



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Departamento de Matemática Aplicada I

MODELO ÁLGEBRO-TOPOLÓGICO DE REPRESENTACIÓN
DE IMÁGENES DIGITALES EN nD

Memoria presentada por Belén Medrano Garfia para optar
al grado de Doctora por la Universidad de Sevilla.

V. B. de los Directores

Fdo. M^a del Rocío González Díaz y
Pedro Real Jurado.

Belén Medrano Garfia

Sevilla, diciembre de 2007

Agradecimientos

Gracias a todos los que me habéis ayudado en la realización de este trabajo.

Gracias Pedro por tu optimismo y buenos consejos.

Gracias M^a José por tus alentadoras palabras.

Gracias Rocío por enseñarme a vencer obstáculos y por tu gran profesionalidad como investigadora.

Gracias familia. A tí mamá y a tí Feli, gracias por vuestra paciencia y comprensión.

Ana M^a y papá, un beso.

“La matemática tiene un fin triple. Primero, proporcionar un instrumento para el estudio de la naturaleza. Pero esto no es todo. Tiene también un fin filosófico y un fin estético. Los buenos conocedores de la matemática encuentran en ella placeres comparables a los que proporcionan la pintura y la música. Admiran la delicada armonía de los números y de las formas. Se maravillan cuando un nuevo descubrimiento abre una nueva perspectiva. ¿Y no es estético este placer, aunque los sentidos no participen en él?”

Poincaré

Resumen

Para introducir este trabajo es necesario hablar de TOPOLOGÍA. La topología es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los objetos que no cambian bajo homeomorfismos (aplicaciones biyectivas y bicontinuas). Un problema fundamental en Topología es la clasificación de objetos salvo homeomorfismos. Dada la dificultad que supone abordar esta cuestión, se definen los llamados invariantes topológicos, es decir, propiedades de los objetos que nos dan respuesta negativa ante resultados distintos. De forma análoga, la TOPOLOGÍA DIGITAL estudia las propiedades y características topológicas de los objetos digitales. Una vez fijada una relación de adyacencia entre los elementos estructurales del objeto digital (pixel en 2D y voxel en 3D), la computación de invariantes topológicos en este campo tiene una gran importancia en algunas áreas como Procesamiento de Imágenes Digitales y Modelado Geométrico de objetos. En Topología Digital, hay dos formas de computar invariantes topológicos: (1). directamente a partir del objeto digital ó (2). asociando al objeto digital un “análogo continuo” (un complejo celular) que refleje la misma topología que el objeto digital inicial. Trabajando directamente con el objeto digital, sólo es posible el uso de técnicas combinatoriales lo que supone que el número de invariantes topológicos computados sea muy limitado. Si por el contrario trabajamos con el complejo celular asociado, podemos recurrir a las herramientas que nos aporta la Topología Algebraica y el Álgebra Homológica. En aquí donde se enmarca este trabajo.

En primer lugar, presentamos un modelo de representación álgebra topológico para objetos digitales tridimensionales sobre un mallado BCC, asociando a dicho objeto un complejo simplicial. Dicho modelo nos va a permitir obtener información homológica del objeto digital así como la computación de nuevos invariantes topológicos en este área. En particular, aquí computamos un invariante derivado del álgebra de cohomología.

En segundo lugar, nos planteamos el problema de trabajar con objetos digitales en cualquier dimensión. Para ello, presentamos dos nuevos modelos de representación trabajando en el dominio de los enteros y desarrollamos algoritmos que nos van a permitir obtener características topológicas de dichos objetos n-dimensionales.

Introducción

El Análisis de Imágenes Digitales tiene múltiples y bien conocidas aplicaciones tanto en la industria (control automático de calidad, lectura automática de documentos, etc) como en otras áreas científicas (medicina, radiología, meteorología, geología, etc). Si nos centramos en imágenes digitales $3D$, tratadas en la forma clásica bidimensional secuencia-a-secuencia (es decir, en formato vídeo) o en forma volumétrica directa $3D$, los avances en el procesamiento y análisis de estas imágenes hacen mejorar a ritmo vertiginoso la investigación en muchos campos actuales como, por ejemplo, en medicina. Algunas de las operaciones de análisis de imágenes requeridas en las aplicaciones nombradas anteriormente, deben tener en cuenta propiedades de tipo geométrico o topológico de los objetos continuos representados en dicha imágenes. Aunque existen diversas técnicas, la tendencia a considerar las puramente discretas es cada vez mayor. Esto se debe a que son las más apropiadas para realizar el tipo de tratamiento que las aplicaciones necesitan, por ser más acordes con la naturaleza de las imágenes digitales. Cuando se consideran estas técnicas, no es posible utilizar directamente, en el diseño de los algoritmos o en la verificación de su corrección, los resultados geométrico-topológicos desarrollados en la matemática continua. Así, se plantea a mediados del siglo XX, la necesidad de desarrollar una teoría topológica bien fundada sobre la clase de las imágenes digitales que sea reflejo de la topología de los objetos continuos en ellas representados, recibiendo el nombre de Topología Digital. Desde el inicio de esta teoría, obtener una completa caracterización topológica de las imágenes digitales es un problema sobre el que muchos investigadores están trabajando.

Para hablar de topología en un universo discreto es necesario determinar de principio los vecinos de cada uno de los elementos fundamentales (en nuestro caso, vóxeles o pequeños cubos) que constituyen el objeto. Una vez especificada la vecindad entre los vóxeles, los conceptos de camino digital, componente conexa y cavidad son claros en el ámbito discreto de los volúmenes digitales binarios. Un *camino digital* de un voxel v a otro voxel w es una secuencia de vóxeles $P_{vw} = \{u_i, i = 0, \dots, n\}$ tal que (1). $u_0 = v$ y $u_n = w$, (2). para cada $i = 1, \dots, n - 1$, u_i tiene exactamente dos vecinos en P_{vw} y (3). u_0 y u_n tienen exactamente un vecino en P_{vw} . Por *componente conexa* entenderemos el conjunto de vóxeles, tales que dos vóxeles cualesquiera del mismo están conectados por un camino digital en dicha componente [KR89]. Una *cavidad* no es más que una componente conexa blanca “rodeada” de alguna componente conexa negra. Sin embargo, un concepto que queda difuso en la mayoría de los libros sobre Procesamiento de Imágenes

Digitales es la noción topológica de *túnel o agujero 3D*. Un túnel se describe informal e intuitivamente en continuo, como el asa de una taza de café, formada por el torcimiento de un cilindro sólido para conectar ambas caras entre sí o con otro objeto conexo. Es decir, un túnel es un objeto que puede elásticamente deformarse en una curva cerrada simple. En un entorno discreto, mientras que existen algoritmos combinatoriales que trabajan vóxel a vóxel y calculan nociones topológicas como componentes conexas, cavidades o la característica de Euler-Poincaré, los túneles son características globales del objeto más difícilmente identificables [KR89, PLB04, AB94, ABP02, SAS03a, SAS03b]. No obstante, el número de túneles de un objeto sí se puede calcular fácilmente a partir del número de componentes conexas, cavidades y la característica de Euler-Poincaré.

En el marco de la Topología Digital, pocos son los invariantes topológicos que han sido algoritmizados con éxito, siendo los más conocidos los anteriormente nombrados: el número de componentes conexas, agujeros y cavidades en la imagen digital, el número de Euler digital o el grupo fundamental digital [Ros81, Kon89, Box99, ADFQ00]. El grupo fundamental digital, muy estudiado en el campo de la imagen digital, es un invariante que nos aporta mucha información topológica. Sin embargo, la comparación de tales grupos está fuertemente relacionada con problemas indecibles. El principal inconveniente es que todos estos invariantes no son, en absoluto, suficientes para caracterizar la complejidad topológica de una imagen digital tridimensional o de dimensión superior y necesitamos de nuevos números topológicos para poder disfrutar de una clasificación más precisa y exhaustiva. Por ejemplo, las dos imágenes de los tres toros dadas en la figura 1 tienen el mismo número de componentes conexas, túneles y cavidades. Sin embargo, no son topológicamente isomorfas. Es por tanto éste el principal objetivo de nuestro trabajo.

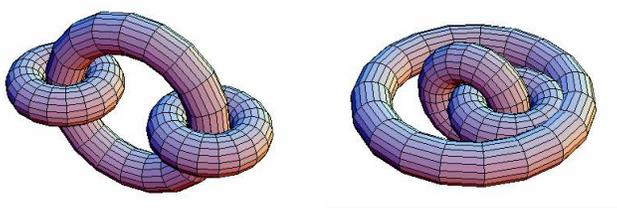


Figura 1: Imágenes con los mismos números de Betti y no topológicamente isomorfas.

La mayoría de las técnicas empleadas con éxito para el análisis de la topología de una imagen digital se basan exclusivamente en el análisis combinatorio. Para avanzar en el cálculo de nuevos invariantes topológicos, la solución por la que hemos optado es recurrir a un campo de las matemáticas, la Topología Algebraica, usando las herramientas que ésta nos aporta, y no cerrándonos en el entorno puramente combinatorio que nos proporciona

la Topología Digital. La Topología Algebraica constituye una de las áreas de la matemática pura con mayor crecimiento en el siglo XX y surge a raíz del problema de buscar invariantes más sofisticados para clasificar los objetos. Para ello, se vale de instrumentos algebraicos, fundamentalmente la Teoría de Grupos y el Álgebra Homológica, hasta tal punto de que su desarrollo es totalmente algebraico. Es decir, pretende dar solución a problemas topológicos reduciéndolos a formas más simples por medio de grupos invariantes por homeomorfismos. Poincaré (1894) fue indudablemente el primer matemático que, de forma efectiva, logró asociar objetos algebraicos a objetos geométricos: los llamados grupos de homología. Estos grupos permiten distinguir espacios como por ejemplo una esfera y un toro. En particular, nos dan información acerca del número de componentes conexas, túneles y cavidades del objeto.

Así, en esta memoria proponemos un marco matemático de modelización topológica algebraica de estructuras tridimensionales. A esta teoría la llamamos ***Teoría de Modelos de Representación de Imágenes Digitales Binarias 3D***. El dato fundamental en este esquema de representación de la imagen es fundamentalmente algebraico lo que nos permite considerar las características topológicas globales de las imágenes digitales, no como conjuntos de vóxeles, sino como clásicamente se hace en el área de la Topología Algebraica, mediante clases de homología. Con este modelo de representación conseguiremos, no sólo obtener el número de túneles de un objeto, sino también calcularlos e identificarlos. Daremos así una solución al problema de visualización y manipulación geométrica y topológica de ciclos representativos de generadores de homología.

Para trabajar con imágenes digitales, es necesario fijar un mallado sobre el que se defina la imagen así como la relación de vecindad entre los vóxeles de la misma. En esta memoria, trabajamos con el *mallado BCC* (body centered cubic grid), cuyos puntos son de la forma $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tal que $x \equiv y \equiv z \pmod{2}$. La única relación de vecindad (también llamada relación de adyacencia) que se define sobre él es la 14-adyacencia. El motivo fundamental de utilizar este mallado es que es muy usado en aplicaciones de imágenes médicas debido a sus características topológicas excepcionales y a su alto contenido en simetrías.

Varias estructuras combinatoriales pueden representar una subdivisión celular que modele una imagen digital 3D dada, tales como complejos simpliciales, cúbicos y simploidales. Nosotros trabajamos aquí con complejos simpliciales donde las celdas son símlices (vértices, aristas, triángulos y tetraedros, en dimensiones 0, 1, 2 y 3, respectivamente). Veremos que dada una imagen digital 3D \mathcal{I} en el mallado BCC con la 14-adyacencia, es posible asociar a \mathcal{I} un complejo simplicial tridimensional, llamado *representación simplicial* de \mathcal{I} y denotado por $K(\mathcal{I})$. Dicho complejo simplicial va a reflejar la misma topología que la imagen. Canónicamente asociado a un complejo simplicial K , se puede siempre

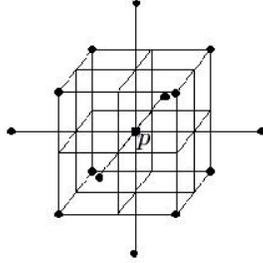


Figura 2: 14-adyacencia sobre el mallado BCC.

definir una estructura algebraica (conjunto de grupos abelianos junto con un operador diferencial), llamada complejo de cadenas y denotada por $\mathcal{C}(K)$. Pues bien, nuestro modelo de representación consiste en calcular lo que se llama una *contracción de cadenas* que nos va a permitir “ligar” un complejo de cadenas general con otro *complejo de cadenas minimal*, cuya definición daremos más adelante, a partir del cual vamos a poder obtener los grupos de homología. Sin dejar de restar importancia a las múltiples ventajas y aplicaciones que presenta este modelo de representación y que veremos a lo largo de esta memoria, destacar que constituye una herramienta muy útil para el cálculo de un nuevo invariante topológico, $HB1(I)$, de carácter cohomológico, más fino que los ya computados hasta el momento. Además, nos permitirá ampliar en un futuro dicha lista, con invariantes más finos incluso que el $HB1(I)$.

La idea fundamental que subyace en nuestra teoría es muy simple y conocida, desde hace bastante tiempo, en Topología Algebraica Computacional. En este campo, muchos son los autores que han desarrollado algoritmos para computar los grupos de homología (o números de Betti); en Agoston [AG76] se propone un método para computar generadores de homología basado en la reducción de ciertas matrices a su forma normal de Smith (SNF). Un algoritmo similar puede encontrarse en [Munk84], conocido como el matricial de Munkres. El problema de los algoritmos que incluyen la reducción de matrices a su SNF es el elevado coste computacional que ello supone y la posibilidad de que aparezcan matrices de enteros muy grandes durante el proceso. Diversos algoritmos, algunos de ellos determinísticos y estocásticos, han sido propuestos para salvar esta dificultad [DSV, G95, PAFL]. En [KMM98], Kaczynski propone un método para computar los grupos de homología mediante una secuencia de reducciones que derivan a un nuevo objeto, con menos celdas y con la misma homología que el objeto inicial. Este proceso lo hace trabajando en un cuerpo y no sobre \mathbb{Z} . Por otro lado, Edelsbrunner desarrolla otro algoritmo para computar los números de Betti de complejos simpliciales finitos [DE95],

basado en la idea incremental de añadir un nuevo símplice del complejo en cada paso. La idea clave es que siempre que se añade un símplice, se crea o se destruye un único elemento de la homología. Esto permite realizar un control topológico del objeto, trabajando de nuevo en un cuerpo y no sobre \mathbb{Z} .

Tanto el algoritmo matricial de reducción de matrices a su SNF, como este último incremental, serán tratados en detalle a lo largo de la tesis, ya que constituyen pilares fundamentales de nuestro trabajo.

El método de cálculo de invariantes topológicos (y en particular de la homología) que nosotros usamos aquí es determinado en su mayor parte por la Teoría de la Homología Efectiva (ver [FS94]) en la que se da una solución al problema de la computabilidad en Topología Algebraica, en términos de encontrar a partir de un complejo de cadenas uno libre de tipo finito (en general, con menor número de elementos) que tenga el mismo “tipo de homología” que el original. Finalmente, el cálculo homol gico se realiza sobre este complejo de cadenas más pequeño.

Destaquemos también que nuestro modelo de representación puede ser tratado desde el punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica, la cual está constituida por un conjunto de técnicas basadas esencialmente en los conceptos de perturbación y contracción de cadenas [GL89, GLS91, HK91]. El Lema Básica de Perturbación constituye la piedra angular de esta teoría: se trata de un verdadero algoritmo en el que el dato de entrada es una contracción entre dos complejos de cadenas junto con una perturbación de la diferencial y el dato de salida es una nueva contracción de cadenas entre los complejos de cadenas perturbados. De hecho, el Algoritmo Incremental, punto de partido de nuestro trabajo, se puede ver como un caso particular del Primer Lema Básico de Perturbación.

A continuación, pasamos a definir el contenido de esta memoria que desglosamos en tres partes perfectamente diferenciadas:

- PARTE I: MODELOS DE REPRESENTACIÓN DE LA HOMOLOGÍA DE COMPLEJOS DE CADENAS.

Esta primera parte se podr a enmarcar en el área del  lgebra Homológica. En ella vamos a desarrollar toda la teoría acerca de nuestro modelo de representación de la homología de complejos de cadenas en general. Concretamente, explicaremos el dato algebraico involucrado en dicho modelo, es decir, la contracción de cadenas que va a ligar un complejo de cadenas en general con otro complejo de cadenas “más pequeño” (con menor número de generadores), a partir del cuál, obtendremos información de la homología del objeto inicial (Homología Efectiva). Al trabajar con herramientas de la Topología Algebraica, es indispensable fijar un anillo base. Este hecho es el que nos hace dividir esta parte en varios capítulos. Un vez dado los

preliminares necesarios para el buen entendimiento de este trabajo, en el capítulo 2, definimos nuestro modelo de representación cuando el anillo base es el anillo de los enteros \mathbb{Z} , dándole el nombre de *Modelo Álgebra Minimal* o *Modelo AM*. Veremos que en este caso, el complejo de cadenas de llegada de la contracción no tiene necesariamente diferencial nula. No obstante, a partir de él vamos a poder obtener toda la información homológica en \mathbb{Z} . Sin embargo, la complejidad para computar dicho modelo es exponencial ya que incluye el cálculo de la forma normal de Smith de ciertas matrices. Así, en el capítulo 3, un nuevo modelo de representación es definido, trabajando con coeficientes en un cuerpo \mathbb{Z}_p , con p primo, obteniendo una contracción de cadenas cuyo complejo de llegada va a ser isomorfo a la homología del objeto inicial. A este último lo llamamos *Modelo Álgebra Topológico* o *Modelo AT*. La complejidad en este caso es menor, concretamente complejidad cúbica, pero veremos que se pierde información homológica cuando el objeto inicial presenta torsión. Por tanto, en el capítulo 4 introducimos un concepto totalmente nuevo, las λ -contracciones de cadenas, que nos van a permitir definir un último modelo de representación, llamado λ -modelo AT. Dicho modelo nos va a dar información de la parte de torsión de la homología sin necesidad de calcular la forma normal de Smith, reduciendo así la complejidad.

Para terminar, en el capítulo 5 veremos que la teoría explicada en los anteriores capítulos puede verse de forma más eficiente, calculando y almacenando sólo una de las aplicaciones de la contracción: un operador de homotopía ϕ).

- **PARTE II: MODELOS DE REPRESENTACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES BINARIAS 3D.**
En esta segunda parte vamos a aplicar las herramientas teóricas desarrolladas en la primera a las imágenes digitales binarias 3D. Para ello, trabajamos con una simplicialización adecuada de la imagen, usando la 14-adyacencia para los vóxeles negros de la misma. Así, como ya hemos mencionado anteriormente, asociamos a la imagen digital un complejo simplicial tridimensional con la misma información topológica que la propia imagen. Por una parte, veremos que nuestros modelos de representación se comportan bien ante la realización de operaciones conjuntistas en la imagen, así como antes cambios locales de la superficie. Por otra parte, avanzaremos en el cálculo de nuevos invariantes topológicos más finos que los ya computados.
- **PARTE III: APLICACIONES.**
Para terminar, introducimos dos importantes aplicaciones de nuestra teoría. Una primera aplicación relacionada con los Grafos de Reeb. Concretamente, construiremos un nuevo grafo asociado a una imagen digital binaria tridimensional, con mejores propiedades que el anterior. Y una segunda aplicación, la cual se enmar-

ca en el campo de la medicina, concretamente, en el problema de la osteoporosis. Veremos que, nuestros modelos de representación van a constituir una herramienta útil para medir el grado de “porosidad” de ciertas imágenes médicas en términos, fundamentalmente, del número, posición, tamaño y orientación de túneles existentes en la misma.

Para terminar con esta introducción, destacar que este trabajo tiene sus raíces en el año 2003 con los primeros resultados obtenidos por los investigadores González-Díaz R. y Real P., publicados concretamente en dos de sus artículos. A lo largo de la tesis, iremos poniendo de manifiesto cuál es la teoría que ya estaba desarrollada y cuáles son los nuevos resultados obtenidos tras mi incorporación al grupo.

Índice General

I Modelos de Representación de la Homología de Complejos de Cadenas	22
1 Preliminares de Topología Algebraica	24
1.1 Complejos simpliciales:	24
1.2 Complejos de cadenas	27
1.3 Homología de complejos de cadenas en general	28
1.4 Cohomología de complejos de cadenas	32
1.4.1 Cup producto sobre la cohomología de complejos simpliciales	35
1.5 Contracciones de cadenas	36
2 Modelo Álgebra Minimal	40
2.1 Modelo AM: definición y algoritmo	43
2.2 Computando información homológica a partir de un modelo AM	48
2.3 Reutilizando información homológica sobre \mathbb{Z}	50
2.3.1 Cálculo del modelo AM tras añadir un elemento a la base	51
2.3.2 Cálculo del modelo AM tras la eliminación de un elemento de la base	56
3 Modelo Álgebra Topológico	60
3.1 Modelo AT: definición y algoritmo	61
3.2 Computando información homológica a partir de un modelo AT	67
3.3 Algoritmo Decremental para computar un modelo AT	69
3.4 Modelos AT desde el punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica	73
4 λ-Modelo AT	78
4.1 λ -Contracciones de cadenas	78
4.2 λ -modelo AT: Definición y algoritmo	81
4.3 Computando información homológica a partir de λ -modelos AT	85
4.4 Ampliando la información homológica usando modelos AT	89

4.5	Algoritmo decremental para computar λ -modelos AT	94
5	Computando modelos de representación a partir de un operador de homotopía	100
5.1	Operador de homotopía que genera un modelo AM	100
5.2	Operador de homotopía que genera un modelo AT	104
5.3	Operador de homotopía que genera un λ -modelo AT	108
II	Modelos de representación de Imágenes Digitales Binarias	
3D		110
6	Modelos de representación de imágenes digitales binarias 3D	112
6.1	Imágenes Digitales Binarias 3D	113
6.2	Modelos de representación de imágenes digitales binarias 3D	117
6.2.1	Software: Voxelo	119
7	Control topológico de imágenes digitales binarias 3D	122
7.1	Representación simplicial de un imagen tras la adición y eliminación de un voxel	123
7.2	Algoritmos para control topológicamente una imagen digital	126
8	Operaciones conjuntistas	132
8.1	Preprocesamiento	133
8.2	Unión de imágenes digitales	134
8.2.1	Secuencia de imágenes digitales 2D	136
8.3	Intersección y diferencia de imágenes digitales	138
8.4	Complementario de una imagen digital	139
9	Cálculo de información cohomológica en imágenes digitales: computación de un nuevo invariante topológico	144
9.1	Información cohomológica a partir de los modelos de representación	145
9.2	Computación de un nuevo invariante topológico: $HB1$	148
III	Aplicaciones	154
10	Estructura de grafo de Reeb con lazos	156
10.1	Construcción del grafo de Reeb con lazos	161
11	Una aplicación a la medicina: osteoporosis	168

Índice de Figuras

1	Dos configuraciones de tres toros no isomorfas.	7
2	14-adyacencia sobre el mallado BCC.	9
1.1	Símplices orientados.	25
1.2	Realización geométrica de un complejo simplicial abstracto.	26
1.3	Operador borde	29
1.4	El toro y un complejo simplicial asociado.	31
1.5	La botella de Klein y un complejo simplicial asociado.	31
1.6	Complejo simplicial K	33
1.7	Cociclos representativos del toro en dimensión 1.	34
2.1	Complejo simplicial K	41
2.2	Ejemplo de Modelo AM con la botella de Klein.	45
2.3	A la izquierda, complejo simplicial K ; a la derecha, $L := K \cup \{2, 3\}$	53
2.4	Complejo simplicial $J := K \setminus \{1, 2\}$	57
3.1	Pasos del algoritmo 5.	65
3.2	Complejo simplicial S asociado a la botella de Klein.	69
3.3	Algoritmo decremental.	71
6.1	14-adyacencia en el mallado BCC.	114
6.2	14-adyacencia en el mallado cúbico y en el mallado BCC.	115
6.3	Descomposición de un cubo en 6 tetraedros.	115
6.4	Imagen digital \mathcal{I} y su representación simplicial $K(I)$	116
6.5	Voxelo: Imágenes digitales binarias A , B y C	120
6.6	Voxelo: Representaciones simpliciales asociadas a A , B y C	121
6.7	Voxelo: 1-ciclos representativos (agujeros o túneles) de A , B y C	121
6.8	Voxelo: 2-ciclos representativos (cavidades) de A , B y C	121

7.1	Imagen digital \mathcal{I} (a la izquierda) y cavidades de \mathcal{I} (a la derecha).	123
7.2	A la izquierda $\mathcal{I}^{\cup\{v\}}$ y a la derecha $\mathcal{I}^{\setminus\{v'\}}$.	123
7.3	Imagen digital \mathcal{I} y su representación simplicial $K(I)$.	124
7.4	Representación simplicial tras la adición y eliminación de un voxel.	124
7.5	14-adyacentes de un punto en la mallado cúbico y descomposición de un cubo en tetraedros.	125
7.6	Enumeración de los 8 cubos adyacentes a p .	125
7.7	Pasos para obtener modelo de $\mathcal{I}^{\cup\{v\}}$.	128
7.8	Pasos para obtener modelo de $\mathcal{I}^{\setminus\{v\}}$.	130
8.1	Unión de imágenes digitales 1	135
8.2	Unión de imágenes digitales 2	135
8.3	Unión de imágenes digitales 3	136
8.4	Secuencia de imágenes digitales $2D$.	137
8.5	Representaciones simpliciales de imágenes de la secuencia.	137
8.6	Intersección de imágenes digitales	138
8.7	Conjunto de vóxeles $F = I \setminus J$.	139
8.8	Inversa de una imagen digital $2D$.	140
8.9	En negro $K(I^c)$ y en rojo $K(I)$.	141
9.1	Imagen \mathcal{I} y $K(I)$.	146
9.2	En verde el 0-ciclo y en rojo el 1-ciclo.	147
9.3	Cociclos representativos.	148
9.4	Imágenes \mathcal{I} y \mathcal{J} .	152
9.5	Representaciones simpliciales $K(I)$ y $K(J)$.	152
9.6	Tablas de multiplicación para \mathcal{I} y \mathcal{J} .	152
10.1	Grafo de Reeb.	157
10.2	Complejo simplicial K y árbol recubridor.	158
10.3	En rojo, $\gamma_{(u,x)}$ y en verde, $\gamma_{(v,x)}$.	160
10.4	Imagen digital \mathcal{I} y un h -complejo asociado considerando la 14-adyacencia.	162
10.5	De izquierda a derecha, K_1 , K_2 y K_3 . En verde, las aristas de T_i , $i = 1, 2, 3$.	164
10.6	Representación simplicial $K(I)$. En verde, las aristas de T .	164
10.7	En rojo, ciclos horizontales β y β' ; en azul, ciclo vertical θ .	166
10.8	Grafo de Reeb	166
11.1	Dos asas unidas y dos túneles claramente diferenciados.	169
11.2	Un cuadrado hueco por todas sus caras y sus 5 túneles.	170

11.3 Un cilindro digital.	170
11.4 Una esfera digital.	171
11.5 Una esfera digital.	171
11.6 Fotografía proyección de μ MR de zona ósea trabecular.	172

Parte I

Modelos de Representación de la Homología de Complejos de Cadenas

Introducción:

Recordemos que, partiendo de un complejo de cadenas en general \mathcal{C} , nuestro objetivo es construir una contracción de cadenas ligando \mathcal{C} con otro complejo de cadenas, con menor número de generadores que el inicial. El motivo de computar dicha contracción es que vamos a obtener información homológica de \mathcal{C} y, en particular, vamos a poder calcular y visualizar ciclos representativos de generadores de homología de \mathcal{C} .

Como ya hemos dicho en la introducción, al trabajar con herramientas de la Topología Algebraica, es necesario fijar un anillo base. Pues bien, dependiendo del anillo base con el que estemos trabajando y de si el objeto inicial presenta torsión o no, se pueden definir diferentes modelos de representación. En el capítulo 1 daremos un breve repaso por las nociones más importantes de la Topología Algebraica. Los capítulos 2, 3 y 4 estarán dedicados a exponer los modelos de representación, siendo la estructura de ellos la siguiente: definimos el modelo, damos un algoritmo para computarlo estudiando su complejidad, vemos la información homológica que podemos obtener en cada caso y por último, nos planteamos el problema de reutilizar la información homológica tras añadir o eliminar un elemento de la base del complejo de cadenas inicial. Al final de cada capítulo, dejaremos claro cuáles son las ventajas y los inconvenientes de cada uno de los modelos de representación, así como los trabajos futuros que pretendemos abordar en cada caso. Por último, en el capítulo 5 estudiaremos una forma más eficiente de ver nuestros modelos de representación.

Capítulo 1

Preliminares de Topología Algebraica

En este capítulo introductorio, vamos a definir los conceptos propios de la Topología Algebraica, necesarios para el buen entendimiento de esta memoria. La terminología que usaremos se puede encontrar en [Munk84].

1.1 Complejos simpliciales:

Varias estructuras combinatorias pueden representar una subdivisión celular que modele un objeto dado. En particular, nosotros trabajamos con complejos simpliciales, los cuales constituyen una herramienta muy útil para el modelado geométrico de dichos objetos.

Símplices: Sea $\{v_0, \dots, v_q\}$ un conjunto de puntos de \mathbb{R}^N linealmente independientes. Se define el q -símplice σ generado por v_0, \dots, v_q como el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^q t_i v_i, \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^q t_i = 1.$$

Se denota $\sigma = \langle v_0, \dots, v_q \rangle$. El número q define la dimensión de σ ; los puntos v_0, \dots, v_q se llaman *vértices* de σ ; cada símplice generado por un subconjunto del conjunto $\{v_0, \dots, v_q\}$ se llama *cara* de σ . Nosotros consideramos una ordenación lexicográfica en el conjunto de vértices tal que $v_i < v_j$ si $i < j$. Entonces, un símplice puede tener

dos *orientaciones*, llamadas orientación positiva y orientación negativa. En nuestro caso, denotaremos la orientación negativa con un signo menos delante.

Ejemplo 1.1 *Un 0-símplice es un punto. El 1-símplice generado por dos vértices v_0 y v_1 consiste en todos los puntos de la forma*

$$x = tv_0 + (1 - t)v_1$$

con $0 \leq t \leq 1$. Luego, el 1-símplice $\sigma = \langle v_0, v_1 \rangle$ es el segmento que une ambos puntos (una arista). Es fácil probar que un 2-símplice generado por v_0, v_1 y v_2 es el triángulo de vértices v_0, v_1 y v_2 ; y un 3-símplice es un tetraedro.

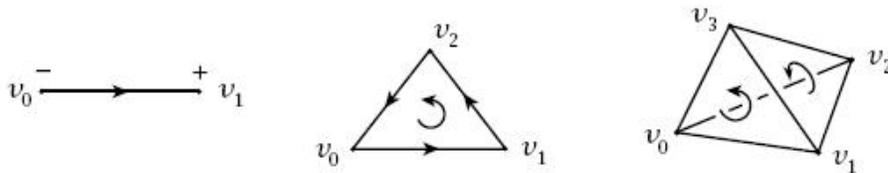


Figura 1.1: Arista, triángulo y tetraedro.

Según la orientación mostrada en la figura 1.1, $\langle v_0, v_1 \rangle$ denota a la arista considerando dicha orientación. Si consideramos la orientación contrario, lo denotaríamos por $-\langle v_0, v_1 \rangle$. Lo mismo ocurre con el triángulo y el tetraedro.

Complejos simpliciales: Un *complejo simplicial finito* K en \mathbb{R}^N es una colección finita de símplexes de \mathbb{R}^N verificando:

- Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in K$.
- Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ o $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es cara común de σ_1 y σ_2 .

Llamamos *dimensión de un complejo simplicial* K a la máxima dimensión de todos los símplexes de K . Denotamos por $K^{(q)}$ al conjunto de todos los q -símplexes de K . Sea $|K|$ el subconjunto de \mathbb{R}^N formado por la unión de todos los símplexes del complejo simplicial K . Dándole a cada símplex σ su topología natural como subespacio de \mathbb{R}^N , podemos definir una topología sobre $|K|$ de forma que un subconjunto A de $|K|$ es cerrado si y sólo si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ , para todo $\sigma \in K$. El espacio $|K|$ es llamado el *espacio subyacente* de K .

Complejos simpliciales abstractos: Un *complejo simplicial abstracto* es una colección Σ de conjuntos finitos no vacíos tal que si A es un elemento de Σ , todo subconjunto no vacío de A está en Σ . Al elemento A de Σ se le llama *símplice*; su *dimensión* es el número de elementos que contiene menos 1; cada subconjunto no vacío de A se llama *cara* de A . La dimensión del complejo Σ se define como la máxima dimensión de cada uno de los símlices de Σ (dicha dimensión puede ser infinita). El *conjunto de vértices* V de Σ es la unión de los elementos unitarios de Σ .

Ejemplo 1.2 Sea K un complejo simplicial. Entonces, podemos asociar a K un complejo simplicial abstracto $\Sigma(K)$ donde:

- El conjunto de vértices V de $\Sigma(K)$ es el conjunto de vértices del complejo simplicial K ;
- Los símlices de $\Sigma(K)$ son los subconjuntos $\{v_0, \dots, v_q\}$ de V , tales que v_0, \dots, v_q generan un símlice de K .

Una *realización geométrica* de un complejo simplicial abstracto Σ es un complejo simplicial K cuyo complejo simplicial abstracto asociado $\Sigma(K)$ es Σ .

Ejemplo 1.3 Consideramos el complejo simplicial abstracto Σ , dado por:

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- Símlices de Σ : los conjuntos $\{a, f, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, e\}$, $\{a, c, e\}$ y $\{a, e, f\}$.

Entonces, el complejo simplicial K de la figura 1.2 es una realización geométrica de Σ .

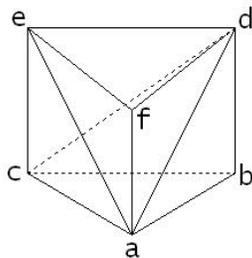


Figura 1.2: Realización geométrica de Σ .

1.2 Complejos de cadenas

En la teoría de módulos, es indispensable fijar un anillo base; suele ser costumbre trabajar con un anillo conmutativo con elemento unidad distinto del elemento neutro (es decir $1 \neq 0$). En general, notamos por Λ a un anillo conmutativo con elemento unidad no nulo. A lo largo de esta memoria, el anillo Λ será el anillo de los enteros \mathbb{Z} ó cuerpo \mathbb{Z}_p , siendo p un primo.

Un *complejo de cadenas* \mathcal{C} es una secuencia

$$\dots \xrightarrow{d_{q+1}} \mathcal{C}_q \xrightarrow{d_q} \mathcal{C}_{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} \dots \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \xrightarrow{d_0} 0.$$

de grupos abelianos \mathcal{C}_q (llamados *grupos de q -cadenas*) y homomorfismos $d_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}_{q-1}$ (llamado *diferencial* de \mathcal{C} en dimensión q), tal que $d_q d_{q+1} = 0$, para todo $q \geq 0$. Cada grupo \mathcal{C}_q es un grupo libre y de rango finito. Un complejo de cadenas \mathcal{C} puede ser codificado como un par (C, d) donde: (1). $C = \{C_q\}$ y para cada q , C_q es una base de \mathcal{C}_q (decimos entonces que C es una base de \mathcal{C}); (2). $d = \{d_q\}$ y para cada q , d_q es la diferencial de \mathcal{C} en dimensión q con respecto a las bases C_q y C_{q-1} . Así, una q -cadenas $a \in \mathcal{C}_q$ es una suma formal de elementos de la base C_q , es decir, $a = \sum \lambda_i a_i$, $\lambda_i \in \Lambda$ y $a_i \in C_q$. Dado un complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$ y una q -cadenas $a \in \mathcal{C}_q$, se dice que la *dimensión de a* es q . La *dimensión de un complejo de cadenas* se define como la máxima dimensión de todos sus elementos. Se dice que la base $C = \{C_q\}$ de \mathcal{C} es un *filtro* si dado $a \in C_q$, $d_q(a)$ se puede expresar como combinación lineal de elementos de la base C_{q-1} , para todo $q \geq 0$.

Ejemplo 1.4 Sean $C_0 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $C_1 = \{a, b, c\}$, $d_0 \equiv 0$, $d_1(a) = -\alpha + \beta$, $d_1(b) = -\beta + \gamma$ y $d_1(c) = -\alpha + \gamma$. Se verifica que $d_0 d_1 \equiv 0$. Entonces, la secuencia

$$\mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \xrightarrow{d_0} 0.$$

define un complejo de cadenas de dimensión 1.

Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ un complejo de cadenas y $M = \{M_q\}$ tal que para cada q , M_q es un subconjunto de C_q y tal que si $m \in M_q$, se verifica que $d_q(m)$ es combinación lineal de elementos de M_{q-1} . Entonces, es posible definir un nuevo complejo de cadenas $\mathcal{M} = (M, d')$, donde $M = \{M_q\}$ y $d' = \{(d_q)|_{M_q}\}$, es decir, para cada q (d'_q es la diferencial de \mathcal{C} en dimensión q , d_q , restringida a los elementos de M_q). Se dice que \mathcal{M} es el *complejo de cadenas generado por M* .

Un complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$ es *minimal* si, en cada dimensión q , la forma normal de Smith A' de la matriz de la diferencial d_q verifica que el primer elemento no nulo de la diagonal es distinto de 1.

Ejemplo 1.5 *El complejo de cadenas del ejemplo 1.4 no es un complejo de cadenas minimal. La matriz de la diferencial d_1 es la siguiente:*

$$\begin{array}{c|ccc} d_1 & a & b & c \\ \hline \alpha & -1 & 0 & -1 \\ \beta & 1 & -1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Haciendo operaciones por filas y columnas, cambiando así las bases iniciales C_i , para $i = 0, 1$, la forma normal de Smith de dicha matriz viene dada por

$$\begin{array}{c|ccc} d_1 & a & b & a + b - c \\ \hline \beta - \gamma & 1 & 0 & 0 \\ \gamma - \beta & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

La nueva base de \mathcal{C} es $C' = \{C'_q\}$ donde $C'_0 = \{\beta - \gamma, \gamma - \beta, \gamma\}$ y $C'_1 = \{a, b, a + b - c\}$. Como el primer no elemento nulo de la diagonal es 1, dicho complejo de cadenas no es minimal.

Complejos de cadenas asociados a complejos simpliciales: Dado un complejo simplicial K , es posible asociar canónicamente a K un complejo de cadenas que denotamos por $\mathcal{C}(K) = (C(K), \partial)$, donde

- El grupo de q -cadenas $\mathcal{C}_q(K)$ es el conjunto de sumas finitas de q -símplices de K con coeficientes en Λ , es decir, si $a \in \mathcal{C}_q(K)$, $a = \sum \lambda_i \sigma_i$, donde $\lambda_i \in \Lambda$ y $\sigma_i \in K^{(q)}$. Luego, la base $C(K)$ de $\mathcal{C}(K)$ viene dada por: $C(K) = \{K^{(q)}\}$.
- La diferencial es $\partial = \{\partial_q\}$, donde $\partial_q : K^{(q)} \longrightarrow K^{(q-1)}$ se define como: $\partial_q(\langle v_0, \dots, v_q \rangle) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_q \rangle$. Por linealidad, podemos extender ∂_q al grupo de las q -cadenas $\mathcal{C}_q(K)$. Dicho operador diferencial recibe el nombre de *operador borde* (ver figura 1.3).

1.3 Homología de complejos de cadenas en general

La Topología Algebraica fue originada fundamentalmente por matemáticos como Poincaré y Betti, construyendo ciertos invariantes topológicos. Poincaré introdujo un cierto

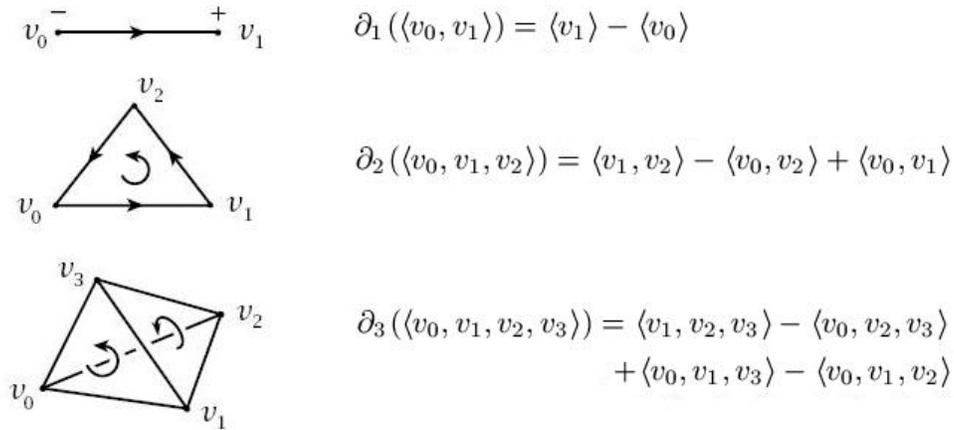


Figura 1.3: Operador borde sobre una arista, un triángulo y un tetraedro.

grupo, llamado el *grupo fundamental* de un espacio topológico X , denotado por $\pi_1(X)$. Demostró que espacios topológicos como la esfera, el toro y la botella de Klein tienen grupos fundamentales distintos con lo cual, prueba que no son espacios homeomorfos. Pero dichos grupos son esencialmente útiles cuando se trabaja con espacios de baja dimensión. Esta limitación es salvada considerando los grupos análogos al grupo fundamental para dimensiones mayores, los *grupos de homotopía*, denotados $\pi_n(X)$. Sin embargo, los grupos de homotopía tienen una importante desventaja en cuanto a que son extremadamente difíciles de computar en general. Incluso para espacios tan simples como la esfera, la computación de $\pi_i(S^n)$, para $i > n$, resulta ser un problema enorme. Por ello, se introducen los *grupos de homología*, denotados por $H_n(X)$. Es cierto que, por ejemplo, para el caso de la esfera los grupos de homología $H_i(S^n)$ son isomorfos a los grupos de homotopía $\pi_i(S^n)$, cuando $1 \leq i \leq n$. Sin embargo, la ventaja de los grupos de homología es que se anulan para $i > n$. La dificultad que presenta la computación de los grupos de homotopía en dimensiones grandes es que no se pueden computar directamente a partir de estructuras celulares como ocurre con el grupo fundamental π_1 . Los grupos de homología, por el contrario, están fuertemente relacionados con estructuras celulares.

En esta sección vamos a definir el concepto de grupos de homología de complejos de cadenas en general.

Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ un complejo de cadenas. Una q -cadena $a \in C_q$ es un q -ciclo si $d_q(a) = 0$. Si $a = d_{q+1}(a')$ para alguna $(q + 1)$ -cadena $a' \in C_{q+1}$, decimos entonces que a es un q -borde. Los grupos de q -ciclos y q -bordes se denotan por Z_q y B_q , respectivamente. Como $d_q d_{q+1} = 0$, es obvio que $B_q \subseteq Z_q$, para todo $q \geq 0$. Entonces, se define el q -ésimo grupo

de homología con coeficientes en el anillo Λ como el grupo cociente Z_q/B_q ,

$$H_q(\mathcal{C}; \Lambda) = Z_q/B_q.$$

Para cada q , existe un número finito de elementos de $H_q(\mathcal{C}; \Lambda)$ tal que todos los elementos de $H_q(\mathcal{C}; \Lambda)$ pueden deducirse a partir de ellos. Dichos elementos se llaman *generadores de homología* de dimensión q . Decimos que $a \in Z_q$ es un q -ciclo representativo de un generador de homología α de dimensión q si $\alpha = a + B_q$. Esto se denota por $\alpha = [a]$. Un conjunto de q -ciclos representativos $\{c_1, \dots, c_n\}$ es una *base de ciclos representativos* en dimensión q si el conjunto $\{[c_1], \dots, [c_n]\}$ es un conjunto de generadores del q -ésimo grupo de homología.

Para cada q , el q -ésimo grupo de homología $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano finitamente generado y por tanto, el Teorema Fundamental de Grupos Abelianos Finitamente Generados ([Munk84], p.24) implica que,

$$H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) \simeq F_q \oplus T_q,$$

donde $F_q = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ y $T_q = \mathbb{Z}/\alpha_{(q,1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/\alpha_{(q,k)}$ son el subgrupo libre y el subgrupo de torsión de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$, respectivamente. El rango de F_q es el q -ésimo número de Betti, β_q . Estos números tienen una interpretación geométrica en dimensiones 0, 1 y 2: β_0 representa el número de componentes conexas, β_1 el número de agujeros independientes y β_2 el número de cavidades. Cada $\alpha_{(q,i)}$ es potencia de un primo p_i , $\alpha_{(q,i)} = p_i^{t_{(q,i)}}$ y son llamados los *factores invariantes* o *coeficientes de torsión* de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$. Los números β_q y $\alpha_{(q,i)}$ están unívocamente determinados por $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$.

Por otra parte, si el anillo base es un cuerpo \mathbb{Z}_p , con p un primo, el q -ésimo grupo de homología $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$ es un espacio vectorial y por tanto su rango, denotado por $\beta_{(q,p)}$ depende del primo p . Por el Teorema de Coeficientes Universales para Homología ([Munk84], p. 332), se tiene que para cada primo p ,

$$T_{(0,p)} = \beta_{(0,p)} - \beta_0 \quad \text{y} \quad T_{(q,p)} = \beta_{(q,p)} - \beta_q - T_{(q-1,p)},$$

siendo $T_{(i,p)}$ el número de factores invariantes de $H_i(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ que son potencia de p .

Ejemplo 1.6 Sea T el complejo simplicial obtenido a partir de una triangulación del toro (ver figura 1.4). Los grupos de homología con coeficientes en \mathbb{Z} son:

$$H_0(T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(T; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

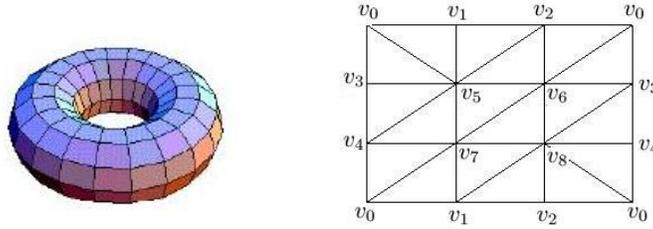


Figura 1.4: A la izquierda el toro, a la derecha el complejo simplicial T .

Los ciclos representativos son $\langle v_0 \rangle$ en dimensión 0, $\langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle$ y $\langle v_0, v_3 \rangle + \langle v_3, v_4 \rangle - \langle v_0, v_4 \rangle$ en dimensión 1 y β = suma de todos los triángulos de S (teniendo en cuenta la orientación) en dimensión 2. Por tanto, los números de Betti son: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = 1$, de donde se deduce que el toro tiene una componente conexas, dos agujeros independientes y una cavidad.

Ejemplo 1.7 Sea S el complejo simplicial obtenido a partir de una triangulación de la botella de Klein (ver figura 1.5). Los grupos de homología en este caso, con coeficientes en \mathbb{Z} , son:

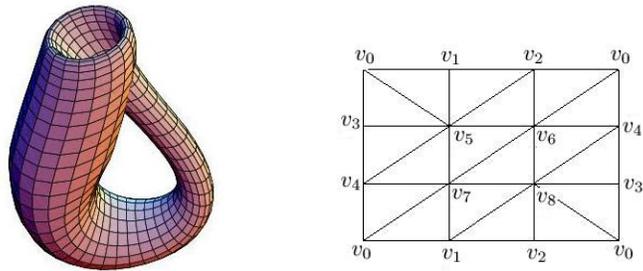


Figura 1.5: A la izquierda la botella de Klein, a la derecha el complejo simplicial S .

$$H_0(S; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2.$$

Los ciclos representativos son $\langle v_0 \rangle$ en dimensión 0, $\langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle$ ciclo representativo de la parte libre en dimensión 1 y $\langle v_0, v_4 \rangle - \langle v_3, v_4 \rangle - \langle v_0, v_3 \rangle$ ciclo representativo de la parte de torsión en dimensión 1. En este caso, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 0$, indicando una componente conexas, un agujero y ninguna cavidad. Por otra parte, para

$p = 2$, $T_{(0,2)} = 0$ y $T_{(1,2)} = 1$, lo que implica que efectivamente hay un factor invariante potencia de 2 en el primer grupo de homología de la botella de Klein.

1.4 Cohomología de complejos de cadenas

Posteriormente a los grupos de homología, surgió otra secuencia de grupos abelianos asociada a un espacio topológico, llamada *grupos de cohomología*. El hecho de que estos últimos aparecieran con posterioridad no es difícil de entender. Se debe fundamentalmente a que los grupos de cohomología son, geoméricamente hablando, menos naturales que los grupos de homología. Sus orígenes provienen del álgebra, más que de la geometría; en un sentido algebraico (para ser más precisos), son “duales” a los grupos de homología. Los teoremas de dualidad para superficies, la conexión entre topología y geometría diferencial y entre topología y análisis, son resultados que han sido formulados en términos de la cohomología. Incluso para problemas puramente topológicos como la clasificación de espacios salvo homeomorfismos, la cohomología constituye una herramienta muy útil.

Es bien sabido que si los grupos de homología no son capaces de distinguir entre dos espacios, los grupos de cohomología tampoco lo serán. Surge por tanto una pregunta natural: ¿Por qué trabajar con la cohomología? La respuesta más concluyente a esta pregunta es que los grupos de cohomología poseen una estructura algebraica adicional: la de anillo. Este anillo permite distinguir dos espacios cuando los grupos de homología no lo hagan.

Pasamos a definir la cohomología de complejos de cadenas:

Complejos de cocadenas: Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ un complejo de cadenas. Un complejo de cocadenas \mathcal{C}^* es una secuencia

$$\mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{\delta_2} \dots,$$

donde $\mathcal{C}^q := \text{Hom}(\mathcal{C}_q; \Lambda)$ (llamados grupos de cocadenas) y $\delta_q : \mathcal{C}^q \rightarrow \mathcal{C}^{q+1}$ es un homomorfismo dado por $\delta_q(c) = cd_{q+1}$, para $c \in \mathcal{C}^q$ (llamado *codiferencial* del complejo de cocadenas en dimensión q). Un complejo de cocadenas \mathcal{C}^* puede ser codificado como un par (\mathcal{C}^*, δ) donde: (1). $\mathcal{C}^* = \{\mathcal{C}^q\}$ y para cada q , \mathcal{C}^q es una base del grupo de q -cocadenas \mathcal{C}^q ; (2). $\delta = \{\delta_q\}$ y para cada q , δ_q es la codiferencial de \mathcal{C}^* en dimensión q respecto a las bases \mathcal{C}^q y \mathcal{C}^{q+1} .

Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ un complejo de cadenas y $\mathcal{C}^* = (C^*, \delta)$ el complejo de cocadenas asociado. Si $\mathcal{C}_q = \{a_1, \dots, a_n\}$ es una base del grupo de q -cadenas \mathcal{C}_q , entonces una base

del grupo de q -cocadenas \mathcal{C}^q viene dada por $\mathcal{C}^q = \{a_1^*, \dots, a_n^*\}$, donde $a_i^* : \mathcal{C}_q \rightarrow \Lambda$ es definido como $a_i^*(a_i) = 1$ y $a_i^*(a_j) = 0$ para $1 \leq i < j \leq n$ y $j \neq i$, y extendido linealmente al resto de elementos de \mathcal{C}_q . Veámoslo: sea c^* una q -cocadena de \mathcal{C}^q ; tenemos que ver que c^* se puede expresar como combinación lineal de a_1^*, \dots, a_n^* . Por definición, $c^* \in \text{Hom}(\mathcal{C}_q, \Lambda)$. Luego, el homomorfismo c^* queda definido dando las imágenes de los elementos de la base \mathcal{C}_q : $c^*(a_1) = \lambda_1, \dots, c^*(a_n) = \lambda_n$. Ahora bien, definimos el homomorfismo $d^* := \lambda_1 a_1^* + \dots + \lambda_n a_n^*$. Dicho homomorfismo aplicado a la base \mathcal{C}_q verifica: $d^*(a_i) = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Luego, $c^* = d^* = \lambda_1 a_1^* + \dots + \lambda_n a_n^*$.

Ejemplo 1.8 Consideramos el complejo simplicial K de la figura 1.6. El complejo de cocadenas asociado a dicho complejo simplicial viene dado por $\mathcal{C}^*(K) = (\mathcal{C}^*(K), \delta)$, donde



Figura 1.6: Complejo simplicial K

- $\mathcal{C}^*(K) = \{\mathcal{C}^q(K)\}$, siendo $\mathcal{C}^0(K) = \{\langle 0 \rangle^*, \langle 1 \rangle^*, \langle 2 \rangle^*\}$, $\mathcal{C}^1(K) = \{\langle 0, 1 \rangle^*, \langle 1, 2 \rangle^*, \langle 0, 2 \rangle^*\}$ y $\mathcal{C}^2(K) = \{\langle 0, 1, 2 \rangle^*\}$;
- $\delta = \{\delta_q\}$: $\delta_0 : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1$, $\delta_1 : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$.

Veamos algunos ejemplos de la codiferencial:

- $\delta_0(\langle 0 \rangle^*)(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0 \rangle^* \partial_1(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0 \rangle^*(\langle 1 \rangle) - \langle 0 \rangle^*(\langle 0 \rangle) = 0 - 1 = -1$,
- $\delta_1(\langle 1, 2 \rangle^*)(\langle 0, 1, 2 \rangle) = \langle 1, 2 \rangle^* \partial_2(\langle 0, 1, 2 \rangle) = \langle 1, 2 \rangle^*(\langle 1, 2 \rangle) - \langle 1, 2 \rangle^*(\langle 0, 2 \rangle) + \langle 1, 2 \rangle^*(\langle 0, 1 \rangle) = 1 - 0 + 0 = 1$.

