

12 114 34

LBS 654185

Bca

043  
85

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS

# BIFURCACIONES MULTIPARAMÉTRICAS EN OSCILADORES AUTÓNOMOS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARÍA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 196 número 99 del libro  
correspondiente.

Sevilla, 14 de Mayo 1991

El Jefe del Negociado de Tesis,

*Flora Raffette*

ALEJANDRO JOSÉ RODRÍGUEZ LUIS

Tesis Doctoral

Memoria que presenta

D. Alejandro José Rodríguez Luis  
para optar al grado de Doctor  
en Ciencias Físicas.

A handwritten signature in black ink, consisting of stylized initials 'AJR' followed by a long horizontal stroke.

Fdo: Alejandro José Rodríguez Luis

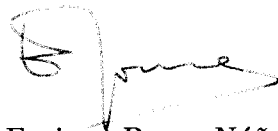
Emilio Freire Macías, catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Sevilla, y Enrique Ponce Núñez, profesor titular del mismo Departamento,

**CERTIFICAN:** Que la presente memoria “Bifurcaciones Multiparamétricas en Osciladores Autónomos”, ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Ciencias Físicas, Alejandro José Rodríguez Luis, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

V° B° : Directores de tesis.



Fdo: Emilio Freire Macías



Fdo: Enrique Ponce Núñez

Sevilla, Mayo de 1991

*A Toñi, Anabel y Alejandro*

*A mis padres*

*A mi familia*



En este apartado, quiero agradecer la ayuda prestada a todas aquellas personas que han hecho posible la realización del trabajo que hay detrás de esta memoria. Mención especial merecen:

El Prof. Dr. D. Emilio Freire Macías, director de esta memoria, que me sugirió el tema de investigación, supo transmitirme su interés y conocimientos en este área, y cuya dedicación ha hecho posible la realización de esta memoria.

El Prof. Dr. D. Enrique Ponce Núñez, que como co-director de la misma, ha contribuido también de forma notable a su realización.

El Prof. Dr. D. Estanislao Gamero Gutiérrez, por su colaboración plena y desinteresada durante todas las fases del trabajo. Algunos aspectos de esta memoria son resultado de fructíferas discusiones en común.

Todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, a los que agradezco los consejos recibidos y el grato ambiente en el que se ha desarrollado el trabajo.

Todas las personas que trabajan en las instalaciones informáticas utilizadas a lo largo de este trabajo (CICA, Centro de Cálculo de la ETSII y Centro de Cálculo del DIESA), por las facilidades concedidas durante las horas que he necesitado sus servicios.

El Prof. Dr. D. José María Quintana, por ayudarme en la confección de varias de las figuras que aparecen a lo largo de esta memoria.

Mi esposa e hijos, y toda mi familia, por todos los ánimos que me han dado y por la paciencia y comprensión mostradas durante los años que ha durado la realización de este trabajo, ayudándome en todo lo que han podido.

# Contenido

<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2 MÉTODOS NUMÉRICOS DE CONTINUACIÓN DE ÓRBITAS PERIÓDICAS Y SUS BIFURCACIONES</b>	<b>6</b>
2.1 Una Introducción a los Métodos de Continuación . . . . .	6
2.2 Continuación y Equilibrios . . . . .	8
2.3 Un Método de Continuación de Órbitas Periódicas y sus Bifurcaciones . . . . .	13
2.3.1 Cálculo de las Derivadas de la Aplicación de Poincaré . . . . .	17
2.3.2 Interpretación Geométrica del Algoritmo . . . . .	21
2.4 Órbitas <i>Canards</i> en el Oscilador de Van der Pol . . . . .	26
2.5 Estudio de un Oscilador de Van der Pol Modificado . . . . .	46
<b>3 MÉTODOS NUMÉRICOS DE CONTINUACIÓN DE ÓRBITAS HOMOCLINAS</b>	<b>59</b>
3.1 Introducción . . . . .	59
3.2 Exposición del Método . . . . .	60
3.3 Diversos <i>Unfoldings</i> de Codimensión Dos . . . . .	73
3.4 Un Sistema con Homoclinas <i>Canards</i> . . . . .	80
3.5 Un Modelo Presa-Depredador . . . . .	90
3.6 Un Sistema con Ondas Viajeras . . . . .	94
3.7 El Sistema de Lorenz . . . . .	102
3.8 Una Clase de Osciladores Forzados . . . . .	108

<b>4 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO Y DE BIFURCACIONES DE UN OSCILADOR ELECTRÓNICO AUTÓNOMO</b>	<b>111</b>
4.1 Introducción . . . . .	111
4.2 Descripción del Modelo . . . . .	112
4.3 Bifurcación de Hopf del Origen . . . . .	116
4.4 Bifurcación de Takens–Bogdanov . . . . .	122
4.5 Bifurcaciones Homoclinas . . . . .	135
4.5.1 Órbitas Principales Asimétricas . . . . .	136
4.5.2 Órbitas Principales Simétricas . . . . .	147
4.5.3 Atractores Caóticos . . . . .	162
4.5.4 Órbitas de Pequeña Amplitud de Periodo Triple . . . . .	177
4.5.5 Órbitas de Gran Amplitud de Periodo Impar . . . . .	183
<b>5 UN CASO DE BIFURCACIÓN DE CODIMENSIÓN TRES EN SISTEMAS PLANOS CON PARTE LI- NEAL NILPOTENTE</b>	<b>203</b>
5.1 Introducción . . . . .	203
5.2 Análisis Local . . . . .	208
5.3 Análisis Semiglobal . . . . .	217
5.4 Estudio de la Función $R(e)$ . . . . .	225
5.5 Continuación del Análisis Semiglobal . . . . .	240
5.6 Estudio de la Función $R^*(t)$ . . . . .	247
5.7 Conjuntos de Bifurcaciones . . . . .	255
5.8 Aplicación a un Sistema Electrónico Autónomo . . . . .	274
5.9 Aplicación a un Sistema Mecánico . . . . .	284
<b>6 CONCLUSIONES</b>	<b>291</b>
<b>Referencias</b>	<b>295</b>

# Capítulo I

## INTRODUCCIÓN

Un primer objetivo de este trabajo, que se encuentra en su origen y motivación, es el estudio del comportamiento dinámico de ciertos osciladores autónomos, más concretamente en el campo de los circuitos electrónicos no lineales. La aplicación de las ideas y técnicas propias de la teoría geométrica y de bifurcaciones de sistemas dinámicos, hace que se susciten diversos problemas y cuestiones que son de interés general y cuya resolución constituye un segundo y fundamental objetivo.

Entre las hipótesis de partida se encuentra el hecho de que mediante el análisis de las posibles bifurcaciones es factible obtener información valiosa sobre el comportamiento dinámico, muchas veces de una gran complejidad, de sistemas concretos. La teoría de bifurcaciones constituye, pues, una herramienta básica a utilizar en el estudio de sistemas dinámicos.

Entre los temas esenciales que consideraremos se encuentran cuestiones sobre oscilaciones periódicas: su existencia, número y variedad de formas así como su aparición y desaparición y cambios de estabilidad en sistemas parametrizados (conducta de bifurcación). La riqueza y complejidad del comportamiento periódico se pone de manifiesto ya en sistemas planos (vid. capítulos II, III y V) y se nos muestra plenamente en sistemas tridimensionales, sobre todo en relación con las conductas homoclinas (vid. capítulos II, III y IV).

En el capítulo II de esta memoria nos planteamos el desarrollo de los adecua-

dos métodos numéricos para la descripción del comportamiento periódico. En concreto, se pretende disponer de técnicas numéricas para la detección de órbitas periódicas (*demostración* de su existencia por ordenador) y su continuación en sistemas parametrizados. Además, estamos interesados en la obtención de conjuntos de bifurcaciones en sistemas biparamétricos, es decir, curvas de bifurcaciones de codimensión uno de órbitas periódicas en el plano de parámetros.

En los osciladores eléctricos y mecánicos se observan, con frecuencia, comportamientos aperiódicos: son los llamados atractores caóticos. De hecho, tales osciladores constituyen un vivero de ejemplos de dinámica caótica (vid. capítulo IV). Un tipo de atractor caótico surge en relación con la existencia de ciertas órbitas homoclinas: es el llamado atractor tipo Shil'nikov. Por ello, nos planteamos en el capítulo III el diseño de procedimientos numéricos para la detección de órbitas homoclinas (*prueba* de su existencia por ordenador). En sistemas biparamétricos se persigue la obtención de las posibles curvas de conexiones homoclinas en el plano de parámetros.

El estudio de bifurcaciones de una familia parametrizada de sistemas dinámicos se centra sobre aquellos valores de los parámetros donde se producen pérdidas de estabilidad estructural. Los problemas son locales y globales. En el primer caso se trata de la pérdida de hiperbolicidad (degeneración lineal) de equilibrios u órbitas periódicas que da origen a fenómenos de bifurcación local (inestabilidad estructural local). Un ejemplo del segundo caso lo constituye la característica de inestabilidad estructural de las órbitas homoclinas, que está en la base de variados y complejos fenómenos de bifurcación global.

A lo largo de esta memoria aparece, de forma recurrente, el procedimiento siguiente de aplicación de la teoría de bifurcación local. Se buscan las situaciones de mayor degeneración de los elementos críticos (preferentemente equilibrios, ocasionalmente órbitas periódicas) en los sistemas parametrizados. Para ello se comienzan analizando las degeneraciones posibles en las partes lineales (no hiperbolicidad), con lo que se consigue especificar un primer conjunto de parámetros de bifurcación de entre los parámetros propios del sistema. El es-

tudio de las correspondientes conductas de bifurcación se lleva a cabo mediante técnicas analíticas tales como variedad de centros y formas normales. Con tal fin se precisa el concurso de algoritmos de computación simbólica desarrollados en trabajos anteriores.

El cálculo de las formas normales nos proporciona información sobre aquellos términos no lineales esenciales para la conducta de bifurcación. Nos planteamos, en este punto, analizar las posibles degeneraciones en dichas partes no lineales. Con ello, pondremos en evidencia el papel como parámetros de bifurcación de nuevos parámetros del sistema.

En síntesis, habremos encontrado situaciones altamente degeneradas y se pretende describir las correspondientes bifurcaciones multiparamétricas. Dichas situaciones de degeneración actúan como centros organizadores de la dinámica, y así, mediante el adecuado análisis local, podremos detectar una amplia variedad de comportamientos dinámicos y de bifurcaciones. En unos casos se tratará de bifurcaciones bien conocidas y estudiadas (por ejemplo, bifurcaciones de Hopf degeneradas, vid. capítulos II y IV), y en otros de nuevas conductas de bifurcación cuyo estudio llevaremos a cabo (vid. en el capítulo V un caso de bifurcación triparamétrica de Takens–Bogdanov con degeneración adicional en los términos no lineales). Una característica de las bifurcaciones locales multiparamétricas de elementos críticos es que su estudio proporciona información sobre comportamientos dinámicos de mayor complejidad y sus bifurcaciones, e incluso sobre fenómenos globales. Así, por ejemplo, en la bifurcación triparamétrica de un equilibrio antes citada y considerada en el capítulo V, nos encontramos con diversidad de comportamientos periódicos que presentan bifurcaciones silla–nodo y cúspide, así como con conexiones homoclinas de diferentes tipos y sus correspondientes conductas de bifurcación.

Los resultados del análisis local antes citado serán válidos, en principio, en un entorno del elemento crítico en el espacio de órbitas y en un entorno de los valores críticos de bifurcación en el espacio de parámetros. Sin embargo, de la observación experimental o la simulación numérica se deduce, con frecuencia, que

los resultados del estudio local se conservan *lejos* de las situaciones de bifurcación (los entornos predichos por la teoría tienen en todo caso un tamaño concreto, aun cuando no sea conocido, en general, a priori).

Nos planteamos, pues, *extender* los resultados locales mediante el uso de los métodos numéricos de continuación desarrollados en los capítulos II y III. La valiosa información obtenida en el estudio de bifurcación local será el adecuado punto de arranque en la aplicación de las técnicas numéricas: aproximaciones locales bien en el espacio de órbitas (por ejemplo, condiciones iniciales aproximadas de órbitas periódicas u homoclinas), bien en el espacio de parámetros (por ejemplo, aproximaciones a curvas de bifurcación). Se trata, por tanto, de una buena muestra de la conjunción de técnicas analíticas y numéricas en el estudio de sistemas dinámicos (vid. capítulos IV y V).

A lo largo de esta memoria diversos sistemas osciladores autónomos son estudiados, aplicando las técnicas analíticas y numéricas desarrolladas. Específicamente, el capítulo IV se dedica al estudio del comportamiento dinámico (periódico y caótico) de un sistema electrónico autónomo; tal estudio ha originado, en buena medida, el trabajo desarrollado en esta memoria y ha suscitado una gran parte de los problemas y cuestiones generales abordados.

La característica no lineal de algunos de los elementos que configuran el circuito electrónico antes citado, es determinante de su dinámica. El carácter no lineal, no sólo aparece en el modelado de fenómenos naturales en los más diversos campos de la ciencia y la técnica, sino que puede ser utilizado con provecho, en el diseño; claro está, si suponemos conocidas sus consecuencias.

Una variada gama de técnicas ha sido utilizada para la descripción de la dinámica del sistema electrónico en el capítulo IV. Aparecen diversas bifurcaciones locales de codimensión dos y tres, cuyos resultados son utilizados como guía para los métodos numéricos de continuación, que nos permiten dar una primera visión global de la dinámica, tanto en el espacio de estados (tridimensional) como en el de parámetros.

Respecto a los atractores caóticos observados en la simulación numérica, se

pretende describirlos y comprender su dinámica relacionando su aparición con la ocurrencia de órbitas homoclinas de diversos tipos. Dichas conexiones homoclinas dan lugar, al variar los parámetros del sistema electrónico, a conductas de bifurcación variadas y complejas. En particular, las técnicas numéricas desarrolladas en capítulos anteriores nos permitirán describir la rica diversidad de comportamientos periódicos y sus bifurcaciones (silla-nodo, duplicación de periodo, pitchfork, ...); es a través de sucesiones de tales bifurcaciones que parecen surgir los atractores caóticos.



## Capítulo II

# MÉTODOS NUMÉRICOS DE CONTINUACIÓN DE ÓRBITAS PERIÓDICAS Y SUS BIFURCACIONES

### 2.1 Una Introducción a los Métodos de Continuación

Los métodos de continuación constituyen una herramienta de especial interés en la determinación numérica de ciertos diagramas que aportan valiosa información para el análisis cualitativo y de bifurcaciones de sistemas dinámicos.

Como haremos uso frecuente de implementaciones específicas de estos métodos en éste y en sucesivos capítulos de la memoria, creemos oportuno incluir primero un breve repaso a las ideas que hay involucradas en su utilización.

Los métodos de continuación, inicialmente desarrollados como una vía alternativa en la resolución de sistemas no lineales de ecuaciones, encajan de forma natural en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos parametrizados. Para su introducción, recurrimos a un contexto algo más general. Supóngase que se quiere resolver el sistema (no lineal en general)

$$F(x) = 0 \tag{2.1.1}$$

con  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suficientemente diferenciable que posee al menos una solución

$\bar{x}$ .

Para ello, formulamos un problema más general que engloba al anterior como caso particular. En concreto, se define una función de homotopía  $H(x, t)$  suficientemente diferenciable de forma tal que, por ejemplo:

$$H(\cdot, 0) = H_0 \text{ (prefijada), } H(\cdot, 1) = F(\cdot)$$

y tal que la elección de  $H_0$  permita identificar fácilmente la solución del sistema

$$H_0(x) = 0 \tag{2.1.2}$$

Así, si elegimos (se trata de una posibilidad entre otras),

$$H_0(x) = F(x) - F(x_0)$$

$$H(x, t) = F(x) + (t - 1)F(x_0), \quad x_0 \text{ arbitrario,}$$

es obvio que el problema (2.1.2) tiene a  $x_0$  como solución.

Ahora, la idea clave estriba en diseñar un mecanismo que permita pasar de la solución conocida  $x_0$  de  $H(x, 0) = 0$  a la solución requerida de (2.1.1) o, equivalentemente, de  $H(x, 1) = 0$ , mediante la variación de  $t$  en  $[0, 1]$ .

Si admitimos la existencia de una curva en  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  que une el punto de partida  $(x_0, 0)$  con  $(\bar{x}, 1)$  que suponemos además con una parametrización diferenciable  $(x(t), t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , se tendrá que  $H(x(t), t) = 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  y podremos, siguiendo a Davidenko [23], derivar respecto de  $t$  la condición anterior y obtener una ecuación diferencial que tiene a dicha curva como solución. Para hallar la solución bastará recorrer el camino necesario hasta  $\bar{x}$  resolviendo el problema de valor inicial de tipo implícito

$$D_x H(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} + D_t H(x(t), t) = 0$$

$$x(0) = x_0$$

que deberá integrarse hasta  $t = 1$ .

Como se ve, con las hipótesis anteriores, y usando métodos estandarizados de integración de ecuaciones diferenciales es posible localizar las soluciones del problema planteado. Observamos, circunstancialmente, que una de las características

del método es su versatilidad, como lo prueba el hecho de que seleccionando adecuadamente la función  $H$ , pueden plantearse algoritmos que permiten abordar de forma no clásica la resolución de problemas variados: el cálculo de las raíces de un polinomio (vid. Wasserstrom [104]), problemas de contorno (vid. Wasserstrom [105]), o la inversión de matrices (vid. Chao & Saeks [17]).

Con una técnica similar, son abordables ciertos problemas de interés en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos, si bien, en dicho caso, la introducción del parámetro  $t$ , a través de la función  $H$ , se hace innecesaria. Para fijar ideas, analizaremos ahora como puede ser utilizado un enfoque similar en el análisis de la dinámica de equilibrios de un sistema dinámico. Posteriormente se abordarán otras aplicaciones de los métodos de continuación, siempre en el contexto de los sistemas dinámicos. Para un tratamiento de ámbito más general, puede consultarse el texto de Allgower & Georg [1].

## 2.2 Continuación y Equilibrios

Frecuentemente, en el análisis de sistemas dinámicos, aparecen involucrados ciertos parámetros que responden a la naturaleza del problema. En otros casos, su presencia proviene de que ciertas magnitudes son susceptibles de ser modificadas e interesa conocer si existe diferencia cualitativa en el comportamiento del modelo al variar dichos parámetros. Su uso es también natural cuando se desea explicar ciertos fenómenos mediante la teoría de bifurcaciones. Sea como fuere es usual enfrentarse a sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

donde  $f$  es una función no lineal en general,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  ( $k = 1$  o  $2$  en los casos más simples).

Es de gran interés, como un primer estadio en el análisis, obtener la distribución de los diferentes equilibrios del sistema con relación a los diferentes valores de  $\lambda$ . Así, si para diferentes valores del parámetro es diverso el número de equilibrios del sistema, conviene delimitar los rangos de valores en los que no

se altera dicho número. Por tanto, necesitamos resolver para diferentes valores de  $\lambda$  la ecuación

$$f(x, \lambda) = 0$$

Hasta hace no mucho tiempo, la manera tradicional de abordar el problema era fijar en cada caso los diferentes valores de  $\lambda$  e intentar localizar todas las soluciones del correspondiente sistema para el vector de estados  $x$ . Aunque el problema es bien conocido, se comprende que el hecho de ser no lineal supone ciertas limitaciones que obligan a resolver la correspondiente ecuación con gran cuidado, evitando dejar sin calcular alguna de las múltiples soluciones que eventualmente pueden estar presentes.

Modernamente se ha comprobado que es mucho más rentable abordar el análisis de la dependencia de los equilibrios respecto a los parámetros usando las ideas inherentes a los métodos de continuación. Para ello basta exigir diferenciabilidad a  $f$  y la existencia de una parametrización (al menos local), también diferenciable, del lugar geométrico de los equilibrios. Asumiendo que ello es así en un entorno de un determinado par  $(x_0, \lambda_0)$  de valores solución podríamos escribir

$$f(x(t), \lambda(t)) = 0$$

y, derivando respecto a  $t$ , llegaríamos a

$$D_x f \frac{dx}{dt} + D_\lambda f \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

que puede escribirse de forma algo más compacta como

$$\left[ D_x f \mid D_\lambda f \right] \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\lambda}{dt} \end{bmatrix} = 0$$

Suponiendo que  $k = 1$ , el sistema anterior, junto con alguna condición de normalización del vector tangente, constituye pues un problema de valor inicial de tipo implícito cuya resolución permitiría *seguir* la curva de equilibrios (o más exactamente de pares  $(x, \lambda)$ ) en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , lo que constituye el objetivo deseado (en el

contexto de sistemas dinámicos suele denominarse a la representación geométrica de dicha curva *diagrama de bifurcaciones*).

Para la integración numérica a efectuar, no tiene demasiado sentido usar métodos sofisticados cuando se conoce —como es nuestro caso— la función  $f$  y, por tanto, en todo punto  $(x, \lambda)$  de la curva debe cumplirse  $f(x, \lambda) = 0$ . Por ello es usual la adopción de un esquema predictor–corrector usando el método de Euler y corrigiendo mediante el método de Newton o alguna de sus variantes.

Como condición de normalización, entre otras alternativas (vid. Keller [63]) puede exigirse que

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 1 = 0$$

(en palabras: que el vector tangente tenga norma euclídea igual a la unidad), de manera que el parámetro  $t$  pasa a jugar el papel de la longitud de arco recorrida. La parametrización resultante tiene la virtualidad de ser regular en los llamados puntos *límite* (conocidos también como *turning points*) para los cuales se tiene que

$$\dim (\text{Ker} (D_x f)) = 1, \quad D_\lambda f \notin \text{Rango} (D_x f)$$

En los puntos en que la matriz  $D_x f$  es singular, con  $\dim (\text{Ker} (D_x f)) > 1$  —o cuando siendo la unidad falla la segunda condición anterior—, es de esperar, a la luz del teorema de la función implícita, que estemos en presencia de puntos de ramificación donde intersectan dos o más curvas (o de otros puntos no regulares). Consiguientemente, la integración numérica del problema planteará dificultades en las proximidades de dichos puntos. Varias estrategias han sido propuestas para *regularizar* el problema en alguno de estos casos, en especial para la aproximación numérica de los puntos de ramificación simple. Los trabajos de Beyn [7], Jepson y Keller [59], Moore [74], Mittelman [73], Werner [107] (vid. también las referencias que contienen) deben ser citados en este contexto. Básicamente, la idea más común es construir un sistema ampliado cuyas soluciones se corresponden con los puntos en que es singular la matriz  $D_x f$  y que, sin embargo, resulta ser un sistema

regular. En esta línea el reciente trabajo de Zhen [109] parece ser especialmente prometedor, al rebajar considerablemente el coste computacional.

Centrándonos ahora en la implementación de estas ideas, son numerosos los códigos de continuación existentes; describir cada uno de ellos escapa a nuestros objetivos. Un buen número de ellos son referenciados en el trabajo de Rheinboldt, Roose & Seydel [82], pero aún existen otros como los elaborados por Jansen & Feudel [58] (CANDYS/QA), Khibnik [64] (LINLBF) y por el activo grupo de Kubíček [67], [57].

Para cumplir los objetivos de esta memoria, hemos utilizado la versión 6.0 de PITCON, que es de los más ampliamente documentados (Rheinboldt [79], Rheinboldt & Burkardt [81], Rheinboldt [80]) al que hemos incorporado en cada caso rutinas específicamente desarrolladas para cada problema de continuación de nuestro interés. Se trata de un método de continuación básico (en el sentido de estar formulado exclusivamente para resolver sistemas no lineales de ecuaciones) que lleva incorporado un sofisticado mecanismo de control de la longitud del paso de continuación (Den Heijer & Rheinboldt [24]). Para la condición de normalización antes mencionada, PITCON usa la siguiente estrategia. Supongamos que estamos situados en un punto  $(x^k, \lambda^k)$  que satisface  $f(x, \lambda) = 0$  y que nos planteamos calcular un nuevo punto  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  sobre la curva.

Sea  $j$  (índice IPM en el código) el índice de la coordenada de mayor valor absoluto del vector tangente en el paso anterior; se plantea entonces el sistema de ecuaciones:

$$\left[ \begin{array}{c|c} D_x f(x^k, \lambda^k) & D_\lambda f(x^k, \lambda^k) \\ \hline & e_j^T \end{array} \right] x_t^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de manera que  $x_t^k \in \mathbb{R}^{n+1}$  representa el vector tangente, incluyendo en la última coordenada a la derivada de  $\lambda$ , al que se le impone (cfr. última línea del sistema) que su coordenada  $j$  sea la unidad.

Una vez obtenido, se normaliza para que su norma euclídea sea la unidad (imponiendo así que la parametrización que implícitamente se usa tenga el significado de longitud de arco recorrida sobre la curva). A continuación se reevaluaría  $j$  para el paso siguiente.

En cuanto a la predicción, PITCON usa el método de Euler. Así, suponiendo definido  $h$ , longitud del paso a dar, que se calcula mediante la información (también la relativa a la convergencia) de los pasos previos de continuación, como nuevo punto se ensaya

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} + h x_t^k$$

que constituye el punto de partida para un proceso de corrección tipo Newton, mediante la iteración de la expresión siguiente:

$$\left[ \begin{array}{c|c} D_x f(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) & D_\lambda f(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \\ \hline e_j^T & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta x^{k+1} \\ \Delta \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde se efectúa, en cada paso, la actualización:

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x^{k+1} \\ \Delta \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

Se observa pues, que PITCON efectúa las correcciones siguiendo un hiperplano paralelo a uno de los coordenados (precisamente, sobre el que se mantiene constante la coordenada que se modifica más rápidamente en las proximidades del punto en cuestión).

Otra observación de interés es constatar que este esquema hace que, localmente, podamos identificar el parámetro de continuación  $t$  con una de las coordenadas (tanto del vector de estados  $x$  como  $\lambda$ ) lo que permite que contemos con un mecanismo adaptativo de variación del parámetro de continuación, usando en cada caso el más conveniente desde el punto de vista de la resolución numérica de los sistemas lineales involucrados. Además, queda garantizada la ausencia de dificultades para sobrepasar los posibles puntos límite de la curva.

Usando este código de continuación como base, pasamos en lo que sigue a describir con cierto detalle como puede formularse un método de continuación de órbitas periódicas, tema central de este capítulo.

## 2.3 Un Método de Continuación de Órbitas Periódicas y sus Bifurcaciones

El problema de continuación de órbitas periódicas ya ha sido abordado previamente por varios autores. Para ello se hace preciso definir una función cuyos ceros se correspondan con las soluciones periódicas del sistema. Básicamente son dos los enfoques seguidos en este tema; si bien ambos pueden formularse de forma equivalente, unos prefieren plantear el problema de acuerdo con el establecimiento de un problema de contorno, mientras que otros utilizan la llamada aplicación de Poincaré para cubrir el mismo objetivo.

Como ya se ha indicado, nuestro trabajo se concretará ahora en definir, para la continuación de órbitas periódicas y de sus bifurcaciones, una función apropiada que utilizaremos conjuntamente con el programa de continuación PITCON, ya reseñado.

Recurriremos para ello a la aplicación de Poincaré, que proporciona el camino más natural y geométrico de los dos enfoques posibles, además de permitir un tratamiento homogéneo tanto para la órbita periódica principal (por ejemplo, la que *nace* de una bifurcación de Hopf) como para posibles órbitas periódicas aparecidas en posteriores bifurcaciones secundarias.

Siguiendo este mismo acercamiento al problema, goza de cierta difusión el código de Kaas-Petersen denominado PATH [62] aunque, por desgracia, no bien documentado. Por ello, nos extenderemos algo más en este apartado describiendo con mayor detalle la línea de razonamiento seguida. Otros autores usan —como se ha mencionado— una formulación propia de problemas de valores de contorno. Quizá el código más difundido en esta línea sea el llamado AUTO de Doedel [26], pero también entran aquí el método propuesto por Kubíček & Holodniok [66] y la formulación de Seydel [91]. En todos los casos citados se acostumbra a normalizar el periodo de las órbitas y se formula un problema de contorno en el intervalo  $[0, 1]$ , introduciendo una incógnita auxiliar correspondiente a dicho periodo.

Consideraremos desde el primer momento sistemas autónomos con dos pará-



metros; esto permite abordar con un mismo tratamiento el problema de la continuación de órbitas periódicas y el de sus eventuales bifurcaciones como se verá a continuación.

Sea, pues, el sistema de ecuaciones diferenciales biparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3.1)$$

donde  $f$  es suficientemente diferenciable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ . Sea  $F(y, \mu, t)$  el flujo solución del sistema (2.3.1) con  $F(y, \mu, 0) = y$ . Admitiremos, para este sistema (2.3.1), la existencia de una familia —dependiente de  $\mu$  y para un cierto rango de valores de dicho vector de parámetros— de soluciones periódicas  $g(t, \mu)$  con periodo  $T(\mu)$ ; es decir, si  $x = g(0, \mu)$  se tendrá que

$$g(t, \mu) = F(x, \mu, t) \quad \text{con} \quad g(t, \mu) = g(t + T(\mu), \mu), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Supongamos ahora un valor prefijado  $\mu^0$ , en el rango anterior, de forma que  $x^0 = g(0, \mu^0)$  y elijamos  $S$  un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que sea transversal en  $x^0$  a  $g(t, \mu^0)$  (sobre su elección más adecuada hablaremos más abajo). En estas condiciones, podemos afirmar (cfr. Hartman [52]), exigiendo hiperbolicidad a la órbita periódica, que existe un entorno  $U \times L$  de  $(x^0, \mu^0)$  en  $S \times \mathbb{R}^2$  y una función única  $\tau : U \times L \rightarrow \mathbb{R}^+$  diferenciable, que cumple:

- (i)  $F(y, \mu, \tau(y, \mu)) \in S, \quad \forall (y, \mu) \in U \times L;$
- (ii)  $\tau(x^0, \mu^0) = T(\mu^0)$

La función  $\tau$  proporcionaría así, para los puntos  $y \in U$ , y dependiendo del valor del vector de parámetros, el tiempo que invierte la correspondiente órbita en volver al hiperplano  $S$  en las proximidades de  $x^0$  (también llamado por algunos autores *tiempo de vuelo*). Para esos puntos queda definida entonces una familia de aplicaciones de Poincaré  $P(y, \mu)$  sin más que asociarles como imagen el punto de retorno a  $S$ . Es decir:

$$P : U \times L \rightarrow S \quad \text{con} \quad (y, \mu) \rightarrow P(y, \mu) = F(y, \mu, \tau(y, \mu)) .$$

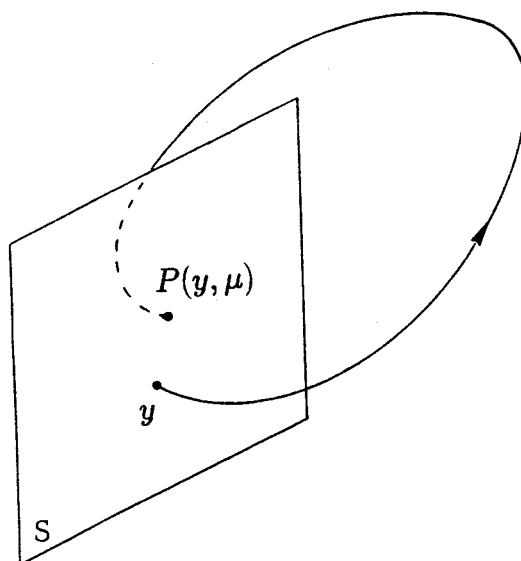


Figura 2.3.1: Construcción de la aplicación de Poincaré.

Obtener el conjunto de soluciones periódicas es equivalente pues a resolver (vid. figura 2.3.1) la ecuación

$$Q(y, \mu) \equiv P(y, \mu) - y = 0$$

es decir, hallar los ceros de la función *residual*  $Q$ . Aunque tanto  $F$  como  $\tau$  son desconocidos *a priori*, la incorporación de una rutina de integración de la órbita que parte de  $y$  hasta completar una *vuelta* permite pasar a PITCON el valor de  $Q$  correspondiente a cada par  $(y, \mu)$ . Nótese que la ecuación anterior define una variedad bidimensional en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2$  sobre la que podríamos definir *camino*s concretos de especial interés. Para ello bastaría, por ejemplo, definir una relación diferenciable entre las dos componentes del vector de parámetros y añadir dicha relación a la ecuación anterior: tendríamos entonces un problema de continuación que permitiría seguir la evolución de la órbita sobre una determinada curva en el plano de parámetros. Aquí quedaría englobado como un caso trivial el de continuación uniparamétrica de órbitas periódicas sin más que considerar una ecuación adicional del tipo  $\mu_i = \text{cte}$ ,  $i = 1$  o  $2$ .

Pero también admite esta formulación una extensión inmediata a la conti-

nuación de curvas de bifurcación en el plano de parámetros, como veremos más adelante.

Surge en cualquier caso la cuestión de calcular las derivadas de la función  $P$ , no sólo para la resolución numérica por continuación del problema (advertamos que ello no sería gran obstáculo pues PITCON cuenta con la opción de aproximación numérica de la derivada) sino, sobre todo, para contar en todo momento con la información más precisa posible acerca de la estabilidad de la órbita y facilitar la detección de eventuales bifurcaciones, ya que los autovalores de  $D_y P$  se corresponden con los multiplicadores característicos de las soluciones periódicas. Por ello nos detendremos en como calcular tanto  $D_y P$  como  $D_\mu P$ , que haremos básicamente mediante integración de las llamadas ecuaciones variacionales.

Antes de ello, y supuesta conocida  $D_y P$ , hacemos las siguientes observaciones, volviendo a considerar la ecuación  $Q(y, \mu) = 0$ . Como se indicó, puede añadirse una ecuación adicional que defina una curva de interés sobre la variedad bidimensional aludida. Si, por ejemplo, consideramos el problema de continuación

$$\begin{aligned} P(y, \mu) - y &= 0 \\ \det \{D_y P + I\} &= 0 \end{aligned}$$

entre sus soluciones estarían las órbitas periódicas con un multiplicador característico igual a  $-1$ , es decir, podríamos seguir sobre el plano de parámetros las curvas donde eventualmente se producirán bifurcaciones de tipo *flip* (duplicación de periodo). Alternativamente, el problema  $(2n)$ -dimensional

$$\begin{aligned} P(y, \mu) - y &= 0 \\ (D_y P + I)v &= 0 \\ \phi \cdot v - 1 &= 0, \phi \text{ prefijado} \end{aligned}$$

también serviría para el mismo propósito. Está asegurada [59] la regularidad de las soluciones de dicho problema y, por tanto, la de la primera alternativa (especialmente cómoda para el caso  $n = 3$ ; en general, resulta muy superior desde el punto de vista numérico la considerada en segundo lugar).

Limitándonos al caso de menor dimensión, y en relación con las aplicaciones que abordaremos en esta memoria, el problema de continuación:

$$\begin{aligned} P(y, \mu) - y &= 0 \\ \det \{D_y P - I\} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

nos permite seguir genéricamente las curvas de bifurcación silla-nodo de forma regular.

No ocurre así para otras bifurcaciones que también se corresponden con un multiplicador de la órbita igual a +1 como es el caso de las bifurcaciones pitchfork o transcricas, en las que el sistema (2.3.2) es claramente no regular. Se hace necesario entonces recurrir a sistemas de mayor dimensión, que no abordaremos aquí.

Antes de pasar al problema del cálculo de las derivadas de  $P$ , queremos resaltar el importante hecho de que, mediante iteración de la aplicación  $P$ , es posible seguir tanto las órbitas subarmónicas como sus posibles curvas de bifurcación siguiendo estrictamente el mismo esquema.

### 2.3.1 Cálculo de las Derivadas de la Aplicación de Poincaré

Frente a otras hipótesis más restrictivas, que consideran exclusivamente planos paralelos a los coordenados, supondremos que el hiperplano transversal  $S$  viene definido por:  $S = \{y \in \mathbb{R}^n : p \cdot y = q, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad q \in \mathbb{R}\}$ , en el que tomaremos un sistema de coordenadas  $y_s \in \mathbb{R}^{n-1}$  con  $y_s = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$  donde  $|p_k| \geq |p_i|, \quad i = 1, \dots, n$ .

La aplicación  $P$  puede ser descompuesta de la forma

$$(y_s, \mu) \xrightarrow{H} (y, \mu) \xrightarrow{G} (y, \mu, \tau(y, \mu)) \xrightarrow{F} F(y, \mu, \tau) \xrightarrow{E} F_s(y, \mu, \tau)$$

donde los sucesivos espacios de trabajo son

$$U \times L \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow S$$

y se cumple que  $P = E \circ F \circ G \circ H$  ( $H$  y  $E$  representan la inyección y proyección canónicas respectivamente). Se tendrá pues que  $DP = DE \circ DF \circ DG \circ DH$ , donde

$$DE = \left[ \begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right]$$

$$DF = \left[ D_x F \mid D_\mu F \mid D_t F \right]$$

$$DG = \left[ \begin{array}{c} I_{n+2} \\ \hline D_x \tau \mid D_\mu \tau \end{array} \right]$$

$$DH = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{k-1} & 0 & \\ \hline \frac{p_1}{p_k} \dots \frac{p_{k-1}}{p_k} & \frac{p_{k+1}}{p_k} \dots \frac{p_n}{p_k} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} & \\ \hline & 0 & I_2 \end{array} \right]$$

Nuestro objetivo es calcular  $D_{(y_s, \mu)} P = [D_j P_i \mid D_\mu P_i]$  con  $k \neq i, j = 1, \dots, n$ . Para ello consideremos la aplicación  $P^* = F \circ G \circ H$  y su derivada  $D_{(y_s, \mu)} P^* = [D_j P_i^* \mid D_\mu P_i^*]$  que contiene una fila adicional (la correspondiente a  $i = k$ ). Observamos, dada la estructura de  $DE$ , que pueden identificarse las entradas de las dos matrices para  $i \neq k$ . Además, por la propia definición de  $P^*$ , su imagen debe estar en  $S$  con lo que podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^n p_i P_i^* = q$$

Si derivamos respecto a una variable espacial de índice  $j$ , obtenemos la relación

$$\sum_{i=1}^n p_i D_j P_i^* = 0, \quad j \neq k \tag{2.3.3}$$

y haciéndolo respecto a uno de los parámetros  $\mu_l$  se llega análogamente a

$$\sum_{i=1}^n p_i D_{\mu_l} P_i^* = 0, \quad l = 1, 2 \tag{2.3.4}$$

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene para  $P^*$  la expresión:

$$D_{(y,\mu)}P^* = [D_{(x,\mu)}F + D_tF D_{(x,\mu)}\tau] DH$$

donde suponemos que las derivadas intermedias son convenientemente evaluadas en las imágenes de cada aplicación elemental que interviene en la descomposición utilizada.

Claramente tenemos, a partir de la estructura de  $DH$ , que para  $j \neq k$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$D_j P_i^* = D_j F_i - \frac{p_j}{p_k} D_k F_i + D_t F_i \left( D_j \tau - \frac{p_j}{p_k} D_k \tau \right)$$

y para  $l = 1, 2$ :

$$D_{\mu_l} P_i^* = D_{\mu_l} F_i + D_t F_i D_{\mu_l} \tau$$

Si definimos  $\tau^* = \tau \circ H$ , la expresión entre paréntesis anterior no es otra cosa que  $D_j \tau^*$  para  $j \neq k$ ; teniendo en cuenta el último bloque de la diagonal de  $DH$ , en lo sucesivo tomaremos también  $D_{\mu_l} \tau^* = D_{\mu_l} \tau$ ,  $l = 1, 2$ .

Ya que  $F$  representa una solución del sistema definido por  $f$  y en consecuencia

$$\frac{d}{dt} F(y, \mu, \tau(y, \mu)) = f(F(y, \mu, \tau), \mu)$$

podemos identificar  $D_t F_i$  con  $f_i(F(y, \mu, \tau), \mu)$ , de manera que supuestas conocidas las variacionales  $D_{(x,\mu)}F$  y el campo  $f$  en el punto de retorno, y recurriendo a las relaciones (2.3.3) y (2.3.4) es posible el cálculo de  $D\tau^*$ , pues:

$$\sum_{i=1}^n p_i \left( D_j F_i - \frac{p_j}{p_k} D_k F_i + f_i D_j \tau^* \right) = 0, \quad j \neq k,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i (D_{\mu_l} F_i + f_i D_{\mu_l} \tau^*) = 0, \quad l = 1, 2,$$

con lo que

$$D_j \tau^* = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{p_i}{p_k} D_k F_i - D_j F_i \right)}{\sum_{i=1}^n p_i f_i}, \quad j \neq k$$

$$D_{\mu_l} \tau^* = - \frac{\sum_{i=1}^n p_i D_{\mu_l} F_i}{\sum_{i=1}^n p_i f_i}, \quad l = 1, 2$$

Para el cálculo de las variacionales, partiendo de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{D_{(x,\mu)}F(y, \mu, t)\} &= D_{(x,\mu)}\left\{\frac{d}{dt}F(y, \mu, t)\right\} = D_{(x,\mu)}f(F, \mu) = \\ &= [D_x f(F, \mu) \ D_x F(y, \mu, t) \mid D_x f(F, \mu) \ D_\mu F(y, \mu, t) + D_\mu f(F, \mu)] \end{aligned}$$

y tomando

$$\begin{aligned} A(t) &= D_{(x,\mu)}F(y, \mu, t) \\ B(t) &= D_x f(F(y, \mu, t), \mu) \\ C(t) &= [O \mid D_\mu f(F(y, \mu, t), \mu)] \end{aligned}$$

podemos plantear el sistema matricial de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}A(t) = B(t) A(t) + C(t)$$

que deberemos integrar, conjuntamente con la órbita, hasta llegar al punto de retorno. Dado que  $F(y, \mu, 0) = y$ ,  $A(0) = [I_n \mid O]$  proporciona la matriz de las condiciones iniciales para la ecuación diferencial matricial anterior.

Para conseguir que la integración, tanto de la órbita como de las variacionales finalice exactamente sobre  $S$ , se hará necesario disponer de un esquema de interpolación. Nuestra experiencia con el algoritmo nos indica que es suficiente una interpolación lineal, pues no se obtienen mejoras sustanciales usando interpolación de orden superior con el esquema de Neville.

En general, se necesita también incorporar al código una rutina de cálculo de autovalores (EISPACK, IMSL, NAG, ...). La dimensión de las aplicaciones abordadas en esta memoria nos exime de ello temporalmente.

Nada impide considerar variable la sección transversal al flujo. En particular, si suponemos obtenida ya una solución  $(x^k, \mu^k)$ , es decir, una órbita periódica que cumple las condiciones correspondientes al problema de continuación formulado, puede optimizarse el rendimiento del método eligiendo como nueva sección  $S^k$  precisamente la ortogonal a la dirección del campo que contiene a  $x^k$ , para hacer lo propio una vez obtenido el siguiente punto de continuación  $(x^{k+1}, \mu^{k+1})$ . Esto

supone elegir  $p_i = f_i(x^k, \mu^k)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , lo que junto con condiciones de normalización, conlleva además simplificaciones en los cálculos necesarios para pasar de  $DF$  a  $DP$  (en particular, los denominadores de las expresiones de  $D\tau^*$  podrían suprimirse, si tomamos  $\|p\|_2 = 1$ ).

### 2.3.2 Interpretación Geométrica del Algoritmo

Resumiendo el estudio anterior, se concluye pues que para  $k \neq i, j = 1, \dots, n$  obtenemos

$$D_j P_i = D_j P_i^* = D_j F_i - \frac{p_j}{p_k} D_k F_i - \frac{f_i}{\sum_{l=1}^n p_l f_l} \sum_{l=1}^n p_l \left( D_j F_l - \frac{p_j}{p_k} D_k F_l \right)$$

de forma que mediante una serie de operaciones sobre  $D_x F$  puede obtenerse  $D_{y_s} P$ , que representa una matriz con una fila y columna menos (precisamente las de índice  $k$ ).

La expresión anterior nos da idea de que el conjunto de operaciones necesarias para pasar de  $DF$  a  $DP$  pueden realizarse *in situ* sobre la matriz  $DF$ . En efecto, bastaría efectuar en dicha matriz la siguiente cadena de transformaciones:

- 1.- Para cada columna  $j \neq k$ , y para cada elemento correspondiente a la fila  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sustraer  $\frac{p_j}{p_k} D_k F_i$  y almacenar el resultado en la posición  $(i, j)$ . Con esto, la columna  $k$  queda inalterada mientras que los restantes elementos de la matriz contendrán la expresión  $D_j F_i - \frac{p_j}{p_k} D_k F_i$  (si se trata del elemento de la fila  $i$  y columna  $j$ ).
- 2.- Construir el último sumatorio de la expresión, que es idéntico para todos los elementos de una misma columna. Ya que, al final, no necesitaremos la fila de índice  $k$  resulta natural aprovechar esa fila para almacenar el resultado. Se trata pues de multiplicar todos los elementos de cada columna por el correspondiente  $p_i$  y almacenar su suma en la posición  $k$  de dicha columna —no es necesario efectuar el proceso para la columna  $k$ ; si, de todos modos, se lleva a cabo, quedará  $\sum_{l=1}^n p_l D_k F_l$  en la posición  $(k, k)$ —.



3.- Finalmente, para cada columna con índice  $j \neq k$ , sustraer a cada elemento en la fila  $i \neq k$ , el producto de  $\frac{f_i}{\sum_{l=1}^n p_l f_l}$  por el elemento en la misma columna y en la fila  $k$ .

Investiguemos ahora qué matriz representa a las transformaciones lineales correspondientes a cada uno de los tres pasos anteriores. Centrándonos en el primer paso, concluimos que para realizarlo bastaría postmultiplicar por la matriz

$$M_1 = \left[ \begin{array}{ccc|c|ccc} I_{k-1} & & & & & & \\ \hline -\frac{p_1}{p_k} & \cdots & -\frac{p_{k-1}}{p_k} & 1 & -\frac{p_{k+1}}{p_k} & \cdots & -\frac{p_n}{p_k} \\ \hline & & & & & & I_{n-k} \end{array} \right]$$

Para el segundo paso, podemos premultiplicar por la matriz

$$M_2 = \left[ \begin{array}{ccc|c|ccc} I_{k-1} & & & & & & \\ \hline p_1 & \cdots & p_{k-1} & p_k & p_{k+1} & \cdots & p_n \\ \hline & & & & & & I_{n-k} \end{array} \right]$$

de forma que si volvemos a premultiplicar por la matriz

$$M_3 = \left[ \begin{array}{ccc|c|ccc} & & & & & & \\ & & & & -\frac{f_1}{\sum p_l f_l} & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & -\frac{f_{k-1}}{\sum p_l f_l} & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ \hline & & & & -\frac{f_{k+1}}{\sum p_l f_l} & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & -\frac{f_n}{\sum p_l f_l} & & \\ \hline & & & & & & I_{n-k} \end{array} \right]$$

que se corresponde con el tercer paso, queda completado el proceso.

Si en  $M_1$  pusiéramos  $\frac{1}{p_k}$  como elemento en la posición  $(k, k)$ , en lugar de la unidad, conseguiríamos algo no casual:  $M_1 M_2 = I$ . Haciéndolo así, resulta que el par de transformaciones  $M_1, M_2$  se correspondería con un cambio de base en

$\mathbb{R}^n$ . Ello nos interesa y, por analogía, supondremos además que en  $M_3$  hemos colocado  $\frac{1}{\sum p_l f_l}$  en la posición análoga, en lugar de la unidad. El hacer dichos retoques a las matrices anteriores conlleva algunas modificaciones que no alteran el objetivo final, a saber:

- En el paso 1, la columna  $k$  queda dividida por  $p_k$ ;
- Al completar el paso 2, en la posición  $(k, k)$  quedará  $\sum_{l=1}^n \frac{p_l D_k F_l}{p_k}$  (ver observación final en la descripción anterior de dicho paso);
- Aunque no era necesario,  $M_3$  alterará también tanto la fila como la columna  $k$ ; en particular, en la columna  $k$  quedará

$$\frac{D_k F_i}{p_k} - \frac{f_i}{\sum p_l f_l} \sum_{l=1}^n \frac{p_l D_k F_l}{p_k}, \quad i \neq k$$

con

$$\frac{\sum p_l D_k F_l}{p_k \sum p_l f_l}$$

en la posición  $(k, k)$ . Y en la fila  $k$  tendremos para  $j \neq k$ ,

$$\frac{1}{\sum_{l=1}^n p_l f_l} \sum_{l=1}^n p_l \left( D_j F_l - \frac{p_j}{p_k} D_k F_l \right)$$

Resumimos lo anterior, notando que si eliminamos la fila y columna  $k$  del producto

$$M_3 M_2 D_x F M_1$$

obtenemos la  $D_{y_s} P$  buscada. Puesto que con la corrección efectuada  $M_2 = M_1^{-1}$ , podemos escribir

$$D_{y_s} P = M_3 M_1^{-1} D_x F M_1 \Big]_{i,j \neq k} = (M_1 M_3^{-1})^{-1} D_x F (M_1 M_3^{-1}) M_3 \Big]_{i,j \neq k}$$

de forma que, salvo por la necesaria introducción de  $M_3$  a la derecha del producto para restablecer la igualdad, el algoritmo llevaría a cabo un cambio de base en  $\mathbb{R}^n$  con matriz de paso  $N = M_1 M_3^{-1}$ . Nótese que, dada la estructura de  $M_3$  la postmultiplicación sólo afectaría a la columna  $k$ , que a nuestros efectos es irrelevante.

Es inmediato concluir, a la vista de

$$M_3^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_{k-1} \end{array} & \\ \hline & \sum p_i f_i & \\ \hline & \begin{array}{c} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_n \end{array} & I_{n-k} \end{array} \right]$$

que

$$N = \left[ \begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & & \\ \hline \frac{p_1}{p_k} \dots \frac{p_{k-1}}{p_k} & \frac{1}{p_k} & \frac{p_{k+1}}{p_k} \dots \frac{p_n}{p_k} \\ \hline & & I_{n-k} \end{array} \right] \cdot M_3^{-1} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_{k-1} \end{array} & \\ \hline \frac{p_1}{p_k} \dots \frac{p_{k-1}}{p_k} & f_k & \frac{p_{k+1}}{p_k} \dots \frac{p_n}{p_k} \\ \hline & \begin{array}{c} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_n \end{array} & I_{n-k} \end{array} \right]$$

Obsérvese que si la sección  $S$  fuese no sólo transversal al campo sino estrictamente ortogonal —con lo que podríamos considerar  $p_i = f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ — conseguiríamos que la matriz resultante tuviera la columna  $k$  ortogonal a las restantes. En un intento de aproximarnos a la situación de condiciones óptimas desde el punto de vista de estabilidad numérica (correspondiente a las matrices ortogonales), ésta es otra razón más para dotar al algoritmo de un mecanismo de adaptación de la sección precisamente en ese sentido.

Interpretaremos ahora estos resultados a la luz de la teoría de Floquet (cfr. Hartman [52]). Supongamos, prescindiendo por el momento de la existencia de los parámetros, que  $x^0$  es un punto fijo de la aplicación de Poincaré y que, por tanto,

la correspondiente órbita  $g(t)$  con  $x^0 = g(0)$  es periódica. Se tendrá entonces para todo punto  $x$  de dicha órbita que  $F(x, T) = x$ , si  $T = \tau(x^0)$  es el periodo orbital. Equivalentemente:

$$F(g(t), T) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y si derivamos respecto a  $t$  dicha ecuación, obtenemos:

$$D_x F(g(t), T) g'(t) = g'(t) = f(g(t))$$

En particular, para  $t = 0$  resulta la igualdad

$$D_x F(x^0, T) f(x^0) = f(x^0)$$

que indica que la matriz  $D_x F$  en un punto fijo siempre posee  $f(x^0)$  como autovector correspondiente al autovalor 1. Es precisamente dicha matriz el punto de partida del algoritmo. Por otra parte los restantes  $n - 1$  autovalores coinciden con los multiplicadores característicos de la órbita en cuestión que determinan, teniendo en cuenta su situación con respecto al círculo unidad del plano complejo, la estabilidad de la misma.

Al realizar el cambio de base correspondiente a la matriz de paso  $N$  anterior, que en su columna  $k$ -ésima está constituida por  $f(x)$ , y supuesto que estamos ya en presencia de una órbita periódica, queda garantizado que la columna  $k$ , ya en la nueva base, de la matriz  $A(T)$  será el vector  $e_k$ . En efecto, el nuevo  $k$ -ésimo vector básico que es  $f$  se transforma en él mismo mediante la aplicación representada por  $A(T)$ . Así, al eliminar la columna y la fila  $k$ -ésimas de la nueva matriz se obtiene una matriz  $(n - 1) \times (n - 1)$  cuyos autovalores son los multiplicadores característicos de la órbita y que —a la luz de los resultados anteriores— no es otra cosa que la derivada de la aplicación de Poincaré.

El esquema anterior ha sido implementado utilizando la subrutina DGEAR de la biblioteca IMSL como método de integración básico, y PITCON 6.0 [80] como método de continuación, y su eficacia quedará patente a la vista de las aplicaciones con las que concluiremos este capítulo y las que aparecen a lo largo del resto de esta memoria.

## 2.4 Órbitas *Canards* en el Oscilador de Van der Pol

Hemos creído interesante usar nuestro algoritmo en el estudio de un fenómeno que aparece en los sistemas singularmente perturbados: las órbitas periódicas tipo *canard* (pato, *duck* en la literatura inglesa).

Los patos son ciertas soluciones de ecuaciones con un pequeño parámetro que se estudian en la teoría de las oscilaciones de relajación. Estas soluciones se encontraron por primera vez en la ecuación de van der Pol y se le dio el nombre de pato porque su forma recuerda a la de dicha ave [14], [102].

Su descubrimiento se produjo usando técnicas del análisis no-estándar, siendo quizás su aplicación más sorprendente. De esta forma muchos de los resultados teóricos que aparecen en la literatura sobre el fenómeno *canard* se prueban de forma más cómoda con las técnicas del citado análisis no-estándar.

Centraremos nuestro estudio en el sistema

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= \mu - x\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

donde  $f(x) = x^3/3 - x$ , que para  $\mu = 0$ , coincide con la ecuación inicialmente propuesta por van der Pol. El sistema (2.4.1) aparece al estudiar la dinámica del circuito de la figura 2.4.1 que consta de un condensador de capacidad  $C$ , una bobina de inductancia  $L$ , una fuente de continua de tensión  $V_{cc}$  y una conductancia no lineal de característica tensión-intensidad  $g(V_c)$ .

La aplicación de las leyes de Kirchhoff, tomando como variables de estado a la intensidad  $i_L$  en la bobina y a la tensión  $V_c$  en la conductancia, nos lleva a

$$\begin{aligned}C \frac{dV_c}{dt} &= -g(V_c) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_c + V_{cc}\end{aligned}$$

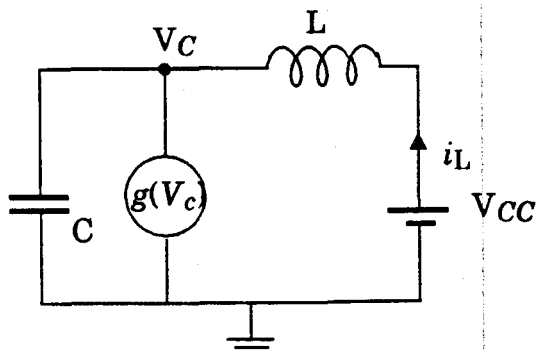


Figura 2.4.1: Esquema del circuito eléctrico.

donde supondremos  $g(V_c) = -a_1 V_c + a_3 V_c^3$ ,  $a_1, a_3 > 0$ . Mediante el siguiente escalado

$$\tau = \omega t, \quad V_c = V_0 x, \quad i_L = I_0 y$$

llegamos al sistema (2.4.1) sin más que elegir

$$\omega = \frac{1}{La_1}, \quad V_0 = \left(\frac{a_1}{3a_3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad I_0 = a_1 \left(\frac{a_1}{3a_3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde los parámetros vienen dados por

$$\varepsilon = \frac{C}{La_1^2}, \quad \mu = \left(\frac{3a_3}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}} V_{cc}$$

Estudiemos pues el sistema bidimensional

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \\ \dot{y} &= \mu - x \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

En este sistema la variable  $y$  es lenta, es decir,  $\dot{y}$  se mantiene finito para todos los puntos finitos del plano. La variable  $x$  es rápida, esto es,  $\dot{x}$  toma valores *infinitamente grandes* en algunos puntos finitos del plano.

En nuestro caso, la variedad lenta vendrá dada por  $y = f(x)$ , es decir, por los puntos en los que la derivada con respecto al tiempo de la variable rápida se anula. El sistema tiene un único equilibrio en  $(x_0, y_0) = (\mu, \mu^3/3 - \mu)$ , siendo la matriz de la linealización en dicho punto

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}(1 - \mu^2) & \frac{1}{\varepsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El análisis del polinomio característico

$$\lambda^2 - \left(\frac{1 - \mu^2}{\varepsilon}\right)\lambda + \frac{1}{\varepsilon} = 0$$

nos conduce a los autovalores

$$\lambda = \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \mu^2 \pm \sqrt{(1 - \mu^2)^2 - 4\varepsilon}\right)$$

lo que nos indica que para  $\mu_c = \pm 1$  ( $\varepsilon > 0$ ) se da una bifurcación de Hopf siendo la frecuencia de las órbitas que nacen en ella  $\omega_0 = 1/\sqrt{\varepsilon}$ . De hecho, podemos centrarnos en el caso  $\mu_c = +1$  pues el correspondiente a  $\mu_c = -1$  es análogo dada la simetría del sistema (2.4.2) al cambio de signo en  $x, y, \mu$ .

Para conocer el carácter de dicha bifurcación comenzamos trasladando el equilibrio al origen mediante el cambio

$$\bar{x} = x - \mu \quad \bar{y} = y - \frac{1}{3}\mu^3 + \mu$$

que nos transforma el sistema (2.4.2) en

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-2\mu_c\xi - \xi^2)\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_0^2(\xi + \mu_c)\bar{x}^2 - \frac{1}{3}\omega_0^2\bar{x}^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde se tomó a  $\mu$  como parámetro de bifurcación y ahora escribimos  $\xi = \mu - \mu_c$  y usamos que  $\mu_c^2 = 1$ ,  $\omega_0^2 = 1/\varepsilon$ .

Mediante el cambio

$$\bar{x} = \omega x^*, \quad \bar{y} = -y^*$$

obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\xi + 2\mu_c)\xi\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -\omega_0^3(\xi + \mu_c)x^{*2} - \frac{1}{3}\omega_0^4x^{*3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el estudio de este sistema recurrimos a la ampliación del mismo añadiéndole la ecuación trivial  $\dot{\xi} = 0$ . Estamos ya en condiciones de aplicarle el algoritmo descrito en [35] para el cálculo de la forma normal de sistemas con parte lineal del tipo interacción Hopf-cero.

Dicho algoritmo nos proporciona la siguiente forma normal hasta grado tres, en coordenadas polares (hemos supuesto  $\mu_c = 1$ ),

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\omega_0^2 \xi r - \frac{1}{8}\omega_0^4 r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega_0 - \frac{1}{2}\omega_0^3 \xi^2 - \frac{1}{6}\omega_0^5 r^2 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

A la vista de estas ecuaciones deducimos que se satisface la condición de transversalidad, es decir, que los autovalores atraviesan el eje imaginario con velocidad no nula:

$$\alpha'(\xi = 0) = -\omega_0^2 < 0.$$

En consecuencia es suficiente estudiar la forma normal (2.4.3) para el valor crítico  $\xi = 0$ . Puesto que el primer coeficiente de la bifurcación de Hopf es en este caso

$$a_1 = -\frac{\omega_0^4}{8} < 0$$

nos encontramos ante una bifurcación de Hopf no degenerada supercrítica. Así, para  $\mu < 1$ ,  $|\mu - 1|$  pequeño, se garantiza la existencia de un ciclo límite estable, cuya amplitud vendrá determinada en primera aproximación por  $|\mu - 1|^{1/2}$ .

Antes de mostrar los resultados numéricos obtenidos, realizamos un estudio analítico —sin recurrir al análisis no-estándar— de la dinámica local (correspondiente a los ciclos límite de la bifurcación de Hopf en  $\mu = 1$ ) que predice un



crecimiento ilimitado en amplitud y periodo para un valor de  $\mu$  que, en primera aproximación, satisface  $\mu \approx 1 - \varepsilon/8$ .

Sigamos, en primer lugar, una idea desarrollada por Baer y Erneux [6] que consiste en buscar una singularidad en la frecuencia de los ciclos límite. Para ello partimos de la forma normal (2.4.3) y usamos las fórmulas obtenidas en [53]. Puesto que el periodo de la órbita que nace en la bifurcación de Hopf viene dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \tau_2\delta^2 + O(\delta^4))$$

la frecuencia valdrá

$$\omega = \omega_0(1 - \tau_2\delta^2 + O(\delta^4))$$

donde

$$\tau_2 = \frac{-1}{\omega_0}(b_1 + \mu_2\omega'(0)), \quad \mu_2 = \frac{-a_1}{\alpha'(0)}, \quad \delta^2 = \frac{\xi}{\mu_2} + O(\xi^2)$$

siendo  $\alpha'(0)$  y  $\omega'(0)$  respectivamente las derivadas de la parte real y de la imaginaria de los autovalores de la matriz  $J(x_0, y_0)$  para  $\xi = 0$  y  $a_1$  y  $b_1$  son los primeros coeficientes de la forma normal de Poincaré de la bifurcación de Hopf para el valor crítico del parámetro  $\xi$ . En nuestro caso, si identificamos en (2.4.3), resulta:

$$\alpha'(0) = -\omega_0^2, \quad \omega'(0) = 0, \quad a_1 = -\frac{\omega_0^4}{8}, \quad b_1 = -\frac{\omega_0^5}{6}$$

con lo que

$$\omega \approx \omega_0(1 + \frac{4}{3}\omega_0^2\xi)$$

Por tanto, en primera aproximación, la frecuencia  $\omega$  se anula si  $\xi = -\frac{3}{4\omega_0^2}$ , que en términos de los parámetros  $\mu$  y  $\varepsilon$  se corresponde con

$$\mu \approx 1 - \frac{3}{4}\varepsilon$$

El análisis efectuado a la forma normal nos indica el valor del parámetro para el que el periodo crece indefinidamente. Sin embargo, este valor no es el correcto para el primer coeficiente del desarrollo

$$\mu - 1 \approx \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 \tag{2.4.4}$$

pues sus coeficientes, determinados mediante técnicas de análisis no-estándar, resultan ser ([111])

$$\alpha_1 = -\frac{1}{8}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{32}, \quad \alpha_3 = -\frac{173}{1024}.$$

con lo que la idea anterior se muestra insuficiente para nuestro propósito.

Veamos como llegar, sin necesidad de recurrir a las técnicas del análisis no-estándar, al valor correcto de  $\alpha_1$ . Para ello volvemos a considerar el sistema (2.4.2). Haciendo el cambio

$$\bar{x} = x - 1, \quad \bar{y} = y + \frac{2}{3}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \lambda = \mu - 1$$

el sistema anterior queda, (la ' indica  $\frac{d}{d\tau}$ )

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{y} - \bar{x}^2 - \frac{1}{3}\bar{x}^3 \\ \bar{y}' &= \varepsilon(\lambda - \bar{x}) \end{aligned}$$

Mediante el escalado

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sqrt{\varepsilon}X & t^* &= \sqrt{\varepsilon}\tau \\ \bar{y} &= \varepsilon Y & \lambda &= \varepsilon\nu \end{aligned}$$

obtenemos a su vez

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt^*} &= Y - X^2 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}X^3 \\ \frac{dY}{dt^*} &= -X + \sqrt{\varepsilon}\nu \end{aligned}$$

sistema que aparece como la suma de un campo vectorial que trataremos de integrar y una pequeña perturbación.

Estudiemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt^*} &= Y - X^2 \\ \frac{dY}{dt^*} &= -X \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Su integración es equivalente a la de

$$X + (Y - X^2)\frac{dY}{dX} = 0$$

que si bien no es diferencial exacta, admite como factor integrante  $\phi(y) = Ke^{-2Y}$ , con lo que la función

$$H(X, Y) = \frac{K}{2}e^{-2Y} \left[ X^2 - \left( Y + \frac{1}{2} \right) \right] + C'$$

es una integral primera del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt^*} &= Ke^{-2Y}(Y - X^2) \\ \frac{dY}{dt^*} &= -Ke^{-2Y}X \end{aligned}$$

Por tanto, hemos obtenido un sistema hamiltoniano topológicamente equivalente al sistema (2.4.5) (pues resulta de multiplicar éste por  $Ke^{-2Y}$ ,  $K \neq 0$ ). Su estudio, pues, nos dará el retrato de fases de ambos sistemas. Tomando  $K = 2$ ,  $C' = 0$ ; nos queda

$$H(X, Y) = e^{-2Y} \left[ X^2 - \left( Y + \frac{1}{2} \right) \right]$$

Las órbitas de este sistema hamiltoniano vendrán dadas por

$$e^{-2Y} \left[ X^2 - \left( Y + \frac{1}{2} \right) \right] = C$$

(vid. figura 2.4.2).

Calculamos ahora el rango de variación de  $C$  estudiando los extremos de  $H(X, Y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

El único punto crítico que obtenemos al resolver  $\text{grad } H(X, Y) = (0, 0)$  es el  $(0, 0)$ , y como la matriz hessiana en dicho punto es definida positiva estamos ante un mínimo relativo. Puesto que la función es de clase  $C^\infty$ , el origen, único punto crítico de  $H(X, Y)$ , será un mínimo absoluto en el que la función toma el valor  $H(0, 0) = -1/2$ .

Comprobar que  $H(X, Y) \geq -1/2$  es, por otra parte, evidente pues esa desigualdad resulta ser equivalente a

$$X^2 + \frac{1}{2}e^{2Y} \geq Y + \frac{1}{2}$$

que se verifica trivialmente para todo  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ .

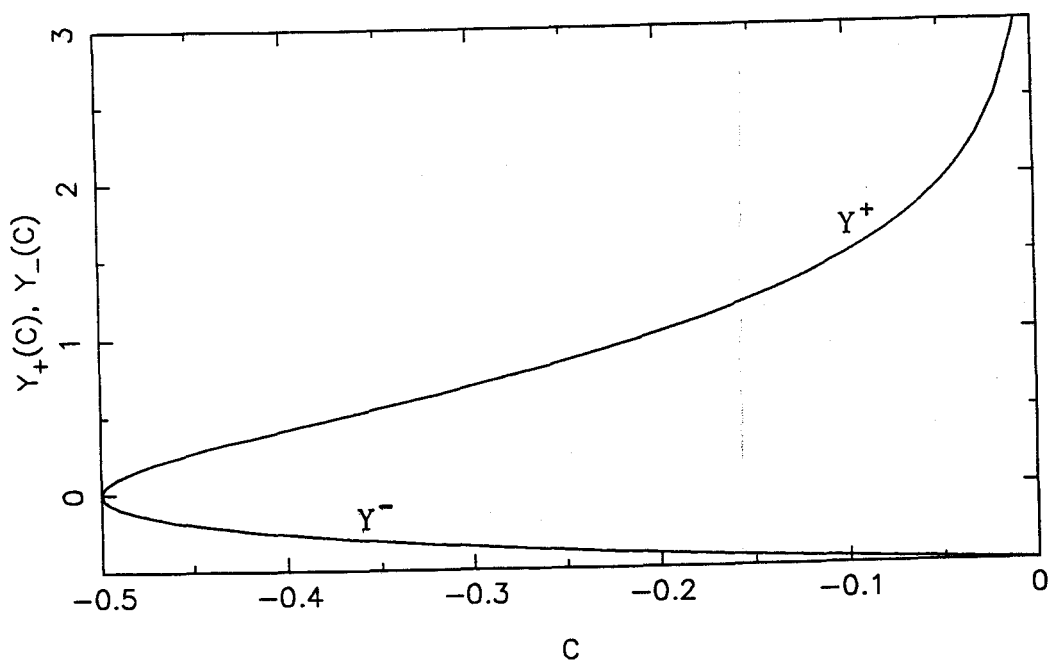
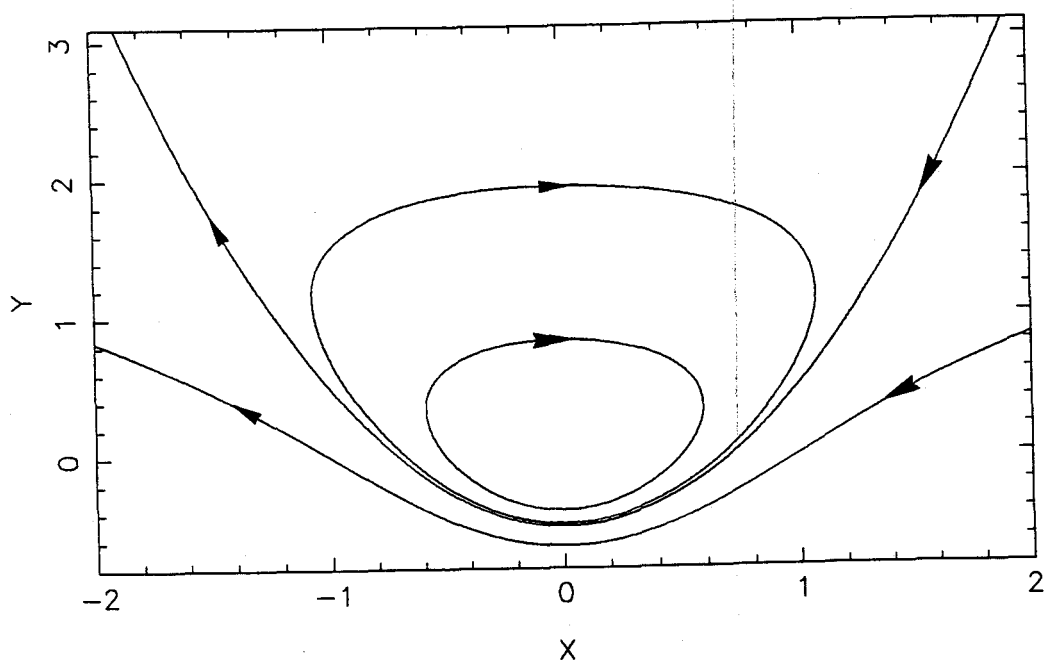


Figura 2.4.2: (a) Órbitas del sistema Hamiltoniano. (b) Representación de  $Y^+$  e  $Y^-$  en función de  $C$ .

Por último, basta verificar que  $H(X, Y)$  no está acotada superiormente (véase, por ejemplo, que  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(X, 0) = +\infty$ ) para poder afirmar que, en nuestro caso,  $C \in [-1/2, +\infty)$ .

Comprobaremos ahora que en el caso  $C \geq 0$  las órbitas no son periódicas y que estas sólo existen cuando  $C \in (-1/2, 0)$ .

En primer lugar, para  $C = 0$  es inmediato verificar que la órbita no es periódica pues viene determinada por  $Y = X^2 - 1/2$ . Para estudiar el caso  $C \neq 0$ , obtenemos la abscisa en función de la ordenada

$$X^2 = Ce^{2Y} + Y + \frac{1}{2} = f(Y)$$

lo que nos indica que las órbitas son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Por tanto, existirán órbitas periódicas en el caso en que  $X$  se anule para dos valores de  $Y$ , es decir, cuando  $f(Y) = 0$  tenga dos soluciones y las órbitas no serán periódicas si  $f(Y)$  sólo tiene una raíz.

Para  $C > 0$  es inmediato comprobar que

$$\lim_{Y \rightarrow -\infty} f(Y) = -\infty, \quad \lim_{Y \rightarrow +\infty} f(Y) = +\infty$$

que junto con el hecho de que

$$f'(Y) = 2Ce^{2Y} + 1 > 0$$

nos garantiza que  $f(Y)$  tiene una y sólo una raíz.

Para  $C \in (-1/2, 0)$ , puesto que

$$\lim_{Y \rightarrow -\infty} f(Y) = -\infty, \quad \lim_{Y \rightarrow +\infty} f(Y) = -\infty$$

unido a que  $f(Y)$  presenta un máximo absoluto en

$$Y_{max} = -\frac{1}{2} \log(-2C)$$

para el que  $f(Y_{max}) = Y_{max} > 0$  ( $f'(Y) > 0$  si  $Y < Y_{max}$ ,  $f'(Y) < 0$  si  $Y > Y_{max}$ ) nos conduce a que existen dos y sólo dos raíces de  $f(Y)$  que denotaremos por

$Y^+$  e  $Y^-$ , de forma que para cada  $C \in (-1/2, 0)$ , la órbita periódica tiene sus ordenadas en el intervalo  $Y \in [Y^-, Y^+]$  (vid. figura 2.4.2).

Así pues, para cada  $C \in (-1/2, 0)$  obtenemos una órbita periódica  $\gamma^C$ . Cuando pasamos al sistema perturbado la preservación de esta órbita periódica vendrá determinada por aquellos valores de  $\nu$  que anulen la siguiente función [2]:

$$M(C, \nu) = \oint_{\gamma^C} (g_2, -g_1) \cdot d\vec{\alpha} = - \iint_{\text{intr}\gamma^C} \left( -\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y} \right) dXdY$$

donde

$$g(X, Y) = \left( -\frac{2}{3}e^{-2Y} X^3, 2e^{-2Y} \nu \right)$$

y la integral de línea de  $g$  a lo largo de  $\gamma^C$  la hemos transformado en una integral doble extendida al interior de  $\gamma^C$  aplicando el teorema de Green. Por tanto,

$$M(C, \nu) = 2 \iint_{\text{intr}\gamma^C} e^{-2Y} (X^2 + 2\nu) dXdY = 0$$

nos lleva a

$$-2\nu = \frac{\iint_{\text{intr}\gamma^C} e^{-2Y} X^2 dXdY}{\iint_{\text{intr}\gamma^C} e^{-2Y} dXdY} = \frac{1}{3} \frac{\int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} X^3(Y) dY}{\int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} X(Y) dY}$$

donde

$$X(Y) = \sqrt{Ce^{2Y} + Y + \frac{1}{2}}$$

Integrando por partes el numerador obtenemos

$$\int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} X^3(Y) dY = \frac{3}{2} \int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} \left( Ce^{2Y} + \frac{1}{2} \right) X(Y) dY$$

donde hemos usado que  $X(Y^+) = X(Y^-) = 0$  y que

$$X^2(Y)X'(Y) = X(Y) \left( Ce^{2Y} + \frac{1}{2} \right)$$

De esta forma, llegamos a

$$-8\nu = \frac{\int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} X(Y) dY + 2C \int_{Y^-}^{Y^+} X(Y) dY}{\int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} X(Y) dY} = \frac{I_1(C) + 2CI_2(C)}{I_1(C)} = R(C)$$

Estamos interesados en determinar el valor de  $\nu$  para  $C \rightarrow 0^-$  pues, en este caso, el periodo y la amplitud de la órbita tienden a infinito según este análisis local.

Por tanto necesitamos calcular  $\lim_{C \rightarrow 0^-} R(C)$ .

**Lema 2.4.1** *En las condiciones anteriores*

$$\lim_{C \rightarrow 0^-} R(C) = 1$$

DEMOSTRACIÓN:

Procederemos viendo que  $I_1(C)$  se mantiene finita —es evidente que es estrictamente positiva— y que  $\lim_{C \rightarrow 0^-} [CI_2(C)] = 0$ .

Para comprobar que  $I_1(C)$  se mantiene finita para  $C \rightarrow 0^-$  la acotamos de la siguiente manera

$$0 < I_1(C) = \int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} \sqrt{Ce^{2Y} + Y + \frac{1}{2}} dY \leq \int_{Y^-}^{Y^+} e^{-2Y} \sqrt{Y + \frac{1}{2}} dY \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2Y} \sqrt{Y + \frac{1}{2}} dY = I_1^*$$

pues

$$\lim_{C \rightarrow 0^-} Y^-(C) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{C \rightarrow 0^-} Y^+(C) = +\infty.$$

En este caso, no sólo es fácil comprobar la convergencia de  $I_1^*$  —por ejemplo, mediante el criterio de comparación por paso al límite para integrales impropias— sino que haciendo el cambio  $Y + \frac{1}{2} = \frac{z}{2}$  se obtiene su valor exacto:

$$I_1^* = \frac{e}{2\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{e}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 0.8517$$

y, por tanto,

$$I_1^* = \lim_{C \rightarrow 0^-} I_1(C) < +\infty$$

Pasamos ahora a demostrar que

$$\lim_{C \rightarrow 0^-} CI_2(C) = 0$$

Como  $I_2(C)$  representa el área comprendida entre la curva  $X(Y)$  y el eje de ordenadas, podemos acotar el valor de  $I_2(C)$  por el área del rectángulo de base  $(Y^+ - Y^-)$  y de altura

$$X(Y_{max}) = \sqrt{Y_{max}} = \sqrt{-\frac{1}{2} \log(-2C)}$$

Puesto que  $Y^- \geq -1/2$  nos basta encontrar una cota superior en función de  $C$  para  $Y^+$ .

Sabemos que para  $Y = Y^+$  se da la igualdad entre

$$z_1(Y) = -Ce^{2Y} \quad \text{y} \quad z_2(Y) = Y + \frac{1}{2}$$

de forma que

$$\frac{1}{2} = z_1(Y_{max}) < z_2(Y_{max})$$

Si desarrollamos  $z_1$  en serie de Taylor alrededor de  $Y_{max}$  hasta grado 2 obtenemos (no basta la aproximación lineal pues obtendríamos una recta paralela a  $z_2$ )

$$z_3(Y) = \frac{1}{2} + Y - Y_{max} + (Y - Y_{max})^2$$

que verificará  $z_3(Y) < z_1(Y)$  para  $Y > Y_{max}$  con lo que la intersección de  $z_3$  con  $z_1$  se dará para un valor  $Y_0 > Y^+ > Y_{max}$ . Como  $Y_0 = Y_{max} + \sqrt{Y_{max}}$ , disponemos ya de una cota superior de  $Y^+$  en función de  $C$  y, por tanto,

$$\begin{aligned} 0 < I_2(C) &\leq (Y^+ - Y^-)X(Y_{max}) \leq \left(Y_0 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{Y_{max}} \\ &= \left(Y_{max} + \sqrt{Y_{max}} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{Y_{max}} = I_2^*(C) \end{aligned}$$

con  $Y_{max} = -(1/2) \log(-2C)$ .

Basta entonces aplicar la regla de L'Hôpital, para comprobar que

$$\lim_{C \rightarrow 0^-} CI_2^*(C) = 0$$

y, por tanto,

$$\lim_{C \rightarrow 0^-} CI_2(C) = 0$$



Hemos conseguido demostrar entonces que

$$\lim_{C \rightarrow 0^-} R(C) = \lim_{C \rightarrow 0^-} \left[ 1 + \frac{2CI_2(C)}{I_1(C)} \right] = 1$$

■

En la figura 2.4.3 hemos representado, evaluándolas numéricamente, las funciones  $I_1(C)$ ,  $I_2(C)$  y  $R(C)$  pudiéndose observar el comportamiento predicho para ellas en el lema anterior.

De esta forma, de  $R(C) = -8\nu$ , y a la vista del citado lema, para  $\nu \approx -1/8$ , el análisis local predice un crecimiento ilimitado en amplitud y periodo de las órbitas periódicas. Como  $\mu - 1 = \varepsilon\nu$ , para  $\mu \approx 1 - \varepsilon/8$  se producirá la explosión *canard* [111], [12].

Una vez concluido el análisis teórico anterior pasamos a exponer los resultados numéricos obtenidos con el algoritmo de continuación descrito en la sección anterior.

Es bien conocido ([49], [75]) que para  $\mu = 0$  el sistema tiene un ciclo límite estable en forma de oscilación de relajación (vid. figura 2.4.4); es decir, una órbita cerrada que se puede considerar, en primera aproximación, formada por trozos de las rectas  $y = \pm 2/3$  (movimiento rápido) y de la curva

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x \quad (\text{movimiento lento})$$

La porción de dicha curva que forma parte de la aproximación a la oscilación de relajación es la llamada parte estable (que corresponde a  $|x| > 1$ ). Esta oscilación de relajación persiste para  $\mu$  próximo a cero.

Si ahora variamos el parámetro  $\mu$  entre 0 y 1 aparecen los ciclos límite tipo *canard*, conectando así la familia de oscilaciones de relajación, existentes para  $\mu$  próximo a cero, con la familia de las pequeñas oscilaciones de Hopf que surgen para  $\mu$  próximo a 1 (vid. figura 2.4.4). La evolución de la órbita periódica tipo *canard* la podemos describir de la siguiente manera:

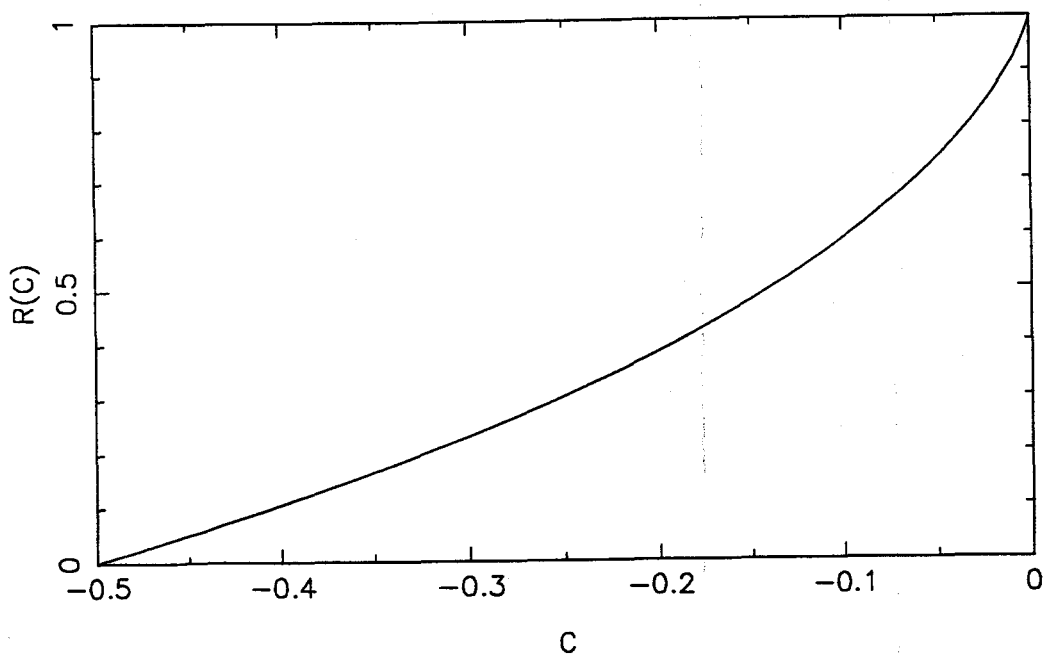
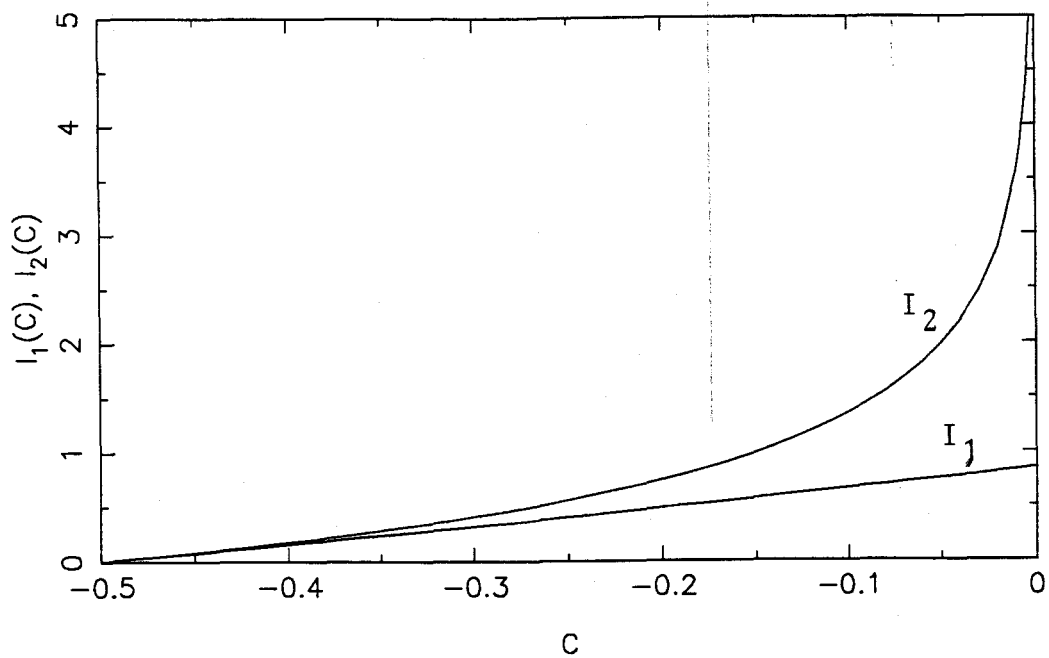


Figura 2.4.3: Representación gráfica de  $I_1(C)$ ,  $I_2(C)$  y  $R(C)$ .

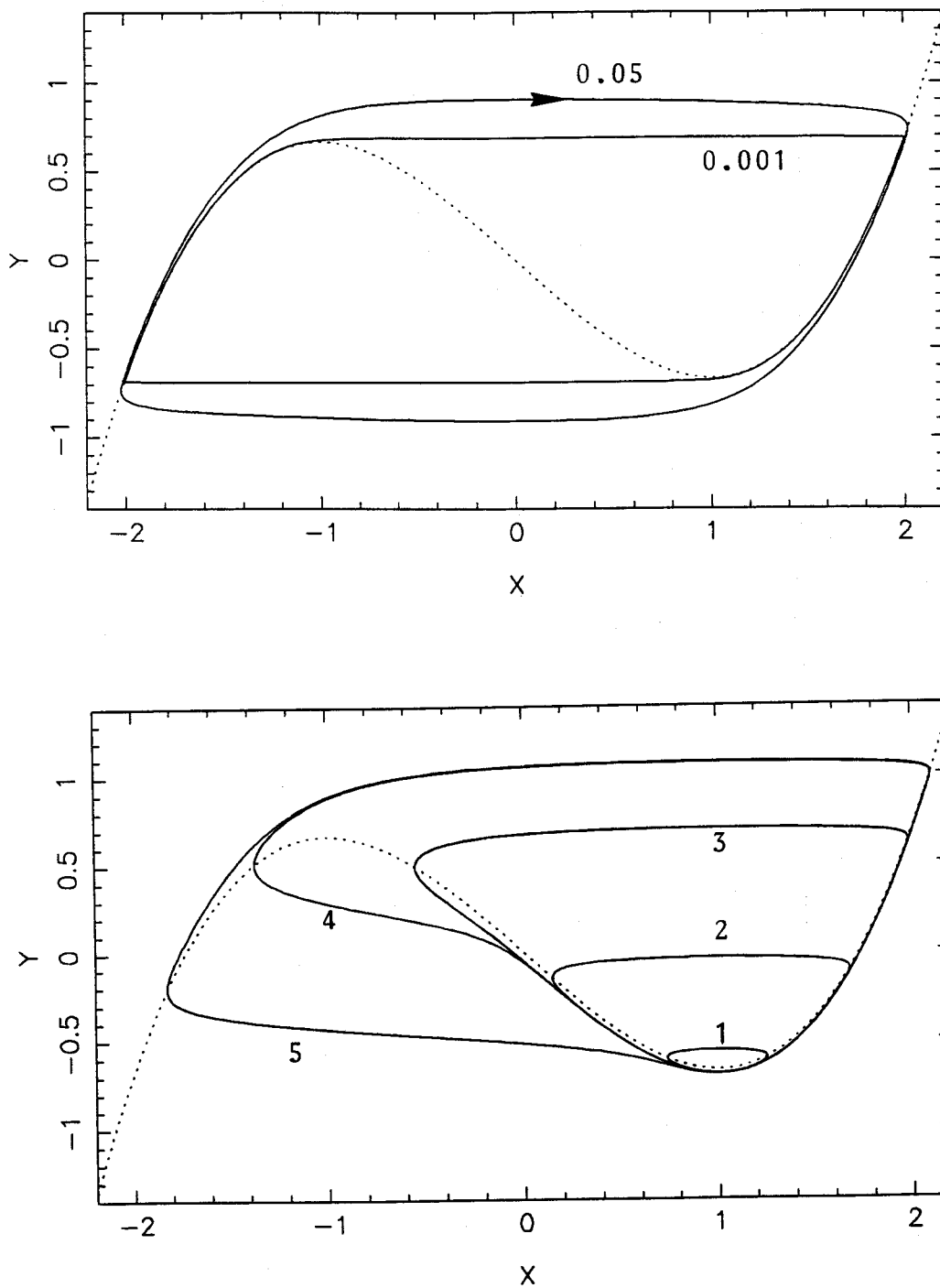


Figura 2.4.4: (a) Oscilaciones de relajación para  $\mu = 0$  y  $\epsilon = 0.001, 0.05$ ; (b) Retrato de fases que muestra la evolución de los *canards* según varía el parámetro  $\mu$  ( $\epsilon = 0.05$ ): (1)  $\mu = 0.995$ , (2)  $\mu = 0.99349095$ , (3)  $\mu = 0.99349093251$ , (4)  $\mu = 0.993490932$ , (5)  $\mu = 0.99$ . En ambos casos, la curva punteada corresponde a  $y = x^3/3 - x$ .

Tras experimentar la bifurcación de Hopf (para  $\mu_c = 1$ ; análogo para  $\mu_c = -1$ ) aparece un ciclo límite pequeño que, a medida que  $\mu$  decrece, va creciendo en amplitud, tomando la forma de un *pato sin cabeza* cuyo segmento superior va subiendo hasta que comienza a aparecer la *cabeza*. Dicha *cabeza* aumenta de tamaño hasta que el pato va tomando la forma de la oscilación de relajación [111].

La primera característica que presentan las órbitas *canards* es que, en primera aproximación, están formadas por trozos de rectas  $y = cte$  y por tramos de la curva lenta  $y = -x + x^3/3$ , tanto de su parte estable como de la llamada parte inestable (que se corresponde con  $|x| < 1$ ).

La segunda característica a señalar es que el rango de valores del parámetro  $\mu$  para el que se tienen órbitas *canards* es muy reducido. Para el sistema (2.4.2) este rango de parámetros es del orden de  $e^{-1/(K\varepsilon)}$ , con  $K$  positivo. Este hecho se puede resumir con una frase muy gráfica: la *vida* de los patos es corta [111]. Esta segunda característica trae consigo que el crecimiento en amplitud y periodo que experimentan los ciclos límites de Hopf aparezca, respecto a variaciones en el parámetro  $\mu$ , como un cambio brusco (explosión *canard*).

En estas condiciones es claro que la continuación de tales órbitas periódicas presentará dificultades y, por tanto, será un excelente banco de pruebas para el algoritmo que hemos propuesto.

Pasamos a comentar los resultados obtenidos con nuestro algoritmo de continuación. Hemos tomado  $x = 1$  como recta de corte para construir la correspondiente familia de aplicaciones de Poincaré.

En la figura 2.4.5 mostramos la evolución de la amplitud de la órbita periódica en función del parámetro  $\mu$  para diversos valores de  $\varepsilon$ . La posibilidad que tiene el algoritmo de continuación de utilizar como parámetro de continuación  $\mu$  o  $y$ , según convenga, permite sobrepasar la zona de la explosión *canard*. En la necesaria integración numérica del sistema original y del correspondiente sistema variacional se ha tenido en cuenta la presencia de movimientos lentos y rápidos, lo que implica un problema *stiff*.

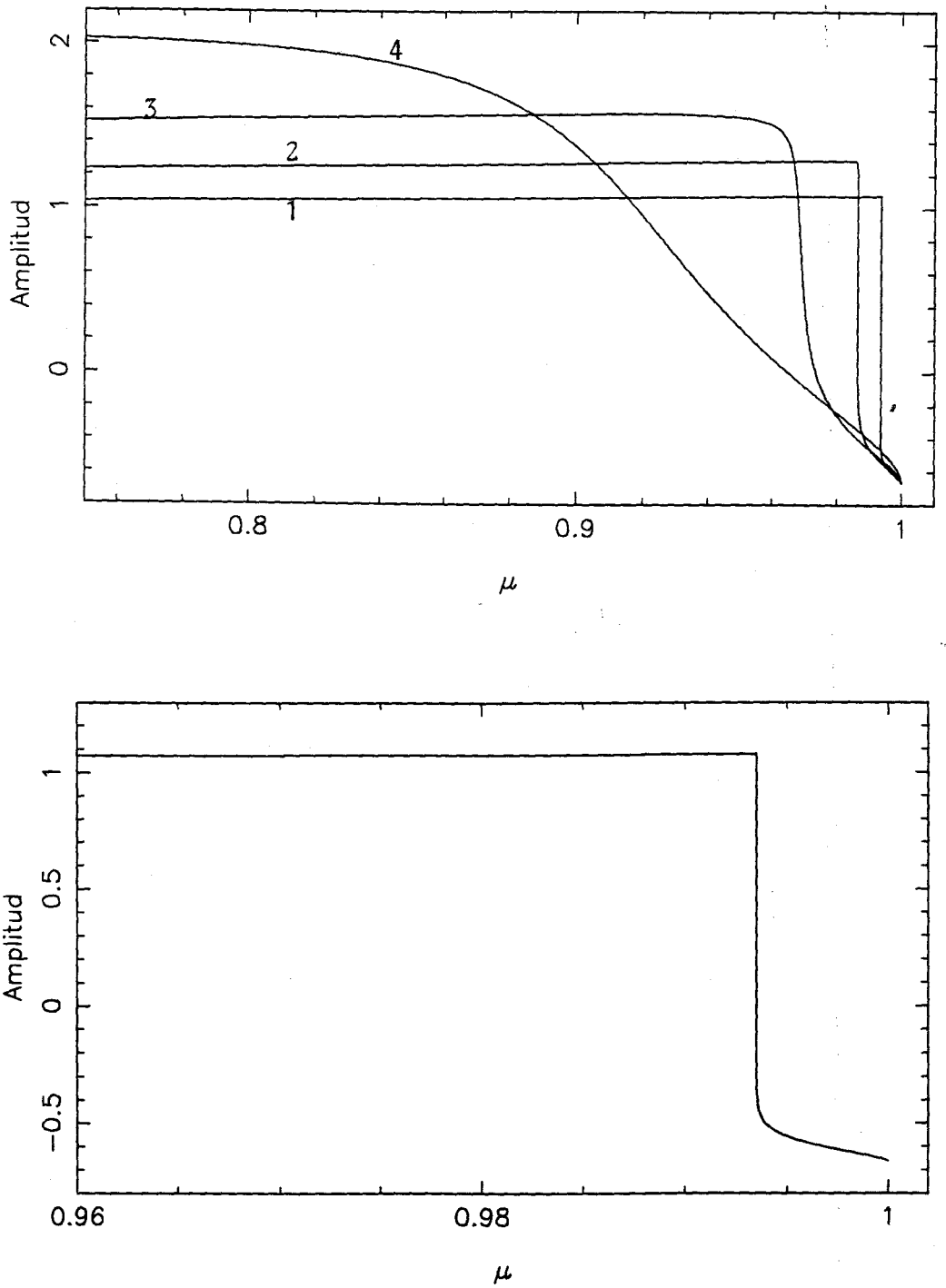


Figura 2.4.5: Amplitud de la órbita periódica medida en  $y$  sobre la recta  $x = 1$  frente al parámetro  $\mu$ : (a) para distintos valores de  $\epsilon$ : (1) 0.05, (2) 0.1, (3) 0.2, (4) 0.5; (b) detalle de la explosión *canard* en el caso  $\epsilon = 0.05$ .

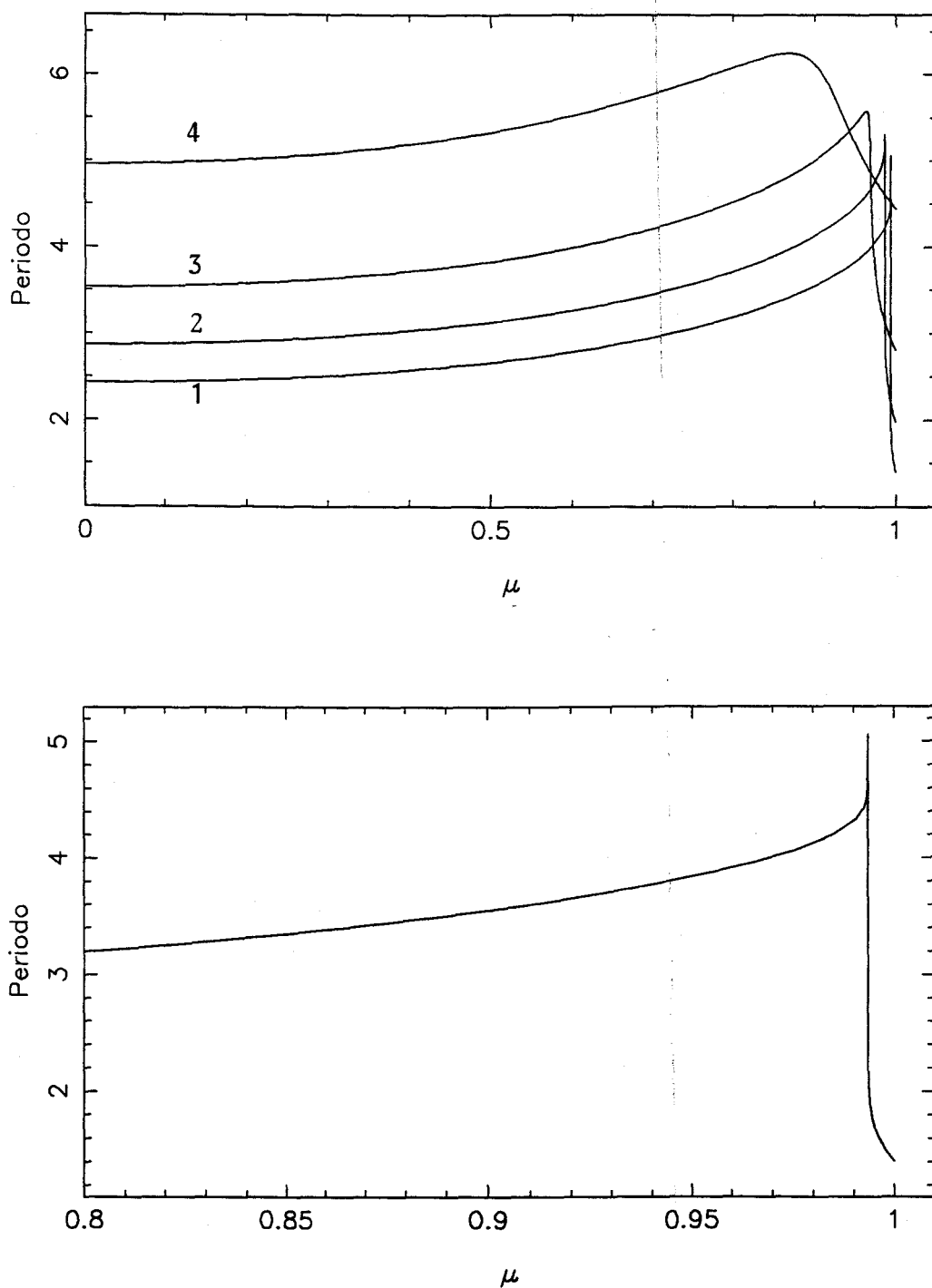


Figura 2.4.6: Evolución del periodo de la órbita frente a  $\mu$ : (a) para distintos valores de  $\epsilon$ : (1) 0.05, (2) 0.1, (3) 0.2, (4) 0.5; (b) detalle para  $\epsilon = 0.05$ .

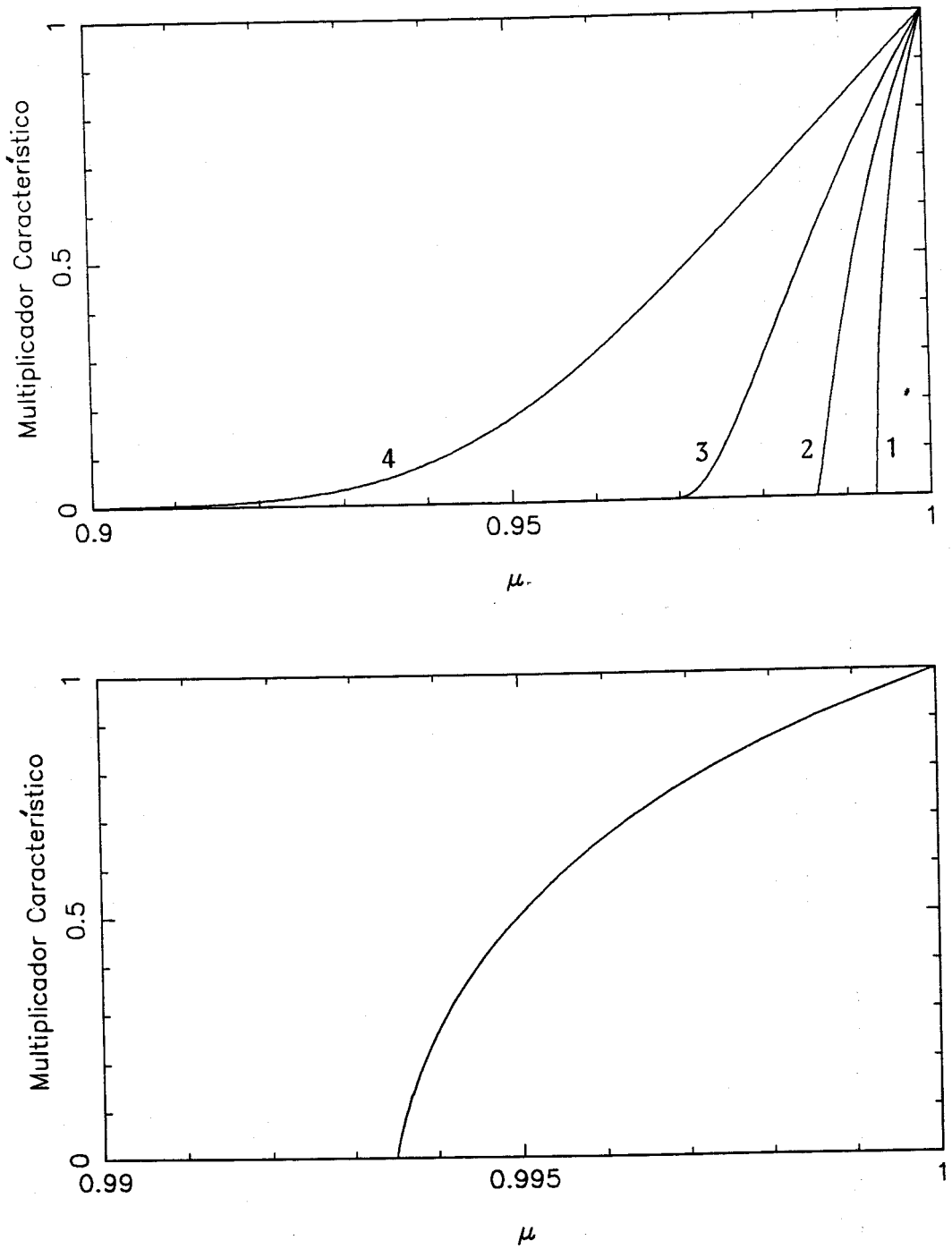


Figura 2.4.7: Evolución del multiplicador característico frente a  $\mu$ : (a) para distintos valores de  $\varepsilon$ : (1) 0.05, (2) 0.1, (3) 0.2, (4) 0.5; (b) detalle en el caso  $\varepsilon = 0.05$ .

Notemos que la brusca subida en la amplitud, correspondiente a la explosión *canard*, se produce en el caso  $\varepsilon = 0.05$ , para —vid. (2.4.4)—  $\mu \approx 0.993491$  mientras que el valor obtenido en nuestra continuación numérica ha sido  $\mu \approx 0.993495$ .

En el proceso de continuación obtenemos asimismo la información que se muestra en las figuras 2.4.6 y 2.4.7 que hacen referencia a la variación del periodo y del multiplicador característico respecto al parámetro  $\mu$ .

En lo que respecta al periodo se observa, en primer lugar, un pico en la zona de la explosión *canard*; si  $\mu$  decrece a partir de 1, se produce para  $|\mu - 1| = O(\varepsilon)$  un fuerte aumento del periodo desde el valor correspondiente a las órbitas periódicas de Hopf (aproximadamente  $2\pi\varepsilon^{1/2}$ ), que después decae hasta alcanzar los valores correspondientes a las oscilaciones de relajación típicas que, en primera aproximación, vienen dados por

$$T = 3 + (\mu^2 - 1) \log \frac{4 - \mu^2}{1 - \mu^2}$$

para  $\mu \in (-1, 1)$ ,  $|1 - \mu^2| \neq o(1)$ . Esta expresión se obtiene fácilmente integrando  $T = \int_C \frac{dx}{x}$  a lo largo de la oscilación de relajación, despreciando el tiempo invertido sobre la variedad rápida.

El perfil de la curva del periodo para  $\varepsilon = 0.05$  se corresponde perfectamente con el predicho por el análisis teórico [111].

Para el multiplicador característico (vid. figura 2.4.7), y conforme  $\mu$  decrece a partir de 1, se produce una brusca disminución en la zona *canard* desde el valor correspondiente a los ciclos límite estables de Hopf (menor y próximo a 1) al valor correspondiente a las oscilaciones de relajación (próximo a cero).

En resumen, los resultados numéricos obtenidos muestran el fenómeno *canard* como un cambio en la dinámica con las siguientes características: se pasa de la dinámica local —representada por los ciclos límite de pequeña amplitud que nacen en la bifurcación de Hopf— a la dinámica global correspondiente a las oscilaciones de relajación. Además, el paso del parámetro  $\mu$  por la zona de la explosión *canard* se percibe como un cambio brutal en el comportamiento del sistema, aun cuando



tal fenómeno no constituya una bifurcación en sentido estricto.

## 2.5 Estudio de un Oscilador de Van der Pol Modificado

En esta sección planteamos el estudio de un circuito electrónico que, si bien presenta un único equilibrio, va a contar con riqueza de órbitas periódicas que se originan y organizan mediante varias degeneraciones en las bifurcaciones de Hopf que experimenta dicho equilibrio. Realizamos, en primer lugar, el análisis teórico de dicha bifurcación para presentar después algunos resultados numéricos, entre los que destaca una cúspide de silla-nodo de órbitas periódicas.

Consideramos el circuito de la figura (2.5.1) que consta de dos condensadores de capacidades  $C_0$  y  $C$ , una bobina de inductancia  $L$ , una resistencia  $R$ , una fuente de continua que suministra una tensión  $a$  y una conductancia no lineal de característica tensión-intensidad dada por

$$f(x) = \alpha \left( -x + \frac{x^3}{3V_0^2} \right)$$

La aplicación de las leyes de Kirchhoff conduce al sistema

$$\begin{aligned} C_0 \dot{x} &= -f(x) + \frac{z-x}{R} - y \\ L \dot{y} &= x - a \\ C \dot{z} &= -\frac{z-x}{R} \end{aligned}$$

donde hemos tomado como variables de estado a la tensión en los condensadores ( $x$  en  $C_0$ ,  $z$  en  $C$ ) y a la intensidad en la bobina ( $y$ ).

