UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

UNIVERSIDAD de SEVILLA

Algunas aplicaciones de los modelos funcionales de operadores en espacios de Hilbert

§

Sergio Bermudo Navarrete

Tesis Doctoral

Memoria presentada por SERGIO BERMUDO NAVARRETE para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Fdo. SERGIO BERMUDO NAVARRETE

Vº Bº de los Directores:

Fdo. PEDRO J. PAÚL ESCOLANO

Fdo. CARMEN HERNÁNDEZ MANCERA

Sevilla, 15 de Julio de 2003

Índice

Introducción general

Hace ahora 100 años, el grupo de trabajo dirigido por D. Hilbert en Gotinga se centraba en la teoría de las ecuaciones integrales, un campo muy activo de investigación después de que C. Neumann hubiera reducido la solución del problema de Dirichlet en un dominio lo bastante regular a la resolución de la ecuación integral

$$u(t) + \int_a^b k(s,t)u(s)\,ds = f(t)$$

en la que u es la función incógnita, k es una función continua y simétrica y f es una función continua dada.

En una serie de seis artículos publicados entre 1904 y 1906, recogidos luego en un volumen titulado "*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*" [Hi], Hilbert analizó las técnicas introducidas por H. Poincaré, V. Volterra e I. Fredholm al estudiar dicha ecuación y mejoró los resultados obtenidos por éstos. En el cuarto trabajo de esta serie, publicado en 1906 y que, de acuerdo con J. Dieudonné [Di], es el primer hito en la historia del Análisis Funcional, Hilbert abandona el punto de vista de las ecuaciones integrales porque se da cuenta de que éstas pueden reducirse al estudio de los sistemas de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas. Esto se hace tomando un sistema ortonormal completo de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y pasando a los coeficientes de Fourier de las funciones involucradas. Entonces la sucesión (x_n) de los coeficentes de Fourier de la función incógnita verifica un sistema de infinitas ecuaciones lineales

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n + \cdots = b_m \qquad m = 1, 2, \ldots$$

donde $a_{mn} = a_{nm}$ y, por las correspondientes desigualdades de Bessel, también se tiene que

$$\sum_m |x_m|^2 < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_m |b_m|^2 < \infty.$$

A partir de este planteamiento, Hilbert se lanza a explorar este tipo de sistemas $Ax = b$ donde $A = [a_{mn}]$ es una matriz simétrica infinita y las sucesiones (x_n) y (b_n) deben ser de cuadrado absolutamente sumable —en la terminología habitual, x y b deben estar en el espacio de Hilbert l^2— lo que le lleva a imponer que la matriz A tiene que verificar una condición de acotación que él expresa en términos de las formas bilineales que se obtienen truncando la matriz A: Existe una constante M tal que

$$\left|\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{p} a_{mn}x_m y_n\right| \leq M \qquad \text{para } p = 1, 2, ...$$

y todas las sucesiones x e y tales que $\sum_m |x_m|^2 \leq 1$ y $\sum_m |y_m|^2 \leq 1$.

Hilbert estudió las transformaciones ortogonales que permiten diagonalizar el sistema, probando la existencia de un espectro discreto para las matrices que generan lo que hoy llamamos un operador compacto y exhibiendo también el fenómeno del espectro continuo para matrices simétricas cuyo operador asociado es acotado pero no compacto. Desde su aparición, la teoría de los espacios de Hilbert ha crecido hasta tener ramificaciones en muchas partes de las matemáticas y sigue siendo hoy en día un campo de trabajo muy activo. En realidad, lo que se conoce como la teoría de los espacios de Hilbert presta, salvo en sus aspectos introductorios básicos, muy poca atención a la estructura geométrica de éstos; de hecho se suele llamar, más propiamente, *teoría de operadores* porque su objetivo es estudiar los operadores definidos entre espacios de Hilbert. Tras las aportaciones del propio Hilbert y los miembros de su escuela, notablemente E. Fischer, E. Hellinger, E. Schmidt y O. Toeplitz, las contribuciones esenciales de, sobre todo, J. von Neumann, el mayor de los hermanos Riesz y M. Stone permiten formar un cuerpo de doctrina cristalizado en los famosos libros *Linear Transformations in Hilbert Space* de Stone y *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* de von Neumann, publicados ambos en 1932. Hasta comienzos de la década de los cincuenta tanto la teoría como sus aplicaciones en diferentes ramas de las matemáticas y de la física teórica descansaban sobre las diversas formas del teorema espectral; esencialmente las de Hilbert [Hi] para operadores compactos y para operadores autoadjuntos y la de von Neumann [Ne] y A. Wintner para operadores normales. Podemos decir que la mayor parte del trabajo desarrollado hasta entonces podría clasificarse como teoría espectral, siendo su mayor inconveniente la falta de un marco adecuado para trabajar con operadores más generales.

En los años cincuenta se produjo un rápido progreso en el análisis de los operadores que no son normales. Este proceso tuvo lugar a lo largo, principalmente, de cuatro líneas de actuación: la búsqueda de la solución al problema de si todo operador acotado en un espacio de Hilbert admite un subespacio invariante no trivial, los modelos triangulares de operadores y sus funciones características, la teoría de la predicción en procesos estocásticos y la teoría de dilataciones y compresiones de operadores, en la que nos centraremos a partir de ahora.

El objetivo central de la teoría de dilataciones de operadores es el siguiente: dada una contracción T (esto es, un operador de norma menor o igual que uno) en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, encontrar otro espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ que contenga a $\mathcal{H}$ como subespacio y un operador U en $\mathcal{K}$ que tenga buenas propiedades —que sea unitario o isómetrico o autoadjunto— y tal que T pueda recobrarse restringiendo U a $\mathcal{H}$ o, si esto no basta, proyectando el resultado sobre $\mathcal{H}$; es decir, que se verifique $Tx = P(\mathcal{H})Ux$ para todo $x \in \mathcal{H}$, siendo $P(\mathcal{H})$ la proyección ortogonal de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{H}$; se dice entonces que U es una dilatación de T o que T es una compresión de U. Cuando $Ux \in \mathcal{H}$ para cada $x \in \mathcal{H}$, entonces no hace falta proyectar, en cuyo caso se dice que U es una extensión de T o que T es una restricción de U.

La idea de considerar un operador dado como una compresión de otro operador más regular definido en un espacio mayor aparece por primera vez en un trabajo de M.A. Naimark en 1943 en el que se representaba una medida semiespectral como la compresión de una medida espectral. En 1944 G. Julia prueba que cada contracción se puede representar como la compresión de una cierta isometría. En 1950 P. Halmos [Hal] define formalmente la noción de dilatación y compresión de un operador; en ese mismo trabajo se prueban la existencia de dilataciones normales, de dilataciones unitarias y de dilataciones que son proyecciones. Las bases de la teoría de dilataciones de operadores en espacios de Hilbert quedan finalmente asentadas con el trabajo de B. Sz.-Nagy [Sz], donde se prueba que dada una contracción T entonces existen, y son únicas bajo condiciones de minimalidad, una dilatación isométrica U y una dilatación unitaria V tales que tanto U^n como V^n son dilataciones de T^n para cada $n \in \mathbb{N}$, resultado que abre la puerta a la posibilidad de considerar funciones de un operador, que se conocen como cálculos funcionales, más generales que los polinomios.

El siguiente paso importante en el desarrollo de esta teoría es el teorema del levantamiento del conmutador dado en 1967 por D. Sarason [Sa] junto con su aplicación al estudio de algunos problemas de interpolación de funciones analíticas planteados y estudiados por C. Carathéodory, L. Fejér, R. Nevannlina, G. Pick, F. Riesz e I. Schur en el período 1907–1920. Motivado por un trabajo anterior de Sz.-Nagy y A. Korányi, Sarason descubrió que estos problemas pueden considerarse como pertenecientes a la esfera de la teoría de A. Beurling de subespacios invariantes para el operador de desplazamiento unilateral definido en el espacio de Hardy H^2 por $Sf(\zeta) = \zeta \cdot f(\zeta)$ o, en términos de los coeficientes de Fourier, por

$$S : (\widehat{f}_0, \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, ...) \to (0, \widehat{f}_0, \widehat{f}_1, ...).$$

Beurling había probado en 1949 que los subespacios invariantes de S son los de la forma θH^2, donde θ es una función analítica y acotada en el disco unidad del plano complejo con módulo constante e igual a uno en la circunferencia unidad; siendo éste uno de los primeros resultados sobre existencia de subespacios invariantes no triviales dado para operadores que no son normales ni compactos. Las soluciones de los problemas de interpolación de Carathéodory y de Nevannlina-Pick se obtienen al aplicar el teorema del levantamiento de Sarason a dos casos particulares del teorema de Beurling en el que los complementarios de los subespacios invariantes del operador de desplazamiento son de dimensión finita. El teorema de Sarason, muy dependiente de la teoría de funciones analíticas y de los espacios de Hardy, fue ampliamente generalizado y, posteriormente, recogido por Sz.-Nagy y C. Foiaş en su monumental monografía *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space* [SzFo1], probando que todo operador que conmuta con una contracción puede extenderse a un operador que conmuta con su dilatación isométrica minimal. (Véanse también los trabajos de V. Pták [Pt1], [Pt2] y de Pták y P. Vrbová [PtVr2] en los que presentan un punto de vista que enfatiza la estructura algebraica de los espacios de Hilbert y los aspectos más simples de la teoría de operadores; este énfasis permite dar demostraciones de los teoremas importantes mencionados anteriormente, y dar nuevas versiones de éstos, que prescinden de la compleja maquinaria de la teoría de funciones analíticas usada en las demostraciones originales.)

Desde entonces, la teoría de dilataciones y contracciones de operadores, el estudio del operador de desplazamiento y sus generalizaciones, y sus aplicaciones se han desarrollado vigorosamente como queda recogido en las monografías de N. Nikolski [Ni1] y M. Rosenblum y J. Rovnyak [RsRv], así como en una gran parte de los tomos de la serie *Operator Theory: Advances and Applications* de la editorial Birkhäuser-Verlag.

En esta memoria hemos abordado dos problemas —el estudio de las propiedades de los operadores de Toeplitz con respecto a semigrupos y la descripción de la relación de casi-semejanza entre dos contracciones completamente no unitarias en términos de sus funciones características— que, aún teniendo poca conexión entre sí, pertenecen ambos al ámbito del objetivo central de la teoría de dilataciones citado antes: obtener propiedades de contracciones X que verifican ciertas relaciones —las ecuaciones $X = T_{2s}XT_{1s}^*$ en el caso de los operadores de Toeplitz con respecto a semigrupos; la ecuación $XT_1 = T_2X$ para la relación de casi-semejanza— a partir de las propiedades de dilataciones adecuadas que verifican relaciones semejantes cuyos coeficientes son, sin embargo, operadores que tienen una estructura más rica.

En vez de continuar ahora esta introducción general, de carácter esencialmente histórico, con una descripción más concreta de los dos problemas abordados, como es habitual; hemos preferido, debido a las diferencias de origen, carácter y técnicas que existen entre dichos problemas, hacer estas descripciones de manera independiente en cada uno de los capítulos.

La memoria está organizada en diez secciones, agrupadas en dos capítulos, más un apéndice (sobre el que comentaremos más abajo) y una sección de referencias bibliográficas. Las secciones de la memoria están enumeradas correlativamente de manera que una referencia de la forma $m.n$ indica el punto n de la sección m, en el caso del Apéndice será $A.n$ y en el caso de una ecuación será *(I.n)* o *(II.n)* según sea la ecuación n del Capítulo I o del Capítulo II.

Terminología y notaciones.

Supondremos conocida la teoría básica de los espacios de Hilbert—definiciones y propiedades elementales de: producto escalar, norma, convergencia, ortogonalidad, subespacios, proyecciones ortogonales, operadores acotados, adjuntos— tal como se desarrolla, por ejemplo, en el libro *Introduction to Hilbert Space* de Halmos [Ha1] o en las secciones 12.1–12.14 (págs. 301–314) del texto *Análisis funcional* de Rudin [Ru1]. Otra referencia adecuada es el texto *Análisis real y complejo* del mismo autor [Ru2], al que junto con las monografías de Hoffman [Ho], Duren [Du] y Bercovici [Be], también nos remitimos para aquellas propiedades de las funciones analíticas y de los espacios de Hardy H^2 y H^∞ que usemos.

Tres pilares fundamentales de la memoria son los operadores de desplazamiento (*shift operators* en inglés), los resultados de la teoría de dilataciones de operadores y la teoría de modelos funcionales. Dado que la referencia habitual para estos temas es la monografía [SzFo1] *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space* de Sz.-Nagy y Foiaş que se encuentra descatalogada, hemos creído conveniente incluir un Apéndice en el que se recogen los principales resultados que utilizaremos. Estos resultados se citarán en el texto principal de la memoria como $A.n$ y sus demostraciones pueden hallarse en [Be], [Du],

[Ho], [Ha2], [Ha3], [Ni1], [Ni2], [NiVa], [Pt1], [Pt2], [PtVr2] y [SzFo1].

Aunque la terminología que usaremos es la habitual, vamos a fijar parte de la notación que emplearemos. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en un espacio de Hilbert y por $\|\cdot\|$ la norma asociada. La clausura de un conjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ la denotaremos por $\operatorname{clos}\{\mathcal{N}\}$ y el subespacio cerrado que genera por $\bigvee \mathcal{N}$. Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert, llamaremos operadores a las aplicaciones lineales entre ellos y operadores acotados a las aplicaciones lineales continuas. El conjunto de todos los operadores acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ lo denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y escribiremos simplemente $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuando $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Diremos que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es una contracción si $\|A\| \leq 1$.

Si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, usaremos $\mathcal{M}^{\perp}$ para indicar su ortogonal o bien $\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}$ si queremos enfatizar que es su ortogonal en $\mathcal{H}$ y no en otro espacio de Hilbert mayor. Denotaremos por $P(\mathcal{M})$ la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{M}$, pero escribiremos solamente P si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ están claros en el contexto. Abusando de la notación, entenderemos que $P(\mathcal{M})$ es tanto un operador de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como de $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{M})$. La aplicación identidad sobre $\mathcal{M}$ la representaremos por $\operatorname{Id}(\mathcal{M})$ o, simplemente, por la letra I o por el número 1 si el contexto está claro.

Si $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ es un operador acotado entre dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, indicaremos por Ax la correspondiente imagen de un cierto elemento $x \in \mathcal{H}$ aunque a veces usemos $A(x)$ si eso facilita la lectura. El adjunto de A lo denotaremos por A^*. La restricción de un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ a un subespacio cerrado $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ la indicaremos por $A|\,\mathcal{M}$ y usaremos que el adjunto de $A|\,\mathcal{M}$ es $P(\mathcal{M})A^*$. El núcleo de A lo representaremos por $\ker(A)$; sin embargo, distinguiremos entre imagen y rango de un operador: llamaremos rango de A, y escribiremos $\operatorname{ran}(A)$, a la clausura en $\mathcal{K}$ de $A\mathcal{H}$, la imagen de A; o sea, $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{clos}\{A\mathcal{H}\}$. Diremos que un operador A es de rango finito si su rango es un espacio de dimensión finita. Emplearemos a menudo que si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $\mathcal{N}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$ no necesariamente cerrado, entonces $\operatorname{clos}\{A\mathcal{N}\} = \operatorname{clos}\{A(\operatorname{clos}\{\mathcal{N}\})\}$. Diremos que un subespacio $\mathcal{M}$ es invariante para A o, simplemente, A-invariante si $A\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ y diremos que es reductor para A, o A-reductor, si es invariante para A y para A^* o, equivalentemente, si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\perp}$ son ambos A-invariantes.

Si λ es un número complejo entonces el operador $x \in \mathcal{H} \to \lambda x \in \mathcal{H}$ lo denotaremos, abusando de la notación, también por λ (con lo que $\lambda^* = \overline{\lambda}$, su conjugado). En particular, el número 1 representará en ocasiones la aplicación identidad, como hemos dicho antes.

Si $\{A_n : n = 1, 2, ..\}$ es una sucesión de operadores acotados entre dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, diremos que $\{A_n : n = 1, 2, ..\}$ converge en la topología fuerte de operadores si para todo $x \in \mathcal{H}$ la sucesión $\{A_n x : n = 1, 2, ..\}$ converge en la topología de espacio de Hilbert de $\mathcal{K}$. Es bien conocido que, como consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus, el límite A definido por $Ax = \lim_n A_n x$ es también un operador acotado. Diremos que $\{A_n : n = 1, 2, ..\}$ converge en la topología débil de operadores si para todo $x \in \mathcal{H}$ y todo $y \in \mathcal{K}$ la sucesión $(\langle A_n x, y\rangle)$ converge en $\mathbb{C}$.

Los ejemplos típicos de espacios de Hilbert que usaremos son el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{C}^n$, el espacio l^2 de las sucesiones de módulo de cuadrado sumable, el espacio de Lebesgue L^2 con respecto a la medida de Lebesgue (normalizada) sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ del plano complejo $\mathbb{C}$ y el espacio de Hardy H^2 de las funciones de L^2 que son analíticas en el disco unidad $\mathbb{D}$ (véase el Apéndice).

El único concepto que usaremos de la teoría básica y que no aparece en el libro de Rudin citado antes es el de suma de Hilbert. Si $\mathcal{H}_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ es una sucesión de espacios de Hilbert, la suma de Hilbert $l^2(\mathcal{H}_n)$ es el espacio

$$l^2(\mathcal{H}_n) = \left\{ (x_n) : x_n \in \mathcal{H}_n \quad \text{para cada } n = 0, 1, 2, ... \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\}.$$

A veces escribiremos $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots$ en vez de $l^2(\mathcal{H}_n)$. Es un ejercicio rutinario comprobar que con el producto escalar

$$\langle (x_n), (y_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n\rangle$$

el espacio $l^2(\mathcal{H}_n)$ es un espacio de Hilbert. Por otro lado, denotaremos por $l^2(\mathcal{H})$ la suma de Hilbert correspondiente a una sucesión cuyos elementos son todos copias de un espacio de Hilbert fijo $\mathcal{H}$. Si lo que tenemos es una sucesión $\mathcal{H}_n$ bilateral, o sea, el subíndice n recorre el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, entonces la suma de Hilbert bilateral $l^2_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}_n)$ y el caso particular $l^2_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H})$ se construyen de manera análoga.

$L^2(\mathcal{H})$ denota el espacio de las funciones medibles $f : \mathbb{T} \to \mathcal{H}$ que toman valores en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $\int_{\mathbb{T}} \|f(e^{it})\|^2 \, d\mu(t) < \infty$. Con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle f(e^{it}), g(e^{it})\rangle \, dt$$

para todos f y g en $L^2(\mathcal{H})$, $L^2(\mathcal{H})$ es un espacio de Hilbert (separable si $\mathcal{H}$ lo es). Existe un isomorfismo isométrico entre los elementos f de $L^2(\mathcal{H})$ y las sucesiones $(a_k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H})$ tal que, para correspondientes f y (a_n) se tiene

$$f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} a_k \qquad \text{y} \qquad \|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \|a_k\|^2 .$$

Al espacio formado por los elementos de $L^2(\mathcal{H})$ que se corresponden mediante este isomorfismo con los elementos de $l^2(\mathcal{H})$ lo denotamos por $H^2(\mathcal{H})$, es decir, elementos de la forma $f(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{int} a_n$. Dichos elementos se pueden definir en el interior del disco unidad $\mathbb{D}$ por $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n a_n$, con lo cual obtenemos una función analítica en $\mathbb{D}$ (y recíprocamente). Denotamos por $H^2_-(\mathcal{H})$ al complemento ortogonal de $H^2(\mathcal{H})$ en $L^2(\mathcal{H})$.

Capítulo I

Operadores de Toeplitz con respecto a semigrupos

1 Introducción

Toda función $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ define un operador de Toeplitz $T_\phi : H^2 \to H^2$, dado por $T_\phi f = P(\phi f)$, donde P es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ sobre H^2. En el lenguaje de la teoría de dilataciones, T_ϕ es la compresión del operador de multiplicación M_ϕ inducido por ϕ. A esta función ϕ se le llama símbolo del operador T_ϕ y es única. Los operadores de Toeplitz verifican una relación simple que los caracteriza; esta relación característica fue dada por Brown y Halmos en 1963 [BrHa], y nos dice que una aplicación lineal y acotada $X : H^2 \to H^2$ es un operador de Toeplitz, si y sólo si, $X = BXB^*$, donde B es el operador de desplazamiento hacia detrás en H^2. El desarrollo de la teoría de los operadores de Toeplitz en las últimas décadas, se puede encontrar en [BaGh], [BöKa], [BöSi], [GhFe] o [GhGlKs].

En la literatura se han propuesto algunas posibles generalizaciones de la noción de operador de Toeplitz, pero nosotros queremos concentrarnos en las generalizaciones que explotan las propiedades de la relación característica. A saber, tomamos una contracción T definida en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y estudiamos las propiedades de los operadores $X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que $X = TXT^*$, llamados operadores de Toeplitz generalizados. Los propósitos de esta línea de investigación —empezada por Douglas [Do1] y [Do2] y Sz.-Nagy y Foiaş [SzFo2], [SzFo3], y continuada por Muhly [Mh1], Pták y Vrbová [PtVr1], Pták [Pt3], Mancera y Paúl [MaPa1], [MaPa2], y Kérchy [Ké1], [Ké2]— son dos: en primer lugar, obtener nuevos operadores que verifican algunas de las propiedades que hacen que la clase de los operadores de Toeplitz sea importante y, en segundo lugar, encontrar cuáles de esas propiedades del caso clásico dependen sólo de la relación característica, y no de la maquinaria de la teoría de funciones complejas que algunas veces es usada para probarlas. Los operadores hiponormales [SzFo2], [SzFo3] y los operadores con autoconmutadores unidimensionales [Cl] son ejemplos de operadores de Toeplitz generalizados.

Para estudiar hasta qué punto son válidas las propiedades de los operadores de Toeplitz clásicos en este planteamiento, un problema esencial es encontrar qué operadores juegan el papel de símbolos. En el caso clásico, los símbolos son operadores de multiplicación inducidos por funciones de $L^\infty(\mathbb{T})$ o, equivalentemente, operadores Y tales que $Y = UYU^*$ donde U es el operador de desplazamiento bilateral hacia detrás en $L^2(\mathbb{T})$. Desde el punto de vista de la teoría de dilataciones, U es, a la vez, la dilatación isométrica minimal y la dilatación unitaria minimal de B, y U^* es la extensión unitaria minimal del desplazamiento unilateral hacia delante $S = B^*$, por lo tanto, lo que se busca son levantamientos de soluciones de $X = BXB^*$ a soluciones de $Y = UYU^*$, y estas familias de soluciones están relacionadas una a una por el hecho de que cada X es la compresión de un Y a H^2, es decir $X = P\,Y|\,H^2$. Esto sugiere que en el caso generalizado los símbolos deberían ser soluciones de un levantamiento adecuado de la ecuación $X = TXT^*$ que involucre la dilatación isométrica minimal, la dilatación unitaria minimal o la extensión unitaria minimal de T.

Si T es una co-isometría, los planteamientos de Douglas, Sz.-Nagy y Foiaş, y Pták y Vrbová son formalmente el mismo, pero hay una pequeña diferencia en sus puntos de vista. Ellos probaron que si T es una co-isometría, entonces toda solución X de la ecuación $X = TXT^*$ es la compresión de una solución Y de la ecuación $Y = UYU^*$ donde, para Sz.-Nagy, Foiaş, Pták y Vrbová, U es la dilatación isométrica minimal de T [SzFo3, Teor. 2], [PtVr1, Teor. 2.11], [Pt3, Teor. 2.5], mientras que, para Douglas, U^* es la extensión unitaria minimal de T^* [Do1, Teor. 2]. Estos puntos de vista diferentes producen, sin embargo, desarrollos diferentes para el caso en que T sea una contracción arbitraria; a saber,

(DM) Douglas propuso el siguiente planteamiento. Sea $A = \sqrt{\lim_n T^n T^{*n}}$ el módulo asintótico de T^* y denotemos por $\mathcal{D}$ la clausura del rango de A. Entonces existe una isometría V definida sobre $\mathcal{D}$, tal que $VA = AT^*$ y toda solución X de la ecuación $X = TXT^*$ puede ser representada de la forma $X = ALA$ donde L es una solución de la ecuación $L = V^*LV$. Ahora, como V^* es una co-isometría, cada uno de los operadores L puede ser escrito como la compresión de una solución M de la ecuación $M = WMW^*$, donde W^* es la extensión unitaria minimal de V. Este planteamiento fue usado más tarde por Muhly [Mh1] para mostrar cómo levantar simultáneamente una familia de ecuaciones de la forma $X = T_s X T_s^*$, donde $\{T_s : s \in \Sigma\}$ es una representación contractiva de un semigrupo abeliano Σ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

(SF) Sz.-Nagy y Foiaş propusieron el siguiente planteamiento. Sea el operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ la dilatación isométrica minimal de T, sea $\mathcal{R}$ el subespacio residual de U, esto es, el mayor subespacio reductor donde U es unitario, y denotemos por $U|\mathcal{R}$ la parte unitaria de la descomposición de Wold de U. Entonces toda solución X de la ecuación $X = TXT^*$ puede ser obtenida como la compresión de una solución Y de la ecuación $Y = (U|\mathcal{R})Y(U|\mathcal{R})^*$, es decir, $X = P(\mathcal{H})Y\,P(\mathcal{R})|\mathcal{H}$, donde $P(\mathcal{H})$ y $P(\mathcal{R})$ denotan las correspondientes proyecciones ortogonales desde $\mathcal{K}$.

(PV) Pták y Vrbová propusieron el siguiente planteamiento. Con la misma notación que en (SF), toda solución X de la ecuación $X = TXT^*$ está dada, de manera única, como la compresión $X = P(\mathcal{H})\,Y|\mathcal{H}$ de una solución Y de la ecuación $Y = UYU^*$. Además, estos operadores Y están esencialmente definidos en $\mathcal{R}$, en el sentido que

$$Y = P(\mathcal{R})Y = YP(\mathcal{R}).$$

Como se dijo en el último párrafo, para el caso de una contracción arbitraria T, los planteamientos (SF) y (PV) son esencialmente el mismo; sin embargo, nosotros preferimos el segundo porque la relación entre X e Y es más simple, debido a que $\mathcal{H}$ es un subespacio de $\mathcal{K}$, pero no necesariamente de $\mathcal{R}$. Este planteamiento es muy útil, y muchos de los teoremas del caso clásico han sido extendidos al caso generalizado en [MaPa1], [MaPa2], [Ké1] y [Ké2], complementando los resultados obtenidos en [Do1], [Do2], [SzFo2], [SzFo3], [PtVr1] y [Pt3].

Sin embargo, el planteamiento (DM) no es, al menos a priori, el mismo que los otros. Uno de los propósitos de este capítulo es clarificar esta situación, y extender el planteamiento (SF)-(PV) al caso de semigrupos. En la Sección 2 damos, refinando las técnicas usadas en [Pt], una forma de levantar una familia de ecuaciones $X = T_s X T_s^*$. En la Sección 3 probamos que nuestro planteamiento es unitariamente equivalente al planteamiento (DM) usado por Muhly. En la Sección 4 damos extensiones al caso de semigrupos, de varios teoremas sobre los operadores de Toeplitz clásicos. En la Sección 5 estudiamos algunos ejemplos concretos de operadores de Toeplitz y observamos que para ciertas representaciones de semigrupos, los operadores de Toeplitz correspondientes son operadores bien conocidos en la literatura. Finalmente, en la Sección 6 definimos los operadores de Hankel con respecto a semigrupos y mostramos un ejemplo de un operador de Hankel con respecto a un semigrupo biparamétrico que no proviene de un símbolo de Hankel.

2 Operadores de Toeplitz con respecto a semigrupos

Representaciones contractivas de semigrupos.

2.1. Definición. Sea Σ un semigrupo abeliano (aditivo) con elemento unidad e. Consideremos Σ como un conjunto dirigido, es decir, $r \leq s$ si $s = r + q$ para algún $q \in \Sigma$. Una familia de contracciones (resp. isometrías, co-isometrías, operadores unitarios) $\{T_s : s \in \Sigma\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice que es una *representación contractiva* (resp. *isométrica, co-isométrica, unitaria*) *del semigrupo* Σ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si T_e es el operador identidad $\mathrm{Id}(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{H}$ y $T_{r+s} = T_r T_s$ para todo $r, s \in \Sigma$.

2.2. Definición. Sea $\{U_s : s \in \Sigma\}$ una representación isométrica (resp. unitaria) del semigrupo Σ en $\mathcal{K}$, diremos que es una *dilatación isométrica* (resp. *unitaria*) de la representación contractiva $\{T_s : s \in \Sigma\}$ en $\mathcal{H}$, si $\mathcal{H}$ es un subespacio de $\mathcal{K}$ y $T_s = P(\mathcal{H})\, U_s | \mathcal{H}$ para todo $s \in \Sigma$, y se dice que es *minimal*, si $\mathcal{K}$ es el menor subespacio que contiene a $\mathcal{H}$ y es U_s-invariante (resp. U_s-reductor) para todo $s \in \Sigma$ o, equivalentemente, si podemos escribir $\mathcal{K} = \bigvee \{U_s\mathcal{H} : s \in \Sigma\}$ (resp. $\mathcal{K} = \bigvee \{U_s\mathcal{H}, U_s^*\mathcal{H} : s \in \Sigma\}$) Si se verifica que $T_s = U_s | \mathcal{H}$, se dice que $\{U_s : s \in \Sigma\}$ es una *extensión isométrica* (resp. *unitaria*) de $\{T_s : s \in \Sigma\}$.

Por ejemplo, dada cualquier contracción T definida en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la familia $\{T_n = T^n : n = 0, 1, 2, ...\}$ es una representación contractiva del semigrupo (aditivo) $\mathbb{Z}_+$ de los enteros no negativos en $\mathcal{H}$, y si $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ es la dilatación isométrica minimal de T, entonces $\{U_n = U^n : n = 0, 1, 2, ...\}$ es una dilatación isométrica minimal de $\{T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$; en este caso, todas las dilataciones isométricas minimales son iguales, salvo equivalencias unitarias. Sin embargo, no ocurre siempre que una representación contractiva $\{T_s : s \in \Sigma\}$ de un semigrupo arbitrario Σ tenga una dilatación isométrica minimal, y puede suceder también que dos dilataciones isométricas minimales de una misma representación no sean isomorfas. Aunque referimos al lector a [SzFo1, I.6-I.9], donde se discuten con detalle estos temas, mencionamos los siguientes ejemplos de representaciones contractivas $\{T_s : s \in \Sigma\}$ que tienen dilatación isométrica minimal, a saber:

(a) cualquier representación contractiva de $\Sigma = \mathbb{Z}_+$;

(b) cualquier representación contractiva de $\Sigma = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$;

(c) si Σ el semigrupo aditivo $\mathbb{R}_+$ de todos los números reales no negativos, cualquier representación contractiva $\{T_s : s \geq 0\}$ continua, esto es, $\lim_{s \to 0^+} T_s = T_0$ en la topología fuerte de operadores. En este caso, se dice que $\{T_s : s \geq 0\}$ es un *semigrupo continuo uniparamétrico de contracciones*;

(d) $\{T_s : s \in \Sigma\}$ una representación co-isométrica, en cuyo caso los elementos de la dilatación isométrica minimal $\{U_s\}$ son, de hecho, unitarios, y $\{U_s^*\}$ es la extensión unitaria minimal de la representación isométrica $\{T_s^*\}$;

(e) $\{T_s : s \in \Sigma\}$ una representación contractiva doblemente conmutativa, es decir, tal que $T_s T_r^* = T_r^* T_s$ para todo $r, s \in \Sigma$.

En lo que resta del capítulo, Σ denotará un semigrupo abeliano con elemento unidad e y $\{T_s\}$ (suprimimos "$s \in \Sigma$" si no hay posibilidad de confusión) una representación contractiva de Σ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que tiene una dilatación isométrica minimal $\{U_s\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

2.3. Lema. *Para todo $s \in \Sigma$ se verifican:*

(1) $P(\mathcal{H})U_s k = T_s P(\mathcal{H})k$ *para todo* $k \in \mathcal{K}$.

(2) $U_s \mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{H}^\perp$.

(3) $U_s^* \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.

(4) $U_s^* | \mathcal{H} = T_s^*$.

Demostración. Como $\mathcal{K} = \bigvee \{U_s \mathcal{H} : s \in \Sigma\}$, para probar que se verifica (1) será suficiente comprobar que $P(\mathcal{H})U_s U_r h = T_s P(\mathcal{H}) U_r h$ para todos $r \in \Sigma$ y $h \in \mathcal{H}$. Ahora bien,

$$P(\mathcal{H})U_s U_r h = P(\mathcal{H})U_{s+r} h = T_{s+r} h = T_s T_r h = T_s P(\mathcal{H}) U_r h,$$

como buscábamos.

Ahora, utilizando la propiedad (1) tenemos que, para todo $h \in \mathcal{H}^\perp$,

$$P(\mathcal{H})U_s h = T_s P(\mathcal{H})h = 0,$$

por lo tanto, tenemos probado que $U_s\mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{H}^\perp$.

Por último, es claro que (2) y (3) son equivalentes y que (4) se obtiene de (3). ■

Como mencionamos con anterioridad, cuando tenemos una representación contractiva $\{T^n\}$ de $\Sigma = \mathbb{Z}_+$, el subespacio $\mathcal{R}$, la parte residual de la descomposición de Wold de la dilatación isométrica minimal U de T, juega un papel esencial porque, en ese caso, los símbolos de Toeplitz Y están esencialmente definidos en el espacio $\mathcal{R}$ en el sentido de que $Y = P(\mathcal{R})Y = YP(\mathcal{R})$. En el caso de un semigrupo arbitrario, como veremos más adelante, tenemos la misma situación: el símbolo está definido esencialmente en la parte unitaria $\mathcal{R}$ de la descomposición de Wold de un semigrupo de isometrías, noción introducida por Suciu [Su] mediante el siguiente teorema.

2.4. Teorema. *Sea $\{U_s : s \in \Sigma\}$ una representación isométrica de Σ en $\mathcal{K}$. Entonces $\mathcal{K}$ se puede escribir de manera única como suma directa,*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_s \oplus \mathcal{K}_e \oplus \mathcal{R},$$

donde los tres sumandos son reductores para $\{U_s : s \in \Sigma\}$ y $\{U_s | \mathcal{R} : s \in \Sigma\}$ es una representación unitaria de Σ. Además $\mathcal{R} = \bigcap_{s\in\Sigma} U_s\mathcal{K}$ y

$$P(\mathcal{R})k = \lim_{s\in\Sigma} U_s U_s^* k \quad \textit{para todo } k \in \mathcal{K}.$$

A $\mathcal{K}_s$ y $\mathcal{K}_e$ se les llama, respectivamente, *parte totalmente no unitaria* o *"shift"*, y *parte extraña* o *evanescente*; esta última no aparece en el caso de una sola contracción (referimos al lector interesado a [Su] y [Mh2]).

Observemos en este punto que si $\{T_s\}$ es una representación co-isométrica de Σ, entonces cada U_s es unitario y, por lo tanto, $\mathcal{R} = \mathcal{K}$. Esto muestra que la importancia del papel jugado por $\mathcal{R}$ en el caso clásico está oculto, ya que si T es el operador de desplazamiento hacia detrás B en H^2, entonces $\mathcal{R} = \mathcal{K} = L^2(\mathbb{T})$. En nuestro caso, cada U_s no tiene por qué ser la dilatación isométrica minimal del correspondiente T_s, ni $\mathcal{R}$ tiene por qué ser el subespacio residual de la descomposición de Wold de cada U_s pero, no obstante, este subespacio $\mathcal{R}$ tiene propiedades similares, por lo tanto lo llamaremos *subespacio residual* de la dilatación isométrica minimal $\{U_s\}$ de $\{T_s\}$. Veamos ahora algunas de las propiedades de las representaciones $\{T_s\}$ y $\{U_s\}$ relativas a $\mathcal{R}$ que usaremos más tarde (ver, por ejemplo [Pt3, Lemas 2.3 y 2.4] y [SzFo1, II.3] para el caso de una contracción simple).

2.5. Lema. *Sea $\mathcal{R} = \bigcap_{t\in\Sigma} U_t\mathcal{K}$ el subespacio residual de la dilatación isométrica minimal $\{U_s\}$ de $\{T_s\}$. Sea $\mathcal{P}$ la clausura de $P(\mathcal{R})\mathcal{H}$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

(1) *$\mathcal{R}$ está contenido en el subespacio residual de la descomposición de Wold de U_s para cada $s \in \Sigma$.*

(2) *$\mathcal{R} = \mathcal{P} \oplus (\mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\perp)$, donde $\mathcal{H}^\perp$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$.*

(3) *$P(\mathcal{P})h = P(\mathcal{R})h$ para todo $h \in \mathcal{H}$.*

(4) *$P(\mathcal{H})P(\mathcal{P}) = P(\mathcal{H})P(\mathcal{R})$.*

(5) *Para todos $h \in \mathcal{H}$ y $s \in \Sigma$ se verifica la siguiente cadena de igualdades*

$$U_s^* P(\mathcal{P})h = P(\mathcal{P})U_s^* h = P(\mathcal{P})T_s^* h = U_s^* P(\mathcal{R})h = P(\mathcal{R})T_s^* h.$$

(6) *$\mathcal{P}$ es U_s^*-invariante y $U_s^*|\,\mathcal{P}$ es una isometría.*

(7) *Para cada $s \in \Sigma$, definimos la co-isometría $R_s = (U_s^*|\,\mathcal{P})^* \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$. Entonces $\{R_s\}$ es una representación co-isométrica de Σ en $\mathcal{P}$ y $\{U_s|\,\mathcal{R}\}$ es la dilatación isométrica (de hecho, unitaria) minimal de $\{R_s\}$.*

Demostración. (1) Si $\mathcal{R}_s$ es el subespacio residual de la isometría U_s entonces, como $U_s|\,\mathcal{R}$ es unitario y $\mathcal{R}$ es U_s-reductor, se verifica $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_s$.

(2) Para cada $x \in \mathcal{R}$ y $h \in \mathcal{H}$ tenemos

$$\langle x, h\rangle = \langle P(\mathcal{R})x, h\rangle = \langle x, P(\mathcal{R})h\rangle\,,$$

por tanto se sigue, usando que $P(\mathcal{R})\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{P}$, que $\langle x, \mathcal{P}\rangle = 0$ si, y sólo si, $x \in \mathcal{H}^\perp$.

(3) Teniendo en cuenta que $P(\mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\perp)h = 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$, tenemos que la afirmación (3) se deduce de la (2).

(4) Ésta también se deduce de (3) porque

$$P(\mathcal{H})P(\mathcal{R}) = P(\mathcal{H})\left[P(\mathcal{P}){+}P(\mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\perp)\right] = P(\mathcal{H})P(\mathcal{P}).$$

(5) Sea $h \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} U_s^* P(\mathcal{P})h &= U_s^* P(\mathcal{R})h && \text{[por el apartado (3)]} \\ &= P(\mathcal{R})U_s^* h && \text{[por el apartado (1)]} \\ &= P(\mathcal{P})U_s^* h && \text{[por el apartado (4) y el Lema 2.3]} \\ &= P(\mathcal{P})T_s^* h. && \text{[por el Lema 2.3]} \end{aligned}$$

(6) Se deduce de (3) y (5).

(7) Como $\mathcal{P}$ es U_s^*-invariante, para cada $s \in \Sigma$ tenemos que

$$R_{s+t} = (U_{s+t}^* | \mathcal{P})^* = (U_t^* U_s^* | \mathcal{P})^* = ((U_t^* | \mathcal{P})(U_s^* | \mathcal{P}))^* = (U_t^* | \mathcal{P})^* (U_s^* | \mathcal{P})^* = R_s R_t.$$

Por otro lado, R_e es la identidad sobre $\mathcal{P}$. En consecuencia, $\{R_s\}$ es una representación co-isométrica de Σ en $\mathcal{P}$.

Ahora, como $R_s = P(\mathcal{P})\, U_s | \mathcal{P}$, tenemos que $U_s | \mathcal{R}$ es dilatación isométrica de R_s pero, como $\mathcal{K} = \bigvee_{s\in\Sigma} U_s \mathcal{H}$, tenemos, usando que $\mathcal{R}$ es U_s-reductor para todo $s \in \Sigma$, que

$$\mathcal{R} = P(\mathcal{R})\mathcal{K} = \bigvee_{s\in\Sigma} P(\mathcal{R}) U_s \mathcal{H} = \bigvee_{s\in\Sigma} U_s P(\mathcal{R})\mathcal{H} = \bigvee_{s\in\Sigma} U_s \mathcal{P}$$

y, por lo tanto, que $\{U_s | \mathcal{R}\}$ es la dilatación isométrica minimal de $\{R_s\}$. ■

Operadores y símbolos de Toeplitz.

2.6. Definición. Se dice que un operador acotado $X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un *operador de Toeplitz con respecto a* $\{T_s\}$ si

$$X = T_s X T_s^* \qquad \text{para todo } s \in \Sigma.$$

Se podría tomar una representación $\{T_{1s}\}$ a la derecha y otra representación $\{T_{2s}\}$ del mismo semigrupo a la izquierda de la ecuación y definir la noción de operador de Toeplitz con respecto a $\{T_{1s}\}$ y $\{T_{2s}\}$. Sin embargo, Muhly [Mh1] demostró cómo reducir esta situación aparentemente más general, al caso en que ambas representaciones son la misma, a saber, X es una solución de $X = T_{2s} X T_{1s}^*$ si, y sólo si, $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una solución de

$$\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{2s} & 0 \\ 0 & T_{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2s} & 0 \\ 0 & T_{1s} \end{bmatrix}^*.$$

Sin embargo, en algunas ocasiones, como cuando estudiemos la invertibilidad de los operadores, no se podrá utilizar esta simplificación ya que el operador $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en la segunda ecuación nunca es invertible. En cualquier caso, nuestros resultados son válidos en la situación más general $X = T_{2s}XT_{1s}^*$; sin embargo, trabajaremos en el caso más simple $X = T_sXT_s^*$ para no complicar la notación, salvo en el caso específico del teorema de invertibilidad.

Cuando T es una contracción y $\{T^n\}$ es la representación correspondiente de $\mathbb{Z}_+$, recuperamos la noción de operador de Toeplitz generalizado descrita al principio del capítulo.

2.7. Definición. Se dice que un operador $Y : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ es un *símbolo de Toeplitz con respecto a* $\{T_s\}$ si $Y = U_sYU_s^*$ para todo $s \in \Sigma$, es decir, si Y es un operador de Toeplitz con respecto a la dilatación isométrica minimal $\{U_s\}$ de $\{T_s\}$.

La observación fundamental aquí es que si Y es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$, entonces la compresión $X = P(\mathcal{H})\, Y|\,\mathcal{H}$ es un operador de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$ porque, usando el Lema 2.3 dos veces, para todos $s \in \Sigma$ y $h \in \mathcal{H}$ tenemos

$$T_sXT_s^*h = T_sXU_s^*h = T_sP(\mathcal{H})YU_s^*h = P(\mathcal{H})U_sYU_s^*h = P(\mathcal{H})Yh = Xh.$$

Nuestro primer resultado importante en este capítulo es que hay una relación biyectiva e isométrica entre los operadores de Toeplitz y los símbolos de Toeplitz.

2.8. Teorema. *Si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$, entonces existe un único símbolo de Toeplitz $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ tal que $X = P(\mathcal{H})\, Y|\,\mathcal{H}$. Este símbolo está dado por*

$$Yk = \lim_{s\in\Sigma} U_sXP(\mathcal{H})U_s^*k \qquad \textit{para todo } k \in \mathcal{K}$$

y se verifica que $\|Y\| = \|X\|$.

Demostración. Teniendo en cuenta que $\|U_sXP(\mathcal{H})U_s^*\| \leq 1$ para todo $s \in \Sigma$ y que $\mathcal{K} = \bigvee\{U_s\mathcal{H} : s \in \Sigma\}$, para probar que $\{U_sXP(\mathcal{H})U_s^*k : s \in \Sigma\}$ es una red convergente para cada $k \in \mathcal{K}$, será suficiente comprobar que para todos $r \in \Sigma$ y $h \in \mathcal{H}$, la red $\{U_sXP(\mathcal{H})U_s^*U_rh : s \in \Sigma\}$ converge. Fijamos $r \in \Sigma$ y tomamos $s \geq r$, por tanto $s = q+r$ para algún $q \in \Sigma$. Ahora, definimos

$$\begin{aligned} k_q &= U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* U_r h = U_{q+r} X P(\mathcal{H}) U_{q+r}^* U_r h = U_{q+r} X P(\mathcal{H}) U_q^* U_r^* U_r h \\ &= U_{q+r} X P(\mathcal{H}) U_q^* h = U_{q+r} X T_q^* h. \end{aligned}$$

Veamos que $\langle k_{p+q}, k_q \rangle = \langle k_q, k_q \rangle$ para todo $p \in \Sigma$. En efecto, usando que U_{q+r} es isometría y que X es un operador de Toeplitz, podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle k_{p+q}, k_q \rangle &= \left\langle U_{p+q+r} X T_{p+q}^* h, U_{q+r} X T_q^* h \right\rangle = \left\langle U_p X T_{p+q}^* h, X T_q^* h \right\rangle \\ &= \left\langle P(\mathcal{H}) U_p X T_{p+q}^* h, X T_q^* h \right\rangle = \left\langle T_p X T_p^* T_q^* h, X T_q^* h \right\rangle \\ &= \left\langle X T_q^* h, X T_q^* h \right\rangle = \left\langle U_{q+r} X T_q^* h, U_{q+r} X T_q^* \right\rangle = \langle k_q, k_q \rangle . \end{aligned}$$

Ahora, se sigue que

$$\begin{aligned} \|k_{p+q} - k_q\|^2 &= \langle k_{p+q} - k_q, k_{p+q} - k_q \rangle \\ &= \langle k_{p+q}, k_{p+q} \rangle - \langle k_{p+q}, k_q \rangle - \langle k_q, k_{p+q} \rangle + \langle k_q, k_q \rangle \\ &= \langle k_{p+q}, k_{p+q} \rangle - \langle k_q, k_q \rangle = \|k_{p+q}\|^2 - \|k_q\|^2, \end{aligned}$$

y esto prueba que la red de números reales $\{\|k_q\|^2 : q \in \Sigma\}$ es creciente. Como esta red está también acotada por $\|h\|^2$, es convergente. La igualdad

$$\|k_{p+q} - k_q\|^2 = \|k_{p+q}\|^2 - \|k_q\|^2$$

nos dice que es $\{k_q : q \in \Sigma\}$ una red de Cauchy en $\mathcal{K}$ y, por tanto, converge, como queríamos probar. Sea Y el operador acotado que a cada $k \in \mathcal{K}$ le asocia el límite de la red, o sea,

$$Yk = \lim_{s \in \Sigma} U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* k \qquad \text{para todo } k \in \mathcal{K}.$$

Es claro que $\|Y\| \leq \|X\|$. Veamos ahora que X es la compresión de Y a $\mathcal{H}$. De hecho, por el Lema 2.3, para todos $h \in \mathcal{H}$ y $s \in \Sigma$ tenemos

$$P(\mathcal{H}) U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* h = T_s X T_s^* h = Xh,$$

por lo tanto $P(\mathcal{H}) Y h = \lim_{s \in \Sigma} P(\mathcal{H}) U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* h = Xh$. Como consecuencia se sigue que $\|X\| \leq \|Y\|$ y, por consiguiente, que $\|Y\| = \|X\|$.

Para probar que Y es un símbolo de Toeplitz, observemos que para cada $r \in \Sigma$ y $k \in \mathcal{K}$ tenemos

$$U_r Y U_r^* k = \lim_{s\in\Sigma} U_r U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* U_r^* k = \lim_{s\in\Sigma} U_{r+s} X P(\mathcal{H}) U_{r+s}^* k = Yk.$$

Finalmente, para probar la unicidad del símbolo, supongamos que Z es un símbolo de Toeplitz tal que $X = P(\mathcal{H})\ Z|\mathcal{H}$. Entonces, para todos $s \in \Sigma$ y $k \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$\begin{aligned} Zk &= U_s Z U_s^* k = U_s[P(\mathcal{H}) + P(\mathcal{H}^\perp)] Z U_s^* k \\ &= U_s P(\mathcal{H}) Z [P(\mathcal{H}) + P(\mathcal{H}^\perp)] U_s^* k + U_s P(\mathcal{H}^\perp) Z U_s^* k \\ &= U_s P(\mathcal{H}) Z P(\mathcal{H}) U_s^* k + U_s P(\mathcal{H}) Z P(\mathcal{H}^\perp) U_s^* k + U_s P(\mathcal{H}^\perp) Z U_s^* k \\ &= U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* k + U_s P(\mathcal{H}) Z P(\mathcal{H}^\perp) U_s^* k + U_s P(\mathcal{H}^\perp) U_s^* Z k. \end{aligned}$$

Si probamos que $\lim_{s\in\Sigma} P(\mathcal{H}^\perp) U_s^* k = 0$ en $\mathcal{K}$, esto implicará que los dos últimos sumandos de la última línea de la cadena de igualdades dė arriba son convergentes a cero y, por lo tanto, que $Zk = \lim_{s\in\Sigma} U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* k = Yk$ para todo $k \in \mathcal{K}$. Ahora bien, usando una vez más que $\mathcal{K} = \bigvee_{r\in\Sigma} U_r \mathcal{H}$, para probar que $\lim_{s\in\Sigma} P(\mathcal{H}^\perp) U_s^* k = 0$ en $\mathcal{K}$, será suficiente comprobarlo sobre elementos de la forma $U_r h$ con $h \in \mathcal{H}$. En efecto, para $s \geq r$, tenemos que

$$P(\mathcal{H}^\perp) U_s^* U_r h = P(\mathcal{H}^\perp) U_{s-r}^* h = 0$$

porque, de acuerdo con el Lema 2.3, el espacio $\mathcal{H}$ es U_s^*-invariante para todo $s \in \Sigma$. ■

A continuación veremos que los símbolos de Toeplitz están esencialmente definidos sobre el espacio residual $\mathcal{R}$ de la dilatación isométrica minimal y también que todo operador de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$ está relacionado con un operador de Toeplitz con respecto a $\{R_s\}$, donde $R_s = (U_s^*|\,\mathcal{P})^*$ es la co-isometría definida en el Lema 2.5.

2.9. Proposición. *Si Y es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_s : s \in \Sigma\}$, entonces Y es un operador esencialmente definido en $\mathcal{R} = \bigcap_{s\in\Sigma} U_s \mathcal{K}$ en el sentido de que*

$$Y = YP(\mathcal{R}) = P(\mathcal{R})Y.$$

Además, Y conmuta tanto con U_s como con U_s^* para todo $s \in \Sigma$.

Demostración. Como cada U_s es una isometría y tenemos que $Y = U_s Y U_s^*$, se sigue que $YU_s = U_s Y$ e $YU_s^* = U_s^* Y$. Por lo tanto,

$$Y = U_s Y U_s^* = Y U_s U_s^* \qquad \text{para todo } s \in \Sigma.$$

Tomando límite cuando $s \in \Sigma$, obtenemos, por el Teorema 2.4, que $Y = YP(\mathcal{R})$. La igualdad $Y = P(\mathcal{R})Y$ se prueba de manera análoga. ■

2.10. Teorema. *Si Y es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_s : s \in \Sigma\}$, entonces el operador $G = Y|\,\mathcal{R}$ es un símbolo de Toeplitz con respecto a la representación co-isométrica $\{R_s = (U_s^*|\,\mathcal{P})^*\}$ con operador de Toeplitz asociado $F = P(\mathcal{P})\, Y|\,\mathcal{P}$. Recíprocamente, si G es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{R_s\}$, entonces $Y = GP(\mathcal{R})$ es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$. Además, $\|Y\| = \|G\|$ en ambos casos.*

Demostración. En el Lema 2.5 vimos que $\{U_s|\,\mathcal{R}\}$ es la dilatación isométrica minimal de $\{R_s\}$ y en el Teorema 2.4 que $\mathcal{R}$ es U_s-reductor para cada $s \in \Sigma$. Teniendo esto en cuenta y que, por la proposición anterior, $Y = P(\mathcal{R})YP(\mathcal{R})$, tenemos que la igualdad $Y = U_s Y U_s^*$ puede ser escrita como

$$Y|\,\mathcal{R} = (U_s|\,\mathcal{R})Y(U_s|\,\mathcal{R})^*,$$

y por tanto $G = Y|\,\mathcal{R}$ es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{R_s\}$. Se sigue ahora de la observación previa al Teorema 2.8 que $F = P(\mathcal{P})\, Y|\,\mathcal{P}$ es un operador de Toeplitz con respecto a la representación co-isométrica $\{R_s\}$ de Σ en $\mathcal{P}$. Además, como

$$Y = YP(\mathcal{R}) = (Y|\,\mathcal{R})P(\mathcal{R}) = GP(\mathcal{R}),$$

se tiene $\|Y\| \leq \|G\|$ y, por tanto, que $\|Y\| = \|G\|$, ya que la otra desigualdad es obvia.

En sentido contrario, si G es un símbolo de Toeplitz con respecto a la representación $\{R_s\}$ e $Y = GP(\mathcal{R})$, entonces se verifica que

$$Y = GP(\mathcal{R}) = (U_s|\,\mathcal{R})G(U_s|\,\mathcal{R})^*P(\mathcal{R}).$$

Ahora, usando otra vez que $\mathcal{R}$ es U_s-reductor, tenemos que

$$Y = (U_s|\,\mathcal{R})GP(\mathcal{R})U_s^*P(\mathcal{R}) = U_s GP(\mathcal{R})U_s^* = U_s Y U_s^*,$$

por lo tanto $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$. Además, como para todo $x \in \mathcal{R}$ se tiene $Gx = GP(\mathcal{R})x = YP(\mathcal{R})x$, entonces $\|G\| \leq \|Y\|$ y, en consecuencia $\|Y\| = \|G\|$, puesto que la otra desigualdad es obvia. ■

El teorema anterior nos dice que existe una relación isométrica y biyectiva entre el conjunto de todos los operadores de Toeplitz con respecto a una representación contractiva $\{T_s\}$ y el conjunto de todos los operadores de Toeplitz con respecto a una representación co-isométrica $\{R_s\}$ definida por $R_s = (U_s^*|\,\mathcal{P})^*$ para cada $s \in \Sigma$. Además, los operadores de Toeplitz relacionados comparten esencialmente el mismo símbolo.

Operadores de Toeplitz analíticos.

Como el conjunto de los símbolos analíticos clásicos es H^∞ y este espacio se puede ver como el conjunto de símbolos tales que el operador de Toeplitz asociado conmuta con el operador de desplazamiento hacia delante S en H^2 o, también, como el conjunto de símbolos que dejan H^2 invariante, podemos mantener la analogía con el caso clásico y decir que un símbolo de Toeplitz Y es analítico si $Y\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. Por lo tanto, un símbolo de Toeplitz Y es *analítico* cuando $P(\mathcal{H}^\perp)\, Y|\,\mathcal{H} = 0$. Un operador de Toeplitz X se dice que es *analítico* si su símbolo Y es analítico, en ese caso, X es simplemente la restricción de Y, es decir, $X = Y|\,\mathcal{H}$. Para el caso en que $\{T_s\}$ sea una representación co-isométrica de Σ, Douglas [Do2] demostró la existencia de (lo que nosotros llamamos aquí) símbolos de Toeplitz analíticos, y también que un operador de Toeplitz X es analítico si, y sólo si, $XT_s^* = T_s^*X$ para cada $s \in \Sigma$, al igual que en el caso clásico. La caracterización en el caso general la da el siguiente resultado.

2.11. Lema. *Sea $X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador acotado. X es un operador de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_s\}$ si, y sólo si, $XT_s^* = T_s^*X$ para todo $s \in \Sigma$ y* $\operatorname{ran}(X) \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$.

Demostración. Sea Y el símbolo del operador de Toeplitz X. Por la Proposición 2.9, sabemos que $Y = YP(\mathcal{R}) = P(\mathcal{R})Y$ y, por tanto, si Y es analítico, se tiene la inclusión $X\mathcal{H} = Y\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. En consecuencia, $X\mathcal{H} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$. Además, usando el Lema 2.3 y que Y y U_s^* conmutan, para todos $h \in \mathcal{H}$ y $s \in \Sigma$ tenemos

$$XT_s^*h = YU_s^*h = U_s^*Yh = U_s^*Xh = T_s^*Xh.$$

En sentido contrario, supongamos que $XT_s^* = T_s^*X$ para todo $s \in \Sigma$ y que se verfica $\operatorname{ran}(X) \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$. Veamos en primer lugar que X es un operador de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$. Por el Lema 2.3 tenemos

$$T_s X T_s^* = T_s T_s^* X = T_s U_s^* X.$$

Usando ahora que $\operatorname{ran}(X) \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ y el Lema 2.5, obtenemos

$$T_s X T_s^* = T_s U_s^* X = T_s U_s^* P(\mathcal{P}) X = T_s P(\mathcal{R}) T_s^* X = P(\mathcal{H}) U_s P(\mathcal{R}) U_s^* X.$$

Finalmente, usando que $\mathcal{R}$ es reductor para U_s, que U_s es unitario sobre $\mathcal{R}$ y, de nuevo, que $\operatorname{ran}(X) \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$, concluimos que

$$T_s X T_s^* = P(\mathcal{H}) U_s P(\mathcal{R}) U_s^* X = P(\mathcal{H}) P(\mathcal{R}) U_s U_s^* X = P(\mathcal{H}) P(\mathcal{R}) X = X,$$

con lo cual, tenemos probado que X es un operador de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$.

