

823789276

*Com. Ute*

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

GRAFOS CONTRACTIBLES

A UN

GRAFO COMPLETO

Tesis  
85

Memoria presentada por  
Juan Carlos Valenzuela Tripodoro  
para optar al grado de  
Doctor en Matemáticas  
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº

de los Directores

Fdo. Martín Cera López  
Catedrático de Escuela Universitaria  
del Departamento de Matemática  
Aplicada I de la Universidad de  
Sevilla

Fdo. Pedro García Vázquez  
Profesor Colaborador del  
Departamento de Matemática  
Aplicada I de la Universidad  
de Sevilla

Sevilla, Mayo de 2006

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA - BIBLIOTECA -
N.º ORDEN GENERAL <u>01150898X</u>
OBRA N.º ..... TOMO.....
SIGNATURA.....
N.º EN ESPECIALIDAD.....
EJEMPLAR NUMERO <u>R.14.831</u>



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARIA GENERAL

---

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 190 número 102 del libro  
correspondiente.

Sevilla, 26 de Mayo de 2006.

El Jefe del Negociado de Tesis

*Bruna Laffille*

A Pili, Marta  
y J. Carlos





UNIVERSIDAD DE SEVILLA REGISTRO GENERAL AUXILIA PABELLÓN DE BRASIL	SALIDA	Nº 200600400014521	05/09/2006 10:11:08
--	--------	--------------------	---------------------

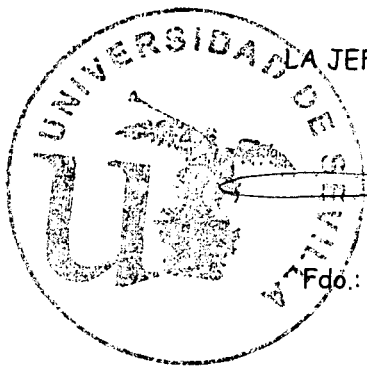
Sevilla, 5 de Septiembre de 2006  
N/Ref.: Negociado de Tesis MYD/CAR  
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA  
DE LA E.T.S. DE INGENIERÍA  
INFORMÁTICA  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Escuela, a fin de que pasen a formar parte de los fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEÍDAS

- CAÑETE BALDEÓN, JOSÉ MIGUEL
- FERRER TROYANO, FRANCISCO JAVIER
- RUIZ SÁNCHEZ, ROBERTO
- SÁNCHEZ ANTÓN, GEMMA
- VALENZUELA TRIPODORO, JUAN CARLOS



Jefa de Sección de Doctorado

Fdo.: YOLANDA DÍAZ ROLANDO.

*Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto,  
y pensar lo que nadie más ha pensado.*

Albert Szent-Györgi (1893-1986)



# Resumen

Los objetivos de esta tesis se pueden enmarcar dentro de la Teoría Extremal de Grafos. Uno de los problemas más conocidos en este ámbito es el denominado *Problema de Turán* consistente en estudiar el mayor tamaño posible de un grafo libre de subgrafos completos. Asimismo, han ido apareciendo a lo largo de los últimos años distintos problemas extremales como extensión o generalización del Problema de Turán. Es este tipo de problemas en el que centramos el estudio que pretendemos reflejar en esta memoria.

En particular, analizamos una de dichas extensiones denominada *Problema de Turán con contracción de aristas* o *Problema de Turán para menores completos*, en la que nos ocupamos de obtener el mayor tamaño posible de un grafo de orden  $n$  no contractible a un grafo completo de orden  $p$ , es decir, sin contener un subgrafo a partir del cual se pueda obtener un grafo completo con  $p$  vértices mediante una cantidad finita de contracciones de aristas. Paralelamente, como en todo problema extremal, nos planteamos la cuestión de caracterizar aquellos grafos que alcancen dicho valor extremo, denominados grafos extremales.

También estudiamos dos generalizaciones del Problema de Turán a grafos bipartitos: el *Problema de Zarankiewicz* y el *Problema de Turán en grafos bipartitos*. En este caso se trata de obtener el mayor número de aristas en un grafo bipartito dado de modo que no contenga un subgrafo bipartito completo  $K_{s,t}$ .



En el Problema de Zarankiewicz se establece una ligadura entre las clases de vértices del grafo bipartito dado y las del subgrafo prohibido, mientras que en el segundo problema esta relación no existe. Evidentemente, veremos que ambos problemas están relacionados.

Como comentaremos a lo largo de esta tesis, los resultados conocidos para estos problemas extremales son mayoritariamente de tipo asintótico, dedicados a acotar las funciones extremales fijando algunos de los parámetros que aparecen y dando libertad a otros. Nuestra intención es abordar los problemas desde otro punto de vista. Vamos a dedicarnos a aportar valores exactos y caracterizar grafos extremales para valores relacionados de los parámetros.

# Agradecimientos

Me gustaría agradecer al profesor Martín Cera López el que me brindara la oportunidad de iniciar el trabajo de investigación que ha dado lugar a la realización de esta tesis. Sin su permanente disponibilidad, orientación y apoyo, no sólo como director de tesis, sino también a nivel personal, no hubiera sido posible alcanzar este objetivo.

También quisiera expresar mi más sincera gratitud al profesor Pedro García Vázquez. Por un lado, en lo profesional, por su constante disponibilidad a ayudarme cuando lo necesité y por combinar a la perfección al exigente director, al meticuloso corrector y al sabio consejero. Por otro lado, en lo personal, por sus ánimos en las difíciles situaciones sobrevenidas durante la realización de esta tesis, y por hacer que estos últimos años de estrecha colaboración me hayan permitido contar con un Amigo más.

A los compañeros de la E.P.S. de Algeciras, muy en especial, a los de las Secciones de Matemáticas y Estadística, deseo expresarles mi agradecimiento por su aliento a lo largo de estos años de intenso trabajo.

Me gustaría también agradecer a mis amigos y a mi familia, recordando especialmente a mi padre, todo su apoyo. Y por último, aunque no en orden de importancia, quiero hacer patente un agradecimiento muy especial a Pili por su comprensión, sacrificio y por su constante aliento. Poder recorrer este largo camino junto a ella ha sido sin duda el mejor de los teoremas, con dos maravillosos corolarios, Marta y J. Carlos, que me han dado siempre la fuerza e ilusión necesarias para no abandonar.





# Introducción

En esta tesis hemos abordado el estudio de varios problemas clásicos dentro de la Teoría de Grafos, que se pueden enmarcar dentro de un grupo denominado de manera general *problemas extremales en grafos*. La rama de la Teoría de Grafos encargada del estudio de los problemas extremales es conocida como *Teoría Extremal de Grafos*. Básicamente, podemos decir que son problemas extremales en grafos aquellos en los que se trata de, por un lado, determinar el valor extremo (ya sea máximo o mínimo) de algún parámetro (orden, tamaño, valencia media,...) referido a los grafos de una determinada clase o familia (grafos de orden  $n$ , grafos bipartitos,...) que cumplen alguna propiedad concreta (no contener subgrafos completos, tener girth dado,...); y, por otro lado, caracterizar aquellos grafos, llamados *grafos extremales*, pertenecientes a la clase estudiada y que alcanzan dicho valor extremal.

Uno de los problemas extremales más conocidos es el denominado *Problema de Turán*, planteado en 1941 y al que se debe, en gran medida, el desarrollo de esta teoría. En este problema, P. Turán [46] se plantea cuál será el tamaño máximo, denotado por  $ex(n; K_p)$ , de un grafo con  $n$  vértices de manera que no contenga a un grafo completo de orden  $p$  como subgrafo. Es el propio autor quien demuestra el conocido *Teorema de Turán*, considerado por muchos el primer resultado en Teoría Extremal, en el que determina que

$$ex(n; K_p) = t_{p-1}(n)$$



siendo  $t_r(n)$  el número de aristas del único grafo  $r$ -partito completo cuyos  $n$  vértices están repartidos en las clases de equivalencia de la manera más igualitaria posible. Es más, también demuestra que el único grafo extremal para dicho problema es, precisamente, el grafo  $r$ -partito que acabamos de describir, el cual también pasó a ser conocido como *Grafo de Turán*.

La relevancia del trabajo de P. Turán no radica sólo en que el problema extremal quedara completamente resuelto, sino también en que dio pie a la aparición de numerosos problemas del mismo tipo. Tanto es así que existe todo un grupo de problemas extremales agrupados bajo la denominación genérica de *Problemas de Turán*. Su estructura es similar a la del problema original, y en ellos se estudia el tamaño máximo de un grafo de determinado tipo (de orden  $n$ , bipartito, etc...) sin contener determinadas subestructuras (subgrafos bipartitos completos, subgrafos homeomorfos a un completo, subgrafos contractibles a un completo, etc...).

Una de las conjeturas más importantes dentro de la Teoría Extremal, la *Conjetura de Hadwiger*, surge en parte como uno de estos problemas de Turán que acabamos de describir cuando H. Hadwiger [26] propone relacionar el número cromático de un grafo con el hecho de que éste contenga un subgrafo completo de orden determinado. Concretamente, este autor conjeturó en 1943 que si un grafo  $G$  tiene número cromático al menos  $p$  entonces  $G$  contiene un subgrafo contractible a  $K_p$ . La conjetura de Hadwiger fue rápidamente confirmada para los primeros valores de  $p$ . Partiendo del hecho de que el resultado es trivial para  $p \leq 3$ , el primero de los valores,  $p = 4$ , es confirmado por G.A. Dirac [12] en 1952. El caso  $p = 5$  es especialmente relevante pues a partir del trabajo de K. Wagner [47] se pone de manifiesto la relación existente entre la conjetura de Hadwiger y el Teorema de los Cuatro Colores. Tras la prueba en 1976 del mencionado Teorema de los Cuatro Colores por K. Appel y W. Haken [1, 2] también el caso  $p = 5$  de la conjetura quedó probado. El último de los resultados conocidos data de 1993 en

el que N. Robertson y P.D. Seymour [41] prueban la conjetura para  $p = 6$ . Para valores superiores a 6 el problema permanece sin resolver.

En 1961 G. Hajós [27] plantea la misma conjetura desde un punto de vista topológico, conjeturando que todo grafo  $p$ -cromático contiene una subdivisión de  $K_p$ . Sin embargo, en 1979 P.A. Catlin [6] probó que esta nueva conjetura es falsa para  $p \geq 7$ .

Este punto de vista topológico dio pie a la aparición de una de las extensiones más conocidas del Problema de Turán, el denominado *Problema Topológico de Turán*. Este problema consiste en determinar el mayor número posible de aristas, denotado por  $ex(n; TK_p)$  de un grafo con  $n$  vértices sin contener una subdivisión del grafo completo  $K_p$ . Como ya dijimos anteriormente, en todo problema extremal aparece una segunda cuestión que es la de caracterizar los grafos extremales. En este caso concreto, se trata de determinar los grafos con  $n$  vértices libres de subdivisiones de  $K_p$  y con  $ex(n; TK_p)$  aristas. La familia de grafos extremales para este problema se denota por  $EX(n; TK_p)$ .

Este último problema arranca cuando W. Mader [35] y P. Erdos y A. Hajnal [14], de modo independiente, conjeturan la existencia de una función  $c(p)$  tal que todo grafo con  $n$  vértices y, al menos,  $c(p)n$  aristas contiene una subdivisión de  $K_p$ . Dicho de otro modo, se trata de acotar superiormente la valencia media de los grafos libres de subdivisiones de un grafo completo de orden  $p$ .

En 1972 el propio W. Mader [37] demuestra que  $c(p) = 3 \cdot 2^{p-3} - p$  es suficiente. Diversos autores aportaron posteriormente varias mejoras de la estimación dada por W. Mader, hasta llegar a la mejor conocida hasta ahora, que da el valor  $c(p) = 256p^2$ , obtenida en unos trabajos independientes de B. Bollobás y A. Thomason [5] y de J. Komlós y E. Szemerédi [32], probándose además que esta es la mejor estimación posible desde el punto de vista asintótico.



Por lo que se refiere a valores exactos de la función  $ex(n; TK_p)$  y los correspondientes grafos extremales, una buena parte de las soluciones permanecen pendientes de ser encontradas. En una parte de los resultados conocidos se ha estudiado el problema fijando el valor del parámetro  $p$  y haciendo  $n$  tender a infinito. Dejando a un lado los casos triviales, es decir, para  $p \leq 3$ , en 1960 G.A. Dirac [13] demuestra que  $ex(n; TK_4) = 2n - 3$ , cuando  $n \geq 4$ . Para el caso  $p = 5$ , el mismo autor conjetura 4 años más tarde que  $ex(n; TK_5) = 3n - 6$ . Sin embargo, hubo que esperar hasta 1998, año en el que W. Mader [38, 39] demuestra que dicha conjetura es cierta, caracterizando además todos los grafos extremales.

El segundo bloque de aportaciones a este problema se inicia con el trabajo de M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez [7] en el que por primera vez se aborda la búsqueda de soluciones para infinitos valores relacionados de  $n$  y  $p$ , simultáneamente. De este modo, los autores encuentran la solución exacta de la función  $ex(n; TK_p)$  para todo par  $(n, p)$  perteneciente al sector del plano determinado por la expresión

$$\left\lceil \frac{2n + 5}{3} \right\rceil \leq p < n$$

y completan los resultados con un segundo trabajo [8] en el que llevan a cabo la caracterización de la correspondiente familia extremal de grafos cuando

$$\left\lceil \frac{2n + 6}{3} \right\rceil \leq p < n - 3.$$

Posteriormente, P. García-Vázquez [16] siguiendo esta misma línea de trabajo en su tesis doctoral, profundiza aún más en la búsqueda de soluciones para este problema extremal. En ese trabajo se aportan distintos resultados de estructura acerca de los grafos extremales involucrados en este problema, así como nuevos valores exactos para la función extremal  $ex(n; TK_p)$  en sucesivos sectores del plano  $(n, p)$ , caracterizando la correspondiente familia  $EX(n; TK_p)$  de grafos extremales. De este modo, agrupando dichos resultados con los obtenidos por M. Cera, A. Diáñez y A. Márquez, el problema topológico queda completamente

resuelto cuando

$$\left\lceil \frac{7n+7}{12} \right\rceil \leq p \leq n.$$

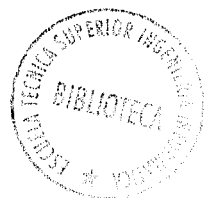
Otra conocida extensión del Problema de Turán está relacionada con la inclusión de subgrafos contractibles a un grafo completo. Este es el problema extremal conocido como *Problema de Turán para menores completos* o *Problema de Turán con contracción de aristas*. En este caso se trata de determinar el mayor número de aristas posible de un grafo de orden  $n$  sin contener al grafo completo  $K_p$  como menor, es decir, el mayor tamaño de un grafo de orden  $n$  que no es contractible a  $K_p$ . Este valor extremal se denota por  $ex(n; MK_p)$  y la correspondiente familia de grafos extremales por  $EX(n; MK_p)$ .

Citando a Andrew Thomason en [45]: "Existe cierto interés en conocer el mayor tamaño posible de un grafo no contractible a  $K_p$ , máxime teniendo en cuenta la relación de este problema con la Conjetura de Hadwiger que afirma que todo grafo  $p$ -cromático es contractible a  $K_p$ ."

Podemos encontrar en la bibliografía numerosos trabajos dedicados a acotar la función extremal desde un punto de vista asintótico. W. Mader [36] prueba que existe un valor mínimo  $c(p)$  tal que todo grafo de orden  $n$  y tamaño, al menos,  $c(p)n$  contiene a  $K_p$  como menor, y además, que  $c(p) \leq 8p \log_2(p)$ . A. Kostochka [33, 34] y W. Fernández de la Vega [10] basándose en B. Bollobás, P. Catlin y P. Erdős [4] pusieron de manifiesto, independiente pero prácticamente al mismo tiempo, que  $c(p)$  no era función lineal de  $p$  ya que podían encontrarse grafos aleatorios no contractibles a  $K_p$  y con valencia media del orden de  $p\sqrt{\log(p)}$ . Además, A. Kostochka [34, 33] y A. Thomason [44], independientemente, probaron que  $p\sqrt{\log(p)}$  era, asintóticamente, el orden de magnitud correcto. Finalmente, A. Thomason [45] demostró que

$$c(p) = (\alpha + o(1)) p\sqrt{\log(p)}$$

siendo  $\alpha = (1 - \lambda)/2\sqrt{\log(1/\lambda)}$  y  $\lambda < 1$  la solución de la ecuación



$$1 - \lambda + 2\lambda \log(\lambda) = 0.$$

Sin embargo el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  y los correspondientes grafos extremales sólo se conocen de manera explícita para los primeros valores de  $p$ . Considerando el grafo  $K_{p-2} + \overline{K_{n-p+2}}$ , es relativamente fácil comprobar que

$$ex(n; MK_p) \geq (p-2)n - \binom{p-1}{2}.$$

En 1964 G.A. Dirac [13] demuestra que esta cota es óptima para  $p \leq 5$ . Posteriormente, en 1968, W. Mader [36] prueba que la cota alcanza el valor exacto también para valores de  $p \leq 7$ , poniendo de manifiesto que no ocurre lo mismo cuando  $p = 8$ . Deben pasar prácticamente dos décadas hasta que L. Jorgensen [31] describe exactamente todos los contraejemplos en el caso  $p = 8$  demostrando que

$$ex(n; MK_8) = \begin{cases} 6n - 20 & \text{si 5 divide a } n, \text{ y} \\ 6n - 21 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este es uno de los problemas extremales que estudiaremos en esta memoria. Como ocurría en el caso topológico, la mayor parte de los trabajos se han dedicado a aportar acotaciones de la función extremal o a tratar el tema desde un punto de vista asintótico. Nosotros nos centraremos en el problema desde el mismo punto de vista en que abordaron M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [7, 8], y P. García-Vázquez [16] el problema topológico, es decir, estudiando el mismo para valores de  $n$  y  $p$  relacionados entre sí.

Otro de los problemas extremales que se pueden enmarcar dentro de este tipo es el conocido como *Problema de Zarankiewicz*. En éste se trata de relacionar el número de aristas de un grafo bipartito con la inclusión de un subgrafo bipartito completo. Concretamente, si  $G = (X, Y)$  es un grafo bipartito tal que  $|X| = m$

y  $|Y| = n$ , y existen un subconjunto  $S \subseteq X$  de cardinal  $s$  y un subconjunto  $T \subseteq Y$  de cardinal  $t$  tales que el subgrafo inducido por  $S \cup T$  en  $G$  es un bipartito completo, entonces se dice que  $G$  contiene a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo. Evidentemente, un grafo bipartito  $G$  puede contener a  $K_{(s,t)}$  pero ser libre de  $K_{(t,s)}$ . Si se da cualquiera de las dos situaciones anteriores, y no es necesario distinguir cual, simplemente se dice que  $G$  contiene a  $K_{s,t}$ . El problema consiste pues en calcular el mayor número de aristas posible, denotado  $z(m, n; s, t)$ , de un grafo bipartito  $G = (X, Y)$  con  $|X| = m$  y  $|Y| = n$  tal que  $G$  no contenga a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo. Como en ocasiones anteriores, también en este problema extremal se trata de caracterizar los grafos de la correspondiente familia extremal denotada por  $Z(m, n; s, t)$ . Por simplicidad, en aquellos casos en los que  $m = n$  y  $s = t$  la función se denota simplemente por  $z(n; t)$  y la familia extremal por  $Z(n; t)$ .

El problema es propuesto por Zarankiewicz [48] en 1951, y en su versión original se plantea en términos matriciales. El autor propone el problema de averiguar el mayor número posible de unos, denotado  $z(n; 3)$ , en una matriz binaria cuadrada de orden  $n = 4, 5, 6$ , de manera que no contenga ninguna submatriz cuadrada de orden 3 cuyos elementos sean todos unos. Ese mismo año S. Sierpinski [42] aporta la solución al problema original, y posteriormente, distintos autores contribuyen con nuevos valores numéricos para la función  $z(n; 3)$  para  $n \geq 7$ .

En éste, como en otros muchos problemas extremales, la mayoría de trabajos han abordado el estudio de la función extremal desde un punto de vista asintótico, es decir, se fijan los valores de  $s$  y de  $t$ , y se evalúa el comportamiento de la función  $z(m, n; s, t)$  cuando  $m$  y  $n$  tienden a infinito (ver [15, 17, 18]).

En lo que se refiere a valores exactos de  $z(m, n; s, t)$ , podemos destacar el trabajo de Culik [9], donde se demuestra que fijados  $s, t$  y  $m$  enteros positivos,

se cumple

$$z(m, n; s, t) = (s - 1)n + (t - 1) \binom{m}{s},$$

para todo  $n \geq (t - 1) \binom{m}{s}$ .

En [3] se prueba que la cota superior

$$z(n; 2) \leq \frac{n + n\sqrt{4n - 3}}{2},$$

válida para cualquier entero  $n \geq 2$ , es óptima cuando  $n = q^2 + q + 1$ , siendo  $q$  la potencia de un número primo. Goddard, Henning y Oellermann [19] deducen el valor exacto de la función  $z(n; 2)$  para valores  $n \leq 10$ , gracias a la vinculación que establecen entre este problema y los números de Ramsey bipartitos. Griggs y otros [21, 20] analizan el llamado “caso mitad-mitad”,  $z(2m, 2n; m, n)$ , desde un punto de vista matricial, obteniendo las acotaciones

$$4mn - (2n + 2m - \text{mcd}(m, n) + 1) \leq z(2m, 2n; m, n) \leq 4mn - (2n + m + 1)$$

donde  $\text{mcd}$  denota al máximo común divisor. Haciendo uso de dichas desigualdades, demuestran que si  $n = km + r$  con  $0 \leq r < m$  y  $r = 0$  o bien  $m \leq k + r$ , entonces  $z(2m, 2n; m, n) = 4mn - (2n + m + 1)$ .

El Problema de Zarankiewicz está estrechamente relacionado con el llamado *Problema de Turán en grafos bipartitos*, en el que la función  $ex(m, n; K_{s,t})$  denota al número máximo de aristas en un grafo bipartito de clases  $X$  e  $Y$  con  $m$  y  $n$  vértices, respectivamente, sin contener a  $K_{s,t}$  como subgrafo, siendo  $EX(m, n; K_{s,t})$  la familia de grafos extremales correspondiente. Obsérvese que la aparente coincidencia entre ambos problemas no es tal, ya que a diferencia del Problema de Zarankiewicz antes descrito, en este segundo problema se prohíbe en el grafo bipartito  $(X, Y)$  tanto el subgrafo  $K_{(s,t)}$  como el  $K_{(t,s)}$ . En cualquier caso, es evidente que para cualesquiera valores de los parámetros se verifica siempre la



siguiente relación

$$ex(m, n; K_{s,t}) \leq z(m, n; s, t).$$

Como ya hemos mencionado en líneas anteriores, en esta memoria abordamos el estudio de distintos problemas extremales que surgen como extensión del Problema de Turán. Nuestro objetivo primordial será la obtención de valores exactos y la caracterización de los correspondientes grafos extremales. Para ello nos apartaremos del método clásico de estudiar estos problemas fijando algunos parámetros y haciendo tender el resto a infinito. En nuestro estudio nos centraremos en conjuntos de valores de los parámetros, involucrados en el problema extremal en cuestión, ligados entre sí por determinadas relaciones. Si bien el grueso de esta tesis está dedicado al estudio del Problema de Turán con contracción de aristas, también nos ocuparemos del Problema de Zarankiewicz y, en menor medida, del Problema de Turán en grafos bipartitos.

Esta memoria se ha estructurado en cinco capítulos que a continuación pasaremos a describir con más detalle.

El primer capítulo recoge, de forma general, algunas notaciones, definiciones y resultados básicos de la Teoría de Grafos que necesitaremos a lo largo del desarrollo del resto de capítulos de esta memoria.

Los tres capítulos siguientes están dedicados al estudio del Problema de Turán con contracción de aristas. En el *Capítulo 2* introducimos la técnica que vamos a utilizar para lograr obtener el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  y caracterizar los grafos extremales. Estudiamos unas familias de grafos que denotaremos por  $\mathcal{V}_r^t$ , y comprobamos su relación con la solución de este problema extremal. La técnica que aplicamos está basada en el concepto, fundamental en nuestro estudio, de *conjunto vértice recubridor* de un grafo, así como en la búsqueda de un *emparejamiento completo* en un determinado grafo bipartito definido expresamente. En el *Capítulo 3* hacemos uso de la relación exis-

tente entre el problema que nos ocupa y el Problema Topológico de Turán, así como de la técnica del emparejamiento completo descrito en el capítulo anterior. Con todo ello obtenemos el valor exacto de la función  $ex(n; MK_p)$  para aquellos pares de valores  $(n, p)$  pertenecientes al sector infinito del plano determinado por las desigualdades siguientes:

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq n.$$

Para abordar esta tarea dividimos el sector antes descrito en sectores contiguos más pequeños, de manera que las expresiones que relacionan los pares de valores  $(n, p)$  puedan representarse de manera homogénea.

Dedicamos el cuarto capítulo a caracterizar los grafos extremales correspondientes a aquellos conjuntos de valores de los parámetros para los cuales el valor exacto fue obtenido en el capítulo anterior. Como ocurría con el valor exacto también en este caso los grafos extremales para ambos problemas, el topológico y el de contracción de aristas, coinciden en parte del sector infinito estudiado.

Por último, en el *Capítulo 5* estudiamos el Problema de Zarankiewicz y el Problema de Turán en grafos bipartitos. Obtenemos una cota superior para la función de Zarankiewicz válida para todos los valores de los parámetros  $m, n, s$  y  $t$ . De manera análoga a como estudiamos en capítulos precedentes el Problema de Turán para menores completos, nuestro objetivo será resolver completamente el Problema de Zarankiewicz y el de Turán, en determinados sectores, tanto en el sentido de aportar el valor exacto de la función extremal como en el de caracterizar los grafos bipartitos extremales. Además, tratamos este problema sin fijar valores de los parámetros, es decir, al igual que hicimos con el problema con contracción de aristas, buscamos la solución de los problemas en sectores infinitos de valores de los parámetros relacionados entre sí. En este sentido, demostramos que si  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  entonces el valor exacto de ambas funciones extremales coincide con la cota antes citada, y caracterizamos los grafos extremales, que

también coinciden para los dos problemas extremales estudiados. Posteriormente, aportamos nuevas soluciones al Problema de Zarankiewicz, comprobando que la cota obtenida es óptima y caracterizando los grafos extremales en otros sectores infinitos de conjuntos de valores  $(m, n, s, t)$  determinados por las relaciones:

$$(i) \quad (m - s) \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t - 1; \text{ o bien}$$

$$(ii) \quad s \text{ divide a } n - t \text{ y } (m - s)n \leq mt, \text{ siendo } m \geq 2s \text{ si } (m - s)n = mt.$$

Concluiremos esta memoria incluyendo un apartado dedicado a recopilar las referencias bibliográficas de todos aquellos trabajos a los que se haga referencia a lo largo de esta tesis.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>i</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Notaciones . . . . .	1
1.2 Teoría Extremal de Grafos . . . . .	14
1.3 Resultados previos . . . . .	15
<b>2 Las familias <math>\mathcal{V}_r^t</math></b>	<b>19</b>
2.1 Introducción . . . . .	19
2.2 Técnica del emparejamiento completo . . . . .	22
2.3 Estudio de las familias $\mathcal{V}_r^t$ . . . . .	31
<b>3 Función Extremal</b>	<b>65</b>
3.1 Introducción . . . . .	65
3.2 Cota inferior para $ex(n; MK_p)$ . . . . .	67



3.3	Valor exacto para $ex(n; MK_p)$ . . . . .	76
3.4	Conclusiones . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Familia Extremal</b>	<b>95</b>
4.1	Introducción . . . . .	95
4.2	Familia extremal $EX(n; MK_p)$ . . . . .	97
4.3	Conclusiones y problemas abiertos . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Problema de Zarankiewicz</b>	<b>133</b>
5.1	Introducción . . . . .	133
5.2	Cota superior de la función $z(m, n; s, t)$ . . . . .	136
5.3	Valor exacto y familia extremal . . . . .	139
5.4	Conclusiones y problemas abiertos . . . . .	163

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo vamos a introducir las notaciones y conceptos necesarios que nos permitirán exponer el estudio que se ha llevado a cabo en esta tesis.

En este trabajo abordaremos el estudio de dos conocidos problemas que podríamos enmarcar dentro del campo denominado Teoría Extremal de Grafos.

En este sentido, cualquiera de los manuales que tratan los principios de la Teoría de Grafos como *Graph Theory* de Harary [29], *Extremal Graph Theory* de B. Bollobás [3] o *Graph Theory* de R. Diestel [11] son referencias adecuadas para toda la terminología y resultados básicos que usaremos a lo largo de esta memoria.

### 1.1 Notaciones

Comenzaremos el capítulo haciendo un repaso por los conceptos básicos de los que haremos uso a lo largo de esta tesis. Aprovecharemos esta exposición para



fijar las oportunas notaciones que seguiremos en el desarrollo de la memoria, si bien cualquier otra que no se haya dado explícitamente, puede consultarse en [3, 11, 29].

Todos los conjuntos con los que trataremos, a menos que se especifique lo contrario, serán finitos. Denotaremos por  $|A|$  al número de elementos del conjunto  $A$ , y nos referiremos a éste como el *cardinal* de  $A$ .

Un *grafo*  $G$  es un par  $(V, E)$ , donde  $E$  es un subconjunto de  $V \times V$ . Los elementos del conjunto  $V$  se denominan *vértices* del grafo y, por otro lado, a los elementos de  $E$  se les llama *aristas* del grafo. Si existe riesgo de confusión denotaremos por  $V(G)$  y  $E(G)$  a los conjuntos de vértices y aristas del grafo  $G$ , respectivamente. Así, una arista  $e = \{u, v\} \in E(G)$  de un grafo  $G$  es un par no ordenado de elementos de  $V(G)$ , y habitualmente se denota por  $e = uv$ . Si existe la arista  $e = uv$  en  $E(G)$ , entonces diremos que los vértices  $u$  y  $v$  son *adyacentes*. En otro caso, diremos que los vértices son *no adyacentes*. Un conjunto de vértices se dice *independiente* si dos a dos son no adyacentes. Diremos que la arista  $uv \in E(G)$  une al vértice  $u$  con el vértice  $v$  y que la arista es *incidente* con cada uno de los dos vértices. Dos aristas serán *adyacentes* si ambas son incidentes con algún vértice común.

Por otro lado, llamamos *orden* y lo denotamos por  $v(G)$  al cardinal del conjunto de vértices de  $G$ ,  $|V(G)|$ . Análogamente, el cardinal del conjunto de aristas,  $|E(G)|$  se llama *tamaño* del grafo, y lo denotaremos por  $e(G)$ .

En esta tesis, y a menos que explícitamente se diga lo contrario, todos los grafos serán *finitos*, es decir, con un número finito de vértices; *simples*, lo cual significa que no puede existir más de una arista uniendo cada par de vértices; *no dirigidos*, esto es, que la arista  $uv$  es igual a la arista  $vu$ ; y sin *lazos*, es decir, que ninguna arista puede unir a un vértice consigo mismo.

A continuación, describiremos algunos conceptos, fijando la notación oportuna, relacionados con el número de aristas incidentes con un vértice concreto. Si  $v$  es un vértice del grafo  $G$ ,  $N_G(v)$  representa al conjunto de vértices de  $G$  que son adyacentes a  $v$ . Estos vértices se denominan *vecinos* de  $v$ . El conjunto  $N_G(v)$  se denomina el *entorno* o *vecindad* de  $v$ . El cardinal del entorno de un vértice  $v$  se denomina *valencia* o *grado* de  $v$ , y se denota por  $\delta_G(v) = |N_G(v)|$ . Dado un subconjunto  $A \subseteq V(G)$ , se define el entorno de  $A$  como  $N_G(A) = \bigcup_{v \in A} N_G(v)$ . Si un vértice no es adyacente a ningún otro del grafo, diremos que es un vértice *aislado*. Por otra parte, se define la *valencia mínima* de un grafo  $G$  como  $\delta(G) = \min \{\delta_G(v) : v \in V(G)\}$ . También llamamos *valencia máxima* de  $G$  al valor  $\Delta(G) = \max \{\delta_G(v) : v \in V(G)\}$ . Y por último, se denomina *valencia media* de  $G$  a

$$d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)}{v(G)}.$$

Es evidente que estos valores están relacionados, ya que

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G). \quad (1.1)$$

Si un grafo es tal que todos sus vértices tienen valencia  $r$ , diremos que el grafo es *regular*. En este caso, las tres valencias definidas en el párrafo anterior son iguales entre sí e iguales a  $r$ .

En todo grafo  $G$  es evidente que

$$2e(G) = \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v),$$

de donde se deduce que

$$d(G) = \frac{2e(G)}{v(G)}.$$

Dados dos grafos  $G$  y  $H$  se dice que  $H$  es un *subgrafo* de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y si  $E(H) \subseteq E(G)$ . Cuando  $H$  sea un subgrafo de  $G$  lo denotaremos por  $H \subseteq G$ .



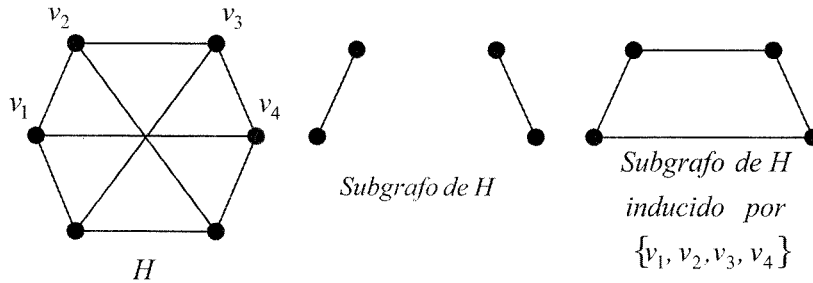


Figura 1.1: Ejemplo de subgrafo y subgrafo inducido.

Dado un conjunto  $A$  de vértices de  $G$ , se llama *subgrafo inducido por  $A$*  en  $G$ , y lo denotamos por  $G[A]$ , al subgrafo que tiene por conjunto de vértices  $A$  y cuyas aristas son todas las de  $G$  que tengan ambos vértices en  $A$  (ver *Figura 1.1*).

De manera similar, podemos definir el *subgrafo inducido por un conjunto de aristas  $F$* , y se denota por  $G[F]$ , al subgrafo cuyos vértices son todos los incidentes con alguna de las aristas del conjunto  $F$  y cuyas aristas son las del propio conjunto  $F$ .

A lo largo de esta memoria va a jugar un papel fundamental el concepto de *conjunto vértice recubridor de un grafo*. Dado un grafo  $H$ , diremos que un conjunto  $W$  de vértices del mismo es un *conjunto vértice recubridor* si toda arista del grafo es incidente con algún vértice del conjunto  $W$ . Al cardinal mínimo de un conjunto vértice recubridor del grafo  $G$  lo denotamos por  $\#_{vr}(G)$ .

En la *Figura 1.2* podemos observar dos conjuntos vértice recubridores de un mismo grafo  $G$ . El conjunto considerado en el caso (a) no es de cardinal mínimo, mientras que sí lo es el del caso (b). Obsérvese que si  $W = \{w_1, \dots, w_s\}$

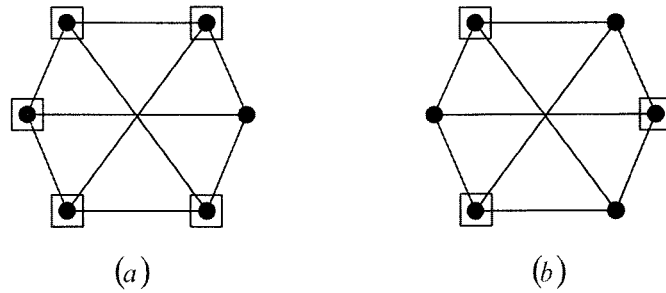


Figura 1.2: Conjuntos vértice recubridores de un grafo.

es un conjunto vértice recubridor del grafo  $G$ , entonces sabemos que

$$e(G) \leq \sum_{i=1}^s \delta_G(w_i).$$

Se pueden definir distintas operaciones elementales entre grafos. Concretamente, dados los grafos  $G$  y  $H$  denotaremos por  $G + H$  a un nuevo grafo en el que el conjunto de vértices está formado por  $V(G) \cup V(H)$ , y cuyas aristas son todas las de  $G$ , todas las de  $H$  y todas las aristas que unen cada vértice de  $G$  con cada vértice de  $H$ . Para cualquier entero positivo  $k$ , el grafo  $k \cdot H = \underbrace{H + \dots + H}_{k \text{ veces}}$ .

Por otra parte, a veces es conveniente estudiar en un grafo el conjunto de aristas ausentes. Con este fin definimos el *grafo complementario* de un grafo  $G$ , que denotaremos por  $\overline{G}$ , como aquel grafo cuyo conjunto de vértices es el mismo que el de  $G$ , y cuyo conjunto de aristas es  $(V(G) \times V(G)) - E(G)$ . Es decir, una arista está en  $\overline{G}$  si y sólo si no está en  $G$  (ver *Figura 1.3*).

Un conjunto de aristas de un grafo  $G$ ,  $\{u_{i-1}u_i : i = 1, \dots, p\}$  siendo los vértices distintos, es un *camino* de longitud  $p$  uniendo los vértices  $u_0$  con

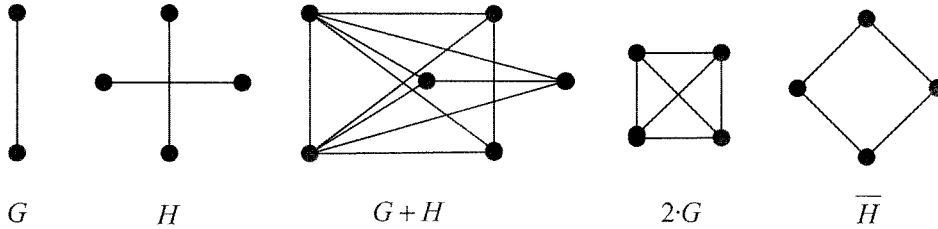


Figura 1.3: Suma, producto por escalar y complementario de un grafo.

$u_p$ . Los vértices  $u_0, u_p$  se denominan *vértices finales*, y los vértices  $u_1, \dots, u_{p-1}$  *vértices internos*. Usaremos indistintamente la lista de aristas o la lista de vértices para representar a un camino, es decir, el camino representado por las aristas  $u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{p-1}u_p$  es el mismo que el representado por el conjunto de vértices  $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_p$ . Dos caminos  $u_0, u_1, \dots, u_p$  y  $v_0, v_1, \dots, v_q$  se dice que son *disjuntos* siempre que  $\{u_1, \dots, u_{p-1}\} \cap \{v_1, \dots, v_{q-1}\} = \emptyset$ . Si  $u_0 = u_p$  diremos que el camino es un *ciclo* de longitud  $p$ . Se denomina *girth*, *cintura* o *cuello* de un grafo a la menor longitud de un ciclo contenido en él. Si el grafo no contiene ciclos decimos que tiene *girth infinito*.

Diremos que un grafo  $G$  es *conexo* si para cualquier par de vértices existe un camino en  $G$  que los une. Todo grafo  $G$  está formado por la unión de subgrafos conexos disjuntos. Estos subgrafos se denominan *componentes conexas* del grafo  $G$ . Una *componente conexa trivial* es aquella formada por un único *vértice aislado*.

Llamamos *árbol* a todo grafo conexo que no contenga ciclos. En todo grafo

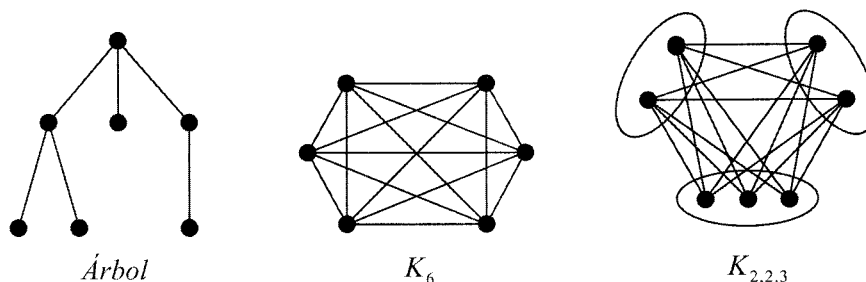


Figura 1.4: Ejemplos de un árbol, un grafo completo y un grafo  $r$ -partito.

conexo  $G$  se verifica la relación

$$e(G) \geq v(G) - 1.$$

Es más, ésta se convierte en igualdad si y sólo si  $G$  es un árbol. En un árbol, los vértices de valencia 1 se denominan *vértices finales*. Un *caterpillar* es un árbol tal que el subgrafo que se obtiene al eliminar los vértices finales es un camino.

Denotaremos por  $K_n$  al grafo *completo* con  $n$  vértices, es decir, al grafo de orden  $n$  con todas las aristas posibles uniendo sus vértices. Evidentemente,  $e(K_n) = \binom{n}{2}$ . Dado un entero  $r \geq 2$ , un grafo  $G$  se dice que es  $r$ -partito si el conjunto de vértices puede descomponerse en  $r$  *clases de vértices* tales que cada arista del grafo una dos vértices de diferentes clases. Los grafos 2-partitos se denominan habitualmente *bipartitos*. Aquellos grafos  $r$ -partitos que contienen todas las aristas posibles uniendo vértices de distinta clase los llamaremos *completos*, y los denotaremos como  $K_{n_1, \dots, n_r}$ , siendo  $n_i$  el número de vértices de cada clase de equivalencia (ver *Figura 1.4*). Nótese que el grafo complementario de  $K_{n_1, \dots, n_r}$  es aquel formado por la unión disjunta de  $r$  grafos completos  $K_{n_1} \cup \dots \cup K_{n_r}$ .

En la parte final de esta tesis trataremos un problema relacionado con la



inclusión de subgrafos bipartitos completos en un grafo bipartito. Evidentemente, dado un grafo bipartito  $G$  con clases de equivalencia  $X$  e  $Y$ , el grafo bipartito completo  $K_{s,t}$ , cuyas clases denotaremos  $X'$  e  $Y'$ , puede estar contenido en  $G$  de tal forma que  $X' \subseteq X$  e  $Y' \subseteq Y$ , o bien siendo  $Y' \subseteq X$  y  $X' \subseteq Y$ . Cuando sea necesario especificar una de las situaciones anteriores usaremos la siguiente notación: diremos que el grafo bipartito  $G$  contiene a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo si  $G$  contiene un subgrafo bipartito completo con  $s$  vértices en la clase  $X$  y  $t$  vértices en la clase  $Y$  (ver *Figura 1.5*).

