UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

GRADUACIONES NATURALES DE ÁLGEBRAS DE LIE 3-FILIFORMES

Emilia Pastor Sahagún

Sevilla, 2001

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

Graduaciones naturales de álgebras de Lie 3-filiformes

Memoria presentada por Emilia Pastor Sahagún para optar al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Emilia Pastor Sahagún

Vº. Bº.
de los Directores

Jesús Mª Cabezas Mtz. de Aragón

Fdo. José Ramón Gómez Martín,
Catedrático de Universidad del
Departamento de Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla.

Fdo. Jesús Mª Cabezas Mtz. de Aragón,
Prof. Titular de Escuela Universitaria del
Departamento de Matemática Aplicada
de la Universidad del País Vasco / E.H.U.

Sevilla, febrero 2001

A Elena y Jesús Mari

Resumen

Se presentan en esta memoria algunos resultados algebraicos sobre clasificación de familias de álgebras de Lie nilpotentes en dimensión cualquiera, junto a algunas aplicaciones geométricas.

Cuando se considera la filtración natural que produce la sucesión central descendente de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, se obtiene un álgebra graduada finita que, en cierto modo, constituye la estructura básica del álgebra que se considera y que, cuando es isomorfa a $\mathfrak{g}$, se dice que está graduada naturalmente.

Un álgebra de Lie de dimensión n se dice p-filiforme si su invariante de Goze es $(n-p, 1, \ldots, 1)$. La clasificación de las álgebras de Lie graduadas naturalmente en dimensión arbitraria se conoce en los casos filiforme y casifiliforme (esto es, las 1-filiformes y 2-filiformes respectivamente).

En este trabajo se obtiene la clasificación completa de las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente en dimensión arbitraria y se estudian algunas aplicaciones geométricas. En concreto, vía el álgebra de derivaciones, se describe el primer espacio de cohomología y se halla la dimensión de las órbitas para cada álgebra 3-filiforme graduada naturalmente.

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todas las personas que han contribuido a que la realización de este trabajo haya llegado a buen término.

En primer lugar y de un modo muy especial a los profesores José Ramón Gómez y Jesús Mª Cabezas, directores de la tesis, por todas las horas de su trabajo que me han dedicado y por contar en todo momento con su ayuda y entusiasmo.

No sólo mi agradecimiento es en el plano profesional, sino también en el personal. A José Ramón y aquí no puedo olvidarme de Concha, a los dos gracias, porque me han ofrecido desde siempre su amistad, un gran cariño y han hecho que Sevilla tenga para mí un atractivo especial.

Palabras de agradecimiento también para el Departamento de Matemática Aplicada I, de la Facultad de Informática y Estadística de la Universidad de Sevilla, que me ha acogido siempre con gran cordialidad. En especial mil gracias a Lisa por su amabilidad y toda la ayuda que tan desinteresadamente siempre me ha prestado. A Javier Cobos por sus conocimientos informáticos que tan útiles me han sido.

Gracias también a Antonio, Isabel, Joaquín y Rosa por haber recibido ayuda de unos y ánimos de todos.

Expreso también mi agradecimiento a todos los compañeros de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial e Ingeniería Técnica en Topografía de Vitoria-Gasteiz que me animaron en mi tarea y a la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, que mediante su programa de perfeccionamiento del profesorado, ha colaborado en la financiación de mis viajes y estancias en Sevilla.

Finalmente, quiero citar a Jesús Mª y Elena, mis seres más queridos. A ellos les agradezco infinito su apoyo incondicional.

Introducción

El primer problema que se plantea al estudiar cualquier ente algebraico es, quizás, la descripción de sus elementos, es decir, su clasificación. Cuando se trata de estructuras algebraicas esta clasificación se suele dar salvo isomorfismo.

A pesar de haber sido planteado hace más de un siglo, la clasificación de las álgebras de Lie es un problema abierto. Desde luego, se conoce la clasificación de importantes familias de álgebras de Lie. Desde fines del siglo pasado (1894), Cartan y Killing obtienen la clasificación de las álgebras de Lie simples complejas y Cartan en 1914 las reales. Esencialmente, las álgebras de Lie simples complejas se reducen a cuatro familias bien conocidas y fácilmente descriptibles como álgebras de matrices. Así, en cada dimensión sólo hay cuatro álgebras de Lie simples no isomorfas entre sí (excepción hecha de las dimensiones 1, 2 y 3 para las que sólo hay una, dos y tres álgebras, respectivamente, y de las dimensiones 14, 52, 78, 133 y 248 en las que hay cinco álgebras de Lie simples, pues aparece una de las llamadas exóticas en cada una de dichas dimensiones).

