

223729545

Compta

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



Departamento de Matemática Aplicada I

Tesis Doctoral

Tesis
84

ESTUDIO DE UN MODELO DE
TURBULENCIA COMPRESIBLE
OBTENIDO MEDIANTE TÉCNICAS DE
HOMOGENEIZACIÓN

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMÁTICA - BIBLIOTECA -
N.º ORDEN GENERAL. 011493975
OBRA N.º TOMO.....
SIGNATURA.....
N.º EN ESPECIALIDAD.....
EJEMPLAR NUMERO. R.14.764

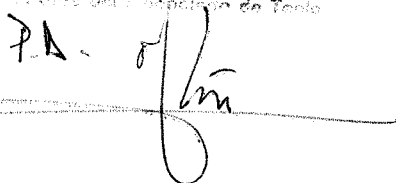
Isabel Sánchez Muñoz
Sevilla, 2005

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 175 número 155 del libro
correspondiente.

Sevilla, 4-11-05.

El Jefe del Departamento de Tesis

PA. 

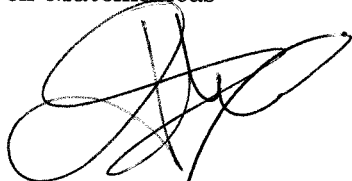
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Tesis Doctoral

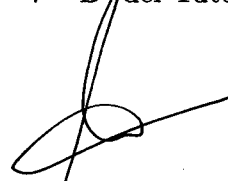
**ESTUDIO DE UN MODELO DE
TURBULENCIA COMPRESIBLE
OBTENIDO MEDIANTE TÉCNICAS
DE HOMOGENEIZACIÓN**

Memoria presentada por
Isabel Sánchez Muñoz
para optar al grado de Doctor
en Matemáticas



Fdo. Isabel Sánchez Muñoz

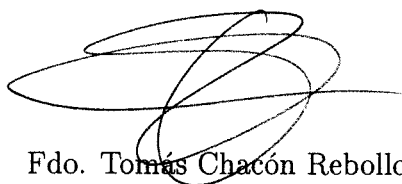
V^o B^o del Tutor



Fdo. Martín Cera López
Prof. Catedrático de
Escuela Universitaria

V^o B^o

de los Directores



Fdo. Tomás Chacón Rebollo
Prof. Catedrático de Universidad

Fdo. Macarena Gómez Mármol
Prof. Titular de Universidad

Sevilla, Octubre de 2005





Sevilla, 9 de Enero de 2006
N/Ref.: Negociado de Tesis MYD/CAR
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

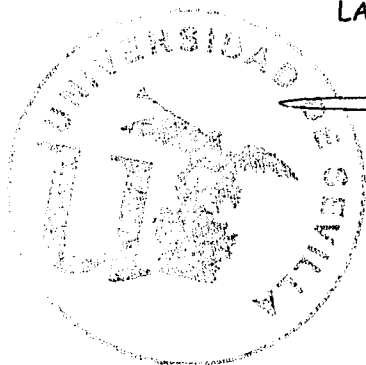
ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA
DE LA E.T.S. DE INGENIERÍA
INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Escuela a fin de que pasen a formar parte de los fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEÍDAS

- MARTÍN MONTES, ANTONIO
- SÁNCHEZ MUÑOZ, ISABEL

LA JEFA DE SECCIÓN DE DOCTORADO



Fdo.: Yolanda Díaz Rolando.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA REGISTRO GENERAL AUXILIAR PABELLON DE BRASIL
SALIDA
Nº. REGISTRO: 4 10.01.06 12:56:22

A Juanjo

A Carlos y Amelia



Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que de alguna manera han contribuido en este trabajo.

Al prof. D. Tomás Chacón Rebollo, por haberme ofrecido la posibilidad de trabajar con él y dirigir esta Tesis Doctoral. Desde el principio supo transmitirme su pasión por la investigación y las cualidades que han de irse desarrollando en este difícil pero entusiasmante camino. Su facilidad para ingeniar soluciones y su buen sentido del humor han hecho que el trabajo sea más llevadero. Gracias por todas sus enseñanzas y aportaciones que han hecho posible este trabajo y han condicionado de forma tan positiva mi formación.

Un lugar especial en esta lista de agradecimientos y también en mi corazón, es sin duda para la prof. D^a Macarena Gómez Mármol, sin la que este trabajo nunca se hubiera terminado. Gracias por su ofrecimiento para co-dirigir esta Tesis y darme así la oportunidad de trabajar de nuevo con ella. Por sus muchos ánimos en los momentos más angustiosos, sus consejos y aportaciones. Todo ello ha sido muy valioso, pero sin duda mucho más lo ha sido su amistad, que ha sabido demostrarme y regalarme durante todo este tiempo.

También quiero dar las gracias al prof. D Martín Cera López por haber aceptado ser tutor de esta Tesis y como no, por ser el compañero ejemplar que es, por su amabilidad y buena predisposición a ayudarme siempre que lo necesité.

No puedo olvidar tampoco al prof. D Daniel Franco Coronil que siempre estuvo dispuesto a ayudarme. Ni al prof. D. Francisco Ortegón Gallego con el que tuve el gusto de trabajar en el proyecto ETMA.

Agradezco al prof. D. Alan Dervieux su invitación para trabajar con

su grupo de investigación. Por lo fructuosa que resultó esta estancia para el desarrollo de este trabajo y por su cálida acogida y extrema amabilidad en todo momento.

A todos los profesores del Dpto. de Matemática Aplicada I, así como a los de la E.U. de Ingeniería Técnica Agrícola que me ofrecieron un lugar agradable para desarrollar mi trabajo.

Termino dando las gracias a mi padres, a mi hermano y a toda mi familia a quien tengo que agradecerles todo, también el haber llegado hasta aquí. El ánimo y la ayuda incondicional que siempre me han dado, ha sido aún máspreciada en estos momentos.

Y de forma más especial, doy las gracias a mis hijos Carlos y Amelia que han sabido perdonarme todo el tiempo que les he robado. Su alegría y sus abrazos han sido el alivio de mi cansancio al llegar a casa. Y también al pequeñín que aún llevo dentro por dejarme trabajar de forma tan intensa hasta el último momento. Y sobretodo, a Juanjo. Sin él esto, como tantas otras cosas, tampoco hubiera sido posible. Gracias por creer siempre en mí y darme tanto amor a cada momento.

Índice General

Notaciones	13
1 Introducción	19
1.1 Las Ecuaciones de Navier-Stokes Compresibles	20
1.2 La generación de la turbulencia	26
1.3 El modelado de la turbulencia	29
1.3.1 Las ecuaciones de Reynolds	29
1.4 El modelo $k - \varepsilon$ de turbulencia	34
1.5 El modelado <i>MPP</i> de la turbulencia	39
1.6 Contenido de la memoria	41
2 Un modelo <i>MPP</i> para flujos compresibles	47
2.1 Descripción del modelo	48
2.1.1 Ecuaciones en micro-estructura	56
2.1.2 Ecuaciones promediadas	65

2.2	Forma conservativa del modelo	72
2.3	Analogía con el modelo $k - \varepsilon$	75
2.4	Modelo a una ecuación	78
3	Un modelo híbrido $MPP k - \varepsilon$ para flujos compresibles	87
3.1	Modelado del tensor de Reynolds	88
3.2	Descripción del modelo	91
3.3	Estructura del término de cierre R_H	95
3.4	El término de cierre R_H para flujos medios bidimensionales	98
3.4.1	Definición regular de los coeficientes de cierre	100
3.5	Modelo bidimensional	105
3.5.1	Cambio de variables	107
3.5.2	Escritura compacta del modelo bidimensional	111
3.6	Cálculo de los términos de cierre	115
3.6.1	Resolución numérica del problema canónico normalizado	115
3.6.2	Tabulaciones de los términos de cierre	117
4	Método numérico de resolución	123
4.1	Planteamiento del problema	124
4.2	Discretización en espacio	128
4.3	Discretización en tiempo	147

5	Aplicación al cálculo de una capa de mezcla compresible	151
5.1	Descripción física de la capa de mezcla compresible	152
5.2	Ensayos subsónicos	157
5.2.1	Validación del cálculo de las coordenadas lagrangianas	160
5.2.2	Validación de los términos de cierre	163
5.3	Ensayos supersónicos	166
5.4	Análisis sobre los términos en D_c	176
6	Análisis de paso al límite singular en las condiciones de contorno	179
6.1	Planteamiento del problema	180
6.2	Estudio del problema de convección-difusión	183
6.3	Estudio del problema de convección	185
6.3.1	Espacio funcional	186
6.3.2	Flujo rellenante	189
6.3.3	El problema de convección homogéneo	191
6.3.4	El problema de convección no homogéneo	192
6.3.5	Solución por transposición del problema convectivo	197
6.4	Convergencia	199
6.4.1	Análisis de convergencia débil	204
6.4.2	Análisis de convergencia fuerte	209



Conclusiones

213

Notaciones

\mathbb{R}^n Espacio euclídeo de dimensión $n = 2, 3$.

Ω Abierto acotado de \mathbb{R}^n (dominio que ocupa el fluido).

Γ Frontera de Ω .

$(0, T)$ Intervalo de tiempo de observación, $T > 0$.

x Variable espacial para las macro-estructuras.

y Variable espacial para las micro-estructuras.

t Variable temporal.

Y Cubo $[-\pi, \pi]^3$.

Dadas φ y ψ dos variables vectoriales:

$\varphi \cdot \psi$ Producto escalar euclídeo de φ por ψ : $\varphi \cdot \psi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi_i$.

$\varphi \times \psi$ Producto vectorial de φ por ψ para $n = 3$: $(\varphi \times \psi)_i = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{ikl} \varphi_k \psi_l$,
 $1 \leq i \leq 3$, donde ϵ_{ikl} es el tensor alternante de tercer orden, es decir,



$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} 1 & \text{si } ikl \text{ está en } 12312 \\ -1 & \text{si } ikl \text{ está en } 13213 \\ 0 & \text{si si dos subíndices están repetidos} \end{cases}$$

$\varphi \otimes \psi$ Matriz de elementos $(\varphi \otimes \psi)_{ij} = \varphi_i \psi_j$, $1 \leq i, j \leq n$.

$\varphi_{,t}$ Derivada de φ respecto de t : $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

$\varphi_{i,j}$ Derivada de φ_i respecto de x_j : $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$.

$\nabla \varphi$ Gradiente de φ respecto de la variable x : matriz de elementos $(\nabla \varphi)_{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$, $1 \leq i, j \leq n$.

$\nabla_y \varphi$ Gradiente de φ respecto de la variable y .

$\nabla \cdot \varphi$ Divergencia de φ respecto de la variable x : $\nabla \cdot \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

$\nabla_y \cdot \varphi$ Divergencia de φ respecto de la variable y .

$\nabla \times \varphi$ Rotacional de φ respecto de la variable x , para $n = 3$: vector de componentes $(\nabla \times \varphi)_i = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{ikl} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}$, $1 \leq i \leq 3$.

$\nabla_y \times \varphi$ Rotacional de φ respecto de la variable y , para $n = 3$.

$(\varphi \cdot \nabla) \psi$ Vector de componentes $[(\varphi \cdot \nabla) \psi]_i = \sum_{j=1}^n \varphi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq n$.

Dadas A y B dos matrices cuadradas de tamaño n :

A^t Matriz traspuesta de A : $(A^t)_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

$Adj(A)$ Matriz adjunta de A .

$tr(A)$ Traza A : $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

- $\det(A)$ Determinante de A .
- $A : B$ Producto escalar de A por B : $A : B = \text{tr}(B^t A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.
- $(A \nabla_y) \varphi$ Matriz de elementos $[(A \nabla_y) \varphi]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}$, $1 \leq i, j \leq n$.
- $(A \nabla_y) \times \varphi$ Vector de componentes $[(A \nabla_y) \times \varphi]_i = \sum_{k,l,j=1}^3 \epsilon_{ikl} a_{kj} \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_j}$, $1 \leq i \leq 3$.
- $\mathbf{a}(x, t)$ Coordenadas lagrangianas inversas: la posición en el instante inicial de la partícula que está en el punto x en el instante t .
- G Matriz $\nabla \mathbf{a} \nabla \mathbf{a}^t$.
- C Matriz $G^t G$.
- \hat{C} Matriz $G G^t$.
- $\rho(x, t)$ Densidad (en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ y en el instante $t \in [0, T]$).
- $\bar{\rho}(x, t)$ Densidad media.
- $\rho^{(k)}(y; x, t)$ Fluctuación turbulenta de la densidad de orden k .
- $\mathbf{v}(x, t)$ Campo de velocidades.
- $\bar{\mathbf{v}}(x, t)$ Campo medio de velocidades.
- $\mathbf{w}(y; x, t)$ Fluctuación turbulenta principal del campo de velocidades.
- $\tilde{\mathbf{w}}(y; x, t)$ Fluctuación canónica del campo de velocidades: $\tilde{\mathbf{w}} = G^t \mathbf{w}$.
- $\tilde{\mathbf{w}}^*(y; x, t)$ Fluctuación canónica normalizada del campo de velocidades.
- $\mathbf{v}^{(k)}(y; x, t)$ Fluctuación turbulenta de orden k del campo de velocidades.
- $e(x, t)$ Energía interna.



- $\bar{e}(x, t)$ Energía interna media.
- $e^{(k)}(y; x, t)$ Fluctuación turbulenta de orden k de la energía interna.
- $\hat{e}^{(1)}(y; x, t)$ Fluctuación canónica de la energía interna.
- $E(x, t)$ Energía total.
- \bar{E} Energía total media.
- $E^{(k)}(y; x, t)$ Fluctuación turbulenta de orden k de la energía total.
- $p(x, t)$ Presión dinámica.
- $\bar{p}(x, t)$ Presión dinámica media.
- $\pi(y; x, t)$ Fluctuación turbulenta principal de la presión.
- $p^{(k)}(y; x, t)$ Fluctuación turbulenta de orden k de la presión.
- $k = \delta^{2/3} q$ Energía cinética turbulenta media.
- h Helicidad turbulenta media.
- ε Tasa de disipación de la energía cinética turbulenta media.
- $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ Norma en $L^2(\Omega)$.
- $\|\cdot\|_{0,\Gamma^\pm}$ Norma en $L^2(\Gamma^\pm)$.
- $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ Norma en $H^1(\Omega)$.
- $\|\cdot\|_\infty$ Norma en $L^\infty(\Omega)$.
- \mathbf{n} Vector normal, exterior y unitario en Γ .
- Γ^- $\{x \in \Gamma, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}$.
- Γ^+ $\{x \in \Gamma, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\}$.

$L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^\pm)$ Espacio de las funciones definidas sobre Γ^\pm que tienen cuadrado sumable en Γ^\pm , respecto de la medida $d\gamma$ con peso $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|$.

$(\cdot, \cdot)_{\Gamma^\pm, \mathbf{v}}$ Producto escalar en $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^\pm)$: $(\alpha, \beta)_{\Gamma^\pm, \mathbf{v}} = \int_{\Gamma^\pm} \alpha \beta |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma$.

$\|\cdot\|_{\Gamma^\pm, \mathbf{v}}$ Norma en $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^\pm)$: $\|\alpha\|_{\Gamma^\pm, \mathbf{v}} = \left(\int_{\Gamma^\pm} \alpha^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma \right)^{1/2}$.

$H(\mathbf{v}, \Omega)$ Espacio funcional $\{\varphi \in L^2(\Omega) : \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Omega)\}$.

$(\cdot, \cdot)_H$ Producto escalar en $H(\mathbf{v}, \Omega)$: $(\varphi, \psi)_H = (\varphi, \psi)_\Omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v} \cdot \nabla \psi)_\Omega$.

$\|\cdot\|_H$ Norma en $H(\mathbf{v}, \Omega)$: $\|\varphi\|_H = [\|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi\|_{0,\Omega}^2]^{1/2}$.

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo trata sobre el estudio de los flujos compresibles que se desarrollan en régimen turbulento. Más concretamente, constituye una contribución al modelado y la simulación numérica de este tipo de flujos.

En este sentido, se construye un modelo de turbulencia, utilizando técnicas matemáticas de homogeneización. Este modelo se estudia desde un punto de vista teórico, analizando matemáticamente algunas cuestiones relacionadas con el mismo. Así también, como desde un punto de vista numérico, mediante la realización de diferentes ensayos numéricos.

Puesto que nuestro estudio se centra en los fluidos compresibles, comenzamos presentando las ecuaciones que determinan el comportamiento de estos flujos.

Particularmente interesante resulta conocer los mecanismos que generan la turbulencia y cómo son modelados los flujos que transcurren de forma turbulenta. Dedicamos los siguientes apartados de esta introducción a describir algunos aspectos fundamentales relacionados con estas cuestiones.

A continuación presentamos el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$. Este modelo es uno de los más conocidos y utilizados por la ingeniería. Constituye una referencia básica en este trabajo, ya que podemos decir que el nuevo modelo que proponemos aquí es un modelo híbrido engendrado a partir del modelo $k-\varepsilon$.

Seguidamente, introducimos la técnica general de modelado *MPP*, cuya herramienta básica es la teoría de la homogeneización. Éste es otro pilar de referencia para nuestro trabajo, puesto que el nuevo modelado se hace utilizando esta técnica. Reseñamos las cualidades características de los modelos pertenecientes a esta familia y algunos de los resultados más importantes que en relación a ellos se han obtenido hasta el momento.

Finalmente, describimos con más detalle el contenido de esta memoria y las principales aportaciones del trabajo que en ella se resume.

1.1 Las Ecuaciones de Navier-Stokes Compresibles

El movimiento de un fluido se formula en términos matemáticos mediante ecuaciones en derivadas parciales, que son la expresión de leyes físicas: las leyes de conservación, de carácter universal, y las leyes de comportamiento, proporcionadas por la naturaleza del flujo.

Consideremos un flujo de un fluido que ocupa un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$), durante un intervalo de tiempo $[0, T]$. El comportamiento del flujo en cada punto x y en cada instante de tiempo t queda determinado por las variables: densidad de masa $\rho(x, t)$, campo de velocidades $\mathbf{v}(x, t)$ y energía interna $e(x, t)$.

En esta memoria, consideramos flujos de fluidos newtonianos en el caso

más general: fluidos viscosos perfectos y compresibles. Estos flujos están gobernados por las llamadas **ecuaciones de Navier-Stokes compresibles** ([39], [1]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla p - \mu \nabla \cdot \mathcal{T} = \rho \mathbf{f} \quad (1.2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right] + p \nabla \cdot \mathbf{v} - \mu \mathcal{T} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \left(\frac{\kappa}{c_v} \nabla e \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.3)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (1.4)$$

La ecuación (1.1) es la llamada ecuación de continuidad que expresa la ley de conservación de la masa.

La ecuación (1.2) expresa la ley de conservación de la cantidad de movimiento. En ella, p representa la presión dinámica del fluido, la constante positiva μ es el primer coeficiente de viscosidad del fluido y \mathcal{T} es el tensor de esfuerzos viscosos. Es decir, se está suponiendo que el tensor de esfuerzos es de la forma:

$$\sigma = -pI + \mu \mathcal{T}, \quad (1.5)$$

donde I denota el tensor identidad. Finalmente, \mathbf{f} es una densidad de fuerzas exteriores.

Esta ley de conservación se obtiene a partir de la segunda ley de Newton que nos dice que el producto de la masa por la aceleración $\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]$ que sufren las partículas por unidad de volumen es igual a la resultante de fuerzas que actúan sobre ellas. Se supone que estas fuerzas son de tres tipos:

- Fuerzas de presión $-\nabla p$ debidas a la acción directa del resto del medio.
- Fuerzas de viscosidad $\mu \nabla \cdot \mathcal{T}$ debidas al rozamiento con el resto de las partículas.



- Fuerzas exteriores $\rho \mathbf{f}$ debidas eventualmente a la acción de un campo gravitatorio, magnético, etc.

Para un fluido newtoniano el tensor \mathcal{T} se expresa en función de $\nabla \mathbf{v}$ según la ley:

$$\mathcal{T} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})I. \quad (1.6)$$

Esta ley no es en absoluto arbitraria. Una vez efectuada la hipótesis de que el tensor \mathcal{T} , por su naturaleza, debe depender del tensor $\nabla \mathbf{v}$, la expresión (1.6) viene determinada por la suposición de que el medio sea isótropo y por los invariantes de dicho tensor: debe ser invariante bajo traslaciones y rotaciones del sistema coordenado, puesto que las leyes físicas deben ser independientes de la posición del observador [20].

La ecuación (1.3) expresa la ley de conservación de la energía. Aquí κ es el coeficiente de difusión del calor y c_v el calor específico a volumen constante.

Esta ley de conservación se obtiene a partir del primer principio de la termodinámica según el cual, la variación de la energía total por unidad de volumen en una determinada región es igual al trabajo realizado por las fuerzas ejercidas sobre dicha región. La energía total es la suma de la energía cinética y de la energía interna:

$$E = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e. \quad (1.7)$$

Y el trabajo efectuado proviene de las fuerzas exteriores $\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$, de las fuerzas interiores $p\nabla \cdot \mathbf{v} - \mu \mathcal{T} : \nabla \mathbf{v}$ y del flujo de calor $-\nabla \cdot \left(\frac{\kappa}{c_v} \nabla e\right)$.

El flujo de calor $\mathbf{q}(x, t)$ viene modelado por la ley de Fourier, según la cual \mathbf{q} debe ser proporcional al gradiente de la temperatura θ :

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla \theta. \quad (1.8)$$

Como la temperatura se relaciona con la energía interna según la ley:

$$e = c_v \theta, \quad (1.9)$$

el flujo de calor se expresa en función de la energía interna como:

$$\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{c_v} \nabla e. \quad (1.10)$$

Finalmente, la ecuación (1.4) es la llamada ley de estado de los gases perfectos que expresa la presión en términos de la densidad y la energía interna:

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad (1.11)$$

siendo $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ la razón de calores específicos a presión y volumen constantes.

Teóricamente, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (1.1)-(1.4), junto con condiciones iniciales y de contorno apropiadas, constituye un problema cerrado ya que comprende $n + 3$ ecuaciones con igual número de incógnitas.

Flujos incompresibles

Se dice que un flujo es incompresible cuando el volumen de fluido en cualquier subdominio $D \subset \Omega$ se mantiene constante en el tiempo. Es decir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{D_t} dx \right) = 0,$$

donde D_t es el transformado por la función de flujo del subdominio D en el instante t . Aplicando el teorema del transporte, esto equivale a que se verifique la condición $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Mirando la ecuación de continuidad (1.1), escrita en función del operador derivada total respecto del campo \mathbf{v} :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

se deduce que si el flujo es incompresible entonces $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Es decir, la densidad es constante a lo largo de las curvas características. Si además el fluido es homogéneo, es decir, la densidad es constante en espacio, la incompresibilidad es equivalente a una densidad constante, $\rho = \rho_0$.

En este caso, las ecuaciones (1.1)-(1.4) se reducen a las llamadas **Ecuaciones de Navier-Stokes Incompresibles**:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f} \end{cases} \quad (1.12)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ es la viscosidad cinemática y p y \mathbf{f} denotan en realidad $\frac{p}{\rho_0}$ y $\frac{\mathbf{f}}{\rho_0}$.

Formulación conservativa

En general, decimos que una ecuación en derivadas parciales, satisfecha por la variable a , está escrita en forma conservativa, si el operador diferencial es una divergencia en espacio - tiempo de la forma:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot F(a) = f \quad \text{en } \Omega \times [0, T],$$

donde F se llama flujo de a . Decimos que esta forma es conservativa porque si $f = 0$, en un subdominio $D \subset \Omega$ en el que el flujo de a sea nulo a través de la frontera, entonces a se conserva en dicho subdominio:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D a \, dx = 0.$$

Si expresamos las ecuaciones (1.1)-(1.4) en función de las variables conservativas, momento cinético $\rho \mathbf{v}$ y energía total E , se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles escritas en forma conservativa:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + pI) - \mu \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \mathbf{f} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{v}] - \mu \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \left(\frac{\kappa}{c_v} \nabla e \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) \end{cases} \quad (1.13)$$

Adimensionalización de las ecuaciones

Cada una de las variables que intervienen las ecuaciones (1.13) está escrita con su correspondiente magnitud. En la práctica es conveniente escribir estas ecuaciones de forma adimensionalizada. Para ello, se consideran magnitudes características del flujo:

- L_0 : longitud de referencia
- ρ_0, V_0 : densidad de masa y velocidad de referencia

y se definen las siguientes variables normalizadas:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L_0}, & t^* &= \frac{t V_0}{L_0}, & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0}, & \mathbf{v}^* &= \frac{\mathbf{v}}{V_0} \\ e^* &= \frac{e}{V_0^2}, & p^* &= \frac{p}{\rho_0 V_0^2}, & E^* &= \frac{E}{\rho_0 V_0^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Las ecuaciones (1.13) escritas en términos de estas nuevas variables tienen la siguiente expresión:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho^* \mathbf{v}^*)}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{v}^* \otimes \mathbf{v}^*) + \nabla^* p^* - \frac{1}{Re} \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* &= \rho^* \mathbf{f}^* \\ \frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot [(E^* + p^*) \mathbf{v}^*] - \frac{1}{Re} \nabla^* \cdot (\boldsymbol{\tau}^* \mathbf{v}^*) - \nabla^* \cdot \left(\frac{\gamma}{Pr Re} \nabla e^* \right) &= \rho^* \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v}^* \\ p^* &= (\gamma - 1) \left(E^* - \frac{1}{2} \rho^* |\mathbf{v}^*|^2 \right) \end{aligned} \right. \quad (1.15)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^* = (\nabla^* \mathbf{v}^* + \nabla^{*t} \mathbf{v}^*) - \frac{2}{3} (\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) \mathbf{I}$ y $\mathbf{f}^* = \frac{L_0}{V_0^2} \mathbf{f}$.

La estructura de estas ecuaciones sigue siendo la misma que la del sistema original. Sin embargo, en ellas aparecen dos nuevos números adimensionales:

- El número de Reynolds, que mide la relación entre fuerzas de inercia y

fuerzas de viscosidad y viene dado por

$$Re = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu}. \quad (1.16)$$

- El número de Prandtl que mide la relación entre los coeficientes de viscosidad y de difusión de la energía interna. Se define como

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}. \quad (1.17)$$

La ventaja de considerar estas ecuaciones adimensionales radica en lo siguiente: si consideremos dos problemas con geometrías homotéticas y valores de referencia tales que se mantengan iguales los números adimensionales (flujos similares), entonces se verifica un principio de similitud. En virtud de este principio, las variables normalizadas correspondientes, verifican exactamente las mismas ecuaciones en el mismo dominio. En consecuencia, podemos resolver un problema y obtener la solución del otro mediante un simple cambio de variables. En la práctica, ésto permite realizar experimentos a pequeña escala y simular numéricamente toda una familia de problemas correspondientes a flujos similares.

1.2 La generación de la turbulencia

Desde el punto de vista físico, el valor del número de Reynolds determina en gran medida el comportamiento cualitativo del flujo. En efecto, si Re es pequeño, el flujo se desarrolla de forma regular, describiendo capas paralelas que no se entremezclan, no se producen variaciones bruscas de las variables que determinan el movimiento y además las pequeñas perturbaciones son amortiguadas por el efecto de la viscosidad. En este caso, se dice que el flujo se desarrolla en **régimen laminar**. Conforme Re crece, los efectos de transporte van predominando sobre

los de difusión y va aumentando la inestabilidad del flujo. Para valores de Re suficientemente grandes el flujo evoluciona de forma completamente irregular, tanto en espacio como en tiempo. La observación de las magnitudes asociadas al flujo muestran un comportamiento totalmente caótico, a la vez que las pequeñas perturbaciones son rápidamente amplificadas, generándose estructuras de gran complejidad tanto a pequeña como a gran escala que interaccionan entre sí. En este caso, se dice que el flujo se desarrolla en **régimen turbulento**. Es fácil imaginarse un flujo turbulento pensando en el humo de un cigarrillo.

Evidentemente, ésta no es una definición muy precisa de la turbulencia. La mayoría de los autores en su lugar, optan por explicitar una serie de propiedades que caracterizan los flujos turbulentos [59, 65].

La mayoría de los flujos de interés práctico se desarrollan en régimen turbulento. Muchos de ellos juegan un papel importante en la vida del hombre. Así ocurre, por ejemplo, con las circulaciones atmosféricas y oceánicas que determinan el clima y en consecuencia aspectos tan fundamentales para nosotros. También se desarrollan en régimen turbulento los flujos de fluidos en torno a obstáculos. Si pensamos en obstáculos tan imprescindibles para nosotros como automóviles, aviones o barcos, es clara la necesidad de estudiar estos flujos cuando pretendemos aumentar la seguridad, reducir costes, etc.

Existe un cierto paralelismo entre el comportamiento cualitativo del flujo en función del número de Reynolds y la dificultad del análisis matemático, tanto teórico como numérico, de las ecuaciones que lo describen.

En efecto, desde el punto de vista teórico, podemos decir en términos intuitivos, que la inestabilidad crece con el número de Reynolds debido a que los efectos regularizadores de los términos viscosos no son suficientes para controlar la no linealidad de los términos de convección. Este carácter inestable hace que estos flujos sean muy sensibles a pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales

y de contorno.

Por otro lado, la turbulencia es esencialmente tridimensional y en este caso el estudio teórico de las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles es todavía un problema abierto. En concreto, sabemos que completando las ecuaciones con condiciones iniciales y de contorno adecuadas y suficientemente regulares existe una solución global en tiempo, que depende de forma continua de los datos [44]. Sin embargo, demostrar la unicidad de solución global sigue siendo aún un problema abierto.

Desde el punto de vista numérico, la simulación de flujos en régimen turbulento se enfrenta también con grandes dificultades. Entre ellas, podemos resaltar fundamentalmente dos:

- Los esquemas numéricos de resolución heredan la inestabilidad de las ecuaciones. Esto produce la amplificación de los errores de discretización, dando lugar a soluciones numéricas bien distintas de las reales. Se hace necesario pues desarrollar métodos numéricos con excelentes propiedades de estabilidad.
- Es necesario utilizar un elevado número de nodos de discretización para simular el flujo correctamente, teniendo en cuenta la talla de las pequeñas estructuras que se generan en él. En la mayoría de los casos de interés, donde se trabaja con dominios tridimensionales de geometría compleja, esto supondría un volumen de cálculo que aún resulta inabordable para la capacidad y rapidez de los ordenadores actuales.

Todas estas dificultades ponen de manifiesto la imposibilidad de calcular directamente los flujos turbulentos de interés práctico. Esto conduce a afrontar el problema desde otra estrategia: el modelado de la turbulencia.

1.3 El modelado de la turbulencia

Una característica sobresaliente de los flujos turbulentos es su carácter cuasi-aleatorio en tiempo y en espacio. Mediciones experimentales muestran que las fluctuaciones de las diferentes magnitudes tienden a alcanzar todos los valores de un intervalo dado. Aunque este carácter aleatorio implique que deba existir una cierta ley de probabilidad, ésta no se conoce a priori.

Afortunadamente no estamos interesados en conocer todos los detalles del flujo, sino que en general el interés se centra en conocer ciertas cantidades de carácter macroscópico. De esta manera, el objetivo pasa a ser el de estudiar el comportamiento promediado, en algún sentido, del flujo. Se espera así conseguir un doble efecto: Por un lado, que desaparezcan las estructuras de talla menor y que el flujo promediado tenga, en general, estructuras de talla mucho mayor que el flujo original. Por otro lado, que disminuya la inestabilidad de las ecuaciones satisfechas por el flujo promediado. Podemos decir, por tanto, que el modelado de la turbulencia tiene un doble objetivo: definir el flujo promediado y obtener las ecuaciones satisfechas por éste.

1.3.1 Las ecuaciones de Reynolds

La mayoría de los modelos de turbulencia existentes se basan en la misma idea inicial: las variables que determinan el comportamiento del flujo se descomponen en una parte media, que describe el comportamiento de las grandes estructuras, y una parte fluctuante, que describe las pequeñas estructuras.

La parte media se define mediante un operador de promediado que será en cada caso el que mejor se adapte a la naturaleza del problema.

Una vez definido el flujo medio, una de las técnicas más extendidas para

obtener las ecuaciones que satisfacen las variables medias, consiste en introducir esta descomposición en las ecuaciones de Navier-Stokes, y a su vez promediar estas ecuaciones. Se obtienen así las llamadas ecuaciones de Reynolds, que las introdujo por primera vez, para flujos incompresibles [52].

Para deducir estas ecuaciones, es interesante tener en cuenta la siguiente observación. Consideremos la descomposición de la variable ρ en una parte media $\bar{\rho}$ y una parte fluctuante ρ' , lo que habitualmente se llama descomposición de Reynolds:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad \text{con } \bar{\rho}' = 0.$$

Y lo mismo para cualquier otra variable que interviene en las ecuaciones φ :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \quad \text{con } \bar{\varphi}' = 0.$$

Para un término de las ecuaciones de la forma $\rho\varphi$ se tiene que

$$\rho\varphi = \bar{\rho}\bar{\varphi} + \bar{\rho}\varphi' + \rho'\bar{\varphi} + \rho'\varphi'.$$

Al introducir esta descomposición en las ecuaciones y promediarlas queda

$$\overline{\rho\varphi} = \bar{\rho}\bar{\varphi} + \overline{\rho'\varphi'}.$$

Entonces se observa que el uso de la descomposición de Reynolds en las ecuaciones compresibles no elimina los términos de la forma $\overline{\rho'\varphi'}$. Para solventar esta dificultad, Favre propuso en [26] utilizar, en el caso compresible, un nuevo operador de promediado ponderado por la densidad de masa, que da lugar a las llamadas medias de Favre:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\overline{\rho\varphi}}{\bar{\rho}}.$$

La parte fluctuante de Favre se define como $\varphi'' = \varphi - \tilde{\varphi}$ y por tanto se tiene la descomposición

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'', \quad \text{con } \tilde{\varphi}'' = 0.$$

Ahora, por la propia definición de $\tilde{\varphi}$, se tiene $\overline{\rho\tilde{\varphi}} = \bar{\rho}\tilde{\varphi}$ y $\overline{\rho\varphi''} = 0$.

Para obtener las ecuaciones de Reynolds compresibles, se descomponen en función de la media de Favre el campo de velocidades y la energía interna y para el resto de variables se mantiene la descomposición de Reynolds:

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \rho', & \mathbf{v} &= \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'', & p &= \bar{p} + p', \\ E &= \bar{E} + E', & e &= \bar{e} + e''.\end{aligned}$$

Consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles (1.13), en ausencia de fuerzas exteriores. Si introducimos en ellas esta descomposición y promediamos las ecuaciones en el sentido de Reynolds, obtenemos el siguiente sistema (puede consultarse [48] para más detalles):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla \bar{p} - \mu \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} = -\nabla \cdot (\overline{\rho\mathbf{v}'' \otimes \mathbf{v}''}) \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{E}\tilde{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{p}\tilde{\mathbf{v}}) - \nabla \cdot \left(\frac{\kappa}{c_v} \nabla \bar{e} \right) = \\ -\nabla \cdot (\overline{(E+p)\mathbf{v}''}) - \mu \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}\tilde{\mathbf{v}})\end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} (|\tilde{\mathbf{v}}|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}''}|^2) \right) \quad (1.21)$$

$$\text{con } \bar{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}^t) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{I}.$$

Desafortunadamente, como es habitual en el modelado de la turbulencia, el sistema de ecuaciones obtenido no está cerrado, en el sentido de que las variables medias aparecen acopladas con las variables fluctuantes. Por ejemplo, en la ecuación para la cantidad de movimiento (1.19), aparece el término $\nabla \cdot (\overline{\rho\mathbf{v}'' \otimes \mathbf{v}''})$, donde

$$R = \overline{\rho\mathbf{v}'' \otimes \mathbf{v}''} \quad (1.22)$$



es el llamado tensor de Reynolds. Este término pone en evidencia el acoplamiento entre las variables de diferente naturaleza y representa, en particular, la acción promediada del campo fluctuante sobre el campo medio.

Este hecho plantea el problema fundamental del modelado de la turbulencia, llamado **problema del cierre**: expresar todos los términos de las ecuaciones de Reynolds en función de las variables promediadas. Desgraciadamente, no podemos esperar que el problema del cierre se resuelva exactamente. El motivo radica en los términos no lineales que intervienen en las ecuaciones de Navier-Stokes. Un análisis de Fourier pone de manifiesto que estos términos no lineales provocan la interacción entre modos de Fourier de distintas frecuencias, lo cual está relacionado con transferencia de energía entre las grandes y las pequeñas estructuras que se generan en el flujo. En consecuencia, desde un punto de vista físico, no será posible descomponer las variables totales en otras elementales, sin que éstas reaccionen unas sobre otras. En términos matemáticos, no es posible una descomposición de este tipo, de manera que las variables elementales estén gobernadas por problemas desacoplados.

Existen pocos resultados matemáticos que contribuyan a resolver el problema del cierre. La mayoría de los modelos de turbulencia resuelven este problema considerando aproximaciones que se basan en hipótesis físicas. Por ejemplo, desde un punto de vista físico, parece razonable que el tensor de Reynolds dependa del tensor de deformaciones ($\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^t$) ya que la turbulencia está asociada a fuertes gradientes de velocidad. Esta es la llamada **hipótesis de Reynolds**. En esta misma línea, Boussinesq [11] postuló la hipótesis de que la interacción entre las pequeñas estructuras que se desarrollan en el flujo turbulento producen una disipación de energía, de forma semejante a la que se produce por la interacción entre las moléculas del flujo. Esta es la llamada **hipótesis de Boussinesq**. En consecuencia, el tensor de Reynolds se puede expresar de forma semejante al

tensor de esfuerzos (1.5):

$$R = \frac{2}{3} \bar{\rho} k I - \mu_t \bar{T}, \quad (1.23)$$

introduciendo los conceptos de energía cinética turbulenta media, $k = \frac{1}{2} \overline{|\mathbf{v}''|^2}$ y viscosidad turbulenta μ_t .

La hipótesis de Boussinesq puede ser demostrada matemáticamente, una vez aceptada la hipótesis de Reynolds, y sobre la suposición razonable de que las ecuaciones de Reynolds deben ser invariantes bajo cambios del sistema de referencia, para ser admisibles físicamente. En estas condiciones, en [48] se demuestra que (1.23) es la única expresión posible para el tensor de Reynolds, en dos dimensiones de espacio.

Si se acepta la hipótesis de Boussinesq, el tensor de Reynolds aún no queda cerrado, ya que a diferencia de la viscosidad, la viscosidad turbulenta no es un parámetro característico del flujo sino que su valor varía en espacio y tiempo. Así pues, resta todavía expresar la viscosidad turbulenta en términos de las variables promediadas.

Existe una amplia variedad de modelos, que resuelven este problema utilizando diferentes hipótesis. Son los llamados modelos algebraicos o modelos a una o dos ecuaciones. Algunas referencias fundamentales de este tipo de modelos son los de Cebeci-Smith [12], Baldwin-Lomax [3] y Spalard-Almaras [56].

En la siguiente sección presentamos uno de los modelos a dos ecuaciones más conocidos, que es el llamado modelo $k - \varepsilon$ y que será el modelo de referencia en esta memoria.



1.4 El modelo $k - \varepsilon$ de turbulencia

Este modelo fue propuesto por Launder y Spalding en 1972 [41]. Inicialmente fue desarrollado para flujos incompresibles pero posteriormente ha sido extendido también al caso compresible, fundamentalmente por Jones [36] y Vandromme [64]. Se trata de uno de los llamados modelos a dos ecuaciones. Esto es debido a que resuelve el cierre del tensor de Reynolds a partir de la hipótesis de Boussinesq (1.23):

$$R = \frac{2}{3} \bar{\rho} k I - \mu_t \bar{T}.$$

Y a su vez, la viscosidad turbulenta se expresa como función de dos magnitudes propias de la turbulencia: la energía cinética turbulenta media k y su tasa de disipación viscosa ε , definidas como

$$k = \frac{1}{2} \overline{|\mathbf{v}''|^2} \quad (1.24)$$

$$\bar{\rho} \varepsilon = \frac{\mu}{2} \overline{|\nabla \mathbf{v}'' + \nabla \mathbf{v}''^t|^2} - \frac{2}{3} \mu \overline{|\nabla \cdot \mathbf{v}''|^2} \quad (1.25)$$

Observemos que $\bar{\rho} \varepsilon \geq 0$ y, obviamente, $k \geq 0$.

Más concretamente, μ_t se expresa según la relación:

$$\mu_t = c_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (1.26)$$

siendo c_μ una constante universal que se determina experimentalmente.

Una vez cerrado el tensor de Reynolds, identificando las medias de Reynolds y de Favre del campo de velocidades, la ecuación de la cantidad de movimiento en las ecuaciones de Reynolds (1.19) queda modelizada mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} I + \frac{2}{3} \bar{\rho} k I) = \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) \tilde{T}], \quad (1.27)$$

con $\tilde{T} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}^t) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) I$.

Para modelizar la ecuación de la energía (1.20) los términos $\overline{(E + p)\mathbf{v}''}$ y $\overline{\mathcal{T}\mathbf{v}}$ se sustituyen por una aproximación propuesta por Vandromme [64], obteniéndose la siguiente ecuación (véase [48] para más detalles):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{E} + \bar{p}I + \frac{2}{3}\bar{\rho}kI)\tilde{\mathbf{v}} &= \\ &= \nabla \cdot [(\mu + \mu_t)\tilde{\mathcal{T}}\tilde{\mathbf{v}}] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\kappa}{c_v} + \frac{\kappa_t}{c_v} \nabla \tilde{\varepsilon} \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right), \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde κ_t es el coeficiente de difusión turbulenta de calor y σ_k una constante que se determina experimentalmente.

Para cerrar el sistema, se obtienen finalmente dos ecuaciones de transporte para las variables k y ε , que a su vez han de ser modelizadas. La ecuación obtenida para k es:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}k\tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho}\varepsilon. \quad (1.29)$$

Según esta ecuación, los factores que intervienen en la variación de la energía cinética turbulenta son difusión $\nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right]$, producción $-R : \nabla \tilde{\mathbf{v}}$ y disipación $-\bar{\rho}\varepsilon$. Los términos que aparecen en la ecuación exacta para k debidos a los efectos de la compresibilidad han sido despreciados en esta modelización. De esta manera, la ecuación modelizada es similar a la obtenida para flujos incompresibles.

Para turbulencia isótropa (cuyos estadísticos son invariantes bajo traslaciones y rotaciones) la ecuación (1.29) se reduce a

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}k\tilde{\mathbf{v}}) = -\bar{\rho}\varepsilon.$$

Usando la ecuación que verifica $\bar{\rho}$, esta ecuación se reduce a su vez a

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla k = -\varepsilon.$$

De aquí que a ε se le de el nombre de tasa de disipación viscosa de k .

La ecuación que se propone para ε es:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - c_{\varepsilon_2} \frac{(\bar{\rho}\varepsilon)^2}{\bar{\rho}k}. \quad (1.30)$$

donde σ_ε , c_{ε_1} y c_{ε_2} son constantes que se determinan experimentalmente. Como vemos, la estructura de esta ecuación es semejante a la de la ecuación para k , es decir,

Variación Total de $\bar{\rho}\varepsilon =$ Difusión + Producción + Disipación.

En resumen, el modelo $k-\varepsilon$ de turbulencia está constituido por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \\ \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} I + \frac{2}{3} \bar{\rho} k I) = \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) \tilde{\mathbf{T}}] \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{E} + \bar{p} I + \frac{2}{3} \bar{\rho} k I) \tilde{\mathbf{v}} = \\ \quad = \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{v}}] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\kappa}{c_v} + \frac{\kappa_t}{c_v} \nabla \bar{e} \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) \\ \frac{\partial(\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \varepsilon \\ \frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - c_{\varepsilon_2} \frac{(\bar{\rho} \varepsilon)^2}{\bar{\rho} k} \\ \bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 - \bar{\rho} k \right) \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Las diferentes constantes que aparecen en el modelo han sido evaluadas mediante numerosas mediciones experimentales y ensayos numéricos [48]. Los valores que habitualmente se les asignan son los siguientes:

$$c_\mu = 0.09, \quad c_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon_2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (1.32)$$

Al igual que las ecuaciones de Navier-Stokes, en la práctica, es habitual considerar estas ecuaciones en forma adimensionalizada. Para ello, se sigue un

procedimiento análogo al caso laminar. Es decir, se fijan las magnitudes características del flujo y se definen, además de las variables físicas normalizadas (1.14), las variables turbulentas normalizadas:

$$k^* = \frac{k}{V_0^2}, \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon L_0}{V_0^3}.$$

Introduciendo este cambio de variables en el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene este otro (en el que hemos omitido los superíndices por simplificar la notación):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} I + \frac{2}{3} \bar{\rho} k I) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \tilde{\boldsymbol{\tau}} \right] \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{E} + \bar{p} I + \frac{2}{3} \bar{\rho} k I) \tilde{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \tilde{\boldsymbol{\tau}} \tilde{\mathbf{v}} \right] + \\ + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\gamma}{Pr Re} + \frac{\gamma}{Pr_t Re_t} \right) \nabla \bar{e} \right] + \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re_t \sigma_k} \nabla k \right) \\ \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_k} \right) \nabla k \right] - R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \varepsilon \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - c_{\varepsilon 2} \frac{(\bar{\rho} \varepsilon)^2}{\bar{\rho} k} \\ \bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 - \bar{\rho} k \right) \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Este sistema de ecuaciones mantiene la misma estructura que el original, incorporando dos nuevos números sin dimensión asociados a la turbulencia:

- El número de Reynolds turbulento

$$Re_t = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu_t} \quad (1.34)$$

- El número de Prandtl turbulento

$$Pr_t = \frac{\mu_t c_p}{\kappa_t} \quad (1.35)$$



En la mayoría de las aplicaciones el número de Prandtl turbulento se toma igual al laminar, $Pr = 0.72$, $Pr_t = Pr$.

Desde el punto de vista teórico, existen resultados relativos a la existencia de solución de las ecuaciones de k y ε para un campo de velocidades dado suficientemente regular. En esta línea, podemos citar el trabajo de Mohammadi [46]. Más recientemente, este mismo autor ha obtenido resultados más completos para otro modelo alternativo obtenido a partir del modelo $k - \varepsilon$, [47].

También existen resultados matemáticos que avalan la consistencia física de este modelo. Se trata de resultados de los que se deducen propiedades matemáticas, que expresan propiedades físicas, imprescindibles para que el modelo sea físicamente aceptable. Así por ejemplo, en [46] se demuestra también la positividad de las variables k y ε .

También, desde un punto de vista numérico, el modelo ha sido validado en numerosas aplicaciones. Los resultados obtenidos en la mayoría de los casos son bastante precisos, incluso en geometrías complejas. Por ello es uno de los modelos más utilizados en la ingeniería. Una buena muestra de diferentes métodos numéricos utilizados en la resolución de este modelo y los resultados obtenidos con éstos, puede verse en [48]. Sin embargo, es también conocido que no resulta adecuado para simular la capa límite. En esta misma referencia, se recogen algunas de las ideas que han sido utilizadas para resolver esta dificultad.

Otro tratamiento bien distinto del modelado de la turbulencia es el que desarrollan los modelos que llamamos *MPP*, que presentamos a continuación.

1.5 El modelado *MPP* de la turbulencia

La homogeneización constituye una técnica que permite estudiar matemáticamente el comportamiento límite de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales con datos o coeficientes altamente oscilantes [7, 25].

En 1985 McLaughlin, Papanicolaou y Pironneau aplicaron esta técnica al análisis del comportamiento asintótico de las soluciones de las ecuaciones de Euler para flujos de fluidos incompresibles e ideales con condiciones iniciales altamente oscilantes [45]. Este trabajo constituye un intento riguroso de cierre del problema de Reynolds. En él se consigue demostrar que el comportamiento de un flujo de tales características está gobernado por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, que se enmarca en los llamados modelos de turbulencia a una ecuación. El modelo obtenido, llamado *MPP* de forma abreviada, contiene las ecuaciones promediadas que describen la evolución de las variables medias del flujo, como es común a otros modelos de turbulencia. Sin embargo, su distinción principal consiste en obtener al mismo tiempo un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que determina el comportamiento del campo fluctuante. Inevitablemente, existen términos de interacción entre ambos sistemas que los hacen ser esencialmente acoplados. En particular, en las ecuaciones promediadas aparecen los llamamos términos de cierre, representando la acción promediada del campo fluctuante sobre el flujo medio.

Así pues, el modelo *MPP* introduce una nueva técnica de modelado de la turbulencia que utiliza exclusivamente herramientas matemáticas y que por ello, difiere sustancialmente de otros modelos de turbulencia clásicos. Efectivamente, el modelo *MPP* se deduce mediante una derivación matemática formal. Además en él los términos de cierre se obtienen a partir de la solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. En otros modelos, como hemos comentado, las técnicas utilizadas siguen argumentos más o menos heurísticos y los términos de

cierre se modelizan a partir de hipótesis físicas y mediciones experimentales.