Con estas notaciones se tiene la siguiente relación

$$K_{s,t} \subseteq G \Leftrightarrow K_{(s,t)} \subseteq G \text{ y/o } K_{(t,s)} \subseteq G.$$

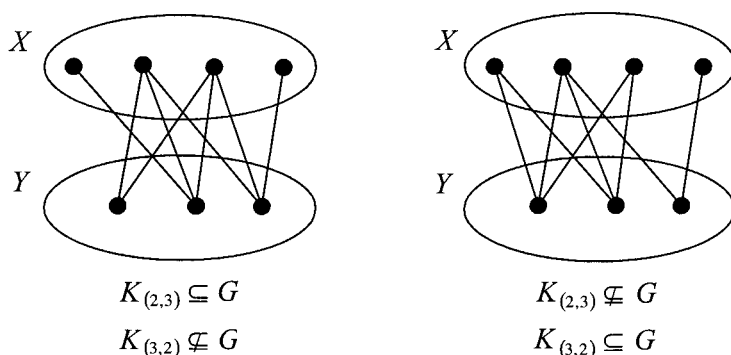


Figura 1.5: Subgrafos bipartitos completos de un grafo bipartito.

Determinados grafos  $r$ -partitos, muy particulares, jugarán un papel fundamental en esta memoria. Nos referimos a los denominados *Grafos de Turán*. El grafo de Turán, denotado  $T_r(n)$ , es el único grafo  $r$ -partito con  $n$  vértices repartidos en sus clases de la forma más igualitaria posible (ver *Figura 1.6*). Es decir, es un grafo con  $n$  vértices repartidos en  $r$  clases, de modo que cada clase va a contener,  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  o  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1$  vértices. El número de aristas del grafo de Turán

$T_r(n)$  se denota por  $t_r(n)$ . En la *Sección 1.3* veremos una expresión explícita de tal valor, en función de  $n$  y  $r$ .

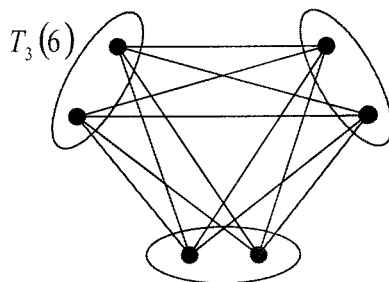


Figura 1.6: Grafo de Turán  $T_3(6)$ .

Un *emparejamiento* en un grafo  $G$  es un conjunto independiente de aristas. Dado  $B$  un grafo bipartito con clases de equivalencia  $X$  e  $Y$ , siendo  $|X| \leq |Y|$ , se dice que  $B$  contiene un *emparejamiento completo* en  $X$ , si existe un emparejamiento en  $B$  de manera que cada vértice de la clase  $X$  pertenece a alguna de las aristas del emparejamiento. Diremos que un conjunto de aristas del grafo bipartito  $B$  es un  $X$ -emparejamiento si no contiene dos aristas que sean incidentes con un mismo vértice de la clase  $X$ . Análogamente se define el concepto de  $Y$ -emparejamiento. En la *Figura 1.7*, el conjunto de aristas resaltadas en negrita representa un emparejamiento completo en  $Y$ , en el grafo de la izquierda, y un  $Y$ -emparejamiento en el grafo bipartito de la derecha.

A lo largo de esta memoria, en la prueba de determinados resultados, nos veremos en la necesidad de probar la existencia de un emparejamiento completo en un grafo bipartito. Para garantizar dicha existencia haremos uso del siguiente resultado, clásico en Teoría de Grafos, conocido como *Condición de Hall*.



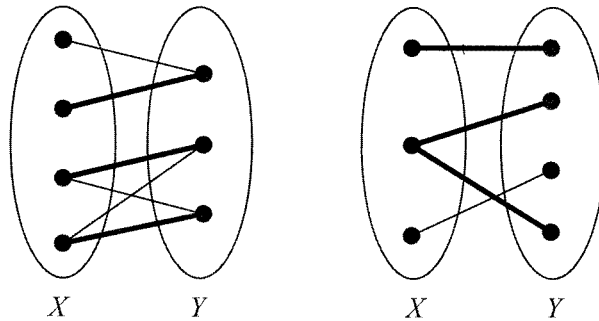
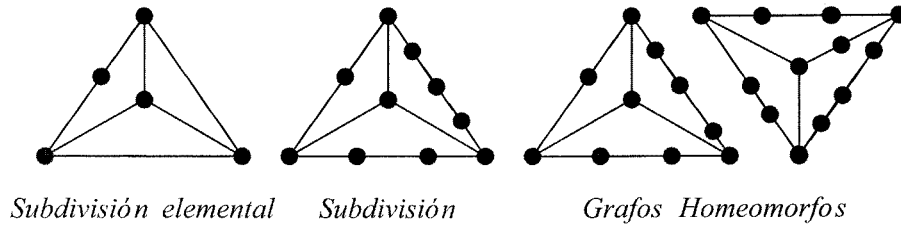


Figura 1.7: Un emparejamiento completo y un  $Y$ -emparejamiento en un grafo bipartito.

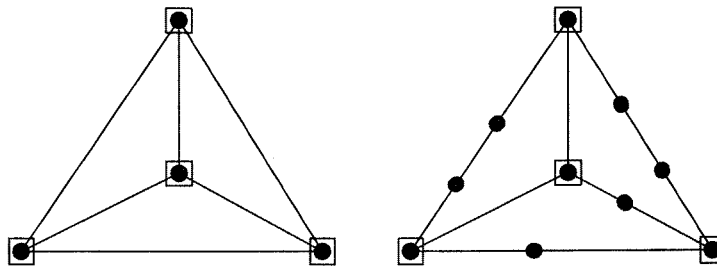
**Teorema 1.1.1 [28]** *Si  $B$  es un grafo bipartito de clases  $X$  e  $Y$ , entonces  $B$  contiene un emparejamiento completo en  $X$  si y sólo si para todo  $A \subseteq X$  se tiene que  $|N_B(A)| \geq |A|$ .*

Diremos que estamos realizando un *subdivisión elemental* en un grafo  $G$  si eliminamos una arista  $uv \in E(G)$ , y la reemplazamos por otras dos  $uw$  y  $wv$ , siendo  $w$  un nuevo vértice que añadimos al grafo. Si un grafo  $H$  puede obtenerse de otro grafo  $G$  realizando una sucesión finita de subdivisiones elementales, entonces diremos que  $H$  es una *subdivisión* del grafo  $G$ , o bien que  $H$  contiene a  $G$  como *menor topológico*, y lo denotaremos por  $H = TG$ . En general, si dos grafos  $H_1$  y  $H_2$  son subdivisiones de un mismo grafo diremos que son *homeomorfos* (ver *Figura 1.8*).

Conviene resaltar que si el grafo  $H$  contiene a  $G$  como menor topológico, entonces es posible sustituir cada una de las aristas del grafo  $G$  por un camino, de modo que dichos caminos sean dos a dos disjuntos en  $H$ . En este sentido,  $V(G) \subseteq V(H)$  y a los vértices de  $G$  identificados en  $H$  se les denomina *vértices*

Figura 1.8: Subdivisiones de  $K_4$ .

*branch*. Nótese que los vértices, que no son *branch*, del subgrafo de  $H$  inducido por el conjunto de caminos disjuntos, tienen valencia dos (ver *Figura 1.9*).

Figura 1.9: Vértices *branch* en una subdivisión de  $K_4$ .

Dado un grafo  $H$  y una arista  $uv \in E(H)$  diremos que hacemos una *contracción elemental* de la arista  $uv$  sobre el vértice  $v$  si eliminamos del grafo  $H$  el vértice  $u$  y unimos mediante una arista el vértice  $v$  con cada uno de los vértices de  $N_H(u)$ . También diremos que la arista  $uv$  se ha contraído sobre el vértice  $v$ .



Al grafo resultante lo denotamos por  $H/uv$ . Diremos que un grafo  $H$  contiene a otro grafo  $G$  como *menor*, o bien que  $H$  es *contractible* a  $G$ , si es posible obtener  $G$  a partir de un subgrafo de  $H$  mediante una sucesión finita de contracciones de aristas. Esto lo denotaremos por  $H = MG$ . Los vértices de  $H$  sobre los que se contraen las aristas para obtener el grafo  $G$  se denominan, al igual que en el caso de menores topológicos, *vértices branch*.

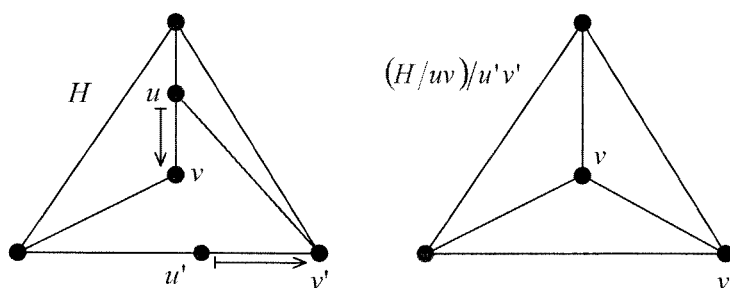


Figura 1.10: El grafo  $H$  contiene a  $K_4$  como menor,  $H = MK_4$ .

Por último, vamos a cerrar esta primera parte de la memoria recordando la definición de *sucesión decreciente de vértices* en un grafo, introducida en [7].

**Definición 1.1.2** [7] Sean  $n$  y  $q$  dos enteros positivos con  $n \geq q$ . Sea  $H$  un grafo con  $n$  vértices y sea  $\{v_1, \dots, v_q\}$  un conjunto ordenado de  $q$  vértices de  $H$ . Diremos que dicho conjunto constituye una *sucesión decreciente de vértices* en  $H$  si verifica las siguientes propiedades:

1.  $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq \delta_{H_j}(v_{j+1})$  para  $j = 1, \dots, q-1$ .
2. Para cada entero positivo  $m$ , si existe  $v \in H_k$  con  $k = 1, \dots, q$  tal que  $\delta_{H_k}(v) \geq m$  entonces se verifica que  $\delta_{H_j}(v_{j+1}) \geq m$  para todo  $j = 0, \dots, k$ ,

siendo  $H_0 = H$  y  $H_j$  es el subgrafo de  $H$  resultante de eliminar el conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_j\}$ .

Dicho de otra forma, una sucesión decreciente de vértices  $\{v_1, \dots, v_q\}$  de un grafo  $H$ , es aquella que cumple que  $v_1$  es un vértice de valencia máxima en  $H$ ,  $v_2$  es un vértice de valencia máxima en  $H_1 = H - \{v_1\}$ , ...,  $v_j$  es un vértice de valencia máxima en  $H_{j-1} = H - \{v_1, \dots, v_{j-1}\}$  (ver *Figura 1.11*).

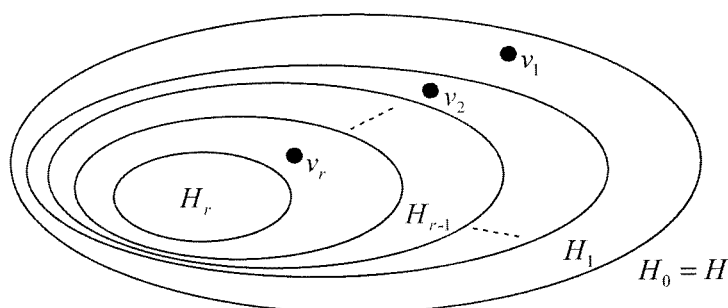


Figura 1.11:  $v_j$  es un vértice de valencia máxima en  $H_{j-1} = H - \{v_1, \dots, v_{j-1}\}$ .

El concepto de sucesión decreciente nos permite el recuento del número de aristas de un grafo. En efecto

$$\begin{aligned} e(H) &= \delta_{H_0}(v_1) + e(H_1) \\ &= \delta_{H_0}(v_1) + \delta_{H_1}(v_2) + e(H_2) \\ &= \dots \end{aligned}$$

y en general,

$$e(H) = \sum_{i=1}^r \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_r). \quad (1.2)$$

## 1.2 Teoría Extremal de Grafos

En esta tesis vamos a plantearnos el estudio de dos problemas que se pueden enmarcar en la denominada Teoría Extremal de Grafos. En general, dados una propiedad  $\mathcal{P}$  y un invariante  $\mu$  sobre una cierta clase de grafos  $\mathcal{H}$ , un *problema extremal* para la propiedad  $\mathcal{P}$  consiste en encontrar el menor entero  $m$  de manera que todo grafo  $G \in \mathcal{H}$  con  $\mu(G) > m$  posee la propiedad  $\mathcal{P}$ .

El primer problema que se plantea, dentro de la estructura que acabamos de describir es el denominado *Problema de Turán*. En el mismo, sobre la clase de grafos de orden  $n$ , se relaciona el invariante “número de aristas” con la propiedad de “contener un subgrafo completo con  $p$  vértices”. En otras palabras, se trata de calcular el tamaño máximo,  $ex(n; K_p)$ , de un grafo con  $n$  vértices sin contener al grafo completo de orden  $p$  como subgrafo.

Este problema, planteado en 1941, fue completamente resuelto por el autor al que debe su nombre. La solución viene dada por el número de aristas del único grafo  $(p - 1)$ -partito completo cuyos vértices están repartidos entre las clases del modo más igualitario posible. Recordemos que ya habíamos definido esta clase de grafos en la sección anterior. Además la familia extremal  $EX(n; K_p)$  se reduce únicamente a ese grafo de Turán,  $T_{p-1}(n)$  (ver *Figura 1.6*).

La importancia del problema descrito no radica sólo en el hecho de que quedara completamente resuelto, sino además en la gran cantidad de problemas que surgieron como extensiones del mismo, y que han dado lugar a un buen número de aportaciones relevantes a esta teoría. De hecho, este problema ha dado nombre a toda una lista de problemas extremales con la misma estructura, en los que se estudia el tamaño máximo de un grafo sin contener un subgrafo prohibido. Así, encontramos el Problema de Turán...

- para subgrafos bipartitos completos  $ex(n; K_{s,t})$ , en donde el subgrafo pro-

hibido es un grafo bipartito completo;

- para subgrafos bipartitos completos en grafos bipartitos con  $m$  y  $n$  vértices, respectivamente, en sus clases,  $ex(m, n; K_{s,t})$ ;
- para menores topológicos,  $ex(n; TK_p)$ , o Problema Topológico de Turán, en donde el subgrafo prohibido es una subdivisión de  $K_p$ ;
- o para menores,  $ex(n; MK_p)$ , también llamado Problema de Turán con contracción de aristas, en donde el subgrafo prohibido es un menor del grafo completo  $K_p$ .

Dedicaremos gran parte de esta memoria al estudio de esta última variante del Problema de Turán conocida como Problema de Turán para menores completos o Problema de Turán con contracción de aristas. Este consiste en la búsqueda del valor exacto para la función  $ex(n; MK_p)$  que denota al máximo número de aristas de un grafo con  $n$  vértices sin contener al grafo completo  $K_p$  como menor, es decir, buscaremos grafos maximales no contractibles a  $K_p$ .

En la parte final de esta tesis haremos aportaciones a otro problema extremal denominado Problema de Zarankiewicz. Este consiste en el estudio del máximo número de aristas en un grafo bipartito con clases  $X$ , de  $m$  vértices, e  $Y$ , de  $n$  vértices, sin que contenga a un subgrafo bipartito completo  $K_{s,t}$  con los  $s$  vértices en  $X$  y los  $t$  vértices en  $Y$ , denotado  $z(m, n; s, t)$ . Muchas han sido las aportaciones a este estudio, sobre todo para dar acotaciones de la función  $z(m, n; s, t)$  desde un punto de vista asintótico.

### 1.3 Resultados previos

Finalizaremos este primer capítulo exponiendo algunos resultados previos de los que haremos uso a lo largo de la memoria. En algunos de los cálculos que llevare-



mos a cabo tendremos que manejar algunas expresiones, cuya equivalencia vamos a poner de manifiesto en la siguiente nota.

**Nota 1.3.1** *Sea  $q$  un entero positivo, y sea  $a = 3$  (resp.  $7, 5$ ) si  $q = 0$  (resp.  $1, 2$ ) módulo 3, entonces,*

$$\left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor = \frac{16q+9-a}{6}$$

En efecto, no hay más que estudiar la clase de  $q$  módulo 6.

- Si  $q = 0$  o  $3$  mód. 6, entonces  $a = 3$ , y como  $8q = 0$  mód. 3,

$$\left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor = \frac{8q+3}{3} = \frac{16q+6}{6} = \frac{16q+9-a}{6}.$$

- Si  $q = 1$  o  $4$  mód. 6, entonces  $a = 7$ , y como  $8q = 2$  mód. 3,

$$\left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor = \frac{8q-2+3}{3} = \frac{16q+2}{6} = \frac{16q+9-a}{6}.$$

- Si  $q = 2$  o  $5$  mód. 6, entonces  $a = 5$ , y como  $8q = 1$  mód. 3,

$$\left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor = \frac{8q-1+3}{3} = \frac{16q+4}{6} = \frac{16q+9-a}{6}.$$

◦

Como advertimos en su momento, los grafos de Turán aparecerán con frecuencia a lo largo de este trabajo, por lo que es conveniente disponer de una expresión del tamaño de dichos grafos en función del orden y del número de clases de vértices del mismo.

**Nota 1.3.2** *Sean  $n$  y  $r$  dos enteros positivos. El número de aristas,  $t_r(n)$ , del grafo de Turán  $T_r(n)$  es*

$$t_r(n) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left( n - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right)$$

La clave para alcanzar esta expresión está en observar que el grafo complementario del grafo de Turán  $T_r(n)$  está formado por la unión disjunta de grafos completos.

Además, en primer lugar, observemos que las clases de vértices de  $T_r(n)$  tienen cardinal  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  o  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1$ , y es obvio que el número de clases de mayor tamaño coincide con el resto de la división entera de  $n$  entre  $r$ . Por tanto, el número de clases de mayor tamaño (ver *Figura 1.12*) es igual a  $n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  y en consecuencia, el número de clases con  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  vértices será  $r - (n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor)$ . Entonces tenemos que el número de aristas del complementario del grafo de Turán  $T_r(n)$ , denotado por  $\bar{t}_r(n) = \binom{n}{2} - t_r(n)$ , es

$$\begin{aligned} \bar{t}_r(n) &= (n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor) \binom{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1}{2} + (r - (n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor)) \binom{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{2} \\ &= (n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor) \frac{(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1) \lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{2} + (r - (n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor)) \frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor (\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - 1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \left( (n - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor) (\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1) + (r - n + r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor) (\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \left( 2n - r - r \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \right), \end{aligned}$$

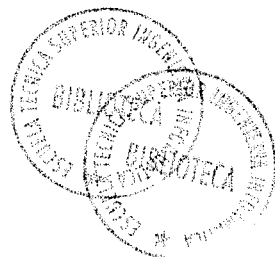
de donde deducimos que

$$t_r(n) = \binom{n}{2} - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \left( n - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \right).$$

◻

Por último, enunciaremos dos resultados que fueron probados en [7], y que nos serán de gran utilidad a la hora de caracterizar los grafos extremales.

El primero de ellos nos permite asegurar la existencia de un determinado número de vértices independientes cuya valencia coincide con la valencia máxima



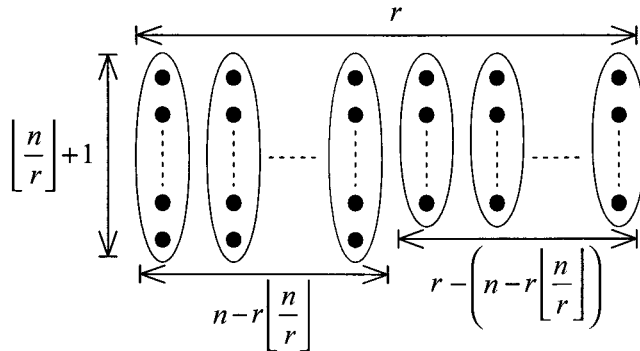


Figura 1.12: Distribución de los vértices en un grafo de Turán.

del grafo.

**Lema 1.3.3** [7] *Sea  $m$  un entero y  $H$  un grafo con valencia máxima  $\Delta$  y, al menos,  $m$  vértices de valencia  $\Delta$ . Entonces, al menos,  $\lfloor \frac{m + \Delta}{\Delta + 1} \rfloor$  de ellos son independientes.*

El segundo resultado nos permite contar, en base a hipótesis acerca del número de vértices independientes con valencia máxima en el grafo, el número de copias disjuntas de un grafo completo.

**Lema 1.3.4** [7] *Sea  $r$  un entero positivo y  $H$  un grafo con valencia máxima  $\Delta$ . Si  $H$  tiene  $r(\Delta + 1)$  vértices de valencia  $\Delta$  y exactamente  $r$  de ellos son independientes, entonces  $H$  contiene  $r$  copias disjuntas de  $K_{\Delta+1}$ .*

# Capítulo 2

## Las familias $\mathcal{V}_r^t$

En este capítulo describiremos la técnica general que vamos a utilizar a lo largo de esta memoria para alcanzar valores exactos de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  y para caracterizar los grafos extremales correspondientes. Para ello estudiaremos el concepto, básico en este trabajo, de conjunto vértice recubridor de un grafo y su relación con el número mínimo de contracciones de aristas necesarias en un grafo dado para obtener un subgrafo completo. Por último, estudiaremos las familias de grafos que denotaremos por  $\mathcal{V}_r^t$ , que usaremos en el estudio del cardinal mínimo de un conjunto vértice recubridor de un grafo, y analizaremos su relación con el problema de Turán para menores completos.

### 2.1 Introducción

Como ya se ha definido en el capítulo anterior, un conjunto vértice recubridor  $W$  de un grafo  $G$  es un subconjunto de sus vértices tal que cualquier arista de  $G$  es incidente con, al menos, un vértice de  $W$ .





Supongamos que una red de distribución está formada por 10 centrales eléctricas, con una cierta interconexión entre ellas. Además, un equipo de operarios situado en cualquier central puede realizar el control y mantenimiento de todas las que estén conectadas a ésta.

Si por necesidades del sistema necesitáramos eliminar 4 de las centrales, lo que interesa, evidentemente, es que el mantenimiento de las 6 restantes pueda llevarse a cabo desde el menor número posible de centrales.

El grafo  $H$  de la *Figura 2.1* representa la situación que acabamos de describir. Cada central está situada en un vértice, y si dos centrales están conectadas, entonces los vértices que las representan son adyacentes en  $H$ .

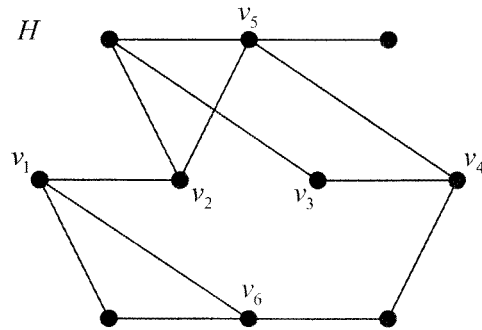


Figura 2.1: Modelo de red de centrales eléctricas interconectadas.

Si denotamos por  $\mathcal{V}_r^t$  a la familia de grafos tales que al eliminar  $r$  vértices, el subgrafo resultante posee un conjunto vértice recubridor de cardinal menor o igual que  $t$ , parece evidente que lo que interesaría es averiguar cuál es el menor valor de  $t$  para el que se cumple que  $H \in \mathcal{V}_4^t$ .

De nuevo en el ejemplo que hemos comentado, si eliminamos las centrales representadas por los vértices  $\{v_i : i = 1, \dots, 4\}$  tendríamos el grafo  $H_4$  de la *Figura 2.2*.

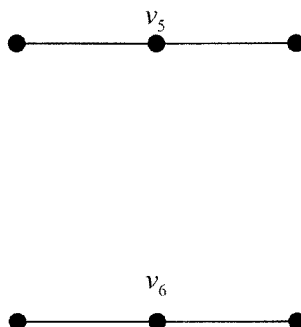


Figura 2.2: Conjunto vértice recubridor del grafo  $H_4$ .

Es evidente que los vértices  $v_5$  y  $v_6$  forman un conjunto vértice recubridor de cardinal mínimo del grafo  $H_4$ , por lo que podemos afirmar que  $H \in \mathcal{V}_4^2$ , y la elección de las centrales a eliminar era óptima.

Por otro lado, observemos que al grafo complementario de  $H_4$  le faltan 4 aristas para ser el grafo completo  $K_6$ . Si mediante ciertas contracciones de aristas en  $G = \overline{H}$  pudiéramos generar las aristas ausentes, deduciríamos que  $G$  es un grafo contractible a  $K_6$ .

Ahora bien, como podemos ver en la *Figura 2.1* el vértice  $v_1$  no es adyacente en  $H$  ni a  $v_5$  ni a ninguno de sus adyacentes. Esto significa que sí lo es en su grafo complementario  $G$ . Por ello, contrayendo en  $G$  la arista  $v_1v_5$  generamos dos de las aristas que nos faltan (ver *Figura 2.3*).

Un razonamiento análogo, aplicado a  $v_3$  y  $v_6$  nos permite obtener las otras dos aristas que buscamos.

Como hemos podido comprobar en el sencillo ejemplo que acabamos de describir, podemos relacionar el cardinal de un conjunto vértice recubridor de un grafo con el número mínimo de contracciones de aristas necesarias en un grafo para obtener un determinado subgrafo completo y todo ello, haciendo uso de las



familias de grafos  $\mathcal{V}_r^t$  y sus propiedades.

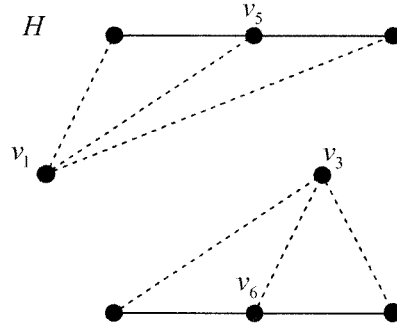


Figura 2.3: Contracciones de aristas en  $G = \overline{H}$  que generan las aristas que faltan.

A lo largo de esta memoria nos basamos en esta técnica para obtener nuevas soluciones del problema de Turán con contracción de aristas.

## 2.2 Técnica del emparejamiento completo

Recordemos que el problema que nos ocupa es determinar el máximo número posible de aristas en un grafo con  $n$  vértices sin que éste sea contractible a un grafo completo con  $p$  vértices, y caracterizar los grafos extremales.

Como ya vimos en el capítulo preliminar, un grafo es contractible a  $K_p$ , o contiene a  $K_p$  como menor, si es posible realizar en él una sucesión finita de contracciones de aristas, de tal modo que el grafo resultante contenga al grafo completo  $K_p$  como subgrafo.

Por tanto, deberemos ocuparnos de dos aspectos fundamentales. El primero de ellos será determinar el número de contracciones de aristas necesarias para obtener un subgrafo completo. Y el segundo, dado que en principio toda arista del grafo es susceptible de ser contraída, también habrá que establecer un criterio que

nos permita seleccionar las contracciones más adecuadas a nuestros propósitos.

Supongamos que  $G$  es un grafo con  $n$  vértices, y denotemos por  $H$  a su grafo complementario. Consideremos ahora un subconjunto cualquiera  $U$  de  $p$  vértices de  $G$ .

Al subgrafo de  $G$  inducido por  $U$ ,  $G[U]$ , le faltan las aristas que tiene el subgrafo de  $H$  inducido por  $U$ ,  $H[U]$ , para ser un grafo completo de orden  $p$  (ver *Figura 2.4*). Para generar esas aristas ausentes en  $G[U]$  es necesario realizar en el grafo  $G$  contracciones de aristas que unan vértices de  $V(G) \setminus U$  con vértices de  $U$ .

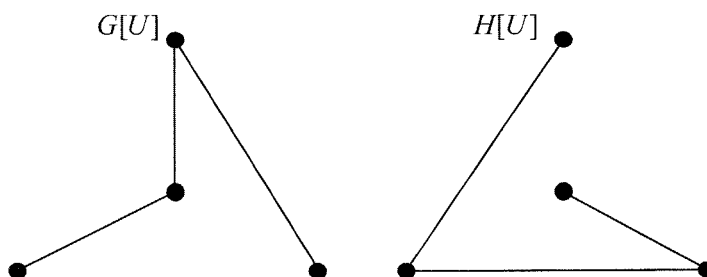


Figura 2.4: Las aristas que faltan a  $G[U]$  para ser  $K_p$  son las de  $H[U]$ .

En el enunciado que vamos a probar a continuación demostraremos que el número de dichas contracciones que es necesario realizar para obtener el subgrafo completo con los  $p$  vértices de  $U$  es mayor o igual que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor del subgrafo  $H[U]$ .

**Teorema 2.2.1** *Sea  $G$  un grafo contractible a  $K_p$  y  $H$  su complementario. El número de aristas que es necesario contraer en  $G$  para obtener  $K_p$  es mayor o igual que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor del subgrafo inducido en  $H$  por el conjunto de vértices  $U$ .*



*Demostración:*

Supongamos que  $U = \{v_1, \dots, v_p\}$  es un conjunto de vértices branch del grafo  $G$  sobre los cuales podemos contraer un conjunto de aristas con cardinal mínimo, que denotaremos  $\{e_1, \dots, e_r\}$ , para obtener un subgrafo completo de orden  $p$ .

Las aristas  $\{e_1, \dots, e_r\}$  no pueden unir vértices de  $U$  entre sí ya que al contraerlas se perderían vértices branch, y esto no es posible. Por otro lado, contraer aristas que unan vértices del conjunto  $V(G) \setminus U$  entre sí, no aporta aristas nuevas a  $G[U]$ . En consecuencia, podemos deducir que cada arista  $e_i$  une un vértice  $v_{j_i}$  de  $U$  con un vértice del conjunto  $V(G) \setminus U$  (ver *Figura 2.5*).

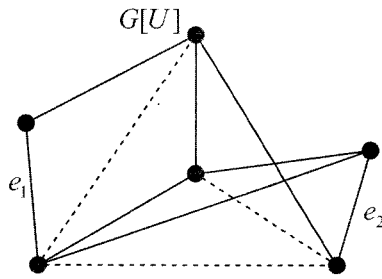


Figura 2.5: Contraer las aristas  $e_i$  genera las que faltan (discontinuas) en  $G[U]$ .

Tengamos en cuenta que el conjunto de aristas  $\{e_1, \dots, e_r\}$  se contrae en  $G$  sobre los vértices  $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}\} \subseteq U$  para generar todas las aristas que faltan en  $G[U]$  para obtener un  $K_p$ , es decir, las de  $H[U]$ . Por tanto, todas las aristas de  $H[U]$  han de ser incidentes con, al menos, un vértice del conjunto  $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}\}$ , lo cual significa que este conjunto de vértices es un conjunto vértice recubridor de cardinal  $r$  del subgrafo  $H[U]$  (ver *Figura 2.6*).

Esto implica que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor del subgrafo  $H[U]$  deber ser menor o igual que  $r$ , como queríamos demostrar.

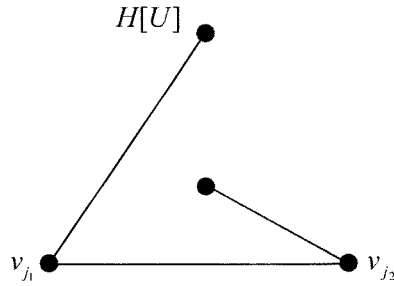


Figura 2.6: Los vértices  $\{v_{j_i}\}$  son un conjunto vértice recubridor de  $H[U]$ .

⊗

Observemos que por cada arista que se contrae en un grafo, se pierde un vértice. Por ello, fijado un subconjunto  $U$  de  $p$  vértices de  $G$ , el número de contracciones de aristas que podemos hacer está limitado por el cardinal del conjunto  $V(G) \setminus U$ , es decir,  $n - p$ .

Como consecuencia de esto y teniendo en cuenta lo probado en el resultado anterior, podemos deducir el siguiente corolario,

**Corolario 2.2.2** *Dado un grafo  $G$  de orden  $n$ , si para cualquier subconjunto  $U$  de  $G$  con  $p$  vértices el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor del subgrafo inducido por  $U$  en  $\overline{G}$  es mayor que  $n - p$ , entonces  $G$  no es contractible al grafo  $K_p$ .*

Por tanto, los grafos  $G$  con  $n$  vértices susceptibles de contener a  $K_p$  como menor son aquellos para los cuales podemos eliminar  $n - p$  vértices, de manera que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor del subgrafo inducido por los  $p$  vértices restantes en  $\overline{G}$  sea, a lo sumo,  $n - p$ .

Como lo interesante es que el mínimo cardinal del conjunto vértice recubridor del subgrafo generado por los  $p$  vértices sea lo menor posible, parece lógico pensar que los  $n - p$  que tenemos que eliminar son aquellos que más adyacencias tengan en el grafo complementario. Por ello recurriremos al concepto de sucesión decreciente introducido en [7].

Supongamos que un grafo  $H$ , con  $e(H)$  aristas y  $n = v(H)$  vértices, tiene valencia máxima  $\Delta(H)$ . Denotemos por  $r_{\Delta(H)}$  al máximo número de vértices independientes con valencia  $\Delta(H)$  en dicho grafo.

El grafo  $H_{r_{\Delta(H)}}$ , obtenido tras eliminar en  $H$  estos  $r_{\Delta(H)}$  vértices independientes, tiene valencia máxima menor o igual que  $\Delta(H) - 1$ . Como sabemos que para todo grafo  $G$ , se cumple la siguiente relación

$$2e(G) = \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) \leq \Delta(G)v(G),$$

entonces, en concreto, podemos deducir que

$$2e(H_{r_{\Delta(H)}}) \leq (\Delta(H) - 1)v(H_{r_{\Delta(H)}}),$$

o lo que es lo mismo

$$2(e(H) - \Delta(H) \cdot r_{\Delta(H)}) \leq (\Delta(H) - 1)(n - r_{\Delta(H)}).$$

Si de la última desigualdad despejamos el valor de  $r_{\Delta(H)}$  tendríamos

$$r_{\Delta(H)} \geq \frac{2e(H) - (\Delta(H) - 1)n}{\Delta(H) + 1}. \quad (2.1)$$

Ahora podemos proceder del mismo modo para acotar el número  $r_{\Delta(H)-1}$  de vértices independientes en el grafo  $H_{r_{\Delta(H)}}$  con valencia  $\Delta(H) - 1$ . Ya que el grafo  $H_{r_{\Delta(H)}+r_{\Delta(H)-1}}$  tiene valencia máxima menor o igual que  $\Delta(H) - 2$ , sabemos que

$$2e(H_{r_{\Delta(H)}+r_{\Delta(H)-1}}) \leq (\Delta(H) - 2)v(H_{r_{\Delta(H)}+r_{\Delta(H)-1}}),$$

o equivalentemente

$$2 \left( e(H) - r_{\Delta(H)} \Delta(H) - r_{\Delta(H)-1} (\Delta(H) - 1) \right) \leq (\Delta(H) - 2) \left( n - r_{\Delta(H)} - r_{\Delta(H)-1} \right),$$

y de esta última expresión podemos obtener la cota

$$r_{\Delta(H)-1} \geq \frac{2e(H) - r_{\Delta(H)} (\Delta(H) + 2) - n (\Delta(H) - 2)}{\Delta(H)}.$$

Podemos seguir acotando de esta manera hasta que obtenemos una cota del número  $r_2$  de vértices independientes con valencia 2 en el grafo  $H_{r_{\Delta(H)}+r_{\Delta(H)-1}+\dots+r_3}$ . De esta manera, cada uno de los valores  $r_j$  queda acotado inferiormente por una función que depende de  $e(H)$ ,  $n$ ,  $\Delta(H)$  y de los anteriores  $r_{\Delta(H)}, \dots, r_{j+1}$ .

Esta construcción nos da una forma explícita de seleccionar una sucesión decreciente en un grafo  $H$  y nos permite acotar el cardinal mínimo de un conjunto vértice recubridor.

En efecto, teniendo en cuenta que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor de un grafo con valencia máxima menor o igual que 1 coincide con su número de aristas, se verifica

$$\#_{vr}(H) \leq r_{\Delta(H)} + \dots + r_2 + e \left( H_{r_{\Delta(H)}+r_{\Delta(H)-1}+\dots+r_2} \right). \quad (2.2)$$

Todo lo anterior nos lleva a introducir unas familias de grafos que van a desempeñar un papel importante a lo largo de esta memoria.

**Definición 2.2.3** Dados dos enteros positivos  $r$  y  $t$ , se define la familia  $\mathcal{V}_r^t$  como el conjunto de grafos  $H$  para los que existe una sucesión decreciente de  $r$  vértices de modo que el cardinal mínimo de un conjunto vértice recubridor del subgrafo  $H_r$ , resultante de eliminar en  $H$  los vértices de la sucesión, es menor o igual que  $t$ .

Con estas notaciones, si denotamos por  $q = n - p$ , tenemos que los grafos  $G$  que centrarán nuestro interés serán aquellos para los cuales su complementario  $H = \overline{G}$  pertenece a la familia  $\mathcal{V}_q^q$ .



Llegados a este punto, tenemos que abordar la segunda de las cuestiones que nos planteamos al inicio. Dado un grafo  $H$  de la familia  $\mathcal{V}_q^q$ , si su complementario  $G = \overline{H}$  es contractible a  $K_p$ , ¿cuáles deben ser las aristas que debemos contraer en  $G$  para obtener un subgrafo completo con  $p$  vértices?

Con el fin de llegar a un criterio que nos permita seleccionar dicho conjunto de aristas, supongamos que  $G$  es un grafo con  $n$  vértices tal que  $H = \overline{G} \in \mathcal{V}_q^q$ , siendo  $q = n - p$ .

Como sabemos, esto implica que existe una sucesión decreciente de  $q$  vértices en  $H$ ,  $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ , tal que  $\#_{vr}(H_q) \leq q$ . Denotemos por  $s = \#_{vr}(H_q)$ . Sea pues  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$  un conjunto vértice recubridor del subgrafo  $H_q$ , con cardinal mínimo.

En el grafo de la *Figura 2.7* vemos representada esta situación. Como las aristas de  $H_q$  son precisamente las que faltan en  $G$  para que el subgrafo de  $G$  inducido por los  $p$  vértices de  $H_q$  sea un  $K_p$ , tenemos que buscar las contracciones necesarias en  $G$  entre vértices de  $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$  y vértices de  $v(H_q)$  que generen dichas aristas ausentes.

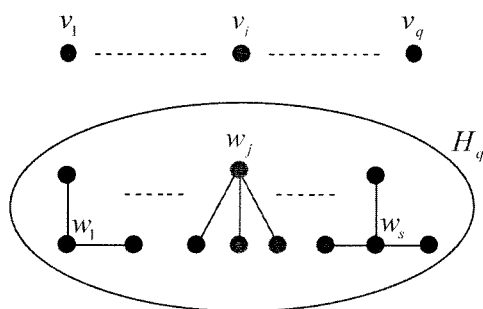


Figura 2.7: Conjunto vértice recubridor del subgrafo  $H_q$ .

Evidentemente, como queremos que los vértices de  $H_q$  sean los vértices branch de ese menor completo, tenemos que buscar entre las aristas que unen

vértices del conjunto  $\{v_i\}$  con otros de  $\{w_j\}$ . Observemos, por ejemplo, el vértice  $w_j$  de la *Figura 2.7*. ¿Qué propiedades habría que exigirle a un vértice  $v_i$  para que al contraer la arista  $v_i w_j$  en  $G$  se generen todas las aristas de  $H_q$  que son incidentes con  $w_j$ ? La respuesta a esta pregunta nos va a dar la clave que buscamos para la selección adecuada de las aristas que habrá que contraer en el grafo  $G$ .

En primer lugar, evidentemente,  $v_i$  tendrá que ser adyacente a  $w_j$  en el grafo  $G$  ya que en caso contrario no existiría arista para contraer. En segundo lugar, toda arista incidente con  $w_j$  en  $H_q$  no existe en el subgrafo de  $G$  inducido por los  $p$  vértices de  $H_q$ . Luego al contraer la arista  $v_i w_j$  éstas deben crearse. Para que esto ocurra es necesario que el vértice  $v_i$  sea adyacente en  $G$  a cada uno de los vértices que son adyacentes a  $w_j$  en  $H_q$ . Por consiguiente

$$\{w_j\} \cup N_{H_q}(w_j) \subseteq N_G(v_i).$$

Como podemos ver en la *Figura 2.8* el vértice  $v_i$  es adyacente en  $G$  tanto al vértice  $w_j$  como a los vértices que eran adyacentes a  $w_j$  en  $H_q$  y que, por tanto, permiten crear las aristas que no existían en  $G[V(H_q)]$ . En dicha figura, las aristas discontinuas son aquellas de  $H_q$  que queremos crear en  $G[V(H_q)]$ . Para ello, basta con hacer la contracción de la arista  $v_i w_j$  en  $G$  sobre el vértice  $w_j$ .

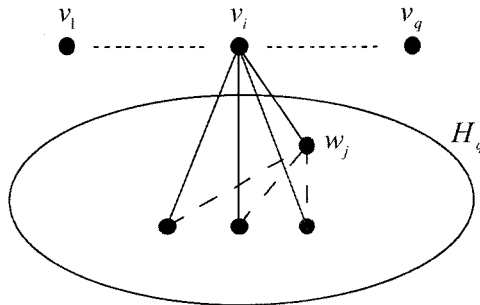


Figura 2.8: Elección de las aristas adecuadas a contraer en  $G$  para generar un  $K_p$ .

Recordemos que toda arista de  $H_q$  ha de ser incidente con alguno de los



vértices  $w_j$  del conjunto vértice recubridor. Por ello, para cada uno de estos vértices  $w_j$  debemos encontrar un vértice distinto  $v_{i_j}$  en la sucesión decreciente verificando las condiciones que hemos comentado en el párrafo anterior. De este modo, bastaría con contraer en el grafo  $G$  las aristas  $w_j v_{i_j}$  sobre los vértices  $w_j$  para obtener un subgrafo completo  $K_p$  con los  $p$  vértices de  $H_q$ . Esto probaría que el grafo  $G$  es contractible a  $K_p$ .

