UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas

Departamento de Algebra, Computación, Geometría y Topología

ALGORITMOS DE CALCULO DE HOMOLOGIA EFECTIVA DE LOS ESPACIOS CLASIFICANTES

Vº Bº
del Tutor

Fdo. Antonio Quintero Toscano

Memoria presentada por
Pedro Real Jurado
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
del Director

Fdo. Francis Sergeraert

Sevilla, junio de 1993

Contenido

Introducción

El propósito esencial de esta memoria es el de describir varios algoritmos de cálculo de homología efectiva de los espacios clasificantes y de los espacios de Eilenberg-MacLane. Intentaremos en todo lo que resta de introducción explicar convenientemente este objetivo.

El invariante topológico de un espacio que, intuitivamente, se puede considerar más evidente es el número de partes conexas en las cuales se puede dividir dicho espacio. Este primitivo concepto admite en cierta forma dos invariantes análogos en dimensiones superiores. Estos son los grupos de homología y homotopía del espacio en cuestión. Es bien conocido en Topología Algebraica que, en general, los grupos de homología de un espacio topológico resultan más fáciles de calcular que sus grupos de homotopía. Por otra parte, hay métodos clásicos que permiten obtener en principio los grupos de homotopía de un espacio conociendo sus grupos de homología. Estos procesos (Torre de Postnikov, Torre de Whitehead) se basan esencialmente en el método de "matar" (hacer nulos) los grupos de homotopía por encima o por debajo de una determinada dimensión. En esta maquinaria algebraica juegan un papel absolutamente fundamental los espacios de Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$, que presentan un único grupo de homotopía no nulo π en dimensión n. Estos espacios pertenecen a una clase más amplia de espacios denominados espacios clasificantes. Conocer explícitamente la homología de estos espacios resulta esencial para intentar obtener resultados de cálculo, utilizando los métodos antes citados. Esta razón, entre otras, fue la que hizo que varios topólogos en el periodo 1950-54 estudiasen intensísimamente esta cuestión. Hacia 1950, Eilenberg y MacLane comenzaron a atacar el problema consiguiendo resultados en bajas dimensiones (ver [EM53], [EM54]). Fue en 1954, cuando Henri Cartan zanjó definitivamente este problema en [Car56], dando un cálculo completo del álgebra de homología de estos espacios.

Una parte fundamental de la Topología Algebraica la constituye, ya desde sus inicios, el cálculo efectivo de invariantes. En lo que respecta a la homología, se desarrollaron muy tempranamente algoritmos elementales para una gran cantidad de espacios topológicos ordinarios. También, para obtener información homológica de un espacio que se construye a partir de otros, estos con homología calculable, se utilizan unos procesos algebraicos más o menos complicados, llamados sucesiones espectrales. Ahora bien, limitémonos a decir aquí que existen problemas esenciales de computabilidad que impiden considerar las sucesiones espectrales como verdaderos algoritmos.

Por otra parte, el primer método de cálculo de grupos de homotopía, realizado por E.H. Brown [Bro57], se remonta a 1957 y fue considerado no operacional por su propio autor debido a la gran complejidad de este algoritmo, tanto en tiempo como en espacio. Posteriormente, se han realizado diversas experiencias computacionales para ciertos espacios relativamente pequeños ([Rav89], [Tan85]), consiguiendo en mayor o menor medida resultados interesantes.

Recientemente, ha habido un gran interés por establecer un marco totalmente algorítmico para los problemas de cálculo en Topología Algebraica. Podemos distinguir dos principales vertientes en este sentido:

- En 1987, F. Sergeraert [Ser87] describe la técnica Homología Efectiva, proponiendo soluciones muy generales a los problemas de calculabilidad en Topología Algebraica.
- En 1990, R. Shön [Sch91] expone la teoría de Topología Algebraica Efectiva, donde también se dan soluciones algorítmicas a una gran cantidad de cuestiones de Topología Algebraica.

Esta memoria se encuentra inmersa dentro de la teoría de la Homología Efectiva. Las dos ideas fundamentales de esta teoría son:

- el definir y utilizar como entrada y salida esencial de sus algoritmos, un concepto que proporciona más información que la homología: *el concepto de homología efectiva*;
- utilizar la teoría de Perturbación Homológica como principal útil para manipular homologías efectivas.

Con esta técnica en mano, podemos convertir las sucesiones espectrales en verdaderos procesos algorítmicos. Como se describe en esta memoria, esta maquinaria se puede usar eficazmente para establecer un primer algoritmo de cálculo de la homología de los espacios clasificantes. Por otra parte, decíamos antes, que en los métodos conocidos para calcular los grupos de homotopía de un espacio topológico a partir de su homología, es esencial conocer la homología de los espacios de Eilenberg-MacLane. Por tanto, en el marco algorítmico en que trabajamos, para obtener un algoritmo de cálculo de grupos de homotopía necesitamos como requisito indispensable conocer la *homología efectiva* de estos espacios. El algoritmo citado anteriormente, aplicado a los espacios $K(\pi, n)$, nos proporciona una primera solución. Obtenemos un método más eficiente de cálculo al retomar el trabajo realizado por Eilenberg y MacLane sobre los espacios clasificantes [EM53] y resolver una conjetura planteada por ellos. Por último, una evidente mejora de los dos anteriores algoritmos sería encontrar una versión Homología Efectiva del trabajo realizado por Cartan, el cual obtenía la homología ordinaria de los espacios de Eilenberg-MacLane. Ahora bien, este trabajo no admite una "traducción" en Homología Efectiva. Para obtener un tercer algoritmo de cálculo de la homología efectiva de los espacios $K(\pi, n)$, ha sido necesario solucionar los problemas que se planteaban a la hora de establecer un proceso iterativo de construcción de dichas homologías efectivas. Para ello, hemos retomado lo realizado por Eilenberg y MacLane sobre esta cuestión y lo hemos completado teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Cartan. Hay que precisar que este algoritmo no calcula la homología efectiva entera sino sólo la homología efectiva p-primaria (p primo).

Evidentemente, una pregunta que surge naturalmente y que constituye la principal motivación del presente trabajo es si podemos establecer, con las herramientas que hemos descrito en esta memoria, un algoritmo de cálculo de los grupos de homotopía. Hemos dedicado un apéndice a plantear las etapas que tenemos que realizar para su obtención.

Mención aparte damos en esta memoria a las A_∞-estructuras, que son unas "álgebras" que poseen un producto que no es asociativo, pudiendose controlar esta "anomalía" por medio de determinados morfismos. En este aspecto, el resultado más importante que hemos obtenido es el describir un algoritmo de cálculo de la estructura de A_∞-coálgebra adquirida por la homología con coeficientes en el cuerpo finito $\mathbf{Z}_p$ (p primo) de un espacio de Eilenberg-MacLane.

Después de exponer una breve descripción del trabajo realizado, establezcamos la división en capítulos de esta memoria. En el capítulo 1, describimos los conceptos fundamentales y necesarios para que este trabajo sea auto-contenido en la medida de lo posible. El capítulo 2, aparte de ser una introducción a la teoría de la Homología Efectiva y a la de Perturbación Homológica, exponemos una serie de resultados y técnicas que emplearemos exhaustivamente en los capítulos siguientes, algunas de las cuales parecen no estar recogidas en la literatura que hay sobre el tema, siendo, sin embargo, fundamentales para la consecución de resultados posteriores. Nos referimos aquí a determinados Lemas de Perturbación construidos para complejos de cadenas dotados de una cierta estructura (álgebra, coálgebra,...) y para reducciones que verifiquen unas condiciones mucho más débiles que las que se imponen en la literatura. El capítulo 3 desarrolla el procedimiento de cálculo de la homología efectiva de la base de un fibrado principal en función de las homologías efectivas de la fibra y del espacio total. Como consecuencias, se pueden deducir métodos de cálculos de las homologías efectivas, tanto del espacio clasificante de un grupo simplicial reducido, como de los espacios de Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$, siendo π un grupo abeliano finitamente generado y n un entero positivo. En el capítulo 4, especificamos una mejora sustancial del algoritmo de cálculo de la homología efectiva de los espacios clasificantes, basada en la resolución de una conjetura de Eilenberg-MacLane. Ya, en el capítulo 5 desarrollaremos, aprovechando los resultados de Cartan, un potente algoritmo de construcción de la homología efectiva p-primaria de un espacio de Eilenberg-MacLane. Incluimos dos apéndices en esta memoria. El primero de ellos los pasos necesarios a realizar para la obtención de un algoritmo que calcule los grupos de homotopía de un espacio topológico simplemente conexo. El segundo describe un algoritmo de cálculo de la estructura de A_∞-coálgebra adquirida por la Z_p-homología de un espacio de Eilenberg-MacLane.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo es un glosario de definiciones y resultados básicos, indispensables para desarrollar de forma auto-contenida el tema de esta memoria. Lo hemos dividido en dos partes correspondientes a las áreas de la Topología Algebraica de las cuales se nutre nuestro trabajo: el Algebra Homológica y la Topología Simplicial.

Brevemente, daremos una explicación de la necesidad de trabajar en estos dos campos para poder establecer resultados algorítmicos en Topología Algebraica. En primer lugar, necesitamos representar los espacios topológicos por medio de modelos combinatoriales, y es la Topología Simplicial la que nos aporta estos modelos. Ahora bien, para obtener resultados sobre invariantes algebraicos de un espacio topológico debemos trabajar con el complejo de cadenas que tiene canónicamente asociado. De esto se ocupa el Algebra Homológica. En esta memoria, el desarrollo de algoritmos se basa en la teoría de la Homología Efectiva, debida a F. Sergeraert [Ser87]. Trabajos sobre esta teoría, que tratan en profundidad el problema de la calculabilidad en Topología Algebraica son [Ser] y [Rub91b].

Λ será siempre un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. Más precisamente, el anillo de base en los algoritmos presentes en este trabajo será $\Lambda = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_p$ o $\mathbf{Z}_{(p)}$ (Z localizado en p, p primo). Todos los DG-módulos que aparecen a lo largo de la memoria serán libres, salvo mención expresa.

1.1 Algebra Homológica

Todas las definiciones y resultados de esta sección pueden encontrarse en [Mac63], [Pro84] y [HMS74].

Definición 1.1.1 *Un Λ-módulo M (por la izquierda) es un grupo abeliano aditivo, junto con una aplicación $p : \Lambda \times M \to M$, que se escribe $p(\lambda, m) = \lambda m$, tal que*

$$(\lambda + \lambda')\, m = \lambda m + \lambda m,' \quad (\lambda \lambda')\, m = \lambda(\lambda' m),$$
$$\lambda(m + m') = \lambda m + \lambda m', \quad 1\, m = m.$$

De forma análoga, se definirán los Λ-módulos por la derecha. A partir de ahora, hablaremos de Λ-módulos sin precisar si son por la izquierda o por la derecha, salvo en los lugares en que puedan producirse confusiones. El tratamiento para unos se aplicará, mutatis mutandis, para los otros.

Definición 1.1.2 *Sean M y N dos Λ-módulos. Un morfismo de Λ-módulos $f : M \to N$ es una aplicación tal que*

$$\begin{array}{l} f(m+m') = f(m) + f(m'), \quad f(\lambda m) = \lambda f(m) \\ \forall m, m' \in M \quad \forall \lambda \in \Lambda \end{array}$$

Definición 1.1.3 *Una Λ-álgebra A es un Λ-módulo dotado de dos morfismos de Λ-módulos:*

$$\begin{array}{l} \mu : A \otimes A \to A, \\ \eta : \Lambda \to A, \end{array}$$

tal que verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \mu(\mu \otimes 1_\Lambda) & = & \mu(1_\Lambda \otimes \mu); \\ \mu(\eta \otimes 1_\Lambda) & = & 1_\Lambda; \\ \mu(1_\Lambda \otimes \eta) & = & 1_\Lambda. \end{array}$$

donde 1_Λ es la aplicación identidad de Λ (más generalmente, 1_C denotará la aplicación identidad sobre cualquier conjunto C).

Definición 1.1.4 *Un Λ-módulo graduado es un Λ-módulo M, junto con una familia M_n $(n \geq 0)$ de submódulos de M, tales que:*

$$\bigoplus_{n \in Z} M_n = M.$$

Habitualmente, denotaremos un Λ-módulo graduado como $M = \{M_n\}_{n \in Z}$.

Todos los módulos graduados que aparezcan en esta memoria serán nulos en grados negativos, es decir: $M_n = 0$ si $n < 0$. En general, este hecho no será explícitamente señalado, pero en ocasiones emplearemos la notación $M = \{M_n\}_{n \geq 0}$

Los elementos de M_n se dicen homogéneos de grado n. Se notará $|x| = n$ para $x \in M_n$.

Consideramos Λ como un Λ-módulo graduado, $\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n \geq 0}$ con $\Lambda_0 = \Lambda$ y $\Lambda_n = 0$ si $n > 0$. Si M es un Λ-módulo graduado tendremos las identificaciones canónicas:

$$\begin{array}{l} M \otimes \Lambda \cong M \\ \Lambda \otimes M \cong M \end{array}$$

Definición 1.1.5 *Si M y N son dos Λ-módulos graduados, un morfismo de Λ-módulos graduados de grado p es un morfismo de Λ-módulos:*

$$f : M \longrightarrow N$$

tal que $f(M_n) \subseteq N_{n+p}$.

Notaremos $|f| = p$.

De aquí en adelante, si no se indica lo contrario, se supondrá que los morfismos de Λ-módulos graduados que aparezcan son todos de grado 0.

Definición 1.1.6 *Si M y N son dos Λ-módulos graduados, definimos el Λ-módulo graduado $M \otimes N$, estableciendo:*

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes N_q).$$

Definición 1.1.7 (Convenciones de Koszul) *Sean $f : M \to M'$, $g : N \to N'$, dos morfismos de Λ-módulos graduados, definimos un nuevo morfismo de Λ-módulos graduados:*

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

estableciendo

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y).$$

Definición 1.1.8 *Sea M un Λ-módulo graduado. Una diferencial:*

$$d : M \longrightarrow M$$

es un morfismo de Λ-módulos graduados de grado -1, tal que $d^2 = 0$. Esta última condición es equivalente a decir que $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$. Si M está dotado de una diferencial se le llama un DG-Λ-módulo (o simplemente DG-módulo).

Definición 1.1.9 *Sea M un DG-módulo. Definimos la homología $H(K)$ de K como el Λ-módulo graduado $\{H_n(K)\}_{n\geq 0}$, donde:*

$$H_n(K) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}.$$

Definición 1.1.10 *Un morfismo de DG-módulos de grado p,*

$$f : M \longrightarrow N$$

es un morfismo de Λ-módulos graduados de grado p tal que:

$$df = (-1)^p f d.$$

Definición 1.1.11 *Sean M y M' dos DG-módulos. Una homotopía entre dos morfismos de DG-módulos $f : M \to M'$ y $g : M \to M'$ es un morfismo de Λ-módulos graduados $\phi : M \to M'$ de grado $+1$, tal que verifica:*

$$f - g = d_{M'}\phi - \phi d_M. \tag{1.1}$$

Se dirá entonces que f y g son homótopos.

Definición 1.1.12 *Una filtración $F = \{F_p(M)\}_{p\in Z}$ de un DG-módulo M es una familia de submódulos graduados, $F_p(M)$, tales que:*

- *son nulos en grados negativos,*

$$F_p(M) = 0, \text{ si } p < 0,$$

- *forman una cadena creciente,*

$$0 = F_0 \subset \ldots \subset F_{p-1}(M) \subset F_p(M) \subset F_{p+1}(M) \subset \ldots, \tag{1.2}$$

- *y*

$$M = \cup_{p\geq 0} F_p(M).$$

Cada filtración F de M determina un módulo graduado asociado $G^F(M) = \{G^F_p M = F_p(M)/F_{p-1}(M)\}$, consistente en todos los módulos cocientes sucesivos de la torre (1.2). Precisemos que, en general, estos módulos no son libres.

Sean M y M' dos DG-módulos que poseen filtraciones F y F', respectivamente. Sea el morfismo de DG-módulos $f : M \to M'$. Se dice que f es un morfismo de DG-módulos filtrados si verifica $f(F_p(M)) \subset F'_p(M')$. Se dice que f disminuye (resp. aumenta) el índice de filtración en i unidades si $f(F_p(M)) \subset F'_{p-i}(M')$ (resp. $f(F_p(M)) \subset F'_{p+i}(M') - F'_{p+i-1}(M')$), para todo $p \geq 0$.

Definición 1.1.13 *Sea M un DG-módulo. Una aumentación (resp.: coaumentación) es un morfismo de DG-módulos:*

$$\xi_M : M \longrightarrow \Lambda$$

$$(\text{resp.: } \eta_M : \Lambda \longrightarrow M).$$

Es decir, una aumentación no es más que un morfismo de módulos graduados tal que $\xi_M d_1 = 0$, siendo $d_1 : M_1 \to M_0$ la diferencial de M en grado 1.

Definición 1.1.14 *Un DGA-módulo es un DG-módulo M dotado de una aumentación ξ_M y de una coaumentación η_M tales que verifican:*

$$\xi_M \eta_M = 1_\Lambda.$$

Definición 1.1.15 *Un DGA-módulo M se dice conexo si $M_0 = \Lambda$ y si su coaumentación $\eta_M : \Lambda \to M$ es la identidad. Se dice simplemente conexo, si además $M_1 = 0$.*

Definición 1.1.16 *Sea M un DG-módulo. Podemos definir el DG-módulo asociado $\overline{M}$, como sigue:*

$$\overline{M} = \begin{cases} M_n & si\ n > 0 \\ 0 & si\ n = 0 \end{cases}$$

Su diferencial es la inducida de M.

Lema 1.1.17 *Si M y N son DGA-módulos, podemos convertir $M \otimes N$ en un DGA-módulo, estableciendo:*

$$d_{M\otimes N} = d_M \otimes 1 + 1 \otimes d_N,$$

$$\xi_{M\otimes N} = \xi_M \otimes \xi_N,$$

$$\eta_{M\otimes N} = \eta_M \otimes \eta_N.$$

Definición 1.1.18 *Un morfismo de DGA-módulos*

$$f : M \longrightarrow N$$

es un morfismo de DG-módulos, tal que

$$\xi_N f = \xi_M, \quad f\eta_M = \eta_N.$$

Definición 1.1.19 *Sea $f : M \to N$ un morfismo de DGA-módulos, se define un nuevo DGA-módulo, denominado cono de f, denotado por $C(f)$, como*

$$C(f)_n = M_{n-1} \oplus N_n$$

$$d(x, y) = (-d_M(x), f(x) + d_N(y)).$$

Su aumentación y coaumentación son las de N.

Definición 1.1.20 *Definimos el morfismo de DG-módulos $T : M \otimes N \to N \otimes M$ por:*

$$T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x.$$

Definición 1.1.21 *Una DGA-álgebra (resp. DGA-coálgebra) es un DGA-módulo A (resp. C) dotado de un morfismo de DGA-módulos:*

$$\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A \quad (producto)$$

$$(resp. \quad \Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C \quad (coproducto))$$

verificando la propiedad de asociatividad:

$$\mu_A(1_A \otimes \mu_A) = \mu_A(\mu_A \otimes 1_A)$$

$$(resp. \quad (\Delta_C \otimes 1_C)\Delta_C = (1_C \otimes \Delta_C)\Delta_C)$$

y para el cual η_A (resp. ξ_C) es una unidad bilateral, es decir:

$$\mu_A(\eta_A \otimes 1_A) = \mu_A(1_A \otimes \eta_A) = 1_A$$

$$(resp. \quad (1_C \otimes \xi_C)\Delta_C = (\xi_C \otimes 1_C)\Delta_C = 1_C).$$

Se dice que es conmutativa (resp. coconmutativa) si:

$$\mu_A T = \mu_A$$

$$(resp. \quad T\Delta_C = \Delta_C).$$

Se dirá que es conmutativa salvo homotopía (resp. coconmutativa salvo homotopía) si existe una homotopía no nula entre los morfismos μ_A y $\mu_A T$ (resp. entre los morfismos Δ_C y $T\Delta_C$).

Por extensión, llamaremos producto sobre un DG-módulo M a cualquier DG-morfismo de $M \otimes M \to M$.

Definición 1.1.22 *Un morfismo de DGA-álgebras $f : A \to A'$ (resp. de DGA-coálgebras $f : C \to C'$) es un morfismo de DGA-módulos verificando:*

$$\mu_{A'}(f \otimes f) = f\mu_A.$$

$$(resp. \quad (f \otimes f)\Delta_C = \Delta_{C'}f).$$

Definición 1.1.23 *Sean A y A' dos DGA-álgebras (resp. C y C' dos DGA-coálgebras) y sea $f : A \to A'$ (resp. $f : C \to C'$) un morfismo de DGA-módulos. Se dice que f es un morfismo de DGA-álgebras (resp. de DGA-coálgebras) salvo homotopía, si existe una homotopía no nula entre los morfismos $\mu_{A'}(f \otimes f)$ y $f\mu_A$ (resp. entre los morfismos $(f \otimes f)\Delta_C$ y $\Delta_{C'}f$).*

Lema 1.1.24 *Si A y A' son DGA-álgebras (resp. C y C' son DGA-coálgebras), $A \otimes A'$ (resp. $C \otimes C'$) es una DGA-álgebra (resp. DGA-coálgebra) estableciendo:*

$$\mu_{A\otimes A'} = (\mu_A \otimes \mu_{A'})(1_A \otimes T \otimes 1_{A'})$$

$$(resp. \quad \Delta_{C\otimes C'} = (1_C \otimes T \otimes 1_{C'})(\Delta_C \otimes \Delta_{C'})).$$

Definición 1.1.25 *Un DGA-A-módulo (resp.: DGA-C-módulo) a izquierda sobre una DGA-álgebra A (resp. DGA-coálgebra C), es un DGA-Λ-módulo M, dotado de un morfismo de DGA-módulos:*

$$\mu_M : A \otimes M \longrightarrow M$$
$$(resp.\ \ \Delta_M : M \longrightarrow C \otimes M)$$

verificando:

$$\mu_M(1_A \otimes \mu_M) = \mu_M(\mu_A \otimes 1_M)$$
$$(resp.\ \ (\Delta_C \otimes 1_M)\Delta_M = (1_C \otimes \Delta_M)\Delta_M)$$
$$\mu_M(\eta_A \otimes 1_M) = 1_M$$
$$(resp.\ \ (\xi_C \otimes 1_M)\Delta_M = 1_M)$$

Se define de forma análoga los DGA-A-módulos (resp. DGA-C-comódulos) a derecha.

Definición 1.1.26 *Una DGA-álgebra de Hopf es una DGA-álgebra A dotada de un homomorfismo de DGA-álgebras:*

$$\Delta_A : A \longrightarrow A \otimes A$$

haciendo de A una DGA-coálgebra.

Esta definición es trivialmente equivalente a la siguiente:

Definición 1.1.27 *Una DGA-álgebra de Hopf es una DGA-coálgebra A, dotada de un homomorfismo de DGA-coálgebras:*

$$\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A$$

haciendo de A una DGA-álgebra. Se tiene en particular la relación:

$$\Delta_A\mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A)(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_A \otimes \Delta_A)$$

Definición 1.1.28 *Sea C una DGA-coálgebra y A una DGA-álgebra. Se llama cocadena de Brown (o cocadena de torsión) a un morfismo de Λ-módulos graduados de grado -1:*

$$t : C \longrightarrow A$$

tal que

$$d_At + td_C + t \cup t = 0$$
$$\xi_A t = 0$$
$$t\eta_C = 0$$

donde $t \cup t = \mu_A(t \otimes t)\Delta_C$.

Lema 1.1.29 *Sea M un DGA-módulo a derecha sobre la DGA-coálgebra C, N un DGA-módulo a izquierda sobre la DGA-álgebra A, $t : C \to A$ una cocadena de Brown. Se define:*

$$d_t : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N$$

por

$$d_t(x \otimes y) = d(x \otimes y) + t \cap x \otimes y$$

donde

$$t \cap x \otimes y = (1_M \otimes \mu_N)(1_M \otimes t \otimes 1_N)(\Delta_M \otimes 1_N)(x \otimes y).$$

Entonces, d_t es una diferencial y $M \otimes N$ dotado de esta diferencial y de la aumentación y coaumentación definidas para el producto tensorial es un DGA-módulo, que sera denotado $M \otimes_t N$. Además, las aplicaciones:

$$1 \otimes \xi_N : M \otimes_t N \longrightarrow M,$$

$$\eta_M \otimes 1 : N \longrightarrow M \otimes_t N,$$

son morfismos de DGA-módulos. El DGA-módulo $M \otimes_t N$ se denomina producto tensorial torcido por la cocadena t.

Definición 1.1.30 *Sea M un DG-módulo graduado. El DGA-módulo tensorial, $T(M)$, está definido por:*

$$T(M) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M^n,$$

donde $M^0 = \Lambda$, $M^n = M \otimes \ldots \otimes M$ (n factores). Un elemento $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ se denomina homogéneo si cada a_i es un elemento homogéneo de M. La graduación de $T(M)$ se define por:

$$|a_1 \otimes \ldots \otimes a_n| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

La diferencial d de $T(M)$ es

$$d_* : T(M)_* \longrightarrow T(M)_{*-1}$$

donde, sobre los elementos homogéneos, se define por

$$\begin{aligned} d_n \;=\; & d_M \otimes \overbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}^{n-1 \text{ veces}} + 1 \otimes d_M \otimes \overbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}^{n-2 \text{ veces}} + \ldots + \\ & \ldots + \overbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}^{n-1 \text{ veces}} \otimes d_M. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La aumentación $\xi_{T(M)}$ y la coaumentación $\eta_{T(M)}$ son la identidad de $M^0 = \Lambda$. Se define un producto, llamado producto tensorial, que se establece por simple yuxtaposición de elementos homogéneos y que se extiende por linealidad:

$$\mu_{T(M)} : T(M) \otimes T(M) \longrightarrow T(M) \tag{1.4}$$

es decir:

$$\mu_{T(M)}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes (a_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+p})) = a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+p},$$

y un coproducto

$$\Delta_{T(M)} : T(M) \longrightarrow T(M) \otimes T(M) \tag{1.5}$$

donde:

$$\Delta_{T(M)}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (a_1 \otimes \ldots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n).$$

Tanto el producto como el coproducto son morfismos de DGA-módulos, asociativos, y admiten por unidad a $\eta_{T(M)}$ y a $\xi_{T(M)}$, respectivamente.

$\mu_{T(M)}$ et $\Delta_{T(M)}$ no hacen de $T(M)$ una DGA-álgebra de Hopf. En efecto, la relación:

$$\Delta_{T(M)}\mu_{T(M)} = (\mu_{T(M)} \otimes \mu_{T(M)})(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_{T(M)} \otimes \Delta_{T(M)})$$

no se verifica. Dependiendo de que consideremos el DGA-módulo $T(M)$ dotado únicamente del producto $\mu_{T(M)}$ o del coproducto $\Delta_{T(M)}$, lo denotaremos $T^a(M)$ el álgebra ó $T^c(M)$ la coálgebra tensorial de M, respectivamente. Si $f : M \to M'$ es un morfismo de DG-módulos, se notará $T(f) : T(M) \to T(M')$ al morfismo de DGA-módulos, definido sobre los elementos homogéneos por:

$$T(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = f^{\otimes n}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \tag{1.6}$$

donde $f^{\otimes n}$ representa el morfismo $f \otimes \ldots \otimes f$ con n factores.

Definición 1.1.31 *Sea M un Λ-módulo graduado. Se define la suspensión (respectivamente, la desuspensión) de M por:*

$$S(M)_n = M_{n-1}$$

$$(\textit{resp.: } S^{-1}(M)_n = M_{n+1}).$$

Se llamará también suspensión (resp. desuspensión) los morfismos canónicos (identidades):

$$S : M \longrightarrow S(M)$$
$$S : S^{-1}(M) \longrightarrow M$$
$$(\textit{resp. } S^{-1} : M \longrightarrow S^{-1}(M)$$
$$S^{-1} : S(M) \longrightarrow M).$$

Notar que $|S| = 1$ y que $|S^{-1}| = -1$.

Si M es un DG-módulo, $S(M)$ y $S^{-1}(M)$ son DG-módulos con diferencial $-d_M$.

Definición 1.1.32 *Una A_∞-álgebra (resp. A_∞-coálgebra) es un Λ-módulo graduado A (resp. C), dotado de una familia de morfismos de Λ-modulos graduados $m_i : A^i \to A$ $(i \geq 1)$ (resp. $\Delta_i : C \to C^i$ $(i \geq 1)$), tal que m_i (resp. Δ_i) sea de grado $i-2$, y satisfaciendo las relaciones (para $n \geq 1$):*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{n-k}(-1)^{k+\lambda+k\lambda}m_{n-k+1}(1^\lambda \otimes m_k \otimes 1^{n-k-\lambda}) = 0. \tag{1.7}$$

$$(resp.: \sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{n-k}(-1)^{k+\lambda+k\lambda}(1^{n-k-\lambda} \otimes \Delta_k \otimes 1^\lambda)\Delta_{n-k+1} = 0).$$

Notemos que para $n = 1,2,3$, las relaciones se escriben:

$$\begin{array}{l} m_1 m_1 = 0 \\ -m_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1) + m_1 m_2 = 0 \\ -m_3(m_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_1) + \\ m_2(m_2 \otimes 1) - m_2(1 \otimes m_2) - m_1 m_3 = 0. \end{array}$$

Se tiene pues que m_1 es una diferencial sobre A y m_2 es un producto, respetando la diferencial. La tercera relación nos dice que m_2 es asociativo salvo homotopía (es decir, que los morfismos $m_2(m_2 \otimes 1)$ y $m_2(1 \otimes m_2)$ son homótopos). Se puede hablar entonces de la homología de A (A es un DG-módulo con diferencial m_1), que es una álgebra graduada. Se sabe que esta homología puede también recibir una estructura de A_∞-álgebra con m_1 nulo ([Kad80], [Pro84]).

Si A es una DG-álgebra, nosotros la consideraremos como una A_∞-álgebra, estableciendo:

$$m_1 = d, \quad m_2 = \mu, \quad m_i = 0\ (i \geq 3)$$

De la misma forma, si C es una DG-coálgebra (asociativa), la podremos considerar como una A_∞-coálgebra, si establecemos:

$$\Delta_1 = d, \quad \Delta_2 = \Delta, \quad \Delta_i = 0\ (i \geq 3)$$

En particular, Λ es una A_∞-álgebra y una A_∞-coálgebra.

1.2 Topología simplicial

Daremos ahora una colección de definiciones y resultados básicos de la Topología Simplicial.

Las definiciones y resultados de esta sección han sido extraídos de los textos [May67] y [Cur71].

Definición 1.2.1 *Un conjunto simplicial K es un conjunto graduado $K = \{K_0, K_1, \ldots, K_n, \ldots\}$ con dos familias de funciones:*

- *los operadores de cara $\partial_i : K_n \to K_{n-1}$, $\quad 0 \leq i \leq n, \quad \forall n > 0$,*
- *los operadores de degeneración $s_i : K_n \to K_{n+1}$, $\quad 0 \leq i \leq n, \quad \forall n \geq 0$,*

que satisfacen las identidades simpliciales siguientes:

$$\begin{gathered}
\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \ \textit{ si } \ i < j, \\
s_i s_j = s_{j+1} s_i \ \textit{ si } \ i \leq j, \\
\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \ \textit{ si } \ i < j, \\
\partial_i s_j = \textit{identidad} = \partial_{j+1} s_j, \\
\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \ \textit{ si } \ i > j+1.
\end{gathered}$$

Los elementos de K_n se llaman n-símplices. Un símplice x es degenerado si $x = s_i z$, para un símplice z y un operador de degeneración s_i; en caso contrario, x es no degenerado.

Definición 1.2.2 *Un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre dos conjuntos simpliciales es una familia de aplicaciones $\{f_q : K_q \to L_q\}_{q \geq 0}$ tales que conmutan con los operadores de cara y de degeneración; esto es, se tiene que*

$$\begin{aligned}
f_q \partial_i &= \partial_i f_{q+1}, \quad 0 \geq i \geq q, \quad \forall q \geq 0, \\
f_q s_i &= s_i f_{q-1}, \ Q; \quad 0 \geq i \geq q, \quad \forall q > 0.
\end{aligned}$$

Definición 1.2.3 *Sea K un conjunto simplicial. Si cada K_n, y cada ∂_i y s_i están en la categoría C , entonces K es un objeto simplicial sobre C. Si K y L son objetos simpliciales sobre C y $f : K \to L$ es un morfismo de conjuntos simpliciales con cada f_n en C, entonces f es un morfismo simplicial sobre C.*

Por ejemplo, podemos hablar de Λ-módulos simpliciales y de morfismos de Λ-módulos simpliciales, tomando en la definición anterior la categoría de los Λ-módulos y de los morfismos de Λ-módulos. Otros ejemplos son los de Λ-álgebra simplicial y grupo simplicial.

Definición 1.2.4 *Un punto base $*$ en K es el subconjunto simplicial constituido por un elemento $*$ de K_0 y todas sus degeneraciones.*

Si no hay lugar a confusión, se identificarán el punto base y el elemento $*$ de K_0.

Definición 1.2.5 *Un conjunto simplicial con punto base (o punteado) es un par $(K, *)$, donde K es un conjunto simplicial y $*$ es un punto base en K.*

El concepto de conjunto simplicial con punto base nos dice que estamos destacando un 0-símplice sobre los demás. Por ejemplo, consideraremos a un grupo simplicial como conjunto simplicial punteado, con punto base el elemento neutro e_0 en dimensión cero. Obsérvese que las degeneraciones de e_0 son los elementos neutros en los grados correspondientes.

Definición 1.2.6 *Un conjunto simplicial K es reducido si K_0 tiene solamente un símplice.*

De ahora en adelante, consideraremos cuando sea necesario los conjuntos simpliciales reducidos como conjuntos simpliciales punteados.

Definición 1.2.7 *Un conjunto simplicial K es n-reducido $(n \geq 1)$ si es reducido y no tiene m-símplices no degenerados, para $1 \leq m \leq n$.*

Definición 1.2.8 *Sea C un conjunto. El Λ-módulo libre generado por C, $\Lambda[C]$, puede construirse como*

$$\Lambda[C] = \oplus_{c \in C} \Lambda\, c,$$

donde $\Lambda\, c$ denota el Λ-módulo a izquierda con elementos λc , $\lambda \in \Lambda$. Dicho de otra forma, el Λ-módulo $\Lambda[C]$ está formado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de C, con coeficientes en Λ.

Definición 1.2.9 *Sea K un conjunto simplicial. El Λ-módulo simplicial libre generado por K es el Λ-módulo simplicial*

$$\Lambda[K]_n = \Lambda[K_n],$$

y sus operadores ∂_i y s_i son los morfismos de Λ-módulos inducidos por los operadores de K.

Lema 1.2.10 *Si L es un Λ-módulo simplicial entonces, $\{L, d\}$, donde*

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i,$$

es un DG-Λ-módulo, llamado el DG-módulo asociado a L.

Es claro que todo morfismo de Λ-módulos simpliciales $f : L \to L'$ da lugar a un morfismo entre los DG-módulos-asociados de forma obvia.

Definición 1.2.11 *Sea K un conjunto simplicial. Definimos el complejo de cadenas asociado a K, que denotaremos por $C_*(K)$, al DG-Λ-módulo asociado a $\Lambda[K]$. La homología $H(K)$, se define como:*

$$H_n(K) = H_n(C_*(K)), \quad \forall n \geq 0.$$

Lema 1.2.12 *Si $(K,*)$ es un conjunto simplicial punteado, entonces $C_*(K)$ es un DGA-módulo con aumentación*

$$\xi_K(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in K_0, \\ 0 & en\ otro\ caso; \end{cases}$$

y coaumentación definida a partir de:

$$\eta_K(1) = *.$$

Definición 1.2.13 *Sea L un Λ-módulo simplicial L. Sea sL el sub-Λ-módulo generado por todos los símplices degenerados. Se verifica que*

$$d_n(sL)_n \subset (sL)_{n-1},$$

y, por tanto, el par $\{L/sL, d\}$, es un DG-Λ-módulo, que será denominado el submódulo normalizado de L; se denota por L_N.

Lema 1.2.14 *Todo morfismo de Λ-módulos simpliciales $f : L \to L'$ da lugar a un morfismo de DG-módulos entre los normalizados $f : L_N \to L'_N$ de forma obvia.*

Definición 1.2.15 *Sea K un conjunto simplicial. Se llama el complejo de cadenas normalizado de K, y se nota $C_*^N(K)$, al normalizado del Λ-módulo simplicial $C_*(K)$.*

Nota 1.2.16 *Indiquemos que $C_*(K)$ y $C_*^N(K)$ son DG-módulos libres y que la homología de K se puede calcular indistintamente a partir de cualquiera de estos dos complejos de cadenas.*

Obsérvese que si K es un conjunto simplicial reducido, tanto $C_*(K)$ como $C_*^N(K)$ son DGA-módulos conexos.

Definición 1.2.17 *Sean K y L dos conjuntos simpliciales. El producto cartesiano $K \times L$ es un conjunto simplicial definido por:*

$$(K \times L)_n = K_n \times L_n,$$
$$\partial_i(x,y) = (\partial_i x, \partial_i y),$$
$$s_i(x,y) = (s_i x, s_i y).$$

Definición 1.2.18 *Dados dos enteros positivos p y q, un (p,q)-shuffle es una permutación π del conjunto $\{0,1,\ldots,p+q-1\}$ verificando:*

$$\pi(i) < \pi(j) \quad si \quad \begin{cases} 0 \le i < j \le p-1 & ó \\ p \le i < j \le p+q-1. \end{cases}$$

Si definimos:

$$\begin{cases} \alpha_i = \pi(i-1) & donde\ 0 < i \le p \\ \beta_j = \pi(j+p-1) & donde\ 0 < j \le q\ , \end{cases}$$

las sucesiones $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *ó* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$ *determinan* π. *Se denotará el* (p,q)*-shuffle* π *por* (α, β); *la signatura de* (α, β) *es*

$$sg(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - i - 1).$$

Definición 1.2.19 *Sean* L *y* L' *dos* Λ*-módulos simpliciales. Los operadores de Alexander-Whitney* $AW_{L,L'} : (L \times L')_N \to L_N \otimes L'_N$, *y de Eilenberg-MacLane* $EML_{L,L'} : L_N \otimes L'_N \to (L \times L')_N$ *son los morfismos de DG-*Λ*-módulos definidos por las fórmulas siguientes:*

$$AW(x_n, y_n) = \sum_{i=0}^{n} \partial_{i+1} \ldots \partial_n x_n \otimes \partial_0 \ldots \partial_{i-1} y_n, \tag{1.8}$$

y

$$EML(x_p \otimes y_q) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \{(p,q)-shuffles\}} (-1)^{sg(\alpha,\beta)} (s_\beta x_p, s_\alpha y_q) \tag{1.9}$$

donde s_α *(resp.* s_β*) es el operador:*

$$s_\alpha = s_{\alpha_p} \ldots s_{\alpha_1}$$

$$(\textit{resp. } s_\beta = s_{\beta_q} \ldots s_{\beta_1}).$$

Definición 1.2.20 *Dado un conjunto simplicial* K, *el coproducto de Alexander-Whitney* $\Delta_K : C_*^N(K) \to C_*^N(K) \otimes C_*^N(K)$ *es la composición de la aplicación diagonal* $C_*^N(K) \to C_*^N(K \times K)$ *y del operador de Alexander-Whitney* $AW_{C_*(K), C_*(K)}$. *Una fórmula explícita para este morfismo de DG-*Λ*-módulos es:*

$$\Delta_K(x_n) = \sum_{i=0}^{n} \partial_{i+1} \ldots \partial_n x_n \otimes \partial_0 \ldots \partial_{i-1} x_n. \tag{1.10}$$

Si el conjunto simplicial K *es punteado, el coproducto de Alexander-Whitney convierte a* $C_*^N(K)$ *en una DGA-coálgebra.*

Definición 1.2.21 *Si* G *es un grupo simplicial, su producto de Eilenberg-MacLane,* $\mu_G : C_*^N(G) \otimes C_*^N(G) \to C_*^N(G)$, *es la composición del operador de Eilenberg-MacLane* $EML_{C_*(G), C_*(G)}$ *y del morfismo de DG-*Λ*-módulos* $C_*^N(G \times G) \to C_*^N(G)$ *inducido por el producto de* G. *Una fórmula explícita para este morfismo de DG-*Λ*-módulos es:*

$$\mu_G(x_n \otimes y_n) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \{(p,q)-shuffles\}} (-1)^{sg(\alpha,\beta)} s_\beta x_p \circ s_\alpha y_q. \tag{1.11}$$

El producto de Eilenberg-Maclane, también llamado producto de Pontrjagin, convierte a $C_*^N(G)$ *en una DGA-álgebra, que es conmutativa si* G *es conmutativo. Si el grupo simplicial* G *es reducido,* $C_*^N(G)$ *es una DGA-álgebra conexa.*

Definición 1.2.22 *Un fibrado principal (también llamado producto cartesiano torcido principal, o PTCP) es una terna (B, τ, G), donde B es un conjunto simplicial reducido (que se le llamará base del fibrado), G es un grupo simplicial (que será la fibra del fibrado) y $\tau : B \rightarrow G$ es una función (llamada función de torsión geométrica) que disminuye en uno la dimensión, y que satisface:*

$$\begin{aligned}
\partial_i \tau(b) &= \tau(\partial_{i+1} b) \text{ para } i > 0, \\
\partial_0 \tau(b) &= \tau(\partial_1 b) \tau(\partial_0 b)^{-1}, \\
s_i \tau(b) &= \tau(s_{i+1} b) \text{ para } i \geq 0, \\
\tau(s_0 b) &= e_n.
\end{aligned}$$

donde e_n es el elemento neutro del grupo G_n correspondiente.

Se puede definir en estas condiciones un conjunto simplicial $E(\tau) = B \times_\tau G$ que se denomina espacio total del fibrado:

$$(B \times_\tau G)_n = B_n \times G_n, \text{ si}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0(b, g) &= (\partial_0 b, \partial_0 g\, \tau(b)), \\
\partial_i(b, g) &= (\partial_i b, \partial_i g) \text{ para } i > 0, \\
s_i(b, g) &= (s_i b, s_i g) \text{ para } i \geq 0.
\end{aligned}$$

que se denomina espacio total del fibrado.

De manera análoga puede definirse $G \times_\tau B$.

Definición 1.2.23 *Sea $B \times_\tau G$ un PTCP y $f : C \rightarrow B$ un morfismo simplicial; entonces, podemos construir un nuevo PTCP $C \times_{\tau \circ f} G$, que llamaremos PTCP inducido por f a partir de τ.*

Definición 1.2.24 *Un PTCP $B \times_\tau G$ se dice de tipo (W) si el operador cara $\partial_0 : B \times \{e_n\} \rightarrow E(\tau)_{n-1}$ es una biyección de conjuntos $\forall\, n \geq 1$. Llamemos $S : E(\tau)_{n-1} \rightarrow B \times \{e_n\}$ a la aplicación inversa de ∂_0; en particular se tiene que $\partial_0 S$ es la identidad en $E(\tau)_{n-1}$.*

Teorema 1.2.25 *Dos PTCPs de tipo (W) con fibra G son naturalmente isomorfos.*

Capítulo 2

Técnicas algorítmicas y algebraicas: la Teoría de la Homología Efectiva y la Teoría de la Perturbación Homológica

En este capítulo, trabajaremos exclusivamente en el área del Algebra Homológica.

El objetivo principal de este trabajo es obtener métodos efectivos de cálculo de la homología de los espacios clasificantes. Para conseguirlo y transformar diversos útiles de la Topología Algebraica en verdaderos procesos algorítmicos, vamos a apoyarnos en la teoría de la Homología Efectiva ([Ser87], [Rub91a], [Ser]), donde las equivalencias de homotopía explícitamente dadas constituyen los datos fundamentales de los algoritmos, y en la teoría de Perturbación Homológica ([Shi62], [Bro64] y [Gug72]), que estudia las modificaciones creadas por perturbaciones sobre las equivalencias de homotopía.