El siguiente escalado

$$x = V_0 \bar{x}, \quad y = V_0 \omega C \bar{y}, \quad z = V_0 \bar{z}, \quad t \rightarrow \sqrt{LC} t$$

junto con los nuevos parámetros

$$\varepsilon = \frac{C_0}{C}, \quad \bar{a} = \frac{a}{V_0}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega C}, \quad \bar{R} = R\omega C$$

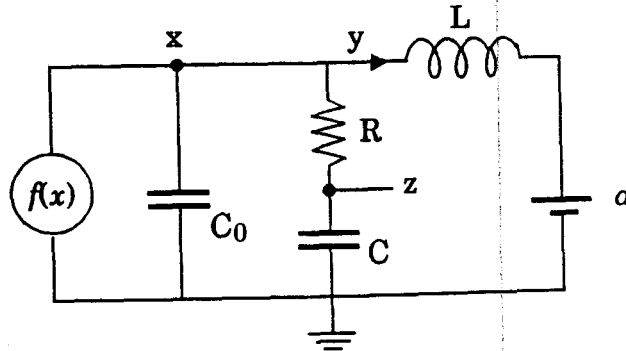


Figura 2.5.1: Esquema del circuito.

nos conduce, eliminando las barras de las variables y de los parámetros, al sistema:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -g(x) + \frac{z-x}{R} - y \\ \dot{y} &= x - a \\ \dot{z} &= -\frac{z-x}{R} \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

en el que

$$g(x) = \alpha \left( \frac{x^3}{3} - x \right)$$

El sistema anterior tiene a  $(x_0, y_0, z_0) = (a, -g(a), a)$  como único equilibrio en el que la matriz de la linealización viene dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\varepsilon}(1 - a^2) - \frac{1}{\varepsilon R} & -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

con lo que su polinomio característico  $P(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3$  tiene por coeficientes

$$A_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \alpha(1 - a^2) - \frac{1}{R} \right] + \frac{1}{R}, \quad A_2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{\alpha}{R}(1 - a^2) \right], \quad A_3 = \frac{1}{\varepsilon R}$$

La condición necesaria de existencia de una bifurcación de Hopf,  $A_1 A_2 = A_3$ ,  $A_2 > 0$ , nos conduce a

$$\varepsilon s = (1 - Rs)(R - s), \quad R > s$$

donde  $s = \alpha(1 - a^2)$ . Dicha curva, en el plano  $R$ - $a$ , viene dada por

$$a^2 = 1 - \frac{1 + R^2 + \varepsilon - \sqrt{(1 + R^2 + \varepsilon)^2 - 4R^2}}{2\alpha R} \quad (2.5.2)$$

(es inmediato verificar que  $(1 + R^2 + \varepsilon)^2 - 4R^2 > 0, \forall R, \varepsilon > 0$ ).

Antes de proceder al análisis de esta bifurcación de Hopf, y puesto que este sistema puede presentar órbitas periódicas tipo *canard* en tres dimensiones, vamos a analizar el sistema reducido, que obtenemos al hacer  $\varepsilon = 0$  en (2.5.1), pues nos ayudará, además, a comprender la conducta de bifurcaciones del sistema completo. En el caso de estar interesados en la búsqueda de órbitas tipo *canard* habrá que asegurarse de que la variedad lenta —dada por la última ecuación de (2.5.3)— tenga un pliegue, es decir, que los coeficientes de  $x$  y  $x^3$  sean de signos opuestos, lo que equivale a pedir que sea  $R > 1/\alpha$ .

El sistema reducido es pues,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x - a \\ \dot{z} &= \frac{x - z}{R} \\ y &= -g(x) + \frac{z - x}{R} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Su equilibrio está situado, al igual que sucedía en (2.5.1), en  $(a, -g(a), a)$ . La matriz de la linealización en dicho equilibrio vale, usando la ecuación algebraica de (2.5.3) para calcular las parciales de  $x$  con respecto a  $y$  y a  $z$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-R}{1 - Rs} & \frac{1}{1 - Rs} \\ \frac{-1}{1 - Rs} & \frac{t}{1 - Rs} \end{pmatrix}$$

donde  $s = \alpha(1 - a^2)$ . La condición de Hopf vendrá dada por  $R = s, R < 1$  (curva límite para (2.5.2) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Es interesante conocer cuándo el equilibrio se encuentra en el mínimo (o máximo) relativo de la cúbica, pues para que se den las órbitas tipo *canard*

el equilibrio ha de estar cerca de esa posición con el fin de que la órbita pueda acceder a la zona inestable de la variedad lenta. Un cálculo sencillo muestra que el equilibrio está en aquella posición cuando  $Rs = 1$ , curva que en lo que sigue denominaremos *barrera*. Teniendo en cuenta que la condición de Hopf  $R > 1$  surge de

$$\det A = \frac{1}{1 - Rs} > 0$$

la curva de Hopf del sistema reducido existirá hasta que intersecte con la *barrera*  $BA$ , intersección que, de producirse (sólo si  $\alpha \geq 1$ ), se dará para  $R = 1$  (vid. figura 2.5.2 (c)).

Tomando  $a$  como parámetro de bifurcación, es fácil verificar la condición de transversalidad, ya que

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{d\lambda}{da} \Big|_{a=a_c} \right] = \frac{-a_c \alpha}{1 - R^2} \neq 0, \text{ si } a_c, \alpha \neq 0. \quad (2.5.4)$$

Para estudiar el carácter de la bifurcación trasladamos el equilibrio al origen mediante

$$\bar{y} = y - \alpha a \left( 1 - \frac{a^2}{3} \right), \quad \bar{z} = z - a, \quad \bar{x} = x - a \quad (2.5.5)$$

tras lo que, mediante el cambio

$$\bar{y} = y^*, \quad \bar{z} = Ry^* - \omega_0(1 - R^2)z^*$$

donde  $\omega_0^2 = 1/(1 - R^2)$ , el sistema (2.5.3) puede escribirse en la forma estándar

$$\begin{pmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi(z^*) + \omega_0 z^* \\ \left[ \frac{-\phi(z^*)}{\omega_0} - z \right] \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

expresión en la que  $\phi(z^*)$  indica la función  $\bar{x} = \phi(z^*)$  que en un cierto entorno del origen viene definida implícitamente por

$$\alpha \bar{x} \left( 1 - a^2 - a\bar{x} - \frac{\bar{x}^2}{3} \right) - \frac{\omega_0(1 - R^2)}{R} z^* - \frac{\bar{x}}{R} = 0 \quad (2.5.6)$$

y que hemos obtenido, con los cambios de variable antes indicados, a partir de la tercera ecuación de (2.5.3). Para calcular el coeficiente de tercer grado  $a_3$  de la

forma normal de Hopf necesitamos las tres primeras derivadas de  $\phi(z^*)$  en  $z^* = 0$ . Calculadas a partir de (2.5.6), resultan ser

$$\phi'(0) = -\omega_0, \quad \phi''(0) = -2a\alpha R\omega_0^4, \quad \phi'''(0) = (2\alpha - 12a^2\alpha^2 R\omega_0^2)\omega_0^5 R$$

con lo que, particularizando para el valor crítico del parámetro  $a = a_c$ , obtenemos [35]

$$a_3 = \frac{-\omega_0^4 \alpha}{8} (1 - 4a_c^2 \alpha R \omega_0^2)$$

donde  $a_c^2 = 1 - R/\alpha$ . La anulación de  $a_3$  nos conduce a  $3R^2 - 4\alpha R + 1 = 0$ , es decir, para que  $a_3$  se anule debe ser  $\alpha \geq \sqrt{3}/2$ . De esta forma, dependiendo del valor de  $\alpha$  llegamos a las siguientes situaciones (vid. figura 2.5.2):

$\alpha < \sqrt{3}/2$  : la bifurcación de Hopf  $HR$  es siempre supercrítica,  $0 < R < \alpha$ .

$\alpha = \sqrt{3}/2$  : la bifurcación de Hopf es siempre supercrítica, excepto para  $R = \sqrt{3}/3$  para la que  $a_3 = 0$ .

$\sqrt{3}/2 < \alpha < 1$  : existen dos valores  $0 < R_1 < \sqrt{3}/3 < R_2 < 1$  de forma que la bifurcación es supercrítica para  $R \in (0, R_1) \cup (0, R_2)$  y subcrítica cuando  $R \in (R_1, R_2)$ .

$\alpha = 1$  : la bifurcación es supercrítica para  $R \in (0, 1/3)$  y subcrítica para  $R \in (1/3, 1)$  (pues  $R_2 = 1$  y viola, a partir de ese valor, la condición de Hopf).

$\alpha > 1$  : ya sólo hay una zona supercrítica, para  $R \in (0, R_1)$ ,  $0 < R_1 < 1/3$  y en el resto del intervalo es subcrítica cuando  $R \in (R_1, 1)$ . Además, a medida que aumenta  $\alpha$  la zona en la que es supercrítica disminuye monótonamente, verificándose que  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R_1(\alpha) = 0$ .

Pasamos, a continuación, tras obtener la información del sistema reducido, a analizar la bifurcación de Hopf del sistema completo ( $\varepsilon \neq 0$ ) [29], [106], cuya curva  $HC$  viene dada por (2.5.2). La forma de esta curva será la indicada en la figura 2.5.2 estando por encima de la curva de Hopf del sistema reducido  $HR$  para  $R < 1$  y por encima de la *barrera*  $BA$  para  $R > 1$ , curvas hacia las que tenderá

2.5 ESTUDIO DE UN OSCILADOR DE VAN DER POL MODIFICADO \_\_\_\_\_ 51

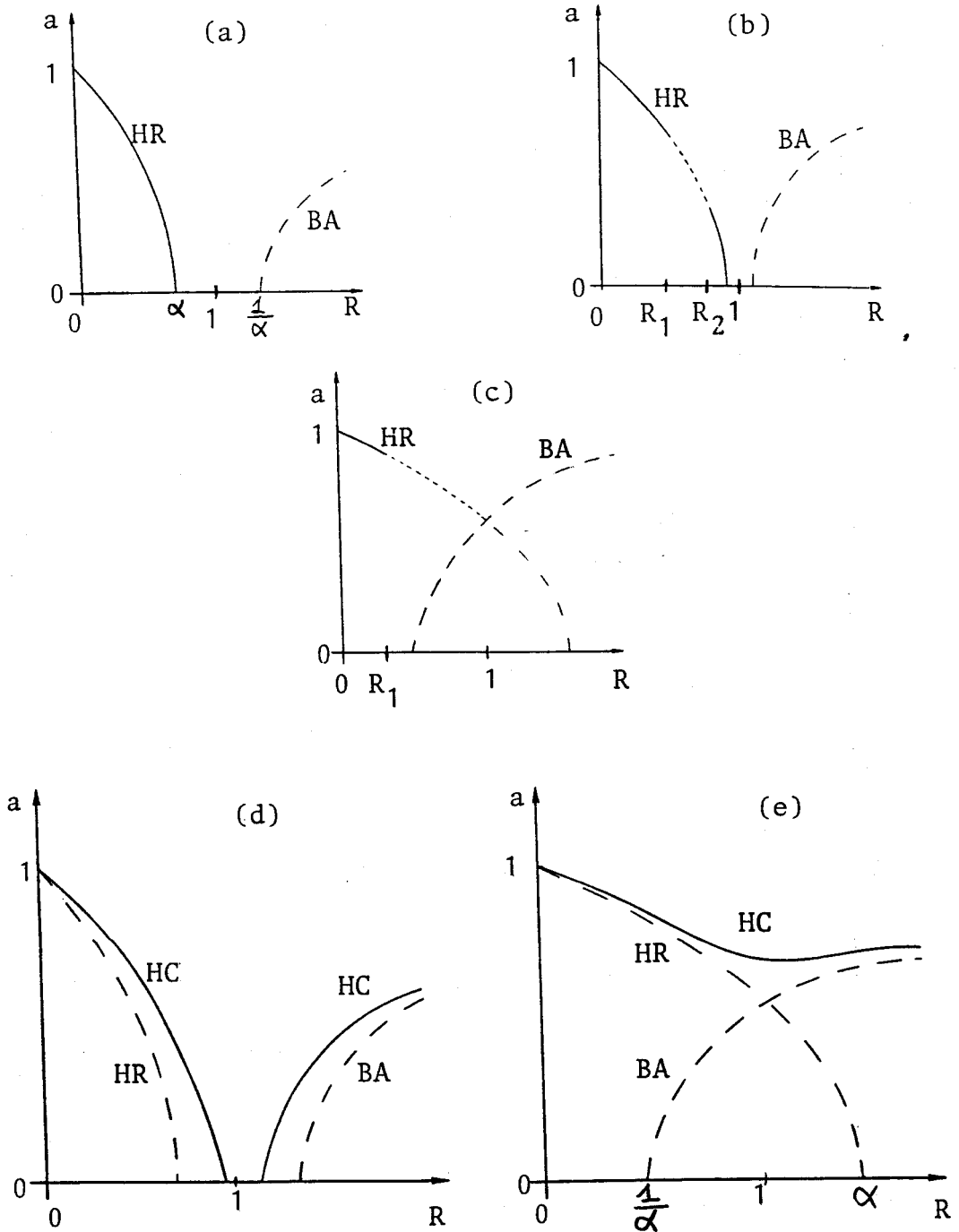


Figura 2.5.2: Tres posibilidades para la curva de Hopf  $HR$  del sistema reducido: (a)  $\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; (b)  $\frac{\sqrt{3}}{2} < \alpha < 1$ ; (c)  $\alpha > 1$ . Curva de Hopf del sistema completo  $HC$ : (d) con *ruptura* ( $\alpha < 1$ ); (e) sin *ruptura* ( $\alpha > 1$ ).

para  $\varepsilon$  pequeño. En consecuencia, para valores de  $\alpha < 1$  y  $\varepsilon$  suficientemente pequeños, la curva de Hopf puede llegar a *romperse*, es decir, puede haber valores de  $R$  para los que la expresión (2.5.2) no tenga solución. En este caso se puede comprobar que fijado un parámetro entre  $\alpha$ ,  $R$  y  $\varepsilon$  —por ejemplo, este último— la *ruptura* de la curva ( $a = 0$ ) se produce para valores determinados unívocamente de los otros dos parámetros, a saber,  $\alpha = \sqrt{1 + \varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}$ ,  $R = \sqrt{1 + \varepsilon}$ .

En lo que se refiere al equilibrio, podemos decir que si  $a > 0$  ( $a < 0$ ) es estable (inestable tipo silla) por encima de la curva de Hopf e inestable tipo silla (estable) por debajo de ella. Nos centraremos en el caso  $a > 0$ .

Comenzamos comprobando la condición de transversalidad, siendo el parámetro de bifurcación  $a$ . En este caso

$$Re \left[ \frac{d\lambda}{da} \Big|_{a=a_c} \right] = - \frac{a_c \alpha \omega_0^2 (1 + \varepsilon R^2 \omega_0^4)}{1 + \varepsilon^2 R^2 \omega_0^6} \neq 0, \text{ si } a_c, \alpha \neq 0 \quad (2.5.7)$$

que coincide, para  $\varepsilon = 0$ , con la condición de transversalidad para el sistema reducido (2.5.4).

Trasladamos el equilibrio al origen —mediante el mismo cambio (2.5.5) utilizado en el caso del sistema reducido— obteniendo

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\bar{x}} &= s\bar{x} + \frac{\bar{z} - \bar{x}}{R} - \bar{y} - \alpha \bar{x}^2 \left( a + \frac{\bar{x}}{3} \right) \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{x} \\ \dot{\bar{z}} &= - \frac{\bar{z} - \bar{x}}{R} \end{aligned}$$

que mediante

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_0} & 1 \\ \frac{s_0}{\omega_0^2 R} & \frac{s_0}{\omega_0} & \frac{1}{s_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

(en la que  $s_0 = \alpha(1 - a^2)$ ,  $\lambda_0 = -1/(R - s_0)$ ) aparece en la forma de Jordan

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} + \xi(x^*, z^*) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$\xi(x^*, z^*) = -\frac{\alpha\lambda_0 s_0}{K_1} \left( a_c + \frac{\bar{x}}{3} \right) \bar{x}^2, \quad \bar{x} = x^* + \lambda_0 z^*, \quad K_1 = \frac{1}{s_0} - s_0 - \frac{\lambda_0 s_0}{\omega_0^2 R}$$

$$\lambda_1 = \frac{s_0^2 - 1}{s_0(1 - R s_0)}, \quad \lambda_2 = -\omega_0, \quad \lambda_3 = 1$$

Calculamos ahora la variedad de centros que, quitando los asteriscos a las variables, vendrá dada por [34]:

$$z = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_{12} xy + \dots$$

donde

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda_0^2 + 2\omega_0^2}{\lambda_0(\lambda_0^2 + 4\omega_0^2)} a_c K_2, \quad \alpha_2 = -\frac{2\omega_0^2}{\lambda_0(\lambda_0^2 + 4\omega_0^2)} a_c K_2, \quad \alpha_{12} = \frac{2\omega_0}{\lambda_0^2 + 4\omega_0^2} a_c K_2$$

con  $K_2 = -(\lambda_0 s_0 \alpha) / K_1$ .

De esta manera, obtenemos el siguiente sistema reducido:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + K_2 \Psi(x, y) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

en el que

$$\Psi(x, y) = a_c x^2 + \left( \frac{1}{3} + 2a_c \lambda_0 \alpha_1 \right) x^3 + 2a_c \lambda_0 \alpha_2 x y^2 + 2a_c \lambda_0 \alpha_{12} x^2 y$$

Estamos ya en condiciones de computar el coeficiente de tercer orden de la bifurcación de Hopf para el que se obtiene la expresión [35]

$$a_3 = -\frac{\alpha s_0}{8} \frac{\Omega(R, s_0)}{(1 - R s_0)[R(1 - R s_0) + s_0(R - s_0)^2][R(1 - R s_0) + 4s_0(R - s_0)^2]}$$

en la que el denominador es siempre positivo y donde

$$\Omega(R, s_0) = (1 - s_0)^2 [R(1 - R s_0) + 4s_0(R - s_0)^2] - 4(\alpha - s_0) s_0^2 [(1 - s_0^2) + s_0(R - s_0)]$$

En primer lugar, comprobamos que la anulación de  $a_3$  para el sistema completo nos lleva a la misma ecuación que obteníamos al anular  $a_3$  del sistema reducido. Basta hacer  $R = s_0$  (que implica  $\varepsilon = 0$ ) para obtener nuevamente  $3R^2 - 4\alpha R + 1 =$



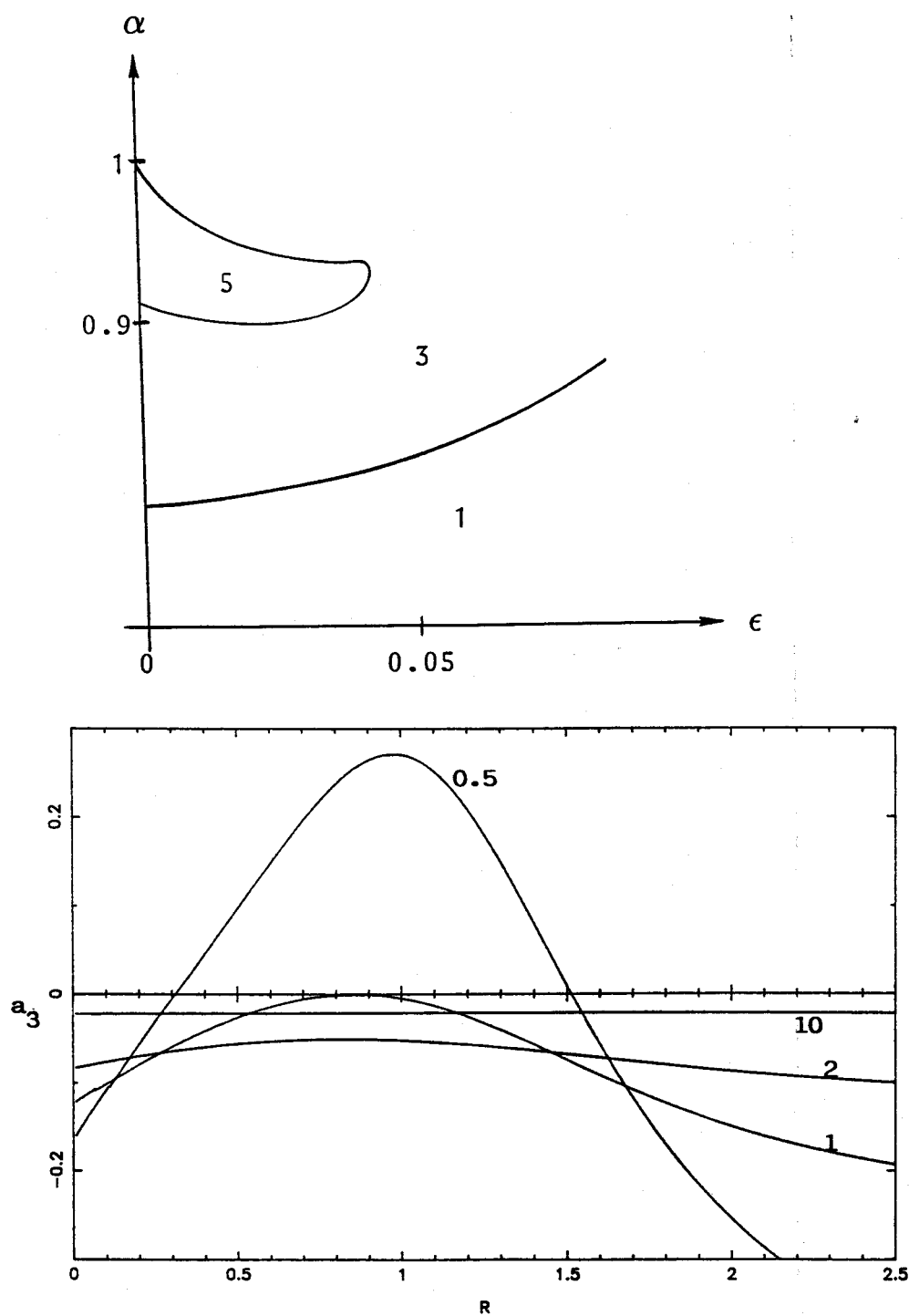


Figura 2.5.3: (a) Zonas en que queda dividida una parte del plano  $\epsilon$ - $\alpha$  dependiendo de las veces que se anula  $a_3$ . (b) Curvas de  $a_3(R)$  para  $\alpha = 2$  y diversos valores de  $\epsilon$ : 0.5, 1, 2, 10.

0. Por tanto, para valores de  $\varepsilon$  próximos a cero será una guía útil, en la búsqueda de valores de los parámetros que anulen a  $a_3$  del sistema completo, la discusión que hicimos para el caso del sistema reducido (válida para  $R < 1$ ).

Además, teniendo en cuenta que la curva de Hopf del sistema completo discurre por encima de la de Hopf del reducido y por encima de la *barrera* (tanto más próxima a éstas cuanto menor es  $\varepsilon$ ) también será de utilidad conocer la expresión que adopta  $\Omega(R, s_0) = 0$  en el caso en el que el equilibrio estuviera en la barrera (nos interesa para  $R > 1$ ). Sin más que sustituir  $Rs_0 = 1$ , la anulación de  $a_3$  equivale a

$$(R^2 - 1)^2 - 2(\alpha R - 1) = 0$$

No es difícil comprobar que la ecuación anterior no tiene solución si  $\alpha < \alpha_0$  y tiene dos soluciones (con  $R > 1$ ) si  $\alpha_0 < \alpha < 1$  donde  $\alpha_0 \approx 0.91269$ .

Con esta información, para  $\varepsilon$  pequeño podemos afirmar [29], [106] —y los resultados numéricos lo confirman— que existen zonas del plano  $\varepsilon$ - $\alpha$  en las que la curva de Hopf en el plano  $R$ - $a$  tiene hasta cuatro puntos de degeneración: la bifurcación, al movernos en el sentido creciente de  $R$ , comienza siendo supercrítica, pasa a subcrítica, vuelve a ser supercrítica, de nuevo cambia a subcrítica y finalmente termina siendo supercrítica.

Pero a medida que aumenta  $\varepsilon$  el análisis numérico de  $\Omega(R, s_0) = 0$  indica que comienzan a colapsar algunos de esos puntos de degeneración, con lo que el plano  $\varepsilon$ - $\alpha$  (para  $\varepsilon$  pequeño y  $\alpha$  próxima a 1) presenta las zonas esquematizadas en la figura 2.5.3. En ella, la zona señalada con un 1 corresponde a los puntos para los que la bifurcación de Hopf (siempre considerada en el plano  $R$ - $a$ ) no tiene ningún punto de degeneración, es decir, se mantiene siempre supercrítica. En la señalada con un 3 la curva de Hopf presenta dos puntos de degeneración y en la señalada con un 5 la degeneración se produce en cuatro puntos dándose los cambios de supercrítica a subcrítica y viceversa indicados al final del párrafo anterior.

Consideramos pues como tarea interesante para próximos trabajos completar este estudio de la anulación de  $a_3$  en el plano  $\varepsilon$ - $\alpha$  con el fin de conocer la riqueza de comportamientos en la bifurcación de Hopf y será interesante, asimismo, analizar

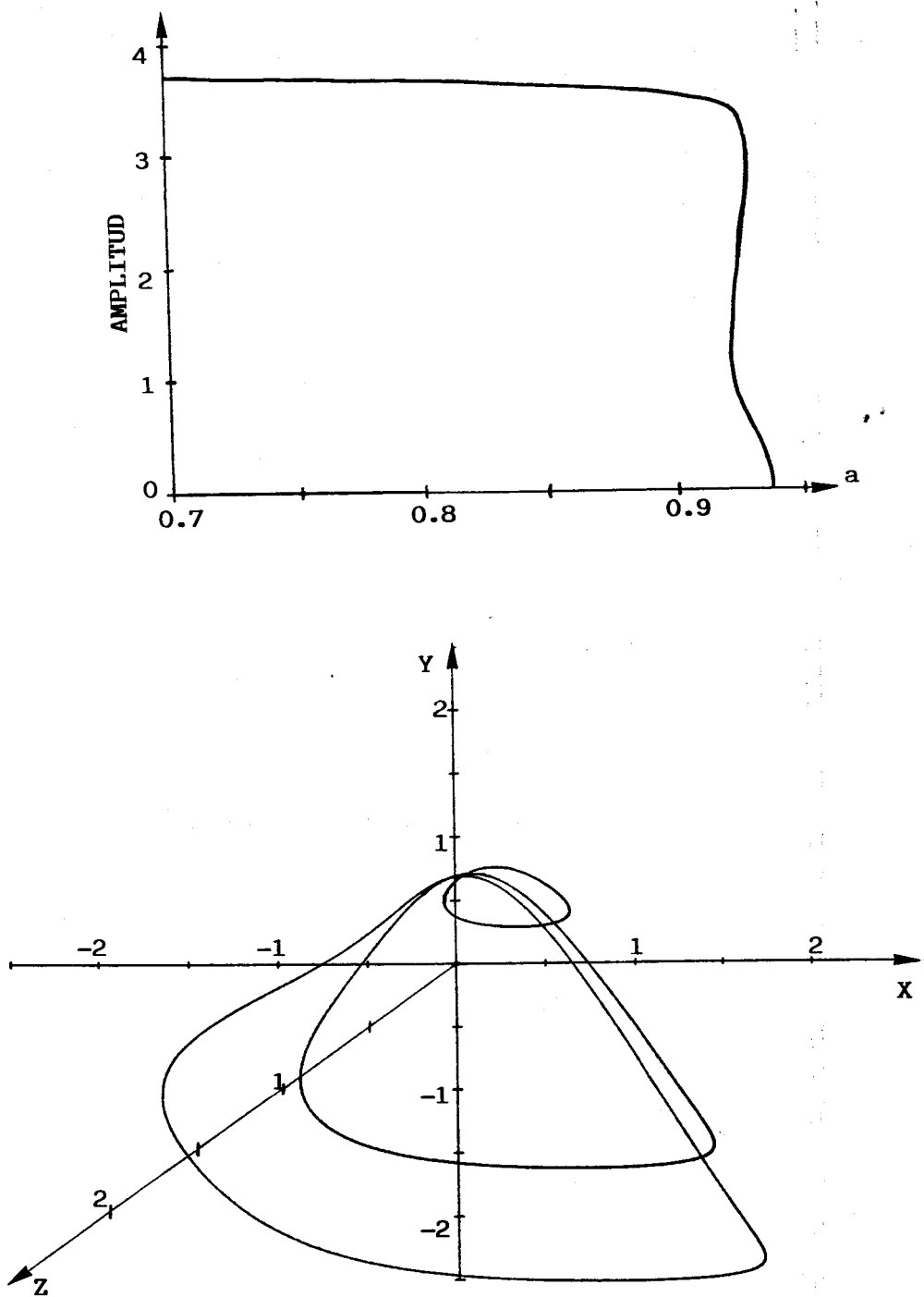


Figura 2.5.4: (a) Diagrama de bifurcaciones para  $R = 4$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 2$ . (b) Tres órbitas que coexisten para  $a = 0.9265$ ,  $R = 4$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 2$ .

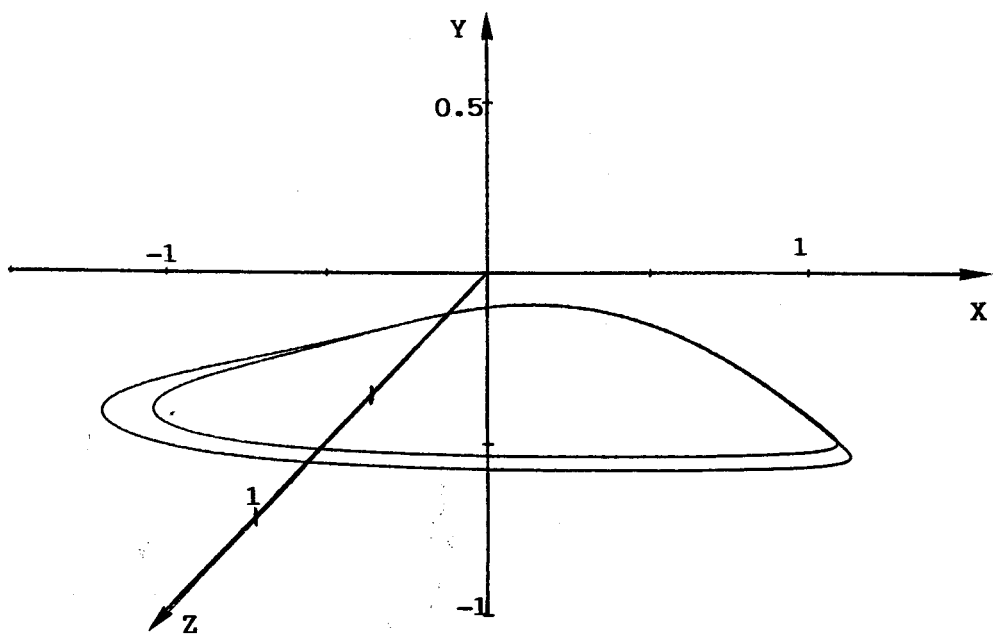
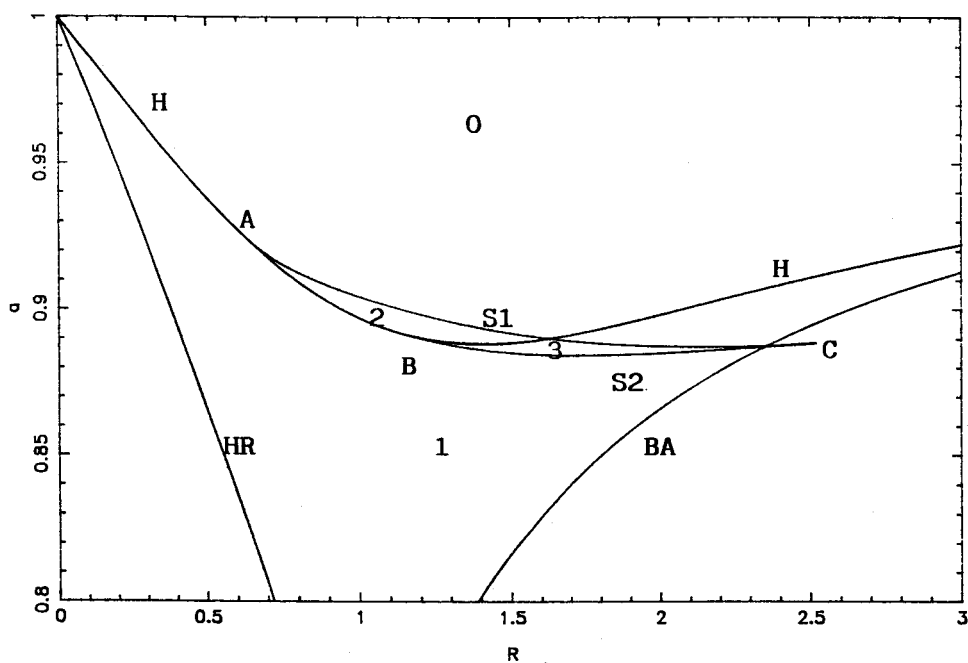


Figura 2.5.5: (a) Conjunto de bifurcaciones para  $\varepsilon = 0.95$ ,  $\alpha = 2$ . (b) Dos órbitas *canards* que coexisten para  $R = 3$ ,  $a = 0.71302$ ,  $\varepsilon = 0.025$ ,  $\alpha = 0.7$ .

la posibilidad de degeneraciones de mayor orden en dicha bifurcación.

En concreto, con la información que obtenemos de la figura 2.5.3 (b), en la que aparecen cuatro curvas  $a_3(R)$  para  $\alpha = 2$  y diversos valores de  $\varepsilon$ , podemos concluir que cuando  $\alpha$  toma dicho valor y  $\varepsilon \approx 1$  pasamos de tener dos raíces de  $a_3(R)$  a no tener ninguna (por supuesto que antes de hacer afirmaciones tajantes sobre el número exacto de raíces habrá que tomar ciertas precauciones como, por ejemplo, ver el comportamiento de la curva para valores mayores de  $R$ , analizar más valores de  $\varepsilon$ , ...).

Pasamos a describir brevemente diversos resultados obtenidos con el método de continuación descrito en este capítulo. En primer lugar hemos continuado la órbita periódica estable que nace de la bifurcación de Hopf cuando  $R = 4$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 2$ , obteniendo el diagrama de bifurcaciones de la figura 2.5.4, en el que se aprecian una bifurcación de Hopf y dos silla-nodo. Esta continuación nos ha permitido dibujar, en la misma figura, las tres órbitas periódicas que coexisten para los valores anteriores de los parámetros y para  $a = 0.9265$ , dos de las cuales son estables.

Por otra parte, hemos obtenido el conjunto de bifurcaciones para el caso  $\varepsilon = 0.95$ ,  $\alpha = 2$  (vid. figura 2.5.5). Observamos como la bifurcación de Hopf  $H$  es degenerada en dos puntos  $A$  y  $B$  de los que surgen, respectivamente, las curvas de silla-nodo  $S1$  y  $S2$  que terminan colapsando en una cúspide  $C$ . Además, y sólo como referencias, aparecen la curva de Hopf  $HR$  que correspondería al sistema reducido y la *barrera*  $BA$  (dado que el valor de  $\varepsilon$  correspondiente no es pequeño la gran separación de  $H$  con respecto a  $HR$  y a  $BA$  es manifiesta). Indicamos, asimismo, en cada región, el número de órbitas periódicas existentes, que varía de 0 a 3 (en este caso, dos son estables, como consecuencia de que la bifurcación de Hopf es subcrítica entre los puntos  $A$  y  $B$  y supercrítica en el resto).

Para finalizar, también en la figura 2.5.5, mostramos dos órbitas periódicas *canards* que coexisten para  $R = 3$ ,  $a = 0.71302$ ,  $\varepsilon = 0.025$  y  $\alpha = 0.7$  siendo la mayor estable y la otra inestable.

## Capítulo III

# MÉTODOS NUMÉRICOS DE CONTINUACIÓN DE ÓRBITAS HOMOCLINAS

### 3.1 Introducción

En el presente capítulo, y aprovechando las ideas y la experiencia obtenida en la continuación de órbitas periódicas, desarrollamos un algoritmo que permite detectar y continuar órbitas homoclinas y heteroclinas en sistemas de dimensión dos y tres.

Estas órbitas aparecen cuando intersectan las variedades estable e inestable de un mismo equilibrio (homoclinas) o de dos distintos (heteroclinas). Para otros tipos de tangencias homoclinas —relacionadas con una órbita periódica o con un toro— vid. [42].

Si bien es cierto que para el caso de sistemas planos estas bifurcaciones globales sólo conllevan la aparición o desaparición de órbitas periódicas [2], [108] —podríamos considerar a la homoclina como una órbita periódica de periodo infinito— en el caso de sistemas de dimensión mayor o igual que tres su presencia puede originar un flujo de estructura muy complicada en las proximidades de la conexión homoclina (o heteroclina) [46], [94], [95], [101], [47], [43], de manera que las tangencias homoclinas son una de las rutas al caos más estudiadas (junto con la cascada de duplicación de periodo de Feigenbaum, la intermitencia y la ruta

cuasiperiódica).

En la sección 2 se introduce el método numérico desarrollado, junto con una discusión teórica previa en la que se dan condiciones suficientes que aseguran la regularidad del problema de continuación formulado.

En las secciones siguientes se aplica el método a varios sistemas de dimensión dos y tres, tanto para el caso de conexiones homoclinas como heteroclinas. En varios de esos sistemas realizamos un análisis teórico previo y usamos también el algoritmo de continuación de órbitas periódicas. Así, en la tercera sección nos planteamos la continuación de tales conexiones para varios *unfoldings* de codimensión dos bien conocidos: los que despliegan el comportamiento de la bifurcación de Takens–Bogdanov (tanto en el caso cuadrático como en el cúbico) y uno de los posibles casos de dos pares de autovalores imaginarios puros sin resonancia.

En la sección 4 proponemos un oscilador tipo Van der Pol que presenta órbitas periódicas y homoclinas *canards*.

En lo que se refiere a heteroclinas en sistemas planos, estudiamos dos sistemas que corresponden, respectivamente, a un modelo presa–depredador (sección 5) y a la búsqueda de ondas viajeras en una ecuación en derivadas parciales correspondiente a un sistema de reacción–difusión (sección 6).

Pasamos ya, en las secciones 7 y 8, a aplicar nuestro método de continuación a dos sistemas tridimensionales bien conocidos. En primer lugar, buscamos en el sistema de Lorenz tanto conexiones homoclinas como heteroclinas. Finalmente analizamos una clase de osciladores forzados desde el punto de vista de la continuación de órbitas homoclinas.

## 3.2 Exposición del Método

En relación al diseño de un método de continuación para conexiones homoclinas y heteroclinas, encontramos en la literatura, al igual que sucedía en el caso de los códigos de continuación de órbitas periódicas, dos filosofías bien distintas.

Por un lado, autores como Beyn [8], [9] o Friedman y Doedel [37] apuestan por buscar las conexiones mediante la resolución de un problema de contorno en la recta real, que han truncado previamente a un intervalo finito. Por otro lado, usando ideas más geométricas, aparecen otros métodos como los propuestos por Kuznetsov [68], [69] —que se interesa también por la orientabilidad de las trayectorias homoclinas—, por Gaspard [42] o por Rodríguez-Luis *et alii* [84], [83], en los que se introduce una sección transversal (un plano normalmente) sobre el que se mide la separación entre las variedades estable e inestable (una de las cuales, al menos, se ha integrado numéricamente).

Pasamos, a continuación, a describir el método que proponemos. Comencemos considerando el sistema autónomo uniparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^3, \mu \in I \subseteq \mathbb{R} \quad (3.2.1)$$

donde  $I$  es un cierto entorno de  $\mu_0$ .

Supongamos que el origen,  $x = 0$ , es un equilibrio hiperbólico,  $f(0, \mu) = 0$  para todo  $\mu \in I$ , de tipo silla; sin pérdida de generalidad supongamos que la matriz de la linealización es de la forma

$$D_x f(0, \mu) = \begin{pmatrix} A(\mu) & 0 \\ 0 & B(\mu) \end{pmatrix}$$

donde  $A(\mu)$  es una matriz  $2 \times 2$  que tiene su espectro en el semiplano izquierdo y  $B(\mu)$  es un escalar positivo, para  $\mu \in I$ .

Tenemos, en estas condiciones, que las variedades estable  $W_\mu^s$  e inestable  $W_\mu^u$  del origen pueden ser descritas respectivamente, para un entorno de dicho punto, como:

$$x_3 = h^s(x_1, x_2, \mu) \quad (3.2.2)$$

y como:

$$x_1 = h_1^u(x_3, \mu), \quad x_2 = h_2^u(x_3, \mu) \quad (3.2.3)$$

donde  $W_\mu^s$  es tangente en el origen al plano  $x_1-x_2$  y  $W_\mu^u$  es tangente en el origen al eje  $OX_3$ .



Supongamos ahora que para  $\mu = \mu_0$  el sistema posee una órbita homoclina  $\gamma_0 \subset W_{\mu_0}^s \cap W_{\mu_0}^u$ . Sea  $S$  una sección transversal a dicha homoclina en el punto  $q_0 \in \gamma_0$ ; supongamos que

$$S \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = c\}$$

es decir, que está contenida en un plano (vid. figura 3.2.1). Bajo esta hipótesis, la característica de transversalidad viene expresada por la no anulación del producto escalar  $(0, 0, 1) \cdot f(q_0, \mu_0)$ .

Sean  $p_0^s, p_0^u$  dos puntos pertenecientes a la homoclina  $\gamma_0$ , próximos al origen,

$$\|p_0^s\|^2 = \|p_0^u\|^2 = \varepsilon$$

tales que  $p_0^s \in W_{\mu_0}^s$  y  $p_0^u \in W_{\mu_0}^u$ .

Para  $\mu$  próximo a  $\mu_0$  se tiene que la órbita de  $p^s$ , punto próximo a  $p_0^s$  y que también verifica  $\|p^s\|^2 = \varepsilon$ , cortará a  $S$  en un punto  $q^s$  próximo a  $q_0$ ; análogamente, la órbita de  $p^u$ , punto próximo a  $p_0^u$  que también verifica  $\|p^u\|^2 = \varepsilon$ , cortará a  $S$  en un punto  $q^u$  próximo a  $q_0$  (vid. figura 3.2.1).

Si denotamos por  $\phi(x, \mu, t)$  el flujo del sistema (3.2.1) podemos escribir las dos primeras componentes de los puntos  $q^s$  y  $q^u$  como:

$$\begin{aligned} q_i^s &= \phi_i(p^s, \mu, \tau^s(p^s, \mu)) \\ q_i^u &= \phi_i(p^u, \mu, \tau^u(p^u, \mu)) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

con  $i = 1, 2$ . Las funciones  $\tau^s(p^s, \mu)$  y  $\tau^u(p^u, \mu)$ , conocidas como función tiempo de vuelo, vienen determinadas por

$$\begin{aligned} \phi_3(p^s, \mu, \tau^s(p^s, \mu)) &= c, & \tau^s(p_0^s, \mu_0) &= \tau_0^s \\ \phi_3(p^u, \mu, \tau^u(p^u, \mu)) &= c, & \tau^u(p_0^u, \mu_0) &= \tau_0^u \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

con

$$\phi(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s) = q_0, \quad \phi(p_0^u, \mu_0, \tau_0^u) = q_0$$

Definimos la función

$$F : U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^7$$

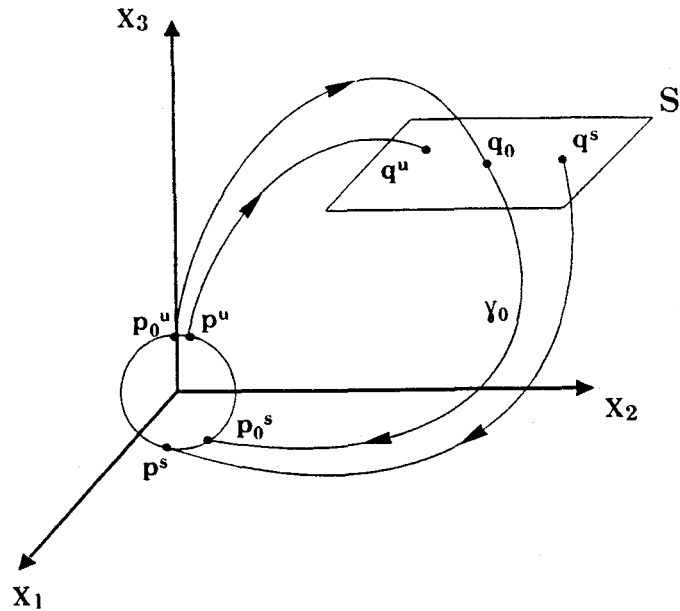


Figura 3.2.1: Geometría asociada a la aplicación  $F(p^s, p^u, \mu)$ .

de la siguiente manera:

$$F(p^s, p^u, \mu) = \begin{pmatrix} q_1^s - q_1^u \\ q_2^s - q_2^u \\ p_3^s - h^s(p_1^s, p_2^s, \mu) \\ p_1^u - h_1^u(p_3^u, \mu) \\ p_2^u - h_2^u(p_3^u, \mu) \\ \|p^s\|^2 - \varepsilon \\ \|p^u\|^2 - \varepsilon \end{pmatrix}$$

Es claro que, en estas condiciones,  $F(p_0^s, p_0^u, \mu_0) = 0$ , es decir, la anulación de  $F(p^s, p^u, \mu)$  indicará la presencia de una órbita homoclina. Vamos a demostrar que, bajo ciertas condiciones,  $(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$  es un cero regular de  $F$  (en particular, un cero aislado); es decir, comprobaremos que, bajo ciertas hipótesis,  $DF(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$  es no singular. Por tanto, tendremos como conclusión que la resolución de la ecuación  $F(p^s, p^u, \mu) = 0$  es un problema bien planteado con vistas a computar la órbita homoclina  $\gamma_0$ .

Comencemos introduciendo la ecuación variacional

$$\dot{y} = D_x f(\varphi_0(t), \mu_0)y + D_\mu f(\varphi_0(t), \mu_0)\lambda \quad (3.2.6)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\varphi_0(t) = \phi(q_0, \mu_0, t)$  es una parametrización de la órbita homoclina  $\gamma_0$ . Siguiendo a Beyn [8], [9] introducimos la siguiente

**Definición 3.2.1** Una órbita homoclina  $\gamma_0$  se dice que es no degenerada si las únicas soluciones acotadas del sistema variacional (3.2.6) son  $\lambda = 0$ ,  $y = k\dot{\phi}_0$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ .

Bajo la condición de no degeneración probaremos el carácter no singular de la matriz  $DF(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$ ; para ello resolveremos

$$DF(p_0^s, p_0^u, \mu_0) \begin{pmatrix} v^s \\ v^u \\ \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2.7)$$

donde  $v^s \in \mathbb{R}^3$ ,  $v^u \in \mathbb{R}^3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Veremos que  $v^s = 0$ ,  $v^u = 0$ ,  $\lambda = 0$  es su única solución.

Comencemos viendo previamente la expresión que adopta  $DF(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$  para obtener relaciones que nos permitan trabajar con las ecuaciones escalares que aparecen en (3.2.7). Dicha matriz  $7 \times 7$  se puede escribir como:

$$DF(p_0^s, p_0^u, \mu_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_{1,2}^s}{\partial p^s} & -\frac{\partial q_{1,2}^u}{\partial p^u} & \frac{\partial q_{1,2}^s}{\partial \mu} & -\frac{\partial q_{1,2}^u}{\partial \mu} \\ N^s & 0 & -\frac{\partial h^s}{\partial \mu} \\ 0 & N^u & -\frac{\partial h^u}{\partial \mu} \\ 2(p^s)^T & 0 & 0 \\ 0 & 2(p^u)^T & 0 \end{pmatrix}$$

en la que

$$N^u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial h_1^u}{\partial p_3^u} \\ 0 & 1 & -\frac{\partial h_2^u}{\partial p_3^u} \end{pmatrix}, \quad N^s = \left( -\frac{\partial h^s}{\partial p_1^s}, -\frac{\partial h^s}{\partial p_2^s}, 1 \right)$$

$$(p^s)^T = (p_1^s, p_2^s, p_3^s), \quad (p^u)^T = (p_1^u, p_2^u, p_3^u)$$

expresiones evaluadas naturalmente en  $(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$ . Por último, los ceros en la expresión anterior de la matriz  $DF$  indican bloques nulos de dimensión adecuada.

Teniendo en cuenta (3.2.4) y (3.2.5) es inmediato obtener que

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{1,2}^s}{\partial p^s}(p_0^s, p_0^u, \mu_0) &= R_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s) \\ \frac{\partial q_{1,2}^u}{\partial p^u}(p_0^s, p_0^u, \mu_0) &= R_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}(p_0^u, \mu_0, \tau_0^u) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

donde la matriz  $R_0$  viene dada por

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-f_1(q_0, \mu_0)}{f_3(q_0, \mu_0)} \\ 0 & 1 & \frac{-f_2(q_0, \mu_0)}{f_3(q_0, \mu_0)} \end{pmatrix}$$

De forma análoga obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{1,2}^s}{\partial \mu}(p_0^s, p_0^u, \mu_0) &= R_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s) \\ \frac{\partial q_{1,2}^u}{\partial \mu}(p_0^s, p_0^u, \mu_0) &= R_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mu}(p_0^u, \mu_0, \tau_0^u) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Ahora, con el fin de contar con expresiones adecuadas para las derivadas parciales de  $\phi$  que aparecen en (3.2.8) y (3.2.9), introducimos dos nuevos sistemas variacionales (análogos al (3.2.6)):

$$\dot{y}_s = D_x f(\varphi_0^s(t), \mu_0) y_s + D_\mu f(\varphi_0^s(t), \mu_0) \lambda_s \quad (3.2.10)$$

$$\dot{y}_u = D_x f(\varphi_0^u(t), \mu_0) y_u + D_\mu f(\varphi_0^u(t), \mu_0) \lambda_u \quad (3.2.11)$$

en los que  $\varphi_0^s(t)$  y  $\varphi_0^u(t)$  son, respectivamente las parametrizaciones de  $\gamma_0$  tales que  $\varphi_0^s(0) = p_0^s$  y  $\varphi_0^u(0) = p_0^u$ . Es, por tanto, evidente que  $\varphi_0^s(t) = \varphi_0(t - \tau_0^s)$ ,  $\varphi_0^u(t) = \varphi_0(t - \tau_0^u)$ .

Sea  $Y(t)$  la matriz fundamental principal ( $Y(0) = I$ ) de la parte homogénea de (3.2.6). Entonces, es claro que

$$Y^s(t) = Y(t - \tau_0^s)Y^{-1}(-\tau_0^s), \quad Y^u(t) = Y(t - \tau_0^u)Y^{-1}(-\tau_0^u)$$

son matrices fundamentales principales de las partes homogéneas, respectivamente, de (3.2.10) y (3.2.11). Por el carácter autónomo del sistema original, se tiene que  $\dot{\varphi}_0(t)$ ,  $\dot{\varphi}_0^s(t)$  y  $\dot{\varphi}_0^u(t)$  son soluciones, respectivamente, de las ecuaciones variacionales homogéneas de (3.2.6), (3.2.10) y (3.2.11), con lo que podemos deducir que

$$f(p_0^s, \mu_0) = Y(-\tau_0^s)f(q_0, \mu_0), \quad f(p_0^u, \mu_0) = Y(-\tau_0^u)f(q_0, \mu_0)$$

Ahora bien, al ser  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s)$  la matriz fundamental principal de la parte homogénea de (3.2.10) evaluada en  $\tau_0^s$ , tendremos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s) = Y^{-1}(-\tau_0^s)$$

y análogamente

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(p_0^u, \mu_0, \tau_0^u) = Y^{-1}(-\tau_0^u)$$

También sabemos que  $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s)$  es la solución de (3.2.10) que es nula en  $t = 0$  y evaluada en  $\tau_0^s$ , es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0, \tau_0^s) &= Y^s(\tau_0^s) \int_0^{\tau_0^s} (Y^s)^{-1}(t) D_\mu f(\varphi_0^s(t), \mu_0) dt = \\ &= Y^{-1}(-\tau_0^s) \int_{-\tau_0^s}^0 Y(-\tau_0^s) Y^{-1}(u) D_\mu f(\varphi_0(u), \mu_0) du = \\ &= \int_{-\tau_0^s}^0 Y^{-1}(u) D_\mu f(\varphi_0(u), \mu_0) du \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio  $t = u + \tau_0^s$ . De forma análoga, obtenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(p_0^u, \mu_0, \tau_0^u) = \int_{-\tau_0^u}^0 Y^{-1}(u) D_\mu f(\varphi_0(u), \mu_0) du$$

Estamos ya en condiciones de trabajar con las ecuaciones escalares de (3.2.7). Así, de sus dos primeras ecuaciones, obtenemos:

$$R_0 \left[ Y^{-1}(-\tau_0^s)v^s - Y^{-1}(-\tau_0^u)v^u + \lambda \int_{-\tau_0^s}^0 Y^{-1}D_\mu f - \lambda \int_{-\tau_0^u}^0 Y^{-1}D_\mu f \right] = 0 \quad (3.2.12)$$

Recordemos que el carácter transversal de la sección  $S$  en el punto  $q_0$  nos garantiza que  $f_3(q_0, \mu_0) \neq 0$ . La ecuación (3.2.12) es equivalente a

$$Y^{-1}(-\tau_0^s)\bar{v}^s - Y^{-1}(-\tau_0^u)\bar{v}^u + \lambda \int_{-\tau_0^s}^0 Y^{-1}D_\mu f - \lambda \int_{-\tau_0^u}^0 Y^{-1}D_\mu f = 0 \quad (3.2.13)$$

en la que  $v^s = \bar{v}^s + k_1 f(p_0^s, \mu_0)$ ,  $v^u = \bar{v}^u + k_2 f(p_0^u, \mu_0)$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

Introducimos ahora la siguiente solución del sistema variacional (3.2.6):

$$z(t) = Y(t)v + \lambda Y(t) \int_0^t Y^{-1}D_\mu f \quad (3.2.14)$$

Elegimos la condición inicial  $z(0) = v$  como

$$v = Y^{-1}(-\tau_0^s)\bar{v}^s + \lambda \int_{-\tau_0^s}^0 Y^{-1}D_\mu f = Y^{-1}(-\tau_0^u)\bar{v}^u + \lambda \int_{-\tau_0^u}^0 Y^{-1}D_\mu f$$

en la que hemos usado (3.2.13). Es evidente que  $z(-\tau_0^s) = \bar{v}^s$  y que  $z(-\tau_0^u) = \bar{v}^u$ . Estudiamos ahora el comportamiento de  $z(t)$  para  $t \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow -\infty$ .

Es posible construir [50] un conjunto fundamental de soluciones,  $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ , para el sistema variacional homogéneo, que satisfaga las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \varphi^1(t) &= \dot{\varphi}_0(t) \\ \varphi^2(t) &\text{ tal que } \varphi^2(0) \in T_{q_0}W_{\mu_0}^s \\ \varphi^3(t) &\text{ tal que } \varphi^3(0) \notin T_{q_0}W_{\mu_0}^s \end{aligned}$$

donde  $T_{q_0}W_{\mu_0}^s$  indica el espacio tangente a la variedad estable  $W_{\mu_0}^s$  en el punto  $q_0$ . Además, este conjunto fundamental de soluciones verifica:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi^1(t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^2(t) &= 0, \quad \varphi^2(t) \text{ no acotado para } t \rightarrow -\infty \\ \varphi^3(t) &\text{ no acotado para } t \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

Sea  $\Psi(t)$  una solución de la ecuación adjunta del sistema variacional homogéneo de manera que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Psi(t) = 0$$

Entonces obtenemos

$$\Psi(t) \cdot \varphi^1(t) = 0, \quad \Psi(t) \cdot \varphi^2(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad (3.2.15)$$

Demostraremos ahora que existe el  $\lim z(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Para ello analizamos las *partes aparentemente no acotadas* de la solución  $z(t)$  definida en (3.2.14). Escribimos, en primer lugar,

$$z(0) = v = \alpha_1 \varphi^1(0) + \alpha_2 \varphi^2(0) + \alpha_3 \varphi^3(0)$$

Multiplicándola por  $\Psi^T(0)$  obtenemos para la *parte aparentemente no acotada* de  $Y(t)v$ , esto es,  $\alpha_3 Y(t)\varphi^3(0)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_3 \Psi^T(0)\varphi^3(0) &= \Psi^T(-\tau_0^s)\bar{v}^s + \lambda \int_{-\tau_0^s}^0 \Psi^T D_\mu f = \\ &= \Psi^T(-\tau_0^s)\bar{v}^s + \lambda \Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^0 Y^{-1} D_\mu f \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

En segundo lugar consideramos el otro término de (3.2.14):

$$\lambda Y(t) \int_0^t Y^{-1} D_\mu f = \lambda Y(t) \left[ \int_0^t P Y^{-1} D_\mu f - \int_t^\infty (I - P) Y^{-1} D_\mu f \right] + Y(t)u \quad (3.2.17)$$

con

$$u = \lambda \int_0^\infty (I - P) Y^{-1} D_\mu f$$

donde hemos usado la dicotomía exponencial sobre el intervalo  $[0, +\infty)$  de la ecuación variacional homogénea, y en la que  $P$  denota la correspondiente proyección [8], [19], [77]. El primer término en el miembro derecho de (3.2.17) tiene límite finito para  $t \rightarrow +\infty$ . Escribimos ahora:

$$u = \beta_1 \varphi^1(0) + \beta_2 \varphi^2(0) + \beta_3 \varphi^3(0)$$

y multiplicando por  $\Psi^T(0)$  obtenemos para la *parte aparentemente no acotada* de  $Y(t)u$ ,  $\beta_3 Y(t)\varphi^3(0)$ :

$$\beta_3 \Psi^T(0)\varphi^3(0) = \lambda \Psi^T(0) \int_0^\infty (I - P)Y^{-1}D_\mu f \quad (3.2.18)$$

Sumando (3.2.16) y (3.2.18) obtenemos:

$$(\alpha_3 + \beta_3) \Psi^T(0)\varphi^3(0) = \lambda \left[ \frac{\partial h^s}{\partial \mu} + \Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^\infty (I - P)Y^{-1}D_\mu f \right] \quad (3.2.19)$$

donde hemos usado el hecho de que:

$$\Psi^T(-\tau_0^s)\bar{v}^s = \lambda \frac{\partial h^s}{\partial \mu}$$

Esto último lo deducimos a partir de la tercera ecuación escalar de (3.2.7):

$$\left( -\frac{\partial h^s}{\partial p_1^s}, -\frac{\partial h^s}{\partial p_2^s}, 1 \right) \cdot \bar{v}^s - \lambda \frac{\partial h^s}{\partial \mu} = 0$$

y teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de  $\Psi(t)$  expresadas en (3.2.15) que nos aseguran que  $\Psi(-\tau_0^s)$  es colineal con

$$\left( -\frac{\partial h^s}{\partial p_1^s}, -\frac{\partial h^s}{\partial p_2^s}, 1 \right) (p_0^s, \mu_0)$$

y, por tanto, podemos elegir  $\Psi(t)$  para que dichos vectores coincidan.

Veamos, por último, que usando cuidadosamente las propiedades de la variedad estable local  $h^s(p_1^s, p_2^s, \mu)$  obtenemos:

$$\frac{\partial h^s}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0) = -\Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^\infty (I - P)Y^{-1}D_\mu f \quad (3.2.20)$$

A partir de

$$\phi_3(p_1^s, p_2^s, h^s(p_1^s, p_2^s, \mu), \mu, t) = h^s(\phi_{1,2}(p_1^s, p_2^s, h^s(p_1^s, p_2^s, \mu), \mu, t), \mu) , \quad \forall t \geq 0$$

en la que  $\phi_{1,2} = (\phi_1, \phi_2)$ , obtenemos, derivando con respecto a  $\mu$  y evaluando en  $(p_0^s, \mu_0)$ :

$$\left[ N^s(t) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(p_0^s, \mu_0, t) \right] \frac{\partial h^s}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0) + N^s(t) \frac{\partial \phi}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0, t) = \frac{\partial h^s}{\partial \mu}(t)$$



siendo

$$\begin{aligned} N^s(t) &= \left( -\frac{\partial h^s}{\partial p_1^s}, -\frac{\partial h^s}{\partial p_2^s}, 1 \right) (\phi_{1,2}(p_0^s, \mu_0, t), \mu_0) \\ \frac{\partial h^s}{\partial \mu}(t) &= \frac{\partial h^s}{\partial \mu}(\phi_{1,2}(p_0^s, \mu_0, t), \mu_0) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$[N^s(t)Y^s(t)e_3] \frac{\partial h^s}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0) + N^s(t)Y^s(t) \int_0^t (Y^s)^{-1} D_\mu f = \frac{\partial h^s}{\partial \mu}(t) \quad (3.2.21)$$

De las propiedades de  $\Psi(t)$  —vid. (3.2.15)— deducimos que existe una función escalar  $\rho(t)$  tal que

$$\rho(t)N^s(t) = \Psi^T(t - \tau_0^s), \quad \forall t \geq 0$$

con  $\rho(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$  y  $\rho(t) \neq 0$ . Recordemos que en  $t = 0$

$$\Psi^T(-\tau_0^s) = N^s(0) = \left( -\frac{\partial h^s}{\partial p_1^s}, -\frac{\partial h^s}{\partial p_2^s}, 1 \right) (p_0^s, \mu_0)$$

y así

$$N^s(t)Y^s(t) = \frac{\Psi^T(-\tau_0^s)}{\rho(t)}$$

Si en la integral de (3.2.21) hacemos una traslación con  $-\tau_0^s$  obtenemos:

$$\frac{\partial h^s}{\partial \mu}(p_0^s, \mu_0) = \rho(t) \frac{\partial h^s}{\partial \mu}(t) - \Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^t Y^{-1} D_\mu f$$

Tomemos límite con  $t \rightarrow \infty$ . A partir de

$$h^s(\phi_{1,2}(p_0^s, \mu, t), \mu) \rightarrow h^s(0, \mu) = 0, \quad \forall \mu$$

se tiene que  $\frac{\partial h^s}{\partial \mu}(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . Además

$$\begin{aligned} \Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^t Y^{-1} D_\mu f &= \Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^0 Y^{-1} D_\mu f + \Psi^T(0) \int_0^t Y^{-1} D_\mu f = \\ &= \Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^0 Y^{-1} D_\mu f + \Psi^T(t)Y(t) \int_0^t Y^{-1} D_\mu f \rightarrow \\ &\rightarrow \Psi^T(0) \int_{-\tau_0^s}^\infty (I - P)Y^{-1} D_\mu f \quad \text{para } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (3.2.17). Así pues, de (3.2.19), podemos deducir la existencia del  $\lim z(t)$  para  $t \rightarrow \infty$ . Razonando de forma análoga puede demostrarse que existe el  $\lim z(t)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Por lo tanto, en particular,  $z(t)$  es una solución acotada del sistema variacional (3.2.6) y aplicando la hipótesis de *no degeneración* concluimos que  $\lambda = 0$  y  $z(t) = k\varphi^1(t) = k\dot{\varphi}_0(t)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . De esta manera

$$\bar{v}^s = z(-\tau_0^s) = k\dot{\varphi}_0(-\tau_0^s) = kf(p_0^s, \mu_0)$$

$$\bar{v}^u = z(-\tau_0^u) = k\dot{\varphi}_0(-\tau_0^u) = kf(p_0^u, \mu_0)$$

y entonces

$$v^s = (k + k_1)f(p_0^s, \mu_0)$$

$$v^u = (k + k_2)f(p_0^u, \mu_0) \quad (3.2.22)$$

Ahora, de (3.2.22), junto con las dos últimas ecuaciones escalares de (3.2.7), deducimos que  $v^s = v^u = 0$ . En consecuencia hemos probado el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.1** *Si la órbita homoclina  $\gamma_0$  es no degenerada entonces  $(p_0^s, p_0^u, \mu_0)$  es un cero regular de  $F$ .*

Consideremos ahora el sistema biparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.2.23)$$

Supondremos también que, para un cierto valor del parámetro  $\mu_0 = (\mu_1^0, \mu_2^0)$ , el sistema (3.2.23) tiene una conexión homoclina  $\gamma_0$ . Entonces, procediendo como en el caso anterior, nos encontraremos con un problema de continuación. Definiremos, análogamente a como hicimos en (3.2.5),  $F : V \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^7$ , donde  $V$  es un entorno de  $(p_0^s, p_0^u, \mu_1^0, \mu_2^0)$ ; es evidente que  $F(p_0^s, p_0^u, \mu_1^0, \mu_2^0) = 0$ .

Así, la continuación de homoclinas es equivalente a la continuación de soluciones de

$$F(p^s, p^u, \mu_1, \mu_2) = 0$$

En este caso, el carácter *no degenerado* de  $\gamma_0$  con respecto a  $\mu_1$  o a  $\mu_2$  garantiza la no singularidad de  $D_{w_i} F(p_0^s, p_0^u, \mu_1^0, \mu_2^0)$  en la que  $w_i = (p^s, p^u, \mu_i)$ ,  $i = 1$  o  $2$ . En consecuencia tenemos garantía, usando el teorema de la función implícita, de que estamos ante una curva regular de conexiones homoclinas en el plano de parámetros  $(\mu_1, \mu_2)$ .

A la hora de programar en un código el método anterior necesitamos aproximar las variedades estable e inestable del equilibrio. Dependiendo del sistema en estudio y de la precisión requerida puede ser suficiente aproximarlas por sus espacios tangentes (aproximación lineal) en el equilibrio hiperbólico. Si no basta con esta aproximación, se pueden usar aproximaciones de orden superior calculadas, por ejemplo, por los procedimientos descritos en [34], [36], [38]. Se trata entonces de integrar numéricamente a partir de  $p^u$  (vid. figura 3.2.1), y de  $p^s$  (que al estar sobre una variedad bidimensional, queda determinado mediante la introducción de un parámetro adicional —o dos parámetros y una relación entre ellos—), detectar las intersecciones de esas órbitas con la sección  $S$  —plano paralelo a uno coordenado—, interpolar (son válidos los comentarios que a este respecto hacíamos en el caso de continuación de órbitas periódicas) y anular las dos primeras componentes de  $F(p^s, p^u, \mu)$  —puesto que las restantes suponemos que son nulas por la aproximación hecha de las variedades—.

Así, el problema de la continuación de la conexión homoclina del sistema (3.2.1) en un plano de dos parámetros se convierte en la anulación de una función de dos componentes y tres variables independientes —o de tres componentes y cuatro variables si para determinar  $p^s$  introducimos dos parámetros y una relación entre ellos— tarea que nuevamente es encomendada al algoritmo PITCON de Rheinboldt.

El método expuesto se puede aplicar, de forma análoga, al caso de órbitas heteroclinas. Obviamente, si el sistema es bidimensional, la tarea de la continuación de las curvas de estas bifurcaciones globales se simplifica: tanto la variedad estable como la inestable son unidimensionales, la sección  $S$  se convierte en una recta y la función que hay que anular sólo tiene una componente y dos variables

independientes (los dos parámetros del sistema plano).

### 3.3 Diversos *Unfoldings* de Codimensión Dos

En esta sección aplicamos el método de continuación propuesto a varios sistemas, *unfoldings* de codimensión dos, que presentan conexiones homoclinas o heteroclinas. Resumimos para cada uno de ellos el análisis teórico proporcionado por el método de Melnikov, que se puede encontrar, por ejemplo, en [51] y presentamos las curvas de bifurcaciones globales obtenidas numéricamente tomando como punto de partida el análisis de Melnikov.

Comenzamos con la familia biparamétrica

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + ax^2 + bxy\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

analizada por Takens [98] y Bogdanov [11]. Nos centramos en el caso  $a = b = 1$ . Los equilibrios de (3.3.1) están situados en  $(x_{\pm}, 0) = (\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)$ , es decir, existen para  $\mu_1 \leq 0$  tras experimentar una bifurcación silla-nodo en  $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ . Asimismo, es fácil comprobar que, mientras que  $(x_+, 0)$  es siempre un punto de silla,  $(x_-, 0)$  experimenta una bifurcación de Hopf subcrítica cuando  $\mu_2 = \sqrt{-\mu_1}$ , pasando de foco inestable si  $\mu_2 > \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0$ , a foco estable.

Para que el conjunto de bifurcaciones sea coherente es necesaria la presencia de una bifurcación global. Determinamos la curva sobre la que se da, en primera aproximación, aplicando el método de Melnikov. Mediante el escalado

$$t \mapsto \varepsilon t, \quad x = \varepsilon^2 u, \quad y = \varepsilon^3 v, \quad \mu_1 = \varepsilon^4 \nu_1, \quad \mu_2 = \varepsilon^2 \nu_2, \quad \varepsilon \geq 0$$

(3.3.1) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= \nu_1 + u^2 + \varepsilon(\nu_2 v + uv)\end{aligned}$$

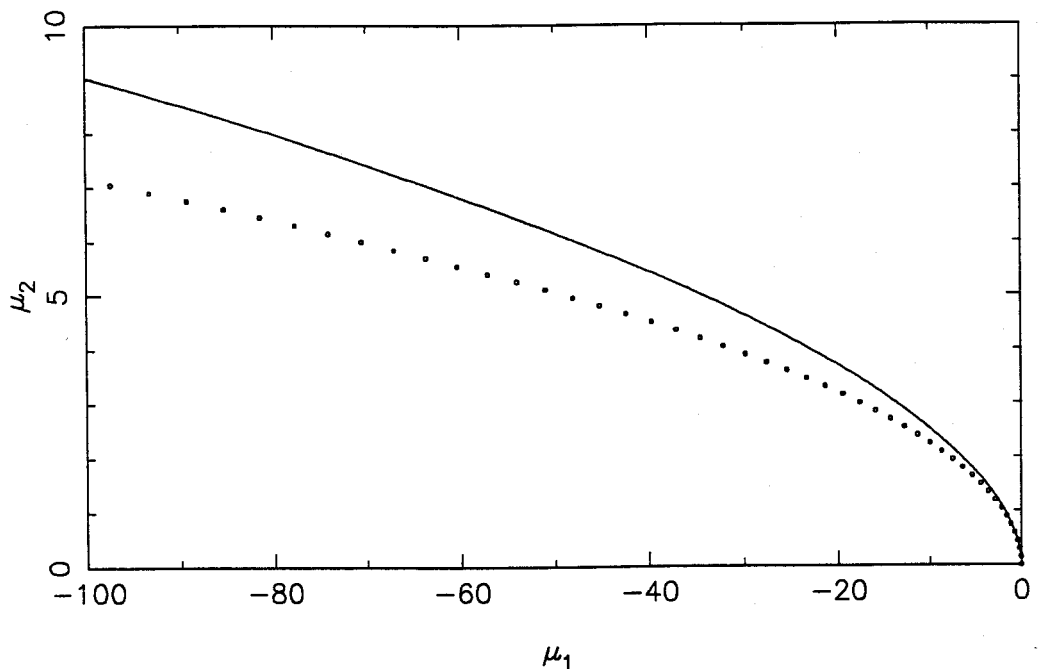


Figura 3.3.1: Curva de conexiones homoclinas.

que resulta ser la suma de un sistema hamiltoniano y una pequeña perturbación. Dicho sistema hamiltoniano procede de la función

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \nu_1 u - \frac{u^3}{3}$$

y presenta, para  $\nu_1 = -1$ , una conexión homoclina cuando  $H(u, v) = \frac{2}{3}$ . Usando la parametrización de dicha órbita y anulando la correspondiente función de Melnikov se obtiene (vid. [51])  $\nu_2 = 5/7$ , que nos lleva a la semiparábola

$$\mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2, \quad \mu_2 \geq 0 \quad (3.3.2)$$

como curva sobre la que se mantienen dichas conexiones homoclinas.

Este resultado nos ha servido de punto de partida para la detección y posterior continuación de dicha curva que aparece en la figura 3.3.1 junto con la aproximación (punteada) (3.3.2) que da el método de Melnikov.

Pasamos, a continuación, a estudiar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y + a_3 x^3 + b_3 x^2 y \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

que despliega el comportamiento de una bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada ( $a_3 \neq 0, b_3 \neq 0$ ) de términos cúbicos. Basta considerar, mediante escalados adecuados, [98], [51], los casos  $b_3 = -1$  junto con  $a_3 = \pm 1$ . Como veremos el caso  $a_3 = -1$  presenta conexiones homoclinas y el  $a_3 = +1$  órbitas heteroclinas.

Comencemos suponiendo  $a_3 = -1, b_3 = -1$ . El sistema (3.3.3) tiene tres equilibrios situados en  $(0, 0)$  y  $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$ . El origen experimenta una bifurcación de Hopf supercrítica para  $\mu_2 = 0, \mu_1 < 0$ , y una pitchfork para  $\mu_1 = 0$  ( $\mu_2 \neq 0$ ). Asimismo, los equilibrios no triviales experimentan una bifurcación de Hopf subcrítica para  $\mu_2 = \mu_1$  ( $\mu_1 > 0$ ). Para determinar, en primera aproximación, las curvas sobre las que se dan conexiones homoclinas y sillan–nodo de órbitas periódicas aplicamos el método de Melnikov. Para ello escalamos el sistema (3.3.3) mediante

$$t \mapsto \varepsilon t, \quad x = \varepsilon u, \quad y = \varepsilon^2 v, \quad \mu_1 = \varepsilon^2 \nu_1, \quad \mu_2 = \varepsilon^2 \nu_2 \quad (3.3.4)$$

con lo que obtenemos, haciendo  $\nu_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 + \varepsilon (\nu_2 v - u^2 v) \end{aligned}$$

que resulta ser una perturbación del sistema hamiltoniano definido por la función

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$$

Perturbando la homoclina (un par por la simetría) de dicho sistema hamiltoniano se obtiene, anulando la correspondiente función de Melnikov,  $\nu_2 = \frac{4}{5}$ , es decir, la curva de conexiones homoclinas es tangente en el origen a la recta

$$\mu_2 = \frac{4}{5} \mu_1, \quad (\mu_1 > 0)$$

Para obtener la aproximación de la curva de sillanodo de órbitas periódicas (en la que colapsan la órbita estable que nació en la Hopf del origen y la inestable que surge tras la conexión homoclina) se perturban tanto las órbitas del sistema hamiltoniano exteriores a la homoclina como las interiores. Tras laboriosos cálculos [15] en los que aparecen integrales elípticas, la anulación de la correspondiente función de Melnikov conduce a

$$\nu_2 = R(e), \quad e \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

donde  $e$  es el nivel de energía de la órbita y  $R$  es una función, definida como el cociente de dos integrales, que estudiaremos en detalle en el capítulo V cuando analicemos la degeneración de la bifurcación de Takens–Bogdanov al anularse el coeficiente de  $x^2y$  con  $a_3 = -1$ .

Por la forma de dicha función  $R(e)$  se deduce que la silla–nodo se producirá cuando  $\nu_2 = c$  donde  $c \approx 0.752$  es el valor para el que  $R(e)$  alcanza su mínimo absoluto [15], [65]. De esta manera, la curva de sillanodo de órbitas periódicas es tangente en el origen a  $\mu_2 = c\mu_1$ .

Hemos continuado numéricamente tanto la curva de homoclinas como la de sillanodo obteniendo los resultados expuestos en la figura 3.3.2, en la que aparecen punteadas las rectas obtenidas por el método de Melnikov.

Pasamos ahora a comentar el caso en que, para el sistema (3.3.3),  $a_3 = +1, b_3 = -1$ . Sus tres equilibrios están situados en  $(0, 0), (\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)$ . El origen experimenta una pitchfork para  $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$  y una bifurcación de Hopf supercrítica para  $\mu_2 = 0, \mu_1 < 0$ . Los equilibrios no triviales, que resultan ser tipo silla, van a estar conectados por dos órbitas heteroclinas, dada la simetría del sistema, que forman un ciclo homoclino. Para aplicar el método de Melnikov, mediante el escalado dado en (3.3.4), transformamos (3.3.3), haciendo  $\nu_1 = -1$ , en:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -u + u^3 + \varepsilon(\nu_2 v - u^2 v) \end{aligned}$$

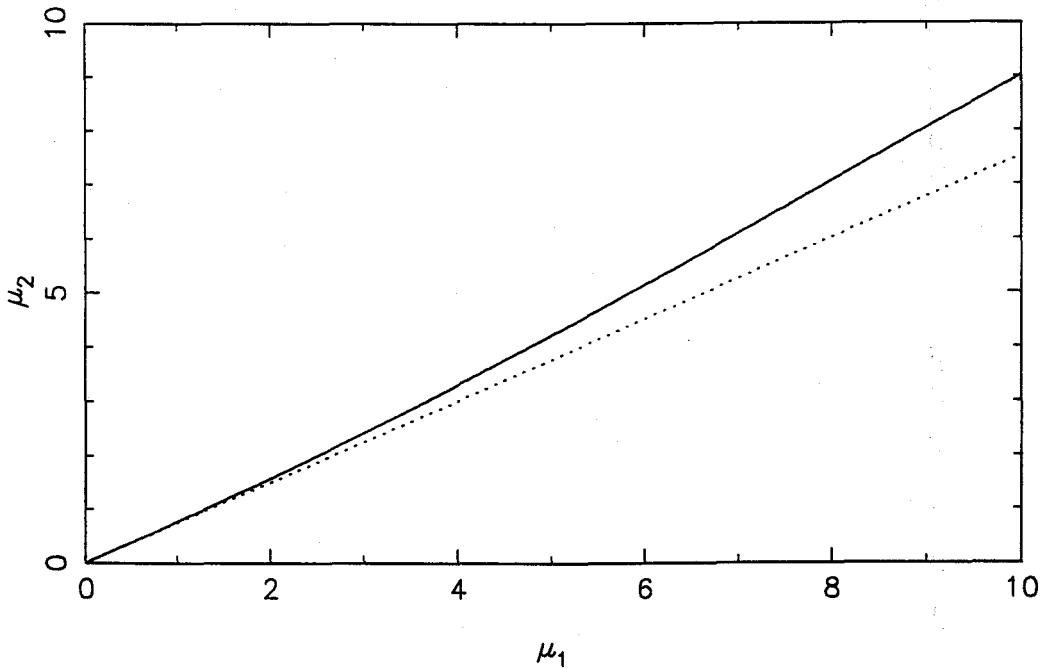
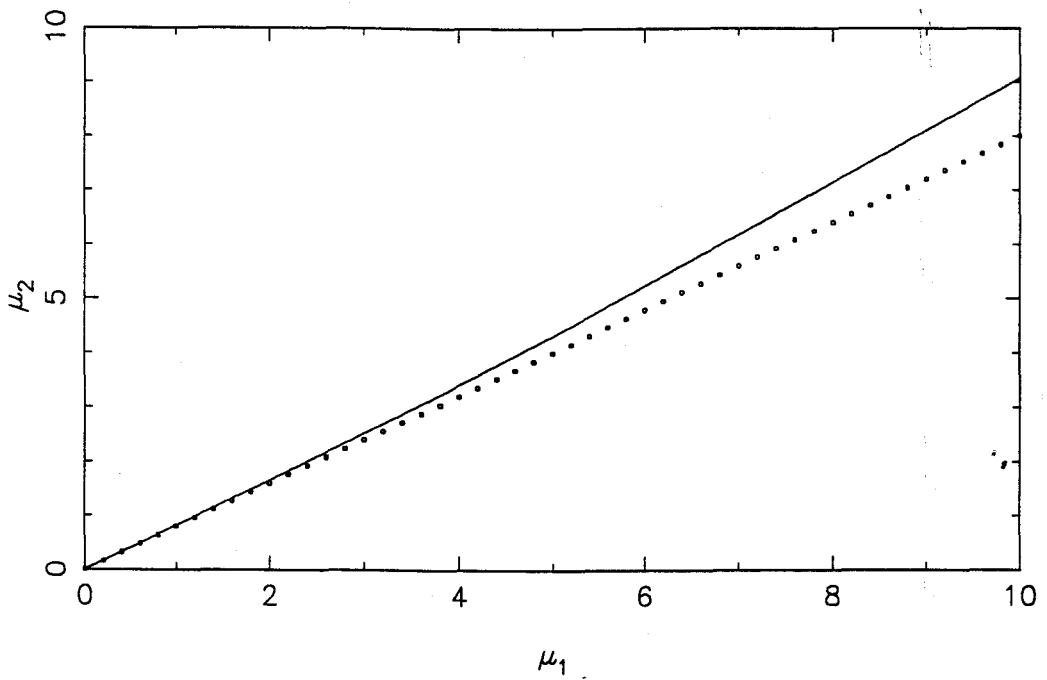


Figura 3.3.2: (a) Curva de conexiones homoclinas; b) curva de sillan-nodo de órbitas periódicas, para el sistema de Takens-Bogdanov cúbico.



Al perturbar el sistema hamiltoniano definido por

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}$$

que presenta un par de órbitas heteroclinas simétricas que unen los puntos de silla  $(\pm 1, 0)$  para  $H(u, v) = \frac{1}{4}$ , se obtiene, como aproximación a la curva de conexiones heteroclinas [51], la recta

$$\mu_2 = \frac{-\mu_1}{5}$$

Representamos en la figura 3.3.3 la curva obtenida por el algoritmo de continuación junto con la recta punteada obtenida por el método de Melnikov.

Para finalizar esta sección consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1(\mu_1 + r_1^2 + br_2^2) \\ \dot{r}_2 &= r_2(\mu_2 + cr_1^2 + dr_2^2) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

que corresponde al *unfolding*, para el caso de dos pares de autovalores imaginarios puros sin resonancia, cuando  $d = -1, b > 0, c < 0, d - bc > 0$  —vid. [51]— y también para el caso Hopf–cero con simetría al cambio de signo (Hopf–pitchfork).

Este sistema tiene siempre el origen como equilibrio y además, en el cuadrante positivo, pueden aparecer otros tres equilibrios más situados en:

- $(\sqrt{-\mu_1}, 0)$  para  $\mu_1 < 0$
- $(0, \sqrt{\mu_2})$  para  $\mu_2 > 0$
- $\left( \sqrt{\frac{b\mu_2 + \mu_1}{1 + bc}}, \sqrt{\frac{\mu_2 - c\mu_1}{1 + bc}} \right)$ , para  $\frac{-(b\mu_2 + \mu_1)}{1 + bc}, \frac{\mu_2 - c\mu_1}{1 + bc} > 0$

Este último equilibrio experimenta una bifurcación de Hopf para

$$\mu_2 = \frac{c-1}{b+1}\mu_1$$

que resulta ser degenerada por lo que es necesario añadir términos de orden superior a (3.3.5) para determinar su orden de degeneración lo que nos proporcionará el tipo topológico del *unfolding*. En este caso bastará añadir  $(0, kr_2^5)$ . Mediante

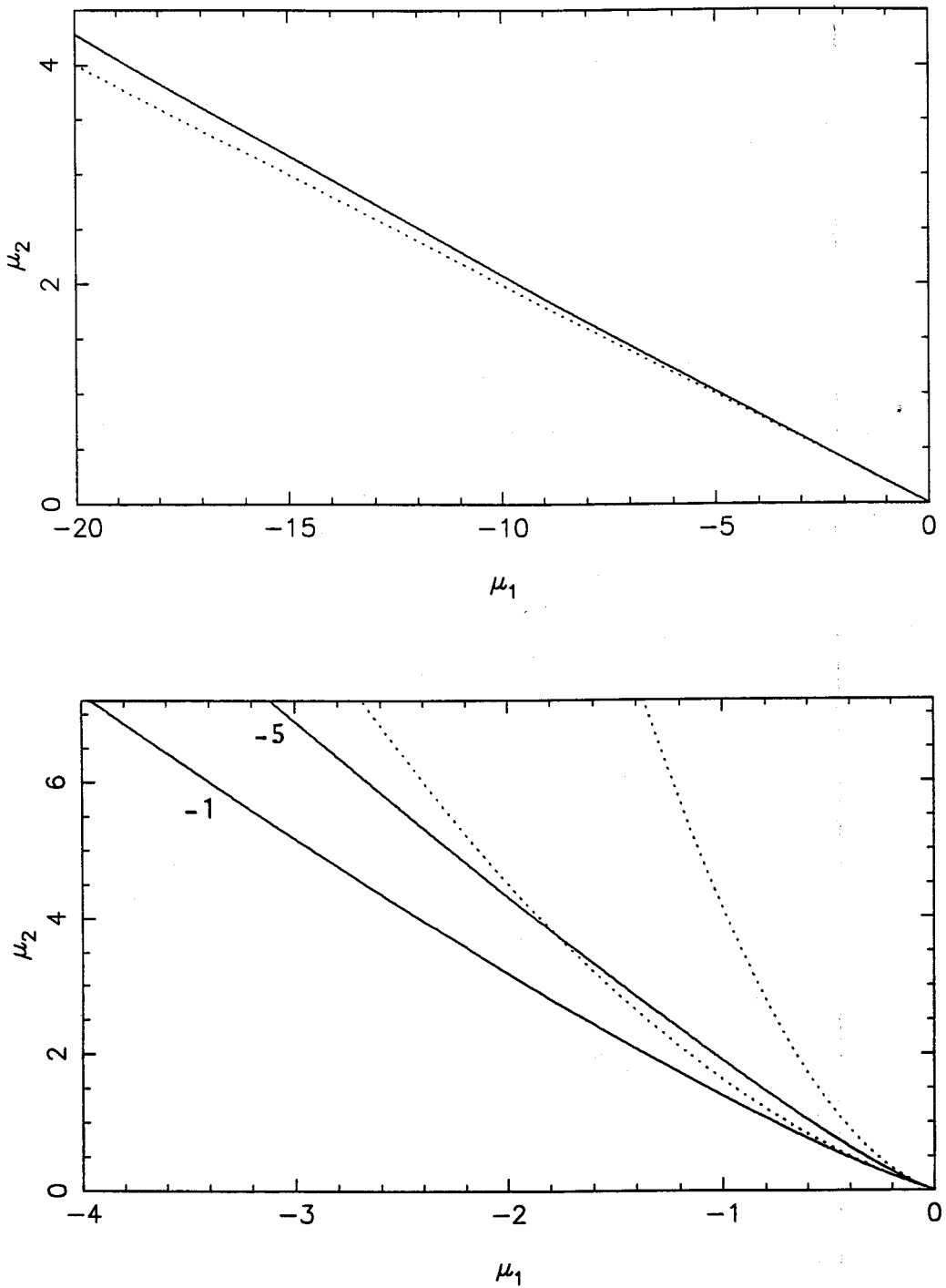


Figura 3.3.3: (a) Curva de conexiones heteroclinas para el sistema de Takens-Bogdanov cúbico; (b) Curva de ciclos homoclinos para  $k = -1$  y para  $k = -5$ .

un escalado adecuado se obtiene un sistema integrable que al aplicarle el método de Melnikov y para el caso particular  $b = 3, c = -3$ , se obtiene la presencia de un ciclo homoclinico cuya curva de bifurcación viene aproximada por [51]

$$\mu_2 = -\mu_1 - \frac{5k}{8}\mu_1^2, \quad (\mu_1 < 0) \quad (3.3.6)$$

Este ciclo homoclinico está formado por tres heteroclinas que unen a los tres puntos de silla, que están situados sobre los ejes: la variedad inestable del punto  $(\sqrt{-\mu_1}, 0)$  intersecta con la estable del origen, la inestable del origen con la estable de  $(0, \sqrt{\mu_2})$  y la inestable de éste con la estable de  $(\sqrt{-\mu_1}, 0)$ .

Mientras que las dos primeras conexiones existen siempre, debido a la invariancia de los ejes, la última, responsable de la desaparición de la órbita periódica que nació en la bifurcación de Hopf antes mencionada, será la que exista en la curva aproximada por (3.3.6).

Hemos continuado numéricamente dicha curva para dos valores de  $k$ ,  $k = -1, k = -5$ , representando los resultados obtenidos en la figura 3.3.3 en la que aparecen, además, punteadas las aproximaciones respectivas obtenidas por el método de Melnikov.

### 3.4 Un Sistema con Homoclinas *Canards*

El circuito de la figura 3.4.1, que consta de un condensador, una bobina, una resistencia y una conductancia no lineal (oscilador tipo Van der Pol), viene gobernado, tomando como variables de estado la tensión en el condensador ( $x$ ) y la intensidad que atraviesa la bobina ( $y$ ) por

$$\begin{aligned} C\dot{x} &= y - f(x) \\ L\dot{y} &= -x - Ry \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

donde la característica tensión-intensidad de la conductancia no lineal viene dada por  $f(x) = -a_1x + a_3x^3$ ,  $a_1, a_3 > 0$ .

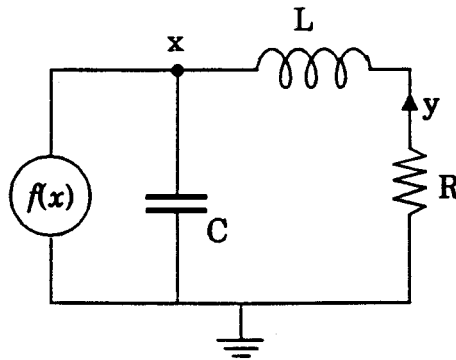


Figura 3.4.1: Circuito eléctrico

Introduciendo variables adimensionales mediante  $x = x_0 X$ ,  $y = y_0 Y$ ,  $\tau = \omega t$ , y eligiendo

$$x_0^2 = \frac{\omega C}{a_3}, \quad y_0^2 = \frac{\omega^3 C^3}{a_3}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

el sistema (3.4.1) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \bar{a}_1 X + Y - X^3 \\ \dot{Y} &= -X - \bar{R} Y \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

donde

$$\bar{a}_1 = \frac{a_1}{\omega C}, \quad \bar{R} = \frac{R}{\omega L}.$$

Vamos a comprobar que este sistema experimenta una bifurcación de Takens-Bogdanov. Para ello, en primer lugar, vamos a pasar de una parte lineal

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & 1 \\ -1 & -\bar{R} \end{pmatrix}$$

a otra en la forma de Frobenius

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \bar{a}_1 \bar{R} & \bar{a}_1 - \bar{R} \end{pmatrix}$$

mediante el cambio  $U = X$ ,  $V = \bar{a}_1 X + Y$ , que convierte (3.4.2) en

$$\begin{aligned} \dot{U} &= V - U^3 \\ \dot{V} &= \mu_1^* U + \mu_2^* V - \bar{a}_1 U^3 \end{aligned}$$

donde hemos introducido  $\mu_1^* = \bar{a}_1 \bar{R} - 1$ ,  $\mu_2^* = \bar{a}_1 - \bar{R}$ . Haciendo  $u^* = U$ ,  $v^* = V - U^3$  obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{u}^* &= v^* \\ \dot{v}^* &= \mu_1^* u^* + \mu_2^* v^* - \bar{R} u^{*3} - 3u^{*2} v^*\end{aligned}$$

Por último, es fácil comprobar que este sistema, mediante el escalado

$$u^* = \frac{\sqrt{\bar{R}}}{3} x, \quad v^* = \frac{\bar{R}^2}{9} y, \quad \tau = \frac{\bar{R}}{3} t$$

se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y - x^3 - x^2 y\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

donde

$$\mu_1 = \frac{9}{\bar{R}^2} \mu_1^*, \quad \mu_2 = \frac{3}{\bar{R}} \mu_2^*$$

Acabamos de comprobar que el sistema (3.4.1) se puede escribir como el *unfolding* de la bifurcación de Takens–Bogdanov con simetría cúbica ([51]) por lo que del origen del plano de parámetros  $\mu_1$ – $\mu_2$  parten tres curvas: la correspondiente a la bifurcación de Hopf (subcrítica en este caso) de los equilibrios no triviales, la de conexiones homoclinas y la correspondiente a la bifurcación silla–nodo de órbitas periódicas.

Estamos interesados en poner de manifiesto la existencia, en determinadas condiciones, de órbitas tipo *canard*. Para ello, introducimos como nuevos parámetros de control

$$\alpha = \frac{R^2 C}{L} > 0, \quad \beta = a_1 R - 1$$

Es fácil comprobar, teniendo en cuenta las diversas transformaciones a que hemos sometido a (3.4.1), que

$$\mu_1 = \frac{9\beta}{\alpha}, \quad \mu_2 = \frac{3(\beta + 1 - \alpha)}{\alpha} \tag{3.4.4}$$

y que mediante el escalado (para  $\beta > 0$ ):

$$x = 3\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}u, \quad y = \frac{9}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v, \quad \tau = \frac{3}{\alpha}t$$

el sistema (3.4.3) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= \alpha\beta u + (\beta + 1 - \alpha)v - \alpha\beta u^3 - 3\beta u^2 v \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

que pasamos, a continuación, a analizar.

Aparecen tres equilibrios situados en  $(0, 0)$  y  $(\pm 1, 0)$ . La matriz de la linealización es

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha\beta(1 - 3u^2) - 6\beta uv & \beta + 1 - \alpha - 3\beta u^2 \end{pmatrix}$$

que en el origen se convierte en

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha\beta & \beta + 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Ésta nos indica que, para  $\alpha, \beta > 0$ , el origen es un punto de silla.

El estudio a partir de la matriz de los equilibrios no triviales nos permite corroborar que estos experimentan una bifurcación de Hopf subcrítica sobre la recta

$$\alpha + 2\beta = 1$$

que parte del punto  $\alpha = 1, \beta = 0$  en el que se da la bifurcación de Takens-Bogdanov antes mencionada. Teniendo en cuenta (3.4.4) es inmediato deducir que, en el plano  $\alpha$ - $\beta$ , las tres curvas que parten de ese punto de codimensión dos —Hopf, homoclina, silla-nodo— son aproximadas respectivamente por

$$\beta = \frac{-\alpha + 1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{7}(-\alpha + 1), \quad \beta = \frac{-\alpha + 1}{1 + 3c}$$

donde  $c \approx 0.752$ .

Estas aproximaciones nos sirven como punto de partida para continuar tanto la curva de conexiones homoclinas  $H$  como la de la bifurcación silla-nodo  $SN$  de

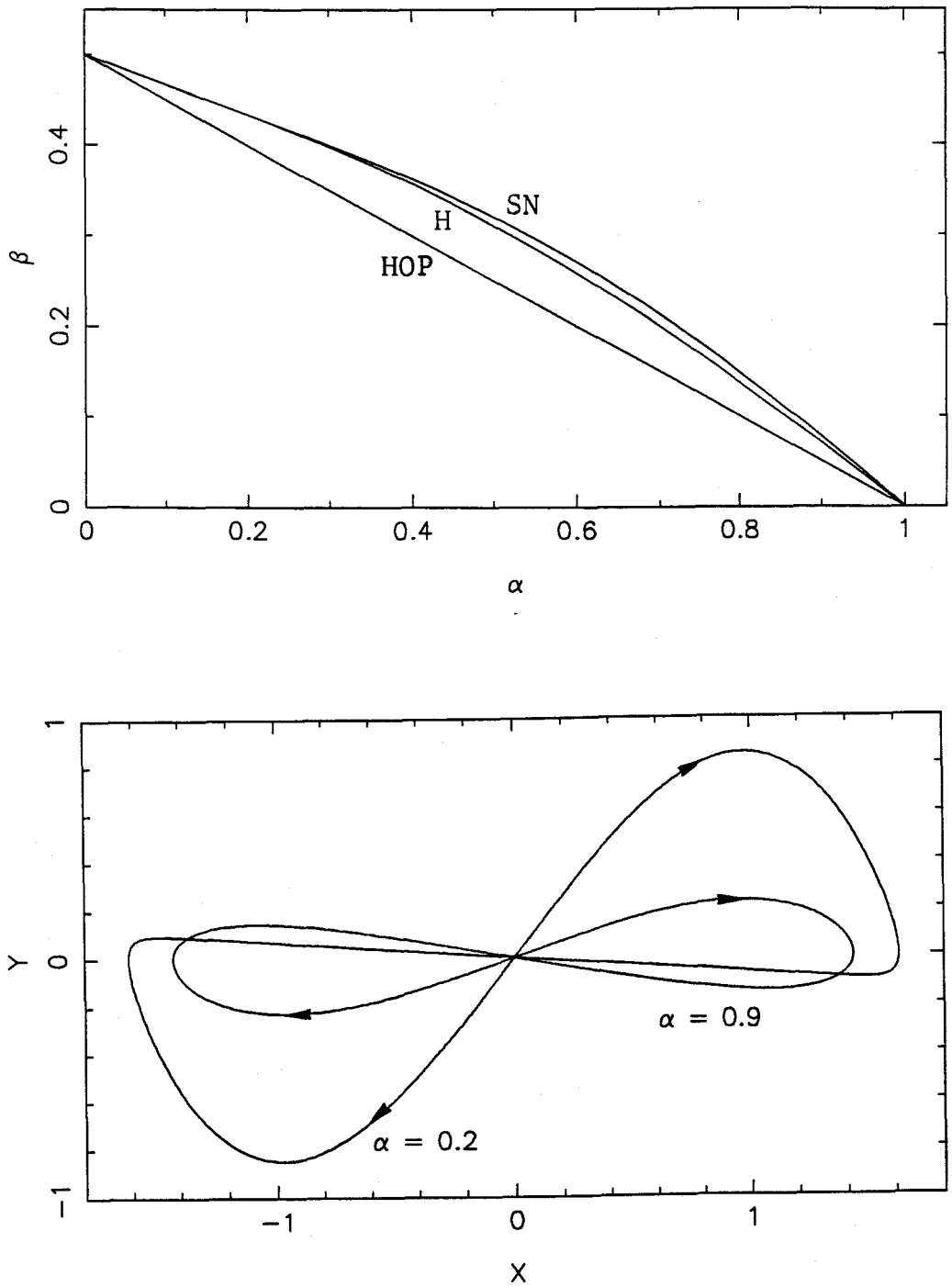


Figura 3.4.2: (a) Conjunto de bifurcaciones. (b) Órbitas homoclinas para dos valores de  $\alpha$ .

órbitas periódicas. Es en la figura 3.4.2 donde hemos representado el conjunto de bifurcaciones en el que aparecen las tres curvas que parten del punto de Takens-Bogdanov y vuelven a unirse en el  $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}$ , precisamente en la zona en la que aparecen las órbitas tipo *canard*.

Si nos movemos a  $\alpha$  constante ( $\alpha < 1$ ) en el sentido de  $\beta$  creciente, obtenemos los retratos de fase esquematizados en la figura 3.4.3 que corresponde a  $\alpha = 0.2$ . En primer lugar, por debajo de la recta de Hopf, una órbita periódica estable rodea a los tres equilibrios, siendo los no triviales inestables. Tras experimentar éstos una bifurcación de Hopf subcrítica aparecen dos órbitas inestables, cada una rodeando a uno de esos equilibrios que ya son estables. Si  $\beta$  sigue aumentando estas dos órbitas crecen y originan una conexión homoclina tras la cual aparece una órbita inestable que rodea a los tres equilibrios. Ésta finalmente colapsa, en una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas, con la órbita estable que ha estado presente durante todo el proceso anterior.

Hemos estudiado para estos tres valores de  $\alpha$  los diagramas de bifurcaciones, representando tanto la amplitud como el periodo frente al parámetro  $\beta$ .

En el caso  $\alpha = 0.9$  (vid. figura 3.4.4) obtenemos los diagramas habituales con la particularidad de que la existencia de la conexión homoclina hace aparecer una discontinuidad en el periodo.

Ya en el caso  $\alpha = 0.2$  (vid. figura 3.4.5) comienza a ser patente la rapidez de crecimiento de la amplitud y el periodo en un intervalo estrecho del parámetro. Este efecto es más tangible para  $\alpha = 0.07$  (vid. figura 3.4.6) donde la explosión *canard*, a diferencia de lo sucedido para el sistema (2.4.1), involucra a órbitas homoclinas.

Para hacer patente la diferencia entre las homoclinas *canards* y las habituales, dibujamos en la figura 3.4.2 las correspondientes a  $\alpha = 0.9$  y  $\alpha = 0.2$ .



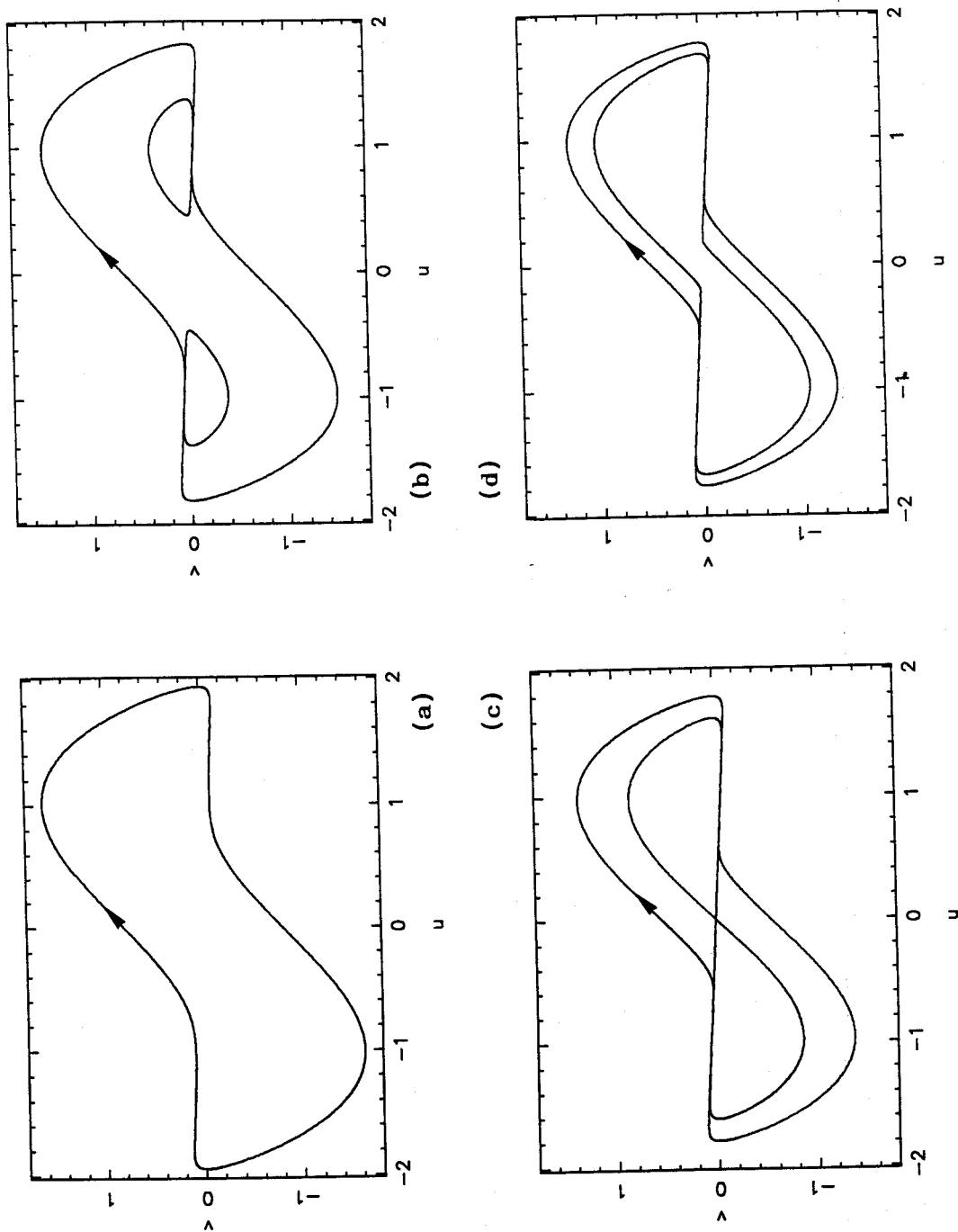


Figura 3.4.3: Diversos retratos de fase para  $\alpha = 0.2$ : (a)  $\beta = 0.38$ ; (b)  $\beta = 0.43$ ; (c)  $\beta = 0.43325$ ; (d)  $\beta = 0.43331$ .

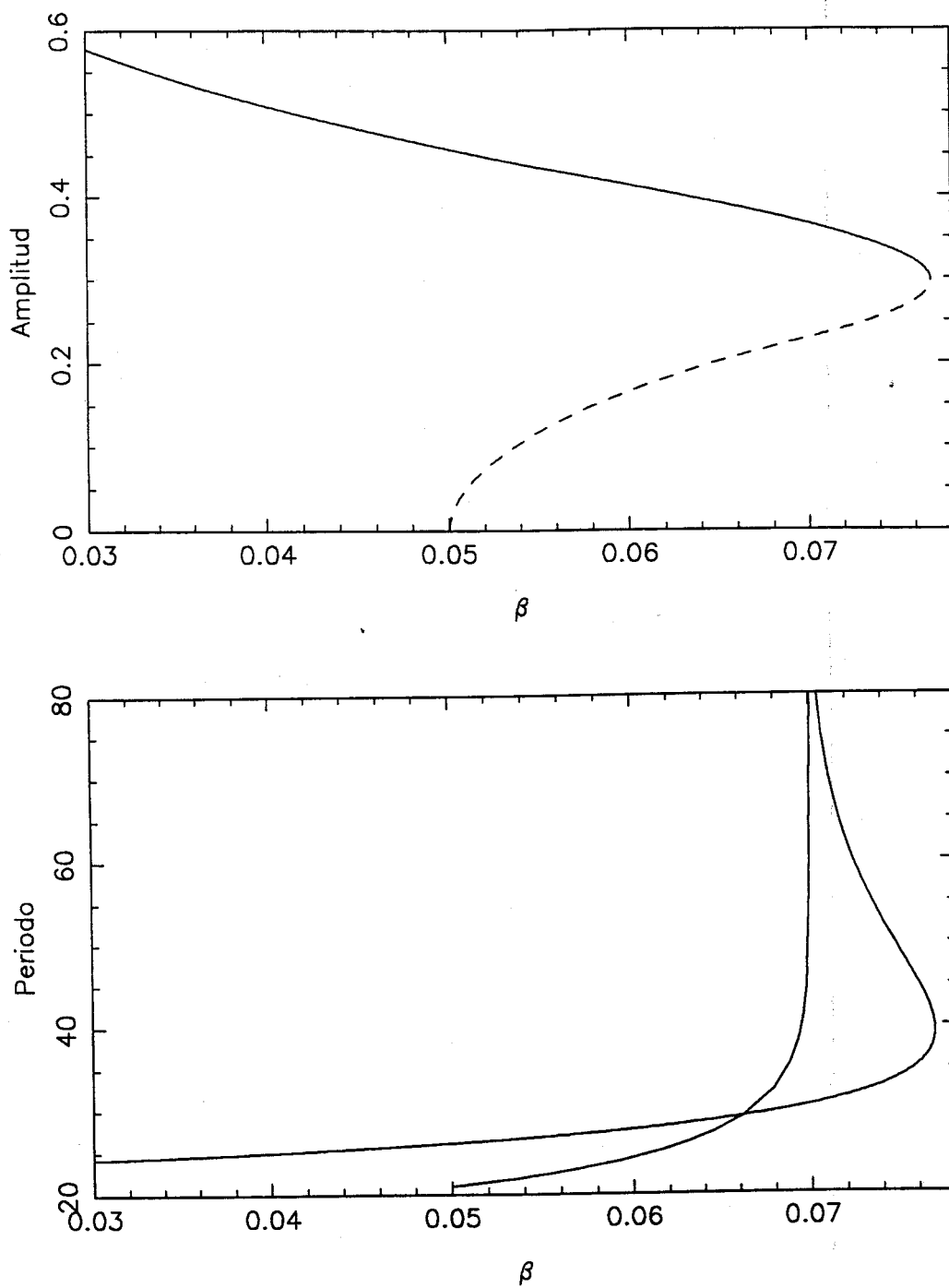


Figura 3.4.4: Diagramas de bifurcaciones para  $\alpha = 0.9$ .