Posteriormente, se han obtenido otras versiones del modelo *MPP* aplicando la misma metodología para estudiar diferentes tipos de flujos: flujos incompresibles débilmente viscosos [14, 50, 17]; flujos compresibles isentrópicos ideales [13, 19] y débilmente viscosos [15]; flujos compresibles perfectos ideales [18] y flujos compresibles perfectos con difusión en temperatura [27, 16].

Formalmente, las ecuaciones en macro-estructura de los modelos *MPP* presentan muchas semejanzas estructurales con los modelos estándar de turbulencia “a una o dos ecuaciones”: Incorporan los mismos términos que modelan el transporte por el campo medio de velocidades, la producción debida a la interacción con el flujo medio y la disipación viscosa. Esta semejanza es particularmente notable con el modelo k-epsilon, con el cual coincide completamente en el caso de turbulencia localmente homogénea e isotrópica [27].

Sin embargo, su mayor inconveniente es que no incorporan efectos de difusión turbulenta, característica de la turbulencia plenamente desarrollada. Incorporan en su lugar términos que modelan ciertos efectos transitorios de la interacción entre grandes y pequeñas estructuras, que en ciertos casos podrían ser de naturaleza ondulatoria [6, 14]. Se trata de efectos novedosos en el modelado de la turbulencia, aunque poco interesantes desde el punto de vista de la ingeniería. Este fenómeno parece ligado a la separación de escalas entre grandes y pequeñas estructuras, hipótesis de la que parten los modelos *MPP*.

Recientemente, T. Hou y su equipo de colaboradores ha dado una prueba rigurosa de la validez de los modelos *MPP* para flujos incompresibles, como modelos de efectos esencialmente transitorios [33, 34, 35]. Hou desarrolla modelos en los que la perturbación turbulenta es transportada por todo el campo de velocidades, y no solamente por la velocidad media. Esto plantea notables dificultades técnicas, que son resueltas con brillantez. Pero permite desarrollar

un modelo en el que se reduce enormemente el número de grados de libertad en la simulación de detalles finos de la evolución de flujos en dos escalas. Mas aún, este modelo es combinado con análisis multiescala para incorporar efectos de difusión turbulenta en el marco de un modelo *MPP*.

Nuestro trabajo se ha centrado en el estudio de flujos compresibles, para los que nuestra contribución parte de la extensión de la técnicas *MPP* anteriores al modelo obtenido por Hou. Este trabajo se describe en esta memoria, cuyo contenido hemos organizado como exponemos a continuación.

1.6 Contenido de la memoria

El objetivo de este trabajo ha sido: En primer lugar, construir un nuevo modelo de turbulencia para flujos compresibles. Un modelo híbrido entre el modelo $k - \varepsilon$ y el modelo *MPP*, que incorpore los efectos que cada uno de los modelos por separado toma en cuenta de forma más adecuada. En segundo lugar, desarrollar un método numérico de resolución de este modelo que permita implementarlo y validarlo numéricamente.

Este trabajo ha sido realizado en diferentes etapas, que hemos tratamos de describir en cada uno de los capítulos de esta memoria. Un resumen del contenido de cada uno de estos capítulos es el siguiente:

En el capítulo 2 desarrollamos una nueva versión del modelo *MPP* para flujos compresibles perfectos débilmente viscosos.

El modelado *MPP* permite caracterizar matemáticamente el comportamiento de ciertos tipos de flujos turbulentos "clásicos": la turbulencia homogénea y la turbulencia isotrópica. Esta caracterización viene dada por la clase de funciones en la que se buscan las perturbaciones turbulentas. En concreto, las funciones casi-periódicas dan lugar a turbulencia localmente homogénea e

isótropa. Este es el caso del modelo obtenido por D. Franco en [27]. En cambio, para las funciones periódicas, cuya célula de periodicidad puede transformarse por homotecia, se modela turbulencia homogénea. Este es el caso, del modelo que nosotros hemos desarrollado. En cualquier caso, las propiedades de homogeneidad e isotropía a las que nos referimos han de entenderse localmente, ya que se cumplen respecto de las variables en micro-estructura.

Es claro, que las funciones periódicas son un caso particular de las casi-periódicas. Sin embargo, como decimos, el modelo obtenido para las primeras es más general, es decir, válido para una clase de flujos más amplia, que el modelo obtenido a partir de las segundas.

El hecho de que las perturbaciones verifiquen un problema en micro-estructura incompresible, condiciona a que el modelo sea válido sólo para la simulación de flujos a bajos números de Mach, como también es el caso del modelo $k - \epsilon$.

Al igual que en anteriores modelos *MPP*, también en nuestro modelo, es posible explicitar la dependencia de la perturbación respecto del campo medio. Esto se hace a través de la solución de un problema en micro-estructura canónico para las ecuaciones de Euler generalizadas; en el sentido de que dependen de las coordenadas lagrangianas inversas relativas al campo medio de velocidades.

Este hecho tiene una importante repercusión sobre la estructura de los términos de cierre, ya que permite que también éstos puedan ser expresados en función del campo medio a través de unos términos de cierre canónicos.

La consistencia física del modelo ha sido analizada a través de dos vías:

Por una parte, comprobamos que si se repite el mismo procedimiento de deducción del modelo, partiendo de las ecuaciones escritas en forma conservativa, el modelo obtenido resulta ser justamente la forma conservativa del modelo

obtenido anteriormente. Este hecho refuerza la consistencia de la técnica empleada. Además la forma conservativa del modelo pone claramente de manifiesto que se conserva la energía total. Más aún, nos indica que ello ocurre porque toda la energía cinética turbulenta que se disipa se transforma en energía interna.

Por otra parte, al igual que en modelos anteriores, nuestro modelo puede englobarse en la familia de modelos a dos ecuaciones. En nuestro caso, para la energía cinética media y la helicidad media. Al estudiar la analogía de nuestro modelo con el modelo de referencia en esta familia, el modelo $k - \varepsilon$, comprobamos que el primero se reduce a éste segundo, para turbulencia homogénea, en algunas situaciones particulares.

A partir de este primer modelo, somos capaces de obtener un modelo reducido a una ecuación. Ello es posible si la perturbación inicial de la velocidad verifica determinadas propiedades de simetría. Evidentemente, se trata de un modelo más simple, ya que elimina la ecuación para la helicidad media, pero a cambio modela un tipo de turbulencia más restrictivo.

En el capítulo 3, construimos un nuevo modelo de turbulencia compresible que constituye un modelo híbrido entre el modelo $k - \varepsilon$ y el modelo *MPP*, desarrollado en el capítulo anterior. La construcción de este modelo se basa en un nuevo modelado del tensor de Reynolds, que incorpora términos procedentes de ambos modelos. Se trata de una extensión al caso compresible del trabajo de Begue et al. [6] para flujos incompresibles. Fundamentalmente, los nuevos términos que aporta este modelo, respecto del $k - \varepsilon$, modelan efectos transitorios y de cizalladura entre las estructuras de diferente talla que se desarrollan en el flujo.

El modelo obtenido resulta ser de gran complejidad ya que en él interviene un nuevo término de cierre, que depende de la perturbación de la velocidad y, a través de ésta, de la energía cinética turbulenta media y de las coordenadas



lagrangianas inversas.

Hemos estudiado la estructura de este término, cuando el sistema de ecuaciones del modelo es invariante bajo cambios de referencia. Esto nos ha llevado a considerar flujos medios bidimensionales, en cuyo caso, esta estructura se simplifica. Para este caso, hemos conseguido reformular la estructura del término de cierre, de manera que sus componentes sean funciones que queden determinadas de forma única y continua por el campo medio.

En el capítulo 4, desarrollamos un método numérico de resolución del modelo $MPP\ k - \varepsilon$ bidimensional. En relación a la discretización espacial, cabe destacar el acoplamiento de diferentes métodos adecuados a la diferente naturaleza de cada uno de los términos de las ecuaciones. Así como para los diferentes tipos de variables que intervienen en ellas. Esto se ha hecho adaptando el método numérico desarrollado por Le Ribault [42], para el modelo $k - \varepsilon$. Se trata de un método mixto de tipo Elementos Finitos-Volúmenes Finitos con extensión a segundo orden mediante un método de tipo M.U.S.C.L.

Para ello, ha sido necesario realizar un cambio de variables en las ecuaciones del modelo, de manera que la ley de estado siga teniendo la misma estructura que la ley de los gases perfectos, para flujos laminares. Sin embargo, esto supone la aparición de dos nuevos coeficientes de cierre en el modelo.

Por otra parte, también ha sido necesario reformular la ecuación satisfecha por las coordenadas lagrangianas inversas, escribiéndolas en forma conservativa, e incorporarla a las ecuaciones del modelo. De esta manera, han sido resueltas de forma análoga al resto de las variables y no de forma independiente.

Las condiciones de contorno se imponen de una forma no estándar, utilizando una función de flujo numérico. Este procedimiento tiene la ventaja de ser capaz de filtrar automáticamente las condiciones de contorno adecuadas, depen-

diendo de si el flujo es subsónico o supersónico.

Hemos realizado un estudio en detalle de las condiciones de contorno que realmente se imponen de esta forma, para cada tipo de flujo y en cada parte de la frontera. Como conclusión, obtenemos que estas condiciones son sólo una aproximación de las que fijamos a priori. Este hecho ha motivado el análisis teórico que se realiza en el capítulo 6, con el objetivo de verificar la validez de esta forma de imponer numéricamente las condiciones de contorno. Este estudio ha permitido dar una respuesta afirmativa a esta cuestión, al menos para el modelo lineal considerado.

En el capítulo 5, aplicamos el modelo $MPP k - \varepsilon$ al cálculo de una capa de mezcla compresible. Consideramos que éste constituye un buen test para nuestro modelo por sus características físicas.

Hemos realizado diferentes ensayos numéricos, tanto para flujos subsónicos como supersónicos. Se aprecian buenas cualidades en los resultados obtenidos, tales como la independencia de la malla, la estabilidad, la autosimilitud y el comportamiento de la tasa de expansión de la capa de mezcla.

A nivel macroscópico, los resultados son similares a los obtenidos con el modelo $k - \varepsilon$, en coherencia con el hecho de que estamos simulando turbulencia que alcanza un estado cuasi-estacionario. Por tanto, no podemos decir que en este sentido nuestro modelo proporcione ninguna mejora sustancial con respecto al $k - \varepsilon$.

Sin embargo, comprobamos que los nuevos términos que aporta el modelo $MPP k - \varepsilon$ frente al $k - \varepsilon$, están modelando la interacción entre las grandes y pequeñas estructuras existentes en el flujo. Así el tiempo que se tarda en alcanzar el estado cuasi-estacionario es mucho mayor que para el modelo $k - \varepsilon$. Por otra parte, estos términos también aportan información relevante sobre la estructura

de la capa de mezcla, y en particular sobre sus características anisótropas.

Finalmente, en el capítulo 6 nos planteamos el estudio de un problema teórico, que como comentamos anteriormente, viene motivado por el interés de garantizar que la imposición numérica de las condiciones de contorno se hace de forma correcta.

En concreto, consideramos un modelo lineal compuesto por una ecuación de convección-difusión estacionaria junto con condiciones de contorno análogas a las que imponemos numéricamente (en el modelo $MPP\ k - \varepsilon$). El problema que nos planteamos consiste en demostrar que cuando el coeficiente de difusión tiende a cero (convección dominante), la solución de este problema de convección-difusión converge a la solución del problema de convección pura con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera de entrada.

Como respuesta a este problema demostramos un primer resultado de convergencia débil en un espacio de Hilbert asociado a la derivada convectiva. En un segundo resultado, demostramos convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$, así como de las trazas convectivas.

La clave para demostrar ambos resultados radica en la elección de una función test, que nos permite obtener estimaciones a priori adecuadas. La existencia de esta función es posible si el flujo tiene la propiedad de ser rellenante, es decir, si las trayectorias entrantes en el dominio lo rellenan en un tiempo finito.

El estudio de paso al límite en la ecuación de convección-difusión ha sido realizado anteriormente por otros autores, entre los que podemos citar a Bardós [4] y Lions [43]. Sin embargo, en estos trabajos se consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas y por ello, efectivamente su estudio se ha centrado en el paso al límite en la ecuación y no en las condiciones de contorno, como es lo relevante en nuestro caso.

Capítulo 2

Un modelo *MPP* para flujos compresibles

En este capítulo desarrollamos una versión del modelo *MPP* para flujos compresibles perfectos débilmente viscosos. Este tipo de flujos ha sido también estudiado en el modelo *MPP* desarrollado en [27]. En este caso, el marco funcional considerado para las fluctuaciones turbulentas da lugar a un modelo de turbulencia localmente homogénea e isotrópica. Nuestro modelo es válido para un tipo de turbulencia más general, localmente homogénea pero no necesariamente isotrópica.

Realizamos algunas pruebas de análisis de la consistencia de la técnica *MPP* empleada en la deducción del mismo.

Por una parte, si partimos de las mismas ecuaciones, en ausencia de efectos viscosos para la velocidad, pero escritas en forma conservativa, entonces al aplicar la técnica desarrollada obtenemos un modelo que resulta ser exactamente la forma conservativa del modelo obtenido en primer lugar.

Por otra parte, nuestro modelo se enmarca dentro de los modelos de tur-

bulencia a dos ecuaciones, en este caso, para la energía cinética turbulenta media y la helicidad media. Su estructura es similar a otros modelos de este tipo. Concretamente, vemos que nuestro modelo se reduce al modelo $k - \varepsilon$ estándar, para turbulencia homogénea, en algunas situaciones particulares.

Finalmente, obtenemos un modelo reducido a una ecuación en el caso de que la perturbación turbulenta de la velocidad verifique una determinada propiedad de simetría.

2.1 Descripción del modelo

Pretendemos estudiar la evolución de un flujo de un fluido compresible que se desarrolla en \mathbb{R}^3 durante un intervalo de tiempo $[0, T]$, usando para ello la técnica de modelado *MPP*. Esta técnica se basa en dos hipótesis de partida:

(H1) Se supone que en el momento inicial la turbulencia ya ha sido generada.

(H2) Se supone que las escalas de longitud en las que se desarrolla el campo medio (L) y el campo fluctuante (l) están netamente diferenciadas. Esta es la llamada hipótesis de separación de escalas.

Formalizamos estas hipótesis como sigue. El comportamiento del flujo puede describirse mediante las variables densidad, velocidad y energía interna, que denotamos por ρ^δ , v^δ y e^δ , respectivamente, siendo $\delta = l/L$. Suponemos que estas variables verifican las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho^\delta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\delta \mathbf{v}^\delta) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \rho^\delta \left[\frac{\partial \mathbf{v}^\delta}{\partial t} + (\mathbf{v}^\delta \cdot \nabla) \mathbf{v}^\delta \right] + (\gamma - 1) \nabla (\rho^\delta e^\delta) - \nu \delta^4 \Delta \mathbf{v}^\delta = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \frac{\partial e^\delta}{\partial t} + \mathbf{v}^\delta \cdot \nabla e^\delta + (\gamma - 1) e^\delta \nabla \cdot \mathbf{v}^\delta - \mu \delta^{4/3} \Delta e^\delta = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Estas son las ecuaciones de Euler para flujos compresibles perfectos, con la incorporación de términos de difusión pequeños en las ecuaciones para la velocidad y la energía interna. La ley de estado de los gases perfectos (1.11),

$$p^\delta = (\gamma - 1) \rho^\delta e^\delta,$$

se ha escrito incorporada a las ecuaciones. Aquí γ es una constante que mide la razón entre el calor específico a presión constante y a volumen constante. Además ν y μ son constantes positivas.

La inclusión de los términos difusivos en las ecuaciones de conservación del momento y de la energía interna garantiza que este sistema junto con condiciones iniciales y de contorno adecuadas esté bien planteado.

Suponer que en el momento inicial la turbulencia ya ha sido generada se formaliza imponiendo al sistema (2.1) condiciones iniciales altamente oscilantes, de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^\delta(x, 0) = \bar{\rho}_0(x) + \delta^{2/3} \rho_0 \left(\frac{x}{\delta}; x \right) \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v}^\delta(x, 0) = \bar{\mathbf{v}}_0(x) + \delta^{1/3} \mathbf{w}_0 \left(\frac{x}{\delta}; x \right) \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ e^\delta(x, 0) = \bar{e}_0(x) + \delta^{2/3} e_0 \left(\frac{x}{\delta}; x \right) \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Estas son condiciones iniciales con dos escalas de espacio. Con respecto a estos datos suponemos que $\bar{\rho}_0(x)$, $\bar{\mathbf{v}}_0(x)$ y $\bar{e}_0(x)$ son funciones regulares en \mathbb{R}^3 . Por

otra parte, suponemos que $\rho_0(y; x)$, $\mathbf{w}_0(y; x)$ y $e_0(y; x)$ son funciones regulares en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y periódicas respecto de la variable y , con célula de periodicidad $Y = [-\pi, \pi]^3$ (Y -periódicas). Suponemos además que tienen media nula respecto de esta variable.

Para una función $\varphi(y; x)$ Y -periódica se considera el operador de promediado

$$\langle \varphi \rangle = \frac{\int_Y \varphi(y; x) dy}{\int_Y dy}. \quad (2.3)$$

Entonces, estamos suponiendo que

$$\langle \rho_0 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{w}_0 \rangle = 0, \quad \langle e_0 \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.4)$$

Esta condición permite identificar a $\bar{\rho}_0$, $\bar{\mathbf{v}}_0$ y \bar{e}_0 como las variables medias iniciales y a $\delta^{2/3}\rho_0$, $\delta^{1/3}\mathbf{w}_0$ y $\delta^{2/3}e_0$ como las perturbaciones “turbulentas” iniciales.

Finalmente, es necesario suponer también que la perturbación inicial de velocidad es incompresible en micro-escala. Esto se formaliza imponiendo que verifique la siguiente relación de compatibilidad con la perturbación inicial de presión:

$$(\mathbf{w}_0 \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_0 + \nabla_y \pi_0 = 0; \quad \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0 = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3, \quad (2.5)$$

donde $\pi_0 = \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}_0} (\rho_0 \bar{e}_0 + \bar{\rho}_0 e_0)$.

La ecuación (2.5) posee por ejemplo soluciones analíticas de tipo Beltrami:

$$\mathbf{w}_0(y) = \begin{pmatrix} a \operatorname{sen}(\lambda y_3) + b \operatorname{cos}(\lambda y_2) \\ c \operatorname{sen}(\lambda y_1) + a \operatorname{cos}(\lambda y_3) \\ b \operatorname{sen}(\lambda y_2) + c \operatorname{cos}(\lambda y_1) \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, \lambda \in \mathbb{R}$. Sin embargo, se trata de funciones que tienen un espectro finito, de hecho contienen un único modo de Fourier con amplitud no nula. Suponemos que existen también soluciones de (2.5) con espectro no finito.

Nuestro objetivo será describir el comportamiento de la solución $(\rho^\delta, \mathbf{v}^\delta, e^\delta)$ del problema (2.1)-(2.2), cuando $\delta \rightarrow 0$. Desde el punto de vista físico, este problema equivale a analizar la interacción entre una perturbación en pequeña escala y el flujo medio. Suponemos que la perturbación existe en el instante inicial y pretendemos conocer el comportamiento del flujo en instantes posteriores.

Desde el punto de vista teórico, el problema (2.1)-(2.2) posee una única solución local en tiempo, si los datos son suficientemente regulares. Los términos de difusión incluidos en las ecuaciones garantizan que este resultado sea cierto [44].

Hipótesis asintóticas

Siguiendo las técnicas de homogeneización utilizadas en los modelos *MPP*, suponemos que las variables ρ^δ , \mathbf{v}^δ y e^δ admiten desarrollos asintóticos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\rho^\delta(x, t) &= \rho(x, t) + \delta^{1/3} \rho^{(0)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \delta^{2/3} \rho^{(1)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \dots \\ \mathbf{v}^\delta(x, t) &= \mathbf{v}(x, t) + \delta^{1/3} \mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \delta^{2/3} \mathbf{v}^{(1)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \dots \\ e^\delta(x, t) &= e(x, t) + \delta^{1/3} e^{(0)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \delta^{2/3} e^{(1)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \dots\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $\mathbf{a}(x, t)$ son las coordenadas lagrangianas inversas relativas al campo de velocidades \mathbf{v} .

Respecto a los diferentes términos de estos desarrollos suponemos que ρ , \mathbf{v} y e son funciones regulares en $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$. Por otra parte, suponemos que $\forall k \geq 1$, $\rho^{(k)}(y; x, t)$, $\mathbf{w}(y; x, t)$, $\mathbf{v}^{(k)}(y; x, t)$ y $e^{(k)}(y; x, t)$ son funciones regulares en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ y αY -periódicas, para algún $\alpha > 0$, a determinar.



En la técnica de modelado *MPP*, el espacio funcional en el que se definen las perturbaciones y el operador de promediado que se considera determina en gran medida la clase de turbulencia que se está modelando.

En nuestro caso, estamos considerando perturbaciones periódicas en una célula de periodicidad αY , es decir, permitimos que la célula de periodicidad inicial se transforme por homotecia. El operador de promediado que estamos considerando para este tipo de funciones, definido en (2.3), resulta ser invariante bajo traslaciones de la variable y . Es decir, para una función φ que sea αY -periódica, se verifica que:

$$\langle \varphi_z \rangle = \langle \varphi \rangle, \quad \text{con} \quad \varphi_z(y) = \varphi(y + z).$$

Así pues, nuestro modelo será válido para un tipo de turbulencia localmente homogénea, según la definición física de la misma [24].

Otras versiones del modelo *MPP* [17, 27] han sido desarrolladas en un marco más general, el de las funciones casi-periódicas [22, 8]. El operador de promediado definido para estas funciones se caracteriza por ser invariante bajo traslaciones y rotaciones. Por tanto, este otro marco funcional determina un tipo de turbulencia localmente homogénea y también localmente isotrópica, en términos físicos.

La estructura compleja de los desarrollos (2.6) está motivada por hipótesis físicas. Así por ejemplo, la hipótesis de Taylor, según la cual la perturbación turbulenta es transportada por el campo medio de velocidades, sugiere la inclusión de la función $\mathbf{a}(x, t)$ como argumento de estas perturbaciones.

En los modelos *MPP* para flujos incompresibles, las perturbaciones turbulentas se hacen depender también de una variable rápida de tiempo $\tau = \frac{t}{\delta^{2/3}}$. Es razonable esperar que las oscilaciones en espacio generadas por la perturbación inicial produzcan oscilaciones en tiempo, las cuales tienen una talla característica del orden de $\delta^{2/3}$, según análisis dimensional. Sin embargo, D. Franco demues-

tra en [27], que en el caso compresible, la dependencia de la variable rápida en tiempo en estos desarrollos asintóticos provocaría la aparición de problemas en micro-estructura mal planteados, y por ello, no se ha incluido en este trabajo.

Según la teoría de homogeneización, los desarrollos asintóticos anteriores han de ser entendidos en el sentido de que, por ejemplo, en el desarrollo para la velocidad, para cada $m \geq 0$ existe una constante c_m , positiva e independiente de δ , tal que

$$\|\mathbf{v}^\delta - S_m^\delta\| \leq c_m \delta^{(m+1)/3},$$

siendo

$$S_m^\delta = \mathbf{v}(x, t) + \delta^{1/3} \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t \right) + \delta^{1/3} \sum_{k=1}^m \delta^{k/3} \mathbf{v}^{(k)} \left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t \right)$$

y $\|\cdot\|$ la norma en algún espacio funcional en espacio-tiempo adecuado.

Cascada de ecuaciones

Para obtener las ecuaciones satisfechas por los diferentes términos de los desarrollos asintóticos (2.6), éstos se incorporan a las ecuaciones (2.1), expresándolas como desarrollos en potencias de δ . Se aplica entonces el principio de perturbaciones singulares, que obliga a que el coeficiente de cada potencia de δ se anule, y la hipótesis de separación de escalas. Se obtiene así una ecuación para cada potencia de $\delta^{1/3}$, de las que vamos a deducir ecuaciones en micro y macro-estructura, satisfechas por los diferentes términos de los desarrollos (2.6). Aunque el tipo de “turbulencia” que consideramos es distinto, las ecuaciones que se obtienen aquí son las mismas que las obtenidas por D. Franco en [27]. Por ello, solamente describiremos las ecuaciones que resultan a los diferentes órdenes de $\delta^{1/3}$.



Se obtiene, en primer lugar, la ecuación que satisface $\mathbf{a}(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{a}) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \mathbf{a}(x, 0) = x & \text{en } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2.7)$$

Por tanto, $\mathbf{a}(x, t)$ son las llamadas coordenadas lagrangianas inversas asociadas al campo de velocidades \mathbf{v} . Es decir, $\mathbf{a}(x, t)$ es la posición inicial de la partícula que siguiendo las trayectorias definidas por el campo \mathbf{v} , se encuentra en la posición x en el instante de tiempo t . Se justifica, en este momento, la formalización de la hipótesis de Taylor en los desarrollos asintóticos (2.6).

Recientemente, el trabajo de Hou [33] sobre flujos incompresibles justifica rigurosamente la inclusión de las coordenadas lagrangianas inversas como argumento de las perturbaciones, cuando todo el campo de velocidades (no sólo el campo medio) transporta la perturbación turbulenta. En nuestro caso, somos capaces de tratar formalmente flujos compresibles, pero cuando las perturbaciones son transportadas por el campo medio.

En segundo lugar, se obtienen las ecuaciones que verifican las fluctuaciones de diferente orden. De estas ecuaciones se deduce primeramente que $\rho^{(0)}$ y $e^{(0)}$ no dependen de la variable en micro-estructura y . Por otra parte, es posible reformular las ecuaciones obtenidas, de manera que formen lo que llamamos “cascada de ecuaciones”. Es decir, de manera que las perturbaciones de cada orden se obtengan a partir de las perturbaciones de órdenes inferiores. Para ello, se definen las fluctuaciones de presión:

$$\pi = \frac{\gamma - 1}{\rho} (\rho e^{(1)} + e \rho^{(1)}) \quad (2.8)$$

$$p^{(k)} = \frac{\gamma - 1}{\rho} (\rho e^{(k+1)} + e \rho^{(k+1)}), \quad \forall k \geq 1. \quad (2.9)$$

Entonces estas variables pasan a ser consideradas variables primarias en sustitución de las fluctuaciones de densidad, que pueden obtenerse a partir de las

fluctuaciones de presión, mediante las relaciones anteriores. Finalmente, la estructura de estas ecuaciones en micro-estructura es la siguiente:

$$(\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}} + C \nabla_y \pi = 0 \quad \nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{w}} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.10)$$

$\forall k \geq 1 :$

$$(\tilde{\mathbf{v}}^{(k)} \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}} + (\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{v}}^{(k)} + C \nabla_y p^{(k)} = f^{(k)} \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.11)$$

$$\nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(k)} = g^{(k)} \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y e^{(k)} - \frac{\mu}{\gamma \rho} \Delta_C e^{(k)} = b^{(k)} \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.12)$$

En estas ecuaciones, las fluctuaciones de la velocidad vienen dadas a partir de las fluctuaciones canónicas $\tilde{\mathbf{w}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}$, definidas como

$$\tilde{\mathbf{w}} = G^t \mathbf{w}, \quad \tilde{\mathbf{v}}^{(k)} = G^t \mathbf{v}^{(k)}, \quad \text{con } G = \nabla \mathbf{a}. \quad (2.13)$$

En ellas, denotamos por $C = G^t G$ y $\Delta_C = \sum_{i,j=1}^3 C_{ij} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$. Los segundos miembros de las ecuaciones, $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ y $b^{(k)}$, son funciones que dependen de las fluctuaciones de diferente orden. Concretamente,

$$f^{(k)} = f^{(k)}(\rho, \mathbf{v}, e, \rho^{(0)}, \dots, \rho^{(k)}, \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(k-1)}, e^{(0)}, \dots, e^{(k)})$$

$$g^{(k)} = g^{(k)}(\rho, \mathbf{v}, \rho^{(0)}, \dots, \rho^{(k-1)}, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}^{(k-1)})$$

$$b^{(k)} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y p^{(k-1)} + b(\rho, \mathbf{v}, e, \rho^{(0)}, \dots, \rho^{(k-1)}, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}^{(k-1)}, e^{(0)}, \dots, e^{(k-1)}).$$

Así pues, se trata efectivamente de ecuaciones en cascada, debiéndose resolver en el orden siguiente:

$(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ de (2.10) $\rightarrow e^{(1)}$ de (2.12) $\rightarrow \rho^{(1)}$ de (2.8) $\rightarrow (\tilde{\mathbf{v}}^{(1)}, p^{(1)})$ de (2.11) $\rightarrow e^{(2)}$ de (2.12) $\rightarrow \rho^{(2)}$ de (2.9) $\rightarrow (\tilde{\mathbf{v}}^{(2)}, p^{(2)})$ de (2.11) $\rightarrow \dots$

Las ecuaciones (2.10) que verifica el par $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ son una generalización de las ecuaciones de Euler para fluidos incompresibles, dependiendo de la matriz



simétrica y definida positiva C . Esto indica que la fluctuación principal de la velocidad \boldsymbol{w} es incompresible respecto de la variable y , en micro-estructura. Como consecuencia, el modelo obtenido sólo será válido en casos en los que los efectos de la compresibilidad de la perturbación no sean relevantes. Esta es una hipótesis habitual en la derivación de los modelos de turbulencia para flujos compresibles a bajo número de Mach, situación en la que las fluctuaciones de densidad son despreciadas [37, 55]. Los rangos del número de Mach para los que esta aproximación es válida varían según el tipo de flujo considerado. Por ejemplo, en el caso de una capa de mezcla (caso test que consideramos en el capítulo 5), el número de Mach convectivo ha de ser no superior a 0.5, según [5]. En el caso de un flujo en torno a un avión, las micro-fluctuaciones de la densidad sólo son relevantes para flujos hipersónicos, es decir con números de Mach por encima de 4, o para flujos supersónicos con números de Mach cercanos a 1, en zonas muy localizadas.

2.1.1 Ecuaciones en micro-estructura

Veamos ahora cómo se determinan las perturbaciones de diferente orden a partir de las ecuaciones obtenidas (2.10)-(2.12).

Perturbación principal de la velocidad

La perturbación principal de la velocidad \boldsymbol{w} viene dada a partir de la perturbación canónica $\tilde{\boldsymbol{w}} = G^t \boldsymbol{w}$, con $G = \nabla \boldsymbol{a}$, que junto con la perturbación principal de la presión π verifican las ecuaciones de Euler generalizadas (2.10). Estas ecuaciones no determinan al par $(\tilde{\boldsymbol{w}}, \pi)$ de forma única. De hecho, cada solución de esta ecuación lleva asociada una familia biparamétrica de soluciones. Concretamente, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 2.1 Si $(\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*)$ es una solución α^*Y -periódica de las ecuaciones de Euler generalizadas (2.10), entonces el par $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ dado por:

$$\tilde{\mathbf{w}}(y) = \lambda \tilde{\mathbf{w}}^*(\beta y), \quad \pi(y) = \lambda^2 \pi^*(\beta y), \quad (2.14)$$

es una solución αY -periódica de las ecuaciones (2.10), con $\alpha = \frac{\alpha^*}{\beta}$, cualesquiera que sean λ y $\beta \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Por la propia definición de $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ es inmediata la periodicidad. Además

$$(\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}} + C \nabla_y \pi = \lambda^2 \beta [(\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}}^* + C \nabla_y \pi^*] = 0.$$

⊗

En otras palabras, este resultado afirma que las ecuaciones estacionarias de Euler (2.10) son invariantes bajo homotecias y re-escalamiento.

Así pues, teniendo en cuenta que las ecuaciones (2.10) tienen infinitas soluciones, es necesario dar condiciones adicionales que determinen una solución que sea físicamente consistente.

En el caso incompresible, las fluctuaciones dependen de la variable rápida en tiempo τ , como comentamos anteriormente, y el par $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ verifica las ecuaciones de Euler evolutivas. En esta situación, se verifica la invariancia galileana, además de la invariancia bajo homotecia y re-escalamiento:

$$\tilde{\mathbf{w}}(y, \tau) = \beta \tilde{\mathbf{w}}^*(\lambda(y - \vec{\alpha}\tau), \beta\lambda\tau) + \vec{\alpha}, \quad \pi(y, \tau) = \beta^2 \pi^*(\lambda(y - \vec{\alpha}\tau), \beta\lambda\tau),$$

$\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Es decir, cada solución lleva asociada una familia penta-paramétrica de soluciones.

El procedimiento para aislar una solución de esta familia se basa en el hecho de que toda solución regular verifica las siguientes leyes de conservación



[27]:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial \tau} + \nabla_y \cdot [\tilde{\mathbf{w}} \otimes \tilde{\mathbf{w}} + C\pi] = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \right) + \nabla_y \cdot \left[\tilde{\mathbf{w}} \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}} + \pi \right) \right] = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}}) + \nabla_y \cdot [\tilde{\mathbf{w}} (\tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}}) + \tilde{\mathbf{r}} (\pi - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}})] = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.17)$$

con $\tilde{\mathbf{r}} = \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{\mathbf{w}})$.

De aquí se deduce que existen tres estadísticos de $\tilde{\mathbf{w}}$ que son invariantes temporales. Concretamente:

- La media

$$\tilde{m} = \langle \tilde{\mathbf{w}} \rangle = G^t \langle \mathbf{w} \rangle. \quad (2.18)$$

- La energía cinética media

$$q = \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \rangle = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{w}|^2 \rangle. \quad (2.19)$$

- La helicidad media

$$h = \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \rangle, \quad (2.20)$$

con $\mathbf{r} = (G \nabla_y) \times \mathbf{w}$ y $\tilde{\mathbf{r}} = G^t \mathbf{r} = \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{\mathbf{w}})$.

Según este resultado, parece conveniente considerar estos estadísticos como parámetros para determinar $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$.

En el caso compresible, no hay dependencia de la variable tiempo en microestructura y el par $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ verifica las mismas ecuaciones, en este caso, estacionarias. Así pues, lo razonable es seguir considerando los estadísticos \tilde{m} , q y h como parámetros para determinar una solución de (2.10). Cuando el flujo es compresible, estos estadísticos se definen como en el caso incompresible, por (2.18)-(2.20),

con la salvedad de que

$$\tilde{r} = \text{Det}(C)^{1/2} \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{\omega}).$$

puesto que $\text{Det}(G) \neq 1$ cuando el flujo no es incompresible. Aunque no tiene sentido hablar ahora de la invariancia temporal de \tilde{m} , q y h , sin embargo, se siguen verificando leyes de conservación asociadas a estos parámetros análogos a las obtenidas en el caso incompresible [27]:

$$\nabla_y \cdot [\tilde{\omega} \otimes \tilde{\omega} + C\pi] = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.21)$$

$$\nabla_y \cdot [\tilde{\omega} (\frac{1}{2} \tilde{\omega} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} + \pi)] = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.22)$$

$$\nabla_y \cdot [\tilde{\omega} (\tilde{\omega} \cdot C^{-1} \tilde{r}) + \tilde{r} (\pi - \frac{1}{2} \tilde{\omega} \cdot C^{-1} \tilde{\omega})] = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (2.23)$$

Por tanto, trataremos de obtener una solución de las ecuaciones (2.10) para cada valor dado de los parámetros \tilde{m} , q y h . Veamos si ello es posible, teniendo en cuenta los invariantes de la ecuación de Euler, dados por (2.14):

Proposición 2.2 *Si $(\tilde{\omega}^*, \pi^*)$ es una solución $\alpha^* Y$ -periódica de las ecuaciones de Euler generalizadas (2.10) y $(\tilde{\omega}, \pi)$ es la solución αY -periódica, con $\alpha = \frac{\alpha^*}{\beta}$, dada por (2.14), para algún λ y $\beta \in \mathbb{R}$, se verifica que:*

$$1) \langle \tilde{\omega} \rangle = \lambda \langle \tilde{\omega}^* \rangle$$

$$2) \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = \lambda^2 \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega}^* \cdot C^{-1} \tilde{\omega}^* \rangle$$

$$3) \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega} \cdot C^{-1} \tilde{r}^* \rangle = \beta \lambda^2 \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega}^* \cdot C^{-1} \tilde{r}^* \rangle, \quad \text{con } \tilde{r}^* = \text{Det}(C)^{1/2} \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{\omega}^*).$$

La demostración de este resultado puede consultarse en [27]. Como consecuencia inmediata, no es posible obtener una solución de (2.10), fijando al mismo tiempo la media y la energía turbulenta. Como las ecuaciones verificadas por

$\tilde{\mathbf{w}}$ son estacionarias y \mathbf{w}_0 tiene media nula, parece razonable imponer que $\tilde{\mathbf{w}}$ también tenga media nula. En este caso, podemos modular la energía cinética, fijando el parámetro λ . Por otra parte, tampoco se pueden fijar al mismo tiempo la helicidad media y la célula de periodicidad. Así pues, podemos modular la helicidad media de $\tilde{\mathbf{w}}$ fijando el parámetro β , aunque para ello debemos dejar libre su periodo y determinarlo en función de este parámetro.

Entonces formulamos el siguiente problema para determinar la perturbación canónica de la velocidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } (\tilde{\mathbf{w}}, \pi) \text{ } \alpha Y \text{ - periódicas, para algún } \alpha > 0, \\ \text{tales que:} \\ (\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}} + C \nabla_y \pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{w}} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \langle \tilde{\mathbf{w}} \rangle = 0, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \rangle = q, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \rangle = h \end{array} \right. \quad (2.24)$$

con $\tilde{\mathbf{r}} = \text{Det}(C)^{1/2} \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{\mathbf{w}})$.

En lo que sigue, consideraremos que la helicidad media del flujo h es no nula. El caso en el que ésta sea nula será tratado en una sección posterior.

Gracias a los invariantes de las ecuaciones de Euler (2.14) y a la proposición 2.2, es posible obtener la solución del problema (2.24) a partir de la solución de un problema canónico normalizado, con media nula y energía cinética y helicidad unitarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } (\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*) \text{ } \alpha^* Y \text{ - periódicas, para algún } \alpha^* > 0, \\ \text{tales que:} \\ (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}}^* + C \nabla_y \pi^* = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{w}}^* = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle = 0, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle = 1, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^* \rangle = 1 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

con $\tilde{\mathbf{r}}^* = \text{Det}(C)^{1/2} \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^*)$.

En concreto, se verifica el siguiente resultado:

Teorema 2.3 *Dados los parámetros $q > 0$ y $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si el par (\tilde{w}^*, π^*) es una solución α^*Y -periódica del problema (2.25), entonces el par (\tilde{w}, π) definido por*

$$\tilde{w}(y) = \sqrt{q}\tilde{w}^*\left(\frac{h}{q}y\right), \quad \pi(y) = q\pi^*\left(\frac{h}{q}y\right), \quad (2.26)$$

es una solución αY -periódica del problema (2.24), con $\alpha = \frac{q}{h}\alpha^$.*

La demostración de este resultado es inmediata a partir de la proposición 2.1, tomando $\lambda = \sqrt{q}$ y $\beta = \frac{h}{q}$, y la proposición 2.2.

Puesto que sólo se conocen resultados que aseguren la existencia de solución de las ecuaciones evolutivas de Euler, y esto en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño, resulta necesario asumir lo siguiente:

(H) El problema (2.25) admite una única solución, que depende de forma continua de la matriz C .

Si admitimos la hipótesis (H), puesto que hemos supuesto que el dato w_0 es una solución de las ecuaciones de Euler (2.5), cuando $C = I$ la fluctuación canónica debe venir dada por:

$$\tilde{w}^*(y) = \frac{1}{\sqrt{q_0}}w_0\left(\frac{q_0}{h_0}y\right), \quad \pi^*(y) = \frac{1}{q_0}\pi_0\left(\frac{q_0}{h_0}y\right), \quad (2.27)$$

y con periodo α^*Y , con $\alpha^* = \frac{h_0}{q_0}$. Aquí $q_0 = \frac{1}{2}\langle |w_0|^2 \rangle$ y $h_0 = \langle w_0 \cdot (\nabla_y \times w_0) \rangle$ son, respectivamente, la energía cinética y la helicidad medias de w_0 . De nuevo hemos usado las proposiciones 2.1 y 2.2.



Perturbación principal de la energía interna

Hemos obtenido que la perturbación principal de la energía interna $e^{(1)}$ verifica la ecuación de convección-difusión (2.12) para $k = 1$:

$$\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y e^{(1)} - \frac{\mu}{\gamma \rho} \Delta_C e^{(1)} = b^{(1)}, \quad \text{con} \quad b^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla_y \pi + b, \quad (2.28)$$

donde la velocidad de convección $\tilde{\mathbf{w}}$ viene dada por (2.26). Aunque b es una función que en principio depende de $(\rho, \mathbf{v}, e, \rho^{(0)}, \tilde{\mathbf{w}}, e^{(0)})$, gracias a que $\rho^{(0)}$ y $e^{(0)}$ son funciones independientes de la variable y , se comprueba que b realmente sólo depende de (ρ, \mathbf{v}, e) .

Gracias a los invariantes de las ecuaciones de Euler generalizadas dadas en (2.14), es posible obtener la solución de la ecuación (2.28) a partir de la solución de un problema canónico, de forma análoga a como hemos obtenido la perturbación principal de velocidad. Este problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \hat{e}^{(1)} - \xi \Delta_C \hat{e}^{(1)} = \hat{b}^{(1)} & \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \langle \hat{e}^{(1)} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

donde

$$\xi = \frac{\mu}{\gamma \rho} \frac{h}{q^{3/2}}, \quad \hat{b}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \pi^* + \frac{1}{h q^{1/2}} b$$

y $(\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*)$ es la solución del problema (2.25).

Observemos que el periodo de la perturbación canónica de la energía interna queda determinado por el de la perturbación canónica de la velocidad.

El siguiente resultado nos garantiza que este problema está bien planteado.

Proposición 2.4 *Bajo la hipótesis (H), el problema (2.29) tiene una única solución $\alpha^* Y$ -periódica si y sólo si se verifica la condición:*

$$\langle \hat{b}^{(1)} \rangle = 0. \quad (2.30)$$

La demostración de este resultado se basa en la aplicación del teorema de Lax-Milgram a la formulación variacional

$$a_C(\varphi, \psi) = \langle L, \psi \rangle$$

donde

$$\begin{aligned} a_C(\varphi, \psi) &= \int_{\alpha^*Y} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla \varphi \psi \, dy + \xi \int_{\alpha^*Y} (C \nabla \varphi) \cdot (C \nabla \psi) \, dy, \\ \langle L, \psi \rangle &= \int_{\alpha^*Y} \hat{b}^{(1)} \psi \, dy. \end{aligned}$$

La forma a_C está bien definida, es bilineal y continua en el espacio $H_P^1(\alpha^*Y)$, definido como el subespacio de $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ de las funciones periódicas en \mathbb{R}^3 con célula de periodicidad α^*Y .

Sin embargo, para que sea coercitiva es necesario considerar el espacio cociente $X = H_P^1(\alpha^*Y)/R$, lo cual provoca que la perturbación canónica se determine de forma única, sólo si se fija su media. Por otra parte, la condición (2.30) es necesaria para que $L \in X'$.

Para más detalles, puede consultarse [27], donde se hace esta demostración completa.

Como $\nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{w}}^* = 0$, podemos escribir $\hat{b}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \nabla_y \cdot (\tilde{\mathbf{w}}^* \pi^*) + \frac{1}{h q^{1/2}} b$. Puesto que b no depende de la variable y , la condición (2.30) es equivalente a:

$$b \equiv 0. \tag{2.31}$$

Entonces $\hat{e}^{(1)}$ es la única solución del problema:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \hat{e}^{(1)} - \xi \Delta_C \hat{e}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \pi^* & \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \langle \hat{e}^{(1)} \rangle = 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

La perturbación principal de la energía interna $e^{(1)}$ se obtiene a partir de la canónica $\hat{e}^{(1)}$, de la manera que establece el siguiente resultado:

Teorema 2.5 *Bajo la hipótesis (H) y dados los parámetros $\beta \in \mathbb{R}$, $q > 0$ y $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $\hat{e}^{(1)}$ es la solución del problema (2.32), entonces la función definida por*

$$e^{(1)}(y) = q \hat{e}^{(1)}\left(\frac{h}{q}y\right) + \beta, \quad (2.33)$$

es una solución αY -periódica, con $\alpha = \frac{q}{h}\alpha^$, de la ecuación (2.28), tal que $\langle e^{(1)} \rangle = \beta$.*

Demostración:

Es evidente que si $\hat{e}^{(1)}$ es una función $\alpha^* Y$ -periódica, entonces $e^{(1)}$ es αY -periódica. Para probar que $e^{(1)}$ verifica la ecuación (2.28) basta hacer el cambio de variables $z = \frac{h}{q}y$ en la ecuación (2.29) y tener en cuenta que

$$\tilde{w}(y) = \sqrt{q}\tilde{w}^*(z), \quad \pi(y) = q\pi^*(z) \quad \text{y} \quad e^{(1)}(y) = q\hat{e}^{(1)}(z) + \beta.$$

Finalmente, se tiene que $\langle e^{(1)} \rangle = q\langle \hat{e}^{(1)} \rangle + \beta$, haciendo el mismo cambio de variables en la integral que define la media. Por tanto, si $\langle \hat{e}^{(1)} \rangle = 0$, entonces $\langle e^{(1)} \rangle = \beta$.

⊗

Perturbaciones de orden superior

Las perturbaciones de orden superior verifican las ecuaciones (2.11) y (2.12). Para que estas ecuaciones puedan tener solución es necesario que se verifiquen ciertas condiciones de compatibilidad, que se obtienen de igual modo que en [27]:

$\forall k \geq 1 :$

$$\langle f^{(k)} + \tilde{w}g^{(k)} \rangle = 0 \quad (2.34)$$

$$\langle \tilde{w} \cdot C^{-1}f^{(k)} + \left(\frac{1}{2}\tilde{w} \cdot C^{-1}\tilde{w} + \pi\right)g^{(k)} \rangle = 0 \quad (2.35)$$

$$\langle g^{(k)} \rangle = 0 \quad (2.36)$$

$$\langle \tilde{\tau} \cdot C^{-1} f^{(k)} \rangle = 0 \quad (2.37)$$

$$\langle b^{(k)} \rangle = 0 \quad (2.38)$$

Las condiciones (2.34)-(2.37) están ligadas a leyes de conservación que verifican las ecuaciones de Euler linealizadas (2.11), derivadas de las leyes de conservación obtenidas para las ecuaciones de Euler (2.21)-(2.23). Por otra parte, la condición (2.38) es necesaria para que la ecuación de convección-difusión (2.12) tenga solución, como hemos visto en el apartado anterior para $k = 1$.

2.1.2 Ecuaciones promediadas

La imposición de las condiciones de compatibilidad (2.34)-(2.38), para cada valor de k , nos permite deducir las ecuaciones promediadas satisfechas por las medias de cada uno de los términos de los desarrollos asintóticos (2.6), así como las ecuaciones verificadas por la energía cinética media q y la helicidad media h . Si consideramos hasta las perturbaciones de orden $\delta^{2/3}$ y denotamos por

$$\bar{\rho}^{(k)} = \langle \rho^{(k)} \rangle, \quad \bar{\mathbf{w}} = \langle \mathbf{w} \rangle, \quad \bar{\mathbf{v}}^{(k)} = \langle \mathbf{v}^{(k)} \rangle \quad \text{y} \quad \bar{e}^{(k)} = \langle e^{(k)} \rangle,$$

estas ecuaciones, junto con las condiciones iniciales, que de manera natural se deducen de las condiciones iniciales (2.2), son las siguientes:

Las variables ρ , \mathbf{v} y e verifican las ecuaciones de Euler compresibles:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + (\gamma - 1) \nabla (\rho e) = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho(x, 0) = \bar{\rho}_0(x), \quad \mathbf{v}(x, 0) = \bar{\mathbf{v}}_0(x), \quad e(x, 0) = \bar{e}_0(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \\ \\ \text{en } R^3 \end{array} \quad (2.39)$$



Las variables $\rho^{(0)}$, $\bar{\mathbf{w}}$, y $e^{(0)}$ satisfacen el problema de valores iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{v} + \rho \bar{\mathbf{w}}) = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{w}} \right] - \frac{\rho^{(0)}}{\rho} (\gamma - 1) \nabla(\rho e) + \\ \quad + (\gamma - 1) \nabla(\rho e^{(0)} + \rho^{(0)} e) = 0 \\ \frac{\partial e^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e^{(0)} + (\gamma - 1) e^{(0)} \nabla \cdot \mathbf{v} + \\ \quad + \bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} = 0 \\ \rho^{(0)}(x, 0) = 0, \quad \bar{\mathbf{w}}(x, 0) = \langle w_0 \rangle = 0, \quad e^{(0)}(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \\ \\ \text{en } \mathbb{R}^3 \end{array} \quad (2.40)$$

Como $\rho^{(0)}$ y $e^{(0)}$ son funciones independientes de la variable y , se tiene que $\bar{\rho}^{(0)} = \rho^{(0)}$ y $\bar{e}^{(0)} = e^{(0)}$ y por ello este sistema determina a las variables $(\rho^{(0)}, \bar{\mathbf{w}}, e^{(0)})$. Como consecuencia, si (2.40) tiene una única solución acotada, ésta debe ser

$$\rho^{(0)} \equiv 0, \quad \bar{\mathbf{w}} \equiv 0, \quad e^{(0)} \equiv 0. \quad (2.41)$$

Por su parte, q y h verifican el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q + R : \nabla \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \psi_q = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{v}) + \frac{\mu}{\rho} \psi_h = 0 \\ q(x, 0) = q_0(x), \quad h(x, 0) = h_0(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \\ \text{en } \mathbb{R}^3 \end{array} \quad (2.42)$$

En estas ecuaciones, aparecen como términos de cierre el tensor de Reynolds R y las funciones escalares ψ_q y ψ_h definidos por:

$$R = \langle \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \rangle \quad (2.43)$$

$$\psi_q = \frac{1}{e} \langle \nabla_y e^{(1)} \cdot C \nabla_y e^{(1)} \rangle \quad (2.44)$$

$$\psi_h = \frac{-1}{2\gamma e} \langle \nabla_y (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) \cdot C \nabla_y e^{(1)} \rangle, \quad \text{con } \mathbf{r} = (G \nabla_y) \times \mathbf{w}. \quad (2.45)$$

Por último, las variables $\bar{\rho}^{(1)}$, $\bar{\mathbf{v}}^{(1)}$ y $\bar{e}^{(1)}$ satisfacen el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}^{(1)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}^{(1)} \mathbf{v} + \rho \bar{\mathbf{v}}^{(1)}) = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}^{(1)} + (\bar{\mathbf{v}}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla \cdot (\rho R) + \\ \quad + (\gamma - 1) \nabla \cdot (\rho \bar{e}^{(1)} + e \bar{\rho}^{(1)}) - (\gamma - 1) \frac{\bar{\rho}^{(1)}}{\rho} \nabla (\rho e) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \frac{\partial \bar{e}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{e}^{(1)} + (\gamma - 1) \bar{e}^{(1)} \nabla \cdot \mathbf{v} + \\ \quad + \bar{\mathbf{v}}^{(1)} \cdot \nabla e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}^{(1)} - \frac{\mu}{\rho} \psi_q = 0 \\ \bar{\rho}^{(1)}(x, 0) = \langle \rho_0 \rangle = 0, \quad \bar{\mathbf{v}}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \bar{e}^{(1)}(x, 0) = \langle e_0 \rangle = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (2.46)$$

En este sistema también aparece el efecto de la perturbación sobre las variables medias a través de los términos de cierre R y ψ_q .