Dado que toda álgebra de Lie semisimple se puede expresar como suma directa de álgebras de Lie simples, es un problema resuelto la clasificación de las semisimples. Como el teorema de Lévi asegura que toda álgebra de Lie se puede descomponer en suma semidirecta de una subálgebra semisimple y un ideal resoluble (su radical) sólo restaría, en un cierto sentido poco estricto, la clasificación de las resolubles.

Este problema, sin embargo, es de una extraordinaria complejidad. Ya la clasificación de un tipo particular de álgebras de Lie resolubles, las nilpotentes, se antoja imposible. Sirva como botón de muestra el hecho de que, aun cuando ya en 1891 Umlauf [53] encuentra (bien que incompletas y con errores) listas de familias de álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 9, en la actualidad sólo se conoce la clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 7.

Aunque era un resultado bien conocido, el primero en publicar listas completas de álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones menores o iguales a 5 fue Dixmier en 1958 [25]. Aún antes, en 1950, Vranceanu [57] obtiene resultados relevantes sobre álgebras de Lie filiformes (bien que él no las denominaba así). En 1958 Morosov [47] da la primera lista completa de álgebras de Lie nilpotentes reales y complejas de dimensión 6. De manera independiente, Vergne en 1966 [55] vuelve a obtener los resultados de Morosov y Vranceanu aunque desde un punto de vista distinto. Es a ella a la que debemos la denominación de álgebras de Lie filiformes. Otras listas completas de dimensión 6 las proporciona en 1983 Nielsen [48] y Cerezo [23], haciendo uso de métodos distintos.

En 1989 Ancochea y Goze [3] y Romdhani [51] dan, independientemente, las primeras listas completas de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 reales y complejas. Además, Seeley [52] obtiene, por distinto procedimiento la misma clasificación. Llegados a este punto, es fácil ver la mucho mayor complejidad de la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes (y, por ende, de las resolubles) respecto a las semisimples, pues ya en dimensión 7 aparecen familias uni-paramétricas de álgebras no isomorfas.

El trabajo citado de Ancochea y Goze tiene una enorme importancia pues introduce un nuevo invariante mucho más fino que el nilíndice, la sucesión característica o invariante de Goze, que ha permitido abordar de una manera más sencilla el problema. Así, estos mismos autores obtienen en 1988 [2] la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 8 y Gómez y Echarte en 1991 [26] la de dimensión 9.

La descomposición que da Khakimdjanov en [42] y [43] de la ley de un álgebra de Lie filiforme a partir de la del álgebra modelo y de una serie de cociclos ha permitido dar otro importante avance a la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes. Así, Gómez, Jiménez-Merchán y Khakimdjanov en 1998 [33] obtienen la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión menor o igual a 11, haciendo uso también de computación simbólica.

La gran dificultad del problema de la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes obliga a seleccionar subfamilias relevantes cuyo estudio pueda ser abordado. El invariante de Goze es ahora de gran ayuda. Así, Cabezas y Gómez llaman p-filiformes a las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n e invariante de Goze $(n-p, 1, \dots, 1)$ y, solos o junto a Camacho y Navarro estudian en [14],[12],[9],[11],[19], [16],[20] la clasificación de diversas familias de álgebras de Lie p-filiformes, obteniendo algunas de ellas en dimensión arbitraria.

Otra posible línea de investigación es el estudio de las álgebras de Lie filiformes que Gómez, Goze y Khakimdjanov [28] denominan k-abelianas (aquéllas cuyo ideal $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g})$ de la sucesión central descendente es abeliano). Bratzlavsky en 1974 [8] estudia el caso $k = 1$ (aunque él no usa esta denominación) y Gómez, Goze y Khakimdjanov en 1997 [28] el caso $k = 2$ en dimensión arbitraria.

La enorme dificultad de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes se pone de manifiesto ya al estudiar el caso, aparentemente sencillo, de las metabelianas o 2-nilpotentes. Algunos autores conjeturan [40] la imposibilidad práctica de obtener la clasificación completa; en cualquier caso, Gómez y Rodríguez [37],[38],[39],[50] han "comprobado" la extraordinaria dificultad de la clasificación para nilíndices pequeños.