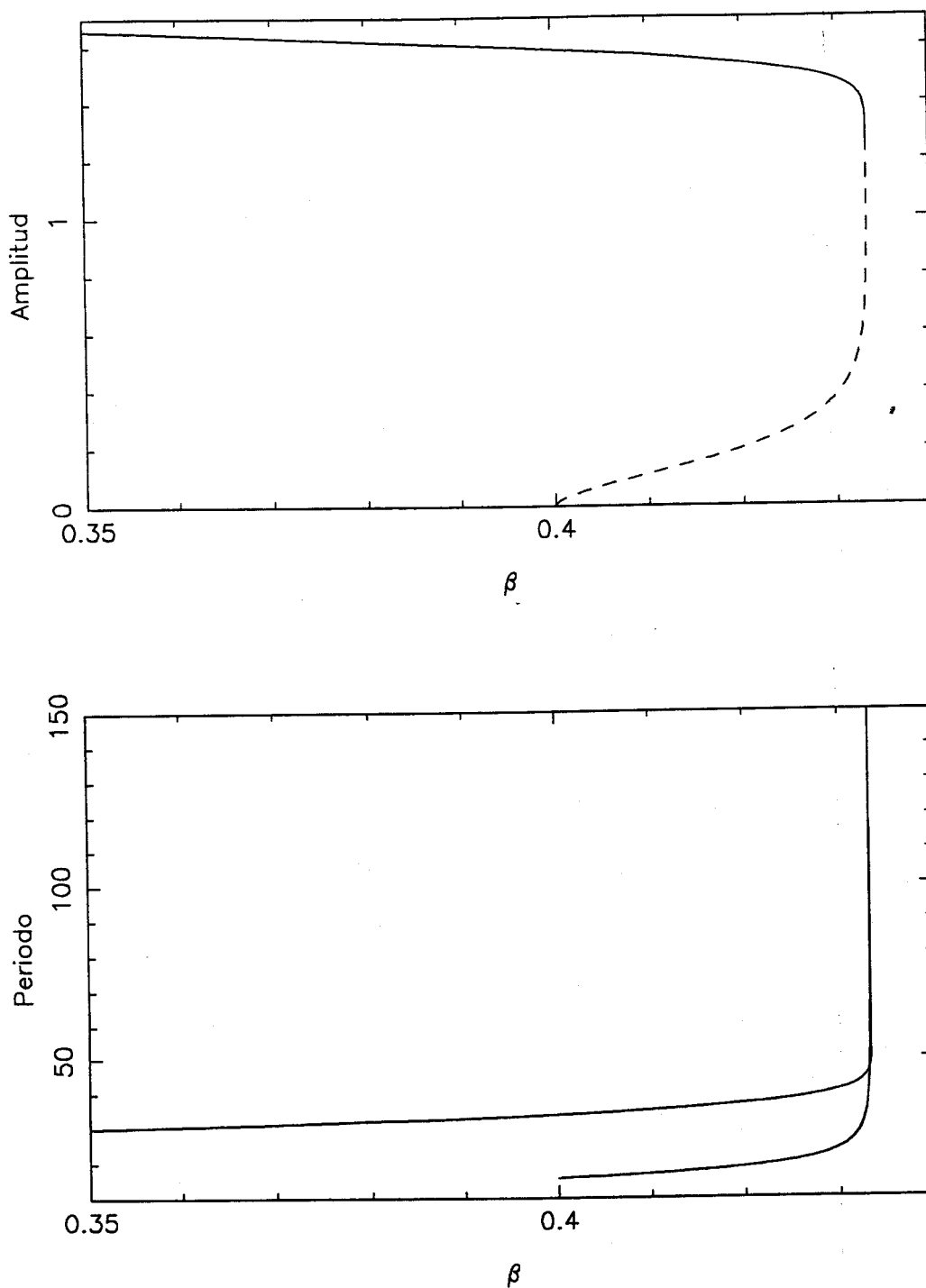
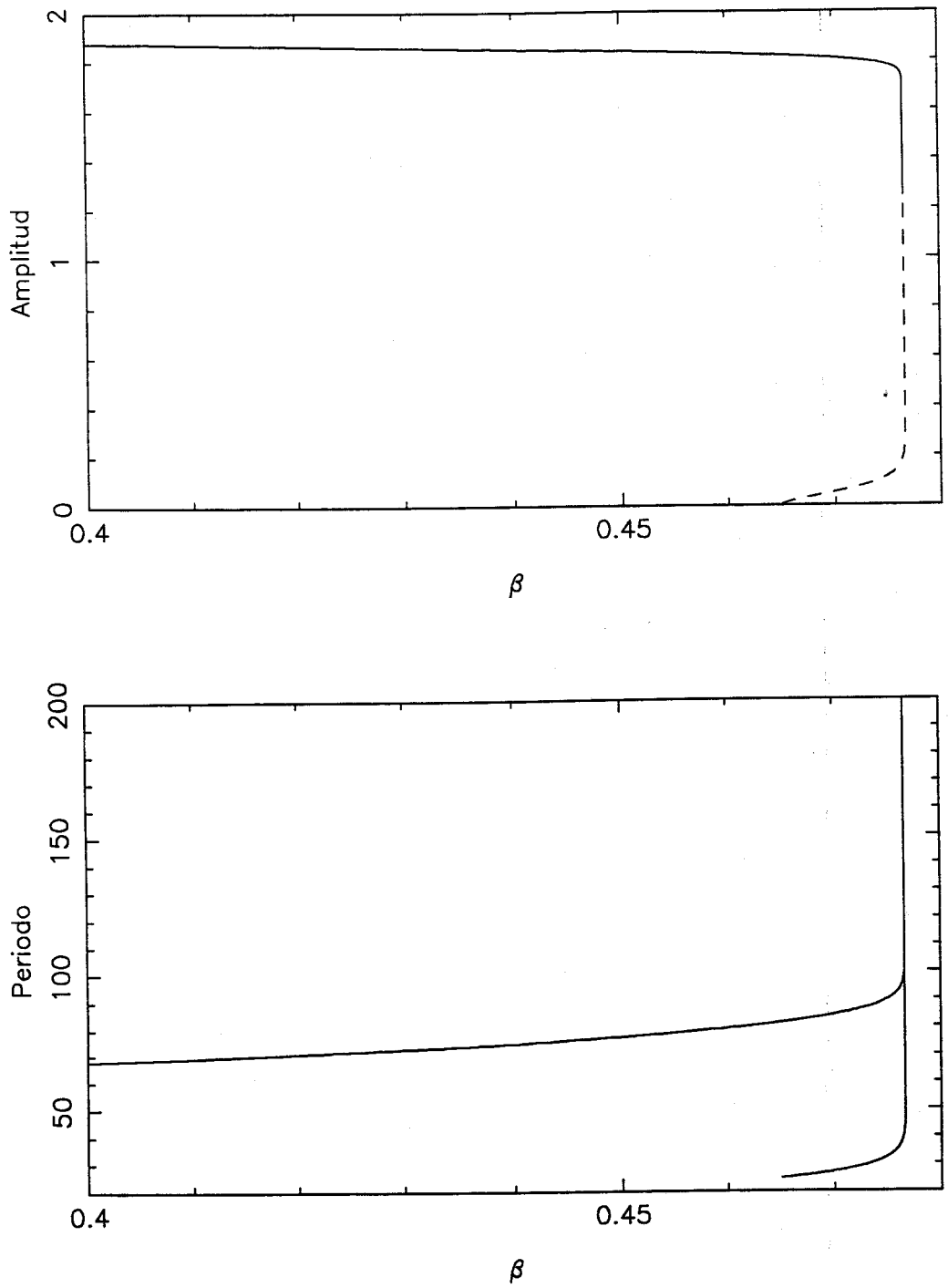


Figura 3.4.5: Diagramas de bifurcaciones para  $\alpha = 0.2$ .

Figura 3.4.6: Diagramas de bifurcaciones para  $\alpha = 0.07$ .

### 3.5 Un Modelo Presa-Depredador

Entre las diversas variantes que se han propuesto de las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= cxy - dy\end{aligned}$$

también llamadas del modelo presa-depredador, vamos a centrarnos en la propuesta por A. Bazykin que elige  $a(x) = (x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)$ , y en concreto, en el sistema biparamétrico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x - \alpha)(1 - x) - xy \\ \dot{y} &= y(x - \beta)\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

que nos fue sugerido por el Dr. A. Khibnik.

En este sistema las variables  $x$  e  $y$  representan al número de individuos de dos especies una de las cuales,  $y$ , ejerce como depredadora de la otra,  $x$ , con lo que las soluciones de (3.5.1) sólo tienen sentido biológico para  $x$  e  $y$  positivas.

Como es inmediato comprobar los ejes  $OX$  y  $OY$  son invariantes. Los equilibrios de (3.5.1) están situados en  $(0, 0)$ ,  $(\alpha, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(\beta, (\beta - \alpha)(1 - \beta))$  y la matriz de la linealización:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 2(1 + \alpha)x - y - \alpha & -x \\ y & x - \beta \end{pmatrix}$$

en cada uno de los equilibrios toma la forma:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$J(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \alpha(1 - \alpha) & -\alpha \\ 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ 0 & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

$$J(\beta, (\beta - \alpha)(1 - \beta)) = \begin{pmatrix} \beta(1 + \alpha - 2\beta) & -\beta \\ (\beta - \alpha)(1 - \beta) & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que aparecen cuatro bifurcaciones transcriticals sobre las siguientes rectas del plano de parámetros:

- (i)  $\alpha = 0$  que involucra al  $(0, 0)$  y al  $(\alpha, 0)$ ;
- (ii)  $\alpha = 1$  en la que intervienen el  $(1, 0)$  y el  $(\alpha, 0)$ ;
- (iii)  $\alpha = \beta$  en la que intercambian su estabilidad el  $(\alpha, 0)$  y el  $(\beta, (\beta - \alpha)(1 - \beta))$ ;
- (iv)  $\beta = 1$  que afecta al  $(1, 0)$  y al  $(\beta, (\beta - \alpha)(1 - \beta))$ .

Además, la separación que, entre los cuatro cuadrantes, impone la invariancia de los ejes impide que los tres equilibrios que aparecen en  $y = 0$  puedan experimentar bifurcaciones de Hopf. Vamos a estudiar pues la bifurcación de Hopf del único equilibrio que no está sobre los ejes, el  $(\beta, (\beta - \alpha)(1 - \beta))$ .

Dado que el polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 - tr\lambda + \Delta$  con  $tr = \beta(1 + \alpha - 2\beta)$ ,  $\Delta = \beta(\beta - \alpha)(1 - \beta)$  la condición  $tr = 0$  junto con  $\Delta > 0$  nos lleva a la existencia de una bifurcación de Hopf sobre la recta

$$1 + \alpha - 2\beta = 0, \quad \beta(\beta - \alpha)(1 - \beta) > 0$$

siempre que se verifique la condición de transversalidad que comprobamos una vez que elegimos a  $\beta$  como parámetro de bifurcación. Así introducimos  $\xi = \beta - \beta_c = \beta - \frac{\alpha + 1}{2}$  y la frecuencia  $\omega_0$  verifica que  $\omega_0^2 = \frac{(1 - \alpha)^2(\alpha + 1)}{8}$ , si  $\alpha > -1$ .

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{d\lambda}{d\xi} \right]_{\xi=0} = -\frac{\alpha + 1}{2}$$

que será distinto de cero excepto cuando  $\alpha = -1$ .

Trasladando el equilibrio al origen mediante  $\bar{x} = x - \beta, \bar{y} = y - (\beta - \alpha)(1 - \beta)$  llegamos a

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_c \\ \frac{\omega_0^2}{\beta_c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\xi(\xi + \beta_c)\bar{x} - \xi\bar{y} - (3\xi + \beta_c)\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}^3 \\ -\xi^2\bar{x} + \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix}$$

Puesto que un autovector asociado a  $\lambda = i\omega_0$  es

$$\begin{pmatrix} \beta_c \\ -i\omega_0 \end{pmatrix}$$

mediante el cambio  $\bar{x} = \beta_c X$ ,  $\bar{y} = \omega_0 Y$  (poniendo ya  $\xi = 0$ ) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{X}} \\ \dot{\bar{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta_c^2 X^2 - \omega_0 XY - \beta_c^2 X^3 \\ \beta_c XY \end{pmatrix}$$

con el que se llega al primer coeficiente de la bifurcación de Hopf:

$$a_3 = -\frac{1}{4}\beta_c^2 < 0$$

Concluimos, por tanto, que la bifurcación de Hopf es siempre supercrítica y se da en

$$\beta = \frac{\alpha + 1}{2}, \quad \beta > 0, \quad \beta \neq 1.$$

Estamos interesados en localizar conexiones heteroclinas entre los equilibrios de tipo silla presentes. Vamos a restringir nuestro estudio al caso  $\alpha, \beta > 0$ . En esta zona del plano de parámetros vamos a separar los casos  $\beta > 1$  y  $\beta < 1$  ya que en el punto  $\alpha = \beta = 1$  se cruzan tres rectas de bifurcaciones transcricas y la recta de Hopf y el análisis lineal indica que la matriz de la linealización en el punto  $(1, 0)$  es nilpotente, de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pero resulta ser un punto de codimensión mayor que dos, cuyo análisis teórico permitiría justificar el paso por ese punto de la curva de conexiones heteroclinas que vamos a determinar, así como la coincidencia de las pendientes de dicha curva con la de Hopf.

Si continuamos numéricamente la órbita que nace de Hopf para  $\alpha = 2$  obtenemos los diagramas de bifurcación de la figura 3.5.1 en los que observamos que para un cierto valor del parámetro  $\beta$  el periodo de la órbita crece indefinidamente para un valor finito de la amplitud: ha sido precisamente la órbita periódica estable que nace en la bifurcación de Hopf la que va a dar lugar a una conexión heteroclina entre los puntos de silla  $(\alpha, 0)$  y  $(1, 0)$ . La variedad inestable de  $(\alpha, 0)$  (en la zona de  $y > 0$ ) intersecta con la estable de  $(1, 0)$  dando lugar a un ciclo homoclino pues la variedad inestable de  $(1, 0)$  (situada sobre el eje de abscisas) conecta siempre con la inestable de  $(\alpha, 0)$ .

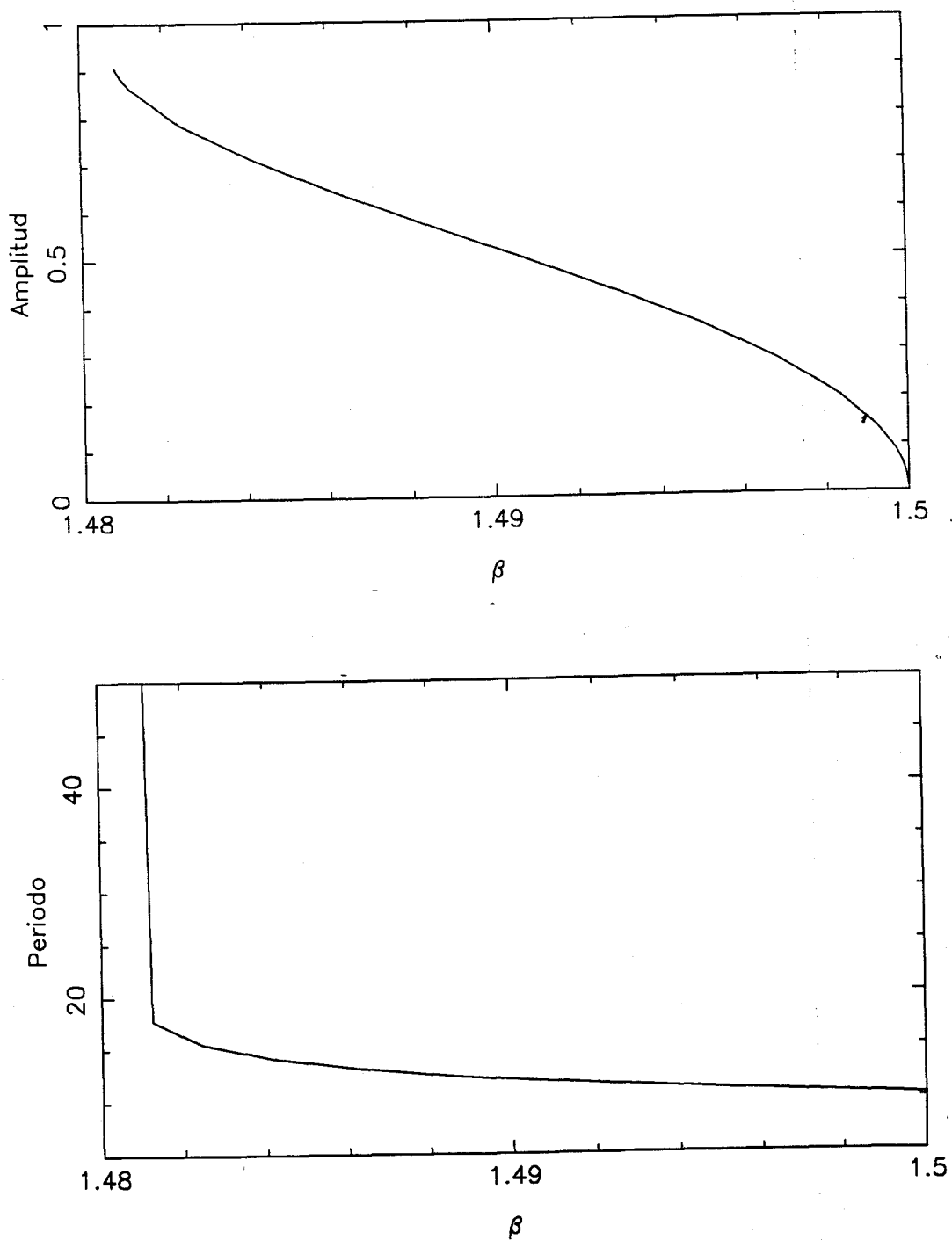


Figura 3.5.1: Amplitud y periodo frente al parámetro  $\beta$  (para  $\alpha = 2$ ) de la órbita estable nacida en la bifurcación de Hopf.



La continuación numérica anterior nos da un punto de partida para la curva de conexiones heteroclinas que suministrado al algoritmo descrito en el presente capítulo nos conduce a la curva  $HE$  de la figura 3.5.2.

Procediendo de forma análoga para  $\beta < 1$  obtenemos la otra porción de curva de conexiones heteroclinas (vid. figura 3.5.2). En este caso, la órbita periódica estable nacida de Hopf desaparece tras conectarse la variedad inestable (para  $y > 0$ ) del  $(1, 0)$  con la estable del  $(\alpha, 0)$ . Nuevamente estamos ante un ciclo homoclino pues en esta zona del plano de parámetros siempre la variedad inestable del  $(\alpha, 0)$ , situada sobre el eje de abscisas, intersecta con la estable del  $(1, 0)$ . En esa misma figura aparecen punteadas las cuatro rectas sobre las que se dan las bifurcaciones transcriticals así como la recta  $HO$  en la que se da la bifurcación de Hopf analizada anteriormente.

### 3.6 Un Sistema con Ondas Viajeras

Buscar ondas viajeras de la forma  $u(x, t) = w(x - \lambda t)$  en un sistema de reacción-difusión gobernado por la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(u - \mu)(1 - u) \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

es equivalente —vid. los trabajos de Fife [31] y Beyn [8]— a investigar la existencia de órbitas heteroclinas que unan los puntos de silla  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  del sistema biparamétrico:

$$\begin{aligned} w' &= z \\ z' &= -\lambda z + w(w - \mu)(w - 1) \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Sus equilibrios se sitúan en  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(\mu, 0)$ .

La matriz de la linealización es

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3w^2 - 2(1 + \mu)w + \mu & -\lambda \end{pmatrix}$$

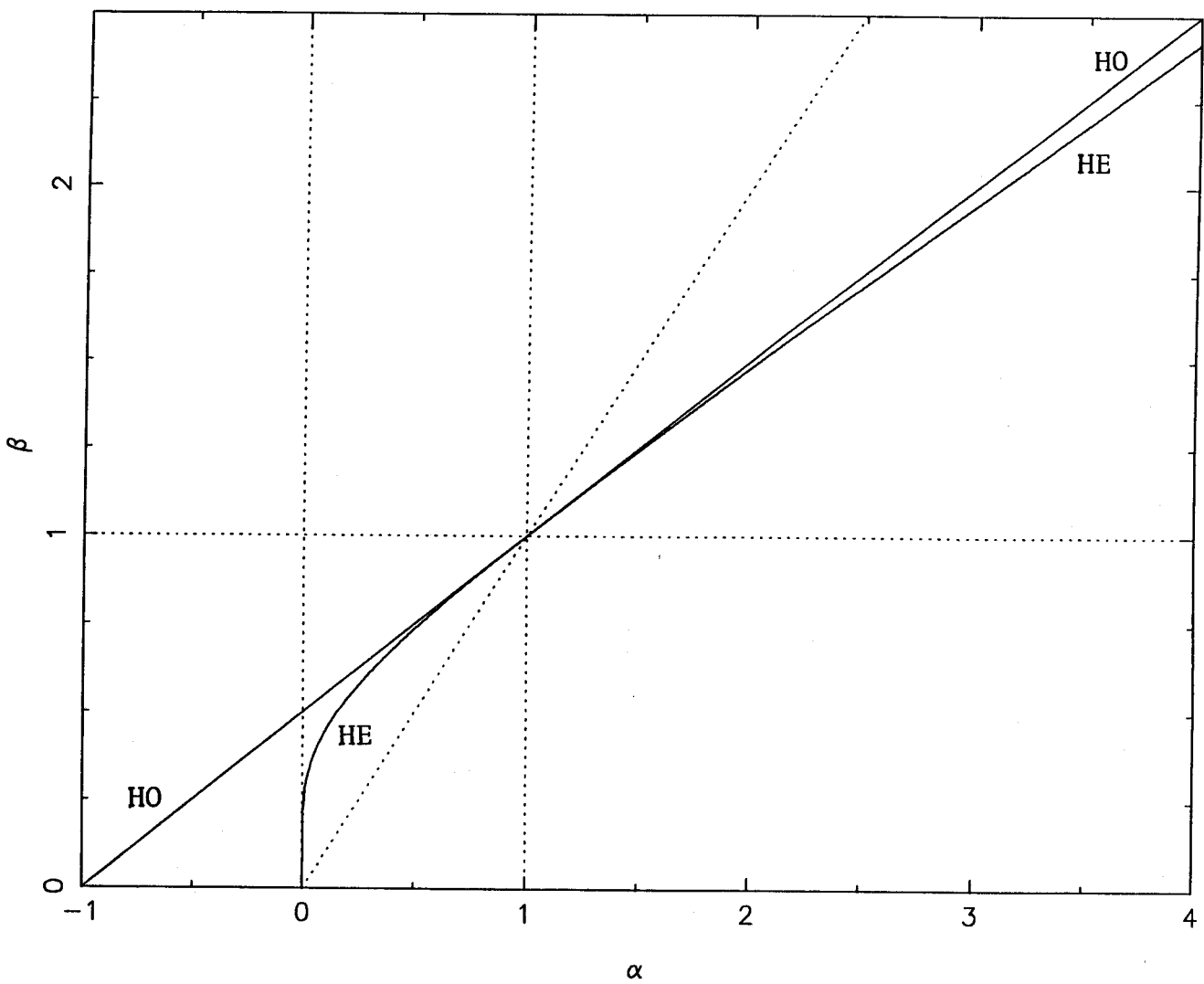


Figura 3.5.2: Conjunto de bifurcaciones del modelo presa-depredador.

y en cada equilibrio vale

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix} \quad J(\mu, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu(\mu - 1) & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \mu & -\lambda \end{pmatrix}$$

De esta manera es fácil comprobar que para  $\mu = 0$  se produce una bifurcación transcítica que involucra a los equilibrios situados en  $(0, 0)$  y  $(\mu, 0)$ , mientras que en  $\mu = 1$  aparece otra bifurcación transcítica en la que intervienen el  $(1, 0)$  y el  $(\mu, 0)$ .

Así, para  $\mu < 0$  el origen resulta ser un equilibrio asintóticamente estable (si  $\lambda > 0$ ) e inestable (si  $\lambda < 0$ ), mientras que el  $(\mu, 0)$  y el  $(1, 0)$  son equilibrios tipo silla.

Si  $0 < \mu < 1$ , el  $(\mu, 0)$  pasa a ser asintóticamente estable (inestable) para  $\lambda > 0$  ( $\lambda < 0$ ) y en esta ocasión los equilibrios tipo silla son el  $(0, 0)$  y el  $(1, 0)$ .

Por último, en el caso en que  $\mu > 1$ , el equilibrio estable (inestable) para  $\lambda > 0$  ( $\lambda < 0$ ) es el  $(1, 0)$ , mientras que el  $(0, 0)$  y el  $(\mu, 0)$  son de tipo silla.

Es decir, exceptuando los casos  $\mu = 0$  y  $\mu = 1$  (en los que el sistema experimenta sendas bifurcaciones transcíticas) de los tres equilibrios que aparecen en el eje de abscisas, los dos de los extremos son equilibrios tipo silla mientras que el equilibrio intermedio es asintóticamente estable en el caso  $\lambda > 0$  y asintóticamente inestable si  $\lambda < 0$ .

Es inmediato comprobar que el sistema (3.6.1) para  $\lambda = 0$  es hamiltoniano, siendo la función de la que deriva

$$H_\mu(w, z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{\mu}{2}w^2 + \frac{1 + \mu}{3}w^3 - \frac{1}{4}w^4$$

cuya parte potencial viene dada por

$$f_\mu(w) = -\frac{\mu}{2}w^2 + \frac{1 + \mu}{3}w^3 - \frac{1}{4}w^4$$

Los extremos relativos de esta función serán los ceros de  $f'_\mu(w)$ , es decir,  $w = 0$ ,  $w = 1$  y  $w = \mu$ . Evaluando  $f''_\mu(w)$  para los valores anteriores, obtenemos

$$f''_\mu(0) = -\mu, \quad f''_\mu(1) = \mu - 1, \quad f''_\mu(\mu) = \mu(1 - \mu)$$

con lo que  $w = 0$  corresponde a un mínimo si  $\mu < 0$  y a un máximo si  $\mu > 0$ ; en  $w = 1$   $f_\mu(w)$  tendrá un mínimo si  $\mu > 1$  y un máximo si  $\mu < 1$ ; el extremo en  $w = \mu$  será un mínimo si  $0 < \mu < 1$  y un máximo si  $\mu < 0$  o  $\mu > 1$ .

Como

$$f_\mu(0) = 0, \quad f_\mu(1) = \frac{-1}{6}\mu + \frac{1}{12}, \quad f_\mu(\mu) = \left(\frac{-1}{6} + \frac{1}{12}\mu\right)\mu^3$$

el comportamiento cualitativo de la función  $f_\mu(w)$  será el reflejado en la figura 3.6.1.

Es fácil comprobar que la función  $f_\mu(w)$  es simétrica respecto del eje que pasa por su mínimo para  $\mu = -1$  (en el caso  $\mu < 0$ ),  $\mu = 1/2$  (para  $0 < \mu < 1$ ) y  $\mu = 2$  (si  $\mu > 1$ ). Por tanto, para esos valores de  $\mu$  (y  $\lambda = 0$ ) el sistema (3.6.1) (en este caso hamiltoniano) exhibirá un ciclo homoclino formado por dos órbitas heteroclinas que unen los dos puntos de silla.

Nos planteamos ahora determinar si esas conexiones siguen existiendo para algún valor de los parámetros cuando el sistema deja de ser hamiltoniano ( $\lambda \neq 0$ ). Para ello realizamos previamente un estudio teórico mediante el método de Melnikov que nos sirva de punto de arranque para aplicar posteriormente el método de continuación, en este caso, para órbitas heteroclinas.

Comenzamos el estudio en las proximidades del punto  $\mu = 1/2$ ,  $\lambda = 0$ . Mediante el escalado

$$\lambda = \varepsilon \bar{\lambda} \quad \mu - \frac{1}{2} = \varepsilon \bar{\mu}$$

podemos escribir el sistema (3.6.1) como un campo vectorial que resulta ser la suma de uno hamiltoniano más una perturbación

$$\begin{aligned} w' &= z \\ z' &= \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}w^2 + w^3 + \varepsilon(\bar{\mu}w(1-w) - \bar{\lambda}z) \end{aligned}$$

Analicemos el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} w' &= z \\ z' &= \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}w^2 + w^3 \end{aligned}$$

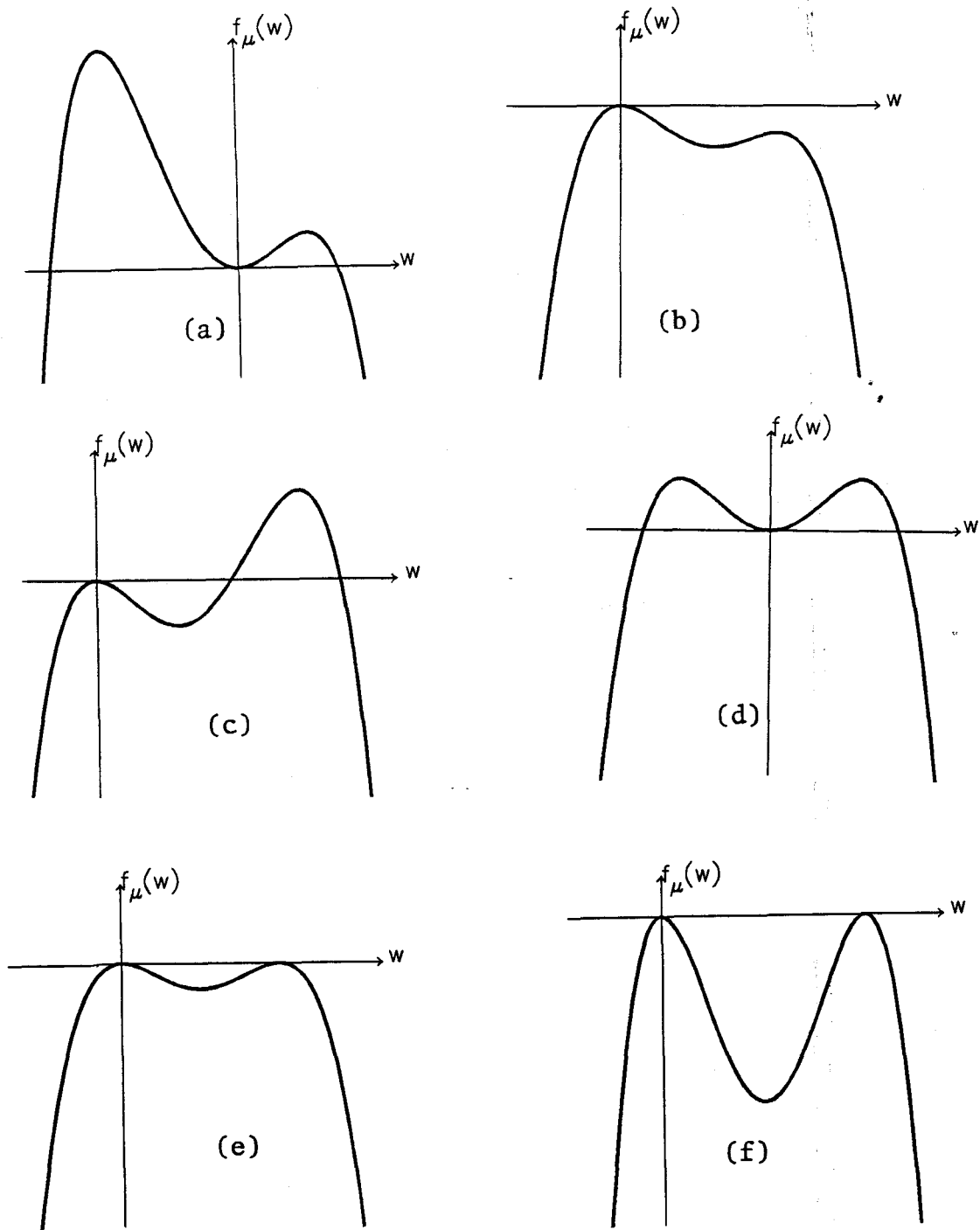


Figura 3.6.1: Representación gráfica de la función potencial  $f_\mu(w)$  para distintos valores de  $\mu$ : (a)  $\mu < 0$ ; (b)  $0 < \mu < 1$ ; (c)  $\mu > 1$ ; (d)  $\mu = -1$ ; (e)  $\mu = 1/2$ ; (f)  $\mu = 2$ .

La función de la que deriva es  $H_{\mu=1/2}(w, z)$ , es decir,

$$H_{1/2}(w, z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}w^2 + \frac{1}{2}w^3 - \frac{1}{2}w^4$$

cuya parte potencial  $f_{\mu=1/2}(w)$  presenta máximos relativos en  $w = 0$  y  $w = 1$  ( $f(0) = f(1) = 0$ ) y un mínimo relativo en  $w = 1/2$  ( $f(1/2) = -1/64$ ). En este caso las conexiones heteroclinas aparecen para  $H_{\mu=1/2}(w, z) = 0$ , es decir,

$$z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}w(1-w)$$

correspondiendo el signo  $+$  a la heteroclina que va de  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$  (vid. figura 3.6.3 (h)).

La función de Melnikov que tenemos que evaluar es

$$\begin{aligned} M(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)[w(t)(1-w(t))\bar{\mu} - \bar{\lambda}z(t)]dt = \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{\mu} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\lambda}) \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t)(1-w(t))^2 dt \end{aligned}$$

Anulando  $M(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ , al ser la integral distinta de cero obtenemos que

$$\bar{\lambda} = \pm \sqrt{2}\bar{\mu},$$

donde el signo  $(+)$  corresponde a la heteroclina superior y el signo  $(-)$  a la inferior.

De esta forma cada una de las heteroclinas existe, respectivamente, en primera aproximación, en las rectas del plano de parámetros

$$\lambda = \pm \sqrt{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right).$$

Las curvas obtenidas numéricamente son las denotadas por  $b$  y  $e$  en la figura 3.6.2 y el esquema de la conexión heteroclina correspondiente aparece, señalado con la misma letra, en la figura 3.6.3. En esta última figura, denotado como (h), aparece el esquema del ciclo homoclino que presenta el sistema (3.6.1) cuando  $\mu = 1/2$ ,  $\lambda = 0$ .

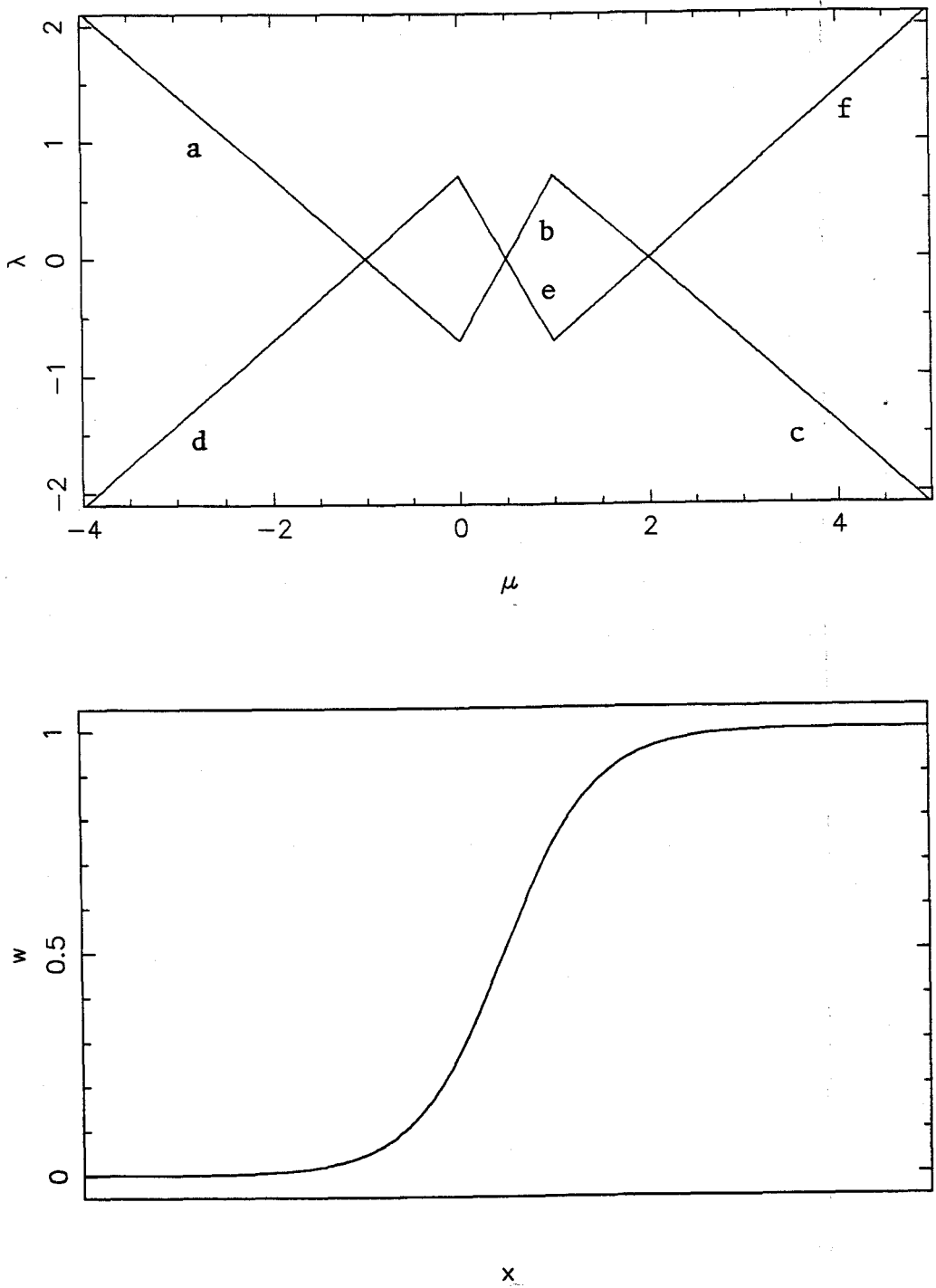


Figura 3.6.2: (a) Curvas de conexiones heteroclinas en el plano de parámetros. (b) Frente de onda típico ( $\mu = 0.2$ ).

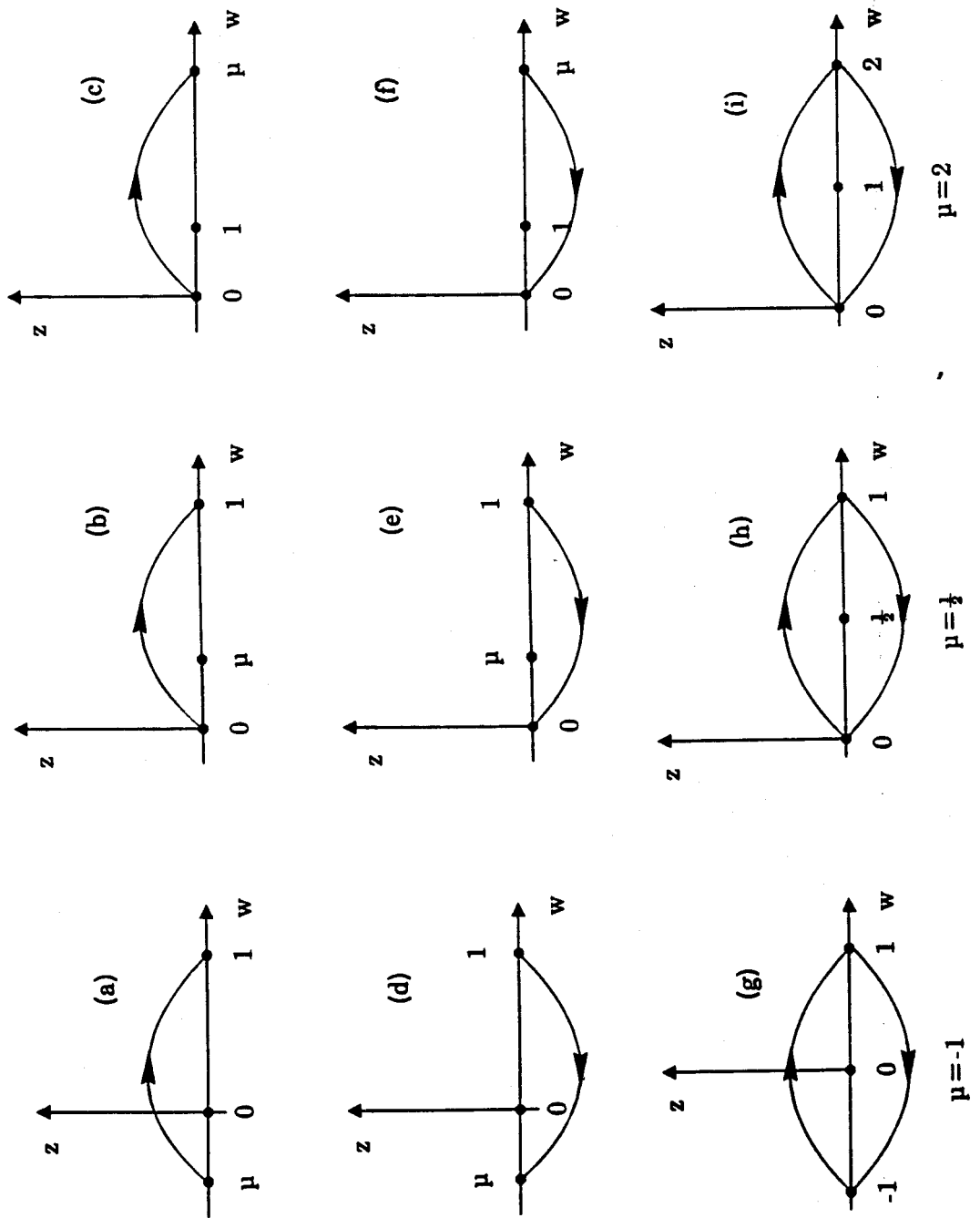


Figura 3.6.3: Esquema de las diversas órbitas heteroclinas.



De forma análoga se aplica el método de Melnikov en los puntos  $\mu = -1, \lambda = 0$  y  $\mu = 2, \lambda = 0$ . En el primero de ellos se obtiene un par de curvas dadas, en primera aproximación, por

$$\lambda = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} (\mu + 1)$$

donde la del signo (-) corresponde a heteroclinas que unen el punto  $(\mu, 0)$  con el  $(1, 0)$  y la del signo (+) a conexiones heteroclinas que van del  $(1, 0)$  al  $(\mu, 0)$ . Las curvas obtenidas numéricamente aparecen señaladas, en la figura 3.6.2, como  $a$  y  $d$  al igual que en la figura 3.6.3 el esquema de cada conexión heteroclina. El ciclo homoclino que presenta el sistema para el punto en que se cortan las curvas  $a$  y  $d$  —  $\mu = -1, \lambda = 0$  — está esbozado en (g) de la misma figura.

En el caso de perturbar, por el método de Melnikov, el sistema hamiltoniano en el que se convierte (3.6.1) para  $\mu = 2, \lambda = 0$  (vid. figura 3.6.3, (i)) obtenemos las rectas dadas por

$$\lambda = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} (\mu - 2)$$

que aproximan muy bien a las curvas  $c$  —la del signo (-)— y  $f$  de la figura 3.6.2 proporcionadas por nuestro algoritmo de continuación. En la figura 3.6.3 observamos esquemáticamente las conexiones heteroclinas que se dan en las curvas  $c$  y  $f$  así como el ciclo homoclino que aparece en la intersección de ambas (i), en el punto  $\mu = 2, \lambda = 0$ . Finalizamos el estudio del sistema (3.6.1) representando un frente de onda típico, en la figura 3.6.2, correspondiente a  $\mu = 0.2$ .

### 3.7 El Sistema de Lorenz

Las famosas ecuaciones de Lorenz fueron deducidas por él [70] al estudiar el movimiento convectivo de un fluido tridimensional calentado por debajo. Dicho movimiento viene gobernado por las ecuaciones de Oberbeck–Boussinesq, de forma que considerando solamente tres modos distintos de cero —de los infinitos en los que se desarrollan las variables de las ecuaciones anteriores en derivadas

parciales— Lorenz llegó al siguiente sistema triparamétrico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}\tag{3.7.1}$$

donde la variable  $x$  corresponde a una velocidad, y las otras dos miden la variación de temperatura horizontal ( $y$ ) y vertical ( $z$ ). Los tres parámetros  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $\beta$  son proporcionales respectivamente al número de Prandtl, al número de Rayleigh y a ciertas proporciones geométricas de la región en consideración. Por el significado físico de los tres parámetros todos deben ser positivos. Estamos interesados en determinar y continuar tanto conexiones homoclinas como heteroclinas en algunos de los rangos de parámetros en que aparecen, como es bien conocido en la literatura [97], [47], [51].

Comenzamos resumiendo algunas propiedades del sistema de Lorenz (3.7.1). Para cualquier valor de los parámetros las ecuaciones son simétricas al cambio  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ . Además el eje  $Z$ ,  $x = y = 0$ , es invariante: todas las órbitas que comiencen en dicho eje se mantienen en él y se acercan al origen.

Si bien el origen resulta ser siempre un equilibrio, tras experimentar una bifurcación pitchfork para  $\rho = 1$ , aparecen dos nuevos equilibrios, si  $\rho > 1$ :

$$C_{\pm} = \left( \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right).$$

La matriz de la linealización resulta ser

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}\tag{3.7.2}$$

que permite deducir que, fijando  $\rho = 10$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$  (valores usuales en la literatura) el comportamiento de los equilibrios es el siguiente [97]:

- (i) si  $0 < \rho < 1$  el origen es asintótica y globalmente estable.
- (ii) si  $\rho > 1$  el origen es tipo silla: los tres autovalores de la matriz de la linealización son reales, dos negativos y uno positivo.

- (iii) si  $1 < \rho < \rho_0 \approx 24.74$  los equilibrios  $C_{\pm}$  son estables: los tres autovalores tienen parte real negativa (en el caso  $\rho > 1.346$  aparece un par complejo conjugado).
- (iv) si  $\rho_0 < \rho$ ,  $C_{\pm}$  pasan a ser equilibrios tipo silla (con un autovalor real negativo y el par complejo con parte real positiva).

Lorenz ya demostró en [70] que se puede encontrar un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^3$ , cerrado, simplemente conexo, que contiene al origen, de forma que el campo vectorial de (3.7.1) siempre está dirigido hacia el interior de la frontera de  $D$ . Este hecho, combinado con que su divergencia —que en este caso coincide con la traza de (3.7.2)— es negativa, prueba otra propiedad importante del sistema de Lorenz: la existencia de un conjunto acotado de volumen nulo que resulta ser un atractor global.

Después de este somero repaso a unas ecuaciones que han resultado ser tan fecundas nos centramos en la búsqueda de conexiones homoclinas. Para ello aprovechamos los valores que aparecen en la literatura (vid., por ejemplo, el capítulo 2 de [97]): una órbita homoclina conecta las variedades estable e inestable del origen cuando  $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}, \rho \simeq 13.926$ . A partir de este punto, aplicando el algoritmo de continuación diseñado, obtenemos en el plano  $\beta - \rho$  la curva de la figura (3.7.1). Asimismo hemos representado las órbitas homoclinas correspondientes a cuatro valores de  $\beta$  (siempre con  $\sigma = 10$ ), observándose el aumento de tamaño de la órbita a medida que  $\beta$  aumenta.

Comenzamos, a continuación, la búsqueda de órbitas heteroclinas que conectan a los equilibrios  $C_+$  y  $C_-$ . Como se argumenta en [97] (vid. también [47]) para valores pequeños de  $\beta$  (o suficientemente grandes de  $\sigma$ ) existirán órbitas heteroclinas simétricas entre los equilibrios no triviales para algún valor de  $\rho$ . Por ejemplo, para  $\sigma = 10, \beta = 0.25, \rho \simeq 487.16$  se dan tales conexiones: una rama de la variedad estable unidimensional de cada equilibrio intersecta con la variedad inestable bidimensional del otro equilibrio. Para esos valores de los parámetros, los autovalores de la matriz de la linealización en esos puntos valen, aproximada-

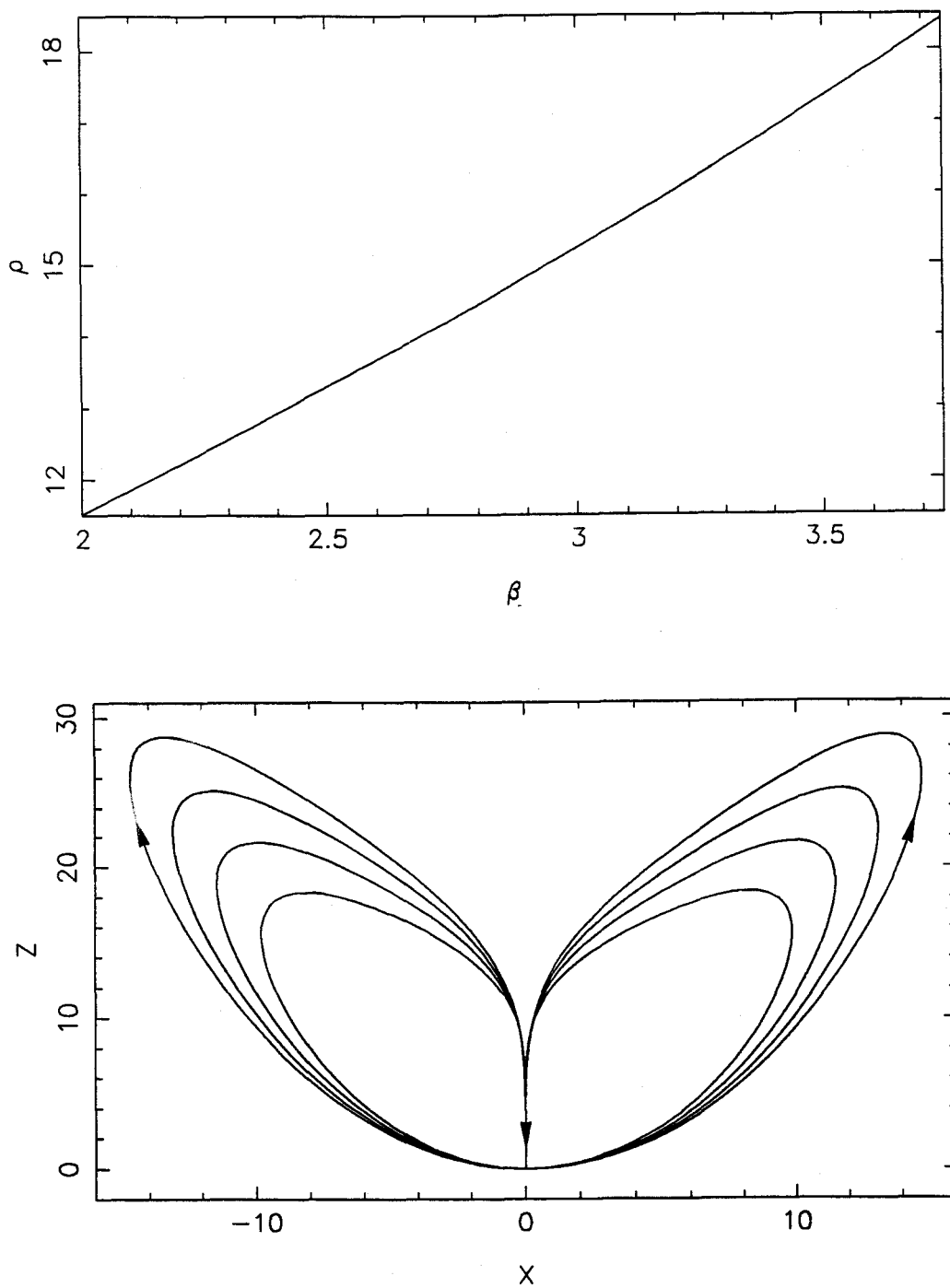


Figura 3.7.1: (a) Curva de conexiones homoclinas para la ecuación de Lorenz cuando  $\sigma = 10$ . (b) Órbitas homoclinas de la ecuación de Lorenz para diversos valores de  $\beta$  (2.1, 8/3, 3.2, 3.7) y  $\sigma = 10$ .

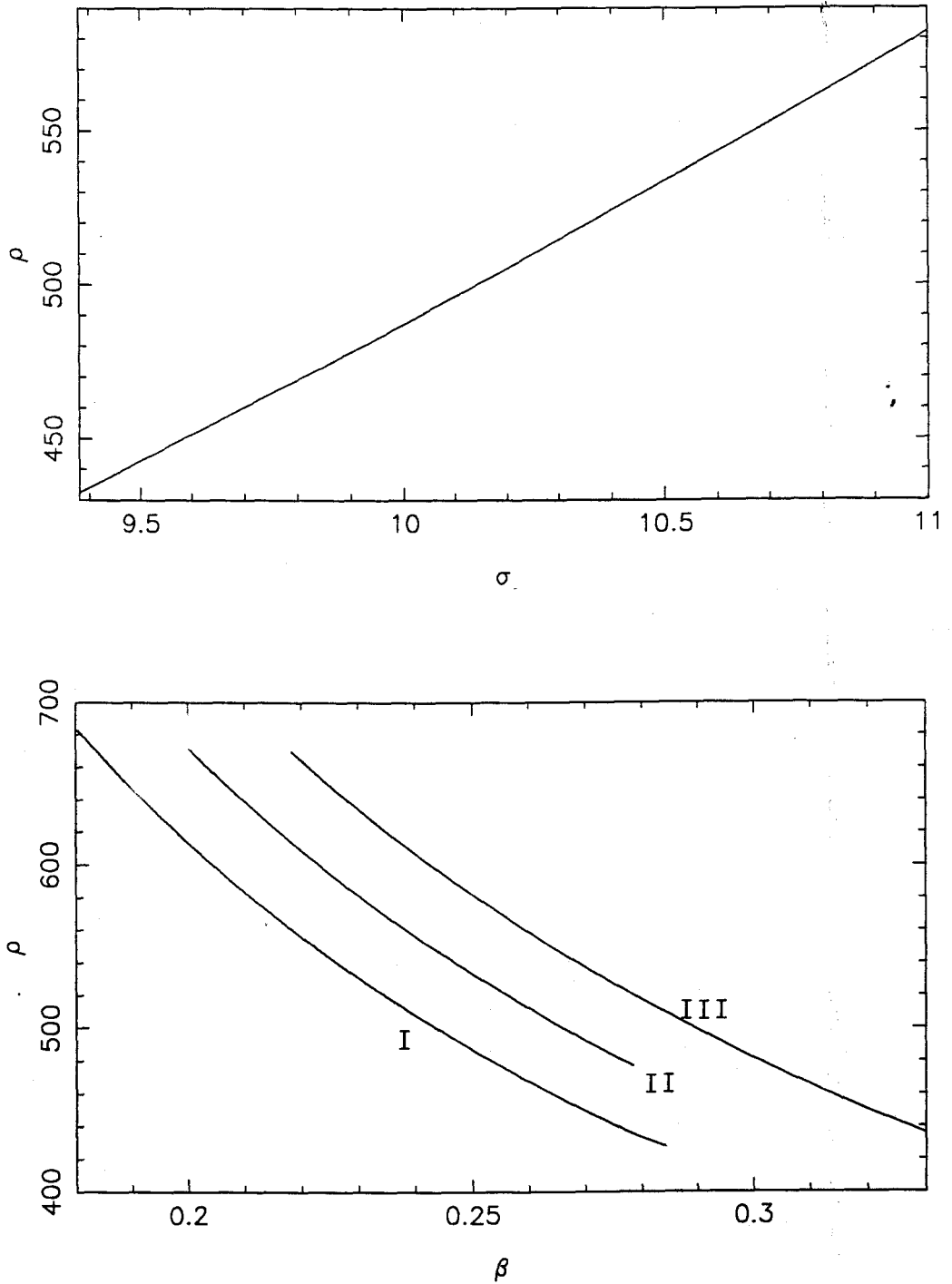


Figura 3.7.2: Curvas de conexiones heteroclinas para la ecuación de Lorenz en: (a) el plano  $\sigma - \rho$  para  $\beta = 0.25$ ; (b) el plano  $\beta - \rho$  para tres valores de  $\sigma$ : 10, 10.5, 11.

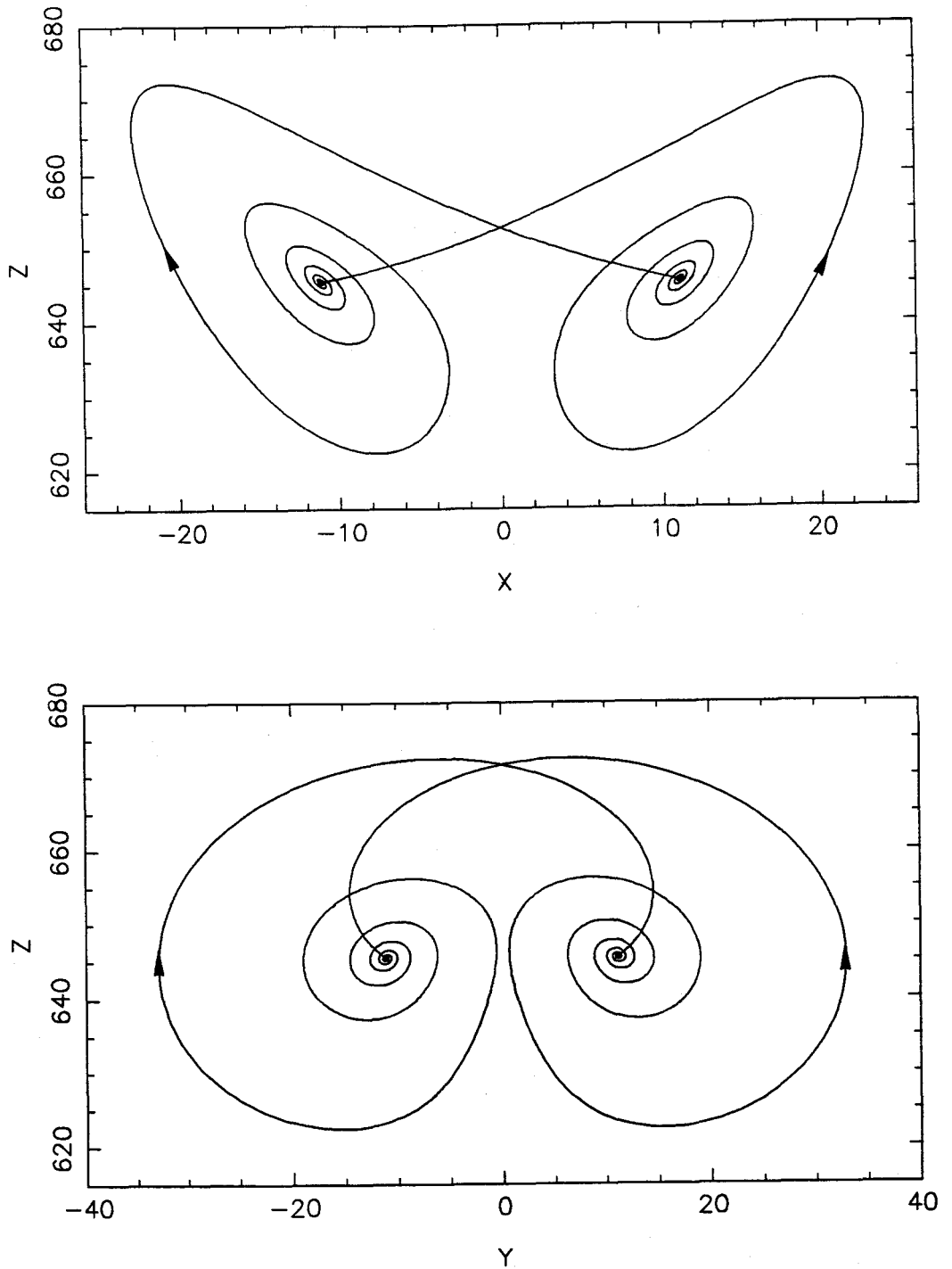


Figura 3.7.3: Proyección en los planos  $XZ$  e  $YZ$  del par de conexiones heteroclinas que el sistema de Lorenz presenta para  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 0.19$ ,  $\rho \approx 646.45$ .

mente,  $-14.37$  y  $1.56 \pm 12.91i$ , es decir, los equilibrios  $C_+$  y  $C_-$  son del tipo silla-foco.

Hemos comenzado moviéndonos en el plano  $\sigma - \rho$  para  $\beta = 0.25$  obteniendo la curva de la figura 3.7.2. Tomando tres puntos de esta curva, los correspondientes a  $\sigma = 10, 10.5, 11$ , hemos continuado tres curvas (vid. nuevamente figura 3.7.2) en el plano  $\beta - \rho$  para esos valores fijos de  $\sigma$ , indicadas respectivamente como I, II y III, que dan una idea de como es la superficie de conexiones heteroclinas simétricas, en el espacio de parámetros, en las proximidades del punto inicial del que partimos.

Finalmente hemos dibujado en la figura 3.7.3 uno de tales pares de conexiones heteroclinas, que corresponde a  $\sigma = 10, \beta = 0.19, \rho \simeq 646.45$ .

### 3.8 Una Clase de Osciladores Forzados

Coullet *et alii*, en [20], plantean el estudio de una familia de sistemas que gobiernan el movimiento de una partícula, bajo un potencial armónico, sometida a una fuerza externa cuya derivada temporal depende exclusivamente de la posición de dicha partícula. Plantean, por tanto,

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + x = \eta, \quad \dot{\eta} = f_{\mu}(x)$$

Como un caso particular suyo consideramos la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{x} + \dot{x} + bx - cx + x^2 = 0 \tag{3.8.1}$$

estudiada en [3] (vid. también [47]).

Si escribimos (3.8.1) como un sistema de ecuaciones de primer orden obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= cx - by - z - x^2 \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

Este sistema presenta dos equilibrios: el origen  $(0, 0, 0)$  y el punto  $(c, 0, 0)$ . Al igual que en las referencias citadas nos vamos a centrar en la región del plano de

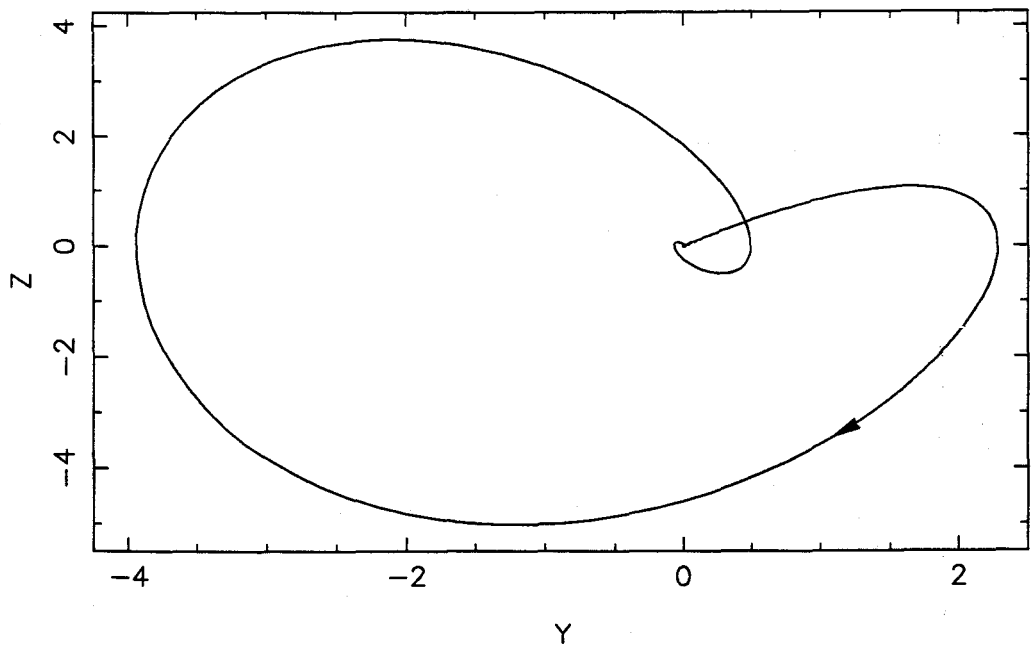
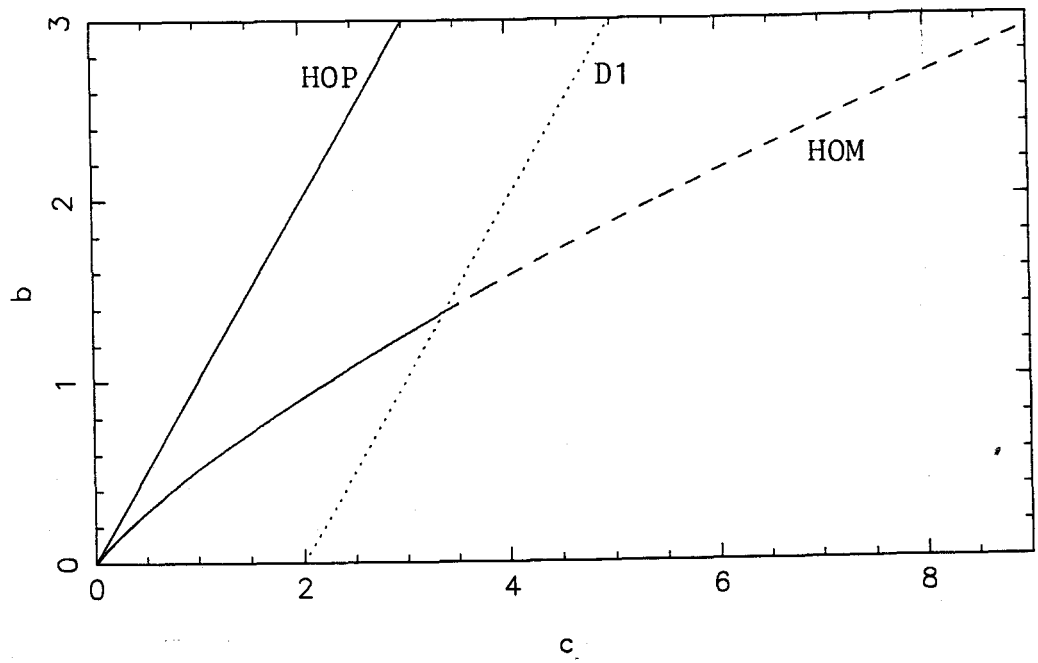


Figura 3.8.1: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones del sistema de Arnéodo. (b) Órbita homoclina para  $b = 1.5$ ,  $c \approx 3.76113$ .



parámetros en la que  $c, b > 0$ . Para  $c > 0$  el origen es siempre inestable de manera que en una pequeña región próxima al origen los tres autovalores son reales, dos de ellos negativos, y en el resto se mantiene un autovalor real positivo y aparece un par complejo conjugado con parte real negativa: el origen ha pasado a ser un equilibrio tipo silla-foco. El otro equilibrio, el  $(c, 0, 0)$ , es estable para  $0 < c < b$  y tras experimentar una bifurcación de Hopf supercrítica cuando  $b = c$  cambia su estabilidad. Es precisamente la órbita periódica nacida en esta bifurcación de Hopf *HOP* la que va a originar una conexión homoclina del origen. Usando como valor aproximado el dado en [47] hemos continuado la curva de conexiones homoclinas *HOM* de la figura 3.8.1. Estas homoclinas, como se indica en los trabajos citados, son homoclinas principales, pues como en este sistema se dan las condiciones de Shil'nikov, a la derecha de la recta  $D1$ , sobre la que  $\delta = 1$  —la homoclina pasa de atractiva a repulsiva— van a existir órbitas homoclinas subsidiarias.

Para finalizar hemos dibujado en la figura 3.8.1 una de las órbitas homoclinas continuadas.

## Capítulo IV

# ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO Y DE BIFURCACIONES DE UN OSCILADOR ELECTRÓNICO AUTÓNOMO

### 4.1 Introducción

Nos planteamos en este capítulo estudiar el comportamiento dinámico de un sistema electrónico, que ha sido ampliamente considerado en la literatura durante la última década. De tal manera que, circuitos que aparecen como variantes del que analizaremos, han sido presentados como exponentes de dinámica caótica en sistemas electrónicos (vid. [92], [93], [32], [33], [71], [72], [110], [18]).

En la sección 4.2 describiremos los componentes del circuito, así como el sistema de ecuaciones diferenciales que nos servirá para estudiar su comportamiento.

En la sección 4.3 nos ocuparemos de la bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen. Repasaremos brevemente los resultados teóricos obtenidos en [38] para simular después dos situaciones de degeneración de dicha bifurcación. En la primera de ellas encontramos bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas y en

la segunda una cúspide de tales bifurcaciones.

En la sección 4.4 estudiaremos la bifurcación de Takens–Bogdanov que aparece al intersectar la curva de Hopf con una bifurcación pitchfork del origen. El análisis teórico realizado en [38] nos sirve como punto de partida para continuar, con los métodos numéricos expuestos en los capítulos II y III, las tres curvas que surgen de ese punto de codimensión dos: la de Hopf de los equilibrios no triviales, la de conexiones homoclinas y la de silla–nodo de órbitas periódicas. Asimismo estudiamos teóricamente, bajo ciertas condiciones, la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, tarea que no se llevó a cabo en [38].

La continuación de la curva de conexiones homoclinas nos permite detectar que éstas son del tipo Shil’nikov en una cierta zona del plano de parámetros. Este hecho ha motivado el estudio realizado en la sección 4.5 que nos ha permitido encontrar, tal como predicen trabajos recientes en este área [47], [43], una gran riqueza de comportamientos periódicos y homoclinos. Además, hemos encontrado órbitas periódicas, cuya presencia está relacionada con una pareja de órbitas homoclinas y cuyo periodo es aproximadamente un número impar de veces el periodo de una órbita principal. Asimismo, el estudio de diversos atractores caóticos presentes en la dinámica del circuito será llevado a efecto, de manera que las aplicaciones próximo retorno obtenidas indican la posibilidad de existencia de una amplia variedad de comportamientos periódicos y aperiódicos.

## 4.2 Descripción del Modelo

El sistema electrónico, objeto de nuestro estudio aparece representado en la figura 4.2.1 en la que podemos observar que consiste en el acoplamiento, mediante la conductancia no lineal  $G_2$ , de dos circuitos: un circuito paralelo RCL (conductancia no lineal  $G_3$ , inductancia  $L$  y capacidad  $C$ ), y un circuito paralelo RC (conductancia no lineal  $G_1$  y capacidad  $C_0$ ). Diferentes elecciones para las conductancias no lineales  $G_1, G_2, G_3$  dan lugar a diversos sistemas particulares, previamente estudiados.

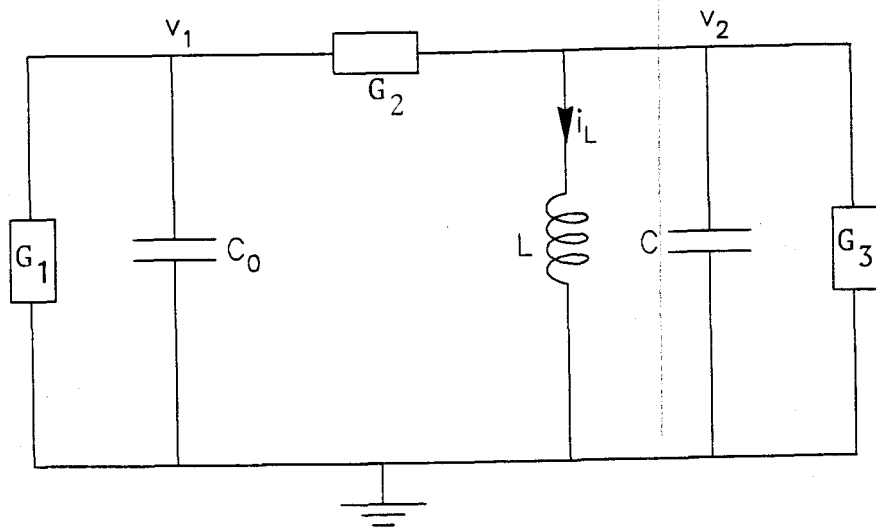


Figura 4.2.1: Esquema del circuito electrónico.

En el caso de  $G_1$  conductancia no lineal negativa (tipo oscilador de Van der Pol),  $G_2$  conductancia no lineal positiva —realizable físicamente mediante la asociación en paralelo de dos grupos de diodos, polarizados en oposición— y  $G_3$  conductancia puramente lineal, tenemos el sistema originalmente propuesto por Shinriki *et alii* [92], [93] como un oscilador que genera *ondas aleatorias*. El análisis realizado por dichos autores se reduce a simulaciones numéricas y alguna experimentación; no llevan a cabo ningún estudio teórico de las ecuaciones de estado e incluso el análisis empírico realizado es incompleto. Un estudio más completo de la dinámica del mencionado sistema puede encontrarse en Freire *et alii* [33].

En el caso de  $G_1$  conductancia no lineal negativa (tipo oscilador de Van der Pol),  $G_2$  conductancia lineal y  $G_3$  conductancia nula se obtendría el llamado *circuito de Chua*, estudiado por Matsumoto [71], Matsumoto *et alii* [72], Chua *et alii* [18].

Las ecuaciones de estado del circuito son

$$C_0 \frac{dv_1}{d\tau} = -i_1(v_1) + i_2(v_2 - v_1)$$

$$\begin{aligned} C \frac{dv_2}{d\tau} &= -i_L - i_2(v_2 - v_1) - i_3(v_2) \\ L \frac{di_L}{d\tau} &= v_2 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

donde las variables de estado son  $v_1, v_2, i_L$ . Las dos primeras,  $v_1, v_2$ , representan las tensiones en los condensadores, mientras que  $i_L$  corresponde a la intensidad en la bobina. Además,  $i_1(v_1), i_2(v_2 - v_1), i_3(v_2)$  representan a la intensidad como función de la correspondiente tensión para las conductancias no lineales. Asumiremos que estas funciones verifican  $i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0$  y también  $i_j(-v) = -i_j(v)$  para  $j = 1, 2, 3$ , y para ellas consideramos los siguientes desarrollos formales:

$$\begin{aligned} i_1(v_1) &= \mu_1 v_1 + \tilde{a}_3 v_1^3 + \tilde{a}_5 v_1^5 + \dots \\ i_2(v_2 - v_1) &= \mu_2 (v_2 - v_1) + \tilde{b}_3 (v_2 - v_1)^3 + \tilde{b}_5 (v_2 - v_1)^5 + \dots \\ i_3(v_2) &= \mu_3 v_2 + \tilde{c}_3 v_2^3 + \tilde{c}_5 v_2^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Con estas hipótesis sobre  $i_1, i_2, i_3$ , el sistema (4.2.1) es invariante al cambio de signo en las variables, propiedad que condicionará la dinámica del sistema.

El análisis efectuado en [38] pone de manifiesto que los candidatos naturales a ser tomados como parámetros de bifurcación son  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , es decir, las aproximaciones lineales a las características tensión-intensidad de las conductancias  $G_1, G_2, G_3$ , los cuales pueden ser fácilmente variados mediante los correspondientes potenciómetros. Además, siguiendo a [38] vamos a restringirnos a considerar el caso  $i_3(v_2) \equiv 0$ , asumiendo  $\tilde{a}_i \geq 0, \tilde{b}_i \geq 0$  para todo  $i = 3, 5, \dots$

Si llamamos ahora  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , vamos a realizar en el sistema (4.2.1) un escalado en el tiempo:  $t = \omega\tau$ . Además, tomaremos como nuevas variables de estado:

$$x = v_1, \quad y = v_2, \quad z = \frac{i_L}{\omega C}$$

Por último, escalamos los parámetros del sistema:

$$r = \frac{C_0}{C}, \quad \nu = \frac{\mu_1}{\omega C}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\omega C}$$

$$a_i = \frac{\tilde{a}_i}{\omega C}, \quad b_i = \frac{\tilde{b}_i}{\omega C}, \quad i = 3, 5, \dots$$

De la expresión de  $r$  deducimos que ha de ser  $r > 0$ , asimismo resulta  $a_i \geq 0$ ,  $b_i \geq 0$  para  $i = 3, 5, \dots$ . Con esta notación, estudiaremos el sistema (4.2.1) cortado a quinto orden, el cual adopta la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\left(\frac{\nu + \beta}{r}\right)x + \frac{\beta}{r}y - \frac{a_3}{r}x^3 + \frac{b_3}{r}(y-x)^3 - \frac{a_5}{r}x^5 + \frac{b_5}{r}(y-x)^5 \\ \dot{y} &= \beta x - \beta y - z - b_3(y-x)^3 - b_5(y-x)^5 \\ \dot{z} &= y \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Los parámetros de bifurcación serán  $\nu$  y  $\beta$ . La matriz de la parte lineal es

$$A(\nu, \beta) = \begin{pmatrix} -\frac{\nu + \beta}{r} & \frac{\beta}{r} & 0 \\ \beta & -\beta & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.4}$$

y su polinomio característico es  $P(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$ , donde

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\nu + \beta(1+r)}{r} \\ p_2 &= \frac{\nu\beta + r}{r} \\ p_3 &= \frac{\nu + \beta}{r} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

En el plano de parámetros  $\nu, \beta$ , la recta  $PI \equiv \{\nu + \beta = 0\}$  se corresponde con los puntos en los que se produce una bifurcación pitchfork supercrítica del equilibrio en el origen —el cual, por otra parte, existe para todo valor de  $\nu$  y  $\beta$ —.

En las siguientes secciones repasaremos los resultados teóricos obtenidos en [38] en lo que se refiere a la bifurcación de Hopf del origen y a la existencia de una bifurcación de Takens-Bogdanov. Analizaremos también, por nuestra parte, la bifurcación de Hopf experimentada por los equilibrios no triviales —nacidos en la bifurcación pitchfork antes mencionada— en el caso de ausencia de diodos ( $b_3 = b_5 = 0$ ).

### 4.3 Bifurcación de Hopf del Origen

Consideramos ahora el caso en que la matriz de la parte lineal del sistema (4.2.3) tiene como autovalores  $\lambda_1 = \omega_0 i$ ,  $\lambda_2 = -\omega_0 i$ ,  $\lambda_3 \neq 0$ , con  $\omega_0 > 0$ . En términos de los coeficientes del polinomio característico de la matriz (4.2.4), este caso se corresponde a  $p_1 p_2 = p_3$ ,  $\omega_0^2 = p_2 > 0$ . Como aquí prevemos encontrar una bifurcación de Hopf, y puesto que se trata de una bifurcación de codimensión uno, seleccionaremos un parámetro para que describa la bifurcación: este parámetro será  $\beta$ . Si traducimos las relaciones que verifican en este caso los coeficientes del polinomio característico a relaciones entre los parámetros del sistema (4.2.3), obtenemos que la condición  $p_1 p_2 = p_3$  se convierte en  $\beta(\nu\beta(1+r) + r^2 + \nu^2) = 0$ , encontrando dos posibilidades para las soluciones de esta ecuación. La primera de ellas corresponde al caso  $\beta = 0$  —es fácil comprobar que se trata de una bifurcación supercrítica [38]— y la segunda posibilidad viene dada para aquellos valores de  $\beta$  que cumplen la siguiente relación:

$$\beta_c = -\frac{r^2 + \nu^2}{\nu(1+r)}$$

Nos centramos aquí en esta segunda posibilidad. Puesto que

$$\omega_0^2 = \frac{r - \nu^2}{r(1+r)} > 0$$

obtenemos  $0 < \nu^2 < r$ , siendo por tanto la curva de posible bifurcación de Hopf:

$$H \equiv \left\{ \beta = -\frac{r^2 + \nu^2}{\nu(1+r)} : -\sqrt{r} < \nu < 0 \right\} \cup \left\{ \beta = -\frac{r^2 + \nu^2}{\nu(1+r)} : 0 < \nu < \sqrt{r} \right\}$$

La situación más interesante en la práctica, que corresponde al caso de fenómenos estables (observables), ocurre cuando  $\lambda_3 = r/\nu < 0$ . Es por ello que nos limitaremos a estudiar la bifurcación de Hopf para  $-\sqrt{r} < \nu < 0$ . La representación de este trozo de la curva  $H$  en el plano  $\nu, \beta$  aparece en la figura 4.3.1, para los siguientes valores de los parámetros:  $r = 0.6$ ,  $a_3 = 0.3286$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$ .

Para valores de  $\beta$  cercanos a  $\beta_c$ , la matriz  $A(\nu, \beta)$  tiene como autovalores  $\alpha(\beta) \pm i\omega(\beta)$ ,  $\lambda(\beta)$ , con  $\alpha(\beta_c) = 0$ ,  $\omega(\beta_c) = \omega_0$  y  $\lambda(\beta_c) = r/\nu$ . La condición de

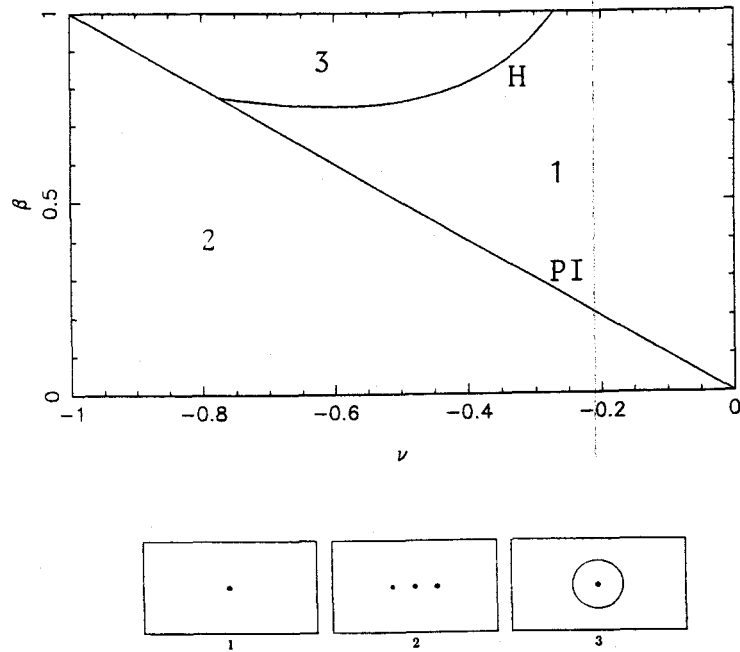


Figura 4.3.1: Conjunto parcial de bifurcaciones para  $r = 0.6$ ,  $a_3 = 0.3286$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$ .

transversalidad es  $\alpha'(\beta_c) \neq 0$  (es decir, que los autovalores complejos atraviesen con velocidad no nula el eje imaginario). Haciendo las operaciones correspondientes, resulta (vid. [38])

$$\alpha'(\beta_c) = \frac{(r^2 + \nu^2)\nu^2}{2r^2(r^2 + \omega_0^2\nu^2)} \neq 0$$

siendo distinto de cero para el rango de valores que manejamos.

El que se verifique la condición de transversalidad permite considerar, en lugar de la familia completa, el sistema correspondiente al valor crítico de  $\beta$ , al cual habrá que determinar el orden de degeneración de la bifurcación de Hopf. Para ello, es necesario aplicar en primer lugar la técnica descrita en [34] para el cálculo de la variedad de centros, obteniendo la variedad de centros y el correspondiente sistema reducido (de dimensión dos), los cuales sólo tienen términos de grado impar, al igual que ocurre con el sistema original. A continuación, se aplica al sistema reducido el algoritmo para el cálculo de los coeficientes de la bifurcación de Hopf descrito en [35], obteniendo la siguiente expresión para el primer coeficiente



de la bifurcación de Hopf:

$$\bar{a}_1 = \frac{3}{8r} \frac{a_3(\nu^4 - r^4) + b_3\nu^4(1+r)^2}{(r^2 + \nu^2)(r^2 + r - \nu^2)}$$

Este primer coeficiente se anula para un único valor  $\nu \in (-\sqrt{r}, 0)$  dado por:

$$\nu_c = -\sqrt[4]{\frac{a_3 r^4}{a_3 + b_3(1+r)^2}}$$

Además, es fácil comprobar que si  $\nu \in (-\sqrt{r}, \nu_c)$ , el coeficiente  $\bar{a}_1$  es positivo y por tanto la bifurcación de Hopf es subcrítica, mientras que si  $\nu \in (\nu_c, 0)$ , el coeficiente es negativo y la bifurcación es supercrítica. En  $\nu = \nu_c$  nos encontramos pues con una bifurcación de Hopf degenerada.

Para obtener el orden de degeneración de la bifurcación se hace preciso estudiar si, para  $\nu = \nu_c$ , es posible que el segundo coeficiente de la bifurcación de Hopf se anule.

En [38] se obtiene la expresión del segundo coeficiente de la bifurcación de Hopf y se discute su anulación en función de  $a_3, b_3, a_5, b_5$ . Teniendo en cuenta esos resultados hemos elegido unos valores de los parámetros para los que la bifurcación de Hopf resulta ser degenerada de primer orden. Esta situación, que aparece en la figura 4.3.2, corresponde a  $a_3 = 0.3286$ ,  $b_3 = 0.9336$ ,  $a_5 = b_5 = 0$ , manteniendo  $r = 0.6$  para que no varíe la forma de la curva de Hopf obtenida con respecto al caso de la figura 4.3.1. Observamos como, del punto *A* en el que aparece la degeneración, parte una curva de silla-nodo de órbitas periódicas *SN*. Asimismo, aparecen esquematizadas las distintas configuraciones con las órbitas periódicas que nacen de la bifurcación de Hopf —como es evidente estas configuraciones resultan incoherentes pues aún faltan varias bifurcaciones más por determinar (vid. sección siguiente)—.

Estamos interesados en encontrar algún valor de los parámetros para los que la degeneración en la bifurcación de Hopf del origen sea de segundo orden. Si mantenemos los valores dados anteriormente a  $r$ ,  $a_3$  y  $b_3$ , el punto de degeneración seguirá apareciendo para  $\nu_c \approx -0.3538$ ,  $\beta_c \approx 0.8571$ . Podemos ahora elegir  $a_5$  y  $b_5$  para que se anule también el coeficiente  $\bar{a}_2$  de la forma normal de Hopf. Para este

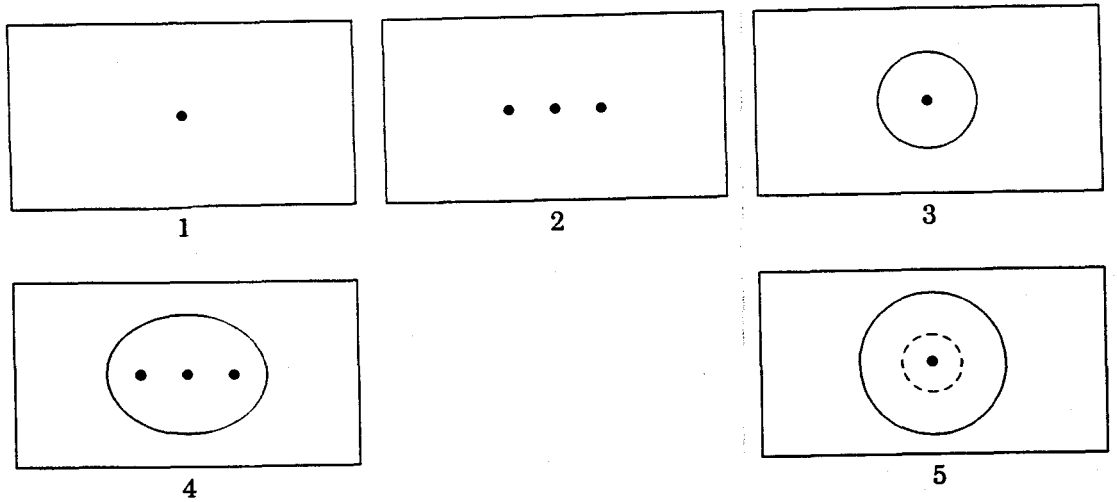
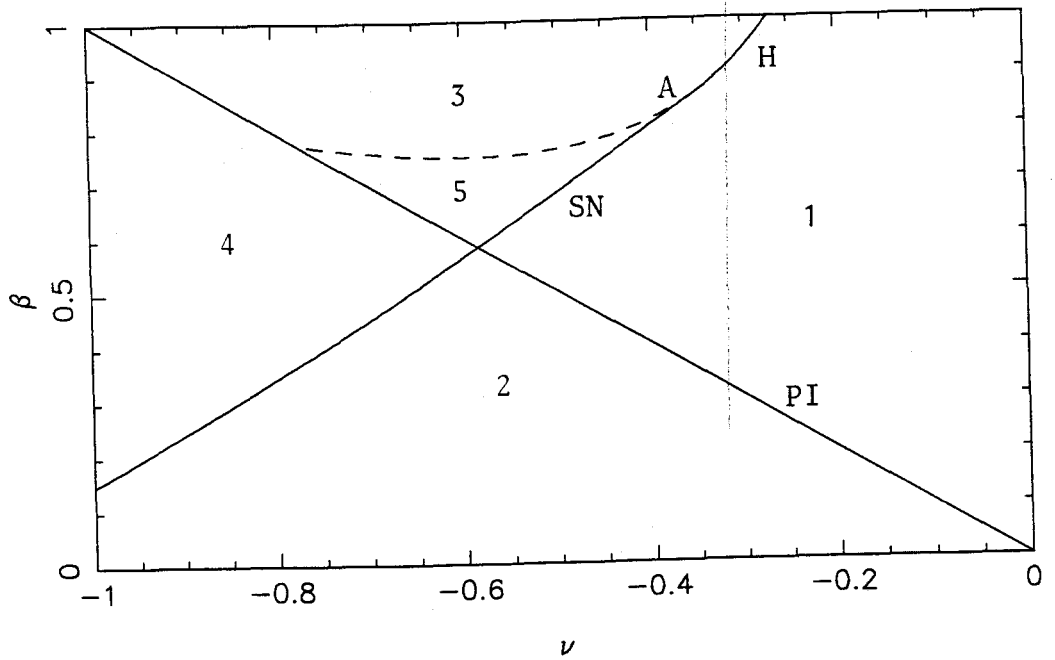


Figura 4.3.2: Conjunto parcial de bifurcaciones para  $r = 0.6$ ,  $a_3 = 0.3286$ ,  $b_3 = 0.9336$ ,  $a_5 = b_5 = 0$ .

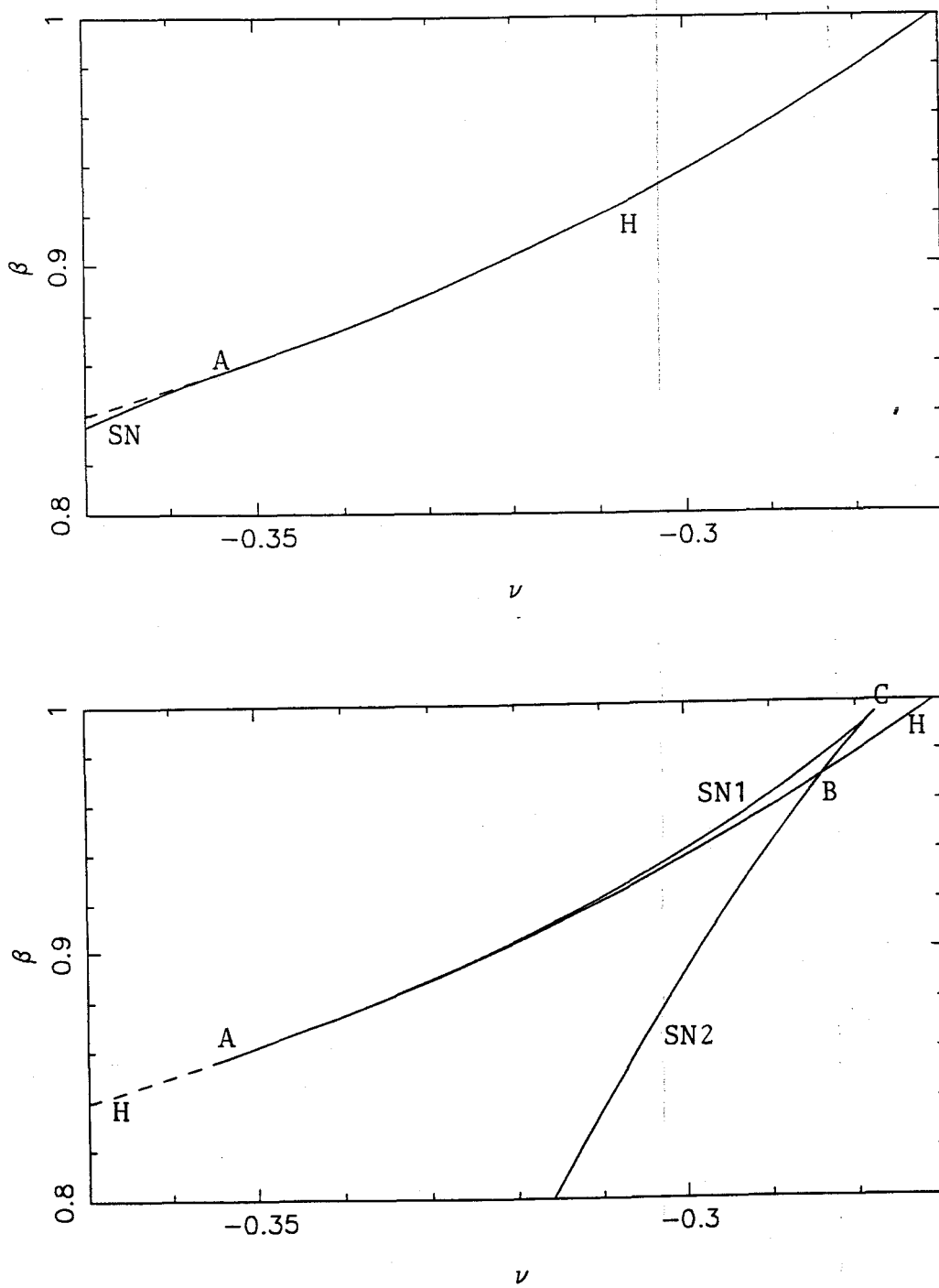


Figura 4.3.3: Conjunto parcial de bifurcaciones para  $r = 0.6$ ,  $a_3 = 0.3286$ ,  $b_3 = 0.9336$ ,  $a_5 = 0$ : (a)  $b_5 = 7$ ; (b)  $b_5 = 100$ .

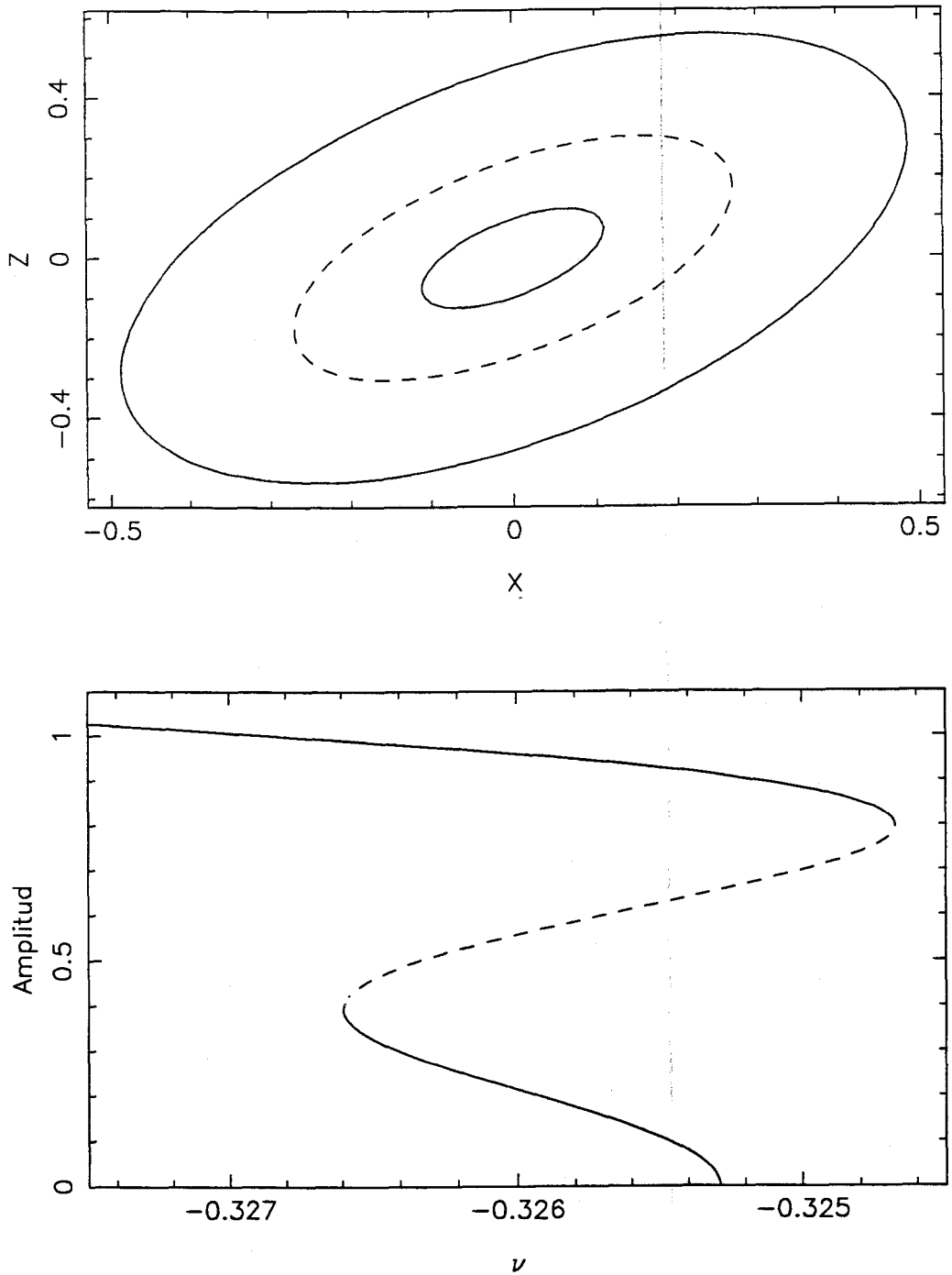


Figura 4.3.4: (a) Órbitas que coexisten para  $\nu = -0.326$ ,  $\beta = 0.895$ ,  $r = 0.6$ ,  $a_3 = 0.3286$ ,  $b_3 = 0.9336$ ,  $a_5 = 0$ ,  $b_5 = 30$ . (b) Diagrama de bifurcaciones para  $\beta = 0.895$ ,  $r = 0.6$ ,  $a_3 = 0.3286$ ,  $b_3 = 0.9336$ ,  $a_5 = 0$ ,  $b_5 = 30$ .

fin, y por simplicidad, elegimos  $a_5 = 0$  de lo que resulta que tomando  $b_5 \approx 6.100$  se anula  $\bar{a}_2$ . Para poner de manifiesto la existencia de la cúspide de silla–nodo que aparece como consecuencia de esa degeneración [48] hemos dibujado un detalle del conjunto de bifurcaciones (vid. figura 4.3.3) para un valor de  $b_5$  próximo al crítico,  $b_5 = 7$ , y para otro en el que la cúspide ya está bastante desarrollada,  $b_5 = 100$ . En el primer caso observamos el cambio de carácter de la bifurcación de Hopf en el punto  $A$  y el nacimiento a partir de él de una curva de silla–nodo  $SN$ , situación análoga a la descrita en la figura 4.3.2. Sin embargo, para  $b_5 = 100$ , la curva de silla–nodo  $SN1$  que nace del punto  $A$  colapsa en la cúspide  $C$  con otra curva de silla–nodo  $SN2$  originando una nueva región en el plano de parámetros (de vértices  $A$ ,  $C$  y  $B$ ) en la que coexisten tres órbitas periódicas como las indicadas en la figura 4.3.4. Nos encontraremos pues, como consecuencia de la degeneración de orden dos de la bifurcación de Hopf, ante un diagrama de bifurcaciones como el mostrado en la figura 4.3.4 (cfr. [48]), en el que aparece un fenómeno de histéresis.

## 4.4 Bifurcación de Takens–Bogdanov

Después del análisis de la bifurcación de Hopf y sus posibles degeneraciones nos interesamos ahora por la presencia de bifurcaciones de Takens–Bogdanov. Para ello, comenzamos resumiendo los resultados obtenidos en [38] para luego llevar a cabo un estudio teórico de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales para el caso  $a_3 \neq 0$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$  que no se había llevado a cabo hasta el momento.

Supongamos, por tanto, que la matriz (4.2.4) tiene a cero como autovalor doble. En términos de los coeficientes del polinomio característico este caso corresponde a  $p_2 = p_3 = 0$ ,  $p_1 \neq 0$ . Puesto que se trata de una bifurcación de codimensión dos, tomamos dos parámetros para describir la bifurcación:  $\nu, \beta$ . La condición sobre los coeficientes del polinomio característico se traduce en las siguientes relaciones para los parámetros de bifurcación:  $\nu_c = \lambda_3 = -\sqrt{r}$ ,  $\beta_c = \sqrt{r}$ .

En otras palabras, esta bifurcación se produce en el punto de intersección de la curva de pitchfork  $PI$  con la curva de Hopf  $H$ .

Comenzamos el estudio trasladando los parámetros para que el valor crítico de bifurcación esté en el origen:

$$\begin{aligned}\bar{\nu} &= \nu - \nu_c = \nu + \sqrt{r} \\ \bar{\beta} &= \beta - \beta_c = \beta - \sqrt{r}\end{aligned}$$

El siguiente paso es el cálculo de la variedad de centros, para lo cual se recurre a la ampliación del sistema introduciendo  $\bar{\nu}, \bar{\beta}$  como nuevas variables. De este modo, se obtiene el sistema reducido (vid. [38]), que adopta la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \Lambda(\bar{\nu}, \bar{\beta}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f(x, y, \bar{\nu}, \bar{\beta}) \quad (4.4.1)$$

donde  $f$  es una función que contiene la parte no lineal en  $x, y$  del sistema reducido y

$$\Lambda(\bar{\nu}, \bar{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\nu} + \bar{\beta}(1+r)}{r^2} & \frac{\bar{\nu}}{r\sqrt{r}} + 1 \\ -\frac{\bar{\nu} + \bar{\beta}}{r\sqrt{r}} & -\frac{\bar{\nu}}{r} \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

Para comprobar las condiciones de transversalidad en este caso, hacemos un cambio lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\bar{\nu} + \bar{\beta}(1+r)}{r^2} & \frac{\bar{\nu}}{r\sqrt{r}} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

mediante el que llevamos la matriz (4.4.2) a su primera forma de Jordan. El sistema (4.4.1) se transforma mediante este cambio en un sistema de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

donde los puntos suspensivos indican términos no lineales en  $x, y$ , y

$$\varepsilon_1 = -\frac{\bar{\nu} + \bar{\beta}}{r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\bar{\nu}(1-r) + \bar{\beta}(1+r)}{r^2}$$

A partir de estas expresiones es fácil comprobar la condición de transversalidad

$$\frac{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\partial(\bar{\nu}, \bar{\beta})} = -\frac{2}{r^3\sqrt{r}} \neq 0$$

La curva  $\varepsilon_1 = 0$  coincide con la recta de bifurcación pitchfork  $PI$ , mientras que la curva  $\varepsilon_2 = 0$ , o lo que es lo mismo  $\bar{\nu}(1-r) + \bar{\beta}(1+r) = 0$ , resulta ser tangente a la curva  $H$  de la bifurcación de Hopf en el punto  $\bar{\nu} = \bar{\beta} = 0$ . En consecuencia, la condición de transversalidad nos dice que el corte entre las curvas de bifurcación pitchfork y Hopf es transversal y podremos tomar variables sobre dichas curvas localmente para describir la bifurcación que estamos considerando.

Debido a que se cumple la condición de transversalidad, en el estudio de la bifurcación en este caso, bastará considerar el sistema (4.4.1) con  $\bar{\nu} = \bar{\beta} = 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f(x, y, 0, 0)$$

Para este sistema, tal como se describe en [38], [39], se obtiene una forma normal del tipo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_3 x^3 + \delta_3 x^2 y + \gamma_5 x^5 + \delta_5 x^4 y + \dots \end{pmatrix}$$

donde las expresiones para sus coeficientes son en este caso:

$$\gamma_3 = -(a_3 + b_3)/r^{\frac{5}{2}}$$

$$\delta_3 = 3(-ra_3 + rb_3 + a_3 + b_3)/r^3$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 = & (3\sqrt{r}r^2 a_3 b_3 + 3\sqrt{r}r^2 b_3^2 + 6\sqrt{r}r a_3 b_3 + 6\sqrt{r}r b_3^2 + 3\sqrt{r}a_3^2 \\ & + 6\sqrt{r}a_3 b_3 + 3\sqrt{r}b_3^2 - r^3 a_5 - r^3 b_5)/r^{\frac{13}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_5 = & (-5\sqrt{r}r^3 a_5 + 5\sqrt{r}r^3 b_5 + 5\sqrt{r}r^2 a_5 + 5\sqrt{r}r^2 b_5 - 15r^3 b_3^2 \\ & + 6r^2 a_3 b_3 - 54r^2 b_3^2 + 15ra_3^2 - 48ra_3 b_3 - 63rb_3^2 - 24a_3^2 - 48a_3 b_3 \\ & - 24b_3^2)/r^{\frac{13}{2}} \end{aligned}$$

En esas expresiones observamos que, supuesto  $a_3, b_3 > 0$ , el coeficiente  $\gamma_3$  resulta ser negativo. Además, si nos limitamos al caso  $0 < r < 1$ , obtenemos que

$\delta_3 > 0$  y estamos ante una bifurcación de Takens–Bogdanov ([15], [98]). El resto de casos ( $r \geq 1$ ) puede dar lugar a bifurcaciones de codimensión más alta que analizaremos en el capítulo V.

Deducimos, en consecuencia (vid. [98], [51]), la existencia local de diversas curvas de bifurcación de codimensión uno en el plano  $\nu, \beta$ , que nacen del punto de Takens–Bogdanov  $O_1$  que actúa como centro organizador: una curva  $h$  de bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales que nacen de la bifurcación pitchfork, otra curva  $OH$  de bifurcación de órbitas homoclinas y una tercera curva  $sn$  de bifurcación silla–nodo de órbitas periódicas. Además, para estas curvas disponemos de sus tangentes en el punto  $O_1$ , como vemos a continuación.

En el plano  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , las tangentes a las curvas  $h$ ,  $OH$  y  $sn$  tienen por ecuaciones  $\varepsilon_1 = \frac{a_3}{b_3}\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{5a_3}{4b_3}\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_1 = \frac{1}{c}\frac{a_3}{b_3}\varepsilon_2$  respectivamente, donde  $c$  es una constante, cuyo valor aproximado es  $c \approx 0.752$  (vid. [51]). Para calcular las pendientes de estas rectas, pero ahora en el plano  $\nu, \beta$ , observamos que si escribimos la ecuación de una recta en el plano  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  en la forma  $\varepsilon_1 = m\varepsilon_2 + n$ , y si sustituimos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  por sus expresiones en función de  $\nu, \beta$ , llegamos a una ecuación de la forma  $\beta = m^*\nu + n^*$ , donde  $m^* = \frac{mr - m - r}{mr + m + r}$ . A partir de aquí es fácil calcular las pendientes de las tres rectas antes citadas en el plano  $\nu, \beta$ , que nos podrán servir como punto de partida para su continuación numérica.

Antes de continuar numéricamente las curvas que nacen de la bifurcación de Takens–Bogdanov vamos a estudiar analíticamente una de ellas, la de Hopf de los equilibrios no triviales en el caso  $a_3 \neq 0$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$  que corresponde a ausencia de diodos en el circuito.