No continuamos escribiendo las ecuaciones verificadas por los términos de orden superior, entendiendo que en las ecuaciones deducidas hasta ahora ya están presentes las principales características de la interacción entre grandes y pequeñas estructuras.

Obsérvese que el orden δ^4 del término de difusión en la ecuación para la velocidad no introduce efectos sobre las principales ecuaciones promediadas del modelo. El estudio con términos de difusión de orden inferior ha sido realizado en otros trabajos [13, 15] y se ha obviado aquí por simplicidad.

Los términos de cierre vienen dados a partir de las perturbaciones principales \mathbf{w} y $e^{(1)}$ según las relaciones (2.43)-(2.45), y éstas se determinan a través de las perturbaciones canónicas $\tilde{\mathbf{w}}^*$ y $\hat{e}^{(1)}$. Por ello, es posible expresar también los términos de cierre en función de unos términos de cierre canónicos y explicitar su dependencia con respecto a los parámetros q y h , tal y como se establece en el siguiente resultado:

Teorema 2.6 *Bajo la hipótesis (H) y dados los parámetros $q > 0$ y $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se verifica que:*

$$R = q \tilde{R}, \quad \psi_q = h^2 \tilde{\psi}_q, \quad \psi_h = \frac{h^3}{q} \tilde{\psi}_h, \quad (2.47)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \otimes \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle G^{-1} \\ \tilde{\psi}_q &= \frac{1}{e} \langle \nabla_y \hat{e}^{(1)} \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)} \rangle \\ \tilde{\psi}_h &= \frac{-1}{2\gamma e} \langle \nabla_y (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^*) \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)} \rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde $\tilde{\mathbf{w}}^*$ y $\hat{e}^{(1)}$ son la solución de los problemas (2.25) y (2.32), respectivamente, y $\tilde{\mathbf{r}}^* = \text{Det}(C)^{1/2} \nabla_y \times (C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^*)$.

Demostración:

Veamos en primer lugar que si $f(y)$ es una función $\alpha^* Y$ -periódica entonces para cualquier $\beta > 0$, $f_\beta(y) = f(\beta y)$ es una función αY -periódica, con $\alpha = \frac{\alpha^*}{\beta}$, y

$$\langle f \rangle = \langle f_\beta \rangle. \quad (2.49)$$

La relación entre los periodos de estas funciones es inmediata. Por otra parte, para comprobar que las medias siguen siendo iguales, basta hacer un cambio de variables en las integrales que las definen:

$$\langle f_\beta \rangle = \frac{\int_{\alpha Y} f(\beta y) dy}{\int_{\alpha Y} dy} = \left\{ \begin{array}{l} z = \beta y \\ dz = \beta dy \end{array} \right\} = \frac{\int_{\alpha^* Y} f(z) dy}{\int_{\alpha^* Y} dz} = \langle f \rangle.$$

Probamos ahora cada una de las identidades que afirma el teorema:

i) Puesto que $\mathbf{w}(y) = G^{-t} \tilde{\mathbf{w}}(y)$ y $\tilde{\mathbf{w}}(y) = \sqrt{q} \tilde{\mathbf{w}}^*\left(\frac{h}{q} y\right)$,

$$\begin{aligned} R &= \langle \mathbf{w}(y) \otimes \mathbf{w}(y) \rangle = G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}(y) \otimes \tilde{\mathbf{w}}(y) \rangle G^{-1} = \\ &= q G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}^*\left(\frac{h}{q} y\right) \otimes \tilde{\mathbf{w}}^*\left(\frac{h}{q} y\right) \rangle G^{-1} = q G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}^*(y) \otimes \tilde{\mathbf{w}}^*(y) \rangle G^{-1}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (2.49) con $\beta = \frac{h}{q}$.

ii) Como $e^{(1)}(y) = q\hat{e}^{(1)}(\frac{h}{q}y) + \beta$, entonces $\nabla_y e^{(1)}(y) = h\nabla_y \hat{e}^{(1)}(\frac{h}{q}y)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\psi_q &= \frac{1}{e} \langle \nabla_y e^{(1)}(y) \cdot C \nabla_y e^{(1)}(y) \rangle = \frac{h^2}{e} \langle \nabla_y \hat{e}^{(1)}(\frac{h}{q}y) \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)}(\frac{h}{q}y) \rangle = \\ &= \frac{h^2}{e} \langle \nabla_y \hat{e}^{(1)}(y) \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)}(y) \rangle,\end{aligned}$$

de nuevo por (2.49).

iii) $\psi_h = \frac{-1}{2\gamma e} \langle \nabla_y (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) \cdot C \nabla_y e^{(1)} \rangle$.

Expresando \mathbf{w} en función de $\tilde{\mathbf{w}}^*$, se tiene que

$$\mathbf{r} = (G\nabla_y) \times \mathbf{w} = \frac{h}{\sqrt{q}} \tilde{\mathbf{r}}^*(\frac{h}{q}y).$$

Entonces

$$\nabla_y (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) = \frac{h^2}{q} \nabla_y (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^*)(\frac{h}{q}y).$$

Por otra parte, $C \nabla_y e^{(1)}(y) = h C \nabla_y \hat{e}^{(1)}(y)(\frac{h}{q}y)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\psi_h &= \frac{-1}{2\gamma e} \frac{h^3}{q} \langle \nabla_y (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^*)(\frac{h}{q}y) \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)}(\frac{h}{q}y) \rangle = \\ &= \frac{h^3}{q} \frac{-1}{2\gamma e} \langle \nabla_y (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^*)(y) \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)}(y) \rangle,\end{aligned}$$

de nuevo por (2.49).

⊗



En consecuencia, las ecuaciones promediadas del modelo MPP son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\
 \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + (\gamma - 1) \nabla (\rho e) = 0 \\
 \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} = 0
 \end{array} \right. \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\
 \left. \begin{array}{l}
 \rho(x, 0) = \bar{\rho}_0(x), \quad \mathbf{v}(x, 0) = \bar{\mathbf{v}}_0(x), \\
 e(x, 0) = \bar{e}_0(x), \quad \mathbf{a}(x, 0) = x
 \end{array} \right\} \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q + q \tilde{R} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} h^2 \tilde{\psi}_q = 0 \\
 \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{v}) + \frac{\mu}{\rho} \frac{h^3}{q} \tilde{\psi}_h = 0 \\
 q(x, 0) = q_0(x), \quad h(x, 0) = h_0(x)
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\
 \text{en } \mathbb{R}^3
 \end{array} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \bar{e}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{e}^{(1)} + (\gamma - 1) \bar{e}^{(1)} \nabla \cdot \mathbf{v} + \\
 \quad + \bar{\mathbf{v}}^{(1)} \cdot \nabla e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}^{(1)} - \frac{\mu}{\rho} h^2 \tilde{\psi}_q = 0 \\
 \frac{\partial \bar{\rho}^{(1)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}^{(1)} \mathbf{v} + \rho \bar{\mathbf{v}}^{(1)}) = 0 \\
 \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}^{(1)} + (\bar{\mathbf{v}}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla \cdot (\rho q \tilde{R}) + \\
 \quad + (\gamma - 1) \nabla \cdot (\rho \bar{e}^{(1)} + e \bar{\rho}^{(1)}) - (\gamma - 1) \frac{\bar{\rho}^{(1)}}{\rho} \nabla (\rho e) = 0 \\
 \bar{\rho}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \bar{\mathbf{v}}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \bar{e}^{(1)}(x, 0) = 0
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\
 \text{en } \mathbb{R}^3
 \end{array}
 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

donde los términos de cierre \tilde{R} , $\tilde{\psi}_q$ y $\tilde{\psi}_h$ están definidos en (2.47).

Este sistema de ecuaciones proporciona una aproximación de las medias

de las variables ρ^δ , \mathbf{v}^δ y e^δ de orden δ , dadas respectivamente por $\rho + \delta^{2/3}\bar{\rho}^{(1)}$, $\mathbf{v} + \delta^{2/3}\bar{\mathbf{v}}^{(1)}$ y $e + \delta^{2/3}\bar{e}^{(1)}$.

Podemos decir, que se trata de un modelo matemático formal de turbulencia localmente homogénea para flujos compresibles a bajos números de Mach y con dos escalas de espacio bien separadas.

A diferencia de otros modelos de turbulencia, éste queda descrito por un sistema formalmente cerrado, en el sentido de que todos los términos de cierre que aparecen en las ecuaciones promediadas son, en última instancia, funciones de \mathbf{v} , q y h , a través de la ecuación para las coordenadas lagrangianas (2.7), y de los problemas en micro-estructura canónicos (2.25) y (2.29).

Desde un punto de vista práctico, las ecuaciones del modelo han de ser resueltas en cascada: En primer lugar, se obtiene (ρ, \mathbf{v}, e) , para luego calcular las coordenadas lagrangianas \mathbf{a} . A continuación se resuelven las ecuaciones acopladas para q , h y las perturbaciones canónicas $\tilde{\mathbf{w}}^*$ y $\hat{e}^{(1)}$, para finalmente obtener $(\bar{\rho}^{(1)}, \bar{\mathbf{v}}^{(1)}, \bar{e}^{(1)})$.

Observemos que en la ecuación para q el término $\hat{\varepsilon} = \frac{\mu}{\rho} h^2 \tilde{\psi}_q$ representa la disipación viscosa de la energía cinética de la perturbación, q ($\hat{\varepsilon}$ juega el papel de la variable ε en el modelo $k - \varepsilon$). En efecto, $\hat{\varepsilon} \geq 0$ y $\hat{\varepsilon} > 0$ sólo si $\mu > 0$, es decir, sólo si existen efectos de disipación viscosa. Además si \mathbf{v} y q sólo dependen del tiempo, entonces la ecuación para q se reduce a

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\hat{\varepsilon}.$$

Lo relevante en nuestro modelo es que toda la energía cinética disipada por efectos viscosos es transformada en energía interna, tal y como se manifiesta en la ecuación para la perturbación de la energía interna $\bar{e}^{(1)}$. En esta ecuación aparece el término $-\hat{\varepsilon}$, de manera que si \mathbf{v} , $\bar{\mathbf{v}}^{(1)}$, e y $\bar{e}^{(1)}$ sólo dependen del tiempo,

ésta ecuación se reduce a

$$\frac{\partial \bar{e}^{(1)}}{\partial t} = \hat{\varepsilon}.$$

2.2 Forma conservativa del modelo

En esta sección, analizamos la consistencia de la técnica de modelado *MPP* que hemos utilizado para obtener el modelo (2.50). Para ello, consideramos las ecuaciones (2.1), en ausencia del término de difusión en las ecuaciones para la velocidad ($\nu = 0$), escritas en forma conservativa. Partiendo de estas ecuaciones, comprobamos que el modelo obtenido en este caso es justamente la forma conservativa del modelo (2.50).

Consideramos las variables conservativas momento cinético y energía total,

$$m^\delta = \rho^\delta \mathbf{v}^\delta, \quad E^\delta = \rho^\delta \left(e^\delta + \frac{1}{2} |\mathbf{v}^\delta|^2 \right), \quad (2.51)$$

y la formulación conservativa de las ecuaciones (2.1) en términos de estas variables:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^\delta}{\partial t} + \nabla \cdot m^\delta = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \frac{\partial m^\delta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho^\delta} m^\delta \otimes m^\delta + \nabla p^\delta \right] = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \frac{\partial E^\delta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(E^\delta + p^\delta) \mathbf{v}^\delta \right] - \mu \delta^{4/3} \rho^\delta \Delta \left[\frac{1}{\rho^\delta} \left(E^\delta - \frac{1}{2\rho^\delta} |m^\delta|^2 \right) \right] = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \end{cases} \quad (2.52)$$

donde $p^\delta = (\gamma - 1) \left(E^\delta - \frac{1}{2\rho^\delta} |m^\delta|^2 \right)$ es la presión dada por la ley de estado de los gases perfectos.

Suponemos que las variables ρ^δ , m^δ y E^δ admiten desarrollos asintóticos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\rho^\delta(x, t) &= \rho(x, t) + \delta^{1/3} \rho^{(0)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \delta^{2/3} \rho^{(1)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \dots \\
m^\delta(x, t) &= m(x, t) + \delta^{1/3} m^{(0)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \delta^{2/3} m^{(1)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \dots \\
E^\delta(x, t) &= E(x, t) + \delta^{1/3} E^{(0)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \delta^{2/3} E^{(1)}\left(\frac{\mathbf{a}(x, t)}{\delta}; x, t\right) + \dots
\end{aligned}
\tag{2.53}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las variables $(\rho^\delta, \mathbf{v}^\delta, e^\delta)$ y $(\rho^\delta, m^\delta, E^\delta)$ dada por (2.51), estos desarrollos asintóticos son equivalentes a los desarrollos (2.6). La relación entre los primeros términos de ambos desarrollos es la siguiente:

$$\begin{aligned}
m &= \rho \mathbf{v}, \quad m^{(0)} = \rho \mathbf{w} + \rho^{(0)} \mathbf{v}, \quad m^{(1)} = \rho \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(0)} \mathbf{w} + \rho^{(1)} \mathbf{v}, \quad \dots \\
E &= \rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right), \quad E^{(0)} = \rho^{(0)} \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \rho(e^{(0)} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}), \\
E^{(1)} &= \rho^{(1)} \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \rho^{(0)} (e^{(0)} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \rho(e^{(1)} + \frac{1}{2} |\mathbf{w}|^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^{(1)}), \quad \dots
\end{aligned}$$

El mismo análisis desarrollado en la sección anterior nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones promediadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot m = 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho} m \otimes m + pI \right] = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{v}] = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho \mathbf{a})\mathbf{v}] = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho q)\mathbf{v}] + (\rho q)\tilde{R} : \nabla \mathbf{v} + \mu h^2 \tilde{\psi}_q = 0 \\ \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho h)\mathbf{v}] + (\rho h)\nabla \cdot \mathbf{v} + \mu \frac{h^3}{q} \tilde{\psi}_h = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}^{(1)}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{m}^{(1)} = 0 \\ \frac{\partial \bar{m}^{(1)}}{\partial t} + \nabla \cdot [m \otimes \bar{\mathbf{v}}^{(1)} + \bar{m}^{(1)} \otimes \mathbf{v}] + \\ \quad + \nabla \cdot [\bar{p}^{(1)}I + (\rho q)\tilde{R}] = 0 \\ \frac{\partial \bar{E}^{(1)}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\bar{E}^{(1)} + \bar{p}^{(1)})\mathbf{v} + (E + p)\bar{\mathbf{v}}^{(1)}] + \\ \quad + \nabla \cdot [(\rho q)\tilde{R}\mathbf{v}] = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\ \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \end{array}$$

(2.54)

donde

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad \bar{p}^{(1)} = (\gamma - 1)(\bar{\rho}^{(1)} e + \rho \bar{e}^{(1)}),$$

$$\bar{E}^{(1)} = \bar{\rho}^{(1)} \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \rho (\bar{e}^{(1)} + \mathbf{v} \bar{\mathbf{v}}^{(1)}) + (\rho q).$$

Este sistema de ecuaciones resulta ser justamente la forma conservativa del sistema (2.50). Este hecho refuerza la consistencia de la técnica que hemos empleado.

Es importante observar que la energía total media E y su perturbación de primer orden $\bar{E}^{(1)}$ se conservan. Ello ocurre porque, como comentábamos tras obtener el modelo (2.50), toda la energía cinética que se disipa por los efectos viscosos ($\rho \hat{\varepsilon} = \mu h^2 \tilde{\psi}_q$ en la ecuación para ρq) es transformada en energía interna.

2.3 Analogía con el modelo $k - \varepsilon$

El modelo *MPP* descrito en las secciones anteriores se encuadra dentro de los modelos de turbulencia a dos ecuaciones, es este caso, para la energía cinética turbulenta media q y la helicidad media h . En esta sección, analizamos la analogía de nuestro modelo con un modelo de referencia de este tipo como es el modelo $k - \varepsilon$. Veremos que a partir de las ecuaciones de nuestro modelo *MPP*, es posible obtener un modelo de tipo $k - \varepsilon$ que coincide formalmente con el modelo estándar, para turbulencia homogénea, si no se consideran efectos difusivos. De hecho, como ya hemos comentado, el tensor de Reynolds en los modelos *MPP* no modela estos efectos. En concreto, esto ocurre, cuando el tensor $\tilde{R} = \frac{2}{3} I$.

Como describíamos en la introducción, el modelo $k - \varepsilon$ para turbulencia compresible (1.31) está constituido por un sistema de ecuaciones para las medias de las variables que gobiernan el flujo, densidad $\bar{\rho}$, velocidad $\tilde{\mathbf{v}}$ y energía total \bar{E} . A éstas añaden dos ecuaciones más para dos magnitudes propias de la turbulencia: la energía cinética turbulenta media k y su tasa de disipación viscosa ε .

En ausencia de efectos difusivos, el modelo $k - \varepsilon$ está formado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} I + \frac{2}{3} \bar{\rho} k I) = 0 \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{E} + \bar{p} I + \frac{2}{3} \bar{\rho} k I) \tilde{\mathbf{v}} = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\rho} \varepsilon = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{2}{3} c_{\varepsilon_1} \bar{\rho} \varepsilon \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + c_{\varepsilon_2} \frac{(\bar{\rho} \varepsilon)^2}{\bar{\rho} k} = 0 \\ \bar{p} = (\gamma - 1) (\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 - \bar{\rho} k) \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Recordamos que en el modelo $k-\varepsilon$, el campo de velocidades se descompone mediante el operador de promediado de Favre como $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}''$ y k se define por $k = \frac{1}{2}|\tilde{\mathbf{v}}''|^2$.

Si en el modelo *MPP* consideramos una aproximación de \mathbf{v}^δ de orden $\delta^{2/3}$, $\mathbf{v}^\delta = \mathbf{v} + \delta^{1/3}\mathbf{w}$, podemos considerar que las perturbaciones \mathbf{v}'' y $\delta^{1/3}\mathbf{w}$ son similares. Entonces, como $q = \frac{1}{2}\langle |\mathbf{w}|^2 \rangle$, si identificamos el operador de promediado respecto de la variable y , $\langle \cdot \rangle$, y el operador de Favre, las variables k y $\delta^{2/3}q$ pueden identificarse.

Por otra parte, en la ecuación para q de nuestro modelo (2.50), su tasa de disipación por viscosidad está representada por $\frac{\mu}{\rho}h^2\tilde{\psi}_q$, por tanto ε se identifica con $\delta^{2/3}\frac{\mu}{\rho}h^2\tilde{\psi}_q$.

En nuestro modelo *MPP*, consideremos como variables medias del flujo las aproximaciones de orden δ de las variables ρ^δ , $\rho^\delta\mathbf{v}^\delta$ y E^δ , dadas por:

$$\bar{\rho} = \rho + \delta^{2/3}\bar{\rho}^{(1)}, \quad \rho^\delta\mathbf{v}^\delta = \rho\mathbf{v} + \delta^{2/3}(\rho\bar{\mathbf{v}}^{(1)} + \bar{\rho}^{(1)}\mathbf{v}), \quad \bar{E} = E + \delta^{2/3}\bar{E}^{(1)}.$$

Entonces a partir de las ecuaciones (2.54), es posible obtener las ecuaciones que satisfacen estas variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}}) = O(\delta^{4/3}) \\ \frac{\partial (\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{p}I) + \delta^{2/3}\nabla \cdot (\bar{\rho}q\tilde{R}) = O(\delta^{4/3}) \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\bar{E} + \bar{p}I)\bar{\mathbf{v}}] + \delta^{2/3}\nabla \cdot (\bar{\rho}q\tilde{R}\bar{\mathbf{v}}) = O(\delta^{4/3}) \\ \bar{p} = (\gamma - 1)(\bar{E} - \frac{1}{2}\bar{\rho}|\bar{\mathbf{v}}|^2 - \delta^{2/3}\bar{\rho}q) \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Además, teniendo en cuenta que

$$\bar{\rho}k \sim \delta^{2/3}\rho q + O(\delta^{4/3}),$$

$$\bar{\rho}\varepsilon \sim \delta^{2/3}\mu\tilde{\psi}_qh^2 + O(\delta^{4/3}),$$

si multiplicamos por $\delta^{2/3}$ la ecuación para ρq en (2.54) se obtiene una ecuación para $\bar{\rho}k$:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}k \mathbf{v}) + \bar{\rho} \delta^{2/3} R : \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho} \varepsilon = O(\delta^{4/3}). \quad (2.57)$$

También es posible obtener una ecuación para $\bar{\rho} \varepsilon$ a partir de la ecuación para h en (2.50):

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \mathbf{v}) + \bar{\rho} \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{v} + 2 \frac{\tilde{\psi}_h}{\tilde{\psi}_q} \frac{(\bar{\rho} \varepsilon)^2}{\bar{\rho} k} = O(\delta^{4/3}). \quad (2.58)$$

Para obtener esta ecuación para $\bar{\rho} \varepsilon$ hemos considerado que

$$\tilde{\psi}_q = \frac{1}{e} \langle \nabla_y \hat{e}^{(1)} \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)} \rangle$$

es constante respecto de las variables en macro-estructura. En realidad, depende de ellas a través de la presencia de q y h en el coeficiente de difusión ξ de la ecuación para la perturbación canónica de la energía interna (2.29). Sin embargo, parece natural despreciar esta dependencia para recuperar el modelo $k - \varepsilon$ estándar, ya que este no tiene en cuenta las interacciones del flujo medio con la energía interna, como en cambio si ocurre en nuestro modelo.

En consecuencia, a partir de las ecuaciones de nuestro modelo MPP , hemos deducido el modelo de tipo $k - \varepsilon$ siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = O(\delta^{4/3}) \\ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} + \bar{p} I + \bar{\rho} k \tilde{R}) = O(\delta^{4/3}) \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\bar{E} + \bar{p} I + \bar{\rho} k \tilde{R}) \bar{\mathbf{v}}] = O(\delta^{4/3}) \\ \frac{\partial(\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \mathbf{v}) + \bar{\rho} k \tilde{R} : \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho} \varepsilon = O(\delta^{4/3}) \\ \frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \mathbf{v}) + \bar{\rho} \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{v} + 2 \frac{\tilde{\psi}_h}{\tilde{\psi}_q} \frac{(\bar{\rho} \varepsilon)^2}{\bar{\rho} k} = O(\delta^{4/3}) \\ \bar{p} = (\gamma - 1) (\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} |\bar{\mathbf{v}}|^2 - \bar{\rho} k) \end{array} \right. \quad (2.59)$$



Comparando los sistemas de ecuaciones (2.55) y (2.59), podemos concluir que, en el caso particular en el que el tensor $\tilde{R} = \frac{2}{3}I$, las ecuaciones (2.59) obtenidas a partir del modelo *MPP* constituyen un modelo de tipo $k - \varepsilon$ que coincide formalmente con el modelo $k - \varepsilon$ estándar para turbulencia homogénea, si no se consideran efectos difusivos.

A pesar de la similitud existente entre ambos modelos, existen sin embargo, dos diferencias fundamentales: En primer lugar, el modelo $k - \varepsilon$ está desarrollado básicamente a partir de hipótesis físicas y análisis dimensional. Por su parte, el modelo *MPP* se obtiene mediante un análisis matemático formal. En segundo lugar, en el modelo $k - \varepsilon$ las constantes c_{ε_1} y c_{ε_2} son constantes universales que se calculan experimentalmente. Habitualmente toman los valores:

$$c_{\varepsilon_1} = 1.44 \quad c_{\varepsilon_2} = 1.92.$$

De las ecuaciones obtenidas aquí y previamente en [27], se deduce que

$$c_{\varepsilon_1} = 1.5 \quad c_{\varepsilon_2} = 2 \frac{\tilde{\psi}_h}{\tilde{\psi}_q}.$$

Por tanto, en nuestro modelo, estas constantes se obtienen teóricamente, a partir de la solución de los problemas que rigen el comportamiento en pequeña escala de la perturbación turbulenta.

2.4 Modelo a una ecuación

Los términos de cierre del modelo (2.50) \tilde{R} , $\tilde{\psi}_q$ y $\tilde{\psi}_h$ dependen de \mathbf{v} , q y h a través de las fluctuaciones canónicas y las coordenadas lagrangianas. Así pues, el cálculo efectivo de estos términos exige la evaluación de $\tilde{\mathbf{w}}^*(C, q, h)$ y $\hat{e}^{(1)}(C, q, h)$ para todos los valores de los parámetros C , q y h . Evidentemente, se trata de una tarea bien costosa, prácticamente imposible. Para salvar esta contrariedad,

diferentes autores [14, 50] han estudiado propiedades de simetría de las fluctuaciones canónicas que permiten reducir la dependencia con respecto a algunos de sus parámetros, si la perturbación inicial verifica ciertas simetrías.

En esta sección, siguiendo esta misma estrategia, conseguimos obtener un modelo reducido de (2.50), suprimiendo la ecuación para la helicidad media h , y que por tanto resulta ser un modelo de turbulencia a una ecuación. A cambio, limitamos el tipo de turbulencia que estamos modelando.

Consideramos el subgrupo de las matrices ortogonales que dejan invariante al cubo Y (e igualmente al cubo αY , $\forall \alpha > 0$):

$$\mathcal{M}_Y = \{Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3} : QQ^t = I, \quad Qy \in Y, \forall y \in Y\}$$

Sea $\tilde{w}(y, C, q, h)$ y $\pi(y, C, q, h)$ una solución del problema (2.24). Para $Q \in \mathcal{M}_Y$, a partir de \tilde{w} y π , construimos la fluctuación \tilde{W} y la presión P de la siguiente forma:

$$\tilde{W}(y) = Q^t \tilde{w}(Qy), \quad P(y) = \pi(Qy).$$

Entonces el par (\tilde{W}, P) verifica el problema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{W}, P) \text{ } \alpha Y \text{ - periódicas} \\ (\tilde{W} \cdot \nabla_y) \tilde{W} + (Q^t C Q) \nabla_y P = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{W} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \langle \tilde{W} \rangle = Q^t \langle \tilde{w} \rangle = 0 \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{W} (Q^t C Q)^{-1} \tilde{W} \rangle = \frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{w} \rangle = q \\ \frac{1}{2} \det(Q) \langle \tilde{W} (Q^t C Q)^{-1} \tilde{R} \rangle = \frac{1}{2} \langle \tilde{w} C^{-1} \tilde{r} \rangle = h \end{array} \right. \quad (2.60)$$

donde $\tilde{R} = \text{Det}(C)^{1/2} \nabla_y \times [(Q^t C Q)^{-1} \tilde{W}]$.

En consecuencia, si el problema (2.60) admite una única solución, se tiene que $\forall Q \in \mathcal{M}_Y$:

$$\tilde{W}(y) = \tilde{w}(y, Q^t C Q, q, h), \quad \text{si } \det(Q) = 1; \quad (2.61)$$

$$\tilde{W}(y) = \tilde{w}(y, Q^t C Q, q, -h), \quad \text{si } \det(Q) = -1. \quad (2.62)$$

Esto significa que:

Si $Q \in \mathcal{M}_Y$ tal que $Q^t C Q = C$ y $\det(Q) = 1$, entonces \tilde{w} verifica la simetría

$$Q^t \tilde{w}(Qy, q, h) = \tilde{w}(y, q, h). \quad (2.63)$$

Si $Q \in \mathcal{M}_Y$ tal que $Q^t C Q = C$ y $\det(Q) = -1$, entonces \tilde{w} verifica la simetría

$$Q^t \tilde{w}(Qy, q, h) = \tilde{w}(y, q, -h). \quad (2.64)$$

Las matrices $Q \in \mathcal{M}_Y$ tales que $\det(Q) = 1$ determinan una rotación en el espacio. En cambio, aquellas tales que $\det(Q) = -1$ se corresponden con la composición de una rotación y una simetría respecto de un plano que pasa por el origen.

Para buscar perturbaciones que verifiquen las dos simetrías al mismo tiempo, damos la siguiente definición:

Definición 2.7 Diremos que una solución (\tilde{w}, π) del problema (2.24) es Q -invariante si $(\tilde{w}, \pi) = (\tilde{W}, P)$, para cualquier matriz $Q \in \mathcal{M}_Y$ tal que $Q^t C Q = C$.

Si (\tilde{w}, π) es una solución de (2.24) Q -invariante, entonces en particular \tilde{w} es una función impar. Para ello, basta tomar $Q = -I$ en (2.64). La consecuencia inmediata de esto es que su media y helicidad son nulas:

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{w} \cdot C^{-1} \tilde{r} \rangle = 0.$$

En este hecho radica la ventaja de considerar fluctuaciones canónicas que verifiquen este nuevo tipo de simetrías, ya que en este caso, podemos simplificar el modelo obtenido (2.50), eliminando la ecuación para h .

En [50], Ortegón demuestra que la helicidad no puede crearse si inicialmente no existía. Este resultado justifica que tenga sentido considerar un modelo para el que la helicidad es nula.

Antes de proseguir con la deducción del modelo reducido, observemos que la definición de invariante por una transformación ortogonal que estamos dando en la definición 2.7 no es artificial. En efecto, si denotamos por $y = y(t)$ a la trayectoria de un punto que se mueve con un flujo de velocidad v , es decir:

$$\frac{d}{dt}y(t) = v(y(t), t),$$

entonces la velocidad del flujo en el punto transformado $z = Qy$ es

$$v(z) = \frac{d}{dt}z(t) = Qv,$$

o lo que es lo mismo $v(Qy) = Qv(y)$.

Para obtener el modelo reducido, consideremos que la perturbación canónica de la velocidad verifica el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } (\tilde{w}, \pi) \text{ } Y - \text{periódicas y } Q - \text{invariantes} \\ \text{tales que:} \\ (\tilde{w} \cdot \nabla_y)\tilde{w} + C\nabla_y\pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{2}\langle \tilde{w} \cdot C^{-1}\tilde{w} \rangle = q \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Siguiendo la misma argumentación que en la deducción del modelo general, las fluctuaciones canónicas (\tilde{w}, π) se determinan a partir de las fluctuaciones canónicas normalizadas (\tilde{w}^*, π^*) , que en este caso se definen como solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } (\tilde{w}^*, \pi^*) \text{ } Y - \text{periódicas y } Q - \text{invariantes} \\ \text{tales que:} \\ (\tilde{w}^* \cdot \nabla_y)\tilde{w}^* + C\nabla_y\pi^* = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w}^* = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{2}\langle \tilde{w}^* \cdot C^{-1}\tilde{w}^* \rangle = 1 \end{array} \right. \quad (2.66)$$



Notemos que ahora no es necesario dejar indeterminado el periodo, ya que no necesitamos modular la helicidad media, y por tanto podemos tomar $\alpha = 1$.

En relación a este problema es necesario también asumir una hipótesis análoga a la hipótesis (H):

(H') El problema (2.66) admite una única solución, que depende de forma continua de la matriz C .

En este caso, los datos (\mathbf{w}_0, π_0) debe ser funciones Y -periódicas y también Q -invariantes que verifican las ecuaciones de Euler (2.5).

Las soluciones Q -invariantes de las ecuaciones de Euler admiten únicamente el invariante por homotecia:

Si $(\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*)$ es una solución del problema (2.66), entonces el par dado por

$$\tilde{\mathbf{w}}(y) = \lambda \tilde{\mathbf{w}}^*(y), \quad \pi(y) = \pi^*(y),$$

es otra solución de este problema tal que

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}} \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}} \rangle = \lambda^2 \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle.$$

Entonces se verifica el siguiente resultado análogo al teorema 2.3:

Teorema 2.8 *Bajo la hipótesis (H') y dado el parámetro $q > 0$. Si el par $(\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*)$ es la solución del problema (2.66) entonces el par $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ definido por*

$$\tilde{\mathbf{w}}(y) = \sqrt{q} \tilde{\mathbf{w}}^*(y), \quad \pi(y) = q \pi^*(y), \quad (2.67)$$

es una solución del problema (2.65).

Por otra parte, la perturbación principal de la energía interna debe ser una solución Y -periódica de la ecuación (2.28). De nuevo, de manera análoga a como se argumentó en el modelo general, la perturbación principal de energía

interna $e^{(1)}$ se determina a partir de la perturbación canónica $\hat{e}^{(1)}$, definida como solución del problema:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \hat{e}^{(1)} - \xi' \Delta_C \hat{e}^{(1)} = \hat{d}^{(1)} & \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \langle \hat{e}^{(1)} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

donde

$$\xi' = \frac{\mu}{\gamma \rho q^{1/2}}, \quad \hat{d}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \pi^* + \frac{1}{q^{3/2}} b$$

y $(\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*)$ es la solución del problema (2.66).

Puesto que se trata de un problema de la misma naturaleza que el problema (2.29), la proposición 2.4 asegura que, bajo la hipótesis (H'), este problema tiene una única solución si y sólo si se verifica la condición

$$\langle \hat{d}^{(1)} \rangle = 0. \quad (2.69)$$

Al igual que en el modelo general, esta condición es equivalente a la condición (2.31). Por ello, $\hat{e}^{(1)}$ es la única solución del problema:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \hat{e}^{(1)} - \xi' \Delta_C \hat{e}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y \pi^* & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \langle \hat{e}^{(1)} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

Formalmente éste es el mismo problema satisfecho por la perturbación canónica de la energía interna en el modelo anterior (2.32).

Entonces se verifica el siguiente resultado análogo al teorema 2.5:

Teorema 2.9 *Bajo la hipótesis (H') y dados los parámetros $\beta \in \mathbb{R}$ y $q > 0$. Si $\hat{e}^{(1)}$ es la solución del problema (2.70) entonces la función definida por*

$$e^{(1)}(y) = q \hat{e}^{(1)}(y) + \beta, \quad (2.71)$$

es una solución Y -periódica de la ecuación (2.28), tal que $\langle e^{(1)} \rangle = \beta$.

Finalmente, al igual que en el teorema 2.6, los términos de cierre se expresan en función de las perturbaciones canónicas $\tilde{\mathbf{w}}^*$ y $\hat{e}^{(1)}$, explicitando su dependencia con respecto a q :

Teorema 2.10 *Bajo la hipótesis (H') y dado el parámetro $q > 0$, se verifica que:*

$$R = q \tilde{R}, \quad \psi_q = q^2 \tilde{\psi}_q, \quad (2.72)$$

con

$$\tilde{R} = G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \otimes \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle G^{-1}, \quad \tilde{\psi}_q = \frac{1}{e} \langle \nabla_y \hat{e}^{(1)} \cdot C \nabla_y \hat{e}^{(1)} \rangle. \quad (2.73)$$

Aquí $\tilde{\mathbf{w}}^*$ y $\hat{e}^{(1)}$ son la solución de los problemas (2.66) y (2.68), respectivamente.

Como consecuencia inmediata de (2.61), el tensor \tilde{R} verifica la siguiente propiedad de simetría:

$$\tilde{R}(Q^t C Q) = Q^t \tilde{R}(C) Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \text{tal que } \det(Q) = 1. \quad (2.74)$$

En particular,

$$\tilde{R}(C) = Q^t \tilde{R}(C) Q, \quad \forall Q \in \mathcal{M}_Y, \quad \text{tal que } \det(Q) = 1 \text{ y } Q^t C Q = C. \quad (2.75)$$

Esta propiedad nos permite deducir que $\tilde{R}(I) = \frac{2}{3} I$, [50].

Observemos, además, que esta última identidad es también cierta para el tensor \tilde{R} del modelo general, ya que se deduce utilizando sólo las simetrías respecto de matrices de rotación que dejan invariante al cubo Y .

Introduciendo estas modificaciones en la ecuaciones promediadas del modelo general, obtenemos las ecuaciones promediadas del modelo reducido, que son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\
 \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + (\gamma - 1) \nabla (\rho e) = 0 \\
 \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} = 0 \\
 \rho(x, 0) = \bar{\rho}_0(x), \quad \mathbf{v}(x, 0) = \bar{\mathbf{v}}_0(x), \\
 e(x, 0) = \bar{e}_0(x), \quad \mathbf{a}(x, 0) = x \\
 \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q + q \tilde{R} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} q^2 \tilde{\psi}_q = 0 \\
 q(x, 0) = q_0(x), \quad h(x, 0) = h_0(x) \\
 \frac{\partial \bar{e}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{e}^{(1)} + (\gamma - 1) \bar{e}^{(1)} \nabla \cdot \mathbf{v} + \\
 + \bar{\mathbf{v}}^{(1)} \cdot \nabla e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}^{(1)} - \frac{\mu}{\rho} q^2 \tilde{\psi}_q = 0 \\
 \frac{\partial \bar{\rho}^{(1)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}^{(1)} \mathbf{v} + \rho \bar{\mathbf{v}}^{(1)}) = 0 \\
 \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}^{(1)} + (\bar{\mathbf{v}}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla \cdot (\rho q \tilde{R}) + \\
 + (\gamma - 1) \nabla \cdot (\rho \bar{e}^{(1)} + e \bar{\rho}^{(1)}) - (\gamma - 1) \frac{\bar{\rho}^{(1)}}{\rho} \nabla (\rho e) = 0 \\
 \bar{\rho}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \bar{\mathbf{v}}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \bar{e}^{(1)}(x, 0) = 0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\
 \text{en } \mathbb{R}^3 \\
 \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\
 \text{en } \mathbb{R}^3 \\
 \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, T) \\
 \text{en } \mathbb{R}^3
 \end{array} \quad (2.76)$$

donde los términos de cierre \tilde{R} y $\tilde{\psi}_q$ están definidos en (2.72).

A diferencia del modelo general (2.50), este modelo se engloba en los llamados modelos a una ecuación, en este caso, para la energía cinética media q .

Capítulo 3

Un modelo híbrido MPP $k - \varepsilon$ para flujos compresibles

En este capítulo presentamos un modelo de turbulencia para flujos compresibles que constituye un modelo híbrido entre el modelo $k - \varepsilon$ y el modelo MPP descrito en el capítulo anterior. El objetivo es incorporar los efectos que cada uno de los modelos por separado toma en cuenta de forma más apropiada. El nuevo modelo se construye a partir de las ecuaciones del modelo $k - \varepsilon$, sustituyendo el modelado usual del tensor de Reynolds por un nuevo modelado, que incorpora términos procedentes de ambos modelos. Se trata de una extensión al caso compresible del modelado realizado por Begue et al., para flujos incompresibles [6].

El nuevo modelo tiene una complejidad mayor que el modelo $k - \varepsilon$ de partida, debido a la aparición de un nuevo término de cierre. En las siguientes secciones se estudia la estructura de este término y una situación particular donde es posible simplificarla, como es el caso de un flujo medio bidimensional.

En el modelo bidimensional obtenido, con el objetivo de poder tratar numéricamente los flujos convectivos de forma similar a como se hace en el caso

laminar, realizamos un cambio de variables de manera que se siga conservando la ley de estado de los gases perfectos. También reescribimos las ecuaciones en forma adimensionalizada y compacta, para el posterior tratamiento numérico.

Finalmente, proponemos dos estrategias diferentes para obtener tabulaciones de los coeficientes de cierre, a partir de la resolución numérica del problema canónico normalizado. Esto da lugar a dos posibles tipos de tabulaciones, que será necesario validar numéricamente.

3.1 Modelado del tensor de Reynolds

En la sección 2.3 hemos analizado la analogía de nuestro modelo MPP (2.50) con el modelo de turbulencia $k - \epsilon$. Sin embargo, existen también diferencias de relevancia física entre ellos. El modelo (2.50) toma en cuenta algunos de los principales efectos que gobiernan el comportamiento estadístico de la perturbación turbulenta, tales como el transporte por el campo medio de velocidades, la producción debida a la interacción con el flujo medio y la disipación viscosa. Sin embargo, no modela ningún efecto de difusión turbulenta, como cabría esperar por parte del tensor de Reynolds. Este hecho contradice en parte el modelado clásico de este tensor mediante la hipótesis de Reynolds y de Boussinesq, según las cuales el tensor de Reynolds se comporta básicamente como un tensor de difusión.

En el caso incompresible, diferentes experimentos numéricos han puesto de manifiesto que el tensor de Reynolds obtenido por homogeneización modela efectos transitorios de la interacción entre las grandes y pequeñas estructuras que se desarrollan en el flujo turbulento, y que otros modelos usuales no son capaces de reproducir. Concretamente, en [14, 17] ha sido observado un comportamiento oscilatorio de las interacciones entre estructuras de diferente talla, en simulaciones

numéricas de turbulencia homogénea tridimensional para flujos Poiseuille (entre placas planas). También en [6], un estudio comparativo entre el modelo $k-\varepsilon$ y un modelo MPP para flujos bidimensionales, pone de manifiesto que los términos de producción del modelo MPP podrían ser relevantes en las regiones donde tienen lugar fuertes efectos transitorios. Sin embargo, el modelo $k-\varepsilon$ no toma en cuenta de forma apropiada estos efectos, sino que más bien modela efectos de equilibrio entre la producción y la difusión más la disipación de la turbulencia.

Ahora bien, la ausencia de difusión turbulenta en el modelo MPP es sólo aparente. Para encontrarla, basta extender el proceso de promediado hasta términos de los desarrollos asintóticos de orden más altos. Concretamente en [14], se considera un modelo MPP para flujos incompresibles débilmente viscosos y se demuestra que este modelo contiene términos de difusión turbulenta, extendiendo el proceso de promediado hasta el cuarto orden. En este caso, el tensor de Reynolds toma la expresión:

$$R = \delta^{2/3} \langle \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \rangle - \delta^{4/3} \mu_t \sqrt{q} (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla^t \bar{\mathbf{v}}), \quad (3.1)$$

donde μ_t es un coeficiente de difusión turbulenta obtenido numéricamente y $\bar{\mathbf{v}}$ es la aproximación del campo medio de velocidades dada por

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \delta^{2/3} \bar{\mathbf{v}}^{(1)} + \delta \bar{\mathbf{v}}^{(2)} + \delta^{4/3} \bar{\mathbf{v}}^{(3)}.$$

Este resultado indicaría que la hipótesis de Reynolds es sólo parcialmente correcta, en presencia de fuertes efectos transitorios. En efecto, el tensor de Reynolds depende del tensor de esfuerzos $\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla^t \bar{\mathbf{v}}$, pero el modelado MPP muestra que también existe una dependencia respecto de la matriz $G = \nabla \mathbf{a}$. En situaciones en las que $\nabla \mathbf{a} = 0$, como puede ser el caso de un flujo que se desarrolla en régimen estacionario, o cuando $\nabla \mathbf{a}$ es aproximadamente la identidad, como ocurre en aquellas zonas donde el flujo transcurre de forma más regular, puede admitirse la hipótesis de Reynolds. En cambio, debe ser completada cuando el flujo medio es fuertemente transitorio o deformante.

Por otra parte, la modelización de la viscosidad turbulenta μ_t en el modelo MPP es bastante grosera (debido a la imposibilidad de modelar mediante homogeneización viscosidades de orden menor que $\delta^{4/3}$ [14]). Además diversos ensayos numéricos llevados a cabo en [6] ponen de manifiesto que el nivel de difusión turbulenta que aporta (3.1) es demasiado bajo. Sin embargo, es conocido que el modelo $k - \varepsilon$ toma en cuenta más adecuadamente los efectos de difusión turbulenta.

Teniendo en cuenta todo ello, en [6] se construye un modelo híbrido $MPP k - \varepsilon$ para flujos incompresibles, incorporando los efectos que cada uno de los modelos toma en cuenta de forma más apropiada. Para ello, se propone un nuevo modelado del tensor de Reynolds en el que los efectos transitorios son descritos por homogeneización y los efectos de viscosidad turbulenta mediante la hipótesis de Boussinesq, como en el modelo $k - \varepsilon$. Concretamente, se modela el tensor de Reynolds utilizando la estructura (3.1) y con la viscosidad turbulenta dada por el modelo $k - \varepsilon$:

$$R = \overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}} \simeq \delta^{2/3} \langle \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \rangle - \mu_t \sqrt{k} (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^t), \quad (3.2)$$

$$\text{con } \mu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Este modelo híbrido ha sido validado en diferentes ensayos numéricos. En concreto, para un flujo Poiseuille el modelo reproduce los resultados experimentales. Como cabía esperar, en el caso de un flujo estacionario, la influencia del término aportado por el modelo MPP a la estructura del tensor de Reynolds, es prácticamente nula. No ocurre así al aplicar el modelo híbrido a la simulación numérica de flujos turbulentos no estacionarios. En particular, para un flujo alrededor de un obstáculo no aerodinámico como un cilindro, el nuevo término derivado del modelo MPP toma efecto. Sobre todo tras el cilindro o en zonas de fuerte vorticidad, siendo despreciable frente a la viscosidad turbulenta en el resto del flujo.

Nuestro propósito en esta memoria es extender estas mismas ideas a flujos compresibles y analizar su validez.

Como hemos visto en la sección 1.4, en el modelo de turbulencia $k - \varepsilon$ para flujos compresibles (1.31), el tensor de Reynolds es modelado mediante la hipótesis de Boussinesq, según la expresión:

$$R = \overline{\rho \mathbf{v}'' \otimes \mathbf{v}} \simeq \frac{2}{3} \bar{\rho} k I - \mu_t \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}), \quad (3.3)$$

donde la viscosidad turbulenta μ_t a su vez es modelada por

$$\mu_t = c_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.4)$$

Recordamos también que el tensor de esfuerzos viscosos $\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}})$ es:

$$\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}) = (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}^t) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) I. \quad (3.5)$$

Siguiendo las ideas desarrolladas en [6] para flujos incompresibles, proponemos un nuevo modelado del tensor de Reynolds para flujos compresibles:

$$R \simeq \delta^{2/3} \bar{\rho} \langle \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \rangle - \mu_t \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}), \quad (3.6)$$

donde \mathbf{w} es la perturbación principal de la velocidad en el modelo *MPP* y μ_t y $\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}})$ definidos como anteriormente para el modelo $k - \varepsilon$.

3.2 Descripción del modelo

Presentamos un nuevo modelo de turbulencia para flujos compresibles que constituye un modelo híbrido entre el modelo clásico $k - \varepsilon$ y el modelo *MPP* descrito en el capítulo anterior. Este modelo se construye a partir de las ecuaciones del modelo $k - \varepsilon$, sustituyendo el modelado usual del tensor de Reynolds por el nuevo modelado propuesto en la sección anterior.



Así pues, para obtener las ecuaciones del nuevo modelo, consideremos el modelo $k - \varepsilon$ para flujos viscosos perfectos y compresibles, descrito en la sección 1.4. Como vimos, este modelo consiste en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para las medias de las variables que determinan el comportamiento del flujo: la densidad media $\bar{\rho}$, el campo medio de velocidades $\tilde{\mathbf{v}}$ y la energía total por unidad de masa media \bar{E} (recuérdese que las barras indican medias de Reynolds y las tildes medias de Favre). A estas ecuaciones se añaden otras dos que describen la variación de dos magnitudes propias de la turbulencia: la energía cinética turbulenta media k y su tasa de disipación viscosa ε .