De cualquier forma, la clasificación exhaustiva de las álgebras de Lie nilpotentes pierde interés. Una posible solución consiste en descubrir y estudiar propiedades de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes. Así lo hacen Ancochea, Gómez, Goze, Khakimdjanov, Jiménez-Merchán y Valeiras, entre otros muchos autores, en [1],[4],[5],[32],[54]. Surge la necesidad de seleccionar subfamilias relevantes que sean susceptibles de ser clasificadas y que proporcionen aportaciones en el estudio de las propiedades y la variedad de álgebras de Lie nilpotentes.

Una familia de álgebras de Lie especialmente interesantes es la de las graduadas naturalmente. La sucesión central descendente de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ produce una filtración de $\mathfrak{g}$ que le asocia, de forma natural, un álgebra de Lie graduada gr $\mathfrak{g}$. En general, $\mathfrak{g}$ y gr $\mathfrak{g}$ no son isomorfas, pero el conocimiento de las álgebras filiformes para las que $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{gr}\ \mathfrak{g}$ ha permitido obtener resultados relevantes sobre las dimensiones de las componentes irreducibles de la variedad de álgebras de Lie nilpotentes o en la descripción del conjunto de álgebras filiformes característicamente nilpotentes.

Vergne obtiene en [56], entre otros resultados, que cada componente irreducible del conjunto algebraico de álgebras de Lie nilpotentes que corta al abierto de las filiformes, contiene siempre una de las álgebras filiformes graduadas naturalmente y proporciona, además, una mayoración de la dimensión de la componente irreducible en función de la dimensión del espacio vectorial subyacente.

Una posible línea a seguir a partir de aquí consiste en estudiar familias de álgebras de Lie nilpotentes de "longitud grande", tal como hacen Gómez, Jiménez-Merchán y Reyes en [29],[30],[35],[49], en algunos casos haciendo uso de técnicas computacionales, como en [34] o [36].

En [22] Ancochea y Campoamor enumeran las álgebras de Lie graduadas naturalmente, $(m-1)$-abelianas de sucesión característica $(2m-1, 2+q, 1)$, no escindidas que se obtienen por extensiones centrales graduadas de los modelos graduados (no escindidos) de sucesión carateristica $(2m-1, 2, 1)$.

Sin embargo, el planteamiento del problema que origina la búsqueda de nuevas álgebras nilpotentes graduadas surgió cuando se intentaba extender la caracterización de las álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes obtenida por Goze y Khakimdjanov [41] a otro tipo de álgebras de Lie nilpotentes distintas de las filiformes.

Aunque en un principio se pensó que el número de álgebras de Lie característicamente nilpotentes era muy pequeño, en realidad se ha probado que "casi todas" las álgebras de Lie nilpotentes son característicamente nilpotentes. Así, Khakimdjanov en [44] prueba la existencia de un subconjunto de Zariski no vacío formado por álgebras de Lie característicamente nilpotentes para dimensión mayor o igual a 12 y construye extensas familias de álgebras de Lie característicamente nilpotentes de dimensión arbitraria mayor o igual que 7.

En [27] Echarte, Gómez y Núñez dan una caracterización de las álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes que, desafortunadamente, no es posible generalizar para álgebras de Lie nilpotentes no filiformes. En [41] Goze y Khakimdjanov prueban que para dimensión mayor o igual a 8 cualquier componente irreducible de la variedad de leyes de álgebras de Lie filiformes complejas contienen un subconjunto abierto cuyos elementos son todos leyes característicamente nilpotentes. Eso lo hacen probando que a partir de dimensión 8 un álgebra de Lie filiforme es característicamente nilpotente si y sólo si no es isomorfa a su (o sus) álgebra(s) de apoyo. Estas álgebras están fuertemente relacionadas con las graduadas naturalmente.

Lo señalado anteriormente justifica el interés intrínseco del estudio de las álgebras de Lie nilpotentes graduadas naturalmente.

Así, Vergne en [56] obtuvo que para $n \geq 5$ sólo existía un álgebra de Lie filiforme graduada naturalmente si la dimensión n es impar (el álgebra modelo, también designada por $\mathcal{L}_n$) y dos si la dimensión n es par ($\mathcal{L}_n$ y otra designada $\mathcal{Q}_n$). La expresión de las leyes de estas álgebras en una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ es la siguiente

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_n : \{\ [X_0, X_i] = X_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-2. \\ n \geq 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{Q}_n : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1} & 1 \leq i \leq q-1. \end{cases} \\ n \geq 6,\ n \text{ par} \end{array}$$

Las álgebras filiformes pueden ser caracterizadas por tener invariante de Goze $(n-1, 1)$, y cabe entonces interesarse por las álgebras graduadas de otras sucesiones características para ver si es posible obtener resultados que aporten nuevos datos en el estudio de la variedad de las álgebras de Lie nilpotentes.