Una q -cocadena $a^* \in \mathcal{C}^q$ es un q -cociclo si $\delta_q(a^*) = 0$. Si $a^* = \delta_{q-1}(b^*)$, decimos que a^* es un q -coborde. Los grupos de q -cociclos y q -cobordes se denotan por Z^q y B^q , respectivamente. Entonces, se define el q -ésimo grupo de cohomología, $q \geq 0$, con coeficientes en el anillo Λ como

$$H^q(\mathcal{C}; \Lambda) = Z^q / B^q.$$

Para cada q , existe un número finito de elementos de $H^q(\mathcal{C}; \Lambda)$ que generan el resto de elementos de $H^q(\mathcal{C}; \Lambda)$. Dichos elementos reciben el nombre de generadores de cohomología de dimensión q . Decimos que $a^* \in Z^q$ es un q -cociclo representativo de un generador de cohomología α^* en dimensión q si $\alpha^* = a^* + B_q$. Esto se denota por $\alpha^* = [a^*]$. Un conjunto de q -cociclos representativos $\{c_1^*, \dots, c_n^*\}$ es una *base de cociclos representativos* en dimensión q si el conjunto $\{[c_1^*], \dots, [c_n^*]\}$ es una base del q -ésimo grupo de cohomología.

Para cada dimensión q , el q -ésimo grupo de cohomología $H^q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano finitamente generado isomorfo a $F^q \oplus T^q$, donde F^q y T^q son el subgrupo libre y el subgrupo de torsión de $H^q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$, respectivamente. El rango de F_q (rango del subgrupo libre de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$) coincide con el rango de F^q , para cada q .

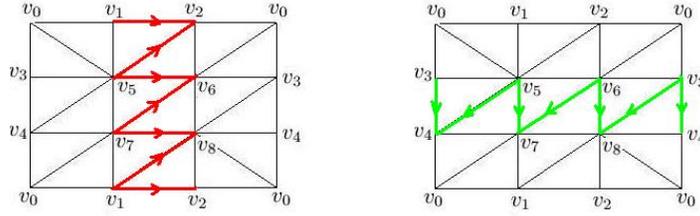


Figura 1.7: En rojo ω_1 y en verde ω_2 .

Ejemplo 1.9 Consideramos el toro y el complejo simplicial asociado T dado en el ejemplo 1.6. Entonces, los grupos de cohomología de T son:

$$H^0(T; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, H^1(T; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, H^2(T; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Las 1-cocadenas ω_1 y ω_2 son 1-cociclos representativos de generadores de cohomología en dimensión 1 (ver figura 1.7), siendo:

$$\omega_1 := \langle v_1, v_2 \rangle^* - \langle v_2, v_5 \rangle^* + \langle v_5, v_6 \rangle^* - \langle v_6, v_7 \rangle^* + \langle v_7, v_8 \rangle^* + \langle v_1, v_8 \rangle^* + \langle v_1, v_2 \rangle^*$$

$$\omega_2 := \langle v_3, v_4 \rangle^* - \langle v_4, v_5 \rangle^* + \langle v_5, v_7 \rangle^* + \langle v_6, v_7 \rangle^* + \langle v_6, v_8 \rangle^* + \langle v_3, v_8 \rangle^* + \langle v_3, v_4 \rangle^*$$

Para ver que efectivamente ω_1 y ω_2 son cociclos, tendríamos que probar primero que $\delta_1(\omega_i) = 0$, $i = 1, 2$. Para ello, tenemos que ver que $\delta_1(\omega_i)(t) = \omega_i \partial_2(t) = 0$, para todo triángulo t . Veamos algunos ejemplos:

- $\delta_1(\omega_1)(\langle b, c, f \rangle) = \omega_1 \partial_2(\langle b, c, f \rangle) = \omega_1(\langle c, f \rangle) - \omega_1(\langle b, f \rangle) + \omega_1(\langle b, c \rangle) = -1 - 0 + 1 = 0$,

$$\bullet \delta_1(\omega_2)(\langle d, g, i \rangle) = \omega_2 \delta_2(\langle d, g, i \rangle) = \omega_2(\langle g, i \rangle) - \omega_2(\langle d, i \rangle) + \omega_2(\langle d, g \rangle) = 1 - 1 + 0 = 0$$

Por otra parte, para probar que ambos 1-cociclos no son cobordes, es decir que $\omega_1, \omega_2 \notin \text{Im } \delta_2$, tenemos que ver que $\delta_2(t) \neq \omega_1, \omega_2$, siendo t una 2-cadena. Esto último supone una tarea bastante difícil, en cuanto a la cantidad de operaciones que hay que realizar. Una vez probado, podemos garantizar que ω_1 y ω_2 son cociclos representativos generadores de cohomología, en el caso del toro. Por otra parte, si σ es cualquier 2-símplice de T , σ^* es un cociclo representativo en dimensión 2.

1.4.1 Cup producto sobre la cohomología de complejos simpliciales

Como hemos mencionado en la introducción, los grupos de cohomología presentan una estructura algebraica adicional, la de anillo con el cup producto. Una fórmula para dicho producto es bien conocida en complejos simpliciales. Sea K un complejo simplicial de cualquier dimensión y $\mathcal{C}^*(K) = (C^*(K), \delta)$ el complejo de cocadenas canónicamente asociado a K . Se define el *cup producto* como $\smile: \mathcal{C}^p(K) \times \mathcal{C}^q(K) \longrightarrow \mathcal{C}^{p+q}(K)$ dado por,

$$(c \smile c')(\langle v_0, \dots, v_{p+q} \rangle) = c(\langle v_0, \dots, v_p \rangle) \cdot c'(\langle v_p, \dots, v_{p+q} \rangle),$$

donde $c \in \mathcal{C}^p(K) = \text{Hom}(\mathcal{C}_p; \Lambda)$, $c' \in \mathcal{C}^q(K) = \text{Hom}(\mathcal{C}_q; \Lambda)$, $\langle v_0, \dots, v_{p+q} \rangle$ es un $(p+q)$ -símplice de K y \cdot es el producto natural de Λ . El cup producto induce una operación $\smile: H^p(K) \times H^q(K) \longrightarrow H^{p+q}(K)$ dada por $[c] \smile [c'] = [c \smile c']$, la cual es bilineal, asociativa, conmutativa salvo signo, independiente de la ordenación de los vértices de K e invariante de tipo homotópico ([Munk84], p. 289).

Ejemplo 1.10 *Consideramos el complejo simplicial T asociado al toro. En el ejemplo 1.9 hemos estudiado su cohomología. En dimensión 1, tenemos dos cociclos ω_1 y ω_2 . Vamos ahora a calcular el cup producto de dichos cociclos, $\omega_1 \smile \omega_2 \in \mathcal{C}^2(T)$. Por definición de complejo de cocadenas, $\omega_1 \smile \omega_2$ es un homomorfismo de $\mathcal{C}_2(K)$ en \mathbb{Z} . Entonces, tenemos que aplicar $\omega_1 \smile \omega_2$ a todos los triángulos de T . Veamos algunos ejemplos:*

- $\omega_1 \smile \omega_2(\langle v_5, v_6, v_7 \rangle) = \omega_1(\langle v_5, v_6 \rangle) \cdot \omega_2(\langle v_5, v_7 \rangle) = 1 \cdot 1 = 1;$
- $\omega_1 \smile \omega_2(\langle v_6, v_7, v_8 \rangle) = \omega_1(\langle v_6, v_7 \rangle) \cdot \omega_2(\langle v_7, v_8 \rangle) = (-1) \cdot 0 = 0.$

Si procedemos de forma análoga con todos los triángulos de T , obtenemos que

$$\omega_1 \smile \omega_2 = \langle v_5, v_6, v_7 \rangle^*$$

siendo $\langle v_5, v_6, v_7 \rangle^*$ el homomorfismo tal que $\langle v_5, v_6, v_7 \rangle^*(\langle v_5, v_6, v_7 \rangle) = 1$ y $\langle v_5, v_6, v_7 \rangle^*(t) = 0$ para el resto de triángulos t de T distintos de $\langle v_5, v_6, v_7 \rangle$.

1.5 Contracciones de cadenas

En esta sección vamos a dar una serie de definiciones y propiedades importantes.

Sean $\mathcal{C} = (C, d)$ y $\mathcal{C}' = (C', d')$ dos complejos de cadenas. Una *aplicación de cadenas* de \mathcal{C} en \mathcal{C}' es una familia de aplicaciones, $f = \{f_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}'_q\}$, tal que en cada dimensión q , $d'_q f_q = f_{q-1} d_q$. Para dar la definición de un homomorfismo f_q , basta dar la imagen de f_q sobre los elementos de la base C_q de \mathcal{C}_q y luego extenderlo linealmente al resto de elementos de \mathcal{C}_q .

Ejemplo 1.11 Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ el complejo de cadenas del ejemplo 1.4 y sea $\mathcal{C}' = (C', d')$ tal que $C'_0 = \{\alpha', \beta', \gamma'\}$ y $C'_1 = \{a', b'\}$; $d'_1(a') = \beta' - \alpha'$ y $d'_1(b') = \alpha' - \gamma'$, extendida linealmente al resto de elementos de \mathcal{C}'_0 y \mathcal{C}'_1 . Definimos $f_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'_0$ como: $f_0(\alpha) = \alpha'$, $f_0(\beta) = \beta'$ y $f_0(\gamma) = \gamma'$; y definimos $f_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ como: $f_1(a) = a'$, $f_1(b) = -a' - b'$ y $f_1(c) = -b'$. Entonces, es fácil ver que $f = \{f_0, f_1\}$ define una aplicación de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{C}' .

Sean $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ y $g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ dos aplicaciones de cadenas. Una *homotopía de cadenas* de f a g es una familia de aplicaciones, $\phi = \{\phi_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}'_{q+1}\}$, tal que en cada dimensión q , se verifica la siguiente igualdad:

$$d'_{q+1} \phi_q + \phi_{q-1} d_q = f_q - g_q$$

Lo denotamos por $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$.

Una *contracción de cadenas* de $\mathcal{C} = (C, d)$ en $\mathcal{C}' = (C', d')$ se define como un conjunto de tres aplicaciones $f = \{f_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}'_q\}$, $g = \{g_q : \mathcal{C}'_q \rightarrow \mathcal{C}_q\}$ y $\phi = \{\phi_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}_{q+1}\}$ tales que para todo q :

- (i). f y g son aplicaciones de cadenas, es decir, $f_{q-1} d_q = d'_q f_q$ y $d_q g_q = g_{q-1} d'_q$;
- (ii). fg es la aplicación identidad en \mathcal{C}' , es decir, $f_q g_q = id_{\mathcal{C}'_q}$;
- (iii). ϕ es una homotopía de cadenas de la identidad en \mathcal{C} en gf , es decir, $id_{\mathcal{C}_q} - g_q f_q = \phi_{q-1} d_q + d_{q+1} \phi_q$.

A continuación, vamos a aclarar algunas notaciones que usaremos a lo largo de la tesis. Denotamos las contracciones de cadenas por $c = (f, g, \phi)$. Si tenemos una contracción

$c = (f, g, \phi)$ entre dos complejos de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$ y $\mathcal{C}' = (C', d')$, para mostrar las imágenes de dichas aplicaciones usaremos tablas de forma que, en la primera y segunda columna se mostrarán los elementos de las bases de \mathcal{C} y \mathcal{C}' , respectivamente; y en el resto de columnas las imágenes de las aplicaciones f , g y ϕ (omitiendo los subíndices, es decir, $f(a)$ denotará $f_q(a)$ si $a \in C_q$).

Ejemplo 1.12 Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ el complejo de cadenas del ejemplo 1.4 y sea $\mathcal{C}' = (C', d')$ tal que $C'_0 = \{\alpha\}$ y $C'_1 = \{b\}$; $d_1 \equiv 0$. Definimos las siguientes aplicaciones:

C	C'	f	g	ϕ
α	α	α	α	0
β		α		a
γ		α		c
a		0		0
b	b	b	$a+b-c$	0
c		0		0

Por ejemplo, si nos fijamos en la fila del elemento b (penúltima fila), $f(b) = f_1(b) = b$, $g(b) = g_1(b) = a + b - c$ y $\phi(b) = \phi_1(b) = 0$. Es fácil probar que $c = (f, g, \phi)$ es una contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{C}' . Veámoslo, por ejemplo, para el elemento b :

- (i). $d'_1 f_1(b) = d'_1(b) = 0 = -\alpha + \alpha = f_0(-\beta + \gamma) = f_0 d_1(b)$;
 $d_1 g_1(b) = d_1(a + b - c) = -\alpha + \beta - \beta + \gamma + \alpha - \gamma = 0 = g_0 d'_1(b)$.
- (ii). $f_1 g_1(b) = f_1(a + b - c) = b$;
- (iii). $b - g_1 f_1(b) = b - a - b + c = c - a = \phi_0(\gamma) - \phi_0(\beta) = \phi_0(-\beta + \gamma) = \phi_0 d_1(b) = \phi_0 d_1(b) + d_2 \phi_1(b)$.

Aparte de las tres propiedades dadas en la definición de contracción de cadenas, éstas también pueden verificar lo que se conoce como *propiedades de anulaci3n*: (iv). $\phi_q g_q = 0$, (v). $f_{q+1} \phi_q = 0$ y (vi). $\phi_{q+1} \phi_q = 0$, para todo q . De hecho, si existe una contracci3n $c = (f, g, \phi)$ tal que no verifica dichas propiedades, basta definir la familia de aplicaciones $\phi' = \{\phi'_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}_{q+1}\}$, tal que para cada q , $\phi'_q = (d_{q+1} \phi_q + \phi_{q-1} d_q) \phi_q (d_{q+1} \phi_q + \phi_{q-1} d_q) d_q (d_{q+1} \phi_q + \phi_{q-1} d_q) \phi_q (d_{q+1} \phi_q + \phi_{q-1} d_q)$. Entonces, la nueva contracci3n de cadenas $c' = (f, g, \phi')$ si verifica las propiedades (iv), (v) y (vi).

Todas las definiciones dadas hasta ahora se basan en complejos de cadenas. De forma an3loga se pueden dar definiciones para complejos de cocadenas. Una de las propiedades m3s importantes es la siguiente:

Propiedad 1.1 Dada una contracción de cadenas $c = (f, g, \phi)$ de $\mathcal{C} = (C, d)$ en $\mathcal{C}' = (C', d')$, se puede definir a partir de c una contracción de cocadenas de $\mathcal{C}^* = (C^*, \delta)$ en $\mathcal{C}'^* = (C'^*, \delta')$, denotada por $c^* = (f^*, g^*, \phi^*)$, donde:

$$f_q^* : \mathcal{C}^q \longrightarrow \mathcal{C}'^q, \quad g_q^* : \mathcal{C}'^q \longrightarrow \mathcal{C}^q, \quad \phi_q^* : \mathcal{C}^q \longrightarrow \mathcal{C}'^{q-1}$$

$$f_q^*(\alpha) = \alpha g_q, \quad g_q^*(\beta) = \beta f_q \quad y \quad \phi_q^*(\alpha) = \alpha \phi_{q-1},$$

para cada q , donde $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{C}_q; \Lambda)$ y $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{C}'_q; \Lambda)$.

Demostración: Tenemos que probar las siguientes propiedades, para todo q : $\delta'_q f_q^* = f_{q+1}^* \delta_q$, $\delta_q g_q^* = g_{q+1}^* \delta'_q$, $f_q^* g_q^* = \text{id}_{\mathcal{C}'^q}$ y $\text{id}_{\mathcal{C}^q} - g_q^* f_q^* = \phi_{q+1}^* \delta_q + \delta_{q-1} \phi_q^*$. Sea entonces, $\alpha \in \mathcal{C}^q$ y $c' \in \mathcal{C}'^q$,

- $\delta'_q f_q^*(\alpha) = \delta'_q \alpha g_q = \alpha g_q d'_{q+1} = \alpha d_{q+1} g_{q+1} = f_{q+1}^* \alpha d_{q+1} = f_{q+1}^* \delta_q(\alpha)$;
- $\delta_q g_q^*(\beta) = \delta_q \beta f_q = \beta f_q d_{q+1} = \beta d'_{q+1} f_{q+1} = g_{q+1}^* \beta d'_{q+1} = g_{q+1}^* \delta'_q(\beta)$;
- $f^* g^*(\beta) = f^*(\beta f_q) = \beta f_q g_q = \beta$,
- $\alpha - g_q^* f_q^*(\alpha) = \alpha - \alpha g_q f_q = \alpha \phi_{q-1} d_q + \alpha d_{q+1} \phi_q = \delta_{q-1} \phi_q^*(\alpha) + \phi_{q+1}^* \delta_q(\alpha)$.

□

Para terminar esta sección de preliminares, veamos algunos resultados que serán de gran utilidad a lo largo de esta tesis. Sea $c = (f, g, \phi)$ una contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{C}' . Entonces, se verifica:

1. El complejo de cadenas \mathcal{C}' tiene un menor número de generadores que el complejo \mathcal{C} ;
2. $H_q(\mathcal{C}; \Lambda) \simeq H_q(\mathcal{C}'; \Lambda)$, para todo $q \geq 0$ ([Munk84], p.73). El isomorfismo, en cada dimensión q , es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} H_q(\mathcal{C}'; \Lambda) & \xleftarrow{\simeq} & H_q(\mathcal{C}; \Lambda) \\ [c'] & \longrightarrow & [g_q(c')] \\ [f_q(c)] & \longleftarrow & [c] \end{array}$$

3. $H^q(\mathcal{C}; \Lambda) \simeq H^q(\mathcal{C}'; \Lambda)$, para todo $q \geq 0$. El isomorfismo, en cada dimensión q , es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathcal{C}'; \Lambda) & \longrightarrow & H^q(\mathcal{C}; \Lambda) \\ [\alpha^*] & \longrightarrow & [\alpha^* f_q] \end{array}$$

Este isomorfismo está bien definido ya que $\alpha^* \in Z'^q \subseteq \mathcal{C}'^q$, luego $\alpha^* : \mathcal{C}'_q \rightarrow \Lambda$. Por otra parte, $f_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}'_q$. Entonces, por composición de aplicaciones, $\alpha^* f_q \in \text{Hom}(\mathcal{C}_q; \Lambda)$. Además, se tiene que verificar que $\alpha^* f_q$ sea un q -cociclo de \mathcal{C}^q . En efecto, $\delta_q(\alpha^* f_q) = \alpha^* f_q d_{q+1} = \alpha^* d'_{q+1} f_{q+1} = 0$ ya que α^* es una q -cociclo de \mathcal{C}'_q y consecuentemente, $\delta'_q(\alpha^*) = \alpha^* d'_{q+1} = 0$.

Capítulo 2

Modelo Álgebra Minimal

Recordemos que dado un complejo de cadenas \mathcal{C} , queremos computar una contracción de cadenas “ligando” el complejo de cadenas \mathcal{C} con un complejo de cadenas minimal. El interés de computar dicha contracción es obtener información homológica de \mathcal{C} así como una base de ciclos representativos de generadores de homología. Concretamente, en este capítulo trabajamos con coeficientes en \mathbb{Z} , computando un modelo de representación que llamamos *Modelo Álgebra Minimal* (más brevemente, modelo AM).

Los comienzos de este modelo se sitúan en el año 2003 con el trabajo realizado por P. Real y R. González-Díaz [GR03]. En dicho trabajo, los autores se basan en el algoritmo matricial de Munkres ([Munk84], p. 53) para computar la homología de complejos simpliciales finitos K . Concretamente, trasladan los resultados de este algoritmo en términos de contracciones de cadenas, con el objetivo de computar, no sólo la homología del complejo K , sino ciclos representativos de generadores de homología. En la sección 2.1 presentamos la definición de modelo AM y el algoritmo para computarlo dados en [GR03] pero basándonos en complejos de cadenas en general dando una versión más algorítmica. El resto de secciones son una versión extendida del artículo [GMRS06b], del cual soy coautora.

Antes de comenzar con el estudio del modelo AM, veamos brevemente en qué consiste el algoritmo matricial de Munkres. Recordemos primero que, dado un complejo simplicial K , es posible asociar a K un complejo de cadenas $\mathcal{C}(K) = (C(K), \partial)$, donde una base de $C_q(K)$ de $\mathcal{C}_q(K)$ viene dada por los q -símplices de K , $K^{(q)}$. La idea del algoritmo es reducir las matrices del operador borde $\partial_q : \mathcal{C}_q(K) \rightarrow \mathcal{C}_{q-1}(K)$, en cada dimensión q , a su forma normal de Smith. Este proceso de reducción conlleva la realización de ciertas operaciones elementales en las filas y las columnas de dichas matrices, modificando las

bases $C_q(K)$ y $C_{q-1}(K)$. Dichas operaciones son:

1. Cambiar la fila i de la matriz por la fila j , lo que supone intercambiar en la base $C_{q-1}(K)$ la cadena i -ésima por la j -ésima;
2. Multiplicar la fila i por (-1) , lo cual supone cambiar de signo la cadena i -ésima de la base $C_{q-1}(K)$ (cambiar la orientación de la cadena i -ésima);
3. Reemplazar la fila i por la fila i más n veces la fila k , siendo $n \in \mathbb{Z}$ y $k \neq i$, cambiando así la cadena k -ésima de la base $C_{q-1}(K)$ por dicha cadena menos n veces la cadena i -ésima).

De la misma forma, existen operaciones análogas por columna, modificando la base $C_q(K)$. Dichas operaciones son similares a las anteriores así como las modificaciones en las correspondientes bases, excepto la operación 3. En este caso, al reemplazar la columna i por la columna i más n veces la columna k , cambia la cadena i -ésima de $C_q(K)$ por dicha cadena más n veces la cadena k -ésima.

Antes de continuar, veamos en ejemplo sencillo:

Ejemplo 2.1 Sea K el complejo simplicial formado por tres aristas constituyendo un triángulo hueco.

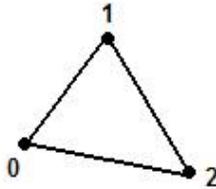


Figura 2.1: Complejo simplicial K .

Las bases iniciales de $\mathcal{C}(K)$ son $C_0(K) = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\}$ y $C_1(K) = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\}$. El único operador borde no nulo es ∂_1 cuya matriz A viene dada por:

$$\begin{array}{c|ccc}
 \partial_1 & \langle 0, 1 \rangle & \langle 0, 2 \rangle & \langle 1, 2 \rangle \\
 \hline
 \langle 0 \rangle & -1 & 0 & -1 \\
 \langle 1 \rangle & 1 & -1 & 0 \\
 \langle 2 \rangle & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Realizamos las correspondientes operaciones por fila y por columna, para reducir la matriz A a su forma normal de Smith, A' :

$$\begin{array}{c|ccc} \partial_1 & \langle 0, 1 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 0, 2 \rangle \\ \hline \langle 0 \rangle - \langle 1 \rangle & -1 & 0 & -1 \\ \langle 1 \rangle & 0 & -1 & -1 \\ \langle 2 \rangle & 0 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} \partial_1 & \langle 0, 1 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 0, 2 \rangle \\ \hline \langle 0 \rangle - \langle 1 \rangle & -1 & 0 & -1 \\ \langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle & 0 & -1 & -1 \\ \langle 2 \rangle & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \partial_1 & \langle 0, 1 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 1 \rangle \\ \hline \langle 0 \rangle - \langle 1 \rangle & -1 & 0 & 0 \\ \langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle & 0 & -1 & -1 \\ \langle 2 \rangle & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} \partial_1 & \langle 0, 1 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 1 \rangle \\ \hline \langle 0 \rangle - \langle 1 \rangle & -1 & 0 & 0 \\ \langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle & 0 & -1 & -1 \\ \langle 2 \rangle & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \partial_1 & \langle 0, 1 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 1 \rangle - \langle 1, 2 \rangle \\ \hline -\langle 0 \rangle + \langle 1 \rangle & 1 & 0 & 0 \\ -\langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle & 0 & 1 & 0 \\ \langle 2 \rangle & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

En el último paso, obtenemos la forma normal de Smith de la matriz A y las nuevas bases de $\mathcal{C}_0(K)$ y $\mathcal{C}_1(K)$, dadas por: $\{-\langle 0 \rangle + \langle 1 \rangle, -\langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle, \langle 2 \rangle\}$ y $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 1 \rangle - \langle 1, 2 \rangle\}$, respectivamente.

Continuamos explicando en qué consiste el algoritmo matricial de Munkres. Supongamos que, de forma general, obtenemos la forma normal de Smith de la matriz de ∂_q , relativa a bases $\{a_1, \dots, a_r\}$ y $\{e_1, \dots, e_s\}$ de $\mathcal{C}_q(K)$ y $\mathcal{C}_{q-1}(K)$, respectivamente:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} \partial_q & a_1 & \cdots & a_l & a_{l+1} & \cdots & a_r \\ \hline e_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \mathcal{O} \\ e_l & & & \lambda_l & & & \\ \hline e_{l+1} & & & & & & \\ \vdots & & \mathcal{O} & & & \mathcal{O} & \\ e_s & & & & & & \end{array}$$

siendo $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, l$, $\lambda_1 | \lambda_2 | \dots | \lambda_l$. Entonces, se verifica lo siguiente:

- $\{a_{l+1}, \dots, a_r\}$ es una base de $Z_q(K) = \text{Ker } \partial_q$,
- $\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_l e_l\}$ es una base de $B_{q-1}(K) = \text{Im } \partial_q$.

Consecuentemente, calculando la forma normal de Smith en dimensión q , se obtiene el rango de Z_q y los factores invariantes para dimensión $q - 1$ (concretamente, los elementos λ_i de la diagonal tal que $\lambda_i > 1$). Por otra parte, calculando la forma normal de Smith

de ∂_{q+1} obtenemos el rango de B_q . La diferencia entre el rango de Z_q y el rango de B_q nos da el q -ésimo número de Betti.

Ejemplo 2.2 *En el ejemplo 2.1 calculamos la forma normal de Smith del operador borde en dimensión 1 del complejo simplicial K de la figura 2.1. Obtenemos que el rango de $Z_1(K)$ es 1. Como $\partial_2 = 0$, el rango de $B_1(K)$ es 0 y se deduce, por tanto, que $\beta_1 = 1$ y que el grupo de homología en dimensión 1 no tiene parte de torsión. Por otra parte, el rango de $Z_0(K)$ es 3 y el rango de $B_0(K)$ es 2, luego $\beta_0 = 1$ y el grupo de homología en dimensión 0 tampoco presenta parte de torsión. Así, la homología del complejo K sobre \mathbb{Z} es:*

$$H_0(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

siendo $\{[\langle 2 \rangle]\}$ y $\{[\langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 1 \rangle - \langle 1, 2 \rangle]\}$ bases de generadores de homología en dimensiones 0 y 1, respectivamente.

Una vez visto brevemente en qué consiste el algoritmo matricial de Munkres, en el resto de secciones vamos a estudiar nuestro modelo de representación, modelo AM.

2.1 Modelo AM: definición y algoritmo

Definición 2.1 *Dado un complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$, un modelo álgebra minimal o modelo AM se define como el conjunto (B, M, f, g, ϕ) , donde*

1. $B = \{B_q\}$ y para cada q , B_q es una de \mathcal{C}_q .
2. $M = \{M_q\}$, donde M_q es un subconjunto de elementos de B_q , para todo q .
3. $c = (f, g, \phi)$ es una contracción de cadenas de \mathcal{C} en un complejo de cadenas minimal $\mathcal{M} = (M, d')$, generado por M y con diferencial $d'_q = d_q|_{M_q}$, es decir, $d'_q(m) = d_q(m)$ para todo $m \in M_q$ y para todo q . Además, la matriz de la diferencial d' en cada dimensión q , A_q , coincide con su forma normal de Smith satisfaciendo que todo entero no nulo de A_q es mayor estricto que 1.

El algoritmo para computar dicho modelo va a recibir como entrada un complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$. Entonces, para cada dimensión q , se reduce la matriz del operador diferencial d_q respecto a las bases C_q y C_{q-1} a su forma normal de Smith, relativa a ciertas bases $\{a_1, \dots, a_r\}$ y $\{e_1, \dots, e_s\}$.

d_q	a_1	\cdots	a_t	a_{t+1}	\cdots	a_l	a_{l+1}	\cdots	a_r
e_1	1								
\vdots		\ddots							
e_t			1						
e_{t+1}				λ_{t+1}					\mathcal{O}
\vdots					\ddots				
e_l						λ_l			
e_{l+1}									
\vdots			\mathcal{O}						\mathcal{O}
e_s									

Se define M_q como aquellos elementos que pertenecen al $\ker d_q$ y aquellos tales que $d_q(a_i) = \lambda_i e_i$, con $\lambda_i > 1$, es decir, $M_q := \{a_{t+1}, \dots, a_r\}$ y $M_{q-1} := \{e_{t+1}, \dots, e_s\}$. En el siguiente paso, reducimos la matriz de la diferencial en dimensión $q + 1$, d_{q+1} . Basta considerar dicha matriz de C_{q+1} en M_q ya que, por construcción de M_q y por verificarse $d_q d_{q+1} = 0$, se tiene que $\text{Im } d_{q+1} \subseteq \text{Ker } d_q \subseteq M_q$.

Así sucesivamente, vamos construyendo el complejo de cadenas minimal \mathcal{M} . Además, a lo largo del algoritmo se van definiendo adecuadamente aplicaciones f , g y ϕ , que finalmente van a definir la contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{M} .

Veamos un pseudocódigo:

Algoritmo 1 Modelo AM para un complejo de cadenas \mathcal{C} .

ENTRADA: Complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$ de dimension n .

Inicialmente: $B_q := C_q$, $M_q := C_q$, $D_q = \{ \}$
 $f_q(a) := a$, $g_q(a) := a$, $\phi_q(a) := 0$
 para todo $a \in C_q$ y $0 \leq q \leq n$.

Para $q = 1$ hasta $q = n$ hacer

Reduce la matriz A_q de la diferencial d_q respecto a las bases B_q y M_{q-1} a su forma normal de Smith A'_q , relativa a ciertas bases $\{a_1, \dots, a_r\}$ y $\{e_1, \dots, e_s\}$ donde:

$d_q(a_i) = e_i$, para $1 \leq i \leq t$; $d_q(a_i) = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ para $t + 1 \leq i \leq \ell$;
 y $d_q(a_i) = 0$ para $\ell + 1 \leq i \leq r$ donde $1 \leq t \leq \ell \leq \min(r, s)$.

Entonces,

$B_{q-1} := D_{q-1} \cup \{e_1, \dots, e_s\}$, $M_{q-1} := \{e_{t+1}, \dots, e_s\}$,
 $B_q := \{a_1, \dots, a_r\}$, $D_q := \{a_1, \dots, a_t\}$, $M_q := \{a_{t+1}, \dots, a_r\}$,

$$f_q(a_i) := 0, f_{q-1}(e_i) := 0 \text{ y } \phi_{q-1}(e_i) := a_i \text{ para } 1 \leq i \leq t,$$

SALIDA: El conjunto (B, M, f, g, ϕ) .

Antes de demostrar que efectivamente la salida del algoritmo 1 es un modelo AM, veamos un ejemplo paso a paso que deje clara cuál es la idea:

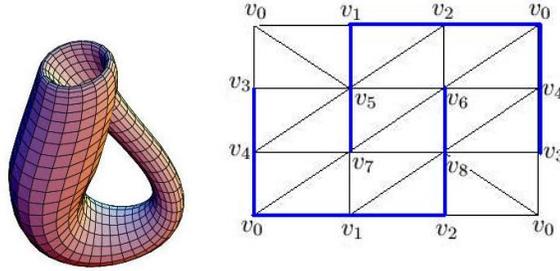


Figura 2.2: Complejo simplicial S asociado a la botella de Klein.

Ejemplo 2.3 Sea S el complejo simplicial dado en la figura 2.2, obtenido a partir de una triangulación de la botella de Klein. Vamos a aplicar el algoritmo 1 al complejo de cadenas $\mathcal{C}(S)$ canónicamente asociado a S . Las bases iniciales de dicho complejo vienen dadas por: $C_0(S)$ el conjunto de vértices de S ; $C_1(S)$ el conjunto de aristas de S ; y $C_2(S)$ el conjunto de triángulos de S . Es obvio que $C_q(S) = 0$ para $q \geq 3$ (al ser S un complejo simplicial tridimensional). Para no hacer muy engorrosa la lectura de este ejemplo, vamos a denotar por $v_0 \dots v_p$ al p -símplice de vértices v_0, \dots, v_p (en páginas anteriores la notación que hemos usado ha sido $\langle v_0, \dots, v_p \rangle$).

Paso 1: Para $q = 1$, reducimos la matriz del operador borde ∂_1 respecto a las bases $C_1(S)$ y $C_0(S)$, obteniendo la siguiente forma normal de Smith:

∂_1	x_1	\dots	x_8	α_1	α_2	$\partial_2(t_1)$	\dots	$\partial_2(t_{17})$
$\partial_1(x_1)$	1							
\vdots		\ddots				\mathcal{O}		
$\partial_1(x_8)$			1					
v_0			\mathcal{O}			\mathcal{O}		

donde x_i para $i = 1, \dots, 8$ denota las aristas marcadas en azul en la figura 2.2, $\alpha_1 = v_0v_1 + v_1v_2 - v_0v_2$, $\alpha_2 = v_0v_3 + v_3v_4 - v_0v_4$, t_i para $i = 1, \dots, 17$ denota todos los triángulos de S excepto el $v_5v_6v_7$ y \mathcal{O} denota la matriz nula. Entonces, $B_0 = \{\partial_1(x_1), \dots, \partial_1(x_8), v_0\}$, $M_0 = \{v_0\}$, $B_1 = \{x_1, \dots, x_8, \alpha_1, \alpha_2, \partial_2(t_1), \dots, \partial_2(t_{17})\}$, $D_0 = \{x_1, \dots, x_8\}$ y $M_1 =$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \partial_2(t_1), \dots, \partial_2(t_{17})\}.$$

Paso 2: Para $q = 2$, reducimos la matriz del operador borde ∂_2 respecto a las bases $C_2(S)$ y M_1 , obteniendo la siguiente forma normal de Smith:

∂_2	t_1	\cdots	t_{17}	β
$\partial_2(t_1)$	1			0
\vdots		\ddots		\vdots
$\partial_2(t_{17})$			1	0
α_2				2
α_1	0	\cdots	0	0

donde $\beta = -v_0v_1v_5 - v_1v_2v_5 + v_0v_2v_6 - v_0v_4v_6 + v_4v_6v_8 + v_3v_4v_8 + v_0v_3v_8 - v_0v_2v_8 + v_1v_2v_8 + v_0v_1v_7 - v_0v_4v_7 + v_3v_4v_5 + v_0v_3v_5 + v_2v_5v_6 - v_5v_6v_7 + v_6v_7v_8 - v_1v_7v_8 + v_6v_7v_8$, es decir, la suma de todos los triángulos de S considerando la orientación contraria a las agujas del reloj. Entonces, $B_1 = \{x_1, \dots, x_8, \partial_2(t_1), \dots, \partial_2(t_{17}), \alpha_1, \alpha_2\}$, $M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $B_2 = \{t_1, \dots, t_{17}, \beta\}$ y $M_2 = \{\beta\}$.

Resumiendo, el modelo AM para $\mathcal{C}(S)$ obtenido con el algoritmo 1 es $(B_S, M_S, f_S, g_S, \phi_S)$, donde

- $B_S = \{B_q\}$, siendo

$$\begin{aligned} B_0 &= \{\partial_1(x_1), \dots, \partial_1(x_8), v_0\} \\ B_1 &= \{x_1, \dots, x_8, \partial_2(t_1), \dots, \partial_2(t_{17}), \alpha_1, \alpha_2\} \\ B_2 &= \{t_1, \dots, t_{17}, \beta\} \end{aligned}$$

- $M_S = \{M_q\}$, siendo $M_0 = \{v_0\}$, $M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ y $M_2 = \{\beta\}$. Además, las matriz de la diferencial d'_1 (diferencial del complejo de cadenas generado \mathcal{M}), es:

$$\begin{array}{c|cc} d'_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \hline \beta & 2 & 0 \end{array}$$

Y las diferenciales d'_0 y d'_2 son nulas.

- Por último, las imágenes de las aplicaciones f_S , g_S y ϕ_S se dan en la siguiente tabla. Denotamos por x las aristas marcadas en azul en la figura 2.2 y por t los triángulos, excepto el $v_5v_6v_7$:

B_S	M_S	f_S	g_S	ϕ_S
v_0	v_0	v_0	v_0	0
$\partial_1(x)$		0		x
x		0		0
$\partial_2(t)$		0		t
α_1	α_1	α_1	α_1	0
α_2	α_2	α_2	α_2	0
t		0		0
β	β	β	β	0

Pasamos ahora a probar la validez del teorema 1:

Teorema 2.1 *Dado un complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$, la salida del algoritmo 1 aplicado a dicho complejo define un modelo AM de $\mathcal{C} = (C, d)$.*

Demostración: En primer lugar veamos que la matriz de la diferencial del complejo de cadenas \mathcal{M} (generado por el conjunto M dado como dato de salida) en cada dimensión q , coincide con su forma normal de Smith tal que los enteros no nulos de la diagonal son mayores estrictos que 1. Recordemos que dicha diferencial ha sido notada por d' , definida como $d'_q(m) = d_q(m)$, si $m \in M_q$. Entonces, para cada q ,

$$d'_q : \{a_{t+1}, \dots, a_r\} \rightarrow \{e_{t+1}, \dots, e_s\}$$

tal que $d'_q(a_i) = \lambda_i e_i$, $\lambda_i > 1$, $i = t + 1, \dots, l$ (considerando los cambios de bases) y $d'_q(a_i) = 0$, $i = l + 1, \dots, r$. Luego, la matriz es de la forma

d'_q	a_{t+1}	\dots	a_l	a_{l+1}	\dots	a_r
e_{t+1}	λ_{t+1}					
\vdots		\ddots			\mathcal{O}	
e_l			λ_l			
e_{l+1}						
\vdots		\mathcal{O}			\mathcal{O}	
e_s						

verificándose así lo que queríamos probar, ya que $\lambda_i > 1$, para $i = t + 1, \dots, r$.

Por inducción, supongamos que una vez computado hasta el paso $q - 1$, obtenemos como salida (D, M, f, g, ϕ) , siendo $c = (f, g, \phi)$ una contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{M} .

Tenemos que probar que en el paso q , el nuevo conjunto que obtenemos, denotado por abuso de notación por (D, M, f, g, ϕ) , es tal que $c = (f, g, \phi)$ es una nueva contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{M} . Concretamente, tenemos que probar: $f_{i-1}d_i = d'_i f_i$, $g_{i-1}d'_i = d_i g_i$, $f_i g_i = id_{\mathcal{M}_i}$ y $id_{\mathcal{C}_i} - g_i f_i = \phi_{i-1}d_i + d_{i+1}\phi_i$, para todo $i \geq 0$. En realidad, sólo lo vamos a probar para $i = q$ ya que para el resto de dimensiones las aplicaciones no cambian.

- $f_{q-1}d_q = d'_q f_q$;
 - Para $i = 1, \dots, t$; $f_{q-1}d_q(a_i) = f_{q-1}(e_i) = 0 = d'_q f_q(a_i)$
 - Para $i = t + 1, \dots, l$; $f_{q-1}d_q(a_i) = \lambda_i f_{q-1}(e_i) = \lambda_i e_i = d'_q f_q(a_i)$
 - Para $i = l + 1, \dots, r$; $f_{q-1}d_q(a_i) = d_q(a_i) = d'_q f_q(a_i)$
- $g_{q-1}d'_q = d_q g_q$; Se tiene por inducción ya que el morfismo g no cambia en el paso q
- $f_q g_q = id_{\mathcal{M}_q}$;
 - Para $i = t + 1, \dots, l$; $f_q g_q(a_i) = f_q(a_i) = a_i$
 - Para $i = l + 1, \dots, r$; $f_q g_q(a_i) = f_q(a_i) = a_i$
- $id_{\mathcal{C}_q} - g_q f_q = \phi_{q-1}d_q + d_{q+1}\phi_q$;
 - Para $i = 1, \dots, t$; $a_i - g_q f_q(a_i) = a_i = \phi_{q-1}(e_i) = \phi_{q-1}d_q(a_i) + d_{q+1}\phi_q(a_i)$
 - Para $i = t + 1, \dots, l$; $a_i - g_q f_q(a_i) = 0 = \lambda_i \phi_{q-1}(e_i) = \phi_{q-1}d_q(a_i) + d_{q+1}\phi_q(a_i)$
 - Para $i = l + 1, \dots, r$; $a_i - g_q f_q(a_i) = 0 = \phi_{q-1}d_q(a_i) + d_{q+1}\phi_q(a_i)$

□

COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO 1: La complejidad en tiempo de este algoritmo es exponencial en n , siendo n la dimensión del complejo de cadenas de entrada. El motivo de esta alta complejidad es debido a la operación de reducción de las matrices a su forma normal de Smith. El número de operaciones filas y columnas que hay que realizar depende, no sólo del número de elementos que tenga una base del complejo, sino también del tamaño de los coeficientes enteros involucrados en las q -cadenas que intervienen en la descripción del algoritmo. Diversos métodos han sido propuestos para salvar esta dificultad [DSV, G95, PAFL].

2.2 Computando información homológica a partir de un modelo AM

En esta sección, vamos a estudiar qué información homológica podemos obtener a partir del modelo AM de un complejo de cadenas \mathcal{C} dado. Para ello, veamos el siguiente teorema:

Teorema 2.2 *Dado un complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$ y un modelo AM (B, M, f, g, ϕ) de \mathcal{C} , la homología en \mathbb{Z} de \mathcal{C} y ciclos representativos de generadores de homología en \mathbb{Z} pueden ser obtenidos directamente a partir de \mathcal{M} .*

Demostración: Por definición de modelo AM, el conjunto $c = (f, g, \phi)$ define una contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{M} . Por las propiedades de contracciones de cadenas, las homología de ambos complejos de cadenas coinciden, es decir, $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) \simeq H(\mathcal{M}; \mathbb{Z})$. Para cada q , sea $\{x_1, \dots, x_r\}$ el conjunto de generadores de \mathcal{M} de dimensión q . Entonces, existen t y l , $1 \leq t < l \leq r$, tales que $d'_q(x_i) = \lambda_i y_i$, $\lambda_i > 1$, $y_i \in \mathcal{M}_{q-1}$ para $1 \leq i \leq t$; $d'_q(x_i) = 0$ y existen $z_i \in \mathcal{M}_{q+1}$ tales que $d'_{q+1}(z_i) = \lambda_i x_i$, $\lambda_i > 1$, para $t < i \leq l$; $d'_q(x_i) = 0$ y no existen $\lambda_i > 1$ ni $z_i \in \mathcal{M}_{q+1}$ tales que $d'_{q+1}(z_i) = \lambda_i x_i$ para $l < i \leq r$. Gráficamente, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & z_{t+1} & \dots & z_l & \\
 & & & \downarrow_{q+1} & & \downarrow_{q+1} & \\
 & & & \lambda_{t+1} x_{t+1} & \dots & \lambda_l x_l & \\
 M_q := \{x_1 & \dots & x_t & x_{t+1} & \dots & x_l & x_{l+1} & \dots & x_r\} \\
 & & \downarrow_q \\
 & & \lambda_1 y_1 & \dots & \lambda_t y_t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{array}$$

Se tiene que los elementos $\{x_1, \dots, x_t\}$ no son ciclos ya que su diferencial no es nula. Los elementos $\{x_{t+1}, \dots, x_r\}$ sí son q -ciclos de \mathcal{M} . Por una parte, $\{x_{l+1}, \dots, x_r\}$ son q -ciclos de la parte libre de la homología. Mientras que $\{x_{t+1}, \dots, x_l\}$ son q -ciclos de la parte de torsión.

Entonces, los conjuntos $\{[x_{l+1}], \dots, [x_r]\}$ y $\{[x_{t+1}], \dots, [x_l]\}$ son generadores de la parte libre y la parte de torsión de la homología de \mathcal{M} en dimensión q , respectivamente. Consecuentemente, tenemos

$$H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{F_q} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/\lambda_{t+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/\lambda_l}_{T_q}$$

siendo $\{[g(x_{l+1})], \dots, [g(x_r)]\}$ y $\{[g(x_{t+1})], \dots, [g(x_l)]\}$ generadores de la parte libre y la parte de torsión de la homología de \mathcal{C} en dimensión q , respectivamente. Como en este caso, g es la inclusión (considerando los cambios de base), tenemos que $\{x_{l+1}, \dots, x_r\}$ y $\{x_{t+1}, \dots, x_l\}$ son bases de q -ciclos representativos de generadores de homología de \mathcal{C} en dimensión q .

□

Ejemplo 2.4 *Consideramos el modelo AM del ejemplo 2.3. El complejo de cadenas \mathcal{M} venía dado por: $M_0 = \{v_0\}$, $M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ y $M_2 = \{\beta\}$. Y la diferencial: $d'_0(v_0) = 0$, $d'_1(\alpha_1) = 0$, $d'_1(\alpha_2) = 0$ y $d'_2(\beta) = 2\alpha_2$. Entonces,*

$$H_0(\mathcal{C}(\mathcal{S}); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathcal{C}(\mathcal{S}); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$$

y los ciclos representativos de generadores de homología son v_0 en dimensión 0, α_1 para la parte libre en dimensión 1 y α_2 para la parte de torsión en dimensión 1.

2.3 Reutilizando información homológica sobre \mathbb{Z}

Esta sección es una ampliación del problema tratado en [GMRS06b], el cual es calcular la homología sobre \mathbb{Z} de un complejo de cadenas tras añadir o eliminar un elemento de la base, aprovechando información ya computada. Para ello, usamos el modelo AM estudiado en las secciones anteriores. Ya hemos visto que la computación de modelos AM requiere el cálculo de la forma normal de Smith de las matrices de las diferenciales asociadas al complejo. Sabemos que en dichas matrices pueden aparecer enteros mayores que 1 cuando la homología del complejo presenta torsión [Munk84]. Ésto nos supuso un inconveniente para poder desarrollar algoritmos que nos diesen una solución positiva al problema que planteamos, por el hecho de trabajar con coeficientes en el anillo \mathbb{Z} . No obstante, si nos restringimos a complejos de cadenas sin torsión, los enteros no nulos de la forma normal de Smith son siempre 1 [Munk84], lo cual soluciona nuestro problema.

Sea por tanto $\mathcal{C} = (C, d)$ un complejo de cadenas sin torsión. Definimos dos nuevos complejos de cadenas, a partir de \mathcal{C} , de la siguiente forma:

1. $\mathcal{C}^{\cup\{a\}} := (C^{\cup}, d^{\cup})$, donde
 - a es un nuevo elemento (de dimensión n) tal que $a \notin C_n$ y $d_n^{\cup}(a) \in C_{n-1}$;
 - $C^{\cup} = \{C_q^{\cup}\}$, siendo $C_n^{\cup} = C_n \cup \{a\}$ y $C_q^{\cup} := C_q$ para todo $q \neq n$.
 - $d_q^{\cup}(c) := d_q(c)$, siendo $c \in C_q$, para todo q .
2. $\mathcal{C}^{\setminus\{a\}} = (C^{\setminus}, d^{\setminus})$, donde
 - $a \in C_n$ (suponiendo que la dimensión de a es n) tal que $a \notin \text{Im } d_{n+1}$;
 - $C^{\setminus} = \{C_q^{\setminus}\}$ siendo $C_n^{\setminus} = C_n \setminus \{a\}$ y $C_q^{\setminus} := C_q$ para todo $q \neq n$.
 - $d_q^{\setminus}(c) := d_q(c)$ siendo $c \in C_q$, para todo q .

Supongamos que conocemos un modelo AM para el complejo de cadenas \mathcal{C} , obtenido aplicando el algoritmo 1. Los algoritmos que presentamos a continuación computan modelos AM para los complejos $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$ y $\mathcal{C}^{\setminus\{a\}}$ a partir del modelo AM inicial. Por comodidad, denotaremos a las diferenciales de $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$ y $\mathcal{C}^{\setminus\{a\}}$ por d .

2.3.1 Cálculo del modelo AM tras añadir un elemento a la base

Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ un complejo de cadenas de cadenas sin torsión, sea $(B = \{B_q\}, M = \{M_q\}, f, g, \phi)$ un modelo AM para \mathcal{C} obtenido aplicando el algoritmo 1, y sea a el elemento que vamos a añadir a la base de \mathcal{C} . Recordamos que la matriz de la diferencial de \mathcal{C} en cada dimensión q , respecto a las bases B_q y B_{q-1} , coincide con su forma normal de Smith. Supongamos que a es de dimensión n . Entonces, la idea del algoritmo que damos a continuación es la siguiente: nos fijamos en la matriz del operador diferencial en dimensión n relativa a las bases $B_n = \{a_1, \dots, a_r\}$ y $B_{n-1} = \{e_1, \dots, e_s\}$:

d_n	a_1	\dots	a_t	a_{t+1}	\dots	a_r
e_1	1					
\vdots		\ddots			\mathcal{O}	
e_t			1			
e_{t+1}						
\vdots		\mathcal{O}			\mathcal{O}	
e_s						

Al añadir el elemento a , como por hipótesis $d_n(a) \in \mathcal{C}_{n-1}$, la nueva matriz de la diferencial en dimensión n viene dada por:

d_n	a_1	\dots	a_t	a	a_{t+1}	\dots	a_r
e_1	1			λ_1			
\vdots		\ddots		\vdots		\mathcal{O}	
e_t			1	λ_t			
e_{t+1}				λ_{t+1}			
\vdots		\mathcal{O}		\vdots		\mathcal{O}	
e_s				λ_s			

Se define un nuevo elemento c de dimensión n , de forma que dicha matriz sea:

d_n	a_1	\dots	a_t	c	a_{t+1}	\dots	a_r
e_1	1			0			
\vdots		\ddots		\vdots		\mathcal{O}	
e_t			1	0			
e_{t+1}				λ_{t+1}			
\vdots		\mathcal{O}		\vdots		\mathcal{O}	
e_s				λ_s			

Se pueden dar dos casos: (1). Si $\lambda_i = 0$, para todo $i > t$, la nueva columna es nula y, por tanto, se añade c a M_n ; (2). en caso contrario, se calcula de nuevo la forma normal de Smith de la diferencial d_n . Entonces, se cambian las bases B_{n-1} y M_{n-1} ; $B_{n-1} := \{e_1, \dots, e_t, e'_{t+1}, \dots, e'_s\}$ y $M_{n-1} := \{e'_{t+2}, \dots, e'_s\}$.

Caso 1:

d_n	a_1	\dots	a_t	c	a_{t+1}	\dots	a_r
e_1	1						
\vdots		\ddots					\mathcal{O}
e_t			1				
e_{t+1}							
\vdots		\mathcal{O}				\mathcal{O}	
e_s							

Caso 2:

d_n	a_1	\dots	a_t	c	a_{t+1}	\dots	a_r
e_1	1						
\vdots		\ddots					\mathcal{O}
e_t			1				
e'_{t+1}				1			
e'_{t+1}							
\vdots		\mathcal{O}				\mathcal{O}	
e'_s							

Veamos un pseudocódigo del algoritmo:

Algoritmo 2 *Computar un modelo AM para $C^{\cup\{a\}}$ a partir de un modelo AM de C .*

ENTRADA: Un modelo AM de $C = (C, d)$, (B, M, f, g, ϕ) , y un elemento a de dimension n tal que $a \notin C_n$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$.

Sea $B_n = \{a_1, \dots, a_r\}$, $M_n = \{a_{t+1}, \dots, a_r\}$, $B_{n-1} = \{e_1, \dots, e_s\}$, $M_{n-1} = \{e_{t+1}, \dots, e_s\}$ tales que $d_n(a_j) = e_j$ para $1 \leq j \leq t$ y $d_n(a_j) = 0$ para $t < j \leq \min(r, s)$;

Sea $d_n(a) := \sum_{l=1}^s \lambda_l e_l$ donde $\lambda_l \in \mathbb{Z}$.

Define $c := a - \sum_{l=1}^t \lambda_l a_l$ y $B_n := \{a_1, \dots, a_r, c\}$.

Si $\lambda_l = 0$ para $l > t$, entonces

$$f_n(c) := c, \quad g_n(c) := c, \quad \phi_n(c) := 0 \quad \text{y} \quad M_n := \{a_{t+1}, \dots, a_r, c\}.$$

En caso contrario, obtener la forma normal de Smith de la matriz d_n respecto a alguna base $\{e_1, \dots, e_t, e'_{t+1}, \dots, e'_s\}$ de C_{n-1} .

Entonces,

$$B_{n-1} := \{e_1, \dots, e_t, e'_{t+1}, \dots, e'_s\}, \quad M_{n-1} := \{e'_{t+2}, \dots, e'_s\};$$

$$f_n(c) := 0, \quad \phi_n(c) := 0, \quad \phi_{n-1}(e'_{t+1}) := c.$$

SALIDA: El conjunto (B, M, f, g, ϕ) .

Antes de demostrar la validez del algoritmo 2, veamos un sencillo ejemplo:

Ejemplo 2.5 Sea K el complejo simplicial dado en la figura 2.3. Como K es un complejo simplicial embebido en \mathbb{R}^3 , el complejo de cadenas canónicamente asociado a K verifica que su homología no tiene torsión. Añadimos la arista $\langle 2, 3 \rangle$ a K y denotamos por L al complejo simplicial resultante. Vamos a aplicar el algoritmo 2 para obtener un modelo AM del complejo de cadenas asociado al complejo simplicial L , a partir de un modelo AM de $C(K)$.

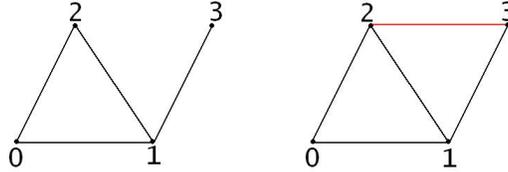


Figura 2.3: A la izquierda, complejo simplicial K ; a la derecha, $L := K \cup \{\langle 2, 3 \rangle\}$.