Modelo $k - \varepsilon$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} I) = \mu \nabla \cdot \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}) - \nabla \cdot R \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{E} + \bar{p} I) \tilde{\mathbf{v}} = \mu \nabla \cdot [\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}] - \nabla \cdot (R \tilde{\mathbf{v}}) + \\ \quad + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\kappa}{c_v} + \frac{\kappa_t}{c_v} \right) \nabla \tilde{\varepsilon} \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) \\ \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \varepsilon \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - c_{\varepsilon_2} \frac{(\bar{\rho} \varepsilon)^2}{\bar{\rho} k} \\ \bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 - \bar{\rho} k \right) \\ R = \frac{2}{3} \bar{\rho} k I - \mu_t \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \mu_t = c_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Modelo híbrido:

El modelo híbrido que proponemos está formado por el sistema (3.7) con el tensor de Reynolds modelado por (3.6):

$$R \simeq \delta^{2/3} \bar{\rho} \langle \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \rangle - \mu_t \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}).$$

\mathbf{w} es la perturbación principal de la velocidad, definida por:

$$\mathbf{w}(y) = G^{-t} \sqrt{q} \tilde{\mathbf{w}}^*(y), \quad (3.8)$$

donde:

- $G = \nabla \mathbf{a}$, con \mathbf{a} las coordenadas lagrangianas inversas que verifican la ecuación (2.7). Esta ecuación puede ser reescrita en forma conservativa como:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{a} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) = 0. \quad (3.9)$$

- $q = \delta^{2/3} k$, con δ la razón entre las escalas de espacio que suponemos se desarrollan en el flujo.
- $\tilde{\mathbf{w}}^*$ la perturbación canónica normalizada de la velocidad, definida como la solución del problema en micro-estructura (2.66):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } (\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*) \text{ } Y - \text{periódicas y } Q - \text{invariantes,} \\ \text{tales que:} \\ (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}}^* + C \nabla_y \pi^* = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{w}}^* = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle = 1 \end{array} \right.$$

Por tanto, R se expresa como

$$R = \bar{\rho} k G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \otimes \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle G^{-1} - \mu_t \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}). \quad (3.10)$$

En definitiva, nuestro modelo $MPP k - \varepsilon$ está constituido por el sistema

de ecuaciones (3.7), junto con (3.9), (3.10) y (2.66):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \\
 \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} I) = \mu \nabla \cdot \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}) - \nabla \cdot R \\
 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{E} + \bar{p} I) \tilde{\mathbf{v}} = \mu \nabla \cdot [\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}] - \nabla \cdot (R \tilde{\mathbf{v}}) + \\
 \quad + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\kappa}{c_v} + \frac{\kappa_t}{c_v} \right) \nabla \tilde{e} \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) \\
 \frac{\partial (\bar{\rho} \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{a} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \\
 \\
 \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \varepsilon \\
 \frac{\partial (\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} R : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - c_{\varepsilon_2} \frac{(\bar{\rho} \varepsilon)^2}{\bar{\rho} k} \\
 \\
 \bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{\rho} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 - \bar{\rho} k \right) \\
 \\
 R = \bar{\rho} k G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \otimes \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle G^{-1} - \mu_t \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \mu_t = c_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*) \quad Y - \text{periódicas y } Q - \text{invariantes, tales que:} \\
 (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}}^* + C \nabla_y \pi^* = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{w}}^* = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\
 \\
 \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle = 1
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Este nuevo modelo tiene obviamente una complejidad mayor que el modelo $k - \varepsilon$ de partida. En efecto, en él interviene un nuevo término de cierre

$$R_H = \bar{\rho} k G^{-t} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \otimes \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle G^{-1}, \quad (3.12)$$

que llamamos así por ser la componente del tensor de Reynolds que modelamos mediante homogeneización.

Este tensor depende de k , de las coordenadas lagrangianas inversas \mathbf{a} y de la perturbación canónica de la velocidad $\tilde{\mathbf{w}}^*$. Sin embargo, \mathbf{a} verifica una

ecuación de transporte puro que ha sido incorporada a las ecuaciones del modelo y \tilde{w}^* es solución del problema canónico normalizado. Así pues, teóricamente se trata de un sistema cerrado. En la práctica, el nuevo término R_H será tabulado en función de la matriz C , a partir de la resolución numérica del problema canónico normalizado y dado al sistema (3.11) como dato.

En las siguientes secciones estudiamos la estructura del nuevo término de cierre R_H . Así como una situación particular en la que es posible simplificar esta estructura.

3.3 Estructura del término de cierre R_H

Tenemos que

$$R_H = \bar{\rho}kG^{-t}\tilde{R}^*G^{-1}, \quad \text{con} \quad \tilde{R}^* = \langle \tilde{w}^* \otimes \tilde{w}^* \rangle.$$

En la sección 2.4, obtuvimos la identidad (2.74) que relaciona al tensor $\tilde{R}(C)$ con $\tilde{R}(Q^tCQ)$ (e igualmente para el tensor \tilde{R}^*). Esta relación es cierta sólo para matrices Q de rotación que dejan invariante al cubo Y . En esta sección, suponiendo que el modelo (3.11) es invariante bajo cambios del sistema de referencia, conseguimos generalizar esta relación para cualquier matriz Q de rotación. En tal caso, el teorema de representación de Rivlin-Eriksen [21] puede ser aplicado al tensor \tilde{R}^* y como consecuencia deducir una estructura más simple del término de cierre R_H .

Así pues, supongamos que el modelo (3.11) es invariante bajo cambios del sistema de referencia. Esta suposición no es demasiado exigente. En efecto, las magnitudes que describen un fenómeno físico, regido por un sistema de ecuaciones diferenciales, deben ser independientes del punto en el que se sitúa y del sistema cartesiano que adopta el observador de dicho fenómeno. En este caso, el tensor

\tilde{R}^* es invariante bajo rotaciones [50]:

$$\tilde{R}^*(Q^t C Q) = Q^t \tilde{R}^*(C) Q, \quad \forall Q \in \{Q \in \mathcal{M}_{3 \times 3} : Q Q^t = I, \det(Q) = 1\} \quad (3.13)$$

Esta propiedad nos dice que el tensor \tilde{R}^* verifica las hipótesis del teorema de Rivlin-Eriksen [21] y por tanto, según este resultado, podemos asegurar que \tilde{R}^* es de la forma:

$$\tilde{R}^* = \tilde{\alpha}_0 I + \tilde{\alpha}_1 C + \tilde{\alpha}_2 C^2, \quad \text{con } C = G^t G, \quad (3.14)$$

donde $\tilde{\alpha}_l$, $l = 1, 2, 3$, son funciones escalares que dependen de los invariantes de la matriz C :

$$i_1 = \text{tr}(C), \quad i_2 = \text{tr}(\text{Adj}(C)), \quad i_3 = \det(C). \quad (3.15)$$

A partir de esta estructura para \tilde{R}^* , en el siguiente resultado deducimos la estructura del tensor R_H .

Proposición 3.1 *Suponiendo que se verifica la propiedad (3.13), el tensor R_H tiene la siguiente estructura:*

$$R_H = \bar{\rho} k \left(\alpha_0 I + \alpha_1 \hat{C} + \alpha_2 \hat{C}^2 \right), \quad \text{con } \hat{C} = G G^t, \quad (3.16)$$

donde α_l , $l = 1, 2, 3$, son funciones escalares que dependen de los invariantes de la matriz C , definidos en (3.15).

Demostración:

Si se verifica la propiedad (3.13), hemos visto que \tilde{R}^* se expresa como en (3.14).

$$\begin{aligned} R_H &= \bar{\rho} k G^{-t} \tilde{R}^* G^{-1} = \bar{\rho} k G^{-t} (\tilde{\alpha}_0 I + \tilde{\alpha}_1 C + \tilde{\alpha}_2 C^2) G^{-1} = \\ &= \bar{\rho} k \left(\tilde{\alpha}_0 \hat{C}^{-1} + \tilde{\alpha}_1 I + \tilde{\alpha}_2 \hat{C} \right), \quad \hat{C} = G G^t. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ahora bien, por el teorema de Cayley-Hamilton, \hat{C} verifica su ecuación característica:

$$\hat{C}^3 - \hat{i}_1 \hat{C}^2 + \hat{i}_2 \hat{C} - \hat{i}_3 I = 0, \quad (3.18)$$

siendo \hat{i}_1 , \hat{i}_2 e \hat{i}_3 los invariantes de la matriz \hat{C} . Estos invariantes coinciden con los de la matriz C :

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad i_1 &= \operatorname{tr}(C) = \sum_{i,j}^n g_{ij}^2 = \operatorname{tr}(\hat{C}) = \hat{i}_1, \\
 \bullet \quad i_2 &= \operatorname{tr}(\operatorname{Adj}(C)) = \frac{1}{2} [\operatorname{tr}(C)^2 - \operatorname{tr}(C^2)] = \\
 &= \frac{1}{2} [\operatorname{tr}(\hat{C})^2 - \operatorname{tr}(\hat{C}^2)] = \operatorname{tr}(\operatorname{Adj}(\hat{C})) = \hat{i}_2, \\
 \bullet \quad i_3 &= \det(C) = \det(G^t) \det(G) = \det(G)^2 \\
 &= \det(G) \det(G^t) = \det(\hat{C}) = \hat{i}_3.
 \end{aligned}$$

Entonces de (3.18), se tiene que

$$\hat{C} (\hat{C}^2 - i_1 \hat{C} + i_2 I) = i_3 I,$$

de donde

$$\hat{C}^{-1} = \frac{1}{i_3} (\hat{C}^2 - i_1 \hat{C} + i_2 I).$$

Sustituimos ahora esta expresión de \hat{C}^{-1} en (3.17):

$$\begin{aligned}
 R_H &= \bar{\rho} k \left[\frac{\tilde{\alpha}_0}{i_3} (\hat{C}^2 - i_1 \hat{C} + i_2 I) + \tilde{\alpha}_1 I + \tilde{\alpha}_2 \hat{C} \right] = \\
 &= \bar{\rho} k \left[(\tilde{\alpha}_0 \frac{i_2}{i_3} + \tilde{\alpha}_1) I + (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_0 \frac{i_1}{i_3}) \hat{C} + \frac{1}{i_3} \tilde{\alpha}_0 \hat{C}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Y por tanto, se tiene el resultado (3.16), con la siguiente relación entre las funciones α_l y $\tilde{\alpha}_l$:

$$\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 \frac{i_2}{i_3} + \tilde{\alpha}_1, \quad \alpha_1 = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_0 \frac{i_1}{i_3}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{i_3} \tilde{\alpha}_0. \quad (3.19)$$

⊗

3.4 El término de cierre R_H para flujos medios bidimensionales

En esta sección vamos a ver cómo se simplifica la estructura del tensor R_H en el caso particular en el que el campo medio de velocidades \mathbf{v} sea bidimensional. Para ello, supongamos que \mathbf{v} es de la forma:

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, t) = (\mathbf{v}_1(x_1, x_2, t), \mathbf{v}_2(x_1, x_2, t), 0). \quad (3.20)$$

En este caso, teniendo en cuenta (2.7), las coordenadas lagrangianas \mathbf{a} son de la forma:

$$\mathbf{a}(x, t) = (a_1(x_1, x_2, t), a_2(x_1, x_2, t), x_3).$$

Por tanto

$$G = \nabla \mathbf{a} = \left[\begin{array}{cc|c} H & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad C = G^t G = \left[\begin{array}{cc|c} D & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \hat{C} = G G^t = \left[\begin{array}{cc|c} \hat{D} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (3.21)$$

donde $H \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, $D = H^t H$ y $\hat{D} = H H^t$, con lo que D y \hat{D} son matrices simétricas y definidas positivas.

Teorema 3.2 *Supongamos que se verifica la propiedad (3.13) y que el campo medio de velocidades $\tilde{\mathbf{v}}$ es de la forma (3.20). Entonces el tensor R_H tiene la siguiente estructura:*

$$R_H = \bar{\rho} k \left[\begin{array}{cc|c} \beta_0 I + \beta_1 \hat{D} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \beta_2 \end{array} \right], \quad (3.22)$$

donde \hat{D} está definida en (3.21) y β_l , $l = 0, 1, 2$, son funciones escalares que dependen de los invariantes de la matriz D :

$$j_1 = \text{tr}(D), \quad j_2 = \det(D). \quad (3.23)$$

Demostración:

A partir de la estructura general que hemos obtenido para el tensor \tilde{R}^* , dada por (3.14), y teniendo en cuenta la estructura que en el caso particular de flujos medios bidimensionales tienen las matrices C y C^2 (3.21), en este caso \tilde{R}^* es de la forma:

$$\tilde{R}^* = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{\alpha}_0 I + \tilde{\alpha}_1 D + \tilde{\alpha}_2 D^2 & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \end{array} \right]. \quad (3.24)$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton, la matriz D^2 verifica su ecuación característica:

$$D^2 - j_1 D + j_2 I = 0,$$

siendo $j_1 = \text{tr}(D)$ y $j_2 = \det(D)$ los invariantes de la matriz D . De aquí

$$D^2 = j_1 D - j_2 I.$$

Sustituyendo esta expresión de D^2 en (3.24) se obtiene que

$$\tilde{R}^* = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{\beta}_0 I + \tilde{\beta}_1 D & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{\beta}_2 \end{array} \right], \quad (3.25)$$

con

$$\tilde{\beta}_0 = \tilde{\alpha}_0 - j_2 \tilde{\alpha}_2, \quad \tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_1 + j_1 \tilde{\alpha}_2, \quad \tilde{\beta}_2 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2. \quad (3.26)$$

Siguiendo la misma argumentación para el tensor R_H , dado por (3.16), y teniendo en cuenta que los invariantes de las matrices D y \hat{D} coinciden, se obtiene (3.22) con una expresión análoga para las funciones β_i :

$$\beta_0 = \alpha_0 - j_2 \alpha_2, \quad \beta_1 = \alpha_1 + j_1 \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2. \quad (3.27)$$

Además, es fácil obtener la relación existente entre las funciones β_i y $\tilde{\beta}_i$. Para ello, basta tener en cuenta las relaciones existentes entre las funciones α_i y



$\tilde{\alpha}_l$, dadas por (3.19), y cómo se relacionan los invariantes de las matrices C y D :

$$\begin{aligned} i_1 &= \text{tr}(C) = \text{tr}(D) + 1 = j_1 + 1, \\ i_2 &= \text{tr}(\text{Adj}(C)) = \text{tr}(D) + \det(D) = j_1 + j_2, \\ i_3 &= \det(C) = \det(D) = j_2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Entonces es posible expresar las funciones β_l en función de las $\tilde{\alpha}_l$:

$$\beta_0 = \frac{j_1}{j_2} \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1, \quad \beta_1 = \tilde{\alpha}_2 - \frac{1}{j_2} \tilde{\alpha}_0, \quad \beta_2 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2. \quad (3.29)$$

De aquí junto con (3.26) se obtiene la siguiente relación entre las funciones β_l y $\tilde{\beta}_l$:

$$\tilde{\beta}_0 = -j_2 \beta_1, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_0 + j_1 \beta_1, \quad \tilde{\beta}_2 = \beta_2. \quad (3.30)$$

⊗

Como conclusión, en el caso de un flujo medio bidimensional el tensor R_H toma la expresión:

$$R_H \simeq \bar{\rho} k \Phi(\hat{D}), \quad \Phi(\hat{D}) = \beta_0 I + \beta_1 \hat{D} \quad (\text{en 2D}). \quad (3.31)$$

De esta manera, la tabulación del tensor R_H queda reducida a la evaluación de las funciones escalares β_0 y β_1 . Dedicamos la siguiente sección a determinar estas funciones.

3.4.1 Definición regular de los coeficientes de cierre

En este apartado, determinamos los coeficientes β_0 y β_1 como la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, el hecho de que este sistema no siempre tenga solución única nos obliga a redefinir el tensor $\Phi(\hat{D})$ considerando su descomposición en una base ortogonal del subespacio generado por $\{I, \hat{D}\}$.

El tensor \tilde{R}^* es conocido una vez resuelto el problema canónico normalizado (2.66), lo cual nos permite determinar las funciones $\tilde{\beta}_i$. En concreto, si tomamos como datos las trazas parciales del tensor \tilde{R}^* :

$$\delta_1 = \tilde{r}_{11}^* + \tilde{r}_{22}^*, \quad \delta_2 = \tilde{r}_{33}^*, \quad (3.32)$$

según (3.25), las funciones $\tilde{\beta}_i$ han de verificar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\tilde{\beta}_0 + j_1\tilde{\beta}_1 = \delta_1 \\ \tilde{\beta}_2 = \delta_2 \end{cases} \quad (3.33)$$

Ahora bien, las relaciones (3.30) nos permiten escribir estas ecuaciones en términos de las funciones β_i :

$$\begin{cases} j_1\beta_0 + (j_1^2 - 2j_2)\beta_1 = \delta_1 \\ \beta_2 = \delta_2 \end{cases} \quad (3.34)$$

Por otra parte, de (3.22) se tiene que

$$tr(R_H) = 2\bar{\rho}k = \bar{\rho}k(2\beta_0 + j_1\beta_1 + \beta_2). \quad (3.35)$$

Es decir, las funciones β_i han de verificar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} j_1\beta_0 + (j_1^2 - 2j_2)\beta_1 = \delta_1 \\ \beta_2 = \delta_2 \\ 2\beta_0 + j_1\beta_1 + \beta_2 = 2 \end{cases} \quad (3.36)$$

Efectivamente, (3.36) constituye un sistema de ecuaciones lineales que nos permite determinar las funciones β_i en función de los datos δ_1 y δ_2 . Esta determinación será única cuando el determinante de este sistema $\Delta = j_1^2 - 4j_2$ sea no nulo. En caso contrario, $\Delta = 0$, habrá infinitas soluciones si se verifica la condición:

$$\delta_1 = \frac{j_1}{2}(2 - \delta_2). \quad (3.37)$$

Estudiamos el caso singular $\Delta = 0$. Los autovalores de la matriz D son las soluciones de su ecuación característica:

$$\lambda^2 - j_1\lambda + j_2 = 0, \quad j_1 = \text{tr}(D), \quad j_2 = \det(D).$$

Como D es una matriz simétrica sus autovalores son reales y por tanto, el discriminante de esta ecuación de segundo grado es no negativo, $j_1^2 - 4j_2 = \Delta \geq 0$. Además, por ser D una matriz definida positiva, j_1 y j_2 son positivos. Así pues, j_1 y j_2 toman valores en la región:

$$\{(j_1, j_2) \in \mathbb{R}^2 : j_1^2 - 4j_2 \geq 0, \quad j_1 > 0, \quad j_2 > 0\}. \quad (3.38)$$

Cuando $\Delta = 0$, la matriz D tiene dos autovalores iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{j_1}{2}$ y por tanto, es proporcional a la matriz identidad, $D = \lambda I$. Es evidente, que el recíproco también es cierto. Por tanto, el caso singular $\Delta = 0$, se identifica con $D = \lambda I$. Geométricamente se corresponde con la frontera parabólica de la región de valores admisibles de los invariantes de la matriz D .

Cuando $D = \lambda I$, la matriz C^{-1} es:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se tiene que:

$$\begin{aligned} 2 &= \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda} [(\tilde{w}_1^*)^2 + (\tilde{w}_2^*)^2] + (\tilde{w}_3^*)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\lambda} (\tilde{r}_{11}^* + \tilde{r}_{22}^*) + \tilde{r}_{33}^* = \frac{1}{\lambda} \delta_1 + \delta_2. \end{aligned}$$

Es decir, $\delta_1 = \lambda(2 - \delta_2) = \frac{j_1}{2}(2 - \delta_2)$ y se verifica la condición (3.37).

En resumen, si $\Delta \neq 0$, o equivalentemente $D \neq \lambda I$, los coeficientes β_0 y β_1 quedan determinados de forma única a partir de los invariantes de la matriz D , j_1 y j_2 , y de los datos δ_1 y δ_2 , como la única solución del sistema (3.36). En

caso contrario, $\Delta = 0$, o equivalentemente $D = \lambda I$, estos coeficientes no están definidos de forma única. Para resolver este problema, vamos a redefinir el tensor $\Phi(\hat{D})$.

El tensor $\Phi(\hat{D})$ pertenece al subespacio de las matrices de orden 2×2 generado por $B = \{I, \hat{D}\}$. Cuando $D = \lambda I$, este subespacio tiene dimensión uno y no dos, como en el caso general y por ello, en este caso, los coeficientes β_0 y β_1 no están determinados de forma única.

Para salvar esta dificultad, expresamos el tensor $\Phi(\hat{D})$ respecto de una base ortogonal de este subespacio:

$$B' = \{I, D_c\} \quad \text{con} \quad D_c = \hat{D} - \frac{j_1}{2}I.$$

Los coeficientes de $\Phi(\hat{D})$ en esta base son:

$$\Phi(\hat{D}) = \gamma_0 I + \gamma_1 D_c, \quad \gamma_0 = \beta_0 + \frac{j_1}{2}\beta_1, \quad \gamma_1 = \beta_1. \quad (3.39)$$

Nótese que la ortogonalidad de la base B' es equivalente a que la matriz D_c tenga traza nula y por ello esta descomposición es única. Además, el caso $\Delta = 0$ es ahora equivalente a $D_c = 0$.

Del sistema (3.36) se deduce que

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}(2 - \delta_2) \quad (3.40)$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{\Delta}(\delta_1 - j_1\gamma_0), \quad \text{si } \Delta \neq 0 \quad (3.41)$$

Entonces, si $\Delta \neq 0$ los coeficientes γ_0 y γ_1 están determinados de forma única a partir de los invariantes de la matriz D , j_1 y j_2 , y de los datos δ_1 y δ_2 , mediante (3.40)-(3.41). Cuando $\Delta = 0$, (3.41) no define a γ_1 , pero en este caso su valor es irrelevante puesto que D_c es la matriz nula.

Así pues, en lo sucesivo, consideraremos la representación del tensor $\Phi(\hat{D})$

dada en (3.39). Para simplificar la notación, seguiremos llamando a sus coeficientes β_0 y β_1 , es decir:

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{D}) &= \beta_0 I + \beta_1 D_c, \quad D_c = \hat{D} - \frac{j_1}{2} I, \\ \beta_0 &= \frac{1}{2}(2 - \delta_2), \quad \beta_1 = \begin{cases} \frac{2}{\Delta}(\delta_1 - j_1 \beta_0) & \text{si } \Delta = j_1^2 - 4j_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } \Delta = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Esta representación del tensor $\Phi(\hat{D})$ tiene además la propiedad de dar continuidad a los sumandos de la descomposición, según el siguiente resultado:

Proposición 3.3 *Bajo la hipótesis (H'), los dos sumandos de la descomposición de $\Phi(\hat{D})$ en (3.42) son funciones continuas de \hat{D} .*

Demostración:

Por la hipótesis (H'), \tilde{w}^* depende de forma continua de C y por tanto, también los tensores $\tilde{R}^*(C)$, $R_H(C)$ y $\Phi(\hat{D})$. Entonces $\beta_0 = \beta_0(C) = \frac{1}{2}(2 - \delta_2)$ es una función continua de C , ya que $\delta_2 = \tilde{r}_{33}^*$.

Igualmente, por su propia definición, β_1 es una función continua de \hat{D} , para toda $\hat{D} \neq \lambda I$.

Sea ahora $\hat{D}_0 = \lambda I$, entonces $D_c(\hat{D}_0) = 0$ y $\Phi(\hat{D}_0) = \beta_0(\hat{D}_0)I$. En un entorno de \hat{D}_0 se tiene:

$$\beta_1(\hat{D})D_c = \Phi(\hat{D}) - \beta_0(\hat{D})I = [\Phi(\hat{D}) - \Phi(\hat{D}_0)] + [\beta_0(\hat{D}_0)I - \beta_0(\hat{D})I],$$

de donde $\lim_{\hat{D} \rightarrow \hat{D}_0} \beta_1(\hat{D})D_c = 0$. ⊗

Desde el punto de vista físico, en la descomposición de $\Phi(\hat{D})$ dada por (3.42) la componente diagonal representa la contribución del modelado MPP a los términos de presión. A su vez, la componente proporcional a D_c está formada únicamente por términos de cizalladura. De aquí la notación usada D_c .

3.5 Modelo bidimensional

En esta sección, reescribimos las ecuaciones del modelo (3.11) para flujos medios bidimensionales. Para ello, incorporamos la estructura particular que, en este caso, tiene el tensor de Reynolds, tal y como hemos determinado en la sección anterior:

$$R = \rho k \Phi(\hat{D}) - \mu_t \mathcal{T}(\tilde{\mathbf{v}}),$$

con $\Phi(\hat{D})$ definido en (3.42).

Estas ecuaciones (obviando las barras y tildes para denotar variables promediadas) son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + pI + \beta_0 \rho k I] = \\ \quad = \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) \mathcal{T}(\mathbf{v})] - \nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p + \beta_0 \rho k) \mathbf{v}] = \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) \mathcal{T}(\mathbf{v}) \mathbf{v}] - \\ \quad - \nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\kappa}{c_v} + \frac{\kappa_t}{c_v} \right) \nabla e \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \rho \varepsilon \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon 2} \frac{(\rho \varepsilon)^2}{\rho k} \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 - \rho k \right), \quad \mu_t = c_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

donde

$$P = -R : \nabla \mathbf{v} = [-\beta_0 \rho k \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu_t \mathcal{T}(\mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v}] - \beta_1 \rho k (D_c : \nabla \mathbf{v}). \quad (3.44)$$

En la práctica, es útil considerar el sistema de ecuaciones (3.43) de forma adimensionalizada. Ello se consigue, escribiendo las ecuaciones del sistema en



función de nuevas variables, normalizadas por magnitudes características del flujo. Si seguimos denotando igual a estas variables normalizadas, para simplificar la notación, y procedemos de forma similar a cómo se hizo en la sección 1.4 para el modelo $k - \varepsilon$, tras este cambio de variables se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + pI + \beta_0 \rho k I] = \\ \quad = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \mathcal{T}(\mathbf{v}) \right] - \nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p + \beta_0 \rho k) \mathbf{v}] = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \mathcal{T}(\mathbf{v}) \mathbf{v} \right] - \\ \quad - \nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\gamma}{Pr Re} + \frac{\gamma}{Pr_t Re_t} \right) \nabla e \right] + \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re_t \sigma_k} \nabla k \right) \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \rho \varepsilon \\ \frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon_2} \frac{(\rho \varepsilon)^2}{\rho k} \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 - \rho k \right) \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Como en el proceso de adimensionalización de las ecuaciones del modelo $k - \varepsilon$, el sistema obtenido mantiene la misma estructura del sistema de partida. Sólo difiere de éste en la aparición de los números adimensionales Re_t , el número de Reynolds turbulento, y Pr_t , el número de Prandtl turbulento, ambos definidos en (1.34) y (1.35).

3.5.1 Cambio de variables

La influencia de las variables turbulentas ρk y $\rho \varepsilon$ sobre las variables del fluido ρ , $\rho \mathbf{v}$ y E se pone de manifiesto a través de la viscosidad turbulenta μ_t . Pero hay además un acoplamiento entre los dos conjuntos de variables, debido a que la energía cinética turbulenta media k interviene en la ley de estado. Este hecho dificulta el tratamiento numérico de los términos convectivos de forma similar a como se hace en el caso laminar. Para resolver esta dificultad, hacemos una reformulación de las ecuaciones del modelo de manera que se siga conservando la ley de estado de los gases perfectos, como en el caso laminar. Esta reformulación se hace introduciendo un cambio de variables adecuado:

Como el término $\beta_0 \rho k$, procedente del modelado *MPP*, es un término de esfuerzos normales, puede reagruparse con la presión p , definiendo la presión modificada q :

$$q = p + \beta_0 \rho k. \quad (3.46)$$

En este caso, la ley de estado (última ecuación de (3.43)) puede ser reescrita en términos de q como:

$$q = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \beta_0 \rho k \right), \quad \beta = -1 + \frac{\beta_0}{(\gamma - 1)}. \quad (3.47)$$

Luego si definimos la energía modificada:

$$F = E + \beta_0 \rho k, \quad (3.48)$$

q y F quedan efectivamente relacionadas por la ley de estado de los gases perfectos:

$$q = (\gamma - 1) \left(F - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right).$$

A partir de la ecuación para E en (3.45) y una ecuación de transporte para $\beta_0 \rho k$, se obtiene una ecuación de conservación para la energía reducida F :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot [(F + q)\mathbf{v}] = \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + q)\mathbf{v}] \right\} + \left\{ \frac{\partial(\beta_0 \rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta_0 \rho k \mathbf{v}) \right\}.$$

El primer sumando se corresponde con el primer término de la ecuación de la energía total en (3.45). Calculamos a continuación el segundo sumando:

Llamamos

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{\partial(\beta\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta\rho k \mathbf{v}) = \\ &= \beta \left\{ \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{v}) \right\} + \rho k \left\{ \frac{\partial\beta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\beta \right\}.\end{aligned}$$

El primer término viene dado por la ecuación para ρk en (3.45). Como $\beta = -1 + \frac{\beta_0}{(\gamma - 1)}$ y β_0 es función de los invariantes de la matriz D , j_1 y j_2 , el segundo término se obtiene a partir de las ecuaciones de transporte verificadas por estos invariantes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\beta &= \frac{1}{(\gamma - 1)} \left(\frac{\partial\beta_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\beta_0 \right) = \\ &= \frac{1}{(\gamma - 1)} \left[\frac{\partial\beta_0}{\partial j_1} \left(\frac{\partial j_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla j_1 \right) + \frac{\partial\beta_0}{\partial j_2} \left(\frac{\partial j_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla j_2 \right) \right].\end{aligned}$$

Las derivadas totales de j_1 y j_2 se calculan en el siguiente resultado:

Lema 3.4 Sean j_1 y j_2 los invariantes de la matriz $D = \nabla \mathbf{a}^t \nabla \mathbf{a}$, $j_1 = \text{tr}(D)$ y $j_2 = \det(D)$. Entonces j_1 y j_2 verifican la siguientes ecuaciones de transporte:

$$\begin{cases} \frac{\partial j_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla j_1 = -2 \hat{D} : \nabla \mathbf{v} \\ \frac{\partial j_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla j_2 = -2 j_2 \nabla \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (3.49)$$

Demostración:

Las coordenadas lagrangianas inversas \mathbf{a} están definidas como la solución del problema:

$$\mathbf{a}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}(x, 0) = x,$$

que escrito por componentes es:

$$a_{i,t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a_i = 0, \quad a_i(x, 0) = x_i, \quad i = 1, 2.$$

Si derivamos estas ecuaciones con respecto a x_j , obtenemos las ecuaciones de transporte que verifican las derivadas de las componentes de \mathbf{a} :

$$\frac{D}{Dt}(a_{i,j}) = a_{i,j,t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a_{i,j} = -\mathbf{v}_{,j} \cdot \nabla a_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (3.50)$$

∇a es la matriz de componentes $(\nabla a)_{i,j} = a_{j,i}$, entonces

$$D = \nabla \mathbf{a}^t \nabla \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 & a_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} \\ a_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} & a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D} = \nabla \mathbf{a} \nabla \mathbf{a}^t = \begin{pmatrix} a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 & a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} \\ a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} & a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2 \end{pmatrix}$$

- $j_1 = \text{tr}(D) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(j_1) &= 2 \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{D}{Dt}(a_{i,j}) = -2 \sum_{i,j} a_{i,j} \mathbf{v}_{,j} \cdot \nabla a_i = \\ &= -2 \sum_{i,j,k} v_{k,j} a_{i,k} a_{i,j} = -2 \hat{D} : \nabla \mathbf{v}, \end{aligned}$$

utilizando (3.50).

- $j_2 = \det(D) = \det(\nabla a)^2$. Si llamamos

$$\alpha = \det(\nabla a) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1},$$

entonces

$$\frac{D}{Dt}(j_2) = 2\alpha \frac{D}{Dt}(\alpha).$$

Operando y utilizando (3.50), como antes, se obtiene que $\frac{D}{Dt}(\alpha) = -\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}$,

luego

$$\frac{D}{Dt}(j_2) = -2\alpha^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = -2j_2 \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

En definitiva,

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \beta = \frac{-2}{(\gamma - 1)} \left[\frac{\partial \beta_0}{\partial j_1} \hat{D} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \beta_0}{\partial j_2} j_2 \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (3.51)$$

y por tanto, $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, con:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \beta \left\{ \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \rho \varepsilon \right\} \\ \Psi_2 &= \frac{-2 \rho k}{(\gamma - 1)} \left\{ \frac{\partial \beta_0}{\partial j_1} \hat{D} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \beta_0}{\partial j_2} j_2 \nabla \cdot \mathbf{v} \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Finalmente, la formulación definitiva del modelo (3.43) es la siguiente:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + q \mathbf{I}] &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \mathcal{T}(\mathbf{v}) \right] - \nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c) \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot [(F + q) \mathbf{v}] &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \mathcal{T}(\mathbf{v}) \mathbf{v} \right] - \nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c \mathbf{v}) \\ &\quad + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\gamma}{Pr Re} + \frac{\gamma}{Pr_t Re_t} \right) \nabla e \right] + \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re_t \sigma_k} \nabla k \right) + \Psi_1 + \Psi_2 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \rho \varepsilon \\ \frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon 2} \frac{(\rho \varepsilon)^2}{\rho k} \\ q &= (\gamma - 1) \left(F - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) \end{aligned} \right. \quad (3.53)$$

donde P está definido en (3.44) y Ψ_1 y Ψ_2 en (3.52).

Como conclusión, gracias al cambio de variables que hemos introducido, los términos convectivos de las ecuaciones de conservación para las variables físicas, densidad, momento y energía reducida, tienen exactamente la misma estructura que en las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles para flujos laminares. Esto supone una gran ventaja para la adaptación de un modelo numérico de resolución

de las ecuaciones laminares, como haremos en el próximo capítulo. Sin embargo, provoca la aparición de términos difusivos en k como términos fuente en la ecuación para la energía F . Esta situación requerirá tratar adecuadamente estos términos para que no sean causa de inestabilidad numérica.

Con respecto al modelo $k - \varepsilon$, esta formulación presenta variantes en las ecuaciones de la conservación del momento y de la energía. Estas variaciones toman especial relevancia en zonas de fuerte cizalladura (debido al término D_c) y allí donde los efectos de compresión varíen fuertemente en espacio (debido al término Ψ_2).

3.5.2 Escritura compacta del modelo bidimensional

En este último apartado, por aligerar la notación, escribimos el modelo (3.53) en forma compacta de la siguiente manera:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) = \nabla \cdot \left[\frac{1}{Re} R(W, \nabla W) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{1}{Re_t} RT(W, \nabla W) \right] + S(W) \quad (3.54)$$

donde:

- $W: \mathbb{R}^8 \mapsto \mathbb{R}^8$ es la función vectorial compuesta por las variables del modelo:

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ F \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \\ \rho a_1 \\ \rho a_2 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$



- $F: \mathbb{R}^8 \mapsto \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8$, $F(W) = (F_1(W), F_2(W))$ es la función de flujos convectivos:

$$F_1(W) = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + q \\ \rho v_1 v_2 \\ (F + q)v_1 \\ \rho k v_1 \\ \rho \varepsilon v_1 \\ \rho a_1 v_1 \\ \rho a_2 v_1 \end{pmatrix}, \quad F_2(W) = \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + q \\ (F + q)v_2 \\ \rho k v_2 \\ \rho \varepsilon v_2 \\ \rho a_1 v_2 \\ \rho a_2 v_2 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

- $R: \mathbb{R}^8 \mapsto \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8$, $R(W, \nabla W) = (R_1(W, \nabla W), R_2(W, \nabla W))$ es la función de flujos difusivos laminares:

$$R_1(W, \nabla W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{11}v_1 + \tau_{12}v_2 + \frac{\gamma}{P_r} \frac{\partial e}{\partial x_1} \\ \frac{\partial k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

$$R_2(W, \nabla W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{22} \\ \mathcal{T}_{12}v_1 + \mathcal{T}_{22}v_2 + \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x_2} \\ \frac{\partial k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Aquí \mathcal{T}_{11} , \mathcal{T}_{12} y \mathcal{T}_{22} son las componentes del tensor de esfuerzos viscosos $\mathcal{T}(\mathbf{v})$:

$$\mathcal{T}_{11} = \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \quad \mathcal{T}_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \quad \mathcal{T}_{22} = \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \quad (3.59)$$

• $RT: \mathbb{R}^8 \mapsto \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8$, $RT(W, \nabla W) = (RT_1(W, \nabla W), RT_2(W, \nabla W))$ es la función de flujos difusivos turbulentos:

$$RT_1(W, \nabla W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_{11} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c11} \\ \mathcal{T}_{12} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c12} \\ (\mathcal{T}_{11} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c11}) v_1 + (\mathcal{T}_{12} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c12}) v_2 + \frac{\gamma}{Pr_t} \frac{\partial e}{\partial x_1} + \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$RT_2(W, \nabla W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{12} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c12} \\ \tau_{22} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c22} \\ (\tau_{12} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c12}) v_1 + (\tau_{22} - \hat{\beta}_1 \rho k D_{c22}) v_2 + \frac{\gamma}{Pr_t} \frac{\partial e}{\partial x_2} + \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} \\ \frac{1}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} \\ \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

donde $\hat{\beta}_1 = \beta_1 Re_t$.

• $S: \mathbb{R}^8 \mapsto \mathbb{R}^8$ es el término fuente:

$$S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi_1 + \Psi_2 \\ P - \rho \varepsilon \\ c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon_2} \frac{(\rho \varepsilon)^2}{\rho k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

donde P está definido en (3.44) y Ψ_1 y Ψ_2 en (3.52).

3.6 Cálculo de los términos de cierre

En modelo MPP $k - \varepsilon$ bidimensional (3.53) intervienen como términos de cierre las funciones

$$\beta_0, \quad \beta_1, \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial j_1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial j_2},$$

que dependen de los invariantes de la matriz $D = \nabla \mathbf{a} \nabla \mathbf{a}^t$: $j_1 = \text{tr}(D)$ y $j_2 = \det(D)$. Como vimos anteriormente, estas funciones quedan definidas por las relaciones (3.42), que recordamos aquí:

$$\beta_0 = \frac{1}{2}(2 - \delta_2), \quad \beta_1 = \begin{cases} \frac{2}{\Delta}(\delta_1 - j_1\beta_0) & \text{si } \Delta = j_1^2 - 4j_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } \Delta = 0 \end{cases}$$

Es decir, se calculan a partir de las trazas parciales δ_1 y δ_2 del tensor $\tilde{R}^* = \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \otimes \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle$, donde $\tilde{\mathbf{w}}^*$ es la solución del problema canónico normalizado (2.66). Así pues, el cálculo de estos términos de cierre pasa necesariamente por la resolución numérica de este problema.

3.6.1 Resolución numérica del problema canónico normalizado

Recordamos que el problema en micro-estructura (2.66) trata de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\tilde{\mathbf{w}}^*, \pi^*) \text{ } Y - \text{periódicas y } Q - \text{invariantes} \\ \text{tales que:} \\ (\tilde{\mathbf{w}}^* \cdot \nabla_y) \tilde{\mathbf{w}}^* + C \nabla_y \pi^* = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{\mathbf{w}}^* = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{w}}^* \cdot C^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^* \rangle = 1 \end{array} \right.$$

En adelante obviaremos las estrellas para aligerar la notación.

Este problema ya ha sido resuelto en [18], siguiendo las técnicas desarrolladas por Chacón y Ortegón en [13, 50]. Por ello, nos limitamos aquí a describir brevemente el método numérico utilizado. Este método se basa en una formulación mínimos cuadrados del problema (2.66): si la perturbación canónica normalizada \tilde{w} es suficientemente regular, entonces puede ser caracterizada como la solución de un problema de optimización.

Para definir este problema, denotamos por $H_p^k(Y)$, $k \geq 0$, al subespacio de $H_{loc}^k(\mathbb{R}^3)$ de las funciones periódicas en \mathbb{R}^3 con célula de periodicidad Y . Se consideran los subespacios

$$V_0 = \{v \in H_p^1(Y)^3 \mid \nabla \cdot v = 0, \langle v \rangle = 0\}, \quad L_{p,0}^2(Y) = \{q \in L_p^2(Y) \mid \langle q \rangle = 0\},$$

en los que buscamos la solución (\tilde{w}, π) del problema (2.66).

A cada par $(\tilde{w}, \pi) \in V_0 \times L_{p,0}^2$, le asociamos el “error” $e(\tilde{w})$ definido como la solución del problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } e \in H_p^1(Y)^3 \text{ tal que} \\ -\Delta_y e = \nabla_y \cdot [\tilde{w} \otimes \tilde{w} + C p], \quad \langle e \rangle = 0 \end{cases}$$

donde a su vez $p(\tilde{w})$ es el “error” asociado a π , definido como la solución del problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } p \in L_p^2(Y) \text{ tal que} \\ -\nabla_y \cdot (C \nabla_y p) = \nabla_y \cdot (\tilde{w} \cdot \nabla_y \tilde{w}), \quad \langle p \rangle = 0 \end{cases}$$

Además, llamamos \tilde{u} a \tilde{w} normalizada por su energía cinética:

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{w}}{\frac{1}{2} \langle \tilde{w}^* C^{-1} \tilde{w}^* \rangle}.$$

Entonces definimos el funcional de error como

$$J(\tilde{w}) = \int_Y |\nabla e(\tilde{u})|^2 dy, \quad (3.63)$$

y buscamos la solución del problema (2.66) como la del siguiente problema de optimización

$$\begin{cases} \text{Hallar } \hat{\mathbf{w}} \in V_0 \text{ tal que} \\ J(\hat{\mathbf{w}}) = \min_{\tilde{\mathbf{w}} \in V_0} J(\tilde{\mathbf{w}}) \end{cases} \quad (3.64)$$

La equivalencia entre este problema y el de partida se tiene bajo ciertas restricciones de $\tilde{\mathbf{w}}$, como puede verse en [50].

El problema de optimización (3.64) es discretizado mediante el método de los Elementos Finitos, aproximando $(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ por el elemento P_1 -iso P_2 sobre tetraedros. El problema discreto resultante se resuelve mediante un algoritmo de Gradiente Conjugado con proyección en el conjunto de las funciones con energía cinética uno. Para calcular el gradiente del funcional discreto se utiliza la Transformada Rápida de Fourier discreta.

El funcional J posee infinitos mínimos como consecuencia de que las ecuaciones generalizadas de Euler tienen infinitas soluciones. Para aislar una solución se buscan soluciones discretas que verifiquen las simetrías que nos interesan ($(\tilde{\mathbf{w}}, \pi)$ Q -invariantes). Ello se consigue construyendo triangulaciones simétricas respecto a los planos coordenados y dando al algoritmo del Gradiente Conjugado una inicialización también Q -invariante.

3.6.2 Tabulaciones de los términos de cierre

El cálculo de los términos de cierre exige resolver el problema en micro-estructura para cada matriz C , obtenida a partir de las coordenadas lagrangianas. Sin embargo, el apartado anterior, deja bien patente que esto sería una tarea prácticamente imposible dada la envergadura de cálculo que necesita la resolución numérica de este problema. Por ello, hemos optado por considerar sólo matrices C con una estructura simple, a partir de las cuales obtendremos tabulaciones de los términos

de cierre.

Hemos seguido dos estrategias para elegir la estructura de las matrices C para las que resolveremos el problema (2.66). Ello da lugar a dos tipos de tabulaciones de los términos de cierre.

Tabulaciones I

La identidad (3.25) muestra que el tensor \tilde{R}^* sólo depende de los invariantes de la matriz D , j_1 y j_2 . De aquí parte una primera idea, que nos sugiere considerar matrices C diagonales:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} D & \\ \hline & 1 \end{array} \right), \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

En este caso, $j_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ y $j_2 = \lambda_1 \lambda_2$. Por tanto, debemos considerar valores de λ_1 y λ_2 tales que j_1 y j_2 se encuentren en la región de sus valores admisibles (3.38).

Resolviendo el problema canónico normalizado mediante el método descrito en el apartado anterior, podemos calcular δ_1 y δ_2 para valores de j_1 y j_2 relativamente cercanos a éstos para la matriz identidad. Sin embargo, los valores de j_1 y j_2 , obtenidos en la práctica a partir de las coordenadas lagrangianas, están bastante alejados de éstos. Por ello, estudiamos el comportamiento asintótico del tensor \tilde{R}^* respecto de j_1 y j_2 .

Para un valor fijo de j_2 suponemos que las componentes de \tilde{w}^* admiten desarrollos asintóticos en términos de $\sigma = \frac{1}{\sqrt{j_1}}$ de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= \tilde{w}_1^{(0)} + \sigma \tilde{w}_1^{(1)} + O(\sigma^2), \\ \tilde{w}_2 &= \tilde{w}_2^{(0)} + \sigma \tilde{w}_2^{(1)} + O(\sigma^2), \\ \tilde{w}_3 &= \tilde{w}_3^{(0)} + \sigma \tilde{w}_3^{(1)} + O(\sigma^2). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Según [50], los únicos desarrollos de este tipo compatibles con las ecuaciones de Euler generalizadas del problema (2.66) corresponden a

$$\tilde{w}_1^{(0)} = \tilde{w}_2^{(0)} = \tilde{w}_3^{(0)} = 0.$$

En consecuencia, $\tilde{w}^* = O\left(\frac{1}{\sqrt{j_1}}\right)$, y por tanto $\tilde{R}^* = O\left(\frac{1}{j_1}\right)$ cuando $j_1 \rightarrow \infty$.

Las Tablas 3.1 y 3.2 muestran que las trazas parciales del tensor \tilde{R}^* , δ_1 y δ_2 , calculadas para matrices diagonales (3.65) siguen este comportamiento, a groso modo.

$j_2 \setminus j_1$	2.00	2.10	2.40	2.60	3.00	4.00	5.00	8.00	20.00	102.00
				0.9					2.16	3.02
1.0	8/3	5.69	8.55	11.45	0.21	0.74	2.07	2.22	2.39	2.39
1.1									2.62	3.19

Tabla 3.1: Valores del parámetro $c_1 \simeq \delta_1 j_1$.

$j_2 \setminus j_1$	2.00	2.10	2.40	2.60	3.00	4.00	5.00	8.00	20.00	102.00
				0.9					1.76	1.81
1.0	4/3	0.015	0.033	0.034	5.89	7.25	2.32	1.90	1.95	2.02
1.1									2.14	2.20

Tabla 3.2: Valores del parámetro $c_2 \simeq \delta_2 j_1$.

Se observa un comportamiento muy irregular cerca de la matriz identidad ($j_1 = 2, j_2 = 1$). Posiblemente esto se debe a una multiplicidad de mínimos del funcional J , definido en (3.63), no aislados por la simetrías y normalizaciones realizadas.

Los términos de cierre $\beta_0, \beta_1, \frac{\partial \beta_0}{\partial j_1}$ y $\frac{\partial \beta_0}{\partial j_2}$ han sido calculados como funciones de j_1 mediante las relaciones dadas en (3.42), a partir de las tabulaciones



de δ_1 y δ_2 para $j_2 = 1$, recogidas en las tablas 3.1 y 3.2. Cuando $j_1 \rightarrow \infty$ se ha considerado el comportamiento asintótico que se deduce de estas tablas:

$$\delta_1 \simeq \frac{2.39}{j_1}, \quad \delta_2 \simeq \frac{1.985}{j_1}, \quad \text{cuando } j_1 \rightarrow \infty.$$

La Figura 3.1 representa los términos de cierre β_0 y β_1 obtenidos de esta forma. Se observan grandes oscilaciones para valores cercanos a los de la matriz identidad.

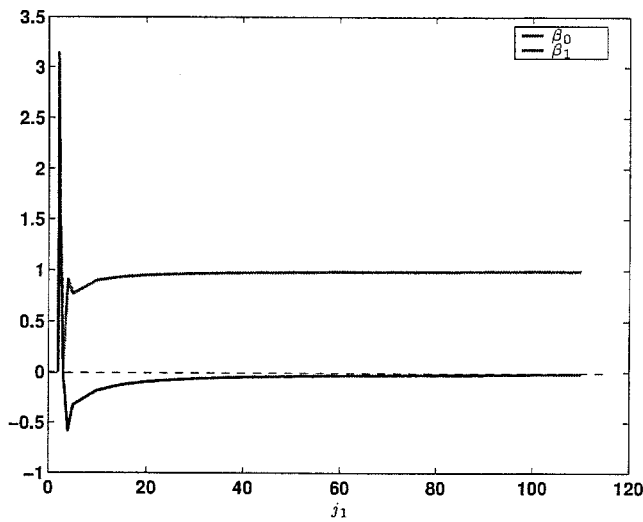


Figura 3.1: Términos de cierre β_0 y β_1 en función de j_1 para matrices (3.65).

Tabulaciones II

Para aquellos flujos cuyo campo medio de velocidades es unidimensional, de la forma

$$\mathbf{v}(x, t) = (v_1(x_2), 0, 0),$$

las matrices C correspondientes son de la forma

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 + \alpha^2 & \alpha & \\ \alpha & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array} \right). \quad (3.67)$$

Éste es el tipo de matrices que consideramos en segundo lugar para resolver el problema canónico normalizado, como ya se ha hecho que en trabajos anteriores [13, 14].