Para ver que X es analítico, tomamos $h \in \mathcal{H}$ y, usando el Lema 2.3 dos veces y el Teorema 2.8, tenemos

$$Yh = \lim_{s\in\Sigma} U_s X P(\mathcal{H}) U_s^* h = \lim_{s\in\Sigma} U_s X T_s^* h = \lim_{s\in\Sigma} U_s T_s^* X h = \lim_{s\in\Sigma} U_s U_s^* X h.$$

Como $\operatorname{ran}(X) \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$, entonces $Xh \in \mathcal{R}$ y, usando que $U_s | \mathcal{R}$ es unitario en el espacio U_s-reductor $\mathcal{R}$, se verifica que $U_s\, U_s^* | \mathcal{R} = \operatorname{Id}(\mathcal{R})$. En consecuencia,

$$Yh = \lim_{s\in\Sigma} U_s U_s^* X h = Xh \in \mathcal{H}.$$

Por lo tanto $Y\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, y esto prueba que Y es analítico. ∎

Observemos que si cada T_s es una co-isometría, entonces es claro que la igualdad $XT_s^* = T_s^* X$ implica inmediatamente que $X = T_s X T_s^*$, por lo tanto cualquier operador que conmute con cada T_s^* es un operador de Toeplitz. Como además en este caso tenemos que $\mathcal{R} = \mathcal{K}$, por ser todos los operadores U_s unitarios, es obvio que $\mathcal{H} \cap \mathcal{R} = \mathcal{H}$. En consecuencia, el Lema 2.11 en este caso particular afirma que, si $\{T_s\}$ es una representación co-isométrica, entonces X es un operador de Toeplitz analítico si, y sólo si, verifica la relación $XT_s^* = T_s^* X$, como demostró Douglas [Do2, Teor. 2]. Pero, en general, esta última equivalencia no es cierta, no todo operador X verificando $XT_s^* = T_s^* X$ es un operador de Toeplitz analítico. Como ejemplo, dado en [PtVr1], podemos tomar el semigrupo $\mathbb{Z}_+$ de los enteros no negativos, donde sabemos que una dilatación isométrica minimal de una representación contractiva $\{T_n = T^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ es $\{U_n = U^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, siendo U la dilatación isométrica minimal de T. Si tomamos $T \equiv 0$, tenemos que U es un operador de desplazamiento unilateral y, por tanto, completamente no unitario, en consecuencia $\mathcal{R} = \{0\}$. Si Y es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, entonces $Y = YP(\mathcal{R}) = 0$, por tanto, el operador de Toeplitz asociado también es nulo. Con todo esto, hemos probado que el único operador de Toeplitz con respecto a $\{T_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ es el operador nulo, sin embargo, cualquier operador verifica la ecuación $XT_n^* = T_n^*X$, ya que $T_n = 0$ para todo n.

3 Relación con el planteamiento de Muhly

Descripción del planteamiento de Muhly.

Como mencionamos con anterioridad, Muhly [Mh1] extendió al caso de semigrupos la ecuación de tipo Toeplitz propuesta por Douglas [Do1]. Empezaremos describiendo este planteamiento, que habíamos llamado (DM), y lo primero que debemos mencionar es que Muhly estudia la ecuación $T_s^*XT_s = X$ en lugar de $X = T_sXT_s^*$, por lo tanto la descripción de los resultados de su trabajo serán adaptados a la ecuación que estamos usando aquí.

El procedimiento (DM) para construir el símbolo consiste en dos pasos. Primer paso [Mh1, Teor. I]: Sea A la raíz cuadrada positiva del límite fuerte de la red $\{T_sT_s^* : s \in \Sigma\}$ y denotemos por $\mathcal{D}$ la clausura del rango de A. Entonces existe una representación isométrica $\{V_s\}$ de Σ en $\mathcal{D}$ tal que $V_sA = AT_s^*$ para cada $s \in \Sigma$. Esta representación isométrica tiene la siguiente propiedad: un operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador de Toeplitz con respecto a $\{T_s\}$ si, y sólo si, existe un operador $L \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ tal que

(i) $\|L\| = \|X\|$.

(ii) L es un operador de Toeplitz con respecto a $\{V_s^*\}$.

(iii) $X = ALA$.

Aunque no está explícitamente mencionado en [Mh1], es fácil comprobar que la relación entre X y L es biyectiva. Para ello basta observar que como L es un operador en $\mathcal{D}$ y A es un operador de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{D}$, la igualdad $X = ALA$ se debe leer como $X = (A|\,\mathcal{D})LA$ y, por tanto, que si $X = 0$ entonces $(A|\,\mathcal{D})L(A\mathcal{H}) = 0$, en concecuencia, $(A|\,\mathcal{D})L = 0$ y, tomando adjuntos $L^*P(\mathcal{D})\ A|\,\mathcal{H} = 0$, por ser A autoadjunto, con lo que se tiene $L = 0$.

Segundo paso [Mh1, Teor. II]: Sea $\{W_s\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ la dilatación isométrica minimal de la representación co-isométrica $\{V_s^*\}$ (en otras palabras, $\{W_s^*\}$ es la extensión unitaria minimal de la representación isométrica $\{V_s\}$). Entonces un operador $L \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ es un operador de Toeplitz con respecto a $\{V_s^*\}$ si, y sólo si, existe un único operador $M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ tal que

(i) $\|M\| = \|L\|$.

(ii) M es un operador de Toeplitz con respecto a $\{W_s\}$.

(iii) L es la compresión de M a $\mathcal{D}$, es decir, $L = P(\mathcal{D})\, M|\,\mathcal{D}$.

Este segundo paso se puede ver como nuestro Teorema 2.8 aplicado al caso particular en que cada T_s es una co-isometría.

Equivalencia de ambos planteamientos.

Estos dos pasos nos proporcionan una representación de los operadores de Toeplitz X como

$$X = AP(\mathcal{D})MA,$$

donde M es un operador de Toeplitz con respecto a la representación unitaria $\{W_s\}$ de Σ tal que $\|M\| = \|X\|$. Nuestro Teorema 2.8 nos da una representación de los operadores de Toeplitz X como $X = P(\mathcal{H})\, Y|\,\mathcal{H}$, donde Y es un operador de Toeplitz con respecto a la dilatación isométrica minimal de $\{T_s\}$ tal que $\|Y\| = \|X\|$. La relación entre Y y M, obtenida vía X y L, es lineal, biyectiva e isométrica, por tanto, ambos planteamientos se pueden ver como formalmente equivalentes. En el próximo teorema iremos un poco más lejos, mostrando una relación unitaria explícita entre el operador de Toeplitz $F \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ definido en el Teorema 2.10 y L. Este operador unitario se extenderá a un operador unitario entrelazando $Y|\,\mathcal{R}$ y M.

¿Que planteamiento es más conveniente usar para desarrollos posteriores? Por supuesto, los operadores unitarios son más simples que las isometrías, y el planteamiento (DM) funciona incluso cuando $\{T_s\}$ no tiene dilatación isométrica minimal. Sin embargo, por otro lado, la relación entre X e Y es más simple que la relación entre X y M y, como veremos en la Sección 4, nos permite obtener algunos resultados sobre la relación entre las propiedades de X y las de Y.

3.1. Lema. *Sea $\mathcal{P}$ la clausura de $P(\mathcal{R})\mathcal{H}$. Entonces se verifica lo siguiente:*

(1) $A^2 = P(\mathcal{H})\, P(\mathcal{R})|\,\mathcal{H}$.

(2) *Existe un operador unitario $J : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ tal que $JAh = P(\mathcal{R})h$ para todo $h \in \mathcal{H}$.*

(3) *El operador unitario J entrelaza las isometrías V_s y $U_s^*|\,\mathcal{P} = R_s^*$ para todo $s \in \Sigma$, es decir, $JV_s = R_s^* J$.*

Demostración. La afirmación (1) es un simple cálculo: para cada $h \in \mathcal{H}$ tenemos, usando el Lema 2.3, que

$$A^2 h = \lim_s T_s T_s^* h = \lim_s P(\mathcal{H}) U_s U_s^* h = P(\mathcal{H}) \lim_s U_s U_s^* h = P(\mathcal{H}) P(\mathcal{R}) h.$$

(2) Dado un elemento arbitrario $h \in \mathcal{H}$, tomamos los elementos

$$x = Ah \in A\mathcal{H} \quad \text{e} \quad y = P(\mathcal{R})h \in P(\mathcal{R})\mathcal{H},$$

y definimos $J : A\mathcal{H} \to P(\mathcal{R})\mathcal{H}$ por $Jx = y$ o, en otras palabras, definimos J por la relación $JA = P(\mathcal{R})|\,\mathcal{H}$. En primer lugar, observemos que J está bien definido porque si $Ah_1 = Ah_2$, entonces $A^2(h_1 - h_2) = 0$ y, por tanto, por la afirmación (1), tenemos que $P(\mathcal{H})P(\mathcal{R})(h_1 - h_2) = 0$. Esto prueba que el elemento $P(\mathcal{R})(h_1 - h_2)$ pertenece a $\mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\perp$, donde $\mathcal{H}^\perp$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$. Pero, como vimos en el Lema 2.5, $\mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\perp$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{R}$, por tanto $P(\mathcal{R})(h_1 - h_2) \in \mathcal{R} \ominus \mathcal{P}$. Por otro lado, $P(\mathcal{R})(h_1 - h_2) \in \mathcal{P}$ por definición, por consiguiente $P(\mathcal{R})h_1 = P(\mathcal{R})h_2$, y esto prueba que J es un operador lineal bien definido de $A(\mathcal{H})$ a $P(\mathcal{R})\mathcal{H}$. Veamos ahora que J es una isometría. Usando otra vez la afirmación (1), tenemos que

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|Ah\|^2 = \langle A^2 h, h \rangle = \langle P(\mathcal{H})P(\mathcal{R})h, h\rangle = \langle P(\mathcal{R})h, h\rangle \\ &= \langle P(\mathcal{R})^2 h, h\rangle = \|P(\mathcal{R})h\|^2 = \|y\|^2. \end{aligned}$$

Como J es sobreyectivo, J se puede extender a un operador unitario $J : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ verificando la igualdad $JAh = P(\mathcal{R})h$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

(3) Tenemos que probar que $JV_s = (U_s^*|\,\mathcal{P})J$ para todo $s \in \Sigma$. Por densidad, será suficiente probar que $JV_sAh = (U_s^*|\,\mathcal{P})JAh$ para todo $h \in \mathcal{H}$. Usando que, como mencionamos antes, $U_s^* P(\mathcal{R})h = P(\mathcal{R})T_s^* h$, tenemos que

$$JV_sAh = JAT_s^*h = P(\mathcal{R})T_s^*h = U_s^*P(\mathcal{R})h = (U_s^*|\,\mathcal{P})JAh.$$

Esto termina la prueba. ∎

3.2. Teorema. (1) *El operador unitario $J : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ definido en el Lema 3.1 nos proporciona una relación unitaria entre los operadores de Toeplitz con respecto a la representación co-isométrica $\{V_s^*\}$ de Σ en $\mathcal{D}$ y los operadores de Toeplitz con respecto a la representación co-isométrica $\{R_s\}$ de Σ en $\mathcal{P}$. A saber, un operador $L \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ verifica $L = V_s^* L V_s$ para todo $s \in \Sigma$ si, y sólo si, el operador $F = JLJ^* \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ verifica $F = R_s F R_s^*$ para todo $s \in \Sigma$.*

(2) *J se puede extender a un operador unitario $\widehat{J} : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$ que entrelaza el símbolo $Y|\mathcal{R}$ (véase Teorema 2.10) y el operador $M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ construido en el segundo paso del planteamiento de Muhly.*

Demostración. (1) Por el Lema 3.1, tenemos que $JV_s^* = (U_s^*|\mathcal{P})^* J$. Por lo tanto si $L = V_s^* L V_s$, entonces

$$JLJ^* = JV_s^* L V_s J^* = (U_s^*|\mathcal{P})^* JLJ^* (U_s^*|\mathcal{P}) = R_s JLJ^* R_s^*.$$

El recíproco es análogo.

(2) Por el Lema 3.1, $JV_s = (U_s^*|\mathcal{P})J = R_s^* J$ para cada $s \in \Sigma$. Al igual que en la descripción del segundo escalón del levantamiento de Muhly, sea $\{W_s\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ la dilatación isométrica minimal de $\{V_s^*\}$. En primer lugar, extenderemos el operador unitario $J : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ a un operador unitario $\widehat{J} : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$ tal que $\widehat{J} W_s^* = U_s^* \widehat{J}$ para cada $s \in \Sigma$. Como $\{V_s^*\}$ y $\{R_s\}$ son co-isométricas, la igualdad $JV_s = R_s^* J$ nos afirma, por el Lema 2.11 que $J : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ es un operador de Toeplitz analítico con respecto a las representaciones $\{V_s^*\}$ y $\{R_s\}$, por tanto, por el Teorema 2.8, $J : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ puede ser extendido a un símbolo de Toeplitz analítico $\widehat{J} : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$, es decir, $J = \widehat{J}|\mathcal{D}$ y $\widehat{J} W_s^* = U_s^* \widehat{J}$ para cada $s \in \Sigma$. Obviamente, $\widehat{J}$ está definido sobre las sumas finitas de la forma $\sum W_s m_s$ como $\widehat{J}(\sum W_s m_s) = \sum U_s J m_s$ y se extiende a todo $\mathcal{E}$ por densidad. Nosotros afirmamos que $\widehat{J}$ es también unitario, lo que probaremos en el Corolario 4.3 de la siguiente sección. Continuemos entonces, y veamos ahora que el operador $\widehat{J}$ así extendido, entrelaza el símbolo $Y|\mathcal{R}$ con el símbolo M obtenido con el planteamiento de Muhly.

Como mencionamos en la descripción del segundo paso del levantamiento de Muhly, M se obtiene a partir de L como se describe en el Teorema 2.8 (esto también se puede comprobar directamente en la prueba de [Mh1, Teor. II]), a saber

$$Mx = \lim_s W_s L P(\mathcal{D}) W_s^* x \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{E}.$$

Dado ahora Y, el símbolo de Toeplitz del operador X de partida, el Teorema 2.10 nos dice que $G = Y|\mathcal{R}$ es el símbolo de F y podemos escribir

$$Gr = Yr = \lim_s U_s F P(\mathcal{P}) U_s^* r \qquad \text{para todo } r \in \mathcal{R}.$$

Como el operador $\widehat{J}^* P(\mathcal{P}) \widehat{J}$ es autoadjunto y verifica

$$\widehat{J}^* P(\mathcal{P}) \widehat{J} \widehat{J}^* P(\mathcal{P}) \widehat{J} = \widehat{J}^* P(\mathcal{P}) \widehat{J},$$

se tiene que es la proyección ortogonal sobre su rango, es decir, se verifica la igualdad $\widehat{J}^* P(\mathcal{P}) \widehat{J} = P(\mathcal{D})$, ya que $\widehat{J} : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$ es unitario y extiende a $J : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$. Usando esto, que $JLJ^* = F$, la expresión de G en términos de F dada arriba, y que $\widehat{J} W_s = U_s \widehat{J}$ para todo $s \in \Sigma$, se sigue que para todo $x \in \mathcal{E}$ tenemos

$$\begin{aligned} G\widehat{J}x &= \lim_s U_s F P(\mathcal{P}) U_s^* \widehat{J} x = \lim_s U_s F P(\mathcal{P}) \widehat{J} W_s^* x \\ &= \lim_s U_s \widehat{J} L \widehat{J}^* P(\mathcal{P}) J W_s^* x = \lim_s \widehat{J} W_s L P(\mathcal{D}) W_s^* x = \widehat{J} M x, \end{aligned}$$

ya que, multiplicando por el operador unitario $\widehat{J}$ por la derecha y por la izquierda en la igualdad $W_s^* (\widehat{J})^* = (\widehat{J})^* U_s^*$, tenemos $\widehat{J} W_s^* = U_s^* \widehat{J}$. Esto termina la prueba. ■

3.3. Corolario. *En el caso de una sola contracción, los planteamientos* (DM) *y* (SF)≡(PV) *son unitariamente equivalentes.*

4 Propiedades de los operadores de Toeplitz

Dentro del marco de los operadores de Toeplitz con respecto a una contracción simple, Mancera y Paúl en [MaPa1] y [MaPa2] dieron extensiones apropiadas, así como ejemplos aclaratorios, de un número de resultados sobre operadores de Toeplitz clásicos: criterio de invertibilidad de Widom y Devinatz para operadores de Toeplitz con símbolos unitarios, el Teorema de Hartman y Wintner para operadores de Toeplitz con símbolos de Fredholm, la estimación de la norma de un operador de Toeplitz compactamente perturbado de Hartman y Wintner, la no existencia de operadores de Toeplitz clásicos compactos dada por Brown y Halmos, y algunas propiedades espectrales que completan el trabajo hecho por Sz.-Nagy y Foiaş. Nuestro objetivo ahora es extender estos resultados al caso de semigrupos que nos ocupa.

Invertibilidad.

4.1. Teorema. *Sea X un operador de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_{1s}\}$ y $\{T_{2s}\}$ e Y su símbolo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $Y_1 = Y|\mathcal{R}_1$ *es un operador invertible en* $\mathcal{B}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *y además su inverso verifica que* $Y_2 = Y_1^{-1}P(\mathcal{R}_2)$ *es un símbolo de Toeplitz analítico con respecto a* $\{T_{2s}\}$ *y* $\{T_{1s}\}$.

(2) $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{R}_i = \mathcal{P}_i$ *para* $i = 1, 2$ *y* $X_1 = X|\mathcal{P}_1$ *es invertible en* $\mathcal{B}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$.

Si estas condiciones se cumplen, se tiene que $X_1^{-1} = P(\mathcal{H}_2)\, Y_2|\mathcal{P}_1$.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2) Por hipótesis $Y_2 = Y_1^{-1}P(\mathcal{R}_2)$ es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_{2s}\}$ y $\{T_{1s}\}$, luego Y_2Y lo es respecto a $\{T_{1s}\}$, ya que

$$U_{1s}Y_2YU_{1s}^* = U_{1s}Y_2U_{2s}^*U_{2s}YU_{1s}^* = Y_2Y, \qquad \text{para todo } s \in \Sigma.$$

De manera análoga se prueba que YY_2 es un símbolo de Toeplitz con respecto a $\{T_{2s}\}$. Además, como $Y\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ e $Y_2\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$, se verifica

$$Y_2Y\mathcal{H}_1 = Y_2P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1,$$

lo que nos muestra que Y_2Y es un símbolo de Toeplitz analítico y lo mismo ocurre con YY_2. Ahora bien, tenemos

$$YY_2 = YY_1^{-1}P(\mathcal{R}_2) = YP(\mathcal{R}_1)Y_1^{-1}P(\mathcal{R}_2) = Y_1Y_1^{-1}P(\mathcal{R}_2) = P(\mathcal{R}_2),$$

lo que, junto con $YY_2\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$ implica que $P(\mathcal{R}_2)\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$. Como $\mathcal{P}_2$ es la clausura de $P(\mathcal{R}_2)\mathcal{H}_2$ llegamos a que $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{R}_2$; la otra inclusión es siempre cierta y, por tanto $\mathcal{P}_2 = \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{R}_2$. Razonando de manera análoga con Y_2Y llegaríamos a que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{P}_1$. Queda por demostrar que $X_1 = X|\mathcal{P}_1$ es un operador invertible. Denotamos por X_2 el operador de Toeplitz asociado a Y_2. Como Y_2 es analítico, se verifica

$$XX_2 = P(\mathcal{H}_2)YP(\mathcal{H}_1)\, Y_2|\mathcal{H}_2 = P(\mathcal{H}_2)Y\, Y_2|\mathcal{H}_2 = P(\mathcal{H}_2)\, P(\mathcal{R}_2)|\mathcal{H}_2 = P(\mathcal{R}_2)|\mathcal{H}_2,$$

donde la última igualdad se tiene porque $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{H}_2$. Como X_2 es un operador de Toeplitz analítico, sabemos, por el Lema 2.11, que $\operatorname{ran}(X_2) \subset \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{P}_1$, con lo cual obtenemos que para cada $y \in \mathcal{P}_2$

$$(X|\mathcal{P}_1)(X_2|\mathcal{P}_2)y = XX_2y = P(\mathcal{R}_2)y = y.$$

De manera análoga, utilizando que Y también es analítico, llegaríamos a que para todo elemento $x \in \mathcal{P}_1$ se verifica

$$(X_2|\,\mathcal{P}_2)(X|\,\mathcal{P}_1)x = x$$

y, como consecuencia, X_1 es un operador invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. Además su inverso es $X_2|\,\mathcal{P}_2 = P(\mathcal{H}_1)\,Y_2|\,\mathcal{P}_2$.

(2)$\Rightarrow$(1) Tenemos por hipótesis que el operador $X_1 = X|\,\mathcal{P}_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ es invertible, así que denotemos su inverso por $X_2 = X_1^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1)$. Como X es un operador de Toeplitz analítico, verifica, por el Lema 2.11, la igualdad $XT_{1s}^* = T_{2s}^*X$ para todo $s \in \Sigma$ y, por tanto,

$$X\,T_{1s}^*|\,\mathcal{P}_1 = T_{2s}^*\,X|\,\mathcal{P}_1 \qquad \text{para todo } s \in \Sigma.$$

Ahora bien, $T_{is}^* = U_{is}^*|\,\mathcal{H}$ y los espacios $\mathcal{H}_i$ y $\mathcal{R}_i$ son U_{is}^*-invariantes para todos $s \in \Sigma$ e $i = 1, 2$. Como, además, se tiene $\mathcal{P}_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{R}_i$, la relación anterior queda

$$(X|\,\mathcal{P}_1)\,T_{1s}^*|\,\mathcal{P}_1 = T_{2s}^*\,X|\,\mathcal{P}_1 \qquad \text{para todo } s \in \Sigma$$

o, lo que es lo mismo,

$$X_1\,T_{1s}^*|\,\mathcal{P}_1 = T_{2s}^*X_1 \qquad \text{para todo } s \in \Sigma.$$

Si en esta igualdad multiplicamos ambos miembros a izquierda y derecha por X_2, obtenemos

$$T_{1s}^*X_2 = X_2\,T_{2s}^*|\,\mathcal{P}_2 \qquad \text{para todo } s \in \Sigma.$$

Definamos ahora el operador $X_3 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ por la relación $X_3 = X_2\,P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2$. Como $P(\mathcal{R}_2)\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_2$ es el dominio de definición de X_2, tenemos que X_3 está bien definido; veamos, además, que es un operador de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_{2s}\}$ y $\{T_{1s}\}$. Para ello, nuevamente por el Lema 2.11 es suficiente probar que $\operatorname{ran}(X_3) \subset \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{R}_1$ y $X_3T_{2s}^* = T_{1s}^*X_3$ para todo $s \in \Sigma$. La primera condición es obvia teniendo en cuenta que $\operatorname{ran}(X_2) = \mathcal{P}_2 = \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{R}_2$. Veamos que también se cumple la segunda condición. Recordando que, en nuestras condiciones, $P(\mathcal{R}_2)\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{P}_2 = \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{R}_2$ y usando la igualdad $T_{1s}^*X_2 = X_2\,T_{2s}^*|\,\mathcal{P}_2$ probada antes, tenemos entonces

$$\begin{aligned} X_3T_{2s}^* &= X_2P(\mathcal{R}_2)T_{2s}^* = X_2P(\mathcal{R}_2)\,U_{2s}^*|\,\mathcal{H}_2 = X_2U_{2s}^*\,P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2 \\ &= X_2T_{2s}^*\,P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2 = T_{1s}^*X_2\,P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2 = T_{1s}^*X_3. \end{aligned}$$

De esta forma X_3 es un operador de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_{2s}\}$ y $\{T_{1s}\}$. Denotemos por Y_3 su símbolo de Toeplitz asociado y veamos que $Y_3|\,\mathcal{R}_2$ es el inverso de Y_1. Como Y_3 es analítico, razonando de manera análoga a como lo hicimos al principio de la demostración, tenemos

$$\begin{aligned} P(\mathcal{H}_2)Y\,Y_3|\,\mathcal{H}_2 &= P(\mathcal{H}_2)YP(\mathcal{H}_1)\,Y_3|\,\mathcal{H}_2 = XX_3 = (X|\,\mathcal{P}_1)X_2\,P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2 \\ &= X_1X_2\,P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2 = P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

Como $P(\mathcal{R}_i)$ conmuta con U_{is}^* para todo $s \in \Sigma$ e $i = 1, 2$, se tiene

$$U_{2s}P(\mathcal{R}_2)U_{2s}^* = U_{2s}U_{2s}^*P(\mathcal{R}_2) = P(\mathcal{R}_2) \qquad \text{para todo } s \in \Sigma,$$

además $P(\mathcal{R}_2)\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{P}_2 = \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{R}_2$, entonces tenemos que $P(\mathcal{R}_2)$ es un símbolo de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_{2s}\}$. Ahora, se tiene, por lo visto antes, que el operador $P(\mathcal{H}_2)\,P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2 = P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2$ es su operador de Toeplitz asociado y coincide con el operador de Toeplitz asociado a YY_3. Como el símbolo asociado a un operador de Toeplitz es único, deducimos que $YY_3 = P(\mathcal{R}_2)$ y, usando la Proposición 2.9, obtenemos

$$Y_1\,Y_3|\,\mathcal{R}_2 = Y_1P(\mathcal{R}_1)\,Y_3|\,\mathcal{R}_2 = (\,Y_1|\,\mathcal{R}_1)P(\mathcal{R}_1)\,Y_3|\,\mathcal{R}_2 = Y\,Y_3|\,\mathcal{R}_2 = P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{R}_2 = \mathrm{Id}(\mathcal{R}_2).$$

Análogamente, y teniendo en cuenta que $\mathrm{ran}(X) \subset \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{R}_2$ porque X es analítico, tenemos

$$P(\mathcal{H}_1)Y_3\,Y|\,\mathcal{H}_1 = P(\mathcal{H}_1)Y_3P(\mathcal{H}_2)\,Y|\,\mathcal{H}_1 = X_3X = X_2P(\mathcal{R}_2)X = X_2X.$$

Veamos que $X = X\,P(\mathcal{R}_1)|\,\mathcal{H}_1$. En efecto, sea $x \in \mathcal{H}_1$, usando la inclusión $P(\mathcal{R}_1)\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$ y que Y es analítico obtenemos

$$Xx = Yx = YP(\mathcal{R}_1)x = XP(\mathcal{R}_1)x$$

o, lo que es lo mismo $X = X\,P(\mathcal{R}_1)|\,\mathcal{H}_1$. Entonces tenemos

$$P(\mathcal{H}_1)Y_3\,Y|\,\mathcal{H}_1 = X_2X = X_2X\,P(\mathcal{R}_1)|\,\mathcal{H}_1 = X_2X_1\,P(\mathcal{R}_1)|\,\mathcal{H}_1 = P(\mathcal{R}_1)|\,\mathcal{H}_1.$$

Razonando de manera análoga a como lo hicimos con el producto YY_3 una vez que obtuvimos $P(\mathcal{H}_2)Y\,Y_3|\,\mathcal{H}_2 = P(\mathcal{R}_2)|\,\mathcal{H}_2$, puede probarse que $Y_3Y = P(\mathcal{R}_1)$ y, por tanto, que $(Y_3|\,\mathcal{R}_2)Y_1 = \mathrm{Id}(\mathcal{R}_1)$. Como ya teníamos $Y_1\,Y_3|\,\mathcal{R}_2 = \mathrm{Id}(\mathcal{R}_2)$, obtenemos que $Y_3|\,\mathcal{R}_2$ es el inverso de Y_1 y, como ya probamos más arriba, se verifica que $Y_1^{-1}P(\mathcal{R}_2) = Y_3$ es un símbolo de Toeplitz analítico. ■

4.2. Corolario. *Sea X un operador de Toeplitz analítico con respecto a dos representaciones co-isométricas $\{T_{1s}\}$ y $\{T_{2s}\}$. Entonces X es invertible si, y sólo si, su símbolo Y es invertible e Y^{-1} es también un símbolo de Toeplitz analítico, en cuyo caso el operador de Toeplitz asociado a Y^{-1} es X^{-1}.*

4.3. Corolario. *Sean $\{T_{1s}\}$ y $\{T_{2s}\}$ dos representaciones co-isométricas de un semigrupo Σ y sean $\{U_{1s}\}$ y $\{U_{1s}\}$ sus dilataciones unitarias minimales. Sea X un operador unitario que verifica $XT_{1s} = T_{2s}X$ para todo $s \in \Sigma$. Entonces X es un operador de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_{1s}\}$ y $\{T_{2s}\}$ que puede ser extendido de manera única a un operador unitario $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, su símbolo analítico, que verifica $YU_{1s} = U_{2s}Y$ para todo $s \in \Sigma$.*

Demostración. Tomando adjuntos en la igualdad $T_{2s}X = XT_{1s}$ y usando que X es unitario, se sigue que $X^*T_{2s}^* = T_{1s}^*X^*$ y $T_{2s}^*X = XT_{1s}^*$ para todo $s \in \Sigma$. Por lo tanto, X y X^* son ambos operadores de Toeplitz analíticos con respecto a $\{T_{1s}\}$ y $\{T_{2s}\}$, y a $\{T_{2s}\}$ y $\{T_{1s}\}$ respectivamente. Como X es invertible y su inverso es X^* se sigue del Corolario 4.2 que su símbolo Y es invertible y que su inverso es el símbolo Y^* de X^*. Por consiguiente, Y es unitario, extiende a X por ser analítico y verifica $YU_{1s} = U_{2s}Y$ para todo $s \in \Sigma$. ∎

En particular, este corolario nos dice, aplicado al operador J del Teorema 3.2, que se puede extender a un operador unitario $\widetilde{J}$ que verifica lo que necesitábamos en la demostración de dicho teorema.

Relaciones espectrales.

Cuando cada T_s es una co-isometría, está claro que $\lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{H})$ es un operador de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_s\}$ para cada número complejo λ y se sigue del teorema que para operadores de Toeplitz analíticos tenemos la inclusión $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$. Veamos que esto es cierto para operadores de Toeplitz arbitrarios con respecto a representaciones contractivas arbitrarias.

4.4. Teorema. *Sea X un operador de Toeplitz con respecto a una representacion contractiva $\{T_s\}$ y sea Y el símbolo de X. Entonces*

$$\sigma_l(Y|\,\mathcal{R}) \subset \sigma_l(X) \qquad y \qquad \sigma_r(Y|\,\mathcal{R}) \subset \sigma_r(X).$$

Demostración. Comenzamos definiendo para cada $s \in \Sigma$ el espacio vectorial, no necesariamente cerrado, $\mathcal{R}_s$ dado por

$$\mathcal{R}_s = U_sP(\mathcal{R})\mathcal{H}.$$

Veamos en primer lugar que $\mathcal{R} = \bigvee \{\mathcal{R}_s : \ s \in \Sigma\}$. En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= P(\mathcal{R})\mathcal{K} = P(\mathcal{R}) \bigvee \{U_s\mathcal{H} : s \in \Sigma\} = \bigvee \{P(\mathcal{R})U_s\mathcal{H} : s \in \Sigma\} \\ &= \bigvee \{U_sP(\mathcal{R})\mathcal{H} : s \in \Sigma\} = \bigvee \{\mathcal{R}_s : s \in \Sigma\},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $P(\mathcal{R})U_s = U_sP(\mathcal{R})$, por ser $\mathcal{R}$ U_s-reductor.

Comprobemos a continuación que $\{\mathcal{R}_s : s \in \Sigma\}$ es una red de espacios vectoriales crecientes a $\mathcal{R}$. Sean pues $s, t \in \Sigma$, con $s \leq t$, y $x \in \mathcal{R}_s$, con lo cual existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $x = U_sP(\mathcal{R})h$, entonces

$$x = U_sP(\mathcal{R})h = U_tU_t^*U_sP(\mathcal{R})h = U_tU_{t-s}^*P(\mathcal{R})h = U_tP(\mathcal{R})U_{t-s}^*h = U_tP(\mathcal{R})T_{t-s}^*h,$$

donde hemos usado que $U_t|\,\mathcal{R}$ es unitario. Por tanto $x = U_tP(\mathcal{R})T_{t-s}^*h \in U_tP(\mathcal{R})\mathcal{H} = \mathcal{R}_t$.

Para probar que $\sigma_l(Y|\,\mathcal{R}) \subset \sigma_l(X)$ es suficiente ver que si el operador $X - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{H})$ es invertible por la izquierda, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, también lo es el operador $Y|\,\mathcal{R} - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{R})$.

Ahora bien, $X - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{H})$ es invertible por la izquierda si, y sólo si, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|(X - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{H}))h\| \geq \varepsilon\|h\| \qquad \text{para todo } h \in \mathcal{H}.$$

Bastará probar entonces que para todo $k \in \mathcal{R}$ y cierto $\varepsilon > 0$ se verifica

$$\|(Y - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{R}))k\| \geq \varepsilon\|k\|. \tag{I.1}$$

Ahora bien, vimos anteriormente que $\mathcal{R} = \bigvee \{\mathcal{R}_s : s \in \Sigma\}$ y que $\{\mathcal{R}_s : s \in \Sigma\}$ es creciente, así pues, cada $k \in \mathcal{R}$ puede escribirse en la forma

$$k = \lim_{s\in\Sigma} k_s \quad \text{con } k_s \in \mathcal{R}_s \quad \text{para } s \in \Sigma$$

y, por tanto, para probar la desigualdad dada en (I.1) es suficiente verla sobre elementos de $\mathcal{R}_s$. Sea entonces $k = U_sP(\mathcal{R})h$, para ciertos $s \in \Sigma$ y $h \in \mathcal{H}$. Usando que $Y = YP(\mathcal{R})$ y los Teoremas 2.4 y 2.8 tenemos

$$\begin{aligned}\|\,(Y - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{R}))\,k\| &= \|(Y - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{R}))\,U_sP(\mathcal{R})h\| = \|U_s\,(Y - \lambda\,\mathrm{Id}(\mathcal{R}))\,P(\mathcal{R})h\| \\ &= \|\,(Y - \lambda P(\mathcal{R}))\,h\| = \lim_{s\in\Sigma} \|U_t(X - \lambda)U_t^*h\| \\ &= \lim_{s\in\Sigma} \|(X - \lambda)U_t^*h\| \geq \varepsilon \lim_{s\in\Sigma} \|U_t^*h\| = \varepsilon \lim_{s\in\Sigma} \|U_tU_t^*h\| \\ &= \varepsilon\,\|P(\mathcal{R})h\| = \varepsilon\,\|k\|\,.\end{aligned}$$

Para probar que $\sigma_r(Y) \subset \sigma_r(X)$, simplemente hay que observar que X^* es un operador de Toeplitz con símbolo Y^* y conjugar la inclusión $\sigma_l(Y^*) \subset \sigma_l(X^*)$. ■

4.5. Proposición. *Sean Y un símbolo de Toeplitz analítico con respecto a una representacion contractiva $\{T_s\}$ y X su operador de Toeplitz asociado. Entonces se verifica* $\sigma_l(Y|\mathcal{R}) \cup \{0\} = \sigma_l(X) \cup \{0\}$. *Si además $\mathcal{H} \cap \mathcal{R}^\perp = \{0\}$ y $P(\mathcal{R})\mathcal{H}$ es cerrado, entonces* $\sigma_l(Y|\mathcal{R}) = \sigma_l(X)$.

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $\sigma_l(Y|\mathcal{R}) \subseteq \sigma_l(X)$ y, por tanto, $\sigma_l(Y|\mathcal{R}) \cup \{0\} \subseteq \sigma_l(X) \cup \{0\}$. Para ver la inclusión contaria procedemos como sigue: Sea $\lambda \notin \sigma_l(Y|\mathcal{R}) \cup \{0\}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|(Y-\lambda)x\| \geq \varepsilon \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Por tanto, dado $x \in \mathcal{H}$ y teniendo en cuenta que $Y|\mathcal{H} = X$ porque Y es analítico, tenemos

$$\|(X-\lambda)x\|^2 = \|(Y-\lambda)x\|^2 = \left\|(Y-\lambda)\left(P(\mathcal{R})x + P(\mathcal{R}^\perp)x\right)\right\|^2,$$

como $\mathcal{R}$ es un espacio reductor para los operadores Y y λ nos queda, teniendo en cuenta que $Y|\mathcal{R}^\perp = 0$, la desigualdad

$$\begin{aligned}\|(X-\lambda)x\|^2 &= \left\|(Y-\lambda)\left(P(\mathcal{R})x + P(\mathcal{R}^\perp)x\right)\right\|^2 \\ &= \|(Y-\lambda)P(\mathcal{R})x\|^2 + \left\|(Y-\lambda)P(\mathcal{R}^\perp)x\right\|^2 \\ &\geq \varepsilon^2 \|P(\mathcal{R})x\|^2 + |\lambda|^2 \left\|P(\mathcal{R}^\perp)x\right\|^2 \geq (\varepsilon')^2 \|x\|^2,\end{aligned}$$

siendo $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, |\lambda|\} > 0$. Esto prueba que $\lambda \notin \sigma_l(X)$ y, como consecuencia, que $\sigma_l(X) \cup \{0\} \subseteq \sigma_l(Y|\mathcal{R}) \cup \{0\}$.

Supongamos ahora que, además, se verifica que $\mathcal{H} \cap \mathcal{R}^\perp = \{0\}$ y que $P(\mathcal{R})\mathcal{H}$ es cerrado. Veamos que , en ese caso, $\sigma_l(Y|\mathcal{R}) = \sigma_l(X)$. Visto lo anterior, faltaría probar que si $0 \in \sigma_l(X)$ entonces $0 \in \sigma_l(Y|\mathcal{R})$. Si $0 \in \sigma_l(X)$ entonces existe una sucesión $\{x_n : n = 1, 2, ...\}$ en $\mathcal{H}$, con $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que $Xx_n \to 0$. Ahora bien, $Xx_n = Yx_n = YP(\mathcal{R})x_n$, por lo que obtenemos una sucesión $\{P(\mathcal{R})x_n : n = 1, 2, ...\}$ en $\mathcal{R}$ de manera que $YP(\mathcal{R})x_n \to 0$. Para ver que $0 \in \sigma_l(Y|\mathcal{R})$ bastará ver que dicha sucesión se mantiene lejos del cero. Como tenemos $\mathcal{H} \cap \mathcal{R}^\perp = \{0\}$, se cumple que dado $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, entonces $P(\mathcal{R})x \neq 0$. Como consecuencia, la aplicación $A = P(\mathcal{R})|\mathcal{H}$ definida en $\mathcal{H}$ con valores en $\mathcal{P}$, es continua, inyectiva y su imagen es todo $\mathcal{P} = P(\mathcal{R})\mathcal{H}$, por tanto, A admite inversa continua, así que existe una constante $\delta > 0$ de manera que $\|P(\mathcal{R})x\| \geq \delta \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, lo cual garantiza que $\|P(\mathcal{R})x_n\| \geq \delta$ y, por tanto, que $0 \in \sigma_l(Y|\mathcal{R})$. ■

4.6. Corolario. *Supongamos que $\{T_s\}$ es una representación co-isométrica de Σ. Si Y un símbolo de Toeplitz analítico con respecto a $\{T_s\}$ y X su operador de Toeplitz asociado entonces $\sigma_l(Y) = \sigma_l(X)$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que si $\{T_s\}$ es una representación co-isométrica, entonces $\mathcal{R} = \mathcal{K}$ y, por tanto, $\mathcal{H} \cap \mathcal{R}^\perp = \{0\}$ y $P(\mathcal{R})\mathcal{H} = \mathcal{H}$ es cerrado, sólo hay que aplicar la proposición anterior. ■

Es bien conocido que para $\phi \in L^\infty$, el espectro de M_ϕ es el rango esencial de ϕ. Por otro lado, el Teorema de Wintner (ver, por ejemplo, [Do3, 7.21], [Ha2, Prob. 247] o [Ni1, pg. 320]) afirma que el espectro de un operador de Toeplitz clásico analítico T_ϕ es igual a la clausura de $\phi_a(\mathbb{D})$, donde ϕ_a es la extensión analítica de ϕ al disco unidad abierto $\mathbb{D}$. Por lo tanto, ni bajo las condiciones más favorables (pero no triviales) hay esperanza de obtener la igualdad $\sigma(Y) = \sigma(X)$, en realidad, $\sigma_r(Y) = \sigma_r(X)$.

Operadores de Fredholm.

Ahora denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores de Fredholm. El teorema de Atkinson [Do3, 5.17] afirma que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ se puede escribir como $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) &= \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A\mathcal{H} \text{ es cerrado y } \ker(A) \text{ es de dimensión finita}\}, \\ \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) &= \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A\mathcal{H} \text{ es cerrado y } \ker(A^*) \text{ es de dimensión finita}\}. \end{aligned}$$

4.7. Teorema. *Sea X un operador de Toeplitz con respecto a una representación contractiva $\{T_s\}$ y sea Y el símbolo de X. Entonces se verifica lo siguiente:*

(1) *Si $X \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ entonces $Y|\mathcal{R} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{R})$.*

(2) *Si $X \in \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ entonces $Y|\mathcal{R} \in \mathcal{F}_-(\mathcal{R})$.*

(3) *Si $X \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ entonces $Y|\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$.*

Demostración. Como un operador está en $\mathcal{F}_+$ si, y sólo si, su adjunto está en $\mathcal{F}_-$, sólo necesitamos probar la afirmación (1). Ahora, si $\mathcal{R}$ es de dimensión finita, entonces es obvio que se verifica $Y|\mathcal{R} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{R})$ y no hay nada que probar. Por tanto, suponemos que $\mathcal{R}$ es de dimensión infinita. Usaremos la siguiente caracterización general para operadores de $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ [BöSi, 1.11(g)]:

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $A \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ y P_0 es la proyección de $\mathcal{H}$ sobre $\ker(A)$, *entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|Ax\| + \|P_0 x\| \geq \delta \|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

En sentido contrario, si existe $\delta > 0$ y un número finito de operadores compactos $K_1, K_2 ..., K_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $\|Ax\| + \sum_{j=1}^{n} \|K_j x\| \geq \delta\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $A \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$.

Por tanto, supongamos que $X \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$. Sea P_0 la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\ker(X)$, entonces, de acuerdo con la caracterización citada arriba, existe $\delta > 0$ tal que $\|Xh\| + \|P_0 h\| \geq \delta\|h\|$ para todo $h \in \mathcal{H}$. Por lo tanto

$$\|P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})k\| + \|P_0 P(\mathcal{H})k\| \geq \delta\|P(\mathcal{H})k\| \qquad \text{para todo } k \in \mathcal{K}.$$

Añadimos $\delta\|P(\mathcal{H}^\perp)k\|$ a ambos lados de la igualdad para obtener

$$\|P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})k\| + \delta\|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)k\| + \|P_0 P(\mathcal{H})k\| \geq \delta\|k\| \qquad \text{para todo } k \in \mathcal{K}.$$

En particular, tomemos $k \in \mathcal{R}$ con $k \neq 0$. Como U_s^* es unitario sobre $\mathcal{R}$ para todo $s \in \Sigma$, tenemos

$$\|P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})U_s^* k\| + \delta\|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)U_s^* k\| + \|P_0 P(\mathcal{H})U_s^* k\| \geq \delta\|U_s^* k\| = \delta\|k\|.$$

Ahora usamos que cada U_s es una isometría para escribir

$$\|U_s P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})U_s^* k\| + \delta\|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)U_s^* k\| + \|P_0 P(\mathcal{H})U_s^* k\| \geq \delta\|k\|. \tag{I.2}$$

Analizaremos el comportamiento de cada uno de los tres sumandos que aparecen a la izquierda en la desigualdad anterior. Para el primer sumando sabemos, por el Teorema 2.8 y la igualdad $XP(\mathcal{H}) = P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})$, que

$$Yk = \lim_{s\in\Sigma} U_s X P(\mathcal{H})U_s^* k = \lim_{s\in\Sigma} U_s P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})U_s^* k.$$

Por lo tanto, existe $s_0 \in \Sigma$, dependiendo de k, tal que si $s \geq s_0$, entonces

$$\|U_s P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})U_s^* k\| - \|Yk\| \leq \|U_s P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})U_s^* k - Yk\| < \frac{\delta}{4}\|k\|. \tag{I.3}$$

Con respecto al segundo sumando, usamos que $\mathcal{R} \subset \mathcal{K} = \bigvee \{U_s\mathcal{H} : s \in \Sigma\}$ para encontrar una cantidad finita $h_1, h_2, ..., h_n \in \mathcal{H}$ y $r_1, r_2, ..., r_n \in \Sigma$ tales que

$$\left\| k - \sum_{j=1}^{n} U_{r_i} h_i \right\| \leq \frac{1}{4}\|k\|.$$

Entonces, usando que $\mathcal{H}$ es U_s^*-invariante, para todo $s \geq s_1 = \max\{r_1, r_2, ..., r_n\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)U_s^* k\| &\leq \left\|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)U_s^*(k - \sum_{i=1}^{n} U_{r_i}h_i)\right\| + \left\|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)U_s^* \sum_{i=1}^{n} U_{r_i}h_i\right\| \qquad \text{(I.4)} \\ &\leq \frac{1}{4}\|k\| + \left\|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)\sum_{i=1}^{n} U_{s-r_i}^* h_i\right\| = \frac{1}{4}\|k\|. \end{aligned}$$

Para el tercer sumando observemos que, dado $x \in \mathcal{R}$, todos los términos de la red

$$\mathcal{C}(x) = \{P_0 P(\mathcal{H})U_s^* x : s \in \Sigma\}$$

pertenecen al subespacio de dimensión finita $\ker(X)$. Como está claro que $\mathcal{C}(x)$ está acotado, se sigue que $\mathcal{C}(x)$ es relativamente compacto, y el teorema de Tijonov nos asegura que el producto $\prod_{x\in\mathcal{R}} \mathcal{C}(x)$ es relativamente compacto para la topología producto. Por tanto la red

$$\{(P_0 P(\mathcal{H})U_s^* x)_{x\in\mathcal{R}} : s \in \Sigma\}$$

tiene un punto adherente $(Cx)_{x\in\mathcal{R}}$ en el espacio producto $\prod_{x\in\mathcal{R}} \mathcal{C}(x)$. Esto nos da una aplicación $C : \mathcal{R} \to \ker(X)$, y una prueba estándar muestra que C es un operador lineal y acotado con rango finito, por tanto C es un operador compacto. Observemos que C no depende del $k \in \mathcal{R}$ fijado previamente. Volviendo a considerar este $k \in \mathcal{R}$, existe un conjunto cofinal $\Sigma_k \subset \Sigma$ tal que para todo $s \in \Sigma_k$ se verifica lo siguiente

$$\|P_0 P(\mathcal{H})U_s^* k\| - \|Ck\| < \frac{\delta}{4}\|k\|. \qquad \text{(I.5)}$$

Ahora, como Σ_k es cofinal, podemos tomar $s \in \Sigma_k$ tal que $s \geq s_0$ y $s \geq s_1$. Tomando este s en las desigualdades (II.2), (I.4) y (II.3), de la desigualdad (I.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \|Yk\| + \|Ck\| &> \|U_s P(\mathcal{H})YP(\mathcal{H})U_s^* k\| + \delta\|\mathcal{P}(\mathcal{H}^\perp)U_s^* k\| \\ &\quad + \|P_0 P(\mathcal{H})U_s^* k\| - \frac{3\delta}{4}\|k\| \\ &\geq \frac{\delta}{4}\|k\|. \end{aligned}$$

Como k era arbitrario en $\mathcal{R}$, la caracterización dada al principio de la prueba nos garantiza que $Y|\mathcal{R} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{R})$. ■

4.8. Corolario. *Sea X un operador de Toeplitz con respecto a una representación co-isométrica $\{T_s\}$ y sea Y el símbolo de X. Si X es un operador de Fredholm, entonces su símbolo Y también es un operador de Fredholm.*

5 Ejemplos

El propósito de esta parte es mostrar que algunas clases de operadores que han sido ampliamente estudiadas se pueden definir como las familias de todos los operadores de Toeplitz con respecto a semigrupos adecuados.

Operadores de Toeplitz con respecto a semigrupos continuos.

Las definiciones y resultados que vamos a utilizar se pueden encontrar en el libro [SzFo1]. Como vamos a necesitar el concepto de cálculo funcional presentado por dichos autores, comenzaremos viendo brevemente en qué consiste dicho cálculo funcional. Denotemos por $\mathcal{A}$ el álgebra de H^∞ dada por

$$\mathcal{A} = \left\{ a(\zeta) = \sum_{k\geq 0} a_k\zeta^k, \text{ con } \sum_{k\geq 0} |a_k| < \infty \right\}.$$

Está claro que las funciones de $\mathcal{A}$ son continuas en $\overline{\mathbb{D}}$. Dadas una contracción T y una función $a \in \mathcal{A}$ definimos el *cálculo funcional* $a(T)$ como

$$a(T) := \sum_{k\geq 0} a_k T^k,$$

donde la covergencia de la serie de operadores anterior es en la topología de la norma. Si ahora $u \in H^\infty$, con $u(\zeta) = \sum_{k\geq 0} c_k\zeta^k$, entonces para $0 < r < 1$ $u_r(\zeta) := u(r\zeta) \in \mathcal{A}$, con lo cual está bien definido el cálculo funcional $u_r(T)$. Si existe

$$\lim_{r\to 1} u_r(T) = \lim_{r\to 1} \sum_{k\geq 0} c_k r^k T^k,$$

en la topología fuerte de operadores, denotamos al valor de dicho límite por $u(T)$ y decimos que es el *cálculo funcional para la función u y la contracción T*. Sea H_T^∞ el conjunto dado por

$$H_T^\infty := \{u \in H^\infty : \text{existe el cálculo funcional } u(T)\}.$$

Se sabe que para contracciones T completamente no unitarias el conjunto H_T^∞ es todo H^∞ [SzFo1, III, pg. 111]. También es conocido que si $\lambda = 1$ no es autovalor de una contracción

T entonces las funciones $u \in H^\infty$ que son continuas en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ están en el conjunto H^∞_T [SzFo1, III, pg. 141].

Con esta definición de cálculo funcional para contracciones, es obvio que si un operador X y una contracción T conmutan, $XT = TX$, entonces también conmutan X y $u(T)$, $Xu(T) = u(T)X$, para todo $u \in H^\infty_T$.

Una vez vista la definición de cálculo funcional pasamos a ver el resultado que nos ocupa, que nos viene a decir que el conjunto de los operadores de Toeplitz para semigrupos continuos uniparamétricos es el mismo que el conjunto de los operadores de Toeplitz para una cierta contracción asociada a dicho semigrupo; esta contracción es lo que se conoce como el cogenerador del semigrupo.

Así pues, sea $\{T_s\}$ un semigrupo continuo de operadores en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El operador, no necesariamente acotado, A definido por

$$Ah := \lim_{s \to 0} \frac{T_s h - h}{s},$$

cuando este límite exista, es un operador cerrado con dominio denso en $\mathcal{H}$ que determina unívocamente el semigrupo $\{T_s\}$. Esa es la razón por la que el operador A se llama *generador* del semigrupo.

Dicho operador, aunque permite determinar el semigrupo, tiene la desventaja, como ya hemos indicado antes, de que no es acotado en general y de que tampoco tiene por qué estar definido en todo el espacio $\mathcal{H}$. Supongamos ahora que el semigrupo está formado por contracciones, definimos entonces el operador T como sigue

$$T := (A + I)(A - I)^{-1}.$$

Dicho operador está bien definido en todo $\mathcal{H}$ porque el operador $A - I$ admite inverso acotado. Este operador T es una contracción y se conoce como el *cogenerador* del semigrupo [SzFo1, III, pg. 141]. El cogenerador determina de manera únivoca tanto el generador A como el semigrupo $\{T_s\}$ ya que

$$\begin{aligned} A &= (T + I)(T - I)^{-1} \\ T_s &= e_s(T), \text{ donde } e_s(\zeta) = e^{s(\zeta+1/\zeta-1)}, \end{aligned}$$

y tiene la ventaja frente al generador de que es un operador acotado y está definido en todo $\mathcal{H}$ (el operador $(T - I)^{-1}$ existe porque 1 no es autovalor de T, de hecho, ésta es la única condición que debe cumplir un operador para poder ser el cogenerador de un semigrupo).

Como las funciones e_s son holomorfas en $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, tiene sentido el cálculo funcional $e_s(T)$. A su vez, el semigrupo también determina al cogenerador de manera unívoca por la relación

$$T = \lim_{s\to 0^+} \phi_s(T_s), \quad \text{donde } \phi_s(\zeta) = \frac{\zeta - 1 + s}{\zeta - 1 - s} \in \mathcal{A}.$$

Necesitaremos las siguientes relaciones entre las propiedades de un semigrupo $\{T_s\}$ y de su cogenerador asociado T.

(1) $\{T_s\}$ es un semigrupo de operadores isométricos (respect. co-isométricos, unitarios) si, y sólo si, T es una isometría (respect. co-isometría, unitario).

(2) Un operador T es el cogenerador de $\{T_s\}$ si, y sólo si, T^* es el cogenerador de $\{T_s^*\}$.

(3) El semigrupo $\{V_s\}$ es la dilatación unitaria minimal de $\{T_s\}$ si, y sólo si, el cogenerador de $\{V_s\}$ es la dilatación unitaria minimal de T.

(4) El semigrupo $\{U_s\}$ es la dilatación isométrica minimal de $\{T_s\}$ si, y sólo si, el cogenerador de $\{U_s\}$ es la dilatación isométrica minimal de T.

(5) Si tanto el operador T como los operadores T_s, para todo $s \geq 0$, son isometrías entonces el espacio $\mathcal{R}$ que aparece en la descomposición de Wold de T, donde el operador T es unitario, es el mayor subespacio reductor para todos los operadores T_s en el cual dichos operadores son unitarios.

Las propiedades (1), (2) y (3) se pueden encontrar en [SzFol, III, pgs. 143-146]. Teniendo en cuenta que si $\{V_s\}$ es la dilatación unitaria minimal de $\{T_s\}$, entonces $\{V_s|\,\mathcal{K}^+\}$ donde $\mathcal{K}^+ = \bigvee\{V_s\mathcal{H} : s \geq 0\}$ es su dilatación isométrica minimal, tenemos (4).

Para probar la propiedad (5) observemos que un subespacio $\mathcal{M}$ es reductor para T si, y sólo si, $P(\mathcal{M})$ y T conmutan, con lo cual también conmutan $P(\mathcal{M})$ y $e_s(T) = T_s$, es decir, $\mathcal{M}$ es también un subespacio reductor para cada T_s. El recíproco también es inmediato, es decir, si $\mathcal{M}$ es reductor para todos los operadores T_s entonces $P(\mathcal{M})$ y $\phi_s(T_s)$ conmutan y, por tanto, $P(\mathcal{M})$ y T también conmutan. En consecuencia, dado $\mathcal{M}$ un subespacio reductor para T y T_s, para todo $s \in \Sigma$, podemos escribir $T|\,\mathcal{M} = e_s(T_s|\,\mathcal{M})$.

Sea ahora $\mathcal{R}$ el mayor subespacio reductor donde T es unitario, la igualdad $T|\,\mathcal{R} = e_s(T_s|\,\mathcal{R})$ nos dice que $T|\,\mathcal{R}$ es el cogenerador del semigrupo $\{T_s|\,\mathcal{R} : s \in \Sigma\}$, con lo cual, la propiedad (1) nos dice que cada $T_s|\,\mathcal{R}$ es un operadore unitario. De hecho,

$\mathcal{R}$ es el mayor subespacio donde dichos operadores son todos unitarios, porque si existiese $\mathcal{R}' \supsetneq \mathcal{R}$ tal que $T_s|\mathcal{R}'$ fuesen unitarios para todo $s \in \Sigma$, la igualdad $T|\mathcal{R}' = e_s(T_s|\mathcal{R}')$ junto con la propiedad (1) nos diría que $T|\mathcal{R}'$ es unitario y, por tanto, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$

De las propiedades (1) y (5) deducimos que si $\{U_s\}$ es la dilatación isométrica minimal de $\{T_s\}$ entonces el espacio residual $\mathcal{R}$ para $\{U_s\}$ es el mismo que para el cogenerador U de $\{U_s\}$.

5.1. Proposición. *Un operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador de Toeplitz para un semigrupo continuo uniparamétrico $\{T_s\}$, es decir, verifica*

$$X = T_s X T_s^*$$

para todo $s \geq 0$ si, y sólo si, es un operador de Toeplitz para T, donde T es el cogenerador de $\{T_s\}$, es decir,

$$X = TXT^*.$$

Demostración. Vamos a comprobar que los símbolos de Toeplitz para el semigrupo $\{T_s\}$ coinciden con los símbolos de Toeplitz para T. Denotaremos por $\{U_s\}$ el semigrupo de la dilatación isométrica minimal de $\{T_s\}$ actuando en el espacio $\mathcal{K}$ y por U el cogenerador de dicho semigrupo. El subespacio $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$ denotará el espacio residual tanto para $\{U_s\}$ como para U.