Calculemos en primer lugar un modelo AM para $C(K)$ aplicando el algoritmo 1. Las bases iniciales de dicho complejo de cadenas son $K^{(0)} = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle\}$ y $K^{(1)} = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, en dimensiones 0 y 1, respectivamente. Inicialmente, $f_q(\sigma) = \sigma$, $g_q(\sigma) = \sigma$ y $\phi_q(\sigma) = 0$, para todo $\sigma \in K^{(q)}$, $q = 0, 1$. En este caso, el único operador borde no nulo es ∂_1 cuya matriz es:

∂_1	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$
$\langle 0 \rangle$	-1	-1	0	0
$\langle 1 \rangle$	1	0	-1	-1
$\langle 2 \rangle$	0	1	1	0
$\langle 3 \rangle$	0	0	0	1

Reduciendo dicha matriz a su forma normal de Smith obtenemos lo siguiente:

∂_1	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$
$\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle$	1	0	0	0
$\langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle$	0	1	0	0
$\langle 3 \rangle - \langle 1 \rangle$	0	0	1	0
$\langle 3 \rangle$	0	0	0	0

Entonces, un modelo AM para $\mathcal{C}(K)$ es $(B_K, M_K, f_K, g_K, \phi_K)$, donde

- $B_K = \{(B_K)_q\}$, siendo $(B_K)_0 = \{\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle - \langle 1 \rangle, \langle 3 \rangle\}$ y $(B_K)_1 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle\}$;
- $M_K = \{(M_K)_q\}$, siendo $(M_K)_0 = \{\langle 3 \rangle\}$ y $(M_K)_1 = \{\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle\}$.
- Por último, las imágenes de las aplicaciones f_K, g_K y ϕ_K se muestran en la siguiente tabla:

B_K	M_K	f_K	g_K	ϕ_K
$\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle$		0		$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle$		0		$\langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$
$\langle 3 \rangle - \langle 1 \rangle$		0		$\langle 1, 3 \rangle$
$\langle 3 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	0
$\langle 0, 1 \rangle$		0		0
$\langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$		0		0
$\langle 1, 3 \rangle$		0		0
$\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$	0
				0

Recordemos que el elemento que queremos añadir a K es la arista $a = \langle 2, 3 \rangle$. Podemos expresar $\partial_1(\langle 2, 3 \rangle) = (\langle 3 \rangle - \langle 1 \rangle) + (\langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle)$. Entonces, se define el elemento $c = \langle 2, 3 \rangle - \langle 0, 1 \rangle + \langle 0, 2 \rangle - \langle 1, 3 \rangle$ y se añade a la base $(B_K)_1$. En este caso, $\partial_1(c) = 0$. Por tanto, un modelo AM de $\mathcal{C}(L)$ es $(B_L, M_L, f_L, g_L, \phi_L)$, donde

- $B_L = \{(B_L)_q\}$, donde $(B_L)_0 = (B_K)_0$ y $(B_L)_1 = (B_K)_1 \cup \{c\}$;
- $M_L = \{(M_L)_q\}$, donde $(M_L)_0 = (M_K)_0$ y $(M_L)_1 = (M_K)_1 \cup \{c\}$;
- $f_L(\sigma) = f_K(\sigma)$, $g_L(\sigma) = g_K(\sigma)$, $\phi_L(\sigma) = \phi_K(\sigma)$, para todo $\sigma \in K$; $f_L(\langle 2, 3 \rangle) = \langle 2, 3 \rangle$, $g_L(\langle 2, 3 \rangle) = \langle 2, 3 \rangle$, $\phi_L(\langle 2, 3 \rangle) = 0$.

Observar que el complejo simplicial K tiene una componente conexa y un túnel y al añadir la nueva arista, se crea un nuevo túnel, como bien se refleja el nuevo modelo AM computado.

Una vez visto el ejemplo, pasamos a demostrar que efectivamente el algoritmo 2 computa un modelo AM:

Teorema 2.3 *La salida del algoritmo 2 aplicado al modelo AM de un complejo de cadenas sin torsión \mathcal{C} y a un elemento a de dimensión n tal que $a \notin C_n$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$, define un modelo AM para el complejo de cadenas $\mathcal{C} \cup \{a\}$.*

Demostración: Vamos a denotar por (B, M, f, g, ϕ) al modelo AM que recibe como entrada el algoritmo y por $(B'M', f', g', \phi')$ al conjunto de la salida. Tenemos que probar que $(B'M', f', g', \phi')$ define un modelo AM de $\mathcal{C} \cup \{a\}$. En primer lugar, el conjunto B' es una base de $\mathcal{C} \cup \{a\}$, por construcción. En segundo lugar, observar que en ambos casos el complejo de cadenas \mathcal{M}' generado por el conjunto M' tiene diferencial nula y por tanto, la matriz asociada a esta diferencial es la matriz nula. Por último, veamos que $c' = (f', g', \phi')$ definen una contracción de cadenas. En concreto, tenemos que probar: $f'_{q-1}d_q = 0$, $d_qg'_q = 0$, $f'_qg'_q = id_{\mathcal{M}'_q}$ y $id_{C_q} - g'_qf'_q = \phi'_{q-1}d_q + d_{q+1}\phi'_q$, para todo $q \geq 0$:

Caso 1: En este caso, basta probar las propiedades para el elemento c . Como $d_n(c) = 0$, se tiene:

- $f'_{n-1}d_n(c) = f_{n-1}d_n(c) = 0$; $d_n g'_n(c) = d_n(c) = 0$;
- $f'_n g'_n(c) = f'_n(c) = c$;
- $c - g'_n f'_n(c) = c - c = 0 = \phi'_{n-1}d_n(c) + d_{n+1}\phi'_n(c)$.

Caso 2: En este caso, $d_n(c) = e'_{t+1}$. Además, observar que los elementos e'_{t+i} son combinaciones lineales de los e_{t+j} , para $j = 1, \dots, s-t$. Por tanto, las imágenes de las aplicaciones f_{n-1} , g_{n-1} y ϕ_{n-1} no cambian para dichos elementos. Entonces, los únicos casos no triviales se demuestran a continuación:

- $f'_{n-1}d_n(c) = f'_{n-1}(e'_{t+1}) = f_{n-1}(e'_{t+1}) = 0$;
- $\phi'_{n-1}d_n(c) + d_{n+1}\phi'_n(c) = \phi'_{n-1}(e'_{t+1}) = c = c - g'_n f'_n(c)$.

□

2.3.2 Cálculo del modelo AM tras la eliminación de un elemento de la base

Sea $\mathcal{C} = (C, d)$ un complejo de cadenas sin torsión, $(B = \{B_q\}, M = \{M_q\}, f, g, \phi)$ un modelo AM de \mathcal{C} obtenido aplicando el algoritmo 1 y sea a un elemento de la base de \mathcal{C} de dimensión n y maximal (es decir, $a \notin \text{Im } d_{n+1}$). Entonces, recordemos que nuestro objetivo es computar un modelo AM para el complejo de cadenas $\mathcal{C} \setminus \{a\}$ a partir del modelo AM de \mathcal{C} . La idea es sencilla: nos fijamos en la matriz de la diferencial en dimensión n respecto a las bases $B_n = \{a_1, \dots, a_r\}$ y $B_{n-1} = \{e_1, \dots, e_s\}$. Entonces, se busca un elemento $a_k \in B_n$ tal que $B_n \setminus \{a_k\}$ sea una base de \mathcal{C}_n . Dos casos pueden ocurrir: (1). si $1 \leq k \leq t$, se añade e_k a la base M_{n-1} ; (2). en caso contrario, se añade a_k a la base M_n .

Caso 1:

d_n	a_1	\dots	a_k	\dots	a_t	a_{t+1}	\dots	a_r
e_1	1							
\vdots		\ddots						
e_k			1					\mathcal{O}
\vdots				\ddots				
e_t					1			
e_{t+1}								
\vdots			\mathcal{O}					\mathcal{O}
e_s								

Caso 2:

d_n	a_1	\dots	a_t	a_{t+1}	\dots	a_k	\dots	a_r
e_1	1							
\vdots		\ddots						\mathcal{O}
e_t			1					
e_{t+1}								
\vdots								
e_k			\mathcal{O}					\mathcal{O}
\vdots								
e_s								

Veamos el pseudocódigo del algoritmo:

Algoritmo 3 *Computando un modelo AM para $\mathcal{C} \setminus \{a\}$ a partir de un modelo AM de \mathcal{C} .*

ENTRADA: Un modelo AM de $\mathcal{C} = (C, d)$, (B, M, f, g, ϕ) , y un elemento $a \in C_n$
tal que $a \notin \text{Im } d_{n+1}$.

Sea $B_n = \{a_1, \dots, a_r\}$, $M_n = \{a_{t+1}, \dots, a_r\}$, $B_{n-1} = \{e_1, \dots, e_s\}$, $M_{n-1} = \{e_{t+1}, \dots, e_s\}$
tales que $d_n(a_j) = e_j$ para $1 \leq j \leq t$ y $d_n(a_j) = 0$ para $t < j \leq \min(r, s)$;

Encuentra el elemento $a_k \in B_n$ tal que $B_n := \{a_1, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_r\}$
es una base de $\mathcal{C}_n \setminus \{a\}$.

Si $1 \leq k \leq t$, entonces

$$M_{n-1} := \{e_k, e_{t+1}, \dots, e_{s+1}\}, f_{n-1}(e_k) := e_k, g_{n-1}(e_k) := e_k \text{ y } \phi_{n-1}(e_k) := 0.$$

En caso contrario, $M_n := \{a_{t+1}, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_r\}$.

SALIDA: El conjunto (B, M, f, g, ϕ) .

Veamos primero un ejemplo:

Ejemplo 2.6 *Sea K el complejo simplicial del ejemplo 2.5, cuyo modelo AM fue denotado por $(B_K, M_K, f_K, g_K, \phi_K)$. Ya sabemos que el complejo de cadenas asociado a K , $\mathcal{C}(K)$ no tiene torsión luego podemos aplicar el algoritmo 3. Sea $a = \langle 1, 2 \rangle$ el elemento que queremos eliminar (es obvio que $a \notin \text{Im } \partial_2$, ver figura 2.4) y denotamos por J a $K \setminus \{\langle 1, 2 \rangle\}$. Recordemos la forma normal de Smith del operador ∂_1 obtenida en el ejemplo 2.5:*

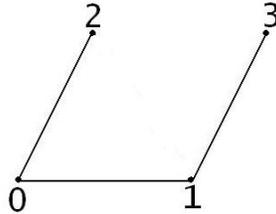


Figura 2.4: Complejo simplicial $J := K \setminus \{\langle 1, 2 \rangle\}$.

∂_1	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$
$\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle$	1	0	0	0
$\langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle$	0	1	0	0
$\langle 3 \rangle - \langle 1 \rangle$	0	0	1	0
$\langle 3 \rangle$	0	0	0	0

Tenemos que buscar un elemento c de $(B_K)_1 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle\}$ tal que $(B_K)_1 \setminus \{c\}$ sea una base de $\mathcal{C}_1(J)$. Basta considerar $c = \langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle$. Entonces, un modelo AM de $\mathcal{C}(J)$ es $(B_J, M_J, f_J, g_J, \phi_J)$, donde

- $B_J = \{(B_J)_q\}$, siendo $(B_J)_0 = (B_K)_0$ y $(B_J)_1 = (B_K)_1 \setminus \{\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle\}$;
- $M_J = \{(M_J)_q\}$, siendo $(M_J)_0 = (M_K)_0$ y $(M_J)_1 = (M_K)_1 \setminus \{\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle - \langle 0, 2 \rangle\}$;
- $f_J(\sigma) = f_K(\sigma)$, $g_J(\sigma) = g_K(\sigma)$ y $\phi_J(\sigma) = \phi_K(\sigma)$, para todo $\sigma \in J$.

Observar que al eliminar la arista $\langle 1, 2 \rangle$, el túnel del complejo K se destruye.

Ahora, pasamos a demostrar la validez del algoritmo 3:

Teorema 2.4 *La salida del algoritmo 3 aplicado al modelo AM de un complejo de cadenas sin torsión $\mathcal{C} = (C, d)$ y a un elemento maximal a de la base en dimensión n , define un modelo AM para el complejo de cadenas $\mathcal{C} \setminus \{a\}$.*

Demostración: Vamos a denotar por (B, M, f, g, ϕ) al modelo AM que recibe como entrada el algoritmo y por $(B'M', f', g', \phi')$ al conjunto de la salida. Tenemos que probar que $(B'M', f', g', \phi')$ define un modelo AM de $\mathcal{C} \setminus \{a\}$. En primer lugar, el conjunto B' es una base de $\mathcal{C} \setminus \{a\}$, por construcción. En segundo lugar, observar que en ambos casos el complejo de cadenas \mathcal{M}' generado por el conjunto M' tiene diferencial nula y por tanto, la matriz asociada a esta diferencial es la matriz nula. Por último, veamos que $c' = (f', g', \phi')$ definen una contracción de cadenas. En concreto, tenemos que probar: $f'_{q-1}d_q = 0$, $d_q g'_q = 0$, $f'_q g'_q = id_{\mathcal{M}'_q}$ y $id_{\mathcal{C}'_q} - g'_q f'_q = \phi'_{q-1}d_q + d_{q+1}\phi'_q$, para todo $q \geq 0$. En este caso probaremos las propiedades sólo para el caso 1 ya que en el caso 2, las aplicaciones no cambian:

- $d_{n-1}g'_{n-1}(e_k) = d_{n-1}(e_k) = 0$, ya que $d_n(a_k) = e_k$ luego $d_{n-1}(e_k) = d_{n-1}d_n(a_k)$,
- $f'_{n-1}g'_{n-1}(e_k) = e_k$,
- $e_k - g'_{n-1}f'_{n-1}(e_k) = 0 = \phi'_{n-2}d_{n-1}(e_k) + d_n\phi'_{n-1}(e_k)$.

□

En conclusión, hemos visto que dado un modelo AM de un complejo de cadenas sin torsión, es posible reutilizar la información tras añadir o eliminar un elemento de la base del complejo.

Modelo AM: ventajas e inconvenientes:

VENTAJAS:

- Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y un modelo AM de \mathcal{C} , (B, M, f, g, ϕ) , podemos obtener la homología en \mathbb{Z} de \mathcal{C} así como ciclos representativos sobre \mathbb{Z} del subgrupo libre y el subgrupo de torsión, a partir del complejo de cadenas \mathcal{M} generado por M .
- Más adelante veremos que podemos computar características cohomológicas a partir de un modelo AM.

INCONVENIENTES:

- El problema de la computación de modelos AM es que la complejidad del algoritmo es exponencial ya que se necesita el cálculo de la forma normal de Smith.

Capítulo 3

Modelo Algebra Topológico

En el capítulo 2, hemos estudiado un modelo de representación trabajando en el anillo de los enteros. Hemos visto que la computación de un modelo AM para un complejo de cadenas necesita el cálculo de la forma normal de Smith de las matrices diferenciales de dicho complejo, lo cual requiere un elevado coste computacional. Para solventar este problema, en este capítulo damos como posible solución trabajar con coeficientes en un cuerpo \mathbb{Z}_p , siendo p un primo. Para ello, definimos un nuevo modelo de representación llamado *Modelo Algebra Topológico* o *Modelo AT*.

La raíz a partir de la cuál surgió este nuevo modelo de representación fue el algoritmo incremental de Edelsbrunner [DE95] para computar los números de Betti de complejos simpliciales finitos. Dicho algoritmo parte de una ordenación de los símlices $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de un complejo simplicial K tal que cada subconjunto $K_{i-1} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}\}$ es un sub-complejo de $K_i = \{\sigma_1, \dots, \sigma_i\}$, para todo $i = 1, \dots, n$ (esta ordenación recibe el nombre del *filtro*). Entonces, los números de Betti del complejo K_i pueden ser obtenidos a partir del símlice σ_i y de los números de Betti de K_{i-1} . Sea k la dimensión de σ_i . Si σ_i pertenece a un k -ciclo de K_i , es decir, existe c un k -ciclo de K_i tal que $c = \lambda\sigma_i + \sum_{j=i}^{i-1} \lambda_j\sigma_j$, entonces, $\beta_k(K_i) = \beta_{k-1}(K_{i-1}) + 1$. En caso contrario, $\beta_k(K_i) = \beta_{k-1}(K_{i-1}) - 1$.

En cuanto a la complejidad del algoritmo incremental de Edelsbrunner, en [DE95] los autores prueban que si el complejo simplicial K está embebido en \mathbb{R}^3 , existen algoritmos rápidos que distinguen entre los dos casos posibles, concretamente, en tiempo $\mathcal{O}(n\alpha(n))$, siendo n el número de elementos del filtro de partida y $\alpha(n)$ la inversa de la función de Ackermann (ver [CLR90]). El problema es que para dimensiones mayores que 3 no está claro cómo decidir, de forma eficiente, cuándo un símlice σ_i pertenece a un ciclo o no. Por otra parte, dicho algoritmo sólo calcula los números de Betti y no ciclos representa-

tivos de generadores de homología.

En [GR03b, GDR05], los autores ya dan una primera definición de modelo AT (aunque aún no dan nombre a este modelo). En estos trabajos se presenta un algoritmo para computarlo, trabajando con coeficientes en el cuerpo \mathbb{Z}_2 . En [GMRS05] nosotros formalizamos dicha definición y en [GMRS06a] generalizamos los algoritmos anteriores para cualquier cuerpo \mathbb{Z}_p , siendo p un primo.

En este capítulo vamos a proceder de la misma forma que hicimos en el capítulo anterior. En la primera sección, damos la definición de modelo AT, mostramos un algoritmo para computarlo y estudiamos su complejidad. En la siguiente sección, estudiamos la información homológica que podemos obtener a partir de él. Posteriormente, nos planteamos el problema de reutilizar la información tras añadir o eliminar un elemento de la base del complejo de cadenas inicial. Y por último, incluimos una sección de Teoría de Perturbación Homológica. El motivo de introducir esta sección aquí, como veremos luego detalladamente, es demostrar que nuestra teoría emerge de la citada anteriormente.

3.1 Modelo AT: definición y algoritmo

Como ya se ha dicho en la introducción, en [GR03b, GDR05], los autores ya dan una primera definición de modelo AT, desarrollando un algoritmo para computarlo sobre \mathbb{Z}_2 . Esta sección es una extensión de los trabajos anteriores a cualquier cuerpo \mathbb{Z}_p , para p un primo ([GMRS05, GMRS06a]).

Definición 3.1 *Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} , un modelo álgebra-topológico ó modelo AT de \mathcal{C} se define como el conjunto (C, H, f, g, ϕ) , donde*

1. $C = \{C_q\}$ es una base de \mathcal{C} , es decir, C_q es una base de \mathcal{C}_q , para todo q .
2. $H = \{H_q\}$, siendo H_q un subconjunto de elementos de C_q , para todo q .
3. $c = (f, g, \phi)$ es una contracción de cadenas de \mathcal{C} en un complejo de cadenas \mathcal{H} , generado por H y con diferencial nula.

El algoritmo para computar modelos AT que presentamos aquí se basa, como ya se ha dicho, en la idea incremental de Edelsbrunner. En primer lugar, dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y un elemento de dimensión n $a \notin C_n$ tal que $d_n(a) \in C_{n-1}$, vamos a dar un algoritmo que computa un modelo AT para $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$ a partir de un modelo AT de \mathcal{C} . Supongamos que (C, H, f, g, ϕ) es el modelo AT de \mathcal{C} . La idea es que si $f_{n-1}d_n(a) = 0$, se crea

una clase de homología representada por el elemento a , mientras que si $f_{n-1}d_n(a) \neq 0$, se destruye una clase de homología envuelta en la expresión de $f_{n-1}d_n(a)$, siendo d la diferencial de \mathcal{C} .

En lo que sigue, si a es un elemento de una base de \mathcal{C}_q y b es una q -cadena de \mathcal{C}_q expresada como combinación lineal de los elementos de la base, el número $\lambda := c_a(b)$ denotará el coeficiente de a en la expresión de b . En este caso $\lambda \in \mathbb{Z}_p$.

Algoritmo 4 *Algoritmo Incremental en \mathbb{Z}_p .*

ENTRADA: Un modelo AT (C, H, f, g, ϕ) del complejo de cadenas \mathcal{C} , la matriz de la diferencial d de \mathcal{C} respecto a la base C y un elemento de dimension n tal que $a \notin C_n$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$.

Si $f_{n-1}d_n(a) = 0$, entonces $H_n := H_n \cup \{a\}$

$$f_n(a) := a, \quad g_n(a) := a - \phi_{n-1}d_n(a), \quad \phi_n(a) := 0.$$

En caso contrario, sea $\beta \in H_{n-1}$ tal que $\lambda := c_\beta(f_{n-1}d_n(a)) \neq 0$, entonces

$$H_{n-1} := H_{n-1} \setminus \{\beta\}, \quad f_n(a) := 0, \quad \phi_n(a) := 0.$$

Para cada $c \in C_{n-1}$,

$$\lambda_c := c_\beta(f_{n-1}(c)),$$

$$f_{n-1}(c) := f_{n-1}(c) - \lambda^{-1}\lambda_c f_{n-1}d_n(a),$$

$$\phi_{n-1}(c) := \phi_{n-1}(c) + \lambda^{-1}\lambda_c(a - \phi_{n-1}d_n(a)),$$

$$C_n := C_n \cup \{a\}$$

SALIDA: El conjunto (C, H, f, g, ϕ) .

Teorema 3.1 *La salida del algoritmo 4 aplicado al modelo AT de un complejo de cadenas \mathcal{C} y a un elemento de dimensión n tal que $a \notin C_n$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$, define un modelo AT para el complejo de cadenas $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$.*

Demostración: Denotamos por (C, H, f, g, ϕ) al modelo AT que recibe el algoritmo como entrada y denotamos por (C', H', f', g', ϕ') al conjunto de la salida de dicho algoritmo. Tenemos que probar que (C', H', f', g', ϕ') es un modelo AT para $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$ (que denotamos por \mathcal{C}'). Por una parte, $C' = C \cup \{a\}$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$, luego C' es una base de \mathcal{C}' . Por otra parte, H' es un subconjunto de elementos de C' y el complejo de cadenas \mathcal{H}' generado por H' tiene diferencial nula. Queda probar que $c' = (f', g', \phi')$ define una contracción de cadenas de \mathcal{C}' en \mathcal{H}' , es decir, que se verifica: $f'_{q-1}d'_q = 0$, $d'_q g'_q = 0$, $f'_q g'_q = id_{\mathcal{H}'_q}$, $id_{\mathcal{C}'_q} - g'_q f'_q = \phi'_{q-1}d'_q + d'_{q+1}\phi'_q$, para todo $q \geq 0$. En realidad, sólo probaremos los casos no triviales:

Caso 1: Si $f_{n-1}d_n(a) = 0$, basta probar las propiedades para el nuevo elemento a ,

- $f'_{n-1}d_n(a) = f_{n-1}d_n(a) = 0$, por hipótesis;
- $d_n g'_n(a) = d_n(a) - d_n \phi_{n-1} d_n(a) = 0$ ya que como $d_n(a) \in \mathcal{C}_{n-1}$, se tiene que $d_n(a) - g_{n-1} f_{n-1} d_n(a) = \phi_{n-2} d_{n-1} d_n(a) + d_n \phi_{n-1} d_n(a)$. Por una parte, $f_{n-1} d_n(a) = 0$ y por otra parte, $d_{n-1} d_n(a) = 0$, luego $d_n(a) = d_n \phi_{n-1} d_n(a)$;
- $f'_n g'_n(a) = f'_n(a) - f'_n \phi_{n-1} d_n(a) = a - f_n \phi_{n-1} d_n(a) = a$, ya que podemos suponer que una contracción de cadenas verifica las llamadas propiedades de anulación, en particular, $f_n \phi_{n-1} = 0$;
- $a - g'_n f'_n(a) = a - a + \phi_{n-1} d_n(a) = \phi'_{n-1} d_n(a) + d_{n+1} \phi'_n(a)$.

Caso 2: Si $f_{n-1}d_n(a) \neq 0$, existe $\beta \in H_{n-1}$ tal que $\lambda := c_\beta(f_{n-1}d_n(a)) \neq 0$. En este caso, basta probar las propiedades para las dimensiones que abajo se van indicando. Entonces,

- $f'_{n-1}d_n = 0$:
 - $f'_{n-1}d_n(a) = f_{n-1}d_n(a) - \lambda^{-1} \lambda_{d_n(a)} f_{n-1}d_n(a) = f_{n-1}d_n(a) - f_{n-1}d_n(a) = 0$, ya que $\lambda_{d_n(a)} = c_\beta(f_{n-1}d_n(a)) = \lambda$;
 - Para $x \in C'_n \setminus \{a\}$, $f'_{n-1}d_n(x) = f_{n-1}d_n(x) - \lambda^{-1} \lambda_{d_n(x)} f_{n-1}d_n(a) = f_{n-1}d_n(x) = 0$, ya que $\lambda_{d_n(x)} = c_\beta(f_{n-1}d_n(x))$ y $f_{n-1}d_n(x) = 0$.
- $f'_{n-1}g'_{n-1} = id_{\mathcal{H}'_{n-1}} : f'_{n-1}g'_{n-1}(h) = f_{n-1}g_{n-1}(h) - \lambda^{-1} \lambda_{g_{n-1}(h)} f_{n-1}d_n(a) = f_{n-1}g_{n-1}(h) = h$, ya que $h \in H_{n-1} \setminus \{\beta\}$ y por tanto $\lambda_{g_{n-1}(h)} = c_\beta(f_{n-1}g_{n-1}(h)) = c_\beta(h) = 0$.
- $\phi'_{n-1}d_n + \phi'_{n+1}d_n = id_{C'_n} - g'_n f'_n :$
 - $\phi'_{n-1}d_n(a) + d_{n+1} \phi'_n(a) = \phi_{n-1}d_n(a) + \lambda^{-1} \lambda_{d_n(a)} (a - \phi_{n-1}d_n(a)) = \phi_{n-1}d_n(a) + a - \phi_{n-1}d_n(a) = a = a - g'_n f'_n(a)$, ya que $\lambda_{d_n(a)} = \lambda$, como vimos anteriormente;
 - Para $x \in C'_n \setminus \{a\}$, $\phi'_{n-1}d_n(x) + d_{n+1} \phi'_n(x) = \phi_{n-1}d_n(x) + \lambda^{-1} \lambda_{d_n(x)} (a - \phi_{n-1}d_n(a)) + d_{n+1} \phi_n(x) = \phi_{n-1}d_n(x) + d_{n+1} \phi_n(x) = x - g_n f_n(x) = x - g'_n f'_n(x)$ ya que $\lambda_{d_n(x)} = c_\beta(f_{n-1}d_n(x)) = 0$.
- $\phi'_{n-2}d_{n-1} + \phi'_n d_{n-1} = id_{C'_{n-1}} - g'_{n-1} f'_{n-1} :$ Para $c \in C'_{n-1}$, $c - g'_{n-1} f'_{n-1}(c) = c - g_{n-1} f_{n-1}(c) + \lambda^{-1} \lambda_c g_{n-1} f_{n-1} d_n(a) = \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi_{n-1}(c) + \lambda^{-1} \lambda_c (d_n(a) - d_n \phi_{n-1} d_n(a)) = \phi'_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi'_{n-1}(c)$.

□

El algoritmo para computar modelos AT va a recibir como entrada un filtro C del complejo de cadenas \mathcal{C} y la matriz de la diferencial d de \mathcal{C} respecto a C . La idea es

simplemente añadir en cada paso un elemento del filtro C y aplicar el algoritmo 4 al modelo AT computado en el paso anterior y al nuevo elemento que se ha añadido.

Algoritmo 5 *Modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} .*

ENTRADA: Un filtro $C = \{a_1, \dots, a_m\}$ del complejo de cadenas \mathcal{C}

y la matriz de la diferencial d respecto a la base C .

Inicialmente, $C := \{a_1\}$, $H := \{a_1\}$, $f(a_1) := a_1$, $g(a_1) := a_1$ y $\phi(a_1) := 0$

Para $i = 2$ hasta $i = m$, hacer

$(C, H, f, g, \phi) :=$ Salida del algoritmo 4 aplicado al modelo AT

(C, H, f, g, ϕ) y al elemento a_i .

SALIDA: El conjunto (C, H, f, g, ϕ) .

Observación 3.1 *Es obvio que el algoritmo 5 computa un modelo AT para el complejo de cadenas \mathcal{C} ya que en cada paso lo que vamos obteniendo son modelos AT por el teorema 3.1.*

Veamos un ejemplo sencillo realizado paso a paso:

Ejemplo 3.1 *Sea K el complejo simplicial formado por tres vértices y tres aristas constituyendo un triángulo hueco. Sea $\mathcal{C}(K)$ el complejo de cadenas canónicamente asociado a K . Vamos a aplicar el algoritmo 5 para computar un modelo AT de $\mathcal{C}(K)$. Un filtro C de $\mathcal{C}(K)$ viene dado por*

$$C = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

Veamos detalladamente cada uno de los pasos del algoritmo:

1. Paso 1: $C = \{\langle 0 \rangle\}$ y $H = \{\langle 0 \rangle\}$;

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0

2. Paso 2: Aplicamos el algoritmo 4 al modelo AT (C, H, f, g, ϕ) y al vértice $\langle 1 \rangle$.

Entonces, $C = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$. Como $f_1 \partial_0(\langle 1 \rangle) = 0$, entonces $H = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$;

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0

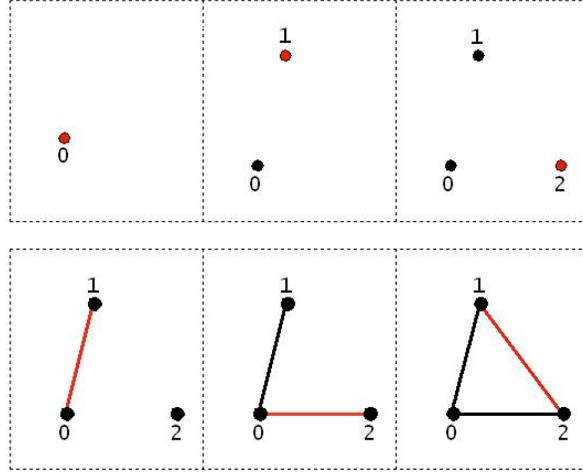


Figura 3.1: Pasos del algoritmo 5.

3. Paso 3: Aplicamos el algoritmo 4 al modelo AT (C, H, f, g, ϕ) y al vértice $\langle 2 \rangle$.
Entonces, $C = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\}$. Como $f_2 \partial_0(\langle 2 \rangle) = 0$, entonces $H = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\}$;

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0
$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0

4. Paso 4: Aplicamos el algoritmo 4 a (C, H, f, g, ϕ) y a la arista $\langle 0, 1 \rangle$. Entonces,
 $C = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\}$. En este caso, $f_3 \partial_1(\langle 0, 1 \rangle) = f_3(\langle 1 \rangle) - f_3(\langle 0 \rangle) = \langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle \neq 0$, luego, $H = \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\}$;

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0
$\langle 0, 1 \rangle$		0		0

5. Paso 5: Aplicamos el algoritmo 4 al modelo AT (C, H, f, g, ϕ) y a la arista $\langle 0, 2 \rangle$.
Entonces, $C = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle\}$. Como en el caso anterior, $f_4 \partial_1(\langle 0, 2 \rangle) = f_4(\langle 2 \rangle) - f_4(\langle 0 \rangle) = \langle 2 \rangle - \langle 0 \rangle \neq 0$, luego, $H = \{\langle 0 \rangle\}$;

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 2 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$		0		0
$\langle 0, 2 \rangle$		0		0

6. Paso 6: Por último, aplicamos el algoritmo 4 al modelo AT (C, H, f, g, ϕ) y a la arista $\langle 1, 2 \rangle$, obteniendo ya el modelo AT del complejo de cadenas $\mathcal{C}(K)$. Por una parte, $C = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$. Y por otra parte, como $f_5 \partial_1(\langle 1, 2 \rangle) = f_5(\langle 2 \rangle) - f_5(\langle 1 \rangle) = \langle 0 \rangle - \langle 0 \rangle = 0$, entonces, $H = \{\langle 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$. Las imágenes de las aplicaciones que definen la contracción de cadenas del modelo AT final se muestran en la siguiente tabla:

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 2 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$		0		0
$\langle 0, 2 \rangle$		0		0
$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle - \langle 0, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$	0

COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO INCREMENTAL 4: La complejidad de este algoritmo es $\mathcal{O}(m^2)$, donde m es el número de elementos de la base C de \mathcal{C} que recibe como entrada. Supongamos que $f_{n-1}d_n(a) \neq 0$. En la expresión de $f_{n-1}d_n(a)$ hay, a lo más, m sumandos (ya que $d_n(a) \in \mathcal{C}_{n-1}$). En el peor de los casos, para cada $1 \leq k \leq m$, tenemos que sustituir $f_{n-1}(a_k)$ por una expresión con, a lo más, m sumandos. Luego, tenemos que realizar m operaciones para simplificar $f_{n-1}(a_k)$. Como $1 \leq k \leq m$, el número total de operaciones en m y por tanto, la complejidad es $\mathcal{O}(m^2)$.

COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO PARA COMPUTAR MODELOS AT 5: $\mathcal{O}(m^3)$, donde m es el número de elementos que hay en el filtro que recibe dicho algoritmo como entrada, como consecuencia de la complejidad del algoritmo anterior.

3.2 Computando información homológica a partir de un modelo AT

En esta sección vamos a estudiar la información homológica que podemos obtener a partir de los modelos AT. Recordemos en primer lugar algunas definiciones y propiedades:

- Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas. Dos ciclos c y c' se dice que son *homólogos* si pertenecen a la misma clase de homología, es decir, $[c] = [c']$.
- Un conjunto $\{c_1, \dots, c_n\}$ de ciclos de \mathcal{C}_q es una *base de ciclos representativos* si $\{[c_1], \dots, [c_n]\}$ es una base de generadores de homología de \mathcal{C} en dimensión q .
- Se dice que una q -cadena de \mathcal{C} es un *borde* si existe una $q+1$ -cadena tal que $d_{q+1}(b) = a$.

Propiedad 3.1 *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas con diferencial d y (C, H, f, g, ϕ) un modelo AT de dicho complejo, computado con el algoritmo 5, entonces se verifica:*

1. Si c, c' son dos q -ciclos de \mathcal{C} tales que $f_q(c) = f_q(c')$, entonces c y c' son ciclos homólogos.
2. Si $a \in \mathcal{C}$ es un q -borde, entonces $a' = \phi_q(a)$ es tal que $d_{q+1}(a') = a$.

Demostración:

1. Si $f_q(c) = f_q(c')$, entonces $[g_q f_q(c)] = [g_q f_q(c')]$, aplicando g_q y tomando clases. Luego $[c - d_{q+1} \phi_q(c)] = [c' - d_{q+1} \phi_q(c')]$, de donde se tiene que $[c] = [c']$.
2. Por las propiedades de contracción de cadenas, $a - g_q f_q(a) = \phi_{q-1} d_q(a) + d_{q+1} \phi_q(a)$. Como a es un q -borde, por una parte a es un q -ciclo (ya que $d_{q-1} d_q = 0$) y por otra parte, $f_q(a) = 0$ (ya que $f_{q-1} d_q = 0$), luego $a = d_{q+1} \phi_q(a)$.

□

Ejemplo 3.2 *Consideramos el modelo AT computado en el ejemplo 3.1. Los vértices $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$ y $\langle 2 \rangle$ son 0-ciclos tales que $f_0(\langle 0 \rangle) = f_0(\langle 1 \rangle) = f_0(\langle 2 \rangle) = \langle 0 \rangle$. Entonces, $[\langle 0 \rangle] = [\langle 1 \rangle] = [\langle 2 \rangle]$ ya que, $\langle 1 \rangle - \langle 0 \rangle = \partial_1(\langle 0, 1 \rangle)$, $\langle 2 \rangle - \langle 0 \rangle = \partial_1(\langle 0, 2 \rangle)$ y $\langle 2 \rangle - \langle 1 \rangle = \partial_1(\langle 1, 2 \rangle)$.*

Por otra parte, $a = \langle 2 \rangle - \langle 1 \rangle$ es un 0-borde ya que existe $b = \langle 1, 2 \rangle$ tal que $\partial_1(\langle 1, 2 \rangle) = \langle 2 \rangle - \langle 1 \rangle$. Entonces, $a' = \phi_0(\langle 2 \rangle - \langle 1 \rangle) = \langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 1 \rangle$ es tal que $\partial_1(a') = \partial_1(\langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 1 \rangle) = \langle 2 \rangle - \langle 1 \rangle = a$.

El teorema que damos a continuación demuestra que, dado un modelo AT (C, H, f, g, ϕ) para un complejo de cadenas \mathcal{C} , obtenemos la homología de \mathcal{C} sobre \mathbb{Z}_p así como una base de ciclos representativos de generadores de homología de \mathcal{C} , directamente a partir de \mathcal{H} .

Teorema 3.2 *Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y un modelo AT de dicho complejo (C, H, f, g, ϕ) computado con el algoritmo 5, se verifica lo siguiente:*

1. $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p) \simeq \mathcal{H}$, siendo p un primo y \mathcal{H} el complejo de cadenas generado por H , con diferencial nula (es decir, para todo $q \geq 0$, $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p) \simeq H_q$).
2. $Gq = \{g_q(h_1), \dots, g_q(h_r), h_i \in H_q, i = 1, \dots, r\}$ es una base de q -ciclos representativos de generadores de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$.

Demostración:

1. Por definición de modelo AT, $c = (f, g, \phi)$ define una contracción de cadenas del complejo \mathcal{C} en \mathcal{H} . Entonces, se verifica que las homologías de ambos complejos son isomorfas, $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p) \simeq H_q(\mathcal{H}; \mathbb{Z}_p)$, para todo q . Por otra parte, como la diferencial del complejo \mathcal{H} es nula, es fácil probar que su homología coincide con el propio complejo y por tanto, se tiene que, para todo q

$$H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p) \simeq H_q(\mathcal{H}; \mathbb{Z}_p) = H_q.$$

2. Sea $H_q = \{h_1, \dots, h_r\}$. Entonces, $\{[h_1], \dots, [h_r]\}$ es una base de $H_q(\mathcal{H}; \mathbb{Z}_p)$ (en realidad no es necesario considerar clases ya que \mathcal{H} tiene diferencial nula). Por el isomorfismo de $H_q(\mathcal{H}; \mathbb{Z}_p)$ en $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$ visto en el capítulo 1, $\{[g_q(h_1)], \dots, [g_q(h_r)]\}$ es una base de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$. Entonces, por definición de base de ciclos representativos, se tiene que efectivamente $Gq = \{g_q(h_1), \dots, g_q(h_r)\}$ es una base de q -ciclos representativos de generadores de homología de \mathcal{C} , en dimensión q .

□

Veamos como ejemplo el caso de la botella de Klein:

Ejemplo 3.3 *Consideramos el complejo simplicial S obtenido de la triangulación de la botella de Klein dada en la figura 3.2. Denotamos por $v_0 \dots v_p$ al p -símplice de vértices $v_0, \dots, v_p, \langle v_0, \dots, v_p \rangle$. Sea $C(S)$ el siguiente conjunto:*

$$\{v_0, v_3, v_0v_3, v_5, v_0v_5, v_3v_5, v_0v_3v_5, v_1, v_0v_1, v_1v_5, v_0v_1v_5, v_2, v_1v_2, v_2v_5, v_1v_2v_5, v_6, v_2v_6, v_5v_6, v_2v_5v_6, v_0v_2, v_0v_6, v_0v_2v_6, v_4, v_0v_4, v_4v_6, v_0v_4v_6, v_3v_4, v_4v_5, v_3v_4v_5, v_7, v_5v_7, v_4v_7, v_4v_5v_7, v_6v_7, v_5v_6v_7, v_8, v_6v_8, v_7v_8, v_6v_7v_8, v_4v_8, v_4v_6v_8, v_3v_8, v_3v_4v_8, v_0v_7, v_0v_4v_7, v_1v_7, v_0v_1v_7, v_1v_8, v_1v_7v_8, v_2v_8, v_1v_2v_8, v_0v_8, v_0v_2v_8, v_0v_3v_8\}.$$

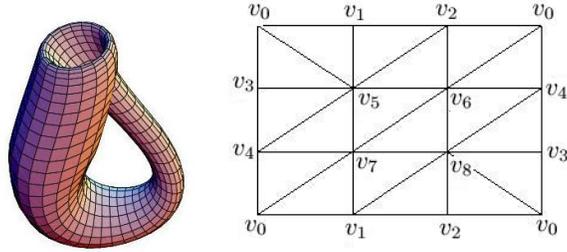


Figura 3.2: Complejo simplicial S asociado a la botella de Klein.

Entonces, $C(S)$ es un filtro del complejo de cadenas. Aplicando el algoritmo 5 a dicho filtro y trabajando con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , obtenemos un modelo AT $(C(S), H_S, f_S, g_S, \phi_S)$, donde $H_S = \{(H_S)_q\}$ siendo $(H_S)_0 = \{v_0\}$, $(H_S)_1 = \{v_0v_2, v_3v_4\}$ y $(H_S)_2 = \{v_0v_3v_8\}$; $G_0 = \{g_0(v_0) = v_0\}$, $G_1 = \{g_1(v_0v_2) = \alpha_1, g_1(v_3v_4) = \alpha_2\}$ siendo $\alpha_1 = v_0v_2 + v_1v_2 + v_0v_1$ y $\alpha_2 = v_3v_4 + v_0v_4 + v_0v_3$, $G_2 = \{g_2(v_0v_3v_8) = \beta\}$ siendo β la 2-cadena formada por la suma de todos los triángulos de S . Entonces,

$$H_0(C(S); \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(C(S); \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(C(S); \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

donde v_0 es el ciclo representativo en dimensión 0, α_1 y α_2 los ciclos representativos en dimensión 1 y β el ciclo representativo en dimensión 2. Además, obtenemos que los números de Betti, para $p = 2$, son $\beta_{(0,2)} = 1$, $\beta_{(1,2)} = 2$ y $\beta_{(2,2)} = 1$ (una componente conexa, dos túneles y una cavidad).

3.3 Algoritmo Decremental para computar un modelo AT

En esta sección nos planteamos de nuevo reutilizar la información homológica de un complejo de cadenas tras añadir o eliminar un elemento de la base. Concretamente, nuestro objetivo es obtener modelos AT para $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$ y $\mathcal{C}^{\setminus\{a\}}$, a partir de un modelo AT de \mathcal{C} . Para obtener un modelo AT de $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$, basta aplicar el algoritmo incremental 4 al modelo AT de \mathcal{C} y al elemento $\{a\}$.

Para el caso $\mathcal{C} \setminus \{a\}$, hemos desarrollado un algoritmo que, por analogía al anterior, llamamos *Algoritmo Decremental*. Aquí presentamos una extensión del algoritmo dado en [GMRS06a]. La idea es la siguiente: sea (C, H, f, g, ϕ) el modelo AT ya computado de \mathcal{C} y n la dimensión del elemento a . Entonces, se comprueba si a pertenece a $Im g_n$. En caso afirmativo, eliminamos la clase de homología correspondiente, y en caso contrario, se crea una nueva clase de homología envuelta en la expresión de $d_n(a)$.

Recordar que si $a \in C_q$ y b es una cadena expresada como combinación lineal de los elementos de la base, el número $c_a(b)$ indica el coeficiente del elemento a en la expresión de b . Se dice que un elemento $a \in C_q$ es maximal si $a \notin Im d_{q+1}$.

Algoritmo 6 *Algoritmo Decremental en \mathbb{Z}_p .*

ENTRADA: Un modelo AT (C, H, f, g, ϕ) del complejo de cadenas \mathcal{C} ,
la matriz de la diferencial d de \mathcal{C} respecto a la base C
y un elemento $a \in C_n$ maximal.

$C_n := C_n \setminus \{a\}$.

Si existe $\beta \in H_n$, tal que $\lambda := c_a(g_n(\beta)) \neq 0$, entonces $H_n := H_n \setminus \{\beta\}$

Para cada $x \in C_n$, $c \in C_{n-1}$ y $h \in H_n$,

$$f_n(x) := f_n(x) - \lambda_x \beta, \quad \lambda_x := c_\beta(f_n(x)),$$

$$g_n(h) := g_n(h) - \lambda_h \lambda^{-1} g_n(\beta), \quad \lambda_h := c_a(g_n(h)).$$

$$\phi_{n-1}(c) := \phi_{n-1}(c) - \lambda'_c \lambda^{-1} g_n(\beta), \quad \lambda'_c := c_a(\phi_{n-1}(c)),$$

En caso contrario, sea $b \in C_{n-1}$ tal que $b \notin H_{n-1}$,

entonces, $H_{n-1} := H_{n-1} \cup \{b\}$, $g_{n-1}(b) := d_n(a)$.

Para cada $c \in C_{n-1}$,

$$\lambda_c := c_a(\phi_{n-1}(c))$$

$$f_{n-1}(c) := f_{n-1}(c) + \lambda_c b,$$

$$\phi_{n-1}(c) := \phi_{n-1}(c) - \lambda_c \phi_{n-1} d_n(a).$$

SALIDA: El conjunto (C, H, f, g, ϕ) .

Ejemplo 3.4 *Consideramos el modelo AT del complejo de cadenas asociado al complejo simplicial K de la figura 3.3, dado en la siguiente tabla (trabajando en \mathbb{Z}_2):*

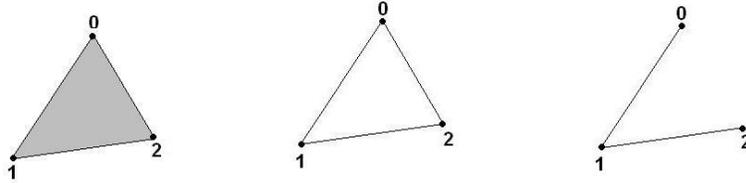


Figura 3.3: Complejo simplicial K (a la izquierda), $L = K \setminus \{\langle 0, 1, 2 \rangle\}$ (en el centro) y $L \setminus \{\langle 0, 2 \rangle\}$ (a la derecha).

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 2 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$		0		0
$\langle 0, 2 \rangle$		0		0
$\langle 1, 2 \rangle$		0		$\langle 0, 1, 2 \rangle$
$\langle 0, 1, 2 \rangle$		0		0

En primer lugar, eliminamos el 2-símplice $a = \langle 0, 1, 2 \rangle$. Como $a \notin \text{Im } g_2$, sea $b = \langle 1, 2 \rangle \in \partial_2(a)$, tal que $b \notin H_1$. Entonces, se crea una clase de homología de dimensión 1 representada por la arista $\langle 1, 2 \rangle$, cuyo ciclo representativo es $\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$. Las imágenes de las nuevas aplicaciones vienen dadas en la siguiente tabla:

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 2 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$		0		0
$\langle 0, 2 \rangle$		0		0
$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$	0

En segundo lugar, eliminamos el 1-símplice $a = \langle 0, 2 \rangle$. En este caso, existe $\beta = \langle 1, 2 \rangle \in H$ tal que $a \in g_1(\beta)$. Se tiene que $c_{\langle 0, 2 \rangle}(g_1(\beta)) = 1$. Luego, se destruye la clase de homología representada por la arista $\langle 1, 2 \rangle$. En las siguiente tabla se muestran las imágenes de las aplicaciones que definen el modelo AT final:

C	H	f	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle 1 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$		$\langle 0 \rangle$		$\langle 0, 2 \rangle + \langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle =$ $= \langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$
$\langle 0, 1 \rangle$		0		0
$\langle 1, 2 \rangle$		$\langle 1, 2 \rangle + \langle 1, 2 \rangle = 0$		0

Observar que, al eliminar el símlice $\langle 0, 1, 2 \rangle$, el triángulo que constituye el complejo simplicial K , queda "hueco", es decir, se crea una nueva clase de homología en dimensión 1. De la misma forma, en el segundo caso, al eliminar la arista $\langle 1, 2 \rangle$, el hueco se destruye, y consecuentemente, se destruye la clase de homología correspondiente.

Veamos que, efectivamente, el algoritmo 6 computa un modelo AT:

Teorema 3.3 *La salida obtenida al aplicar el algoritmo 6 a un modelo AT de un complejo de cadenas \mathcal{C} y a un elemento $a \in C_n$ maximal define un modelo AT para el complejo de cadenas $\mathcal{C} \setminus a$.*

Demostración: Denotamos por (C', H', f', g', ϕ') a la salida del algoritmo y por (C, H, f, g, ϕ) al modelo AT de \mathcal{C} que recibe como entrada. Es obvio que el conjunto C' es una base de $\mathcal{C} \setminus \{a\}$ (que denotamos por \mathcal{C}'). Además, por construcción, el conjunto H' es un subconjunto de elementos de C' . Falta probar que $c' = (f', g', \phi')$ define una contracción de cadenas de \mathcal{C}' en \mathcal{H}' , siendo \mathcal{H}' el complejo de cadenas generado por H' y con diferencial nula. Es decir, tenemos que probar: $f'_{q-1}d_q = 0$, $d_q g'_q = 0$, $f'_q g'_q = id_{\mathcal{H}'_q}$, $id_{\mathcal{C}'_q} - g'_q f'_q = \phi'_{q-1}d_q + d_{q+1}\phi'_q$, para todo $q \geq 0$. En realidad, sólo probaremos los casos no triviales, es decir, para las dimensiones en las que las aplicaciones no cambien.

Caso 1: Si existe $\beta \in H_n$, tal que $\lambda := c_a(g_n(\beta)) \neq 0$, entonces,

- $f'_n d_{n+1} = 0$: $f'_n d_{n+1}(t) = f_n d_{n+1}(t) - \lambda_{d_{n+1}(t)} \beta = f_n d_{n+1}(t) = 0$, ya que $\lambda_{d_{n+1}(t)} = c_\beta(f_n d_{n+1}(t)) = 0$.
- $d_n g'_n = 0$: $d_n g'_n(h) = d_n g_n(h) - \lambda_h \lambda^{-1} d_n g_n(\beta) = 0$.
- $f'_n g'_n = id_{\mathcal{H}'_n}$: $f'_n g'_n(h) = f'_n g_n(h) - \lambda_h \lambda^{-1} f'_n g_n(\beta) = f_n g_n(h) - \lambda_{g_n(h)} \beta - \lambda_h \lambda^{-1} (f_n g_n(\beta) - \lambda_{g_n(\beta)} \beta) = f_n g_n(h) = h$, ya que $\lambda_{g_n(h)} = c_\beta(f_n g_n(h) = h) = 0$ al ser $h \in H_n \setminus \{\beta\}$. Por otra parte, $\lambda_{g_n(\beta)} = c_\beta(f_n g_n(\beta) = \beta) = 1$

- $id_{\mathcal{C}'_n} - g'_n f'_n = \phi'_{n-1} d_n + d'_{n-1} \phi_n : x - g'_n f'_n(x) = x - g'_n f_n(x) + \lambda_x g'_n(\beta) = x - g_n f_n(x) + \lambda_{f_n(x)} \lambda^{-1} g_n(\beta) = \phi'_{n-1} d_n(x) + d_{n+1} \phi'_n(x)$, ya que, por las propiedades de contracción de cadenas, $x - g_n f_n(x) = \phi_{n-1} d_n(x) + d_{n+1} \phi_n(x)$. Por una parte, $x \in C_n \setminus \{a\}$ y por otra, $a \notin d_{n+1} \phi_n(x)$ por ser maximal, entonces, $c_a(g_n f_n(x)) = -c_a(\phi_{n-1} d_n(x))$.
- $id_{\mathcal{C}'_{n-1}} - g'_{n-1} f'_{n-1} = \phi'_{n-2} d_{n-1} + d_n \phi'_{n-1} : \phi'_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi'_{n-1}(c) = \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi_{n-1}(c) - \lambda'_c \lambda^{-1} d_n g_n(\beta) = c - g'_{n-1} f'_{n-1}(c)$, ya que $d_n g_n = 0$.

Caso 2: Si $c_a(g_n(h)) = 0$ para todo $h \in H_n$, es decir, $a \notin Im g_n$, entonces,

- $f'_{n-1} d_n = 0 : f'_{n-1} d_n(x) = f_{n-1} d_n(x) + \lambda_{d_n(x)} b = f_{n-1} d_n(x) = 0$, ya que por las propiedades de contracción de cadenas $x - g_n f_n(x) = \phi_{n-1} d_n(x) + d_{n+1} \phi_n(x)$. Entonces, como $x \in C_n \setminus \{a\}$, $a \notin d_{n+1} \phi_n(x)$ por ser maximal y por hipótesis, $a \notin g_n f_n(x)$, se tiene que $\lambda_{d_n(x)} = c_a(\phi_{n-1} d_n(x)) = 0$.
- $d_{n-1} g'_{n-1} = 0 : d_{n-1} g'_{n-1}(b) = d_{n-1} d_n(a) = 0$.
- $f'_{n-1} g'_{n-1} = id_{\mathcal{H}'_{n-1}} : f'_{n-1} g'_{n-1}(b) = f_{n-1} d_n(a) = f_{n-1} d_n(a) + \lambda_{d_n(a)} b = b$, ya que $f_{n-1} d_n = 0$ y $c_a(\phi_{n-1} d_n(a)) = 1$ ya que $a - g_n f_n(a) = \phi_{n-1} d_n(a) + d_{n+1} \phi_n(a)$, $a \notin Im g_n$ y $a \notin Im d_{n+1}$.
- $id_{\mathcal{C}'_{n-1}} - g'_{n-1} f'_{n-1} = \phi'_{n-2} d_{n-1} + d_n \phi'_{n-1} : c - g'_{n-1} f'_{n-1}(c) = c - g_{n-1} f_{n-1}(c) - \lambda_c g_{n-1}(b) = c - g_{n-1} f_{n-1}(c) - \lambda_c d_n(a) = \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi_{n-1}(c) - \lambda_c d_n(a) = \phi'_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi'_{n-1}(c)$, ya que $d_n(a) = d_n \phi_{n-1} d_n(a)$, por verificarse $d_n(a) - g_{n-1} f_{n-1} d_n(a) = \phi_{n-2} d_{n-1} d_n(a) + d_n \phi_{n-1} d_n(a)$ y ser $f_{n-1} d_n = 0$ y $d_{n-1} d_n = 0$.
- $id_{\mathcal{C}'_n} - g'_n f'_n = \phi'_{n-1} d_n + d_{n+1} \phi'_n : \phi'_{n-1} d_n(x) + d_{n+1} \phi'_n(x) = \phi_{n-1} d_n(x) - \lambda_{d_n(x)} \phi_{n-1} d_n(a) + d_{n+1} \phi_n(x) = \phi_{n-1} d_n(x) + d_{n+1} \phi_n(x) = x - g'_n f'_n(x)$, ya que $\lambda_{d_n(x)} = c_a(\phi_{n-1} d_n(x)) = 0$, como vimos anteriormente.