En este caso, $j_1 = 2 + \alpha^2$ y $j_2 = 1$. Para estas matrices se obtienen los valores de δ_1 y δ_2 que recogemos en la Tabla 3.3. Observando los valores obtenidos para j_1 grande, consideraremos que en este caso, el comportamiento asintótico de δ_1 y δ_2 es como sigue:

$$\delta_1 \simeq 1.7, \quad \delta_2 \simeq 1.7, \quad \text{cuando } j_1 \rightarrow \infty.$$

La Figura 3.2 representa los términos de cierre β_0 y β_1 obtenidos a partir de estos valores de δ_1 y δ_2 . Como podemos observar, las oscilaciones de estas tabulaciones para valores cercanos a los de la matriz identidad son menos pronunciados.

j_1	2	2.01	8.25	18	102
δ_1	4/3	1.9	10.2	2.5	1.7
δ_2	2/3	0.0001	0.67	1.4	1.7

Tabla 3.3: Tabulaciones de δ_1 y δ_2 para matrices (3.67).

El comportamiento de estos dos tipos de tabulaciones en la simulación de flujos test será analizado en el capítulo 5. Como veremos allí, las tabulaciones II resultan ser más estables y por ello serán las utilizadas en ensayos posteriores. Esto parece bastante razonable, a la vista del comportamiento fuertemente oscilatorio del las tabulaciones I cerca del origen.

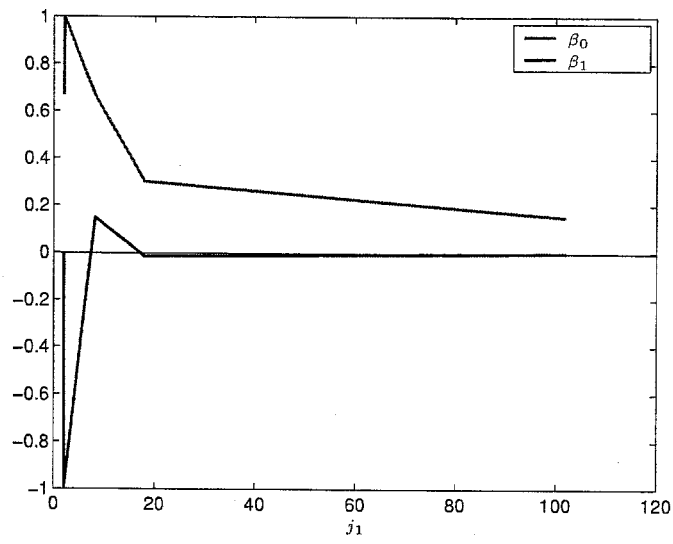


Figura 3.2: Términos de cierre β_0 y β_1 en función de j_1 para matrices (3.67).

Capítulo 4

Método numérico de resolución

El objetivo de este capítulo es desarrollar un esquema numérico estable para discretizar el modelo bidimensional que hemos introducido en el capítulo anterior.

Como método de discretización en espacio utilizamos una adaptación a nuestro modelo del método introducido por Le Ribault en [42] para el modelo $k - \varepsilon$. Se trata de un método mixto de tipo Elementos Finitos-Volúmenes Finitos basado en una versión laminar propuesta por Rostand en [54].

Este esquema tiene precisión de orden uno. Para extenderlo a segundo orden se sigue una técnica de tipo M.U.S.C.L. (Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws) introducida por Van Leer [62, 63].

Las condiciones de contorno se imponen de una forma no estándar. Ésta resulta ser particularmente útil para filtrar las condiciones de contorno adecuadas, según si el flujo es subsónico o supersónico. Como contrapartida, las condiciones que realmente se imponen son sólo una aproximación a las condiciones fijadas a priori. La validez de esta forma de tratar las condiciones de contorno se analiza en el capítulo 6 de esta memoria, en un marco simplificado.

Finalmente, para la discretización en tiempo se utiliza un método explícito de Runge-Kutta de segundo orden.

4.1 Planteamiento del problema

Consideramos el sistema de ecuaciones que constituye el modelo $MPP k - \varepsilon$ para flujos bidimensionales (3.53), escrito como en el capítulo precedente, de la forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) = \nabla \cdot \left[\frac{1}{Re} R(W, \nabla W) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{1}{Re_t} RT(W, \nabla W) \right] + S(W) \quad (4.1)$$

En primer lugar, introducimos alguna notación que utilizaremos a lo largo del capítulo. Si no consideramos los efectos viscosos ($1/Re = 1/Re_t = 0$), las ecuaciones (4.1) constituyen un sistema de leyes de conservación de naturaleza hiperbólica, es decir, para todo W , las matrices jacobianas de los flujos convectivos:

$$\mathcal{A}_1(W) = \frac{\partial F_1(W)}{\partial W} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_2(W) = \frac{\partial F_2(W)}{\partial W},$$

son matrices diagonalizables con autovalores reales.

Para cada vector \mathbf{n} unitario, denotamos por $\mathcal{F}(W, \mathbf{n})$ al flujo convectivo en la dirección \mathbf{n} y $\mathcal{A}(W, \mathbf{n})$ a su matriz jacobiana:

$$\mathcal{F}(W, \mathbf{n}) = F(W) \cdot \mathbf{n} = F_1(W)n_1 + F_2(W)n_2 \quad (4.2)$$

$$\mathcal{A}(W, \mathbf{n}) = \mathcal{A}(W) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{A}_1(W)n_1 + \mathcal{A}_2(W)n_2 \quad (4.3)$$

La diagonalización de la matriz $\mathcal{A}(W, \mathbf{n})$ se escribe como:

$$\mathcal{A}(W, \mathbf{n}) = T(W, \mathbf{n})\Lambda(W, \mathbf{n})T^{-1}(W, \mathbf{n}),$$

donde $\Lambda(W, \mathbf{n})$ es la matriz diagonal de los autovalores y $T(W, \mathbf{n})$ es la matriz de paso cuyas columnas son los autovectores asociados a los autovalores. Estos

autovalores son:

$$\lambda_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \lambda_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - c, \quad (4.4)$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n},$$

donde $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ es la velocidad local del sonido. Nótese que los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 son los correspondientes a las ecuaciones de Euler para flujos laminares.

Denotaremos también por \mathcal{A}^\pm y $|\mathcal{A}|$ a las matrices siguientes:

$$\mathcal{A}^\pm(W, \mathbf{n}) = T(W, \mathbf{n}) \Lambda^\pm(W, \mathbf{n}) T^{-1}(W, \mathbf{n}) \quad (4.5)$$

$$|\mathcal{A}(W, \mathbf{n})| = T(W, \mathbf{n}) |\Lambda(W, \mathbf{n})| T^{-1}(W, \mathbf{n}) \quad (4.6)$$

donde

$$\Lambda^\pm(W, \mathbf{n}) = \text{diagonal}(\lambda_1^\pm, \lambda_2^\pm, \dots, \lambda_8^\pm) \quad \text{y} \quad |\Lambda(W, \mathbf{n})| = \text{diagonal}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_8|),$$

con $\lambda_k^+ = \max(\lambda_k, 0)$ y $\lambda_k^- = \min(\lambda_k, 0)$.

En lo sucesivo, denotaremos por $F(W, \mathbf{n})$ y $A(W, \mathbf{n})$ a los bloques superiores de las matrices $\mathcal{F}(W, \mathbf{n})$ y $\mathcal{A}(W, \mathbf{n})$, respectivamente, correspondientes a las variables físicas $(\rho, \rho v_1, \rho v_2, F)$.

Como dominio de cálculo, consideramos un dominio acotado poligonal de \mathbb{R}^2 que llamamos Ω , cuya frontera denotamos por Γ . Sea \mathbf{n} el vector normal exterior y unitario definido c.p.d. en Γ . Suponemos que la frontera Γ se descompone de la siguiente forma: $\Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^0$, donde

$$\Gamma^- = \{x \in \Gamma, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\},$$

$$\Gamma^+ = \{x \in \Gamma, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\},$$

$$\Gamma^0 = \{x \in \Gamma, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0\}.$$

Es decir, Γ^- representa la frontera de entrada de flujo, Γ^+ la frontera de salida y Γ^0 la frontera por la que el flujo se desliza.



Pretendemos resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (4.1) en el dominio Ω durante un intervalo de tiempo $[0, T]$. Se trata de un problema de evolución planteado en un abierto acotado, así pues es necesario completarlo con condiciones iniciales y condiciones de contorno adecuadas, para que sea un problema bien planteado.

La condición inicial es de la forma:

$$W(x, 0) = W_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (4.7)$$

con W_0 una función dada.

Teniendo en cuenta que consideramos flujos turbulentos, tiene sentido elegir el dominio computacional Ω de modo que la convección sea dominante en las zonas de la frontera donde hay entrada y salida de flujo, es decir en Γ^- y Γ^+ . En este caso, consideramos condiciones de tipo Dirichlet allí donde hay entrada de flujo y condiciones de tipo Newman homogéneas en el resto de la frontera. Esta última condición significa que suponemos que el único flujo relevante en las fronteras Γ^+ y Γ^0 es el convectivo.

El número de condiciones Dirichlet que es necesario imponer no es un problema trivial ya que está determinado por las direcciones en las que se propaga la información a través de la frontera; es decir, por las curvas características entrantes y salientes, que arrastran la información desde el exterior al interior del dominio o al revés.

En este sentido, la matriz jacobiana $\mathcal{A}(W, \mathbf{n})$ juega un papel fundamental, ya que la naturaleza de las características está regida por el signo de sus autovalores. Así, los autovalores negativos están asociados a características entrantes y los positivos a características salientes.

Para las variables físicas $(\rho, \rho v_1, \rho v_2, F)$ el signo de los autovalores (4.4) en cada parte de la frontera, depende de si el flujo es subsónico o supersónico:

En la frontera de entrada Γ^-

- Si el flujo es **supersónico** todos los autovalores son negativos y por tanto es necesario dar condiciones Dirichlet para las cuatro variables. Normalmente, la densidad, el campo de velocidades y la presión (a partir de la que se determina la energía total).
- Si el flujo es **subsónico** λ_2, λ_3 y λ_4 son negativos, pero λ_1 es positivo. En este caso, sólo es necesario dar tres condiciones Dirichlet.

En la frontera de salida Γ^+

- Si el flujo es **supersónico** todos los autovalores son positivos y por tanto no es necesario dar ninguna condición Dirichlet.
- Si el flujo es **subsónico** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son positivos, pero λ_4 es negativo y por ello es necesario dar una condición Dirichlet. Normalmente la presión, que es necesario conocer en ese caso.

Para el resto de variables $(\rho a_1, \rho a_2, \rho k, \rho \varepsilon)$, los autovalores (4.4) son negativos en la frontera de entrada Γ^- y positivos en la frontera de salida Γ^+ , independientemente de si el flujo es subsónico o supersónico. En este caso, es necesario dar condiciones de Dirichlet para las cuatro variables en la frontera de entrada.

Así pues, las condiciones de contorno que consideramos son las siguientes:

Si el flujo es supersónico

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_\infty, \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty, q = q_\infty, \mathbf{a} = \mathbf{a}_\infty, k = k_\infty, \varepsilon = \varepsilon_\infty \quad \text{en } \Gamma^- \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \Gamma^+ \cup \Gamma^0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Si el flujo es subsónico

$$\begin{cases} \rho = \rho_\infty, & \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty, & \mathbf{a} = \mathbf{a}_\infty, & k = k_\infty, & \varepsilon = \varepsilon_\infty & \text{en } \Gamma^- \\ q = q_\infty, & \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, & \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \Gamma^+ \cup \Gamma^0 \end{cases} \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{a}_\infty = \mathbf{x} - \mathbf{v}_\infty t$.

En resumen, nos planteamos la resolución numérica del problema constituido por el sistema (4.1) junto con la condición inicial (4.7) y las condiciones de contorno (4.8) o (4.9), dependiendo de si el flujo es supersónico o subsónico.

4.2 Discretización en espacio

El método de discretización en espacio que aplicamos es una adaptación a nuestro modelo del método introducido por Le Ribault en [42] para el modelo $k - \varepsilon$. Se trata de un método mixto de tipo Elementos Finitos – Volúmenes Finitos basado en una versión laminar propuesta por Rostand en [54].

La discretización del término convectivo se hace por el método de Volúmenes Finitos [60, 28]. Este método está especialmente adaptado al tratamiento de leyes de conservación. Se basa en considerar subdominios, denominados volúmenes de control, que recubren todo el dominio Ω y sobre los que se formula la ley conservativa. La aplicación del teorema de la divergencia transforma las integrales sobre cada volumen de control en integrales de los flujos a través de las fronteras de éstas. Esto permite pasar a una formulación unidimensional donde las técnicas de aproximación son más sencillas y más fáciles de implementar. La convección es un fenómeno físico claramente direccional, en la dirección de la velocidad del fluido, y por ello el tratamiento numérico de los términos de este tipo es más eficaz si se hace utilizando métodos no centrados. En nuestro

caso, el descentramiento se realiza mediante un resolutor aproximado de Riemann, que tiene en cuenta las direcciones de propagación de las ondas físicas. Para aumentar la precisión de este esquema a segundo orden, la función de flujo numérico utilizada se combina con una técnica de interpolación que preserva la monotonía, perteneciente a los llamados “Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws” (M.U.S.C.L.).

Por su parte, los términos difusivos y el término fuente se aproximan de forma centrada por el método de Elementos Finitos clásico, que como es sabido, está especialmente adaptado a la aproximación de términos de este tipo, en dominios con geometrías complejas y mallados no estructurados.

Sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω , es decir, una familia finita de triángulos que recubren Ω y tal que sus intersecciones por parejas tienen medida nula:

$$\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{i=1}^{n_t}, \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_t} \bar{T}_i, \quad \text{med}(T_i \cap T_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

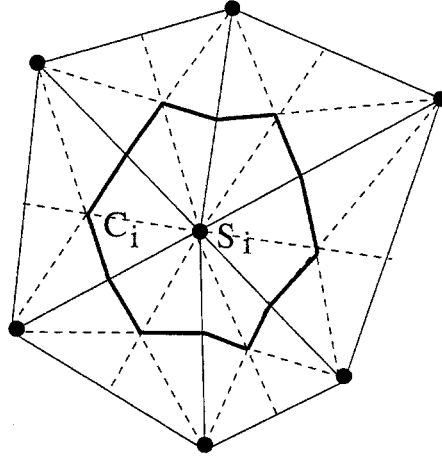
Llamamos n_t al número de triángulos de \mathcal{T}_h y n_s al número total de vértices de los triángulos de \mathcal{T}_h , que constituyen los nodos del mallado.

A cada vértice de la triangulación s_i , le asociamos un volumen de control C_i , que se construye de la siguiente manera: cada uno de los triángulos que contienen al vértice s_i se divide en seis subtriángulos, trazando las medianas de éstos. Entonces C_i está formado por la unión de los subtriángulos que contienen al vértice s_i (Figura 4.1).

De esta manera, hemos definido una familia finita de subdominios que constituyen otro recubrimiento de Ω asociado a \mathcal{T}_h :

$$\mathcal{C}_h = \{C_i\}_{i=1}^{n_s}, \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_s} \bar{C}_i, \quad \text{med}(C_i \cap C_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Asociados a estos dos recubrimientos de Ω , consideramos dos espacios funcionales de aproximación de dimensión finita:

Figura 4.1: Volumen de control C_i .

- $Y_h = \{y_h \in C^0(\bar{\Omega}) : y_h|_T \text{ es afín, } \forall T \in \mathcal{T}_h\}$

Es decir, Y_h es el espacio de Elementos Finitos P_1 –Lagrange. Llamamos $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_s}$ a las funciones de base canónicas de este espacio:

$$\varphi_i(s_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n_s, \quad \text{sop}(\varphi_i) = \bigcup_{T/s_i \in T} T.$$

De esta manera, cada función $y_h \in Y_h$ está determinada por su valor en los vértice de la triangulación:

$$y_h = \sum_{i=1}^{n_s} y_h(s_i) \varphi_i.$$

- $Z_h = \{z_h \in L^\infty(\Omega) : z_h|_{C_i} \text{ es constante, } \forall i = 1, \dots, n_s\}$

Una base de Z_h está formada por las funciones características de cada volumen de control:

$$\{\psi_i\}_{i=1}^{n_s}, \quad \psi_i = \chi(C_i) = \begin{cases} 1 & \text{en } C_i \\ 0 & \text{fuera de } C_i \end{cases}$$

De esta manera, cada función $z_h \in Z_h$ está determinada por su valor en los volúmenes de control:

$$z_h = \sum_{i=1}^{n_s} z_h|_{C_i} \psi_i.$$

Los espacios Y_h y Z_h se relacionan mediante la siguiente transformación:

$$\sigma_h : Y_h \mapsto Z_h, \quad \sigma_h(y_h)|_{C_i} = y_h(s_i), \quad \forall i = 1, \dots, n_s.$$

Entonces σ_h es un operador biyectivo. Las funciones y_h y $\sigma_h(y_h)$ verifican:

$$(y_h, \psi_i) = (\sigma_h(y_h), \psi_i), \quad \forall i = 1, \dots, n_s.$$

Es decir, realmente σ_h es la proyección ortogonal (entendida como transformación) de Y_h sobre Z_h en $L^2(\Omega)$.

La formulación variacional discreta que consideramos para nuestro problema es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } W_h : [0, T] \mapsto Y_h^8 \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \frac{\partial W_h}{\partial t} \sigma_h(\varphi_h) dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot F(W_h) \sigma_h(\varphi_h) dx = \\ = \frac{1}{Re} \langle \nabla \cdot R(W_h, \nabla W_h), \varphi_h \rangle_{\Omega} + \langle \nabla \cdot [\frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h)], \varphi_h \rangle_{\Omega} + \\ + \int_{\Omega} S(W_h) \varphi_h dx, \quad \forall \varphi_h \in Y_h^8. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Teniendo en cuenta que $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_s}$ es la base canónica de Y_h , la formulación anterior es equivalente a esta otra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } W_h : [0, T] \mapsto Y_h^8 \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \frac{\partial W_h}{\partial t} \psi_i dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot F(W_h) \psi_i dx = \\ = \langle \nabla \cdot [\frac{1}{Re} R(W_h, \nabla W_h)], \varphi_i \rangle_{\Omega} + \langle \nabla \cdot [\frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h)], \varphi_i \rangle_{\Omega} + \\ + \int_{\Omega} S(W_h) \varphi_i dx, \quad \forall i = 1, \dots, n_s. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

ya que $\psi_i = \sigma_h(\varphi_i)$, $\forall i = 1, \dots, n_s$.

Cálculo de integrales

Aplicamos la fórmula de Green a las integrales de los términos convectivos y difusivos:

$$\bullet \int_{\Omega} \frac{\partial W_h}{\partial t} \psi_i dx = \int_{C_i} \frac{\partial W_h}{\partial t} dx. \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\Omega} \nabla \cdot F(W_h) \psi_i dx &= \int_{C_i} \nabla \cdot F(W_h) dx = - \int_{\partial C_i} F(W_h) \cdot \mathbf{n}_i ds = \quad (4.13) \\ &= - \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} F(W_h) \cdot \mathbf{n}_i ds - \int_{\partial C_i \cap \Gamma} F(W_h) \cdot \mathbf{n} ds. \end{aligned}$$

donde \mathbf{n}_i es el vector normal exterior y unitario en la frontera de C_i ,
 $K(i)$ es el conjunto de vértices vecinos del vértice s_i y $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$.

$$\begin{aligned} \bullet \langle \nabla \cdot R(W_h, \nabla W_h), \varphi_i \rangle_{\Omega} &= \langle \nabla \cdot R(W_h, \nabla W_h), \varphi_i \rangle_{\text{sop}(\varphi_i)} = \quad (4.14) \\ &- \int_{\text{sop}(\varphi_i)} R(W_h, \nabla W_h) \nabla \varphi_i dx + \int_{\Gamma_i} R(W_h, \nabla W_h) \cdot \mathbf{n} \varphi_i ds. \end{aligned}$$

$$\bullet \langle \nabla \cdot \left[\frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h) \right], \varphi_i \rangle_{\Omega} = \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \nabla \cdot \left[\frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h) \right], \varphi_i \rangle_{\text{sop}(\varphi_i)} = \quad (4.16) \\ &- \int_{\text{sop}(\varphi_i)} \frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h) \nabla \varphi_i dx + \int_{\Gamma_i} \frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h) \cdot \mathbf{n} \varphi_i ds. \end{aligned}$$

donde $\Gamma_i = \text{sop}(\varphi_i) \cap \Gamma$

$$\bullet \int_{\Omega} S(W_h) \varphi_i dx = \int_{\text{sop}(\varphi_i)} S(W_h) \varphi_i dx. \quad (4.17)$$

Esta última igualdad no es rigurosamente cierta. Efectivamente, los términos fuente se tratan así, pero no los términos difusivos en k que incluimos en $S(W)$, como consecuencia del cambio de variables que realizamos en el capítulo anterior. Estos términos, se tratan de la misma forma que el resto de términos difusivos que aparecen en la formulación (4.11).

Cálculo de los flujos convectivos internos

La integral de los flujos convectivos internos, a través de la frontera de cada volumen de control C_i en (4.13), se descompone en la suma de las integrales de los flujos a través de la frontera con cada uno de sus volúmenes vecinos:

$$\sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} F(W_h, \mathbf{n}_i) ds.$$

Cada una de estas integrales representa la evaluación del flujo que atraviesa la frontera ∂C_{ij} . Esta frontera está formada por la unión de dos segmentos de medianas pertenecientes a los triángulos T y T' cuya intersección es el segmento $\overline{s_i s_j}$.

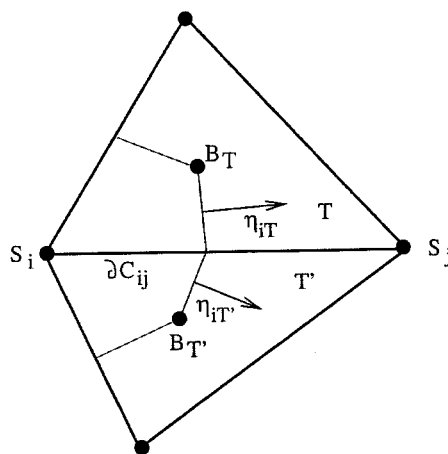


Figura 4.2: Frontera común a los volúmenes de control C_i y C_j .



Así pues, se trata de integrales unidimensionales que aproximamos mediante una función de flujo numérico Φ con descentramiento.

Debido a la estructura de la frontera ∂C_{ij} , el vector normal \mathbf{n}_i se sustituye por su promedio en ella, que denotamos como \mathbf{n}_{ij} :

$$\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i ds = \mathbf{n}_{iT} \text{med}(MB_T) + \mathbf{n}_{iT'} \text{med}(MB_{T'}),$$

donde M es el punto medio del segmento $\overline{s_i s_j}$ y B_T y $B_{T'}$ son los baricentros de los triángulos T y T' comunes a los vértices s_i y s_j (ver Figura 4.2).

Entonces la función de flujo numérico Φ depende de los estados a cada lado de la frontera ∂C_{ij} , $W_i = W_h(s_i)$ y $W_j = W_h(s_j)$, y del vector normal \mathbf{n}_{ij} :

$$\int_{\partial C_{ij}} F(W_h, \mathbf{n}_{ij}) ds = \Phi(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}). \quad (4.18)$$

Definición de la función de flujo Φ

• **Para las variables físicas** $(\rho, \rho v_1, \rho v_2, F)$, la función de flujo Φ se toma igual a la función de flujo de Roe [53] definida por:

$$\Phi^R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{F(W_i, \mathbf{n}_{ij}) + F(W_j, \mathbf{n}_{ij})}{2} - \frac{1}{2} R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij})(W_j - W_i), \quad (4.19)$$

donde $R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij})$ es la llamada matriz de Roe, que debe verificar determinadas propiedades [53].

Para las ecuaciones de Euler, Roe propone como matriz R la matriz siguiente:

$$R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = |A(\tilde{W}_{ij}, \mathbf{n}_{ij})|,$$

donde $A(W, \mathbf{n})$ es la matriz jacobiana del flujo $F(W, \mathbf{n})$ definida en (4.3). El significado de $|A(W, \mathbf{n})|$ está dado en (4.6) y \tilde{W}_{ij} es una media, ponderada por la densidad, de los estados W_i y W_j , que definimos a continuación:

Si

$$W_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_i v_{1i} \\ \rho_i v_{2i} \\ F_i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad W_j = \begin{pmatrix} \rho_j \\ \rho_j v_{1j} \\ \rho_j v_{2j} \\ F_j \end{pmatrix},$$

entonces

$$\tilde{W}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{ij} \\ \tilde{\rho}_{ij} \tilde{v}_{1ij} \\ \tilde{\rho}_{ij} \tilde{v}_{2ij} \\ \tilde{F}_{ij} \end{pmatrix}$$

Aquí

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{ij} &= \frac{\sqrt{\rho_i} \rho_i + \sqrt{\rho_j} \rho_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{ij} = (\tilde{v}_{1ij}, \tilde{v}_{2ij}) &= \frac{\sqrt{\rho_i} \mathbf{v}_i + \sqrt{\rho_j} \mathbf{v}_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \\ \tilde{H}_{ij} &= \frac{\sqrt{\rho_i} H_i + \sqrt{\rho_j} H_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \end{aligned}$$

con H la entalpía total, a partir de la que se calcula la energía total mediante la relación $F = \frac{\rho H}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho |\mathbf{v}|^2$.

La elección del esquema de Roe se hace en base a diferentes ensayos numéricos realizados para las ecuaciones de Euler en [58]. Aquí se estudia la eficacia de diferentes esquemas descentrados según el número de Mach del flujo y se concluye que para números de Mach menores que 3, el esquema de Roe es adecuado.

Una de las propiedades que verifica la matriz de Roe $R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij})$ es la

siguiente:

$$R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij})(W_i - W_j) = F(W_i, \mathbf{n}_{ij}) - F(W_j, \mathbf{n}_{ij}).$$

Esta propiedad tiene algunas consecuencias sobre el esquema obtenido. Por una parte, el esquema resuelve exactamente discontinuidades estacionarias [32]. Por otra parte, permite reescribir la función de flujo, simplificando su implementación:

$$\Phi^R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = F(W_i, \mathbf{n}_{ij}) - R^-(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij})(W_j - W_i), \quad (4.20)$$

o bien

$$\Phi^R(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = F(W_j, \mathbf{n}_{ij}) - R^+(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij})(W_j - W_i), \quad (4.21)$$

donde la notación R^- y R^+ tiene el significado fijado en (4.5).

• **Para las variables turbulentas** ($\rho k, \rho \varepsilon$), la función de flujo numérico Φ se toma igual a la función de flujo propuesta por Larrouturou en [40] para el modelo $k - \varepsilon$. Este flujo numérico se define como una extensión de la función de flujo de Roe, definido para las variables físicas, a las variables turbulentas k y ε , preservando la positividad de estas variables.

Llamamos $\Phi_{ij}^{\rho k}$ y $\Phi_{ij}^{\rho \varepsilon}$ a las componentes de la función de flujo Φ para las variables ρk y $\rho \varepsilon$:

$$\Phi_{ij}^{\rho k} = \int_{\partial C_{ij}} \rho k \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i ds, \quad \Phi_{ij}^{\rho \varepsilon} = \int_{\partial C_{ij}} \rho \varepsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i ds$$

El cálculo de estos flujos se hace mediante un esquema totalmente descentrado en función del signo de la velocidad normal en la frontera ∂C_{ij} . Concretamente, si denotamos por Φ_{ij}^{ρ} a la componente del flujo numérico de Roe relativa a la densidad:

$$\Phi_{ij}^{\rho} = \int_{\partial C_{ij}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i ds,$$

entonces $\Phi_{ij}^{\rho k}$ y $\Phi_{ij}^{\rho \varepsilon}$ se definen como:

$$\Phi_{ij}^{\rho k} = \begin{cases} k(s_i) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} > 0 \\ k(s_j) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} < 0 \end{cases} \quad \Phi_{ij}^{\rho \varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon(s_i) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} > 0 \\ \varepsilon(s_j) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

• Para las coordenadas lagrangianas inversas $(\rho a_1, \rho a_2)$, la función de flujo numérico Φ se construye de la misma forma que para las variables ρk y $\rho \varepsilon$. Teniendo en cuenta que estas variables verifican una ecuación de transporte puro, el cálculo de sus flujos se hace igualmente utilizando un esquema totalmente descentrado en función del signo de la velocidad normal en la frontera ∂C_{ij} . Concretamente, si llamamos $\Phi_{ij}^{\rho a_1}$ y $\Phi_{ij}^{\rho a_2}$ a las componentes de la función de flujo Φ para las variables ρa_1 y ρa_2 :

$$\Phi_{ij}^{\rho a_1} = \int_{\partial C_{ij}} \rho a_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i ds, \quad \Phi_{ij}^{\rho a_2} = \int_{\partial C_{ij}} \rho a_2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i ds,$$

entonces éstas se definen como:

$$\Phi_{ij}^{\rho a_1} = \begin{cases} a_1(s_i) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} > 0 \\ a_1(s_j) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} < 0 \end{cases} \quad \Phi_{ij}^{\rho a_2} = \begin{cases} a_2(s_i) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} > 0 \\ a_2(s_j) \Phi_{ij}^{\rho} & \text{si } \Phi_{ij}^{\rho} < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

En resumen, podemos escribir que la función de flujo numérico Φ en (4.18)

es:

$$\Phi(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = (\Phi^R, \Phi^{\rho k}, \Phi^{\rho \varepsilon}, \Phi^{\rho a_1}, \Phi^{\rho a_2}), \quad (4.24)$$

donde Φ^R está definida como en (4.20) o (4.21), $\Phi^{\rho k}$ y $\Phi^{\rho \varepsilon}$ están definidas en (4.22) y $\Phi^{\rho a_1}$ y $\Phi^{\rho a_2}$ están definidas en (4.23).

Extensión a un esquema de segundo orden

El esquema numérico descrito para calcular las integrales de los flujos convectivos internos tiene precisión de orden uno. Sin embargo, es posible extenderlo



a un esquema de orden dos mediante una técnica de tipo M.U.S.C.L (Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws) introducida por Van Leer [62, 63].

La idea de este método consiste en aumentar la precisión del esquema aumentando el orden de interpolación de W_h en la frontera ∂C_{ij} . Concretamente, los valores W_i y W_j , como argumentos de la función de flujo, se reemplazan por interpolados de W_h de primer orden, W_{ij} y W_{ji} , respectivamente. Estos estados se definen de la siguiente manera:

$$W_{ij} = W_i + \frac{1}{2} \vec{G}_i \cdot \overline{s_i s_j}, \quad W_{ji} = W_j - \frac{1}{2} \vec{G}_j \cdot \overline{s_i s_j}, \quad (4.25)$$

donde \vec{G}_i y \vec{G}_j son una aproximación del gradiente de W_h en los volúmenes de control C_i y C_j , respectivamente:

$$\vec{G}_i = \frac{1}{\text{med}(C_i)} \int_{C_i} \nabla W_h dx = \frac{1}{\text{med}(C_i)} \sum_{T/s_i \in T} \frac{\text{área}(T)}{3} \nabla W_h(T),$$

con $\nabla W_h(T)$ el valor constante de ∇W_h en el triángulo T .

Para preservar la monotonía del esquema es necesario aplicar una técnica de limitación de la pendiente. Ésta se basa en la modificación de los argumentos de la función de flujo. Concretamente, se sustituye W_{ij} y W_{ji} definidos en (4.25) por:

$$\tilde{W}_{ij} = W_i + \frac{1}{2} \text{Lim}(\vec{G}_i \cdot \overline{s_i s_j}, W_i - W_j), \quad \tilde{W}_{ji} = W_j - \frac{1}{2} \text{Lim}(\vec{G}_j \cdot \overline{s_i s_j}, W_i - W_j) \quad (4.26)$$

donde Lim es una función adecuada que garantiza la propiedad TVD (Total Variation Disminishing) del esquema.

Nosotros utilizamos aquí el limitador de Albada-Van Leer [61], que se define como:

$$\text{Lim}(a, b) = \begin{cases} \frac{(a^2 + \epsilon) b + (b^2 + \epsilon) a}{a^2 + b^2 + \epsilon^2} & \text{si } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

donde ϵ es un número pequeño positivo.

El esquema definitivo tiene como función de flujo

$$\Phi(\tilde{W}_{ij}, \tilde{W}_{ji}, \mathbf{n}_{ij}), \quad (4.28)$$

con Φ definida en (4.24) y \tilde{W}_{ij} y \tilde{W}_{ji} definidos en (4.26). Este esquema es TVD y de orden dos donde el flujo sea regular.

Cálculo de los flujos difusivos laminares internos

La integral de los flujos difusivos laminares internos sobre el soporte de cada función de base φ_i en (4.14), se calcula como la suma de las integrales sobre cada uno de los triángulos que soportan al nodo s_i :

$$\int_{\text{sop}(\varphi_i)} R(W_h, \nabla W_h) \nabla \varphi_i dx = \sum_{T/s_i \in T} \int_T R(W_h, \nabla W_h) \nabla \varphi_i dx.$$

Cada una de estas integrales se calcula de forma exacta, utilizando la fórmula de cuadratura del baricentro:

$$\int_T f(x) dx \simeq \text{área}(T) f(B_T), \quad (4.29)$$

donde B_T es el baricentro del triángulo T . Esta fórmula es exacta para funciones afines.

Como W_h es afín sobre cada triángulo, su gradiente ∇W_h es constante sobre cada triángulo y evidentemente, $\nabla \varphi_i$ también lo es. Así pues, la integral sobre cada triángulo se reduce a integrar la velocidad del término de frotamiento $\mathcal{T}v$, que se calcula, como decimos, de forma exacta por la fórmula (4.29). Por tanto,

$$\int_{\text{sop}(\varphi_i)} R(W_h, \nabla W_h) \nabla \varphi_i dx = \sum_{T/s_i \in T} \text{área}(T) R(T) \cdot \nabla \varphi_i(T), \quad (4.30)$$

donde $\nabla\varphi_i(T)$ es el valor constante de $\nabla\varphi_i$ en el triángulo T y $R(T)$ es el valor constante del tensor R en el triángulo T :

$$R_1(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11}(T) \\ \tau_{12}(T) \\ \tau_{11}(T)v_1(T) + \tau_{12}(T)v_2(T) + \frac{\gamma}{P_r} \sum_{s_j \in T} e(s_j) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}(T) \\ \sum_{s_j \in T} k(s_j) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}(T) \\ \sum_{s_j \in T} \varepsilon(s_j) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}(T) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{12}(T) \\ \tau_{22}(T) \\ \tau_{12}(T)v_1(T) + \tau_{22}(T)v_2(T) + \frac{\gamma}{P_r} \sum_{s_j \in T} e(s_j) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_2}(T) \\ \sum_{s_j \in T} k(s_j) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_2}(T) \\ \sum_{s_j \in T} \varepsilon(s_j) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_2}(T) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquí $(v_1(T), v_2(T)) = \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}(B_T) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \mathbf{v}(s_j)$ y

$$\begin{aligned}\tau_{11}(T) &= \frac{2}{3} \sum_{s_j \in T} \left[2v_1(s_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}(T) - v_2(s_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2}(T) \right] \\ \tau_{12}(T) &= \sum_{s_j \in T} \left[v_1(s_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2}(T) + v_2(s_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}(T) \right] \\ \tau_{22}(T) &= \frac{2}{3} \sum_{s_j \in T} \left[2v_2(s_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2}(T) - v_1(s_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}(T) \right].\end{aligned}$$

Cálculo de los flujos difusivos turbulentos internos

La integral de los flujos difusivos turbulentos internos sobre el soporte de cada función de base φ_i en (4.15), se calcula de la misma forma que la integral de los flujos difusivos laminares internos:

$$\begin{aligned}\int_{\text{sop}(\varphi_i)} \frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h) \nabla \varphi_i dx &= \\ = \sum_{T/s_i \in T} \text{área}(T) \frac{1}{Re_t(T)} [RT(T) \cdot \nabla \varphi_i(T)],\end{aligned}\tag{4.31}$$

donde $RT(T)$ es el valor constante del tensor RT en el triángulo T , que se obtiene de la misma forma que $R(T)$. Igualmente, $Re_t(T)$ es el valor constante de Re_t en el triángulo T . Este valor corresponde a $\mu_t(T) = c_{\mu} \rho(T) \frac{k(T)^2}{\varepsilon(T)}$. Los valores constantes de las variables en cada triángulo se obtienen al aproximar W_h por $W_h(T) = \frac{1}{3} \sum_{s_j \in T} W_h(s_j)$ en el triángulo T . En relación al término $\beta_1 \rho k D_c$, observemos que β_1 y D_c son constantes por triángulos puesto que $\nabla \mathbf{a}$ lo es.

A diferencia de la integral de los flujos difusivos laminares, esta integral no se calcula de forma exacta al aplicar la fórmula de cuadratura del baricentro, ya que el término ρk no es lineal sobre cada triángulo.



Cálculo de la integral del término fuente

La integral de las componentes no difusivas del término fuente sobre el soporte de cada función de base φ_i en (4.17), se calcula utilizando de nuevo la fórmula de cuadratura del baricentro:

$$\int_{\text{sop}(\varphi_i)} S(W_h) \varphi_i dx = \sum_{T/s_i \in T} \int_T S(W_h) \varphi_i dx = \frac{1}{3} \sum_{T/s_i \in T} \text{área}(T) S(T),$$

teniendo en cuenta que $\varphi(B_T) = \frac{1}{3}$. Aquí $S(T)$ es el valor constante de $S(W_h)$ en el triángulo T obtenido aproximando W_h por $W_h(T) = \frac{1}{3} \sum_{s_j \in T} W_h(s_j)$. Observemos que los términos $\frac{\partial \beta_0}{\partial j_1}$ y $\frac{\partial \beta_0}{\partial j_2}$ que intervienen en Ψ_2 son constantes en cada triángulo, puesto que β_0 lo es.

Cálculo de las integrales de frontera: Imposición de las condiciones de contorno

Las condiciones de contorno se imponen en sentido débil, es decir, mediante la evaluación de las integrales de los flujos a través de la frontera, que resultan al aplicar la fórmula de Green en la formulación variacional (4.11).

La integral de los flujos convectivos en la frontera se calcula, al igual que la integral de los flujos convectivos internos, mediante una función de flujo numérico. Sin embargo, como las integrales de los flujos difusivos en la frontera no se calculan explícitamente, esto supone que realmente se hace el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial C_i \cap \Gamma} F(W_h) \cdot \mathbf{n} ds - \\ & - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_i} R(W_h, \nabla W_h) \cdot \mathbf{n} \varphi_i ds - \int_{\Gamma_i} \frac{1}{Re_t} R(W_h, \nabla W_h) \cdot \mathbf{n} \varphi_i ds = \end{aligned}$$

$$= \int_{\partial C_i \cap \Gamma} \Phi_{\Gamma}(W_i, W_{\infty}, \mathbf{n}) ds, \quad (4.32)$$

donde Φ_{Γ} es la función de flujo numérico y W_{∞} es el vector de datos en el exterior del dominio.

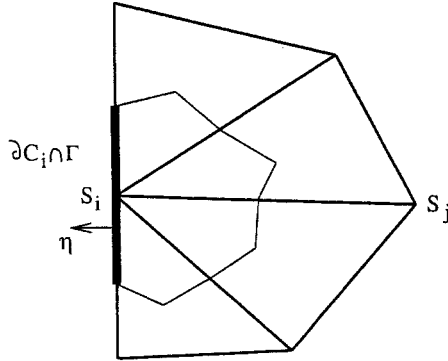


Figura 4.3: Intersección de la frontera del volumen de control C_i y Γ .

La función de flujo Φ_{Γ} se define de forma diferente para cada tipo de variable, lo que permite imponer condiciones de contorno específicas para cada una de ellas.

Definición de la función de flujo Φ_{Γ}

- **Para las variables físicas** $(\rho, \rho v_1, \rho v_2, F)$, como hemos visto al principio del capítulo, el número de condiciones de contorno de tipo Dirichlet que es necesario imponer depende del signo de los autovalores de la matriz jacobiana y en definitiva de si el flujo es subsónico o supersónico. Por ello, para estas variables, la función de flujo Φ_{Γ} se toma igual a la función de flujo de Steger-Warming [57] definida como:

$$\Phi^{SW}(W_i, W_{\infty}, \mathbf{n}) = A^+(W_i, \mathbf{n}) W_i + A^-(W_{\infty}, \mathbf{n}) W_{\infty}. \quad (4.33)$$

Entonces, la propia estructura de esta función actúa como un filtro que selecciona el número de condiciones de contorno apropiadas según el signo de los autovalores.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno fijadas en el planteamiento de nuestro problema, (4.8) y (4.9), tomamos como estado W_∞^1 , para este primer bloque de variables, el siguiente:

$$W_{\infty,-}^1 = (\rho_\infty, \rho_\infty v_{1\infty}, \rho_\infty v_{2\infty}, F_\infty)^t, \quad F_\infty = \frac{q_\infty}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_\infty |\mathbf{v}_\infty|^2 \quad \text{en } \Gamma^- \quad (4.34)$$

$$W_{\infty,+}^1 = (\rho_i, \rho_i v_{1i}, \rho_i v_{2i}, F_\infty)^t, \quad F_\infty = \frac{q_\infty}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_i |\mathbf{v}_i|^2 \quad \text{en } \Gamma^+ \quad (4.35)$$

• Para el resto de las variables $(\rho k, \rho \varepsilon, \rho a_1, \rho a_2)$, teniendo en cuenta (4.8) y (4.9), ha de imponerse en cualquier caso (tanto si el flujo es subsónico como supersónico) su valor en Γ^- y no es necesario dar ninguna condición Dirichlet en Γ^+ . Así pues, para estas variables, la función de flujo Φ_Γ se define con la siguiente estructura:

$$\Phi_\Gamma(W_i, W_\infty, \mathbf{n}) = \begin{cases} F(W_\infty) \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma^- \\ F(W_i) \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma^+ \end{cases} \quad (4.36)$$

tomando como estado W_∞^2 , para este segundo bloque de variables, el siguiente:

$$W_\infty^2 = (\rho_\infty k_\infty, \rho_\infty \varepsilon_\infty, \rho_\infty a_{1\infty}, \rho_\infty a_{2\infty})^t, \quad (4.37)$$

con $\mathbf{a}_\infty = x - \mathbf{v}_\infty t$.

Hemos definido la función de flujo Φ_Γ para cualquier vértice $s_i \in \Gamma^- \cup \Gamma^+$. Finalmente, si $s_i \in \Gamma^0$, Φ_Γ se define de la siguiente forma:

$$\Phi_\Gamma(W_i, W_\infty, \mathbf{n}) = (0, q_i n_1, q_i n_2, 0, 0, 0, 0). \quad (4.38)$$

En resumen, podemos decir que en forma condensada estamos imponiendo las condiciones de contorno:

$$[F(W_h) - \frac{1}{Re} R(W_h, \nabla W_h) - \frac{1}{Re_t} RT(W_h, \nabla W_h)] \cdot \mathbf{n} = \Phi_\Gamma(W_h, W_\infty, \mathbf{n}),$$

con la función de flujo numérico Φ_Γ definida como:

$$\Phi_\Gamma(W_h, W_\infty, \mathbf{n}) = \begin{cases} (\Phi^{SW}(W_h, W_{\infty,-}^1, \mathbf{n}), F(W_\infty^2) \cdot \mathbf{n}) & \text{en } \Gamma^- \\ (\Phi^{SW}(W_h, W_{\infty,+}^1, \mathbf{n}), F(W_h) \cdot \mathbf{n}) & \text{en } \Gamma^+ \\ (0, q n_1, q n_2, 0, 0, 0, 0, 0) & \text{en } \Gamma^0 \end{cases} \quad (4.39)$$

donde $W_{\infty,-}^1$ y $W_{\infty,+}^1$ están definidas en (4.34) y (4.35), respectivamente, y W_∞^2 en (4.37).

Es interesante analizar con detalle las condiciones de contorno que realmente estamos imponiendo de esta forma sobre cada variable:

En la frontera de entrada Γ^-

– Si el flujo es **supersónico**

$$A^+(W_h, \mathbf{n}) = 0, \quad A^-(W_{\infty,-}^1, \mathbf{n}) = A(W_{\infty,-}^1, \mathbf{n})$$

$$\Phi^{SW}(W_h, W_{\infty,-}^1, \mathbf{n}) = A(W_{\infty,-}^1, \mathbf{n}) W_{\infty,-}^1 = F(W_{\infty,-}^1) \cdot \mathbf{n}$$

$$(1, \Gamma^-) \quad \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \rho_\infty \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}.$$

$$(2, \Gamma^-) \quad \mathbf{v} + q \mathbf{n} - \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \tau + \beta_1 \rho k D_c \right] \mathbf{n} = \mathbf{v}_\infty + q_\infty \mathbf{n}.$$

$$(3, \Gamma^-) \quad (F + q) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}^t \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \tau + \beta_1 \rho k D_c \right] \mathbf{n} + \left(\frac{\gamma}{Re Pr} + \frac{\gamma}{Re_t Pr_t} \right) \frac{\partial e}{\partial n} + \frac{1}{Re_t \sigma_k} \frac{\partial k}{\partial n} = (F_\infty + q_\infty) \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}.$$

– Si el flujo es **subsónico**

$$\Lambda^+(W_h, \mathbf{n}) = \text{diagonal}(\lambda_1, 0, 0, 0)$$

$$\Lambda^-(W_{\infty,-}^1, \mathbf{n}) = \text{diagonal}(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

y se imponen sólo las condiciones (2, Γ^-) y (3, Γ^-) anteriores.

– En ambos casos (flujo subsónico o supersónico)

$$(4, \Gamma^-) \quad \rho k \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = \rho_\infty k_\infty \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}.$$

$$(5, \Gamma^-) \quad \rho \varepsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = \rho_\infty \varepsilon_\infty \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}.$$

$$(6, \Gamma^-) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_\infty.$$

En la frontera de salida Γ^+

– Si el flujo es **supersónico**

$$A^+(W_h, \mathbf{n}) = A(W_h, \mathbf{n}), \quad A^-(W_{\infty,+}^1, \mathbf{n}) = 0$$

$$\Phi^{SW}(W_h, W_{\infty,+}^1, \mathbf{n}) = A(W_h, \mathbf{n}) W_h = F(W_h) \cdot \mathbf{n}$$

$$(1, \Gamma^+) \quad \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \tau + \beta_1 \rho k D_c \right] \mathbf{n} = 0.$$

$$(2, \Gamma^+) \quad \left(\frac{\gamma}{Re Pr} + \frac{\gamma}{Re_t Pr_t} \right) \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{Re_t \sigma_k} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

– Si el flujo es **subsónico**

$$\Lambda^+(W_h, \mathbf{n}) = \text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0)$$

$$\Lambda^-(W_{\infty,+}^1, \mathbf{n}) = \text{diagonal}(0, 0, 0, \lambda_4)$$

y se imponen las condiciones (1, Γ^+) y (2, Γ^+) anteriores y además

$$(3, \Gamma^+) \quad q = q_\infty.$$

– En ambos casos (flujo subsónico o supersónico)

$$(4, \Gamma^+) \quad \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \implies \quad (2, \Gamma^+) \quad \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

$$(5, \Gamma^+) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

En la frontera de deslizamiento Γ^0

$$\Phi_\Gamma(W_h, W_\infty, \mathbf{n}) = (0, q n_1, q n_2, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}
(1, \Gamma^0) \quad & \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \tau + \beta_1 \rho k D_c \right] \mathbf{n} = 0. & (2, \Gamma^0) \quad & \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0. \\
(3, \Gamma^0) \quad & \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0. & (4, \Gamma^0) \quad & \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0.
\end{aligned}$$

Este análisis pone de manifiesto que en la frontera de entrada realmente estamos imponiendo el flujo total normal y no el flujo convectivo normal, como sería adecuado. Es decir, no estamos imponiendo verdaderas condiciones de tipo Dirichlet, debido a que implícitamente estamos despreciando las integrales de frontera de los flujos difusivos. Sin embargo, cuando consideramos flujos turbulentos, es razonable esperar que el flujo dominante en la frontera de entrada sea el convectivo. Por esta razón, imponer condiciones de tipo Dirichlet en la frontera Γ^- , de la forma cómo se hace en $(2, \Gamma^-)$, $(3, \Gamma^-)$, $(4, \Gamma^-)$, y $(5, \Gamma^-)$, producirá errores pequeños. El estudio que realizamos en el capítulo 6 de esta memoria, refuerza esta afirmación.