Sea $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ un símbolo de Toeplitz para el semigrupo $\{T_s\}$. Entonces, por la Proposición 2.9,

$$YU_s^* = U_s^* Y, \quad \text{para todo } s \geq 0$$

con lo cual

$$Y\phi_s(U_s^*) = \phi_s(U_s^*)Y,$$

para cada s fijado. Tomando límite cuando $s \to 0^+$ llegamos a que

$$YU^* = U^*Y. \tag{I.6}$$

Teniendo en cuenta que $Y = P(\mathcal{R})Y$ y que U es unitario sobre $\mathcal{R}$, si multiplicamos por U a la izquierda tenemos

$$UYU^* = UU^*Y = UU^*P(\mathcal{R})Y = P(\mathcal{R})Y = Y,$$

por lo que Y es un símbolo de Toeplitz para la contracción T. Recíprocamente, si el operador Y es un símbolo de Toeplitz para T entonces verifica, de nuevo por la Proposición 2.9, la relación (I.6), en consecuencia

$$Ye_s(U^*) = e_s(U^*)Y,$$

o, lo que es lo mismo,

$$YU_s^* = U_s^*Y.$$

Razonando de manera análoga al caso anterior, tenemos que Y es un símbolo de Toepliz para el semigrupo $\{T_s\}$. Como los símbolos de Toeplitz determinan unívocamente a los operadores de Toeplitz tenemos que un operador X es de Toeplitz para $\{T_s\}$, es decir

$$X = T_s X T_s^*, \text{ para todo } s \geq 0,$$

si, y solo si, es un operador de Toeplitz para T, es decir $X = TXT^*$. ■

Esta proposición nos dice que para semigrupos continuos los resultados no suponen, formalmente, una extensión de los obtenidos en [MaPa1] y [MaPa2]. Sin embargo, como veremos a continuación, el cogenerador puede ser un operador más complicado que los propios elementos del semigrupo, en cuyo caso es mejor trabajar con estos últimos.

Operadores de Wiener-Hopf.

A lo largo de este ejemplo denotaremos por L^p y L^p_+ ($1 \leq p \leq +\infty$) a los espacios L^p de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_+$, respectivamente. Los espacios L^p en el círculo unidad se denotarán por $L^p(\mathbb{T})$. El operador P_+ definido por

$$P_+ : f \in L^2 \to \chi_{\mathbb{R}_+} f \in L^2_+$$

es la proyección ortogonal de L^2 sobre L^2_+. Por $H^2(\mathbb{R})$ entenderemos el conjunto de todas las funciones g analíticas en el semiplano superior tales que

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |g(x+iy)|^2 \, dx < \infty.$$

Toda función de $H^2(\mathbb{R})$ se puede identificar con la función formada por sus valores frontera. Con esta identificación, el espacio $H^2(\mathbb{R})$ puede verse como un subespacio de $L^2(= L^2(\mathbb{R}))$. Finalmente, denotaremos por $H^\infty(\mathbb{R})$ al espacio $H^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty$.

Para $f \in L^1$ sea $\mathcal{F}f$ la transformada de Fourier de f dada por

$$\mathcal{F}f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt$$

Nos serán de utilidad los dos resultados clásicos siguientes (ver [Ru1], por ejemplo).

5.2.Teorema de Plancherel. *Si $f \in L^1 \cap L^2$ entonces $\mathcal{F}f \in L^2$ y se tiene la igualdad $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$. Como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2, $\mathcal{F}$ se extiende a un operador isométrico en L^2 que también denotaremos por $\mathcal{F}$. Para $f \in L^2$ la inversa de $\mathcal{F}$ está dada por*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \mathcal{F}f(-t).$$

5.3.Teorema de Representación de Paley-Wiener. *La transformada $\mathcal{F}$ es un operador unitario de L^2_+ en $H^2(\mathbb{R})$.*

Para cada $s \in \mathbb{R}$, el operador de traslación U_s en L^2 es el operador unitario definido para $f \in L^2$ y $t \in \mathbb{R}$ por

$$U_s f(t) := f(t+s).$$

Es bien conocido, ver [BöSi, 9.2], que los operadores Y en L^2 que conmutan con las traslaciones, es decir, aquellos que cumplen $YU_s = U_sY$ para todo $s \in \mathbb{R}$ son los operadores dados por

$$Yf := \mathcal{F}^{-1}M_a\mathcal{F}f, \tag{I.7}$$

donde $f \in L^2$, $a \in L^\infty$, M_a es el operador de multiplicación en L^2 inducido por la función a y $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier. Además $\|Y\| = \|a\|_\infty$ [BöSi, 9.5 (a)].

Para cada $s \geq 0$ consideremos ahora las compresiones

$$T_s := P_+ \, U_s | \, L^2_+.$$

T_s consiste en trasladar s unidades a la izquierda la gráfica de f y luego proyectar sobre L^2_+. Es inmediato comprobar que $\{T_s\}_{s\geq 0}$ es una representación co-isométrica del semigrupo $\mathbb{R}_+$ y que $\{U_s\}_{s\geq 0}$ es su dilatación isométrica minimal. Así pues, un operador X en L^2_+ es un operador de Toeplitz para la representación $\{T_s\}$, es decir, es un operador que verifica

$$X = T_sXT_s^*, \qquad \text{para todo } s \geq 0 \tag{I.8}$$

si, y sólo si, en virtud del Teorema 2.8, es la compresión de un símbolo de Toeplitz Y en L^2, $X = P_+ Y| L^2_+$, donde $YU_s = U_sY$ para todo $s \geq 0$. En consecuencia, como los símbolos Y son los operadores dados por la relación (I.7) anterior, tenemos que

$$Xf = P_+\mathcal{F}^{-1}M_a\mathcal{F}f, \tag{I.9}$$

para cada $f \in L^2_+$. Los operadores dados por la expresión (I.9) son bien conocidos en la literatura como *operadores integrales de Wiener-Hopf* en L^2_+ con símbolo $a \in L^\infty$. El Teorema 2.8 asegura entonces que $\|X\| = \|Y\|$.

Si aplicamos la Proposición 5.1 del ejemplo anterior, teniendo en cuenta que es un semigrupo continuo, obtenemos entonces que los operadores X de Wiener-Hopf vienen caracterizados por verificar la siguiente relación entre operadores

$$X = TXT^*, \tag{I.10}$$

donde T es el cogenerador del semigrupo $\{T_s\}_{s\geq 0}$. Es conocido que el cogenerador para dicho semigrupo, ver [SzFo1, III, pg. 151], viene dado por

$$Tf(x) = f(x) - 2e^x \int_x^\infty f(t)e^{-t}dt, \qquad \text{para } f \in L^2_+.$$

Su adjunto T^* es la isometría completamente no unitaria R dada por

$$Rf(x) = f(x) - 2e^{-x} \int_0^x f(t)e^{t}dt, \qquad \text{para } f \in L^2_+.$$

Por tanto, los operadores de Wiener-Hopf son los que verifican la relación entre operadores dada por

$$X = R^*XR, \tag{I.11}$$

para S la isometría anterior.

La teoría de operadores integrales de Wiener-Hopf fue estudiada durante mucho tiempo de manera independiente de la teoría de operadores de Toeplitz, hasta que Rosemblum [Rs] y Devinatz y Shinbrot [DeSh] establecieron la equivalencia entre ambos conjuntos de operadores. Para ver esto, denotemos por V_2 al operador unitario de $L^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$(V_2 f)(x) := \frac{i/\sqrt{2\pi}}{x + (1/2)i} f\left(\frac{x - (1/2)i}{x + (1/2)i}\right) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

y sea V_∞ el operador de $L^\infty(\mathbb{T})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ dado por

$$(V_\infty f)(x) := f\left(\frac{x-(1/2)i}{x+(1/2)i}\right) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

La aplicación

$$x \longrightarrow \frac{x-\frac{1}{2}i}{x+\frac{1}{2}i}$$

transforma el semiplano superior en el disco unidad, y la recta real se corresponde de manera biyectiva con la circunferencia unidad. Su inversa es

$$y \longrightarrow \frac{i}{2}\frac{1+y}{1-y},$$

por tanto, V_∞ es un operador unitario de $L^\infty(\mathbb{T})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$.

Dichos operadores verifican que (véanse [Ni1, Lecture XI, pg. 253] o [BöSi, pg. 398])

$$V_i H^i(\mathbb{T}) = H^i(\mathbb{R}) \qquad \text{para } i = 2, \infty$$

y, por consiguiente,

$$V_i^{-1} H^i(\mathbb{R}) = H^i(\mathbb{T}) \qquad \text{para } i = 2, \infty,$$

siendo

$$(V_2^{-1} f)(e^{it}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(1-e^{it})} f\left(\frac{i}{2}\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}}\right); \quad (V_\infty^{-1} f)(e^{it}) = f\left(\frac{i}{2}\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}}\right) \quad \text{si } t \neq 0.$$

Fijemos ahora las bases ortonormales estándar en L^2_+ y $H^2(\mathbb{T})$ dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \phi_{1n}(t) &= e^{-(1/2)t} L_n(t) \quad \text{para } n \geq 0 \\ \phi_{2n}(e^{it}) &= (e^{it})^n = e^{int} \quad \text{para } n \geq 0, \end{aligned}$$

donde las funciones $L_n(t)$ que aparecen en la primera expresión son los polinomios de Laguerre, que vienen definidos por cualquiera de las relaciones

$$e^{-t} L_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, ...,$$

$$(1-z)^{-1} e^{-\frac{tz}{1-z}} = \sum_0^\infty L_n(t) z^n \qquad \text{para } \mid z \mid < 1.$$

Tales polinomios verifican, para cada $n = 0, 1, 2, \dots,$

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)dt = \frac{(s-\frac{1}{2})^n}{(s+\frac{1}{2})^{n+1}}, \qquad \text{para } \operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}.$$

Si consideremos los operadores de desplazamiento S_i, $i = 1, 2$ para estas bases, es decir, los operadores que cumplen que $S_i\phi_{in} = \phi_{in+1}$, para cada $n \geq 0$, dichos operadores vienen dados por las siguientes expresiones, ver [RsRv, pg. 59]

$$\begin{aligned} S_1 f(t) &= f(t) - e^{-(1/2)t}\int_0^t f(x)e^{(1/2)x}dx \text{ para } f \in L^2_+ \\ S_2 f(e^{it}) &= e^{it}f(e^{it}) \text{ para } f \in H^2(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

(El operador S_1 se conoce también como el operador de desplazamiento de Laguerre). Entonces se verifica

$$V_2^{-1}\mathcal{F}\phi_{1n} = \phi_{2n} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

ya que, por un lado

$$(\mathcal{F}\phi_{1n})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(-ix)t}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-ix-\frac{1}{2})^n}{(-ix+\frac{1}{2})^{n+1}},$$

y por otro

$$(V_2\phi_{2n})(x) = \frac{i/\sqrt{2\pi}}{x+(1/2)i}\left(\frac{x-\frac{i}{2}}{x+\frac{i}{2}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-ix-\frac{1}{2})^n}{(-ix+\frac{1}{2})^{n+1}}.$$

Lo que permite afirmar que los operadores S_1 y S_2 son unitariamente equivalentes mediante el isomorfismo unitario $W := V_2^{-1}\,\mathcal{F}|\,L^2_+$, es decir

$$S_1 = W^{-1}S_2W. \tag{I.12}$$

Si denotamos por $X_1(a_1)$ y $X_2(a_2)$ los operadores de Wiener-Hopf en L^2_+ y de Toeplitz en $H^2(\mathbb{T})$ para símbolos $a_1 \in L^\infty$ y $a_2 \in L^\infty(\mathbb{T})$ respectivamente, entonces (ver detalles en [RsRv, pg. 60]) para cada $a \in L^\infty$

$$\langle X_1(a)\phi_{1n}, \phi_{1m}\rangle \;=\; \left\langle X_2(V_\infty^{-1}(a))\phi_{2n}, \phi_{2m}\right\rangle$$

y, por lo tanto,

$$X_1(a) = \mathcal{F}^{-1}V_2X_2(V_\infty^{-1}(a))V_2^{-1}\mathcal{F} = W^{-1}X_2(V_\infty^{-1}(a))W. \tag{I.13}$$

En consecuencia, los operadores de Toeplitz clásicos y de Wiener-Hopf son unitariamente equivalentes mediante el isomorfismo unitario W. Como el operador de Toeplitz X_2 viene caracterizado por la relación $X_2 = S_2^* X_2 S_2$, utilizando las igualdades (I.12) y (I.13) tenemos que

$$\begin{aligned} X_1(a) &= W^{-1} X_2(V_\infty^{-1}(a)) W = W^{-1} S_2^* X_2(V_\infty^{-1}(a)) S_2 W \\ &= S_1^* W^{-1} X_2(V_\infty^{-1}(a)) W S_1 = S_1^* X_1(a) S_1 \end{aligned}$$

y, por tanto, llegamos a que los operadores de Wiener-Hopf vienen caracterizados por la relación entre operadores dada por

$$X = S_1^* X S_1. \tag{I.14}$$

Comprobamos que la relación obtenida para operadores de Wiener-Hopf no es exactamente la misma que la obtenida en (I.11), ello se debe a que, como veremos a continuación, si bien los operadores R y S_1 son distintos y representan, por tanto, a cogeneradores de semigrupos formalmente distintos, dichos semigrupos pueden verse como iguales si se miran simplemente como conjuntos de operadores.

Comenzamos observando que R y S_1 son operadores unitariamente equivalentes ya que ambos son operadores de desplazamiento de multiplicidad uno. Vamos a construir de manera explícita un operador unitario que nos lleve uno en el otro, para lo que necesitaremos conocer una base ortonormal para R. Es inmediato comprobar que el subespacio errante para R, es decir el núcleo de R^*(recordemos que $R^* = T$ es el cogenerador del semigrupo de las traslaciones $\{T_s\}$), es el espacio generado por la función e^{-x}, ver [SzFo1, pg. 151], por lo que las funciones $R^n e^{-x}$ forman una base ortogonal para R. Para saber cuáles son dichas funciones vamos a introducir la siguiente notación

$$M_n(x) := L_n(2x),$$

donde L_n son los polinomios de Laguerre anteriormente mencionados. Entonces se verifica que $R^n e^{-x} = e^{-x} M_n(x)$. Probaremos esta igualdad por recurrencia. Para $n = 0$, el polinomio de Laguerre de orden cero es $L_0 = 1$, con lo cual $e^{-x} = e^{-x} M_0$. Supongamos cierta la igualdad para n y veamos que también lo es para $n+1$, para ello vamos a necesitar la siguiente igualdad entre los polinomios de Laguerre, ver [RsRv, pg. 18]

$$\int_0^x L_n(t)dt = L_n(x) - L_{n+1}(x).$$

Conociendo esta igualdad tenemos entonces

$$\begin{aligned}
R^{n+1}e^{-x} &= RR^n e^{-x} = R(e^{-x}M_n(x)) = e^{-x}M_n(x) - 2e^{-x}\int_0^x M_n(t)dt \\
&= e^{-x}M_n(x) - 2e^{-x}\int_0^x L_n(2t)dt \qquad \text{(hacemos el cambio } 2t = u\text{)} \\
&= e^{-x}M_n(x) - e^{-x}\int_0^{2x} L_n(u)du \\
&= e^{-x}M_n(x) - e^{-x}\left(L_n(2x) - L_{n+1}(2x)\right) \\
&= e^{-x}M_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Sea U el operador unitario en L^2_+ definido por

$$(Uf)(x) := \sqrt{2}f(2x),$$

es inmediato ver que U transforma la base ortonormal $\phi_{1n} = e^{-(1/2)x}L_n(x)$, para S_1, en $\phi_n(x) := \sqrt{2}e^{-x}M_n(x)$ y, obviamente, $\{\phi_n\}$ representa una base ortonormal para R, así pues U es un operador unitario que lleva S_1 en R

$$S_1 = U^{-1}RU, \tag{I.15}$$

donde $(U^{-1}f)(x) = (1/\sqrt{2})f(x/2)$. Sea ahora el semigrupo de las traslaciones $\{T_s\}$ del que es cogenerador $T = R^*$. Entonces

$$T_s^* = e_s(R) \text{ para cada } s \geq 0,$$

donde $e_s(\zeta) = e^{s(\zeta+1/\zeta-1)}$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ y $e_s(R)$ es el cálculo funcional. Por otro lado tenemos, como consecuencia de la igualdad (I.15), que

$$p(S_1) = U^{-1}p(R)U, \tag{I.16}$$

para cualquier polinomio p. Como 1 no es autovalor de S_1, está bien definido el cálculo funcional $e_s(S_1)$ y, teniendo en cuenta (I.16), éste vendrá dado por $U^{-1}e_s(R)U$. Definamos para cada $s \geq 0$ el operador $\widehat{T}_s$ en L^2_+ por su adjunto

$$\widehat{T}_s^{\,*} = e_s(S_1) = U^{-1}e_s(S)U = U^{-1}T_s^*U,$$

nuevamente por [SzFo1, III, Th. 8.1], el conjunto $\left\{\widehat{T_s}^* : s \geq 0\right\}$ constituye un semigrupo continuo de operadores cuyo cogenerador es S_1. Sólo nos resta ver que como conjunto es el mismo que el formado por $\{T_s^* : s \geq 0\}$. Ahora bien,

$$\widehat{T_s}^* f(x) = U^{-1}T_s^*Uf(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}U^{-1}T_s^*f(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}U^{-1}f(2x-s) = f(x-s/2),$$

es decir, $\widetilde{T_s}$ es la traslación a la izquierda de $\frac{s}{2}$ unidades seguida de la proyección sobre L^2_+. En consecuencia,

$$\widehat{T_s} = T_{\frac{s}{2}} \qquad \text{para cada } s \geq 0,$$

con lo que representan al mismo conjunto como afirmábamos al principio.

Resumiendo, hemos visto que los operadores de Toeplitz con respecto al semigrupo $\{T_s\}$, es decir, aquellos operadores que verifican las relaciones (II.6)$\equiv$ (I.10)$\equiv$ (I.11), son los operadores de Wiener-Hopf, que son más conocidos en la literatura por ser, o bien los que verifican la relación (I.14) o bien los que vienen dados por la expresión (I.9).

El siguiente paso, una vez caracterizado el conjunto de los operadores de Toeplitz con respecto al semigrupo de las traslaciones, es ver cuáles de ellos corresponden al conjunto de los analíticos. Vamos a comprobar que un operador de Toeplitz es analítico en el sentido dado en esta memoria cuando el correspondiente símbolo es una función de H^∞, lo cual es congruente con la noción de operador de Wiener-Hopf analítico que se conoce en la literatura. Así pues, sea X un operador de Toeplitz para el semigrupo de las traslaciones, X es analítico cuando el símbolo Y verifica que

$$YL^2_+ \subset L^2_+.$$

Como Y es un símbolo de Toeplitz llevará asociada una función $a \in L^\infty$. Dada $f \in L^2_+$, tenemos por (I.7) que

$$Yf = \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}f,$$

donde $\mathcal{F}f \in H^2(\mathbb{R})$, por el teorema de representación de Paley-Wiener. Ahora bien, $\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}f \in L^2_+$ equivale, nuevamente por el teorema de Paley-Wiener, a que se tenga $a\mathcal{F}f \in H^2(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{F}$ es un operador unitario de L^2_+ en $H^2(\mathbb{R})$, $a\mathcal{F}f \in H^2(\mathbb{R})$ para toda $f \in L^2_+$ si, y sólo si, $a \in H^\infty$, de acuerdo con la caracterización [Ha2]

Una vez caracterizado el conjunto de operadores analíticos podemos aplicar el Corolario 4.2 y los Teoremas 4.4 y 4.7 que hemos enunciado y demostrado en esta memoria. Los resultados que de ellos se deducen son muy bien conocidos en la literatura de operadores de

Wiener-Hopf, sobre todo una vez vista la relación entre ellos y los operadores de Toeplitz, por lo que es difícil dar una referencia exacta de los mismos. No obstante, los resultados deducidos del Corolario 4.2 y del Teorema 4.7 (es decir, aquellos sobre invertibilidad y ser de Fredholm) se pueden encontrar recogidos en el libro de [BöSi].

El Corolario 4.2 aplicado a este ejemplo nos dice que un operador de Wiener-Hopf analítico X es invertible si, y sólo si, su símbolo es invertible y el inverso es analítico. Es inmediato comprobar que entonces la función a asociada a dicho símbolo es invertible en H^∞. En ese caso el inverso del operador de Wiener-Hopf tiene por símbolo aquel cuya función asociada es a^{-1}.

Aplicando el Teorema 4.4 tenemos que el rango esencial de $a \in L^\infty$ está incluido tanto en el espectro izquierdo como en el espectro derecho de $X(a)$, el operador de Wiener-Hopf asociado a a. En el caso particular de que $a \in H^\infty$ entonces, por el Corolario 4.6, el rango esencial de a es todo el espectro izquierdo de $X(a)$.

Si aplicamos el Teorema 4.7 a este ejemplo obtenemos el resultado conocido que afirma que los símbolos Y de operadores de Wiener-Hopf semi-Fredholm son también semi-Fredholm, de hecho en este caso se puede comprobar, ver por ejemplo [BöSi], que son invertibles, es decir existe $a^{-1} \in L^\infty$.

Operadores de Toeplitz en el sentido de Murphy.

En los trabajos [Mr1], [Mr2], [Mr3], [Mr4] y [Mr5], Murphy ha extendido la noción y muchas de las propiedades de los operadores de Toeplitz clásicos a espacios de Hardy generados por álgebras de funciones. Describiremos su trabajo como aparece en [Mr4]. Sea Φ un álgebra de funciones sobre un espacio de Hausdorff compacto G que tiene una única medida representante μ para un carácter de Φ. Entonces, una generalización de los espacios de Hardy sobre $\mathbb{T}$ se extiende a este contexto. Sea $H^2(\mu)$ la clausura de Φ en $L^2(\mu)$. Las funciones de $H^2(\mu)$ se llaman funciones analíticas, en particular, las funciones analíticas de módulo uno se llaman interiores, como en el caso clásico. Toda función $\phi \in L^2(\mu)$ define un operador de Toeplitz

$$T_\phi : H^2(\mu) \to H^2(\mu) \qquad \text{por } T_\phi f = P(\phi \cdot f),$$

donde P es la proyección ortogonal de $L^2(\mu)$ sobre $H^2(\mu)$. Sea Σ el semigrupo de todas las funciones interiores, entonces Murphy probó [Mr4, Teor. 2.1] que un operador acotado $X : H^2(\mu) \to H^2(\mu)$ es un operador de Toeplitz si, y sólo si, $X = T_\phi^* X T_\phi$ para toda función interior ϕ. Por lo tanto, en nuestro lenguaje, $X : H^2(\mu) \to H^2(\mu)$ es un operador de Toeplitz en el sentido de Murphy si, y sólo si, X es un operador de Toeplitz con respecto al semigrupo $\{T_{\phi}^{*} : \phi \in \Sigma\}$. Nuestros resultados en la Sección 4 dan lugar a algunos de los resultados obtenidos por Murphy para operadores de Toeplitz individuales. También produjo numerosas contribuciones interesantes al estudio de las álgebras de Toeplitz generadas por operadores de Toeplitz; referimos al lector interesado a sus artículos.

Operadores de Toeplitz en $H^2(\mathbb{T}^d)$.

Sean $L^2(\mathbb{T}^d)$ y $H^2(\mathbb{T}^d)$ los correspondientes espacios de Lebesgue y Hardy de funciones de d variables $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$. Como en el caso unidimensional, toda función $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ define un operador de Toeplitz sobre $H^2(\mathbb{T}^d)$ por $T_\phi f = P(\phi \cdot f)$, donde P es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sobre $H^2(\mathbb{T}^d)$. Se dice que el operador T_ϕ es analítico, si el símbolo $\phi \in H^\infty(\mathbb{T}^d)$. Esta clase de operadores ha sido estudiada por muchos autores; referimos la lectura del libro de Böttcher y Silbermann [BöSi, Cap. 8] y a las referencias que allí aparecen.

Dado $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, ..., n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, consideramos el operador de desplazamiento $S_{\overrightarrow{n}}$ definido sobre $H^2(\mathbb{T}^d)$ por

$$(S_{\overrightarrow{n}} f)(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_d) = \zeta_1^{n_1} \zeta_2^{n_2} \cdots \cdot \zeta_d^{n_d} f(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_d).$$

Si definimos ahora $T_{\overrightarrow{n}} = S_{\overrightarrow{n}}^*$, entonces está claro que $\{T_{\overrightarrow{n}} : \overrightarrow{n} \in \mathbb{Z}_+^d\}$ es una representación co-isométrica de $\in \mathbb{Z}_+^d$ en $H^2(\mathbb{T}^d)$, que tiene como dilatación isométrica minimal a $\{U_{\overrightarrow{n}} : \overrightarrow{n} \in \mathbb{Z}_+^d\}$ definido en $L^2(\mathbb{T}^d)$ por

$$(U_{\overrightarrow{n}} f)(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_d) = \zeta_1^{-n_1} \zeta_2^{-n_2} \cdots \cdot \zeta_d^{-n_d} f(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_d).$$

(Recalquemos que una representación contractiva arbitraria de $\mathbb{Z}_+^d$ no tiene necesariamente una dilatación isométrica minimal si $d > 2$ [SzFo1, I.6.3]).

Siguiendo las líneas de la demostración dada por Brown y Halmos para el caso unidimensional, es fácil ver, y seguramente bien conocido, que $X \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}^d))$ es un operador de Toeplitz si, y sólo si, es un operador de Toeplitz con respecto a $\{T_{\overrightarrow{n}} : \overrightarrow{n} \in \mathbb{Z}_+^d\}$, y que los operadores de Toeplitz analíticos T_ϕ corresponden con los operadores de Toeplitz analíticos con respecto a $\{T_{\overrightarrow{n}} : \overrightarrow{n} \in \mathbb{Z}_+^d\}$. El Corolario 4.2 y el Teorema 4.7 no nos dan ninguna información nueva, sólo pruebas alternativas, sobre operadores de Toeplitz analíticos en $H^2(\mathbb{T}^d)$. Sin embargo, una de las consecuencias del Corolario 4.6, el hecho de que si $\phi \in H^\infty(\mathbb{T}^d)$, entonces $\sigma_l(\phi) = \sigma_l(T_\phi)$, es probablemente bien conocido al menos, para el caso unidimensional [Ha2] y para operadores de Toeplitz en el sentido de Murphy [Mr3, 5.6]; sin embargo, no hemos podido encontrar una referencia para el caso de dimensión d. Observemos que si $\phi \in H^\infty(\mathbb{T}^d)$, entonces $\sigma(\phi) = \sigma_l(\phi)$, por tanto, el espectro de ϕ, que está dentro del espectro de su operador de Toeplitz T_ϕ (que es más grande en general), es exactamente el espectro izquierdo de T_ϕ.

6 Operadores de Hankel con respecto a semigrupos

Al igual que hemos generalizado los resultados que aparecen en [MaPa1] y [MaPa2] para operadores de Toeplitz generalizados, cabe plantearse si es posible generalizar también al caso de semigrupos la existencia de símbolos de Hankel [PtVr1], [PtVr2], [Pt3], así como los resultados de compacidad y rango finito sobre operadores de Hankel generalizados que aparecen en [MaPa3], [MaPa4], y que se apoyan en la existencia de dicho símbolo. Esta fue nuestra primera idea para el segundo capítulo de esta memoria, pero desistimos de ella al comprobar que existen operadores de Hankel con respecto a semigrupos biparamétricos que no provienen de ningún símbolo.

Para comenzar, recordemos que cada $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ define un operador de Hankel

$$H_\phi : H^2 \to H^2_- \quad \text{dado por } H_\phi f = P_-(\phi f),$$

donde H^2_- denota al complemento ortogonal de H^2 en L^2 y P_- denota la proyección ortogonal de $L^\infty(\mathbb{T})$ sobre H^2_-. Los operadores de Hankel verifican una relación simple que los caracteriza; esta relación característica fue dada por Nehari en 1957, y nos dice que una aplicación lineal y acotada $X : H^2 \to H^2_-$ es un operador de Hankel si, y sólo si, $XS = (S_-)^* X$ donde S es el operador de desplazamiento hacia delante en H^2 y S_- es el operador de desplazamiento hacia delante en H^2_- definido por $(S_- f)(\zeta) = \overline{\zeta} \cdot f(\zeta)$.

En la literatura se han propuesto varias generalizaciones de la noción de operador de Hankel pero, nosotros nos concentraremos en la siguiente: dada una contracción T definida en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se dice que un operador acotado $X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un *operador de Hankel con respecto a* T si verifica la relación $TX = XT^*$ y existe una constante positiva c tal que $|\langle Xh_1, h_2\rangle| \leq c \, \|P(\mathcal{R})h_1\| \, \|P(\mathcal{R})h_2\|$ para todos $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, donde $\mathcal{R}$ es la parte unitaria de la dilatación isométrica minimal $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ de T. Esta última condición, llamada *PV-acotación*, es necesaria para garantizar la existencia de un símbolo de Hankel para X que, en esta generalización, es un operador $Z : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ tal que $UZ = ZU^*$ y $X = P(\mathcal{H}) \, Z | \mathcal{H}$ (para más detalles ver [PtVr1], [MaPa3],[MaPa4]).

Una vez que hemos establecido las definiciones de operador y símbolo de Hankel con respecto a una contracción, veamos ahora las generalizaciones cuando tenemos, en lugar de una contracción simple, una representación contractiva de un semigrupo $\{T_s : s \in \Sigma\}$, teniendo en cuenta todas las propiedades sobre la representación contractiva y la dilatación isométrica minimal que se vieron en la Sección 2.

Operadores y símbolos de Hankel.

6.1. Definición. Se dice que un operador acotado $X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un *operador de Hankel con respecto a* $\{T_s\}$ si

$$T_s X = X T_s^* \qquad \textit{para todo } s \in \Sigma$$

y es *PV-acotado*, es decir, existe una constante $c > 0$ tal que

$$| \langle X h_1, h_2 \rangle | \leq c \, \| P(\mathcal{R}) h_1 \| \, \| P(\mathcal{R}) h_2 \| \qquad \text{para todo } h_1 \text{ y } h_2 \text{ en } \mathcal{H}.$$

En este punto, podemos hacer el mismo comentario que hicimos en el caso Toeplitz. En la relación que verifican los operadores de Hankel, se podría poner una representación $\{T_{1s}\}$ a la derecha y otra representación $\{T_{2s}\}$ del mismo semigrupo a la izquierda de la ecuación, definidas en espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente. Pero es fácil observar que X es una solución de $T_{2s}X = XT_{1s}^*$ si, y sólo si, $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una solución de

$$\begin{bmatrix} T_{2s} & 0 \\ 0 & T_{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2s} & 0 \\ 0 & T_{1s} \end{bmatrix}^*,$$

donde estos operadores matriciales están definidos en el espacio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1$. También es fácil verificar que si X es PV-acotado como operador de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$, el operador $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es PV-acotado como operador en $\mathcal{H}$, ya que una posible dilatación isométrica minimal de la representación $\begin{bmatrix} T_{2s} & 0 \\ 0 & T_{1s} \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} U_{2s} & 0 \\ 0 & U_{1s} \end{bmatrix}$ donde $\{U_{1s}\}$ y $\{U_{2s}\}$ son dilataciones isométricas minimales de las representaciones $\{T_{1s}\}$ y $\{T_{2s}\}$ respectivamente.

6.2. Definición. Se dice que un operador $Z : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ es un *símbolo de Hankel con respecto a* $\{T_s\}$ si $U_s Z = Z U_s^*$ para todo $s \in \Sigma$, es decir, si Z verifica la relación de Hankel con respecto a la dilatación isométrica minimal $\{U_s\}$ de $\{T_s\}$. Se dice que el símbolo de Hankel es *analítico*, si verifica $Z\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}^{\perp}$.

Si $\{T_s\}$ es un semigrupo continuo uniparamétrico de contracciones, se obtiene un resultado análogo al que se tenía para operadores de Toeplitz en la Proposición 4.1.

6.3. Proposición. *Un operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador de Hankel para un semigrupo continuo uniparamétrico $\{T_s\}$, es decir, verifica*

$$T_s X = X T_s^* \quad \textit{para cada } s \geq 0$$

y la condición de PV-acotación si, y sólo si, es un operador de Hankel para T, donde T es el cogenerador de $\{T_s\}$, es decir,

$$TX = XT^*$$

y verifica la correspondiente condición de PV-acotación.

La demostración de que las ecuaciones son equivalentes se obtiene de la misma forma que para los operadores de Toeplitz, y la condición de PV-acotación no influye en realidad ya que la parte unitaria $\mathcal{R}$ de la dilatación isométrica minimal $\{U_s\}$ de $\{T_s\}$ es también la parte unitaria del cogenerador U de $\{U_s\}$, que resulta ser la dilatación isométrica minimal de T (ver comentarios anteriores a la Proposición 5.1).

Sin embargo, vamos a construir un ejemplo de un operador de Hankel con respecto a dos representaciones contractivas de un semigrupo que no tiene símbolo de Hankel. Para ello reformularemos en nuestra situación el contraejemplo de Bakonyi y Timotin [BaTi] a una conjetura de Cotlar y Sadosky [CoSa2]. Las demostraciones de los resultados 6.4 a 6.9 se encuentran pues, esencialmente en [BaTi].

En esta sección usamos la siguiente notación: $L^2 = L^2(\mathbb{T}^2)$, $L^\infty = L^\infty(\mathbb{T}^2)$

$$H^2 = H^2(\mathbb{T}^2) = \left\{ f \in L^2 : \widehat{f}(n,m) = 0 \text{ si } n < 0 \text{ o } m < 0 \right\},$$

$$H_x^2 = \left\{ f \in L^2 : \widehat{f}(n,m) = 0 \text{ si } n < 0 \right\},$$

$$H_y^2 = \left\{ f \in L^2 : \widehat{f}(n,m) = 0 \text{ si } m < 0 \right\},$$

y P es la proyección ortogonal de L^2 en H^2.

Consideramos S_x y S_y, los operadores de desplazamiento en L^2, definidos por

$$S_x f(e^{ix}, e^{iy}) = e^{ix} f(e^{ix}, e^{iy}) \quad \text{y} \quad S_y f(e^{ix}, e^{iy}) = e^{iy} f(e^{ix}, e^{iy}) \quad \text{para todo } f \in L^2,$$

y consideramos los espacios

$$H_k = \left\{ f \in L^2 : f(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} b_{rs} e^{irx} e^{isy} \text{ con } b_{rs} = 0 \text{ si } r + s \neq k \right\},$$

donde P_k denotará su proyección ortogonal. Considerando estos espacios podemos escribir

$$L^2 = l^2_{\mathbb{Z}}(H_k).$$

Sea ahora M_F el operador de multiplicación en L^2 correspondiente a una función de L^∞ de la forma

$$F(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} e^{-iny} \in H_0.$$

Si $g \in H_k$, entonces es de la forma $g(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_r e^{irx} e^{i(k-r)y}$, y se tiene

$$\begin{aligned} F(e^{ix}, e^{iy}) g(e^{ix}, e^{iy}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_n b_r e^{i(n+r)x} e^{i(k-(n+r))y} \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n b_{s-n} \right) e^{isx} e^{i(k-s)y} \in H_k, \end{aligned}$$

por tanto, H_k es invariante por M_F para todo $k \in \mathbb{Z}$.

6.4. Lema. *El operador M_F restringido a cada espacio H_k es unitariamente equivalente al operador de multiplicación*

$$M_{F_0} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \quad \textit{donde} \quad F_0(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}.$$

En particular $\|F\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = \|F_0\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Demostración. Consideremos el operador unitario

$$U : H_k \to L^2(\mathbb{T}) \quad \text{dado por } U\left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} b_r e^{irx} e^{i(k-r)y} \right) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_r e^{irt},$$

y veamos que $M_F = U^{-1} M_{F_0} U$.

Sea $g(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} b_r e^{irx} e^{i(k-r)y}$, entonces

$$\begin{aligned} M_{F_0} U g(e^{ix}, e^{iy}) &= M_{F_0} \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} b_r e^{irt} \right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int} \right) \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} b_r e^{irt} \right) \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_{s-n} \right) e^{ist}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$U^{-1} M_{F_0} U g(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_{s-n} \right) e^{isx} e^{i(k-s)y} = M_F g(e^{ix}, e^{iy}).$$

Además $\|F\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = \|M_F\| = \|M_{F_0}\| = \|F_0\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. ■

6.5. Lema. *Si $f \in H^2$, entonces la compresión $P_k M_f P_k|\, H_k$ es la multiplicación escalar por $f_{00} = f(1,1)$.*

Demostración. Si $f(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{n,j\geq 0} c_{nj} e^{inx} e^{ijy}$, tenemos

$$M_f\Big(\sum_{r\in\mathbb{Z}} b_r e^{irx} e^{i(k-r)y}\Big) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \sum_{n,j\geq 0} c_{nj} e^{i(r+n)x} e^{i(k-(r-j))y}$$

pero, $r + n + k + j - r = k$ si, y sólo si, $n + j = 0$ o, lo que es lo mismo, $n = 0$ y $j = 0$, por lo tanto $P_k M_f P_k|\, H_k = M_{c_{00}} = M_{f_{00}}$. ■

6.6. Definición. Se dice que un operador $\Gamma : H^2 \to (H^2)^\perp$ es un *operador de Hankel grande* (*big Hankel*, en inglés) si verifica cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes

(1) $(\Gamma S_x f, g) = (\Gamma f, S_x^* g)$ y $(\Gamma S_y f, g) = (\Gamma f, S_y^* g)$ para todo $f \in H^2$ y todo $g \in (H^2)^\perp$.

(2) $\Gamma S_x = (I - P) S_x \Gamma$ y $\Gamma S_y = (I - P) S_y \Gamma$.

(3) Existe una función $\phi \in L^2$ tal que $\Gamma = \Gamma_\phi$ es un operador acotado, donde

$$\Gamma f = \Gamma_\phi f = (I - P)\phi f \quad \text{para todo } f \in H^2.$$

(4) $\Gamma = \Gamma_{\phi_-}$ para $\phi_- = \Gamma 1 \in (H^2)^\perp$.

A cualquiera de las funciones ϕ del apartado (3) la llamaremos *símbolo de Hankel grande* de Γ (para distinguirlo de los definidos en 6.2). Estas funciones fueron caracterizadas por Cotlar y Sadosky [CoSa1] de la siguiente manera. Consideremos el espacio BMO reducido, que se denota por $BMOr$, y está formado por las funciones de L^2 que verifican $\|\phi\|_{BMOr} < +\infty$, donde

$$\|\phi\|_{BMOr} = \max \left\{ \begin{array}{c} \inf\left\{\|\phi - h_x\|_\infty : h_x \in H_x^2\right\}, \inf\left\{\|\phi - h_y\|_\infty : h_y \in H_y^2\right\}, \\ \inf\left\{\|\phi - h^\perp\|_\infty : h^\perp \in (H^2)^\perp\right\} \end{array} \right\}.$$

Entonces Γ_ϕ es un operador acotado si, y sólo si, $\phi_- \in BMOr$ y, además, en ese caso

$$\|\phi_-\|_{BMOr} \leq \|\Gamma\| \leq \sqrt{2}\|\phi_-\|_{BMOr}. \tag{I.17}$$

6.7. Teorema. *Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio*

$$P_N(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} e^{inx} e^{-iny}.$$

Entonces $P_N \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, su operador de Hankel grande Γ_{P_N} verifica que $\|\Gamma_{P_N}\|$ es acotado independientemente de N y, sin embargo, la norma $\|\psi\|$ de cualquier $\psi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ con $\Gamma_\psi = \Gamma_{P_N}$, es del orden de $\log N$.

Demostración. $P_N \in H^{2\perp}$ y por (I.17) $\|\Gamma_{P_N}\| \leq \sqrt{2}\|P_N\|_{BMOr}$. Como $P_N \in (H^2)^\perp \cap H_x^2$ tenemos

$$\|P_N\|_{BMOr} = \inf\left\{\|P_N - h_y\|_\infty : h_y \in H_y^2\right\}.$$

Sea $h_y^{(N)}(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} e^{-inx} e^{iny} \in H_y^2$, entonces

$$(P_N - h_y^{(N)})(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{\substack{-N \leq n \leq -1 \\ 1 \leq n \leq N}} \frac{1}{n} e^{inx} e^{-iny} \in H_0,$$

por lo tanto, aplicando el Lema 6.4 tenemos $\|P_N - h_y^{(N)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = \|F^{(N)}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$, donde

$$F^{(N)}(e^{it}) = \sum_{\substack{-N \leq n \leq -1 \\ 1 \leq n \leq N}} \frac{1}{n} e^{int} = 2i \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}.$$

Pero $\left\|2i\sum_{1\leq n\leq N}\dfrac{\operatorname{sen}(nt)}{n}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \pi$ para todo $N \in \mathbb{N}$, en consecuencia, por (I.17)

$$\|P_N\|_{BMOr} \leq \|P_N - h_y^{(N)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq \pi$$

y, por lo tanto, $\|\Gamma_{P_N}\| \leq \sqrt{2}\pi$ independientemente de N.

Por otro lado, supongamos que $\psi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ es tal que $\Gamma_\psi = \Gamma_{P_N}$, entonces existe una función $\chi \in H^\infty \subset H^2$ tal que $\psi = P_N + \chi$, y además se tiene

$$\|\psi\|_\infty = \|M_\psi\| \geq \|\, P_0 M_\psi|\, H_0\|.$$

Por el Lema 6.5, tenemos que $P_0 M_\psi|\, H_0 = P_0 M_{P_N+\chi_{00}}\big|\, H_0$ y, como $P_N+\chi_{00} \in H_0$, usando el Lema 6.4 y que $M_{P_N+\chi_{00}} H_0 \subseteq H_0$, llegamos a que

$$\|\psi\|_\infty \geq \|\, P_0 M_{P_N+\chi_{00}}\big|\, H_0\| = \|\, M_{P_N+\chi_{00}}\big|\, H_0\| = \|P_N + \chi_{00}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = \|g_N\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

donde $g_N(e^{ix}) = \chi_{00} + \sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n} e^{inx}$. Como

$$\|g_N\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \geq |\, g_N(0)\, | = \left|\chi_{00} + \sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n}\right|$$

y $\sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n}$ crece como $\log N$, entonces $\|g_N\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ es al menos del orden de $\log N$ y, por tanto, $\|\psi\|_\infty \geq c \log N$, donde c es una constante que no depende de N. ■

6.8. Observación. Con lo anterior tenemos probado que no existe una constante $k > 0$ tal que para todo $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ exista $\psi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ con $\Gamma_\psi = \Gamma_\phi$ y $\|\psi\|_\infty \leq k\|\Gamma_\phi\|$. En particular, no existe una constante k tal que, para todo $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ se verifique $\|\phi\|_\infty \leq k\|\Gamma_\phi\|$.

6.9. Corolario. *Dado el conjunto* $\mathcal{G} = \left\{\Gamma_\theta : H^2 \to (H^2)^\perp \text{ operador acotado con } \theta \in L^2\right\}$, *la aplicación*

$$G : L^\infty/H^\infty \to \mathcal{G} \quad \text{dada por } G\varphi = \Gamma_\varphi$$

no es sobreyectiva.

Demostración. Si G fuese sobreyectiva, como es inyectiva, lineal y continua, por el teorema de la aplicación abierta, G sería abierta, es decir, transformaría abiertos en abiertos y, por tanto, su inversa sería continua o, lo que es lo mismo, existiría $k > 0$ tal que, para todo $\varphi \in L^\infty/H^\infty$ se tendría $\|\varphi\|_\infty \leq k\|\Gamma_\varphi\|$, lo cual es una contradicción con el teorema anterior. Por tanto, existe $\phi \in L^2$ tal que Γ_ϕ es acotado pero $\phi \notin L^\infty$. ■

6.10. Ejemplo. El operador $X = \Gamma_\phi \in \mathcal{B}(H^2, (H^2)^\perp)$ correspondiente a la función

$$\phi(e^{ix}, e^{iy}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} e^{inx} e^{-iny} \in (H^2)^\perp$$

es un operador de Hankel correspondiente a las representaciones co-isométricas del semigrupo $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ dadas por

$$T_{1nm} = PU_1^{*n} U_2^{*m} |\, H^2(\mathbb{T}^2) \quad y \quad T_{2nm} = (I-P) U_1^n U_2^m |\, H^2(\mathbb{T}^2)^\perp.$$

Sin embargo, no existe operador acotado Z que sea el símbolo de Hankel de $X = \Gamma_\phi$ en el sentido de la Definición 6.2.

Demostración. Veamos en primer lugar que Γ_ϕ es un operador acotado. De acuerdo con la caracterización (I.17) de Cotlar y Sadosky, debemos ver que $\phi_- = \phi \in BMOr$. Ahora bien, como $\phi \in H_x^2 \cap (H^2)^\perp$, tenemos

$$\inf \left\{ \|\phi - h_x\|_\infty : h_x \in H_x^2 \right\} = 0 = \inf \left\{ \|\phi - h^\perp\|_\infty : h^\perp \in (H^2)^\perp \right\},$$

por tanto, basta ver que $\inf \left\{ \|\phi - h_y\|_\infty : h_y \in H_y^2 \right\} < +\infty$. Tomamos $h_y = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} e^{-inx} e^{iny} \in H_y^2$. Entonces

$$\phi - h_y = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n} e^{inx} e^{-iny} \in H_0.$$

Por el Lema 6.4

$$\|\phi - h_y\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n} e^{int} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \left\| 2i \sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < +\infty,$$

en consecuencia, Γ_ϕ es acotado.

Para $i = 1, 2$, consideremos ahora los operadores unitarios

$$U_i : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2) \quad \text{dado por } U_i f(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_i f(\zeta_1, \zeta_2),$$

sus restricciones

$$S_i : H^2(\mathbb{T}^2) \to H^2(\mathbb{T}^2) \quad \text{donde } S_i = U_i |\, H^2(\mathbb{T}^2),$$

y las representaciones co-isométricas del semigrupo $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ dadas por

$$T_{1nm} = PU_1^{*n}U_2^{*m}|\, H^2(\mathbb{T}^2) \quad \text{y} \quad T_{2nm} = (I-P)U_1^nU_2^m|\, H^2(\mathbb{T}^2)^\perp.$$

Veamos en segundo lugar que $X = \Gamma_\phi$ es un operador de Hankel con respecto a $\{T_{1nm}\}$ y $\{T_{2nm}\}$. Es claro que Γ_ϕ verifica las relaciones

$$\begin{aligned} XS_1 &= (I-P)U_1X \\ XS_2 &= (I-P)U_2X. \end{aligned} \tag{I.18}$$

Veamos que estas relaciones son equivalentes a

$$(I-P)U_1^nU_2^nX = XS_1^nS_2^n \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{I.19}$$

Es obvio que, si se verifica (I.19) entonces se verifica (I.18). Para probar la otra implicación veamos en primer lugar que, para todo $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ se verifica

$$(I-P)U_1(I-P)U_1f = (I-P)U_1^2f.$$

Para ello, sea $g \in H^2(\mathbb{T}^2)^\perp$, entonces

$$\begin{aligned} \langle (I-P)U_1(I-P)U_1f, g\rangle &= \langle U_1(I-P)U_1f, g\rangle = \langle (I-P)U_1f, U_1^*g\rangle \\ &= \langle U_1f, U_1^*g\rangle = \left\langle U_1^2f, g\right\rangle = \left\langle (I-P)U_1^2f, g\right\rangle, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $H^2(\mathbb{T}^2)^\perp$ es invariante para U_1^*. Usando que $H^2(\mathbb{T}^2)^\perp$ es invariante para $(U_1^*)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ y reiterando este razonamiento se llega a que

$$XS_1^n = (I-P)U_1^nX \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+$$

y lo mismo ocurre para el subíndice 2. Con todo esto tenemos, usando de nuevo que $H^2(\mathbb{T}^2)^\perp$ es invariante para $(U_1^*)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$XS_1^nS_2^n = (I-P)U_1^nXS_2^n = (I-P)U_1^n(I-P)U_2^nX.$$

Por tanto, para todos $f \in H^2(\mathbb{T}^2)$ y $g \in H^2(\mathbb{T}^2)^\perp$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle XS_1^nS_2^nf, g\rangle &= \langle (I-P)U_1^n(I-P)U_2^nXf, g\rangle = \langle U_1^n(I-P)U_2^nXf, g\rangle \\ &= \langle (I-P)U_2^nXf, (U_1^n)^*g\rangle = \langle U_2^nXf, (U_1^n)^*g\rangle \\ &= \langle U_1^nU_2^nXf, g\rangle = \langle (I-P)U_1^nU_2^nXf, g\rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia $(I-P)U_1^n U_2^n X = X S_1^n S_2^n$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}_+$.

Con las representaciones co-isométricas que hemos tomado tenemos, entonces

$$T_{2nm} X = X T_{1nm}^* \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

por lo tanto X es un operador de Hankel con respecto a $\{T_{1nm}\}$ y $\{T_{2nm}\}$ ya que, al ser $\{T_{1nm}\}$ y $\{T_{2nm}\}$ representaciones co-isométricas, la PV-acotación es trivial.

Finalmente, un símbolo de Hankel para X en el sentido de la Definición 6.2 sería un operador $Z : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ tal que

$$U_1^n U_2^n Z = Z U_1^n U_2^m \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{y} \quad X = (I-P)Z|\,H^2(\mathbb{T}^2).$$

Pero sabemos que los operadores que verifican la primera de las dos condiciones anteriores son de la forma $Z = M_\psi$ con $\psi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ y, por tanto, sería

$$\Gamma_\phi = X = (I-P)Z|\,H^2(\mathbb{T}^2) = (I-P)M_\psi|\,H^2(\mathbb{T}^2) = \Gamma_\psi.$$

Ahora, razonando de manera análoga a la demostración del Teorema 6.7, existe una función $\chi \in H^2$ con $\psi = \phi + \chi$ y $P_0 M_\psi|\,H_0 = P_0 M_{\phi+\chi_{00}}|\,H_0$. Además

$$\begin{aligned}\|\psi\|_\infty &\geq \|\,P_0 M_{\phi+\chi_{00}}|\,H_0\| = \|\,M_{\phi+\chi_{00}}|\,H_0\| = \|\phi + \chi_{00}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \\ &= \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} e^{inx} + \chi_{00} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = +\infty.\end{aligned}$$

Como queríamos demostrar. ■

Capítulo II

Casi-semejanza de contracciones

7 Introducción

Una de la nociones más importantes del álgebra lineal en dimensión finita es la de semejanza de matrices. Decimos que dos matrices A_1 y A_2 cuadradas de orden N son semejantes cuando existe una matriz invertible P, llamada matriz de paso, tal que $PA_1 = A_2P$. Las matrices semejantes comparten su estructura de autovalores y autovectores, por lo que pueden considerarse idénticas en muchas situaciones. De hecho, un problema muy importante en este contexto es hallar la más simple entre todas las matrices semejantes a una dada; una diagonal y, si no existe, una bidiagonal, su forma de Jordan.

Para trasladar esta noción al contexto de los espacios de Hilbert, parece natural definir que dos operadores $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ y $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ son *semejantes* si existe un operador invertible $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $PT_1 = T_2P$. Operadores semejantes comparten, al igual que las matrices en dimensión finita, muchas propiedades y, de hecho, cuando el operador de paso es unitario, en cuyo caso se dice que son unitariamente equivalentes, los operadores se consideran iguales a todos los efectos.

Si embargo, en dimensión infinita se puede sustituir la condición de que el operador de paso P sea invertible por condiciones más débiles, pero de forma que se siga conservando la estructura de autovalores y autovectores. Una opción, en este sentido, recogida por Sz-Nagy y Foiaş [SzFo1, Cap. II, Sec. 3] es sustituir la invertibilidad de P por, meramente, la inyectividad de P y P^*, dando lugar a la noción de casi-semejanza.

Se dice que dos operadores acotados en sendos espacios de Hilbert $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ y $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ son *casi-semejantes*, lo que denotaremos por $T_1 \sim T_2$, si existen dos operadores acotados $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tales que

$$\begin{aligned} XT_1 &= T_2X, \qquad \ker(X) = \{0\} \qquad \text{y} \qquad \ker(X^*) = \{0\}\,; \\ T_1W &= WT_2, \qquad \ker(W) = \{0\}\,, \qquad \text{y} \qquad \ker(W^*) = \{0\}\,. \end{aligned}$$

En ese caso, estos operadores X y W se llaman *deformaciones* o *casi-afinidades.* Observemos, de paso, que las condiciones de inyectividad de X^* y W^* son equivalentes a las condiciones

$$\begin{aligned} \ker(X^*) &= \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{ran}(X) = \operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2, \\ \ker(W^*) &= \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{ran}(W) = \operatorname{clos}\{W\mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

La relación de casi-semejanza es una relación de equivalencia entre operadores que, aunque es más débil que la relación de semejanza, también conserva los autovalores, la multiplicidad espectral y la existencia de subespacios invariantes no triviales. Para más información sobre propiedades de la relación de casi-semejanza nos remitimos a los textos [Be], [Ni1] y [SzFo1].

Puesto que, mediante equivalencias unitarias, un mismo operador puede expresarse de distintas formas, un problema de interés es el de caracterizar la casi-semejanza de operadores en términos de aquellos invariantes que comparten dichas expresiones diferentes. Uno de estos invariantes es la función característica.

Toda contracción completamente no unitaria lleva asignada una función analítica en $\mathbb{D}$ cuyos valores son operadores acotados, llamada función característica y que se define de la siguiente manera.

7.1. Definición. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción completamente no unitaria y sean $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ su operador defecto y $\mathcal{D}_T = \operatorname{ran}(D_T)$ su espacio defecto. Entonces la función Θ definida para cada $\zeta \in \mathbb{D}$ por

$$\Theta(\zeta) = \big(-T + \zeta D_{T^*}(I - \zeta T^*)^{-1} D_T\big)\,\big|\,\mathcal{D}_T$$

es una función analítica cuyos valores son contracciones $\Theta(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*})$, que se llama *función característica* de T.

Aunque pueden darse formulaciones diferentes de Θ usando isomorfismos unitarios de $\mathcal{D}_T$ y $\mathcal{D}_{T^*}$ sobre espacios de las mismas dimensiones respectivas, éstas corresponden a equivalencias unitarias de T, como se recoge con más detalle en el Apéndice (veánse los comentarios previos al Teorema A.29 y los resultados siguientes).

La función característica representa para las contracciones completamente no unitarias un papel parecido al que el polinomio característico representa para una matriz. En este sentido, y enlazando con los comentarios anteriores, nos hemos planteado la siguiente pregunta: ¿Puede describirse la casi-semejanza de contracciones en términos de sus funciones características o invariantes ligados a ellas?

Formulando este problema con tanta generalidad, la respuesta es, probablemente, que no. Para varias clases de operadores, sin embargo, sí se ha conseguido obtener caracterizaciones adecuadas, a saber:

(a) El modelo de Jordan para C_0-contracciones [Be], [Ni1].

(b) El modelo de Jordan para contracciones débiles [Wu1], [Wu2].

(c) La clasificación de C_{10}-contracciones con índice de Fredholm igual a -1 [MaVa].

Supongamos que la función característica Θ de una contracción T es una matriz de orden N, lo que corresponde a que los índices de defecto $\dim(\mathcal{D}_T)$ y $\dim(\mathcal{D}_{T^*})$ de, respectivamente, T y T^* son ambos iguales a N. Si se cumple que $\det(\Theta(\zeta)) \neq 0$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{D}$, entonces T es una contracción débil y podemos caracterizar los operadores casi-semejantes a T usando el Modelo de Jordan citado en el punto (b) anterior. Sin embargo, cuando $\det(\Theta(\zeta)) = 0$ en casi todo $\zeta \in \mathbb{D}$, la contracción T no pertenece a ninguna de las clases citadas antes. El problema central que abordamos en este Capítulo II es estudiar la caracterización de la casi-semejanza cuando Θ es una matriz singular de dimensión 2×2, en la confianza de que los resultados obtenidos sirvan de guía para abordar el caso $N \times N$.

Con objeto de formular lo dicho en el párrafo anterior de manera más precisa, vamos a describir con detalle los modelos de Jordan para C_0-contracciones y contracciones débiles, particularizando este último en los casos en que Θ es una matriz no singular de dimensión 1×1 y 2×2. Las herramientas sobre funciones analíticas interiores y exteriores que necesitaremos se describen en el Apéndice (A.9, A.10, A.11 y A.12).

El modelo de Jordan para C_0-contracciones.

7.2. Definición. se dice que una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de la clase C_0 o, simplemente, que es una C_0-*contracción*, si existe una función $\varphi \in H^\infty$ tal que $\varphi(T) = 0$. En ese caso se puede probar que existe una función $m_T \in H^\infty$, que es única salvo factores escalares de módulo unidad, verificando que $m_T(T) = 0$ y que, si $\varphi \in H^\infty$ es tal que $\varphi(T) = 0$, entonces m_T divide a φ, es decir, existe $\psi \in H^\infty$ tal que $\varphi = \psi m_T$; por ello m_T recibe el nombre de *anulador minimal* de T.

El modelo de Jordan para C_0-contracciones fue desarrollado por Sz-Nagy y Foiaş y completado por Müller y, para espacios no separables, por Bercovici (pueden verse los detalles en [Ni1] y [Be]). Se basa en la nociones de multiplicidad espectral y de operadores modelo que recordamos antes de dar el resultado.