□

COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO DECREMENTAL: $\mathcal{O}(m^2)$, donde m es el número de elementos de la base del complejo \mathcal{C} . La idea es la misma que explicamos para el caso del algoritmo incremental.

3.4 Modelos AT desde el punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica

La Teoría de Perturbación Homológica está constituida por un conjunto de técnicas basadas esencialmente en los conceptos de perturbación y contracción de cadenas. El Lema

Básico de Perturbación constituye la piedra angular de esta teoría: se trata de un verdadero algoritmo en el que el dato de entrada es una contracción entre dos complejos de cadenas, \mathcal{C} y \mathcal{C}' , junto con una perturbación δ de la diferencial d de \mathcal{C} (aplicación de \mathcal{C} en \mathcal{C} verificando cierta propiedad) y el dato de salida es una nueva contracción de cadenas entre los complejos de cadenas perturbados, \mathcal{C}_δ y \mathcal{C}'_δ . Veamos formalmente dicho lema:

Teorema 3.4 Teorema Básico de Perturbación Homológica *Sea (f, g, ϕ) una contracción entre dos complejos de cadenas \mathcal{C} y \mathcal{C}' , con diferenciales d y d' , respectivamente. Sea $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ una aplicación ($\delta_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}_{q-1}$, para todo q), llamada perturbación, tal que $\phi\delta$ es puntualmente nilpotente (para cada $c \in \mathcal{C}_q$, existe $n_c \in \mathbb{Z}$ tal que $(\phi_{q-1}\delta_q)^{n_c}(c) = 0$, para todo q) y $(d + \delta)^2 = 0$, para todo q . Entonces, $c_\delta = (f_\delta, g_\delta, \phi_\delta)$, donde*

$$\begin{aligned} f_\delta &= f - f\delta\Delta\phi \\ g_\delta &= \Delta g \\ \phi_\delta &= \Delta\phi \end{aligned}$$

define una nueva contracción de cadenas de $\tilde{\mathcal{C}}$ y $\tilde{\mathcal{C}}'$, siendo $d + \delta$ la diferencial de $\tilde{\mathcal{C}}$, $d' + d_\delta$ la diferencial de $\tilde{\mathcal{C}}'$, $d_\delta = f\delta\Delta\phi$ y $\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\phi\delta)^i$.

En realidad, nuestra teoría puede ser vista de forma análoga, concretamente el algoritmo incremental: dada una contracción de cadenas entre dos complejos de cadenas, \mathcal{C} y \mathcal{C}' , y una perturbación del complejo \mathcal{C} , ¿es posible obtener una contracción de cadenas entre los complejos de cadenas perturbados, $\tilde{\mathcal{C}}$ y $\tilde{\mathcal{C}}'$? En [GMRS06a], vimos que la respuesta es positiva. En dicho trabajo, demostramos la validez del algoritmo incremental (algoritmo 4) usando el Teorema Básico de Perturbación Homológica. Recordemos que en dicho algoritmo el dato de entrada es una contracción de cadenas (modelo AT) (f, g, ϕ) , de un complejo de cadenas \mathcal{C} en \mathcal{H} y realizamos una perturbación al complejo de cadenas \mathcal{C} (añadir un elemento $\{a\}$), obteniendo una nueva contracción de cadenas entre los complejos perturbados $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$ y \mathcal{H}' . Pues bien, a continuación vamos a demostrar que la contracción de cadenas computada con el algoritmo 4, que denotamos por (f', g', ϕ') , coincide con la obtenida al aplicar el Lema Básico de Perturbación, denotada por $(f_\delta, g_\delta, \phi_\delta)$, para cierta perturbación δ . Por comodidad, omitiremos los subíndices.

Caso 1: Si $fd(a) = 0$:

Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ el complejo de cadenas generado por $C \cup \{a\}$ con diferencial \tilde{d} , dada por $\tilde{d}(c) = d(c)$ si $c \in C$ y $\tilde{d}(a) = 0$. Sea $\tilde{\mathcal{H}}$ el complejo de cadenas generado por $H \cup \{a\}$ con diferencial $\tilde{d}' = 0$. Y sea $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi})$ una contracción de cadenas de $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\tilde{\mathcal{H}}$ dada por: $\tilde{f}(c) := f(c)$ y $\tilde{\phi}(c) := \phi(c)$ si $c \in C$; $\tilde{g}(h) := g(h)$ si $h \in H$; $\tilde{f}(a) := a$, $\tilde{g}(a) := a$ y $\tilde{\phi}(a) := 0$. Es fácil

demostrar que, efectivamente, $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi})$ es una contracción de cadenas al serlo (f, g, ϕ) . Definimos $\delta : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ como: $\delta(c) := 0$ si $c \in C$ y $\delta(a) := d(a)$. Veamos que se verifican las dos propiedades:

- $\delta\tilde{\phi}\delta = 0$: $\delta\tilde{\phi}\delta(c) = 0$ si $c \in C$ y $\delta\tilde{\phi}\delta(a) = \delta\tilde{\phi}d(a) = \delta\phi d(a) = 0$,
- $(\tilde{d} + \delta)^2 = 0$: $(\tilde{d} + \delta)^2(c) = (\tilde{d} + \delta)(\tilde{d} + \delta)(c) = (\tilde{d} + \delta)d(c) = dd(c) = 0$ si $c \in C$ y $(\tilde{d} + \delta)^2(a) = (\tilde{d} + \delta)(\tilde{d} + \delta)(a) = (\tilde{d} + \delta)d(a) = dd(a) = 0$.

Luego, aplicando el Teorema Básico de Perturbación Homológica a la perturbación δ y a la contracción $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi})$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\tilde{\mathcal{H}}$, obtenemos una nueva contracción de cadenas

$$(\tilde{f}_\delta, \tilde{g}_\delta, \tilde{\phi}_\delta) : \tilde{\mathcal{C}}_\delta = (C \cup \{a\}, \tilde{d} + \delta = d^\cup) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_\delta = (H \cup \{a\}, \tilde{d}' + d_\delta = 0)$$

Ahora, vamos a probar que dicha contracción coincide con (f', g', ϕ') :

- $\tilde{f}_\delta(c) = \tilde{f}(c) - \tilde{f}\delta\tilde{\phi}(c) = f(c) - fd\phi(c) = f(c) = f'(c)$ si $c \in C$ y $\tilde{f}_\delta(a) = \tilde{f}(a) - \tilde{f}\delta\tilde{\phi}(a) = a = f'(a)$.
- $\tilde{g}_\delta(h) = \tilde{g}(h) - \tilde{\phi}\delta\tilde{g}(h) = g(h)$ si $h \in H$ y $\tilde{g}_\delta(a) = \tilde{g}(a) - \tilde{\phi}\delta\tilde{g}(a) = a - \phi d(a) = g'(a)$.
- $\tilde{\phi}_\delta(c) = \tilde{\phi}(c) - \tilde{\phi}\delta\tilde{\phi}(c) = \phi(c) = \phi'(c)$ si $c \in C$ y $\tilde{\phi}_\delta(a) = \tilde{\phi}(a) - \tilde{\phi}\delta\tilde{\phi}(a) = 0 = \phi'(a)$.

Luego, tenemos demostrado el primer caso.

Caso 2: Si existe $\beta \in H$ tal que $\lambda := c_\beta(fd(a)) \neq 0$:

Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ el complejo de cadenas generado por $C \cup \{a, e\}$, donde e es un elemento de dimensión $q - 1$ (siendo q la dimensión de a) que eliminaremos al final. La diferencial \tilde{d} de $\tilde{\mathcal{C}}$ viene dada por: $\tilde{d}(c) := d(c)$ si $c \in C$; $\tilde{d}(a) := e$ y $\tilde{d}(e) := 0$. Sea $\tilde{\mathcal{H}}$ el complejo de cadenas generado por H y con diferencial nula. Y sea $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi})$ una contracción de cadenas de $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\tilde{\mathcal{H}}$ dada por: $\tilde{f}(e) := 0$, $\tilde{f}(a) := 0$, $\tilde{f}(c) := f(c)$, si $c \in C$; $\tilde{g}(\beta) := g(\beta) - \lambda^{-1}e$ y $\tilde{g}(h) := g(h)$ si $h \in H$; $\tilde{\phi}(e) := a$, $\tilde{\phi}(a) := 0$, $\tilde{\phi}(c) := \phi(c) + \lambda_c \lambda^{-1}a$, si $c \in C$ siendo $\lambda_c := c_\beta(f(c))$. Es fácil demostrar que, efectivamente, $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi})$ es una contracción de cadenas al serlo (f, g, ϕ) . Definimos $\delta : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ como: $\delta(c) := 0$ si $c \in C$, $\delta(e) := 0$ y $\delta(a) := d(a) - e$. Veamos que se verifican las dos propiedades:

- $\delta\tilde{\phi}\delta = 0$: $\delta\tilde{\phi}\delta(c) = 0$ si $c \in C$, $\delta\tilde{\phi}\delta(e) = 0$ y $\delta\tilde{\phi}\delta(a) = \delta\tilde{\phi}(d(a)) - \delta\tilde{\phi}(e) = \delta\phi d(a) + \delta(a) - \delta(a) = 0$,
- $(\tilde{d} + \delta)^2 = 0$: $(\tilde{d} + \delta)^2(c) = (\tilde{d} + \delta)(\tilde{d} + \delta)(c) = (\tilde{d} + \delta)d(c) = dd(c) = 0$ si $c \in C$; $(\tilde{d} + \delta)^2(e) = (\tilde{d} + \delta)(\tilde{d} + \delta)(e) = 0$ y $(\tilde{d} + \delta)^2(a) = (\tilde{d} + \delta)(\tilde{d} + \delta)(a) = (\tilde{d} + \delta)d(a) = dd(a) = 0$.

Aplicando el Teorema Básico de Perturbación Homológica a la perturbación δ y a la contracción $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\phi})$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\tilde{\mathcal{H}}$, obtenemos una nueva contracción de cadenas

$$(\tilde{f}_\delta, \tilde{g}_\delta, \tilde{\phi}_\delta) : \tilde{\mathcal{C}}_\delta = (C \cup \{a, e\}, \tilde{d} + \delta = d^\cup) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_\delta = (H, \tilde{d}' + d_\delta = 0)$$

Ahora, vamos a probar que dicha contracción coincide con (f', g', ϕ') :

- $\tilde{f}_\delta(c) = \tilde{f}(c) - \tilde{f}\delta\tilde{\phi}(c) = f(c) - \tilde{f}\delta\phi(c) - \lambda_c\lambda^{-1}\tilde{f}\delta(a) = f(c) - \lambda_c\lambda^{-1}fd(a) = f'(c)$
si $c \in C$ y $\tilde{f}_\delta(a) = \tilde{f}(a) - \tilde{f}\delta\tilde{\phi}(a) = 0 = f'(a)$.
- $\tilde{g}_\delta(h) = \tilde{g}(h) - \tilde{\phi}\delta\tilde{g}(h) = g(h) - \tilde{\phi}\delta g(h) = g(h)$ si $h \in H \setminus \{\beta\}$.
- $\tilde{\phi}_\delta(c) = \tilde{\phi}(c) - \tilde{\phi}\delta\tilde{\phi}(c) = \phi(c) + \lambda_c\lambda^{-1}a - \tilde{\phi}\delta\phi(c) - \lambda_c\lambda^{-1}\tilde{\phi}\delta(a) = \phi(c) + \lambda_c\lambda^{-1}a - \lambda_c\lambda^{-1}\tilde{\phi}(d(a) - e) = \phi(c) + \lambda_c\lambda^{-1}a - \lambda_c\lambda^{-1}\phi d(a) - \lambda_c\lambda^{-1}a + \lambda_c\lambda^{-1}a = \phi(c) + \lambda_c\lambda^{-1}(a - \phi d(a)) = \phi'(c)$ si $c \in C$ y $\tilde{\phi}_\delta(a) = \tilde{\phi}(a) - \tilde{\phi}\delta\tilde{\phi}(a) = 0 = \phi'(a)$.

Podemos eliminar el elemento e sin problemas, obteniendo la contracción de cadenas deseada.

□

Consecuentemente, queda demostrado que nuestra teoría se puede ver desde el punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica.

Modelo AT: ventajas e inconvenientes

VENTAJAS:

- Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y un modelo AT de \mathcal{C} , (C, H, f, g, ϕ) , podemos obtener la homología en \mathbb{Z}_p de \mathcal{C} así como ciclos representativos sobre \mathbb{Z}_p de los generadores de homología. Concretamente, el complejo de cadenas \mathcal{H} , generado por H , es isomorfo a $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$.
- Otra ventaja importante es que los algoritmos para computar modelos AT tienen complejidad cúbica.
- A partir de un modelo AT, también vamos a poder computar características cohomológicas.

INCONVENIENTES:

- El problema de la computación de modelos AT es perdemos mucha información cuando la homología del complejo inicial presenta torsión. En este caso, los números de Betti pueden variar al variar el primo p . Por ejemplo, la siguiente tabla muestra cómo varían los números de Betti de la botella de Klein, cuando $p = 2, 3, 29$:

	β_0	β_1	β_2
$\mathbb{Z}/2$	1	2	1
$\mathbb{Z}/3$	1	1	0
$\mathbb{Z}/29$	1	1	0

Capítulo 4

λ -Modelo AT

Como ya hemos mencionado en varias ocasiones, computar modelos AT sobre cuerpos \mathbb{Z}_p , para p primo, supone un gran inconveniente si la homología del complejo que estamos estudiando presenta torsión. En este caso, los números de Betti pueden variar al variar el primo p (Munkres, p.332). Antes esta situación, nuestro interés en este capítulo se centra en obtener un nuevo modelo de representación, trabajando en el anillo de los enteros, evitando el cálculo de la forma normal de Smith. Si trabajamos en \mathbb{Z} y hay torsión, es claro que no podemos obtener una contracción de cadenas hacia un complejo isomorfo a la homología del complejo inicial (ya que en ese caso, el complejo de cadenas de llegada tendría que tener diferencial nula). De ahí la necesidad de definir este nuevo modelo que llamamos λ -modelo AT, siendo $\lambda \in \mathbb{Z}$. Dicho modelo fue definido [GJMR07]. Aquí, presentamos una versión extendida y un análisis más detallado del mismo.

En primer lugar, introducimos un nuevo concepto, λ -contracciones de cadenas.

4.1 λ -Contracciones de cadenas

Definición 4.1 Sean $\mathcal{C} = (C, d)$ y $\mathcal{C}' = (C', d')$ dos complejos de cadenas y λ un entero no nulo. Se define una λ -contracción de cadenas como un conjunto de tres aplicaciones $f = \{f_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}'_q\}$, $g = \{g_q : \mathcal{C}'_q \rightarrow \mathcal{C}_q\}$ y $\phi = \{\phi_q : \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}_{q+1}\}$, tales que para todo q :

1. f y g son aplicaciones de cadenas, es decir, $f_{q-1}d_q = d'_q f_q$ y $g_{q-1}d'_q = d_q g_q$;
2. $f_q g_q = \lambda \text{id}_{\mathcal{C}'_q}$;

3. ϕ es una homotopía de cadenas de λid_C en gf , es decir, $\lambda id_{C_q} - g_q f_q = \phi_{q-1} d_q + d_{q+1} \phi_q$.

Notaremos las λ -contracciones de cadenas por $c_\lambda = (f, g, \phi, \lambda)$. Observar que si $\lambda = 1$, lo que tenemos en realidad es una contracción de cadenas. Además, si $c_\lambda = (f, g, \phi, \lambda)$ es una contracción de cadenas con $\lambda = -1$, entonces $c = (-f, g, -\phi)$ es una contracción de cadenas.

A continuación, exponemos un resultado en el que se ve el comportamiento de las contracciones de cadenas con respecto a algunas operaciones elementales del Álgebra Homológica: composición, suma directa y producto tensorial.

Lema 4.1 *Dada dos contracciones de cadenas, $c := (f, g, \phi)$ de \mathcal{C} en \mathcal{D} , y $c' := (f', g', \phi')$ de \mathcal{C}' en \mathcal{D}' , se pueden construir las siguientes contracciones de cadenas:*

1. Si $\mathcal{D} = \mathcal{C}'$, la contracción composición de ambas dada por:

$$c \circ c' := (f' f, g g', \phi + g \phi' f)$$

del complejo de cadenas \mathcal{C} en \mathcal{D}' .

2. La contracción suma directa dada por:

$$c \oplus c' := (f \oplus f', g \oplus g', \phi \oplus \phi')$$

del complejo de cadenas $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$ en $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$.

3. La contracción producto tensorial, dada por:

$$c \otimes c' := (f \otimes f', g \otimes g', id_{\mathcal{C}} \otimes \phi' + \phi \otimes g' f')$$

del complejo de cadenas $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ en $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$.

Ahora bien, es fácil probar que las λ -contracciones de cadenas también se comportan “bien” con respecto a las operaciones elementales del Álgebra Homológica definidas en el lema 4.1. El siguiente teorema nos lo muestra:

Teorema 4.1 *Sea $c_\lambda = (f, g, \phi, \lambda)$ una λ -contracción de cadenas de $\mathcal{C} = (C, d^C)$ en $\mathcal{D} = (D, d^D)$ y sea $c_{\lambda'} = (f', g', \phi', \lambda')$ una λ' -contracción de cadenas de $\mathcal{C}' = (C', d^{C'})$ en $\mathcal{D}' = (D', d^{D'})$. Entonces, se pueden construir las siguientes $\lambda\lambda'$ -contracciones de cadenas:*

1. Si $\mathcal{D} = \mathcal{C}'$, la composición de ambas dada por:

$$c_\lambda \circ c_{\lambda'} := (f'f, gg', \lambda'\phi + g\phi'f, \lambda\lambda')$$

del complejo de cadenas \mathcal{C} en \mathcal{D}' .

2. La suma directa dada por:

$$c_\lambda \oplus c_{\lambda'} := (\lambda'f \oplus \lambda f', g \oplus g', \lambda'\phi \oplus \lambda\phi', \lambda\lambda')$$

del complejo de cadenas $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$ en $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$.

3. El producto tensorial, dado por:

$$c_\lambda \otimes c_{\lambda'} := (\lambda'f \otimes \lambda f', g \otimes g', \lambda\lambda' \otimes \lambda\phi' + \lambda\phi \otimes \lambda'g'f', \lambda\lambda')$$

del complejo de cadenas $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ en $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}'$.

En el capítulo 1 vimos que si tenemos una contracción de cadenas entre dos complejos de cadenas \mathcal{C} y \mathcal{C}' , las homología de ambos complejos sobre cualquier anillo Λ son isomorfas, es decir, $H(\mathcal{C}; \Lambda) \simeq H(\mathcal{C}'; \Lambda)$. El siguiente resultado nos muestra un resultado similar para las λ -contracciones de cadenas:

Proposición 4.1 *Si existe una λ -contracción de cadenas $c_\lambda = (f, g, \phi, \lambda)$ (con $\lambda \neq 0$) de un complejo de cadenas \mathcal{C} en otro complejo de cadenas \mathcal{C}' , el subgrupo libre de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ es isomorfo al subgrupo libre de $H(\mathcal{C}'; \mathbb{Z})$. Como consecuencia, los números de Betti de \mathcal{C} y \mathcal{C}' coinciden.*

Demostración: Sean d y d' las diferenciales de \mathcal{C} y \mathcal{C}' , respectivamente. Sea a un q -ciclo representativo de un generador del subgrupo libre de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$. Entonces, $f_q(a)$ es un q -ciclo de \mathcal{C}' ya que $d'_q f_q(a) = f_{q-1} d_q(a) = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $f_q(a)$ es un ciclo del subgrupo de torsión de $H_q(\mathcal{C}'; \mathbb{Z})$. Entonces, existe $\mu \neq 0$ y existe $b' \in \mathcal{C}'_{q+1}$ tal que $d'_{q+1}(b') = \mu f_q(a)$. Por las propiedades de λ -contracción de cadenas se tiene que $\lambda\mu a - g_q f_q(\mu a) = \phi_{q-1} d_q(\mu a) + d_{q+1} \phi_q(\mu a)$, de donde se deduce que $\lambda\mu a = d_{q+1}(\mu\phi_q(a) + g_{q+1}(b'))$. Esto último es una contradicción ya que a es un q -ciclo de la parte libre de la homología de \mathcal{C} .

Ahora, sean a y b q -ciclos representativos de dos generadores distintos de la parte libre de la homología de \mathcal{C} . Por reducción al absurdo, suponemos que $f_q(a)$ y $f_q(b)$ son q -ciclos representativos del mismo generador de la parte libre de la homología de \mathcal{C}' . Entonces, $f_q(a) - f_q(b) \in \text{Im } d'_{q+1}$, es decir, existe $b' \in \mathcal{C}'_{q+1}$ tal que $f_q(a) - f_q(b) = d'_{q+1}(b')$. Entonces, $\lambda(a - b) = d_{q+1}(g_{q+1}(b') + \phi_q(a - b))$, lo cual es una contradicción.

Análogamente, podemos probar que si a' y b' son q -ciclos representativos de dos generadores distintos de la parte libre de la homología de \mathcal{C}' , $g_q(a')$ y $g_q(b')$ son q -ciclos representativos de dos generadores distintos de la parte libre de la homología de \mathcal{C} .

Por tanto, podemos concluir que la parte libre de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ es isomorfa a la parte libre de $H(\mathcal{C}'; \mathbb{Z})$.

□

4.2 λ -modelo AT: Definición y algoritmo

El problema que supone computar modelos AT en \mathbb{Z} es que no podemos obtener en general una contracción de cadenas hacia un complejo de cadenas con diferencial nula. En concreto, si intentamos aplicar el algoritmo 5 con coeficientes en \mathbb{Z} , llegamos a un paso en el que no podemos continuar ya que tenemos que “despejar”. Con esto nos referimos a lo siguiente: cuando añadimos un elemento a_i de dimensión n a la base \mathcal{C} del complejo de cadenas \mathcal{C} , en el paso i -ésimo del algoritmo, se comprueba si $f_{n-1}d_n(a_i) = 0$ o $f_{n-1}d_n(a_i) \neq 0$ (siendo f_q el morfismo involucrado en la contracción de cadenas del paso $i - 1$). Sabemos que, para obtener un modelo AT, como queremos llegar a un complejo de cadenas con diferencial nula, debe verificarse que $f_{q-1}d_q = 0$, para todo q . Entonces, si $f_{n-1}d_n(a_i) \neq 0$, la idea es definir las nuevas aplicaciones de forma que $f_{n-1}d_n(a_i)$ se anule y para ello, necesitamos despejar y dividir por enteros. Obviamente, ésto no supone ningún problema cuando los coeficientes pertenecen a un cuerpo.

A raíz de esta cuestión surge la idea de definir los λ -modelos AT.

Definición 4.2 *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas y λ un entero no nulo. Se define un λ -modelo AT de \mathcal{C} como el conjunto $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$, donde:*

- $C = \{C_q\}$ es una base de \mathcal{C} , es decir, C_q es una base de \mathcal{C}_q , para todo q ;
- $H = \{H_q\}$, tal que para todo q , H_q es un subconjunto de elementos de C_q ,
- $c_\lambda = (f, g, \phi, \lambda)$ es una λ -contracción de cadenas de \mathcal{C} en un complejo de cadenas \mathcal{H} , generado por H y con diferencial nula.

De la misma forma que hicimos con el modelo AT, vamos a mostrar en primer lugar un algoritmo que va a recibir como entrada un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} y un elemento a de dimensión n tal que $a \notin C_n$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$. Como dato de salida, vamos a obtener un λ' -modelo AT para el complejo de cadenas $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$. La idea es la misma que la aplicada para el algoritmo incremental en modelos AT (algoritmo 4), es decir, evaluar la expresión $f_{n-1}d_n(a)$. Entonces, si $f_{n-1}d_n(a) = 0$, se crea una clase de

homología representada por el elemento a y, en caso contrario, se destruye una clase de homología envuelta en la expresión de $f_{n-1}d_n(a)$.

Algoritmo 7 *Algoritmo Incremental para λ -modelos AT.*

ENTRADA: Un λ -modelo AT $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$ de \mathcal{C} , la matriz de la diferencial d de \mathcal{C} respecto a la base C y un elemento a de dimension n tal que $a \notin C_n$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$.

Si $f_{n-1}d_n(a) = 0$, entonces $H_n := H_n \cup \{a\}$,

$$f_n(a) := a, \quad \phi_n(a) := 0, \quad g_n(a) := \lambda a - \phi_{n-1}d_n(a).$$

En caso contrario, sea $\beta \in H_{n-1}$ tal que $\mu := c_\beta(f_{n-1}d_n(a)) \neq 0$,

siendo $\mu = \min\{|c_h(f_{n-1}d_n(a))|, h \in H_{n-1}\}$. Entonces,

$$H_{n-1} := H_{n-1} \setminus \{\beta\}, \quad f_n(a) := 0, \quad \phi_n(a) := 0.$$

Para cada q y cada $c \in C_q$,

$$\lambda_c := c_\beta(f_q(c)),$$

$$f_q(c) := \mu f_q(c) - \lambda_c f_{n-1}d_n(a),$$

$$\phi_q(c) := \mu \phi_q(c) + \lambda_c(\lambda a - \phi_{n-1}d_n(a)),$$

$$\lambda := \lambda\mu.$$

$$C_n := C_n \cup \{a\}.$$

SALIDA: El conjunto $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$.

A partir de este algoritmo, mostramos otro para computar un λ -modelo AT de un complejo de cadenas en general:

Algoritmo 8 *Algoritmo para computar un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} .*

ENTRADA: Un filtro $C = \{a_1, \dots, a_m\}$ del complejo de cadenas \mathcal{C} y la matriz diferencial d para la base C .

Inicialmente, $C := \{a_1\}$, $H := \{a_1\}$,

$$f(a_1) := a_1, \quad g(a_1) := a_1 \text{ y } \phi(a_1) := 0, \quad \lambda := 1.$$

Para $i = 2$ hasta $i = m$, hacer

$(C, H, f, g, \phi, \lambda)$:= Salida del algoritmo 7 aplicado al λ -modelo AT

$(C, H, f, g, \phi, \lambda)$ y al elemento a_i .

SALIDA: El conjunto $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$.

Ejemplo 4.1 *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas tal que los conjuntos $\{a, b\}$, $\{c, e\}$ y $\{g\}$ son bases de C_0 , C_1 y C_2 , respectivamente. Sea d la diferencial de \mathcal{C} dada por: $d_0(a) = 0$,*

$d_0(b) = 0$, $d_1(c) = 2b$, $d_1(e) = 0$ y $d_2(g) = -3e$. Un filtro C de \mathcal{C} es $C = \{a, b, c, e, g\}$. Entonces, aplicamos el algoritmo 8 al filtro C de \mathcal{C} :

<p>Inicialmente:</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">C</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">H</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">f</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">g</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">ϕ</th> <th style="border-bottom: 1px solid black;">λ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	C	H	f	g	ϕ	λ	a	a	a	a	0	1	<p>Paso 1: $f_{-1}d_0(b) = 0$,</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">C</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">H</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">f</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">g</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">ϕ</th> <th style="border-bottom: 1px solid black;">λ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">b</td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	C	H	f	g	ϕ	λ	a	a	a	a	0	1	b	b	b	b	0	1																								
C	H	f	g	ϕ	λ																																																		
a	a	a	a	0	1																																																		
C	H	f	g	ϕ	λ																																																		
a	a	a	a	0	1																																																		
b	b	b	b	0	1																																																		
<p>Paso 3: $f_0d_1(c) = 2b \neq 0$,</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">C</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">H</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">f</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">g</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">ϕ</th> <th style="border-bottom: 1px solid black;">λ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">2a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">b</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">c</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">c</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	C	H	f	g	ϕ	λ	a	a	2a	a	0	1	b		0		c	1	c		0		0	2	<p>Paso 4: $f_0d_1(e) = 0$,</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">C</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">H</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">f</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">g</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">ϕ</th> <th style="border-bottom: 1px solid black;">λ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">2a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">b</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">c</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">c</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">e</td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	C	H	f	g	ϕ	λ	a	a	2a	a	0	1	b		0		c	1	c		0		0	2	e	e	e	e	0	2
C	H	f	g	ϕ	λ																																																		
a	a	2a	a	0	1																																																		
b		0		c	1																																																		
c		0		0	2																																																		
C	H	f	g	ϕ	λ																																																		
a	a	2a	a	0	1																																																		
b		0		c	1																																																		
c		0		0	2																																																		
e	e	e	e	0	2																																																		
<p>Paso 5: $f_1d_2(g) = -3e \neq 0$,</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">C</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">H</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">f</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">g</th> <th style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">ϕ</th> <th style="border-bottom: 1px solid black;">λ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">6a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">a</td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">b</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">3c</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">c</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">e</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">-2g</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">g</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		C	H	f	g	ϕ	λ	a	a	6a	a	0	1	b		0		3c	1	c		0		0	2	e		0		-2g	2	g		0		0	6																		
C	H	f	g	ϕ	λ																																																		
a	a	6a	a	0	1																																																		
b		0		3c	1																																																		
c		0		0	2																																																		
e		0		-2g	2																																																		
g		0		0	6																																																		

Obtenemos un 6-modelo AT para el complejo de cadenas \mathcal{C} , siendo $H = \{a\}$ (obviamente, con diferencial nula).

Teorema 4.2 Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} , un λ -modelo AT para dicho complejo de cadenas y un elemento a de dimensión n tal que $a \notin C_n$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$, el algoritmo 7 aplicado a dicho modelo AT y al elemento a computa un λ' -modelo AT para el complejo de cadenas $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$.

Demostración: Denotamos por $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$ al λ -modelo AT que recibe el algoritmo como entrada y denotamos por $(C', H', f', g', \phi', \lambda')$ al conjunto en la salida de dicho algoritmo. Tenemos que probar que $(C', H', f', g', \phi', \lambda')$ es un λ' -modelo AT para $\mathcal{C}^{\cup\{a\}}$ (que denotamos por \mathcal{C}'). Por una parte, $C' = C \cup \{a\}$ y $d_n(a) \in C_{n-1}$, luego C' es una base de \mathcal{C}' . Por otra parte, H' es un subconjunto de elementos de C' y el complejo de cadenas \mathcal{H}' generado por H' tiene diferencial nula. Queda probar que $c_{\lambda'} = (f', g', \phi', \lambda')$ define una contracción de cadenas de \mathcal{C}' en \mathcal{H}' . Es decir, tenemos que probar que: $f'_{q-1}d'_q = 0$, $d'_qg'_q = 0$, $f'_qg'_q = \lambda'id_{\mathcal{H}'_q}$, $\lambda'id_{C'_q} - g'_qf'_q = \phi'_{q-1}d'_q + d'_{q+1}\phi'_q$, para todo $q \geq 0$.

Caso 1: Si $f_{n-1}d_n(a) = 0$, basta probarlo para el elemento a ,

- $f'_{n-1}d_n(a) = f_{n-1}d_n(a) = 0$;
- $d_n g'_n(a) = \lambda d_n(a) - d_n \phi_{n-1} d_n(a) = 0$, ya que como $d_n(a) \in \mathcal{C}_{n-1}$, se verifica que $\lambda d_n(a) - g_{n-1} f_{n-1} d_n(a) = \phi_{n-2} d_{n-1} d_n(a) + d_n \phi_{n-1} d_n(a)$. Por una parte, $f_{n-1} d_n(a) = 0$ y por otra parte, $d_{n-1} d_n(a) = 0$, luego $\lambda d_n(a) = d_n \phi_{n-1} d_n(a)$;
- $f'_n g'_n(a) = \lambda f'_n(a) - f'_n \phi_{n-1} d_n(a) = \lambda a - f_n \phi_{n-1} d_n(a) = \lambda a = \lambda' a$, ya que podemos suponer que se verifican las propiedades de anulaci3n, en particular $f_n \phi_{n-1} = 0$;
- $\lambda a - g_n f_n(a) = \lambda a - \lambda a + \phi_{n-1} d_n(a) = \phi_{n-1} d_n(a) + d_{n+1} \phi_n(a)$.

Caso 2: Si existe $\beta \in H_{n-1}$ tal que $\mu := c_\beta(f_{n-1}d_n(a)) \neq 0$, entonces s3lo lo probaremos para las dimensiones no triviales,

- $f'_{n-1}d_n = 0$:
 - $f'_{n-1}d_n(a) = \mu f_{n-1}d_n(a) - \mu f_{n-1}d_n(a) = 0$, ya que $c_\beta(f_{n-1}d_n(a)) = \mu$
 - Para $c \in \mathcal{C}'_n$, $f'_{n-1}d_n(c) = \mu f_{n-1}d_n(c) - \lambda_{d_n(x)} f_{n-1}d_n(a) = \mu f_{n-1}d_n(x) = 0$, ya que $\lambda_{d_n(x)} = c_\beta(f_{n-1}d_n(x)) = 0$
- $d_q g'_q = 0$: trivial ya que g_q no cambia, para todo q .
- $f'_{n-1}g'_{n-1} = \lambda' id_{\mathcal{H}'_{n-1}}$: $f'_{n-1}g'_{n-1}(h) = \mu f_{n-1}g_{n-1}(h) - \lambda_{g_{n-1}(h)} f_{n-1}d_n(a) = \mu \lambda h = \lambda' h$, ya que $\lambda_{g_{n-1}(h)} = c_\beta(f_{n-1}g_{n-1}(h)) = c_\beta(\lambda h) = 0$ por ser $h \in H_{n-1} \setminus \{\beta\}$.
- $\phi'_{n-1}d_n + d_{n+1}\phi'_n = \lambda' id_{\mathcal{C}'_n} - g'_n f'_n$:
 - $\lambda' a - g'_n f'_n(a) = \lambda' a = \lambda \mu a = \mu \phi_{n-1} d_n(a) + \lambda \mu a - \mu \phi_{n-1} d_n(a) = \phi'_{n-1} d_n(a) + d_{n+1} \phi'_n(a)$
 - Para $c \in \mathcal{C}'_n$, $\phi'_{n-1}d_n(c) + d_{n+1}\phi'_n(c) = \mu \phi_{n-1}d_n(c) + \lambda_{d_n(c)}(\lambda a - \phi_{n-1}d_n(a)) + \mu d_{n+1}\phi_n(c) = \mu \phi_{n-1}d_n(x) + \mu d_{n+1}\phi_n(x) = \mu \lambda c - \mu g_n f_n(c) = \lambda' c - g'_n f'_n(c)$
- $\phi'_{n-2}d_{n-1} + d_n \phi'_{n-1} = \lambda' id_{\mathcal{C}'_{n-1}} - g'_{n-1} f'_{n-1}$: $\lambda' c - g'_{n-1} f'_{n-1}(c) = \lambda \mu c - \mu g_{n-1} f_{n-1}(c) + \lambda c g_{n-1} f_{n-1} d_n(a) = \mu \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + \mu d_n \phi_{n-1}(c) - \lambda_c(\lambda d_n(a) - d_n \phi_{n-1} d_n(a)) = \phi'_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi'_{n-1}(c)$.

□

COMPLEJIDAD, EN TIEMPO, DEL ALGORITMO 7: $\mathcal{O}((m^2))$, donde m es la dimensi3n del complejo de cadenas inicial. La complejidad en espacio puede ser mayor ya que pueden aparecer enteros muy grandes.

COMPLEJIDAD, EN TIEMPO, DEL ALGORITMO 8: $\mathcal{O}((m^3))$, donde m es el n3mero de elementos del filtro que recibe como entrada.

4.3 Computando información homológica a partir de λ -modelos AT

En esta sección vamos a ver que, computando un λ -modelo AT, $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$, para un complejo de cadenas \mathcal{C} , obtenemos información homológica en \mathbb{Z} . En concreto, obtenemos los números de Betti así como los primos p candidatos a aparecer en los coeficientes de torsión de la homología. Veamos los siguientes resultados:

Teorema 4.3 *Dado un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} , $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$, el complejo de cadenas \mathcal{H} (generado por H y con diferencial nula) es isomorfo a la parte libre de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$.*

La demostración del teorema anterior es una consecuencia directa de la proposición 4.1 y de ser \mathcal{H} un complejo de cadenas con diferencial nula.

Veamos más propiedades de los λ -modelos AT:

Proposición 4.2 *Dado un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} , $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$, es posible obtener un modelo AT racional (es decir, un modelo AT sobre \mathbb{Q}) dado por $(C, H, \lambda^{-1}f, g, \lambda^{-1}\phi)$. Además, el conjunto $\{g(h) : h \in H\}$ es un conjunto de ciclos representativos de generadores de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$.*

Demostración: Veamos que, efectivamente, $c = (\lambda^{-1}f, g, \lambda^{-1}\phi)$ define una contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{H} . Es decir, tenemos que probar: $\lambda^{-1}f_{q-1}d_q = 0$, $d_qg_q = 0$, $\lambda^{-1}f_qg_q = id_{\mathcal{H}_q}$, $id_{\mathcal{C}_q} - \lambda^{-1}g_qf_q = \lambda^{-1}\phi_{q-1}d_q + \lambda^{-1}d_{q+1}\phi_q$, para todo q .

- $\lambda^{-1}f_{q-1}d_q = 0$ y $d_qg_q = 0$, por ser f y g aplicaciones de cadena;
- $\lambda^{-1}f_qg_q = \lambda^{-1}\lambda id_{\mathcal{H}_q} = id_{\mathcal{H}_q}$;
- $\lambda^{-1}\phi_{q-1}d_q + \lambda^{-1}d_{q+1}\phi_q = \lambda^{-1}(\lambda id_{\mathcal{C}_q} - g_qf_q) = id_{\mathcal{C}_q} - \lambda^{-1}g_qf_q$.

La demostración de que el conjunto $\{g(h) : h \in H\}$ es un conjunto de ciclos representativos de generadores de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$ es ya conocida al tener un modelo AT sobre un cuerpo \mathbb{Q} .

□

El Teorema de Coeficientes Universales para Homología ([Munk84], pag. 332) nos dice que el q -ésimo número de Betti β_q (rango de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$) coincide con la dimensión del espacio vectorial $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$. Además, trabajando en el dominio de los enteros, podemos obtener un conjunto de β_q ciclos no bordes independientes de \mathcal{C} sobre \mathbb{Z} , para cada q , a partir de un λ -modelo AT de \mathcal{C} .

Corolario 4.1 *Dado un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} , $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$, el conjunto $\{g(h) : h \in H\}$ es un conjunto de ciclos no bordes independientes de \mathcal{C} sobre \mathbb{Z} .*

De la misma forma que hemos construido un modelo AT racional a partir de un λ -modelo AT (proposición 4.2), podemos obtener un modelo AT sobre \mathbb{Z}_p , para p un primo.

Proposición 4.3 *Dado un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} con diferencial d , $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$, y un primo q tal que p no divide a λ , el conjunto $(C, H_{\mathbb{Z}_p}, f_{\mathbb{Z}_p}, g_{\mathbb{Z}_p}, \phi_{\mathbb{Z}_p})$ es un modelo AT sobre \mathbb{Z}_p para el complejo de cadenas \mathcal{C} con diferencial $d_{\mathbb{Z}_p}$, siendo $d_{\mathbb{Z}_p} = d \bmod p$, $f_{\mathbb{Z}_p} = \lambda^{-1}f \bmod p$, $g_{\mathbb{Z}_p} = g \bmod p$ y $\phi_{\mathbb{Z}_p} = \lambda^{-1}\phi \bmod p$. Además, $\{g_{\mathbb{Z}_p}(h) : h \in H\}$ es un conjunto de ciclos representativos de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$.*

Demostración: Veamos que $c_{\mathbb{Z}_p} = (f_{\mathbb{Z}_p}, g_{\mathbb{Z}_p}, \phi_{\mathbb{Z}_p})$ define una contracción de cadenas del complejo de cadenas \mathcal{C} con diferencial $d_{\mathbb{Z}_p}$ en \mathcal{H} . Para cada q :

- $(f_{\mathbb{Z}_p})_{q-1}(d_{\mathbb{Z}_p})_q = \lambda^{-1}f_{q-1}d_q \bmod p = 0$;
- $(d_{\mathbb{Z}_p})_q(g_{\mathbb{Z}_p})_q = d_q g_q \bmod p = 0$;
- $(f_{\mathbb{Z}_p})_q(g_{\mathbb{Z}_p})_q = \lambda^{-1}f_q g_q \bmod p = \lambda \lambda^{-1} f_q g_q \bmod p = id_{\mathcal{C}_q} \bmod p = id$;
- $(\phi_{\mathbb{Z}_p})_{q-1}(d_{\mathbb{Z}_p})_q + (d_{\mathbb{Z}_p})_{q+1}(\phi_{\mathbb{Z}_p})_q = \lambda^{-1}\phi_{q-1}d_q + \lambda^{-1}d_{q+1}\phi_q \bmod p = id_{\mathcal{C}_q} - \lambda^{-1}g_q f_q \bmod p = id_{\mathcal{C}_q} - (g_{\mathbb{Z}_p})_q(f_{\mathbb{Z}_p})_q$.

Por ser $(C, H_{\mathbb{Z}_p}, f_{\mathbb{Z}_p}, g_{\mathbb{Z}_p}, \phi_{\mathbb{Z}_p})$ un modelo AT sobre \mathbb{Z}_p , ya sabemos que $\{g_{\mathbb{Z}_p}(h) : h \in H\}$ es un conjunto de ciclos representativos de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$. □

Hemos visto que, obteniendo un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} , conocemos los números de Betti de \mathcal{C} . Veamos ahora la información que obtenemos de la parte de torsión:

Proposición 4.4 *Sea $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$ un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} . Si $a \in \mathcal{C}_q$ tal que $d_q(a) = 0$ y existe $b \in \mathcal{C}_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(b) = \alpha a$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$ y además, para cada $0 < \beta < \alpha$, $\beta a \notin \text{Im}d_{q+1}$. Entonces, α divide a λ .*

Demostración: Veamos primero que $f_q(a) = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $f_q(a) \neq 0$, luego $\alpha f_q(a) \neq 0$ ya que $\alpha \neq 0$ y estamos trabajando con el anillo \mathbb{Z} . Por otra parte, $\alpha f_q(a) = f_q(\alpha a) = f_q d_{q+1}(b) = 0$, lo cual es una contradicción.

Por otra parte, por definición de λ -contracción de cadenas, $\lambda a - g_q f_q(a) = \phi_{q-1}d_q(a) + d_{q+1}\phi_q(a)$, entonces $\lambda a = d_{q+1}\phi_q(a)$, ya que por hipótesis $d_q(a) = 0$ y se tiene que

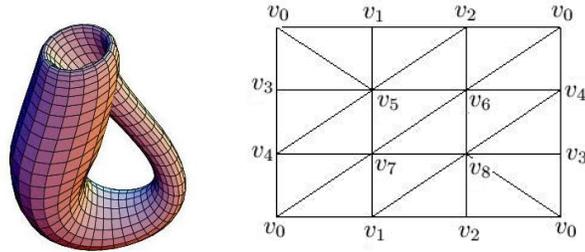
$f_q(a) = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que α no divide a λ . Entonces, existen $c, r \in \mathbb{Z}$ tales que $0 < r < \alpha$ y $\lambda = c\alpha + r$. Por una parte, $ra \notin \text{Im}d_{q+1}$, por hipótesis, ya que $r < \alpha$, y por otra parte, $ra = \lambda a - c\alpha a = d_{q+1}\phi_q(a) - cd_{q+1}(b) = d_{q+1}\phi_q(a) - d_{q+1}(cb) = d_{q-1}(\phi_q(a) - cb) \in \text{Im}d_{q+1}$, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 4.2 Si $\alpha = p^{t_q}$ es un factor invariante de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$, entonces p divide a λ .

Demostración: Si $\alpha = p^{t_q}$ es un factor invariante de $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$, entonces sea $a \in \mathcal{C}_q$ tal que $d_q(a) = 0$ y $b \in \mathcal{C}_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(b) = \alpha a$ y tal que, para cada $0 < \beta < \alpha$, $\beta a \notin \text{Im}d_{q+1}$. Por el corolario 4.2, α divide a λ . Como $\alpha = p^{t_q}$ y p es primo, se tiene que p divide a λ . \square

De los resultados anteriores se deduce que los primos candidatos a aparecer en los coeficientes de torsión son aquellos primos p tales que $p|\lambda$ (p divide a λ).

Veamos como ejemplo el caso de la botella de Klein:



Ejemplo 4.2 Consideramos el complejo simplicial S derivado de la triangulación de la botella de Klein. Sea $\mathcal{C}(S)$ el complejo de cadenas asociado y $C(S)$ el filtro de dicho complejo de cadenas, dado en el ejemplo 3.3. Aplicando el algoritmo 8, obtenemos un 2-modelo AT, $(C(S), H_S, f_S, g_S, \phi_S, 2)$, donde $H_S = \{a, ac\}$. Las imágenes de las aplicaciones vienen dadas en la siguiente tabla:

	f	g	ϕ
vértice $v \neq a$	$2a$		$2\gamma_{(v,a)}$
a	$2a$	a	0
arista roja $l \neq ac$	$2ac$		$2\gamma_{(l,ac)}$
ac	$2ac$	$ab + bc - ac$	0
r , resto de aristas	0		$2\gamma_{(r,ac)}$
t , triángulo	0		0

donde $\gamma_{(v,a)}$ es un camino del vértice v al vértice a y $\gamma_{(l,ac)}$ de la arista l a la arista ac (análogamente se define $\gamma_{(r,ac)}$); por ejemplo $\gamma_{(g,a)} = ab + bc + cg$ y $\gamma_{(gh,ac)} = fhg - cfg + bcf + abf$.

La información homológica que obtenemos es la siguiente:

Parte libre: Como $H_S = \{a, ac\}$, entonces $\beta_0 = 1$ y $\beta_1 = 1$.

Parte de torsión: Como $\lambda = 2$, entonces los candidatos a ser coeficientes de torsión de la homología son de la forma 2^t , es decir, potencias del primo $p = 2$.

Observar que si λ es muy “grande”, hay muchos candidatos a aparecer en los coeficientes de torsión de la homología de \mathcal{C} , en concreto, todos los primos que dividen a λ . Por tanto, la cuestión que nos planteamos ahora es conseguir el mínimo $\lambda > 0$ tal que exista un λ -modelo AT para \mathcal{C} .

Proposición 4.5 *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas tal que en cada dimensión q , la matriz de la diferencial d_q de \mathcal{C} respecto a las bases C_q y C_{q-1} de \mathcal{C}_q y \mathcal{C}_{q-1} , respectivamente, coincide con su forma normal de Smith. Sea ρ el mínimo común múltiplo de todos los enteros no nulos que aparecen en dichas matrices. Entonces, $(\mathcal{C} = \{C_q\}, H, f, g, \phi, \rho)$ define un ρ -modelo AT de \mathcal{C} , donde*

- Si $x \in C_q$ tal que $d_q(x) = \mu y$, para $y \in C_{q-1}$ y $\mu > 0$, entonces $f_q(x) = 0$, $f_{q-1}(y) = 0$, $\phi_q(x) = 0$ y $\phi_{q-1}(y) = \frac{\rho}{\mu}x$.
- Si $x \in C_q$ tal que $d_q(x) = 0$ y no existe $z \in C_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(z) = \mu x$, para $\mu > 0$, entonces $f_q(x) = x$, $g_q(x) = \rho x$ y $\phi_q(x) = 0$.
- $H = \{H_q\}$ tal que para cada q ,

$$H_q = \{x \in C_q \text{ tal que } d_q(x) = 0 \text{ y no existe } z \in C_{q+1} \text{ tal que } d_{q+1}(z) = \mu x, \mu > 0\}$$

Demostración: Sea $C_q = \{x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_r\}$ tal que $d_q(x_i) = \mu_i y_i$, $\mu_i > 0$ para $1 \leq i \leq t$; $d_q(x_i) = 0$ y no existe $z_i \in C_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(z_i) = \theta_i x_i$, $\theta_i > 0$, para $t < i \leq l$; $d_q(x_i) = 0$ y existe $z_i \in C_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(z_i) = \gamma_i x_i$, $\gamma_i > 0$, para $l < i \leq r$. Entonces, $H_q = \{x_{t+1}, \dots, x_l\}$. Obviamente, la diferencial del complejo de cadenas \mathcal{H} generado por H_q , en cada dimensión q , es nula, por construcción. Veamos entonces que el conjunto $c_\rho = (f, g, \phi, \rho)$ define una ρ -contracción de cadenas \mathcal{C} en \mathcal{H} :

- $f_{q-1}d_q = 0$:

- Para $1 \leq i \leq t$, $f_{q-1}d_q(x_i) = f_{q-1}(\mu_i y_i) = \mu_i f_{q-1}(y_i) = 0$.
- Para $t < i \leq r$, $f_{q-1}d_q(x_i) = 0$.
- $d_q g_q(x_i) = d_q(\rho x_i) = \rho d_q(x_i) = 0$, para $t < i \leq l$.
- $f_q g_q(x_i) = \rho f_q(x_i) = \rho x_i$, para $t < i \leq l$.
- $\rho i d_{\mathcal{C}_q} - g_q f_q = \phi_{q-1} d_q + d_{q+1} \phi_q$:
 - Para $1 \leq i \leq t$, $\phi_{q-1} d_q(x_i) + d_{q+1} \phi_q(x_i) = \phi_{q-1}(\mu_i y_i) = \frac{\rho}{\mu_i} \mu_i x_i = \rho x_i = \rho x_i - g_q f_q(x_i)$.
 - Para $t < i \leq l$, $\phi_{q-1} d_q(x_i) + d_{q+1} \phi_q(x_i) = 0 = \rho x_i - g_q f_q(x_i)$.
 - Para $l < i \leq r$, $\phi_{q-1} d_q(x_i) + d_{q+1} \phi_q(x_i) = d_{q+1}(\frac{\rho}{\gamma_i} x_i) = \frac{\rho}{\gamma_i} \gamma_i x_i = \rho x_i = \rho x_i - g_q f_q(x_i)$.

□

El ρ -modelo AT definido en la proposición 4.5 satisface que un primo p divide a ρ si y sólo si p forma parte del subgrupo de torsión de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$. Por una parte, si p forma parte de un factor invariante, por el corolario 4.2, sabemos que p divide a ρ . Recíprocamente, si p es un primo que divide a ρ , por la forma de definir ρ en la proposición 4.5, p forma parte de un factor invariante.

Observar que para obtener un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} con λ mínimo, necesitamos calcular la forma normal de Smith de las matriz diferencial de \mathcal{C} .

4.4 Ampliando la información homológica usando modelos AT

En la sección anterior hemos visto que computando un λ -modelo AT para un complejo de cadenas \mathcal{C} obtenemos información del subgrupo libre de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ así como los primos candidatos a aparecer en los coeficientes de torsión correspondientes al subgrupo de torsión de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$. Entonces, surgen de forma natural dos cuestiones:

1. ¿Cómo sabemos si un primo p que divide a λ forma realmente parte de un factor invariante?
2. Si tenemos la seguridad de que un primo p forma parte de un factor invariante p^t , ¿podemos conocer el exponente t ?

En esta sección, vamos a dar una respuesta a dichas cuestiones recurriendo a la computación de modelos AT sobre \mathbb{Z}_p , para p un primo. En primer lugar, la siguiente proposición nos muestra que podemos obtener un modelo AT sobre \mathbb{Z}_p aplicando el algoritmo 8:

Proposición 4.6 *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas, C un filtro de \mathcal{C} y $d_{\mathbb{Z}_p}$ la diferencial de \mathcal{C} respecto a C . Trabajando con coeficientes en un cuerpo \mathbb{Z}_p , siendo p un primo, sea $(C, H_{\mathbb{Z}_p}, f_{\mathbb{Z}_p}, g_{\mathbb{Z}_p}, \phi_{\mathbb{Z}_p})$ la salida obtenida al aplicar el algoritmo 8 al filtro C de \mathcal{C} . Entonces,*

$$(C, H_{\mathbb{Z}_p}, \lambda^{-1} f_{\mathbb{Z}_p}, g_{\mathbb{Z}_p}, \lambda^{-1} \phi_{\mathbb{Z}_p})$$

es un modelo AT para \mathcal{C} sobre \mathbb{Z}_p . Además, $\{g_{\mathbb{Z}_p}(h) : h \in H_{\mathbb{Z}_p}\}$ es un conjunto de ciclos representativos de generadores de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$.

Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y un λ -modelo AT de \mathcal{C} , computando modelos AT en \mathbb{Z}_p , para los primos p que dividen a λ , podemos obtener información acerca de la parte de torsión. En concreto, podemos conocer la cantidad de factores invariantes que son potencia del primo p . Además, obtenemos una base de ciclos representativos módulo p de generadores del subgrupo libre y el subgrupo de torsión de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$. Veamos el siguiente algoritmo:

Algoritmo 9 *Computando información homológica en \mathbb{Z} de \mathcal{C} .*

ENTRADA: Un complejo de cadenas $\mathcal{C} = (C, d)$ de dimension n

Aplica algoritmo 8 sobre \mathbb{Z} para obtener un λ -modelo AT para $\mathcal{C} = (C, d)$: $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$.

Para $q = 0$ hasta $q = n$ hacer

$\beta_q :=$ numero de elementos de H_q ;

$G = \{g(h) : h \in H\}$.

