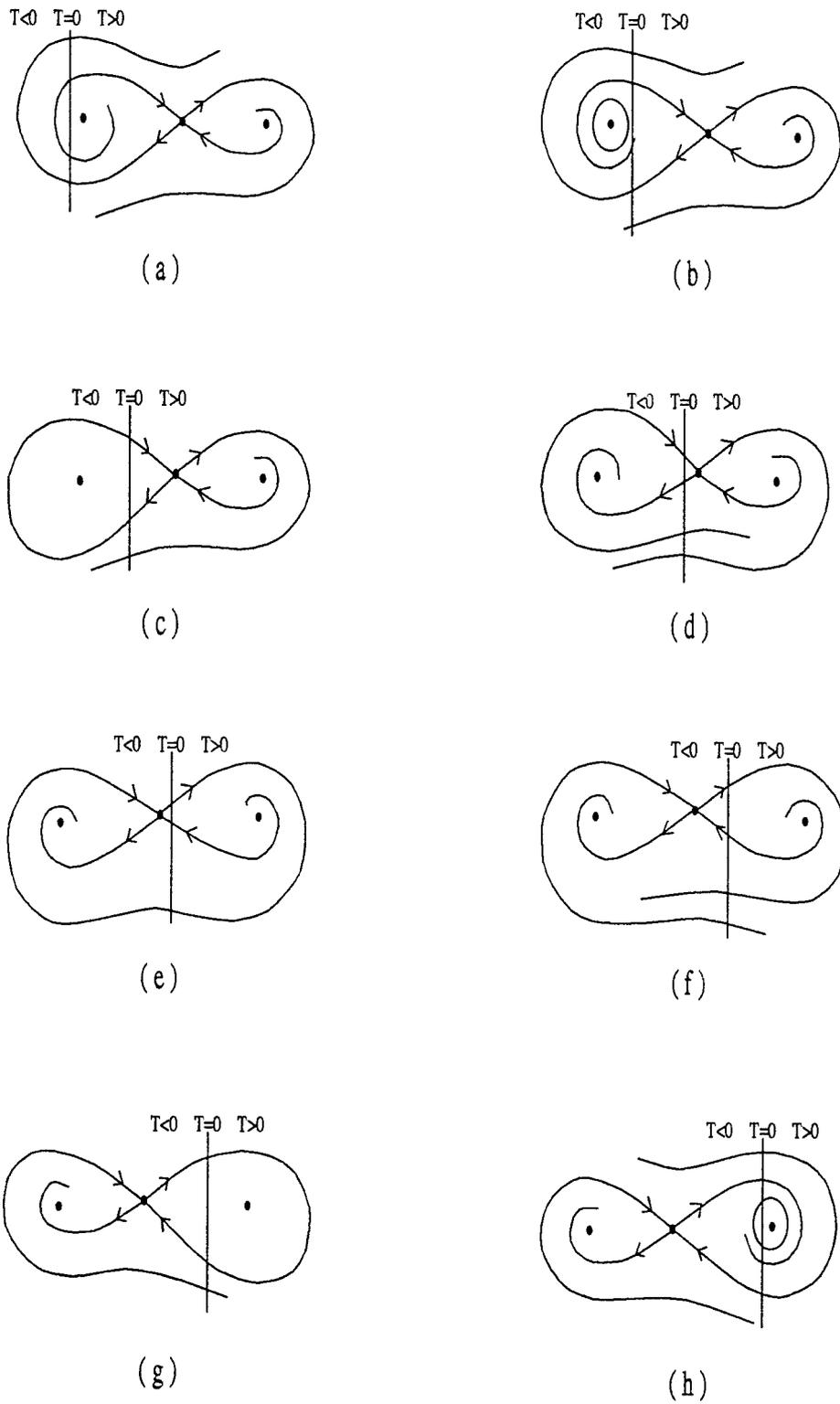


Figura 3.4.5: Evolución de los retratos de fases para  $\mu_3$  decreciente.

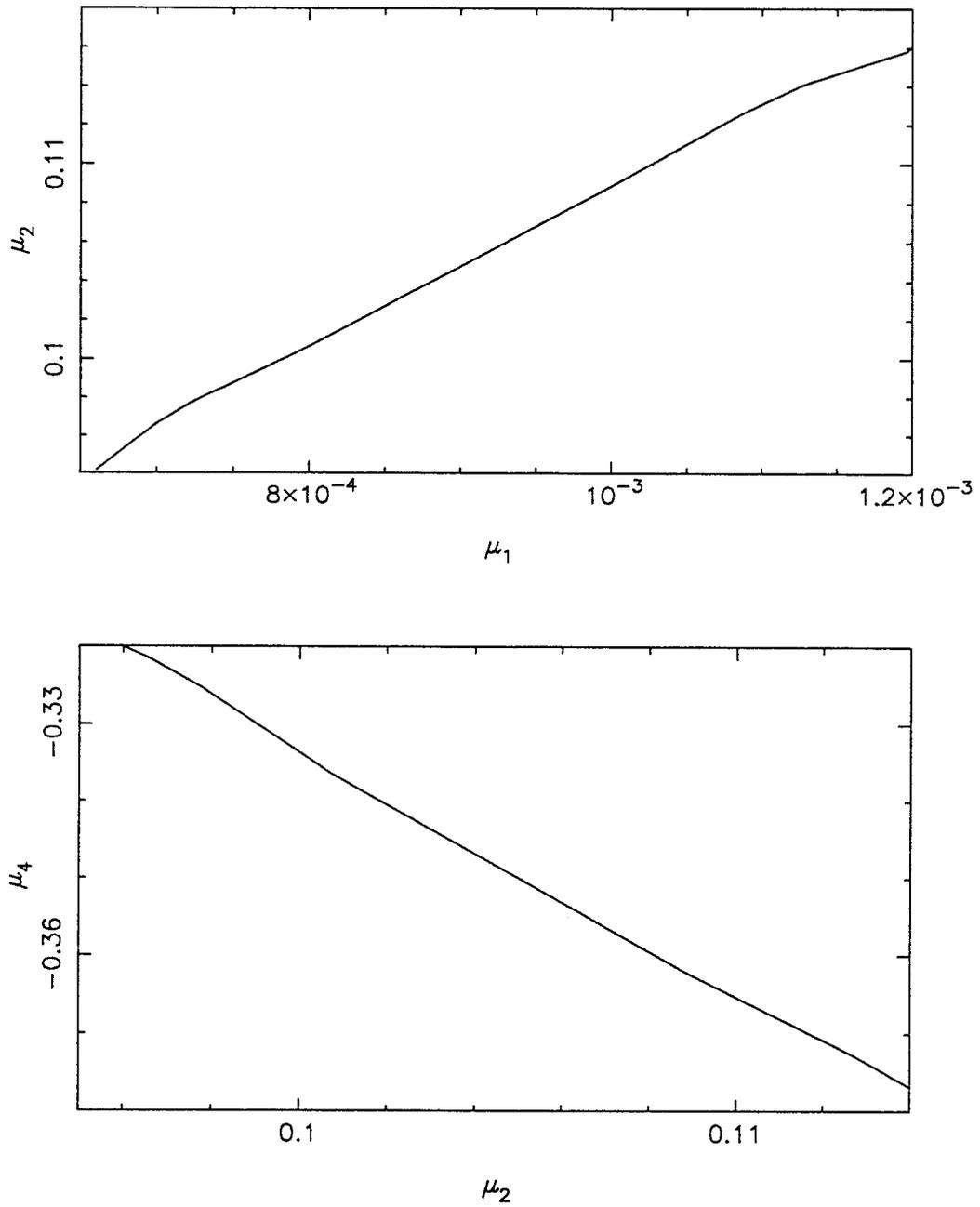


Figura 3.4.6: Proyecciones de la curva de conexiones homoclinas degeneradas de codimensión tres (dadas por las condiciones traza cero y coeficiente  $EID = 1$ ) obtenidas numéricamente.

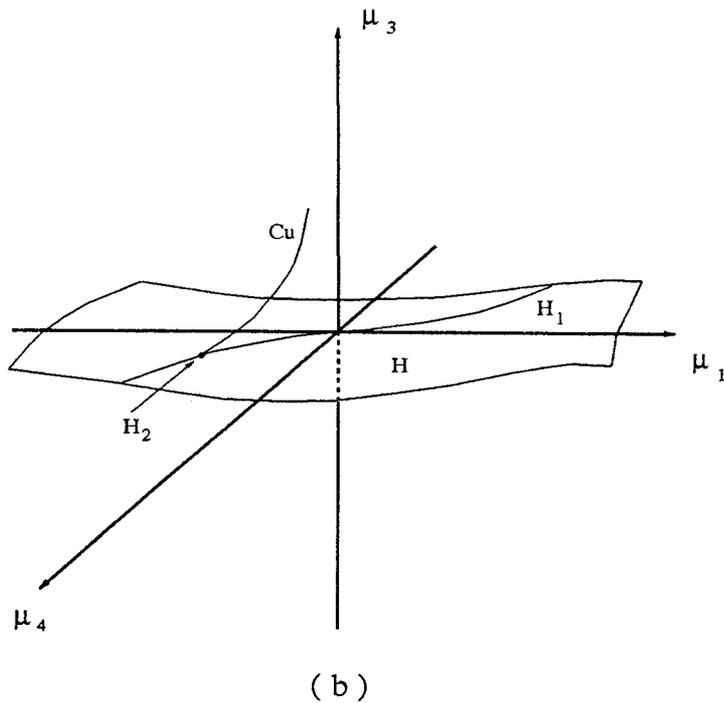
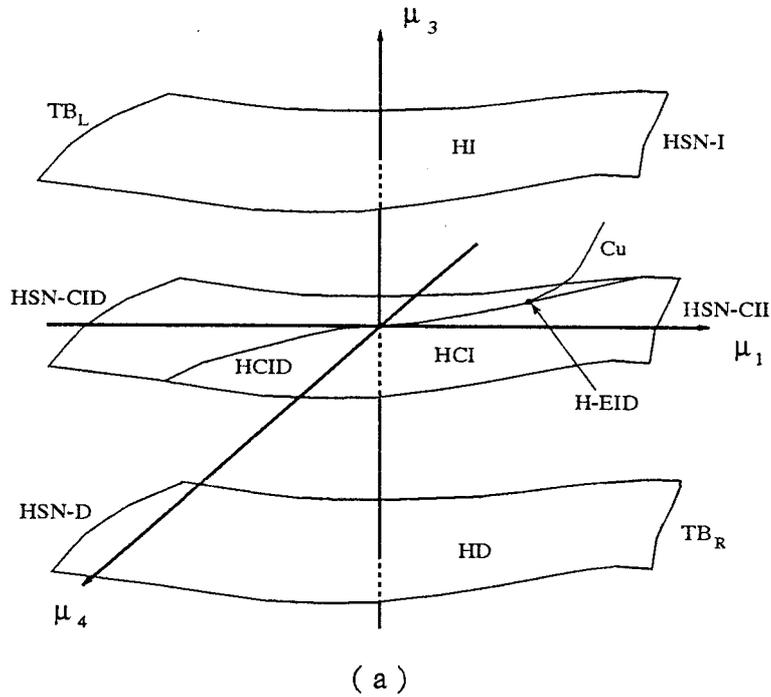


Figura 3.4.7: Conjuntos de bifurcaciones conjeturados obtenidos al intersecar con un cubo de centro el origen de coordenadas. (a)  $\mu_2 > 0$ . (b)  $\mu_2 < 0$ . Los símbolos están explicados en el texto.

de homoclinas), de donde los dos equilibrios extremos son focos con la misma estabilidad (si la recta  $T = 0$  está a la derecha del foco de mayor abscisa o bien si está a la izquierda del foco de menor abscisa) o bien el izquierdo es estable y el derecho es inestable (si la recta  $T = 0$  está entre ambos focos; recuérdese que  $\frac{\partial T}{\partial x} = b > 0$  y, por tanto,  $T$  es positivo a la derecha de  $T = 0$  y negativo a la izquierda de  $T = 0$ ). Esta última situación, distinta estabilidad, es la única compatible con la existencia de homoclinas cóncavas inferiores (para la existencia de homoclinas cóncavas superiores se requiere que el foco derecho sea estable y el izquierdo inestable, situación que corresponde al caso  $b < 0$ ) (vid. figura 3.4.4).

Las posibles homoclinas derechas e izquierdas pueden ocurrir únicamente si, de nuevo, los focos tienen diferentes estabilidades, es decir, si la curva  $T = 0$  se encuentra entre el foco y el silla (en caso contrario y suponiendo, por ejemplo, ambos inestables, la homoclina sería estable siendo la traza positiva, lo que no es posible). Puesto que la curva  $T = 0$  corta localmente una sola vez al eje  $OX$ , esto impide la coexistencia de homoclinas derechas e izquierdas, es decir, de homoclinas dobles.

En la figura 3.4.5 representamos la evolución de los retratos de fases del sistema cuando el parámetro  $\mu_3$  decrece: entre (a) y (b) se produce una bifurcación de Hopf de la que nace una órbita periódica estable, que sólo puede existir mientras la curva  $T = 0$  se encuentre a la izquierda del silla (pues, por las propiedades rotacionales, acumula en una conexión homoclina izquierda, que sólo puede ocurrir si la curva  $T = 0$  está a la izquierda del silla). El paso de  $T = 0$  a través del silla garantiza, pues, la *muerte* de la órbita periódica en una órbita homoclina convexa izquierda, representada en (c). Entre esta última y la homoclina convexa derecha, representada en (g), se verifica que aquellas partes de las variedades estable e inestable del silla con  $y \geq 0$  cortan al eje  $OY$  negativo; las propiedades rotacionales garantizan la existencia de una homoclina cóncava inferior, dada en (e). La evolución, cuando  $T = 0$  se sitúa a la derecha del silla, es análoga a la estudiada: homoclina convexa derecha en (g) y existencia de una órbita periódica estable en (h) que va a desaparecer en una bifurcación de Hopf.

Esto completa la demostración. ■

Con respecto a homoclinas degeneradas, mostramos en la figura 3.4.6 los resultados numéricos que hemos obtenido mediante la continuación de las órbitas homoclinas cóncavas inferiores de codimensión tres dadas por las condiciones de traza cero y  $EID = 1$ .

Finalizamos esta sección mostrando en la figura 3.4.7 los diferentes conjuntos de bifurcaciones que conjeturamos para el sistema (3.4.14), donde  $TB_R$  y  $TB_L$  corresponden a Takens–Bogdanov de los equilibrios de la derecha y de la izquierda, respectivamente;  $HD, HI, HCI, HCID$  y  $H - EID$  corresponden a homoclinas derechas, izquierdas, cóncavas inferiores, cóncavas inferiores con traza cero y cóncavas inferiores con traza cero y  $EID = 1$ , respectivamente;  $HSN - I, HSN - D, HSN - CII$  y  $HSN - CID$  corresponden a homoclinas silla-nodo izquierdas, derechas, cóncavas inferiores izquierdas y cóncavas inferiores derechas, respectivamente;  $Cu$  corresponde a cúspide de órbitas periódicas;  $H, H_1$  y  $H_2$  corresponden a bifurcaciones de Hopf, Hopf degenerada en el término cúbico y Hopf degenerada en el término de orden cinco, respectivamente.

### 3.5 Un Caso de Degeneración de un Doble Cero Diagonalizable

En esta última sección abordamos el estudio del desplegamiento de cierta degeneración de una singularidad con un doble cero diagonalizable, cuyo origen se encuentra en una singularidad tetradimensional con dos pares de autovalores imaginarios sin resonancia (vid. [51]). Nuestro interés en este caso viene dado por el hecho de que el sistema plano que vamos a estudiar puede ser obtenido como una *sección* de un sistema tridimensional que experimenta una bifurcación de Hopf–cero en presencia de una simetría, y que aparece en las ecuaciones del modelo de un circuito electrónico (cuyo estudio parcial abordaremos en el capítulo

IV y al que remitimos para los detalles de lo que sigue) dadas, a orden cinco, por

$$\begin{cases} R\dot{x} &= -(\nu + \beta)x + \beta y - a_3x^3 + b_3(y - x)^3 - a_5x^5 + b_5(y - x)^5 \\ \dot{y} &= \beta x - (\beta + \gamma)y - z - b_3(y - x)^3 - c_3y^3 - b_5(y - x)^3 - c_5y^5 \\ \dot{z} &= y \end{cases} \tag{3.5.1}$$

donde  $R, \nu, \beta, \gamma, a_3, a_5, b_3, b_5, c_3$  y  $c_5$  son parámetros.

El sistema dado en (3.5.1), una vez situado sobre los valores críticos de los parámetros donde experimenta una bifurcación de Hopf-cero, puede ser escrito en la siguiente forma normal (vid. [45]) dada en coordenadas cilíndricas por

$$\begin{cases} \dot{r} &= a_{11}r^3 + a_{12}rz^2 \\ \dot{z} &= a_{21}r^2z + a_{22}z^3 \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + t_1r^2 + t_2z^2 \end{cases} \tag{3.5.2}$$

para  $r > 0$ , siendo

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3[\beta^4(a_3 + b_3) - R^4\omega_0^4(b_3 + c_3)]}{3R(R - \beta^2)} \\ a_{12} &= \frac{3[\beta^2(a_3 + b_3) - R^2\omega_0^2b_3]}{2R(R - \beta^2)} \\ a_{21} &= \frac{-3[\beta^2(a_3 + b_3) + R^2\omega_0^2b_3]}{2(R - \beta^2)} \\ a_{22} &= -\frac{a_3 + b_3}{R - \beta^2} \\ t_1 &= \frac{-3\omega_0\beta b_3(R^2\omega_0^2 + \beta^2)}{4(R - \beta^2)} \\ t_2 &= \frac{-3\omega_0\beta b_3}{R - \beta^2} \end{aligned}$$

Quitando la ecuación correspondiente al término azimutal obtenemos el sistema plano

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(a_{11}r^2 + a_{12}z^2) \\ \dot{z} &= z(a_{21}r^2 + a_{22}z^2) \end{cases} \tag{3.5.3}$$

En la hipótesis adicional de degeneración del término  $r^3$ ,  $a_{11} = 0$ , obtenemos el siguiente desplegamiento de (3.5.3) (vid. [2])

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(\mu_1 + \mu_3r^2 + z^2 + cr^4) \\ \dot{z} &= z(\mu_2 + dr^2 + az^2) \end{cases} \tag{3.5.4}$$

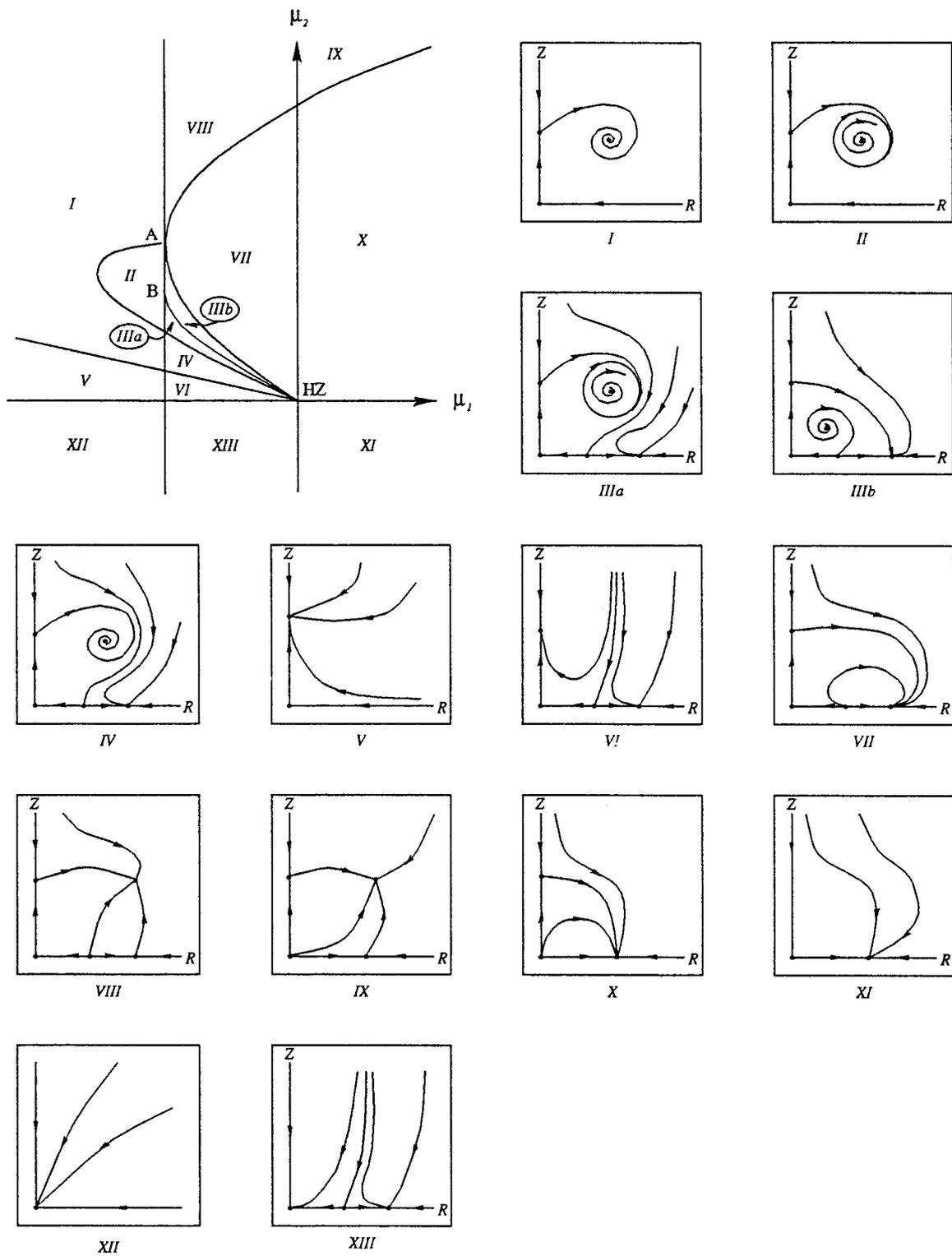


Figura 3.5.1: Conjunto de bifurcaciones para  $\mu_3 > 0$ .

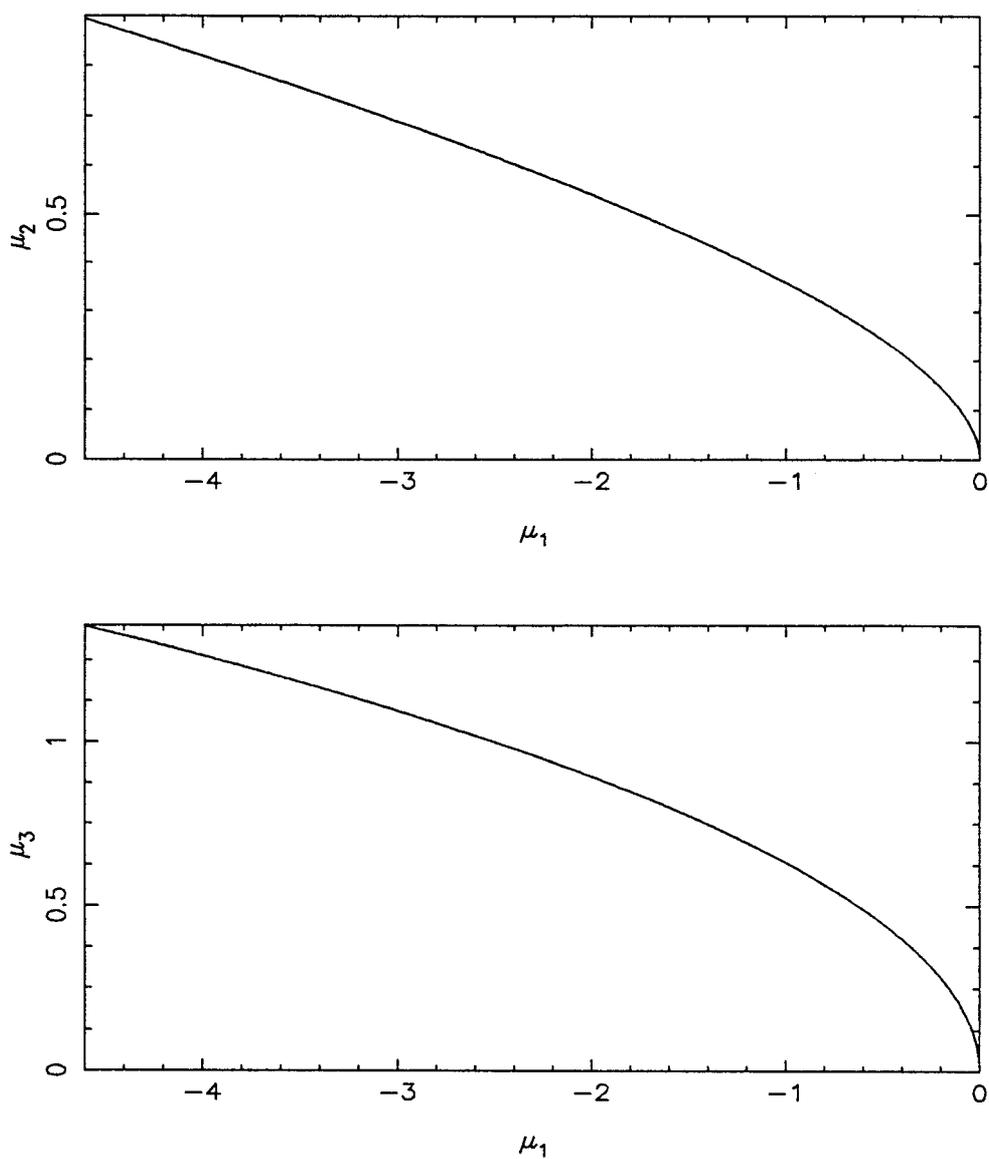


Figura 3.5.2: Proyecciones de la curva de conexiones heteroclinas de tipo silla-nodo.

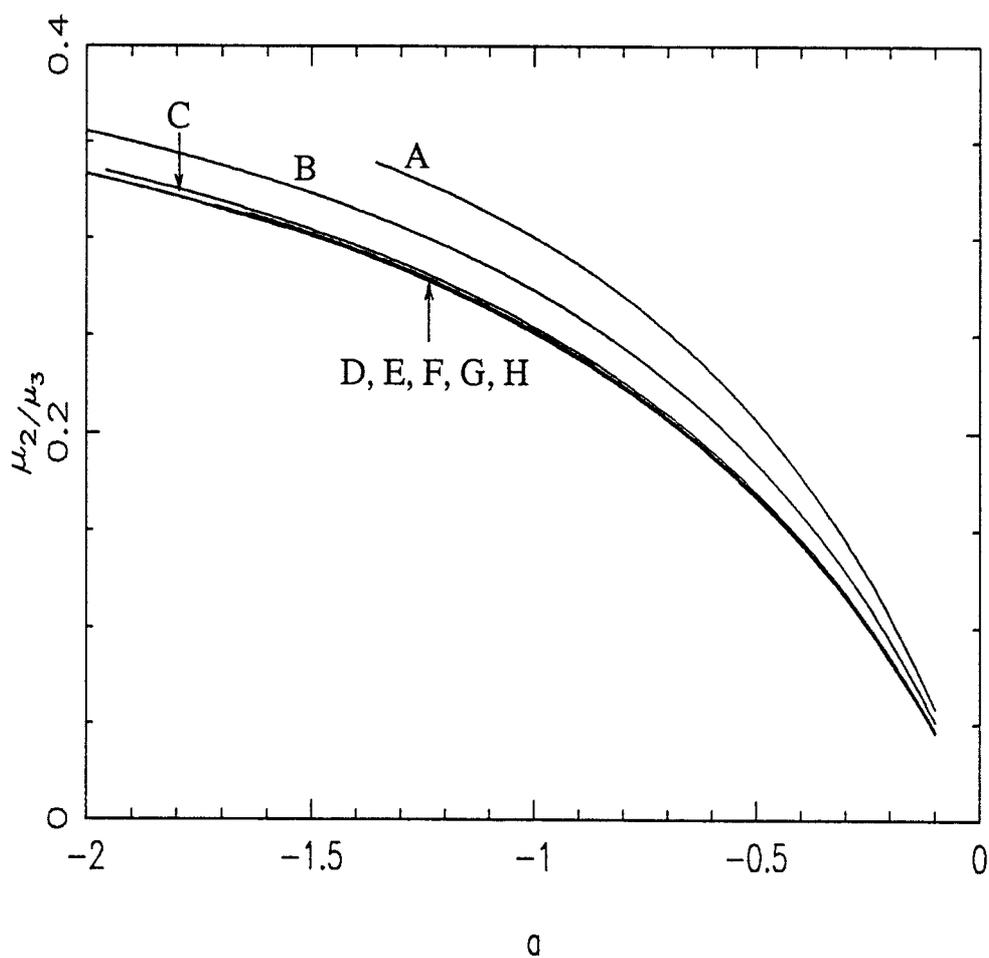


Figura 3.5.3: Proyecciones de la curva de conexiones heteroclinas de tipo silla-nodo para diferentes valores de  $\mu_3$ : A:  $\mu_3 = 1$ ; B:  $\mu_3 = 0.5$ ; C:  $\mu_3 = 0.1$ ; D:  $\mu_3 = 0.05$ ; E:  $\mu_3 = 0.01$ ; F:  $\mu_3 = 0.005$  y G:  $\mu_3 = 0.002$ . La curva H corresponde a la predicción teórica para la curva límite  $\frac{\mu_2}{\mu_3} = \frac{a}{2(a-1)}$ .

donde los parámetros  $\mu_i, i = 1, 2, 3$ , están próximos a cero y  $a \neq 0, 1, 2, c = \pm 1, d = \pm 1$ . En lo que sigue consideraremos el caso  $a < 0, c = -1, d = -1, \mu_3 > 0$  puesto que es el que tiene más riqueza de bifurcaciones.

Debido a la presencia en el sistema (3.5.4) de la simetría al cambio de signo de  $r$  y  $z$ , restringimos el estudio al primer cuadrante ( $r \geq 0, z \geq 0$ ) del plano de fases. Esto nos permite realizar el cambio de variables  $R = r^2, Z = z^2$  que transforma (3.5.4) en

$$\begin{cases} \dot{R} = R(\mu_1 + \mu_3 R + Z - R^2) \\ \dot{Z} = Z(\mu_2 - R + aZ) \end{cases} \quad (3.5.5)$$

En la figura 3.5.1 mostramos una representación cualitativa del conjunto de bifurcaciones de (3.5.5) en el plano de parámetros  $(\mu_1, \mu_2)$ , para  $\mu_3 > 0$ , junto a los diferentes retratos de fases que pueden aparecer.

En la figura 3.5.2 aparecen las curvas numéricas de heteroclinas de tipo silla-nodo (punto B en el conjunto de bifurcaciones de la figura 3.5.1) proyectada en dos planos paramétricos.

Para  $\mu_3 > 0$  y cuando  $\mu_3$  tiende a cero, los puntos de codimensión dos,  $A, B$  y  $HZ$ , se unen en el origen del espacio de parámetros  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 0, 0)$  (correspondiente a un punto de Hopf-cero degenerado). Hemos realizado la continuación numérica del punto B en el espacio  $(\mu_1, \mu_2, a)$ , para  $\mu_3$  constante, y hemos representado  $\frac{\mu_2}{\mu_3}$  frente a  $a$  para varios valores de  $\mu_3$  (vid. figura 3.5.3) verificando la corrección de la predicción dada en [2] para esta curva:

$$\mu_2 = \frac{a}{2(a-1)}\mu_3 + o(\mu_3)$$

Cuando  $\mu_3$  tiende a cero, obtenemos la curva límite  $\frac{\mu_2}{\mu_3} = \frac{a}{2(a-1)}$  representada en la figura 3.5.3.

# Capítulo IV

## BIFURCACIONES EN CIRCUITOS DE VAN DER POL–DUFFING

### 4.1 Introducción

En la primera parte de este capítulo estudiaremos las características principales, tanto cualitativas como numéricas, del conocido *cross-shaped diagram* o diagrama *en forma de cruce*, como a partir de este momento será denominado, uno de cuyos orígenes se encuentra en un sistema plano que modela un oscilador de Van der Pol–Duffing. Este sistema será objeto de estudio en la sección segunda.

En la segunda parte del capítulo (secciones tercera y cuarta) estudiaremos un oscilador electrónico tridimensional, genealógicamente relacionado con el oscilador plano de Van der Pol–Duffing, centrándonos en los fenómenos relativos a la bifurcación de Hopf y algunas degeneraciones relacionadas.

En la sección tercera describiremos las componentes del circuito, así como el sistema de ecuaciones diferenciales que nos servirá para estudiar su comportamiento.

Para el oscilador tridimensional citado, y en la cuarta sección, nos ocuparemos de la bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen, así como de varias degeneraciones adicionales que serán estudiadas haciendo uso de la teoría de la singularidad desarrollada en [48]. Esto nos permitirá localizar, en primer lugar, y

tras introducir los conceptos fundamentales necesarios, una singularidad con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión 2, correspondiente a una pérdida doble de la condición de transversalidad. En segundo lugar, localizaremos una singularidad aún más degenerada, a saber, una con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión 3 en presencia de un parámetro modal (y por tanto con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión topológica 2) que corresponde a una pérdida simple de la condición de transversalidad junto con la anulación del término cúbico en la forma normal de la bifurcación de Hopf. Otras singularidades con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión 3 surgirán del caso anterior cuando obtengamos puntos conectores. Finalmente, otras singularidades que determinaremos vendrán dadas de nuevo como casos límite de la que presenta parámetro modal, precisamente cuando éste tiende a infinito (volvemos a obtener puntos conectores) y dará lugar a dos singularidades con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión 3: una aparece por una pérdida doble de la condición de transversalidad junto con la anulación del término cúbico de la forma normal; la otra, por la anulación simultánea de los coeficientes de órdenes tres y cinco de la forma normal junto con una pérdida simple de la condición de transversalidad.

## 4.2 El Diagrama en Forma de Cruce

En esta sección nos proponemos presentar el conjunto de bifurcaciones del desplegamiento de una singularidad que experimenta una bifurcación de Takens–Bogdanov con una simetría rotacional (análoga a aquella descrita en [51], pág. 371, pero añadiendo un parámetro independiente en su desplegamiento). Por la forma que exhibe su conjunto de bifurcaciones en uno de los planos de parámetros, aquél es conocido como el diagrama *en forma de cruce* (vid. [19], [36] y [50]).

### 4.2.1 Génesis del Oscilador de Van der Pol–Duffing

Tres sistemas, uno físico, otro químico y el tercero biológico se encuentran, independientemente, en el origen del oscilador que vamos a estudiar:

**Un oscilador electrónico de Van der Pol–Duffing:** En la figura 4.2.1 aparece un sistema electrónico consistente en un circuito paralelo RCL (resistencia

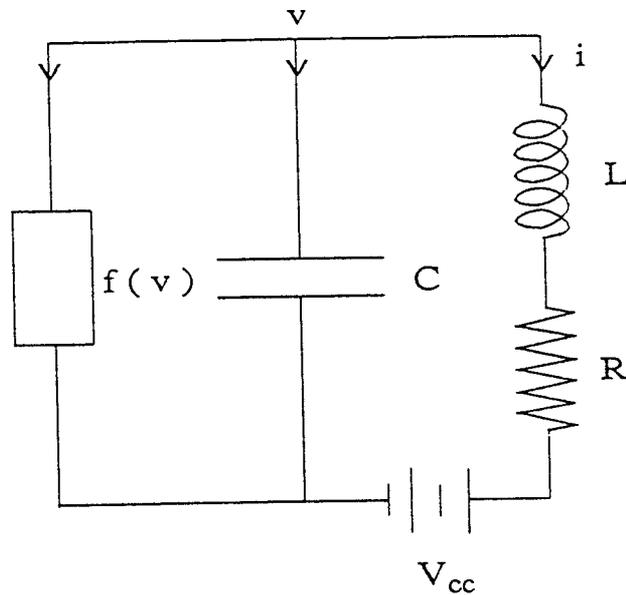


Figura 4.2.1: Circuito electrónico.

$R$ , capacidad  $C$  e inductancia  $L$ ) con una conductancia no lineal  $f(v)$ . Las ecuaciones de estado del circuito vienen dadas por

$$\begin{cases} C \frac{dv}{dt} = -i - f(v) \\ L \frac{di}{dt} = v - Ri - V_{cc} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde supondremos  $f(v) = -a_1v + a_3v^3$ , con  $a_1, a_3 > 0$ .

Escribamos el sistema (4.2.1) en la forma de una ecuación de Liénard

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + (Lf'(v) + RC) \frac{dv}{dt} + (v + Rf(v)) = V_{cc}$$

En el caso particular en que  $R = 0$  y  $V_{cc} = 0$  se obtiene el oscilador clásico de Rayleigh–Van der Pol.

Cuando  $R \neq 0$ , reconocemos en la ecuación anterior términos cúbicos en  $v$ , que nos autorizan a denominar esta ecuación con el nombre de Van der Pol–Duffing.

Escalando adecuadamente obtenemos a partir de 4.2.1

$$\ddot{x} = \mu_1 + \mu_2x + \mu_3\dot{x} - x^3 - 3x^2\dot{x}$$

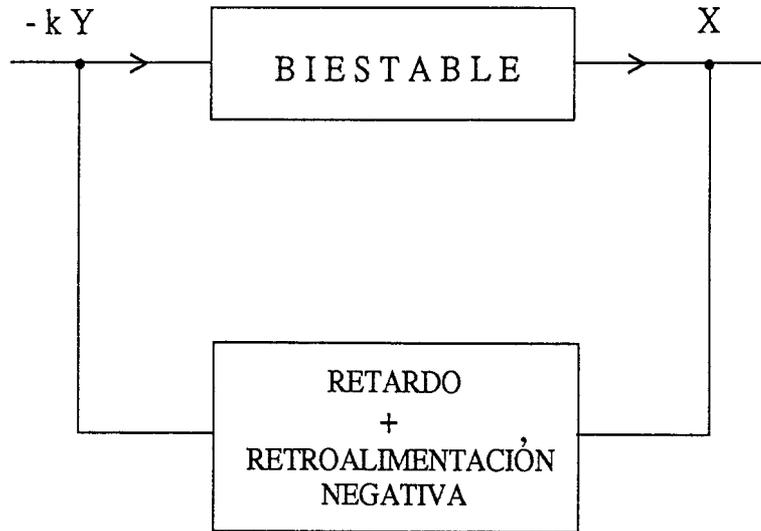


Figura 4.2.2: Reactor químico oscilante.

o, en forma de sistema,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 y - x^3 - 3x^2 y \end{cases} \quad (4.2.2)$$

(para  $\mu_1 = 0$  corresponde a la Takens–Bogdanov con simetría antes mencionada).

**Un reactor químico oscilante:** El reactor químico esquematizado en la figura 4.2.2 viene modelado por las ecuaciones de Boissonade–de Kepper (vid. [10])

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -(X^3 - \mu_0 X + \lambda) - KY \\ \tau \frac{dY}{dt} = X - Y \end{cases}$$

(para  $\mu_0 > 0$ ) que, mediante una traslación en la variable  $Y$  y un escalado, puede ser escrito en la forma dada en (4.2.2).

**Ecuaciones de Fitzhugh–Nagumo:** Este modelo de la conducción nerviosa fue introducido en torno a 1960 como una simplificación del modelo de Hodgkin–Huxley de la actividad eléctrica de una membrana excitable. Sus

ecuaciones vienen dadas por el sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \alpha + Y + X - \frac{X^3}{3} \\ \frac{dY}{dt} = \rho(a - X - bY) \end{cases}$$

que puede ser escrito, de nuevo mediante una traslación en la variable  $Y$  y un escalado, en la forma dada en (4.2.2).

### 4.2.2 Análisis de Bifurcaciones

Comenzamos analizando el comportamiento local de (4.2.2), que viene descrito en el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.1** *El sistema (4.2.2) experimenta una bifurcación de:*

1. *silla-nodo de equilibrios en la superficie  $27\mu_1^2 - 4\mu_2^3 = 0$ ;*
2. *cúspide de equilibrios en la curva  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ ;*
3. *Hopf de codimensión:*

- (a) *uno, en la superficie  $\mu_1 = \pm \left(\frac{\mu_3}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{\mu_3}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \mu_2$ , para  $\mu_3 > \mu_2$ ,*
- (b) *dos, en la curva  $\mu_2 = -\mu_3$ , para  $\mu_3 > \mu_2$ .*

4. *Takens-Bogdanov en la curva*

$$\begin{cases} \mu_1 = -2\alpha^3 \\ \mu_2 = 3\alpha^2 \\ \mu_3 = 3\alpha^2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

DEMOSTRACIÓN:

Los equilibrios del sistema vienen dados por  $(x_0, 0)$ , donde  $\mu_1 + \mu_2 x_0 - x_0^3 = 0$ . La matriz de la linealización del sistema en  $(x_0, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 - 3x_0^2 & \mu_3 - 3x_0^2 \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

junto con la condición de equilibrio nos permiten deducir fácilmente las expresiones para las diferentes bifurcaciones existentes. El algoritmo desarrollado en [38] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf nos permite conocer el coeficiente cúbico de aquélla, cuya anulación viene dada por  $\mu_2 = -\mu_3$ , siendo la bifurcación de Hopf subcrítica cuando  $\mu_2 > -\mu_3$  y supercrítica cuando  $\mu_2 < -\mu_3$ .

De las condiciones de anulación de la traza y el determinante de la matriz (4.2.3), se deduce inmediatamente la expresión de la curva de bifurcación de Takens–Bogdanov. ■

Las superficies y curvas correspondientes a los diferentes tipos de homoclinas de codimensión uno y dos, respectivamente, que pueden aparecer van a ser calculadas haciendo uso de la función de Melnikov así como numéricamente. Sea el escalado

$$\begin{aligned} x &\mapsto \varepsilon x, & \mu_1 &= \varepsilon^3 \nu_1, & t &\mapsto \varepsilon t, \\ y &\mapsto \varepsilon^2 y, & \mu_2 &= \varepsilon^2 \nu_2, \\ & & \mu_3 &= \varepsilon^2 \nu_3 \end{aligned}$$

que transforma (4.2.2) en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \nu_1 + \nu_2 x - x^3 + \varepsilon(\nu_3 y - 3x^2 y) \end{cases} \quad (4.2.4)$$

que resulta de perturbar el sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \nu_1 + \nu_2 x - x^3 \end{cases}$$

Se verifica el teorema siguiente.

**Teorema 4.2.2** *El sistema (4.2.2) presenta homoclinas de codimensión:*

- (a) *Uno: derechas, izquierdas, cóncavas superiores y cóncavas inferiores;*
- (b) *Dos: dobles y de tipo silla–nodo derechas, izquierdas, cóncavas superiores y cóncavas inferiores.*

## DEMOSTRACIÓN:

El criterio de la divergencia de Andronov (vid. [4]), dado por

$$\int \int_{\text{int} \gamma} (\nu_3 - 3x^2) dx dy = 0$$

donde  $\gamma$  es una órbita homoclina derecha, izquierda o cóncava, nos permite obtener, en primera aproximación, curvas de estas órbitas homoclinas en el plano paramétrico  $(\mu_1, \mu_2)$  (para  $\mu_3 > 0$ ). Tomando  $\nu_3 = 1$  (es decir,  $\mu_3 > 0$ ) obtenemos la siguiente parametrización de la curva de conexiones homoclinas derechas

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_3^{\frac{3}{2}} \nu_1 \\ \mu_2 = \mu_3 \nu_2 \end{cases} \quad (4.2.5)$$

donde

$$\nu_1 = -\nu_2 s + s^3 \quad \nu_2 = \frac{1}{3 + \frac{4}{5} h(\theta)} \quad s^2 = \frac{\text{sen}^2 \theta}{2 + \text{sen}^2 \theta} \nu_2$$

$$h(\theta) = \frac{\cos^5 \theta}{(2 + \text{sen}^2 \theta) \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \text{sen} \theta - \cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]}$$

donde  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Para  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  se obtiene el punto terminal de (4.2.5) sobre la curva de sillanodo de equilibrios y corresponde, por tanto, a una homoclina de codimensión dos de tipo silla-nodo derecha; para  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$  y  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  tenemos homoclinas derechas; para  $\theta = 0$  tenemos una homoclina doble y para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  se obtiene el otro punto terminal de la curva, correspondiente al punto de Takens-Bogdanov (vid. figura 4.2.3).

Debido a la simetría que exhibe el sistema, dada por la invarianza al cambio  $x \mapsto -x$ ,  $y \mapsto -y$ ,  $\mu_1 \mapsto -\mu_1$ , la curva de homoclinas izquierdas se obtiene de (4.2.5) sin más que cambiar el signo de  $\mu_1$ . De nuevo, el valor  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , correspondiente al punto terminal de la curva de homoclinas izquierdas sobre la curva de sillanodo de equilibrios, nos permite obtener el punto donde ocurre una homoclina de codimensión dos de tipo silla-nodo izquierda.

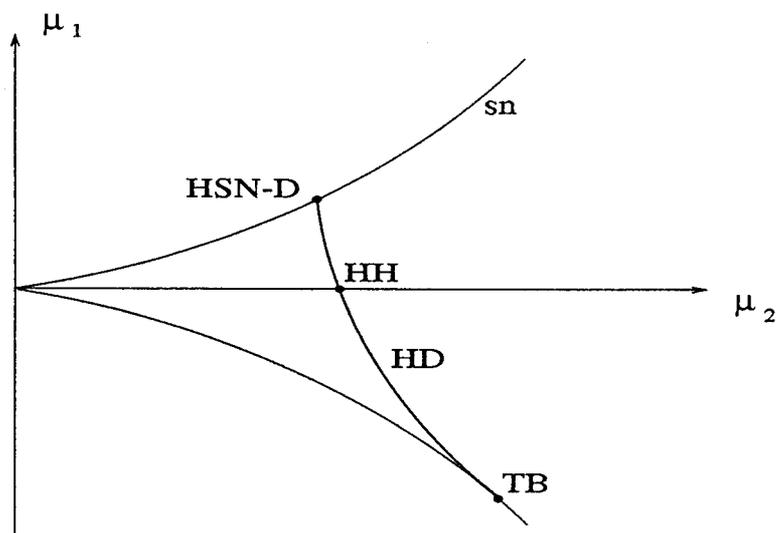


Figura 4.2.3:  $HD$ =curva de homoclinas derechas (en trazo grueso);  $sn$ =silla-nodo de equilibrios;  $TB$ =Takens-Bogdanov ( $\mu_2 = \mu_3; \theta = \frac{\pi}{2}$ );  $HH$ =homoclina doble ( $\mu_2 = \frac{5}{12}\mu_3; \theta = 0$ );  $HSN - D$ =homoclina silla-nodo derecha ( $\mu_2 = \frac{1}{3}\mu_3; \theta = -\frac{\pi}{2}$ ).