Necesitamos garantizar la existencia de tales aristas y para ello vamos a definir un grafo bipartito  $B$  cuyas clases de vértices van a ser, por un lado, el conjunto vértice recubridor del subgrafo  $H_q$ , que denotaremos por  $X = \{w_1, \dots, w_s\}$ . Y por otro lado, la sucesión decreciente,  $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ , de  $q$  vértices en el grafo  $H$ .

En el grafo bipartito descrito, diremos que un vértice  $w_j$  de  $X$  es adyacente a otro  $v_i$  de  $Y$  si se verifica que

$$\{w_j\} \cup N_{H_q}(w_j) \subseteq N_G(v_i).$$

De este modo, por el razonamiento que hemos expuesto previamente, una condición suficiente para garantizar que el grafo  $G$  contiene a  $K_p$  como menor es la existencia de un emparejamiento completo en el grafo bipartito  $B$  que acabamos de construir (ver *Figuras 2.7 y 2.9*).

Por último, para probar la existencia de tal emparejamiento completo en el grafo bipartito  $B$  haremos uso de un resultado conocido como *Condición de Hall*, que ya enunciamos en el capítulo preliminar.

En resumen, la técnica que vamos a usar a lo largo de esta memoria para aportar los valores exactos de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  y caracterizar los grafos extremales de la familia correspondiente  $EX(n; MK_p)$  se basa en establecer las hipótesis necesarias sobre el número de vértices y aristas de un determinado grafo  $G$  para que su complementario  $H$  pertenezca a la familia  $\mathcal{V}_q^q$ , y para que,

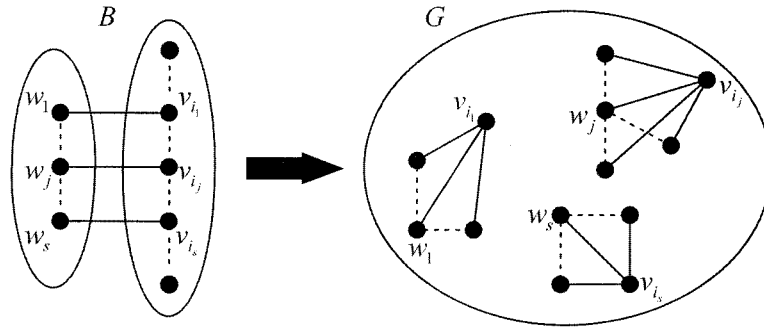


Figura 2.9: Un emparejamiento completo en  $B$  hace que  $G$  sea contractible a  $K_p$ .

además, esta relación entre el orden y tamaño del grafo nos permita probar la existencia de un emparejamiento completo en el grafo bipartito  $B$  definido para tal fin.

## 2.3 Estudio de las familias $\mathcal{V}_r^t$

Como hemos comentado en la sección anterior, las familias  $\mathcal{V}_r^t$  van a jugar un importante papel en la técnica que usaremos para abordar la búsqueda de nuevas soluciones del problema de Turán para menores completos. Necesitamos obtener condiciones suficientes sobre el número de vértices y aristas de un grafo para que este pertenezca a una determinada familia  $\mathcal{V}_r^t$ .

Este primer lema establece una condición suficiente sobre orden y tamaño de un grafo, que garantiza su pertenencia a una familia de la forma  $\mathcal{V}_{q-i}^q$ .

**Lema 2.3.1** Sean dos enteros positivos  $k$  y  $q$  tales que  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q-9}{3} \rfloor$ . Sea  $H$  un grafo con  $3q-k-i$  vértices y, a lo sumo,  $3q+3k+5-4i$  aristas, siendo  $0 \leq i \leq q$ . Si la valencia máxima de  $H$  es menor o igual que 3, entonces  $H \in \mathcal{V}_{q-i}^q$ .



*Demostración:*

Para ver que  $H \in \mathcal{V}_{q-i}^q$  tenemos que demostrar que es posible eliminar una sucesión decreciente de  $q-i$  vértices en el grafo  $H$  de manera que en el subgrafo resultante  $H_{q-i}$ , el cardinal mínimo de un conjunto vértice recubridor sea, a lo sumo,  $q$ .

Nótese que puesto que  $e(H) \leq 3q + 3k + 5 - 4i$ , existe un entero  $m \geq 0$  tal que  $e(H) = 3q + 3k + 5 - 4i - m$ .

Dada cualquier sucesión decreciente,  $\{v_1, \dots, v_{q-i}\}$ , de vértices en  $H$  existen varios casos en los que el resultado es inmediato. En efecto, por una parte, teniendo en cuenta que el cardinal de cualquier conjunto vértice recubridor de un grafo es menor o igual que su tamaño, si  $e(H_{q-i}) \leq q$  el resultado estaría probado. Así que, en adelante, supondremos que  $e(H_{q-i}) \geq q + 1$ .

Por otra parte, si  $\Delta(H_{q-i}) = 1$  tenemos que

$$q + 1 \leq e(H_{q-i}) \leq \frac{1}{2}v(H_{q-i}) = q - \frac{k}{2} < q + 1,$$

de lo que deducimos que  $\Delta(H_{q-i}) \geq 2$ .

Y por otro lado, si  $\Delta(H_{q-i}) = 3$  entonces, por definición de sucesión decreciente, se tendría que  $\delta_{H_{j-1}}(v_j) = 3$  para todo  $j = 1, \dots, q-i$ , con lo cual

$$\begin{aligned} e(H) &= 3(q-i) + e(H_{q-i}) \\ &\geq 3q - 3i + q + 1 \\ &= 4q + 1 - 3i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora bien, como  $e(H) = 3q + 3k + 5 - 4i - m$  y por hipótesis sabemos que  $k \leq \left\lfloor \frac{q-9}{3} \right\rfloor$ , entonces

$$\begin{aligned} e(H) &= 3q + 3k + 5 - 4i - m \\ &\leq 3q + 3(q-9) + 5 - 4i - m \\ &< 4q + 1 - 3i, \end{aligned}$$

lo que contradice a (2.3). De este modo, sabemos que  $\Delta(H_{q-i}) = 2$ .

Así, para finalizar la prueba, sólo nos queda analizar el caso en el que  $e(H_{q-i}) \geq q + 1$  y  $\Delta(H_{q-i}) = 2$ . Hay que tener presente que si esto es así, entonces  $2 \leq \delta_{H_{q-i}}(v_j) \leq 3$  para todo  $j = 1, \dots, q - i$  ya que  $\Delta(H_{q-i}) = 2$  y, por hipótesis,  $\Delta(H) \leq 3$ .

Denotemos por  $r_3$  al máximo número de vértices independientes con valencia 3 en  $H$ , y por  $r_2$  al máximo número de vértices independientes con valencia 2 en  $H_{q-i}$ . Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_{q-i}\}$  la sucesión decreciente formada por  $r_3$  vértices independientes de valencia 3 en  $H$  y por  $q - i - r_3$  vértices independientes de valencia 2 en  $H_{q-i}$ .

Obsérvese que  $\Delta(H) \leq 3$ , y aplicando (2.1) se deduce que

$$r_3 \geq \frac{e(H) - n}{2},$$

es decir

$$r_3 \geq \frac{3q + 3k + 5 - 4i - m - (3q - k - i)}{2},$$

o lo que es igual

$$r_3 \geq 2k + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{m}{2}. \quad (2.4)$$

Por otra parte, como  $\Delta(H_{q-i}) = 2$  y, de nuevo, teniendo en cuenta (2.1) se sigue que

$$r_2 \geq \frac{2e(H_{q-i}) - v(H_{q-i})}{3},$$

y por tanto

$$r_2 \geq \frac{2(3q + 3k + 5 - 4i - m - 3r_3 - 2(q - i - r_3)) - (3q - k - i - (q - i))}{3},$$

de donde obtenemos la cota

$$r_2 \geq \frac{7}{3}k + \frac{10}{3} - \frac{4}{3}i - \frac{2}{3}m - \frac{2}{3}j. \quad (2.5)$$



Finalmente, como  $\Delta(H_{q-i+r_2}) \leq 1$ , podemos acotar el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor de  $\Delta(H_{q-i})$  de modo que

$$\#_{vr}(H_{q-i}) = r_2 + e(H_{q-i+r_2}) = r_2 + e(H_{q-i}) - 2r_2 = e(H_{q-i}) - r_2.$$

Así pues, teniendo en cuenta el tamaño del grafo  $H_{q-i}$  obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \#_{vr}(H_{q-i}) &= e(H_{q-i}) - r_2 \\ &= 3q + 3k + 5 - 4i - m - 3r_3 - 2(q - i - r_3) - r_2. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la desigualdad (2.5)

$$\#_{vr}(H_{q-i}) \leq q + \frac{2}{3}k + \frac{5}{3} - \frac{2}{3}i - \frac{m}{3} - \frac{1}{3}r_3,$$

y teniendo en cuenta (2.4)

$$\begin{aligned} \#_{vr}(H_{q-i}) &\leq q + \frac{5}{6} - \frac{1}{6}i - \frac{m}{6} \\ &< q + 1. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $H \in \mathcal{V}_{q-i}^q$ , como queríamos demostrar.

⊗

El *Lema 2.3.1* nos va a permitir a continuación dar la primera de las condiciones suficientes que aportaremos a lo largo de esta sección para que un grafo pertenezca a la familia  $\mathcal{V}_q^q$ .

**Lema 2.3.2** Sean  $k$  y  $q$  dos enteros positivos, siendo  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q-9}{3} \rfloor$ . Si  $H$  es un grafo con  $v(H) = 3q - k$  vértices y  $e(H) = 3q + 3k + 5$  aristas, entonces  $H \in \mathcal{V}_q^q$ .

*Demostración:*

Para abordar la prueba de este lema, sería interesante que pudiéramos acotar la valencia del grafo  $H$ . Es aquí donde va a jugar un papel relevante el lema anterior.

En concreto, si la valencia máxima de  $H$  es menor o igual que 3, entonces la demostración concluye al aplicar el *Lema 2.3.1* tomando  $i = 0$ .

Sólo nos queda analizar qué sucede cuando  $\Delta(H) \geq 4$ . En tal caso, sea  $\{v_1, \dots, v_q\}$  una sucesión decreciente de vértices en  $H$ . Además de estimar la valencia máxima del grafo  $H$ , es fundamental hacer lo propio con la del grafo  $H_q$ , resultante de eliminar en  $H$  los vértices de la sucesión decreciente.

En primer lugar, si  $\Delta(H_q) \geq 4$ , como la sucesión de vértices es decreciente, deducimos que  $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 4$ , para todo  $j = 1, \dots, q$ , con lo cual

$$e(H) = \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \geq 4q > 3q + 3k + 5 = e(H),$$

lo que contradice nuestras hipótesis de partida. Por tanto,  $\Delta(H_q) \leq 3$ .

Visto lo anterior, debe existir un  $i \in \{1, \dots, q\}$  de modo que  $\Delta(H_{i-1}) \geq 4$  y  $\Delta(H_i) \leq 3$ . En tal caso el grafo  $H_i$  se encuentra en las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} v(H_i) = 3q - k - i, \\ e(H_i) \leq e(H) - 4i = 3q + 5 + 3k - 4i, \\ \Delta(H_i) \leq 3. \end{cases}$$

Aplicando el *Lema 2.3.1* deducimos que  $H_i \in \mathcal{V}_{q-i}^q$ , es decir, existe una sucesión decreciente de vértices  $\{w_1, \dots, w_{q-i}\}$  en  $H_i$ , de modo que

$$\#_{vr}((H_i)_{q-i}) \leq q.$$

Pero entonces, tenemos que  $\{v_1, \dots, v_i, w_1, \dots, w_{q-i}\}$  es una sucesión decreciente de  $q$  vértices en  $H$  verificando que  $\#_{vr}(H_q) \leq q$ .



En conclusión,  $H \in \mathcal{V}_q^q$ , lo cual finaliza la prueba del resultado.

⊗

A continuación probamos otro resultado que nos permite asegurar que un grafo pertenece a una de las familias  $\mathcal{V}_{q-\lambda-i}^{q-\lambda}$  bajo ciertas hipótesis acerca de los valores de  $i$  y  $\lambda$ . Este resultado nos permitirá dar una condición suficiente para que un grafo pertenezca a la familia  $\mathcal{V}_{q-\lambda}^{q-\lambda}$ .

**Lema 2.3.3** Sean  $k, q, \lambda$  y  $\mu$  enteros positivos tales que  $0 \leq \lambda \leq 3$ ,  $q \geq 132$ ,

$$0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-3}{6} \right\rfloor - b \quad \text{y} \quad 0 \leq i \leq q - \lambda,$$

siendo  $b = 1$  si  $q = 4 \pmod{6}$ , y  $b = 0$  en caso contrario. Sea  $H$  un grafo con  $v(H)$  vértices y  $e(H)$  aristas, verificando:

1.  $v(H) = \frac{16q+9-a}{6} - k - \lambda - i$ .
2.  $e(H) \leq 4q + 6k + a + \mu - \lambda \left( \frac{q+1-\lambda}{3} \right) - 5i$ ,

siendo  $a = 3$  (resp. 7, 5) si  $q = 0$  (resp. 1, 2)  $\pmod{3}$ ; y siendo  $\mu = 0$ , si  $\lambda = 0$ , o  $\mu = 1$  si  $\lambda \geq 1$ .

Bajo estas hipótesis, si  $\Delta(H) \leq 4$  entonces  $H \in \mathcal{V}_{q-\lambda-i}^{q-\lambda}$ .

*Demostración:*

Tenemos que demostrar que podemos eliminar una sucesión decreciente de  $q - \lambda - i$  vértices en  $H$ , de tal modo que el grafo resultante posea un conjunto vértice recubridor de cardinal menor o igual que  $q - \lambda$ . De hecho, probaremos que el resultado es cierto independientemente de cuál sea la sucesión decreciente elegida.

Para ello, fijemos una sucesión decreciente en  $H$  con  $q - \lambda - i$  vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_{q-\lambda-i}\}$ .

En primer lugar, si  $e(H_{q-\lambda-i}) \leq q - \lambda$ , entonces ya estaría probado el resultado, puesto que siempre se cumple que  $\#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) \leq e(H_{q-\lambda-i})$ .

Por tanto, en adelante, podemos suponer que  $e(H_{q-\lambda-i}) \geq q - \lambda + 1$ .

Para comenzar, probaremos que  $2 \leq \Delta(H_{q-\lambda-i}) \leq 3$ . Si fuera  $\Delta(H_{q-\lambda-i}) \leq 1$ , entonces

$$2e(H_{q-\lambda-i}) \leq v(H_{q-\lambda-i}).$$

Pero el grafo  $H$  tiene  $n$  vértices por lo que el grafo  $H_{q-\lambda-i}$  tiene orden  $n - (q - \lambda - i)$ , y estamos suponiendo que  $e(H_{q-\lambda-i}) \geq q - \lambda + 1$ , de modo que se tiene

$$\begin{aligned} 2(q - \lambda + 1) &\leq \left( \frac{16q + 9 - a}{6} - k - \lambda - i \right) - q + \lambda + i \\ &\leq \frac{5}{3}q + 1 - k \leq \frac{5}{3}q + 1 < 2q - 4, \end{aligned}$$

siendo la desigualdad estricta cierta para todo  $q > 15$ .

Deducimos, pues, que

$$2q - 2\lambda + 2 < 2q - 4,$$

lo cual sólo es posible si  $\lambda > 3$ , pero esto contradice nuestras hipótesis. En consecuencia, podemos afirmar que  $\Delta(H_{q-\lambda-i}) \geq 2$ .

Veamos ahora que  $\Delta(H_{q-\lambda-i}) \leq 3$ . En efecto, si  $\Delta(H_{q-\lambda-i}) = \Delta(H) = 4$  entonces cada uno de los vértices  $v_j$ , por formar éstos una sucesión decreciente, ha de tener valencia 4 en  $H_{j-1}$ , es decir

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) = 4, \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, q - \lambda - i\}.$$

Por tanto, dado que  $e(H_{q-\lambda-i}) \geq q - \lambda + 1$ , deducimos la relación

$$\begin{aligned} q - \lambda + 1 &\leq e(H_{q-\lambda-i}) = e(H) - 4(q - \lambda - i) \\ &\leq 4q + 6k + a + \mu - \lambda \left( \frac{q+1-\lambda}{3} \right) - 5i - 4q + 4\lambda + 4i. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $6k + a \leq q$  obtenemos

$$\begin{aligned} q - \lambda - i &\leq e(H_{q-\lambda-i}) \\ &\leq 4q + q + \mu - \frac{\lambda q}{3} - \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{3} - 5i - 4q + 4\lambda + 4i - 4 \\ &= \frac{(3-\lambda)q}{3} + \frac{11\lambda + \lambda^2}{3} + \mu - i, \end{aligned}$$

y como sabemos que  $i \geq 0$  y que  $q > 18$ , llegamos a que

$$q - \lambda + 1 \leq e(H_{q-\lambda-i}) \leq \frac{(3-\lambda)}{3}q + \frac{11\lambda + \lambda^2}{3} + \mu \leq q - \lambda,$$

siendo una contradicción. Luego,  $2 \leq \Delta(H_{q-\lambda-i}) \leq 3$ .

Denotemos por  $r_4$  al número de vértices independientes con valencia 4 en  $H$ . El grafo  $H_{r_4}$  resultante de eliminar en  $H$  los  $r_4$  vértices independientes de valencia 4 tiene orden  $n - r_4$ , tamaño  $e(H) - 4r_4$  y valencia máxima menor o igual que 3. Por todo ello, aplicando (2.1), tenemos que

$$r \geq \frac{2e(H) - 3n}{5}. \quad (2.6)$$

Análogamente, denotemos por  $r_3$  al número de vértices independientes con valencia 3 en  $H_{r_4}$ . Razonando como en el caso anterior, dado que el grafo  $H_{r_4+r_3}$  resultante de eliminar los  $r_3$  vértices con valencia 3 en  $H_{r_4}$  verifica  $\Delta(H_{r_4+r_3}) \leq 2$ , y por la relación (2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} r_3 &\geq \frac{e(H_{r_4}) - v(H_{r_4})}{2} \\ &= \frac{e(H) - 4r_4 - (n - r_4)}{2}, \end{aligned}$$

de donde deducimos la cota

$$r_3 \geq \frac{e(H) - 3r_4 - n}{2}. \quad (2.7)$$

Por último, sea  $r_2$  el máximo número de vértices independientes con valencia 2 en el grafo  $H_{r_4+r_3}$ . Al eliminar estos últimos vértices en  $H_{r_4+r_3}$  obtenemos el grafo  $H_{r_4+r_3+r_2}$  que tiene orden  $n - r_4 - r_3 - r_2$ , tamaño  $e(H) - 4r_4 - 3r_3 - 2r_2$  y tal que  $\Delta(H_{r_4+r_3+r_2}) \leq 1$ . De nuevo aplicando (2.1) llegamos a

$$\begin{aligned} r_2 &\geq \frac{2e(H_{r_4+r_3+r_2}) - v(H_{r_4+r_3+r_2})}{3} \\ &= \frac{2(e(H) - 4r_4 - 3r_3 - 2r_2) - (n - (r_4 + r_3 + r_2))}{3}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la cota

$$r_2 \geq \frac{2e(H) - 7r_4 - 5r_3 - n}{3}. \quad (2.8)$$

Por una parte, como  $\Delta(H_{r_4+r_3+r_2}) \leq 1$  y  $\Delta(H_{q-\lambda-i}) \geq 2$ , tenemos que

$$r_4 + r_3 + r_2 > q - \lambda - i.$$

Además, al ser  $\Delta(H_{r_4+r_3+r_2}) \leq 1$ , sabemos que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor de dicho grafo coincide con el número de sus aristas, y por tanto

$$\begin{aligned} \#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) &\leq e(H_{r_4+r_3+r_2}) + (r_4 + r_3 + r_2 - (q - \lambda - i)) \\ &= e(H) - 4r_4 - 3r_3 - 2r_2 + (r_4 + r_3 + r_2 - (q - \lambda - i)) \\ &= e(H) - 3r_4 - 2r_3 - r_2 - q + \lambda + i. \end{aligned}$$

Si ahora tenemos presente la relación (2.8) nos queda

$$\begin{aligned} \#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) &\leq e(H) - 3r_4 - 2r_3 - \left( \frac{2e(H) - 7r_4 - 5r_3 - n}{3} \right) - q + \lambda + i \\ &= \frac{e(H) - 2r_4 - r_3 + n}{3} - q + \lambda + i. \end{aligned}$$

Aplicando (2.7) obtenemos

$$\#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) \leq \frac{e(H) - r_4}{6} + \frac{n}{2} - q + \lambda + i,$$

y por último, hacemos uso de la cota obtenida para el valor de  $r_4$  en (2.6) llegamos a

$$\#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) \leq \frac{e(H) + 6n}{10} - q + \lambda + i.$$

En conclusión, hemos acotado el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor del grafo  $H_{q-\lambda-i}$  en función de su orden y su tamaño. Ahora bien, por hipótesis, sabemos que

$$e(H) \leq 4q + 6k + a + \mu - \lambda \left( \frac{q+1-\lambda}{3} \right) - 5i$$

y que

$$n = \frac{16q + 9 - a}{6} - k - \lambda - i,$$

con lo cual, teniendo en cuenta que  $i \geq 0$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) &\leq \frac{e(H) + 6n}{10} - q \\ &\leq \frac{30 - \lambda}{30}q + \frac{\lambda^2 + 11\lambda + 27}{30} + \frac{\mu}{10}. \end{aligned}$$

Tenemos dos casos posibles:

*Caso 1.* Si  $\lambda = 0$ , por hipótesis, se tiene que  $\mu = 0$  y deducimos que

$$\#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) \leq q + \frac{27}{30},$$

pero como el cardinal es entero, sería entonces  $\#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) \leq q = q - \lambda$ .

*Caso 2.* Si  $1 \leq \lambda \leq 3$ , como  $\mu = 1$  y  $q > 14$ , tenemos que

$$\#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) \leq \frac{30 - \lambda}{30}q + \frac{\lambda^2 + 11\lambda + 30}{30} \leq \frac{29}{30}q + \frac{42}{30},$$

pero, por otro lado,  $q - 3 \leq q - \lambda$  porque  $\lambda \leq 3$ , y como  $q > 131$ , se verifica que

$$\frac{29}{30}q + \frac{42}{30} \leq q - 3,$$

con lo cual  $\#_{vr}(H_{q-\lambda-i}) \leq q - \lambda$ .

Esto concluye la demostración del lema.

⊗

Como hemos comentado previamente, el lema que acabamos de probar nos va a permitir enunciar el siguiente resultado, en el que damos una condición suficiente para que un grafo pertenezca a la familia  $\mathcal{V}_{q-\lambda}^{q-\lambda}$ , en función de la relación existente entre el número de vértices y el número de aristas del mismo.

**Lema 2.3.4** Sean  $k, q, \lambda$  y  $\mu$  enteros positivos tales que  $0 \leq \lambda \leq 3$ ,  $q \geq 132$ ,

$$0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-3}{6} \right\rfloor - b \quad \text{y} \quad 0 \leq i \leq q - \lambda,$$

siendo  $b = 1$  si  $q = 4 \pmod{6}$ , y  $b = 0$  en caso contrario. Si  $H$  es un grafo con  $v(H)$  vértices y  $e(H)$  aristas, verificando:

1.  $v(H) = \frac{16q + 9 - a}{6} - k - \lambda$ ,
2.  $e(H) \leq 4q + 6k + a + \mu - \lambda \left( \frac{q + 1 - \lambda}{3} \right)$ ,

siendo  $a = 3$  (resp. 7, 5) si  $q = 0$  (resp. 1, 2)  $\pmod{3}$ ;  $\mu = 0$ , si  $\lambda = 0$ ; y  $\mu = 1$ , si  $\lambda \geq 1$ . Entonces  $H \in \mathcal{V}_{q-\lambda}^{q-\lambda}$ .

*Demostración:*

En este caso, hemos de comprobar que es posible eliminar  $q - \lambda$  vértices en  $H$ , de tal manera que en el grafo resultante exista un conjunto vértice recubridor de cardinal menor o igual que  $q - \lambda$ .

Si la valencia máxima del grafo  $H$  es menor o igual que 4 el resultado es evidente aplicando el *Lema 2.3.3* con  $i = 0$ .



Supongamos pues que  $\Delta(H) \geq 5$ , y sea  $\{v_1, \dots, v_{q-\lambda}\}$  una sucesión decreciente de vértices en  $H$ .

En primer lugar, si  $e(H_{q-\lambda}) \leq q - \lambda$ , teniendo en cuenta que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor de cualquier grafo es siempre menor o igual que su tamaño, estaría probado que  $\#_{vr}(H_{q-\lambda}) \leq q - \lambda$ .

En segundo lugar, si  $\delta_{H_{q-\lambda-1}}(v_{q-\lambda}) \geq 5$ , por definición de sucesión decreciente, sabemos que

$$\delta_{H_{i-1}}(v_i) \geq 5, \text{ para todo } i = 1, \dots, q - \lambda,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} e(H_{q-\lambda}) &\leq e(H) - 5(q - \lambda) \\ &\leq 4q + 6k + a + \mu - \lambda \left( \frac{q+1-\lambda}{3} \right) - 5(q - \lambda) \\ &\leq \mu + \frac{\lambda^2 + (14 - q)\lambda}{3}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $e(H_{q-\lambda}) < 0$  puesto que  $\lambda \leq 3$  y  $q > 18$ .

Por tanto, debe existir un  $i \in \{1, \dots, q - \lambda - 1\}$  tal que  $\delta_{H_{i-1}}(v_i) \geq 5$  y  $\delta_{H_i}(v_{i+1}) \leq 4$ . El grafo  $H_i$  satisface las siguientes condiciones:

- $v(H_i) = \frac{16q + 9 - a}{6} - k - \lambda - i$
- $e(H_i) \leq 4q + 6k + a + \mu - \lambda \left( \frac{q+1-\lambda}{3} \right) - 5i$  y
- $\Delta(H_i) \leq 4$

Por tanto, el grafo  $H_i$  cumple las hipótesis del *Lema 2.3.3* y, por tanto,  $H_i \in \mathcal{V}_{q-\lambda-i}^{q-\lambda}$ . Esto significa que existe una sucesión decreciente  $\{v'_1, \dots, v'_{q-\lambda-i}\}$  de manera que en  $(H_i)_{q-\lambda-i}$  existe un conjunto vértice recubridor de cardinal menor o igual que  $q - \lambda$ .

En conclusión, el conjunto  $\{v_1, \dots, v_i, v'_1, \dots, v'_{q-\lambda-i}\}$  es una sucesión decreciente en  $H$ , con  $q - \lambda$  vértices, tal que  $\#_{vr}(H_{q-\lambda}) \leq q - \lambda$ , y con esto queda demostrado que  $H \in \mathcal{V}_{q-\lambda}^{q-\lambda}$ .

⊗

A continuación probamos que en el sector determinado por las relaciones entre tamaño y orden establecidas en los *Lemas 2.3.1* y *2.3.2*, para todo  $H \in \mathcal{V}_q^q$ , su complementario  $\overline{H}$  contiene a  $K_{n-q}$  como menor.

**Lema 2.3.5** *Sean  $n$ ,  $q$  y  $k$  tres enteros positivos, tales que  $n = 3q - k$ ,  $q > 24$  y  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q-9}{3} \rfloor$ . Sea  $H$  un grafo con  $n$  vértices y, a lo sumo,  $3q + 3k + 6$  aristas. Si  $H \in \mathcal{V}_q^q$  entonces  $\overline{H}$  contiene un subgrafo contractible a  $K_p$ , siendo  $p = n - q$ .*

*Demostración:*

Como  $H \in \mathcal{V}_q^q$ , sabemos que existe una sucesión decreciente de  $q$  vértices  $\{v_1, \dots, v_q\}$  en  $H$  de modo que  $\#_{vr}(H_q) = s \leq q$ . Es decir, si denotamos por  $H_q$  al subgrafo de  $H$  resultante de eliminar los vértices anteriores, existe un conjunto  $\{w_1, \dots, w_s\}$  vértice recubridor en  $H_q$ , de cardinal mínimo,  $s \leq q$ .

Observemos que el subgrafo  $H_q$  tiene orden  $p = n - q$ , y que las aristas de este subgrafo son justamente las que faltarían a esos  $p$  vértices en  $G = \overline{H}$  para ser un grafo completo de orden  $p$ .

Por otra parte, al ser  $\{w_1, \dots, w_s\}$  un conjunto vértice recubridor de  $H_q$ , cada arista debe ser adyacente, al menos, a un vértice de dicho conjunto. En consecuencia, si pudiéramos probar que para cada  $w_j$  existe un vértice  $v_{i_j}$ , distinto, y adyacente en  $G$  tanto a  $w_j$  como a todos los vecinos de  $w_j$  en  $H_q$ , habríamos probado que el grafo  $G$  contiene al grafo completo  $K_p$  como menor. Lo último sería evidente ya que bastaría con contraer en  $G$  las aristas que unen a cada vértice  $w_j$  con su correspondiente  $v_{i_j}$  (ver *Figuras. 2.8* y *2.9*).



Veamos que esto es cierto y, por tanto, que existe en  $\{v_1, \dots, v_q\}$  un subconjunto  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$  de modo que cada  $v_{i_j}$  es adyacente en el grafo  $G$  al vértice  $w_j$  y a los vértices adyacentes a éste en  $H_q$ .

Consideremos el grafo bipartito  $B$  cuyas clases de equivalencia son  $X = \{w_1, \dots, w_s\}$  e  $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ , definido de modo que un vértice  $w_j$  es adyacente a otro vértice  $v_i$  en  $B$  si se verifica que

$$N_{H_q}(w_j) \cup \{w_j\} \subseteq N_G(v_i).$$

Basta demostrar la existencia de un emparejamiento completo en  $B$ .

Para ello, haremos uso del *Teorema 1.1.1 (Condición de Hall)*, de modo que es suficiente demostrar que para cada subconjunto  $A \subseteq X$ , se cumple  $|N_B(A)| \geq |A|$ .

Observemos que  $\Delta(H_q) \leq 3$ , ya que en caso contrario, teniendo presente que  $\{v_1, \dots, v_q\}$  es una sucesión decreciente en  $H$ , llegaríamos a la conclusión de que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 4, \text{ para todo } j = 1, \dots, q,$$

y, por consiguiente

$$e(H) \geq 4q + e(H_q) \geq 4q + 4 > 3q + 3k + 6 \geq e(H),$$

lo cual es absurdo.

Fijemos un subconjunto cualquiera  $A$  de  $X$ , y denotemos por  $m = |A|$  y por  $\Delta_q(A) = \Delta(H_q[A])$ , es decir,  $\Delta_q(A)$  es la valencia máxima en el subgrafo de  $H_q$  inducido por los vértices del conjunto  $A$ .

Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que  $|N_B(A)| \leq m - 1$ .

Esto significa que, a lo sumo, existen  $m - 1$  vértices en la sucesión decreciente  $\{v_1, \dots, v_q\}$  que son adyacentes en  $B$  a algún vértice de  $A$ . O lo que

es equivalente, existen, al menos,  $q - (m - 1)$  vértices en la sucesión que no son adyacentes a ninguno del conjunto  $A$ .

Por la propia definición del grafo bipartito, el hecho de que un vértice  $v_i$  no sea adyacente en  $B$  a ninguno de los de  $A$  significa que

$$N_{H_q}(w_j) \cup \{w_j\} \not\subseteq N_G(v_i),$$

para todo  $j = 1, \dots, s$ . O de modo equivalente, que

$$N_H(v_i) \cap (N_{H_q}(w_j) \cup \{w_j\}) \neq \emptyset,$$

para todo  $j = 1, \dots, s$ . Veremos que esto hace crecer la valencia de los vértices de la sucesión decreciente tanto que sobrepasaríamos el total de aristas del grafo, con lo cual llegamos a contradicción.

Es evidente que el caso más desfavorable en el cómputo de las aristas que aportan los vértices de la sucesión decreciente se dará cuando los  $m - 1$  últimos de la misma sean los adyacentes en  $B$  a  $A$ . Pero aún en este caso, podemos asegurar que

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq \frac{m}{\Delta_q(A)}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq \sum_{i=1}^{q-(m-1)} \delta_{H_{i-1}}(v_i) + \sum_{i=q-(m-2)}^q \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_q) \\ &\geq (q - m + 1) \frac{m}{\Delta_q(A)} + (m - 1) \Delta_q(A) + m \\ &= \frac{-m^2 + (q + 1 + \Delta_q(A) + \Delta_q(A)^2)m - \Delta_q(A)^2}{\Delta_q(A)} = \mathcal{F}(m). \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que la función polinómica  $\mathcal{F}(m)$  alcanza su valor máximo en  $m_0 = \frac{1}{2}(q + 1 + \Delta_q(A) + \Delta_q(A)^2)$ , podemos acotar inferiormente

dicha función, en cualquier intervalo  $[m_0 - T, m_0 + T]$  por el valor que alcanza en los extremos del mismo.

En consecuencia, si  $m \in [4\Delta_q(A) + 1, q - 3\Delta_q(A) + \Delta_q(A)^2]$ , entonces el número de aristas de  $H$  estaría acotado inferiormente por

$$e(H) \geq \frac{4\Delta_q(A)^3 - 12\Delta_q(A)^2 + (4q - 3)\Delta_q(A) + q}{\Delta_q(A)}.$$

Ahora bien, como sabemos que  $\Delta_q(A) \leq 3$ , veamos lo que ocurre en cada caso en función del valor de dicha valencia.

(i) Supongamos que  $\Delta_q(A) = 3$ . Si  $m \in [13, q]$ , entonces deducimos que

$$e(H) \geq \frac{13q - 9}{3} > 4q - 3 \geq 3q + 3k + 6 = e(H),$$

lo cual es imposible. Supongamos ahora que  $m \leq 12$ .

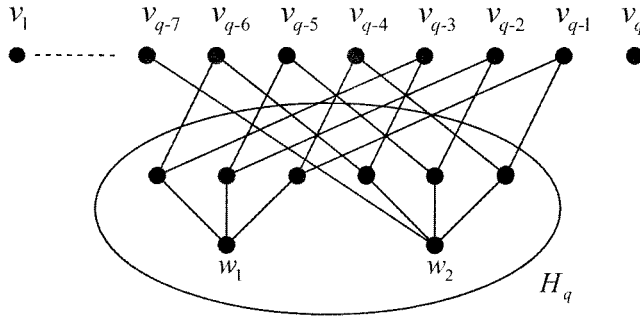


Figura 2.10: Posible configuración de  $H$  cuando  $m = 2$ ,  $|N_B(A)| < |A|$  y  $\Delta(H_q) = 3$ .

En el peor de los casos (ver Figura 2.10) tendríamos que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-(m+6)}}(v_{q-(m+5)}) &\geq 4, & \delta_{H_{q-(m+10)}}(v_{q-(m+9)}) &\geq 5, \\ \delta_{H_{q-(m+14)}}(v_{q-(m+13)}) &\geq 6, \end{aligned}$$

y por ser  $\Delta(H_q) = 3$ , se tiene que  $\delta_{H_{j-1}}(v_j) = 3$  para todo  $j = q - m, \dots, q$ .

Por tanto

$$\begin{aligned}
e(H) &= \sum_{j=1}^{q-(m+13)} \delta_{H_{j-1}}(v_j) + \sum_{j=q-(m+12)}^{q-(m+5)} \delta_{H_{j-1}}(v_j) + \sum_{j=q-(m+4)}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\
&\geq (q-m-13)6 + (4 \cdot 5 + 4 \cdot 4) + (m+5)3 + m \\
&= 6q - 2m - 27 \\
&\geq 6q - 51,
\end{aligned}$$

pero como  $q > 24$ , se tiene que  $e(H) \geq 6q - 51 > 4q - 3 \geq e(H)$ , que es imposible.

(ii) Supongamos que  $\Delta_q(A) = 2$ . Si  $m \in [9, q-2]$ , entonces tendríamos que

$$e(H) \geq \frac{9q-22}{2} > 3q + 3k + 6 = e(H),$$

lo cual es imposible. Supongamos ahora que  $m \leq 8$ . En tal caso, y dado que existen, al menos,  $q - (m-1)$  vértices en el conjunto  $\{v_1, \dots, v_q\}$  que son adyacentes en  $H$  a alguno de los elementos de  $A \cup N_{H_q}(A)$ , aún en el peor de los casos (ver *Figura 2.11*) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\delta_{H_{q-(m+2)}}(v_{q-(m+1)}) &\geq 3, & \delta_{H_{q-(m+5)}}(v_{q-(m+4)}) &\geq 4, \\
\delta_{H_{q-(m+8)}}(v_{q-(m+7)}) &\geq 5, & \delta_{H_{q-(m+11)}}(v_{q-(m+10)}) &\geq 6,
\end{aligned}$$

y además, como  $\Delta(H_q) \geq 2$ , tenemos que  $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 2$  para todo  $j = q-m, \dots, q$ .

De todo ello deducimos que

$$\begin{aligned}
e(H) &= \sum_{j=1}^{q-(m+10)} \delta_{H_{j-1}}(v_j) + \sum_{j=q-(m+9)}^{q-(m+1)} \delta_{H_{j-1}}(v_j) + \sum_{j=q-m}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\
&\geq (q-m-10)6 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + (m+1)2 + m \\
&= 6q - 3m - 22 \\
&\geq 6q - 46,
\end{aligned}$$

y como sabemos que  $q > 22$ , llegamos a

$$6q - 46 > 4q - 3 \geq 3q + 3k + 6 \geq e(H),$$

lo cual es imposible.

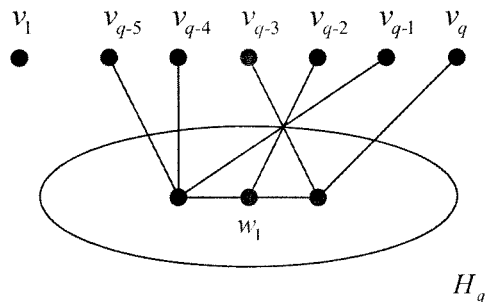


Figura 2.11: Posible estructura del grafo  $H$  cuando  $m = 1, |N_B(A)| < |A|$  y  $\Delta(H_q) = 2$ .

(iii) Supongamos que  $\Delta_q(A) = 1$ . Si  $m \in [5, q - 2]$ , entonces

$$e(H) \geq \frac{5q - 11}{3} > 4q - 3 \geq 3q + 3k + 6 = e(H),$$

lo cual es imposible. Supongamos ahora que  $m \leq 4$ . Aún en el caso más desfavorable (ver *Figura 2.12*) deducimos que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) &\geq 2, & \delta_{H_{q-(m+2)}}(v_{q-(m+1)}) &\geq 3, \\ \delta_{H_{q-(m+4)}}(v_{q-(m+3)}) &\geq 4, & \delta_{H_{q-(m+6)}}(v_{q-(m+5)}) &\geq 5, \\ \delta_{H_{q-(m+8)}}(v_{q-(m+7)}) &\geq 6. \end{aligned}$$

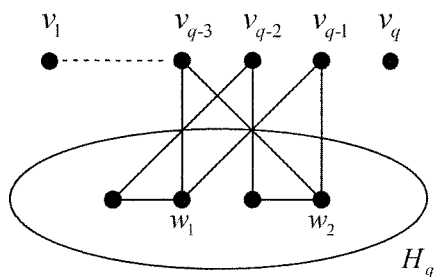


Figura 2.12: Posible estructura del grafo  $H$  cuando  $\Delta_q(A) = 1$  y  $m = 2$ .

Pero como  $\Delta(H_q) \geq 1$ , tenemos garantizado que

$$\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 1, \text{ para todo } j = q - (m - 2), \dots, q.$$

Luego

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq (q - m - 7)6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + m - 1 + s \\ &\geq 6q - 5m - 15 + s \\ &\geq 6q - 4m - 15 \\ &\geq 6q - 31. \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $q > 14$ , sabemos que

$$6q - 31 > 4q - 3 \geq 3q + 6 + 3k \geq e(H),$$

llegando a una contradicción.

Para finalizar, sólo queda estudiar qué ocurre en los casos  $m \geq q - 1$  y  $\Delta_q(A) \leq 2$ .

Nótese que el caso  $\Delta_q(A) = 1$  y  $m = q$  es imposible. Esto es debido a que en estas circunstancias,  $v(H_q) \geq 2q$  con lo que  $v(H) \geq 3q$ , lo cual es absurdo ya que sabemos por hipótesis que  $v(H) = 3q - k$  siendo  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q-9}{3} \rfloor$ .

Para el caso  $\Delta_q(A) = 1$  y  $m = q - 1$ , tengamos en cuenta que  $v(H_q) \geq 2(q - 1)$ , con lo que se tiene que  $v(H) = 3q - k \geq q + v(H_q) \geq 3q - 2$ , y por tanto  $k \leq 2$ . En consecuencia, si  $k \leq 2$  entonces

$$e(H) \leq 3q + 3k + 6 \leq 3q + 12.$$



Pero por otra parte, al ser  $\delta_{H_1}(v_2) \geq m \geq q - 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq \delta_{H_0}(v_1) + \delta_{H_1}(v_2) + \sum_{i=3}^q \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_q) \\ &\geq 2(q-1) + 1(q-2) + q - 1 \\ &= 4q - 5, \end{aligned}$$

pero entonces, por ser  $q > 17$ , se tiene que

$$e(H) \geq 4q - 5 > 3q + 12 \geq e(H),$$

lo cual no tiene sentido.

Para concluir la prueba hemos de ver qué ocurre en los casos  $\Delta_q(A) = 2$  con  $m = q - 1, q$ .

Denotemos por  $m_2$  al número de vértices del conjunto  $A$  con valencia 2 en  $H_q$ . En el peor de los casos, es decir, cuando pares de vértices de  $A$  comparten un vértice adyacente común, uno de los vértices de la sucesión decreciente puede no ser adyacente en  $B$  a dichos vértices de  $A$  aportando una sola arista, la que le hace adyacente al vértice común a los anteriores.