Para cada primo p que divida a λ ,

Aplica algoritmo 8 sobre \mathbb{Z}_p para obtener un modelo AT

para $\mathcal{C} = (C, d_{\mathbb{Z}_p})$ sobre \mathbb{Z}_p : $(C, H_{\mathbb{Z}_p}, f_{\mathbb{Z}_p}, g_{\mathbb{Z}_p}, \phi_{\mathbb{Z}_p})$;

Para $q = 0$ hasta $q = n$, hacer

$\beta_{(q,p)} :=$ numero de elementos de $H_{\mathbb{Z}_p}$ en dimension q ;

$T_{(0,p)} = \beta_{(0,p)} - \beta_0$;

Para $q = 1$ hasta $q = n$, hacer

$T_{(q,p)} = \beta_{(q,p)} - \beta_q - T_{(q-1,p)}$;

$G_{\mathbb{Z}_p} = \{g_{\mathbb{Z}_p}(h), : h \in H_{\mathbb{Z}_p}\}$;

SALIDA: Los conjuntos G , $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, $\{G_{\mathbb{Z}_p} : p \text{ primo que divide a } \lambda\}$
y $\{T_{(q,p)} : 0 \leq q \leq n \text{ y } p \text{ primo que divide a } \lambda\}$.

Resumiendo, después de computar un λ -modelo AT y modelos AT sobre \mathbb{Z}_p , para cada primo p que divide a λ , para un complejo de cadenas \mathcal{C} , obtenemos:

- Los números de Betti β_q , $0 \leq q \leq n$, y un conjunto G de ciclos no bordes independientes de \mathcal{C} sobre \mathbb{Z} (en realidad, G es también un conjunto de ciclos representativos de generadores de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$);
- Los primos envueltos en los factores invariantes correspondientes al subgrupo de torsión de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$, la cantidad de factores invariantes en cada dimensión q que son potencia de un primo p , $T_{(q,p)}$, y un conjunto $G_{\mathbb{Z}_p}$ de ciclos representativos de generadores de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$, para cada p primo que divida a λ .

Ejemplo 4.3 *En el ejemplo 4.2 obtuvimos un 2-modelo AT, $(C(S), H_S, f_S, g_S, \phi_S, 2)$, para el complejo de cadenas asociado a la botella de Klien, siendo $H_S = \{a, ac\}$. Deducimos que*

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 1$$

Como $\lambda = 2$, sólo tenemos que computar un modelo AT con coeficientes en \mathbb{Z}_2 . Dicho modelo fue obtenido en el ejemplo 3.3, $(C, H_{\mathbb{Z}_2}, f_{\mathbb{Z}_2}, g_{\mathbb{Z}_2}, \phi_{\mathbb{Z}_2})$, donde $H_{\mathbb{Z}_2} = \{a, ac, de, adi\}$. Entonces, $\beta_{(0,2)} = 1$, $\beta_{1,2} = 2$, $\beta_{(2,2)} = 1$ y $G_{\mathbb{Z}_2} = \{a, \alpha_1, \alpha_2, \beta\}$. Por lo tanto, $T_{(0,2)} = 0$, $T_{(1,2)} = 1$ y $T_{(2,2)} = 0$. Finalmente, concluimos que:

$$H_0(\mathcal{C}(S); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad y \quad H_1(\mathcal{C}(S); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2,$$

COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO 9: $\mathcal{O}(m^3\psi(\lambda))$, siendo ψ la función de Euler y m el número de elementos del filtro de \mathcal{C} que recibe como entrada. Por una parte, la complejidad de los algoritmos para computar modelos AT y λ -modelos AT es $\mathcal{O}(m^3)$ y por otra parte, tenemos que aplicar el algoritmo para computar modelos AT tantas veces como primos p dividan a λ . Dicho número de primos nos lo da la conocida función de Euler.

Ahora bien, una cuestión importante es limitar el coeficiente λ para así, disminuir la complejidad del algoritmo 9. Para ello, la solución que proponemos es realizar un preprocesado antes de aplicar el algoritmo 9. Dicho preprocesado va a consistir en computar una contracción de cadenas del complejo de cadenas \mathcal{C} a otro complejo de cadenas \mathcal{C}' , con la misma homología en \mathbb{Z} que \mathcal{C} , pero con menor número de generadores. Posteriormente, se aplica el algoritmo 9 al complejo de cadenas “adelgazado”, lo cual no supone ningún problema ya que sabemos que la composición de λ -contracciones de cadenas es una λ -contracción de cadenas.

El algoritmo de preprocesamiento recibe como entrada un filtro del complejo de cadenas \mathcal{C} y en cada paso, se añade un nuevo elemento a de dicho filtro. La idea es quedarnos sólo con aquellos elementos $c \in C$ tales que $fd(c) = 0$ y aquellos tales que el mínimo de los coeficientes de la expresión $fd(c)$ en valor absoluto es mayor que 1, siendo (f, g, ϕ) la contracción obtenida antes de añadir el elemento c .

Algoritmo 10 *Preprocesamiento: Contracción de cadenas de \mathcal{C} en un complejo de cadenas más pequeño \mathcal{C}' .*

ENTRADA: Un filtro $C = \{a_0, \dots, a_m\}$ del complejo \mathcal{C} de dimension n ,
y la matriz de la diferencial d para la base C .

$C'_q := \{\}$, $d'_q := 0$, $f_q := 0$, $\phi_q := 0$, $g_q := 0$, para todo q .

Para $i = 0$ hasta m hacer

Sea n la dimension de a_i ;

Si $f_{n-1}d_n(a_i) = 0$, entonces

$$C'_n := C'_n \cup \{a_i\}, \quad d'_n(a_i) := 0,$$

$$f_n(a_i) := a_i, \quad \phi_n(a_i) := 0, \quad g_n(a_i) := a_i - \phi_{n-1}d_n(a_i).$$

En caso contrario

Si $\min \{|c_{a_j}(f_{n-1}d_n(a_i))|, a_j \in C'_{n-1}\} = 1$, entonces

$$k := \max \{j \text{ tal que } |c_{a_j}(f_{n-1}d_n(a_i))| = 1, a_j \in C'_{n-1}\}.$$

$$\lambda_k := c_{a_k}(f_{n-1}d_n(a_i)) (= \pm 1), \quad C'_{n-1} := C'_{n-1} \setminus \{a_k\},$$

$$f_n(a_i) := 0, \quad \phi_n(a_i) := 0.$$

Para $c \in C_{n-1}$ y $x \in C'_n$ hacer

$$\lambda_c := c_{a_k}(f_{n-1}(c)), \quad \lambda'_x := c_{a_k}(d'_n(x)),$$

$$f_{n-1}(c) := f_{n-1}(c) - \lambda_k \lambda_c f_{n-1}d_n(a_i),$$

$$\phi_{n-1}(c) := \phi_{n-1}(c) + \lambda_k \lambda_c (a_i - \phi_{n-1}d_n(a_i)),$$

$$d'_n(x) := d'_n(x) - \lambda_k \lambda'_x f_{n-1}d_n(a_i).$$

en caso contrario

$$C'_n := C'_n \cup \{a_i\}, \quad d'_n(a_i) := f_{n-1}d_n(a_i),$$

$$f_n(a_i) := a_i, \quad \phi_n(a_i) := 0, \quad g_n(a_i) := a_i - \phi_{n-1}d_n(a_i).$$

SALIDA: El conjunto $((C, d), (C', d'), f, g, \phi)$.

Veamos en primer lugar un ejemplo:

Ejemplo 4.4 *Aplicamos el algoritmo 10 al complejo de cadenas $\mathcal{C}(S)$ asociado a la botella de Klein. Entonces, el complejo de cadenas “adelgazado” que obtenemos es $\mathcal{C}'(S) = (C'(S), d')$, donde:*

- $C'(S) = \{a, ac, de, adi\}$,

- $d'_0(a) = 0$, $d'_1(ac) = 0$, $d'_1(de) = 0$ y $d'_2(adi) = 2de$

Teorema 4.4 *La salida del algoritmo 10 aplicado a un filtro C de un complejo de cadenas \mathcal{C} nos devuelve una contracción de cadenas de \mathcal{C} en un complejo de cadenas \mathcal{C}' con menor número de generadores que \mathcal{C} .*

Demostración: Supongamos que, una vez computado el algoritmo hasta el paso $(i-1)$, obtenemos $((C, d), (C', d'), f, g, \phi)$, siendo $c = (f, g, \phi)$ una contracción de cadenas de $\mathcal{C} = (C, d)$ en $\mathcal{C}' = (C', d')$. Vamos a probar que al añadir el elemento a_i de dimensión n , el nuevo conjunto que obtenemos, que denotamos por $((C, d), (\tilde{C}', \tilde{d}'), f', g', \phi')$ es tal que $c' = (f', g', \phi')$ define una nueva contracción de cadenas. Para ello, tenemos que probar: $f'_{q-1}d_q = \tilde{d}'_q f'_q$, $d_q g'_q = g'_{q-1} \tilde{d}'_q$, $f'_q g'_q = id_{\tilde{C}'_q}$, $id_{C_q} - g'_q f'_q = \phi'_{q-1} d_q + d_{q+1} \phi'_q$, para todo q .

Caso 1: Si $f_{n-1}d_n(a_i) = 0$, probamos las propiedades sólo para a_i ya que para el resto de elementos las aplicaciones no cambian,

- $f'_{n-1}d_n(a_i) = f_{n-1}d_n(a_i) = 0 = \tilde{d}'_n(a_i) = \tilde{d}'_n f'_n(a_i)$;
- $d_n g'_n(a_i) = d_n(a_i) - d_n \phi_{n-1} d_n(a_i) = 0 = g'_{n-1} \tilde{d}'_n(a_i)$, por ser (f, g, ϕ) una contracción de cadenas;
- $f'_n g'_n(a_i) = f'_n(a_i) - f'_n \phi_{n-1} d_n(a_i) = a_i - f_n \phi_{n-1} d_n(a_i) = a_i$, ya que podemos suponer que se verifican las propiedades de anulación, en particular que $f_n \phi_{n-1} = 0$;
- $a_i - g'_n f'_n(a_i) = a_i - a_i + \phi_{n-1} d_n(a_i) = \phi'_{n-1} d_n(a_i) + d_{n+1} \phi'_n(a_i)$.

Caso 2: Si $\min \{|c_{a_j}(f_{n-1}d_n(a_i))|, a_j \in C'_{n-1}\} = 1$, siendo $k := \max \{j \text{ tal que } |c_{a_j}(f_{n-1}d_n(a_i))| = 1, a_j \in C'_{n-1}\}$ y $\lambda_k := c_{a_k}(f_{n-1}d_n(a_i)) (= \pm 1)$, probamos las propiedades sólo para las dimensiones no triviales. Entonces, sea $c \in C_{n-1}$, $z \in C_n$, $x \in \tilde{C}'_n$ y $t \in \tilde{C}'_{n-1}$,

- $f'_{q-1}d_q = \tilde{d}'_q f'_q$:
 - $f'_{n-1}d_n(a_i) = f_{n-1}d_n(a_i) - \lambda_k \lambda_{d_n(a_i)} f_{n-1}d_n(a_i) = 0 = \tilde{d}'_n f'_n(a_i)$ ya que $\lambda_{d_n(a_i)} = \lambda_k$ y como $\lambda_k = \pm 1$, $\lambda_k \lambda_k = 1$;
 - $\tilde{d}'_{n-1} f'_{n-1}(c) = \tilde{d}'_{n-1} f_{n-1}(c) - \lambda_k \lambda_c \tilde{d}'_{n-1} f_{n-1}d_n(a_i) = f_{n-2}d_{n-1}(c) - \lambda_k \lambda_c f_{n-2}d_{n-1}d_n(a_i) = f_{n-2}d_{n-1}(c) = f'_{n-2}d_{n-1}(c)$, ya que $d_{n-1}d_n = 0$;
 - $\tilde{d}'_n f'_n(z) = \tilde{d}'_n f_n(z) = d'_n f_n(z) - \lambda_k \lambda'_{f_n(z)} f_{n-1}d_n(a_i) = f_{n-1}d_n(z) - \lambda_k \lambda_{d_n(z)} f_{n-1}d_n(a_i) = f'_{n-1}d_n(z)$, ya que $\lambda'_{f_n(z)} = c_{a_k}(d'_n f_n(z)) = c_{a_k}(f_{n-1}d_n(z)) = \lambda_{d_n(z)}$
- $g'_{q-1} \tilde{d}'_q = d_q g'_q$:

- $f'_q g'_q = id_{\tilde{C}'_q} : f'_{n-1} g'_{n-1}(t) = f_{n-1} g_{n-1}(t) - \lambda_k \lambda_{g_{n-1}(t)} f_{n-1} d_n(a_i) = f_{n-1} g_{n-1}(t) = t$, ya que $\lambda_{g_{n-1}(t)} = c_{a_k}(f_{n-1} g_{n-1}(t)) = c_{a_k}(t) = 0$ puesto que $a_k \in \tilde{C}'_{n-1} = C'_{n-1} \setminus \{a_k\}$.
- $id_{C'_q} - g'_q f'_q = \phi'_{q-1} d_q + d_{q+1} \phi'_q :$
 - $\phi'_{n-1} d_n(a_i) + d_{n+1} \phi'_n(a_i) = \phi'_{n-1} d_n(a_i) = \phi_{n-1} d_n(a_i) + \lambda_k \lambda_{d_n(a_i)} (a_i - \phi_{n-1} d_n(a_i)) = \phi_{n-1} d_n(a_i) + \lambda_k \lambda_k (a_i - \phi_{n-1} d_n(a_i)) = a_i = a_i - g'_n f'_n(a_i)$, ya que $\lambda_k = \pm 1$ y por tanto, $\lambda_k \lambda_k = 1$;
 - $c - g'_{n-1} f'_{n-1}(c) = c - g_{n-1} f_{n-1}(c) + \lambda_k \lambda_c g_{n-1} f_{n-1} d_n(a_i) = \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi_{n-1}(c) + \lambda_k \lambda_c (d_n(a_i) - d_n \phi_{n-1} d_n(a_i)) = \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n (\phi_{n-1}(c) + \lambda_k \lambda_c (a_i - \phi_{n-1} d_n(a_i))) = \phi'_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi'_{n-1}(c)$.

Caso 3: Si $\min \{|c_{a_j}(f_{i-1} d(a_i))|, j = 0, \dots, i-1\} > 1$, como en el caso 1, probamos las propiedades sólo para a_i ya que para el resto de elementos los morfismos no cambian,

- $\tilde{d}'_n f'_n(a_i) = \tilde{d}'_n(a_i) = f_{n-1} d_n(a_i) = f'_{n-1} d_n(a_i)$;
- $d_n g'_n(a_i) = d_n(a_i) - d_n \phi_{n-1} d_n(a_i) = g_{n-1} f_{n-1}(a_i) = g'_{n-1} \tilde{d}'_n(a_i)$;
- $f'_n g'_n(a_i) = f'_n(a_i) - f'_n \phi_{n-1} d_n(a_i) = a_i - f_n \phi_{n-1} d_n(a_i) = a_i$, ya que $f_n \phi_{n-1} = 0$ (podemos suponer que se verifican las propiedades de anulaci3n),
- $a_i - g'_n f'_n(a_i) = a_i - a_i + \phi_{n-1} d_n(a_i) = \phi_{n-1} d_n(a_i) + d_{n+1} \phi_n(a_i) = \phi'_{n-1} d_n(a_i) + d_{n+1} \phi'_n(a_i)$.

□

Hemos probado que podemos computar una contracci3n de cadenas de un complejo de cadenas en otro complejo de cadenas con menor n3mero de generadores que el inicial. Entonces, las homologías de ambos complejos son isomorfas. Aplicando el algoritmo 9 al complejo de cadenas “adelgazado” podemos disminuir el λ y consecuentemente la complejidad de dicho algoritmo.

4.5 Algoritmo decremental para computar λ -modelos AT

Para terminar con el estudio de este modelo de representaci3n, como hemos venido haciendo para el resto de modelos, nos planteamos el problema de obtener un λ' -modelo AT para los complejos de cadenas $C^{\cup\{a\}}$ y $C^{\setminus\{a\}}$, a partir de un λ -modelo AT para el complejo

de cadenas \mathcal{C} .

El caso de la adición ya lo tenemos resuelto, basta aplicar el algoritmo 7 tantas veces como elementos haya en la base C de \mathcal{C} .

Para solucionar el caso de la eliminación, hemos desarrollado un nuevo algoritmo. La idea es la misma que para modelos AT. Supongamos que el elemento a que vamos a eliminar es de dimensión n . Se trata de ver si $a \in \text{Im } g_n$. Si $a \in \text{Im } g_n$, se destruye una clase de homología mientras que, en caso contrario, se crea una nueva clase de homología envuelta en la expresión de $d_n(a)$.

Algoritmo 11 *Algoritmo Decremental para computar λ -modelos AT.*

ENTRADA: Un λ -AT-model $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$ de \mathcal{C} , la matriz de la diferencial d respecto a la base C y un elemento de dimension n , $a \in C_n$, tal que a es maximal.

$$C_n := C_n \setminus \{a\}.$$

Si existe $\beta \in H_n$ tal que $\mu := c_a(g_n(\beta)) \neq 0$, entonces

$$H_n := H_n \setminus \{\beta\}, \quad \lambda := \lambda\mu.$$

Para cada q , cada $c \in C_q$ y $h \in H_q$,

$$f_q(c) := f_q(c) - \lambda_c \beta, \quad \lambda_c := c_\beta(f_q(c)),$$

$$\phi_q(c) := \mu \phi_q(c) - \lambda'_c g_n(\beta), \quad \lambda'_c := c_a(\phi_q(c)),$$

$$g_q(h) := \mu g_q(h) - \lambda_h g_n(\beta), \quad \lambda_h := c_a(g_q(h)).$$

En caso contrario, sea $\gamma \in C_{n-1}$ tal que $c_\gamma(d_n(a)) \neq 0$ y $\gamma \notin H_{n-1}$, entonces

$$H_{n-1} := H_{n-1} \cup \{\gamma\}, \quad g_{n-1}(\gamma) := d_n(a).$$

Para cada q y cada $c \in C_q$,

$$\lambda'_c := c_a(\phi_q(c)),$$

$$f_q(c) := f_q(c) + \lambda'_c \gamma,$$

$$\phi_q(c) := \phi_q(c) - \lambda'_c \phi_{n-1} d_n(a)$$

SALIDA: El conjunto $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$.

Teorema 4.5 *Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} , $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$ un λ -modelo AT para dicho complejo de cadenas y un elemento $a \in C_n$ maximal, el algoritmo 11 aplicado a dicho λ -modelo AT y al elemento a computa un λ' -modelo AT para el complejo de cadenas $\mathcal{C} \setminus \{a\}$.*

Demostración: Denotamos por $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$ al λ -modelo AT que recibe el algoritmo como entrada y denotamos por $(C', H', f', g', \phi', \lambda')$ al conjunto en la salida de dicho algoritmo. Tenemos que probar que $(C', H', f', g', \phi', \lambda')$ es un λ' -modelo AT para $\mathcal{C} \setminus \{a\}$

(que denotamos por \mathcal{C}'). Por una parte, $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{a\}$, luego \mathcal{C}' es una base de \mathcal{C}' . Por otra parte, H' es un subconjunto de elementos de \mathcal{C}' y el complejo de cadenas \mathcal{H}' generado por H' tiene diferencial nula. Queda probar que $c_{\lambda'} = (f', g', \phi', \lambda')$ define una λ' -contracción de cadenas de \mathcal{C}' en \mathcal{H}' . Es decir, tenemos que probar que: $f'_{q-1}d_q = 0$, $d_q g'_q = 0$, $f'_q g'_q = \lambda' id_{\mathcal{H}'_q}$, $\lambda' id_{\mathcal{C}'_q} - g'_q f'_q = \phi'_{q-1}d_q + d_{q+1}\phi'_q$, para todo $q \geq 0$. Como hemos venido haciendo con el resto de algoritmos, sólo las demostraremos para aquellas dimensiones no triviales.

Caso 1: Si existe $\beta \in H_n$ tal que $\mu := c_a(g_n(\beta)) \neq 0$, entonces,

- $f'_n d_{n+1} = 0$: $f'_n d_{n+1}(c) = f_n d_{n+1}(c) - \lambda_{d_{n+1}(c)} \beta = 0$ ya que $\lambda_{d_{n+1}(c)} = c_\beta(f_n d_{n+1}(c)) = 0$.
- $d_n g'_n = 0$: $d_n g'_n(h) = \mu d_n g_n(h) - \lambda_h d_n g_n(\beta) = 0$.
- $f'_n g'_n = \lambda' id_{\mathcal{H}'_n}$: $f'_n g'_n(h) = \mu f_n g_n(h) - \mu \lambda_{g_n(h)} \beta - \lambda_h f_n g_n(\beta) + \lambda_h \lambda_{g_n(\beta)} \beta = \mu \lambda h - \lambda_h \lambda \beta + \lambda_h \lambda \beta = \mu \lambda h = \lambda' h$, ya que $\lambda_{g_n(h)} = c_\beta(f_n g_n(h)) = c_\beta(\lambda h) = 0$ y $\lambda_{g_n(\beta)} = c_\beta(f_n g_n(\beta)) = c_\beta(\lambda \beta) = \lambda$.
- $\lambda' id_{\mathcal{C}'_n} - g'_n f'_n = \phi'_{n-1}d_n + d_{n+1}\phi'_n$: $\lambda' c - g'_n f'_n(c) = \lambda \mu c - \mu g_n f_n(c) + \lambda_{f_n(c)} g_n(\beta) + \lambda_c \mu g_n(\beta) - \lambda_c \lambda \beta g_n(\beta) = \lambda \mu c - \mu g_n f_n(c) - \lambda'_{d_n(c)} g_n(\beta) = \mu \phi_{n-1} d_n(c) + \mu d_{n+1} \phi_n(c) - \lambda'_{d_n(c)} g_n(\beta) = d_{n+1} \phi'_n(c) + \phi'_{n-1} d_n(c)$, ya que $\lambda_{f_n(c)} = c_a(g_n f_n(c)) = -c_a(\phi_{n-1} d_n(c)) = -\lambda'_{d_n(c)}$, por ser $c \neq a$ y a maximal.
- $\lambda' id_{\mathcal{C}'_{n-1}} - g'_{n-1} f'_{n-1} = \phi'_{n-2} d_{n-1} + d_n \phi'_{n-1}$: $\phi'_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi'_{n-1}(c) = \mu \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + \mu d_n \phi_{n-1}(c) - \lambda'_c d_n g_n(\beta) = \mu \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + \mu d_n \phi_{n-1}(c) = \mu \lambda c - \mu g_{n-1} f_{n-1}(c) = \lambda' c - g'_{n-1} f'_{n-1}(c)$.

Caso 2: Si $a \notin g_n(h)$ para ningún $h \in H_n$, entonces

- $f'_{n-1} d_n = 0$: $f'_{n-1} d_n(c) = f_{n-1} d_n(c) + \lambda'_{d_n(c)} \gamma = f_{n-1} d_n(c) = 0$, ya que $\lambda'_{d_n(c)} = c_a(\phi_{n-1} d_n(c)) = 0$ por ser $c \neq a$, a maximal y $a \notin g_n f_n(c)$ por hipótesis.
- $d_{n-1} g'_{n-1} = 0$: $d_{n-1} g'_{n-1}(\gamma) = d_{n-1} d_n(a) = 0$.
- $f'_{n-1} g'_{n-1} = \lambda' id_{\mathcal{H}'_{n-1}}$: $f'_{n-1} g'_{n-1}(\gamma) = f'_{n-1} d_n(a) = f_{n-1} d_n(a) + \lambda'_{d_n(a)} \gamma = \lambda \gamma = \lambda' \gamma$, ya que $\lambda'_{d_n(a)} = c_a(\phi_{n-1} d_n(a)) = \lambda$.
- $\lambda' id_{\mathcal{C}'_{n-1}} - g'_{n-1} f'_{n-1} = \phi'_{n-2} d_{n-1} + d_n \phi'_{n-1}$: $\lambda' c - g'_{n-1} f'_{n-1}(c) = \lambda c - g_{n-1} f_{n-1}(c) + \lambda'_c g_{n-1}(\gamma) = \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi_{n-1}(c) + \lambda'_c d_n(a) = \phi_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi_{n-1}(c) - \lambda'_c d_n \phi_{n-1} d_n(a) = \phi'_{n-2} d_{n-1}(c) + d_n \phi'_{n-1}(c)$.

$$\bullet \lambda' id_{C'_n} - g'_n f'_n = \phi'_{n-1} d_n + d_{n+1} \phi'_n : \phi'_{n-1} d_n(c) + d_{n+1} \phi'_n(c) = \phi_{n-1} d_n(c) - \lambda'_{d_n(c)} \phi_{n-1} d_n(a) + d_{n+1} \phi_n(c) = \phi_{n-1} d_n(c) + d_{n+1} \phi_n(c) = \lambda' c - g'_n f'_n(c) =.$$

□

Por tanto, para este último modelo de representación también hemos presentado algoritmos que nos permiten reutilizar información computada para un complejo de cadenas tras añadir o eliminar un elemento a la base de dicho complejo.

λ -modelo AT: ventajas, inconvenientes y trabajos futuros

VENTAJAS:

Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y un λ -modelo AT de \mathcal{C} , $(C, H, f, g, \phi, \lambda)$, podemos obtener información de la homología en \mathbb{Z} de \mathcal{C} *sin calcular la forma normal de Smith*.

Concretamente, obtenemos:

- los números de Betti de \mathcal{C} y un conjunto de ciclos no bordes independientes de \mathcal{C} sobre \mathbb{Z} .
- los primos envueltos en los factores invariantes del subgrupo de torsión de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$
- la cantidad de factores invariantes que son potencia de un primo p
- un conjunto de ciclos representativos de generadores de homología $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$ para cada primo p que divide a λ .

Otra ventaja importante es que la complejidad de los algoritmos que computan λ -modelos AT es cúbica.

INCONVENIENTES:

No obtenemos toda la información del subgrupo de torsión de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$.

TRABAJOS FUTUROS:

- Obtener generadores del subgrupo de torsión de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ con coeficientes en \mathbb{Z} .
- Estudiar la computación de características cohomológicas sobre \mathbb{Z} a partir de un λ -modelo AT.

Capítulo 5

Computando modelos de representación a partir de un operador de homotopía

En este último capítulo de la primera parte de la tesis, vamos a mostrar que la teoría de modelos de representación vista en términos de contracciones de cadenas se puede ver desde un punto de vista más eficiente ya que bastaría computar y almacenar el operador de homotopía ϕ de la contracción de cadenas. Este capítulo estará dividido en tres secciones en las que veremos el operador de homotopía que genera cada uno de los modelos de representación estudiados: modelo AM, modelo AT y λ -modelo AT.

5.1 Operador de homotopía que genera un modelo AM

Parte de lo que explicaremos en esta sección se puede encontrar en [GJMR07b].

Definición 5.1 *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas. Un modelo AM para \mathcal{C} se puede establecer a partir de un par (C, ϕ) , donde:*

1. $C = \{C_q\}$ es una base de \mathcal{C} , siendo C_q una base de \mathcal{C}_q , para cada $q \geq 0$.
2. $\phi : \mathcal{C}_q \longrightarrow \mathcal{C}_{q+1}$ una aplicación tal que, para todo $q \geq 0$, $\phi_q \phi_{q-1} = 0$ y $\phi_q d_{q+1} \phi_q = \phi_q$.

3. El complejo de cadenas \mathcal{M} , generado por $M = \{M_q\}$ (donde $M_q = \text{Im } \pi_q$, siendo $\pi_q = \text{id}_{C_q} - \phi_{q-1}d_q - d_{q+1}\phi_q$, para todo q) y diferencial $d' = \{d'_q\}$ (siendo $d'_q(m) = d_q(m)$), satisface que todo entero no nulo de A_q es mayor estricto que 1, siendo A_q la forma normal de Smith (SNF) de la matriz de la diferencial d'_q .

Teorema 5.1 Dado un par (C, ϕ) para un complejo de cadenas \mathcal{C} verificando las condiciones de la definición 5.1, se puede definir una contracción de cadenas (f, g, ϕ) de \mathcal{C} en \mathcal{M} .

Demostración: Basta definir $f := \{f_q : C_q \rightarrow M_q\}$, tal que $f_q = \pi_q = \text{id}_{C_q} - \phi_{q-1}d_q - d_{q+1}\phi_q$ y $g := \{g_q : M_q \rightarrow C_q\}$, tal que g_q es la inclusión, para todo q . Veamos que (f, g, ϕ) es una contracción de cadenas (por comodidad, notaremos por d a la diferencial de \mathcal{M} también):

- Para $a \in C_q$, $f_{q-1}d_q(a) = (\text{id}_{C_{q-1}} - \phi_{q-2}d_{q-1} - d_q\phi_{q-1})d_q(a) = d_q(a) - \phi_{q-2}d_{q-1}d_q(a) - d_q\phi_{q-1}d_q(a) = d_q(a) - d_q\phi_{q-1}d_q(a) = d_qf_q(a)$;
- Si $m \in M_q$, sabemos que $d_q(m) \in M_{q-1}$, entonces $d_qg_q(m) = g_{q-1}d_q(m)$;
- Si $m \in M_q$, existe $a \in C_q$ tal que $m = a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)$. Entonces, $f_qg_q(m) = f_q(m) = (\text{id}_{C_q} - \phi_{q-1}d_q - d_{q+1}\phi_q)(a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)) = a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a) - \phi_{q-1}d_q(a) + \phi_{q-1}d_q\phi_{q-1}d_q(a) + \phi_{q-1}d_qd_{q+1}\phi_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a) + d_{q+1}\phi_q\phi_{q-1}d_q(a) + d_{q+1}\phi_qd_{q+1}\phi_q(a) = a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a) = m$;
- Para $a \in C_q$, $a - g_qf_q(a) = a - (a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)) = \phi_{q-1}d_q(a) + d_{q+1}\phi_q(a)$;

□

A continuación, damos un algoritmo para computar un par (C, ϕ) asociado a un complejo de cadenas \mathcal{C} .

Algoritmo 12 Computar un par (C, ϕ) para un complejo de cadenas \mathcal{C} .

ENTRADA: El complejo de cadenas \mathcal{C} de dimensión n y la matriz de la diferencial d de \mathcal{C} .

Para $q = 0$ hasta $q = n$ hacer

Reduce la matriz de d_q a su forma normal de Smith relativa a ciertas bases $\{a_1, \dots, a_r\}$ de C_q y $\{e_1, \dots, e_s\}$ de C_{q-1} tal que para t y l , $1 \leq t \leq l \leq \min(r, s)$, $d_q(a_i) = e_i$ para $1 \leq i \leq t$; $d_q(a_i) = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, para $t < i \leq l$ y $d_q(a_i) = 0$ para $l < i \leq r$.

Define $C_{q-1} := \{e_1, \dots, e_s\}$, $C_q = \{a_1, \dots, a_r\}$,

$\phi_{q-1}(e_i) := a_i$ para $1 \leq i \leq t$, $\phi_{q-1}(e_i) := 0$ para $t < i \leq s$

y $\phi_q(a_i) = 0$ para $1 \leq i \leq r$.

SALIDA: El par (C, ϕ) .

Teorema 5.2 *La salida del algoritmo 12 satisface las propiedades de la definición 5.1.*

Demostración: Denotamos por (C, ϕ) al par obtenido al aplicar el algoritmo 12. Por construcción, se tiene que C es una base de \mathcal{C} . Veamos que la aplicación ϕ verifica la propiedad 2. de la definición 5.1 (sólo lo veremos para los casos no triviales):

- $\phi_q \phi_{q-1}(e_i) = \phi_q(a_i) = 0$ para $1 \leq i \leq t$; $\phi_q \phi_{q-1}(e_i) = 0$ para $t < i \leq s$;
 $\phi_{q+1} \phi_q(a_i) = 0$ para $1 \leq i \leq r$.
- $\phi_{q-1} d_q \phi_{q-1}(e_i) = \phi_{q-1} d_q(a_i) = \phi_{q-1}(e_i)$ para $1 \leq i \leq t$; $\phi_{q-1} d_q \phi_{q-1}(e_i) = 0 = \phi_{q-1}(e_i)$ para $t < i \leq s$;
 $\phi_q d_{q+1} \phi_q(a_i) = 0 = \phi_q(a_i)$ para $1 \leq i \leq r$.

Y por último queda probar la condición 3. Sea $\pi_q = id_{\mathcal{C}_q} - \phi_{q-1} d_q - d_{q+1} \phi_q$, entonces, $\pi_q(a_i) = 0$ para $1 \leq i \leq t$; $\pi_q(a_i) = a_i$ para $t+1 \leq i \leq r$. Luego $M_q = Im \pi_q = \{a_{t+1}, \dots, a_r\}$. Como $d_q(a_i) = \lambda_i e_i$, $\lambda_i > 1$, para $t+1 \leq i \leq l$ y $d_q(a_i) = 0$ para $l+1 \leq i \leq r$, se tiene que la matriz de la diferencial de \mathcal{M} es la siguiente:

	a_{t+1}	\cdots	a_l	a_{l+1}	\cdots	a_r
e_{t+1}	λ_{t+1}					
\vdots		\ddots				\mathcal{O}
e_l			λ_l			
e_{l+1}						
\vdots		\mathcal{O}			\mathcal{O}	
e_s						

y por tanto, coincide con su forma normal de Smith satisfaciendo que todo entero no nulo es mayor estricto que 1.

□

Teorema 5.3 *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas de dimensión n y (C, ϕ) el par obtenido aplicando el algoritmo 12 a dicho complejo de cadenas. Entonces, se pueden obtener generadores de homología en \mathbb{Z} y ciclos representativos de dichos generadores de homología a partir de \mathcal{M} .*

Demostración: Por el teorema 5.7 podemos definir una contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{M} . Consecuentemente, las homologías de ambos complejos son isomorfas. Veamos que

una base de \mathcal{M} es $M = \{M_q\}$, siendo $M_q = \{c \in C_q \text{ tal que } \pi_q(c) = c\}$. Como el par (C, ϕ) ha sido obtenido aplicando el algoritmo 12, la matriz de la diferencial de \mathcal{C} en cada dimensión q coincide con su forma normal de Smith. Entonces, para cada $c \in C_q$:

- Si $d_q(c) = y$ para $x \in C_{q-1}$, se verifica que $\phi_{q-1}(y) = c$ y $\phi_q(c) = 0$, luego $\pi_q(c) = c - \phi_{q-1}d_q(c) - d_{q+1}\phi_q(c) = 0$;
- Si $d_q(c) = \lambda y$ para $y \in C_{q-1}$ y $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq 2$, se verifica que $\phi_{q-1}(y) = 0$ y $\phi_q(c) = 0$, luego $\pi_q(c) = c - \phi_{q-1}d_q(c) - d_{q+1}\phi_q(c) = c$;
- Si $d_q(c) = 0$ y existe $z \in C_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(z) = c$, se verifica que $\phi_q(c) = z$, luego $\pi_q(c) = c - \phi_{q-1}d_q(c) - d_{q+1}\phi_q(c) = 0$;
- Si $d_q(c) = 0$ y existe $z \in C_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(z) = \lambda c$ para $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq 2$, se verifica que $\phi_q(c) = 0$, luego $\pi_q(c) = c - \phi_{q-1}d_q(c) - d_{q+1}\phi_q(c) = c$;
- Si $d_q(c) = 0$ y no existe $\lambda \neq 0$ ni $z \in C_{q+1}$ tal que $d_{q+1}(z) = \lambda c$, se verifica que $\phi_q(c) = 0$, luego $\pi_q(c) = c - \phi_{q-1}d_q(c) - d_{q+1}\phi_q(c) = c$;

Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto $M_q = \{c \in C_q \text{ tal que } \pi_q(c) = c\}$ es una base de \mathcal{M} en dimensión q . Sea $M_q = \{c_1, \dots, c_{m_q}\}$ y $M_{q-1} = \{x_1, \dots, x_{m_{q-1}}\}$. Entonces, existe $1 \leq s \leq m_{q-1}$ tal que $d_{q-1}(y_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq s$ y $d_{q-1}(y_i) = 0$ para $s < i \leq m_{q-1}$. Además, existe $1 \leq l \leq \min(m_q, s)$ tal que

- $d_q(x_i) = \lambda_i y_i$, donde $\lambda \in \mathbb{Z}$ y $\lambda \geq 2$, para $1 \leq i \leq l$;
- $d_q(x_i) = 0$ para $l < i \leq m_q$.

Consecuentemente, la homología de \mathcal{C} en dimensión q es $H_q(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) = F_q \oplus T_q$, donde

$$F_{q-1} = \mathbb{Z} \oplus \overset{s-l}{\cdots} \oplus \mathbb{Z} \quad y \quad T_{q-1} = \mathbb{Z}/\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\lambda_l$$

siendo $\{y_{l+1}, \dots, y_s\}$ y $\{y_1, \dots, y_s\}$ ciclos representativos de generadores de homología en dimensión 1 (por ser la aplicación g de la contracción de cadenas la inclusión).

□

Consecuentemente, dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y aplicando el algoritmo 12 a \mathcal{C} , obtenemos un par (C, ϕ) a partir del cual podemos generar un modelo AM. La ventaja, como mencionamos al principio, es que sólo calculamos y almacenamos una aplicación: ϕ .

5.2 Operador de homotopía que genera un modelo AT

En esta sección nos planteamos la misma cuestión que en la sección anterior pero para modelos AT.

Definición 5.2 Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas. Un modelo AT de \mathcal{C} se puede establecer a partir de un par (C, ϕ) , donde

1. $C = \{C_q\}$ es una base de \mathcal{C} , siendo C_q una base de \mathcal{C}_q , para cada $q \geq 0$.
2. $\phi : \mathcal{C}_q \longrightarrow \mathcal{C}_{q+1}$ una aplicación tal que, para todo q ,
 - (a) $\phi_{q+1}\phi_q = 0$
 - (b) $\phi_q d_{q+1}\phi_q = \phi_q$
 - (c) $d_q\phi_{q-1}d_q = d_q$

Teorema 5.4 Dado un par (C, ϕ) para un complejo de cadenas \mathcal{C} verificando las condiciones de la definición 5.2, se puede definir una contracción de cadenas (f, g, ϕ) de \mathcal{C} en un complejo de cadenas con diferencial nula.

Demostración: Sea \mathcal{M} el complejo de cadenas generado por $Im \pi$, siendo $\pi = \{\pi_q\}$ tal que para cada q , $\pi_q = id_{\mathcal{C}_q} - \phi_{q-1}d_q - d_{q+1}\phi_q$ y con diferencial $d' = \{d'_q\}$ tal que para cada q , $d'_q(m) = d_q(m)$ (siendo d la diferencial de \mathcal{C}). Veamos en primer lugar que dicha diferencial es nula. Sea $m \in \mathcal{M}_q$, entonces existe $a \in \mathcal{C}_q$ tal que $m = a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)$. Luego, $d'_q(m) = d_q(m) = d_q(a) - d_q\phi_{q-1}d_q(a) - d_q d_{q+1}\phi_q(a) = d_q(a) - d_q\phi_{q-1}d_q(a) = 0$, por la propiedad (c) de la definición 5.2.

En segundo lugar, vamos a demostrar que $c = (\pi, g, \phi)$ define una contracción de cadenas del complejo de cadenas \mathcal{C} en el complejo \mathcal{M} , siendo $g = \{g_q\}$ tal que para cada q , g_q es la inclusión de \mathcal{M}_q en \mathcal{C}_q :

- Para $a \in \mathcal{C}_q$, $\pi_{q-1}d_q(a) = (id_{\mathcal{C}_{q-1}} - \phi_{q-2}d_{q-1} - d_q\phi_{q-1})d_q(a) = d_q(a) - \phi_{q-2}d_{q-1}d_q(a) - d_q\phi_{q-1}d_q(a) = 0$ por la propiedad (c) de la definición 5.2;
- Si $m \in \mathcal{M}_q$, sabemos que $d_q(m) \in \mathcal{M}_{q-1}$, luego $d_q g_q(m) = 0$;
- Si $m \in \mathcal{M}_q$, existe $a \in \mathcal{C}_q$ tal que $m = a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)$. Entonces, $\pi_q g_q(m) = \pi_q(m) = m - \phi_{q-1}d_q(m) - d_{q+1}\phi_q(m) = a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a) - \phi_{q-1}d_q(a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)) - d_{q+1}\phi_q(a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)) = m - \phi_{q-1}d_q(a) + \phi_{q-1}d_q\phi_{q-1}d_q(a) + \phi_{q-2}d_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a) + d_{q+1}\phi_q\phi_{q-1}d_q(a) + d_{q+1}\phi_q d_{q+1}\phi_q(a) = m$, por las propiedades de la aplicación ϕ ;
- Para $a \in \mathcal{C}_q$, $a - g_q\pi_q(a) = a - (a - \phi_{q-1}d_q(a) - d_{q+1}\phi_q(a)) = \phi_{q-1}d_q(a) + d_{q+1}\phi_q(a)$.

□

Damos un algoritmo para computar el par (C, ϕ) :

Algoritmo 13 *Computar un par (C, ϕ) para un complejo de cadenas \mathcal{C} .*

ENTRADA: Un filtro $C = \{a_1, \dots, a_m\}$ de un complejo de cadenas \mathcal{C} .
y la matriz de la diferencial d para la base C .

Para $i = 1$ hasta $i = m$ hacer

Sea n la dimension de a_i .

Si $d_n(a_i) = d_n\phi_{n-1}d_n(a_i)$, entonces $\phi_n(a_i) := 0$.

Si $d_n(a_i) \neq d_n\phi_{n-1}d_n(a_i)$, entonces

$$\lambda := \min\{c_{a_j}(d_n(a_i) - d_n\phi_{n-1}d_n(a_i)), j = 0, \dots, i-1\}$$

$$k := \max\{j \text{ tal que } c_{a_j}(d_n(a_i) - d_n\phi_{n-1}d_n(a_i)) = \lambda, j = 0, \dots, i-1\}$$

$$\phi_n(a_i) := 0$$

Para $c \in C_{n-1}$ hacer

$$\lambda_c := c_{a_k}(c - \phi_{n-2}d_{n-1}(c) - d_n\phi_{n-1}(c)),$$

$$\phi_{n-1}(c) := \phi_{n-1}(c) + \lambda^{-1}\lambda_c(a_i - \phi_{n-1}d_n(a_i)).$$

SALIDA: El conjunto (C, ϕ) .

Teorema 5.5 *La salida del algoritmo 13 satisface las propiedades de la definición 5.2.*

Demostración: Supongamos que en los $i-1$ primeros pasos obtenemos un par (C, ϕ) que verifica las propiedades de la definición 5.2. Tenemos que probar que en el paso i -ésimo, al añadir el elemento a_i , el par que obtenemos sigue verificando dichas propiedades. Denotamos a dicho par por (C', ϕ') .

Caso 1: Si $d_n(a_i) = d_n\phi_{n-1}d_n(a_i)$, es trivial ya que $\phi'_n(a_i) = 0$.

Caso 2: Si $d_n(a_i) \neq d_n\phi_{n-1}d_n(a_i)$, probamos las propiedades sólo para dimensión $n-1$ ya que para el resto no cambia la aplicación. Sea $c \in C'_{n-1}$ y $x \in C'_n$,

- $\phi'_n\phi'_{n-1}(c) = \phi_n\phi_{n-1}(c) + \lambda^{-1}\lambda_c(\phi_n(a_i) - \phi_n\phi_{n-1}(a_i)) = 0$;
- $\phi'_{n-1}d_n\phi'_{n-1}(c) = \phi'_{n-1}d_n\phi_{n-1}(c) + \lambda^{-1}\lambda_c\phi'_{n-1}d_n(a_i) - \lambda^{-1}\lambda_c\phi'_{n-1}d_n\phi_{n-1}d_n(a_i) = \phi_{n-1}d_n\phi_{n-1}(c) + \lambda^{-1}\lambda_c\phi_{n-1}d_n(a_i) + \lambda^{-1}\lambda_c\lambda^{-1}\lambda(a_i - \phi_{n-1}d_n(a_i)) - \lambda^{-1}\lambda_c\phi_{n-1}d_n\phi_{n-1}d_n(a_i) = \phi_{n-1}(c) + \lambda^{-1}\lambda_c\phi_{n-1}d_n(a_i) + \lambda^{-1}\lambda_c a_i = \phi'_{n-1}(c)$;
- $d_n\phi'_{n-1}d_n(a_i) = d_n\phi_{n-1}d_n(a_i) + d_n(a_i) - d_n\phi_{n-1}d_n(a_i) = d_n(a_i)$,
 $d_n\phi_{n-1}d_n(x) = d_n\phi'_{n-1}d_n(x) + \lambda^{-1}\lambda_{d_n(x)}(d_n(a_i) - d_n\phi_{n-1}d_n(a_i)) = d_n\phi_{n-1}d_n(x) = d_n(x)$.

□

Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas y (C, ϕ) un par verificando las propiedades de la definición 5.2. A continuación, vamos a estudiar la información homológica que podemos obtener a partir del par (C, ϕ) .

Teorema 5.6 *Dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y un par (C, ϕ) obtenido aplicando el algoritmo 13 al filtro C de \mathcal{C} , se pueden obtener generadores de homología de \mathcal{C} sobre \mathbb{Z}_p así como ciclos representativos de generadores de homología.*

Demostración: Por el teorema 5.4, se puede definir una contracción de cadenas de \mathcal{C} en \mathcal{M} . Por las propiedades de contracciones de cadenas, las homologías de ambos complejos son isomorfas. Ahora bien, como el complejo de cadenas \mathcal{M} tiene diferencial nula, su homología coincide con el propio complejo. Si tenemos una base de \mathcal{M} , obtenemos una base de generadores de homología de \mathcal{C} y consecuentemente, una base de ciclos representativos de generadores de homología. Como el par (C, ϕ) es obtenido aplicando el algoritmo 13, es posible ir construyendo una base M de \mathcal{M} a medida que se va aplicando dicho algoritmo. La idea es la siguiente (omitimos los subíndices por comodidad): en el paso i -ésimo, al añadir el elemento a_i del filtro C de \mathcal{C} , se distinguen dos casos. Entonces:

- Si $\pi d(a_i) = d(a_i) - d\phi d(a_i) = 0$, añadimos a la base el elemento $\pi(a_i) = a_i - \phi d(a_i)$ (ya que $\phi(a_i)=0$);
- Si $\pi d(a_i) = d(a_i) - d\phi d(a_i) \neq 0$, siendo $\lambda = c_{a_k}(\pi d(a_i)) \neq 0$, entonces eliminamos el elemento $\pi(a_k)$ de la base.

Veamos que efectivamente obtenemos una base M de \mathcal{M} . En primer lugar, observar algunas propiedades:

- $\pi\pi = (id_{\mathcal{C}} - \phi d - d\phi)(id_{\mathcal{C}} - \phi d - d\phi) = id_{\mathcal{C}} - \phi d - d\phi - \phi d + \phi d\phi d + \phi d d\phi - d\phi + d\phi\phi d + d\phi d\phi = \pi$, por las propiedades de la definición 5.2;
- $\pi d\phi d = (id_{\mathcal{C}} - \phi d - d\phi)d\phi d = d\phi d - \phi d d\phi d - d\phi d\phi d = 0$, por las propiedades de la definición 5.2;

Supongamos que antes de llegar al paso i -ésimo tenemos construida una base M de \mathcal{M} . Sea a_i el elemento que añadimos en dicho paso. Entonces,

Caso 1: Si $\pi d(a_i) = 0$, tenemos que probar que $M' := M \cup \{\pi(a_i)\}$ es de nuevo una base. M' es sistema generador ya que para todo $m \in \mathcal{M}$, existe $b \in \mathcal{C}$ tal que $\pi(b) = m$. Si $a_i \notin b$, $\pi(m) = \sum_{m_j \in M} \lambda_j m_j$ y si $c_{a_i}(b) = \lambda \neq 0$,

$\pi(m) = \sum_{m_j \in M} \lambda_j m_j + \lambda \pi(a_i)$. Tenemos que probar que M' es linealmente independiente. Por reducción al absurdo, suponemos que $\pi(a_i) = \sum_{m_j \in M} \lambda_j m_j$. Entonces, $a_i \phi d(a_i) = \sum_{m_j \in M} \lambda_j (b_j - \phi d(b_j))$ (siendo b_j tal que $m_j = \pi(b_j)$), de donde se deduce que $a_i = \sum_j \lambda_j b_j + \phi(d(a_i) - \sum_j \lambda_j d(b_j))$, lo cual es una contradicción ya que a_i es un elemento nuevo que acabamos de añadir y no se puede expresar como combinación de los anteriores.

Caso 2: Supongamos ahora que $\pi d(a_i) \neq 0$. Sea

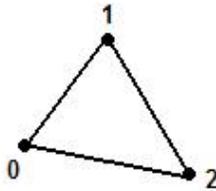
$$M = \{\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_r), \pi(a_k)\}$$

Veamos que $M' := M \setminus \{\pi(a_k)\}$, sigue siendo una base de \mathcal{M} . Es obvio que son linealmente independientes ya que simplemente hemos quitado un elemento de la base. Tenemos que probar que es sistema generador. Para ello, probamos que $\pi(a_k) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \pi(\alpha_j)$. Por una parte, como $\pi d(a_i) \in M$, $\pi d(a_i) = \lambda_k \pi(a_k) + \sum_{j=1}^r \lambda_i \pi(\alpha_j)$, para un cierto λ_k . Ahora bien, por hipótesis, $\lambda = c_{a_k}(\pi d(a_i)) = c_{\pi(a_k)(\pi d(a_i))}$ (por verificarse $\pi \pi = \pi$). Entonces, $\lambda_k = \lambda$. Por otra parte, $\lambda_{a_k} = c_{a_k}(\pi(a_k) = a_k - \phi d(a_k)) = 1 \neq 0$, la definición de $\phi(a_k)$ en el paso i -ésimo cambia y consecuentemente la de $\pi(a_k)$, siendo ahora $\pi(a_k) = \pi(a_k) - \lambda^{-1}(d(a_i) - d\phi d(a_i))$. De nuevo, como $\pi \pi = \pi$ se tiene que $\pi(a_k) = \pi(a_k) - \lambda^{-1} \pi d(a_i)$. Luego, $\pi(a_k) = \pi(a_k) - \lambda^{-1} \lambda \pi(a_k) - \sum_{j=1}^r \lambda^{-1} \lambda_i \pi(\alpha_j) = - \sum_{j=1}^r \lambda^{-1} \lambda_i \pi(\alpha_j)$.

Entonces, conocida una base M de \mathcal{M} , conocemos los generadores de $H(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_p)$ y consecuentemente una base de ciclos representativos de dichos generadores de homología. \square

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 5.1 Consideramos el complejo simplicial K formado por tres vértices y tres aristas constituyendo un triángulo hueco.



Sea $\mathcal{C}(K)$ el complejo de cadenas asociado y $C(K) = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ un filtro de $\mathcal{C}(K)$. Aplicamos el algoritmo 13 trabajando con coeficientes en \mathbb{Z}_2 :

- $i = 1$; $\pi_0(\langle 0 \rangle) = 0$, luego $\phi_0(\langle 0 \rangle) = 0$ y $M = \{\langle 0 \rangle\}$.
- $i = 2$; $\pi_0(\langle 1 \rangle) = 0$, luego $\phi_0(\langle 1 \rangle) = 0$ y $M = \{\pi(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle, \pi(\langle 1 \rangle) = \langle 1 \rangle\}$.
- $i = 3$; $\pi_0(\langle 2 \rangle) = 0$, luego $\phi_0(\langle 2 \rangle) = 0$ y $M = \{\pi(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle, \pi(\langle 1 \rangle) = \langle 1 \rangle, \pi(\langle 2 \rangle) = \langle 2 \rangle\}$.
- $i = 4$; $\pi_1(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 1 \rangle + \langle 0 \rangle$, luego $\phi_1(\langle 0, 1 \rangle) = 0$, $\phi_0(\langle 1 \rangle) = \langle 0, 1 \rangle$, $\pi(\langle 1 \rangle) = \langle 0 \rangle$ y $M = \{\pi(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle, \pi(\langle 2 \rangle) = \langle 2 \rangle\}$.
- $i = 5$; $\pi_1(\langle 0, 2 \rangle) = \langle 2 \rangle + \langle 0 \rangle$, luego $\phi_1(\langle 0, 2 \rangle) = 0$, $\phi_0(\langle 2 \rangle) = \langle 0, 2 \rangle$, $\pi(\langle 2 \rangle) = \langle 0 \rangle$ y $M = \{\pi(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle\}$.
- $i = 6$; $\pi_1(\langle 1, 2 \rangle) = \langle 0 \rangle + \langle 0 \rangle = 0$, luego $\phi_1(\langle 1, 2 \rangle) = 0$ y $M = \{\pi(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle, \pi(\langle 1, 2 \rangle) = \langle 0, 1 \rangle + \langle 0, 2 \rangle + \langle 1, 2 \rangle\}$.

Entonces, una base M de \mathcal{M} es $M = \{\langle 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle\}$ y por tanto,

$$H_0(\mathcal{C}(K); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad H_1(\mathcal{C}(K); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$$

siendo $\langle 0 \rangle$ y $\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$ ciclos representativos de los generadores de homología en dimensiones 0 y 1, respectivamente.

Resumiendo, dado un complejo de cadenas \mathcal{C} y aplicando el algoritmo 13 a un filtro \mathcal{C} de \mathcal{C} , obtenemos un par (\mathcal{C}, ϕ) a partir del cual podemos generar un modelo AT. La ventaja, como mencionamos al principio, es que sólo calculamos y almacenamos una aplicación: ϕ .

5.3 Operador de homotopía que genera un λ -modelo AT

Finalmente, nos planteamos la misma cuestión para este último modelo de representación.