El cálculo para las homoclinas cóncavas nos lleva a obtener una parametrización idéntica a la obtenida para las homoclinas derechas sin más que suprimir el término  $\frac{\pi}{2}$  que aparece en el denominador de  $h(\theta)$  (los puntos de esta curva corresponden para  $\mu_1 > 0$  a homoclinas cóncavas superiores y para  $\mu_1 < 0$  a homoclinas cóncavas inferiores; en  $\mu_1 = 0$ , donde la curva se corta con las dos curvas de homoclinas derechas e izquierdas, se obtiene una homoclina doble; los puntos terminales sobre la curva de silla-nodo de equilibrios corresponden a homoclinas de codimensión dos de tipo silla-nodo cóncavas: superior para  $\mu_1 > 0$  e inferior para  $\mu_1 < 0$ ). ■

En la figura 4.2.4 mostramos el conjunto de bifurcaciones cualitativo que hemos obtenido para el sistema (4.2.2) en el plano paramétrico  $(\mu_2, \mu_1)$ , para  $\mu_3 > 0$  (con el siguiente significado de los símbolos:  $TB$  = Takens-Bogdanov;  $SN$  = silla-nodo de órbitas periódicas;  $sn$  = silla-nodo de equilibrios;  $C$  = cúspide de equilibrios;  $H$  = Hopf;  $H_1$  = Hopf degenerada;  $HD$  = homoclinas derechas;

$HI$  = homoclinas izquierdas;  $HCS$  = homoclinas cóncavas superiores;  $HCI$  = homoclinas cóncavas inferiores;  $HH$  = homoclina doble;  $HSN - D$  = homoclina silla-nodo derecha;  $HSN - I$  = homoclina silla-nodo izquierda;  $HSN - CSD$  = homoclina silla-nodo cóncava superior derecha y  $HSN - CII$  = homoclina silla-nodo cóncava inferior izquierda).

En las figuras 4.2.5 y 4.2.6 aparecen diferentes detalles del conjunto de bifurcaciones de (4.2.2) obtenido numéricamente. Para la continuación de las curvas de homoclinas recogidas en estas figuras hemos aproximado linealmente las variedades estable e inestable de los puntos de silla hiperbólicos, mientras que hemos aproximado cuadráticamente la variedad de centros en el caso de equilibrios no hiperbólicos de tipo silla-nodo, aproximación dada por

$$y = \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

con  $\alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 = \frac{3x_0}{\mu_3 - 3x_0^2}$ .

En lugar de uno de los parámetros de bifurcación  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , hemos tomado como parámetro de continuación la abscisa del equilibrio,  $x_0$ , para evitar problemas numéricos en las proximidades de la curva de sillan-nodo de órbitas periódicas.

Hacemos la observación de que las curvas de homoclinas derechas y cóncavas superiores (análoga observación puede hacerse para homoclinas izquierdas y cóncavas inferiores) obtenidas aplicando el criterio de Andronov, se unen sobre la curva de sillan-nodo de equilibrios en el mismo punto  $\mu_2 = \frac{\mu_3}{3}$ , y ambas con tangente vertical. La teoría de la perturbación falla en este caso a causa de que el equilibrio del sistema sin perturbar es no hiperbólico. El trabajo de Schecter (vid. [99]) predice un contacto de primer orden entre las curvas de silla-nodo de equilibrios y de homoclinas derechas y un contacto similar entre las curvas de sillan-nodo de equilibrios y de homoclinas cóncavas superiores.

Por último, en la figura 4.2.7 mostramos las proyecciones en el plano de parámetros  $(\mu_2, \mu_3)$  de las curvas de homoclinas silla-nodo derechas ( $HSN - D$ ) y cóncavas superiores derechas ( $HSN - CSD$ ) en el caso  $\mu_1 > 0$  (para  $\mu_1 < 0$  obtendríamos las mismas proyecciones, pero ahora de homoclinas silla-nodo

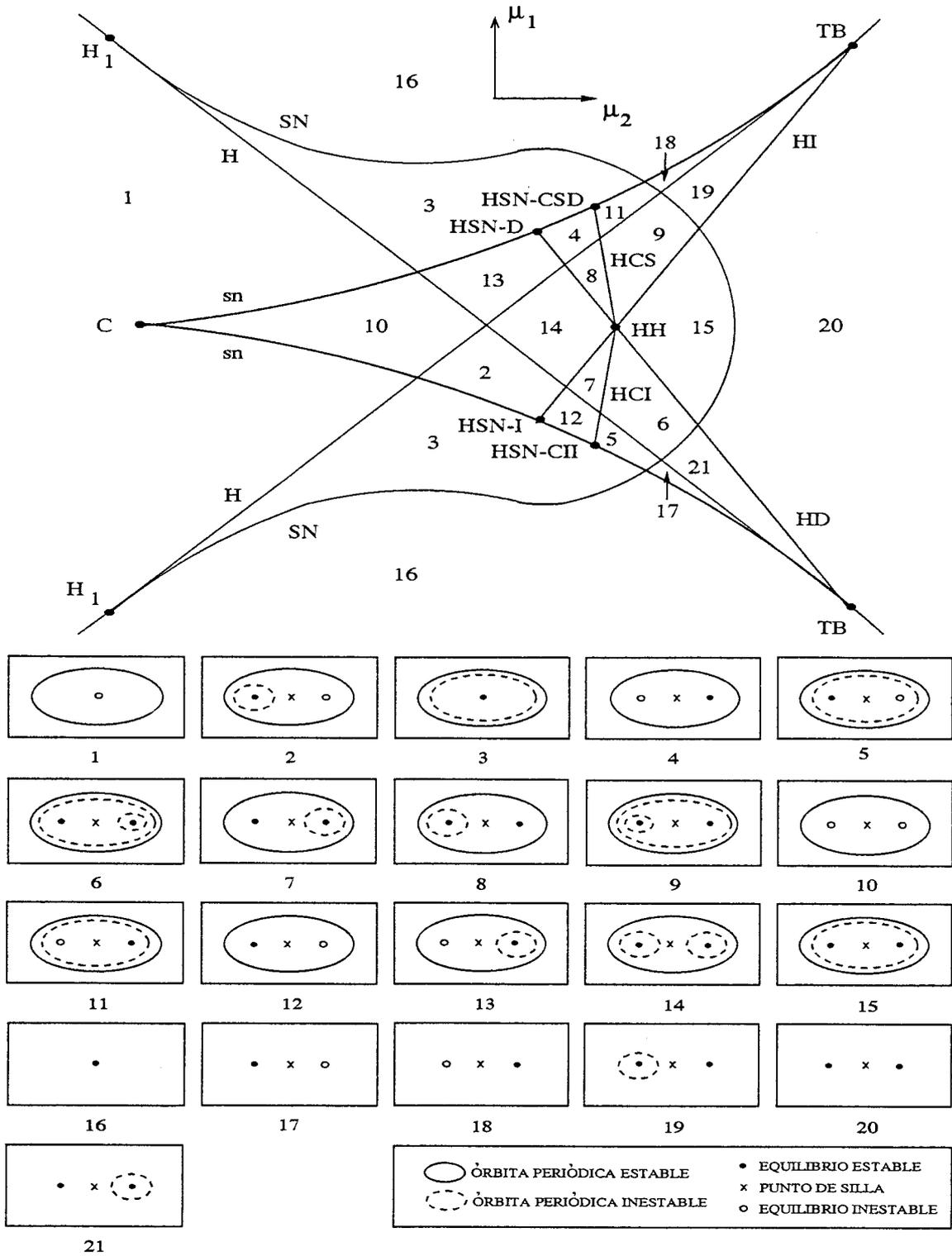
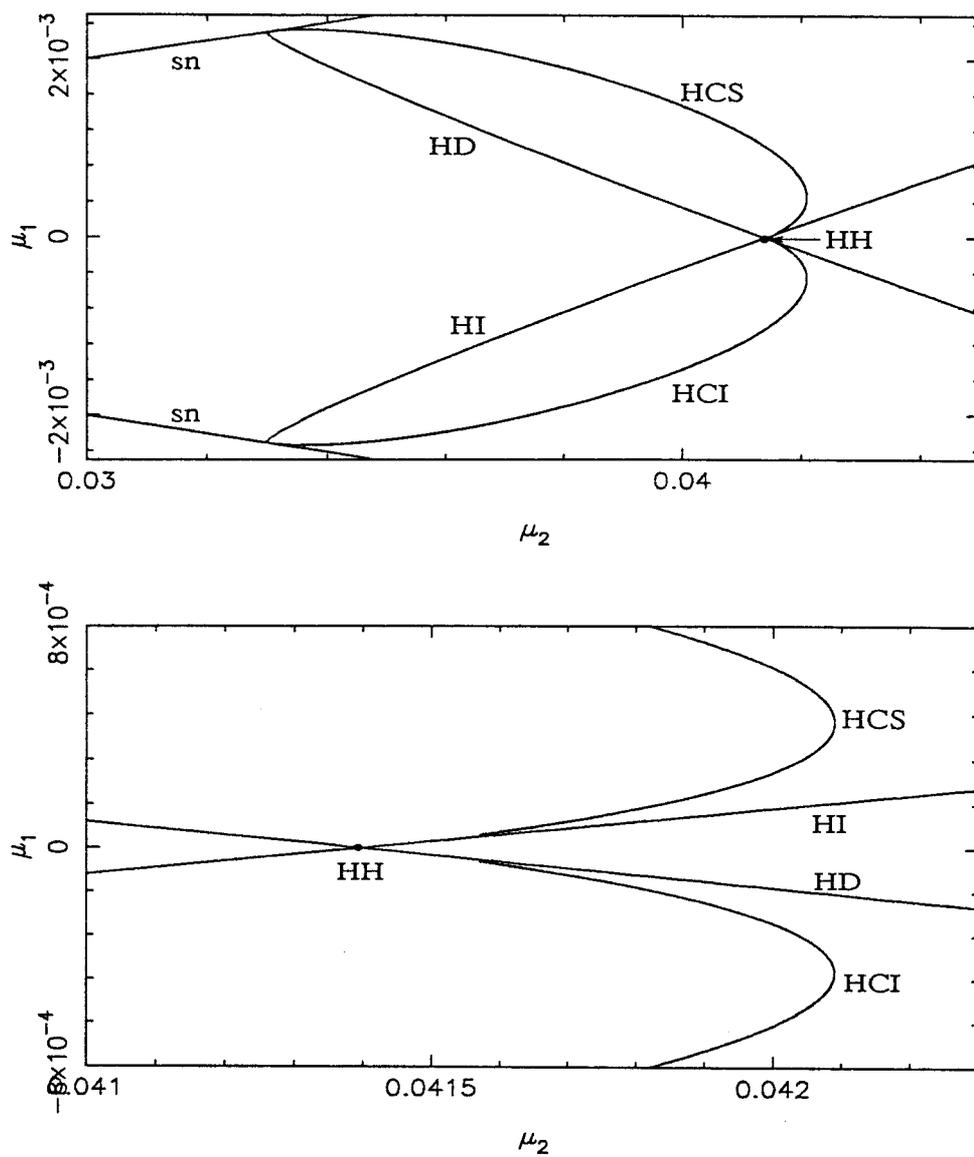


Figura 4.2.4: Diagrama en forma de cruce para  $\mu_3 > 0$  (en el texto aparece el significado de los símbolos).

Figura 4.2.5: Detalles del diagrama *en forma de cruce*.

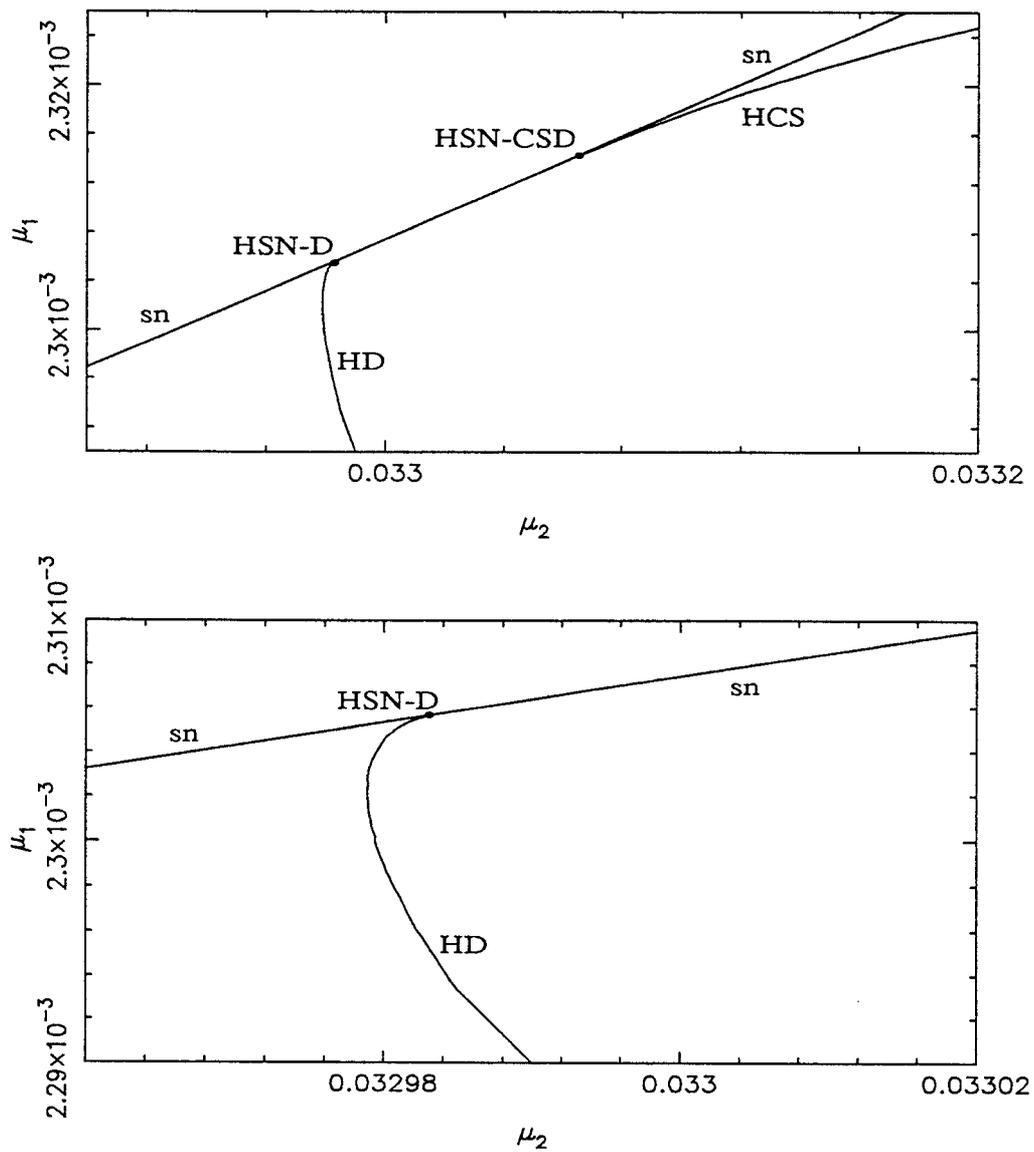


Figura 4.2.6: Detalles del diagrama en forma de cruce.

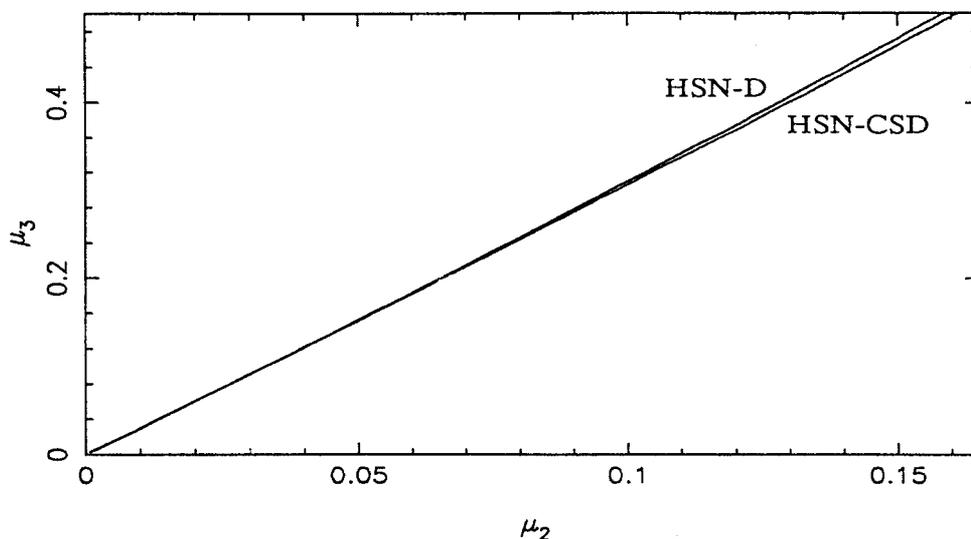


Figura 4.2.7: Proyección de las curvas de homoclinas silla-nodo derechas ( $HSN - D$ ) y cóncavas superiores derechas ( $HSN - CSD$ ).

izquierdas ( $HSN - I$ ) y de homoclinas silla-nodo cóncavas inferiores izquierdas ( $HSN - CII$ ).

### 4.3 Un Modelo Tridimensional para un Circuito de Van der Pol–Duffing.

El sistema electrónico objeto ahora de nuestro estudio aparece representado en la figura 4.3.1, en la que podemos observar que consiste en el acoplamiento, mediante la conductancia no lineal  $G_2$ , de dos circuitos: un circuito paralelo RCL (conductancia no lineal  $G_3$ , inductancia  $L$  y capacidad  $C$ ), y un circuito paralelo RC (conductancia no lineal  $G_1$  y capacidad  $C_0$ ). Diferentes elecciones para las conductancias no lineales  $G_1, G_2, G_3$  dan lugar a diversos sistemas particulares.

En el caso en que  $G_1$  sea una conductancia no lineal negativa (tipo oscilador de Van der Pol),  $G_2$  una conductancia no lineal positiva —realizable físicamente mediante la asociación en paralelo de dos grupos de diodos, polarizados en oposición— y  $G_3$  una conductancia puramente lineal, tenemos el sistema

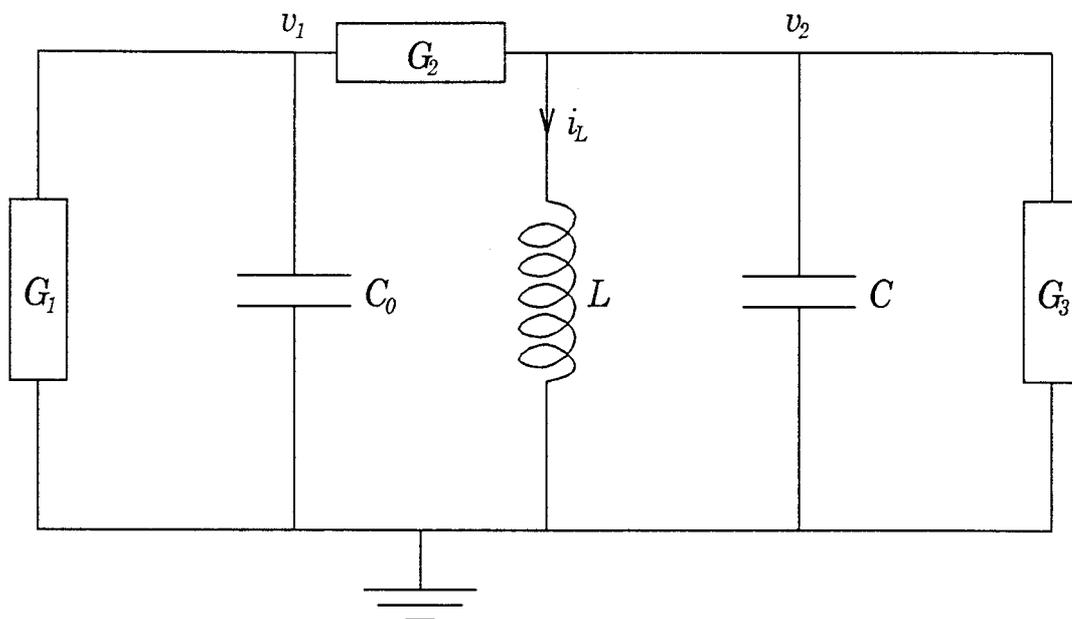


Figura 4.3.1: Esquema del circuito electrónico.

originalmente propuesto por Shinriki *et alii* (vid. [103] y [104]) como un oscilador que genera *ondas aleatorias*. El análisis realizado por dichos autores se reduce a simulaciones numéricas y alguna experimentación; no llevan a cabo ningún estudio teórico de las ecuaciones de estado e incluso el análisis empírico realizado es incompleto. Un estudio más exhaustivo de la dinámica del mencionado sistema puede encontrarse en [37], [41], [45] y [88].

En el caso en que  $G_1$  sea una conductancia no lineal negativa (tipo oscilador de Van der Pol),  $G_2$  una conductancia lineal y  $G_3$  una conductancia nula, se obtendría el llamado *circuito de Chua*, estudiado por Matsumoto (vid. [75]), Matsumoto *et alii* (vid. [76]), Chua *et alii* (vid. [17]) y, más recientemente, en [73].

Las ecuaciones de estado del circuito son

$$\begin{cases} C_0 \frac{dv_1}{d\tau} = -i_1(v_1) + i_2(v_2 - v_1) \\ C \frac{dv_2}{d\tau} = -i_L - i_2(v_2 - v_1) - i_3(v_2) \\ L \frac{di_L}{d\tau} = v_2 \end{cases} \quad (4.3.1)$$

donde las variables de estado son  $v_1, v_2, i_L$ . Las dos primeras,  $v_1, v_2$ , representan las tensiones en los condensadores, mientras que  $i_L$  corresponde a la intensidad en la bobina. Además,  $i_1(v_1), i_2(v_2 - v_1), i_3(v_2)$  representan a la intensidad como función de la correspondiente tensión para las conductancias no lineales. Asumiremos que estas funciones verifican  $i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0$  y también  $i_j(-v) = -i_j(v)$  para  $j = 1, 2, 3$ , y para ellas consideramos los siguientes desarrollos formales

$$\begin{aligned} i_1(v_1) &= \mu_1 v_1 + \tilde{a}_3 v_1^3 + \tilde{a}_5 v_1^5 + \dots \\ i_2(v_2 - v_1) &= \mu_2 (v_2 - v_1) + \tilde{b}_3 (v_2 - v_1)^3 + \tilde{b}_5 (v_2 - v_1)^5 + \dots \\ i_3(v_2) &= \mu_3 v_2 + \tilde{c}_3 v_2^3 + \tilde{c}_5 v_2^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

donde supondremos que  $\tilde{a}_i \geq 0, \tilde{b}_i \geq 0, \tilde{c}_i \geq 0$  para todo  $i = 3, 5, \dots$

El análisis efectuado por Gamero en [45] pone de manifiesto que los candidatos naturales a ser tomados como parámetros de bifurcación son  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , es decir, las aproximaciones lineales a las características tensión-intensidad de las conductancias  $G_1, G_2, G_3$ , los cuales pueden ser fácilmente variados mediante los correspondientes potenciómetros.

Si llamamos ahora  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , vamos a realizar en el sistema (4.3.1) un escalado en el tiempo:  $t = \omega\tau$ . Además, tomaremos como nuevas variables de estado

$$x = v_1, \quad y = v_2, \quad z = \frac{i_L}{\omega C}$$

Por último, realizamos el siguiente escalado sobre los parámetros del sistema

$$\begin{aligned} r &= \frac{C_0}{C}, \quad \nu = \frac{\mu_1}{\omega C}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\omega C}, \quad \gamma = \frac{\mu_3}{\omega C} \\ a_i &= \frac{\tilde{a}_i}{\omega C}, \quad b_i = \frac{\tilde{b}_i}{\omega C}, \quad c_i = \frac{\tilde{c}_i}{\omega C} \quad i = 3, 5, \dots \end{aligned}$$

De la expresión de  $r$  deducimos que ha de ser  $r > 0$ , asimismo resulta  $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$  para  $i = 3, 5, \dots$ . Con esta notación, estudiaremos el sistema (4.3.1)

cortado a quinto orden, que adopta la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -\left(\frac{\nu + \beta}{r}\right)x + \frac{\beta}{r}y - \frac{a_3}{r}x^3 + \frac{b_3}{r}(y-x)^3 - \frac{a_5}{r}x^5 + \frac{b_5}{r}(y-x)^5 \\ \dot{y} = \beta x - (\beta + \gamma)y - z - c_3y^3 - b_3(y-x)^3 - c_5y^5 - b_5(y-x)^5 \\ \dot{z} = y \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Observemos que el sistema es invariante bajo la transformación  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ , es decir, es  $\mathbb{Z}_2$ -simétrico, propiedad que condicionará la dinámica del sistema.

Por simplicidad, vamos a restringirnos al caso en que  $a_5 = b_5 = 0$ . Además, supondremos que la conductancia  $G_3$  es lineal y, por tanto,  $c_3 = c_5 = 0$ . Un nuevo escalado nos permitirá reducir en uno el número de parámetros. Sea, pues,

$$\begin{aligned} x &\mapsto Kx, & y &\mapsto Ky, & z &\mapsto Kz \\ p &= \frac{b_3}{a_3 + b_3}, & K^2 &= \frac{1}{a_3 + b_3} \end{aligned}$$

que transforma (4.3.3) en

$$\begin{cases} \dot{x} = -\left(\frac{\nu + \beta}{r}\right)x + \frac{\beta}{r}y - (1-p)x^3 + p(y-x)^3 \\ \dot{y} = \beta x - (\beta + \gamma)y - z - p(y-x)^3 \\ \dot{z} = y \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Este sistema tiene un equilibrio en el origen para cualesquiera valores de los parámetros. Su linealización en este equilibrio viene dada por

$$A(\nu, \beta) = \begin{pmatrix} -\frac{\nu + \beta}{r} & \frac{\beta}{r} & 0 \\ \beta & -(\beta + \gamma) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

y su polinomio característico es  $P(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$ , donde

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\nu + \beta(1+r) + \gamma r}{r} \\ p_2 &= \frac{\nu(\beta + \gamma) + \beta\gamma + r}{r} \\ p_3 &= \frac{\nu + \beta}{r} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Por último, vamos a sintetizar el comportamiento de bifurcaciones de (4.3.4) (vid. [45]) considerando los distintos casos de no hiperbolicidad del origen.

**Caso 1:**  $\lambda_1 = 0$  es autovalor simple de (4.3.5), teniendo además los restantes autovalores parte real no nula:  $re(\lambda_2) \neq 0, re(\lambda_3) \neq 0$ . Este caso se corresponde con  $p_3 = 0, p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$ , que en términos de  $\nu, \beta, \gamma$  se traduce en  $\nu + \beta = 0, \beta + \gamma \neq 0$  y  $\beta \neq \sqrt{r}$ . En este caso, la matriz (4.3.5) será semejante a una matriz del tipo

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & B \end{array} \right)$$

donde  $B \in \mathcal{M}_2$  y además  $\sigma(B) \subseteq \{re(z) \neq 0\}$ .

Los equilibrios no triviales del sistema (4.3.4) vienen expresados por  $(x^+, y^+, z^+), (x^-, y^-, z^-)$ , donde

$$\begin{aligned} x^\pm &= \pm \sqrt{-\frac{\nu + \beta}{r}} \\ y^\pm &= 0 \\ z^\pm &= \pm \beta \sqrt{-\frac{\nu + \beta}{r}} \pm p \left( \sqrt{-\frac{\nu + \beta}{r}} \right)^3 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

y por tanto, si  $\nu + \beta < 0$ , tenemos tres equilibrios, que se confunden en uno para  $\nu + \beta \geq 0$ . Así, el plano PI  $\equiv \nu + \beta = 0$  determina la zona donde se produce una bifurcación pitchfork (la cual es consecuencia de la simetría antes mencionada del sistema), siendo por tanto una bifurcación estática (sólo involucra equilibrios) de codimensión uno (vid. figura 4.3.2).

**Caso 2:** Aquí consideramos que la matriz (4.3.5) tiene dos autovalores imaginarios puros conjugados:  $\lambda_1 = \omega_0 i, \lambda_2 = -\omega_0 i$  y el tercer autovalor es real y distinto de cero ( $\lambda_3 \neq 0$ ). En términos de los coeficientes del polinomio característico, este caso se corresponde a  $p_1 p_2 = p_3, p_2 > 0$  y  $p_3 \neq 0$ . Además, se tiene que  $\omega_0^2 = p_2$  y  $\lambda_3 = -p_1$ . La matriz (4.3.5) será ahora

semejante a una matriz de la forma

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & -\omega_0 & \\ \omega_0 & 0 & \\ \hline & & \lambda_3 \end{array} \right)$$

y nos encontramos ante la posibilidad de una bifurcación de Hopf para los valores de  $\nu, \beta, \gamma$  que cumplen la relación  $p_1 p_2 = p_3, p_2 > 0$ . En la próxima sección estudiaremos en detalle este caso.

**Caso 3:** La matriz (4.3.5) tiene a cero como autovalor doble ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ) y el tercer autovalor es no nulo  $\lambda_3 \neq 0$ . Este caso se corresponde con  $p_2 = p_3 = 0, p_1 \neq 0$ , o bien, en términos de  $\nu, \beta, \gamma$ , las anteriores relaciones se traducen en  $\nu + \beta = 0, \beta^2 = r, \beta + \gamma \neq 0$ . Para estos valores, la matriz (4.3.5) será semejante a una matriz de la forma

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ \hline & & \lambda_3 \end{array} \right)$$

Aquí, nos encontramos con la posibilidad de aparición de una bifurcación de Takens-Bogdanov (de codimensión dos) sobre las rectas  $TB_1 \equiv \nu = -\beta = \sqrt{r}, TB_2 \equiv \nu = -\beta = -\sqrt{r}, \gamma^2 \neq r$  (vid. figura 4.3.2).

**Caso 4:** La matriz (4.3.5) tiene dos autovalores imaginarios puros conjugados:  $\lambda_1 = \omega_0 i, \lambda_2 = -\omega_0 i$  y el tercero nulo  $\lambda_3 = 0$ . Este caso se corresponde con  $p_3 = p_1 = 0, p_2 > 0$ , o bien,  $\nu + \beta = 0, \beta + \gamma = 0, |\beta| < \sqrt{r}$ . Aquí, la matriz (4.3.5) es semejante a

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & -\omega_0 & \\ \omega_0 & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array} \right)$$

con  $\omega_0^2 = p_2$ . Ahora estamos ante una degeneración lineal de codimensión dos en el segmento

$$\text{HZ} \equiv \{ \nu = -\beta = \gamma, -\sqrt{r} < \mu_2 < \sqrt{r} \}$$

que corresponde a una bifurcación de Hopf–cero (vid. figura 4.3.2).

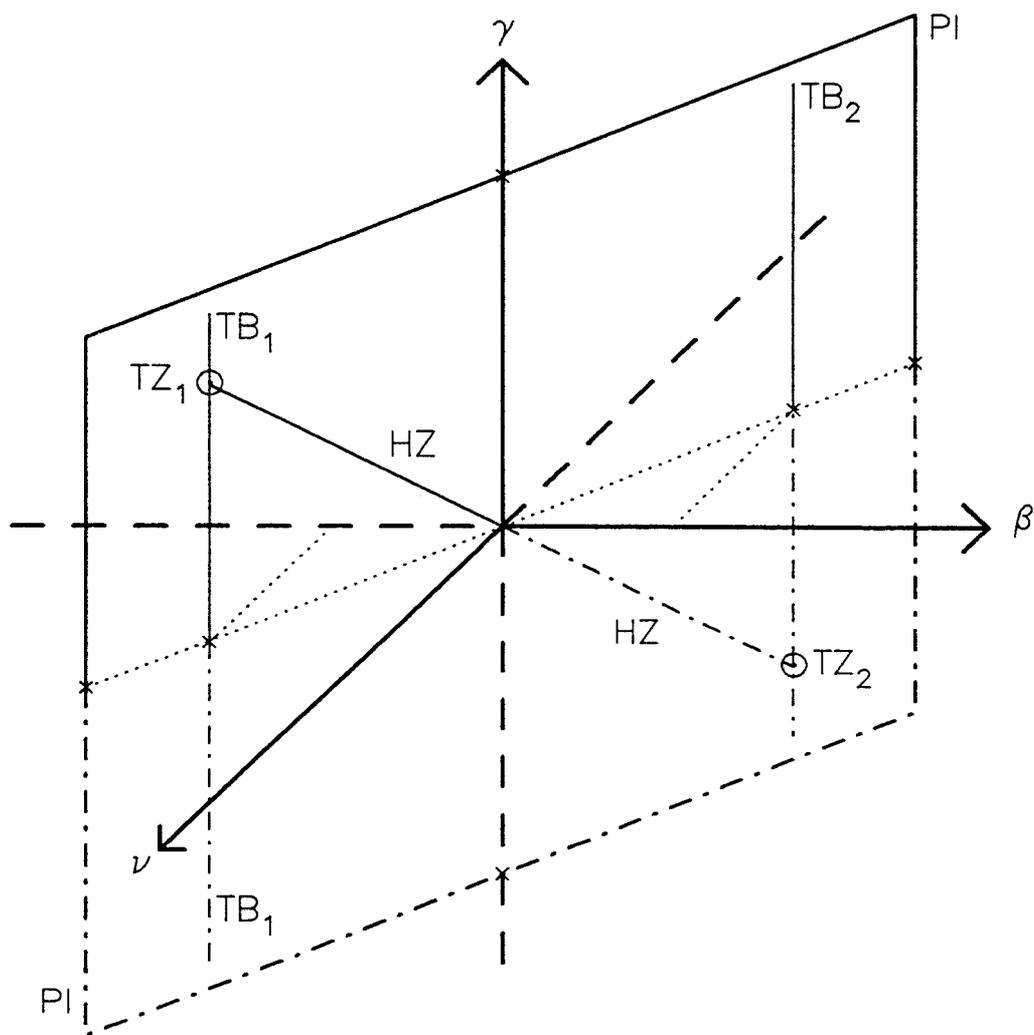


Figura 4.3.2: Conjunto de bifurcaciones del circuito electrónico.

**Caso 5:** La matriz tiene a cero como autovalor triple  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , es decir, se tiene  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ , o bien  $\nu + \beta = 0$ ,  $\beta + \gamma = 0$ ,  $\beta^2 = r$ . En este caso, la forma de Jordan de la matriz (4.3.5) es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos una degeneración lineal de codimensión tres para los puntos  $TZ_1 = (\sqrt{r}, -\sqrt{r}, \sqrt{r})$ ,  $TZ_2 = (-\sqrt{r}, \sqrt{r}, -\sqrt{r})$ , que son precisamente los extremos del segmento HZ (vid. figura 4.3.2).

## 4.4 Degeneraciones de la Bifurcación de Hopf del Origen

El origen experimenta una bifurcación de Hopf, como vimos en el caso 2 de la sección anterior, si los autovalores de la matriz (4.3.5) son  $\pm\omega_0 i$  y  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ , con  $\omega_0, \lambda_3 \neq 0$ , es decir, si se verifica  $p_1 p_2 = p_3$  y  $p_2 = \omega_0^2 > 0$ . Estas condiciones corresponden a la hipersuperficie en el espacio de parámetros  $(\nu, \beta, \gamma, r)$  dada por

$$h(\nu, \beta, \gamma, r) = A\beta^2 + B\beta + C = 0 \tag{4.4.1}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -(\gamma + \nu + r\gamma + r\nu) \\ B &= -(2\gamma\nu + \nu^2 + 2r\gamma\nu + r\gamma^2 + r^2) \\ C &= -(\gamma\nu^2 + r\nu\gamma^2 + r^2\gamma) \end{aligned}$$

y para  $\beta(\nu + \gamma) > -(r + \gamma\nu)$ .

Consideremos el discriminante de la ecuación cuadrática en  $\beta$  dada en (4.4.1),

$$\begin{aligned} W &= B^2 - 4AC = \nu^4 + (2r^2 + 2r\gamma^2)\nu^2 + \\ &+ (r^2\gamma^4 - 2r^3\gamma^2 - 4r^2\gamma^2 + r^4) \end{aligned}$$

Se tiene

$$W = 0 \iff \nu = \begin{cases} \pm\sqrt{-r(r + \gamma^2 - 2\gamma\sqrt{1+r})} & \text{si } \gamma > 0 \\ \pm\sqrt{-r(r + \gamma^2 + 2\gamma\sqrt{1+r})} & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$$

Si llamamos  $V = r + \gamma^2 - 2\gamma\sqrt{1+r}$ , se verifica que  $V = 0$  si y sólo si  $r = \gamma^2 \pm 2\gamma$ . En el caso en que sea  $V = r + \gamma^2 + 2\gamma\sqrt{1+r}$ , de nuevo  $V = 0$  si y sólo si  $r = \gamma^2 \pm 2\gamma$ .

Por otra parte, sólo nos interesan aquellos valores de  $\gamma$  tales que  $-\sqrt{r} < \gamma < \sqrt{r}$ , es decir, nos interesan los valores de  $\gamma$  para los cuales existe la curva de Hopf-cero en el espacio de parámetros  $(\nu, \beta, \gamma)$ .

En la figura 4.4.1 representamos las parábolas  $r = \gamma^2 \pm 2\gamma$ , que determinan, en el interior de la región limitada por  $r = \gamma^2$ , dos regiones (obsérvese que ambas se encuentran en la zona  $r > 0$ , única físicamente aceptable). En la región (1) (que corresponde a  $r > \gamma^2 + 2\gamma$ , si  $\gamma < 0$ , y  $r > \gamma^2 - 2\gamma$ , si  $\gamma > 0$ )  $V$  y  $W$  son ambos positivos, con lo que tenemos dos valores de  $\beta$  para cada valor de  $\nu \in (-\sqrt{r}, \sqrt{r})$  (excepto para  $\nu = -\gamma$ , donde hay un único valor para  $\beta$ ) y un único valor de  $\beta$  para cada valor de  $\nu \in (-\infty, -\sqrt{r}) \cup (\sqrt{r}, +\infty)$ . En la región (2) (que corresponde a  $r < \gamma^2 + 2\gamma$ , si  $\gamma < 0$ , y  $r < \gamma^2 - 2\gamma$ , si  $\gamma > 0$ )  $V$  es negativo, con lo que tenemos que  $W = 0$  si y sólo si  $\nu = \nu_{1,2} = \pm\sqrt{-rV}$ . De aquí se sigue que hay dos valores de  $\beta$  para cada valor de  $\nu \in (-\sqrt{r}, \nu_1) \cup (\nu_2, \sqrt{r})$ ,  $\nu \neq -\gamma$ , un único valor de  $\beta$  para cada valor de  $\nu \in (-\infty, -\sqrt{r}) \cup (\sqrt{r}, +\infty) \cup \{\nu_1, \nu_2, -\gamma\}$  y ningún valor de  $\beta$  para cada valor de  $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$ . En la situación límite entre las regiones (1) y (2), se tiene  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , con lo que dos de las ramas de la curva se unen en el punto  $(\nu, \beta, \gamma) = \left(0, \frac{r}{\sqrt{1+r}}, 1 - \sqrt{1+r}\right)$ , si  $\gamma < 0$ , o en el punto  $(\nu, \beta, \gamma) = \left(0, -\frac{r}{\sqrt{1+r}}, \sqrt{1+r} - 1\right)$ , si  $\gamma > 0$ .

En el plano  $(\nu, \beta)$ , para  $\gamma$  constante, la recta  $\nu = -\gamma$  es una asíntota para dos de las ramas de que consta la curva de bifurcación de Hopf. Estas dos mismas ramas tienen sus puntos terminales en los valores  $\nu = \pm\sqrt{r}$ , que corresponden a los puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov.

En la figura 4.4.2 mostramos la curva de bifurcación de Hopf en el plano de parámetros  $(\nu, \beta)$  para  $\gamma < 0$  (el caso  $\gamma > 0$  es simétrico, puesto que se verifica  $h(-\nu, -\beta, -\gamma) = -h(\nu, \beta, \gamma)$ ) en las dos regiones estudiadas, así como en la situación límite entre ambas. Hacemos la observación de que todos los puntos de

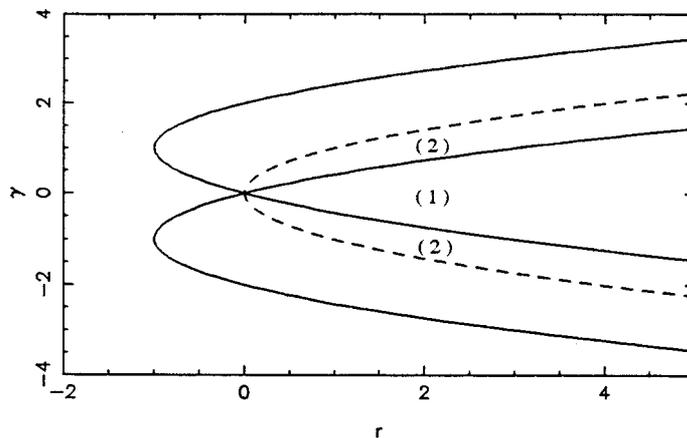


Figura 4.4.1: Parábolas  $r = \gamma^2 \pm 2\gamma$  (en trazo continuo) y  $r = \gamma^2$  (en trazo discontinuo).

las curvas de bifurcación de Hopf que son extremos con respecto a alguno de los parámetros (por ejemplo, aquéllos con coordenada  $\nu = \nu_{1,2}$  son extremos con respecto al parámetro  $\beta$ ; vid. figura 4.4.2) corresponden a puntos en los que ocurre una bifurcación de Hopf con una *pérdida simple* (más adelante definida) de la condición de transversalidad (siendo el parámetro de bifurcación aquél para el que se produce la condición de extremo). Estas bifurcaciones tienen  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión uno y, al ser los casos de degeneración de Hopf más simples que pueden presentarse, no van a ser considerados en lo que sigue (si bien aparecerán más adelante formando parte del desplegamiento de singularidades más degeneradas).

Una vez determinada la hipersuperficie en el espacio de parámetros  $(\nu, \beta, \gamma, r)$  donde se tiene una bifurcación de Hopf, vamos a buscar variedades sobre esta hipersuperficie donde ocurren ciertas degeneraciones adicionales. Para ello vamos a transformar nuestro sistema original (4.3.4) en una única ecuación escalar  $g(x, \alpha) = 0$ , donde  $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $x \in \mathbb{R}$  y  $\alpha = (\nu, \beta, \gamma, r) \in \mathbb{R}^4$ . Así, nuestro problema original, a saber, el estudio de la bifurcación de Hopf y sus degenera-

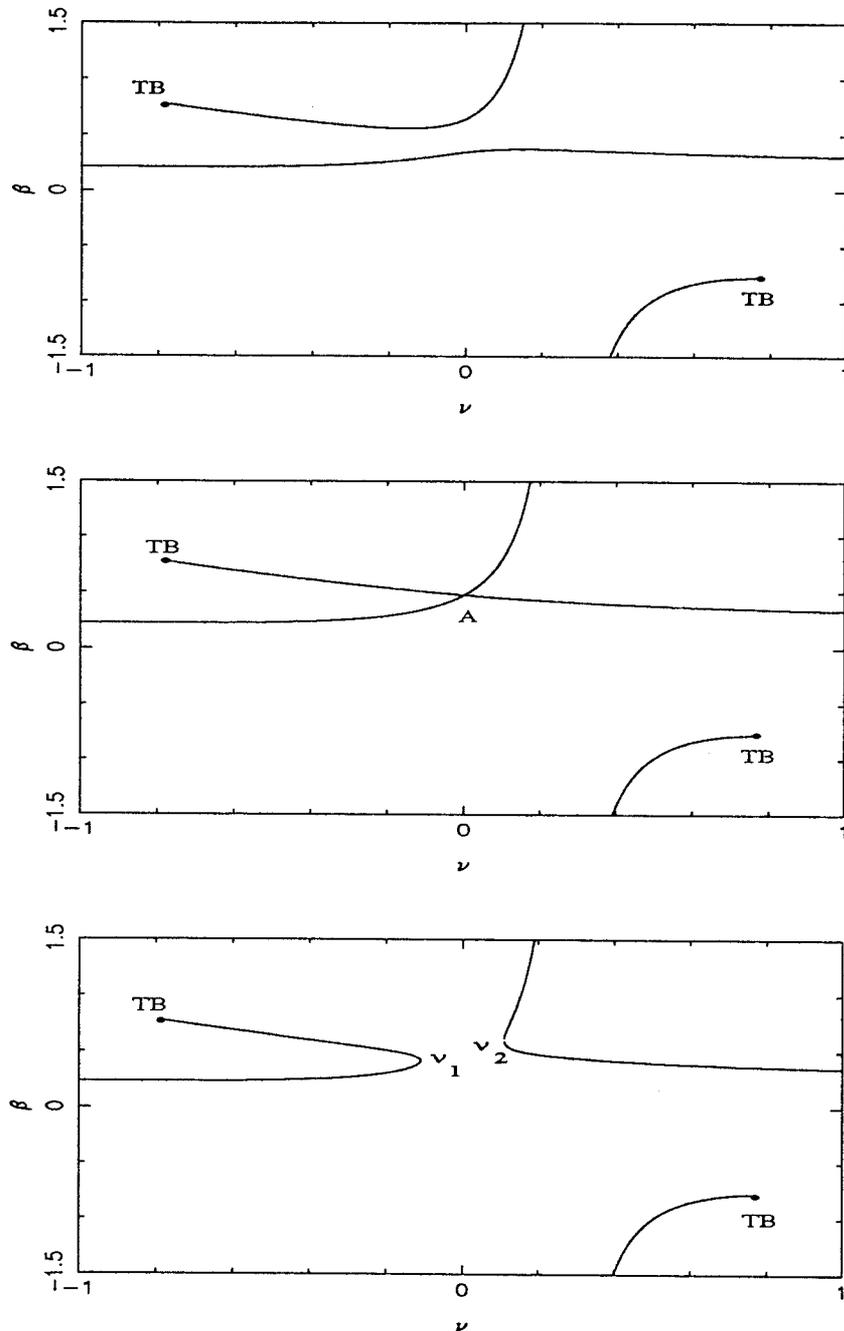


Figura 4.4.2: Curvas de Hopf para  $r = 0.6$ : (a)  $\gamma = -0.25$ ; (b)  $\gamma = -0.264911064$ ; (c)  $\gamma = -0.275$ .

ciones (la búsqueda de órbitas periódicas nacidas de un punto de bifurcación de Hopf) se reduce al estudio de los ceros de una ecuación unidimensional. Esto es posible, por ejemplo, mediante el método de reducción de Lyapunov–Schmidt (vid. [48]). En lugar de este método, nosotros aplicaremos el teorema de la variedad de centros y la teoría de formas normales (vid. [51]).