Dichos equilibrios, que existen para  $\nu + \beta < 0$ , vienen dados por

$$(x_0^\pm, y_0^\pm, z_0^\pm) = \left( \pm \sqrt{-\frac{\nu + \beta}{a_3}}, 0, \pm \beta \sqrt{-\frac{\nu + \beta}{a_3}} \right)$$

Para el análisis de la bifurcación de Hopf en el punto  $(x_0^+, y_0^+, z_0^+)$  (el estudio en el punto  $(x_0^-, y_0^-, z_0^-)$  sería análogo dada la simetría del sistema), introducimos



los parámetros

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{2}{r}(\nu + \beta) - \beta \\ \mu_2 &= \frac{2}{r}(\nu + \beta) + \frac{\beta}{r}\end{aligned}$$

con objeto de simplificar las expresiones posteriores. Además, obtenemos la siguiente expresión para la matriz jacobiana del sistema (4.2.3) en el equilibrio  $(x_0^+, y_0^+, z_0^+)$ :

$$J(x_0^+, y_0^+, z_0^+) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 + r\mu_2}{1+r} & \frac{\mu_2 - \mu_1}{1+r} & 0 \\ \frac{(\mu_2 - \mu_1)r}{1+r} & -\frac{(\mu_2 - \mu_1)r}{1+r} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

Consideramos el caso  $\beta \neq 0$  (el caso  $\beta = 0$  corresponde a  $\mu_1 = \mu_2$ ). Con esta suposición, la condición de Hopf de este equilibrio se convierte en la siguiente relación entre  $\mu_1, \mu_2$ :

$$1 + \mu_1\mu_2 = 0, \quad \mu_1 < -\sqrt{r}$$

Un cálculo directo muestra que se verifica la condición de transversalidad de la bifurcación de Hopf, lo cual permite considerar el sistema correspondiente al valor crítico, que tomamos como

$$\mu_2^c = \frac{-1}{\mu_1}$$

Para el cómputo de los coeficientes de la bifurcación de Hopf, en primer lugar, trasladamos el equilibrio  $(x_0^+, y_0^+, z_0^+)$  al origen, mediante el cambio

$$\begin{aligned}X &= x - x_0^+ \\ Y &= y - y_0^+ \\ Z &= z - z_0^+\end{aligned}$$

y a continuación realizamos un cambio lineal mediante el que llevamos la matriz (4.4.4) (para el valor crítico  $\mu_2^c$ ) a su forma canónica de Jordan:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & -\omega_0 & \\ \omega_0 & 0 & \\ \hline & & \mu_1 \end{array} \right)$$

donde  $\omega_0 = \frac{1}{\mu_1} \sqrt{\frac{\mu_1^2 - r}{1+r}}$ . El cambio que consigue esto es de la forma

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mu_1 \\ -\frac{\mu_1 + r\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} & -\frac{(1+r)\omega_0}{\omega_0(\mu_2 - \mu_1)} & \mu_1 r \\ \frac{\mu_2 - \mu_1}{1+r} & \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + r\mu_2} & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

El sistema resultante tras estos cambios es

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} - \frac{a_3}{r} \begin{pmatrix} 3x_0^+(x - \mu_1 z)^2 + (x - \mu_1 z)^3 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= (r((-r + \mu_1^2)r\mu_1^2 + (-r + \mu_1^2)r + (-r + \mu_1^2)\mu_1^2 + (-r + \mu_1^2) + \\ &\quad + (r+1)r\mu_1^4 + (r+1)r\mu_1^2 - (r+1)\mu_1^6 - (r+1)\mu_1^4))/((-r + \mu_1^2)r^2 - \\ &\quad - (-r + \mu_1^2)r\mu_1^2 + (-r + \mu_1^2)r - (-r + \mu_1^2)\mu_1^2 + (r+1)r^2\mu_1^4 - \\ &\quad - (r+1)r\mu_1^6 + (r+1)r\mu_1^4 - (r+1)\mu_1^6) \\ k_2 &= \left( \frac{1}{(-r^2 + r\mu_1^2 - r + \mu_1^2)^2} r(-r\mu_1^4 + r - 2\mu_1^4 - 2\mu_1^2) \right) / ((-r + \mu_1^2)r^2 - \\ &\quad - (-r + \mu_1^2)r\mu_1^2 + (-r + \mu_1^2)r - (-r + \mu_1^2)\mu_1^2 + (r+1)r^2\mu_1^4 - \\ &\quad - (r+1)r\mu_1^6 + (r+1)r\mu_1^4 - (r+1)\mu_1^6) \\ k_3 &= (\mu_1((-r + \mu_1^2)r^2 + 2(-r + \mu_1^2)r + (-r + \mu_1^2) + (r+1)r^2 - \\ &\quad - 2(r+1)r\mu_1^2 + (r+1)\mu_1^4)) / ((-r + \mu_1^2)r^2 - (-r + \mu_1^2)r\mu_1^2 + \\ &\quad + (-r + \mu_1^2)r - (-r + \mu_1^2)\mu_1^2 + (r+1)r^2\mu_1^4 - (r+1)r\mu_1^6 + \\ &\quad + (r+1)r\mu_1^4 - (r+1)\mu_1^6) \end{aligned}$$

El sistema (4.4.5) está en condiciones de aplicarle el algoritmo descrito en [34], que proporciona una variedad de centros a segundo orden de la forma

$$z = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3a_3x_0^+k_3(2\omega_0^2 + \mu_1^2)}{r\mu_1(4\omega_0^2 + \mu_1^2)} \\ \alpha_2 &= \frac{-6a_3x_0^+k_3\omega_0}{r(4\omega_0^2 + \mu_1^2)} \\ \alpha_3 &= \frac{6a_3x_0^+k_3\omega_0^2}{r\mu_1(4\omega_0^2 + \mu_1^2)} \end{aligned}$$

También obtenemos el sistema reducido a tercer orden:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left\{ 3x_0^+x^2 + (1 - 6x_0^+\mu_1\alpha_1)x^3 - \right. \\ \left. - 6x_0^+\mu_1\alpha_2x^2y - 6x_0^+\mu_1\alpha_3xy^2 \right\} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Para este sistema, aplicando el algoritmo desarrollado en [35], obtenemos la siguiente expresión para el primer coeficiente de la bifurcación de Hopf:

$$\begin{aligned} &(3a_3(2r\omega_0x_0^+k_1\mu_1\alpha_3 + 6r\omega_0x_0^+k_1\mu_1\alpha_1 \\ &+ 2r\omega_0x_0^+k_2\mu_1\alpha_2 - r\omega_0k_1 - 6a_3x_0^{+2}k_1k_2))/(8r^2\omega_0) \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de cada una de las constantes que aparecen en esta fórmula, y factorizando la expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned} &6a_3\sqrt{-r + \mu_1^2}r^2(r^2\mu_1^6 - r^2\mu_1^4 - 4r^2\mu_1^2 + 4r^2 + 2r\mu_1^6 - r\mu_1^4 - \\ &- 5r\mu_1^2 + 10r + 4\mu_1^6 - 10\mu_1^2)/(8r^2\omega_0\sqrt{r + 1}\mu_1(r^3\mu_1^6 - r^3\mu_1^4 - 4r^3\mu_1^2 + \\ &+ 4r^3 + 3r^2\mu_1^6 + 2r^2\mu_1^4 - 12r^2\mu_1^2 + 4r^2 + 3r\mu_1^6 + 7r\mu_1^4 - 8r\mu_1^2 + \mu_1^6 + 4\mu_1^4)) \end{aligned}$$

El estudio del signo de la anterior expresión caracterizará el tipo de bifurcación de Hopf del equilibrio no trivial  $(x_0^+, y_0^+, z_0^+)$  (subcrítica o supercrítica). Del análisis llevado a cabo podemos concluir que ni la forma de la curva de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales ni la estabilidad de la misma se ve influida por el valor de  $a_3$ . En la sección 5.8 aparecerá un caso de degeneración de la bifurcación de Hopf ahora analizada.

Pasamos a continuación a describir el conjunto de bifurcaciones una vez que hemos continuado las tres curvas que parten del punto de Takens–Bogdanov  $O_1$

y que mostramos en la figura 4.4.1. En lo que resta de capítulo tomaremos los siguientes parámetros con los valores que a continuación especificamos:

$$r = 0.6, \quad a_3 = 0.3286, \quad b_3 = 0.9336, \quad a_5 = b_5 = 0.$$

La curva de Hopf de los equilibrios no triviales  $h$ , que verifica

$$1 + \left[ \left( \frac{2}{r} + Q \right) (\nu + \beta) - \beta \right] \left[ \frac{2}{r} (\nu + \beta) - \frac{1}{r} (Q(\nu + \beta) - \beta) \right] = 0$$

donde  $Q = \frac{3b_3}{a_3 + b_3}$ , resulta ser supercrítica. En la misma figura denotamos por  $OH$  a la curva de conexiones homoclinas y por  $sn$  a la curva de silla-nodo. Además, hemos representado también las configuraciones de equilibrios y órbitas periódicas que el sistema tendría suponiendo que no existieran más curvas de bifurcación: como veremos, en lo que resta de capítulo, la situación será bien distinta en una zona del plano de parámetros pues la homoclina pasará a ser del tipo Shil'nikov, lo que traerá consigo una gran riqueza de comportamientos periódicos y aperiódicos que trataremos de poner de manifiesto.

Pero antes de eso, para tener idea del comportamiento de la homoclina vamos a estudiar la forma de los autovalores de la matriz de la linealización del origen, es decir, pasamos a analizar las raíces del polinomio característico cuyos coeficientes vienen dados en (4.2.5).

En primer lugar vamos a determinar la curva que separa la zona del plano de parámetros en la que los tres autovalores son reales de la zona en la que hay uno real y un par complejo conjugado. Esta curva viene dada por la fórmula de Cardano

$$F(\nu, \beta, r) = q^2 + p^3 = 0$$

donde  $p$  y  $q$ , en términos de los coeficientes del polinomio característico, vienen dados por

$$q = \frac{1}{2} \left[ \frac{2p_1^3}{27} - \frac{p_1 p_2}{3} + p_3 \right]$$

$$p = \frac{3p_2 - p_1^2}{9}$$

Hemos continuado dicha curva  $RI$ , que aparece punteada en la figura 4.4.1, usando el algoritmo PITCON.

Vamos a centrarnos en el caso en el que el polinomio característico tiene una raíz real,  $s$ , y dos complejas conjugadas  $a \pm \omega i$ , situación en la que adopta la forma

$$\lambda^3 - (2a + s)\lambda^2 + (a^2 + \omega^2 + 2as)\lambda - (a^2 + \omega^2)s = 0$$

(si hacemos  $a = 0$ , obtenemos la condición de Hopf; si queremos que la raíz real sea positiva,  $s > 0$ , obtenemos  $p_3 < 0$ , o sea,  $\nu + \beta < 0$ : región a la izquierda de la recta  $PI$ ).

Estamos ya en condiciones de determinar la curva sobre la que la parte real de los autovalores complejos coincide, en módulo, con el autovalor real, es decir, la curva sobre la que la homoclina pasa de atractiva a repulsiva.

Esta curva,  $\delta = 1$  con  $\delta = -\frac{a}{s}$ , la determinamos de la siguiente forma. Por una parte,  $s + a = 0$  implica  $p_1 = s$ ; por otra, al ser  $s$  raíz del polinomio característico, verifica  $s^3 + p_1s^2 + p_2s + p_3 = 0$ . Por tanto, dicha curva  $D1$  viene dada por

$$2p_1^3 + p_1p_2 + p_3 = 0$$

y, una vez continuada usando el algoritmo PITCON, aparece punteada en la figura 4.4.2, en la que nos hemos centrado en las tres curvas que nacen del punto de Takens-Bogdanov.

Hemos determinado, por último, la curva sobre la que  $\delta = \frac{1}{2}$ , es decir,  $s + 2a = 0$ , lo que implica  $p_1 = 0$  que define a la recta, en el plano  $\nu, \beta$ :  $\nu + (1 + r)\beta = 0$ . Esta aparece punteada, como  $D2$ , en la misma figura 4.4.2.

El breve estudio anterior sobre los autovalores nos permite comprender que la homoclina pasa, tras atravesar la curva  $RI$ , de ser del tipo silla-nodo, a ser del tipo silla-foco. Más adelante, al intersectar con  $D1$ , pasa de atractiva a repulsiva, es decir, se hace del tipo Shil'nikov. Ya finalmente atraviesa la recta  $D2$ , lo que según el análisis hecho en [47] trae importantes consecuencias sobre el carácter de las órbitas periódicas cuya existencia está conectada con tal homoclina. Por último, esta curva  $OH$  acaba al intersectar con la recta  $\beta = 0$ , sobre la que se da

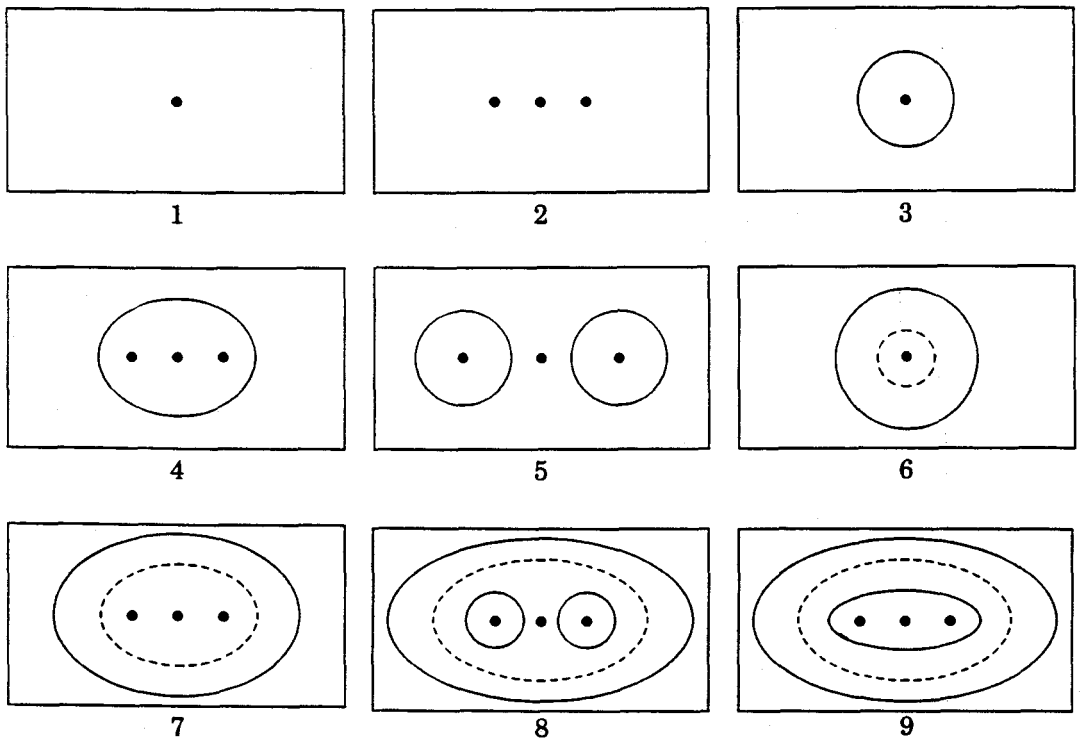
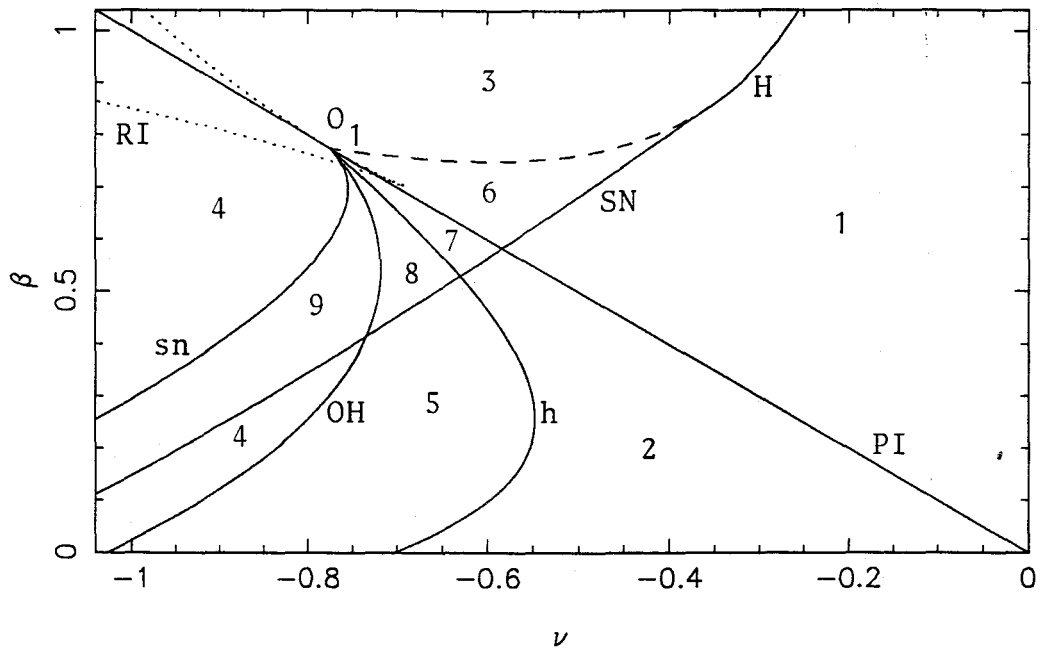


Figura 4.4.1: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\nu, \beta$  para los valores de  $r = 0.6, a_3 = 0.3286, b_3 = 0.9336, a_5 = b_5 = 0$ .

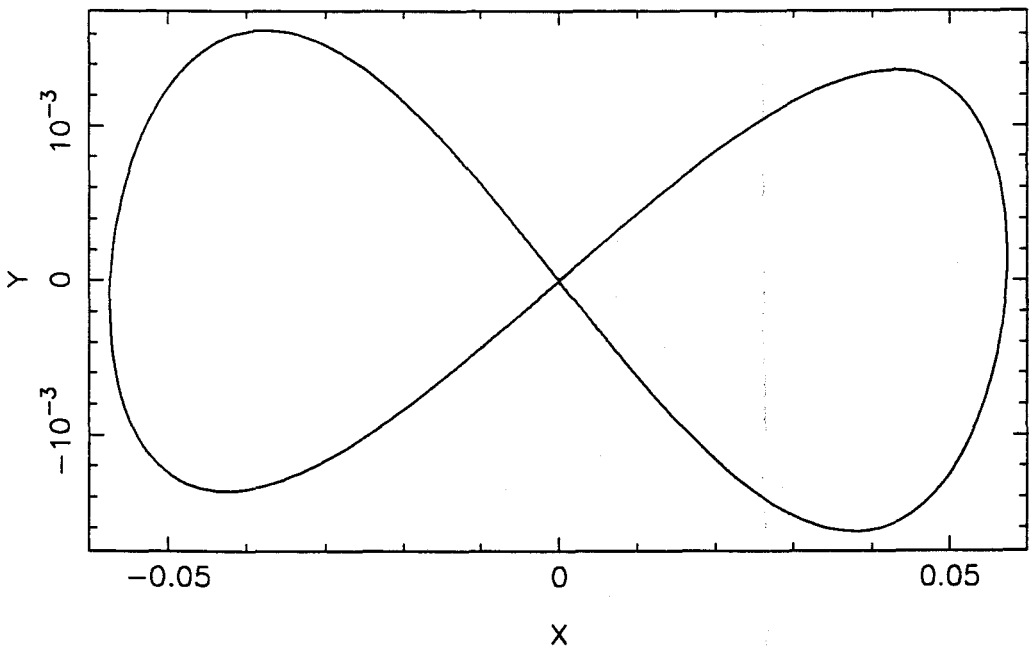
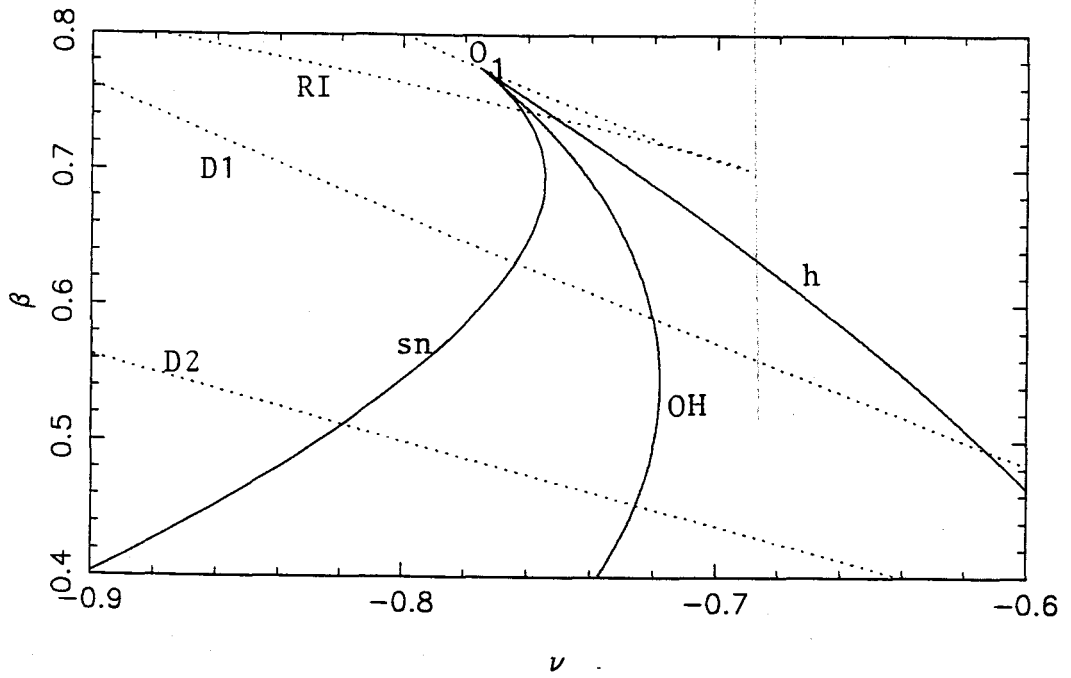


Figura 4.4.2: (a) Conjunto de bifurcaciones que surge del punto de Takens-Bogdanov. (b) Conexión homoclina para  $\nu \approx -0.7721$ ,  $\beta = 0.77$ .

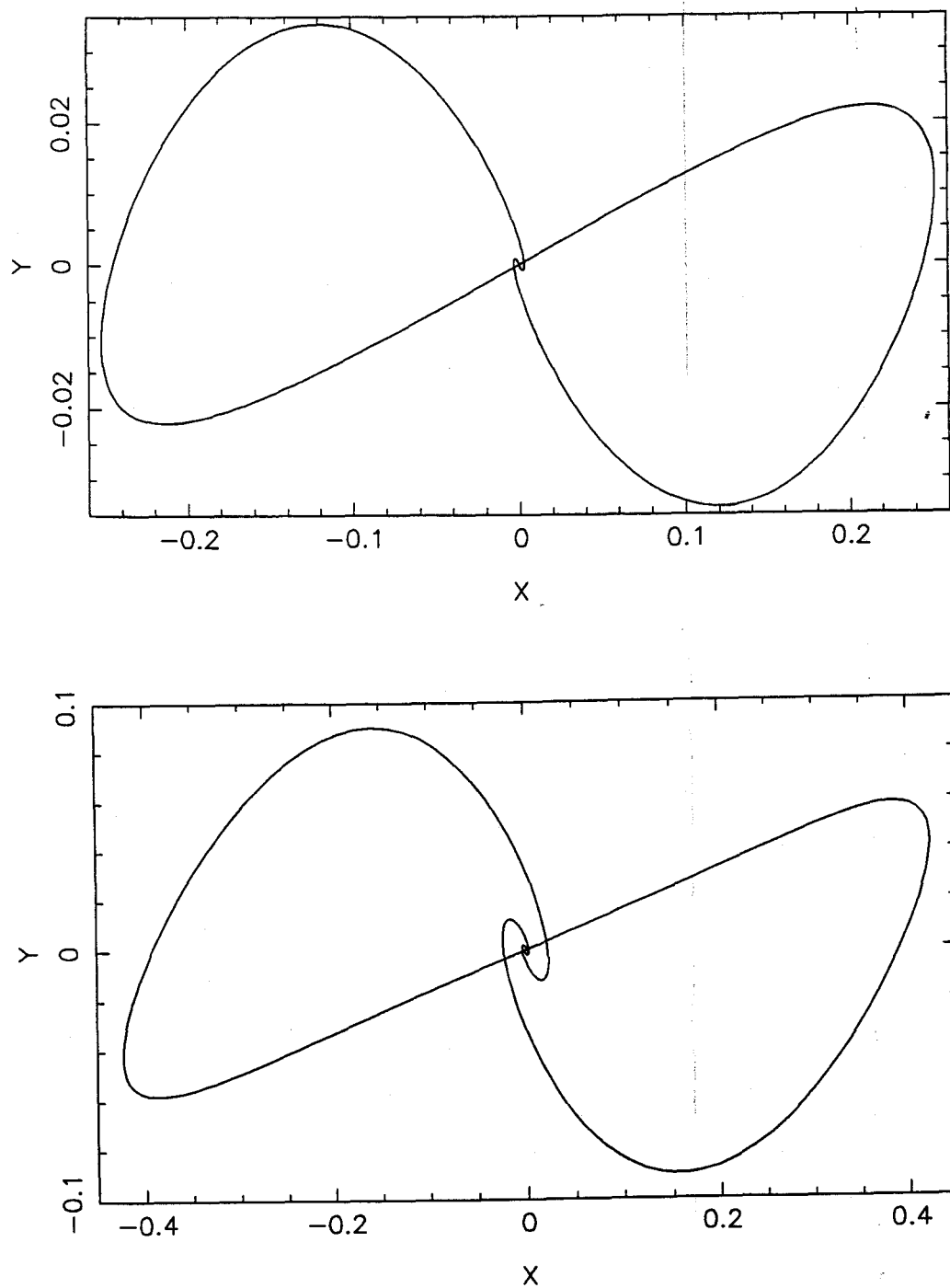


Figura 4.4.3: Conexiones homoclinas para: (a)  $\nu \approx -0.7428$ ,  $\beta = 0.7$ ; (b)  $\nu \approx -0.7213$ ,  $\beta = 0.6$ .



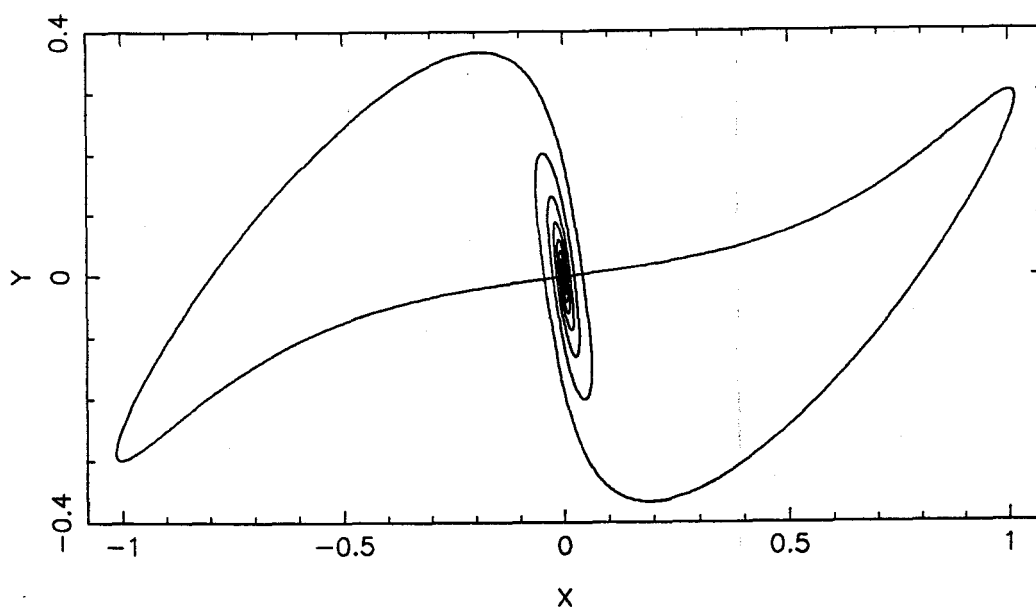
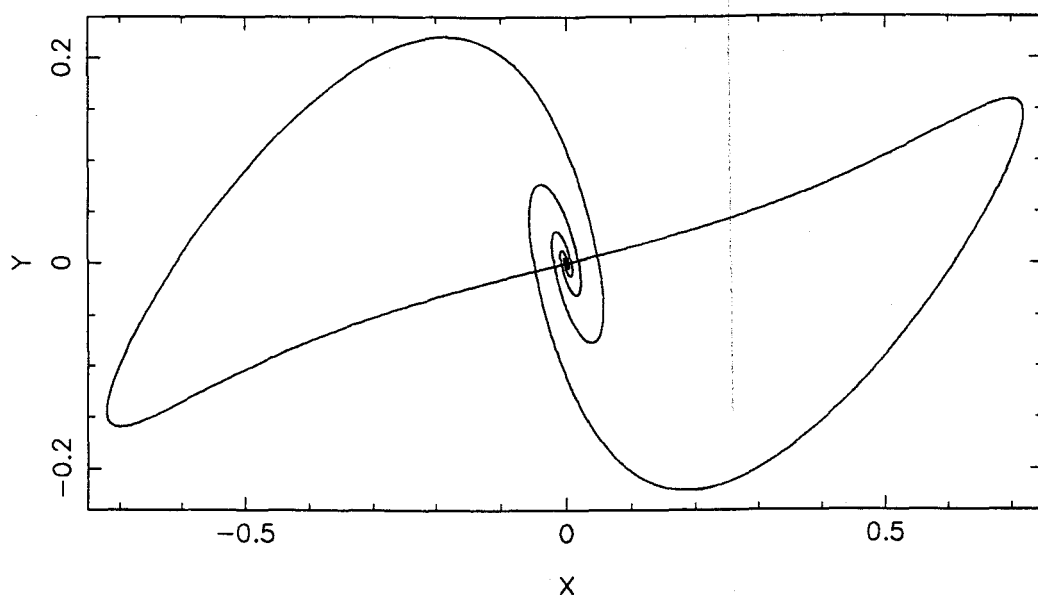


Figura 4.4.4: Conexiones homoclinas para: (a)  $\nu \approx -0.7377$ ,  $\beta = 0.4$ ; (b)  $\nu \approx -0.8361$ ,  $\beta = 0.2$ .

una bifurcación de Hopf supercrítica del origen, lo que trae consigo el nacimiento, a partir de ese punto denominado de Hopf–Shil’nikov, de una homoclina asociada a una órbita periódica [96], [42].

Dibujamos a continuación la conexión homoclina para diversos valores de los parámetros, con lo que observamos su evolución.

En primer lugar nos hemos situado en un punto de la curva de conexiones homoclinas próximo al punto de Takens–Bogdanov,  $\nu \approx -0.7721, \beta = 0.77$  (vid. figura 4.4.2), en el que se aprecia el tamaño todavía pequeño de tal órbita y su geometría prácticamente plana (estamos en la zona por encima de la curva  $RI$  en la que los tres autovalores de la matriz de la linealización en el origen son reales). Ya, en el segundo caso representado, para  $\nu \approx -0.7428, \beta = 0.7$  (vid. figura 4.4.3), hemos pasado a la zona en la que dos autovalores son complejos pero estamos aún por encima de la curva  $D1$ , es decir, la homoclina es atractiva. La tercera conexión homoclina representada (vid. figura 4.4.3) corresponde a  $\nu \approx -0.7213, \beta = 0.6$ . Ésta se encuentra situada por debajo de la curva  $D1$ , se trata, por tanto, de una homoclina repulsiva, con  $\frac{1}{2} < \delta < 1$ . La siguiente aparece para  $\nu \approx -0.7477, \beta = 0.4$  (vid. figura 4.4.4) por lo que para ella  $\delta < \frac{1}{2}$ . Por último, y para ver como sigue creciendo el movimiento en espiral impuesto por el par de autovalores complejos, hemos dibujado la órbita homoclina correspondiente a  $\nu \approx -0.8361, \beta = 0.2$  (vid. figura 4.4.4).

## 4.5 Bifurcaciones Homoclinas

En la presente sección vamos a describir el comportamiento periódico y homoclino que hemos encontrado en el estudio numérico realizado, para diversos valores de  $\beta$ , en las proximidades de la zona de existencia de la órbita homoclina, interpretando a ésta como elemento organizador fundamental en la riqueza de comportamiento que vamos a mostrar. Asimismo, estudiaremos los atractores caóticos presentes como consecuencia de dichas conexiones homoclinas y de cascadas de Feigenbaum.

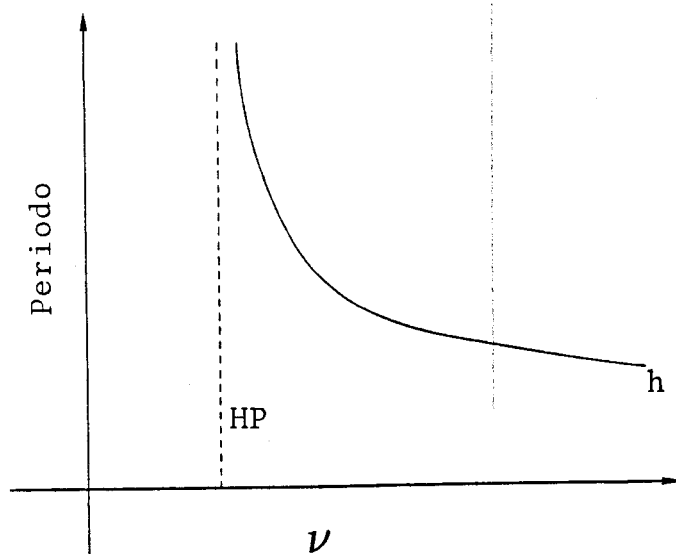


Figura 4.5.1: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas pequeñas para  $\beta = 0.7$ .

#### 4.5.1 Órbitas Principales Asimétricas

Al atravesar, de derecha a izquierda, la curva de Hopf de los equilibrios no triviales  $h$  que surgió del punto de Takens–Bogdanov, aparece una órbita periódica estable alrededor de cada equilibrio no trivial; llamaremos a dichas órbitas periódicas y a las que nazcan en sus bifurcaciones, órbitas pequeñas o de pequeña amplitud. Veamos cómo dependiendo de los valores de  $\beta$  dichas órbitas evolucionarán de forma distinta.

Así, para  $\beta = 0.7$ , este par de órbitas asimétricas de pequeña amplitud, al ir disminuyendo  $\nu$ , va aumentando en amplitud hasta que ambas órbitas dan lugar a la homoclina  $HP$  con lo que la curva de su periodo tiene la forma típica indicada en la figura 4.5.1, correspondiente al caso  $\delta > 1$  ([47], [45], [42], [56]).

Si nos situamos en  $\beta = 0.6$  (vid. figura 4.5.2) el par de órbitas pequeñas  $P$  experimenta una bifurcación flip de duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.7025$ ) tras la cual se hacen inestables.

Las órbitas de periodo doble  $D$  se mantienen estables hasta que desaparecen en otra bifurcación flip ( $\nu \approx -0.7167$ ) de las órbitas principales, con lo que éstas

recuperan su estabilidad.

Dichas órbitas siguen creciendo en amplitud y periodo tras lo cual experimentan una bifurcación silla-nodo ( $\nu \approx -0.7207$ ) en la que aparecen dos órbitas inestables. Éstas desaparecen en otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.7201$ ) del que surgen dos órbitas estables que tras experimentar una bifurcación flip ( $\nu \approx -0.7207$ ), ya inestables, siguen creciendo en periodo hasta que recuperan la estabilidad mediante otra flip ( $\nu \approx -0.7211$ ) muy próximas ya al valor de la homoclina ( $\nu \approx -0.7213$ ) que corresponde a la recta punteada  $HP$ . En la misma figura hemos representado, como es habitual, la mitad del periodo de las órbitas nacidas tras la bifurcación flip para poderlo comparar con el de las órbitas principales.

Para  $\beta = 0.6$ , puesto que  $\delta \approx 1$ , nos encontramos con una situación intermedia entre la predicha en [56] y en [47] (vid. por ejemplo la figura 3.8 de [47]). Para  $\beta = 0.5$  se obtienen resultados análogos, pues las órbitas de periodo doble no llegan a experimentar ninguna bifurcación flip que duplique su periodo.

Vamos a centrarnos ahora en el caso  $\beta = 0.4$  (vid. figura 4.5.3). Nuevamente, las órbitas pequeñas  $P$ , tras nacer en la bifurcación de Hopf ( $\nu \approx -0.5745$ ) comienzan a crecer y tras experimentar una bifurcación flip ( $\nu \approx -0.6502$ ) se hacen inestables. En esta ocasión, se mantienen inestables hasta instantes antes de experimentar una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7729$ ) pues recuperan la estabilidad mediante una bifurcación flip ( $\nu \approx -0.7728$ ). Hacemos notar que estas órbitas pequeñas han pasado a la izquierda del valor para el que existe la homoclina principal ( $\nu \approx -0.7377$ ), indicado por la recta punteada  $HP$ . Una vez inestables vuelven hacia la derecha y atraviesan nuevamente el valor de  $HP$  para experimentar una nueva bifurcación silla-nodo ( $\nu \approx -0.7237$ ) en la que se hacen estables. Pero esta situación se mantiene en un intervalo muy pequeño del parámetro  $\nu$  pues nuevamente experimentan una bifurcación flip ( $\nu \approx -0.7243$ ). Pasan, siendo inestables, por el valor de  $HP$  y recuperan su estabilidad en otra flip tras la que experimentan otra silla-nodo de la que saldrán inestables. Para este valor de  $\beta$  son evidentes las oscilaciones de la órbita principal asimétrica alrededor del valor de la homoclina principal tal como predicen en su análisis Glendinning y Sparrow

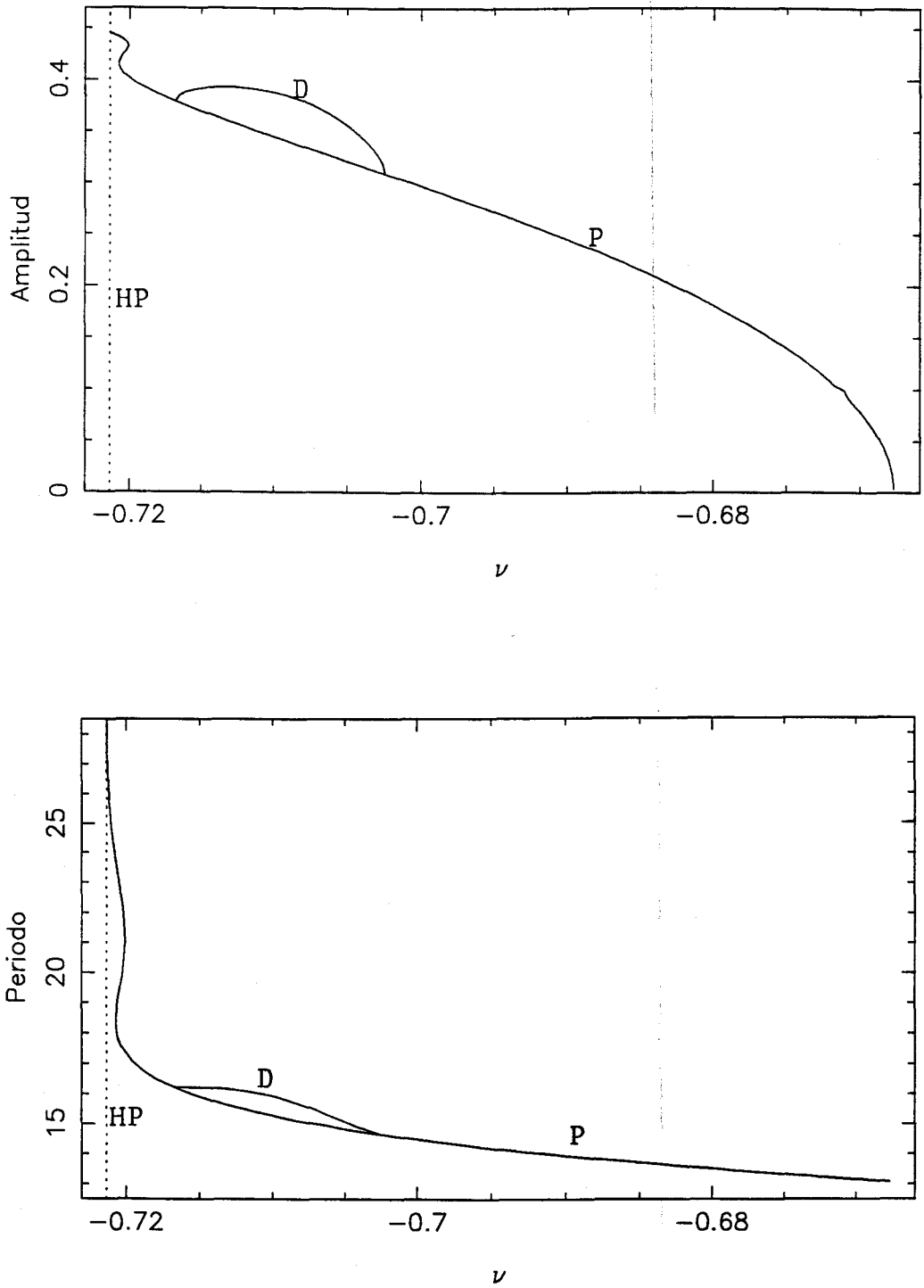


Figura 4.5.2: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas pequeñas para  $\beta = 0.6$ .

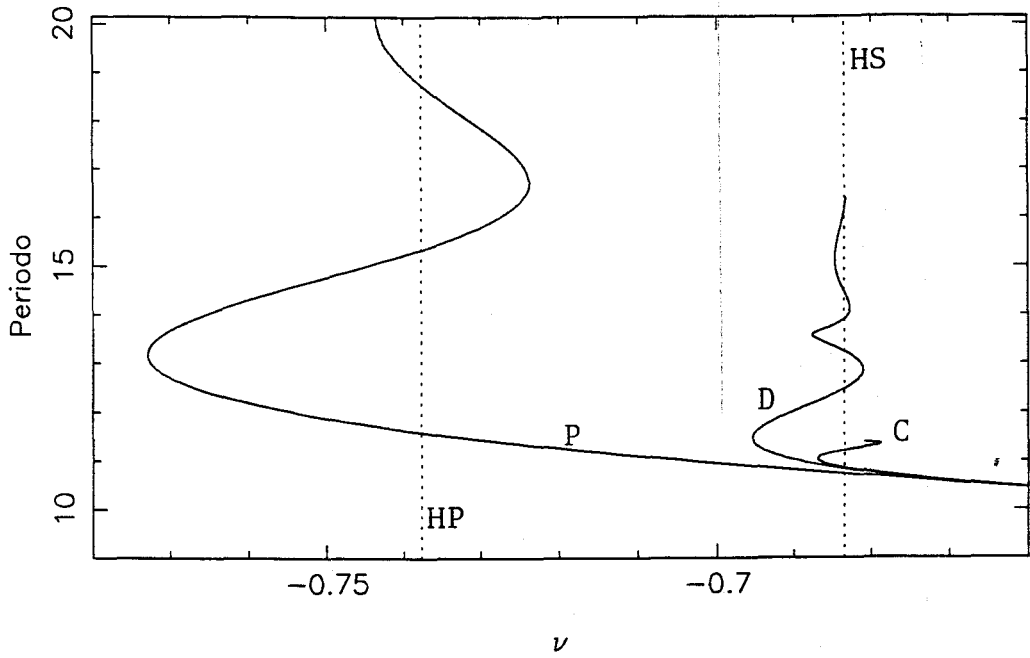


Figura 4.5.3: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas pequeñas para  $\beta = 0.4$ .

[47], [45] y Gaspard *et alii* [43], [42] (vid., por ejemplo, la figura 2 de [45] y la 3.5 de [42]).

Vamos a comentar la evolución seguida por las órbitas de periodo doble  $D$  que nacieron en la primera bifurcación flip de las órbitas principales. Si bien comenzaron siendo estables al nacer ( $\nu \approx -0.6502$ ) experimentan una bifurcación flip ( $\nu \approx -0.6619$ ) tras la que se mantienen inestables hasta que en otra bifurcación flip ( $\nu \approx -0.6950$ ) recuperan su estabilidad. Inmediatamente después experimentan una silla-nodo ( $\nu \approx -0.6954$ ) de la que surge un par de órbitas inestables cuya existencia se ve truncada por otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.6810$ ) en la que aparece otro par de órbitas pequeñas estables. Pero éstas experimentan una flip ( $\nu \approx -0.6813$ ) que las hace inestables hasta que en otra flip ( $\nu \approx -0.6875$ ) recuperan la estabilidad que pierden en una nueva bifurcación silla-nodo ( $\nu \approx -0.6876$ ). Van a mantenerse inestables hasta que en otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.6827$ ) surgen ya estables pero por muy poco tiempo pues experimentan una flip ( $\nu \approx -0.6828$ ) que las hace inestables ...

Hemos comprobado pues que las órbitas secundarias de periodo doble experimentan la misma sucesión de bifurcaciones que las órbitas principales pequeñas, oscilando en sucesivos silla-nodo cada vez más cercanos. Esto nos hace pensar en la existencia de una homoclina secundaria (una pareja, dada la simetría del sistema) o de doble pulso ([54], [28], [30], [40], [41]), que localizamos para  $\nu \approx -0.6835$ .

En la figura 4.5.3 aparece punteada una recta para el valor en el que se da dicha conexión homoclina secundaria  $HS$ . Dibujamos en la figura 4.5.4 tanto la pareja de homoclinas secundarias como la evolución de una de sus coordenadas frente al tiempo que pone de manifiesto el motivo por el que a estas homoclinas se las llama también de doble pulso. Hemos dibujado también, en la figura 4.5.5, seis órbitas de periodo doble, todas inestables, que coexisten con la homoclina. Vemos como estas órbitas van pareciéndose cada vez más a la homoclina a medida que crece su periodo (la de periodo más bajo es la de la esquina superior izquierda y la de más alto la de la inferior derecha).

Pasemos ahora a comentar lo que sucede con las órbitas de periodo cuádruple  $C$  que surgieron en la primera bifurcación flip de las de periodo doble. Si bien nacieron estables ( $\nu \approx -0.6619$ ) experimentan una bifurcación flip ( $\nu \approx -0.6646$ ) que las hace inestables y en la que nace un par de órbitas de periodo aproximadamente ocho veces el del par principal. Estas órbitas de periodo cuádruple siguen un proceso análogo de bifurcaciones silla-nodo y flip alrededor de un valor en el que existirá una homoclina de cuádruple pulso. Estamos pues ante una cascada de Feigenbaum —de las órbitas de periodo óctuple (vid. figura 4.5.3) surge tras experimentar una bifurcación flip ( $\nu \approx -0.6653$ ) un par de órbitas cuyo periodo es aproximadamente 16 veces el del par principal ...— de la que hemos representado una órbita de periodo doble, otra de cuádruple, otra de óctuple y otra de periodo dieciséis (vid. figura 4.5.6) que van apareciendo en las sucesivas duplicaciones de periodo.

Con el fin de tener una visión global de la zona del plano de parámetros en la que se dan los fenómenos descritos hasta ahora para las órbitas pequeñas

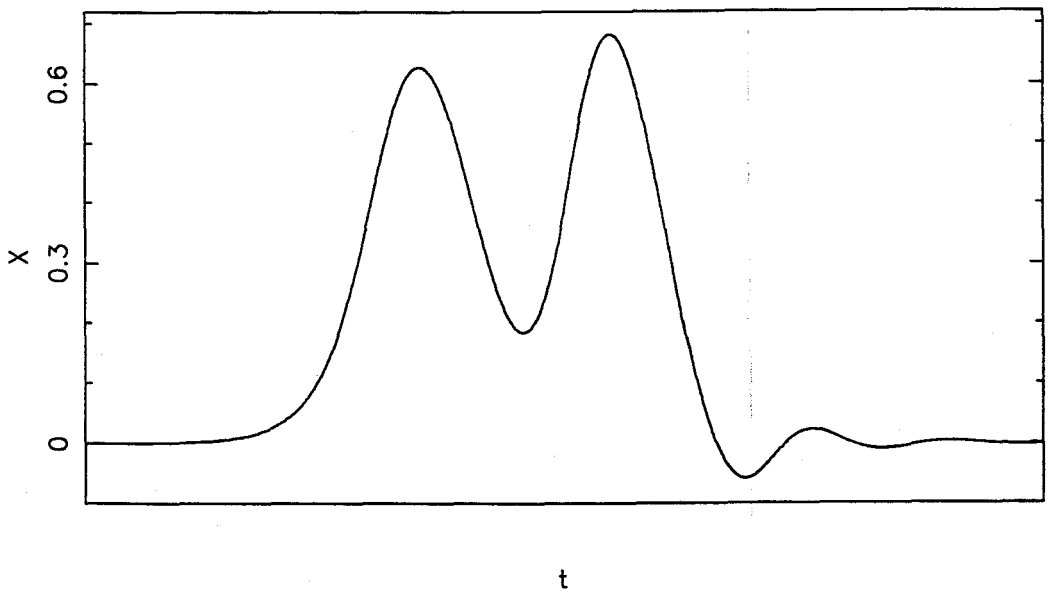
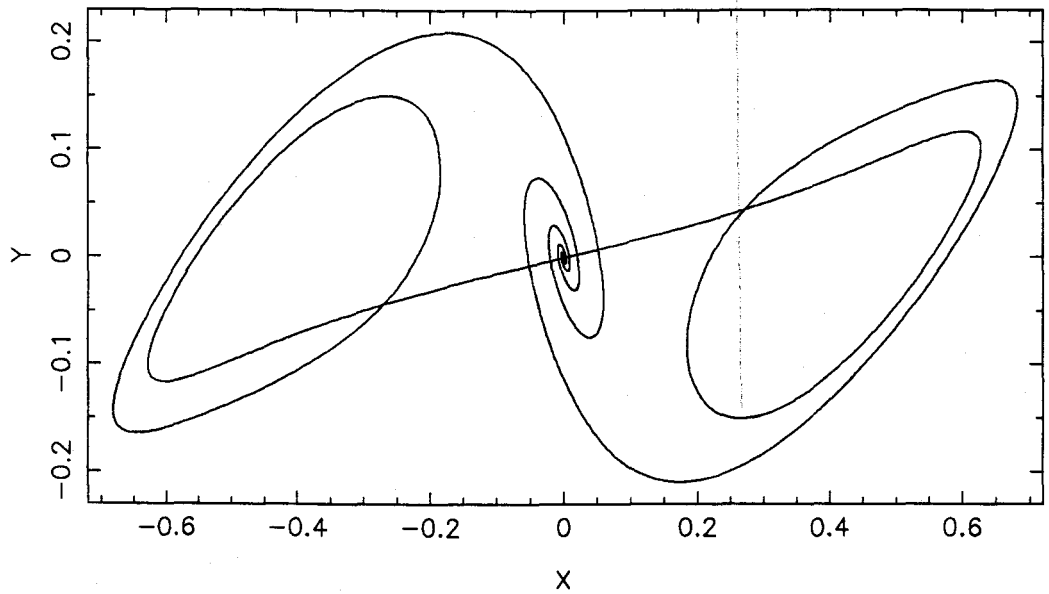


Figura 4.5.4: Homoclina secundaria de doble pulso que se da para  $\nu \approx -0.6835$ ,  $\beta = 0.4$ .



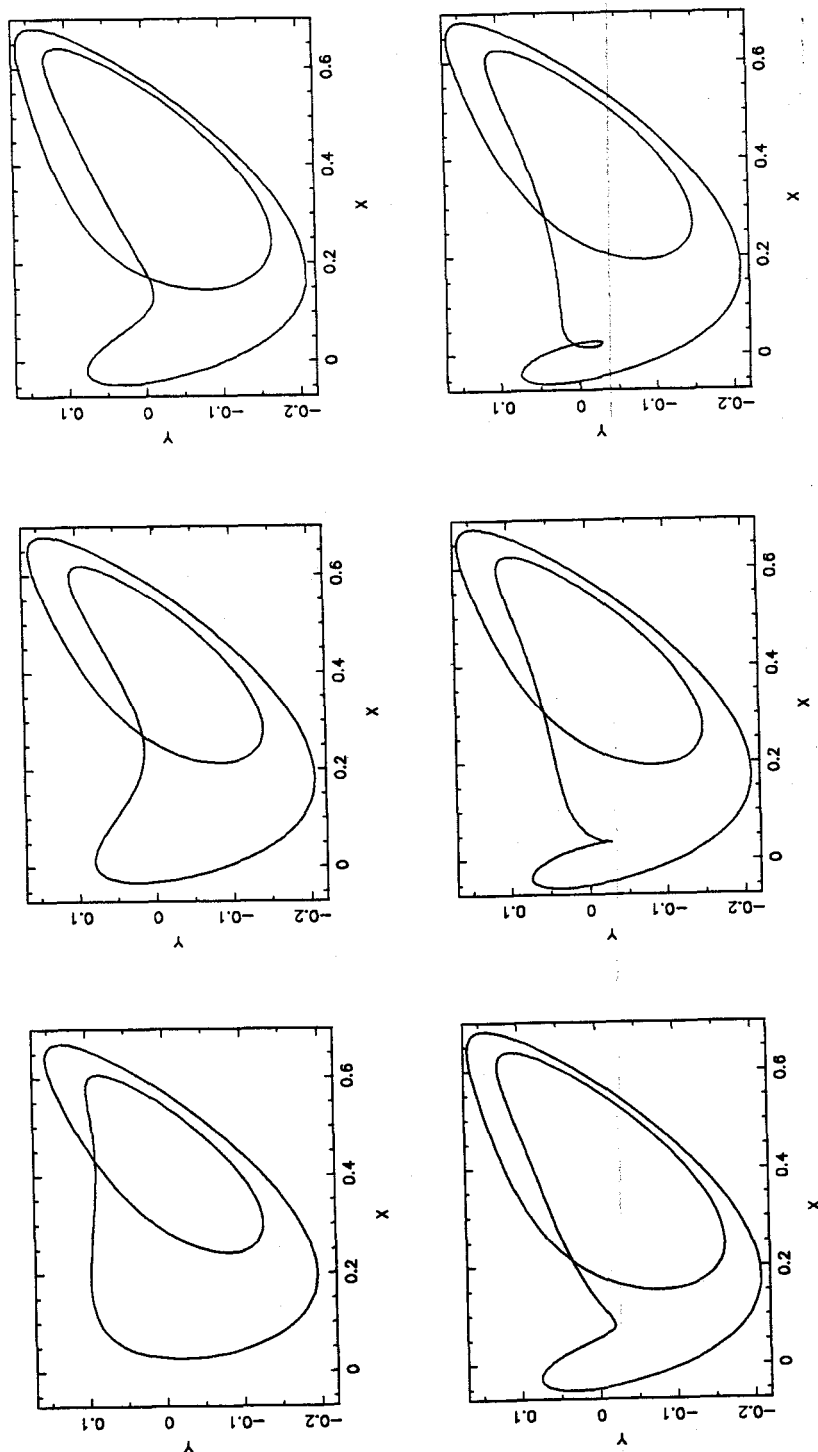


Figura 4.5.5: Seis órbitas de periodo doble que coexisten con la homoclinina secundaria de doble pulso,  $\nu \approx -0.6835$ ,  $\beta = 0.4$ .

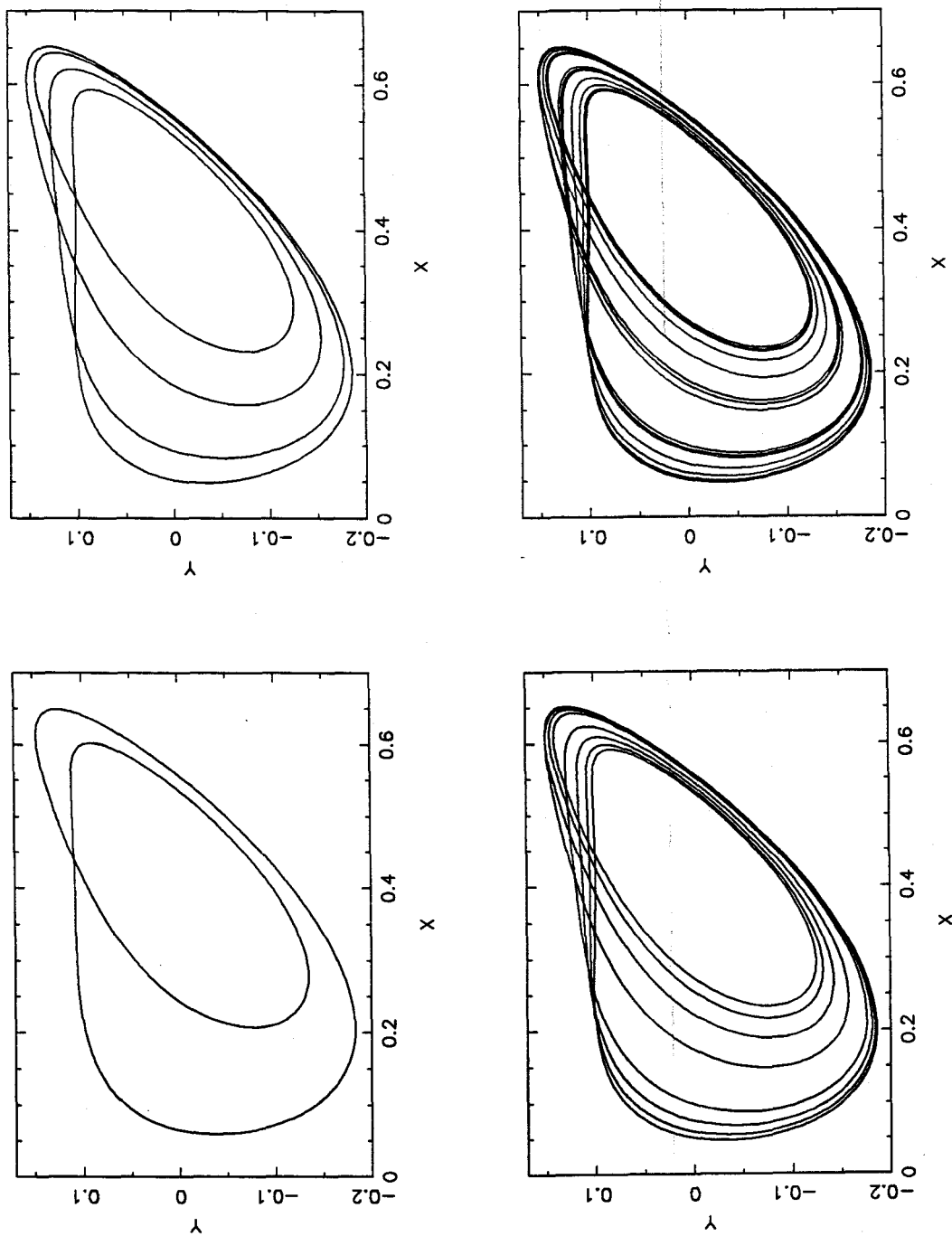


Figura 4.5.6: Órbitas inestables de periodo doble, cuádruple, óctuple y dieciséis que coexisten para  $\nu \approx -0.667$ ,  $\beta = 0.4$ .

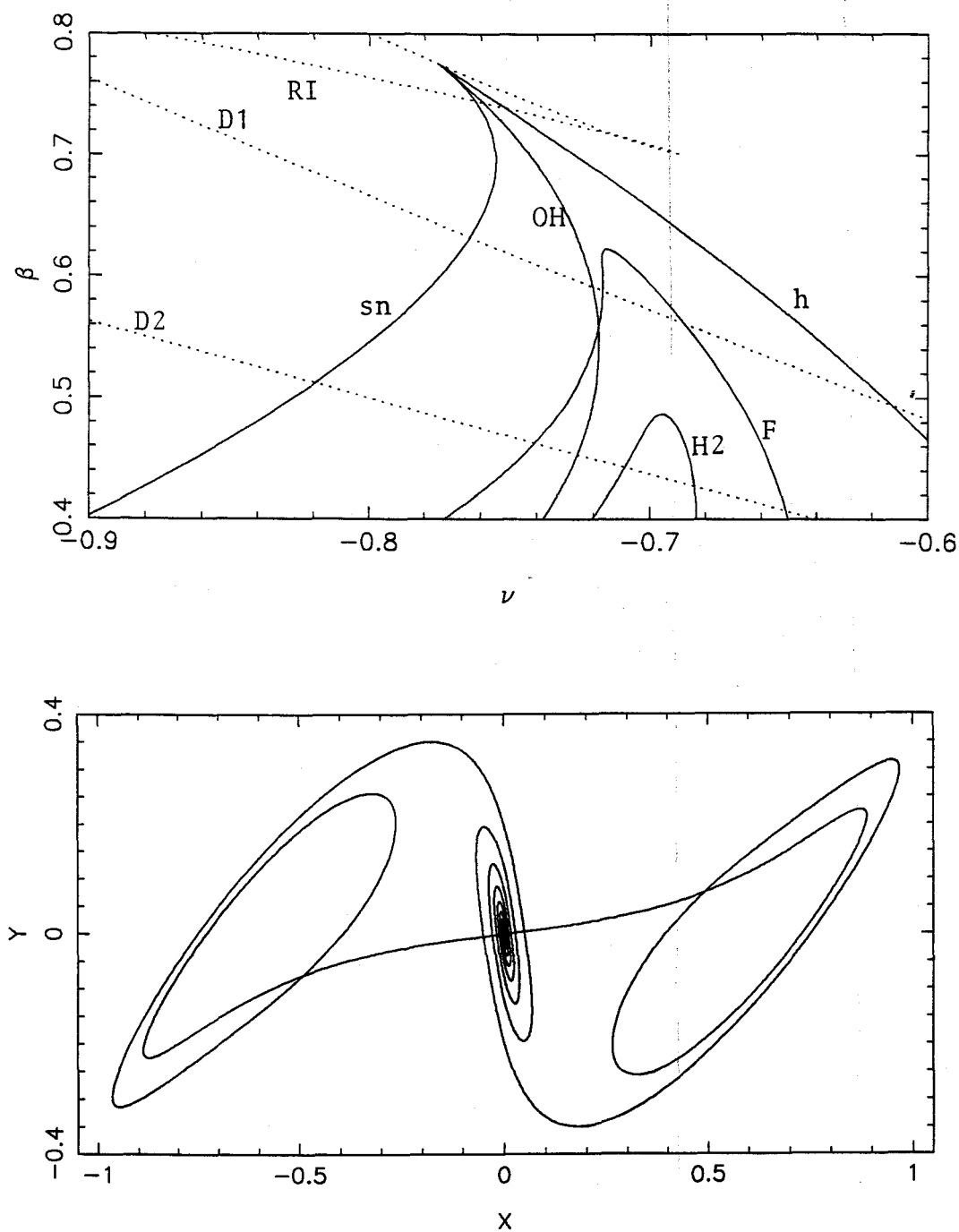


Figura 4.5.7: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones de las órbitas pequeñas. (b) Homoclina de doble pulso que se da para  $\nu \approx -0.7367$ ,  $\beta = 0.2$ .

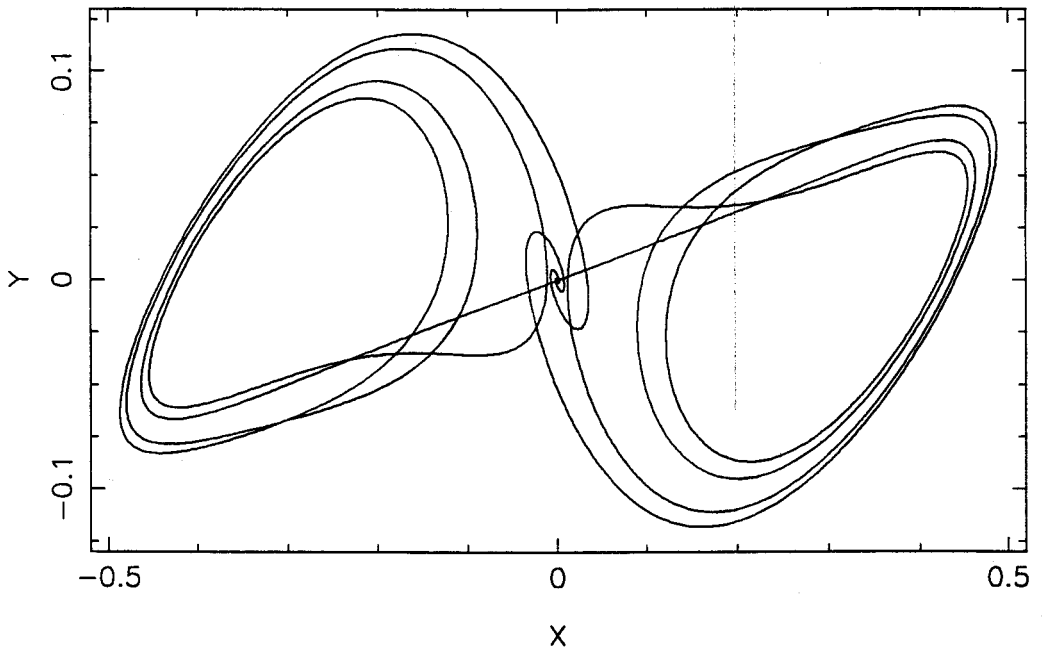


Figura 4.5.8: Homoclina de cuádruple pulso que se da para  $\nu \approx -0.6993$ ,  $\beta \approx 0.5462$ .

dibujamos en la figura 4.5.7 la curva sobre la que dichas órbitas experimentan su primera bifurcación de duplicación de periodo  $F$ . Asimismo, hemos continuado la homoclina de doble pulso que en su momento representamos en la figura 4.5.4 obteniendo la curva  $H2$ . También, representamos dicha conexión homoclina para  $\nu \approx -0.7367$ ,  $\beta = 0.2$ .

Para finalizar la descripción de las órbitas pequeñas (las que surgen de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales y de las distintas bifurcaciones que experimentan posteriormente) mostramos en la figura 4.5.8 una conexión homoclina de cuádruple pulso, que se da para  $\nu \approx -0.6993$ ,  $\beta \approx 0.5462$ , y que aparece como configuración intermedia entre la pareja de órbitas estables de periodo cuádruple ( $\nu = -0.6990$ ,  $\beta \approx 0.5462$ ) y la órbita estable grande ( $\nu = -0.6995$ ,  $\beta \approx 0.5462$ ) que han sido dibujadas en la figura 4.5.9.

Será precisamente a partir de ahora cuando nos ocupemos de las órbitas simétricas que surgieron de la bifurcación de Hopf del origen.

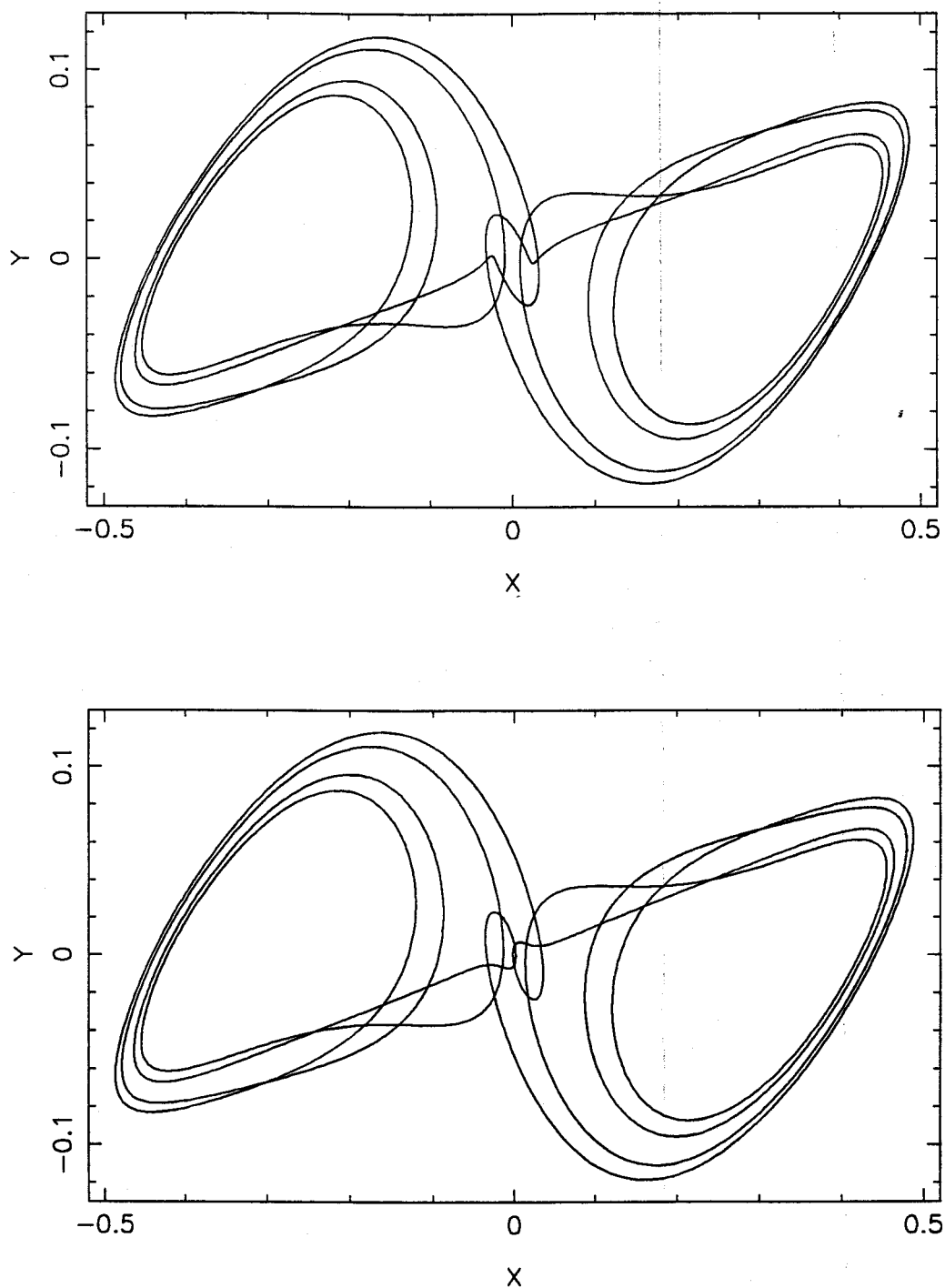


Figura 4.5.9: (a) Pareja de órbitas estables de periodo cuádruple  $\nu = -0.6990$  y (b) órbita grande  $\nu = -0.6995$ , relacionadas con la anterior homoclina de cuádruple pulso ( $\beta \approx 0.5462$ ).

### 4.5.2 Órbitas Principales Simétricas

En este apartado describimos el comportamiento de las órbitas periódicas principales simétricas —en lo que sigue denominaremos, tanto a éstas órbitas periódicas como a las que surjan de sus bifurcaciones, órbitas grandes o de gran amplitud—. Como hicimos en el caso de las órbitas pequeñas, haremos esta descripción fijando  $\beta$  y comentando la evolución de las órbitas al variar  $\nu$ . Por la forma de la curva de Hopf del origen y su posición respecto al punto de Takens–Bogdanov (vid. figura 4.4.1), es posible que para algún valor de  $\beta$  cortemos dos veces a dicha curva, ya en su zona subcrítica. En este caso el diagrama de bifurcaciones sería como el indicado en la figura 4.5.10. Por una parte, la órbita inestable nacida en el punto de Hopf de la derecha  $HD$  crece en amplitud hasta que desaparece en una silla-nodo  $SN$  de la que surge una órbita estable que va a existir para cualquier valor de  $\nu$  a la izquierda del correspondiente a  $SN$ . Por otra parte, la órbita inestable que surge del punto de Hopf de la izquierda  $HI$  después de crecer en amplitud experimenta una bifurcación silla-nodo  $sn$  de la que surge una órbita estable que disminuyendo en amplitud y, creciendo en periodo, existe hasta que se encuentra con la homoclina principal  $HP$ . Ésta a su derecha da paso a un par de órbitas pequeñas estables que desaparecen en la bifurcación de Hopf supercrítica de los equilibrios no triviales  $h$  (situación análoga a la presentada en la figura 4.5.1).

Esta situación se dará para valores de  $\beta$  comprendidos entre 0.75 (mínimo de la curva de Hopf para  $r = 0.6$ ) y  $\sqrt{0.6} \approx 0.7746$  (valor de  $\beta$  para el que se da el punto de Takens–Bogdanov).

Si nos situamos en  $\beta = 0.7$  obtenemos el segundo diagrama de bifurcaciones de la figura 4.5.10, en el que ya no aparece la bifurcación de Hopf del origen. Una órbita estable grande (que surgió en la Hopf del origen) va a desaparecer en una bifurcación silla-nodo  $SN$  de la que surge una órbita inestable que existe hasta que experimenta otra silla-nodo  $sn$ . En ésta surge otra órbita estable que sigue disminuyendo en amplitud (y creciendo en periodo) hasta que encuentra a la homoclina principal  $HP$  [56]. A la derecha de ésta, y tal como sucedía en el

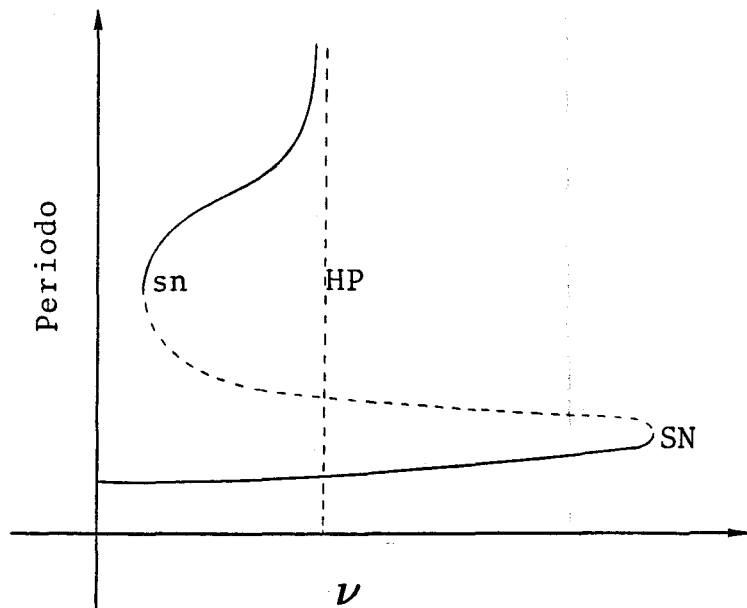
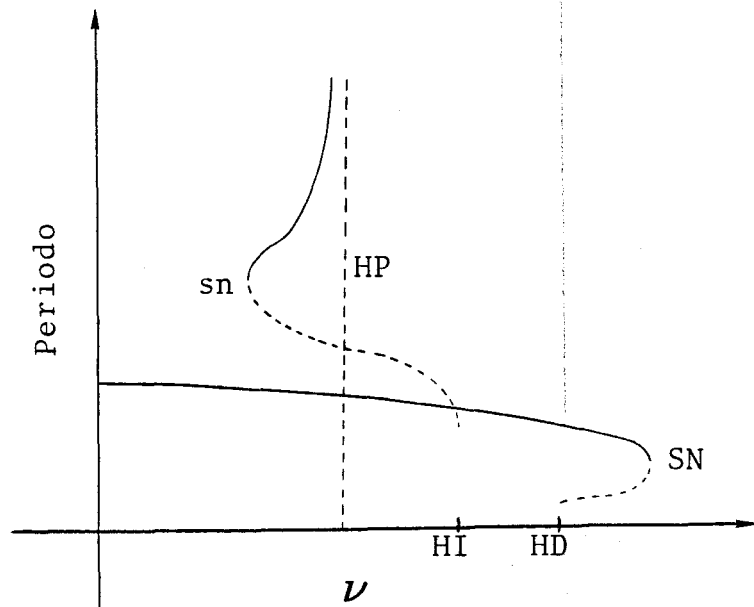


Figura 4.5.10: Diagrama de bifurcaciones de órbitas grandes para (a)  $\beta = 0.76$ ; (b)  $\beta = 0.7$ .

caso anterior, un par de órbitas pequeñas estables existirá hasta que lleguen a la bifurcación de Hopf  $h$  de la que nacieron (vid. nuevamente la figura 4.5.1).

Si bajamos, por ejemplo, a  $\beta = 0.6$  la riqueza de bifurcaciones aumenta tal como describimos a continuación.

En primer lugar, hemos representado en la figura 4.5.11 (a) el diagrama de bifurcaciones correspondiente a las órbitas grandes junto con el que ya dibujamos para las órbitas pequeñas en la figura 4.5.2. La órbita estable (con periodo próximo a 10) experimenta una silla-nodo ( $\nu \approx -0.570$ ) haciéndose inestable. Ésta existe hasta que en otra bifurcación silla-nodo ( $\nu \approx -0.7744$ ) desaparece surgiendo otra órbita estable y ésta sí presenta riqueza de comportamientos al acercarse hacia la homoclina principal (punteada en la figura,  $\nu \approx -0.7213$ ).

Ampliamos en la propia figura la zona que va desde la última silla-nodo hasta la homoclina. Tras esta silla-nodo la órbita estable experimenta una bifurcación pitchfork ( $\nu \approx -0.7660$ ) de la que sale inestable junto con dos órbitas asimétricas. La órbita principal recupera su estabilidad al experimentar otra pitchfork ( $\nu \approx -0.7245$ ) y ya en las proximidades de la homoclina desaparece en otra bifurcación silla-nodo ( $\nu \approx -0.7218$ ) de la que surge una órbita inestable que, aumentando su periodo, sólo existe hasta otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.7225$ ) del que nace una órbita estable que sigue acercándose a la homoclina aumentando su periodo. Representamos en la figura 4.5.12, tres órbitas grandes ( $\nu \approx -0.7221$ ) que coexisten en las proximidades de la homoclina (que ya dibujamos, para  $\beta = 0.6$ , en la figura 4.4.3).

Vamos a centrarnos ahora en lo que sucede con las órbitas asimétricas nacidas en las bifurcaciones pitchfork o de ruptura de simetría. El par de asimétricas que nació en la primera pitchfork experimentada por la órbita principal ( $\nu \approx -0.7660$ ) sufre una flip ( $\nu \approx -0.7622$ ) que las convierte en inestables hasta que por otra bifurcación de duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.7485$ ) recuperan su estabilidad hasta que desaparecen en una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7478$ ) de la que surge un par de asimétricas inestables que a su vez desaparecen en otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.7487$ ) para nacer de ella un par estable.



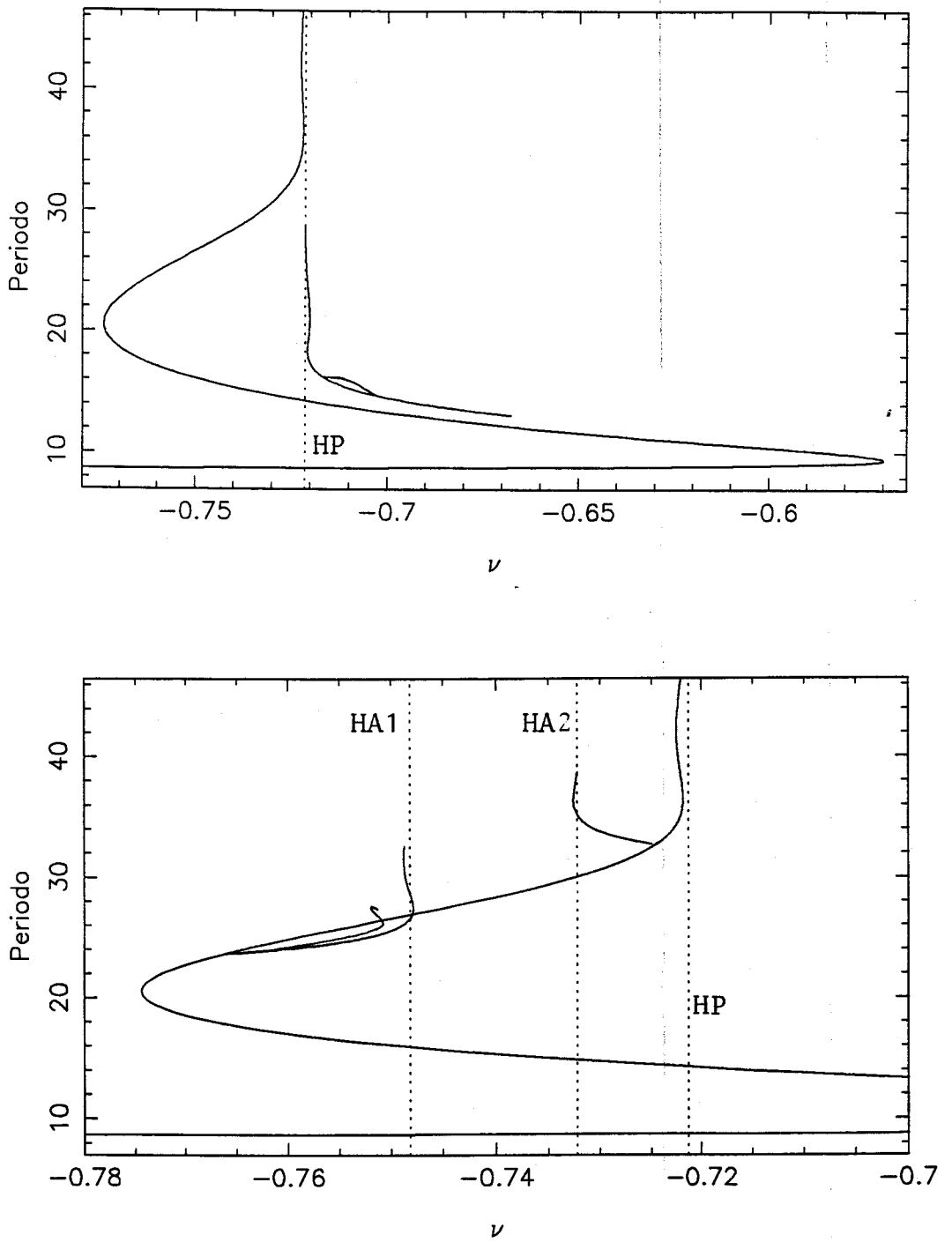


Figura 4.5.11: Diagramas de bifurcaciones de órbitas grandes para  $\beta = 0.6$ .

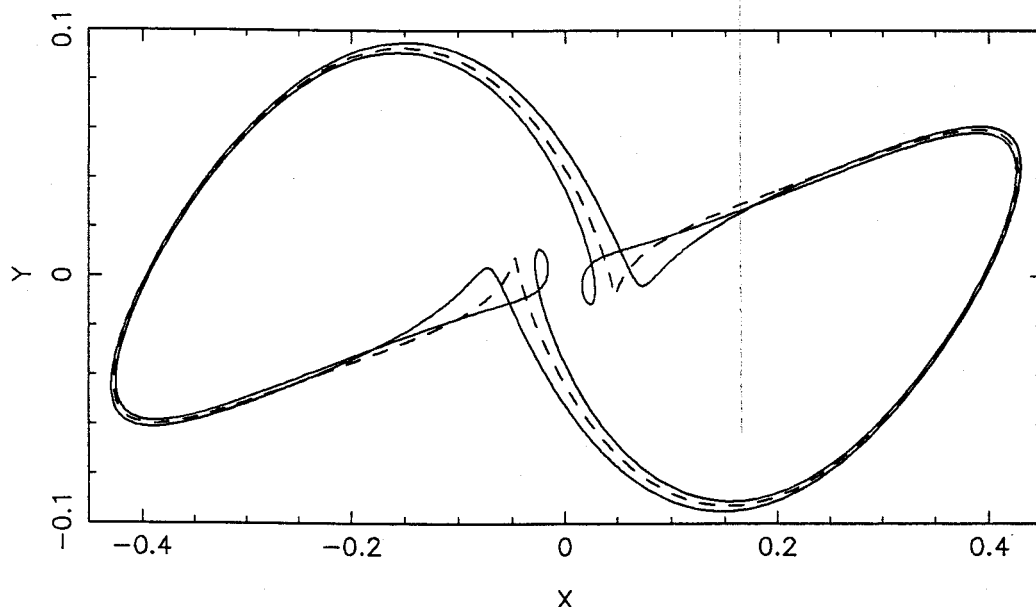


Figura 4.5.12: Tres órbitas grandes que coexisten,  $\nu = -0.7221$ ,  $\beta = 0.6$ , en las proximidades de la homoclina principal.

Las oscilaciones alrededor de un cierto valor de  $\nu$  de este par asimétrico nos sugieren la existencia de una homoclina que actúa como centro organizador de este comportamiento. Hemos detectado esta conexión ( $\nu \approx -0.7484$ ) para cuyo valor aparece la recta punteada  $HA1$ .

Antes de dibujar este par homoclinino representamos en la figura 4.5.13 un par asimétrico junto con las diversas órbitas simétricas con que coexiste. Correspondería, en el diagrama de bifurcaciones de la figura 4.5.11, a la situación que nos encontraríamos para  $\nu$  entre  $-0.7660$  y  $-0.7622$  (la órbita principal ya experimentó la pitchfork pero las asimétricas todavía no han experimentado una flip). Es decir, una órbita grande estable —la proveniente de una bifurcación de Hopf del origen— rodea a cuatro órbitas, cuyo detalle aparece en la parte inferior de dicha figura: una órbita inestable que rodea a otras tres. De éstas, la inestable corresponde a la simétrica que experimentó la pitchfork y las estables forman el par asimétrico. Después de haber dibujado las órbitas asimétricas representamos,

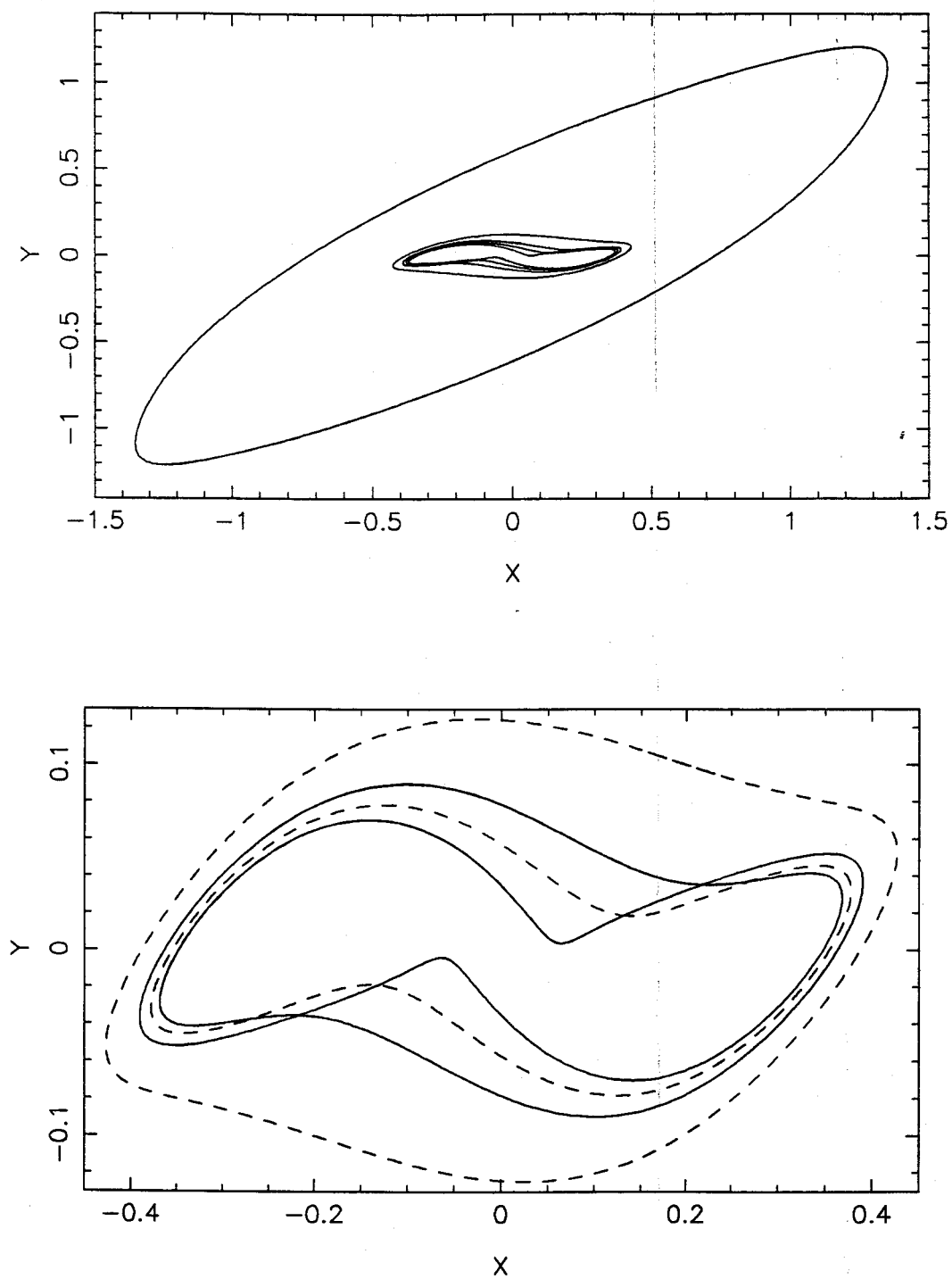


Figura 4.5.13: Órbitas grandes que coexisten para  $\nu = -0.7449$ ,  $\beta = 0.65$ .

en la figura 4.5.14, una de las conexiones homoclinas existentes para  $\nu \approx -0.7484$ , y la pareja de homoclinas secundarias relacionadas con el comportamiento oscilatorio de esa rama de órbitas asimétricas (vid. *HA1* en la figura 4.5.11).

Vamos a comentar brevemente lo que sucede en la segunda rama de órbitas asimétricas, que surge cuando la órbita principal simétrica recupera su estabilidad ( $\nu \approx -0.7245$ ). El par asimétrico, en este caso también, experimenta una bifurcación de duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.7263$ ) tras la que se mantiene inestable hasta que recupera la estabilidad en otro flip ( $\nu \approx -0.7325$ ) justo antes de una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7326$ ) tras la que surge un par asimétrico inestable cuyo periodo sigue creciendo. Nuevamente parece que debe existir una conexión homoclina que motive ese comportamiento. Hemos encontrado, para el valor de  $\nu$  en el que aparece la recta punteada *HA2* ( $\nu \approx -0.7322$ ), la órbita homoclina —una pareja simétrica— representada en la figura 4.5.15 (hemos mantenido la misma escala que en la figura 4.5.14). Además, hemos creído interesante presentar dos órbitas asimétricas (vid. figura 4.5.16) que coexisten con esta homoclina en la que se puede observar cómo dichas órbitas (la de abajo es la de periodo mayor) van adoptando la forma de la homoclina (lo mismo que ya pusimos de manifiesto en el caso de las órbitas pequeñas de periodo doble, vid. figura 4.5.5).

Pasamos, a continuación, a comentar la cascada de bifurcaciones de duplicación de periodo que experimenta el par de órbitas asimétricas. Para ello nos centramos en la bifurcación flip que hizo perder la estabilidad al par asimétrico ( $\nu \approx -0.7622$ ) (vid. figura 4.5.11). Esta pareja de órbitas asimétricas de periodo doble es estable hasta que experimenta una nueva flip ( $\nu \approx -0.7611$ ) que la hace inestable hasta que mediante otra flip ( $\nu \approx -0.7610$ ) recupera su estabilidad llegando así a una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7608$ ) en la que desaparece y se crea un par inestable que existe hasta una nueva silla-nodo ( $\nu \approx -0.7520$ ) de la que surge un nuevo par estable que inmediatamente experimenta otra duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.7519$ ). En la continuación de esta rama de órbitas asimétricas de periodo doble, contrariamente a lo sucedido en las demás ramas, el periodo ha dejado de crecer y se ha mantenido prácticamente constante (disminuyó levemente).

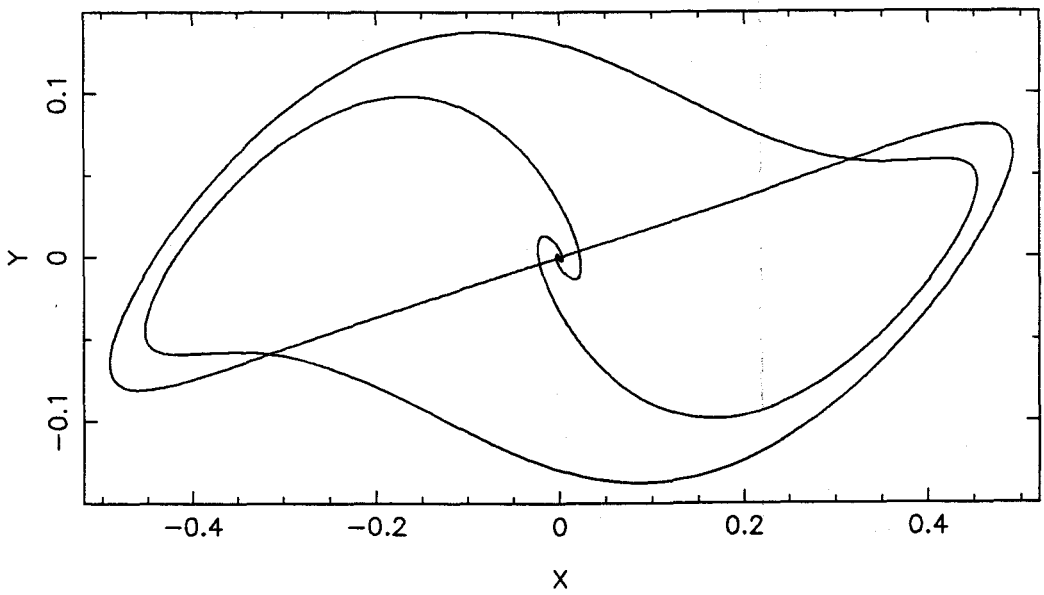
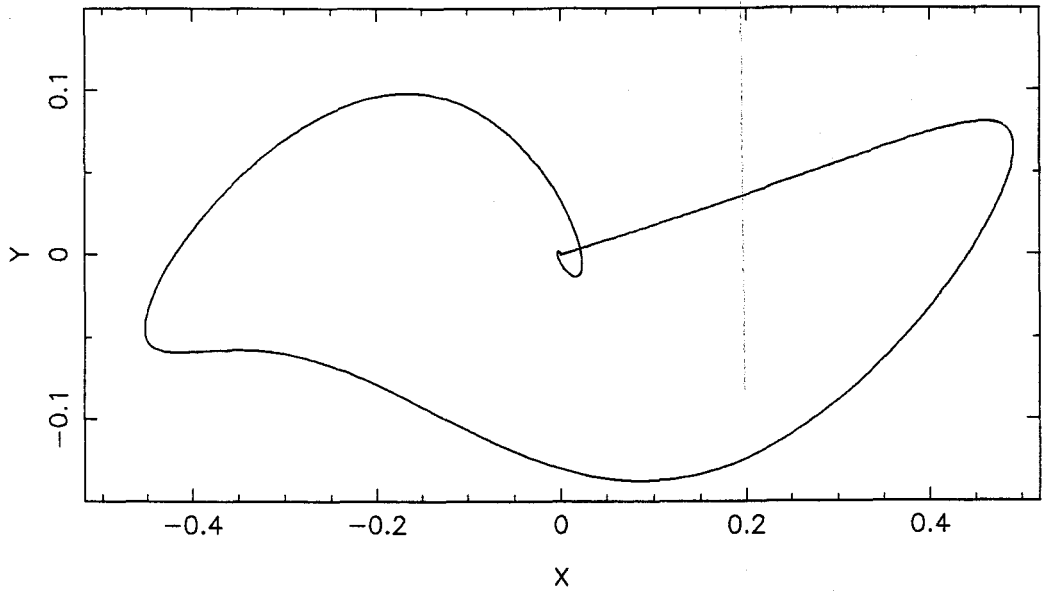


Figura 4.5.14: Pareja de conexiones homoclinas relacionada con las órbitas grandes asimétricas que existe para  $\nu \approx -0.7484$ ,  $\beta = 0.6$ .

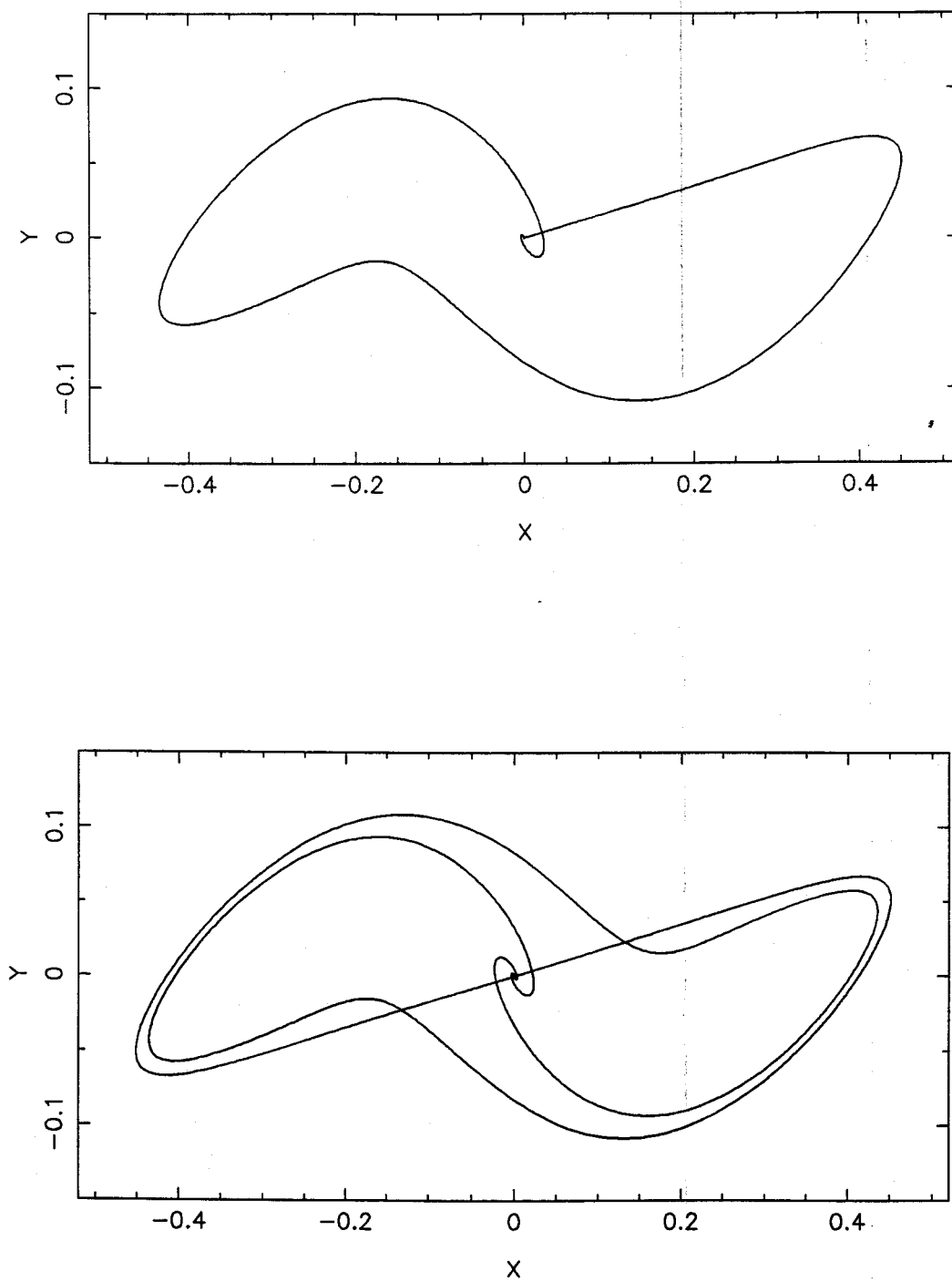


Figura 4.5.15: Pareja de conexiones homoclinas relacionada con las órbitas grandes asimétricas que existe para  $\nu \approx -0.7322$ ,  $\beta = 0.6$ .

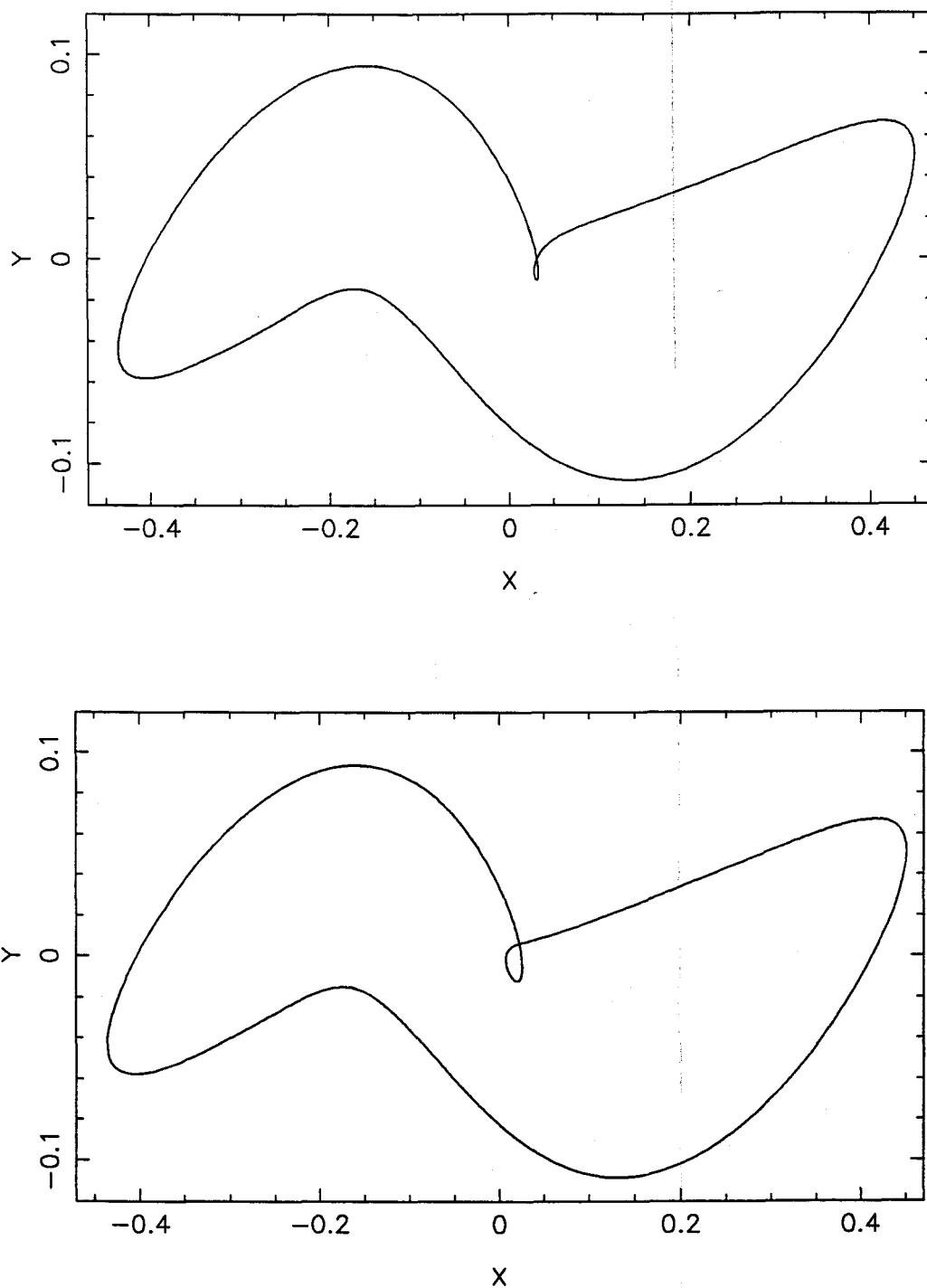


Figura 4.5.16: Dos órbitas grandes asimétricas inestables que coexisten con una conexión homoclina  $\nu = 0.7322$ ,  $\beta = 0.6$ .

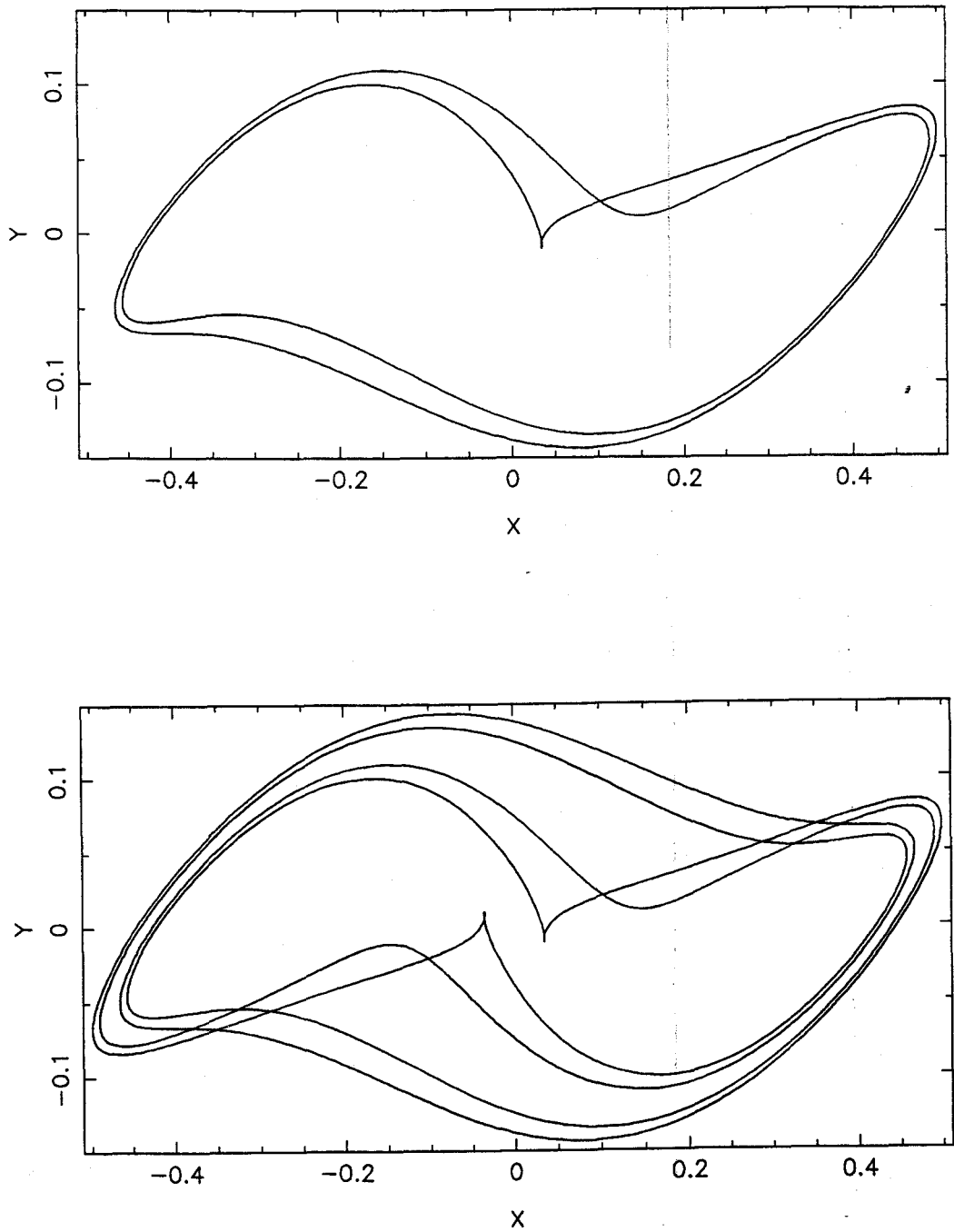


Figura 4.5.17: Pareja de órbitas grandes asimétricas inestables de periodo doble para  $\nu = 0.7513$ ,  $\beta = 0.6$ .