7.3. Definición. La *multiplicidad espectral* de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se define como

$$\mu_T = \inf\left\{\operatorname{card}(A) : \bigvee \{T^n A : n = 0, 1, 2, ...\} = \mathcal{H}\right\},$$

es decir, el ínfimo de los cardinales de los conjuntos con los que se puede generar todo el espacio $\mathcal{H}$ por medio de sucesivas aplicaciones de T, combinaciones lineales y límites. Este tipo de conjuntos se dice que son *cíclicos* para T. Como ejemplo sencillo podemos considerar el operador de desplazamiento S en H^2, cuya multiplicidad espectral es $\mu_S = 1$ o, más generalmente, el operador de desplazamiento M_ζ en $H^2(\mathcal{L})$ que tiene multiplicidad espectral $\mu_{M_\zeta} = \operatorname{card}(\mathcal{L})$ (véase A.2).

7.4. Definición. Sea $m \in H^\infty$ una función interior no constante, entoces mH^2 es un subespacio de H^2 invariante para el operador de desplazamiento S. (El conocido Teorema de Beurling dice que, de hecho, todos los subespacios S-invariantes de H^2 son de esa forma.) Entonces el complemento ortogonal $H^2 \ominus mH^2$ se llama *espacio modelo* asociado a m y lo denotaremos por K_m. La compresión a K_m del operador de desplazamiento S, es decir el operador $S_m = P_m S|\, K_m$, donde P_m es la proyección ortogonal de H^2 sobre K_m, se llama *operador modelo* asociado a m. Los operadores modelos fueron introducidos por Sarason en su trabajo seminal [Sa] comentado en la Introducción General.

Para no complicar la notación damos el modelo de Jordan en el caso en que los conjuntos cíclicos son numerables.

7.5. Teorema. *Si T es una C_0-contracción con multiplicidad espectral finita o numerable, entonces existe una familia $\{m_i : i = 1, 2, ...\}$ de funciones interiores de cardinal μ_T tales que $m_1 = m_T$, m_{i+1} divide a m_i en H^∞ para cada $i = 1, 2, ...$ y de forma que T es casi-semejante al operador diagonal*

$$J_{\{m_i\}} = S_{m_1} \oplus S_{m_2} \oplus \cdots$$

formado por los operadores modelo S_{m_i} *sobre la suma de Hilbert de los espacios modelo* $K_{m_1} \oplus K_{m_2} \oplus \cdots$.

Este operador $J_{\{m_i\}}$ se llama *modelo de Jordan* de T y se verifica que dos C_0-contracciones son casi-semejantes si, y sólo si, tienen el mismo modelo de Jordan.

El nombre de modelo de Jordan se debe a que si la función interior m viene dada por $m(\zeta) = \zeta^n$, entonces K_m es de dimensión finita y S_m actúa sobre K_m como una matriz de Jordan nilpotente.

Modelo de Jordan para contracciones débiles.

Las contracciones débiles forman una clase más amplia que las C_0-contracciones.

7.6. Definición. Se dice que una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es *débil* si su espectro $\sigma(T)$ no cubre todo el disco unidad $\mathbb{D}$ y el operador $I - T^*T$ tiene traza finita. Por ejemplo, las contracciones T con índices de defecto $\dim(D_T)$ y $\dim(D_{T^*})$ finito tales que $T^n h \not\to 0$ y $T^{*n} h \not\to 0$ para todo $h \neq 0$ son contracciones débiles que no son de la clase C_0. Como ya hemos indicado, las contracciones cuya función característica Θ es una matriz cuadrada (finita) no singular son también ejemplos de contracciones débiles.

La caracterización de la casi-semejanza de contracciones débiles fue dada por Wu [Wu1], [Wu2] en los términos que recoge el siguiente resultado (para μ_T finito o numerable).

7.7. Teorema. *Si* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *es una contracción débil, entonces* T *es casi-semejante a la suma directa de un modelo de Jordan* $J_{\{m_i\}}$ *y una suma directa de operadores de multiplicación por la variable independiente* $M_\zeta | L^2(\Omega_i)$ *sobre una colección de espacios de Lebesgue* $L^2(\Omega_i)$ *definidos sobre una familia decreciente* $\{\Omega_i : i = 1, 2, ...\}$ *de subconjuntos medibles de* $\mathbb{T}$. *Además, dos contracciones débiles son casi-semejantes si, y sólo si, tienen el mismo modelo de Jordan* $J_{\{m_i\}}$ *y, salvo conjuntos de medida nula, la misma familia de subconjuntos* $\{\Omega_i : i = 1, 2, ...\}$.

En el caso en que la función característica de una contracción débil es una matriz Θ cuadrada de orden N no singular, se tiene que tanto el modelo de Jordan como la familia $\{\Omega_i\}$ constan, cada uno de ellos, de N elementos como mucho. Como nuestro propósito es centrarnos en el caso de una función característica que es una matriz singular de dimensión 2×2, resultará instructivo y, más adelante, útil, describir los casos 1×1 y 2×2 del Teorema de Wu.

7.8. Corolario. *Sea T una contracción completamente no unitaria con función característica escalar $\Theta = mw$, donde $m = \Theta^{\mathrm{i}}$ y $w = \Theta^{\mathrm{e}}$ son su parte interior y exterior respectivamente (véase A.9). Entonces T es casi-semejante a $S_m \oplus M_\zeta | L^2(\Omega)$, donde S_m es el operador modelo asociado a m y $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{T} : |w(\zeta)| < 1\}$. Es más, en ese caso, si definimos $\Delta = (1 - \Theta^*\Theta)^{1/2} = (1 - |w|^2)^{1/2}$, entonces se tiene que $L^2(\Omega) = \operatorname{clos}\{\Delta L^2\}$.*

7.9. Corolario. *Sean T_1 y T_2 dos contracciones completamente no unitarias con funciones características escalares $\Theta_1 = m_1 w_1$ y $\Theta_2 = m_2 w_2$. Entonces, con la notación anterior,*

$$T_1 \text{ es casi-semejante a } T_2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 = m_2 \quad y \quad \Omega_1 = \Omega_2 \text{ en casi todo.}$$

Supongamos ahora que Θ es una matriz no singular de la forma

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \theta_{ij} \in H^\infty.$$

Definimos $m_2 = \text{m.c.d.i.}\{\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}\}$, el máximo común divisor interior de las funciones que aparecen en el conjunto, y $m_1 = \dfrac{\det(\Theta)}{m_2}$. Entonces, con esta notación se tiene la siguiente caracterización.

7.10. Corolario. *Si Θ es la función característica de T, entonces T es casi-semejante al operador*

$$S_{m_1} \oplus S_{m_2} \oplus M_\zeta | L^2(\Omega_1) \oplus M_\zeta | L^2(\Omega_2)$$

donde, para $\Delta = (1 - \Theta^*\Theta)^{1/2}$, se tiene que

$$\Omega_1 = \{\zeta \in \mathbb{T} : \Delta(\zeta) \neq 0\} \qquad y \qquad \Omega_2 = \{\zeta \in \mathbb{T} : \Delta(\zeta) \text{ es invertible}\}.$$

De alguna manera, este corolario nos dice que T es casi-semejante al operador diagonal $T_{m_1 w_1} \oplus T_{m_2 w_2}$ donde $T_{m_1 w_1}$ y $T_{m_2 w_2}$ son contracciones con funciones características $m_1 w_1$ y $m_2 w_2$ respectivamente y, w_1 y w_2 son funciones exteriores adecuadas tales que $\Omega_i = \{\zeta \in \mathbb{T} : |w_i(\zeta)| < 1\}$ para $i = 1, 2$.

Estrategias y herramientas.

Concentrémonos ya en el caso de una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuya función característica Θ es una matriz singular de dimensión 2×2 con elementos en H^∞. Probaremos más adelante que, en ese caso, Θ se factoriza de la siguiente manera:

$$\Theta = wm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

donde $w, m, a, b, c, d \in H^\infty$ son tales que

(i) w es una función exterior con $|w| \leq 1$,

(ii) m es una función interior,

(iii) $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$,

(iv) m.c.d.i.$\{a, b\}$ = m.c.d.i. $\{c, d\} = 1$.

Teniendo en cuenta esta descomposición de la función característica Θ y el comentario posterior al Corolario 7.10, es lógico intentar la siguiente estrategia: si queremos caracterizar qué operadores son casi-semejantes a operadores con función característica Θ, debemos estudiar sus factores por separado, es decir, los operadores casi-semejantes a operadores con funciones características

$$\Theta_1 = w, \quad \Theta_2 = m, \quad \Theta_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Theta_4 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}.$$

Lo ideal sería caracterizar mediante casi-semejanza los operadores que tienen como función característica Θ_i con $i = 1, 2, 3$ y 4, y tratar de deducir de estos resultados, qué operadores son casi-semejantes al operador que tiene por función característica la función Θ de partida.

Para ello, una primera cuestión a tener en cuenta es que, si $T_1 \sim T_1'$ y $T_2 \sim T_2'$, y sus correspondientes casi-afinidades son X_1, W_1 y X_2, W_2 respectivamente, es claro que

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} T_1' & 0 \\ 0 & T_2' \end{bmatrix} \tag{II.1}$$

con casi-afinidades $\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$. Sin embargo, el recíproco no nos sirve, en el sentido de que si

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} T_1' & 0 \\ 0 & T_2' \end{bmatrix}$$

entonces no tiene por qué cumplirse $T_1 \sim T_1'$ (o T_2') y $T_2 \sim T_2'$ (o T_1').

Por otro lado, también hay que tener en cuenta que una función característica Θ es diagonal si, y sólo si, lo es su correspondiente operador T_Θ (salvo equivalencias unitarias).

Con todo lo anterior, y teniendo en cuenta que una condición necesaria para obtener la casi-semejanza entre dos contracciones, es que tengan el mismo índice de Fredholm, es decir, que el número $\dim(\mathcal{D}_T)-\dim(\mathcal{D}_{T^*})$ sea el mismo para ambos operadores, si queremos caracterizar mediante casi-semejanza los operadores con funciones características 2×2 con determinante nulo, que son funciones de la forma $\Theta = wm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$, lo ideal sería tener las siguientes casi-semejanzas (en términos de las funciones características de los operadores):

$$(1) \quad wm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$(2) \quad m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

con lo cual tendríamos que el operador con función característica $\Theta = wm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ sería casi-semejante al operador diagonal con función característica

$$\begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Calculando operadores casi-semejantes a los operadores T_{Θ_1}, T_{Θ_2}, T_{Θ_3} y T_{Θ_4}, y montando una matriz diagonal con ellos, obtendríamos operadores casi-semejantes a T_Θ.

El problema es que, como veremos, las casi-semejanzas (2) y (3) no se verifican en general y, por tanto, la estrategia natural esbozada antes no funciona. No obstante, el estudio de las condiciones bajo las cuales se verifican (2) y (3) y las condiciones para obtener operadores casi-semejantes a T_{Θ_1}, T_{Θ_2}, T_{Θ_3} y T_{Θ_4}, nos dará una idea de las condiciones que debemos plantearnos para lograr la caracterización general.

Tanto para abordar las condiciones bajo las que se dan las casi-semejanzas (1), (2) y (3) anteriores, lo que se hará en la Sección 9, como para, posteriormente, abordar la caracterización general, lo que se hará en la Sección 10, la herramienta fundamental será el modelo funcional de coordenadas libres de Nikolski y Vasyunin [NiVa] que describiremos ahora muy brevemente. En la parte final del Apéndice se hace una exposición mucho más detallada del modelo y los parámetros que en él intervienen.

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción completamente no unitaria y sea $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ su *dilatación unitaria minimal* (véase A.26), es decir, U es un operador unitario definido en un espacio $\mathcal{K}$ del que $\mathcal{H}$ es un subespacio cerrado y tal que

$$T^n x = P(\mathcal{H}) U^n x \qquad \text{para cada } x \in \mathcal{H}$$

y, además, U es minimal en el sentido de que no existen subespacios U-reductores intermedios entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ en el que se dé la misma condición o, equivalentemente, se tiene $\mathcal{K} = \bigvee \{U^n \mathcal{H} : n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$. En ese caso puede probarse que el espacio $\mathcal{K}$ se puede descomponer como la suma ortogonal

$$\mathcal{K} = \mathcal{G}_* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$$

con respecto a la cual U es una matriz triangular inferior cuyo elemento central es T. Los espacios $\mathcal{G}_*$ y $\mathcal{G}$ se llaman, respectivamente, subespacios *de entrada* y *de salida*, y verifican $U^* \mathcal{G}_* \subseteq \mathcal{G}_*$ y $U\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$. El modelo funcional de coordenadas libres consiste en describir todas las posibles construcciones unitariamente equivalentes de U, $\mathcal{G}_*$ y $\mathcal{G}$ en términos de una serie de parámetros (isometrías, isometrías parciales, proyecciones y operadores positivos) que dependen, esencialmente, de los índices de defecto $\dim(D_T)$ y $\dim(D_{T^*})$ y la función característica Θ, y que actúan sobre espacios funcionales $L^2(\mathcal{E})$ y $H^2(\mathcal{E})$ (todo esto se describe con detalle en el Apéndice).

¿Por qué es este modelo funcional una buena herramienta para nuestro problema? La razón es la siguiente: Para estudiar la casi-semejanza de T_1 y T_2 debemos resolver las ecuaciones $XT_1 = T_2X$ y $T_1W = WT_2$ encontrando soluciones X y W que verifiquen $\ker(X) = \ker(W^*) = \{0\}$ y $\ker(W) = \ker(X^*) = \{0\}$. Centrémonos en la ecuación

$XT_1 = T_2X$, que se llama ecuación de enlace de T_1 y T_2. El teorema del levantamiento nos dice que esta ecuación puede levantarse a una ecuación $YU_1 = U_2Y$ en el nivel de las dilataciones unitarias minimales U_1 y U_2 de, respectivamente, T_1 y T_2; de forma que X viene dado como la compresión de Y, o sea, $X = P(\mathcal{H}_2)Y|\mathcal{H}_1$. La ventaja es que la estructura de la ecuación $YU_1 = U_2Y$ es más rica. El teorema del levantamiento permite, de hecho, parametrizar los levantamientos Y en términos de los elementos del modelo.

7.11. Definición. Para cada $i = 1, 2$, sea $T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ una contracción completamente no unitaria con dilatación unitaria minimal $U_i \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_i)$ definida sobre un espacio $\mathcal{K}_i = \mathcal{G}_{*i} \oplus \mathcal{H}_i \oplus \mathcal{G}_i$ en el que $\mathcal{G}_{*i}$ y $\mathcal{G}_i$ son, respectivamente, los subespacios de entrada y de salida. Sea $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador que entrelaza T_1 y T_2, esto es, $XT_1 = T_2X$. Se dice que un operador $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ es un *levantamiento* de X si se verifican

(i) Y entrelaza U_1 y U_2, o sea, $YU_1 = U_2Y$,

(ii) $X = P(\mathcal{H}_2)Y|\mathcal{H}_1$,

(iii) $Y\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ y $Y^*\mathcal{G}_{*2} \subseteq \mathcal{G}_{*1}$.

7.12. Teorema. *Para cada $i = 1, 2$, sea $T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ una contracción completamente no unitaria con función característica Θ_i. Entonces un operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ verifica $XT_1 = T_2X$ si, y sólo si, existe un levantamiento Y de X. En ese caso, el levantamiento Y se puede parametrizar de las dos formas siguientes*

$$\begin{aligned} Y &= \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* \\ &= \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* \end{aligned}$$

donde A y A_* son funciones analíticas en $\mathbb{D}$ cuyos valores son operadores tales que $A_*\Theta_1 = \Theta_2 A$, B es una función medible y acotada en $\mathbb{D}$ cuyos valores son operadores, y los operadores π, τ y Δ que aparecen son los parámetros funcionales del modelo (véase el Apéndice).

Lo primero que haremos, en la Sección 8 siguiente, es expresar las condiciones $\ker(X) = \{0\}$ y $\ker(X^*) = \{0\}$ en términos de los levantamientos Y de X. En esta misma sección recogemos otros resultados de carácter esencialmente técnico que utilizaremos. Posteriormente, en las Secciones 9 y 10, estudiaremos los distintos elementos de los modelos funcionales de las contracciones cuya casi-semejanza queremos caracterizar, y daremos nuestros resultados principales.

8 Lemas preliminares

En primer lugar, vamos a demostrar que Θ se puede descomponer como producto de cuatro funciones, como indicamos anteriormente. Para ello, necesitamos algunos resultados previos.

8.1. Lema. *Sean α y β dos funciones en H^∞ y consideremos el operador*

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in \left(H^2 \oplus H^2\right) \to \alpha f + \beta g \in H^2.$$

Si $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0$ en casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$, entonces

$$\ker \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\varphi\omega} \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} H^2$$

siendo $\varphi =$ m.c.d.i. $\{\alpha, \beta\}$ y ω una función exterior tal que $|\omega|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que m.c.d.i. $\{\alpha, \beta\} = 1$ y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Como $\ker[\alpha\ \beta] \subseteq (H^2 \oplus H^2)$ es invariante por el operador de multiplicación por la variable independiente M_ζ, el teorema de Beurling-Helson A.14 afirma que existe una matriz interior Φ que será de la forma $\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_3 \\ \phi_2 & \phi_4 \end{bmatrix}$ o bien de la forma $\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$, con $\phi_i \in H^\infty$ para $i = 1, 2, 3, 4$, tal que

$$\ker \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_3 \\ \phi_2 & \phi_4 \end{bmatrix} \left(H^2 \oplus H^2\right) \quad \text{o bien} \quad \ker \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} H^2.$$

Como $\Phi(\zeta)$ es una isometría para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$, se tiene que $(\Phi(\zeta))^*\Phi(\zeta)$ es igual a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ o bien a 1, para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$, dependiendo del caso en el que estemos. De cualquier modo, $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 1$ y $\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$.

En consecuencia $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 = 0$, por lo que, tomando módulos, podemos escribir $|\alpha|^2 |\phi_1|^2 = |\beta|^2 |\phi_2|^2 = |\beta|^2 (1 - |\phi_1|^2)$ y, por tanto, $|\beta|^2 = |\phi_1|^2 (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = |\phi_1|^2$, de donde $|\beta| = |\phi_1|$ y $|\alpha| = |\phi_2|$. Utilizando ahora las propiedades de la factorización interior-exterior de una función, llegamos a $\beta^{\mathrm{e}} = \phi_1^{\mathrm{e}}$ y $\alpha^{\mathrm{e}} = \phi_2^{\mathrm{e}}$. Por otro lado, como $\alpha^{\mathrm{i}}\phi_1^{\mathrm{i}} = -\beta^{\mathrm{i}}\phi_2^{\mathrm{i}}$, tenemos que β^{i} divide a $\alpha^{\mathrm{i}}\phi_1^{\mathrm{i}}$, pero como m.c.d.i. $\{\alpha, \beta\} = 1$, necesariamente β^{i} divide a

$\phi_1^{\rm i}$, es decir, existe una función interior ϑ tal que $\phi_1^{\rm i} = \vartheta\beta^{\rm i}$ y, en consecuencia, $\phi_2^{\rm i} = -\vartheta\alpha^{\rm i}$. Recopilándolo todo llegamos a

$$\phi_1 = \phi_1^{\rm i}\phi_1^{\rm e} = \vartheta\beta^{\rm i}\beta^{\rm e} = \vartheta\beta \quad \text{y} \quad \phi_2 = \phi_2^{\rm i}\phi_2^{\rm e} = -\vartheta\alpha^{\rm i}\alpha^{\rm e} = -\vartheta\alpha,$$

es decir, $\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \vartheta.$

En el caso en que Φ es 2×2, si hacemos el mismo razonamiento con $\begin{bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$, llegamos a que existe una función interior ψ tal que $\begin{bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \psi$. Por tanto, la función Φ se escribiría como

$$\Phi = \begin{bmatrix} \vartheta\beta & \psi\beta \\ -\vartheta\alpha & -\psi\alpha \end{bmatrix},$$

que, contra lo establecido antes, no es una isometría puesto que

$$\Phi(\zeta) = \begin{bmatrix} \vartheta(\zeta)\beta(\zeta) & \psi(\zeta)\beta(\zeta) \\ -\vartheta(\zeta)\alpha(\zeta) & -\psi(\zeta)\alpha(\zeta) \end{bmatrix}$$

tiene determinante igual a cero. Así pues, la única opción es que Φ sea de la forma $\Phi = \begin{bmatrix} \vartheta\beta \\ -\vartheta\alpha \end{bmatrix}$, con lo cual $\ker \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta\beta \\ -\vartheta\alpha \end{bmatrix} H^2$.

Teniendo en cuenta que $\begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$, existe $f \in H^2$ tal que $\beta = \beta\vartheta f$ y $\alpha = \alpha\vartheta f$, por tanto, $\vartheta f = 1$. Tomando módulo, se sigue que, al ser ϑ interior, f tiene que ser tambien interior y, por tanto, ambas deben ser constantes de módulo 1. En consecuencia $\ker \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} H^2$.

Veamos ahora el caso general: sean α y β dos funciones arbitrarias en H^∞ y tomemos $\varphi = \text{m.c.d.i.}\,\{\alpha, \beta\}$ y

$$\omega(\zeta) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta} \log(|\alpha(e^{it})|^2 + |\beta(e^{it})|^2)^{1/2} dt\right].$$

Sabemos que la función ω es una función exterior que verifica $|\omega|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ en casi todo $\mathbb{T}$. Por tanto, como $\text{m.c.d.i.}\left\{\frac{\alpha}{\varphi\omega}, \frac{\beta}{\varphi\omega}\right\} = 1$ y $\left|\frac{\alpha}{\varphi\omega}\right|^2 + \left|\frac{\beta}{\varphi\omega}\right|^2 = 1$, podemos usar lo anterior para concluir que

$$\ker\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{\varphi\omega} & \dfrac{\beta}{\varphi\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta}{\varphi\omega} \\ -\dfrac{\alpha}{\varphi\omega} \end{bmatrix} H^2 = \frac{1}{\varphi\omega}\begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} H^2. \qquad \blacksquare$$

8.2. Corolario. *Sean $\alpha, \beta \in H^\infty$ tales que* m.c.d.i. $\{\alpha, \beta\} = 1$ *y* $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. *Si $p, q \in H^2$ verifican $\alpha p + \beta q = 0$, entonces existe una función $\phi \in H^2$ tal que $p = \phi\beta$ y $q = -\phi\alpha$. Además, si p y q están en H^∞, entonces ϕ tambien está en H^∞.*

Demostración. Por el lema anterior sabemos que existe una función $\phi \in H^2$ tal que $p = \phi\beta$ y $q = -\phi\alpha$. Pero, si p y q están en H^∞, se tiene que la función

$$|p|^2 + |q|^2 = |\phi\beta|^2 + |\phi\alpha|^2 = |\phi|^2 \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) = |\phi|^2 \qquad \text{(II.2)}$$

está acotada y, por tanto, la función ϕ está en H^∞. $\blacksquare$

8.3. Lema. *Si $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}$, con $\theta_{ij} \in H^\infty$, es una contracción no nula como operador en $\mathcal{B}(L^2, L^2)$ y verifica que* $\det\Theta = 0$, *entonces existen una función exterior $w \in H^\infty$ con $|w| \leq 1$, una función interior $m \in H^\infty$ y $a, b, c, d \in H^\infty$ con $|a|^2 + |b|^2 = 1 = |c|^2 + |d|^2$ y* m.c.d.i. $\{a, b\} = 1 =$ m.c.d.i. $\{c, d\}$ *tales que*

$$\Theta = mw\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}.$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que Θ tiene una fila de ceros, por ejemplo, la segunda fila, entonces

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \end{bmatrix}.$$

Tomando $m =$ m.c.d.i. $\{\theta_{11}, \theta_{12}\}$ y w exterior tal que $|w|^2 = |\theta_{11}|^2 + |\theta_{12}|^2$, se tiene

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \end{bmatrix} = mw\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\theta_{11}}{mw} & \dfrac{\theta_{12}}{mw} \end{bmatrix},$$

y el lema queda probado.

Supongamos ahora que ninguna de las filas de la matriz es nula, y tomemos ω_1 y ω_2 funciones exteriores tales que $|\omega_1|^2 = |\theta_{11}|^2 + |\theta_{12}|^2$ y $|\omega_2|^2 = |\theta_{21}|^2 + |\theta_{22}|^2$. Por otro lado, sean $\gamma_1 = \text{m.c.d.i.}\,\{\theta_{11}, \theta_{12}\}$ y $\gamma_2 = \text{m.c.d.i.}\,\{\theta_{21}, \theta_{22}\}$, y consideremos la matriz $\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$ definida por

$$\phi_{11} = \frac{\theta_{11}}{\gamma_1\omega_1}, \quad \phi_{12} = \frac{\theta_{12}}{\gamma_1\omega_1}, \quad \phi_{21} = \frac{\theta_{21}}{\gamma_2\omega_2} \quad \text{y} \quad \phi_{22} = \frac{\theta_{22}}{\gamma_2\omega_2}.$$

Entonces $\det\Phi = \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} = \dfrac{\det\Theta}{\gamma_1\omega_1\gamma_2\omega_2} = 0$. Por la elección de γ_1 y γ_2 es obvio que

$$\text{m.c.d.i.}\,\{\phi_{11}, \phi_{12}\} = 1 \quad \text{y} \quad \text{m.c.d.i.}\,\{\phi_{21}, \phi_{22}\} = 1.$$

Además

$$|\phi_{11}|^2 + |\phi_{12}|^2 = 1 = |\phi_{21}|^2 + |\phi_{22}|^2.$$

Si aplicamos el corolario anterior a las funciones

$$\alpha = \phi_{11}, \quad \beta = \phi_{12}, \quad p = \phi_{22} \quad \text{y} \quad q = -\phi_{21},$$

tenemos que existe una función $\eta \in H^\infty$ tal que

$$\phi_{22} = \eta\phi_{12} \qquad \text{y} \qquad \phi_{21} = \eta\phi_{11}.$$

Además, usando la igualdad (II.2) dada en la demostración de dicho corolario, la función η verifica

$$|\eta|^2 = |\phi_{21}|^2 + |\phi_{22}|^2 = 1.$$

Luego η es, de hecho, una función interior y podemos escribir

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi_{11}\gamma_1\omega_1 & \phi_{12}\gamma_1\omega_1 \\ \eta\phi_{11}\gamma_2\omega_2 & \eta\phi_{12}\gamma_2\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1\omega_1 \\ \eta\gamma_2\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \end{bmatrix}.$$

Ahora, si tomamos $m = \text{m.c.d.i.}\,\{\gamma_1\omega_1, \eta\gamma_2\omega_2\} = \text{m.c.d.i.}\,\{\gamma_1, \eta\gamma_2\}$ y w una función exterior tal que $|w|^2 = |\gamma_1\omega_1|^2 + |\eta\gamma_2\omega_2|^2 = |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2$ nos queda

$$\Theta = mw \begin{bmatrix} \gamma_1\omega_1(mw)^{-1} \\ \eta\gamma_2\omega_2(mw)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \end{bmatrix} = mw \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix},$$

donde, obviamente, $|a|^2 + |b|^2 = 1 = |c|^2 + |d|^2$ y m.c.d.i. $\{a, b\} = 1 =$ m.c.d.i. $\{c, d\}$. Como además Θ es una contracción, entonces se verifica, finalmente, que

$$\begin{aligned} 1 \;\geq\; \|\Theta^*\Theta\| &= \left\| m w \overline{m}\,\overline{w} \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \right\| \\ &= |m|^2 |w|^2 \left\| \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \right\| = |w|^2, \end{aligned}$$

ya que al ser el operador $\begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ una proyección, tiene norma 1. ■

Pasamos ahora a caracterizar las condiciones $\ker(X) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$ en términos de los parámetros del levantamiento.

8.4. Lema. *Sea $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador acotado tal que $XT_1 = T_2X$. Sea Y un levantamiento de X parametrizado por*

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2A\pi_1^* + \tau_2B(\tau_{*1})^*.$$

Entonces $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$ *si, y sólo si,*

$$\operatorname{clos}\left\{ \begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2A\Theta_1^* + \tau_2B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2\,(\Delta_2A\Delta_1 - B\Theta_1)\,L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \\ +\pi_2H^2(\mathcal{E}_2) \end{array} \right\} = \pi_{*2}H^2(\mathcal{E}_{*2}) \oplus \tau_2L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2).$$

Demostración. Primer paso: Veamos que

$$\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2.$$

Al ser X la compresión de Y, podemos escribir, usando también que $\mathcal{G}_2 \perp \mathcal{H}_2$,

$$\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2.$$

Vamos ahora que $P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_2 = Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2$. Como $Y^*\mathcal{G}_{*2} \subseteq \mathcal{G}_{*1}$ tenemos que $Y\mathcal{G}_{*1}^{\perp} \subseteq \mathcal{G}_{*2}^{\perp}$ o, lo que es lo mismo, $Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) \subseteq \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2$. En consecuencia

$$Y\mathcal{H}_1 = P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \oplus P(\mathcal{G}_2)Y\mathcal{H}_1 \subseteq P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_2,$$

con lo que $Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2 \subseteq P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_2$. Por otro lado, si $h_1 \in \mathcal{H}_1$ tenemos

$$Yh_1 = P(\mathcal{H}_2)Yh_1 + P(\mathcal{G}_2)Yh_1,$$

así que

$$P(\mathcal{H}_2)Yh_1 = Yh_1 - P(\mathcal{G}_2)Yh_1 \in Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2.$$

Luego $P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \subseteq Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2$, en consecuencia $Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2 = P(\mathcal{H}_2)Y\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ y, con esto podemos escribir

$$\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2.$$

Segundo paso: Veamos ahora que

$$\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2.$$

Para ello, bastará ver que

$$\operatorname{clos}\{Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2 \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2.$$

Por un lado, usando la inclusión $Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) \subseteq \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2$ que, según vimos antes, siempre se da, tenemos

$$\operatorname{clos}\{Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2\} \subseteq \operatorname{clos}\{Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_2\} \subseteq \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2,$$

por tanto, si $\operatorname{clos}\{Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2$ se tiene que $\operatorname{clos}\{Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2$. Supongamos ahora la igualdad

$$\operatorname{clos}\{Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2 \supseteq \operatorname{clos}\{Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2\}.$$

Sea $h_2 + g_2 \in \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2$, por la igualdad recién escrita sabemos que existen sucesiones $h_{1n} \in \mathcal{H}_1$, $g_{1n} \in \mathcal{G}_1$ y $g_{2n} \in \mathcal{G}_2$ tales que $\lim_n [Y(h_{1n} + g_{1n}) + g_{2n}] = h_2 + g_2$. Como $(Yg_{1n} + g_{2n}) \in \mathcal{G}_2$ se tiene que $h_2 + g_2 \in \operatorname{clos}\{Y\mathcal{H}_1 + \mathcal{G}_2\}$. Esto concluye la prueba del segundo paso.

Último paso: Teniendo en cuenta la expresión de Y y que, por el Lema A.34,

$$\mathcal{H}_i \oplus \mathcal{G}_i = \pi_{*i}H^2(\mathcal{E}_{*i}) \oplus \tau_i L^2(\Delta_i \mathcal{E}_i) \quad \text{para } i = 1, 2,$$

podemos escribir $\operatorname{clos}\{Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_2\}$ como

$$\operatorname{clos}\left\{(\pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*)\left(\pi_{*1}H^2(\mathcal{E}_{*1}) \oplus \tau_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right) + \pi_2 H^2(\mathcal{E}_2)\right\}$$

$$= \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2 A\Theta_1^* + \tau_2 B\Delta_{*1})\, H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2\left(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1\right) L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \\ +\pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) \end{array}\right\},$$

donde hemos usado las relaciones de A.33. Por tanto, usando lo probado en el segundo paso, tenemos que

$$\operatorname{clos}\{Y(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_1) + \mathcal{G}_2\} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_2$$

si, y sólo si,

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2 A\Theta_1^* + \tau_2 B\Delta_{*1})\, H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2\,(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)\, L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \\ +\pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) \end{array}\right\} = \pi_{*2}H^2(\mathcal{E}_{*2}) \oplus \tau_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2).$$

Lo que concluye la demostración. ∎

8.5. Lema. *Sea $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador acotado tal que $XT_1 = T_2X$. Sea*

$$Y = \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*$$

un levantamiento de X. Entonces $\ker(X) = \{0\}$ si, y sólo si,

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_1 A^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2) \\ +\,\tau_{*1}\,(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*)\, L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) \\ +\,\pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) \end{array}\right\} = \pi_1 H^2_-(\mathcal{E}_1) \oplus \tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

Demostración. Primer paso: Al ser X^* la compresión de Y^*, podemos escribir

$$\ker(X) = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{X^*\mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{P(\mathcal{H}_1)Y^*\mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1.$$

Al ser $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{G}_{*1}$, se tiene que esta última igualdad es equivalente a

$$\operatorname{clos}\{P(\mathcal{H}_1)Y^*\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}.$$

Como $Y\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ tenemos que $Y^*\mathcal{G}_2^\perp \subseteq \mathcal{G}_1^\perp$ o, lo que es lo mismo $Y^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*2}) \subseteq \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}$, en consecuencia

$$Y^*\mathcal{H}_2 = P(\mathcal{H}_1)Y^*\mathcal{H}_2 \oplus P(\mathcal{G}_{*1})Y^*\mathcal{H}_2 \subseteq P(\mathcal{H}_1)Y^*\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*1},$$

con lo que $Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1} \subseteq P(\mathcal{H}_1)Y^*\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*1}$. La inclusión contraria se obtiene fácilmente puesto que, si $h_2 \in \mathcal{H}_2$ tenemos

$$P(\mathcal{H}_1)Y^*h_2 = Y^*h_2 - P(\mathcal{G}_{*1})Y^*h_2 \in Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1}.$$

En resumen, con esto podemos escribir

$$\ker(X) = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}.$$

Segundo paso: Veamos ahora que

$$\operatorname{clos}\{Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1} \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{Y^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*2}) + \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}.$$

En primer lugar

$$\operatorname{clos}\{Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1}\} \subseteq \operatorname{clos}\{Y^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*2}) + \mathcal{G}_{*1}\} \subseteq \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1},$$

por tanto, si $\operatorname{clos}\{Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}$ se tiene que

$$\operatorname{clos}\{Y^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*2}) + \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}.$$

Recíprocamente, si

$$\operatorname{clos}\{Y^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*2}) + \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1} \supseteq \operatorname{clos}\{Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1}\},$$

entonces, para cada $h_1 + g_{*1} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}$, existen sucesiones $h_{2n} \in \mathcal{H}_2$, $g_{*2n} \in \mathcal{G}_{*2}$ y $g_{*1n} \in \mathcal{G}_{*1}$ tales que $\lim_n [Y^*(h_{2n} + g_{*2n}) + g_{*1n}] = h_1 + g_{*1}$. Como $(Y^*g_{*2n} + g_{*1n}) \in \mathcal{G}_{*1}$ se tiene que $h_1 + g_{*1} \in \operatorname{clos}\{Y^*\mathcal{H}_2 + \mathcal{G}_{*1}\}$. Concluyendo, podemos escribir

$$\ker(X) = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{clos}\{Y^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*2}) + \mathcal{G}_{*1}\} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{G}_{*1}.$$

Tercer paso: Teniendo en cuenta la expresión de Y^* y que, por el Lema A.34

$$\mathcal{H}_i \oplus \mathcal{G}_{*i} = \pi_i H^2_-(\mathcal{E}_i) \oplus \tau_{*i} L^2(\Delta_{*i}\mathcal{E}_{*i}) \qquad \text{para } i = 1, 2,$$

entonces, usando la parametrización de Y y las relaciones de A.33, podemos escribir $\operatorname{clos}\{Y^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{G}_{*2}) + \mathcal{G}_{*1}\}$ como

$$\operatorname{clos}\left\{(\pi_1 A^*\pi_2^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*(\pi_{*2})^* + \tau_{*1}B^*\tau_2^*)\left(\pi_2 H^2_-(\mathcal{E}_2) \oplus \tau_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right) + \pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\}$$
$$= \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_1 A^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2) \\ + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) \\ + \pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) \end{array}\right\}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_1 A^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2) \\ + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) \\ + \pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) \end{array}\right\} = \pi_1 H^2_-(\mathcal{E}_1) \oplus \tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}),$$

como queríamos demostrar. ■

8.6. Lema. *Sea X un operador acotado tal que $XT_1 = T_2X$ verificando* $\ker(X) = \{0\}$. *Si tenemos un levantamiento Y parametrizado por*

$$Y = \pi_2 A \pi_1^* + \pi_{*2} A_* \Delta_{*1} (\tau_{*1})^* + \tau_2 B (\tau_{*1})^*,$$

entonces $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ *es $*$-exterior.*

Demostración. Puesto que $\ker(X) = \{0\}$, el lema anterior nos dice que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_1 A^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2) \\ + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) \\ + \pi_{*1} H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) \end{array}\right\} = \pi_1 H^2_-(\mathcal{E}_1) \oplus \tau_{*1} L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

Si aplicamos el operador π_1^* a esta igualdad y usamos las relaciones dadas en A.33, obtenemos

$$H^2_-(\mathcal{E}_1) = \pi_1^* \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_1 A^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2) \\ + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) \\ + \pi_{*1} H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) \end{array}\right\}$$

$$\subseteq \operatorname{clos}\left\{A^* H^2_-(\mathcal{E}_2) + \Theta_1^* H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\}.$$

Pero, como $AH^2(\mathcal{E}_1) \subseteq H^2(\mathcal{E}_2)$ y $\Theta_1 H^2(\mathcal{E}_1) \subseteq H^2(\mathcal{E}_{*1})$ y, por tanto, $A^* H^2_-(\mathcal{E}_2) \subseteq H^2_-(\mathcal{E}_1)$ y $\Theta_1^* H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) \subseteq H^2_-(\mathcal{E}_1)$, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{A^* H^2_-(\mathcal{E}_2) + \Theta_1^* H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\} \subseteq H^2_-(\mathcal{E}_1),$$

en consecuencia,

$$H^2_-(\mathcal{E}_1) = \operatorname{clos}\left\{A^* H^2_-(\mathcal{E}_2) + \Theta_1^* H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} A^* & \Theta_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^2_-(\mathcal{E}_2) \\ H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) \end{bmatrix}\right\} = H^2_-(\mathcal{E}_1),$$

es decir, $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior de acuerdo con A.13. ■

8.7. Lema. *Sea X un operador acotado tal que $XT_1 = T_2X$ verificando la condición* $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$. *Si tenemos un levantamiento Y parametrizado por*

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2A\pi_1^* + \tau_2B(\tau_{*1})^*,$$

entonces $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ *es exterior.*

Demostración. Puesto que $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$, el Lema 8.4 afirma que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2A\Theta_1^* + \tau_2B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2\,(\Delta_2A\Delta_1 - B\Theta_1)\,L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \\ +\pi_2H^2(\mathcal{E}_2) \end{array}\right\} = \pi_{*2}H^2(\mathcal{E}_{*2}) \oplus \tau_2L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2).$$

Si aplicamos ahora el operador π_{*2}^* a esta igualdad y usamos de nuevo las relaciones dadas en A.33 obtenemos

$$\begin{aligned} H^2(\mathcal{E}_{*2}) &= \pi_{*2}^*\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2A\Theta_1^* + \tau_2B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2\,(\Delta_2A\Delta_1 - B\Theta_1)\,L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \\ +\pi_2H^2(\mathcal{E}_2) \end{array}\right\} \\ &\subseteq \operatorname{clos}\left\{A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \Theta_2H^2(\mathcal{E}_2)\right\}. \end{aligned}$$

Pero, como $A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) \subseteq H^2(\mathcal{E}_{*2})$ y $\Theta_2H^2(\mathcal{E}_2) \subseteq H^2(\mathcal{E}_{*2})$, tenemos que

$$\operatorname{clos}\left\{A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \Theta_2H^2(\mathcal{E}_2)\right\} = H^2(\mathcal{E}_{*2})$$

o, lo que es lo mismo, que $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ es exterior, de acuerdo con A.13. ∎

La idea ahora es intentar conseguir un recíproco manejable de los lemas anteriores, es decir, encontrar condiciones necesarias para que un operador acotado $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $XT_1 = T_2X$, verifique $\ker(X) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$. Para ello, lo que hacemos es, hablando sin mucha precisión, desglosar las equivalencias dadas en los Lemas 8.4 y 8.5 en piezas más manejables.

8.8. Lema. *Sea $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador acotado tal que $XT_1 = T_2X$. Si tenemos un levantamiento*

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2A\pi_1^* + \tau_2B(\tau_{*1})^* = \pi_2A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2B(\tau_{*1})^*,$$

y los operadores A, A_* y B verifican las condiciones (1) y (2) siguientes

(1) $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ *es exterior,*

(2) $\operatorname{clos}\{(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1)\, L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)$,

entonces $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$.

Demostración. Probemos que se verifica la condición dada en el Lema 8.4. De la condición (1) sabemos por A.13 que

$$\operatorname{clos}\left\{A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \Theta_2 H^2(\mathcal{E}_2)\right\} = H^2(\mathcal{E}_{*2}).$$

Aplicando a ambos lados de la igualdad la isometría π_{*2} tenemos

$$\operatorname{clos}\left\{\pi_{*2} A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \pi_{*2}\Theta_2 H^2(\mathcal{E}_2)\right\} = \pi_{*2} H^2(\mathcal{E}_{*2}).$$

Por otro lado $\pi_{*2}\Theta_2 = \pi_2 - \tau_2\Delta_2$ usando A.33, por lo que la expresión anterior se puede escribir como

$$\operatorname{clos}\left\{\pi_{*2} A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + (\pi_2 - \tau_2\Delta_2)\, H^2(\mathcal{E}_2)\right\} = \pi_{*2} H^2(\mathcal{E}_{*2}). \tag{II.3}$$

Ahora, aplicando la isometría τ_2 a la igualdad de la condición (2) tenemos

$$\operatorname{clos}\left\{\tau_2\,(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1)\, L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = \tau_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2) \tag{II.4}$$

y, utilizando esto junto con la expresión (II.3), obtenemos

$$\begin{aligned}&\operatorname{clos}\left\{\pi_{*2} A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + (\pi_2 - \tau_2\Delta_2) H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\}\\ &\qquad = \pi_{*2} H^2(\mathcal{E}_{*2}) \oplus \tau_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2).\end{aligned}$$

Veamos ahora que se verifica la igualdad

$$\begin{aligned}&\operatorname{clos}\left\{\pi_{*2} A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2\,(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1)\, L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\}\\ &\qquad = \operatorname{clos}\left\{\pi_{*2} A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + (\pi_2 - \tau_2\Delta_2) H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\}.\end{aligned}$$

En primer lugar, comprobemos la inclusión del primer conjunto en el segundo:

$$\begin{aligned}&\operatorname{clos}\left\{\pi_{*2} A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\}\\ &\qquad \subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c}\pi_{*2} A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + (\pi_2 - \tau_2\Delta_2) H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2\Delta_2 H^2(\mathcal{E}_2)\\ +\tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\end{array}\right\}\end{aligned}$$

$$\subseteq \text{clos}\left\{\begin{array}{c} \pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + (\pi_2 - \tau_2\Delta_2)H^2(\mathcal{E}_2) \\ +\tau_2(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \end{array}\right\},$$

donde, en la última inclusión hemos usado que, por (II.4),

$$\tau_2\Delta_2 H^2(\mathcal{E}_2) \subseteq \tau_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \text{clos}\left\{\tau_2(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\}.$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} &\text{clos}\left\{\pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + (\pi_2 - \tau_2\Delta_2)H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} \\ &\quad \subseteq \text{clos}\left\{\pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) - \tau_2\Delta_2 H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} \\ &\quad \subseteq \text{clos}\left\{\pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) + \tau_2(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\}, \end{aligned}$$

usando nuevamente la inclusión deducida de (II.4).

Como hemos dicho, para probar que $\text{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$, quedaría ver, usando el Lema 8.4, que

$$\begin{aligned} &\text{clos}\left\{\pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + (\tau_2\Delta_2 A\Delta_1 - \tau_2 B\Theta_1)\,L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) + \pi_2 H^2(\mathcal{E}_2)\right\} \\ &\qquad = \text{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2 A\Theta_1^* + \tau_2 B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \\ +\pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) \end{array}\right\}. \end{aligned} \tag{II.5}$$

Por ser $\tau_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)$ la imagen del operador τ_2 y (II.4), tenemos

$$\begin{aligned} &\text{clos}\left\{(\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2 A\Theta_1^* + \tau_2 B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1})\right\} \\ &\qquad \subseteq \text{clos}\left\{\pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \tau_2(\Delta_2 A\Theta_1^* + B\Delta_{*1})H^2(\mathcal{E}_{*1})\right\} \\ &\qquad \subseteq \text{clos}\left\{\pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \tau_2(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue, obviamente, la inclusión $\subseteq$ en (II.5). Para demostrar la otra inclusión basta observar que

$$\begin{aligned} \text{clos}\left\{\pi_{*2}A_*H^2(\mathcal{E}_{*1})\right\} &\subseteq \text{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2 A\Theta_1^* + \tau_2 B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ -\tau_2\,(\Delta_2 A\Theta_1^* + B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \end{array}\right\} \\ &\subseteq \text{clos}\left\{\begin{array}{c} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2 A\Theta_1^* + \tau_2 B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2\,(\Delta_2 A\Delta_1 - B\Theta_1)\,L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

de nuevo por (II.4). Esto prueba la igualdad (II.5) y, en consecuencia, que $\text{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$. ∎

8.9. Lema. *Sea $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador acotado tal que $XT_1 = T_2X$. Si tenemos un levantamiento*

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* = \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*,$$

y los operadores A, A_* y B verifican las condiciones (1) y (2) siguientes

(1) $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ *es $*$-exterior,*

(2) $\operatorname{clos}\left\{(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*)\, L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$,

entonces $\ker(X) = \{0\}$.

Demostración. Para probar que $\ker(X) = \{0\}$ usaremos la condición dada en el Lema 8.5. En primer lugar utilizamos la condición (1) junto con la caracterización A.13 de función $*$-exterior para afirmar que

$$\operatorname{clos}\left\{A^*H^2_-(\mathcal{E}_2) + \Theta_1^* H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\} = H^2_-(\mathcal{E}_1).$$

Si aplicamos a esta igualdad la isometría π_1 obtenemos

$$\operatorname{clos}\left\{\pi_1 A^*H^2_-(\mathcal{E}_2) + \pi_1\Theta_1^* H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\} = \pi_1 H^2_-(\mathcal{E}_1).$$

Como se verica $\pi_1\Theta_1^* = \pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1}$ por A.33, esto se puede escribir como

$$\operatorname{clos}\left\{\pi_1 A^*H^2_-(\mathcal{E}_2) + (\pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1})\, H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\} = \pi_1 H^2_-(\mathcal{E}_1),$$

que, sumando el espacio $\tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$ a cada lado, queda

$$\operatorname{clos}\left\{\pi_1 A^*H^2_-(\mathcal{E}_2) + (\pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1}) H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\} + \tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) = \pi_1 H^2_-(\mathcal{E}_1) \oplus \tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

Ahora, aplicando la isometría τ_{*1} a la igualdad de la condición (2) tenemos

$$\operatorname{clos}\left\{\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) \supset \tau_{*1}\Delta_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1}), \quad \text{(II.6)}$$

y, junto con lo anterior obtenemos

$$\operatorname{clos}\left\{\pi_1 A^*H^2_-(\mathcal{E}_2) + (\pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1})H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}$$
$$= \pi_1 H^2_-(\mathcal{E}_1) \oplus \tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}). \quad \text{(II.7)}$$

Para probar que $\ker(X) = \{0\}$ usando el Lema 8.5 y (II.7), bastaría ver la igualdad

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c}(\pi_1 A^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2)\\ + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\\ + \pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\end{array}\right\}$$

$$= \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c}\pi_1 A^* H^2_-(\mathcal{E}_2)\\ + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\\ + \left(\pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1}\right) H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\end{array}\right\}.$$

Comenzamos viendo que el primer espacio está incluido en el segundo. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\} &\subseteq \operatorname{clos}\left\{(\pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1})H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) + \tau_{*1}\Delta_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\right\}\\ &\subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c}\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\\ + \left(\pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1}\right) H^2_-(\mathcal{E}_{*1})\end{array}\right\},\end{aligned}$$

usando la inclusión dada en (II.6). Como también tenemos que

$$\operatorname{clos}\left\{(\tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2)\right\} \subseteq \tau_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}),$$

volvemos a usar la igualdad que aparece en (II.6) para concluir

$$\begin{aligned}&\operatorname{clos}\left\{(\pi_1 A^* + \tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2 + \tau_{*1}B^*\Delta_2)\, H^2_-(\mathcal{E}_2)\right\}\\ &\qquad\subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c}\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\\ +\pi_1 A^* H^2_-(\mathcal{E}_2)\end{array}\right\}\end{aligned}$$

y, por tanto, que el primer espacio está incluido en el segundo. Igualmente, para la inclusión contraria

$$\begin{aligned}&\operatorname{clos}\left\{(\pi_{*1} - \tau_{*1}\Delta_{*1})H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}\\ &\quad\subseteq \operatorname{clos}\left\{\pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) - \tau_{*1}\Delta_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}\\ &\quad\text{(usando nuevamente la inclusión dada en (II.6))}\\ &\quad\subseteq \operatorname{clos}\left\{\pi_{*1}H^2_-(\mathcal{E}_{*1}) + \tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}\end{aligned}$$

y también, usando de nuevo que, por (II.6)

$$\operatorname{clos}\left\{\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*\right) L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}$$

es la imagen del operador τ_{*1}, se tiene

$$\operatorname{clos}\left\{\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2+B^*\Delta_2\right)H^2_-(\mathcal{E}_2)\right\}\subseteq\operatorname{clos}\left\{\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}-B^*\Theta_2^*\right)L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\pi_1A^*H^2_-(\mathcal{E}_2)\right\}&\subseteq\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c}\left(\pi_1A^*+\tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2+\tau_{*1}B^*\Delta_2\right)H^2_-(\mathcal{E}_2)\\ -\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2+B^*\Delta_2\right)H^2_-(\mathcal{E}_2)\end{array}\right\}\\ &\subseteq\operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c}\left(\pi_1A^*+\tau_{*1}\Delta_{*1}(A_*)^*\Theta_2+\tau_{*1}B^*\Delta_2\right)H^2_-(\mathcal{E}_2)\\ +\tau_{*1}\left(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}-B^*\Theta_2^*\right)L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\end{array}\right\}\end{aligned}$$

y, en consecuencia, se tiene probado la inclusión del segundo en el primero. Por lo tanto, tenemos que $\ker(X)=\{0\}$. ■

Por último, antes de comenzar con los casos previos, veamos un resultado que usaremos en algunas de las demostraciones que siguen.

8.10. Lema. *Sean a, b y m funciones en H^∞.*

(1) *Si* m.c.d.i. $\{a,b\}=1$, *entonces existen dos funciones f y g en H^∞ tales que* m.c.d.i. $\{af+bg,m\}=1$.

(2) *Si* m.c.d.i. $\{b,m\}=1$, *entonces existe f en H^∞ tal que* m.c.d.i. $\{a+bf,m\}=1$.

Demostración. (1) Basta considerar, para todo número real $t\in[0,1]$, las funciones $ta+b$. Si denotamos $m_t=$ m.c.d.i. $\{ta+b,m\}$, tenemos que m.c.d.i. $\{m_{t_1},m_{t_2}\}=1$ si $t_1\neq t_2$ ya que si φ divide a m_{t_1} y a m_{t_2} también dividirá a $(t_1-t_2)a$ y, por tanto, a la función a. Como φ divide a a y a t_1a+b, entonces también divide a b y, por tanto, tiene que ser $\varphi=1$. Como todos los m_t dividen a m y son primos entre sí, no puede existir una cantidad no numerable de m_t distintos (ver [Be, pg. 24]), en consecuencia, existen una cantidad no numerable de t_1 y t_2 tales que $m_{t_1}=m_{t_2}$, pero como m.c.d.i. $\{m_{t_1},m_{t_2}\}=1$, tiene que ser $m_{t_1}=m_{t_2}=1$. Por consiguiente, basta tomar $f=t$ y $g=1$.

(2) Al igual que antes, si tomamos para todo número real $t\in[0,1]$, las funciones $a+bt$ y denotamos $m_t=$ m.c.d.i. $\{a+bt,m\}$, tenemos que m.c.d.i. $\{m_{t_1},m_{t_2}\}=1$ si $t_1\neq t_2$ ya que si φ divide a m_{t_1} y a m_{t_2} también dividirá a $(t_1-t_2)b$ y, por tanto, a la función b. Pero φ también divide a m, en consecuencia $\varphi=1$. Como todos los m_t dividen a m y son primos entre sí, al igual que en la demostración anterior, existen t_1 y t_2 tales que $m_{t_1}=m_{t_2}=1$, es decir, se puede tomar f constante igual a t_1. ■

9 Casos previos

Como indicamos en el planteamiento del problema, hay ciertos casos previos que uno debe plantearse antes de intentar resolver el caso general. En primer lugar, veamos que siempre podemos separar la función exterior w de la función característica Θ y estudiar las dos funciones que aparecen por separado, lo cual nos servirá para obtener operadores casi-semejantes a T_Θ, pero no para caracterizarlos a todos, puesto que como comentábamos el recíproco de (II.1) no se verifica.

Caso 1: Supongamos el caso de dos funciones características Θ_1 y Θ_2, de la forma

$$\Theta_1 = wm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

donde $w, m, a, b, c, d \in H^\infty$ son tales que w es una función exterior con $|w| \leq 1$, m es una función interior, $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$ y m.c.d.i. $\{a, b\} =$ m.c.d.i. $\{c, d\} = 1$. En lo que sigue denotaremos por Δ_w a la función $\Delta_w = \sqrt{1 - |w|^2}$. Entonces, si definimos $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{T} : |w(\zeta)| < 1\}$, se tiene que $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{T} : \Delta_w(\zeta) > 0\}$. Si consideramos ahora el espacio $L^2(\Delta_w) = \operatorname{clos}\{\Delta_w L^2\}$, o sea, el rango del operador de multiplicación por Δ_w, tenemos que $L^2(\Delta_w)$ es reductor para el operador de desplazamiento bilateral por lo que, de acuerdo con la conocida caracterización de éstos [Ha2, pr. 146], $L^2(\Delta_w) = \chi_\Omega L^2$. Asimismo, observemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{clos}\{\Delta_w L^2(\Delta_w)\} &= \operatorname{clos}\{\Delta_w \chi_\Omega L^2\} = \chi_\Omega \operatorname{clos}\{\Delta_w L^2\} \\ &= \chi_\Omega \chi_\Omega L^2 = \chi_\Omega L^2 = L^2(\Delta_w). \end{aligned} \tag{II.8}$$

Usaremos estas igualdades a menudo en el resto del capítulo.

Los espacios auxiliares $\mathcal{E}_1$, y $\mathcal{E}_{*1}$ del modelo funcional son espacios de Hilbert de dimensión dos, que tomamos iguales a $\mathbb{C}^2$, mientras que los espacios $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_{*2}$ son de dimensión tres que tomamos iguales a $\mathbb{C}^3$.

9.1. Lema. *Para Θ_1 las correspondientes funciones Δ_1 y Δ_{*1} en el modelo funcional son, respectivamente,*

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{*1} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix}.$$

Los correspondientes subespacios residuales son, respectivamente,

$$L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \chi_\Omega L^2,$$

$$L^2(\Delta_{*1} \mathcal{E}_{*1}) = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \chi_\Omega L^2,$$

donde $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{T} : |w(\zeta)| < 1\}$. *Además se tiene*

$$\operatorname{clos}\{\Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \quad y \quad \operatorname{clos}\{\Delta_{*1} L^2(\Delta_{*1} \mathcal{E}_{*1})\} = L^2(\Delta_{*1} \mathcal{E}_{*1}).$$

Demostración. En primer lugar, hay que observar que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - |w|^2$ son los autovalores de

$$\Delta_1^2 = I - \Theta_1^* \Theta_1 = I - |w|^2 \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix},$$

ya que

$$\Delta_1^2 \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} = (1 - |w|^2) \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_1^2 \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}.$$

Por tanto tenemos que, los autovalores de Δ_1 son las raíces cuadradas de λ_1 y λ_2, o sea 1 y $\sqrt{1 - |w|^2} = \Delta_w$, con los mismos autovectores, de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{bmatrix} d & \overline{c} \\ -c & \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & \Delta_w \overline{c} \\ -c & \Delta_w \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El cálculo para Δ_{*1} es análogo, teniendo en cuenta que

$$\Delta_{*1}^2 = I - \Theta_1 \Theta_1^* = I - |w|^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix}.$$

Para comprobar la igualdad entre los espacios, observemos en primer lugar que como $\mathcal{E}_1 = \mathbb{C}^2$, entonces escribiendo $L^2(\mathcal{E}_1) = L^2 \oplus L^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_1 \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\left(\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&\subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&\subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w)\right\},
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} = L^2 \quad \text{y} \quad \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} = L^2,$$

ya que, los operadores $\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix}$, actuando sobre L^2 y $L^2(\Delta_w)$ respectivamente, son isometrías puesto que

$$\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}^*\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix}^*\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} = 1;$$

por lo tanto, ambos tienen imágenes cerradas y además, en este caso particular, ortogonales. En consecuencia, podemos concluir que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w)\right\} = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w)$$

y, con lo anterior, que

$$L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \subseteq \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w).$$

La otra inclusión es más sencilla ya que, dado cualquier elemento

$$\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} f \in \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \subseteq \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix},$$

se verifica que

$$\Delta_1 \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} f = \left(\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} f,$$

en consecuencia, $\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} f \in L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)$ y, por tanto, se tiene $\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \subseteq L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)$. Análogamente, dado cualquier elemento $g \in L^2$ se tiene $\begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} g \in \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}$ y, además,

$$\begin{aligned} \Delta_1 \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} g &= \left(\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} g \\ &= \Delta_w \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \Delta_w g. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \Delta_w L^2 \subseteq \Delta_1 L^2(\mathbb{C}^2) = \Delta_1 L^2(\mathcal{E}_1)$$

y, tomando clausuras

$$\begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) \subseteq L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1),$$

con lo cual

$$\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) \subseteq L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1),$$

y tenemos probada la primera igualdad. Para la segunda igualdad basta observar, como hemos comentado antes en (II.8), que $L^2(\Delta_w) = \chi_\Omega L^2$.