El teorema de la variedad de centros nos permite reducir la dimensión del sistema (4.3.4) en una unidad y la teoría de formas normales nos permite simplificar las ecuaciones dadas en este sistema reducido bidimensional para obtener una única ecuación

$$g(x, \alpha) = \sigma(\alpha)x + a_1(\alpha)x^3 + a_2(\alpha)x^5 + o(x^5) = 0 \quad (4.4.2)$$

de forma que, localmente, sus soluciones no triviales están en correspondencia biunívoca con órbitas periódicas de pequeña amplitud de (4.3.4) (órbitas periódicas que nacen de los puntos de bifurcación de Hopf).

El coeficiente  $\sigma(\alpha)$  en (4.4.2) representa la parte real del par de autovalores complejos conjugados de la matriz (4.3.5). Si la bifurcación de Hopf es no degenerada, y  $\nu$  es el parámetro de bifurcación, se verifica la *condición de transversalidad* dada por  $\frac{\partial}{\partial \nu} \sigma(\alpha_0) \neq 0$  (donde  $\alpha_0$  es el punto en el espacio de parámetros donde ocurre la bifurcación de Hopf). En el caso en que esta condición no se verifique, sino que se tenga  $\frac{\partial}{\partial \nu} \sigma(\alpha_0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \sigma(\alpha_0) \neq 0$  (resp.  $\frac{\partial}{\partial \nu} \sigma(\alpha_0) = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \sigma(\alpha_0) = 0$ ,  $\frac{\partial^3}{\partial \nu^3} \sigma(\alpha_0) \neq 0$ ) diremos que la bifurcación de Hopf experimenta una *pérdida simple* (resp. *doble*) de la condición de transversalidad.

La ecuación dada en (4.4.2) va a ser tratada desde el punto de vista de la teoría de la singularidad desarrollada por Golubitsky y Schaeffer en [48].

Para llevar a cabo estas ideas contamos con herramientas simbólicas y numéricas:

- los algoritmos para la computación simbólica de la variedad de centros y de la bifurcación de Hopf implementados por Freire *et alii* en [38], [40], [39] y [45]. Ellos nos permiten obtener los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  de (4.4.2).

Otros cálculos han sido realizados haciendo uso de los programas de cálculo simbólico MAPLE V y REDUCE 3.4;

- algunos programas escritos en lenguaje FORTRAN 77 que hemos desarrollado para los cálculos numéricos y los trabajos de continuación (acoplados con los códigos de continuación PITCON versión 6.0, vid. [84], [85] y [86], y PATH, vid. [63]).

#### 4.4.1 Conceptos Preliminares

Vamos a introducir, a continuación, algunos de los elementos que necesitaremos en las subsecciones siguientes (para los conceptos utilizados en el resto del capítulo, estén o no recogidos en lo que sigue, vid. [48]).

Denominamos *problema de bifurcación* a la determinación de los ceros de una ecuación escalar

$$g(x, \lambda) = 0$$

donde  $x \in \mathbb{R}$  es la incógnita, llamada *variable de estado*, y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un parámetro auxiliar, denominado *parámetro de bifurcación*.

Por abuso de lenguaje, diremos que  $g(x, \lambda)$  es un problema de bifurcación. En lo que sigue supondremos los problemas de bifurcación definidos en un entorno del origen de  $\mathbb{R}^2$ .

Dado el problema de bifurcación  $g(x, \lambda)$ , decimos que tiene  $\mathbb{Z}_2$ -simetría si  $g$  es impar en  $x$ , es decir, si

$$g(-x, \lambda) = -g(x, \lambda)$$

Dados  $g(x, \lambda)$  y  $h(x, \lambda)$  dos problemas de bifurcación con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría, decimos que  $g$  y  $h$  son  $\mathbb{Z}_2$ -equivalentes si existen funciones regulares  $X(x, \lambda)$ ,  $S(x, \lambda)$  y  $\Lambda(\lambda)$  verificando

$$X(0, 0) = 0, \quad X_x(x, \lambda) > 0, \quad S(x, \lambda) > 0,$$

y siendo  $X$  impar en  $x$  y  $S$  par en  $x$ , tales que se tiene la relación

$$h(x, \lambda) = S(x, \lambda) g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$$

en un entorno del origen.

En el caso particular en que  $\Lambda(\lambda) \equiv \lambda$ , decimos que  $g$  y  $h$  son *fuertemente*  $\mathbb{Z}_2$ -*equivalentes*.

Decimos que  $G(x, \lambda, \alpha)$  es un  $\mathbb{Z}_2$ -*desplegamiento* de  $g(x, \lambda)$ , un problema de bifurcación con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría, si  $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  verifica  $G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$  y  $G(-x, \lambda, \alpha) = -G(x, \lambda, \alpha)$

Sean  $G(x, \lambda, \alpha)$  y  $H(x, \lambda, \beta)$  dos  $\mathbb{Z}_2$ -desplegamientos de  $g(x, \lambda)$ , un problema de bifurcación con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría. El desplegamiento  $H$  *factoriza a través* del desplegamiento  $G$  si

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta) G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta))$$

donde  $S(x, \lambda, 0) = 1$ ,  $X(x, \lambda, 0) = x$ ,  $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ ,  $A(0) = 0$ ,  $S(-x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta)$  y  $X(-x, \lambda, \beta) = -X(x, \lambda, \beta)$ .

$G$  es un  $\mathbb{Z}_2$ -desplegamiento *versal* de  $g$  si cada  $\mathbb{Z}_2$ -desplegamiento  $H$  de  $g$  factoriza a través de  $G$ .

Un desplegamiento versal de  $g$  es *universal* si tiene el mínimo número de parámetros. Llamamos  $\mathbb{Z}_2$ -*codimensión* de  $g$  a este mínimo número de parámetros (entre los cuales no se cuenta al parámetro *distinguido*  $\lambda$ ; obsérvese los diferentes conceptos de *codimensión* dados en [48] y, e.g., en [51]).

Dados  $g(x, \lambda)$  y  $h(x, \lambda)$  dos problemas de bifurcación, decimos que son *topológicamente equivalentes* si existe una aplicación de la forma  $(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$  verificando:

1.  $(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$  y su inversa son aplicaciones continuas en un entorno del origen de  $\mathbb{R}^2$ ;
2.  $X(x, 0)$  y  $\Lambda(\lambda)$  son funciones monótonas crecientes;
3.  $(X, \Lambda)$  aplica el conjunto de ceros de  $g$  en el de  $h$ , en un entorno del origen.

Si existen ciertos parámetros en un desplegamiento universal de un problema de bifurcación,  $g$ , con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría, para los que las perturbaciones de  $g$  asociadas

a estos parámetros son topológicamente equivalentes, pero no  $\mathbb{Z}_2$ -equivalentes, a  $g$ , entonces decimos que estamos en presencia de *parámetros modales*.

Definimos la  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión topológica de un problema de bifurcación con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría,  $g$ , como la diferencia entre la  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión de  $g$  y el número de parámetros modales que aparecen en un  $\mathbb{Z}_2$ -despliegamiento universal de  $g$ .

Un *punto conector* corresponde a un valor de un parámetro modal, en el despliegamiento universal de un problema de bifurcación,  $g$ , con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría, para el que existen, al menos, dos perturbaciones de  $g$  no topológicamente equivalentes que comparten ese valor.

Un  $\mathbb{Z}_2$ -despliegamiento universal  $G(x, \lambda, \alpha)$  de un problema de bifurcación  $g$  con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría puede ser escrito en la forma  $G(x, \lambda, \alpha) = R(u, \lambda, \alpha)x$ , donde  $u = x^2$ .

Vamos a definir, a continuación, las *fuentes de no persistencia* asociadas al  $\mathbb{Z}_2$ -despliegamiento universal de un problema de bifurcación con  $\mathbb{Z}_2$ -simetría. Vienen dadas por los conjuntos:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{ \alpha \in \mathbb{R}^k / \exists (u, \lambda), u > 0, \text{ tales que } R = R_u = R_\lambda = 0 \text{ en } (u, \lambda, \alpha) \} \\ B_0 &= \{ \alpha \in \mathbb{R}^k / \exists \lambda \text{ tal que } R = R_\lambda = 0 \text{ en } (0, \lambda, \alpha) \} \\ H_0 &= \{ \alpha \in \mathbb{R}^k / \exists \lambda \text{ tal que } R = R_u = 0 \text{ en } (0, \lambda, \alpha) \} \end{aligned}$$

(existen otras fuentes de no persistencia, pero no las consideramos pues no haremos uso de ellas en lo que sigue).

La unión de las variedades (en el espacio de parámetros) dadas por las diferentes fuentes de no persistencia, constituyen la llamada *variedad de transición*, denotada por  $\Sigma$ .

En relación a la variedad de transición, se verifica el resultado siguiente.

**Teorema 4.4.1** *Si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pertenecen a la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^k - \Sigma$ , entonces existen un difeomorfismo  $(X, \Lambda)$ , conmutando con  $\mathbb{Z}_2$ , que aplica  $U \times L$  en sí mismo (donde  $U$  y  $L$  son entornos de cero en  $\mathbb{R}$  suficientemente pequeños)*

y una función positiva y par,  $S$ , tales que

$$G(x, \lambda, \alpha_2) = S(x, \lambda) G(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), \alpha_1).$$

### 4.4.2 Singularidades con $\mathbb{Z}_2$ -Codimensión Dos

Comenzamos con un resultado que nos va a permitir expresar (4.4.2) en una forma más cómoda de manejar.

**Lema 4.4.1** *La forma normal dada en (4.4.2) es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a  $h(x, \alpha) = h(\alpha)x + b_1(\alpha)x^3 + b_2(\alpha)x^5 + o(x^5) = 0$ , donde  $h(\alpha) = h(\nu, \beta, \gamma, r)$  es la función dada en (4.4.1) y  $b_i = 2\rho a_i$ ,  $i = 1, 2$ , para cierta función  $\rho > 0$ .*

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos un punto en el espacio de parámetros,  $\alpha_0 = (\nu_0, \beta_0, \gamma_0, r_0)$ , donde ocurre una bifurcación de Hopf, y por tanto  $h(\alpha_0) = h(\nu_0, \beta_0, \gamma_0, r_0) = 0$ , para la función  $h$  dada en (4.4.1). Sea  $V$  un entorno de  $\alpha_0$  elegido de tal forma que la matriz  $A$  dada en (4.3.5) tenga, para cada  $\alpha \in V$ , dos autovalores complejos conjugados  $\lambda_{1,2} = \sigma(\alpha) \pm \omega(\alpha)i$  (con  $\omega(\alpha) \neq 0$ ) y un autovalor real  $\lambda_3(\alpha)$ .

El polinomio característico de  $A$  vendrá dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = (\lambda - \lambda_3(\alpha)) [(\lambda - \sigma(\alpha))^2 + \omega^2(\alpha)]$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} p_1 &= -(2\sigma(\alpha) + \lambda_3(\alpha)) \\ p_2 &= 2\sigma(\alpha)\lambda_3(\alpha) + \sigma^2(\alpha) + \omega^2(\alpha) \\ p_3 &= -\lambda_3(\alpha)(\sigma^2(\alpha) + \omega^2(\alpha)) \end{aligned}$$

Así, puesto que la función  $h$  viene dada por  $h(\alpha) = p_3 - p_1p_2$ , se tiene que  $h(\alpha) = 2\sigma(\alpha)\rho(\alpha)$ , donde  $\rho(\alpha) = (\lambda_3(\alpha) + \sigma(\alpha))^2 + \omega^2(\alpha)$ . Notemos que  $\rho(\alpha) > 0$  en  $V$ . Si multiplicamos la función  $g(\alpha)$  dada en (4.4.2) por el factor positivo  $2\rho(\alpha)$  obtenemos la forma normal

$$h(x, \alpha) = h(\alpha)x + b_1(\alpha)x^3 + b_2(\alpha)x^5 + o(x^5) = 0 \tag{4.4.3}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Seguidamente establecemos el principal resultado de esta subsección.

**Teorema 4.4.2** *Sobre la hipersuperficie en el espacio de parámetros  $(\nu, \beta, \gamma, r)$  donde ocurre una bifurcación de Hopf, dada en (4.4.1), existen puntos para los que ocurre una pérdida doble de la condición de transversalidad.*

DEMOSTRACIÓN:

El cambio lineal en los parámetros

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \nu + \beta \\ \mu_2 &= \nu - \beta \\ \mu_3 &= \gamma + \beta \\ \mu_4 &= r \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

transforma  $h(x, \alpha) = s(x^2, \alpha)x = 0$ , donde  $s(x^2, \alpha) = h(\alpha) + b_1(\alpha)x^2 + b_2(\alpha)x^4 + o(x^4)$ , dada en (4.4.3), en una nueva función  $h^*(x, \mu) = s^*(x^2, \mu)x$ , con  $\mu \in \mathbb{R}^4$ , de manera que  $h$  y  $h^*$  son  $\mathbb{Z}_2$ -equivalentes.

Escribamos  $s^*(x^2, \mu) = h^*(\mu) + b_1^*(\mu)x^2 + b_2^*(\mu)x^4 + o(x^4)$ , donde  $h^*(\mu) = \frac{1}{4}\tilde{h}(\mu)$ , siendo  $\tilde{h}(\mu) = \mu_1^3 + b\mu_1^2 + c\mu_1 + d$  con

$$\begin{aligned} b &= \mu_4\mu_3 - 4\mu_3 - 2\mu_2 \\ c &= \mu_2^2 - 4\mu_4\mu_3 \left( \mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2 \right) \\ d &= -4\mu_3 \left( \mu_4^2 - \frac{1}{4}\mu_4\mu_2^2 \right) \end{aligned}$$

Vamos a buscar un valor,  $\mu^0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \mu_4^0)$ , en el espacio de parámetros tal que se tenga

$$\begin{cases} s^* = s_{\mu_1}^* = s_{\mu_1\mu_1}^* = 0 \\ s_z^* \neq 0, s_{\mu_1\mu_1\mu_1}^* \neq 0 \end{cases} \tag{4.4.5}$$

en  $z = 0$  y  $\mu = \mu^0$  (donde  $z = x^2$ ). En estas condiciones, la singularidad dada por  $h_0^*(x, \mu_1) \stackrel{def}{=} h^*(x, \mu_1, \mu_2^0, \mu_3^0, \mu_4^0)$  (en un entorno de  $\mu_1^0$ ) es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a la forma normal

$$\varepsilon x^3 + \delta \mu_1^3 x$$

(donde  $\varepsilon = \text{signo}(s_z^*)$  y  $\delta = \text{signo}(s_{\mu_1 \mu_1 \mu_1}^*)$ ) que corresponde a una pérdida doble de la condición de transversalidad. Las condiciones (4.4.5) son equivalentes a

$$3c - b^2 = 0 \tag{4.4.6}$$

$$2b^3 - 9bc + 27d = 0 \tag{4.4.7}$$

$$\mu_1^0 + \frac{b}{3} = 0 \tag{4.4.8}$$

junto con  $s_z^*(0, \mu^0) \neq 0$  (en este caso  $s_{\mu_1 \mu_1 \mu_1}^*(0, \mu^0) = \frac{3}{2} \neq 0$  se verifica).

La condición (4.4.6) conduce a  $e = A(\mu_3^0)^2 + 2B\mu_2^0\mu_3^0 + (\mu_2^0)^2$  donde  $A = [(\mu_4^0 + 2)^2 + 12]$  y  $B = \mu_4^0 + 8$ . Si escribimos  $e$  en la forma

$$e = [A\mu_3^0 + (B + \sqrt{B^2 - A})\mu_2^0] [A\mu_3^0 + (B - \sqrt{B^2 - A})\mu_2^0]$$

se tiene

$$\mu_3^0 = H\mu_2^0 \quad \text{o bien} \quad \mu_3^0 = K\mu_2^0$$

siendo

$$H = -\frac{B + \sqrt{B^2 - A}}{A} \quad \text{y} \quad K = -\frac{B - \sqrt{B^2 - A}}{A}$$

Sustituyendo  $\mu_3^0 = H\mu_2^0$  (resp.  $\mu_3^0 = K\mu_2^0$ ) en (4.4.7) obtenemos

$$\mu_2^0 = \pm \sqrt{-\frac{M}{L}} \quad \left( \text{resp.} \quad \mu_2^0 = \pm \sqrt{-\frac{N}{P}} \right)$$

donde

$$\begin{aligned} M &= -108H(\mu_4^0)^2 \\ L &= 2(\mu_4^0 + 8)(\mu_4^0 + 2)(\mu_4^0 - 4)H^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 6 \left[ (\mu_4^0)^2 - 8\mu_4^0 - 32 \right] H^2 + 6 (\mu_4^0 - 10) H + 2 \\
 N & = -108K (\mu_4^0)^2 \\
 P & = 2 (\mu_4^0 + 8) (\mu_4^0 + 2) (\mu_4^0 - 4) K^3 + \\
 & + 6 \left[ (\mu_4^0)^2 - 8\mu_4^0 - 32 \right] K^2 + 6 (\mu_4^0 - 10) K + 2
 \end{aligned}$$

Por fin, y añadiendo la condición (4.4.8), obtenemos las siguientes curvas en el espacio de parámetros, formadas por puntos en los cuales ocurre una pérdida doble de la condición de transversalidad:

$$C_1^\pm \equiv \begin{cases} \mu_1^0 = \pm \left( \frac{2}{3} - \frac{\mu_4^0 - 4}{3} H \right) \sqrt{-\frac{M}{L}} \\ \mu_2^0 = \pm \sqrt{-\frac{M}{L}} \\ \mu_3^0 = \pm H \sqrt{-\frac{M}{L}} \end{cases}$$

o bien

$$C_2^\pm \equiv \begin{cases} \mu_1^0 = \pm \left( \frac{2}{3} - \frac{\mu_4^0 - 4}{3} K \right) \sqrt{-\frac{N}{P}} \\ \mu_2^0 = \pm \sqrt{-\frac{N}{P}} \\ \mu_3^0 = \pm K \sqrt{-\frac{N}{P}} \end{cases}$$

El conjunto de puntos dado por estas curvas es no vacío. En efecto, sea, por ejemplo,  $\mu_4^0 = 1$  (hemos tomado  $p = 0.739661$ ). El cálculo de los parámetros restantes y del coeficiente  $b_1^*$  muestra que

$$\begin{aligned}
 \mu_1^0 & \approx -0.261154749 \\
 \mu_2^0 & \approx 1.997202146 \\
 \mu_3^0 & \approx -1.592622887 \\
 b_1^* & \approx 0.036576442
 \end{aligned}$$

Esto significa que  $h_0^*(x, \mu_1)$  (en un entorno suficientemente pequeño del valor  $\mu_1^0$  dado arriba) es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a la forma normal  $x^3 + \mu_1^3$ . Esto completa la demostración. ■

Tenemos evidencia numérica de que, para  $\mu_4^0 \in (0, 10^4]$ , se tienen los siguientes casos (hemos tomado  $p = 0.739661$ ):

- para cada  $\mu_4^0 \in (0, \frac{4}{3})$  existen dos valores de  $\mu^0$  (correspondientes a las curvas  $C_1^\pm$ , que aparecen representadas en la figura 4.4.3; las curvas  $C_2^\pm$  son vacías). Existe un valor de  $\mu_4^0$ ,  $\mu_{0_4}^* \approx 0.857021$ , para el que  $b_1^* < 0$  si  $\mu_4^0 \in (0, \mu_{0_4}^*)$  y  $b_1^* > 0$  si  $\mu_4^0 \in (\mu_{0_4}^*, \frac{4}{3})$  (y, por tanto,  $b_1^* = 0$  si  $\mu_4^0 = \mu_{0_4}^*$ ). Así,  $h_0^*(x, \mu_1)$  es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a la forma normal
  1.  $x^3 - \mu_1^3 x$  para cada  $\mu_4^0 \in (0, \mu_{0_4}^*)$ ;
  2.  $x^3 + \mu_1^3 x$  para cada  $\mu_4^0 \in (\mu_{0_4}^*, \frac{4}{3})$ ;
  3.  $x^5 \pm \lambda x^3 \pm \lambda^3 x$  para  $\mu_4^0 = \mu_{0_4}^*$ . Este caso será considerado después.
- para cada  $\mu_4^0 \in [\frac{4}{3}, 10^4]$  las curvas  $C_1^\pm$  y  $C_2^\pm$  son vacías. Esto se debe a que el coeficiente  $p_2$  del polinomio característico dado en (4.3.6) se hace menor o igual que cero, para  $\mu_4^0$  mayor o igual, respectivamente, que  $\frac{4}{3}$ .

Puesto que  $h_0^*(x, \mu_1)$  es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a la forma normal  $x^3 \pm \mu_1^3 x$  (para los valores de  $\mu_4^0$  antes indicados) se tiene que  $h^*(x, \mu)$  es un desplegamiento no universal de  $x^3 \pm \mu_1^3 x$  (y, por supuesto, de  $h_0^*(x, \mu_1)$ ). En el caso en que hagamos constante uno de los parámetros, digamos  $\mu_4 = \mu_4^0$ , el nuevo desplegamiento, ya con dos parámetros (sin contar el parámetro *distinguido*  $\mu_1$ ) será, además, universal si y sólo si se verifica la condición adicional dada por

$$D = \det \begin{pmatrix} s_{\mu_2}^* & s_{\mu_2 \mu_1}^* \\ s_{\mu_3}^* & s_{\mu_3 \mu_1}^* \end{pmatrix} \Big|_{\begin{cases} \mu = \mu^0 \neq 0 \\ x = 0 \end{cases}}$$

De donde se tiene que

$$D = \det \begin{pmatrix} \tilde{h}_{\mu_2} & \tilde{h}_{\mu_2 \mu_1} \\ \tilde{h}_{\mu_3} & \tilde{h}_{\mu_3 \mu_1} \end{pmatrix} \Big|_{\mu = \mu^0}$$

y, por tanto,

$$D = -8 (\mu_1^0)^2 \mu_2^0 - 16 (\mu_4^0)^2 \mu_1^0 + 8 (\mu_4^0)^2 \mu_2^0 - 2 (\mu_4^0)^2 (\mu_1^0)^2 \mu_3^0 +$$

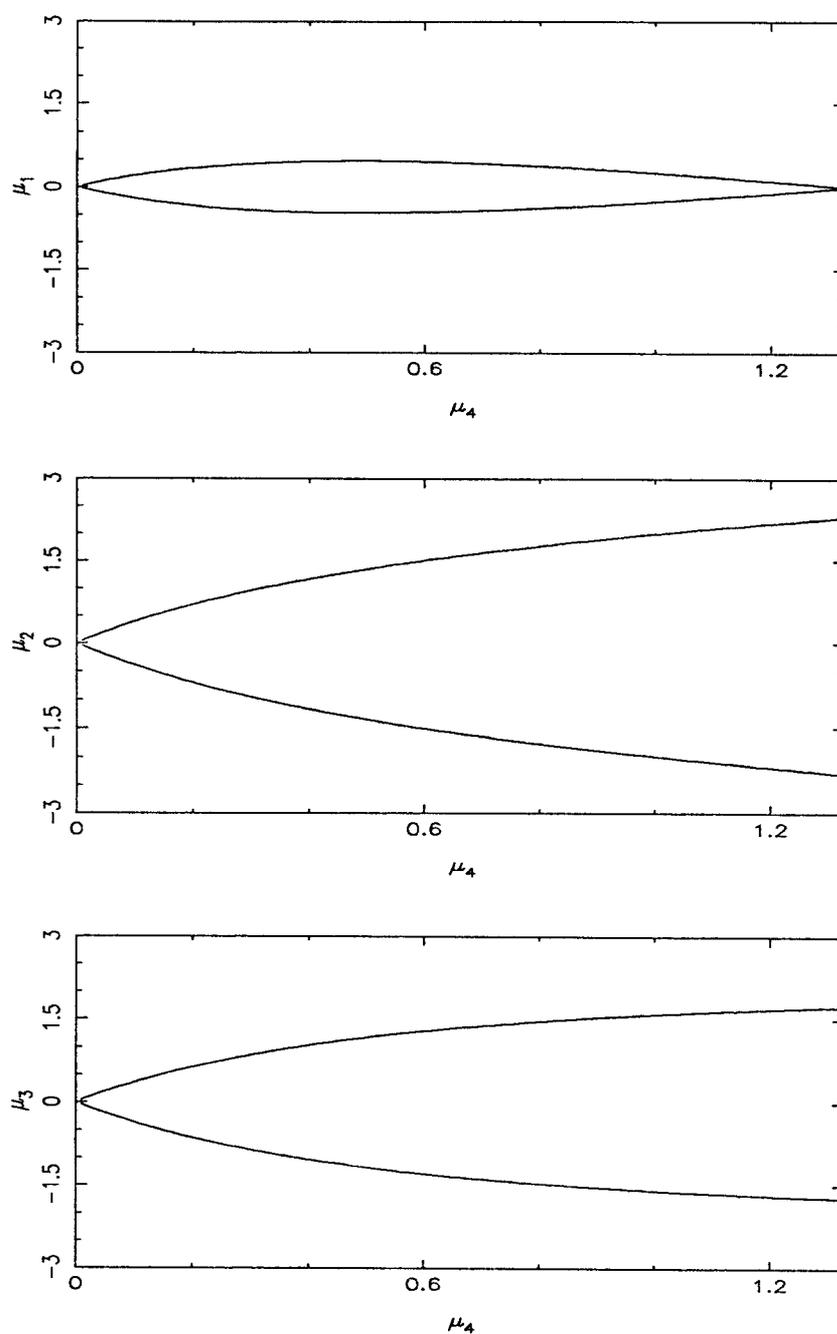


Figura 4.4.3: Diferentes proyecciones de las curvas de puntos donde se verifica una pérdida doble de la condición de transversalidad.

$$\begin{aligned}
 &+ 4\mu_4^0\mu_1^0(\mu_2^0)^2 - 2(\mu_4^0)^2(\mu_2^0)^2\mu_3^0 - 2\mu_4^0(\mu_1^0)^2\mu_2^0 - 8\mu_4^0(\mu_1^0)^2\mu_3^0 - \\
 &- 16(\mu_4^0)^2\mu_2^0(\mu_3^0)^2 - 16\mu_1^0\mu_2^0\mu_3^0 + 4(\mu_4^0)^2\mu_1^0\mu_2^0\mu_3^0 - 2\mu_4^0(\mu_2^0)^3 - 8(\mu_4^0)^3\mu_3^0
 \end{aligned}$$

Hemos encontrado, numéricamente, que  $D \neq 0$  para cada  $\mu_4^0 \in (0, \frac{4}{3})$ , y, por tanto,  $h^*(x, \mu)$  es un desplegamiento universal de  $x^3 \pm \mu_1^3 x$ .

Estudiamos, por último, los diferentes diagramas de bifurcaciones que surgen de la forma normal  $h^*(x, \mu)$  en el caso en que  $\mu_4^0 = 1$ .

En el plano de parámetros  $(\mu_2, \mu_3)$ , el conjunto

$$\begin{aligned}
 H &= \{(\mu_2, \mu_3) / \exists \mu_1 \text{ tal que } s^* = s_{\mu_1}^* = 0 \text{ en } (0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4^0)\} = \\
 &= \{(\mu_2, \mu_3) / \exists \mu_1 \text{ tal que } \tilde{h} = \tilde{h}_{\mu_1} = 0 \text{ en } (0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4^0)\}
 \end{aligned}$$

define la única fuente de no persistencia para la forma normal  $h^*(x, \mu)$ . Es decir, como era de esperar, el conjunto de bifurcaciones de (4.3.4) en un entorno de un punto que verifica una pérdida doble de la condición de transversalidad, consiste, en el plano  $(\mu_2, \mu_3)$ , en una única curva formada por puntos que verifican una pérdida simple de la condición de transversalidad. Se trata, en el espacio  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ , de una superficie homeomorfa a la catástrofe de cúspide.

La curva dada en  $H$  ha sido continuada para el valor  $\mu_4^0 = 1$  y la mostramos en la parte superior de la figura 4.4.4. El punto  $P$  corresponde a una pérdida doble de la condición de transversalidad y viene dado por las coordenadas

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &\approx 0.261154 \\
 \mu_2 &\approx -1.997202 \\
 \mu_3 &\approx 1.592622
 \end{aligned}$$

Del cambio lineal de parámetros dado en (4.4.4), es inmediato que  $\gamma = \mu_3 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$ . La condición  $\gamma = \text{constante} = K$  se traduce (en el plano  $(\mu_2, \mu_3)$ ) en la condición  $\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2 = K$ . Siguiendo los caminos  $\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2 = K$  (para tres valores de la constante  $K$  correspondientes, respectivamente, a las tres únicas situaciones cualitativas que se pueden presentar, a saber, que la recta corte una, dos o ninguna vez a la variedad de transición dada en  $H$ ; esto corresponderá a la aparición, respectivamente, de uno, dos o ningún punto de pérdida simple de

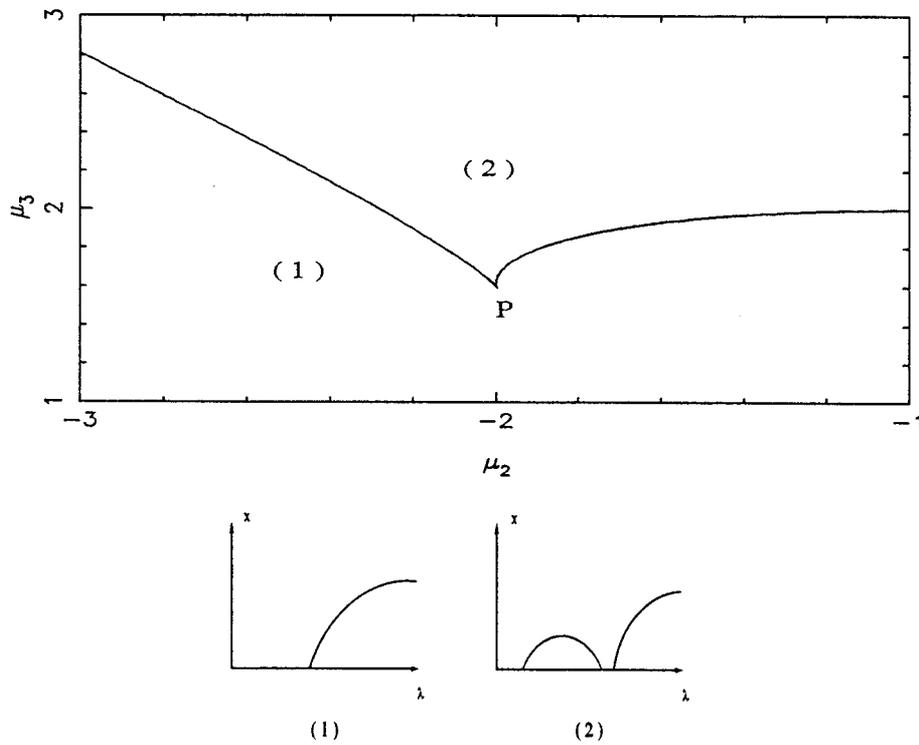


Figura 4.4.4: Variedad de transición dada en el conjunto  $H$  ( $\mu_4^0 = 1$ ) junto con los dos posibles diagramas de bifurcaciones.

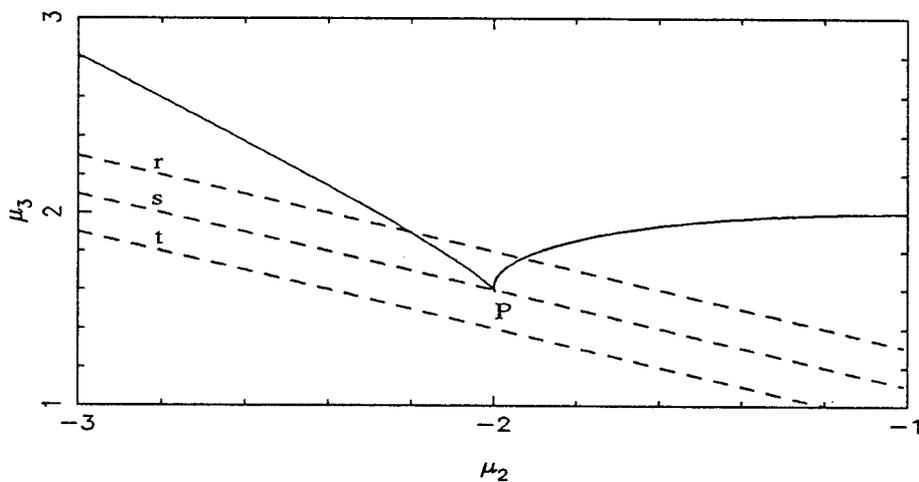


Figura 4.4.5: Variedad de transición dada en el conjunto  $H$  cortada por tres rectas:  $r : \mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2 = 0.792622$ ;  $s : \mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2 = 0.592622$  y  $t : \mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2 = 0.392622$  ( $\mu_4^0 = 1$ ).

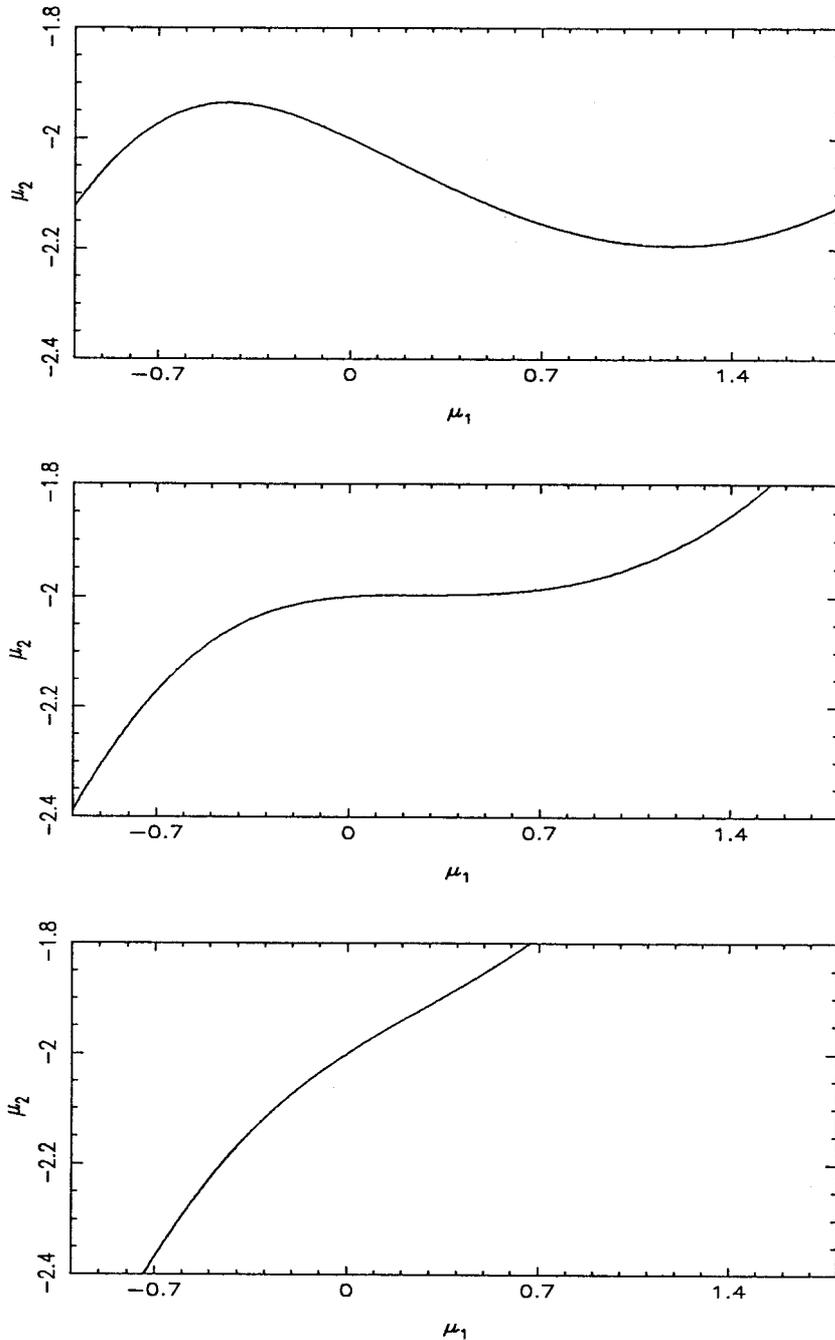


Figura 4.4.6: Curvas de bifurcación de Hopf continuadas siguiendo, respectivamente, tres rectas  $\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_2 = K$  ( $\mu_4^0 = 1$ ): (a)  $K = 0.792622$  (existen dos puntos de pérdida simple de transversalidad); (b)  $K = 0.592622$  (existe un punto de pérdida doble de transversalidad) y (c)  $K = 0.392622$  (no existen puntos de pérdida de transversalidad).

transversalidad, con respecto al parámetro  $\mu_1$ , en la curva de Hopf; vid. figura 4.4.5) obtenemos las diferentes curvas de bifurcación de Hopf representadas en la figura 4.4.6.

Cualquier entorno del punto  $P$  (vid. figura 4.4.4) se divide en dos conjuntos. Las curvas solución de la ecuación  $s^*(x, \mu_1) = 0$  en el plano  $(x, \mu_1)$  (es decir, los diagramas de bifurcaciones para  $h^*(x, \mu)$ ) son representados en la parte inferior de la figura 4.4.4.

### 4.4.3 Singularidades con $\mathbb{Z}_2$ -Codimensión Topológica Dos

Si consideramos la superficie  $h(\nu, \beta, \gamma, r)$ , para  $r$  constante, en el espacio de parámetros  $(\nu, \beta, \gamma)$  y proyectamos sobre el plano  $(\nu, \beta)$  la curva intersección de  $h$  y el plano  $\gamma = 1 - \sqrt{1+r}$ , obtenemos la curva mostrada en la figura 4.4.7 (para  $p = 0.739661$  y  $r = 0.6$ ). Un programa FORTRAN preparado para continuar la bifurcación de Hopf (mediante el uso del código de continuación PATH, antes mencionado, que permite la determinación de la estabilidad de la órbita periódica que nace del punto de bifurcación) proporciona esta figura, que exhibe un punto de degeneración (anulación del coeficiente cúbico de la forma normal de Hopf) en

$$A = (\nu, \beta, \gamma, r) = \left(0, \frac{r}{\sqrt{1+r}}, 1 - \sqrt{1+r}, r\right) \approx (0, 0.474341, -0.264911, 0.6)$$

El conocimiento del término cúbico de la forma normal de Hopf, calculado en el punto  $A$  aplicando el algoritmo para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf dado en [38], nos proporciona evidencia analítica para la anterior afirmación, puesto que hemos obtenido

$$a_1(A) = -\frac{3}{4} \frac{c_3}{1+r} = 0$$

ya que estamos en el supuesto de que  $c_3 = 0$ .

Un cálculo directo muestra que la forma normal dada en (4.4.3) verifica

$$h_\nu(0, A) = 0 \quad \text{y} \quad h_{\nu\nu}(0, A) = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{1+r}} - 1 \right) < 0, \quad \forall r > 0$$

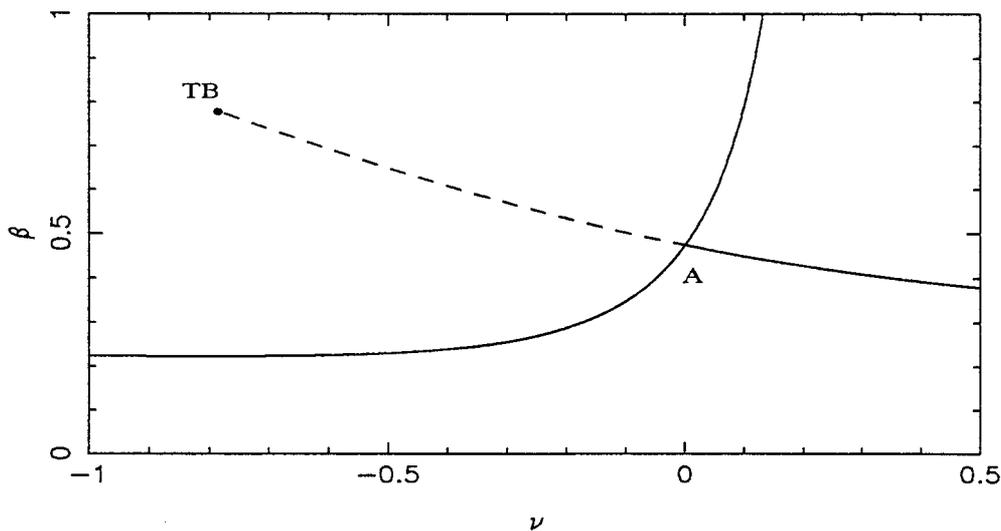


Figura 4.4.7: Curvas de bifurcación de Hopf para  $\gamma = -0.264911064$ ,  $r = 0.6$  y  $p = 0.739661$ . En trazo continuo (resp. discontinuo) la de carácter supercrítico (resp. subcrítico).

y, por tanto, se tiene en  $A$  una pérdida simple de la condición de transversalidad.

Así,  $A$  actúa como centro organizador de una bifurcación de Hopf degenerada y caracterizada por la siguiente forma normal:

$$\varepsilon x^5 + 2m\lambda x^3 - \lambda^2 x$$

donde  $\varepsilon = \text{signo}(a_2(A))$  y  $m$  es un parámetro modal, dado por

$$m = \frac{s_{z\nu}(0, A)}{\sqrt{|s_{zz}(0, A) s_{\nu\nu}(0, A)|}}$$

Hemos demostrado, por tanto, el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.3** *Sobre la hipersuperficie en el espacio de parámetros  $(\nu, \beta, \gamma, r)$  donde ocurre una bifurcación de Hopf, dada en (4.4.1), el punto*

$$A = \left( 0, \frac{r}{\sqrt{1+r}}, 1 - \sqrt{1+r}, r \right)$$

para cada  $r > 0$ , corresponde a una degeneración en el término cúbico de la forma normal de Hopf junto a una pérdida simple de la condición de transversalidad.

Se trata, en consecuencia, (y si no hay degeneraciones adicionales) de una bifurcación con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión 3, siendo uno de los parámetros de tipo modal y, por tanto, la singularidad posee  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión topológica 2.

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} s_{z\nu}(0, A) &= 2\rho(A) a_{1\nu}(A) \\ s_{zz}(0, A) &= 4\rho(A) a_2(A) \\ s_{\nu\nu}(0, A) &= h_{\nu\nu}(A) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{1\nu}(A) &= -\frac{3(1+r)p\sqrt{1+r}+1-p}{4r(1+r+\sqrt{1+r})^2} < 0, \quad \forall p > 0 \\ h_{\nu\nu}(A) &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+r}} - 1\right) < 0, \quad \forall r > 0 \end{aligned}$$

Introduciendo las coordenadas del punto  $A$  en la matriz (4.3.5) obtenemos sus autovalores,  $\pm\omega_0 i, \lambda_3$ , donde

$$\omega_0 = \frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{4}}} \text{ y } \lambda_3 = -1$$

lo que nos permite el cálculo de  $\rho(A)$ , obteniendo

$$\rho(A) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+r}}$$

Así, se tiene

$$m = \frac{-3[(1+r)p\sqrt{1+r}+1-p]\sqrt{\sqrt{1+r}+1}}{4\sqrt{2}\sqrt{|a_2(A)|}r(1+r+\sqrt{1+r})^2\sqrt{\sqrt{1+r}-1}}$$

(notemos que  $m < 0$  para cada  $p > 0$ ) donde

$$a_2(A) = \frac{3N}{16D}$$

con

$$\begin{aligned}
 N &= 18p^2 + 54rp^2 - 28p(1-p) - 3r(1-p)^2 + \\
 &+ 24r^2p^2\sqrt{1+r} + 39rp^2\sqrt{1+r} - 2p(1-p)\sqrt{1+rr^2} - \\
 &- 30rp(1-p)\sqrt{1+r} - 56rp(1-p) + 54r^2p^2 + \\
 &+ 18r^3p^2 + 3r^3p^2\sqrt{1+r} + 18p^2\sqrt{1+r} - 28p(1-p)r^2 - \\
 &- 28p(1-p)\sqrt{1+r} - 18(1-p)^2\sqrt{1+r} - 18(1-p)^2 \\
 D &= r(1+r)^2(40 + 40\sqrt{1+r} + 32r + 12r\sqrt{1+r} + r^2)
 \end{aligned}$$

Si  $a_2(A) \neq 0$ , la forma normal  $\tilde{h}_0(x, \nu) = \tilde{e}_0(z, \nu)x$ , con  $\tilde{e}_0(z, \nu) = h(\alpha) + b_1(\alpha)z + b_2(\alpha)z^2$  y particularizada en  $\beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$  y  $r = r_0$ , donde  $\beta_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1+r_0}}$  y  $\gamma_0 = 1 - \sqrt{1+r_0}$  (para algún  $r_0 > 0$ ), es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente (en un entorno de  $\nu = 0$ ) a aquella dada en (4.4.3), particularizada en  $\beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$  y  $r = r_0$ .

En la figura 4.4.8 mostramos, en el plano de parámetros  $(r, p)$ , las curvas  $a_2(A) = 0$  (en trazo discontinuo) y  $m = -1$  (en trazo continuo). Ambas curvas determinan cinco regiones, etiquetadas (1)–(5), de tal forma que  $h_0(x, \nu)$  es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente (en un entorno de  $\nu = 0$ ) a la forma normal  $(\lambda = \nu)$ :

- $x^5 + 2m\lambda x^3 - \lambda^2 x$  en las regiones (1), (2) y (5);
- $x^5 + 2m\lambda x^3 + \lambda^2 x$  en las regiones (3) y (4);
- $\varepsilon x^7 + \delta x^5 - 2\lambda x^3 - \lambda^2 x$  sobre la curva  $m = -1$ , donde  $\varepsilon = \text{signo}(a_3(A))$  ( $a_3$  es el coeficiente de grado 7 de la forma normal de la bifurcación de Hopf) y  $\delta = \text{signo}(a_2(A))$ ;
- $\varepsilon x^7 - \lambda x^3 - \lambda^2 x$  sobre la curva  $a_2 = 0$ , donde  $\varepsilon = \text{signo}(a_3(A))$ .

Notemos que  $m = -1$  es un punto conector y  $a_2 = 0$  es otro punto conector, pues corresponde a  $m = -\infty$ . Estos dos casos dan lugar a singularidades con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión 3.