En este capítulo, describiremos sólo los elementos de estas dos teorías indispensables para el desarrollo de esta memoria. Comenzaremos por definir el concepto fundamental de reducción y mostraremos las "construcciones" más relevantes que se pueden realizar a partir de reducciones dadas. Después, realizaremos una primera aproximación a la teoría de Perturbación Homológica. Posteriormente, se hablará acerca de la teoría de la Homología Efectiva y especificaremos en qué contexto vamos a establecer nuestros algoritmos. Ya en la última sección, se estudian las reducciones de conos de morfismos, que nos indicarán el camino a seguir para el diseño de un mecanismo de perturbación apropiado para objetos con estructura. El caso para DGA-(co)álgebras lo trataremos ampliamente, completando ciertos aspectos de la teoría que parecen no estar cubiertos en la literatura y que serán fundamentales en el desarrollo posterior de esta memoria. Por último, se da una caracterización de las A_∞ estructuras desde el punto de vista de la teoría de la Perturbación.

Notación 2.0.26 *Recordemos que un DGA-módulo no es más que un DG-módulo que posee una aumentación y una coaumentación (ver def. 1.1.14). En este capítulo, los resultados que* *expondremos para DG-módulos, podrán extenderse en la forma adecuada para DGA-módulos. Utilizaremos la simbología "DG(A)-módulo', para expresar la existencia paralela de dos resultados, uno para DG-módulos y otro para DGA-módulos, respectivamente.*

2.1 El concepto de reducción

Comenzemos por establecer la definición de reducción, concepto que será esencial en todo nuestro trabajo.

Definición 2.1.1 *Una reducción de DG-módulos (o, simplemente reducción) es un conjunto de datos $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ donde $f : N \to M$, $g : M \to N$ son morfismos de DG-módulos (llamados la proyección y la inyección de la reducción r) y $\phi : N \to N$ es un morfismo de módulos graduados de grado $+1$ (llamado operador de homotopía) que verifican las condiciones siguientes:*

$$\begin{array}{ll} \textbf{(r1)} & fg = 1_M; \\ \textbf{(r2)} & f\phi = 0; \\ \textbf{(r3)} & \phi g = 0; \\ \textbf{(r4)} & \phi d + d\phi + gf = 1_N; \\ \textbf{(r5)} & \phi\phi = 0. \end{array}$$

En esta definición se ha seguido la terminología de Sergeraert [Ser]; se encuentra también en la literatura: "retracción con deformación fuerte" o SDR (en Lambe-Stasheff [LS87], Gugenheim-Lambe [GL89] y Gugenheim-Stasheff [GS86]), "dato Eilenberg-Zilber" (en Gugenheim-Munkholm [GM74b]), "extensión trivial" (en Munkholm [Mun76]), o simplemente "contracción" (en Eilenberg-MacLane [EM53]).

Como ejemplos de reducciones tenemos:

- $1_N : \{N,\ N,\ 1_N,\ 1_N,\ 0\}$, llamada la reducción trivial del DG-módulo $\{N, d_N\}$.
- $f : \{N,\ M,\ f,\ f^{-1},\ 0\}$, donde $f : N \to M$ es un isomorfismo de DG-módulos.
- El teorema de Eilenberg-Zilber:

  Teorema 2.1.2 *[EZ59]*
  Sean L e L' dos Λ-módulos simpliciales. Entonces, los datos $EZ_{L,L'} : \{(L \times L')_N,\ L_N \otimes L'_N,\ AW_{L,L'},\ EML_{L,L'},\ SHI_{L,L'}\}$ definen una reducción. La homotopía $SHI_{L,L'}$ está definida por la fórmula siguiente:

  $$SHI(x_n, y_n) =$$
  $$= \sum (-1)^{n-p-q+sg(\alpha,\beta)} \ (s_{\beta_q+n-p-q} \cdots s_{\beta_1+n-p-q} s_{n-p-q-1} \partial_{n-q+1} \cdots \partial_n x_n,$$
  $$s_{\alpha_{p+1}+n-p-q} \cdots s_{\alpha_1+n-p-q} \partial_{n-p-q} \cdots \partial_{n-q-1} y_n),$$

  donde la última suma está definida para todos los índices $0 \le q \le n-1$, $0 \le p \le n-q-1$ y $(\alpha, \beta) \in \{(p+1, q) - \textit{shuffles}\}$. Los morfismos $AW_{L,L'}$ y $EML_{L,L'}$ están especificados en (1.8) y (1.9) de la definición 1.2.19.

Evidentemente, si tenemos dos conjuntos simpliciales X e Y, podemos establecer una reducción Eilenberg-Zilber

$$EZ_{X,Y} : \{C_*^N(X \times Y),\ C_*^N(X) \otimes C_*^N(Y),\ AW_{X,Y},\ EML_{X,Y},\ SHI_{X,Y}\}.$$

- Un último ejemplo de reducción es aquella que se puede establecer entre los complejos de cadenas $C_*(X)$ et $C_*^N(X)$, donde X es un conjunto simplicial ([EM53], pag 61, teor. 4.1).

Nota 2.1.3 *Habrá ocasiones en las que, dada una reducción $r : \{N,\ M,\ f,\ g,\ \phi\}$, representaremos la proyección, la inyección y la homotopía de la misma por f^r, g^r y ϕ^r, respectivamente.*

Dada una cierta estructura E, habrá dos conceptos fundamentales que será conveniente distinguir; a saber, las E-reducciones y las reducciones de E-estructuras.

Entenderemos por estructuras: DGA-módulo, DGA-álgebra, DGA-coálgebra, DGA-álgebra de Lie,...

Definición 2.1.4 *Sean M y N dos DG-módulos con una estructura adicional E, y una reducción $r : \{N, M, f, g, \phi\}$. Se dice que r es una E-reducción si, al menos, uno de los morfismos f y g preservan dicha estructura.*

Por ejemplo, una DGA-módulo-reducción $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ es aquella en la que su proyección o su inyección es un morfismo de DGA-módulos. Con esta condición podemos afirmar que la estructura de DGA-módulo de M (ξ_M, η_M) coincide con la estructura de DGA-módulo transferida ($\xi_N\, g$, $f\, \eta_N$) por el DGA-módulo de N (ξ_N, η_N), gracias a la reducción.

Por otra parte,

Definición 2.1.5 *Sean M y N dos DG-módulos con una estructura adicional E, y una reducción $r : \{N, M, f, g, \phi\}$. Se dice que r es una reducción de E-estructuras si los dos morfismos f y g son morfismos de E-estructuras.*

Por ejemplo, una reducción de DGA-módulos es aquella que tanto su proyección como su inyección son morfismos de DGA-módulos.

Vemos, pues, que una reducción de E-estructuras es, en particular, una E-reducción.

Para el caso de DGA-módulos, se tiene que una DGA-módulo-reducción puede transformarse en una reducción de DGA-módulos.

Proposición 2.1.6 ([Hue89]) *Sean M y N dos DGA-módulos y sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG-módulos.*

1. *Si la proyección f es un morfismo de DGA-módulos, entonces podemos construir la reducción de DGA-módulos siguientes:*

$$r' : \{N,\ M,\ f,\ \ g(1 - \eta_M \xi_M) + \eta_N \xi_M,\ \ \phi(1 - \eta_N \xi_N)\};$$

2. *Si la inyección g es un morfismo de DGA-módulos, entonces podemos construir la reducción de DGA-módulos siguientes:*

$$r' : \{N,\ M,\ (1-\eta_N\xi_N)f + \eta_N\xi_M,\ g,\ (1-\eta_N\xi_N)\phi\}.$$

Definición 2.1.7 *Dos reducciones r y r' coinciden, y se nota $r \equiv r'$, cuando los módulos, diferenciales y morfismos que forman parte de ellas son los mismos.*

Después de estos preliminares, expondremos ahora algunos lemas básicos y conocidos ([LS87], [GLS89]) sobre construcciones que podremos aplicar a reducciones dadas:

Lema 2.1.8 (SUSPENSION) *Sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG(A)-módulos. Podemos construir la reducción de DG(A)-módulos suspensión de r:*

$$S(r) : \{S(N),\ S(M),\ f,\ g,\ -\phi\} \tag{2.1}$$

Lema 2.1.9 *Supongamos que se dan dos reducciones de DG(A)-módulos:*

$$r_i : \{N_i,\ M_i,\ f_i,\ g_i,\ \phi_i\} \quad i = 1,2$$

entonces,

1. *(SUMA DIRECTA) podemos construir la reducción de DG(A)-módulos suma directa:*

$$r_1 \oplus r_2 : \{N_1 \oplus N_2,\ M_1 \oplus M_2,\ f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2,\ \phi_1 \oplus \phi_2\} \tag{2.2}$$

2. *(COMPOSICIÓN) si $N_2 = M_1$, podemos construir la reducción de DG(A)-módulos composición:*

$$r_2 \circ r_1 : \{N_1,\ M_2,\ f_2 f_1,\ g_1 g_2,\ \phi_1 + g_1\phi_2 f_1\} \tag{2.3}$$

3. *(PRODUCTO TENSORIAL) podemos construir la reducción de DG(A)-módulos producto tensorial:*

$$r_1 \otimes r_2 : \{N_1 \otimes N_2,\ M_1 \otimes M_2, f_1 \otimes f_2,\ g_1 \otimes g_2,\ \phi_1 \otimes g_2 f_2 + 1_{M_1} \otimes \phi_2.\} \tag{2.4}$$

Por ejemplo, si tenemos una reducción de DG(A)-módulos $r : \{N,\ M,\ f,\ g,\ \phi\}$, podemos construir las reducciones de DG(A)-módulos siguientes:

- $$r \oplus r : \{N \oplus N,\ M \oplus M,\ f \oplus f,\ g \oplus g,\ \phi \oplus \phi\}$$

- $$r \otimes r : \{N \otimes N,\ M \otimes M,\ f \otimes f,\ g \otimes g,\ \phi \otimes gf + 1_N \otimes \phi\}. \tag{2.5}$$

- $$\varphi \circ r : \{N,\ M',\ \varphi f,\ g\varphi^{-1},\ \phi\} \tag{2.6}$$
  donde $\varphi : M \to M'$ es un isomorfismo de DG(A)-módulos

- $$r \circ \varphi : \{N',\ M,\ f\varphi,\ \varphi^{-1} g,\ \varphi^{-1}\phi\varphi\} \tag{2.7}$$
  donde $\varphi : N' \to N$ es un isomorfismo de DG(A)-módulos.

Otras construcciones clásicas de interés para nosotros son:

Lema 2.1.10 *Sea $r : \{N_1, N_2, f, g, \phi\}$ una reducción de DG(A)-módulos. Se puede construir la reducción de DGA-módulos*

$$\bar{r} : \{\bar{N}_1,\ \bar{N}_2,\ f,\ g,\ \phi\} \tag{2.8}$$

donde $\bar{N}_i$, $i = 1,2$, vienen dados por la definición 1.1.16 y donde f, g y ϕ son un abuso de notación para las aplicaciones obvias.

Lema 2.1.11 *Sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG(A)-módulos. Podemos construir la reducción de DGA-módulos módulo tensorial $T(r) : \{T(N), T(M), T(f), T(g), T(\phi)\}$, donde los morfismos $T(f)$ y $T(g)$ son los morfismos inducidos por f y g sobre los módulos tensoriales, y el operador $T(\phi)$ se define*

$$T(\phi)|_{N^n} = \phi \otimes (gf)^{\otimes n-1} + 1 \otimes \phi \otimes (gf)^{\otimes n-2} + \ldots + 1^{\otimes n-1} \otimes \phi, \quad k \geq 1.$$

El concepto de módulo tensorial y la notación utilizada en esta última proposición aparecen en la definición 1.1.30. La reducción $T(r)$ resulta ser $\oplus_{i\geq 0} \overbrace{r \otimes \ldots \otimes r}^{i \text{ veces}}$.

2.2 El Lema de Perturbación Homológica

La teoría de Perturbación Homológica ([Shi62], [Bro64], [Gug72], [GL89], [GLS91]) es una técnica sistemática y algorítmicamente eficaz para la transferencia de estructuras de un objeto a otro salvo homotopía, y constituye una herramienta poderosa para obtener complejos de cadenas que representen un tipo de homotopía dado. Aquí y en las últimas secciones de este capítulo, expondremos una parte de esta teoría, teniendo en cuenta los nuevos avances que ha conocido recientemente.

En esta sección realizaremos una primera aproximación a esta teoría. Comenzaremos por varias definiciones previas y el enunciado del Lema de Perturbación Homológica. Después, expondremos varios resultados de "compatibilidad" de este Lema con respecto a "construcciones" que se pueden realizar a partir de reducciones.

El elemento mas importante de la teoría de Perturbación Homológica es, sin duda, el Lema de Perturbación (en cuanto a su génesis, ver [Shi62], [Bro64] y [Gug72]; en cuanto a su desarrollo posterior, ver, por ejemplo [GL89], [HK91], [GLS89] y [GLS91]). En esta sección, empezaremos dando varias definiciones previas y el enunciado del Lema de Perturbación.

Definición 2.2.1 *Sean M un módulo graduado y $f : M \rightarrow M$ un morfismo de módulos graduados. El morfismo f es localmente nilpotente si para todo x, elemento no nulo de M, existe un número entero positivo n (en general, el número n depende del elemento x) tal que $f^n(x) = 0$, donde $f^n : M \rightarrow M$ es el morfismo de módulos graduados obtenido al iterar n veces el morfismo f.*

Para demostrar que un morfismo f es localmente nilpotente, se utiliza frecuentemente filtraciones sobre los módulos graduados considerados. Es evidente que si un morfismo $f : M \rightarrow M$ disminuye el índice de filtración en M, entonces f es un morfismo localmente nilpotente.

Definición 2.2.2 *Una perturbación de un DG-módulo (N, d_N) es un morfismo de módulos graduados $\rho : N \rightarrow N$, de grado -1 y tal que $(d_N + \rho)^2 = 0$.*

Es decir, una perturbación ρ de un DG-módulo (N, d_N) verifica que $|\rho| = -1$ y $d_N\rho + \rho d_N + \rho^2 = 0$.

Definición 2.2.3 *Una perturbación ρ de un DGA-módulo N es una perturbación de DG-módulos, que verifica la condición $\xi_N\rho = 0$.*

Definamos el concepto de perturbación que "induce convergencia" con respecto a una reducción:

Definición 2.2.4 *Sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG(A)-módulos y $\rho : N \rightarrow N$ una perturbación del DG(A)-módulo N. La reducción r y la perturbación ρ inducen convergencia si la composición $\phi\rho : N \rightarrow N$ es un morfismo localmente nilpotente.*

Estamos ahora en condiciones de enunciar el Lema de Perturbación de DG(A)-módulos.

Teorema 2.2.5 (Lema de Perturbación Homológica) *[Shi62]*
Sea $r : \{(N, d_N), (M, d_M), f, g, \phi\}$ una reducción de DG(A)-módulos y sea $\rho : N \rightarrow N$ una perturbación del DG(A)-módulo (N, d_N) tales que r y ρ inducen convergencia. Entonces, una

nueva reducción de DG(A)-módulos $r_\rho : \{(N, d_N + \rho), (M, d_\rho), f_\rho, g_\rho, \phi_\rho\}$ *se puede definir por las fórmulas siguientes:*

$$
\begin{aligned}
d_\rho &= d_M + f\rho\Sigma_\infty g; && (2.9)\\
f_\rho &= f(1 - \rho\Sigma_\infty\phi); && (2.10)\\
g_\rho &= \Sigma_\infty^\rho g; && (2.11)\\
\phi_\rho &= \Sigma_\infty\phi, && (2.12)
\end{aligned}
$$

donde

$$\Sigma_\infty = 1 - \phi\rho + \phi\rho\phi\rho - \ldots + (-1)^i(\phi\rho)^i + \ldots \qquad (2.13)$$

Notación 2.2.6 *En la mayoría de las demostraciones donde interviene el Lema de Perturbación, notaremos* Σ_∞ *con la fórmula más compacta* $\sum_{i\geq 0}(-1)^i(\phi\rho)^i$*, donde definimos* $(\phi\rho)^0 = 1_N$.

Para una referencia posterior, vamos a comentar dos casos especiales :

Proposición 2.2.7 *En las condiciones del teorema anterior:*

1. *Si la proyección* f *es tal que verifica* $f\rho\phi = 0$*, entonces* $f_\rho = f$ *y* $d_\rho = d + f\rho g$.
2. *Si la inyección* g *es tal que verifica* $\phi\rho g = 0$*, entonces* $g_\rho = g$ *y* $d_\rho = d + f\rho g$.

Notación 2.2.8 *Toda reducción subindicada por un símbolo no numérico querrá decir reducción perturbada por la perturbación que representa dicho símbolo. Por abuso de notación, habrá veces en que escribiremos simplemente reducción y perturbación para indicar reducción y perturbación de DG(A)-módulos, respectivamente.*

Veamos ahora que el Lema de Perturbación tiene un buen comportamiento con respecto a las construcciones suspensión, suma directa, composición y producto tensorial de reducciones. La demostración de la primera proposición es una simple comprobación:

Proposición 2.2.9 *Sea* $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ *una reducción de DG(A)-módulos y sea* ρ *una perturbación del DG(A)-módulo* N*, tales que* r *y* ρ *inducen convergencia. Entonces,*

$$S(r_\rho) \equiv (S(r))_{-\rho}.$$

Proposición 2.2.10 *Sean las reducciones de DG(A)-módulos siguientes:*

$$r_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \qquad i = 1, 2$$

- SUMA DIRECTA

  Sea ρ_i una perturbación del DG(A)-módulo N_i, tal que r_i y ρ_i inducen convergencia, $i = 1,2$. Entonces, las reducciones siguientes coinciden:

$$(r_1 \oplus r_2)_{(\rho_1 \oplus \rho_2)} \equiv (r_1)_{\rho_1} \oplus (r_2)_{\rho_2}$$

- COMPOSICIÓN *([DB]) Se supone que $M_1 = N_2$ y que ρ es una perturbación del DG(A)-módulo N_1. Entonces, las reducciones siguientes coinciden:*

$$(r_2 \circ r_1)_\rho \equiv (r_2)_\psi \circ (r_1)_\rho$$

$$\textit{donde} \quad \psi = f_1\rho\Sigma_\infty^\rho g_1 = f_1\rho(1 - \phi_1\rho + (\phi_1\rho)^2 - \ldots)g_1.$$

  donde todas las perturbaciones en juego inducen convergencia con respecto a las reducciones sobre las que se aplican.

- PRODUCTO TENSORIAL *([HK91], pag. 256-257)*

  Sean ρ_i una perturbación del DG(A)-módulo N_i, tal que r_i y ρ_i inducen convergencia, $i = 1,2$. Entonces, las reducciones siguientes coinciden:

$$(r_1 \otimes r_2)_{(\rho \otimes 1 + 1 \otimes \rho')} \equiv (r_1)_\rho \otimes (r_2)_{\rho'}$$

Demostración

- La demostración de la equivalencia para la suma directa es evidente ya que las reducciones actuan separadamente para cada sumando.

- *(Composición)* Nuestra demostración es diferente a la realizada en [DB]. Por una parte, se construye la reducción $(r_2r_1)_\rho$ que se obtiene aplicando el Lema de Perturbación de DG(A)-módulos (teorema 2.2.5) a la reducción composición (ver (2.3) del lema 2.1.9):

$$r_2r_1 : \{N_1, M_2, f_2f_1, g_1g_2, \phi_1 + g_1\phi_2 f_1\}$$

  donde la perturbación es ρ; por otra, se considera las reducciones obtenidas de la aplicación del Lema de Perturbación a las reducciones r_1 y r_2, donde las perturbaciones son son ρ y $\psi = f_1\rho(1 - \phi_1\rho + (\phi_1\rho)^2 - \ldots)g_1$ respectivamente, y se construye la reducción composición de éstas, $(r_1)_\rho(r_2)_\psi$. Entonces, demostremos que estas dos reducciones finales coinciden.

  Las fórmulas de los morfismos integrantes de la reducción $(r_2r_1)_\rho$, teniendo en cuenta (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12) del Lema de Perturbación, son:

$$\begin{array}{lcl}
[(r_2r_1)_\rho](d_{M_2}) & = & d_{M_2} + f_2f_1\rho\Sigma_\infty g_1g_2; \\
[(r_2r_1)_\rho](f) & = & f_2f_1(1 - \rho\Sigma_\infty(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1)); \\
[(r_2r_1)_\rho](g) & = & \Sigma_\infty g_1g_2; \\
[(r_2r_1)_\rho](\phi) & = & \Sigma_\infty(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1);
\end{array}$$

  donde $\Sigma_\infty = 1 - (\phi_1 + g_1\phi_2 f_1)\rho + \ldots + (-1)^i[(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1)\rho]^i + \ldots$.

Por otra parte, las fórmulas de las flechas de la reducción $(r_2)_\psi(r_1)_\rho$ resultan:

$$\begin{aligned}
[(r_2)_\psi(r_1)_\rho](d_{M_2}) &= d_{M_2} + f_2 f_1 \rho \Sigma_\infty g_1 \Sigma''_\infty g_2;\\
[(r_2)_\psi(r_1)_\rho](f) &= f_2(1 - f_1 \rho \Sigma_\infty g_1 \Sigma''_\infty \phi_2);\\
[(r_2)_\psi(r_1)_\rho](g) &= \Sigma_\infty g_1 \Sigma''_\infty g_2;\\
[(r_2)_\psi(r_1)_\rho](\phi) &= \Sigma_\infty \phi_1 + \Sigma_\infty g_1 \Sigma''_\infty \phi_2 f_1 (1 - \rho \Sigma_\infty \phi_1);
\end{aligned}$$

donde $\Sigma''_\infty = 1 - \phi_2\psi + \ldots + (-1)^i(\phi_2\psi)^i + \ldots$ y $\Sigma^\rho_\infty = 1 - \phi_1\rho + \ldots + (-1)^i(\phi_1\rho)^i + \ldots$. Para probar la igualdad entre los morfismos correspondientes de las dos reducciones, todo se reduce a demostrar las fórmulas siguientes, que establecen la igualdad entre los términos de orden de nilpotencia n de estos morfismos:

$$\begin{aligned}
f_2 f_1 \rho[(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1)\rho]^n g_1 g_2 &= f_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^n g_1 g_2 +\\
&+\sum_{i+k+\sum r_j = n} f_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^i g_1 \prod_{j=1}^{k} [\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^{r_j} g_1] g_2;
\end{aligned}$$

donde la notación $\prod_{j=1}^k h_j$ quiere expresar la composición de k morfismos $h_k\, h_{k-1} \ldots h_1$.

$$\begin{aligned}
&f_2 f_1 \rho[(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1)\rho]^n(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1) =\\
&= f_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^n \phi_1 + +\textstyle\sum_{i+k+\sum r_j = n} f_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^i g_1 \prod_{j=1}^k [\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^{r_j} g_1]\phi_2 +\\
&+ \textstyle\sum_{i+k+\sum r_j + t = n} f_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^i g_1 \prod_{j=1}^k [\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^{r_j} g_1]\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^t \phi_1;
\end{aligned}$$

$$[(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1)\rho]^n g_1 g_2 = \sum_{i+k+\sum r_j = n} (\phi_1\rho)^i g_1 \prod_{j=1}^{k} [\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^{r_j} g_1] g_2;$$

$$\begin{aligned}
&[(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1)\rho]^n(\phi_1 + g_1\phi_2 f_1) =\\
&= (\phi_1\rho)^n\phi_1 + \textstyle\sum_{i+k+\sum r_j = n} (\phi_1\rho)^i g_1 \prod_{j=1}^k [\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^{r_j} g_1]\phi_2 f_1 +\\
&+ \textstyle\sum_{i+k+\sum r_j + t = n} (\phi_1\rho)^i g_1 \prod_{j=1}^k [\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^{r_j} g_1]\phi_2 f_1 \rho(\phi_1\rho)^k \phi_1.
\end{aligned}$$

Estas igualdades se demuestran fácilmente por inducción en n.

- *(Producto tensorial)*

  Por una parte, se construye la reducción $(r_1 \otimes r_2)_{(\rho_1 \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2)}$ que se obtiene aplicando el Lema de Perturbación a la reducción producto tensorial de las dos reducciones $r_1 \otimes r_2$ (ver (2.4) del lema 2.1.9), donde la perturbación es $\rho_1 \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2$; por otra parte, se consideran las reducciones r_1 et r_2 perturbadas por ρ_1 y ρ_2 respectivamente, y se construye la reducción producto tensorial de estas $(r_1)_{\rho_1} \otimes (r_2)_{\rho_2}$. Entonces, estas dos reducciones finales coinciden.

Como hemos indicado anteriormente, la demostración puede encontrarse en [HK91] y al igual que la demostración anterior, se utiliza inducción en el orden de nilpotencia n, para probar la igualdad entre los términos de orden n de los morfismos correspondientes de las reducciones $(r_1 \otimes r_2)_{(\rho_1 \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2)}$ y $(r_1)_{\rho_1} \otimes (r_2)_{\rho_2}$.

Expongamos un caso concreto que será utilizado más tarde en esta memoria:

Corolario 2.2.11 *Sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG(A)-módulos y ρ una perturbación del DG(A)-módulo N, tal que r y ρ inducen convergencia. Entonces, las siguientes reducciones de DG(A)-módulos coinciden:*

$$(r \otimes r)_{\rho \otimes 1 + 1 \otimes \rho} \equiv (r)_\rho \otimes (r)_\rho. \tag{2.14}$$

Demostración Basta aplicar la proposición anterior al ejemplo (2.5).

Utilizando la misma técnica de demostración que se utilizó para la composición y para el producto tensorial en la proposición 2.2.10, podemos establecer el resultado siguiente, que debe ser conocido:

Proposición 2.2.12 *Sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG(A)-módulos, y sean ρ y ρ' dos perturbaciones del DG(A)-módulo N, tales que inducen convergencia con respecto a r, siendo $\rho + \rho'$ también una perturbacion de d_N. Entonces, las reducciones siguientes coinciden:*

$$(r_\rho)_{\rho'} = (r_{\rho'})_\rho = r_{(\rho+\rho')}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis sobre ρ, ρ' y su suma $\rho + \rho'$, podemos deducir la relación siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} d\rho + \rho d + \rho^2 = 0 \\ d\rho' + \rho' d + \rho'^2 = 0 \\ d(\rho + \rho') + (\rho + \rho')d + (\rho + \rho')^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \rho\rho' + \rho'\rho = 0$$

que especifica la propiedad que deben cumplir las perturbaciones tales que su suma es una perturbación. Notemos que la perturbación $\rho + \rho'$ induce convergencia con respecto a r, por hacerlo ρ y ρ'.

2.3 Homología Efectiva

La teoría de la Homologia Efectiva, debida a F. Sergeraert [Ser87], establece una base algorítmica para asociar a los objetos de la Topología Algebraica, modelos sobre una máquina teórica, siendo posible enunciar y demostrar resultados de calculabilidad. Esta teoría tiene como segundo objetivo la implementación en ordenador de estos procesos (lo más eficientemente posible).

Daremos aquí sólo las herramientas indispensables para desarrollar nuestros algoritmos. Estas técnicas están descritas con todo detalle en [Ser87], [Ser] y [Rub91a].

La primera idea importante en esta teoría, es el hecho de representar los espacios topológicos por medio de modelos combinatoriales, que son manipulables por un ordenador. Estos modelos nos los da la Topología Simplicial. Ahora bien, para establecer resultados de calculabilidad acerca de invariantes algebraicos de un conjunto simplicial K (ver la def. 1.2.1), debemos trabajar con el complejo de cadenas canónicamente asociado $C_*^N(K)$ (ver la def. 1.2.15), que no es más que un DG-módulo. Entramos, pues, en el ámbito del Algebra Homológica. Dos ideas esenciales en la teoría de la Homología Efectiva para resolver los problemas de tipo algorítmico en este área, son:

- *hay que trabajar con equivalencias de homotopía explícitamente dadas entre DG-módulos*, si se quiere guardar una información homológica completa;
- y la teoría de Perturbación Homológica integrará el conjunto de técnicas algebraicas necesarias para manipular equivalencias de homotopía y, por tanto, indispensables para un desarrollo algorítmico.

Vamos a explicar ahora estas dos últimas consideraciones.

Definición 2.3.1 *[Rub91a] Una equivalencia de homotopía entre dos DG-módulos M y M' es un par de reducciones $\{r, r'\}$ de un mismo DG-módulo $\widehat{M}$ hacia M y M'.*

Más precisamente, una equivalencia de homotopía entre M y M' es un conjunto de datos $\{M, M', \widehat{M}, f_M, g_M, \phi_M, f_{M'}, g_{M'}, \phi_{M'}\}$ donde $\{\widehat{M}, M, f_M, g_M, \phi_M\}$ y $\{\widehat{M}, M', f_{M'}, g_{M'}, \phi_{M'}\}$ son reducciones.

Esta definición es equivalente a la definición habitual si en ésta se pide además que la inversa homotópica y las homotopías sean dadas explícitamente; basta tomar entonces como $\widehat{M}$, el "mapping-cilinder" de la equivalencia de homotopía [DB].

El objetivo principal que se persiguen en los algoritmos de Homología Efectiva, es el establecer una equivalencia de homotopía de un DG-módulo M hacia un DG-módulo de tipo finito HM; la homología de este último DG-módulo pueden ser calculada gracias a un algoritmo elemental. Todo esto está motivado por el siguiente resultado clásico en Algebra Homológica:

Proposición 2.3.2 *Sean M y N dos DG-módulos. Si existe una equivalencia de homotopía entre ellos, M y N tienen la misma homología.*

Con el fin de describir los algoritmos de una forma precisa, son necesarias las siguientes definiciones que encontramos en [Rub91a]:

Definición 2.3.3 *Un DG-módulo con homología efectiva es un conjunto de datos* $\{M, HM, \omega\}$ *donde* ω *es una equivalencia de homotopía entre* M *y un DG-módulo de tipo finito* HM. *También diremos* $\{M, HM, \omega\}$ *es una homología efectiva del DG-módulo* M.

Definición 2.3.4 *Un conjunto simplicial* K *tiene homología efectiva si su complejo de cadenas normalizado* $C_*^N(K)$ *es un DG-módulo con homología efectiva.*

La definición de complejo de cadenas normalizado se da en 1.2.15. En la definición anterior podemos cambiar $C_*^N(K)$ por $C_*(K)$, teniendo en cuenta la nota 1.2.16 y el último ejemplo de reducción establecido en la pag. 19.

En esta memoria, los resultados titulados "Algoritmo" se especificarán únicamente con una *entrada* y una *salida*. Cuando establezcamos diferentes algoritmos que realizen una misma tarea, añadiremos en la formulación de estos, una especificación que llamaremos it procesamiento. En él introduciremos información (en forma de palabras claves) acerca de los procesos que posibiliten la obtención de dichos algoritmos para, de esta manera, poder diferenciar un algoritmo de otro. Recordemos nuevamente que el anillo de base en los algoritmos presentes en este trabajo será $\Lambda = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_p$ o $\mathbf{Z}_{(p)}$ (Z localizado en p, p primo) y los DG-módulos serán libres, salvo cuando se indique explícitamente lo contrario.

La afirmación que hemos hecho anteriormente acerca de que *homología efectiva* implica *homología* puede establecerse en forma de algoritmo:

Algoritmo 2.3.5 *[Rub91a]*

Entrada:

- *un conjunto simplicial* K *con homología efectiva;*
- *un número* n *entero positivo;*

Salida: *El grupo n-ésimo de homología* $H_n(K)$.

Además, también como muestra y para referencias posteriores, enunciaremos los siguientes algoritmos que son consecuencias evidentes de proposiciones de la sección primera:

- la proposición 2.1.8 da lugar al

  Algoritmo 2.3.6 Entrada: *Un DG(A)-módulo con homología efectiva* $\{M, HM, \omega\}$,
  Salida: *Un DG(A)-módulo con homología efectiva* $\{S(M), HS(M), \omega'\}$.

- el resultado (2.4) del lema 2.1.9, aplicado $n-1$ veces:

  Algoritmo 2.3.7 (Teorema de Künneth en Homología Efectiva) Entrada: n *DG(A)-módulos con homología efectiva* $\{M_i, HM_i, \omega_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

  Salida: *Un DG(A)-módulo con homología efectiva* $\{M_1 \otimes \ldots \otimes M_n,\ HM_1 \otimes \ldots \otimes HM_n,\ ,\omega\}$.

- el resultado 2.1.10:

  Algoritmo 2.3.8 Entrada: *Un DG(A)-módulo con homología efectiva* $\{M, HM, \omega\}$,
  Salida: *Un DG(A)-módulo con homología efectiva* $\{\bar{M}, H\bar{M}, \omega'\}$.

- el lema 2.1.11:

  Algoritmo 2.3.9 Entrada: *Un DG(A)-módulo con homología efectiva* $\{M, HM, \omega\}$,
  Salida: *Un DGA-módulo con homología efectiva* $\{T(M), HT(M), \omega'\}$.

A partir de ahora, a fin de no hacer pesada la lectura con una doble traducción de los contenidos, sólo se enunciarán en la forma de algoritmo, los resultados que, o bien sean esenciales para mantener la conexión algebro-algorítmica, o bien sean los métodos de cálculo objeto de esta memoria.

Veamos ahora cómo la teoría de la Perturbación se integra con la teoría de la Homología Efectiva.

En primer lugar, observemos que el Lema de Perturbación puede ser generalizado para equivalencias de homotopía.

Hasta ahora, hemos establecido que si tenemos una reducción, y si perturbamos la diferencial del objeto "más grande" , el Lema de Perturbación construye una nueva diferencial sobre el objeto mas pequeño y una nueva reducción relacionando los dos objetos. La solución al problema de la perturbación del objeto más pequeño, nos ayudará a la obtención de un Lema de Perturbación apropiado para las equivalencias de homotopía.

Proposición 2.3.10 *([Rub91a], pag 38) Sea* $\{N, M, f, g, \phi\}$ *una reducción y* $\rho : M \to M$ *una perturbación del DG-módulo* M. *Entonces, podemos construir una nueva reducción* $\{(N\ , g(d_M + \rho)f),\ (M, d_M + \rho),\ f,\ g,\ \phi\}$.

Con la definición siguiente, estamos en condiciones de establecer el Lema de Perturbación para equivalencias de homotopías.

Definición 2.3.11 *([Rub91a], pag. 37)*

Sea $\omega : \{M,\ M',\ \widehat{M},\ f_M,\ g_M,\ \phi_M,\ f_{M'},\ g_{M'},\ \phi_{M'}\}$ *una equivalencia de homotopía entre dos DG-módulos* M *y* M' *y sea* $\rho : M \to M$ *una perturbación del DG-módulo* M. *La equivalencia de homotopía* ω *y la perturbación* ρ *inducen convergencia si la composición* $\phi_{M'} g_M \rho f_M : \widehat{M} \to \widehat{M}$ *es localmente nilpotente.*

Proposición 2.3.12 *([Rub91a], pag. 38)*

Sea $\omega : \{M,\ M',\ \widehat{M},\ f_M,\ g_M,\ \phi_M,\ f_{M'},\ g_{M'},\ \phi_{M'}\}$ *una equivalencia de homotopía de DG-módulos y una perturbación* $\rho : M \rightarrow M$ *del DG-módulo* M *que induzcan convergencia. Entonces, puede construirse una nueva equivalencia de homotopía de DG-módulos:*

$$\omega_\rho : \{(M, d+\rho),\ (M', d_\rho),\ f_M,\ g_M,\ \phi_M,\ f_\rho,\ g_\rho,\ \phi_\rho\}$$

donde d_ρ, f_ρ, g_ρ, ϕ_ρ, *vienen dadas por el Lema de Perturbación de DG(A)-módulos (teorema 2.2.5) aplicado a la reducción* $\{\widehat{M}, M', f_{M'}, g_{M'}, \phi_{M'}\}$ *y a la perturbación* $g_M \rho f_M : \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$.

Evidentemente, si tenemos un DG-módulo (M, d_M) con homología efectiva y una perturbación ρ del DG-módulo M que induzca convergencia con respecto a esta homología efectiva, entonces podremos obtener la homología efectiva del DG-módulo $(M, d_M + \rho)$.

Aunque su objetivo principal es el cálculo de la homología de conjuntos simpliciales, la teoría de la Homología Efectiva puede extenderse a objetos con estructuras adicionales (DGA-módulos, DGA-álgebras,...); para ello es necesario estudiar el comportamiento de estas estructuras respecto a las equivalencias de homotopía y crear lemas de perturbación adecuados. Nos limitaremos a decir que el concepto fundamental que, en casi todos los casos, puede considerarse apropiado para el tratamiento de objetos con cierta estructura E, es el de E-reducción. Más tarde, cuando tratemos las perturbaciones de objetos con estructuras, fundamentaremos esta afirmación

---

2.4 Perturbación de objetos con estructura

Si añadimos estructuras adicionales (tales como las de existencia de aumentación, álgebra, coálgebra, ...) al problema de perturbación, es interesante saber en qué condiciones el Lema preserva estas estructuras. Esta cuestión ha sido abordada por Gugenheim-Lambe [GL89], Gugenheim-Lambe-Stasheff [GLS91], y Huebschmann-Kadeishvili [HK91], y se prueba que podemos establecer un resultado de perturbación apropiado para cada estructura.

Comenzaremos nuestro estudio por la construcción de reducciones entre los conos de morfismos de DG-módulos, que nos dará la clave para encontrar resultados de perturbación apropiados para cada estructura. Analizaremos en detalle el Lema de Perturbación de (Co)Algebras, completando ciertos aspectos de la teoría que parecen no estar cubiertos en la literatura y que serán fundamentales en el desarrollo posterior de esta memoria. Para terminar, siempre utilizando la técnica de la reducción de cono de un morfismo, caracterizaremos las A_∞ estructuras desde un punto de vista homotópico.

2.4.1 Reducción de conos de morfismos.

En este parágrafo, examinaremos la reducción que es posible establecer sobre el cono de un morfismo $\varphi : M \rightarrow N$ (ver la def. 1.1.19), a partir de reducciones ya existentes que tengamos sobre M y N.

Nota 2.4.1 *Habrá veces en que representemos el DG-módulo cono del morfismo $\varphi : M \rightarrow N$, $C(\varphi)$, por la siguiente notación gráfica:*

$$S(M) \xrightarrow{\varphi} N.$$

Esto lo haremos para acentuar el hecho de que el morfismo φ constituye parte de la diferencial de $C(\varphi)$.

Proposición 2.4.2 (REDUCCIÓN CONO) *Sean las reducciones de DG(A)-módulos siguientes:*

$$r_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \quad i = 1, 2$$

Sea $\varphi : N_1 \rightarrow N_2$ un morfismo de DG(A)-módulos. Entonces, podemos construir la reducción de DG(A)-módulos cono de φ:

$$C(\varphi)(r_1, r_2) : \{C(\varphi), C(\varphi'), f_{C(\varphi)}, g_{C(\varphi)}, \phi_{C(\varphi)}\}$$

donde el morfismo de DG(A)-módulos $\varphi' : M_1 \rightarrow M_2$ viene definido por la fórmula:

$$\varphi'(m_1) = f_2 \varphi g_1(m_1)$$

y

$$\begin{aligned}
f_{C(\varphi)}(n_1, n_2) &= (f_1(n_1), f_2(n_2) + f_2\varphi\phi_1(n_1)), \\
g_{C(\varphi)}(m_1, m_2) &= (g_1(m_1), g_2(m_2) - \phi_2\varphi g_1(m_1)), \\
\phi_{C(\varphi)}(n_1, n_2) &= (-\phi_1(n_1), \phi_2(n_2) + \phi_2\varphi\phi_1(n_1)).
\end{aligned}$$

Demostración

Hay que darse cuenta, simplemente, de que la reducción del enunciado es:

$$C(\varphi)(r_1, r_2) \equiv (S(r_1) \oplus r_2)_\varphi$$

donde el morfismo $\varphi : S(N_1) \rightarrow N_2$ es una perturbación de la diferencial del DG(A)-módulo suma directa $S(N_1) \oplus N_2$, ya que $\varphi : N_1 \rightarrow N_2$ es un morfismo de DG(A)-módulos y, evidentemente, puede extenderse sin problemas a un morfismo $\varphi : S(N_1) \oplus N_2 \rightarrow S(N_1) \oplus N_2$. Se trata, pues, de aplicar el Lema de Perturbación (teorema 2.2.5) a la reducción $S(r_1) \oplus r_2$ y a la perturbación φ, que inducen, además, convergencia (porque la composición $\varphi\phi_2\varphi$ es nula), y encontraremos las fórmulas del enunciado.

La siguiente descripción gráfica nos puede ayudar a comprender como actúan las flechas que integran la reducción cono $C(\varphi)(r_1, r_2)$:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
S(N_1) \arrow[loop above, "-\phi_1"] \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[d, bend right=60, "\bar{\phi}_\varphi^{r_1,r_2}"'] \arrow[dr, "\bar{f}_\varphi^{r_1,r_2}" near end] & S(M_1) \arrow[l, shift left, "g_1"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dl, "\bar{g}_\varphi^{r_1,r_2}"' near end] \\
N_2 \arrow[loop below, "\phi_2"] \arrow[r, shift left, "f_2"] & M_2 \arrow[l, shift left, "g_2"]
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

donde los morfismos $\bar{f}_\varphi^{r_1,r_2}$, $\bar{g}_\varphi^{r_1,r_2}$ y $\bar{\phi}_\varphi^{r_1,r_2}$ son:

$$\bar{f}_\varphi^{r_1,r_2} = f_{C(\varphi)} - (f_1 \oplus f_2) = f_2\varphi\phi_1 : S(N_1) \to M_2, \tag{2.15}$$
$$\bar{g}_\varphi^{r_1,r_2} = g_{C(\varphi)} - (g_1 \oplus g_2) = -\phi_2\varphi g_1 : S(M_1) \to N_2, \tag{2.16}$$
$$\bar{\phi}_\varphi^{r_1,r_2} = \phi_{C(\varphi)} - (-\phi_1 \oplus \phi_2) = \phi_2\varphi\phi_1 : S(N_1) \to N_2. \tag{2.17}$$

Del hecho de ser $f_{C(\varphi)}$ y $g_{C(\varphi)}$ morfismos de DG-módulos, y que $\phi_{C(\varphi)}$ sea un operador de homotopía, se obtienen las igualdades siguientes:

$$f_{C(\varphi)}d_{C(\varphi)} = d_{C(\varphi')}f_{C(\varphi)}$$
$$g_{C(\varphi)}d_{C(\varphi')} = d_{C(\varphi)}g_{C(\varphi)}$$
$$1_{C(\varphi)} - g_{C(\varphi)}f_{C(\varphi)} = \phi_{C(\varphi)}d_{C(\varphi)} + d_{C(\varphi)}\phi_{C(\varphi)}$$

De estas relaciones se puede deducir que los morfismos $\bar{f}_\varphi^{r_1,r_2}$, $\bar{g}_\varphi^{r_1,r_2}$ y $\bar{\phi}_\varphi^{r_1,r_2}$ verifican

$$
\begin{array}{rcl}
f_2\,\varphi - \varphi'\,f_1 & = & \bar{f}_\varphi^{r_1,r_2}\,d_{N_1} + d_{M_2}\,\bar{f}_\varphi^{r_1,r_2}; \\
g_2\,\varphi' - \varphi\,g_1 & = & \bar{g}_\varphi^{r_1,r_2}\,d_{M_1} + d_{N_2}\,\bar{g}_\varphi^{r_1,r_2}; \\
\phi_2\,\varphi - \varphi\,\phi_1 & = & \bar{\phi}_\varphi^{r_1,r_2}\,d_{N_1} - d_{N_2}\,\bar{\phi}_\varphi^{r_1,r_2};
\end{array}
\tag{2.18}
$$

Estas igualdades significan que los morfismos $\bar{f}_\varphi^{r_1,r_2}$, $\bar{g}_\varphi^{r_1,r_2}$ y $\bar{\phi}_\varphi^{r_1,r_2}$ constituyen las homotopías para los pares $f_2\,\varphi \sim \varphi'\,f_1$, $g_2\,\varphi' \sim \varphi\,g_1$ y $\phi_2\,\varphi \sim \varphi\,\phi_1$, respectivamente. A partir de ahora, nos referiremos a ellos como los morfismos-homotopías de la reduccion cono.

Dos consecuencias fáciles de esta proposición son:

Corolario 2.4.3 *Sean las reducciones de DG-módulos siguientes:*

$$r_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \quad i = 1, 2.$$

Sea $\varphi_i : N_1 \to N_2$ *un morfismo de DG-módulos,* $i = 1, 2$. *Entonces se tiene que*

$$C(\varphi_1 + \varphi_2)(r_1, r_2) \equiv [C(\varphi_1)(r_1, r_2)]_{\varphi_2} \equiv [C(\varphi_2)(r_1, r_2)]_{\varphi_1}.$$

Demostración.