Para terminar la demostración del lema, basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned} \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) &= \left(\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \right) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \\ &= \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 + \Delta_w \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \Delta_w L^2(\Delta_w), \end{aligned}$$

por tanto, como $\operatorname{clos}\{\Delta_w L^2(\Delta_w)\} = L^2(\Delta_w)$ por la igualdad (II.8), se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1).$$

Análogamente se prueban

$$L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \chi_\Omega L^2$$

y la igualdad

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}),$$

y, por tanto, el lema queda probado. ■

9.2. Lema. *Para Θ_2 los correspondientes operadores Δ_2 y Δ_{*2} en el modelo funcional son*

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \Delta_w & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad y \quad \Delta_{*2} = \begin{bmatrix} \Delta_w & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

con subespacios residuales correspondientes

$$L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) = \begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}.$$

Demostración. Para probar esto, observemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_2^2 &= I - \Theta_2^*\Theta_2 = I - \begin{pmatrix} \overline{w} & 0 \\ 0 & \overline{m}\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I - |w|^2 & 0 \\ 0 & I - \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Puesto que $|c|^2 + |d|^2 = 1$, la submatriz de la esquina inferior derecha nos queda

$$I - \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-|c|^2 & -\bar{c}d \\ -\bar{d}c & 1-|d|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{d}d & -\bar{c}d \\ -\bar{d}c & \bar{c}c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, puesto que $\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix}$ es una proyección, se tiene

$$\left(\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix}$$

y, por tanto,

$$\Delta_2^2 = \begin{bmatrix} I-|w|^2 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_w^2 & 0 \\ 0 & \left(\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix}\right)^2 \end{bmatrix},$$

con lo cual

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \Delta_w & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Para Δ_{*2} razonamos de manera análoga y escribimos

$$\begin{aligned} \Delta_{*2}^2 &= I - \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w} & 0 \\ 0 & \overline{m}\begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I-|w|^2 & 0 \\ 0 & I-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de igual forma, usando ahora que $|a|^2+|b|^2=1$, tenemos que

$$I-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-|a|^2 & -a\overline{b} \\ -b\overline{a} & 1-|b|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\overline{b} & -a\overline{b} \\ -b\overline{a} & a\overline{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}$$

y, usando que es una proyección, podemos escribir

$$\Delta_{*2} = \begin{bmatrix} \Delta_w & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Para probar la igualdad de los espacios basta usar que $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{*2} = \mathbb{C}^3$ y escribir

$$\begin{aligned} L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 L^2(\mathbb{C}^3)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \Delta_w & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \Delta_w L^2 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

ya que al ser las funciones c y d tales que $|c|^2 + |d|^2 = 1$, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} = L^2.$$

Finalmente, usando que el operador $\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$ es una isometría y, por tanto, tiene imagen cerrada, podemos concluir

$$L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \Delta_w L^2 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}.$$

Análogamente

$$\begin{aligned} L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}L^2(\mathbb{C}^3)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \Delta_w & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de nuevo usando que $\begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}$ es una isometría y, por tanto, que tiene imagen cerrada. ■

9.3. Teorema. *T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2}.*

Demostración. Debemos encontrar dos operadores

$$X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \quad \text{y} \quad W : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$$

tales que

$$\begin{aligned} XT_{\Theta_1} &= T_{\Theta_2}X, & \operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} &= \mathcal{H}_2, & \ker(X) &= \{0\}; \\ T_{\Theta_1}W &= WT_{\Theta_2}, & \operatorname{clos}\{W\mathcal{H}_2\} &= \mathcal{H}_1, & \ker(W) &= \{0\}. \end{aligned}$$

Para encontrar dicho operador $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ de acuerdo con los Lemas 8.8 y 8.9, basta elegir unos parámetros A, A_* y B de un levantamiento

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* = \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*,$$

tales que

(1) $A_*\Theta_1 = \Theta_2 A$,

(2) $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ sea exterior,

(3) $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ sea $*$-exterior,

(4) $\operatorname{clos}\{(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1)\, L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)$ y

(5) $\operatorname{clos}\{(\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2} - B^*\Theta_2^*)\, L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$.

Como sabemos que tienen que ser operadores $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$, $A_* \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ y $B \in L^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$, tomamos

$$A = \begin{bmatrix} mac & mad \\ w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}, \quad A_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = 0,$$

donde, suponemos que a no es la función nula. Si fuese $a = 0$, tomaríamos

$$A = \begin{bmatrix} mbc & mbd \\ w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}, \quad A_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = 0,$$

y los cálculos que se hacen son análogos a los que vamos a hacer para el caso en que $a \neq 0$.

Veamos que, en efecto, en dicho caso se verifican las cinco condiciones. Basta hacer los cálculos correspondientes. En primer lugar,

$$\begin{aligned}
A_*\Theta_1 &= wm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = wm \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\
&= wm \begin{bmatrix} ac & ad \\ ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & mac & mad \\ 0 & mbc & mbd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mac & mad \\ w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mac & mad \\ w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = \Theta_2 A.
\end{aligned}$$

Para probar que $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ es exterior, hay que comprobar que se tiene la igualdad $\text{clos}\left\{\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} H_5^2\right\} = H_3^2$, donde H_n^2 denota la suma ortogonal de n copias de H^2. Ahora bien, usando que w es exterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{clos}\left\{\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} H_5^2\right\} &\supseteq \text{clos}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & w & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & mac & mad \\ 0 & 1 & 0 & mbc & mbd \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \text{clos}\left\{\begin{bmatrix} H^2 + wH^2 \\ H^2 \\ H^2 \end{bmatrix}\right\} = H_3^2.
\end{aligned}$$

La función $\Psi = \begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mac & mad \\ w & 0 \\ 0 & w \\ wmac & wmad \\ wmbc & wmbd \end{bmatrix}$ es $*$-exterior si, y sólo si, la función

$$\widetilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{c} & \widetilde{w} & 0 & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{c} & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{b}\widetilde{c} \\ \widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{d} & 0 & \widetilde{w} & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{d} & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{b}\widetilde{d} \end{bmatrix}$$

es exterior por A.13. Pero, como $\widetilde{w}$ es exterior, por serlo w, se tiene

$$\text{clos}\left\{\widetilde{\Psi} H_5^2\right\} \supseteq \text{clos}\left\{\begin{bmatrix} \widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{c} & \widetilde{w} & 0 & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{c} & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{b}\widetilde{c} \\ \widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{d} & 0 & \widetilde{w} & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{d} & \widetilde{w}\widetilde{m}\widetilde{b}\widetilde{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ H_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = H_2^2$$

y, por tanto, $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior.

Puesto que hemos tomado $B = 0$, para obtener (4) hay que probar que

$$\text{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2).$$

Ahora bien, al ser $\text{clos}\{\Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)$ como vimos en el Lema 9.1, se verifica

$$\text{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = \text{clos}\left\{\Delta_2 A \text{clos}\left\{\Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\}\right\} = \text{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\},$$

así que bastará probar que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2).$$

Como

$$\begin{aligned}
\Delta_2 A &= \begin{bmatrix} \Delta_w & 0 & 0 \\ 0 & d\overline{d} & -d\overline{c} \\ 0 & -c\overline{d} & c\overline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mac & mad \\ w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mac\Delta_w & mad\Delta_w \\ wd\overline{d} & -wd\overline{c} \\ -wc\overline{d} & wc\overline{c} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ma\Delta_w \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\ w \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y, por el Lema 9.1,

$$L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w),$$

teniendo en cuenta que $|c|^2 + |d|^2 = 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{clos}\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = \\
&= \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} ma\Delta_w \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\ w \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) \right] \right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ w \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} ma\Delta_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) \right\} \\
&= \begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que si φ es una función de L^∞ distinta de cero en casi todo, entonces se tiene $\operatorname{clos}\{\varphi L^2\} = L^2$ (de acuerdo con la caracterización de los subespacios reductores para el operador de desplazamiento bilateral [Ha2, pr. 142]) con $\varphi = a$, $\varphi = w$ y $\varphi = m$.

Para probar (5), como hemos tomado $B = 0$, debemos probar

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^* \Delta_{*2} L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

Tenemos, por un lado

$$\begin{aligned}
\Delta_{*1}(A_*)^* &= \left[\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y, por otro, usando la expresión del Lema 9.2 para $L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})$, tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \Delta_w & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \Delta_w L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}).
\end{aligned}$$

Con lo cual, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \\
&= \operatorname{clos}\left\{\left[\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&\subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ L^2 \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}(bL^2(\Delta_w) + L^2) + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\bar{a}L^2(\Delta_w)\right\} \\
&\subseteq \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} L^2(\Delta_w) = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})
\end{aligned}$$

donde, en la última expresión hemos usado que $\operatorname{clos}\{\Delta_w L^2(\Delta_w)\} = L^2(\Delta_w)$. Con todo esto llegamos a que

$$\begin{aligned}
\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} \subseteq L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).
\end{aligned}$$

Para probar la inclusión contraria, de acuerdo con el Lema 9.1, un elemento arbitrario de $L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$ será de la forma $\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} g \in L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$ donde $f \in L^2$ y $g \in L^2(\Delta_w)$. Al ser $\bar{a}$ distinto de cero en casi todo, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_w \bar{a} L^2(\Delta_w)\right\} = L^2(\Delta_w),$$

con lo cual, existe una sucesión $(g_n)_{n\geq 0} \subseteq L^2(\Delta_w)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \Delta_w \bar{a} g_n = g$. Tomando $\begin{bmatrix} g_n \\ f - b g_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ L^2 \end{bmatrix}$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left[\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 1 \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} g_n \\ f - b g_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}(b g_n + f - b g_n) + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\Delta_w \bar{a} g_n\right) = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} g$$

y, por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} g \in \operatorname{clos}\left\{\left[\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 1 \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ L^2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Como

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\left[\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 1 \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} L^2(\Delta_w) \\ L^2 \end{bmatrix}\right\}$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} g \in \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\},$$

y tenemos probada la igualdad.

Con esto tenemos probada la existencia de la casi-afinidad X tal que $XT_{\Theta_1} = T_{\Theta_2}X$. Para probar que existe una casi-afinidad $W : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ acotada tal que

$$WT_{\Theta_2} = T_{\Theta_1}W, \quad \ker(W) = \{0\} \quad \text{y} \quad \operatorname{clos}\{W\mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1,$$

basta observar que $WT_{\Theta_2} = T_{\Theta_1}W$ si, y sólo si, $T^*_{\Theta_2}W^* = W^*T^*_{\Theta_1}$, y que las funciones características de $T^*_{\Theta_1}$ y $T^*_{\Theta_2}$ son $\widetilde{\Theta}_1$ y $\widetilde{\Theta}_2$, respectivamente, por A.27. Por tanto podemos utilizar el argumento anterior para encontrar el operador W^*, ya que las funciones $\widetilde{\Theta}_1$ y $\widetilde{\Theta}_2$ resultan ser

$$\widetilde{\Theta}_1 = \widetilde{w}\widetilde{m}\begin{bmatrix} \widetilde{c} \\ \widetilde{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{a} & \widetilde{b} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{\Theta}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{w} & 0 \\ 0 & \widetilde{m}\begin{bmatrix} \widetilde{c} \\ \widetilde{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{a} & \widetilde{b} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

que tienen las mismas estructuras que Θ_1 y Θ_2, y las funciones que las forman tienen las mismas propiedades. ∎

Caso 2: Siguiendo con nuestro planteamiento, el siguiente paso sería intentar ver si se puede separar la función interior m de la función característica

$$\Theta = m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

para estudiarla por separado, es decir, consideremos el caso en que las funciones características son de la forma

$$\Theta_1 = m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Theta_2 = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

donde $m, a, b, c, d \in H^\infty$, siendo m una función interior, m.c.d.i. $\{a, b\} = 1 =$ m.c.d.i. $\{c, d\}$, y $|a|^2 + |b|^2 = 1 = |c|^2 + |d|^2$.

Los espacios auxiliares los podemos elegir como $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{*1} = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{*2} = \mathbb{C}^3$. Para la función Θ_1, usando el Lema 9.1 con $w = 1$, lo cual implica que $\Delta_w = 0$, tenemos que

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Delta_{*1} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix},$$

y que los espacios residuales son

$$L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \qquad \text{y} \qquad L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2.$$

Veamos lo que ocurre para Θ_2.

9.4. Lema. *Para la funcion Θ_2 anterior, los correspondientes operadores Δ_2 y Δ_{*2} son*

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad y \quad \Delta_{*2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

con subespacios residuales

$$L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \qquad y \qquad L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}.$$

Además

$$\Delta_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) \qquad y \qquad \Delta_{*2} L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} I - \Theta_2^*\Theta_2 &= I - \begin{bmatrix} \overline{m} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= I - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |c|^2 & \overline{c}d \\ 0 & \overline{d}c & |d|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d|^2 & -\overline{c}d \\ 0 & -\overline{d}c & |c|^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

se llega a que

$$\Delta_2 = (I - \Theta_2^*\Theta_2)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Si hacemos lo mismo para Δ_{*2}, tenemos

$$\begin{aligned}
I-\Theta_2\Theta_2^* &= I-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{m} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= I-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |b|^2 & -a\overline{b} \\ 0 & -b\overline{a} & |a|^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

por consiguiente

$$\Delta_{*2} = (I-\Theta_2\Theta_2^*)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Para calcular los espacios basta usar que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} = L^2 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} = L^2,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 L^2(\mathcal{E}_2)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}L^2(\mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

La demostración de las dos últimas afirmaciones del lema es una simple comprobación, ya que

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\Delta_{*2} L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}).
\end{aligned}
$$

Lo que finaliza la prueba. ■

9.5. Teorema. *En las condiciones anteriores, T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2} si, y sólo si, existen dos funciones exteriores f y g, y existen ocho funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3$ y g_4 en H^∞ tales que las funciones*

$$mf + maf_1 + mbf_2 + cf_3 + df_4 \quad y \quad mg + mcg_3 + mdg_4 + ag_1 + bg_2$$

son exteriores.

Demostración. Si suponemos que T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2}, entonces existe un operador acotado $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ cumpliendo que $XT_{\Theta_1} = T_{\Theta_2}X$, $\ker(X) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$, para el cual, los parámetros A y A_* de su levantamiento

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* = \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*$$

verifican, entre otras propiedades

$$(1)\ \Theta_2 A = A_*\Theta_1, \qquad (2)\ \begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} \text{ es exterior} \quad \text{y} \quad (3)\ \begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix} \text{ es } *\text{-exterior},$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3) \quad \text{y} \quad A_* = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \\ a_{*31} & a_{*32} \end{bmatrix} \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3).$$

De (1) se tiene que

$$\begin{aligned} A_*\Theta_1 &= \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \\ a_{*31} & a_{*32} \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} c(a_{*11}a + a_{*12}b) & d(a_{*11}a + a_{*12}b) \\ c(a_{*21}a + a_{*22}b) & d(a_{*21}a + a_{*22}b) \\ c(a_{*31}a + a_{*32}b) & d(a_{*31}a + a_{*32}b) \end{bmatrix} \\ &= \Theta_2 A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & ac & ad \\ 0 & bc & bd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma_{11} & ma_{12} \\ aca_{21} + ada_{31} & aca_{22} + ada_{32} \\ bca_{21} + bda_{31} & bca_{22} + bda_{32} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de donde

(1.1) $c(a_{*11}a + a_{*12}b) = a_{11}$,

(1.2) $d(a_{*11}a + a_{*12}b) = a_{12}$,

(1.3) $mc(a_{*21}a + a_{*22}b) = a(ca_{21} + da_{31})$,

(1.4) $md(a_{*21}a + a_{*22}b) = a(ca_{22} + da_{32})$,

(1.5) $mc(a_{*31}a + a_{*32}b) = b(ca_{21} + da_{31})$,

(1.6) $md(a_{*31}a + a_{*32}b) = b(ca_{22} + da_{32})$.

De (1.1) y (1.2) obtenemos que $da_{11} - ca_{12} = 0$ y, por el Corolario 8.2, tenemos que existe una función γ_1 en H^∞ tal que

$$a_{11} = \gamma_1 c \quad \text{y} \quad a_{12} = \gamma_1 d.$$

De (1.1) y (1.2) también obtenemos que $\overline{c}a_{11} + \overline{d}a_{12} = aa_{*11} + ba_{*12}$ y, usando lo anterior, tenemos $\gamma_1 = aa_{*11} + ba_{*12}$.

Multiplicando (1.4) por c y restándole (1.3) multiplicado por d llegamos a

$$-da(ca_{21} + da_{31}) + ca(ca_{22} + da_{32}) = 0.$$

Si hacemos lo mismo con (1.6) y (1.5) obtenemos

$$-db(ca_{21} + da_{31}) + cb(ca_{22} + da_{32}) = 0.$$

Como a y b no pueden ser simultáneamente nulas, se tiene que

$$-d(ca_{21} + da_{31}) + c(ca_{22} + da_{32}) = 0,$$

y, usando de nuevo el Corolario 8.2, que existe una función γ_2 en H^∞ tal que

$$ca_{21} + da_{31} = \gamma_2 c \quad \text{y} \quad ca_{22} + da_{32} = \gamma_2 d. \tag{II.9}$$

Multiplicando ahora (1.5) por a y restándole (1.3) multiplicado por b llegamos a

$$mc[-b(a_{*21}a + a_{*22}b) + a(a_{*31}a + a_{*32}b)] = 0.$$

Si hacemos lo mismo con (1.6) y (1.4) obtenemos

$$md[-b(a_{*21}a + a_{*22}b) + a(a_{*31}a + a_{*32}b)] = 0.$$

Como c y d no pueden ser simultáneamente nulas y $|m| = 1$ en casi todo, se tiene que

$$-b(a_{*21}a + a_{*22}b) + a(a_{*31}a + a_{*32}b) = 0,$$

y, usando de nuevo el Corolario 8.2, que existe una función γ_3 en H^∞ tal que

$$a_{*21}a + a_{*22}b = \gamma_3 a \quad \text{y} \quad a_{*31}a + a_{*32}b = \gamma_3 b. \tag{II.10}$$

Por tanto, de las igualdades (II.9) y (II.10), obtenemos que

$$\begin{aligned} c(a_{21}-\gamma_2)+da_{31} &= 0, \\ ca_{22}+d(a_{32}-\gamma_2) &= 0, \\ a(a_{*21}-\gamma_3)+ba_{*22} &= 0, \\ aa_{*31}+b(a_{*32}-\gamma_3) &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el Corolario 8.2 podemos afirmar que existen cuatro funciones $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ y γ_7 tales que

$$\begin{aligned} a_{21} &= \gamma_2+\gamma_4 d, & a_{31} &= -c\gamma_4, & a_{22} &= \gamma_5 d, & a_{32} &= \gamma_2 - c\gamma_5, \\ a_{*21} &= \gamma_3+\gamma_6 b, & a_{*22} &= -a\gamma_6, & a_{*31} &= \gamma_7 b & a_{*32} &= \gamma_3-\gamma_7 a. \end{aligned}$$

Con todo esto, si sustituimos en las igualdades (1.3), (1.4), (1.5) y (1.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
&(1.3) \quad mc((\gamma_3+\gamma_6 b)a - a\gamma_6 b) = a(c(\gamma_2+\gamma_4 d)-c\gamma_4 d) \Longleftrightarrow acm\gamma_3 = ac\gamma_2, \\
&(1.4) \quad md((\gamma_3+\gamma_6 b)a - a\gamma_6 b) = a(c\gamma_5 d + d(\gamma_2 - c\gamma_5)) \Longleftrightarrow adm\gamma_3 = ad\gamma_2, \\
&(1.5) \quad mc(\gamma_7 ba + (\gamma_3-\gamma_7 a)b) = b(c(\gamma_2+\gamma_4 d)-c\gamma_4 d) \Longleftrightarrow bcm\gamma_3 = bc\gamma_2, \\
&(1.6) \quad md(\gamma_7 ba + (\gamma_3-\gamma_7 a)b) = b(c\gamma_5 d + d(\gamma_2 - c\gamma_5)) \Longleftrightarrow bdm\gamma_3 = bd\gamma_2,
\end{aligned}$$

con lo cual $\gamma_2 = m\gamma_3$ y, por tanto,

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_1 c & \gamma_1 d \\ m\gamma_3+\gamma_4 d & \gamma_5 d \\ -c\gamma_4 & m\gamma_3 - c\gamma_5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_* = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ \gamma_3+\gamma_6 b & -a\gamma_6 \\ \gamma_7 b & \gamma_3-\gamma_7 a \end{bmatrix}.$$

Como, por (2), tenemos que $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ es exterior, entonces los determinantes de todos los menores de orden tres de la matriz

$$\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} & m & 0 & 0 \\ \gamma_3+\gamma_6 b & -a\gamma_6 & 0 & ac & ad \\ \gamma_7 b & \gamma_3-\gamma_7 a & 0 & bc & bd \end{bmatrix}$$

son primos entre sí por A.15. Si numeramos las columnas y denotamos por $|ijk|$ al determinante de las correspondientes columnas i, j y k, tenemos que

$|123| = m\gamma_3(\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6),$

$|124| = aa_{*11}(-bc\gamma_6 - c\gamma_3 + ac\gamma_7) + ba_{*12}(-bc\gamma_6 - c\gamma_3 + ac\gamma_7) = -c\gamma_1(\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6),$

$|125| = -d\gamma_1(\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6),$

$|134| = mcb(\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6),$

$|135| = mbd(\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6),$

$|145| = 0,$

$|234| = -mac(\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6),$

$|235| = -mad(\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6),$

$|345| = 0,$

son funciones primas entre sí, por tanto, $\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6$ es exterior, y las funciones $m\gamma_3$, $c\gamma_1$, $d\gamma_1$, mcb, mbd, mac y mad son primas entre sí. Veamos que esta última condición es equivalente a que m.c.d.i. $\{m, \gamma_1\} = 1$. En efecto, es claro que si $m\gamma_3$, $c\gamma_1$, $d\gamma_1$, mcb, mbd, mac y mad son primas entre sí, entonces m.c.d.i. $\{m, \gamma_1\} = 1$. Recíprocamente, si m.c.d.i. $\{m, \gamma_1\} = 1$ pero existe una función $\varphi \in H^\infty$ interior no trivial que divide a las seis funciones, en particular, divide a $c\gamma_1$ y $d\gamma_1$ pero, como c y d son primas entre sí, entonces φ divide a γ_1. Por otro lado, φ divide a mcb y mbd; por tanto, divide a mb pero, como φ también divide a mac y mad, entonces φ divide a ma, con lo cual, es un divisor de m, porque a y b son primos entre sí.

Usando ahora que por (3), $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior, tenemos que todos los determinantes de los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & d\gamma_1 \\ m\gamma_3 + d\gamma_4 & d\gamma_5 \\ -c\gamma_4 & m\gamma_3 - c\gamma_5 \\ mac & mad \\ mbc & mbd \end{bmatrix}$$

son primos entre sí, por el Teorema A.16, por tanto, las funciones

$|12| = -d\gamma_1(m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5),$

$$|13| = c\gamma_1(m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5),$$

$$|14| = 0,$$

$$|15| = 0,$$

$$|23| = m\gamma_3(m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5),$$

$$|24| = adm(m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5),$$

$$|25| = bdm(m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5),$$

$$|34| = -acm(m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5),$$

$$|35| = -bcm(m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5),$$

$$|45| = 0,$$

son primas entre sí, es decir, la función $m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5$ es exterior, y las funciones $d\gamma_1$, $c\gamma_1$, $m\gamma_3$, adm, bdm, acm y bcm son primas entre sí, pero esta última condición es la misma que apareció antes, y ya vimos que era equivalente a que m.c.d.i. $\{m, \gamma_1\} = 1$.

En definitiva, debido a la existencia de la casi-afinidad X, existen funciones $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$, γ_6 y γ_7 en H^∞ tales que $\gamma_3 - a\gamma_7 + b\gamma_6$ y $m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5$ son funciones exteriores, $a_{11} = \gamma_1 c, a_{12} = \gamma_1 d$ y m.c.d.i. $\{m, \gamma_1\} = 1$. Por tanto, existe una función f exterior tal que $\gamma_3 = f + a\gamma_7 - b\gamma_6$ y, sustituyendo esta función γ_3 en la otra expresión, queda que

$$m\gamma_3 + d\gamma_4 - c\gamma_5 = mf + ma\gamma_7 - mb\gamma_6 + d\gamma_4 - c\gamma_5$$

es exterior; en consecuencia, existen funciones γ_4, γ_5, γ_6 y γ_7 en H^∞ y f exterior tales que $mf + ma\gamma_7 - mb\gamma_6 + d\gamma_4 - c\gamma_5$ es una función exterior.

Por otro lado, sabemos que también existe un operador $W : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ acotado, tal que $T_{\Theta_1} W = W T_{\Theta_2}$, $\ker(W) = \{0\}$ y clos$\{W\mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1$, para el cual, los parámetros A' y A'_* de su levantamiento tienen que verificar, entre otras propiedades

$$(4)\, \Theta_1 A' = A'_* \Theta_2, \qquad (5) \begin{bmatrix} A'_* & \Theta_1 \end{bmatrix} \text{ es exterior} \quad \text{y} \quad (6) \begin{bmatrix} A' \\ \Theta_2 \end{bmatrix} \text{ es } *\text{-exterior},$$

donde

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \end{bmatrix} \in H^\infty(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2) \quad \text{y} \quad A'_* = \begin{bmatrix} a'_{*11} & a'_{*12} & a'_{*13} \\ a'_{*21} & a'_{*22} & a'_{*23} \end{bmatrix} \in H^\infty(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2).$$

De (4) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Theta_1 A' &= \begin{bmatrix} mac & mad \\ mbc & mbd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \end{bmatrix} \\
&= m \begin{bmatrix} a(ca'_{11} + da'_{21}) & a(ca'_{12} + da'_{22}) & a(ca'_{13} + da'_{23}) \\ b(ca'_{11} + da'_{21}) & b(ca'_{12} + da'_{22}) & b(ca'_{13} + da'_{23}) \end{bmatrix} \\
&= A'_* \Theta_2 = \begin{bmatrix} a'_{*11} & a'_{*12} & a'_{*13} \\ a'_{*21} & a'_{*22} & a'_{*23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & ac & ad \\ 0 & bc & bd \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ma'_{*11} & c(aa'_{*12} + ba'_{*13}) & d(aa'_{*12} + ba'_{*13}) \\ ma'_{*21} & c(aa'_{*22} + ba'_{*23}) & d(aa'_{*22} + ba'_{*23}) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

por tanto,

(4.1) $a(ca'_{11} + da'_{21}) = a'_{*11}$,

(4.2) $b(ca'_{11} + da'_{21}) = a'_{*21}$,

(4.3) $ma(ca'_{12} + da'_{22}) = c(aa'_{*12} + ba'_{*13})$,

(4.4) $ma(ca'_{13} + da'_{23}) = d(aa'_{*12} + ba'_{*13})$,

(4.5) $mb(ca'_{12} + da'_{22}) = c(aa'_{*22} + ba'_{*23})$,

(4.6) $mb(ca'_{13} + da'_{23}) = d(aa'_{*22} + ba'_{*23})$.

De (4.1) y (4.2) obtenemos que $aa'_{*21} - ba'_{*11} = 0$ y, por el Corolario 8.2, tenemos que existe una función γ'_1 en H^∞ tal que

$$a'_{*21} = \gamma'_1 b \quad \text{y} \quad a'_{*11} = \gamma'_1 a.$$

De (4.1) y (4.2) también obtenemos que $ca'_{11} + da'_{21} = \bar{a}a'_{*11} + \bar{b}a'_{*21}$ y, usando lo anterior, tenemos

$$\gamma'_1 = ca'_{11} + da'_{21}.$$

Multiplicando (4.4) por c y restándole (4.3) multiplicado por d llegamos a

$$ma[-d(ca'_{12} + da'_{22}) + c(ca'_{13} + da'_{23})] = 0.$$

Si hacemos lo mismo con (4.6) y (4.5) obtenemos

$$mb[-d(ca'_{12} + da'_{22}) + c(ca'_{13} + da'_{23})] = 0.$$

Como m es distinta de cero en casi todo y a y b no pueden ser simultáneamente nulas, se tiene que

$$-d(ca'_{12} + da'_{22}) + c(ca'_{13} + da'_{23}) = 0,$$

y, usando de nuevo el Corolario 8.2, que existe una función γ'_2 en H^∞ tal que

$$ca'_{12} + da'_{22} = \gamma'_2 c \quad \text{y} \quad ca'_{13} + da'_{23} = \gamma'_2 d. \tag{II.11}$$

Multiplicando ahora (4.5) por a y restándole (4.3) multiplicado por b llegamos a

$$-bc(aa'_{*12} + ba'_{*13}) + ac(aa'_{*22} + ba'_{*23}) = 0.$$

Si hacemos lo mismo con (4.6) y (4.4) obtenemos

$$-bd(aa'_{*12} + ba'_{*13}) + ad(aa'_{*22} + ba'_{*23}) = 0.$$

Como c y d no pueden ser simultáneamente nulas, se tiene que

$$-b(aa'_{*12} + ba'_{*13}) + a(aa'_{*22} + ba'_{*23}) = 0,$$

y, usando de nuevo el Corolario 8.2, que existe una función γ'_3 en H^∞ tal que

$$aa'_{*12} + ba'_{*13} = \gamma'_3 a \quad \text{y} \quad aa'_{*22} + ba'_{*23} = \gamma'_3 b. \tag{II.12}$$

Como tenemos, usando (II.11) y (II.12), que

$$\begin{aligned}
c(a'_{12} - \gamma'_2) + da'_{22} &= 0,\\
ca'_{13} + d(a'_{23} - \gamma'_2) &= 0,\\
a(a'_{*12} - \gamma'_3) + ba'_{*13} &= 0,\\
aa'_{*22} + b(a'_{*23} - \gamma'_3) &= 0,
\end{aligned}$$

podemos aplicar de nuevo el Corolario 8.2 para afirmar que existen cuatro funciones $\gamma'_4, \gamma'_5, \gamma'_6$ y γ'_7 tales que

$$\begin{aligned}
a'_{12} &= \gamma'_2 + \gamma'_4 d, \qquad a'_{22} = -c\gamma'_4, \qquad a'_{13} = \gamma'_5 d, \qquad a'_{23} = \gamma'_2 - c\gamma'_5,\\
a'_{*12} &= \gamma'_3 + \gamma'_6 b, \qquad a'_{*13} = -a\gamma'_6, \qquad a'_{*22} = \gamma'_7 b \qquad a'_{*23} = \gamma'_3 - \gamma'_7 a.
\end{aligned}$$

Con todo esto, si sustituimos en las igualdades (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6), y razonando de manera análoga a como lo hicimos con la casi-afinidad X, obtenemos que

$$\gamma_3' = m\gamma_2'$$

y, por tanto,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11}' & \gamma_2' + \gamma_4' d & \gamma_5' d \\ a_{21}' & -c\gamma_4' & \gamma_2' - c\gamma_5' \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_*' = \begin{bmatrix} \gamma_1' a & m\gamma_2' + \gamma_6' b & -a\gamma_6' \\ \gamma_1' b & \gamma_7' b & m\gamma_2' - \gamma_7' a \end{bmatrix}.$$

Por (5) tenemos que $\begin{bmatrix} A_*' & \Theta_1 \end{bmatrix}$ es exterior o, lo que es lo mismo, que los determinantes de todos los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{bmatrix} A_*' & \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1' a & m\gamma_2' + \gamma_6' b & -a\gamma_6' & mac & mad \\ \gamma_1' b & \gamma_7' b & m\gamma_2' - \gamma_7' a & mbc & mbd \end{bmatrix}$$

son primos entre sí, por A.16. Si numeramos las columnas y denotamos por $|ij|$ al determinante de las correspondientes columnas i y j tenemos que

$$|12| = \gamma_1' b(a\gamma_7' - m\gamma_2' - \gamma_6' b),$$

$$|13| = \gamma_1' a(m\gamma_2' - \gamma_7' a + b\gamma_6'),$$

$$|14| = 0,$$

$$|15| = 0,$$

$$|23| = m\gamma_2'(m\gamma_2' - \gamma_7' a + \gamma_6' b),$$

$$|24| = mbc(m\gamma_2' + \gamma_6' b - \gamma_7' a),$$

$$|25| = mbd(m\gamma_2' + \gamma_6' b - \gamma_7' a),$$

$$|34| = acm(-\gamma_6' b - m\gamma_2' + a\gamma_7'),$$

$$|35| = adm(-\gamma_6' b - m\gamma_2' + a\gamma_7'),$$

$$|45| = 0,$$

son primos entre sí, por tanto, $m\gamma_2' - \gamma_7' a + b\gamma_6'$ es exterior y las funciones $\gamma_1' b$, $\gamma_1' a$, $m\gamma_2'$, mbc, mbd, acm y adm son primas entre sí o, equivalentemente, m.c.d.i. $\{\gamma_1', m\} = 1$.

Usando ahora que $\begin{bmatrix} A' \\ \Theta_2 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior, tenemos que todos los determinantes de los menores de orden tres de la matriz

$$\begin{bmatrix} A' \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}' & \gamma_2' + \gamma_4' d & \gamma_5' d \\ a_{21}' & -c\gamma_4' & \gamma_2' - c\gamma_5' \\ m & 0 & 0 \\ 0 & ac & ad \\ 0 & bc & bd \end{bmatrix}$$

son primos entre sí, por tanto, las funciones

$$|123| = m\gamma_2'(\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d),$$

$$|124| = ca_{11}' a(-\gamma_2' - d\gamma_4' + c\gamma_5') + da_{21}' a(-\gamma_2' - d\gamma_4' + c\gamma_5') = -\gamma_1' a(\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d),$$

$$|125| = -\gamma_1' b(\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d),$$

$$|134| = mad(\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d),$$

$$|135| = mbd(\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d),$$

$$|234| = -mac(\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d),$$

$$|235| = -mbc(\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d),$$

$$|245| = 0,$$

$$|345| = 0,$$

son primas entre sí, con lo cual, $\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d$ es exterior.

En definitiva, debido a la existencia de la casi-afinidad W, existen funciones $\gamma_2', \gamma_4', \gamma_5'$, γ_6' y γ_7' tales que $\gamma_2' - c\gamma_5' + \gamma_4' d$ y $m\gamma_2' - \gamma_7' a + b\gamma_6'$ son funciones exteriores, por tanto, existe una función g exterior tal que $\gamma_2' = g + c\gamma_5' - \gamma_4' d$ y

$$m\gamma_2' - \gamma_7' a + b\gamma_6' = mg + mc\gamma_5' - m\gamma_4' d - \gamma_7' a + b\gamma_6'$$

es una función exterior. En consecuencia, $f_1 = \gamma_7$, $f_2 = -\gamma_6$, $f_3 = -\gamma_5$, $f_4 = \gamma_4$, $g_1 = -\gamma_7'$, $g_2 = \gamma_6'$, $g_3 = \gamma_5'$ y $g_4 = -\gamma_4'$ son las funciones de H^∞ tales que

$$mf + maf_1 + mbf_2 + cf_3 + df_4 \quad \text{y} \quad mg + mcg_3 + mdg_4 + ag_1 + bg_2$$

son exteriores.

Recíprocamente, supongamos ahora que existen f y g en H^∞ funciones exteriores, y ocho funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3$ y g_4 en H^∞ tales que las funciones

$$mf + maf_1 + mbf_2 + cf_3 + df_4 \quad \text{y} \quad mg + mcg_3 + mdg_4 + ag_1 + bg_2$$

también son exteriores. Por otro lado tenemos, por el Lema 8.10, que existen funciones $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H^\infty$ tales que

$$\text{m.c.d.i.}\,\{m, ah_1 + bh_2\} = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{m.c.d.i.}\,\{m, ch_3 + dh_4\} = 1.$$

Tomando entonces las funciones

$$\gamma_1 = ah_1 + bh_2, \quad \gamma_1' = ch_3 + dh_4, \quad \gamma_3 = f + af_1 + bf_2 \quad \text{y} \quad \gamma_3' = g + cg_3 + dg_4,$$

y los operadores

$$A = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & d\gamma_1 \\ m\gamma_3 + df_4 & -df_3 \\ -cf_4 & m\gamma_3 + cf_3 \end{bmatrix}, \qquad A_* = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ \gamma_3 - bf_2 & af_2 \\ bf_1 & \gamma_3 - af_1 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} h_3 & \gamma_3' - dg_4 & dg_3 \\ h_4 & cg_4 & \gamma_3' - cg_3 \end{bmatrix}, \qquad A_*' = \begin{bmatrix} a\gamma_1' & m\gamma_3' + bg_2 & -ag_2 \\ b\gamma_1' & -bg_1 & m\gamma_3' + ag_1 \end{bmatrix}$$

y $B = 0$, veamos que se verifican las condiciones

(1) $\Theta_2 A = A_* \Theta_1$,

(2) $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ es exterior,

(3) $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior,

(4) $\operatorname{clos}\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)$,

(5) $\operatorname{clos}\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$,

(6) $\Theta_1 A' = A'_*\Theta_2$,

(7) $\begin{bmatrix} A'_* & \Theta_1 \end{bmatrix}$ es exterior,

(8) $\begin{bmatrix} A' \\ \Theta_2 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior,

(9) $\operatorname{clos}\{\Delta_1 A'\Delta_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)\} = L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)$,

(10) $\operatorname{clos}\big\{\Delta_{*2}(A'_*)^*\Delta_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\big\} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})$,

que, por los Lemas 8.8 y 8.19, nos garantizan la casi-semejanza de los operadores de partida.

Las condiciones (1), (2), (3), (6), (7) y (8) se verifican por la elección de los parámetros. Los cálculos son exactamente iguales a los realizados en la prueba de la necesidad. Veamos las cuatro restantes teniendo en cuenta que

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix}, \qquad L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \qquad L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{*1} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}, \qquad L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2$$

$$\Delta_{*2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}.$$

Para comprobar (4) tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_2 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d|^2 & -d\bar{c} \\ 0 & -c\bar{d} & |c|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma_1 & d\gamma_1 \\ m\gamma_3 + df_4 & -df_3 \\ -cf_4 & m\gamma_3 + cf_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |d|^2 (m\gamma_3 + df_4) + |c|^2 df_4 & -|d|^2 df_3 - d\bar{c}m\gamma_3 - |c|^2 df_3 \\ -cm\bar{d}\gamma_3 - |d|^2 cf_4 - |c|^2 cf_4 & |d|^2 cf_3 + |c|^2 (m\gamma_3 + cf_3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |d|^2 m\gamma_3 + df_4 & -df_3 - d\bar{c}m\gamma_3 \\ -cm\bar{d}\gamma_3 - cf_4 & cf_3 + |c|^2 m\gamma_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_2 AL^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ d(|d|^2 m\gamma_3 + df_4) + c(df_3 + d\bar{c}m\gamma_3) \\ -d(cm\bar{d}\gamma_3 + cf_4) - c(cf_3 + |c|^2 m\gamma_3) \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ dm\gamma_3 + d^2 f_4 + cdf_3 \\ -cm\gamma_3 - dcf_4 - c^2 f_3 \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} (m\gamma_3 + cf_3 + df_4) L^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $m\gamma_3 + cf_3 + df_4 = m(f + af_1 + bf_2) + cf_3 + df_4$ es exterior por hipótesis y, por consiguiente, distinta de cero en casi todo, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{(m\gamma_3 + cf_3 + df_4)L^2\right\} = L^2.$$

Si usamos, además, que por el Lema 9.1 con $w = 1$

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 AL^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A\Delta_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\},$$

y que $\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$ es una isometría, se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} (m\gamma_3 + cf_3 + df_4)L^2 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2).\end{aligned}$$

Para comprobar (5), tenemos

$$\Delta_{*1}(A_*)^* = \begin{bmatrix} |b|^2 & -a\overline{b} \\ -\overline{a}\,b & |a|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{h}_1 & \overline{\gamma}_3 - \overline{b}\,\overline{f}_2 & \overline{b}\,\overline{f}_1 \\ \overline{h}_2 & \overline{a}\,\overline{f}_2 & \overline{\gamma}_3 - \overline{a}\,\overline{f}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |b|^2\overline{h}_1 - a\,\overline{b}\,\overline{h}_2 & |b|^2(\overline{\gamma}_3 - \overline{b}\,\overline{f}_2) - |a|^2\overline{b}\,\overline{f}_2 & |b|^2\overline{b}\,\overline{f}_1 - a\overline{b}\,\overline{\gamma}_3 + |a|^2\overline{b}\,\overline{f}_1 \\ -a\overline{b}\,\overline{h}_2 + |a|^2\overline{h}_2 & -\overline{a}\,b\,\overline{\gamma}_3 + |b|^2\overline{a}\,\overline{f}_2 + |a|^2\overline{a}\,\overline{f}_2 & -|b|^2\overline{a}\,\overline{f}_1 + |a|^2(\overline{\gamma}_3 - \overline{a}\,\overline{f}_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |b|^2\overline{h}_1 - a\,\overline{b}\,\overline{h}_2 & |b|^2\overline{\gamma}_3 - \overline{b}\,\overline{f}_2 & \overline{b}\,\overline{f}_1 - a\overline{b}\,\overline{\gamma}_3 \\ -a\overline{b}\,\overline{h}_2 + |a|^2\overline{h}_2 & -\overline{a}\,b\,\overline{\gamma}_3 + \overline{a}\,\overline{f}_2 & -\overline{a}\,\overline{f}_1 + |a|^2\overline{\gamma}_3 \end{bmatrix},$$

por tanto,

$$\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} |b|^2\overline{h}_1 - a\,\overline{b}\,\overline{h}_2 & |b|^2\overline{\gamma}_3 - \overline{b}\,\overline{f}_2 & \overline{b}\,\overline{f}_1 - a\overline{b}\,\overline{\gamma}_3 \\ -a\overline{b}\,\overline{h}_2 + |a|^2\overline{h}_2 & -\overline{a}\,b\,\overline{\gamma}_3 + \overline{a}\,\overline{f}_2 & -\overline{a}\,\overline{f}_1 + |a|^2\overline{\gamma}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{b}(|b|^2\overline{\gamma}_3 - \overline{b}\,\overline{f}_2) - \overline{a}(\overline{b}\,\overline{f}_1 - a\overline{b}\overline{\gamma}_3) \\ \overline{b}(-\overline{a}\,b\,\overline{\gamma}_3 + \overline{a}\,\overline{f}_2) - \overline{a}(-\overline{a}\,\overline{f}_1 + |a|^2\overline{\gamma}_3) \end{bmatrix} L^2 \\ &= \begin{bmatrix} \overline{b}\,\overline{\gamma}_3 - \overline{b}(\overline{b}\,\overline{f}_2 + \overline{a}\,\overline{f}_1) \\ -\overline{a}\,\overline{\gamma}_3 + \overline{a}(\overline{b}\,\overline{f}_2 + \overline{a}\,\overline{f}_1) \end{bmatrix} L^2 \\ &= \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} (\overline{\gamma}_3 - \overline{a}\,\overline{f}_1 - \overline{b}\,\overline{f}_2)L^2 = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \overline{f} L^2. \end{aligned}$$

Como f es exterior y, por consiguiente, distinta de cero en casi todo, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\overline{f} L^2\right\} = L^2.$$

Si usamos, además, que por el Lema 9.4

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\},$$

y que $\begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}$ es una isometría, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\overline{f}L^2\right\} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}L^2 = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

Para comprobar (9), tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_1 A' &= \begin{bmatrix} |d|^2 & -\overline{c}d \\ -c\overline{d} & |c|^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_3 & \gamma_3' - dg_4 & dg_3 \\ h_4 & cg_4 & \gamma_3' - cg_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |d|^2 h_3 - \overline{c}dh_4 & |d|^2\gamma_3' - dg_4 & dg_3 - \overline{c}d\gamma_3' \\ -c\overline{d}h_3 + |c|^2 h_4 & -c\overline{d}\gamma_3' + cg_4 & -cg_3 + |c|^2\gamma_3' \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_1 A' L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) &= \begin{bmatrix} |d|^2 h_3 - \overline{c}dh_4 & |d|^2\gamma_3' - dg_4 & dg_3 - \overline{c}d\gamma_3' \\ -c\overline{d}h_3 + |c|^2 h_4 & -c\overline{d}\gamma_3' + cg_4 & -cg_3 + |c|^2\gamma_3' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d(|d|^2\gamma_3' - dg_4) - c(dg_3 - \overline{c}d\gamma_3') \\ d(-c\overline{d}\gamma_3' + cg_4) - c(-cg_3 + |c|^2\gamma_3') \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} d(\gamma_3' - cg_3 - dg_4) \\ -c(\gamma_3' - cg_3 - dg_4) \end{bmatrix} L^2 = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} gL^2.
\end{aligned}$$

Como g es exterior y, por consiguiente, distinta de cero en casi todo, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{gL^2\right\} = L^2.$$

Si usamos, además, que por el Lema 9.4

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_1 A' L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_1 A'\Delta_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)\right\},$$

se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_1 A'\Delta_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} gL^2\right\} = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 = L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1).$$

Para comprobar (10), tenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta_{*2}(A'_*)^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |b|^2 & -a\bar{b} \\ 0 & -\bar{a}\,b & |a|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}\,\overline{\gamma'_1} & \bar{b}\,\overline{\gamma'_1} \\ \overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{b}\,\overline{g}_2 & -\bar{b}\,\overline{g}_1 \\ -\bar{a}\,\overline{g}_2 & \overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{a}\,\overline{g}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |b|^2\left(\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{b}\,\overline{g}_2\right) + |a|^2\,\bar{b}\,\overline{g}_2 & -|b|^2\,\bar{b}\,\overline{g}_1 - a\,\bar{b}\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} - |a|^2\,\bar{b}\,\overline{g}_1 \\ -\bar{a}\,b\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} - |b|^2\,\bar{a}\,\overline{g}_2 - |a|^2\,\bar{a}\,\overline{g}_2 & |b|^2\,\bar{a}\,\overline{g}_1 + |a|^2\left(\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{a}\,\overline{g}_1\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |b|^2\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{b}\,\overline{g}_2 & -\bar{b}\,\overline{g}_1 - a\,\bar{b}\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} \\ -\bar{a}\,b\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} - \bar{a}\,\overline{g}_2 & \bar{a}\,\overline{g}_1 + |a|^2\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{*2}(A'_*)^* L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |b|^2\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{b}\,\overline{g}_2 & -\bar{b}\,\overline{g}_1 - a\bar{b}\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} \\ -\bar{a}b\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} - \bar{a}\,\overline{g}_2 & \bar{a}\,\overline{g}_1 + |a|^2\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}(|b|^2\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{b}\,\overline{g}_2) - \bar{a}(-\bar{b}\,\overline{g}_1 - a\,\bar{b}\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3}) \\ \bar{b}(-\bar{a}\,b\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} - \bar{a}\,\overline{g}_2) - \bar{a}(\bar{a}\,\overline{g}_1 + |a|^2\,\overline{m}\,\overline{\gamma'_3}) \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} (\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{a}\,\overline{g}_1 + \bar{b}\,\overline{g}_2) \end{bmatrix} L^2.
\end{aligned}
$$

Como $m\gamma'_3 + ag_1 + bg_2$ es exterior y, por consiguiente, distinta de cero en casi todo, se tiene que

$$
\operatorname{clos}\left\{(\overline{m}\,\overline{\gamma'_3} + \bar{a}\,\overline{g}_1 + \bar{b}\,\overline{g}_2)L^2\right\} = L^2.
$$

Si usamos, además, que por el Lema 9.1 con $w = 1$

$$
\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}(A'_*)^* L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}(A'_*)^*\Delta_{*1} L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\},
$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}(A'_*)^*\Delta_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\left[\begin{array}{c} 0 \\ \left[\begin{array}{c}\overline{b}\\ -\overline{a}\end{array}\right](\overline{m}\overline{\gamma}'_3+\overline{b}\,\overline{g}_2+\overline{a}\,\overline{g}_1)\end{array}\right]L^2\right\}\\ &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ \left[\begin{array}{c}\overline{b}\\ -\overline{a}\end{array}\right]L^2\end{array}\right] = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}).\end{aligned}$$

Lo que finaliza la demostración. ■

Caso 3: Veamos por último, qué condiciones tienen que cumplirse para poder separar la función característica

$$\Theta = \left[\begin{array}{c} a \\ b\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} c & d\end{array}\right]$$

en dos partes, es decir, consideremos el caso en que las funciones características son de la forma

$$\Theta_1 = \left[\begin{array}{c} a \\ b\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} c & d\end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad \Theta_2 = \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} a \\ b\end{array}\right] & 0 \\ 0 & \left[\begin{array}{cc} c & d\end{array}\right]\end{array}\right]$$

donde $a, b, c, d \in H^\infty$ son tales que m.c.d.i. $\{a, b\} = 1 =$ m.c.d.i. $\{c, d\}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ y $|c|^2 + |d|^2 = 1$.

Los espacios auxiliares los podemos elegir como $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{*1} = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{*2} = \mathbb{C}^3$. Para la función Θ_1, usando el Lema 9.1 con $m = 1 = w$, lo cual implica que $\Delta_w = 0$, tenemos que

$$\Delta_1 = \left[\begin{array}{c} d \\ -c\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \overline{d} & -\overline{c}\end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad \Delta_{*1} = \left[\begin{array}{c} \overline{b} \\ -\overline{a}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} b & -a\end{array}\right],$$

y que los espacios residuales son

$$L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) = \left[\begin{array}{c} d \\ -c\end{array}\right]L^2 \qquad \text{y} \qquad L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) = \left[\begin{array}{c} \overline{b} \\ -\overline{a}\end{array}\right]L^2.$$

Veamos lo que ocurre para Θ_2.

9.6. Lema. *Para la funcion Θ_2 anterior, los correspondientes operadores Δ_2 y Δ_{*2} son*

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad y \quad \Delta_{*2} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con subespacios residuales

$$L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \quad y \quad L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} I - \Theta_2^*\Theta_2 &= I - \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{c} \\ 0 & 0 & \overline{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |c|^2 & \overline{c}d \\ 0 & \overline{d}c & |d|^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d|^2 & -\overline{c}d \\ 0 & -\overline{d}c & |c|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

se llega a que

$$\Delta_2 = (I - \Theta_2^*\Theta_2)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Si hacemos lo mismo para Δ_{*2} tenemos

$$\begin{aligned} I - \Theta_2\Theta_2^* &= I - \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{c} \\ 0 & 0 & \overline{d} \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} |a|^2 & a\overline{b} & 0 \\ b\overline{a} & |b|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |b|^2 & -a\overline{b} & 0 \\ -b\overline{a} & |a|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por consiguiente,

$$\Delta_{*2} = (I - \Theta_2 \Theta_2^*)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una vez calculados estos dos operadores, al ser, como ya vimos,

$$\operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix} \right\} = L^2 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix} \right\} = L^2,$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2) &= \operatorname{clos}\left\{ \Delta_2 L^2(\mathcal{E}_2) \right\} = \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \\ L^2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L^2(\Delta_{*2} \mathcal{E}_{*2}) &= \operatorname{clos}\left\{ \Delta_{*2} L^2(\mathcal{E}_{*2}) \right\} = \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \\ L^2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lo que termina la demostración del lema. ∎

9.7. Teorema. *En las condiciones anteriores, T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2} si, y sólo si, existen f_1, f_2, f_3 y $f_4 \in H^\infty$ tales que $f_1a + f_2b + f_3c + f_4d$ es una función exterior.*

Demostración. Si suponemos que T_{Θ_1} y T_{Θ_2} son casi-semejantes, entonces existe un operador acotado $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $XT_{\Theta_1} = T_{\Theta_2}X$, $\ker(X) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$, y los parámetros A y A_* de su levantamiento

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* = \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*$$

verifican por el Lema 8.6, entre otras propiedades, la relación $\Theta_2 A = A_*\Theta_1$ y que $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior.

Si denotamos por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ y $A_* = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \\ a_{*31} & a_{*32} \end{bmatrix}$, se tiene que

$$\Theta_2 A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} \\ ba_{11} & ba_{12} \\ ca_{21} + da_{31} & ca_{22} + da_{32} \end{bmatrix}$$

$$= A_*\Theta_1 = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \\ a_{*31} & a_{*32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix},$$

con lo cual

(1) $\quad aa_{11} = aca_{*11} + bca_{*12}$.

(2) $\quad aa_{12} = ada_{*11} + bda_{*12}$.

(3) $\quad ba_{11} = aca_{*21} + bca_{*22}$.

(4) $\quad ba_{12} = ada_{*21} + bda_{*22}$.

(5) $\quad ca_{21} + da_{31} = aca_{*31} + bca_{*32}$.

(6) $\quad ca_{22} + da_{32} = ada_{*31} + bda_{*32}$.

Si multiplicamos en (1) por d, multiplicamos en (2) por c y restamos ambas ecuaciones queda $a(da_{11} - ca_{12}) = 0$. Si hacemos lo mismo con (3) y (4) queda $b(da_{11} - ca_{12}) = 0$. Como a y b no pueden ser ambas la función nula, deducimos que $da_{11} - ca_{12} = 0$ y, por el Corolario 8.2, existe una función $\gamma_1 \in H^\infty$ tal que

$$a_{11} = \gamma_1 c \qquad \text{y} \qquad a_{12} = \gamma_1 d. \tag{II.13}$$

Si multiplicamos ahora (5) por d, (6) por c y restamos nuevamente, tenemos que

$$d(ca_{21} + da_{31}) - c(ca_{22} + da_{32}) = 0. \tag{II.14}$$

De nuevo, aplicando el Corolario 8.2, sabemos que existe una función $\gamma_2 \in H^\infty$ tal que

$$ca_{21} + da_{31} = \gamma_2 c \qquad \text{y} \qquad ca_{22} + da_{32} = \gamma_2 d. \tag{II.15}$$

Volviendo de nuevo a la ecuación inicial tenemos

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 ca & \gamma_1 da \\ \gamma_1 cb & \gamma_1 db \\ \gamma_2 c & \gamma_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \\ a_{*31} & a_{*32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}.$$

Si nos fijamos, en particular, en la última fila, nos queda

$$\gamma_2 c = (a_{*31}a + a_{*32}b)c \qquad \text{y} \qquad \gamma_2 d = (a_{*31}a + a_{*32}b)d,$$

pero, al no poder ser c y d simultánemente las funciones nulas, deducimos

$$\gamma_2 = a_{*31}a + a_{*32}b.$$

Observemos ahora que, en (II.15),

$$c(a_{21} - \gamma_2) + da_{31} = 0 \qquad \text{y} \qquad ca_{22} + d(a_{32} - \gamma_2) = 0.$$

Podemos entonces aplicar nuevamente el Corolario 8.2 para afirmar que existen dos funciones γ_3 y γ_4 en H^∞ tales que

$$a_{21} - \gamma_2 = \gamma_3 d, \qquad a_{31} = -\gamma_3 c, \qquad a_{32} - \gamma_2 = -\gamma_4 c \qquad \text{y} \qquad a_{22} = \gamma_4 d,$$

o, escrito de otra forma

$$a_{21} = \gamma_2 + \gamma_3 d, \qquad a_{31} = -\gamma_3 c, \qquad a_{32} = \gamma_2 - \gamma_4 c \qquad \text{y} \qquad a_{22} = \gamma_4 d. \tag{II.16}$$

Utilizando las igualdades dadas en (II.13) y (II.16) podemos escribir

$$\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 c & \gamma_1 d \\ \gamma_2 + d\gamma_3 & d\gamma_4 \\ -c\gamma_3 & \gamma_2 - c\gamma_4 \\ ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz tiene que ser $*$-exterior, todos los determinantes de sus menores de orden dos tienen que ser primos entre sí por el Teorema A.16. Si numeramos sus filas, denotamos por $\mid ij \mid$ el determinante correspondiente a las filas i y j, se tiene que las funciones

$$\begin{aligned}
&\mid 12 \mid = \gamma_1 c d\gamma_4 - \gamma_2\gamma_1 d - \gamma_3\gamma_1 d^2 = -\gamma_1 d(\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4), \\
&\mid 13 \mid = \gamma_1 c\gamma_2 - \gamma_1 c^2\gamma_4 + c\gamma_3\gamma_1 d = c\gamma_1(\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4), \\
&\mid 14 \mid = \gamma_1 cad - ac\gamma_1 d = 0, \\
&\mid 15 \mid = \gamma_1 cbd - bc\gamma_1 d = 0, \\
&\mid 23 \mid = \gamma_2^2 - \gamma_2 c\gamma_4 + d\gamma_3\gamma_2 - d\gamma_3 c\gamma_4 + c\gamma_3 d\gamma_4 = \gamma_2(\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4), \\
&\mid 24 \mid = \gamma_2 ad + d\gamma_3 ad - acd\gamma_4 = ad(\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4), \\
&\mid 25 \mid = \gamma_2 bd + d\gamma_3 bd - bcd\gamma_4 = bd(\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4), \\
&\mid 34 \mid = -c\gamma_3 ad - ac\gamma_2 + acc\gamma_4 = -ac(\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4), \\
&\mid 35 \mid = -c\gamma_3 bd - bc\gamma_2 + bc^2\gamma_4 = -bc(\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4), \\
&\mid 45 \mid = acbd - bcad = 0,
\end{aligned}$$

son primas entre sí. Por lo tanto, la función $\gamma_2 + d\gamma_3 - c\gamma_4$ es exterior. Como $\gamma_2 = a_{*31}a + a_{*32}b$, se concluye que existen cuatro funciones f_1, f_2, f_3 y $f_4 \in H^\infty$ tales que $f_1 a + f_2 b + f_3 c + f_4 d$ es exterior.