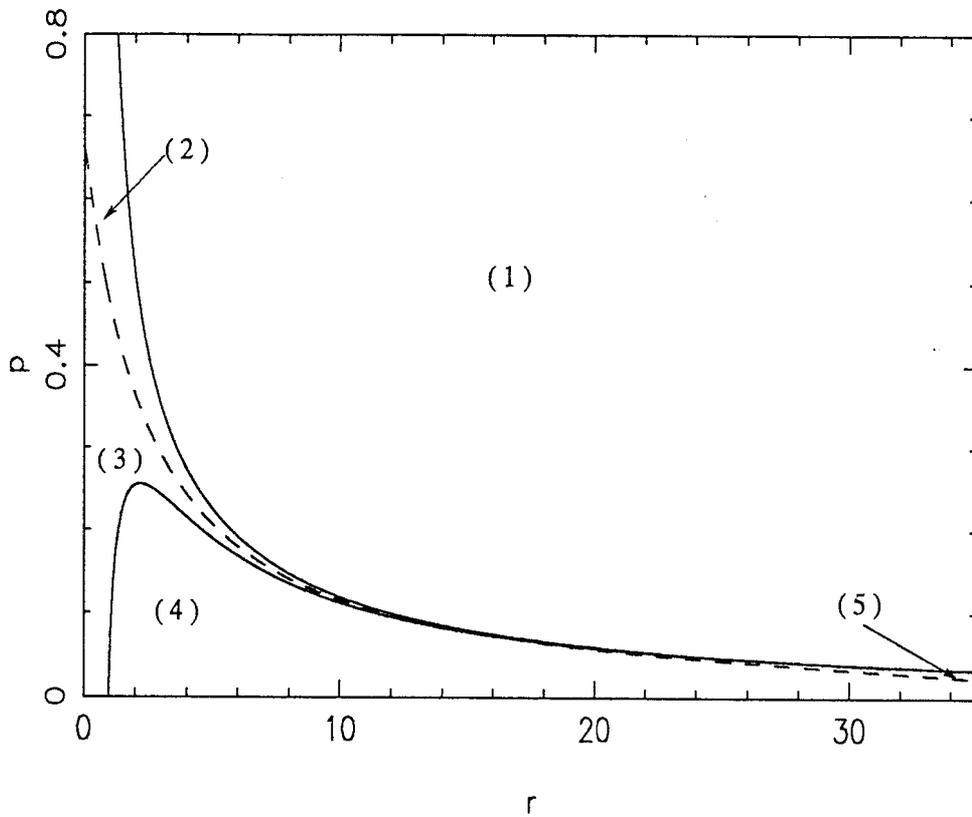


Figura 4.4.8: Curvas de puntos conectores:  $a_2 = 0$  (en trazo discontinuo) y  $m = -1$  (en trazo continuo). Determinan cinco regiones: (1)  $a_2 > 0, -1 < m < 0$ ; (2)  $a_2 > 0, m < -1$ ; (3)  $a_2 < 0, m < -1$ ; (4)  $a_2 < 0, -1 < m < 0$  y (5)  $a_2 > 0, -1 < m < 0$ .

La forma normal dada en (4.4.3) y cortada a quinto orden

$$\tilde{h}(x, \alpha) = e(z, \alpha) x \stackrel{def}{=} \left( h(\alpha) + b_1(\alpha) z + b_2(\alpha) z^2 \right) x$$

es, evidentemente, un desplegamiento no universal de  $\tilde{h}_0(x, \nu)$ . Si fijamos uno de los parámetros, se tiene el resultado siguiente.

**Teorema 4.4.4** Para cada  $r \neq \frac{1}{p} - 2$ ,  $\tilde{h}$  es un desplegamiento universal de  $\tilde{h}_0$ .

DEMOSTRACIÓN:

Si fijamos el parámetro  $r$ ,  $\tilde{h}$  será un desplegamiento universal de  $\tilde{h}_0$  si y sólo si se verifica la condición dada por

$$D = \det \begin{pmatrix} 0 & \tilde{e}_{0\nu} & \tilde{e}_{0\nu\nu} \\ \tilde{e}_\gamma & \tilde{e}_{\gamma z} & \tilde{e}_{\gamma\nu} \\ \tilde{e}_\beta & \tilde{e}_{\beta z} & \tilde{e}_{\beta\nu} \end{pmatrix} \neq 0$$

calculado en  $A$  y en  $x = 0$ .

Pero

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{0\nu} &= \tilde{h}_\nu = 0, & \tilde{e}_{0\nu\nu} &= \tilde{h}_{\nu\nu}, & \tilde{e}_\gamma &= \tilde{h}_\gamma, & \tilde{e}_\beta &= \tilde{h}_\beta = 0, \\ \tilde{e}_{\gamma z} &= 2\rho a_{1\gamma}, & \tilde{e}_{\beta z} &= 2\rho a_{1\beta}, & \tilde{e}_{\gamma\nu} &= \tilde{h}_{\gamma\gamma}, & \tilde{e}_{\beta\nu} &= \tilde{h}_{\beta\nu} \end{aligned}$$

en  $A$  y en  $x = 0$ , y, por tanto,

$$D = 2\rho(A) \tilde{h}_{\nu\nu}(A) \tilde{h}_{\gamma a_{1\beta}}(A)$$

Puesto que  $\rho(A) \neq 0$  y  $\tilde{h}_{\nu\nu}(A) \neq 0$ , tenemos que  $D \neq 0$  si y sólo si  $\tilde{h}_\gamma(A) a_{1\beta}(A) \neq 0$ . Pero,

$$\tilde{h}_\gamma(A) a_{1\beta}(A) = \frac{3[p(1+r) - (1-p)]r\sqrt{1+r}}{(\sqrt{1+r} + r + 1)^2}$$

que es distinto de cero si y sólo si  $r \neq \frac{1}{p} - 2$ , como queríamos demostrar. ■

Por último, queremos conocer los diferentes diagramas de bifurcaciones que surgen de la forma normal  $\tilde{h}(x, \alpha)$  en un entorno del punto  $A$ . Para ello, definimos las fuentes de no persistencia para  $\tilde{h}$ :

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(\beta, \gamma, r) / \exists (z, \nu), z > 0, \text{ tales que } \tilde{e} = \tilde{e}_z = \tilde{e}_\nu = 0 \text{ en } (z, \nu, \beta, \gamma, r)\} = \\ &= \{(\beta, \gamma, r) / \exists (z, \nu), z > 0, \text{ tales que } 4\sigma a_2 - a_1^2 = \\ &= a_{2\nu} a_1^2 - 2a_1 a_2 a_{1\nu} + 4a_2^2 \sigma_\nu = 0, \text{ signo}(a_1) \neq \text{signo}(a_2), \text{ en } (z, \nu, \beta, \gamma, r)\} \\ B_0 &= \{(\beta, \gamma, r) / \exists \nu \text{ tal que } \tilde{e} = \tilde{e}_\nu = 0 \text{ en } (0, \nu, \beta, \gamma, r)\} = \\ &= \{(\beta, \gamma, r) / \exists \nu \text{ tal que } h = h_\nu = 0 \text{ en } (0, \nu, \beta, \gamma, r)\} \\ H_0 &= \{(\beta, \gamma, r) / \exists \nu \text{ tal que } \tilde{e} = \tilde{e}_z = 0 \text{ en } (0, \nu, \beta, \gamma, r)\} = \\ &= \{(\beta, \gamma, r) / \exists \nu \text{ tal que } h = a_1 = 0 \text{ en } (0, \nu, \beta, \gamma, r)\} \end{aligned}$$

Los conjuntos  $B_0, B_1$  y  $H_0$  están constituidos por aquellas superficies que se obtienen al proyectar sobre el espacio de parámetros  $(\beta, \gamma, r)$  el conjunto de bifurcaciones de (4.3.4) en un entorno del punto  $A$ :  $B_0$  está formada por la proyección de los puntos de la superficie de Hopf donde se produce una pérdida simple de la condición de transversalidad;  $H_0$  está formada por la proyección de aquellos puntos de la superficie de Hopf donde se anula el coeficiente cúbico de la forma normal (de cada uno de ellos nace, en consecuencia, una curva de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas);  $B_1$  corresponde a la proyección de los puntos que verifican  $\Delta = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta = 0$ , donde  $\Delta$  es el discriminante de la ecuación cuadrática  $a_2 z^2 + a_1 z + \sigma = 0$  y, por tanto, representa la proyección de aquellos puntos de la curva de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas para los que ocurre un extremo con respecto al parámetro  $\nu$ .

Puesto que  $\tilde{h}$ , en las condiciones del teorema 4.4.4, es un desplegamiento universal de la forma normal  $x^5 + 2m\lambda x^3 \pm \lambda^2 x$ , las superficies que definen  $B_1, B_0$  y  $H_0$  son localmente difeomorfas a aquéllas obtenidas al definir las diferentes variedades de transición de  $x^5 + (2m\lambda + \delta) x^3 \pm (\lambda^2 + \theta) x$  (desplegamiento universal de  $x^5 + 2m\lambda x^3 \pm \lambda^2 x$ ) y que aparecen representadas en [48], págs. 276–278.

Hemos continuado las curvas obtenidas al intersecar las superficies dadas en los conjuntos  $B_0, B_1$  y  $H_0$  con planos  $r = \text{constante}$  (para diversos valores de  $p$ ) en los tres casos cualitativamente diferentes que se pueden presentar:  $a_2(A) > 0$  (regiones (1), (2) y (5) de la figura 4.4.8; para la continuación hemos tomado  $r = 2$  y  $p = 0.739661$ );  $a_2(A) < 0$  y  $|m| > 1$  (región (3) de la figura 4.4.8; hemos tomado  $r = 1$  y  $p = 0.3$ ) y  $a_2(A) < 0$  y  $|m| < 1$  (región (4) de la figura 4.4.8; hemos tomado  $r = 4$  y  $p = 0.1$ ). Estas curvas, proyecciones en el plano  $(\beta, \gamma)$  de los diferentes conjuntos de bifurcaciones de (4.3.4) en un entorno del punto  $A$ , aparecen representadas en las partes superiores de las figuras 4.4.9, 4.4.10 y 4.4.11. Un entorno del punto  $A$  queda dividido en cinco regiones, etiquetadas (1)–(5). En la parte inferior de las figuras 4.4.9, 4.4.10 y 4.4.11 representamos los diferentes diagramas de bifurcaciones de la forma normal  $\tilde{h}$  correspondientes a cada una de las cinco regiones. En el caso en que  $r = 4$  y  $p = 0.1$  observamos

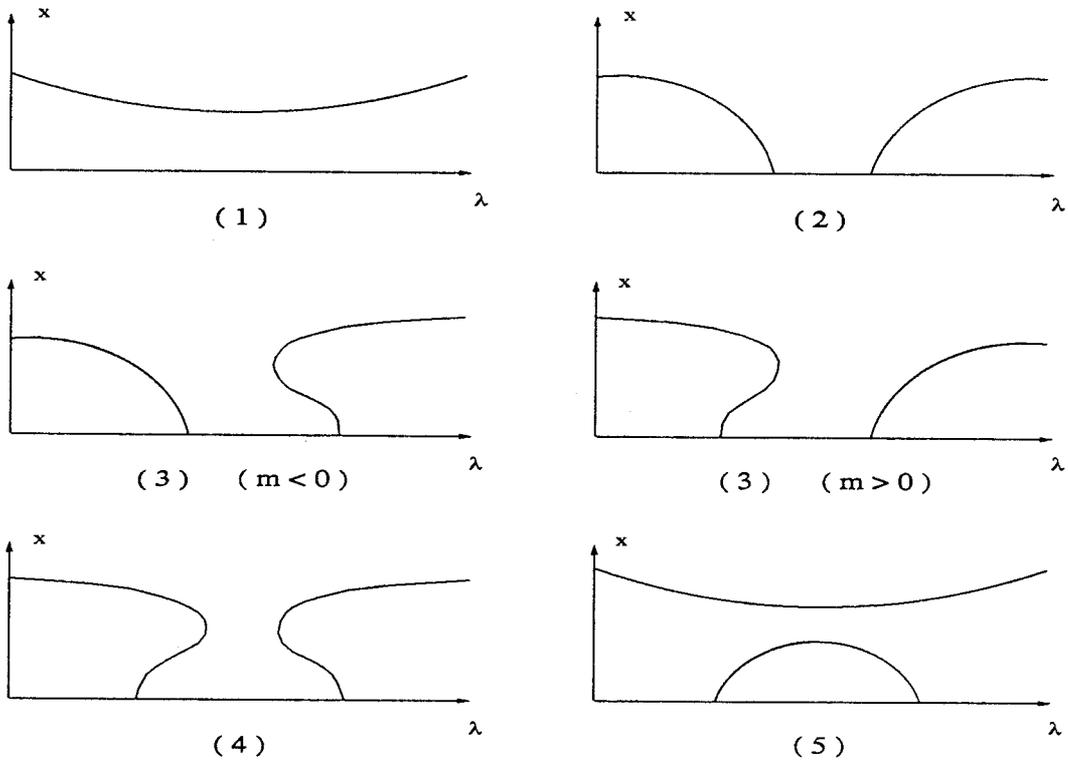
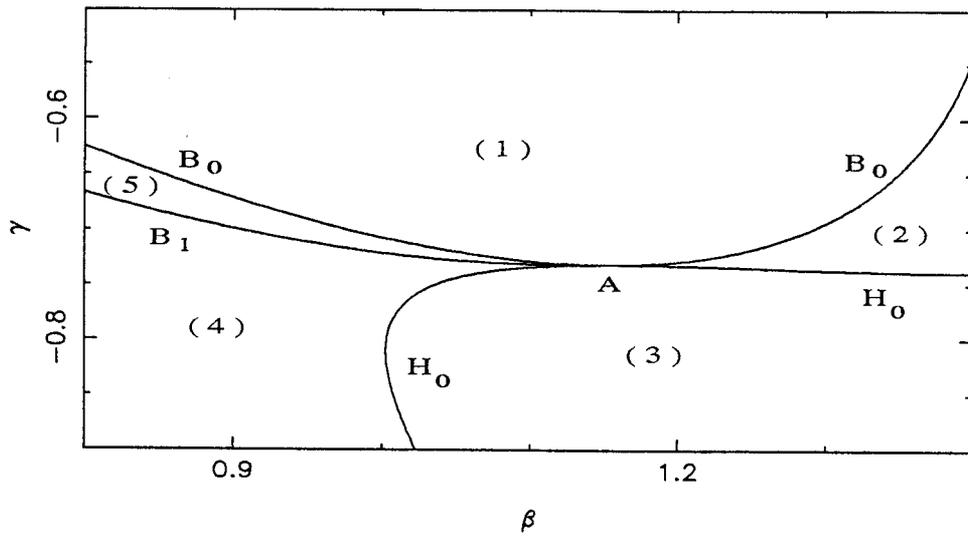


Figura 4.4.9: Conjunto y diagramas de bifurcaciones en el caso  $r = 2$  y  $p = 0.739661$ .

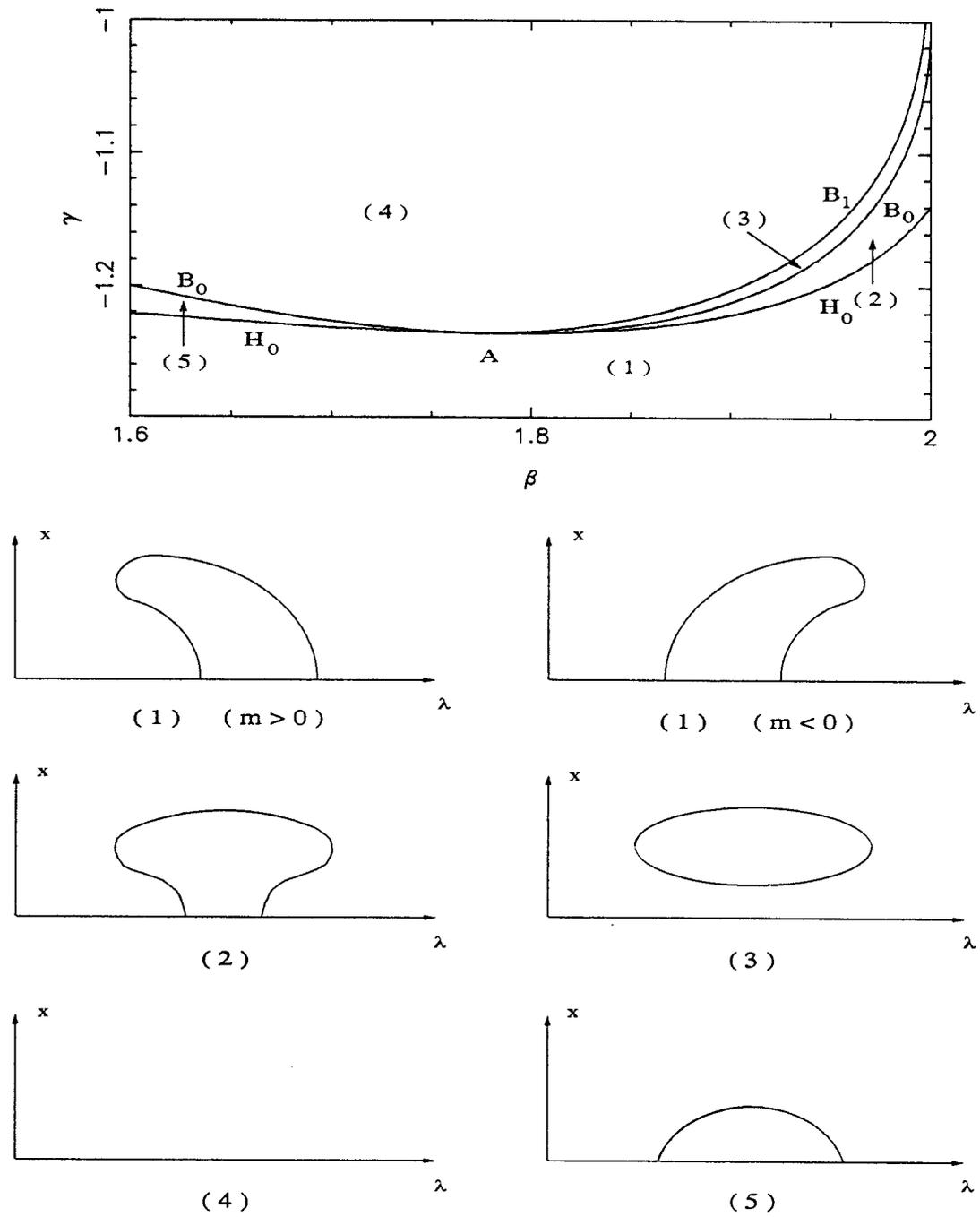


Figura 4.4.10: Conjunto y diagramas de bifurcaciones en el caso  $r = 4$  y  $p = 0.1$ .

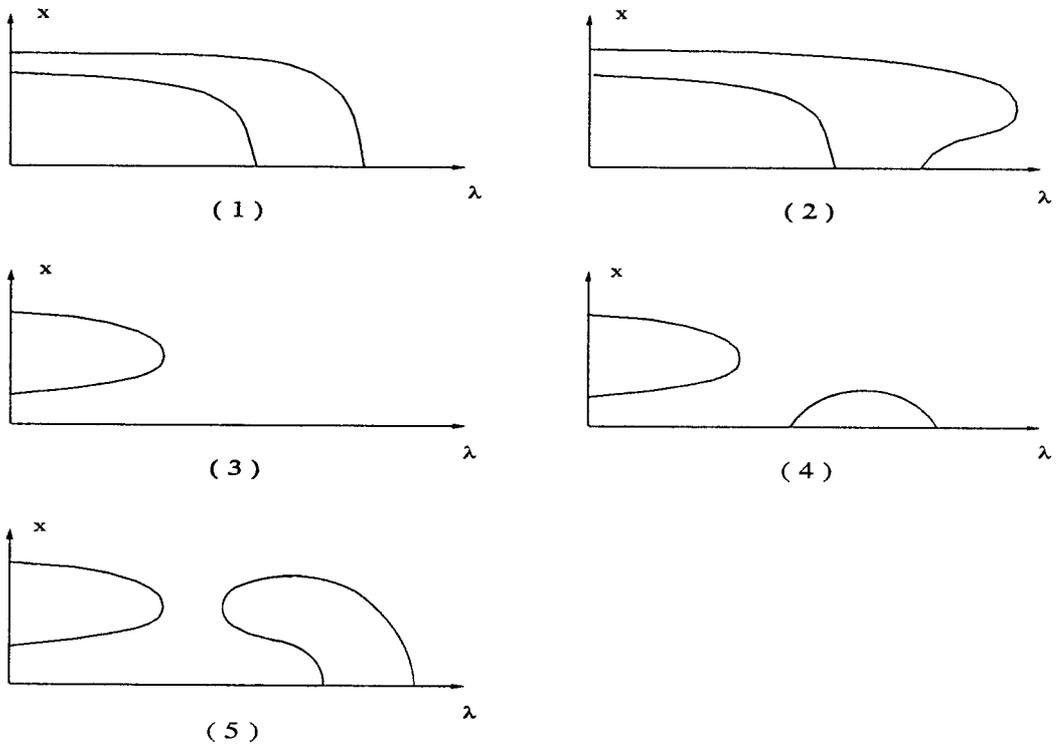
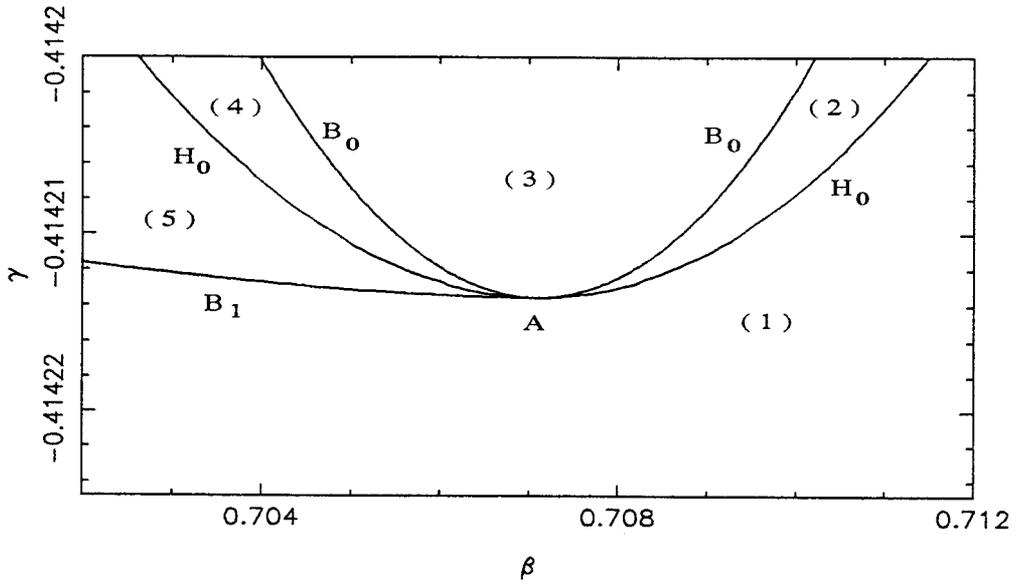


Figura 4.4.11: Conjunto y diagramas de bifurcaciones en el caso  $r = 1$  y  $p = 0.3$ .

la aparición de islas de órbitas periódicas (estas islas aparecen también en otros contextos, por ejemplo en relación con homoclinas de tipo Šil’nikov; vid. [90]).

#### 4.4.4 Caso Límite: Singularidades con $\mathbb{Z}_2$ -Codimensión Tres

En esta última subsección abordamos el estudio de un caso de degeneración de la bifurcación de Hopf que surge como caso límite del considerado en la subsección anterior.

Con la notación del teorema 4.4.2, sobre las curvas donde ocurre una pérdida doble de la condición de transversalidad existe un punto (obtenido numéricamente) en el que, además, el coeficiente cúbico  $a_1$  se anula, a saber,

$$\begin{aligned} \mu_1^0 &\approx 0.350511 \\ \mu_2^0 &\approx -1.842482 \\ \mu_3^0 &\approx 1.507009 \\ \mu_4^0 &\approx 0.857021 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Evaluamos el coeficiente de orden cinco en este punto y obtenemos que  $a_2 \neq 0$ . Por lo tanto, el punto  $\mu^0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \mu_4^0)$  actúa como centro organizador de una bifurcación de Hopf caracterizada por la forma normal

$$\varepsilon x^5 + \delta \lambda x^3 + \phi \lambda^3 x$$

con

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{signo}(s_{zz}^*) &= \text{signo}(b_2^*) \\ \delta &= \text{signo}(s_{\mu_1 z}^*) &= \text{signo}(b_{1\mu_1}^*) \\ \phi &= \text{signo}(s_{\mu_1 \mu_1 \mu_1}^*) &= \text{signo}(h_{\mu_1 \mu_1 \mu_1}^*) \end{aligned}$$

en  $(\mu^0, r_0)$  y  $z = 0$ . La evaluación de estos coeficientes y sus derivadas en  $\mu^0$  nos permiten establecer que  $\varepsilon = -1, \delta = -1$  y  $\phi = 1$ . De ello deducimos que la forma normal  $h^*(x, \mu)$  es fuertemente  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente (en un entorno de  $\mu = \mu_1^0$ ) a

$$x^5 + \lambda x^3 - \lambda^3 x$$

que corresponde a una singularidad con  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión 3.

Hemos demostrado, pues, el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.5** *Sobre la hipersuperficie en el espacio de parámetros  $(\nu, \beta, \gamma, r)$  donde ocurre una bifurcación de Hopf, dada en (4.4.1), existen puntos para los que ocurre una degeneración en el término cúbico de la forma normal de Hopf junto a una pérdida doble de la condición de transversalidad.*

Hemos continuado las curvas  $C_1 : h^* = h_{\mu_1}^* = 0$  y  $C_2 : h^* = b_1^* = 0$  (para  $\mu_4^0 = 0.6$ ) mostradas en la figura 4.4.12. Se observan tres puntos de intersección de estas dos curvas:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . El otro punto representado,  $D$ , corresponde a una pérdida doble de la condición de transversalidad.

Seguidamente, hemos continuado los puntos  $B$  y  $D$  variando el parámetro  $\mu_4$ , obteniendo las curvas  $D_1$  y  $D_2$  mostradas en la figura 4.4.13. El punto  $E$  de intersección de las curvas  $D_1$  y  $D_2$  está, pues, caracterizado por las condiciones  $h^* = h_{\mu_1}^* = h_{\mu_1\mu_1}^* = b_1^* = 0$ ,  $h_{\mu_1\mu_1\mu_1}^* \neq 0$ , es decir, es un punto de degeneración del término cúbico de la forma normal de Hopf junto a una pérdida doble de la condición de transversalidad, y observamos que concuerda con los cálculos dados en (4.4.9).

Por otra parte, el punto  $E$  podría haber sido obtenido como un caso límite de una bifurcación de Hopf degenerada como la estudiada en la subsección anterior. En efecto, el punto  $B$  que aparece en la figura 4.4.12 puede actuar como centro organizador de una bifurcación de Hopf caracterizada por la forma normal

$$x^5 + 2m\lambda x^3 \pm \lambda^2 x \quad (4.4.10)$$

donde  $m$  es el parámetro modal, calculado en las coordenadas  $(\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0)$  de  $B$  y en  $\mu_4^0 = 0.6$ . Variando el parámetro  $\mu_4$  podemos conseguir que  $h_{\mu_1\mu_1}^*$  se anule. Nuestros cálculos muestran que el valor donde se anula,  $\mu_4 \approx 0.857021$ , corresponde precisamente al punto  $E$ . Pero si  $h_{\mu_1\mu_1}^* = 0$ , entonces  $m = -\infty$  y, por lo tanto, el punto  $E$  representa un punto conector de (4.4.10).

Tenemos evidencia numérica de que no existen degeneraciones adicionales en el rango de parámetros  $r, p \in (0, 100)$ , puesto que el coeficiente de orden cinco

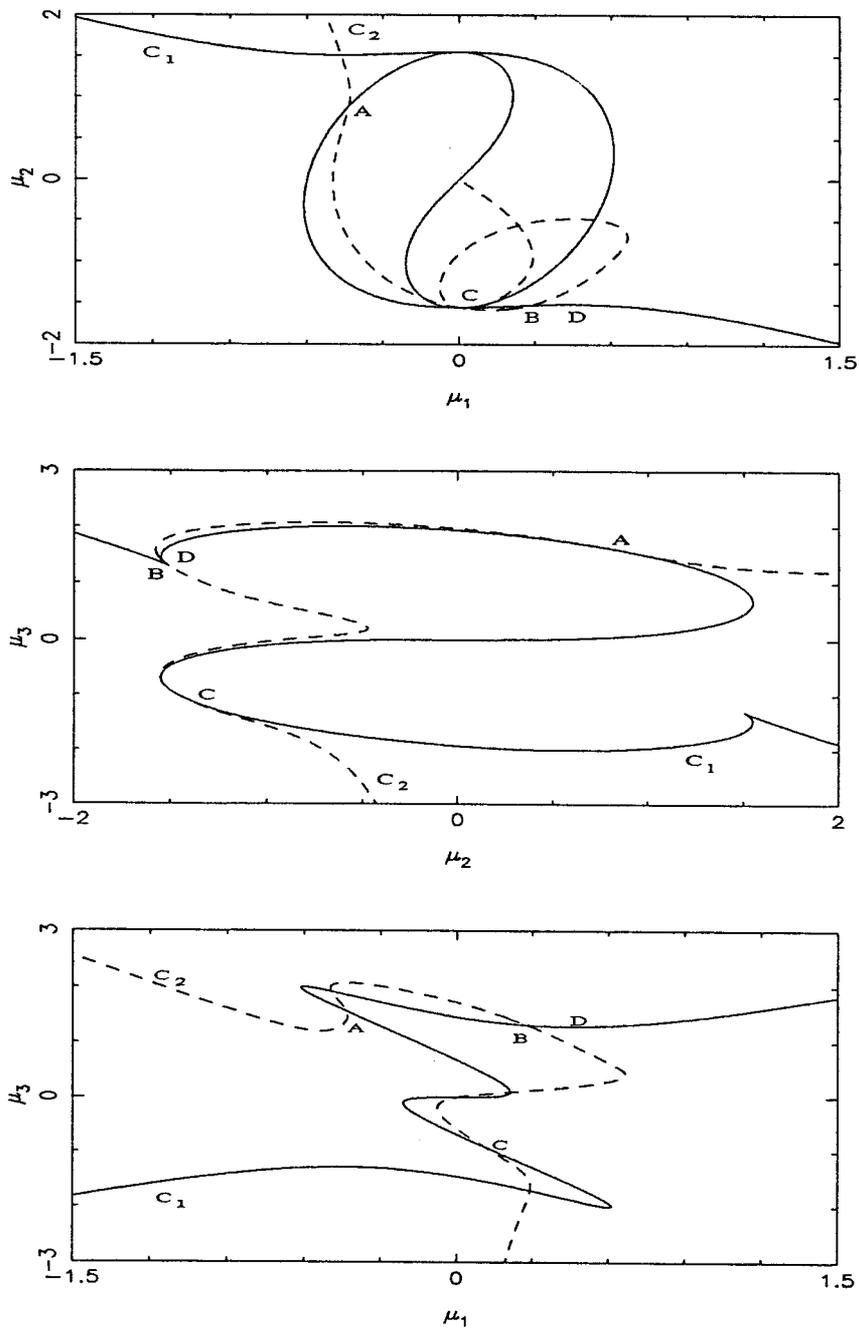


Figura 4.4.12: Proyecciones de las curvas  $C_1$  (en trazo continuo) y  $C_2$  (en trazo discontinuo) ( $\mu_4^0 = 0.6$ ).

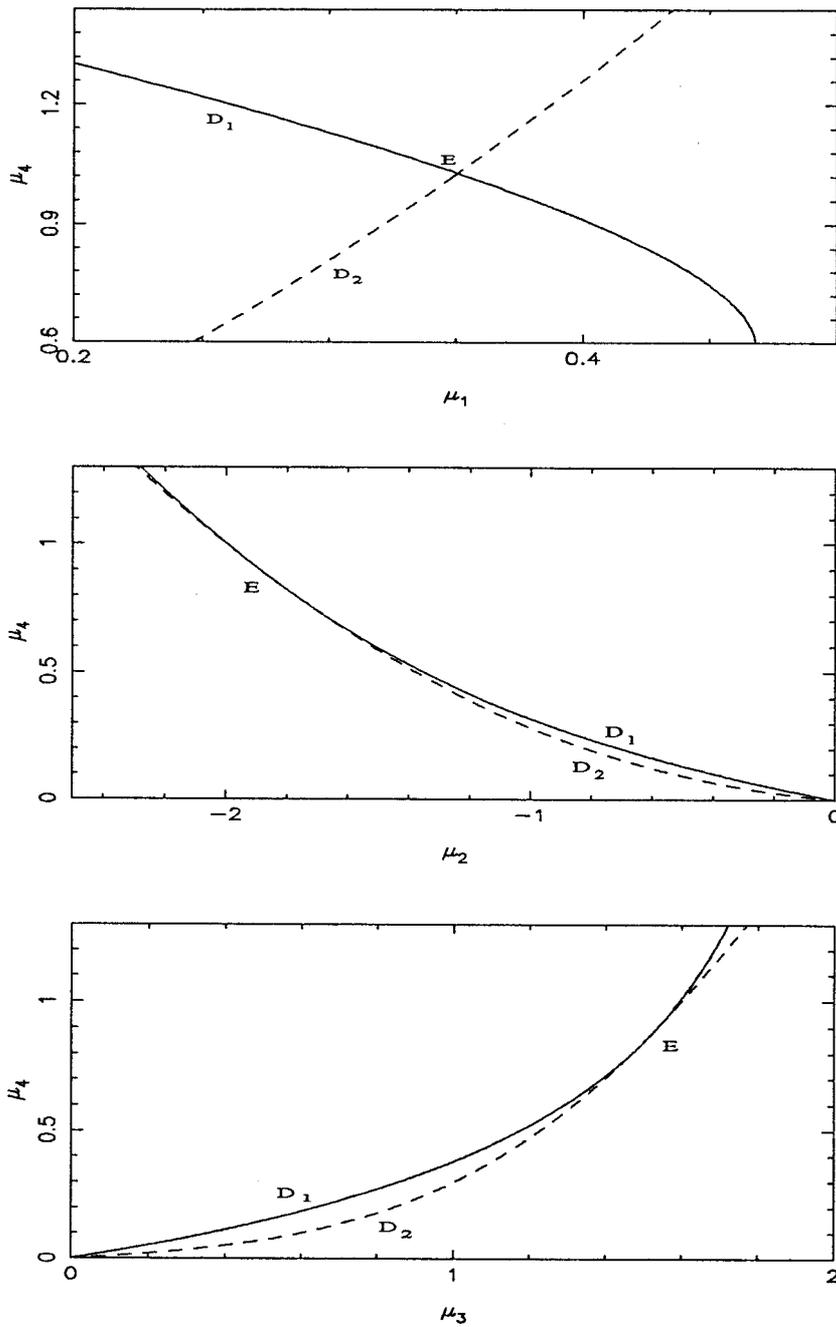


Figura 4.4.13: Proyecciones de las curvas  $D_1$  (en trazo continuo) y  $D_2$  (en trazo discontinuo).

de la forma normal de Hopf no se anula en aquellos puntos para los que ocurre la anulación del coeficiente cúbico junto a una pérdida doble de la condición de transversalidad.

# Capítulo V

## BIFURCACIONES MULTIPARÁMETRICAS EN UN SISTEMA ENZIMÁTICO

### 5.1 Introducción

Distintas reacciones bioquímicas aparecen modeladas por las llamadas *ecuaciones de reacción-difusión*. En este capítulo nos centramos en el análisis de las bifurcaciones que experimenta un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, plano y con cinco parámetros, (en lo sucesivo denominado *sistema enzimático*) que surge a partir de uno en derivadas parciales de tipo reacción-difusión propuesto para el estudio de reacciones enzimáticamente catalizadas (vid. [80]).

El sistema enzimático ha sido estudiado previamente por diversos autores, pero sus trabajos describen tan sólo una mínima parte de la gran riqueza de comportamiento dinámico y de bifurcaciones que este sistema experimenta: Kernevez *et alii* en [65] y [66] estudian numéricamente dicho sistema mediante el código de continuación AUTO, por lo que obtienen como única información la existencia de bifurcaciones de Hopf y de sillan-nodo de equilibrios y de órbitas periódicas; Doedel *et alii* en [25], [27] y [28] consideran el sistema enzimático tan sólo como un ejemplo de aplicación del código AUTO, por lo que la información que obtienen se limita, de nuevo, a las bifurcaciones antes mencionadas; por último, Hassard y Jiang dedican dos trabajos al estudio del sistema enzimático. En el primero

Codim.	Equilibrios	Órbitas Periódicas	Policiclos
1	silla-nodo Hopf	silla-nodo	homoclina con traza no nula homoclina silla-nodo transversal
2	cúspide Hopf degenerada (anulación del término cúbico de la forma normal) Takens-Bogdanov	cúspide	homoclina con traza cero homoclina silla-nodo no transversal (5 tipos) homoclina doble
3	Takens-Bogdanov degenerada (cúspide de orden tres) Takens-Bogdanov degenerada (anulación del término $x^2$ de la forma normal) Hopf degenerada (anulación de los términos de órdenes tres y cinco de la forma normal)		homoclina cuspidal homoclina con traza cero y coeficiente EID igual a uno
2*	Hopf degenerada con pérdida simple de transversalidad		

(\*)  $Z_2$ -codimensión topológica 2

Tabla 5.1.1: Fenómenos de bifurcación experimentados por el sistema enzimático.

de ellos, [54], detectan numéricamente un punto en el espacio de parámetros del sistema en el que éste experimenta una bifurcación de Hopf para la que no se verifica la condición de transversalidad (vid. la sección 4.4) y obtienen curvas numéricas, implementando el código AUTO, de las bifurcaciones de silla-nodo de órbitas periódicas relacionadas con el desplegamiento de la correspondiente singularidad; la pobreza de resultados en este trabajo se pone aún más en evidencia al considerar que la bifurcación de la que trata presenta un mínimo de interés (precisamente porque un cambio en la elección del parámetro de bifurcación posibilita que se verifique la condición de transversalidad). En el segundo trabajo, [55], los mismos autores realizan un estudio muy parecido al anterior, pero con un nivel más de degeneración en la bifurcación de Hopf, puesto que añaden a la pérdida de la condición de transversalidad la anulación del coeficiente cúbico de su forma normal; aun cuando esta bifurcación es más rica que la anterior, no deja de ponerse en evidencia, de nuevo, la pobreza de resultados que obtienen (todos numéricos) puesto que, como veremos a lo largo de este capítulo, el comportamiento de bifurcaciones del sistema enzimático puede ser descrito, al menos en gran parte, analíticamente, lo que conlleva una mayor información, así como un tratamiento más elegante en la obtención de ésta. Con nuestro trabajo creemos haber aportado una descripción esencialmente completa (obtenida tanto con técnicas analíticas como numéricas) del comportamiento de bifurcaciones del sistema enzimático en el rango de parámetros para el que la reacción bioquímica modelada tiene sentido (rango denominado en lo sucesivo *físicamente aceptable*).

En la tabla 5.1.1 esquematizamos las diferentes bifurcaciones tanto de equilibrios como de órbitas periódicas y políciclos (conexiones homoclinas en este caso) que ocurren en el sistema enzimático y que analizaremos en detalle en el resto del capítulo.

En la segunda sección de este capítulo mostraremos el origen bioquímico del sistema enzimático, describiendo el sistema de ecuaciones de reacción-difusión del cual procede.

En la tercera sección describiremos las bifurcaciones de silla-nodo y cúspide

de equilibrios. Un cambio de variables adecuado y una reparametrización del tiempo permitirá transformar el sistema enzimático en un sistema polinomial, más simple de estudiar.

La sección cuarta está dedicada al análisis de la bifurcación de Hopf y sus degeneraciones.

En la quinta sección abordaremos el estudio de la bifurcación de Takens–Bogdanov y analizaremos dos degeneraciones de codimensión tres que presenta.

El estudio de la gran riqueza de bifurcaciones homoclinas que experimenta el sistema enzimático será el contenido de la sección sexta. Localizaremos y continuaremos los diversos tipos de homoclinas de codimensión menor o igual que tres que aparecen en el sistema. Mostraremos el desplegamiento de una homoclina cuspidal y los conjuntos de bifurcaciones de los diferentes puntos de codimensión tres encontrados, así como la transición de los conjuntos de bifurcaciones entre estos puntos.

En la séptima y última sección de este capítulo estudiaremos un caso particular y singular: cuando uno de los parámetros del sistema,  $\alpha$ , alcanza el valor límite  $\alpha = 1$ . La singularidad se debe a que toda la riqueza dinámica y de bifurcaciones que encontramos para un valor arbitrario de  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 1)$  desaparece casi por completo cuando  $\alpha = 1$ .

## 5.2 Origen del Sistema

Las reacciones bioquímicas ocurren continuamente en todos los organismos vivos. En la mayoría de estas reacciones intervienen ciertas proteínas llamadas *enzimas*, las cuales actúan como catalizadores extraordinariamente eficientes. Las enzimas actúan selectivamente sobre determinados compuestos llamados *sustratos*, y son importantes en la regulación de los procesos biológicos, por ejemplo activando o inhibiendo una reacción.

Consideremos, siguiendo a Murray en [80], el mecanismo propuesto para explicar determinados fenómenos relativos a la *melanogénesis* (síntesis de *melanina*

en la piel y el pelo de los mamíferos; la melanina es un pigmento que proviene de la oxidación de la *dihidrofénil-alanina*, que a su vez se obtiene de la oxidación de la *tirosina* por la acción de la enzima *tirosinasa*). Sean dos sustancias, un sustrato (la *tirosina*) y un cosustrato (un activador que gobierna la iniciación de la melanogénesis), cuyas concentraciones respectivas denotamos por  $S$  y  $A$ , cantidades que son funciones tanto del tiempo como de las variables espaciales. Se supone que estas sustancias están contenidas en un depósito con concentraciones constantes,  $S_0$  y  $A_0$ , respectivamente. Desde este depósito se difunden a través de una membrana inactiva de grosor  $L_1$  hacia una membrana activa de grosor  $L_2$ , donde se encuentra inmovilizada la enzima *tirosinasa*, que permite a  $S$  y a  $A$  reaccionar con la siguiente velocidad:

$$R = \frac{V_m AS}{K_m + S + S^2/K_S} \quad (5.2.1)$$

donde  $V_m$ ,  $K_m$  y  $K_S$  son parámetros característicos de la enzima y se suponen constantes y positivos. Es evidente, a partir de la forma de  $R$  en (5.2.1), que  $S$  inhibe la reacción cuando su concentración es alta, mientras que  $A$  la activa.

Las ecuaciones que gobiernan este proceso enzimáticamente catalizado, vienen dadas por el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{D'_S}{L_1 L_2} (S_0 - S) - \frac{V_m AS}{K_m + S + S^2/K_S} + D_S \Delta S \\ \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{D'_A}{L_1 L_2} (A_0 - A) - \frac{V_m AS}{K_m + S + S^2/K_S} + D_A \Delta A \end{cases} \quad (5.2.2)$$

donde  $D'_S$  y  $D'_A$  son los coeficientes de difusión para  $S$  y  $A$ , respectivamente, en la membrana inactiva, y  $D_S$  y  $D_A$  son los coeficientes de difusión para  $S$  y  $A$ , respectivamente, en la membrana activa ( $\Delta$  representa el operador laplaciano). El primer sumando en cada miembro de la derecha de las ecuaciones de (5.2.2) describe el flujo de la sustancia  $S$  o  $A$  (según se trate de la primera o de la segunda ecuación, respectivamente) desde el depósito a la membrana activa; el segundo sumando mide la pérdida debida a la reacción, mientras que el tercer sumando corresponde a la difusión sobre la membrana activa.

Los sistemas que presentan una estructura análoga al dado en (5.2.2) se denominan *sistemas de reacción-difusión*.

Con el objeto de adimensionalizar tanto las variables de estado como los parámetros, realizamos el siguiente escalado

$$\begin{aligned} s &= \frac{S}{K_m}, & a &= \frac{A}{K_m}, & t^* &= \frac{D'_S}{L_1 L_2} t, & \Delta^* &= L_1 L_2 \frac{D_S}{D'_S} \Delta \\ \alpha &= \frac{D'_A}{D'_S}, & \rho &= V_m \frac{L_1 L_2}{D'_S}, & \kappa &= \frac{K_m}{K_S}, & \beta &= \frac{D_A}{D_S} \end{aligned}$$

que transforma el sistema (5.2.2) en

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = s_0 - s - \rho \frac{sa}{1 + s + \kappa s^2} + \Delta s \\ \frac{\partial a}{\partial t} = \alpha (a_0 - a) - \rho \frac{sa}{1 + s + \kappa s^2} + \beta \Delta a \end{cases} \quad (5.2.3)$$

(donde hemos suprimido, por conveniencia de notación, los asteriscos de  $t$  y  $\Delta$ ). El parámetro  $\kappa$  es llamado *parámetro de inhibición*.

Hacemos la observación de que el sistema dado en (5.2.3) modela diferentes reacciones bioquímicas enzimáticamente catalizadas, además de la propuesta en [80] (por ejemplo, la acción de la enzima uricasa sobre ácido úrico y oxígeno para dar lugar a alantoína y otros productos).

La reacción bioquímica que el sistema (5.2.3) modela impone que sean positivos tanto los parámetros como las variables de estado, hecho éste que desempeñará un papel importante en el análisis que efectuaremos posteriormente.

En el caso en que las concentraciones del sustrato y del cosustrato no dependan de la posición de éstos sobre la membrana activa, los términos de difusión pueden ser eliminados y, en consecuencia, (5.2.3) adquiere la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que puede ser abordado con las técnicas de estudio de las bifurcaciones de sistemas dinámicos. Así, (5.2.3) queda de la forma

$$\begin{cases} \dot{s} = s_0 - s - \rho \frac{sa}{1 + s + \kappa s^2} \\ \dot{a} = \alpha (a_0 - a) - \rho \frac{sa}{1 + s + \kappa s^2} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

con  $s$ ,  $a$ ,  $a_0$ ,  $s_0$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$  y  $\kappa$  positivos.

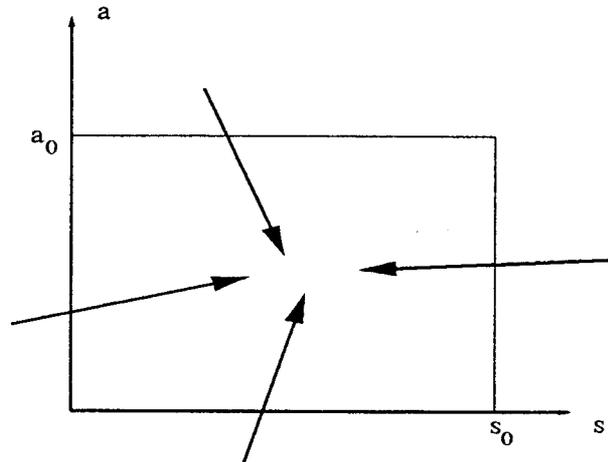


Figura 5.2.1: Región positivamente invariante para el flujo del sistema enzimático.