En efecto,

$$C(\varphi_1 + \varphi_2)(r_1, r_2) \equiv [S(r_1) \oplus r_2]_{\varphi_1+\varphi_2} \equiv [(S(r_1) \oplus r_2)_{\varphi_1}]_{\varphi_2} \equiv [(S(r_1) \oplus r_2)_{\varphi_2}]_{\varphi_1}.$$

Las dos últimas equivalencias se obtienen gracias a la proposición 2.2.12.

Corolario 2.4.4 *Consideremos las tres reducciones de DG(A)-módulos siguientes:*

$$r_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \quad i = 1, 2, 3.$$

Sea $\varphi : N_1 \to N_2$ *un morfismo de DG(A)-módulos. Entonces la reducción cono* $C(1_{N_3} \otimes \varphi)(r_3 \otimes r_1, r_3 \otimes r_2)$ *es una reducción entre los DG(A)-módulos* $C(1_{N_3} \otimes \varphi)$ *y* $C(1_{M_3} \otimes \varphi')$, *donde el morfismo de DG(A)-módulos* φ' *viene dado por la fórmula:*

$$\varphi' = f_2 \varphi g_1.$$

Demostración. Es una simple aplicación de la proposición 2.4.2 al morfismo $1_{N_3} \otimes \varphi$. Análogamente, se puede obtener un resultado de este tipo para $\varphi \otimes 1_{N_3}$.

El siguiente ejemplo sobre la reducción cono de un producto será fundamental para la comprensión de la demostración de los Lemas de Perturbación de Algebras que introduciremos más adelante.

Ejemplo 2.4.5 (Reducción cono de un producto) *Sea una reducción de $DG(A)$-módulos $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ y un morfismo de $DG(A)$-módulos $\mu_N : N \otimes N \to N$. En primer lugar, podemos construir la reducción de $DG(A)$-módulos $r \otimes r : \{N \otimes N,\ M \otimes M,\ f \otimes f,\ g \otimes g,\ \phi^{r\otimes r}\}$ donde $\phi^{r\otimes r} = 1 \otimes \phi + \phi \otimes gf$ (ver (2.5)); después, gracias a la proposición 2.4.2, construiremos la reducción cono de μ_N:*

$$C(\mu_N)(r \otimes r, r) : \{C(\mu_N), C(v), f_{C(\mu_N)}, g_{C(\mu_N)}, \phi_{C(\mu_N)}\} \tag{2.19}$$

donde el morfismo de $DG(A)$-módulos $v : M \otimes M \to M$ viene dado por:

$$v = f\mu_N(g \otimes g) \tag{2.20}$$

y

$$\begin{aligned}
f_{C(\mu_N)}(n \otimes n', n'') &= (f(n) \otimes f(n'), f(n'') + f\mu_N\phi^{r\otimes r}(n \otimes n')),\\
g_{C(\mu_N)}(m \otimes m', m'') &= (g(m) \otimes g(n'), g(n'') - \phi\mu_N(g \otimes g)(n \otimes n')),\\
\phi_{C(\mu_N)}(n \otimes n', n'') &= (-\phi^{r\otimes r}(n \otimes n'), \phi(n'') + \phi\mu_N\phi^{r\otimes r}(n \otimes n')).
\end{aligned}$$

Por (2.15), (2.16) y (2.17), los morfismos-homotopías de la reducción cono, $\bar{f}^{r_1,r_2}_{\mu_N}$, $\bar{g}^{r_1,r_2}_{\mu_N}$ y $\bar{\phi}^{r_1,r_2}_{\mu_N}$ tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\bar{f}^{r\otimes r,r}_{\mu_N} &= f\mu_N\phi^{r\otimes r} : N \otimes N \to M, &(2.21)\\
\bar{g}^{r\otimes r,r}_{\mu_N} &= -\phi\mu_N(g \otimes g) : M \otimes M \to N, &(2.22)\\
\bar{\phi}^{r\otimes r,r}_{\mu_N} &= \phi\mu_N\phi^{r\otimes r} : N \otimes N \to N, &(2.23)
\end{aligned}$$

y verifican las relaciones siguientes (ver (2.18)):

$$\begin{aligned}
f\mu_N - v(f \otimes f) &= \bar{f}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}(d_N \otimes 1 + 1 \otimes d_N) + d_M\bar{f}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}, &(2.24)\\
gv - \mu_N(g \otimes g) &= \bar{g}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}((d_M \otimes 1 + 1 \otimes d_M) + d_N\bar{g}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}. &(2.25)\\
\phi\mu_N - \mu_N\phi^{r\otimes r} &= \bar{\phi}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}(d_N \otimes 1 + 1 \otimes d_N) - d\bar{\phi}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}. &(2.26)
\end{aligned}$$

que establecen que los morfismos $\bar{f}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}$, $\bar{g}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}$ y $\bar{\phi}^{r\otimes r,r}_{\mu_N}$ constituyen, pues, homotopías para los pares $f\mu_N \sim v(f \otimes f)$, $gv \sim \mu_N(g \otimes g)$ y $\phi\mu_N \sim \mu_N\phi^{r\otimes r}$.

El estudio del cono de un morfismo de DG-módulos $\Delta_N : N \to N \otimes N$ (un coproducto) es análogo al realizado arriba.

Por supuesto, podemos establecer un resultado de "compatibilidad" del Lema de Perturbación con respecto al cono:

Proposición 2.4.6 *Sean las reducciones de DG(A)-módulos siguientes:*

$$r_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \quad i = 1, 2$$

Sean ρ_1 y ρ_2 perturbaciones de los DG(A)-módulos N_1 y N_2, que inducen convergencia con respecto a las reducciones r_1 y r_2, respectivamente. Sea $\varphi : N_1 \to N_2$ un morfismo de DG(A)-módulos, tal que verifica la relación: $\rho_2\varphi - \varphi\rho_1 = 0$. Entonces, las reducciones de DG(A)-módulos siguientes coinciden:

$$C(\varphi)((r_1)_{\rho_1}, (r_2)_{\rho_2}) \equiv [C(\varphi)(r_1, r_2)]_{(-\rho_1 \oplus \rho_2)}$$

Demostración

Tenemos la siguiente cadena de reducciones:

$$C(\varphi)((r_1)_{\rho_1}, (r_2)_{\rho_2}) \equiv (S[(r_1)_{\rho_1}] \oplus (r_2)_{\rho_2})_\varphi \equiv ([S(r_1)]_{-\rho_1} \oplus (r_2)_{\rho_2})_\varphi \equiv [(S(r_1) \oplus r_2)_{-\rho_1 \oplus \rho_2}]_\varphi \equiv$$

Como se tiene que $\rho_2\varphi - \varphi\rho_1 = 0$, podemos, pués, permutar las perturbaciones (ver la prop. 2.2.12) y resulta que la cadena anterior de equivalencias de reducciones continúa como sigue:

$$\equiv [(S(r_1) \oplus r_2)_\varphi]_{-\rho_1 \oplus \rho_2} \equiv [C(\varphi)(r_1, r_2)]_{-\rho_1 \oplus \rho_2}.$$

Corolario 2.4.7 *Sean las reducciones de DG(A)-módulos siguientes:*

$$r_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \quad i = 1, 2$$

Sean ρ_1 y ρ_2 perturbaciones de los DG(A)-módulos N_1 y N_2, que inducen convergencia con respecto a las reducciones r_1 y r_2, respectivamente. Sea $\varphi : N_1 \to N_2$ un morfismo de DG(A)-módulos, tal que verifica la relación $\rho_2\varphi - \varphi\rho_1 = 0$. Supongamos que los morfismos $\bar{f}_\varphi^{r_1, r_2}$, $\bar{g}_\varphi^{r_1, r_2}$ y $\bar{\phi}_\varphi^{r_1, r_2}$ integrantes de la reducción cono $C(\varphi)(r_1, r_2)$, y definidos por (2.15), (2.16) y (2.17) respectivamente, son nulos. Entonces, los morfismos $\bar{f}_\varphi^{(r_1)_{\rho_1}, (r_2)_{\rho_2}}$, $\bar{g}_\varphi^{(r_1)_{\rho_1}, (r_2)_{\rho_2}}$ y $\bar{\phi}_\varphi^{(r_1)_{\rho_1}, (r_2)_{\rho_2}}$ de la reducción cono $C(\varphi)((r_1)_{\rho_1}, (r_2)_{\rho_2})$ son nulos.

Demostración. Obvia, teniendo en cuenta la definición de los morfismos-homotopías de las dos reducciones conos y las fórmulas del Lema de Perturbación 2.2.5.

A pesar de ser sencilla de demostrar, la proposición siguiente será muy útil posteriormente:

Proposición 2.4.8 *Sean las reducciones de DG(A)-módulos:*

$$r_i : \{N_i, M_i, f_i, g_i, \phi_i\} \quad i = 1,2,3$$

y sean los morfismos de DG(A)-módulos:

$$\varphi_{1,2} : N_1 \to N_2,$$

$$\varphi_{2,3} : N_2 \to N_3,$$

que verifican la relación:

$$\varphi_{2,3}\varphi_{1,2} = 0.$$

Entonces, podemos construir la reducción siguiente:

$$C(\varphi_{1,2})[S(r_1),\ C(\varphi_{2,3})(r_2, r_3)] \equiv C(\varphi_{2,3})[C(-\varphi_{1,2})(r_1, r_2),\ r_3)]$$

entre los DG(A)-módulos:

$$\begin{tikzcd}
S^2(N_1) \arrow[d, "\varphi_{1,2}"] & & S^2(M_1) \arrow[d, "\varphi'_{1,2}"] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi'_{1,3}"] \\
S(N_2) \arrow[d, "\varphi_{2,3}"] & y & S(M_2) \arrow[d, "\varphi'_{2,3}"] \\
N_3 & & M_3
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned}
\varphi'_{1,2} &= f_2\varphi_{1,2}g_1 \\
\varphi'_{2,3} &= f_3\varphi_{2,3}g_2 \\
\varphi'_{1,3} &= f_3\varphi_{2,3}\phi_2\varphi_{1,2}g_1.
\end{aligned}$$

Del hecho de verificar que se tiene una verdadera diferencial en el segundo DG-módulo, se deduce la relación siguiente:

$$d_{M_3}\varphi'_{1,3} + \varphi'_{1,3}d_{M_1} = \varphi'_{2,3}\varphi'_{1,2}. \tag{2.27}$$

Ejemplo 2.4.9 (Asociatividad del producto) *Si estamos en las condiciones del ejemplo 2.4.5 y se impone que el morfismo $\mu_N : N \otimes N \to N$ es asociativo (es decir, se tiene la relación $\mu_N(\mu_N \otimes 1) = \mu_N(1 \otimes \mu_N)$), podemos, entonces, aplicar la proposición 2.4.8 a la situación siguiente:*

$$\begin{array}{c} S^2(N^3) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mu_N \otimes 1 - 1 \otimes \mu_N} \\ S(N^2) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mu_N} \\ N \end{array}$$

y deducir la construcción de una reducción:

$$C(\mu_N \otimes 1 - 1 \otimes \mu_N)[S(r \otimes r \otimes r),\ C(\mu_N)(r \otimes r, r)]$$

entre los DG-módulos

$$\begin{array}{c} S^2(N^3) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mu_N \otimes 1 - 1 \otimes \mu_N} \\ S(N^2) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mu_N} \\ N \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{c} S^2(M^3) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle v \otimes 1 - 1 \otimes v} \\ S(M^2) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle v} \\ M \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} S^2 \\ \Big\downarrow \\ S \\ \Big\downarrow \\ M \end{array}}\right] \zeta$$

donde

$$\zeta = f(\mu_N + \mu_N)(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf)(-1 \otimes \mu_N + \mu_N \otimes 1)(g \otimes g \otimes g), \tag{2.28}$$

Gracias al resultado (2.27), podemos establecer que este morfismo ζ "mide" la asociatividad del morfismo v:

$$v(v \otimes 1) - v(1 \otimes v) = d_{M^3}\zeta + \zeta d_M.$$

Esto significa que si el morfismo ζ es nulo, el morfismo v será asociativo, y si no lo es, v será asociativo salvo homotopía.

2.4.2 Lema de Perturbación de DGA-(Co)Algebras

Utilizando las técnicas de la subsección anterior, vamos a establecer unas eficaces herramientas de perturbación para el caso de DGA-(co)álgebras.

En primer lugar, recordemos que podemos utilizar los conceptos de DGA-(co)álgebra-reducción y de reducción de DGA-(co)álgebras, gracias a las definiciones 2.1.4 y 2.1.5. Definamos ahora lo que es una (co)derivación con respecto a un (co)producto:

Definición 2.4.10 *([HMS74], pag. 138) Sea A una DGA-álgebra (resp. C una coálgebra) y sea $\delta : A \to A$ (resp. $\delta : C \to C$) un morfismo de Λ-módulos graduados de grado -1. El morfismo δ sera una derivación (resp. una coderivación) si verifica las condiciones siguientes:*

$$\begin{array}{rcl} \delta\mu_A & = & \mu_A(1 \otimes \delta + \delta \otimes 1); \\ \xi_A\delta & = & 0. \end{array}$$

$$(resp. \begin{array}{rcl} \Delta_C\delta & = & (1 \otimes \delta + \delta \otimes 1)\Delta_C); \\ \xi_A\delta & = & 0.) \end{array}$$

Nota 2.4.11 *Si hay posibilidad de confusión, especificaremos el producto (resp. coproducto) con respecto al cual el morfismo δ es una derivación.*

Nos interesa también definir los conceptos de homotopía de álgebras y homotopía de coálgebras.

Definición 2.4.12 *([GLS89]) Sean A y A' dos DGA-álgebras (resp. C y C' dos DGA-coálgebras) y sea $r : \{A, A', f, g, \phi\}$ (resp. $r : \{C, C', f, g, \phi\}$) una reducción de DGA-módulos. Diremos que la homotopía ϕ es una homotopía de álgebras (resp. homotopía de coálgebras) si verifica la condición siguiente:*

$$\mu_A\phi = (1 \otimes \phi + \phi \otimes g\,f)\mu_A.$$

$$(resp.\ \Delta_A\phi = (1 \otimes \phi + \phi \otimes g\,f)\Delta_A.)$$

Enunciaremos varios Lemas de Perturbación de Algebras, uno para cada condición diferente que impongamos al operador de homotopía de la reducción primitiva. En principio, desarrollaremos el procedimiento general utilizado para la demostración de estos Lemas.

Sean $\{A, d_A, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_B, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$ dos DGA-álgebras y sea r una reducción de DGA-módulos:

$$r : \{A, B, f, g, \phi\}.$$

Sea ρ una perturbación de la diferencial de A que induzca convergencia con respecto a r, y que sea también una derivación.

Notación 2.4.13 *En lo que resta de sección, si h es un morfismo de Λ-modulos graduados, notaremos:*

$$h^{\otimes} = 1 \otimes h + h \otimes 1;$$

Ademas, utilizaremos a veces la notación establecida en 2.1.3. Más precisamente, si tenemos una reducción $r : \{N, M, f, g, \phi\}$, notaremos $\phi^{r\otimes r}$ como $1 \otimes \phi + \phi \otimes gf$.

Gracias al Lema de Perturbación de DGA-módulos 2.2.5, podemos construir la reducción de DGA-módulos "perturbada" por ρ:

$$r_\rho : \{(A, d_A + \rho), (B, d_\rho), f_\rho, g_\rho, \phi_\rho\}$$

Sabemos (ver (2.5)) que se puede construir también la reducción producto tensorial

$$r_\rho \otimes r_\rho : \{A \otimes A,\ \ B \otimes B,\ \ f_\rho \otimes f_\rho,\ \ g_\rho \otimes g_\rho,\ \ 1 \otimes \phi_\rho + \phi_\rho \otimes g_\rho f_\rho\}.$$

Gracias al resultado 2.2.10 referente al producto tensorial, la reducción anterior es equivalente a la reducción $r \otimes r$ perturbada por $\rho^{\otimes}$:

$$(r \otimes r)_{\rho^\otimes} : \{A \otimes A, B \otimes B, (f \otimes f)_{\rho^\otimes}, (g \otimes g)_{\rho^\otimes}, (\phi^{r \otimes r})_{\rho^\otimes}\} \tag{2.29}$$

Consideramos ahora, la reducción cono del morfismo $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$ (ejemplo 2.4.5), que es posible construirla gracias al hecho de que la perturbación ρ es una derivación:

$$C(\mu_A)(r_\rho \otimes r_\rho, r_\rho) = C(\mu_A)((r \otimes r)_{\rho^\otimes}, r_\rho) : \{C(\mu_A), C(v_B), f_{C(\mu_A)}, g_{C(\mu_A)}, \phi_{C(\mu_A)}\} \tag{2.30}$$

$$\begin{tikzcd}
C(\mu_A) \arrow[loop above, "\phi_{C(\mu_A)}"] \arrow[r, shift left, "f_{C(\mu_A)}"] & C(v_B) \arrow[l, shift left, "g_{C(\mu_A)}"]
\end{tikzcd}$$

Por (2.20), el morfismo de DGA-módulos v_B es de la forma:

$$\begin{aligned}
v_B &= f_\rho \mu_A (g_\rho \otimes g_\rho) = \\
&= f_\rho \mu_A (g \otimes g)_{\rho^\otimes} = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} f \\ \sum_{n \geq 1} (-1)^n f(\rho\phi)^n \end{array} \right\} \mu_A \left\{ \begin{array}{c} g \otimes g \\ \sum_{m \geq 1} (-1)^m (\phi^{r \otimes r} \rho^{\otimes})^m (g \otimes g) \end{array} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Teniendo en cuenta que los morfismos f y g son morfismos de DGA-módulos, que la homotopía verifica la relación $\phi\eta_A = 0$, que μ_A tiene como unidad bilateral a η_A y las propiedades de anulación que verifican los morfismos de una reducción (ver def. 2.1.1), podemos establecer las siguientes igualdades:

$$v_B(\eta_B \otimes 1) = v_B(1 \otimes \eta_B) = 1. \tag{2.32}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
v_B(\eta_B \otimes 1) &= (\textstyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n f(\rho\phi)^n))\mu_A(\sum_{m\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m(g\eta_B \otimes g)) = \\
&= (\textstyle\sum(-1)^n f(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m(\eta_A \otimes g)) = \\
&= ([\textstyle\sum(-1)^n f(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum(-1)^m\eta_A \otimes (\phi\rho)^m g)) = \\
&= (\textstyle\sum(-1)^n f(\rho\phi)^n)(\sum(-1)^m(\phi\rho)^m g) = fg = 1.
\end{aligned}$$

De forma análoga se tiene la otra igualdad.

Si el morfismo v_B fuera un verdadero producto, las igualdades anteriores afirman que η_B sería su unidad bilateral.

Las fórmulas para la proyección, la inyección y el operador de homotopía de esta nueva reducción (2.30) son las siguientes:

$$\begin{array}{lll}
f_{C(\mu_A)} = (f\otimes f)_{\rho\otimes} \oplus f_\rho + \bar{f}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho} & \text{donde} & \bar{f}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho} = f_\rho\mu_A(\phi^{r\otimes r})_{\rho\otimes}, \\
g_{C(\mu_A)} = (g\otimes g)_{\rho\otimes} \oplus g_\rho + \bar{g}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho} & \text{donde} & \bar{g}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho} = -\phi_\rho\mu_A(g\otimes g)_{\rho\otimes}, \\
\phi_{C(\mu_A)} = (-(\phi^{r\otimes r})_{\rho\otimes} \oplus \phi_\rho + \bar{\phi}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho} & \text{donde} & \bar{\phi}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho} = \phi_\rho\mu_A(\phi^{r\otimes r})_{\rho\otimes}.
\end{array}$$

Las fórmulas desarrolladas que definen a los morfismos $\bar{f}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho}$, $\bar{g}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho}$ y $\bar{\phi}_{\mu_A}^{(r\otimes r)_{\rho\otimes},r_\rho}$, que a partir de ahora los llamaremos simplemente $\bar{f}$, $\bar{g}$ y $\bar{\phi}$ respectivamente, son:

$$\bar{f} = f_\rho\mu_A(\phi^{r\otimes r})_{\rho\otimes} = (\sum_{n\geq 0}(-1)^n f(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum_{n\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m\phi^{r\otimes r}), \tag{2.33}$$

$$\bar{g} = -\phi_\rho\mu_A(g\otimes g)_{\rho\otimes} = (\sum(-1)^{n+1}\phi(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m(g\otimes g)), \tag{2.34}$$

$$\bar{\phi} = \phi_\rho\mu_A(\phi^{r\otimes r})(\rho^{\otimes}) = (\sum(-1)^n\phi(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m\phi^{r\otimes r}). \tag{2.35}$$

Por (2.24), (2.25) y (2.26), sabemos que

- si $\bar{f}$ (resp. $\bar{g}$) es el morfismo nulo, entonces f_ρ (resp. g_ρ) será un morfismo multiplicativo con respecto a μ_A y y a v_B; si $\bar{f}$ (resp. $\bar{g}$) no fuera nulo, entonces f_ρ (resp. g_ρ) será un morfismo multiplicativo salvo homotopía.
- si $\bar{\phi}$ es cero, entonces ϕ_ρ resulta ser una homotopía de algebras.

Teniendo en cuenta (2.28), vemos que el morfismo

$$\zeta_B = f_\rho\mu_A(1\otimes\phi_\rho + \phi_\rho\otimes g_\rho f_\rho)(-1\otimes\mu_A + \mu_A\otimes 1)(g_\rho\otimes g_\rho\otimes g_\rho), \tag{2.36}$$

"mide" la asociatividad de v_B. Si $\zeta_B = 0$, entonces v_B es asociativo; si no, v_B es asociativo salvo homotopía.

Por otra parte, una descripción "gráfica" que nos puede ayudar a comprender como actuán las flechas de la reducción $C(\mu_A)(r_\rho\otimes r_\rho, r_\rho)$ es la siguiente:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
S(\{A,d_A+\rho\}\otimes\{A,d_A+\rho\}) \arrow[loop above, "-(1\otimes\phi_\rho+\phi_\rho\otimes g_\rho f_\rho)"] \arrow[r, shift left, "f_\rho\otimes f_\rho"] \arrow[d, "\mu_A"] \arrow[dr, "\bar{f}"] & S(\{B,d_\rho\}\otimes\{B,d_\rho\}) \arrow[l, shift left, "g_\rho\otimes g_\rho"] \arrow[d, "v_B"] \arrow[dl, "\bar{g}"'] \\
\{A,d_A+\rho\} \arrow[loop left, "\phi_\rho"] \arrow[u, bend left=60, "\bar{\phi}"] \arrow[r, shift left, "f_\rho"] & \{B,d_\rho\} \arrow[l, shift left, "g_\rho"]
\end{tikzcd}
$$

Es ahora cuando distinguiremos los diferentes casos. Un resultado más débil que el que se establecerá a continuación fue ya obtenido por Gugenheim, Lambe y Stasheff en [GLS91], pag. 363-364.

Teorema 2.4.14 (LPA-1) *Sean $\{A,d_A,\mu_A,\eta_A,\xi_A\}$ y $\{B,d_B,\mu_B,\eta_B,\xi_B\}$ dos DGA-álgebras y sea $r:\{A,B,f,g,\phi\}$ una reducción de DGA-módulos. Sea ρ una perturbación de DGA-módulo de la diferencial de A que induce convergencia con respecto a r, y que sea también una derivación. Supongamos que la homotopía ϕ verifica la condición siguiente:*

$$\phi\mu_A = \mu_A\phi^{r\otimes r}. \tag{2.37}$$

(ϕ es una homotopía de álgebras)

Entonces, la homotopía ϕ_ρ de la reducción r_ρ, obtenida gracias al Lema de Perturbación, es una homotopía de álgebras. Además, podemos afirmar que:

- *la reducción r_ρ, obtenida gracias al Lema de Perturbación, es una reducción de DGA-álgebras $\{A,d_A+\rho,\mu_A,\eta_A,\xi_A\}$ y $\{B,d_\rho,v_B,\eta_B,\xi_B\}$, donde el producto v_B es igual a $f\mu_A(g\otimes g)$.*
- *d_ρ es una v_B-derivación,*

Si, además, f (o g) es un morfismo de DGA-álgebras, entonces el morfismo v_B coincide con μ_B y tendríamos que:

- *la reducción r_ρ es una reducción de DGA-álgebras entre $\{A,d_A+\rho,\mu_A,\eta_A,\xi_A\}$ y $\{B,d_\rho,\mu_B,\eta_B,\xi_B\}$,*
- *d_ρ es una μ_B-derivación,*

Demostración.

En virtud de las propiedades de anulación de los morfismos f, g y ϕ de la reducción original y la hipótesis (2.37) sobre ϕ, el "producto" v_B (cuya fórmula es (2.31)) queda como sigue:

$$v_B = (\sum_{n\geq 0}(-1)^n f(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum_{m\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m(g\otimes g)) = f\mu_A(g\otimes g). \tag{2.38}$$

Recordemos que se tiene la igualdad

$$\phi^{r_\rho\otimes r_\rho} = (\phi^{r\otimes r})_{\rho\otimes},$$

o de forma más desarrollada,

$$1\otimes\phi_\rho + \phi_\rho\otimes g_\rho f_\rho = (1\otimes\phi + \phi\otimes gf)_{1\otimes\rho+\rho\otimes 1}.$$

Gracias a esta igualdad y a la relación (2.37), llegamos a establecer que ζ_B es nulo, y que v_B es, en este caso, un verdadero producto con unidad bilateral η_B (ver (2.32)). Deducimos, pues, que $\{B, d_\rho, v_B, \eta_B, \xi_B\}$ es una DGA-álgebra.

En este caso, las fórmulas (2.33), (2.34) y (2.35) quedan como siguen:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= 0\\ \bar{g} &= 0\\ \bar{\phi} &= 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Es decir, tenemos las siguientes relaciones para los morfismos f_ρ, g_ρ y ϕ_ρ:

$$\begin{aligned} f_\rho\mu_A &= v_B(f_\rho\otimes f_\rho),\\ g_\rho v_B &= \mu_A(g_\rho\otimes g_\rho),\\ \text{y}\quad \phi_\rho\mu_A &= \mu_A(1\otimes\phi_\rho + \phi_\rho\otimes g_\rho f_\rho). \end{aligned}$$

Evidentemente, la diferencial d_ρ será una v_B-derivación, ya que la reducción $C(\mu_A)(r_\rho\otimes r_\rho, r_\rho)$ se tiene entre $C(\mu_A)$ y $C(v_B)$.

En resumen, los morfismos f_ρ y g_ρ son morfismos de DGA-álgebras entre $\{A, d_A+\rho, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_\rho, v_B, \eta_B, \xi_B\}$, la homotopía ϕ_ρ es una homotopía de algebras y la diferencial d_ρ es una v_B-derivación.

Si suponemos que, por ejemplo, la proyección f es un morfismo de DGA-álgebras, es decir, que verifica la relación:

$$f\mu_A = \mu_B(f\otimes f) \tag{2.40}$$

probaremos que g, f_ρ y g_ρ serán morfismos de DGA-álgebras entre $\{A, d_A+\rho, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_\rho, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$, la homotopía ϕ_ρ será una homotopía de álgebras y que d_ρ es una μ_B-derivación.

En primer lugar, para demostrar que la inyección g de la reducción primitiva r es un morfismo multiplicativo, haremos la siguiente cadena de implicaciones:

$$\phi\mu_A = \mu_A\phi^{r\otimes r} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} d\phi\mu_A = \mu_A(1\otimes d_A + d_A\otimes 1)\phi^{r\otimes r} \\ \phi d\mu_A = \mu_A\phi^{r\otimes r}(1\otimes d_A + d_A\otimes 1) \end{array} \right\}$$

Si se suma estas dos últimas igualdades tenemos:

$$\begin{array}{l} (1-gf)\mu_A = \mu_A(1\otimes 1-(g\otimes g)(f\otimes f)) \ \Rightarrow gf\mu_A = \mu_A(g\otimes g)(f\otimes f) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ g\mu_B(f\otimes f) = \mu_A(g\otimes g)(f\otimes f) \ \text{ y } f \text{ es sobreyectiva } \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ g\mu_B = \mu_A(g\otimes g) \ \Rightarrow \ g \text{ es un morfismo de DGA-álgebras} \end{array}$$

En cuanto a los morfismos f_ρ, g_ρ y ϕ_ρ, los dos primeros son morfismos de DGA-álgebras entre $\{A, d_A+\rho, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_\rho, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$ y el tercero es una homotopía de álgebras, ya que tenemos las relaciones (2.39) y el producto v_B coincide con μ_B:

$$\begin{array}{rcll} v_B & = & f\mu_A(g\otimes g) = & \text{por (2.38)} \\ & = & \mu_B(f\otimes f)(g\otimes g) = & \text{por (2.40)} \\ & = & \mu_B. & . \end{array}$$

La diferencial d_ρ, evidentemente, será una μ_B-derivación, ya que la reducción $C(\mu_A)(r_\rho\otimes r_\rho, r_\rho)$ se tiene ahora entre $C(\mu_A)$ y $C(\mu_B)$.

El Lema anterior no resulta apropiado para álgebras conmutativas, ya que la hipótesis impuesta a la homotopía de la reducción (ser una homotopía de álgebras) no respeta la "simetría". Es decir, por una parte, el lado izquierdo de la ecuación $\phi\mu_A = \mu_A(1\otimes\phi + \phi\otimes gf)$ es simétrico, pero el lado derecho no lo es. Teniendo en cuenta esto, un Lema de Perturbación apropiado para DGA-álgebras conmutativas puede ser:

Teorema 2.4.15 (LPA-2) *Sean $\{A, d_A, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_B, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$ dos DGA-álgebras y sea $r : \{A, B, f, g, \phi\}$ una reducción de DGA-módulos. Sea ρ una perturbación de DGA-módulo de la diferencial de A que induce convergencia con respecto a r, y que sea también una μ_A-derivación. Supongamos que la homotopía ϕ verifica la condición siguiente:*

$$\phi\mu_A\phi^{r\otimes r} = 0. \tag{2.41}$$

Entonces, el operador de homotopía de la reducción r_ρ, obtenida gracias al Lema de Perturbación, es una homotopía de álgebras.

Además, si el morfismo f (resp. g) es un morfismo de DGA-álgebras, se tiene que:

- *la proyección f_ρ (resp. la inyección g_ρ) de la reducción r_ρ es un morfismo de DGA-álgebras entre $\{A, d_A+\rho, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_\rho, v_B, \eta_B, \xi_B\}$, donde el producto v_B viene definido por la fórmula (2.31);*

- *la diferencial d_ρ es una v_B-derivación;*

Si imponemos que los morfismos f y g sean ambos morfismos de DGA-álgebras, entonces el morfismo v_B coincide con el producto μ_B, la reducción r_ρ será una reducción de DGA-álgebras entre $\{A, d_A + \rho, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_\rho, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$ y d_ρ será una μ_B-derivación.

Demostración.

Teniendo en cuenta la relación (2.41) y haciendo uso de las fórmulas (2.31), (2.33), (2.34) y (2.35) de v_B, $\bar{f}$, $\bar{g}$ y $\bar{\phi}$ respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} v_B &= (\sum_{n\geq 0}(-1)^n f(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum_{m\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m(g\otimes g)? = \\ &= f\mu_A(\sum_{m\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m(g\otimes g)) + (\sum_{n\geq 1}(-1)^n f(\rho\phi)^n)\mu_A(g\otimes g), \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n f(\rho\phi)^n\mu_A(\sum_{m\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m\phi^{r\otimes r}) = \\ &= f\mu_A(\sum_{m\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m\phi^{r\otimes r}), \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} \bar{g} &= (\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\phi(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum_{m\geq 0}(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m(g\otimes g)) = \\ &= (\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\phi(\rho\phi)^n)\mu_A(g\otimes g), \end{aligned} \tag{2.44}$$

y,

$$\bar{\phi} = (\sum_{n\geq 0}(-1)^n\phi(\rho\phi)^n)\mu_A(\sum(-1)^m(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^m\phi^{r\otimes r}) = 0 \tag{2.45}$$

Utilizando estas fórmulas podemos afirmar:

- Por (2.45), la homotopía ϕ_ρ de la reducción r_ρ, obtenida gracias al Lema de Perturbación, es una homotopía de álgebras;

- Teniendo en cuenta (2.43) y (2.44), si la proyección f (resp.: la inyección g) es un morfismo de DGA-álgebras, el morfismo $\bar{f}$ (resp. $\bar{g}$) es nulo y, por tanto, la proyección f_ρ (resp.: la inyección g_ρ) verificará:

$$f_\rho \mu_A = v_B(f_\rho \otimes f_\rho);$$

$$(\text{resp.: } g_\rho(v_B) = \mu_A(g_\rho \otimes g_\rho)).$$

  Además, después de una examinación de (2.36), el morfismo v_B resulta un verdadero producto para B. La diferencial d_ρ será también, en este caso, una v_B-derivación.

Si f y g son, ambos, morfismos de DGA-álgebras, nos encontramos con que la homotopía ϕ de la reducción original r, es una homotopía de álgebras. En efecto, consideremos en principio las siguientes dos igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 - gf = \phi d + d\phi \\ 1 \otimes 1 - (g \otimes g)(f \otimes f) = \phi^{r \otimes r} d^{\otimes} + d^{\otimes} \phi^{r \otimes r} \end{array} \right\}$$

Si en ambas igualdades, realizamos la composición con el producto μ_A -en la primera igualdad por la derecha, en la segunda por la izquierda- tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu_A - gf\mu_A = \phi d\mu_A + d\phi\mu_A \\ \mu_A - \mu_A(g \otimes g)(f \otimes f) = \mu_A \phi^{r \otimes r} d^{\otimes} + \mu_A d^{\otimes} \phi^{r \otimes r} \end{array} \right\}$$

Gracias a que los morfismos f y g son morfismos de DGA-álgebras, podemos modificar los términos de la izquierda de estas igualdades como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_A - g\mu_A(f \otimes f) = \phi d\mu_A + d\phi\mu_A \\ \mu_A - g\mu_A(f \otimes f) = \mu_A \phi^{r \otimes r} d^{\otimes} + \mu_A d^{\otimes} \phi^{r \otimes r} \end{array} \right\}$$

Si en la primera igualdad componemos por la derecha cada término con el morfismo $\phi^{r \otimes r}$, en la segunda igualdad lo hacemos por la izquierda con el morfismo ϕ, y tenemos en cuenta la condición (2.41), obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_A \phi^{r \otimes r} = \phi d\mu_A \phi^{r \otimes r} \\ \phi\mu_A = \phi\mu_A d^{\otimes} \phi^{r \otimes r} \end{array} \right\}$$

Restando estas dos últimas igualdades, llegamos a:

$$\mu_A \phi^{r \otimes r} = \phi\mu_A.$$

En este caso, además, inspeccionando (2.42) vemos que $v_B = \mu_B$. Podemos establecer pues, que la reducción r_ρ es una reducción de DGA-álgebras entre $\{A, d_A + \rho, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_\rho, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$, con d_ρ siendo una μ_B-derivación.

Un caso que también nos encontraremos posterioremente en esta memoria es el siguiente:

Teorema 2.4.16 (LPA-3) *Sean $\{A, d_A, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_B, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$ dos DGA-álgebras y sea r una reducción de DGA-módulos $r : \{A, B, f, g, \phi\}$. Sea ρ una perturbación de DGA-módulo de la diferencial de A que induce convergencia con respecto a r, y que sea también una μ_A-derivación. Supongamos que tenemos la condición siguiente:*

$$\phi\mu_A(\phi^{r\otimes r}\rho^{\otimes})^n(g \otimes g) = 0. \quad \forall n \geq 0 \tag{2.46}$$

Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1. *la inyección g_ρ de la reducción r_ρ, obtenida gracias al Lema de Perturbación, es un morfismo de DGA-álgebras entre $\{A, d_A + \rho, \mu_A, \eta_A, \xi_A\}$ y $\{B, d_\rho, \upsilon_B, \eta_B, \xi_B\}$, donde el producto υ_B viene dado por la fórmula (2.31);*

2. *la diferencial d_ρ es una υ_B-derivación;*

Si imponemos además que el morfismo g es un morfismo de DGA-álgebras, entonces, las propiedades anteriores siguen verificándose, teniendo en cuenta que, ahora, el morfismo υ_B coincide con el producto μ_B

La técnica de demostración que se utiliza en este último teorema es la misma que la realizada para los Lemas de Perturbación anteriores 2.4.14 y 2.4.15. Si en vez de (2.46), establecemos como hipótesis que $f(\rho\phi)^n\mu_A\phi^{\otimes} = 0$, podemos obtener un nuevo Lema de Perturbación de álgebras análogo al de arriba.

Como vemos, los Lemas de Perturbación transforman DGA-álgebra-reducciones en DGA-álgebra-reducciones.

Para la estructura de coálgebra, podemos establecer Lemas de Perturbación análogos a los establecidos para álgebras. Para ello, sólo tendremos que estudiar la reducción cono del coproducto del álgebra más grande y realizar el mismo desarrollo teórico anterior. En adelante, nos referiremos a los Lemas de Perturbación de Coálgebras que se corresponden con los Lemas LPA-i, $i = 1, 2, 3, 4$, llamándolos $LPC - i$, $i = 1,2,3$. La traducción que nos permite trasladar los enunciados LPA-i a enunciados LPC-i es la que cambia "DGA-álgebra" por "DGA-coálgebra", "producto υ_B" por "coproducto Υ_B" y transforma la fórmula que define υ_B y la condición que especifica el Lema por medio de la siguiente correspondencia de símbolos:

$$\begin{array}{ccc} \text{LPA-i} & \to & \text{LPC-i} \\ \mu_A & \to & \Delta_A \\ v_B & \to & \Upsilon_B \\ \phi & \to & \phi^{r\otimes r} \\ \phi^{r\otimes r} & \to & \phi \\ g\otimes g & \to & g \end{array} \tag{2.47}$$

Por último, para referencias posteriores necesitaremos la siguiente proposición, que se corresponde a los casos especiales del Lema de Perturbación (prop. 2.2.7). En ella, no especificaremos los productos (resp. coproductos), ya que estos siempre son los mismos.

Proposición 2.4.17 (LPA(C)-4) *[GLS89] Sean A y B dos DGA-álgebras (resp. dos DGA-coálgebras), y sea $r : \{A, B, f, g, \phi\}$ una reducción de DGA-módulos. Sea ρ una perturbación de DGA-módulos de A que induce convergencia con respecto a r, y que sea también una derivación (resp. coderivación). Supongamos que se tiene la condición siguiente:*

$$\phi\rho g = 0 \tag{2.48}$$

Entonces, si la inyección g de r es un morfismo de DGA-álgebras (resp. de DGA-coálgebras), se tiene que la inyección g_ρ de la reducción r_ρ, obtenida gracias al Lema de Perturbación, coincide con g y, por tanto, es un morfismo de DGA-álgebras (resp. de DGA-coálgebras) entre $(A, d_A + \rho)$ y (B, d_ρ); la diferencial d_ρ es una derivación.

Podemos enunciar otro resultado de este tipo, si suponemos que la proyección f verifica $f\rho\phi = 0$.

La idea que subyace en todas estas demostraciones, *es el hecho que podemos "construir" Lemas de Perturbación para una estructura cualquiera, si examinamos el efecto de la operación que genera esta estructura sobre una reducción dada.*

De nuevo, la utilización de reducciones de conos de morfismos de DGA-módulos, nos ayudará a probar de forma cómoda el resultado siguiente:

Proposición 2.4.18
Sean $\{A, d_A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \xi_A\}$ una DGA-álgebra de Hopf, $\{B, d_B, \mu_B, \eta_B, \xi_B\}$ una DGA-álgebra y $r : \{A, B, f, g, \phi\}$ una reducción de DGA-álgebras. Consideremos el morfismo:

$$\Delta_B = (f \otimes f)\Delta_A g$$

Entonces, $\{B, d_B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \xi_B\}$ es una DGA-álgebra de Hopf si se verifica la condición siguiente:

$$(f \otimes f \otimes f)(\Delta_A \otimes 1 - 1 \otimes \Delta_A)\phi^{r \otimes r}\Delta_A g = 0 \tag{2.49}$$

Demostración. A partir de la reducción r de DGA-módulos, construyamos, gracias a la proposición 2.4.2, la reducción cono del coproducto $\Delta_A : A \to A \otimes A$ de la DGA-álgebra de Hopf A (esta reducción admitirá un desarrollo análogo al hecho para la reducción cono de un producto en el ejemplo 2.4.5):

$$C(\Delta_A)(r, r \otimes r) : \{C(\Delta_A), C(\Delta_B), f_{C(\Delta_A)}, g_{C(\Delta_A)}, \phi_{C(\Delta_A)}\} \tag{2.50}$$

donde el morfismo $\Delta_B : B \to B \otimes B$ viene dado por:

$$\Delta_B = (f \otimes f)\Delta_A g,$$

y los morfismos integrantes de la reducción son:

$$\begin{aligned}
f_{C(\Delta_A)}(a, a' \otimes a'') &= (f(a), f(a') \otimes f(a'') + (f \otimes f)\Delta_A \phi(a)),\\
g_{C(\Delta_A)}(b, b' \otimes b'') &= (g(b), g(b') \otimes g(b'') - \phi^{r \otimes r}\Delta_N g(b)),\\
\phi_{C(\Delta_A)}(a, a' \otimes a'') &= (-\phi(a), \phi^{r \otimes r}(a' \otimes a'') + \phi^{r \otimes r}\Delta_A \phi(a)).)
\end{aligned}$$

El morfismo Δ_B es un morfismo de DGA-álgebras, ya que las flechas f, g y Δ_A son morfismos de DGA-álgebras.

Si aplicamos la proposición 2.4.8 a la situación que crea la asociatividad del coproducto Δ_A, obtendremos una reducción entre los DG-módulos siguientes:

$$\begin{tikzcd}
S^2(A) \arrow[d, "\Delta_A"] \\
S(A^2) \arrow[d, "\Delta_A \otimes 1 - 1 \otimes \Delta_A"] \\
A^3
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
S^2(B) \arrow[d, "\Delta_B"] \arrow[dd, bend left=60, "\zeta"] \\
S(B^2) \arrow[d, "\Delta_B \otimes 1 - 1 \otimes \Delta_B"] \\
B^3
\end{tikzcd}$$

donde, formando parte de la diferencial del último DG-módulo, hay una flecha llamada ζ (ver el resultado (2.27) de la proposición 2.4.8) que "medirá" la asociatividad de Δ_B. Si $\zeta = 0$, Δ_B es asociativo; si ζ no es nula, Δ_B es asociativo salvo homotopía. El morfismo ζ tiene como fórmula explícita:

$$\zeta = (f \otimes f \otimes f)(\Delta_A \otimes 1 - 1 \otimes \Delta_A)\phi^{r \otimes r}\Delta_A g.$$

Por (2.49), este morfismo es nulo. En lo que concierne a la coaumentación ξ_B, ésta será la counidad bilateral del coproducto Δ_B, ya que los morfismo f y g son morfismos de DGA-módulos y el coproducto Δ_A tiene como counidad a ξ_A. Con esto terminamos la demostración.

Nota 2.4.19 *Un examen directo de la coconmutatividad del nuevo coproducto Δ_B permite demostrar:*

$$\Delta_A \text{ coconmutativo} \Rightarrow \Delta_B \text{ coconmmutativo}$$
$$\Delta_A \text{ coconmutativo salvo homotopía} \Rightarrow \Delta_B \text{ coconmutativo salvo homotopía.}$$

Evidentemente, la proposición anterior puede probarse de una forma más simple y mecánica. Sólo sería necesario obtener la homotopía para la asociatividad de Δ_B:

$$\begin{aligned}
&(\Delta_B \otimes 1)\Delta_B - (1 \otimes \Delta_B)\Delta_B = \\
&= ((f \otimes f)\Delta_A g \otimes 1)(f \otimes f)\Delta_A g - (1 \otimes (f \otimes f)\Delta_A g)(f \otimes f)\Delta_A g = \\
&= \ldots = (f \otimes f \otimes f)(1 \otimes \Delta_A - \Delta_A \otimes 1)(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf)\Delta_A g d + \\
&+ d_{B^3}(f \otimes f \otimes f)(1 \otimes \Delta_A - \Delta_A \otimes 1)(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf)\Delta_A g.
\end{aligned}$$

donde $d_{B^3} = d \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes d \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes d$.

Sin embargo, el método del cono presenta una gran ventaja con respecto a éste último, en el sentido que la técnica de demostración que utiliza el primero presenta las homotopías a simple vista, mientras que en el segundo debemos manipular convenientemente las fórmulas para deducirlas.