Recíprocamente, si suponemos ahora que existen esas cuatro funciones, para obtener la casi-semejanza entre los dos operadores tenemos que construir dos operadores acotados $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ y $W : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tales que $XT_{\Theta_1} = T_{\Theta_2}X$, $WT_{\Theta_2} = T_{\Theta_1}W$, $\ker(X) = \{0\}$, $\ker(W) = \{0\}$, clos$\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$ y clos$\{W\mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1$. Tomando $B = 0 = B'$, basta dar los parámetros A, A_*, A' y A'_* de sus correspondientes levantamientos que verifiquen

(1) $\Theta_2 A = A_*\Theta_1$,

(2) $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ exterior,

(3) $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ $*$-exterior,

(4) $\operatorname{clos}\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)$,

(5) $\operatorname{clos}\{\Delta_{*1}(A_*)^* \Delta_{*2} L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$,

(6) $\Theta_1 A' = A'_* \Theta_2$,

(7) $\begin{bmatrix} A'_* & \Theta_1 \end{bmatrix}$ exterior,

(8) $\begin{bmatrix} A' \\ \Theta_2 \end{bmatrix}$ $*$-exterior,

(9) $\operatorname{clos}\left\{\Delta_1 A' \Delta_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)\right\} = L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)$,

(10) $\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}(A'_*)^* \Delta_{*1} L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})$.

Tomamos

$$A = \begin{bmatrix} c & d \\ f_1 a + f_2 b + f_4 d & -f_3 d \\ -f_4 c & f_1 a + f_2 b + f_3 c \end{bmatrix}, \quad A_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} f_3 & 1 & 0 \\ f_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A'_* = \begin{bmatrix} f_2 b + f_3 c + f_4 d & -f_2 a & a \\ -f_1 b & f_1 a + f_3 c + f_4 d & b \end{bmatrix}.$$

Veamos que se verifica todo lo que necesitamos

(1) Basta hacer el producto de las matrices

$$\begin{aligned} \Theta_2 A &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ f_1 a + f_2 b + f_4 d & -f_3 d \\ -f_4 c & f_1 a + f_2 b + f_3 c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \\ c(f_1 a + f_2 b) & d(f_1 a + f_2 b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ f_1 a + f_2 b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = A_* \Theta_1. \end{aligned}$$

(2) $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & 0 & c & d \end{bmatrix}$ es exterior, por A.16, puesto que dos de los determinantes de sus menores son las funciones c y d, que son primas entre sí [A.16].

(3) Para ver que $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ f_1a+f_2b+f_4d & -f_3d \\ -f_4c & f_1a+f_2b+f_3c \\ ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}$ es $*$-exterior basta ver que los determinantes de sus menores de orden dos son primos entre sí. Pero esto se tiene ya que, si numeramos sus filas, denotamos por $\mid ij \mid$ el determinante correspondiente a las filas i y j, se tiene que las funciones

$\mid 12 \mid = -cf_3d - f_1ad - f_2bd - f_4d^2 = -d(f_1a+f_2b+f_3c+f_4d)$,

$\mid 13 \mid = c(f_1a+f_2b+f_3c) + f_4cd = c(f_1a+f_2b+f_3c+f_4d)$,

son primas entre sí, ya que lo son c y d y la función $f_1a+f_2b+f_3c+f_4d$ es exterior.

(4) Como

$$\begin{aligned} \Delta_2 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d\overline{d} & -d\overline{c} \\ 0 & -c\overline{d} & c\overline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ f_1a+f_2b+f_4d & -f_3d \\ -f_4c & f_1a+f_2b+f_3c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d\overline{d}(f_1a+f_2b)+df_4 & -d\overline{c}(f_1a+f_2b)-f_3d \\ -c\overline{d}(f_1a+f_2b)-f_4c & c\overline{c}(f_1a+f_2b)+f_3c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta_2 A \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d\overline{d}(f_1a+f_2b)+df_4 & -d\overline{c}(f_1a+f_2b)-f_3d \\ -c\overline{d}(f_1a+f_2b)-f_4c & c\overline{c}(f_1a+f_2b)+f_3c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ d(|d|^2(f_1a+f_2b)+df_4) + d(|c|^2(f_1a+f_2b)+f_3c) \\ -c(|d|^2(f_1a+f_2b)+df_4) - c(|c|^2(f_1a+f_2b)+f_3c) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ d(f_1a+f_2b+f_3c+f_4d) \\ -c(f_1a+f_2b+f_3c+f_4d) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}(f_1a+f_2b+f_3c+f_4d) \end{bmatrix} L^2\right\}.\end{aligned}$$

Como la función $f_1a + f_2b + f_3c + f_4d$ es exterior y, por tanto, distinta de cero en casi todo, se verifica

$$\operatorname{clos}\left\{(f_1a+f_2b+f_3c+f_4d)L^2\right\} = L^2,$$

con lo cual, concluimos que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2).$$

Ahora bien, ya que

$$\Delta_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 = L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1),$$

tenemos que

$$L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\}.$$

(5) $\Delta_{*1}(A_*)^* = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \overline{f}_1 \\ 0 & 1 & \overline{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a & b\overline{f}_1 - a\overline{f}_2 \end{bmatrix}$, por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a & b\overline{f}_1 - a\overline{f}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).\end{aligned}$$

Usando ahora que

$$\begin{aligned}
\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \\ 0 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}),
\end{aligned}$$

se tiene

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

(6) Por un lado tenemos

$$\Theta_1 A' = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_3 & 1 & 0 \\ f_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_3c+f_4d & c & d \end{bmatrix},$$

y, por otro

$$\begin{aligned}
A'_*\Theta_2 &= \begin{bmatrix} f_2b+f_3c+f_4d & -f_2a & a \\ -f_1b & f_1a+f_3c+f_4d & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(f_3c+f_4d) & ac & ad \\ b((f_3c+f_4d) & bc & bd \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_3c+f_4d & c & d \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

por tanto, tenemos la igualdad que buscábamos.
(7) Veamos que

$$\begin{bmatrix} A'_* & \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2b+f_3c+f_4d & -f_2a & a & ac & ad \\ -f_1b & f_1a+f_3c+f_4d & b & bc & bd \end{bmatrix}$$

es exterior. Si numeramos las columnas, denotamos por $| \; ij \; |$ al determinante de las correspondientes columnas ij, y por ψ a la función exterior $f_1a+f_2b+f_3c+f_4d$, tenemos que

$$\mid 13 \mid = b(f_2 b + f_3 c + f_4 d) + a f_1 b = b\psi \quad \text{y}$$
$$\mid 23 \mid = -f_2 ab - a(f_1 a + f_3 c + f_4 d) = -a\psi,$$

son primas entre sí por ser ψ y a y b son primos entre sí, por tanto $\begin{bmatrix} A'_* & \Theta_1 \end{bmatrix}$ es exterior de acuerdo con A.16.

(8) Como

$$\begin{bmatrix} A' \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 & 1 & 0 \\ f_4 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$$

y dos de los determinantes de los menores de orden tres son a y b, que son primos entre sí, el operador es $*$-exterior.

(9) Un simple cáculo nos lleva a

$$\begin{aligned} \operatorname{clos}\left\{\Delta_1 A' L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 & 1 & 0 \\ f_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} f_3 - \overline{c} f_4 & \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 = L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \Delta_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_1 A' \Delta_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_1 A' L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)\right\} = L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1).$$

(10) Por último, como

$$
\begin{aligned}
(A'_*)^* L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) &= \begin{bmatrix} \overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}+\overline{f}_2\,\overline{b} & -\overline{f}_1\,\overline{b} \\ -\overline{f}_2\,\overline{a} & \overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}+\overline{f}_1\,\overline{a} \\ \overline{a} & \overline{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} \overline{b}(\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}+\overline{f}_2\,\overline{b})+\overline{a}\,\overline{f}_1\overline{b} \\ -\overline{f}_2\,\overline{a}\,\overline{b}-\overline{a}(\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}+\overline{f}_1\,\overline{a}) \\ 0 \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} \overline{b}(\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}) \\ -\overline{a}(\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}) \\ 0 \end{bmatrix} L^2,
\end{aligned}
$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
\Delta_{*2}(A'_*)^* L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) &= \begin{bmatrix} \overline{b}b & -\overline{b}a & 0 \\ -\overline{a}b & \overline{a}a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}(\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}) \\ -\overline{a}(\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}) \\ 0 \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} \overline{b}(\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}) \\ -\overline{a}(\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}) \\ 0 \end{bmatrix} L^2 \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} (\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}) L^2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, la función $\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d}$ es distinta de cero en casi todo puesto que su conjugada es una función exterior y, por lo tanto

$$
\operatorname{clos}\left\{(\overline{f}_1\,\overline{a}+\overline{f}_2\,\overline{b}+\overline{f}_3\,\overline{c}+\overline{f}_4\,\overline{d})L^2\right\} = L^2.
$$

Con lo cual, llegamos a

$$
\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}(A'_*)^* L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \\ 0 \end{bmatrix} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}).
$$

Pero de nuevo, usando que

$$
\Delta_{*1} L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}) = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}),
$$

tenemos

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}(A'_*)^*\Delta_{*1}L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}(A'_*)^*L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\right\} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}),$$

con lo que concluye la prueba. ■

Una vez que hemos visto las condiciones que se tienen que cumplir para poder separar la función característica en partes, el siguiente paso sería caracterizar los operadores casi-semejantes a los operadores que tienen por funciones características dichas partes de Θ. El caso correspondiente a los operadores que tienen por función característica a m o w se engloban en el mismo caso, es decir, en el caso de los operadores completamente no unitarios con función característica escalar, que ya vimos en los Corolarios 7.8 y 7.9 debidos a Wu.

Las otras piezas que nos quedan son $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$. Abordamos entonces ahora el caso de una función característica 2×1, que además nos dará una idea de las condiciones que tienen que cumplirse para tener la casi-semejanza en el caso 2×2. Si queremos dar un resultado de casi-semejanza para una función cualquiera $\Theta = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ donde f y g están en H^∞, la cual es función característica de un operador T_Θ, será de gran utilidad un resultado análogo al del Lema 8.3, para afirmar que Θ se puede escribir como

$$\Theta = wm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

donde $w, m, a, b \in H^\infty$, w es exterior con $|w| \leq 1$, m es interior, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ y $\text{m.c.d.i.}\{a, b\} = 1$. En este caso es muy simple, basta tomar $m = \text{m.c.d.i.}\{f, g\}$, w exterior tal que $|w|^2 = |f|^2 + |g|^2$, $a = \dfrac{f}{wm}$ y $b = \dfrac{g}{wm}$.

Caso 4: Supongamos que las funciones características son de la forma

$$\Theta_1 = m_1 w_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Theta_2 = m_2 w_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

donde $m_i, w_i, a_i, b_i \in H^\infty$ son tales que m_i es una función interior, w_i es una función exterior con $|w_i| \leq 1$, $|a_i|^2 + |b_i|^2 = 1$ y $\text{m.c.d.i.}\{a_i, b_i\} = 1$ para $i = 1, 2$.

Los espacios auxiliares los podemos elegir como $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathbb{C}$ y $\mathcal{E}_{*1} = \mathcal{E}_{*2} = \mathbb{C}^2$.

9.8. Lema. *Dada la función* $\Theta = mw \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ *donde* m *es una función interior,* w *es una función exterior con* $|w| \leq 1$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ *y* m.c.d.i. $\{a, b\} = 1$, *los operadores* Δ *y* Δ_* *son de la forma*

$$\Delta = \Delta_w \qquad y \qquad \Delta_* = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix},$$

con subespacios residuales correspondientes

$$L^2(\Delta\mathcal{E}) = L^2(\Delta_w) = \chi_\Omega L^2 \qquad y \qquad L^2(\Delta_*\mathcal{E}_*) = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \chi_\Omega L^2,$$

donde $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{T} : |w(\zeta)| < 1\}$.

Demostración. En primer lugar $\Delta^2 = 1 - \Theta^*\Theta = 1 - |w|^2$, por tanto, $\Delta = \Delta_w$. Para Δ_* tenemos

$$\Delta_*^2 = I - \Theta\Theta^* = I - |w|^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - |w|^2$ ya que,

$$\Delta_*^2 \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_*^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (1 - |w|^2) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Por tanto, tenemos que los autovalores de Δ_* son las raíces cuadradas de λ_1 y λ_2 con los mismos autovectores, de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_* &= \begin{bmatrix} \bar{b} & a \\ -\bar{a} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \\ \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} & \Delta_w a \\ -\bar{a} & \Delta_w b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \\ \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para comprobar la igualdad entre los espacios, como $\Delta = \Delta_w$, para la primera no hay que probar nada. Para la segunda, observemos en primer lugar que

$$
\begin{aligned}
L^2(\Delta_*\mathcal{E}_*) &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_*\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\left(\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&\subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}\right\} \\
&\subseteq \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} L^2(\Delta_w)\right\}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como los operadores $\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, actuando sobre L^2 y $L^2(\Delta_w)$, respectivamente, son isometrías, ya que

$$
\left(\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\right)^* \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} = 1
$$

y

$$
\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)^* \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1,
$$

ambos tienen imágenes cerradas y, en este caso particular, ortogonales. En consecuencia, podemos concluir que

$$
\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} L^2(\Delta_w)\right\} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} L^2(\Delta_w).
$$

La otra inclusión es sencilla ya que, dado cualquier elemento

$$
\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f \in \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} L^2 \subseteq \begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix},
$$

se verifica que

$$
\Delta_*\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f = \left(\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} + \Delta_w \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ -\bar{a} \end{bmatrix} f,
$$

en consecuencia $\begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} f \in L^2(\Delta_* \mathcal{E}_*)$ y, por tanto, se tiene $\begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{a} \end{bmatrix} L^2 \subseteq L^2(\Delta_* \mathcal{E}_*)$.
Análogamente se probaría con $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} L^2(\Delta_w)$. ■

Antes de enunciar el teorema que caracteriza la casi-semejanza entre los operadores correspondientes a estas funciones características, debemos introducir algunos conceptos y ver dos lemas que nos serán de utilidad. Comenzamos recordando la definición de lo que se conoce como la *clase de Smirnov*

$$\mathcal{N}^+ = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in H^\infty \text{ donde } g \text{ es una función exterior} \right\},$$

y el *ideal de Smirnov* generado por $a, b \in H^\infty$

$$\mathcal{N}^+[a,b] = \{ fa + gb : f, g \in \mathcal{N}^+ \}.$$

Tambien introducimos la notación $\vartheta_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$ y $\vartheta_i^{\mathrm{ad}} = \begin{bmatrix} b_i & -a_i \end{bmatrix}$, por tanto, las funciones características se reescriben como $\Theta_i = m_i w_i \vartheta_i$. Conviene tener en cuenta las relaciones que aparecen con esta notación, dos de las cuales son $\vartheta_i^{\mathrm{ad}} \vartheta_i = 0$ y $\vartheta_i^* \vartheta_i = 1$. Si tenemos una matriz $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, denotamos

$$B^{\mathrm{ad}} = \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix},$$

con lo cual se tendrá que

$$(\det B) I = B B^{\mathrm{ad}} = B^{\mathrm{ad}} B \qquad \text{y} \qquad \det B = \det B^{\mathrm{ad}}.$$

Esta matriz B^{ad} no es más que la matriz adjunta que aparece en los libros de álgebra elemental para calcular la inversa de la matriz B, en el caso de que sea invertible. Con esta notación tenemos la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \vartheta^{\mathrm{ad}} B^{\mathrm{ad}} &= \begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bb_4 + ab_3 & -bb_2 - ab_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.17)} \\ &= \begin{bmatrix} bb_2 + ab_1 \\ bb_4 + ab_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{ad}} = \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{ad}} = (B\vartheta)^{\mathrm{ad}}. \end{aligned}$$

Introducimos ahora la siguiente clase de matrices 2×2

$$\mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} : \alpha_{ij} \in \mathcal{N}^+ \right\}$$

Se verifica que para cualquier $\Lambda \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ existen una función φ exterior y una matriz $M \in H^\infty[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ tal que $\Lambda = \frac{1}{\varphi} M$. En efecto, sea $\Lambda \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ con lo cual,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} f_1/g_1 & f_2/g_2 \\ f_3/g_3 & f_4/g_4 \end{bmatrix} \qquad \text{para ciertos } f_i, g_i \in H^\infty \text{ con } g_i \text{ exterior para todo } i = 1, 2, 3, 4.$$

Basta, por tanto, tomar $\varphi = g_1 g_2 g_3 g_4$ para tener $M = \varphi\Lambda \in H^\infty[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$. Definimos entonces, para Λ tal que $\det \Lambda \neq 0$, $(\det \Lambda)^{\mathrm{i}}$ como $(\det M)^{\mathrm{i}}$. Veamos que está bien definido, para ello observemos en primer lugar que si $\det \Lambda \neq 0$ entonces $\det M \neq 0$ puesto que $\varphi\Lambda = M$ y, por tanto, $\varphi^2 \det \Lambda = \det M$. Como φ es exterior, es distinta de cero, en consecuencia, $\det \Lambda \neq 0$ si, y sólo si, $\det M \neq 0$. De hecho, como $\det M \in H^\infty$ es, por tanto, una función distinta de cero en casi todo y tiene sentido considerar su parte interior. Además, esta definición es independiente de la función exterior φ elegida ya que, si tenemos $M_1 = \varphi_1 \Lambda$ y $M_2 = \varphi_2 \Lambda$ en $H^\infty[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ con φ_1 y φ_2 funciones exteriores, entonces $\frac{M_1}{\varphi_1} = \frac{M_2}{\varphi_2}$ y, por tanto, $\varphi_2 M_1 = \varphi_1 M_2$. En consecuencia

$$(\det(\varphi_2 M_1))^{\mathrm{i}} = (\varphi_2^2 \det(M_1))^{\mathrm{i}} = (\det M_1)^{\mathrm{i}}$$

es igual a

$$(\det(\varphi_1 M_2))^{\mathrm{i}} = (\varphi_1^2 \det(M_2))^{\mathrm{i}} = (\det M_2)^{\mathrm{i}}$$

por ser φ_1 y φ_2 funciones exteriores. Definamos, por último, el conjunto

$$\det\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{i}} = \left\{ (\det \Lambda)^{\mathrm{i}} : \Lambda \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2] \;\text{ y }\; \Lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\}.$$

9.9. Lema. *Sea $a, b, c, d, m \in H^\infty$ tales que*

(1) *m es interior,*

(2) $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$,

(3) m.c.d.i. $\{a, b\}$ = m.c.d.i. $\{c, d\} = 1$,

(4) $\mathcal{N}^+[a,b] = \mathcal{N}^+[c,d]$.

Entonces existe $f_0 \in \det\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{i}}$ *tal que* m.c.d.i. $\{f_0, m\} = 1$.

Demostración. Debemos encontrar $\Lambda \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2]$ tal que $\Lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ y m.c.d.i. $\{(\det \Lambda)^{\mathrm{i}}, m\} = 1$.

Como $\mathcal{N}^+[c,d] = \mathcal{N}^+[a,b]$, se tiene que $c, d \in \mathcal{N}^+[a,b]$, con lo cual existen cuatro funciones $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22} \in \mathcal{N}^+$ tales que

$$\lambda_{11}a + \lambda_{12}b = c \qquad \text{y} \qquad \lambda_{21}a + \lambda_{22}b = d.$$

En otras palabras, si tomamos

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$\Lambda \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2] \qquad \text{y} \qquad \Lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Si m.c.d.i. $\{(\det \Lambda)^{\mathrm{i}}, m\} = 1$ ya habríamos terminado. Por tanto, supongamos que,

$$\text{o bien } \det \Lambda = 0, \qquad \text{o bien m.c.d.i. } \{(\det \Lambda)^{\mathrm{i}}, m\} \neq 1. \tag{II.18}$$

Señalemos en primer lugar que, obviamente, todas las matrices $\Lambda' \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2]$ que verifican la condición $\Lambda' \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ se pueden escribir como $\Lambda' = \Lambda + \Lambda''$, donde $\Lambda'' \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2]$ es tal que $\Lambda'' \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$.

Veamos ahora cómo son todas las matrices $\Lambda'' \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2]$ tales que $\Lambda'' \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$. Si escribimos

$$\Lambda'' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{con } \alpha_{ij} \in \mathcal{N}^+,$$

sabemos que existe una función exterior $h \in H^\infty$ tal que $h\Lambda'' = M \in H^\infty[\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2]$ y

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = h\Lambda'' \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0.$$

Supongamos que

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con } \mu_{ij} \in H^\infty.$$

Entonces

$$\mu_{11}a + \mu_{12}b = 0 \qquad \text{y} \qquad \mu_{21}a + \mu_{22}b = 0,$$

por tanto, por el Corolario 8.2, existen $\phi, \psi \in H^\infty$ tales que

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi b & -\phi a \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi b & -\psi a \end{bmatrix},$$

en consecuencia, se tiene que Λ'' es de la forma

$$\Lambda'' = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} \phi b & -\phi a \\ \psi b & -\psi a \end{bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}$$

para cualesquiera $\phi, \psi, h \in H^\infty$ con h exterior.

Veamos a continuación cual es la parte interior del determinante de cualquier elemento $\Lambda' \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ tal que $\Lambda'\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$. Por lo anterior, sabemos que Λ' se puede escribir como

$$\Lambda' = \Lambda + \Lambda'' = \Lambda + \frac{1}{h}\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix}$$

con $\phi, \psi, h \in H^\infty$ y h exterior. Tomamos $\lambda \in H^\infty$ exterior tal que $\lambda\Lambda \in H^\infty[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$, y tenemos que

$$h\lambda\Lambda' = h\lambda\Lambda + \lambda\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -a \end{bmatrix} \in H^\infty[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2].$$

Como

$$\det(h\Lambda') = \det\left[h\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi b & -\phi a \\ \psi b & -\psi a \end{bmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} h\lambda_{11} + \phi b & h\lambda_{12} - \phi a \\ h\lambda_{21} + \psi b & h\lambda_{22} - \psi a \end{bmatrix}$$

$$= h^2\lambda_{11}\lambda_{22} - h\lambda_{11}\psi a + \phi b h\lambda_{22} - \phi b\psi a - h^2\lambda_{21}\lambda_{12} + h\lambda_{21}\phi a - \psi b h\lambda_{12} + \psi b\phi a$$

$$= h^2\det(\Lambda) - h\psi(\lambda_{11}a + \lambda_{12}b) + h\phi(\lambda_{21}a + b\lambda_{22}) = h(h\det(\Lambda) - \psi c + \phi d),$$

tenemos

$$\det(\lambda h\Lambda') = \lambda^2\det(h\Lambda') = h\left[h(\lambda^2\det(\Lambda)) - (\lambda^2\psi)c + (\lambda^2\phi)d\right],$$

por tanto, teniendo en cuenta que λ y h son exteriores

$$(\det(\Lambda'))^{\mathrm{i}} = (\det(\lambda h \Lambda'))^{\mathrm{i}} = \left[h(\lambda^2 \det(\Lambda)) - (\lambda^2\psi)c + (\lambda^2\phi)d\right]^{\mathrm{i}}.$$

Para terminar, necesitamos encontrar $\psi, \phi, h \in H^\infty$ con h exterior, teles que la expresión anterior sea una función relativamente prima con m.

Como c y d cumplen que $|c|^2 + |d|^2 = 1$ y m.c.d.i. $\{c, d\} = 1$, por el Lema 8.10 sabemos que existen dos funciones $\delta, \gamma \in H^\infty$ tales que m.c.d.i. $\{\delta c + \gamma d, m\} = 1$. Tomemos las funciones $g = \lambda^2(\delta c + \gamma d)$, que verifica m.c.d.i. $\{g, m\} = 1$, y $f = h(\lambda^2 \det(\Lambda))$. Tenemos por hipótesis (II.18) que, o bien $f = 0$, o bien m.c.d.i. $\{f, m\} \neq 1$.

Si $f = 0$ entonces tomando $\psi = -\delta$ y $\phi = \gamma$ se tiene

$$(\det(\Lambda'))^{\mathrm{i}} = \left[\lambda^2(-\psi c + \phi d)\right]^{\mathrm{i}} = g^{\mathrm{i}},$$

con lo cual, m.c.d.i. $\left\{(\det(\Lambda'))^{\mathrm{i}}, m\right\} = 1$.

Si, por el contrario, tenemos que m.c.d.i. $\{f, m\} \neq 1$, aplicando el Lema 8.10 a f, g y m, tenemos que existe una función $g' \in H^\infty$ tal que m.c.d.i. $\{f + gg', m\} = 1$. Con lo cual, tomando

$$\psi = -\delta g' \in H^\infty \qquad \text{y} \qquad \phi = \gamma g' \in H^\infty,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \det(\Lambda')^{\mathrm{i}} &= \det(\lambda h \Lambda')^{\mathrm{i}} = \left[h(\lambda^2 \det(\Lambda)) - (\lambda^2\psi)c + (\lambda^2\phi)d\right]^{\mathrm{i}} = \left[f + \lambda^2\delta g' c + \lambda^2 \gamma g' d\right]^{\mathrm{i}} \\ &= \left[f + \lambda^2(\delta c + \gamma d)g'\right]^{\mathrm{i}} = [f + gg']^{\mathrm{i}}, \end{aligned}$$

que sabemos que es prima con m. ■

Recordando que $\Omega_i = \{\zeta \in \mathbb{T} : |w_i(\zeta)| < 1\}$ para $i = 1, 2$, podemos establecer el siguiente resultado.

9.10. Teorema. *En las condiciones anteriores T_{Θ_1} es casi semejante a T_{Θ_2} si, y sólo si, $m_1 = m_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$ en casi todo y $\mathcal{N}^+[a_1, b_1] = \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$.*

Demostración. Si T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2}, entonces existe un operador acotado $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ cumpliendo que $XT_{\Theta_1} = T_{\Theta_2}X$, $\ker(X) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$. Sea

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* = \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*$$

un levantamiento de X, entonces los parámetros A y A_* verifican, entre otras condiciones,

(1) $\Theta_2 A = A_* \Theta_1$, (2) $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ es exterior y (3) $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior,

donde $A \in H^\infty$ y $A_* = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{bmatrix} \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

De (1) obtenemos $m_2 w_2 A \vartheta_2 = m_1 w_1 A_* \vartheta_1$, es decir

$$m_2 w_2 A a_2 = m_1 w_1 (a_{*11} a_1 + a_{*12} b_1) \quad \text{y} \quad m_2 w_2 A b_2 = m_1 w_1 (a_{*21} a_1 + a_{*22} b_1),$$

por tanto, m_1 divide a $m_2 A a_2$ y a $m_2 A b_2$. Como a_2 y b_2 no tienen ningún factor interior común, m_1 tiene entonces que dividir a $m_2 A$. Por otro lado, multiplicando en (1) a la izquierda por el vector $\vartheta_2^{\mathrm{ad}}$ y usando que $\vartheta_2^{\mathrm{ad}} \vartheta_2 = 0$ llegamos a que $m_1 w_1 \vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \vartheta_1 = 0$, es decir,

$$\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \vartheta_1 = \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Aplicando el Corolario 8.2 a los operadores

$$\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

podemos afirmar que existen dos funciones f_1 y f_2 en H^∞ tales que

$$\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{bmatrix} = f_1 \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = f_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

o, reescrito con nuestra notación $\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* = f_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}}$ y $A_* \vartheta_1 = f_2 \vartheta_2$. Utilizando estas expresiones tenemos que

$$(\det A_*) \vartheta_1 = A_*^{\mathrm{ad}} A_* \vartheta_1 = f_2 A_*^{\mathrm{ad}} \vartheta_2.$$

Ahora bien, $A_*^{\mathrm{ad}} \vartheta_2 = (\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_*)^{\mathrm{ad}}$, por (II.17), es decir, $A_*^{\mathrm{ad}} \vartheta_2 = (f_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f_1 \vartheta_1$ y, por tanto, $(\det A_*) \vartheta_1 = f_2 A_*^{\mathrm{ad}} \vartheta_2 = f_1 f_2 \vartheta_1$, de donde se deduce que $(\det A_*) = f_1 f_2$.

Por otro lado, sabemos que también existe un operador $W : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ acotado, tal que $T_{\Theta_1} W = W T_{\Theta_2}$, $\ker(W) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{W \mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1$. Sea

$$Y' = \pi_{*1} A_*' (\pi_{*2})^* + \tau_1 \Delta_1 A' \pi_2^* + \tau_1 B' (\tau_{*2})^* = \pi_1 A' \pi_2^* + \pi_{*1} A_*' \Delta_{*2} (\tau_{*2})^* + \tau_1 B' (\tau_{*2})^*$$

un levantamiento de W, entonces los parámetros A' y A'_* verifican, entre otras propiedades

(4) $\Theta_1 A' = A'_* \Theta_2$, (5) $\begin{bmatrix} A'_* & \Theta_1 \end{bmatrix}$ es exterior y (6) $\begin{bmatrix} A' \\ \Theta_2 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior,

donde $A' \in H^\infty$ y $A'_* = \begin{bmatrix} a'_{*11} & a'_{*12} \\ a'_{*21} & a'_{*22} \end{bmatrix} \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

Con un razonamiento análogo al anterior, teniendo en cuenta ahora que Θ_1 y Θ_2 tienen papeles intercambiados, llegamos a que m_2 divide a $m_1 A'$ y existen dos funciones f_3 y f_4 en H^∞ tales que $\vartheta_1^{\mathrm{ad}} A'_* = f_3 \vartheta_2^{\mathrm{ad}}$ y $A'_* \vartheta_2 = f_4 \vartheta_1$, con $(\det A'_*) = f_3 f_4$.

Como $\Theta_2 = m_2 w_2 \vartheta_2$, la condición (2) nos dice que $\begin{bmatrix} A_* & m_2 w_2 \vartheta_2 \end{bmatrix}$ es exterior y, por tanto, todos los determinantes de sus menores de orden dos son primos entre sí. Si escribimos la matriz completa

$$\begin{bmatrix} A_* & m_2 w_2 \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} & m_2 w_2 a_2 \\ a_{*21} & a_{*22} & m_2 w_2 b_2 \end{bmatrix},$$

observamos que las funciones que tienen que ser primas entre sí son las funciones

$$\det A_* = a_{*11} a_{*22} - a_{*21} a_{*12},$$

$$m_2 w_2 (a_{*11} b_2 - a_{*21} a_2) = m_2 w_2 \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{*11} \\ a_{*21} \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$m_2 w_2 (a_{*12} b_2 - a_{*22} a_2) = m_2 w_2 \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{*12} \\ a_{*22} \end{bmatrix}$$

o, lo que es lo mismo, las componentes del vector

$$\begin{bmatrix} \det A_* & m_2 w_2 \vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 f_2 & m_2 w_2 f_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}} \end{bmatrix}$$

son primas entre sí. En consecuencia, f_1 tiene que ser exterior y m.c.d.i. $\{m_2, f_2\} = 1$. Ahora bien, como f_1 es exterior y se verifica $\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* = f_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}}$, entonces cada elemento

$a_1 f + b_1 g \in \mathcal{N}^+[a_1, b_1]$, con $f, g \in \mathcal{N}^+$, se puede escribir como

$$a_1 f + b_1 g = \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} = \vartheta_1^{\mathrm{ad}} \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} = \frac{1}{f_1} \vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{f_1} \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{-a_{*21} g + a_{*22} f}{f_1} \right) a_2 + \left(\frac{a_{*11} g - a_{*12} f}{f_1} \right) b_2.$$

Al ser el espacio $\mathcal{N}^+$ invariante bajo la multiplicación por elementos de H^∞ e invariante bajo la multiplicación por una función de la forma $\frac{1}{\varphi}$ con $\varphi \in H^\infty$ y exterior, se tiene que, como f_1 es exterior y $g, f \in \mathcal{N}^+$, los coeficientes $\left(\frac{-a_{*21} g + a_{*22} f}{f_1} \right)$ y $\left(\frac{a_{*11} g - a_{*12} f}{f_1} \right)$ están en $\mathcal{N}^+$ y, por tanto, $a_1 f + b_1 g \in \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$. En consecuencia $\mathcal{N}^+[a_1, b_1] \subseteq \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$.

De manera análoga, usando la propiedad (5), obtenemos que las tres componentes del vector

$$\begin{bmatrix} \det A'_* & m_1 w_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}} A'_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 f_4 & m_1 w_1 f_3 \vartheta_2^{\mathrm{ad}} \end{bmatrix}$$

son primas entre sí y, por tanto, deducimos que f_3 es exterior, m.c.d.i. $\{m_1, f_4\} = 1$ y $\mathcal{N}^+[a_2, b_2] \subseteq \mathcal{N}^+[a_1, b_1]$.

Usando ahora (3) tenemos que las funciones A, $m_1 w_1 a_1$ y $m_1 w_1 b_1$ son primas entre sí. Por tanto, m_1 y A son primas entre sí. Por otro lado, sabemos de (1) que m_1 divide a $m_2 A$, en consecuencia, m_1 tiene que dividir a m_2. Un razonamiento análogo con (6) nos conduce a que m_2 divide a m_1 y, por tanto, $m_1 = m_2$.

Para probar que $\Omega_1 = \Omega_2$ en casi todo, usaremos que, de acuerdo con el Lema 8.4, puesto que $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$ entonces

$$\operatorname{clos} \left\{ \begin{array}{c} (\pi_{*2} A_* + \tau_2 \Delta_2 A \Theta_1^* + \tau_2 B \Delta_{*1}) H_2^2 \\ + \tau_2 (\Delta_2 A \Delta_1 - B \Theta_1) \chi_{\Omega_1} L^2 \\ + \pi_2 H^2 \end{array} \right\} = \pi_{*2} H_2^2 \oplus \tau_2 \chi_{\Omega_2} L^2, \tag{II.19}$$

donde $B(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$. Veamos cómo influye cada uno de los sumandos. Como τ_2 actúa sobre el espacio

$$L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2) = L^2(\Delta_{w_2}) = \chi_{\Omega_2} L^2,$$

podemos afirmar que

$$\tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1)\chi_{\Omega_1} L^2 \subseteq \tau_2 \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2. \tag{II.20}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\tau_2 \chi_{\Omega_2} L^2 = \tau_2 \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2 + \tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2.$$

De hecho, la suma anterior es ortogonal por ser τ_2 una isometría y, por tanto, la proyección ortogonal de $\pi_{*2} H_2^2 \oplus \tau_2 \chi_{\Omega_2} L^2$ sobre el espacio

$$\left[\pi_{*2} H_2^2 \oplus \tau_2 \chi_{\Omega_2} L^2\right] \ominus \tau_2 \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2 = \pi_{*2} H_2^2 \oplus \tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2,$$

es el operador

$$P\left(\left[\tau_2 \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2\right]^{\perp}\right) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P\left(\tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2\right) \end{bmatrix},$$

dode $P\left(\tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2\right)$ es la proyección ortogonal de $\tau_2 \chi_{\Omega_2} L^2$ sobre su subespacio $\tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2$. Si ahora aplicamos esta proyección a la igualdad (II.19), usamos (II.20) y tenemos en cuenta que por A.33,

$$\pi_2 = \pi_{*2}\Theta_2 + \tau_2 \Delta_2 \tag{II.21}$$

nos queda

$$\begin{aligned} &\operatorname{clos}\left\{P\left(\left[\tau_2 \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2\right]^{\perp}\right)\left[\left(\pi_{*2} A_* + \tau_2 \Delta_2 A \Theta_1^* + \tau_2 B \Delta_{*1}\right) H_2^2 + \left(\pi_{*2}\Theta_2 + \tau_2 \Delta_2\right) H^2\right]\right\} \\ &\qquad = \pi_{*2} H_2^2 \oplus \tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} &\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P\left(\tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi_{*2} A_* & \pi_{*2}\Theta_2 \\ \tau_2 \Delta_2 A \Theta_1^* + \tau_2 B \Delta_{*1} & \tau_2 \Delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_2^2 \\ H^2 \end{bmatrix}\right\} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} \pi_{*2} H_2^2 \\ \tau_2 \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{II.22}$$

Veamos que $P\left(\tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})L^2\right) = \tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^*$. En primer lugar se tiene que el operador $\tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^*$ es autoadjunto ya que lo son las funciones χ_{Ω_1} y χ_{Ω_2}. Por otro lado

$$\begin{aligned}(\tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^*)^2 &= \tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^*\tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^* \\ &= \tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^* = \tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^*,\end{aligned}$$

por tanto sabemos que es una proyección ortogonal sobre su imagen. Además, su imagen es

$$\left(\tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^*\right)\tau_2\chi_{\Omega_2}L^2 = \tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\chi_{\Omega_2}L^2 = \tau_2(1-\chi_{\Omega_1})\chi_{\Omega_2}L^2.$$

Usando esto podemos escribir (II.22) como

$$\begin{aligned}&\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})\tau_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi_{*2}A_* & \pi_{*2}\Theta_2 \\ \tau_2\Delta_2 A\Theta_1^* + \tau_2 B\Delta_{*1} & \tau_2\Delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_2^2 \\ H^2 \end{bmatrix}\right\} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} \pi_{*2}H_2^2 \\ \tau_2\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})L^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

pero, teniendo en cuenta que el operador Δ_2 es cero fuera de Ω_2 y que, por tanto, se tiene que $\chi_{\Omega_2}\Delta_2 = \Delta_2$, la igualdad anterior se puede escribir

$$\begin{aligned}&\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} \pi_{*2} & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 A\Theta_1^* + \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})B\Delta_{*1} & (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_2^2 \\ H^2 \end{bmatrix}\right\} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} \pi_{*2} & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})L^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\begin{bmatrix} \pi_{*2} & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix}$ es una isometría, si probamos que la matriz

$$\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 A\Theta_1^* + \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})B\Delta_{*1} & (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \end{bmatrix}$$

tiene rango 2, entonces no es posible que su imagen tenga rango mayor que 2, es decir, que el espacio

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})L^2 \end{bmatrix}$$

tenga dimensión mayor que 2 y, por tanto, tiene que ser $\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})L^2 = \{0\}$ o, lo que es lo mismo $\chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) = 0$ en casi todo y, consecuentemente $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ en casi todo.

Veamos pues, que el rango de dicha matriz es 2, para ello empecemos notando que como $(1-\chi_{\Omega_1})\Delta_{w_1} = 0$ y

$$\Delta_{*1} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ -\overline{a}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \Delta_{w_1} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \overline{b}_1 \end{bmatrix} = (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* \vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*,$$

se tiene $(1-\chi_{\Omega_1})B\Delta_{*1} = (1-\chi_{\Omega_1})B(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}$. Además, de las igualdades que se obtenían de (1) $w_1 f_2 \vartheta_2 = w_1 A_* \vartheta_1 = w_2 A \vartheta_2$, deducimos que $A = \dfrac{w_1 f_2}{w_2}$. Usando esta igualdad, que $m_1 = m_2 = m$ y que

$$(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \vartheta_1\vartheta_1^* = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ -\overline{a}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \overline{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 A\Theta_1^* + \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})B\Delta_{*1} & (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} A_*[(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \vartheta_1\vartheta_1^*] & m w_2 \vartheta_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \dfrac{w_1 f_2}{w_2} \overline{m}\,\overline{w}_1 \vartheta_1^* + \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})B(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} & (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $(1-\chi_{\Omega_1})\,|w_1|^2 = (1-\chi_{\Omega_1})$ y que $A_*\vartheta_1 = f_2\vartheta_2$, esta matriz se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} f_2\vartheta_2\vartheta_1^* & m w_2 \vartheta_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \dfrac{f_2}{w_2}\overline{m}\vartheta_1^* & (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_*(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} & 0 \\ \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})B(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vartheta_2 m w_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{f_2}{w_2}\overline{m}\vartheta_1^* & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_*(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* \\ \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1})B(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^{\mathrm{ad}} & 0 \end{bmatrix},$$

que es una suma de dos matrices de rango 1 y, por tanto, a lo más tendrá rango 2, como afirmábamos.

La demostración de que $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ en casi todo es análoga, intercambiando A por A', A_* por A'_*, f_2 por f_4, y el subíndice 1 por 2.

Veamos el recíproco. Supongamos ahora que se tiene $m_1 = m_2 = m$, la igualdad $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ en casi todo y $\mathcal{N}^+[a_1, b_1] = \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$. Por el Lema 9.9 sabemos que existe $f_0 \in \det(\vartheta_2 \to \vartheta_1)^{\mathrm{i}}$ con m.c.d.i. $\{f_0, m\} = 1$, y existe a su vez $g_0 \in \det(\vartheta_1 \to \vartheta_2)^{\mathrm{i}}$ verificando m.c.d.i. $\{g_0, m\} = 1$. Usando los lemas 8.8 y 8.9 con $B = 0 = B'$, basta elegir los parámetros A, A_*, A' y A'_* para que se verifiquen las seis condiciones anteriores y además

(7) $\operatorname{clos}\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)$,

(8) $\operatorname{clos}\{\Delta_{*1}(A_*)^* \Delta_{*2} L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$,

(9) $\operatorname{clos}\{\Delta_1 A' \Delta_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)\} = L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)$,

(10) $\operatorname{clos}\{\Delta_{*2}(A'_*)^* \Delta_{*1} L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})\} = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})$.

Como $f_0 \in \det(\vartheta_2 \to \vartheta_1)^{\mathrm{i}}$, sabemos que existen $\varphi \in H^\infty$ exterior y $\Lambda \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ tales que $\varphi\Lambda \in H^\infty[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$, $\Lambda\vartheta_2 = \vartheta_1$ y $f_0 = (\det \Lambda)^{\mathrm{i}} = (\varphi^2\lambda)^{\mathrm{i}}$, siendo $\lambda = \det \Lambda$. Análogamente, como $g_0 \in \det(\vartheta_1 \to \vartheta_2)^{\mathrm{i}}$, existen $\psi \in H^\infty$ exterior y $\Gamma \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ tales que $\psi\Gamma \in H^\infty[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$, $\Gamma\vartheta_1 = \vartheta_2$ y $g_0 = (\det \Gamma)^{\mathrm{i}} = (\psi^2\gamma)^{\mathrm{i}}$, donde $\gamma = \det \Gamma$. Tomamos $A_* = w_2\varphi^2\Lambda^{\mathrm{ad}}$ y $A'_* = w_1\psi^2\Gamma^{\mathrm{ad}}$, $A = w_1\varphi^2\lambda$ y $A' = w_2\psi^2\gamma$. Veamos que se verifica todo lo que buscamos

(1) Como $\Lambda\vartheta_2 = \vartheta_1$, multiplicando por el operador Λ^{ad} a la izquierda tenemos

$$\lambda\vartheta_2 = (\det \Lambda)\vartheta_2 = \Lambda^{\mathrm{ad}}\Lambda\vartheta_2 = \Lambda^{\mathrm{ad}}\vartheta_1$$

y, por tanto,

$$A_*\Theta_1 = w_2\varphi^2 w_1 m \Lambda^{\mathrm{ad}}\vartheta_1 = w_2\varphi^2 w_1 m \lambda\vartheta_2 = w_2 m \vartheta_2 w_1 \varphi^2 \lambda = \Theta_2 A.$$

(2) Sabemos que $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_* & m w_2 \vartheta_2 \end{bmatrix}$ es exterior si todos los determinantes de sus menores son primos entre sí por A.16 o, lo que es lo mismo, como vimos en la demostración de la implicación contraria, si las componentes del vector

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \det A_* & m w_2 \vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w_2^2\varphi^4\lambda & m w_2 \vartheta_2^{\mathrm{ad}} w_2 \varphi^2 \Lambda^{\mathrm{ad}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_2^2\varphi^4\lambda & m w_2^2 \varphi^2 (\Lambda\vartheta_2)^{\mathrm{ad}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_2^2\varphi^4\lambda & m w_2^2 \varphi^2 \vartheta_1^{\mathrm{ad}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_2^2\varphi^2(\varphi^2\lambda) & m w_2^2 \varphi^2 b_1 & -m w_2^2 \varphi^2 a_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

son primas entre sí, pero esto se verifica porque φ y w_2 son funciones exteriores, $(\varphi^2\lambda)$ no puede tener ningún factor interior común con a_1 y b_1 puesto que estos dos últimos son primos entre sí y m.c.d.i. $\{(\varphi^2\lambda)^{\mathrm{i}}, m\} =$ m.c.d.i. $\{f_0, m\} = 1$.

(3) De nuevo por A.16 sabemos que $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1\varphi^2\lambda \\ mw_1\vartheta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior por ser $(\varphi^2\lambda)^{\mathrm{i}}$ y m primos.

Las condiciones (4), (5) y (6) se prueban de manera análoga, usando A' y A'_*. Las condiciones (7) y (9) son triviales ya que, teniendo en cuenta que $\Omega_1 = \Omega_2$ en casi todo y que A y A' son funciones analíticas escalares y, por tanto, distintas de cero en casi todo, ya que no pueden ser nulas por no serlo ni f_0 ni g_0, se tiene

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} = \operatorname{clos}\left\{A\Delta_2\Delta_1\chi_\Omega L^2\right\}$$

pero, como Δ_2 y Δ_1 se anulan sólo fuera de Ω, podemos afirmar

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1)\right\} = \operatorname{clos}\left\{A\Delta_2\Delta_1\chi_\Omega L^2\right\} = \chi_\Omega L^2 = L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2).$$

Análogamente se tendría para (9).

Queda ver la condición (8), la (10) es análoga intercambiando los subíndices y A'_* por A_*. Debemos probar que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

Para empezar, observemos que $\vartheta_2^*\vartheta_2 = 1$, $\vartheta_2^{\mathrm{ad}}(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* = 1$ y $\vartheta_2^{\mathrm{ad}}\vartheta_2 = 0$, por tanto se verifica $\vartheta_2^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* = 0$, con lo cual

$$\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) = \left((\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_2^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_2}\vartheta_2\vartheta_2^*\right)\left((\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*L^2 \oplus \vartheta_2\chi_\Omega L^2\right) = (\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*L^2 \oplus \vartheta_2\Delta_{w_2}\chi_\Omega L^2,$$

por tanto

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = (\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*L^2 \oplus \vartheta_2\chi_\Omega L^2 = L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})$$

ya que, como Δ_{w_2} es nula donde lo es χ_Ω, $\operatorname{clos}\{\Delta_{w_2}\chi_\Omega L^2\} = \chi_\Omega L^2$. Con lo cual

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}.$$

Ahora bien

$$\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}) = \left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*\right)(A_*)^*\left(\begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ -\bar{a}_2 \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \chi_\Omega L^2\right)$$

$$= \left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*\right)(A_*)^*\left((\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* L^2 \oplus \vartheta_2\chi_\Omega L^2\right)$$

y, en consecuencia, el espacio

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^* L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{array}{c} \Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* L^2 \\ + \left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*\right)(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2 \end{array}\right\}$$

está incluido en

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} + \operatorname{clos}\left\{(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} + \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\}.$$

Para el primer sumando tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(\vartheta_2^{\mathrm{ad}}A_*)^* L^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(\vartheta_2^{\mathrm{ad}}w_2\varphi^2\Lambda^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(w_2\varphi^2\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2\Delta_{*1}(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\}.\end{aligned}$$

Como $\vartheta_i^*(\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* = 0$ y $\vartheta_i^{\mathrm{ad}}(\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* = 1$, tenemos

$$\Delta_{*i}(\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* = \left((\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_i^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_i}\vartheta_i\vartheta_i^*\right)(\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* = (\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^*$$

para $i = 1, 2$ y, por tanto

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2\Delta_{*1}(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} = (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2,$$

por ser w_2 y φ distintas de cero en casi todo. Claramente, para el segundo sumando tenemos

$$(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2 \subseteq (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2,$$

ya que los elementos de $\vartheta_1^{\mathrm{ad}}$, A_* y ϑ_2 están en H^∞ y, de ahí se sigue que $\vartheta_1^{\mathrm{ad}}(A_*)^*\vartheta_2 \in L^2$ y también $\vartheta_1^{\mathrm{ad}}(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2 \subseteq L^2$. Por último, para el tercer sumando

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1(A_*\vartheta_1)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1(w_2\varphi^2\Lambda^{\mathrm{ad}}\vartheta_1)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1(w_2\varphi^2\Lambda^{\mathrm{ad}}\Lambda\vartheta_2)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1(w_2\varphi^2\lambda\vartheta_2)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2\,\overline{\lambda}\vartheta_2^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2\,\overline{\lambda}\chi_\Omega L^2\right\},\end{aligned}$$

como la función $\Delta_{w_1}\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2\,\overline{\lambda}$ es distinta de cero en casi todo Ω, se tiene que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2\,\overline{\lambda}\chi_\Omega L^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{\vartheta_1 \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\overline{w_2}\,\overline{\varphi}^2\,\overline{\lambda}\chi_\Omega L^2\right\}\right\} = \operatorname{clos}\left\{\vartheta_1\chi_\Omega L^2\right\} = \vartheta_1\chi_\Omega L^2,$$

donde la última igualdad se tiene por ser ϑ_1 una isometría. En consecuencia

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} = \vartheta_1\chi_\Omega L^2.$$

Por lo tanto, usando todo lo anterior

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\} \subseteq (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*L^2 \oplus \vartheta_1\chi_\Omega L^2 = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}).$$

Veamos que también se verifica la inclusión contraria. Tomamos un elemento

$$(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*f_1 + \vartheta_1\chi_\Omega f_2 \in (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*L^2 \oplus \vartheta_1\chi_\Omega L^2 = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}),$$

como $\operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} = \vartheta_1\chi_\Omega L^2$, sabemos que existe un elemento de la forma $\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*A_*^*\vartheta_2\chi_\Omega g_1$ tal que

$$\|\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*A_*^*\vartheta_2\chi_\Omega g_1 - \vartheta_1\chi_\Omega f_2\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando también que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*L^2\right\} = (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*L^2 \quad \text{y} \quad (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2 \subseteq (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*L^2,$$

podemos afirmar que existen dos elementos $\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*g_2$ y $\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*g_3$ tales que

$$\left\|\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*g_2 - (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*f_1\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

y

$$\left\|\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*g_3 - (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega g_1\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando el elemento

$$\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*(g_2 - g_3) + \left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*\right)(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega g_1$$

que pertenece al espacio

$$\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*L^2 + \left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*\right)(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2 = \Delta_{*1}(A_*)^*L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2}),$$

tenemos

$$\left\|\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*(g_2-g_3)+\left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}+\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*\right)(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega g_1-\left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*f_1+\vartheta_1\chi_\Omega f_2\right)\right\|\leq$$

$$\left\|\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*g_2-(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*f_1\right\|+\left\|\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*g_3-(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega g_1\right\|$$

$$+\left\|\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega g_1-\vartheta_1\chi_\Omega f_2\right\|<\varepsilon.$$

En consecuencia, el elemento arbitrario $(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*f_1+\vartheta_1\chi_\Omega f_2$ pertenece al espacio

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*(\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^*L^2+\left((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}+\Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*\right)(A_*)^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\}$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}=(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*L^2\oplus\vartheta_1\chi_\Omega L^2=L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}),$$

con lo que podemos concluir que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1}(A_*)^*\Delta_{*2}L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\right\}=L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1}),$$

como queríamos demostrar. ■

El caso que queda por ver, es decir, el caso de caracterizar mediante casi-semejanza dos operadores con funciones características 1×2, es un corolario obvio de este teorema tomando los operadores adjuntos.

Caso 5: Sean las funciones características de la forma

$$\Theta_1=m_1w_1\begin{bmatrix}a_1 & b_1\end{bmatrix}\qquad\text{y}\qquad\Theta_2=m_2w_2\begin{bmatrix}a_2 & b_2\end{bmatrix}$$

donde $m_i, w_i, a_i, b_i\in H^\infty$ son tales que m_i es una función interior, w_i es una función exterior con $|w_i|\leq 1$, $|a_i|^2+|b_i|^2=1$ y m.c.d.i. $\{a_i,b_i\}=1$ para $i=1,2$, se tiene el siguiente corolario.

9.11. Corolario. *T_{Θ_1} es casi semejante a T_{Θ_2} si, y sólo si, $m_1=m_2$, $\Omega_1=\Omega_2$ en casi todo y $\mathcal{N}^+[a_1,b_1]=\mathcal{N}^+[a_2,b_2]$.*

En este teorema hemos caracterizado mediante casi-semejanza operadores con función característica 2×1 cualquiera, pero es posible incluso que un operador de este tipo sea casi-semejante a un operador con función característica de dimensión $(n+1)\times n$ con cualquier $n \geq 0$, como afirma el siguiente teorema, el cual nos proporciona unas condiciones necesarias y suficientes para que un operador con función característica interior y $*$-exterior de dimensión 2×1 sea casi-semejante al operador desplazamiento S en H^2, que sabemos por A.31 que es un operador con función característica nula considerada como operador de $\mathbb{C}$ en $\{0\}$.

9.12. Teorema. *Sea T una contracción completamente no unitaria con función característica $\Theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ con $a, b \in H^\infty$, la cual es interior ($|a|^2 + |b|^2 = 1$) y $*$-exterior* (m.c.d.i. $\{a, b\} = 1$). *Entonces T es casi-semejante a S si, y sólo si, existen dos funciones $f, g \in H^\infty$ tales que $af + bg$ es una función exterior.*

9.13. Corolario. *Sea T una contracción completamente no unitaria con función característica $\Theta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ con $a, b \in H^\infty$ y tales que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ y* m.c.d.i. $\{a, b\} = 1$. *Entonces T es casi-semejante a $B = S^*$ si, y sólo si, existen dos funciones $f, g \in H^\infty$ tales que $af + bg$ es una función exterior.*

9.14. Proposición. *Consideremos la función interior singular*

$$h_1(\zeta) = \exp\left(-\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$$

y el producto de Blaschke cuyos ceros son $\lambda_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

$$h_2(\zeta) = \prod_n \left(\frac{\lambda_n - \zeta}{1 - \overline{\lambda}_n \zeta}\right).$$

Entonces se verifica que sea cuales sean las funciones f_1 y f_2 en H^∞, la función $f_1 h_1 + f_2 h_2$ no es exterior.

Demostración. Para demostrarlo necesitamos la siguiente propiedad: para toda función $h \in H^\infty$ exterior se tiene

$$\lim_{|z| \to 1^-} \log |h(z)| \, (1 - |z|) = 0.$$

En efecto, al ser h exterior, la podemos escribir como

$$h(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \left|h(e^{it})\right| dt\right] \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D},$$

por tanto,

$$\log|h(z)| = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|h(e^{it})\right|dt\right].$$

Dado $\varepsilon > 0$, como los polinomios son un conjunto denso en $L^1(\mathbb{T})$ y la función $\log|h(e^{it})| \in L^1(\mathbb{T})$, sabemos que existe un polinomio $P(t) = a_0 + a_1e^{it} + \cdots + a_ne^{int}$, tal que $\|\log|h(e^{it})| - P(t)\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$. Si escribimos

$$\log|h(z)| = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(\log\left|h(e^{it})\right| - P(t))dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}P(t)dt\right],$$

tenemos que

$$\begin{aligned}(1-|z|)\left|\log|h(z)|\right| &\leq (1-|z|)\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(\log\left|h(e^{it})\right| - P(t))dt\right| \\ &\quad +(1-|z|)\left|\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}P(t)dt\right]\right|,\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}(1-|z|)\left|\log|h(z)|\right| &\leq (1-|z|)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right|\left|\log\left|h(e^{it})\right| - P(t)\right|dt \\ &\quad +(1-|z|)\left|\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}P(t)dt\right]\right|.\end{aligned}$$

Usando que $|e^{it}+z| \leq 2$ y que $|e^{it}-z| \geq 1-|z|$ llegamos a

$$\begin{aligned}(1-|z|)\left|\log|h(z)|\right| &\leq 2\left\|\log\left|h(e^{it})\right| - P(t)\right\|_1 + (1-|z|)\left|\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}P(t)dt\right]\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (1-|z|)\left|\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}P(t)dt\right]\right|.\end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $n \geq 1$, usando la Fórmula Integral de Cauchy, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}e^{int}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}}\frac{s+z}{s-z}s^{n-1}ds = 2z^n$$

y, si $n = 0$, usando el Teorema de los Residuos,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}}\frac{s+z}{s-z}\frac{1}{s}ds = 2-1 = 1,$$

por tanto
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}P(t)dt = a_0 + 2a_1z + 2a_2z^2 + \cdots + 2a_nz^n.$$
En consecuencia, si $|z| = r < 1$ llegamos a que
$$\begin{aligned}(1-|z|)\left|\log|h(z)|\right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2(1-r)(|a_0| + |a_1|r + \cdots + |a_n|r^n)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2(1-r)(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|),\end{aligned}$$
por consiguiente, basta tomar z tal que $1-|z| < \dfrac{\varepsilon}{4(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|)}$ para tener que
$$(1-|z|)\left|\log|h(z)|\right| < \varepsilon.$$

Con lo que queda probada la propiedad.