Observemos que existe en el plano de fases  $(s, a)$  un rectángulo de lados  $s_0$  y  $a_0$  (vid. figura 5.2.1) que constituye una región positivamente invariante para el flujo del sistema (5.2.4). Es en el interior de este rectángulo donde ocurre, precisamente, toda la dinámica interesante de dicho sistema.

El estudio analítico y numérico de las diferentes bifurcaciones que experimenta el sistema (5.2.4) será objeto de estudio en el resto de este capítulo.

### 5.3 Bifurcaciones de Silla-nodo y Cúspide de Equilibrios

Comencemos, pues, con el estudio de las bifurcaciones de silla-nodo y de cúspide que experimentan los equilibrios del sistema enzimático dado en (5.2.4).

En el lema que sigue, y con el objeto de simplificar el estudio analítico de las bifurcaciones que experimenta (5.2.4), demostramos que este sistema racional puede ser expresado equivalentemente en la forma de un sistema polinomial.

**Lema 5.3.1** *El sistema dado en (5.2.4) es, para  $s > 0$ ,  $C^\infty$ -equivalente al sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 + F_1(v)u + F_2(v) \\ \dot{v} = uv \end{cases} \quad (5.3.1)$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_1(v) &= -\kappa(\alpha + 2)v^3 + (\kappa s_0 - 1 - \alpha - \rho)v^2 - \alpha v - s_0, \\
 F_2(v) &= vp(v)h(v) \\
 p(v) &= 1 + v + \kappa v^2 \\
 h(v) &= -\alpha\kappa v^3 + [\alpha(s_0\kappa - 1) - \rho]v^2 + \\
 &\quad + [\rho(s_0 - \alpha a_0) + \alpha(s_0 - 1)]v + \alpha s_0
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

DEMOSTRACIÓN:

La reparametrización del tiempo dada por

$$t \longrightarrow (1 + s + \kappa s^2) t$$

(obsérvese que  $1 + s + \kappa s^2 > 0$  para  $s > 0$ ) transforma el sistema (5.2.4) en

$$\begin{cases} \dot{s} = (s_0 - s)(1 + s + \kappa s^2) - \rho s a \\ \dot{a} = \alpha(a_0 - a)(1 + s + \kappa s^2) - \rho s a \end{cases} \tag{5.3.3}$$

El cambio de variables

$$\begin{aligned}
 u &= (s_0 - s)(1 + s + \kappa s^2) - \rho s a \\
 v &= s
 \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

permite expresar (5.3.3) en la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = [-p(v) + (s_0 - v)p'(v)]u - \rho\alpha a_0 v p(v) + \\ \quad + \frac{1}{v}[-u + \alpha v p(v) + \rho v^2][(s_0 - v)p(v) - u] \\ \dot{v} = u \end{cases} \tag{5.3.5}$$

donde  $p(v) = 1 + v + \kappa v^2$ .

Una nueva reparametrización del tiempo dada por

$$t \longrightarrow vt \quad (v > 0)$$

transforma (5.3.5) en el sistema dado en el enunciado, lo que demuestra el lema.

■

Los equilibrios del sistema (5.3.1) se encuentran, al ser  $v > 0$ , en los puntos  $(0, v_*)$ , donde  $F_2(v_*) = 0$ . La linealización de (5.3.1) en el equilibrio  $(0, v_*)$  viene dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} F_1(v_*) & F_2'(v_*) \\ v_* & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.6)$$

(donde  $' = \frac{d}{dv_*}$ ).

El polinomio característico

$$\lambda^2 - F_1(v_*)\lambda - v_*F_2'(v_*) = 0$$

nos proporciona los autovalores

$$\lambda = \frac{F_1(v_*) \pm \sqrt{F_1^2(v_*) + 4v_*F_2'(v_*)}}{2} \quad (5.3.7)$$

Puesto que  $F_2(v_*) = v_*p(v_*)h(v_*)$  y  $p(v_*) > 0$ , los equilibrios corresponden a los ceros del polinomio cúbico  $h(v_*)$ . Por tanto, el sistema tendrá un equilibrio como mínimo y tres como máximo. Se verifica que  $\det A = -v_*F_2'(v_*)$ , y al ser negativo el coeficiente del término de mayor grado de  $h(v_*)$  y positivo su término independiente, se sigue que, en el caso en que  $h(v_*) = 0$  tenga tres ceros, la pendiente de  $h$  en los ceros de los extremos es negativa, y positiva en el del medio, de donde, de los tres equilibrios, el del medio es una silla y los de los extremos son focos o nodos; en el caso en que  $h(v_*) = 0$  tenga un único cero, la pendiente de  $h$  en este cero es positiva, de donde se sigue que el único equilibrio es de tipo silla. Las dos situaciones límite, a saber, la existencia de dos equilibrios, uno doble, y la existencia de un equilibrio triple nos proporcionan las degeneraciones que buscamos en esta sección:

- si se tiene  $F_2(v_*) = F_2'(v_*) = 0$  y  $F_2''(v_*) \neq 0$ , el equilibrio  $(0, v_*)$  experimenta una bifurcación de silla-nodo. Para  $\alpha$  y  $\kappa$  constantes, esta bifurcación determina en el espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$  una superficie que puede

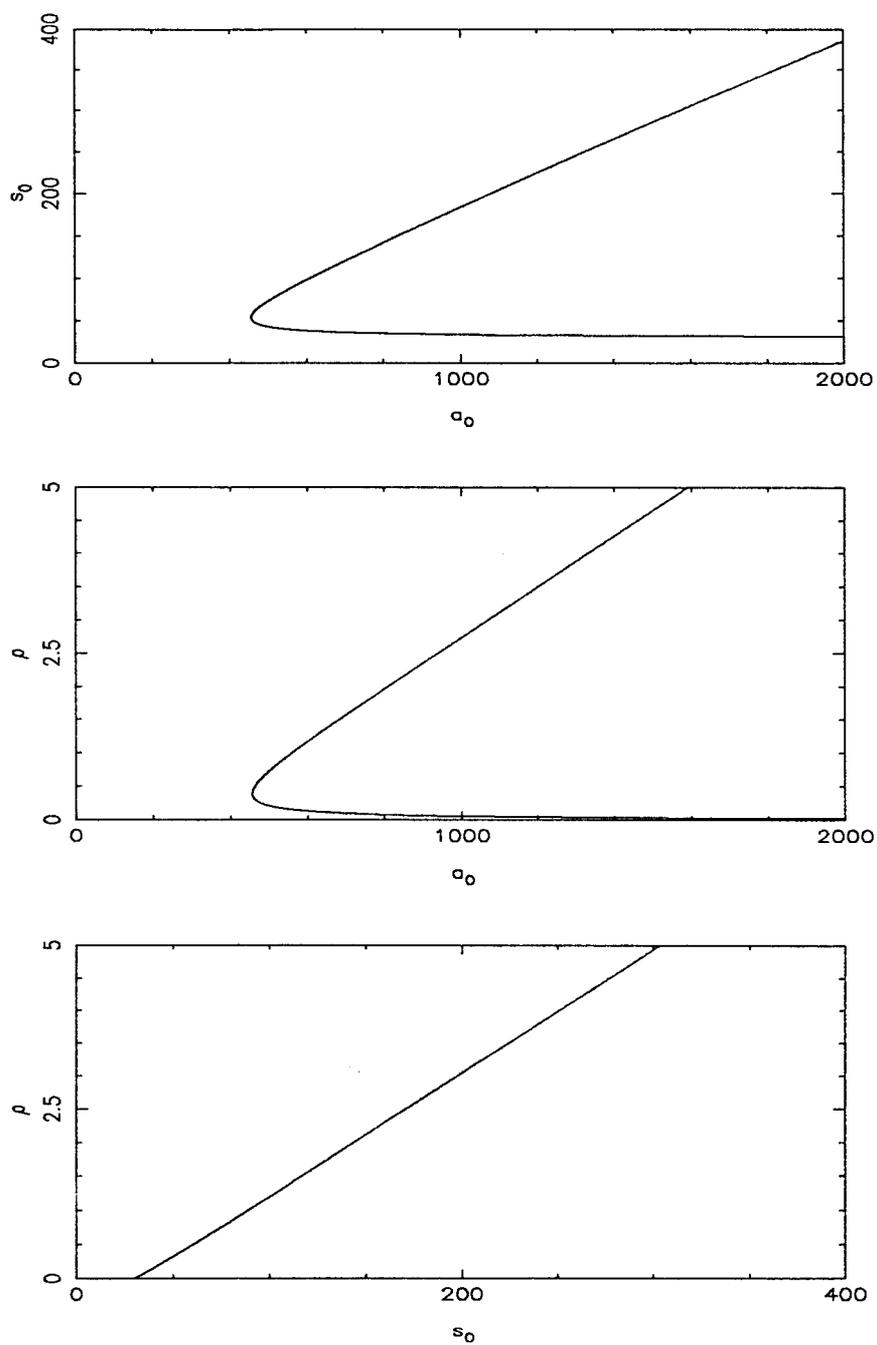


Figura 5.3.1: Proyecciones de la curva de bifurcación de cúspide de equilibrios, obtenidas para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ .

ser parametrizada mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} s_0 = \frac{v_*^2(\rho + \alpha p'(v_*))}{\alpha(v_* p'(v_*) - p(v_*))} \\ a_0 = \frac{(\alpha p(v_*) + \rho v_*)^2}{\alpha^2(v_* p'(v_*) - p(v_*))\rho} \end{cases}$$

- si se tiene  $F_2(v_*) = F_2'(v_*) = F_2''(v_*) = 0$  y  $F_2'''(v_*) \neq 0$ , el equilibrio  $(0, v_*)$  experimenta una bifurcación de cúspide. Para  $\alpha$  y  $\kappa$  constantes, esta bifurcación determina en el espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$  una curva que puede ser parametrizada mediante las ecuaciones (no hacemos explícita la dependencia de  $v_*$  de los polinomios  $p(v_*)$ ,  $p'(v_*)$  y  $p''(v_*)$ )

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2(v_* p' - p) [2(v_* p' - p)^2 + v_*^2 p(p'' - p')]}{\alpha(v_*^2 p'' - 2v_* p' + 2p) p'(2v_* p' - 2p - v_* p)} \\ s_0 = v_* + \frac{2v_*(v_* p' - p)}{v_*^2 p'' - 2(v_* p' - p)} \\ \rho = \frac{2\alpha p'(v_* p' - p) - \alpha v_* p p''}{v_*^2 p'' - 2(v_* p' - p)} \end{cases}$$

En la figura 5.3.1 representamos la curva de cúspides de equilibrios proyectada en los planos coordenados del espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$ , para los valores  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ .

## 5.4 Bifurcación de Hopf y Degeneraciones Relacionadas

Dado un equilibrio  $(0, v_*)$  del sistema (5.3.1), a partir de la matriz de la linealización dada en (5.3.6) y de sus autovalores, expresados en (5.3.7), es inmediato constatar que dicho equilibrio experimenta una bifurcación de Hopf si  $F_1(v_*) = 0$  y  $F_2'(v_*) < 0$ . La condición de transversalidad viene dada por

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v_*} \right) = \frac{1}{2} F_1'(v_*) \neq 0 \tag{5.4.1}$$

donde hemos tomado  $v_*$  como parámetro de bifurcación.

De la condición

$$F_1(v_*) = v_*(s_0 - v_*)p'(v_*) - (\alpha v_* + s_0)p(v_*) - \rho v_*^2 = 0$$

obtenemos

$$s_0 = v_* + \frac{v_*}{\kappa v_*^2 - 1} [\rho v_* + (\alpha + 1)p(v_*)]$$

que nos permite expresar, para cada valor de  $\rho$ ,  $\alpha$  y  $\kappa$ , la curva de Hopf en el plano  $(v_*, s_0)$ . Es fácil comprobar que la curva tiene una asíntota vertical en  $v_* = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$  y una asíntota oblicua en la recta  $s_0 = (\alpha + 2)v_* + \frac{\rho + \alpha + 1}{\kappa}$ . Para los valores de  $v_*$  en el intervalo  $(0, \frac{1}{\sqrt{\kappa}})$ , el valor de  $s_0$  es negativo, situación no permitida, por lo que el rango de  $v_*$  será el intervalo  $(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}, +\infty)$ . En la figura 5.4.1 representamos la curva de Hopf en el plano  $(v_*, s_0)$ , para  $\alpha = 0.2$ ,  $\kappa = 0.1$  y  $\rho = 1$ .

De las condiciones de Hopf,  $F_1(v_*) = 0$ , y de equilibrio,  $F_2(v_*) = 0$ , podemos obtener una parametrización de la superficie de bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$ , para  $\alpha$  y  $\kappa$  constantes. Ésta viene dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} a_0 = \frac{(s_0 - v_*) [v_* p'(v_*) (v_* - s_0) + p(v_*) s_0]}{\alpha [v_* p'(v_*) (v_* - s_0) + p(v_*) (\alpha v_* + s_0)]} \\ \rho = \frac{v_* (s_0 - v_*) p'(v_*) - (\alpha v_* + s_0) p(v_*)}{v_*^2} \end{cases}$$

siempre que  $F_2'(v_*) < 0$ .

Obsérvese que Hassard y Jiang en [55] no consiguen algo tan básico como son las ecuaciones de la hipersuperficie, en el espacio de parámetros, donde ocurre la bifurcación de Hopf.

La traslación del equilibrio  $(0, v_*)$  al origen, dada por

$$\begin{aligned} u &\longrightarrow u \\ v &\longrightarrow v + v_*, \end{aligned}$$

seguida de la reparametrización de las variables de estado, dada por

$$\begin{aligned} u &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{-F_2'(v_*)}} u \\ v &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{v_*}} v, \end{aligned}$$

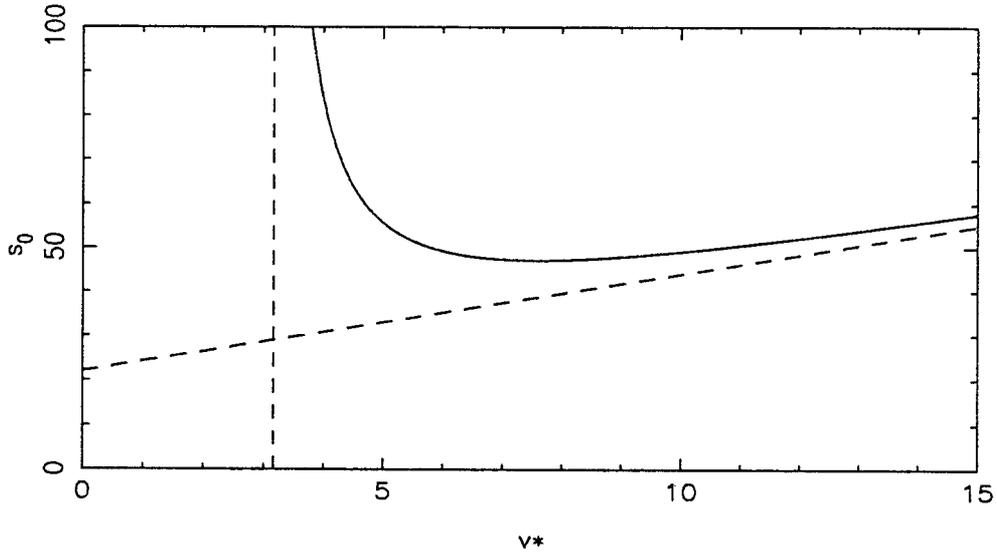


Figura 5.4.1: Curva de bifurcación de Hopf (en trazo continuo) y sus asíntotas (en trazo discontinuo) obtenidas para  $\alpha = 0.2$ ,  $\kappa = 0.1$  y  $\rho = 1$ .

nos permite escribir el sistema (5.3.1) en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{-v_* F'_2(v_*)} \\ f(u, v) &= \sqrt{-F'_2(v_*)} u^2 + F_1(\sqrt{v_*} v + v_*) u + \\ &+ \frac{F_2(\sqrt{v_*} v + v_*) - F'_2(v_*) \sqrt{v_*} v}{\sqrt{-F'_2(v_*)}} \\ g(u, v) &= \sqrt{-F'_2(v_*)} uv \end{aligned}$$

Al sistema (5.4.2) podemos aplicarle el algoritmo desarrollado en [38] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf, obteniendo los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  (en el supuesto  $a_1 = 0$ ) y  $a_3$  (en el supuesto  $a_1 = a_2 = 0$ ), de órdenes tres,

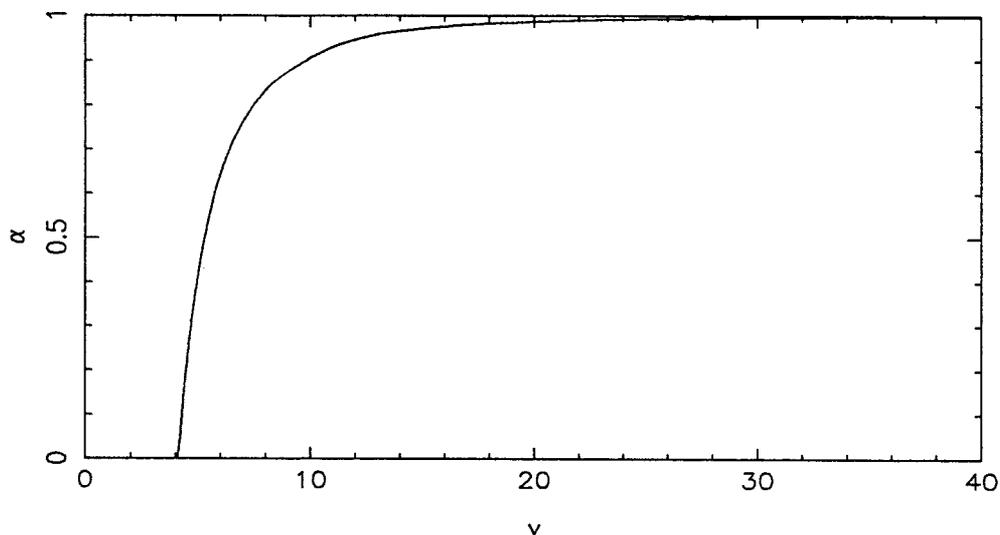


Figura 5.4.2: Curva de bifurcación de Hopf de codimensión tres, correspondiente a la anulación simultánea de los coeficientes de órdenes tres y cinco de la forma normal ( $\kappa = 0.1$ ).

cinco y siete, respectivamente, dados por (expresamos las funciones  $F_1$  y  $F_2$  y sus derivadas sin explicitar su dependencia de  $v_*$ ):

$$a_1 = \frac{1}{16} \frac{A_{1,1}}{A_{1,2}}, \quad a_2 = -\frac{1}{1152} \frac{A_{2,1}}{A_{2,2}}, \quad a_3 = -\frac{1}{18432} \frac{A_{3,1}}{A_{3,2}} \quad (5.4.3)$$

donde

$$A_{1,1} = v_* F_1'' F_2' - v_* F_2'' F_1' + 2F_1' F_2'$$

$$A_{1,2} = F_2'$$

$$\begin{aligned} A_{2,1} = & 10v_*^2 F_2' F_1''' F_1'' + 30v_* F_2' (F_1'')^2 - 12F_1'' F_2' F_1' - \\ & 10v_*^2 F_2''' F_1'' F_1' + 3v_*^2 (F_1')^2 F_2^{IV} - \\ & 16v_* F_2' F_1''' F_1' + 4v_* (F_1')^2 F_2'' \end{aligned}$$

$$A_{2,2} = F_2' F_1'$$

$$\begin{aligned} A_{3,1} = & 35v_*^4 (F_1')^2 F_2^{IV} (F_2'')^3 - 35v_*^4 F_2' F_2^V (F_1')^2 (F_2'')^2 + \\ & + 35v_*^4 F_2'' (F_2')^2 F_2^{IV} F_1''' F_1' + 5v_*^4 F_2'' (F_1')^2 (F_2')^2 F_2^{VI} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 140v_*^3 F_1''' F_2' F_1' (F_2'')^3 - 315v_*^3 F_2' F_2^{IV} (F_1')^2 (F_2'')^2 + \\
 & + 204v_*^3 F_2'' (F_1')^2 F_2^V (F_2')^2 - 140v_*^3 F_2'' (F_2')^3 (F_1''')^2 - \\
 & - 126v_*^3 (F_2')^3 F_2^{IV} F_1''' F_1' - 12v_*^3 (F_1')^2 (F_2')^3 F_2^{VI} + \\
 & + 1260v_*^2 F_1''' (F_2')^2 F_1' (F_2'')^2 + 942v_*^2 (F_2')^2 F_2^{IV} (F_1')^2 F_2'' - \\
 & - 288v_*^2 (F_1')^2 F_2^V (F_2')^3 + 504v_*^2 (F_2')^{IV} (F_1''')^2 - \\
 & - 3768v_* F_1''' (F_2')^3 F_1' F_2'' - 936v_* (F_2')^3 F_2^{IV} (F_1')^2 + \\
 & + 3744F_1''' (F_2')^{IV} F_1' \\
 A_{3,2} = & (F_2')^3 F_1' (5v_* F_2'' - 12F_2')
 \end{aligned}$$

En el espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$  (para  $\alpha$  y  $\kappa$  constantes) la condición de anulación del coeficiente cúbico de la forma normal,  $a_1 = 0$ , junto con las condiciones de Hopf y de equilibrio, determinan dos curvas de degeneración de la bifurcación de Hopf, que hemos continuado numéricamente y que aparecen representadas en la figura 5.5.4. Sobre una de estas curvas hemos detectado numéricamente un punto en el que se anula el coeficiente de orden cinco de la forma normal,  $a_2$ , dando lugar a una degeneración en la bifurcación de Hopf de codimensión tres. Este punto viene dado por los valores (para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ ):

$$\begin{aligned}
 v_* & \approx 4.4721298 \\
 a_0 & \approx 458.8523045 \\
 s_0 & \approx 51.6934269 \\
 \rho & \approx 0.3533743
 \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Hemos continuado, también, la curva de puntos de Hopf de codimensión tres, para  $\kappa = 0.1$ , que aparece representada en la figura 5.4.2.

Tenemos evidencia numérica de que el coeficiente de orden siete de la forma normal,  $a_3$ , no se anula simultáneamente con los de órdenes tres y cinco (al menos para los valores de  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 1)$  y para  $\kappa$  en  $(0, 10000)$ ).

Otras degeneraciones de la bifurcación de Hopf tienen su origen en la no verificación de la condición de transversalidad dada en (5.4.1). De ellas, precisamente, vamos a ocuparnos brevemente en el resto de esta sección (puesto que se hizo un

estudio análogo en la sección 4.4, a ella remitimos para los detalles).

### 5.4.1 Bifurcación de Hopf con $\mathbb{Z}_2$ -Codimensión Topológica Dos

Una primera degeneración en la bifurcación de Hopf surge como consecuencia de una pérdida simple de la condición de transversalidad. Esta degeneración corresponde a los valores de los parámetros para los que se verifica  $F_1(v_*) = F_1'(v_*) = 0, F_1''(v_*) \neq 0$  y  $a_1 \neq 0$ , siendo  $(0, v_*)$  un equilibrio del sistema (5.3.1). Una singularidad que verifique estas condiciones es  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a la forma normal  $x^3 - \lambda^2 x$ , una vez que la dinámica del sistema ha sido descrita localmente por los ceros de una ecuación escalar. Hassard y Jiang dedican la totalidad de [54] a localizar y desplegar un punto en el plano de parámetros  $(v_*, s_0)$ , para  $a_0, \alpha$  y  $\kappa$  constantes ( $\rho$  es expresado en función del resto de los parámetros), en el que ocurre tal degeneración. Dada la riqueza de bifurcaciones del sistema enzimático que estudiamos, no vamos a ocuparnos de este tipo de degeneración, que creemos de muy poco interés, sino que vamos a adentrarnos en otras que conllevan una dinámica más rica.

Éste es el caso de aquella bifurcación de Hopf para la que se producen simultáneamente una pérdida simple de la condición de transversalidad y una degeneración del término cúbico de su forma normal. Una singularidad con estas características es  $\mathbb{Z}_2$ -equivalente a la forma normal  $\varepsilon x^5 + 2m\lambda x^3 + \delta\lambda^2 x$ , una vez que la dinámica del sistema ha sido, de nuevo, descrita localmente por los ceros de una ecuación escalar,  $g(x, v_*) = r(z, v_*)x$  (con  $z = x^2$ ), donde  $\varepsilon = \text{signo}(r_{zz}), \delta = \text{signo}(r_{v_*v_*})$  (calculados en el punto de bifurcación) y  $m$  es un parámetro modal. Tal singularidad posee  $\mathbb{Z}_2$ -codimensión topológica 2. Hassard y Jiang dedican, en esta ocasión, el contenido de [55] a la localización y posterior despliegamiento de una tal singularidad, que aparece en el sistema enzimático (5.2.4) para  $\alpha$  y  $\kappa$  constantes. El complejo abordaje numérico del problema que realizan estos autores contrasta con la simplicidad y elegancia con las que vamos a obtener, a continuación, nuestros resultados.

Si en el sistema polinomial (5.3.1) nos planteamos la búsqueda de un punto en el espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$ , para  $\alpha$  y  $\kappa$  constantes, que verifique las condiciones anteriores, hemos de localizar una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v_*} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\ F_2(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\ a_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Puesto que  $a_1 = 0$  si y sólo si  $v_*(F_1'F_2'' - F_1''F_2') = 2F_1'F_2'$ , el sistema de ecuaciones (5.4.5) es equivalente a uno de los dos sistemas siguientes:

(a)

$$\begin{aligned} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v_*} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial v_*^2} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\ F_2(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

De la tercera ecuación se tiene

$$v_* = \frac{\kappa s_0 - 1 - \alpha - \rho}{3\kappa(\alpha + 2)}$$

y, sustituyendo en la segunda, obtenemos

$$v_*^2 = \frac{\alpha}{3\kappa(\alpha + 2)} < \frac{1}{\kappa}$$

de donde

$$v_* < \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$$

que está fuera del rango permitido para  $v_*$ , como vimos anteriormente. De este sistema, por tanto, no obtenemos ninguna solución.

Obsérvese, por otra parte, que las ecuaciones (5.4.6) corresponden a un punto para el que se verifica una pérdida doble de la condición de transversalidad junto a una degeneración del término cúbico de la forma normal

de la bifurcación de Hopf. Se tiene, por tanto, que no existe posibilidad de existencia de puntos con pérdida doble de la condición de transversalidad, tanto en la situación en que  $a_1 \neq 0$  (puesto que esta situación es contradictoria) como en la situación en que  $a_1 = 0$ .

(b)

$$\begin{aligned}
 F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial v_*} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\
 F_2(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial v_*} F_2(v_*, a_0, s_0, \rho) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.4.7}$$

Pero un punto que verifique este sistema de ecuaciones deja de ser un punto de bifurcación de Hopf, pues no se verifica la condición  $F_2(v_*) < 0$ . De hecho, un punto tal corresponde a una bifurcación de Takens–Bogdanov y, por lo tanto, tendremos ocasión de reencontrarlo y estudiarlo más adelante.

No existen pues, en la forma en que hemos planteado el problema, puntos que verifiquen una pérdida simple de la condición de transversalidad junto a una degeneración del término cúbico de la forma normal. Estos puntos hay que buscarlos desde otra perspectiva, y ésta va a venir determinada por un hecho simple: en lugar de intentar localizar estos puntos sobre la curva definida en el espacio  $(v_*, a_0, s_0, \rho)$ , los buscamos sobre la curva proyectada en el espacio  $(v_*, a_0, s_0)$ . La razón de la validez de este nuevo planteamiento se encuentra en el hecho de que la pérdida de la transversalidad, lejos de ser una característica dinámica del sistema, es, más bien, una característica *geométrica*; en efecto, un punto en el espacio de parámetros donde no se cumple la condición de transversalidad no es más que un punto que es un extremo con respecto al parámetro de bifurcación. El procedimiento consiste en obtener  $\rho$  de la tercera ecuación de (5.4.5) y sustituirlo en la primera y en la cuarta; así, se proyecta la curva solución de estas tres ecuaciones desde el espacio de parámetros  $(v_*, a_0, s_0, \rho)$  al espacio  $(v_*, a_0, s_0)$ . Seguidamente se localiza un punto extremo (con respecto al parámetro de bifurcación) en la

curva proyectada.

Sea, pues,  $\rho = \rho(v_*, a_0, s_0, \alpha, \kappa) \equiv \rho(v_*)$ . La condición de pérdida de transversalidad,  $\frac{\partial}{\partial v_*} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) = 0$  se transforma ahora en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_*} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho) &= \frac{\partial}{\partial v_*} F_1(v_*, a_0, s_0, \rho(v_*)) = \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial v_*} + \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial v_*} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Pero

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_*} = \frac{\partial F_2}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial v_*}$$

de donde (5.4.8) es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_*} \frac{\partial F_2}{\partial \rho} - \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \frac{\partial F_2}{\partial v_*} = 0.$$

Esta última ecuación, junto a las condiciones de Hopf,  $F_1(v_*, a_0, s_0, \rho(v_*)) = 0$ , y de anulación del coeficiente cúbico de la forma normal,  $a_1(v_*, a_0, s_0, \rho(v_*)) = 0$ , determinan un sistema de ecuaciones simple cuya solución, para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , viene dada por:

$$\begin{aligned} v_* &\approx 12.910025849187 \\ a_0 &\approx 330.201560357254 \\ s_0 &\approx 67.707767353754 \\ \rho &\approx 2.308837729186 \end{aligned}$$

que es, precisamente, el punto obtenido en forma más enrevesada en [55].

Hemos continuado en el espacio de parámetros  $(v_*, a_0, s_0, \rho, \alpha)$  (para  $\kappa = 0.1$ ) la curva formada por los puntos que verifican las condiciones de pérdida simple de transversalidad y anulación del coeficiente cúbico de la forma normal de Hopf. En la figura 5.4.3 mostramos sus proyecciones sobre algunos planos paramétricos.

Desde la nueva perspectiva antes indicada, a saber, la búsqueda de degeneraciones sobre la curva de bifurcación de Hopf proyectada en el espacio de parámetros  $(v_*, a_0, s_0)$ , es posible encontrar puntos en los que se produzca una

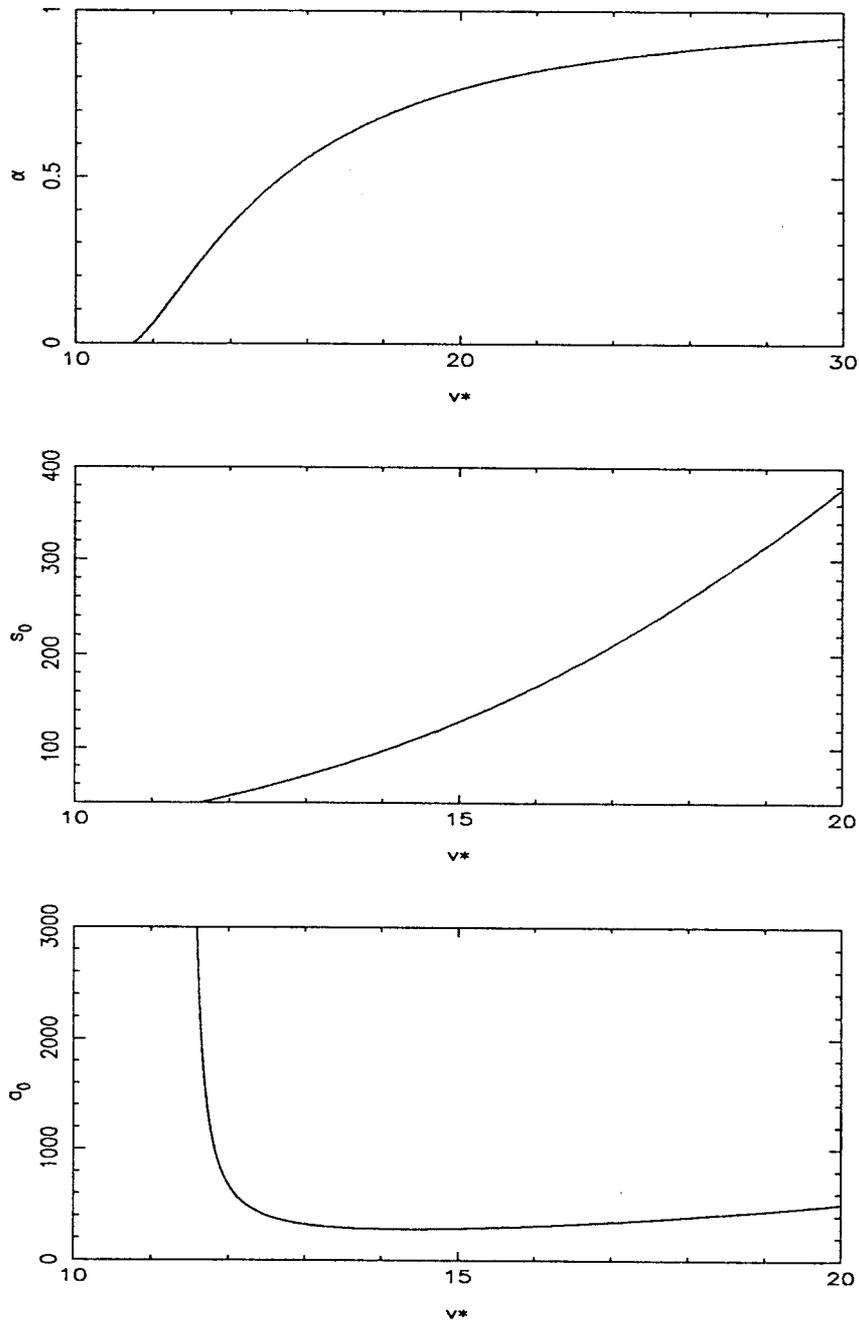


Figura 5.4.3: Proyecciones de la curva de bifurcación de Hopf con una pérdida simple de la condición de transversalidad y una degeneración en el término cúbico de la forma normal ( $\kappa = 0.1$ ).

pérdida doble de la condición de transversalidad. El tratamiento analítico que hemos dado al sistema enzimático nos permite obtener, por tanto, con respecto a la bifurcación de Hopf y sus degeneraciones, una información mucho más exhaustiva que la ofrecida por Hassard y Jiang en [54] y [55]. Hemos de señalar, no obstante, que las degeneraciones adicionales de la bifurcación de Hopf relativas a la pérdida múltiple de la condición de transversalidad y sus fenómenos asociados, presentan tan sólo un interés relativo frente a la riqueza de bifurcaciones que vamos a encontrar y a estudiar en el resto del capítulo, y es por esto por lo que no insistiremos más sobre ellas.

## 5.5 Bifurcaciones de Takens–Bogdanov

Abordamos en esta sección el estudio para el sistema enzimático (5.3.1) de la bifurcación de Takens–Bogdanov y sus degeneraciones. Hemos de señalar que entramos, desde esta sección en adelante y hasta el final del capítulo, en un estudio de bifurcaciones del sistema enzimático para el que no existe ningún trabajo precedente, salvo los que nosotros mismos hemos realizado en [82] y [83] y a los que remitimos.

Un equilibrio  $(0, v_*)$  de (5.3.1) experimenta una bifurcación de Takens–Bogdanov si la linealización del sistema en dicho equilibrio, dada en (5.3.6), posee traza y determinante nulos, es decir, si

$$F_1(v_*) = F_2'(v_*) = 0.$$

Con el objeto de analizar esta bifurcación, vamos a escribir primeramente el sistema (5.3.1) en la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = uv \\ \dot{v} = v^2 + F_1(u)v + F_2(u) \end{cases} \quad (5.5.1)$$

donde simplemente hemos intercambiado las variables  $u$  y  $v$  y el orden de las ecuaciones.

Sea  $(u_*, 0)$  un equilibrio de (5.5.1) que experimenta una bifurcación de Takens–Bogdanov. La reparametrización del tiempo dada por

$$t \longrightarrow \frac{t}{u_*}$$

transforma (5.5.1) en el sistema  $C^\infty$ –equivalente

$$\begin{cases} \dot{u} &= \frac{1}{u_*} u v \\ \dot{v} &= \frac{1}{u_*} (v^2 + F_1(u) v + F_2(u)) \end{cases} \quad (5.5.2)$$

La linealización de este sistema en  $(u_*, 0)$  viene dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que podemos aplicar al sistema (5.5.2) el algoritmo desarrollado en [45] para el cálculo de los coeficientes de la forma normal de la bifurcación de Takens–Bogdanov. Obtenemos que (5.5.2) es  $C^\infty$ –conjugado, en un entorno del equilibrio  $(u_*, 0)$ , a un sistema que, cortado a segundo orden, tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{2u_*} F_2''(u_*) u^2 + \frac{1}{u_*} F_1'(u_*) uv \end{cases} \quad (5.5.3)$$

En el caso en que  $F_1'(u_*)$  y  $F_2''(u_*)$  sean ambos no nulos, tenemos una bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada de codimensión dos, siendo, en este caso, el sistema (5.5.2)  $C^\infty$ –conjugado, en un entorno del equilibrio  $(u_*, 0)$ , al dado por (5.5.3).

De las condiciones  $F_1(u_*) = F_2(u_*) = F_2'(u_*) = 0$  (equivalentes a  $F_1(u_*) = h(u_*) = h'(u_*) = 0$ ) podemos deducir una expresión paramétrica para la curva de bifurcación de Takens–Bogdanov en el espacio  $(a_0, s_0, \rho)$ . En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha F_1(u_*) + (h(u_*) - u_* h'(u_*)) = \\ &= (1 - \alpha) u_*^2 \left( \rho - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \frac{p(u_*)}{u_*} \right) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Análogamente, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= F_1(u_*) + (h(u_*) - u_*h'(u_*)) = \\ &= (1 - \alpha)(u_*p'(u_*) - p(u_*)) \left[ (s_0 - u_*) - \frac{u_*p(u_*)}{(u_*p'(u_*) - p(u_*))(1 - \alpha)} \right] \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Despejando  $a_0$  de  $F_2(u_*) = 0$ , y a partir de (5.5.4) y (5.5.5), se obtiene, para los valores de  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 1)$ , una expresión paramétrica de la curva de puntos de Takens–Bogdanov:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{u_*p(u_*)}{\alpha^2(u_*p'(u_*) - p(u_*))(1 - \alpha)} \\ s_0 = u_* + \frac{u_*p(u_*)}{(u_*p'(u_*) - p(u_*))(1 - \alpha)} \\ \rho = \frac{\alpha^2p(u_*)}{u_*(1 - \alpha)} \end{cases} \quad (5.5.6)$$

Las primeras degeneraciones de la bifurcación de Takens–Bogdanov que podemos encontrar, aparecerán en los casos en que se anule alguno de los coeficientes cuadráticos de la forma normal dada en (5.5.3). Tenemos, en consecuencia, dos casos posibles (el tercer caso, a saber, que ambos coeficientes se anulen simultáneamente, no puede darse, como demostraremos más adelante):

**Cúspides de orden tres.** Es el caso en que  $F_1'(u_*) = 0$ . Un punto que verifica la degeneración dada por esta condición, denotado en lo sucesivo por  $E$ , corresponde a una *cúspide* de orden tres (vid. la sección 3.2), con codimensión tres (en ausencia de degeneraciones adicionales), y se obtiene como solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1(u_*) &= 0 \\ F_1'(u_*) &= 0 \\ F_2(u_*) &= 0 \\ F_2'(u_*) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Multiplicando la segunda ecuación de (5.5.7) por  $u_*$  y restando el resultado al doble de la primera, se obtiene

$$s_0 = u_* + \frac{(u_*p'(u_*) - p(u_*))u_*(\alpha + 2)}{2}$$

Igualando esta expresión con la obtenida para  $s_0$  en (5.5.7), llegamos al polinomio en  $u_*$  dado por

$$[2 - \alpha(1 + \alpha)] \kappa^2 u_*^4 - 2[3 - \alpha(1 + \alpha)] \kappa u_*^2 - 2u_* - \alpha(1 + \alpha) = 0$$

o, despejando  $\alpha$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \sqrt{9 - 4h(u_*)} - 1 \right) \quad \text{donde} \quad h(u_*) = \frac{2p(u_*)}{(u_* p'(u_*) - p(u_*))^2} \quad (5.5.8)$$

que expresa, para  $\kappa$  constante, el valor de  $\alpha$  en términos de la abscisa del equilibrio.

Para los valores de referencia  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , hemos obtenido los siguientes valores para los restantes parámetros.

$$u_* \approx 6.9312522972356$$

$$a_0 \approx 725.1213502005642$$

$$s_0 \approx 35.9361063052581$$

$$\rho \approx 0.0918699651368$$

En la figura 5.5.2 aparece representada la curva de puntos de cúspide de orden tres en el plano  $(v_*, \alpha)$ .

Sabemos (vid. [34]) que el sistema (5.5.3) es, en un entorno de un equilibrio que experimenta una cúspide de orden tres,  $C^\infty$ -conjugado al sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = a_2 u^2 + a_3 u^3 + b_3 u^2 v + a_4 u^4 + b_4 u^3 v \end{cases} \quad (5.5.9)$$

y éste último es  $C^\infty$ -equivalente a

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = a_2 u^2 + b'_4 u^3 v \end{cases} \quad (5.5.10)$$

donde

$$b'_4 = b_4 - \frac{a_3 b_3}{a_2} \quad (5.5.11)$$

El algoritmo desarrollado en [45] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Takens–Bogdanov nos proporciona los coeficientes que buscamos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} \frac{F_2''(u_*)}{u_*} \\ a_3 &= \frac{1}{6} \frac{F_2'''(u_*) + 3F_2''(u_*)}{u_*^2} \\ b_3 &= \frac{1}{2} \frac{F_1''(u_*)}{u_*} \\ a_4 &= \frac{1}{24} \frac{u_*^2 F_2^{IV} + 8F_2'''(u_*) + 12F_2''(u_*)}{u_*^3} \\ b_4 &= \frac{1}{6} \frac{u_*^2 F_1'''(u_*) + 6u_* F_1''(u_*)}{u_*^3} \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $F_1''$ ,  $F_1'''$ ,  $F_2''$ ,  $F_2'''$  y  $F_2^{IV}$  los valores de los parámetros  $a_0$ ,  $s_0$  y  $\rho$  por las expresiones dadas en (5.5.6), obtenemos

$$\begin{aligned} b'_4 &= 96\kappa^5 u_*^9 + 102\kappa^4 u_*^8 + (24 - 268\kappa) \kappa^3 u_*^7 - 316\kappa^3 u_*^6 + \\ &+ (196\kappa - 88) \kappa^2 u_*^5 + (264\kappa - 4) \kappa u_*^4 + (76 - 20\kappa) \kappa u_*^3 + \\ &+ (4 - 52\kappa) u_*^2 - (4\kappa + 12) u_* + 2 + \\ &+ \sqrt{9\kappa^2 u_*^4 - 26\kappa u_*^2 - 8u_* + 1} \left[ -32\kappa^4 u_*^7 - 34\kappa^3 u_*^6 + \right. \\ &+ (44\kappa - 8) \kappa^2 u_*^5 + 46\kappa^2 u_*^4 + (8 - 24\kappa) \kappa u_*^3 - \\ &\left. - 30\kappa u_*^2 - 4(1 + \kappa) u_* + 2 \right] \end{aligned}$$

La anulación de este coeficiente,  $b'_4$ , nos proporciona las posibles cúspides de orden cuatro. En el caso en que  $\kappa = 0.1$ , los ceros de  $b'_4 = 0$  dan lugar a valores de los parámetros físicamente no aceptables, por lo que no existen, para  $u_* > \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ , cúspides de orden cuatro.

**Focos débiles.** En este otro caso se verifica  $F_2''(u_*) = 0$ . La degeneración de codimensión tres (en ausencia de degeneraciones adicionales) dada por esta condición, ha sido exhaustivamente estudiada por Dumortier *et alii* en [35].

Un punto que verifica este tipo de degeneración, denotado en lo sucesivo por  $D$ , se obtiene como solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1(u_*) &= 0 \\ F_2(u_*) &= 0 \\ F_2'(u_*) &= 0 \\ F_2''(u_*) &= 0 \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Sustituyendo en la cuarta ecuación los valores de  $u_*$ ,  $s_0$  y  $\rho$  expresados en (5.5.6), obtenemos el siguiente polinomio en  $u_*$

$$u_*^2 p(u_*) p''(u_*) - 2(u_* p'(u_*) - p(u_*)) [(1 - \alpha) u_* p'(u_*) + \alpha p(u_*)] = 0$$

o, despejando  $\alpha$ ,

$$\alpha = 1 - \frac{p(u_*)}{(u_* p'(u_*) - p(u_*))^2} \tag{5.5.13}$$

que expresa, para  $\kappa$  constante, el valor de  $\alpha$  en términos de la abscisa del equilibrio.

De nuevo, para los valores de referencia  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , hemos obtenido los siguientes valores para los restantes parámetros.

$$\begin{aligned} u_* &\approx 7.1113848847614 \\ a_0 &\approx 721.3041239070539 \\ s_0 &\approx 35.9635498410436 \\ \rho &\approx 0.0925879037351 \end{aligned}$$

En la figura 5.5.2 aparece representada, en el plano  $(v_*, \alpha)$ , la curva de puntos correspondientes a esta degeneración.

Sabemos (vid. [35] y la sección 3.4) que el sistema (5.5.3) es, en un entorno de un equilibrio que experimenta una bifurcación de Takens–Bogdanov degenerada de tipo  $D$ ,  $C^\infty$ -conjugado al sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = b_2 uv + a_3 u^3 + b_3 u^2 v + a_4 u^4 + b_4 u^3 v \end{cases} \tag{5.5.14}$$

y éste último es  $C^\infty$ –equivalente a

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = b_2 uv + a_3 u^3 + b'_3 u^2 v \end{cases} \quad (5.5.15)$$

donde

$$b'_3 = b_3 - \frac{3b_2 a_4}{5a_3} \quad (5.5.16)$$

Según sean los valores de estos coeficientes, el punto  $D$  se clasifica en tres tipos topológicamente diferentes, a saber, silla (si  $a_3 > 0$ ), foco débil (si  $a_3 < 0$  y  $b_2^2 + 8a_3 < 0$ ) y elíptico (si  $a_3 < 0$  y  $b_2^2 + 8a_3 > 0$ ). Puesto que para el sistema (5.5.3) existe una curva de puntos de degeneración  $D$ , para cada valor de  $\kappa$  constante, estamos interesados en clasificarlos según los tres tipos mencionados. El siguiente lema nos resuelve esta cuestión.