Podemos poner de manifiesto esta ventaja si complicamos el problema de transferencia. Un ejemplo es el caso de las A_∞-estructuras.

2.4.3 A_∞-estructuras

En este apartado, utilizaremos la técnica "cono" para detectar y determinar las "anomalías" presentes en una transferencia de la estructura de (co)álgebra de un objeto a otro por medio de una reducción. Este caso ha sido bastante tratado en la literatura, donde aparece estudiado en el campo de las A_∞-estructuras. Estas han sido ya estudiadas desde el punto de vista de la teoría de la Perturbación (ver [GS86], [GLS91]). Aquí, nosotros seguiremos la línea descrita por Gugenheim, Lambe y Stasheff en [GLS91].

Tengamos en cuenta que una A_∞-álgebra $\{B, m_i\}_{i \geq 1}$ no es más que un DG-módulo con un "producto" que puede no ser asociativo, y cuya falta de asociatividad viene "medida" por medio de los morfismos $m_i : B^i \to B$ (ver 1.1.32). Es decir, estos morfismos son las homotopías de "corrección" sucesivas para la asociatividad de B.

La situación que descrita en [GLS91] es la siguiente. Sea una DGA-álgebra A, un DGA-módulo B y una reducción $r : \{A, B, f, g, \phi\}$. Podemos obtener una reducción (que llamaremos Bar tilde), $\tilde{B}(r) : \{\bar{B}(A), \tilde{B}(B), \bar{f}, \bar{g}, \bar{\phi}\}$, donde la construcción $\bar{B}(\ )$ es la construcción Bar, de la que hablaremos posteriormente, y la construcción $\tilde{B}(\ )$ es la construcción Bar tilde de Stasheff ([Sta63a],[Sta63b]), de la cual podremos obtener los m_i-productos de la A_∞-estructura de B. Aquí, gracias a la técnica cono, presentaremos una reducción Bar tilde "segmentada", de la cual obtendremos las fórmulas generales que definen los m_i-productos de la A_∞-estructura de la que está dotado B, a partir de los datos de la reducción $r : \{A, B, f, g, \phi\}$.

Notación.

Con el objeto de hacer menos pesada la lectura, utilizaremos la notación siguiente:

$$
\begin{aligned}
A^n &= \overbrace{A \otimes \ldots \otimes A}^{n \text{ veces}};\\
f^{\otimes n} &= \overbrace{f \otimes \ldots \otimes f}^{n \text{ veces}};\\
g^{\otimes n} &= \overbrace{g \otimes \ldots \otimes g}^{n \text{ veces}};\\
r^{\otimes n} &\equiv \overbrace{r \otimes \ldots \otimes r}^{n \text{ veces}};\\
\phi^{r^{\otimes n}} &= \overbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}^{n-1 \text{ veces}} \otimes \phi + \ldots + \phi \otimes \overbrace{gf \otimes \ldots gf}^{n-1 \text{ veces}};\\
\mu_A^n &= \mu_A \otimes \overbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}^{n-2} - 1 \otimes \mu_A \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + (-1)^{n-2} \overbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}^{n-2} \otimes \mu_A.
\end{aligned}
$$

En primer lugar, está claro que la flecha m_1 va a ser igual a la diferencial de B. Consideremos ahora, el efecto del producto μ_A de A sobre la reducción primitiva. Es decir, tomaremos la reducción cono del morfismo μ_A (ver el ejemplo 2.4.5)):

$$
\begin{tikzcd}
s(A \otimes A) \arrow[loop above, "-(1\otimes\phi+\phi\otimes gf)"] \arrow[rr, shift left, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"] \arrow[drr, "\bar{f}_2"'] & & s(B \otimes B) \arrow[ll, shift left, "g \otimes g"] \arrow[d, "m_2"] \arrow[dll, "\bar{g}_2"] \\
A \arrow[loop left, "\phi"] \arrow[u, bend left=60, "\bar{\phi}_2"] \arrow[rr, shift left, "f"] & & B \arrow[ll, shift left, "g"]
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

donde, gracias a (2.20), (2.21), (2.22) y (2.23) de 2.4.5, los morfismos $m_2, \bar{f}_2, \bar{g}_2$ y $\bar{\phi}_2$ son:

$$
\begin{aligned}
m_2 &= f\mu_A(g \otimes g), \\
\bar{f}_2 &= f\mu_A(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf), \\
\bar{g}_2 &= -\phi\mu_A(g \otimes g), \\
\bar{\phi}_2 &= \phi\mu_A(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf).
\end{aligned}
$$

El morfismo m_2 generado es la segunda flecha de la A_∞-estructura de B deducida de la estructura de álgebra de A, gracias a la reducción $r : \{A, B, f, g, \phi\}$. m_2 va a ser el "producto" del cual corregiremos su asociatividad.

Teniendo en cuenta que el producto μ_A es asociativo y (2.28) del ejemplo 2.4.9, podemos obtener la flecha m_3,

$$m_3 = f\mu_A(1 \otimes \phi + \phi \otimes gf)(\mu_A \otimes 1 - 1 \otimes \mu_A)(g \otimes g \otimes g).$$

que constituye la homotopía para el par $m_2(m_2 \otimes 1) \sim m_2(1 \otimes m_2)$; esta condición está reflejada en la relación (1.7) de la definición 1.1.32, para $n = 3$.

Gráficamente, hemos llegado a la situación siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
A & S(A^2) \arrow[l, "\mu_A"'] & & B & S(B^2) \arrow[l, "m_2"'] \\
 & & \overset{reducción}{\Rightarrow} & & \\
S(A^2) \arrow[uu, "\mu_A"] & S^2A^3 \arrow[l, "-1\otimes\mu_A"] \arrow[uu, "\mu_A\otimes 1"'] & & S(B^2) \arrow[uu, "m_2"'] & S^2B^3 \arrow[l, "-1\otimes m_2"] \arrow[uu, "m_2\otimes 1"'] \arrow[uul, "m_3"']
\end{tikzcd}
$$

Apliquemos ahora la proposición 2.4.8 al triplete de reducciones:

$$
\begin{aligned}
r_1 &\equiv S(r^{\otimes 4}) \\
r_2 &\equiv S(r^{\otimes 3}) \\
r_3 &\equiv C(\mu_A)(r^{\otimes 2}, r)
\end{aligned}
$$

con

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \mu_A^4 \\ k_{2,3} &= \mu_A^3. \end{aligned}$$

Obtenemos un morfismo

$$k'_{1,3} = -f\mu_A\phi^{r^{\otimes 2}}\mu_A^3\phi^{r^{\otimes 3}}\mu_A^4 g^{\otimes 4}.$$

que constituirá la flecha m_4 de la estructura de A_∞-álgebra de B. Podemos afirmar esto, ya que la relación (1.7) de la definición 1.1.32, para $n = 4$, coincide con la condición (2.27) de la proposición 2.4.8 que m_4 debe verificar.

Si continuamos aplicando la proposición 2.4.8 a situaciones del tipo:

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv S(r^{\otimes n}) \\ r_2 &\equiv S(r^{\otimes n-1}) \\ r_3 &\equiv C(\mu_A^{n-2})(S^{n-2}(r^{\otimes n-2}), C(\mu_A^{n-3})(\ldots, C(\mu_A(r^{\otimes 2}, r)\ldots) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \mu_A^n \\ k_{2,3} &= \mu_A^{n-1}. \end{aligned}$$

obtendremos la fórmula general que define a todos los m_n-productos de B y que coincide con los resultados de [GLS91].

Teorema 2.4.20 *Sean A una DGA-álgebra, B un DGA-módulo y $r : \{A, B, f, g, \phi\}$ una reducción de DGA-módulos. La estructura de A_∞-álgebra de B, $\{B, m_i\}_{i\geq 1}$, inducida por la reducción r, viene determinada por la fórmula siguiente:*

$$m_n = (-1)^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} f\mu_A\phi_2\ldots\phi^{r^{\otimes(n-1)}}(\mu_A \otimes \overbrace{1\ldots\otimes 1}^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\overbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}^{n-2}\otimes\mu_A)g^{\otimes n}. \quad (2.51)$$

Un tratamiento análogo admite las A_∞-coálgebras.

Teorema 2.4.21 *Sean A una DGA-coálgebra, B un DGA-módulo y $r : \{A, B, f, g, \phi\}$ una reducción de DGA-módulos. La estructura de A_∞-coálgebra de B, $\{B, \Delta_i\}_{i\geq 1}$, inducida por la reducción r, viene determinada por la fórmula siguiente:*

$$\Delta_n = (-1)^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} f^{\otimes n}(\Delta_A\otimes\overbrace{1\ldots\otimes 1}^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\overbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}^{n-2}\otimes\Delta_A)\phi^{r^{\otimes(n-1)}}\ldots\phi^{r^{\otimes 2}}\Delta_A g. \quad (2.52)$$

Vemos que el concepto de A_∞ estructura ha surgido de forma natural como consecuencia de la transferencia de la estructura de (co)álgebra de un objeto a otro, "conectados" por una reducción. Esta aproximación a las A_∞-estructuras desde el punto de vista de la Teoría de la Perturbación nos obliga a una nueva redefinición de estas. Especificar, por ejemplo, una A_∞-álgebra A no será limitarse a dar las fórmulas de los m_i-productos de la misma, sino a dar una reducción explícita de DGA-módulos entre una DG-álgebra A' y el DG-módulo A. Además, con este reconocimiento de las A_∞ estructuras como el invariante homotópico apropiado para trabajar con DGA-(co)álgebras, y teniendo en consideración las fórmulas de las flechas m_i y Δ_i, podemos afirmar que una DGA-(co)álgebra-reducción preserva las estructuras de DGA-(co)álgebras ya existentes en los objetos que conecta.

Proposición 2.4.22 *Sean A y B dos DG-álgebras (resp. DG-coálgebras) y r una DG-álgebra-reducción (resp. una DG-coálgebra-reducción). La estructura de A_∞-álgebra (resp. A_∞-coálgebra) adquirida por B y transferida por la DG-álgebra (resp. DG-coálgebra) A gracias a la reducción r, se reduce a la estructura original de álgebra (resp. de coálgebra) de B. En este caso, diremos que la reducción r preserva las estructuras de DGA-álgebras (resp. de DGA-coálgebras) que subyacen en A y B.*

Capítulo 3

Primer algoritmo de cálculo de la homología de los espacios clasificantes

La sucesión espectral de Eilenberg-Moore (ver [EM66], [McC], [Moo59]) es un mecanismo que permite obtener información sobre la homología de la base (resp. de la fibra) de un fibrado cuando se conoce la homología de la fibra (resp. de la base) y la del espacio total, al menos cuando se verifican ciertas hipótesis de conexión. Rubio en [Rub91a] demostró que este proceso, en el caso de querer obtener la homología de la fibra, puede ser reorganizado de forma totalmente algorítmica, con la condición de trabajar en homología efectiva. En este capítulo realizaremos un trabajo paralelo al de Rubio y demostraremos un teorema del tipo "sucesión espectral de Eilenberg-Moore" para calcular la homología efectiva de la base. Más precisamente, logramos obtener un algoritmo de cálculo de la homología efectiva de la base de un fibrado principal (ver def. 1.2.22) en función de la homología efectiva de la fibra y del espacio total, suponiendo que la fibra es conexa. Utilizamos para ello la conocida resolución Bar y resolvemos, primero, el caso de los fibrados triviales; después, por perturbación, trataremos el caso de fibrados cualesquiera. Por último, los resultados obtenidos se aplicarán al caso de los espacios clasificantes y, en particular, a los espacios de Eilenberg-MacLane, obteniendose un algoritmo de cálculo de su homología efectiva.

3.1 La Resolución Bar. Homología efectiva.

En esta sección, introduciremos toda la maquinaria algebraica necesaria para la consecución de los algoritmos arriba mencionados.

Sea A una DGA-álgebra conexa (ver def. 1.1.15), X un DGA-A-módulo a la derecha e Y un DGA-A-módulo a la izquierda (ver def. 1.1.25). El DGA-módulo $Bar^A(X,Y)$ se define (ver [Moo59]) de la forma siguiente:

$$Bar^A_n(X,Y) = X \otimes T(S(\bar{A}))_n \otimes Y = X \otimes \overbrace{S(\bar{A}) \otimes \ldots \otimes S(\bar{A})}^{n \text{ veces}} \otimes Y$$

donde S indica suspensión (ver def. 1.1.31), T indica módulo tensorial (ver def. 1.1.30) y $\bar{A}$ (ver def. 1.1.16) viene definido por: $\bar{A}_n = \begin{cases} A_n & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Nota. Notaremos un elemento de la forma $x \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes y \in Bar^A_n(X,Y)$ por $x[a_1|\ldots|a_n]y$, donde $a_i \in \bar{A}$, $1 \leq i \leq n$. Un elemento $x[a_1|\ldots|a_n]y$ se dice homogéneo si x, y y cada a_i son elementos homogéneos de X, Y y A, respectivamente.

La graduación total de un elemento homogéneo de $Bar^A(X,Y)$ es:

$$|\ | = |\ |_t + |\ |_r,$$

donde $|\ |_t$ es la graduación tensorial:

$$|x[a_1|\ldots|a_n]y|_t = |x| + |a_1| + \ldots + |a_n| + |y|,$$

y $|\ |_r$ es la graduación residual:

$$|x[a_1|\ldots|a_n]y|_r = n.$$

La diferencial sobre $Bar^A_n(X,Y)$, $d_n : Bar^A_n(X,Y) \to Bar^A_n(X,Y)$, llamada diferencial tensorial, está definida como:

$$\begin{aligned} d_n(x[a_1|\ldots|a_n]y) \quad = \quad & d_X(x)[a_1|\ldots|a_n]y - \\ & - \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{e_{i-1}} x[a_1|\ldots|d_A(a_i)|\ldots a_n]y - \\ & - (-1)^{e_n} x[a_1|\ldots|a_n] d_Y(y) \end{aligned}$$

y la diferencial externa $\delta_n : Bar^A_n(X,Y) \to Bar^A_{n-1}(X,Y)$ viene expresada por:

$$\begin{aligned} \delta_n(x[a_1|\ldots|a_n]y) \quad = \quad & (-1)^{e_0} \mu_X(x \otimes a_1)[a_2|\ldots|a_n]y + \\ & + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i} x[a_1|\ldots|\mu_A(a_i \otimes a_{i+1})|\ldots|a_n]y + \\ & + (-1)^{e_n} x[a_1|\ldots|a_{n-1}]\mu_Y(a_n \otimes y) \end{aligned}$$

donde los exponentes e_i vienen dados por las fórmulas:

$$e_i = i + |x| + |a_1| + \ldots + |a_i|.$$

Su aumentación es $\xi_X \otimes \xi_Y$, donde ξ_X y ξ_Y son las aumentaciones de X e Y.

Nota 3.1.1 *Nótese que la resolución $Bar^A(X,Y)$ no es más que el DGA-módulo $X \otimes T(S(\bar{A})) \otimes Y$ donde se ha perturbado su diferencial, introduciendo la diferencial externa δ_n.*

Introducido el concepto, podemos dar ya un algoritmo de cálculo de la homología efectiva de la resolución Bar:

Algoritmo 3.1.2 Entrada:

- *Una DGA-álgebra A conexa con homología efectiva;*
- *Un DGA-A-módulo a la derecha X con homología efectiva;*
- *Un DGA-A-módulo a la izquierda Y con homología efectiva;*

Salida: *La homología efectiva de $Bar^A(X,Y)$.*

Demostración.

Como A, X e Y tienen homología efectiva, por los algoritmos 2.3.8, 2.3.6, 2.3.9 y 2.3.7, podemos deducir que el DGA-módulo $X \otimes T(S(\bar{A})) \otimes Y$ tiene homología efectiva. Pero, como hemos precisado antes, este DGA-módulo no es más que $Bar^A(X,Y)$ sin contar con su diferencial externa. Considerando δ_n como perturbación (de DGA-módulo) de la diferencial de este último DGA-módulo, vemos que δ_n induce convergencia en la homología efectiva. En efecto, como la perturbación disminuye en uno la graduación residual y la homotopía aumenta en uno la graduación tensorial, podemos afirmar que si tomamos un elemento $x \in Bar^A_n(X,Y)$, al cabo de n iteraciones, la composición de la homotopía con la perturbación, aplicada a x, será nula. La proposición 2.3.12 se puede pues aplicar, y obtenemos el resultado deseado.

Una DGA-álgebra A puede ser considerada como un DGA-A-módulo a la derecha (o a la izquierda) de forma evidente. Entonces, podemos construir el DGA-módulo $Bar^A(A,\Lambda)$; su aumentación es la de A, es decir, la identidad en Λ, ya que A es conexa. Podemos establecer el siguiente resultado:

Proposición 3.1.3 *[Moo59] Podemos construir una reducción explícita entre el DGA-módulo $Bar^A(A,\Lambda)$ y el DGA-módulo trivial Λ, donde la proyección y la inyección son ámbas, la identidad en Λ, y con homotopías explícitas $\phi_n : A \otimes \bar{A}^n \to A \otimes \bar{A}^{n+1}$, donde $\phi_n = \eta_A \otimes p \otimes 1_{\bar{A}^n}$, $n \geq 0$ ($\eta_A : \Lambda \to A$ es la coaumentación de A y $p : A \to \bar{A}$ es la proyección canónica). Sea M un DGA-módulo. Si dotamos a $M \otimes A$ de la estructura de DGA-A-módulo extensión (es decir, con producto $1 \otimes \mu_A$) entonces, la aplicación a esta reducción del funtor de tensorización por M define una reducción canónica entre $Bar^A(M \otimes A,\ \Lambda)$ y M.*

3.2 Algoritmo de cálculo de la homología de la base en función de la de la fibra y la del espacio total.

En este parágrafo, trabajaremos en el contexto simplicial y aplicaremos los resultados algebraicos precedentes para deducir un algoritmo de cálculo: el de la homología efectiva de la base de un fibrado principal en función de la de la fibra y la del espacio total.

Si G es un grupo simplicial, $C_*^N(G)$ es el complejo de cadenas normalizado de G (ver def. 1.2.15). Este complejo $C_*^N(G)$ admite una estructura canónica de álgebra (ver la def. 1.2.21). Si el grupo G es reducido, entonces $C_*^N(G)$ es una DGA-álgebra conexa.

A partir de ahora, todos los fibrados (o PTCP) principales tendrán como fibra (grupo simplicial) un espacio simplicial reducido. Recordemos, además, que nuestra definición de fibrado principal (ver la def. 1.2.22) presupone que la base es siempre reducida.

Si consideramos primero un fibrado trivial $B \times G$ o, dicho de otra forma, el producto cartesiano de un conjunto y un grupo simpliciales (ver la def. 1.2.17), aplicando el teorema de Eilenberg-Zilber (ver el ejemplo (2.1.2)), obtenemos una reducción entre $C_*^N(B \times G)$ y $C_*^N(B) \otimes C_*^N(G)$. Si dotamos ahora a $C_*^N(B) \otimes C_*^N(G)$ de la estructura de $C_*^N(G)$-módulo extensión, obtenemos una reducción entre $Bar^A(C_*^N(B) \otimes C_*^N(G), \Lambda)$ y $C_*^N(B)$.

Luego, tenemos el siguiente algoritmo de cálculo de la homología efectiva de la base $C_*^N(B)$:

Algoritmo 3.2.1 Entrada:

- *un grupo simplicial G reducido con homología efectiva;*
- *el fibrado simplicial trivial $B \times G$, con homología efectiva.*

Salida: *la homología efectiva de la base B del fibrado.*

Se puede considerar este algoritmo como el resultado de una división: conociendo la homología del producto y la de un factor, determinamos la homología del otro factor.

Resolveremos ahora el caso de fibrados no triviales, utilizando perturbación homológica.

Dado un PTCP (B, G, τ), utilizamos el operador de torsión τ para perturbar la diferencial de $C_*^N(B \times G)$; esta perturbación y el teorema de Eilenberg-Zilber producen, vía el Lema de Perturbación, una nueva reducción de $C_*^N(B \times_\tau G)$ hacia un producto tensorial "torcido". Este resultado es conocido bajo el nombre de "teorema de Eilenberg-Zilber torcido"; originariamente, fué demostrado por E.H. Brown [Bro59] con la ayuda de la teoría de modelos acíclicos, después por Shih [Shi62]. De hecho, el resultado de Brown nos proporciona más información sobre la diferencial del nuevo producto tensorial:

Teorema 3.2.2 (Teorema de Brown) *Sea $B \times_\tau G$ un fibrado principal con grupo estructural G y con base B reducida. Entonces, existe una cocadena de torsión $t : C_*^N(B) \to C_*^N(G)$ tal que el producto tensorial torcido $C_*^N(B) \otimes_t C_*^N(G)$, con diferencial $d_t = d \otimes 1 + 1 \otimes d + t\cap$ (ver def. 1.1.29), sea canónicamente homotópicamente equivalente al complejo de cadenas del espacio total $C_*^N(B \times_\tau G)$.*

Nos encontramos, pues, con un verdadero producto tensorial torcido y, por tanto, la diferencial de este producto torcido $C_*^N(B) \otimes_t C_*^N(G)$ es, ella también, una perturbación de la diferencial del producto tensorial banal por el producto cap $t\cap$, asociado a una cocadena de torsión t construida con la ayuda de la torsión geométrica τ.

Retomemos el DGA-módulo $Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda)$; observemos que la homotopía ϕ de la reducción $\{Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G),\Lambda),\ C_*^N(B),\ f,\ g,\ \phi\}$ aumenta en una unidad la graduación residual del anterior DGA-módulo. La n-ésima "columna" de $Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda)$ es $C_*^N(B)\otimes C_*^N(G)\otimes \overline{C_*^N(G)}^n$. Perturbamos en este momento la diferencial de cada columna para reemplazarla por el DG-módulo $C_*^N(B)\otimes_t C_*^N(G)\otimes \overline{C_*^N(G)}^n$. De esta forma, hemos construido un morfismo de módulos graduados $Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda)\to Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G),\Lambda)$, de grado -1, que denotaremos $t\cap\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1$. Por supuesto, este morfismo es una perturbación, es decir, si añadimos este morfismo a la diferencial de $Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda)$, encontramos de nuevo una diferencial. Esta perturbación induce convergencia en la reducción que tenemos, ya que, por una parte, la perturbación disminuye en una unidad la graduación tensorial de $Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda)$ y, por otra, la homotopía de la reducción aumenta en uno su graduación residual. Además, el DGA-módulo obtenido por perturbación es exactamente el complejo $Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes_t C_*^N(G),\Lambda)$, donde el DGA-módulo $C_*^N(B)\otimes_t C_*^N(G)$ está dotado de una estructura de $C^N(G)$-módulo a derecha por el producto extension: $1\otimes\mu_{C^N(G)}: C_*^N(B)\otimes_t C_*^N(G)\otimes C_*^N(G)\to C_*^N(B)\otimes_t C_*^N(G)$. Resulta, entonces, que el Lema de Perturbación de DGA-módulos 2.2.5 puede ser aplicado a la reducción $\{Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda), C_*^N(B), f, g, \phi\}$ con perturbación $t\cap\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1$. El hecho fundamental en esta aplicación es que la diferencial de $C_*^N(B)$ no es modificada, una vez realizado el proceso de perturbación.

Proposición 3.2.3 *Si aplicamos el lema de perturbación a la reducción* $\{Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda),\ C_*^N(B),\ f,\ g,\ \phi\}$ *y la perturbación* $t\cap\otimes 1\ldots\otimes 1$, *se obtiene otra reducción* $\{Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes_t C_*^N(G),\Lambda),\ C_*^N(B),\ f_\infty,\ g_\infty,\ \phi_\infty\}$, *donde la diferencial de* $C_*^N(B)$ *no ha sido modificada.*

Demostración.

Sea $\rho = t\cap\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1$ y retomemos la fórmula (2.9) del Lema de Perturbación 2.2.5: $d_\infty = d_{C^N(B)} + f\rho\Sigma_\infty g$. Es suficiente demostrar que $f\rho\Sigma_\infty g = 0$. Para conseguir esto, nótese que $g: C_*^N(B)\to Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B)\otimes C_*^N(G), \Lambda)$ es, simplemente, la inclusión canónica $C_n^N(B)\to C_n^N(B)\otimes\Lambda$ (G es reducido).

Por otra parte, la expresión del producto cap, teniendo en cuenta las definiciones 1.1.29, 1.2.20 y 1.2.21, es la siguiente:

$$\cap t(b_q\otimes g_r) = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i\Delta'_{q,i}b_q\otimes\mu_{q-i+r-1}(t_{q-i}\Delta''_{q,q-i}b_q\otimes g_r),$$

donde

$$\Delta'_{q,i}b = \partial_{i+1}\ldots\partial_q b,$$

$$\Delta''_{q,q-i} b = \overbrace{\partial_0 \ldots \partial_0}^{i \text{ veces}} b,$$

$$\mu_{r+s}(b_q, g_r) = \sum_{\alpha \in \ (q,r)-shuffles} (-1)^{\sigma(\alpha)} \mu(s_{\beta_r} \ldots s_{\beta_1} b_q \otimes s_{\alpha_q} \ldots s_{\alpha_1} g_r).$$

Podemos ver ahora que la composición $f\rho\Sigma_\infty g = 0$. En efecto, teniendo en cuenta (2.13) del Lema de Perturbación, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f\rho\Sigma_\infty g(b) & = & f\rho\Sigma_\infty(b[]) = \\ & = & f(\Sigma_{i=0}^{q-1}(-1)^i \Delta'_{q,i} b \otimes (t_{q-i}\Delta''_{q,q-i} b)[] + \cdots) = \\ & & = (-1)^{q-1}\Delta'_{q,q-1} b \otimes t_1 \Delta''_{q,1} b. \end{array}$$

Además, sabemos que se tiene el siguiente resultado (ver [May67], pag. 143):

$$\tau(b) = e_0 \ \ \forall b \in B_1 \Rightarrow \ t_1(b) = 0 \ \ \forall b_1 \in B_1 \ \text{ no degenerado},$$

donde $e_0 \in G_0$ es la unidad en dicha dimensión.

Con esto y del hecho de ser G reducido, deducimos que $d_\infty = d_B$.

Algoritmo 3.2.4 Entrada:

- *la reducción* $\{Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B) \otimes C_*^N(G), \Lambda), \ \ C_*^N(B), \ \ f, \ \ g, \ \ \phi\}$
- *la perturbación* $t \cap \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1$

Salida : *una reducción* $\{Bar^{C^N(G)}(C_*^N(B) \otimes_t C_*^N(G), \Lambda), \ \ C_*^N(B), \ \ f_\infty, \ \ g_\infty, \ \ \phi_\infty\}$

De esta forma, la homología efectiva de la base puede ser calculada por el intermediario *Bar* y el mismo razonamiento que en el caso del fibrado trivial puede ser utilizado.

Algoritmo 3.2.5 Entrada:

- *un grupo simplicial reducido G con homología efectiva;*
- *un fibrado principal simplicial reducido $B \times_\tau G$ con homología efectiva;*

Salida: *La homología efectiva de la base B del fibrado.*

3.3 Homología efectiva de los espacios clasificantes. Los espacios de Eilenberg-MacLane

El espacio clasificante $\bar{W}_g(G)$, donde G es un grupo simplicial, sirve para la clasificación de PTCPs con fibra G, salvo isomorfismo. En esta sección, especificaremos un algoritmo para calcular la homología efectiva de $\bar{W}_g(G)$, si conocemos la homología efectiva del grupo simplicial G. Como una simple consecuencia, obtendremos también un procedimiento de cálculo para la homología efectiva de los espacios de Eilenberg-MacLane, $K(\pi, n)$, donde π es un grupo abeliano finitamente generado.

En la notación $\bar{W}_g$, el subíndice g hace referencia a que se trata de un clasificante de naturaleza geométrica. Este subíndice se introduce para distinguir este clasificante de otro que aparecerá en el siguiente capítulo, $\bar{W}$, de naturaleza algebraica. En el siguiente capítulo, también estableceremos la relación existente entre estos dos objetos.

En primer lugar, definamos el espacio clasificante de un grupo simplicial:

Definición 3.3.1 *([May67],pag. 87-88) Dado un grupo simplicial G, notemos como $\bar{W}_g(G)$ a la versión simplicial del espacio clasificante de G:*

$$(\bar{W}_g(G))_0 = *,$$

$$(\bar{W}_g(G))_n = G_{n-1} \times \ldots \times G_0,$$

$$\partial_0(g_{n-1}, \ldots, g_0) = (g_{n-2}, \ldots, g_0),$$

$$\partial_i(g_{n-1}, \ldots, g_0) = (\partial_{i-1}g_{n-1}, \ldots, \partial_0 g_{n-i}g_{n-i-1}, g_{n-i-2}, \ldots, g_0),$$

$$s_i(g_{n-1}, \ldots, g_0) = (s_{i-1}g_{n-1}, \ldots, s_0 g_{n-i}, e_{n-i}, g_{n-i-1}, \ldots, g_0),$$

Notemos que el conjunto simplicial $\bar{W}_g(G)$ es reducido.

Si G es un grupo simplicial conmutativo, entonces $\bar{W}_g(G)$ será también un grupo simplicial conmutativo con el producto:

$$(g_{n-1}, \ldots, g_0)(g'_{n-1}, \ldots, g'_0) = (g_{n-1}g'_{n-1}, \ldots, g_0 g'_0).$$

Entonces, se puede definir el clasificante iterado como $\bar{W}_g^n(G) = \bar{W}_g(\bar{W}_g^{n-1}(G))$ para todo $n \geq 1$, $\bar{W}_g^0(G) = G$.

Proposición 3.3.2 *([May67], pag. 88)*

Sea G un grupo simplicial. Podemos definir el PTCP $\bar{W}_g(G) \times_{\tau_G} G$, llamado fibrado universal para G, donde $\tau_G : \bar{W}_g(G) \to G$ definida por $\tau(g_{n-1}, \ldots, g_0) = g_{n-1}$, es la función de torsión.

El complejo de cadenas $C_*^N(\bar{W}_g(G) \times_{\tau_G} G)$ admite una reducción hacia el DGA-módulo trivial Λ, con homotopía de contracción definida sobre los generadores como:

$$\phi((g_{n-1}, \ldots, g_0), g_n) = ((g_n, \ldots, g_0), e_{n+1}).$$

El fibrado universal $\bar{W}_g(G) \times_{\tau_G} G$ es un PTCP de tipo (W) (ver la def 1.2.24) con aplicación conjuntista S definido como:

$$\begin{array}{c} S : (\bar{W}_g(G) \times_{\tau_G} G)_n \to (\bar{W}_g(G))_{n+1} \times e_{n+1}, \\ S((g_{n-1}, \ldots, g_0), g_n) = ((g_n, g_{n-1}, \ldots, g_0), e_{n+1}). \end{array} \tag{3.1}$$

Vemos, pues, que el algoritmo 3.2.5 puede aplicarse a esta situación y obtenemos:

Algoritmo 3.3.3 **Entrada:** *un grupo simplicial reducido G con homología efectiva.*

Salida: *la homología efectiva de su espacio clasificante $\bar{W}_g(G)$.*

Un esquema del proceso de obtención de esta homología efectiva es el siguiente:

NOTA: la símbologia $A \rightleftharpoons B$ quiere expresar la existencia de una reducción o equivalencia de homotopía entre A y B. $\overset{LPH}{\Rightarrow}$ quiere expresar que en el paso que se da, se usa el Lema de Perturbación.

- En principio, tenemos:

$$Bar^{C^N(G)}(C_*^N(G),\Lambda) \rightleftharpoons \Lambda \;\Rightarrow\; Bar^{C^N(G)}(C_*^N(\bar{W}_g(G)) \otimes C_*^N(G),\Lambda) \rightleftharpoons C_*^N(\bar{W}_g(G)) \overset{LPH}{\Rightarrow}$$

$$Bar^{C^N(G)}(C_*^N(\bar{W}_g(G)) \otimes_{t_G} C_*^N(G),\Lambda) \rightleftharpoons C_*^N(\bar{W}_g(G))$$

y la diferencial de $C_*^N(\bar{W}_g(G))$ no se modificado, una vez realizado el proceso de perturbación.

- Entonces, gracias al teorema de Brown y al hecho de que el complejo de cadenas $C_*^N(\bar{W}_g(G) \times_{\tau_G} G)$ es homotópicamente trivial, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} Bar^{C^N(G)}(C_*^N(\bar{W}_g(G)) \otimes_{t_G} C_*^N(G),\Lambda) \rightleftharpoons C_*^N(\bar{W}_g(G)) \\ C_*^N(\bar{W}_g(G) \times_{\tau_G} G) \rightleftharpoons C_*^N(\bar{W}_g(G)) \otimes_{t_G} C_*^N(G) \\ C_*^N(\bar{W}_g(G) \times_{\tau_G} G) \rightleftharpoons \Lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Bar^{C_*^N(G)}(\Lambda,\Lambda) \rightleftharpoons C_*^N(\bar{W}_g(G)).}$$

Evidentemente, en el caso conmutativo, también es posible establecer un algoritmo de cálculo para la homología de los clasificantes iterados:

Algoritmo 3.3.4 Entrada:

- *Un grupo simplicial conmutativo y reducido G con homología efectiva.*
- *un número entero n no negativo.*

Salida: *la homología efectiva del clasificante iterado $\bar{W}_g^n(G)$.*

Es un resultado clásico en Topología Algebraica que todo conjunto simplicial "factorize" en un producto cartesiano torcido de factores primos irreducibles. Los grupos de homotopía de estos "espacios primos" son todos cero, salvo en una sóla dimensión. Un espacio primo, con grupo de homotopía no trivial π en dimensión n, está únicamente determinado por π y por n, es esencialmente único y se denota $K(\pi, n)$. Estos $K(\pi, n)$-espacios de Eilenberg-MacLane juegan, por tanto, un papel absolutamente fundamental en la Teoría Homotópica. Además, si π es un grupo abeliano, podemos escoger clasificantes iterados como modelos de $K(\pi, n)$. En efecto,

Teorema 3.3.5 *([May67], pag. 98-99) Sea π un grupo. Definimos el grupo simplicial K estableciendo que $K_m = \pi$, $m \geq 0$, y que cada ∂_i y s_i sobre K_m sean la identidad del grupo π. Entonces K es un $K(\pi, 0)$. Además, $\bar{W}_g(K(\pi, 0))$ es un $K(\pi, 1)$. Si π es abeliano, entonces el grupo simplicial abeliano $\bar{W}_g^n(K(\pi, 0))$ es un $K(\pi, n)$, para $n \geq 1$.*

Teniendo en cuenta la prop. 3.3.2, podemos deducir que:

Corolario 3.3.6 *Sea π un grupo abeliano y n un número entero nonegativo. Existe un PTCP canónico de la forma*

$$K(\pi, n+1) \times_{\tau_{\pi,n}} K(\pi, n)$$

El teorema que sigue es una traducción inmediata en homología efectiva de los resultados que establecieron Eilenberg y MacLane en [EM54], pag. 95-101.

Teorema 3.3.7 *([EM54], pag. 95-101)*

Sea π un grupo abeliano finitamente generado. Entonces $K(\pi, 1)$ es un grupo simplicial conmutativo con homología efectiva.

Gracias a este resultado y al teorema 3.3.5, el algoritmo de cálculo de la homología efectiva de los $K(\pi, n)$ no es más que una aplicación del algoritmo 3.3.4:

Algoritmo 3.3.8 Entrada:

- *Un grupo abeliano π finitamente generado,*
- *un número entero n positivo.*

Procesamiento: *Versión en Homología Efectiva de la sucesión espectral de Eilenberg-Moore, espacio clasificante.*

Salida: *la homología efectiva de un espacio $K(\pi, n)$.*

Capítulo 4

Segundo algoritmo de cálculo de la homología de los espacios clasificantes: el método de Eilenberg-MacLane

El algoritmo 3.3.3 estaba basado en una equivalencia de homotopía entre $C_*(\bar{W}_g G)$ y $Bar^{C_*(G)}(\Lambda, \Lambda)$. Construir una equivalencia de homotopía explícita ***y sin intermediarios*** entre estos objetos supone, por tanto, una ventaja considerable, en cuanto al tiempo de cálculo se refiere, a la hora de obtener la homología efectiva de un espacio clasificante $\bar{W}_g(G)$ de un grupo G.

Para alcanzar este objetivo, la forma de actuar es, primero, formular de manera precisa esta cuestión a nivel simplicial. El texto de Eilenberg-MacLane [EM53] es la referencia obligada para ello; es en ese artículo donde se estudia este problema en detalle: se definen unos objetos $\bar{B}_N(K_N)$ y $\bar{W}_N(K)$, siendo K un álgebra simplicial aumentada, que se corresponden con las construcciones Bar y clasificante definidas anteriormente en esta memoria, y se obtiene un morfismo de DGA-coálgebras (de DGA-álgebras de Hopf si K es conmutativa) $g : \bar{B}_N(K_N) \to \bar{W}_N(K)$ que induce un isomorfismo en homología. En este capítulo, mantendremos intacta la notación de Eilenberg-MacLane y demostraremos que el morfismo g es la inyección de una reducción $R_{\bar{W}\bar{B}}$, como conjeturaron Eilenberg y MacLane. Esta se construirá a partir de reducciones de tipo Eilenberg-Zilber que hay sobre filtraciones de los objetos anteriores, utilizando como herramienta de "ensamblaje" el Lema de Perturbación.

La sección primera la dedicaremos a la formalización del problema, comentando el trabajo de Eilenberg y MacLane sobre este tema. En la segunda, estableceremos la reducción $R_{\bar{W}\bar{B}}$ induciéndola por perturbación de una reducción que se tiene sobre los módulos graduados asociados a unas filtraciones establecidas sobre $\bar{W}_N(K)$ y $\bar{B}_N(K_N)$.

4.1 Preliminares simpliciales

En esta sección introduciremos los objetos y resultados básicos necesarios para poder atacar el problema de la construcción de la reducción R_{WB}. En primer lugar, trataremos las álgebras simpliciales y las consecuencias de suponer la existencia de una aumentación en ellas. En los restantes párrafos examinaremos las construcciones $\bar{B}(\ )$ y clasificante algebraico $\bar{W}(\ )$. Todo lo que sigue, salvo demostración o mención expresa, ha sido extraído del artículo [EM53].

En principio, recordemos que una Λ-álgebra (o simplemente álgebra) simplicial K es un conjunto simplicial, donde los K_n son Λ-álgebras y los operadores ∂_i y s_i son morfismos de Λ-álgebras. Un álgebra simplicial K es conmutativa si cada Λ-álgebra K_n lo es. Llamaremos al producto sobre cada álgebra K_n, producto interno del álgebra simplicial K.

Definamos lo que es una aumentación sobre un álgebra simplicial.

Definición 4.1.1 *Una aumentación de un módulo (resp. álgebra) simplicial K es un morfismo de Λ-módulos (resp. Λ-álgebras) $\xi : K_0 \to \Lambda$ tal que verifica $\xi\partial_0 = \xi\partial_1$ (donde ∂_0, ∂_1 son los operadores de cara de K_1).*

Veamos ahora que, a partir de un álgebra simplicial, podemos obtener una DG-álgebra. En efecto, si tenemos un álgebra simplicial K, entonces el producto:

$$a_p \Diamond b_q = \sum (-1)^{sig(\alpha)} (s_{\beta_q} \dots s_{\beta_1} a_p)(s_{\alpha_p} \dots s_{\alpha_1} b_q), \quad \text{donde } a_p \in K_p, b_q \in K_q \tag{4.1}$$

donde la suma está definida para todos los $(\alpha, \beta) \in \{(p,q) - \text{shuffles}\}$,

y la diferencial (ver lema 1.2.10)

$$d(a_p) = \sum_{i=0}^{p} \partial_i(a_p), \quad \text{donde } a_p \in K_p \text{ y donde } \partial_i \text{ son los operadores de cara de } K_p \tag{4.2}$$

convierten a K en una DG-álgebra. Evidentemente, si el producto interno es conmutativo, el producto $\Diamond$ también lo es. Si K es aumentada, la misma aplicación define una aumentación para la DG-álgebra K. El objeto normalizado K_N será también una DGA-álgebra.

Expongamos varias consecuencias de suponer la existencia de una aumentación ξ sobre un álgebra simplicial K.

Definimos K^u como el subconjunto simplicial de K que está generado como Λ-módulo en cada dimensión por la unidad 1_q de K_q. K^u es, él mismo, un álgebra simplicial y, de hecho, cada álgebra K_q^u es isomorfa a Λ por el morfismo de álgebras $\bar{\xi}$ definido como:

$$\bar{\xi}_q : K_q \to \Lambda \quad \forall q \in \mathbf{N}$$

$$\bar{\xi}(c_q) = \xi(\partial_0^q c_q); \quad c_q \in K_q$$

donde $\partial_0^q = \partial_{q-1} \ldots \partial_0$.

Definimos

$$\bar{K} = Ker(\bar{\xi}). \tag{4.3}$$

Se observa que $\bar{K}$ es un sub-Λ-módulo simplicial de K. Además, se tiene que $K \Diamond \bar{K} \subset \bar{K}$.

La aplicación ξ^u definida como:

$$\xi^u : K \rightarrow K^u$$

$$\xi^u(c_q) = \bar{\xi}(c_q)1_q, \quad c_q \in K_q$$

es un morfismo de álgebras simpliciales teniendo como núcleo a $\bar{K}$. Debido al hecho de que este morfismo es la identidad sobre K^u, obtenemos la descomposición siguiente:

$$K = K^u \oplus \bar{K}$$

Consideremos ahora el morfismo p definido como sigue:

$$p : K \rightarrow \bar{K} \tag{4.4}$$

$$p(a_q) = a_q - \bar{\xi}(a_q)1_q; \qquad a_q \in K_q$$

p es un morfismo simplicial, verifica que $p|_{\bar{K}} = 1_{\bar{K}}$ y que $\mathrm{Ker}\, p = K^u$. En ocasiones por abuso de notación, llamaremos también p al morfismo de DG-módulos inducido $p : K_N \rightarrow \bar{K}_N$.

4.1.1 La construcción $\bar{B}$

En esta subsección, trataremos la construcción $\bar{B}$, que está íntimamente relacionada con la resolución *Bar*, ya definida en esta memoria. En primer lugar, definiremos $\bar{B}$ y estableceremos las estructuras de DGA-coálgebra y DGA-álgebra (en el caso conmutativo) subyacentes. Después, daremos sus propiedades más importantes, para por último establecer su relación concreta con la construcción *Bar*.

Como hemos dicho, existen semejanzas muy marcadas entre la construcción $\bar{B}$ y la resolución *Bar* definida en el capítulo 3. A costa de caer en la repetición, hemos optado por exponer la siguiente definición con todo detalle.

Definición 4.1.2 *Sea A una DGA-álgebra con aumentación ξ. Definimos la DGA-coálgebra $\bar{B}_*(A)$ como sigue:*

$$\bar{B}_*(A) = \Lambda \oplus A \oplus (A \otimes A) \oplus \ldots \oplus (A \otimes \ldots \otimes A) \oplus \ldots$$

Un elemento del producto tensorial $A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$ se escribirá $[a_1|\ldots|a_n]$ y diremos que este elemento es homogéneo si cada a_i es un elemento homogéneo de A.