Definición 5.3 Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas y $\lambda \in \mathbb{Z}$. Un λ -modelo AT de \mathcal{C} se puede establecer a partir de un conjunto $(\mathcal{C}, \phi, \lambda)$, donde

1. $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_q\}$ es una base de \mathcal{C} , siendo \mathcal{C}_q una base de \mathcal{C}_q , para cada $q \geq 0$.
2. $\phi : \mathcal{C}_q \longrightarrow \mathcal{C}_{q+1}$ una aplicación tal que, para todo q ,
 - (a) $\phi_{q+1}\phi_q = 0$
 - (b) $\phi_q d_{q+1}\phi_q = \lambda\phi_q$

$$(c) \quad d_q \phi_{q-1} d_q = \lambda d_q$$

Teorema 5.7 *Dado un conjunto (C, ϕ, λ) para un complejo de cadenas \mathcal{C} verificando las condiciones de la definición 5.3, se puede definir una λ -contracción de cadenas $c_\lambda = (f, g, \phi, \lambda)$ de \mathcal{C} en un complejo de cadenas con diferencial nula.*

Demostración: Sea \mathcal{M} el complejo de cadenas generado por $Im \pi$, siendo $\pi = \{\pi_q\}$ tal que para cada q , $\pi_q = \lambda id_{\mathcal{C}_q} - \phi_{q-1} d_q - d_{q+1} \phi_q$ y con diferencial $d' = \{d'_q\}$ tal que para cada q , $d'_q(m) = d_q(m)$ (siendo d la diferencial de \mathcal{C}). Veamos en primer lugar que dicha diferencial es nula. Sea $m \in \mathcal{M}_q$, entonces existe $a \in \mathcal{C}_q$ tal que $m = \lambda a - \phi_{q-1} d_q(a) - d_{q+1} \phi_q(a)$. Luego, $d'_q(m) = d_q(m) = \lambda d_q(a) - d_q \phi_{q-1} d_q(a) - d_q d_{q+1} \phi_q(a) = \lambda d_q(a) - d_q \phi_{q-1} d_q(a) = 0$, por la propiedad (c) de la definición 5.3.

En segundo lugar, vamos a demostrar que $c_\lambda = (\pi, g, \phi, \lambda)$ define una contracción de cadenas del complejo de cadenas \mathcal{C} en el complejo \mathcal{M} , siendo $g = \{g_q\}$ tal que para cada q , g_q es la inclusión de \mathcal{M}_q en \mathcal{C}_q :

- Para $a \in \mathcal{C}_q$, $\pi_{q-1} d_q(a) = (\lambda id_{\mathcal{C}_{q-1}} - \phi_{q-2} d_{q-1} - d_q \phi_{q-1}) d_q(a) = \lambda d_q(a) - \phi_{q-2} d_{q-1} d_q(a) - d_q \phi_{q-1} d_q(a) = 0$ por la propiedad (c) de la definición 5.3;
- Si $m \in \mathcal{M}_q$, sabemos que $d_q(m) \in \mathcal{M}_{q-1}$, luego $d_q g_q(m) = 0$;
- Si $m \in \mathcal{M}_q$, existe $a \in \mathcal{C}_q$ tal que $m = \lambda a - \phi_{q-1} d_q(a) - d_{q+1} \phi_q(a)$. Entonces, $\pi_q g_q(m) = \pi_q(m) = (\lambda id_{\mathcal{C}_q} - \phi_{q-1} d_q - d_{q+1} \phi_q)(\lambda a - \phi_{q-1} d_q(a) - d_{q+1} \phi_q(a)) = \lambda^2 a - \lambda \phi_{q-1} d_q(a) - \lambda d_{q+1} \phi_q(a) - \lambda \phi_{q-1} d_q(a) + \phi_{q-1} d_q \phi_{q-1} d_q(a) + \phi_{q-1} d_q d_{q+1} \phi_q(a) - \lambda d_{q+1} \phi_q(a) + d_{q+1} \phi_q \phi_{q-1} d_q(a) + d_{q+1} \phi_q d_{q+1} \phi_q(a) = \lambda(\lambda a - \phi_{q-1} d_q(a) - d_{q+1} \phi_q(a)) = \lambda m$, por las propiedades de la aplicación ϕ ;
- Para $a \in \mathcal{C}_q$, $\lambda a - g_q \pi_q(a) = \lambda a - (\lambda a - \phi_{q-1} d_q(a) - d_{q+1} \phi_q(a)) = \phi_{q-1} d_q(a) + d_{q+1} \phi_q(a)$.

□

El algoritmo para computar un conjunto (C, ϕ, λ) que genere un λ -modelo AT es similar al algoritmo 13.

Parte II

Modelos de representación de Imágenes Digitales Binarias *3D*

Introducción:

En esta segunda parte vamos a aplicar las herramientas teóricas desarrolladas en la primera a las imágenes digitales binarias $3D$. Para ello, trabajamos con una simplicialización adecuada de la imagen, usando la 14-adyacencia para los vóxeles negros de la misma. Como ya hemos mencionado anteriormente, asociamos a la imagen digital un complejo simplicial tridimensional con la misma información topológica que la propia imagen. Nuestro objetivo aquí es aplicar los modelos de representación ya conocidos al complejo de cadenas canónicamente asociado a dicho complejo simplicial. Todo esto será detallado en el capítulo 6. En el resto de capítulos estudiaremos cómo se comportan los modelos de representación así como la forma de obtener un nuevo invariante topológico a partir de ellos. Por una parte, en el capítulo 7 veremos nos van a permitir realizar un control topológico de la imagen ante cambios locales de la superficie. En el capítulo 8, demostraremos que se comportan bien ante la realización de operaciones conjuntistas. Por último, en el capítulo 9 es donde pondremos de manifiesto que constituyen una potente herramienta para el cálculo de nuevos invariantes topológicos más finos que los ya computados, concretamente, obtendremos un invariante de carácter cohomológico, que denotaremos por $HB1(I)$.

Capítulo 6

Modelos de representación de imágenes digitales binarias $3D$

En los últimos años el Procesamiento Digital de Imágenes ha sido ampliamente utilizado por diversas disciplinas tales como: Medicina, Biología, Física e Ingeniería. Mediante el Procesamiento Digital de Imágenes es posible manipular imágenes digitales en un computador con el fin de obtener información objetiva de la escena captada por una cámara. Como aplicaciones típicas se puede mencionar: detección de presencia de objetos, inspección visual automática, medición de características geométricas y de color de objetos y restauración y mejoramiento de la calidad de las imágenes. Nosotros trabajamos aquí con imágenes digitales binarias $3D$, concepto que definiremos más adelante de manera formal y nos centramos, a grandes rasgos, en el estudio de propiedades topológicas de dichas imágenes. Hablar de propiedades topológicas en el marco de las imágenes digitales, nos lleva a adentrarnos en el campo de la Topología Digital. Esta teoría surge por la necesidad de desarrollar una teoría topológica bien fundada sobre el espacio discreto, concretamente, sobre la clase de las imágenes digitales. La idea fundamental que sustenta este trabajo es la de mostrar un correcto modelo matemático para una imagen digital binaria tridimensional que permita darnos información acerca de la topología de la misma y que, por tanto, nos permita una clasificación más precisa y exhaustiva. Para llevar a cabo esta idea, nuestro objetivo es algoritmizar procesos de la Topología Algebraica y no cerrarnos en el análisis puramente combinatorio que nos proporciona la Topología Digital. Por ejemplo, cuando hablamos de información topológica, no sólo nos referimos a la obtención de la característica de Euler o los números de componentes conexas, túneles y cavidades de la imagen, sino a una completa descripción de dichas componentes conexas, túneles y cavidades, que facilite el tratamiento de problemas que requieran analizar

parámetros topológicos. Además, se pretende que a partir de este modelo matemático podamos enriquecer la listas de invariantes topológicos computados hasta el momento, obteniendo nuevos invariantes más finos que los grupos de homología.

Los objetos son clásicamente modelados con subdivisiones celulares. Los complejos simpliciales constituyen una herramienta muy útil para el modelado geométrico de tales objetos. Esta estructura algebraica será la que utilicemos para estudiar las imágenes digitales binarias 3D. Sin embargo, existen otras representaciones combinatoriales, como complejos cúbicos o complejos simploidales. Los complejos cúbicos provienen de un mallado cúbico, el cual subdivide el espacio en cubos con vértices en los puntos de coordenadas enteras. Por otra parte, los conjuntos simploidales [DM82] incluyen complejos simploidales y complejos cúbicos como casos particulares. Tanto para complejos simpliciales y cúbicos como para conjuntos simploidales, se define la homología de tales estructuras como la homología de los complejos de cadenas canónicamente asociados a ellos [Mass91, PFL06]. Por ello, aunque trabajemos con complejos simpliciales, no hay ningún problema en adaptar nuestra teoría a otro tipo de representación de la imagen como complejos cúbicos o complejos simploidales. Sin embargo, para la computación del invariante $HB1$ necesitaríamos conocer cómo se define el producto en cohomología para dichos casos. Esta cuestión forma parte de los trabajos que pretendemos abordar en un futuro.

En la sección 6.1 definiremos el concepto de imagen digital binaria 3D. Explicaremos cómo construir el complejo simplicial asociado a la imagen demostrando que un isomorfismo de imágenes digitales es equivalente a un homeomorfismo simplicial entre los complejos simpliciales asociados. Estos resultados fueron publicados en [GR03b, GDR05]. En la sección 6.2, explicaremos en qué consiste nuestro modelo álgebra-topológico de representación de la imagen y mostramos, de forma breve, el software informático desarrollado (ver [Vox]).

6.1 Imágenes Digitales Binarias 3D

Un *espacio digital binario 3D* (más brevemente, un DPS) es una 3-upla $(\mathcal{V}, \beta, \omega)$, donde \mathcal{V} es un conjunto de puntos en un mallado tridimensional, β y ω son conjuntos de segmentos que unen puntos de \mathcal{V} . Una *imagen digital binaria 3D* se define como una 4-upla, $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, \beta, \omega)$, donde $(\mathcal{V}, \beta, \omega)$ es un DPS e I es un subconjunto finito de puntos de \mathcal{V} , que llamamos puntos negros de la imagen digital (el resto de puntos de \mathcal{V} se llaman puntos blancos). El conjunto β (respectivamente, el conjunto ω) determina las relaciones de vecindad, también llamadas relaciones de adyacencia, entre los puntos negros de la

imagen digital (respectivamente, puntos blancos). Un *isomorfismo* de un DPS $(\mathcal{V}_1, \beta_1, \omega_1)$ en otro DPS $(\mathcal{V}_2, \beta_2, \omega_2)$, es un homeomorfismo h del espacio euclídeo tridimensional en sí mismo tal que aplica \mathcal{V}_1 sobre \mathcal{V}_2 , cada β_1 -adyacencia sobre una β_2 -adyacencia y cada ω_1 -adyacencia sobre una ω_2 -adyacencia. Además, h^{-1} aplica cada β_2 -adyacencia sobre una β_1 -adyacencia y cada ω_2 -adyacencia sobre una ω_1 -adyacencia. Un *isomorfismo entre dos imágenes digitales* $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{V}_1, I_1, \beta_1, \omega_1)$ e $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{V}_2, I_2, \beta_2, \omega_2)$, es un isomorfismo del DPS $(\mathcal{V}_1, \beta_1, \omega_1)$ en $(\mathcal{V}_2, \beta_2, \omega_2)$, tal que aplica I_1 sobre I_2 .

Nosotros trabajamos aquí con el *mallado BCC*, donde

$$\mathcal{V} = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \text{ tal que } a \equiv b \equiv c \pmod{2}\}.$$

La única relación de adyacencia posible es la 14-adyacencia. Dado un punto $p = (a, b, c) \in \mathcal{V}$, los 14-vecinos de p son: $(a \pm 2, b, c)$, $(a, b \pm 2, c)$, $(a, b, c \pm 2)$ y $(a \pm 1, b \pm 1, c \pm 1)$. Una de los motivos por los que trabajamos con dicho mallado es que es muy usado en aplicaciones de imágenes médicas debido a sus características topológicas excepcionales y a su alto contenido en simetrías.

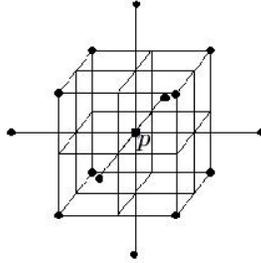


Figura 6.1: 14-adyacencia en el mallado BCC.

El DPS $(\mathcal{V}, 14, 14)$, donde \mathcal{V} son los puntos del mallado BCC, es isomorfo a un DPS $(\mathcal{V}', 14, 14)$, donde \mathcal{V}' son los puntos de un mallado cúbico, es decir, puntos de la forma $\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$. Dado un punto $p = (x, y, z)$ del mallado cúbico, los 14-vecinos de p son $(x \pm 1, y, z)$, $(x, y \pm 1, z)$, $(x, y, z \pm 1)$, $(x + 1, y - 1, z)$, $(x - 1, y + 1, z)$, $(x + 1, y, z - 1)$, $(x - 1, y, z + 1)$, $(x, y + 1, z - 1)$, $(x, y - 1, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z - 1)$, $(x - 1, y - 1, z + 1)$ (ver figura 6.2).

Para probar que ambos DPS son isomorfos, se define el homeomorfismo h del espacio euclídeo tridimensional en sí mismo tal que, para cada punto $p = (x, y, z) \in \mathcal{V}'$, $h(p) = (x + y + 2z, -x + y, -x - y)$. Dicho homeomorfismo está bien definido ya que $x + y + 2z \equiv -x + y \equiv -x - y \pmod{2}$. Además, es fácil demostrar que h aplica puntos

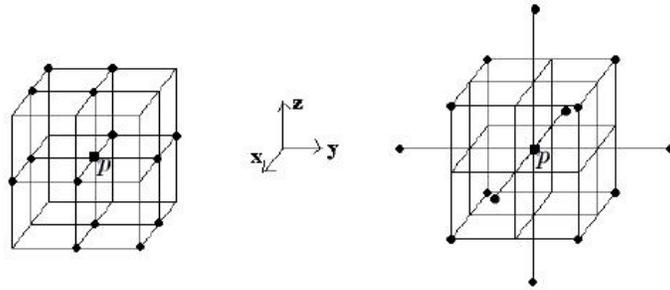


Figura 6.2: 14-adyacencia en el mallado cúbico (a la izquierda) y en el mallado BCC (a la derecha).

14-adyacentes del mallado cúbico sobre puntos 14-adyacentes del mallado BCC. El inverso de h se define como $h^{-1}(a, b, c) = \frac{1}{2}(-b - c, b - c, a + c)$. Como (a, b, c) es un punto del mallado BCC, $x \equiv y \equiv z \pmod{2}$ y por tanto $\frac{1}{2}(-b - c, b - c, a + c) \in \mathbb{Z}^3$. También es fácil demostrar que h^{-1} aplica puntos 14-adyacentes del mallado BCC sobre puntos 14-adyacentes del mallado cúbico.

Otro de los motivos de trabajar con estos mallados y la 14-adyacencia se debe a que, dada una imagen digital binaria 3D, $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, \beta, \omega)$, es posible construir un complejo simplicial finito tridimensional topológicamente equivalente a \mathcal{I} , denotado por $K(I)$ y llamado *representación simplicial* de I .

A continuación, detallamos cómo construir dicho complejo simplicial.

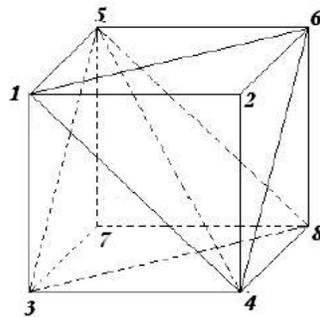


Figura 6.3: Descomposición de un cubo en 6 tetraedros.

En primer lugar, consideramos un cubo del mallado 3D. Descomponemos el cubo en 6 tetraedros como muestra la figura 6.3. Podemos construir una lista con dichos tetraedros, usando la notación de los vértices:

$$\{\langle 1, 2, 4, 6 \rangle, \langle 4, 5, 6, 8 \rangle, \langle 3, 5, 7, 8 \rangle, \langle 1, 3, 4, 5 \rangle, \langle 3, 4, 5, 8 \rangle, \langle 1, 4, 5, 6 \rangle\}$$

De esta forma, podemos ver el cubo como un complejo simplicial, tal que dos cubos adyacentes comparten vértices, aristas y triángulos. Así, el mallado cúbico inicial es visto como un complejo simplicial 3D infinito. Entonces, la representación simplicial $K(I)$ es un subcomplejo finito de dicho complejo simplicial infinito, construido de la siguiente forma: por cada punto del subconjunto I , tenemos un vértice de complejo simplicial $K(I)$ y los i -símplices de $K(I)$ se construyen a partir de los distintos conjuntos ordenados de i -puntos de I 14-adyacentes dos a dos; es decir, dos puntos de I adyacentes forman una arista, tres puntos un triángulo y cuatro puntos, un tetraedro.

Ejemplo 6.1 Consideramos la imagen digital $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, 14, 14)$, donde

$$I = \{v_0 = (-1, -1, 1), v_1 = (-1, 1, 1), v_2 = (0, 0, 0), v_3 = (0, 0, 2), v_4 = (0, 2, 0)\}.$$

Entonces, $K(I)$ es el complejo simplicial cuyo conjunto de símplices maximales es

$$\{\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle, \langle v_1, v_2, v_4 \rangle\}.$$

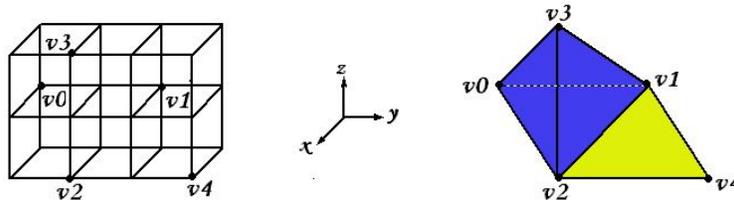


Figura 6.4: Imagen digital \mathcal{I} y su representación simplicial $K(I)$: en azul, el tetraedro y en amarillo el triángulo.

Esta representación simplicial de la imagen es la que nos va a permitir estudiar topológicamente la misma y avanzar en el cálculo de nuevos invariantes, gracias al resultado que damos a continuación:

Teorema 6.1 Dos imágenes digitales \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 son isomorfas si y sólo si sus representaciones simpliciales asociadas $K(I_1)$ y $K(I_2)$ son simplicialmente homeomorfas.

Demostración: En efecto, si \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 son imágenes isomorfas, entonces, existe un homeomorfismo h de \mathbb{Z}^3 en \mathbb{Z}^3 que aplica I_1 en I_2 y puntos negros adyacentes de \mathcal{I}_1 en puntos negros adyacentes de \mathcal{I}_2 . Entonces, tendríamos que probar que existe un homeomorfismo simplicial de $K(I_1)$ en $K(I_2)$. En efecto, el homeomorfismo h lleva puntos negros de \mathcal{I}_1 en puntos negros de \mathcal{I}_2 , por tanto, por la definición de representación simplicial asociada a una imagen, h aplica $K(I_1)^{(0)}$ en $K(I_2)^{(0)}$ (es decir, es una aplicación entre los vértices de ambos complejos) y es biyectiva. Además, si $\langle v_0, \dots, v_q \rangle$ es un símplice de $K(I_1)$, por definición se tiene que los vértices v_i , $0 \leq i \leq q$, son adyacentes dos a dos. Por el homeomorfismo h , se verifica que $h(v_i)$, $0 \leq i \leq q$, son vértices de $K(I_2)$ adyacentes dos a dos, de donde se deduce que $\langle h(v_0), \dots, h(v_q) \rangle$ es un símplice de $K(I_2)$. Por tanto, hemos probado que h define un homeomorfismo simplicial entre $K(I_1)$ y $K(I_2)$. El caso recíproco es análogo. □

Consecuentemente, podemos dar la siguiente definición:

Definición 6.1 *Dada una imagen digital binaria 3D \mathcal{I} , se puede definir la (co)homología de \mathcal{I} como la (co)homología del complejo de cadenas $\mathcal{C}(K(I))$ asociado a la representación simplicial $K(I)$ de \mathcal{I} .*

Para terminar, es conveniente insistir en el hecho de que toda la teoría de nuestros modelos de representación aplicados a imágenes digitales, es una teoría en desarrollo con mucho potencial. Sin embargo, somos conscientes de que queda mucho por hacer en relación con este tema. Una de las cuestiones más importantes es que nosotros trabajamos con los vóxeles blancos y negros de la imagen por separado, sin tener en cuenta la relación existente entre ellos. Por tanto, tenemos en mente plantearnos la posibilidad de abordar la relación entre vóxeles negros y blancos, así como la relación entre las representaciones simpliciales.

6.2 Modelos de representación de imágenes digitales binarias 3D

En esta sección vamos a mostrar el modelo matemático que asociamos a una imagen digital.

En la primera parte, se han definido tres modelos de representación para complejos de cadenas en general: modelo AM, modelo AT y λ -modelo AT, siendo $\lambda \in \mathbb{Z}$. Esta distinción se hacía dependiendo del anillo base con el que estemos trabajando y de si el objeto inicial presenta torsión o no. Nuestro objetivo ahora es asociar a una imagen digital binaria

3D \mathcal{I} un objeto algebraico consistiendo en un modelo de representación del complejo de cadenas $\mathcal{C}(K(I))$. Al trabajar con imágenes digitales 3D, las representaciones simpliciales asociadas a dichas imágenes son complejos simpliciales embebidos en \mathbb{R}^3 y por tanto, la homología del complejo de cadenas $\mathcal{C}(K(I))$ no presenta torsión. Este hecho hace que, tanto un modelo AT como un modelo AM de $\mathcal{C}(K(I))$, nos de una contracción de cadenas hacia un complejo de cadenas con diferencial nula. Sin embargo, para imágenes digitales, los λ -modelos AT no aportan información nueva al no haber torsión. Este último modelo sí constituirá una herramienta muy útil en un futuro, cuando trabajemos con imágenes digitales de cualquier dimensión mayor que 3, ya que en este caso puede existir torsión.

Damos a continuación una definición formal de modelo de representación de una imagen digital:

Definición 6.2 *Sea \mathcal{I} una imagen digital binaria 3D, $K(I)$ la representación simplicial asociada a los véxeles negros de \mathcal{I} y $\mathcal{C}(K(I))$ el complejo de cadenas canónicamente asociado a $K(I)$. Un modelo de representación de \mathcal{I} se define como el conjunto $(C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$, donde*

- C_I es una base de $\mathcal{C}(K(I))$.
- H_I es un subconjunto de elementos de $\mathcal{C}(K(I))$,
- $c_I = (f_I, g_I, \phi_I)$ es una contracción de cadenas de $\mathcal{C}(K(I))$ en $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}$, siendo $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}$ el complejo generado por H_I y con diferencial nula.

Para obtener un modelo de representación de una imagen digital \mathcal{I} , basta aplicar el algoritmo 1 ó el algoritmo 5 (dependiendo del anillo base con el que estemos trabajando) al complejo de cadenas $\mathcal{C}(K(I))$.

Antes de continuar, aclaramos algunas notaciones que usaremos posteriormente. Dada una imagen digital \mathcal{I} , denotamos por ATM_I al modelo de representación de \mathcal{I} . Ahora bien, dado K un complejo simplicial embebido en \mathbb{R}^3 , denotamos por ATM_K al modelo de representación del complejo de cadenas $\mathcal{C}(K)$. Por tanto, observar que el modelo de representación de representación de una imagen \mathcal{I} también se puede denotar por $ATM_{K(I)}$.

El resultado que damos a continuación ya se ha visto para un caso general. Sin embargo, es importante recordarlo dada la importancia que supone en el caso de las imágenes digitales.

Teorema 6.2 *Sea $ATM_I = (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ un modelo de representación para una imagen digital binaria 3D \mathcal{I} . Entonces, podemos obtener la homología de \mathcal{I} así como una base de ciclos representativos de generadores de homología. En concreto, si $H_I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, una base de ciclos representativos viene dada por $\{g_I(\alpha_1), \dots, g_I(\alpha_r)\}$.*

Este teorema nos permite dar solución a uno de los problemas que nos planteamos al principio. Computando un modelo de representación para una imagen digital \mathcal{I} podemos conocer, no sólo el número de componentes conexas, túneles y cavidades de \mathcal{I} (números de Betti), sino también ciclos representativos, dando así una solución al problema de una completa descripción y visualización de las componentes conexas, túneles y cavidades de la imagen digital. En el último capítulo veremos que dichos modelos van a constituir una potente herramienta para computar nuevos invariantes topológicos. Concretamente, explicaremos como obtener un nuevo invariante de carácter cohomológico que denotaremos por $HB1(I)$.

6.2.1 Software: Voxelo

Para visualizar los modelos de representación asociados a imágenes digitales binarias 3D, se ha desarrollado un software informático (ver [Vox]) llamado **VOXELO** con la ayuda del ingeniero informático Sánchez-Peláez. Veamos brevemente en qué consiste dicho programa.

Un objeto 3D en VOXELO es un conjunto de vóxeles a partir de una teselación del espacio continuo. Dichos objetos son creados por el propio usuario añadiendo o eliminando vóxeles, con la ayuda del ratón a partir de posiciones 2D sobre la pantalla. Para el desarrollo de este software, se ha usado la 14-adyacencia sobre un mallado cúbico uniforme y \mathbb{Z}_2 como anillo base. En primer lugar, se calcula la representación simplicial de la imagen creada y posteriormente la homología (concretamente, los números de Betti), permitiéndonos visualizar ciclos representativos de generadores de homología. Además, se calcula también la contracción de cadenas (f_I, g_I, ϕ_I) envuelta en el modelo de representación asociado a la imagen, guardando en un archivo de texto las imágenes de las aplicaciones f_I , g_I y ϕ_I . La cuestión más importante es que con VOXELO también se pueden visualizar cociclos representativos de generadores de cohomología, así como la tabla de multiplicación del cup producto, obteniendo el nuevo invariante topológico $HB1(I)$.

A continuación, mostramos tres imágenes creadas con VOXELO (figura 6.5), sus representaciones simpliciales asociadas (figura 6.6) y los ciclos representativos de cada una de ellas (figuras 6.7 y 6.8). Damos una tabla comparativa en la que se puede observar el

tiempo que tarda VOXELO, en segundos, en computar los grupos de homología de las imágenes, usando el programa en un Pentium 4, 3.2 GHz, 1Gb RAM:

Imagen	Número de vóxeles	Componentes conexas	Túneles	Cavidades	Tiempo
<i>A</i>	1184	1	4	3	2
<i>B</i>	6840	2	179	4	8
<i>C</i>	11540	1	23	24	18

En cuanto a la implementación, VOXELO ha sido desarrollado usando las librerías MFC y OpenGL de MS Visual C++ 6.0 y MS Visual C++ 2003.

Para terminar, destacar que futuros desarrollos pueden transformar este software en una potente herramienta para el análisis topológico de imágenes digitales 3D. Para ello, algunas de las posibles mejoras son: (1). implementar el proceso de asociar a la imagen un complejo simplicial, utilizando otros mallados; (2). incluir operaciones geométricas y morfológicas sobre los volúmenes digitales; (3). implementar un algoritmo de adelgazamiento que nos permita obtener un correcto esqueleto de la imagen inicial; (4). trabajar con coeficientes en cualquier anillo conmutativo (y no sólo en el cuerpo \mathbb{Z}_2) al tratar las cuestiones algebraicas; (5). obtener “buenos” ciclos representativos (geoméricamente hablando) de generadores de homología; (6). computar nuevos “números cohomológicos” derivados de la tabla de multiplicación del cup producto y (7). tratar otros esquemas de representación de los volúmenes digitales, como el octree.

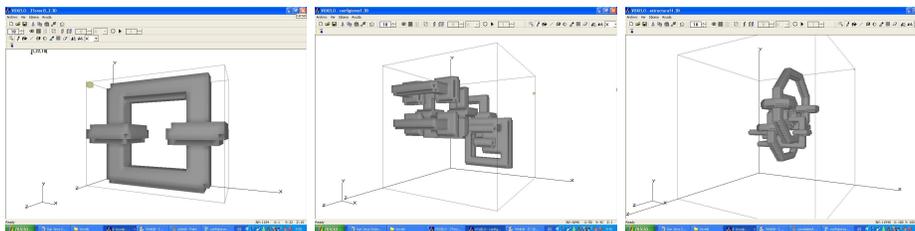


Figura 6.5: Voxel: Imágenes digitales binarias *A*, *B* y *C*.

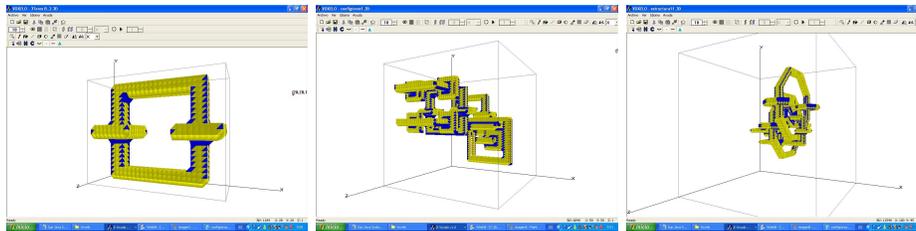


Figura 6.6: Voxelo: Representaciones simpliciales asociadas a A , B y C .

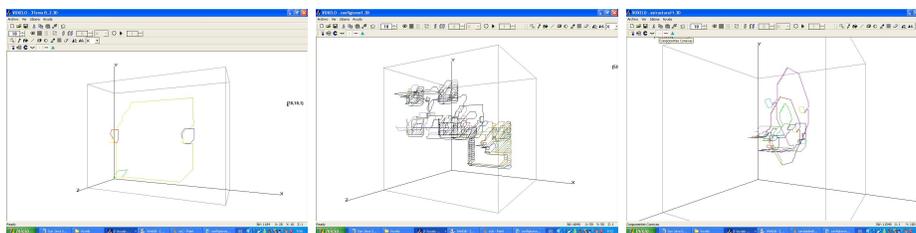


Figura 6.7: Voxelo: 1-ciclos representativos (agujeros o túneles) de A , B y C .

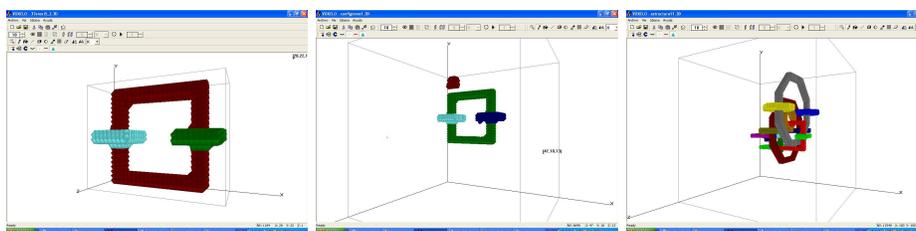


Figura 6.8: Voxelo: 2-ciclos representativos (cavidades) de A , B y C .

Capítulo 7

Control topológico de imágenes digitales binarias 3D

Una vez definido el modelo matemático que asociamos a una imagen digital binaria 3D, comenzamos a estudiar las ventajas que estos nos aportan. En [GMRS06a], nos planteamos el problema de controlar topológicamente una imagen ante cambios locales de la superficie. Cuando hablamos de cambios locales, nos referimos a la adición o eliminación de un voxel negro a la imagen, es decir, cambiar el color del voxel: de blanco a negro en el caso de la adición y de negro a blanco en el caso de la eliminación. Dada una imagen digital $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, 14, 14)$ y un voxel v tal que $v \notin I$, denotamos por $\mathcal{I}^{\cup\{v\}}$ a la imagen resultante de añadir el voxel v a I , es decir, $\mathcal{I}^{\cup\{v\}} = (\mathcal{V}, I \cup \{v\}, 14, 14)$. De la misma forma, si v es un voxel tal que $v \in I$, denotamos por $\mathcal{I}^{\setminus\{v\}}$ a la imagen resultante de eliminar v de I , es decir, $\mathcal{I}^{\setminus\{v\}} = (\mathcal{V}, I \setminus \{v\}, 14, 14)$.

Al realizar un cambio local de este tipo, es obvio que las características topológicas de la imagen pueden cambiar. Veamos un ejemplo en el que dichas características cambian. Consideremos la imagen digital \mathcal{I} de la figura 7.1. Dicha imagen tiene una componente conexa, cuatro túneles y tres cavidades. En la misma figura mostramos cada una de sus cavidades en un color distinto. Si añadimos el voxel v a \mathcal{I} (ver figura 7.2), la nueva imagen digital tiene una componente conexa más, es decir, dos componentes conexas, cuatro túneles y tres cavidades. Si por el contrario, se elimina el voxel v' (ver figura 7.2), destruimos una de las tres cavidades de \mathcal{I} .

Insistimos en el hecho de que nuestro objetivo va más allá de saber cómo cambia el número de componentes conexas, túneles y cavidades. Nosotros pretendemos estudiar cómo obtener los nuevos ciclos representativos que se crean, así como saber cuáles son

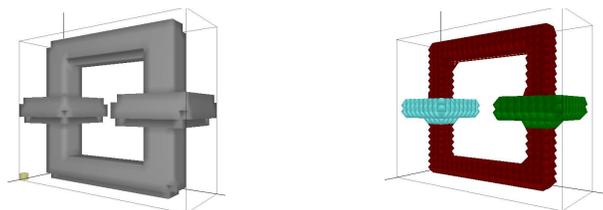


Figura 7.1: Imagen digital \mathcal{I} (a la izquierda) y cavidades de \mathcal{I} (a la derecha).

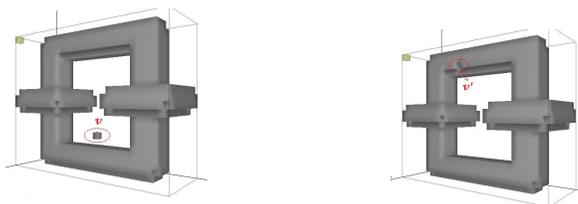


Figura 7.2: A la izquierda $\mathcal{I} \cup \{v\}$ y a la derecha $\mathcal{I} \setminus \{v'\}$.

aquellos que se destruyen, a partir de la información ya computada previamente. Concretamente, dado un modelo de representación de una imagen digital \mathcal{I} , en este capítulo mostraremos cómo obtener un modelo de representación para la imagen resultante de añadir o eliminar un voxel, a partir del modelo de representación de la imagen inicial.

7.1 Representación simplicial de un imagen tras la adición y eliminación de un voxel

Para computar un modelo de representación de una imagen \mathcal{I} , ya sabemos que el primer paso que tenemos que realizar es obtener la representación simplicial asociada a los puntos negros de dicha imagen, $K(\mathcal{I})$. En esta sección vamos a estudiar cómo afecta la adición y eliminación de un voxel al complejo simplicial $K(\mathcal{I})$. En principio, podemos pensar que basta añadir o eliminar un vértice a $K(\mathcal{I})$ ya que, si recordamos cómo se construye la representación simplicial asociada a una imagen, cada voxel negro se corresponde con un vértice del complejo simplicial. Si sólo añadimos o eliminamos un vértice, es fácil ver que el complejo simplicial resultante no se corresponde con la representación simplicial de $\mathcal{I} \cup \{v\}$ o $\mathcal{I} \setminus \{v'\}$, ya que dicho voxel puede ser adyacente al resto de vóxeles negros de la imagen.

Por tanto, añadir un voxel v a \mathcal{I} consiste en añadir a $K(I)$ un vértice junto con el resto de símlices (aristas, triángulos y tetraedros) que provienen de las adyacencias de dicho voxel con el resto de vóxeles negros de la imagen. De forma análoga, eliminar un voxel v de \mathcal{I} , consiste en eliminar de $K(I)$ el vértice correspondiente a dicho voxel y todos los símlices que provienen de las adyacencias de dicho voxel con el resto de vóxeles negros de la imagen.

Ejemplo 7.1 Consideramos la imagen digital \mathcal{I} , con cuatro vóxeles v_1, v_2, v_3, v_4 y su representación simplicial $K(I)$, dadas en la figura 7.3.

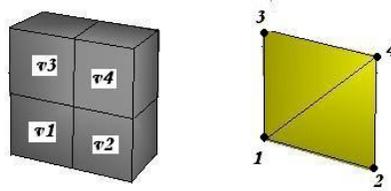


Figura 7.3: Imagen digital \mathcal{I} y su representación simplicial $K(I)$.

Si añadimos el voxel v_5 a \mathcal{I} , se añade el vértice $\langle 5 \rangle$ y la arista $\langle 2, 5 \rangle$ al complejo simplicial $K(I)$. Por el contrario, si eliminamos el voxel v_2 , tenemos que eliminar de $K(I)$ el vértice $\langle 2 \rangle$, las aristas $\langle 1, 2 \rangle$ y $\langle 2, 4 \rangle$ y el triángulo $\langle 1, 2, 4 \rangle$ (ver figura 7.4).

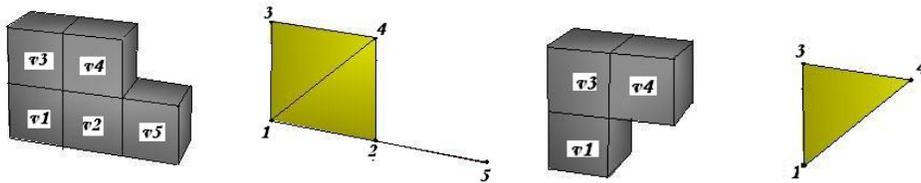


Figura 7.4: Representación simplicial tras la adición y eliminación de un voxel.

Una cuestión importante es “controlar” el número máximo de símlices que se pueden eliminar o añadir. Dicho número es siempre finito. En particular, para el caso del mallado cúbico con la 14-adyacencia, veamos que la cota es 74. Enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 7.1 Sea p un punto del mallado cúbico tridimensional. El número máximo de símlices (aristas, triángulos y tetraedros) que contienen al punto p , considerando la 14-adyacencia en dicho mallado, es 74.

Demostración: En la figura 7.5, recordamos la 14-adyacencia en el mallado cúbico y la descomposición de un cubo en los 6 tetraedros:

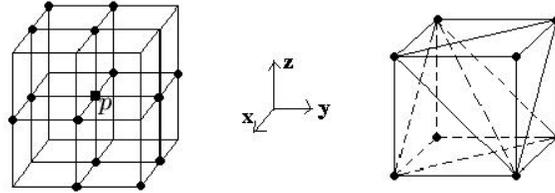


Figura 7.5: 14-adyacentes de un punto en la mallado cúbico y descomposición de un cubo en tetraedros.

Por una parte, es obvio que hay **14 aristas** que contienen al punto p . Enumeramos los cubos que contienen a p como muestra la figura 7.6.

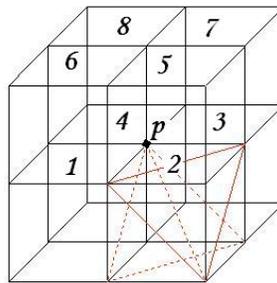


Figura 7.6: Enumeración de los 8 cubos adyacentes a p .

En primer lugar, contamos el número de tetraedros. Para ello, nos fijamos en cada uno de los cubos y vemos, en cada caso, cuántos tetraedros contienen a p . Obtenemos lo siguiente: los cubos 1 y 8 contienen cinco tetraedros con vértice p ; los cubos 2, 3, 6 y 7 contienen tres tetraedros con vértice p y los cubos 2 y 7 contienen un tetraedro con vértice p . Luego, en total, tenemos **24 tetraedros** con vértice p .

Pasamos ahora a contar el número de triángulos con vértice p . Esta cuestión es la que presenta un poco más de dificultad ya que hay que tener en cuenta que hay triángulos que se pueden contar dos veces, al ser caras compartidas por dos tetraedros. Para ello, procedemos de la siguiente forma: en primer lugar, vemos cuántos triángulos contienen a p en cada uno de los cubos. Simplemente, la idea es multiplicar por 3 el número de tetraedros que contiene cada cubo ya que de las cuatro caras que forman un tetraedro,

sólo tres pueden contener a p . Así, en principio contamos 75 triángulos. Ahora bien, quitando aquellos que hemos contados dos veces, el número total de **triángulos** es 36 (dejamos al lector comprobar en detalles esta parte ya que no presenta dificultad).

Resumiendo, tenemos: 14 aristas + 24 tetraedros + 36 triángulos = 74 símplices.

□

7.2 Algoritmos para control topológicamente una imagen digital

Una vez visto cómo afecta la adición o eliminación de un voxel v a la representación simplicial de la imagen \mathcal{I} , en esta sección vamos a dar los algoritmos correspondientes que nos van a permitir el control topológico de la imagen antes dichos cambios. Veremos que así, usando nuestros modelos de representación, no sólo vamos a saber cómo varía el número de componentes conexas, túneles y cavidades, antes dichos cambios, sino que vamos a poder controlar los ciclos representativos que se crean o se destruyen en cada caso. Todo ello, “aprovechando” la información topológica de la imagen digital inicial, que suponemos conocida.

En concreto, los algoritmos que vamos a usar para resolver nuestro problema son los algoritmos incremental (algoritmos 2 y 4) y decremental (algoritmos 3 y 6) desarrollados en la primera parte de la tesis. Recordemos que, cuando trabajamos con coeficientes en \mathbb{Z} (concretamente, para el modelo AM), dichos algoritmos fueron definidos sólo para el caso particular de complejos de cadenas que no presenten torsión. Este hecho no supone ningún problema ya que aquí, estamos trabajando con complejos simpliciales asociados a imágenes digitales tridimensionales y, consecuentemente, los complejos de cadenas asociados no tiene torsión.

La idea a seguir es la siguiente: partiendo del modelo de representación de la imagen inicial \mathcal{I} y del conjunto L de símplices que tenemos que añadir o eliminar a $K(I)$, el proceso consiste en aplicar el algoritmo incremental (respectivamente, el algoritmo decremental) tantas veces como símplices haya en el conjunto L .

MODELO DE REPRESENTACIÓN DE $\mathcal{I} \cup \{v\}$:

Algoritmo 14 *Modelo de representación de $\mathcal{I} \cup \{v\}$.*

ENTRADA: Un modelo de representación de \mathcal{I} , ATM_I , un voxel $v \notin I$ y

$L := \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ conjunto de simplices de $K(I \cup \{v\}) \setminus K(I)$,
tal que $\dim(\sigma_i) < \dim(\sigma_j)$, si $i < j$.

Para $i = 1$ hasta $i = m$, hacer

Aplica el algoritmo incremental* a $ATM_{K(I) \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}\}}$
y al simplece σ_i .

$ATM_{I \cup \{v\}} := ATM_{K(I) \cup L}$

SALIDA: $ATM_{I \cup \{v\}}$.

* Nos referimos a los algoritmos 2 y 4.

Observar que en el paso i -ésimo, al aplicar el algoritmo incremental a $ATM_{K(I) \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}\}}$ y al simplece σ_i , obtenemos un modelo de representación de $\mathcal{C}(K(I) \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_i\})$. Por tanto en el último paso, $ATM_{K(I) \cup L}$ define un modelo de representación de $\mathcal{C}(K(I) \cup L)$, es decir, un modelo de la imagen $\mathcal{I} \cup \{v\}$.

Ejemplo 7.2 Consideramos la imagen digital \mathcal{I} de la figura 7.3 a la que le añadimos el voxel v_5 . En la siguiente tabla mostramos un modelo de representación de dicha imagen trabajando con coeficientes en el cuerpo \mathbb{Z}_2 :

C_I	H_I	f_I	g_I	ϕ_I
$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0
$\langle 2 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 2 \rangle$
$\langle 3 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 3 \rangle$
$\langle 4 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 4 \rangle$
$\langle 1, 2 \rangle$		0		0
$\langle 1, 3 \rangle$		0		0
$\langle 1, 4 \rangle$		0		0
$\langle 1, 3 \rangle$		0		$\langle 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 2, 4 \rangle$		0		$\langle 1, 3, 4 \rangle$
$\langle 1, 2, 4 \rangle$		0		0
$\langle 1, 3, 4 \rangle$		0		0

Sea $L = \{\langle 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle\}$. Entonces, tenemos que aplicar el algoritmo incremental dos veces (ver figura 7.7):

Etapa 1: Se añade el vértice $\langle 5 \rangle$ y se aplica el algoritmo incremental al modelo de representación $ATM_I = (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ y a dicho vértice. Entonces, se crea una nueva

componente conexas, representada por $\langle 5 \rangle$.

Etapa 2: Se añade la arista $\langle 2, 5 \rangle$ y se aplica el algoritmo incremental al modelo de representación obtenido en el paso anterior y a dicha arista. Entonces, la componente conexas creada en el paso anterior se destruye.

El modelo de representación resultante, se muestra en la siguiente tabla:

$C_{I \cup \{v_5\}}$	$H_{I \cup \{v_5\}}$	$f_{I \cup \{v_5\}}$	$g_{I \cup \{v_5\}}$	$\phi_{I \cup \{v_5\}}$
$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0
$\langle 2 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 2 \rangle$
$\langle 3 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 3 \rangle$
$\langle 4 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 4 \rangle$
$\langle 5 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 2 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$
$\langle 1, 2 \rangle$		0		0
$\langle 1, 3 \rangle$		0		0
$\langle 1, 4 \rangle$		0		0
$\langle 2, 4 \rangle$		0		$\langle 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 3, 4 \rangle$		0		$\langle 1, 3, 4 \rangle$
$\langle 2, 5 \rangle$		0		0
$\langle 1, 2, 4 \rangle$		0		0
$\langle 1, 3, 4 \rangle$		0		0

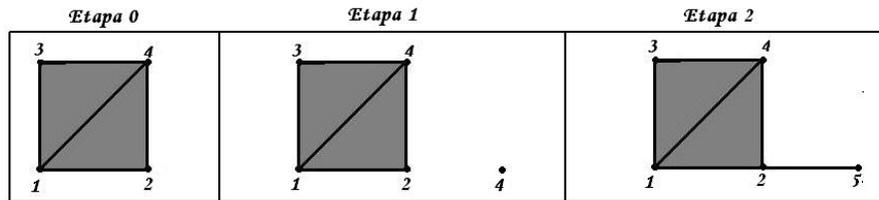


Figura 7.7: Pasos para obtener modelo de $\mathcal{I} \cup \{v_5\}$.

MODELO DE REPRESENTACIÓN DE $\mathcal{I} \setminus \{v\}$:

Algoritmo 15 Modelo de representación de $\mathcal{I} \setminus \{v\}$.

ENTRADA: Un modelo de representación de \mathcal{I} , ATM_I , un voxel $v \in I$ y

$L := \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ conjunto de simplices de $K(I \setminus \{v\}) \setminus K(I)$,

tal que $\dim(\sigma_i) > \dim(\sigma_j)$, si $i < j$.

Para $i = 1$ hasta $i = m$, hacer

 Aplica el algoritmo decremental* a $ATM_{K(I) \setminus \{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}\}}$

 y al simplece σ_i .

$ATM_{I \setminus \{v\}} := ATM_{K(I) \setminus L}$

SALIDA: $ATM_{I \setminus \{v\}}$.

* Nos referimos a los algoritmo 3 y 6.

Ejemplo 7.3 Consideramos de nuevo la imagen digital \mathcal{I} de la figura 7.3 a la que le eliminamos el voxel v_2 . En el ejemplo 7.2, mostramos un modelo de representación de dicha imagen. Sea $L = \{\langle 1, 2, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2 \rangle\}$. Entonces, tenemos que aplicar el algoritmo decremental cuatro veces (ver figura 7.8):

Etapa 1: Se elimina el triángulo $\langle 1, 2, 4 \rangle$. Entonces, se crea una clase de homología de dimensión 1, cuyo ciclo representativo es $\langle 1, 2 \rangle + \langle 1, 4 \rangle + \langle 2, 4 \rangle$.

Etapa 2: Se elimina la arista $\langle 2, 4 \rangle$. Entonces, el ciclo creado en el paso anterior destruye.

Etapa 3: Se elimina la arista $\langle 1, 2 \rangle$. Entonces, se crea una nueva componente conexa, representada por el vértice $\langle 2 \rangle$.

Etapa 4: Por último, se elimina el vértice $\langle 2 \rangle$, destruyendo así la componente conexa creada en el paso anterior.

El modelo de representación resultante se muestra en la siguiente tabla:

$C_{I \setminus \{v_2\}}$	$H_{I \setminus \{v_2\}}$	$f_{I \setminus \{v_2\}}$	$g_{I \setminus \{v_2\}}$	$\phi_{I \setminus \{v_2\}}$
$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0
$\langle 3 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 3 \rangle$
$\langle 4 \rangle$		$\langle 1 \rangle$		$\langle 1, 4 \rangle$
$\langle 1, 3 \rangle$		0		0
$\langle 1, 4 \rangle$		0		0
$\langle 3, 4 \rangle$		0		$\langle 1, 3, 4 \rangle$
$\langle 1, 3, 4 \rangle$		0		0

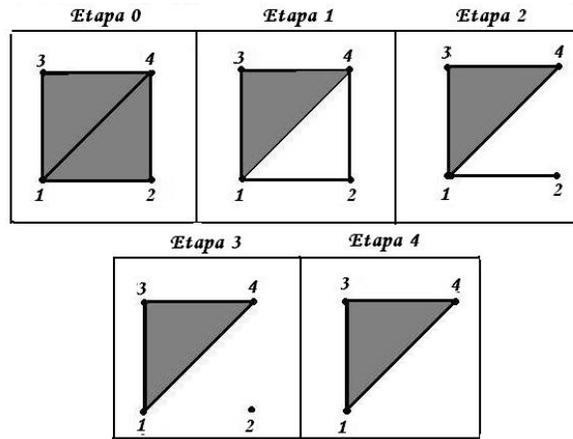


Figura 7.8: Pasos para obtener modelo de $\mathcal{I} \setminus \{v_2\}$.

COMPLEJIDAD DE LOS ALGORITMOS: Como ya sabemos, la complejidad en tiempo de los algoritmos incremental y decremental es $\mathcal{O}(m^3)$, donde m es el número de símlices del complejo inicial. Sabemos que por cada voxel que añadimos o eliminamos de la imagen \mathcal{I} , el número máximo de símlices que se añaden o se eliminan a la representación simplicial $K(I)$ es 74. Luego, en términos del número de vóxeles negros de \mathcal{I} , n_v , podemos decir que la complejidad de estos algoritmos es $\mathcal{O}(n_v^3)$.

Resumiendo, en este capítulo hemos probado que nuestros modelos de representación constituyen una herramienta útil para realizar un control topológico de una imagen ante cambios locales de la superficie. No sólo controlamos la variación de los números de Betti

sino que calculamos y visualizamos los ciclos representativos que se crean ó se destruyen en cada paso.

Capítulo 8

Operaciones conjuntistas

Hasta ahora, hemos definido un modelo de representación para imágenes digitales binarias $3D$, basándonos en los puntos negros de dichas imágenes. Posteriormente, hemos desarrollado algoritmos que nos permiten obtener dichos modelos de representación ante un cambio local en las mismas (adición o eliminación de un voxel), aprovechando información ya computada. El problema que nos planteamos ahora es ver si nuestros modelos de representación se comportan bien antes operaciones conjuntistas de imágenes digitales binarias $3D$: unión, intersección y diferencia de dos imágenes digitales, así como la imagen complementaria de una dada. Es decir, nuestro objetivo en este capítulo es dar algoritmos que computen modelos de representación de imágenes binarias digitales $3D$, resultantes de la unión, intersección y diferencia de dos imágenes digitales, a partir de los modelos de representación de las imágenes iniciales. Además, estudiaremos cómo hacer lo mismo con el complementario de una imagen dada. Este último caso presenta algunos inconvenientes añadidos que detallaremos en su momento.

Este problema ha sido tratado en [GJMR07b] trabajando en el dominio de los enteros. En este capítulo presentamos una versión más extendida de dicho trabajo.

Dada dos imágenes digitales, $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, \beta, \omega)$ y $\mathcal{J} = (\mathcal{V}, J, \beta, \omega)$, recordemos que \mathcal{V} constituyen los puntos del mallado, los conjuntos I y J están constituidos por los vóxeles negros de \mathcal{I} y \mathcal{J} y β y ω definen las relaciones de adyacencia entre vóxeles negros y blancos, respectivamente. A partir de dichas imágenes, se definen las siguientes:

- Imagen unión: $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} = (\mathcal{V}, I \cup J, \beta, \omega)$.
- Imagen intersección: $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = (\mathcal{V}, I \cap J, \beta, \omega)$.
- Imagen diferencia: $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J} = (\mathcal{V}, I \setminus J, \beta, \omega)$.

- Imagen complementaria: $\mathcal{T}^c = (\mathcal{V}, I^c, \beta, \omega)$.

La notación $I \cup J$, $I \cap J$ e $I \setminus J$, se refiere a la unión, intersección y diferencia de vóxeles negros de \mathcal{I} y \mathcal{J} , en un sentido conjuntista. En cuanto a I^c , veremos en detalle cómo se define cuando estudiemos esta operación.

8.1 Preprocesamiento

Antes de comenzar a estudiar las distintas operaciones conjuntistas, vamos a dar un algoritmo de preprocesamiento común a todas ellas.

Sea $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, L, \beta, \omega)$ una imagen digital binaria 3D y $F = \{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto de vóxeles tal que $F \subset L$ ó $F \cap L = \emptyset$. Denotamos por \mathcal{L}^F a la siguiente imagen digital:

- Si $F \subset L$, $\mathcal{L}^F := (\mathcal{V}, L \setminus F, \beta, \omega)$, es decir, la imagen digital resultante de eliminar de L el conjunto de vóxeles F ;
- Si $F \cap L = \emptyset$, $\mathcal{L}^F := (\mathcal{V}, L \cup F, \beta, \omega)$, es decir, la imagen digital resultante de añadir a L el conjunto de vóxeles F ;

El algoritmo de preprocesamiento que damos a continuación consiste en lo siguiente: recibe como entrada un modelo de representación de la imagen digital \mathcal{L} , que denotamos por $ATM_L := (C_L, H_L, f_L, g_L, \phi_L)$, y devuelve como salida un modelo de representación de la imagen digital \mathcal{L}^F . Para ello, se distinguen dos casos: $F \subset L$ ó $F \cap L = \emptyset$. Por ejemplo, si $F \subset L$, en cada paso del algoritmo se considera un voxel v_i de F y se aplica el algoritmo decremental tantas veces como simplices haya que eliminar de la representación simplicial de $\mathcal{L} \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ para obtener la representación simplicial de la imagen resultante de eliminar el voxel v_i , $\mathcal{L} \setminus \{v_1, \dots, v_i\}$. De forma análoga procedemos si $F \cap L = \emptyset$, aplicando el algoritmo incremental en cada paso.

Algoritmo 16 *Preprocesamiento Común.*

ENTRADA: El modelo $ATM_L := (C_L, H_L, f_L, g_L, \phi_L)$ para \mathcal{L} y un conjunto de puntos $F = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{Z}^3$ verificando que $F \subset L$

Si $F \subset L$, entonces

Para $i = 1$ hasta $i = m$ hacer

 Aplica algoritmo decremental 15 a v_i y al modelo ATM_L .