**Lema 5.5.1** *Para cada valor de  $\kappa > 0$  y de  $u_* \in (0, +\infty)$ , el punto de degeneración de Takens–Bogdanov  $D$  corresponde a un foco débil. Para cada valor de  $\kappa > 0$ , la curva de puntos  $D$  tiene 0, 2, 4 o 6 puntos donde los focos cambian de estabilidad. Estos puntos corresponden a degeneraciones de codimensión cuatro dadas por la anulación simultánea de los términos  $u^2$  y  $u^2 v$  de la forma normal.*

DEMOSTRACIÓN:

El algoritmo desarrollado en [45] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Takens–Bogdanov nos proporciona los coeficientes que buscamos:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{F'_1(u_*)}{u_*} \\ a_3 &= \frac{1}{6} \frac{F''_2(u_*)}{u_*} \\ b_3 &= \frac{1}{2} \frac{u_* F''_1(u_*) + 2F'_1(u_*)}{u_*^2} \\ a_4 &= \frac{1}{24} \frac{u_* F''_2(u_*) + 8F''_2(u_*)}{u_*^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $F_1', F_1'', F_2'''$  y  $F_2^{IV}$  los valores de los parámetros  $a_0, s_0$  y  $\rho$  por las expresiones dadas en (5.5.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 a_3 &= -\frac{u_* p(u_*) \kappa (\kappa^2 u_*^3 - 3\kappa u_* - 1)}{(u_* p'(u_*) - p(u_*))^2} \\
 b_2 &= -\frac{\kappa^2 u_*^3 - 3\kappa u_* - 1}{u_* p'(u_*) - p(u_*)} \\
 b_3 &= -\frac{2 - 3\kappa u_*^2 + 9\kappa u_* - 17\kappa^2 u_*^3 + 6\kappa^3 u_*^5}{u_* (u_* p'(u_*) - p(u_*))^2} \\
 a_4 &= -\frac{\kappa (\kappa^2 u_*^3 - 3\kappa u_* - 1) (5\kappa u_*^2 + 4u_* + 3)}{u_* (u_* p'(u_*) - p(u_*))^2}
 \end{aligned}$$

siendo

$$d(\kappa, u_*) \stackrel{def}{=} b_2^2 + 8a_3 = \frac{\sqrt{\kappa^2 u_*^3 - 3\kappa u_* - 1} - 2\sqrt{2u_* \kappa p(u_*)}}{\sqrt{u_* \kappa p(u_*)}}$$

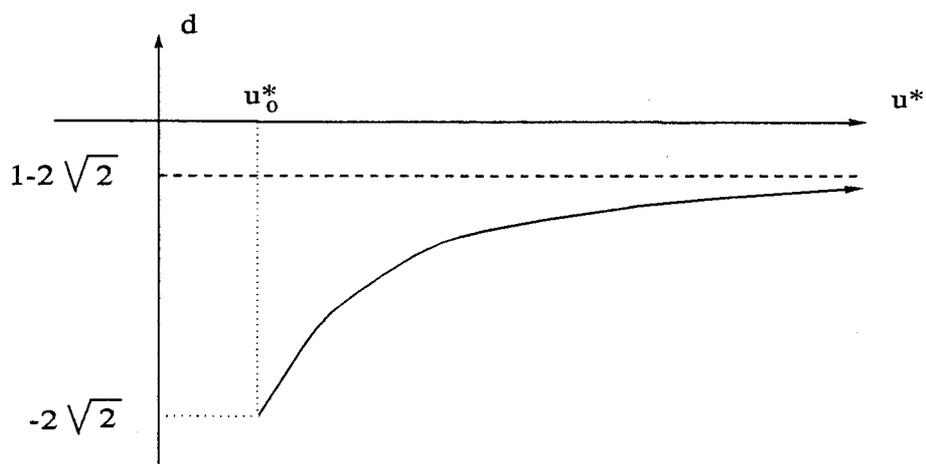
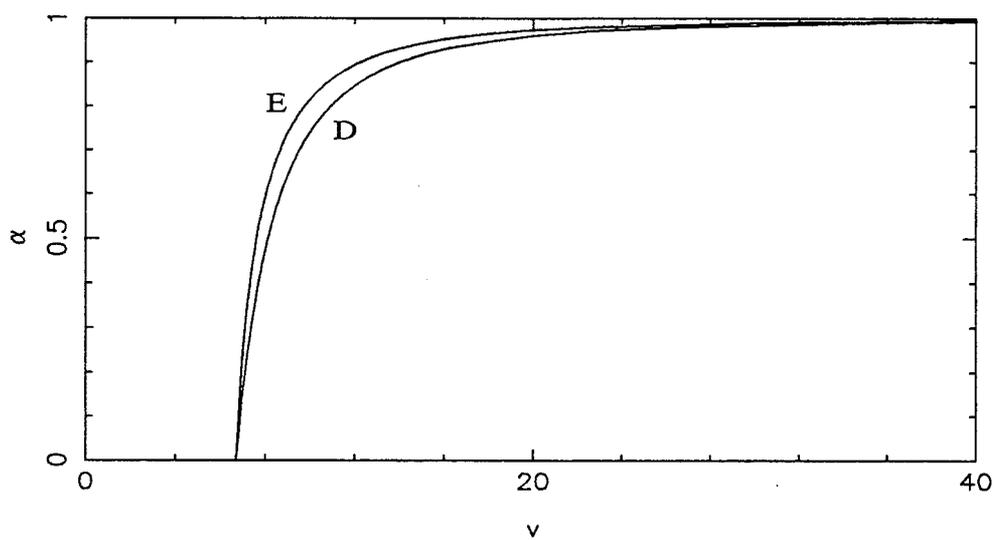
Es fácil verificar que  $a_3 < 0$ ; en efecto, de (5.5.13) se deduce fácilmente que, cuando  $\alpha$  tiende a cero, la abscisa del equilibrio,  $u_*$ , tiende a un valor  $u_*^0$  que es raíz del polinomio  $P(u_*) = \kappa^2 u_*^3 - 3\kappa u_* - 1$ . Pero  $u_*^0$  es la única raíz de este polinomio en el intervalo  $(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}, +\infty)$  (pues  $P'(u_*) = 3\kappa(\kappa u_*^2 - 1) > 0$ , al ser  $u_* > \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ ). Por tanto, puesto que la curva  $D$  está definida solamente para los valores de  $u_*$  en el intervalo  $(u_*^0, +\infty)$  y el polinomio  $P$  es estrictamente creciente en este intervalo, se tiene que  $P(u_*) > 0$  para cada valor  $u_* > u_*^0$ . Así, cada factor de  $-a_3$  es positivo, de donde  $a_3 < 0$ .

Por otra parte, un cálculo directo muestra que:

- $\lim_{u_* \rightarrow +\infty} d(\kappa, u_*) = 1 - 2\sqrt{2}$ , independientemente de  $\kappa$ ;
- $d(\kappa, u_*^0) = -2\sqrt{2}$ , de nuevo, independientemente de  $\kappa$ ;
- La función  $d(\kappa, u_*)$  es estrictamente creciente en  $(u_*^0, +\infty)$ . En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial u_*} d(\kappa, u_*) = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 u_*^4 + 8\kappa^2 u_*^3 + 6\kappa u_*^2 + 2u_* + 1}{u_*^{\frac{3}{2}} \sqrt{\kappa p(u_*)}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\kappa^2 u_*^3 - 3\kappa u_* - 1}}$$

de donde  $\frac{\partial}{\partial u_*} d(\kappa, u_*) = 0$  si, y sólo si,  $H = \kappa^2 u_*^4 + 8\kappa^2 u_*^3 + 6\kappa u_*^2 + 2u_* + 1 = 0$ . Pero en  $(u_*^0, +\infty)$  se tiene que  $H > 0$ .

Figura 5.5.1: Curva  $d(\kappa, u_*)$ .Figura 5.5.2: Curvas  $D$  y  $E$  de degeneración de Takens–Bogdanov de codimensión tres obtenidas para  $\kappa = 0.1$ .

Por lo tanto, se tiene que  $d(\kappa, u_*) < 0$  para cada valor de  $\kappa > 0$  y cada valor de  $u_*$  en el intervalo  $(u_*^0, +\infty)$ . Esto nos dice que los puntos de la curva  $D$ , para cada valor de  $\kappa > 0$ , corresponden al tipo foco. En la figura 5.5.1 representamos cualitativamente la función  $d(\kappa, u_*)$ .

La estabilidad de los focos viene determinada por el signo del coeficiente  $b'_3$ . A partir de la expresión para  $b'_3$  dada en (5.5.16), obtenemos

$$b'_3 = -\frac{1}{5} \frac{r(u_*)}{u_* p(u_*) (u_* p'(u_*) - p(u_*))^2}$$

donde

$$\begin{aligned} r(u_*) = & 15\kappa^4 u_*^7 + 18\kappa^3 u_*^6 + 18\kappa u_* + 1 - \\ & - u_* \left[ 4\kappa^3 u_*^4 + 37\kappa^2 u_*^3 + (49\kappa^2 + 3\kappa) u_*^2 + 2\kappa u_* + 2 \right] \end{aligned}$$

Puesto que  $r(0) = 1$ ,  $r(u_*)$  tiene negativa al menos una de sus raíces y, por tanto, hay, a lo más, seis positivas. Estas raíces corresponden a cambios de estabilidad en los focos, y dan lugar a los puntos de degeneración de codimensión cuatro enunciados en el lema. ■

En el caso en que  $\kappa = 0.1$ , los ceros de  $b'_3 = 0$  dan lugar a valores de los parámetros físicamente no aceptables, por lo que no existen, para  $u_* > \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ , degeneraciones adicionales del punto  $D$ .

No tenemos evidencia de la existencia de degeneraciones adicionales de los puntos  $D$  y  $E$ . En efecto, hemos realizado un estudio numérico para los valores de  $v_* \in (0, 10000)$  y de  $\kappa \in (0, 10000)$ , obteniendo que todas las degeneraciones que se producen de los puntos  $D$  y  $E$  (la anulación de los coeficientes, respectivamente,  $b'_3$  y  $b'_4$  antes considerados) se encuentran siempre en la zona de parámetros físicamente no aceptables.

La posibilidad, antes aludida, de que se anulen simultáneamente ambos coeficientes cuadráticos de la forma normal de la bifurcación de Takens–Bogdanov,

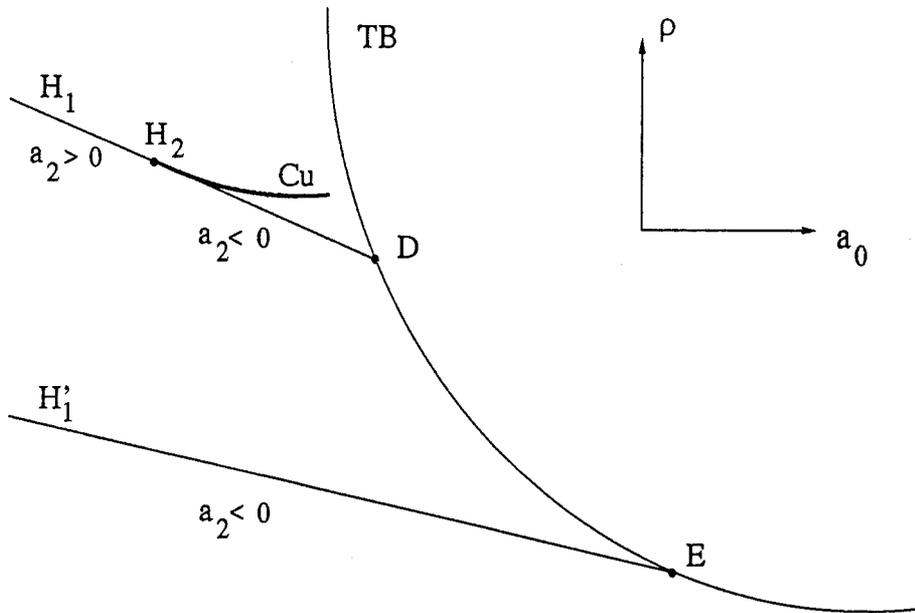


Figura 5.5.3: Representación cualitativa, para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , de las curvas de Takens-Bogdanov ( $TB$ ), de Hopf degenerado ( $H_1$  y  $H'_1$ ) y de cúspide de órbitas periódicas ( $Cu$ ).

no puede ocurrir; en efecto, a partir de (5.5.8) y (5.5.13), tal situación implicaría

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt{9 - 4h(u_*)} - 1 \right) = 1 - \frac{p(u_*)}{(u_* p'(u_*) - p(u_*))^2}$$

que ocurre si y sólo si  $\alpha = 0$ , valor que queda fuera del rango permitido. Para  $\alpha = 0$  las curvas (5.5.8) y (5.5.13) coinciden en el valor de  $u_*$  que es la única solución del polinomio  $\kappa^2 u_*^3 - 3\kappa u_* - 1 = 0$ . Obsérvese que ambas curvas tienen la recta  $\alpha = 1$  por asíntota, hecho que se deduce directamente al tomar límite cuando  $u_*$  tiende a infinito en las expresiones de las dos curvas.

A partir del conocimiento de los desplegamientos de estas dos degeneraciones,  $E$  y  $D$ , obtenidos por Dumortier *et alii* en [34] y [35], respectivamente, sabemos que, en el espacio de parámetros, de ambos puntos de degeneración nacen curvas de bifurcación de Hopf de codimensión dos, aquellas para las que el coeficiente cúbico de su forma normal se anula. Así mismo, del punto  $D$  nace la curva de cúspides de equilibrios estudiada en la sección 5.3. De las dos curvas de puntos de Hopf degenerado que nacen en los puntos  $D$  y  $E$ , el punto de Hopf de codimensión

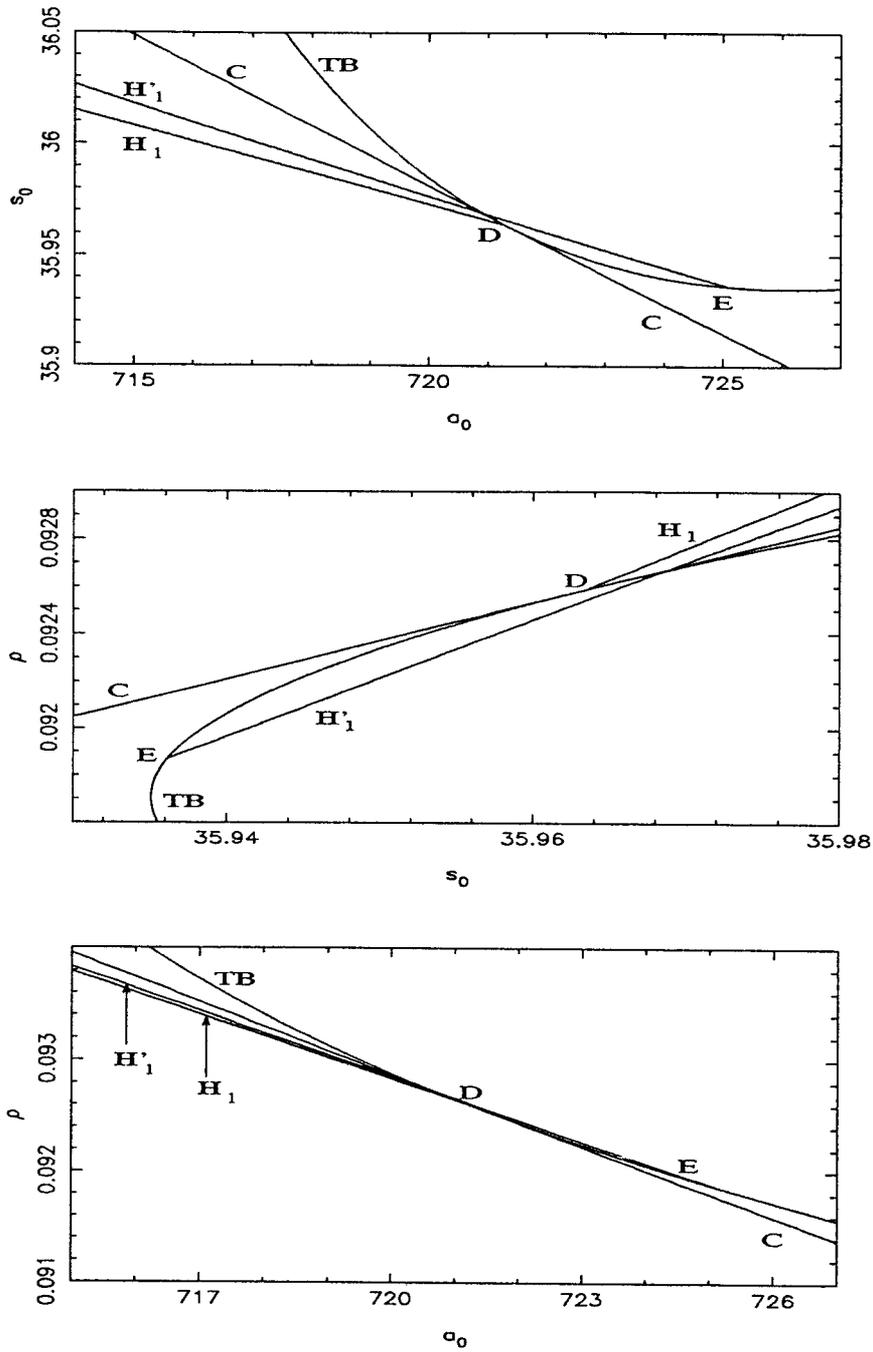


Figura 5.5.4: Diferentes proyecciones de las curvas de: Takens–Bogdanov ( $TB$ ), situando sobre ella los puntos de degeneración  $D$  y  $E$ ; Hopf degenerado ( $H_1$  y  $H'_1$ ) y cúspide de equilibrios ( $C$ ) ( $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ ).

tres,  $H_2$ , dado en (5.4.4), se encuentra sobre la rama que nace en  $E$ . En el tramo sobre esta rama comprendido entre  $E$  y  $H_2$ , el coeficiente de orden cinco de la forma normal de Hopf,  $a_2$ , es negativo, pasando a ser positivo al superar el punto  $H_2$ . Sobre la rama de la curva de Hopf degenerado que nace en  $D$ , el coeficiente  $a_2$  es siempre negativo. Esto nos dice que la curva de bifurcación de cúspides de órbitas periódicas que nace del punto  $H_2$ , es tangente en este punto a la rama de la curva de Hopf degenerado (que nace en  $E$ ) correspondiente al tramo en que  $a_2$  es negativo (vid. figura 5.5.3).

En la figura 5.5.4 representamos (para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ ) diversas proyecciones de la curva de puntos de Takens-Bogdanov, así como los puntos  $D$  y  $E$ , las curvas de Hopf degenerado y la curva de cúspides de equilibrios.

Para la bifurcación de Takens-Bogdanov, podemos resumir en el teorema siguiente todos los resultados obtenidos.

**Teorema 5.5.1** *Dado el sistema enzimático (5.5.3), existe en el espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$ , para cada valor de  $\kappa > 0$  y para cada valor de  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 1)$ , una curva de bifurcación de Takens-Bogdanov, que puede parametrizarse por*

$$\begin{cases} a_0 = \frac{u_* p(u_*)}{\alpha^2 (u_* p'(u_*) - p(u_*) (1 - \alpha))} \\ s_0 = u_* + \frac{u_* p(u_*)}{(u_* p'(u_*) - p(u_*) (1 - \alpha))} \\ \rho = \frac{\alpha^2 p(u_*)}{u_* (1 - \alpha)} \end{cases}$$

donde  $u_*$  es la abscisa del equilibrio que experimenta la bifurcación.

Sobre cada una de estas curvas, existen dos puntos degenerados de codimensión tres:

1. Una cúspide de orden tres, que corresponde a la anulación del término  $uv$  de la forma normal, y cuyos valores del parámetro  $\alpha$ , para  $\kappa$  constante,

pueden expresarse en función de  $u_*$  por:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \sqrt{9 - 4h(u_*)} - 1 \right) \quad \text{donde } h(u_*) = \frac{2p(u_*)}{(u_*p'(u_*) - p(u_*))^2}$$

2. Una degeneración que corresponde a la anulación del término  $u^2$  de la forma normal, de tipo foco débil, y cuyos valores del parámetro  $\alpha$ , para  $\kappa$  constante, pueden expresarse en función de  $u_*$  por:

$$\alpha = 1 - \frac{p(u_*)}{(u_*p'(u_*) - p(u_*))^2}$$

Así mismo, no existen degeneraciones debidas a la anulación simultánea de los términos  $u^2$  y  $uv$  de la forma normal.

Existe, por el contrario, la posibilidad de que ocurran degeneraciones adicionales de codimensión cuatro: en un caso, cúspides de orden cuatro, y en otro caso, aquellas degeneraciones dadas por la anulación simultánea de los términos  $u^2$  y  $u^2v$  de la forma normal, que dan lugar a cambios de estabilidad en los focos débiles. De este último tipo de degeneraciones existen 0, 2, 4 o 6. Mediante una exploración numérica llevada a cabo en el rango de parámetros  $v_*$ ,  $\kappa \in (0, 10000)$ , hemos verificado, sin embargo, que no existe ninguna de estas degeneraciones en la zona de los parámetros físicamente aceptable.

## 5.6 Bifurcaciones Homoclinas

Una vez realizado el estudio local de bifurcaciones del sistema enzimático (5.3.1), procedemos en esta sección al estudio de sus diferentes conexiones homoclinas.

El conocimiento teórico de los desplegamientos de los puntos de Takens–Bogdanov degenerados de codimensión tres (vid. [34] y [35]),  $D$  y  $E$  (vid. sección 5.5), predice gran riqueza de conexiones homoclinas. Hemos localizado y continuado numéricamente cada uno de los tipos de homoclinas dados en estos desplegamientos, a saber:

1. De codimensión uno:

- (a) Homoclinas izquierdas no degeneradas ( $HI$ );

- (b) Homoclinas derechas no degeneradas ( $HD$ );
- (c) Homoclinas cóncavas inferiores no degeneradas ( $HCI$ );
- (d) Homoclinas silla-nodo transversales ( $HSN - T$ ).

2. De codimensión dos:

- (a) Homoclinas izquierdas con traza cero ( $HID$ );
- (b) Homoclinas cóncavas inferiores con traza cero ( $HCID$ );
- (c) Homoclinas silla-nodo derechas ( $HSN - D$ );
- (d) Homoclinas silla-nodo izquierdas ( $HSN - I$ );
- (e) Homoclinas silla-nodo cóncavas inferiores derechas ( $HSN - CID$ );
- (f) Homoclinas silla-nodo cóncavas inferiores izquierdas ( $HSN - CII$ ).

Junto a estas órbitas homoclinas existen otras, también detectadas y continuadas, no relacionadas con los desplegamientos de los puntos  $D$  y  $E$ . Éstas son:

1. De codimensión uno:

Homoclinas cóncavas superiores no degeneradas ( $HCS$ ).

2. De codimensión dos:

- (a) Homoclinas silla-nodo cóncavas superiores izquierdas ( $HSN - CSI$ );
- (b) Homoclinas dobles ( $HH$ ).

3. De codimensión tres:

- (a) Homoclinas cuspidales ( $HC$ );
- (b) Homoclinas cóncavas inferiores con traza cero y coeficiente  $EID$  igual a uno ( $H - EID$ ).

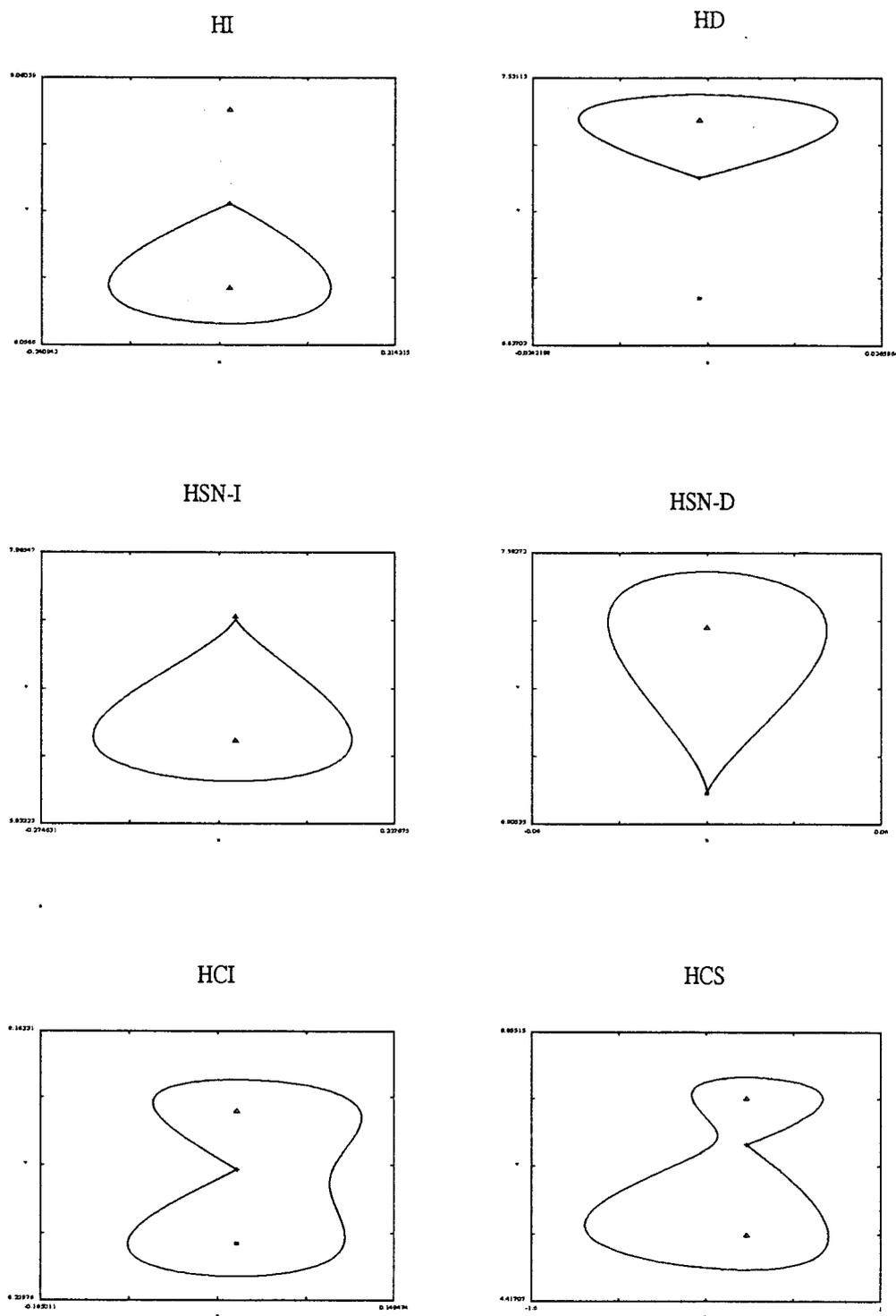
Hacemos la observación de que la nomenclatura utilizada para designar los diferentes tipos de homoclinas corresponde a la situación que éstas presentan en el plano de fases original,  $(s, a)$ , y no en el nuevo,  $(u, v)$ , obtenido al realizar el cambio de variables dado en (5.3.4). Para que en el plano  $(u, v)$  se ajusten los nombres dados a las homoclinas con las *formas geométricas* de éstas, hemos de considerar el eje  $OV$  como eje *horizontal* y el eje  $OU$  como eje *vertical*. En las figuras 5.6.1 y 5.6.2 representamos las homoclinas derechas e izquierdas no degeneradas, así como los diferentes tipos de homoclinas silla-nodo y cóncavas existentes, que han sido obtenidas mediante simulación con DSTOOL (vid. [52]) para los valores de los parámetros dados a continuación:

$HI$	$a_0 \approx 721.95065,$	$s_0 = 36.06,$	$\rho \approx 0.09287;$
$HD$	$a_0 \approx 715.82836,$	$s_0 = 36.06,$	$\rho \approx 0.09386;$
$HSN - I$	$a_0 \approx 719.76279,$	$s_0 = 36.06,$	$\rho \approx 0.09322;$
$HSN - D$	$a_0 \approx 715.76303,$	$s_0 \approx 36.05158,$	$\rho \approx 0.09384;$
$HCI$	$a_0 \approx 718.01252,$	$s_0 = 36.06,$	$\rho \approx 0.09351;$
$HCS$	$a_0 \approx 683.38816,$	$s_0 = 37,$	$\rho \approx 0.10367;$
$HSN - CSI$	$a_0 \approx 680.47,$	$s_0 = 37,$	$\rho \approx 0.10424;$
$HSN - CII$	$a_0 \approx 719.76279,$	$s_0 = 36.06,$	$\rho \approx 0.09322;$
$HSN - CID$	$a_0 \approx 715.31515,$	$s_0 = 36.06,$	$\rho \approx 0.09395,$

siendo en todos los casos  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ .

No hemos encontrado ninguna degeneración adicional en ninguna de las homoclinas mencionadas en la lista anterior. En efecto, de un estudio numérico realizado para los valores de  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 1)$  y de  $\kappa$  en el intervalo  $(0, 10000)$ , hemos obtenido que no existen homoclinas derechas con traza cero, homoclinas cóncavas superiores con traza cero, homoclinas izquierdas con traza cero y coeficiente  $EID$  (vid. (2.4.8)) igual a uno, homoclinas cóncavas inferiores con traza cero, coeficiente  $EID$  igual a uno y coeficiente  $RES$  (vid. (2.6.7)) igual a cero, homoclinas silla-nodo cóncavas superiores derechas, ni, por fin, homoclinas dobles con traza cero.

Para la localización y continuación de cada uno de los tipos de homoclinas mencionados, han sido elaborados diferentes programas FORTRAN, acoplados con el código de continuación PITCON (vid. capítulo II). En todos los casos de

Figura 5.6.1: Diferentes tipos de homoclinas en el plano de fases  $(u, v)$ .

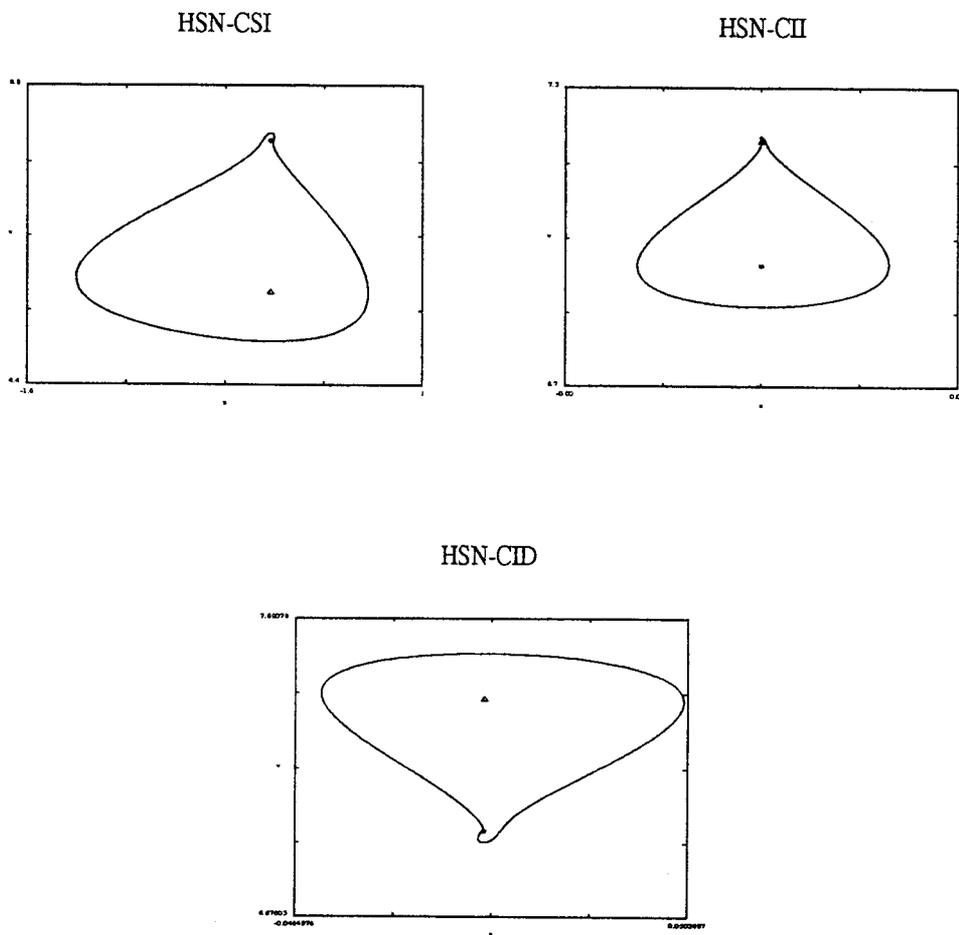


Figura 5.6.2: Diferentes tipos de homoclinas en el plano de fases  $(u, v)$  (continuación).

homoclinas en los que el punto de silla es hiperbólico, hemos realizado la aproximación de las variedades estable e inestable del equilibrio mediante sus espacios tangentes, es decir, linealmente. Para las homoclinas de tipo silla-nodo, hemos aproximado cuadráticamente la variedad de centros del equilibrio y linealmente la otra variedad (estable o inestable). Para ello hemos realizado una traslación del equilibrio no hiperbólico de (5.3.1) al origen, seguido de un desarrollo de Taylor en un entorno del origen, obteniendo un sistema que, cortado a segundo orden, tiene la forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = F_1(v_*)u + u^2 + F_1'(v_*)uv + \frac{1}{2}F_2''(v_*)v^2 \\ \dot{v} = uv_* + uv \end{cases} \quad (5.6.1)$$

El cambio de variables lineal dado por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(v_*) & 0 \\ v_* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.6.2)$$

permite desacoplar la parte lineal de (5.6.1), obteniendo en las nuevas variables  $x$  e  $y$  el siguiente sistema

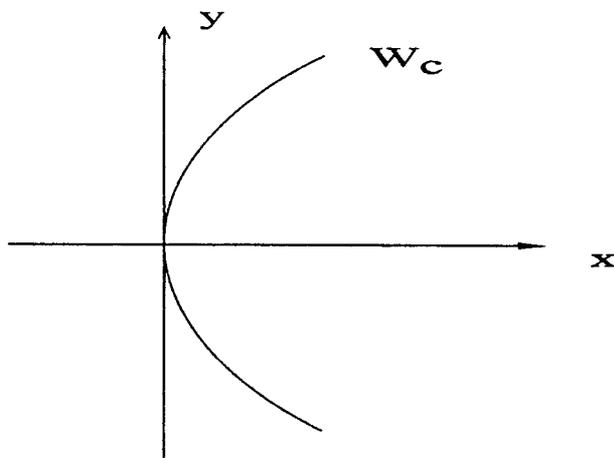
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(v_*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (5.6.3)$$

donde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= F_1(v_*)x^2 + F_1'(v_*)x(v_*x + y) + \frac{F_2''(v_*)}{2F_1(v_*)}(v_*x + y)^2 \\ g(x, y) &= -v_* \left[ F_1(v_*)x^2 + F_1'(v_*)x(v_*x + y) + \frac{F_2''(v_*)}{2F_1(v_*)}(v_*x + y)^2 \right] + \\ &+ F_1(v_*)x(v_*x + y) \end{aligned}$$

El origen, equilibrio semihiperbólico de (5.6.3), tiene al eje  $OY$  como espacio tangente a su variedad de centros (vid. figura 5.6.3), que viene dada, a segundo orden, por la ecuación  $x = ay^2$ , para cierto valor de  $a$ . Derivando e identificando coeficientes, se llega a la expresión para la variedad de centros, en las variables originales, dada por

$$u = -\frac{F_2''(v_*)}{2F_1(v_*)} \left[ v^2 - \frac{2v_*}{F_1(v_*)}uv + \frac{v_*^2}{F_1(v_*)^2}u^2 \right]$$

Figura 5.6.3: Variedad de centros ( $W_c$ ).

Las homoclinas de codimensión tres dadas por la anulación de la traza junto a la condición de que el coeficiente  $EID$  sea igual a uno, han sido localizadas y continuadas implementando las técnicas desarrolladas en el capítulo II. Para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , hemos localizado una homoclina  $H - EID$  en los valores de los parámetros dados por

$$\begin{aligned} v_* &\approx 7.4884 \\ a_0 &\approx 717.2305 \\ s_0 &\approx 36.122 \\ \rho &\approx 0.0939 \end{aligned}$$

En cuanto a las homoclinas cuspidales, hemos aproximado las separatrices del equilibrio no hiperbólico por la semicúbica  $(v - v_*)^3 = au^2$ , donde  $v_*$  es la ordenada del equilibrio y  $a$  es un parámetro a determinar. Consideremos el sistema (5.3.1) escrito en la forma normal de Takens–Bogdanov, en un entorno del equilibrio  $(0, v_*)$ , a segundo orden pero sin el término en  $uv$ :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{2} \frac{F_2''(v_*)}{v_*} (v - v_*)^2 \\ \dot{v} = u \end{cases} \quad (5.6.4)$$

Derivando con respecto a  $t$  en la expresión de la semicúbica, y a partir de (5.6.4), se obtiene el valor

$$a = \frac{3v_*}{F_2''(v_*)}$$

Para localizar una homoclina cuspidal, hemos seguido el procedimiento siguiente: en primer lugar hemos detectado un punto en el espacio de parámetros para el que se produce, simultáneamente, una bifurcación de Hopf en un equilibrio y una bifurcación de Takens–Bogdanov en el otro equilibrio (esta situación corresponde, para  $\alpha$  y  $\kappa$  constante, a un punto, en el espacio  $(a_0, s_0, \rho)$ , sobre la curva de Takens–Bogdanov); la órbita periódica que nace de esta bifurcación de Hopf evoluciona, al movernos sobre la curva de Takens–Bogdanov, hacia la homoclina de punto de cúspide.

Sea, pues, un punto en el espacio de parámetros,  $(a_0, s_0, \rho, \alpha, \kappa)$ , para el que ocurren, simultáneamente, una bifurcación de Hopf en un equilibrio,  $(0, v_1^*)$ , y una bifurcación de Takens–Bogdanov en el otro equilibrio,  $(0, v_2^*)$ . Teniendo en cuenta que tanto  $v_1^*$  como  $v_2^*$  son ceros de la ecuación  $F_1(v) = 0$ , se deduce que

$$\alpha = \frac{(v_1^* p'(v_1^*) - p(v_1^*))^2 - p(v_1^*)}{(v_1^* p'(v_1^*) - p(v_1^*))^2 + p(v_1^*)} \quad (5.6.5)$$

que expresa, para  $\kappa$  constante, el valor de  $\alpha$  en términos de la abscisa del equilibrio que experimenta la bifurcación de Takens–Bogdanov.

Puesto que  $v_2^*$  es una raíz doble y  $v_1^*$  una raíz simple del polinomio cúbico  $h(v)$  dado en (5.3.2), se obtiene, a partir de las relaciones de Cardano, que

$$v_2^* = \frac{\kappa (v_1^*)^2 + \alpha}{(1 + \alpha) \kappa v_1^*} = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 (v_1^*)^3 + \kappa v_1^* + 1}{\kappa (\kappa (v_1^*)^2 - 1)} \quad (5.6.6)$$

A partir de (5.6.5) y (5.6.6), y para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , obtenemos los valores donde ocurren simultáneamente una bifurcación de Hopf y una bifurcación de Takens–Bogdanov,

$$v_1^* \approx 6.45600206263$$

$$v_2^* \approx 7.47981680962$$

$$a_0 \approx 716.00015818913$$

$$s_0 \approx 36.11982313718$$

$$\rho \approx 0.09408373973$$

Continuando la órbita periódica que nace de este punto de bifurcación de Hopf (al movernos sobre la curva de Takens–Bogdanov), obtenemos los valores para los que existe una homoclina cuspidal, dados por

$$v^* \approx 7.56022$$

$$a_0 \approx 715.2247$$

$$s_0 \approx 36.1692$$

$$\rho \approx 0.094415$$

En la figura 5.6.4 mostramos, mediante simulación con DSTOOL, la evolución de los retratos de fases del sistema (5.3.1), para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , al movernos sobre la curva de bifurcación de Takens–Bogdanov. Se observa cómo, al crecer la ordenada del equilibrio, la órbita periódica que nace en la bifurcación de Hopf acumula en una homoclina cuspidal. Una órbita periódica *grande*, nacida de la homoclina cuspidal al crecer el parámetro, desaparece al colapsar con otra en una bifurcación de silla–nodo.

En la figura 5.6.5 representamos en el plano  $(v_*, \alpha)$ , para el caso  $\kappa = 0.1$ , todas las curvas correspondientes a bifurcaciones de codimensión tres: las cúspides de orden tres ( $E$ ), los focos débiles ( $D$ ), los puntos de Hopf con degeneración en los términos de órdenes tres y cinco de su forma normal ( $H_2$ ), las homoclinas cuspidales ( $HC$ ) y las homoclinas con traza cero y coeficiente  $EID$  igual a uno ( $H - EID$ ).

En el caso  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ , hemos comprobado que tanto la homoclina cuspidal como las órbitas periódicas *pequeñas* que nacen de la homoclina asociada con la bifurcación de Takens–Bogdanov, son inestables. En efecto, en la figura 5.6.6 representamos dos órbitas periódicas inestables muy próximas a una homoclina doble (figura obtenida con DSTOOL para los valores de los parámetros:

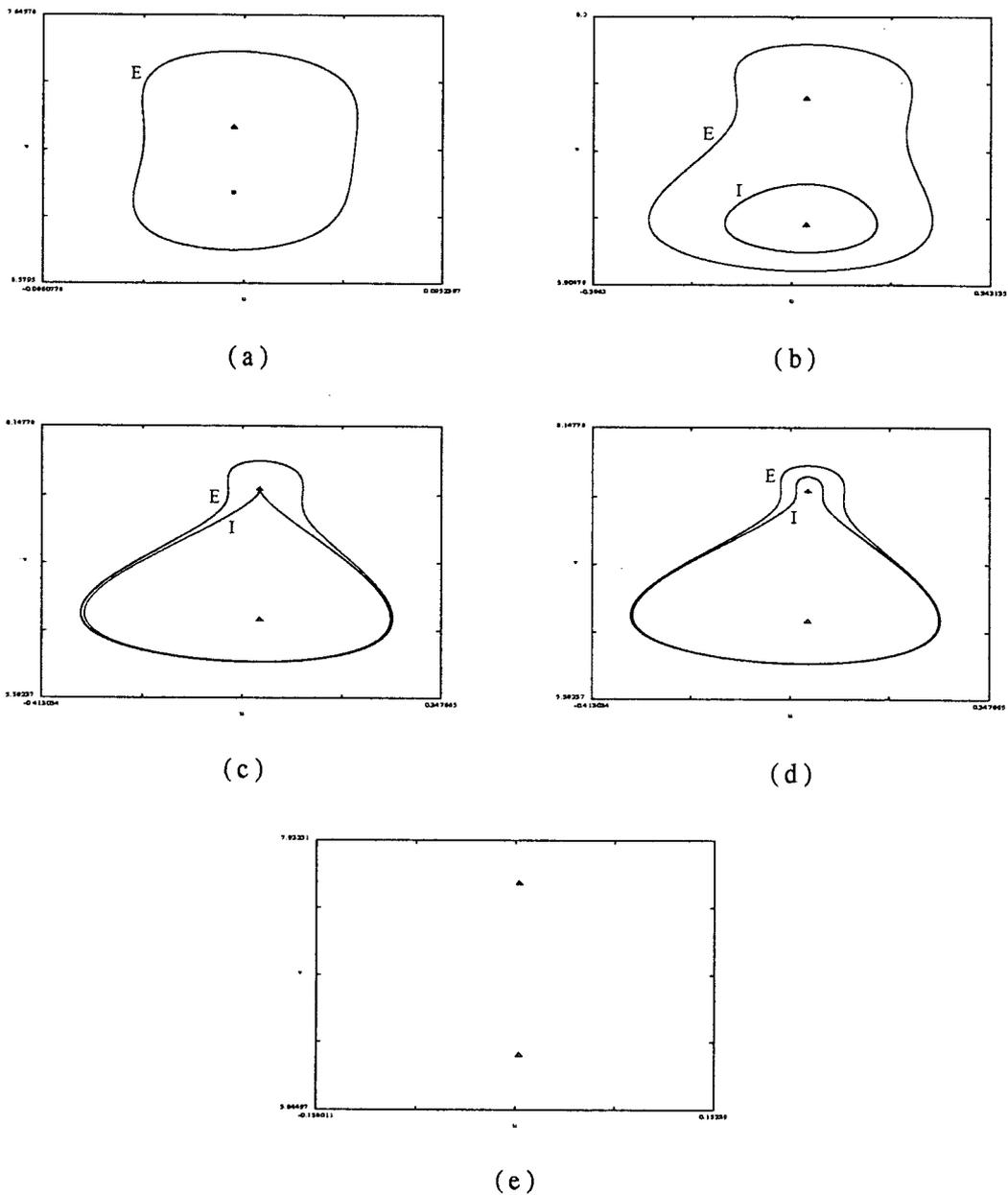


Figura 5.6.4: Evolución de los retratos de fases en el plano  $(u, v)$  para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ : (a)  $v_* = 7.2$ ; (b)  $v_* = 7.5$ ; (c)  $v_* = 7.56022$ ; (d)  $v_* = 7.561$  y (e)  $v_* = 7.6$ .  $E$  = Estable;  $I$  = Inestable;  $\triangle$  = Equilibrio estable;  $\square$  = Equilibrio inestable;  $+$  = Equilibrio de tipo silla.