En este caso, podemos deducir que

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq \frac{m_2}{2} + m - m_2 = m - \frac{m_2}{2},$$

y además

$$e(H_q) \geq m + \frac{m_2}{2}.$$

Particularizado en los casos que nos faltan por estudiar,

(i) Si  $m = q - 1$ . Teniendo en cuenta que  $m_2 \leq q - 1$ , deducimos que

$$\begin{aligned}
 e(H) &\geq 2\left(q - 1 - \frac{m_2}{2}\right) + 2(q - 2) + q - 1 + \frac{m_2}{2} \\
 &= \left(q - 1 - \frac{m_2}{2}\right) + \left(q - 1 - \frac{m_2}{2}\right) + 2q - 4 + q - 1 + \frac{m_2}{2} \\
 &\geq q - 1 - \frac{m_2}{2} + \frac{q - 1}{2} + 3q - 5 + \frac{m_2}{2} \\
 &= \frac{9q - 13}{2} \\
 &> 4q - 3 \geq e(H),
 \end{aligned}$$

ya que  $q > 7$ , llegando a un absurdo.

(ii) Si  $m = q$ , entonces

$$\begin{aligned}
 e(H) &\geq q - \frac{m_2}{2} + 2(q - 1) + q - 1 + \frac{m_2}{2} \\
 &= 4q - 2 > e(H),
 \end{aligned}$$

y esto es absurdo.

Por consiguiente,  $|N_B(A)| \geq |A|$  para todo  $A \subseteq X$ . Así que aplicando la *Condición de Hall* existe un emparejamiento completo en el grafo bipartito  $B$  y por tanto, queda probado que  $\overline{H}$  es contractible a  $K_p$ .

⊗

El lema que enunciamos a continuación es análogo al que acabamos de demostrar, pero bajo hipótesis distintas acerca del orden y el tamaño de los grafos.

**Lema 2.3.6** Sean  $q, k$  enteros positivos tales que  $q \geq 132$ ,  $0 \leq k \leq \lfloor \frac{q-3}{6} \rfloor - b$ , siendo  $b = 1$  si  $q = 4 \pmod{6}$ , y  $b = 0$  en caso contrario. Sea  $H$  un grafo con  $v(H) = \frac{16q + 9 - a}{6} - k$  vértices y  $e(H) \leq 4q + 6k + a + 1$ , donde  $a = 3$  (resp. 7, 5) si  $q = 0$  (resp. 1, 2)  $\pmod{3}$ .

Entonces, si  $H \in \mathcal{V}_q^q$  entonces  $\overline{H}$  contiene a  $K_p$  como menor, siendo  $p = v(H) - q$ .



*Demostración:*

Como  $H \in \mathcal{V}_q^n$  sabemos que existe una sucesión decreciente de vértices  $\{v_1, \dots, v_q\}$  en  $H$ , de manera que el grafo  $H_q$  resultante de eliminar dichos vértices en  $H$  posee un conjunto vértice recubridor de cardinal mínimo  $s \leq q$ . Denotemos por  $W = \{w_1, \dots, w_s\}$  a un conjunto vértice recubridor cualquiera.

Es interesante resaltar que el grafo  $H_q$  tiene  $p = n - q$  vértices, y que sus aristas son precisamente las que les faltarían a esos  $p$  vértices en  $G = \overline{H}$  para ser un  $K_p$ . Por otro lado, como el conjunto  $W$  es vértice recubridor de  $H_q$ , cada una de esas aristas debe ser incidente con algún vértice de dicho conjunto. Por tanto, razonando como al comienzo de este capítulo cuando describimos la técnica del emparejamiento completo, si demostramos que para cada  $w_j \in W$  existe un vértice  $v_{i_j}$ , distinto, en  $\{v_1, \dots, v_q\}$  que es adyacente en  $G$  a  $w_j$  y a todos sus vértices adyacentes en  $H_q$ , quedaría probado que  $G$  contiene a  $K_p$  como menor. Para esto último, bastaría con contraer en  $G$  las aristas que unen a cada vértice  $w_j$  con su correspondiente  $v_{i_j}$  (ver Figuras 2.8 y 2.9).

Definamos el grafo bipartito  $B$  cuyas clases son  $X = \{w_1, \dots, w_s\}$  e  $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ , y donde  $w_j$  va a ser adyacente a  $v_i$  si

$$N_{H_q}(w_j) \cup \{w_j\} \subseteq N_G(v_i),$$

donde  $G$  denota al grafo complementario de  $H$ .

Por los argumentos antes expuestos bastaría demostrar la existencia de un emparejamiento completo en dicho grafo bipartito  $B$ . Para ello haremos uso, como anteriormente, del *Teorema 1.1.1 (Condición de Hall)*. Según este resultado, para asegurar la existencia de un emparejamiento completo en  $B$ , basta probar que  $|N_B(A)| \geq |A|$  para cada  $A \subseteq X$ .

Fijemos un subconjunto cualquiera  $A$  de  $X$ , y denotemos por  $m = |A|$  y por  $\Delta_q(A) = \Delta(H_q[A])$ . Es decir,  $\Delta_q(A)$  es la valencia máxima en el subgrafo de

$H_q$  inducido por los vértices del conjunto  $A$ .

En primer lugar, es evidente que  $1 \leq \Delta_q(A) \leq 4$ , ya que en caso contrario tenemos que  $\delta_{H_{j-1}}(v_j) \geq 5$  para todo  $j = 1, \dots, q$  y por tanto

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{j=1}^q \delta_{H_{j-1}}(v_j) + e(H_q) \\ &\geq 5q + \Delta(H_q) \geq 5q + 5 \\ &> 5q + 1 \geq 4q + 6k + a + 1 \geq e(H), \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que  $|N_B(A)| \leq |A| - 1 = m - 1$ .

Aplicando un razonamiento análogo al de la prueba del *Lema 2.3.5*, podemos afirmar que

$$\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq \frac{m}{\Delta_q(A)},$$

y en consecuencia, se puede acotar el número de aristas del grafo de modo que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq \sum_{i=1}^{q-(m-1)} \delta_{H_{i-1}}(v_i) + \sum_{i=q-(m-2)}^q \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_q) \\ &\geq (q - m + 1) \frac{m}{\Delta_q(A)} + (m - 1) \Delta_q(A) + m \\ &= \frac{-m^2 + (q + 1 + \Delta_q(A) + \Delta_q(A)^2)m - \Delta_q(A)^2}{\Delta_q(A)} = \mathcal{F}(m). \end{aligned}$$

Ahora bien, la expresión polinómica  $\mathcal{F}(m)$  toma su valor máximo en el punto  $m_0 = \frac{1}{2}(q + 1 + \Delta_q(A) + \Delta_q(A)^2)$ . Entonces, podemos acotar inferiormente dicha función en cualquier intervalo  $[m_0 - T, m_0 + T]$  por el valor que alcanza en los extremos del mismo.

Por tanto, si  $m \in [5\Delta_q(A) + 1, q - 4\Delta_q(A) + \Delta_q(A)^2]$ , entonces el número



de aristas de  $H$  estaría acotado inferiormente por

$$e(H) \geq \frac{5\Delta_q(A)^3 - 20\Delta_q(A)^2 + (5q - 4)\Delta_q(A) + q}{\Delta_q(A)}. \quad (2.9)$$

Veamos qué ocurre ahora, en cada caso, en función de la valencia máxima  $\Delta_q(A)$ .

(i) Supongamos primero que  $\Delta_q(A) = 1$ . En primer lugar, si fuese  $m > q - 3$ , al haber, al menos,  $m$  vértices en el conjunto vértice recubridor, y por ser  $\Delta(H_q) = 1$ , se deduce la existencia de, al menos,  $2m$  vértices en  $H_q$  y entonces,

$$v(H_q) \geq 2m > 2(q - 3) = 2q - 6 > \frac{5q + 3}{3},$$

siendo cierta la última desigualdad estricta por ser  $q > 21$ .

Pero sabemos que

$$v(H_q) = v(H) - q = \frac{16q + 9 - a}{6} - k - q \leq \frac{8q + 3}{3} - q = \frac{5q + 3}{3},$$

con lo que llegamos a una contradicción.

En segundo lugar, si  $6 \leq m \leq q - 3$ . Entonces de la relación (2.9) tenemos que

$$e(H) \geq 6q - 19 > 5q + 1 \geq e(H),$$

que es una contradicción.

Por otro lado, para valores de  $m$  tales que  $1 \leq m \leq 5$ , por nuestra suposición de que  $|N_B(A)| \leq m - 1$ , se deduce que, a lo sumo,  $m - 1$  vértices en la sucesión decreciente son adyacentes en  $B$  a alguno de los  $m$  vértices de  $A$ .

O dicho de otro modo, existen, a lo sumo,  $m - 1$  vértices que no son adyacentes en  $H$  a los  $w_j$  ni a sus respectivos vecinos en  $H_q$ .

En concreto, el peor de los casos se daría cuando los  $m - 1$  vértices adyacentes en  $B$  a los de  $A$  fueran los últimos de la sucesión,  $\{v_{q-(m-2)}, \dots, v_q\}$ ,

ya que esto retrasaría lo máximo posible el crecimiento de las valencias del resto de los vértices de la sucesión decreciente (ver *Figura 2.13*).

Comencemos a estudiar el valor de las respectivas valencias de los vértices de la sucesión decreciente. En primer lugar, como es lógico, cada vértice de  $\{v_{q-(m-2)}, \dots, v_q\}$  tiene por lo menos valencia 1. Por otro lado, como el vértice  $v_{q-(m-1)}$  no es adyacente en  $B$  a ninguno de los vértices de  $A$ , sabemos que debe ser adyacente en  $H$  a  $w_j$  o a alguno de sus vecinos en  $H_q$  para todo  $j \in \{1, \dots, s\}$ , por lo que debe tener valencia, al menos, 2 en  $H_{q-m}$  (ver *Figura 2.13*).

En segundo lugar, el vértice  $v_{q-m}$ , siguiendo el razonamiento anterior, debe ser adyacente a cada  $w_j$  o a alguno de los adyacentes a éste en  $H_q$ . En el peor de los casos,  $v_{q-m}$  será adyacente a los que no lo era el vértice  $v_{q-(m-1)}$ , con lo cual los vértices  $w_j$  y sus adyacentes en  $H_q$  han de tener valencia, al menos, 2 en el grafo  $H_{q-(m+1)}$  (ver *Figura 2.13*). Siguiendo el mismo razonamiento ahora con el vértice  $v_{q-(m+1)}$ , éste debe tener, al menos, valencia 3 en  $H_{q-(m+2)}$ , al igual que  $v_{q-(m+2)}$  en  $H_{q-(m+3)}$  (ver *Figura 2.13*).

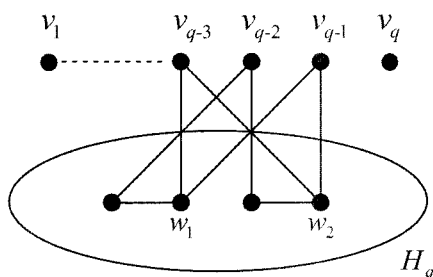


Figura 2.13: Posible estructura del grafo  $H$  cuando  $m = 1$ .

En conclusión, deducimos que

$$\delta_{H_{q-(m-1)}}(v_{q-(m-2)}) \geq 1, \dots, \delta_{H_{q-1}}(v_q) \geq 1$$

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) &\geq 2 \quad y \quad \delta_{H_{q-(m+1)}}(v_{q-m}) \geq 2, \\ \delta_{H_{q-(m+2)}}(v_{q-(m+1)}) &\geq 3 \quad y \quad \delta_{H_{q-(m+3)}}(v_{q-(m+2)}) \geq 3, \\ \delta_{H_{q-(m+4)}}(v_{q-(m+3)}) &\geq 4 \quad y \quad \delta_{H_{q-(m+5)}}(v_{q-(m+4)}) \geq 4, \\ \delta_{H_{q-(m+6)}}(v_{q-(m+5)}) &\geq 5 \quad y \quad \delta_{H_{q-(m+7)}}(v_{q-(m+6)}) \geq 5, \end{aligned}$$

y para el resto de los vértices basta observar que

$$\delta_{H_{q-(m+8)}}(v_{q-(m+7)}) \geq 6,$$

por lo que

$$\delta_{H_{i-1}}(v_i) \geq 6, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, q - (m + 8)\}.$$

Teniendo en cuenta estas acotaciones, deducimos que

$$\begin{aligned} e(H) &= \sum_{i=1}^{q-(m+7)} \delta_{H_{i-1}}(v_i) + \sum_{i=q-(m+6)}^q \delta_{H_{i-1}}(v_i) + e(H_q) \\ &\geq (q - (m + 7))6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (m - 1)1 + e(H_q). \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que  $|A| = m$  y que  $\Delta_q(A) = 1$ , en el grafo  $H_q$  debemos tener, al menos,  $m$  aristas, con lo cual,

$$e(H) \geq (q - m - 7)6 + 28 + m - 1 + m = 6q - 4m - 15 \geq 6q - 35.$$

Pero por otro lado, al ser  $q > 36$ , tenemos que

$$e(H) \geq 6q - 35 > 5q + 1 \geq e(H),$$

lo cual es absurdo.

Por tanto, si  $\Delta_q(A) = 1$  entonces  $|N_B(A)| \geq |A|$  para todo  $A \subseteq X$ .

(ii) Supongamos ahora que  $\Delta_q(A) = 2$ . Para valores de  $m$  comprendidos entre 11 y  $q - 4$ , ambos inclusive, deducimos de (2.9) que

$$e(H) \geq \frac{11}{2}q - 24 > 5q + 1 \geq e(H),$$

lo cual no es posible.

Si  $1 \leq m \leq 10$  y utilizamos el mismo argumento que en el apartado anterior para acotar inferiormente las valencias de los vértices de la sucesión decreciente (ver *Figura 2.15*) obtenemos las cotas

$$\delta_{H_{q-(m+1)}}(v_{q-m}) \geq 2, \dots, \delta_{H_{q-1}}(v_q) \geq 2,$$

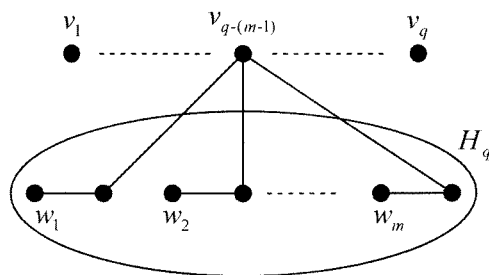


Figura 2.14: La valencia de  $v_{q-(m-1)}$  en  $H_{q-m}$  es al menos  $m$ .

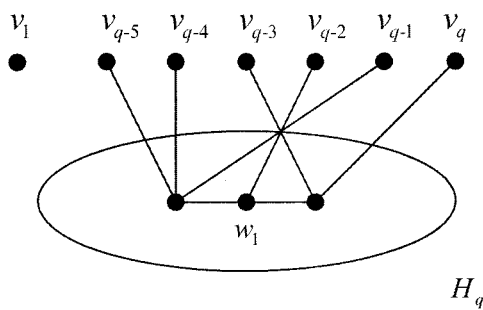


Figura 2.15: Si  $\Delta_q(A) = 2$ ,  $\delta_{H_{q-(m+2)}}(v_{q-(m+1)}) \geq 3$  y  $\delta_{H_{q-(m+5)}}(v_{q-(m+4)}) \geq 4$ .

y

$$\delta_{H_{(q-m+2)}}(v_{q-(m+1)}) \geq 3 \quad \text{y} \quad \delta_{H_{q-(m+5)}}(v_{q-(m+4)}) \geq 4,$$

$$\delta_{H_{q-(m+8)}}(v_{q-(m+7)}) \geq 5 \quad \text{y} \quad \delta_{H_{q-(m+9)}}(v_{q-(m+10)}) \geq 6.$$

Además, teniendo presente que en  $H_q$  debe haber, al menos,  $m$  aristas, una por cada vértice de  $A$ , deducimos que,

$$\begin{aligned} e(H) &\geq (q - (m + 10))6 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + (m + 1)2 + m \\ &= 6q - 3m - 22 \\ &\geq 6q - 52. \end{aligned}$$

Sin embargo, sabemos que  $e(H) \leq 5q + 1$  y, por otro lado,  $5q + 1 < 6q - 52$  por ser  $q > 53$ , con lo que se llega a contradicción.

Por último, nos falta comprobar que también se llega a un absurdo en el caso de que  $q \geq m \geq q - 3$ .

Supongamos primero que  $m = q - 3$ . Vamos a tratar de precisar un poco la estructura del grafo  $H_q$  cuando tenemos valencia máxima 2.

Denotemos por  $m_2$  al número de vértices de  $A$  con valencia 2 en  $H_q$ . Tendremos, en el peor de los casos (ver *Figura 2.16*), que

$$\delta_{H_3}(v_4) \geq q - 3 - \frac{m_2}{2},$$

y

$$e(H_q) \geq q - 3 + \frac{m_2}{2},$$

ya que un par de vértices independientes,  $\{w_i, w_{i'}\}$ , de  $A$  con valencia 2 en  $H_q$  pueden compartir, a lo sumo, un vértice adyacente  $w$ . Por tanto, una sola arista uniendo  $v_4$  con  $w$  bastaría para hacer que  $v_4$  no fuese adyacente, en  $B$ , ni a  $w_i$  ni a  $w_{i'}$ .

Entonces, por definición de sucesión decreciente, se deduce por un lado que los vértices desde  $v_1$  hasta  $v_4$  tienen valencia, al menos,  $q - 3 - \frac{m_2}{2}$ . Y por

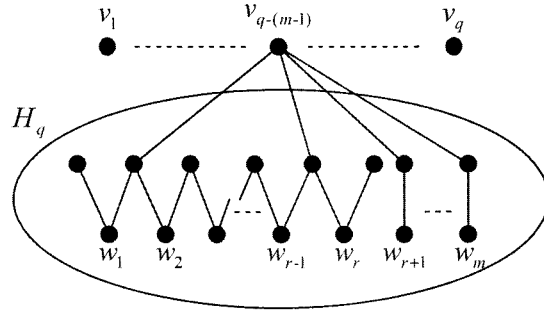


Figura 2.16: Una sola arista puede hacer que  $v_{q-(m-1)}$  no sea adyacente en  $B$  a dos vértices de  $A$ .

otro lado, al ser  $\Delta(H_q) = 2$ , los vértices desde  $v_5$  hasta  $v_q$  tienen, al menos, valencia 2.

Agrupando todo lo anterior y teniendo en cuenta que  $m_2 \leq q - 3$ , se deduce

$$\begin{aligned}
 e(H) &\geq 4 \left( q - 3 - \frac{m_2}{2} \right) + (q - 4)2 + \left( q - 3 + \frac{m_2}{2} \right) \\
 &\geq 3 \left( q - 3 - \frac{m_2}{2} \right) + q - 3 - \frac{m_2}{2} + 3q - 11 + \frac{m_2}{2} \\
 &\geq 3 \frac{q - 3}{2} + 4q - 14 \\
 &= \frac{11}{2}q - \frac{37}{2}.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, es inmediato verificar que

$$e(H) \geq \frac{11}{2}q - \frac{37}{2} > 5q + 1,$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que  $q > 39$ . Esto nos lleva de nuevo a contradicción por ser  $e(H) \leq 4q + 6k + a + 1 \leq 5q + 1$ .

Por último, si  $q - 2 \leq m \leq q$ , entonces tenemos que

$$\#_{vr}(H_q) \geq m \geq q - 2.$$





Si tomamos  $\lambda = q - (m - 1)$ , tenemos que  $1 \leq \lambda \leq 3$ . Y como  $\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq \frac{m}{2}$  se cumple que

$$\delta_{H_{\lambda-1}}(v_\lambda) \geq \frac{q+1-\lambda}{2}.$$

En estas circunstancias, observamos que el grafo  $H_\lambda$  satisface:

- $v(H_\lambda) = \frac{16q+9-a}{6} - k - \lambda$
- $e(H_\lambda) \leq 4q + 6k + a + 1 - \lambda \left( \frac{q+1-\lambda}{2} \right)$   
 $\leq 4q + 6k + a + 1 - \lambda \left( \frac{q+1-\lambda}{3} \right)$

de modo que, siendo  $1 \leq \lambda \leq 3$  y tomando  $\mu = 1$ , este grafo  $H_\lambda$  está en las condiciones del *Lema 2.3.4*.

Aplicando dicho resultado, deducimos que  $H_\lambda \in \mathcal{V}_{q-\lambda}^{q-\lambda}$ , por lo que existe una sucesión decreciente de  $q - \lambda$  vértices en  $H_\lambda$  tal que

$$\#_{vr}((H_\lambda)_{q-\lambda}) \leq q - \lambda.$$

Esto implica que

$$\#_{vr}(H_q) \leq q - \lambda = m - 1,$$

lo cual es absurdo, pues estamos suponiendo que  $|A| = m$  y  $A$  es un subconjunto del conjunto vértice recubridor de cardinal mínimo. Luego  $\#_{vr}(H_q) \geq m$ .

(iii) Supongamos en este caso que  $\Delta_q(A) = 3$ . Si  $16 \leq m \leq q - 3$ , entonces, de la expresión (2.9) se deduce que

$$e(H) \geq \frac{16}{3}q - 19 > 5q + 1$$

ya que  $q > 60$ . Esto es una contradicción.

Si  $1 \leq m \leq 15$ , aplicando un razonamiento análogo a los casos que hemos estudiado previamente, en el caso más desfavorable (ver *Figura 2.17*), se

tiene que:

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 3, & \delta_{H_{q-(m+6)}}(v_{q-(m+5)}) &\geq 4, \\ \delta_{H_{q-(m+10)}}(v_{q-(m+9)}) &\geq 5, & \delta_{H_{q-(m+14)}}(v_{q-(m+13)}) &\geq 6. \end{aligned}$$

Con lo anterior, y teniendo presente que  $e(H_q) \geq m$ , observamos que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq (q - (m + 13))6 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + (m + 5)3 + m \\ &= 6q - 2m - 27 \\ &\geq 6q - 57. \end{aligned}$$

Pero, por otro lado,  $5q + 1 < 6q - 57$  porque  $q > 58$ , lo que nos vuelve a llevar a una contradicción, pues  $e(H) \leq 4q + 6k + a + 1 \leq 5q + 1$ .

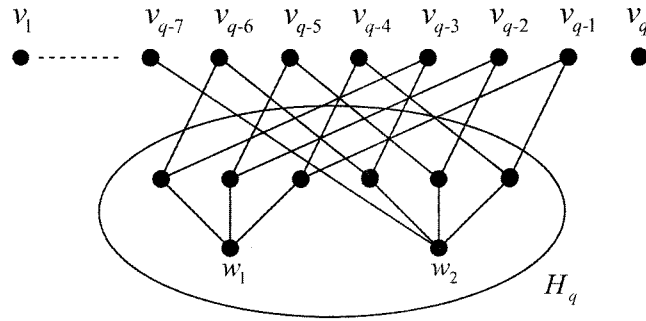


Figura 2.17: Si  $\Delta_q(A) = 3$  y  $m = 2$ , aún en el caso más desfavorable,  $\delta_{H_{q-8}}(v_{q-7}) \geq 4$ .

Por último, veamos qué ocurre cuando  $m \geq q - 2$ . En primer lugar, llamemos  $\lambda = q - (m - 1)$ , con lo que es obvio que  $1 \leq \lambda \leq 3$ . Por otro lado, sabemos que  $\delta_{H_{q-m}}(v_{q-(m-1)}) \geq \frac{m}{3}$ , o lo que es lo mismo,

$$\delta_{H_{\lambda-1}}(v_\lambda) \geq \frac{(q + 1 - \lambda)}{3}.$$

Como el grafo  $H_\lambda$  está en las condiciones del *Lema 2.3.4*, sabemos que  $\#_{vr}((H_\lambda)_{q-\lambda}) \leq q - \lambda$ , y por ello,

$$\#_{vr}(H_q) \leq q - \lambda = m - 1,$$



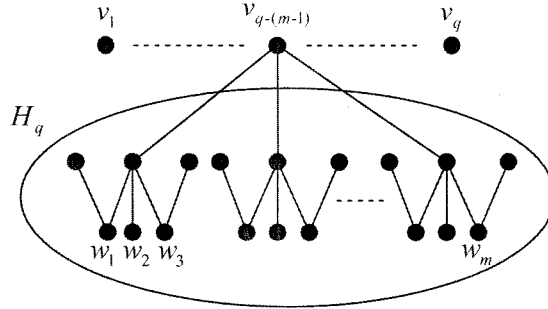


Figura 2.18: Basta una sola arista, si  $\Delta(H[A]) = 3$ , para que  $v_{q-(m-1)}$  no sea adyacente en  $B$  a  $\{w_1, w_2, w_3\}$ .

pero esto último contradice nuestras hipótesis, ya que el conjunto vértice recubridor de cardinal mínimo tiene, al menos,  $m$  elementos.

(iv) Estudiemos finalmente el caso  $\Delta_q(A) = 4$ . Para valores de  $m$  tales que  $21 \leq m \leq q$ , a partir de la relación obtenida en (2.9) deducimos que

$$e(H) \geq \frac{21}{4}q - 4 > 5q + 1$$

puesto que  $q > 60$ , lo cual es absurdo.

Por otro lado, si  $1 \leq m \leq 20$ , razonando como en los apartados anteriores, deducimos que, en el peor de los casos, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_{H_{q-1}}(v_q) &\geq 4, \\ \delta_{H_{q-(m+12)}}(v_{q-(m+11)}) &\geq 5, \\ \delta_{H_{q-(m+17)}}(v_{q-(m+16)}) &\geq 6, \end{aligned}$$

y por todo ello,

$$\begin{aligned} e(H) &\geq (q - (m + 16))6 + 5 \cdot 5 + (m + 11)4 + m \\ &= 6q - m - 27 \\ &\geq 6q - 47 > e(H), \end{aligned}$$

ya que  $q > 45$ , y de nuevo llegamos a un absurdo.

En definitiva acabamos de comprobar que en cualquiera de las situaciones posibles se tiene que  $|N_B(A)| \geq |A|$  para todo subconjunto  $A \subseteq X$ . Luego, aplicando la *Condición de Hall*, existe un emparejamiento completo en el grafo bipartito  $B$ .

Finalmente, como comentamos al comienzo de la prueba, si se contraen en  $G = \overline{H}$  las aristas correspondientes a este emparejamiento completo obtenemos un grafo  $K_p = K_{n-q}$  cuyos vértices son los de  $H_q$ . Con esto queda probado el resultado.

⊗

En resumen, los *Lemas 2.3.1* y *2.3.3* nos sirvieron como resultados auxiliares para probar los *Lemas 2.3.2* y *2.3.4* en los que se aportan condiciones suficientes para que un grafo pertenezca a la familia  $\mathcal{V}_{q-\lambda}^{q-\lambda}$  con  $0 \leq \lambda \leq 3$ .

Por último, se han demostrado los *Lemas 2.3.5* y *2.3.6* en los que se prueba que si un grafo de la familia  $\mathcal{V}_q^q$  satisface determinadas relaciones entre su orden y tamaño entonces su complementario contiene como menor a un grafo completo con  $p = n - q$  vértices.

Como venimos comentando a lo largo de este capítulo, los resultados que acabamos de demostrar serán básicos en el desarrollo de los capítulos posteriores. En el *Capítulo 3* aplicaremos dichos lemas a la obtención de valores exactos para la función extremal del problema de Turán con contracción de aristas  $ex(n; MK_p)$ . Una vez determinados dichos valores exactos, nos centraremos en caracterizar la familia de grafos extremales  $EX(n; MK_p)$  para dicho problema extremal, tarea que llevaremos a cabo en el *Capítulo 4*.



# Capítulo 3

## Estudio de la función extremal

### $\text{ex}(n; \text{MK}_p)$

Una vez que hemos situado el problema objeto de nuestro estudio, e introducidos los conceptos y resultados previos con los que trabajaremos a lo largo de esta memoria, abordamos en este capítulo la tarea de obtener valores exactos de la función extremal  $\text{ex}(n; \text{MK}_p)$ . Para ello, inicialmente, se establecerá una cota inferior, válida para los pares de valores de  $n$  y  $p$  pertenecientes a un sector infinito del plano  $(n, p)$ . A continuación, probaremos que esta cota inferior es óptima, y por tanto coincide con el valor exacto de la función extremal  $\text{ex}(n; \text{MK}_p)$  cuando  $n$  y  $p$  satisfacen la relación

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq n.$$

### 3.1 Introducción

Uno de los problemas extremales más conocidos dentro de la Teoría de Grafos consiste en la búsqueda del valor exacto de la función  $\text{ex}(n; F)$ , es decir, el máximo



número de aristas de un grafo con  $n$  vértices sin contener a  $F$  como subgrafo, siendo  $F$  un grafo cualquiera. El resultado más relevante en este área fue demostrado por P. Turán [46] en 1941, y responde a la cuestión antes planteada cuando  $F$  es un grafo completo. El valor exacto de la función  $ex(n; K_p)$  viene dado por el número de aristas del único grafo  $(p - 1)$ -partito completo cuyos vértices están repartidos entre sus clases del modo más igualitario posible. Además, dicho grafo, conocido como *Grafo de Turán*, es también el único grafo de tamaño extremal que no contiene a  $K_p$  como subgrafo.

El problema de Turán impulsó, sin duda, un fuerte avance de la Teoría Extremal de Grafos, con la aparición de numerosos problemas extremales que relacionan diversos invariantes de un grafo, como el número de aristas, la valencia media o el número cromático, con la propiedad de contener a cierto grafo  $F$  como subgrafo. Dos de esos problemas, consisten en la búsqueda del valor exacto de:

- (1) la función  $ex(n; TK_p)$ , esto es, el máximo número de aristas de un grafo de orden  $n$  sin contener un subgrafo homeomorfo a un grafo completo de orden  $p$ ,
- (2) la función  $ex(n; MK_p)$ , es decir, el máximo número de aristas de un grafo de orden  $n$  sin contener un subgrafo completo de orden  $p$  como menor.

En lo referente al segundo de estos problemas, en el cual nos centraremos en este capítulo, sólo se conocen valores exactos de la función para  $p \leq 8$  (ver [31, 36]) aunque existen otros muchos trabajos en los que se aportan cotas para la función. En todos estos trabajos se estudia el problema de manera asintótica, es decir, para valores fijos de  $p$  y suponiendo  $n$  suficientemente grande.

En esta tesis, aprovechando algunos de los resultados conocidos para la función  $ex(n; TK_p)$  encontraremos el valor exacto de la función  $ex(n; MK_p)$  para  $n$  y  $p$  relacionados entre sí. Y haciendo uso de la técnica del emparejamiento

completo descrita en el capítulo anterior, ampliaremos el rango de soluciones con un nuevo sector infinito de valores exactos para dicha función.

## 3.2 Cota inferior para $ex(n; MK_p)$

Como ya se ha comentado en la sección anterior, muchos han sido los trabajos dedicados a arrojar alguna luz acerca del valor de la función extremal  $ex(n; MK_p)$ . En este sentido, la gran mayoría de ellos tratan de aportar acotaciones para esta función.

Entre los más importantes podemos destacar las aportaciones de W. Mader quien en [35] prueba que

$$ex(n; MK_p) \leq c_p n$$

y en [36] hace una primera estimación de la constante  $c_p \leq 8p \log_2(p)$ . Y los trabajos de W. Fernández De la Vega [10] y A. Thomasson [44] quienes posteriormente sitúan la constante en

$$\frac{1}{4} \sqrt{\log_2(p)} \leq c_p \leq 2.68p \sqrt{\log_2(p)}.$$

Sin embargo, en esta sección nos vamos a ocupar de acotar la función extremal inferiormente. Nuestra intención es aportar una cota inferior para la función  $ex(n; MK_p)$  que además, en infinitos casos, nos conduzca al valor exacto de la misma.

No es difícil comprobar que el grafo  $G = K_{p-2} + \overline{K_{n-p+2}}$  no es contractible a  $K_p$ . En efecto, supongamos que existe un conjunto  $U$  de  $p$  vértices branch sobre los cuales, tras contraer ciertas aristas, construiríamos un grafo completo.

Ahora bien,  $U$  debe contener  $j$  de los vértices de  $\overline{K_{n-p+2}}$ , con  $j \geq 2$ . Pero como el grafo inducido por estos  $j$  vértices en  $G$  no contiene aristas, se

necesitarán, al menos,  $j - 1$  contracciones para cubrir esta ausencia.

Evidentemente, las contracciones que aportan aristas son aquellas que unen un vértice de  $K_{p-2}$  con otro de  $\overline{K_{n-p+2}}$ , con lo cual, sólo quedan  $p - 2 - (j - 1)$  vértices disponibles en el subgrafo  $K_{p-2}$  para formar parte de  $U$ . Es decir,  $|U| \leq j + (p - 1 - j) \leq p - 1 < p$ , lo cual no es posible.

En consecuencia, el grafo  $G = K_{p-2} + \overline{K_{n-p+2}}$  conduce a la siguiente cota inferior para la función

$$ex(n; MK_p) \geq n(p - 2) - \binom{p - 1}{2},$$

siendo ésta la cota inferior clásica, que para pequeños valores de  $p$  conduce a la solución exacta del problema.

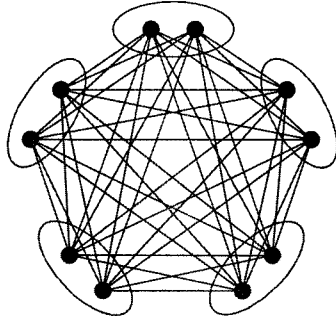


Figura 3.1:  $T_5(10)$  no es contractible a  $K_8$ : grafo extremal con una arista más que la cota inferior conocida.

Así, en 1964, Dirac [13] probó que esta cota era óptima para  $p \leq 5$ . Posteriormente, W. Mader [36] lo hizo para los valores  $6 \leq p \leq 7$ . Sin embargo, este último autor puso de manifiesto que para  $p = 8$  la cota no podía ser óptima. De hecho, algunos años más tarde, L. K. Jorgensen [31] dio a conocer el valor



exacto de la función extremal

$$ex(n; MK_8) = \begin{cases} 6n - 20, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 5, \\ 6n - 21, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo éste estrictamente mayor que la cota inferior conocida para valores de  $n$  que sean múltiplo de 5 (ver *Figura 3.1*).

Teniendo en cuenta que nuestro fin último es aportar soluciones exactas a este problema, y dado que la cota inferior clásica se empieza a alejar de tales valores, pretendemos iniciar nuestro trabajo mediante la búsqueda de una nueva cota inferior que pueda conducirnos a la obtención de nuevos valores exactos para dicha función extremal.

En efecto, probaremos la existencia de una cota inferior para la función  $ex(n; MK_p)$  que será válida en un sector infinito del plano  $(n, p)$ , y que vendrá dada por el número de aristas de un determinado grafo de Turán. Además, comprobaremos que el sector indicado es maximal en el sentido de que más allá del mismo todos los grafos de Turán de orden  $n$  son contractibles a  $K_p$ .

Si bien esta cota inferior no va a mejorar desde el punto de vista asintótico a la ya conocida, es cierto que para determinados valores de  $n$  y de  $p$ , relacionados entre sí, nos conducirá al valor exacto de la función. Concretamente, finalizado este capítulo, estaremos en condiciones de afirmar que la cota inferior aportada es óptima para todos los valores de  $n$  y  $p$  tales que

$$\left\lceil \frac{3n + 3}{5} \right\rceil \leq p \leq n.$$

A continuación pasamos a enunciar un primer resultado en el que ponemos de manifiesto que determinados grafos de Turán de orden  $n$  no son contractibles al grafo completo con  $p$  vértices.

**Teorema 3.2.1** Sean  $n, p$  y  $r$  enteros positivos tales que  $p \leq n \leq 2p - 3$  y  $2 \leq r \leq 2p - n - 1$ . Entonces, el grafo de Turán  $T_r(n)$  no es contractible al grafo completo de orden  $p$ .

*Demostración:*

Sea  $U = \{v_1, \dots, v_p\}$  un subconjunto de  $p$  vértices del grafo de Turán  $T_r(n)$ , y denotemos por  $H$  al subgrafo de  $\overline{T_r(n)}$  inducido por los vértices de  $U$ .

Si probamos que el mínimo cardinal de un conjunto vértice recubridor de  $H$  es mayor que  $n - p$ , aplicando el *Corolario 2.2.2*, deduciríamos que el grafo de Turán no es contractible a  $K_p$ , lo cual concluiría la prueba de este teorema.

Denotemos por  $C_i$  a las clases de vértices del grafo  $T_r(n)$  y por  $r_i = |U \cap C_i|$  para  $i = 1, \dots, r$ . Podemos considerar el conjunto  $I = \{j \in \{1, \dots, r\} : r_j \neq 0\}$ , es decir,  $I$  sería el conjunto de índices de las clases de vértices de  $T_r(n)$  que contienen algún vértice del conjunto  $U$ .

Es evidente que  $H = \bigcup_{i \in I} K_{r_i}$  y, en consecuencia, dado que cualquier conjunto vértice recubridor de cardinal mínimo de un grafo completo debe estar formado por todos sus vértices salvo uno, deducimos que

$$\begin{aligned} \#_{vr}(H) &= \sum_{i \in I} (r_i - 1) \\ &= \sum_{i \in I} r_i - |I| \\ &= p - |I| \geq p - r \\ &\geq p - (2p - n - 1) > n - p, \end{aligned}$$

con lo que queda probado el resultado.

⊗

En el resultado que acabamos de demostrar hemos visto que ninguno de los grafos de Turán  $T_r(n)$ , siendo  $2 \leq r \leq 2p - n - 1$  y  $p \leq n \leq 2p - 3$ , son

contractibles al grafo completo  $K_p$ . De entre todos estos grafos de Turán de orden  $n$ , el que más aristas tiene es el grafo  $T_{2p-n-1}(n)$ , lo que nos lleva a enunciar el siguiente corolario del *Teorema 3.2.1*.

**Corolario 3.2.2** *Si  $n$  y  $p$  son enteros positivos tales que  $p \leq n \leq 2p-3$ , entonces*

$$ex(n; MK_p) \geq t_{2p-n-1}(n).$$

16																	119
15																104	117
14														90	102	114	
13												77	88	99	110		
12											65	75	85	95	105		
11										54	63	72	81	90	99		
10									44	52	60	68	76	84	92		
9								35	42	49	56	63	70	77	84		
8							27	33	39	45	51	57	63	69	75		
7						20	25	30	35	40	45	50	55	60	65		
6					14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54		
5				9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42		
4			5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29		
3		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
2																	
1																	
<b>p/n</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	

Tabla 3.1: Algunos valores de la cota inferior conocida.

En la *Tabla 3.1* vemos que para  $n = 10$  y  $p = 8$  la cota inferior clásica da un valor mínimo para la función  $ex(10; MK_8)$  de 39 aristas. Sin embargo, en la *Tabla 3.2*, podemos ver que la nueva cota inferior que hemos obtenido mejora a la anterior, ya que para los valores indicados tenemos que  $ex(10; MK_8) \geq 40$ . Este último valor coincide con la solución de L.K. Jorgensen [31]. En la *Figura 3.1* se muestra un grafo extremal de orden 10 no contractible a  $K_8$ .

En la *Tabla 3.3* podemos comprobar que la nueva cota inferior representa una mejora significativa con respecto a la anterior.

16																119
15															104	117
14													90	102	115	
13												77	88	100	113	
12											65	75	86	98	109	
11										54	63	73	84	93	102	
10										44	52	61	70	78	84	85
9								35	42	50	57	63	65	56		
8							27	33	40	45	48	42				
7						20	25	30	33	30						
6					14	18	21	20								
5				9	12	12										
4			5	6												
3		2														
2																
1																
$p/n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Tabla 3.2: Algunos valores de la nueva cota inferior obtenida.

Nuestro propósito es demostrar que el valor de esta nueva cota inferior coincide, precisamente, con el valor exacto de la función extremal, en un sector infinito de pares  $(n, p)$  relacionados entre sí. Dedicaremos la *Sección 3.3* a alcanzar este objetivo.

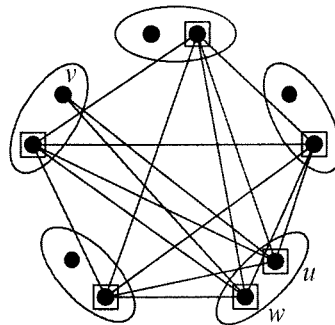
Para finalizar esta sección vamos a demostrar que la región de valores  $(n, p)$  expresada en el *Teorema 3.2.1* es maximal. En este sentido, probaremos que si  $n$  y  $p$  no pertenecen a dicho sector entonces cualquier grafo de Turán de orden  $n$  es contractible a  $K_p$ .

Por ejemplo, el grafo  $T_5(10)$  de la *Figura 3.1* no es contractible a  $K_8$ , ya que  $n = 10 \leq 2p - 3 = 13$ . Sin embargo, sí lo es a  $K_6$ , por ser  $n = 10 \geq 10 = 2p - 2$ . Como se puede observar en la *Figura 3.2*, al subgrafo inducido por los vértices recuadrados sólo le falta la arista  $uw$  para ser un  $K_6$ . Esta arista se puede conseguir, por ejemplo, contrayendo la arista  $uw$  sobre el vértice  $u$ .

**Teorema 3.2.3** *Si  $n$  y  $p$  son enteros positivos tales que  $n \geq 2p - 2$ , entonces*

p	n	Cota anterior	Nueva cota
9	11	49	50
	12	56	57
10	12	60	61
	13	68	70
	14	76	78
11	13	72	73
	14	81	84
	15	90	93
	16	99	102

Tabla 3.3: Valores de la cota inferior que mejoran la ya conocida.

Figura 3.2:  $T_5(10)$  es contractible a  $K_6$ .

cualquier grafo de Turán de orden  $n$  es contractible a  $K_p$ .

*Demostración:*

Denotemos por  $G = T_r(n)$  al grafo de Turán  $r$ -partito de orden  $n$ . Evidentemente, si  $r \geq p$ , entonces  $G \supseteq K_p$  con lo que el resultado estaría probado.

Supongamos pues que  $2 \leq r \leq p - 1$ , y denotemos por  $C_i$  a las clases

de vértices del grafo  $G$ . Los cardinales de estas clases, como ya sabemos, se diferencian, a lo sumo, en una unidad.