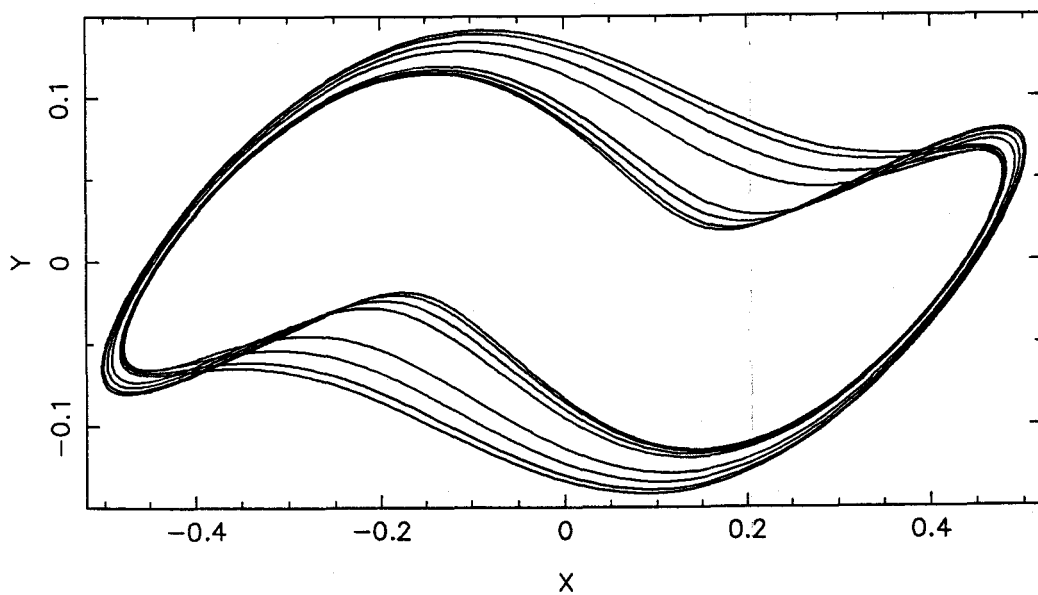
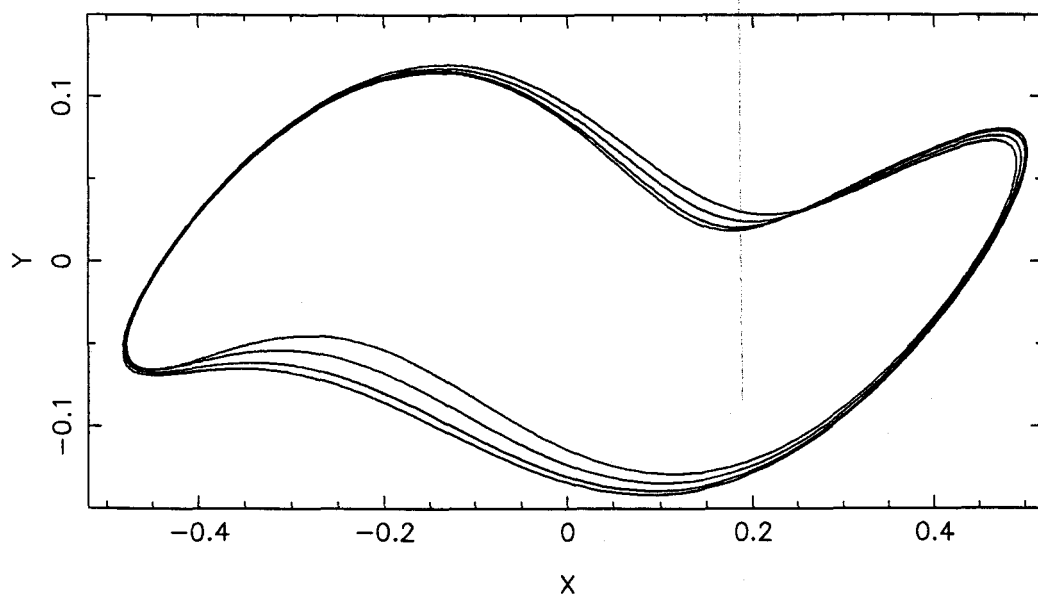


Figura 4.5.18: Pareja de órbitas grandes asimétricas inestables de periodo cuádruple para  $\nu = 0.7611$ ,  $\beta = 0.6$ .

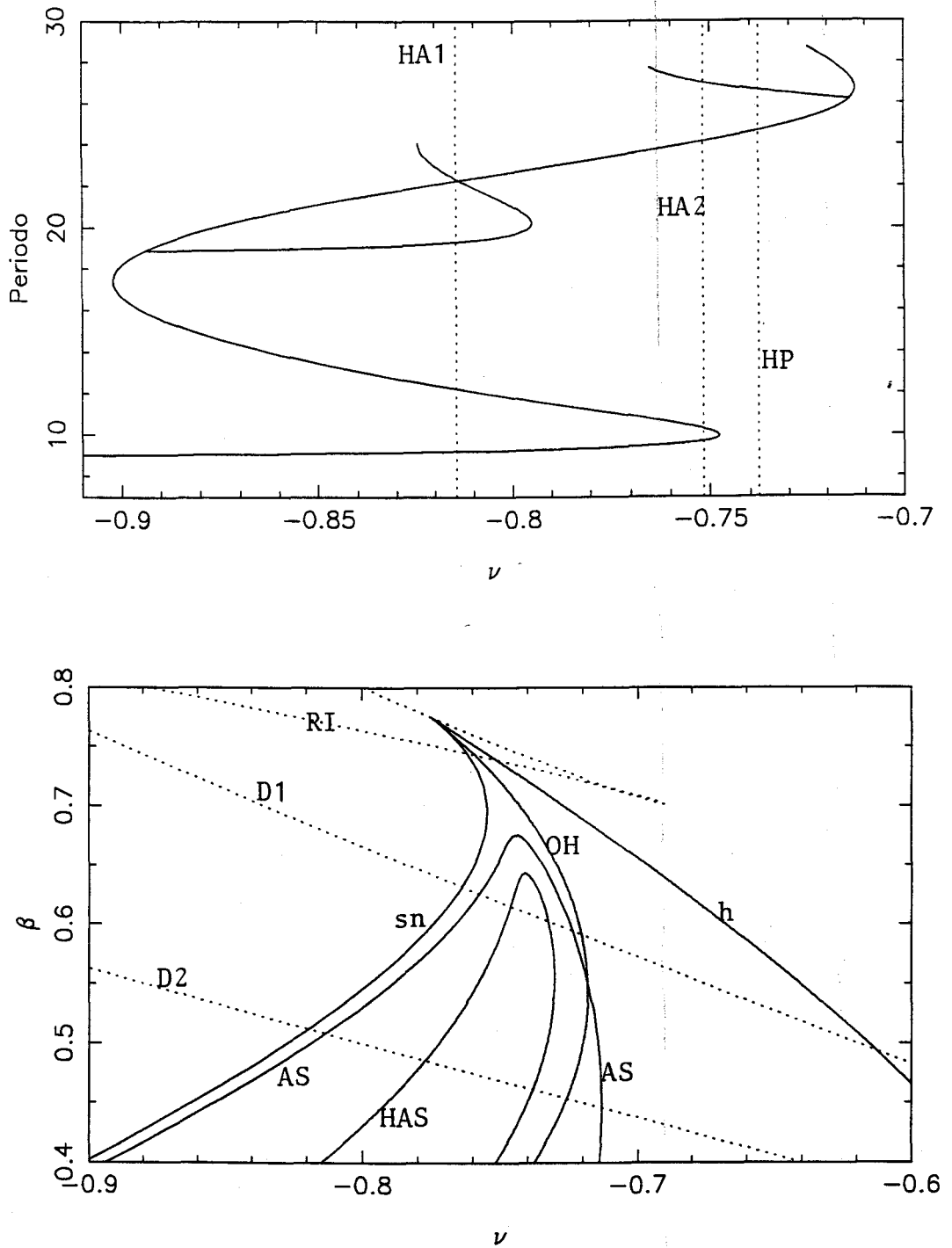


Figura 4.5.19: (a) Diagrama de bifurcaciones de las órbitas grandes para  $\beta = 0.4$ . (b) Conjunto parcial de bifurcaciones de las órbitas grandes.

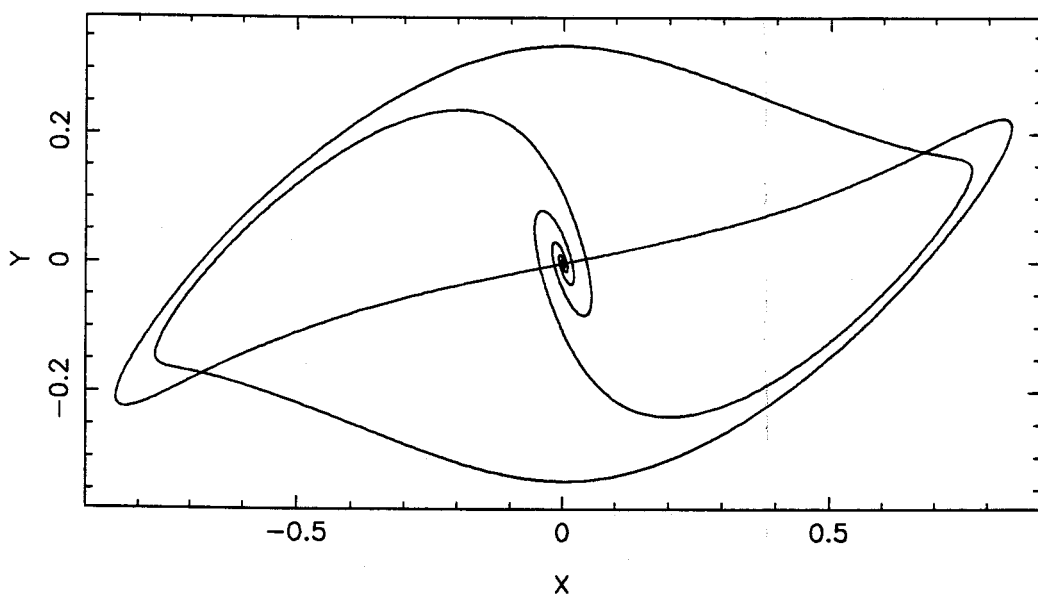
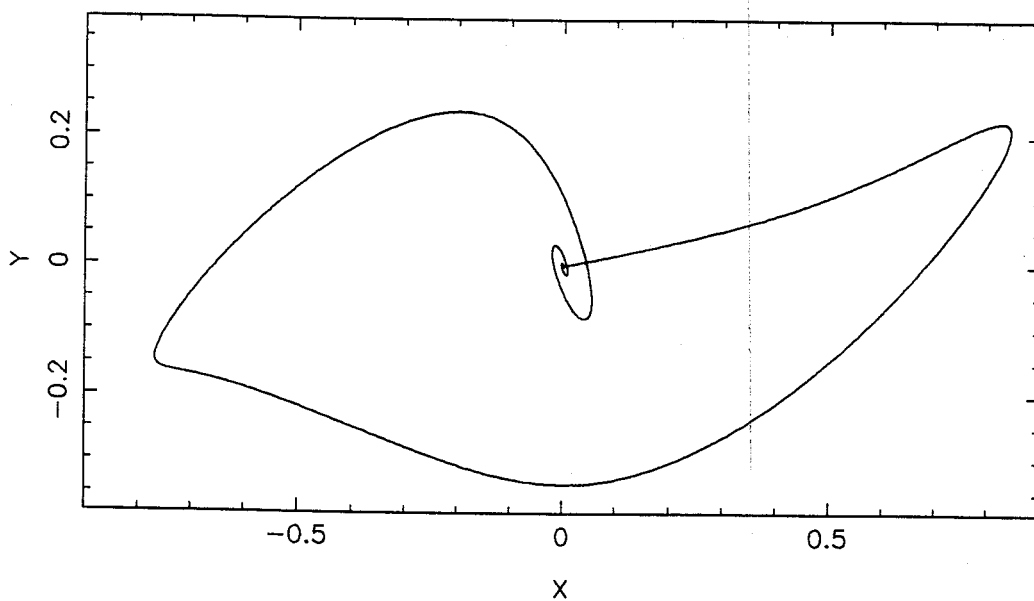


Figura 4.5.20: Pareja de conexiones homoclinas relacionadas con las órbitas grandes asimétricas que se da para  $\nu \approx -0.8147$ ,  $\beta = 0.4$ .

Hemos representado en la figura 4.5.17 una órbita asimétrica de periodo doble y una pareja de tales órbitas ( $\nu \approx -0.7513$ ), que por su forma pueden estar cerca de una conexión homoclina.

Como ya comentamos antes, las órbitas asimétricas experimentan una cascada de bifurcaciones de duplicación de periodo (conjeturada en [45]). Así, las que nacen de periodo cuádruple rápidamente experimentan una flip de la que surgen pares de periodo óctuple ... Dibujamos, para finalizar nuestro estudio sobre las órbitas asimétricas y sus bifurcaciones en el caso  $\beta = 0.6$ , una órbita asimétrica de periodo cuádruple y una pareja de tales órbitas para  $\nu = -0.7611$  (vid. figura 4.5.18).

Destacamos, en este momento, que para  $\beta = 0.6$  la homoclina está ya en la zona  $\delta < 1$  pero muy próxima a la curva sobre la que  $\delta = 1$ , por lo que la conducta de bifurcaciones asociadas a una homoclina tipo Shil'nikov está poco desarrollada. Pero a su vez, hemos visto que, mientras que para las órbitas de pequeña amplitud —nacidas en la Hopf de los equilibrios no triviales— la riqueza de bifurcaciones se limitaba a una flip que recuperaba más adelante, las órbitas de gran amplitud —provenientes de la Hopf del origen tras experimentar dos silla-nodo— no sólo presentan una bifurcación de ruptura de simetría sino que aparece una cascada de bifurcaciones de duplicación de periodo. Esta diferencia de comportamiento a  $\beta$  constante la achacamos a la forma de la curva  $\delta = 1$  que, al ser decreciente, está situada más abajo en la zona de órbitas pequeñas.

Hemos continuado también las órbitas grandes para  $\beta = 0.4$  obteniendo el diagrama de la figura 4.5.19 en el que se aprecia la misma estructura que en el de la figura 4.5.11 (para  $\beta = 0.6$ ) pero con oscilaciones más pronunciadas alrededor de las respectivas homoclinas señaladas con rectas punteadas: la  $HP$  corresponde a la homoclina principal, y las  $HA1$  y  $HA2$  a las homoclinas secundarias relacionadas con los pares de órbitas asimétricas. Representamos en la figura 4.5.20 la conexión homoclina correspondiente a  $HA1$  ( $\nu \approx -0.8147$ ).

Por último, para tener una visión global del plano de parámetros en el que se dan estas bifurcaciones para las órbitas grandes, hemos representado en la

figura 4.5.19 la curva de bifurcaciones pitchfork  $AS$  y la de conexiones homoclinas relacionadas con las órbitas asimétricas  $HAS$ .

### 4.5.3 Atractores Caóticos

En este apartado nos ocupamos tanto de los atractores caóticos que surgen de la cascada de Feigenbaum experimentada por las órbitas principales asimétricas nacidas de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales —atractores tipo Rössler— como de los atractores que aparecen como consecuencia de la presencia de una homoclina de Shil'nikov —atractores tipo Shil'nikov—.

Este estudio, que realizaremos tomando secciones del flujo y construyendo las aplicaciones próximo retorno [3], [4], [5], [100], nos permitirá tener una base teórica [43], [25], que nos garantice nuevos comportamientos periódicos que describiremos en las subsecciones siguientes.

Nos centraremos en dos valores de  $\beta$ : (a)  $\beta = 0.4$ , puesto que para este valor hemos realizado un estudio numérico en detalle de comportamientos tanto periódicos como homoclinos; (b)  $\beta = 0$ , pues para este valor se da una bifurcación de Hopf supercrítica del origen, de forma que la curva de homoclinas principales al intersectar con ella dará lugar a que aparezcan, para  $\beta < 0$ , homoclinas que existen al intersectar las variedades estable y la inestable de una órbita periódica tipo silla.

En primer lugar, para  $\beta = 0.4$ , nos interesamos por la evolución del atractor tras la cascada de Feigenbaum que se ha dado para  $\nu \approx -0.665$  (vid. en la figura 4.5.6 las órbitas que han surgido en las primeras duplicaciones de periodo). Comenzamos dibujando el atractor para dos valores de  $\nu$  (vid. figura 4.5.21):  $\nu = -0.6656$  y  $\nu = -0.68$ . Para determinar la estructura del atractor tomaremos, mediante la elección de planos adecuados, secciones del mismo, con lo que obtendremos los conjuntos límite de la correspondiente aplicación de Poincaré para una determinada sección del flujo (en lo que sigue, a dichas secciones del flujo las denominaremos aplicaciones de Poincaré). Así, en primer lugar, tomamos como sección de Poincaré  $y = 0$  obteniendo para los tres valores

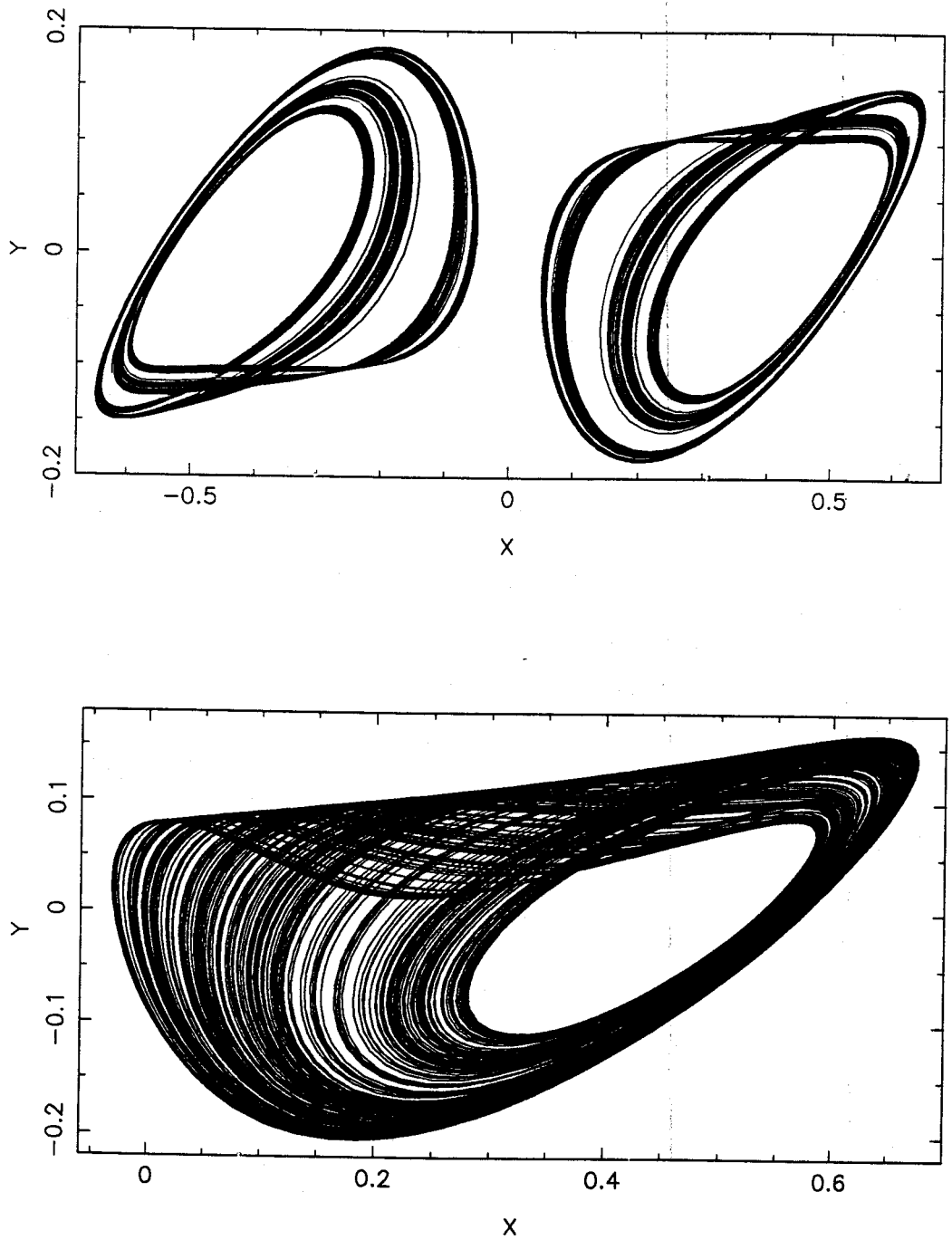


Figura 4.5.21: Evolución de la pareja de atractores para  $\beta = 0.4$ : (a)  $\nu = -0.6656$ ; (b)  $\nu = -0.68$ .

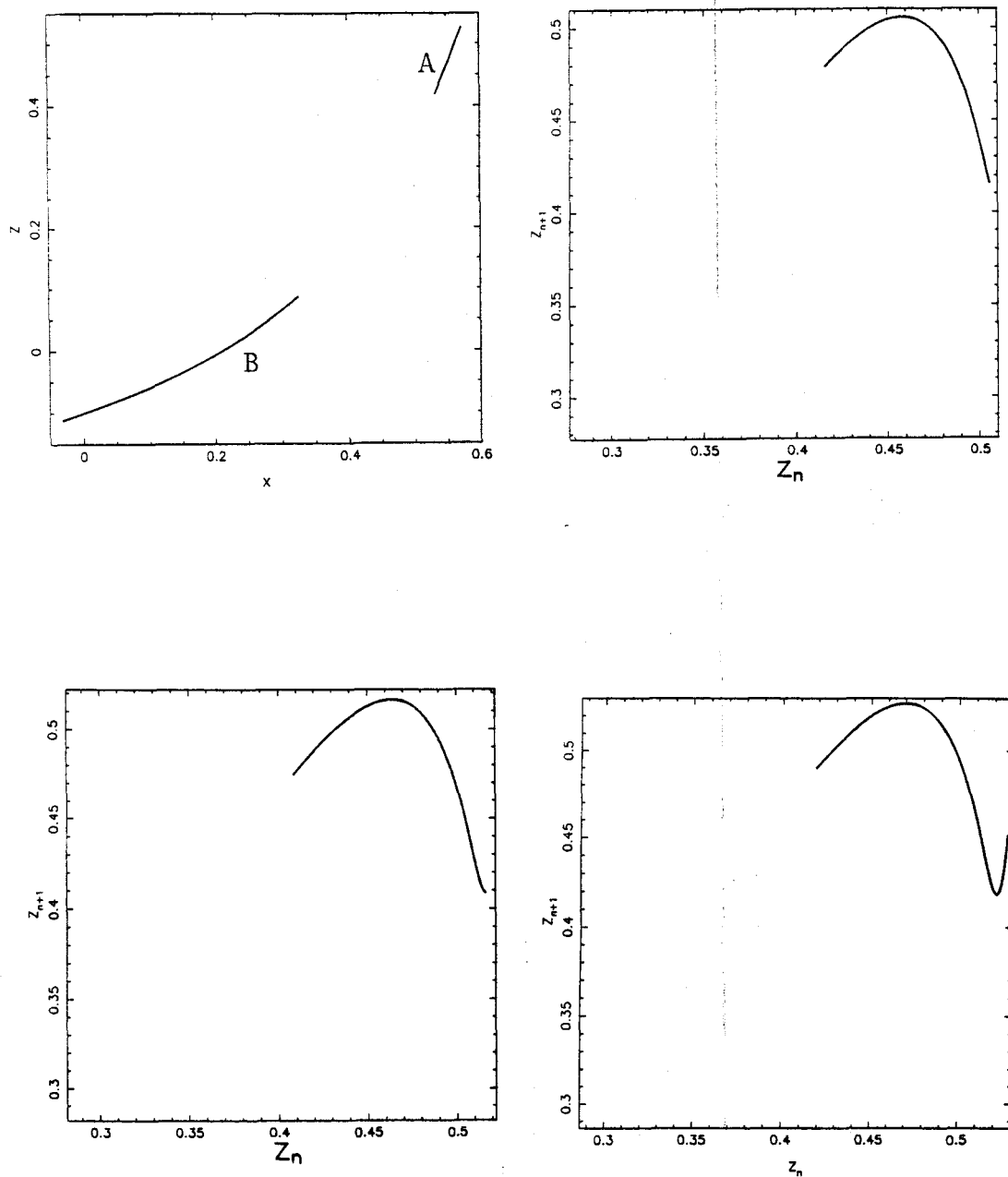


Figura 4.5.22: Para  $\beta = 0.4$ : (a) aplicación de Poincaré ( $y = 0$ ) para  $\nu = -0.68$ ; aplicaciones próximo retorno para: (b)  $\nu = -0.67$ ; (c)  $\nu = -0.675$ ; (d)  $\nu = -0.68$ .

de  $\nu$  estudiados ( $\nu = -0.67$ ,  $\nu = -0.675$ ,  $\nu = -0.68$ ) una aplicación de Poincaré como la mostrada en la figura 4.5.22: la isla  $A$  corresponde al corte del atractor con dicho plano con  $y' < 0$  y la  $B$  con  $y' > 0$ . La aplicación próximo retorno de estos atractores tipo Rössler la construimos para la isla  $A$  considerando la coordenada  $z$  de cada punto y tomando como origen de esa aplicación la posición del equilibrio no trivial alrededor del que se sitúa el atractor ( $z \approx 0.2772$ ,  $z \approx 0.2815$ ,  $z \approx 0.2859$ , según sean respectivamente  $\nu = -0.67$ ,  $\nu = -0.675$  o  $\nu = -0.68$ ). Los resultados obtenidos (vid. figura 4.5.22) concuerdan plenamente con el estudio teórico que para sistemas fuertemente disipativos llevan a cabo Gaspard *et alii* [43] al introducir una aplicación biparamétrica unidimensional que caracteriza la separación entre atractores de Rössler tipo espiral o tipo tornillo (*screw*, en la literatura anglosajona) [86], [87], [88], [89]. En nuestro caso, el atractor que surge tras la cascada comienza siendo tipo espiral (su aplicación próximo retorno es una parábola truncada tras el máximo) para transformarse en tipo tornillo (en su aplicación próximo retorno surge, tras una ancha zona en la que se da un máximo cuadrático, una estrecha región con un mínimo). Podemos apreciar dicha transición (vid. figura 4.5.22) a medida que  $\nu$  decrece (la proximidad del mínimo, para  $\nu = -0.68$ , al extremo del intervalo indica precisamente que no está lejos de la zona de transición espiral-tornillo). Por otra parte, la altura de ese mínimo orienta sobre la existencia de una conexión homoclina en el equilibrio —en este caso la pareja de no triviales— de tal manera, que tal conexión se da cuando el valor del mínimo coincide con el del equilibrio. Este resultado [43] nos indica que debemos investigar —en un futuro inmediato— la existencia de tales conexiones para lo que contaremos tanto con el algoritmo desarrollado para tal fin como con la información que nos proporcionen las aplicaciones próximo retorno de estos atractores para otros valores de los parámetros.

Como veremos a lo largo de los casos estudiados en esta sección, las aplicaciones de Poincaré del atractor presentan siempre islas (unidimensionales) debido a la fuerte contractividad consecuencia de la divergencia negativa del sistema.

Al seguir disminuyendo  $\nu$ , la pareja de atractores extraños tipo Rössler pasa a



formar un único atractor (que ya se da para el valor en el que existe una homoclina secundaria de doble pulso del origen,  $\nu \approx -0.6835$ , que habíamos dibujado ya en la figura 4.5.4). Hemos centrado nuestro estudio en el atractor tipo Shil'nikov que coexiste con la homoclina principal ( $\nu \approx -0.7377$ ) (vid. dicha conexión en la figura 4.4.4) y dos de cuyas proyecciones en los planos coordenados aparecen en las figuras 4.5.23 y 4.5.24. Para desentrañar en lo posible su complicada y bella estructura —parecida a la del denominado *double-scroll* que aparece en el llamado *circuito de Chua*— hemos tomado dos secciones de Poincaré distintas. En la primera consideramos el plano  $y = 0$  en el que se encuentran los tres equilibrios. La aplicación de Poincaré obtenida aparece en la figura 4.5.25 en la que hemos punteado la cúbica sobre la que  $y' = 0$  y en la que lógicamente, se encuentran los tres equilibrios (indicados con pequeños cuadrados). Por encima de dicha cúbica se encuentran los puntos de corte del atractor con  $y' < 0$  (trataremos siempre este caso para poder comparar las distintas situaciones analizadas) de tal manera que están distribuidos en, prácticamente, tres islas que denotamos por  $A$ ,  $B$  y  $C$  (por la simetría del sistema estos comentarios valdrán para el corte correspondiente a  $y' > 0$ ). Hemos representado, asimismo, el corte de la variedad estable del origen  $VE$  con dicho plano, pues los cortes de dicha variedad con las diversas islas conllevan cambios en el orden de visita del atractor a cada una de las islas.

Si dibujamos (vid. figura 4.5.25) la aplicación próximo retorno de la isla  $A$  en sí misma (ignorando los pasos intermedios por otras islas) comprobamos cómo el atractor grande *recuerda* la estructura del atractor Rössler tipo tornillo ( $\nu = -0.68$ ) del que procede, hasta que, a partir de un cierto punto —en el que se da la intersección de la variedad estable del origen con dicha isla— la aplicación se complica como consecuencia de que comienzan los saltos entre las tres islas (información que hemos perdido al construir la aplicación de  $A$  en sí misma).

Hemos preferido entonces, y para poder comparar con el atractor que analizaremos más adelante para  $\beta = 0$ , representar la aplicación primer retorno de todas las islas en todas las islas, tomando como variable la coordenada  $z$  de cada punto y con la particularidad de que entonces hay un intervalo de valores de  $z$  (princi-

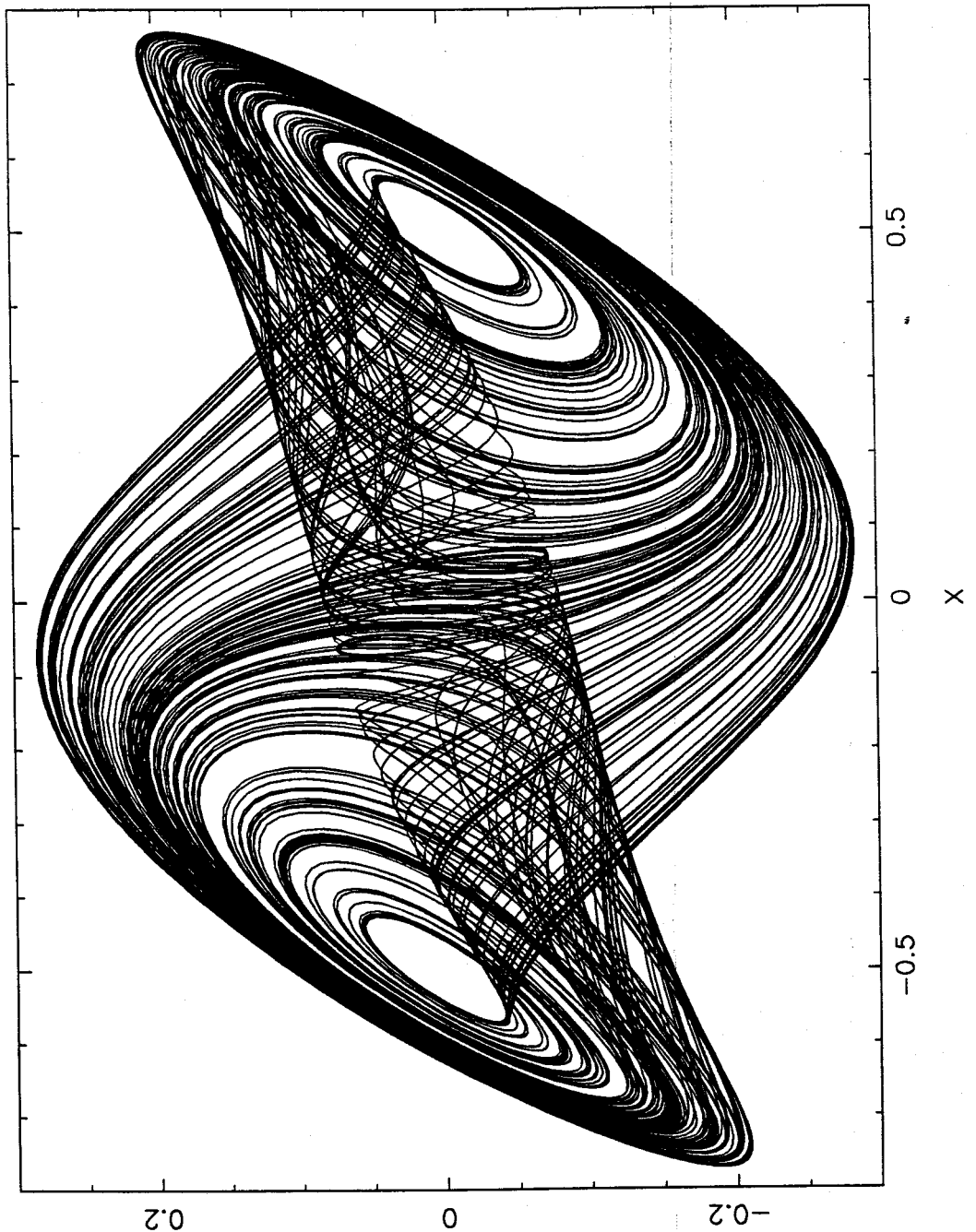


Figura 4.5.23: Proyección en el plano  $XY$  del atractor que coexiste con la homoclina principal:  $\nu = -0.7377$ ,  $\beta = 0.4$ .

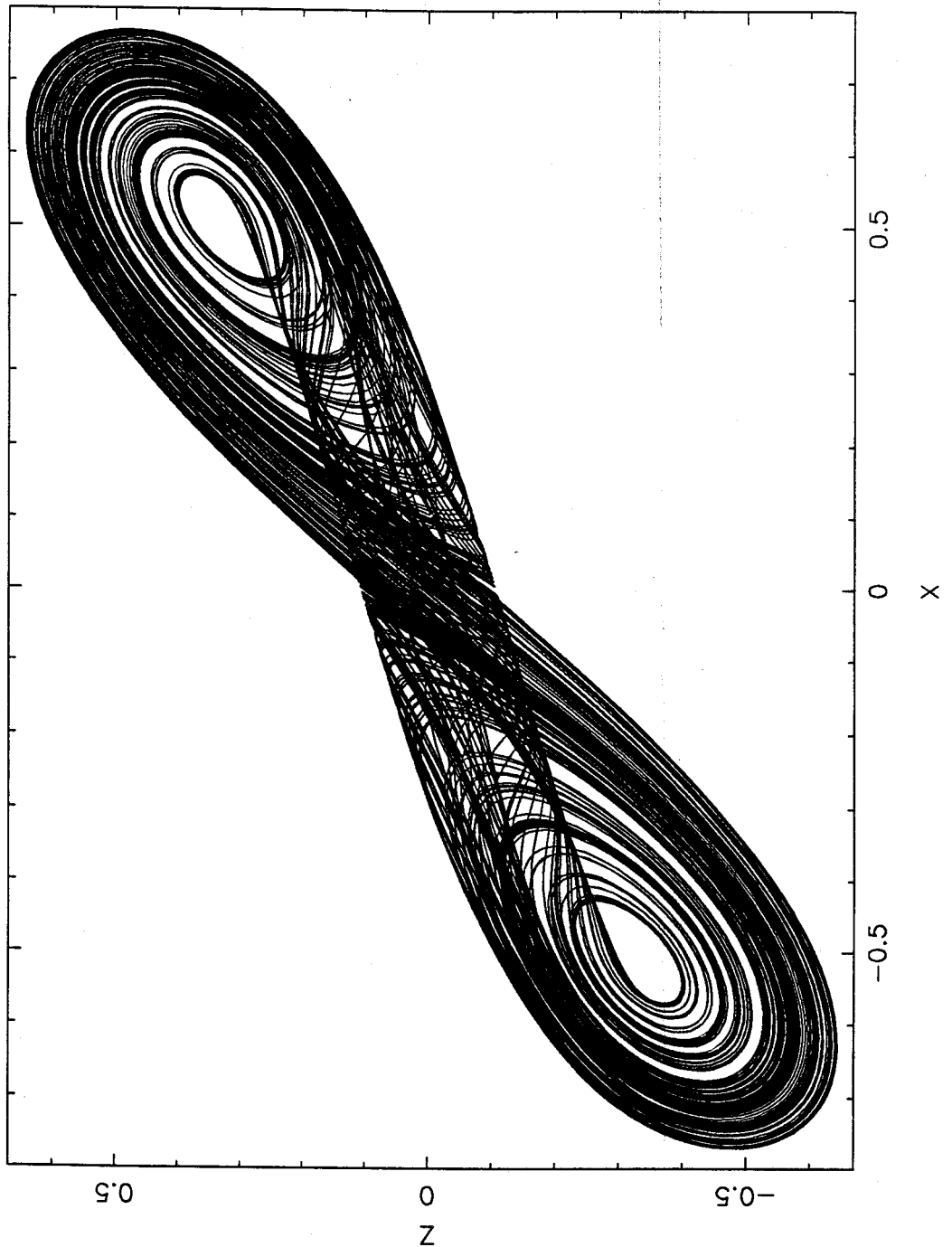


Figura 4.5.24: Proyección en el plano  $XZ$  del atractor que coexiste con la homoclina principal:  $\nu = -0.7377$ ,  $\beta = 0.4$ .

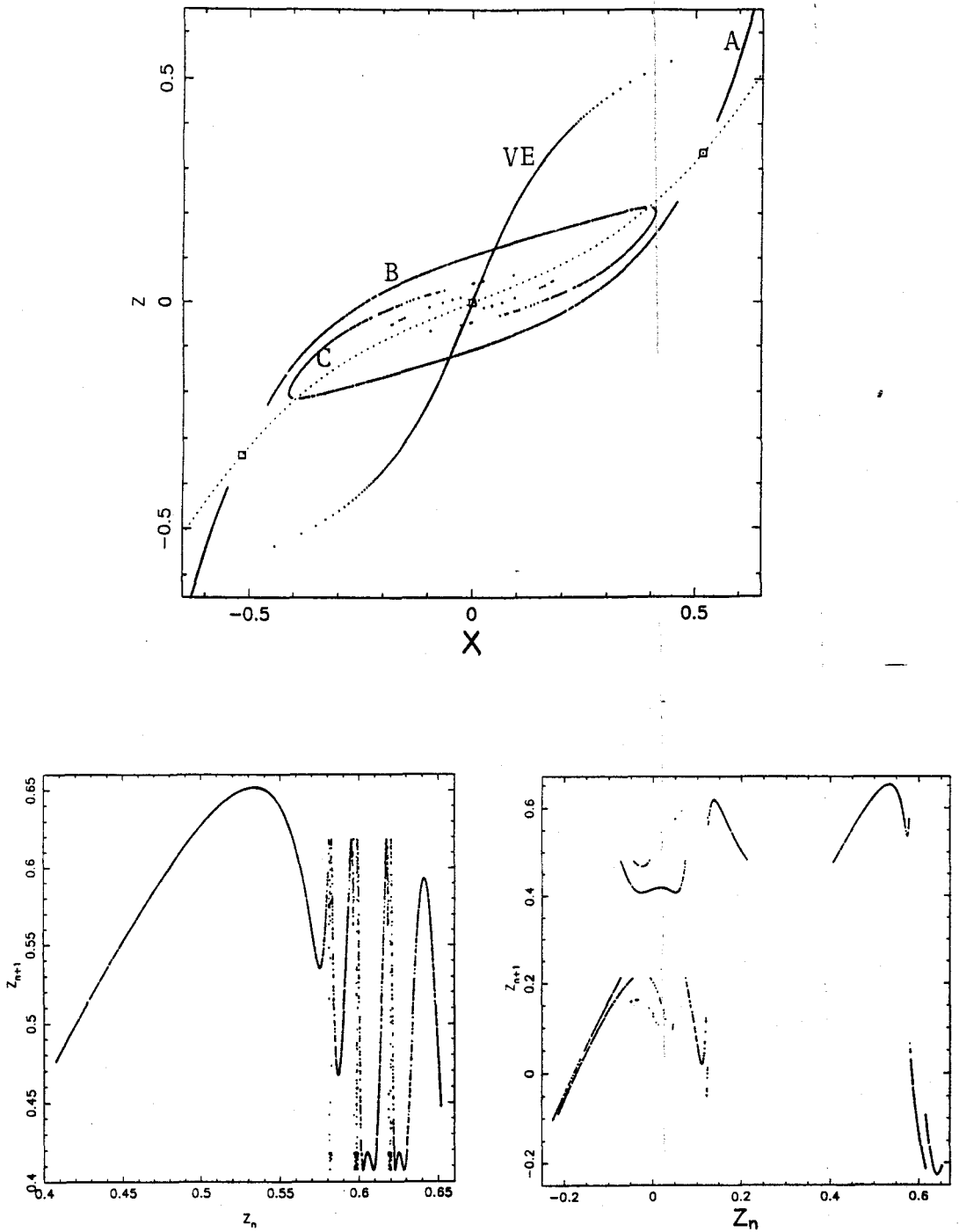


Figura 4.5.25: Para el atractor existente para  $\nu = -0.7377$ ,  $\beta = 0.4$ : (a) aplicación de Poincaré ( $y = 0$ ); (b) aplicación próximo retorno para la isla  $A$ ; (c) *pseudo*-aplicación próximo retorno.

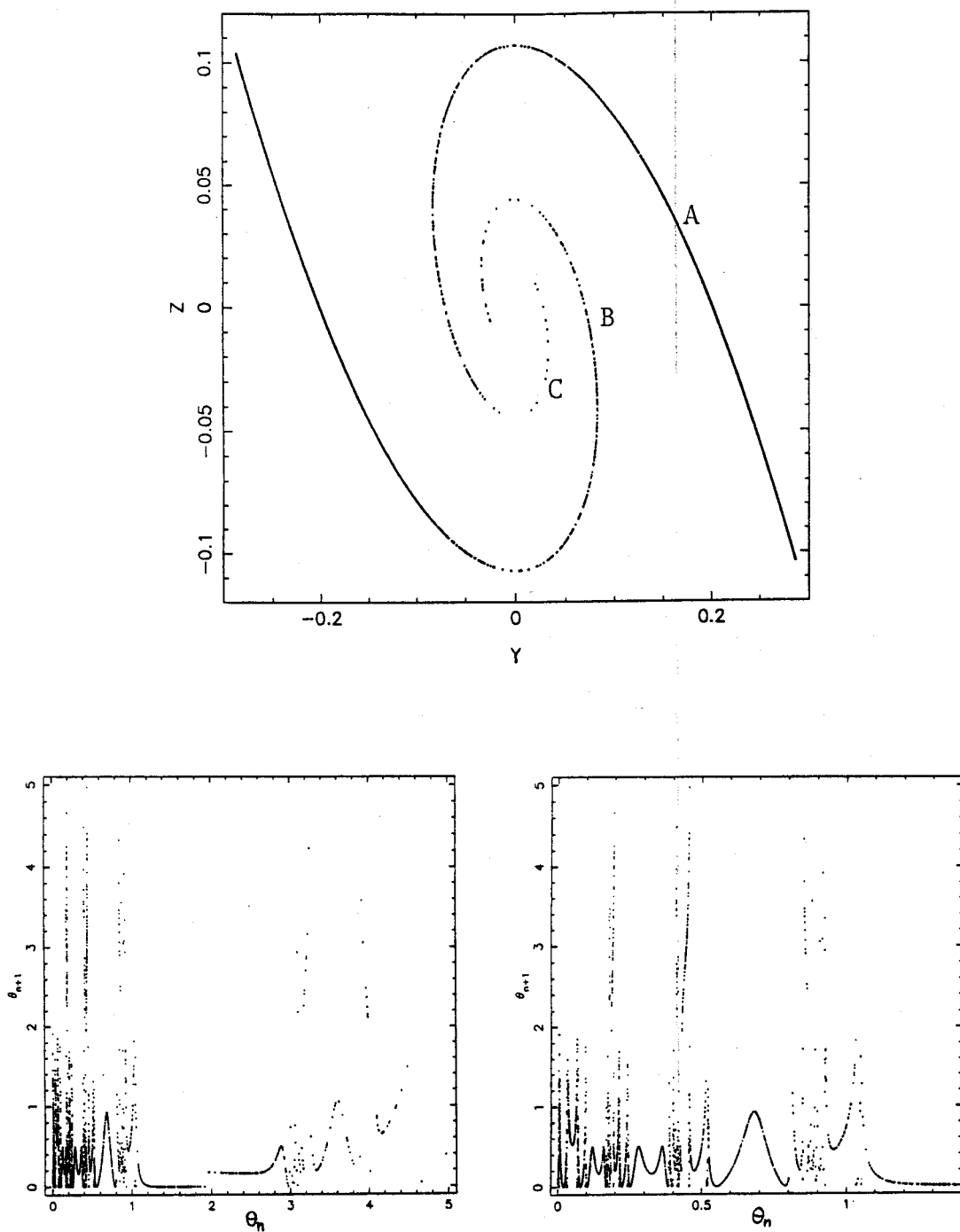


Figura 4.5.26: Para el atractor existente para  $\nu = -0.7377$ ,  $\beta = 0.4$ : (a) aplicación de Poincaré ( $x = 0$ ); (b) aplicación próximo retorno para las islas A y B; (c) detalle de ésta.

palmente entre  $z \approx -0.2$  y  $z \approx 0$ ) al que corresponden dos puntos (de las islas  $B$  y  $C$ ) e incluso alguno más que está fuera de estas islas. Esta *pseudo*-aplicación aparece en la figura 4.5.25 y en ella se observan varias discontinuidades que estarán relacionadas con la intersección ya mencionada de la variedad estable del origen con las diversas islas.

Si tomamos ahora  $x = 0$  como sección de Poincaré para este mismo atractor (vid. figura 4.5.26), aparecen tres islas para el corte con  $x' > 0$  (situadas en la zona  $y > 0$ )  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . Si despreciamos la isla  $C$  por los pocos puntos que contiene, la aplicación próximo retorno obtenida con los puntos de las islas  $A$  y  $B$  aparece también en la figura 4.5.26. Hemos tomado como parámetro, para describir a dichas islas, al ángulo polar asignando el valor  $\theta = 0$  a punto con  $z$  mínima de la isla  $A$  y  $\theta \approx 5$  al punto con  $z$  máxima de la isla  $B$  (es evidente que hubiera sido posible tomar la coordenada  $z$  como parámetro trasladando una de las islas). Con esa parametrización a la isla  $A$  le corresponde  $0 \leq \theta \leq \theta_0 \approx 2$ , y podemos apreciar, por tanto, los saltos entre las dos islas. Hemos ampliado la zona correspondiente a la isla  $A$  que, al tener mayor número de puntos, presenta una gran riqueza de subintervalos en los que aparecen curvas con varios extremos locales.

Hemos creído interesante estudiar la estructura del atractor para  $\beta = 0$  pues a la bifurcación de Hopf que el origen experimenta para dicho valor se une el hecho de que el origen tiene asociada simultáneamente una conexión homoclina dando lugar a un punto de codimensión dos cuyo estudio no está aún completado [42], [96]. Esquematizamos en la figura 4.5.27, tomada de [42], el paso de una homoclina tipo Shil'nikov —que conecta las variedades estable e inestable de un punto de silla  $O$ — a una homoclina que resulta como consecuencia de la intersección de las variedades de una órbita periódica tipo silla  $C$  y que surge tras experimentar el punto  $O$  una bifurcación de Hopf supercrítica. En nuestro sistema, para  $\beta = 0$ , la variedad inestable del origen es tangente al eje  $OX$  y la estable al plano  $YZ$ .

En nuestro caso, la intersección entre la curva de conexiones homoclinas (vid.

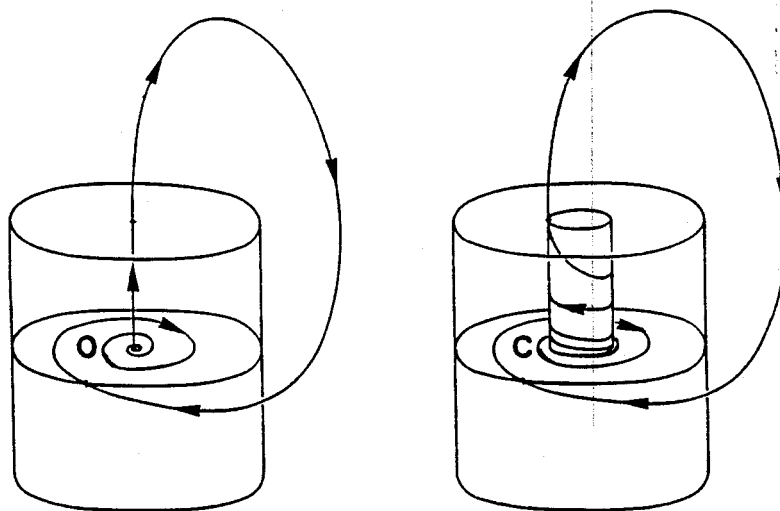


Figura 4.5.27: Paso de una homoclina asociada a un equilibrio a una asociada a una órbita periódica.

figura 4.4.1) y la curva de Hopf ( $\beta = 0$ ) se produce en  $\nu \approx -1.0264787$ , y será precisamente para ese valor para el que estudiemos la estructura del atractor caótico (vid. figura 4.5.28) que coexiste con la conexión homoclina principal.

En primer lugar, tomamos como sección de Poincaré al plano  $y = 0$ , obteniendo como resultado la aplicación de la figura 4.5.29 en la que observamos, comparándola con el caso analizado para  $\beta = 0.4$  (vid. figura 4.5.25), cómo las islas  $B$  y  $C$  se han aproximado tanto que son prácticamente indistinguibles.

Si dibujamos la aplicación próximo retorno de la isla  $A$  en sí misma observamos cómo la primera parte de la aplicación tiene la forma de la presentada por los atractores espirales de Rössler, hasta que, comienzan a aparecer discontinuidades —de forma análoga a como sucedía en el caso  $\beta = 0.4$ , vid. figura 4.5.25— cuando dicha isla intersecta con la variedad estable del origen: aunque no la hemos dibujado en la figura, su forma es similar a la  $VE$  de la figura 4.5.25, pero partiendo del origen con pendiente vertical.

También hemos obtenido la aplicación próximo retorno de las dos islas, despreciando los pocos puntos que no están en ellas, y asignando como parámetro su coordenada  $z$  a cada punto. Del resultado obtenido (vid. figura 4.5.29) deduci-

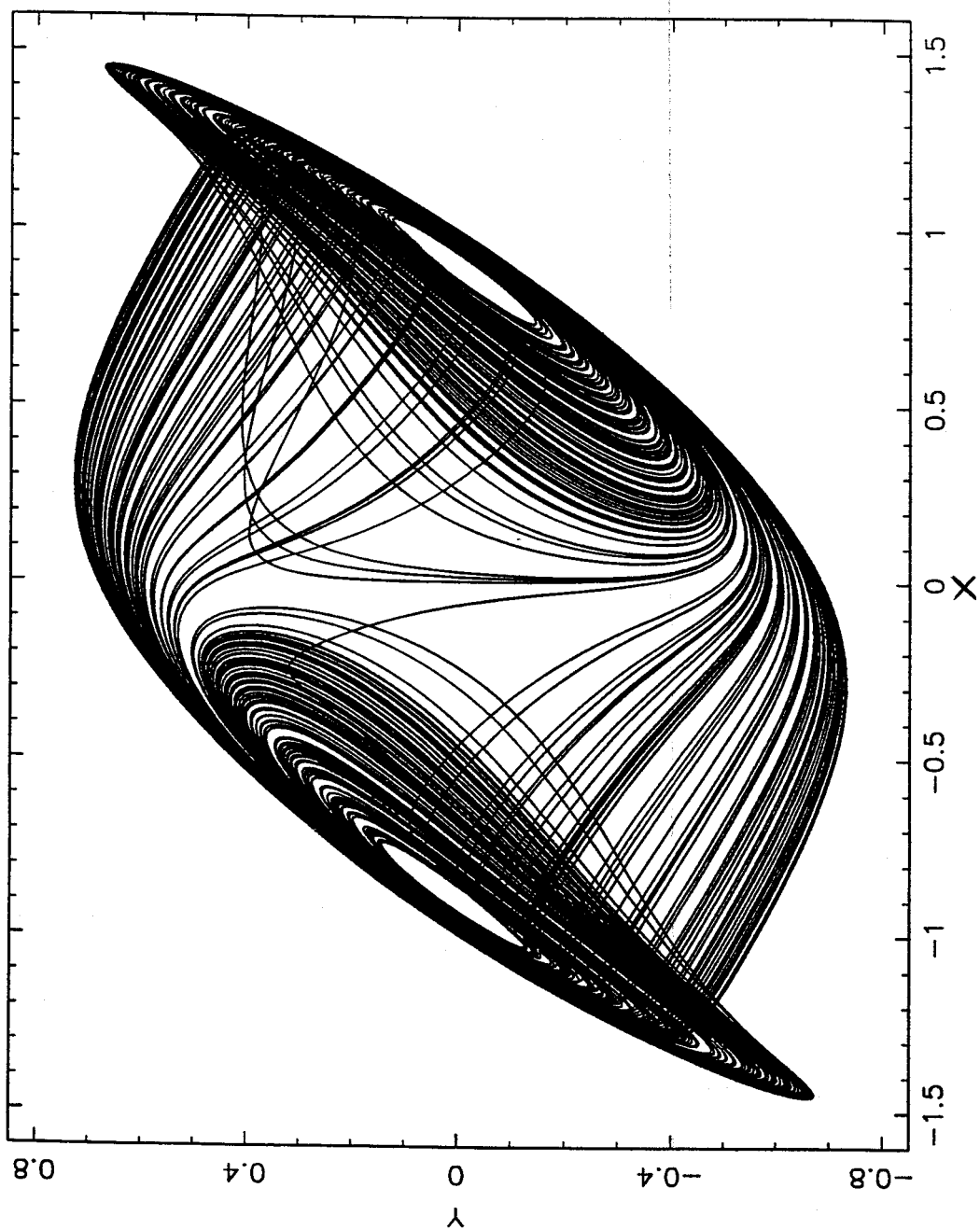


Figura 4.5.28: Proyección en el plano  $XY$  del atractor que coexiste con la homoclina principal:  $\nu = -1.0264787$ ,  $\beta = 0$ .



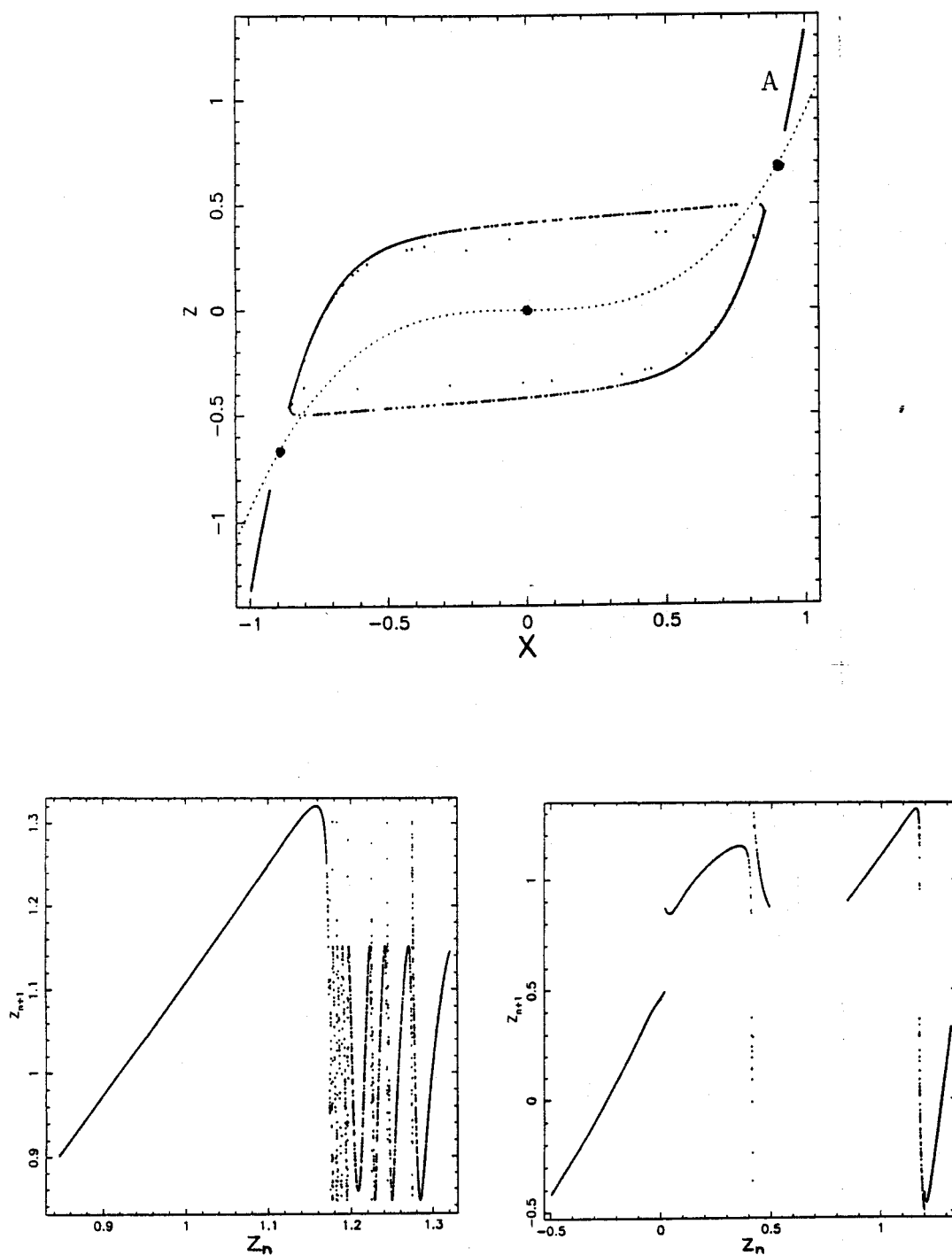


Figura 4.5.29: Para el atractor existente para  $\nu = -1.0264787$ ,  $\beta = 0$ : (a) aplicación de Poincaré ( $y = 0$ ); (b) aplicación próximo retorno para la isla A; (c) aplicación próximo retorno para las dos islas.

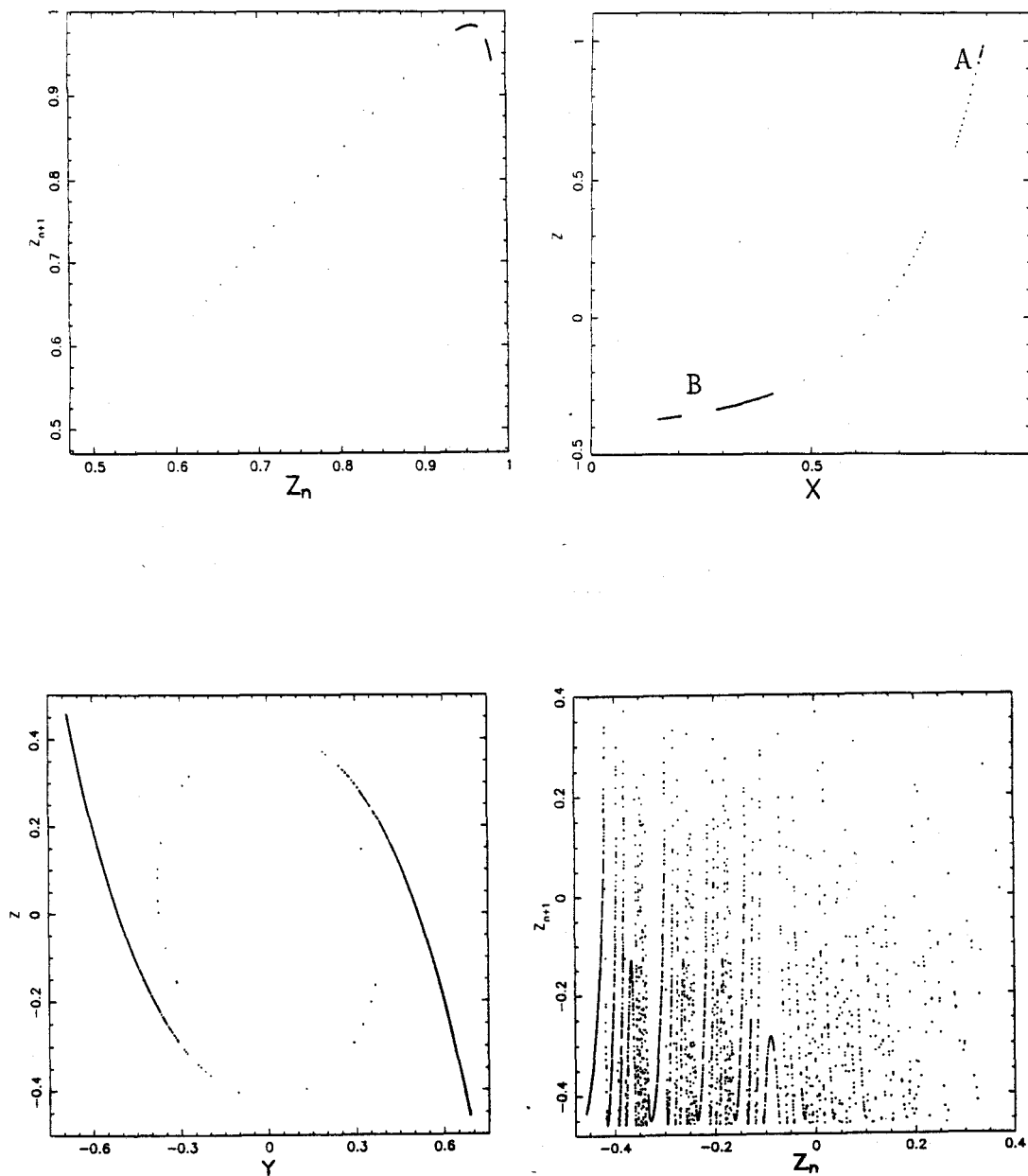


Figura 4.5.30: Para el atractor existente para  $\nu = -0.8, \beta = 0$ : (a) aplicación próximo retorno; (b) aplicación de Poincaré ( $y = 0$ ). Para el atractor existente para  $\nu = -1.0264787, \beta = 0$ : (c) aplicación de Poincaré ( $x = 0$ ); (d) aplicación próximo retorno.

mos que nuevamente la intersección de la variedad estable del origen con cada una de las islas actúa como separadora de comportamientos, tal como indican las discontinuidades de la aplicación.

Tanto la visualización directa del propio atractor (vid. figura 4.5.28) como la aplicación próximo retorno de la isla  $A$  en sí misma que acabamos de mostrar parecen indicar que la pareja de atractores tipo Rössler que existirán entre la cascada de Feigenbaum y este otro atractor han de ser del tipo espiral. Para confirmarlo hemos estudiado el atractor existente para  $\nu = -0.8$ ,  $\beta = 0$  (momentos antes de que se unan ambos) tomando como sección de Poincaré a  $y = 0$ . El resultado obtenido (vid. figura 4.5.30) confirma dicha estructura espiral (compárese con la figura 4.5.22) con la particularidad de que aparecen —tanto en la aplicación con  $y' < 0$  como con  $y' > 0$ — dos islas, que quedan claramente de manifiesto en la aplicación próximo retorno, en la que nuevamente hemos asignado a cada punto su coordenada  $z$ .

Parece, por tanto, que la diferencia evidente que hay en la estructura de los atractores analizados (vid. figuras 4.5.23 y 4.5.28) está relacionada con la estructura que presente la pareja de atractores de Rössler antes de su unión. En concreto, la estructura *tubular* que exhibe el atractor en  $\beta = 0.4$  es consecuencia de que los atractores de Rössler eran tipo tornillo, mientras que la mayor independencia que hay entre la parte izquierda y la derecha del atractor para  $\beta = 0$  está relacionada con el hecho de que los atractores de Rössler fueran del tipo espiral (es evidente que podíamos haber hecho este razonamiento en sentido inverso: la estructura del atractor de Shil'nikov en cada caso fuerza el tipo de atractor de Rössler que nos vamos a encontrar). Será, por tanto, una tarea interesante determinar la curva del plano de parámetros en la que se da el cambio de espiral a tornillo.

Para finalizar este estudio de los atractores extraños, que habrá de ser continuado en un futuro próximo, estudiamos nuevamente el atractor de Shil'nikov para  $\beta = 0$  (vid. figura 4.5.28) tomando como sección de Poincaré, en este caso, al plano  $x = 0$ . La aplicación obtenida (vid. figura 4.5.30 y compárese con la de

la figura 4.5.26) presenta una única isla para  $x' > 0$  —situada en  $y > 0$ — junto con algunos puntos aislados más. La aplicación próximo retorno para dicha isla, con la coordenada  $z$  de cada punto como parámetro, aparece también en la figura 4.5.30 en la que junto con un gran número de discontinuidades aparecen algunas curvas con un extremo.

#### 4.5.4 Órbitas de Pequeña Amplitud de Periodo Triple

Tras los resultados obtenidos en el apartado anterior al estudiar los atractores caóticos y motivados también por los resultados experimentales obtenidos en [33], [32], referentes al circuito que modelamos en este capítulo, así como por los resultados numéricos obtenidos por Ponce [78] en su estudio de un sistema propuesto por Couillet *et alii* [20], nos planteamos la búsqueda de órbitas de pequeña amplitud de periodo triple. En lo que sigue describimos los resultados obtenidos en relación con este tipo de órbitas que no aparecen en el análisis local, ni en las simulaciones numéricas llevadas a cabo en sistemas con homoclinas tipo Shil'nikov, de Glendinning y Sparrow [47], [45], y de Gaspard *et alii* [43], [44], [76].

Nos hemos centrado en dos valores de  $\beta$  : 0.5 y 0.4. Para el primero de ellos encontramos el diagrama de bifurcaciones que aparece en la figura 4.5.31 que corresponde a una isla de órbitas de pequeña amplitud de periodo triple cuya existencia se da alrededor de un par de valores para los que aparecen conexiones homoclinas de triple pulso (indicados con dos rectas punteadas *HT1* ( $\nu \approx -0.7100$ ) y *HT2* ( $\nu \approx -0.7169$ )). La rama inferior *I* de esta curva de órbitas de periodo triple corresponde siempre a órbitas inestables. Si nos movemos por ella hacia la derecha aparece una bifurcación silla-nodo ( $\nu \approx -0.70514$ ) de la que surge una pareja de órbitas estables que muy rápidamente se hace inestable al experimentar una bifurcación de duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.70519$ ). Dicha pareja recupera la estabilidad mediante otra bifurcación flip ( $\nu \approx -0.71137$ ) para afrontar así una silla-nodo ( $\nu \approx -0.71138$ ) de la que surge una pareja inestable que continúa acercándose al valor de la homoclina *HT1*. De forma

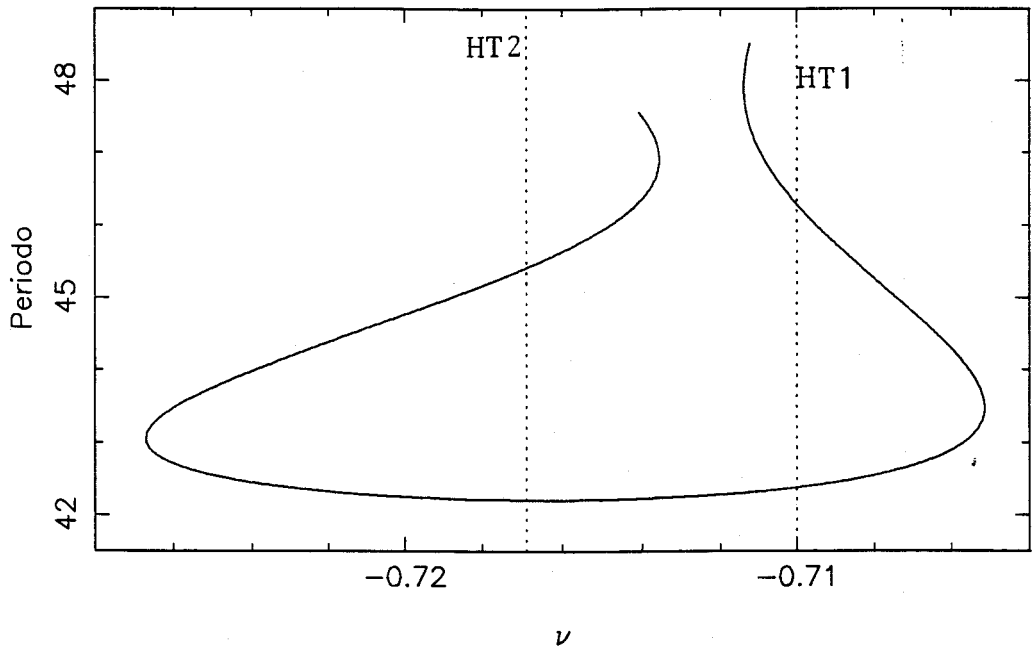


Figura 4.5.31: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas pequeñas de periodo triple para  $\beta = 0.5$ .

análoga, si nos movemos hacia la izquierda de la rama inferior  $I$ , la pareja de órbitas pequeñas de periodo triple experimenta otra bifurcación silla-nodo ( $\nu \approx -0.72670$ ) para nacer de ella dos órbitas estables que inmediatamente se convierten en inestables por la presencia de una bifurcación de duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.72668$ ). Tras ella, se mantienen inestables hasta que en otra nueva bifurcación flip ( $\nu \approx -0.71355$ ) recuperan la estabilidad para desaparecer rápidamente en una silla-nodo ( $\nu \approx -0.71356$ ) del que surge una pareja inestable que continúa acercándose al valor de la homoclina  $HT2$ . Si bien no hemos continuado las ramas surgidas en las bifurcaciones flip, todo parece indicar que estas órbitas de periodo triple experimentan una cascada de bifurcaciones de duplicación de periodo, análoga a la experimentada por las órbitas principales de la que surgirán órbitas de periodo  $6T$ ,  $12T$ , ...

Así mismo, en la figura 4.5.32, hemos dibujado dos órbitas pequeñas de periodo triple que coexisten con una homoclina pudiéndose observar cómo a medida que crece su periodo —la de periodo menor es la de arriba— van asemejándose

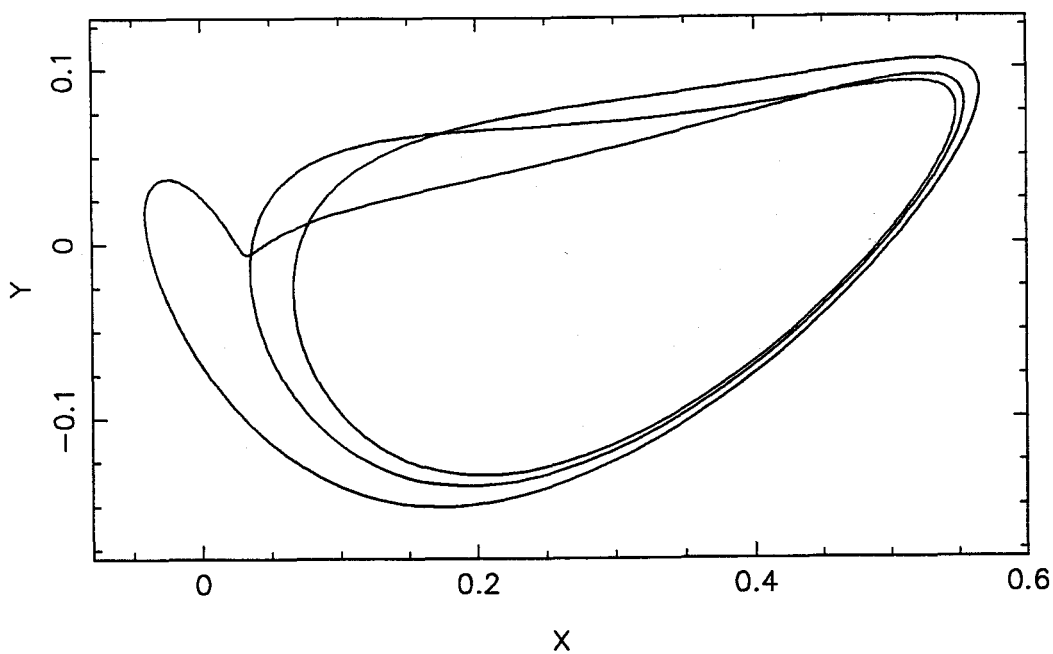
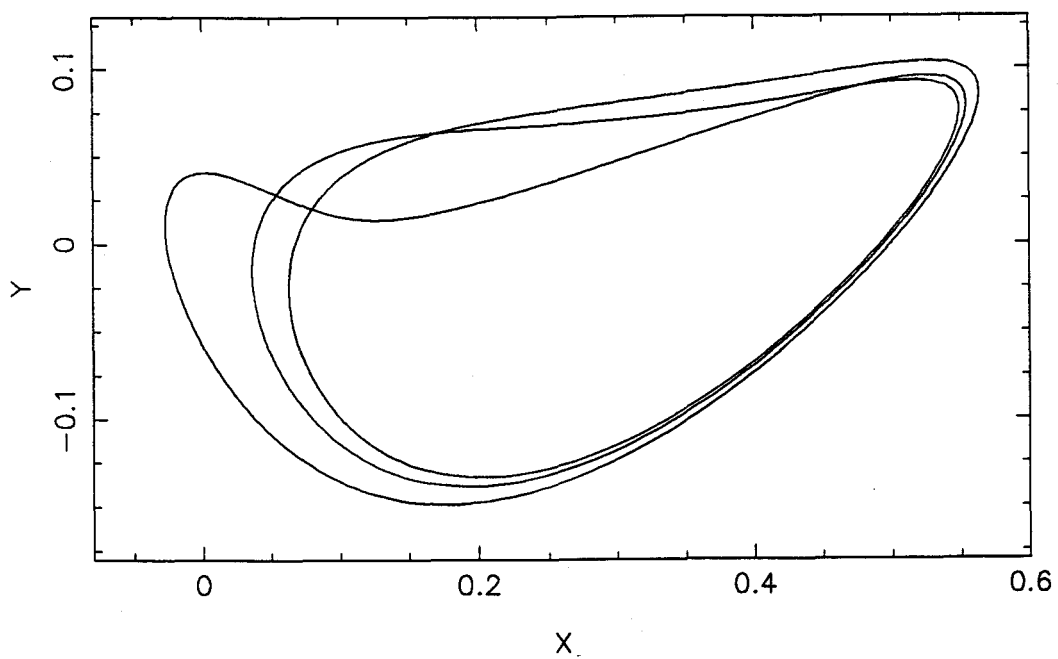


Figura 4.5.32: Dos órbitas pequeñas de periodo triple  $\nu = -0.7100$ ,  $\beta = 0.5$  que coexisten con una pareja de homoclinas.

más a dicha órbita homoclina.

Como ya indicamos antes, también hemos estudiado la evolución de estas órbitas para el caso  $\beta = 0.4$ . Hemos obtenido, como era de esperar, resultados análogos al caso  $\beta = 0.5$ , pero con mayores dificultades para la continuación de dichas órbitas que son tan inestables que, en algunos momentos, uno de sus multiplicadores característicos llegaba a ser del orden del millar.

El diagrama de bifurcaciones de estas órbitas para este valor de  $\beta$  (vid. figura 4.5.33) hemos preferido situarlo en el contexto del diagrama que obtuvimos para la órbita principal y las que de ella nacían tras sucesivas bifurcaciones flip. Así hemos repetido y ampliado la figura 4.5.3 situando la isla de órbitas de periodo triple (hemos representado lógicamente la tercera parte de su periodo para poder comparar), que indicamos con un 3, y cuya existencia está relacionada con las dos parejas de conexiones homoclinas que se dan para los valores indicados por las rectas punteadas  $HT1$  y  $HT2$ . En la misma figura indicamos con un 1, un 2 o un 4 respectivamente, a las ramas de las órbitas pequeñas principales (periodo simple), de periodo doble o de periodo cuádruple. Asimismo, las rectas punteadas  $HP$  y  $HS$  indican, respectivamente, los valores para los que se dan las conexiones homoclinas principal y secundaria de doble pulso.

Representamos, en la figura 4.5.34, a una de las parejas de conexiones homoclinas de triple pulso —la correspondiente a  $\nu \approx -0.7252$ — junto con el conjunto de bifurcaciones relacionado con las órbitas pequeñas de periodo triple y que nos da una visión global de la zona de existencia de estas islas de órbitas periódicas. Hemos representado la curva de sillas—nodo  $SN$  de la rama principal que, dada la forma de dichas ramas en los diagramas de bifurcaciones, parece ser una frontera que nos delimita la zona de existencia de dichas órbitas. Así mismo, hemos dibujado la curva de conexiones homoclinas  $HT$  que son la columna vertebral de estas islas. Por último, la curva punteada  $OH$ , corresponde a las conexiones homoclinas principales, y la  $D2$  a la recta sobre la que  $\delta = \frac{1}{2}$ .

Conjeturamos que también existen órbitas periódicas de pequeña amplitud de periodo quíntuplo, séptuplo, ... que con sus correspondientes cascadas de du-

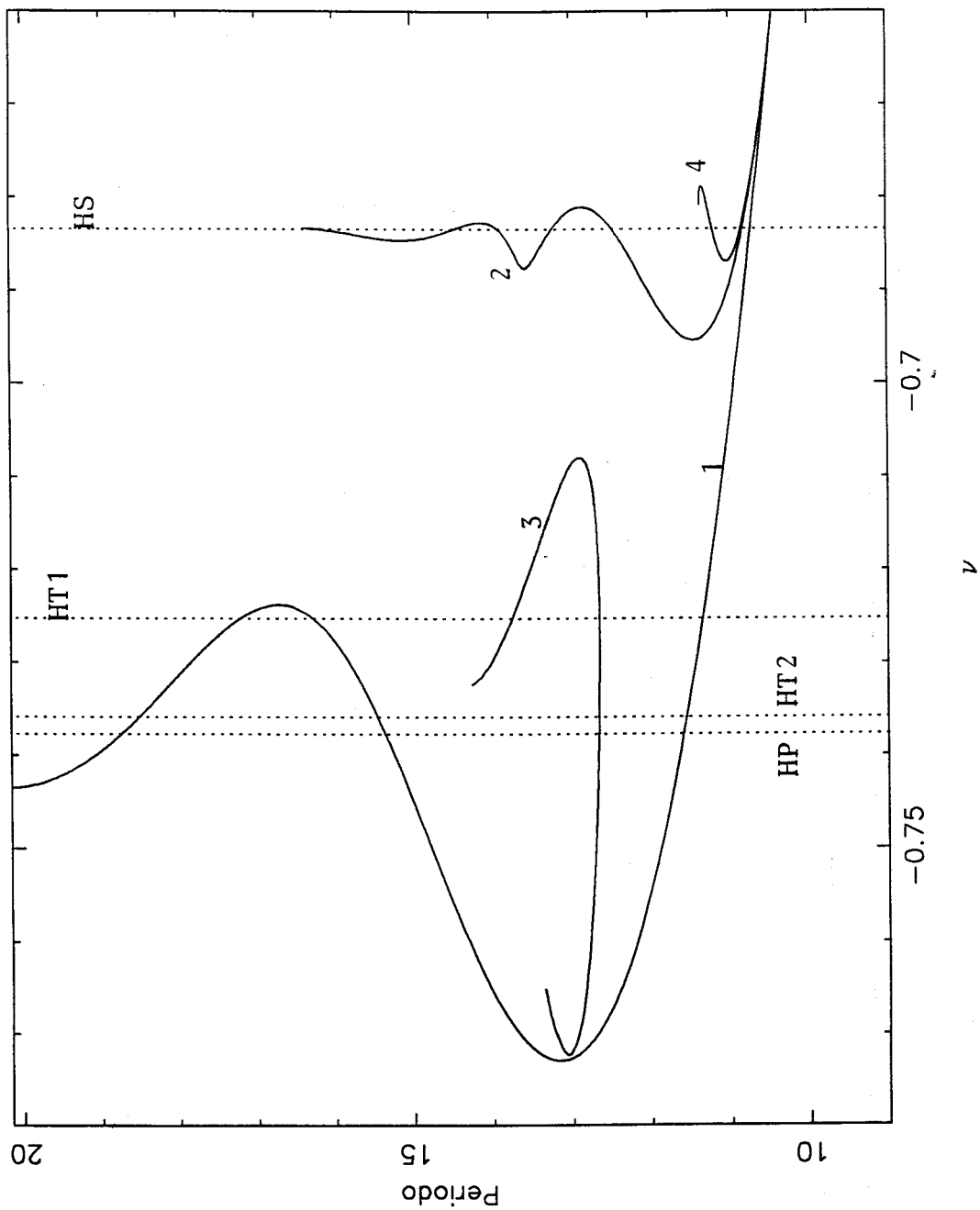


Figura 4.5.33: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas pequeñas para  $\beta = 0.4$ .



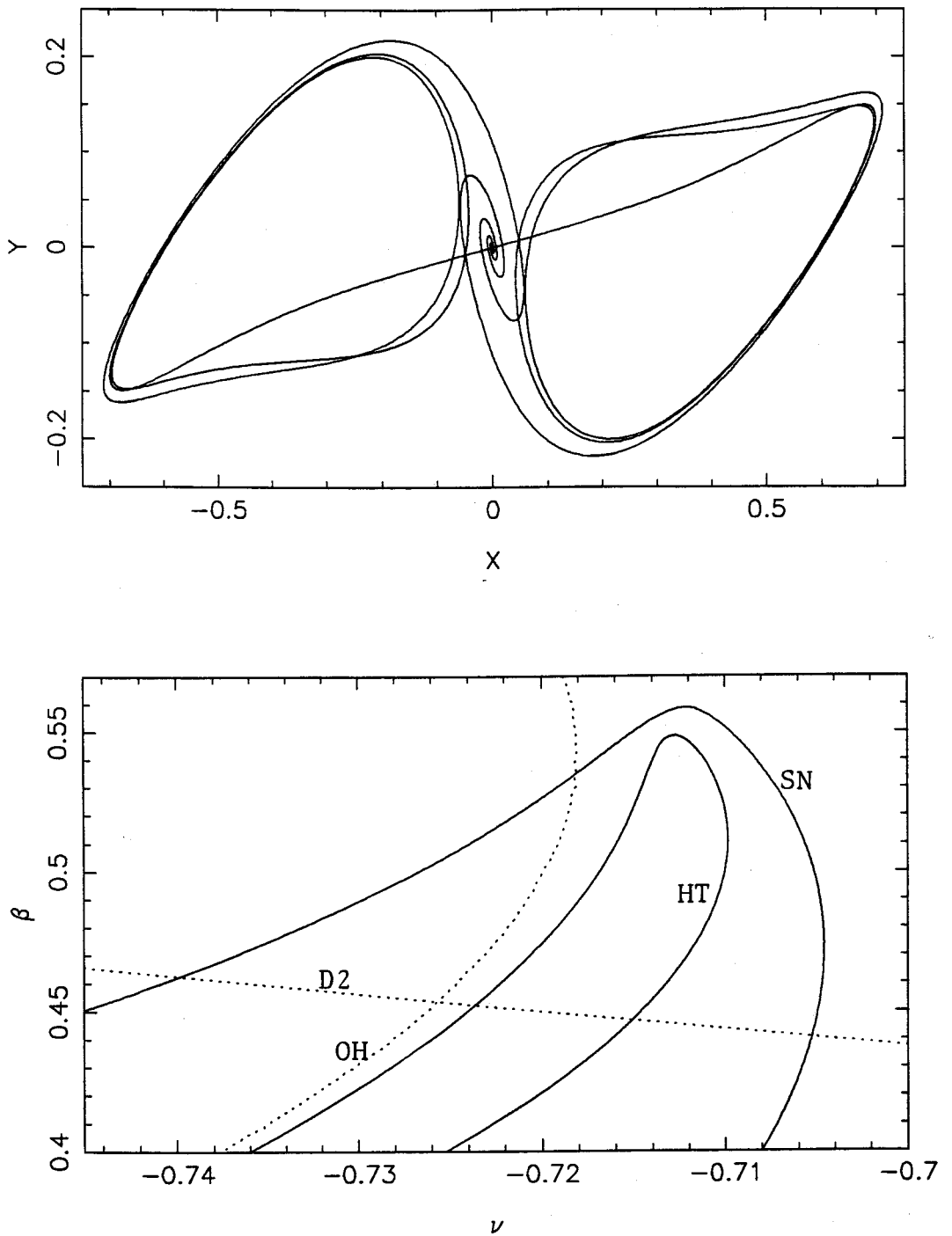


Figura 4.5.34: (a) Pareja de conexiones homoclinas de triple pulso para  $\nu \approx -0.7252$ ,  $\beta = 0.4$ . (b) Conjunto parcial de bifurcaciones de las órbitas pequeñas de periodo triple.

plicación de periodo harán que alrededor de esta homoclina de tipo Shil'nikov existan órbitas de cualquier número entero de veces (aproximadamente) el periodo de la órbita principal.

Finalizamos este apartado dedicado a las órbitas periódicas de pequeña amplitud de periodo triple indicando una propiedad que las diferencia del resto de las órbitas periódicas estudiadas en este capítulo: la rama principal —la que une a las dos ramas que oscilan alrededor de los valores de las dos conexiones homoclinas que organizan su isla— está formada por órbitas inestables, de manera que las correspondientes bifurcaciones silla-nodo de esta rama principal son atacadas por órbitas inestables que pasan a estables. En todos los demás casos de órbitas periódicas analizadas (incluidas las que veremos en la próxima subsección), la primera silla-nodo de la rama principal corresponde a una órbita estable que pasa a inestable.

#### 4.5.5 Órbitas de Gran Amplitud de Periodo Impar

En este apartado, pasamos a describir el comportamiento de las órbitas periódicas de gran amplitud —o simplemente órbitas grandes, en el sentido de que *rodean* a los tres equilibrios— de periodo aproximadamente triple, quíntuplo, séptuplo, ... de una órbita periódica principal de gran amplitud.

Vamos a comenzar, y serán las que estudiemos con más detalle, por las órbitas de periodo triple. Estas órbitas se caracterizan, como veremos, porque —hablando sin precisión— además de dar una vuelta completa a los tres equilibrios, le dan una vuelta más a cada uno de los equilibrios no triviales con lo que invierten, aproximadamente, el triple de tiempo que una órbita principal grande.

Como también comprobaremos, al igual que sucedía con las órbitas pequeñas de periodo triple, existen en islas organizadas alrededor de dos parejas de conexiones homoclinas en las proximidades de las cuales experimentan las bifurcaciones típicas de una órbita grande asociada a una homoclina tipo Shil'nikov: pitchfork, flip y silla-nodo.

Empezamos nuestra descripción en el caso  $\beta = 0.6$ . Hemos dibujado en la

figura 4.5.35 el diagrama de bifurcaciones de tales órbitas que pasamos a describir. Partimos de un punto a la izquierda de  $F$  y nos movemos en ese mismo sentido. La órbita, que comienza siendo estable, experimenta una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7485$ ) de la que nace una órbita inestable cuyo periodo comienza a aumentar en las proximidades de un cierto valor de  $\nu$  para el que sospechamos que habrá una conexión homoclina (una pareja, por la simetría del sistema). Efectivamente, tal conexión existe para ( $\nu \approx -0.7482$ ), valor en el que hemos colocado la recta punteada  $HT1$ . Representamos en la figura 4.5.36 dos órbitas grandes de periodo triple que coexisten con la homoclina (dibujada en la figura 4.5.37). La de arriba, de periodo menor, es estable y la otra inestable. Esta segunda, presenta ya claramente la forma de la homoclina.

Destacamos dos hechos en lo que a esta conexión homoclina se refiere. En primer lugar, excepto en las proximidades del origen, cada conexión es ya prácticamente simétrica (vid. figura 4.5.37), con lo que se mantiene muy próxima a su pareja.

En segundo lugar, nos llama la atención su parecido con la conexión homoclina de la figura 4.5.14 que aparecía para las órbitas asimétricas de la principal. En el caso que nos ocupa, la órbita pasa muy próxima al origen pero no lo alcanza hasta después de dar otra vuelta. Estamos, usando el lenguaje de Glendinning y Sparrow [47], ante una homoclina subsidiaria (obsérvese que existen para dos valores de  $\nu$  separados por 2 diezmilésimas).

Sigamos con la descripción del diagrama de bifurcaciones de la figura 4.5.35. Si en esta ocasión nos movemos hacia la derecha llegamos al punto  $F$  ( $\nu \approx -0.7444$ ) en el que la órbita grande de periodo triple (estable hasta entonces) experimenta una bifurcación de ruptura de simetría de la que ella surge inestable y coexiste, a partir de entonces, con dos órbitas asimétricas estables. Pero la órbita simétrica recupera la estabilidad en otra bifurcación pitchfork en el punto  $E$  ( $\nu \approx -0.7398$ ) en el que desaparece el par de órbitas asimétricas estables (que no han experimentado ninguna otra bifurcación). Mantiene su estabilidad hasta que en una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7265$ ) colapsa con una órbita inestable. Ésta va a desaparecer

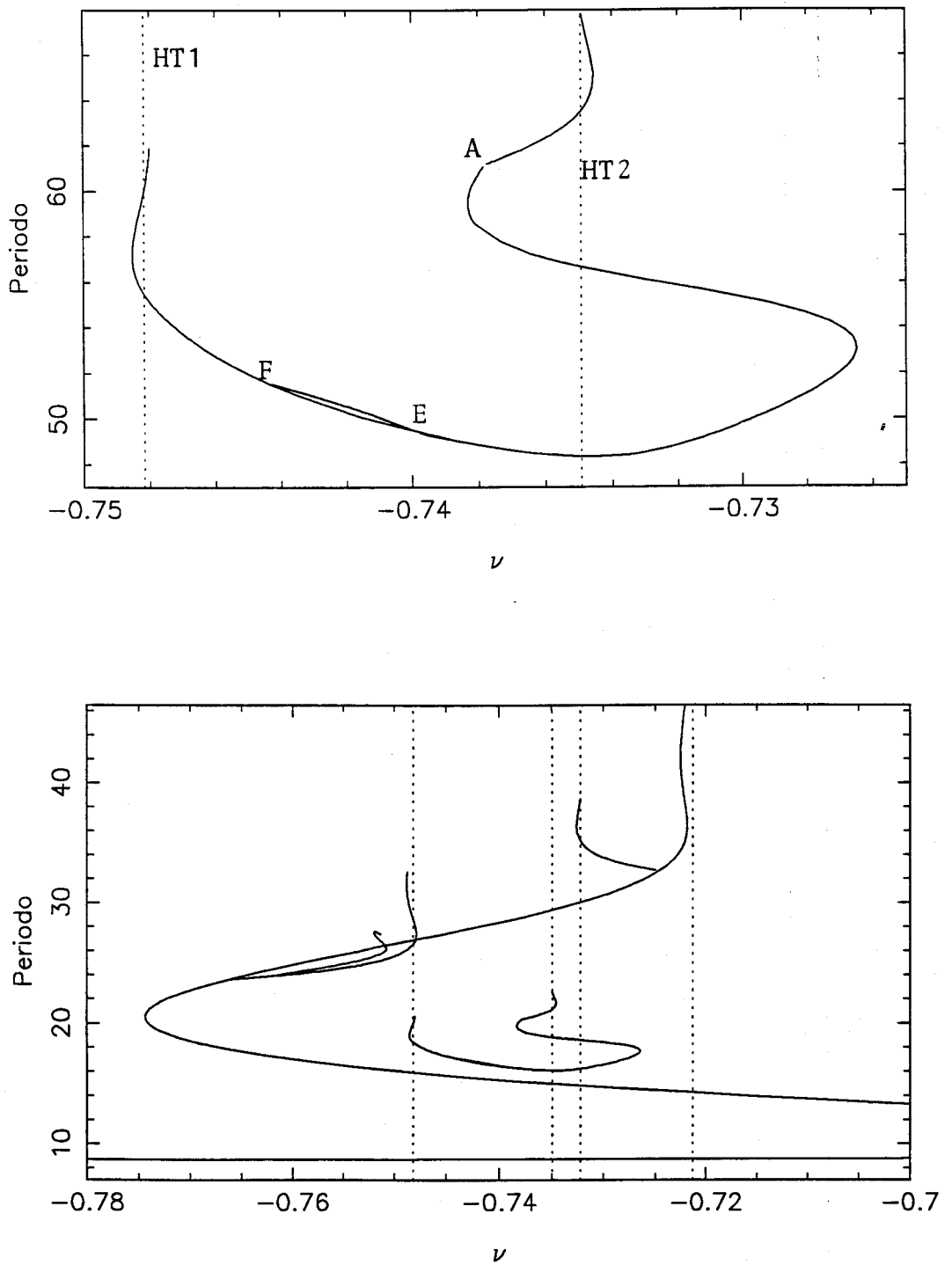


Figura 4.5.35: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas grandes de periodo triple para  $\beta = 0.6$ : (a) solo; (b) en el contexto del de las órbitas principales grandes.

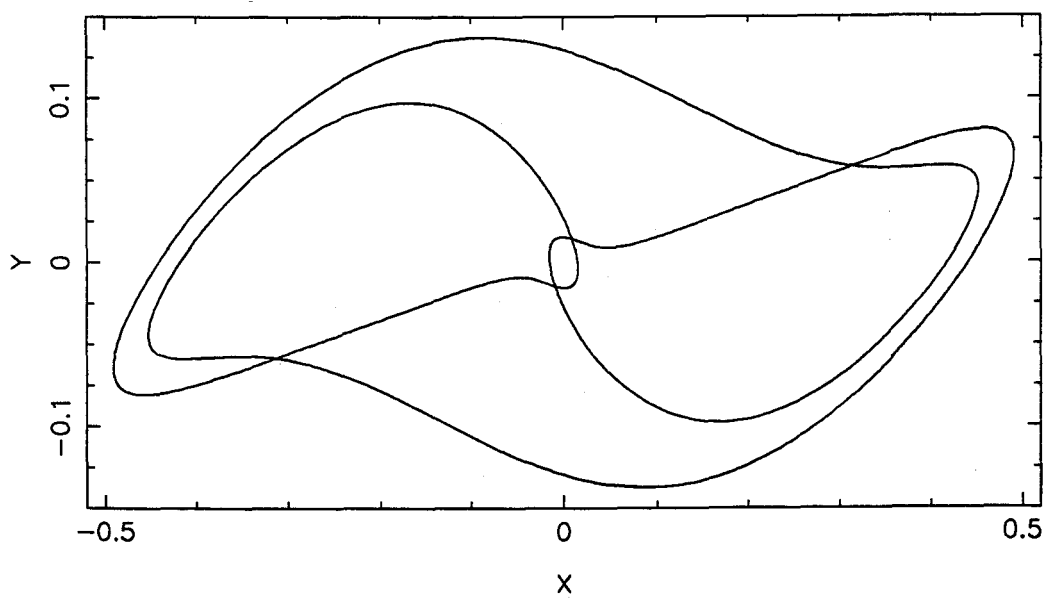
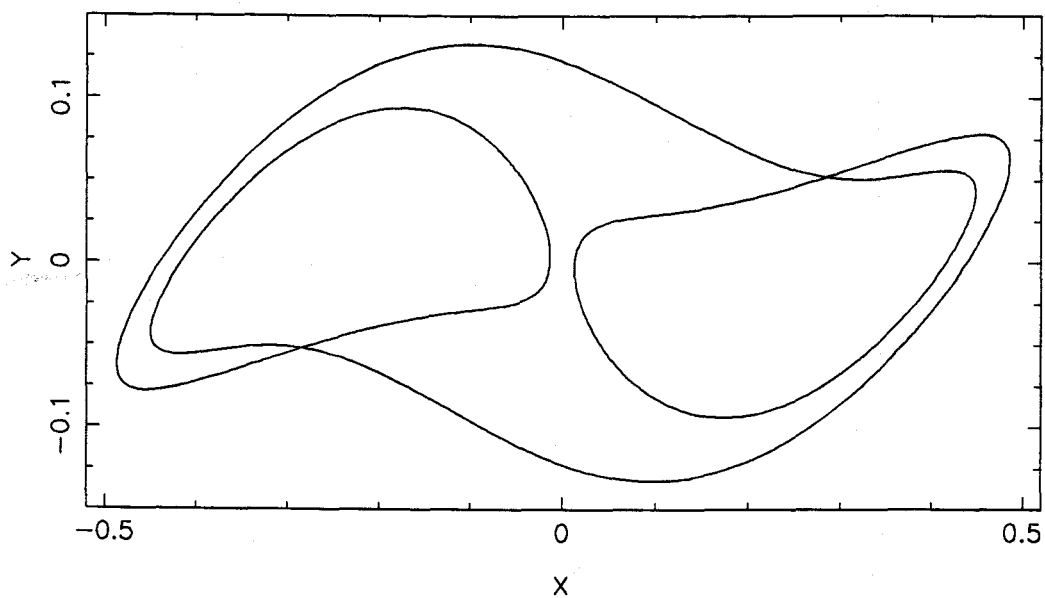


Figura 4.5.36: Dos órbitas grandes de periodo triple que coexisten con una pareja de conexiones homoclinas para  $\nu = -0.7482$ ,  $\beta = 0.6$ .

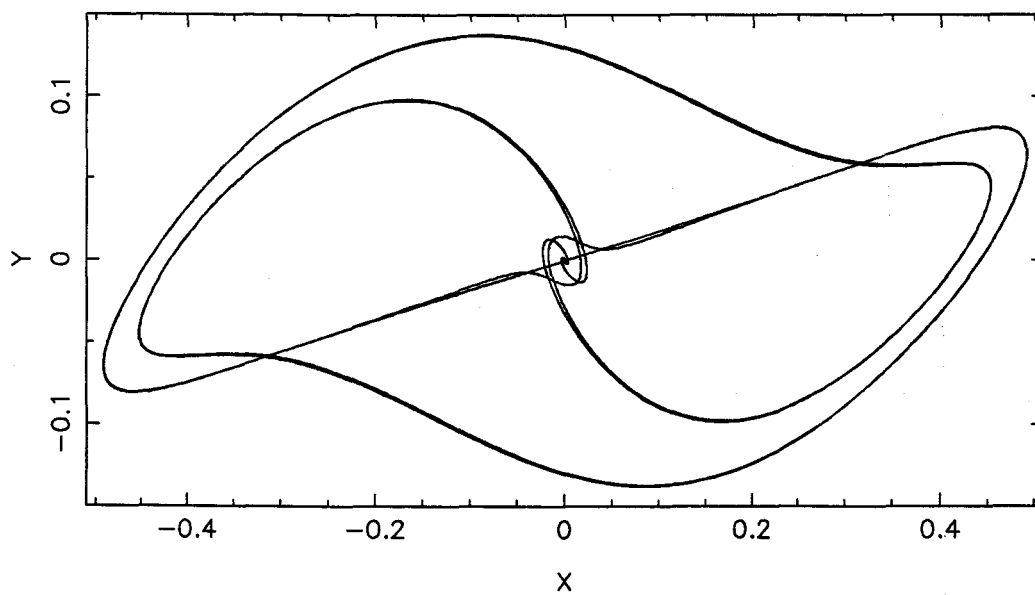
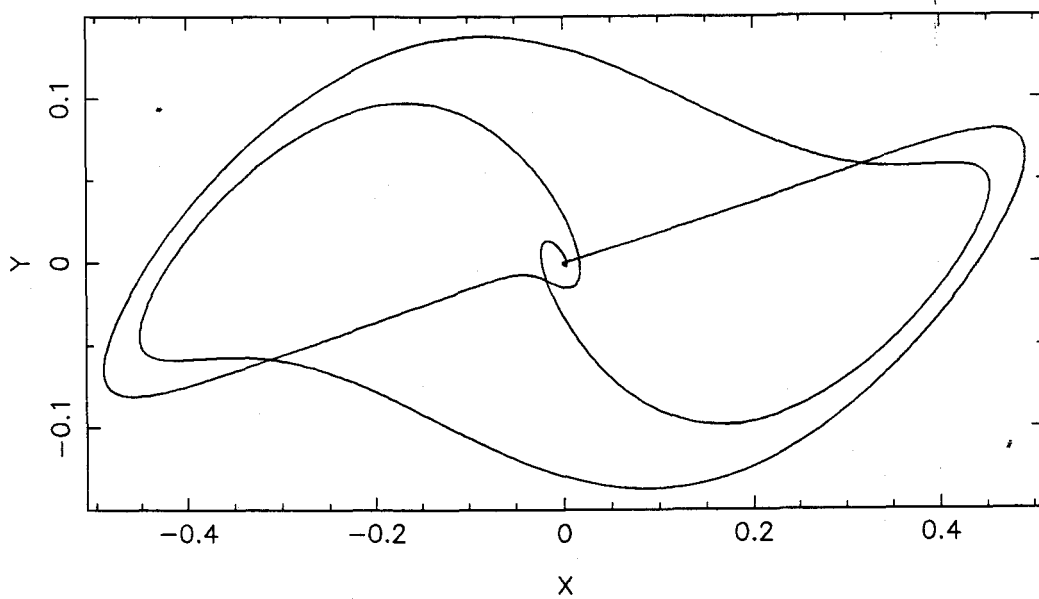


Figura 4.5.37: Pareja de conexiones homoclinas, relacionadas con las órbitas grandes de periodo triple, que se da para  $\nu \approx -0.7482$ ,  $\beta = 0.6$ .

en otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.7383$ ) y la órbita estable que surge experimenta en el punto *A* otra bifurcación pitchfork ( $\nu \approx -0.7377$ ). Hemos continuado, a partir de ahí, el par estable asimétrico que surge, el cual, tras experimentar una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7346$ ), continúa su acercamiento a la otra conexión homoclina ( $\nu \approx -0.7349$ ) indicada con la recta punteada *HT2*. Dibujamos precisamente, en la figura 4.5.38, esta conexión homoclina junto con una órbita asimétrica que coexiste con ella. En este caso, no son evidentes los comentarios que hacíamos sobre la otra conexión homoclina *HT1* ( $\nu \approx -0.7482$ ), respecto a su simetría y a ser subsidiaria.

Para finalizar con el estudio de estas órbitas grandes de periodo triple en el caso  $\beta = 0.6$  hemos dibujado también, en la figura 4.5.35, el diagrama de bifurcaciones de la figura 4.5.11 —correspondiente a la órbita principal grande y sus bifurcaciones— en el que hemos incluido a estas órbitas de periodo triple: las hemos denominado así pues, al dividir su periodo por tres, éste prácticamente coincide con el de una órbita principal (inestable en este caso).

El diagrama de bifurcaciones para el caso  $\beta = 0.4$  aparece en la figura 4.5.39. En ella observamos una rama principal que comenzamos a describir de izquierda a derecha desde el punto *A* en el que una órbita grande inestable de periodo triple acaba de experimentar una silla-nodo tras la que, aunque sale estable, sufre rápidamente una bifurcación de ruptura de simetría que la convirtió en inestable. Comienza a disminuir su periodo y su estabilidad se ve recuperada por otra pitchfork ( $\nu \approx -0.7670$ ) inmediatamente anterior a una silla-nodo *B* ( $\nu \approx -0.7644$ ) de la que surge una órbita inestable. A partir de ese momento el periodo de la órbita comienza a crecer. Una nueva silla-nodo ( $\nu \approx -0.7919$ ) le devuelve la estabilidad hasta que en una pitchfork ( $\nu \approx -0.7898$ ) vuelve a perderla. Es otra bifurcación de ruptura de simetría ( $\nu \approx -0.7030$ ) la que restaura la estabilidad de la órbita, preparándola así para afrontar otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.7014$ ) de la que surge inestable y, de esta forma, continuar su aproximación hacia la conexión homoclina *HT2* ( $\nu \approx -0.7536$ ) para cuyo valor hemos dibujado una recta punteada. De forma análoga, la rama desde el punto *A* seguirá su aproximación hacia

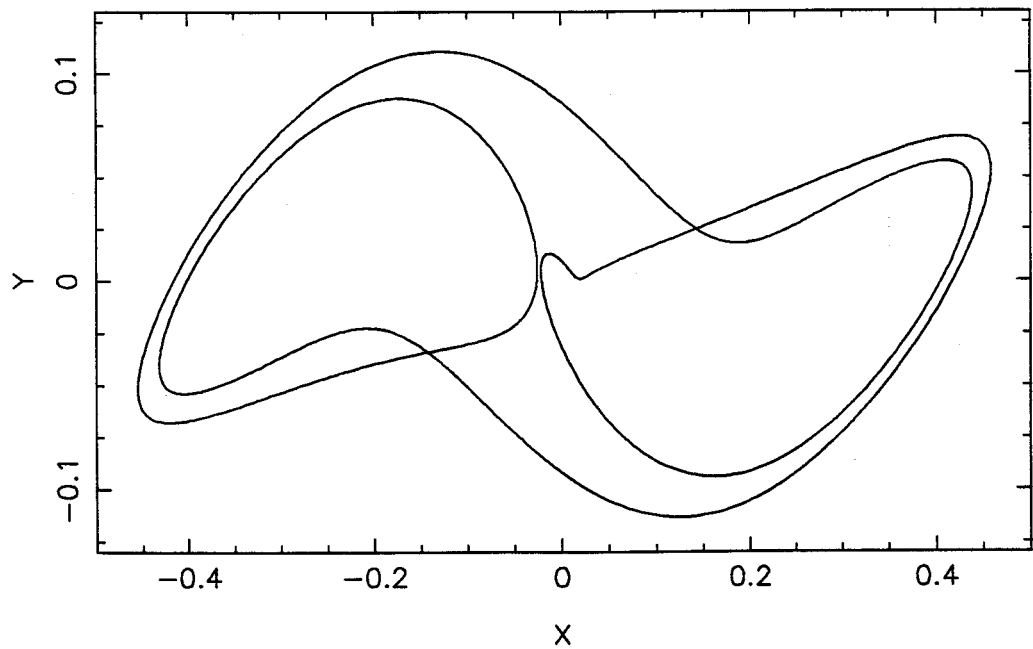
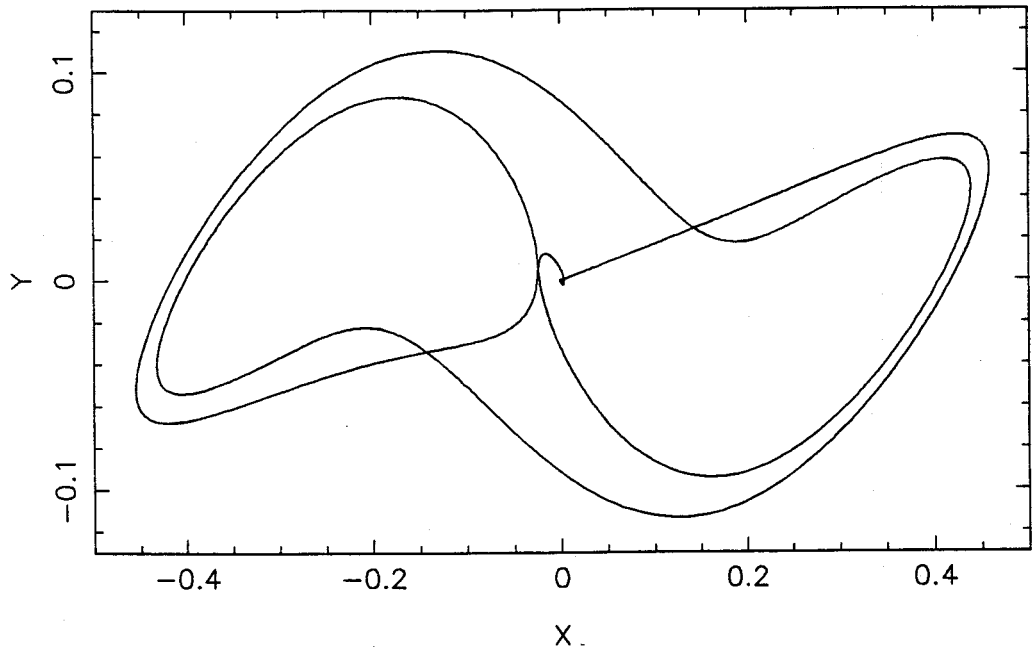


Figura 4.5.38: Órbita grande asimétrica de periodo triple que coexiste con una conexión homoclina para  $\nu \approx -0.7349$ ,  $\beta = 0.6$ .



la otra homoclina  $HT1$  ( $\nu \approx -0.8126$ ) (vid. figura 4.5.39), actuando ambas como centro organizador de esta isla de órbitas periódicas grandes de periodo triple.