4.3 Discretización en tiempo

La discretización espacial realizada en la sección anterior nos ha conducido a la siguiente formulación semidiscreta:

$$\int_{C_i} \frac{\partial W_h(t)}{\partial t} dx = G(W_i(t)), \quad \forall i = 1, \dots, n_s, \quad (4.40)$$

donde

$$\begin{aligned}
G(W_i) = & \sum_{j \in K(i)} \Phi(\tilde{W}_{ij}, \tilde{W}_{ji}, \mathbf{n}_{ij}) - \\
& - \sum_{T/i \in T} \text{área}(T) \left[\frac{1}{Re} R(T) \cdot \nabla \varphi_i(T) + \frac{1}{Re_t} RT(T) \cdot \nabla \varphi_i(T) - \frac{1}{3} S(T) \right] \\
& + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \Phi_\Gamma(W_i, W_\infty, \mathbf{n}) dx.
\end{aligned}$$

Para discretizar este problema en tiempo adaptamos un método de Runge-Kutta de cuatro pasos y segundo orden, usado en [42] para el modelo $k - \varepsilon$.



Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) & \text{en } [0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Consideramos una partición del intervalo $[0, T]$, $\{t_n\}$, y denotamos $y_n = y(t_n)$. Entonces el método de Runge-Kutta que consideramos calcula y_{n+1} a partir de y_n según el siguiente esquema:

$$\begin{cases} y_{n,0} = y_n \\ y_{n,k} = y_n + \alpha_k \Delta t_n f(y_{n,k-1}), & k = 1, \dots, 4 \\ y_{n+1} = y_{n,4} \end{cases} \quad (4.41)$$

donde $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ es el paso de tiempo en la etapa n y los coeficientes α_k , $k = 1, \dots, 4$, valen: $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 0.2766$, $\alpha_3 = 0.5$ y $\alpha_4 = 1$. Estos valores han sido obtenidos en [38], como coeficientes óptimos para acelerar la convergencia, teniendo en cuenta el tipo de discretización espacial utilizada.

Se trata de un esquema explícito de cuatro pasos, de segundo orden de precisión y condicionalmente estable, limitando el paso de tiempo mediante una condición de tipo CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Los esquemas implícitos conducen a métodos más eficaces de resolución, aunque su implementación es más costosa. Por ejemplo en [49] se ha desarrollado un esquema implícito linealizado para el problema (4.40), reducido al modelo $k - \varepsilon$. Éste ha sido validado para flujos de diferente tipo (subsónico y supersónico) y también en diferentes aplicaciones, mostrando esta ventaja del esquema implícito respecto al esquema explícito de Euler. Nosotros hemos optado aquí por un esquema explícito por motivos de sencillez y economía.

Para aplicar el esquema (4.41) al problema (4.40), denotamos

$$W_{i,n} = W_h(s_i, t_n)$$

Entonces la discretización de nuestro modelo es:

$$\begin{cases} W_{n,0} &= W_{i,n} \\ W_{n,k} &= W_{i,n} + \alpha_k \frac{\Delta t_n}{\text{med}(C_i)} G(W_{n,k-1}), \quad k = 1, \dots, 4 \\ W_{i,n+1} &= W_{n,4} \end{cases} \quad (4.42)$$

La aplicación de este esquema se hace descomponiendo el vector de variables W_h en dos bloques:

$$W_h^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ F \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad W_h^{(2)} = \begin{pmatrix} \rho a_1 \\ \rho a_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces nuestra estrategia de paso de tiempo ha sido la siguiente:

Dado $W_{n,0} = W_{i,n}$, calcular recursivamente $W_{n,k}$ para $k = 1, 2, 3, 4$, según el esquema (4.42), en las siguientes etapas:

1. Actualizar $W_{n,k}^{(2)}$ a $W_{n,k+1}^{(2)}$.
2. A partir de $\mathbf{a}_{n,k+1}$, calcular todos los términos de cierre

$$(j_1, j_2, D_c, \beta_0, \beta_1, \frac{\partial \beta_0}{\partial j_1}, \frac{\partial \beta_0}{\partial j_2}).$$

3. Actualizar $W_{n,k}^{(1)}$ a $W_{n,k+1}^{(1)}$.

Y finalmente, tomar $W_{i,n+1} = W_{n,4}$.

Capítulo 5

Aplicación al cálculo de una capa de mezcla compresible

En este capítulo aplicamos el modelo de turbulencia que hemos desarrollado en el capítulo 3, al cálculo de una capa de mezcla compresible. Para ello, hemos construido un código numérico que implanta el método numérico de resolución descrito en el capítulo 4. Este código es una adaptación del código desarrollado por el INRIA para el modelo $k - \varepsilon$.

Primeramente, se describen las características físicas de este caso test y se fijan los parámetros que determinan su comportamiento. En consistencia con la construcción de nuestro modelo, a partir del $k - \varepsilon$, hemos utilizado los resultados obtenidos con este modelo como referencia para valorar nuestros resultados.

En un primer momento, hemos realizado una serie de ensayos subsónicos con el objetivo de validar el cálculo de las coordenadas lagrangianas y los posibles tipos de tabulaciones obtenidos para calcular los términos de cierre.

En segundo lugar, hemos llevado a cabo diferentes ensayos supersónicos

para analizar las propiedades de nuestro modelo. Los resultados obtenidos en este caso difieren poco de los obtenidos con el modelo $k-\varepsilon$, en consistencia con el hecho de que estamos simulando turbulencia que alcanza el estado estacionario. Las mayores diferencias se dan allí donde los efectos transitorios son más relevantes, en el sentido de que el flujo toma mayor tiempo en alcanzar el estado estacionario, en concordancia con la naturaleza de nuestro modelo.

5.1 Descripción física de la capa de mezcla compresible

Se llama capa de mezcla compresible al flujo que se desarrolla a partir de dos flujos compresibles con velocidades constantes, paralelas y de distinto módulo que entran en contacto. En este momento, las diferentes velocidades de ambos flujos generan grandes fuerzas de cizalladura en la zona intermedia de mezcla o interfaz, que tienden a arrastrar a un flujo sobre otro. Cuando el tiempo transcurre, se va desarrollando una capa alrededor de esta interfaz caracterizada por fuertes gradientes de todas las variables físicas implicadas y la generación de torbellinos de diferente talla. Además su grosor se va incrementando en la dirección de la corriente.

El estudio de las capas de mezcla compresibles tiene una gran aplicación en el sector de la aeronáutica, entre otros. Por ejemplo, para el diseño de aviones a gran velocidad, es necesario conocer el desarrollo de la mezcla que se produce entre el chorro de gases que sale del motor y el medio exterior. Esto permite controlar el ruido y otros fenómenos que afectan a la aerodinámica exterior. También, tiene una gran aplicación en el estudio de la combustión, siendo fundamental, en particular, para el diseño de los carburadores de los motores.

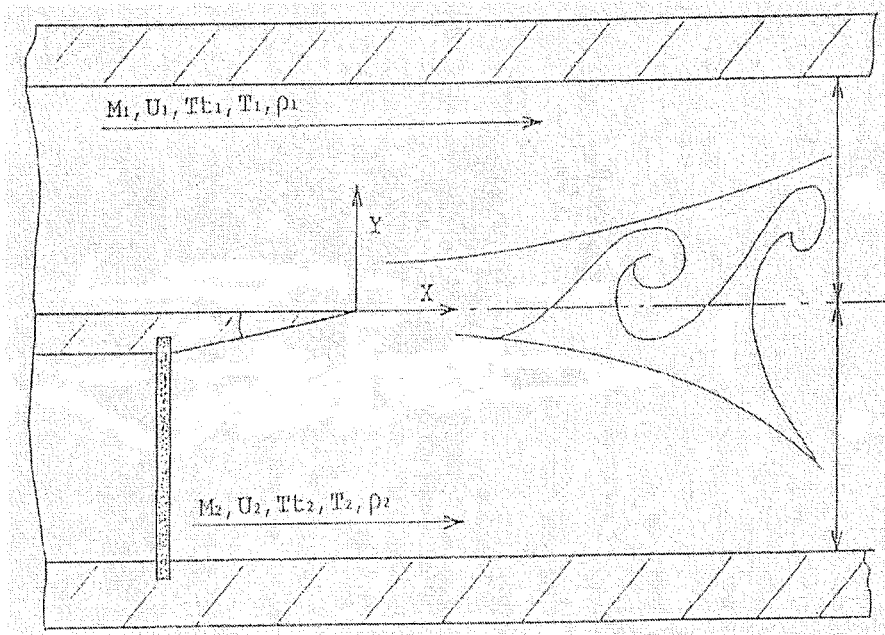


Figura 5.1: Esquema de la generación de una capa de mezcla.

Por otra parte, las capas de mezcla compresibles constituyen flujos particularmente interesantes desde el punto de vista de la modelización de la turbulencia compresible. En este caso, no existen paredes sólidas y los efectos difusivos son prácticamente despreciables, por lo que predominan los efectos de la compresibilidad.

Así pues, la capa de mezcla turbulenta compresible es un buen test para verificar la eficacia con la que un modelo de turbulencia modela los efectos de la compresibilidad.

Como test para nuestro modelo, también resulta especialmente interesante la presencia de efectos de anisotropía, ya que el comportamiento del flujo según la dirección longitudinal y transversal es bien distinto. Esto permite testar los nuevos términos que introduce nuestro modelo, respecto del $k - \epsilon$. Por la misma razón, también son de interés las diferentes tasas con las que distintas partes del flujo alcanzan el estado estacionario.



Parámetros que determinan el comportamiento de la capa de mezcla compresible

El número de Mach convectivo

La estructura turbulenta de una capa de mezcla a gran velocidad se ve afectada en gran medida por la compresibilidad. Ahora bien, la elección de un criterio para medir la compresibilidad intrínseca de una capa de mezcla no es trivial ya que depende de diferentes factores. Fundamentalmente, el número de Mach, la razón de velocidades y la razón de densidades de los flujos que se mezclan, de manera que cada uno de estos factores no es determinante por sí sólo. Por ejemplo, aunque en principio el número de Mach parece el parámetro más influyente, es claro que no es determinante, puesto que aunque los flujos iniciales sean supersónicos la velocidad relativa de uno respecto del otro puede ser subsónica.

En este sentido, Bogdanoff en [10] y más tarde Papamoschou y Roshko en [51] proponen considerar un nuevo parámetro para medir la compresibilidad de una capa de mezcla, que se define haciendo intervenir todos estos factores. Se trata del **número de Mach convectivo** M_c . En el caso, en el que los dos flujos sean perfectos y las presiones estáticas de ambos tomen valores iguales, el número de Mach convectivo se define por:

$$M_c = \frac{u_1 - u_2}{c_1 + c_2}, \quad (5.1)$$

donde u_1 y u_2 son las velocidades horizontales de los flujos exteriores a la capa de mezcla, considerando $u_1 > u_2$, y donde c_1 y c_2 son las respectivas velocidades del sonido.

La tasa de expansión

La compresibilidad afecta de forma destacada a la expansión de la capa de mezcla. En 1972, Birch y Eggers [9] constataron experimentalmente que la tasa de expansión de una capa de mezcla compresible es muy sensible al número de Mach. Y en particular, que la tasa de expansión es menor para una capa supersónica que para una subsónica.

Si denotamos por δ al espesor de la capa de mezcla y x a la variable longitudinal a lo largo de la capa, entonces la **tasa de expansión**, en un punto x_0 de la línea de separación entre las dos capas, se define como:

$$\delta'(x_0) = \frac{\partial \delta}{\partial x}(x_0). \quad (5.2)$$

Para calcular este parámetro es necesario fijar previamente una definición precisa del espesor de la capa δ . En la literatura existen varias propuestas, de las cuales la más usual es la aceptada en la Conferencia de Stanford, que es la considerada en este trabajo. Según esta definición, si para cada x_0 , denotamos por y_1 e y_2 a las ordenadas de los puntos tales que:

$$u(x_0, y_1) = u_2 + \sqrt{0.9}(u_1 - u_2) \quad \text{y} \quad u(x_0, y_2) = u_2 + \sqrt{0.1}(u_1 - u_2), \quad (5.3)$$

donde u es la velocidad horizontal del flujo y u_1 y u_2 son, respectivamente, los valores máximo y mínimo de ésta, entonces

$$\delta(x_0) = y_1 - y_2. \quad (5.4)$$

Papamoschou y Roskho en [51] realizan una serie de experimentos sobre capas de mezclas supersónicas con el objetivo de comprender el efecto de la compresibilidad sobre la tasa de expansión. Considerando que para números de Reynolds suficientemente grandes, los efectos de la viscosidad son prácticamente

despreciables, obtienen, mediante análisis dimensional, que la tasa de expansión se puede expresar como una función de parámetros adimensionales:

$$\delta' = f(r, s, M_c), \quad (5.5)$$

donde $r = \frac{u_2}{u_1}$ es la razón de velocidades y $s = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ la razón de densidades.

Además comprueban experimentalmente que si la tasa de expansión es normalizada por la tasa de expansión de un capa de mezcla incompresible, con las mismas razones de velocidad y de densidad, entonces los efectos de estas razones, r y s , aparecen desacoplados de los del número de Mach convectivo M_c . Así pues, si se considera la **tasa de expansión normalizada**:

$$\delta'_n = \frac{\delta'}{\delta_0} = \frac{f(r, s, M_c)}{f(r, s, M_c \simeq 0)}, \quad (5.6)$$

ésta depende únicamente del número de Mach convectivo,

$$\delta'_n = \Phi(M_c).$$

Esto parece indicar que la dependencia de la función f respecto de r y s es multiplicativa:

$$\delta' = \Phi(M_c)\Psi(r, s).$$

En la Figura 5.2,a) se representa la curva $\Phi(M_c)$ que expresa la dependencia de δ'_n respecto de M_c , a partir de los resultados obtenidos en [51]. Otras curvas similares provienen de diferentes resultados experimentales, como la obtenida por Bogdanoff (Figura 5.2,b) o Langley (Figura 5.2,c). En cualquier caso, se constata que la tasa de expansión normalizada se mantiene prácticamente constante hasta $M_c < 0.5$, es decreciente para valores $M_c \in [0.5, 1]$ y a partir de $M_c > 1$ se va aproximando a un valor límite.

Es de destacar, que a diferencia de la tasa de expansión de la capa, el comportamiento de otros estadísticos de la turbulencia es mucho menos sensible

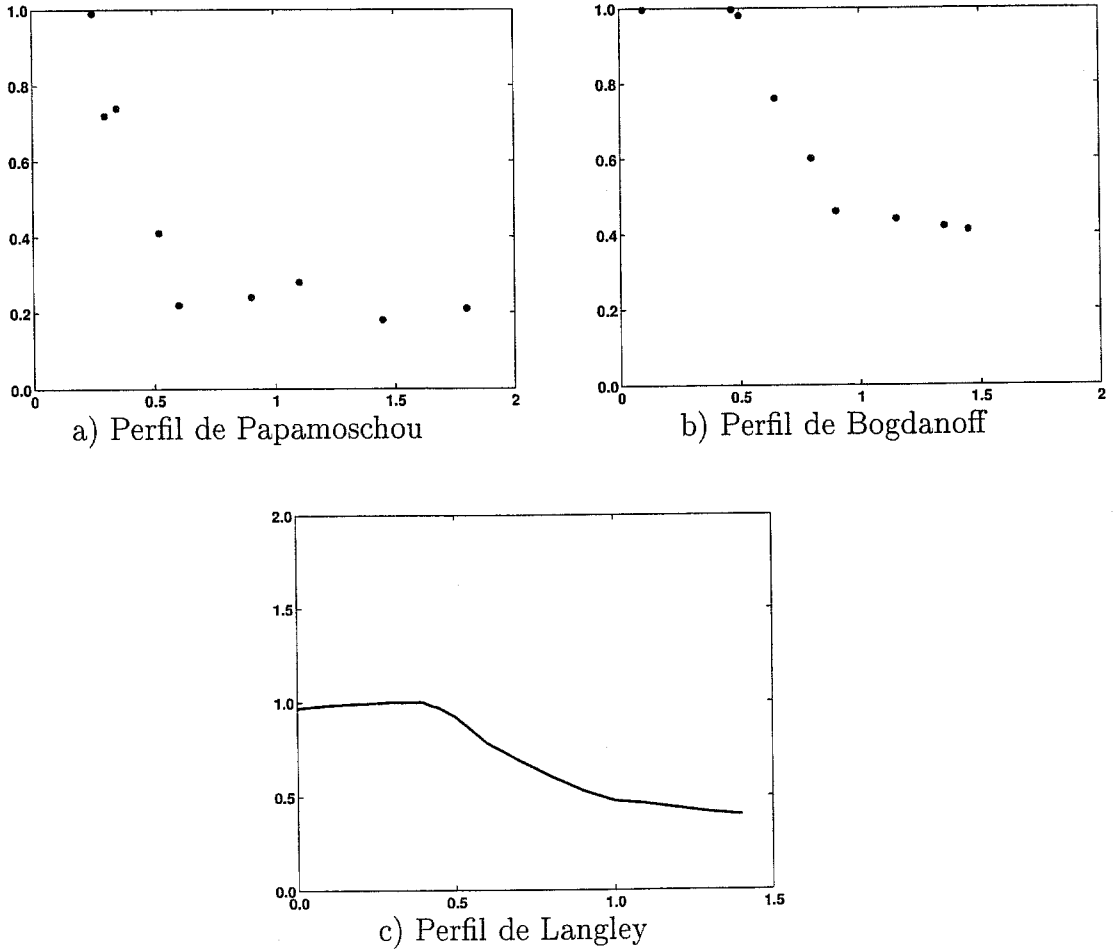


Figura 5.2: Tasa de expansión normalizada en función de M_c .

al número de Mach convectivo. Por ejemplo, el perfil de la velocidad media es casi independiente de M_c , hasta valores de $M_c < 4$.

5.2 Ensayos subsónicos

Inicialmente hemos realizado diferentes pruebas de nuestro código numérico para capas de mezcla subsónicas estacionarias. Puesto que nuestro modelo puede ser considerado como una perturbación del modelo $k - \varepsilon$, es razonable utilizar los resultados obtenidos con este modelo como referencia para valorar nuestros resul-



tados. Además los resultados obtenidos con el modelo $k - \varepsilon$ son bien conocidos y tienen una precisión aceptable con respecto a las medidas experimentales. Por otra parte, es adecuado analizar la consistencia de nuestro modelo con el $k - \varepsilon$ para flujos estacionarios. En efecto, nuestro modelo aporta nuevos términos “con memoria”, que esencialmente tienen en cuenta efectos transitorios entre las estructuras de diferente talla. Así pues, para este tipo de flujos que alcanzan un estado estacionario, las diferencias entre los resultados obtenidos con ambos modelos deberían ser pequeñas.

Condiciones de cálculo

Para realizar estos ensayos, hemos considerado como dominio de cálculo el rectángulo $\Omega = (0, 1) \times (0.1, 0.1)$, de manera que la frontera artificial Γ^0 se corresponde con los lados horizontales del rectángulo y la fronteras de entrada de flujo Γ^- y de salida Γ^+ coinciden con los lados verticales.

Sobre este dominio consideramos un mallado no uniforme simétrico respecto del eje OX y con 240 nodos, que se representa en la Figura 5.3.

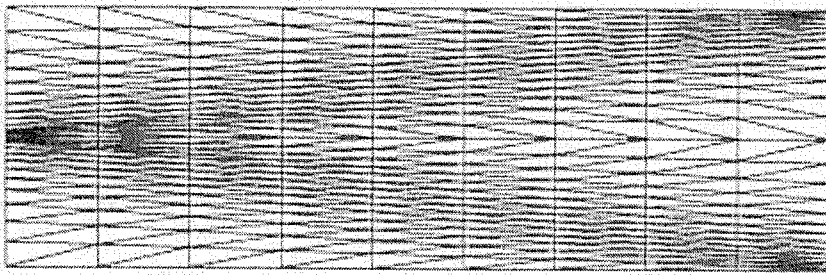


Figura 5.3: Malla de 290 nodos y 504 elementos.

Como condiciones iniciales tomamos una densidad y una presión constantes:

$$\rho_0 \equiv 1, \quad p_0 \equiv 71.43. \quad (5.7)$$

Consideramos un campo de velocidades inicial con la estructura:

$$\mathbf{v}_0(x) = (u(x_2), 0), \quad \text{con } u \geq 0.$$

que detallaremos más adelante. Para k y ε se consideran los perfiles iniciales siguientes:

$$k_0(x_2) = \begin{cases} 10^{-4} & \text{si } -0.1 \leq x_2 < -0.01 \\ 2 \cdot 10^{-2} x_2 + 3 \cdot 10^{-4} & \text{si } -0.01 \leq x_2 < 0 \\ -2 \cdot 10^{-2} x_2 + 3 \cdot 10^{-4} & \text{si } 0 \leq x_2 < 0.01 \\ 10^{-4} & \text{si } 0.01 \leq x_2 \leq 0.1 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_0(x_2) = \begin{cases} 9 \cdot 10^{-6} & \text{si } -0.1 \leq x_2 < -0.01 \\ 72 \cdot 10^{-4} x_2 + 81 \cdot 10^{-6} & \text{si } -0.01 \leq x_2 < 0 \\ -72 \cdot 10^{-4} x_2 + 81 \cdot 10^{-6} & \text{si } 0 \leq x_2 < 0.01 \\ 9 \cdot 10^{-6} & \text{si } 0.01 \leq x_2 \leq 0.1 \end{cases}$$

Estas curvas están representadas en la Figura 5.4. Por último, sabemos que inicialmente las coordenadas lagrangianas valen

$$\mathbf{a}_0(x) = (x_1, x_2). \quad (5.9)$$

Las condiciones de contorno que se consideran están fijadas en (4.9), tomando como valores ρ_∞ , \mathbf{v}_∞ , p_∞ , \mathbf{a}_∞ , k_∞ , y ε_∞ las restricciones de las condiciones iniciales a la frontera.

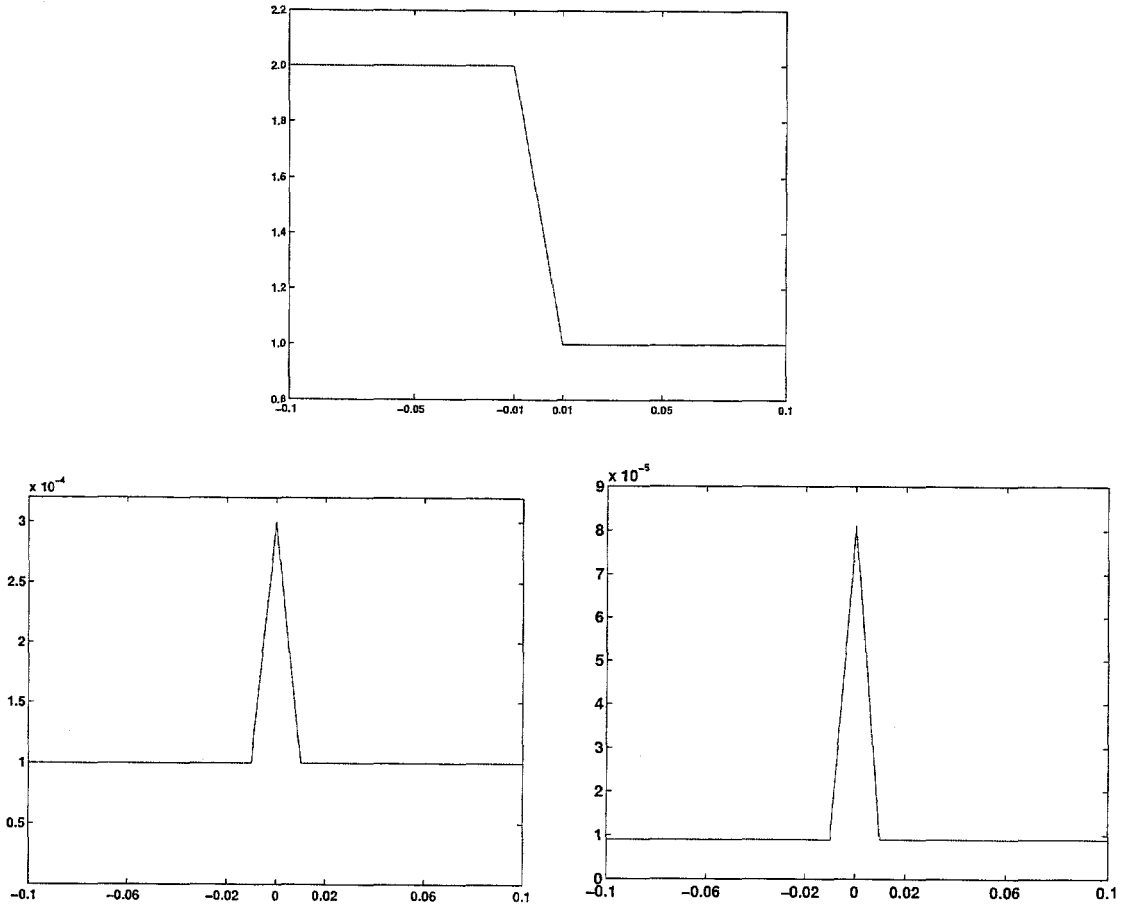


Figura 5.4: Perfiles iniciales de la velocidad horizontal, k y ϵ utilizados en los ensayos subsónicos.

5.2.1 Validación del cálculo de las coordenadas lagrangianas

Para calcular las coordenadas lagrangianas, la ecuación verificada por éstas (2.7), ha sido reformulada en términos de la variable conservativa $\rho \mathbf{a}$:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) = 0.$$

Esta ecuación aparece incorporada con el resto de las ecuaciones del modelo. Como describimos en el capítulo 4, para resolverla numéricamente se utiliza un esquema que extiende a estas variables el esquema numérico desarrollado para el resto de variables del modelo. Es decir, para la discretización en espacio se utiliza

un esquema descentrado de orden uno que utiliza la función de flujo numérico (4.23). Esta discretización en espacio se combina con una discretización en tiempo mediante el esquema de segundo orden de Runge-Kutta de cuatro pasos (4.41). El esquema resultante tiene una precisión teórica de primer orden.

Con el objetivo de validar numéricamente el método numérico de resolución de las coordenadas lagrangianas, hemos realizado dos ensayos numéricos:

Ensayo I

En un primer ensayo, hemos confirmado la precisión teórica del esquema. Junto con las condiciones iniciales detalladas en el apartado anterior, tomamos como velocidad horizontal inicial el siguiente perfil parabólico:

$$u(x_2) = (0.1 + x_2)(0.1 - x_2). \quad (5.10)$$

La tabla 5.1 muestra los órdenes de convergencia p estimados en varios tiempos hasta $t = 1$, calculados con errores en norma L^1 . Estos órdenes de convergencia han sido obtenidos utilizando la siguiente fórmula que depende de dos parámetros de discretización consecutivos:

$$p(t) = \frac{\log[e(h_2, t) / e(h_1, t)]}{\log[h_2 / h_1]},$$

con $e(h, t) = \| \mathbf{a}(\cdot, t) - \mathbf{a}_h(\cdot, t) \|_{L^1}$. Estos cálculos confirman la estimación teórica de orden de convergencia uno.

t	$h = \Delta t = 0.1$	$h = \Delta t = 0.05$	p	$h = \Delta t = 0.025$	p
0.2	$0.8029E - 03$	$0.4653E - 03$	0.7870	$0.2447E - 03$	0.9272
0.5	$0.1996E - 02$	$0.1153E - 02$	0.7922	$0.6014E - 03$	0.9391
1	$0.3959E - 02$	$0.2273E - 02$	0.8004	$0.1178E - 02$	0.9479

Tabla 5.1: Orden de convergencia.

Ensayo II

En un segundo ensayo, junto con las condiciones iniciales detalladas en el apartado anterior, tomamos como velocidad horizontal inicial un perfil con un fuerte gradiente alrededor del origen (Figura 5.4):

$$u(x_2) = \begin{cases} 2 & \text{si } -0.1 \leq x_2 < -0.01 \\ 1 - 50(x_2 - 0.01) & \text{si } -0.01 \leq x_2 < 0.01 \\ 1 & \text{si } 0.01 \leq x_2 \leq 0.1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Con estas condiciones iniciales, se desarrolla una capa de mezcla subsónica con números de Mach $M_1 = 0.2$, en el lado inferior de la capa, $M_2 = 0.1$, en el lado superior de la capa, y parámetros $r = 0.5$, $s = 1$ y $M_c = 0.2$.

La Figura 5.5,a) muestra los isovalores de a_{1h} cuando el flujo ha alcanzado el estado estacionario. Se obtiene una precisión razonable para un esquema de orden uno.

Para aumentar la precisión de la solución calculada hemos modificado la discretización en espacio, utilizando una técnica de tipo M.U.S.C.L. que modifica los argumentos de la función de flujo (4.26). En la Figura 5.5,b) podemos ver de nuevo los isovalores de a_{1h} , calculados ahora con este nuevo método. Se aprecia una notable mejora de la precisión.

Obsérvese que si $\nabla \mathbf{a}_h$ es no singular, entonces los valores calculados por el código numérico para (j_1, j_2) se mantienen siempre dentro de la región admisible (3.38). En efecto, $\nabla \mathbf{a}_h$ toma un valor constante en cada triángulo G_T . Entonces, $C_T = G_T^t G_T$ es siempre una matriz semidefinida positiva. Si además, $\nabla \mathbf{a}_h$ es no singular entonces C_T es definida positiva y en tal caso sus invariantes j_1 y j_2 están en dicha región.

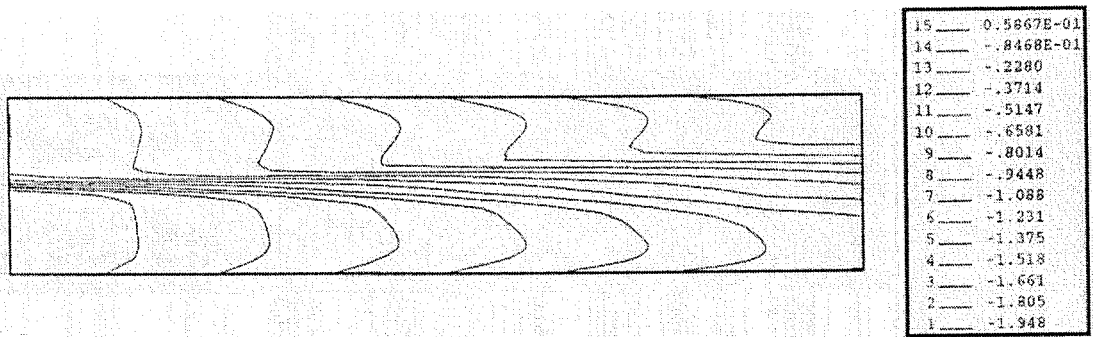
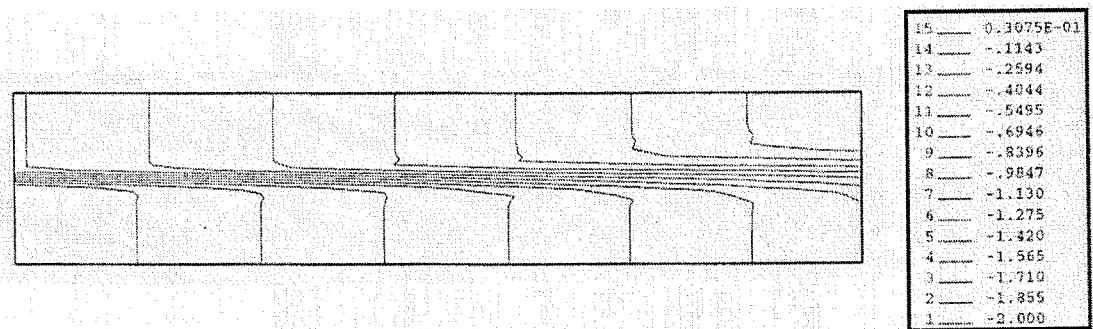
a) Isovalores de a_1 calculada con orden 1 en espacio.b) Isovalores de a_1 calculada con orden 2 en espacio.

Figura 5.5: Comparación del estado estacionario de la primera componente de las coordenadas lagrangianas calculado con diferente precisión en espacio.

5.2.2 Validación de los términos de cierre

Para validar los dos posibles tipos de tabulaciones de los términos de cierre, obtenidas en la sección 3.6, hemos realizado dos ensayos numéricos. Para ello, seguimos considerando las condiciones iniciales (5.7), (5.8), (5.9) y (5.11).

Ensayo I

En un primer ensayo, hemos utilizado las tabulaciones I, que dan lugar a los términos de cierre β_0 y β_1 representados en la Figura 5.6. En este caso, el código presenta cierta inestabilidad y se aprecian algunos comportamientos no físicos en los resultados obtenidos. En particular, la inestabilidad del código puede observarse claramente en el perfil de la velocidad horizontal media: aparecen



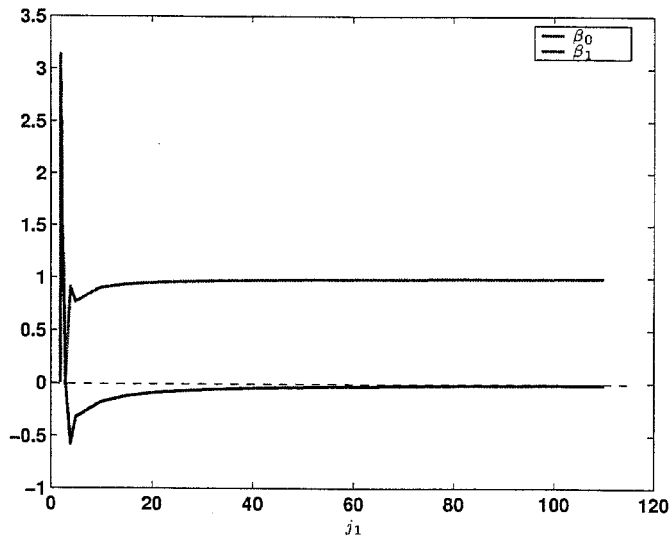


Figura 5.6: Términos de cierre calculados con las tabulaciones I.

algunas oscilaciones de la solución en la zona superior de la capa correspondiente al flujo con velocidad menor. También en esta misma zona, en la frontera superior, no se satisface de forma adecuada la condición de libre deslizamiento (ver Figura 5.7,a). Por otra parte, se obtiene una expansión progresiva no física de la capa de mezcla, tal y como puede apreciarse en la Figura 5.7,b) en la que se representa el espesor de la capa δ . Esta expansión produce una disminución de los niveles de k y ε , como se observa en los perfiles de las Figuras 5.7,c) y 5.7,d), en comparación con los obtenidos para el modelo $k - \varepsilon$.

Estos resultados no físicos pueden ser debidos, al menos parcialmente, a las inestabilidades numéricas producidas por los términos de cierre que hemos utilizado. Efectivamente, estos fenómenos se localizan en la zona superior de la capa correspondiente al flujo con velocidad menor que coincide con la región donde los términos de cierre son altamente oscilantes. Hemos comprobado que las oscilaciones se corrigen cuando la malla es refinada. Sin embargo, parece más difícil poder eliminar el resto de comportamientos no físicos. Para ello, probablemente necesitaríamos mejorar el cálculo de los términos de cierre.

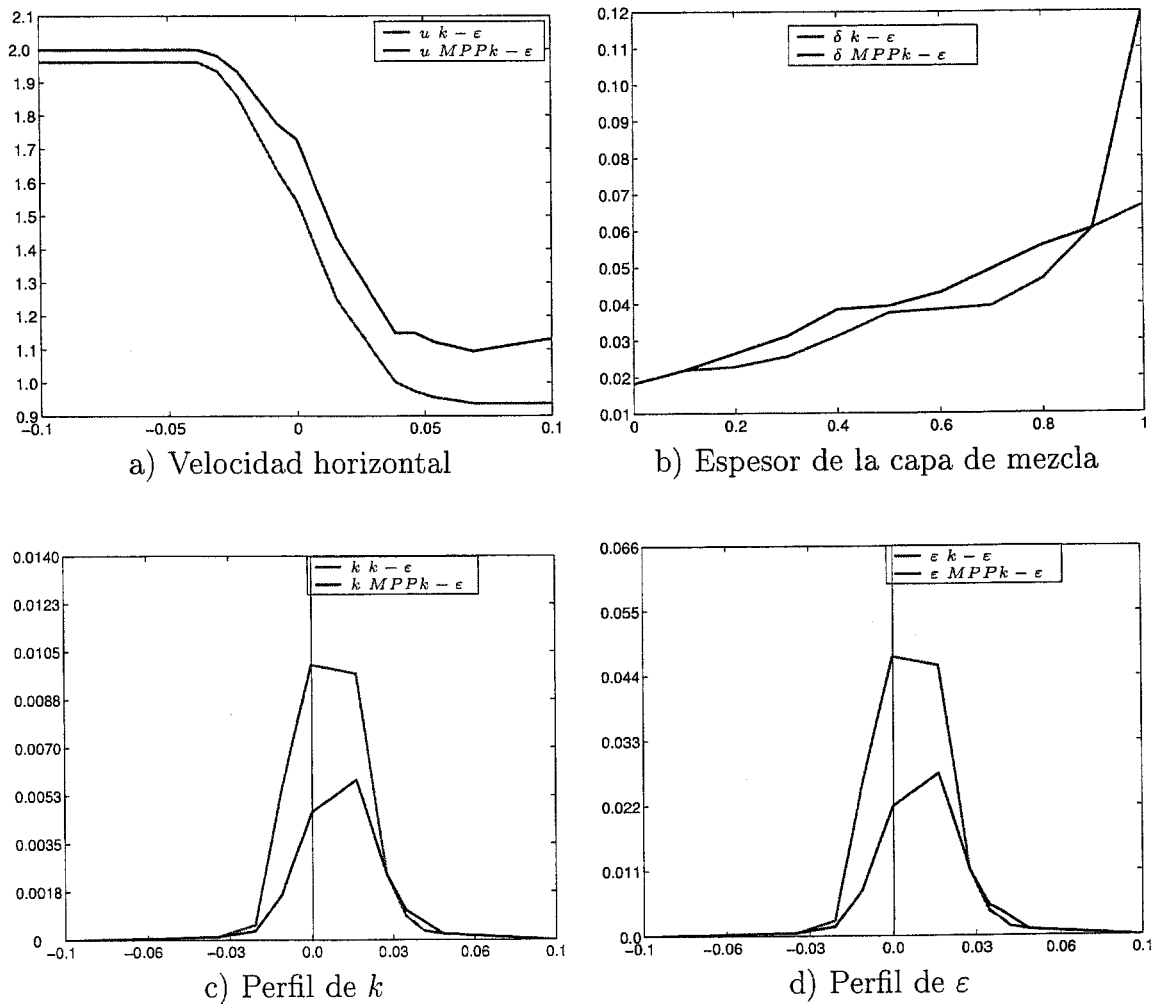


Figura 5.7: Comparación de la solución estacionaria obtenida con el modelo $k-\epsilon$ y el modelo $MPP k-\epsilon$, usando las tabulaciones I.

Ensayo II

En un segundo ensayo, hemos utilizado las tabulaciones II, que dan lugar a los términos de cierre β_0 y β_1 representados en la Figura 5.8. Los resultados obtenidos en este caso, difieren muy poco de los obtenidos con el modelo $k-\epsilon$. Por ejemplo, los estados estacionarios obtenidos para la velocidad horizontal y k en ambos modelos son casi indistinguibles, como muestran las gráficas de isovalores (Figuras 5.9 y 5.10). Sin embargo, esto no sucede porque los términos debidos al modelado MPP sean despreciables frente a los términos propios del modelado $k-\epsilon$, como

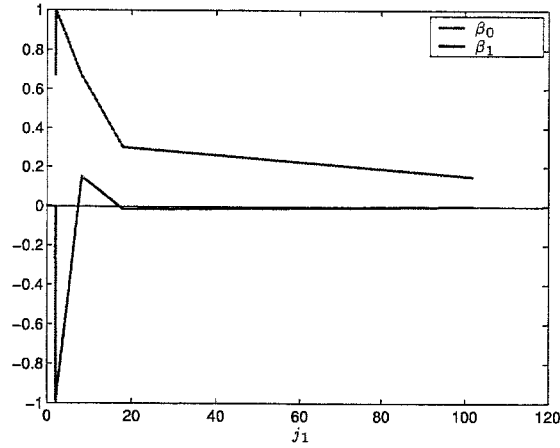


Figura 5.8: Términos de cierre calculados con las tabulaciones II.

veremos en la sección 5.4. Los resultados obtenidos para estas tabulaciones son consistentes con el hecho de que esencialmente estamos modelando turbulencia estacionaria.

Como conclusión, desechamos las tabulaciones I y en los sucesivos ensayos que llevamos a cabo utilizamos las tabulaciones II.

5.3 Ensayos supersónicos

En esta sección presentamos varios ensayos de capas de mezcla supersónicas con números de Mach convectivo $M_c = 0.45$, $M_c = 0.65$ y $M_c = 1$. Estos experimentos están basados en las medidas experimentales obtenidas por Goebel et al. [29]. La elección de estos datos como base de cálculo se ha hecho en base a que también han sido utilizados por Le Ribault [42] y Guezengar [30] para validar sus códigos numéricos del modelo $k - \varepsilon$. Puesto que además el método numérico con el que resolvemos nuestro modelo es una adaptación del utilizado en estos códigos, tenemos de esta forma la mejor referencia para comparar nuestros resultados. Es cierto que para números de Mach elevados, como es el caso, el modelo $k - \varepsilon$ es

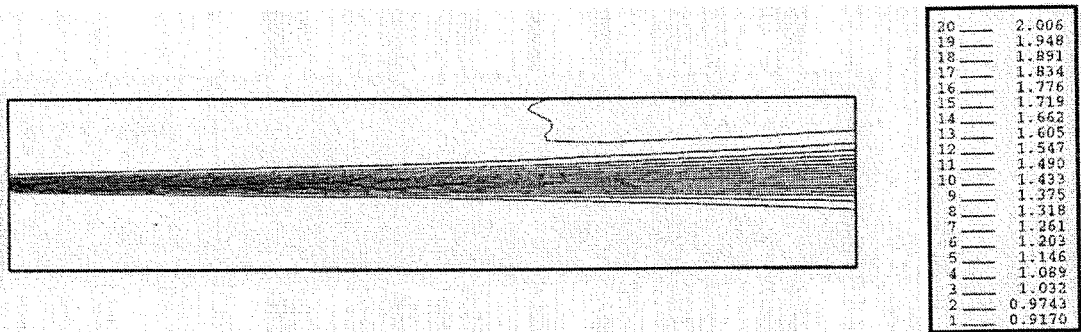
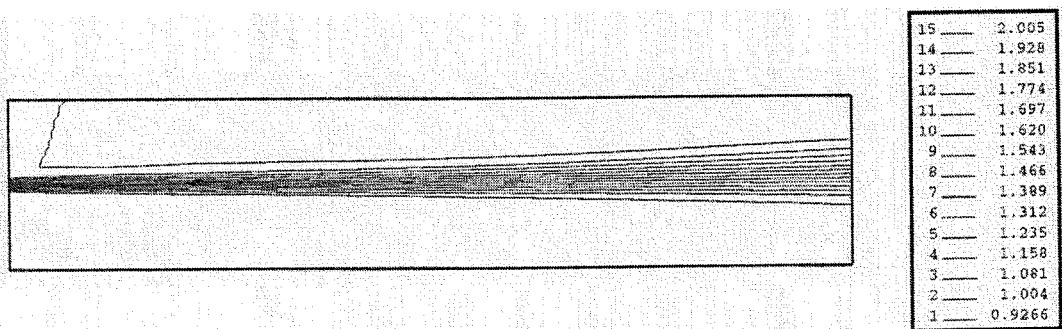
a) Isovalores de u con el modelo $MPP k - \varepsilon$.b) Isovalores de u con el modelo $k - \varepsilon$.

Figura 5.9: Comparación del estado estacionario de la velocidad horizontal u obtenido con el modelo $MPP k - \varepsilon$, usando las tabulaciones II, y el modelo $k - \varepsilon$.

menos preciso, debido a que no tiene en cuenta algunos efectos relevantes de la compresibilidad en pequeña escala. Sin embargo, esta referencia nos va a permitir comprobar algunas propiedades importantes de nuestro código.

Condiciones de cálculo

El experimento de Goebel consiste en una capa de mezcla que se desarrolla en un túnel de dimensiones $0.384 \text{ mm.} \times 0.048 \text{ mm.}$, a partir de dos flujos con las



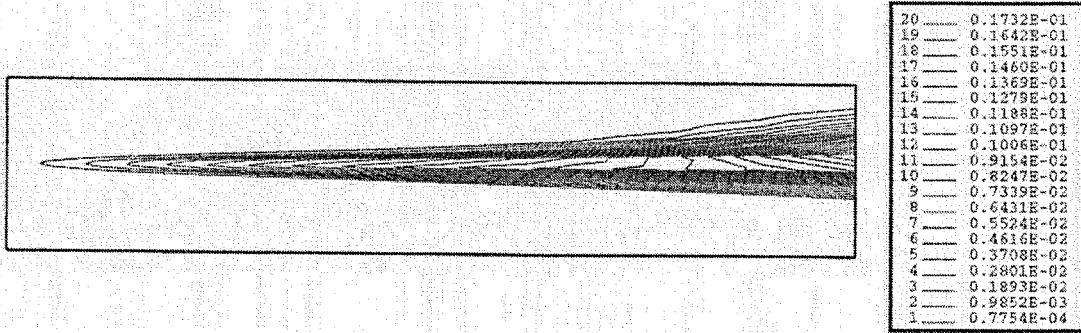
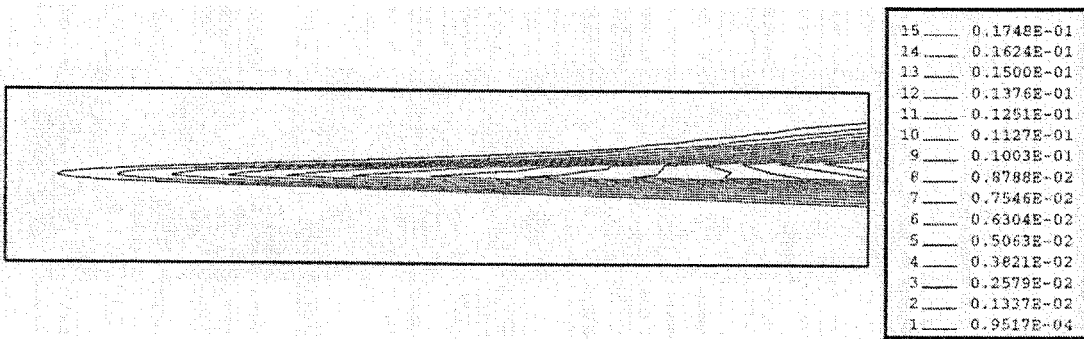
a) Isovalores de k con el modelo $MPP k - \epsilon$.b) Isovalores de k con el modelo $k - \epsilon$.

Figura 5.10: Comparación del estado estacionario de k obtenido con el modelo $MPP k - \epsilon$, usando las tabulaciones II, y el modelo $k - \epsilon$.

características siguientes:

$$\rho_1 = 0.295 \text{ Kg/s}^2 \quad \rho_2 = 0.46 \text{ Kg/s}^2$$

$$u_1 = 700 \text{ m/s} \quad u_2 = 406 \text{ m/s}$$

$$p_1 = 28302.4 \text{ Pa} \quad p_2 \simeq p_1$$

$$M_1 = 1.91 \quad M_2 = 1.37$$

Se trata pues de una capa de mezcla supersónica. Los parámetros que la caracterizan valen:

$$r = \frac{u_2}{u_1} = 0.58, \quad s = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1.56, \quad M_c = 0.45$$

Para adimensionalizar las ecuaciones se consideran las siguientes magni-

tudes de referencia:

$$L_0 = 48 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho_0 = 0.295 \text{ Kg/s}^2, \quad V_0 = 700 \text{ m/s}.$$

Es decir, como longitud de referencia se toma la altura del túnel de experimentación y como densidad y velocidad de referencia las del flujo superior. Esto da lugar a un número de Reynolds $Re = 8.64 \cdot 10^5$.

Las nuevas variables normalizadas toman valores en el rectángulo

$$\Omega = (0, 8) \times (-0.5, 0.5),$$

que será nuestro dominio computacional. Guezengar en [30], realiza una investigación numérica de la independencia respecto de la malla de la solución estacionaria obtenida a partir de este mismo flujo para el modelo $k - \varepsilon$. Utilizando un mallado con 570 nodos, los resultados obtenidos ponen en evidencia que esta malla no es suficiente fina para simular los fenómenos que se producen en pequeña escala, sobre todo en la interfaz entre los dos fluidos, donde los gradientes son más fuertes. Sin embargo, la variación de los resultados obtenidos con diferentes mallas de unos 2.000 nodos en adelante es muy pequeña. Teniendo en cuenta estos resultados, por economía de cálculo, en nuestros ensayos hemos optado por utilizar generalmente una malla de 2.183 nodos, de características similares a la malla de 290 nodos utilizada en los ensayos subsónicos.