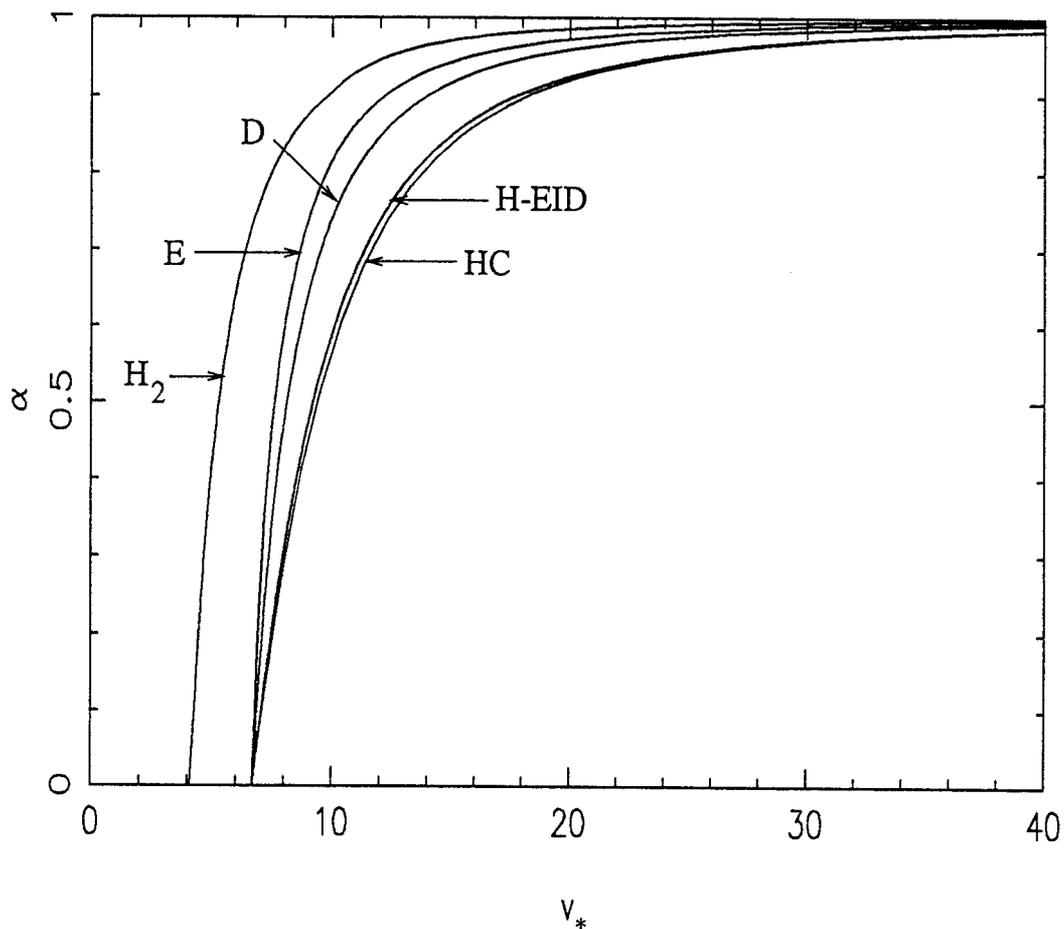


Figura 5.6.5: Curvas de bifurcación de codimensión tres en el plano  $(v_*, \alpha)$  (para  $\kappa = 0.1$ ).  $E$  = cúspides de orden tres (Takens–Bogdanov degenerada en el término  $uv$  de su forma normal);  $D$  = focos débiles (Takens–Bogdanov degenerada en el término  $u^2$  de su forma normal);  $H_2$  = Hopf degenerado en los términos de órdenes tres y cinco de su forma normal);  $HC$  = homoclinas cuspidales y  $H - EID$  = homoclinas con traza cero y coeficiente  $EID$  igual a uno.

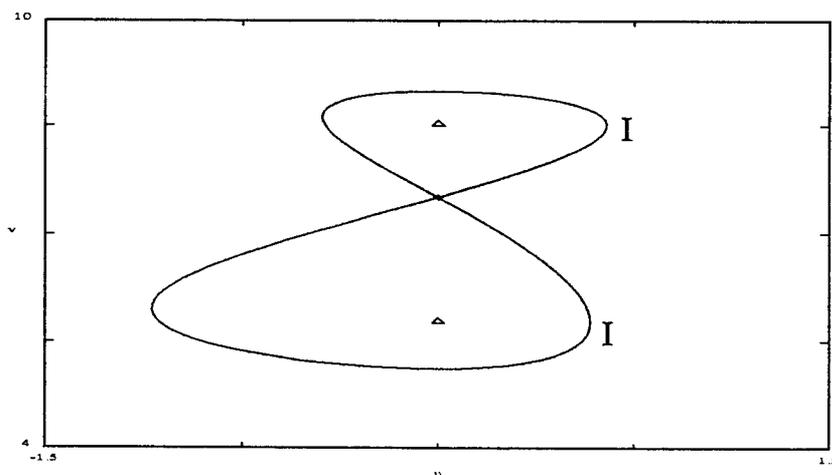


Figura 5.6.6: Homoclina doble ( $HH$ ).  $I =$  Inestable.

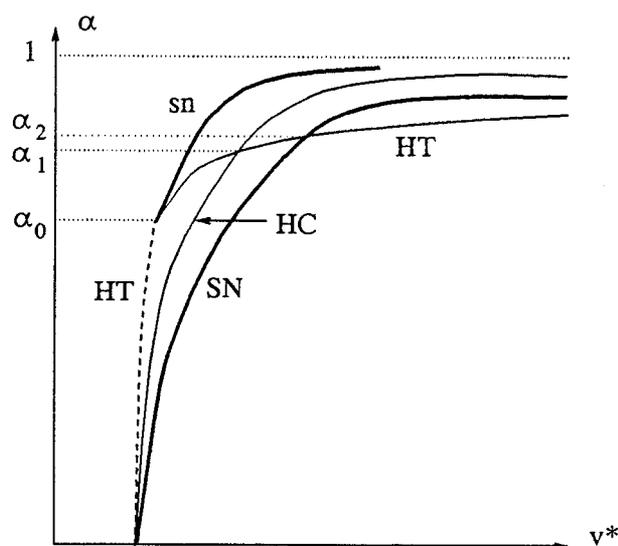


Figura 5.6.7: Representación cualitativa, para  $\kappa = 0.1$ , de las curvas de homoclinas cuspidales ( $HC$ ), de coexistencia de Hopf y Takens–Bogdanov ( $HT$ ), de silla–nodo de órbitas pequeñas ( $sn$ ) y de silla–nodo de órbitas grandes ( $SN$ ). El trazo continuo (resp. discontinuo) en la curva  $HT$  significa que la bifurcación de Hopf es supercrítica (resp. subcrítica).

$a_0 \approx 683.39885$ ,  $s_0 \approx 37$ ,  $\rho \approx 0.10367$ ,  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ ); la órbita periódica inferior acumula en la homoclina cuspidal, mientras que la superior acumula en la homoclina nacida en la bifurcación de Takens–Bogdanov. Ello nos dice que, de los diferentes desplegamientos correspondientes a los dos tipos de homoclinas cuspidales existentes (vid. [19] y [49] y la sección 2.7), nos encontramos en este caso con el menos rico (hemos comprobado numéricamente que el arco regular de la homoclina cuspidal es asintóticamente estable, siendo inestable el local, con lo que nos encontramos en el caso (2) de la clasificación de homoclinas cuspidales dada en la sección 2.7).

Hemos realizado un estudio numérico para los valores de  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 0.9994705)$  (para  $\kappa = 0.1$ ), con el objeto de determinar si se produce un cambio en la estabilidad de la homoclina cuspidal y, por tanto, una degeneración de codimensión cuatro, dando lugar a homoclinas cuspidales situadas, esta vez, en la zona de mayor riqueza. El resultado ha sido negativo. No hemos detectado ningún cambio de estabilidad de la homoclina cuspidal. Sin embargo, hemos constatado, para  $\alpha$  por encima de cierto valor  $\alpha_0 \approx 0.98$ , una mayor riqueza en la dinámica. Ello se debe a que, sobre la curva de puntos en los que ocurre, simultáneamente, una bifurcación de Hopf en un equilibrio y una bifurcación de Takens–Bogdanov en el otro equilibrio (curva que llamaremos de coexistencia de Hopf y Takens–Bogdanov), se produce una degeneración en la bifurcación de Hopf. De este punto de degeneración nace una curva de bifurcación de silla–nodo de órbitas periódicas pequeñas, que coexiste con aquella de órbitas periódicas grandes antes mencionada. Para  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  la bifurcación de Hopf es subcrítica, mientras que para  $\alpha \in (\alpha_0, 1)$  la bifurcación de Hopf es supercrítica. En la figura 5.6.7 representamos, cualitativamente, las posiciones relativas, en el plano  $(v_*, \alpha)$ , de las curvas de homoclinas cuspidales y de coexistencia de Hopf y Takens–Bogdanov. Hemos comprobado que ambas curvas intersecan en el valor  $\alpha_1 \approx 0.99$ , intercambiando sus posiciones relativas. Existe, además, un valor  $\alpha_2 \approx 0.994$  en el que se produce un cruce entre las curvas de coexistencia de Hopf y Takens–Bogdanov y de silla–nodo de órbitas grandes.

En la figura 5.6.8 representamos los cuatro diagramas de bifurcación de las órbitas periódicas en las proximidades de la homoclina cuspidal, correspondientes, respectivamente, a las cuatro situaciones dadas por:  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ,  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$  y  $\alpha \in (\alpha_2, 1)$ .

En la figura 5.6.9 mostramos, de nuevo mediante simulación con DSTOOL, la evolución de los retratos de fases del sistema (5.3.1), para  $\alpha = 0.9971544168$  y  $\kappa = 0.1$ , al movernos sobre la curva de bifurcación de Takens–Bogdanov. Se observa cómo, al crecer la ordenada del equilibrio, nacen dos órbitas periódicas pequeñas en una bifurcación de silla–nodo; de éstas, la órbita estable desaparece en una bifurcación de Hopf, mientras que la inestable acumula en una homoclina cuspidal. Una órbita periódica grande, nacida de la homoclina cuspidal al crecer el parámetro, desaparece al colapsar con otra en una bifurcación de silla–nodo.

En la figura 5.6.10 aparece la proyección sobre el plano de parámetros  $(a_0, s_0)$  de todas las curvas (obtenidas numéricamente) de homoclinas de codimensión dos, junto con la curva de bifurcación de Takens–Bogdanov y los cuatro puntos correspondientes a bifurcaciones de codimensión tres:  $D$ ,  $E$  y  $HC$ , situados sobre la curva de Takens–Bogdanov, y  $H - EID$ , situado sobre la curva de homoclinas cóncavas inferiores con traza cero. En la figura 5.6.11 aparecen todas estas curvas y puntos representados cualitativamente.

Nuestro próximo objetivo consiste en realizar un estudio completo de los conjuntos de bifurcaciones relacionados con los puntos de codimensión tres  $D$ ,  $E$ ,  $H - EID$ ,  $H_2$  y  $HC$ , así como las transiciones que se producen entre estos puntos. Para ello hemos intersecado el espacio de parámetros  $(a_0, s_0, \rho)$  (para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ ) con diversos planos  $s_0 = \text{constante}$ , en las diez situaciones representadas en la figura 5.6.12.

En las figuras 5.6.16 – 5.6.26 aparecen los conjuntos de bifurcaciones cortados por dichos planos, que vamos a comentar más adelante. En cada caso hemos realizado la localización y/o continuación numérica de todos los fenómenos de bifurcación que aparecen representados en las figuras mencionadas.

Hemos de señalar que estas figuras han de venir dadas, necesariamente, por

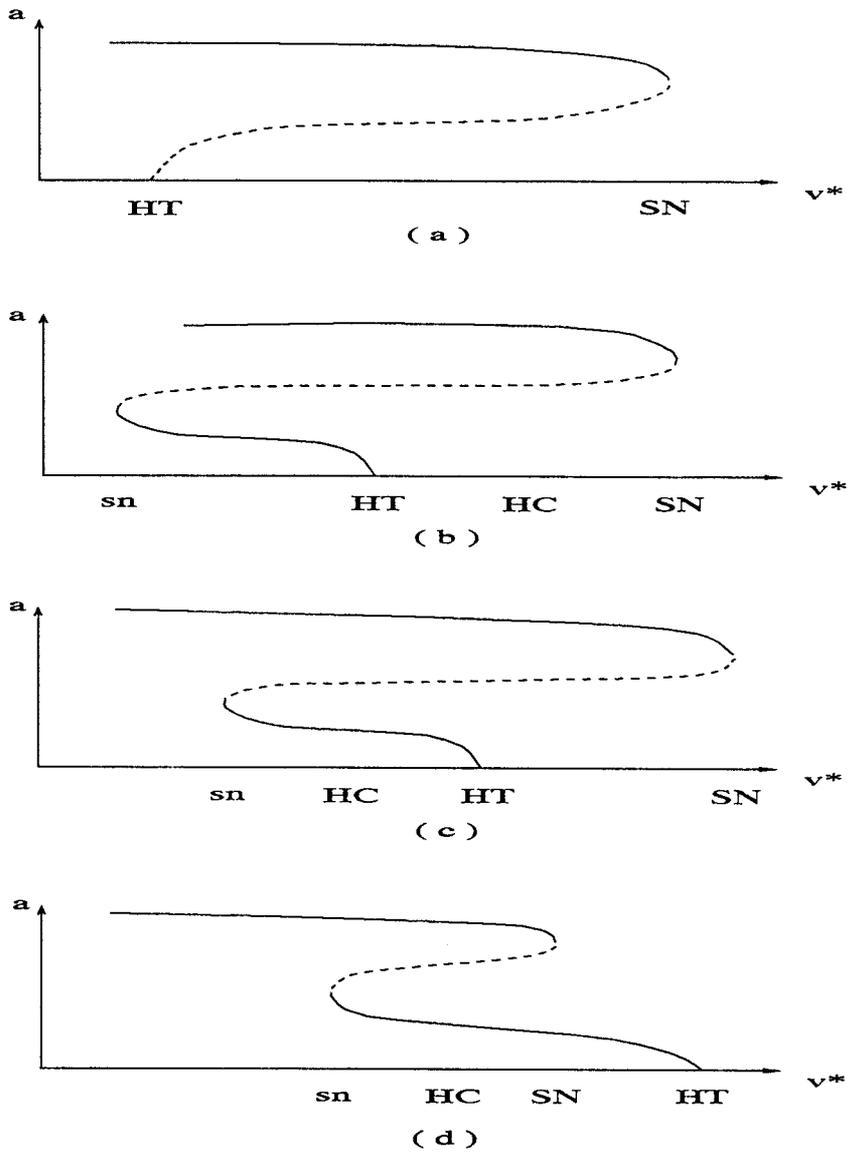


Figura 5.6.8: Diagramas de bifurcación cualitativos, para  $\kappa = 0.1$ , de las órbitas periódicas en las proximidades de la homoclina cuspidal. (a)  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ; (b)  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ ; (c)  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$  y (d)  $\alpha \in (\alpha_2, 1)$ . La ordenada,  $a$ , representa la amplitud de la órbita periódica. La línea continua (resp. discontinua) significa que la órbita periódica es estable (resp. inestable).

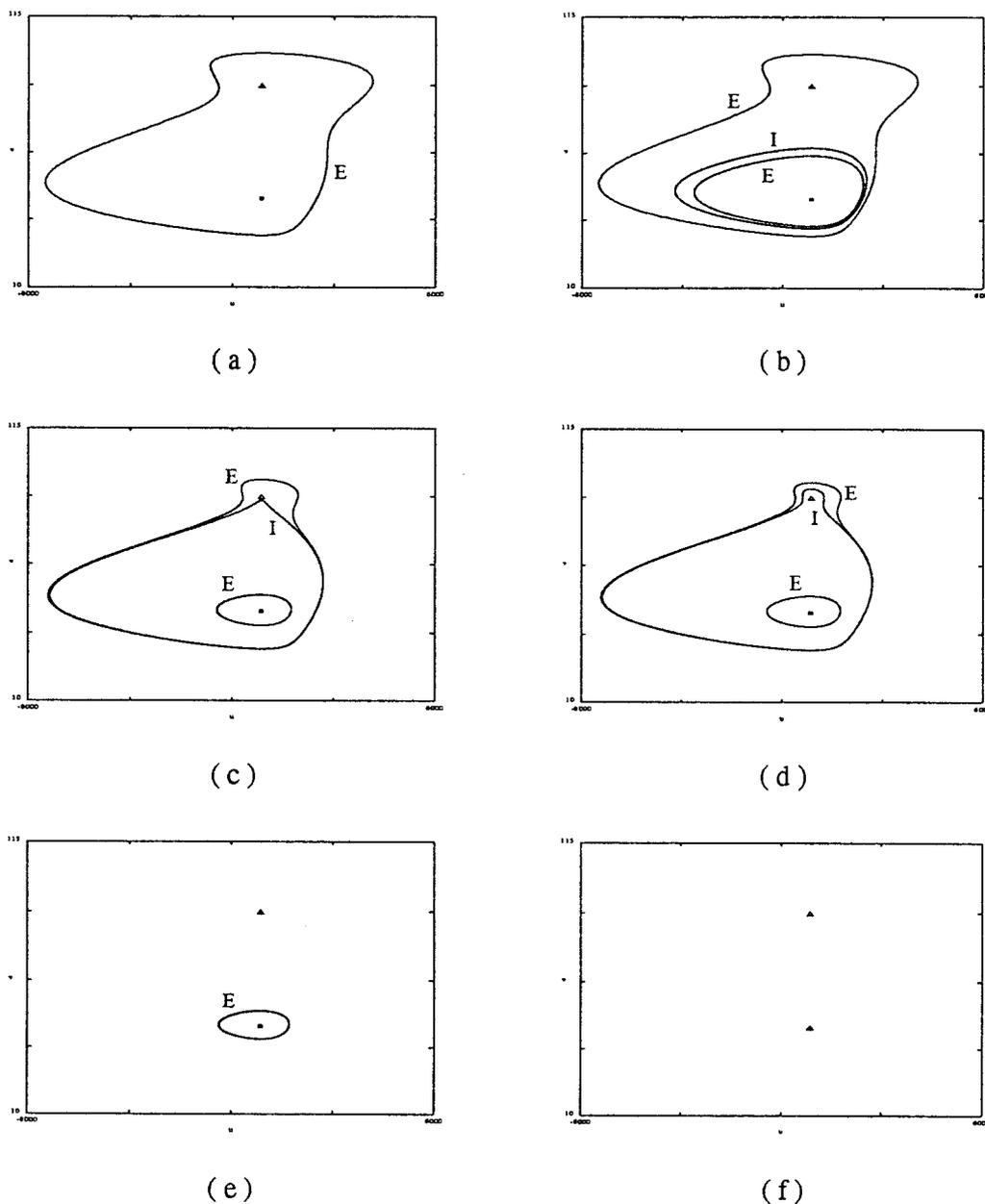


Figura 5.6.9: Evolución de los retratos de fases en el plano  $(u, v)$  para  $\alpha = 0.9971544168$  y  $\kappa = 0.1$ : (a)  $v_* = 88.3$ ; (b)  $v_* = 88.32$ ; (c)  $v_* = 88.4715$ ; (d)  $v_* = 88.473$ ; (e)  $v_* = 88.48$  y (f)  $v_* = 88.8$ .  $E$  = Estable;  $I$  = Inestable;  $\Delta$  = Equilibrio estable;  $\square$  = Equilibrio inestable;  $+$  = Equilibrio de tipo silla.

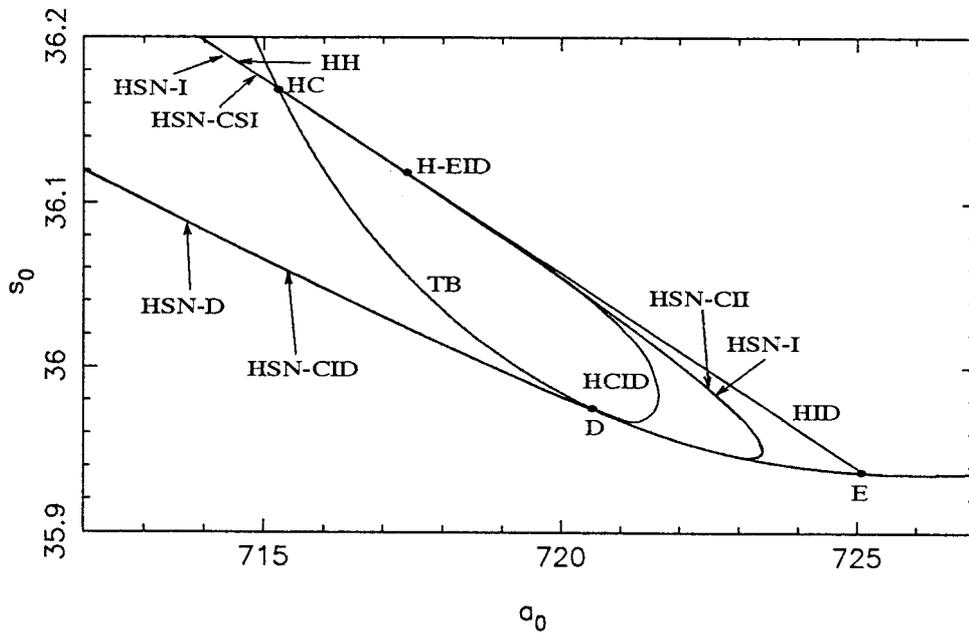


Figura 5.6.10: Curvas de homoclinas de codimensión dos obtenidas numéricamente.

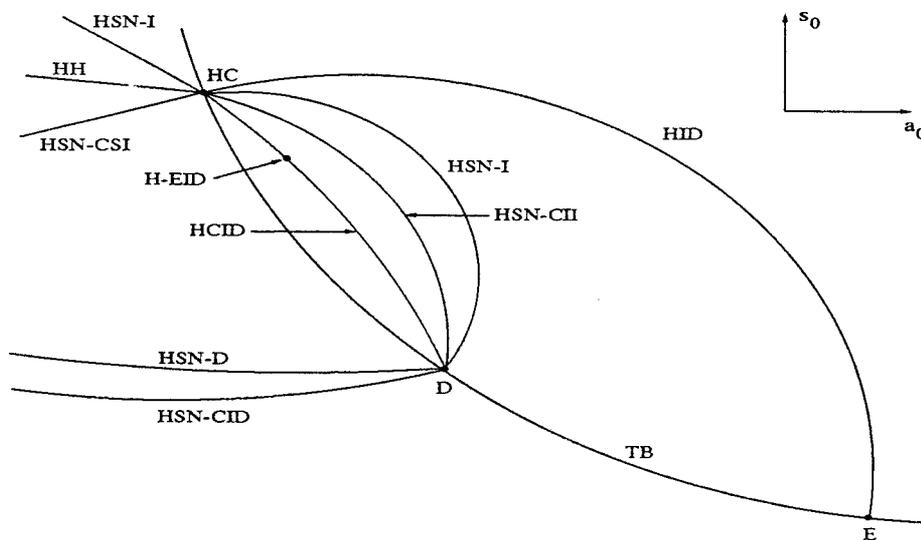


Figura 5.6.11: Representación cualitativa de las curvas de homoclinas de codimensión dos.

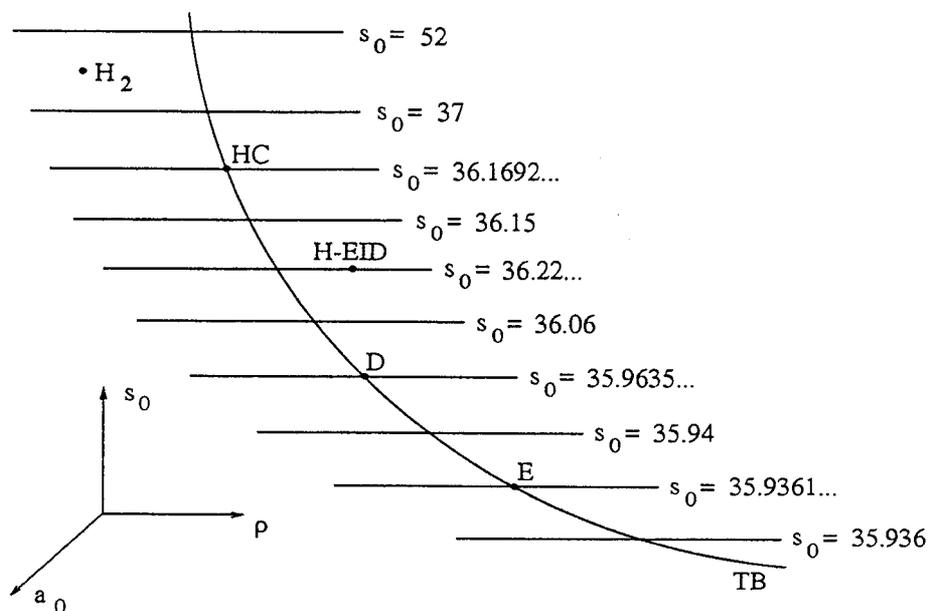


Figura 5.6.12: Posición relativa con respecto a los puntos de codimensión tres de los planos  $s_0 = \text{constante}$  utilizados para cortar los conjuntos de bifurcaciones.

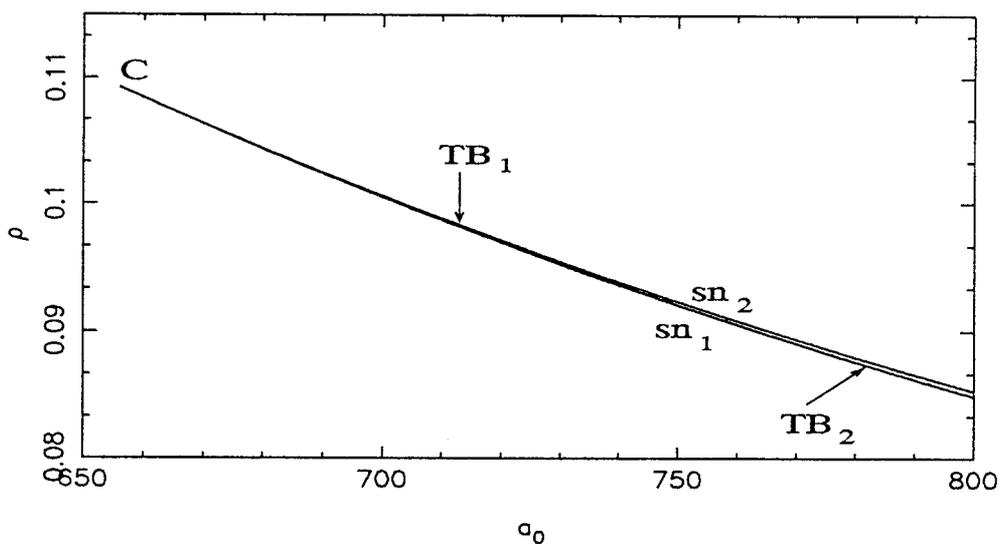


Figura 5.6.13: Curva de silla-nodo de equilibrios en el plano  $(a_0, \rho)$  (para  $s_0 = 37$ ). Sobre ella aparecen los puntos de Takens-Bogdanov ( $TB_1$  y  $TB_2$ ) y cúspide de equilibrios ( $C$ ).

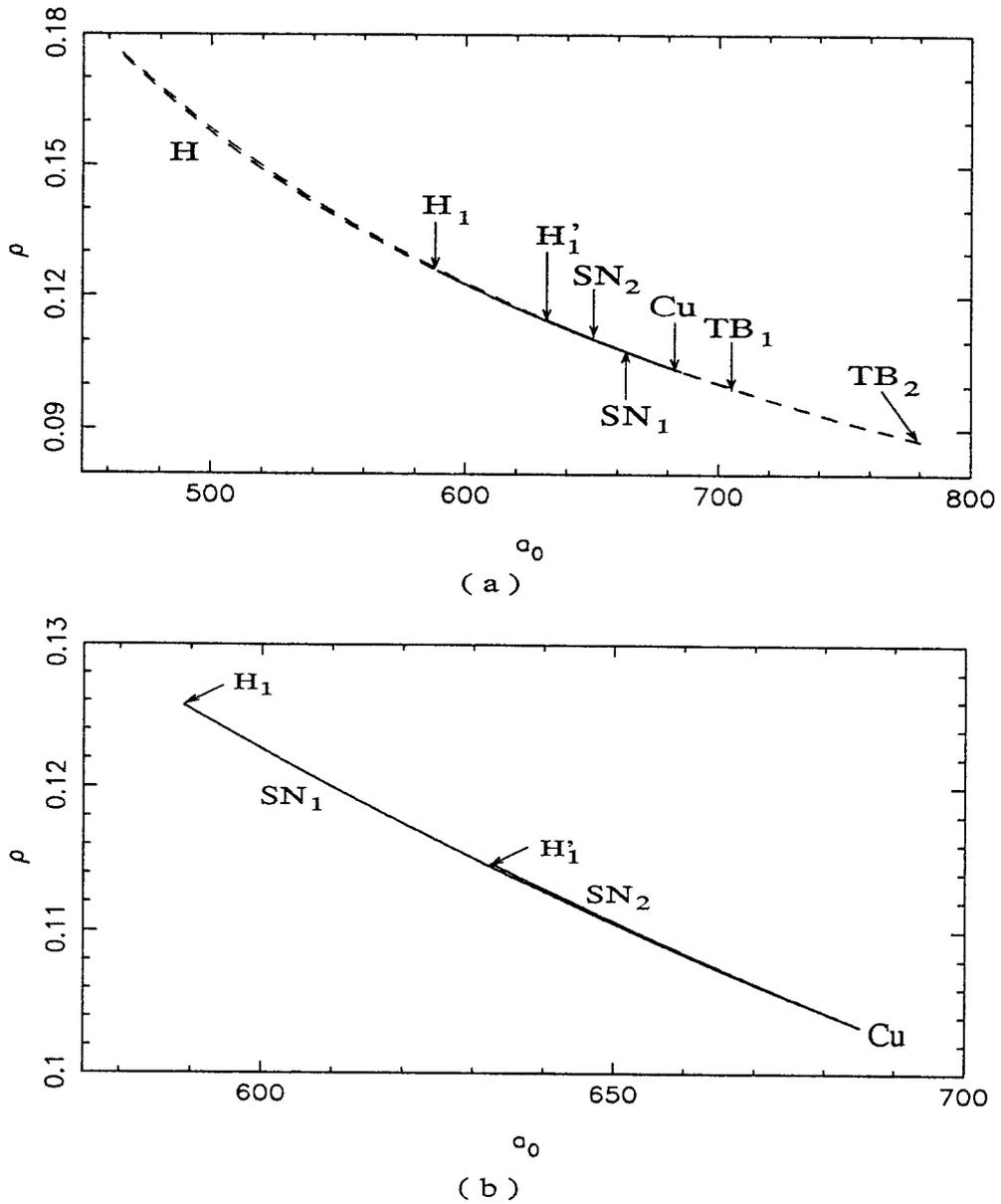


Figura 5.6.14: (a) Curvas de Hopf (en trazo discontinuo) y de silla-nodo de órbitas periódicas (en trazo continuo); sobre ellas, los puntos de degeneración de Hopf ( $H_1$  y  $H'_1$ ) y de cúspide de órbitas periódicas ( $Cu$ ) ( $s_0 = 37$ ); (b) Detalle de las curvas de silla-nodo de órbitas periódicas.

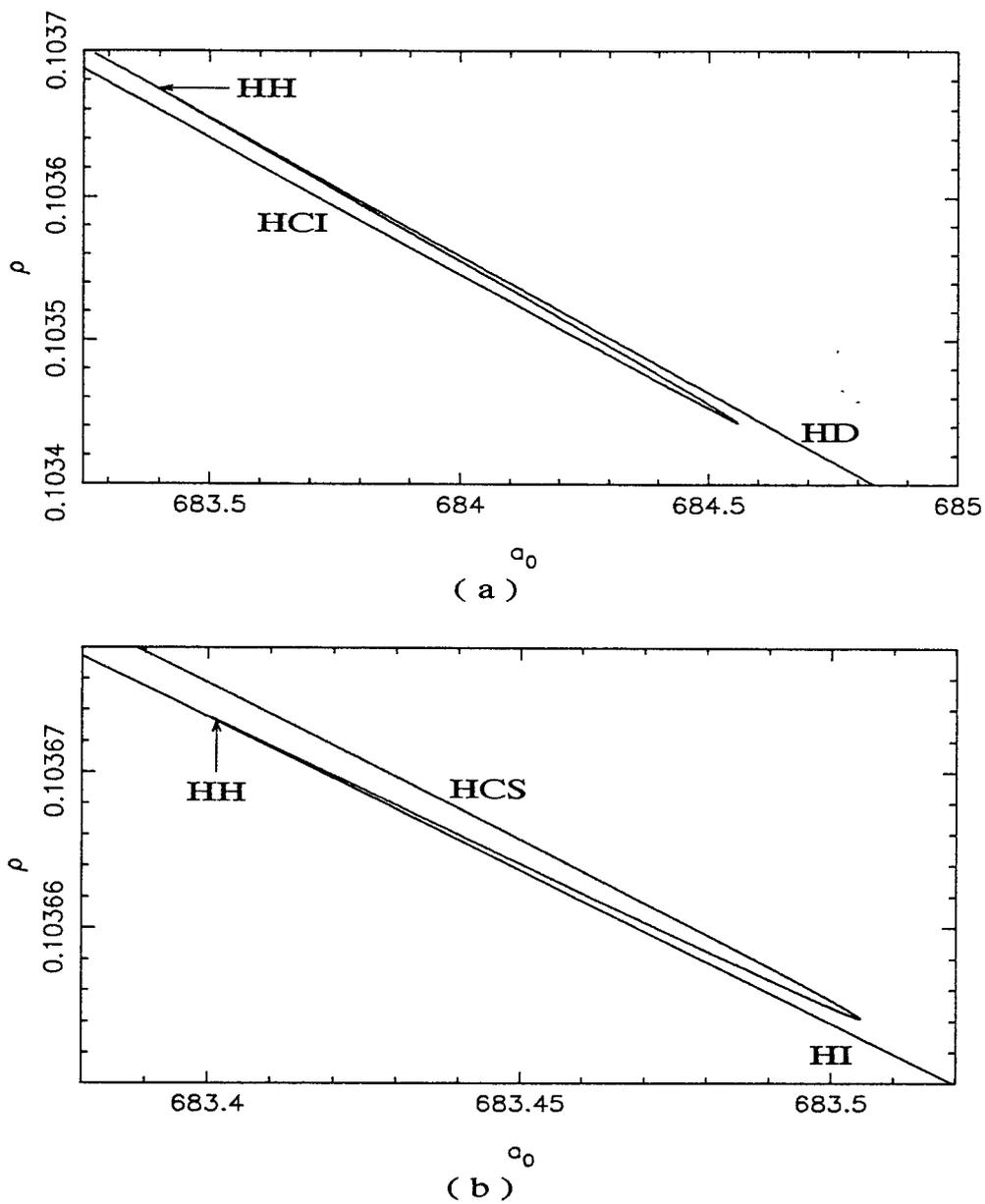


Figura 5.6.15: Detalle de la tangencia entre las curvas de: (a) homoclinas derechas ( $HD$ ) y de homoclinas cóncavas inferiores ( $HCI$ ); (b) homoclinas izquierdas ( $HI$ ) y de homoclinas cóncavas superiores ( $HCS$ ). En ambos casos el punto de contacto corresponde a una homoclina doble ( $HH$ ) ( $s_0 = 37$ ).

su configuración cualitativa. Sirva la figura 5.6.13 para hacernos una idea de la estructura que presentarían, en el espacio de parámetros, las curvas obtenidas numéricamente. En efecto, en esta figura aparecen representadas, en el plano  $(a_0, \rho)$  (para  $s_0 = 37$ ), las curvas de bifurcación de silla-nodo de equilibrios. Todos los fenómenos de bifurcación relativos a homoclinas ocurren en la zona de tres equilibrios, delimitada por las curvas  $sn_1$  y  $sn_2$ , y entre los puntos de cúspide de equilibrios,  $C$ , y el punto de Takens-Bogdanov situado más *a la derecha* (es decir, con mayor valor del parámetro  $a_0$ ), denotado por  $TB_2$ . Aun cuando las diferentes curvas obtenidas numéricamente no serían distinguibles entre sí, de ser representadas en esta *estrecha* zona de parámetros, sí podemos representar, y así lo haremos a continuación, detalles interesantes de éstas.

En la figura 5.6.14 (a) aparece la curva de bifurcación de Hopf ( $H$ ), en la que señalamos los dos puntos de degeneración  $H_1$  y  $H'_1$  (correspondientes a la anulación del término cúbico de su forma normal), así como las curvas de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas ( $SN_1$  y  $SN_2$ ) que nacen, respectivamente, de estos puntos. Estas curvas se unen en un punto de cúspide de órbitas periódicas ( $Cu$ ). En la figura 5.6.14 (b) aparecen en detalle las curvas de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas  $SN_1$  y  $SN_2$ . En la figura 5.6.15 (a) representamos las curvas de homoclinas derechas y de homoclinas cóncavas inferiores, intersecando en la homoclina doble. Se observa la tangencia entre ambas curvas. En forma análoga representamos en la figura 5.6.15 (b) las curvas de homoclinas izquierdas y de homoclinas cóncavas superiores, intersecando, de nuevo tangencialmente, en la homoclina doble.

Vamos, pues, a describir los diferentes conjuntos de bifurcaciones que se obtienen en el plano de parámetros  $(a_0, \rho)$  (para  $\alpha = 0.2$  y  $\kappa = 0.1$ ) al intersecar el espacio  $(a_0, s_0, \rho)$  con los planos  $s_0 = \text{constante}$  antes indicados.

$s_0 = 52$  (Vid. figura 5.6.16)

En la situación mostrada en la figura, vemos cómo los dos puntos de Takens-Bogdanov existentes,  $TB_1$  y  $TB_2$ , se encuentran sobre diferentes curvas de silla-nodo de equilibrios,  $sn_1$  y  $sn_2$ , es decir, están separados por el punto

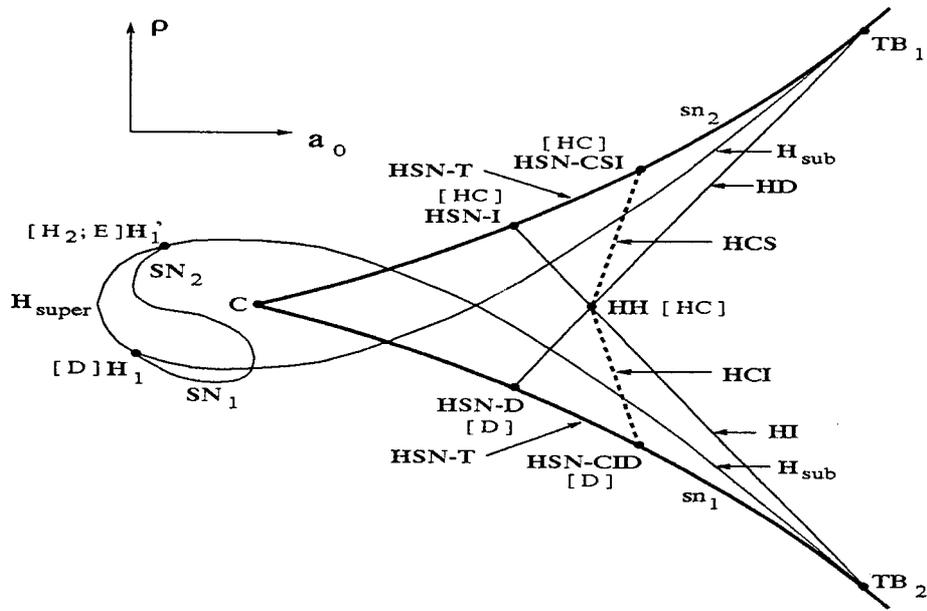


Figura 5.6.16: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = 52$ .

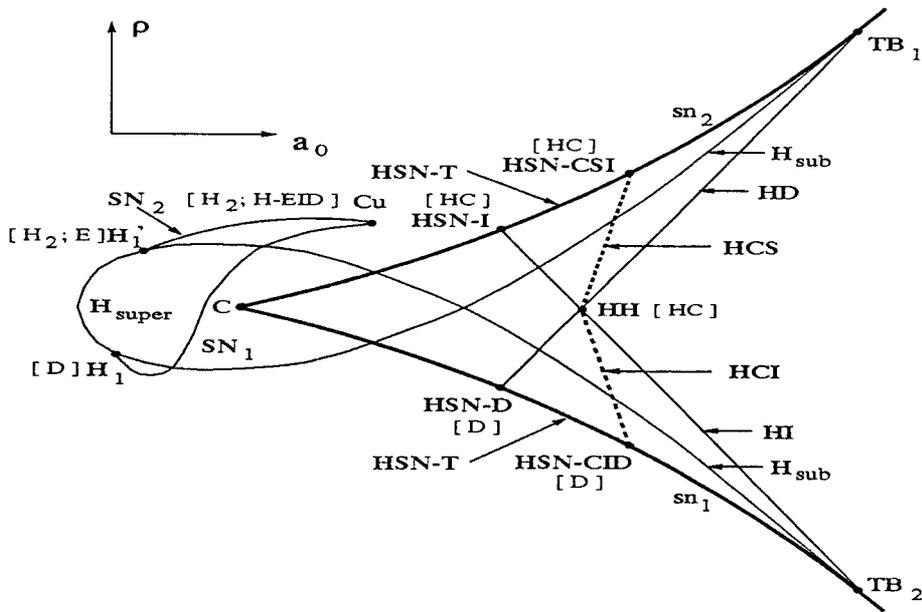


Figura 5.6.17: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = 37$ .

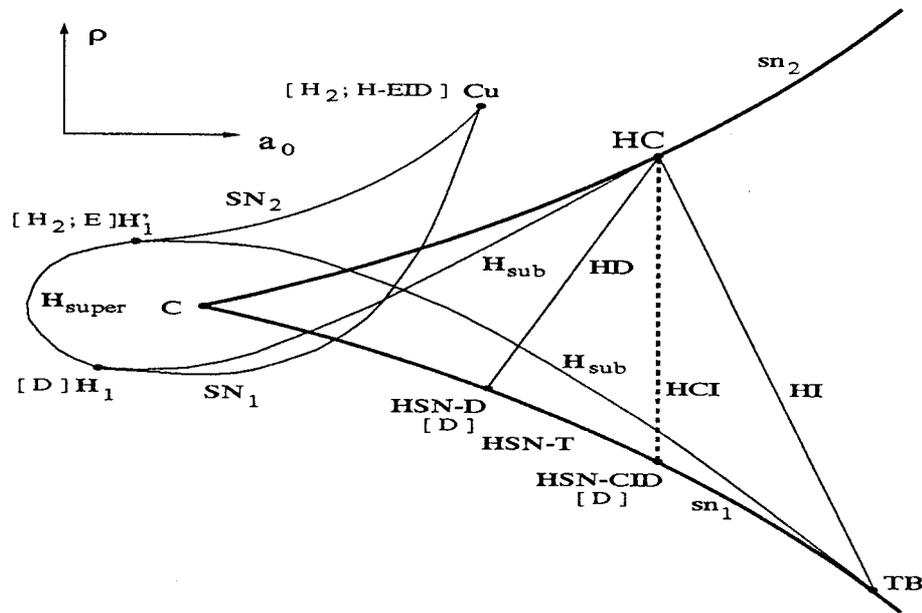


Figura 5.6.18: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = s_0^{HC}$ .

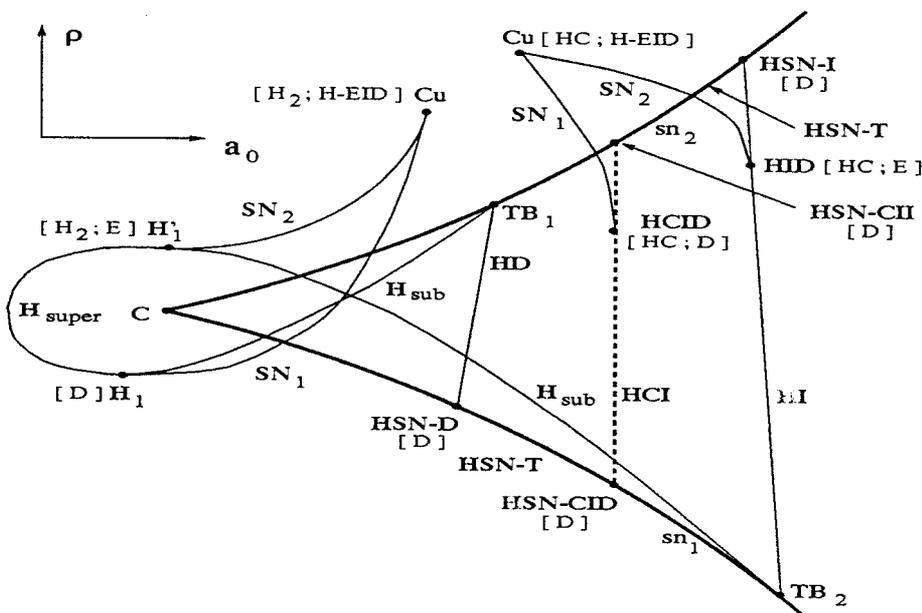


Figura 5.6.19: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = 36.15$ .

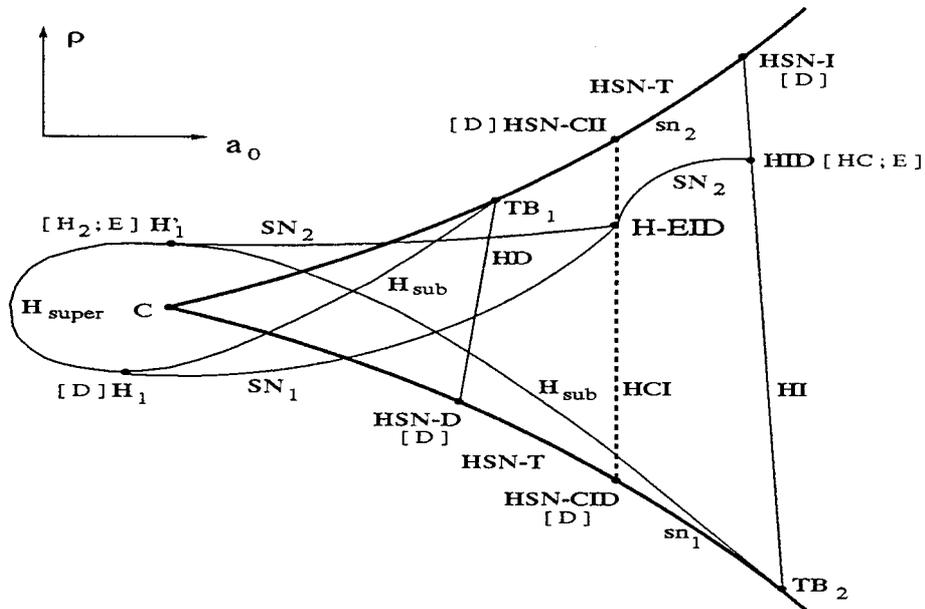


Figura 5.6.20: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = s_0^{H-EID}$ .

de cúspide de equilibrios,  $C$ . De cada punto de Takens–Bogdanov surgen dos curvas, una de Hopf y otra de homoclinas. Las curvas de Hopf nacen de ambos puntos siendo subcríticas,  $H_{sub}$ , y se conectan entre ellas mediante un tramo supercrítico,  $H_{super}$ . De las curvas de homoclinas nacidas de los puntos de Takens–Bogdanov, una corresponde a homoclinas izquierdas,  $HI$ , y otra a homoclinas derechas,  $HD$ . Ambas se cortan en un punto correspondiente a una homoclina doble,  $HH$ . De esta homoclina doble nace una curva de homoclinas cóncavas superiores,  $HCS$ , y otra de homoclinas cóncavas inferiores,  $HCI$ . La curva de homoclinas cóncavas superiores termina sobre la curva de silla–nodo de equilibrios en un punto correspondiente a una homoclina de tipo silla–nodo cóncava superior izquierda,  $HSN-CI$ , mientras que la curva de homoclinas cóncavas inferiores termina sobre la curva de silla–nodo de equilibrios en un punto correspondiente a una homoclina de tipo silla–nodo cóncava inferior derecha,  $HSN-CID$ . Los tramos sobre la curva de sillanodo de equilibrios comprendidos entre dos puntos

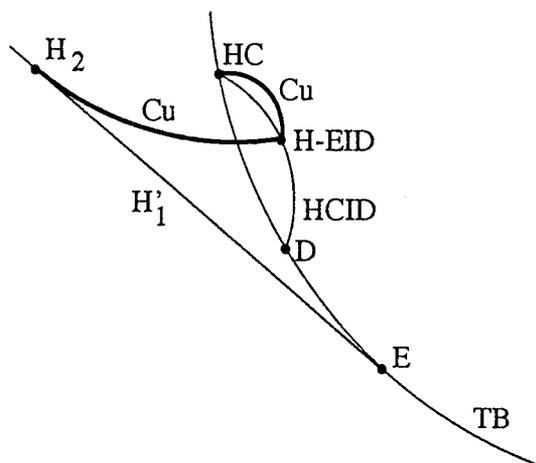


Figura 5.6.21: Curvas de cúspides de órbitas periódicas ( $Cu$ ) conectando los puntos  $H_2$ ,  $HC$  y  $H - EID$ .

de homoclinas sillas-nodo de codimensión dos corresponden a homoclinas sillas-nodo transversales,  $HSN - T$ .