Nos fijamos ahora en dos de las ramas que surgen de las bifurcaciones de ruptura de simetría. En una de ellas, en la  $C$ , la órbita asimétrica que surgió de la bifurcación pitchfork ( $\nu \approx -0.7898$ ) experimenta una flip ( $\nu \approx -0.7890$ ) que la hace inestable hasta que otra nueva flip ( $\nu \approx -0.7511$ ) le devuelve la estabilidad para experimentar inmediatamente después una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7510$ ) tras la que surge una órbita inestable que continuará, aumentando su periodo, a la búsqueda de su correspondiente homoclina. En la otra rama de órbitas asimétricas continuadas, la  $D$ , observamos cómo la estabilidad de estas órbitas se pierde rápidamente pues experimentan una bifurcación de duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.7038$ ).

Asimismo, en las ramas de órbitas asimétricas de periodo doble continuadas detectamos nuevamente nuevas duplicaciones de periodo para  $\nu \approx -0.7888$ , en la rama  $E$ , y para  $\nu \approx -0.7040$ , en la  $F$ , lo que parece indicar que ya, para  $\beta = 0.4$ , al contrario de lo que ocurría para  $\beta = 0.6$ , estas órbitas asimétricas de periodo triple experimentan una cascada de bifurcaciones de duplicación de periodo de forma análoga a como sucedía en el caso de las órbitas grandes principales asimétricas.

Dibujamos, en la figura 4.5.40, una órbita simétrica inestable (que coexiste con otras dos órbitas, una estable y otra inestable, como se ve en el diagrama de bifurcaciones de la figura 4.5.39) y una órbita asimétrica inestable de la rama  $D$ .

En la figura 4.5.41 hemos representado el espectro de frecuencias de una órbita asimétrica estable de la rama  $D$  y de una órbita asimétrica de periodo doble de la rama  $F$  poco después de su nacimiento y antes de que experimente una nueva bifurcación de duplicación de periodo que la haga inestable.

Ya en la figura 4.5.42 aparecen dos órbitas asimétricas inestables de periodo doble, cada una de ellas correspondiente a una de las ramas  $E$  y  $F$  de la figura 4.5.39.

Para finalizar con la exposición de los resultados numéricos relativos a las

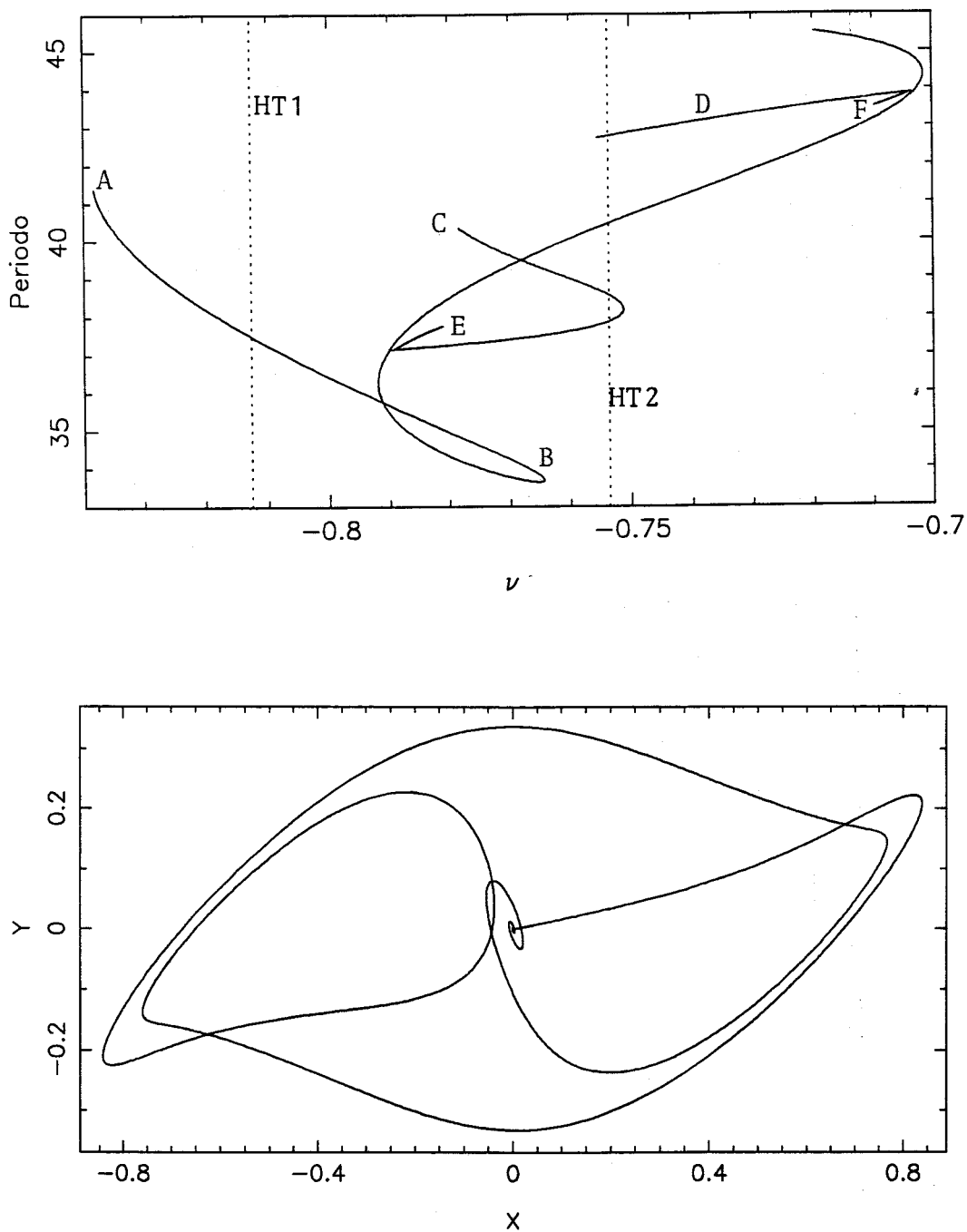


Figura 4.5.39: (a) Diagrama de bifurcaciones para las órbitas grandes de periodo triple para  $\beta = 0.4$ . (b) Conexión homoclina para  $\nu \approx -0.8126$ ,  $\beta = 0.4$ .

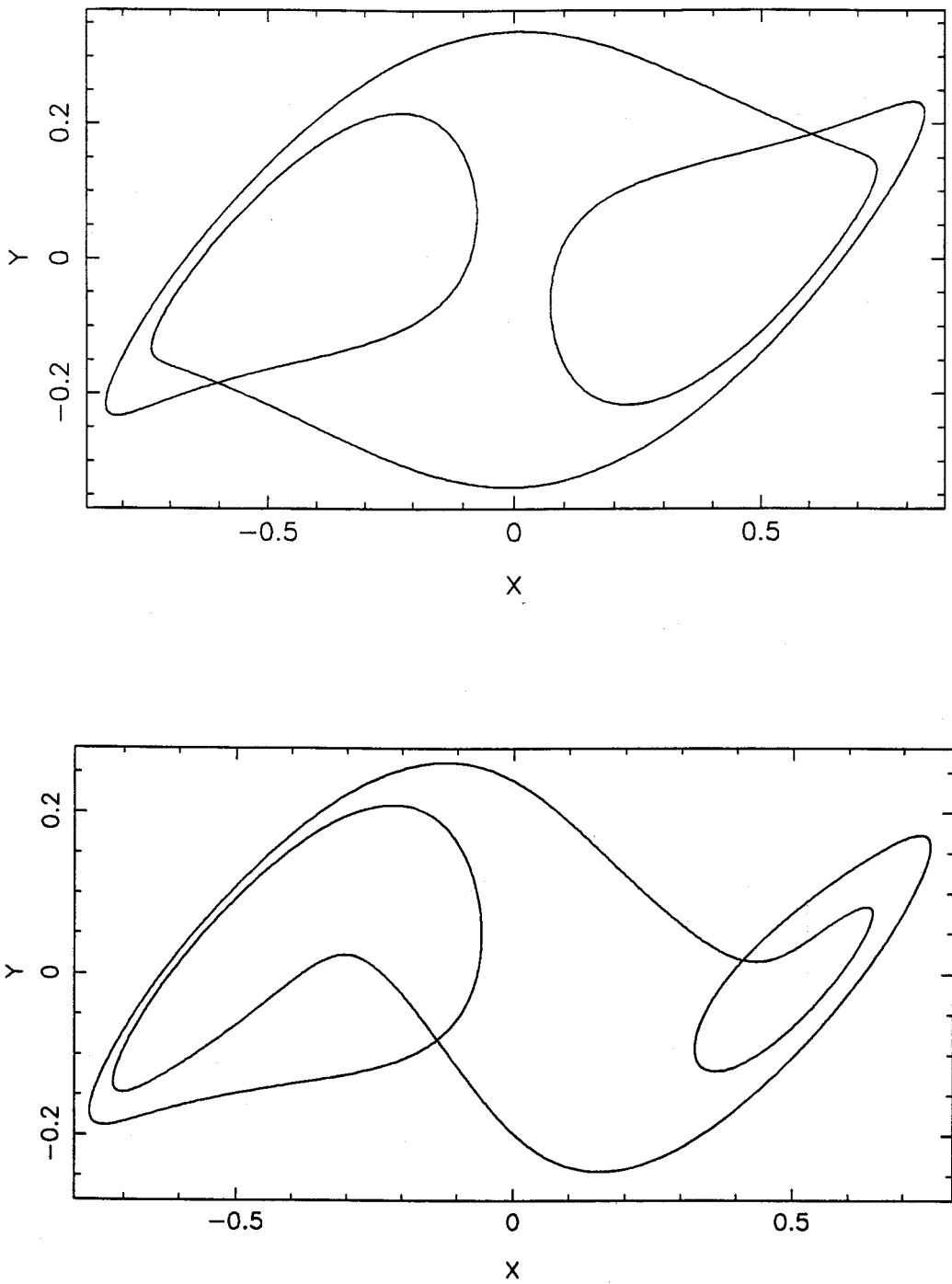


Figura 4.5.40: (a) Órbita grande simétrica de periodo triple para  $\nu = -0.791$ ,  $\beta = 0.4$ ; (b) órbita grande asimétrica de periodo triple para  $\nu = -0.7554$ ,  $\beta = 0.4$ .

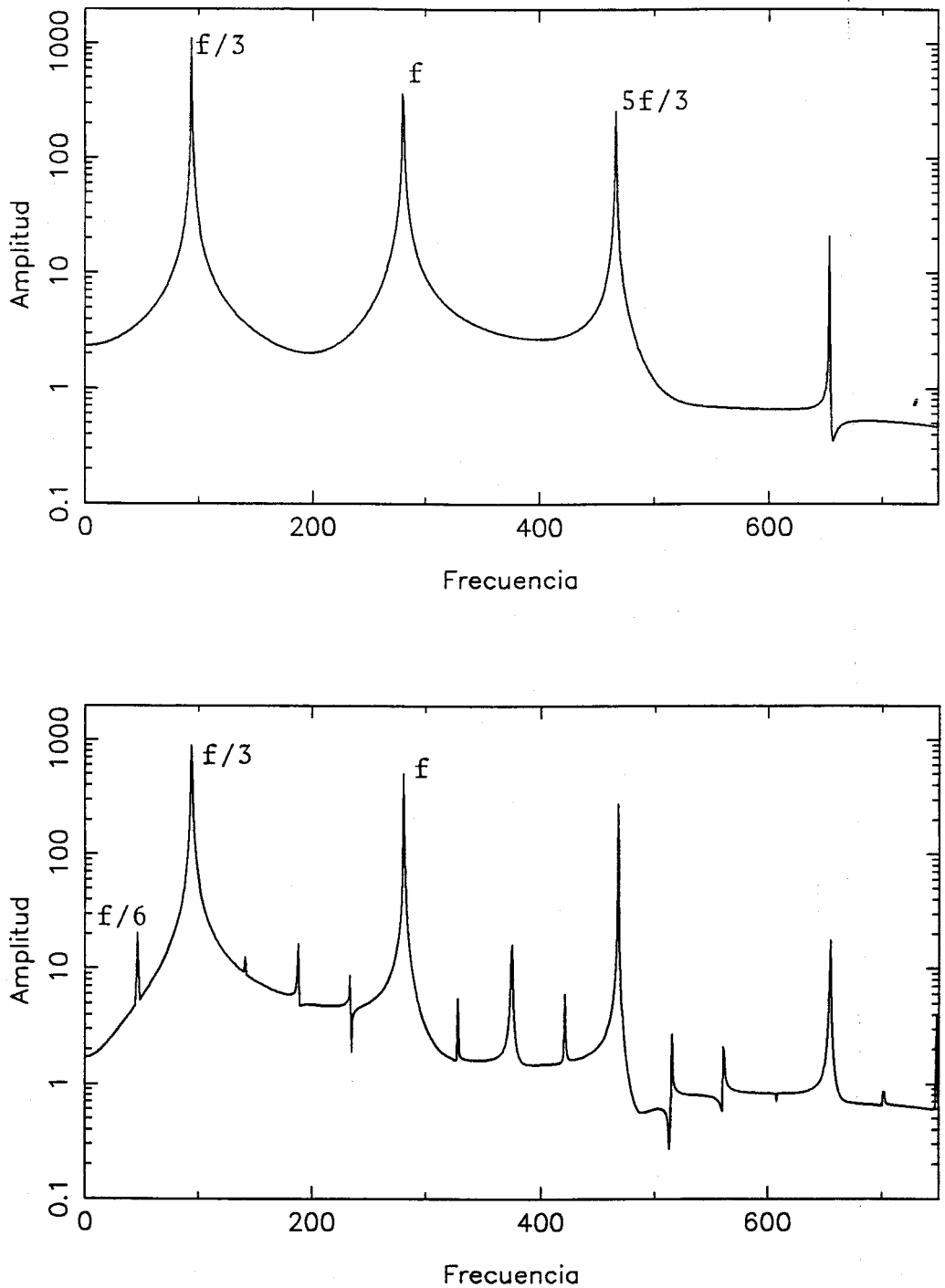


Figura 4.5.41: Espectro de frecuencias correspondiente a: (a) una órbita grande asimétrica de periodo triple para  $\nu = -0.7025$ ,  $\beta = 0.4$ ; (b) órbita grande asimétrica de periodo doble de la anterior para  $\nu = -0.7040$ ,  $\beta = 0.4$ .

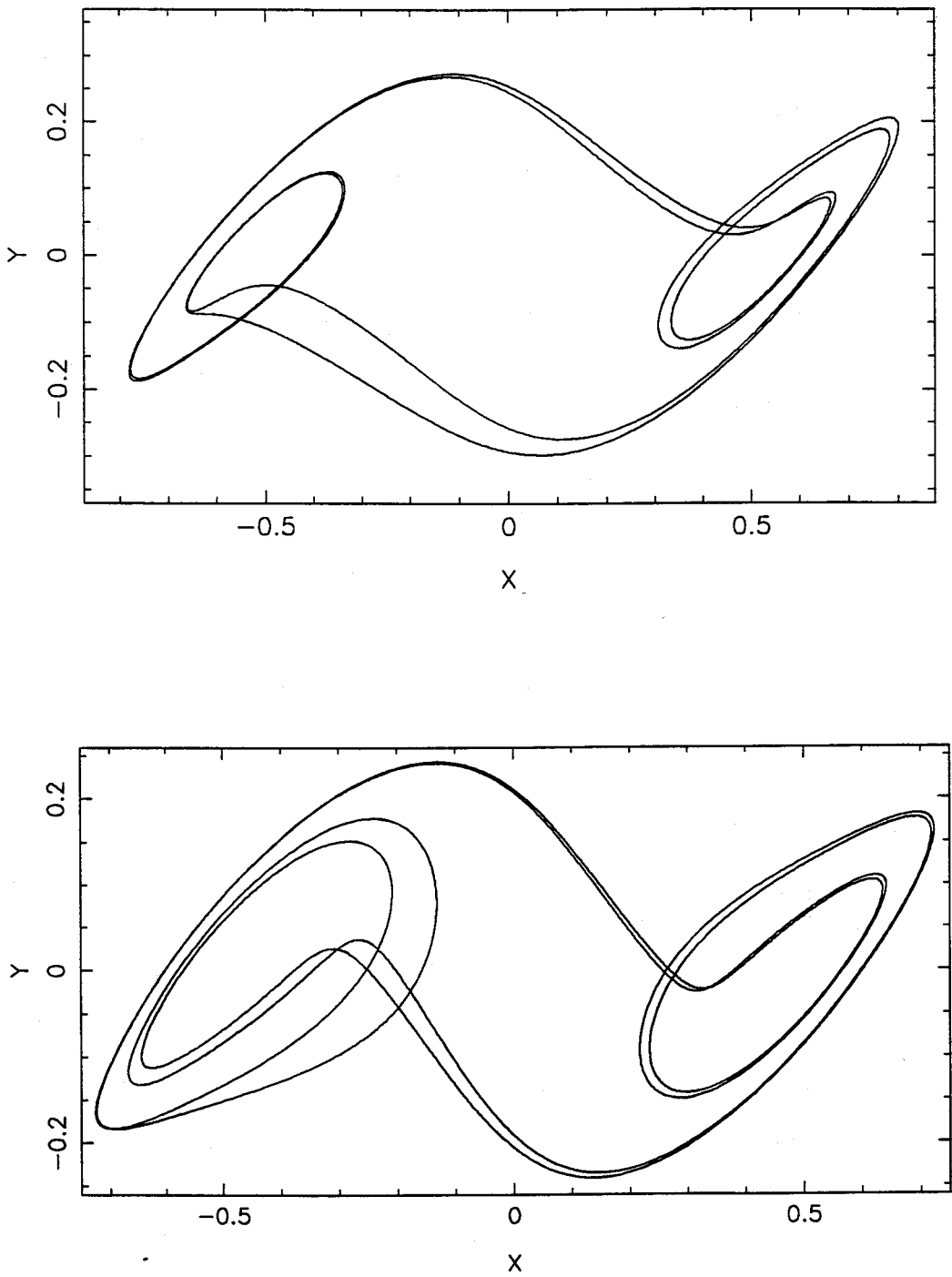


Figura 4.5.42: Órbitas de periodo doble de las asimétricas para: (a)  $\nu = -0.7811$ ,  $\beta = 0.4$ ; (b)  $\nu = -0.7098$ ,  $\beta = 0.4$ .

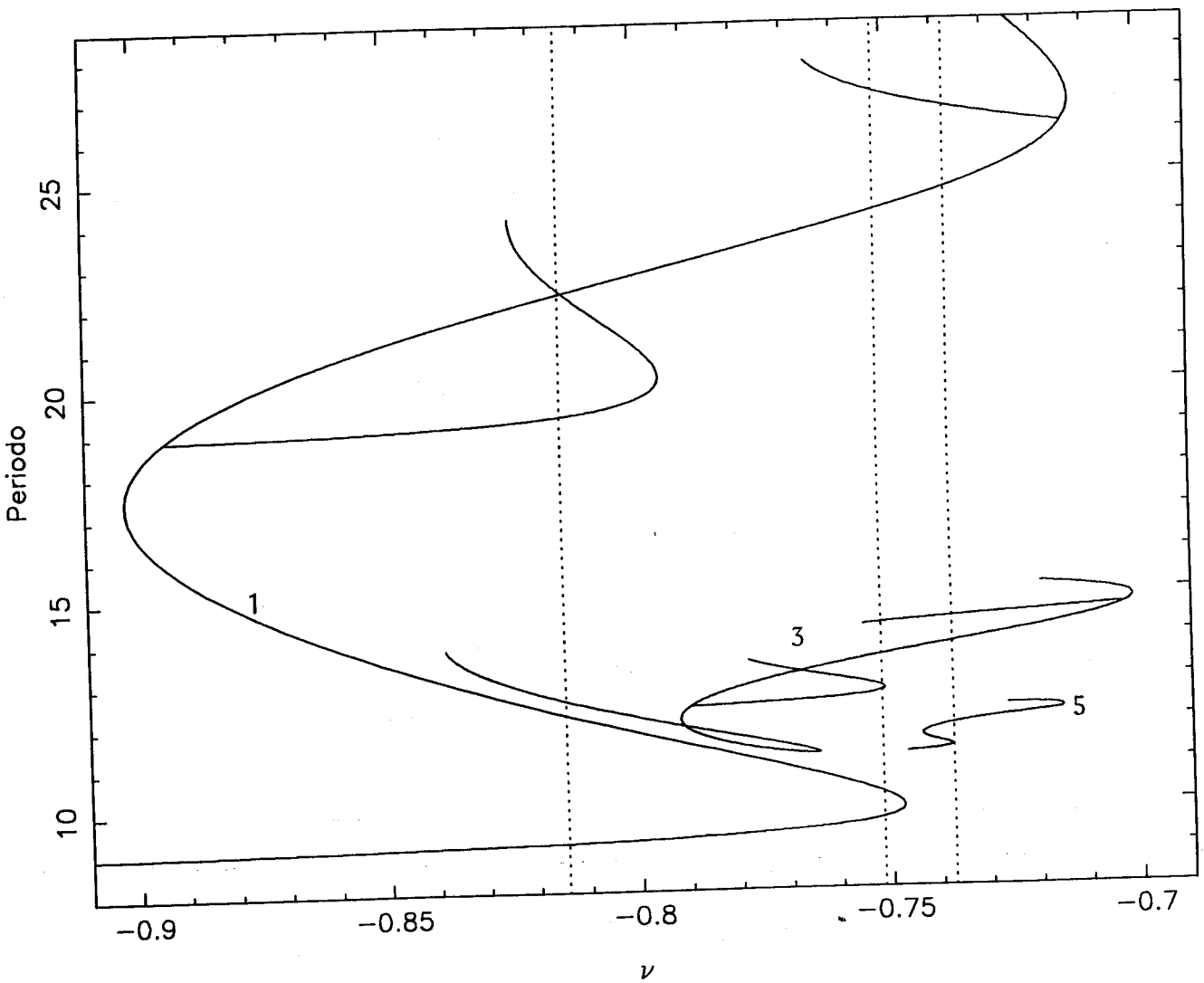


Figura 4.5.43: Diagrama de bifurcaciones de las órbitas grandes principales, de periodo triple y de periodo quintuplo para  $\beta = 0.4$ .

órbitas grandes de periodo triple hemos representado (vid. figura 4.5.43) el diagrama de bifurcaciones, para  $\beta = 0.4$ , de las órbitas grandes principales (ya esquematizado en la figura 4.5.19) junto con el de las órbitas de periodo triple de la figura 4.5.39 (dividiendo lógicamente su periodo por 3) y también con el de las órbitas grandes de periodo quintuplo que estudiaremos en lo que sigue (vid. figura 4.5.44). Hemos indicado con un 1, un 3 ó un 5, respectivamente, a cada una de las ramas de órbitas principales, de periodo triple o de periodo quintuplo de la figura 4.5.43.

A continuación vamos a ocuparnos de órbitas periódicas grandes de periodo quintuplo, como la mostrada en la figura 4.5.44: la órbita, en lugar de dar una sola vuelta alrededor de cada equilibrio no trivial —como sucedía en el caso de las de periodo triple— da dos. Hemos continuado una rama de estas órbitas que mostramos también en la misma figura. Si partimos del punto *A* nos encontramos con una órbita simétrica inestable que experimenta una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7155$ ) tras la que surge una órbita estable que rápidamente experimenta una bifurcación de ruptura de simetría ( $\nu \approx -0.7160$ ). Hemos seguido, a partir de ese punto *B*, la rama de la pareja de órbitas asimétricas. Éstas, pierden su estabilidad tras experimentar una flip ( $\nu \approx -0.7163$ ) y no la recuperan hasta otra nueva flip ( $\nu \approx -0.7437$ ) inmediatamente anterior a una silla-nodo ( $\nu \approx -0.7438$ ) de la que surge una pareja inestable que desaparece en otra silla-nodo ( $\nu \approx -0.7379$ ). La pareja estable que nace en esta última bifurcación experimenta inmediatamente una bifurcación de duplicación de periodo ( $\nu \approx -0.7380$ ) que la mantiene inestable hasta que en otra nueva flip ( $\nu \approx -0.7464$ ) recupera su estabilidad, para desaparecer finalmente en una pitchfork ( $\nu \approx -0.7468$ ) en el punto indicado con una *C*.

Aunque será conveniente continuar determinando ramas de estas órbitas, todo parece indicar que su conducta de bifurcaciones es similar a la exhibida por las órbitas grandes de periodo triple. Mostramos, para finalizar, en la figura 4.5.45, una órbita asimétrica de periodo  $5T$  y una de periodo doble de una asimétrica momentos después de su nacimiento.

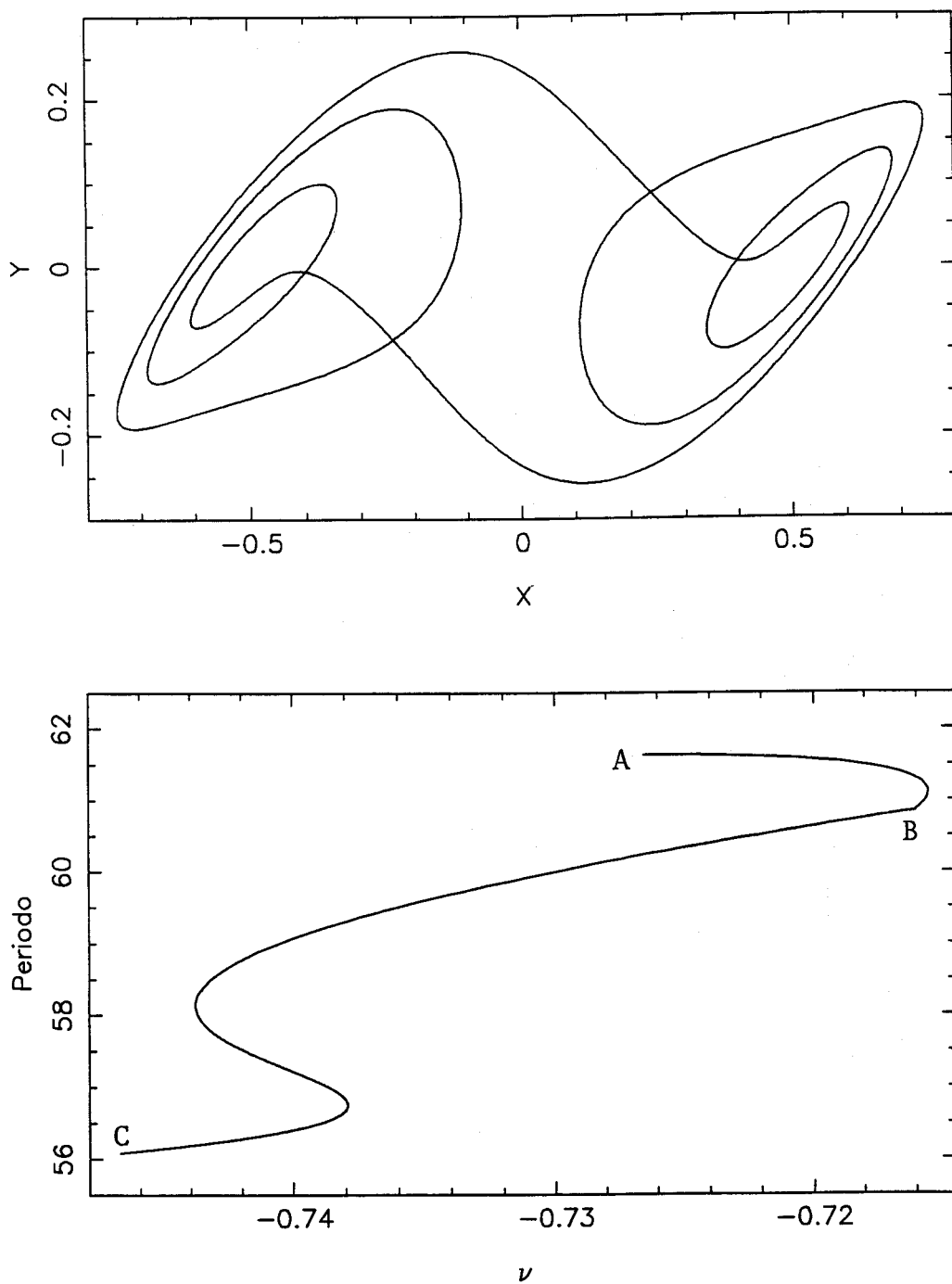


Figura 4.5.44: (a) Órbita simétrica de periodo quintuplo para  $\nu = -0.7265$ ,  $\beta = 0.4$ . (b) Diagrama de bifurcaciones de las órbitas de periodo quintuplo para  $\beta = 0.4$ .



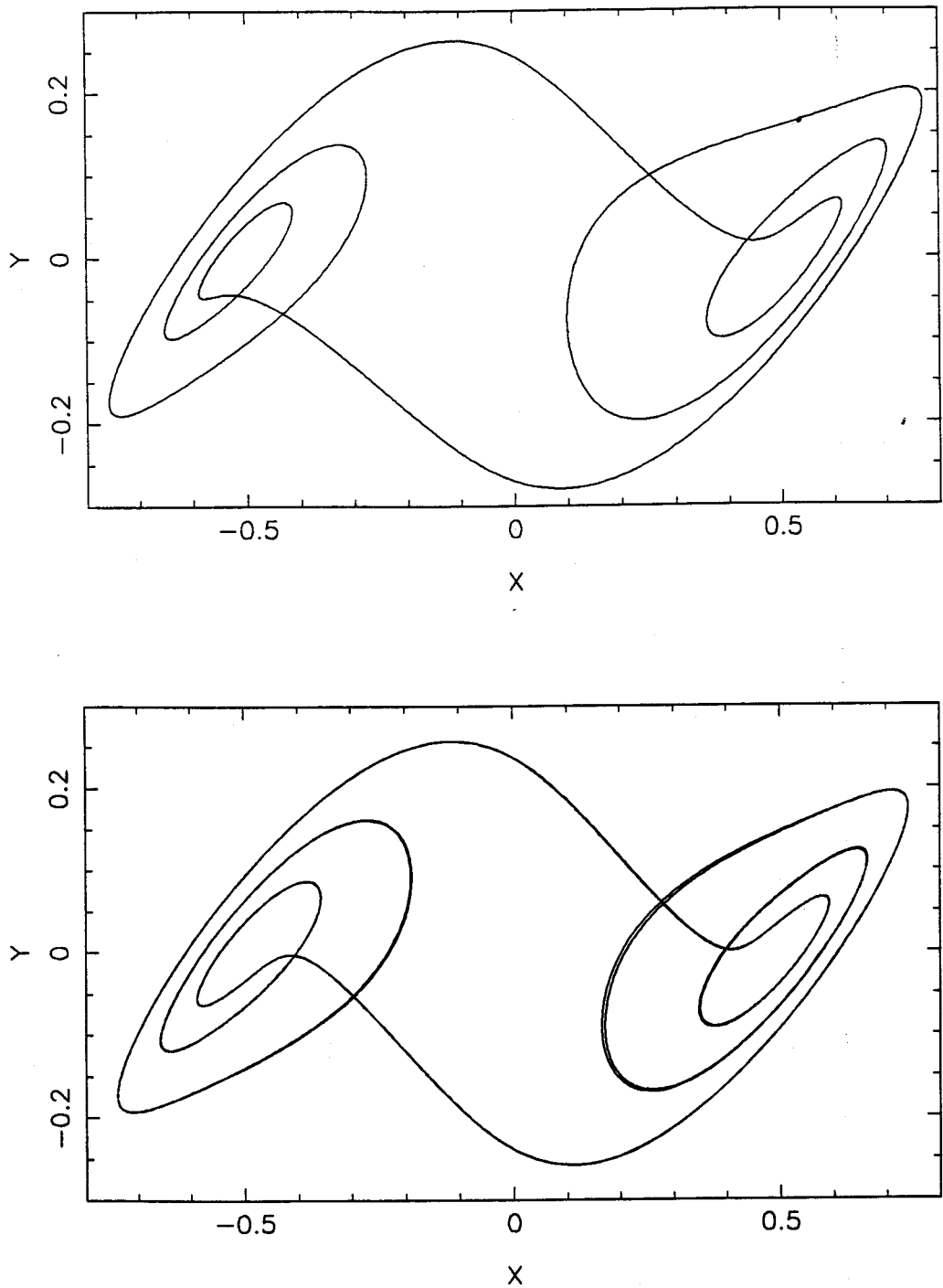


Figura 4.5.45: (a) Órbita asimétrica de periodo quintuplo para  $\nu = -0.71637$ ,  $\beta = 0.4$ . (b) Órbita asimétrica de periodo doble de la anterior para  $\nu = -0.7164$ ,  $\beta = 0.4$ .

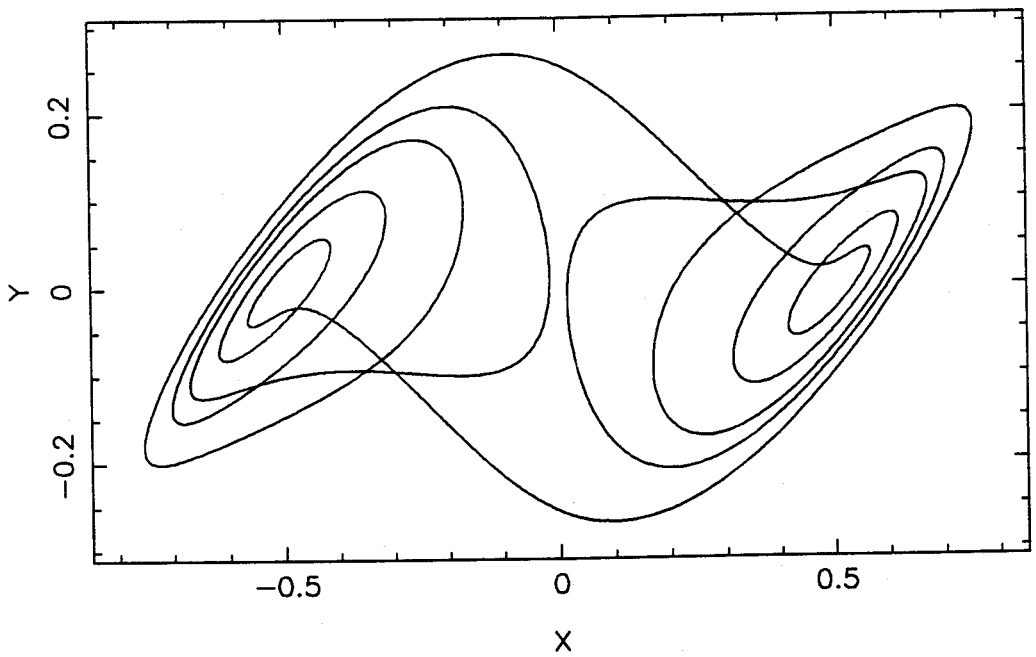
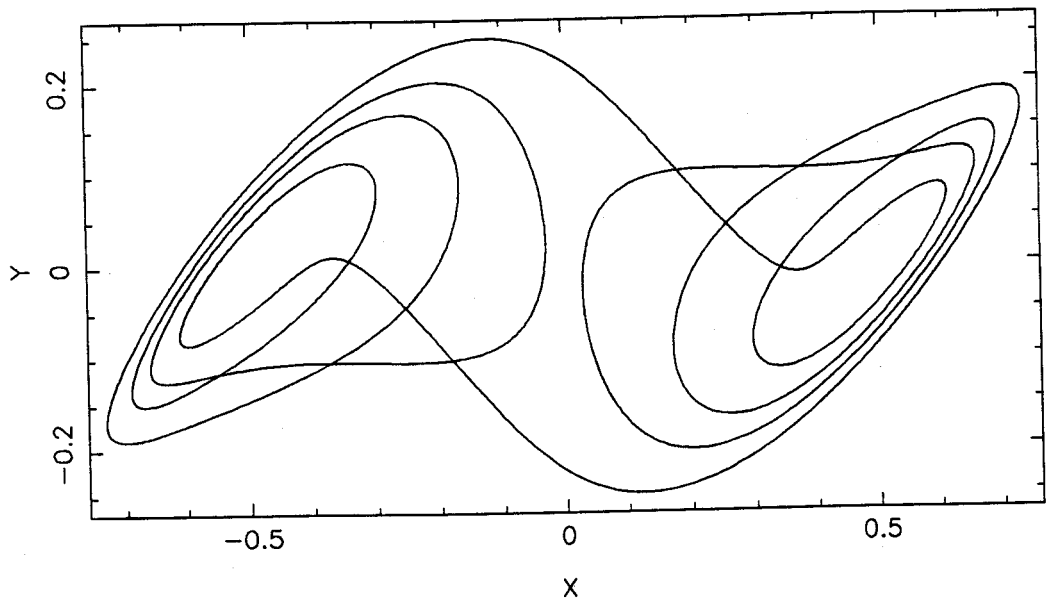


Figura 4.5.46: (a) Órbita simétrica de periodo séptuplo para  $\nu = -0.711$ ,  $\beta = 0.4$ .  
(b) Órbita simétrica de periodo aproximadamente nueve veces el de una órbita principal para  $\nu = -0.7235$ ,  $\beta = 0.4$ .

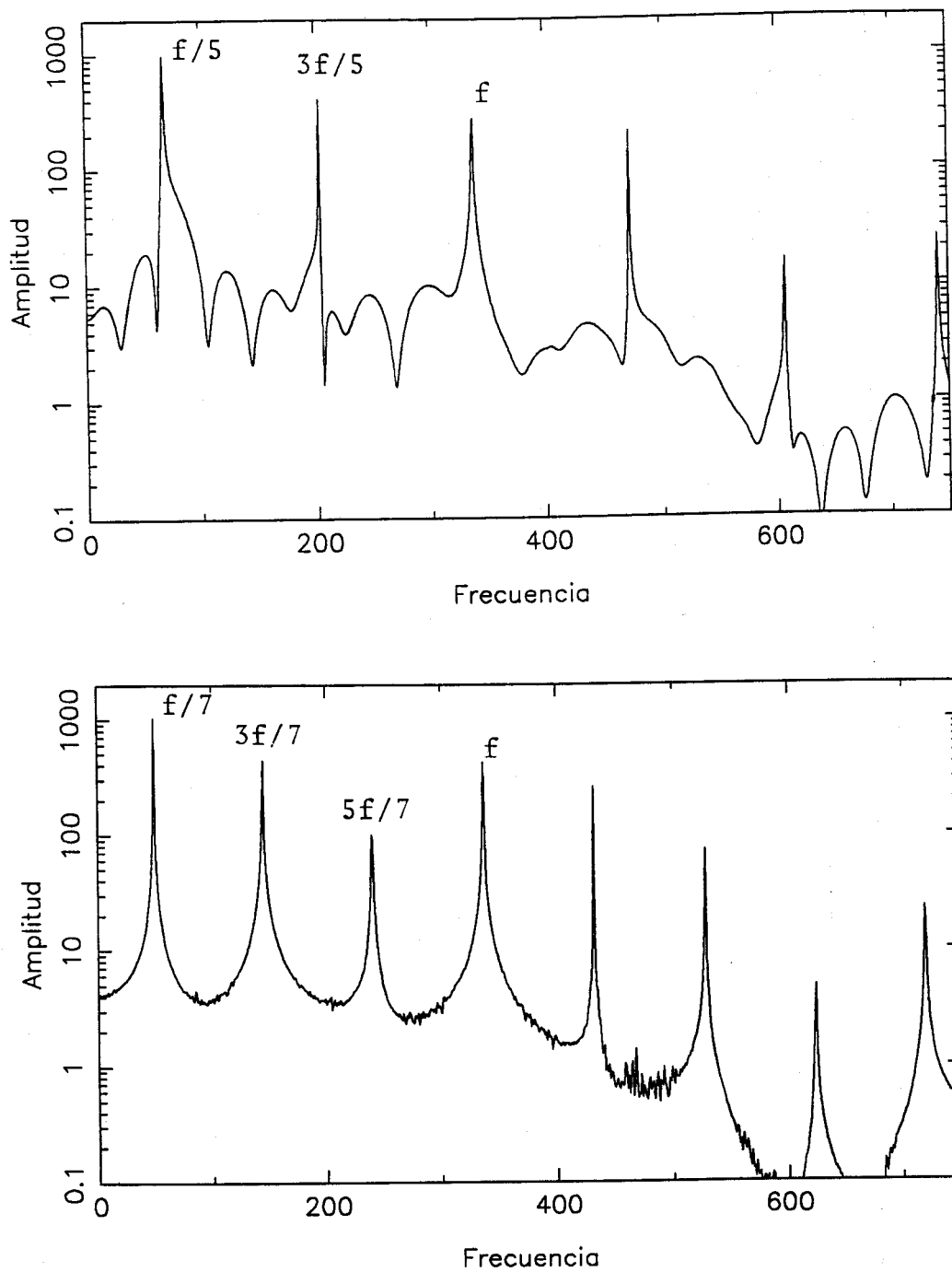


Figura 4.5.47: Espectro de frecuencias de: (a) una órbita simétrica de periodo quintuplo para  $\nu = -0.716$ ,  $\beta = 0.4$ ; (b) una órbita simétrica de periodo séptuplo para  $\nu = -0.711$ ,  $\beta = 0.4$ .

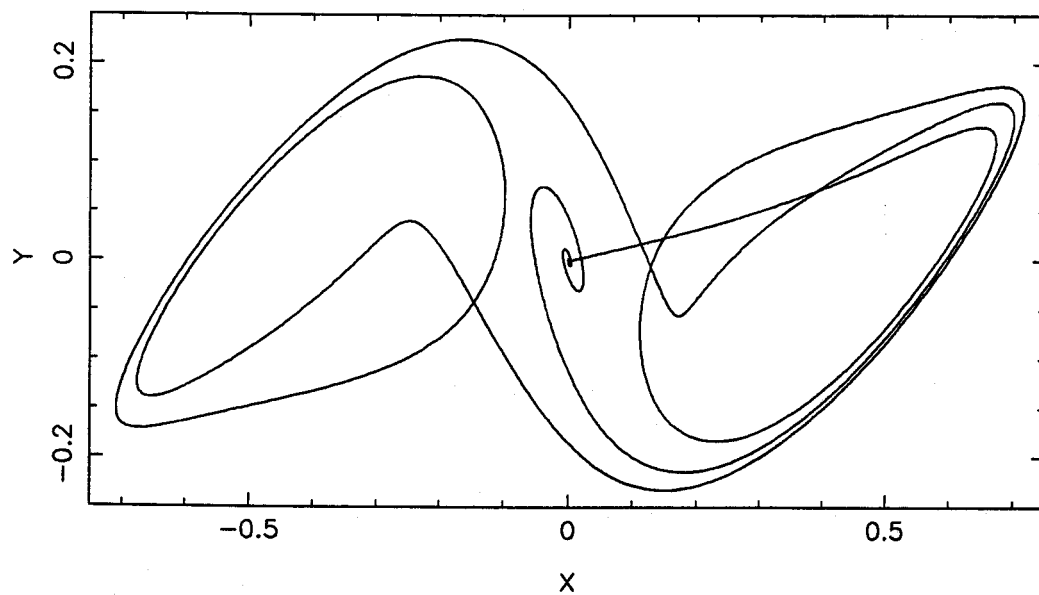
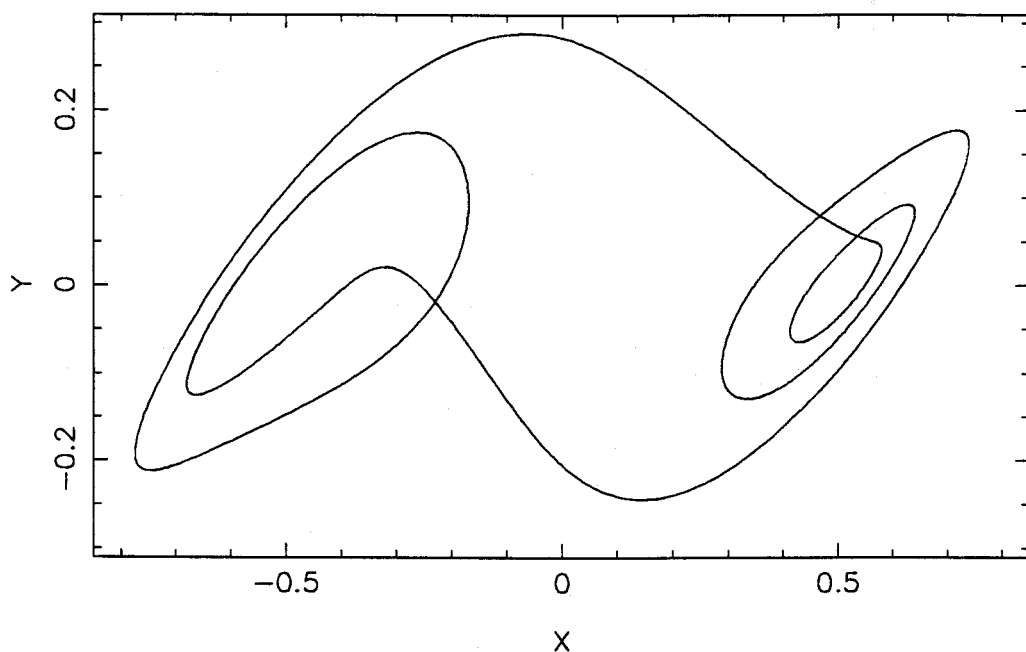


Figura 4.5.48: (a) Órbita de periodo cuádruple para  $\nu = -0.736$ ,  $\beta = 0.4$ ; (b) conexión homoclina, organizadora de una isla de órbitas de periodo cuádruple, para  $\nu \approx -0.7096$ ,  $\beta = 0.4$ .

También hemos localizado órbitas de periodo séptuplo y de, aproximadamente nueve veces el de una órbita principal (vid. figura 4.5.46). En la primera de estas órbitas simétricas los equilibrios no triviales son rodeados tres veces (cuatro en la de periodo nueve) cada uno.

Hemos estudiado asimismo, mediante la transformada rápida de Fourier, el espectro de frecuencias de una órbita de periodo quíntuplo y otra de periodo séptuplo (vid. figura 4.5.47).

Conjeturamos que todas estas órbitas de periodo triple, quíntuplo, séptuplo,... se presentan en islas organizadas alrededor de dos parejas de conexiones homoclinas. Asimismo, por la forma de esas órbitas periódicas, se puede pensar en la posibilidad de existencia de conexiones heteroclinas entre los equilibrios no triviales, situación que esperamos poder confirmar en un futuro próximo.

Para finalizar la exposición de la riqueza de órbitas periódicas y homoclinas que el circuito presenta hemos dibujado, en la figura 4.5.48, una órbita grande de periodo aproximadamente cuádruple (da dos vueltas alrededor de un equilibrio no trivial y una alrededor del otro) junto con una de las conexiones homoclinas que organizan su isla de existencia.

## Capítulo V

# UN CASO DE BIFURCACIÓN DE CODIMENSIÓN TRES EN SISTEMAS PLANOS CON PARTE LINEAL NILPOTENTE

### 5.1 Introducción

Desde que hace unos quince años se comenzó a estudiar [98], [11], lo que hoy conocemos como la bifurcación de Takens–Bogdanov, han aparecido muchos trabajos en los que se analizan sistemas para los cuales, tal bifurcación actúa como centro organizador de su conducta. Con la monografía de Carr [15] y algunos otros trabajos (como [65]), se completó su estudio en el caso no degenerado, es decir, cuando los coeficientes de  $x^3$  y de  $x^2y$  son distintos de cero. En esa situación nos encontrábamos al estudiar la presencia de tal bifurcación en el circuito analizado en el capítulo anterior para el caso  $0 < r < 1$ . Como ya insinuamos entonces, el permitir que sea  $r > 1$  puede dar lugar a una degeneración en la bifurcación de Takens–Bogdanov, lo que conllevaría una conducta de bifurcaciones más rica.

El motivo de este capítulo es pues realizar el estudio analítico de la degeneración que de tal bifurcación presenta el mencionado circuito para, de esta forma, guiar la búsqueda de las correspondientes curvas de bifurcación para los valores

adecuados de los parámetros.

Cuando comenzamos este estudio [85] conocíamos la existencia del trabajo de Dumortier *et alii* [27], donde se analiza la bifurcación de Takens–Bogdanov degenerada con términos cuadráticos. No sucedía lo mismo con los trabajos de Dangelmayr *et alii* [21], [22] que estudian las ecuaciones de Lorenz para el láser con absorbente. En el primero de ellos se ocupan de otro caso distinto al nuestro y en el segundo, analizando un sistema con mayor degeneración, engloban el sistema (5.1.5) con el cual trabajaremos a lo largo de este capítulo. Sin embargo, los resultados que presentan (vid. su figura 3 (I,J)), como veremos en nuestro análisis, son incompletos y no darían cuenta correcta del comportamiento del circuito, asociado a una bifurcación degenerada de Takens–Bogdanov.

También hemos tenido conocimiento con posterioridad del trabajo de Herfort y Troger [55] en el que, estudiando un modelo mecánico para tuberías en intercambiadores de calor, analizan el mismo sistema triparamétrico plano que nosotros. Aquí también, como comentamos en la sección 5.9, los resultados que se obtienen son incompletos y no explicarían la conducta de bifurcaciones de tal modelo mecánico.

Pasamos a continuación a comentar el esquema de este capítulo. En la parte final de esta sección explicitamos la conexión existente entre la forma normal de la bifurcación de Takens–Bogdanov que aparece en el estudio del circuito analizado en el capítulo IV y el sistema triparamétrico plano que desplegará dicha conducta de bifurcación.

En la sección 5.2 llevamos a cabo un análisis local de (5.1.5) que nos permite caracterizar las bifurcaciones de Hopf del origen y de los equilibrios no triviales, así como la presencia de bifurcaciones de Takens–Bogdanov no degeneradas.

Será en las secciones 5.3 y 5.5 donde, mediante un análisis semiglobal, pongamos de manifiesto la existencia de conexiones homoclinas (a veces degeneradas) y bifurcaciones silla–nodo (algunas de las cuales colapsan en una cúspide). Para ello será necesario realizar un estudio en profundidad, en las secciones 5.4 y 5.6, de dos funciones  $R(e)$  y  $R^*(t)$ , que aparecen definidas en términos de integrales

elípticas.

Ya en la sección 5.7, estamos en condiciones de representar los ricos conjuntos y diagramas de bifurcaciones que hemos obtenido, tras el estudio analítico de las secciones precedentes, para el sistema (5.1.5). Completamos esta sección con alguna simulación numérica que concuerda plenamente con los resultados teóricos obtenidos.

Estamos entonces en condiciones de, en la sección 5.8, encontrar en el circuito esta conducta de bifurcaciones. Para ello nos centraremos en tres configuraciones distintas de parámetros y los resultados numéricos que obtengamos vendrán guiados por el análisis teórico previo.

Para finalizar, en la sección 5.9, se da cuenta de cómo nuestro análisis teórico permite explicar satisfactoriamente la conducta de bifurcaciones del modelo mecánico analizado en [103] y [55].

Comenzamos pues analizando la posible degeneración en la forma normal de la bifurcación de Takens–Bogdanov que presenta el circuito (4.2.3). Dicha forma normal (vid. sección 4.4) adopta la expresión:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_3 x^3 + \delta_3 x^2 y + \gamma_5 x^5 + \delta_5 x^4 y + \dots \end{pmatrix}$$

donde:

$$\gamma_3 = -(a_3 + b_3)/r^{\frac{5}{2}}$$

$$\delta_3 = 3(-ra_3 + rb_3 + a_3 + b_3)/r^3$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 = & (3\sqrt{r}r^2 a_3 b_3 + 3\sqrt{r}r^2 b_3^2 + 6\sqrt{r}r a_3 b_3 + 6\sqrt{r}r b_3^2 + 3\sqrt{r}a_3^2 \\ & + 6\sqrt{r}a_3 b_3 + 3\sqrt{r}b_3^2 - r^3 a_5 - r^3 b_5)/r^{\frac{13}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_5 = & (-5\sqrt{r}r^3 a_5 + 5\sqrt{r}r^3 b_5 + 5\sqrt{r}r^2 a_5 + 5\sqrt{r}r^2 b_5 - 15r^3 b_3^2 \\ & + 6r^2 a_3 b_3 - 54r^2 b_3^2 + 15ra_3^2 - 48ra_3 b_3 - 63rb_3^2 - 24a_3^2 - 48a_3 b_3 \\ & - 24b_3^2)/r^{\frac{13}{2}} \end{aligned}$$

Como ya indicamos entonces, al ser  $a_3, b_3 > 0$ , el coeficiente  $\gamma_3$  resulta ser negativo. Sin embargo, si  $r \geq 1$  —situación no considerada en el capítulo anterior—  $\delta_3$



puede cambiar de signo dando origen, al anularse, a una bifurcación degenerada. Eligiendo  $a_3$  como tercer parámetro, sus valores críticos resultan ser

$$\nu_c = -\sqrt{r}, \quad \beta_c = \sqrt{r}, \quad a_{3c} = \frac{r+1}{r-1}b_3$$

Para valores cercanos a los críticos es posible transformar el sistema reducido (4.4.1) en:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y + \gamma_3 x^3 + \mu_3 x^2 y + \gamma_5 x^5 + \delta'_5 x^4 y \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{\nu - \nu_c + \beta - \beta_c}{r} \\ \mu_2 &= \frac{(\nu - \nu_c)(1 - r) + (\beta - \beta_c)(1 + r)}{r^2} \\ \mu_3 &= \frac{3(-ra_3 + rb_3 + a_3 + b_3)}{r^3} \end{aligned}$$

Ahora es posible verificar la condición de transversalidad:

$$\frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\partial(\nu, \beta, a_3)} = -\frac{6(1-r)}{r^6\sqrt{r}} \neq 0$$

siempre que  $r \neq 1$ , y es por ello por lo que nos limitamos a estudiar el sistema anterior para los valores críticos. Para dichos valores, obtenemos como forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \gamma_3 x^3 + \gamma_5 x^5 + \delta_5 x^4 y + \dots \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

donde los puntos indican términos en  $x^k, x^{k-1}y$  de grado mayor que cinco, siendo  $\gamma_3 \neq 0, \delta_5 \neq 0$ .

Veamos en primer lugar que la presencia del término en  $x^5$  no es esencial:

**Lema 5.1.1** *El sistema (5.1.1) es  $C^\infty$ -equivalente a un sistema que, cortado a quinto orden, es*

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= \gamma_3 X^3 + \delta'_5 X^4 Y\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

con  $\gamma_3 \neq 0$ ,  $\delta'_5 \neq 0$ .

DEMOSTRACIÓN:

Al igual que en los trabajos de Dumortier *et alii* [27] y Roussarie [90], asociamos al sistema (5.1.1) la 1-forma dual correspondiente

$$y dy - (\gamma_3 x^3 + \gamma_5 x^5 + \delta_5 x^4 y + O(|x, y|^6)) dx\tag{5.1.3}$$

En este nuevo contexto, el concepto de sistemas  $C^\infty$ -equivalentes se traslada al de 1-formas diferenciales  $C^\infty$ -equivalentes. Consideremos una serie formal  $X(x) = x + \dots$  tal que

$$\frac{\gamma_3 X^4}{4} = \frac{\gamma_3 x^4}{4} + \frac{\gamma_5 x^6}{6}$$

Diferenciando la igualdad anterior obtenemos

$$\gamma_3 X^3 dX = \gamma_3 x^3 dx + \gamma_5 x^5 dx$$

Además, se tiene

$$(\delta_5 x^4 y + O(|x, y|^6)) dx = (\delta'_5 X^4 y + O(|X, y|^6)) dX$$

donde  $\delta'_5$  depende polinomialmente de  $\delta_5$ . De este modo, si llamamos  $Y = y$ , deducimos que las 1-formas (5.1.3) y la

$$Y dY - (\gamma_3 X^3 + \delta'_5 X^4 Y + \dots) dX$$

son  $C^\infty$ -equivalentes y, en consecuencia, el sistema (5.1.1) es  $C^\infty$ -equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= \gamma_3 X^3 + \delta'_5 X^4 Y + \dots\end{aligned}$$



Pasamos a continuación a estudiar la deformación del sistema (5.1.2) dada por

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= \epsilon_1 X + \epsilon_2 Y + \gamma_3 X^3 + \epsilon_3 X^2 Y + \delta'_5 X^4 Y\end{aligned}\quad (5.1.4)$$

En primer lugar, reescalamos mediante  $X = x_0 \bar{x}$ ,  $Y = y_0 \bar{y}$ ,  $\tau = \omega t$ , eligiendo

$$x_0 = \left( \frac{-\gamma_3}{\delta'^2_5} \right)^{1/6}, \quad y_0 = x_0^5 |\delta'_5|, \quad \omega = x_0^4 |\delta'_5|$$

Llegamos de este modo, suprimiendo las barras en las variables de estado, al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \epsilon_1 x + \epsilon_2 y - x^3 + \epsilon_3 x^2 y + K x^4 y\end{aligned}\quad (5.1.5)$$

donde

$$\epsilon_1 = \frac{x_0 \epsilon_1}{\omega y_0}, \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon_2}{\omega}, \quad \epsilon_3 = \frac{x_0^2 \epsilon_3}{\omega}$$

y  $K = \pm 1$  (su signo coincide con el de  $\delta'_5$ ).

En el estudio de este sistema bidimensional tripamétrico bastará considerar el caso  $K = +1$ , pues el sistema es invariante al cambio

$$(x, y, t, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, K) \longrightarrow (x, -y, -t, \epsilon_1, -\epsilon_2, -\epsilon_3, -K)$$

con lo que el conjunto de bifurcaciones será similar en el caso  $K = -1$  (si bien habrá un cambio en la estabilidad).

## 5.2 Análisis Local

Nos planteamos, en primer lugar, hacer un análisis local de (5.1.5). El origen es siempre un equilibrio. Además, tras experimentar una bifurcación pitchfork para  $\epsilon_1 = 0$ , aparecen dos nuevos equilibrios situados en  $(\pm \sqrt{\epsilon_1}, 0)$ .

Vamos a analizar las posibles bifurcaciones de Hopf que estos equilibrios vayan a experimentar. Para ello escribimos la matriz de la linealización:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 - 3x^2 + 2\varepsilon_3xy + 4Kx^3y & \varepsilon_2 + \varepsilon_3x^2 + Kx^4 \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

Empecemos estudiando la bifurcación de Hopf del origen. En su caso, la matriz (5.2.1) toma la forma

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico  $\lambda^2 - \varepsilon_2\lambda - \varepsilon_1 = 0$  nos da los autovalores que nos indican la estabilidad del origen:

$$\lambda = \frac{\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1}}{2}$$

La bifurcación de Hopf aparecerá para  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $-\varepsilon_1 > 0$ . Para analizarla tomamos como parámetro de bifurcación a  $\varepsilon_2$ , comprobando previamente que se satisface la condición de transversalidad, es decir,

$$\operatorname{re} \left[ \frac{d\lambda}{d\varepsilon_2}(\varepsilon_2 = 0) \right] = \operatorname{re} \left[ \frac{u^T A'_0 v}{u^T v} \right] \neq 0$$

donde  $A'_0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon_2} J(0, 0) \right|_{\varepsilon_2=0}$  y  $u, v$  son respectivamente un autovector izquierdo y uno derecho de la matriz de la linealización  $J(0, 0)|_{\varepsilon_2=0}$  correspondientes al autovalor  $\lambda = \omega_0 i$  (en nuestro caso  $\omega_0^2 = -\varepsilon_1$ ). Como  $A'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , si elegimos, por ejemplo,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_0 i \end{pmatrix}$ ,  $u = \begin{pmatrix} \omega_0 i \\ 1 \end{pmatrix}$ , obtenemos  $\frac{d\lambda}{d\varepsilon_2}(\varepsilon_2 = 0) = \frac{1}{2} \neq 0$ .

Una vez verificada la condición de transversalidad podemos suponer en nuestros cálculos que  $\varepsilon_2$  toma el valor crítico, o sea,  $\varepsilon_2 = 0$ . Así (5.1.5) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 + \varepsilon_3 x^2 y + Kx^4 y \end{pmatrix}$$

que escalado con  $x = \bar{x}$ ,  $y = -\omega_0 \bar{y}$  se convierte en

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega_0} \bar{x}^3 + \varepsilon_3 \bar{x}^2 \bar{y} + K \bar{x}^4 \bar{y} \end{pmatrix}$$

al que podemos aplicarle el algoritmo desarrollado en [35] para el cálculo de la forma normal de la bifurcación de Hopf, obteniendo en este caso, hasta orden cinco:

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon_2}{2} r + \frac{\varepsilon_3}{8} r^3 + \frac{K}{16} r^5 \quad (5.2.2)$$

Puesto que el primer coeficiente de la forma normal se anula para  $\varepsilon_3 = 0$ , concluimos que la bifurcación de Hopf del origen, que se da como ya indicamos para  $\varepsilon_2 = 0$  ( $\varepsilon_1 < 0$ ), es supercrítica cuando  $\varepsilon_3 < 0$ , subcrítica para  $\varepsilon_3 > 0$  y degenerada para  $\varepsilon_3 = 0$ , apareciendo una bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas en una superficie que, en primera aproximación, viene dada por

$$\varepsilon_3^2 = 8K\varepsilon_2, \quad \left( \frac{\varepsilon_3}{K} < 0 \right).$$

En la figura 5.2.1 esquematizamos los resultados obtenidos mediante nuestro análisis local de la bifurcación de Hopf del origen, tanto en el espacio de parámetros como en los planos que, como veremos a lo largo del capítulo, presentan un conjunto de bifurcaciones más rico: el  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_2$  y el  $\varepsilon_3$ - $\varepsilon_2$ . En el espacio de parámetros aparece a trazos la porción del plano  $\varepsilon_2 = 0$  en la que dicha bifurcación de Hopf es subcrítica y con trazo continuo la parte en la que es supercrítica. La superficie de silla-nodo es el cilindro parabólico señalado con *SN*. En el plano  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_3 < 0$ ) aparecen dos rectas paralelas, la *HOP* correspondiente a la bifurcación de Hopf supercrítica y la *SN* a la silla-nodo. En el plano  $\varepsilon_3$ - $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 < 0$ ) observamos la recta *HOP* de Hopf supercrítica y la parábola *SN* de la silla-nodo.

Vamos a analizar la bifurcación que ocurre al intersectar la curva de Hopf del origen con la de pitchfork, es decir, para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Nos encontramos entonces, para el origen de coordenadas, con una matriz de la forma

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

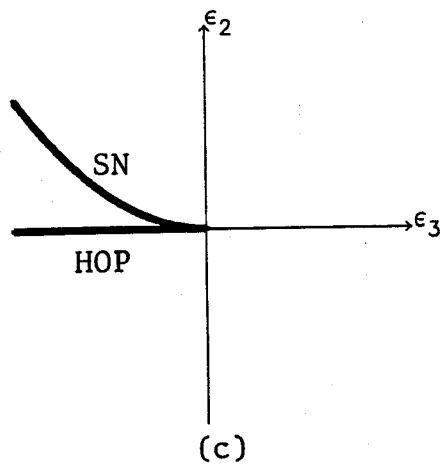
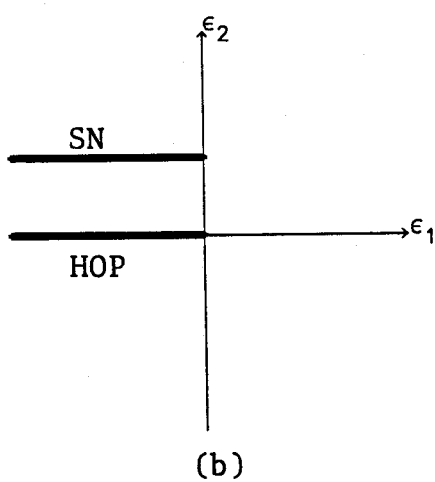
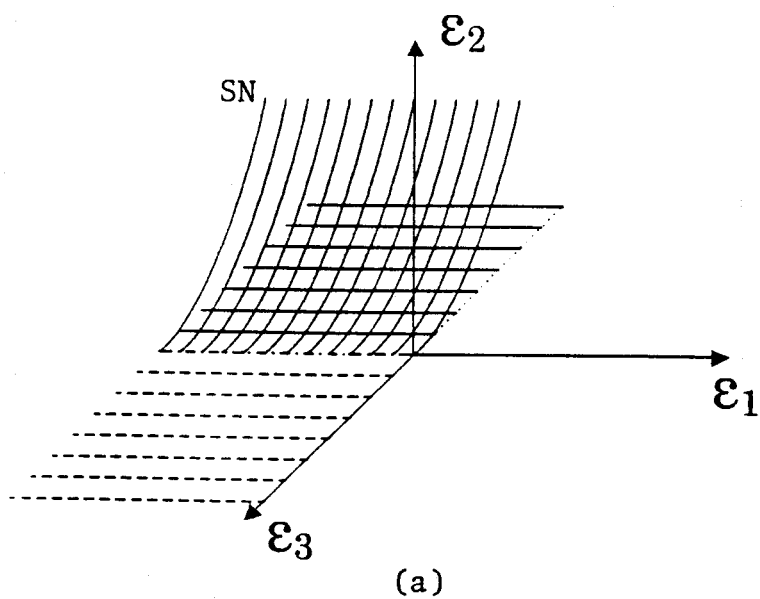


Figura 5.2.1: Bifurcación de Hopf del origen y su silla-nodo asociada ( $K = +1$ ) en: (a) el espacio de parámetros; (b) en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 < 0$ ); (c) en el plano  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 < 0$ ).

dando lugar a una bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada si  $\varepsilon_3 \neq 0$ . Así, de cada semieje  $\varepsilon_3$  ( $\varepsilon_3 \neq 0$ ) en el espacio de parámetros arrancan tres superficies dadas, en primera aproximación, por:  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ) para la bifurcación de Hopf de los otros equilibrios;  $\varepsilon_2 = -\frac{4}{5}\varepsilon_3\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ) para las conexiones homoclinas;  $\varepsilon_2 = -c\varepsilon_3\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ) donde  $c \approx 0.752$  (valor mínimo de la función  $R(e)$  que estudiamos en la sección 5.4), para la de silla–nodo de órbitas periódicas. De esta forma, si consideramos la intersección de dichas superficies con un plano  $\varepsilon_3 = \text{cte} \neq 0$  aparecerán las curvas de la figura 5.2.2, típicas de una bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada. En el caso  $\varepsilon_3 < 0$ , una bifurcación de Hopf subcrítica *HOP*, una conexión homoclina repulsiva *HOM* y una silla–nodo de órbitas periódicas *SN*. En el supuesto en el que  $\varepsilon_3 > 0$ , la bifurcación de Hopf es supercrítica *HOP* y la homoclina atractiva *HOM*. Hacemos notar el cambio de posición relativa entre las curvas al pasar de  $\varepsilon_3 < 0$  a  $\varepsilon_3 > 0$ .

En lo que sigue caracterizaremos con más detalle estas tres bifurcaciones que aparecen como consecuencia de la degeneración doble de la matriz de la linealización en el origen.

El estudio de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales dará por finalizada esta sección dedicada al análisis local del sistema (5.1.5) mientras que el objetivo del análisis semiglobal que comienza en la sección 5.3 será estudiar en detalle las conexiones homoclinas así como las bifurcaciones silla–nodo de órbitas periódicas.

A continuación, analizamos la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, es decir, los situados en  $(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ . Para ellos, la matriz de la linealización (5.2.1) adopta la forma:

$$J(\pm\sqrt{\varepsilon_1}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon_1 & \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + K\varepsilon_1^2 \end{pmatrix}$$

con lo que el polinomio característico es en nuestro caso:

$$\lambda^2 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + K\varepsilon_1^2)\lambda + 2\varepsilon_1 = 0$$

La bifurcación se dará para  $\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + K\varepsilon_1^2 = 0$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ). Para su estudio elegimos nuevamente a  $\varepsilon_2$  como parámetro de bifurcación,  $\eta = \varepsilon_2 - \varepsilon_{2c} = \varepsilon_2 -$

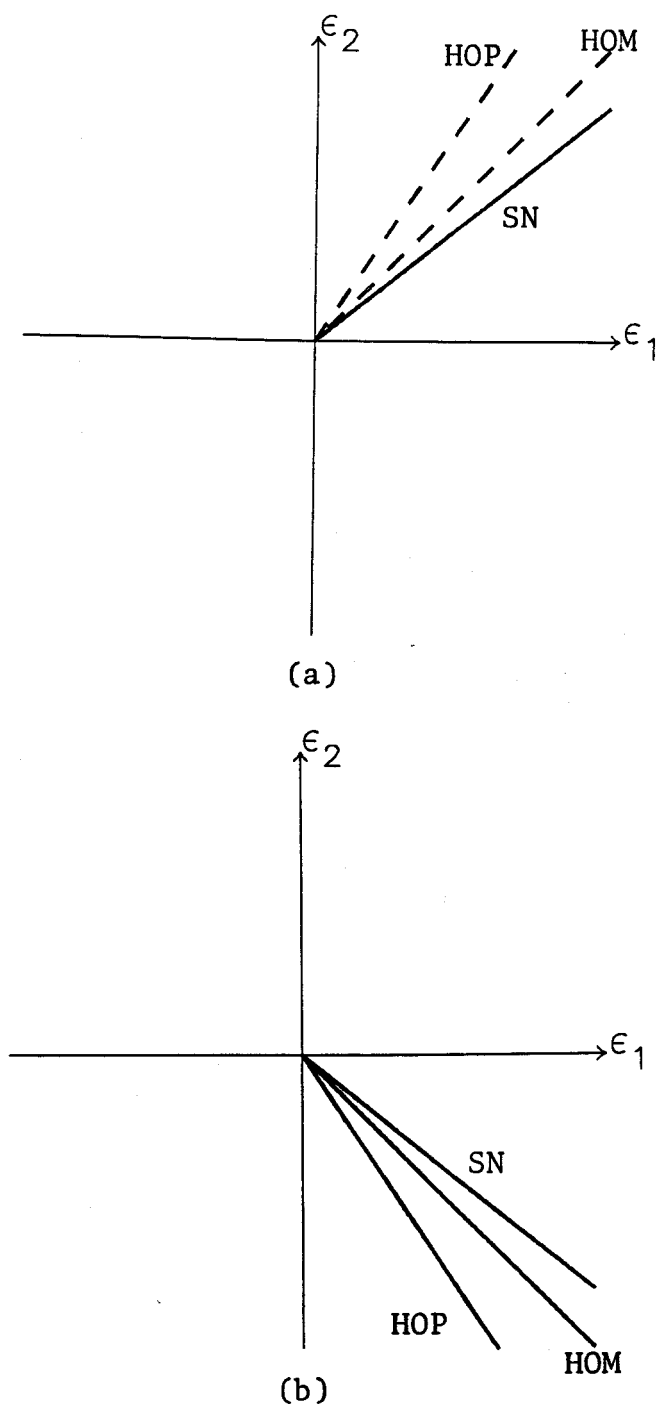


Figura 5.2.2: Bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$ :  
(a)  $\epsilon_3 < 0$ ; (b)  $\epsilon_3 > 0$ .



$(-\varepsilon_1\varepsilon_3 - K\varepsilon_1^2)$ , tras comprobar, de forma análoga a como hicimos para el origen, que se verifica la condición de transversalidad:

$$\operatorname{re} \left[ \frac{d\lambda}{d\eta}(\eta = 0) \right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

En lo que resta, nos limitamos a analizar el equilibrio  $(-\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ , siendo análogo el estudio para  $(+\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ . Comenzamos trasladando dicho equilibrio al origen mediante  $\bar{x} = x + \sqrt{\varepsilon_1}, \bar{y} = y$ . Teniendo en cuenta que  $\varepsilon_1 = \frac{\omega_0^2}{2}$  y que podemos suponer  $\eta = 0$ , nos basta escalar con  $\bar{x} = x^*, \bar{y} = -\omega_0 y^*$  para llegar a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{2}}x^{*2} - \sqrt{2}\omega_0(\varepsilon_3 + \omega_0^2 K)x^*y^* + \\ \frac{1}{\omega_0}x^{*3} + (\varepsilon_3 + 3\omega_0^2 K)x^{*2}y^* - \\ -2\sqrt{2}K\omega_0x^{*3}y^* + Kx^{*4}y^* \end{pmatrix}$$

Tenemos ya el sistema en la forma estándar para poder aplicar nuevamente el algoritmo que calcula la forma normal de la bifurcación de Hopf [35]. En este caso obtenemos, hasta orden cinco:

$$\dot{r} = \frac{\eta}{2}r - \frac{\varepsilon_3}{4}r^3 - \frac{K}{32}(4K^2\varepsilon_1^3 + 17)r^5 \quad (5.2.3)$$

Por tanto, la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, que se da para

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + K\varepsilon_1^2 = 0, \quad (\varepsilon_1 > 0) \quad (5.2.4)$$

es supercrítica para  $\varepsilon_3 > 0$  y subcrítica para  $\varepsilon_3 < 0$ . La degeneración que aparece para  $\varepsilon_3 = 0$  trae consigo la aparición de una bifurcación de silla-nodo de órbitas periódicas sobre la superficie definida, en primera aproximación, mediante

$$\varepsilon_2 = \frac{-\varepsilon_3^2}{K(4K^2\varepsilon_1^3 + 17)} - \varepsilon_1\varepsilon_3 - K\varepsilon_1^2 \quad (5.2.5)$$

en la zona en que se verifica

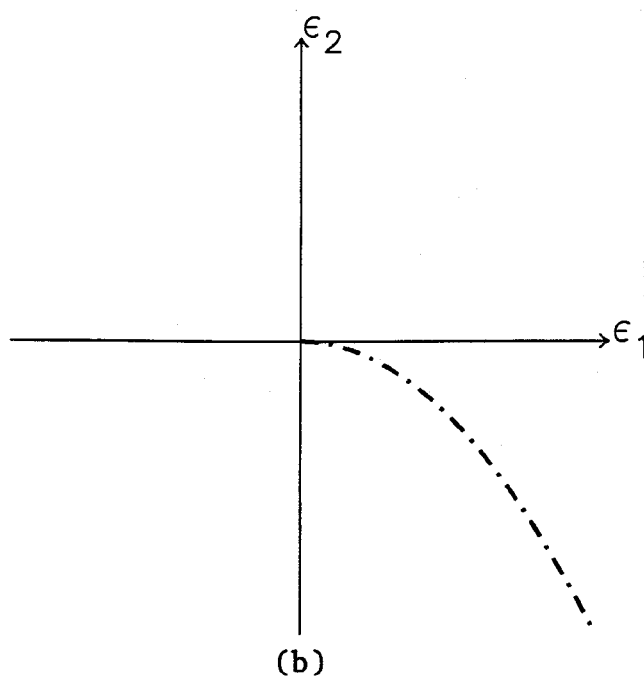
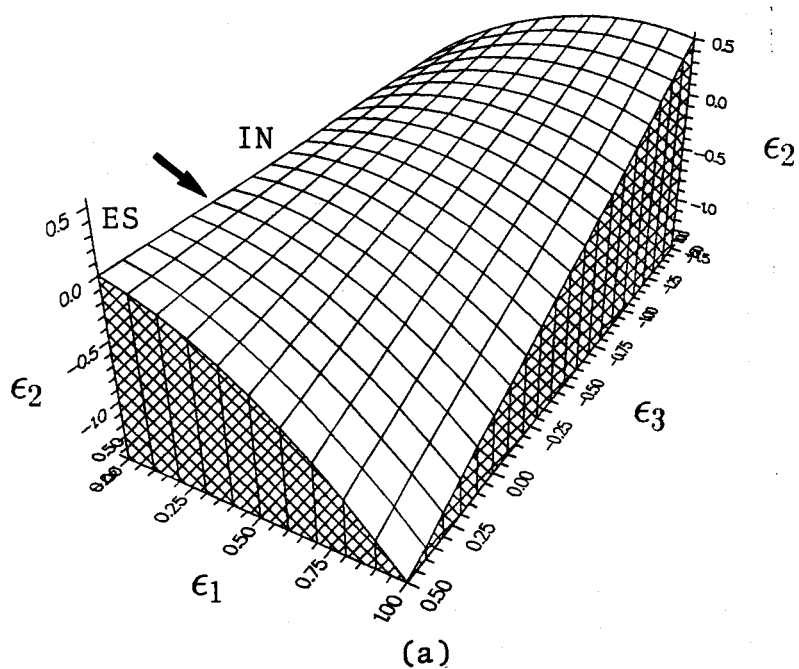


Figura 5.2.3: (a) Bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en el espacio de parámetros ( $K = +1$ ). (b) Curva de Hopf degenerada ( $\epsilon_3 = 0$ ).

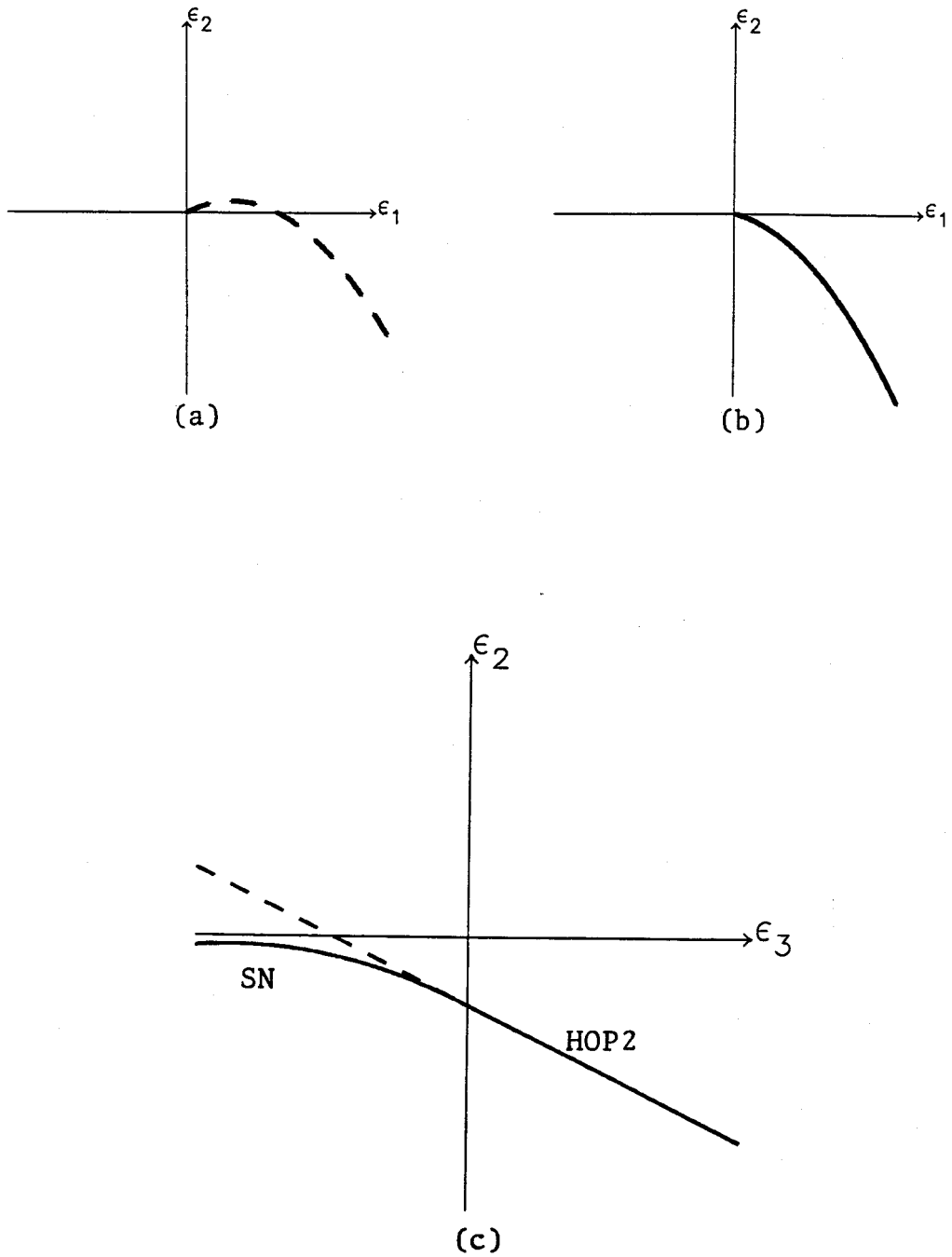


Figura 5.2.4: Bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales y su silla-nodo asociada ( $K = +1$ ) en: (a) el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 < 0$ ); (b) el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 > 0$ ); (c) el plano  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 > 0$ ).

$$\frac{\varepsilon_3}{K(4K^2\varepsilon_1^3 + 17)} < 0$$

o sea, para  $\varepsilon_3 < 0$  ( $\varepsilon_3 > 0$ ) si  $K = +1$  ( $K = -1$ ).

En la figura 5.2.3 aparece la superficie (5.2.4) en el espacio de parámetros para  $K = +1$ . La flecha indica la curva que separa la zona en la que la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales es subcrítica *IN* de la zona en la que es supercrítica *ES*. Asimismo hemos dibujado la curva de Hopf degenerada que corresponde a  $\varepsilon_3 = 0$ .

Ya en la figura 5.2.4 esquematizamos la intersección de dicha superficie con los planos  $\varepsilon_3 = \text{cte}$ , que resulta ser una porción de parábola:  $\varepsilon_2 = -K\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ) que cortará al eje  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_1^c = \frac{-\varepsilon_3}{K}$  (si  $\varepsilon_1^c > 0$ ). El extremo absoluto de esta semiparábola (máximo si  $K = +1$  y mínimo si  $K = -1$ ) aparecerá en  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1^c}{2}$  (si  $\varepsilon_1^c > 0$ ) o en  $\varepsilon_1 = 0$ . También en la figura 5.2.4 aparece esquematizada esta situación en el plano  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_2$  en el caso  $K = +1$ .

Dado que la bifurcación de Hopf no cambia de carácter en los planos  $\varepsilon_3 = \text{cte}$ , en ellos la bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas no parece ser consecuencia de la degeneración antes mencionada.

La intersección de la superficie (5.2.4) con los planos  $\varepsilon_1 = \text{cte} > 0$  da como resultado líneas rectas:  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1\varepsilon_3 - K\varepsilon_1^2$  en las que se aprecia el cambio de estabilidad de las órbitas que nacen en la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales *HOP2* y, por tanto, la curva de silla-nodo de órbitas periódicas *SN* que viene aproximada por la semiparábola definida en (5.2.5) junto con  $\varepsilon_1 = \text{cte} > 0$ , en la zona  $\varepsilon_3 < 0$  ( $\varepsilon_3 > 0$ ) si  $K = +1$  ( $K = -1$ ). Esta situación, en el caso  $K = +1$  está indicada en la figura 5.2.4.

### 5.3 Análisis Semiglobal

Hasta ahora hemos determinado mediante el análisis local la existencia de una bifurcación pitchfork, de dos bifurcaciones de Hopf (del origen y de los equilibrios no triviales respectivamente) y de las bifurcaciones silla-nodo de órbitas

periódicas asociadas con la degeneración que presentan las de Hopf. Asimismo hemos obtenido información de una bifurcación de codimensión dos: la de Takens-Bogdanov. Vamos, a partir de ahora, a investigar mediante un análisis semiglobal la complejidad del conjunto de bifurcaciones del sistema (5.1.5). Para ello usamos el siguiente escalado:

$$\begin{aligned}x &= \varepsilon^{\frac{1}{3}}X, & y &= \varepsilon^{\frac{2}{3}}Y \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon^{\frac{2}{3}}\mu_1, & \varepsilon_2 &= \varepsilon^{\frac{4}{3}}\mu_2, & \varepsilon_3 &= \varepsilon^{\frac{2}{3}}\mu_3\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

reescalando asimismo el tiempo mediante  $t \rightarrow \varepsilon^{\frac{1}{3}}t$ . De esta manera el sistema (5.1.5) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= \mu_1X - X^3 + \varepsilon(\mu_2Y + \mu_3X^2Y + KX^4Y)\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

es decir, consta de un campo vectorial hamiltoniano y de una pequeña perturbación. Comenzaremos nuestro análisis semiglobal con la búsqueda de conexiones homoclinas. Para ello, hacemos  $\mu_1 = 1$ , con lo que vamos a perturbar el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= X - X^3\end{aligned}\tag{5.3.3}$$

Este sistema procede de la función de Hamilton

$$H(X, Y) = \frac{Y^2}{2} - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4}$$

Las curvas  $H(X, Y) = \text{cte} = e$  determinan las órbitas de (5.3.3) donde  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$  especifica el nivel de energía del sistema hamiltoniano. Es fácil comprobar que (5.3.3) presenta tres equilibrios: un punto de silla en el origen y dos centros en  $(\pm 1, 0)$ . Dependiendo de los valores de  $e$  tenemos una órbita cerrada rodeando a los tres equilibrios ( $e > 0$ ) o un par de órbitas cerradas

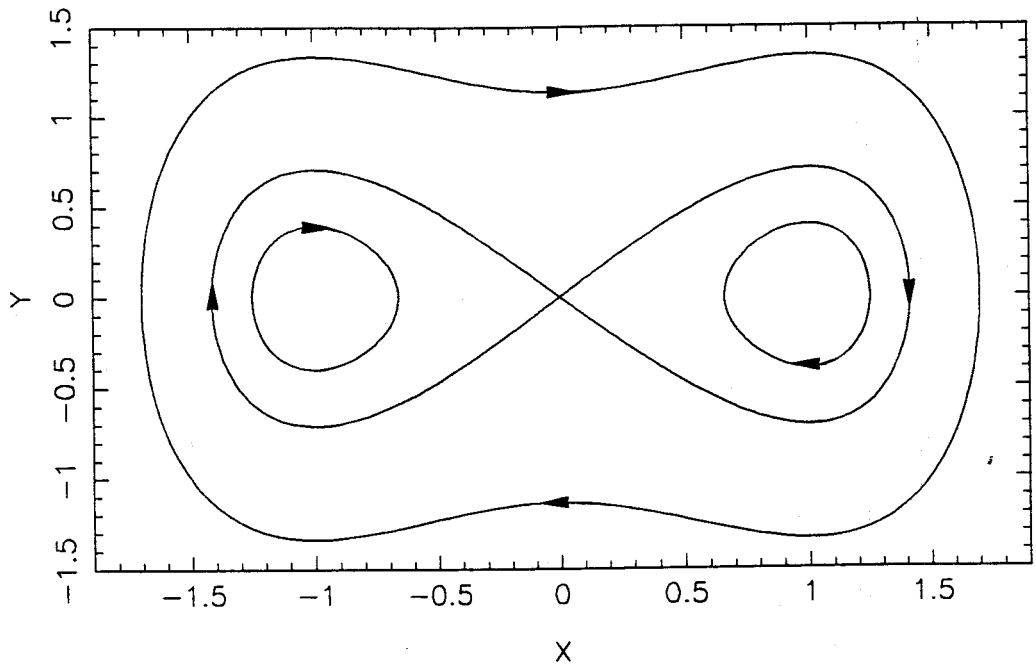


Figura 5.3.1: Retrato de fases del sistema hamiltoniano.

rodeando cada una a uno de los equilibrios no triviales ( $-\frac{1}{4} < e < 0$ ). Para  $e = -\frac{1}{4}$  obtenemos dichos equilibrios y para  $e = 0$  el punto de silla del origen y una órbita homoclina doble que conecta dicho punto consigo mismo y que se puede parametrizar mediante:

$$\begin{aligned} X(t) &= \pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t \\ Y(t) &= \pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t \operatorname{th} t \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

El retrato de fases de (5.3.3) aparece en la figura 5.3.1.

El método de Melnikov nos lleva, usando (5.3.4), a:

$$\begin{aligned} M(\mu_2, \mu_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \left[ \mu_2 Y(t) + \mu_3 X^2(t) Y(t) + K X^4(t) Y(t) \right] dt = \\ &= 2\mu_2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{th}^2 t dt + 4\mu_3 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 t \operatorname{th}^2 t dt + \\ &+ 8K \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^6 t \operatorname{th}^2 t dt = \frac{4}{3} \left( \mu_2 + \frac{4}{5} \mu_3 + \frac{32}{35} K \right) \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\operatorname{sech}^2 t = 1 - \operatorname{th}^2 t$  y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{th}^m t \, dt = \frac{\operatorname{th}^{m+1} t}{m+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{m+1}$$

Anulando  $M(\mu_2, \mu_3)$  obtenemos la siguiente curva de conexiones homoclinas en el plano  $\mu_3 - \mu_2$  ( $\mu_1 = 1$ ):

$$\mu_2 + \frac{4}{5}\mu_3 + \frac{32}{35}K = 0$$

Usando el escalado definido en (5.3.1) llegamos a la siguiente superficie en el espacio de parámetros:

$$\varepsilon_2 + \frac{4}{5}\varepsilon_1\varepsilon_3 + \frac{32}{35}K\varepsilon_1^2 = 0, \quad (\varepsilon_1 > 0) \quad (5.3.5)$$

que aparece dibujada en la figura 5.3.2 para  $K = +1$ .

Observamos la gran similitud entre la ecuación (5.2.4) que nos determina la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales y la primera aproximación que el método de Melnikov nos da para la superficie en la que existen órbitas homoclinas.

Dado que la traza de la matriz de la linealización en el origen vale  $\varepsilon_2$ , la homoclina pasará de ser repulsiva (si  $\varepsilon_2 > 0$ ) a atractiva (si  $\varepsilon_2 < 0$ ) apareciendo junto con la homoclina degenerada ( $\varepsilon_2 = 0$ ) —indicada con la flecha en la superficie de la figura 5.3.2— dos superficies de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas (vid. [60], [61]) que determinaremos también gracias a nuestro análisis semiglobal.

La curva de conexiones homoclinas degeneradas aparece también en la figura 5.3.2. Su ecuación, en primera aproximación, la obtenemos haciendo en (5.3.5)  $\varepsilon_2 = 0$ :

$$\varepsilon_3 + \frac{8}{7}K\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \quad (\varepsilon_1 > 0). \quad (5.3.6)$$

Si dibujamos en un plano  $\varepsilon_3 = \text{cte}$  (vid. figura 5.3.3), la curva de conexiones homoclinas vendrá dada por una semiparábola que cortará al eje  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_1^c = -\frac{7\varepsilon_3}{8K}$  (si  $\varepsilon_1^c > 0$ ). Su extremo absoluto (máximo si  $K = +1$ , mínimo si  $K = -1$ ) se alcanza en  $\varepsilon_1^m = \frac{\varepsilon_1^c}{2}$  (si  $\varepsilon_1^c > 0$ ) o en  $\varepsilon_1 = 0$ .

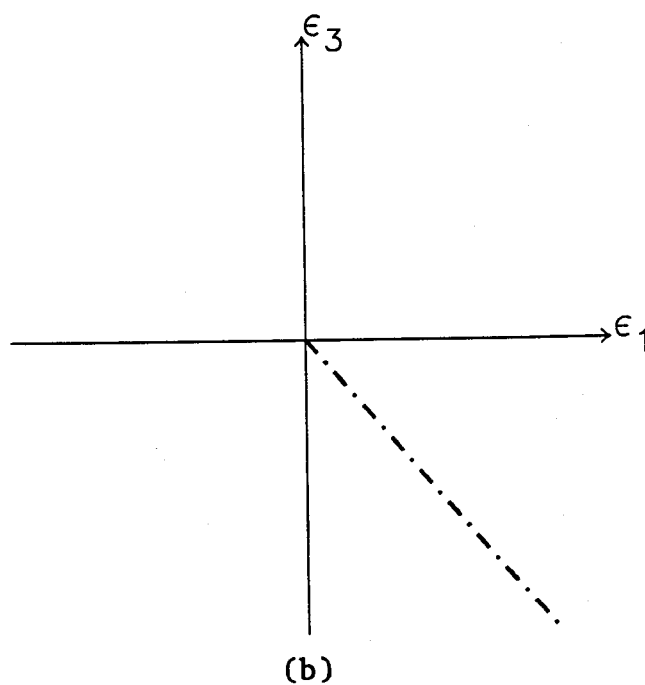
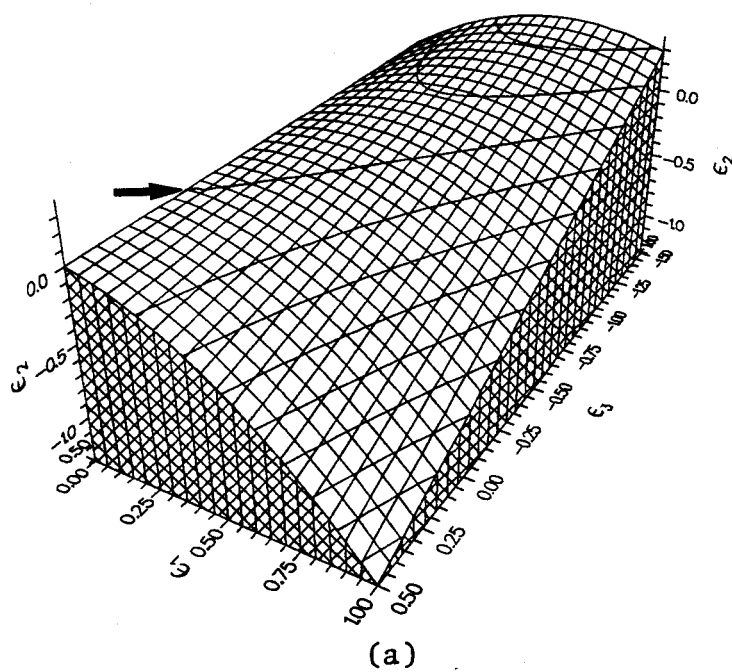


Figura 5.3.2: (a) Superficie de conexiones homoclinas en primera aproximación ( $K = +1$ ). (b) Curva de homoclinas degeneradas ( $\epsilon_2 = 0$ ).



En la figura 5.3.3 observamos, para  $K = +1$ , la semiparábola en los casos  $\varepsilon_3 < 0$  y  $\varepsilon_3 > 0$ . En la primera de ellas sí aparece su cambio de estabilidad.

Si consideramos la intersección de (5.3.5) con un plano  $\varepsilon_1 = \text{cte} > 0$  nos encontramos con una recta como la de la figura 5.3.3.

Pasamos a continuación a determinar las bifurcaciones silla-nodo mediante la aplicación del método de Melnikov. Nos centramos en primer lugar en el plano  $\mu_3 - \mu_2$  con  $\mu_1 = 1$ , considerando nuevamente el sistema (5.3.2) como perturbación del (5.3.3). La función de Melnikov es, en este caso:

$$M(e, \mu_2, \mu_3) = \mu_2 \int_0^{T(e)} Y^2(t) dt + \mu_3 \int_0^{T(e)} X^2(t) Y^2(t) dt + K \int_0^{T(e)} X^4(t) Y^2(t) dt \quad (5.3.7)$$

donde  $T(e)$  es el periodo de la órbita correspondiente al nivel de energía  $e$ . Si en vez de parametrizar las integrales de línea por el tiempo  $t$  lo hacemos con las variables espaciales, usando  $dt = \frac{dX}{Y}$ , podemos escribir (5.3.7) como:

$$M(e, \mu_2, \mu_3) = \mu_2 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_0 \cdot d\vec{\alpha} + \mu_3 \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{\alpha} + K \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_4 \cdot d\vec{\alpha} \quad (5.3.8)$$

donde las funciones vectoriales cuyas integrales de línea calculamos a lo largo de las órbitas cerradas  $\gamma(e)$  vienen definidas por  $\vec{\omega}_i(X, Y) = (X^i Y, 0)$ ,  $i = 0, 2, 4$ . El vector  $d\vec{\alpha}$  representa a  $(dX, dY)$ .

Si introducimos los campos:

$$\begin{aligned} \text{grad}(XY^3) &= (Y^3, 3XY^2) \quad y \\ \text{grad}(H(X, Y)) &= (-X + X^3, Y) \end{aligned}$$

es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_4(X, Y) &= \frac{4}{7} H(X, Y) \vec{\omega}_0(X, Y) + \frac{8}{7} \vec{\omega}_2(X, Y) - \frac{2}{7} \text{grad}(XY^3) + \\ &+ \frac{6}{7} XY \text{grad}(H(X, Y)). \end{aligned}$$

Si integramos esta ecuación a lo largo de  $\gamma(e)$  obtenemos

$$\oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_4 \cdot d\vec{\alpha} = \frac{4}{7} e \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_0 \cdot d\vec{\alpha} + \frac{8}{7} \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{\alpha} \quad (5.3.9)$$

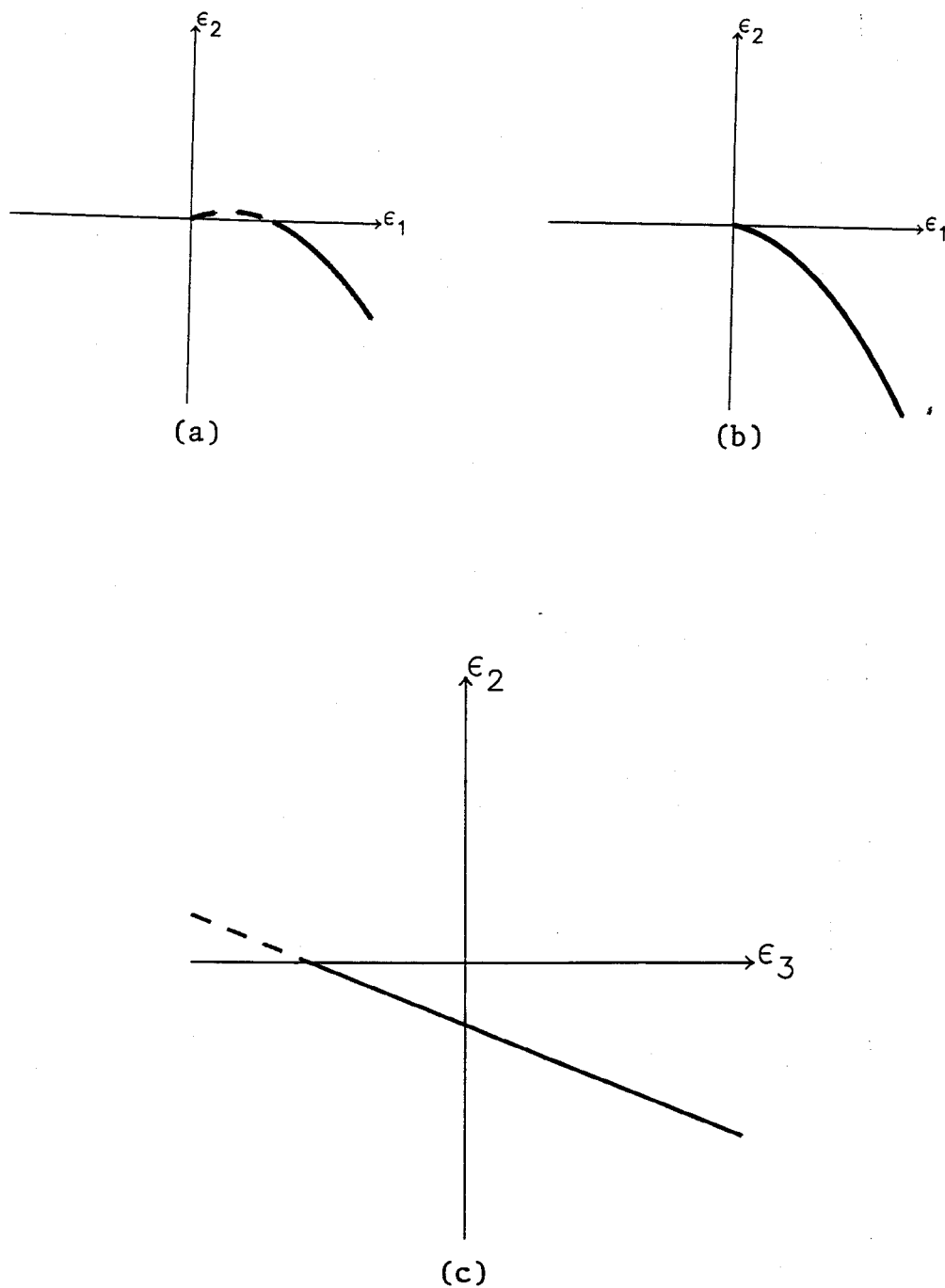


Figura 5.3.3: Órbitas homoclinas, para  $K = +1$ , en: (a) el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 < 0$ ); (b) el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 > 0$ ); (c) el plano  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 > 0$ ).

ya que  $H(X, Y) = e$  sobre la órbita  $\gamma(e)$  y

$$XY \operatorname{grad} (H(X, Y)) = \operatorname{grad} (XYH(X, Y)) - H(X, Y) \operatorname{grad} (X, Y).$$

De esta forma, la función de Melnikov (5.3.8) se convierte en

$$M(e, \mu_2, \mu_3) = \left( \mu_2 + \frac{4Ke}{7} \right) I_0(e) + \left( \mu_3 + \frac{8K}{7} \right) I_2(e) \quad (5.3.10)$$

donde

$$I_i(e) = \oint_{\gamma(e)} \vec{\omega}_i \cdot d\vec{\alpha}, \quad i = 0, 2. \quad (5.3.11)$$

Introducimos ahora la función

$$R(e) = \frac{I_2(e)}{I_0(e)} \quad (5.3.12)$$

con lo que (5.3.10) se puede escribir, puesto que  $I_0(e) \neq 0$ , como

$$M(e, \mu_2, \mu_3) = I_0(e) \left[ \left( \mu_2 + \frac{4Ke}{7} \right) + \left( \mu_3 + \frac{8K}{7} \right) R(e) \right] \quad (5.3.13)$$

De esta forma, la curva de bifurcaciones silla-nodo viene determinada por

$$\begin{aligned} G(e, \mu_2, \mu_3) &= \left( \mu_2 + \frac{4Ke}{7} \right) + \left( \mu_3 + \frac{8K}{7} \right) R(e) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial e}(e, \mu_2, \mu_3) &= \frac{4K}{7} + \left( \mu_3 + \frac{8K}{7} \right) R'(e) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

junto con la condición

$$\frac{\partial^2 G}{\partial e^2}(e, \mu_2, \mu_3) = \left( \mu_3 + \frac{8K}{7} \right) R''(e) = -\frac{4K}{7} \frac{R''(e)}{R'(e)} \neq 0 \quad (5.3.15)$$

Por medio de (5.3.14) llegamos a la siguiente parametrización,  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} \mu_3(e) &= -\frac{4K(2R'(e) + 1)}{7R'(e)} \\ \mu_2(e) &= \frac{4K(R(e) - eR'(e))}{7R'(e)} \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

válida siempre que se verifique (5.3.15).

Hacemos notar que la(s) curva(s) de bifurcaciones silla-nodo que aparezc(a)n tendrá(n) una interpretación geométrica sencilla: ser la envolvente de la familia de rectas en el plano  $\mu_3 - \mu_2$  definida por  $G(e, \mu_2, \mu_3) = 0$ .

Es evidente que para usar (5.3.16), junto con (5.3.15), necesitamos conocer en profundidad el comportamiento de la función  $R(e)$ , definida en (5.3.12), y de sus dos primeras derivadas. Prestaremos especial atención a los valores de  $e$  para los que  $R'(e)$  se anule o no esté acotada y para los que  $R''(e)$  se anule, puesto que ello indicará que se viola la condición (5.3.15) o que se anula el denominador en (5.3.16).

## 5.4 Estudio de la Función $R(e)$

Puesto que los niveles de energía  $e$  del sistema hamiltoniano (5.3.3) varían en el intervalo  $e \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$  éste será el dominio de definición de la función  $R(e)$ . Pero tenemos que considerar dos subintervalos por separado,  $[-\frac{1}{4}, 0)$  y  $(0, +\infty)$ , ya que el nivel  $e = 0$ , como ya dijimos, separa las órbitas de gran amplitud que rodean a los tres equilibrios y el par de órbitas de pequeña amplitud cada una de las cuales rodea a uno de los equilibrios no triviales situados en  $(\pm 1, 0)$ . Y, como veremos a continuación, las integrales de línea que aparecen en la definición de  $R(e)$  (5.3.12) toman forma distinta dependiendo del signo de  $e$ .

Consideraremos, en primer lugar, el caso de  $e > 0$ . Recordando las definiciones de  $I_0(e)$  e  $I_2(e)$  (5.3.11) y teniendo en cuenta que la integral de línea está calculada a lo largo de una órbita grande  $\gamma(e)$ , podemos escribir:

$$I_i(e) = 4 \int_0^c x^i y(x, e) dx, \quad i = 0, 2 \quad (5.4.1)$$

donde

$$y(x, e) = \sqrt{2e + x^2 - \frac{x^4}{2}} \quad (5.4.2)$$

y  $c$  es la única raíz real positiva de  $y(x, e) = 0$ . Factorizando  $y^2(x, e)$ :

$$y^2(x, e) = \frac{1}{2}(c^2 - x^2)(x^2 + \beta^2) \quad (5.4.3)$$

con

$$c^2 - \beta^2 = 2, \quad c^2 \beta^2 = 4e \quad (5.4.4)$$

llegamos a

$$I_0(e) = 4 \left[ \frac{1}{3} x y(x, e) \Big|_0^c + \frac{4e}{3} \int_0^c \frac{dx}{y(x, e)} + \frac{1}{3} \int_0^c \frac{x^2 dx}{y(x, e)} \right] \quad (5.4.5)$$

$$I_2(e) = 4 \left[ \left( \frac{1}{5} x^3 - \frac{2}{15} x \right) y(x, e) \Big|_0^c + \frac{4e}{15} \int_0^c \frac{dx}{y(x, e)} + \frac{4}{5} \left( e + \frac{1}{3} \right) \int_0^c \frac{x^2 dx}{y(x, e)} \right]$$

Puesto que  $y(c, e) = 0$ , debemos calcular las dos integrales que aparecen en (5.4.5). La primera de ellas, usando  $x = c \cos \varphi$ , se convierte en

$$\int_0^c \frac{dx}{y(x, e)} = \sqrt{\frac{2}{c^2 + \beta^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{2}{c^2 + \beta^2}} F(k) \quad (5.4.6)$$

donde  $F(k)$  es la integral elíptica completa de primera especie y su módulo  $k$ , que debe verificar  $0 \leq k < 1$ , vale en este caso

$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \beta^2}} \quad (5.4.7)$$

Para la otra integral de (5.4.5), haciendo también uso de  $x = c \cos \varphi$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{x^2 dx}{y(x, e)} &= \sqrt{c^2 + \beta^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \\ &- \beta^2 \sqrt{\frac{2}{c^2 + \beta^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \sqrt{2} \sqrt{c^2 + \beta^2} E(k) - \beta^2 \sqrt{\frac{2}{c^2 + \beta^2}} F(k) \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

siendo  $E(k)$  la integral elíptica completa de segunda especie.

De esta forma, introduciendo (5.4.6) y (5.4.8) en (5.4.5) llegamos a

$$I_0(e) = \frac{4\sqrt{2}(4e - \beta^2)}{3\sqrt{c^2 + \beta^2}} F(k) + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{c^2 + \beta^2}}{3} E(k) \quad (5.4.9)$$

$$I_2(e) = \frac{16}{15} \sqrt{\frac{2}{c^2 + \beta^2}} [e(1 - 3\beta^2) - \beta^2] F(k) + \frac{16\sqrt{2}}{5} \left( e + \frac{1}{3} \right) \sqrt{c^2 + \beta^2} E(k)$$

donde  $c, \beta$  y  $k$  dependen de  $e$  de la siguiente forma, teniendo en cuenta (5.4.4) y (5.4.7):

$$c^2 = 1 + \sqrt{1 + 4e}, \quad \beta^2 = \sqrt{1 + 4e} - 1, \quad k^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4e}}{2\sqrt{1 + 4e}} \quad (5.4.10)$$

Es inmediato comprobar que  $k(e)$  es una función monótona estrictamente decreciente en  $e \in (0, +\infty)$  y que tiende, respectivamente, a 1 y a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  en los extremos de dicho intervalo.