Para el primer ensayo con $M_c = 0.45$, las condiciones iniciales que hemos utilizado provienen directamente de los datos del experimento de Goebel et al. tras la adimensionalización. Estos perfiles están representados en la Figura 5.11. Para los siguientes ensayos con $M_c = 0.65$ y $M_c = 1$, se han mantenido las mismas condiciones iniciales, excepto el campo de velocidades que ha sido reescalado para modificar el número de Mach convectivo. Teniendo en cuenta la definición de M_c (5.1), si a partir del campo de velocidades con valores u_i definimos otro campo de velocidades con valores u'_i tal que $u'_i = \lambda u_i$, entonces el número de Mach

convectivo del flujo correspondiente vale $M'_c = \lambda M_c$. Por tanto, los parámetros r y s se han mantenido constantes en los tres ensayos

$$r = 0.58, \quad s = 1.56,$$

y hemos modificado sólo los números de Mach:

$M_c = 0.45$	$M_1 = 1.91$	$M_2 = 1.37$	$Re = 8.64 \cdot 10^5$
$M_c = 0.65$	$M_1 = 2.76$	$M_2 = 1.98$	$Re = 12.48 \cdot 10^5$
$M_c = 1$	$M_1 = 4.24$	$M_2 = 3.04$	$Re = 19.2 \cdot 10^5$

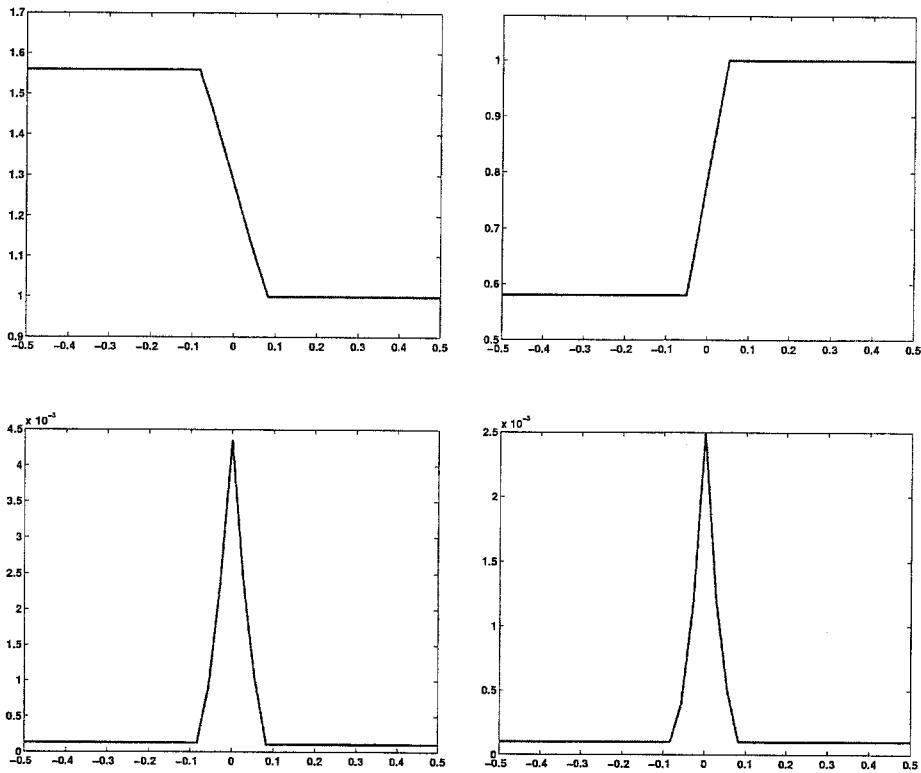


Figura 5.11: Perfiles iniciales de la densidad, la velocidad horizontal, k y ϵ utilizados en los ensayos supersónicos.

Como condiciones de contorno, al igual que en los ensayos subsónicos, hemos considerado las condiciones fijadas en (4.8), tomando como valores ρ_∞ , v_∞ , p_∞ , a_∞ , k_∞ , y ε_∞ las restricciones de las condiciones iniciales a la frontera.

Finalmente, como concluimos en la sección anterior, para calcular los términos de cierre hemos utilizado el tipo de tabulaciones II.

Resultados

En todos estos ensayos, los resultados obtenidos con nuestro modelo son similares a los obtenidos con el modelo $k - \varepsilon$. En cada etapa de tiempo, hemos medido los residuos normalizados de las variables ρ y $\rho\varepsilon$ para determinar el estado final del flujo. Para $M_c = 0.45$ el flujo alcanza el estado estacionario. Para los ensayos con números de Mach convectivo superiores, el flujo límite es cuasi-estacionario, con residuos del orden de 10^{-3} que oscilan débilmente. Este comportamiento coincide con el del código $k - \varepsilon$, que usamos como referencia.

Por otra parte, los ensayos realizados nos han permitido conferir algunas buenas propiedades a nuestro código. Así los resultados obtenidos son totalmente independientes de la malla y las condiciones de contorno se imponen de forma adecuada. También hemos comprobado una buena estabilidad, aunque para ello sea necesario acortar los pasos de tiempo, en función del número CFL, conforme el número de Mach es más elevado, como es de esperar.

En las Figuras 5.12 y 5.13 podemos apreciar la regularidad de los estados de k y ε calculados, para cada uno de los diferentes valores de M_c .

Según [5], puesto que los ensayos realizados corresponden a una capa de mezcla que alcanza el estado estacionario o cuasi-estacionario, los estadísticos del flujo límite que deben ser testados son principalmente los perfiles similares de la

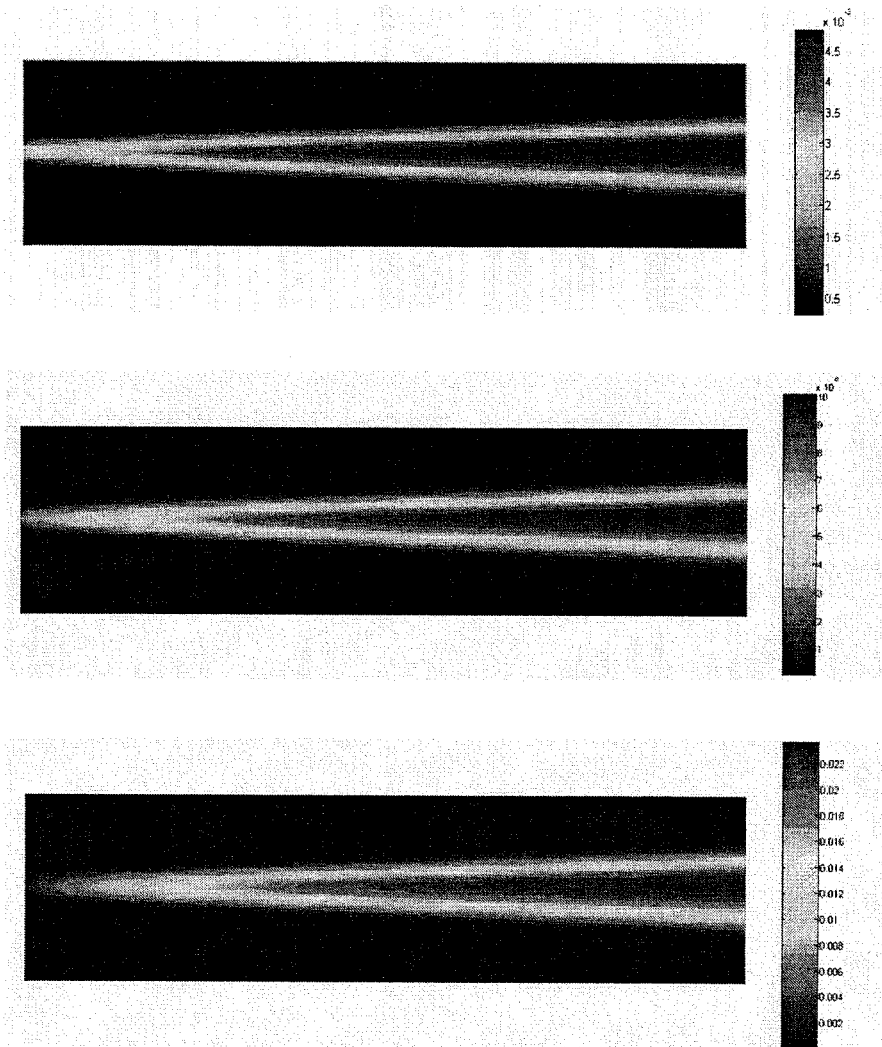


Figura 5.12: Estado estacionario de k para $M_c = 0.45$, $M_c = 0.65$ y $M_c = 1$.

velocidad horizontal y de la energía cinética turbulenta y la tasa de expansión.

La autosimilitud constituye un buen test para analizar si la solución numérica estacionaria obtenida es aceptable físicamente. Si denotamos por x a la variable longitudinal a lo largo de la capa de mezcla e y a la variable transversal, para definir los perfiles similares consideramos la variable

$$y^s = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

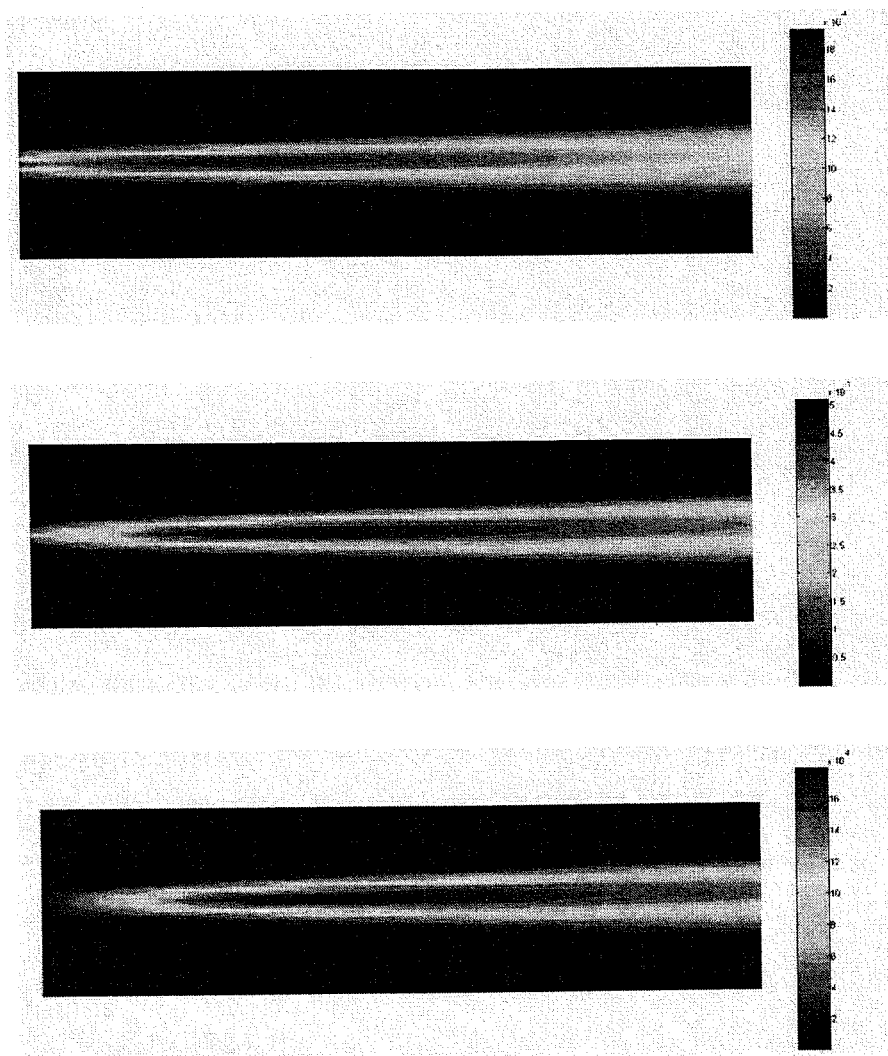


Figura 5.13: Estado estacionario de ε para $M_c = 0.45$, $M_c = 0.65$ y $M_c = 1$.

donde y_1 e y_2 son las ordenadas definidas en (5.3). Entonces, para cada valor de x , los perfiles similares de la velocidad horizontal y la energía cinética turbulenta se construyen como las curvas:

$$u^s(x, y^s) = \frac{u(x, y^s) - u_1}{u_2 - u_1}, \quad k^s(x, y^s) = \frac{k(x, y^s)}{\max_y k(x, y)},$$

en función de la variable y^s . Diremos que una solución es autosimilar cuando sus perfiles similares son independientes de la variable longitudinal x . Como puede observarse en la Figura 5.14, nuestros resultados producen perfiles autosimilares

para la velocidad media horizontal y la energía cinética turbulenta, aunque para esta variable la autosimilitud es más débil que para la velocidad.

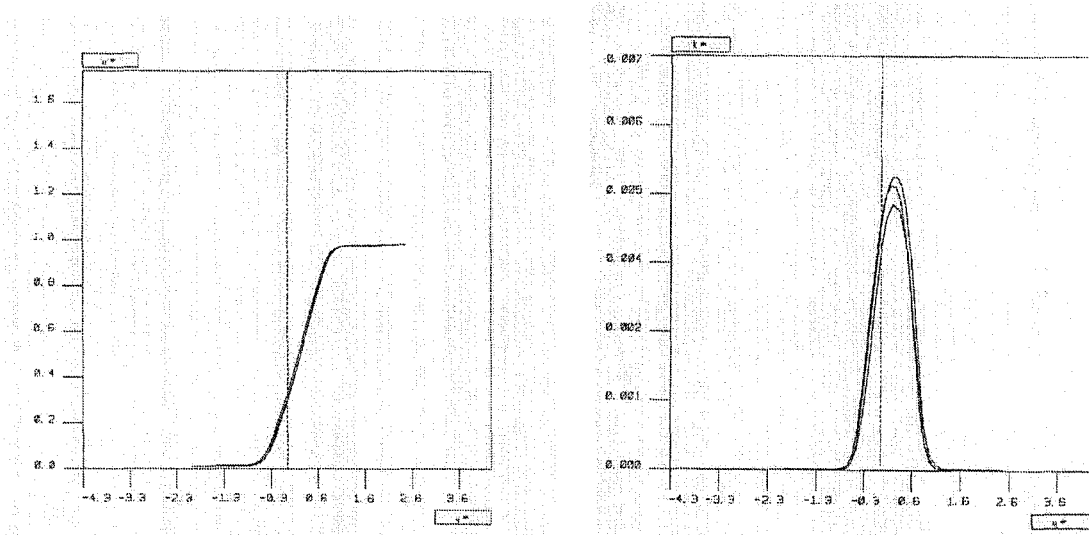
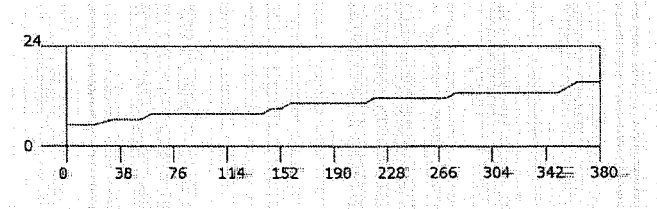


Figura 5.14: Perfiles similares para la velocidad horizontal y k para $M_c = 0.45$.

También hemos analizado en nuestros experimentos el comportamiento de la expansión de la capa de mezcla. Los resultados obtenidos constatan que el espesor de la capa de mezcla tiene un crecimiento cuasi-lineal, tal y como se deduce de las mediciones experimentales (Figura 5.15).

La tabla 5.2 nos permite comparar los valores de la tasa de expansión de la capa δ' con $M_c = 0.45$, la tasa de expansión de la capa incompresible δ'_0 con $M_c \sim 0$ y la tasa de expansión normalizada δ'_n , obtenidos a partir de nuestro modelo híbrido y el modelo $k - \varepsilon$ en los ensayos de C. Le Ribault (CLR) y D. Guezengar (DG), así como los calculados a partir de las medidas experimentales de Goebel et al.

Como se deduce de estos datos, la variación entre las tasas de expansión δ' y δ'_0 calculadas con los diferentes códigos es bien pequeña. Sin embargo, existen diferencias notables con la obtenida a partir de las medidas experimentales. Por ello, para calcular la tasa de expansión normalizada δ'_n se ha utilizado el valor

Figura 5.15: Espesor de la capa de mezcla para $M_c = 0.45$.

	CLR	DG	Híbrido	Goebel
δ'_0	0.034	0.034	0.027	0.042
δ'	0.031	0.032	0.028	0.045
δ'_n	0.91	0.94	1.031	1.071

Tabla 5.2: Tasa de expansión de la capa para $M_c = 0.45$.

de δ'_0 calculado numéricamente con el mismo código considerando un flujo con $M_c = 0.05$.

En el ensayo con $M_c = 0.45$, el valor obtenido con nuestro modelo para $\delta'_n = 1.031$ mejora los resultados del modelo $k - \varepsilon$, teniendo en cuenta los valores medidos experimentalmente por Goebel et al. $\delta'_n = 1.071$ y Langley $\delta'_n = 1$ (Figura 5.2). Sin embargo, en los ensayos con $M_c = 0.65$ y $M_c = 1$ hemos seguido obteniendo el mismo valor para δ'_n , en discrepancia con los resultados experimentales, según los cuales los efectos de la compresibilidad producen un decrecimiento de δ'_n para valores de M_c por encima de 0.5.

Realmente este hecho no es sorprendente, puesto que nuestro modelo, al igual que el modelo $k - \varepsilon$ estándar, no tiene en cuenta los efectos de la compresibilidad en micro-estructura.

Los efectos de la compresibilidad son tenidos en cuenta por modelos es-

pecíficos como el de Zeman [66] o el de Sarkar [55]. Ambos modelos introducen un incremento de la tasa de disipación turbulenta. En el primer caso, basándose en la dilatación producida por la formación de choques. En el segundo caso, basándose en un análisis asintótico de los diferentes términos que intervienen en la expresión de la variable $\rho\varepsilon$. Los experimentos de Guezengar [31] con el modelo de Sarkar confirman las predicciones experimentales sobre el valor de δ'_n .

5.4 Análisis sobre los términos en D_c

La diferencia fundamental que presenta nuestro modelo híbrido frente al modelo $k - \varepsilon$, es la aportación de los términos en D_c (tanto en la ecuación de conservación del momento como de la energía interna).

Un primer efecto relevante de estos términos es que su estado cuasi-estacionario tarda notablemente más tiempo en alcanzarse que el del modelo $k - \varepsilon$. En concreto, para obtener un residuo normalizado

$$\frac{\|W^{n+1} - W^n\|_\infty}{\|W^1 - W^0\|_\infty} \leq 10^{-3},$$

nuestro modelo requiere un tiempo de cálculo mucho mayor que el $k - \varepsilon$.

Podemos entender bien este efecto si observamos los resultados representados en las Figuras 5.16 y 5.17. En 5.16 representamos la norma de la matriz D_c para la solución cuasi-estacionaria. Su talla es del orden de 10^6 , lo cual es coherente con el hecho de que corresponde a valores transitorios del gradiente de las coordenadas lagrangianas para tiempos muy grandes.

En la Figura 5.17 representamos la primera y segunda componentes del término adicional que aparece en la ecuación de conservación del momento en nuestro modelo, $\nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c)$. Como vemos la talla de ambas componentes es del orden de 10^{-3} , similar a la talla del residuo de la solución cuasi-estacionaria.

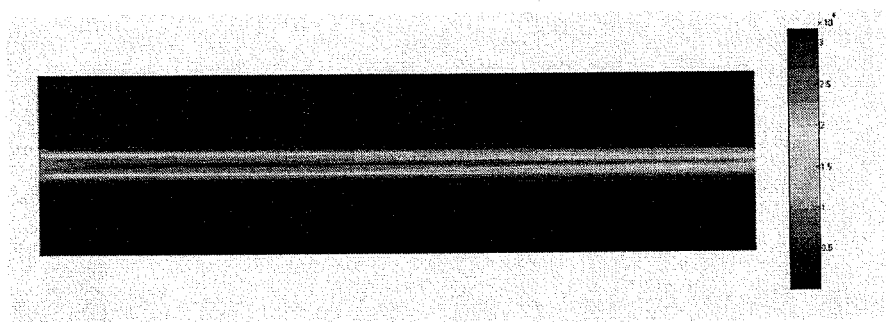


Figura 5.16: Isovalores de la norma de la matriz D_c con $M_c = 0.45$.

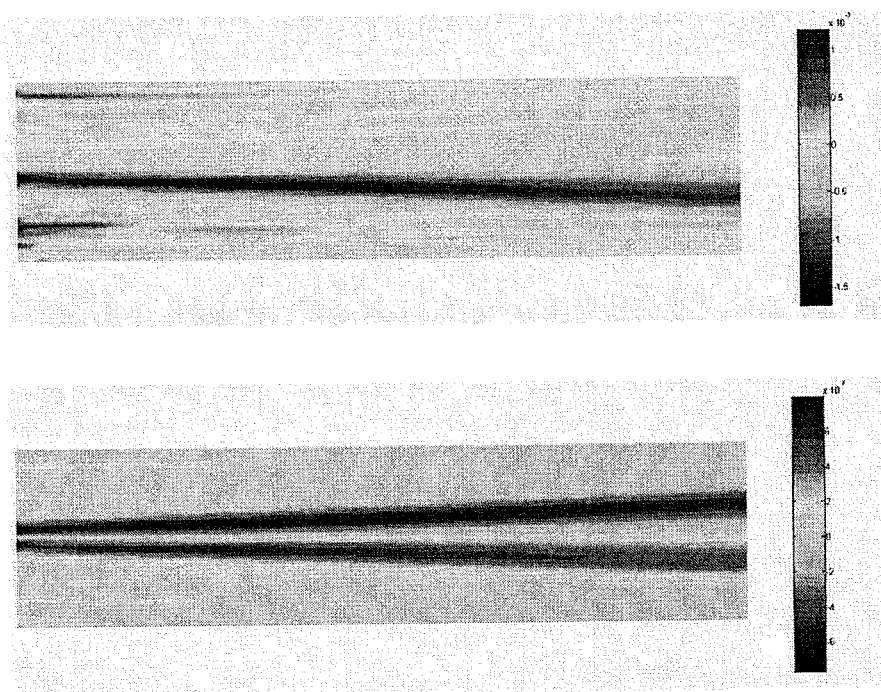


Figura 5.17: Isovalores del término $\nabla \cdot (\beta_1 \rho k D_c)$ con $M_c = 0.45$.

Por otra parte, las componentes del nuevo término contienen información sobre la estructura anisótropa de la capa de mezcla. Observemos como la primera componente es no nula únicamente en la capa inferior, mientras que la segunda lo es en las dos. Además, ambas alcanzan sus máximos lejos del eje intermedio (donde se alcanzan los mayores gradientes de velocidad y efectos de mezcla), en el interior de las zonas superior e inferior.

Hemos de decir, además, que este análisis es válido independientemente de las tabulaciones de los términos de cierre que hayamos elegido, ya que dada la talla de la matriz D_c , nos encontramos en un régimen para el cual el coeficiente β_1 es muy pequeño.

En suma, los nuevos términos aportados por nuestro modelo en relación al modelo $k - \varepsilon$:

- a) Proporcionan resultados similares al modelo $k - \varepsilon$ en lo concerniente al comportamiento autosimilar y macroscópico de la solución cuasi-estacionaria de la capa de mezcla turbulenta.
- b) Aportan información relevante sobre la estructura de la capa de mezcla, y en particular sobre sus características anisótropas.

Capítulo 6

Análisis de paso al límite singular en las condiciones de contorno

En el capítulo 4, veíamos que en el método desarrollado para resolver numéricamente el modelo híbrido las condiciones de contorno se imponen de una forma no estándar. Concretamente, comprobamos que esta forma equivale a imponer en la frontera de entrada de flujo el flujo total normal en vez del flujo convectivo normal, como sería lo adecuado. En este capítulo, nos planteamos el problema de analizar si esta forma de imponer numéricamente las condiciones de contorno es correcta, cuando el flujo en la frontera de entrada es predominantemente convectivo.

Con el objetivo de dar respuesta a la cuestión planteada, consideramos un modelo lineal compuesto por una ecuación de convección-difusión con condiciones de contorno análogas a las que imponemos en nuestro esquema numérico. Sobre este modelo, nos planteamos el problema de demostrar que cuando el coeficiente de difusión tiende a cero, su solución converge a la del problema de convección pura con condiciones de tipo Dirichlet en la frontera de entrada. Como consecuencia del análisis desarrollado, somos capaces de dar una respuesta afirmativa

a la cuestión planteada.

Concretamente, demostramos convergencia débil en un espacio de Hilbert adecuado (cuya norma incluye la derivada convectiva) y convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$, así como de las trazas “convectivas”. La clave para ello, reside en obtener estimaciones a priori adecuadas, utilizando funciones test convenientemente elegidas.

Todo ello es posible si el flujo posee la propiedad de ser “rellenante”. Esto es, que las trayectorias que parten de la frontera de entrada rellenan el dominio, salvo un conjunto de medida nula, en un tiempo finito. Esencialmente, esto permite reescribir la ecuación de convección como un ecuación diferencial ordinaria mediante la transformación dada por la aplicación de flujo. Trataremos esta ecuación usando la formulación variacional y la teoría desarrollada por Azérad en [2].

Algunas referencias relacionadas con el problema que aquí tratamos son los trabajos de Bardós [4] y Lions [43]. Las diferencias fundamentales de estos trabajos respecto al nuestro son dos: por una parte, añaden un término lineal a la ecuación de convección-difusión que permite controlar el término convectivo. Por otra parte, consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas. De esta manera, sus estudios se centran en el paso al límite en la ecuación de convección-difusión y no en las condiciones de contorno, como es lo relevante en nuestro caso.

6.1 Planteamiento del problema

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n de clase C^1 y frontera Γ . Denotamos por $d\gamma$ a la medida de Lebesgue en Γ y \mathbf{n} al vector normal unitario y exterior que está

definido c.p.d. en la frontera Γ .

Consideramos un campo de velocidades definido en un abierto V que contiene a $\bar{\Omega}$, $\mathbf{v} : V \mapsto \mathbb{R}^n$, que supondremos con divergencia nula, y en función del cual, descomponemos la frontera de la forma $\Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^0$, donde

$$\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\},$$

$$\Gamma^+ = \{x \in \partial\Omega, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\},$$

$$\Gamma^0 = \{x \in \partial\Omega, \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0\}.$$

Es decir, Γ^- representa la frontera de entrada de flujo, Γ^+ la frontera de salida y Γ^0 la frontera por la que el flujo se desliza.

Consideramos también una función f definida en Ω , una función g definida en la frontera Γ^- y un parámetro μ positivo destinado a tender a cero. Con todos estos datos, planteamos el siguiente problema de convección-difusión:

$$(P_{cd}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w \text{ tal que} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w - \mu \Delta w = f \quad \text{en } \Omega; \\ w \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \mu \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma^-; \\ \mu \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \Gamma^+ \cup \Gamma^0. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Notemos que como $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ en Ω , la ecuación de este problema se puede escribir de la forma $\nabla \cdot L = f$, con $L = \mathbf{v} w - \mu \nabla w$ (como una ley de conservación). Por tanto, lo que estamos imponiendo en la frontera de entrada Γ^- es el flujo total normal, $L \cdot \mathbf{n}$. En cambio, en la frontera de salida Γ^+ imponemos que el flujo normal sea nulo, con lo que implícitamente suponemos que el flujo dominante es el convectivo.

Nuestro objetivo es comprobar que cuando en el problema de convección-difusión (P_{cd}) el término convectivo es dominante, el comportamiento de su

solución se aproxima al de la solución del problema de convección pura:

$$(P_c) \begin{cases} \text{Hallar } w \text{ tal que} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla w = f \quad \text{en } \Omega; \\ w = g \quad \text{en } \Gamma^-. \end{cases} \quad (6.2)$$

En concreto, tratamos de demostrar que cuando el parámetro μ tiende a cero, la sucesión formada por las soluciones de los problemas (P_{cd}) , converge a una función que resulta ser solución en algún sentido del problema (P_c) .

Antes de abordar el estudio de la convergencia, presentamos algunos resultados teóricos que nos garantizan que ambos problemas, el problema de convección-difusión y el problema de convección, están bien definidos. Para ello, necesitamos fijar la regularidad de los datos que vamos a considerar.

Definimos el espacio $L_{\mathbf{v}}^2(\Gamma^-)$ de las funciones α definidas sobre Γ^- que tienen cuadrado sumable en Γ^- , respecto de la medida $d\gamma$ con peso $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|$. Este espacio es un espacio de Hilbert dotado del producto escalar

$$(\alpha, \beta)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} = \int_{\Gamma^-} \alpha \beta |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma$$

y la norma $\|\alpha\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}} = \left(\int_{\Gamma^-} \alpha^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma \right)^{1/2}$. Y análogamente definimos también el espacio $L_{\mathbf{v}}^2(\Gamma^+)$, dotado del producto escalar $(\cdot, \cdot)_{\Gamma^+, \mathbf{v}}$ y la norma $\|\cdot\|_{\Gamma^+, \mathbf{v}}$.

Suponemos que los datos tienen la siguiente regularidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\in C^1(V), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } V, \\ f &\in L^2(\Omega), \\ g &\in L_{\mathbf{v}}^2(\Gamma^-). \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.2 Estudio del problema de convección-difusión

El problema (P_{cd}) es un problema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico con condiciones de contorno de tipo Robin y Newmann. Gracias a la regularidad de los datos que hemos supuesto, este problema se puede englobar en el marco hilbertiano habitual. En concreto, consideramos la siguiente formulación variacional del problema (P_{cd}) :

$$(PV_{cd}) \begin{cases} \text{Hallar } w_\mu \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a_{\mathbf{v}}(w_\mu, \varphi) = l_{\mathbf{v}}(\varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (6.4)$$

donde las formas $a_{\mathbf{v}}$ y $l_{\mathbf{v}}$ se definen como:

$$a_{\mathbf{v}}(w, \varphi) = (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_\Omega + (w, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} + \mu(\nabla w, \nabla \varphi)_\Omega \quad (6.5)$$

$$l_{\mathbf{v}}(\varphi) = (f, \varphi)_\Omega + (g, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}}$$

denotando por $(\cdot, \cdot)_\Omega$ el producto escalar usual en $L^2(\Omega)$.

Es inmediato comprobar que, con la regularidad de los datos que hemos supuesto, este problema está bien planteado y verifica el siguiente resultado de existencia y unicidad de solución.

Teorema 6.1 *Bajo las hipótesis (6.3), el problema (PV_{cd}) admite una única solución $w_\mu \in H^1(\Omega)$. Además esta solución depende de forma continua de los datos, es decir, existe una constante positiva $c(\Omega, \mu, c_{\mathbf{v}})$ (dependiente de Ω , μ y $c_{\mathbf{v}}$) tal que*

$$\|w_\mu\|_{1,\Omega} \leq c(\Omega, \mu, c_{\mathbf{v}}) (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}),$$

siendo $c_{\mathbf{v}} = \max_{\Omega} |\mathbf{v}(x)|$.

Demostración:

Consideramos en $H^1(\Omega)$ la norma

$$\|w\| = [\|\nabla w\|_{0,\Omega}^2 + \|w\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}^2 + \|w\|_{\Gamma^+, \mathbf{v}}^2]^{1/2},$$

que es equivalente a la norma usual en $H^1(\Omega)$.

Es evidente que $a_{\mathbf{v}}$ es una forma bilineal en $H^1(\Omega)$. También es inmediato comprobar que es continua:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{v}}(w, \varphi) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_{\Omega} + (w, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} + \mu(\nabla w, \nabla \varphi)_{\Omega} \\ &\leq c_{\mathbf{v}} \|\nabla w\|_{0, \Omega} \|\varphi\|_{0, \Omega} + c_{\mathbf{v}} \|w\|_{0, \Gamma^-} \|\varphi\|_{0, \Gamma^-} + \mu \|\nabla w\|_{0, \Omega} \|\nabla \varphi\|_{0, \Omega} \\ &\leq c(\Omega, \mu, c_{\mathbf{v}}) \|w\|_{1, \Omega} \|\varphi\|_{1, \Omega}, \end{aligned}$$

siendo $c_{\mathbf{v}} = \max_{\Omega} |\mathbf{v}(x)|$.

Por último veamos que $a_{\mathbf{v}}$ es coercitiva en $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{v}}(w, w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla(w^2) dx + \int_{\Gamma^-} w^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma + \mu \|\nabla w\|_{0, \Omega}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} w^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\gamma + \int_{\Gamma^-} w^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma + \mu \|\nabla w\|_{0, \Omega}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \|w\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2} \|w\|_{\Gamma^+, \mathbf{v}}^2 + \mu \|\nabla w\|_{0, \Omega}^2 \geq \mu \|w\|^2 \geq \mu c(\Omega) \|w\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Para estas últimas desigualdades se ha tenido en cuenta que μ es un parámetro que tiende a cero y la equivalencia entre las normas.

Por otra parte, $l_{\mathbf{v}}$ es una forma lineal y continua en $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{v}}(\varphi) &= (f, \varphi)_{\Omega} + (g, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} \\ &\leq \|f\|_{0, \Omega} \|\varphi\|_{0, \Omega} + c_{\mathbf{v}} \|\varphi\|_{0, \Gamma^-} \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}} \\ &\leq (\|f\|_{0, \Omega} + c_{\mathbf{v}} c(\Omega) \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}) \|\varphi\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Lax-Milgram que nos garantiza que el problema variacional (PV_{cd}) tiene una única solución w_{μ} . Además como

$$\mu c(\Omega) \|w_{\mu}\|_{1, \Omega}^2 \leq a_{\mathbf{v}}(w_{\mu}, w_{\mu}) = l_{\mathbf{v}}(w_{\mu}) \leq (\|f\|_{0, \Omega} + c_{\mathbf{v}} c(\Omega) \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}) \|w_{\mu}\|_{1, \Omega},$$

se tiene que

$$\|w_\mu\|_{1,\Omega} \leq \frac{c(\Omega, c\mathbf{v})}{\mu} (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}), \quad c(\Omega, \mu, c\mathbf{v}) = \frac{c(\Omega, c\mathbf{v})}{\mu}.$$

Es decir, la solución depende de forma continua de los datos. \otimes

Nota 6.2 El resultado anterior sigue siendo cierto si \mathbf{v} es menos regular. Por ejemplo si $n \leq 3$, es suficiente que $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, en cuyo caso $c\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}$.

Nota 6.3 Observemos que en el teorema anterior, la constante $c(\Omega, \mu, c\mathbf{v})$ que acota la norma de w_μ en $H^1(\Omega)$ respecto de los datos es $O(\frac{1}{\mu})$. Ello supone una primera dificultad para el estudio de la convergencia, ya que cuando $\mu \rightarrow 0$ no se puede obtener acotación independiente de μ de la solución w_μ en $H^1(\Omega)$. En realidad, es natural que sea así pues no hay razones para que la solución de la ecuación de convección esté en $H^1(\Omega)$ (las derivadas en la dirección ortogonal a \mathbf{v} no tienen por qué estar acotadas).

6.3 Estudio del problema de convección

El problema (P_c) es un problema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Sin embargo, es posible darle un tratamiento variacional análogo al habitual para un problema elíptico, siguiendo las ideas de Azérad en [2].

Para ello, empezamos presentando el marco funcional en el que se formula el problema de convección.

6.3.1 Espacio funcional

Se considera el espacio funcional

$$H(\mathbf{v}, \Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Omega)\},$$

dotado del producto escalar

$$(\varphi, \psi)_H = (\varphi, \psi)_\Omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \mathbf{v} \cdot \nabla \psi)_\Omega$$

y de la norma

$$\|\varphi\|_H = [\|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi\|_{0,\Omega}^2]^{1/2}.$$

Describimos ahora algunas propiedades importantes de este espacio y otros relacionados con él, que necesitaremos utilizar en nuestro análisis posterior. Para ver las demostraciones de estos resultados pueden consultarse las referencias [4] y [23].

Lema 6.4 *El espacio $H(\mathbf{v}, \Omega)$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en él.*

La demostración de que $H(\mathbf{v}, \Omega)$ es un espacio de Hilbert, es inmediata. En concreto mediante la técnica estándar se prueba que es un espacio completo. La demostración de la densidad se prueba en [4] bajo condiciones de regularidad para la frontera más débiles que las que nosotros suponemos.

Los resultados y definiciones que presentamos a continuación, los enunciamos sólo para la frontera Γ^- , por no complicar la notación, pero se tienen los análogos para la frontera Γ^+ .

Para poder tratar la condición de contorno de tipo Dirichlet necesitamos definir las trazas de las funciones de $H(\mathbf{v}, \Omega)$. En relación a ello, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.5 Sea K un subconjunto compacto de Γ^- . La aplicación traza $\varphi \mapsto \varphi|_K$ definida sobre $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ se prolonga por continuidad a una aplicación continua de $H(\mathbf{v}, \Omega)$ en $L^2(K)$.

Este resultado nos permite definir las trazas de las funciones de $H(\mathbf{v}, \Omega)$:

Definición 6.6 Definimos la aplicación traza sobre Γ^-

$$\begin{aligned} \gamma^- : H(\mathbf{v}, \Omega) &\mapsto L^2_{\text{loc}}(\Gamma^-) \\ \varphi &\mapsto \gamma^-(\varphi) \end{aligned}$$

como la prolongación por continuidad de la aplicación traza en $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Es decir, dada $\varphi \in H(\mathbf{v}, \Omega)$ consideramos una sucesión $\varphi_n \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ en $H(\mathbf{v}, \Omega)$, entonces definimos $\gamma^-(\varphi) = \varphi|_{\Gamma^-} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n|_{\Gamma^-}$.

Como es habitual, consideramos los espacios que engloban la condición Dirichlet homogénea. Para ello:

Definición 6.7 Se define el espacio

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) : \varphi|_{\Gamma^-} = 0\}$$

y se designa por $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$ a la clausura de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$ en $H(\mathbf{v}, \Omega)$.

Teorema 6.8 $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$ es el núcleo de γ^- , la aplicación traza sobre Γ^- de $H(\mathbf{v}, \Omega)$ en $L^2_{\text{loc}}(\Gamma^-)$. Es decir,

$$H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-) = \{\varphi \in H(\mathbf{v}, \Omega) : \varphi|_{\Gamma^-} = 0\},$$

entendiendo que $\varphi|_{\Gamma^-} = 0$, si lo es sobre cada compacto contenido en Γ^- .



Como hemos visto las trazas de las funciones de $H(\mathbf{v}, \Omega)$ están en $L^2_{\text{loc}}(\Gamma^\pm)$. Sin embargo, no están necesariamente en los espacios $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^\pm)$. En [4] puede encontrarse un ejemplo de que esto no ocurre. En consecuencia, la fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \psi \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Gamma^+} \psi \varphi |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma - \int_{\Gamma^-} \psi \varphi |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma, \quad (6.6)$$

que se verifica $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, no puede ser extendida directamente al espacio $H(\mathbf{v}, \Omega)$. Para salvar este inconveniente, se considera el subespacio de $H(\mathbf{v}, \Omega)$:

$$\tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega) = \{\varphi \in H(\mathbf{v}, \Omega) : \varphi|_{\Gamma^-} \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-) \text{ y } \varphi|_{\Gamma^+} \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^+)\},$$

sobre el que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6.9

i) La fórmula de Green (6.6) es cierta $\forall \psi, \varphi \in \tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega)$.

ii) El espacio $\tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega)$ puede ser identificado con

$$\{\varphi \in H(\mathbf{v}, \Omega) : \varphi|_{\Gamma^-} \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)\}$$

o con

$$\{\varphi \in H(\mathbf{v}, \Omega) : \varphi|_{\Gamma^+} \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^+)\}.$$

De nuevo la demostración de este teorema se encuentra en [4].

Una consecuencia inmediata de ii) es que los espacios $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^\pm)$ están contenidos en $\tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega)$, y por tanto es posible aplicar en ellos la fórmula de Green (6.6).

Por similitud con los problemas con condiciones de tipo Dirichlet homogéneas, parece natural plantear la formulación variacional del problema de convección (P_c) en el espacio $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$. Recordemos, que en el espacio $H_0^1(\Omega)$ se dispone de una potente herramienta como es la desigualdad de Poincaré. En

este caso, vamos a disponer de una desigualdad del mismo tipo sobre el espacio $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$, que se conoce como desigualdad de Poincaré curva (DPC). Esta desigualdad afirma que existe una constante $c = c(\mathbf{v}, \Omega) > 0$ positiva tal que

$$\|\varphi\|_{0,\Omega} \leq c \|\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi\|_{0,\Omega} \quad \forall \varphi \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^\pm). \quad (6.7)$$

Una de las consecuencias más importantes de esta desigualdad en el desarrollo de nuestro análisis, es el hecho de que permite probar el siguiente resultado de densidad.

Lema 6.10 *Si se verifica la (DPC) (6.7), los conjuntos $\{\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi; \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+)\}$ y $\{\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi; \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)\}$ son densos en $L^2(\Omega)$.*

La demostración de este lema está hecha en [2].

Debido a su importancia, nos preocupamos en primer lugar de conocer cuando es cierta la desigualdad de Poincaré curva, y encontramos que una condición suficiente para que se verifique, es que el flujo tenga la propiedad de ser ‘rellenante’, que describimos a continuación.

6.3.2 Flujo rellenanante

Para definir exactamente esta propiedad, consideramos las trayectorias del flujo, es decir, para cada $x \in V$, los conjuntos $\{\phi_x(t), t \in I_x\}$, donde $\phi_x : I_x \mapsto V$ es la única solución maximal del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) = \mathbf{v}(\phi(t)) \\ \phi(0) = x \end{cases} \quad (6.8)$$

A partir de las trayectorias, definimos la función de flujo

$$\phi : I \times V \mapsto V, \text{ tal que } \phi(t, x) = \phi_x(t) \quad (6.9)$$

con $I = \bigcup_{x \in V} I_x$.

Definición 6.11 [Flujo rellenante] Diremos que el flujo gobernado por el campo de velocidades \mathbf{v} es **rellenante** si existe una constante $T > 0$, tal que p.c.t. $x \in \bar{\Omega}$, existe un punto en la frontera de entrada, $x^- \in \Gamma^-$, y un tiempo t_x , de manera que $0 \leq t_x \leq T$ y $\phi(t_x, x^-) = x$. Es decir, las trayectorias que parten de la frontera de entrada rellenan todo $\bar{\Omega}$, salvo un conjunto de medida nula, y en un tiempo finito y acotado uniformemente por la constante T .

Como consecuencia de que el flujo sea rellenante se verifica el siguiente resultado:

Teorema 6.12 *Un flujo gobernado por un campo de velocidades \mathbf{v} con divergencia nula, que es rellenante verifica la (DPC) (6.7).*

La demostración de este resultado puede leerse en [2]. La idea de la prueba consiste en redireccionar globalmente el campo de velocidades que gobierna el flujo y aplicar la desigualdad de Poincaré clásica.

Azérad en [2] da también una condición suficiente para que el flujo sea rellenante:

Proposición 6.13 *Si el campo de velocidades $\mathbf{v} \in C^1(V)$ y existe una dirección dada por un vector unitario fijo k y un número $\alpha > 0$ tales que:*

$$\mathbf{v}(x) \cdot k \geq \alpha, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

entonces el flujo es rellenante.

6.3.3 El problema de convección homogéneo

Una vez presentado el espacio funcional natural para estudiar el problema de convección, estamos ya en condiciones de plantear su formulación variacional. Comenzamos estudiando el caso en el que la condición de contorno de tipo Dirichlet es homogénea. En este caso, el problema se escribe como:

$$(PV_c)_0 \begin{cases} \text{Hallar } w \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-) \text{ tal que} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_\Omega = (f, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (6.10)$$

Teorema 6.14 *Bajo las hipótesis (6.3), si el flujo verifica la (DPC) (6.7) entonces el problema $(PV_c)_0$ admite una única solución $w \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$. Además esta solución depende de forma continua de los datos, es decir, existe una constante $c = c(\mathbf{v}, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|w\|_H \leq c \|f\|_{0,\Omega}.$$

Demostración:

Damos aquí un esbozo de la demostración, que con detalle puede encontrarse en [2].

En primer lugar se prueba que la formulación variacional (6.10) es equivalente a la formulación variacional del problema (P_c) en el sentido de los mínimos cuadrados:

$$\begin{cases} \text{Hallar } w \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-) \text{ tal que} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_\Omega = (f, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-). \end{cases}$$

Esta equivalencia se tiene gracias al resultado de densidad (Lema 6.10) por el que las funciones $\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^-)$, son densas en $L^2(\Omega)$.



En segundo lugar, la (DPC) permite demostrar que la forma bilineal que interviene en esta nueva formulación variacional sea coercitiva. En consecuencia, se puede utilizar el teorema de Lax-Milgram para garantizar la existencia y unicidad de solución. \otimes

Nota 6.15 A partir de la fórmula de Green (6.6), se verifica que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \psi)_\Omega = (\varphi, -\mathbf{v} \cdot \nabla \psi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-), \quad \forall \psi \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+).$$

Teniendo esto en cuenta, el problema dual del problema de transporte $(PV_c)_0$ se escribe como

$$(PV_c)_0^* \begin{cases} \text{Hallar } w^* \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+) \text{ tal que} \\ (-\mathbf{v} \cdot \nabla w^*, \varphi)_\Omega = (f, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (6.11)$$

El problema $(PV_c)_0^*$ satisface las mismas hipótesis que el problema $(PV_c)_0$. En efecto, si denotamos simbólicamente al problema $(PV_c)_0$ por $\mathcal{P}(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$, entonces su problema dual es $\mathcal{P}(-\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+)$. Y si el flujo con velocidad \mathbf{v} es rellenante, entonces el flujo con velocidad $-\mathbf{v}$ también lo es. Por tanto, podemos asegurar que el problema dual también tiene solución y es única.

Nota 6.16 El teorema 6.14 nos dice que existe un isomorfismo entre $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$ y $L^2(\Omega)$, que se desarrolla mediante la convección por \mathbf{v} . (El resultado análogo se tiene para Γ^+).

6.3.4 El problema de convección no homogéneo

Abordamos ahora la formulación variacional del problema de transporte (P_c) cuando el dato de contorno en la frontera de entrada Γ^- es no nulo. Es decir,

dada una función $g \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)$, nos planteamos el problema de

$$(PV_c) \begin{cases} \text{Hallar } w \in \tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega) \text{ con } w|_{\Gamma^-} = g, \text{ tal que} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_{\Omega} = (f, \varphi)_{\Omega}, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (6.12)$$

También en este caso, es posible demostrar la existencia y unicidad de solución como hacemos a continuación. Recordamos las hipótesis sobre los datos que planteamos en (6.3):

$$\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(V), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } V,$$

$$f \in L^2(\Omega),$$

$$g \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-).$$

Teorema 6.17 *Bajo las hipótesis (6.3), si el flujo verifica la (DPC) (6.7) entonces el problema (PV_c) admite una única solución. Además esta solución depende de forma continua de los datos, es decir, existe una constante $c = c(\mathbf{v}, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_H \leq c(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}).$$

Demostración:

Unicidad

Supongamos que existen dos soluciones w_1 y w_2 . Entonces la función $w = w_1 - w_2$ pertenece a $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$ y verifica que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_{\Omega} = 0, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

Esto significa que w es solución del problema homogéneo $(PV_c)_0$ con término fuente nulo. Por el teorema 6.14 tenemos $\|w\|_H \leq c\|f\|_{0,\Omega} = 0$, luego $w_1 = w_2$.

Existencia

Procedemos por regularización de la condición de contorno, reducción al caso homogéneo y uso de un argumento de compacidad.

Teniendo en cuenta la regularidad de la frontera que estamos suponiendo, es posible construir una sucesión de funciones $G_n \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tal que $G_n|_{\Gamma^-} \rightarrow g$ en $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)$ [4].

Para cada función G_n , planteamos el problema de convección con término fuente modificado y condición de contorno homogénea siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_n \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-) \text{ tal que} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla u_n, \varphi)_\Omega = (f - \mathbf{v} \cdot \nabla G_n, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Sabemos que este problema tiene una única solución u_n por el teorema 6.14. Sea $w_n = u_n + G_n$, entonces para cada n se tiene que $w_n \in \tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega)$ y

$$w_n|_{\Gamma^-} \rightarrow g \text{ en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-).$$

Además

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla w_n, \varphi)_\Omega = (f, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (6.13)$$

Veamos en primer lugar que $\{w_n\}$ es una sucesión acotada en $\tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega)$. Para ello, aplicamos la fórmula de Green (6.6) en la igualdad anterior. Obtenemos entonces que

$$-(w_n, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_\Omega + \int_{\Gamma^+} w_n \varphi |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma - \int_{\Gamma^-} w_n \varphi |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma = (f, \varphi)_\Omega \quad \forall \varphi \in \tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega). \quad (6.14)$$

Para acotar la norma de w_n en $L^2(\Omega)$, tomamos como función test la única solución del problema dual siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \varphi_n \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+) \text{ tal que} \\ (-\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_n, \varphi)_\Omega = (w_n, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

El teorema 6.14 para el problema dual $(PV_c)_0^*$ garantiza la existencia de esta función φ_n , y además nos proporciona la acotación

$$\|\varphi_n\|_H \leq c \|w_n\|_{0,\Omega},$$

y por tanto

$$\|\varphi_n\|_{0,\Omega} \leq c\|w_n\|_{0,\Omega}. \quad (6.15)$$

Por otra parte, como $\varphi_n \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+)$, a partir de la fórmula de Green (6.6), se tiene que

$$\|\varphi_n\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}} \leq \|\varphi_n\|_H,$$

así que igualmente

$$\|\varphi_n\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}} \leq c\|w_n\|_{0,\Omega}. \quad (6.16)$$

Usando entonces φ_n como función test en la expresión (6.14), se obtiene

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{0,\Omega}^2 &= (f, \varphi_n)_\Omega + \int_{\Gamma^-} w_n \varphi_n |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|\varphi_n\|_{0,\Omega} + \|w_n\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}} \|\varphi_n\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Y teniendo en cuenta las acotaciones (6.15) y (6.16), llegamos a:

$$\|w_n\|_{0,\Omega} \leq c(\|f\|_{0,\Omega} + \|w_n\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}).$$

Ahora bien, como $w_n|_{\Gamma^-}$ converge en $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)$, esta acotación implica que $\{w_n\}$ está uniformemente acotada en $L^2(\Omega)$. Esta acotación junto con el hecho de que $\mathbf{v} \cdot \nabla w_n = f$ en $L^2(\Omega)$, según (6.13), nos dice que $\{w_n\}$ está uniformemente acotada en $H(\mathbf{v}, \Omega)$.