Gómez y Jiménez-Merchán estudian el caso de las álgebras de Lie casifiliformes (invariante de Goze $(n-2,1,1)$) en dimensión arbitraria en [31]. Estos autores encuentran, a partir de dimensión 10, que si la dimensión n es par existe una familia localmente finita de álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente no escindidas (que generalizan, en cierto sentido, a $\mathcal{L}_n$ y designan por $\mathcal{L}(n,r)$) y un álgebra (que denominan terminal y designan por $\tau(n,n-3)$); cuando la dimensión n es impar encuentran dos familias localmente finitas (que generalizan, en cierto sentido, a $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{Q}_n$ y designan por $\mathcal{L}(n,r)$ y $\mathcal{Q}(n,r)$, respectivamente) y un álgebra (que denominan terminal y designan por $\tau(n,n-4)$). Los casos de dimensiones pequeñas (menores o iguales a 9) requieren un estudio aparte. Las álgebras o familias de álgebras indicadas anteriormente se expresan, respecto de una base adaptada $\{X_0,X_1,\dots,X_{n-2},Y\}$ y cuando tenga sentido, mediante

$\mathcal{L}(n,r)$ $\left(n\geq 5,\ 3\leq r\leq 2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor-1,\ r \text{ impar}\right)$:

$$\begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq n-3,\\ [X_i,X_{r-i}]=(-1)^{i-1}\,Y & 1\leq i\leq \dfrac{r-1}{2}. \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n,r)$ $(n\geq 7,\ n \text{ impar};\ 3\leq r\leq n-4,\ r \text{ impar})$:

$$\begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq n-3,\\ [X_i,X_{r-i}]=(-1)^{i-1}\,Y & 1\leq i\leq \dfrac{r-1}{2},\\ [X_i,X_{n-2-i}]=(-1)^{i-1}\,X_{n-2} & 1\leq i\leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

$\tau(n,n-4)$ $(n \text{ impar},\ n\geq 7)$:

$$\begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq n-3,\\ [X_i,X_{n-4-i}]=(-1)^{i-1}\,(X_{n-4}+Y) & 1\leq i\leq \frac{n-5}{2},\\ [X_i,X_{n-3-i}]=(-1)^{i-1}\,\frac{(n-3-2i)}{2}\,X_{n-3} & 1\leq i\leq \frac{n-5}{2},\\ [X_i,X_{n-2-i}]=(-1)^{i}\,(i-1)\,\frac{(n-3-i)}{2}\,X_{n-2} & 2\leq i\leq \frac{n-3}{2},\\ [X_i,Y]=\frac{(5-n)}{2}\,X_{n-4+i} & 1\leq i\leq 2. \end{cases}$$

$\tau(n, n-3)$ (n par, $n \geq 6$):

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(X_{n-3}+Y) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\frac{(n-2-2i)}{2}X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_1, Y] = \frac{(4-n)}{2}X_{n-2}. \end{cases}$$

Resultan un total de $\frac{n-2}{2}$ álgebras no escindidas si la dimensión n es par, $n \geq 6$, y $n-3$ si n es impar, $n \geq 7$ (una sola si $n = 5$). Además, existen trivialmente las álgebras escindidas $\mathcal{L}(n-1)\oplus\mathbf{C}$ si $n \geq 4$ y $\mathcal{Q}(n-1)\oplus\mathbf{C}$ si $n \geq 7$, n impar. Finalmente, en dimensión 7 existe un álgebra más y en dimensión 9 otras dos.

Si a las álgebras de Lie filiformes y a las casifiliformes las identificamos por 1-filiforme y 2-filiforme respectivamente, esta notación deja más compacta la expresión de los resultados obtenidos. Así, se resalta aún más el paralelismo de los casos 1-filiforme y 2-filiforme si en lugar de considerar la paridad de la dimensión n de un álgebra de Lie p-filiforme ($p = 1$ ó 2) se considera la paridad de $n-p$ en cada caso.