Como de (5.4.10) deducimos que la energía  $e$ , en términos del módulo  $k$ , puede escribirse como

$$e(k) = \frac{k^2(1 - k^2)}{(2k^2 - 1)^2} \quad (5.4.11)$$

donde  $k \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ , podemos expresar  $I_0$  e  $I_2$  como funciones de  $k$ , sustituyendo (5.4.11) en (5.4.10) y (5.4.9):

$$\begin{aligned} I_0(k) &= \frac{8[(1 - k^2)F(k) + (2k^2 - 1)E(k)]}{3(2k^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \\ I_2(k) &= \frac{16[(1 - k^2)(k^2 - 2)F(k) + 2(k^4 - k^2 + 1)E(k)]}{15(2k^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Estas expresiones de  $I_0$  e  $I_2$  resultan útiles para determinar el comportamiento de  $R(e)$  en los extremos del intervalo  $(0, +\infty)$ . Así:

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{R(e)}{\sqrt{e}} &= \lim_{k \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{I_2(k)}{I_0(k)\sqrt{e(k)}} = \frac{6}{5} \left[ \frac{2E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - 1 \right] = \\ &= \frac{3}{5} \frac{\pi}{F^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{48\pi^2}{5\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)} \approx 0.548336 \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

donde hemos tenido en cuenta la relación de Legendre:

$$E(k)F(k') + E(k')F(k) - F(k)F(k') = \frac{\pi}{2} \quad (5.4.14)$$

(siendo  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  el llamado módulo complementario) y que

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}}$$

en la que aparece la función  $\Gamma(\cdot)$  de Euler.

Comprobemos ahora que

$$\lim_{e \rightarrow 0^+} R(e) = \frac{4}{5} \quad (5.4.15)$$

Para ello, y a partir de (5.4.12), es inmediato que

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} I_0(e) &= \lim_{k \rightarrow 1} I_0(k) = \frac{8}{3} \\ \lim_{e \rightarrow 0^+} I_2(e) &= \lim_{k \rightarrow 1} I_2(k) = \frac{32}{15} \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

donde hemos usado que

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left[ F(k) - \log \frac{4}{k'} \right] = 0 \quad (5.4.17)$$

De (5.4.16) se deduce inmediatamente (5.4.15).

Para el caso  $-\frac{1}{4} < e < 0$ , las integrales de línea que aparecen en (5.3.11) están evaluadas a lo largo de una órbita cerrada pequeña  $\gamma(e)$ . Así:

$$I_i(e) = 2 \int_b^c x^i y(x, e) dx, \quad i = 0, 2 \quad (5.4.18)$$

donde  $y(x, e)$  aparece en (5.4.2) y, en este caso, al factorizar

$$y^2(x, e) = \frac{1}{2}(c^2 - x^2)(x^2 - b^2) \quad (5.4.19)$$

las raíces reales y positivas  $b$  y  $c$  ( $b < c$ ) de  $y(x, e) = 0$  satisfacen:

$$b^2 + c^2 = 2, \quad c^2 b^2 = -4e \quad (5.4.20)$$

Procediendo de forma idéntica a como hicimos en el caso  $e > 0$  para obtener (5.4.5) llegamos a:

$$I_0(e) = 2 \left[ \frac{1}{3} x y(x, e) \Big|_b^c + \frac{4e}{3} \int_b^c \frac{dx}{y(x, e)} + \frac{1}{3} \int_b^c \frac{x^2 dx}{y(x, e)} \right] \quad (5.4.21)$$

$$I_2(e) = 2 \left[ \left( \frac{1}{5} x^3 - \frac{2}{15} x \right) y(x, e) \Big|_b^c + \frac{4e}{15} \int_b^c \frac{dx}{y(x, e)} + \frac{4}{5} \left( e + \frac{1}{3} \right) \int_b^c \frac{x^2 dx}{y(x, e)} \right]$$

Como  $y(b, e) = y(c, e) = 0$ , basta calcular las dos integrales que aparecen en (5.4.21). Ambas se convierten, haciendo  $t^2 = \frac{c^2 - x^2}{c^2 - b^2}$  y después  $t = \sin \varphi$ , en

$$\int_b^c \frac{dx}{y(x, e)} = \frac{\sqrt{2}}{c} F(k), \quad \int_b^c \frac{x^2 dx}{y(x, e)} = \sqrt{2} c E(k) \quad (5.4.22)$$

donde el módulo  $k$  en este caso, viene dado por ( $0 \leq k < 1$ )

$$k = \frac{c^2 - b^2}{c^2} \quad (5.4.23)$$

Así, introduciendo (5.4.22) en (5.4.21) obtenemos

$$\begin{aligned} I_0(e) &= \frac{8\sqrt{2}e}{3c}F(k) + \frac{2\sqrt{2}}{3}cE(k) \\ I_2(e) &= \frac{8\sqrt{2}e}{15c}F(k) + \frac{8\sqrt{2}}{15}c(3e+1)E(k) \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

donde la dependencia de  $c$ ,  $b$  y  $k$  con respecto a  $e$  se obtiene de manera inmediata a partir de (5.4.20) y (5.4.23):

$$c^2 = 1 + \sqrt{1+4e}, \quad b^2 = 1 - \sqrt{1+4e}, \quad k^2 = \frac{2\sqrt{1+4e}}{1 + \sqrt{1+4e}} \quad (5.4.25)$$

Usando varias de las expresiones ya enunciadas comprobamos que

$$\lim_{e \rightarrow -\frac{1}{4}} R(e) = 1, \quad \lim_{e \rightarrow 0^-} R(e) = \frac{4}{5}$$

con lo que constatamos la continuidad de  $R(e)$  para  $e = 0$ .

Nos proponemos ahora comprobar que  $I_0(e)$  e  $I_2(e)$  verifican el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias [15], [16], [27]:

$$\begin{aligned} 3I_0(e) &= 4eI_0'(e) + I_2'(e) \\ 15I_2(e) &= 4eI_2'(e) + (4+12e)I_2'(e) \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

Nos centraremos en el caso  $e > 0$ . Si  $e < 0$  el mismo procedimiento nos conducirá también a (5.4.26). Partiendo de (5.4.1) y (5.4.2):

$$I_i(e) = 4 \int_0^c x^i y(x, e) dx = 4 \int_0^c \frac{x^i (2e + x^2 - \frac{x^4}{2})}{y(x, e)} dx, \quad i = 0, 2 \quad (5.4.27)$$

Derivando la anterior expresión obtenemos

$$I_i'(e) = 4 \int_0^c \frac{x^i dx}{y(x, e)}$$



con lo que

$$I_i(e) = 2eI'_i(e) + I'_{i+2}(e) - \frac{1}{2}I'_{i+4}(e) \quad (5.4.28)$$

Por otro lado, integrando por partes en (5.4.27):

$$I_i(e) = -\frac{1}{i+1} (I'_{i+2}(e) - I'_{i+4}(e)) \quad (5.4.29)$$

Eliminando  $I'_{i+4}(e)$  entre (5.4.28) y (5.4.29) obtenemos:

$$I_i(e) = \frac{4eI'_i(e) + I'_{i+2}(e)}{i+3}$$

Dándole los valores  $i = 0, 2$  y sustituyendo  $I'_4(e)$  por su valor obtenido al hacer  $i = 0$  en (5.4.28), obtenemos (5.4.26).

El sistema (5.4.26), válido tanto para  $e > 0$  como para  $e < 0$ , nos permite deducir que la función  $R(e)$  verifica la siguiente ecuación diferencial de Riccati:

$$4e(1+4e)R'(e) = 8eR(e) - 4e - 4R(e) + 5R^2(e) \quad (5.4.30)$$

Para ello, basta escribir

$$R'(e) = \frac{I'_2(e)}{I_0(e)} - R(e) \frac{I'_0(e)}{I_0(e)}$$

deduciendo, a partir de (5.4.26), que

$$\frac{I'_2(e)}{I_0(e)} = \frac{5R(e) - 1}{1 + 4e}, \quad \frac{I'_0(e)}{I_0(e)} = \frac{4 + 12e - 5R(e)}{4e(1 + 4e)}$$

Usando los valores de  $R(e)$  en los extremos de los intervalos  $(-\frac{1}{4}, 0)$  y  $(0, +\infty)$ , junto con algunas relaciones verificadas por las integrales elípticas [13], como por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{dE(k)}{dk} &= \frac{E(k) - F(k)}{k} \\ \frac{dF(k)}{dk} &= \frac{E(k) - (1 - k^2)^2 F(k)}{k(1 - k^2)^2} \end{aligned}$$

calculamos los siguientes límites para  $R'(e)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow -\frac{1}{4}} R'(e) &= -\frac{1}{2} & \lim_{e \rightarrow 0^-} R'(e) &= -\infty \\ \lim_{e \rightarrow 0^+} R'(e) &= -\infty & \lim_{e \rightarrow +\infty} R'(e) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

Nos proponemos a continuación enunciar cuatro lemas que determinan el comportamiento de  $R(e)$  y sus dos primeras derivadas en todo su intervalo de definición (los correspondientes a la primera derivada de  $R(e)$  son enunciados —y demostrados de forma distinta— por Carr [15]).

**Lema 5.4.1** *Existe un valor  $e_1 > 0$  tal que  $R'(e) < 0$  para  $0 < e < e_1$  y  $R'(e) > 0$  para  $e > e_1$ .*

DEMOSTRACIÓN:

Como  $\lim_{e \rightarrow 0^+} R'(e) = -\infty$  y  $\lim_{e \rightarrow +\infty} R'(e) = +\infty$  basta demostrar que si  $R'(e_1) = 0$ , entonces  $R''(e_1) > 0$ , es decir, que el mínimo —que debe existir por la continuidad de  $R(e)$ — es único.

Sabemos que  $R(e)$  verifica la ecuación diferencial (5.4.30). Derivándola llegamos a:

$$2e(1 + 4e)R''(e) = (5R(e) - 4 - 12e)R'(e) + 4R(e) - 2 \quad (5.4.32)$$

Si  $R'(e_1) = 0$  las ecuaciones (5.4.30) y (5.4.32) se convierten respectivamente en

$$5R^2(e_1) - 4R(e_1) - 4e_1 + 8e_1R(e_1) = 0 \quad (5.4.33)$$

$$2e_1(1 + 4e_1)R''(e_1) = 4R(e_1) - 2 \quad (5.4.34)$$

Combinando (5.4.33) y (5.4.34) obtenemos

$$\text{sig } [R''(e_1)] = \text{sig } [4R(e_1) - 2] = \text{sig } \left[ \frac{R(e_1)(4 - 5R(e_1))}{e_1} \right]$$

Luego  $R''(e_1) > 0$  si  $\frac{1}{2} < R(e_1) < \frac{4}{5}$ . Pero esto es evidente al despejar  $e_1$  de (5.4.33):

$$e_1 = \frac{R(e_1)(5R(e_1) - 4)}{4(1 - 2R(e_1))}$$

y tener en cuenta que tanto  $e_1$  como  $R(e_1)$  son positivos. ■

Acabamos de demostrar que en  $e_1$  la función  $R(e)$ ,  $e \in (0, +\infty)$ , alcanza su mínimo absoluto obteniendo además analíticamente una cota para dicho valor:

$$\frac{1}{2} < R(e_1) < \frac{4}{5}$$

**Lema 5.4.2** Si  $-\frac{1}{4} < e < 0$ , entonces  $R'(e) < 0$ .

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que  $R'(e)$  no se puede anular pues se llegaría a una contradicción. Como también en el caso  $-\frac{1}{4} < e < 0$  son válidas (5.4.30) y (5.4.32), al suponer en ellas  $R'(e_0) = 0$ ,  $-\frac{1}{4} < e_0 < 0$ , deben verificarse simultáneamente:

$$e_0 = \frac{R(e_0)[5R(e_0) - 4]}{4(1 - 2R(e_0))} \quad (5.4.35)$$

y

$$4e_0(1 + 4e_0)R''(e_0) = 8R(e_0) - 4 = \frac{R(e_0)[4 - 5R(e_0)]}{e_0} \quad (5.4.36)$$

De (5.4.35) obtenemos que, o bien  $0 < R(e_0) < \frac{1}{2}$ , o bien  $\frac{4}{5} < R(e_0) < 1$ .

Si se diera la primera posibilidad, de (5.4.36) deduciríamos que  $R''(e_0) > 0$ , con lo que  $R(e)$  alcanzaría un mínimo local en  $e_0$ . Pero esta situación (ausencia de máximos locales y existencia de un mínimo en el que la función verifica  $0 < R(e_0) < \frac{1}{2}$ ) sería incompatible con que

$$\lim_{e \rightarrow 0^-} R(e) = \frac{4}{5}, \quad \lim_{e \rightarrow 0^-} R'(e) = -\infty$$

Asimismo, si se verificara  $\frac{4}{5} < R(e_0) < 1$ , de (5.4.36) deduciríamos que  $R''(e_0) < 0$ , es decir,  $R(e)$  alcanzaría un máximo local en  $e_0$ . Pero nuevamente esta situación (ausencia de mínimos locales y existencia de un máximo en el que la función verifica  $\frac{4}{5} < R(e_0) < 1$ ) sería incompatible con que

$$\lim_{e \rightarrow -\frac{1}{4}} R(e) = 1, \quad \lim_{e \rightarrow 0^-} R(e) = \frac{4}{5}$$

Por tanto,  $R'(e)$  no se anula en  $-\frac{1}{4} < e < 0$  y, al ser continua, mantiene siempre el signo que tiene en las proximidades de  $-\frac{1}{4}$ :

$$\lim_{e \rightarrow -\frac{1}{4}} R'(e) = -\frac{1}{2} < 0$$

Como consecuencia inmediata del lema 5.4.2, sabiendo que

$$\lim_{e \rightarrow -\frac{1}{4}} R(e) = 1, \quad \lim_{e \rightarrow 0^-} R(e) = \frac{4}{5}$$

deducimos que  $\frac{4}{5} < R(e) < 1$  para  $-\frac{1}{4} < e < 0$ .

**Lema 5.4.3** *Existe un valor  $e_2 > 0$  tal que  $R''(e) > 0$  si  $0 < e < e_2$  y  $R''(e) < 0$  si  $e > e_2$ . Además,  $e_2 > e_1$ .*

DEMOSTRACIÓN:

La existencia de  $e_2$  está garantizada por el hecho de que  $R'(e) > 0$  si  $e > e_1$  y que  $\lim_{e \rightarrow +\infty} R'(e) = 0$ ; por tanto, existe  $e_2 > e_1$  tal que  $R''(e_2) = 0$ .

Veamos que existe un único valor de  $e \in (0, +\infty)$  en el que se anula la derivada segunda de  $R(e)$ .

Derivando (5.4.32), obtenemos

$$2e(1+4e)R'''(e) = R''(e)[5R(e) - 6 - 28e] + R'(e)[5R'(e) - 8] \quad (5.4.37)$$

que se convierte, al suponer  $R''(e_2) = 0$ , en:

$$2e_2(1+4e_2)R'''(e_2) = R'(e_2)[5R'(e_2) - 8] \quad (5.4.38)$$

Si en (5.4.32) también suponemos  $R''(e_2) = 0$  llegamos a

$$R'(e_2) = \frac{4R(e_2) - 2}{12e_2 + 4 - 5R(e_2)} \quad (5.4.39)$$

Al sustituir (5.4.39) en (5.4.38) obtenemos:

$$R'''(e_2) = \frac{6[2R(e_2) - 1][10R(e_2) - 16e_2 - 7]}{e_2(1 + 4e_2)[12e_2 + 4 - 5R(e_2)]^2} \quad (5.4.40)$$

Como  $R(e_2) > \frac{1}{2}$  (acotación obtenida en la demostración del lema 5.4.1),  $e_2 > 0$  y  $12e_2 + 4 - 5R(e_2) \neq 0$  (de (5.4.39) y del lema 5.4.1), de (5.4.40) deducimos que

$$\text{sig } [R'''(e_2)] = \text{sig } [10R(e_2) - 16e_2 - 7] \quad (5.4.41)$$

En lo que resta de demostración, probaremos que

$$\text{sig } [10R(e_2) - 16e_2 - 7] = -1 \quad (5.4.42)$$

y, por tanto, no pueden existir mínimos relativos de  $R'(e)$ ,  $e \in (0, +\infty)$ , lo que implica que sólo puede existir un máximo local para  $R'(e)$ : el que alcanza en  $e = e_2$ .

Probar (5.4.42) es demostrar que cuando

$$R''(e_2) = \frac{R'(e_2)[5R(e_2) - 4 - 12e_2] + 4R(e_2) - 2}{2e_2[1 + 4e_2]} = 0 \quad (5.4.43)$$

—expresión que obtenemos de (5.4.32)— se verifica

$$10R(e_2) - 16e_2 - 7 < 0 \quad (5.4.44)$$

Usando la expresión de  $R'(e_2)$  que nos da (5.4.30) y sustituyéndola en (5.4.43) obtenemos:

$$R''(e_2) = \frac{\{ [8e_2R(e_2) - 4e_2 - 4R(e_2) + 5R^2(e_2)] [5R(e_2) - 4 - 12e_2] + 8e_2(1 + 4e_2)[2R(e_2) - 1] \}}{8[e_2(1 + 4e_2)]^2} = 0 \quad (5.4.45)$$

Al ser  $e_2 > 0$ , queremos demostrar que cuando el numerador de (5.4.45) se anula, se verifica (5.4.44). Desarrollando dicho numerador, obtenemos:

$$25R^3(e_2) - 20e_2R^2(e_2) - 32e_2^2R(e_2) - 40R^2(e_2) + 12e_2R(e_2) + 16e_2^2 + 16R(e_2) + 8e_2 = 0$$

que se puede escribir como

$$\varphi_1(R)e_2^2 + \varphi_2(R)e_2 + \varphi_3(R) = 0 \quad (5.4.46)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1(R) &= 32 \left( R - \frac{1}{2} \right) \\ \varphi_2(R) &= 4 (5R^2 - 3R - 2) \end{aligned} \quad (5.4.47)$$

$$\varphi_3(R) = -25R \left( R - \frac{4}{5} \right)^2 \quad (5.4.48)$$

están evaluadas en  $R(e_2)$ .

Se trata de demostrar que  $e_2 - \Psi(R) > 0$  cuando se verifica (5.4.46), siendo

$$\Psi(R) = \frac{10R - 7}{16} \quad (5.4.49)$$

evaluada en  $R(e_2)$ .

Manipulando vemos que (5.4.46) se puede escribir como

$$\varphi_1(R) [e_2 - \Psi(R)] e_2 + [\varphi_1(R)\Psi(R) + \varphi_2(R)] e_2 + \varphi_3(R) = 0$$

que usando (5.4.47) se convierte en

$$\varphi_1(R) [e_2 - \Psi(R)] e_2 = 25R(e_2) \left[ R(e_2) - \frac{4}{5} \right]^2 - \varphi_4(R)e_2 \quad (5.4.50)$$

siendo

$$\varphi_4(R) = 40R^2 - 36R - 1$$

evaluada en  $R(e_2)$ .

Pero, así mismo, (5.4.46) equivale a:

$$\begin{aligned} &[\varphi_1(R)e_2 + \varphi_1(R)\Psi(R) + \varphi_2(R)] [e - \Psi(R)] + \varphi_1(R)\Psi^2(R) + \\ &+ \varphi_2(R)\Psi(R) + \varphi_3(R) = 0 \end{aligned}$$

que usando nuevamente (5.4.47) lleva a:

$$[\varphi_1(R)e_2 + \varphi_4(R)] [e_2 - \Psi(R)] = \frac{7}{8} \left( R(e_2) - \frac{1}{2} \right) \quad (5.4.51)$$

Veamos que, por un simple análisis de los signos de los factores que aparecen en (5.4.50) y (5.4.51), podemos concluir que  $e_2 - \Psi(R) > 0$ . Para ello sabemos que  $e_2 > 0$ ,  $R(e_2) > \frac{1}{2}$ ,  $\varphi_1(R) > 0$ . Además, es inmediato comprobar que  $\text{sig} [\varphi_4(R)] = -1, 0, +1$  si respectivamente  $R \in (\frac{1}{2}, R_+)$ ,  $R = R_+$ ,  $R \in (R_+, +\infty)$  donde  $R_+ = \frac{9 + \sqrt{91}}{20}$ .

Así, de (5.4.50) deducimos que  $\text{sig} [e_2 - \Psi(R)] = +1$  si  $R(e_2) \leq R_+$  y de (5.4.51) que  $\text{sig} [e_2 - \Psi(R)] = +1$  cuando  $R(e_2) \geq R_+$ .

Por tanto, al verificarse (5.4.44),  $\text{sig} [R'''(e_2)] = -1$  lo que conduce a que existe un único valor  $e_2 > 0$ ,  $e_2 > e_1$ , tal que  $R''(e_2) = 0$ . ■

Puesto que  $R'''(e_2) < 0$ , de (5.4.38) deducimos que  $10R'(e_2) - 16 < 0$  de donde obtenemos una cota para el máximo absoluto de  $R'(e)$ :

$$R'(e_2) < \frac{8}{5}$$

**Lema 5.4.4** Si  $-\frac{1}{4} < e < 0$ , entonces  $R''(e) < 0$ .

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a demostrar que no existe ningún valor  $e_0$ ,  $-\frac{1}{4} < e_0 < 0$ , tal que  $R''(e_0) = 0$ . Si evaluamos (5.4.37) para  $e = e_0$ , usando el lema 5.4.2, llegamos a que  $R'''(e_0) < 0$ , con lo que  $R'(e)$  tendría un máximo relativo en  $e_0$  ( $R'(e)$  no puede tener mínimos relativos).

Si demostramos que  $R'(e_0) < -\frac{1}{2}$ , no podrá haber tal máximo, dado que

$$\lim_{e \rightarrow -\frac{1}{4}} R'(e) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{e \rightarrow 0^-} R'(e) = -\infty$$

Probemos, por tanto, para concluir la demostración, que  $R'(e_0) < -\frac{1}{2}$ .

Evaluando (5.4.32) en  $e = e_0$ , obtenemos que la desigualdad

$$R'(e_0) = \frac{4R(e_0) - 2}{12e_0 + 4 - 5R(e_0)} < -\frac{1}{2}$$

es equivalente a

$$8R(e_0) + 12e_0 - 5 > 0$$

cuando  $R''(e_0) = 0$ . Es decir, queremos demostrar que  $e_0 - \xi(R) > 0$  cuando se verifica (vid. (5.4.46) en la demostración del lema 5.4.3):

$$\varphi_1(R)e_0^2 + \varphi_2(R)e_0 + \varphi_3(R) = 0 \quad (5.4.52)$$

donde  $\varphi_1(R), \varphi_2(R), \varphi_3(R)$  son las funciones introducidas en (5.4.47) evaluadas en esta ocasión en  $e = e_0$ , y

$$\xi(R) = \frac{5 - 8R}{12}$$

evaluada también en  $e = e_0$ .

Es fácil comprobar que (5.4.52) se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\varphi_1(R) [e_0 - \xi(R)]^2 + [2\varphi_1(R)\xi(R) + \varphi_2(R)] [e_0 - \xi(R)] + \\ &[\varphi_1(R)\xi^2(R) + \varphi_2(R)\xi(R) + \varphi_3(R)] = 0 \end{aligned}$$

que se convierte, usando las expresiones de (5.4.47), en

$$\varphi_5(R) [e_0 - \xi(R)] = \varphi_1(R) [e_0 - \xi(R)]^2 + \varphi_6(R) \quad (5.4.53)$$

donde

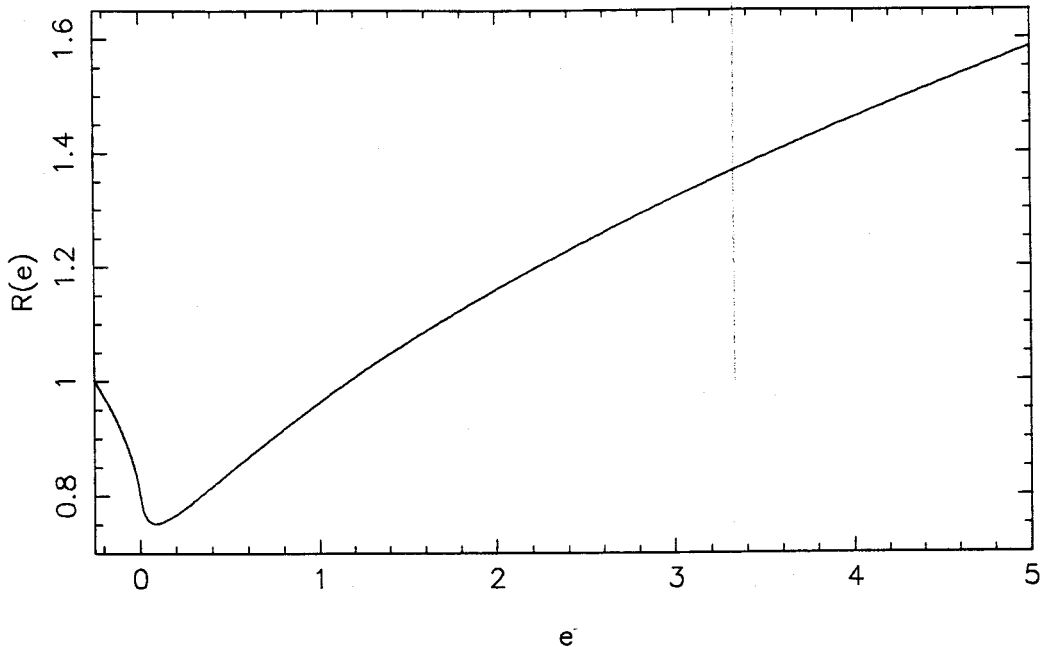
$$\begin{aligned} \varphi_5(R) &= \frac{4}{3} [17R^2 - 27R + 16] \\ \varphi_6(R) &= \frac{1}{9}(R - 1) [-217R^2 + 66R + 55] \end{aligned} \quad (5.4.54)$$

están evaluadas en  $R(e_0)$ .

Vamos a ver que analizando los signos de los factores que aparecen en (5.4.53) se concluye que  $\text{sig} [e_0 - \xi(R)] = +1$ , o sea,  $8R(e_0) + 12e_0 - 5 > 0$  y, por tanto,  $R'(e_0) < -\frac{1}{2}$ .

En el análisis de signos basta tener en cuenta que  $\varphi_5(R) > 0$  para cualquier  $R(e)$ ,  $\varphi_6(R) > 0$  para  $\frac{4}{5} < R(e) < 1$  (rango de valores en los que se mueve  $R$  para  $e$  negativo) y  $\varphi_1(R) > 0$  puesto que  $R(e) > \frac{1}{2}$ .

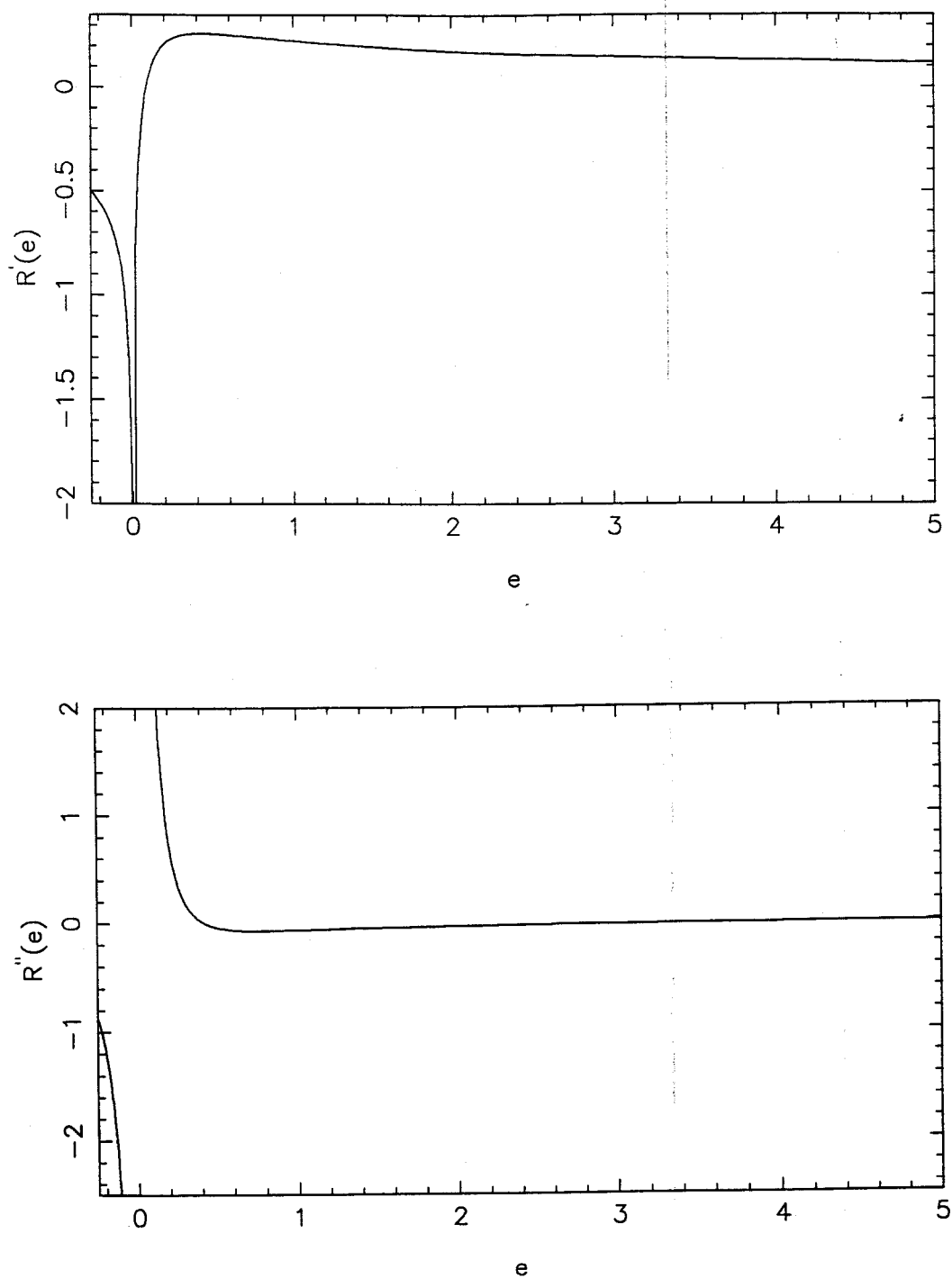


Figura 5.4.1: Gráfica de la función  $R(e)$ .

Puesto que hemos probado que el signo de  $R''(e)$  es constante para  $-\frac{1}{4} < e < 0$ , teniendo en cuenta los valores de los límites de  $R(e)$  y  $R'(e)$  en los extremos del intervalo, concluimos que  $R''(e) < 0$  si  $-\frac{1}{4} < e < 0$ . ■

Aunque la función  $R(e)$  ha sido ampliamente estudiada y utilizada ([15], [65], [51]), como consecuencia de su aparición en el análisis de la bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada, en ninguno de los trabajos consultados se evidencian las propiedades de su derivada segunda (vid., por ejemplo, la figura 7.3.8 de [51] en la que no aparece reflejada ni la pendiente infinita en el origen ni el cambio de curvatura para  $e = e_2$ ). Si bien dichas propiedades no influyen en el caso no degenerado, sí juegan un papel fundamental, como veremos en la sección siguiente, en el caso degenerado que estamos analizando.

Una vez que hemos determinado analíticamente el comportamiento de  $R(e)$  y sus dos primeras derivadas, pasamos a obtener su representación gráfica evaluando

Figura 5.4.2: Derivadas primera y segunda de la función  $R(e)$ .

numéricamente las integrales elípticas completas de primera y segunda especie que aparecen en su definición mediante las correspondientes funciones DELK y DELE de la biblioteca de subrutinas matemáticas IMSL. Los resultados obtenidos aparecen en las figuras 5.4.1 y 5.4.2.

## 5.5 Continuación del Análisis Semiglobal

En el estudio de la función  $R(e)$  y sus dos primeras derivadas han aparecido tres valores importantes de  $e$  que dividen el dominio de definición de  $R(e)$  en cuatro subintervalos. Estos tres valores son:

- (i)  $e = 0$ , en el que  $R'(e)$  no está acotada;
- (ii)  $e = e_1$ , en el que se anula  $R'(e)$ ;
- (iii)  $e = e_2$ , en el que se anula  $R''(e)$ .

Al usar la parametrización dada en (5.3.16) obtenemos cuatro curvas distintas (vid. figura 5.5.1) al movernos a lo largo de esos cuatro subintervalos. Así, cuando  $-\frac{1}{4} < e < 0$ , la bifurcación silla-nodo es de órbitas pequeñas. Comienza dicha curva  $SNH2$  en el punto en el que la bifurcación de Hopf cambia de estabilidad ( $\mu_3 = 0$ ) —curva aproximada, según el análisis local, por (5.2.5)— y se une con la curva de silla-nodo de órbitas pequeñas  $SN1$  que aparece como consecuencia del cambio de estabilidad de la órbita homoclina ( $\mu_2 = 0$ ). Cuando  $e \in (0, e_1)$  la parametrización (5.3.16) nos proporciona la curva  $SN2$  que corresponde a una bifurcación silla-nodo de órbitas grandes y que surge, junto con  $SN1$ , como consecuencia del cambio de estabilidad de la homoclina.

Si  $e \in (e_1, e_2)$ , entonces obtenemos otra curva  $SN3$  correspondiente —al igual que  $SN2$ — a órbitas grandes que colapsa en una cúspide (obtenida para  $e = e_2$ ) con otra curva  $SN4$  de silla-nodo de órbitas grandes.

Cuando estudiemos a continuación el plano de parámetros  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_2$  tendremos una visión más global de las superficies de silla-nodo y, en particular, aparecerá bajo otra perspectiva la cúspide en la que colapsan  $SN3$  y  $SN4$ .

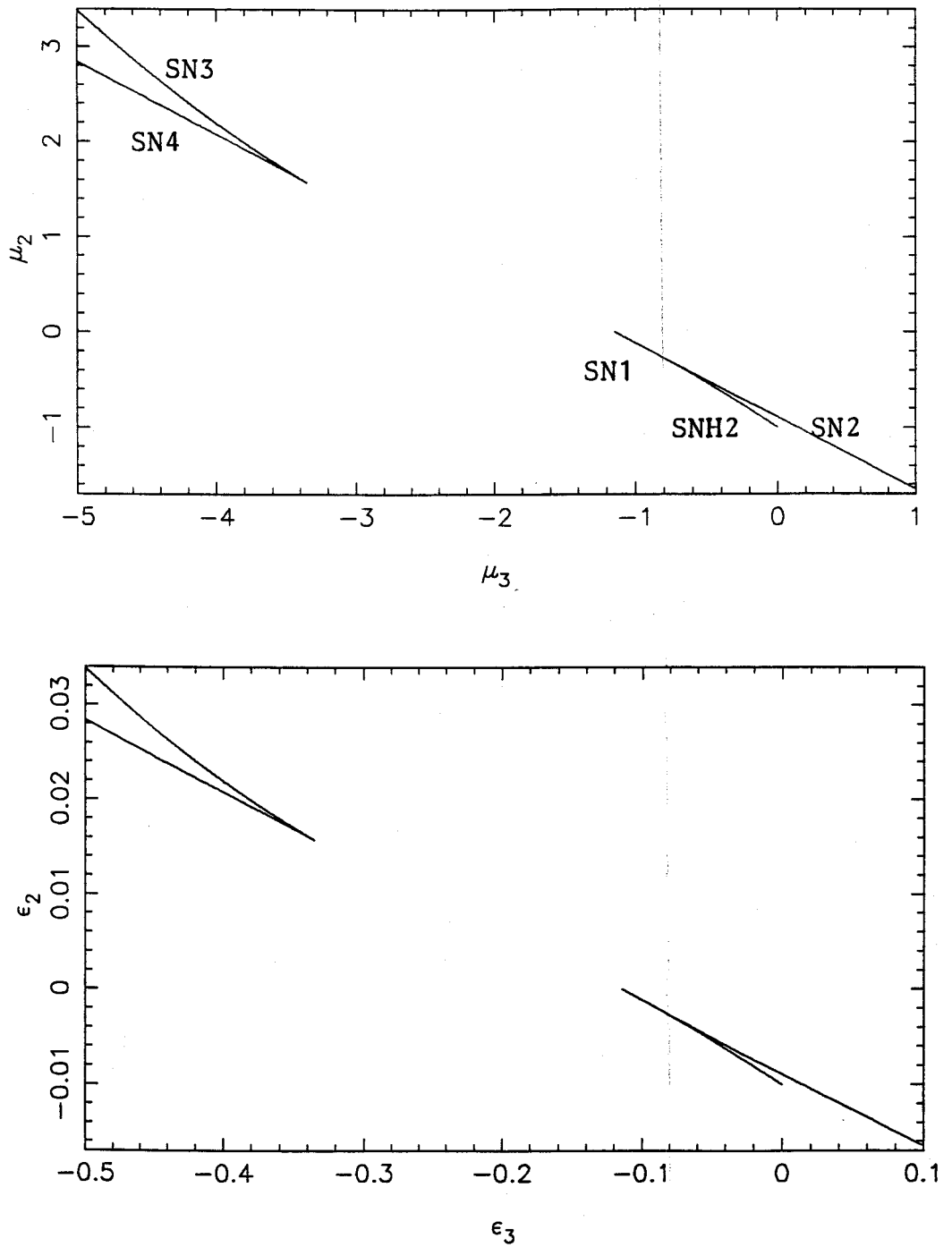


Figura 5.5.1: Curvas de bifurcaciones silla-nodo ( $K = +1$ ) en: (a) el plano  $\mu_3$ - $\mu_2$ ; (b) el plano  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 = 0.1$ ).

Para estudiar las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas en el plano  $\mu_1-\mu_2$ , consideramos el sistema (5.3.2) haciendo  $\mu_3 = -K$ , es decir:

$$\begin{aligned} X' &= Y \\ Y' &= \mu_1 X - X^3 + \varepsilon (\mu_2 Y - K X^2 Y + K X^4 Y) \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

El sistema hamiltoniano que vamos a perturbar (coincide con (5.3.3) para  $\mu_1 = 1$ ) es, por tanto:

$$\begin{aligned} X' &= Y \\ Y' &= \mu_1 X - X^3 \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

que proviene de la función de Hamilton

$$H_{\mu_1}(X, Y) = \frac{Y^2}{2} - \mu_1 \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4}$$

Las curvas  $H_{\mu_1}(X, Y) = \text{cte} = e$  determinan las órbitas de (5.5.2) donde el nivel de energía del sistema hamiltoniano queda especificado por el valor de  $e$ , de tal forma que  $e \in \left[ \frac{-\mu_1^2}{4}, +\infty \right)$  si  $\mu_1 \geq 0$  y  $e \in [0, +\infty)$  si  $\mu_1 \leq 0$ .

Es inmediato verificar que (5.5.2) presenta un equilibrio (tipo centro) en el origen para valores de  $\mu_1 < 0$  y que tras experimentar para  $\mu_1 = 0$  una bifurcación pitchfork se convierte en tipo silla apareciendo además dos equilibrios (centros) situados en  $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$ .

De esta manera, para valores de  $\mu_1 < 0$  existirán órbitas periódicas rodeando al origen, mientras que para valores de  $\mu_1 > 0$  existirán tanto órbitas grandes (rodeando a los tres equilibrios) correspondientes a  $e > 0$  como pares de órbitas pequeñas (cada una rodea a uno de los equilibrios no triviales) para  $-\frac{\mu_1^2}{4} < e < 0$ . Para  $e = 0$  ( $\mu_1 > 0$ ) aparecen el punto de silla del origen y una órbita homoclina doble que conecta dicho equilibrio, mientras que para  $e = -\frac{\mu_1^2}{4}$  aparecen los equilibrios no triviales.

El método de Melnikov nos conduce a la función

$$\begin{aligned} M(e, \mu_1, \mu_2) &= \mu_2 \int_0^{T(e, \mu_1)} Y^2(t) dt - K \int_0^{T(e, \mu_1)} X^2(t) Y^2(t) dt + \\ &+ K \int_0^{T(e, \mu_1)} X^4(t) Y^2(t) dt \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

donde  $T(e, \mu_1)$  es el periodo de la órbita correspondiente al nivel de energía  $e$ . Parametrizando las integrales de línea con las variables espaciales en lugar de con el tiempo  $t$ , (5.5.3) se convierte en:

$$M(e, \mu_1, \mu_2) = \mu_2 \oint_{\gamma(e, \mu_1)} \vec{\omega}_0 \cdot d\vec{\alpha} - K \oint_{\gamma(e, \mu_1)} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{\alpha} + K \oint_{\gamma(e, \mu_1)} \vec{\omega}_4 \cdot d\vec{\alpha} \tag{5.5.4}$$

donde las funciones vectoriales cuyas integrales de línea calculamos a lo largo de las órbitas cerradas  $\gamma(e, \mu_1)$  vienen definidas por  $\vec{\omega}_i(X, Y) = (X^i Y, 0)$ ,  $i = 0, 2, 4$ .

Al igual que en (5.3.8), el vector  $d\vec{\alpha} = (dX, dY)$ . En este caso se puede comprobar que

$$\vec{\omega}_4(X, Y) = \frac{4}{7} H_{\mu_1}(X, Y) \vec{\omega}_0(X, Y) + \frac{8}{7} \mu_1 \vec{\omega}_2(X, Y) - \frac{2}{7} \text{grad}(XY^3) + \frac{6}{7} XY \text{grad}(H_{\mu_1}(X, Y))$$

y al integrarla sobre la órbita  $\gamma(e, \mu_1)$  obtenemos

$$\oint_{\gamma(e, \mu_1)} \vec{\omega}_4 \cdot d\vec{\alpha} = \frac{4}{7} e \oint_{\gamma(e, \mu_1)} \vec{\omega}_0 \cdot d\vec{\alpha} + \frac{8}{7} \oint_{\gamma(e, \mu_1)} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{\alpha}$$

con lo que

$$M(e, \mu_1, \mu_2) = \left( \mu_2 + \frac{4Ke}{7} \right) I_0^{\mu_1}(e) + K \left( \frac{8}{7} \mu_1 - 1 \right) I_2^{\mu_1}(e) \tag{5.5.5}$$

donde

$$I_i^{\mu_1}(e) = \oint_{\gamma(e, \mu_1)} \vec{\omega}_i \cdot d\vec{\alpha}, \quad i = 0, 2. \tag{5.5.6}$$

Nos planteamos ahora conocer la forma de  $I_i^{\mu_1}(e)$  dependiendo de los valores de  $\mu_1$ . En este caso, para  $e > 0$ :

$$I_i^{\mu_1}(e) = 4 \int_0^c x^i y(x, e, \mu_1) dx, \quad i = 0, 2 \tag{5.5.7}$$

y para  $e < 0$  (sólo si  $\mu_1 > 0$ ):

$$I_i^{\mu_1}(e) = 2 \int_b^c x^i y(x, e, \mu_1) dx, \quad i = 0, 2 \tag{5.5.8}$$

donde

$$y(x, e, \mu_1) = \sqrt{2e + \mu_1 x^2 - \frac{x^4}{2}} \quad (5.5.9)$$

y  $b$  y  $c$  son las raíces reales positivas de  $y(x, e, \mu_1) = 0$ . Mediante el cambio de variable  $x = \sqrt{|\mu_1|} \bar{x}$  e introduciendo  $c = \sqrt{|\mu_1|} \bar{c}$ ,  $b = \sqrt{|\mu_1|} \bar{b}$ ,  $e = \mu_1^2 t$ , es inmediato comprobar que

$$I_i^{\mu_1}(e) = \begin{cases} \mu_1^m I_i(t) & \text{si } \mu_1 > 0 \\ (-\mu_1)^m I_i^*(t) & \text{si } \mu_1 < 0 \end{cases} \quad (5.5.10)$$

donde  $m = \frac{3+i}{2}$ . Las funciones  $I_i(t)$  son las que aparecen en (5.4.1) para  $t > 0$  y en (5.4.18) para  $t < 0$ . Las funciones  $I_i^*(t)$  las estudiaremos más adelante, al considerar (5.5.5) para  $\mu_1 < 0$ .

Pasamos a continuación a analizar las curvas de silla-nodo que aparecen al desarrollar la función de Melnikov (5.5.5) en el caso  $\mu_1 > 0$ . Dicha función puede escribirse, pues  $I_0(t) \neq 0$ , como

$$M(t, \mu_1, \mu_2) = \mu_1^{\frac{3}{2}} I_0(t) \left[ \left( \mu_2 + \frac{4K\mu_1^2 t}{7} \right) + K \left( \frac{8\mu_1}{7} - 1 \right) \mu_1 R(t) \right]$$

donde  $R(t)$  se introdujo en (5.3.12). Así, la curva de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas viene determinada por

$$\begin{aligned} G(t, \mu_1, \mu_2) &= \left( \mu_2 + \frac{4}{7} K \mu_1^2 t \right) + K \left( \frac{8}{7} \mu_1 - 1 \right) \mu_1 R(t) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t}(t, \mu_1, \mu_2) &= \frac{4}{7} K \mu_1^2 + K \left( \frac{8}{7} \mu_1 - 1 \right) \mu_1 R'(t) = 0 \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

junto con la condición:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t, \mu_1, \mu_2) = K \left( \frac{8}{7} \mu_1 - 1 \right) \mu_1 R''(t) = -\frac{7K R'(t) R''(t)}{4[1 + 2R'(t)]^2} \neq 0 \quad (5.5.12)$$

Por medio de (5.5.11) llegamos a la siguiente parametrización,  $t \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \frac{7R'(t)}{4[1 + 2R'(t)]} \\ \mu_2(t) &= \frac{7KR'(t)[R(t) - tR'(t)]}{4[1 + 2R'(t)]^2} \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

válida siempre que se verifique (5.5.12), es decir, cuando no se anule ni  $R'(t)$  ni  $R''(t)$  y  $R'(t)$  esté acotada.

Como en la sección 5.4 ya analizamos el comportamiento de  $R(t)$ , estamos en condiciones de representar las curvas obtenidas que, en este caso, corresponden a envolventes de la familia de parábolas dada por  $G(t, \mu_1, \mu_2) = 0$ .

Las cuatro curvas que se obtienen (vid. figura 5.5.2) al usar la parametrización (5.5.13) corresponden a los cuatro subintervalos en que los valores  $t = 0$ ,  $t = e_1$  y  $t = e_2$  dividen al intervalo  $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ . Al mover  $t$  en sentido creciente nos van apareciendo las curvas que a continuación mencionamos. La curva  $SN1$  corresponde a órbitas pequeñas y está relacionada con el cambio de estabilidad de la homoclina ( $\mu_2 = 0, \mu_1 = \frac{7}{8}$ ). De este mismo punto parte  $SN2$  que corresponde a órbitas grandes y que junto con  $SN1$  envuelve a la homoclina aislándola de la bifurcación de Hopf puesto que tienen estabilidades distintas. Pero esta curva aparece para valores  $t \in (0, t_c)$  donde  $t_c < e_1$  es tal que  $R'(t_c) = -\frac{1}{2}$  (vid. lema 5.4.1), puesto que para ese valor el denominador que aparece en (5.5.13) se anula y para valores  $t \in (t_c, e_1)$  (vid. lema 5.4.2), obtendríamos valores negativos de  $\mu_1(t)$ , cuando en esta parte de nuestro análisis estamos suponiendo  $\mu_1 > 0$ .

La curva  $SN3$  corresponde a la silla-nodo que nos había dado el análisis local de una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada pero que colapsa en una cúspide de silla-nodo de órbitas periódicas, con  $SN4$ .

De esta última sólo obtenemos una porción con el análisis de (5.5.5) para  $\mu_1 > 0$ . Veamos ahora que la otra parte de  $SN4$ , la correspondiente a  $\mu_1 < 0$ , también aparece al estudiar (5.5.5). Para ello, volvamos a esta ecuación, asumiendo  $\mu_1 < 0$  y usando (5.5.10) con lo que obtenemos, pues  $I_0^*(t) \neq 0$ :

$$M^*(t, \mu_1, \mu_2) = (-\mu_1)^{\frac{3}{2}} I_0^*(t) \left[ \left( \mu_2 + \frac{4}{7} K \mu_1^2 t \right) - K \left( \frac{8}{7} \mu_1 - 1 \right) \mu_1 R^*(t) \right]$$

donde hemos introducido, de forma análoga a como hicimos en (5.3.12), la función:

$$R^*(t) = \frac{I_2^*(t)}{I_0^*(t)} \tag{5.5.14}$$

definida para  $t \in (0, +\infty)$ .



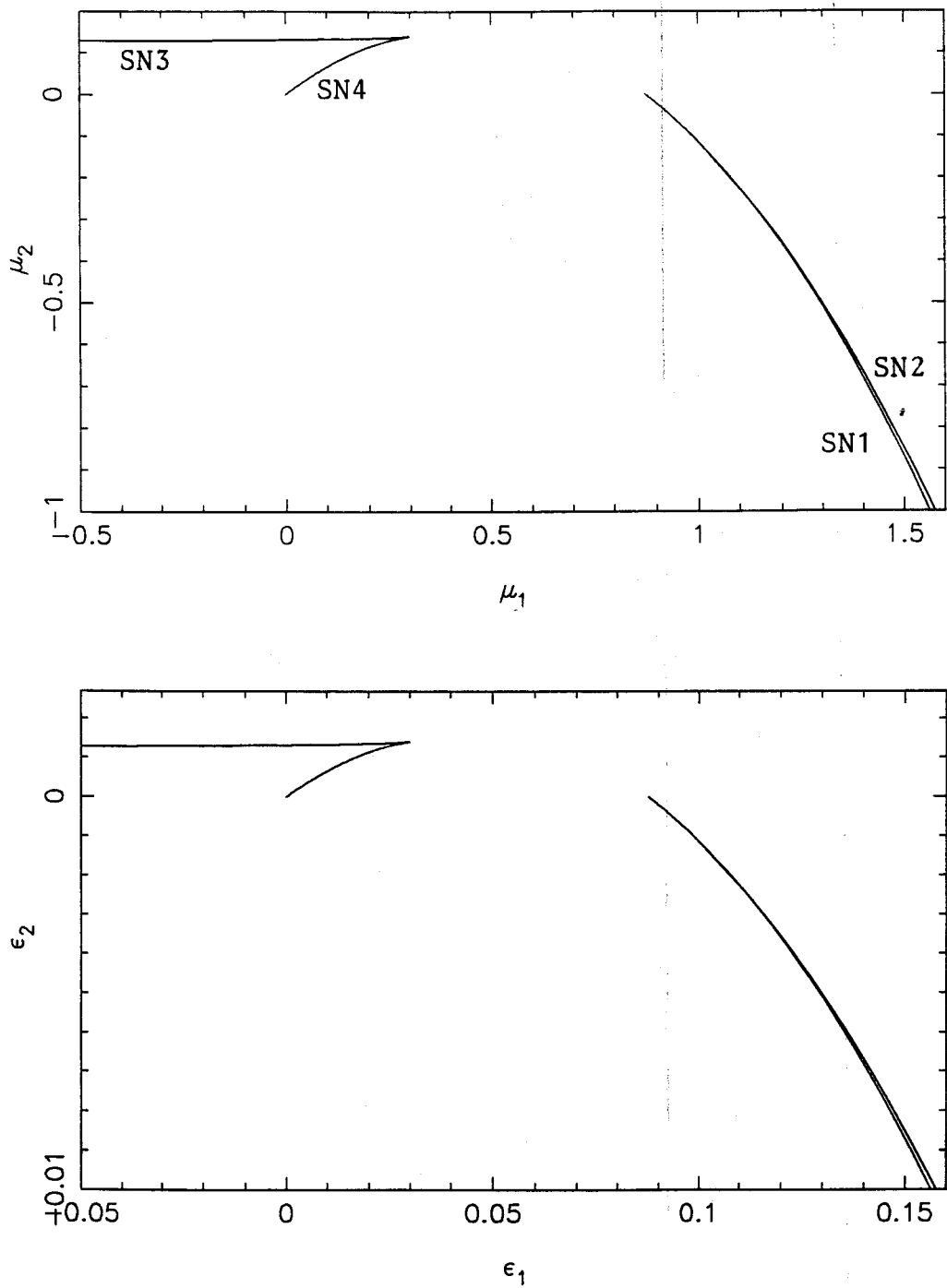


Figura 5.5.2: Curvas de bifurcaciones silla-nodo ( $K = +1$ ) en: (a) el plano  $\mu_1$ - $\mu_2$ ; (b) el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 = -0.1$ ).

De esta forma, la curva de bifurcaciones silla-nodo vendrá determinada por

$$\begin{aligned} G^*(t, \mu_1, \mu_2) &= \left( \mu_2 + \frac{4}{7}K\mu_1^2 t \right) - K \left( \frac{8}{7}\mu_1 - 1 \right) \mu_1 R^*(t) = 0 \\ \frac{\partial G^*}{\partial t}(t, \mu_1, \mu_2) &= \frac{4}{7}K\mu_1^2 - K \left( \frac{8}{7}\mu_1 - 1 \right) \mu_1 R^{*\prime}(t) = 0 \end{aligned}$$

junto con la condición:

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial t^2}(t, \mu_1, \mu_2) = -K \left( \frac{8}{7}\mu_1 - 1 \right) \mu_1 R^{*\prime\prime}(t) = -\frac{7KR^{*\prime}(t)R^{*\prime\prime}(t)}{4[1 - 2R^{*\prime}(t)]^2} \neq 0 \quad (5.5.15)$$

que nos lleva a la parametrización:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \frac{-7R^{*\prime}(t)}{4[1 - 2R^{*\prime}(t)]} \\ \mu_2(t) &= \frac{7KR^{*\prime}(t)[R^*(t) - tR^{*\prime}(t)]}{4[1 - 2R^{*\prime}(t)]^2} \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

siempre que se verifique la condición (5.5.15).

En este caso, para poder usar esta parametrización necesitamos conocer en detalle el comportamiento de la función  $R^*(t)$ , en especial los ceros de sus dos primeras derivadas, así como los puntos en que se anule el denominador que aparece en (5.5.16).

## 5.6 Estudio de la Función $R^*(t)$

Para  $t \in (0, +\infty)$  definimos en (5.5.14) la función

$$R^*(t) = \frac{I_2^*(t)}{I_0^*(t)}$$

La forma de  $I_i^*(t)$  la determinamos de la siguiente manera.

Particularizando (5.5.7) al caso  $\mu_1 < 0$  obtenemos

$$I_i^{\mu_1}(e) = 4 \int_0^c x^i y(x, e, \mu_1) dx = 4(-\mu_1)^{\frac{3+i}{2}} \int_0^{\bar{c}} \sqrt{2t - \bar{x}^2 - \frac{\bar{x}^4}{2}} d\bar{x}$$

que comparando con (5.5.10) nos lleva a definir (sólo para  $t > 0$ )

$$I_i^*(t) = 4 \int_0^c x^i y^*(x, t) dx, \quad i = 0, 2 \quad (5.6.1)$$

donde

$$y^*(x, t) = \sqrt{2t - x^2 - \frac{x^4}{2}} \quad (5.6.2)$$

y  $c$  es la única raíz real positiva de  $y^*(x, t) = 0$ . Factorizando  $y^{*2}(x, t)$  obtenemos:

$$y^{*2}(x, t) = \frac{1}{2}(c^2 - x^2)(x^2 + \beta^2) \quad (5.6.3)$$

verificándose —a diferencia de lo que ocurría en (5.4.4)—

$$\beta^2 - c^2 = 2, \quad c^2\beta^2 = 4t \quad (5.6.4)$$

Aprovechando los cálculos hechos en (5.4.5)–(5.4.8) es fácil llegar a

$$I_0^*(t) = \frac{4\sqrt{2}(4t + \beta^2)}{3\sqrt{c^2 + \beta^2}} F(k) - \frac{4\sqrt{2}\sqrt{c^2 + \beta^2}}{3} E(k) \quad (5.6.5)$$

$$I_2^*(t) = -\frac{16}{15}\sqrt{\frac{2}{c^2 + \beta^2}} [t(1 + 3\beta^2) + \beta^2] F(k) + \frac{16\sqrt{2}}{5} \left(t + \frac{1}{3}\right) \sqrt{c^2 + \beta^2} E(k)$$

donde el módulo  $k$  de las integrales elípticas completas vale nuevamente

$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \beta^2}}$$

y  $c, \beta, k$  dependen de  $t$  de la siguiente forma:

$$c^2 = \sqrt{1 + 4t} - 1, \quad \beta^2 = \sqrt{1 + 4t} + 1, \quad k^2 = \frac{\sqrt{1 + 4t} - 1}{2\sqrt{1 + 4t}} \quad (5.6.6)$$

Es inmediato comprobar que  $k(t)$  es una función monótona estrictamente creciente para  $t \in (0, +\infty)$  y que tiende, respectivamente, a 0 y a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  en los extremos de dicho intervalo.

Deduciendo de (5.6.6) que  $t$  como función de  $k$  vale

$$t(k) = \frac{k^2(1 - k^2)}{(1 - 2k^2)^2}$$

donde  $k \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , podemos expresar  $I_0^*$  e  $I_2^*$  como funciones del módulo  $k$  —que resulta ser el complementario del introducido en (5.4.7)—

$$\begin{aligned} I_0^*(k) &= \frac{8[(1 - k^2)F(k) + (2k^2 - 1)E(k)]}{3(1 - 2k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ I_2^*(k) &= \frac{16[(1 - k^2)(k^2 - 2)F(k) + 2(k^4 - k^2 + 1)E(k)]}{15(1 - 2k^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Indicamos que estas expresiones coinciden formalmente con las obtenidas en (5.4.12), considerando el denominador  $|1 - 2k^2|$ .

Este resultado está relacionado con la continuidad de  $I_i^{\mu_1}(e)$  en  $\mu_1 = 0$ . Dicha continuidad la comprobamos calculando

$$I_0^{\mu_1}(e)|_{\mu_1=0} = 2\sqrt{2}(4e)^{\frac{3}{4}} \int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{4}{3}(4e)^{\frac{3}{4}} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$I_2^{\mu_1}(e)|_{\mu_1=0} = 2\sqrt{2}(4e)^{\frac{5}{4}} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{8}{5}(4e)^{\frac{5}{4}} \left[ E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]$$

y verificando que estas expresiones coinciden, respectivamente, con los valores de los límites de  $I_0^{\mu_1}(e)$  e  $I_2^{\mu_1}(e)$  cuando  $\mu_1 \rightarrow 0$  tanto por la izquierda como por la derecha.

Usando los desarrollos en serie de potencias del módulo  $k$  de las integrales elípticas completas [13]:

$$F(k) = 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64}k^4 + \dots$$

$$E(k) = 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{9}{192}k^4 - \dots$$

se demuestra fácilmente que

$$\lim_{t \rightarrow 0} R^*(t) = \lim_{k \rightarrow 0} R^*(k) = 0 \tag{5.6.8}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R^*(t)}{\sqrt{t}} = \lim_{k \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{R^*(k)}{\sqrt{t(k)}} = \frac{48\pi^2}{5\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}$$

De forma análoga a como obtuvimos para  $I_0(e)$  e  $I_2(e)$  el sistema (5.4.26), comprobamos que  $I_0^*(t)$  e  $I_2^*(t)$  verifican

$$3I_0^*(t) = 4tI_0^{*'}(t) - I_2^{*'}(t)$$

$$15I_2^*(t) = -4tI_0^{*'}(t) + (4 + 12t)I_2^{*'}(t) \tag{5.6.9}$$

(basta derivar (5.6.1), integrar por partes la misma ecuación y combinar ambos resultados).

Este sistema nos permite deducir que la función  $R^*(t)$  verifica la siguiente ecuación diferencial de Riccati:

$$4t(1 + 4t)R^{*'}(t) = 8tR^*(t) + 4t - 4R^*(t) + 5R^{*2}(t) \tag{5.6.10}$$

expresión que nos ayuda a deducir

$$\lim_{t \rightarrow 0} R^{*'}(t) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} R^{*'}(t) = 0 \quad (5.6.11)$$

Enunciamos, a continuación, dos lemas que nos indican el comportamiento de  $R^*(t)$  y sus dos primeras derivadas (el primero de ellos aparece demostrado en [15] en una forma alternativa).

**Lema 5.6.1**  $R^{*'}(t) > 0$  para todo  $t > 0$ .

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a suponer que existe un valor  $t_1 > 0$  tal que  $R^{*'}(t_1) = 0$  y llegaremos a una contradicción. Derivando (5.6.10) obtenemos:

$$2t(1 + 4t)R^{*''}(t) = -R^{*'}(t)[12t + 5R^*(t) + 4] + 4R^*(t) + 2 \quad (5.6.12)$$

que particularizada para  $t = t_1$  se convierte en

$$t_1(1 + 4t_1)R^{*''}(t_1) = 2R^*(t_1) + 1$$

Puesto que  $t_1 > 0$ ,  $R^*(t_1) > 0$  es evidente que  $R^{*''}(t_1) > 0$  con lo que  $R^*(t)$  tendría un mínimo relativo en  $t = t_1$ . Pero esta situación no es compatible con

$$\lim_{t \rightarrow 0} R^*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} R^*(t) = +\infty$$

pues requeriría la presencia de algún máximo relativo (prohibido por  $R^{*''}(t_1) > 0$ ).

Por tanto,  $R^{*'}(t)$  no se anula para  $t > 0$  y, al ser continua, mantiene siempre el signo que tiene en las proximidades del origen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} R^{*'}(t) = \frac{1}{2} > 0$$

■

**Lema 5.6.2**  $R^{*''}(t) < 0$  para todo  $t > 0$ .

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que no existe  $t_2 > 0$  tal que  $R^{*''}(t_2) = 0$ . Derivando (5.6.12) obtenemos:

$$2t(1 + 4t)R^{*'''}(t) = -R^{*''}(t)[28t + 5R^*(t) + 6] - R^{*'}(t)[8 + 5R^{*'}(t)] \quad (5.6.13)$$

que evaluada en  $t = t_2$  aparece como

$$2t_2(1 + 4t_2)R^{*'''}(t_2) = -R^{*''}(t_2)[8 + 5R^{*'}(t_2)]$$

con lo que  $\text{sig } [R^{*'''}(t_2)] = -1$  pues  $t_2 > 0$ ,  $R^*(t_2) > 0$  y  $R^{*'}(t_2) > 0$  (vid. lema 5.6.1). Así,  $R^{*'}(t)$  tendría un máximo relativo en  $t = t_2$  (y no podrá tener mínimos relativos). Si conseguimos demostrar ahora que  $R^{*'}(t_2) < \frac{1}{2}$  no podrá existir tal máximo sin la presencia de algún mínimo, ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} R^{*'}(t) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} R^{*'}(t) = 0.$$

En lo que sigue probaremos pues que  $R^{*'}(t_2) < \frac{1}{2}$ . Particularizando (5.6.12) para  $t = t_2$ :

$$R^{*'}(t_2) = \frac{4R^*(t_2) + 2}{12t_2 + 5R^*(t_2) + 4}$$

vemos que  $R^{*'}(t_2) < \frac{1}{2}$  si  $t_2 > \frac{R^*(t_2)}{4}$  cuando  $R^{*''}(t_2) = 0$ .

Para determinar  $R^{*''}(t_2) = 0$  combinamos (5.6.10) y (5.6.12) para  $t = t_2$  llegando a

$$\gamma_1(R^*)t_2^2 + \gamma_2(R^*)t_2 + \gamma_3(R^*) = 0 \quad (5.6.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1(R^*) &= 32 \left( R^* + \frac{1}{2} \right) \\ \gamma_2(R^*) &= 4 \left( -5R^{*2} - 3R^* + 2 \right) \\ \gamma_3(R^*) &= -25R^* \left( R^* + \frac{4}{5} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.6.15)$$

están evaluadas en  $R^*(t_2)$ .

Es decir, queremos demostrar que  $t_2 - \zeta(R^*) > 0$  cuando se verifican (5.6.14) y (5.6.15) siendo

$$\zeta(R^*) = \frac{R^*}{4} \tag{5.6.16}$$

evaluada también en  $R^*(t_2)$ .

Por una parte, (5.6.14) se puede escribir como

$$\gamma_1(R^*) [t_2 - \zeta(R^*)] t_2 + [\gamma_1(R^*)\zeta(R^*) + \gamma_2(R^*)] t_2 + \gamma_3(R^*) = 0$$

que teniendo en cuenta (5.6.15) y (5.6.16) se convierte en

$$\gamma_1(R^*) [t_2 - \zeta(R^*)] t_2 = \gamma_4(R^*) t_2 + 25R^*(t_2) \left[ R^*(t_2) + \frac{4}{5} \right]^2 \tag{5.6.17}$$

donde

$$\gamma_4(R^*) = 4(3R^{*2} + 2R^* - 2)$$

está evaluada en  $R^*(t_2)$ .

Pero además, (5.6.14) equivale también a:

$$\begin{aligned} & [\gamma_1(R^*) t_2 + \gamma_1(R^*) \zeta(R^*) + \gamma_2(R^*)] [t_2 - \zeta(R^*)] + \gamma_1(R^*) \zeta^2(R^*) + \\ & + \gamma_2(R^*) \zeta(R^*) + \gamma_3(R^*) = 0 \end{aligned}$$

que mediante (5.6.15) y (5.6.16) puede escribirse como

$$[\gamma_1(R^*) t_2 - \gamma_4(R^*)] [t_2 - \zeta(R^*)] = 14R^*(t_2) (2R^{*2}(t_2) + 3R^*(t_2) + 1) \tag{5.6.18}$$

Al igual que en los lemas 5.4.3 y 5.4.4, por un simple análisis de los signos de los factores que aparecen en (5.6.17) y (5.6.18), podemos concluir que  $t_2 - \zeta(R^*) > 0$ . Para ello sabemos que  $t_2 > 0$ ,  $R^*(t_2) > 0$ ,  $\gamma_1(R^*) > 0$ . Además, es evidente que  $\text{sig} [\gamma_4(R^*)] = -1, 0, +1$  si respectivamente  $R^* \in (\frac{1}{2}, R^*_+)$ ,  $R^* = R^*_+$ ,  $R^* \in (R^*_+, +\infty)$  donde  $R^*_+ = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ .

Así, de (5.6.17) deducimos que  $\text{sig} [t_2 - \zeta(R^*)] = +1$  si  $R^*(t_2) \geq R^*_+$  y de (5.6.18) que  $\text{sig} [t_2 - \zeta(R^*)] = -1$  si  $R^*(t_2) \leq R^*_+$ . Por tanto, acabamos de demostrar que  $t_2 > \frac{R^*(t_2)}{4}$ , es decir,  $R^{*'}(t_2) < \frac{1}{2}$ .

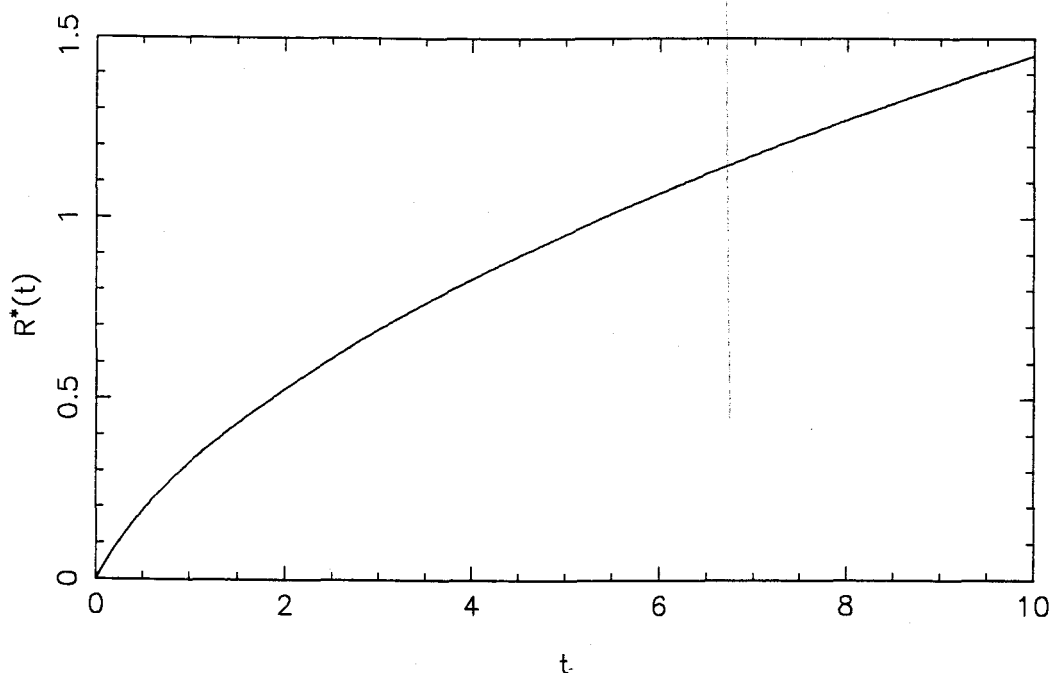


Figura 5.6.1: Gráfica de la función  $R^*(t)$ .

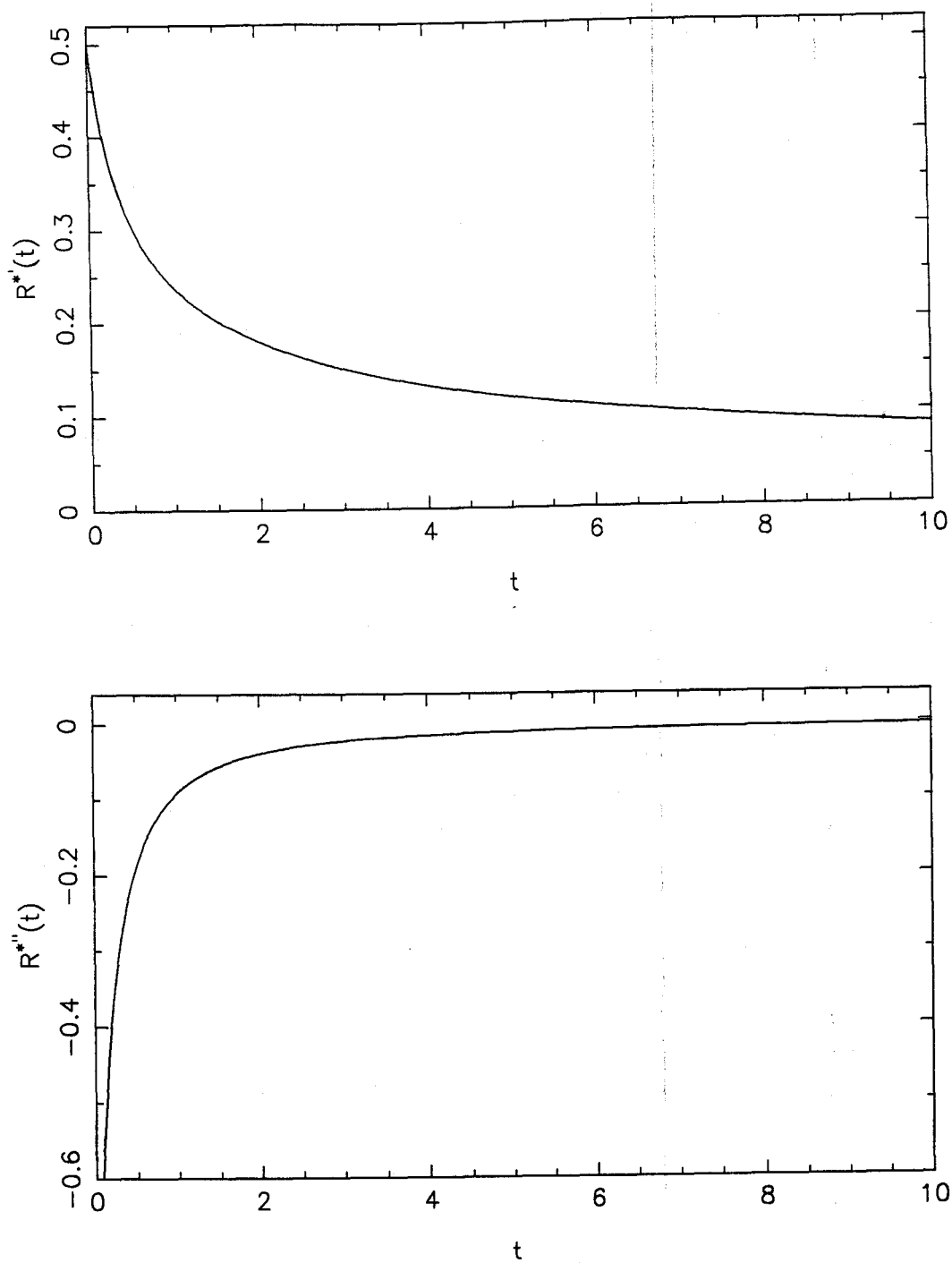
Finalmente, puesto que el signo de  $R^{**}$  es constante, teniendo en cuenta los valores de los límites de  $R^*(t)$  y  $R^{*'}(t)$  dados en (5.6.8) y (5.6.11) deducimos que  $R^{**}(t) < 0$  si  $t > 0$ . ■

Los resultados analíticos se ven reflejados en la representación gráfica, al igual que hicimos para  $R(e)$ , tanto de la función  $R^*(t)$  como de sus dos primeras derivadas (vid. figuras 5.6.1 y 5.6.2).

Tras el estudio que hemos realizado de la función  $R^*(t)$  estamos ya en condiciones de usar la parametrización dada en (5.5.16). Vamos a comprobar previamente que la curva que obtenemos con esta parametrización se une en el eje  $\mu_2$  (del plano  $\mu_1-\mu_2$ ) con la curva obtenida mediante (5.5.13). Para ello, calculamos

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow 0^-} \mu_2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{7KR^{*'}(t)[R^*(t) - tR^{*'}(t)]}{4(1 - 2R^{*'}(t))^2} =$$



Figura 5.6.2: Derivadas primera y segunda de la función  $R^*(t)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_1 \rightarrow 0^+} \mu_2 &= \lim_{e \rightarrow +\infty} \frac{7KR'(e)[R(e) - eR'(e)]}{4(1 + 2R'(e))^2} = \\ &= \frac{7}{16} \left[ \frac{48\pi^2}{5\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)} \right]^2 K \approx 0.131544K \end{aligned}$$

donde hemos usado ecuaciones y valores de límites de  $R(e)$  y  $R^*(t)$  mencionados a lo largo de este capítulo.

Es pues, mediante la parametrización dada en (5.5.16), como se completa la curva  $SN4$  de la figura 5.5.2 en la zona  $\mu_1 < 0$ . Dicha porción de  $SN4$  ya la obteníamos mediante el análisis local de la bifurcación de Hopf del origen, aunque para dicho análisis la curva —línea recta en aquel caso— acababa bruscamente en  $\varepsilon_1 = 0$  (vid. figura 5.2.1).

## 5.7 Conjuntos de Bifurcaciones

Se trata de recopilar, a partir de los resultados de las secciones precedentes, las curvas de las bifurcaciones que van a aparecer en cada plano de parámetros del sistema (5.1.5). Nos centraremos en el caso  $K = +1$ .

Comenzamos con el plano  $\varepsilon_3 - \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ). En este plano puede apreciarse (vid. figura 5.7.1) la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales  $HOP2$ , una recta dada por la ecuación (5.2.4), que cambia de estabilidad en  $\varepsilon_3 = 0$ . A raíz de este cambio en el carácter de la bifurcación aparece una curva de silla-nodo  $SNH2$  de órbitas periódicas (vid. figura 5.5.1), que corresponde, en primera aproximación, a la semiparábola dada por (5.2.5). Asimismo, la curva de conexiones homoclinas  $HOM$ , en este caso una recta determinada por (5.3.5), cambia de atractiva ( $\varepsilon_2 < 0$ ) a repulsiva ( $\varepsilon_2 > 0$ ) haciendo que aparezcan dos curvas de silla-nodo de órbitas periódicas. La primera de ellas  $SN1$  corresponde a órbitas pequeñas y colapsa con  $SNH2$ ; la segunda  $SN2$  es de órbitas grandes. Por último aparecen, en este plano de parámetros, otras dos curvas de silla-nodo,  $SN3$  y  $SN4$ , que colapsan en una cúspide. La primera de ellas está relacionada con la bifurcación de Takens-Bogdanov mientras que la segunda lo está con el cambio de carácter de la bifurcación de Hopf del origen. Destacamos que en este corte del

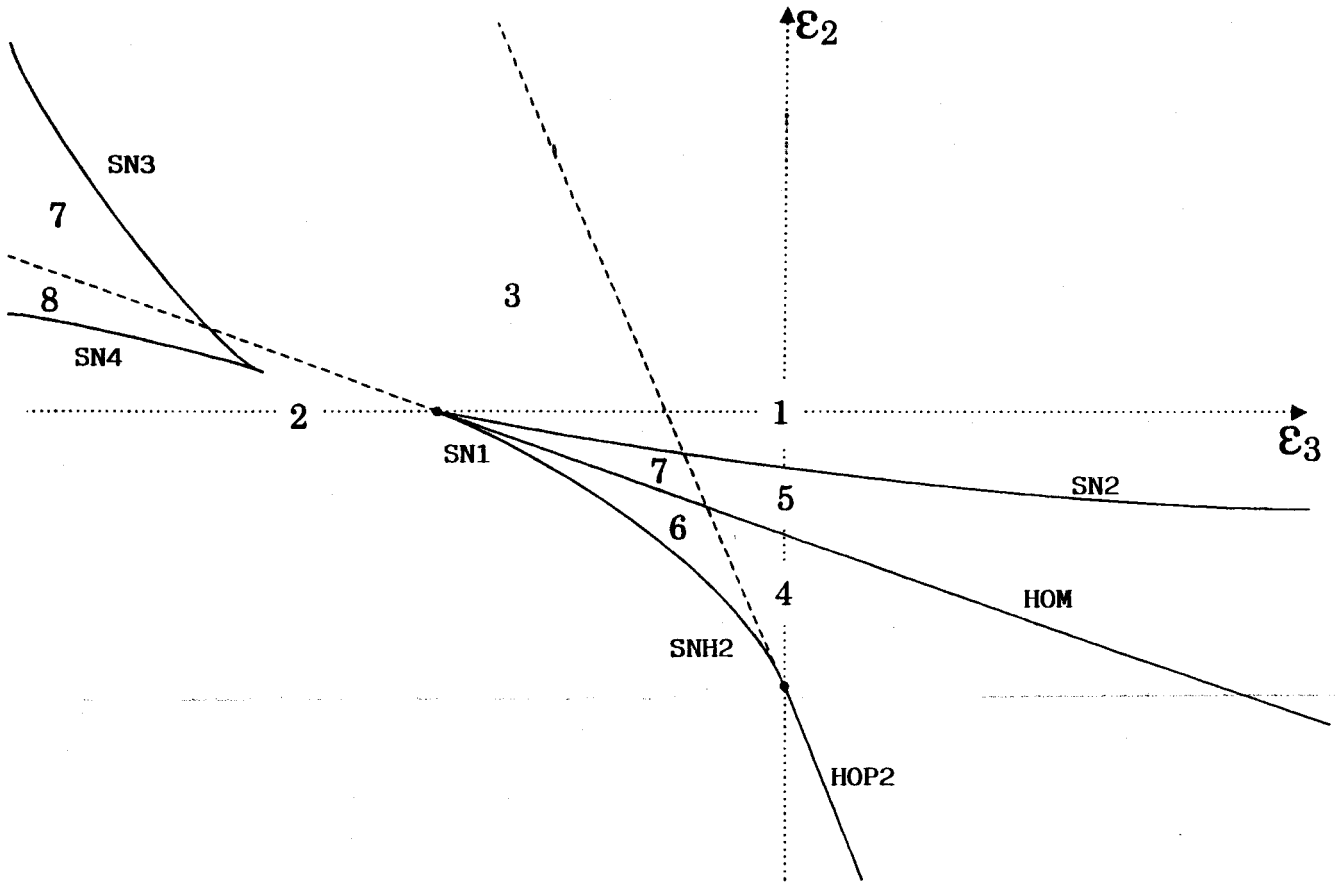


Figura 5.7.1: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 > 0$ ), ( $K = +1$ ).

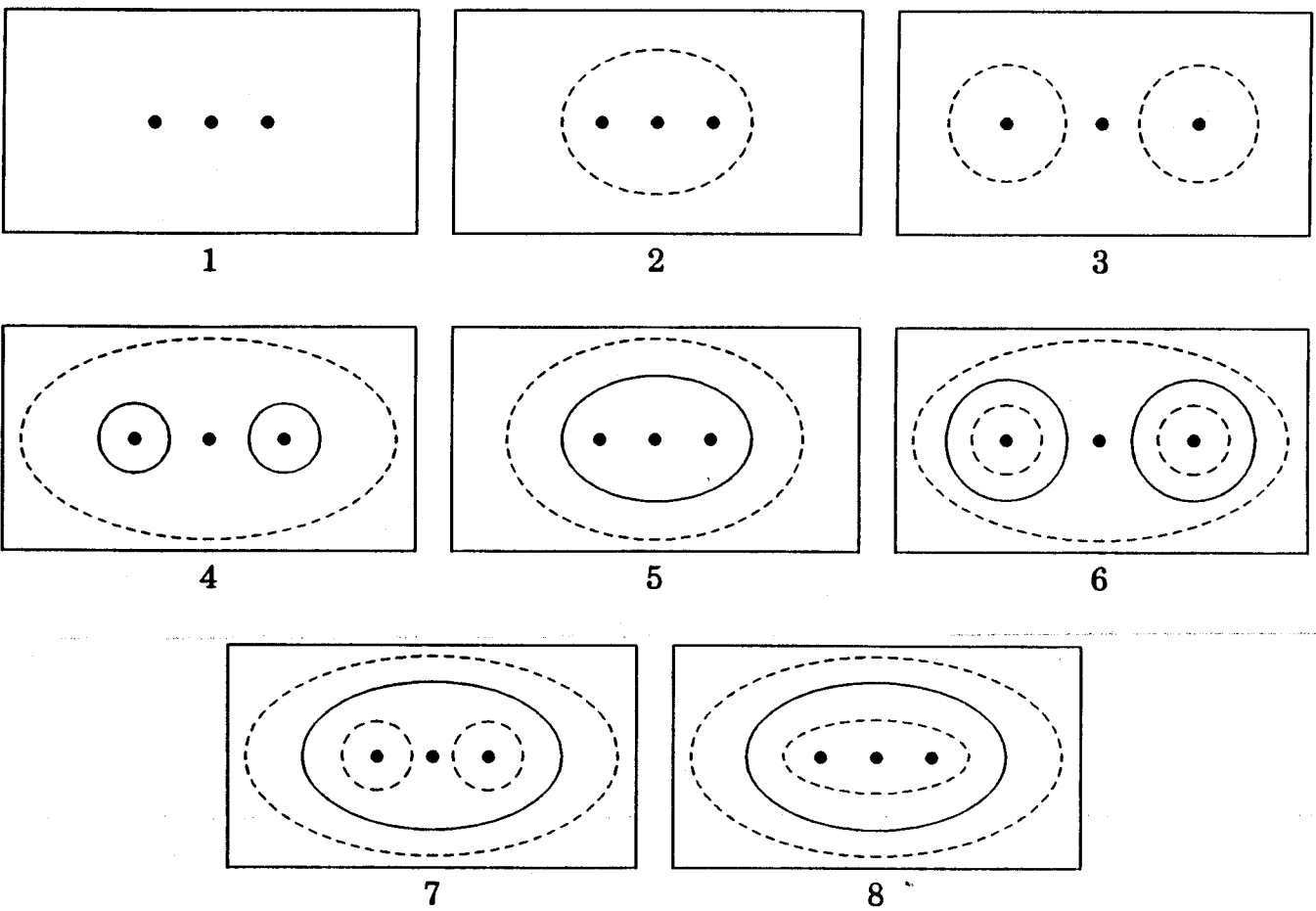


Figura 5.7.2: Configuraciones de equilibrios y órbitas periódicas que aparecen en el plano de parámetros  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 > 0$ ), ( $K = +1$ ).

espacio de parámetros no aparece esta última bifurcación de Hopf y que siempre hay tres equilibrios. Nos encontramos ante 9 regiones en el plano  $\varepsilon_3-\varepsilon_2$  que originan 8 configuraciones distintas, esquematizadas en la figura 5.7.2. En estos esquemas de configuraciones nos limitamos a indicar el número de equilibrios, sin indicar su estabilidad. En lo referente a las órbitas periódicas, el trazo continuo indica órbita estable y el discontinuo inestable.

Vamos ahora a comentar el conjunto de bifurcaciones obtenido en el plano  $\varepsilon_1-\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_3 < 0$ ) (vid. figura 5.7.3). En primer lugar observamos la bifurcación de Hopf del origen *HOP1* que resulta ser siempre supercrítica. Al intersectar dicha recta con la correspondiente a la bifurcación pitchfork *PI* aparece un punto de codimensión dos, el correspondiente a una bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada. De este punto, el origen en el plano de parámetros, parten tres curvas:

- (i) la correspondiente a la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales *HOP2* que se mantiene siempre subcrítica;
- (ii) la de conexiones homoclinas *HOM* que al atravesar el eje  $\varepsilon_2 = 0$  pasan de repulsivas a atractivas apareciendo, relacionadas con este cambio de estabilidad, dos curvas de silla–nodo de órbitas periódicas: *SN1* corresponde a órbitas pequeñas y *SN2* a grandes;
- (iii) la de silla–nodo de órbitas periódicas *SN4* que colapsa en una cúspide con otra curva de silla–nodo de órbitas grandes *SN3* que aparece como consecuencia del cambio de estabilidad de la bifurcación de Hopf del origen (vid. figura 5.2.1).

En resumen, el conjunto de bifurcaciones en este plano de parámetros presenta 11 regiones que dan lugar a 10 configuraciones distintas (vid. figura 5.7.4).

En la figura 5.7.5 mostramos el mismo esquema que en la figura 5.7.3 en el caso  $\varepsilon_3 = -0.1$  ( $K = +1$ ). Observamos la proximidad a la que se encuentran varias curvas, lo que justifica que en algunos conjuntos de bifurcaciones nos conformemos

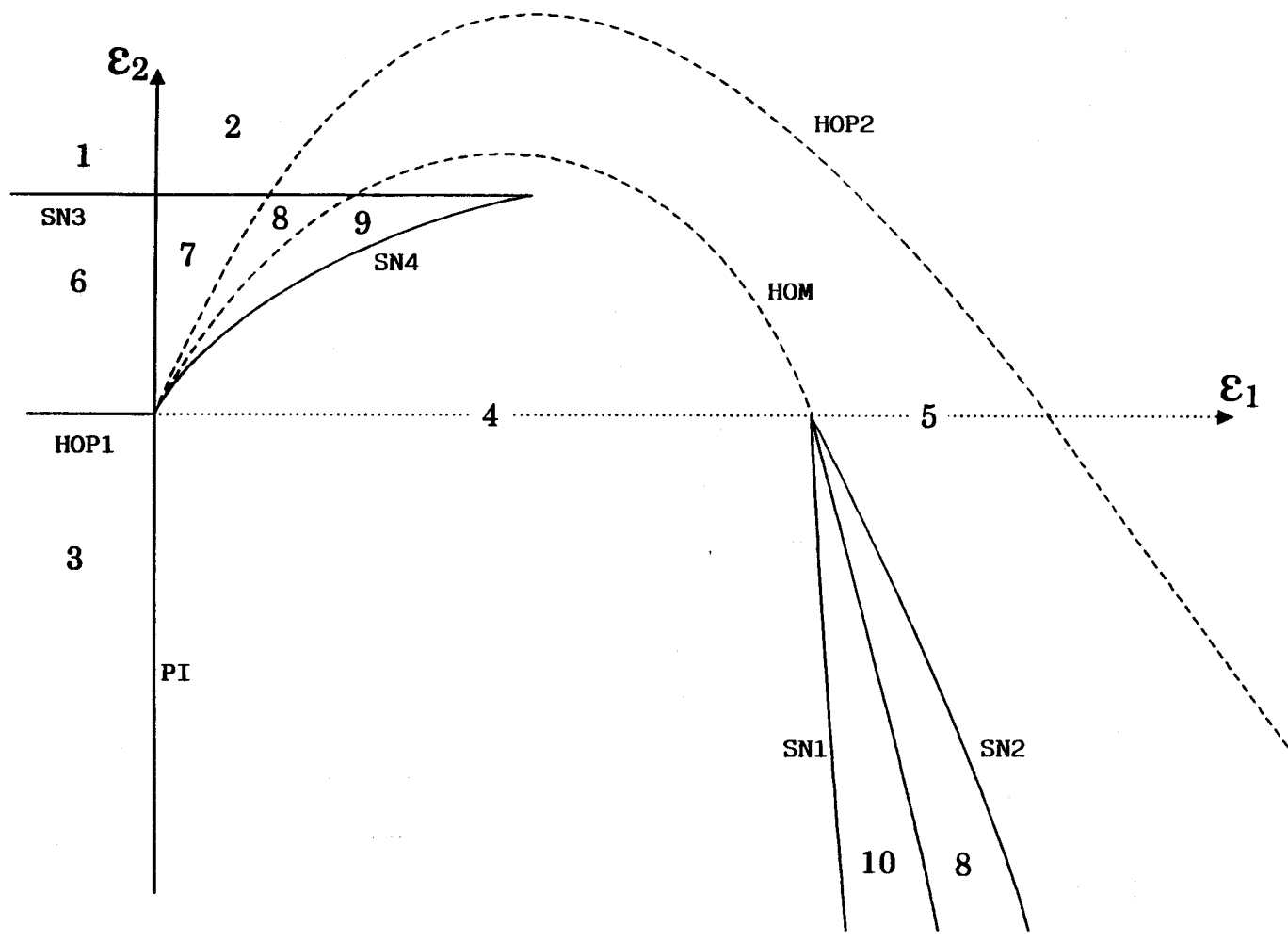


Figura 5.7.3: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 < 0$ ), ( $K = +1$ ).

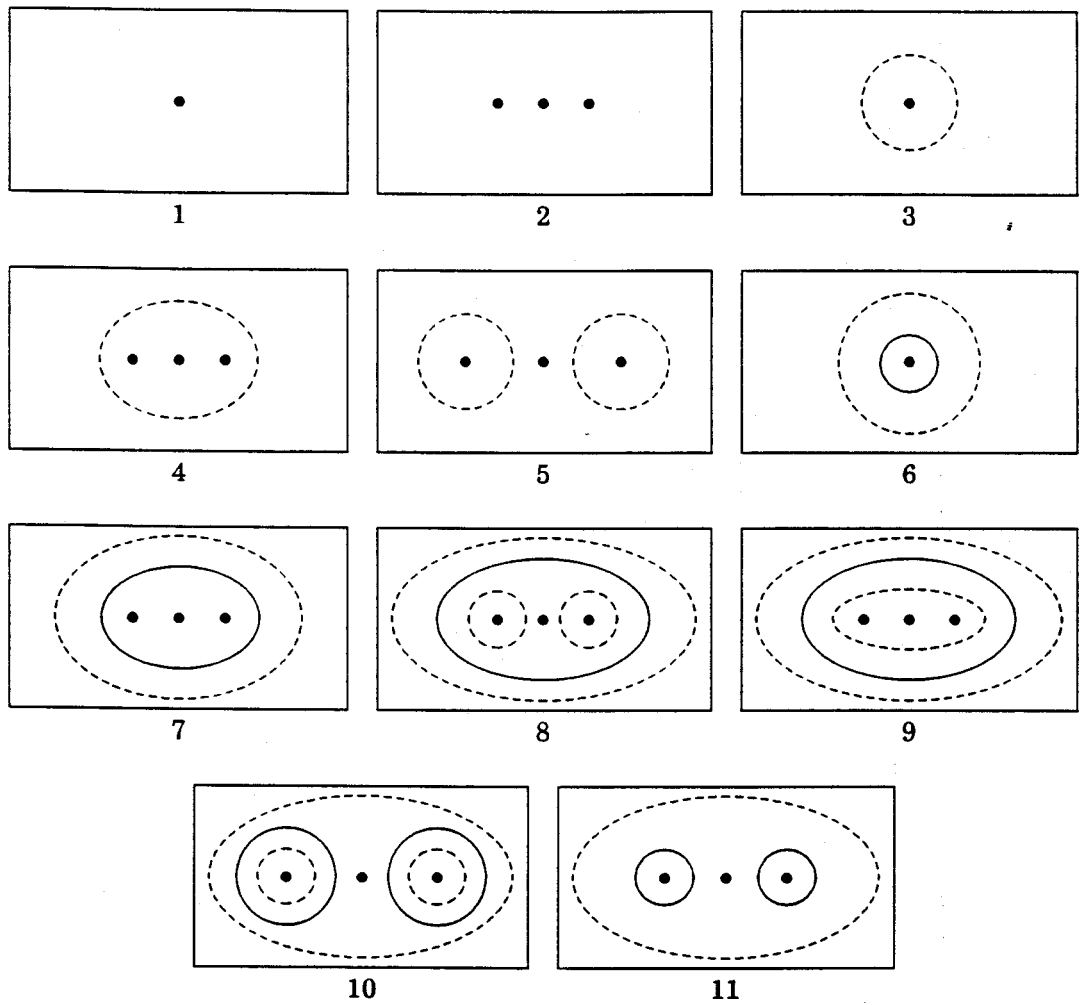


Figura 5.7.4: Configuraciones de equilibrios y órbitas periódicas que aparecen en el plano de parámetros  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_3 < 0$ ), ( $K = +1$ ).

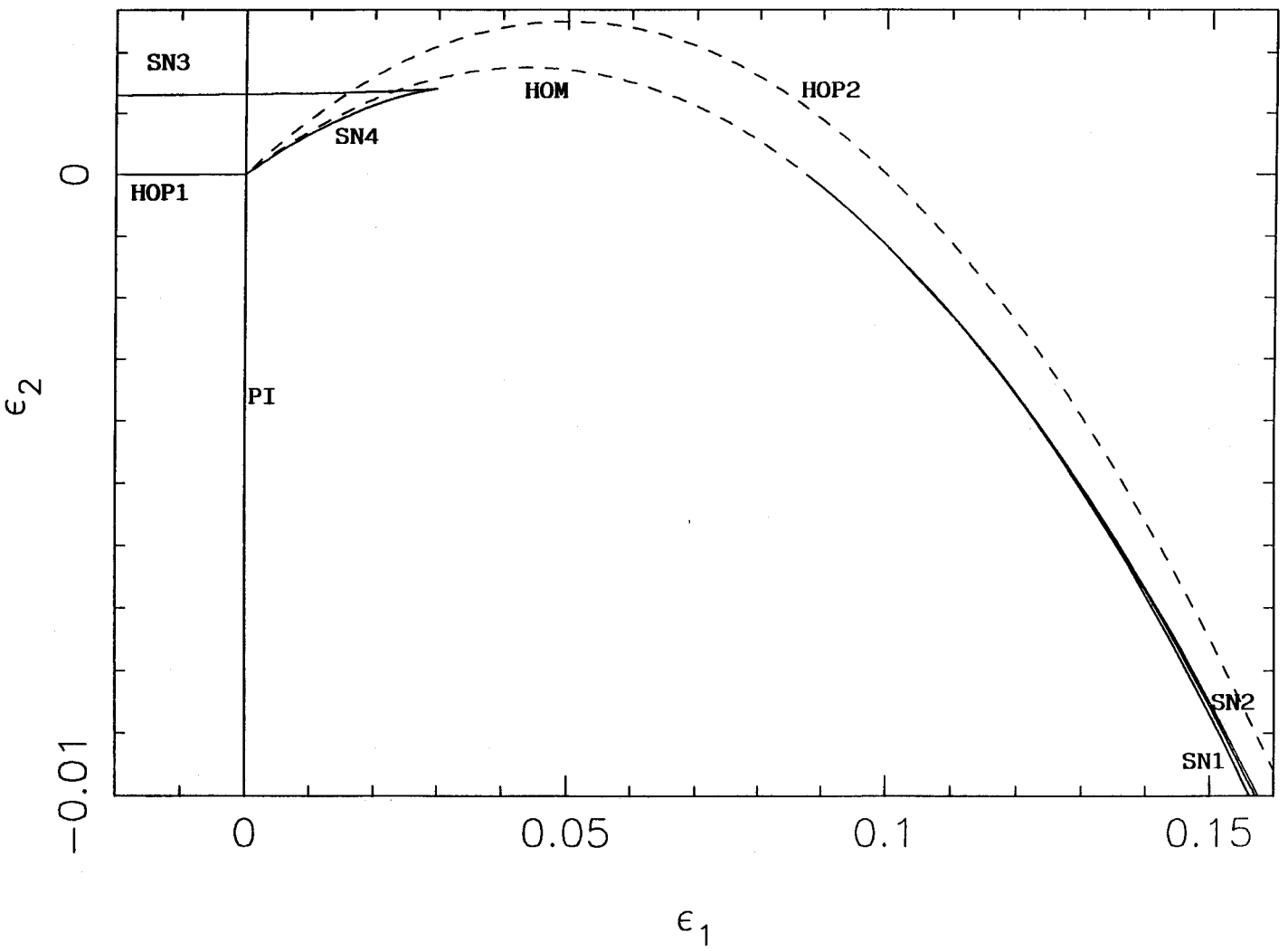


Figura 5.7.5: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 = -0.1$ ), ( $K = +1$ ).



con los detalles cualitativos para que queden claras todas las zonas presentes en los mismos.

Como acabamos de ver, al cortar las superficies de bifurcaciones en el espacio de parámetros por planos paralelos a los planos coordenados algunas curvas parecen *desconectadas* de su origen; están ahí pero no aparece de forma evidente el motivo de su existencia. Si en su lugar cortamos las superficies por una semiesfera y proyectamos dichas curvas en el plano coordenado correspondiente obtenemos conjuntos de bifurcaciones con más información y que además se asemejarán más a los que nos vamos a encontrar cuando estudiemos sistemas reales, pues las relaciones entre los parámetros de dichos sistemas y los parámetros de (5.1.5) van a ser, en general, no lineales.

De esta forma, si buscamos la intersección de la semiesfera  $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = R^2$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ) con las superficies de bifurcaciones y proyectamos las curvas obtenidas en el plano  $\varepsilon_3 - \varepsilon_2$  el conjunto de bifurcaciones es como el indicado en la figura 5.7.6. Comparando con el obtenido en la figura 5.7.1 vemos que:

- (i) la curva de silla-nodo  $SN4$  aparece conectada con un punto de Takens-Bogdanov  $TB1$  con lo que la cúspide en la que colapsa con  $SN3$  no se presenta aislada;
- (ii) las curvas  $HOP2$  y  $HOM$  que surgen del mismo punto  $TB1$  aparecen conectadas con las correspondientes curvas que surgen del otro punto de Takens-Bogdanov  $TB2$ ;
- (iii) la curva de silla-nodo  $SN2$  que surge por el cambio estabilidad de la homoclina ( $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 < 0$ ) aparece conectada con la correspondiente silla-nodo que nace en  $TB2$  ( $\varepsilon_3 > 0$ ).

Nos encontramos pues, en este caso, con 10 regiones y 8 configuraciones distintas (vid. figura 5.7.2).

Si el corte lo damos en esta ocasión con la semiesfera  $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = R^2$  ( $\varepsilon_3 < 0$ ) y proyectamos en el plano  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$  obtenemos un conjunto de bifurcaciones como el

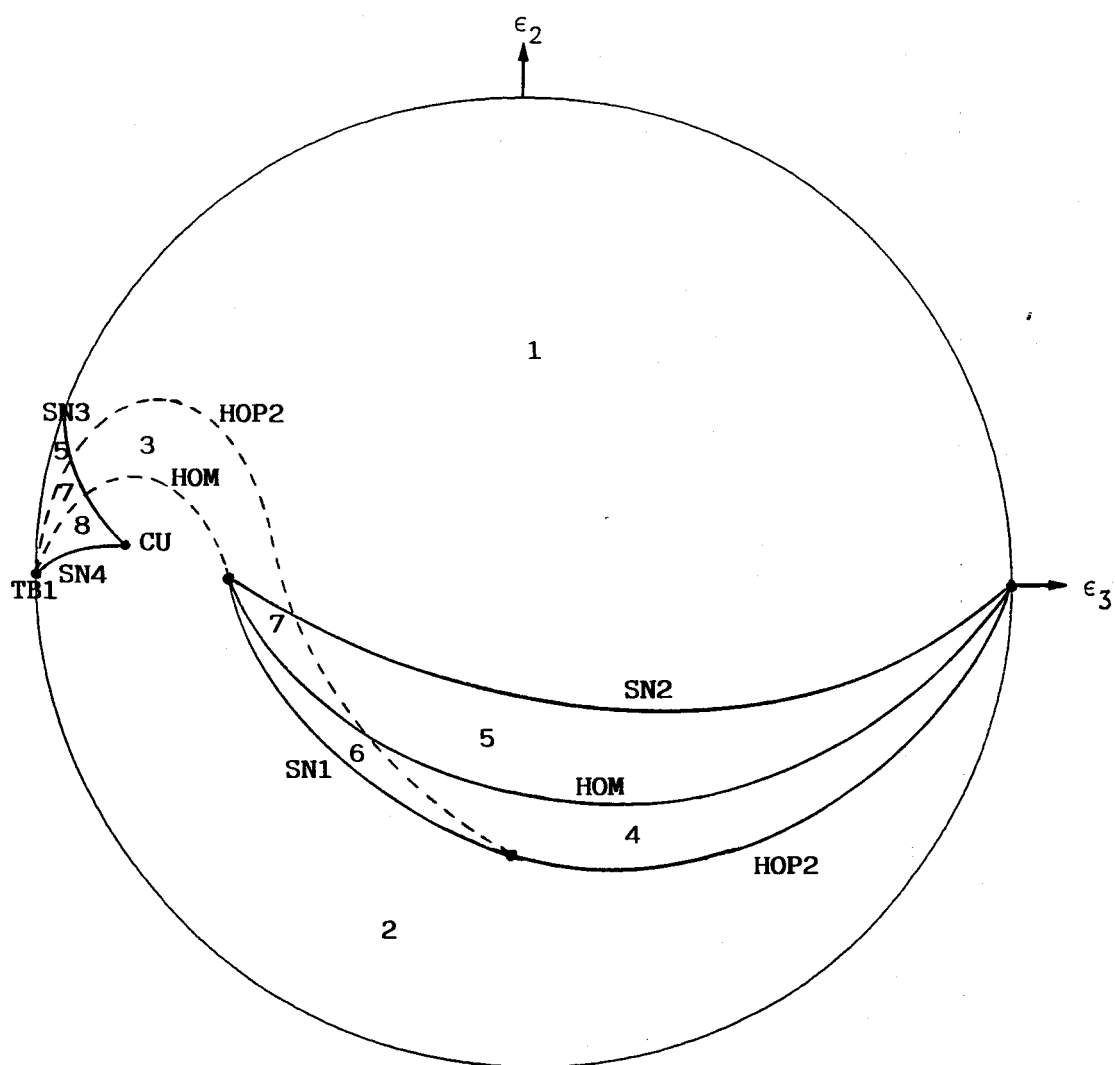


Figura 5.7.6: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$  ( $K = +1$ ) obtenido al intersectar con la semiesfera en la que  $\epsilon_1 > 0$ .

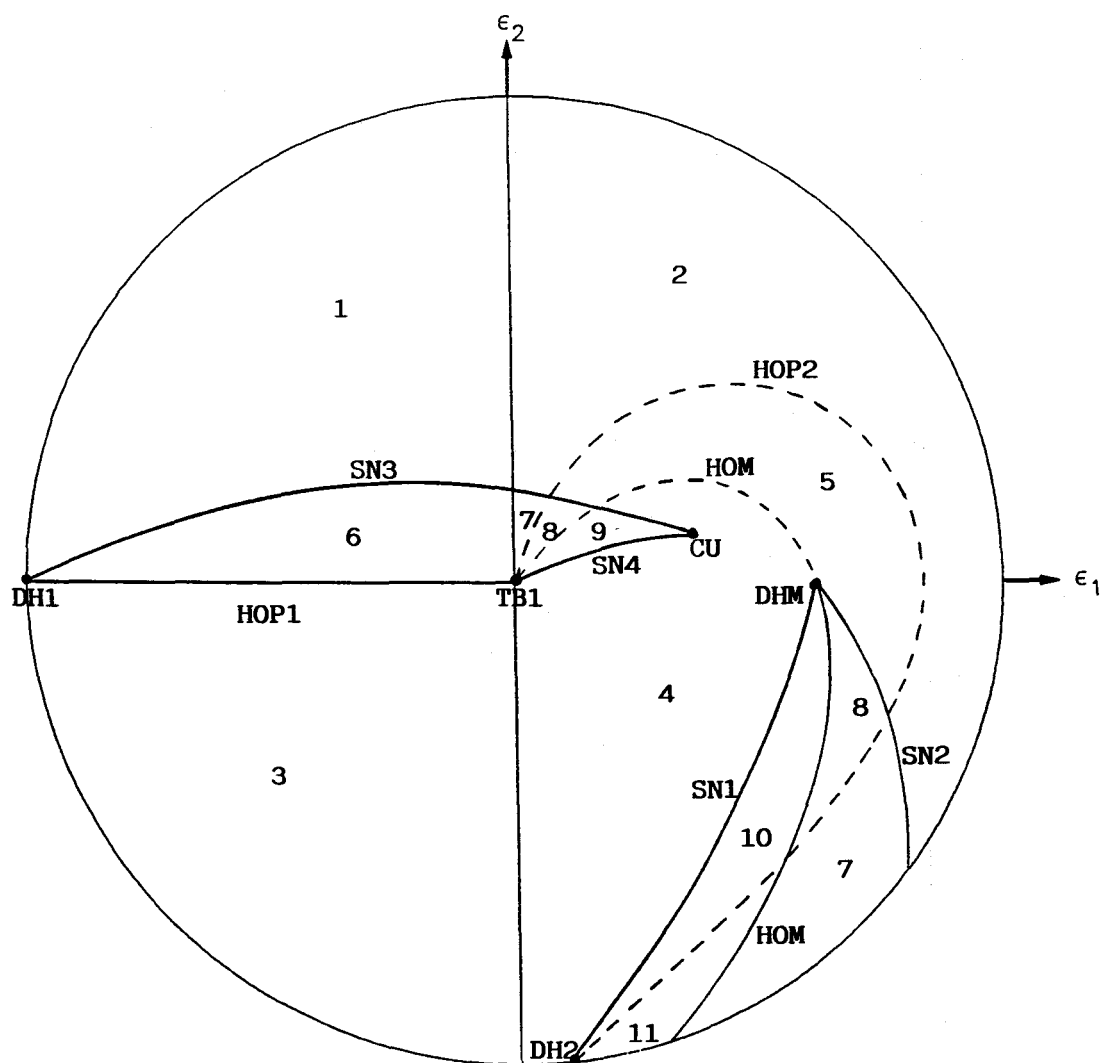


Figura 5.7.7: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $K = +1$ ) obtenido al intersectar con la semiesfera en la que  $\epsilon_3 < 0$ .

indicado en la figura 5.7.7. Si bien este conjunto es muy parecido al representado en la figura 5.7.3 destacamos tres nuevos aspectos:

- (i) se hace patente la relación entre la curva de silla-nodo  $SN3$  y la bifurcación de Hopf del origen  $HOP1$ , pues ésta es degenerada en el punto  $DH1$ ;
- (ii) la curva  $SN1$  conecta al punto  $DHM$  en el que la conexión homoclina es degenerada con el punto  $DH2$  en el que la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales cambia de estabilidad;
- (iii) aparece una nueva configuración, la 11 de la figura 5.7.4, con lo que el conjunto de bifurcaciones queda dividido en 13 regiones dando lugar a 11 configuraciones distintas (vid. figura 5.7.4).