Utilizando que $H(\mathbf{v}, \Omega)$ es un espacio de Hilbert, deducimos que existe al menos una subsucesión (que seguimos denotando igual) que converge débil en $H(\mathbf{v}, \Omega)$ a una función $w \in H(\mathbf{v}, \Omega)$.

Por la continuidad de la aplicación traza, obtenemos que

$$w_n|_{\Gamma^-} \rightarrow w|_{\Gamma^-} \text{ en } L^2_{\text{loc}}(\Gamma^-),$$

pero por construcción,

$$w_n|_{\Gamma^-} \rightarrow g \text{ en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-).$$



Luego $w|_{\Gamma^-} = g$ y por tanto, $w \in \tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega)$.

Finalmente tomando límite en (6.13) se tiene que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_\Omega = (f, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (6.18)$$

Es decir, w es la solución del problema (PV_c) .

Dependencia continua de la solución respecto de los datos

Observemos en primer lugar, que como

$$\|\mathbf{v} \cdot \nabla w_n\|_{0,\Omega} = \|f\|_{0,\Omega} \quad y \quad \|w_n\|_{0,\Omega} \leq c(\|f\|_{0,\Omega} + \|w_n\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}),$$

entonces

$$\|w_n\|_H \leq c(\|f\|_{0,\Omega} + \|w_n\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}). \quad (6.19)$$

En segundo lugar, vemos que realmente w_n converge a w fuerte en $H(\mathbf{v}, \Omega)$.

Utilizando (6.18) en la igualdad (6.17), tenemos que

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{0,\Omega}^2 &= (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi_n) + \int_{\Gamma^-} w_n \varphi_n |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma \\ &= -(w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_n) - \int_{\Gamma^-} w \varphi_n |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma + \int_{\Gamma^-} w_n \varphi_n |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma \\ &= (w, w_n) - \int_{\Gamma^-} w \varphi_n |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma + \int_{\Gamma^-} w_n \varphi_n |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma. \end{aligned}$$

Entonces, por la convergencia débil en $L^2(\Omega)$ de w_n y la convergencia fuerte de su traza sobre Γ^- en $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)$, se tiene que $\|w_n\|_{0,\Omega} \rightarrow \|w\|_{0,\Omega}$ (Nótese que $\{\varphi_n\}$ está uniformemente acotada por (6.16)).

Por otra parte, por (6.13) y (6.18), $\mathbf{v} \cdot \nabla w_n = \mathbf{v} \cdot \nabla w$, luego $\|w_n\|_H \rightarrow \|w\|_H$.

Por tanto, tomando límite en la acotación (6.19) y teniendo en cuenta de nuevo que $w_n|_{\Gamma^-} \rightarrow g$ en $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)$, se tiene

$$\|w\|_H \leq c(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}).$$

⊗

6.3.5 Solución por transposición del problema convectivo

Para poder interpretar el límite de las soluciones de los problemas (PV_{cd}) como la solución del problema (PV_c) , vamos a considerar la solución por transposición de este problema. Esta definición requerirá funciones test más regulares. A cambio, permitirá en general considerar datos menos regulares, aunque nosotros mantendremos la regularidad dada en (6.3).

En concreto, consideramos la formulación variacional:

$$(PVT_c) \begin{cases} \text{Hallar } w \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ -(w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_\Omega = (f, \varphi)_\Omega + (g, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} \quad \forall \varphi \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+). \end{cases} \quad (6.20)$$

La ventaja de esta formulación es que se buscan soluciones menos regulares que en la formulación (PV_c) . Sin embargo, el siguiente resultado demuestra que, gracias a la (DPC), las dos formulaciones del problema convectivo (P_c) son equivalentes, para los mismos datos.

Teorema 6.18 *Bajo las hipótesis (6.3), si el flujo verifica la (DPC) (6.7) entonces los problemas (PV_c) y (PVT_c) son equivalentes.*

Demostración: Es evidente que una solución del problema (PV_c) es también solución del problema (PVT_c) . Para comprobarlo, basta aplicar la fórmula de Green (6.6) en la formulación variacional (6.12) y posteriormente tomar funciones test en $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+)$.

Recíprocamente, como el problema (PV_c) tiene una única solución, basta demostrar que el problema (PVT_c) también tiene solución única. Para ello, supongamos que existen dos soluciones w_1 y w_2 de (PVT_c) . Entonces la función

$w = w_1 - w_2$ pertenece a $L^2(\Omega)$ y verifica que

$$(w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+).$$

Ahora bien, el lema de densidad 6.10 asegura que las funciones $\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+)$ son densas en $L^2(\Omega)$, y por consiguiente la igualdad anterior implica que $w = 0$ y por tanto, $w_1 = w_2$. \otimes

Nota 6.19 La formulación variacional (PVT_c) no se ha presentado con el formato habitual de la formulación por transposición, por comodidad para el trabajo técnico posterior. Sin embargo, es la misma. En efecto: definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^2(\Omega) &\mapsto H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+) \\ \varphi &\mapsto \mathcal{L}\varphi : \quad (-\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathcal{L}\varphi), \psi)_\Omega = (\varphi, \psi)_\Omega, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Si se verifica la (DPC) esta aplicación está bien definida, por el teorema 6.14 para el problema de convección adjunto, y además es una isometría, considerando en $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+)$ la norma convectiva $\|\varphi\|_C = \|\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi\|_{0,\Omega}$, que es equivalente a la norma usual en $H(\mathbf{v}, \Omega)$,

$$\|\mathcal{L}\varphi\|_C = \|\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathcal{L}\varphi)\|_{0,\Omega} = \|\varphi\|_{0,\Omega}.$$

En términos de esta aplicación, el problema (PVT_c) se expresa equivalentemente como:

$$(FVT_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ (w, \varphi)_\Omega = (f, \mathcal{L}\varphi)_\Omega + (g, \mathcal{L}\varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (6.22)$$

que es la formulación por transposición estándar del problema de transporte (P_c).

Dado que \mathcal{L} es un isomorfismo, las formulaciones (6.20) y (6.22) son equivalentes. En efecto, si usamos (6.21) en (6.22) tenemos

$$(w, -\mathbf{v} \cdot \nabla(\mathcal{L}\varphi))_\Omega = (f, \mathcal{L}\varphi)_\Omega + (g, \mathcal{L}\varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}}$$

y $\mathcal{L}\varphi$ recorre $H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+)$ si y sólo si φ recorre $L^2(\Omega)$.

6.4 Convergencia

En esta sección abordamos finalmente el estudio de la convergencia de las soluciones de los problemas (PV_{cd}) a la solución del problema (PV_c) , cuando $\mu \rightarrow 0$.

En un primer resultado, demostramos la convergencia débil en $H(\mathbf{v}, \Omega)$. Para ello, probamos la convergencia débil en $L^2(\Omega)$, siguiendo un argumento clásico de compacidad. Posteriormente, es posible demostrar la convergencia débil en $H(\mathbf{v}, \Omega)$ gracias a la caracterización de la solución límite obtenida.

En segundo lugar, probamos un resultado de convergencia fuerte en un subespacio de $L^2(\Omega)$, cuya norma engloba la norma convectiva en la frontera $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

Las demostraciones de estos resultados de convergencia se apoyan en la existencia, cuando el flujo es rellenante, de una función con las propiedades adecuadas para poder obtener estimaciones de la solución del problema (PV_{cd}) .

Empezamos pues obteniendo esta función en el resultado técnico, que presentamos a continuación.

Lema 6.20 *Bajo las hipótesis que hemos supuesto sobre la regularidad del dominio y el campo de velocidades \mathbf{v} . Si el flujo es rellenante entonces el problema*

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \nabla h = 1 & \text{en } \Omega \\ h = 0 & \text{en } \Gamma^- \end{cases} \quad (6.23)$$

tiene una única solución $h \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Además $0 \leq h \leq T$ e.c.t. $\bar{\Omega}$, con T la cota dada en la definición de flujo rellenante (6.11).

Demostración:

Por el teorema 6.14, sabemos que este problema tiene una única solución $h \in$

$H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^-)$. Vamos a ver que además es posible calcular explícitamente esta solución y comprobar que tiene mayor regularidad. Más concretamente, veremos que e.c.t. $x \in \bar{\Omega}$, $h(x)$ coincide con el tiempo que tarda en llegar el flujo desde la frontera de entrada hasta este punto.

Hacemos la demostración en dos etapas: una primera, en la que reconstruimos la función de flujo para que sea un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 , y una segunda, en la que resolvemos el problema por el método de las características.

1) Construcción de un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 :

Parametrizamos las trayectorias del flujo por su punto de impacto sobre la frontera de entrada. Para ello, sea α una parametrización de Γ^- :

$$\alpha : \Theta \mapsto \mathbb{R}^n,$$

tal que Θ es un abierto de \mathbb{R}^{n-1} y $\alpha(\Theta) = \Gamma^-$. Además, por la regularidad del dominio que hemos fijado, podemos suponer que α es de clase $\mathcal{C}^1(\Theta)$.

Entonces definimos la función de flujo

$$\psi : I \times \Theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mapsto V \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{tal que} \quad \psi(t, y) = \phi(t, \alpha(y)),$$

donde ϕ es la función de flujo definida en (6.9). Es decir, $t \mapsto \psi(t, y)$ es la trayectoria del flujo que parte de $\alpha(y) \in \Gamma^-$. Pues bien, veamos que ψ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 :

- i) ψ es de clase $\mathcal{C}^1(I \times \Theta)$, por la regularidad de la solución de un problema de Cauchy con dato y condición inicial de clase \mathcal{C}^1 .
- ii) Si llamamos $J(t, y)$ al determinante de la matriz jacobiana de ψ , $J(t, y) = \det [J(\psi(t, y))]$, se verifica que $J(t, y) \neq 0, \forall (t, y) \in I \times \Theta$. Esto se demuestra, mediante un argumento estándar, comprobando que $J(t, y)$ es solución

del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial t}(t, y) = 0 \\ J(0, y) = J_0(y) \end{cases}$$

con $J_0(y) \neq 0, \forall y \in \Theta$.

En efecto:

$$J(t, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t, y) = \sum_{i=1}^n D_i, \quad \text{con } D_i = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_1 \partial t} & \dots & \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_{n-1} \partial t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t, \alpha(y)) = v_i(\phi(t, \alpha(y))) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial v_i}{\partial t}(\phi(t, \alpha(y))) = \sum_{j=1}^n \partial_j v_i \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \partial_j v_i \frac{\partial \psi_j}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k \partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k}(\phi(t, \alpha(y))) = \sum_{j=1}^n \partial_j v_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \partial_j v_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} \quad \forall k = 1, \dots, n-1.$$

Entonces

$$D_i = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \partial_j v_i \frac{\partial \psi_j}{\partial t} & \sum_{j=1}^n \partial_j v_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y_1} & \dots & \sum_{j=1}^n \partial_j v_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix} = \partial_i v_i J(t, y),$$



y por tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t, y) = \sum_{i=1}^n D_i = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i J(t, y) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) J(t, y) = 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t, y) = v_i(\phi(t, \alpha(y))) \Rightarrow \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(0, y) = v_i(\phi(0, \alpha(y))) = v_i(\alpha(y)).$$

De la condición inicial para ϕ tenemos que:

$$\psi(0, y) = \phi(0, \alpha(y)) = \alpha(y),$$

de donde

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}(0, y) = \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_k}.$$

Por tanto,

$$J(0, y) = \det \left(\begin{array}{c|c} v_1(\alpha(y)) & \\ v_2(\alpha(y)) & J(\alpha(y)) \\ \vdots & \\ v_n(\alpha(y)) & \end{array} \right)$$

donde $J(\alpha(y)) = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} \right)_{n \times n-1}$ es la matriz jacobiana de la parametrización α de Γ^- . Este determinante es siempre no nulo. En efecto, los vectores

$$\left\{ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_j}, \dots, \frac{\partial \alpha_n}{\partial y_j} \right) \right\}_{j=1}^{n-1}$$

constituyen una base del hiperplano tangente a Γ^- en cada punto. Si $J(0, y)$ fuese cero, esto significaría que la velocidad \mathbf{v} estaría en este hiperplano tangente, y no es así.

iii) ψ es inyectiva en $I \times \Theta$:

$$(t_1, y_1) \neq (t_2, y_2) \Rightarrow (t_1, \alpha(y_1)) \neq (t_2, \alpha(y_2)) \Rightarrow \phi(t_1, \alpha(y_1)) \neq \phi(t_2, \alpha(y_2)),$$

por ser α una parametrización de Γ^- y ϕ la función de flujo.

En estas condiciones, el teorema de la función inversa global garantiza que ψ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 , es decir, existe ψ^{-1} y es también de clase $\mathcal{C}^1(V)$. En otras palabras, podemos decir que ψ define un cambio de variable en $\bar{\Omega}$:

$$\hat{x} = (t, y) \mapsto x = \psi(t, y).$$

Si para cualquier función u llamamos $\hat{u} = u \circ \psi$ se verifica que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\hat{x}) = \mathbf{v} \cdot \nabla u(x). \quad (6.24)$$

2) Resolución del problema (6.23) por el método de las características:

Como el flujo es rellenante, p.c.t $x \in \bar{\Omega}$ existe $t_x, 0 \leq t_x \leq T$, e $y_x \in \Theta$ tal que $\psi(t_x, y_x) = x$. Teniendo en cuenta (6.24), integrar la ecuación $\mathbf{v} \cdot \nabla h = 1$ a lo largo de la característica $\psi(\cdot, y_x)$ entre 0 y t_x es equivalente a

$$\int_0^{t_x} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t}(t, y_x) dt = \int_0^{t_x} dt$$

y de aquí $\hat{h}(t_x, y_x) - \hat{h}(0, y_x) = t_x$.

$$\hat{h}(t_x, y_x) = h(\psi(t_x, y_x)) = h(x)$$

$$\hat{h}(0, y_x) = h(\psi(0, y_x)) = 0, \quad \text{ya que } \psi(0, y_x) = \alpha(y_x) \in \Gamma^-, \text{ donde } h \text{ se anula.}$$

Entonces $h(x) = t_x$, e.c.t $x \in \bar{\Omega}$. La función $x \in \bar{\Omega} \mapsto t_x \in I$ es la primera componente de la función inversa de ψ , así que, tal y como hemos probado en la etapa anterior, se trata de una función de clase $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ y por tanto, $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Además, si el flujo es rellenante, $0 \leq t_x \leq T$, e.c.t $x \in \bar{\Omega}$, luego h también. \otimes

Lema 6.21 *Bajo las hipótesis que hemos supuesto sobre la regularidad del dominio y el campo de velocidades \mathbf{v} . Si el flujo es rellenante entonces existe una función $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$ que verifica $\mathbf{v} \cdot \nabla h = -1$ en Ω y $1 \leq h \leq T + 1$ e.c.t. $\bar{\Omega}$, con T la cota dada en la definición de flujo rellenante (6.11).*



Demostración: Sea \hat{h} la función dada por el lema (6.20). Entonces la función $h = T + 1 - \hat{h}$ es la función buscada:

- i) Evidentemente, h tiene la misma regularidad que \hat{h} y por tanto $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$.
- ii) $\mathbf{v} \cdot \nabla h = -\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{h} = -1$ en Ω .
- iii) Como $0 \leq \hat{h} \leq T$, e.c.t. $\bar{\Omega}$, entonces $T + 1 \geq h = T + 1 - \hat{h} \leq 1$, e.c.t. $\bar{\Omega}$.

⊗

6.4.1 Análisis de convergencia débil

Teorema 6.22 *Bajo las hipótesis (6.3), si además el flujo es rellenante entonces la sucesión de soluciones de los problemas (PV_{cd}) converge débil en $H(\mathbf{v}, \Omega)$ a la solución del problema (PV_c) .*

Demostración:

En primer lugar, demostramos la convergencia débil en $L^2(\Omega)$ mediante el argumento clásico de compacidad. Es decir, obtenemos estimaciones a priori de la sucesión formada por las soluciones w_μ de los problemas (PV_{cd}) , las cuales nos permiten extraer subsucesiones convergentes y pasar al límite. Seguidamente, caracterizamos dicho límite como la solución del problema (PV_c) . Por último, esto nos permite demostrar también la convergencia débil en $H(\mathbf{v}, \Omega)$.

(I) Estimaciones a priori

En la formulación variacional (PV_{cd}) , consideramos una función test de la forma $\varphi = hw_\mu$, con $w_\mu \in H^1(\Omega)$ la única solución de este problema y h una función que elegiremos de forma adecuada. De esta manera, tenemos que

$$a_{\mathbf{v}}(w_\mu, hw_\mu) = l_{\mathbf{v}}(hw_\mu), \quad (6.25)$$

con $a_{\mathbf{v}}$ y $l_{\mathbf{v}}$ definidos en (6.5). Desarrollamos el primer miembro:

$$\begin{aligned}
 a_{\mathbf{v}}(w_{\mu}, h w_{\mu}) &= \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} h \mathbf{v} \cdot \nabla w_{\mu}^2 dx + \int_{\Gamma^{-}} h |w_{\mu}|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma + \mu \int_{\Omega} \nabla w_{\mu} \nabla (h w_{\mu}) dx = \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_{\mu}|^2 \mathbf{v} \cdot \nabla h dx + \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}} h |w_{\mu}|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma \\
 &+ \mu \int_{\Omega} h |\nabla w_{\mu}|^2 dx + \mu \int_{\Omega} w_{\mu} \nabla w_{\mu} \nabla h dx.
 \end{aligned}$$

Entonces para poder estimar la norma de w_{μ} en $L^2(\Omega)$, necesitamos una función h que verifique $\mathbf{v} \cdot \nabla h = -1$ en Ω . Tomamos pues la función h dada por el lema 6.21 y al sustituirla en la igualdad (6.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \|w_{\mu}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}} h |w_{\mu}|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma + \mu \int_{\Omega} h |\nabla w_{\mu}|^2 dx &= \\
 &= l_{\mathbf{v}}(h w_{\mu}) - \mu \int_{\Omega} w_{\mu} \nabla w_{\mu} \nabla h dx.
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Como $h \geq 1$ e.c.t $\bar{\Omega}$, el primer miembro está acotado inferiormente por

$$\frac{1}{2} \|w_{\mu}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|w_{\mu}\|_{\Gamma^{-},\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2} \|w_{\mu}\|_{\Gamma^{+},\mathbf{v}}^2 + \mu \|\nabla w_{\mu}\|_{0,\Omega}^2.$$

Acotamos también el segundo miembro:

$$\begin{aligned}
 l_{\mathbf{v}}(h w_{\mu}) - \mu \int_{\Omega} w_{\mu} \nabla w_{\mu} \nabla h dx &= \\
 &= (f, h w_{\mu})_{\Omega} + (g, h w_{\mu})_{\Gamma^{-},\mathbf{v}} - \mu \int_{\Omega} w_{\mu} \nabla w_{\mu} \nabla h dx \\
 &\leq \|h\|_{\infty} \|f\|_{0,\Omega} \|w_{\mu}\|_{0,\Omega} + \|h\|_{\infty} \|g\|_{\Gamma^{-},\mathbf{v}} \|w_{\mu}\|_{\Gamma^{-},\mathbf{v}} + \\
 &\quad + \mu \|\nabla h\|_{\infty} \|w_{\mu}\|_{0,\Omega} \|\nabla w_{\mu}\|_{0,\Omega} \leq \\
 &\leq c^2 \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{4} \|w_{\mu}\|_{0,\Omega}^2 + c^2 \|g\|_{\Gamma^{-},\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{4} \|w_{\mu}\|_{\Gamma^{-},\mathbf{v}}^2 + \\
 &\quad + \frac{c^2}{2} \mu \|u_{\mu}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla w_{\mu}\|_{0,\Omega}^2,
 \end{aligned}$$

siendo $c = \|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$. Entonces, obtenemos que

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{c^2}{2}\mu\right) \|w_\mu\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{4} \|w_\mu\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2} \|w_\mu\|_{\Gamma^+, \mathbf{v}}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla w_\mu\|_{0,\Omega}^2 \leq c^2 (\|f\|_{0,\Omega}^2 + \|g\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}}^2).$$

Como consecuencia, podemos concluir que tenemos la siguientes acotaciones uniformes (independientes de μ) para la sucesión $\{w_\mu\}$:

$$\{w_\mu\} \text{ está uniformemente acotada en } L^2(\Omega) \quad (6.27)$$

$$\{\mu^{\frac{1}{2}} \nabla w_\mu\} \text{ está uniformemente acotada en } L^2(\Omega) \quad (6.28)$$

$$\{w_\mu|_{\Gamma^+}\} \text{ está uniformemente acotada en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^+) \quad (6.29)$$

$$\{w_\mu|_{\Gamma^-}\} \text{ está uniformemente acotada en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-). \quad (6.30)$$

(II) Extracción de subsucesiones convergentes

Teniendo en cuenta las acotaciones uniformes anteriores, podemos extraer una subsucesión de $\{w_\mu\}$, que seguiremos denotando igual, verificando las siguientes convergencias cuando $\mu \rightarrow 0$:

$$w_\mu \rightharpoonup w \text{ débil en } L^2(\Omega), \text{ con } w \in L^2(\Omega) \quad (6.31)$$

$$\mu^{\frac{1}{2}} \nabla w_\mu \rightharpoonup u \text{ débil en } L^2(\Omega), \text{ con } u \in L^2(\Omega) \quad (6.32)$$

$$w_\mu|_{\Gamma^+} \rightharpoonup \alpha^+ \text{ débil en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^+), \text{ con } \alpha^+ \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^+) \quad (6.33)$$

$$w_\mu|_{\Gamma^-} \rightharpoonup \alpha^- \text{ débil en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-), \text{ con } \alpha^- \in L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-). \quad (6.34)$$

(III) Paso al límite

Como w_μ es solución del problema (PV_{cd}) , verifica la formulación variacional

$$a_{\mathbf{v}}(w_\mu, \varphi) = l_{\mathbf{v}}(\varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

donde recordamos que

$$a_{\mathbf{v}}(w_\mu, \varphi) = (\mathbf{v} \cdot \nabla w_\mu, \varphi)_\Omega + (w_\mu, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} + \mu (\nabla w_\mu, \nabla \varphi)_\Omega, \quad (6.35)$$

$$l_{\mathbf{v}}(\varphi) = (f, \varphi)_{\Omega} + (g, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}}.$$

Teniendo en cuenta las convergencias que hemos obtenido en el apartado anterior, para poder calcular el límite del término convectivo de $a_{\mathbf{v}}$, aplicamos la fórmula de Green en este término y consideramos esta otra expresión equivalente para la forma $a_{\mathbf{v}}$:

$$a_{\mathbf{v}}(w_{\mu}, \varphi) = -(w_{\mu}, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_{\Omega} + (w_{\mu}, \varphi)_{\mathbf{v}, +} + \mu (\nabla w_{\mu}, \nabla \varphi)_{\Omega}. \quad (6.36)$$

Ahora tomamos límite en cada uno de los términos de $a_{\mathbf{v}}$ en (6.36):

Por la convergencia (6.31),

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} -(w_{\mu}, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_{\Omega} = -(w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_{\Omega} \text{ si } \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Omega). \quad (6.37)$$

Por la convergencia (6.32),

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu (\nabla w_{\mu}, \nabla \varphi)_{\Omega} = \lim_{\mu \rightarrow 0} (\mu^{\frac{1}{2}} \nabla w_{\mu}, \mu^{\frac{1}{2}} \nabla \varphi)_{\Omega} = 0 \text{ si } \nabla \varphi \in L^2(\Omega). \quad (6.38)$$

Por tanto,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a_{\mathbf{v}}(w_{\mu}, \varphi) = -(w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_{\Omega}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}, \Gamma^+),$$

y por densidad,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a_{\mathbf{v}}(w_{\mu}, \varphi) = -(w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_{\Omega}, \quad \forall \varphi \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+). \quad (6.39)$$

Entonces, en el límite se verifica que

$$-(w, \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi)_{\Omega} = (f, \varphi)_{\Omega} + (g, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}}, \quad \forall \varphi \in H_0(\mathbf{v}, \Omega, \Gamma^+). \quad (6.40)$$

(IV) Caracterización del límite

Hemos demostrado que la sucesión de soluciones de los problemas (PV_{cd}) converge débil en $L^2(\Omega)$ a una función $w \in L^2(\Omega)$ que verifica (6.40). Esto es, w es la única solución del problema (PVT_c) . Pero gracias a la (DPC), según el teorema

de equivalencia 6.18, w es igualmente la solución del problema (PV_c) . Como consecuencia, w tiene más regularidad, $w \in \tilde{H}(\mathbf{v}, \Omega)$, y verifica $w|_{\Gamma^-} = g$ y la igualdad variacional:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_\Omega = (f, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (6.41)$$

(V) Convergencia débil en $H(\mathbf{v}, \Omega)$

Partimos de nuevo de la formulación variacional que verifica la solución w_μ del problema (PV_{cd})

$$a_{\mathbf{v}}(w_\mu, \varphi) = l_{\mathbf{v}}(\varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Calculamos el límite de cada uno de los términos de la forma $a_{\mathbf{v}}$ utilizando ahora la expresión (6.35):

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a_{\mathbf{v}}(w_\mu, \varphi) = \lim_{\mu \rightarrow 0} (\mathbf{v} \cdot \nabla w_\mu, \varphi)_\Omega + (\alpha^-, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

teniendo en cuenta (6.38) y la convergencia (6.34). Por tanto, en el límite se verifica que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (\mathbf{v} \cdot \nabla w_\mu, \varphi)_\Omega + (\alpha^-, \varphi)_{\mathbf{v}, -} = (f, \varphi)_\Omega + (g, \varphi)_{\mathbf{v}, -}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (6.42)$$

Por otra parte, por (6.41), $(f, \varphi)_\Omega = (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_\Omega, \forall \varphi \in L^2(\Omega)$. Luego si en particular tomamos una función test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se verifica que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (\mathbf{v} \cdot \nabla w_\mu, \varphi)_\Omega = (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \varphi)_\Omega, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y por densidad, también $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$. Esto es, $\mathbf{v} \cdot \nabla w_\mu \rightharpoonup \mathbf{v} \cdot \nabla w$ débil en $L^2(\Omega)$ y en consecuencia, la solución del problema (PV_{cd}) converge débil en $H(\mathbf{v}, \Omega)$ a la solución w del problema (PV_c) .

Además, volviendo ahora a (6.42), obtenemos que

$$(\alpha^-, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}} = (g, \varphi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),$$

luego $\alpha^- = g$. Es decir, la traza en Γ^- de la solución del problema (PV_{cd}) converge débil en $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)$ a la traza en Γ^- de solución w del problema (PV_c) :

$$w_\mu|_{\Gamma^-} \rightharpoonup w|_{\Gamma^-} = g \text{ débil en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-). \quad (6.43)$$

⊗

6.4.2 Análisis de convergencia fuerte

Teorema 6.23 *Bajo las hipótesis (6.3), si además el flujo es rellenante entonces la sucesión de soluciones de los problemas (PV_{cd}) converge fuerte en $L^2(\Omega)$ a la solución del problema (PV_c) . Igualmente las trazas convectivas sobre Γ^- y Γ^+ de esta sucesión convergen fuerte en los espacios $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-)$ y $L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^+)$, respectivamente:*

$$\begin{aligned} w_\mu &\rightarrow w, \quad \text{fuerte en } L^2(\Omega) \\ w_\mu|_{\Gamma^-} &\rightarrow g \quad \text{fuerte en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^-) \\ w_\mu|_{\Gamma^+} &\rightarrow w|_{\Gamma^+} \quad \text{fuerte en } L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^+). \end{aligned}$$

Demostración:

Definimos un subespacio auxiliar de $L^2(\Omega)$ de la siguiente forma:

Dada h la función determinada por el lema 6.21,

$$L^2_*(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h|\varphi|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma < \infty \right\}.$$

Sobre este espacio consideramos el producto escalar

$$(\varphi, \psi)_* = (\varphi, \psi)_\Omega + (h\varphi, \psi)_{\Gamma^+, \mathbf{v}} + (h\varphi, \psi)_{\Gamma^-, \mathbf{v}},$$

y la norma asociada

$$\|\varphi\|_* = \left[\|\varphi\|_0^2 + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h|\varphi|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma \right]^{1/2}.$$



La función h que interviene en la definición de este espacio está determinada por el campo de velocidades y el dominio Ω . Así pues, tanto el espacio como el producto escalar y la norma definidos en él, dependen del campo de velocidades, a través de la función h .

Observemos también que el espacio $L_*^2(\Omega)$ es un espacio intermedio entre $H(\mathbf{v}, \Omega)$ y $L^2(\Omega)$. Por tanto la sucesión de soluciones $\{w_\mu\}$ así como su límite w están en este espacio.

Vamos a demostrar que la sucesión $\{w_\mu\}$ converge fuerte en el espacio $L_*^2(\Omega)$.

La convergencia débil es cierta, gracias a la regularidad de la función h y las convergencias débiles ya obtenidas. En concreto, la convergencia débil de w_μ a w en $L^2(\Omega)$ y la de las trazas en Γ^+ y Γ^- :

$$\begin{aligned} w_\mu &\rightharpoonup w, & \text{débil en } L^2(\Omega) \\ w_\mu|_{\Gamma^-} &\rightharpoonup g & \text{débil en } L_{\mathbf{v}}^2(\Gamma^-) \\ w_\mu|_{\Gamma^-} &\rightharpoonup \alpha^+ & \text{débil en } L_{\mathbf{v}}^2(\Gamma^+). \end{aligned}$$

Para obtener la convergencia fuerte basta con demostrar la semicontinuidad inferior de la norma. Para ello, tomamos límite en (6.26), con w_μ la única solución del problema (PV_{cd}) . Recordamos aquí esta expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w_\mu\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h |w_\mu|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma + \mu \int_{\Omega} h |\nabla w_\mu|^2 dx = \\ = l_{\mathbf{v}}(h w_\mu) - \mu \int_{\Omega} u_\mu \nabla w_\mu \nabla h dx. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mu \int_{\Omega} h |\nabla w_\mu|^2 dx \geq 0$, obtenemos la desigualdad

$$\frac{1}{2} \|w_\mu\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h |w_\mu|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma \leq l_{\mathbf{v}}(h w_\mu) - \mu \int_{\Omega} u_\mu \nabla w_\mu \nabla h dx. \quad (6.44)$$

Calculamos el límite de cada uno de los términos del segundo miembro de la desigualdad:

- $l_{\mathbf{v}}(h w_{\mu}) = (f, h w_{\mu}) + (g, h w_{\mu})_{\mathbf{v},-}$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} l_{\mathbf{v}}(h, w_{\mu}) &= (f, h w)_{\Omega} + (w, h w)_{\mathbf{v},-} \quad \text{por las convergencias (6.31) y (6.43)} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla w, h w)_{\Omega} + (w, h w)_{\mathbf{v},-} \quad \text{por (6.41)} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |w|^2 \mathbf{v} \cdot \nabla h \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h |w|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\mathbf{v} \cdot \nabla h = -1$ en Ω , llegamos a:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} l_{\mathbf{v}}(h w_{\mu}) = \frac{1}{2} \|w\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h |w|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \, d\gamma. \quad (6.45)$$

- $\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \int_{\Omega} w_{\mu} \nabla w_{\mu} \nabla h \, dx \leq \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{\frac{1}{2}} \|w_{\mu}\|_{0,\Omega} \|\mu^{\frac{1}{2}} \nabla w_{\mu}\|_{0,\Omega} \|\nabla h\|_{\infty} = 0,$ (6.46)

por las acotaciones (6.27) y (6.28).

Entonces pasando al límite en la desigualdad (6.44) obtenemos,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\|w_{\mu}\|_0^2 + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h |w_{\mu}|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \right) \leq \|w\|_0^2 + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h |w| |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|.$$

Esto es,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|w_{\mu}\|_* \leq \|w\|_*.$$

Por tanto, concluimos que la sucesión $\{w_{\mu}\}$ converge fuerte en $L_*^2(\Omega)$ a w .

Ahora bien, esta convergencia implica, en particular, la convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|w_{\mu} - w\|_{0,\Omega} = 0, \quad (6.47)$$

así como,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} h |w_\mu - w|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma = 0. \quad (6.48)$$

Más aún, (6.48) nos dice que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\Gamma^+} h |w_\mu - w|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\Gamma^-} h |w_\mu - w|^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma = 0.$$

Pero como h es una función acotada inferiormente por 1, se tiene que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|w_\mu - w\|_{\Gamma^-, \mathbf{v}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \|w_\mu - w\|_{\Gamma^+, \mathbf{v}} = 0. \quad (6.49)$$

⊗

Tras el análisis que hemos realizado en este capítulo obtenemos la siguiente conclusión: Para flujos gobernados por ecuaciones de convección-difusión, pero predominantemente convectivos en la frontera de entrada de flujo, imponer el flujo total normal es una buena aproximación a imponer condiciones de contorno de tipo Dirichlet en la frontera de entrada.

De esta manera justificamos la forma en la que el método numérico de resolución de nuestro modelo de turbulencia impone las condiciones de contorno. Sabemos que al menos para modelos más sencillos, se está haciendo una aproximación válida.

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo y el análisis de los resultados obtenidos nos permiten llegar a las siguientes conclusiones generales:

Hemos desarrollado una nueva versión del modelo *MPP* para flujos compresibles perfectos débilmente viscosos, que constituye un modelo para turbulencia localmente homogénea pero no necesariamente isotrópica, como es el caso del modelo *MPP* existente para este tipo de flujos.

El modelo *MPP* obtenido es consistente desde el punto de vista físico, en los siguientes sentidos:

La formulación conservativa del modelo coincide con el modelo que se obtiene desarrollando la misma técnica a partir de las mismas ecuaciones escritas en forma conservativa.

El modelo se enmarca dentro de la familia de modelos de turbulencia a dos ecuaciones, para la energía cinética turbulenta media y la helicidad turbulenta media. Además, en determinadas condiciones, el modelo coincide formalmente con el modelo $k - \varepsilon$ para turbulencia localmente homogénea.

El modelo es capaz de controlar la variación total de la energía. Es decir, no sólo muestra que se conserva la energía total, sino también que la energía cinética debida a la turbulenta que se disipa se transforma en energía

interna.

Hemos construido un modelo de turbulencia compresible, que constituye un modelo híbrido $MPP k - \varepsilon$, en el sentido, de que los efectos transitorios de interacción entre el campo medio y el campo fluctuante son modelados mediante homogeneización mientras que los efectos de difusión turbulenta son modelados mediante la hipótesis de Boussinesq, como en el modelo $k - \varepsilon$. Este modelo es válido para el tratamiento de la turbulencia localmente homogénea y a bajos números de Mach.

Hemos obtenido una versión bidimensional del modelo híbrido, para la cual los términos de cierre tienen una estructura particularmente simple. Para este caso, hemos conseguido reformular los términos de cierre de manera que sean funciones determinadas de forma única y continua a partir del campo medio.

Hemos desarrollado una técnica de resolución numérica del modelo $MPP k - \varepsilon$, bien compleja, que acopla diferentes métodos adaptados a la diferente naturaleza de cada uno de los términos de las ecuaciones, así como a los diferentes tipos de variables que intervienen en el modelo. Esto se hace mediante una técnica de descomposición de estas variables en variables físicas, variables turbulentas y variables auxiliares.

Hemos validado numéricamente el modelo $MPP k - \varepsilon$ resolviendo una capa de mezcla compresible supersónica que alcanza un estado cuasi-estacionario. Los resultados obtenidos confirman las expectativas teóricas, en el sentido de que el modelo predice de forma adecuada las cantidades medias más relevantes del flujo, de forma similar al modelo $k - \varepsilon$.

A la vista de los resultados obtenidos, no podemos afirmar que este modelo proporcione una mejora sustancial con respecto al modelo $k - \varepsilon$. Sin embargo, el modelo sí aporta una información cualitativa relevante sobre la estructura transi-

toria de la turbulencia. Los ensayos realizados, hasta el momento, no constituyen una validación cualitativa ni cuantitativa del modelo. Para ello, sería necesario encontrar mejores estrategias de resolución del problema en micro-estructura que nos permitan obtener tabulaciones de los términos de cierre más regulares.

Aun así, estos resultados refuerzan el interés de extender a flujos compresibles el análisis teórico de modelos de tipo *MPP* realizado por T. Hou [33] para flujos incompresibles.

Por último, hemos realizado un análisis de paso al límite singular sobre el problema de convección difusión:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w \text{ tal que} \\ v \cdot \nabla w - \mu \Delta w = f \quad \text{en } \Omega; \\ w v \cdot n - \mu \frac{\partial w}{\partial n} = g v \cdot n \quad \text{en } \Gamma^-; \\ \mu \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma^+ \cup \Gamma^0. \end{array} \right.$$

Como conclusión de este estudio, hemos demostrado que cuando el parámetro de difusión μ tiendo a cero, la sucesión de soluciones de estos problemas converge a la solución del problema de convección:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w \text{ tal que} \\ v \cdot \nabla w = f \quad \text{en } \Omega; \\ w = g \quad \text{en } \Gamma^-. \end{array} \right.$$

Esta convergencia se verifica en el sentido de la convergencia débil en el espacio

$$H(v, \Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : v \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Omega)\},$$

la convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$ y la de las trazas sobre Γ^+ y Γ^- en los espacios de trazas convectivas

$$L^2_{\mathbf{v}}(\Gamma^\pm) = \left\{ \alpha : \int_{\Gamma^\pm} \alpha^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\gamma < +\infty \right\}$$

En particular, este análisis teórico nos permite justificar que para flujos gobernados por ecuaciones de convección-difusión, pero predominantemente convectivos en la frontera de entrada flujo, imponer, en esta parte de la frontera, el flujo total normal es una buena aproximación a imponer condiciones de tipo Dirichlet.

Bibliografía

- [1] J.D. ANDERSON. *Modern compressible flow with historical perspective*. McGraw-Hill, New York (1990).
- [2] P. AZERAD. *Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport*. Thèse de Doctorat, Université de Neuchatel, Suisse (1996).
- [3] B. BALDWIN, H. LOMAX. *Thin layer approximation and algebraic model separated turbulent flows*. AIAI-Paper, vol. 78-257 (1978).
- [4] C. BARDOS. *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; théorèmes d'approximation; applications à l'équation de transport*. Ann. Scient, Éc. Norm. Sup., vol. 3, pp. 185–233 (1970).
- [5] S. BARRE, C. QUINE, J.P. DUSSAUGE. *Compressibility effects on the structure of supersonic mixing layers: experimental results*. J. Fluid. Mech., vol. 259, pp. 47–78 (1994).
- [6] C. BEGUE, B. CARDOT, O. PIRONNEAU. *Simulation of turbulence with transient mean*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 11 (2), pp. 677–695 (1990).
- [7] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU. *Asymptotic methods for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam (1978).

- [8] A.S. BESICOVITCH. *Almost-periodic functions*. Dover Publications, New York (1954).
- [9] S. BIRCH, J. EGGERS. *A critical review of the experimental data for developed free turbulent shear layers*. NASA SP., vol. 321, pp. 11–40 (1972).
- [10] D.W. BOGDANOFF. *Compressibility effects in turbulent shear layers*. AIAA J., vol. 21 (1983).
- [11] J. BOUSSINESQ. *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes á grandes section. Tome I-II*. Gauthiers Villars, París (1879).
- [12] T. CEBECI, A. SMITH. *Analysis of turbulent boundary layers*. Academic Press, New York (1974).
- [13] T. CHACÓN. *Étude d'un modèle pour la convection des microstructures*. Thèse 3^{ème} Cycle, Université Paris VI (1985).
- [14] T. CHACÓN. *Oscillations due to the transport of microstructures*. SIAM J. Appl. Math., vol. 48, pp. 1128–1146 (1988).
- [15] T. CHACÓN, J. COUCE, R. ECHEVARRIA, E. FERNÁNDEZ-CARA, J. MARTÍN, F. ORTEGÓN. *Reports 1, 2, 3 and 4, HERMES RDANE 23/87 Contract*. University of Sevilla (1988-1991).
- [16] T. CHACÓN, D. FRANCO. *Derivation of the $k - \varepsilon$ model for locally homogeneous turbulence by homogenization techniques*. C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 337, pp. 431–436 (2003).
- [17] T. CHACÓN, D. FRANCO, F. ORTEGÓN. *Homogenization of incompressible flow with helical microstructures*. Adv. Math. Sci. Appl., vol. 1, pp. 251–300 (1992).

- [18] T. CHACÓN, D. FRANCO, F. ORTEGÓN, I. SÁNCHEZ. *Modelling of compressible flows with highly oscillating initial data by homogenization*. Applied Numerical Mathematics, vol. 26, pp. 435–464 (1998).
- [19] T. CHACÓN, O. PIRONNEAU. *Convection of microstructures by incompressible and slightly compressible flows*. En *Oscillation theory, computation and methods of compensated compactness*". IMA Volumes for Mathematics and its Applications, vol. 2, pp. 1–22. Springer-Verlag (1986).
- [20] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, New York (1979).
- [21] P.G. CIARLET. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, París (1986).
- [22] C. CORDUNEANU. *Almost-periodic functions*. Interscience Publishers, New York (1968).
- [23] R. DAUTRAY, J.L. LIONS. *Analyse mathématique et problèmes aux limites*. Vol. 9. Masson, París (1988).
- [24] T. DUBOIS, F. JAUBERTAU, R. TEMAN. *Dynamic multilevel methods and numerical simulation of turbulence*. Cambridge University Press, New York (1999).
- [25] W. ECKHAUS. *Asymptotic analysis of singular perturbations*. North-Holland, Amsterdam-New York (1979).
- [26] A. FAVRE, L.S. KOVASNAY, R. DUMAS, M. COANTIC. *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthiers Villars, París (1976).
- [27] D. FRANCO. *Modelado de la turbulencia localmente homogénea mediante técnicas de homogeneización*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (2001).
- [28] E. GODLEWSKI, P.A. RAVIART. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer-Verlag, New York (1996).

- [29] S.G. GOEBEL, J.C. DUTTON, H. KRIER, J.P. RENIE. *Mean and turbulent velocity measurements of supersonic mixing layers*. Experiments in Fluids, vol. 8, pp. 263–272 (1990).
- [30] D. GUEZENGAR. *Modélisation et simulation de la turbulence compressible dans les écoulements cisailés supersoniques*. Thèse de Doctorat, Université de Marseille (1997).
- [31] D. GUEZENGAR, H. GUILLARD. *Compressibility models applied to supersonic mixing layers*. En *Computation and Comparison of Efficient Turbulence Models for Aeronautics. Serie: Notes on Numerical Fluid Mechanics*, vol. 65, pp. 28–36. Vieweg (1998).
- [32] A. HARTEN, P. LAX, B. VAN LEER. *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*. SIAM Review, vol. 25, pp. 35–61 (1983).
- [33] T.Y. HOU, D. YANG, H. RAN. *Multiscale analysis in lagrangian formulation for 2D incompressible Euler equation*. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 12, pp. 1–36 (2005).
- [34] T.Y. HOU, D. YANG, H. RAN. *Multiscale modelling and computation of fluid flow*. Internat. J. Numer. Methods Fluids, vol. 47, pp. 707–719 (2005).
- [35] T.Y. HOU, D. YANG, K. WANG. *Homogenization of incompressible Euler equation*. J. Comput. Math, vol. 22, pp. 220–229 (2004).
- [36] W.P. JONES. *Models for turbulent flows with variable density and combustion*. VKI Lectures Series (1979).
- [37] C. KASBARIAN. *Étude numérique pour les problèmes d’advection-diffusion. Application à la modélisation d’écoulements turbulents compressibles*. Thèse de Doctorat, Université Lyon I (1995).

- [38] M.H. LALLEMAND. *Schémas décentés multigrilles pour la résolution des équations d'Euler en éléments finis*. Thèse de Doctorat, Université de Provence (1988).
- [39] L. LANDAU, E. LIFCHITZ. *Mécanique des fluides*. MIR, Moscú (1953).
- [40] B. LARROUTUROU. *How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows*. J. Comput. Phys., vol. 95, pp. 59–84 (1991).
- [41] B.E. LAUNDER, D.B. SPALDING. *Mathematical models of turbulence*. Academic press, London (1972).
- [42] C. LE RIBAULT. *Simulation des écoulements turbulents compressibles par une méthode mixte éléments finis-volumes finis*. Thèse de Doctorat, Université de Lyon (1991).
- [43] J.L. LIONS. *Perturbations singulières dans problèmes aux limites et contrôle optimal*. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 323. Springer-Verlag, Berlin-New York (1973).
- [44] P.L. LIONS. *Mathematical topics in fluid mechanics. Volume 2: Compressible models*. Clarendon Press, New York (1998).
- [45] D. MCLAUGHLIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU. *Transport of microstructures and related problems*. SIAM J. Appl. Math., vol. 45, pp. 780–793 (1985).
- [46] B. MOHAMMADI. *Etude du modèle $k - \varepsilon$ de la turbulence pour les écoulements compressibles*. Thèse 3^{ème} Cycle, Université Paris VI (1991).
- [47] B. MOHAMMADI, P. GUILLAUME. *Mathematical and numerical analysis of an alternative well-posed two-layer turbulence model*. M2AN Math. Model. Numer. Anal., vol. 35, pp. 1111–1136 (2001).

- [48] B. MOHAMMADI, O. PIRONNEAU. *Analysis of the $k-\varepsilon$ turbulence model*. Wiley-Masson, Paris (1993).
- [49] C. OLIVIER. *Simulation numérique d'écoulements visqueux compressibles laminaires et turbulents*. Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis (1991).
- [50] F. ORTEGÓN. *Estudio de un modelo matemático de turbulencia obtenido mediante técnicas de homogeneización*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla (1988).
- [51] D. PAPAMOSCHOU, A. ROSHKO. *The compressible turbulent shear layer: an experimental study*. J. Fluid. Mech., vol. 197, pp. 453–477 (1988).
- [52] O. REYNOLDS. *Scientific papers, Vol. 2*. Cambridge Press, Londres (1901).
- [53] P.L. ROE. *Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes*. J. Comp. Phys., vol. 43, pp. 357–371 (1981).
- [54] P. ROSTAND. *Sur une méthode de volumes finis en maillage non structuré pour le calcul d'écoulements visqueux compressibles*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1989).
- [55] S. SARKAR. *Modeling the pressure-dilatation correlation*. ICASE Report, vol. 91-42 (1991).
- [56] P. SPALARD, S. ALLMARAS. *A one equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAI-Paper, vol. 92-0439 (1992).
- [57] J. STEGER, R.F. WARMING. *Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite-difference methods*. J. Comp. Phys., vol. 40, pp. 263–293 (1981).

- [58] H. STEVE. *Schémes implicites linéaires décentrés pour la résolution des équations d'Euler en plusieurs dimensions*. Thèse de Doctorat, Université de Provence Aix-Marseille1 (1988).
- [59] H. TENNEKES, J.L. LUMLEY. *A first course in turbulence*. MIT Press (2001).
- [60] E.F. TORO. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer-Verlag, Berlín (1997).
- [61] G.D. VAN ALBADA, B. VAN LEER. *Flux vector splitting and Runge-Kutta methods for the Euler equations*. ICASE Report, vol. 84-27.
- [62] B. VAN LEER. *Towards the ultimate conservative difference scheme: the quest of monotonicity*. Lecture Notes in Physics, vol. 18, pp. 163–168 (1972).
- [63] B. VAN LEER. *Flux vector splitting for the Euler equations*. Lecture Notes in Physics, vol. 170, pp. 405–512 (1982).
- [64] D. VANDROMME. *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulement turbulents à masse volumique variable*. Thèse d'état, Université de Lille (1983).
- [65] D.C. WILCOX. *Turbulence modeling for CFD*. La Cañada DCW, California (2000).
- [66] O. ZEMAN. *Dilatation dissipation: the concept and application in modeling compressible mixing layers*. Phys. Fluids, vol. 2, pp. 178–188 (1990).

COMITÉ DE INVESTIGACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

EX CM
DR. ISABEL SANCHEZ MUÑOZ
TITULAR ESTUDIO DE UN MODELO DE TURBULENCIA
COMPRESIBLE OBTENIDO MEDIANTE TÉCNICAS DE
HOMOGENEIZACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SOBRESALIENTE CON LAUDE POR UNANIMIDAD
2005

El Vicerrector



El Presidente