Vamos a encontrar un conjunto  $U$  de vértices branch, de modo que garanticemos que existen aristas en  $G$  tales que al contraerlas sobre este conjunto de vértices generan un grafo completo con  $p$  vértices. Para ello, consideremos un conjunto  $U$  de  $p$  vértices en  $G$  de modo que el subgrafo inducido por  $U$  en  $G$  sea precisamente  $T_r(p)$  (ver *Figura 3.3*).

El grafo  $H$  complementario de  $T_r(p)$  consiste en la unión de  $r$  grafos completos, de lo que se deduce que  $\#_{vr}(H) = p - r$ . Además, por hipótesis tenemos que

$$\#_{vr}(H) = p - r \leq p - 2 = (2p - 2) - p \leq n - p. \quad (3.1)$$

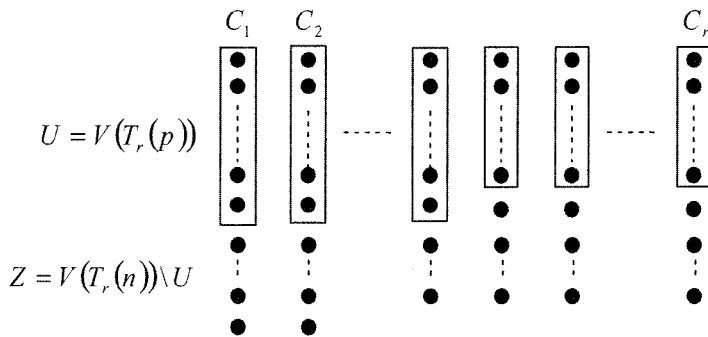


Figura 3.3: Elección del conjunto  $U$  de vértices branch.

Hay que tener en cuenta que las aristas del grafo  $H$  son precisamente las que faltan en el subgrafo inducido por  $U$  en  $G$  para ser un grafo completo de orden  $p$ . Vamos a probar que es posible encontrar las aristas necesarias en  $G$  de manera que al contraerlas generan tales aristas ausentes en  $G[U]$ .

Sea  $W = \{w_1, \dots, w_s\}$  un conjunto vértice recubridor de cardinal mínimo del grafo  $H$ . Consideremos el grafo bipartito  $B$  cuyas clases de vértices son  $W$  y

$Z = V(T_r(n)) \setminus U$ , y de manera que un vértice  $w_i$  es adyacente a otro vértice  $z_j$  si

$$N_H(w_i) \cup \{w_i\} \subseteq N_G(z_j).$$

Recuérdese del *Capítulo 3* que si  $w_i$  es adyacente a  $z_j$  en  $B$  y, por tanto,

$$N_H(w_i) \cup \{w_i\} \subseteq N_G(z_j),$$

tenemos que  $z_j$  es adyacente en  $G$  a  $w_i$  y a todos sus vecinos de  $H$ . Esto quiere decir que si contraemos en  $G$  la arista  $z_j w_i$  sobre el vértice  $w_i$ , en el grafo resultante éste último vértice ya es adyacente a todos los del conjunto  $U$ .

Es por ello por lo que será suficiente probar la existencia de un emparejamiento completo en  $B$ , ya que las aristas de este emparejamiento son justamente las que deben contraerse en  $G$  para obtener un subgrafo completo cuyos vértices branch son los del conjunto  $U$ .

Por (3.1), sabemos que  $|W| \leq n - p = |Z|$ . Así que es posible preguntarse si existe o no un emparejamiento completo sobre  $W$  en el grafo bipartito  $B$ . Para ello, haremos uso de la *Condición de Hall (Teorema 1.1.1)*. Según ésta, debemos comprobar que  $|N_B(A)| \geq |A|$  para todo subconjunto  $A$  de la clase  $W$ .

Si  $A \subseteq W$  contuviera dos vértices pertenecientes a clases  $C_i$  y  $C_j$  distintas, entonces  $N_B(A) = Z$  y por tanto

$$|N_B(A)| = n - p \geq s \geq |A|.$$

Supongamos pues que el subconjunto  $A$  de  $W$  esta contenido en una sola clase de vértices  $C_j$  del grafo de Turán. Ahora bien

$$\begin{aligned} |A| \leq |W \cap C_j| &= |C_j| - 1 - |Z \cap C_j| \\ &\leq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 1 - |Z \cap C_j| \\ &\leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 - |Z \cap C_j|, \end{aligned} \tag{3.2}$$



pero sabemos que  $n \geq 2p - 2$ , lo cual implica que

$$n - 2 \leq 2n - 2p,$$

o lo que es igual,

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \leq n - p.$$

Sustituyendo en la expresión (3.2), nos queda

$$|A| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 - |Z \cap C_j| \leq n - p - |Z \cap C_j| = |N_B(A)|,$$

lo que nos permite concluir la prueba de este resultado.

⊗

En resumen, en esta sección hemos probado que si  $n \leq 2p - 3$  entonces el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  no es contractible al grafo completo con  $p$  vértices. Esto nos ha permitido deducir una nueva cota inferior para la función extremal  $ex(n; MK_p)$ . Además hemos verificado que la relación entre los grafos de Turán y el problema extremal para menores sólo tiene lugar cuando  $n \leq 2p - 3$  ya que si  $n \geq 2p - 2$  entonces cualquier grafo de Turán  $T_r(n)$  es contractible a  $K_p$ .

### 3.3 Valor exacto para $ex(n; MK_p)$

En la sección precedente hemos establecido una cota inferior para la función extremal  $ex(n; MK_p)$ , y hemos visto que, en ciertos casos, mejora las cotas inferiores anteriormente conocidas.

Vamos a dedicar esta sección a comprobar que dicha cota inferior conduce a valores exactos de la función  $ex(n; MK_p)$  para todos aquellos pares  $(n, p)$  que satisfacen la relación

$$\left\lceil \frac{3n + 3}{5} \right\rceil \leq p \leq n.$$



Para abordar esta tarea dividiremos el sector infinito de pares  $(n, p)$  que acabamos de describir en varios subsectores (ver *Figura 3.4*) que estudiaremos por separado.

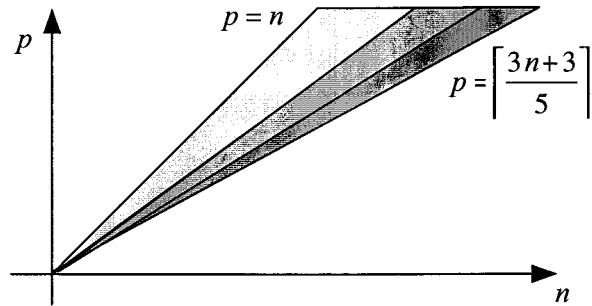


Figura 3.4: Pares  $(n, p)$  para los que se determinará  $ex(n; MK_p)$ .

### 3.3.1 Si $\left\lfloor \frac{2n+3}{3} \right\rfloor \leq p \leq n$

En este apartado comenzaremos a abordar la tarea de encontrar valores exactos para la función extremal  $ex(n; MK_p)$ . Para ello, y como ya se ha comentado, vamos a estudiar la función en distintos sectores del plano  $(n, p)$ . Comenzaremos nuestro estudio suponiendo que el par  $(n, p)$  está contenido en el sector infinito determinado por la expresión

$$\left\lfloor \frac{2n+3}{3} \right\rfloor \leq p \leq n. \quad (3.3)$$

Como veremos a continuación, la solución del problema que estamos estudiando va a estar directamente relacionada con la solución en el mismo sector, de otro de los problemas extremales más estudiados, que al igual que el que nos ocupa, surge como una extensión del Problema de Turán, el problema topológico de Turán.

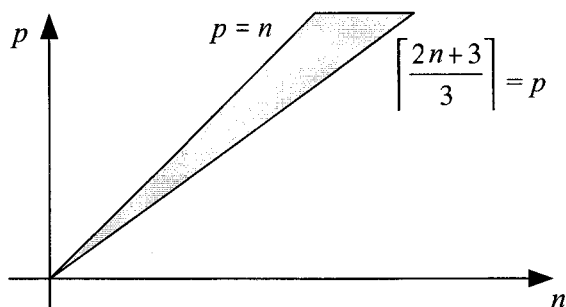


Figura 3.5: Pares  $(n, p)$  para los que se determinará  $ex(n; MK_p)$ .

Recordemos que una *subdivisión elemental* en un grafo consiste en sustituir una arista por un camino de longitud 2, añadiendo así un nuevo vértice al grafo inicial. Un grafo  $H$  se dice que es un *menor topológico*, o *subdivisión* o *subdivisión topológica* de un grafo  $G$  si puede obtenerse a partir de este último mediante una sucesión finita de subdivisiones elementales de aristas. Si  $H$  es un menor topológico de  $G$ , lo denotaremos por  $H = TG$  (ver *Figura 1.8*).

Conviene observar que un grafo  $H$  es una subdivisión de  $G$  si el conjunto de aristas de  $G$  puede sustituirse por un conjunto de caminos disjuntos en  $H$ . Por último, dos grafos se dicen *homeomorfos* si ambos son subdivisiones de un mismo grafo.

Una de las más conocidas extensiones del Problema de Turán relaciona el tamaño máximo de un grafo con la inclusión en éste de menores topológicos de un grafo completo. Este problema consiste en el cálculo del máximo número de aristas posibles en un grafo con  $n$  vértices sin que contenga una subdivisión de un grafo completo con  $p$  vértices. Denotaremos a este valor por  $ex(n; TK_p)$ .

Para una revisión del desarrollo histórico de esta extensión del Problema de Turán se puede consultar [3]. Sin embargo, nuestro interés se va a centrar en

los recientes resultados obtenidos en [7, 8, 16].

Agrupando los resultados obtenidos en dichos trabajos se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.1** [7, 8, 16] *Sean  $n$  y  $p$  dos enteros positivos tales que  $\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil \leq p \leq n$ . Entonces*

$$ex(n; TK_p) = t_{2p-n-1}(n)$$

A continuación estudiaremos la relación existente entre el problema topológico de Turán,  $ex(n; TK_p)$ , que acabamos de describir, y el problema de Turán con contracción de aristas,  $ex(n; MK_p)$ , que nos ocupa en esta tesis.

Recordemos que, tal y como hemos definido en los preliminares, decimos que un grafo  $H$  contiene a otro grafo  $G$  como menor si podemos obtener  $G$  a partir de un subgrafo de  $H$  mediante una sucesión finita de contracciones de aristas.

Obviamente, ambos problemas están relacionados (ver *Figura 3.6*).

**Observación 3.3.2** *Si un grafo  $H$  contiene a otro grafo  $G$  como menor topológico entonces también lo contiene como menor.*

En efecto, si  $H = TG$ , es decir, si  $H$  es un menor topológico de  $G$ , entonces existe un conjunto  $W$  de vértices branch en  $H$ , y un conjunto de caminos disjuntos en  $H$  uniendo cada par de vértices de  $W$ . Si contraemos cada camino del conjunto anterior a una sola arista, obtenemos el grafo  $G$ . En consecuencia,  $H = MG$ .

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Es decir, ambos problemas no son equivalentes. Como veremos a continuación es posible que un grafo contenga a otro grafo como menor y no lo contenga como menor topológico.



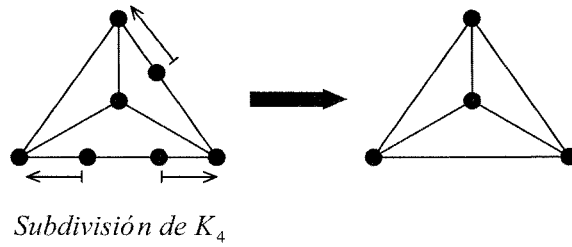


Figura 3.6:  $TK_4$  implica  $MK_4$ .

Si observamos el grafo  $H$  de la *Figura 3.7* vemos que basta con contraer una arista, tal y como indica la flecha en trazo grueso, para obtener  $K_5$ .

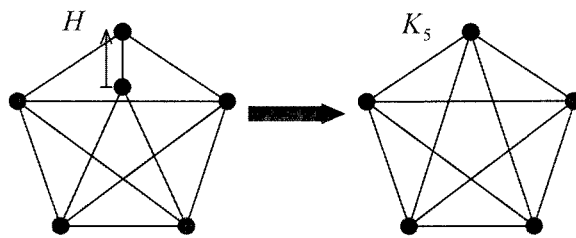


Figura 3.7: El grafo  $H$  contiene a  $K_5$  como menor.

Pero por otro lado, no puede contener a  $K_5$  como menor topológico ya que el número de vértices con grado, al menos, 4 es estrictamente menor que 5.

Una vez que hemos visto la relación que existe entre los dos problemas extremales con los que estamos tratando, vamos a pasar a estudiar relaciones entre los valores exactos de las funciones extremales correspondientes.

A partir de la *Observación 3.3.2*, podemos deducir la siguiente consecuen-

cia inmediata.

**Corolario 3.3.3** *Si  $n$  y  $p$  son dos enteros positivos con  $n \geq p$ , entonces*

$$ex(n; MK_p) \leq ex(n; TK_p)$$

Por último, pasaremos a enunciar el resultado central de esta sección, en el cual vamos a resolver el Problema de Turán para menores, en el sentido de aportar el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$ , para todos los pares de valores  $(n, p)$  pertenecientes al sector infinito del plano determinado por la expresión (3.3).

**Teorema 3.3.4** *Si  $n$  y  $p$  son dos enteros positivos tales que  $\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil \leq p \leq n$ , entonces*

$$ex(n; MK_p) = t_{2p-n-1}(n)$$

*Demostración:*

En primer lugar, sabemos por el *Teorema 3.3.1* que si

$$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n$$

entonces

$$ex(n; TK_p) = t_{2p-n-1}(n) \tag{3.4}$$

De (3.4) y del *Corolario 3.3.3* se tiene que

$$ex(n; MK_p) \leq t_{2p-n-1}(n)$$

La otra desigualdad es consecuencia del *Corolario 3.2.2* en el que se prueba que

$$ex(n; MK_p) \geq t_{2p-n-1}(n) \tag{3.5}$$

para  $p \leq n \leq 2p - 3$ .

Ahora bien, dado que  $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 2n + 3 &\leq 3p \\ n &\leq \frac{3p - 3}{2} \leq 2p - 3 \end{aligned}$$

y por tanto,  $p \leq n \leq 2p - 3$ , de donde deducimos que la desigualdad (3.5) es cierta en el sector que estamos estudiando.

Esto concluye la prueba del teorema.

⊗

Acabamos de demostrar que cuando  $n$  y  $p$  están relacionados por

$$\left\lceil \frac{2n + 3}{3} \right\rceil \leq p \leq n,$$

el valor exacto de la función extremal es

$$ex(n; MK_p) = t_{2p-n-1}(n).$$

Sin embargo, sería interesante disponer de una expresión explícita de dicho valor en función de los parámetros  $n$  y  $p$ .

Para obtener las expresiones que buscamos, distinguiremos dos casos distintos

1. Supongamos primero que

$$\left\lceil \frac{2n + 3}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{3n + 2}{4} \right\rfloor.$$

Denotemos por  $q = n - p$ , de modo que

$$2n + 3 \leq 3p = 3n - 3q \Rightarrow n \geq 3q + 3$$

$$3n + 2 \geq 4p = 4n - 4q \Rightarrow n \leq 4q + 2,$$

con lo que podemos expresar  $n = 3q + 3 + k$ , siendo  $0 \leq k \leq q - 1$ .

En estas circunstancias no es difícil comprobar que

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{2p - n - 1} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{3q + 3 + k}{n - 2q - 1} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{3q + 3 + k}{q + 2 + k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 2 + \frac{q - 1 - k}{q + 2 + k} \right\rfloor = 2 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce por ser  $k \leq q - 1$  y  $q - 1 - k < q + 2 + k$ .

Si recordamos la expresión del número de Turán que obtuvimos en la *Nota 1.3.2*,

$$t_r(n) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left( n - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right),$$

y la aplicamos en nuestro caso, tomando  $r = 2p - n - 1 = n - 2q - 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} ex(n; MK_p) &= \binom{n}{2} - 2 \left( n - \frac{3}{2}(n - 2q - 1) \right) \\ &= \binom{n}{2} - (2n - 3n + 6(n - p) + 3) \\ &= \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3). \end{aligned}$$

2. Cuando

$$\left\lfloor \frac{3n + 3}{4} \right\rfloor \leq p \leq n,$$

el razonamiento es totalmente análogo. En esta ocasión, podemos expresar  $n = 4q + 3 + k$  siendo  $0 \leq k$  de modo que se verifica  $\left\lfloor \frac{n}{2p - n - 1} \right\rfloor = 1$ , con lo que nos queda

$$\begin{aligned} ex(n; MK_p) &= \binom{n}{2} - \left( n - \frac{n - 2q - 1}{2} - \frac{n - 2q - 1}{2} \right) \\ &= \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1). \end{aligned}$$



Con lo que acabamos de ver, podemos enunciar el *Teorema 3.3.4* desde una perspectiva diferente.

**Teorema 3.3.5** *Si  $n$  y  $p$  son dos enteros positivos tales que  $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n$  entonces,  $ex(n; MK_p) = t_{2p-n-1}(n)$ . Es decir*

$$ex(n; MK_p) = \begin{cases} \binom{n}{2} - (5n - 6p + 3), & \text{si } \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{3n+2}{4} \right\rfloor, \\ \binom{n}{2} - (2n - 2p + 1), & \text{si } \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil \leq p \leq n. \end{cases}$$

En resumen, en esta primera parte de la sección hemos comprobado que la cota inferior para la función extremal  $ex(n; MK_p)$  que describimos en la *Sección 3.2* es óptima, y por tanto nos permite conocer el valor exacto de dicha función, en el sector

$$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n.$$

**3.3.2** Si  $\left\lceil \frac{5n+9}{8} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$

En apartados precedentes hemos visto que la cota inferior que obtuvimos en la *Sección 3.2* es óptima para valores de  $n$  y  $p$  satisfaciendo las relaciones

$$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n. \quad (3.6)$$

A continuación, ampliamos el sector infinito del plano  $(n, p)$ , definido por la expresión (3.6), con una nueva región infinita de pares  $(n, p)$  en la que determinamos el valor exacto de la función  $ex(n; MK_p)$ , y que viene dada por las desigualdades

$$\left\lceil \frac{5n+9}{8} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor. \quad (3.7)$$



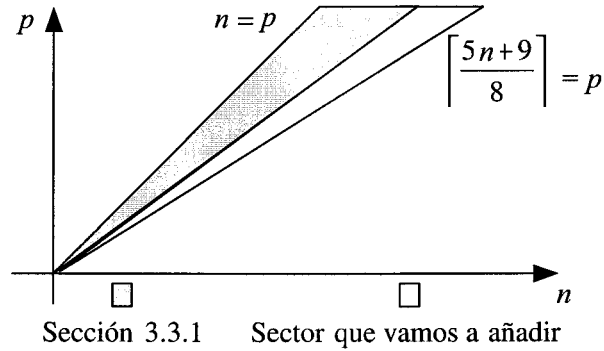


Figura 3.8: Sector infinito para el que vamos a aportar el valor exacto.

Para ello procedemos de modo análogo a como lo hicimos para probar que la cota era óptima en el sector anterior. Vamos a demostrar que cualquier grafo  $G$  de orden  $n$ , con una arista más que el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  contiene un subgrafo contractible al grafo completo de orden  $p$ . Haremos uso de las familias de grafos  $\mathcal{V}_r^t$  y de las propiedades de éstas que se expusieron en el *Capítulo 2*.

Si denotamos por  $q = n - p$ , las desigualdades (3.7) se pueden expresar del siguiente modo:

$$\left\lfloor \frac{5n+9}{8} \right\rfloor \leq p \iff 3n \geq 8q+9 \iff n \geq \left\lceil \frac{8q+9}{3} \right\rceil = 3q - \left\lfloor \frac{q-9}{3} \right\rfloor.$$

$$p \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor \iff 3p \leq 2n-1 \iff n \leq 3q-1.$$

En consecuencia, podemos expresar el número de vértices de este modo:

$$n = 3q - k, \quad \text{siendo } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-9}{3} \right\rfloor.$$

Considerando que  $n = 3q - k$ , es fácil ver que

$$\left\lfloor \frac{n}{2p-n-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{n-2q-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3q-k}{q-k-1} \right\rfloor = \left\lfloor 3 + \frac{2k+3}{q-k-1} \right\rfloor = 3.$$

donde la última igualdad se deriva de que  $2k + 3 < q - k - 1$ .

Recordemos que el número de Turán  $t_r(n)$  podemos expresarlo como

$$t_r(n) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left( n - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right).$$

Así que tomando  $r = 2p - n - 1 = n - 2q - 1$ , como  $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor = 3$  deducimos que

$$\begin{aligned} t_{2p-n-1}(n) &= t_{n-2q-1}(n) \\ &= \binom{n}{2} - 3(3q - k - 2(n - 2q - 1)) \\ &= \binom{n}{2} - 3(q + k + 2) \\ &= \binom{n}{2} - (3q + 3k + 6). \end{aligned} \tag{3.8}$$

En resumen, nuestro objetivo en este apartado va a ser probar que todo grafo con  $3q - k$  vértices, y  $\binom{n}{2} - (3q + 3k + 5)$  aristas contiene un subgrafo contractible a un grafo completo de orden  $p$ , siendo  $q = n - p$  y  $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-9}{3} \right\rfloor$ .

Para ello, demostraremos el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.6** *Sean  $n$  y  $p$  dos enteros positivos tales que  $n - p \geq 24$  y  $\left\lceil \frac{5n+9}{8} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$ . Entonces*

$$ex(n; MK_p) = t_{2p-n-1}(n) = \binom{n}{2} - (9n - 12p + 6).$$

*Demostración:*

Para comenzar con la prueba de este resultado, conviene tener presente que

$$\left\lceil \frac{5n+9}{8} \right\rceil \leq p \iff 5n+9 \leq 8p \iff n \leq \left\lfloor \frac{8p-9}{5} \right\rfloor,$$

y por ello deducimos que

$$n \leq \left\lfloor \frac{8p-9}{5} \right\rfloor \leq 2p-3.$$

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el *Teorema 3.2.1*, que afirma que en estas circunstancias, el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  no contiene a  $K_p$  como menor. Esto nos conduce a la desigualdad

$$ex(n; MK_p) \geq t_{2p-n-1}(n).$$

Para probar la otra desigualdad basta demostrar que cualquier grafo de orden  $n$  con, al menos,  $t_{2p-n-1}(n) + 1$  aristas, contiene al grafo completo de orden  $p$  como menor.

Según hemos visto en la introducción de esta sección, tomando  $q = n - p$ , podemos expresar el número  $n$  de vértices del siguiente modo

$$n = 3q - k, \quad \text{siendo } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-9}{3} \right\rfloor.$$

Por otra parte, el número de aristas del grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ , en función de  $n, q$  y  $k$  viene definido, como vimos en la expresión (3.8), de esta manera:

$$t_{2p-n-1}(n) = \binom{n}{2} - (3q + 3k + 6).$$

Por ser  $q = n - p$  y  $k = 3q - n$  se verifica la igualdad

$$\binom{n}{2} - (3q + 3k + 6) = \binom{n}{2} - (9n - 12p + 6).$$

Nuestro objetivo consiste en demostrar que todo grafo  $G$  de orden  $n = 3q - k$ , siendo  $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-9}{3} \right\rfloor$ , con al menos  $\binom{n}{2} - (3q + 3k + 5)$  aristas, es contractible a  $K_p$ , siendo  $q = n - p \geq 24$ .

Sea  $G$  un grafo cumpliendo tales hipótesis y denotemos por  $H$  a su grafo complementario.



Obviamente  $H$  es un grafo que tiene  $n = 3q - k$  vértices y, a lo sumo,  $3q + 3k + 5$  aristas. Por tanto, aplicando el *Lema 2.3.2* deducimos que  $H \in \mathcal{V}_q^q$ .

Ahora bien, por ser  $H$  de orden  $n$ , tamaño  $e(H) \leq 3q + 3k + 5 \leq 3q + 3k + 6$  y  $H \in \mathcal{V}_q^q$ , entonces haciendo uso del *Lema 2.3.5* deducimos que  $G = \overline{H}$  contiene a  $K_p$  como menor, lo que concluye esta demostración.

⊗

En conclusión, hemos verificado que la nueva cota inferior para la función extremal  $ex(n; MK_p)$  aportada en la *Sección 3.2* coincide con el valor exacto de dicha función, no sólo en el sector infinito determinado por las relaciones (3.6), sino que además lo hace en otro sector infinito que contiene a este último, y que viene definido por la expresión

$$\left\lceil \frac{5n+9}{8} \right\rceil \leq p \leq n.$$

**3.3.3** Si  $\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor$

En esta sección nos ocuparemos de añadir un tercer sector infinito del plano  $(n, p)$  para el cual la cota inferior del *Teorema 3.2.1* basada en el grafo de Turán conduce al valor exacto de la función  $ex(n; MK_p)$ . En concreto, para enteros positivos  $n$  y  $p$  relacionados por las desigualdades

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor \tag{3.9}$$

comprobaremos que el valor de la función extremal coincide con el número de Turán  $t_{2p-n-1}(n)$ .

La prueba del resultado central de esta sección, que pasaremos a enunciar a continuación, extiende la técnica que ya usamos en la *Sección 3.3.2* al sector determinado por (3.9).

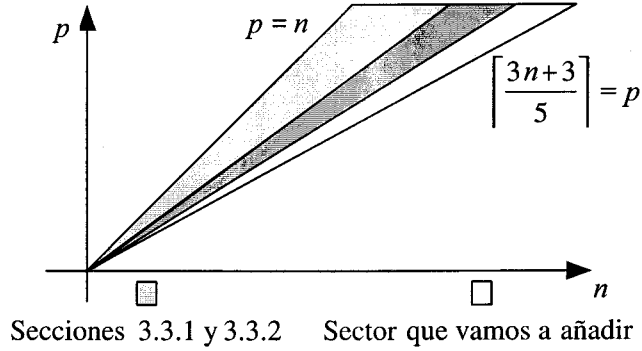


Figura 3.9: Sector ampliado para los que obtendremos  $ex(n; MK_p)$ .

Como ya se ha comentado ampliamente, la idea fundamental en todo este proceso es probar que, bajo ciertas hipótesis sobre el número de vértices y aristas de un grafo  $H$ , es posible establecer un emparejamiento completo en un determinado grafo bipartito, de modo que al contraer las aristas de este emparejamiento en el complementario del grafo,  $\overline{H}$ , se obtenga un subgrafo completo.

**Teorema 3.3.7** Sean  $n$  y  $p$  enteros tales que  $\lceil \frac{3n+3}{5} \rceil \leq p \leq \lfloor \frac{5n+3}{8} \rfloor$ . Entonces

$$ex(n; MK_p) = t_{2p-n-1}(n) = \binom{n}{2} - (14n - 20p + 10).$$

*Demostración:*

En primer lugar, de la desigualdad

$$\lceil \frac{3n+3}{5} \rceil \leq p,$$

se deduce que

$$3n+3 \leq 5p \iff n \leq \frac{5p-3}{3},$$

y por tanto,

$$n \leq 2p - 3.$$

En consecuencia, aplicando el *Teorema 3.2.1*, sabemos que el Grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  no es contractible a  $K_p$ , con lo que llegamos a que

$$ex(n; MK_p) \geq t_{2p-n-1}(n).$$

Una vez acotado inferiormente el valor exacto de la función extremal, para completar la demostración basta comprobar que todo grafo con  $n$  vértices y, al menos,  $t_{2p-n-1}(n) + 1$  aristas contiene al grafo completo de orden  $p$  como menor.

Al igual que hicimos en ocasiones anteriores, tomamos  $q = n - p$  de modo que  $2p - n - 1 = n - 2q - 1$ .

Además, por un lado,

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \implies n \geq \left\lfloor \frac{5q+3}{2} \right\rfloor,$$

y por otra parte,

$$p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor \implies n \leq \left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor,$$

de modo que podemos expresar el número de vértices del grafo como

$$n = \left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor - k, \text{ siendo } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-3}{6} \right\rfloor - b,$$

donde  $b = 1$  si  $q = 4 \pmod{6}$ , que equivalentemente (ver *Nota 1.3.1*) podemos expresar de esta manera:

$$n = \frac{16q+9-a}{6} - k,$$

siendo  $a = 3$  (resp.  $7, 5$ ) si  $q = 0$  (resp.  $1, 2$ )  $\pmod{3}$ .

Recordemos que el número de Turán viene dado (ver *Nota 1.3.2*) por la expresión

$$t_r(n) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left( n - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right).$$

En nuestro caso,  $r = 2p - n - 1 = n - 2q - 1$ , con lo cual

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\frac{16q+9-a-6k}{6}}{\frac{16q+9-a-6k}{6} - 2q-1} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{16q+9-a-6k}{4q+3-a-6k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 4 + \frac{-3+3a+18k}{4q+3-a-6k} \right\rfloor = 4, \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde la última desigualdad es cierta por ser  $-3 + 3a + 18k < 4q + 3 - a - 6k$ .

En definitiva, vemos que el número de Turán  $t_{2p-n-1}(n)$  expresado en función de  $n$  y  $q$  queda como sigue:

$$\begin{aligned} t_{2p-n-1}(n) &= t_{n-2q-1}(n) \\ &= \binom{n}{2} - 4 \left( \frac{16q+9-a}{6} - k - \frac{5}{2} \left( \frac{4q+3-a}{6} - k \right) \right) \\ &= \binom{n}{2} - 4 \left( \frac{32q+18-a-12k-20q-15+5a+30k}{12} \right) \\ &= \binom{n}{2} - 4 \left( \frac{12q+18k+3a+3}{12} \right) \\ &= \binom{n}{2} - (4q+6k+a+1). \end{aligned}$$

Obviamente, como  $q = n - p$  y  $6k = 16q + 9 - a - 6n$ , el número de aristas del grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  puede expresarse en función de  $n$  y  $p$  del modo siguiente:

$$t_{2p-n-1}(n) = \binom{n}{2} - (14n - 20p + 10).$$

Resumiendo todo lo visto hasta este momento, vemos que para demostrar que  $ex(n; MK_p) \leq t_{2p-n-1}(n)$  podemos probar, de modo equivalente, que

$$ex(n; MK_{n-q}) \leq \binom{n}{2} - (4q + 6k + a + 1),$$



donde  $n = \left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor - k$  con  $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-3}{6} \right\rfloor - b$ , siendo  $b = 1$  si  $q = 4 \pmod{6}$ , y  $b = 0$  en caso contrario; y siendo  $a = 3$  (resp. 7, 5) si  $q = 0$  (resp. 1, 2)  $\pmod{3}$ .

Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices y una arista más que el numero anterior, es decir,

$$e(G) = \binom{n}{2} - (4q + 6k + a).$$

Llamemos  $H$  al grafo complementario de  $G$ , que tendrá  $n$  vértices y  $4q + 6k + a$  aristas. El grafo  $H$  está por tanto en las condiciones del *Lema 2.3.4*, tomando  $\lambda = 0$ . Así que, aplicando dicho resultado deducimos que  $H \in \mathcal{V}_q^q$ .

Ahora bien, como  $H$  tiene  $n = \left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor - k$  vértices,  $e(H) \leq 4q + 6k + a + 1$  y  $H \in \mathcal{V}_q^q$ , entonces dicho grafo satisface las hipótesis del *Lema 2.3.6*. Aplicando este último resultado concluimos que  $\overline{H} = G$  es contractible a  $K_p$ . Esto finaliza la prueba de este teorema.

⊗

### 3.4 Conclusiones

Una vez finalizado este capítulo, y a modo de resumen, podemos decir que hemos alcanzado nuestro objetivo inicial, que como describimos en la introducción no era otro que el de aportar una nueva cota inferior para la función extremal  $ex(n; MK_p)$  y verificar que esta cota conduce al valor exacto de la función para todos aquellos pares de valores de los parámetros  $(n, p)$  pertenecientes al sector infinito del plano descrito por las relaciones

$$\left\lfloor \frac{3n+3}{5} \right\rfloor \leq p \leq n.$$

Si bien es cierto, como podemos observar en la *Figura 3.10*, que el sector del plano  $(n, p)$  para el que el problema permanece aún abierto es bastante amplio,



no es menos cierto que en esta tesis hemos llevado a cabo un avance importante en la obtención explícita del valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$ .

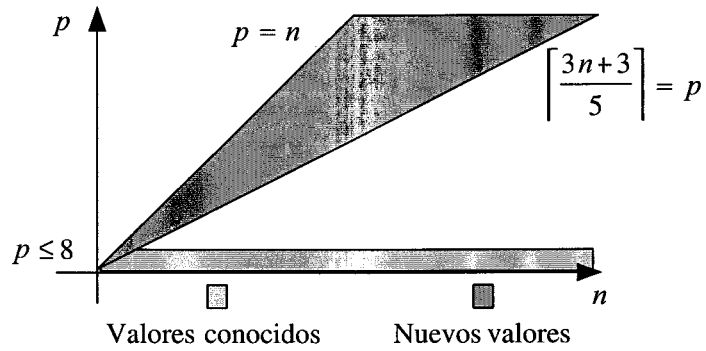


Figura 3.10: Pares  $(n, p)$  para los que se ha determinado explícitamente  $ex(n; MK_p)$ .



# Capítulo 4

## Estudio de la familia extremal

### $EX(n; MK_p)$

En el capítulo anterior hemos demostrado que el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  coincide con el número de Turán  $t_{2p-n-1}(n)$  cuando  $n$  y  $p$  están relacionados por la expresión

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq n$$

Dedicaremos este capítulo a caracterizar la familia extremal para los mismos pares de valores  $(n, p)$ . Probaremos que en este mismo sector esta familia se reduce al correspondiente grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ , salvo cuando  $n = p + 1$ , caso que detallaremos de manera particular.

#### 4.1 Introducción

En este capítulo vamos a abordar la segunda parte del Problema de Turán con contracción de aristas, que como en todo problema extremal, consiste en determinar cuáles son los grafos pertenecientes a la correspondiente familia extremal,



que denotamos  $EX(n; MK_p)$ .

Como ya hemos comentado en distintas ocasiones, los resultados conocidos acerca de este problema, tanto en lo referente al cálculo de valores exactos de la función extremal como a la caracterización de los grafos extremales, especialmente en este segundo aspecto, no son demasiado abundantes. En todos estos trabajos se ha estudiado el problema desde un punto de vista asintótico, es decir, fijando el valor de  $p$  y haciendo tender  $n$  a infinito.

Teniendo en cuenta que el grafo  $K_{p-2} + \overline{K_{n-p+2}}$  no es contractible a un completo con  $p$  vértices, se obtiene la cota clásica conocida para la función extremal  $ex(n; MK_p)$

$$ex(n; MK_p) \geq (p-2)n - \binom{p-1}{2}. \quad (4.1)$$

En el posterior estudio de este problema extremal han jugado un papel importante los grafos denominados  $G(m)$ -cockades. Estos grafos se definen por recursión de la siguiente manera: todo grafo isomorfo a  $G$  es un  $G(m)$ -cockade, y si  $G_1$  y  $G_2$  son  $G(m)$ -cockades entonces el grafo que se obtiene de la unión disjunta de  $G_1$  y  $G_2$  identificando los vértices de un  $K_m$  contenido en  $G_1$  con los de otro completo  $K_m$  contenido en  $G_2$  también es un  $G(m)$ -cockade; y todo  $G(k)$ -cockade se obtiene de esta manera.

En 1964 G.A. Dirac [13] demuestra que los únicos grafos con una arista más que la cota (4.1) son precisamente  $K_{p-1}(p-2)$ -cockades, para los valores  $p \leq 5$ . Posteriormente, en 1968, W. Mader [36] prueba que la cota alcanza el valor exacto cuando  $p \leq 7$ , poniendo de manifiesto que no es válida para  $p = 8$  mediante el contraejemplo  $K_{2,2,2,2,2}$ , que no es contractible a  $K_8$  pero tiene una arista más que el valor de la cota (4.1). En 1988, L. Jorgensen [30] caracteriza la familia extremal de grafos  $EX(n; MK_7)$  y este mismo autor [31], en 1998, demuestra que todo grafo con  $n$  vértices y, al menos,  $6n - 20$  aristas contiene a

$K_8$  como menor o bien es un  $K_5(2)$ -cockade. Por último, A. Thomason [45] prueba que en el caso general, los grafos extremales son grafos casi-aleatorios, es decir, grafos tales que cualquier subgrafo inducido por la mitad de sus vértices tiene la misma densidad que el grafo original. J. S. Myers [40] completa la demostración de este hecho, resolviendo algunas lagunas que aparecen en el argumento inicial de Thomason.

Al igual que hicimos en el capítulo anterior cuando estudiamos el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$ , estudiaremos esta segunda parte del Problema de Turán con contracción de aristas cuando  $n$  y  $p$  son valores relacionados entre sí. Concretamente, caracterizaremos los grafos extremales de las familias  $EX(n; MK_p)$  para aquellos pares  $(n, p)$  satisfaciendo

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq n. \quad (4.2)$$

## 4.2 Familia extremal $EX(n; MK_p)$

Como ya hemos comentado anteriormente, todo problema extremal tiene dos vertientes. Por un lado es necesario obtener el valor exacto de la función extremal en cuestión, y para completar el estudio de dicho problema, se debe abordar también la caracterización del conjunto de grafos extremales, denominado familia extremal.

Para el caso que nos ocupa, en el *Capítulo 3* hemos puesto de manifiesto que el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  coincide con el número de aristas del único grafo  $(2p - n - 1)$ -partito cuyas clases difieren, a lo sumo, en un vértice. El grafo descrito es el denominado grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ , y esto ocurre siempre que los valores de  $n$  y  $p$  satisfacen la relación

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq n. \quad (4.3)$$



A continuación, y para completar el estudio de este problema extremal, vamos a demostrar que en el mismo sector (4.3) la familia extremal de grafos,  $EX(n; MK_p)$ , se reduce exclusivamente al mencionado grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  salvo para el caso particular  $n = p + 1$ . En este último caso, además del citado grafo de Turán, encontramos otros dos grafos extremales que describiremos con detalle.

Para hacer esto procederemos del mismo modo que en el capítulo anterior cuando buscábamos el valor exacto de la función extremal. Dividiremos el sector infinito del plano  $(n, p)$  determinado por la expresión (4.3) en distintos sectores más pequeños (ver *Figura 4.1*).

$$4.2.1 \quad \text{Si } \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n$$

Iniciamos la caracterización de la familia extremal  $EX(n; MK_p)$  estudiando aquellos casos para los que los parámetros  $n$  y  $p$  están relacionados por las desigualdades

$$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n.$$

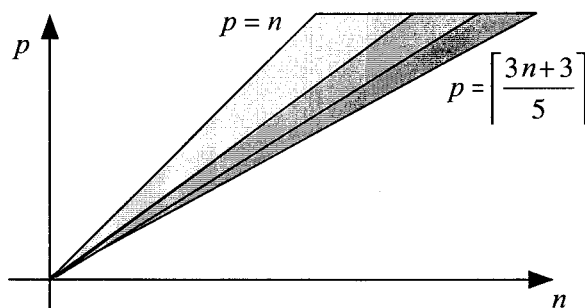


Figura 4.1: Pares  $(n, p)$  para los que se determinará  $EX(n; MK_p)$ .

Recordemos que si un grafo  $G$  contiene a otro como menor topológico entonces también lo contiene como menor (ver *Observación 3.3.2*), lo cual nos permite relacionar ambas funciones extremales mediante la desigualdad

$$ex(n; MK_p) \leq ex(n; TK_p).$$

Esta relación existente entre las dos funciones extremales podemos extenderla a las correspondientes familias extremales en aquellos casos en los que los valores exactos de ambas funciones coincidan, como queda de manifiesto en el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.1** *Si  $n$  y  $p$  son dos enteros positivos con  $n \geq p$  tales que  $ex(n; MK_p) = ex(n; TK_p)$ , entonces*

$$EX(n; MK_p) \subseteq EX(n; TK_p)$$

*Demostración:*

Sea  $G$  un grafo perteneciente a la familia extremal  $EX(n; MK_p)$ . Obviamente, se tiene que  $e(G) = ex(n; MK_p)$  lo cual, por hipótesis, implica que  $e(G) = ex(n; TK_p)$ .

Por otro lado, si  $G = TK_p$ , es decir, si  $G$  contiene a  $K_p$  como menor topológico, entonces por la *Observación 3.3.2* se tiene que  $G = MK_p$ , o lo que es igual,  $G$  contiene a  $K_p$  como menor. Pero esto es absurdo ya que  $G \in EX(n; MK_p)$ . Por consiguiente, tenemos que  $G \neq TK_p$  y que  $e(G) = ex(n; TK_p)$ , luego llegamos a la conclusión de que  $G \in EX(n; TK_p)$  y esto concluye la demostración.

⊗

De esta manera, en aquellos casos en los que los valores exactos de ambas funciones extremales coincidan y conozcamos los correspondientes grafos extremales para el problema topológico, el problema de determinar la familia de

grafos extremales para el problema con contracción de aristas se reduce a examinar cuáles de los grafos de la familia  $EX(n; TK_p)$  no son contractibles al grafo completo de orden  $p$ .

En definitiva, los avances obtenidos en la caracterización de los grafos extremales para el problema topológico pueden ser utilizados, y de hecho eso es lo que haremos a continuación, para caracterizar familias extremales en el problema de Turán con contracción de aristas.

En la *Sección 3.3.1* demostramos que el valor exacto de la función extremal para el problema con menores coincide con el obtenido por M. Cera, A. Diánez y A. Márquez [7, 8] y por P. García-Vázquez [16] para el problema topológico. Concretamente

$$ex(n; MK_p) = ex(n; TK_p) = t_{2p-n-1}(n)$$

siempre que

$$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n.$$

Por tanto, aplicando el *Teorema 4.2.1* en dicho sector infinito del plano, deducimos que

$$EX(n; MK_p) \subseteq EX(n; TK_p).$$

Agrupando las aportaciones de los mencionados autores en [7, 8, 16] tenemos los resultados de caracterización de la familia extremal para el problema topológico que exponemos a continuación.