Si bien es verdad que la riqueza de comportamientos que la degeneración de la bifurcación de Takens-Bogdanov trae consigo se concentra en una zona concreta del espacio de parámetros —justamente la comentada hasta ahora— no debemos olvidar, con el fin de completar el estudio del sistema (5.1.5), su conducta de bifurcaciones en las zonas de menor variedad de configuraciones, como es el caso del conjunto de bifurcaciones presente para  $\varepsilon_3 > 0$  ( $K = +1$ ). En este supuesto, las bifurcaciones que aparecen en el plano  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_2$  están esquematizadas en la figura 5.7.8. En ella observamos como la intersección de la bifurcación de Hopf del origen  $H0$  —subcrítica en este caso— con la recta en la que se da la bifurcación pitchfork de equilibrios  $PI$  produce en el origen un punto de Takens-Bogdanov no degenerado del que parten, como es habitual, una curva de Hopf (supercrítica) de los equilibrios no triviales  $H2$ , una curva de conexiones homoclinas (atractivas)  $HOM$  y una de silla-nodo de órbitas periódicas  $SN$ . La situación es similar a la de una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada (vid. figura 5.2.2) si bien en este caso las curvas  $H2$ ,  $HOM$  y  $SN$  tienen forma parabólica (la expresión analítica de  $SN$  se puede obtener a partir de (5.3.16) y del escalado introducido en (5.3.1)). En la propia figura 5.7.8 hemos indicado las 6 configuraciones de equilibrios y órbitas periódicas presentes en esta situación.

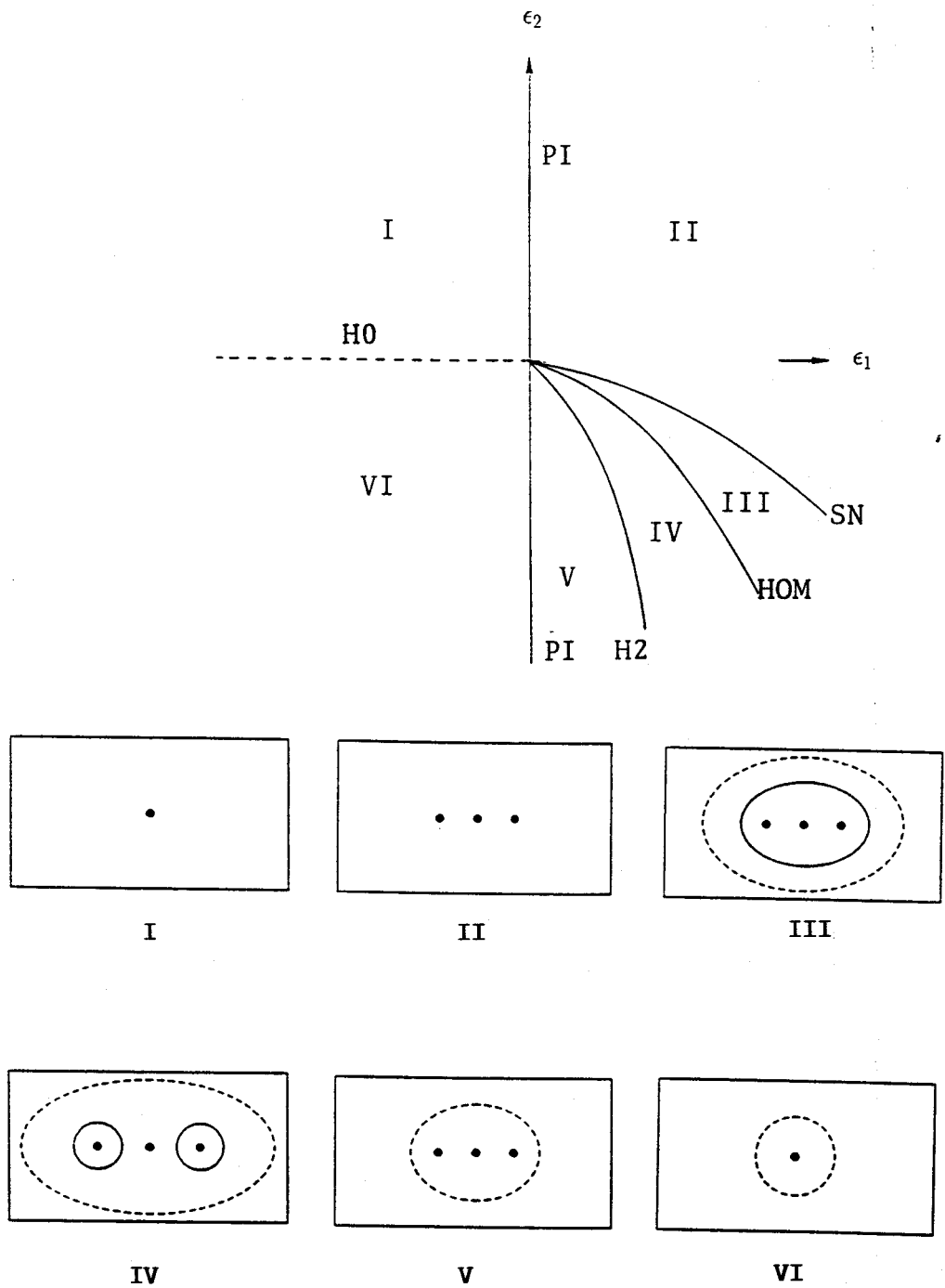


Figura 5.7.8: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  ( $\epsilon_3 > 0$ ), ( $K = +1$ ).

Como breve resumen podemos indicar que hemos obtenido, mediante el análisis teórico del sistema (5.1.5), seis curvas de codimensión dos que parten todas del origen del espacio de parámetros. Estas curvas corresponden a:

- (i) una bifurcación de Hopf degenerada del origen, situada en  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_1 < 0$ ;
- (ii) una bifurcación de Hopf degenerada de los equilibrios no triviales, que aparece para  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = -K\varepsilon_1^2$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ;
- (iii) una conexión homoclina degenerada, dada, en primera aproximación, por  $\varepsilon_3 = -(8/7)K\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ;
- (iv) una bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada con los dos coeficientes de los términos cúbicos negativos, determinada por  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 < 0$ ;
- (v) otra bifurcación de Takens–Bogdanov no degenerada con un coeficiente cúbico positivo, que aparece para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 > 0$ ;
- (vi) una cúspide de silla–nodo de órbitas periódicas, cuya ecuación, en primera aproximación, deducimos en lo que sigue.

Teniendo en cuenta que dicha cúspide aparece para  $e = e_2$ , mediante la parametrización dada en (5.3.16) —también se podría utilizar la de (5.5.13)— y usando las relaciones entre  $\mu_i$  y  $\varepsilon_i$  del escalado introducido en (5.3.1) llegamos a la siguiente parametrización para la cúspide:

$$\varepsilon_1(s) = s, \quad \varepsilon_2(s) = \alpha_2 s^2, \quad \varepsilon_3(s) = \alpha_3 s, \quad s > 0$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \mu_2(e_2) &= \frac{4K(R(e_2) - e_2 R'(e_2))}{7R'(e_2)} \\ \alpha_3 = \mu_3(e_2) &= -\frac{4K(2R'(e_2) + 1)}{7R'(e_2)} \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

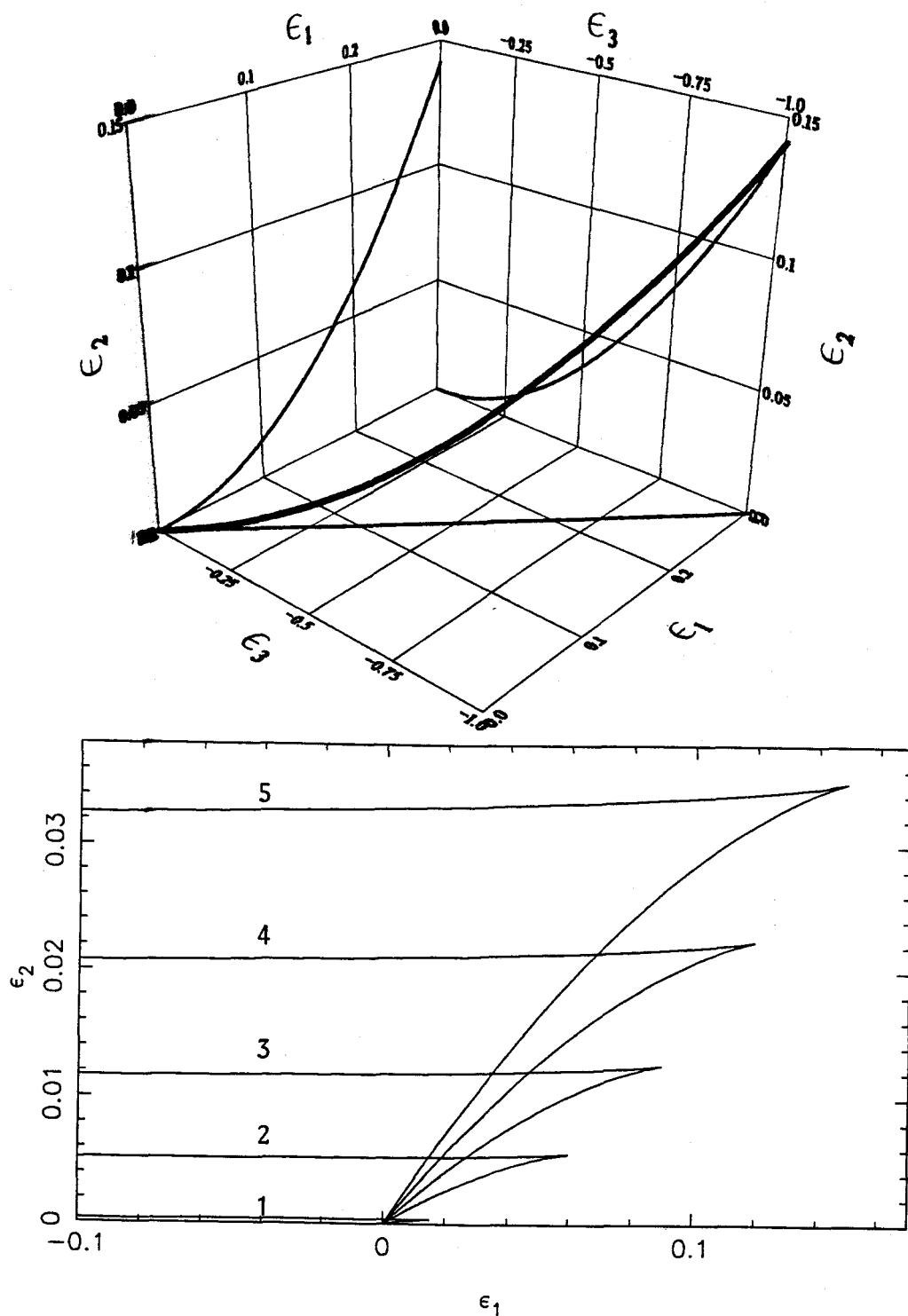


Figura 5.7.9: (a) Cúspide de silla-nodo de órbitas periódicas en el espacio de parámetros ( $K = +1$ ). (b) Curvas de silla-nodo que colapsan en una cúspide para distintos valores de  $\epsilon_3$ : (1)  $-0.05$ ; (2)  $-0.2$ ; (3)  $-0.3$ ; (4)  $-0.4$ ; (5)  $-0.5$ .

Mediante dicha parametrización obtenemos la curva de la figura 5.7.9 en la que también aparecen las proyecciones en los planos coordenados de dicha cúspide de silla-nodo.

En lo que resta de sección vamos a exponer resultados de estudios numéricos, realizados con los algoritmos expuestos en los capítulos II y III, que concuerdan con los resultados teóricos obtenidos.

Comenzamos dando los valores aproximados de  $e_1$  y  $e_2$  donde  $R(e)$  y  $R'(e)$  alcanzan respectivamente su mínimo y su máximo absolutos:

$$e_1 \approx 0.088987, \quad R(e_1) \approx 0.752256$$

$$e_2 \approx 0.423807, \quad R(e_2) \approx 0.822213, \quad R'(e_2) \approx 0.259085$$

Con estos últimos valores podemos evaluar  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  de (5.7.1) obteniendo

$$\alpha_2 \approx 1.571268K, \quad \alpha_3 \approx -3.348421K$$

Hemos obtenido, para diversos valores negativos de  $\varepsilon_3$ , secciones de la cúspide cuya aproximación teórica también dibujamos en la figura 5.7.9. Asimismo, hemos comparado dicha aproximación teórica con los resultados numéricos proyectando en el plano  $\varepsilon_1$ - $\varepsilon_2$  la curva teórica y obteniendo numéricamente varios puntos de la curva exacta, con valores de  $\varepsilon_3$  comprendidos entre 0 y  $-1$  (vid. figura 5.7.10).

La otra curva sobre la que se produce una bifurcación de codimensión dos de la que tenemos una expresión analítica aproximada es la de conexiones homoclinas degeneradas. Mediante el algoritmo desarrollado en el capítulo 3 hemos continuado dicha curva  $HD$  (vid. figura 5.7.10). La recta punteada  $HT$  corresponde a la aproximación obtenida por el método de Melnikov que se ajusta muy bien, en este caso, a la curva continuada hasta valores del orden de la unidad. Al seguir aumentando  $\varepsilon_1$  la curva de homoclinas degeneradas se va separando de la punteada y se acerca a la de Hopf  $HOP2$  de los equilibrios no triviales.

Si fijamos  $\varepsilon_1 = 0.5$  ( $K = +1$ ), el conjunto de bifurcaciones que aparece en el plano  $\varepsilon_3$ - $\varepsilon_2$  es el de la figura 5.7.11, análogo al de la figura 5.7.1 y con las configuraciones esquematizadas en la figura 5.7.2.



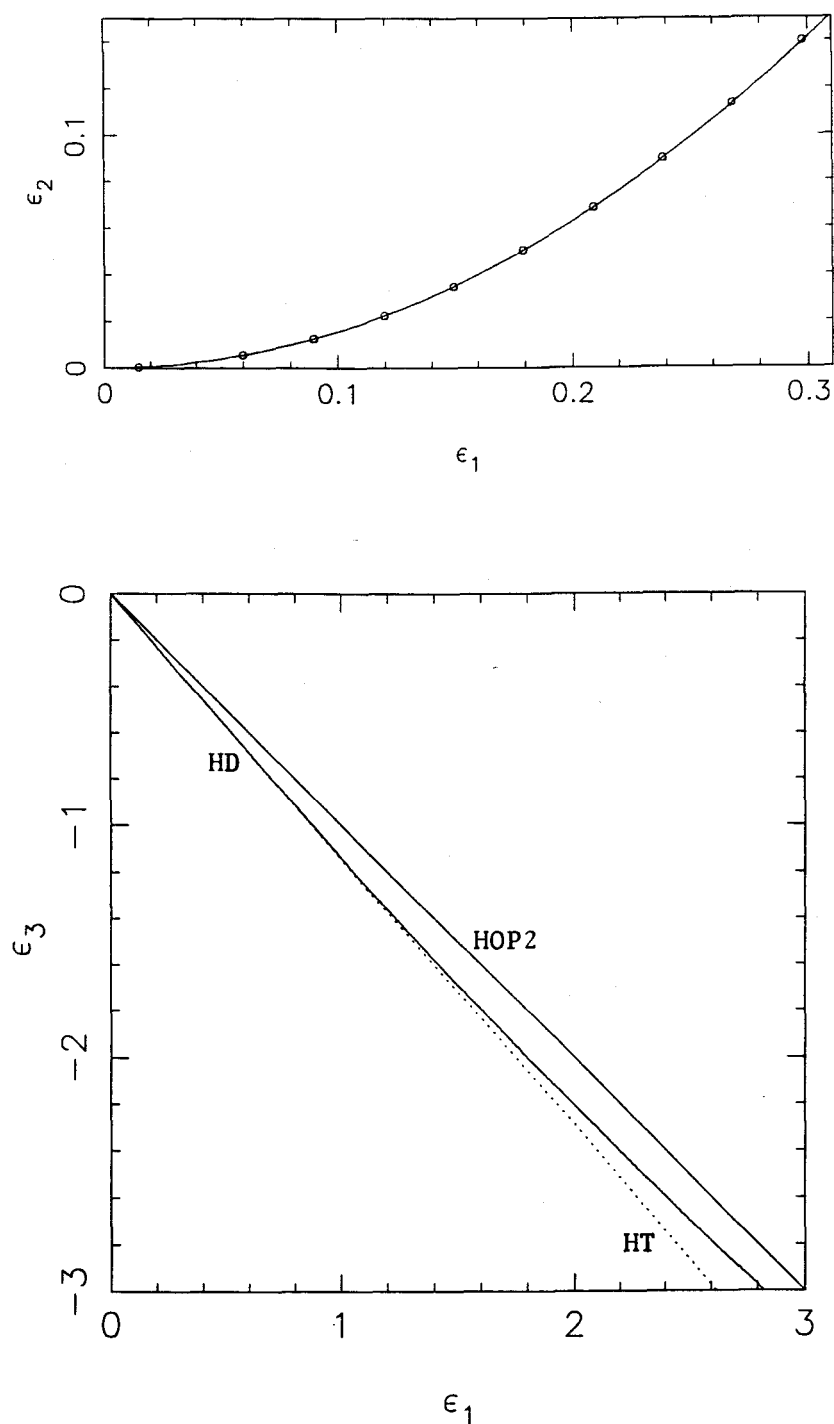


Figura 5.7.10: (a) Proyección en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  de la curva teórica de cúspides de silla-nodo de órbitas periódicas. Los puntos corresponden a valores obtenidos numéricamente ( $K = +1$ ). (b) Curva de homoclinas degeneradas ( $\epsilon_2 = 0$ ), ( $K = +1$ ).

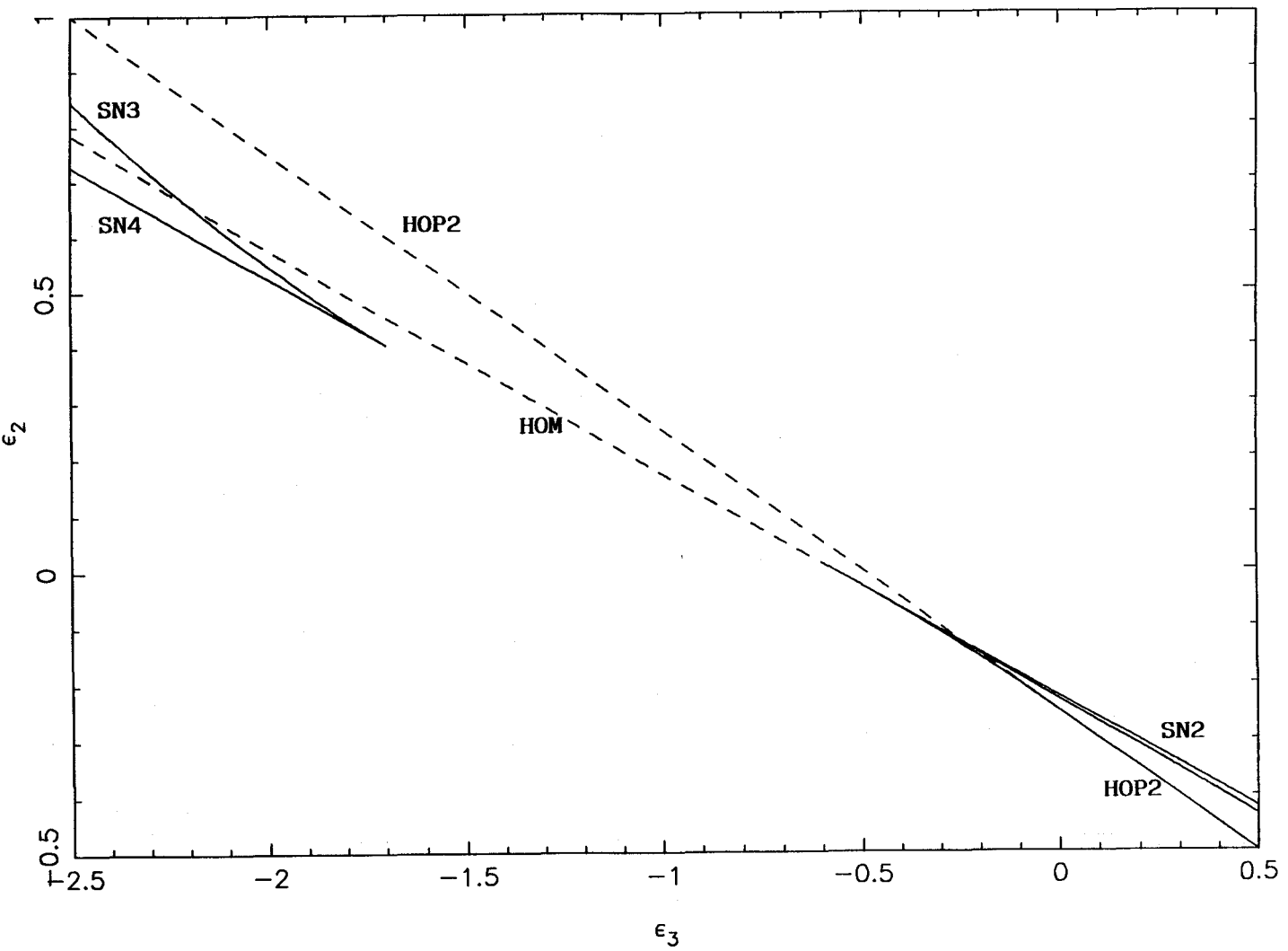


Figura 5.7.11: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_3$ - $\epsilon_2$ , obtenido numéricamente para  $\epsilon_1 = 0.5$ ,  $K = +1$ .

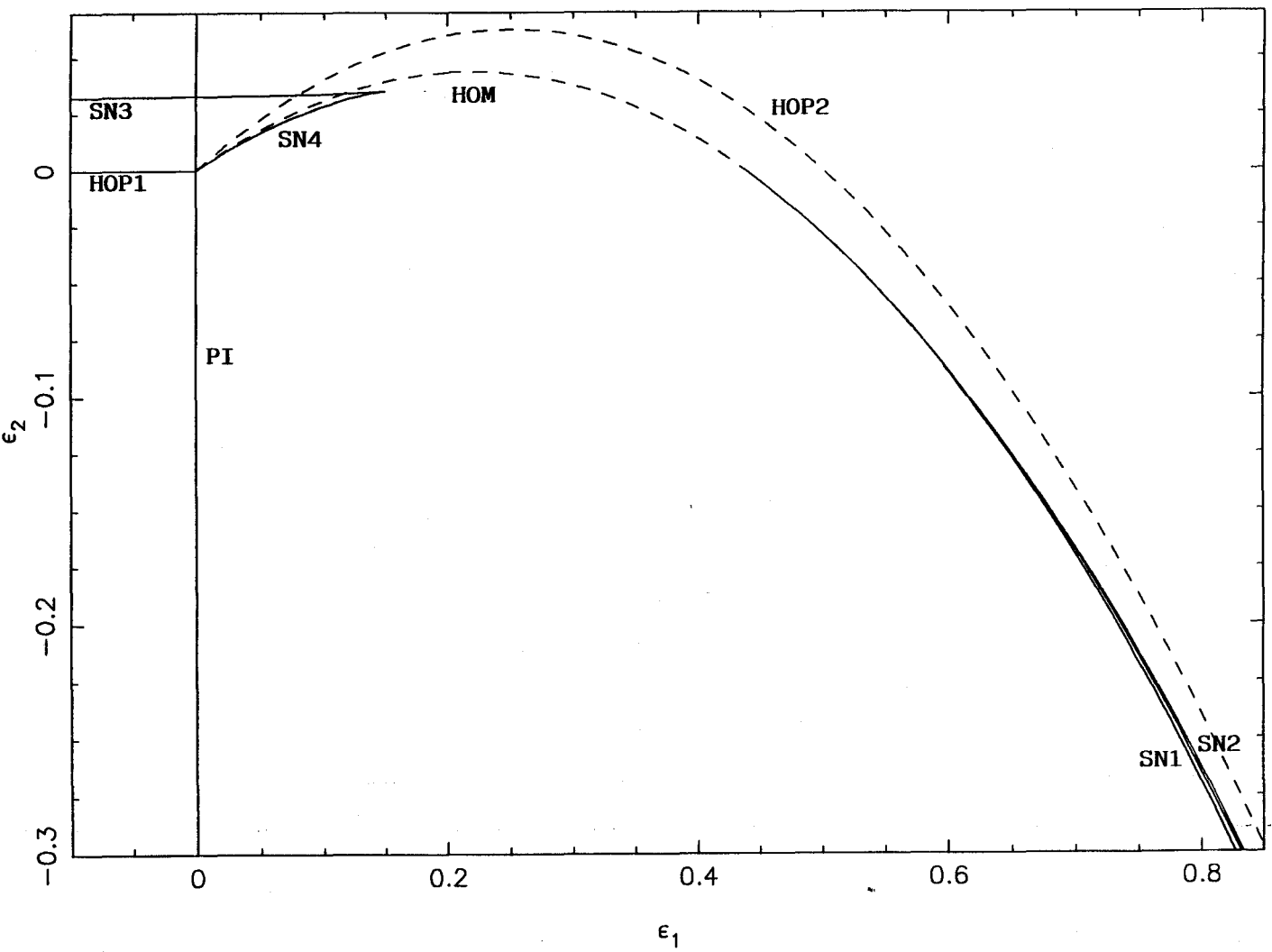


Figura 5.7.12: Conjunto de bifurcaciones en el plano  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$ , obtenido numéricamente para  $\epsilon_3 = -0.5$ ,  $K = +1$ .

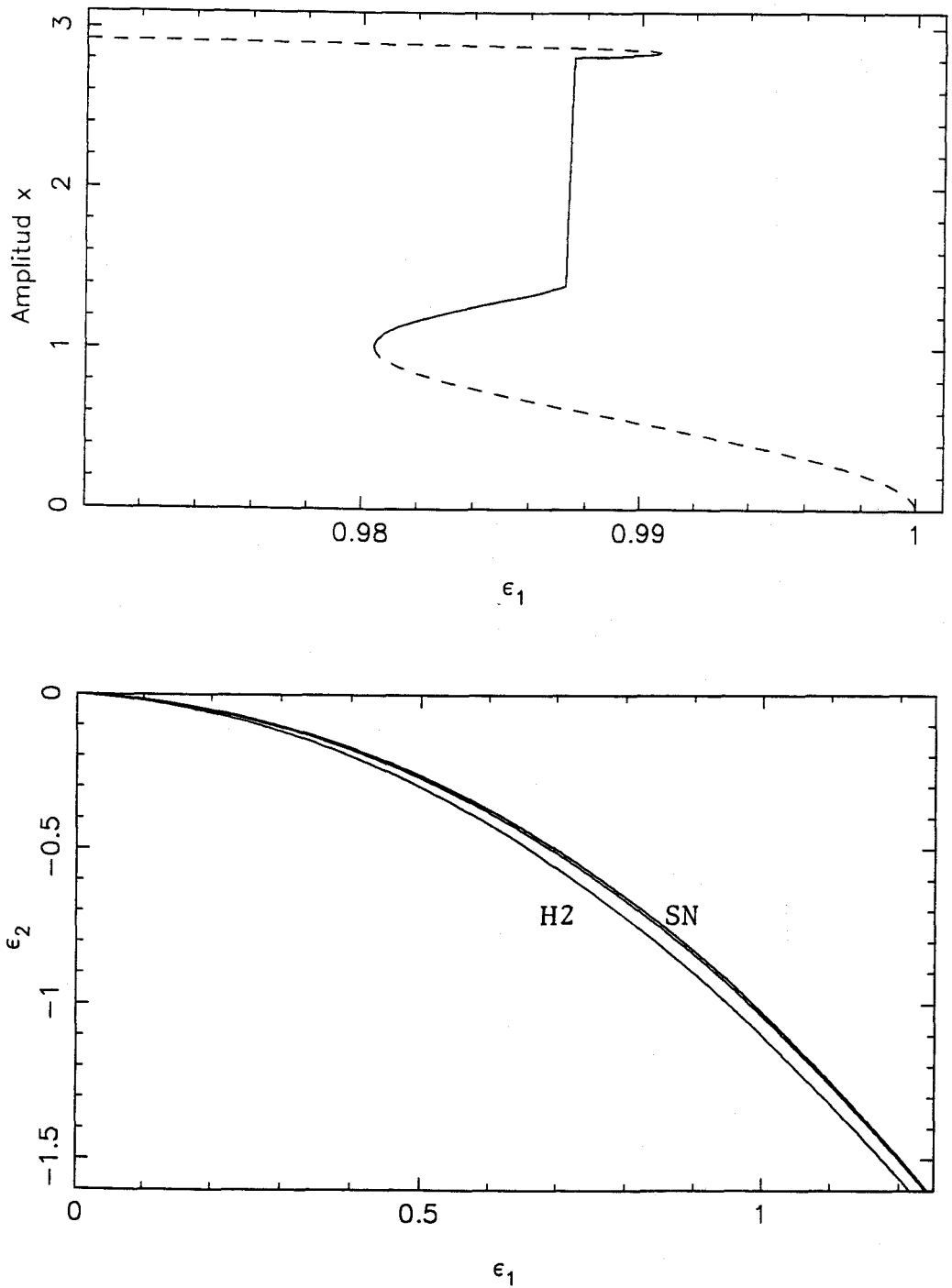


Figura 5.7.13: (a) Diagrama de bifurcaciones para  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -0.5$ ,  $K = +1$ . (b) Conjunto parcial de bifurcaciones para  $\epsilon_3 = 0.1$ ,  $K = +1$ .

Nos planteamos ahora obtener numéricamente las curvas de bifurcaciones que aparecen en las figuras 5.7.3 y 5.7.5. Fijamos para ello  $\varepsilon_3 = -0.5$ ,  $K = +1$ . Usando los algoritmos desarrollados en los capítulos 2 y 3 hemos obtenido los resultados que aparecen en la figura 5.7.12, que presentará las configuraciones indicadas en la figura 5.7.4.

Si además fijamos  $\varepsilon_2 = -0.5$  obtenemos el diagrama de bifurcaciones de la figura 5.7.13 en el que se observa como el par de órbitas periódicas inestables que nacen en una bifurcación de Hopf subcrítica de los equilibrios no triviales desaparece en una bifurcación silla-nodo con un par de órbitas estables que provienen de la homoclina atractiva. Ésta se ha formado a partir de una órbita estable grande que colapsa en otra bifurcación silla-nodo con otra órbita inestable grande. En este caso concreto nos hemos movido por las configuraciones 4, 10, 8, 5 y 2 de la figura 5.7.4.

Para finalizar la presente sección hemos centrado nuestra atención en el caso  $\varepsilon_3 = 0.1$  ( $K = +1$ ) para el que hemos encontrado las tres curvas mostradas en la figura 5.7.13: la de Hopf de los equilibrios no triviales  $H2$ , la de conexiones homoclinas (en medio) y la de silla-nodo de órbitas periódicas  $SN$ . Este conjunto de bifurcaciones corresponde al que aparece en el cuadrante inferior derecho de la figura 5.7.8.

## 5.8 Aplicación a un Sistema Electrónico Autónomo

Nos planteamos, en esta sección, determinar el comportamiento tan rico de bifurcaciones —predicho por el análisis anterior— que presenta el circuito estudiado en el capítulo IV, como consecuencia de una degeneración en la bifurcación de Takens-Bogdanov (vid. sección 5.1). Vamos a centrarnos en tres situaciones:

- (i) ausencia de diodos, es decir,  $a_3 \neq 0$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$ ;
- (ii)  $a_3 \neq 0$ ,  $b_3 \neq 0$ ,  $a_5 = b_5 = 0$ ;

(iii)  $a_3 \neq 0$ ,  $b_3 \neq 0$ ,  $a_5 \neq 0$ ,  $b_5 \neq 0$ .

En el primer caso fijamos  $a_3 = 0.1$  con lo que la bifurcación de Takens–Bogdanov resulta ser degenerada para  $r_c = 1$ . Evaluando los coeficientes de la forma normal para los valores críticos de los parámetros obtenemos  $\delta_5 < 0$ . Parece pues que el conjunto de bifurcaciones que esperamos encontrar será el correspondiente a  $K = -1$ . Para valores de  $r < r_c$  el conjunto de bifurcaciones es el de la figura 5.8.1 en el que aparecen las siguientes curvas. La bifurcación de Hopf del origen  $HOP$  cambia de supercrítica a subcrítica en  $A$  apareciendo como consecuencia de esta degeneración una curva de silla–nodo de órbitas periódicas  $SN1$ . La intersección de  $HOP$  con la recta de pitchfork de equilibrios  $PI$  da lugar a un punto de Takens–Bogdanov  $B$  del que parten tres curvas: la de Hopf de los equilibrios no triviales  $HOP2$ , la de conexiones homoclinas  $HOM$  y la de silla–nodo  $SN2$  de órbitas periódicas. Esta última, tal como sucedía en el sistema (5.1.5), colapsa en una cúspide  $C$  con  $SN1$ .

Por otra parte, el cambio de carácter de  $HOP2$  en  $D$  conlleva la aparición de otra curva de silla–nodo de órbitas periódicas pequeñas  $SN3$  que finaliza, igual que en el caso del sistema plano analizado, en el punto  $E$  en el que la curva  $HOM$  cambia de atractiva a repulsiva. De este punto  $E$  también nace otra curva de silla–nodo de órbitas periódicas grandes  $SN4$ . Ésta colapsa en una cúspide  $F$  con otra curva de silla–nodo  $SN5$  que nuestro análisis semiglobal no predijo. Destacamos el hecho de que las cúspides  $F$  y  $C$  colapsan para algún valor de  $r$  comprendido entre 0.5 y 0.7: parece que estamos ante una bifurcación *pico a pico* (*beak-to-beak singularity*) (vid. figura 5.10 de [99]) cuyo estudio dejamos para trabajos posteriores.

Incluimos, en la figura 5.8.2, un detalle muy ampliado de una zona del conjunto de bifurcaciones de la figura 5.8.1 en el que se observa la pequeñez de algunas regiones de dicho conjunto lo que imposibilita que se pueda reproducir, en un tamaño razonable, el conjunto completo obtenido numéricamente. De ahí que recurramos a los esquemas cualitativos para tener una visión global de la riqueza de comportamientos del circuito en estudio.

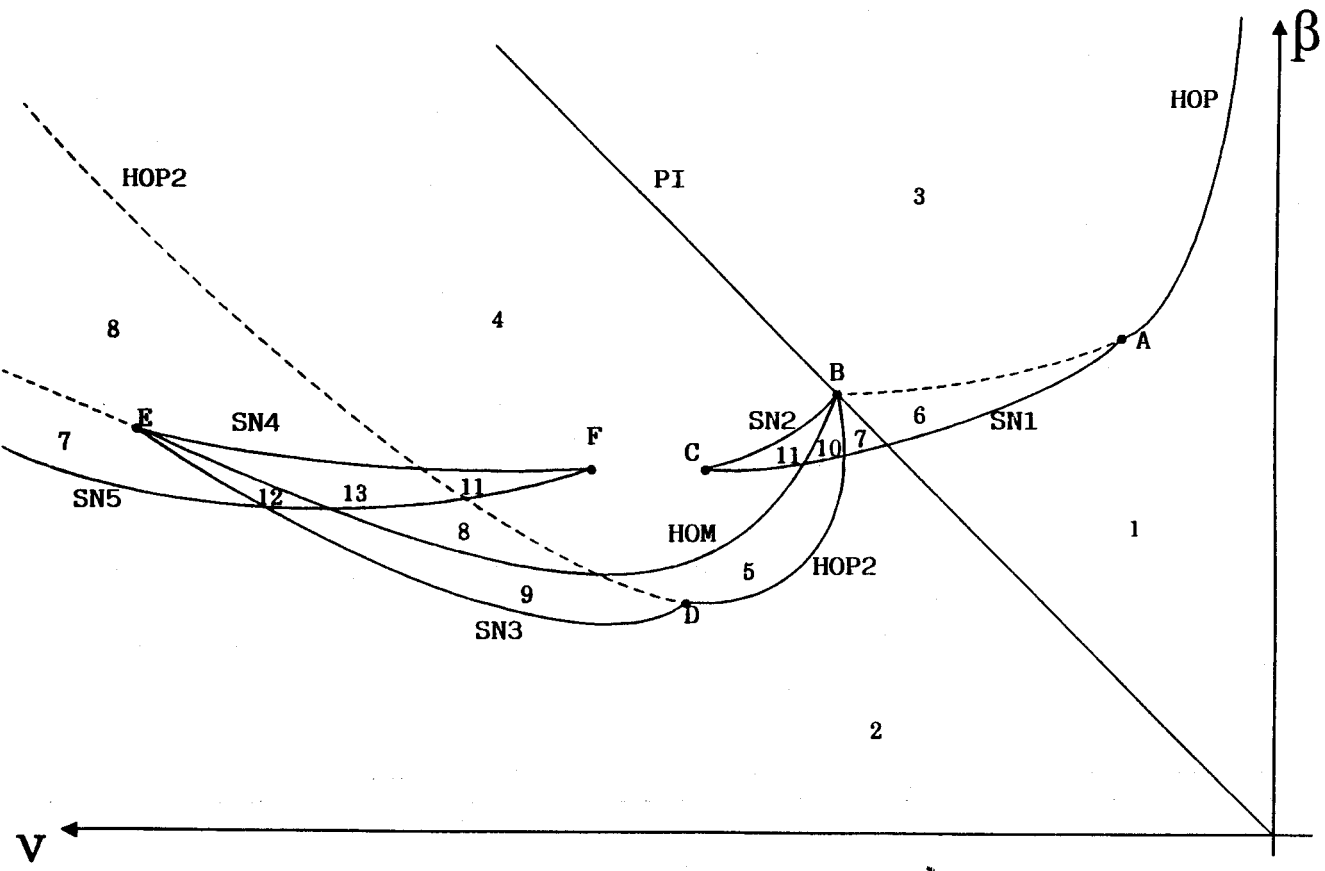


Figura 5.8.1: Conjunto de bifurcaciones en el caso  $r = 0.7$ ,  $a_3 = 0.1$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$ .

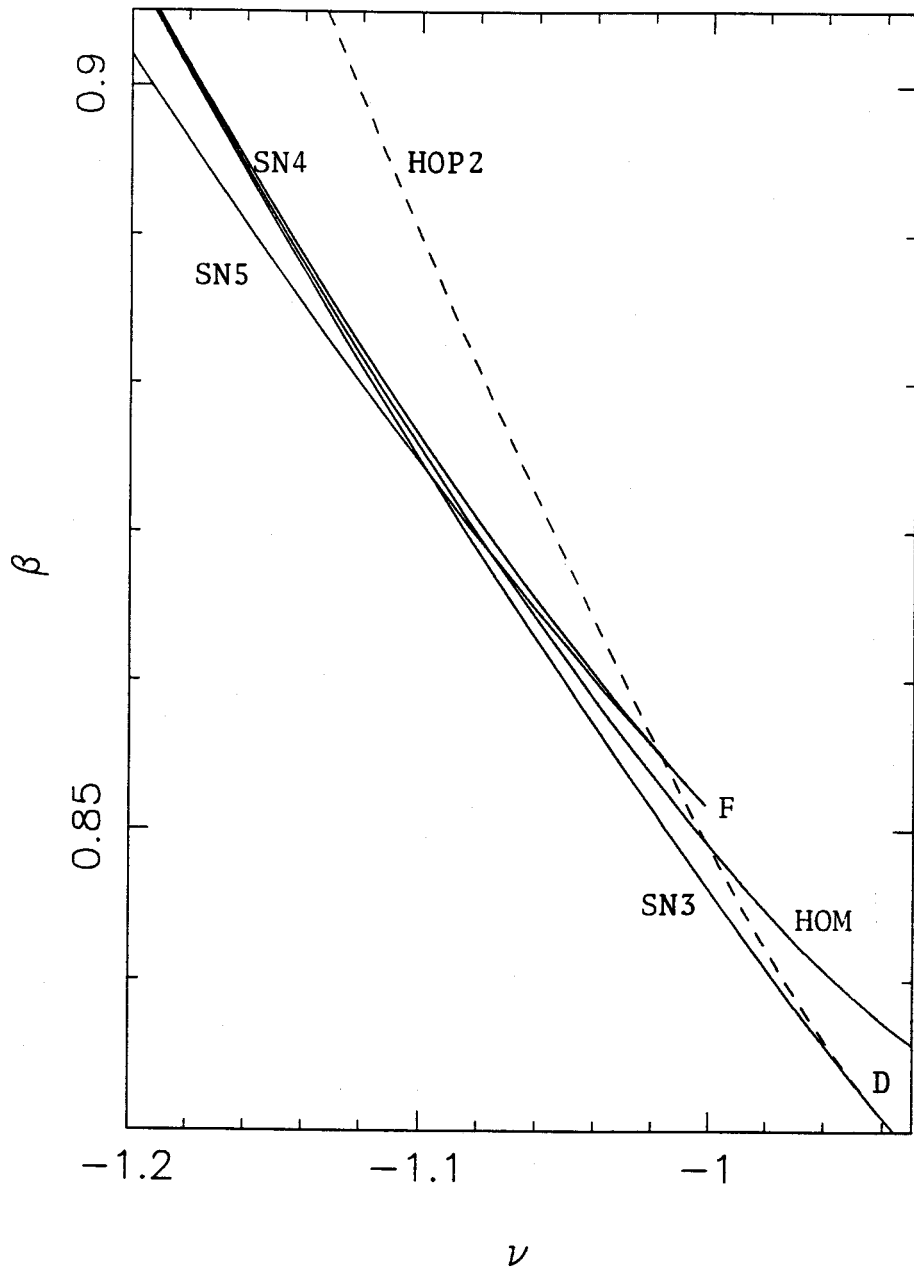


Figura 5.8.2: Detalle del conjunto de bifurcaciones que se obtiene numéricamente para  $r = 0.7$ ,  $a_3 = 0.1$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$ .



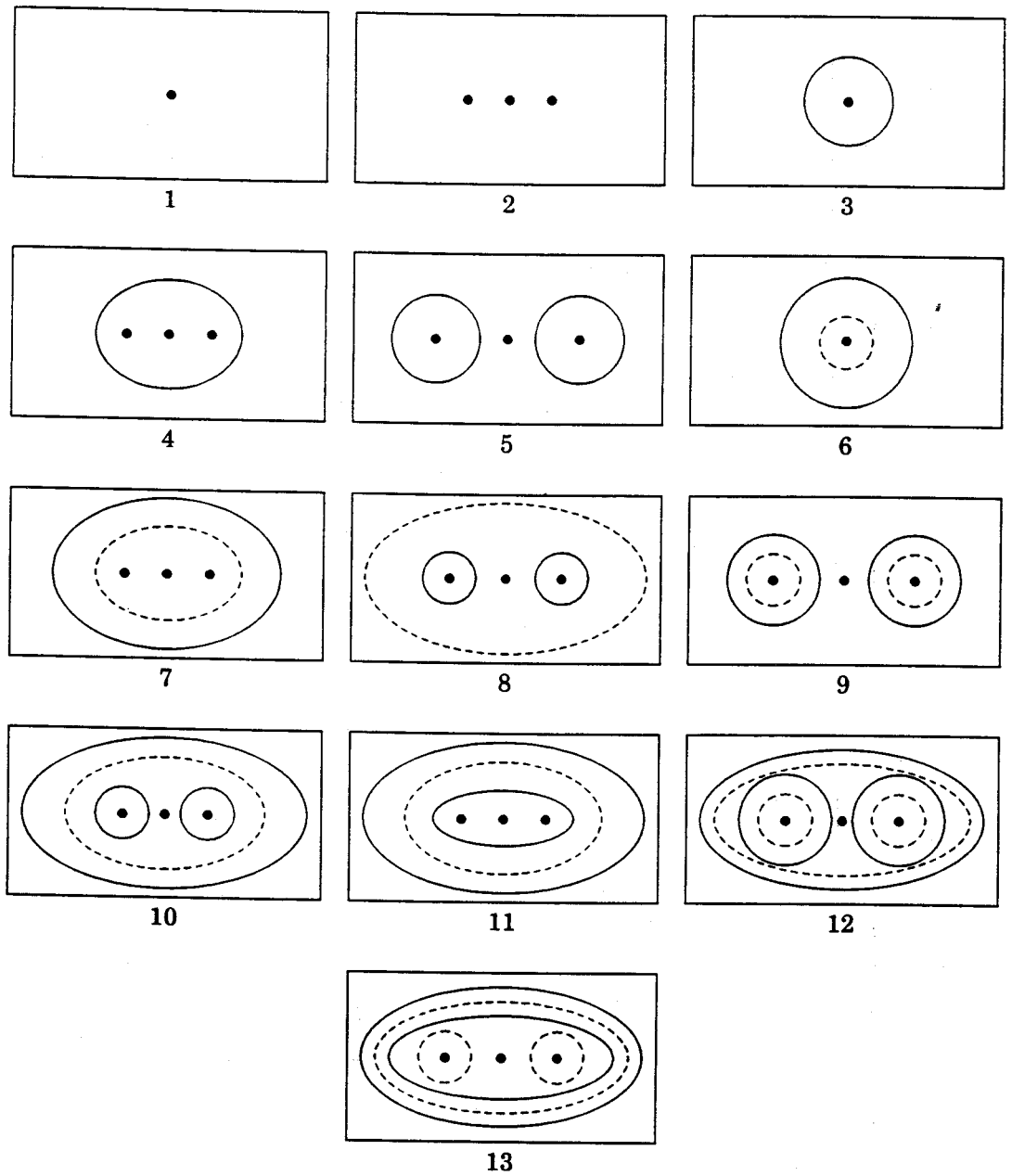


Figura 5.8.3: Distintas configuraciones de equilibrios y órbitas periódicas correspondientes al caso  $r = 0.7$ ,  $a_3 = 0.1$ ,  $b_3 = a_5 = b_5 = 0$ .

Para los valores de los parámetros indicados, las 13 configuraciones que presenta el conjunto de bifurcaciones de la figura 5.8.1 han sido esquematizadas en la figura 5.8.3, en la que no indicamos la estabilidad de los equilibrios y sí la de las órbitas periódicas. La existencia de la cúspide  $F$  hace que haya configuraciones, la 12 y 13, en las que coexisten hasta 4 órbitas periódicas.

Resumiendo, podemos indicar que el comportamiento en las proximidades de  $r_c$ , para  $r < r_c$ , es rico —el indicado hasta ahora— mientras que para  $r > r_c$  sólo aparece una bifurcación de Hopf del origen no degenerada (siempre supercrítica) que al intersectar con la recta de pitchfork de equilibrios origina un punto de Takens–Bogdanov del que parten tres curvas y ninguna de las cuales va a cambiar su estabilidad (la de Hopf de los equilibrios no triviales se mantiene subcrítica y la homoclina repulsiva).

En el segundo caso que analizamos tomamos  $r = 2$ ,  $b_3 = 0.3$ ,  $a_5 = b_5 = 0$ , con lo que la degeneración en la bifurcación de Takens–Bogdanov se da para el valor crítico de  $a_3$ ,  $a_{3c} = 0.9$ . Nuevamente la evaluación de  $\delta_5$  nos hace pensar, al ser negativa, que nos encontramos en el caso  $K = -1$  como así sucede y el comportamiento de bifurcaciones rico aparece aquí, en las proximidades de  $a_{3c}$ , para  $a_3 < a_{3c}$ . En la figura 5.8.4, que comentamos a continuación, aparece el conjunto de bifurcaciones, relacionado con la degeneración de la Takens–Bogdanov, para  $a_3 = 0.1$ . Observamos, en primer lugar, que la curva de Hopf del origen  $HOP$  pasa de supercrítica a subcrítica en  $A$  de donde surge, como consecuencia de esa degeneración, una curva de silla–nodo de órbitas periódicas  $SN1$ . Al intersectar  $HOP$  con la recta de pitchfork de equilibrios  $PI$  aparece un punto de Takens–Bogdanov  $B$  del que surgen una curva de Hopf  $HOP2$  de los equilibrios surgidos en  $PI$ , una curva de conexiones homoclinas  $HOM$  y una curva de silla–nodo de órbitas periódicas  $SN2$ . Tal como predijo nuestro análisis de (5.1.5), esta última colapsa con  $SN1$  originando la cúspide  $C$ . Mientras que  $HOP2$  se mantiene supercrítica, la homoclina  $HOM$  atraviesa la curva punteada  $RI$ , que separa la zona del plano de parámetros  $RE$  en la que los tres autovalores de la matriz de la linealización del origen son reales de la zona en la que dicha matriz tiene un par

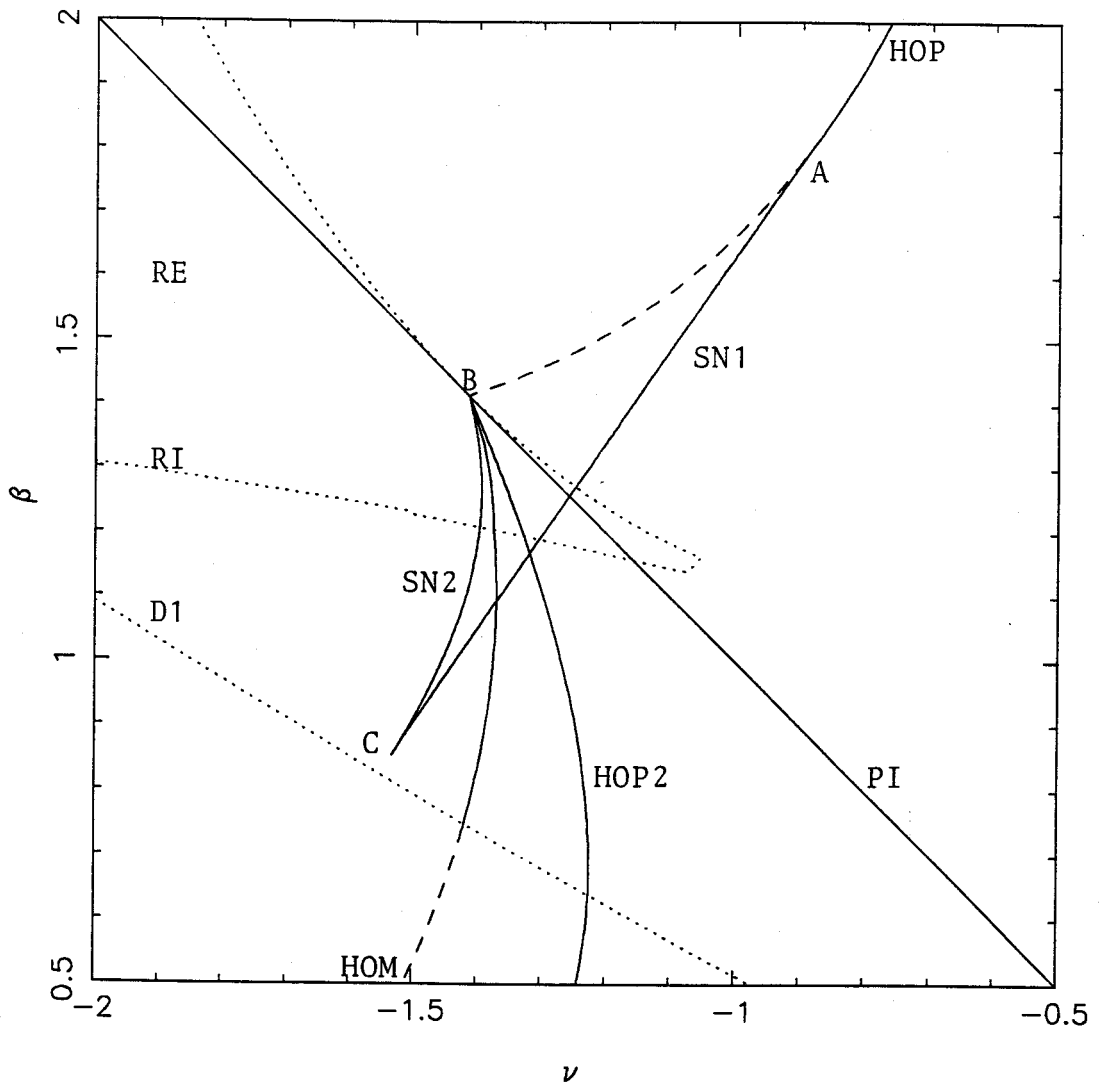


Figura 5.8.4: Conjunto de bifurcaciones en el caso  $r = 2$ ,  $a_3 = 0.1$ ,  $b_3 = 0.3$ ,  $a_5 = b_5 = 0$ .

de autovalores complejos conjugados, con lo que la homoclina pasa a ser del tipo silla-foco. Después  $HOM$  atraviesa la otra curva punteada  $D1$  que indica que el autovalor real positivo coincide con el módulo de la parte real de los autovalores complejos. Por tanto, por debajo de  $D1$ , la homoclina pasa a ser repulsiva, con lo que el comportamiento del sistema presentará la misma riqueza que la analizada en el capítulo anterior, alrededor de esa homoclina tipo Shil'nikov.

Finalizamos este segundo caso indicando que, si  $a_3 > a_{3c} = 0.9$ , el conjunto de bifurcaciones se simplifica notablemente puesto que la bifurcación de Hopf del origen se mantiene siempre supercrítica y, por tanto, la curva de silla-nodo que surge del punto Takens-Bogdanov no colapsará en ninguna cúspide consecuencia de la degeneración de la bifurcación de Takens-Bogdanov analizada.

En el último supuesto que analizamos del circuito, para intentar encontrar en él el comportamiento predicho teóricamente por el análisis que hicimos del sistema plano (5.1.5), mantenemos los valores dados en el caso anterior a  $r$  y  $b_3$ :  $r = 2$ ,  $b_3 = 0.3$  —con lo que el valor crítico de  $a_3$  sigue siendo  $a_{3c} = 0.9$ — pero consideramos valores no nulos de  $a_5$  y  $b_5$ , a saber,  $a_5 = b_5 = 5$ . De esta manera, el coeficiente de la forma normal  $\delta_5$  sería positivo, con lo que esperaríamos encontrar un comportamiento, en este caso, análogo al correspondiente a  $K = +1$ . Sin embargo, la situación no es ésa, puesto que el correspondiente  $\delta'_5$  de (5.1.4) no es conocido y, en este caso, parece ser que tiene signo distinto a  $\delta_5$ . La situación nuevamente se corresponde con el caso  $K = -1$  de (5.1.5). Pasamos a comentar la situación con que nos encontramos en el caso  $a_3 < a_{3c}$ , que aparece esquematizada en la figura 5.8.5. La simulación numérica la hicimos para  $a_3 = 0.1$ , pero debido a que algunas de las curvas permanecen muy juntas y, por tanto, algunas de las configuraciones aparecen en regiones muy pequeñas, hemos preferido presentar solamente la información cualitativa.

Al igual que en los dos casos anteriormente analizados, aparece una curva de silla-nodo de órbitas periódicas  $SN1$  como consecuencia del cambio de carácter que la bifurcación de Hopf del origen  $HOP$  experimenta en el punto  $A$ . El punto de Takens-Bogdanov  $B$ , que aparece al intersectar  $HOP$  con la recta de

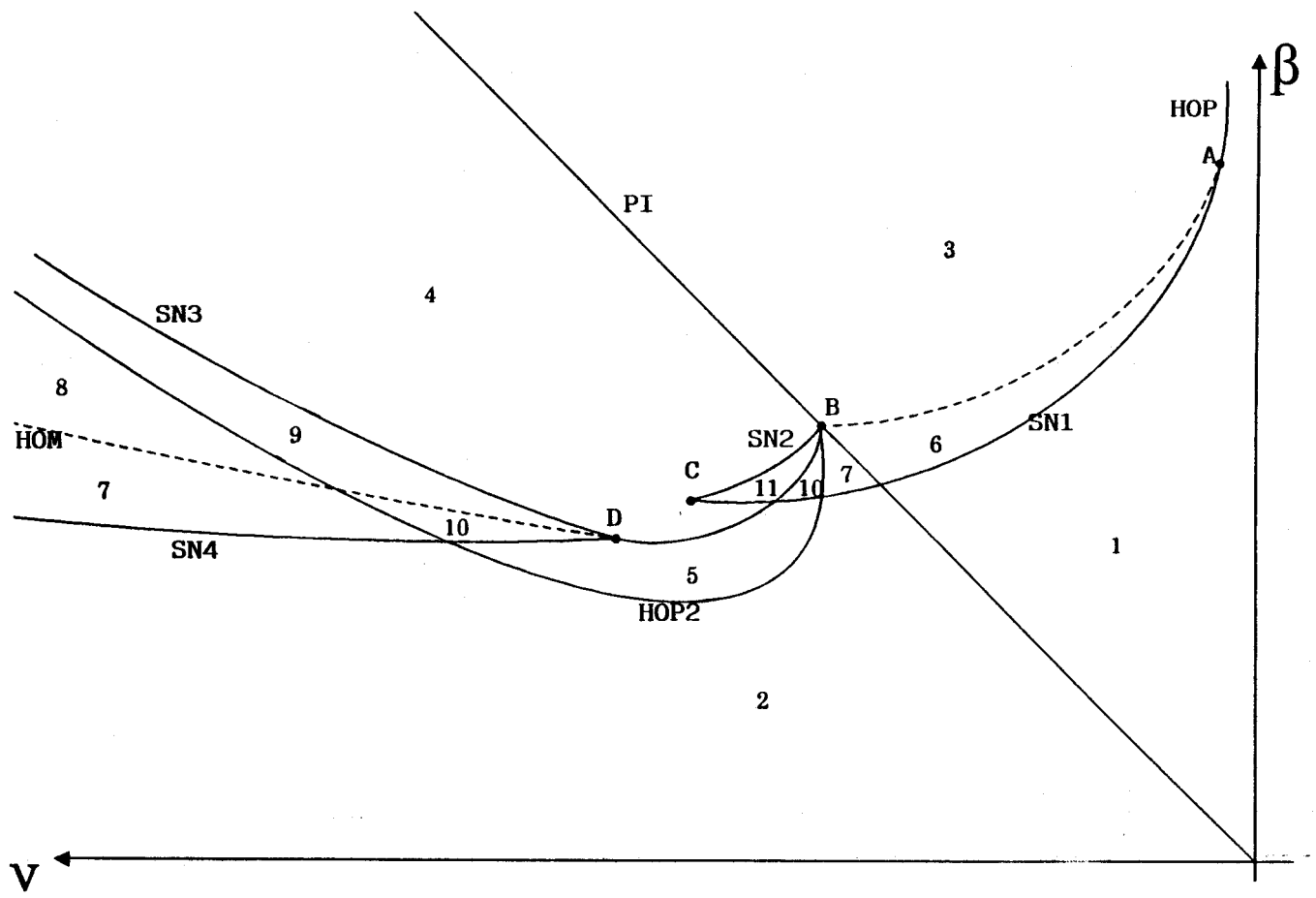


Figura 5.8.5: Conjunto de bifurcaciones en el caso  $r = 2, a_3 = 0.1, b_3 = 0.3, a_5 = b_5 = 5$ .

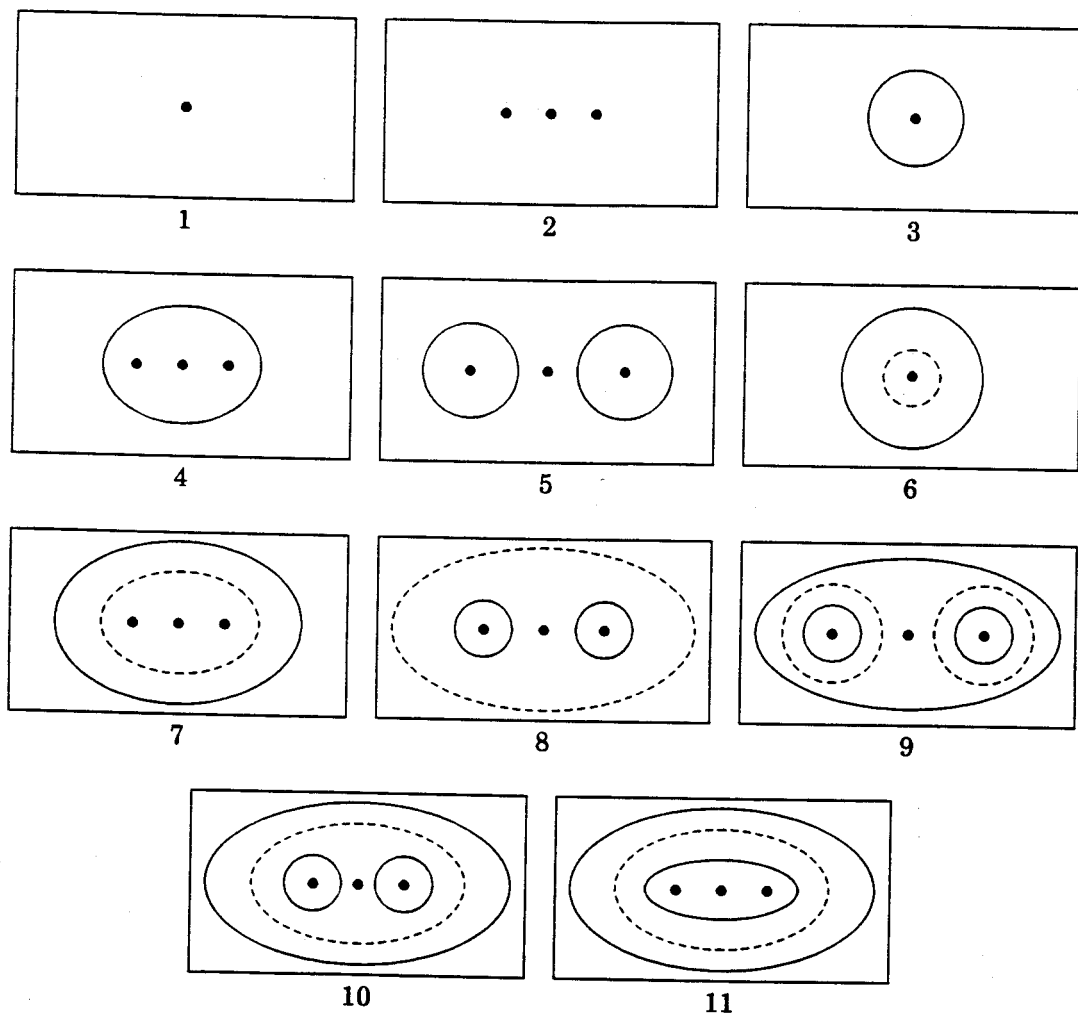


Figura 5.8.6: Distintas configuraciones de equilibrios y órbitas periódicas existentes cuando  $r = 2$ ,  $a_3 = 0.1$ ,  $b_3 = 0.3$ ,  $a_5 = b_5 = 5$ .

pitchfork de los equilibrios no triviales  $PI$ , es el origen de una curva de Hopf de los equilibrios no triviales  $HOP2$ , de una curva de conexiones homoclinas  $HOM$  y de una de silla-nodo de órbitas periódicas  $SN2$  que colapsa en la cúspide  $C$  con  $SN1$ . Mientras que  $HOP2$  se mantiene siempre supercrítica, la homoclina  $HOM$  pasa de atractiva a repulsiva en  $D$  y como consecuencia de este cambio en su estabilidad surgen dos curvas de silla-nodo, una de órbitas pequeñas  $SN3$  y otra de grandes  $SN4$ .

En la figura 5.8.6 esquematizamos las 11 configuraciones distintas de equilibrios y órbitas periódicas que presenta este último caso estudiado.

## 5.9 Aplicación a un Sistema Mecánico

Al estudiar oscilaciones de tuberías en intercambiadores de calor [103], si se hace un modelo mecánico sencillo de una tubería [55], [75], se llega a la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 x + x^3 + \dot{x}^3 = 0$$

Estamos interesados en obtener su conjunto de bifurcaciones. Para ello, convertimos la ecuación anterior en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha_2 x - \alpha_1 y - x^3 - y^3 \end{aligned} \tag{5.9.1}$$

que tiene por equilibrios al  $(0, 0)$  y a  $(\pm\sqrt{-\alpha_2}, 0)$  y su matriz de la linealización vale

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 - 3x^2 & -\alpha_1 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Ésta adopta la siguiente expresión en el origen de coordenadas:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Si le calculamos la forma normal con parámetros a (5.9.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha_2 x - \alpha_1 y - 3\alpha_2 x^2 y - x^3 - 3x^4 y \end{aligned}$$

que se corresponde con el sistema (5.1.5) para el caso

$$\varepsilon_1 = -\alpha_2, \varepsilon_2 = -\alpha_1, \varepsilon_3 = -3\alpha_2, K = -3.$$

Es decir, su conjunto de bifurcaciones resultará de intersectar el espacio de parámetros de (5.1.5), para  $K = -3$ , con el plano  $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$ . De esta forma obtenemos la intersección esquematizada en la figura 5.9.1 en la que observamos, además de un bifurcación pitchfork de equilibrios y dos bifurcaciones de Hopf supercríticas (una correspondiente al origen y otra a los equilibrios no triviales), un par de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas (una de órbitas grandes y otra de pequeñas) que rodean desde el origen a la homoclina la cual se mantiene siempre repulsiva. Para obtener las aproximaciones correspondientes a las curvas de silla-nodo y de conexiones homoclinas basta hacer en (5.3.7)  $\mu_3 = 3, K = -3$ , con lo que la función de Melnikov (5.3.13) se convierte en

$$M(e, \mu_2) = I_0(e) \left[ \mu_2 - \frac{12}{7}e - \frac{3}{7}R(e) \right]$$

Al anular  $M(e, \mu_2)$  obtenemos

$$\mu_2 = \frac{3}{7} [4e + R(e)] = g(e).$$

Por el estudio analítico que hicimos en la sección 5.4 de la función  $R(e)$  es fácil comprobar que el comportamiento cualitativo de  $g(e)$  es el de la figura 5.9.2. La función  $g(e)$  presenta dos extremos locales: un máximo para  $e = e_- < 0$  (ya que  $R'(e_-) = -4, R''(e_-) < 0$ , según nos garantizan los lemas 5.4.2 y 5.4.4) y un mínimo local para  $e = e_+ > 0$  (puesto que  $R'(e_+) = -4, R''(e_+) > 0$ , para un cierto valor de  $e$  que verifica  $0 < e_+ < e_1$ , cuya existencia deducimos de los lemas 5.4.1 y 5.4.3). Además, podemos asegurar que

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 0, \quad g'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}, \quad g(0) = \frac{12}{35},$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} g'(e) = -\infty, \quad g''(e_2) = 0, \quad \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{g(e)}{e} = \frac{12}{7}$$

Teniendo en cuenta el escalado (5.3.1) es fácil obtener las aproximaciones a las curvas de silla-nodo y a la de homoclinas. Estas son:



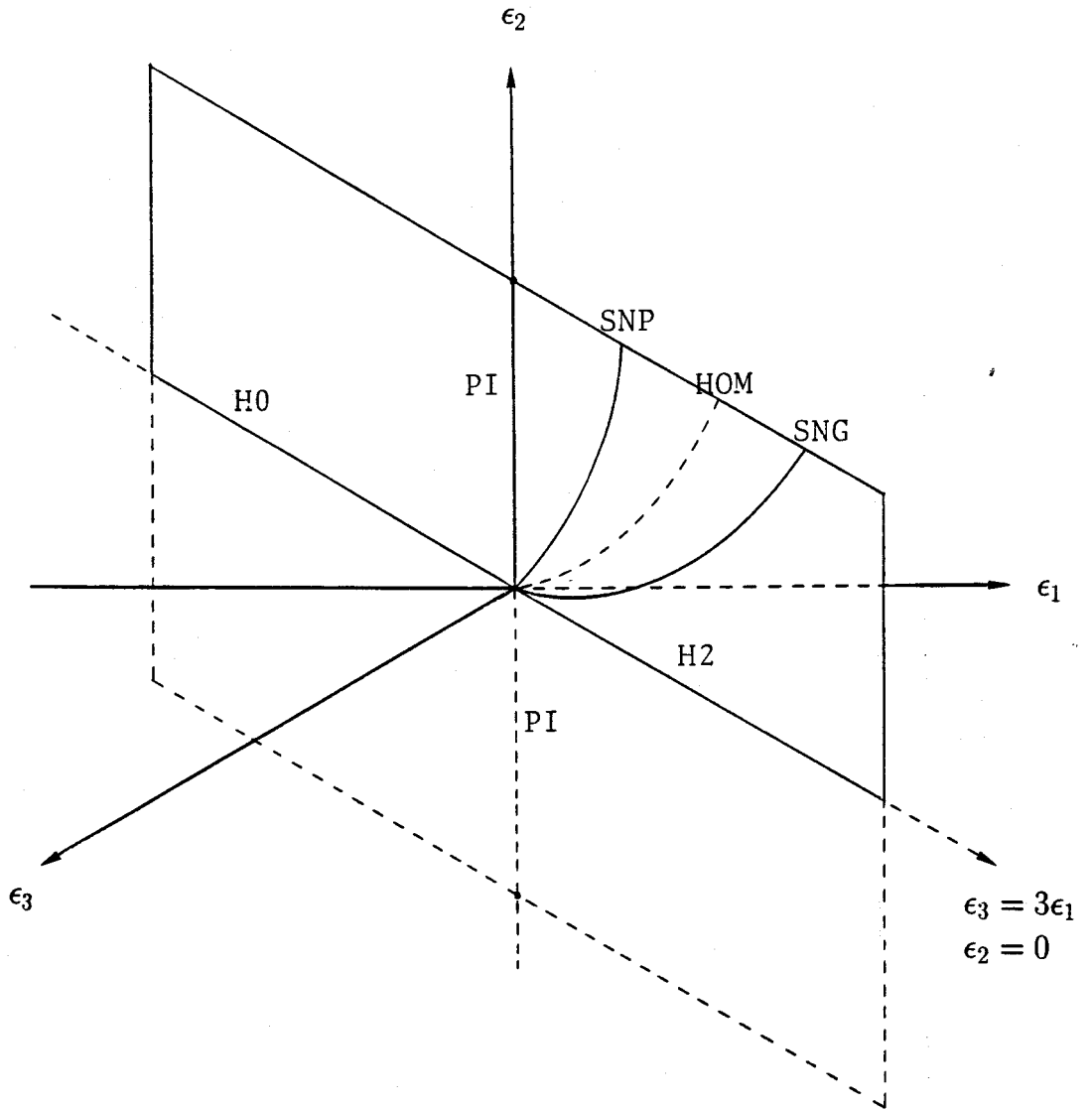
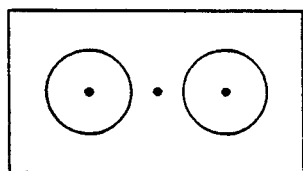
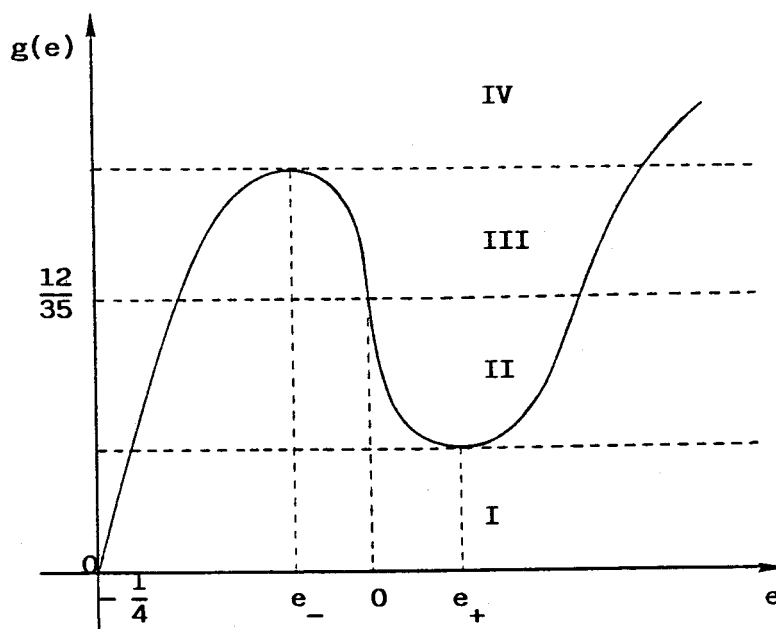
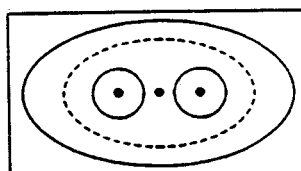


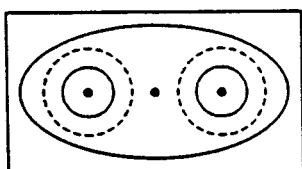
Figura 5.9.1: Intersección del plano  $\epsilon_3 = 3\epsilon_1$  con las superficies de bifurcación en el espacio de parámetros.



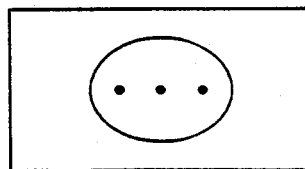
I



II



III



IV

Figura 5.9.2: Representación gráfica cualitativa de la función  $g(e)$  junto con las configuraciones de órbitas periódicas que de ella se deducen.

- (i)  $\varepsilon_2 = g(e_-)\varepsilon_1^2$ ,  $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  para la curva de silla-nodo de órbitas pequeñas *SNP*;
- (ii)  $\varepsilon_2 = g(0)\varepsilon_1^2$ ,  $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  para la de conexiones homoclinas *HOM* (este resultado sale también de (5.3.5));
- (iii)  $\varepsilon_2 = g(e_+)\varepsilon_1^2$ ,  $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  para la de silla-nodo de órbitas grandes *SNG*.

Por último, el conjunto de bifurcaciones en el plano de parámetros de (5.9.1) (vid. figura 5.9.3) se obtiene, a partir de los resultados antes mencionados, sustituyendo  $\varepsilon_1$  por  $-\alpha_2$  y  $\varepsilon_2$  por  $-\alpha_1$ . Vemos, por tanto, que la degeneración en la bifurcación de Takens–Bogdanov trae consigo, en este caso, un conjunto de bifurcaciones bien distinto al caso no degenerado o al caso degenerado que aparece en el circuito analizado en el capítulo anterior: las dos bifurcaciones de Hopf tienen la misma estabilidad y la homoclina siempre presenta carácter opuesto a la de Hopf de los equilibrios no triviales, por lo que se necesita la presencia de dos curvas de silla-nodo de órbitas periódicas.

Con el estudio llevado a cabo sobre el sistema (5.9.1) hemos puesto de manifiesto dos errores presentes en la literatura consultada. El primero corresponde al conjunto de bifurcaciones obtenido en [103] (vid. su figura 24), en el que al no detectar que la homoclina es inestable, faltan además las dos curvas de silla-nodo que la rodean. El segundo aparece en [55] en el que se plantean encontrar un *unfolding* tridimensional que dé cuenta del comportamiento presentado por (5.9.1). El sistema que analizan es justamente el (5.1.5), (con  $K < 0$ ), pero la única riqueza de comportamiento que obtienen es la presencia de una órbita periódica extra con respecto al caso de Takens–Bogdanov no degenerado. Es decir, en sus resultados no aparece ni la silla-nodo relacionada con la Hopf del origen, ni la cúspide que ésta forma con la silla-nodo que parte del origen, ni el cambio de carácter que experimenta la homoclina ni la pareja de silla-nodo que aparece como consecuencia de este cambio de estabilidad. Por tanto, con su estudio no son capaces de justificar ni el comportamiento erróneo que aparecía

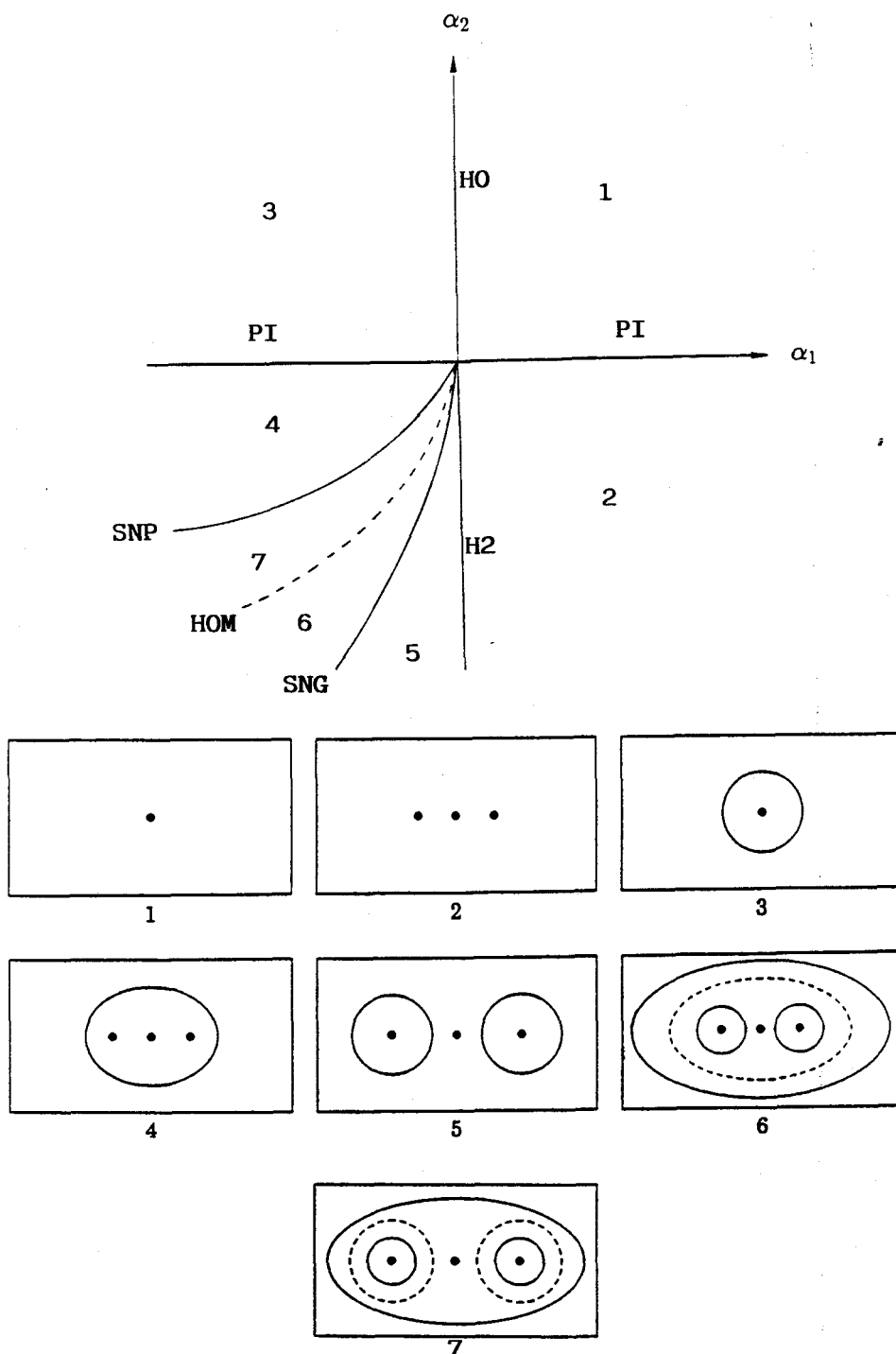


Figura 5.9.3: Conjunto de bifurcaciones del sistema (5.9.1) junto con las configuraciones de equilibrios y órbitas periódicas existentes.

en [103] ni el correcto con la homoclina repulsiva.

Para finalizar evaluamos los coeficientes de los parámetros que aproximan a la curva de homoclinas y a las de silla-nodo, para los que obtenemos:

$$g(e_-) \approx 0.342893, \quad g(0) = \frac{12}{35} \approx 0.342857, \quad g(e_+) \approx 0.342822$$

pues

$$e_- \approx -1.396 \cdot 10^{-4}, \quad e_+ \approx 1.349 \cdot 10^{-4}, \quad R(e_-) \approx 0.799379, \quad R(e_+) \approx 0.800642$$

La conclusión inmediata que sacamos es que las tres curvas están muy juntas. Este hecho puede justificar el error cometido en [103] en el que considera a la homoclina atractiva; a efectos prácticos, todo sucede como si la homoclina lo fuera.

# Capítulo VI

## CONCLUSIONES

Procedemos, a continuación, a destacar los principales resultados obtenidos en esta memoria respetando, en lo posible, el orden de los temas tratados.

En el capítulo II hemos hecho un repaso, necesariamente breve, de la bibliografía consultada relativa a los métodos de continuación aplicados al estudio de equilibrios y órbitas periódicas de sistemas dinámicos.

Desarrollamos entonces, con un marcado enfoque geométrico, un algoritmo de continuación de órbitas periódicas y sus bifurcaciones. Hemos detallado, a partir de la introducción de la aplicación de Poincaré, una formulación de dicho algoritmo que nos permite tanto la continuación de órbitas periódicas sobre una curva del plano de parámetros, como la detección y continuación de algunas bifurcaciones de codimensión uno experimentadas por aquéllas.

Tras exponer el procedimiento seguido en el cálculo de las derivadas de la aplicación de Poincaré —necesarias para el cómputo de los multiplicadores característicos— y después de interpretar geoméricamente el algoritmo, hemos enumerado las herramientas informáticas utilizadas para su implementación entre las que destaca el código de propósito general PITCON.

Como primera aplicación del método numérico expuesto estudiamos la presencia de órbitas periódicas *canards* en el oscilador de Van der Pol. Tras obtener analíticamente, mediante la perturbación de un sistema hamiltoniano, el valor en el que, en primera aproximación, se da la explosión *canard*, mostramos la

bondad del algoritmo desarrollado que es capaz de proporcionarnos diagramas de bifurcaciones en los que la variación de la amplitud con el parámetro se hace muy abrupta.

Para finalizar el capítulo proponemos un oscilador de Van der Pol modificado tridimensional. El estudio analítico que de él realizamos nos permite determinar la existencia de diversos puntos de degeneración en la bifurcación de Hopf de su único equilibrio, lo que traerá consigo riqueza de comportamientos periódicos. Así, con el algoritmo propuesto se continúan dos curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas que colapsan en una cúspide. Dejamos para posteriores trabajos un estudio numérico más exhaustivo de este sistema que consideramos de gran interés, especialmente en la zona de las oscilaciones de relajación, pues nos proporcionará un ejemplo de órbitas periódicas *canards* tridimensionales.

En el capítulo III, y también con un marcado carácter geométrico, planteamos un algoritmo numérico que nos permite detectar y continuar órbitas homoclinas y heteroclinas, asociadas a equilibrios, en sistemas bi- y tridimensionales.

Después de dar condiciones suficientes que aseguran la regularidad del problema de continuación formulado y de dar detalles sobre su implementación práctica, se ha aplicado el algoritmo planteado a varios sistemas, tanto planos como tridimensionales, quedando patente su utilidad para la detección y continuación tanto de conexiones homoclinas como heteroclinas.

De entre los sistemas planos analizados destacamos el circuito que proponemos con homoclinas *canards*, el modelo presa-depredador y el sistema de reacción-difusión con ondas viajeras en los que hemos encontrado curvas de bifurcaciones globales no mencionadas en la literatura.

En el capítulo IV hemos llevado a cabo un estudio del comportamiento dinámico y de bifurcaciones de un oscilador electrónico autónomo. Además de realizar algún análisis teórico previo —como el de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en el caso de ausencia de diodos— hemos llevado a cabo, con las herramientas numéricas diseñadas en los capítulos anteriores —y guiados en lo posible por resultados analíticos obtenidos en trabajos previos—,

un estudio numérico que nos ha permitido detectar, en primer lugar, una cúspide de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas originada por una degeneración de segundo orden en la bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen.

Nos hemos centrado, además, en el estudio de las curvas que nacen en una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada. El resultado principal que obtenemos es que la conexión homoclina pasa por casi todas las situaciones posibles: comienza siendo del tipo nodo-silla atractiva, pasa a silla-foco atractiva, después a silla-foco repulsiva y termina desapareciendo en un punto de Hopf-Shil'nikov —nace y desaparece, por tanto, en dos puntos de codimensión dos—.

Será esta conexión homoclina la que actúe como centro organizador de los comportamientos periódicos y aperiódicos del sistema. Hemos prestado especial atención a la zona en la que la homoclina es tipo Shil'nikov obteniendo los resultados predichos para las órbitas periódicas principales por el análisis local de Glendinning y Sparrow [47] y el de Gaspard, Kapral y Nicolis [43]. Asimismo, hemos encontrado comportamientos periódicos no recogidos en los citados trabajos: se trata de órbitas periódicas, tanto de pequeña como de gran amplitud, cuyo periodo es, aproximadamente, un número impar de veces el de una órbita periódica principal. Por último, también hemos analizado los atractores caóticos tipo Rössler y tipo Shil'nikov que aparecen en la compleja dinámica exhibida por el circuito en estudio.

En el capítulo V, motivados por una posible degeneración en la bifurcación de Takens-Bogdanov del circuito anterior, hemos llevado a cabo un análisis teórico de un sistema triparamétrico plano que despliega el comportamiento asociado con dicha degeneración. Para poner de manifiesto la riqueza de bifurcaciones de dicho sistema plano, hemos tenido que llevar a cabo un estudio en profundidad de dos funciones definidas en términos de integrales elípticas, ya que dicho estudio sólo aparece de forma parcial en la literatura consultada. Tras caracterizar a estas funciones estamos en condiciones de comprobar que el sistema presenta seis curvas de bifurcaciones de codimensión dos: bifurcaciones que corresponden a dos de Hopf degeneradas (tanto la del origen como la de los equilibrios no triviales),



a una homoclina degenerada, a una cúspide de silla-nodo de órbitas periódicas y a dos de Takens–Bogdanov no degeneradas.

Este estudio analítico nos ha permitido encontrar, en tres configuraciones distintas del circuito, la riqueza en la conducta de bifurcaciones asociada a la degeneración en la bifurcación de Takens–Bogdanov, entre las que destacamos la presencia de homoclinas degeneradas.

Conseguimos, por último, poner de manifiesto dos errores que aparecen en la literatura en relación al análisis de un modelo mecánico que, como consecuencia de la degeneración que presenta su forma normal, exhibe un conjunto de bifurcaciones novedoso en lo que se refiere a bifurcaciones de Takens–Bogdanov: una homoclina cuyo carácter es siempre opuesto al de las dos bifurcaciones de Hopf presentes, y que obliga a la aparición de dos curvas de silla-nodo de órbitas periódicas *envolviendo* desde el origen a dicha homoclina.

Para finalizar, señalemos que el conjunto de algoritmos numéricos diseñados se revela de gran utilidad en el estudio cualitativo de sistemas dinámicos de dimensión dos y tres, acompañado, siempre que sea posible, de los estudios analíticos previos que guíen las correspondientes simulaciones.

# Referencias

- [1] Allgower, E. L.; Georg, K., *Numerical Continuation Methods. An Introduction*, Springer Series in Computational Mathematics, n. 13, Springer, New York (1990).
- [2] Andronov, A. A.; Leontovich, E. A.; Gordon, I. I.; Maier, A. G., *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, (1971).
- [3] Arnéodo, A.; Couillet, P. H.; Spiegel, E. A.; Tresser, C., *Asymptotic Chaos*, Physica 14D, pp. 327–347, (1985).
- [4] Arnéodo, A.; Couillet, P. ; Tresser, C., *Ocurrence of Strange Atractors in Three-Dimensional Volterra Equations*, Physics Letters, vol. 79A. n. 4, pp. 259–263, (1980).
- [5] Arnéodo, A.; Couillet, P. ; Tresser, C., *Possible New Strange Attractors with Spiral Structure*, Commun. Math. Phys., vol. 79, pp. 573–579, (1981).
- [6] Baer, S. M.; Erneux, T., *Singular Hopf Bifurcation to Relaxation Oscillations*, Siam J. Appl. Math., vol. 46, n. 5, pp. 721–739, (1986).
- [7] Beyn, W.-J., *Defining Equations for Singular Solutions and Numerical Applications*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. D. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, (1984).
- [8] Beyn, W.-J., *The Numerical Computation of Connecting Orbits in Dynamical Systems*, IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 9, pp. 379–405, (1990).

- [9] Beyn, W.-J., *Global Bifurcations and Their Numerical Computation*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose, B. de Dier, A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Series C, vol. 313, Kluwer, Dordrecht, pp. 169–181, (1990).
- [10] Beyn, W.-J., *Numerical Methods for Dynamical Systems*, (preprint), Proceedings of the SERC Summer School at Lancaster (UK), Oxford University Press, (1990).
- [11] Bogdanov, R. I., *Versal Deformation of a Singular Point of a Vector Field on the Plane in the Case of Zero Eigenvalues*, *Funct. Anal. Appl.* 9, pp. 144–145, (1975).
- [12] Brøns, M., *Nonlinear Differential Equations and Compressor Flow Stability Problems*, Tesis, The Technical University of Denmark, (1987).
- [13] Byrd, P. F.; Friedman, M. D., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer, (1971).
- [14] Callot, J.L.; Diener, F.; Diener, M., *Le problème de la "chasse au canard"*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, vol. 286, pp. 1059–1061, (1978).
- [15] Carr, J., *Applications of Centre Manifold Theory*, *Appl. Math. Sci. Series*, vol. 35, Springer-Verlag, (1981).
- [16] Carr, J.; Chow, S-N.; Hale, J. K., *Abelian Integrals and Bifurcation Theory*, *J. Differential Equations* 59, pp. 413–436, (1985).
- [17] Chao, K. S.; Saeks, R., *Continuation Method in Circuit Analysis*, Proceedings of the IEEE, vol. 65, n. 8, pp. 1187–1194, (1977).
- [18] Chua, L. O.; Komuro, M.; Matsumoto, T., *The Double Scroll Family*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-33, 11, pp. 1072–1118, (1986).

- [19] Coppel, W. A., *Dichotomies in Stability Theory*, Lecture Notes in Mathematics 629, Springer-Verlag, New York (1978).
- [20] Couillet, P.; Tresser, C.; Arnéodo, A., *Transition to Stochasticity for a Class of Forced Oscillators*, Physics Letters, vol. 72A, pp. 268-270 (1979).
- [21] Dangelmayr, G.; Armbruster, D.; Neveling, M., *A Codimension Three Bifurcation for the Laser with Saturable Absorber*, Z. Phys. B. -Condensed Matter 59, pp. 365-370, (1985).
- [22] Dangelmayr, G.; Neveling, M.; Armbruster, D., *Structurally Stable Phase Portraits for the Five-Dimensional Lorenz-Equations*, Z. Phys. B-Condensed Matter 64, pp. 491-501, (1986).
- [23] Davidenko, D. F., *On a New Method of Numerically Integrating a System of Nonlinear Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, pp. 601-604, (1953).
- [24] Den Heijer, C.; Rheinboldt, W. C., *On Steplength Algorithms for a Class of Continuation Methods*, Siam J. Numer. Anal., vol. 18, n. 5, pp. 925-948, (1981).
- [25] Ding, M.; Hao B., *Systematics of the Periodic Windows in the Lorenz Model and Its Relation with the Antisymmetric Cubic Map*, Commun. in Theor. Phys., vol. 9, n. 4, pp. 375-389, (1988).
- [26] Doedel, E., *AUTO: A Program for the Automatic Bifurcation Analysis of Autonomous Systems*, Proceedings of the tenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, vol. I, D. S. Meek, H. C. Williams (eds.), Utilitas Mathematica Publ., pp. 265-284, (1981).
- [27] Dumortier, F.; Roussarie, R.; Sotomayor, J., *Generic 3-Parameter Families of Vector Fields on the Plane, Unfolding a Singularity with Nilpotent Linear Part. The Cusp Case of Codimension 3*, Ergod Th. & Dynam. Sys., 7, pp. 375-413, (1987).

- [28] Evans, J. W.; Fenichel, N.; Feroe, J. A., *Double Impulse Solutions in Nerve Axon Equations*, Siam J. Appl. Math., vol. 42, n. 2, pp. 219–234, (1982).
- [29] Fenichel, N., *Oscillatory Bifurcations in Singular Perturbation Theory*, Siam J. Math. Anal., vol. 14, n. 5, pp. 861–867, 868–875, (1983).
- [30] Feroe, J. A., *Existence and Stability of Multiple Impulse Solutions of a Nerve Equation*, Siam J. Appl. Math., vol. 42, n. 2, pp. 235–246, (1982).
- [31] Fife, P. C., *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*, Lecture Notes in Biomathematics 28, Springer (1979).
- [32] Freire, E., *Análisis Cualitativo y de Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos*, Tesis Doctoral, Univ. de Sevilla, (1982).
- [33] Freire E.; Franquelo, L. G.; Aracil, J., *Periodicity and Chaos in an Autonomous Electronic Circuit*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. Cas-31, n. 3, pp. 237–247, (1984).
- [34] Freire, E.; Gamero, E.; Ponce, E.; Franquelo, L. G. *An Algorithm for Symbolic Computation of Center Manifolds*, Symbolic and Algebraic Computation, Lecture Notes in Computer Science, 358, P. Gianni (ed.), pp. 218–230, (1988).
- [35] Freire, E.; Gamero, E.; Ponce, E., *An Algorithm for Symbolic Computation of Hopf Bifurcation*, Computers and Mathematics; E. Kaltofen & S. M. Watt (eds.) Springer-Verlag, pp. 109–118, (1989).
- [36] Freire, E.; Gamero, E.; Ponce, E., *Symbolic Computation and Bifurcations Methods*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose, B. de Dier & A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Kluwer, pp. 105–122, (1990).

- [37] Friedman, M. J.; Doedel, E. J., *Numerical Computation and Continuation of Invariant Manifolds Connecting Fixed Points*, (preprint), Siam J: Numer. Analysis, (1989).
- [38] Gamero, E., *Computación Simbólica y Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, (1990).
- [39] Gamero, E.; Freire, E.; Ponce, E., *On the Normal Forms for Planar Systems with Nilpotent Linear Part*, Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications, R. Seydel, F. W. Schneider, T. Küpper, H. Troger (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 97, Birkhäuser, pp. 123–127 (1991).
- [40] Gaspard, P., *Generation of a Countable Set of Homoclinic Flows through Bifurcation*, Physics Letters, 97A, pp. 1–4, (1983).
- [41] Gaspard, P., *Generation of a Countable Set of Homoclinic Flows through Bifurcation in Multidimensional Systems*, Bull. Cl. Sc. Acad. Roy. Belg. 5<sup>e</sup> série-tome LXX, pp. 61–83, (1985).
- [42] Gaspard, P., *Tangences Homoclines dans les Systèmes Dynamiques Dissipatifs. Chaos et Structure Fractale de Bifurcations*, Thèse, Université Libre de Bruxelles, (1987).
- [43] Gaspard, P.; Kapral, R.; Nicolis, G., *Bifurcation Phenomena near Homoclinic Systems: a Two-Parameter Analysis*, Journal of Statistical Physics, vol. 35, pp. 697–727, (1984).
- [44] Gaspard, P.; Nicolis, G., *What Can We Learn from Homoclinic Orbits in Chaotic Dynamics?*, Journal of Statistical Physics, vol. 31, pp. 499–518, (1983).
- [45] Glendinning, P., *Bifurcations near Homoclinic Orbits with Symmetry*, Physics Letters 103A, n. 4, pp. 163–166, (1984).

- [46] Glendinning, P., *Global Bifurcations in Flows*, New Directions in Dynamical Systems, T. Bedford, J. Swift (eds.), Cambridge University Press, pp. 120–149, (1988).
- [47] Glendinning, P.; Sparrow, C., *Local and Global Behavior near Homoclinic Orbits*, Journal of Statistical Physics, vol. 35, nos. 5–6, (1984).
- [48] Golubitsky, M.; Langford, W., *Classification and Unfolding of Degenerate Hopf Bifurcations*, Journal of Differential Equations, 41, pp. 375–415, (1981).
- [49] Grasman, J., *Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications*, Applied Mathematical Sciences, n. 63, Springer-Verlag, (1987).
- [50] Gruendler, J., *The Existence of Homoclinic Orbits and The Method of Melnikov for Systems in  $\mathbb{R}^n$* , Siam J. Math. Anal., vol. 16, n. 5, pp. 907–931, (1985).
- [51] Guckenheimer, J.; Holmes, P. J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Appl. Math. Sci. Series, vol. 42, Springer-Verlag (1983).
- [52] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, (1973).
- [53] Hassard, B. D.; Kazarinoff, N. D.; Wan, Y-H., *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, London Mathematical Society Lecture Note Series 41, Cambridge University Press, (1981).
- [54] Hastings, S. P., *Single and Multiple Pulse Waves for the Fitzhugh–Nagumo Equations*, Siam J. Appl. Math., vol. 42, n. 2, pp. 247–260, (1982).
- [55] Herfort, W.; Troger, H., *Robust Modelling of Flow Induced Oscillations of Bluff Bodies*, Mathematical Modelling in Science and Technology, vol. 8, pp. 251–255, (1987).

- [56] Holmes, P. J., *A Strange Family of Three-Dimensional Vector Fields near a Degenerate Singularity*, *Journal of Differential Equations* 37, pp. 382–403, (1980).
- [57] Holodniok, M.; Kubíček, M., *Continuation of Periodic Solutions in Ordinary Differential Equations Numerical Algorithm and Application to Lorenz Model*, *Numerical Methods for Bifurcation Problems*, T. Küpper, H. D. Mittelman, H. Weber (eds.), *International Series of Numerical Mathematics*, vol. 70, Birkhäuser, pp. 181–194, (1984).
- [58] Jansen, W.; Feudel, U., *CANDYS/QA – A Software System for Qualitative Analysis of the Behaviour of the Solutions of Nonlinear Dynamical Systems*, *Systems Analysis and Simulation*, A. Sydow *et alii* (eds.), Akademik Verlag, Berlin, (1988).
- [59] Jepson, A. D.; Keller, H. B., *Steady State and Periodic Solution paths: Their Bifurcations and Computations*, *Numerical Methods for Bifurcation Problems*, T. Küpper, H. D. Mittelman, H. Weber (eds.), *International Series of Numerical Mathematics*, vol. 70, Birkhäuser, (1984).
- [60] Joyal, P., *Generalized Hopf Bifurcation and its Dual Generalized Homoclinic Bifurcation*, *SIAM, J. Appl. Math.*, Vol. 48, 3, pp. 481–496, (1988).
- [61] Joyal, R.; Rousseau, C., *Saddle Quantities and Applications*, *Journal of Differential Equations* No. 78, pp. 374–399, (1989).
- [62] Kaas-Petersen, C., *Path-User's Guide*, CNLS, University of Leeds, (1987).
- [63] Keller, H. B., *Numerical Solution of Bifurcations and Nonlinear Eigenvalue Problems*, *Applications of Bifurcation Theory*, P. H. Rabinowith (ed.), Academic Press, pp. 359–384, (1977).
- [64] Khibnik, A., *LINLBF: A Program for Continuation and Bifurcation Analysis of Equilibria up to Codimension Three*, *Continuation and Bifurcations:*



- Numerical Techniques and Applications, D. Roose *et alii* (eds.), NATO ASI Series, Series C, vol. 313, Kluwer, pp. 283–296, (1990).
- [65] Knobloch, E.; Proctor M. R. E., *Nonlinear Periodic Convention in Double-Diffusive Systems*, J. Fluid Mech., vol. 108, pp. 291–316, (1981).
- [66] Kubíček, M.; Holodniok, M., *Numerical Determination of Bifurcation Points in Steady State and Periodic Solutions—Numerical Algorithms and Examples*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. D. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 247–270, (1984).
- [67] Kubíček, M.; Marek, M., *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*, Springer, New York, (1983).
- [68] Kuznetsov, Yu. A., *Computation of Invariant Manifold Bifurcation, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*, D. Roose, B. de Dier, A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Series C, vol. 313, Kluwer, Dordrecht, pp. 183–195, (1990).
- [69] Kuznetsov, Yu. A., *Numerical Analysis of the Orientability of Homoclinic Trajectories*, International Series of Numerical Mathematics, vol. 97, Birkhäuser, pp. 237–242, (1991).
- [70] Lorenz, E. N., *Deterministic Non-Periodic Flow*, J. Atmos. Sci. 20, pp. 130–141, (1963).
- [71] Matsumoto, T., *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-31, 12, pp. 1055–1058, (1984).
- [72] Matsumoto, T.; Chua, L. O.; Komuro, M., *The Double Scroll*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-32, 8, pp. 797–818, (1985).
- [73] Mittelman, H. D., *Continuation near Symmetry-Breaking Bifurcation Points*, Numerical Methods for Bifurcations Problems, T. Küpper, H. Mit-

- telman, H. Weber (eds.), *International Series of Numerical Mathematics*, vol. 70, Birkhäuser, pp. 319–334, (1984).
- [74] Moore, *The Numerical Treatment of Non-Trivial Bifurcation Point*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., vol. 2 (6), pp. 441–472, (1980).
- [75] Nayfeh, P.; Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, J. Wiley and Sons, New York, (1979).
- [76] Nicolis, G.; Gaspard, P., *Bifurcations, Chaos and Self-Organization in Reaction-Diffusion Systems*, Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications, D. Roose, B. de Dier, A. Spence (eds.); Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NATO ASI Series, Series C, vol. 313, pp. 43–70, (1990).
- [77] Palmer, K. J., *Exponential Dichotomies and Transversal Homoclinic Points*, J. Diff. Eqns. 55, pp. 225–256, (1984).
- [78] Ponce, E., *Técnicas de Análisis Cualitativo en Sistemas Dinámicos. Métodos Numéricos y Aplicaciones en Ingeniería*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, (1987).
- [79] Rheinboldt, W. C., *Solution Fields of Nonlinear Equations and Continuation Methods*, Siam J. Numer. Anal., vol. 17, pp. 221–237, (1980).
- [80] Rheinboldt, W. C., *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*, The University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Science, vol. 7, John Wiley & Sons, Inc., (1986).
- [81] Rheinboldt, W. C.; Burkardt, J. V., *A Locally Parametrized Continuation Process*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 9, n. 2, pp. 215–235, (1983).

- [82] Rheinboldt, W. C.; Roose, D.; Seydel, R., *Aspects of Continuation Software*, D. Roose *et alii* (eds.) *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*, Kluwer, Dordrecht, pp. 261–268, (1990).
- [83] Rodríguez-Luis, A. J.; Freire, E.; Ponce, E., *Continuación de Homoclinas y Heteroclinas en Sistemas Autónomos Bi- y Tridimensionales*, Actas del XI CEDYA, Málaga, pp. 489–493 (1989).
- [84] Rodríguez-Luis, A. J.; Freire, E.; Ponce, E., *A Method for Homoclinic and Heteroclinic Continuation in Two and Three Dimensions*, *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*, D. Roose, B. de Dier & A. Spence (eds.), NATO ASI Series, Kluwer, pp. 197–210, (1990).
- [85] Rodríguez-Luis, A. J.; Freire, E.; Ponce, E., *On a Codimension 3 Bifurcation Arising in an Autonomous Electronic Circuit*, *Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications*, R. Seydel, F. W. Schneider, T. Küpper, H. Troger (eds.), *International Series of Numerical Mathematics*, vol. 97, Birkhäuser, pp. 301–306 (1991).
- [86] Rössler, O. E. *Chaotic Behaviour in Simple Reaction Systems*, *Z. Naturforsch.* 31 a, pp. 259–264, (1976).
- [87] Rössler, O. E. *Continuous Chaos—Four Prototype Equations*, *Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines*, O. Gurel, O. E. Rössler (eds.), *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 316, pp. 376–392, (1979).
- [88] Rössler, O. E., *Chaos, Structural Stability in Physics*, W. Güttinger, H. Eikemeier (eds.), Springer-Verlag, Berlin pp. 290–309, (1979).
- [89] Rössler, O. E., *The Chaotic Hierarchy*, *Z. Naturforsch.* 38 a, pp. 788–801, (1983).
- [90] Roussarie, R., *Déformations Génériques des Cusps*, *Astérisque*, vol. 150–151, pp. 151–184, (1987).

- [91] Seydel, R., *A Continuation Algorithm with Step Control*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 480–494, (1984).
- [92] Shinriki, R.; Yamamoto, M.; Mori, S., *A Simultaneous Asynchronous Oscillator with Both Nonlinear Positive and Negative Conductances Connected in Series*, IEEE Proc. 67, 2, pp. 322–324, (1979).
- [93] Shinriki, R.; Yamamoto, M.; Mori, S., *Multimode Oscillations in a Modified Van der Pol Oscillator Containing a Positive Nonlinear Conductance*, IEEE Proc. 69, 3, pp. 394–395, (1981).
- [94] Shil'nikov, L. P., *A Case of the Existence of a Countable Number of Periodic Motions*, Soviet Math. Dokl., 16, pp. 163–166, (1965).
- [95] Shil'nikov, L. P., *On a New Type of Bifurcation of Multidimensional Dynamical Systems*, Soviet Math. Dokl. 10, n. 6, pp. 1368–1371, (1969).
- [96] Simó, C., *The Shil'nikov–Hopf Bifurcation*, NATO Advanced Research Workshop on Homoclinic Chaos, Brussels (1991).
- [97] Sparrow, C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Appl. Math. Sci. Series, vol. 41, Springer-Verlag, (1982).
- [98] Takens, F., *Forced Oscillations and Bifurcations*, Com. Math. Inst., Rijk Universiteit Utrecht, vol. 3, pp. 1–59, (1974).
- [99] Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin, London, (1975).
- [100] Tomita, K., *Chaos and Its Description*, Preprint, (1980).
- [101] Tresser, C., *About Some Theorems by L. P. Shil'nikov*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 40, n. 4, pp. 441–461, (1984).

- [102] Troesch, A.; Urlacher, E., *Analyse non Standard et l'Équation de Van der Pol*, Publications IRMA, Strasbourg (1977).
- [103] Troger, H., *Application of Bifurcation Theory to the Solution of Nonlinear Stability Problems in Mechanical Engineering*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. D. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 525–546, (1984).
- [104] Wasserstrom, E., *Root Finding of Polynomials as an Initial Value Problem*, J. Computational Phys. vol. 8, pp. 304–308, (1971).
- [105] Wasserstrom, E., *Numerical Solutions by the Continuation Method*, Siam Review, vol. 15, n. 1, (1973).
- [106] Wegner, B., *About Generalized Hopf Bifurcation for Singularly Perturbed Systems*, Math. Nachr., vol. 140, pp. 37–48, (1989).
- [107] Werner, B., *Regular Systems for Bifurcation Points with Underlying Symmetries*, Numerical Methods for Bifurcation Problems, T. Küpper, H. Mittelman, H. Weber (eds.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 70, Birkhäuser, pp. 562–574, (1984).
- [108] Wiggins, S., *Global Bifurcations and Chaos. Analytical Methods*, Applied Mathematical Series, vol. 73, Springer, New York, (1988).
- [109] Zhen, M., *A Numerical Approximation for the Simple Bifurcation Problems*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 10 (3 & 4), pp. 383–400, (1989).
- [110] Zhong, G.-Q.; Ayrom, F., *Periodicity and Chaos in Chua's Circuit*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-32, 5, pp. 501–503, (1985).
- [111] Zvonkin, A. K.; Shubin, M. A., *Non-Standard Analysis and Singular Perturbations of Ordinary Differential Equations*, Russian Math. Surveys 39:2, pp. 69–131, (1984).

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de  
D. Alejandro José Rodríguez (us)  
titulada Bipolaridad y sus parámetros en unidades autónomas

acordó otorgarle la calificación de Apto Cum Laude

Sevilla, 19 de Junio 1971

El Vocal,

*Alvar*

El Presidente

*Lambert*

El Vocal,

*Alencant*

El Secretario,

*[Signature]*

El Vocal,

*[Signature]*

El Secretario,

*[Signature]*