En esta memoria se aborda la clasificación de las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente, en dimensión cualquiera. La situación que se presenta ahora generaliza los resultados de los casos 1-filiforme y 2-filiforme. Se ha obtenido que, a partir de dimensión 11, si $n-3$ es par existe una familia localmente finita de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente no escindidas (que generalizan, en cierto sentido, a $\mathcal{L}(n,r)$ y se designan por $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$) y una familia localmente finita de álgebras terminales que se designan por $\tau(n,r_1,n-4)$; cuando $n-3$ es impar existen dos familias localmente finitas (que generalizan, en cierto sentido, a $\mathcal{L}(n,r)$ y $\mathcal{Q}(n,r)$ y se designan por $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$ y $\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$, respectivamente) y una familia localmente finita de álgebras terminales que se designan por $\tau(n,r_1,n-5)$. Los casos de dimensiones pequeñas (menores o iguales a 10) precisan un estudio particular.

Las álgebras o familias de álgebras indicadas anteriormente se expresan, respecto de una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$, mediante

$\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$ ($n \geq 8$, r_1, r_2 impar, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-3$) :

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_j - i}] &= (-1)^{i-1}Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$ $\quad(n$ par, $n\geq 10$, r_1,r_2 impar, $3\leq r_1<r_2\leq n-5)$:

$$\begin{cases} [X_0,X_i] &= X_{i+1} & 1\leq i\leq n-4 \\ [X_i,X_{r_j-i}] &= (-1)^{i-1}Y_j & 1\leq i\leq \frac{r_j-1}{2}, \quad 1\leq j\leq 2 \\ [X_i,X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1}X_{n-3} & 1\leq i\leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

$\tau(n,r,n-5)$ $\quad(n$ par, $n\geq 12$, r impar, $3\leq r\leq n-7)$:

$$\begin{cases} [X_0,X_i] &= X_{i+1} & 1\leq i\leq n-4 \\ [X_i,X_{r-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1\leq i\leq \frac{r-1}{2} \\ [X_i,X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-5}+Y_2) & 1\leq i\leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i,X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}X_{n-4} & 1\leq i\leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i,X_{n-3-i}] &= (-1)^{i}(i-1)\frac{(n-4-i)}{2}X_{n-3} & 1\leq i\leq \frac{n-4}{2} \\ [X_i,Y_2] &= \frac{(6-n)}{2}X_{n-5+i} & 1\leq i\leq 2 \end{cases}$$

$\tau(n,r,n-4)$ $\quad(n$ impar, $n\geq 9$, r impar, $3\leq r\leq n-6)$:

$$\begin{cases} [X_0,X_i] &= X_{i+1} & 1\leq i\leq n-4 \\ [X_i,X_{r-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1\leq i\leq \frac{r-1}{2} \\ [X_i,X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-4}+Y_2) & 1\leq i\leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i,X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2}X_{n-3} & 1\leq i\leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1,Y_2] &= \frac{(5-n)}{2}X_{n-3} & \end{cases}$$

El capítulo **0** sólo pretende resaltar algunos conceptos y propiedades bien conocidos pero que son prerrequisitos necesarios para el desarrollo de la memoria.

Se comienza el capítulo **1** obteniendo una primera aproximación a la estructura de la ley de cualquier álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente. Luego se estudian todas las situaciones admisibles que den lugar a álgebras de este tipo, ya sean escindidas o no y se finalizará la primera sección del capítulo con el teorema de estructura de las citadas álgebras.

En la sección **2**, se presentan algunas álgebras de Lie o familias de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente no escindidas y no isomorfas dos a dos, que como se verá a lo largo del desarrollo del capítulo son, todas las graduadas naturalmente no escindidas que existen para cada dimensión.

Así, en la sección **3** se hace un estudio de las citadas álgebras de dimensión menor o igual a 12. Si bien los resultados en dimensiones 11 y 12 quedarán dentro de lo que más tarde denominaremos caso general, se ha hecho un estudio aparte de ellas por razones técnicas. Se obtiene que en dimensión 5 existe un álgebra no escindida (la de Heisenberg); en dimensión 8 existe otra álgebra aparte de la $\mathcal{L}(8,3,5)$; en dimensión 9 hay un álgebra excepcional además de las álgebras $\mathcal{L}(9,3,5)$ y $\tau(9,3,5)$; finalmente en dimensión 10 existen tres álgebras excepcionales y una familia infinita uniparamétrica además de las álgebras $\mathcal{L}(10,3,5)$, $\mathcal{L}(10,3,7)$, $\mathcal{L}(10,5,7)$ y $\mathcal{Q}(10,3,5)$.