Ahora supongamos que $h = f_1h_1 + f_2h_2$ es una función exterior, con f_1 y f_2 en H^∞. Teniendo en cuenta que $\lambda_n = 1 - 2^{-n}$ son los ceros de h_2, obtenemos que
$$h(1-2^{-n}) = (f_1h_1 + f_2h_2)(1-2^{-n}) = h_1(1-2^{-n})f_1(1-2^{-n}).$$

Por la propiedad anterior, se cumple que
$$\lim_{n\to\infty}\log\left|h_1(1-2^{-n})f_1(1-2^{-n})\right|(1-(1-2^{-n})) = 0.$$

Como
$$h_1(1-2^{-n}) = \exp\left(-\frac{1+(1-2^{-n})}{1-(1-2^{-n})}\right) = \exp\left(1-2^{n+1}\right),$$
se verifica que
$$\begin{aligned}0 = \lim_{n\to\infty}\log\left|h_1(1-2^{-n})f_1(1-2^{-n})\right|\frac{1}{2^n} &= \lim_{n\to\infty}\log\left|\exp\left(1-2^{n+1}\right)f_1(1-2^{-n})\right|\frac{1}{2^n}\\ = \lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{n+1}}{2^n} + \lim_{n\to\infty}\log\left(\left|f_1(1-2^{-n})\right|\right)\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$
y, como $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-2^{n+1}}{2^n} = -2$, tenemos
$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\left|f_1(1-2^{-n})\right|\right)\frac{1}{2^n} = 2.$$

En consecuencia,
$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\left|f_1(1-2^{-n})\right|\right) = +\infty,$$
lo cual es una contradicción con el hecho de que $f_1 \in H^\infty$. ∎

9.15. Ejemplo. La función característica

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

construida con las funciones h_1 y h_2 de la Proposición 9.14 es interior y $*$-exterior pero no es casi-semejante al operador de desplazamiento S en H^2.

En efecto, como h_1 y h_2 son interiores se tiene que

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} h_1\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}} h_2\right|^2 = 1$$

así que Θ es interior. Por otro lado, como h_1 es singular y h_2 es un producto de Blaschke, se tiene que m.c.d.i.$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} h_1, \frac{1}{\sqrt{2}} h_2\right\} = 1$, así que Θ es $*$-exterior.

Usando este ejemplo podemos probar que no siempre es cierto que se den las casi-semejanzas de los casos 2 y 3. En efecto, tomando

$$m = h_1, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = h_2 \quad \text{y} \quad d = 0,$$

donde h_1 y h_2 son las funciones de la Proposición 9.14, vemos que la condición necesaria del Teorema 9.5 no se cumple y, por tanto, que

$$h_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{no es casi-semejante a} \quad \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

o, más claramente, que

$$\begin{bmatrix} h_1 h_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{no es casi-semejante a} \quad \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, tomando

$$a = h_1, \quad b = 0, \quad c = h_2 \quad \text{y} \quad d = 0,$$

veamos que la condición necesaria del Teorema 9.7 no se cumple y, por tanto, que

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{no es casi-semejante a} \quad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} h_2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

que es, básicamente, el mismo ejemplo que antes:

$$\begin{bmatrix} h_1h_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{no es casi-semejante a} \quad \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

10 El teorema principal

A continuación, veamos el resultado principal de este capítulo, es decir, las condiciones necesarias y suficientes para que dos contracciones completamente no unitarias con funciones características 2×2 y determinante nulo, sean casi-semejantes.

Escribamos las funciones características de la forma

$$\Theta_i = m_i w_i \vartheta_i \varphi_i \qquad \text{con } \vartheta_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \text{ y } \varphi_i = \begin{bmatrix} c_i & d_i \end{bmatrix},$$

donde $m_i, w_i, a_i, b_i, c_i, d_i \in H^\infty$ son tales que m_i es una función interior, w_i es una función exterior con $|w_i| \leq 1$, $|a_i|^2+|b_i|^2 = 1 = |c_i|^2+|d_i|^2$ y m.c.d.i. $\{a_i, b_i\} = 1 =$ m.c.d.i. $\{c_i, d_i\}$ para $i = 1, 2$.

Los espacios auxiliares los podemos elegir como $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{*1} = \mathcal{E}_{*2} = \mathbb{C}^2$ y, por el Lema 9.1, sabemos que las correspondientes funciones Δ_i y Δ_{*i} en el modelo funcional son, respectivamente,

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} d_i \\ -c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d}_i & -\overline{c}_i \end{bmatrix} + \Delta_{w_i} \begin{bmatrix} \overline{c}_i \\ \overline{d}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i & d_i \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{*i} = \begin{bmatrix} \overline{b}_i \\ -\overline{a}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & -a_i \end{bmatrix} + \Delta_{w_i} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_i & \overline{b}_i \end{bmatrix},$$

y los correspondientes subespacios residuales son

$$L^2(\Delta_i \mathcal{E}_i) = \begin{bmatrix} d_i \\ -c_i \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \overline{c}_i \\ \overline{d}_i \end{bmatrix} L^2(\Delta_{w_i}) = \begin{bmatrix} d_i \\ -c_i \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} \overline{c}_i \\ \overline{d}_i \end{bmatrix} \chi_{\Omega_i} L^2,$$

$$L^2(\Delta_{*i} \mathcal{E}_{*i}) = \begin{bmatrix} \overline{b}_i \\ -\overline{a}_i \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} L^2(\Delta_{w_i}) = \begin{bmatrix} \overline{b}_i \\ -\overline{a}_i \end{bmatrix} L^2 \oplus \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \chi_{\Omega_i} L^2,$$

siendo $\Omega_i = \{\zeta \in \mathbb{T} : |w_i(\zeta)| < 1\}$ para $i = 1, 2$.

Con nuestra notación, las funciones Δ_i, y Δ_{*i}, y los subespacios residuales para $i = 1, 2$ se pueden escribir como

$$\Delta_i = \varphi_i^{\mathrm{ad}}(\varphi_i^{\mathrm{ad}})^* + \Delta_{w_i}\varphi_i^*\varphi_i \quad \text{y} \quad \Delta_{*i} = (\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_i^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_i}\vartheta_i\vartheta_i^*,$$

donde

$$\varphi_i^{\mathrm{ad}} = \begin{bmatrix} d_i \\ -c_i \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vartheta_i^{\mathrm{ad}} = \begin{bmatrix} b_i & -a_i \end{bmatrix},$$

$$L^2(\Delta_i\mathcal{E}_i) = \varphi_i^{\mathrm{ad}}L^2 \oplus \varphi_i^*\chi_{\Omega_i}L^2 \qquad \text{y} \qquad L^2(\Delta_{*i}\mathcal{E}_{*i}) = (\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^*L^2 \oplus \vartheta_i\chi_{\Omega_i}L^2.$$

10.1. Teorema. *En las condiciones anteriores T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2} si, y sólo si, se verifican:*

(i) $m_1 = m_2 = m$,

(ii) $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ *en casi todo,*

(iii) $\mathcal{N}^+[a_1, b_1] = \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$,

(iv) $\mathcal{N}^+[c_1, d_1] = \mathcal{N}^+[c_2, d_2]$,

(v) *existe* $f_0 \in \det(\vartheta_2 \to \vartheta_1)^{\mathrm{i}} \cap \det\left(\varphi_1^{\mathrm{ad}} \to \varphi_2^{\mathrm{ad}}\right)^{\mathrm{i}}$ *con* m.c.d.i. $\{f_0, m\} = 1$ *y*

(vi) *existe* $g_0 \in \det(\vartheta_1 \to \vartheta_2)^{\mathrm{i}} \cap \det\left(\varphi_2^{\mathrm{ad}} \to \varphi_1^{\mathrm{ad}}\right)^{\mathrm{i}}$ *con* m.c.d.i. $\{g_0, m\} = 1$.

Demostración. Supongamos que T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2}, entonces existe un operador acotado $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $XT_{\Theta_1} = T_{\Theta_2}X$, $\ker(X) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$, y para el cual, los parámetros A y A_* de su levantamiento

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2A\pi_1^* + \tau_2B(\tau_{*1})^* = \pi_2A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2B(\tau_{*1})^*$$

tienen que cumplir, entre otras propiedades

$$(1)\ \Theta_2A = A_*\Theta_1, \qquad (2)\ \begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} \text{ es exterior} \qquad \text{y} \qquad (3)\ \begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix} \text{ es } *\text{-exterior},$$

donde $A, A_* \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

Multiplicando (1) por $\vartheta_2^{\mathrm{ad}}$ a la izquierda y usando que $\vartheta_2^{\mathrm{ad}}\vartheta_2 = 0$ y, por tanto, que $\vartheta_2^{\mathrm{ad}}\Theta_2 = 0$, obtenemos $m_1w_1\vartheta_2^{\mathrm{ad}}A_*\vartheta_1\varphi_1 = 0$. Como φ_1 no es el vector nulo y m_1 y w_1

son distintas de cero en casi todo, la función escalar $\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \vartheta_1$ debe ser cero. De manera análoga, multiplicando a la derecha por φ_1^{ad} y usando que $\varphi_1 \varphi_1^{\mathrm{ad}} = 0$ se obtiene que $m_2 w_2 \vartheta_2 \varphi_2 A \varphi_1^{\mathrm{ad}} = A_* \Theta_1 \varphi_1^{\mathrm{ad}} = 0$, en consecuencia $\varphi_2 A \varphi_1^{\mathrm{ad}} = 0$. Como tenemos

$$\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \vartheta_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \varphi_2 A \varphi_1^{\mathrm{ad}} = 0,$$

podemos aplicar el Corolario 8.2 a los operadores $\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_*$, $A_* \vartheta_1$, $\varphi_2 A$ y $A \varphi_1^{\mathrm{ad}}$ para obtener cuatro funciones $f_1, f_2, f_3, f_4 \in H^\infty$ tales que

$$\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* = f_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}}, \qquad A_* \vartheta_1 = f_2 \vartheta_2, \qquad \varphi_2 A = f_3 \varphi_1 \qquad \text{y} \qquad A \varphi_1^{\mathrm{ad}} = f_4 \varphi_2^{\mathrm{ad}}. \tag{II.23}$$

Por tanto

$$(\det A_*) \vartheta_1 = A_*^{\mathrm{ad}} A_* \vartheta_1 = f_2 A_*^{\mathrm{ad}} \vartheta_2 = f_1 f_2 \vartheta_1,$$

y

$$(\det A) \varphi_1^{\mathrm{ad}} = A^{\mathrm{ad}} A \varphi_1^{\mathrm{ad}} = f_4 A^{\mathrm{ad}} \varphi_2^{\mathrm{ad}} = f_4 f_3 \varphi_1^{\mathrm{ad}},$$

por lo que

$$\det A_* = f_1 f_2 \qquad \text{y} \qquad \det A = f_3 f_4. \tag{II.24}$$

Como

$$m_1 w_1 f_2 \vartheta_2 \varphi_1 = m_1 w_1 A_* \vartheta_1 \varphi_1 = A_* \Theta_1 = \Theta_2 A = m_2 w_2 \vartheta_2 \varphi_2 A = m_2 w_2 f_3 \vartheta_2 \varphi_1,$$

se tiene, multiplicando por ϑ_2^* a la izquierda, por φ_1^* a la derecha y usando las igualdades $\vartheta_2^* \vartheta_2 = 1 = \varphi_1 \varphi_1^*$, que

$$m_1 w_1 f_2 = m_2 w_2 f_3. \tag{II.25}$$

Por otro lado, al ser c_2 y d_2 primos entre sí, se tiene que $\begin{bmatrix} c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ es exterior por A.15 y, por tanto, $\operatorname{clos}\{w_2 \varphi_2 H_2^2\} = H^2$, y usando la condición (2)

$$\begin{aligned} H_2^2 &= \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} H_4^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{A_* H_2^2 + \Theta_2 H_2^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{A_* H_2^2 + m_2 w_2 \vartheta_2 \varphi_2 H_2^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{A_* H_2^2 + m_2 \vartheta_2 \operatorname{clos}\left\{w_2 \varphi_2 H_2^2\right\}\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} A_* & m_2 \vartheta_2 \end{bmatrix} H_3^2\right\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, la matriz

$$\begin{bmatrix} A_* & m_2 \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} & m_2 a_2 \\ a_{*21} & a_{*22} & m_2 b_2 \end{bmatrix}$$

es exterior y, por tanto, todos sus menores de orden dos son primos entre sí o, lo que es lo mismo, todas las componentes del vector

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc} \det A_* & m_2(b_2 a_{*11} - a_2 a_{*21}) & m_2(b_2 a_{*12} - a_2 a_{*22}) \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{cc} \det A_* & m_2 \vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} f_1 f_2 & m_2 f_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}} \end{array}\right]\end{aligned}$$

son primas entre sí. En particular, f_1 es una función exterior y m.c.d.i. $\{f_2, m_2\} = 1$. Como f_1 es exterior y $\vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* = f_1 \vartheta_1^{\mathrm{ad}}$ se tiene, de manera análoga a como lo hicimos en la demostración del Teorema 9.10, que todo $a_1 f + b_1 g \in \mathcal{N}^+[a_1, b_1]$ con $f, g \in \mathcal{N}^+$, lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} a_1 f + b_1 g &= \left[\begin{array}{cc} b_1 & -a_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} g \\ -f \end{array}\right] = \vartheta_1^{\mathrm{ad}} \left[\begin{array}{c} g \\ -f \end{array}\right] = \frac{1}{f_1} \vartheta_2^{\mathrm{ad}} A_* \left[\begin{array}{c} g \\ -f \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{f_1} \left[\begin{array}{cc} b_2 & -a_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} a_{*11} & a_{*12} \\ a_{*21} & a_{*22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} g \\ -f \end{array}\right] \\ &= \left(\frac{-a_{*21} g + a_{*22} f}{f_1}\right) a_2 + \left(\frac{a_{*11} g - a_{*12} f}{f_1}\right) b_2 \in \mathcal{N}^+[a_2, b_2], \end{aligned}$$

de donde $\mathcal{N}^+[a_1, b_1] \subseteq \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$. Además, de la relación $m_1 w_1 f_2 = m_2 w_2 f_3$ dada en II.25 tenemos que, al ser f_2 y m_2 primos entre sí, m_2 divide a m_1.

De manera análoga, usando (3) tenemos que $\left[\begin{array}{c} A \\ \Theta_1 \end{array}\right]$ es $*$-exterior o, equivalentemente, de acuerdo con A.16,

$$H_2^2 = \operatorname{clos}\left\{\left[\begin{array}{cc} A^T & \Theta_1^T \end{array}\right] H_4^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{A^T H_2^2 + m_1 w_1 \varphi_1^T \vartheta_1^T H_2^2\right\}.$$

Como w_1 es exterior y m.c.d.i. $\{a_1, b_1\} = 1$, se tiene $\operatorname{clos}\left\{w_1 \vartheta_1^T H_2^2\right\} = H^2$ y, por tanto

$$\begin{aligned} H_2^2 = \operatorname{clos}\left\{\left[\begin{array}{cc} A^T & \Theta_1^T \end{array}\right] H_4^2\right\} &= \operatorname{clos}\left\{A^T H_2^2 + m_1 \varphi_1^T \operatorname{clos}\left\{w_1 \vartheta_1^T H_2^2\right\}\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\left[\begin{array}{cc} A^T & m_1 \varphi_1^T \end{array}\right] H_3^2\right\}, \end{aligned}$$

luego la matriz

$$\begin{bmatrix} A^T & m_1\varphi_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & m_1c_1 \\ a_{12} & a_{22} & m_1d_1 \end{bmatrix}$$

es exterior y, por tanto, todos los menores de orden dos son primos entre sí o, lo que es lo mismo, todas las componentes del vector

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \det A^T & m_1(d_1a_{11} - c_1a_{12}) & m_1(d_1a_{21} - c_1a_{22}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \det A & m_1(\varphi_1^T)^{\mathrm{ad}}A^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \det A & m_1(A\varphi_1^{\mathrm{ad}})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_3f_4 & m_1f_4(\varphi_2^{\mathrm{ad}})^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

son primas entre sí. En particular, f_4 es una función exterior y m.c.d.i. $\{f_3, m_1\} = 1$. Como f_4 es exterior y $f_4\varphi_2 = \varphi_1A^{\mathrm{ad}}$, todo elemento $c_2f + d_2g \in \mathcal{N}^+[c_2, d_2]$ lo podemos escribir como

$$c_2f + d_2g = \begin{bmatrix} c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \varphi_2\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \frac{1}{f_4}\varphi_1A^{\mathrm{ad}}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{f_4}\begin{bmatrix} c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{a_{22}f - a_{12}g}{f_4}\right)c_1 + \left(\frac{-a_{21}f + a_{11}g}{f_4}\right)d_1 \in \mathcal{N}^+[c_1, d_1],$$

de donde se deduce que $\mathcal{N}^+[c_2, d_2] \subseteq \mathcal{N}^+[c_1, d_1]$. Pero también, al ser f_3 y m_1 primos entre sí, de la igualdad (II.25) $m_1w_1f_2 = m_2w_2f_3$ se tiene que m_1 divide a m_2 y, en consecuencia, que $m_1 = m_2$.

Por otro lado, al ser $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$, por el Lema 8.4 sabemos que se verifica

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{matrix} (\pi_{*2}A_* + \tau_2\Delta_2A\Theta_1^* + \tau_2B\Delta_{*1})\,H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2\,(\Delta_2A\Delta_1 - B\Theta_1)\,L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \\ +\pi_2H^2(\mathcal{E}_2) \end{matrix}\right\} = \pi_{*2}H^2(\mathcal{E}_{*2}) \oplus \tau_2L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2).$$

Usando que

$$\varphi_iL^2(\Delta_i\mathcal{E}_i) = \varphi_i(\varphi_i^{\mathrm{ad}}L^2 \oplus \varphi_i^*\chi_{\Omega_i}L^2) = \chi_{\Omega_i}L^2 \quad \text{para } i = 1, 2, \tag{II.26}$$

que π_{*2} y τ_2 son isometrías y que, por A.32 $(\pi_{*2})^*\tau_2 = 0$, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2} L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^2(\mathcal{E}_{*2}) \\ \varphi_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\pi_{*2})^* \\ \tau_2^* \end{bmatrix} \left[\pi_{*2} H^2(\mathcal{E}_{*2}) \oplus \tau_2 L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)\right],$$

y de lo anterior tenemos que

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2} L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\pi_{*2})^* \\ \varphi_2 \tau_2^* \end{bmatrix} \operatorname{clos} \left\{ \begin{array}{c} (\pi_{*2} A_* + \tau_2 \Delta_2 A \Theta_1^* + \tau_2 B \Delta_{*1}) H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \\ +\pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) \end{array} \right\}.$$

Si usamos de nuevo que π_{*2} y τ_2 son isometrías y que $(\pi_{*2})^*\tau_2 = 0$ tenemos

$$(\pi_{*2})^* \left\{ \begin{array}{c} (\pi_{*2} A_* + \tau_2 \Delta_2 A \Theta_1^* + \tau_2 B \Delta_{*1}) H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \\ +\pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) \end{array} \right\} = A_* H^2(\mathcal{E}_{*1}) + \Theta_2 H^2(\mathcal{E}_2)$$

y

$$\varphi_2 \tau_2^* \left\{ \begin{array}{c} (\pi_{*2} A_* + \tau_2 \Delta_2 A \Theta_1^* + \tau_2 B \Delta_{*1}) H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \\ +\pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \varphi_2(\Delta_2 A \Theta_1^* + B\Delta_{*1}) H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\varphi_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \\ +\varphi_2 \tau_2^* \pi_2 H^2(\mathcal{E}_2). \end{array} \right\}.$$

Teniendo en cuenta que el espacio $\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2} L^2 \end{bmatrix}$ es cerrado,

$$\varphi_i \Delta_i = \varphi_i(\varphi_i^{\mathrm{ad}}(\varphi_i^{\mathrm{ad}})^* + \Delta_{w_i} \varphi_i^* \varphi_i) = \Delta_{w_i} \varphi_i \quad \text{para } i = 1, 2, \tag{II.27}$$

y que, por A.32 $\tau_2^* \pi_2 = \Delta_2$, llegamos a

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2} L^2 \end{bmatrix} = \operatorname{clos} \left\{ \begin{bmatrix} (\pi_{*2})^* \\ \varphi_2 \tau_2^* \end{bmatrix} \operatorname{clos} \left\{ \begin{array}{c} (\pi_{*2} A_* + \tau_2 \Delta_2 A \Theta_1^* + \tau_2 B \Delta_{*1}) H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ +\tau_2(\Delta_2 A \Delta_1 - B\Theta_1) L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \\ +\pi_2 H^2(\mathcal{E}_2) \end{array} \right\} \right\}$$

$$= \operatorname{clos} \left\{ \begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 & 0 \\ \Delta_{w_2} \varphi_2 A \Theta_1^* + \varphi_2 B \Delta_{*1} & \Delta_{w_2} \varphi_2 & \Delta_{w_2} \varphi_2 A \Delta_1 - \varphi_2 B \Theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ H^2(\mathcal{E}_2) \\ L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \end{bmatrix} \right\}.$$

Como $\varphi_2 A = f_3 \varphi_1$ y, por (II.27), $\varphi_1 \Delta_1 = \Delta_{w_1} \varphi_1$ podemos escribir

$$\varphi_2 A \Theta_1^* = \varphi_2 A \overline{m}\, \overline{w}_1 \varphi_1^* \vartheta_1^* = f_3 \overline{m}\, \overline{w}_1 \vartheta_1^* \qquad \text{y} \qquad \Delta_{w_2} \varphi_2 A \Delta_1 = \Delta_{w_2} f_3 \varphi_1 \Delta_1 = \Delta_{w_2} f_3 \Delta_{w_1} \varphi_1,$$

por lo tanto, el espacio anterior nos queda igual al espacio

$$\text{clos}\left\{\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 & 0 \\ \Delta_{w_2} f_3 \overline{m}\,\overline{w}_1 \vartheta_1^* + \varphi_2 B \Delta_{*1} & \Delta_{w_2}\varphi_2 & (\Delta_{w_2} f_3 \Delta_{w_1} - m w_1 \varphi_2 B \vartheta_1)\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^2(\mathcal{E}_{*1}) \\ H^2(\mathcal{E}_2) \\ L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1) \end{bmatrix}\right\}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que, por (II.26), $\varphi_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) = \chi_{\Omega_1} L^2$, que la imagen del operador B está en $L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2)$ y que, por tanto, la imagen de $\varphi_2 B$ está en $\varphi_2 L^2(\Delta_2\mathcal{E}_2) = \chi_{\Omega_2} L^2$, llegamos a

$$\begin{aligned} (\Delta_{w_2} f_3 \Delta_{w_1} - m w_1 \varphi_2 B \vartheta_1)\varphi_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) &= (\Delta_{w_2} f_3 \Delta_{w_1} - m w_1 \varphi_2 B \vartheta_1)\chi_{\Omega_1} L^2 \\ &\subseteq \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} L^2 = \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2. \end{aligned}$$

Como los espacios $\mathcal{E}_{*1}$ y $\mathcal{E}_2$ son $\mathcal{E}_{*1} = \mathbb{C}^2 = \mathcal{E}_2$, podemos razonar con la proyección ortogonal de la misma forma que lo hicimos en la demostración del Teorema 9.10, es decir, teniendo en cuenta la descomposición ortogonal

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2} L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)} L^2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2 \end{bmatrix},$$

si aplicamos la proyección ortogonal de $\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2} L^2 \end{bmatrix}$ sobre el espacio

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)} L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) L^2 \end{bmatrix},$$

que no es más que la matriz $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) \end{bmatrix}$, en la igualdad anterior se verifica

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)} L^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \text{clos}\left\{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \chi_{\Omega_2}(1-\chi_{\Omega_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \\ \Delta_{w_2} f_3 \overline{m}\,\overline{w}_1 \vartheta_1^* + \varphi_2 B \Delta_{*1} & \Delta_{w_2}\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2^2 \\ H_2^2 \end{bmatrix}\right\},$$

ya que $(\Delta_{w_2} f_3 \Delta_{w_1} - \varphi_2 B \vartheta_1)\varphi_1 L^2(\Delta_1\mathcal{E}_1) \subseteq \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} L^2$. Como

$$\Theta_2 = m w_2 \vartheta_2 \varphi_2, \qquad \text{clos}\left\{\varphi_2 H_2^2\right\} = H^2 \qquad \text{y} \qquad \chi_{\Omega_2}\Delta_{w_2} = \Delta_{w_2}$$

llegamos a

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)}L^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1-\chi_{\Omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \\ \Delta_{w_2} f_3 \overline{m}\,\overline{w}_1 \vartheta_1^* + \chi_{\Omega_2}\varphi_2 B \Delta_{*1} & \Delta_{w_2}\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2^2 \\ H_2^2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1-\chi_{\Omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_* & m w_2 \vartheta_2 \\ \Delta_{w_2} f_3 \overline{m}\,\overline{w}_1 \vartheta_1^* + \chi_{\Omega_2}\varphi_2 B \Delta_{*1} & \Delta_{w_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2^2 \\ H^2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si multiplicamos las matrices y tenemos en cuenta que $\vartheta_1\vartheta_1^* + (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} = I$, que $w_1 H_2^2$ es denso en H_2^2 y que

$$(1-\chi_{\Omega_1})\Delta_{*1} = (1-\chi_{\Omega_1})((\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_1}\vartheta_1\vartheta_1^*) = (1-\chi_{\Omega_1})(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}},$$

podemos escribir la igualdad anterior como

$$\begin{bmatrix} H_2^2 \\ \chi_{\Omega_2\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)}L^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} A_*[\vartheta_1\vartheta_1^* + (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}] & m w_2 \vartheta_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\left(\Delta_{w_2} f_3 \overline{m}\,\overline{w}_1 \vartheta_1^* + \chi_{\Omega_2}\varphi_2 B (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}\right) & (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_{w_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 H_2^2 \\ H^2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{clos}\left\{ \left[\begin{bmatrix} m w_2 \vartheta_2 \\ (1-\chi_{\Omega_1})\Delta_{w_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \overline{m} \vartheta_1^* & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_*(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* \\ (1-\chi_{\Omega_1})\chi_{\Omega_2}\varphi_2 B (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^{\mathrm{ad}} & 0 \end{bmatrix} \right] H_3^2 \right\},$$

ya que $(1-\chi_{\Omega_1})\,|w_1|^2 = (1-\chi_{\Omega_1})$ y, por (II.23) y (II.25),

$$m w_2 f_3 \vartheta_2 \overline{m} \vartheta_1^* = w_1 f_2 \vartheta_2 \vartheta_1^* = w_1 A_* \vartheta_1 \vartheta_1^*.$$

Como la matriz que aparece dentro del corchete es suma de dos matrices de rango uno, a lo más puede tener rango dos y, por tanto, tiene que ser $\chi_{\Omega_2\setminus\Omega_1\cap\Omega_2}L^2 = 0$ o, lo que es lo mismo, $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ en casi todo.

Usando ahora que también existe un operador $W : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que $T_{\Theta_1}W = WT_{\Theta_2}$, $\ker(W) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{W\mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_1$, y razonando de manera análoga con los parametros A' y A'_* de su levantamiento, llegaríamos a las inclusiones contrarias a las que hemos obtenido antes y, en consecuencia $\mathcal{N}^+[a_1, b_1] = \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$, $\mathcal{N}^+[c_1, d_1] = \mathcal{N}^+[c_2, d_2]$ y $\Omega_1 = \Omega_2$ en casi todo.

Como $w_1 f_2 = w_2 f_3$, la parte interior f_2^{i} de f_2 es igual a la parte interior de f_3, tomando $f_0 = f_2^{\mathrm{i}} = f_3^{\mathrm{i}}$ tenemos que m.c.d.i. $\{f_0, m\} = 1$. Además, como f_1 y f_4 son exteriores, se tiene por (II.23) (II.25)

$$\frac{1}{f_1}A_*^{\mathrm{ad}}, \frac{1}{f_4}A \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2], \quad \frac{1}{f_1}A_*^{\mathrm{ad}}\vartheta_2 = \vartheta_1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{f_4}A\varphi_1^{\mathrm{ad}} = \varphi_2^{\mathrm{ad}} \quad \text{con}$$

$$(\det(\frac{1}{f_1}A_*^{\mathrm{ad}}))^{\mathrm{i}} = (\det A_*^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{i}} = (\det A_*)^{\mathrm{i}} = (f_1 f_2)^{\mathrm{i}} = f_2^{\mathrm{i}} = f_0 \quad \text{y}$$

$$(\det(\frac{1}{f_4}A))^{\mathrm{i}} = (\det A)^{\mathrm{i}} = f_3^{\mathrm{i}} = f_0,$$

por lo tanto, $f_0 \in \det(\vartheta_2 \to \vartheta_1)^{\mathrm{i}} \cap \det\left(\varphi_1^{\mathrm{ad}} \to \varphi_2^{\mathrm{ad}}\right)^{\mathrm{i}}$.

La existencia de g_0 se prueba de manera análoga, usando los parámetros A' y A'_*.

Para ver la implicación contraria, como el papel de Θ_1 y Θ_2 es simétrico, vamos a probar que si

(i) $m_1 = m_2 = m$,

(ii) $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ en casi todo,

(iii) $\mathcal{N}^+[a_1, b_1] \subseteq \mathcal{N}^+[a_2, b_2]$,

(iv) $\mathcal{N}^+[c_2, d_2] \subseteq \mathcal{N}^+[c_1, d_1]$ y

(v) existe $f_0 \in \det(\vartheta_2 \to \vartheta_1)^{\mathrm{i}} \cap \det\left(\varphi_1^{\mathrm{ad}} \to \varphi_2^{\mathrm{ad}}\right)^{\mathrm{i}}$ con m.c.d.i. $\{f_0, m\} = 1$,

entonces existe un operador acotado $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $XT_{\Theta_1} = T_{\Theta_2}X$, con $\ker(X) = \{0\}$ y $\operatorname{clos}\{X\mathcal{H}_1\} = \mathcal{H}_2$. De acuerdo con los Lemas 8.8 y 8.9, debemos construir un levantamiento

$$Y = \pi_{*2}A_*(\pi_{*1})^* + \tau_2\Delta_2 A\pi_1^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^* = \pi_2 A\pi_1^* + \pi_{*2}A_*\Delta_{*1}(\tau_{*1})^* + \tau_2 B(\tau_{*1})^*$$

cuyos parámetros verifique las condiciones allí enunciadas. Empezamos tomando $B = 0$ con lo que dichas condiciones quedan:

(1) $\Theta_2 A = A_*\Theta_1$,

(2) $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ exterior,

(3) $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ $*$-exterior,

(4) $\operatorname{clos}\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)$,

(5) $\operatorname{clos}\{\Delta_{*1}(A_*)^* \Delta_{*2} L^2(\Delta_{*2}\mathcal{E}_{*2})\} = L^2(\Delta_{*1}\mathcal{E}_{*1})$,

donde $A, A_* \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

En primer lugar, sabemos que existe $\Lambda \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ tal que $\Lambda\vartheta_2 = \vartheta_1$ y $(\det \Lambda)^{\mathrm{i}} = f_0$. Sea λ_* una función exterior cumpliendo que $\lambda_*\Lambda \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ y de forma que $\lambda_* \det \Lambda$ sea una función de H^∞. Si denotamos $M^{\mathrm{ad}} = \lambda_*\Lambda$, tendremos $M^{\mathrm{ad}}\vartheta_2 = \lambda_*\vartheta_1$. Sea ahora $\lambda'_* = \lambda_* \det \Lambda \in H^\infty$ y sea $f_1 = (\lambda'_*)^{\mathrm{e}}$ su factor exterior. Entonces

$$\lambda'_* = \lambda_* \det \Lambda = (\lambda_* \det \Lambda)^{\mathrm{i}} (\lambda_* \det \Lambda)^{\mathrm{e}} = f_0 f_1,$$

y la igualdad $f_0 = (\lambda_* \det \Lambda)^{\mathrm{i}}$ se tiene ya que, al ser λ_* exterior

$$f_0 = (\det \Lambda)^{\mathrm{i}} = (\det(\lambda_*\Lambda))^{\mathrm{i}} = (\lambda_*\lambda_* \det \Lambda)^{\mathrm{i}} = (\lambda_* \det \Lambda)^{\mathrm{i}}.$$

Con todo esto tenemos, por un lado que

$$\det M = \det M^{\mathrm{ad}} = \lambda_*^2 \det \Lambda = \lambda_* f_0 f_1,$$

y por otro lado que

$$M(\lambda_*\vartheta_1) = M(M^{\mathrm{ad}}\vartheta_2) = (\det M^{\mathrm{ad}})\vartheta_2,$$

con lo cual

$$M\vartheta_1 = \frac{\det M^{\mathrm{ad}}}{\lambda_*}\vartheta_2 = \lambda'_*\vartheta_2.$$

Razonando de manera análoga con una matriz $\Gamma \in \mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ tal que $\Gamma\varphi_1^{\mathrm{ad}} = \varphi_2^{\mathrm{ad}}$ y $(\det \Gamma)^{\mathrm{i}} = f_0$, llegaríamos a que existe $N = \lambda\Gamma \in H^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, con λ exterior tal que $\lambda' = \lambda \det \Gamma \in H^\infty$, verificando $N\varphi_1^{\mathrm{ad}} = \lambda\varphi_2^{\mathrm{ad}}$ y $\det N = \lambda f_0 f_2$, donde $f_2 = (\lambda')^{\mathrm{e}}$. Además, se tiene también que $\lambda' = f_0 f_2$ y $N^{\mathrm{ad}}\varphi_2^{\mathrm{ad}} = \lambda'\varphi_1^{\mathrm{ad}}$, por tanto, $\varphi_2 N = \lambda'\varphi_1$.

Tomamos $A_* = w_2 f_2 M$ y $A = w_1 f_1 N$. Veamos que se verifican las cinco condiciones. (1) En primer lugar,

$$A_*\Theta_1 = w_2 f_2 M m w_1 \vartheta_1 \varphi_1 = m w_1 w_2 f_2 \lambda'_* \vartheta_2 \varphi_1 = m w_1 w_2 f_2 f_0 f_1 \vartheta_2 \varphi_1$$

y

$$\Theta_2 A = m w_2 \vartheta_2 \varphi_2 w_1 f_1 N = m w_1 w_2 \vartheta_2 f_1 \lambda' \varphi_1 = m w_1 w_2 f_2 f_0 f_1 \vartheta_2 \varphi_1,$$

por tanto, ya tenemos probada la primera condición.

(2) Para ver que $\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix}$ es exterior, hay que comprobar que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} H_4^2\right\} = H_2^2.$$

Ahora bien,

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} A_* & \Theta_2 \end{bmatrix} H_4^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} M & m\vartheta_2 \end{bmatrix} H_3^2\right\}$$

por ser w_2, f_2 y φ_2 funciones exteriores, por tanto, basta comprobar que $\begin{bmatrix} M & m\vartheta_2 \end{bmatrix}$ es exterior o, usando A.16, que son primos entre sí los determinantes de sus menores de orden dos, es decir, que los elementos del vector

$$\begin{bmatrix} \det M & m\vartheta_2^{\mathrm{ad}} M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_* f_0 f_1 & m\lambda_* \vartheta_1^{\mathrm{ad}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_* f_0 f_1 & m\lambda_* b_1 & -m\lambda_* a_1 \end{bmatrix}$$

son primos entre sí, pero esto es claro ya que m.c.d.i. $\{f_0, m\} = 1$, a_1 y b_1 son primos entre sí, y λ_* y f_1 son funciones exteriores.

(3) Para ver que $\begin{bmatrix} A \\ \Theta_1 \end{bmatrix}$ es $*$-exterior, basta ver que $\begin{bmatrix} A^T & \Theta_1^T \end{bmatrix}$ es exterior o, análogamente al párrafo anterior, que

$$\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix} N^T & m\varphi_1^T \end{bmatrix} H_3^2\right\} = H_2^2,$$

es decir, que los elementos del vector

$$\begin{bmatrix} \det N^T & m(\varphi_1^T)^{\mathrm{ad}} N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda f_0 f_2 & m\lambda (\varphi_2^{\mathrm{ad}})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda f_0 f_2 & m\lambda d_2 & -m\lambda c_2 \end{bmatrix}$$

son primos entre sí. Pero esto es obvio al ser f_0 y m primos entre sí, al igual que c_2 y d_2, y ser λ y f_2 funciones exteriores.

(4) Veamos ahora la cuarta condición, es decir,

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2) = \varphi_2^{\mathrm{ad}} L^2 \oplus \varphi_2^* \chi_\Omega L^2,$$

donde la primera igualdad se tiene por el Lema 9.1. La inclusión del espacio de la izquierda en el de la derecha es obvia, ya que $L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2)$ es la imagen del operador Δ_2. Para ver la inclusión contraria, observemos que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 w_1 f_1 N\left[\varphi_1^{\mathrm{ad}} L^2 \oplus \varphi_1^* \chi_\Omega L^2\right]\right\}.$$

Ahora bien, como

$$\Delta_i \varphi_i^{\mathrm{ad}} = \left(\varphi_i^{\mathrm{ad}}(\varphi_i^{\mathrm{ad}})^* + \Delta_{w_i}\varphi_i^*\varphi_i\right)\varphi_i^{\mathrm{ad}} = \varphi_i^{\mathrm{ad}} \quad \text{para } i = 1, 2$$

y $N\varphi_1^{\mathrm{ad}} = \lambda\varphi_2^{\mathrm{ad}}$, tenemos

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} L^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 w_1 f_1 \lambda \varphi_2^{\mathrm{ad}} L^2\right\} = \operatorname{clos}\left\{w_1 f_1 \lambda \varphi_2^{\mathrm{ad}} L^2\right\} = \varphi_2^{\mathrm{ad}} L^2$$

ya que w_1, f_1 y λ son funciones exteriores y, por tanto, distintas de cero en casi todo, y φ_2^{ad} es una isometría.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_2}\varphi_2^*\varphi_2 w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega L^2\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_2}\varphi_2^* w_1 f_1 \lambda' \varphi_1 \varphi_1^* \chi_\Omega L^2\right\} \\ &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_2}\varphi_2^* w_1 f_1 \lambda' \chi_\Omega L^2\right\} = \varphi_2^* \chi_\Omega L^2,\end{aligned}$$

por ser las funciones w_1, f_1 y λ' distintas de cero en casi todo, Δ_{w_2} distinta de cero en Ω y φ_2^* una isometría. Por tanto, sea cualquier elemento

$$\varphi_2^{\mathrm{ad}} g_1 + \varphi_2^* \chi_\Omega g_2 \in \varphi_2^{\mathrm{ad}} L^2 \oplus \varphi_2^* \chi_\Omega L^2 = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2),$$

como $\operatorname{clos}\{\Delta_{w_2}\varphi_2^*\varphi_2 w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega L^2\} = \varphi_2^* \chi_\Omega L^2$, sabemos que existe un elemento de la forma $\Delta_{w_2}\varphi_2^*\varphi_2 w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega h_1$ tal que

$$\|\Delta_{w_2}\varphi_2^*\varphi_2 w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega h_1 - \varphi_2^* \chi_\Omega g_2\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando además que

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} L^2\right\} = \varphi_2^{\mathrm{ad}} L^2 \quad \text{y} \quad \operatorname{clos}\left\{\varphi_2^{\mathrm{ad}}(\varphi_2^{\mathrm{ad}})^* w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega L^2\right\} \subseteq \varphi_2^{\mathrm{ad}} L^2,$$

podemos afirmar que existen dos elementos $\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} h_2$ y $\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} h_3$ tales que

$$\left\|\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} h_2 - \varphi_2^{\mathrm{ad}} g_1\right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left\|\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} h_3 - \varphi_2^{\mathrm{ad}}(\varphi_2^{\mathrm{ad}})^* w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega h_1\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando el elemento

$$\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}}(h_2 - h_3) + \left(\varphi_2^{\mathrm{ad}}(\varphi_2^{\mathrm{ad}})^* + \Delta_{w_2}\varphi_2^*\varphi_2\right) w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega h_1$$

que pertenece al espacio

$$\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} L^2 + \left(\varphi_2^{\mathrm{ad}} (\varphi_2^{\mathrm{ad}})^* + \Delta_{w_2} \varphi_2^* \varphi_2\right) w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega L^2 = \Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1),$$

tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} (h_2 - h_3) + \left(\varphi_2^{\mathrm{ad}} (\varphi_2^{\mathrm{ad}})^* + \Delta_{w_2} \varphi_2^* \varphi_2\right) w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega h_1 - (\varphi_2^{\mathrm{ad}} g_1 + \varphi_2^* \chi_\Omega g_2)\right\| \leq \\
&\qquad \left\|\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} h_2 - \varphi_2^{\mathrm{ad}} g_1\right\| + \left\|\Delta_2 w_1 f_1 N \varphi_1^{\mathrm{ad}} h_3 - \varphi_2^{\mathrm{ad}} (\varphi_2^{\mathrm{ad}})^* w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega h_1\right\| \\
&\qquad\qquad + \left\|\Delta_{w_2} \varphi_2^* \varphi_2 w_1 f_1 N \varphi_1^* \chi_\Omega h_1 - \varphi_2^* \chi_\Omega g_2\right\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

En consecuencia, el elemento arbitrario $\varphi_2^{\mathrm{ad}} g_1 + \varphi_2^* \chi_\Omega g_2$ pertenece a clos $\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\}$ y, por tanto

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A \Delta_1 L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_2 A L^2(\Delta_1 \mathcal{E}_1)\right\} = L^2(\Delta_2 \mathcal{E}_2).$$

(5) Queda ver la quinta condición que, por el Lema 9.1, podemos escribir como

$$\begin{aligned}
\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1} (A_*)^* \Delta_{*2} L^2(\Delta_{*2} \mathcal{E}_{*2})\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1} (A_*)^* L^2(\Delta_{*2} \mathcal{E}_{*2})\right\} \\
&= L^2(\Delta_{*1} \mathcal{E}_{*1}) = (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2 \oplus \vartheta_1 \chi_\Omega L^2.
\end{aligned}$$

De la misma forma

$$\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1} (A_*)^* L^2(\Delta_{*2} \mathcal{E}_{*2})\right\} = \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1} \overline{w}_2 \overline{f}_2 M^* L^2(\Delta_{*2} \mathcal{E}_{*2})\right\} \subseteq L^2(\Delta_{*1} \mathcal{E}_{*1})$$

y, por ser

$$\Delta_{*i} (\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* = \left((\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* \vartheta_i^{\mathrm{ad}} + \Delta_{w_i} \vartheta_i \vartheta_i^*\right) (\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* = (\vartheta_i^{\mathrm{ad}})^* \quad \text{para } i = 1, 2$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1} \overline{w}_2 \overline{f}_2 M^* (\vartheta_2^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1} \overline{w}_2 \overline{f}_2 (\vartheta_2^{\mathrm{ad}} M)^* L^2\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{*1} \overline{w}_2 \overline{f}_2 (\lambda_* \vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2\right\} = (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^* L^2,
\end{aligned}$$

ya que w_2, f_2 y λ_* son distintas de cero en casi todo y $(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*$ es una isometría. Usando ahora la igualdad

$$\begin{aligned}
\operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1} \vartheta_1 \vartheta_1^* \overline{w}_2 \overline{f}_2 M^* \vartheta_2 \chi_\Omega L^2\right\} &= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1} \vartheta_1 \overline{w}_2 \overline{f}_2 (M \vartheta_1)^* \vartheta_2 \chi_\Omega L^2\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1} \vartheta_1 \overline{w}_2 \overline{f}_2 \overline{\lambda}'_* \vartheta_2^* \vartheta_2 \chi_\Omega L^2\right\} \\
&= \operatorname{clos}\left\{\Delta_{w_1} \vartheta_1 \overline{w}_2 \overline{f}_2 \overline{\lambda}'_* \chi_\Omega L^2\right\} = \vartheta_1 \chi_\Omega L^2,
\end{aligned}$$

que se obtiene por ser w_2, f_2 y λ_* son distintas de cero en casi todo, Δ_{w_1} distinta de cero en Ω y ϑ_1 isometría, y

$$\operatorname{clos}\left\{(\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*\vartheta_1^{\mathrm{ad}}\overline{w}_2\overline{f}_2M^*\vartheta_2\chi_\Omega L^2\right\} \subseteq (\vartheta_1^{\mathrm{ad}})^*L^2,$$

se prueba la igualdad, de manera análoga a como lo hemos hecho antes, y el teorema queda probado. ■

El caso no trivial más simple de operador con función característica 2×2 con determinante nulo es el de un operador cuya función característica sea de la forma

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mw \end{bmatrix},$$

donde m y w estan en H^∞, m es interior y w es exterior con $|w| \leq 1$. Como dicha matriz es diagonal, y sabemos que el operador $S \oplus S^*$ tiene a la función escalar cero como función característica, tenemos que T_Θ es unitariamente equivalente al operador $S \oplus S^* \oplus T_{mw}$, donde S es el operador desplazamiento unilateral de dimensión 1.

Con todo esto, supongamos ahora el caso particular en que

$$\Theta_1 = mw\vartheta\varphi \quad \text{con } \vartheta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ y } \varphi = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix},$$

donde $m, w, a, b, c, d \in H^\infty$ son tales que m es una función interior, w es una función exterior con $|w| \leq 1$, $|a|^2 + |b|^2 = 1 = |c|^2 + |d|^2$ y m.c.d.i. $\{a, b\} = 1 =$ m.c.d.i. $\{c, d\}$, y

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mw \end{bmatrix}.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado

10.2. Corolario. *T_{Θ_1} es casi-semejante a T_{Θ_2} si, y sólo si, existen cuatro funciones f, g, h, k en H^∞ tales que $af + bg$ y $ch + dk$ son funciones exteriores.*

Demostración. Como Θ_2 se puede reescribir como

$$\Theta_2 = mw \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

usando el teorema anterior, hay que probar que existen cuatro funciones $f, g, h, k \in H^\infty$ tales que $af + bg$ y $ch + dk$ son funciones exteriores si, y sólo si,

$$\mathcal{N}^+[a, b] = \mathcal{N}^+[0, 1],$$

$$\mathcal{N}^+[c, d] = \mathcal{N}^+[0, 1],$$

$$\text{existe } f_0 \in \det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{i}} \cap \det\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{i}} \quad \text{con m.c.d.i.}\ \{f_0, m\} = 1$$

y

$$\text{existe } g_0 \in \det\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{i}} \cap \det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{i}} \quad \text{con m.c.d.i.}\ \{g_0, m\} = 1.$$

Supongamos en primer lugar que existen cuatro funciones $f, g, h, k \in H^\infty$ tales que $af + bg$ y $ch + dk$ son funciones exteriores y veamos que se verifican las cuatro condiciones. Empecemos observando que $\mathcal{N}^+[0, 1] = \mathcal{N}^+$, así que, $\mathcal{N}^+[a, b] \subseteq \mathcal{N}^+$ y $\mathcal{N}^+[c, d] \subseteq \mathcal{N}^+$, por tanto, basta ver las inclusiones contrarias. Pero, es fácil comprobar que todo $v \in \mathcal{N}^+$ se puede escribir como

$$v = a\left(\frac{vf}{af + bg}\right) + b\left(\frac{vg}{af + bg}\right) \quad \text{y} \quad v = c\left(\frac{vh}{ch + dk}\right) + d\left(\frac{vk}{ch + dk}\right),$$

por tanto $\mathcal{N}^+ \subseteq \mathcal{N}^+[a, b]$ y $\mathcal{N}^+ \subseteq \mathcal{N}^+[c, d]$.

Por otro lado, si tomamos

$$\Lambda = \begin{bmatrix} g & a \\ f & b \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} d & -c \\ \dfrac{h}{ch + dk} & \dfrac{k}{ch + dk} \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} b & -a \\ \dfrac{f}{af + bg} & \dfrac{g}{af + bg} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Psi = \begin{bmatrix} k & c \\ h & d \end{bmatrix}.$$

Es claro que estas matrices están en $\mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ y se tiene

$$\Lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & a \\ -f & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

$$\Gamma \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ \dfrac{h}{ch+dk} & \dfrac{k}{ch+dk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ \dfrac{f}{af+bg} & \dfrac{g}{af+bg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Psi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & c \\ -h & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Como $\det \Lambda = af + bg$, $\det \Gamma = 1$, $\det \Phi = 1$ y $\det \Psi = ch + dk$, tomando $f_0 = g_0 = 1$ se tiene todo lo que queremos.

Si suponemos ahora que se verifican las cuatro condiciones, en particular, existen

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

en $\mathcal{N}^+[\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2]$ tales que $\Gamma \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\Phi \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces $\gamma_{21}c + \gamma_{22}d = 1$ y $\phi_{21}a + \phi_{22}b = 1$, por tanto, como $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \phi_{21}$ y ϕ_{22} están en $\mathcal{N}^+$, sabemos que existen dos funciones exteriores u y v tales que $u\gamma_{21}, u\gamma_{22}, v\phi_{21}$ y $v\phi_{22}$ están en H^∞, en consecuencia, si tomamos $f = v\phi_{21}$, $g = v\phi_{22}$, $h = u\gamma_{21}$ y $k = u\gamma_{22}$, tenemos que las funciones $af + bg = v$ y $ch + dk = u$ son exteriores. ∎

Por otro lado, fue probado en [Wu2], y aparece en esta memoria como Teorema 7.8, que T_{mw} es casi-semejante a $S_m \oplus M_\zeta | \chi_\Omega L^2$, donde M_ζ es el operador de multiplicación por la variable independiente ζ y $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{T} : | w(\zeta) | < 1\}$ de donde, el teorema anterior puede ser reescrito como sigue.

10.3. Corolario. *T_{Θ_1} es casi-semejante a $S \oplus S^* \oplus S_m \oplus M_\zeta | \chi_\Omega L^2$ si, y sólo si, existen $f, g, h, k \in H^\infty$ tales que $af + bg$ y $ch + dk$ son funciones exteriores.*

Como al final de la Sección anterior, con el ejemplo 9.15 podemos construir una función característica Θ_1 de orden 2×2 y singular que no es casi-semejante a $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. por otro lado, sin embargo, sí hay muchos ejemplos de casi-semejanza: El Teorema de la Corona de Carleson [Ni1] afirma que si a y b son funciones de H^∞ tales que existe $\delta > 0$ con $|a(\zeta)|^2 + |b(\zeta)|^2 \geq \delta > 0$ para todo $\zeta \in \mathbb{D}$, entonces existen funciones $f, g \in H^\infty$ tales que $af + bg = 1$.

Apéndice

Los operadores de desplazamiento.

Es bien conocido que toda isometría que esté definida en un espacio de Hilbert de dimensión finita es un operador unitario. Sin embargo, esta afirmación no es cierta si el espacio es de dimensión infinita. El ejemplo típico, que describiremos a continuación, es el operador de desplazamiento en H^2 o l^2.

A.1. Ejemplo. Sea $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ la circunferencia unidad del plano complejo, dotada de la medida de Lebesgue μ normalizada de forma que $\mu(\mathbb{T}) = 1$. Sabemos que el conjunto de funciones $\{e_n(\zeta) = \zeta^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(= L^2(\mathbb{T}))$. Por tanto, cualquier función $f \in L^2$ se puede escribir como

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle \, e_n,$$

donde la serie converge en la topología de espacio de Hilbert de L^2 o, usando una terminología clásica, que converge en media cuadrática. El coeficiente $\widehat{f}_n = \langle f, e_n \rangle$ se llama coeficiente de Fourier n-ésimo de f. Abusando de la notación, en vez de $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e_n$, a veces se escribe $f(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n \zeta^n$ (entendida esta convergencia como convergencia puntual, es sabido que la igualdad es cierta salvo un conjunto de medida nula).

Consideremos el operador V de multiplicación por la variable independiente ζ en L^2; es decir, $(Vf) = \zeta \cdot f(\zeta)$ o, en otras palabras, $V(f) = e_1 \cdot f$. Poniendo $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e_n$ se tiene

$$Vf = e_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e_{n+1},$$

con lo cual $\|Vf\|^2 = \|f\|^2$, así que V es una isometría en L^2. Su adjunto V^* viene dado por la multiplicación por $\overline{\zeta}$, es decir $f \to e_{-1} \cdot f$, que también es una isometría, en consecuencia V es un operador unitario en L^2. Si efectuamos la identificación canónica de

L^2 y $l^2_{\mathbb{Z}}$ mediante el isomorfismo unitario

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \rightleftarrows (...a_{-2}, a_{-1}, \boxed{a_0}, a_1, a_2, ...),$$

(donde el recuadro indica la posición $n = 0$ en la sucesión bilateral) entonces los operadores V y V^* anteriores actúan sobre $l^2_{\mathbb{Z}}$ de la siguiente forma

$$V(..., a_{-1}, \boxed{a_0}, a_1, a_2, ...) = (..., a_{-2}, \boxed{a_{-1}}, a_0, a_1, ...),$$

$$V^*(..., a_{-1}, \boxed{a_0}, a_1, a_2, ...) = (..., a_0, \boxed{a_1}, a_2, a_3, ...),$$

por este motivo, V se llama *operador de desplazamiento bilateral hacia delante (bilateral forward shift* en inglés) y V^* se llama *operador de desplazamiento bilateral hacia detrás (bilateral backward shift* en inglés).

Se pueden definir operadores de desplazamiento unilaterales sobre ciertos subespacios de L^2. El ejemplo más importante es el *espacio de Hardy* H^2, que se define como el espacio de L^2 formado por aquellas funciones f cuyos coeficientes de Fourier n-ésimos valen cero para $n < 0$. O sea, H^2 es el subespacio cerrado generado por la sucesión ortonormal $\{e_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ que será una base del mismo; en particular, el conjunto de los polinomios en la variable independiente ζ es denso en H^2. Definimos en H^2 el operador de multiplicación por la variable independiente ζ, que denotaremos por S, es decir $Sf = e_1 \cdot f$. El operador S es simplemente la restricción a H^2del operador V, por lo que es una isometría en H^2, el adjunto $B = S^*$ de S viene dado por:

$$Bf = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}_{n+1} e_n = \widehat{f}_1 e_0 + \widehat{f}_2 e_1 + \widehat{f}_3 e_2 + \cdots.$$

Obviamente $B(e_0) = 0$ con lo cual B no es una isometría y, por tanto, S no es unitario. Si efectuamos la identificación canónica de H^2 y l^2 mediante el isomorfismo unitario

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \rightleftarrows (a_0, a_1, a_2, ...),$$

entonces los operadores S y B anteriores actúan sobre l^2 de la siguiente forma

$$S(a_0, a_1, a_2, ...) = (0, a_0, a_1, ...),$$

$$B(a_0, a_1, a_2, ...) = (a_1, a_2, a_3, ...),$$

por este motivo, S se llama *operador de desplazamiento unilateral hacia delante* y B se llama *operador de desplazamiento unilateral hacia detrás.*

Puesto que $S^n e_0 = e_n$, tenemos que los vectores $\{S^n e_0 : n = 0, 1, 2, ...\}$ forman una base ortonormal de H^2. En particular, si $\mathcal{L}$ es el espacio de las funciones constantes —el espacio generado por e_0— entonces podemos descomponer H^2 como la suma de Hilbert de los espacios $\{S^n\mathcal{L} : n = 0, 1, 2, ...\}$:

$$H^2 = \mathcal{L} \oplus S\mathcal{L} \oplus S^2\mathcal{L} \oplus \cdots.$$

Esta idea se puede utilizar para definir operadores de desplazamiento en un contexto más general. Este tipo de operadores representan canónicamente a todas las isometrías que no son unitarias sobre ningún subespacio.

A.2. Definiciones. Sea U una isometría en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $\mathcal{L}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Diremos que $\mathcal{L}$ es un *subespacio errante* (en inglés *wandering subspace*) para U si los subespacios $U^n\mathcal{L}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ son todos ortogonales entre sí. Por ejemplo, según acabamos de ver, las funciones constantes forman un subespacio errante para el operador de desplazamiento S en H^2.