Su graduación es $|\ |_B = |\ |_t + |\ |_s$ donde $|\ |_t$ es la dimensión tensorial:

$$|[a_1|\ldots|a_n]|_t = \sum_{i=1}^{n} |a_i|,$$

y $|\ |_s$ es la dimensión simplicial:

$$|[a_1|\ldots|a_n]|_s = n.$$

La diferencial sobre $\bar{B}_*(A)$ está definida por:

$$d_B = d_t + d_s,$$

donde la diferencial interna (o tensorial) d_t está determinada por:

$$d_t([a_1|\ldots|a_n]) = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{e_{i-1}}[a_1|\ldots|d_A(a_i)|\ldots a_n],$$

y la diferencial externa (o simplicial) d_s viene definida por:

$$\begin{aligned} d_s([a_1|\ldots|a_n]) \quad = \quad & \xi(a_1)[a_2|\ldots|a_n]+ \\ & + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{e_i}[a_1|\ldots|a_i\, a_{i+1}|\ldots|a_n]+ \\ & + (-1)^{e_n}[a_1|\ldots|a_{n-1}]\xi(a_n) \end{aligned}$$

donde los exponentes e_i vienen dados por las fórmulas:

$$e_i = i + |a_1| + \ldots + |a_i|.$$

Su coproducto (que será coconmutativo salvo homotopía) es

$$\Delta_B([a_1|\ldots|a_n]) = \sum_{i=0}^{n}[a_1|\ldots|a_i] \otimes [a_{i+1}|\ldots|a_n];$$

y su aumentación (que será su counidad) es

$$\xi_B : \bar{B}_*(A) \to \Lambda$$

$$\xi_B(\lambda) = \lambda, \ \ \lambda \in \Lambda;$$

$$\xi_B(u) = 0, \ \ d_B > 0.$$

Es importante resaltar las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}(d_t \otimes 1 + 1 \otimes d_t)\Delta_B &= \Delta_B\, d_t;\\ (d_s \otimes 1 + 1 \otimes d_s)\Delta_B &= \Delta_B\, d_s;\\ d_s\, d_t + d_t\, d_s &= 0;\\ d_t\, d_t &= 0;\\ d_s\, d_s &= 0.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Con ayuda de estas relaciones, se deduce que:

- $\bar{B}_*(A)$ coincide como DGA-módulo con el módulo tensorial $T(A)$, si eliminamos la diferencial simplicial d_s de su diferencial total.
- $\bar{B}_*(A)$ es una DGA-coálgebra con la graduación $|\ |_B$, la diferencial d_t y el coproducto Δ_B. Coincide con la coálgebra tensorial $T^c(A)$.
- $\bar{B}_*(A)$ es una DGA-álgebra con la graduación $|\ |_B$, la diferencial d_t y el producto tensorial (ver (1.4) de la def. 1.1.30). Así, coincidirá como DGA-álgebra, con el álgebra tensorial $T^a(A)$.

  Podemos establecer el algoritmo siguiente que se demuestra como el algoritmo 3.1.2.

Algoritmo 4.1.3 Entrada: *Una DGA-álgebra A con homología efectiva.*
Salida: *La homología efectiva de la construcción $\bar{B}(A)$.*

En el caso en que el álgebra A sea conmutativa, nos encontramos que $\bar{B}_*(A)$ puede ser dotada de un producto que la convierte en álgebra de Hopf.

Proposición 4.1.4 *([GM74a], pag 72) Si la DGA-álgebra A es conmutativa, entonces $\bar{B}_*(A)$ se convierte en un DGA-álgebra de Hopf conmutativa, y coconmutativa salvo homotopía. El producto shuffle $*$, definido en $\bar{B}_*(A)$, es:*

$$[a_1|\dots|a_m] * [b_1|\dots|b_n] = \sum (-1)^{sg(\pi,a,b)}[c_{\pi_1}|\dots|c_{\pi_{(m+n)}}] \tag{4.6}$$

donde la suma está definida para todos los $\pi \in \{(m,n)-shuffles\}$, $sg(\pi,a,b) = \sum_{(i,j),\pi(i)>\pi(j)} d_B[a_i]d_B[b_j]$, y $(c_1,\dots,c_{m+n}) = (a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n)$.

Además, las diferenciales tensorial y simplicial son derivaciones con respecto a este producto.

En cualquier caso, sea o no A conmutativa, podemos dar a $\bar{B}_*(A)$ una estructura de Λ-módulo simplicial de la forma siguiente:

Proposición 4.1.5 *Sea A una DGA-álgebra. Entonces, podemos dotar a $\bar{B}_*(A)$ de una estructura de Λ-módulo simplicial aumentado como sigue:*

$$\bar{B}_*(A)_q = \overbrace{A \otimes \ldots \otimes A}^{q \text{ veces}}$$

con los siguientes operadores de cara y de degeneración:

$$\begin{array}{lcl}
\partial_0[a_1|\ldots|a_q] & = & \xi(a_1)[a_2|\ldots|a_q], \\
\partial_i[a_1|\ldots|a_q] & = & (-1)^{(\|[a_1|\ldots|a_i]\|_t)}[a_1|\ldots|a_i a_{i+1}|\ldots|a_q] \quad 0 < i < q, \\
\partial_q[a_1|\ldots|a_q] & = & (-1)^{(\|[a_1|\ldots|a_q]\|_t)}[a_1|\ldots|a_{q-1}]\xi(a_q), \\
s_0[\,] = [\theta] & & \textit{donde } \theta \textit{ es la identidad de } A \\
s_i[a_1|\ldots|a_q] & = & (-1)^{(\|[a_1|\ldots|a_i]\|_t)}[a_1|\ldots|a_i|\theta|a_{i+1}|\ldots|a_q]
\end{array}$$

y con aumentación $\xi_B : \bar{B}_*(A) \to \Lambda$.

Si A es además conmutativa, entonces podemos dotar a $\bar{B}_*(A)$ de un producto interno

$$\begin{array}{lcl}
1\,1 = 1 \in \Lambda & & \\
[a_1|\ldots|a_q][b_1|\ldots|b_q] & = & (-1)^{\sum_{i<j}|a_j||b_i|}[a_1 b_1|\ldots|a_q b_q]
\end{array}$$

que la convierte en un álgebra simplicial conmutativa aumentada.

En el caso conmutativo podemos, entonces, afirmar que $\bar{B}_*(A)$ es una DGA-álgebra respecto de la graduación $|\,|_s$, la diferencial d_s y el producto $\diamond$ (ver pag. 65). La relación que hay entre el producto $\diamond$ y el producto shuffle definido anteriormente es la siguiente:

$$u * v = (-1)^{|u|_t|v|_s} u \diamond v, \qquad \text{donde } u, v \in \bar{B}_*(A).$$

Con todo lo dicho, estamos en condiciones de establecer el siguiente resultado:

Proposición 4.1.6 *([GM74a], pag. 75)*
Si A es una DGA-álgebra (resp. DGA-álgebra conmutativa), entonces el cociente

$$\bar{B}_N(A) = \frac{\bar{B}_*(A)}{s(\bar{B}_*(A))}$$

es una DGA-coálgebra coconmutativa salvo homotopía, con graduación, diferencial y coproducto inducidos por $|\,|_B$, d_B y Δ_B, respectivamente. Está aumentada por ξ_B. Llamaremos a esta construcción, construcción bar normalizada.

Si A es conmutativa, entonces $\bar{B}_N(A)$ será una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa salvo homotopía, con producto inducido del producto shuffle $*$.

Nota 4.1.7 *Notemos que si tomamos una DGA-álgebra conexa A, la construcción $\bar{B}_N(A)$ no es más que la DGA-coálgebra $T^c(S(\bar{A}))$, "perturbada" por la diferencial simplicial d_s; es decir, $\bar{B}_N(A)$ coincide como DGA-módulo con la construcción $Bar^A(\Lambda, \Lambda)$ definida en el capítulo precedente.*

4.1.2 La construcción $\bar{W}$

Definiremos ahora, la construcción clasificante algebraico $\bar{W}(K)$, donde K es un álgebra simplicial aumentada, y estableceremos sus propiedades estructurales. En el caso de tener un grupo simplicial reducido, la construcción $\bar{W}_N(C_*(G))$ coincidirá con el complejo de cadenas $C_*^N(\bar{W}_g(G))$ como DGA-coálgebras (como DGA-álgebras de Hopf, en el caso de que G fuese conmutativo).

Al igual que en la sección anterior, expondremos con detalle la construcción $\bar{W}(\ )$ y después la relacionaremos con $C_*^N(\bar{W}_g(\ ))$. Hemos mantenido esta "duplicidad" de conceptos, simplemente con el fin de hacer patente la diferencia entre las nociones geométricas y las nociones algebraicas y, sobretodo, con el fin de ajustarnos a la notación que establecieron Eilenberg y MacLane en su artículo [EM53].

Definición 4.1.8 *Sea K un álgebra simplicial conmutativa y aumentada. Definimos una nueva álgebra simplicial conmutativa $\bar{W}(K)$, tal que $\bar{W}_q(K)$ es el producto tensorial de álgebras:*

$$\bar{W}_q(K) = K_{q-1} \otimes \ldots \otimes K_0 \qquad q \geq 0.$$

El producto de la Λ-álgebra $\bar{W}_q(K)$ será:

$$(a_{q-1}, \ldots, a_0) \cdot (b_{q-1}, \ldots, b_0) = (a_{q-1}b_{q-1}, \ldots, a_0 b_0). \tag{4.7}$$

$\bar{W}_q(K)$ está generado por 1, si $q = 0$ y por los elementos $(a_{q-1}, \ldots, a_0)$ si $q \geq 0$. Su elemento unidad es $1_{(q,\bar{W})} = (1_{(q-1,K)}, \ldots, 1_{(0,K)})$ Sus operadores de cara y de degeneración son:

$$\begin{array}{rcll}
\partial_0(a_{q-1}, \ldots, a_0) & = & \xi(a_{q-1})(a_{q-2}, \ldots, a_0), & \\
\partial_i(a_{q-1}, \ldots, a_0) & = & (\partial_{i-1}a_{q-1}, \partial_{i-2}a_{q-2}, \ldots, (\partial_0 a_{q-i})a_{q-i-1}, a_{q-i-2}, \ldots, a_0) & 0 < i < q, \\
\partial_q(a_{q-1}, \ldots, a_0) & = & (\partial_{q-1}a_{q-1}, \partial_{q-2}a_{q-2}, \ldots, \partial_1 a_1)\xi(a_0), & y \\
s_i(a_{q-1}, \ldots, a_0) & = & (s_{i-1}a_{q-1}, \ldots, s_0 a_{q-i}, 1_{(q-i,K)}, a_{q-i-1}, \ldots, a_0). &
\end{array}$$

La aumentación de esta álgebra simplicial $\xi_{\bar{W}}$ es la aplicación identidad sobre $\Lambda = \bar{W}_0(K)$. $\bar{W}(K)$ como DGA-álgebra, resulta conmutativa y conexa.

Es importante notar que la conmutatividad sobre el álgebra simplicial K es esencial para probar que la multiplicación que hay en $\bar{W}_q(K)$ induce una estructura de álgebra simplicial sobre $\bar{W}(K)$. Es decir, si quitamos la hipótesis de conmutatividad sobre K, $\bar{W}(K)$ resulta ser, simplemente, un Λ-módulo simplicial. En cualquier caso, siempre es posible construir el complejo normalizado $\bar{W}_N(K)$ y dotarle de una estructura de coálgebra con el coproducto siguiente:

$$\Delta_{\bar{W}} : \bar{W}_N(K) \to \bar{W}_N(K) \otimes \bar{W}_N(K)$$

$$\Delta_{\bar{W}}(a_{q-1}, \ldots, a_0) = \sum_{i=0}^{q} (\tilde{\partial}^{q-i} a_{q-1}, \ldots, \tilde{\partial}^{q-i} a_{q-i}) \otimes (a_{q-i-1}, \ldots, a_0).$$

donde $\tilde{\partial}^{q-i} a_q = \partial_{i+1} \ldots \partial_q a_q$, $a_q \in K_q$. La aumentación $\xi_{\bar{W}}$ es la counidad de esta coálgebra.

Proposición 4.1.9 *([GM74a], pag. 77) Si K es un álgebra simplicial entonces $\bar{W}_N(K)$ es un DGA-coálgebra coconmutativa salvo homotopía y, si K es además conmutativa entonces $\bar{W}_N(K)$ es una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa salvo homotopía.*

Muy importante es resaltar el hecho siguiente:

Proposición 4.1.10 *([GM74a], pag. 81)*

Si G es un grupo simplicial reducido, la construcción $\bar{W}_N(C_*(G))$ coincide como DGA-coálgebra con $C_*^N(\bar{W}_g(G))$. Si G es conmutativo, entonces coincidirán como DGA-álgebras de Hopf.

La demostración de esta última proposición se basa fundamentalmente en el hecho de que el funtor $\Lambda[\ ]$ (ver def. 1.2.8) convierte productos cartesianos en productos tensoriales y que $\Lambda[*] = \Lambda$. Vemos, pues, que esta proposición también es válida si tomamos las construcciones $\bar{W}(C_*(G))$ y $C_*(\bar{W}_g(G))$ sin nomalizar. Recordemos, además, que la estructura de DGA-álgebra de Hopf que tiene $C_*^N(\bar{W}_g(G))$ es la inducida del producto de Pontrjagin y el coproducto de Alexander-Whitney.

4.1.3 El trabajo de Eilenberg-MacLane sobre la reducción $R_{\bar{W}-\bar{B}}$

Vamos a ocuparnos ahora de comentar con detalle el trabajo realizado por Eilenberg-MacLane [EM53] sobre el problema de obtener una reducción explícita $R_{\bar{W}\bar{B}}$ entre los objetos $\bar{B}_N(K_N)$ y $\bar{W}_N(K)$, donde K es un álgebra simplicial. Ellos construyeron, para K álgebra simplicial conmutativa, un morfismo de DGA-álgebras de Hopf $g_{\bar{W}\bar{B}} : \bar{B}_N(K_N) \rightarrow \bar{W}_N(K)$ que inducía isomorfismo en homología, y conjeturaron que esta flecha era la inyección de una reducción ([EM53], pag. 98). La técnica que emplearon para tratar este problema fue de "filtrar" (ver def. 1.1.12) los objetos en cuestión, obtener una reducción entre los módulos graduados asociados y sacar conclusiones a partir de la misma. Como ya veremos en la sección siguiente, el Lema de Perturbación será la herramienta algebraica que necesitaremos para obtener la reducción $R_{\bar{W}\bar{B}}$.

Todos los resultados de esta subsección pueden ser encontrados en el artículo [EM53], salvo la parte final que constituye nuestro análisis del trabajo realizado por Eilenberg y MacLane, y que comienza a partir del lema 4.1.12. Sólo se especificarán las referencias de los resultados que consideremos esenciales.

Sea K un álgebra simplicial aumentada.

En primer lugar, definimos los Λ-módulos simpliciales $\bar{W}^{(k)}(K)$ y los DG-Λ-módulos $\bar{B}_N^{(k)}(K_N)$ que nos ayudarán a establecer una reducción inicial entre los objetos $\bar{W}_N(K)$ y $\bar{B}_N(K_N)$.

Por una parte, tenemos un "esqueleto" sobre $\bar{W}(K)$. En efecto, definimos:

$$\bar{W}^{(k)}(K) = \{\Lambda\text{-módulo simplicial engendrado en cada dimensión } q \text{ como } \Lambda\text{-módulo por los elementos } (a_{q-1}, \ldots, a_0) \in \bar{W}_q(K) /\ \exists \text{ como mínimo } k \text{ elem. } a_i \in K^u\} \subset \bar{W}_q(K);$$

donde K^u viene definida en la pag. 65.

Se tienen los siguientes resultados:

- Si normalizamos el módulo simplicial $W^{(k)}(K)$, obtenemos un DG-Λ-módulo $W_N^{(k)}(K)$ contenido en $\bar{W}_N(K)$, y su diferencial es la inducida de éste último.
- Tenemos la familia de subconjuntos simpliciales siguiente:

$$W^{(0)}(K) \subset \ldots \subset W^{(k)}(K) \subset W^{(k+1)}(K) \subset \ldots \bar{W}(K)$$

tal que recubre $\bar{W}(K)$ y $W_q^{(k)} = \bar{W}_q(K)$ para todo $k \geq q$. Por supuesto, para el objeto normalizado $\bar{W}_N(K)$, obtenemos la familia siguiente de DG-Λ-módulos:

$$W_N^{(0)}(K) \subset \ldots \subset W_N^{(k)}(K) \subset W_N^{(k+1)}(K) \subset \ldots \bar{W}_N(K) \tag{4.8}$$

que es una filtración de $\bar{W}_N(K)$. Denotaremos dicha filtración por $F_{\bar{W}}$.
- El cociente

$$\bar{W}^{(k+1)}(K) = \frac{W^{(k+1)}(K)}{W^{(k)}(K)}$$

es un Λ-módulo simplicial y admitirá, pués, un normalizado $\bar{W}_N^{(k+1)}(K)$. Con respecto a este último DG-módulo, se puede afirmar que es libre y que:

$$\bar{W}_N^{(k+1)}(K) = \frac{W_N^{(k+1)}(K)}{W_N^{(k)}(K)}. \tag{4.9}$$

Es decir, $\bar{W}_N^{(k+1)}(K)$ constituye el "nivel" $k+1$ en el módulo graduado asociado a la filtración (4.8). Dicho módulo graduado asociado lo denotaremos $G^{F_{\bar{W}}}$. Evidentemente, la diferencial de $\bar{W}_N^{(k+1)}(K)$ es la inducida de la diferencial de $\bar{W}_N(K)$.

Por otra parte, podemos definir los siguientes sub-DG-módulos de $\bar{B}_N(K_N)$:

$$B_N^{(k)}(K_N) \;=\; \{\text{DG-}\Lambda\text{-módulo engendrado por los elementos } u \in \bar{B}_N(K_N) \text{ tales que verifican que } |u|_s \leq k\} \subset \bar{B}_N(K_N)$$

Su diferencial es la inducida por la de $\bar{B}_N(K_N)$.

Se tienen los siguientes resultados:

- La familia de DG-Λ-módulos siguiente:

$$B_N^{(0)}(K_N) \subset \ldots \subset B_N^{(k)}(K_N) \subset B_N^{(k+1)}(K_N) \subset \ldots \bar{B}_N(K_N) \tag{4.10}$$

constituye una filtración de $\bar{B}_N(K_N)$ $(B_{N,q}^{(k)}(K_N) = \bar{B}_{N,q}(K_N)$ para todo $k \geq q)$. Denotaremos dicha filtración por $F_{\bar{B}}$.
- El DG-módulo cociente

$$\bar{B}_N^{(k+1)}(K_N) = \frac{B_N^{(k+1)}(K_N)}{B_N^{(k)}(K_N)} \tag{4.11}$$

es libre y representa al "nivel" $k+1$ del módulo graduado y asociado a la filtración (4.10). Denotaremos dicho módulo por $G^{F_{\bar{B}}}$. El DG-módulo $\bar{B}_N^{(k+1)}(K_N)$ está engendrado por $u \in \bar{B}_N(K_N)\ /d_s(u) = k+1$ y tiene por diferencial la inducida de la diferencial de $\bar{B}_N(K_N)$, es decir, la diferencial tensorial de $\bar{B}_N(K_N)$.

El resultado siguiente será fundamental para la consecución de una reducción entre los módulos graduados asociados a las filtraciones anteriores:

Lema 4.1.11 *([EM53],pag. 100 et 103)*
Tenemos los isomorfismos de DG-módulos siguientes:

$$\varphi : \bar{W}_N^{(k+1)}(K) \to S((\bar{K} \times \bar{W}^{(k)}(K))_N) \text{ definido} \tag{4.12}$$
$$\text{por } \varphi(a_q \otimes u) = p(a_q) \times u \text{ donde } a_q \otimes u \in \bar{W}_N^{(k+1)}(K),$$

y

$$\psi : \bar{B}_N^{(k+1)}(K_N) \to S(\bar{K}_N \otimes \bar{B}_N^{(k)}(K_N)) \text{ definido} \tag{4.13}$$
$$\text{por } \psi([a|u]) = p(a) \otimes u, \text{ donde } \quad a \in K_N, \ y \ u \in \bar{B}_N(K_N).$$

donde S representa la suspensión de DG-módulos y el morfismo p y el Λ-módulo simplicial $\bar{K}$ están definidos por (4.4) y (4.3), respectivamente.

Estamos ya en condiciones de comparar G^{F_W} y G^{F_B}. Haremos esto de forma gradual.

Para el caso $k = 0$, obtenemos un isomorfismo de DG-módulos (trivialmente, una reducción):

$$\bar{B}_N^{(0)}(K_N) \cong \Lambda \cong \bar{W}_N^{(0)}(K)$$

Para el caso $k = 1$ tenemos de nuevo un isomorfismo de DG-módulos r_1:

$$\begin{tikzcd} \bar{B}_N^{(1)}(K_N) \arrow[loop above, "\bar{\phi}_1"] \arrow[r, shift left, "\bar{f}_1"] & \bar{W}_N^{(1)}(K) \arrow[l, shift left, "\bar{g}_1"] \end{tikzcd}$$

donde

$$\bar{f}_1(a_q \otimes 1_{q,W}) = [a_q] \text{ si } a_q \otimes 1_{q,W} \in \bar{W}_{q+1N}^{(1)}(K)$$

$$\bar{g}_1[a_q] = a_q \otimes 1_{q,W} \text{ si } [a_q] \in \bar{B}_{q+1N}^{(1)}(K_N) \tag{4.14}$$

$$\bar{\phi}_1 = 0$$

Para $k = 2$, se considera el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
\bar W_N^{(2)}(K) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, shift right, "\bar f_2"'] & & S((\bar K \times \bar W_N^{(1)}(K)))_N \arrow[loop above, "-SHI_1"] \arrow[d, shift right, "AW_1"'] \\
\bar B_N^{(2)}(K_N) \arrow[u, shift right, "\bar g_2"'] \arrow[r, "\psi"] & S(\bar K_N \otimes \bar B_N^{(1)}(K_N)) \arrow[r, shift left, "1\otimes \bar f_1"] & S(\bar K_N \otimes \bar W_N^{(1)}(K)) \arrow[l, shift left, "1\otimes \bar g_1"] \arrow[u, shift right, "EM_1"']
\end{tikzcd}
$$

donde $1 : \bar K_N \to \bar K_N$ es la identidad y $EZ_1 : \{(\bar K \times \bar W_N^{(1)}(K))_N, \bar K_N \otimes \bar W_N^{(1)}(K), AW_1, EM_1, SHI_1\}$ es una reducción Eilenberg-Zilber (ver 2.1.2). Es decir, podemos construir la reducción:

$$r_2 \equiv \psi^{-1}\, S(1\otimes r_1)\, S(EZ_1)\, \varphi$$

o de forma más desarrollada:

$$r_2 : \{\bar W_N^{(2)}(K), \bar B_N^{(2)}(K_N), \bar f_2, \bar g_2, \bar\phi_2\}$$

donde

$$\bar f_2 = \psi^{-1}(1\otimes \bar f_1)(AW_1)\varphi,$$
$$\bar g_2 = \varphi^{-1}(EM_1)(1\otimes \bar g_1)\psi,$$
$$\bar\phi_2 = -\varphi^{-1}(SHI_1)\varphi - \varphi^{-1}(EM_1)\bar\phi_1(AW_1)\varphi = \varphi^{-1}(SHI_1)\varphi.$$

En el caso $k = n$, nos encontramos con el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
W_N^{(n)}(K) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, shift right, "\bar f_n"'] & & S((K \times W_N^{(n-1)}(K))_N) \arrow[loop above, "-SHI_{n-1}"] \arrow[d, shift right, "AW_{n-1}"'] \\
B_N^{(n)}(K_N) \arrow[u, shift right, "\bar g_n"'] \arrow[r, "\psi"] & S(K_N \otimes B_N^{(n-1)}(K_N)) \arrow[r, shift left, "1\otimes \bar f_{n-1}"] & S(K_N \otimes W_N^{(n-1)}(K)) \arrow[l, shift left, "1\otimes \bar g_{n-1}"] \arrow[u, shift right, "EM_{n-1}"']
\end{tikzcd}
$$

donde $EZ_{n-1} : \{(\bar K \times \bar W_N^{(n-1)}(K))_N, \ \bar K_N \otimes \bar W_N^{(n-1)}(K), \ AW_{n-1}, \ EM_{n-1}, \ SHI_{n-1}\}$ es una reducción Eilenberg-Zilber. Entonces, podemos construir la reducción $r_n : \{\bar W_N^{(n)}(K), \ \bar B_N^{(n)}(K_N), \ \bar f_n, \ \bar g_n, \ \bar\phi_n\}$:

$$r_n \equiv \psi^{-1}\, S(1\otimes r_{n-1})\, S(EZ_{n-1})\, \varphi \tag{4.15}$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{f}_n &= \psi^{-1}\,(1\otimes \bar{f}_{n-1})\,AW^{n-1}\,\varphi,\\ \bar{g}_n &= \varphi^{-1}\,EM^{n-1}\,(1\otimes \bar{g}_{n-1})\,\psi,\\ \bar{\phi}_n &= -\varphi^{-1}\,SHI^{n-1}\,\varphi - \varphi^{-1}\,EM^{n-1}\,(1\otimes \bar{\phi}_{n-1})\,AW^{n-1}\,\varphi.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Resumiendo, se obtienen reducciones r_k que relacionan los DG-módulos $\bar{W}_N^{(k)}(K)$ et $\bar{B}_N^{(k)}(K_N)$ para todo $k \geq 0$.

Nos detenemos ahora para comentar de manera informal el estado en el cual Eilenberg y MacLane dejaron esta cuestión.

Después de haber hecho esta comparación entre los módulos graduados asociados de las filtraciones de $\bar{W}_N(K)$ y $\bar{B}_N(K_N)$, Eilenberg y MacLane pudieron construir de forma recursiva una flecha $g : \bar{B}_N(K_N) \to \bar{W}_N(K)$ que induce isomorfismo en homología y definida por:

$$\begin{aligned} g\,[\,] &= 1_{0,W}\,,\\ g\,[a] &= a\otimes 1_{p,W},\\ g\,[a|u] &= \textstyle\sum_{(\alpha,\beta)} s_\beta a\otimes s_\alpha \bar{g}(u),\end{aligned}$$

$$\text{donde } a\in (K_N)_p,\quad u\in (\bar{B}_N)_q(K_N),\quad \text{y}\quad (\alpha,\beta)\in\{(p,q)-\text{shuffles}\}.$$

Es fácil ver que este morfismo g definido por Eilenberg y Maclane coincide con el morfismo $\bar{g}_k$ anteriormente definido por nosotros, si lo restringimos a $\bar{B}_N^{(k)}(K_N)$, para todo $k \geq 0$. En efecto:

Lema 4.1.12

$$g = \oplus_{k\geq}\bar{g}_k$$

Demostración.

Se hace por inducción en el grado de filtración k.

Para $k = 0$, es evidente que $\bar{g}_0 = g$ en $\bar{B}_N^{(0)}(K_N)$.

Supongamos el resultado cierto para $k = n$, y demostrémoslo para $k = n + 1$. Si desarrollamos la fórmula de la inyección $\bar{g}_n$ de la reducción r_n, obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{g}_n\,[a|u] &= \varphi^{-1}\,EM_{n-1}\,(1\otimes \bar{g}_{n-1})\,\psi\,[a|u] =\\ &= \textstyle\sum_{(\alpha,\beta)} s_\beta a\otimes s_\alpha \bar{g}_{n-1}(u),\end{aligned}$$

$$\text{donde } a\in K_{p,N},\quad u\in \bar{B}_{q,N}(K_N),\quad \text{y}\quad (\alpha,\beta)\in\{(p,q)-\text{shuffles}\}.$$

Como u está en el DG-módulo $\bar{B}_N^{(n)}(K_N)$ tendremos que $\bar{g}_{n+1}(u) = g(u)$, por la hipótesis de inducción. Haciendo la sustitución consiguiente en la fórmula de arriba, encontramos la fórmula para el morfismo global g.

Nota 4.1.13 *Gracias a esta igualdad, todos los resultados que Eilenberg y MacLane probaron para el morfismo global g pueden enunciarse para* $\oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k$.

En contrapartida, Eilenberg y MacLane chocaron con el problema de construir los morfismos globales $f : \bar{W}_N(K) \to \bar{B}_N(K_N)$ y $\phi : \bar{W}_N(K) \to \bar{W}_N(K)$, que sabían que faltaban para tener una reducción $R_{\bar{W}\bar{B}} : \{\bar{W}_N(K),\ \bar{B}_N(K_N),\ f,\ g,\ \phi\}$. Podemos ver, por ejemplo, que el morfismo candidato a ser f, $\oplus \bar{f}_k$, no es ya un morfismo de DG-módulos entre $\bar{W}_N(K)$ et $\bar{B}_N(K_N)$. En efecto, un contraejemplo ya lo encontramos en el grado de filtración 2:

Sea K un algebra simplicial aumentada. Sea $a_2 \otimes a_1 \otimes a_0 \in \bar{W}_N^{(2)}(K)$, *donde* a_2 *y* a_0 *pertenecen a* $\bar{K}$. *El morfismo* $\bar{f}_2$ *actua sobre este elemento produciendo*

$$\bar{f}_2(a_2 \otimes a_1 \otimes a_0) = \bar{\xi}(a_1)[\partial_2 a_2|a_0].$$

Ahora bien, por una parte tenemos:

$$d_B\bar{f}_2 a_2 \otimes a_1 \otimes a_0) = \bar{\xi}(a_1)(-[\partial_2 a_2\, a_0] - [\partial_0\partial 2a_2|a_0] + [\partial_1\partial_2 a_2|a_0])$$

y por otra:

$$\bar{f}_2 d_{\bar{W}}(a_2 \otimes a_1 \otimes a_0) = -[\partial_0\partial_2 a_2\partial_1 a_1|a_0] + [\partial_1\partial_2 a_2|\partial_0 a_1 a_0].$$

Es en este estadio donde Eilenberg y MacLane dejaron la cuestión. Les hacía falta una instrumento algebraico para "pegar" correctamente una serie de reducciones r_n. Esta herramienta es el Lema de Perturbación Homológica, que no había nacido todavía en aquella época.

4.2 Reducción explícita entre $\bar{W}_N(K)$ y $\bar{B}_N(K_N)$

Una vez hechas estas observaciones "históricas", retomemos el trabajo de establecer una reducción $R_{\bar{W}\bar{B}}$. Sabemos que las familias $G^{F_w} = \{\bar{W}_N^{(k)}(K)\}_{k\geq 0}$ y $G^{F_b} = \{\bar{B}_N^{(k)}(K_N)\}_{k\geq 0}$ recubren en tanto que módulos graduados a $\bar{W}_N(K)$ y $\bar{B}_N(K_N)$, respectivamente; vamos a estudiar, ahora, las diferencias que hay entre estos objetos desde un punto de vista diferencial.

De un lado, el trozo de la diferencial del DG-módulo $\bar{W}_N(K)$ que "se pierde" cuando tomamos el DG-módulo $\oplus_{k\geq 0} \bar{W}_N^{(k)}(K)$, es la que va de un DG-módulo $\bar{W}_N^{(k)}(K)$ a $\bar{W}_N^{(k-1)}(K)$; o, lo que es lo mismo, la que está formada por, al menos, un operador de cara que hace disminuir el grado de la filtración $\{W_N^{(k)}(K)\}_{k\geq 0}$. Esta parte de la diferencial $d_{\bar{W}}$ es

$$\rho^{k,k-1} = d_W : W_N^{(k)}(K) \to W_N^{(k-1)}(K), \qquad \forall k \geq 1.$$

Escrito de otra forma:

$$\rho^{k,k-1} = \sum(-1)^i \partial_i^W : W_N^{(k)}(K) \to W_N^{(k-1)}(K) \qquad \forall k \geq 1 \tag{4.17}$$

donde la suma recorre todos los índices i tales que los morfismos anteriores tienen un sentido.

El morfismo que se presenta candidato para ser la perturbación requerida es, pues:

$$\rho = \oplus_{k\geq 1}\rho^{k,k-1}. \tag{4.18}$$

Notation A partir de ahora, la diferencial del DG-módulo $\bar{W}_N^{(k)}(K)$ se escribirá ρ^k. La diferencial de la construcción $\bar{W}_N(K)$ toma la forma:

$$d_W = \oplus_{k\geq 0}(\rho_W^k + \rho_W^{k+1,k})$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que los DG-módulos $\bar{B}_N^{(k)}(K_N)$ tienen por diferencial la diferencial tensorial de $\bar{B}_N(K_N)$, resulta que el DG-módulo $\bigoplus_{k\geq 0}\bar{B}_N^{(k)}(K_N)$ será igual a la construcción $\bar{B}_N(K_N)$ como DG-módulos, si introducimos en ésta suma la diferencial simplicial de $\bar{B}_N(K_N)$.

La idea a desarrollar es, pues, constatar que si aplicamos el Lema de Perturbación a la reducción

$$\oplus_{k\geq 0}\, r_k : \{\bigoplus_{k\geq 0}\bar{W}_N^{(k)}(K), \bigoplus_{k\geq 0}\bar{B}_N^{(k)}(K_N), \oplus_{k\geq 0}\bar{f}_k, \oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k, \oplus_{k\geq 0}\bar{\phi}_k\}. \tag{4.19}$$

considerando como perturbación al morfismo ρ, vamos a encontrar como diferencial final sobre el DG-módulo $\bigoplus \bar{B}_N^{(k)}(K_N)$ la verdadera diferencial de la construcción $\bar{B}_N(K_N)$.

Hagamos notar, en primer lugar, que la reducción y la perturbación anteriores inducen convergencia. Si aplicamos la perturbación ρ a un elemento u de un DG-módulo $\bar{W}_N^{(k)}(K)$, el resultado $\rho(u) = \rho^{k,k-1}(u)$ queda en el DG-módulo $\bar{W}_N^{(k-1)}(K)$; si ahora, hacemos actuar la homotopía de la reducción (4.19), que en este caso es $\bar{\phi}_{k-1}$, sobre $\rho^{k,k-1}(u)$, entonces obtenemos un elemento $\bar{\phi}_{k-1}\rho^{k,k-1}(u)$ que nos queda en $\bar{W}_N^{(k-1)}(K)$. Luego, de esto se infiere que el morfismo composición de la homotopía de la reducción r y la perturbación ρ es localmente nilpotente.

Demostremos el lema siguiente:

Lema 4.2.1 *Los morfismos $\bar{g}_k$ verifican:*

$$\rho^{k,k-1}\bar{g}_k = \bar{g}_{k-1}d_s \qquad \forall k \geq 1 \tag{4.20}$$

donde d_s es la diferencial simplicial de la construcción $\bar{B}(K_N)$.

Demostración

Hay que tomar simplemente en consideración el lema (4.1.12), la nota (4.1.13) y que el morfismo global g conmuta con las diferenciales de $\bar{B}_N(K_N)$ y $\bar{W}_N(K)$ (ver [EM53], pag. 94). Más precisamente, este último resultado afirma que para todo elemento $u \in \bar{B}_N(K_N)$,

$$\partial_0^W g(u) = g\partial_0^{\bar{B}}(u), \quad \text{si } u \in \bar{B}_N(K_N)/\ |u|_s > 1$$

$$-d_W^* g(u) = g(d_r - d_s^*)(u), \quad \text{si } u \in \bar{B}_N(K_N),$$

donde cada $d^*(v)$ designa la suma $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\partial_i(v)$, siendo n el grado del elemento v. Luego, podemos "traducir" este resultado en términos de los morfismos $\{\bar{g}_k\}_{k\geq 0}$ como sigue:

$$\partial_0^W \bar{g}_k = \bar{g}_{k-1} g \partial_0^{\bar{B}}, \quad \text{si } u \in \bar{B}_N^{(k)}(K_N),\ k \geq 1 \tag{4.21}$$

$$-d_W^* \bar{g}_k(u) = (\bar{g}_k d_r - \bar{g}_{k-1} d_s^*)(u), \quad \text{si } u \in \bar{B}_N^{(k)}(K_N),\ k \geq 1 \tag{4.22}$$

Estas igualdades admiten una segunda lectura, en la que aparecen las perturbaciones $\rho^{k,k-1}$ (ver 4.17):

$$(\rho_W^k + \rho^{k,k-1})\bar{g}_k(u) = (\bar{g}_k d_r - \bar{g}_{k-1} d_s)(u), \quad \text{si } u \in \bar{B}_N^{(k)}(K_N),\ k \geq 1 \tag{4.23}$$

donde ρ_W^k es la diferencial del DG-módulo $\bar{W}_N^{(k)}(K)$ (notación de la sección 4.2).
Finalmente, si en (4.23) aislamos la parte que decala en uno el grado de filtración, resulta:

$$\rho^{k,k-1}\bar{g}_k(u) = \bar{g}_{k-1}\, d_s(u), \quad \text{si } u \in \bar{B}_N^{(k)}(K_N),\ k \geq 1 \tag{4.24}$$

Por tanto, se tiene (4.20).

Estamos en condiciones de verificar que la reducción (4.19) perturbada por (4.18),

$$(\bigoplus_{k\geq 0} r_k)_\rho \tag{4.25}$$

es una reducción entre los DG-módulos $\bar{W}_N(K)$ y $\bar{B}_N(K_N)$. En efecto, el Lema de Perturbación Homológica nos aporta las fórmulas siguientes:

$$d_\rho = d_t + (\oplus_{k\geq 0}\bar{f}_k)\rho\Sigma_\infty(\oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k); \tag{4.26}$$

$$f_\rho = (\oplus_{k\geq 0}\bar{f}_k)[1 - \rho\Sigma_\infty(\oplus_{k\geq 0}\bar{\phi}_k)]; \tag{4.27}$$

$$g_\rho = \Sigma_\infty(\oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k); \tag{4.28}$$

$$\phi_\rho = \Sigma_\infty(\oplus_{k\geq 0}\bar{\phi}_k). \tag{4.29}$$

donde $\Sigma_\infty = 1 - (\oplus_{k\geq 0}\bar{\phi}_k)\rho - \ldots + (-1)^i[(\oplus_{k\geq 0}\bar{\phi}_k)\rho]^i + \ldots$.
En particular, la fórmula (4.26) se reduce a

$$
\begin{aligned}
d_\rho &= d_t + (\oplus_{k\geq 0}\bar{f}_k)(\sum_{n\geq 0}(-1)^n[\rho(\oplus_{k\geq 0}\bar{\phi}_k)]^n\rho)(\oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k) = \\
&= d_t + (\oplus_{k\geq 0}\bar{f}_k)(\oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k)d_s = \qquad (4.30)\\
&= d_t + d_s = d_{\bar{B}} \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

donde (4.30) se deduce del resultado (4.20) y de la propiedad de anulación $\bar{\phi}_k\bar{g}_k = 0$, y (4.31) se deduce de la propiedad de anulación $\bar{f}_k\bar{g}_k = 0, \ \forall k \geq 0$.

Además, la fórmula (4.28) de la inyección de la reducción queda:

$$
g_\rho = \oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k, \qquad (4.32)
$$

resultado esperado, teniendo en cuenta el lema (4.1.12).

De todo lo que precede, resulta:

Teorema 4.2.2 *Sea K una Λ-álgebra simplicial aumentada (resp. un álgebra simplicial aumentada conmutativa). Entonces, podemos construir una reducción a nivel de DGA-módulos:*

$$
R_{WB} : \{\bar{W}_N(K),\ \bar{B}_N(K_N),\ f_{WB},\ g_{WB},\ \phi_{WB}\} \qquad (4.33)
$$

donde la inyección $g_{\bar{W}\bar{B}}$ es un morfismo de DGA-coálgebras (resp. es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf). La proyección f_{WB} es un morfismo de DGA-coálgebras salvo homotopía (resp. es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf salvo homotopía).

Demostración

La reducción en cuestión es (4.25) y las fórmulas de los morfismos integrantes vienen dadas por (4.27), (4.28) y (4.29). El hecho de que la inyección g_{BW} sea un morfismo de DGA-coálgebras (un morfismo de DGA-álgebras de Hopf, en el caso conmutativo) se debe a (4.32) y al resultado demostrado por Eilenberg-MacLane (ver [EM53], pag. 94, y [EM54], pag. 74-75) de que $\oplus_{k\geq 0}\bar{g}_k$ es un morfismo de DGA-coálgebras (un morfismo de DGA-álgebras de Hopf, en el caso conmutativo).

Además, si g_{WB} es un morfismo de DGA-coálgebras, la proyección f_{WB} verifica:

$$
\begin{aligned}
& f_{WB}g_{WB} = 1_B \Rightarrow (f_{WB}\otimes f_{WB})(g_{WB}\otimes g_{WB})\Delta_B = \Delta_B \Rightarrow \\
& \Rightarrow (f_{WB}\otimes f_{WB})\Delta_W g_{WB} = \Delta_B \Rightarrow (f_{WB}\otimes f_{WB})\Delta_W g_{WB}f_{WB} = \Delta_B f_{WB}; \Rightarrow \\
& \Rightarrow (f_{WB}\otimes f_{WB})\Delta_W(1_{\bar{W}} - d_W\phi_{WB} - \phi_{WB}d_W) = \Delta_B f_{WB} \Rightarrow \\
& \Rightarrow (f_{WB}\otimes f_{WB})\Delta_W - \Delta_B f_{WB} = d_B(f_{WB}\otimes f_{WB})\Delta_W\phi_{WB} + (f_{WB}\otimes f_{WB})\Delta_W\phi_{WB}d_W.
\end{aligned}
$$

Es decir, f_{WB} es un morfismo de DGA-coálgebras salvo homotopía. De igual forma, podemos obtener que $f_{\bar{W}\bar{B}}$ es un morfismo de DGA-álgebras salvo homotopía, si la inyección $g_{\bar{W}\bar{B}}$ es un morfismo de DGA-álgebras.

La consecuencia algorítmica que se deduce de este teorema es clara. Hay una evidente mejora en el algoritmo de cálculo de la homología efectiva de los espacios clasificantes. En efecto, dado un grupo simplicial reducido con homología efectiva G, podemos construir una coálgebra-reducción (álgebra de Hopf-reducción, en el caso en que G sea conmutativo) explícita y directa entre $C_*^N(\bar{W}_g(G)) \cong \bar{W}_N(C_*(G))$ y $\bar{B}_N(C_*^N(G))$ y este último objeto tiene homología efectiva (ver prop. 4.1.3).

4.2.1 Naturalidad de la reducción R_{WB}

Una cuestión que cabe preguntarse sobre la reducción R_{WB} es si es natural; es decir, si tenemos un morfismo simplicial de álgebras simpliciales aumentadas $h : K \rightarrow K'$, el diagrama siguiente resulta conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\bar{W}_N(K) \arrow[loop above, "\phi_{WB}"] \arrow[r, shift left, "f_{WB}"] \arrow[d, "\bar{W}_N(h)"'] & \bar{B}_N(K_N) \arrow[l, shift left, "g_{WB}"] \arrow[d, "\bar{B}_N(h)"'] \\
\bar{W}_N(K') \arrow[loop above, "\phi_{\bar{W}\bar{B}}"] \arrow[r, shift left, "f_{\bar{W}\bar{B}}"] & \bar{B}_N(K'_N) \arrow[l, shift left, "g_{\bar{W}\bar{B}}"]
\end{tikzcd}
$$

donde los morfismos de DG-módulos $\bar{W}_N(h)$ y $\bar{B}_N(h)$ están definidos por:

$$\bar{W}_N(h)(a_{q-1}, \ldots, a_0) = (h_{q-1}(a_{q-1}), \ldots, h_0(a_0)), \quad \text{si} \quad (a_{q-1}, \ldots, a_0) \in \bar{W}_q(K),$$

y

$$\bar{B}_N(h)[a_1|\ldots|a_n] = [h(a_1)|\ldots|h(a_n)] \quad \text{si} \quad [a_1|\ldots|a_n] \in \bar{B}_N(K_N).$$

Para este estudio, nos remitimos, en principio a la naturalidad de la reducción $\oplus_{k \geq 0} r_n$ de la cual proviene la reducción $R_{\bar{W}\bar{B}}$. Demostremos por inducción en el grado de filtración k, que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus \bar{W}_N^{(k)}(K) \arrow[loop above, "\oplus\bar{\phi}_k"] \arrow[r, shift left, "\oplus \bar{f}_k"] \arrow[d, "\bar{W}(h)"'] & \bigoplus \bar{B}_N^{(k)}(K_N) \arrow[l, shift left, "\oplus\bar{g}_k"] \arrow[d, "\bar{B}(h)"'] \\
\bigoplus \bar{W}_N^{(k)}(K') \arrow[loop above, "\oplus\bar{\phi}_k"] \arrow[r, shift left, "\oplus \bar{f}_k"] & \bigoplus \bar{B}_N^{(k)}(K'_N) \arrow[l, shift left, "\oplus\bar{g}_k"]
\end{tikzcd} \tag{4.34}$$

Probemoslo primero para $\oplus \bar{f}_k$. La demostración para la inyección es completamente análoga.

Para $k = 0$, es trivial. Para $k = 1$, obtenemos

Sea $a_{p-1} \otimes 1_{p-1,\bar{W}} \in \bar{W}_N^{(1)}(K)$

$$\bar{B}(h)\bar{f}_1(a_{p-1} \otimes 1_{p-1,\bar{W}}) = [h(a_{p-1})] = \bar{f}_1 \bar{W}(h)(a_{p-1} \otimes 1_{p-1,\bar{W}})$$

Supongamos cierto el resultado para $k = n - 1$ y comprobémoslo para n.