$ATM_L := AMT_{L \setminus \{v_1, \dots, v_i\}}$.

En caso contrario,

Para $i = 1$ hasta $i = m$ hacer

Aplica algoritmo incremental 14 a v_i y al modelo AMT_L .

$$ATM_L := ATM_{L \cup \{v_1, \dots, v_i\}}.$$

$$ATM_{L^F} := ATM_L.$$

SALIDA: Un modelo de representacion ATM_{L^F} para \mathcal{L}^F .

Una vez visto este algoritmo, pasamos a estudiar las diferentes operaciones conjuntistas.

8.2 Unión de imágenes digitales

Para computar un modelo de representación de la unión de dos imágenes digitales \mathcal{I} y \mathcal{J} , $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, a partir de los modelos de representación de las mismas, se distinguen dos casos:

- (1). Si $I \cap J = \emptyset$, sea $L := \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ el conjunto de símlices que tenemos que añadir a $K(I) \cup K(J)$ para obtener la representación simplicial de $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, $K(I \cup J)$, ordenados de forma que la dimensión de σ_i es menor que la dimensión de σ_j , si $i < j$. Veamos un pseudocódigo del algoritmo que computa un modelo de representación de $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ en este caso:

Algoritmo 17 $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, si $I \cap J = \emptyset$.

ENTRADA: Los modelos de representacion $ATM_I := (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ y $ATM_J := (C_J, H_J, f_J, g_J, \phi_J)$, para \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente y el conjunto de símlices L .

Define $C := C_{I^F} \cup C_{J^F}$ y $H := H_{I^F} \cup H_{J^F}$.

Para cada $c \in C$ y $h \in H$,

$$\begin{aligned} f(c) &:= f_{I^F}(c) \text{ si } c \in C_{I^F}, \quad f(c) := f_{J^F}(c) \text{ si } c \in C_{J^F}, \\ \phi(c) &:= \phi_{I^F}(c) \text{ si } c \in C_{I^F}, \quad \phi(c) := \phi_{J^F}(c) \text{ si } c \in C_{J^F}, \\ g(h) &:= g_{I^F}(h) \text{ si } h \in H_{I^F}, \quad g(h) := g_{J^F}(h) \text{ si } h \in H_{J^F}. \end{aligned}$$

$$ATM_C := (C, H, f, g, \phi).$$

Para $i = 1$ hasta $i = m$ hacer

Aplica algoritmo incremental* al modelo ATM_C y al símlice σ_i .

$$ATM_C := ATM_{C \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_i\}}$$

$$ATM_{I \cup J} := ATM_C.$$

SALIDA: Un modelo de representacion, $ATM_{I \cup J}$ para $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

* Obviamente, nos referimos a los algoritmos 4 y 2 ya que lo que vamos añadiendo son símlices y no vóxeles.

(2). Si $I \cap J \neq \emptyset$, el algoritmo no es tan sencillo. Antes de mostrar el pseudocódigo, veamos cuáles son los pasos a realizar.

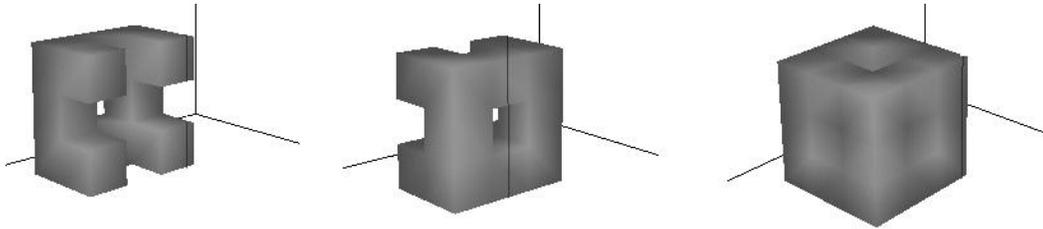


Figura 8.1: Imagen \mathcal{I} a la izquierda, imagen \mathcal{J} en el centro, $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ a la derecha.

Paso 1: Aplicamos el preprocesamiento, algoritmo 16, dos veces: por una parte, al modelo de representación de \mathcal{I} y al conjunto $F := I \cap J$ y por otra parte, al modelo de representación de \mathcal{J} y al conjunto $F := I \cap J$. Obtenemos así modelos de representación de \mathcal{I}^F y de \mathcal{J}^F .

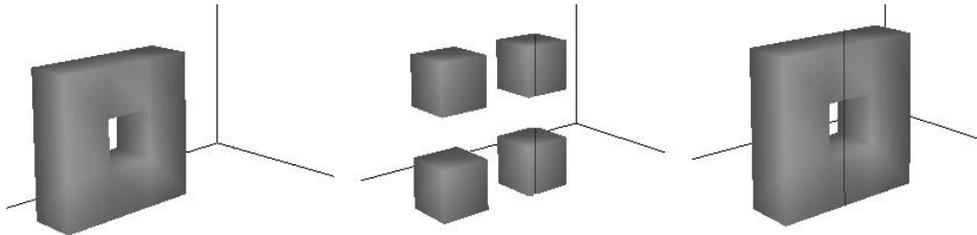


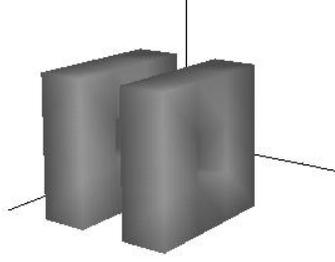
Figura 8.2: Imagen \mathcal{I}^F a la izquierda, voxeles de F en el centro, imagen \mathcal{J}^F a la derecha.

Paso 2: Calculamos un modelo de representación de $(\mathcal{I}^F) \cup (\mathcal{J}^F)$, aplicando el algoritmo 17.

Paso 3: Aplicamos de nuevo el preprocesamiento, algoritmo 16, al modelo de representación obtenido en el paso anterior y al conjunto F , computando así el modelo de representación de $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

Una vez visto los pasos a realizar, damos un pseudocódigo del algoritmo:

Algoritmo 18 $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ tal que $I \cap J \neq \emptyset$.

Figura 8.3: Imagen $(\mathcal{I}^F) \cup (\mathcal{J}^F)$.

ENTRADA: Los modelos de representación $ATM_I := (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ y $ATM_J := (C_J, H_J, f_J, g_J, \phi_J)$, para \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente.
 Aplica algoritmo 16 a ATM_L y $F := I \cap J$ para $L = I, J$.
 Aplica algoritmo 17 a ATM_{I^F} y ATM_{J^F} .
 Aplica algoritmo 16 al modelo $ATM_{I^F \cup J^F}$ y a F .
 $ATM_{I \cup J} := ATM_{(I^F \cup J^F)^F}$
 SALIDA: Un modelo de representación, $ATM_{I \cup J}$ para $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

8.2.1 Secuencia de imágenes digitales 2D

En [GMRS05] nos planteamos el problema de analizar topológicamente una secuencia de imágenes digitales binarias 2D variando en el tiempo, usando como herramienta los modelos AT de dichas imágenes. Aquí presentamos una extensión de dicho trabajo a los modelos de representación en general. Introducimos esta sección en este momento de la tesis ya que podemos ver la secuencia de imágenes digitales binarias 2D como una unión, en sentido conjuntista, de dichas imágenes y por tanto aplicar los algoritmos anteriores.

Sea $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_s)$ una secuencia de imágenes digitales 2D. Sea \mathcal{V}_r , para $1 \leq r \leq s$, la imagen digital 3D resultante de concatenar las sucesivas imágenes digitales 2D $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_r$. Este hecho lo denotamos como $\mathcal{V}_r = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \dots + \mathcal{I}_r$. Y sean $ATM_{\mathcal{I}_1}, ATM_{\mathcal{I}_2}, \dots, ATM_{\mathcal{I}_s}$ los modelos de representación de cada una de las imágenes que constituyen la secuencia. Suponemos que tenemos computado un modelo de representación para la imagen digital 3D \mathcal{V}_r , $ATM_{\mathcal{V}_r}$, con $r < s$. Sea $L := \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ el conjunto de símlices que tenemos que añadir a $K(\mathcal{V}_r) \cup K(\mathcal{I}_{r+1})$ para obtener el complejo simplicial $K(\mathcal{V}_{r+1})$. Entonces, es posible computar un modelo de representación para la imagen digital 3D $\mathcal{V}_{r+1} = \mathcal{V}_r + \mathcal{I}_{r+1}$, aplicando el algoritmo 17 a $ATM_{\mathcal{V}_r}$, $ATM_{\mathcal{I}_{r+1}}$ y al conjunto L .

El algoritmo que damos a continuación computa un modelo de representación para una secuencia de imágenes digitales 2D (es decir, para la imagen digital 3D resultante de concatenar las sucesivas imágenes 2D de la secuencia) a partir de los modelos de representación de cada una de dichas imágenes:

Algoritmo 19 *Secuencia de imágenes digitales 2D.*

ENTRADA: Una secuencia de imágenes 2D $(\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_s)$ y los modelos de representación $\{ATM_{\mathcal{I}_1}, \dots, ATM_{\mathcal{I}_s}\}$.

Para $i = 1$ hasta $i = s - 1$ hacer

$L_i :=$ simplices de $K(V_{i+1}) \setminus (K(V_i) \cup K(I_{i+1}))$.

Aplica el algoritmo 17 a los modelos ATM_{V_i} y $ATM_{I_{i+1}}$

$ATM_{V_{i+1}} := ATM_{V_i \cup I_{i+1}}$.

SALIDA: Un modelo de representación ATM_{V_s} .

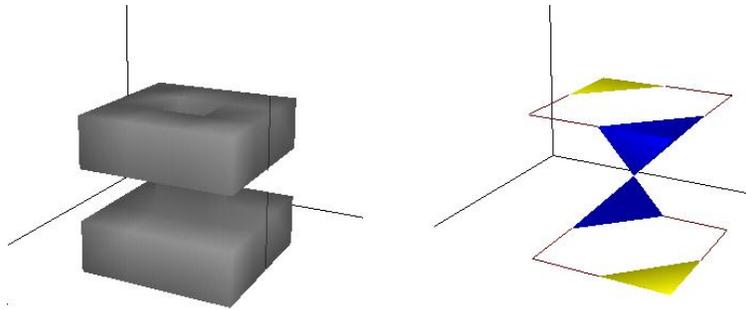


Figura 8.4: Volumen \mathcal{V}_3 y representación simplicial $K(\mathcal{V}_3)$.

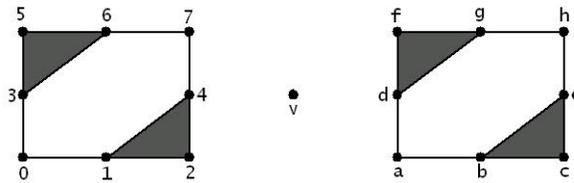


Figura 8.5: De izquierda a derecha: $K(I_1)$, $K(I_2)$ y $K(I_3)$.

Ejemplo 8.1 *Consideramos una secuencia de tres imágenes digitales 2D, $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$, constituyendo el volumen digital $\mathcal{V}_3 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$, dado en la figura 8.4. Sean $K(I_1)$, $K(I_2)$ y $K(I_3)$ las representaciones simpliciales de dichas imágenes (ver figura 8.5). Supongamos que tenemos computado modelos de representación $\{ATM_{I_1}, ATM_{I_2}, ATM_{I_3}\}$*

para \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 e \mathcal{I}_3 , respectivamente. Veamos los pasos que tendríamos que realizar al aplicar el algoritmo 19 para obtener un modelo de representación de \mathcal{V}_3 .

En primer lugar, tendríamos que aplicar el algoritmo 17 a los modelos de representación $ATM_{\mathcal{I}_1}$ y $ATM_{\mathcal{I}_2}$ y al conjunto de simplices

$$L_1 = \{\langle v, 1 \rangle, \langle v, 2 \rangle, \langle v, 4 \rangle, \langle v, 1, 2 \rangle, \langle v, 2, 4 \rangle, \langle v, 1, 4 \rangle, \langle v, 1, 2, 4 \rangle\},$$

obteniendo un modelo de representación $ATM_{\mathcal{V}_2}$ para $\mathcal{V}_2 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$. Y en segundo lugar, volveríamos a aplicar el algoritmo 18 con datos de entrada, el modelo de representación obtenido en el paso anterior $ATM_{\mathcal{V}_2}$, $ATM_{\mathcal{I}_3}$ y el conjunto de simplices

$$L_2 = \{\langle v, d \rangle, \langle v, f \rangle, \langle v, g \rangle, \langle v, d, f \rangle, \langle v, f, g \rangle, \langle v, d, g \rangle, \langle v, d, f, g \rangle\}.$$

La salida de este último paso ya nos da el modelo de representación del volumen \mathcal{V}_3 .

8.3 Intersección y diferencia de imágenes digitales

Para la intersección de dos imágenes, es decir, la imagen formada por los voxeles negros comunes a \mathcal{I} y a \mathcal{J} , sólo necesitamos realizar un paso. Basta aplicar el preprocesamiento, algoritmo 16, al modelo de representación de la imagen \mathcal{I} y al conjunto de vóxeles $F := \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$.

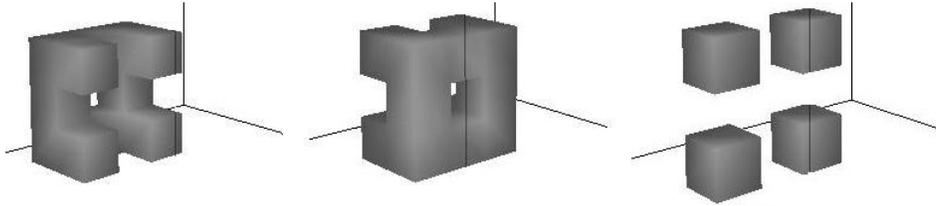


Figura 8.6: Imagen \mathcal{I} a la izquierda, imagen \mathcal{J} en el centro, imagen $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ a la derecha.

Veamos un pseudocódigo del algoritmo:

Algoritmo 20 $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

ENTRADA: El modelo de representación $ATM_{\mathcal{I}}$ para \mathcal{I}
y el conjunto $F = \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$.

Aplica algoritmo 16 a $ATM_{\mathcal{I}}$ y a F .

$ATM_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} := ATM_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}}$.

SALIDA: Un modelo de representación $ATM_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}$ para $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

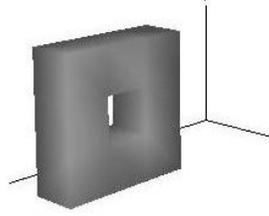


Figura 8.7: Conjunto de vóxeles $F = I \setminus J$.

El algoritmo para computar la diferencia de dos imágenes digitales \mathcal{I} y \mathcal{J} , $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$, es similar al anterior. Para este caso, $F = I \cap J$.

Algoritmo 21 $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$.

ENTRADA: El modelo de representación ATM_I para \mathcal{I}
y el conjunto $F = I \cap J$.

Aplica algoritmo 16 a ATM_I y a F .

$ATM_{\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}} := ATM_{IF}$.

SALIDA: Un modelo de representación $ATM_{I \cap J}$ para $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$.

Observar que para computar un modelo de representación de la intersección o diferencia de dos imágenes, basta conocer el modelo de representación de una de ellas.

8.4 Complementario de una imagen digital

La última operación que vamos a estudiar es el complementario. Es decir, dada una imagen digital $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, 14, 14)$. Para cada $p = (x_1, y_1, z_1)$ punto del mallado \mathcal{V} , sea $X_p = \max \{|x_i| : i = 1, 2, 3\}$ y sea $X_I = \max \{X_p : p \in I\}$. Entonces, definimos la imagen digital \mathcal{G}_I , donde $G_I = \{p : d_p \leq X_I + 1\}$. En realidad, el objetivo de definir esta imagen es enmarcar la imagen inicial \mathcal{I} . Entonces, el complementario de \mathcal{I} se define como

$$\mathcal{I}^c := \mathcal{G}_I \setminus I$$

En la siguiente figura mostramos un ejemplo sencillo en $2D$ de cómo se construye el complementario de una imagen digital.

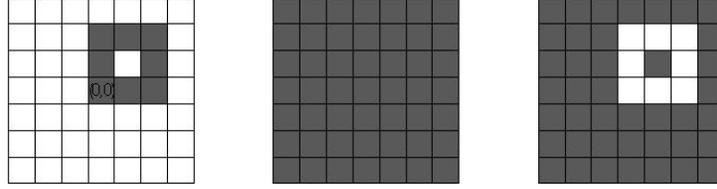


Figura 8.8: Imagen \mathcal{I} a la izquierda, imagen \mathcal{G}_I en el centro, imagen complementaria \mathcal{I}^c a la derecha.

Para obtener un modelo de representación de \mathcal{I}^c , suponemos computado un modelo de representación para la imagen \mathcal{G}_I (es obvio que la homología de \mathcal{G}_I es nula en todas las dimensiones, excepto en dimensión 0, que es Λ , siendo Λ el anillo base con el que estemos trabajando). La idea es aplicar el algoritmo de preprocesamiento al modelo de \mathcal{G}_I y al conjunto de vóxeles $F := I$.

Algoritmo 22 \mathcal{I}^c .

ENTRADA: El modelo de representación $ATM_{\mathcal{G}_I}$ para \mathcal{G}_I
y el conjunto $F = I$.

Aplica algoritmo 16 a $ATM_{\mathcal{G}_I}$ y a F .

$ATM_{\mathcal{I}^c} := ATM_{\mathcal{G}_I}^F$

SALIDA: Un modelo de representación $ATM_{\mathcal{I}^c}$ para \mathcal{I}^c .

Observar que el algoritmo 22 no reutiliza la información conocida, es decir, el modelo de representación de \mathcal{I} . Este hecho fue el que nos hizo replantearnos la forma del ver nuestros modelos de representación considerando, no sólo los vóxeles negros de la imagen digital, sino también los vóxeles blancos. Veamos la siguiente definición:

Definición 8.1 Dada una imagen digital binaria $3D$, $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, \beta, \omega)$, un modelo de representación de \mathcal{I} se define como el par $(ATM_I, ATM_{\mathcal{I}^c})$, donde

- $ATM_I := (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ es un modelo de representación de \mathcal{I} (en el sentido que ya conocemos) y
- $ATM_{\mathcal{I}^c} := (C_{\mathcal{I}^c}, H_{\mathcal{I}^c}, f_{\mathcal{I}^c}, g_{\mathcal{I}^c}, \phi_{\mathcal{I}^c})$ es un modelo de representación de \mathcal{I}^c (en el sentido que ya conocemos), siendo $\mathcal{I}^c = \mathcal{G}_I$ la imagen digital vista anteriormente.

Si partimos de una imagen digital $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, 14, 14)$, el problema del complementario desaparece considerando la definición 8.1. Supongamos que conocemos el modelo de representación de \mathcal{I} , (ATM_I, ATM_{I^c}) , donde ATM_I es el modelo de representación considerando los puntos negros de \mathcal{I} (modelo de $\mathcal{C}(K(I))$) y ATM_{I^c} es el modelo de representación considerando los puntos blancos de \mathcal{I} (modelo de $\mathcal{C}(K(I^c))$). Un modelo de representación de \mathcal{I}^c vendrá dado por (ATM_{I^c}, ATM_I) , donde ATM_{I^c} será el modelo de representación asociado a los puntos negros de \mathcal{I}^c y ATM_I será el modelo de representación asociado a los puntos blancos de \mathcal{I}^c . Como usamos la misma adyacencia para puntos blancos y puntos negros, es posible reutilizar la información conocida. En la figura 8.9 mostramos las representaciones simpliciales de las imágenes \mathcal{I} e \mathcal{I}^c , dadas en 8.8, usando la $(14, 14)$ -adyacencia. Si por el contrario, usamos por ejemplo la $(26, 6)$ -adyacencia, no sabemos si es posible reutilizar dicha información. Esta cuestión es un trabajamos que pretendemos abordar en un futuro.

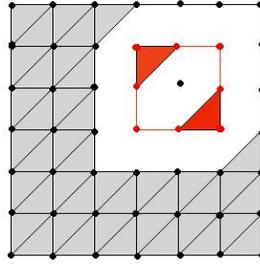


Figura 8.9: En negro $K(I^c)$ y en rojo $K(I)$.

Considerando la definición 8.1, los anteriores algoritmos de cálculo de modelo de representación de la unión, intersección y diferencia puede reescribirse sin problemas.

Veamos, por ejemplo, el caso de la unión de dos imágenes $\mathcal{I} = (\mathcal{V}, I, 14, 14)$ y $\mathcal{J} = (\mathcal{V}, J, 14, 14)$ tales que $I \cap J \neq \emptyset$. Sean (ATM_I, ATM_{I^c}) y (ATM_J, ATM_{J^c}) modelos de representación de \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente. El algoritmo que damos a continuación computa un modelo de representación de $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ denotado por el par $(ATM_{\mathcal{I} \cup \mathcal{J}}, ATM_{(\mathcal{I} \cup \mathcal{J})^c})$.

Algoritmo 23 $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ tal que $I \cap J \neq \emptyset$.

ENTRADA: Los modelos de representación (ATM_I, ATM_{I^c}) y (ATM_J, ATM_{J^c}) de \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente.

Aplica el algoritmo 18 a ATM_I y ATM_J .

Aplica el algoritmo 20 a ATM_{I^c} y ATM_{J^c} .

$$ATM_{(I \cup J)^c} := ATM_{I^c \cap J^c}.$$

SALIDA: El par $(ATM_{I \cup J}, ATM_{(I \cup J)^c})$.

El par obtenido en el algoritmo 23 es efectivamente un modelo de representación de $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ (en el sentido de la definición 8.1). Por una parte, al aplicar el algoritmo 18 a ATM_I y ATM_J , ya hemos visto que obtenemos un modelo de representación de $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, en el sentido inicial de modelo de representación. Por otra parte, cuando aplicamos el algoritmo 20 a ATM_{I^c} y ATM_{J^c} , obtenemos un modelo de representación de la imagen $\mathcal{I}^c \cap \mathcal{J}^c$. Ahora bien, una propiedad bien conocida en Teoría de Conjuntos nos dice que dado dos conjuntos A y B no vacíos, $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c$. Como nosotros estamos trabajando con la unión e intersección de vóxeles en un sentido conjuntista, se verifica que $I^c \cap J^c = (I \cup J)^c$ y por tanto, $\mathcal{I}^c \cap \mathcal{J}^c = (\mathcal{V}, I^c \cap J^c, 14, 14) = (\mathcal{V}, (I \cup J)^c, 14, 14) = (\mathcal{I} \cup \mathcal{J})^c$. Consecuentemente, al aplicar el algoritmo 20 a ATM_{I^c} y ATM_{J^c} , obtenemos un modelo de representación de $(\mathcal{I} \cup \mathcal{J})^c$.

Veamos ahora un algoritmo para la intersección de dos imágenes digitales. Sean $\mathcal{I} = (V, I, 14, 14)$ y $\mathcal{J} = (V, J, 14, 14)$ dos imágenes digitales binarias 3D, (ATM_I, ATM_{I^c}) y (ATM_J, ATM_{J^c}) modelos de representación de \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente. El siguiente algoritmo computa un modelo de representación de $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, en el sentido de la definición 8.1, denotado por el par $(ATM_{I \cap J}, ATM_{(I \cap J)^c})$:

Algoritmo 24 $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

ENTRADA: Los modelos de representación (ATM_I, ATM_{I^c}) y (ATM_J, ATM_{J^c}) de \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente.

Aplicar el algoritmo 20 aplicado a ATM_I y ATM_J .

Aplicar el algoritmo 18 a ATM_{I^c} y ATM_{J^c} .

$ATM_{(I \cap J)^c} := ATM_{I^c \cup J^c}$ SALIDA: El par $(ATM_{I \cap J}, ATM_{(I \cap J)^c})$.

Como para el caso de la unión, el par obtenido en el algoritmo 24 es efectivamente un modelo de representación de $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ (en el sentido de la definición 8.1). Por una parte, al aplicar el algoritmo 20 a ATM_I y ATM_J , ya hemos visto que obtenemos un modelo de representación de $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, en el sentido inicial de modelo de representación. Por otra parte, cuando aplicamos el algoritmo 18 a ATM_{I^c} y ATM_{J^c} , obtenemos un modelo de representación de la imagen $\mathcal{I}^c \cup \mathcal{J}^c$. En este caso, por otra de propiedad de Teoría de Conjuntos tenemos que $I^c \cup J^c = (I \cap J)^c$ y por tanto, $\mathcal{I}^c \cup \mathcal{J}^c = (\mathcal{V}, I^c \cup J^c, 14, 14) = (\mathcal{V}, (I \cap J)^c, 14, 14) = (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})^c$. Consecuentemente, al aplicar el algoritmo 18, obtenemos un modelo de representación de $(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})^c$.

Resumiendo, en este capítulo hemos probado que nuestros modelos de representación se comportan bien ante la realización de operaciones conjuntistas diseñando algoritmos que nos permiten reutilizar los modelos de representación de las imágenes ante dichas operaciones. Hemos visto que el caso del complementario presenta algunos inconvenientes añadidos que nos hacen plantearnos, en un futuro, el hecho de considerar los vóxeles blancos de la imagen así como estudiar la relación existente entre las representaciones simpliciales asociadas.

Capítulo 9

Cálculo de información cohomológica en imágenes digitales: computación de un nuevo invariante topológico

Como se ha puesto de manifiesto en repetidas ocasiones, son muchos los investigadores que han tratado el problema de computar los grupos de homología en el campo digital. Posteriormente a los grupos de homología, surgió otra secuencia de grupos abelianos asociada a un espacio topológico, llamada grupos de cohomología. El hecho de que estos últimos apareciesen con posterioridad no es difícil de entender. Se debe fundamentalmente a que los grupos de cohomología son, geoméricamente hablando, menos naturales que los grupos de homología. Sus orígenes provienen del álgebra, más que de la geometría; en un sentido algebraico (para ser más precisos), son “duales” a los grupos de homología.

Los teoremas de dualidad para superficies, la conexión entre topología y geometría diferencial y entre topología y análisis, son resultados que han sido formulados en términos de la cohomología. Incluso para problemas puramente topológicos, como la clasificación de espacios salvo homeomorfismos, la cohomología constituye una herramienta muy útil.

La importancia de los grupos de cohomología es que poseen una estructura algebraica adicional: la de anillo. Así, el anillo de cohomología constituye un invariante topológico de especial importancia. Aunque en la actualidad existen muchos programas para calcular los grupos de (co)homología de complejos simpliciales finitos, no existe ningún software para computar invariantes cohomológicos como el cup producto (producto que se define

en el anillo de cohomología) y operaciones cohomológicas.

Hablar de cohomología en el campo de la Imagen Digital es algo que puede resultar, en principio, un poco extraño. De hecho, en la literatura es difícil encontrar trabajos relacionados con este aspecto. No obstante, son los investigadores González-Díaz R. y Real P. los que comienzan a introducir el término *cohomología digital*. En [GR03b, GDR05] proponen un método para computar el \mathbb{Z}_2 -anillo de cohomología (fácilmente ampliable a cualquier cuerpo) de imágenes digitales binarias tridimensionales. Para ello, la herramienta que usan son los modelos AT ya conocidos. El hecho fundamental que les permite realizar este trabajo es que, como ya sabemos, un isomorfismo de imágenes digitales es equivalente a un homeomorfismo entre las correspondientes representaciones simpliciales y, por tanto, es coherente definir el anillo de cohomología de una imagen digital como el anillo de cohomología de su representación simplicial asociada. La gran importancia de estos trabajos es que, a partir de la computación del anillo de cohomología, definen un nuevo invariante cohomológico en imágenes digitales, denotado por $HB1(I)$, más fino que grupos de homología. Este hecho nos va a permitir disfrutar de una clasificación más precisa y exhaustiva de las imágenes digitales y así, solucionar uno de los problemas fundamentales que planteamos en esta tesis. Posterior a los trabajos mencionados anteriormente, en [GJMR07b], procedemos de forma análoga, computando dicho invariante con coeficientes enteros.

En este capítulo, vamos a mostrar detalladamente cómo computar información cohomológica a partir de nuestros modelos de representación (sección 9.1), así como la forma de obtener el invariante $HB1(I)$ (sección 9.2). Para una buena comprensión de este capítulo, remitimos al lector al capítulo 1 donde se dieron los preliminares de Topología Algebraica necesarios.

9.1 Información cohomológica a partir de los modelos de representación

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar cómo obtener información cohomológica de \mathcal{I} a partir de un modelo de representación de dicha imagen.

Teorema 9.1 *Sea $ATM_I = (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ un modelo de representación de una imagen digital \mathcal{I} , siendo $H_I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Entonces, el conjunto*

$$G^* = \{\alpha_1^* f_I, \dots, \alpha_r^* f_I\}$$

es una base de cociclos representativos de generadores de cohomología.

Demostración: Por definición de modelo de representación, el conjunto $c_I = (f_I, g_I, \phi_I)$ define una contracción de cadenas de $\mathcal{C}(K(I))$ en \mathcal{H}_I , siendo \mathcal{H}_I el complejo de cadenas generado por H_I y con diferencial nula. A partir de c_I , una contracción de cocadenas de $\mathcal{C}^*(K(I)) := \text{Hom}(\mathcal{C}(K(I)); \Lambda)$ en $\mathcal{H}_I^* := \text{Hom}(\mathcal{H}_I; \Lambda)$ puede ser construida. Entonces, el q -ésimo grupo de cohomología de \mathcal{I} es isomorfo al q -ésimo grupo de cohomología de \mathcal{H}_I , es decir, para cada $q \geq 0$ se tiene que:

$$H^q(\mathcal{C}(K(I)), \Lambda) \simeq H^q(\mathcal{H}_I, \Lambda).$$

Por otra parte, como \mathcal{H}_I es un complejo de cadenas con diferencial nula, es fácil ver que \mathcal{H}_I^* es un complejo de cocadenas con codiferencial nula, luego el q -ésimo grupo de cohomología de \mathcal{H}_I coincide con el grupo de q -cocadenas de \mathcal{H}_I , es decir, para todo $q \geq 0$

$$H^q(\mathcal{C}(K(I)), \Lambda) \simeq \mathcal{H}_I^q$$

Como $H_I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, una base de \mathcal{H}_I^* es $H_I^* = \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*\}$ (donde $\alpha_i^*(\alpha_i) = 1$ y $\alpha_i^*(\alpha_j) = 0$, para $j \neq i, 1 \leq i \leq r$). Por el isomorfismo anterior (cuya definición puede verse en el capítulo 1), una base de $H^*(\mathcal{C}(K(I)), \Lambda)$ es $\{[\alpha_1^* f_I], \dots, [\alpha_r^* f_I]\}$, de donde se deduce que el conjunto $G^* = \{\alpha_1^* f_I, \dots, \alpha_r^* f_I\}$ es una base de cociclos representativos de generadores de cohomología de \mathcal{I} .

□

Ejemplo 9.1 Consideramos la imagen digital \mathcal{I} dada en la figura 9.1 y su representación simplicial $K(I)$.

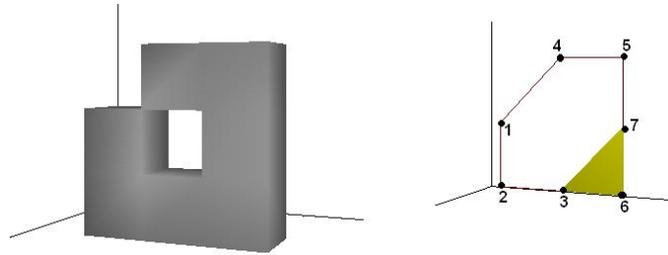


Figura 9.1: Imagen \mathcal{I} y $K(I)$.

Computamos un modelo de representación de \mathcal{I} sobre \mathbb{Z}_2 . En la siguiente tabla mostramos los resultados obtenidos:

C_I	H_I	f_I	g_I	ϕ_I
$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0
v		$\langle 1 \rangle$		$\gamma_{\langle 1 \rangle, v}$
$\langle 5, 7 \rangle$	$\langle 5, 7 \rangle$	$\langle 5, 7 \rangle$	β	0
$\langle 6, 7 \rangle$		0		$\langle 3, 6, 7 \rangle$
a		0		0
$\langle 3, 6, 7 \rangle$		0		0

donde v es un vértice distinto del vértice $\langle 1 \rangle$, $\gamma_{\langle 1 \rangle, v}$ es un camino entre los vértices $\langle 1 \rangle$ y v , por ejemplo $\gamma_{\langle 1 \rangle, 7} = \langle 1, 2 \rangle + \langle 2, 3 \rangle + \langle 3, 7 \rangle$, $\beta = \langle 1, 2 \rangle + \langle 2, 3 \rangle + \langle 3, 7 \rangle + \langle 5, 7 \rangle + \langle 4, 5 \rangle + \langle 1, 4 \rangle$ y a es una arista distinta de $\langle 5, 7 \rangle$ y $\langle 6, 7 \rangle$.

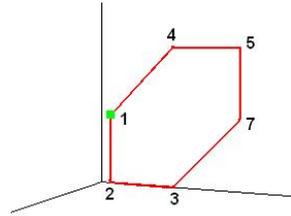


Figura 9.2: En verde el 0-ciclo y en rojo el 1-ciclo.

Como $H_I = \{\langle 1 \rangle, \langle 5, 7 \rangle\}$, por el teorema 9.1, una base de cociclos representativos de generadores de cohomología es $G^* = \{\langle 1 \rangle^* f_I, \langle 5, 7 \rangle^* f_I\}$:

- $\langle 1 \rangle^* f_I(v) = \langle 1 \rangle^*(\langle 1 \rangle) = 1$ para todo v vértice de $K(I)$ y $\langle 1 \rangle^* f_I = 0$ para el resto de símlices. Luego,

$$\langle 1 \rangle^* f_I = \langle 1 \rangle^* + \langle 2 \rangle^* + \langle 3 \rangle^* + \langle 4 \rangle^* + \langle 5 \rangle^* + \langle 6 \rangle^* + \langle 7 \rangle^*.$$

- $\langle 5, 7 \rangle^* f_I(\langle 5, 7 \rangle) = 1$ y $\langle 5, 7 \rangle^* f_I = 0$ para el resto de símlices. Luego,

$$\langle 5, 7 \rangle^* f_I = \langle 5, 7 \rangle^*.$$

Por tanto $G^* = \{\langle 1 \rangle^* + \langle 2 \rangle^* + \langle 3 \rangle^* + \langle 4 \rangle^* + \langle 5 \rangle^* + \langle 6 \rangle^* + \langle 7 \rangle^*, \langle 5, 7 \rangle^*\}$. En la figura 9.3 se muestran dichos cociclos.

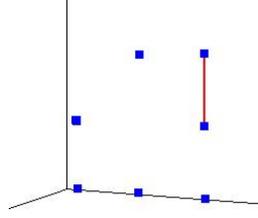


Figura 9.3: Cociclos representativos.

9.2 Computación de un nuevo invariante topológico: $HB1$

Una vez visto cómo obtener información cohomológica a partir de un modelo de representación, nuestro objetivo en esta sección es computar el invariante topológico, de carácter cohomológico, $HB1(I)$.

Sea \mathcal{I} una imagen digital, $K(I)$ su representación simplicial asociada y $ATM_I = (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ un modelo de representación de \mathcal{I} . Ya sabemos que

$$H^q(\mathcal{I}, \Lambda) := H^q(\mathcal{C}(K(I)), \Lambda) \simeq \mathcal{H}_I^q, \quad q \geq 0.$$

En primer lugar, vamos a dotar al complejo de cocadenas \mathcal{H}_I^* de estructura de álgebra. Recordemos que \mathcal{H}_I^* es un complejo de cocadenas con codiferencial nula y el grupo de q -cocadenas de \mathcal{H}_I^* es el conjunto de homomorfismos de \mathcal{H}_q en Λ , para cada $q \geq 0$. Definimos en \mathcal{H}_I^* un producto que, por abuso de notación, lo denotamos de la misma forma que el cup producto definido sobre $H^*(\mathcal{I}; \Lambda)$:

$$\begin{aligned} \smile : \mathcal{H}_I^p \times \mathcal{H}_I^q &\longrightarrow \mathcal{H}_I^{p+q} \\ (\alpha^*, \beta^*) &\longrightarrow \alpha^* \smile \beta^* \end{aligned}$$

$$(\alpha^* \smile \beta^*)(\gamma) := (\alpha^* f_I \smile \beta^* f_I)(g_I \gamma),$$

siendo $\alpha^* \in H_I^p$ (base del grupo de p -cocadenas \mathcal{H}_I^p), $\beta^* \in H_I^q$ (base del grupo de q -cocadenas \mathcal{H}_I^q) y $\gamma \in (H_I)_{p+q}$, es decir, un elemento de H_I de dimensión $p+q$. Dicho producto se puede extender linealmente al resto de elementos de \mathcal{H}_I^p , \mathcal{H}_I^q y \mathcal{H}_{p+1} . Veamos que está bien definido: $\alpha^* \in H_I^p$, luego α^* es un homomorfismo de $(\mathcal{H}_I)_p$ en Λ . Por otra parte, f_I en dimensión q es un homomorfismo de $\mathcal{C}_q(K(I))$ en $(\mathcal{H}_I)_q$, luego $\alpha^* f_I$

es un homomorfismo de $\mathcal{C}_q(K(I))$ en Λ , es decir, $\alpha^* f_I \in \mathcal{C}^q(K(I))$. Además, sabemos que como α^* es un q -cociclo de \mathcal{H}_I^* , $\alpha^* f_I$ es un q -cociclo de $\mathcal{C}^*(K(I))$. Por tanto, $[\alpha^* f_I] \in \mathcal{H}^p(\mathcal{I}, \Lambda)$. De la misma forma se prueba que $[\beta^* f_I] \in \mathcal{H}^q(\mathcal{I}, \Lambda)$. Aplicando el cup producto sobre la cohomología de \mathcal{I} , se tiene que $[\alpha^* f_I] \smile [\beta^* f_I] = [\alpha^* f_I \smile \beta^* f_I]$ y por tanto, $\alpha^* f_I \smile \beta^* f_I \in \text{Hom}(\mathcal{C}_{p+q}(K(I)), \Lambda)$. Por otra parte, como $\gamma \in H_{p+q}$, $g_I(\gamma) \in \mathcal{C}_{p+q}(K(I))$, con lo cual queda demostrado que el producto anterior está bien definido.

Una vez definido el producto en \mathcal{H}_I^* , damos un algoritmo que lo computa:

Algoritmo 25 *Producto en \mathcal{H}^* .*

ENTRADA: Los conjuntos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ de elementos de H_I de dimensiones 1 y 2, respectivamente.

Inicialmente $CUP := \{\}$.

Para $i = 1$ hasta $i = r$ hacer,

 Para $j = i$ hasta $j = r$, hacer

$$cup_{i,j} := \sum_{k=1}^s (\alpha_i^* f_I \smile \alpha_j^* f_I)(g_I \beta_k).$$

$$CUP := CUP \cup \{cup_{i,j}\}.$$

SALIDA: El conjunto CUP .

COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO: $\mathcal{O}(r^3 sm^3)$, donde r y s son los números de 1-ciclos y 2-ciclos, respectivamente y m es el número de simplices de $K(I)$.

Una vez dado este algoritmo, pasamos a explicar cómo definimos el nuevo invariante $HB1(I)$.

Sean \mathcal{I} y \mathcal{J} dos imágenes digitales binarias 3D con la misma homología y $K(I)$ y $K(J)$ las representaciones simpliciales asociadas a \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente. Computamos modelos de representación $ATM_I = (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ y $ATM_J = (C_J, H_J, f_J, g_J, \phi_J)$ de dichas imágenes. Denotamos por $H_{I_1} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $H_{I_2} = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ los elementos de H_I de dimensiones 1 y 2, respectivamente. Y denotamos por $H_{J_1} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ y $H_{J_2} = \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ los elementos de S_J de dimensiones 1 y 2, respectivamente. Observar que, como hemos supuesto que ambas imágenes tienen la misma homología, el número de elementos de H_{I_1} y H_{J_1} coinciden, así como el número de elementos de H_{I_2} y H_{J_2} . A partir de dichos conjuntos, construimos las bases correspondientes de los grupos de cohomología.

La pregunta que nos hacemos ahora es la siguiente:

¿Existe un isomorfismo $\psi : \mathcal{H}_I^* \rightarrow \mathcal{H}_J^*$ que respete el producto?

Es decir, un isomorfismo ψ entre los grupos de cohomología de \mathcal{I} y \mathcal{J} tal que,

$$\psi(\alpha_i^* \smile \alpha_j^*) = \psi(\alpha_i^*) \smile \psi(\alpha_j^*), \quad i, j = 1, \dots, r.$$

La idea es la siguiente:

- Si no existe tal isomorfismo, $K(I)$ y $K(J)$ no son homotópicos (en particular, no homeomorfos), lo cual implica que \mathcal{I} y \mathcal{J} no son imágenes isomorfas (a pesar de tener los mismos grupos de homología).
- Si existe tal isomorfismo, puede que $K(I)$ y $K(J)$ sean homotópicos y que, por tanto, \mathcal{I} y \mathcal{J} sean imágenes isomorfas.

Ahora bien, probar si existe o no dicho isomorfismo, como es ya sabido, es una tarea bastante difícil. Entonces, nosotros procedemos de la siguiente forma. En primer lugar, aplicamos el algoritmo 25 a los conjuntos H_{I_i} y H_{J_i} , $i = 1, 2$ y ponemos la información obtenida en forma matricial:

$$\begin{array}{c|ccccccc} \mathcal{M}_I & \alpha_1^* \smile \alpha_1^* & \cdots & \alpha_1^* \smile \alpha_r^* & \cdots & \alpha_2^* \smile \alpha_r^* & \cdots & \alpha_r^* \smile \alpha_r^* \\ \hline \beta_1^* & \lambda_{11,1} & \cdots & \lambda_{1r,1} & \cdots & \lambda_{2r,1} & \cdots & \lambda_{rr,1} \\ \vdots & & & & & & & \\ \beta_k^* & \lambda_{11,k} & \cdots & \lambda_{1r,k} & \cdots & \lambda_{2r,k} & \cdots & \lambda_{rr,k} \\ \hline \mathcal{M}_J & \gamma_1^* \smile \gamma_1^* & \cdots & \gamma_1^* \smile \gamma_r^* & \cdots & \gamma_2^* \smile \gamma_r^* & \cdots & \gamma_r^* \smile \gamma_r^* \\ \hline \theta_1^* & \lambda'_{11,1} & \cdots & \lambda'_{1r,1} & \cdots & \lambda'_{2r,1} & \cdots & \lambda'_{rr,1} \\ \vdots & & & & & & & \\ \theta_k^* & \lambda'_{11,k} & \cdots & \lambda'_{1r,k} & \cdots & \lambda'_{2r,k} & \cdots & \lambda'_{rr,k} \end{array}$$

donde $\lambda_{ij,t}$ denota al coeficiente de β_t^* en la expresión del producto $\alpha_i^* \smile \alpha_j^*$. Análogamente, $\lambda'_{ij,t}$ denota el coeficiente de θ_t^* en la expresión del producto $\gamma_i^* \smile \gamma_j^*$. El siguiente paso es diagonalizar las matrices anteriores \mathcal{M}_I y \mathcal{M}_J y calcular sus rangos, que denotamos por R_I y R_J , respectivamente.

Como $\alpha_i^* \smile \alpha_i^* = \lambda_{ij,1}\beta_1^* + \dots + \lambda_{ij,k}\beta_k^*$, aplicando ψ en ambos miembros se tiene que $\psi(\alpha_i^* \smile \alpha_i^*) = \lambda_{ij,1}\psi(\beta_1^*) + \dots + \lambda_{ij,k}\psi(\beta_k^*)$. Entonces, el rango de \mathcal{M}_I , R_I , coincide con el rango de la siguiente matriz \mathcal{M}'_I , que denotamos por R'_I , siendo \mathcal{M}'_I la siguiente matriz:

\mathcal{M}'_I	$\psi(\alpha_1^* \smile \alpha_1^*)$	\cdots	$\psi(\alpha_1^* \smile \alpha_r^*)$	\cdots	$\psi(\alpha_2^* \smile \alpha_r^*)$	\cdots	$\psi(\alpha_r^* \smile \alpha_r^*)$
$\psi(\beta_1^*)$	$\lambda_{11,1}$	\cdots	$\lambda_{1r,1}$	\cdots	$\lambda_{2r,1}$	\cdots	$\lambda_{rr,1}$
\vdots							
$\psi(\beta_k^*)$	$\lambda_{11,k}$	\cdots	$\lambda_{1r,k}$	\cdots	$\lambda_{2r,k}$	\cdots	$\lambda_{rr,k}$

Entonces, si el isomorfismo ψ respeta el producto, se debe dar la siguiente igualdad:

$$R_I = R'_I = R_J$$

En conclusión,

Si $R_I \neq R_J$, \mathcal{I} y \mathcal{J} no son isomorfas.

Damos por tanto la siguiente definición:

Definición 9.1 Dado una imagen digital binaria 3D \mathcal{I} cuyo modelo de representación es $ATM_I = (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$, el rango de la matriz del producto \smile definido sobre \mathcal{H}_I^* , define un invariante topológico de \mathcal{I} , que denotamos por $HB1(I)$.

A continuación, recopilamos todas la información explicada hasta el momento, mostrando un algoritmo para computar dicho invariante:

Algoritmo 26 $HB1(\mathcal{I})$.

ENTRADA: Una imagen digital binaria 3D \mathcal{I} .

Paso 1: Computar un modelo de representacion $ATM_I = (C_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ de \mathcal{I} .

Paso 2: $H_{I_i} :=$ elementos de H_I de dimension i , $i = 1, 2$.

Paso 3: Aplicar algoritmo 25 a H_{I_i} , $i = 1, 2$.

Paso 4: Poner la informacion obtenida en el paso anterior.
en forma matricial, \mathcal{M}_I .

Paso 5: Diagonalizar \mathcal{M}_I .

Paso 6: $HB1(I) :=$ rango de la matriz del paso anterior.

SALIDA: $HB1(I)$.

Para la realización del siguiente ejemplo, recurrimos al software VOXELO. Por tanto, los resultados que obtenemos son trabajando en el cuerpo \mathbb{Z}_2 .

Ejemplo 9.2 Consideramos las imágenes digitales binarias 3D \mathcal{I} y \mathcal{J} dadas en la figura 4.4. Ambas imágenes tienen 1 componente conexa, 4 túneles y 3 cavidades, es decir,

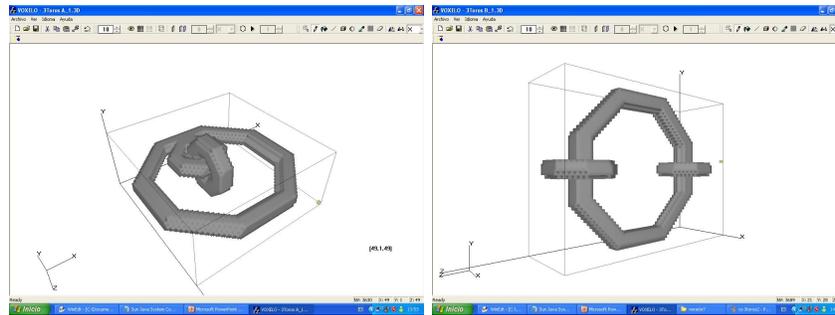


Figura 9.4: Imágenes \mathcal{I} y \mathcal{J} .

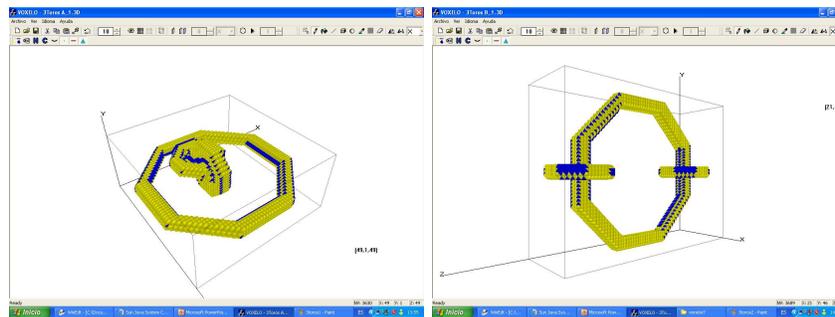


Figura 9.5: Representaciones simpliciales $K(I)$ y $K(J)$.

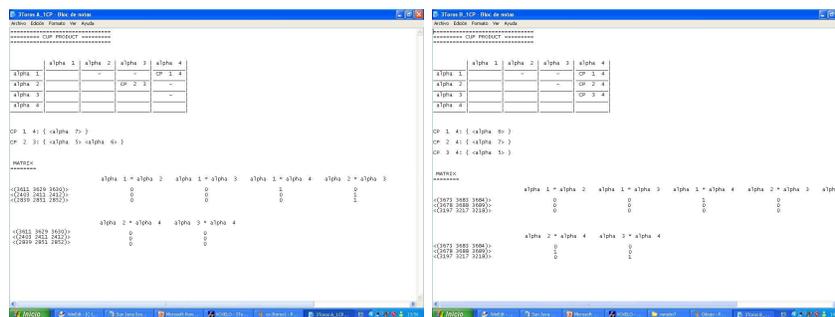


Figura 9.6: Tablas de multiplicación para \mathcal{I} y \mathcal{J} .

tienen grupos de homología isomorfos. Denotamos por $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ y $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ los cuatro túneles de \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente. Denotamos por $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ las tres cavidades de \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente. Las tablas de multiplicación del cup producto obtenidas con VOXELO son:

\mathcal{M}_I	$\alpha_1^* \smile \alpha_2^*$	$\alpha_1^* \smile \alpha_3^*$	$\alpha_1^* \smile \alpha_4^*$	$\alpha_2^* \smile \alpha_3^*$	$\alpha_2^* \smile \alpha_4^*$	$\alpha_3^* \smile \alpha_4^*$
β_1^*	0	0	1	0	0	0
β_2^*	0	0	0	1	0	0
β_3^*	0	0	0	1	0	0

\mathcal{M}_J	$\gamma_1^* \smile \gamma_2^*$	$\gamma_1^* \smile \gamma_3^*$	$\gamma_1^* \smile \gamma_4^*$	$\gamma_2^* \smile \gamma_3^*$	$\gamma_2^* \smile \gamma_4^*$	$\gamma_3^* \smile \gamma_4^*$
θ_1^*	0	0	1	0	0	0
θ_2^*	0	0	0	0	1	0
θ_3^*	0	0	0	0	0	1

Entonces, el rango de \mathcal{M}_I es $R_I = 2$ y el rango de \mathcal{M}_J es $R_J = 3$. Luego, $HB1(I) = 2$ y $HB1(J) = 3$ y consecuentemente, podemos asegurar que \mathcal{I} y \mathcal{J} no son isomorfas.

Terminamos este capítulo confirmando que, en realidad, invariantes topológicos más complicados que el $HB1(I)$ se pueden derivar del anillo de cohomología. El invariante $HB1(I)$ puede ser obtenido a partir del primer grupo de homología de la *construcción bar reducida* [MacL] asociada a un complejo de cocadenas. Entonces, nosotros intuimos que el resto de grupos de homología de este último objeto algebraico nos puede llevar a obtener invariantes cohomológicos más complicados en imágenes digitales. En un futuro, pretendemos abordar esta cuestión.

Parte III

Aplicaciones

Introducción:

En esta última parte queremos mostrar dos aplicaciones de nuestros modelos de representación. Una primera aplicación relacionada con los conocidos Grafo de Reeb, construyendo un nuevo grafo asociado a una imagen digital binaria $3D$, con mejores propiedades que los anteriores. Y una segunda aplicación al campo de la medicina, concretamente al problema de la osteoporosis, viendo que nuestros modelos constituyen una herramienta muy útil para medir el grado de “porosidad” de ciertas imágenes médicas, en términos del número, posición, tamaño y orientación de los túneles existentes en las mismas.

Capítulo 10

Estructura de grafo de Reeb con lazos

Los grafos de Reeb [R46] han sido muy usados en el pasado para modelar y visualizar ciertas aplicaciones. Sea X un espacio topológico y $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Un *conjunto nivel* es la preimagen de un valor constante, $h^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. A una componente conexa de un conjunto nivel se le llamamos *contorno*. Dos puntos $x, y \in X$ son equivalentes, $x \sim y$, si pertenecen al mismo contorno, es decir, $h(x) = h(y)$ y están conectados por un camino en X . El *grafo de Reeb*, $R_h(X)$, se define como el espacio cociente con esta relación de equivalencia. Observar que, por construcción, el grafo de Reeb tiene un punto por cada contorno y la conexión entre los puntos viene dada por la aplicación $\psi : X \rightarrow R_h(X)$, que asocia cada punto x con su clase de equivalencia. Se verifican dos importantes propiedades: (1). un agujero en X que se aplica (por ψ) a un agujero en $R_h(X)$ no es contráctil y (2). dos agujeros en X que se aplican a diferentes agujeros en $R_h(X)$ no son homólogos. El número de componentes conexas de X se preserva, mientras que el número de agujeros no puede aumentar. Es decir

$$\beta_0(X) = \beta_0(R_h(X)) \text{ y } \beta_1(X) \leq \beta_1(R_h(X))$$

En [?], los autores adaptan los conceptos desarrollados para superficies continuas al caso discreto, introduciendo una representación de grafo de Reeb extendido, basada en la computación de un número suficientemente denso de líneas de contorno y en la definición de grafo de Reeb a partir de conjuntos contorno. Tal construcción no es, actualmente, una extensión del grafo de Reeb, sino más bien una aplicación del grafo de Reeb al dominio discreto. En [CEHNP04], los autores dan cotas superiores e inferiores del número de túneles en el grafo de Reeb, los cuales dependen del género, del número de componentes

borde y de si la superficie es orientable o no.