Sobre la curva de Hopf aparecen dos puntos de degeneración correspondientes a la anulación del término cúbico de su forma normal,  $H_1$  y  $H'_1$ . De ambos puntos nacen curvas de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas,  $SN_1$  y  $SN_2$ , que están conectadas entre sí.

En cada punto de codimensión dos de la figura 5.6.16 aparece, junto a la etiqueta que identifica al punto, otra etiqueta encerrada entre corchetes. Ésta indica el punto de codimensión tres hacia el cual evoluciona el de codimensión dos cuando movemos el parámetro  $s_0$  (cuando entre corchetes figuran dos puntos en lugar de uno, éstos indican, en el orden en que están colocados, otros dos puntos de codimensión tres hacia los que evoluciona el de codimensión dos cuando se mueve  $s_0$  en sentido creciente y decreciente, respectivamente).

$s_0 = 37$  (Vid. figura 5.6.17)

En este caso, al pasar de  $s_0 = 52$  a  $s_0 = 37$ , nos hemos situado por *debajo*



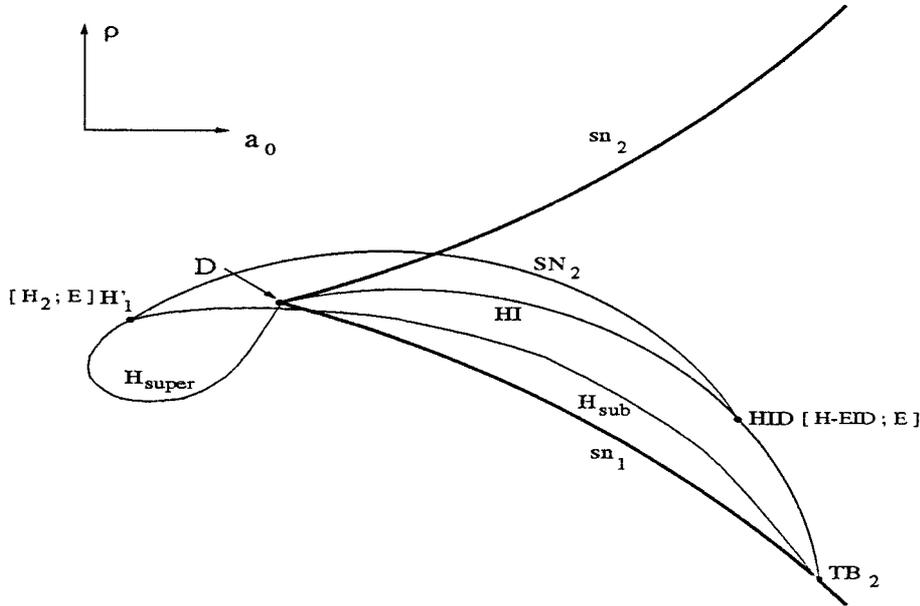


Figura 5.6.23: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = s_0^D$ .

$$s_0 = s_0^{H-EID} \text{ (Vid. figura 5.6.20)}$$

La homoclina cóncava inferior con traza cero,  $HCID$ , se degenera al hacerse su coeficiente  $EID$  igual a uno. En el punto correspondiente a esta homoclina de codimensión tres,  $H - EID$ , desaparecen las cúspides de órbitas periódicas nacidas, respectivamente, de la Hopf de codimensión tres,  $H_2$ , y de la homoclina cuspidal,  $HC$ . En la figura 5.6.21 aparece una representación cualitativa de las curvas de cúspides de órbitas periódicas.

$$s_0 = 36.06 \text{ (Vid. figura 5.6.22)}$$

Los puntos de Hopf degenerados de codimensión dos,  $H_1$  y  $H'_1$ , quedan conectados con los puntos correspondientes a las homoclinas cóncava inferior con traza cero e izquierda con traza cero, respectivamente, mediante curvas de bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas.

$$s_0 = s_0^D = 35.9635 \dots \text{ (Vid. figura 5.6.23)}$$

El punto de Takens-Bogdanov  $TB_1$  alcanza el punto de cúspide de equili-

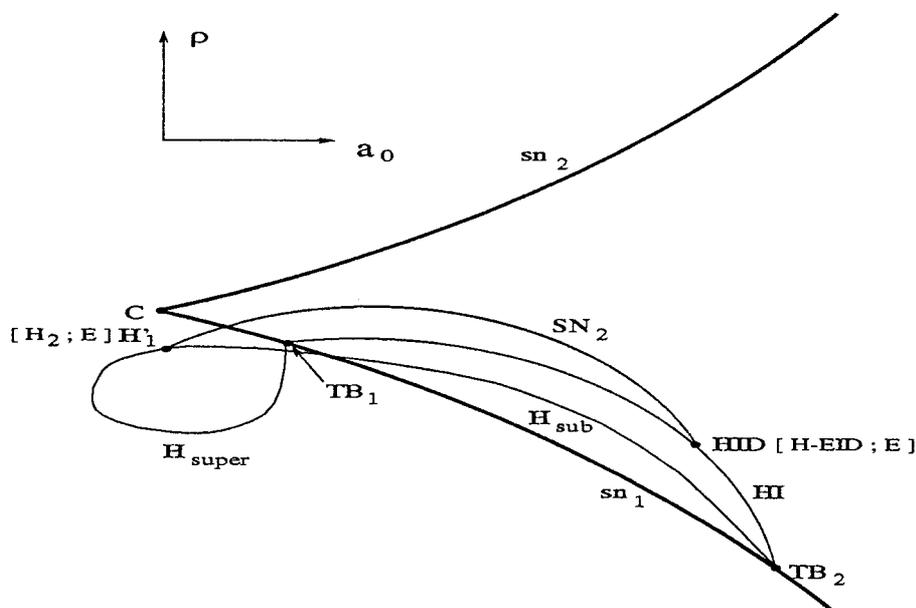


Figura 5.6.24: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = 35.94$ .

brios, degenerándose en un foco débil,  $D$ . En este punto desaparecen las curvas de homoclinas derechas,  $HD$ , homoclinas cóncavas inferiores,  $HCI$ , (y por tanto los puntos degenerados situados sobre ellas:  $HSN-D$ ,  $HCID$ ,  $HSN-CID$  y  $HSN-CII$ ) y de silla-nodo de órbitas periódicas  $SN_1$  (y por tanto el punto de Hopf degenerado  $H_1$ ). En  $D$  desaparece también el punto correspondiente a la homoclina silla-nodo izquierda,  $HSN-I$ .

$s_0 = 35.94$  (Vid. figura 5.6.24)

Los puntos de Takens-Bogdanov se encuentran, a partir de ahora, sobre la misma rama,  $sn_1$ , de la curva de silla-nodo de equilibrios. Ambos aparecen conectados por la curva de homoclinas izquierdas,  $HI$ .

$s_0 = s_0^E = 35.9361\dots$  (Vid. figura 5.6.25)

El punto de Takens-Bogdanov  $TB_1$  se degenera, alcanzando el punto de cúspide de orden tres,  $E$ , donde desaparecen el punto de Hopf degenerado  $H'_1$  y el punto correspondiente a la homoclina izquierda con traza

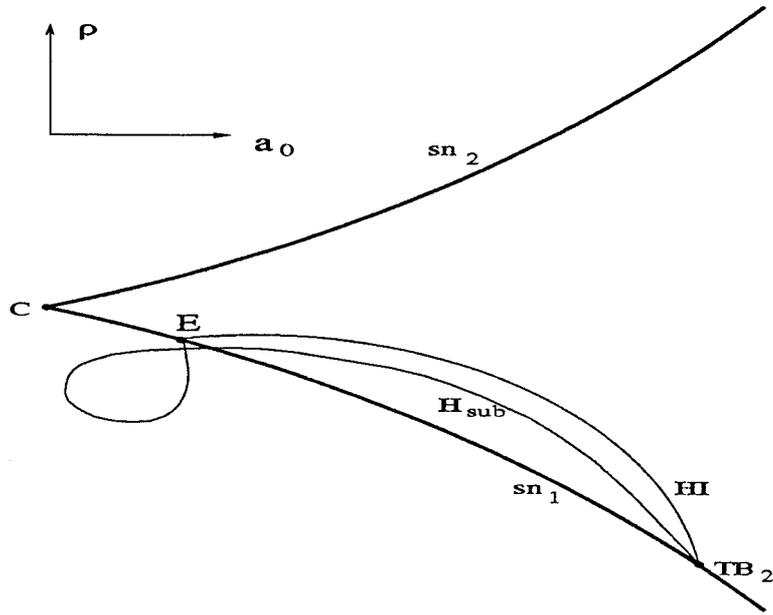


Figura 5.6.25: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = s_0^E$ .

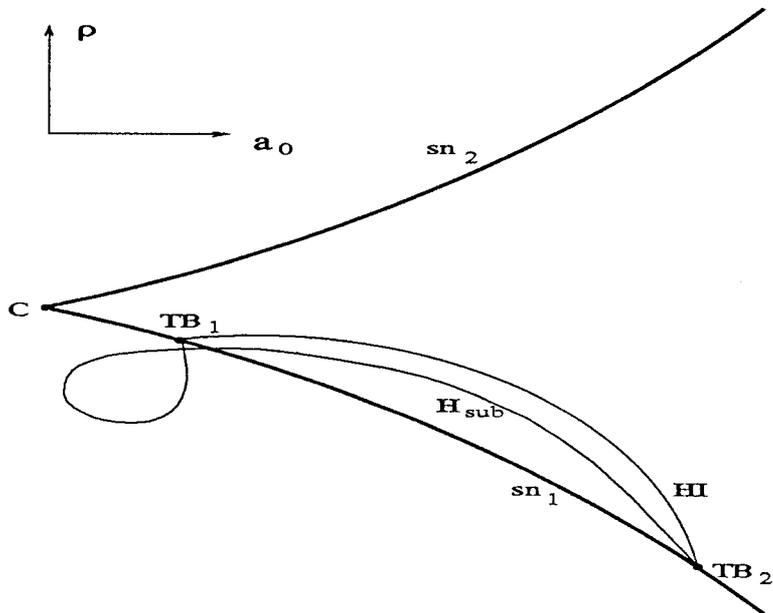


Figura 5.6.26: Conjunto de bifurcaciones correspondiente a la intersección con el plano  $s_0 = 35.936$ .

cero,  $HID$  (y, por tanto, la curva de silla-nodo de órbitas periódicas,  $SN_2$ , que conectaba ambos puntos). La rama subcrítica de la curva de Hopf desaparece, quedando sólo la rama supercrítica.

$s_0 = 35.936$  (Vid. figura 5.6.26)

Los dos puntos de Takens-Bogdanov,  $TB_1$  y  $TB_2$ , quedan conectados por las curvas de Hopf y de homoclinas izquierdas.

La curva de puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov posee un mínimo en el valor  $s_0 = 35.93506854 \dots$ . Por lo tanto, para valores de  $s_0$  por debajo de este valor crítico, los puntos de Takens-Bogdanov han desaparecido, así como las curvas de bifurcación de Hopf y de homoclinas izquierdas. A este nivel, las únicas bifurcaciones que aún persisten son las de silla-nodo y cúspide de equilibrios.

## 5.7 El Caso $\alpha = 1$

Vamos, por último, a considerar el caso en que el parámetro  $\alpha$  alcanza el valor uno.

A partir de las expresiones obtenidas para la parametrización de la curva de Takens-Bogdanov dada en (5.5.6), se tiene que tal bifurcación deja de existir para  $\alpha = 1$ . De hecho, como veremos enseguida, no sólo la bifurcación de Takens-Bogdanov, sino la casi totalidad de la riqueza de bifurcaciones que hemos estudiado desaparece para tal valor de  $\alpha$ .

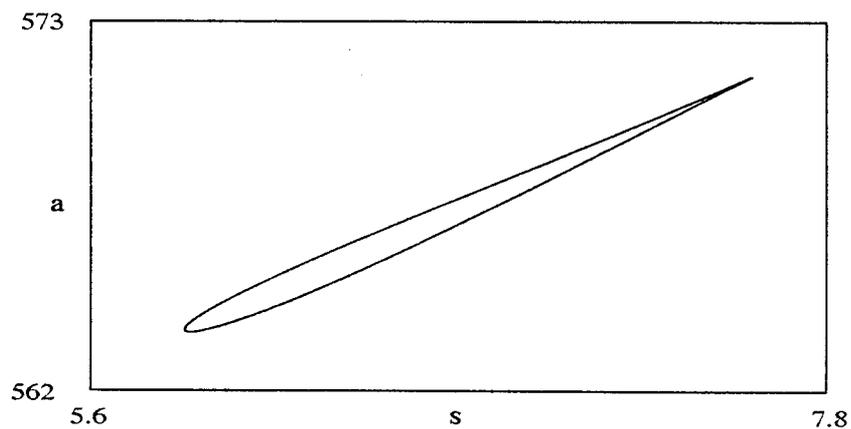
Si consideramos el sistema enzimático dado en (5.2.4) para  $\alpha = 1$ , tenemos

$$\begin{cases} \dot{s} = (s_0 - s) - \rho \frac{sa}{1 + s + \kappa s^2} \\ \dot{a} = (a_0 - a) - \rho \frac{sa}{1 + s + \kappa s^2} \end{cases} \quad (5.7.1)$$

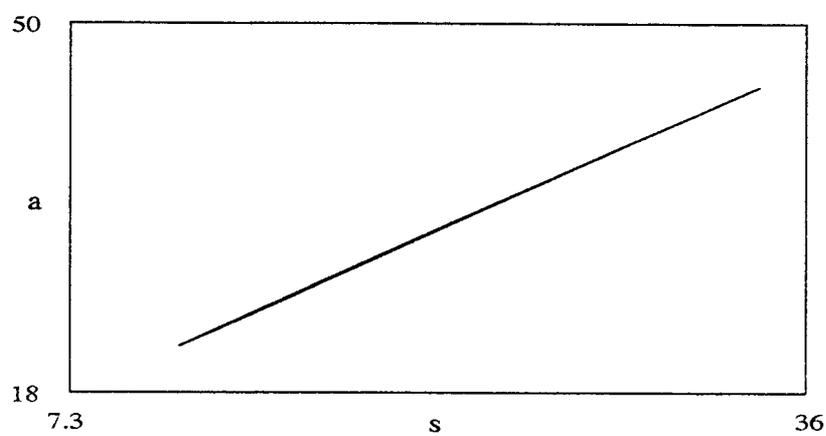
Si realizamos el cambio de variable  $w = s - a$ , esta nueva variable,  $w$ , verifica la ecuación diferencial

$$\dot{w} = w_0 - w \quad (5.7.2)$$

donde  $w_0 = s_0 - a_0$ .



(a)



(b)

Figura 5.7.1: Homoclinas cuspidales obtenidas por simulación con DSTOOL para los valores: (a)  $\alpha = 0.2$ ,  $a_0 \approx 715.2247$ ,  $s_0 \approx 36.1692$  y  $\rho \approx 0.09441$ ; (b)  $\alpha \approx 0.97552$ ,  $a_0 \approx 1881.2647$ ,  $s_0 \approx 1823.2647$  y  $\rho \approx 168.8043$ . En ambos casos  $\kappa = 0.1$ .

El equilibrio de (5.7.2), dado por la condición  $w = w_0$ , corresponde a la recta invariante para el flujo de (5.7.1) dada por la ecuación  $s - a = s_0 - a_0$ . Si escribimos la ecuación de esta recta en términos de las variables  $u$  y  $v$ , tenemos

$$v - \frac{(s_0 - v)p(v) - u}{\rho v} = s_0 - a_0$$

es decir,

$$u = \rho v (s_0 - a_0) + (s_0 - v)p(v) - \rho v^2 = h(v)$$

siendo  $h(v)$  la función dada en (5.3.2), cuyos ceros proporcionan los equilibrios del sistema enzimático escrito en las variables  $u$  y  $v$ .

Obtenemos, por tanto, que los equilibrios de (5.7.1) se encuentran sobre la recta invariante  $s - a = s_0 - a_0$ . Este hecho imposibilita la existencia de ciclos límite, de conexiones homoclinas y de equilibrios de tipo foco. Esto justifica que las curvas de codimensión tres dadas en la figura 5.6.5 tengan carácter asintótico con respecto a la recta  $\alpha = 1$  (en el plano de parámetros  $(v_*, \alpha)$ ), puesto que no pueden tener su término en ningún punto situado sobre ella. Por tanto, y a pesar de la riqueza de bifurcaciones existente para cualquier valor de  $\alpha$  tan próximo a uno como queramos, en la situación  $\alpha = 1$  no hay más conjuntos límites que los equilibrios y, en consecuencia, tan sólo persisten como únicas posibles bifurcaciones las de silla-nodo y cúspide de aquéllos.

Los conjuntos límites existentes para  $\alpha < 1$ , tales como órbitas periódicas y conexiones homoclinas, sufren un proceso de *estiramiento* cuando  $\alpha$  tiende hacia uno, hasta desaparecer, cuando  $\alpha$  alcanza el valor uno, en la recta invariante antes mencionada.

En la figura 5.7.1 mostramos dos homoclinas cuspidales para los valores  $\alpha = 0.2$  y  $\alpha \approx 0.97552$ , respectivamente. Se observa el efecto de *aproximación* a la recta invariante  $s - a = s_0 - a_0$ , que se produce cuando  $\alpha$  se acerca al valor límite  $\alpha = 1$ .

# Capítulo VI

## CONCLUSIONES

Procedemos, a continuación, a destacar los principales resultados obtenidos en esta memoria.

En la primera parte del capítulo II hacemos un repaso, necesariamente breve, de la bibliografía consultada relativa a los métodos de continuación aplicados al estudio de conjuntos límites de sistemas dinámicos planos, tales como equilibrios, órbitas periódicas y conexiones homoclinas. Con respecto a las degeneraciones de las órbitas periódicas, nos planteamos en un futuro próximo implementar un código de continuación de bifurcaciones de cúspides de estas órbitas. Para la continuación de las conexiones homoclinas, caso que a nosotros nos interesa especialmente en esta memoria, diseñamos nuestro propio algoritmo, que se ha mostrado eficiente a la vista de los numerosos ejemplos de aplicación que exponemos en los capítulos restantes.

Seguidamente analizamos la estabilidad de las órbitas homoclinas degeneradas de codimensión dos dadas por la condición de anulación de la traza. Damos una demostración del conocido hecho de que la estabilidad de una órbita homoclina con traza cero viene determinada por el signo de la integral de la divergencia del campo vectorial calculado sobre la órbita homoclina, cantidad que relacionamos con el coeficiente del término lineal del desarrollo asintótico de la aplicación de Poincaré a lo largo de la homoclina. Con estas ideas, implementamos un algoritmo (del que damos después una versión mejorada en cuanto a tiempo de cálculo

y precisión) para la localización y continuación de conexiones homoclinas de codimensión tres (que llamamos  $H - EID$ ) dadas mediante la anulación simultánea de la traza y de la integral de la divergencia del campo sobre la homoclina.

El conocimiento del término en  $x^2 \log x$  en el desarrollo asintótico de la mencionada aplicación de Poincaré, nos permite localizar y continuar conexiones homoclinas de codimensión cuatro (que llamamos  $H - RES$ ), que se obtienen cuando se anulan simultáneamente los coeficientes de los términos en  $x$  y en  $x^2 \log x$  de dicha aplicación.

Resaltamos el hecho de que estas ideas nos permiten localizar y continuar conexiones homoclinas de codimensiones tres y cuatro sin hacer uso de la función de Melnikov, que es el único procedimiento que hemos encontrado en la literatura existente para localizar y continuar estas homoclinas. La existencia de sistemas que modelan procesos físicos, que no pueden ser expresados, en general, como la perturbación de un sistema conservativo justifican el diseño de un método alternativo al dado por la función de Melnikov.

La última parte del capítulo está dedicada al estudio de la estabilidad de homoclinas de punto de cúspide, cuyas conclusiones aplicamos al estudio de un sistema con cinco parámetros, que presenta una curva de homoclinas cuspidales degeneradas de codimensión cuatro, que aproximamos mediante la función de Melnikov. Obtenemos numéricamente el conjunto de bifurcaciones en las proximidades de esta curva, así como las superficies de homoclinas cuspidales no degeneradas, conseguidas tanto numéricamente como mediante la función de Melnikov.

En el capítulo III abordamos el estudio de varias singularidades planas con ciertas degeneraciones en los términos no lineales. Centramos nuestra atención, aunque no exclusivamente, en las conexiones homoclinas y sus degeneraciones, con el objeto de aplicar las ideas desarrolladas en el capítulo II.

Comenzamos el capítulo III estudiando las conexiones homoclinas de codimensiones tres ( $H - EID$ ) y cuatro ( $H - RES$ ) experimentadas por una cúspide de orden seis, que calculamos numéricamente, comparando sus resultados con los que predice la función de Melnikov.

Seguidamente se lleva a cabo un estudio completo de las cúspides con simetría de órdenes cuatro y cinco. Para la de orden cuatro ampliamos los resultados obtenidos por Rousseau en [95]. Para la de orden cinco, no abordada hasta ahora, obtenemos, en particular, curvas numéricas de conexiones homoclinas de tipo  $H - EID$  y  $H - RES$  que comparamos con las predicciones hechas mediante la función de Melnikov. También aparecen ciclos límites hasta de multiplicidad cuatro (resp. cinco) en la cúspide de orden cuatro (resp. cinco). El desplegamiento de un ciclo límite de multiplicidad cuatro (resp. cinco) da lugar, en el espacio de parámetros, a una variedad homeomorfa a la catástrofe de *swallowtail* (resp. de *butterfly*), cuyas diferentes secciones obtenemos a partir de la función de Melnikov.

El siguiente caso a estudiar es un foco débil dado mediante la degeneración simultánea de los coeficientes de los términos en  $x^2$  y en  $x^2y$  de la forma normal de una bifurcación de Takens-Bogdanov. Como en los casos anteriores, resaltamos la existencia de conexiones homoclinas de codimensión tres ( $H - EID$ ), que calculamos numéricamente. Queda pendiente de posteriores trabajos el complejo estudio de la función de Melnikov para la determinación de los ciclos límites y sus degeneraciones.

Concluimos el capítulo III estudiando parcialmente una singularidad dada mediante un doble cero diagonalizable, del que continuamos numéricamente una curva de conexiones heteroclinas de codimensión dos de tipo silla-nodo.

En los diferentes casos abordados en este capítulo (excepto en el primero y en el último, en los que ya ha sido previamente obtenido) realizamos un estudio completo de la determinación de las distintas singularidades que aparecen, aplicando las técnicas dadas mediante los cambios de variables de tipo *blow-up*.

En el capítulo IV llevamos a cabo un estudio de dos circuitos de Van der Pol-Duffing. El primero se modela mediante un sistema plano del que obtenemos su conjunto de bifurcaciones completo, el conocido como *diagrama en forma de cruz*. Hacemos énfasis especial en las conexiones homoclinas. El segundo circuito viene gobernado por un sistema tridimensional, del que exponemos resumidamente su gran riqueza de bifurcaciones, para centrarnos después en la bifurcación de Hopf

del origen y sus diferentes degeneraciones (que proceden de la anulación de los términos de órdenes tres y cinco de su forma normal y/o de la no verificación de la condición de transversalidad), que estudiamos exhaustivamente, aplicando las técnicas de la teoría de la singularidad desarrolladas por Golubitsky y Schaeffer en [48]. La presencia de un parámetro modal en el desplegamiento de uno de los casos estudiados hace posible la aparición, entre otros interesantes fenómenos, de islas de órbitas periódicas.

En el capítulo V realizamos un análisis teórico y numérico de un sistema plano con cinco parámetros que modela una reacción bioquímica de tipo reacción-difusión. Los estudios sobre este sistema realizados hasta el presente describen tan sólo una mínima parte de la gran riqueza de bifurcaciones que este sistema experimenta. En la zona de parámetros en la que el sistema tiene sentido físico damos una descripción completa de todos sus fenómenos de bifurcación, que incluyen bifurcaciones estáticas y dinámicas de hasta codimensión tres. La presencia de varias degeneraciones de la bifurcación de Takens-Bogdanov (concretamente cúspides de orden tres y focos débiles dados por la anulación del coeficiente del término en  $x^2$  de su forma normal) conlleva la aparición de una gran variedad de conexiones homoclinas (de hasta codimensión tres), que estudiamos y continuamos numéricamente en todos los casos.

La combinación de técnicas analíticas y numéricas nos permite exhibir el conjunto de bifurcaciones completo que se da para este sistema. Ponemos de manifiesto, en particular, las transiciones de los diferentes conjuntos de bifurcaciones que ocurren en las proximidades de los diferentes puntos de codimensión tres que obtenemos: uno de Hopf doblemente degenerado (debido a la anulación de los coeficientes de los términos de órdenes tres y cinco de su forma normal), uno de Takens-Bogdanov con la anulación del coeficiente del término en  $x^2$  de su forma normal, una cúspide de orden tres y una homoclina de tipo  $H - EID$ .

Los diferentes casos estudiados a lo largo de esta memoria, pero en especial el sistema enzimático considerado en el capítulo V, han sido un excelente banco de pruebas para los métodos analíticos y numéricos desarrollados, que han permitido

poner de manifiesto una gran riqueza de bifurcaciones tanto de equilibrios como de órbitas periódicas y de conexiones homoclinas.

# Referencias

- [1] Abraham, R.; Marsden, J., *Foundations of Mechanics*, Benjamin, New York (1978).
- [2] Algaba, A., Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1995).
- [3] Allgower, E.L.; Georg, K., *Numerical Continuation Methods. An Introduction*, Springer Series in Computational Mathematics, n. 13, Springer, New York (1990).
- [4] Andronov, A.A.; Leontovich, E.A.; Gordon, I.I.; Maier, A.G., *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem (1971).
- [5] Andronov, A.A.; Leontovich, E.A.; Gordon, I.I.; Maier, A.G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York (1973).
- [6] Beyn, W.-J., *Defining Equations for Singular Solutions and Numerical Applications*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. D. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 42–56 (1984).
- [7] Beyn, W.-J., *Global Bifurcations and Their Numerical Computation*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose, B. de Dier, A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Series C, vol. 313, Kluwer, Dordrecht, pp. 169–181 (1990).
- [8] Beyn, W.-J., *The Numerical Computation of Connecting Orbits in Dynamical Systems*, IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 9, pp. 379–405 (1990).

- [9] Blows, T.R.; Perko, L.M., *Bifurcation of Limit Cycles from Centers and Separatrix Cycles of Planar Analytic Systems*, SIAM Review, vol. 36, n. 3, pp. 341–376 (1994).
- [10] Boissonade J.; De Kepper, P., *Transitions from Bistability to Limit Cycle Oscillations. Theoretical Analysis and Experimental Evidence in an Open Chemical System*, J. Phys. Chem., n. 84, pp. 501–506 (1980).
- [11] Canale, V., *The Computations of Paths of Homoclinics Orbits*, PhD Thesis, Department of computer Science, University of Toronto (1994).
- [12] Castrigiano, D.P.L.; Hayes, S.A., *Catastrophe Theory*, Addison–Wesley P. Co. (1993).
- [13] Champneys, A.; Kuznetsov, Y., *A Numerical Toolbox for Homoclinic Bifurcation Analysis*, To appear in Int. J. Bifurcation and Chaos (1995).
- [14] Champneys, A.; Kuznetsov, Y.; Sandstede, B., *Numerical Detection and Continuation of Codimension–Two Homoclinic Bifurcations*, Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 4, n. 4, pp. 785–822 (1994).
- [15] Chao, K.S.; Saeks, R., *Continuation Method in Circuit Analysis*, Proceedings of the IEEE, vol. 65, n. 8, pp. 1187–1194 (1977).
- [16] Chicone, C., *Bifurcations of Nonlinear Oscillations and Frequency Entrainment Near Resonance*, SIAM J. Math. Anal., vol. 23, n. 6, pp. 1577–1608 (1992).
- [17] Chua, L.O.; Komuro, M.; Matsumoto, T., *The Double Scroll Family*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS–33, 11, pp. 1072–1118 (1986).
- [18] Coddington, E.A.; Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw–Hill, New York (1955).

- [19] Dangelmayr, G.; Guckenheimer, J., *On a Four Parameter Family of Planar Vector Fields*, Arch. Rat. Mech. Anal., n. 97, pp. 321–352 (1987).
- [20] Davidenko, D.F., *On a New Method of Numerically Integrating a System of Nonlinear Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, pp. 601–604 (1953).
- [21] Den Heijer, C.; Rheinboldt, W.C., *On Steplength Algorithms for a Class of Continuation Methods*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 18, n. 5, pp. 925–948 (1981).
- [22] Doedel, E., *AUTO: A Program for the Automatic Bifurcation Analysis of Autonomous Systems*, Proceedings of the tenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, vol. I, D. S. Meek, H. C. Williams (eds.), Utilitas Mathematica Publ., pp. 265–284 (1981).
- [23] Doedel, E.; Friedman, M., *Numerical Computation of Heteroclinic Orbits*, J. Comp. Appl. Math., n. 26, pp. 159–170 (1989).
- [24] Doedel, E.; Friedman, M.; Monteiro, A., *On Locating Homoclinic and Heteroclinic Orbits*, Technical Report, Cornell Theory Center, Center for Applied Mathematics, Cornell University (1993).
- [25] Doedel, E.J.; Keller, H.B.; Kernévez, J.P., *Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems, Part I: Bifurcation in Finite Dimensions*, Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 1, n. 3, pp. 493–520 (1991).
- [26] Doedel, E.J.; Keller, H.B.; Kernévez, J.P., *Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems, Part II: Bifurcation in Infinite Dimensions*, Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 1, n. 4, pp. 745–772 (1991).
- [27] Doedel, E.J.; Kernévez, J.P., *AUTO: Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematics Report, California Institute of Technology (1986).

- [28] Doedel, E.; Wang, X., *AUTO94: Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematics Report, California Institute of Technology (1994).
- [29] Dumortier, F., *Singularities of Vector Fields on the Plane*, Journal of Differential Equations, n. 23, pp. 53–106 (1977).
- [30] Dumortier, F., *Singularities of Vector Fields* Monografías de Matemática, n. 32, IMPA, Río de Janeiro (1978).
- [31] Dumortier, F., *Local Study of Planar Vector Fields: Singularities and their Unfoldings*, Studies in Mathematical Physics, vol. 2, North-Holland (1991).
- [32] Dumortier, F., *Techniques in the Theory of Local Bifurcations: Blow-Up, Normal Forms, Nilpotent Bifurcations, Singular Perturbation*, NATO ASI Series, Series C, vol. 408, pp. 19–73 (1992).
- [33] Dumortier, F.; Roussarie, R. *On the Saddle Loop Bifurcation*, Bifurcations of Planar Vector Fields, Lecture Notes in Math., n. 1455, pp. 44–73 (1989).
- [34] Dumortier, F.; Roussarie, R.; Sotomayor, J., *Generic 3-Parameter Families of Vector Fields on the Plane, Unfolding a Singularity with Nilpotent Linear Part. The Cusp Case of Codimension 3*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 7, pp. 375–413 (1987).
- [35] Dumortier, F.; Roussarie, R.; Sotomayor, J., *Generic 3-Parameter Families of Planar Vector Fields, Unfoldings of Saddle, Focus and Elliptic Singularities with Nilpotent Linear Parts*, Lecture Notes in Math., n. 1480 (1991).
- [36] Fernández, F.; Freire, E.; Pizarro, L.; Rodríguez Luis, A., *Estudio Analítico y numérico de un Oscilador de Van der Pol-Duffing*, a aparecer en los proceedings de XIV C.E.D.Y.A./ IV C.M.A., Barcelona (1995).

- [37] Freire E.; Franquelo, L.G.; Aracil, J., *Periodicity and Chaos in an Autonomous Electronic Circuit*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. Cas-31, n. 3, pp. 237-247 (1984).
- [38] Freire, E.; Gamero, E.; Ponce, E., *An Algorithm for Symbolic Computation of Hopf Bifurcation*, Computers and Mathematics, E. Kaltofen & S. M. Watt (eds.) Springer-Verlag, pp. 109-118 (1989).
- [39] Freire, E.; Gamero, E.; Ponce, E., *Symbolic Computation and Bifurcations Methods*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose, B. de Dier & A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Kluwer, pp. 105-122 (1990).
- [40] Freire, E.; Gamero, E.; Ponce, E.; Franquelo, L.G. *An Algorithm for Symbolic Computation of Center Manifolds*, Symbolic and Algebraic Computation, Lecture Notes in Computer Science, 358, P. Gianni (ed.), pp. 218-230 (1988).
- [41] Freire, E.; Rodríguez Luis, A.J.; Gamero, E.; Ponce, E., *A Case Study for Homoclinic Chaos in an Autonomous Electronic Circuit. A Trip from Takens-Bogdanov to Hopf-Šil'nikov*, Physica D, vol. 1-4, pp. 230-253 (1993).
- [42] Friedman, M., *Numerical Analysis and Accurate Computation of Heteroclinic Orbits in the Case of Center Manifolds*, J. Dyn. Diff. Eqs., n. 5, pp. 59-87 (1993).
- [43] Friedman, M.J.; Doedel, E.J., *Numerical Computation and Continuation of Invariant Manifolds Connecting Fixed Points*, SIAM J. Numer. Anal., n. 28, pp. 789-808 (1991).
- [44] Friedman, M.J.; Doedel, E.J., *Computational Methods for Global Analysis of Homoclinic and Heteroclinic Orbits: A Case Study*, J. Dyn. Diff. Eqs., n. 5, pp. 37-57 (1993).

- [45] Gamero, E., *Computación Simbólica y Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1990).
- [46] Gaspard, P., *Tangences Homoclines dans les Systèmes Dynamiques Dissipatifs. Chaos et Structure Fractale de Bifurcations*, Thèse, Université Libre de Bruxelles (1987).
- [47] Glendinning, P., *Stability, Instability and Chaos: an Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*, Cambridge Text in Applied Mathematics, Cambridge University Press (1994).
- [48] Golubitsky, M.; Schaeffer, D.G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, vol. I*, Appl. Math. Sci. Series, vol. 51, Springer-Verlag (1985).
- [49] Guckenheimer, J., *Global Bifurcations in Simple Models of a Chemical Reactor*, Lectures in Applied Mathematics, vol. 24, pp. 163–174 (1986).
- [50] Guckenheimer, J., *Multiple Bifurcation Problems for Chemical Reactors*, Physica 20D, pp. 1–20 (1986).
- [51] Guckenheimer, J.; Holmes, P. J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Appl. Math. Sci. Series, vol. 42, Springer-Verlag (1983).
- [52] Guckenheimer, J.; Kim, S., *dstool: A Dynamical System Toolkit with an Interactive Graphical Interface*, Center for Applied Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York (1992).
- [53] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley (1973).
- [54] Hassard, B.; Jiang, K., *Unfolding a Point of Degenerate Hopf Bifurcation in an Enzyme-Catalyzed Reaction Model*, SIAM J. Math. Anal., vol. 23, n. 5, pp. 1291–1304 (1992).

- [55] Hassard, B.; Jiang, K., *Degenerate Hopf Bifurcation and Isolas of Periodic Solutions in an Enzyme-Catalyzed Reaction Model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, n. 177, pp. 170–189 (1993).
- [56] Ilyashenko, Y.S., *Local Dynamics and Nonlocal Bifurcations*, NATO ASI Series, Series C, D. Schlomiuk (ed.), vol. 408, pp. 279–319 (1992).
- [57] Holodniok, M.; Kubíček, M., *Continuation of Periodic Solutions in Ordinary Differential Equations Numerical Algorithm and Application to Lorenz Model*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. D. Mittelmann, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 181–194 (1984).
- [58] Jansen, W.; Feudel, U., *CANDYS/QA – A Software System for Qualitative Analysis of the Behaviour of the Solutions of Nonlinear Dynamical Systems*, Systems Analysis and Simulation, A. Sydow *et alii* (eds.), Akademik Verlag, Berlin (1988).
- [59] Jepson, A.D.; Keller, H.B., *Steady State and Periodic Solution paths: Their Bifurcations and Computations*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. D. Mittelmann, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser (1984).
- [60] Joyal, P., *Generalized Hopf Bifurcation and its Dual Generalized Homoclinic Bifurcation*, SIAM J. Appl. Math., vol. 48, 3, pp. 481–496 (1988).
- [61] Joyal, P., *The Cusp of Order  $N$* , Journal of Differential Equations, n. 88, pp. 1–14 (1990).
- [62] Joyal, R.; Rousseau, C., *Saddle Quantities and Applications*, Journal of Differential Equations. n. 78, pp. 374–399 (1989).
- [63] Kaas-Petersen, C., *Path-User's Guide*, CNLS, University of Leeds (1987).

- [64] Keller, H.B., *Numerical Solution of Bifurcations and Nonlinear Eigenvalue Problems*, Applications of Bifurcation Theory, P. H. Rabinowith (ed.), Academic Press, pp. 359–384 (1977).
- [65] Kernevez, J.P.; Doedel, E.; Duban, M.C.; Hervagault, J.F.; Joly, G.; Thomas, D., *Spatio-temporal Organization in Immobilized Enzyme Systems*, preprint.
- [66] Kernevez, J.P.; Doedel, E.; Thomas, D., *Mathematical Modeling of Immobilized Enzyme Systems*, preprint.
- [67] Khibnik, A., *LINLBF: A Program for Continuation and Bifurcation Analysis of Equilibria up to Codimension Three*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose *et alii* (eds.), NATO ASI Series, Series C, vol. 313, Kluwer, pp. 283–296 (1990).
- [68] Kokubu, H.; Nishiura, Y.; Oka, H., *Heteroclinic and Homoclinic Bifurcations in Bistable Reaction Diffusion Systems*, Journal of Differential Equations, vol. 86, n. 2, pp. 260–341 (1990).
- [69] Kubíček, M.; Holodniok, M., *Numerical Determination of Bifurcation Points in Steady State and Periodic Solutions—Numerical Algorithms and Examples*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. D. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 247–270 (1984).
- [70] Kubíček, M.; Marek, M., *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*, Springer, New York (1983).
- [71] Kuznetsov, Yu.A., *Computation of Invariant Manifold Bifurcation*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose, B. de Dier, A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Series C, vol. 313, Kluwer, Dordrecht, pp. 183–195 (1990).

- [72] Kuznetsov, Yu.A., *Numerical Analysis of the Orientability of Homoclinic Trajectories*, International Series of Numerical Mathematics, R. Seydel *et alii* (eds.), vol. 97, Birkhäuser, pp. 237–242 (1991).
- [73] Madan, R.N. (ed.), *Chua's Circuit: a Paradigm for Chaos*, Series B, vol. 1, World Scientific (1993).
- [74] Mardešić, P., *Le Déploiement Versel du Cusp d'ordre  $n$* , C.R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, pp. 1235–1239 (1992).
- [75] Matsumoto, T., *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-31, 12, pp. 1055–1058 (1984).
- [76] Matsumoto, T.; Chua, L.O.; Komuro, M., *The Double Scroll*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-32, 8, pp. 797–818 (1985).
- [77] Mittelman, H.D., *Continuation near Symmetry-Breaking Bifurcation Points*, Numerical Methods for Bifurcations Problems, T. Küpper, H. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 319–334 (1984).
- [78] Moore, *The Numerical Treatment of Non-Trivial Bifurcation Point*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., vol. 2 (6), pp. 441–472 (1980).
- [79] Mourtada, A. *Cyclicité Finie des Vecteurs du Plan. Mise Sous Forme Normale*, Bifurcations of Planar Vector Fields, Lecture Notes in Math., J.-P. Francoise & R. Roussarie (eds.), 1455, pp. 272–314 (1989).
- [80] Murray, J.D., *A Pre-pattern Formation Mechanism for Animal Coat Markings*, J. Theor. Biol., n. 88, pp. 161–199 (1981).
- [81] Perko, L.M., *Rotated Vector Fields and the Global Behavior of Limit Cycles for a Class of Quadratic Systems in the Plane*, Journal of Differential Equations, n. 18, pp. 63–86 (1975).

- [82] Pizarro, L.; Freire, E.; Rodríguez Luis, A., *Numerical Continuation of Several Kinds of Degenerated Homoclinic Orbits*, a aparecer en los proceedings de EQUADIFF95, Lisboa (1995).
- [83] Pizarro, L.; Freire, E.; Rodríguez Luis, A., *Bifurcaciones de Codimensión Dos en un modelo Enzimático*, a aparecer en los proceedings de XIV C.E.D.Y.A./ IV C.M.A., Barcelona (1995).
- [84] Rheinboldt, W.C., *Solution Fields of Nonlinear Equations and Continuation Methods*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 17, pp. 221–237 (1980).
- [85] Rheinboldt, W.C., *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*, The University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Science, vol. 7, John Wiley & Sons, Inc. (1986).
- [86] Rheinboldt, W.C.; Burkardt, J.V., *A Locally Parametrized Continuation Process*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 9, n. 2, pp. 215–235 (1983).
- [87] Rheinboldt, W.C.; Roose, D.; Seydel, R., *Aspects of Continuation Software*, D. Roose *et alii* (eds.) Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, Kluwer, Dordrecht, pp. 261–268 (1990).
- [88] Rodríguez Luis, A.J. *Bifurcaciones Multiparamétricas en Osciladores Autónomos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1991).
- [89] Rodríguez Luis, A.J.; Freire, E.; Gamero, E., *On a 3-Parameter Unfolding of a Degenerate Takens–Bogdanov Bifurcation*, Proc. Workshop on Dynamical systems, Barcelona (1990), J. Llibre *et alii* (eds.), World Scientific, to appear.
- [90] Rodríguez Luis, A.; Freire, E.; Gamero, E.; Pizarro, L.; Fernández, F., *Islas de Órbitas Periódicas en un Sistema Electrónico*, a aparecer en los proceedings de XIV C.E.D.Y.A./ IV C.M.A., Barcelona (1995).

- [91] Rodríguez Luis, A.J.; Freire, E.; Ponce, E., *Continuación de Homoclinas y Heteroclinas en Sistemas Autónomos Bi- y Tridimensionales*, Actas del XI CEDYA, Málaga, pp. 489–493 (1989).
- [92] Rodríguez Luis, A.J.; Freire, E.; Ponce, E., *A Method for Homoclinic and Heteroclinic Continuation in Two and Three Dimensions*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose, B. de Dier & A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Kluwer, pp. 197–210 (1990).
- [93] Rodríguez Luis, A.J.; Freire, E.; Ponce, E., *On a Codimension 3 Bifurcation Arising in an Autonomous Electronic Circuit*, Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications, R. Seydel, F. W. Schneider, T. Küpper, H. Troger (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 97, Birkhäuser, pp. 301–306 (1991).
- [94] Roussarie, R., *On the Number of Limit Cycles which Appear by Perturbation of Separatrix Loop of Planar Vector Fields*, Bol. Soc. Bras. Mat., vol. 17, n. 2, pp. 67–101 (1986).
- [95] Rousseau, C., *Universal Unfolding of a Singularity of a Symmetric Vector Field with 7-jet  $C^\infty$ -equivalent to  $y\partial/\partial x + (\pm x^3 \pm x^6 y)\partial/\partial y$* , Lecture Notes in Math., J.-P. Francoise & R. Roussarie (eds.), n. 1455, pp. 334–355 (1989).
- [96] Rousseau, C.; Li, C., *A System with Three Limit Cycles Appearing in a Hopf Bifurcation and Dying in a Homoclinic Bifurcation: The Cusp of Order 4*, Journal of Differential Equations, n. 79, pp. 132–167 (1989).
- [97] Sandstede, B., *Convergence Estimates for the Numerical Approximation of Homoclinic Solutions*, preprint (1995).
- [98] Sandstede, B., *Numerical Computation of Homoclinic Flip-Bifurcations*, preprint (1995).
- [99] Schecter, S., *The Saddle-node Separatrix-loop bifurcation*, SIAM J. Math. Anal., n. 18, pp. 1142–1156 (1987).

- [100] Schechter, S., *Numerical Computation of Saddle–Node Homoclinic Bifurcation Points*, SIAM J. Num. Anal., n. 30, pp. 1155–1178 (1993).
- [101] Schechter, S., *Rate of Convergence of Numerical Approximations to Homoclinic Bifurcation Points*, North Carolina State University (1994).
- [102] Seydel, R., *A Continuation Algorithm with Step Control*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 480–494 (1984).
- [103] Shinriki, R.; Yamamoto, M.; Mori, S., *A Simultaneous Asynchronous Oscillator with Both Nonlinear Positive and Negative Conductances Connected in Series*, IEEE Proc. 67, 2, pp. 322–324 (1979).
- [104] Shinriki, R.; Yamamoto, M.; Mori, S., *Multimode Oscillations in a Modified Van der Pol Oscillator Containing a Positive Nonlinear Conductance*, IEEE Proc. 69, 3, pp. 394–395 (1981).
- [105] Takens, F., *Unfoldings of Certain Singularities of Vectorfields: Generalized Hopf Bifurcations*, Journal of Differential Equations, n. 14, pp. 476–493 (1973).
- [106] Wasserstrom, E., *Root Finding of Polynomials as an Initial Value Problem*, J. Computational Phys. vol. 8, pp. 304–308 (1971).
- [107] Wasserstrom, E., *Numerical Solutions by the Continuation Method*, SIAM Review, vol. 15, n. 1 (1973).
- [108] Werner, B., *Regular Systems for Bifurcation Points with Underlying Symmetries*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 562–574 (1984).

- [109] Zhen, M., *A Numerical Approximation for the Simple Bifurcation Problems*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 10 (3 & 4), pp. 383–400 (1989).