Sea $a_{p-1} \otimes \ldots \otimes a_0 \in \bar{W}_N^{(n)}(K)$

$$\begin{aligned}
\bar{B}(h)\bar{f}_n(a_{p-1} \otimes v_{p-1}) &= \bar{B}(h)\psi^{-1}(1 \otimes \bar{f}_{n-1})\, AW_{n-1}\, \varphi(a_{p-1} \otimes v_{p-1}) = \\
&= \bar{B}(h)\psi^{-1}(1 \otimes \bar{f}_{n-1})(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\partial}^{p-1-i}\, p(a_{p-1}) \otimes \partial_0^i v_{p-1}) = \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} h\, p\partial^{p-1-i}(a_{p-1}) \otimes \bar{B}(h)\bar{f}_{n-1}\partial_0^i v_{p-1} = \qquad (4.35) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\partial}^{p-1-i} p\, h(a_{p-1}) \otimes \bar{f}_{n-1}\, \bar{W}(h)\partial_0^i v_{p-1}. \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

El resultado (4.35) se tiene ya que el morfismo p es un morfismo simplicial. El resultado (4.36) es gracias a la hipótesis de inducción, a que h es un morfismo simplicial y al hecho de que se los morfismos p y h conmutan:

$$p\,h(a) = h(a) - \xi_{K'}(h(a))1_{q,K} = h(a) - \xi_K(a)1_{q,K} = h\,p(a), \quad \text{si} \quad a \in K_q.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\bar{f}_n \bar{W}(h)(a_{p-1} \otimes v_{p-1}) &= \psi^{-1}(1 \otimes \bar{f}_{n-1})\, AW_{n-1}\varphi(h(a_{p-1}) \otimes \bar{W}(h)v_{p-1}) = \\
&= \psi^{-1}(1 \otimes \bar{f}_{n-1})(\sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\partial}^{p-1-i}\, p\,h(a_{p-1}) \otimes \partial_0^i \bar{W}(h)v_{p-1}) = \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{\partial}^{p-1-i}\, p\,h(a_{p-1}) \otimes \bar{f}_{n-1}\bar{W}(h)\partial_0^i v_{p-1}. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

obteniendo el mismo resultado (4.36). La última igualdad (4.37) se obtiene teniendo en cuenta que $\bar{W}(h)$ es un morfismo simplicial.

Igualmente, se puede probar que la composición $(\oplus\bar{\phi}_k)W(h)(\oplus\bar{\phi}_k)$ es nula. Deducimos, pues, que el último diagrama representa la reducción $C(\bar{W}(h))(\oplus_{k\geq 0}r_k, \oplus_{k\geq 0}r_k)$ entre los conos de $\bar{W}(h)$ y $\bar{B}(h)$.

Apliquemos ahora el Lema de Perturbación a esta reducción tomando como perturbación $-\rho \oplus \rho$. Sabemos que ρ y $\oplus_{k\geq 0}r_k$ inducen convergencia y se verifica la relación $\rho\bar{W}(h) - \bar{W}(h)\rho = 0$ (ya que h es un morfismo de álgebras simpliciales). Finalmente, el lema 2.4.7 se puede aplicar en este caso y obtenemos la equivalencia

$$C(\bar{W}(h))(\oplus_{k\geq 0}r_k, \oplus_{k\geq 0}r_k)_{(-\rho\oplus\rho)} \equiv C(\bar{W}(h))(R_{WB}, R_{WB}).$$

Ahora bien, esta última reducción es de la forma (4.34), lo que demuestra el siguiente teorema:

Teorema 4.2.3 *La reducción* $R_{WB} : \{\bar{W}_N(K), \bar{B}_N(K_N), f_{WB}, g_{WB}, \phi_{WB}\}$ *es natural.*

Capítulo 5

Cálculo de la homología efectiva de los espacios de Eilenberg-MacLane: el método de Cartan

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar el problema de calcular la homología efectiva de los espacios de Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$, donde π es un grupo abeliano finitamente generado y n es un número natural. La cuestión de determinar el álgebra de homología de estos espacios fue intensísimamente tratada por varios matemáticos durante el periodo 1950-1954, y completamente resuelta por Henri Cartan en 1954. Un resumen histórico de la evolución de este problema en ese periodo se impone. Para hacerlo, hemos seguido en gran parte el texto ([Die89], pag. 474-478) Por una parte, hacia 1950, Eilenberg y MacLane comenzaron a atacar el problema del cálculo de $H_*(K(\pi, n); \Lambda)$ para anillos generales Λ. Su idea era sustituir el complejo de cadenas $C_*(K(\pi, n))$ por otro de la misma homología, pero más fácilmente manejable. Ellos establecieron que existía un isomorfismo en homología entre $C_*(K(\pi, n))$ y el DG-módulo $\bar{B}^n(\Lambda[\pi])$, obtenido de aplicar n construcciones Bar al álgebra $\Lambda[\pi]$.

Usando esta relación, pudieron computar los grupos de homología $H_{n+q}(Z, n; Z)$ con $n > q$, para $q \leq 10$ ([EM54]). Señalemos que una gran parte del trabajo de Eilenberg y MacLane sobre esta cuestión admite una 'traducción' directa en Homología Efectiva, ya que ellos trabajaban, siempre que era posible, con equivalencias de homotopía explícitas.

Por otra parte, en su tesis ([Ser51]) Serre dio un método de cálculo de $H_*(K(\pi, n); \Lambda)$ por inducción, aplicando de forma iterada la sucesión espectral de homología de Serre a la fibración (especie de equivalente topológico de la noción simplicial de producto torcido o fibrado)

$$K(\pi, q) \hookrightarrow P_{x_0}K(\pi, q+1) \xrightarrow{p} K(\pi, q+1),$$

del espacio de caminos de $K(\pi, q+1)$ con origen fijo x_0. Mas tarde, en 1952, usó el mismo método, junto con propiedades de los cuadrados de Steenrod (operaciones cohomológicas), para determinar la cohomología $H^*(K(\pi, n); Z_2)$ para grupos conmutativos finitamente generados π ([Ser53]).

Por último en 1954, Henri Cartan zanjó la cuestión del cálculo del álgebra de homología de dichos espacios en el genial seminario [Car56] de 1954-1955 sobre homotopía y espacios de Eilenberg-MacLane. Cartan generalizó la construcción bar de una DGA-álgebra A, $\bar{B}(A)$, creando el concepto de construcción. Grosso modo, una construcción (A, N, M) sobre A constituye una especie de equivalente algebraico de fibración $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$ de un espacio contráctil X, donde M corresponde al complejo de cadenas del espacio total $C_*(X)$, N al de la base $C_*(B)$, y A al de la fibra $C_*(F)$. En lo que sigue, utilizaremos esta analogía cuando nos refiramos a una construcción. Definió asimismo lo que era una construcción iterada $(A^{(n-1)}, A^{(n)}, M^{(n)})_{n\geq 1}$ sobre una DGA-álgebra $A = A^{(0)}$ y demostró que $\bar{B}(\,)$ podía admitir una iteración $(\bar{B}^{(n-1)}(A), \bar{B}^{(n)}(A), B^{(n)}(A))_{n\geq 0}$ sobre una DGA-álgebra A cualquiera. Además, Cartan estableció un "criterio de unicidad" entre construcciones con "fibras" homológicamente equivalentes, en el sentido que las "bases" resultan también homológicamente equivalentes. Esto significa, en particular, que partiendo de una construcción iterada cualquiera $(A^{(n-1)}, A^{(n)}, M^{(n)})_{n\geq 1}$ sobre una DGA-álgebra A, podemos obtener un morfismo de DGA-álgebras $A^{(n)} \to \bar{B}^{(n)}(A)$ que induce un isomorfismo en homología.

Con todas estas consideraciones y planteando el caso particular del álgebra $\mathbf{Z}[\pi]$ de un grupo abeliano π, consiguió, mediante una inteligente elección de construcción iterada sobre este álgebra, determinar $H_*(\pi, n; \mathbf{Z})$. Más precisamente, Cartan trató este problema primero para los cuerpos finitos $\Lambda = Z_p$ con p primo, concluyendo que la construcción iterada para $\Lambda[\pi]$ podía establecerse usando como "bloques de construcción" o "complejos elementales" productos tensoriales de álgebras exteriores y álgebras polinomiales con un sólo generador (resultados que eran previsibles, a la luz de los trabajos que había realizado Serre). De esta forma, Cartan dio un cálculo completo de la homología de un $K(\pi, n)$ con coeficientes enteros mod p. Aún más, determinó la homología entera $H_*(K(\pi, n); Z)$. Usando las operaciones homológicas aplicables para coeficientes mod p -suspensión, transpotencia y potencias modificadas- construyó, gracias a ellas, el producto tensorial de un número determinado de complejos elementales, uno para cada operación homológica apropiada. Entonces, la homología de este producto tensorial reducida por ciertas identificaciones daba la requerida homología entera de un espacio de Eilenberg-MacLane.

Ahora bien, es importante destacar el hecho de que, a pesar de poder explicitar la homología de los espacios de Eilenberg-MacLane, el trabajo de Cartan no admite una 'traducción' en Homología Efectiva, es decir, no puede considerarse como un método de cálculo de una *homología efectiva* de estos espacios. Esto es debido, fundamentalmente, al hecho de que Cartan trabaja con la noción de *isomorfismo en homología*, concepto que es esencialmente más débil que el de *equivalencia de homotopía.*

Una vez hecha esta mirada retrospectiva, resumiendo, podemos decir que el problema del cálculo de homología *efectiva* de los $K(\pi, n)$ se quedó "estancado" en la consecución de unos morfismos de DGA-álgebras g_1 y g_2, que inducen isomorfismos en homología y que preservan las estructuras multiplicativas (g_1 será también un morfismo de DGA-coálgebras), tal que:

$$C_*(K(\pi, n)) \xleftarrow{g_1} \bar{B}^n(\Lambda[\pi]) \xleftarrow{g_2} \otimes(\text{complejos elementales}). \qquad (5.1)$$

Nuestro objetivo es, pues, intentar obtener equivalencias de homotopía explícitas entre los objetos "ligados" en (5.1). En cuanto a obtener una reducción explícita entre $C_*(K(\pi, n))$ y $\bar{B}^n(\Lambda[\pi])$, todo se limita a utilizar la reducción $R_{\bar{W}B}$ obtenida en el capítulo anterior y de generalizarla para clasificantes iterados. Sin embargo, el establecer una equivalencia de homotopía entre los dos últimos objetos de (5.1) resulta mucho más complicado de realizar y, precisamente, en esa tarea hemos invertido la mayor parte de este capítulo. Si nos restringimos a que el anillo de base Λ sea $\mathbf{Z}_{(p)}$ -$\mathbf{Z}$ localizado en p, con p primo- podemos obtener el resultado principal en este capítulo: la determinación de una reducción explícita entre $\bar{B}^n(\Lambda[\pi])$, siendo π un grupo abeliano y finitamente generado, y el producto tensorial de complejos elementales obtenido ya por Cartan para ese caso concreto.

En este capítulo, estudiaremos en primer lugar la construcción $\bar{B}$ desde el punto de vista de la teoría de la Perturbación Homológica. Después, diseñaremos un proceso de construcción para las reducciones que se establecen entre las construcciones bar iteradas del álgebra $\mathbf{Z}_{(p)}[\pi]$ y los productos tensoriales de complejos elementales, reducciones que se corresponden con los pasos sucesivos en una determinada construcción iterada sobre el álgebra $\mathbf{Z}_{(p)}[\pi]$. El hecho de trabajar con este anillo nos permitirá un "buen" desarrollo en el proceso iterativo, al tiempo que podremos extraer toda la información homológica p-primaria. Exactamente, hemos estructurado esta sección en dos partes: una, donde describiremos las DGA-álgebras que intervienen en el proceso iterativo, y otra, donde estableceremos los resultados fundamentales que permitirán la iteración. Seguidamente, especificaremos un algoritmo de construcción de la $\mathbf{Z}_{(p)}$-homología efectiva de un $K(\pi, n)$, siendo el anillo de base $\mathbf{Z}_{(p)}$. Nos basaremos en el hecho de que son clasificantes iterados y en el proceso iterativo de la sección anterior.

5.1 Más sobre la construcción Bar

En esta sección, trataremos la construcción Bar (ver la subsección 4.1.1) en el contexto de la teoría de la Perturbación Homológica. En primer lugar, expondremos los estudios realizados por Gugenheim, Lambe y Stasheff en [GL89] y [GLS91], y por Huebschmmann y Kadeishvili en [HK91]. En estos artículos, el problema de la perturbación de una reducción r entre DGA-(co)álgebras, se ataca imponiendo una fuerte condición sobre la homotopía. Exactamente, el Lema de Perturbación que utilizan es el lema LPA(C)-1 (ver teorema 2.4.14) de esta memoria. Para estar seguros que esta condición se satisface, ellos consideran la reducción tensorial $T(r)$ (ver lema 2.1.11). Gracias a esta técnica, se pueden establecer propiedades de preservación de las estructuras de coálgebra -generadas por $\Delta_{\bar{B}}$- y de álgebra -generadas por el producto tensorial- sobre reducciones de construcciones Bar. Aquí, completaremos este trabajo, estudiando el comportamiento de estas reducciones cuando se considera el producto shuffle $*$. Posteriormente, expondremos una reducción de tipo Eilenberg-Zilber, ya descrita por Eilenberg-MacLane, que puede establecerse entre $\bar{B}_N(A \otimes A')$ y $\bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A')$, donde A y A' son dos DGA-álgebras. Finalmente, trataremos un tipo especial de perturbación que puede darse para esta clase de reducciones, que llamaremos perturbación simple, y comentaremos las consecuencias que conlleva perturbar una reducción del tipo anterior con una perturbación simple.

Comenzaremos, pues, por mostrar en qué resultados elementales y conocidos se fundamenta esencialmente los trabajos sobre perturbación de reducciones de DGA-(co)álgebras de los autores citados al principio de la sección:

Proposición 5.1.1 *Sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG-módulos conexos. Entonces, la reducción*

$$T^c(S(\bar{r})) : \{T^c(S(\bar{N})), T^c(S(\bar{M})), T(f), T(g), T(\phi)\} \tag{5.2}$$

donde $T(f)$, $T(g)$ y $T(\phi)$ denotan los morfismos definidos en el lema 2.1.11, es una reducción de DGA-coálgebras (ver def. 1.1.30). Además, $T(\phi)$ es una homotopía de coálgebras, es decir, verifica la condición siguiente:

$$(1 \otimes T(\phi) + T(\phi) \otimes T(g)T(f))\Delta_{T(S(\bar{N}))} = \Delta_{T(S(\bar{N}))}T(\phi).$$

Proposición 5.1.2 *Sea $r : \{N, M, f, g, \phi\}$ una reducción de DG-módulos conexos. Entonces, la reducción*

$$T^a(S(\bar{r})) : \{T^a(S(\bar{N})), T^a(S(\bar{M})), T(f), T(g), T(\phi)\} \tag{5.3}$$

donde $T(f)$, $T(g)$ y $T(\phi)$ denotan los morfismos definidos en el lema 2.1.11, es una reducción de DGA-álgebras, consideradas ambas con el producto tensorial. Además, $T(\phi)$ es una homotopía de álgebras, es decir, verifica la condición siguiente:

$$T(\phi)\mu_{T(S(\bar{N}))} = \mu_{T(S(\bar{N}))}(1 \otimes T(\phi) + T(\phi) \otimes T(f)T(g).$$

Como se estableció en [GL89] y [HK91], si N es una DG-álgebra conexa, podemos aplicar el Lema de Perturbación LPA(C)-1 a las reducciones (5.2) y (5.3), tomando como perturbación la diferencial simplicial d_s^N de la construcción $\bar{B}_N(N)$, obteniendo así, no una reducción entre los DG-módulos originales, sino una reducción entre los correspondientes "espacios clasificantes". Para mostrar en detalle esta técnica, veamos el siguiente teorema que podemos deducir de lo establecido en [GLS91], en las pag. 367-368.

Teorema 5.1.3 *Sea $r : \{A, A', f, g, \phi\}$ una reducción de DGA-módulos, siendo A y A' dos DGA-álgebras conexas. Si r es una DGA-álgebra-reducción , entonces podemos construir la reducción de DGA-coálgebras siguiente:*

$$\bar{B}_N(r) : \{\bar{B}_N(A), \bar{B}_N(A'), \bar{B}(f), \bar{B}(g), \bar{B}(\phi)\} \tag{5.4}$$

donde la homotopía $\bar{B}(\phi)$ es una homotopía de coálgebras.

Demostración.

En este caso, podemos aplicar el Lema LPC-1 (ver (2.47) en la pag. 47), a la reducción $T(S(\bar{r}))$ (5.2) de la proposición 5.1.1, tomando como perturbación la diferencial simplicial d_s^A de la construcción $\bar{B}_N(A)$ que constituye una coderivación (ver la nota 4.1.7 y la segunda relación de (4.5) de esa misma subsección). Además, d_s^A induce convergencia en la reducción $T(S(\bar{r}))$, ya que el término corrector $T(\phi)d_s^A$ hace decrecer la dimensión tensorial en uno y, entonces, al iterarlo un número finito de veces será cero. Por tanto, podemos construir la siguiente reducción de DGA-coálgebras:

$$[T(S(\bar{r}))]_{d_s^A} : \{\bar{B}_N(A), (T^c(S(\bar{A}')), d), T_{d_s^A}(f), T_{d_s^A}(g), T_{d_s^A}(\phi)\} \tag{5.5}$$

donde $(T^c(S(\bar{A}')), d)$ denota al Λ-módulo graduado $T^c(S(\bar{A}'))$ dotado de una cierta diferencial d. Además, $T_{d_s^A}(\phi)$ es una homotopía de coálgebras.

Como r es una DGA-álgebra-reducción, supongamos, por ejemplo, que la inyección g es un morfismo de DGA-álgebras (de forma análoga se demuestra si tomamos f multiplicativa). Aparte de la diferencial tensorial banal, encontramos como parte de la diferencial d de $T^c(S(\bar{A}'))$:

$$\begin{aligned} T(f)d_s^A \Sigma_\infty^{d_s^A} T(g) &= T(f)d_s^A(1 - T(\phi)d_s^A + \ldots)T(g) = \\ &= T(f)d_s^A T(g) - T(f)d_s^A(T(\phi)d_s^A - \ldots)T(g) = \\ &= T(f)T(g)d_s^{A'} - 0 = \\ &= d_s^{A'}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde (5.6) se ha obtenido gracias a las igualdades

$$\begin{aligned} d_s^A T(g) &= T(g)d_s^{A'} \text{ y} \\ T(\phi)d_s^A T(g) &= 0, \end{aligned}$$

que se tienen por ser g multiplicativa. Es decir, hemos demostrado que el DG-módulo $(T^c(S(\bar{A}')), d)$ coincide con $\bar{B}_N(A')$.

Además, si examinamos en este caso el morfismo $T_{d_s^A}(g)$, vemos que permanecido inalterado por la perturbación:

$$T_{d_s^A}(g) = T(g) = \bar{B}(g). \tag{5.7}$$

Por tanto, podemos concluir que la reducción de DGA-coálgebras (5.5) es la reducción (5.4) que buscábamos.

Nota 5.1.4 *En [GLS91], una A_∞-álgebra es un módulo conexo M con una diferencial d, que es, al tiempo, una coderivación de la coálgebra tensorial $T^c(S(\bar{M}))$ y una perturbación de la diferencial tensorial banal, es decir, difiere de la diferencial tensorial en términos en los cuales decrece el número de factores tensoriales. Si en el teorema anterior, la reducción r hubiera sido sólamente una reducción de DGA-módulos o A' hubiera sido sólo un DGA-módulo conexo, el par $(T(S(\bar{A}')), d)$ obtenido en (5.5) sería un ejemplo de A_∞-estructura. En este caso, $(T(S(\bar{A}')), d)$ es la construcción bar tilde de A', $\bar{B}(A')$ (ver [Sta63b]). Es patente y conocida la equivalencia de esta interpretación de A_∞-álgebra con la definición 1.1.32. Además, la técnica de la construcción bar tilde proporciona una forma más compacta de obtener los m_i productos que la establecida en la subsección 2.4.3.*

Completaremos este estudio, con los dos teoremas en los cuales consideraremos el producto shuffle $*$ (ver (4.6) de la subsección 4.1.1) en las construcciones Bar puestas en juego.

Teorema 5.1.5 *Sea $r : \{A,\ A',\ f,\ g,\ \phi\}$ una reducción de DGA-módulos siendo A y A' dos DGA-álgebras conmutativas conexas. Si r es una DGA-álgebra-reducción entonces, podemos construir la DGA-álgebra de Hopf-reducción siguiente:*

$$\bar{B}_N(r) : \{\bar{B}_N(A),\ \bar{B}_N(A'),\ \bar{B}(f),\ \bar{B}(g),\ \bar{B}(\phi)\} \tag{5.8}$$

donde la homotopía $\bar{B}(\phi)$ es una homotopía de coálgebras.

Si r es una reducción de DGA-álgebras, entonces $\bar{B}_N(r)$ es una reducción de DGA-álgebras de Hopf.

Demostración.

En primer lugar, aplicamos el teorema 5.1.3, y obtenemos la reducción (5.8) que buscamos. Sólo hay que probar que $\bar{B}(f)$ o $\bar{B}(g)$ preserva la estructura de DGA-álgebra. Si suponemos, por ejemplo, que la inyección g es un morfismo de DGA-álgebras, entonces obteníamos en (5.7) que $\bar{B}(g) = T(g)$. Como $T(g)$ preserva, evidentemente, el producto shuffle, tenemos que $\bar{B}_N(r)$ es una DGA-álgebra-reducción. Considerando este razonamiento, la última afirmación del teorema resulta evidente.

Ahora bien, el siguiente teorema asevera que la hipótesis de DGA-álgebra-reducción para r, es necesaria sólo para establecer que los objetos finales de $\bar{B}(r)$ sean construcciones Bar y no, para la preservación de los productos shuffles.

Teorema 5.1.6 *Sea $r : \{A,\ A',\ f,\ g,\ \phi\}$ una reducción de DGA-módulos siendo A y A' dos DGA-álgebras conmutativas conexas. Entonces, podemos construir la DGA-álgebra de Hopf-reducción siguiente:*

$$\bar{B}_N(r) : \{\bar{B}_N(A),\ \tilde{B}(A'),\ \bar{B}(f),\ \bar{B}(g),\ \bar{B}(\phi)\} \tag{5.9}$$

donde $\tilde{B}(A')$ viene definida en la nota 5.1.4.

Demostración.

Exactamente, la reducción (5.9) es la reducción (5.5) obtenida en la demostración del teorema 5.1.3. Nuevamente, sólo hay que probar que la proyección o la inyección de $\bar{B}_N(r)$ es multiplicativa. Para ello, vamos a aplicar el Lema LPA-3 (ver teor. 2.4.16) a la reducción $T(S(\bar{r}))$ y la perturbación d_s^A. En primer lugar, tanto d_t^A como d_s^A son derivaciones con respecto al producto shuffle $*$ (ver (4.1.4) de la pag 68). Además, sólamente teniendo en cuenta las propiedades de anulación de la reducción r (ver def. 2.1.1), podemos probar que se tiene la relación (2.46) que define al Lema LPA-3:

$$T(\phi) \circ * \circ [(1 \otimes T(\phi) + T(\phi) \otimes T(g)T(f)) \circ (1 \otimes d_s^A + d_s^A \otimes 1)]^n \circ (T(g) \otimes T(g)) = 0. \qquad \forall n \geq 0.$$

donde hemos utilizado el símbolo $\circ$, para especificar que se trata de composición de funciones.

Antes de aplicar el Lema LPA-3, observemos que la fórmula (2.31) de la página 39, para el producto $v_{A'}$ queda, en este caso:

$$\begin{aligned} v_{A'} &= [\textstyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n T(f)[d_s^A T(\phi)]^n] \circ *_A \circ \\ &\quad \circ [\textstyle\sum_{m\geq 0}(-1)^m [(1 \otimes T(\phi) + T(\phi) \otimes T(g)T(f))(1 \otimes d_s^A + d_s^A \otimes 1)]^m (T(g) \otimes T(g))] = \\ &= T(f) \circ *_A \circ (T(g) \otimes T(g)) = \\ &= *_{A'} \quad \text{es el producto shuffle en A'.} \end{aligned}$$

Luego, aplicando LPA-3, obtenemos que la inyección $\bar{B}(g)$ de la reducción $\bar{B}_N(r)$ es un morfismo de DGA-álgebras y que la diferencial de $\bar{B}(A')$ es una $*_{A'}$-derivación. Hemos probado, pues, el teorema.

Mostraremos ahora una reducción que posteriormente será intensamente tratada en esta memoria. El teorema de Eilenberg-Zilber (ver el teorema 2.1.2) será usado para "reducir" la construcción Bar de un producto tensorial $A \otimes A'$ de dos DGA-álgebras.

Teorema 5.1.7 *([EM54], pag. 59-60) Sean A y A' dos DGA-álgebras conmutativas. Podemos construir una reducción de DGA-álgebras $R_{B\otimes}$ entre $\bar{B}_N(A \otimes A')$ y $\bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A')$. La inyección de esta reducción es también un morfismo de DGA-coálgebras.*

Es decir, tenemos una DGA-álgebra de Hopf-reducción entre estas dos construcciones. La reducción $R_{B\otimes}$ se define como la composición

$$R_{B\otimes} \equiv \varsigma\, EZ_{BA,BA'}\, \kappa \tag{5.10}$$

donde ς y κ son isomorfismos de Λ-módulos, que que se encargan de hacer cambios de signo adecuados. En la reducción de Eilenberg-Zilber que aparece, tanto $\bar{B}A$ como $\bar{B}A'$ se considerán como álgebras simpliciales.

Vamos a necesitar en lo que sigue las fórmulas explícitas de los morfismos integrantes de esta reducción. Notaremos por ξ_A y $\xi_{A'}$ a las aumentaciones de A y A', respectivamente.

Definimos el morfismo

$$f_{B\otimes} : \bar{B}_N(A \otimes A') \to \bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A'), \tag{5.11}$$

para elementos homogéneos a_i de A y a'_i de A' por la fórmula

$$\begin{aligned} f_{\bar{B}\otimes}[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_m \otimes a'_m] &= \\ &= \sum_{i=0}^{m} \xi_{A'}(a'_1 \cdots a'_i)\xi_A(a_{i+1} \cdots a_m)[a_1|\cdots|a_i] \otimes \\ &\qquad \otimes[a'_{i+1}|\cdots|a'_m]; \end{aligned} \tag{5.12}$$

en el sumando para $i = 0$, el término $[a_1|\cdots|a_i]$ se comprende como el elemento unidad de $\bar{B}(A)$, mientras, para $i = m$, $[a'_{i+1},\cdots|a'_m]$ similarmente designa el elemento unidad de $\bar{B}(A')$.

Podemos identificar $\bar{B}(A)$ y $\bar{B}(A')$ con sub-DG-álgebras de $\bar{B}(A \otimes A')$ por medio de los morfismos

$$[a_1|\cdots|a_m] = [a_1 \otimes 1'|\cdots|a_m \otimes 1']$$

$$[a'_1|\cdots|a'_m] = [1 \otimes a'_1|\cdots|1 \otimes a'_m]$$

donde 1 y $1'$ son las respectivas unidades de A y A'. Con estas identificaciones, se define el morfismo

$$g_{\bar{B}\otimes} : \bar{B}_N(A) \otimes \bar{B}_N(A') \to \bar{B}_N(A \otimes A'), \tag{5.13}$$

por la fórmula

$$g_{\bar{B}\otimes}(u \otimes u') = u * u', \quad \text{si} \quad u \in \bar{B}_N(A), \ \ u' \in \bar{B}_N(A'). \tag{5.14}$$

donde $*$ es el producto shuffle de la DGA-álgebra $\bar{B}_N(A \otimes A')$.

Por último, en cuanto a la homotopía $\phi_{\bar{B}\otimes}$ resulta:

$$\phi_{\bar{B}\otimes} \ = \ \varsigma\, SHI_{BA,BA'}\, \varsigma, \tag{5.15}$$

donde el isomorfismo de DG-módulos ς se define para elementos homogéneos de $\bar{B}_N(A \otimes A')$ de la forma

$$[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_m \otimes a'_m],$$

con a_i y a'_i, elementos homogéneos de A y A', respectivamente, por la fórmula

$$\varsigma\,[a_1 \otimes a'_1|\cdots|a_m \otimes a'_m] = (-1)^{\sum_{j>k}|a_j||a'_k|}[a_1|\cdots|a_m] \otimes [a'_1|\cdots|a'_m]. \tag{5.16}$$

Una vez explicitada la reducción $R_{\bar{B}\otimes}$, vamos a establecer el siguiente resultado "negativo":

Proposición 5.1.8 *La homotopía $\phi_{\bar{B}\otimes}$ de la reducción $R_{\bar{B}\otimes}$ no es ni una homotopía de álgebras ni una homotopía de coálgebras.*

Demostración. Como contraejemplo tomemos

$$u = [a \otimes a'] \quad u' = [b \otimes b'], \text{ donde:}$$
$$a, b \in A,\ a', b' \in A', \text{ y además } |x| > 0, \quad \text{si } x = a, b, a', b'.$$

Entonces, por una parte tenemos:

$$\phi_{B\otimes}(u * u') = -[a \otimes a'|b'|b] + [a'\, b'|a|b] + [b \otimes b'|a'|a] - [a'\, b'|b|a];$$

y por otra,

$$u * \phi_{\bar{B}\otimes}(u') + \phi_{\bar{B}\otimes}(u) \otimes g_{\bar{B}\otimes} f_{\bar{B}\otimes}(u') = [b'|b|a \otimes a'] - [b'|a \otimes a'|b] + [a \otimes a'|b'|b].$$

Tampoco $\phi_{B\otimes}$ es una homotopía de coálgebras, ya que la proyección $f_{B\otimes}$ no es un morfismo de DGA-coálgebras (ver el teorema 2.4.14). En efecto, para un elemento $[a|b'] \in \bar{B}_N(A \otimes A')$, siendo a y b' elementos del núcleo de la aumentaciones respectivas de A y A', tenemos, por una parte

$$\begin{aligned}(f \otimes f)\Delta_{B\otimes}[a|b'] \;&=\; [\,] \otimes [\,] \otimes [a] \otimes [b'] + [a] \otimes [\,] \otimes [\,] \otimes [b'] + \\ &\quad + [a] \otimes [b'] \otimes [\,] \otimes [\,]\end{aligned}$$

y por otra,

$$\begin{aligned}(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_{B\otimes} \otimes \Delta_{B\otimes}\, f\,[a|b'] \;&=\; [\,] \otimes [b'] \otimes [a] \otimes [\,] + [a] \otimes [\,] \otimes [\,] \otimes [b'] + \\ &\quad + [\,] \otimes [\,] \otimes [a] \otimes [b'] + [a] \otimes [b'] \otimes [\,] \otimes [\,]\end{aligned}$$

Establezcamos ahora las siguientes definiciones:

Definición 5.1.9 *Sean A y A' dos DGA-álgebras. Un elemento $u = [c_1|\dots|c_m]$ de $\bar{B}_N(A \otimes A')$ se dice simple si para cada i, c_i pertenece a A o pertenece a A'.*

Se dice que u es 1-simple si todos los c_i, excepto uno, verifican la condición anterior.

Definición 5.1.10 *Sean A y A' dos DGA-álgebras conmutativas. Una perturbación ρ de la reducción $R_{B\otimes}$ se llama perturbación 1-simple si ρ induce convergencia en $R_{B\otimes}$, es una derivación, es una coderivación y transforma elementos simples en elementos simples o 1-simples.*

Con estas definiciones en mano, podemos establecer el siguiente resultado que será fundamental en el proceso iterativo "a la Cartan" que desarrollaremos para los $K(\pi, n)$.

Teorema 5.1.11 *Sean A y A' dos DGA-álgebras conmutativas. Sea ρ una perturbación 1-simple de $\bar{B}_N(A\otimes A')$. Entonces, la inyección de la reducción perturbada $(R_{B\otimes})_\rho$ es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf, y la diferencial final sobre $\bar{B}_N(A)\otimes\bar{B}_N(A')$ es una derivación y una coderivación.*

Demostración.

Todo se remite a probar las siguientes condiciones que definen al Lema de Perturbación LPA(C)-3:

$$\phi_{B\otimes}\circ *\circ[(1\otimes\phi_{B\otimes}+\phi_{B\otimes}\otimes g_{B\otimes}f_{B\otimes})(1\otimes\rho+\rho\otimes 1)]^n(g_{B\otimes}\otimes g_{B\otimes}) = 0 \quad \forall n\geq 0,$$

y

$$(1\otimes\phi_{B\otimes}+\phi_{B\otimes}\otimes g_{B\otimes}f_{B\otimes})\Delta_{B\otimes}(\phi_{B\otimes}\rho)^n g_{B\otimes} = 0, \quad \forall n\geq 0.$$

Ahora bien, para comprobar estas igualdades hay que tener en cuenta simplemente que todo elemento imagen por el morfismo $g_{B\otimes}$ es simple, y que se dan las siguientes trasformaciones:

$$\begin{aligned}
\text{(elemento simple)} &\xRightarrow{\rho} \text{(elem. simple o 1-simple)}\\
\text{(elem. simple)} &\xRightarrow{\phi_{B\otimes}} 0\\
\text{(elem. 1-simple)} &\xRightarrow{\phi_{B\otimes}} \text{(elem. simple)}\\
\text{(elem. simple} \times \text{elem. simple)} &\xRightarrow{*} \text{(elem. simple)}\\
\text{(elem. simple)} &\xRightarrow{\Delta_{B\otimes}} \text{(elem. simple} \times \text{elem. simple).}
\end{aligned}$$

5.2 Algebras elementales que intervendrán en el proceso iterativo

En esta sección, vamos a exponer cuatro tipos de álgebras: las álgebras libres generadas por un grupo, las álgebras exteriores, las álgebras polinomiales modificadas y las álgebras truncadas. Estas álgebras serán las únicas que participen en el proceso iterativo que podrá establecerse para construir una homología efectiva de los espacios de Eilenberg-MacLane, cuando el anillo de base sea $\mathbf{Z}_{(p)}$. Todas las definiciones que siguen han sido extraídas de [Mac63] y [Car56].

Definición 5.2.1 *Sea π un grupo. Definimos una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa, denotada $\Lambda[\pi]$, por medio de la 5-terna*

$$\{\Lambda[\pi],\mu,\Delta,\eta,\xi\}, \text{ donde:}$$

- *los elementos no nulos de* $\Lambda[\pi]$ *están únicamente en grado 0, y son combinaciones lineales finitas* $\sum m(x)x$, *tal que* $m(x) \in \Lambda$, $x \in \pi$;

- *el producto viene definido por*

$$\mu((\sum m(x)x) \otimes (\sum m'(y)y)) = \sum m(x)m'(y)(x+y);$$

- *el coproducto viene dado por*

$$\Delta(\sum m(x)x) = \sum m(x)(x \otimes x);$$

- *la coaumentación es*

$$\eta : \Lambda \to \Lambda[\pi]$$

$\eta(m) = m\,0$, *donde* 0 *es la unidad aditiva del grupo conmmutativo* π;

- *y la aumentación es*

$$\xi(\sum m(x)x) = \sum m(x).$$

A $\Lambda[\pi]$ *la llamaremos la* Λ*-álgebra libre generada por el grupo* π.

Definición 5.2.2 *Sea* $n \geq 0$. *Denotemos por* $E(u, 2n+1)$, *la DGA-álgebra libre con generadores* 1 *y* u, u *de grado* $2n+1$, *con* $u^2 = 0$ *y* $d(u)=0$; *el elemento* u *es el generador del álgebra exterior* $E(u, 2n+1)$. *Los morfismos*

$$\Delta_E : E(u, 2n+1) \to E(u, 2n+1) \otimes E(u, 2n+1),$$

$$\Delta_E(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u,$$

y

$$\xi_E : E(u, 2n+1) \to \Lambda,$$

$$\xi_E(u) = 0,$$

convierten $E(u, 2n+1)$ *en una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa. Su coaumentación es la trivial (el único morfismo de módulos graduados que se puede tener).*

Definición 5.2.3 *Sea* $n \geq 1$. *Denotemos por* $P(u, 2n)$ *la DG-álgebra libre con generadores* $1 = \gamma_0(u), \gamma_1(u), \gamma_2(u), \ldots, \gamma_k(u), \ldots)$, *con* $\gamma_k(u)$ *de grado* $2kn$, *con diferencial* $d(\gamma_k(u) = 0$, *para todo* k, *y producto*

$$\gamma_k(u)\gamma_h(u) = \frac{(k+h)!}{k!h!}\gamma_{k+h}(u);$$

$\gamma_1(u) = u$ *se llama el "generador" del álgebra polinomial modificada* $P(u, 2n)$. *Los morfismos*

$$\Delta_P : P(u, 2n) \to P(u, 2n) \otimes P(u, 2n),$$

$$\Delta_P(\gamma_k(u)) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(u) \otimes \gamma_j(u),$$

y

$$\begin{aligned}\xi_P : P(u,2n) &\to \Lambda,\\ \xi_P(1) &= 1,\\ \xi_P(\gamma_k(u)) &= 0, \quad k \geq 1,\end{aligned}$$

convierten a $P(u,2n)$ en una DGA-álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa. La coaumentación es la trivial.

Definición 5.2.4 *Sean n un número natural, y p un número primo. El álgebra troncada $Q_p(u,2n)$ es la DGA-álgebra conmutativa, cociente del álgebra de polinomios $\Lambda[u]$ por el ideal (u^p), siendo u de grado $2n$ y con diferencial $d(u^k) = 0$, $k = 0,\ldots,p-1$. Su aumentación y coaumentación son las triviales.*

5.3 Resultados que permitirán la iteración

Esta sección, comenzaremos hablando de los productos tensoriales infinitos de DGA-álgebras. Después, veremos como la construcción Bar aplicada a las álgebras elementales -exteriores, truncadas y polinomiales modificadas- dan lugar a productos tensoriales torcidos de algebras elementales, cuando fijamos $\mathbf{Z}_{(p)}$ como el anillo de base. Estas últimas álgebras son, como $\mathbf{Z}_{(p)}$-álgebras graduadas, productos tensoriales banales, y como diferencial tienen una derivación no nula. Debido a que la "torsión" se produce en productos tensoriales de un álgebra exterior y una polinomial modificada, trataremos el comportamiento de estos productos tensoriales torcidos con respecto a la construcción Bar y veremos que las álgebras finales que resultan son, nuevamente, productos tensoriales de álgebras elementales y de productos tensoriales torcidos del mismo tipo. Estos resultados, junto con el hecho de que la construcción Bar de un álgebra libre generada por un grupo da lugar a un álgebra de las comentadas anteriormente (esto se verá en la sección siguiente), nos permitirá la iteración en el proceso que aprovecha las ideas de Cartan. Es este buen comportamiento el que explica por qué nos restringimos a $\mathbf{Z}_{(p)}$ como anillo de base a la hora de calcular la homología efectiva de los espacios de Eilenberg-MacLane.

En la teoría desarrollada por Cartán, los generadores de las álgebras elementales que aparecen en este proceso iterativo admiten una interpretación en términos de operaciones homológicas. Pese a que aquí lo utilizaremos de una forma puramente simbólica, mantendremos esta notación a fin de establecer una comparación con el proceso realizado por Cartan.

Lema 5.3.1 *([Pro84], pag. 62) La categoría de las DGA-álgebras contiene sumas infinitas (que llamaremos productos tensoriales infinitos).*

Demostración.

En efecto, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia eventualmente infinita de DGA-álgebras, entonces la familia:

$$(\otimes_{i\in J} A_i)_{J\in PF(I)}, \tag{5.17}$$

donde $PF(I)$ es el conjunto de todas las partes finitas de I, es un sistema inductivo de álgebras. Para $J \subset J' \in PF(I)$, el morfismo de $\otimes_{i\in J}A_i$ en $\otimes_{i\in J'}A_i$ se obtiene tensorizando con las unidades de los A_i, para aquellos i que no estén en J. El límite inductivo de este sistema se denotará

$$\otimes_{i\in I} A_i, \tag{5.18}$$

y se tiene una inclusión canónica de A_i en este límite. Es claro que una es una suma en el sentido categórico del término.

Nota 5.3.2 *Consecuencia inmediata de este lema es que es posible, por ejemplo, construir una reducción producto tensorial $\otimes_{i\in I}r_i$ a partir de un número infinito de reducciónes $\{r_i; i \in I\}$. De igual forma, podemos hablar sin problemas de que una reducción en la que intervienen productos tensoriales infinitos, y una perturbación puedan inducir convergencia.*

En el trabajo de Cartán sobre el cálculo de la homología de los espacios de Eilenberg-MacLane, aparecen exactamente tres operaciones cohomológicas, la suspensión σ, la transpotencia φ_p (p primo) y la potencia modificada k-ésima γ_k ($k \geq 1$), que son fundamentales en todo el proceso. Con el fin de establecer una posterior comparación con este método de Cartan, definiremos ahora estas operaciones -salvo γ_k, que ya ha sido nombrada en la definición del álgebra polinomial modificada (ver 5.2.3)- y así, mantendremos una interpretación de los generadores de las álgebras elementales que surgan, en función de estas operaciones.

Definición 5.3.3 *([Car56], pag. 1337-1338, pag. 1340-1341)*

Sea A una DGA-álgebra. Definimos los siguientes morfismos de módulos graduados:

- LA SUSPENSIÓN,

$$\begin{array}{l} \sigma : A \rightarrow \bar{B}(A) \text{ definida por} \\ \sigma(a) = [a], \text{ donde } a \in A. \end{array} \tag{5.19}$$

- LA p-TRANSPOTENCIA, *siendo p un número primo,*

$$\begin{array}{l} \varphi_p : A \rightarrow \bar{B}(A), \text{ definida por} \\ \varphi_p(a) = [a|a^{p-1}] \text{ donde } a \in A. \end{array} \tag{5.20}$$

Establecezcamos, ahora, el comportamiento de la construcción Bar, aplicada a las álgebras exteriores, truncadas y polinomiales modificadas, expuestas en el parágrafo anterior.

Proposición 5.3.4 *([EM54], pag. 96).*

Sea $n \geq 0$. Dada el álgebra exterior $E(u, 2n+1)$, existe un isomorfismo canónico

$$\bar{B}_N(E(u, 2n+1)) \cong P(\sigma(u), 2(n+1)), \tag{5.21}$$

como DGA-álgebras de Hopf.

Hemos notado por $\sigma(u)$ el generador del álgebra polinomial modificada, con el fin de hacer notar que podemos obtener este generador a partir del generador u del álgebra exterior, por medio de la operación suspensión definida en 5.3.3.

Como un isomorfismo puede verse como una reducción, escribiremos la igualdad (5.21) como sigue:

$$R_{BE} : \{\bar{B}_N(E(u, 2n+1)),\ P(\sigma(u), 2(n+1)),\ f_{BE},\ g_{BE},\ 0\}. \tag{5.22}$$

El morfismo $f_{BE} : \bar{B}_N(E(u, 2n+1)) \rightarrow P(\sigma(u), 2(n+1))$ se define como

$$f_{BE}(\overbrace{[u|\dots|u]}^{k \text{ veces}}) = \gamma_k(\sigma(u)); \tag{5.23}$$

$g_{BE} : P(\sigma(u), 2(n+1)) \rightarrow \bar{B}_N(E(u, 2n+1))$ es el morfismo

$$g_{BE}(\gamma_k(\sigma(u)) = \overbrace{[u|\dots|u]}^{k \text{ veces}} \tag{5.24}$$

La siguiente proposición se deduce fácilmente de la sección 15 del artículo [EM54].

Proposición 5.3.5 *Sean n un número entero, $n \geq 1$, y p un número primo impar. Podemos construir una reducción de DGA-álgebras:*

$$R_{BQ} : \{\bar{B}_N(Q_p(u, 2n)), E(\sigma(u), 2n+1) \otimes P(\varphi_p(u), 2np+2), f_{BQ}, g_{BQ}, \phi_{BQ}\} \tag{5.25}$$

Como ya hemos indicado antes, notamos los generadores de las álgebras finales de las reducciones, utilizando las operaciones cohomológicas que permitieron a Cartan obtener la homología entera de los espacios de Eilenberg-MacLane.

Notaremos un elemento de $\bar{B}_N(Q_p(u, 2n))$ de la forma $[u^{r_1}|\dots|u^{r_m}]$ por $[r_1|\dots|r_m]$, donde $0 \leq r_i < p$.