**Teorema 4.2.2** [7, 8, 16] *Sean  $n$  y  $p$  dos enteros positivos tales que  $\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil \leq p \leq n$  y  $p \neq n-1$ . Entonces*

$$EX(n; TK_p) = \left\{ T_{2p-n-1}(n) \right\}$$

**Teorema 4.2.3** [16] *Para todo entero  $n \geq 6$  se verifica que*

$$EX(n; TK_{n-1}) = \left\{ T_{n-3}(n), \overline{K_3} + K_{n-3}, \overline{P_3} + K_{n-4} \right\}$$

En la *Figura 4.2* se muestran los complementarios de los grafos extremales,  $G_1 = T_{n-3}(n)$ ,  $G_2 = \overline{K_3} + K_{n-3}$  y  $G_3 = \overline{P_3} + K_{n-4}$ , pertenecientes a la familia  $EX(n; TK_{n-1})$ .

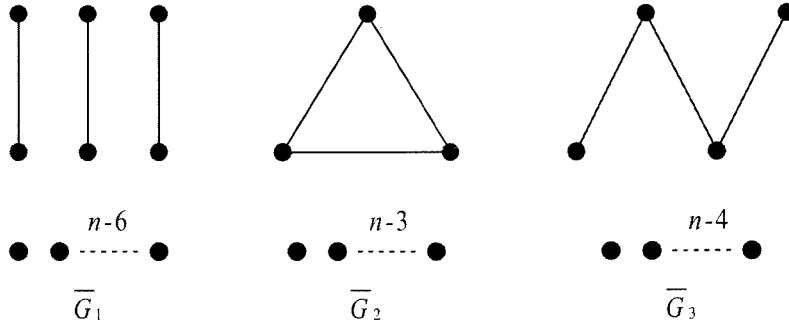


Figura 4.2: Complementarios de los grafos extremales de  $EX(n; TK_{n-1})$ .

Una vez expuestos los resultados conocidos en relación a la familia extremal para el problema topológico de Turán y probados los resultados que relacionan a dicho problema extremal con el problema para menores, abordamos la caracterización de la familia extremal  $EX(n; MK_p)$ . Para ello probamos un primer resultado en el que se describen todos los grafos extremales de  $EX(n; MK_p)$ , siempre que  $n \neq p + 1$ , en el sector de pares  $(n, p)$  que estamos estudiando.

**Teorema 4.2.4** *Si  $n$  y  $p$  son dos enteros positivos tales que  $\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil \leq p \leq n$  y  $p \neq n - 1$ , entonces*

$$EX(n; MK_p) = \left\{ T_{2p-n-1}(n) \right\}$$

*Demostración:*

Teniendo en cuenta los *Teoremas 3.3.1* y *3.3.4* tenemos que

$$ex(n; MK_p) = ex(n; TK_p) = t_{2p-n-1}(n).$$



Por tanto, aplicando el *Teorema 4.2.1* y considerando la caracterización de la familia extremal para el problema topológico dada en el *Teorema 4.2.2*, sabemos que

$$EX(n; MK_p) \subseteq \left\{ T_{2p-n-1}(n) \right\}.$$

Obsérvese que de  $\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil \leq p \leq n$  se deduce que  $n \leq \frac{3p-3}{2} < 2p-3$  ya que  $p \geq 3$ . Así que aplicando el *Teorema 3.2.1* sabemos que el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  no es contractible a  $K_p$ , de donde tenemos que

$$\left\{ T_{2p-n-1}(n) \right\} \subseteq EX(n; MK_p).$$

lo que prueba la igualdad de ambos conjuntos.

⊗

Para concluir analizamos el caso concreto  $p = n - 1$ . En esta ocasión, probamos que de nuevo las familias para ambos problemas extremales coinciden.

**Teorema 4.2.5** *Para todo entero  $n \geq 6$  se verifica que*

$$EX(n; MK_{n-1}) = \left\{ T_{n-3}(n), \overline{K}_3 + K_{n-3}, \overline{P}_3 + K_{n-4} \right\}.$$

*Demostración:*

Razonando como en la demostración del *Teorema 4.2.4*, haciendo uso de los *Teoremas 3.3.1, 3.3.4, 4.2.1* y *4.2.3*, sabemos que

$$EX(n; MK_{n-1}) \subseteq \left\{ T_{n-3}(n), \overline{K}_3 + K_{n-3}, \overline{P}_3 + K_{n-4} \right\}.$$

En primer lugar, por el *Teorema 3.2.1*, el grafo de Turán  $T_{n-3}(n)$  no es contractible a  $K_p$ . Y para concluir, basta observar que tanto en el caso del grafo  $\overline{K}_3 + K_{n-3}$  como en el de  $\overline{P}_3 + K_{n-4}$  al contraer una arista cualquiera en el grafo,

siempre queda al menos una arista en el complementario, lo cual implica que ninguno de estos dos grafos es contractible a  $K_{n-1}$ , lo que concluye la prueba de este resultado.

⊗

La relación que hemos descrito entre los dos problemas extremales, el topológico y el de contracción de aristas, nos ha permitido caracterizar la familia extremal del segundo de ellos gracias a los resultados conocidos en relación al problema topológico de Turán. La pregunta que surge ahora de manera natural es si será posible aplicar esta misma técnica para completar la caracterización de dicha familia en los demás sectores. Como veremos a continuación, en los sectores contiguos los valores de las funciones extremales de estos problemas no coinciden y por tanto no podremos aplicar el *Teorema 4.2.1*. Será aquí donde haya que retomar la técnica del emparejamiento completo que describimos en el *Capítulo 3*.

Como hemos dicho, el problema que se nos plantea a continuación es que los valores exactos de las funciones extremales  $ex(n; TK_p)$  y  $ex(n; MK_p)$  no coinciden, en general, cuando  $p < \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ . Concretamente, en el *Teorema 4.2.6* de [16] se demuestra que

$$ex(n; TK_p) = \binom{n}{2} - (5n - 6p + 2)$$

para valores de  $n$  y  $p$  tales que  $\lceil \frac{7n+7}{12} \rceil \leq p < \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ . Pero por otra parte, en la *Sección 3.3.2* de esta memoria, hemos demostrado que

$$ex(n; MK_p) = \binom{n}{2} - (9n - 12p + 6),$$

para ese conjunto de pares  $(n, p)$ .

En la *Tabla 4.1* se pueden observar los valores exactos de ambas funciones para algunos de los valores de  $n$  y  $p$  verificando  $\lceil \frac{7n+7}{12} \rceil \leq p < \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ .

n	p	$ex(n; TK_p)$	$ex(n; MK_p)$
126	80	7723	7695
	81	7729	7707
	82	7735	7719
	83	7741	7731
127	82	7856	7836
	83	7862	7848
	84	7868	7860

Tabla 4.1: Valor exacto de las funciones extremales  $ex(n; TK_p)$  y  $ex(n; MK_p)$ .

**4.2.2** Si  $\left\lceil \frac{5n+9}{8} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$

En este apartado nos proponemos continuar con la caracterización de la familia extremal de grafos  $EX(n; MK_p)$  que hemos comenzado en la *Sección 4.2.1*. En aquella ocasión verificamos que dicha familia se reducía a un único grafo, el Grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ , para valores de  $n$  y  $p$  satisfaciendo la relación

$$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n,$$

salvo cuando  $n = p + 1$ , en cuyo caso aparecían dos grafos extremales más, que fueron descritos con detalle.

En este caso vamos a caracterizar la familia extremal  $EX(n; MK_p)$  cuando  $n$  y  $p$  vienen determinados (ver *Figura 4.3*) por

$$\left\lceil \frac{5n+9}{8} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$$

Para empezar debemos recordar que, por un lado, en la *Sección 3.2* demostramos que el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  no es contractible a un grafo completo con  $p$  vértices siempre que  $n \leq 2p-3$ . Y por otra parte, a lo largo de la *Sección 3.3* hemos verificado que el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  coincide,

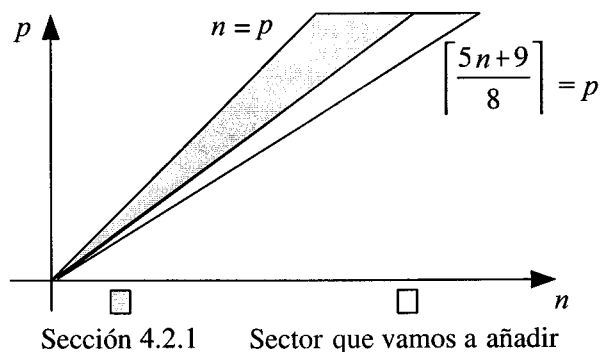


Figura 4.3: Sector infinito para el que vamos a caracterizar la familia extremal.

precisamente, con el tamaño de dicho grafo. De todo ello podemos deducir que el grafo  $T_{2p-n-1}(n)$  es un grafo de la familia extremal  $EX(n; MK_p)$ . Nuestra intención es demostrar que éste es justamente el único grafo extremal de dicha familia.

La técnica que vamos a utilizar consistirá en considerar un grafo no contractible a  $K_p$ , de orden  $n$  y tamaño  $ex(n; MK_p)$ , es decir, un grafo de la familia extremal  $EX(n; MK_p)$ , y verificar que su grafo complementario está formado por  $2p - n - 1$  copias disjuntas de grafos completos cuyos ordenes se diferencian, a lo sumo, en una unidad.

Como viene siendo habitual, ya que los grafos extremales contienen un número elevado de aristas, trabajaremos con los grafos complementarios.

Por tanto, y denotando por  $q = n - p$ , como estamos suponiendo que

$$\left\lfloor \frac{5n+9}{8} \right\rfloor \leq p$$

deducimos que

$$n \geq \left\lceil \frac{8q+9}{3} \right\rceil$$



Y además, como

$$p \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$$

se tiene también que  $n \leq 3q - 1$ .

En resumen, es posible relacionar el número  $n$  de vértices con el valor  $q$  de la siguiente manera:

$$n = 3q - k, \quad \text{siendo } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-9}{3} \right\rfloor$$

Antes de abordar el resultado principal de esta sección, y aprovechando las relaciones que hemos obtenido en los párrafos anteriores, vamos a obtener algunas expresiones que nos serán de ayuda. A continuación, mostraremos una expresión del número de aristas del grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  en función de los valores  $n$  y  $q$ .

Hemos visto que podemos expresar el número de vértices como  $n = 3q - k$ , de modo que es fácil ver que

$$\left\lfloor \frac{n}{2p-n-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{n-2q-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3q-k}{q-k-1} \right\rfloor = \left\lfloor 3 + \frac{2k+3}{q-k-1} \right\rfloor = 3$$

siendo la última igualdad consecuencia directa de que  $2k+3 < q-k-1$ .

Por otro lado, haciendo uso de la expresión del número de Turán que obtuvimos en la *Nota 1.3.2*,

$$t_r(n) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left( n - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right),$$

tomando  $r = 2p - n - 1 = n - 2q - 1$  y  $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor = 3$ , tenemos, en definitiva, que el

número de Turán  $t_{2p-n-1}(n)$  expresado en función de  $n$  y  $q$  nos queda

$$\begin{aligned} t_{2p-n-1}(n) &= t_{n-2q-1}(n) \\ &= \binom{n}{2} - 3(3q - k - 2(n - 2q - 1)) \\ &= \binom{n}{2} - 3(q + k + 2) \\ &= \binom{n}{2} - (3q + 3k + 6) \end{aligned}$$

Por último, como

$$\left\lfloor \frac{n}{2p - n - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3q - k}{q - k - 1} \right\rfloor = 3$$

sabemos que el complementario del grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n) = T_{n-2q-1}(n) = T_{q-k-1}(n)$  es un grafo formado por  $a$  copias disjuntas del grafo completo  $K_3$  y por  $b$  copias disjuntas de  $K_4$ , siendo  $a$  y  $b$  enteros no negativos tales que  $a + b = q - k - 1$ .

Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} q - k - 1 = a + b \\ 3q + 3k + 6 = 3a + 6b \end{cases}$$

de donde se deduce que  $a = q - 3k - 4$  y  $b = 2k + 3$ .

En resumen, nuestro objetivo en este apartado va a ser probar que todo grafo de la familia extremal  $EX(n; MK_p)$  es tal que su complementario consiste en la unión de  $q - 3k - 4$  copias disjuntas de  $K_3$  y  $2k + 3$  copias disjuntas de  $K_4$ , siendo  $q = n - p$  y  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q-9}{3} \rfloor$ .

Para llevar a cabo esta tarea haremos uso de los *Lemas 1.3.3* y *1.3.4* enunciados en el *Capítulo 1* y en los que bajo ciertas hipótesis, podemos afirmar que un grafo contiene copias disjuntas de un determinado grafo completo.

A continuación, pasamos a enunciar el resultado central de esta sección en el que vamos a determinar la familia extremal  $EX(n; MK_p)$ .

**Teorema 4.2.6** Sean  $n$  y  $p$  dos enteros positivos tales que  $n - p \geq 24$  y  $\lceil \frac{5n+9}{8} \rceil \leq p \leq \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ . Entonces se tiene que

$$EX(n; MK_p) = \left\{ T_{2p-n-1}(n) \right\}.$$

*Demostración:*

Para comenzar la prueba de este resultado recordemos que en el *Teorema 3.3.6* se asegura que el valor de la función extremal  $ex(n; MK_p)$  coincide con el número de aristas del grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ . Por otro lado, aplicando el *Teorema 3.2.1*, sabemos que dicho grafo no es contractible a  $K_p$ . De todo ello se deduce que este grafo pertenece a la familia extremal  $EX(n; MK_p)$ .

Una vez comprobado esto, sólo nos queda verificar que ese grafo de Turán es el único elemento de esta familia. De acuerdo con el razonamiento expuesto en párrafos anteriores, nuestra tarea consistirá en demostrar que si un grafo es extremal, entonces su grafo complementario se compone de  $q - 3k - 4$  copias disjuntas de  $K_3$  y  $2k + 3$  copias disjuntas de  $K_4$ , siendo  $q = n - p$  y  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q-9}{3} \rfloor$ .

Sea  $G \in EX(n; MK_p)$ . Sabemos que  $v(G) = 3q - k$  y, por el *Teorema 3.3.6*

$$e(G) = ex(n; MK_p) = \binom{n}{2} - (9n - 12p + 6) = \binom{n}{2} - (3q + 3k + 6).$$

Por ello, si denotamos por  $H$  al grafo complementario de  $G$ , tenemos que  $v(H) = 3q - k$  y  $e(H) = 3q + 3k + 6$ .

Como sabemos que  $G$  no contiene a  $K_p$  como menor, aplicando el *Lema 2.3.5*, podemos deducir que  $H \notin \mathcal{V}_q^q$ , es decir, que para toda sucesión decreciente de  $q$  vértices en  $H$ ,  $\{v_1, \dots, v_q\}$ , el cardinal mínimo de un conjunto vértice recubridor del grafo  $H_q$ , obtenido al eliminar de  $H$  los vértices de la sucesión, es mayor o igual que  $q + 1$ .

Sea  $\{v_1, \dots, v_q\}$  una sucesión decreciente formada por  $q$  vértices del grafo

$H$ . Para continuar con la demostración, será conveniente que obtengamos cierta información acerca de la valencia máxima en los grafos  $H$  y  $H_q$ .

En primer lugar, vamos a ver que  $\Delta(H_q) = 2$ . Para ello, supongamos primero que  $\Delta(H_q) \leq 1$ . En ese caso, el grafo  $H_q$  estaría formado por aristas disjuntas y vértices aislados, con lo que un conjunto vértice recubridor de cardinal mínimo del mismo podría formarse tomando un vértice de cada una de las aristas. En consecuencia

$$\#_{vr}(H_q) = e(H_q) \leq \frac{1}{2}v(H_q) = \frac{1}{2}(2q - k) = q - \frac{k}{2} < q + 1$$

lo cual no es posible ya que  $H \notin \mathcal{V}_q^q$ .

Supongamos, por otro lado, que  $\Delta(H_q) \geq 3$ . En ese caso, por definición de sucesión decreciente en  $H$ , se tendría que  $\delta_{H_{i-1}}(v_i) \geq 3$  para todo  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Ahora bien, es obvio que  $\#_{vr}(H_q) \leq e(H_q)$  y por todo ello, tenemos que

$$\#_{vr}(H_q) \leq e(H_q) \leq e(H) - 3q = 3q + 3k + 6 - 3q \leq 3\frac{q-9}{3} + 6 \leq q - 3 < q + 1$$

pero esto también contradice nuestras hipótesis. Luego  $\Delta(H_q) = 2$ .

A continuación, veamos que  $\Delta(H) = 3$ .

En primer lugar, como  $e(H) = 3q + 3k + 6 > 3q - k = v(H)$ , es evidente que  $\Delta(H) \geq 3$ . Luego sólo nos queda ver que es cierta la otra desigualdad.

Supongamos pues que  $\Delta(H) \geq 4$ . Denotemos por  $s_3 \geq 1$  al máximo número de vértices independientes en  $H$  con valencia mayor o igual que 3, y por  $r_2$  al máximo número de vértices independientes con valencia 2 en  $H_q$ .

Por una parte,

$$e(H_{s_3}) = \sum_{j=s_3+1}^q \delta_{H_{j+1}}(v_j) + e(H_q) = 2(q - s_3) + e(H_q)$$

y como  $\Delta(H_q) = 2$ , haciendo uso de la relación (2.2) entre el mínimo cardinal de





un conjunto vértice recubridor y  $r_2$ , deducimos que

$$e(H_{s_3}) = 2(q - s_3) + \#_{vr}(H_q) + r_2 \geq 3q - 2s_3 + 1 + r_2. \quad (4.4)$$

Por otro lado, como  $\Delta(H_{s_3}) = 2$ , sabemos que  $e(H_{s_3}) \leq v(H_{s_3})$ , y teniendo en cuenta (4.4)

$$3q - 2s_3 + r_2 + 1 \leq 3q - k - s_3$$

llegamos a

$$r_2 + k + 1 \leq s_3 \quad (4.5)$$

Además, como  $\Delta(H_{q+r_2}) \leq 1$ , se cumple que  $2e(H_{q+r_2}) \leq v(H_{q+r_2})$  y por tanto,

$$2(e(H_q) - 2r_2) \leq 3q - k - q - r_2.$$

De nuevo aplicando (2.2) obtenemos

$$2(\#_{vr}(H_q) - r_2) \leq 2q - k - r_2,$$

es decir,

$$2q + 2 - 2r_2 \leq 2q - k - r_2$$

de donde deducimos que

$$k + 2 \leq r_2. \quad (4.6)$$

Sin embargo, al ser  $e(H) \geq 3s_3 + 1 + 2(q - s_3) + e(H_q)$  y puesto que  $\#_{vr}(H_q) \geq q + 1$  tenemos que

$$e(H) \geq 3s_3 + 1 + 2(q - s_3) + \#_{vr}(H_q) + r_2,$$

pero como  $\#_{vr}(H_q) \geq q + 1$

$$e(H) \geq 3q + 2 + r_2 + s_3.$$

Por último, considerando las relaciones (4.5) y (4.6) deducimos finalmente que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq 3q + 2 + r_2 + s_3 \\ &\geq 3q + k + 3 + 2r_2 \\ &\geq 3q + 3k + 7. \end{aligned}$$

Esto contradice nuestra hipótesis acerca del tamaño del grafo  $H$  y en consecuencia, queda demostrado que  $\Delta(H) = 3$ .

Una vez que hemos obtenido la información acerca de la valencia máxima de los grafos  $H$  y  $H_q$ , vamos a pasar directamente a concluir la prueba de este teorema demostrando que el grafo  $H$  está formado por  $2k + 3$  copias disjuntas del grafo completo  $K_4$  y  $q - 3k - 4$  copias de  $K_3$ .

Para ello, denotemos por  $n_i$  al número de vértices del grafo  $H$  con valencia  $i$ , con  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . De este modo, sabemos que

$$\begin{aligned} v(H) &= n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \\ 2e(H) &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$2e(H) - 2v(H) = -2n_0 - n_1 + n_3 \leq n_3$$

En consecuencia

$$n_3 \geq 2e(H) - 2v(H) = 8k + 12$$

Como acabamos de ver,  $H$  contiene, al menos,  $8k + 12$  vértices de valencia máxima. Luego aplicando el *Lema 1.3.3* tenemos que de ellos, al menos

$$\left\lfloor \frac{8k + 12 + 3}{4} \right\rfloor = 2k + 3$$

son independientes.

Además, vamos a ver que ese es el número exacto de vértices independientes en  $H$  con valencia 3. En caso contrario, ocurriría lo siguiente:

$$e(H) \geq 3(2k + 4) + 2(q - 2k - 4) + e(H_q)$$

Por otra parte, como  $\Delta(H_q) = 2$  tenemos que  $e(H_q) = \#_{vr}(H_q) + r_2$ , y por consiguiente

$$\begin{aligned} e(H) &= 2q + 2k + 4 + \#_{vr}(H_q) + r_2 \\ &\geq 2q + 2k + 4 + q + 1 + r_2 \\ &\geq 3q + 3k + 7 \end{aligned}$$

lo cual contradice nuestras hipótesis.

Así pues el grafo  $H$  tiene  $8k + 12 = 4(2k + 3)$  vértices con valencia 3, siendo  $2k + 3$  de ellos independientes. Basta, entonces, con aplicar el *Lema 1.3.4* para deducir que el grafo  $H$  está formado por  $2k + 3$  copias disjuntas de  $K_4$  y un grafo  $H^*$  cuya valencia máxima es, a los sumo, 2.

Para finalizar esta demostración, sólo nos queda verificar que el grafo  $H^*$  consiste en la unión disjunta de  $q - 3k - 4$  copias de  $K_3$ .

Como vimos en párrafos anteriores, si denotamos por  $n_i$  al número de vértices de  $H$  con valencia  $i$  para  $i = 0, 1, 2, 3$  tenemos que

$$\begin{aligned} v(H) = 3q - k &= n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \\ 2e(H) = 2(3q + 3k + 6) &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 \end{aligned}$$

Ahora bien, hemos visto que  $n_3 = 8k + 12$ , por lo que las expresiones anteriores conducen a

$$\begin{aligned} 3q - 9k - 12 &= n_0 + n_1 + n_2 \\ 6q - 18k - 24 &= n_1 + 2n_2 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $2n_0 + n_1 = 0$ . Ahora bien, por ser las variables involucradas en este sistema números naturales, se deduce que  $n_0 = n_1 = 0$  y  $n_2 = 3q - 9k - 12$ .

Por tanto, el grafo  $H^*$  tiene valencia máxima 2 y  $3q - 9k - 12$  vértices con dicha valencia máxima en  $H^*$ . Aplicando el *Lema 1.3.3*, sabemos que, al menos

$$\left\lfloor \frac{3q - 9k - 12 + 2}{3} \right\rfloor = q - 3k - 4$$

de estos vértices son independientes.

Veamos ahora que es éste, precisamente, el número exacto de vértices independientes con valencia 2 en  $H^*$ . Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que  $H^*$  tiene, al menos,  $q - 3k - 3$  vértices independientes de valencia 2. Es necesario destacar que el grafo  $H_{2k+3}$  resultante de eliminar en  $H$  los  $2k + 3$  vértices independientes de valencia 3, está formado por la unión de  $2k + 3$  copias disjuntas de  $K_3$  y el grafo  $H^*$ . Así que si suponemos que  $H^*$  tiene, al menos,  $q - 3k - 3$  vértices independientes de valencia 2, entonces,  $H_{2k+3}$  tendrá, al menos,  $(2k + 3) + (q - 3k - 3) = q - k$  vértices independientes de valencia 2. Por ello, se cumpliría que en el grafo  $H_q$ , el número de vértices independientes de valencia 2, que denotamos  $r_2$ , satisface la desigualdad

$$r_2 \geq q - k - (q - (2k + 3)) = k + 3.$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} e(H) &\geq 3(2k + 3) + 2(q - (2k + 3)) + e(H_q) \\ &= 2q + 2k + 3 + \#_{vr}(H_q) + r_2 \\ &\geq 2q + 2k + 3 + q + 1 + r_2 \\ &\geq 3q + 3k + 7 \end{aligned}$$

que es imposible. Así pues, el grafo  $H^*$  contiene

$$3q - 9k - 12 = 3(q - 3k - 4)$$

vértices de valencia máxima 2, siendo exactamente  $q - 3k - 4$  de ellos independientes.



De este modo, si aplicamos ahora el *Lema 1.3.4* concluimos que  $H^*$  está formado por  $q - 3k - 4$  copias disjuntas del grafo completo  $K_3$ .

En resumen, hemos verificado que el grafo complementario del grafo  $G$  de la familia extremal que habíamos tomado, consiste en la unión disjunta de  $2k + 3$  copias de  $K_4$  y  $q - 3k - 4$  copias del grafo  $K_3$ . Pero como

$$\begin{aligned} (2k + 3) + (q - 3k - 4) &= q - k - 1 \\ &= (3q - k) - 2q - 1 \\ &= n - 2q - 1 \\ &= 2p - n - 1 \end{aligned}$$

tenemos que el grafo  $G$  es un grafo  $(2p - n - 1)$ -partito cuyos  $n$  vértices están repartidos en las clases de la forma más igualitaria posible. Es decir,  $G$  es el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ .

Con esto concluimos la demostración del teorema.

⊗

En resumen, uniendo los resultados obtenidos en la sección precedente con los aportados en el teorema que acabamos de demostrar, hemos caracterizado la familia extremal  $EX(n; MK_p)$  para todos aquellos pares de valores  $(n, p)$  pertenecientes al sector infinito dado por

$$\left\lceil \frac{5n + 9}{8} \right\rceil \leq p \leq n$$

comprobando, además, que esta familia es unitaria y está formada por el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ .

**4.2.3** Si  $\left\lceil \frac{3n + 3}{5} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{5n + 3}{8} \right\rfloor$

En la última parte de este capítulo pretendemos, utilizando las técnicas descritas en secciones anteriores, obtener la familia extremal de grafos para el problema de

Turán con contracción de aristas, en el sector contiguo que sigue a los descritos en los resultados probados hasta ahora.

Más concretamente, la familia extremal sigue siendo unitaria y se reduce al citado grafo de Turán, añadiéndole ( ver *Figura 4.4*) todos aquellos pares de valores  $(n, p)$  que verifican

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor.$$

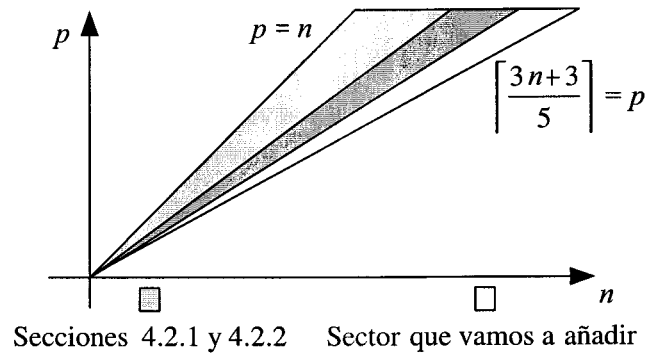


Figura 4.4: Sector infinito contiguo para el que también vamos a caracterizar la familia extremal.

Hay que recordar que en el *Teorema 3.2.1* demostramos que cuando  $p \leq n \leq 2p-3$ , el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  no es contractible al grafo completo con  $p$  vértices, y que además, tiene tamaño extremal. En nuestro caso, dado que  $\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p$  se tiene que  $n \leq \frac{5p-3}{3} < 2p-3$  y podemos aplicar dicho teorema. Por tanto, la primera de las relaciones de inclusión ya estaría establecida.

Para probar la otra inclusión, partimos de un grafo de  $EX(n; MK_p)$  y veremos que su complementario esta formado por la unión disjunta de  $2p-n-1$  grafos completos de orden 4 ó 5. En consecuencia, deduciremos que el grafo extremal es, necesariamente, el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ .

Denotamos por  $q = n - p$ , y dado que estamos suponiendo la relación  $\left\lfloor \frac{3n+3}{5} \right\rfloor \leq p$  se tiene lo siguiente:

$$\left\lfloor \frac{3n+3}{5} \right\rfloor \leq p \Rightarrow 3n+3 \leq 5p = 5(n-q) \Rightarrow n \geq \left\lfloor \frac{5q+3}{3} \right\rfloor.$$

Por otro lado, como  $p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor$ , también podemos deducir la relación

$$p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor \Rightarrow 5n+3 \geq 8p = 8(n-q) \Rightarrow n \leq \left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor.$$

En definitiva, podemos expresar el número de vértices  $n$  en función del valor  $q$  del modo siguiente

$$n = \left\lfloor \frac{8q+3}{3} \right\rfloor - k, \text{ siendo } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q-3}{6} \right\rfloor - b$$

donde  $b = 1$  si  $q = 4 \pmod{6}$  y  $b = 0$  en caso contrario.

Podemos prescindir de las partes enteras (ver *Nota 1.3.1*) ya que

$$n = \frac{16q+9-a}{6} - k$$

donde  $a = 3$  (resp.  $7, 5$ ) si  $q = 0$  (resp.  $1, 2$ ) *mód.*  $3$

Recordemos que nuestro propósito es probar que el grafo  $T_{2p-n-1}(n)$  es el único perteneciente a la familia  $EX(n; MK_p)$ . Consecuentemente, y ya que hemos obtenido una expresión del orden de los grafos que estamos manejando en función de  $q$ , parece lógico que obtengamos asimismo una expresión del tamaño de dicho grafo en función también de  $q$ . Sabemos que este tamaño coincide con el valor exacto de la función  $ex(n; MK_p)$  en este sector, como ya probamos en el *Teorema 3.3.7* y que dicho valor es

$$ex(n; MK_p) = t_{2p-n-1}(n) = \binom{n}{2} - (14n - 20p + 10)$$

Lo primero que hemos de tener en cuenta es la expresión del tamaño de un grafo de Turán que vimos en la *Nota 1.3.2*

$$t_r(n) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \left( n - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right)$$

Así que tomando  $r = 2p - n - 1 = n - 2q - 1$  deducimos que  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor = 4$ , como vimos en (3.10). En conclusión, vemos que es posible expresar el tamaño del grafo de Turán en función de los valores  $n$  y  $q$  del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
 t_{2p-n-1}(n) &= t_{n-2q-1}(n) \\
 &= \binom{n}{2} - 4 \left( \frac{16q + 9 - a}{6} - k - \frac{5}{2} \left( \frac{4q + 3 - a}{6} - k \right) \right) \\
 &= \binom{n}{2} - 4 \left( \frac{32q + 18 - a - 12k - 20q - 15 + 5a + 30k}{12} \right) \\
 &= \binom{n}{2} - 4 \left( \frac{12q + 18k + 3a + 3}{12} \right) \\
 &= \binom{n}{2} - (4q + 6k + a + 1).
 \end{aligned}$$

Como acabamos de ver, para los valores de  $(n, p)$  en este sector del plano, se tiene que  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor = 4$ , y por ello, sabemos que el complementario del grafo  $T_{2p-n-1}(n)$  está formado por copias disjuntas de subgrafos completos  $K_4$  y  $K_5$ .

Supongamos que el número de copias disjuntas de  $K_4$  es  $i$  y que el de  $K_5$  es  $j$ . Como el número total de clases de vértices es  $n - 2q - 1$ , tenemos por un lado que

$$\begin{aligned}
 i + j &= \frac{16q + 9 - a}{6} - k - 2q - 1 \\
 &= \frac{4q + 3 - a}{6} - k.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Y por otra parte, como el número total de aristas es  $4q + 6k + a + 1$ , también se verifica que

$$6i + 10j = 4q + 6k + a + 1. \tag{4.8}$$

Del sistema formado por las expresiones (4.7) y (4.8) obtenemos que

$$i = \frac{2q - 2a + 3}{3} - 4k$$



y que

$$j = 3k + \frac{a-1}{2}.$$

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección, en el que caracterizamos la familia extremal  $EX(n; MK_p)$  cuando  $n$  y  $p$  pertenecen al sector

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor.$$

**Teorema 4.2.7** Sean  $n$  y  $p$  enteros tales que  $n-p > 162$  y  $\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor$ .

Entonces

$$EX(n; MK_p) = \left\{ T_{2p-n-1}(n) \right\}$$

*Demostración:*

Una de las inclusiones es inmediata como consecuencia de los resultados que hemos demostrado en el *Capítulo 3*. En concreto, por el *Teorema 3.3.7*, sabemos que el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$  tiene tamaño extremal. Y por el *Teorema 3.2.1*, dicho grafo no es contractible al grafo completo con  $p$  vértices.

En resumen, sabemos que  $T_{2p-n-1}(n)$  es un grafo de la familia extremal  $EX(n; MK_p)$ . Para completar la prueba del teorema vamos a comprobar que también se da la otra inclusión.

Sea  $G \in EX(n; MK_p)$ , siendo

$$\left\lceil \frac{3n+3}{5} \right\rceil \leq p \leq \left\lfloor \frac{5n+3}{8} \right\rfloor.$$

Como hemos visto en los preliminares de esta sección, podemos expresar

$$n = \frac{16q+9-a}{6}$$

siendo  $a = 3$  (resp. 7, 5) si  $q = 0$  (resp. 1, 2) mód.3.

Haciendo uso del razonamiento previo al enunciado de este teorema, basta comprobar que el grafo complementario de  $G$  está formado por

$$\frac{2q - 2a + 3}{3} - 4k$$

copias disjuntas de  $K_4$  y por

$$3k + \frac{a - 1}{2}$$

copias disjuntas de  $K_5$ , siendo  $a = 3$  (resp. 7, 5) si  $q = 0$  (resp. 1, 2) mód. 3.

Aplicando el *Teorema 3.3.7* sabemos que el grafo  $H = \overline{G}$  tiene

$$v(H) = n = \left\lfloor \frac{8q + 3}{3} \right\rfloor - k$$

vértices y

$$e(H) = 4q + 6k + a + 1$$

aristas.

Por otra parte, teniendo en cuenta el *Lema 2.3.6*, y que  $G$  no es contractible a  $K_p$ , deducimos que  $H \notin \mathcal{V}_q^q$ . Por tanto, para toda sucesión decreciente de  $q$  vértices en  $H$  sabemos que  $\#_{vr}(H_q) \geq q + 1$ .

Sea  $\{v_1, \dots, v_q\}$  una sucesión decreciente formada por  $q$  vértices del grafo  $H$ . Vamos a estimar la valencia máxima en los grafos  $H$  y  $H_q$ , siendo este último el grafo que se obtiene de  $H$  tras eliminar los  $q$  vértices de la sucesión decreciente.

En primer lugar, si  $\Delta(H_q) \leq 1$  entonces

$$v(H) \geq q + 2 \#_{vr}(H_q) \geq 3q + 2 > \frac{16q + 9 - a}{6} - k = v(H)$$

lo cual es imposible. En segundo lugar, si  $\Delta(H_q) \geq 4$  entonces

$$e(H_{q+1}) \leq 4q + 6k + a + 1 - 4q - 4 = 6k + a - 3 \leq q - 3$$

y por tanto  $H \in \mathcal{V}_q^q$ , en contra de nuestras hipótesis. Luego  $2 \leq \Delta(H_q) \leq 3$ .



A continuación veamos que  $\Delta(H) = 4$ . Por una parte, dado que

$$\begin{aligned} 2e(H) &= 8q + 12k + 2a + 2 \\ &> 8q - 3k + \frac{9-a}{2} \\ &\geq 3 \left( \frac{16q + 9 - a}{6} - k \right) \\ &= 3v(H) \end{aligned}$$

es evidente que  $\Delta(H) \geq \frac{2e(H)}{v(H)} > 3$ . En consecuencia,  $\Delta(H) \geq 4$ .

Y por otra parte, supongamos, razonando por reducción al absurdo, que  $\Delta(H) \geq 5$ . Denotemos por  $s_4$  al número de vértices independientes con valencia mayor o igual que 4 en  $H$ , por  $r_3$  al número de vértices independientes con valencia 3 en  $H_{s_4}$  y por  $r_2$  al número de vértices independientes con valencia 2 en  $H_{s_4+r_3}$ . Obsérvese que

$$\begin{aligned} e(H_{s_4}) &= e(H) - \delta_{H_0}(v_1) - \sum_{i=2}^{s_4} \delta_{H_{i-1}}(v_i) \\ &\leq e(H) - 5 - 4(s_4 - 1) \\ &= e(H) - 4s_4 - 1. \end{aligned}$$

Sea entonces  $m \geq 0$  un entero tal que  $e(H) = e(H_{s_4}) + 4s_4 + 1 + m$ .

Al ser  $\Delta(H_{s_4}) \leq 3$ , podemos acotar el valor  $s_4$  de la siguiente manera

$$s_4 \geq \frac{2e(H) - 3v(H)}{5}$$

o equivalentemente

$$s_4 \geq \frac{1}{10} \left( 8q + 12k + 2a - 8s_4 - 2m - 3 \frac{16q + 9 - a}{6} + 3k + 3s_4 \right)$$

de lo que podemos obtener la siguiente cota

$$s_4 \geq \frac{1}{10} (30k + 5a - 4m - 9) \quad (4.9)$$

Como  $\Delta(H_{s_4+r_3}) \leq 2$ , aplicando (2.1), sabemos que

$$r_3 \geq \frac{e(H_{s_4}) - v(H_{s_4})}{2}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} r_3 &\geq \frac{1}{2} \left( 4q + 6k + a - 4s_4 - m - \left( \frac{16q + 9 - a}{6} - k - s_4 \right) \right) \\ &= \frac{1}{12} (8q + 42k + 7a - 18s_4 - 6m - 9) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por otra parte, al ser  $\Delta(H_{s_4+r_3+r_2}) \leq 1$  y haciendo de nuevo uso de (2.1), tenemos que

$$r_2 \geq \frac{2e(H_{s_4+r_3}) - v(H_{s_4+r_3})}{3}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} r_2 &\geq \frac{1}{3} \left( 8q + 12k + 2a - 8s_4 - 2m - \left( \frac{16q + 9 - a}{6} - k - s_4 - r_3 \right) \right) \\ &= \frac{1}{18} (32q + 78k + 13a - 42s_4 - 30r_3 - 12m - 9). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nótese que si  $\Delta(H_q) = 3$ , lo que implica que  $s_4 + r_3 > q$ , entonces  $\#_{vr}(H_q) \leq r'_3 + \#_{vr}(H_{s_4+r_3})$ , siendo  $r'_3$  el número de vértices independientes en  $H_q$  con grado 3. Puesto que  $r'_3 = s_4 + r_3 - q$  deducimos que

$$\#_{vr}(H_{s_4+r_3}) \geq \#_{vr}(H_q) + q - s_4 - r_3 \geq 2q + 1 - s_4 - r_3.$$

Vamos a comprobar que esta última desigualdad también es cierta cuando  $\Delta(H_q) = 2$ . Recordemos que en el *Capítulo 1* vimos que si  $F$  es un grafo con  $\Delta(F) \leq 2$  entonces  $\#_{vr}(F) = e(F) - f_2$ , siendo  $f_2$  el número de vértices independientes en  $F$  con valencia 2. Por tanto, como  $\Delta(H_{s_4+r_3}) \leq 2$ , sabemos que

$$\#_{vr}(H_{s_4+r_3}) = e(H_{s_4+r_3}) - r_2.$$

Como  $\Delta(H_q) = 2$ , lo cual implica  $s_4 + r_3 \leq q$ , entonces

$$\#_{vr}(H_q) = e(H_q) - r'_2,$$

siendo  $r'_2$  el número de vértices independientes en  $H_q$  con grado 2. Puesto que  $r'_2 = s_4 + r_3 + r_2 - q$  deducimos que

$$e(H_q) = \#_{vr}(H_q) + s_4 + r_3 + r_2 - q.$$

Por todo esto, se tiene

$$\begin{aligned} \#_{vr}(H_{s_4+r_3}) &= e(H_{s_4+r_3}) - r_2 \\ &= e(H_q) + 2(q - s_4 - r_3) - r_2 \\ &= \#_{vr}(H_q) + s_4 + r_3 + r_2 - q + 2(q - s_4 - r_3) - r_2 \\ &= \#_{vr}(H_q) + q - s_4 - r_3 \\ &\geq 2q + 1 - s_4 - r_3. \end{aligned}$$

De manera que, independientemente de la valencia máxima de  $H_q$ , se verifica

$$\#_{vr}(H_{s_4+r_3}) \geq 2q + 1 - s_4 - r_3.$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} e(H) &= 1 + 4s_4 + m + 3r_3 + e(H_{s_4+r_3}) \\ &= 1 + 4s_4 + m + 3r_3 + r_2 + \#_{vr}(H_{s_4+r_3}) \\ &\geq 1 + 4s_4 + m + 3r_3 + r_2 + 2q + 1 - s_4 - r_3 \\ &= 2q + 3s_4 + 2r_3 + r_2 + m + 2, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la cota (4.11)

$$\begin{aligned} e(H) &\geq 2q + 3s_4 + 2r_3 + \frac{1}{18} (32q + 78k + 13a - 42s_4 - 30r_3 - 12m - 9) + m + 2 \\ &= \frac{1}{18} (68q + 78k + 13a + 12s_4 + 6r_3 + 6m + 27), \end{aligned}$$

si ahora acotamos  $r_3$  por (4.10)

$$\begin{aligned} e(H) &\geq \frac{1}{18} \left( 68q + 78k + 13a + 12s_4 + \frac{8q + 42k + 7a - 18s_4 - 6m - 9}{2} + 6m + 27 \right) \\ &= \frac{1}{12} (48q + 66k + 11a + 2s_4 + 2m + 15), \end{aligned}$$

y por último, aplicando la acotación (4.9)

$$\begin{aligned} e(H) &\geq \frac{1}{12} \left( 48q + 66k + 11a + \frac{1}{5} (30k + 5a - 4m - 9) + 2m + 15 \right) \\ &= 4q + 6k + a + \frac{m + 11}{10}, \end{aligned}$$

pero como  $m \geq 0$  y  $e(H)$  es entero, esto implica que

$$e(H) \geq 4q + 6k + a + 2 = e(H) + 1$$

lo que nos lleva a una contradicción.

Como acabamos de ver,  $\Delta(H) = 4$  y sabemos que  $2 \leq \Delta(H_q) \leq 3$ . A continuación vamos a probar que el grafo  $H$  consiste en una unión disjunta de copias de los grafos completos  $K_5$  y  $K_4$ .