En [GJMR07c], nosotros presentamos un trabajo relacionando la teoría de grafos de Reeb con nuestros modelos de representación, en concreto, con el modelo AT. Partiendo de una imagen digital binaria $3D$, \mathcal{I} , $K(I)$ su representación simplicial asociada, $|K(I)|$ una realización geométrica de dicho complejo simplicial y $h : |K(I)| \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que a cada punto de $|K(I)|$ le asocia su elevación. Nuestro objetivo en dicho trabajo es computar un grafo $G_h(K(I))$ y una función $\psi : G_h(K(I)) \rightarrow K(I)$ verificando las siguientes propiedades:

1. $G_h(K(I))$ tiene el mismo número de componentes conexas y túneles que $K(I)$.
2. Cada lazo en $G_h(K(I))$ (arista tal que sus vértices finales coinciden) se aplica en un ciclo c no contráctil de $K(I)$ tal que $|c|$ (realización geométrica de c) se encuentra en el contorno de $K(I)$.
3. Dos lazos en $G_h(K(I))$ se aplican a dos ciclos no homólogos de $K(I)$.
4. Cada arista en $G_h(K(I))$ se aplica a un camino de $K(I)$.
5. Si no consideramos los lazos en $G_h(K(I))$, entonces dicho grafo es una subdivisión del grafo de Reeb $R_h(K(I))$.

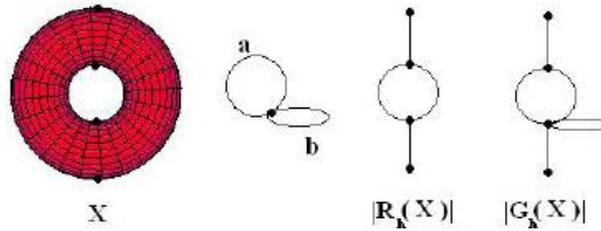


Figura 10.1: De izquierda de derecha; el toro T , ciclos representativos de los dos túneles de T , una realización geométrica del grafo de Reeb $R_h(T)$ y una realización geométrica del grafo con lazos $G_h(T)$.

Así, $G_h(K(I))$ puede ser visto como una extensión de $R_h(K(I))$ tal que, no sólo el número de componentes conexas y túneles de $K(I)$ y $G_h(K(I))$ coinciden (hecho que no ocurre, en general, para $R_h(K(I))$), sino que existe una identificación biunívoca entre los túneles de $G_h(K(I))$ y de $K(I)$. Dicha identificación se tiene en el sentido de que, si e es

un lazo de $G_h(K(I))$, $\psi(e)$ es un ciclo de $K(I)$ tal que todos los puntos de $|\psi(e)|$ tienen la misma altura.

Antes de pasar a ver cómo computar nuestro grafo $G_h(K)$, damos algunas definiciones y propiedades:

Definición 10.1 Dado K un complejo simplicial, un árbol recubridor T sobre K es un complejo simplicial de dimensión 1 sin ciclos tal que los vértices de T son todos los vértices de K y las aristas de T son un subconjunto de aristas de K . Además, dos vértices cualesquiera de K están conectados por un único camino en T si y sólo si ellos están en la misma componente conexa de K . Denotaremos a un árbol recubridor de K por $T = (V, E)$, donde V denota el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas.

Definición 10.2 Sea $T = (V, E)$ un árbol recubridor sobre K . Un conjunto de símlices de K , $S_K = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, es un T -filtro de K si es una ordenación de todos los símlices de K tal que:

- para cada j ($1 \leq j \leq m$), $\{\sigma_1, \dots, \sigma_j\}$ es un subcomplejo de K ;
- si $i < j$, la dimensión de σ_i es menor o igual que la dimensión de σ_j ;
- si $i < j$, σ_i y σ_j son aristas y $\sigma_j \in T_K$, entonces $\sigma_i \in T_K$.

Ejemplo 10.1 Consideramos el complejo simplicial K de la figura 10.2. Sea $T = (V, E)$, donde $E = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, un árbol recubridor para K .

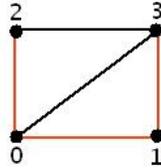


Figura 10.2: En rojo, aristas de un árbol recubridor T .

Entonces, es fácil probar que el conjunto

$$S = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 0, 3 \rangle\}$$

es un T -filtro de K . Sin embargo, el conjunto

$$S' = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

no es un T -filtro ya que $\langle 1, 3 \rangle \in T$ y $\langle 0, 3 \rangle \notin T$. Sin embargo, S' sí es un filtro de K .

Las diferencias entre un T filtro de un complejo simplicial K y un filtro de K son: (1). en el T filtro de K los símlices tienen que ir ordenados por dimensiones de menor a mayor (vértices, aristas, triángulos, etc) mientras que en un filtro no es necesario y (2). el orden de aparición de las aristas en un T filtro es importante mientras que un filtro no. Recordemos que la única condición que debe verificar un filtro $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ de un complejo simplicial K es que para todo i , $K_{i-1} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}\}$ sea un subcomplejo de $K_i = \{\sigma_1, \dots, \sigma_i\}$.

La forma más fácil de construir un T -filtro para un complejo simplicial K , es considerar primero los vértices de K , segundo las aristas de T , posteriormente las aristas de K que no estén en T y por último el resto de símlices de K ordenados por dimensión.

Ahora bien, dada una imagen digital binaria $3D$, \mathcal{I} , un árbol recubridor T de $K(I)$ y un T -filtro asociado S_I , computamos un modelo AT de \mathcal{I} , $AT_I := (S_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$, considerando la ordenación S de los símlices. Damos la siguiente proposición:

Proposición 10.1 *Sea \mathcal{I} una imagen digital binaria $3D$, T un árbol recubridor de $K(I)$, S_I un T -filtro de $K(I)$ y $AT_I = (S_I, H_I, f_I, g_I, \phi_I)$ un modelo AT de \mathcal{I} . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1. H_I es un subconjunto de S_I tal que ninguna arista de T está en H_I .
2. Si v es un vértice de $K(I)$, $\phi_I(v)$ es un camino simple en T conectando v con el vértice en H_I que pertenece a la misma componente conexa en $K(I)$ que v . En realidad, $g_I(a) \setminus \{a\}$ es un camino simple en T conectando los vértices finales de a .

Antes de demostrar la proposición anterior, recordemos algunas propiedades de los modelos AT:

- El número de vértices, aristas y triángulos de H_I es igual al número de componentes conexas, agujeros y cavidades de $|K(I)|$.
- Si c y c' son dos ciclos de $K(I)$ tales que $f_I(c) = f_I(c')$, entonces, c y c' son homólogos.
- $\{g_I(h_1), \dots, g_I(h_r), h_i \in H_I\}$ es una base de ciclos representativos de generadores de homología. Si $h, h' \in H_I$, $h \neq h'$, entonces, $g_I(h)$ y $g_I(h')$ no son homólogos.
- Si v es un vértice de $K(I)$, entonces $\phi_I(v)$ es un camino simple en $K(I)$ conectando v con el vértice de H_I que pertenece a la misma componente conexa en $K(I)$ que v .

Además, recordemos que la idea del algoritmo para computar un modelo AT era, partiendo de una ordenación de todos los símlices, añadir en cada paso un símlice σ . Entonces, si $f_I\partial(\sigma) = 0$, se crea una clase de homología representada por σ y se añadía dicho símlice al conjunto H . En caso contrario se destruye una clase de homología envuelta en la expresión de $f_I\partial(\sigma)$, eliminando de H_I el símlice correspondiente.

Demostración de la proposición 10.1:

1. Por reducción al absurdo, sea $a = \langle u, v \rangle \in T$ tal que $a \in H_I$. Entonces, por una parte, recordemos que $g_I(a) = a - \phi_I(v) + \phi_I(u)$. Por otra parte, $\phi_I(v)$ nos da un camino en $K(I)$ conectando el vértice v con el vértice de H_I que representa la componente conexas a la que pertenece a . De la misma forma se define $\phi_I(u)$. Sea $x \in H_I$ el vértice que representa dicha componente conexas. Entonces, notamos $\phi_I(u) = \gamma_{(u,x)}$ y $\phi_I(v) = \gamma_{(v,x)}$. Luego, $g_I(a) = a - \gamma_{(v,x)} + \gamma_{(u,x)}$ es un ciclo en $K(I)$ que contiene a la arista a (ver figura 10.3).

Ahora bien, todas las aristas que pertenecen a dicho ciclo, aparecen antes que la arista a en la ordenación S_I que recibe como entrada. Como $a \in T$ y S_I es un T -filtro, entonces, todas las aristas de $g_I(a)$ están en T , luego $g_I(a)$ es un ciclo en T . Esto último es una contradicción ya que T es un árbol y por tanto, no puede contener ciclos.

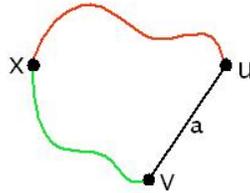


Figura 10.3: En rojo, $\gamma_{(u,x)}$ y en verde, $\gamma_{(v,x)}$.

2. Denotamos el T -filtro por $T = (V, E)$. Entonces,

$$S_I = \{V, E, K(I)^{(1)} \setminus E, K(I)^{(q)} \mid q > 1\},$$

donde $K(I)^{(t)}$ denota el conjunto de t -símlices de $K(I)$, $t \geq 1$. Al aplicar el algoritmo para computar modelos AT, los primeros símlices que se añaden son los vértices de $K(I)$ y las aristas de T . Una vez añadidos dichos símlices, se tiene que

para todo vértice $v \in K(I)$, $\phi_I(v)$ es un camino en T conectando v con el vértice x de H_I que representa la componente conexa de $K(I)$ a la que pertenece v (ya que por construcción, $\phi_I(v)$ es un camino en $K(I)$ pero hasta dicho paso, sólo tenemos aristas de T). Además, $f_I(w) = x$ para todo w vértice de dicha componente conexa. Ahora bien, $\phi_I(v)$ sólo puede cambiar si se añade una arista $a = \langle u, v \rangle$ tal que $f_I \partial(a) \neq 0$. Esto último no puede ocurrir ya que $f_I \partial(a) = f_I(v) - f_I(u) = x - x = 0$. Luego, se cumple que $\phi_I(v)$ es un camino en T conectando v con x .

Por otra parte, si $a = \langle w_1, w_2 \rangle \in H_I$, $g_I(a) = a - \phi_I(w_2) + \phi_I(w_1)$. Luego, $g_I(a) \setminus a = \phi_I(w_1) - \phi_I(w_2)$. Como $\phi_I(w_i)$ son caminos en T conectando w_i con x (siendo de nuevo x el vértice de H_I representado la componente conexa a la que pertenecen w_1 y w_2), $g_I(a) \setminus a$ es un camino en T conectando los vértices finales de a .

□

10.1 Construcción del grafo de Reeb con lazos

En esta sección vamos a mostrar detalladamente la forma de construir nuestro grafo de Reeb con lazos, dada en [GJMR07c].

Sea K un complejo simplicial de dimensión 3, $|K|$ su realización geométrica en \mathbb{R}^3 y $h : |K| \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Denotamos por e_{uv} a la arista de vértices uv e v . Decimos que la altura de un punto $p \in |K|$ es t si $h(p) = t$ y la altura de un símlice $\sigma \in K$ se define como la mínima altura de todos los puntos de $|\sigma|$.

Definición 10.3 *Sea K un complejo simplicial. Decimos que K es un h -complejo si:*

- *el conjunto de vértices de K , V , se puede partir en un número finito de subconjuntos en término de sus alturas, es decir, $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$, donde $V_i = \{v \in V : h(v) = t_i\}$ y $t_1 < \dots < t_r$.*
- *si e_{vw} es una arista en K , entonces v y w pertenecen a V_i ó $v \in V_i$ y $w \in V_{i+1}$ para algún $i = 1, \dots, r$.*

Los h -complejos aparecen de forma natural cuando se definen a partir de las relaciones de vecindad entre los vóxeles de la imagen digital y h es la función real que asocia a cada punto de $|K|$ su elevación.

Sea K un h -complejo y σ un símlice de K . Decimos que σ es un *símlice horizontal* si la altura de todos los puntos de $|\sigma|$ coinciden. En caso contrario, decimos que es un *símlice vertical*.

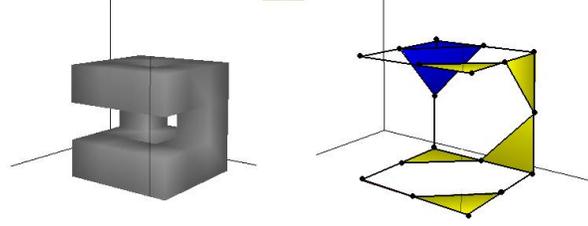


Figura 10.4: Imagen digital \mathcal{I} y un h -complejo asociado considerando la 14-adyacencia.

Pasamos a dar detalladamente los pasos previos a realizar para construir el grafo:

Paso 1: Para $i = 1, \dots, r$, construimos el subcomplejo de K , K_i , formado por todas los simplices horizontales de K con la misma altura t_i . Si una celda no está en K_i , para ningún i , entonces dicha celda es vertical.

Paso 2: Construimos árboles recubridores $T_i = (V_i, E_i)$ para cada uno de los complejos obtenidos en el paso anterior y T_i -filtros S_{K_i} , para cada K_i , $i = 1, \dots, r$.

Paso 3: Computamos modelos AT $ATM_{K_i} := (S_{K_i}, H_{K_i}, f_{K_i}, g_{K_i}, \phi_{K_i})$ para cada K_i , $i = 1, \dots, r$.

Paso 4: Construimos un árbol recubridor $T = (V, E)$ para el complejo K , añadiendo aristas verticales de K , en orden creciente respecto a la altura, al grafo $(V, \bigcup_{i=1}^r E_i)$. Y S_K , un T -filtro de K .

Paso 5: Computamos un modelo AT para K , $AT_K := (S_K, H_K, f_K, g_K, \phi_K)$.

Ahora, explicamos cómo construir el grafo $G_h(K)$ y la función $\psi : G_h(K) \rightarrow K$ usando los modelos AT $(S_{K_i}, H_{K_i}, f_{K_i}, g_{K_i}, \phi_{K_i})$, $i = 1, \dots, r$ y $(S_K, H_K, f_K, g_K, \phi_K)$ computados en los pasos anteriores.

1. Los vértices de $G_h(K)$ en cada nivel i son los vértices de H_{K_i} , $i = 1, \dots, r$. Si v es un vértice de $G_h(K)$, entonces $\psi(v) = v$.
2. Para cada nivel i , por cada arista (horizontal) $a \in H_{K_i} \cap H_K$, añadimos un lazo α a $G_h(K)$, cuyo vértice es el vértice del nivel i de $G_h(K)$ que se encuentra en la misma componente conexa que $|a|$ en $|K_i|$. Se define $\psi(\alpha) = g_i(a) = g(a)$.
3. Por cada arista vertical e_{vw} en H_K , añadimos a $G_h(K)$ una arista b . Como e_{vw} es vertical, $v \in H_{K_i}$ y $w \in H_{K_{i+1}}$, para algún i . Los vértices finales de b son los vértices de $G_h(K)$ que pertenecen a la misma componente conexa que v en K_i y w en K_{i+1} , respectivamente. Definimos $\psi(b) := e_{vw} + \phi_i(v) + \phi_{i+1}(w)$.

4. Añadimos una arista e_{xy} entre dos vértices x e y de $G_h(K)$ si $x \in H_{K_i}$ e $y \in H_{K_{i+1}}$ para algún i , $f(x) = f(y) = z \in H$ y no existe ninguna arista conectando dichos vértices (es decir, x e y pertenecen a la misma componente conexa en K). Se define $\psi(e_{xy}) = \phi(x) + \phi(y)$ (el camino simple en T conectando los vértices x e y).

Entonces, se verifica el siguiente teorema:

Teorema 10.1 *Dado un complejo simplicial K y una función elevación de $|K|$, h . Si K es un h -complejo, entonces:*

1. El grafo $G_h(K)$ y K tienen el mismo número de agujeros y componentes conexas.
2. Para cada lazo α de $G_h(K)$, $\psi(\alpha)$ es un ciclo representativo de un generador de homología de K . Si α_1 y α_2 son dos lazos distintos en $G_h(K)$, entonces $\psi(\alpha_1)$ y $\psi(\alpha_2)$ son dos ciclos representativos de dos generadores de homología no equivalentes.
3. Para cada arista vertical e_{xy} en $G_h(K)$, procedente de una arista vertical $e_{vw} \in H$, entonces $\psi(e_{xy}) + \phi(x) + \phi(y) = g(e_{xy})$ es un ciclo representativo de un generador de homología de K .
4. El grafo $G_h(K)$ sin lazos es una subdivisión del grafo de Reeb $R_h(K)$ asociado a la función elevación h de $|K|$.
5. El grafo $G_h(K)$ y la función ψ pueden ser computadas en $\mathcal{O}(m^3)$, siendo m el número de símlices de K .

Demostración: El número de agujeros de K es el número de aristas de H . Por construcción, por cada arista horizontal en H tenemos un lazo en $G_h(K)$ (es decir, un agujero en $G_h(K)$). Por otra parte, cada arista vertical $e_{vw} \in H$ produce una arista vertical b en $G_h(K)$. Sea $v \in K_i$ y $w \in K_{i+1}$ y denotamos por V y W los vértices de $G_h(K)$ que pertenecen a la misma componente conexa que v y w , respectivamente. Como $e_{vw} \in H$, la arista e_{vw} creó un ciclo cuando ésta fue añadida en el algoritmo (recordar la idea del algoritmo para computar un modelo de representación). Por lo tanto, v y w pertenecen a la misma componente conexa en K . Entonces, existe un camino p entre V y W en $G_h(K)$, aparte de la arista b , que produce e_{vw} , por construcción. Entonces, $p + b$ es un ciclo en $G_h(K)$. Además, $\psi(p + b) = g(b)$ es un ciclo representativo en K . \square

Ejemplo 10.2 *Consideramos la imagen digital 3D, \mathcal{I} , de la figura 10.4 y su representación simplicial asociada. En este caso, tenemos tres subcomplejos de $K(\mathcal{I})$: K_1 , K_2 y K_3 . y denotamos por T_i , $i = 1, 2, 3$, los árboles recubridores para cada subcomplejo. Denotamos por T el árbol recubridor de $K(\mathcal{I})$, construido como se explicó anteriormente (ver*

figura ?). Entonces, definimos los T_i -filtros S_i , $i = 1, 2, 3$ y el T -filtro S , de la siguiente forma:

- $S_1 = \{ \text{vértices de } K_1, \text{ aristas de } T_1, \langle 5, 6 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 1, 2, 4 \rangle, \langle 3, 5, 6 \rangle \}$.
- $S_2 = \{ \langle a \rangle, \langle b \rangle \}$.
- $S_3 = S_1$ (cambiando la notación de los vértices).
- $S = \{ \text{aristas de } T_1, \text{ aristas de } T_3, \langle a, 0 \rangle, \langle a', 0 \rangle, \text{ resto de aristas, triángulos y tetraedros} \}$.

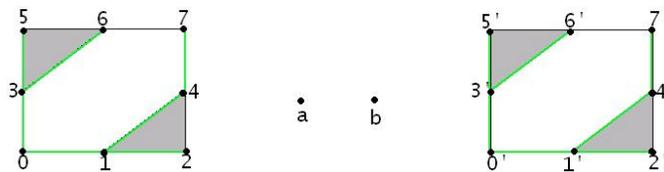


Figura 10.5: De izquierda a derecha, K_1 , K_2 y K_3 . En verde, las aristas de T_i , $i = 1, 2, 3$.

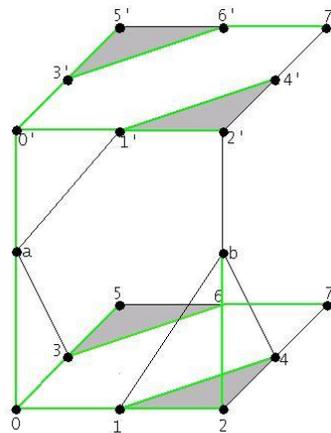


Figura 10.6: Representación simplicial $K(I)$. En verde, las aristas de T .

El siguiente paso es, computar modelos de representación para K_i , $i = 1, 2, 3$ y $K(I)$ (trabajamos en \mathbb{Z}_2). Para entender mejor el ejemplo, en las tablas que se dan a continuación, sólo se van a mostrar las imágenes de los morfismos g_i , $i = 1, 2, 3$ y del morfismo g y las imágenes de ϕ_i , $i = 1, 2, 3$ y ϕ para los vértices (en realidad, el morfismo f no interviene en la construcción del grafo).

S_1	H_1	g_1	ϕ_1
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle w \rangle$			$\gamma_{(\langle w \rangle, \langle 0 \rangle)}^{T_1}$
$\langle 4, 7 \rangle$	$\langle 4, 7 \rangle$	β	0

donde w es cualquier vértice distinto de $\langle 0 \rangle$, $\gamma_{(\langle w \rangle, \langle 0 \rangle)}^{T_1}$ es un camino en T_1 uniendo los vértices $\langle w \rangle$ y $\langle 0 \rangle$, por ejemplo $\gamma_{(\langle 6 \rangle, \langle 0 \rangle)}^{T_1} = \langle 0, 3 \rangle + \langle 3, 6 \rangle$ y $\beta = \langle 0, 3 \rangle + \langle 3, 6 \rangle + \langle 6, 7 \rangle + \langle 4, 7 \rangle + \langle 1, 4 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$.

S_2	H_2	g_2	ϕ_2
$\langle a \rangle$	$\langle a \rangle$	$\langle a \rangle$	0
$\langle b \rangle$	$\langle b \rangle$	$\langle b \rangle$	0

S_3	H_3	g_3	ϕ_3
$\langle 0' \rangle$	$\langle 0' \rangle$	$\langle 0' \rangle$	0
$\langle w' \rangle$			$\gamma_{(\langle w' \rangle, \langle 0' \rangle)}^{T_3}$
$\langle 4', 7' \rangle$	$\langle 4', 7' \rangle$	β'	0

donde w' es cualquier vértice distinto de $\langle 0' \rangle$, $\gamma_{(\langle w' \rangle, \langle 0' \rangle)}^{T_3}$ es un camino en T_3 uniendo los vértices $\langle w' \rangle$ y $\langle 0' \rangle$, por ejemplo $\gamma_{(\langle 6' \rangle, \langle 0' \rangle)}^{T_3} = \langle 0', 3' \rangle + \langle 3', 6' \rangle$ y $\beta' = \langle 0', 3' \rangle + \langle 3', 6' \rangle + \langle 6', 7' \rangle + \langle 4', 7' \rangle + \langle 1', 4' \rangle + \langle 0', 1' \rangle$.

S	H	g	ϕ
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	0
$\langle w \rangle$			$\gamma_{(\langle w \rangle, \langle 0 \rangle)}^T$
$\langle 4, 7 \rangle$	$\langle 4, 7 \rangle$	β	0
$\langle 4', 7' \rangle$	$\langle 4', 7' \rangle$	β'	0
$\langle b, 2' \rangle$	$\langle b, 2' \rangle$	θ	0

donde w es cualquier vértice distinto de $\langle 0 \rangle$, $\gamma_{(\langle w \rangle, \langle 0 \rangle)}^T$ es un camino en T uniendo los vértices $\langle w \rangle$ y $\langle 0 \rangle$, por ejemplo $\gamma_{(\langle 6' \rangle, \langle 0 \rangle)}^T = \langle a, 0 \rangle + \langle a, 0' \rangle + \langle 0', 3' \rangle + \langle 3', 6' \rangle$ y $\theta = \langle b, 2' \rangle + \langle b, 2 \rangle + \langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 1 \rangle + \langle a, 0 \rangle + \langle a, 0' \rangle + \langle 0', 1' \rangle + \langle 1', 2' \rangle$.

Una vez computado los modelos de representación, pasamos a construir el grafo $G_h(K(I))$ (ver figura 10.8):

- Por cada vértice de H_i , $i = 1, 2, 3$, añadimos un vértice al grafo, luego tenemos que añadir cuatro vértices, correspondientes a los vértices $\langle 0 \rangle$, $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ y $\langle 0' \rangle$ (los denotamos por A , B , C y D).

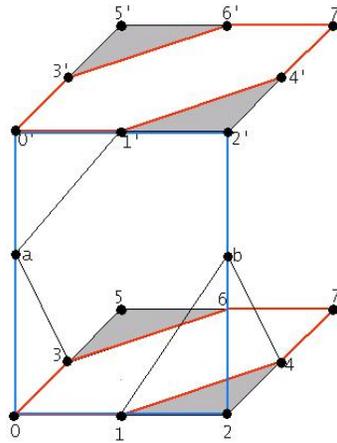


Figura 10.7: En rojo, ciclos horizontales β y β' ; en azul, ciclo vertical θ .

- Por cada arista horizontal de $H_i \cap H$, $i = 1, 2, 3$, añadimos un lazo, luego añadimos un lazo α con vértice A y un lazo α' con vértice B , correspondientes a las aristas $\langle 4, 7 \rangle$ y $\langle 4', 7' \rangle$ de H_1 y H_3 , respectivamente.
- Añadimos una arista vertical, uniendo los vértices C y D , correspondiente a la arista vertical de H , $\langle b, 2' \rangle$.
- Por último, añadimos aristas verticales e_{AB} , e_{AC} y e_{BD} .

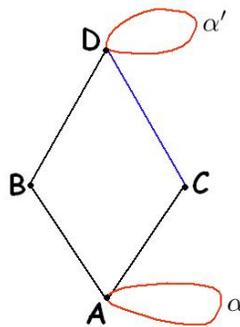


Figura 10.8: Grafo de Reeb.

En la siguiente tabla, mostramos las imágenes de la aplicación $\psi : G_h(K(I)) \rightarrow K(I)$:

$G_h(K(I))$	ψ
A	(0)
B	(a)
C	(b)
D	$(0')$
AB	$(0a)$
BD	$(0'a)$
CD	$(2'b) + \phi_{K_2}(b) + \phi_{K_3}(2') = \theta$
α	β
α'	β'

Luego, hemos construido un grafo $G_h(K(I))$ y una aplicación ψ identificando los agujeros en dicho grafo con los agujeros en $K(I)$.

Capítulo 11

Una aplicación a la medicina: osteoporosis

Multitud de imágenes digitales $3D$ de estructuras internas humanas, generadas por un elenco variado de instrumentación de imagen, se usan rutinariamente en el día a día en el cuidado al paciente. Sin lugar a dudas, los avances en el procesamiento y análisis de estas imágenes, tanto en la forma clásica bidimensional secuencia-a-secuencia como en forma volumétrica directa $3D$ hacen mejorar a ritmo vertiginoso la investigación médica actual. Un área del análisis de volúmenes digitales aún no completamente desarrollada todavía es el de la Topología. Obtener una completa caracterización topológica de estructuras $3D$ y $4D$ es un problema mayor en Imagen Médica actualmente. Por complejidad topológica se entiende el número, tamaño, posición y posición relativa de las distintas características topológicas globales (fundamentalmente en $3D$, hablamos de componentes conexas, túneles y cavidades) existentes en el volumen. Multitud de trabajos médico-matemáticos se han realizado para cuantificar aspectos topológicos de imágenes $3D$ de vasos sanguíneos o partes óseas trabeculares, sin que haya todavía consenso, no ya sobre la mejor forma de representar lo que debe ser la complejidad topológica de la imagen en cuestión, sino fundamentalmente sobre cómo definir geoméricamente sin ambigüedades algunos descriptores topológicos globales de la misma como, por ejemplo, el caso de los túneles. Tanto es así, que la mayoría de las técnicas empleadas con éxito para el análisis de la “topología” de la imagen $3D$ médica (adecuadamente binarizada) se basan exclusivamente en el análisis combinatorio y clasificación topológica local a nivel de vóxel en imágenes adelgazadas [IM04], [IM00].

El motivo de introducir un capítulo relacionado con el campo de la medicina en esta

tesis se debe a que, nuestros modelos representación pueden constituir una herramienta útil para la realización de tareas de análisis, reconocimiento y reconstrucción de las imágenes, permitiendo, por ejemplo, medir el grado de “porosidad” de ciertas imágenes médicas en términos fundamentalmente del número, posición, tamaño y orientación de túneles existentes en la misma. Ya sabemos que el dato fundamental en nuestro esquema de representación es un dato fundamentalmente algebraico y no puramente combinatorio. Desde una perspectiva algebraica, las componentes conexas, túneles y cavidades se describen formalmente como los elementos de los primeros grupos de homología del volumen (clases representando los diferentes ciclos cero, uno y dos dimensionales del volumen). Los algoritmos de cálculo de estos grupos para objetos topológicos genéricos, basados fundamentalmente en técnicas del Álgebra Lineal, no parecen adecuados para dar una respuesta positiva al problema del cálculo topológico en el Volumen Digital. La dificultad está en que en el área gráfica no nos es suficiente calcular el objeto algebraico, sino que necesitamos visualizarlo y manipularlo también geoméricamente. Además, el concepto algebraico no se corresponde exactamente con nuestra primera apreciación intuitiva de lo que debería ser un túnel. Para dar una idea de la problemática del concepto de túnel en $3D$, mostramos las siguientes imágenes (las dos primeras de volúmenes continuos $3D$ y las tres últimas sobre volúmenes digitales $3D$):

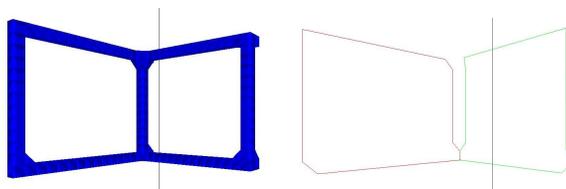


Figura 11.1: Dos asas unidas presentan dos túneles claramente diferenciados. A la derecha, aparecen representados ciclos que definen los respectivos túneles.

Así, para dar una solución a estas cuestiones así como otras más complejas relacionadas con la topología de los volúmenes $3D$, proponemos el uso de nuestros modelos de representación. Guardando el dato algebraico de dicho modelo, es decir, la contracción de cadenas envuelta en él, ya sabemos que podemos dar respuestas automáticas a los siguientes problemas:

- cuándo un ciclo representará a una componente conexa, túnel o cavidad;
- cuándo un ciclo será topológicamente nulo;
- cuándo dos ciclos pertenecerán a la misma característica topológica.

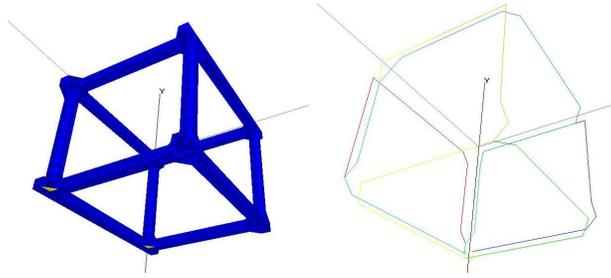


Figura 11.2: Un cuadrado hueco por todas sus caras presentará 5 túneles. A la derecha, se plasman los ciclos que representan (no-unívocamente) a dichos túneles.

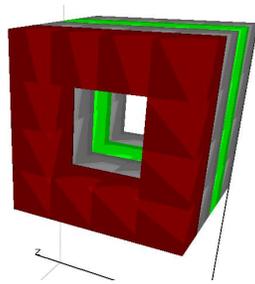


Figura 11.3: En este volumen digital, los 1-ciclos pintados en rojo y verde representan al mismo túnel en el cilindro.

Concretamente, vamos a aplicar nuestra teoría al análisis de estructuras óseas tridimensionales.

La osteoporosis se debe principalmente a una pérdida de masa ósea y deterioro del tejido óseo que, por supuesto, tiene efectos adversos en la resistencia del hueso. Las investigaciones actuales prueban que, aparte de la densidad mineral del hueso, el grado de osteoporosis viene también determinado por las propiedades de la microestructura ósea. El hueso trabecular es un tipo de hueso altamente poroso y contiene una red de hebras llamadas trabéculas. Hay trabéculas tipo-palo y tipo-plato, siendo el cociente entre estos dos tipos el que nos proporciona ya una primera información básica sobre las propiedades estructurales del hueso trabecular. La resistencia del hueso y otras propiedades mecánicas se encuentran fuertemente correladas con propiedades topológicas y geométricas de la trabécula [IM72]. Es frecuente la construcción de modelos de elementos finitos de hueso trabecular para estudiar estas propiedades [IM04b]. Los datos tridimensionales de hueso trabecular se obtienen fundamentalmente usando escaners micro-CT. Antes de realizar

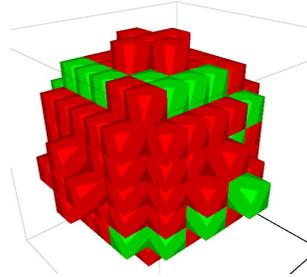


Figura 11.4: El 1-ciclo verde pintado sobre la esfera digital roja no representa ningún túnel ya que puede “deformarse” paso a paso y reducirse a un solo vóxel.

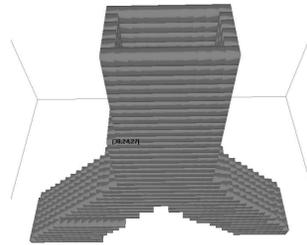


Figura 11.5: En este volumen digital, también llamado Y-túnel, si nos atenemos a la definición algebraica en términos de clases de 1-ciclos, deducimos que hay dos túneles. Uno, por ejemplo, pudiendo estar representado por la curva cerrada simple del borde de arriba y el otro por la curva cerrada simple del borde de abajo a la izquierda.

cualquier análisis profundo de los volúmenes digitales, se requiere hacer uso de varias técnicas de mejora de la imagen, de cara a eliminar ruidos e imperfecciones. Si vamos a estudiar las propiedades topológicas del volumen digital, es evidente que esas técnicas deben preservar en el mayor grado posible la topología de dicho volumen. Ahora bien, el cajón de técnicas usuales de segmentación en Imagen Médica $3D$ es grande (binarización, Morfología Matemática, crecimiento de regiones, isosuperficies, contornos activos de minimización de energía) [IM85], [IM88], [IM91]. Pero lo cierto es que para el problema de analizar el hueso trabecular, los métodos que se han mostrado más útiles hasta la fecha han sido los derivados de la Topología Digital. Usando esas técnicas y a partir de un volumen digital ya binarizado y realzado, hay métodos de caracterización topológica $3D$ para clasificar cada vóxel-hueso como perteneciente a una curva, superficie u otros tipos de elementos. A partir de esta clasificación, se calculan parámetros tales como la porosidad, superficie-curva o el índice de erosión, que nos proporcionan una información

relevante sobre las propiedades estructurales del hueso. En cualquier caso, todos estos algoritmos se centran más en cuántas trabéculas de cada tipo hay, en su localización y su orientación que en conocer realmente cual es la verdadera topología de la red.

Nuestro objetivo es plantear una solución teórica en términos de nuestros modelos de representación, que completaría el estudio realizado por los algoritmos anteriormente citados sobre el análisis de la topología de redes óseas trabeculares, siendo nuestra motivación la de poder considerar nuestro modelo matemático como base fiable para el análisis topológico de imágenes médicas *3D*.

En primer lugar, visualicemos una microestructura ósea trabecular y comparémosla con un mallado test regular a base de cuadrados huecos por algunas caras y rellenos por otras. A simple vista, parece que sus características topológicas son similares: una componente conexa, ninguna cavidad, partes de superficie (trabéculas tipo plato-caras rellenas de los cuadrados) y partes de curvas (trabéculas tipo palo-aristas de caras huecas de los cuadrados). Nada nos atrevemos a decir a la hora de comparar sus respectivas geometrías. Lo cierto es que la definición algebraica de túnel como clase de homología de dimensión 1, resulta adecuada para tratar el problema de medir el número de túneles o agujeros en nuestro mallado test, así como en el que determinan las trabéculas en el hueso.

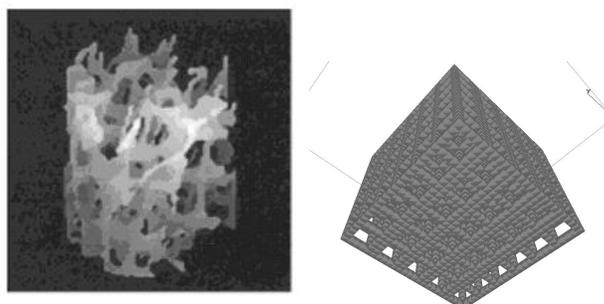


Figura 11.6: Fotografía proyección de μ MR de zona ósea trabecular.

A continuación, detallamos los pasos a realizar:

Paso 0: Preprocesamiento de la imagen (mejora, eliminación de ruidos y artefactos, binarización coloreando de negro la parte ósea y de blanca la parte de tuétano).

Paso 1: Modelo de representación del volumen binario de hueso V .

Paso 1.1: Crear la representación simplicial $K(V)$, asociada al hueso V .

Paso 1.2: Adelgazamiento topológico: crear el complejo simplicial adelgazado $\tilde{K}(V)$ usando nuestros algoritmos decrementales.

Paso 1.3: Computar un modelo de representación $ATM_V := (C_V, H_V, f_V, g_V, \phi_V)$.

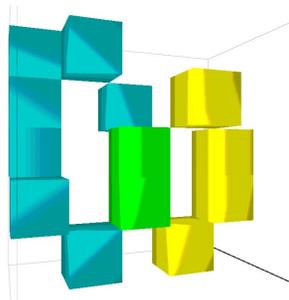
Paso 1.4: Tomar todos los 1-ciclos representativos de túneles ($\{g_v(h) : h \in H_V\}$), determinar cuántas curvas cerradas simples se pueden extraer de este conjunto y establecer una nueva contracción de cadenas de cadenas de $\mathcal{C}(\tilde{K}(V))$ a su homología tal que los ciclos representativos de las clases de homología de dimensión 1 sean todos curvas cerradas simples. Abusando de la notación, a esta nueva contracción de cadenas la nombraremos (f_V, g_V, ϕ_V) .

Paso 1.5: Para cada curva cerrada simple c representativa de un túnel, aplicar en el volumen digital V un algoritmo de búsqueda de contorno (usando, por ejemplo, contornos activos de minimización de energía) que permita deformarla en otra c' tal que $f_H(c) = f_H(c')$ (es decir, tal que pertenezcan a la misma clase de homología), que se encuentre en el borde de V y que fuera lo más convexa posible.

Paso 1.6: Para cada curva c' resultante del paso anterior, calcular el centroide, su radio mayor y menor, código de cadenas y diferencia [KR89], las dimensiones del menor cubo que la contenga y su orientación.

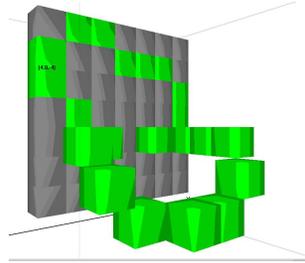
Si posponemos la creación del complejo simplicial para después del Paso 1.2, dicho paso podría hacerse también con un algoritmo cualquiera de adelgazamiento topológico completo [AB94]. En particular podría usarse la reciente técnica desarrollada por Pot-huaud et al. llamada 3D-LSGA (Análisis del Grafo Esqueleto de línea 3D)[IM04].

El Paso 1.4 es necesario ya que nuestro método puede devolver un 1-ciclo representativo de túneles que no sea conexo o que no sea una curva cerrada simple.



El Paso 1.5 permitirá solventar problemas como el que muestra la siguiente figura, donde tenemos una curva cerrada simple en color verde (usando 26-adyacencia), que

podría representar a un túnel, pero que no es adecuada para medir las dimensiones de dicho agujero o túnel.



Finalmente, decir que el problema de detectar curvas c' (resultado del Paso 1.6) que estén asociadas a fracturas parece abordable si partimos de la información que nos da el código diferencia de la misma.

Parte IV

Conclusiones

En esta memoria hemos presentado un modelo de representación para imágenes digitales binarias $3D$ basado en un objeto algebraico, concretamente una contracción de cadenas. Dada una imagen digital binaria tridimensional \mathcal{I} en un mallado BCC con la 14-adyacencia, hemos asociado a dicha imagen un complejo simplicial tridimensional, denotado por $K(\mathcal{I})$, con la misma información topológica que \mathcal{I} . Este hecho nos permite definir la (co)homología de \mathcal{I} como la (co)homología (en un sentido algebraico) del complejo de cadenas canónicamente asociado a $K(\mathcal{I})$. Nuestro modelo de representación consiste en asociar a la imagen una contracción de cadenas conectando el complejo de cadenas $\mathcal{C}(K(\mathcal{I}))$ con su homología y consecuentemente, con la homología de la imagen.

Esta representación matemática de la imagen constituye una potente herramienta para la realización de un completo estudio topológico de la misma. En primer lugar, a partir de un modelo de representación de una imagen digital \mathcal{I} vamos a poder, no sólo calcular los números de Betti (en términos del número de componentes conexas, túneles y cavidades) sino visualizar ciclos representativos de dichas componentes conexas, túneles y cavidades, facilitando así el tratamiento de problemas que requieran analizar parámetros topológicos. En segundo lugar, nuestro modelo de representación nos va a permitir realizar un control topológico de las imágenes ante cambios locales de la superficie (concretamente, adición o eliminación de un voxel negro) y permiten reutilizar información tras la realización de operaciones conjuntistas. En particular, partiendo de los modelos de representación de dos imágenes digitales, hemos desarrollado algoritmos para computar un modelo de representación de la unión, intersección y diferencia de ambas imágenes. Dichos algoritmos nos permiten controlar topológicamente una imagen digital $3D$ vista como una secuencia de imágenes digitales $2D$ variando en el tiempo (lo que se conoce como formato vídeo), a partir de los modelos de representación de las imágenes $2D$ que constituyen la secuencia. De la misma forma que hemos hecho con las operaciones anteriores, hemos resuelto el problema de obtener un modelo de representación del complementario de una imagen a partir del modelo de la imagen inicial. Para ello, hemos propuesto una nueva definición de modelo de representación la cual tiene en cuenta tanto los vóxeles negros como blancos. Esta nueva definición es válida sólo si trabajamos con la $(14, 14)$ -adyacencia. Si por el contrario trabajamos con otras adyacencias, la puede presentar problemas.

En cuanto a la obtención de una clasificación más precisa y exhaustiva de las imágenes digitales binarias $3D$, el modelo de representación mostrado en esta memoria constituye una herramienta muy potente. Un nuevo invariante topológico, denotado por $HB1(\mathcal{I})$ y de carácter cohomológico, ha sido definido a partir de él, permitiéndonos distinguir imágenes con los mismos números de Betti. Además, nosotros intuimos que nuevos números coho-

mológicos pueden derivarse de los grupos de homología de la construcción bar del álgebra de cohomología de $K(I)$.

Nuestros modelos de representación han sido estudiados trabajando con coeficientes en un cuerpo \mathbb{Z}_p , siendo p un primo, y con coeficientes en el anillo de los enteros \mathbb{Z} . En realidad, estos modelos son válidos también para imágenes digitales binarias en cualquier dimensión $n > 3$. Para dichas imágenes, el problema de trabajar con coeficientes en un cuerpo \mathbb{Z}_p (modelo AT) es que perdemos mucha información cuando hay torsión. Por otra parte, si trabajamos en \mathbb{Z} , los algoritmos que actualmente se conocen para computar grupos de homología incluyen el cálculo de la forma normal de Smith de ciertas matrices. En esta memoria se ha presentado un modelo de representación (modelo AM) trasladando los algoritmos anteriores en términos de contracciones de cadenas. Sin embargo, es bien conocido que los algoritmos que incluyen el cálculo de la forma normal de Smith tienen un elevado coste computacional. Por ello, hemos estudiado un nuevo modelo de representación sobre \mathbb{Z} (λ -modelo AT), a partir del cual podemos obtener información homológica de la imagen evitando el cálculo de la forma normal de Smith. Aunque en esta memoria, los λ -modelos AT no nos aportan información nueva, ya que trabajamos con imágenes $3D$, sí constituirá una herramienta muy útil cuando nos centremos en dimensiones superiores.

Finalmente, en la parte de aplicaciones se ha construido un grafo asociado a una imagen digital binaria $3D$ con mejores propiedades que los conocidos grafos de Reeb, en cuanto a que se conserva no sólo el número de componentes conexas, sino también el número de túneles. Por otra parte, se ha presentado una aplicación de nuestros modelos de representación a la medicina, mostrando que constituyen una herramienta útil para medir el grado de porosidad de ciertas imágenes médicas, en términos del número, posición, tamaño y orientación de los túneles existentes en las mismas.

Trabajos futuros

Aunque a lo largo de la tesis hemos ido expresando los trabajos que tenemos en mente abordar en un futuro, es importante hacer una recopilación de ellos al finalizar.

- Ampliar la teoría relacionada con los λ -modelos AT, concretamente, obtener generadores de homología, con coeficientes enteros, de la parte de torsión y computar características cohomológicas sobre \mathbb{Z} a partir de ellos;

- Trabajar con imágenes digitales binarias nD , $n > 3$, considerándolas como secuencias de imágenes digitales $(n - 1)D$;
- Construir complejos simpliciales asociados a las imágenes considerando otro mallado así como otra adyacencia entre los vóxeles;
- Estudiar la relación existente entre los complejos simpliciales asociados a los puntos negros y blancos de una imagen, usando cualquier adyacencia (por ejemplo, la $(26, 6)$ -adyacencia);
- Computar nuevos números cohomológicos más finos que el $HB1(I)$, enriqueciendo así la lista de invariantes topológicos computados hasta el momento;
- Ampliar el grafo de Reeb con lazos a imágenes digitales que presenten torsión, usando los λ -modelos AT;
- Construir un complejo discreto de Morse $M_n(K)$ asociado a un complejo celular de cualquier dimensión tal que no sólo exista una identificación entre los generadores de homología, sino también un isomorfismo entre los anillos de cohomología.

Bibliografía

- [AB94] Z. Aktouf, G. Bertrand. *A 3D thinning algorithm using subfields*. Proceedings of 1994 SPIE Conference on Vision Geometry, San Diego, CA, (1994) 113-124.
- [ABP02] Z. Aktouf, G. Bertrand, L. Perroton. *A three-dimensional holes closing algorithm*. Pattern Recognition Letters, 23 (2002) 523-531.
- [ADFQ00] Ayala R., Domínguez E., Francés A.R., Quintero A.: *Homotopy in Digital Spaces*. DGCI 2000 LNCS, Springer-Verlag 1953 (2000) 3-14.
- [AG76] M-K. Agoston. *Algebraic Topology: a first course*. Marcel Dekker Ed. (1976).
- [BGLLR01] J.M. Berrio, R. González-Díaz, F. Leal, M.M. López, P. Real. *Visualizing Cohomology Aspects of 3D Objects*. 6th Asian Technology Conference in Mathematics, ATCM2001, Melbourne (Australia), December, 2001.
- [BSF00] Biasotti S., Spagnuolo M. , Facidieno B.: *Extended Reeb Graphs for Surface Understanding and Description*. DGCI2000, LNCS, vol. 1953, 185-197 (2000).
- [Box99] Boxer L.: *A classical construction for the digital fundamental group*. J.Math. Imaging Vision (1999) 51-62.
- [CEHNP04] Cole-McLaughlin K., Edelsbrunner H., Harer J., Natarajan V., Pascucci V. *Loops in Reeb Graphs of 2-manifolds*. Discrete Comput. Geom., v. 32, 213-244 (2004).
- [CLR90] T.H. Cormen, Ch. E. Leiserson, R.L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.
- [DE95] Delfinado C.J.A., Edelsbrunner H.: *An Incremental Algorithm for Betti Numbers of Simplicial Complexes on the 3-Sphere*. Comput. Aided Geom. Design 12 (1995) 771-784.

- [DM82] Dahmen W., Micchelli, C.A.: *On the Linear Independence of Multivariate b-splines I*. Triangulation of simploids. SIAM J. Numer. Anal., vol. 19 (1982).
- [DSV] J.G. Dumas, B. Saunders, G. Villard. *On efficient sparse integer matrix smith normal form computations*. Journal of Symbolic Computation.
- [For95] Forman R. *A discrete Morse theory for cell complexes*. In S. T. Yau, editor, Geometry, Topology and Physics for Raoul Bott. International Press (1995).
- [For02] Forman R. *Discrete Morse Theory and the Cohomology Ring*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 354, 5063-5085 (2002).
- [FS94] F. Sergeraert. *The computability problem in Algebraic Topology*. Avd. in Math, v. 104 (1994) 1-29.
- [G95] M. Giesbrecht. Nearly optimal algorithms for canonical matrix-forms. SIAM J. COMPUT. 24 (5) (1995) 948-969.
- [GL89] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe. *Perturbation Theory in Differential Homological Algebra, I*. Illionois J. Math., 33 (1989) 556-582.
- [GLS91] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe, J.D. Staheff. *Perturbation Theory in Differential Homological Algebra, II*. Illionois J. Math., v. 35, n. 3 (1991) 357-373.
- [GMRS05] González-Díaz R., Medrano B., Real P., Sánchez-Peláez J.: *Algebraic Topological Analysis of Time-Sequence of Digital Images*. Lectura Notes Computer Science LNCS, vol. 3718 (2005) 208-219.
- [GMRS06a] González-Díaz R., Medrano B., Real P., Sánchez-Peláez J.: *Simplicial Perturbation Techniques and Effective Homology*. Lectura Notes Computer Science LNCS, vol. 4194 (2005) 166-177.
- [GMRS06b] González-Díaz R., Medrano B., Real P., Sánchez-Peláez J.: *Reusing Integer Homology Information of Binary Digital Images*. Lectura Notes Computer Science LNCS, vol. 4245 (2005) 199-210.
- [GJMR07] González-Díaz R., Jiménez M.J., Medrano B., Real P.: *Extending the notion of AT-models for integer homology computation*. Lectura Notes Computer Science LNCS, vol. 4538 (2007) 330-339.
- [GJMR07b] González-Díaz R., Jiménez M.J., Medrano B., Real P.: *Chain Homotopies for Object-Topological Representations*

- [GJMR07c] González-Díaz R., Jiménez M.J., Medrano B., Real P.: *A Graph-with-Loop Structure for a Topological Representation of 3D Objects*. Lecture Notes Computer Science LNCS, vol. 4673 (2007) 506-513.
- [GR03] Gonzalez-Díaz R., Real P. *Computation of Cohomology Operations on Finite Simplicial Complexes*. Homology, Homotopy and Applications 5 (2) (2003) 83-93.
- [GR03b] González-Díaz R., Real P.: *Towards Digital Cohomology*. Lecture Notes Computer Science vol. 2886 (2003) 92-101.
- [GDR05] González-Díaz R., Real P.: *On the Cohomology of 3D Digital Images*. Discrete Applied Math vol. 147, Issues 2-3 (2005) 245-263.
- [HK91] J.Huebschmann, T. Kadeishvili. *Small Models For Chain Algebras*. Math. Z., 207 (1991) 245-280.
- [IM04] L. Pothuaud, P. Porion, E. Lespessailles, C.L. Benhamou, P. Levitz, *A new method for three-dimensional skeleton graph analysis of porous media: application to trabecular bone microarchitecture*, Journal of Microscopy, 199 (2004) 149-161.
- [IM00] P. K. Saha, B. R. Gomberg, F. W. Wehrli, *Three-Dimensional Digital Topological Characterization of Cancellous Bone Architecture*, International Journal of Imaging Systems and Technology, Vol. 11 (2000) 81-90.
- [IM72] R. T. DeHoff, E. H. Aigeltinger and K. R. Craig, *Experimental determination of the topological properties of three-dimensional microstructures*, J Microsc 95 (1972) 69-91.
- [IM04b] L. Pothuaud, B. Van Rietbergen, C. Charlot, E. Ozhinsky and S. Majumdar. *A New Computational Efficient Approach for Trabecular Bone Analysis using Beam Models Generated with Skeletonized Graph Technique*, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. Vol. 7, n. 4 (2004), 205-213.
- [IM85] R. M. Haralick and L. G. Shapiro, *Image segmentation techniques*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 29(1), 1985, pp 100-132.
- [IM88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, *Snakes: active contour models*, International Journal of Computer Vision, 1(4), (1988) 321-331.

- [IM91] J.K. Udupa, G.T. Herman, eds. *3D Imaging in Medicine*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.
- [KMM98] T. Kaczynski, M. Mrozek, M. Slusarek. *Homology computation by reduction of chain complexes*. Computers and Math. Appl. 34 (4) (1998) 59-70.
- [Kon89] Kong T.Y.: *A Digital Fundamental Group*. Computers and Graphics 13 (1989) 159-166.
- [KR89] T.Y. Kong, A. Rosenfeld. *Digital topology: introduction and survey*. Comput. Vision Graphics Image Process 48 (1989) 357-393.
- [MacL] S.MacLane, *Homology*, Classic in Mathematics, Springer, Berlin, 1995.
- [Mass91] Massey W.M.: *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York,1991.
- [MR07] J.L.Mari, P.Real. *Simplicialization of Digital Volumes in 26-adjacency: Application to Topological Analysis*.
- [Munk84] Munkres J.R.: *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Co. (1984)
- [PAFL] S. Peltier, S. Alayrangues, L. Funchs, J. Lachaud. *Computation of homology groups and generators*.
- [PLB04] L. Pothuaud, P. Porion, E. Lespessailles, C.L. Benhamou, P. Levitz. *A new method for three-dimensional skeleton graph analysis of porous media: application to trabecular bone microarchitecture*. Journal of Microscopy, 199 (2004) 149-161.
- [PFL06] S. Peltier, L. Fuchs, P. Liendhardt: *Homology of Simplicial Set*. LNCS, vol. 4245, 235-246 (2006).
- [R46] Reeb G. Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complement integrable ou d'une fonction numérique Comptes Rendud Acad. Sciences, v. 222, 847-849 (1946).
- [Ros81] Rosenfeld A.: *3D Digital Topology*. Inform. and Control 50 (1981) 119-127.
- [SAS03a] S. Svensson, C. Arcelli, G. Sanniti di Baja. *Characterizing 3D objects by shape and topology*. Lecture Notes in Computer Science, v. 2886 (2003) 124-133.
- [SAS03b] S. Svensson, C. Arcelli, G. Sanniti di Baja. *Finding Cavities and Tunnels in 3D Complex Objects*. 12th International Conference on Image Analysis and Processing (ICIAP'03) (2003) 342-348.

[Vox] Programa informático VOXELO. Desarrolladores: P. Real y J. Sánchez Peléaz. <http://alojamientos.us.es/gtocomas>, 2003.