Los morfismos explícitos son:

$$\begin{array}{l} f_{BQ}[r_1|t_1|\dots|r_m|t_m] = \{\prod_{k=1}^{n} \delta_{p, r_k+t_k}\}\gamma_m(\varphi_p(u)), \\ f_{BQ}[r_1|t_1|\dots|r_m|t_m|l] = \delta_{1,l}\{\prod_{k=1}^{n} \delta_{p, r_k+t_k}\}\sigma(u)\gamma_m(\varphi_p(u)), \end{array} \tag{5.26}$$

donde los símbolos $\delta_{i,j}$ son las conocidas deltas de Kronecker:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

El morfismo $g_{BQ} : E(\sigma(u), 2n+1) \otimes P(\varphi_p(u), 2np+2) \to \bar{B}_N(Q_p(u, 2n))$ se define sobre los generadores como sigue:

$$
\begin{aligned}
&g_{BQ}(\sigma(u)) = [1],\\
&g_{BQ}(\gamma_k(\varphi_p(u)) = [1|p-1| \overset{\text{k veces}}{\cdots} |1|p-1].
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

Teniendo en cuenta la definición 5.3.3 y las expresiones de los generadores de las álgebras finales de (5.25) en función de σ y φ_p, vemos que esto es coherente con la definición de g_{BQ}.

La homotopía ϕ_{BQ} tiene la forma recursiva siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{BQ}1 = 0; \qquad \phi_{BQ}[1] = 0;\\
&\phi_{BQ}[x] = -[1|x-1] \quad 1 < x < p;\\
&\phi_{BQ}[x|y] = -[1|x-1|y];\\
&\phi_{BQ}[x|y|z] = -[1|x-1|y|z] - \delta_{p,x+y}[1|p-1|\phi(z)]
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

donde $z \in \bar{B}_N(Q_p(u, 2n))$.

Nota 5.3.6 *Ni g_{BQ} ni f_{BQ} preservan la estructura de coálgebras existentes naturalmente en $\bar{B}_N(Q_p(u,2n))$ y en $E(\sigma(u), 2n+1) \otimes P(\varphi_p(u), 2np+2)$. Por ejemplo,*

$$(g \otimes g)\Delta(\gamma_1\varphi_p(u)) = (g \otimes g)(1 \otimes \gamma_1\varphi_p(u) + \gamma_1\varphi_p(u) \otimes 1) = [\,] \otimes [1|p-1] + [1|p-1] \otimes [\,],$$

y, por contra,

$$\Delta g(\gamma_1\varphi_p(u)) = \Delta[1|p-1] = [\,] \otimes [1|p-1] + [1] \otimes [p-1] + [1|p-1] \otimes [\,].$$

Nota 5.3.7 *Téngase en cuenta que para $p = 2$, el álgebra troncada $Q_2(u, 2n)$ coincide con $E(u, 2n)$ como DGA-álgebras.*

En los resultados que siguen será esencial el hecho de que el anillo de base sea el anillo de los enteros localizado en un primo p, $\mathbf{Z}_{(p)}$. Esta restricción es la que nos permitirá la iteración en el proceso de construir reducciones entre el complejo de cadenas asociado a un espacio de Eilenberg-MacLane y un determinado producto tensorial de complejos elementales.

Fijamos, pues, $\mathbf{Z}_{(p)}$ como anillo base, en todo lo que resta de sección.

Proposición 5.3.8 *Sea n un número natural positivo y p un número primo cualquiera. Dada el álgebra de polinomios modificada $P(u, 2n)$, tenemos el siguiente isomorfismo de DGA-álgebras:*

$$P(u, 2n) \cong \tilde{\otimes}_{i \geq 0} Q_{(p)}(u_i, 2np^i), \tag{5.29}$$

donde
$\tilde{\otimes}_{i\geq 0}Q_{(p)}(u_i, 2np^i)$ *es igual como* $\mathbf{Z}_{(p)}$*-modulo al producto tensorial banal* $\otimes_{i\geq 0}Q_{(p)}(u_i, 2np^i)$*, y su producto es*

$$u_i^k u_j^h = \begin{cases} u_i^k \otimes u_j^h & si\ i \neq j \\ u_i^{k+h} & si\ i = j\ y\ k+h < p \\ -pu_i^t u_{i+1} & si\ i = j\ y\ k+h = p+t \end{cases} \tag{5.30}$$

Demostración Al igual que hacíamos en la proposición 5.3.4, podemos considerar el isomorfismo de arriba como una reducción del tipo

$$R_P : \{P(u, 2n),\ \tilde{\otimes}_{i\geq 0}Q_{(p)}(u_i, 2np^i),\ f_P,\ g_P,\ 0\} \tag{5.31}$$

Consideremos la función $R_p(n) = \frac{p^n-1}{p-1}$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$. Los morfismos explícitos son:

$$f_P : P(u, 2n) \to \tilde{\otimes}_{i\geq 0}Q_{(p)}(u_i, 2np^i)$$

$$f_P(\gamma_k(u)) = \frac{(-p)^{\sum_{i=1}^r k_i R_p(i)}}{k!} u_0^{k_0} \ldots u_r^{k_r},$$

donde $k = k_0 + k_1 p + \ldots + k_r p^r$ $(0 \leq k_i < p)$ es el desarrollo p-ádico de k, y

$$g_P : \tilde{\otimes}_{i\geq 0}Q_{(p)}(u_i, 2np^i) \to P(u, 2n)$$

$$g_P(u_n^k) = \frac{(-1)^{nk} k(kp^n - 1)!}{p^{kR_p(n)-n}} \gamma_{kp^n}(u), \quad 0 \leq k < p.$$

Observe que los números $\frac{(-p)^{\sum_{i=1}^r k_i R_p(i)}}{k!}$ y $\frac{(-1)^{nk} k(kp^n-1)!}{p^{kR_p(n)-n}}$ tienen sentido en $\mathbf{Z}_{(p)}$.

Demostremos que $f_P g_P = 1$. Para ello, sólo tenemos que comprobarlo para un elemento u_n^k:

$$\begin{aligned} f_P g_P(u_n^k) &= f_P\left(\frac{(-1)^{nk} k(kp^n-1)!}{p^{kR_p(n)-n}} \gamma_{kp^n}(u)\right) = \\ &= \frac{(-1)^{nk} k(kp^n-1)!}{p^{kR_p(n)-n}} \frac{(-p)^{kR_p(n)}}{kp^n!} u_n^k = \\ &= \frac{(-1)^{k(R_p(n)+n)} k(kp^n-1)! p^{kR_p(n)}}{kp^{kR_p(n)}(kp^n-1)!} u_n^k = \\ &= (-1)^{k(R_p(n)+n)} u_n^k = u_n^k \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene ya que $R_p(n) + n$ es siempre par $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$.

Por otra parte, siendo $k = k_0 + k_1 p + \ldots + k_r p^r$ $(0 \leq k_i < p)$ es el desarrollo p-ádico de k, podemos establecer asimismo que $g_P f_P = 1$:

$$
\begin{aligned}
& g_P f_P(\gamma_k(u)) = g_P\left(\frac{(-p)^{\sum_{i=1}^{r} k_i R_p(i)}}{k!} u_0^{k_0} \dots u_r^{k_r}\right) = \\
&= \frac{(-p)^{\sum_{i=1}^{r} k_i R_p(i)}}{k!} k_0! \gamma_{k_0}(u) \frac{(-1)^{k_1} k_1 (k_1 p - 1)!}{p^{k_1 - 1}} \gamma_{k_1 p}(u) \dots \frac{(-1)^{r k_r} k_r (k_r p^r - 1)!}{p^{k_r R_p(r) - r}} \gamma_{k_r p^r}(u) = \\
&= (-1)^{(\sum k_i R_p(i) - \sum i k_i)} \frac{p^{\sum k_i R_p(i)}}{k!} \frac{(k_1 p - 1)!(k_2 p^2 - 1)! \dots (k_r p^r - 1)!}{p^{(\sum k_i R_p(i) - \sum i k_i)}} k_0! k_1 \dots k_r \gamma_{k_0}(u) \dots \gamma_{k_r p^r}(u) = \\
&= \frac{k_0! k_1 \dots k_r (k_1 p - 1)! \dots (k_r p^r - 1)!}{k!} \frac{(k_0 + k_1 p)!}{k_0!(k_1 p)!} \dots \frac{(k_0 + k_1 p + \dots k_r p^r)!}{(k_0 + \dots + k_{r-1} p^{r-1})!(k_r p^r)!} p^{\frac{r(r+1)}{2}} \gamma_k(u) = \\
&= \frac{k_1 \dots k_r}{a!} \frac{a!}{k_1 p k_2 p^2 \dots k_r p^r} p^{\frac{r(r+1)}{2}} \gamma_k(u) \\
&= \gamma_k(u).
\end{aligned}
$$

Se puede también verificar sin problemas que f_P y g_P son compatibles con las estructuras multiplicativas. Como la diferencial de las dos DGA-álgebras es siempre nula, estos morfismos son trivialmente compatibles con ella.

Nota 5.3.9 *Afin poder comparar posteriormente con el proceso realizado por Cartan, a partir de ahora identificaremos los generadores de las álgebras troncadas u_i con los $\gamma_{p^i}(u)$, (operación potencia p^i modificada, en el proceso de Cartan); son elementos que se corresponden, salvo coeficiente, por el isomorfismo anterior.*

Será ahora, en la construcción Bar normalizada de la DGA-álgebra de polinomios modificada, cuando aparecerán productos tensoriales torcidos.

Definición 5.3.10 *Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia finita o infinita de DGA-álgebras. Se define el producto tensorial deformado $\tilde{\otimes}_\delta A_i$ como la DGA-álgebra que coincide, como Λ-álgebra graduada, con el producto tensorial banal $\otimes A_i$ y tal que su diferencial es la suma de la diferencial del producto tensorial banal y de una derivación δ.*

Establezcamos ahora la reducción que admite $\bar{B}_N(P(u,2n))$:

Teorema 5.3.11 *Sea p un número primo impar y $n \geq 1$. Podemos construir una reducción explícita de DGA-modulos:*

$$
R_{BP} : \left\{ \begin{array}{c} \bar{B}_N(P(u,2n)), \\ E(\sigma(u), 2n+1) \otimes (\otimes_{i\geq 1}(E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1)\tilde{\otimes}_{\delta_p} P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), 2np^i + 2)), \\ f_{BP},\ g_{BP},\ \phi_{BP}\}, \end{array} \right\} \quad (5.32)
$$

tal que la inyección g_{BP} sea un morfismo de DGA-álgebras y donde la diferencial torcida de las parejas $(E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1)\,\tilde{\otimes}_{\delta_p}\, P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), 2np^i + 2))$ viene definida por la siguiente fórmula:

$$
\begin{array}{c} \delta_p\,(\gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u)) = p\,\sigma\gamma_{p^i}(u) \otimes \gamma_{k-1}\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), \\ \forall k \geq 1, \qquad \forall i \geq 1. \end{array} \quad (5.33)
$$

Demostración.

La proposición 5.3.8 nos dice que hay un isomorfismo de DGA-álgebras entre $P(u, 2n)$ y un producto tensorial torcido de DGA-álgebras $\tilde{\otimes}_{i\geq 0} Q_{(p)}(\gamma_{p^i}(u), 2np^i)$ (nótese que se está utilizando las identificaciones de (5.20)). Entonces, podemos concluir que las construcciones Bar respectivas de estas dos álgebras son también isomorfas. Este isomorfismo de DGA-álgebras de Hopf puede representarse con la notación $\bar{B}_N(R_P)$ donde la operación $\bar{B}_N(\,)$ sobre una reducción se define en el teorema 5.1.6 y la reducción R_P es (5.31).

Para la construcción de R_{BP}, necesitaremos establecer, pues, una reducción de la DGA-álgebra de Hopf $\bar{B}_N(\tilde{\otimes}_{i\geq 0} Q_{(p)}(\gamma_{p^i}(u), 2np^i))$. En primer lugar, consideramos para ello, el producto tensorial banal -sin tener en cuenta la "torsión" (5.30)- de las álgebras truncadas, y, teniendo en cuenta la nota 5.3.2, construimos las reducciones siguientes:

-
$$R_{B\otimes Q} : \{\, \bar{B}_N(\otimes_{i\geq 0} Q_{(p)}(\gamma_{p^i}(u), 2np^i)),\ \otimes_{i\geq 0} \bar{B}_N(Q_{(p)}(\gamma_{p^i}(u), 2np^i)), \\ f_{B\otimes Q},\ g_{B\otimes Q},\ \phi_{B\otimes Q}\,\}, \tag{5.34}$$

  gracias al teorema 5.1.7,

- y
$$R_{\otimes BQ} : \left\{ \begin{array}{c} \otimes_{i\geq 0} \bar{B}_N(Q_{(p)}(\gamma_{p^i}(u), 2np^i)), \\ \otimes_{i\geq 0} E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1) \otimes P(\varphi_p \gamma_{p^i}(u), 2np^{i+1} + 2), \\ f_{\otimes BQ},\ g_{\otimes BQ},\ \phi_{\otimes BQ} \end{array} \right\}. \tag{5.35}$$

  gracias a la reducción (5.25) y al hecho de que es posible construir el producto tensorial de reducciones.

Ahora, aplicaremos el Lema de Perturbación Homológica a la reducción $R_{B\otimes Q}$, donde la perturbación ρ es la diferencia entre las diferenciales de las construcciones $\bar{B}_N(\otimes Q_p)$ y $\bar{B}_N(\tilde{\otimes} Q_p)$. Observemos que esto significa, en particular, que ρ es una derivación y una coderivación. Esta perturbación es la inducida sobre la diferencial simplicial de $\bar{B}_N(\otimes Q_p)$ por la modificación hecha en el producto del álgebra $\otimes Q_p$. La fórmula de ρ es:

$$\rho[\ldots|(\gamma_{p^i}(u))^k \ldots|(\gamma_{p^i}(u))^{k'} \ldots|\ldots] = [\ldots|\ldots \pm p\,(\gamma_{p^i}(u))^t\, \gamma_{p^{i+1}} \ldots|\ldots], \tag{5.36}$$

$\forall i \geq 0$ y donde $k + k' = p + t$ con $0 \leq t \leq p - 2$.

La reducción $R_{B\otimes Q}$ y la perturbación ρ inducen convergencia. Por una parte, la homotopía $\phi_{B\otimes Q}$ sobre un elemento aumenta en 1 su graduación simplicial (ver (5.15)) y, por otra, ρ hace disminuir progresivamente las potencias de los γ_{p^i} que entran a formar parte de ese elemento.

Como ρ es una perturbación 1-simple (ver su fórmula (5.36) y la definición 5.1.10), estamos en condiciones de aplicar el teorema 5.1.11 a esta situación. Obtenemos, pues, una reducción $(R_{BQ})_\rho$ entre $\bar{B}_N(\tilde{\otimes} Q_p)$ y $\tilde{\otimes}_{\rho'} \bar{B}_N(Q_p)$, tal que su inyección es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf y donde ρ' es una derivación y una coderivación.

Consideremos ahora la reducción $R_{\otimes \bar{B}Q}$ (ver 5.35) y la perturbación ρ' generada sobre la DGA-álgebra $\tilde{\otimes}_{i\geq 0}\bar{B}_N(Q_{(p)}(\gamma_{p^i}(u), 2np^i))$. Inducen convergencia ya que la perturbación ρ', al igual que ρ, hace disminuir las potencias de los elementos $\gamma_{p^i}(u)$ y la homotopía $\phi_{\otimes BQ}$, en la cual participan homotopías de reducciones $R_{\bar{B}Q}$ (ver (5.28) de la proposición 5.3.5), tambien hace disminuir dichas potencias. Es posible, pues, construir la reducción $(R_{\otimes BQ})_{\rho'}$. Probemos ahora que nos encontramos en el caso LPA-4 (ver teorema 2.4.17). Tenemos, pues, que probar la relación siguiente,

$$\phi_{\otimes \bar{B}Q}\rho' g_{\otimes \bar{B}Q} = 0. \tag{5.37}$$

Para demostrarla, obtendremos primero las imágenes por $g_{\otimes \bar{B}Q}$ de los generadores del DGA-álgebra $\otimes_{i\geq 0}E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1) \otimes P(\varphi_p\gamma_{p^i}(u), 2np^{i+1} + 2)$:

$$\begin{aligned} g_{\otimes \bar{B}Q}(\sigma(u)) &= [\gamma_1(u)]; \\ g_{\otimes \bar{B}Q}(\sigma\gamma_{p^i}(u)) &= [\gamma_{p^i}(u)]; \end{aligned}$$

$$g_{\otimes \bar{B}Q}(\gamma_k(\varphi_p\gamma_{p^i}(u))) = [\gamma_{p^i}(u)|\gamma_{p^i(p-1)}(u)| \overset{k \text{ veces}}{\cdots} |\gamma_{p^i}(u)|\gamma_{p^i(p-1)}(u)],$$

donde estamos utilizando las identificaciones de la nota 5.3.9.

Si aplicamos la perturbación ρ' a estas imágenes, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\rho'([u]) = 0; \\ &\rho'([\gamma_{p^i}(u)]) = 0; \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned} &\rho'([\gamma_{p^i}(u)|\gamma_{p^i(p-1)}(u)| \overset{k \text{ veces}}{\cdots} |\gamma_{p^i}(u)|\gamma_{p^i(p-1)}(u)]) = \\ &= p\,[\gamma_{p^i}(u)|\gamma_{p^i(p-1)}(u)| \overset{k-1 \text{ veces}}{\cdots} |\gamma_{p^i}(u)|\gamma_{p^i(p-1)}(u)] \otimes [\gamma_{p^{i+1}}(u)]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\phi_{\otimes BQ}$ es la homotopía de una reducción producto tensorial de reducciones del tipo $R_{\bar{B}Q}$ y utilizando las fórmulas explícitas de las homotopías de estas reducciones, obtenemos que la composición (5.37) es cero.

El Lema LPA-4, aplicado a este caso, afirma que podemos construir la reducción perturbada $(R_{\otimes BQ})_{\rho'}$ entre las DGA-álgebras $\tilde{\otimes}_{\rho'}\bar{B}_N(Q_{(p)}(\gamma_{p^i}(u), 2np^i))$ y $E(\sigma(u), 2n+1) \otimes (\otimes_{i\geq 1}(E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1)\tilde{\otimes}_{\delta_p}P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), 2np^i + 2))$, tal que la inyección de esta reducción es la misma que la inyección de la reducción original $R_{\otimes BQ}$ (y, por tanto, será un morfismo de DGA-álgebras). Por la nota 5.3.6, no podemos conseguir ningún resultado sobre las estructuras de coálgebras subyacentes.

La fórmula de la diferencial torcida de las parejas

$$(E(\sigma\gamma_{p^i}(u), 2np^i + 1)\tilde{\otimes}_{\delta_p}P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u), 2np^i + 2))$$

se obtiene examinando la "perturbación" generada por ρ' (ver las fórmulas (5.38)) en la última DGA-álgebra :

$$\begin{aligned} \delta_p(\gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u)) &= f_{\otimes BQ}\rho'\Sigma_\infty^{\rho'} g_{\otimes BQ}(\gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u)) = \\ &= f_{\otimes BQ}\rho' g_{\otimes BQ}(\gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u)) = \\ &= p\sigma\gamma_{p^i}(u) \otimes \gamma_{k-1}(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u)), \end{aligned}$$

$$\forall k \geq 1, \qquad \forall i \geq 1.$$

En conclusión, hemos obtenido que la reducción R_{BP} que buscábamos es la composición:

$$R_{BP} \equiv (R_{\otimes BQ})_{\rho'} \circ (R_{B\otimes Q})_{\rho} \circ \bar{B}_N(R_P), \tag{5.39}$$

y que la inyección de esta reducción es un morfismo de DGA-álgebras.

Con esto, hemos demostrado el teorema.

Nota 5.3.12 *Evidentemente otra forma de probar este teorema es considerar directamente la reducción composición $R_{\otimes BQ} \circ R_{B\otimes Q}$ y aplicar el Lema LPA-4 con perturbación ρ. Obtendríamos nuevamente el teorema. Sin embargo, el estudio realizado anteriormente resulta ser más completo que el que proponemos. En efecto, en la demostración realizada, observamos que las reducciones $\bar{B}_N(R_P)$ y $(R_{B\otimes Q})_\rho$ preserva tanto las estructuras de álgebras como de coálgebras (véase teor. 2.4.22) mientras la reducción $(R_{\otimes BQ})_{\rho'}$ preserva sólo la estructura de álgebra. Es decir, sabemos en que punto exactamente del encadenamiento de reducciones usadas para "reducir" el álgebra $\bar{B}_N(P(u,2n))$, se ha perdido la preservación de la estructura de coálgebra.*

Puesto que las torsiones en la diferencial del álgebra final de la reducción R_{BP} se producen en parejas de tipo $E \otimes P$, es importante conocer una reducción explícita de la construcción bar de estos productos tensoriales torcidos.

Teorema 5.3.13 *Sean $n \geq 0$ y p un número primo impar. Sea el producto tensorial torcido $E(u,2n)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} P(v,2(n+1))$, tal que su diferencial torcida es:*

$$\delta_{p^r}(\gamma_k(v)) = p^r\,(u \otimes \gamma_{k-1}(v)),\ si \quad r \geq 1 \tag{5.40}$$

Podemos construir la reducción de DGA-módulos siguiente:

$$R_{BEP} : \left\{ \begin{array}{c} \bar{B}_N(E(u,2n+1)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} P(v,2(n+1)), \\ \\ [P(\sigma(u),2(n+1))\tilde{\otimes}_{\delta'} E(\sigma(v),2n+3)]\otimes \\ \otimes(\otimes_{i\geq 1}[E(\sigma\gamma_{p^i}(v),2(n+1)p^i+1)\tilde{\otimes}_{\delta_p} P(\varphi_p\gamma_{p^i-1}(v),2(n+1)p^i+2), \\ \\ f_{BEP},\ g_{BEP},\ \phi_{BEP} \end{array} \right\}. \tag{5.41}$$

tal que la inyección g_{BEP} sea un morfismo de DGA-álgebras y donde la diferencial torcida de las parejas $(P(\sigma(u),2(n+1))\tilde{\otimes}_{\delta'} E(\sigma(v),2n+3)$ viene definida por

$$\delta'(\sigma(v)) = -p^r\sigma(u), \tag{5.42}$$

y la de las parejas $E(\sigma\gamma_{p^i}(v), 2(n+1)p^i+1)\tilde{\otimes}_{\delta_p}P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v), 2(n+1)p^i+2)$ *es*

$$\begin{array}{c}\delta_p(\gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v)) = p\,\sigma\gamma_{p^i}(v)\otimes\gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v),\\ \forall k\geq 1 \quad \forall i\geq 1\end{array} \tag{5.43}$$

Demostración.

Para facilitar la lectura, escribiremos las álgebras sin expresar la graduación o dimension del generador.

En primer lugar, consideremos las reducciones:

- $$R^{E,P}_{B\otimes} : \{\bar{B}_N(E(u)\otimes P(v)), \bar{B}_N(E(u))\otimes\bar{B}_N(P(v)), f_{B\otimes}, g_{B\otimes}, \phi_{B\otimes}\} \tag{5.44}$$

  que es una reducción de DGA-álgebras con inyección comultiplicativa, por el teorema 5.1.7,

- y

  $$R^{E,P}_{\otimes B} \equiv R_{BE}\otimes R_{BP} : \left\{\begin{array}{c}\bar{B}_N(E(u))\otimes\bar{B}_N(P(v)),\\ P(\sigma u)\tilde{\otimes}E(\sigma v)\otimes\otimes_{i\geq 1}E(\sigma\gamma_{p^i}v)\tilde{\otimes}_{\delta_p}P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}v),\\ f_{\otimes B},\ g_{\otimes B},\ \phi_{\otimes B}\}\end{array}\right\} \tag{5.45}$$

  obtenida gracias a las reducciones (5.22) y (5.32). Como R_{BE} es una reducción de DGA-álgebras de Hopf y la R_{BP} es una DGA-álgebra-reducción, su producto tensorial es una DGA-álgebra reducción.

Evidentemente, nuestra perturbación de partida ρ será la inducida por la derivación δ_{p^r} en la diferencial tensorial de la construcción $\bar{B}_N(E(u)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}}P(v))$.

La reducción $R^{E,P}_{B\otimes}$ y ρ inducen convergencia. Por una parte, la homotopía $\phi_{B\otimes}$, al aplicarse sobre un elemento cualquiera, aumenta en 1 su graduación simplicial y, por otra, ρ y, por tanto δ_{p^r}, actúa sólo sobre las potencias modificadas de v, haciendolas disminuir progresivamente.

Se tiene además que ρ es una derivación y una coderivación ya que es la diferencia entre las diferenciales de las construcciones $\bar{B}_N(E(u)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}}P(v))$ y $\bar{B}_N(E(u)\otimes P(v))$. Es obvio además que ρ es una perturbación 1-simple.

Podemos, pues, aplicar el teorema 5.1.11, y obtener una nueva reducción $(R^{E,P}_{B\otimes})_\rho$ entre $\bar{B}_N(E(u)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}}P(v))$ y $\bar{B}_N(E(u))\tilde{\otimes}_{\rho'}\bar{B}_N(P(v))$ donde la inyección es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf y la perturbación ρ' generada es una derivación y una coderivación.

Consideremos ahora la reducción $R^{E,P}_{\otimes B}$ (ver (5.45)) y la perturbación ρ'. Inducen convergencia ya que ρ', al igual que ρ, hace disminuir las potencias de v en beneficio de elementos de $\bar{B}_N(E(u))$, y por otra, la homotopía producto tensorial $\phi_{\otimes B}$, o bien hace disminuir también dichas potencias

(ϕ_{BP}), o bien es cero ($\phi_{BE} = 0$). Entonces, se puede construir la reducción $(R_{\otimes B}^{E,P})_{\rho'}$. Probemos ahora que se tiene la siguiente relación:

$$\phi_{\otimes B}\rho' g_{\otimes B} = 0. \tag{5.46}$$

Para ello, describamos las imágenes por $g_{\otimes B}$ de los generadores de la última álgebra, que no son más que las imágenes por $g_{\bar{B}E}$ y $g_{\bar{B}P}$:

$$\begin{array}{l} g_{\otimes B}(\sigma(u)) = [u]; \\ g_{\otimes B}(\sigma\gamma_{p^i}(v)) = [\gamma_{p^i}(v)]; \\ g_{\otimes B}(\gamma_k(\varphi_p\gamma_{p^i}(v))) = [\gamma_{p^i}(v)|\gamma_{p^i(p-1)}(v)| \overset{k}{\ } \text{veces} \ |\gamma_{p^i}(v)|\gamma_{p^i(p-1)}(v)]. \end{array} \tag{5.47}$$

Si aplicamos la perturbación ρ' a estos elementos, obtenemos:

$$\begin{array}{l} \rho'([u]) = 0; \\ \rho'([\gamma_{p^i}(v)]) = -p^{rp^i} \overbrace{[u|\ldots|u]}^{p^i \text{ veces}} \\ \rho'([\gamma_{p^i}(v)|\gamma_{p^i(p-1)}(v)]) = -p^{rp^i} \overbrace{[u|\ldots|u]}^{p^i \text{ veces}} \otimes [\gamma_{p^i(p-1)}(v)]. \end{array} \tag{5.48}$$

Teniendo en cuenta que la homotopía $\phi_{\otimes B}$ es una homotopía producto tensorial de reducciones R_{BE} y R_{BP}, y utilizando las fórmulas explícitas de las homotopías de éstas, obtenemos que la composición (5.46) es nula.

Entonces, el lema LPA-4 (ver teor. 2.4.17) se puede aplicar a esta situación, y afirma que podemos construir la reducción $(R_{\otimes B})_{\rho'}$ entre las álgebras

$$\bar{B}_N(E(u))\tilde{\otimes}_{\rho'}\bar{B}_N(P(v))$$

y

$$(P(\sigma(u)) \otimes E(\sigma(v)) \otimes \otimes_{i\geq 1}[E(\sigma\gamma_{p^i}(v))\tilde{\otimes}_{\delta_p}P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v))], \ d')$$

donde d' denota la diferencial inducida por ρ' gracias al Lema de Perturbación. Si examinamos d' (considerar las fórmulas (5.48) y la fórmula (2.9) del teorema 2.2.5), se observa que la torsión no aparece exactamente por parejas, sino que es más complicado. Para ser más precisos, veamos cuál es el valor de $d' = f_{\otimes B}\rho'\Sigma_\infty g_{\otimes B}$ para los distintos generadores de álgebras:

$$d_f(\sigma(v)) = f_{\otimes B}\rho' g_{\otimes B}(\sigma(v)) = -p^r [u]; \tag{5.49}$$

$$d_f(\sigma\gamma_{p^i}(v)) = (-p)^{rp^i}\gamma_{p^i}(u) \tag{5.50}$$

$$d_f(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v)) = (-p)^{rp^{i-1}(p-1)}\gamma_{p^{i-1}(p-1)}(u) \otimes \gamma_{p^{i-1}}(v) \tag{5.51}$$

Es decir, tenemos el siguiente esquema que establece el comportamiento de las álgebras con respecto a la diferencial:

$$
\begin{array}{rcll}
P(\sigma(u)) & \to & 0; & \\
E(\sigma(v)) & \to & P(\sigma(u)); & (5.52)\\
E(\sigma\gamma_{p^i}(v)) & \to & P(\sigma(u)); & (5.53)\\
P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v)) & \to & E(\sigma\gamma_{p^i}(v))+ & (5.54)\\
 & \to & +P(\sigma(u))\otimes E(\sigma\gamma_{p^{i-1}}(v)) & (5.55)
\end{array}
$$

Vemos que (5.49) corresponde a (5.52), que (5.50) corresponde a (5.53), y que (5.51) corresponde a (5.55).

Observamos así que (5.54) es una torsión que ya existía. De las tres restantes, sólo (5.52) es una torsión esencial (que podemos comprobar que coincide con la derivación δ' expuesta en el enunciado), mientras que (5.53) y (5.55) pueden ser "eliminadas" de la diferencial de la última DGA-álgebra, realizando un cambio de base. En efecto, consideremos los isomorfismos de DGA-álgebras siguientes, inversos uno del otro:

$$
\begin{array}{rcl}
f_{norm}(z) & = & \begin{cases} \sigma\gamma_{p^i}(v) - p^{r(p^i-p^{i-1}-1)}\gamma_{p^{i-1}(p-1)}(u)\otimes\sigma\gamma_{p^{i-1}}(v) & \text{si } z=\sigma\gamma_{p^i}(v),\\ z & \text{en otro caso.}\end{cases}\\
g_{norm}(z) & = & \begin{cases} \sigma\gamma_{p^i}(v) + p^{r(p^i-p^{i-1}-1)}\gamma_{p^{i-1}(p-1)}(u)\otimes\sigma\gamma_{p^{i-1}}(v) & \text{si } z=\sigma\gamma_{p^i}(v),\\ z & \text{en otro caso.}\end{cases}
\end{array}
$$

Entonces, esto determina la reducción de DGA-álgebras siguientes:

$$
R_{norm}:\left\{\begin{array}{c}
(P(\sigma(u))\otimes E(\sigma(v))\otimes\otimes_{i\geq 1}[E(\sigma\gamma_{p^i}(v))\tilde{\otimes}_{\delta_p}P(\varphi_p\gamma_{p^i}(v))],d_f),\\
P(\sigma(u))\otimes_{\delta'}E(\sigma(v))\otimes\otimes_{i\geq 1}[E(\sigma\gamma_{p^i}(v))\tilde{\otimes}_{\delta_p}P(\varphi_p\gamma_{p^i}(v))],\\
f_{norm},\ g_{norm},\ 0
\end{array}\right\}\tag{5.56}
$$

Este proceso de "normalización" ya fue establecido por Moore ([Moo57]) en el estudio de la homología p-ádica de los espacios de Eilenberg-MacLane.

La reducción R_{BEP} buscada es, por tanto:

$$
R_{BEP}\equiv R_{norm}\circ(R^{E,P}_{\otimes B})_{\rho'}\circ(R^{E,P}_{B\otimes})_{\rho}.\tag{5.57}
$$

y su inyección es un morfismo de DGA-álgebras.

Nota 5.3.14 *Tengamos en cuenta que la reducción $(R^{E,P}_{B\otimes})_\rho$ preserva las estructuras de álgebra y de coálgebras, ya que su inyección es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf. Sin embargo, las reducciones $(R^{E,P}_{\otimes B})_{\rho'}$ y R_{norm} preservan sólo la estructura de álgebra.*

De la misma forma, pero sin tener necesidad de realizar ninguna "normalización", se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 5.3.15 *Sean $n \geq 0$ y p un número primo impar. Sea el producto tensorial torcido $P(u,2n)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} E(v,2n+1)$, tal que su diferencial torcida es:*

$$\delta_{p^r}(v) = p^r u, \quad si \quad r \geq 1 \tag{5.58}$$

Podemos construir la reducción de DGA-módulos siguiente:

$$R_{BPE} : \left\{ \begin{array}{c} \bar{B}_N(P(u,2n)\tilde{\otimes}_\delta E(v,2n+1), \\ [E(\sigma(u),2n+1)\tilde{\otimes}_{\delta'} P(\sigma(v),2n+2)]\otimes \\ \otimes(\otimes_{i\geq 1}[E(\sigma\gamma_{p^i}(u),2np^i+1)\tilde{\otimes}_{\delta_p} P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(u),2np^i+2)]), \\ f_{BPE},\ g_{BPE},\ \phi_{BPE} \end{array} \right\} \tag{5.59}$$

tal que la inyección g_{BPE} sea un morfismo de DGA-álgebras y donde la diferencial torcida de las parejas $(E(\sigma(u),2n+1)\tilde{\otimes}_{\delta'} P(\sigma(v),2n+2)$ viene definida por

$$\delta'(\sigma(v)) = -p^r \sigma(u); \tag{5.60}$$

y la de las parejas $E(\sigma\gamma_{p^i}(v),2np^i+1)\tilde{\otimes}_{\delta_p} P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v),2np^i+2)$ es

$$\begin{array}{c} \delta_p(\gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v)) = p\sigma\gamma_{p^i}(v) \otimes \gamma_k\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}(v), \\ \forall k \geq 1 \quad \forall i \geq 1 \end{array} \tag{5.61}$$

Nota 5.3.16 *Para el primo $p = 2$, los tres últimos resultados obtenidos son válidos, con las únicas modificaciones en sus enunciados de cambiar el símbolo φ_p por la composición $\gamma_2\sigma$ y que las inyecciones de las reducciones en este caso resultan ser morfismos de DGA-álgebras de Hopf.*

Es ahora cuando definimos el concepto de complejo elemental:

Definición 5.3.17 *Llamamos complejo elemental C a una DGA-álgebra que puede ser una cualquiera de los cuatro siguientes tipos:*

$$\begin{array}{ll} A) & E(u,2n+1), \\ B) & P(u,2(n+1)), \\ C) & E(u,2n+1)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} P(v,2n), \\ D) & P(u,2(n+1))\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} E(v,2n+3), \end{array}$$

donde $n \geq 0$ y la derivación δ_{p^r} viene determinada por la fórmula:

$$\delta_{p^r}(v) = \pm p^r u; \quad donde \quad p \text{ primo},\ r \geq 1.$$

Llamaremos construcción elemental a un producto tensorial de complejos elementales.

Por lo visto en esta sección, podemos concluir con el siguiente teorema:

Teorema 5.3.18 *Fijemos como anillo de base a $\mathbb{Z}_{(p)}$. La construcción bar normalizada de cualquier construcción elemental admite una DGA-álgebra-reducción (su inyección es multiplicativa), hacia una construcción elemental.*

Demostración

Si tenemos un producto tensorial $\otimes_{i\in I}CE_i$, donde los CE_i son complejos elementales de cualquier tipo, podemos construir, gracias al teorema 5.1.7, la reducción $R_{B\otimes CE}$, que "reduce" la construcción bar normalizada del producto tensorial anterior hacia el producto tensorial de las construcciones bar normalizadas de estos complejos CE_i; su inyección, además, es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf. Por otra parte, la construcción bar normalizada de cualquier complejo elemental CE admite una DGA-álgebra-reducción $R_{\bar{B}CE}$ hacia un producto tensorial de complejos elementales. En efecto, tenemos el siguiente esquema:

Notación: Notaremos los complejos elementales de un tipo E determinado como $CE - E$

$\bar{B}_N(CE-A)$	admite una reducción a	$CE-B$	por (5.21)
$\bar{B}_N(CE-B)$	admite una reducción a	$CE-A\otimes(\otimes CE-C)$	por (5.32)
$\bar{B}_N(CE-C)$	admite una reducción a	$CE-D\otimes(\otimes CE-C)$	por (5.41)
$\bar{B}_N(CE-D)$	admite una reducción a	$CE-C\otimes(\otimes CE-C)$	por (5.59)

Por tanto, la reducción que buscamos es la siguiente:

$$R_{\bar{B}(\otimes CE_i)} \equiv \otimes R_{\bar{B}(CE_i)} \circ R_{B\otimes CE}. \tag{5.62}$$

5.4 Cálculo de homología efectiva p-primaria de un espacio de Eilenberg-MacLane

Para el cálculo de la $\mathbb{Z}_p$-homología (p número primo) de un $K(\pi,n)$ -π grupo abeliano finitamente generado y $n>0$-, Cartán en [Car56] utilizó un alfabeto de tres letras (de dos para $p=2$) que correspondían a las operaciones cohomológicas que detectaban generadores en homología (suspensión σ, transpotencia φ_p, y potencias modificadas γ_p) y estableció el grupo de palabras admisibles que correspondían a estos generadores. Estableció, asímismo, los complejos elementales asociados a estas palabras admisibles (los ya obtenidos en la sección anterior) y determinó que la homología del producto de todos estos complejos nos daba toda la información $\mathbb{Z}_p$-homológica del espacio de Eilenberg-MacLane $K(\pi,n)$.

Aquí, en esta sección, fijando como anillo de base $\mathbb{Z}_{(p)}$, construiremos explícitamente unas reducciones $R_{K(\pi,n)}$ que ligan al complejo de cadenas de un espacio $K(\pi,n)$ con el producto de complejos elementales propuestos por Cartan para obtener la toda la información p-primaria. En primer lugar, estableceremos una reducción entre el complejo de cadenas de un clasificante iterado y una construcción bar normalizada iterada. Después, aplicaremos este resultado al caso de los espacios de Eilenberg-MacLane. Seguidamente, enunciaremos unas reducciones conocidas de las construcciones $\bar{B}_N(\Lambda[\pi])$, siendo π el grupo aditivo de los enteros o un grupo cíclico finito de orden la potencia de un número primo. A partir de estas reducciones, podremos establecer la construcción de una reducción de $\bar{B}^n_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\pi])$ hacia un producto de complejos elementales (ver la definición 5.3.17). Teniendo en cuenta todo lo anterior, concluimos la sección con un algoritmo de construcción de una homología efectiva p-primaria de un $K(\pi, n)$.

Daremos, en principio, una serie de resultados que son válidos para un anillo de base general Λ. Más tarde, mencionaremos los pasos en los que la restricción del anillo de base a $\mathbf{Z}_{(p)}$ será necesaria para la obtención de resultados.

En primer lugar, vamos a obtener una reducción explícita entre el complejo de cadenas normalizado de un $K(\pi, n)$ y una construcción "más pequeña", que definiremos como construcción Bar normalizada iterada n veces del álgebra libre generada por el grupo π.

Definición 5.4.1 *Sea n un número natural y sea K un álgebra simplicial conmutativa aumentada. Se puede definir el clasificante algebraico iterado de K, $\bar{W}^n(K)$, de la siguiente forma recursiva:*

$$\begin{aligned} \bar{W}^1(K) &= \bar{W}(K), \\ \bar{W}^n(K) &= \bar{W}(\bar{W}^{n-1}(K)). \end{aligned} \tag{5.63}$$

donde $\bar{W}(K)$ es clasificante algebraico definido en la subsección 4.1.2. Además, definimos $\bar{W}^n_N(K) = \bar{W}_N(\bar{W}^{n-1}(K))$

De la misma forma, podemos definir la construccion Bar normalizada iterada de K_N:

$$\begin{aligned} \bar{B}^1_N(K_N) &= \bar{B}_N(K_N), \\ \bar{B}^n_N(K_N) &= \bar{B}_N(\bar{B}^{n-1}_N(K_N)). \end{aligned} \tag{5.64}$$

donde $\bar{B}_N(K_N)$ es la construcción bar normalizada.

Podemos establecer ahora el siguiente resultado:

Proposición 5.4.2 *Sea π un grupo abeliano y $n \geq 1$. Podemos construir el isomorfismo de DGA-álgebras de Hopf siguiente:*

$$R^{\pi,n}_{W_{ga}} : \{C^N_*(K(\pi, n)),\ \bar{W}^n_N(K(\pi, 0)),\ f^{\pi,n}_{W_{ga}},\ g^{\pi,n}_{W_{ga}},\ 0\} \tag{5.65}$$

Demostración.

Recordemos que los espacios $K(\pi, n)$, con π un grupo abeliano y $n \geq 1$, los habíamos definido como clasificantes geométricos iterados (ver la def. 3.3.5). Tengamos en cuenta además que el resultado 4.1.10 que relaciona las construcciones clasificante geométrico y clasificante algebraico se tiene también si los objetos no son normalizados; es decir, si G es un grupo simplicial, tenemos el isomorfismo canónico:

$$C_*(\bar{W}_g(G)) \cong \bar{W}(C_*(G))$$

Con todo esto, ya podemos obtener los isomorfismos requeridos $R^{\pi,n}_{W_{ga}}$.

Notación 5.4.3 *En algunas demostraciones que siguen, usaremos la simbología* $A \overset{r}{\rightleftharpoons} B$ *que expresará la existencia de una reducción* r *entre* A *y* B*, siendo* A *el DG-módulo "más grande" y* B*, por tanto, el "más pequeño".*

Teorema 5.4.4 *Sea* $n \geq 1$ *y* K *un álgebra simplicial conmutativa aumentada. Podemos construir la reducción de DGA-módulos:*

$$R^n_{WB} : \{\bar{W}^n_N(K),\ \bar{B}^n_N(K_N),\ f^n_{WB},\ g^n_{WB}, \phi^n_{WB}\} \tag{5.66}$$

donde la inyección g^n_{WB} *es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf.*

Demostración.

Demostrémoslo por inducción en n. Para $n = 1$ es el teorema 4.2.2. Supongamos cierto el resultado para $n-1$ y probémoslo para n. Tenemos el siguiente encadenamiento de reducciones (donde usamos la notación 5.4.3):

$$\bar{W}^n_N(K) = \bar{W}_N(\bar{W}^{n-1}(K)) \overset{R_{WB}}{\rightleftharpoons} \bar{B}_N(\bar{W}^{n-1}_N(K) \overset{\bar{B}_N(R^{n-1}_{WB})}{\rightleftharpoons} \bar{B}_N(\bar{B}^{n-1}_N(K_N)) = \bar{B}^n_N(K_N).$$

donde R_{WB} es la reducción del teorema 4.2.2, R^{n-1}_{WB} es la reducción que tenemos por hipótesis de inducción, y $\bar{B}_N(\ )$ es la operación sobre reducciones que se establece en el teorema 5.1.5. Luego, en conclusión, obtenemos la siguiente reducción composición:

$$R^n_{WB} \equiv \bar{B}_N(R^{n-1}_{WB}) \circ R_{WB},$$

siendo su inyección un morfismo de álgebras de Hopf.

Establezcamos ahora el siguiente resultado clásico para grupos π abelianos finitamente generados:

Proposición 5.4.5 *[Kur] Todo grupo abeliano finitamente generado π es una suma directa de subgrupos cíclicos $\{\pi_j \subset \pi\}$,*

$$\pi = \oplus_{j=1}^{k} \pi_j, \qquad \pi_j = \mathbf{Z}/\nu_j\mathbf{Z}, \qquad \nu_j \in \mathbf{Z}, \qquad v_j \geq 0.$$

donde los $\nu_j > 1$ pueden ser escogidos como potencias de números primos p_j, $\nu_j = p_j^{\rho_j}$, p_j primo, $\rho_j > 0$, siendo los ν_j únicos salvo permutación.

Proposición 5.4.6 *([EM54], pag 69-71)*

Sea π un grupo abeliano y $n \geq 0$. Sea $\pi = \oplus_{j=1}^{k} \pi_j$ una descomposición de π en subgrupos. Podemos construir una reducción de DGA-módulos

$$R^n_{\oplus\pi_j} : \{\bar{B}^n_N(\Lambda[\pi]),\ \bar{B}^n_N(\Lambda[\pi_1]) \otimes \ldots \otimes \bar{B}^n_N(\Lambda[\pi_k]),\ f^n_{\oplus\pi_j},\ g^n_{\oplus\pi_j},\ {\phi_{\oplus\pi_j}}^n\} \tag{5.67}$$

donde la inyección $g^n_{\oplus\pi_j}$ es un morfismo de DGA-álgebras de Hopf.