Denotemos por  $n_i$  al número de vértices de  $H$  con valencia  $i$ , con  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Así, es posible establecer las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} v(H) &= n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \\ 2e(H) &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 \end{aligned}$$

Combinando ambas expresiones se obtiene fácilmente que

$$2e(H) - 3v(H) = -3n_0 - 2n_1 - n_2 + n_4 \leq n_4$$

de donde se tiene que

$$n_4 \geq 8q + 12k + 2a + 2 - 3 \left( \frac{16q + 9 - a}{6} - k \right) = 15k + \frac{5a - 5}{2}.$$

Como acabamos de comprobar,  $H$  contiene al menos  $15k + \frac{5a-5}{2}$  vértices de valencia 4. Aplicando el *Lema 1.3.3*, llegamos a la conclusión de que, al menos

$$\left\lfloor \frac{15k + \frac{5a-5}{2} + 4}{5} \right\rfloor = \left\lfloor 3k + \frac{a-1}{2} + \frac{4}{5} \right\rfloor = 3k + \frac{a-1}{2}$$



de ellos son independientes.

Lo que haremos a continuación es verificar que éste es exactamente el número,  $r_4$ , de vértices independientes en  $H$  con valencia 4. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que

$$r_4 \geq 3k + \frac{a-1}{2} + 1 = 3k + \frac{a+1}{2}.$$

Obsérvese que en (4.9) habíamos acotado el valor  $s_4$  suponiendo que  $e(H) = e(H_{s_4}) + 4s_4 + 1 + m$ . Ahora bien, como ya hemos probado que  $\Delta(H) = 4$ , entonces  $s_4 = r_4$  y el exceso,  $1 + m$ , de aristas debido a la existencia de posibles vértices con valencia mayor o igual que 5 es en realidad 0, con lo cual todas las acotaciones anteriores (4.9), (4.10) y (4.11) son válidas, sustituyendo  $1 + m$  por 0.

Por otro lado, vimos que  $\#_{vr}(H_{r_4+r_3}) \geq 2q + 1 - r_4 - r_3$ , independientemente del valor de  $\Delta(H)$  y de  $\Delta(H_q)$ . Pero al ser  $\Delta(H_{r_4+r_3+r_2}) \leq 1$  sabemos que  $\#_{vr}(H_{r_4+r_3+r_2}) = e(H_{r_4+r_3+r_2})$ , y por ser  $\#_{vr}(H_{r_4+r_3+r_2}) = \#_{vr}(H_{r_4+r_3}) - r_2$  se tiene

$$e(H_{r_4+r_3+r_2}) \geq 2q + 1 - r_4 - r_3 - r_2.$$

Luego, agrupando todo esto, tenemos

$$\begin{aligned} e(H) &= 4r_4 + 3r_3 + 2r_2 + e(H_{r_4+r_3+r_2}) \\ &\geq 4r_4 + m + 3r_3 + 2r_2 + 2q + 1 - r_4 - r_3 - r_2 \\ &= 2q + 1 + 3r_4 + 2r_3 + r_2. \end{aligned}$$

Considerando la cota (4.11), sustituyendo  $1 + m$  por 0, se tiene

$$e(H) \geq \frac{1}{18} (68q + 78k + 13a + 12r_4 + 6r_3 + 21)$$

y haciendo lo propio con (4.10), obtenemos

$$e(H) \geq \frac{1}{12} (48q + 66k + 11a + 2r_4 + 13).$$

Por último, aplicando (4.9) de la misma manera concluimos que

$$e(H) \geq 4q + 6k + a + \frac{7}{6},$$

lo cual implica, al ser  $e(H)$  un entero, que

$$e(H) \geq 4q + 6k + a + 2 = e(H) + 1,$$

que es absurdo.

Por consiguiente, queda probado que el número de vértices independientes en  $H$  con grado 4 es exactamente

$$r_4 = 3k + \frac{a-1}{2}.$$

Aplicando el *Lema 1.3.4* sabemos que  $H$  está formado por  $3k + \frac{a-1}{2}$  copias disjuntas de  $K_5$  y un grafo  $H^*$  disjunto con éstas y con valencia máxima 3.

Para finalizar la prueba basta probar que  $H^*$  está formado por

$$\frac{2q - 2a + 3}{3} - 4k$$

copias disjuntas del grafo completo  $K_4$ .

Para ello, recordemos las relaciones existentes entre los valores  $n_i$  que definimos con anterioridad:

$$\begin{cases} n_4 + n_3 + n_2 + n_1 + n_0 = \frac{16q - a + 9}{6} - k \\ 4n_4 + 3n_3 + 2n_2 + n_1 = 2(4q + 6k + a + 1). \end{cases}$$

Ahora bien, como

$$n_4 = 5 \left( 3k + \frac{a-1}{2} \right) = 15k + \frac{5}{2}(a-1),$$

las citadas expresiones conducen a estas otras

$$\begin{cases} n_3 + n_2 + n_1 + n_0 = \frac{8q - 8a + 12}{3} - 16k \\ 3n_3 + 2n_2 + n_1 = 8q - 48k - 8a + 12. \end{cases}$$





Combinando ambas expresiones y sabiendo que los valores  $n_i$  son enteros positivos, se tiene que

$$n_0 = n_1 = n_2 = 0 \text{ y } n_3 = \frac{8q - 8a + 12}{3} - 16k.$$

En consecuencia, el grafo  $H^*$  tiene todos sus vértices de valencia 3. Así que aplicando el *Lema 1.3.3*, deducimos que, al menos,

$$\left\lfloor \frac{\frac{8q - 8a + 12}{3} - 16k + 3}{4} \right\rfloor$$

de ellos son independientes.

Ahora bien,

$$\left\lfloor \frac{\frac{8q - 8a + 12}{3} - 16k + 3}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8q - 8a - 48k + 21}{12} \right\rfloor = \frac{2q - 2a + 3}{3} - 4k.$$

Entonces, sabemos que en  $H^*$  tenemos, al menos,  $\frac{2q-2a+3}{3} - 4k$  vértices independientes de valencia 3.

De hecho, vamos a probar que no existen más vértices independientes de valencia 3 en el grafo  $H^*$ . Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que  $H^*$  tiene  $\frac{2q-2a+3}{3} - 4k + m$  vértices independientes siendo  $m \geq 1$ . Como  $r_4 = 3k + \frac{a-1}{2}$  y  $H$  es la unión disjunta de  $r_4$  copias de  $K_5$  y  $H^*$ , entonces el grafo  $H_{r_4}$  será la unión disjunta de  $r_4$  copias de  $K_4$  y  $H^*$ . Esto significa que si denotamos por  $r_3$  al número de vértices independientes de valencia 3 en  $H_{r_4}$ , entonces

$$r_3 = 3k + \frac{a-1}{2} + \frac{2q+3-2a}{3} - 4k + 1 = \frac{4q+9-a}{6} - k.$$

Distinguiamos dos casos posibles, de acuerdo con la valencia máxima de  $H_q$ .

- *Caso 1.* Supongamos que  $\Delta(H_q) = 2$ . Denotemos por  $r_2$  al número de vértices independientes con valencia 2 en  $H_q$ .

Aplicando la relación (2.1), podemos acotar el valor de  $r_2$  como sigue:

$$\begin{aligned} r_2 &\geq \frac{2e(H_q) - v(H_q)}{3} \\ &\geq \frac{1}{3} \left( q - k + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$e(H_q) = \#_{vr}(H_q) + r_2 \geq q + 1 + r_2$$

y por ello,

$$e(H_{q+r_2}) = e(H_q) - 2r_2 \geq q + 1 - r_2.$$

De esto podemos concluir que

$$\begin{aligned} e(H) &\geq 2q + \frac{4q + 9 - a}{6} - k + 6k + a - 1 + 2r_2 + q + 1 - r_2 \\ &\geq \frac{11}{3}q + 5k + \frac{5}{6}a + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}q - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}a - \frac{1}{3} \\ &= 4q + 6k + a + 1 + \left( \frac{q}{3} - \frac{5}{3}k + \frac{a+1}{6} \right) \\ &> e(H) \end{aligned}$$

por lo que esta situación no es posible.

- *Caso 2.* Supongamos que  $\Delta(H_q) = 3$ . Al igual que antes, denotemos por  $r_2$  al número de vértices independientes con valencia 2 en  $H_q$ .

En este caso, el número de vértices independientes de valencia 3 en  $H_{r_4}$  es mayor que  $q$  y por tanto,

$$3k + \frac{a-1}{2} + \frac{4q+9-a}{6} - k \geq q + 1,$$

de manera que tenemos que

$$q \leq 6k + a.$$

Pero como sabemos que  $6k + a \leq q$ , entonces este caso sólo es posible si  $q = 6k + a$ .

Si sustituimos la relación que acabamos de obtener en todos los datos de los que disponemos hasta el momento, resulta que nos encontramos en la siguiente situación. Tendríamos  $r_4 = \frac{q-1}{2}$  vértices independientes con valencia 4 en  $H$ ,  $r_3 = \frac{q+3}{2}$  vértices independientes con valencia 3 en  $H_{r_4}$ ,  $r_2$  vértices independientes con valencia 2 en  $H_q$  y, por hipótesis,  $e(H) = 5q + 1$ .

Ahora bien, como  $\Delta(H_{q+1+r_2}) \leq 1$ , se cumple que

$$2(5q + 1 - 2q + 2 - \frac{3}{2}q - \frac{9}{2} - 2r_2) \leq \frac{16q + 9 - a}{6} - k - q - 1 - r_2,$$

de donde se deduce que

$$3q - 7 \leq 6r_2 \implies r_2 \geq \frac{1}{6}(3q - 7).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} e(H) &\geq 2q - 2 + \frac{3}{2}q + \frac{9}{2} + 2r_2 + e(H_{q+1+r_2}) \\ &\geq \frac{7}{2}q + \frac{5}{2} + q + \frac{q}{2} - \frac{7}{6} \\ &= 5q + \frac{4}{3} \\ &> e(H), \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

En consecuencia, hemos verificado que  $H^*$  tiene

$$\frac{8q - 8a + 12}{3} - 16k = 4 \left( \frac{2q - 2a + 3}{3} - 4k \right)$$

vértices de valencia 3, de los cuales exactamente

$$\frac{2q - 2a + 3}{3} - 4k$$

son independientes.

Haciendo ahora uso del *Lema 1.3.4* deducimos que  $H^*$  está compuesto por la unión disjunta de  $\frac{2q - 2a + 3}{3} - 4k$  copias de  $K_4$ .

En resumen, hemos demostrado que  $H$  está formado por la unión disjunta de

$$3k + \frac{a - 1}{2}$$

copias de  $K_5$  y

$$\frac{2q - 2q + 3}{3} - 4k$$

copias del grafo completo  $K_4$ . Por tanto,  $H$  es el complementario de un grafo de Turán  $T_r(n)$  siendo

$$\begin{aligned} r &= \left(3k + \frac{a - 1}{2}\right) + \left(\frac{2q - 2q + 3}{3} - 4k\right) = \frac{4q + 3 - a}{6} - k \\ &= \left(\frac{16q + 9 - a}{6} - k\right) - 2q - 1 \\ &= n - 2q - 1 \\ &= 2p - n - 1. \end{aligned}$$

Es decir,  $G$  es el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ .

Y con esto queda demostrado el teorema.

⊗

### 4.3 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos completado el estudio del Problema de Turán con contracción de aristas que comenzamos en el capítulo anterior, en el que obtuvimos el valor exacto de la función extremal  $ex(n; MK_p)$ , demostrando que la correspondiente familia extremal de grafos,  $EX(n; MK_p)$ , se reduce únicamente al grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ , excepción hecha del caso  $n = p + 1$ . En este último caso, aparecen otros dos grafos extremales que han sido asimismo caracterizados.



Para llevar a cabo esta tarea hemos actuado del mismo modo que en el capítulo anterior para calcular el valor exacto de la función extremal. Hemos dividido el sector infinito del plano  $(n, p)$  determinado por la expresión (4.3) en distintos sectores más pequeños (ver *Figura 4.5*).

Hemos abordado esta caracterización de los grafos extremales estudiando aquellos casos para los que los parámetros  $n$  y  $p$  están relacionados por las desigualdades

$$\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n,$$

ya que en estos casos, como hemos demostrado, podemos hacer uso de los últimos avances conocidos para el Problema Topológico de Turán para alcanzar resultados en el problema extremal que nos ocupa.

Para el resto de los casos, hemos demostrado que el único grafo extremal es el grafo de Turán  $T_{2p-n-1}(n)$ .

Aunque ciertamente queda un amplio sector de valores  $(n, p)$  para los cuales el problema de obtener explícitamente los grafos extremales es aún un problema abierto, no es menos cierto que la aportación a la caracterización de dicha familia que hemos realizado en este trabajo es importante. Recordemos que

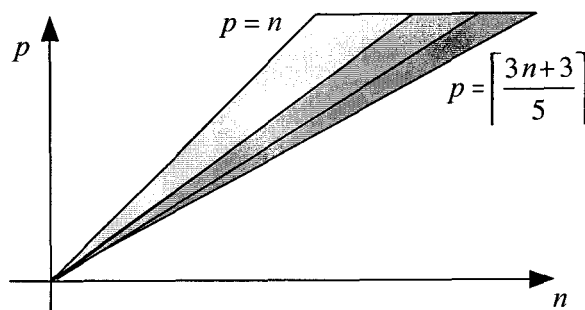


Figura 4.5: Pares  $(n, p)$  para los que hemos determinado  $EX(n; MK_p)$ .

aunque para el caso general, A. Thomason [45] y J.S. Myers [40] han probado que los grafos casi-aleatorios son, esencialmente, los únicos grafos extremales, el problema planteado por W. Mader [36] de describir ejemplos concretos de grafos extremales sigue siendo muy interesante.

Por otra parte, teniendo en cuenta que A. Thomason [45] ha aportado el valor de la función extremal, desde un punto de vista asintótico, podemos plantearnos como primer problema abierto el encontrar una expresión explícita del valor exacto de dicha función para el resto de pares  $(n, p)$  no incluidos en los sectores que hemos descrito anteriormente.

Asimismo, podemos plantearnos como problema abierto la búsqueda de soluciones para otros problema de Turán. Concretamente, en esta línea de trabajo nos podemos preguntar por las extensiones del Problema de Turán a grafos bipartitos.

Además nos podemos plantear, como otro problema abierto, el determinar los grafos extremales en otras extensiones del problema de Turán. En este sentido, son particularmente interesantes los problemas de Turán en grafos bipartitos.

# Capítulo 5

## El problema de Zarankiewicz

En este capítulo estudiamos otro conocido problema extremal denominado Problema de Zarankiewicz. Éste, en su versión en términos de Teoría de Grafos, consiste en el estudio del máximo número de aristas,  $z(m, n; s, t)$ , de un grafo bipartito  $G = (X, Y)$  con clases de vértices  $X$  e  $Y$ , siendo  $|X| = m$  y  $|Y| = n$ , sin contener un subgrafo bipartito completo  $K_{(s,t)}$  con  $s$  vértices contenidos en la clase  $X$  y  $t$  vértices en la clase  $Y$ . Aportamos nuevos valores exactos para la función extremal  $z(m, n; s, t)$  y caracterizamos la familia de grafos extremales correspondiente  $Z(m, n; s, t)$ .

### 5.1 Introducción

Este problema extremal fue enunciado originalmente en términos matriciales. En su planteamiento inicial, se trataba de determinar el mayor número de unos, denotado  $z(m, n; s, t)$ , que se pueden colocar en una matriz binaria (es decir, cuyos elementos son 0 ó 1) de dimensión  $m \times n$  sin que ésta contenga una submatriz con  $s$  filas y  $t$  columnas cuyos elementos son todos iguales a uno. En el año 1951

K. Zarankiewicz [48] propone este problema para los casos particulares  $s = t = 3$  y  $m = n = 4, 5, 6$ . En ese mismo año, S. Sierpinski [42] obtiene la respuesta a la cuestión planteada y en los años siguientes diversos autores aportan valores numéricos de la función  $z(n; 3)$  para  $n \geq 7$ . En este sentido, se pueden destacar las aportaciones de: W. Brzezinski (ver [43]), K. Culik [9], R. Guy [22, 23, 24] y R. Guy y S. Znám [25]. El problema general de determinar el valor exacto de la función  $z(m, n; s, t)$  y caracterizar la correspondiente familia de grafos extremales pasó a ser conocido como *Problema de Zarankiewicz*.

Dado que la matriz de adyacencia de cualquier grafo es una matriz de ceros y unos, es evidente que este mismo problema se puede abordar desde el punto de vista de la Teoría de Grafos. En este sentido, la función extremal  $z(m, n; s, t)$  representa el máximo número de aristas de un grafo bipartito con clases de vértices  $X$  e  $Y$ , siendo  $|X| = m$  y  $|Y| = n$ , sin contener ningún subgrafo bipartito completo  $K_{s,t}$  de manera que los  $s$  vértices estén incluidos en la clase  $X$  y los  $t$  vértices en la clase  $Y$ . Cuando  $m = n$  y  $s = t$  denotaremos a la función extremal simplemente por  $z(n; t)$ .

En adelante,  $G = G(m, n) = (X, Y)$  representa a un grafo bipartito cuyas clases  $X, Y$  tienen cardinal  $m$  y  $n$ , respectivamente. Diremos que un grafo bipartito  $G = G(X, Y)$  contiene a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo si existe un subconjunto  $S$  de  $s$  vértices en  $X$  y otro subconjunto  $T$  de  $t$  vértices en  $Y$  tales que el subgrafo inducido por estos conjuntos de vértices en  $G$ ,  $G[S \cup T]$ , es un grafo bipartito completo  $K_{s,t}$ . Asimismo, denotaremos por  $Z(m, n; s, t)$  a la familia de grafos extremales para este problema, es decir, la formada por aquellos grafos bipartitos  $(X, Y)$  libres de  $K_{(s,t)}$ , con  $m$  vértices en  $X$  y  $n$  vértices en  $Y$  y cuyo número de aristas coincide con el valor extremal  $z(m, n; s, t)$ .

El problema de Zarankiewicz está relacionado con otro conocido problema extremal denominado *Problema de Turán para grafos bipartitos*, en el



que se plantea el cálculo del máximo número de aristas posible, denotado por  $ex(m, n; K_{s,t})$ , de un grafo bipartito  $G = (X, Y)$ , siendo  $|X| = m$  y  $|Y| = n$ , de manera que  $G$  no contenga como subgrafo ni al bipartito completo  $K_{(s,t)}$  ni a  $K_{(t,s)}$ . Cuando esto último ocurre decimos simplemente que  $K_{s,t} \not\subseteq G$ . La familia de grafos extremales correspondiente se denota por  $EX(m, n; K_{s,t})$ . Es evidente que para cualesquiera valores de los parámetros se verifica siempre la siguiente relación

$$ex(m, n; K_{s,t}) \leq \min\{z(m, n; s, t), z(m, n; t, s)\}.$$

En el Problema de Zarankiewicz, como en otros muchos problemas extremales, la mayoría de los autores han abordado el estudio de la función extremal desde un punto de vista asintótico, es decir, fijando los valores de  $s$  y de  $t$ , y evaluando el comportamiento de la función  $z(m, n; s, t)$  cuando  $m$  y  $n$  tienden a infinito (ver [15, 17, 18]).

No obstante, también encontramos aportaciones en lo referente al cálculo de valores exactos de la función extremal. Destacamos el trabajo de K. Culik [9] en donde, fijados  $s$ ,  $t$  y  $m$  naturales, se obtiene que

$$z(m, n; s, t) = (s-1)n + (t-1)\binom{m}{s}, \quad \text{para todo } n \geq (t-1)\binom{m}{s}. \quad (5.1)$$

En [3] se prueba que la cota superior  $z(n; 2) \leq (n + n\sqrt{4n-3})/2$ , válida para cualquier entero  $n \geq 2$ , es óptima cuando  $n = q^2 + q + 1$  siendo  $q$  la potencia de un número primo. W. Goddard, M.A. Henning y O.R. Oellermann [19] deducen el valor exacto de la función  $z(n; 2)$  para valores  $n \leq 10$ , gracias a la vinculación que establecen entre este problema y los números de Ramsey bipartitos.

Por otro lado, estudiando el problema desde el punto de vista matricial, J. Griggs y otros [20, 21] analizan el llamado “caso mitad-mitad”, es decir, estudian el valor de la función extremal  $z(2m, 2n; m, n)$  así como las matrices ex-

tremales correspondientes. De este modo, para  $m \leq n$ , obtienen las siguientes acotaciones

$$4mn - (2n + 2m - \text{mcd}(m, n) + 1) \leq z(2m, 2n; m, n) \leq 4mn - (2n + m + 1)$$

donde  $\text{mcd}(m, n)$  denota al máximo común divisor de  $m$  y  $n$ .

Es más, los autores demuestran que tomando  $n = km + r$ , siendo  $0 \leq r < m$  el resto de la división euclídea de  $n$  entre  $m$ , si  $r = 0$  o bien si  $m \leq k + r$ , se tiene que

$$z(2m, 2n; m, n) = 4mn - (2n + m + 1).$$

Nuestro propósito en este capítulo es aportar valores exactos de la función  $z(m, n; s, t)$  para infinitos parámetros  $m, n, s, t$  relacionados entre sí, y caracterizar la correspondiente familia de grafos extremales  $Z(m, n; s, t)$ . Para ello, inicialmente, obtendremos una cota superior de la función extremal  $z(m, n; s, t)$  que aún siendo peor desde un punto de vista asintótico que las ya conocidas, nos conducirá a la solución exacta del problema en una región infinita del espacio de los parámetros  $m, n, s$  y  $t$ . Asimismo, veremos que ciertos sectores la solución del Problema de Turán para grafos bipartitos coincide con la del Problema de Zarankiewicz.

## 5.2 Cota superior de la función $z(m, n; s, t)$

En esta sección nos planteamos buscar una cota superior de la función de Zarankiewicz que nos conduzca a valores exactos bajo determinadas hipótesis sobre los parámetros  $m, n, s$  y  $t$ .

**Teorema 5.2.1** *Sean  $m, n, s, t$  enteros positivos tales que  $2 \leq s \leq m$  y  $2 \leq t \leq n$ .*

Entonces

$$z(m, n; s, t) \leq mn - (\alpha + m + n - s - t + 1), \quad (5.2)$$

siendo  $\alpha = \max \left\{ \lfloor (n-t)/s \rfloor (m-s), \lfloor (m-s)/t \rfloor (n-t) \right\}$ .

*Demostración:*

Sea  $G = (X, Y)$  un grafo extremal perteneciente a la familia  $Z(m, n; s, t)$  y denotemos por  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  e  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  a sus clases de vértices. En primer lugar, podemos suponer ordenados los vértices de  $V(G)$  de manera que  $d_G(x_i) \geq d_G(x_{i+1})$ , para  $i = 1, \dots, m-1$  y  $d_G(y_j) \geq d_G(y_{j+1})$ , para  $j = 1, \dots, n-1$ . Consideremos los subconjuntos  $S = \{x_1, \dots, x_s\} \subseteq X$  y  $T = \{y_1, \dots, y_t\} \subseteq Y$ .

Evidentemente, como  $G$  no contiene a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo, entonces tampoco puede contenerlo el subgrafo inducido por los vértices de  $S \cup Y$ . Ahora bien, como  $K_{(s,t)} \not\subseteq G[S \cup Y]$  y este subgrafo inducido tiene  $s$  vértices en su primera clase, aplicando la fórmula de Culik para el valor exacto de la función  $z(s, n; s, t)$  tenemos que

$$e(G[S \cup Y]) \leq z(s, n; s, t) = (s-1)n + t - 1.$$

Nótese que si  $d_G(x_s) \geq n - \lfloor (n-t)/s \rfloor$ , teniendo en cuenta la ordenación de los vértices de  $X$ , deducimos que  $d_G(x_i) \geq n - \lfloor (n-t)/s \rfloor$  para todo  $i = 1, \dots, s$ , y por tanto

$$e(G[S \cup Y]) \geq s \left( n - \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor \right) \geq (s-1)n + t,$$

lo cual es absurdo.

En consecuencia, sabemos que  $d_G(x_s) \leq n - \lfloor (n-t)/s \rfloor - 1$  y debido al orden que hemos establecido en las clases de vértices, esto implica que  $d_G(x_i) \leq n - \lfloor (n-t)/s \rfloor - 1$  para todo  $i = s+1, \dots, m$ .



Agrupando todo lo anterior, y recordando que  $e(G) = z(m, n; s, t)$ , deducimos que

$$\begin{aligned} z(m, n; s, t) &= e(G[S \cup Y]) + e(G[(X \setminus S) \cup Y]) \\ &\leq sn - n + t - 1 + (m - s)(n - \lfloor (n - t)/s \rfloor - 1) \\ &= mn - \left( \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor (m - s) + m + n - s - t + 1 \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Podemos repetir exactamente el mismo razonamiento que acabamos de aplicar al subgrafo inducido por los vértices de  $S \cup Y$  a aquel inducido por el subconjunto de vértices  $X \cup T$ . Con ello deduciríamos que

$$z(m, n; s, t) \leq mn - \left( \left\lfloor \frac{m-s}{t} \right\rfloor (n - t) + m + n - s - t + 1 \right). \quad (5.4)$$

De las expresiones (5.3) y (5.4), si denotamos por

$$\alpha = \max \left\{ \lfloor (n - t)/s \rfloor (m - s), \lfloor (m - s)/t \rfloor (n - t) \right\},$$

deducimos que

$$z(m, n; s, t) \leq mn - (\alpha + m + n - s - t + 1),$$

y esto concluye la demostración del teorema.

⊗

Es fácil comprobar que si  $s$  divide a  $t$  entonces la cota (5.2) coincide con el valor exacto de la función  $z(2s, 2t; s, t)$  que J. Griggs y otros [21, 20] obtuvieron para el caso “mitad-mitad” del problema de Zarankiewicz. Sin embargo, no ocurre lo mismo cuando  $s$  no divide a  $t$ . Si suponemos  $t = ks + r$  con  $0 < r < s$  entonces, por el *Teorema 5.2.1* tenemos que

$$z(2s, 2t; s, t) \leq 4st - (2t + s + 1 - r).$$

Pero del resultado de J. Griggs y otros, cuando  $s \leq k + r$ , se tiene que

$$z(2s, 2t; s, t) = 4st - (2t + s + 1) < 4st - (2t + s + 1 - r)$$

s	t	$z(2s, 2t; st)$	Cota Superior
2	3	15	16
2	5	27	28
3	5	46	48
2	7	39	40
3	7	66	67
4	7	93	96
3	8	76	78
2	9	51	52
5	9	156	160

Tabla 5.1: Valores de la función de Zarankiewicz en el caso mitad-mitad y de la cota superior.

por lo que la cota en este caso no es óptima. En la *Tabla 5.1* se muestran algunos valores exactos de la función  $z(2s, 2t; s, t)$  y el correspondiente valor de la cota superior.

No obstante, como veremos en la siguiente sección, esta cota nos permitirá obtener el valor exacto de la función de Zarankiewicz para una región infinita de valores de los parámetros  $m, n, s$  y  $t$  y, de paso, generalizar los resultados conocidos para el caso “mitad-mitad” cuando  $s$  divide a  $t$ .

### 5.3 Valor exacto y familia extremal

Nuestro objetivo en esta parte del capítulo va a ser demostrar que bajo determinadas hipótesis sobre los valores de los parámetros naturales  $m, n, s$  y  $t$  la cota superior obtenida en el *Teorema 5.2.1* coincide con el valor exacto de la función de Zarankiewicz. Una vez calculado el valor exacto de la función ex-



tremal  $z(m, n; s, t)$ , caracterizaremos los grafos de la correspondiente familia extremal  $Z(m, n; s, t)$ .

Recordemos que un conjunto de aristas  $M$  es un *emparejamiento* en  $G = (X, Y)$  si no existen dos de ellas incidentes con un mismo vértice de  $G$ ; es un  *$X$ -emparejamiento* si no existen dos de ellas incidentes con un mismo vértice de  $X$ ; y es un  *$Y$ -emparejamiento* si no existen dos de ellas incidentes con un mismo vértice de  $Y$ . Además, si  $M$  es un emparejamiento en un grafo bipartito  $G = (X, Y)$  entonces también es, a la vez, un  $X$ -emparejamiento y un  $Y$ -emparejamiento.

En la *Figura 5.1* vemos un ejemplo de un  $Y$ -emparejamiento de cardinal 6. El primer resultado que probaremos nos permitirá caracterizar los grafos extremales en los casos límite en los que  $m = s$  y/o  $n = t$ . Describiremos estos grafos extremales en función de determinados  $X$ -emparejamientos e  $Y$ -emparejamientos. Conviene indicar que para estos casos límite el valor exacto de la función extremal es conocido, aplicando por ejemplo la fórmula (5.1) aportada por Culik, y además coincide con la cota superior (5.2).

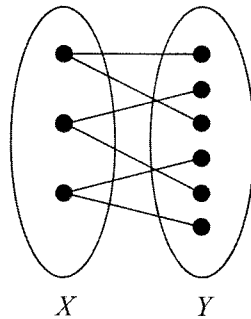


Figura 5.1: Un  $Y$ -emparejamiento de cardinal 6 en un grafo bipartito.

Al igual que hicimos en capítulos anteriores, dado un grafo extremal  $G = (X, Y)$  trabajaremos a menudo con el grafo cuyas aristas son precisamente

las que faltan en  $G$  para ser un completo. A dicho grafo lo denotaremos por  $G^c$  y lo llamaremos *complemento bipartito de  $G$* .

**Teorema 5.3.1** *Sean  $m, n, s$  y  $t$  enteros positivos tales que  $2 \leq s < m$  y  $2 \leq t < n$ . Entonces*

(i)  $Z(m, n; m, t) = \{K_{(m,n)} - M\}$ , donde  $M$  es cualquier  $Y$ -emparejamiento en  $K_{(m,n)}$  de cardinal  $n - t + 1$ .

(ii)  $Z(m, n; s, n) = \{K_{(m,n)} - M\}$ , donde  $M$  es cualquier  $X$ -emparejamiento en  $K_{(m,n)}$  de cardinal  $m - s + 1$ .

*Demostración:*

Aplicando la fórmula de Culik (5.1) tenemos que:

$$\begin{cases} z(m, n; m, t) = mn - (n - t + 1), & y \\ z(m, n; s, n) = mn - (m - s + 1). \end{cases}$$

Por un lado, si  $G = (X, Y) = K_{(m,n)} - M$  es un grafo bipartito obtenido tras eliminar del bipartito completo  $K_{(m,n)}$  un  $Y$ -emparejamiento cualquiera  $M$  de cardinal  $n - t + 1$  entonces  $G$  no contiene a  $K_{(m,t)}$  como subgrafo. Esto es cierto pues el único subconjunto de cardinal  $m$  que podemos tomar en la clase  $X$  es ella misma, y si en  $G$  faltan las aristas de un  $Y$ -emparejamiento de cardinal  $n - t + 1$  eso quiere decir que existen  $n - t + 1$  vértices en la clase  $Y$  que no son adyacentes a algún vértice de  $X$ . Dicho de otro modo, el número de vértices de  $Y$  que son adyacentes a todos los de  $X$  es  $t - 1$  por lo que no es posible encontrar un subconjunto  $T \subseteq Y$  de cardinal  $t$  tal que  $G[X \cup T] = K_{(m,t)}$ .

Por otro lado, supongamos que  $G \in Z(m, n; m, t)$  es un grafo extremal cuyas clases de vértices son  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  e  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Evidentemente,

$e(G^c) = n - t + 1$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los vértices de  $G$  están ordenados en sus respectivas clases de tal modo que  $d_{G^c}(x_i) \leq d_{G^c}(x_{i+1})$ , para  $i = 1, \dots, m - 1$  y  $d_{G^c}(y_j) \leq d_{G^c}(y_{j+1})$ , para  $j = 1, \dots, n - 1$ .

Si  $d_{G^c}(y_n) \geq 2$  entonces  $d_{G^c}(y_t) = 0$  ya que en otro caso

$$e(G^c) \geq 2 + (n - 1 - t + 1) > n - t + 1 = e(G^c),$$

lo cual es absurdo. Pero si  $d_{G^c}(y_t) = 0$  entonces  $d_G(y_t) = m$  lo cual implica que  $d_G(y_i) = m$  para todo  $i = 1, \dots, t$  con lo que  $K_{(m,t)} \subseteq G$ , siendo de nuevo absurdo.

En consecuencia,  $d_{G^c}(y_n) \leq 1$ , y por tanto, teniendo en cuenta que los vértices están ordenados según su valencia creciente en  $G^c$  deducimos que  $d_{G^c}(y_i) \leq 1$ , para  $i = 1, \dots, n$ , es decir, el conjunto  $M = E(G^c)$  es un  $Y$ -emparejamiento. En conclusión,  $G = K_{(m,n)} - M$ , siendo  $M$  un  $Y$ -emparejamiento de cardinal  $n - t + 1$  en  $K_{(m,n)}$ .

El razonamiento para probar el item (ii) es análogo.

⊗

En la *Figura 5.2* se muestra uno de los  $Y$ -emparejamientos  $M$  en  $K_{(4,5)}$  tal que  $K_{(4,5)} - M$  es un grafo extremal de la familia  $Z(4, 5; 4, 3)$ .

En el resultado que vamos a probar a continuación estudiaremos los problemas extremales de Turán en bipartitos y de Zarankiewicz en el sector infinito de valores de los parámetros determinado por la relación

$$\max\{m, n\} \leq s + t - 1.$$

Probaremos que en este sector ambas funciones extremales alcanzan el mismo valor, en particular, veremos que coinciden con la cota superior (5.2), y además, veremos que los grafos extremales también son los mismos.



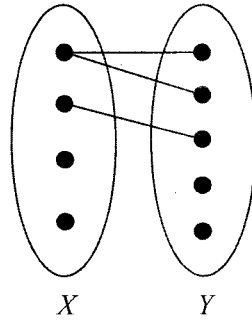


Figura 5.2: Un  $Y$ -emparejamiento en  $K_{(4,5)}$  que determina un grafo de  $Z(4, 5; 4, 3)$ .

**Teorema 5.3.2** Sean  $m, n, s$  y  $t$  enteros positivos tales que  $2 \leq s < m$ ,  $2 \leq t < n$  y  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$ . Entonces

$$\begin{cases} z(m, n; s, t) = z(m, n; t, s) = ex(m, n; K_{s,t}) = mn - (m + n - s - t + 1) \\ Z(m, n; s, t) = Z(m, n; t, s) = EX(m, n; K_{s,t}) = \{K_{(m,n)} - M\} \end{cases}$$

siendo  $M$  un emparejamiento en  $K_{(m,n)}$  de cardinal  $m + n - s - t + 1$ .

*Demostración:*

En primer lugar observemos que si  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  entonces

$$\left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) = \left\lfloor \frac{m-s}{t} \right\rfloor (n-t) = 0$$

y por tanto, teniendo en cuenta el *Teorema 5.2.1* sabemos que:

$$z(m, n; s, t) \leq mn - (m + n - s - t + 1).$$

Por otro lado, consideremos el grafo bipartito  $G = (X, Y) = K_{(m,n)} - M$  obtenido eliminando del bipartito completo  $K_{(m,n)}$  las aristas de un emparejamiento  $M$  de cardinal  $m + n - s - t + 1$ . Este grafo está bien definido ya



que al ser  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  se tiene que  $m + n - s - t + 1 \leq \min\{m, n\}$ , por lo que es posible eliminar un emparejamiento, del cardinal indicado, en  $K_{(m,n)}$ .

Consideremos el complemento bipartito  $G^c$  del grafo  $G$  cuyo número de aristas es, obviamente,  $m+n-s-t+1$ . La clase  $X$  contiene entonces  $m+n-s-t+1$  vértices de valencia 1 en  $G^c$  y  $s+t-1-n$  vértices de valencia 0 en  $G^c$ . Si tomamos ahora cualquier subconjunto  $S$  de cardinal  $s$  contenido en la clase  $X$  éste contendrá, al menos,  $s-(s+t-1-n) = n-t+1$  vértices de valencia 1 en  $G^c$ . Pero esto significa que existen  $n-t+1$  vértices en la clase  $Y$  que son adyacentes en  $G^c$  a, al menos, un vértice del conjunto  $S$ , o equivalentemente, que el número de vértices de la clase  $Y$  que son adyacentes en  $G$  a todos los vértices del conjunto  $S$  es, a lo sumo,  $t-1$ . Por tanto,  $G$  no contiene a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo, lo que implica que

$$z(m, n; s, t) \geq e(G) = mn - (m + n - s - t + 1).$$

Un razonamiento completamente análogo nos serviría para demostrar que este grafo también es libre de  $K_{(t,s)}$  como subgrafo.

En resumen, hemos demostrado que si  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  entonces

$$z(m, n; s, t) = mn - (m + n - s - t + 1).$$

Obsérvese que de la simetría de la relación  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  podemos deducir también que

$$z(m, n; t, s) = mn - (m + n - s - t + 1).$$

por lo que, al ser  $ex(m, n; K_{s,t}) = \min\{z(m, n; s, t), z(m, n; t, s)\}$ , las soluciones a los problemas de Zarankiewicz y Turán son iguales, en este sector, en cuanto al valor exacto de la función extremal.

Por último, vamos a caracterizar los grafos extremales. Para ello, sea  $G = (X, Y) \in Z(m, n; s, t)$  un grafo extremal. Sabemos que

$$e(G) = mn - (m + n - s - t + 1)$$

y podemos suponer, como hemos hecho en ocasiones anteriores, que los vértices de  $G$  están ordenados de manera que  $d_G(x_i) \geq d_G(x_{i+1})$ , para  $i = 1, \dots, m - 1$  y  $d_G(y_j) \geq d_G(y_{j+1})$ , para  $j = 1, \dots, n - 1$ . Denotemos por  $S = \{x_1, \dots, x_s\}$ . Teniendo en cuenta que

$$(i) \quad e(G) = mn - (m + n - s - t + 1)$$

(ii)  $G$  no contiene a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo

$$(iii) \quad \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) = \left\lfloor \frac{m-s}{t} \right\rfloor (n-t) = 0,$$

se deduce que todas las desigualdades en (5.3) se convierten en igualdades y  $d_G(x_m) = n - 1$ , lo que implica que  $d_G(x_i) \geq n - 1$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Por un razonamiento análogo aplicado al subconjunto  $T = \{y_1, \dots, y_t\}$  de la clase  $Y$  llegamos a que  $d_G(y_j) \geq m - 1$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

En consecuencia, reuniendo todo lo anterior, el complemento bipartito de  $G$  es tal que  $e(G^c) = m + n - s - t + 1$ ,  $d_{G^c}(x_i) \leq 1$  para todo  $i = 1, \dots, m$  y  $d_{G^c}(y_j) \leq 1$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Luego  $E(G^c)$  consiste en un conjunto de aristas independientes de cardinal  $m + n - s - t + 1$ , como queríamos demostrar.

De igual forma, por la simetría de la relación  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  y de los grafos que acabamos de caracterizar, se puede comprobar que  $Z(m, n; t, s) = Z(m, n; s, t)$  y por tanto, ya que como vimos anteriormente  $ex(m, n; K_{s,t}) = z(m, n; s, t) = z(m, n; t, s)$ , también la familia extremal para el Problema de Turán,  $EX(m, n; K_{s,t})$ , coincide con las dos anteriores. Con esto último completamos la prueba del teorema.





Evidentemente, el valor exacto que acabamos de aportar en el sector infinito de valores de  $m, n, s$  y  $t$  dado por  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  coincide con el obtenido por K. Culik [9] en las regiones comunes de los parámetros. Concretamente, si  $m = s$ , o bien si  $m = n = s + 1$  y  $t = 2$ , podemos comprobar que ambos resultados conducen al mismo valor exacto.

Sin embargo, con los resultados demostrados en los *Teoremas 5.3.1 y 5.3.2* el Problema de Zarankiewicz queda completamente resuelto cuando  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$ . Si añadimos a esta última desigualdad las condiciones  $s < m$  y  $t < n$  entonces también el Problema de Turán para grafos bipartitos queda totalmente cerrado.

A continuación pretendemos ampliar el sector infinito de valores de los parámetros para los cuales se ha determinado la solución del Problema de Zarankiewicz. Sin pérdida de generalidad, y teniendo en cuenta que para cualesquiera valores de los parámetros  $2 \leq s \leq m$  y  $2 \leq t \leq n$  se verifica que  $z(m, n; s, t) = z(n, m; t, s)$ , podemos suponer de ahora en adelante que  $m \leq n$ . Es conveniente hacer la siguiente observación: si  $m \leq n$  entonces la condición  $\max\{m, n\} \leq s + t - 1$  es equivalente a  $\lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor = 0$ . Es por ello que centraremos nuestra atención en el caso  $\lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor \geq 1$ , o lo que es lo mismo,  $2 \leq t \leq n - s$ .

Para conseguir nuestro objetivo vamos a introducir tres familias de grafos que tendrán gran vinculación con las soluciones del problema de Zarankiewicz.

Sean  $m, n, s$  y  $t$  enteros positivos tales que  $m \leq n$ ,  $2 \leq s \leq m$  y  $2 \leq t \leq n - s$ . Denotemos por  $H = H_1 \cup H_2 \subseteq K_{(m,n)}$  a un subgrafo de  $K_{(m,n)}$  siendo  $H_1$  y  $H_2$  subgrafos disjuntos. Definimos las siguientes familias de subgrafos de  $K_{(m,n)}$ :

(1)  $\mathcal{F}_1(m, n; s, t)$  es la familia de subgrafos  $H \subseteq K_{(m,n)}$  tales que:

- $s$  divide a  $n - t$ ;
- el subgrafo  $H_1$  consiste en  $s - 1$  copias disjuntas de  $K_{(1, \frac{n-t}{s})}$ ;
- el subgrafo  $H_2$  tiene girth, al menos,  $2(s + 1)$  (puede incluso ser infinito) y todo vértice de la  $m$ -clase tiene valencia  $(n - t)/s + 1$ .