Diremos que una isometría U en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un *operador de desplazamiento unilateral hacia delante*[1] si admite un subespacio errante $\mathcal{L}$ de manera que $\mathcal{H}$ es la suma de Hilbert de los espacios ortogonales $U^n\mathcal{L}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$:

$$\mathcal{H} = l^2(U^n\mathcal{L}) = \mathcal{L} \oplus U\mathcal{L} \oplus U^2\mathcal{L} \oplus \cdots;$$

es decir, si cada elemento $x \in \mathcal{H}$ se puede descomponer de manera única como una suma ortogonal $x = \sum_{n=0}^{\infty} U^n x_n$, donde todos los elementos x_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ están en $\mathcal{L}$. Dado que esta descomposición es única, podemos identificar x con la sucesión $(x_0, x_1, x_2, ...)$. Obsérvese entonces que

$$Ux = \sum_{n\geq 0} U^{n+1}x_n = \sum_{n\geq 1} U^n x_{n-1}$$

y, usando la identificación anterior, tenemos

$$U : x = (x_0, x_1, x_2, ...) \to Ux = (0, x_0, x_1, ...).$$

[1] A lo largo de toda la memoria este tipo de operador se llama, por comodidad, operador de desplazamiento. Sólo en el caso de encontrarnos con un operador de desplazamiento unilateral hacia detrás o de alguno de los operadores de desplazamiento bilateral, lo indicaremos expresamente.

Vemos entonces que U actúa de forma similar al operador de desplazamiento S en l^2. La unicidad de la descomposición también nos permite escribir

$$U\mathcal{H} = \{0\} \oplus U\mathcal{L} \oplus U^2\mathcal{L} \oplus \cdots$$

con lo que, obviamente, $U\mathcal{H} = \mathcal{L}^\perp$ y, por tanto, $\mathcal{L} = (\mathcal{UH})^\perp = \ker(U^*)$. Esto nos dice que $\mathcal{L}$ está unívocamente determinado por lo que sólo se habla del espacio errante de un operador de desplazamiento. Teniendo esto en cuenta, la dimensión de $\mathcal{L}$ se llama *multiplicidad de U.*

Como caso particular, si consideramos $\mathcal{H}$ como el espacio $H^2(\mathcal{L})$, entonces el operador de multiplicación por la variable independiente M_ζ definido en $H^2(\mathcal{L})$ por

$$M_\zeta\left(\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} x_n,$$

es un operador de desplazamiento cuyo subespacio errante es $\mathcal{L}$ y, por tanto, de multiplicidad $\dim(\mathcal{L})$.

A.3. Teorema. *Sea U una isometría en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces U es un operador de desplazamiento unilateral si, y sólo si,* $\lim_{n\to\infty} U^{*n}x = 0$ *para todo $x \in \mathcal{H}$.*

La descomposición de Wold.

A.4. Definición. Sea T un operador acotado definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Diremos que T es *completamente no unitario* si no existe ningún subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ que sea reductor para T y en el cual T sea unitario.

A.5. Definición. Si T es una contracción en un espacio de hilbert $\mathcal{H}$ entonces $\|T^{n+1}\| \leq \|T^n\|$ para cualquier $n \geq 1$. Por tanto, $\{T^{*n}T^n : n = 1, 2, ...\}$ es una sucesión decreciente de operadores positivos que está acotada inferiormente y que, como consecuencia, es convergente a un operador positivo. La raíz cuadrada de este operador positivo se llama *módulo asintótico de T* y se denota por $A(T)$. O sea, $A(T)$ es el único operador positivo en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que verifica $A(T)^2x = \lim_n T^{*n}T^n x$ o, lo que es lo mismo, $\|A(T)^2 x\| = \lim_n \|T^n x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

A.6. Teorema. *Sea U una isometría definida sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existen dos subespacios cerrados y complementarios $\mathcal{H}_\mathrm{u}$ y $\mathcal{H}_\mathrm{n} = \mathcal{H}_\mathrm{u}^\perp$ que son reductores* *para U y tales que $U|\mathcal{H}_{\mathrm{u}}$ es unitario y $U|\mathcal{H}_{\mathrm{n}}$ es completamente no unitario. Estos subespacios vienen dados por $\mathcal{H}_{\mathrm{u}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U^n\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_{\mathrm{n}} = \{x \in \mathcal{H} : U^{*n}x \to 0\}$. La proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_{\mathrm{u}}$ es $A(U^*) = A(U^*)^2 = \lim_{n\to\infty} U^nU^{*n}$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $U^nU^{*n} \geq P(\mathcal{H}_{\mathrm{u}})$. La restricción de U a $\mathcal{H}_n$ es un operador de desplazamiento cuyo subespacio errante es $(U\mathcal{H})^\perp = \ker(U^*)$. Dicho de otra manera, $\mathcal{H}$ lo podemos escribir como*

$$\mathcal{H} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U^n\mathcal{H}\right) \oplus l^2(U^n\mathcal{L}),$$

siendo $L=(U\mathcal{H})^\perp = \ker(U^*)$. Esta descomposición se llama descomposición de Wold de U.

A.7. Corolario. *Todo operador de desplazamiento en un espacio de Hilbert es completamente no unitario. Recíprocamente, toda isometría completamente no unitaria definida en un espacio de Hilbert es un operador de desplazamiento.*

Si en vez de una isometría lo que tenemos es una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, también se puede obtener una descomposición del espacio $\mathcal{H}$ análoga a la descomposición de Wold.

A.8. Teorema. *Sea T una contracción en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existen dos subespacios cerrados y complementarios $\mathcal{H}_{\mathrm{u}}$ y $\mathcal{H}_{\mathrm{n}} = \mathcal{H}_{\mathrm{u}}^\perp$ que son reductores para T y tales que $T|\mathcal{H}_{\mathrm{u}}$ es unitario y $T|\mathcal{H}_{\mathrm{n}}$ es completamente no unitario. El espacio $\mathcal{H}_{\mathrm{u}}$ viene dado por*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{u}} = \bigcap_{n\geq 0} \left[\ker(I - T^nT^{*n}) \bigcap \ker(I - T^{*n}T^n)\right].$$

La descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{u}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{n}}$ se llama *descomposición de Langer-Wold* de T. En particular, si T es una co-isometría entonces la descomposición de Langer-Wold de T coincide con la descomposición de Wold de T^*.

Funciones interiores y exteriores.

Uno de los teoremas esenciales en el estudio del espacio $H^\infty = H^2 \cap L^\infty$ de las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$ es el de la factorización interior-exterior.

A.9. Definiciones. Se dice que una función $u \in H^\infty$ es *interior* si verifica $|u(\zeta)| = 1$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$. Es conocido que si u es interior, entonces $|u(\zeta)| \leq 1$ para todo

$\zeta \in \mathbb{D}$ y que su forma general es $u(\zeta) = \lambda B(\zeta)S(\zeta)$, donde λ es un factor constante de módulo 1, $B(\zeta)$ es un producto de Blaschke:

$$B(\zeta) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_k}}{|a_k|} \frac{a_k - \zeta}{1 - \overline{a_k}\zeta} \quad \text{donde} \quad |a_k| < 1 \quad \text{para todo } k \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty,$$

y el factor $S(\zeta)$, llamado parte singular, viene dado por

$$S(\zeta) = \exp\left[- \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} \, d\mu(t) \right],$$

donde μ es una medida finita no negativa en $[0, 2\pi]$ que es singular con respecto a la medida de Lebesgue.

Se dice que una función u definida en el disco unidad $\mathbb{D}$ es *exterior*, si admite una representación de la forma

$$u(\zeta) = \lambda \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} \log(k(t)) \, dt \right] \quad \text{para todo } \zeta \in \mathbb{D},$$

donde $k(t) \geq 0$, $\log(k(t)) \in L^1$ y λ es un número complejo de módulo 1. Esta función u pertenece a H^p $(0 < p \leq \infty)$ si, y sólo si, $k \in L^p$; en cuyo caso $|u(e^{it})| = k(t)$ en casi todo.

Es obvio que las únicas funciones que son a la vez interiores y exteriores son las funciones constantes de módulo 1, ya que, usando que las funciones exteriores tienen la expresión anterior y que $|u(e^{it})| = k(t) = 1$ en casi todo, entonces tiene que ser $u(\zeta) = \lambda$ con λ un número complejo de módulo 1.

A.10. Teorema. *Toda función $u \in H^p$ ($0 < p \leq \infty$) que no es la función idénticamente nula, tiene una factorización canónica $u = u^{\mathrm{i}} u^{\mathrm{e}}$ como el producto de una función interior u^{i} por una función exterior u^{e}, la cual está determinada salvo factor constante de módulo 1. La función exterior u^{e} viene dada por la fórmula*

$$u_{\mathrm{e}}(\zeta) = \lambda \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} \log\left|u(e^{it})\right| dt \right] \quad \text{para todo } \zeta \in \mathbb{D},$$

donde λ es un escalar de módulo 1; u^{i} y u^{e} se llaman factor interior *y* factor exterior *de u, respectivamente.*

De lo anterior, es fácil comprobar que si u, v y uv están en espacios de Hardy respectivos y no son idénticamente nulas, entonces

$$(uv)^{\mathrm{e}} = u^{\mathrm{e}}v^{\mathrm{e}} \quad \text{y} \quad (uv)^{\mathrm{i}} = u^{\mathrm{i}}v^{\mathrm{i}};$$

esto se verifica en particular si $u \in H^\infty$ y $v \in H^p$, ya que, en ese caso, $uv \in H^p$.

El Teorema del subespacio invariante de Beurling nos proporciona una de las propiedades por las cuales son importantes las funciones interiores en el contexto de la teoría de operadores.

A.11. Teorema. *Dado el operador desplazamiento S en H^2 se tiene que un subespacio $\mathcal{M} \subseteq H^2$ es invariante para S si, y sólo si, existe una función interior u tal que $\mathcal{M} = uH^2$.*

En lo que sigue, denotaremos por m.c.d.i.$\{u_1, u_2, ...u_n\}$ al mayor factor interior común de las funciones $u_1, u_2, ...u_n$.

Desde el punto de vista de la teoría de operadores, la propiedad esencial que caracteriza las funciones exteriores se debe también a Beurling.

A.12. Teorema. *Una función $u \in H^\infty$ es función exterior si, y sólo si,*

$$\operatorname{clos}\{uH^2\} = H^2.$$

Funciones interiores y exteriores cuyos valores son operadores.

Veamos como se extienden las nociones de función interior y función exterior a un contexto más general. Todos los resultados que enunciamos a continuación se pueden consultar en [Nil] y [SzFol]. Sea $\Theta : \mathbb{D} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ una función analítica y acotada, esto es, $\sup\{\|\Theta(\zeta)\| : \zeta \in \mathbb{D}\} < \infty$ y existe una sucesión $\Theta_0, \Theta_1, ... \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tal que Θ se escribe como la serie de potencias

$$\Theta(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k \zeta^k,$$

donde se supone que la serie es convergente en la topología fuerte de operadores en el disco unidad $\mathbb{D}$. El conjunto de funciones analíticas y acotadas así definidas se denota por $H^\infty(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Como en el caso escalar, se puede probar que existe $\lim_{r\to 1^-} \Theta(re^{it})$ en casi todo $t \in [0, 2\pi)$, como límite en la topología fuerte de operadores y, por tanto, podemos definir

Θ sobre $\mathbb{T}$ como dicho límite, es decir,

$$\Theta(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} \Theta(re^{it}).$$

Si tenemos una función analítica y acotada Θ, se define su *función analítica adjunta* $\widetilde{\Theta}$ como

$$\widetilde{\Theta}(\zeta) = (\Theta(\overline{\zeta}))^* \quad \text{para todo } \zeta \in \mathbb{D},$$

que está en $H^\infty(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ y está acotada por la misma cota; de hecho, tenemos que

$$\widetilde{\Theta}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k^* \zeta^k.$$

Dada una función analítica acotada Θ, diremos que es *contractiva* si $\|\Theta(\zeta)\| \leq 1$ para todo $\zeta \in \mathbb{D}$. Tal función se llamará *puramente contractiva* si

$$\|\Theta(0)h\| < \|h\| \quad \text{para todo } h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}.$$

A cada función analítica acotada Θ le podemos asociar el operador Θ de $L^2(\mathcal{H})$ en $L^2(\mathcal{K})$ definido por

$$(\Theta f)(\zeta) = \Theta(\zeta) f(\zeta) \quad \text{para todo } f \in L^2(\mathcal{H}).$$

Si la función $\Theta(\zeta)$ es contractiva, entonces el operador Θ es una contracción. Podemos observar también que el adjunto del operador Θ viene dado por la función

$$(\Theta^* f)(\zeta) = \Theta(\zeta)^* f(\zeta) \quad \text{para todo } f \in L^2(\mathcal{K}),$$

ya que

$$(\Theta^* f, g) = (f, \Theta g) = \int_{\mathbb{T}} (f(\zeta), \Theta(\zeta) g(\zeta))\, d\zeta = \int_{\mathbb{T}} (\Theta(\zeta)^* f(\zeta), g(\zeta))\, d\zeta.$$

En otros términos $(\Theta^* f)(\zeta) = \widetilde{\Theta}(\overline{\zeta}) g(\zeta)$ para todo $f \in L^2(\mathcal{K})$.

Puesto que si $\Theta \in H^\infty(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $f \in H^2(\mathcal{H})$ entonces $\Theta f \in H^2(\mathcal{H})$, podemos considerar también Θ como un operador de $H^2(\mathcal{H})$ en $H^2(\mathcal{K})$. Un ejemplo obvio sería $\Theta(\zeta) = \zeta \operatorname{Id}(\mathcal{H})$ con lo cual $(\Theta f)(\zeta) = \zeta \cdot f(\zeta)$ y Θ no es más que el operador de multiplicación por la variable independiente M_ζ. Sobre $L^2(\mathcal{H})$, M_ζ es un operador de desplazamiento bilateral y sobre $H^2(\mathcal{H})$ es un operador de desplazamiento.

Una vez dada esta definición del operador asociado a una función analítica y acotada, podemos dar la definición de lo que llamaremos funciones interiores y exteriores en este contexto.

A.13. Definición. La función analítica contractiva Θ (o su operador asociado) se llamará

(1) *interior*, si $\Theta(\zeta)$ es una isometría de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$ o, equivalentemente, si Θ es una isometría de $L^2(\mathcal{H})$ en $L^2(\mathcal{K})$;

(2) *exterior*, si $\operatorname{clos}\{\Theta H^2(\mathcal{H})\} = H^2(\mathcal{K})$;

(3) $*$-*interior*, si la función $\widetilde{\Theta}$ es interior o, equivalentemente, $\Theta^*(\zeta)$ es una isometría de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$;

(4) $*$-*exterior*, si la función $\widetilde{\Theta}$ es exterior, o sea $\operatorname{clos}\left\{\widetilde{\Theta} H^2(\mathcal{K})\right\} = H^2(\mathcal{H})$ o, equivalentemente, $\operatorname{clos}\{\Theta^* H^2_-(\mathcal{K})\} = H^2_-(\mathcal{H})$.

Las únicas funciones analíticas contractivas Θ que son simultáneamente interiores y exteriores, son las funciones constantes unitarias, es decir, las funciones $\Theta(\zeta) \equiv \Theta_0$, donde Θ_0 es un operador unitario de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$.

Desde el punto de vista de la teoría de operadores, el teorema esencial para funciones interiores es la extensión dada por Helson del Teorema del Subespacio Invariante de Beurling.

A.14. Teorema. *Si $\mathcal{M}$ es un subespacio de $H^2(\mathcal{H})$ que es invariante para el operador de multiplicación M_ζ, entonces existe una función interior $\Theta \in H^\infty(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ tal que $\mathcal{M} = \Theta H^2(\mathcal{H})$.*

Para funciones exteriores también existen extensiones adecuadas de los resultados escalares.

A.15. Proposición. *Para toda función exterior Θ tenemos que*

(1) $\operatorname{clos}\{\Theta(\zeta)\mathcal{H}\} = \mathcal{K}$ *para todo* $\zeta \in \mathbb{D}$;

(2) $\operatorname{clos}\{\Theta(\zeta)\mathcal{H}\} = \mathcal{K}$ *para casi todo* $\zeta \in \mathbb{T}$.

Veamos ahora un teorema de caracterización de función exterior que usaremos bastante a menudo.

A.16. Teorema. *Sea* Θ *una función analítica contractiva, y supongamos que se verifica* $d = \dim \mathcal{K} \leq \dim \mathcal{H} < \infty$. *Entonces* Θ *es exterior si, y sólo si,* m.c.d.i. $\{(\det \Theta(\zeta)_d)^{\mathrm{i}}\} = 1$, *donde* m.c.d.i. $\{(\det \Theta(\zeta)_d)^{\mathrm{i}}\}$ *denota el máximo común divisor interior de todas las partes interiores de los determinantes de los menores de orden* d *de la matriz* $\Theta(\zeta)$.

Respectivamente, supongamos que se verifica $d = \dim \mathcal{H} \leq \dim \mathcal{K} < \infty$. *Entonces* Θ *es* $*-$*exterior si, y sólo si,* m.c.d.i. $\{(\det \Theta(\zeta)_d)^{\mathrm{i}}\} = 1$.

Finalmente, recordamos a continuación que también se tiene una factorización interior-exterior para las funciones analíticas cuyos valores son operadores.

A.17. Teorema. *Sea* Θ *una función analítica contractiva en* $H^\infty(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, *entonces existen un espacio* $\mathcal{F}$ *con* $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{H}$, *una función analítica exterior* $\Theta^{\mathrm{e}} \in H^\infty(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ *y una función analítica interior* $\Theta^{\mathrm{i}} \in H^\infty(\mathcal{F}, \mathcal{K})$ *tales que*

$$\Theta(\zeta) = \Theta^{\mathrm{i}}(\zeta)\Theta^{\mathrm{e}}(\zeta) \qquad \textit{para todo } \zeta \in \mathbb{D}.$$

Dilataciones y compresiones.

Sean $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ y $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ dos espacios de Hilbert. Cualquier operador acotado $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ se puede representar como una matriz cuadrada de orden 2 :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde

$$B_{ij} = P(\mathcal{K}_i)B|\mathcal{H}_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{K}_i), \qquad i = 1, 2.$$

A.18. Definiciones. Sean $\mathcal{H}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y $\mathcal{H}'$ un subespacio cerrado de otro espacio de Hilbert $\mathcal{K}'$. Diremos que un operador acotado $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ es una *dilatación* de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, o bien que A es una *compresión* de B, cuando $A = P(\mathcal{H}')B|\mathcal{H}$ o, equivalentemente, $AP(\mathcal{H}) = P(\mathcal{H}')BP(\mathcal{H})$. En otras palabras, decir que B es una dilatación de A es lo mismo que decir que A coincide con el operador B_{11} en la expresión matricial de B con respecto a las descomposiciones $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ y $\mathcal{K}' = \mathcal{H}' \oplus (\mathcal{H}')^\perp$. Otra formulación equivalente es la siguiente: A es una compresión de B si, y sólo si, se verifica $\langle Ax, x' \rangle = \langle Bx, x' \rangle$ para todos $x \in \mathcal{H}$ y $x' \in \mathcal{H}'$.

A.19. Definición. Sean $\mathcal{H}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y sea B un operador acotado en $\mathcal{K}$. Se dice que B es una *dilatación potencial* de un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que B^n es una dilatación de A^n; es decir, $A^n = P(\mathcal{H})B^n|\,\mathcal{H}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que todas las dilataciones que usamos en esta memoria son potenciales, las llamaremos simplemente dilataciones.

A.20. Definición. Sea $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ una isometría que es una dilatación potencial de una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea $\mathcal{K}$ el menor subespacio de $\mathcal{K}_0$ que contiene a $\mathcal{H}$ y es invariante para U. Entonces la restricción $U|\,\mathcal{K}$ es la *dilatación isométrica minimal* de T. Además, se verifica que el espacio $\mathcal{K}$ es el subespacio cerrado generado por la unión de los subespacios $U^n\mathcal{H}$ ($n = 0, 1, 2, ...$), es decir $\mathcal{K} = \bigvee \{U^n\mathcal{H} : n = 0, 1, 2, ...\}$.

A.21. Definición. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción. La raíz cuadrada de $I - T^*T$ se llama *operador defecto* de T y lo denotaremos por D_T. El espacio $\mathcal{D}_T = \operatorname{clos}\{D_T\mathcal{H}\}$ se llama *espacio defecto* de T.

A.22. Teorema. *Sea T una contracción no isométrica definida sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sean, respectivamente, D_T y $\mathcal{D}_T$ el operador defecto y el espacio defecto de T. Sea $\mathcal{K}_0$ el espacio de Hilbert*

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{H} \oplus l^2(\mathcal{D}_T) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_T \oplus \mathcal{D}_T \oplus \cdots,$$

donde identificamos $\mathcal{H}$ con el subespacio de $\mathcal{K}_0$ dado por $\{(x, 0, 0, ...) : x \in \mathcal{H}\}$. Sea U_0 el operador definido por

$$U_0(x, z_0, z_1, z_2, z_3, ...) = (Tx, D_Tx, z_0, z_1, ...).$$

Entonces U_0 es una dilatación isométrica minimal de T, conocida como dilatación isométrica minimal canónica.

La unicidad de la dilatación isométrica minimal de una contracción salvo isomorfismos unitarios viene recogida en el siguiente resultado.

A.23. Teorema. *Sea T una contracción no isométrica definida sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ una dilatación isométrica minimal de T. Entonces:*

(1) *El operador $U|\,\mathcal{H}^\perp$ es un operador de desplazamiento unilateral cuyo subespacio errante $\mathcal{L}$ es el complemento ortogonal de $U(\mathcal{H}^\perp)$ en $\mathcal{H}^\perp$ y la proyección ortogonal*

de $\mathcal{K}$ *sobre* $\mathcal{L}$ *viene dada por* $P(\mathcal{L}) = Q - UQU^*$, *siendo* Q *la proyección ortogonal de* $\mathcal{K}$ *sobre* $\mathcal{H}^\perp$.

(2) *El subespacio lineal* $(U-T)\mathcal{H}$ *es denso en el subespacio errante de* $U|\mathcal{H}^\perp$; *es decir,* $\mathcal{L} = \operatorname{clos}\{(U-T)\mathcal{H}\}$.

(3) *El conjunto de vectores de la forma* $\{U^n(U-T)z : z \in \mathcal{H},\ n = 0,1,2,...\}$ *genera un subespacio lineal denso en* $\mathcal{H}^\perp$.

(4) *Existe un isomorfismo unitario* $J : \mathcal{L} \to \mathcal{D}_T$ *tal que* $J(U-T)x = D_T x$ *para todo* $x \in \mathcal{H}$.

(5) *El operador* $\widetilde{J} : y \in \mathcal{K} \to \widetilde{J}(y) = (x, z_0, z_1, z_2, ...) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_T \oplus \mathcal{D}_T \oplus \cdots$, *donde* $x = P(\mathcal{H})y$ *y* $z_n = JU^*P(U^n\mathcal{L})y \in \mathcal{D}_T$ $(n = 0,1,2,...)$, *es un isomorfismo unitario.*

(6) *La dilatación* U *y la dilatación isométrica minimal canónica* U_0 *son unitariamente equivalentes. Concretamente,* $\widetilde{J}U = U_0\widetilde{J}$.

A.24. Proposición. *Sea* $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ *la dilatación isométrica minimal de una contracción* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) U *es unitario si, y sólo si,* T^* *es una isometría.*

(2) *Si* T^* *es un operador de desplazamiento, entonces* U *es un operador de desplazamiento bilateral hacia detrás.*

(3) *Si* $T = 0$ *entonces* $\mathcal{K} = l^2(\mathcal{H})$ *y* $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ *es un operador de desplazamiento cuyo subespacio errante es* $\mathcal{H}$.

(4) *la sucesión* $\{P(\mathcal{H}^\perp)U^{*n} : n = 1,2,...\}$ *converge a cero en la topología fuerte de operadores.*

(5) *Si* T^* *es una isometría y* $\mathcal{H}_\mathrm{n}$ *es la parte completamente no unitaria de su descomposición de Wold, entonces* $T^*|\mathcal{H}_\mathrm{n}$ *y* $U|\mathcal{H}^\perp$ *son operadores de desplazamiento de la misma multiplicidad.*

A.25. Notaciones. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción y sea $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ la dilatación isométrica minimal de T. En el espacio $\mathcal{K}$ coexisten, entonces, dos descomposiciones ligadas de manera natural a la isometría U. Por un lado, podemos escribir $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$. Con respecto a esta descomposición, $\mathcal{H}$ es U^*-invariante y $U^*|\,\mathcal{H} = T^*$. Además, $\mathcal{H}^{\perp}$ es U-invariante y $U|\,\mathcal{H}^{\perp}$ es un operador de desplazamiento unilateral hacia delante.

Por otro lado está la descomposición de Wold. Podemos escribir $\mathcal{K} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^{\perp}$, donde $\mathcal{R}$ es el mayor subespacio U-reductor en el que U es unitario. Sobre el ortogonal $\mathcal{R}^{\perp}$, el operador $U|\,\mathcal{R}^{\perp}$ es también un operador de desplazamiento unilateral hacia delante.

A.26. Teorema. *Sea T una contracción en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces existe una dilatación potencial de T que es un operador unitario $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ que es minimal en el sentido de que no existen subespacios U-reductores entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ o, equivalentemente, $\mathcal{K} = \bigvee \{U^n\mathcal{H} : n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$. U se llama la* dilatación unitaria minimal *y es única salvo equivalencias unitarias.*

La construcción canónica de la dilatación unitaria minimal es la siguiente: Tomamos la suma de Hilbert bilateral

$$\mathcal{K} = \cdots \oplus \mathcal{D}_{T^*} \oplus \mathcal{D}_{T^*} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_T \oplus \mathcal{D}_T \oplus \cdots$$

en la que identificamos $\mathcal{H}$ con el sumando correspondiente a la posición cuyo subíndice es el 0. Definimos

$$U(..., x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, ...) = (..., x_{-3}, x_{-2}, \boxed{D_{T^*}x_{-1} + Tx_0}, -T^*x_{-1} + D_Tx_0, x_1, x_2, ...).$$

Usando las igualdades

$$T^*T + D_T^2 = 1, \quad TT^* + D_{T^*}^2 = 1, \quad TD_T - D_{T^*}T = 0 \quad \text{y} \quad D_TT^* - T^*D_{T^*} = 0,$$

es inmediato comprobar que U es una isometría. Escribiendo U como una matriz doblemente infinita

$$U = \begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & D_{T^*} & \boxed{T} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & -T^* & D_T & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}$$

obtenemos fácilmente su adjunto

$$U^* = \begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & D_{T^*} & -T & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \boxed{T^*} & D_T & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}$$

que también podemos escribir como

$$U^*(..., x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, x_3, ...) = (..., x_{-2}, x_{-1}, D_{T^*}x_0 - Tx_1, \boxed{T^*x_0 + D_Tx_1}, x_2, x_3, ...).$$

Usando de nuevo las igualdades que relacionan T, T^*, D_T y D_T obtenemos que U^* también es una isometría y, en consecuencia, que U es unitario.

Finalmente, que U es una dilatación potencial de T se deduce de que la matriz de U es triangular inferior (con respecto a la diagonal principal) y, por tanto, también lo serán las matrices de sus potencias. Esto puede comprobarse también directamente: si $P(\mathcal{H})$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{H}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$T^n P(\mathcal{H})(..., x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, ...) = T^n x_0$$

y, por otro lado,

$$P(\mathcal{H})U^n P(\mathcal{H})(..., x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, ...) = P(\mathcal{H})U^n(..., 0, 0, \boxed{x_0}, 0, 0, ...)$$

$$= P(\mathcal{H})(..., 0, 0, \boxed{T^n x_0}, D_T T^{n-1} x_0, D_T T^{n-2} x_0, ..., D_T T x_0, D_T x_0, 0, ...) = T^n x_0$$

Si la matriz U la dividimos en nueve bloques

$$U = \left[\begin{array}{ccccc|c|ccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & 0 & 0 & D_{T^*} & \boxed{T} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & 0 & 0 & -T^* & D_T & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right]$$

entonces esto corresponde a escribir $\mathcal{K}$ como la suma ortogonal $\mathcal{K} = l^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \mathcal{H} \oplus l^2(\mathcal{D}_T)$. Los espacios $\mathcal{G}_* = l^2(\mathcal{D}_{T^*})$ y $\mathcal{G} = l^2(\mathcal{D}_T)$ se llaman, respectivamente, *subespacio de entrada* y *subespacio de salida* de U. Observemos que $U\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$ y que, de hecho, U es un operador de desplazamiento unilateral sobre $\mathcal{G}$; además

$$\mathcal{G} = \bigvee \{U^n \mathcal{H} : n \geq 0\} \ominus \mathcal{H}.$$

Similarmente, $U^*\mathcal{G}_* \subseteq \mathcal{G}_*$ y U^* también es un operador de desplazamiento sobre $\mathcal{G}_*$. Esta estructura se mantiene en cualquier expresión de la dilatación unitaria minimal. Volveremos sobre esto en la descripción del modelo funcional de Nikolski y Vasyunin que hacemos a continuación.

El modelo funcional de coordenadas libres.

Un modelo de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es otro operador $M \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$, que es, en algún sentido, equivalente a T. Existen modelos mediante equivalencia unitaria $T = U^{-1}MU$, para un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{N}$ actuando entre espacios de Hilbert, mediante equivalencia de semejanza $T = V^{-1}MV$, para un isomorfismo lineal $V : \mathcal{H} \to \mathcal{N}$ actuando entre

espacios de Banach, mediante casi-semejanza, pseudo-semejanza, y otras equivalencias. De hecho, la idea central es que estas transformaciones U, V, etc., reducen el operador a una forma conveniente para los cálculos, especialmente para el cálculo funcional admitido por el operador. Este cálculo contiene tanto elementos algebraicos como analíticos, y las herramientas necesarias para simplificarlos aparecen en las teorías modernas de modelos basadas en extensiones y dilataciones del operador en cuestión. Tan pronto como la dilatación está establecida, todos los objetos relacionados con el análisis de nuestro operador pueden ser levantados al nivel de la dilatación, donde pueden ser tratados más fácilmente.

Como usamos de forma esencial en el Capítulo II las propiedades y notación del modelo funcional de coordenadas libres de Nikolski y Vasyunin para contracciones completamente no unitarias, lo describiremos brevemente; la descripción completa y las pruebas de los resultados aparecen en [NiVa].

Dada una contracción completamente no unitaria $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sean $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ su operador defecto y $\mathcal{D}_T = \operatorname{clos}\{D_T\mathcal{H}\}$ su espacio defecto. Tomamos dos espacios de Hilbert auxiliares $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_*$ tales que

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{D}_T) \qquad \text{y} \qquad \dim(\mathcal{E}_*) = \dim(\mathcal{D}_{T^*}).$$

El número $\dim(\mathcal{D}_T)$ se llama *índice de defecto* del operador T. Ahora, sea $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ una dilatación unitaria minimal de T. Entonces como acabamos de recordar, U se representa mediante una matriz triangular con respecto a la descomposición $\mathcal{K} = \mathcal{G}_* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$, donde

$$\mathcal{G} = \bigvee_{n\geq 0} U^n\mathcal{H} \ominus \mathcal{H} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}_* = \mathcal{K} \ominus \bigvee_{n\geq 0} U^n\mathcal{H}.$$

$\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_*$ son los espacios de salida y de entrada, respectivamente, y verifican $U\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$ y $U^*\mathcal{G}_* \subseteq \mathcal{G}_*$.

Se puede comprobar que

$$\dim(\mathcal{D}_T) = \dim(\mathcal{G} \ominus U\mathcal{G}) \qquad \text{y} \qquad \dim(\mathcal{D}_{T^*}) = \dim(\mathcal{G}_* \ominus U^*\mathcal{G}_*),$$

por tanto, existen sendas aplicaciones unitarias

$$v : \mathcal{E} \to \mathcal{G} \ominus U\mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad v_* : \mathcal{E}_* \to \mathcal{G}_* \ominus U^*\mathcal{G}_*$$

que identifican dichos espacios. Definimos los operadores

$$\pi : L^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{K} \qquad \text{y} \qquad \pi_* : L^2(\mathcal{E}_*) \to \mathcal{K}$$

como

$$\pi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \zeta^k e_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} U^k v e_k \qquad \text{y} \qquad \pi_*\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \zeta^k e_{*k}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} U^{k+1} v_* e_{*k},$$

entonces se verifica: por un lado, que π y π_* son isometrías que enlazan U y el operador de multiplicación por la variable independiente M_ζ en el correspondiente L^2 vectorial, o sea,

$$U\pi = \pi M_\zeta \qquad \text{y} \qquad U\pi_* = \pi_* M_\zeta,$$

y, por otro lado, que

$$\pi H^2(\mathcal{E}) = \mathcal{G} \perp \mathcal{G}_* = \pi_* H^2_-(\mathcal{E}_*).$$

Ahora, podemos considerar el operador

$$\Pi = (\pi_*, \pi) : L^2(\mathcal{E}_*) \oplus L^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{K}$$

donde

$$\Pi(f_* \oplus f) = \pi_* f_* + \pi f \quad \text{para todos } f_* \in L^2(\mathcal{E}_*) \quad \text{y} \quad f \in L^2(\mathcal{E});$$

usando que T es completamente no unitaria, puede comprobarse que Π tiene rango denso en $\mathcal{K}$.

Usando la inyección funcional Π anterior, podemos definir el operador

$$\Theta = (\pi_*)^* \pi \in \mathcal{B}(L^2(\mathcal{E}), L^2(\mathcal{E}_*)),$$

que llamaremos *función característica de T*. Dicho operador conmuta con el operador de multiplicación M_ζ y se puede probar que $\Theta H^2(\mathcal{E}) \subseteq H^2(\mathcal{E}_*)$, por tanto, se puede identificar como el operador de multiplicación por una función analítica puramente contractiva en el disco unidad $\mathbb{D}$, que llamaremos también función característica, cuyos valores son contracciones $\zeta \to \Theta(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$; esto es, $(\Theta f)(\zeta) = \Theta(\zeta) f(\zeta)$ para cada $f \in L^2(\mathcal{E})$.

Mirando la construcción anterior y, teniendo en cuenta la arbitrariedad de los espacios $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_*$ y de las aplicaciones unitarias v y v_*, es claro que la función característica de una contracción completamente no unitaria no es realmente única. Sin embargo el siguiente teorema pone de relieve que las funciones características son esencialmente únicas salvo las "coordenadas" $(\mathcal{E}, v)$ y $(\mathcal{E}_*, v_*)$ que se elijan. Elecciones distintas de estas coordenadas proporcionan modelos distintos, que son útiles para problemas diversos.

Dada una contracción completamente no unitaria T, el primer ejemplo a considerar es la elección $\mathcal{E} = \mathcal{D}_T$ y $\mathcal{E}_* = \mathcal{D}_{T^*}$ en cuyo caso se tiene que la función característica es la función definida en el disco unidad $\mathbb{D}$ por

$$\Theta_T(\zeta) = (-T + \zeta D_{T^*}(I - \zeta T^*)^{-1} D_T) \mid \mathcal{D}_T.$$

La razón del nombre de función analítica adjunta que se dio anteriormente a $\widetilde{\Theta}$, la recoge el siguiente resultado.

A.27. Proposición. *Sea T una contracción completamente no unitaria con función característica $\Theta(\zeta)$. Entonces la función característica del operador T^* es la función analítica adjunta $\widetilde{\Theta}(\zeta)$.*

A.28. Definición. Se dice que dos funciones analíticas, cuyos valores son contracciones

$$\zeta \in \mathbb{D} \to \Theta(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \quad \text{y} \quad \zeta \in \mathbb{D} \to \Theta'(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'_*),$$

son *equivalentes* si existen sendas aplicaciones unitarias

$$u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \quad \text{y} \quad u_* : \mathcal{E}_* \to \mathcal{E}'_*,$$

tales que $\Theta'(\zeta)u = u_*\Theta(\zeta)$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}$. Observemos que se exige una condición más restrictiva que el mero hecho de que Θ y Θ' sean unitariamente equivalentes.

A.29. Teorema. *Dos contracciones completamente no unitarias T y T' son unitariamente equivalentes si, y sólo si, sus funciones características Θ y Θ' son equivalentes.*

Este teorema muestra que todas las posibles funciones características de un mismo operador son equivalentes y, por supuesto, que operadores con la misma función característica se pueden tratar como iguales.

Recíprocamente, si tenemos una función $\Theta \in \mathcal{B}(L^2(\mathcal{E}), L^2(\mathcal{E}_*))$ que podemos identificar con el operador de multiplicación por una función analítica puramente contractiva en el disco unidad $\mathbb{D}$ cuyos valores son contracciones $\zeta \to \Theta(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$, ¿podemos construir una contracción completamente no unitaria T cuya función característica sea Θ? La respuesta es afirmativa y la construcción se hace dando los siguientes pasos:

(1) Tomamos un operador Π actuando de $L^2(\mathcal{E}_*) \oplus L^2(\mathcal{E})$ en un espacio de Hilbert arbitrario, y verificando la ecuación

$$\Pi^*\Pi = \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta^* & I \end{bmatrix},$$

es decir, el operador $\Pi^*\Pi$ como operador de $\begin{bmatrix} L^2(\mathcal{E}_*) \\ L^2(\mathcal{E}) \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} L^2(\mathcal{E}_*) \\ L^2(\mathcal{E}) \end{bmatrix}$ viene dado por esa matriz (para la existencia de dicha inyección, veáse [NiVa]).

(2) Tomamos el espacio de Hilbert $\mathcal{K}_\Theta = \operatorname{clos}\{\Pi\,[L^2(\mathcal{E}_*) \oplus L^2(\mathcal{E})]\}$.

(3) Definimos un operador unitario U_Θ sobre $\mathcal{K}_\Theta$ por la relación $U_\Theta\Pi = \Pi M_\zeta$.

(4) Introducimos el *subespacio modelo*

$$\mathcal{H}_\Theta = \mathcal{K}_\Theta \ominus \left[\pi H^2(\mathcal{E}) \oplus \pi_* H^2_-(\mathcal{E}_*)\right],$$

donde $\pi = \Pi|\,L^2(\mathcal{E})$ y $\pi_* = \Pi|\,L^2(\mathcal{E}_*)$.

(5) Finalmente, definimos el *operador modelo* como

$$M_\Theta = P_\Theta U_\Theta |\,\mathcal{H}_\Theta,$$

donde P_Θ denota la proyección ortogonal de $\mathcal{K}_\Theta$ en $\mathcal{H}_\Theta$.

El teorema fundamental al que nos lleva esta construcción es el siguiente

A.30. Teorema. *El operador modelo M_Θ es una contracción completamente no unitaria con función característica Θ. Además, el operador U_Θ definido en el paso (3) es la dilatación unitaria minimal de M_Θ. En particular, si Θ es la función característica de una contracción completamente no unitaria T, entonces T y M_Θ son unitariamente equivalentes.*

A.31. Ejemplo. Dados dos espacios de Hilbert arbitrarios $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_*$, veamos cual es el operador, salvo equivalencia unitaria, que tiene a la función idénticamente nula $\Theta \equiv 0$ como función característica, considerando que $\Theta(\zeta)$ es el operador nulo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}_*$ para todo $\zeta \in \mathbb{D}$.

En primer lugar, según la construcción anterior, tenemos que tomar un operador Π actuando de $L^2(\mathcal{E}_*) \oplus L^2(\mathcal{E})$ en un espacio de Hilbert arbitrario, y verificando la ecuación

$$\Pi^*\Pi = \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Podemos tomar por ejemplo el operador identidad $\Pi = I$. Ahora, el espacio $\mathcal{K}_\Theta$ será la clausura de su rango, por tanto,

$$\mathcal{K}_\Theta = \text{clos}\left\{I\left[L^2(\mathcal{E}_*) \oplus L^2(\mathcal{E})\right]\right\} = \left[H^2(\mathcal{E}_*) \oplus H^2_-(\mathcal{E}_*)\right] \oplus \left[H^2(\mathcal{E}) \oplus H^2_-(\mathcal{E})\right],$$

el espacio $\mathcal{H}_\Theta$ tiene que ser

$$\mathcal{H}_\Theta = \mathcal{K}_\Theta \ominus \left[H^2_-(\mathcal{E}_*) \oplus H^2(\mathcal{E})\right] = H^2(\mathcal{E}_*) \oplus H^2_-(\mathcal{E}).$$

Como $\Pi = I$, entonces el operador U_Θ es el operador de multiplicación M_ζ en $\mathcal{K}_\Theta = L^2(\mathcal{E}_*) \oplus L^2(\mathcal{E})$ y, en consecuencia $M_\Theta = P_\Theta M_\zeta | \mathcal{H}_\Theta$. Por tanto, tenemos que $M_\Theta = S(\mathcal{E}_*) \oplus B(\mathcal{E})$ donde

$$\begin{aligned} S(\mathcal{E}_*) : H^2(\mathcal{E}_*) &\to H^2(\mathcal{E}_*) \\ f(\zeta) &\to \zeta \cdot f(\zeta) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} B(\mathcal{E})^* : H^2_-(\mathcal{E}) &\to H^2_-(\mathcal{E}) \\ g(\overline{\zeta}) &\to \overline{\zeta} \cdot g(\overline{\zeta}) \end{aligned}$$

son operadores de desplazamiento isométricos de multiplicidades $\dim \mathcal{E}_*$ y $\dim \mathcal{E}$, respectivamente. En resumen, M_Θ es la suma directa de un operador de desplzamiento unilateral hacia delante más otro hacia detrás.

A.32. Ejemplo. Si tomamos como función característica una función $\Theta = m \in H^\infty$ interior y no constante considerada como un operador de multiplicación en L^2, en cuyo caso, los espacios $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_*$ son iguales a $\mathbb{C}$, y los operadores $\pi = m$ y $\pi_* = 1$, tenemos que se verifica la igualdad

$$\Pi^*\Pi = \begin{bmatrix} \pi_*^* \\ \pi^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_* & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \overline{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ \overline{m} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\mathcal{K}_\Theta = \text{clos}\left\{\Pi\left[L^2 \oplus L^2\right]\right\} = \text{clos}\left\{\pi_* L^2 + \pi L^2\right\} = \text{clos}\left\{L^2 + mL^2\right\} = L^2,$$

con lo cual

$$\mathcal{H}_\Theta = \mathcal{K}_\Theta \ominus \left[\pi H^2 \oplus \pi_* H^2_-\right] = L^2 \ominus \left[mH^2 \oplus H^2_-\right] = H^2 \ominus mH^2 = K_m$$

que se llama espacio modelo asociado a m. Como el operador U_Θ tiene que verificar la igualdad $U_\Theta \Pi = \Pi M_\zeta$, se tiene que, para todo $(f, g) \in L^2 \oplus L^2$

$$U_\Theta \Pi(f, g) = \Pi M_\zeta(f, g),$$

pero

$$U_\Theta \Pi(f, g) = U_\Theta(f + mg) \qquad \text{y} \qquad \Pi M_\zeta(f, g) = M_\zeta f + m M_\zeta g = M_\zeta(f + mg),$$

por tanto $U_\Theta = M_\zeta$ y, en consecuencia, $M_\Theta = P_\Theta M_\zeta | \mathcal{H}_\Theta = P_\Theta S | \mathcal{H}_\Theta$, donde S es el operador de desplazamiento en H^2. Es decir, M_Θ es la restricción de S al espacio B-invariante $H^2 \ominus mH^2$, se llama operador modelo asociado a m y se denota por S_m.

A continuación introducimos otras dos aplicaciones funcionales relativas al modelo funcional de una contracción. Para ello, volvemos a tener la situación inicial, es decir, una contracción completamente no unitaria T definida en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, su dilatación unitaria minimal U definida sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{K} = \mathcal{G}_* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$, y la función característica Θ de T, que viene dada por las inyecciones funcionales π y π_*. Las aplicaciones que vamos a introducir, que denotaremos por τ y τ_*, aparecen necesariamente cuando se estudia el espectro absolutamente continuo de una contracción, porque dan una representación espectral de las restricciones de la dilatación unitaria U a la *parte residual de* $\mathcal{K}$ y la *parte* $*$*-residual de* $\mathcal{K}$, es decir, a los espacios

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} \ominus \pi_* L^2(\mathcal{E}_*) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_* = \mathcal{K} \ominus \pi L^2(\mathcal{E})$$

que son, respectivamente, las partes unitarias de las descomposiciones de Wold de las dilataciones isométricas minimales de T y T^*, es decir, de los operadores $U | (\mathcal{H} \oplus \mathcal{G})$ y $U^* | (\mathcal{G}_* \oplus \mathcal{H})$.

Como $\pi_*(\pi_*)^*$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{K}$ sobre $\pi_* L^2(\mathcal{E}_*)$ se tiene que

$$\mathcal{R} = (I - \pi_*(\pi_*)^*)\mathcal{K} = (I - \pi_*(\pi_*)^*)\left(\text{clos}\left\{\pi L^2(\mathcal{E}) + \pi_* L^2(\mathcal{E}_*)\right\}\right)$$

pero, como $(I - \pi_*(\pi_*)^*)\pi_* L^2(\mathcal{E}_*) = \{0\}$, se tiene

$$\mathcal{R} = \operatorname{clos}\left\{(I - \pi_*(\pi_*)^*)\pi L^2(\mathcal{E})\right\} = \operatorname{clos}\left\{(\pi - \pi_*\Theta)L^2(\mathcal{E})\right\}.$$

Si definimos ahora $\Delta = (I - \Theta^*\Theta)^{1/2}$, teniendo en cuenta que

$$\Delta^2 = I - \Theta^*\Theta = (\pi - \pi_*\Theta)^*(\pi - \pi_*\Theta),$$

obtenemos que Δ es la parte positiva de la descomposición polar $\pi - \pi_*\Theta = \tau\Delta$, donde

$$\tau : L^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{K}$$

es una isometría parcial con espacio de partida $\operatorname{clos}\{\Delta L^2(\mathcal{E})\}$, que denotaremos como $L^2(\Delta\mathcal{E})$, y espacio de llegada $\mathcal{R} = \mathcal{K} \ominus \pi_* L^2(\mathcal{E}_*) = \tau L^2(\Delta\mathcal{E})$. De manera análoga, para el operador $\Delta_* = (I - \Theta\Theta^*)^{1/2}$ existe una isometría τ_* definida en $L^2(\Delta_*\mathcal{E}_*)$ y con rango $\mathcal{R}_*$, es decir, $\tau_* L^2(\Delta_*\mathcal{E}_*) = \mathcal{K} \ominus \pi L^2(\mathcal{E})$, tal que $\tau_*\Delta_* = \pi_* - \pi\Theta^*$. Estos operadores verifican varias relaciones. Algunas de ellas se usan profusamente en el Capítulo II.

A.33. Lema. *Se verifican las siguientes relaciones:*

$$\begin{array}{rclrclrclrcl}
(\pi_*)^*\pi_* & = & I & (\pi_*)^*\pi & = & \Theta & \tau^*\tau_* & = & -\Theta^* & \tau\Delta & = & \pi - \pi_*\Theta \\
\tau\tau^* + \pi_*(\pi_*)^* & = & I & \tau^*\pi & = & \Delta & \tau^*\pi_* & = & 0 & \tau_*\Delta_* & = & \pi_* - \pi\Theta^* \\
\tau_*(\tau_*)^* + \pi\pi^* & = & I & (\tau_*)^*\pi_* & = & \Delta_* & (\tau_*)^*\pi & = & 0 & \Delta_* & = & (I - \Theta\Theta^*)^{1/2} \\
\pi^*\pi & = & I & \pi^*\pi_* & = & \Theta^* & (\tau_*)^*\tau & = & -\Theta & \Delta & = & (I - \Theta^*\Theta)^{1/2}
\end{array}$$

Veamos finalmente, un lema que nos da una expresión de los espacios $\mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$ y $\mathcal{H} \oplus \mathcal{G}_*$ en función de los operadores y los espacios que acabamos de introducir.

A.34. Lema. *Con todo lo anterior, se verifica*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{G} = \pi_* H^2(\mathcal{E}_*) \oplus \tau L^2(\Delta\mathcal{E}) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}_* = \pi H^2_-(\mathcal{E}) \oplus \tau_* L^2(\Delta_*\mathcal{E}_*).$$

Demostración. Basta considerar las siguientes igualdades

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{G}_* = \mathcal{K} \ominus \mathcal{G} = \left[\tau_* L^2(\Delta_*\mathcal{E}_*) \oplus \pi L^2(\mathcal{E})\right] \ominus \pi H^2(\mathcal{E}) = \pi H^2_-(\mathcal{E}) \oplus \tau_* L^2(\Delta_*\mathcal{E}_*)$$

y

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{K} \ominus \mathcal{G}_* = \left[\tau L^2(\Delta\mathcal{E}) \oplus \pi_* L^2(\mathcal{E}_*)\right] \ominus \pi_* H^2_-(\mathcal{E}_*) = \pi_* H^2(\mathcal{E}_*) \oplus \tau L^2(\Delta\mathcal{E}),$$

donde hemos usado que al ser π y π_* isometrías se tiene

$$\pi L^2(\mathcal{E}) \ominus \pi H^2(\mathcal{E}) = \pi \left(L^2(\mathcal{E}) \ominus H^2(\mathcal{E})\right) = \pi H^2_-(\mathcal{E})$$

y

$$\pi_* L^2(\mathcal{E}_*) \ominus \pi_* H^2_-(\mathcal{E}_*) = \pi_* \left(L^2(\mathcal{E}_*) \ominus H^2_-(\mathcal{E}_*)\right) = \pi_* H^2(\mathcal{E}_*).$$

Como queríamos demostrar. ■

Bibliografía

[BaTi] M. Bakonyi, D. Timotin, *On a conjeture of Cotlar and Sadosky on multidimensional Hankel operatos*, C. R. Aca. Sci. Paris, Ser. I Math., vol **325** (1997) 1071-1075.

[BaGh] E. L. Basor, I. Gohberg, *Toeplitz Operators and Related Topics,* Operator Theory: Adv. Appl., vol **71**, Birkhäuser-Verlag, Basilea, Berlín y Boston, 1994.

[Be] H. Bercovici, *Operator Theory and Arithmetic in H^∞*, Mathematical Surveys and Monographs, vol **26**, American Math. Soc., Providence, RI, 1980.

[BöKa] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*, Progr. Math., vol **154**, Birkhäuser-Verlag, Basilea, Berlín y Boston, 1997.

[BöSi] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators,* Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg y Nueva York, 1990.

[BrHa] A. Brown, P. R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators,* J. reine angew. Math. **213** (1963), 89-102.

[Cl] K. F. Clancey, *Toeplitz models for operators with one dimensional self-commutators, Dilation Theory, Toeplitz Operators and Other Topics*, Operator Theory: Adv. Appl., vol **11**, Birkhäuser-Verlag, Basilea, Berlín y Boston, 1983, pp. 81-107.

[CoSa1] M. Cotlar, C. Sadosky, *Nehari and Nevanlinna-Pick problems and holomorphic extensions in the polydisk in terms of restricted BMO,* J. Funct. Anal. **124** (1994), 205-210.

[CoSa2] M. Cotlar, C. Sadosky, *Two distinguished subspaces of product BMO and Nehari-AAK theory for Hankel operators on the torus,* Integral Equations Operator Theory, **26** (1996), 273-303.

[DeSh] A. Devinatz, M. Shinbrot, General Wiener-Hopf operators, Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969), 467-494.

[Di] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis,* North-Holland / Elsevier, Amsterdam, Nueva York y Oxford, 1981.

[Do1] R. G. Douglas, *On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics*, Acta Sci. Math. (Szeged) **30** (1969), 19-32.

[Do2] R. G. Douglas, *On extending commutative semigroups of isometries*, Bull. London Math. Soc. **1** (1969), 157-159.

[Do3] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, Nueva York, 1972.

[Du] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces,* Dover Publications, Mineola N.Y., (2000)

[GhFe] I. Gohberg, I. A. Feldman, *Convolution Equations and Projection Methods for their Solution,* Translations of Mathematical Monographs, vol. **41**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1974.

[GhGlKs] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators I and II,* Operator Theory: Adv. Appl., vol **49** y **63**, Birkhäuser Verlag, Basilea, Berlín y Boston, 1990 y 1993.

[Ha1] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity,* segunda edición, Chelsea, Nueva York, 1957.

[Ha2] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, segunda edición, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg y Nueva York, 1982.

[Ha3] P. R. Halmos, *Shifts on Hilbert spaces,* J. reine angew. Math. **208** (1961), 102-112.

[Hi] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,* Leipzig, 1912.

[Ho] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions,* Dover Publications, Nueva York (1962).

[Ké1] L. Kérchy, *Generalized Toeplitz operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **68** (2002), 373-400.

[Ké2] L. Kérchy, *Reflexive subspaces of generalized Toeplitz operators,* preprint.

[MaPa1] C. H. Mancera, P. J. Paúl, *Remarks, examples and spectral properties of generalized Toeplitz operators,* Acta Sci. Math. (Szeged) **66** (2000), 737-753.

[MaPa2] C. H. Mancera, P. J. Paúl, *Properties of generalized Toeplitz operators,* Integral Equations Operator Theory **40** (2001), 106-126.

[MaPa3] C. H. Mancera, P. J. Paúl, *On Ptak´s generalization of Hankel operators,* Czech. Math. J. **51** (2001), 323-342.

[MaPa4] C. H. Mancera, P. J. Paúl, *Compact and finite rank operators satisfying a Hankel type equation* $T_2X = XT_1^*$, Integral Equations Operator Theory **39** (2001), 475-495.

[Mh1] P. S. Muhly, *Toeplitz operators and semigroups,* J. Math. Anal. Appl. **38** (1972), 312-319.

[Mh2] P. S. Muhly, *A structure theory for isometric representations of a class of semigroups,* J. reine angew. Math. **255** (1972), 135-154.

[Mr1] G. J. Murphy, *Ordered groups and Toeplitz algebras*, J. Operator Theory **18** (1987), 303-326.

[Mr2] G. J. Murphy, *Toeplitz operators and algebras,* Math. Z. **208** (1991), 355-362.

[Mr3] G. J. Murphy, *Toeplitz operators on generalised H^2 spaces*, Integral Equations Operator Theory **15** (1992), 825-852.

[Mr4] G. J. Murphy, *Inner functions and Toeplitz operators,* Canad. Math. Bull. **36** (1993), 324-331.

[Mr5] G. J. Murphy, *Products of Toeplitz operators,* Integral Equations Operator Theory **27** (1997), 439–445.

[MaVa] N. G. Makarov and V. Vasyunin, *Quasisimilarity of model contractions with unequal defects,* Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. mat. Inst. Steklov. (LOMI) **149** (1986), 24-37 (en ruso); traducción al inglés en J. Soviet Math. **42** (1998), 1550-1561.

[Ne] J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann. **102** (1929), 370-427.

[Ni1] N. K. Nikolski, *Treatise on the Shift Operator*, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg y Nueva York, 1986.

[Ni2] N. K. Nikolski, *Eléments des opérateurs de Hankel et Toeplitz,* Ecole Doctorale de Mathematiques, Université Bordeaux I, Burdeos, 1992.

[NiVa] N. K. Nikolski and V. Vasyunin, *Elements of spectral theory in terms of the free function model. Part I: basic constructions* en *Holomorphic Spaces* (S. Axler, J. E. McCarthy, D. Sarason, eds.), Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. **33**, Cambridge University Press, Cambridge, Melbourne, New York, 1998, pp. 211-302.

[Pt1] V. Pták, *An operator-theoretic approach to theorems of the Pick-Nevanlinna and Carathéodory types,* Manuscripta Math. **62** (1988), 131-144.

[Pt2] V. Pták, *Contructions of dilations,* Exposition. Math. **10** (1992), 151-170.

[Pt3] V. Pták, *Factorization of Toeplitz and Hankel operators*, Math. Bohemica **122** (1997), 131-145.

[PtVr1] V. Pták, P. Vrbová, *Operators of Toeplitz and Hankel type*, Acta Sci. Math. (Szeged) **52** (1988), 117-140.

[PtVr2] V. Pták, P. Vrbová, *Lifting intertwining dilations,* Integral Equations Operator Theory **11** (1988), 128-147.

[Rs] M. Rosenblum, *Vectorial Toeplitz operators and the Fejér-Riesz theorem*, J. Math. Anal. Appl. **23** (1968), 139-147.

[RsRv1] M. Rosenblum, J. Rovnyak, *Hardy Classes and Operator Theory,* Dover, Mineola, N.Y., 1997.

[Ru1] W. Rudin, *Análisis funcional,* Editorial Reverté, Barcelona, 1979.

[Ru2] W. Rudin, *Análisis real y complejo,* tercera edición, McGraw-Hill, Madrid, 1988.

[Sa] D. Sarason, *Generalized interpolation in* H^∞, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 179-203.

[Su] I. Suciu, *On the semigroups of isometries*, Studia Math. **39** (1968), 101-110.

[Sz] B. Sz.-Nagy, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert,* Acta Sci. Math. (Szeged) **18** (1953), 87-92.

[SzFo1] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space,* Akadémiai Kiadó y North-Holland, Budapest y Amsterdam, 1970.

[SzFo2] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *An application of dilation theory to hyponormal operators,* Acta Sci. Math. (Szeged) **37** (1975), 155-159.

[SzFo3] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Toeplitz type operators and hyponormality,* en *Dilation Theory, Toeplitz Operators and Other Topics*, Operator Theory: Adv. Appl., vol **11**, Birkhäuser-Verlag, Basilea, Berlín y Boston, 1983, pp. 371-378.

[Wu1] P. Y. Wu, *Quasi-similarity of weak contractions,* Proc. Amer. Math. Soc. **69** (1978), 277-282.

[Wu2] P. Y. Wu, *Jordan model for weak contractions,* Acta Sci. Math. (Szeged), **40** (1978), 189-196.