Demostración.

En principio tenemos el isomorfismo de DGA-álgebras de Hopf evidente

$$\Lambda[\pi] \cong \Lambda[\pi_1] \otimes \ldots \otimes \Lambda[\pi_k] \tag{5.68}$$

que puede ser visto como una reducción $R^0_{\oplus\pi_j}$ con homotopía nula.

Aplicando $\bar{B}_N(\ )$ a esa reducción (ver el teor. 5.1.5), obtenemos una reducción de DGA-álgebras de Hopf $\bar{B}_N(R^0_{\oplus\pi_j})$ entre $\bar{B}_N(\Lambda[\pi])$ y $\bar{B}_N(\Lambda[\pi_1] \otimes \ldots \otimes \Lambda[\pi_k])$. Ahora, el teorema 5.1.7 nos proporciona la reducción $R_{B\otimes}$ entre $\bar{B}_N(\Lambda[\pi_1] \otimes \ldots \otimes \Lambda[\pi_k])$ y $\bar{B}_N(\Lambda[\pi_1]) \otimes \ldots \otimes \bar{B}_N(\Lambda[\pi_k])$, siendo su inyección un morfismo de DGA-álgebra de Hopf.

Es decir, la reducción que buscamos para $n = 1$ es

$$R^1_{\oplus\pi_j} \equiv R_{B\otimes} \circ \bar{B}_N(R^0_{\oplus\pi_j}).$$

Además, su inyección es un morfismo de álgebras de Hopf.

Supongamos que hayamos obtenido la reducción $(n-1)$-ésima. Podemos construir la n-ésima como sigue:

$$R^n_{\oplus\pi_j} \equiv R_{B\otimes} \circ \bar{B}_N(R^{n-1}_{\oplus\pi_j}),$$

tal que su inyección es un morfismo de álgebras de Hopf.

Debido a los dos últimos resultados, estudiaremos ahora las reducciónes de las construcciones $\bar{B}_N(\Lambda[\pi])$, donde $\pi = \mathbf{Z}$ o $\mathbf{Z}_{p^r}$ (siendo p un número primo y r un número natural.

Teorema 5.4.7 *([EM54], pag. 95-96)*

Para el grupo aditivo de los enteros $\mathbf{Z}$, *podemos contruir la reducción de DGA-álgebras de Hopf:*

$$R_{\mathbf{Z}} : \{\bar{B}_N(\Lambda[\mathbf{Z}]),\ E(u,1),\ f_{\mathbf{Z}},\ g_{\mathbf{Z}},\ \phi_{\mathbf{Z}}\}, \tag{5.69}$$

donde $E(u,1)$ *es el álgebra exterior con generador* u *de grado* 1.

Daremos las fórmulas explícitas de los morfismos integrantes de $R_{\mathbf{Z}}$:

$$\begin{array}{ll} f_{\mathbf{Z}}([i]) = i.u; & i \in \mathbf{Z} \\ f_{\mathbf{Z}} c_q = 0; & c_q \in \bar{B}_q(\Lambda[\mathbf{Z}])\quad q > 1, \end{array} \tag{5.70}$$

$$g_{\mathbf{Z}}(u) = [1], \tag{5.71}$$

y

$$\phi_{\mathbf{Z}}[n_1|\ldots|n_k] = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n_1-1}[1|i|n_2|\ldots|n_k] & \text{si } n_1 > 1 \\ 0 & \text{si } n_1 = 1 \\ \sum_{i=1}^{|n_1|}[1|-i|n_2|\ldots|n_k] & \text{si } n_1 < 1 \end{cases} \tag{5.72}$$

Nota 5.4.8 *Teniendo en cuenta, la definición de la operación suspensión* σ *(ver (5.19) de la definición 5.3.3), observamos que el generador* u *se obtiene como* $\sigma(1)$. *A partir de ahora, al generador* u *lo llamaremos* $\sigma(1)$, *con el fin de realizar posteriormente una comparación con el proceso desarrollado por Cartan.*

Teorema 5.4.9 *([EM54], pag. 97-101)*

Sea p *un número primo y* r *un número natural. Sea* $\mathbf{Z}_{p^r}$ *el grupo finito cíclico de orden* p^r. *Podemos construir la siguiente reducción de DGA-álgebras*

$$R_{\mathbf{Z}_{p^r}} : \{\bar{B}_N(\Lambda[\mathbf{Z}_{p^r}]),\ E(u,1)\tilde{\otimes}_{\delta_{p^r}} P(v,2),\ f_{\mathbf{Z}_{p^r}},\ g_{\mathbf{Z}_{p^r}},\ \phi_{\mathbf{Z}_{p^r}}\} \tag{5.73}$$

donde la última álgebra es un complejo elemental del tipo C) (ver la definición 5.3.17).

Los morfismos explícitos de esta reducción son:

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathbf{Z}_{p^r}}[x_1|y_1|\ldots|x_m|y_m] & = & \left\{\prod_{i=1}^m s^2(x_i,y_i)\right\}\gamma_m(v) \\ f_{\mathbf{Z}_{p^r}}[x_1|y_1|\ldots|x_m|y_m|z] & = & \left\{s^1(z)\prod_{i=1}^m s^2(x_i,y_i)\right\}u\gamma_m(v), \end{array} \tag{5.74}$$

donde $s^2 : \mathbf{Z}_{p^r} \times \mathbf{Z}_{p^r} \to \mathbf{Z}$ y $s^1 : \mathbf{Z}_{p^r} \to \mathbf{Z}$ se definen como

$$s^2(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j < p^r \\ 1 & i+j \geq p^r \end{cases}$$

$$s^1(i) = i, \quad 0 \leq i \leq p^r.$$

$$\begin{array}{lcl} g_{Z_{p^r}}(u) & = & [1] \\ g_{Z_{p^r}}(\gamma_k(v)) & = & \sum_{x_1,\ldots,x_k \in \mathbf{Z}_{p^r}} [1|x_1|\ldots|1|x_k] \\ g_{Z_{p^r}}(u\gamma_k(v)) & = & \sum_{x_1,\ldots,x_k \in \mathbf{Z}_{p^r}} [1|x_1|\ldots|1|x_k|1] \end{array} \tag{5.75}$$

$$\begin{array}{l} \phi_{Z_{p^r}} 1 = 0; \quad \phi_{Z_{p^r}}[x] = -C(x); \\ \phi_{Z_{p^r}}[x|y|\sigma] = -[C(x)|y|\sigma] - s^2(x,y)[\sum_{x \in \mathbf{Z}_{p^r}} [1|x]|\phi_{Z_{p^r}} \sigma] \end{array} \tag{5.76}$$

donde

$$C(x) = \sum_{i=0}^{x-1} [1|i].$$

Nota 5.4.10 *Con el fin de comparar nuestro método con el desarrollado por Cartan, llamaremos $\sigma(1)$ al generador u y $\psi_{p^r}(1)$ a v. Aclaremos que la notación ψ_p es definida por Cártan como una transpotencia φ_p para el primer paso del proceso de iteración.*

Nota 5.4.11 *Téngase en cuenta que si se escoge $\Lambda = \mathbf{Z}_{(p)}$, p primo, entonces la DGA-álgebra de Hopf $\bar{B}_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\mathbf{Z}_{q^s}])$, con q primo distinto de p, admite una reducción hacia el DGA-módulo trivial $\mathbf{Z}_{(p)}$; esta reducción puede deducirse inmediatamente de la establecida arriba.*

Teorema 5.4.12 *Sea $\Lambda = \mathbf{Z}_{(p)}$, p primo. Sea π un grupo cíclico infinito o finito con generador de orden la potencia de un primo q y n un número natural. Podemos construir una DGA-álgebra reducción:*

$$R : \{\bar{B}^n(\mathbf{Z}_{(p)}[\pi]), C(\pi, n), f_{B(\pi,n)}, g_{B(\pi,n)}, \phi_{B(\pi,n)}\} \tag{5.77}$$

donde $C(\pi, n)$ es una construcción elemental (ver la def. 5.3.17).

Demostración.

Lo probaremos por inducción en n. En principio, tenemos el resultado para $n = 1$, gracias a los teoremas 5.4.7, 5.4.9 y 5.4.11. Además, $C(\pi, n)$ solo puede ser un complejo elemental tipo A), tipo C), o el algebra trivial $Z_{(p)}$.

Suponemos, ahora, el resultado cierto para $n = k - 1$. La reducción $R_{B(\pi,n)}$ se obtiene como la composición de las siguientes dos reducciones:

$$R_{\bar{B}(\pi,n)} \equiv R_{\bar{B}(C(\pi,n-1))} \circ \bar{B}_N(R_{\bar{B}(\pi,n-1)}). \tag{5.78}$$

Por una parte, $\bar{B}_N(R_{\bar{B}(\pi_i,n-1)})$ tiene un morfismo de DGA-álgebras de Hopf como inyección. En efecto, esto se deduce del hecho de que $R_{\bar{B}(\pi_i,n-1)}$ es una reducción que tiene inyección multiplicativa y del teorema 5.1.5. Por otra parte, el teorema 5.3.18 afirma que $R_{\bar{B}(C(\pi,n-1))}$ es una reducción con álgebra final una construcción elemental $C(\pi,n)$ y con inyección multiplicativa. Con esto, el teorema queda demostrado.

Ejemplo 5.4.13 *Como ejemplo, mostremos las primeras etapas de construcción de reducciones $R_{\bar{B}(\mathbf{Z},n)}$ entre $\bar{B}^n_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\mathbf{Z}])$ y las construcciones elementales $C(\mathbf{Z},n)$.*

Notación: Hemos notado por $R_{\bar{B}(C(Z,n))}$ a la reducción que admite la construcción bar normalizada de la construcción elemental $C(\mathbf{Z},n)$.

- *Para $n=1$, tenemos la reducción*

$$R_{\bar{B}(Z,1)} \equiv \bar{B}_N(K_N(\pi,0)) \cong \bar{B}_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\mathbf{Z}]) \overset{R_{\mathbf{Z}}}{\rightleftharpoons} E(u,1) = C(\mathbf{Z},1).$$

- *Para $n=2$,*

$$\begin{aligned} R_{\bar{B}(Z,2)} &\equiv \bar{B}^2_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\mathbf{Z}]) = \bar{B}_N(\bar{B}_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\mathbf{Z}])) \overset{\bar{B}_N(R_{\bar{B}(Z,1)})}{\rightleftharpoons} \bar{B}_N(E(\sigma(1),1) \overset{R_{BE}}{\rightleftharpoons} \\ &\rightleftharpoons P(\sigma^2(1)) = C(\mathbf{Z},2), \end{aligned}$$

donde $\bar{B}_N(R_{\bar{B}(Z,1)})$ viene dada por el teorema 5.1.5 y el isomorfismo R_{BE} es el (5.22) de la proposición 5.3.4.

- *Para $n=3$,*

$$\begin{aligned} R_{\bar{B}(Z,3)} \equiv \bar{B}^3_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\mathbf{Z}]) = \bar{B}_N(\bar{B}^2_N(\mathbf{Z}_{(p)}[\mathbf{Z}]) &\overset{\bar{B}_N(R_{\bar{B}(Z,2)})}{\rightleftharpoons} \bar{B}_N(P(\sigma^2(1))) \overset{R_{\bar{B}(C(Z,2))}}{\rightleftharpoons} \\ \rightleftharpoons E(\sigma^3(1)) \otimes \otimes_{i\geq 1}[E(\sigma\gamma_{p^i}\sigma^2(1))\tilde{\otimes}_{\delta_p} P(\varphi_p\gamma_{p^{i-1}}\sigma^2(1)) \end{aligned} \tag{5.79}$$

donde $R_{\bar{B}(C(Z,2))}$ es exactamente la reducción (5.32) del teorema 5.3.11.

- ...

- *Para el paso $n=k$, podemos obtener la reducción siguiente:*

$$R_{\bar{B}(Z,k)} \equiv R_{\bar{B}(C(Z,k-1))} \circ \bar{B}_N(R_{\bar{B}(Z,k-1)}). \tag{5.80}$$

Además, las inyecciones de estas reducciones son todas morfismos de DGA-álgebras.

Un resultado del mismo tipo tendríamos si tomamos el grupo $\mathbf{Z}_{p^r}$. En el caso $\mathbf{Z}_{q^s}$, con q primo diferente de p, obtenemos reducciones hacia el complejo elemental $C(\mathbf{Z}_{q^s},n) = \mathbf{Z}_{(p)}$

Estamos en condiciones de obtener un algoritmo de cálculo de la homología con coeficientes en $\mathbf{Z}_{(p)}$ de un espacio de Eilenberg-MacLane.

Teorema 5.4.14 *Dado un número natural n y un grupo abeliano finitamente generado π, podemos construir explícitamente una homología efectiva del espacio $K(\pi, n)$, con coeficientes en $\mathbf{Z}_{(p)}$.*

Demostración.

En esta demostración haremos uso de la notacion 5.4.3.

En primer lugar, como π es un grupo abeliano finitamente generado, podemos realizar una descomposición de π (ver prop. 5.4.5) en una suma directa $\oplus_{i=1}^{k}\pi_i$ de grupos cíclicos infinitos y finitos con ordenes la potencia de un primo. Además, tenemos el siguiente encadenamiento de reducciones

$$C_*^N(K(\pi,n)) \overset{R^{\pi,n}_{W_{ga}}}{\cong} \bar{W}^n_N(K(\pi,0)) \overset{R^n_{WB}}{\rightleftharpoons} \bar{B}^n_N(\Lambda[\pi]) \overset{R^n_{\oplus\pi_i}}{\rightleftharpoons} \bar{B}^n_N(\Lambda[\pi_1])\otimes\ldots\bar{B}^n_N(\Lambda[\pi_k]) \quad (5.81)$$

donde $R^{\pi,n}_{W_{ga}}$ es el isomorfismo establecido en la proposición 5.4.2, R^n_{WB} es la reducción (5.66) del teorema 5.4.4, y $R^n_{\oplus\pi_i}$ es la reducción (5.67) de la proposición 5.4.6. Esta composición de reducciones tiene por inyección un morfismo de DGA-álgebras de Hopf.

Fijemos ahora $\Lambda = \mathbf{Z}_{(p)}$. Sólo tenemos que obtener reducciones para construcciones bar iteradas de álgebras libres generadas por grupos cíclicos infinitos o finitos con generador de orden la potencia de un primo. Ahora bien, estas reducciones $R_{\mathcal{B}(\pi,n)}$ vienen dadas por el teorema 5.4.12. Concluimos, pues, que es posible construir una homología efectiva p-primaria de un espacio $K(\pi,n)$, siendo π un grupo abeliano finitamente generado y $n \geq 1$. Exactamente, ésta viene determinada recursivamente por la reducción siguiente:

$$R_{K(\pi_i,n)} \equiv \otimes_{i=1}^{k} R_{\mathcal{B}(\pi_i,n)} \circ R^n_{\oplus\pi_i} \circ R^n_{WB} \circ R^{\pi,n}_{W_{ga}}. \quad (5.82)$$

donde $\pi = \oplus_{i=1}^{k}\pi_i$ es una descomposición en grupos cíclicos infinitos o finitos con generador de orden la potencia de un primo.

El buen comportamiento por parte de los complejos elementales $C(\pi_i, n)$ cuando se les aplica la construcción bar, responde a unas reglas de símbolos para los generadores; es decir, como hemos notado los generadores en función de las operaciones suspensión σ, transpotencia φ_p y potencia modificada k-ésima γ_k, estos se corresponden con unas determinadas palabras (denominadas "admisibles" por Cartan) en el alfabeto formado por las tres letras indicadas. Nuestros resultados coinciden con los de Cartan en este sentido. Para una comprobación con todo detalle, basta con determinar las reglas que siguen las palabras que corresponden a generadores en nuestro proceso iterativo (ver el ejemplo 5.4.13) y observar que esto coincide con lo establecido en las pag. 1361-1362, las pag. 1369-1370 y las pag. 1381-1385 de [Car56], donde define Cartan las palabras admisibles para p primo impar, para p primo par, y los complejos elementales que darán la información homológica p-primaria, respectivamente.

Capítulo A

Hacia la obtención de un algoritmo de cálculo de grupos de homotopías de un espacio topológico

En este apéndice, seguiremos el artículo [Rea93] y estableceremos los pasos fundamentales necesarios para poder obtener un algoritmo de cálculo de los grupos de homotopía de un espacio topológico simplemente conexo (ver def. 1.2.7) con homología efectiva. Para ello, reconsideraremos desde el punto de vista de la Homología Efectiva, el proceso de "matar grupos de homotopía" basado en el método de la Torre de Whitehead ([CS52a], [CS52b]).

En primer lugar, haremos un somero estudio del método de la Torre de Whitehead, con el fin de reflejar los problemas esenciales que suscita esta proceso desde un punto de vista algorítmico. Después perfilaremos los pasos fundamentales que tendremos que acometer para el diseño del algoritmo de cálculo de grupos de homotopía.

Ya habíamos comentado que en la teoría de Homotopía, donde dos objetos se consideran iguales si pueden ser deformados uno en el otro, todo conjunto simplicial factoriza en un producto cartesiano torcido de espacios de Eilenberg-MacLane. Este tipo de factorizaciones pueden construirse usando varios métodos, siendo el más conocido el de la Torre de Postnikov. La Torre de Whitehead es una especie de dual del anterior. Más precisamente, es una torre de fibrados principales asociada a X, un espacio topológico simplemente conexo. En la base de dicha torre, tenemos el espacio topológico considerado, que lo notaremos $X(2)$. Entonces, en la etapa n de construcción de la torre, "mataremos" el menor grupo de homotopía no nulo de la etapa $n-1$ de la torre, $X(n-1)$ construyendo un fibrado principal $X(n)$, de fibra un espacio de Eilenberg-MacLane y base el espacio $X(n-1)$. De esta forma, usamos los espacios de Eilenberg-MacLane como los bloques de construcción de esta torre, y éstos pueden ser unidos en un producto cartesiano torcido que aproxima el espacio en consideración.

Proposición A.0.15 *Los grupos de homotopía de los espacios $X(n)$ así construidos verifican* *las siguientes propiedades:*

$$\pi_j(X(n)) = \{0\} \; si \; j < n,$$
$$y \; \pi_j(X(n)) = \pi_j(X(n-1)) \; si \; j \geq n.$$

Ya que pretendemos crear un algoritmo de cálculo, nos interesa movernos en un marco combinatorial. Ahora bien, todo este proceso puede trasladarse sin problemas al contexto simplicial. La noción topológica de simplemente conexo se corresponde con la noción de 1-reducido en el ámbito simplicial.

Con el fin de especificar con más detalle los pasos de este proceso, nos limitaremos a estudiar el ejemplo de la 2-esfera S^2 (tratada ya como conjunto simplicial). Hemos indicado que iteración de Whitehead comienza en la etapa 2, ya que la homología y también la homotopía de S^2, no comienzan antes de la dimensión 2; esto es una consecuencia de ser S^2 (como conjunto simplicial) 1-reducido o, lo que es lo mismo, de ser S^2 (como espacio topológico) simplemente conexo.

Es claro que el segundo grupo de homología de S^2, $H_2(S^2)$, puede ser calculado, y es igual a Z. Entonces, el segundo grupo de homotopía de S^2, $\pi_2(S^2)$, es igual también a Z. Esto se obtiene gracias al teorema de Hurewicz; este teorema bien conocido afirma que los primeros grupos de homología y homotopía no nulos de un conjunto simplicial dado se tienen en la misma dimensión y son isomorfos. El segundo paso en la etapa 2 es la construcción de un fibrado canónico:

$$S_3^2 = S^2 \times_{\tau_2} K(Z,1),$$

con base el conjunto simplicial S^2, con operador de torsión un cierto τ_2, y con fibra el espacio de Eilenberg-MacLane $K(Z,1)$, donde el grupo Z es el grupo de homología calculado inmediatamente antes, $H_2(S^2)$, y el índice 1 representa una dimensión menos de la expresada en ese grupo de homología. Este fibrado es un PTCP inducido (ver la def. 1.2.23) de una función que puede determinarse del Teorema de Coeficientes Universales para homologí, a partir del fibrado canónico $K(\mathbf{Z},2) \times_{\tau_{\mathbf{Z},n}} K(Z,1)$ (ver el resultado 3.3.6).

La proposición A.0.15 nos afirma en este caso concreto que,

$$\begin{aligned} \pi_j(S_3^2) &= \{0\} \text{ si } j < 3, \\ \text{y } \pi_j(S_3^2) &= \pi_j(S^2) \text{ si } j \geq 3. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Nótese que la aserción "matar el segundo grupo de homotopía de S^2" adquiere un sentido. De hecho, matar $\pi_2(S^2)$ significa que el segundo grupo de homotopía de la siguiente etapa construida, S_3^2, es nulo.

Continuemos con la siguiente etapa de construcción de la torre. En primer lugar, la sucesión espectral de Serre nos proporciona el grupo $H_3(S_3^2) = \mathbf{Z}$ que es igual al grupo $\pi_3(S_3^2)$, por el teorema de Hurewicz. Por el resultado (A.1), podemos obtener el grupo

$$\pi_3(S^2) = \mathbf{Z}.$$

Estamos ahora en condiciones de construir un fibrado canónico del tipo

$$S_4^2 = S_3^2 \times_{\tau_3} K(\mathbf{Z}, 2)$$

donde S_4^2 constituirá la próxima etapa en la torre. Y así continuaríamos.

Ahora bien, es necesario precisar que existen problemas esenciales de calculabilidad en el proceso de la Torre de Whitehead. A saber:

- Encontrar una versión algorítmica de la sucesión espectral de Serre. Consideremos que cualquier sucesión espectral dada en su forma original no puede ser considerada como un algoritmo por dos principales razones. La primera es el problema de calcular las *diferenciales* presentes en una sucesión espectral. No hay nada en la teoría de sucesiones espectrales acerca del cómputo de diferenciales. La segunda razón es el problema de extensión. Para ser más precisos, una sucesión espectral nos da una filtración:

$$H_nE = H_{n,0}E \supset H_{n-1,1}E \supset \ldots \supset H_{0,n}E \supset 0$$

  y unos grupos habitualmente denotados $E^{\infty}_{p,q} = \frac{H_{p,q}E}{H_{p-1,q+1}E}$ y el problema de extensión es obtener, conociendo estos grupos, el grupo H_nE que estamos buscando.

- Conocer la homología de los espacios de Eilenberg-MacLane, a fin de aplicar "una versión algorítmica" de la sucesión espectral de Serre, teniendo en mano toda la información homológica sobre estos espacios que aparecen de forma iterada en la torre de Whitehead.

Para resolver estos problemas de computabilidad, hacemos uso de la teoría de la Homología Efectiva. Aquí sólo presentaremos las soluciones a los dos problemas que se suscitan más arriba.

En cuanto a la obtención de *una homología efectiva* de los espacios de Eilenberg-MacLane, hemos conseguido en esta memoria algoritmos de cálculo (precisemos que en el último algoritmo, obtenido a partir del trabajo de Cartan, restringimos el anillo de base a $\mathbf{Z}_{(p)}$ (siendo p primo) y, por tanto, este método no podría utilizarse, en principio, para la construcción de la Torre de Whitehead). Hay que especificar que estos algoritmos cálculan una homología efectiva de los espacios $K(\pi, n)$, con π grupo abeliano finitamente generado y $n \geq 1$. Si queremos calcular los grupos de homotopía de un conjunto simplicial 1-reducido de partida, los espacios de Eilenberg-MacLane que surgen sucesivamente en la Torre de Whitehead son precisamente de ese tipo. En efecto, esto resulta de considerar que

- la homología y la homotopía de un conjunto simplicial 1-reducido no comienzan antes de la dimensión 2. Por tanto, viendo el proceso de construcción de la Torre, podemos afirmar que todos los $K(\pi, n)$ que aparecen son tales que $n \geq 1$. Debido al hecho de que los grupos de homotopía de cualquier conjunto simplicial son abelianos a partir de la dimensión 2, podemos establecer también que los grupos π que definen a estos espacios de Eilenberg-MacLane son todos abelianos.

- el conjunto simplicial 1-reducido del cual queremos conocer sus grupos de homotopía, tiene homología efectiva. De ahí podemos deducir que en la Torre de Whitehead obtendremos espacios $K(\pi, n)$, con grupos abelianos π *finitamente generados.*

En lo que respecta a diseñar un algoritmo en versión Homología Efectiva de la sucesión espectral de Serre, tenemos el siguiente resultado:

Teorema A.0.16 *([Rub91a], pag. 48-49) Sea $B \times_\tau G$ un fibrado principal reducido. Entonces si B y G tienen homología efectiva, $B \times_\tau G$ tiene también homología efectiva.*

Demostración.

Gracias al teorema de Brown (ver 3.2.2), es suficiente encontrar una homología efectiva del DG-módulo $B \times_t G$.

Sabemos que $C(B) \otimes C(G)$ tiene homología efectiva. La diferencia entre $C(B) \otimes_t C(G)$ y $C(B) \otimes C(G)$ no es otra que el producto cap. $t \cup$: Es suficiente pues demostrar que la perturbación $t \cup$ induce convergencia con la homología efectiva canónica de $C(B) \otimes C(G)$. Esto resulta de dos aspectos:

1. Los operadores de homología efectiva de $C(B) \otimes C(G)$ preservan las filtraciones canóncias de los productos tensoriales, salvo las homotopías que aumentan a lo más una unidad el índice de filtración.
2. El hecho de que G sea reducido implica que $t_1 = 0$, y la composición $t \cup$ disminuye al menos dos unidades el índice de filtración.

Una descripción del algoritmo "asociado" a este resultado es:

Algoritmo A.0.17 Entrada:

- *un conjunto simplicial reducido B con homología efectiva;*
- *un grupo simplicial reducido G con homología efectiva;*
- *un operador de torsión τ.*

Salida: *La homología efectiva del PTCP $B \times_\tau G$.*

Capítulo B

Algoritmo de cálculo de la estructura de A_∞-coálgebra de $H_*(K(\pi,n);\mathbf{Z}_p)$

Kadeishvili en [Kad80] introdujo una técnica en el campo de la homología de los espacios fibrados que utilizaba las A_∞-estructuras de Stasheff [Sta63b]. Uno de sus resultados más importantes es que, fijando como anillo de base un cuerpo, si A es una A_∞-estructura (ver def. 1.1.32), entonces la homología $H_*(A)$ hereda una A_∞-estructura de forma natural, y que constituye el modelo minimal de Kadeishvili de A. En el capítulo seis de su tesis, Prouté [Pro84], basándose en la técnica de Kadeishvili, intenta calcular sin éxito la estructura de A_∞-coálgebra que adquiere la homología de un espacio de Eilenberg-MacLane con coeficientes en el cuerpo $\mathbf{Z}_p$, p primo.

Aquí, resolveremos esta cuestión diseñando un algoritmo que determina esta A_∞-estructura para un espacio $K(\pi,n)$, con π un grupo abeliano finitamente generado y $n \geq 1$. Hemos demostrado en el capítulo 5 (ver el teor. 5.4.14) que, con anillo de base $\mathbf{Z}_{(p)}$, estos espacios admiten reducciones explícitas $R_{K(\pi,n)}$ hacia productos tensoriales infinitos de complejos elementales. No hay ningún problema en establecer unos resultados análogos a estos anteriores, si fijamos como anillo de base el cuerpo finito $\mathbf{Z}_p$ (p primo). En este caso, la única diferencia estriba en que los complejos elementales ya no tienen torsiones y, por tanto, todos tienen diferencial nula. Esto se deriva del hecho de que, en estas condiciones, existe un isomorfismo de DGA-álgebras entre el álgebra de polinomios modificada y el producto tensorial infinito <u>banal</u> de álgebras truncadas (compárese con la prop. 5.3.8). Es decir, tenemos que esos productos tensoriales infinitos que encontramos cuando "reducimos" el complejo de cadenas de un espacio $K(\pi,n)$, constituyen la verdadera $\mathbf{Z}_p$-homología de estos espacios.

Para resolver, pues, el problema que nos ocupa, podemos simplemente aplicar las fórmulas (2.52) del teorema 2.4.21, considerando las reducciones $R_{K(\pi,n)}$ obtenidas siendo el anillo base $\mathbf{Z}_p$. Ahora bien, podemos saber exactamente donde deja de preservarse la estructura de coálgebra en estas reducciones. Recordemos (ver (5.82) del teor. 5.4.14) que las reducciones $R_{K(\pi,n)}$ vienen definidas por la siguiente composición de reducciones:

$$R_{K(\pi,n)} \equiv (\otimes_{i=1}^{k} R_{\bar{B}(\pi_i,n)}) \circ R^n_{\oplus\pi_i} \circ R^n_{WB} \circ R^{\pi,n}_{W_{ga}} \tag{B.1}$$

donde $\pi = \oplus_{i=1}^{k}\pi_i$, con π_i un grupo cíclico infinito o finito con generador de orden una potencia de un primo. Ahora bien, las reducciones $R^n_{\oplus\pi_i}$, R^n_{WB} y $R^{\pi,n}_{W_{ga}}$. preservan la estructura de coálgebra, ya que las inyecciones de cada una de ellas son morfismos de álgebras de Hopf y, en particular, de coálgebras. En cuanto a la última reducción, $\otimes R_{\bar{B}(\pi_i,n)}$, habíamos probado en el teorema 5.4.12 que cada $R_{\bar{B}(\pi_i,n)}$ admite la siguiente descomposición:

$$R_{\bar{B}(\pi_i,n)} \equiv R_{\bar{B}(C(\pi_i,n-1))} \circ \bar{B}_N(R_{\bar{B}(\pi_i,n-1)}). \tag{B.2}$$

Sabemos que la reducción $\bar{B}_N(R_{\bar{B}(\pi_i,n-1)})$ tiene un morfismo de DGA-álgebras de Hopf como inyección. Por otra parte, $R_{\bar{B}(C(\pi_i,n-1))}$ está compuesta de una reducción del tipo (5.10) expuesta en el teorema 5.1.7, y de una reducción producto tensorial de reducciones R_{BE} y R_{BP} (son los únicos complejos elementales que subsisten con Z_p como anillo de base). En esta última reducción, si bien R_{BE} preserva la estructura de coálgebra (ver prop. 5.3.4), no así lo verifican la reducción R_{BP}, que es de la forma (ver (5.39):

$$R_{BP} \equiv R_{\otimes BQ} \circ R_{B\otimes Q} \circ \bar{B}_N(R_P), \tag{B.3}$$

En esta descomposición, $R_{B\otimes Q}$ y $\bar{B}_N(R_P)$ son reducciones con inyección comultiplicativa. Tengamos en cuenta que la reducción $R_{\otimes BQ}$ es una reducción producto tensorial de reducciones del tipo R_{BQ} (ver (5.25) del teorema 5.3.5) que "conectan" a construcciones bar normalizadas de álgebras truncadas $\bar{B}_N(Q_p)$ con productos tensoriales del tipo $E(y, 2n+1) \otimes P(z, 2np+2)$. Ahora bien, como ya hacíamos notar en la nota 5.3.6, la reducción $R_{B_N Q_p}$ solo preserva la estructura de álgebra. Hemos encontrado, pues, el lugar concreto dentro del encadenamiento de reducciones que tenemos para el complejo de cadenas de un $K(\pi, n)$, en el cual se pierde la estructura de coálgebra y donde tendremos que aplicar el teorema 2.4.21.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones podemos enunciar el siguiente algoritmo:

Algoritmo B.0.18 Entrada:

- *Un grupo π abeliano y finitamente generado;*
- *un número n entero positivo;*
- *un número p primo impar;*

Salida: *La estructura de A_∞-coálgebra de la homología $H_*(K(\pi,n), \mathbf{Z}_p)$*

Nota B.0.19 *Aclaremos que en el caso $p = 2$, la estructura de Kadeishvili comultiplicativa de la homología $H_*(K(\pi,n), \mathbf{Z}_2)$ se reduce a su estructura de DGA-coálgebra. Esto es debido a que se tiene, en este caso, que las álgebras truncadas coinciden con álgebras exteriores y todas las reducciones resultan ser DGA-álgebra de Hopf-reducciones.*

Ejemplo B.0.20 *Para p primo impar, podemos cálcular la estructura de A_∞-coálgebra adquirida por el producto tensorial $E(y, 2n+1) \otimes P(z, 2np+2)$ considerando la reducción $\bar{B}_N(Q_p)$.*

$$
\begin{array}{l}
\Delta_i = 0 \text{ si } i \neq 2, p; \\
\Delta_2(y^i\gamma_j(z)) = \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} y^k\gamma_l(z)\otimes y^{i-k}\gamma_{j-l}(z); \\
\Delta_p(y^i\gamma_j(z)) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=j-1} y^{i+1}\gamma_{k_1}(z)\otimes\ldots\otimes y^{i+1}\gamma_{k_p}(z).
\end{array}
\tag{B.4}
$$

Ejemplo B.0.21 *Otro ejemplo interesante es el caso de $K(\mathbf{Z}_{p^r},1)$, donde la reducción a la cuál aplicaremos el teorema 2.4.21 es $R_{\mathbf{Z}_{p^r}}$ (ver (5.73), que conecta $\bar{B}_N(\mathbf{Z}_p[Z_{p^r}])$ y $E(u,1)\otimes P(v,2)$. Para Δ_2, resulta las siguientes fórmulas:*

$$
\begin{array}{l}
\Delta_2(\gamma_j(v)) = \sum_{0\leq i\leq j}(\gamma_i(v)\otimes\gamma_{j-i}(v) + \frac{p^r(p^r-1)}{2}u\gamma_i(v)\otimes u\gamma_{j-i-1}(v)), \\
\Delta_2(u\gamma_j(v)) = \sum_{0\leq i\leq j}(u\gamma_i(v)\otimes\gamma_{j-i}(v) + \gamma_i(v)\otimes u\gamma_{j-i}(v)).
\end{array}
\tag{B.5}
$$

Un simple cálculo establece que $\Delta_3 = 0$ y, por la proposición 2.4.18, tenemos que Δ_2 constituye un verdadero coproducto para $E(u,1)\otimes P(v,2)$ y que esta álgebra adquiere una estructura de DGA-álgebra de Hopf conmutativa, y coconmutativa salvo homotopía. Estos resultados coinciden con los expuestos en [Hue91].

Finalmente, una idea interesante, ya propuesta por Prouté en [Pro84], encaminada también a resolver el problema que nos ocupa, es definir explícitamente la estructura de A_∞-coálgebra del el producto tensorial de dos A_∞-coálgebras. Si solucionamos esta cuestión, podríamos determinar la estructura de A_∞-coálgebra sobre la $\mathbf{Z}_p$-homología de los espacios de Eilenberg-MacLane. Sin embargo, este problema resulta bastante complejo.

En efecto, supongamos que tenemos dos A_∞-coálgebras $\{C_i, \Delta_i^{C_i}\}_{i\geq 1}$, $i = 1,2$, y dos reducciones de DG-módulos $r_i : \{C_i', C_i, f_i, g_i, \phi_i\}$ donde los C_i' son DG-álgebras, $i = 1,2$, y que determinan, precisamente, las A_∞ estructuras de los C_i, $i = 1,2$ (téngase en cuenta lo comentado en pag. 52- 53). Entonces, podemos construir la reducción producto tensorial

$$
r_1\otimes r_2 : \{C_1'\otimes C_2',\ C_1\otimes C_2,\ f_1\otimes f_2,\ g_1\otimes g_2,\ 1\otimes\phi_2 + \phi_1\otimes g_2f_2\}
$$

que determinará por medio del teorema 2.4.21, la estructura de A_∞-coálgebra sobre $C_1\otimes C_2$ (obteniendo los morfismos $\Delta_i^{C_1\otimes C_2}$). Por otra parte, podemos intentar buscar relaciones entre esos morfismos $\Delta_i^{C_1\otimes C_2}$ y los morfismos $\Delta_i^{C_i}$, $i = 1,2$. Un mero ejercicio de comprobación afirma:

$$
\Delta_i^{C_1\otimes C_2} = (1\otimes T\otimes 1)\Delta_2^{C_1}\otimes\Delta_2^{C_2}.
$$

Sin embargo, para $i \geq 3$, las relaciones que se pueden establecer entre estos morfismos conllevan la aparición de los morfismos integrantes de la reducción $r_1\otimes r_2$. Debido a eso, la forma que se perfila más adecuada para la obtención de la A_∞-estructura del producto tensorial $C_1\otimes C_2$ es determinarla utilizando directamente la reducción $r_1\otimes r_2$, si es que disponemos en principio de las reducciones r_i, $i = 1,2$.

Bibliography

[Bro57] E.H. Brown. *Finite computability of* Postnikov *complexes. Annals of Math., vol. 65 (n.1): pp. 1–20, (1957).*

[Bro59] E.H. Brown. *Twisted tensor products* I. *Annals of Math., vol. 69 : pp. 223–246, (1959).*

[Bro64] R. Brown. *The twisted* Eilenberg-Zilber *theorem. Celebrazioni Archimedae del Secolo XX, Simposio de Topologia, pp. 34–37, (1964).*

[Car56] H. Cartan. *Algèbres d'eilenberg-maclane. Séminaire H. Cartan, 1954/55, (exposé 2 à 11), 1956.*

[CS52a] H. Cartan and J.P. Serre. *Espaces fibrés et groupes d'homotopie,* I. C*onstructions générales. C. R. Acad. Sc. París, v. 234 : pp. 288–290, (1952).*

[CS52b] H. Cartan and J.P. Serre. *Espaces fibrés et groupes d'homotopie,* II. A*pplications. C. R. Acad. Sc. París, v. 234 : pp. 393–395, (1952).*

[Cur71] E.B. Curtis. *Simplicial* Homotopy Theory. *Advances in Math., (n. 6): pp. 107–209, (1971).*

[DB] L.A. Lambe D.W. Barnes. *Fixed point approach to homological perturbation theory. Aparecerá en Proceeding A.M.S.*

[Die89] J. Dieudonné. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960. Basel:Birkhäuser, Boston, (1989).*

[EM53] S. Eilenberg and S. MacLane. *On the groups* H(π, n), I. *Annals of Math., vol. 58 : pp. 55–106, (1953).*

[EM54] S. Eilenberg and S. MacLane. *On the groups* H(π, n),II. *Annals of Math., vol. 60 : pp. 49–139, (1954).*

[EM66] S. Eilenberg and J.C. Moore. *Homology and fibrations* I. *Coalgebras, cotensor product and its derived functors. Comm. Math. Helv., (n. 40): pp. 199–236, (1966).*

[EZ59] S. Eilenberg and J.A. Zilber. *On products of complexes. Am. J. Math., (n. 75): pp.200–204, (1959).*

[GL89] V.K.A.M. Gugenheim and L. Lambe. *Perturbation theory in* D*ifferential* H*omological* A*lgebra* I. *Illinois J. Math., vol. 33 : pp. 556–582, (1989).*

[GLS89] V.K.A.M. Gugenheim, L.A. Lambe, and J. Stasheff. *Algebraic aspects of* Chen's *twisting cochain. Illinois J. Math., vol. 34 : pp. 485–502, (1989).*

[GLS91] V.K.A.M. Gugenheim, L.A. Lambe, and J.D. Staheff. *Perturbation theory in* Differential Homological Algebra II. *Illinois J. Math., vol. 35 (n. 3): pp. 357–373, (1991).*

[GM74a] V.K.A.M. Gugenheim and J.P. May. *On the theory and application of differential torsion products. Memo. Amer. Math. Soc., (n. 142), (1974).*

[GM74b] V.K.A.M. Gugenheim and H.J. Munkholm. *On the extended functoriality of* Tor *and* Cotor. *J. Pure Appl. Alg., (n. 4): pp. 9–29, (1974).*

[GS86] V.K.A.M. Gugenheim and J. Stasheff. *On perturbations and* A_∞*-structures. Bull. Soc. Math. Belg., vol. 38 : pp. 237–246, (1986).*

[Gug72] V.K.A.M. Gugenheim. *On the chain complex of a fibration. Illinois J. Math., vol. 3: pp. 398–414, (1972).*

[HK91] J. Huebschmann and T. Kadeishvili. *Small models for chain algebras. Math. Z., vol. 207: pp. 245–280, (1991).*

[HMS74] D. Husemoller, J. Moore, and J.D. Stasheff. *Differential homological algebra and homogeneous spaces. J. Pure Appl. Alg., (n. 5): pp. 113–185, (1974).*

[Hue89] J. Huebschmann. *Perturbation theory and free resolutions for nilpotent groups of class 2. J. Algebra, vol 126 : pp. 348–399, (1989).*

[Hue91] J. Huebschmann. *Cohomology of finitely generated abelian groups. Ens. Math, t. 37 : pp. 61–71, (1991).*

[Kad80] T.K. Kadeishvili. *On the homology theory of fibre spaces. Russian Math. Surveys, vol 35 : pp. 231–238, (1980).*

[Kur] A.G. Kurosh. *The theory of groups, vol. I. Chesea Publ. Co.*

[LS87] L. Lambe and J. Stasheff. *Applications of perturbation theory to iterated fibrations. Manuscripta Math., vol. 58 : pp. 363–376, (1987).*

[Mac63] S. MacLane. *Homology. Volume 114 of Die Grundlehren der mathematichen Wissenchaften, Springer, (1963).*

[May67] P. May. *Simplicial objects in* Algebraic Topology. *Van Nostrand, Princenton, 1967.*

[McC] J. McCleary. *User's guide to* Spectral Sequences. *Math. Lect. Series, Publish or Perish, Inc.*

[Moo57] J.C. Moore. *On the homology of* $K(\pi, n)$. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 43 , (1957).*

[Moo59] J.C. Moore. *Algèbre homologique et cohomologie des espaces classifiants. S éminaire H. Cartan, 1959/60, (exp. 7), (1959).*

[Mun76] H.J. Munkholm. *The eilenberg-moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps. J. Pure Appl. Alg., (n. 9): pp. 1–50, (1976).*

[Pro84] A. Prouté. *Algèbres* Différentielles Fortement Homotopiquement Associatives. *Thèse de Math. de l'Université Paris VII, (1984).*

[Rav89] D. C. Ravenel. *Homotopy groups of spheres on a small computer. Volume v. 114 of L. N. in Pure and Appl. Algebra, "Computers in Geometry and Topology", (1989).*

[Rea93] P. Real. *An algorithm for calculating homotopy groups. In N.E. Oussous G. Jacobs and S. Steinberg, editors, International IMACS Symposium on symbolic computation: New Trends and Developments, pages pp. 68–70, June (1993).*

[Rub91a] J. Rubio. *Homologie effective des espace de lacets itérés: un logiciel. Thèse de Math. de l'Université Joseph Fourier, (1991).*

[Rub91b] J. Rubio. *A program computing the homology groups of loop spaces. SIGSAM Bulletin ACM, (n. 25): pp. 20–24, (1991).*

[Sch91] R. Schön. *Effective Algebraic Topology. Memo. Amer. Math. Soc., v. 451 , (1991).*

[Ser] F. Sergeraert. *The computability problem in Algebraic Topology. Aparecerá en Advances in Math.*

[Ser51] J.P. Serre. *Homologie singulière des espaces fibrés et applications. Annals of Math., t. 54 : pp. 435–505, (1951).*

[Ser53] J.P. Serre. *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Comm. Math. Helv., v. 27 : pp. 198–232, (1953).*

[Ser87] F. Sergeraert. *Homologie effective I, II. C. R. Acad. Sc. París, (n. 304): pp.279–281 y 319–321, (1987).*

[Shi62] W. Shi. *Homologie des espaces fibrés. Inst. Hautes Études Sci., vol. 13 : pp. 93–176, (1962).*

[Sta63a] J. Stasheff. *Homotopy associativity of H-spaces I. Transactions of the A.M.S, vol. 108 : pp. 275–292, (1963).*

[Sta63b] J. Stasheff. *Homotopy associativity of H-spaces II. Transactions of the A.M.S, vol. 108 : pp. 293–312, (1963).*

[Tan85] M. C. Tangora. *Computing the homology of the lambda algebra. Memo. Amer. Math. Soc., (n. 337), (1985).*

Pedro Real Jurado

Algoritmo de cálculo de homología efectiva de los espacios clasificantes

Apto cum laude por unanimidad

20 Septiembre 93

Mª Tomás Recio

El Doctorado,

José L. Vicente