(2)  $\mathcal{F}_2(m, n; s, t)$  es la familia de subgrafos  $H \subseteq K_{(m, n)}$  tales que:

- $3 \leq s \leq m$  y  $n - t = s \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor + r$  siendo  $0 \leq r \leq s - 3$ ;
- existe un entero  $k$ , con

$$2 \leq \left\lceil \frac{n - t + s^2 - r(s + 1)}{n - t + s - r} \right\rceil \leq k \leq s - r - 1,$$

tal que:

– el subgrafo  $H_1$  es la unión disjunta de  $K_{(1, d_i)}$ , donde

$$0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_{k-1} \leq \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor, y$$

$$d_1 + \dots + d_{k-1} = (k - 1) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) - s + r + 1;$$

– el subgrafo  $H_2$  es la unión disjunta de  $m - k + 1$  copias del grafo

$$K_{(1, \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor + 1)}.$$

(3)  $\mathcal{F}_3(m, n; s, t)$  es la familia de subgrafos  $H \subseteq K_{(m, n)}$  tales que:

- $n - t = s \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor + r$ , siendo  $0 < r < s$ ;
- el subgrafo  $H_1$  es la unión de  $s - r - 1$  copias disjuntas de  $K_{(1, \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor)}$ ;
- el subgrafo  $H_2$  es la unión de  $m - s + r + 1$  copias disjuntas de  $K_{(1, \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor + 1)}$ .

En la *Figura 5.3* se muestra un ejemplo de un subgrafo perteneciente a cada una de las familias que acabamos de describir. En cada ejemplo,  $H_1$  es el subgrafo inducido por el conjunto de vértices blancos.

Una primera observación que debemos tener presente es que las familias  $\mathcal{F}_1(m, n; s, t)$ ,  $\mathcal{F}_2(m, n; s, t)$  y  $\mathcal{F}_3(m, n; s, t)$  son mutuamente disjuntas. Además, conviene resaltar que si  $H \in \mathcal{F}_i(m, n; s, t)$  con  $i = 1, 2, 3$  entonces el número de aristas del subgrafo  $H$  es precisamente

$$\left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) + m + n - s - t + 1. \quad (5.5)$$

Es decir,  $K_{(m,n)} - E(H)$  es un grafo bipartito cuyo número de aristas coincide con la cota superior (5.2) obtenida para la función de Zarankiewicz.

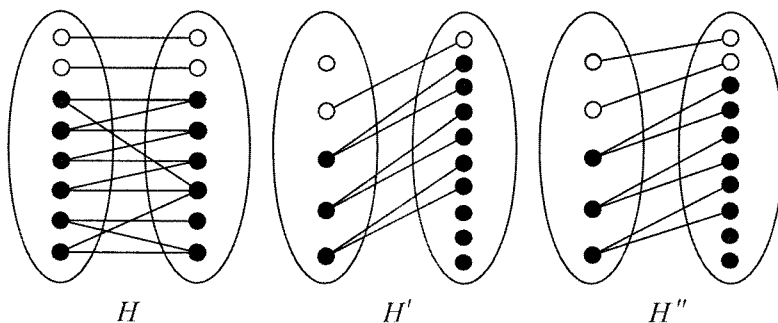


Figura 5.3:  $H \in \mathcal{F}_1(8, 8; 3, 5)$ ;  $H' \in \mathcal{F}_2(5, 10; 4, 6)$  ( $k = 3$ );  $H'' \in \mathcal{F}_3(5, 10; 4, 5)$ .

A continuación vamos a probar que, bajo determinadas restricciones sobre los valores de los parámetros, podemos afirmar que las familias que acabamos de describir son no vacías.

**Lema 5.3.3** *Si  $m, n, s, t$  son enteros positivos con  $2 \leq s \leq m$  y  $2 \leq t \leq n - s$  y tales que:*

$$(i) \quad (m-s) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t-1; \text{ o bien}$$

(ii)  $s$  divide a  $n - t$  y  $(m - s)n \leq mt$ , siendo  $m \geq 2s$  si  $(m - s)n = mt$ .

Entonces las familias  $\mathcal{F}_i(m, n; s, t)$  son no vacías.

*Demostración:*

Lo primero a tener en cuenta es que de cualquiera de las condiciones (i) y (ii) se desprende que  $m \leq n$ .

Primero supongamos que

$$(m - s) \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t - 1.$$

Si  $s$  divide a  $n - t$  entonces podemos considerar un grafo bipartito  $G = (X, Y) = K_{(m, n)} - E(H)$  con  $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_1(m, n; s, t)$ , siendo el girth de  $H_2$  infinito. Efectivamente los subgrafos  $H_1$  y  $H_2$  están bien definidos ya que el número de vértices diferentes de  $H_1 \cup H_2$  en la clase  $Y$  es, a lo sumo

$$(s - 1) \frac{n - t}{s} + (m - s + 1) \left( \frac{n - t}{s} + 1 \right) = (m - s) \left( \frac{n - t}{s} + 1 \right) + n - t + 1 \leq n.$$

En otro caso, es decir, si  $s$  no divide a  $n - t$ , entonces consideramos el grafo  $G = (X, Y) = K_{(m, n)} - E(H)$  con  $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_3(m, n; s, t)$  y razonamos de manera análoga.

Por otra parte, si suponemos que  $s$  divide a  $n - t$  y que  $(m - s)n \leq mt$  entonces, claramente, podemos también suponer que

$$t \leq (m - s) \left( \frac{n - t}{s} + 1 \right)$$

ya que en caso contrario nos encontraríamos en la situación que hemos estudiado previamente.

En resumen, nos restringimos a aquellos valores de los parámetros tales que

$$(m - s)n \leq mt \leq (m - s)(n + s).$$



En este caso podemos considerar el grafo bipartito  $G = (X, Y) = K_{(m,n)} - E(H)$ , con  $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_1(m, n; s, t)$ , siendo el subgrafo  $H_2$  construido de la siguiente manera:

- (1) Si  $(m - s)n < mt$ , lo cual es equivalente a  $m(n - t)/s < n$ , entonces  $H_2$  consiste en un caterpillar basado en un camino de longitud  $2(m - s + 1)$  con vértices finales en la clase  $Y$ , de tal modo que cada vértice de la clase  $X$ , interior a dicho camino, es incidente con  $(n - t)/s - 1$  aristas finales.

El grafo  $G$  está bien definido puesto que el número de vértices distintos de  $H_1 \cup H_2$  en la clase  $Y$  es, a lo sumo,

$$(s - 1) \frac{n - t}{s} + (m - s + 1) \frac{n - t}{s} + 1 = m \frac{n - t}{s} + 1 \leq n.$$

- (2) Si  $(m - s)n = mt$ , lo cual es equivalente a  $m(n - t)/s = n$ , y  $m \geq 2s$  entonces  $H_2$  consiste en un ciclo de longitud  $2(m - s + 1)$  cuyos vértices pertenecientes a la clase  $X$  son incidentes con  $(n - t)/s - 1$  aristas cada uno, formando todas estas aristas un  $Y$ -emparejamiento.

Obsérvese que la condición  $m - s + 1 \geq s + 1$  es necesaria puesto que el girth de  $H_2$  es, al menos,  $2(s + 1)$ , por lo que debe ocurrir que  $m \geq 2s$ . El grafo  $G$  está bien definido ya que el número de vértices distintos de  $H_1 \cup H_2$  en la clase  $Y$  es, a lo sumo,

$$(s - 1) \frac{n - t}{s} + (m - s + 1) \frac{n - t}{s} = m \frac{n - t}{s} = n.$$

Razonando de manera análoga a como lo hemos hecho en las líneas anteriores es fácil comprobar que la condición

$$(m - s) \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t - 1$$

es necesaria y suficiente para que también las familias  $\mathcal{F}_2(m, n; s, t)$  y  $\mathcal{F}_3(m, n; s, t)$  sean no vacías, lo que concluye la demostración de este lema.

⊗



Para probar que la cota superior es óptima y para caracterizar los grafos extremales haremos uso de la siguiente propiedad, que nos ayudará a determinar si un grafo bipartito contiene o no un subgrafo bipartito completo.

**Lema 5.3.4** Sean  $m, n, s, t$  enteros positivos tales que  $2 \leq s \leq m$  y  $2 \leq t \leq n$ . Sea  $G = (X, Y)$  un grafo bipartito con  $|X| = m$  y  $|Y| = n$ . Entonces,  $G$  es libre de  $K_{(s,t)}$  como subgrafo si y solo si  $|N_{G^c}(S)| \geq n - (t - 1)$  para todo  $S \subseteq X$  de cardinal  $s$ .

*Demostración:*

Si  $S \subseteq X$  es un subconjunto formado por  $s$  vértices de la clase  $X$  tal que  $|N_{G^c}(S)| \leq n - t$ , entonces existe un subconjunto  $T$  de la clase de vértices  $Y$ , con cardinal  $t$ , de manera que  $N_{G^c}(x) \cap T = \emptyset$  para cualquier  $x \in S$ . Entonces  $G[S \cup T] = K_{(s,t)}$ , y por tanto  $K_{(s,t)} \subseteq G$ .

Recíprocamente, si  $K_{(s,t)} \subseteq G$  entonces existen  $S \subseteq X$  de cardinal  $s$  y  $T \subseteq Y$  de cardinal  $t$  tales que no hay ninguna arista entre un vértice de  $S$  y un vértice de  $T$  en el complemento bipartito  $G^c$  de  $G$ . En consecuencia,  $|N_{G^c}(S)| \leq n - t$ , lo que concluye la prueba de este resultado.

⊗

En el siguiente lema probaremos que los grafos bipartitos  $G = (X, Y) = K_{(m,n)} - E(H)$  obtenidos tras eliminar del bipartito completo  $K_{(m,n)}$  las aristas de un subgrafo  $H \subseteq K_{(m,n)}$  perteneciente a una de las tres familias que hemos descrito en los párrafos anteriores, son libres del subgrafo bipartito completo  $K_{(s,t)}$ .

**Lema 5.3.5** Sean  $m, n, s$  y  $t$  enteros positivos tales que  $m \leq n$ ,  $2 \leq s \leq m$  y

$2 \leq t \leq n - s$ . Si  $H \in \mathcal{F}_i(m, n; s, t)$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$ , entonces  $K_{(m,n)} - E(H)$  no contiene a  $K_{(s,t)}$  como subgrafo.

*Demostración:*

Sea  $G = (X, Y) = K_{(m,n)} - E(H_1 \cup H_2)$ , siendo  $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_i(m, n; s, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Sea  $S$  cualquier subconjunto de  $X$  con cardinal  $s$ . Para cada  $i = 1, 2, 3$ , obsérvese que todo vértice de la clase  $X$  pertenece bien a  $V(H_1)$  o a  $V(H_2)$ , por tanto  $S$  estará formado por  $j$  vértices de  $V(H_1)$  y  $s - j$  vértices de  $V(H_2)$ , donde  $0 \leq j \leq s - 1$ .

En primer lugar, supongamos que  $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_1(m, n; s, t)$ , entonces  $|V(H_1) \cap X| = s - 1$  y  $|V(H_2) \cap X| = m - s + 1$ .

Denotemos por  $W \subseteq H_2$  el subgrafo del complemento bipartito  $G^c$  de  $G$  inducido por los  $s - j$  vértices de  $S \cap V(H_2)$  y sus vecinos. Teniendo en cuenta que el girth de  $H_2$  es, al menos,  $2(s + 1) \geq 6$  podemos deducir que  $W$  no contiene ciclos y  $|N_{G^c}(u) \cap N_{G^c}(u')| \leq 1$  para cada par de vértices distintos  $u, u' \in V(W)$ .

Puesto que el valencia en  $G^c$  de todo vértice  $x$  de  $V(H_2) \cap X$  es

$$d_{G^c}(x) = \frac{n - t}{s} + 1,$$

deducimos que  $|V(W) \cap Y| \geq (s - j)(n - t)/s + 1$ . Esto implica que

$$|N_{G^c}(S)| \geq j \frac{n - t}{s} + (s - j) \frac{n - t}{s} + 1 = n - (t - 1)$$

de donde se obtiene, aplicando el *Lema 5.3.4*, que  $K_{(s,t)} \not\subseteq G$ .

En segundo lugar supongamos que  $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_2(m, n; s, t)$ . Entonces  $|V(H_1) \cap X| = k - 1$  y  $|V(H_2) \cap X| = m - k + 1$ , para algún  $2 \leq k \leq s - r - 1$ , con lo que  $0 \leq j \leq k - 1$ . Denotemos por  $U$  al subgrafo de  $G^c$  inducido por los  $j$  vértices de  $S \cap V(H_1)$  y sus vecinos en  $G^c$ . Teniendo en cuenta que

$$|V(H_1) \cap Y| = d_1 + \dots + d_{k-1} = (k - 1) \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor + 1 \right) - s + r + 1$$

y que para todo  $x \in V(H_1)$ ,

$$d_{G^c}(x) \leq \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} |V(U) \cap Y| &= |V(H_1) \cap Y| - |(V(H_1) \setminus V(U)) \cap Y| \\ &\geq (k-1) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) - s + r + 1 - (k-1-j) \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor \\ &= k - s + r + j \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |N_{G^c}(S)| &\geq k - s + r + j \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + (s-j) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= n - t + k - j \\ &\geq n - t + 1, \end{aligned}$$

lo que implica que  $K_{(s,t)} \not\subseteq G$ , aplicando el *Lema 5.3.4*.

Finalmente, supongamos que  $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_3(m, n; s, t)$ , lo cual implica que  $0 \leq j \leq s - r - 1$  ya que  $|V(H_1) \cap X| = s - r - 1$  y  $|V(H_2) \cap X| = m - s + r + 1$ . En este caso,

$$|N_{G^c}(S)| \geq j \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + (s-j) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) = n - t - r + s - j \geq n - t + 1.$$

Haciendo uso, una vez más, del *Lema 5.3.4* podemos deducir que  $K_{(s,t)} \not\subseteq G$ . Esto completa la prueba de este resultado.

⊗

Si recordamos la observación (5.5), y tenemos presente el *Lema 5.3.5* que acabamos de probar, es evidente que en aquellas circunstancias en las que podamos garantizar que las familias anteriormente descritas son no vacías, seremos capaces de demostrar que la cota superior (5.2) es óptima, pues en ella se alcanzaría el valor exacto de la función extremal  $z(m, n; s, t)$ .



En ese sentido, vamos a demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 5.3.6** Sean  $m, n, s, t$  enteros positivos con  $2 \leq s \leq m$  y  $2 \leq t \leq n - s$  y tales que

$$(i) \quad (m - s) \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t - 1; \text{ o bien}$$

$$(ii) \quad s \text{ divide a } n - t \text{ y } (m - s)n \leq mt, \text{ siendo } m \geq 2s \text{ si } (m - s)n = mt.$$

Entonces

$$z(m, n; s, t) \geq mn - \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor (m - s) + m + n - s - t + 1 \right).$$

*Demostración:*

Es consecuencia inmediata de los *Lemas 5.3.3 y 5.3.5* y de la observación (5.5).

⊗

Con lo visto hasta este momento podemos enunciar un resultado en el que, bajo ciertas restricciones sobre los valores de los parámetros  $m, n, s$  y  $t$ , determinamos el valor exacto de la función extremal de Zarankiewicz.

**Teorema 5.3.7** Sean  $m, n, s, t$  enteros positivos tales que  $2 \leq s \leq m$  y  $2 \leq t \leq n - s$ . Si

$$(i) \quad (m - s) \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t - 1; \text{ o bien}$$

$$(ii) \quad s \text{ divide a } n - t \text{ y } (m - s)n \leq mt, \text{ siendo } m \geq 2s \text{ si } (m - s)n = mt,$$

entonces

$$z(m, n; s, t) = mn - \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) + m + n - s - t + 1 \right).$$

*Demostración:*

Veamos que bajo las hipótesis en las que nos encontramos, se cumple

$$\left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) \geq \left\lfloor \frac{m-s}{t} \right\rfloor (n-t). \quad (5.6)$$

En efecto, en primer lugar, si

$$(m-s) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t-1$$

entonces se tiene que

$$0 \leq (m-s) \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor \leq s+t-1-m,$$

lo que implica que  $m \leq s+t-1$ , y por tanto,

$$\left\lfloor \frac{m-s}{t} \right\rfloor (n-t) = 0$$

y la desigualdad (5.6) es evidente.

Por otra parte, si  $(m-s)n < mt$ , lo cual es equivalente a que  $m(n-t)/s < n$ , y además,  $s$  divide a  $n-t$  entonces  $m < n$ . En ese caso, ha de ser  $m \leq s+t-1$  ya que si fuera al contrario, entonces

$$0 \leq (m-s-t)n = (m-s)n - tn < (m-n)t,$$

pero esto último implica que  $m > n$ , lo cual es imposible. Por tanto, como  $m \leq s+t-1$ , tenemos que

$$\left\lfloor \frac{m-s}{t} \right\rfloor (n-t) = 0,$$

de donde deducimos (5.6).



Por último, si  $(m - s)n = mt$ , o lo que es equivalente  $m(n - t)/s = n$ , y además  $s$  divide a  $n - t$  y  $m \geq 2s$  entonces  $m \leq n$ . Si  $m \leq s + t - 1$  entonces, razonando como en el párrafo anterior, habríamos acabado. Y si  $m \geq s + t$  entonces  $tn \leq (m - s)n = mt$  y en consecuencia,  $s + t = n = m \geq 2s$ , lo que implica que  $t \geq s$ . En este caso tenemos que

$$\left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) = t \geq s = \left\lfloor \frac{m-s}{t} \right\rfloor (n-t),$$

con lo que quedaría probada la desigualdad (5.6).

Una vez comprobado que bajo las restricciones sobre los parámetros  $m, n, s$  y  $t$  que se imponen en las hipótesis del teorema, la desigualdad (5.6) es cierta, entonces, como consecuencia inmediata del *Teorema 5.2.1* y de la *Proposición 5.3.6* se tiene que

$$z(m, n; s, t) = mn - \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) + m + n - s - t + 1 \right),$$

lo que completa la prueba de este teorema.

⊗

Una vez que hemos obtenido el valor exacto de la función  $z(m, n; s, t)$  para los conjuntos de valores de los parámetros descritos en las hipótesis del *Teorema 5.3.7* vamos a abordar la tarea de caracterizar los grafos extremales. Nuestro objetivo es comprobar que los únicos grafos extremales, en los sectores de valores de  $m, n, s$  y  $t$  que hemos mencionado antes, son aquellos que se obtienen tras eliminar del bipartito completo  $K_{(m,n)}$  las aristas de un subgrafo perteneciente a una de las familias  $\mathcal{F}_i(m, n; s, t)$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Teorema 5.3.8** Sean  $m, n, s$  y  $t$  enteros positivos tales que  $2 \leq s \leq m$ ,  $2 \leq t \leq n - s$  y  $n - t = s \lfloor (n - t)/s \rfloor + r$  siendo  $0 \leq r < s$ . Si

$$(i) \quad (m - s) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t - 1; \text{ o bien}$$

(ii)  $s$  divide a  $n - t$  y  $(m - s)n \leq mt$ , siendo  $m \geq 2s$  si  $(m - s)n = mt$ ,

entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Si  $r = 0$  y  $s = 2$  entonces

$$Z(m, n; s, t) = \{K_{(m,n)} - E(H) : H \in \mathcal{F}_1(m, n; s, t)\}.$$

2. Si  $r = 0$  y  $s \geq 3$  entonces

$$Z(m, n; s, t) = \{K_{(m,n)} - E(H) : H \in \mathcal{F}_1(m, n; s, t) \cup \mathcal{F}_2(m, n; s, t)\}.$$

3. Si  $r > 0$  y  $s - 2 \leq r \leq s - 1$  entonces

$$Z(m, n; s, t) = \{K_{(m,n)} - E(H) : H \in \mathcal{F}_3(m, n; s, t)\}.$$

4. Si  $0 < r \leq s - 3$  entonces

$$Z(m, n; s, t) = \{K_{(m,n)} - E(H) : H \in \mathcal{F}_2(m, n; s, t) \cup \mathcal{F}_3(m, n; s, t)\}.$$

*Demostración:*

Consideremos un grafo extremal  $G = (X, Y) \in Z(m, n; s, t)$  y supongamos que los vértices están ordenados en las clases de modo que

$$d_{G^c}(x_1) \leq \dots \leq d_{G^c}(x_m).$$

Sea  $S = \{x_1, \dots, x_s\}$  un subconjunto de la clase  $X$  de cardinal  $s$  cualquiera.

Como

$$e(G) = mn - \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor (m-s) + m + n - s - t + 1 \right)$$

todas las desigualdades (5.3) se convierten en igualdades y por tanto,

$$d_G(x_s) = \dots = d_G(x_m) = n - \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor - 1$$

y  $e(G[S \cup Y]) = sn - n + t - 1$ . Esto último implica que  $e(G^c[S \cup Y]) = n - t + 1$ .

Sea  $r$  el único entero tal que  $0 \leq r < s$  y  $n - t = s \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor + r$ . Obsérvese que

$$d_{G^c}(x_{s-r}) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1,$$

ya que en caso contrario,

$$\begin{aligned} e(G^c[S \cup Y]) &\leq (s-r) \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + r \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= n-t, \end{aligned}$$

lo cual no es posible. Así que tenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} d_{G^c}(x_{s-r}) = \dots = d_{G^c}(x_m) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \\ d_{G^c}(x_i) \leq \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \text{ para todo } i = 1, \dots, s-r-1 \text{ si } r \leq s-2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Más aún, nótese que  $d_{G^c}(x_1) = \lfloor \frac{n-t}{s} \rfloor + 1$  sólo si  $r = s-1$ , debido a que

$$n-t+1 = e(G^c[S \cup Y]) = s \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) = n-t-r+s.$$

Pero por otra parte, también es fácil ver que  $d_{G^c}(x_{s-1}) \geq 1$  ya que en otro caso tendríamos  $d_{G^c}(x_i) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, s-1$  y entonces

$$n-t+1 = e(G^c[S \cup Y]) = d_{G^c}(x_s),$$

pero esto es imposible ya que

$$d_{G^c}(x_s) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1, \text{ y } s \geq 2.$$

Si tenemos ahora en cuenta que

$$n-t+1 = e(G^c[S \cup Y]) \geq |N_{G^c}(S)|$$

y aplicamos el *Lema 5.3.4* tenemos que

$$e(G^c[S \cup Y]) = |N_{G^c}(S)| = n-t+1. \quad (5.8)$$



De la expresión (5.8) deducimos que

$$N_{G^c}(x) \cap N_{G^c}(x') = \emptyset$$

para todo par de vértices distintos  $x, x' \in S$ .

En lo que sigue, haremos uso de la condición suficiente que probamos en la siguiente nota.

**Nota 5.3.9** Si

$$d_{G^c}(x_{s-1}) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1$$

entonces

$$N_{G^c}(x) \cap N_{G^c}(x') = \emptyset$$

para todo par de vértices distintos  $x, x' \in X$ .

Para probar este hecho, supongamos que

$$N_{G^c}(x) \cap N_{G^c}(x') \neq \emptyset$$

para algún par de vértices  $x' \in X$ . Podemos suponer que  $x' \in X \setminus S$ . Si  $x, x'$  tienen algún vecino en común en la clase  $Y$ , haciendo uso de (5.8) llegamos a una contradicción con el *Lema 5.3.4* ya que:

(1) si  $x \in S$ , tomando un vértice  $x'' \in \{x_{s-1}, x_s\}$  tal que  $x'' \neq x$ , se tiene que

$$|N_{G^c}((S \setminus \{x''\}) \cup \{x'\})| \leq n - t;$$

(2) si  $x \in X \setminus S$  entonces

$$|N_{G^c}((S \setminus \{x_{s-1}, x_s\}) \cup \{x, x'\})| \leq n - t.$$

□

Obsérvese que si  $r \geq 1$  entonces, teniendo en cuenta (5.7), tenemos que

$$d_{G^c}(x_{s-1}) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1.$$

En este caso, como consecuencia de la *Nota 5.3.9*, si  $r \geq 1$  entonces

$$N_{G^c}(x) \cap N_{G^c}(x') = \emptyset$$

para todo par de vértices distintos  $x, x' \in X$ .

Supongamos ahora que  $r = s-1$ . Entonces, de nuevo por (5.7), deducimos que

$$d_{G^c}(x_i) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , y por la *Nota 5.3.9* se tiene que  $G = K_{(m,n)} - E(H)$ , donde  $H$  es la unión disjunta de  $m$  copias del grafo  $K_{(1, \lfloor (n-t)/s \rfloor + 1)}$ . Por tanto, en este caso,  $H \in \mathcal{F}_3(m, n; s, t)$ .

Veamos qué ocurre cuando  $0 \leq r \leq s-2$ . Supongamos que

$$d_{G^c}(x_{s-r-1}) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1.$$

Esto implica que  $0 \leq r \leq s-3$ . En efecto, si  $r = s-2$  entonces  $x_{s-r-1} = x_1$ , pero  $d_{G^c}(x_1) = \lfloor (n-t)/s \rfloor + 1$  si y sólo si  $r = s-1$ , lo cual es imposible en este caso.

Entonces, haciendo uso de (5.7), sabemos que existe algún entero  $k$ , siendo  $2 \leq k \leq s-r-1$ , tal que

$$d_{G^c}(x_i) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1$$

para todo  $i = k, \dots, m$ , y además

$$d_{G^c}(x_i) \leq \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor$$

para todo  $1 \leq i \leq k-1$ . Por consiguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^{k-1} d_{G^c}(x_i) \\ &= e(G^c[S \cup Y]) - (s-k+1) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= (k-1) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) - (s-r) + 1, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$k \geq \frac{n-t+s^2-r(s+1)}{n-t+s-r}$$

es decir

$$s-r-1 \geq k \geq \left\lceil \frac{n-t+s^2-r(s+1)}{n-t+s-r} \right\rceil \geq 2.$$

En consecuencia, de nuevo por la *Nota 5.3.9*, concluimos que  $G = K_{(m,n)} - E(H_1 \cup H_2)$ , donde los subgrafos  $H_1$  y  $H_2$  son disjuntos, siendo, por un lado,  $H_1$  la unión de  $k-1$  subgrafos disjuntos  $K_{(1,d_1)}, \dots, K_{(1,d_{k-1})}$ , donde

$$0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_{k-1} \leq \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor$$

y además,

$$d_1 + \dots + d_{k-1} = (k-1) \left( \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1 \right) - (s-r) + 1.$$

Y, por otro lado,  $H_2$  es la unión de  $m-k+1$  copias disjuntas de  $K_{(1, \lfloor (n-t)/s \rfloor + 1)}$ .

Todo esto implica que  $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_2(m, n; s, t)$ .

Para finalizar, supongamos que

$$d_{G^c}(x_{s-r-1}) \leq \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor.$$

En ese caso,

$$d_{G^c}(x_i) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor$$

para cada  $i = 1, \dots, s-r-1$ , ya que en caso contrario,

$$\begin{aligned} e(G^c[S \cup Y]) &< (s-r-1) \lfloor (n-t)/s \rfloor + (r+1) (\lfloor (n-t)/s \rfloor + 1) \\ &= s \lfloor (n-t)/s \rfloor + r + 1 = n-t+1, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Si  $r \geq 1$  entonces, teniendo en cuenta (5.7), sabemos que

$$d_{G^c}(x_{s-1}) = \left\lfloor \frac{n-t}{s} \right\rfloor + 1.$$

De manera que, por la *Nota 5.3.9*, deducimos que  $G = K_{(m,n)} - E(H_1 \cup H_2)$ , siendo  $H_1$  y  $H_2$  subgrafos disjuntos, donde  $H_1$  consiste en la unión de  $s - r - 1$  copias disjuntas de  $K_{(1, \lfloor (n-t)/s \rfloor)}$  y  $H_2$  es la unión de  $m - s + r + 1$  copias disjuntas del grafo  $K_{(1, \lfloor (n-t)/s \rfloor + 1)}$ . En consecuencia,  $H_1 \cup H_2$  pertenece a la familia  $\mathcal{F}_3(m, n; s, t)$ .

Si  $r = 0$ , a partir de la expresión (5.7), sabemos que todos los vértices del conjunto  $\{x_s, \dots, x_m\}$  tienen valencia igual a  $(n-t)/s + 1$  en  $G^c$ , por lo que aplicando (5.8) al conjunto  $S \setminus \{x_s\} \cup \{x_j\}$  de cardinal  $s$ , se obtiene que

$$N_{G^c}(x_j) \cap N_{G^c}(S \setminus \{x_s\}) = \emptyset$$

para todo  $j = s, \dots, m$ . Esto significa que los subgrafos

$$H_1 = G^c[(S \setminus \{x_s\}) \cup N_{G^c}(S \setminus \{x_s\})]$$

y

$$H_2 = G^c[\{x_s, \dots, x_m\} \cup N_{G^c}(\{x_s, \dots, x_m\})]$$

son disjuntos. Además,  $H_1$  consiste en la unión de  $s - 1$  copias disjuntas del subgrafo  $K_{(1, (n-t)/s)}$ . Es importante resaltar que

$$|N_{G^c}(x) \cap N_{G^c}(x')| \leq 1$$

para todo par de vértices distintos  $x, x' \in \{x_s, \dots, x_m\}$ , ya que si fuera de otro modo, el conjunto  $S' = (S \setminus \{x_{s-1}, x_s\}) \cup \{x, x'\}$  verificaría

$$\begin{aligned} |N_{G^c}(S')| &\leq |N_{G^c}(S \setminus \{x_{s-1}, x_s\})| + |N_{G^c}(\{x, x'\})| \\ &\leq (s-2)(n-t)/s + 2((n-t)/s + 1) - 2 = n-t, \end{aligned}$$

lo cual contradice lo expuesto en el *Lema 5.3.4*. Por otra parte, hay que tener en cuenta que todo ciclo contenido en  $H_2$ , en caso de existir, debe tener longitud, al menos,  $2(s+1)$ . En otro caso, si existiera uno de estos ciclos  $C$  y su longitud fuera  $2l$ , siendo  $2 \leq l \leq s$ , entonces el subconjunto  $S' \subseteq X$  de cardinal  $s$  consistente en los  $l$  vértices de  $C$  y cualesquiera  $s-l$  vértices de

$$V(H_1) \cap X \subseteq \{x_1, \dots, x_{s-1}\}$$

verificaría que

$$|N_{G^c}(S')| = (s-l) \frac{n-t}{s} + l \frac{n-t}{s} = n-t,$$

en contra del *Lema 5.3.4*. Como consecuencia de esto, deducimos que  $H_2$  no contiene ciclos, o bien, los ciclos que contiene deben ser de longitud, al menos,  $2(s+1)$ . En cualquier caso todos los vértices de  $H_2$  que pertenecen a la clase  $X$  tienen valencia  $(n-t)/s+1$  en  $G^c$ . Por tanto,  $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{F}_1(m, n; s, t)$ .

Para concluir la prueba de este resultado, obsérvese que para cada uno de los casos 1 a 4 del teorema existe, al menos, una familia de subgrafos  $\mathcal{F}_i(m, n; s, t) \neq \emptyset$  tal que  $Z(m, n; s, t) \neq \emptyset$ . Esto concluye la demostración.

⊗

## 5.4 Conclusiones y problemas abiertos

En este último capítulo de la tesis hemos abordado el estudio de dos de las más conocidas extensiones del Problema de Turán a grafos bipartitos: el Problema de Zarankiewicz y el Problema de Turán para grafos bipartitos.

Primero hemos obtenido una cota superior para la función extremal de Zarankiewicz. Posteriormente, hemos comprobado que si  $m$  y  $n$  son menores o iguales que  $s+t-1$  entonces ambos problemas extremales conducen a las mismas



soluciones y los grafos extremales se obtienen tras eliminar un emparejamiento de un determinado cardinal en el grafo completo  $K_{(m,n)}$ .

Por último, hemos descrito tres familias de grafos que nos han permitido ampliar el conjunto de valores de los parámetros  $m, n, s, t$  para los cuales hemos resuelto el Problema de Zarankiewicz. Concretamente, hemos obtenido el valor exacto de la función extremal  $z(m, n; s, t)$  y caracterizado los grafos bipartitos extremales pertenecientes a la familia  $Z(m, n; s, t)$  cuando los parámetros satisfacen las siguientes relaciones:

$$(i) \quad (m - s) \left( \left\lfloor \frac{n - t}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq t - 1; \text{ o bien}$$

$$(ii) \quad s \text{ divide a } n - t \text{ y } (m - s)n \leq mt, \text{ siendo } m \geq 2s \text{ si } (m - s)n = mt.$$

Hay que tener presente que debido a la simetría de la función extremal ( $z(m, n; s, t) = z(n, m; t, s)$ ) podemos duplicar el conjunto de valores para los cuales hemos resuelto este problema, sin más que intercambiar los papeles de  $m$  y  $n$ , por un lado, y de  $s$  y de  $t$  por otro lado en las relaciones del párrafo anterior.

El conjunto de los valores de los parámetros para los cuales el problema de Zarankiewicz y el de Turán permanecen sin resolver, es uno de los problemas abiertos a los cuales tendremos que dedicar nuestra atención en el futuro.

También parece lógico plantearse un estudio semejante al que hemos realizado pero no en grafos bipartitos, sino en grafos  $r$ -partitos en general.

De igual modo, y de manera paralela a las extensiones que surgieron del Problema de Turán, podríamos plantearnos extensiones del Problema de Zarankiewicz prohibiendo en este caso menores topológicos de grafos bipartitos completos.

# Indice

- $E(G)$ , 2
- $G + H$ , 5
- $G[A]$ , 4
- $G[F]$ , 4
- $H \subseteq G$ , 3
- $K_n$ , 7
- $K_{n_1, \dots, n_r}$ , 7
- $N_G(A)$ , 3
- $V(G)$ , 2
- $\delta(v)$ ,  $\delta_G(v)$ , 3
- $\mathcal{F}_1(m, n; s, t)$ , 146
- $\mathcal{F}_2(m, n; s, t)$ , 147
- $\mathcal{F}_3(m, n; s, t)$ , 147
- $\overline{G}$ , 5
- $|\cdot|$ , 2
- $k \cdot H$ , 5
- árbol, 6
  - caterpillar, 7
- arista, 2
  - adyacentes, 2
  - incidente, 2
- camino, 5
  - longitud, 5
- caterpillar, 7
- ciclo, 6
- cintura, 6
- clases de vértices, 7
- componente conexa, 6
  - trivial, 6
- conjunto, 2
  - cardinal, 2
- conjunto vértice recubridor, 4
- contracción
  - elemental, 11
- cuello, 6
- emparejamiento, 9
  - completo, 9
  - Condición de Hall, 9
- girth, 6
  - infinito, 6
- grafo, 2
  - $r$ -partito, 7
    - bipartito, 7
    - completo, 7
  - conexo, 6
  - contractible, 12



- de Turán, 8
- finito, 2
- homeomorfos, 10
- no dirigido, 2
- orden de un, 2
- regular, 3
- simple, 2
- tamaño de un, 2
- complementario, 5
- completo, 7
- $H=TG$ , 10
- lazo, 2
- menor, 12
  - topológico, 10
- Problema de Turán, 14
- Problema de Turán con contracción
  - de aristas, 15
- Problema de Turán para menores completos, 15
- Problema de Zarankiewicz, 15
- problema extremal, 14
- subdivisión, 10
  - elemental, 10
- subgrafo, 3
  - inducido por aristas, 4
  - inducido por vértices, 4
- sucesión decreciente, 12
- Teorema de
  - Hall, 9
- vértice, 2
  - adyacentes, 2
  - aislado, 3, 6
  - branch, 11
  - entorno de un, 3
  - final, 6
  - grado, 3
  - incidente, 2
  - independientes, 2
  - interno, 6
  - valencia, 3
  - vecindad, 3
  - vecinos, 3
- vértices
  - finales, 7
- valencia
  - máxima, 3
  - mínima, 3
  - media, 3
- Zarankiewicz, problema de, 15



# Bibliografía

- [1] K. Appel y W. Haken. *Every Planar Map is Four-Colorable, Part I: discharging*. University of Illinois, Urbana, 1976.
- [2] K. Appel, W. Haken y J. Koch. *Every Planar Map is Four-Colorable, Part II: reducibility*. University of Illinois, Urbana, 1976.
- [3] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1978.
- [4] B. Bollobás, P. Catlin y P. Erdős. Hadwiger's conjecture is true for almost every graph. *Europ. J. Combin. Theory.*, 1:195–199, 1980.
- [5] B. Bollobás y A. Thomason. Proof of a conjecture of Mader, Erdős and Hajnal on topological complete subgraphs. *Europ. J. Combin.*, 19:883–887, 1998.
- [6] P.A. Catlin. Hajós's graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *Jour. of Comb. Theory B*, 26:268–274, 1979.
- [7] M. Cera, A. Diánez y A. Márquez. The size of a graph without topological complete subgraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 13:295–301, 2000.
- [8] M. Cera, A. Diánez y A. Márquez. Extremal graphs without topological complete subgraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 18 (2):388–396, 2004.
- [9] K. Culik. Teilweise Lösung eines verallgemeinerten Problems von Zarankiewicz. *Anna. Soc. Polon. Math.*, 3:165–168, 1956.



- [10] W. Fernández de la Vega. On the maximum density of graphs which have no subcontraction to  $K_s$ . *Discrete Math.*, 46:109–110, 1983.
- [11] R. Diestel. Graph theory. En *Graduate Texts in Mathematics*, volumen 173. Springer-Verlag, 1997,2000.
- [12] G.A. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.*, 27:85–92, 1952.
- [13] G.A. Dirac. Homomorphism theorems of graphs. *Math. Ann.*, 153:69–80, 1964.
- [14] P. Erdős y A. Hajnal. On complete topological subgraphs of certain graphs. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, 7:143–149, 1964.
- [15] Z. Füredi. New asymptotics for bipartite Turán numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 75:141–144, 1996.
- [16] P. García-Vázquez. Problemas extremales en teoría de grafos. *Tesis Doctoral*, pages 1–154, 2003.
- [17] A.P. Godbole y H.C. Graziano. Contributions to the problem of Zarankiewicz. *Journal of Statistical Planning and Interference*, 95:197–208, 2001.
- [18] A.P. Godbole, B. Lamorte y E.J. Sandquist. Threshold functions for the bipartite Turán property. *Electron. J. Combin.*, 4:R18, 1997.
- [19] W. Goddard, M.A. Henning y O.R. Oellermann. Bipartite Ramsey numbers and Zarankiewicz numbers. *Discrete Math.*, 219:85–95, 2000.
- [20] J. Griggs y H. Chih-Chang. On the half-half case of the Zarankiewicz problem. *Discrete Math.*, 249:95–104, 2002.

- [21] J. Griggs y J. Ouyang.  $(0, 1)$ -matrices with no half-half submatrix of ones. *European J. Combinatorics*, 18:751–761, 1997.
- [22] R.K. Guy. A problem of Zarankiewicz. En *Theory of graphs*, pages 139–142. Gordon and Breach, New York, 1967.
- [23] R.K. Guy. A problem of Zarankiewicz. En *Theory of graphs*, pages 119–150. Academic Press, New York, 1968.
- [24] R.K. Guy. The many faceted problem of Zarankiewicz. En *The many facets of Graphs Theory*, volumen Lecture Notes in Math. 110, pages 129–148. Springer Verlag, New York, 1969.
- [25] R.K. Guy y S. Znám. A problem of Zarankiewicz. En *Recent progress in Combinatorics*, pages 237–243. Academic Press, New York, 1969.
- [26] H. Hadwiger. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich*, 88:133–142, 1943.
- [27] G. Hajós. Über ein Konstruktion nicht  $n$ -färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, 10:116–117, 1961.
- [28] P. Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10:26–30, 1935.
- [29] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [30] L.K. Jorgensen. Extremal graphs for contractions to  $K_7$ . *Ars Combinatoria*, 25C:133–148, 1988.
- [31] L.K. Jorgensen. Contractions to  $K_8$ . *Journal of Graph Theory*, 18:431–448, 1994.
- [32] J. Komlós y E. Szemerédi. Topological cliques in graphs II. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5:79–90, 1996.

- [33] A. Kostochka. The minimum Hadwiger number for graphs with a given mean degree of vertices. *Metody Diskret. Analiz.*, 38:37–58, 1982.
- [34] A. Kostochka. A lower bound for the Hadwiger number of graphs by their average degree. *Combinatorica*, 4:307–316, 1984.
- [35] W. Mader. Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. *Math. Annalen*, 174:265–268, 1967.
- [36] W. Mader. Homomorphiesätze für Graphen. *Math. Annalen*, 178:154–168, 1968.
- [37] W. Mader. Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Teilgraphen, die zu einem vollständigen Graphen homöomorph sind. *Math. Nachr.*, 53:145–150, 1972.
- [38] W. Mader.  $3n - 5$  edges do force a subdivision of  $K_5$ . *Combinatorica*, 18, 4:569–595, 1997.
- [39] W. Mader. Graphs with  $3n-6$  edges not containing a subdivision of  $K_5$ . *Combinatorica*, 25 (4):425–438, 2005.
- [40] J.S. Myers. Graphs without large complete minors are quasi-random. *Combinatorics, Probability and Computing*, 11:571–585, 2002.
- [41] N. Robertson y P.D. Seymour. Graph minor XIII. The disjoint paths problem. *J. Comb. Theory Ser. B*, 63:65–110, 1995.
- [42] S. Sierpinski. Sur un probl'eme concernant un reseau 'a 36 points. *Ann. Pol. Math.*, 24:173–174, 1951.
- [43] S. Sierpinski. *Problems in the Theory of Numbers*. Pergamon, Oxford, 1964.
- [44] A. Thomason. An extremal function for contractions of graphs. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 95:261–265, 1984.

- [45] A. Thomason. The extremal function for complete minors. *Jour. of Comb. Theory, Series B*, 81:318–338, 2001.
- [46] P. Turán. Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941.
- [47] K. Wagner. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.*, 114:570–590, 1937.
- [48] K. Zarankiewicz. Problem p 101. *Colloq. Math.*, 2:116–131, 1951.





**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

Reunido el tribunal en el día de la fecha, integrado por los abajo firmantes, para evaluar la tesis doctoral de D. **JUAN CARLOS VALENZUELA TRIPEDORO** titular de **GRAFOS CONTRACTIBLES A UN GRAFO COMPLETO** acordó otorgarle la calificación de **SOBRESALIENTE CUM LAUDE POR UNANIMIDAD**

Sevilla, a 19 de JULIO de 2006.

Vocal,

Presidente,

Vocal,

Secretario,

Vocal,

Doctorando,