En la sección siguiente se estudian las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión mayor o igual a 11 y leyes $\mu(n,r_1,r_2)$ cuando r_2 es próximo a $n-3$. Estos casos especiales ocurren solamente cuando $n-6 \leq r_2 \leq n-3$ y se estudian separadamente porque el método que se utiliza consiste en cocientar por el ideal $\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$. Se obtienen, según la paridad de n, la familia de álgebras terminales reseñadas anteriormente.

En la última sección del capítulo se enuncian y demuestran los resultados que se adelantaban anteriormente y que son una generalización de los que se obtenían en el caso de álgebras de Lie 2-filiformes y 1-filiformes graduadas naturalmente. Así se prueba que si la dimensión $n \geq 11$ es impar cualquier álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente es isomorfa bien a una de la familia uniparamétrica $\tau(n,r,n-4)$, bien a una de la familia biparamétrica $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$. Si $n \geq 12$ es par es isomorfa bien a una de la familia uniparamétrica $\tau(n,r,n-5)$, bien a una de las familias biparamétricas $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$ o $\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$. La demostración de este resultado se ha probado usando inducción sobre cada pareja de valores consecutivos de n.

Resultan un total de $\frac{n^2-8n+7}{8}$ álgebras no escindidas si la dimensión n es impar y $\frac{n^2-10n+20}{4}$ si n es par. Además, existen trivialmente las álgebras escindidas $\mathfrak{g}_{(n-1)}\oplus\mathbf{C}$ y $\mathfrak{g}_{(n-2)}\oplus\mathbf{C}^2$, siendo $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ un álgebra filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-1$ y $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ un álgebra casifiliforme graduada naturalmente de dimensión $n-2$. Finalmente, en dimensión 8 y 9 existe un álgebra más en cada caso mientras que en dimensión 10 aparecen tres álgebras más y una familia infinita uniparamétrica de álgebras.

En el capítulo **2** se estudian propiedades geométricas de las álgebras encontradas. Es fundamental determinar las correspondientes álgebras de derivaciones, $Der(\mathfrak{g})$, para, a partir de ellas, describir el primer espacio de cohomología, $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, de cada álgebra. También se calculan las dimensiones del espacio de 2-cobordes, $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, y, por tanto, de las órbitas, $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$.

Dado que se tiene que $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})/B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, con $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ y $B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, respectivamente, los correspondientes espacios de 1-cociclos y 1-cobordes y dado que se pueden identificar $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \simeq Der(\mathfrak{g})$ y $B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \simeq Ad(\mathfrak{g})$ resulta que $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ no es más que el álgebra de Lie cociente $Der(\mathfrak{g})/Ad(\mathfrak{g})$ y que la dimensión de $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

no es otra que la de su álgebra de derivaciones asociada menos la del álgebra de las derivaciones interiores. Análogamente,

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) = (dim(\mathfrak{g}))^2 - dim(Der(\mathfrak{g})),$$

con lo que la mayor parte del capítulo se reduce al cálculo de las derivaciones de todas las álgebras 3-filiformes graduadas naturalmente.

La determinación del álgebra $Der(\mathfrak{g})$ es, en general, muy laboriosa pero en nuestro caso se simplifica hasta hacerse abordable a mano para $\mathfrak{g}$ de dimensión arbitraria, por admitir las álgebras aquí consideradas una graduación conexa con un número relativamente alto $(dim(\mathfrak{g}) - 3)$ de subespacios homogéneos (la propia graduación natural). En esta línea hay trabajos realizados, [13], [21], [18]. De todas formas, parece razonable abordar el problema del cálculo de $Der(\mathfrak{g})$ con técnicas computacionales como se hace, por ejemplo, en [17] y [36].

Índice

Resumen v

Agradecimientos vii

Introducción ix

0 Preliminares 1

0.1 Notaciones y terminología 1

0.2 Álgebras de Lie p-filiformes 4

0.3 Graduaciones de álgebras de Lie 5

0.4 Álgebras de Lie filiformes graduadas naturalmente 6

0.5 Álgebras de Lie 2-filiformes graduadas naturalmente 7

0.6 Cohomología 8

1 Álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente **11**

1.1 Estructura de las AL3FGN 12

1.1.1 Valores admisibles de r_1 y r_2 15

1.1.2 Teorema de estructura de las AL3FGN 25
1.2 Ejemplos 28
1.3 Dimensiones menores o iguales a 12 46
1.3.1 Clasificación de las AL3FGN hasta dimensión 8 47
1.3.2 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 9 51
1.3.3 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 10 56
1.3.4 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 11 65
1.3.5 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 12 71
1.4 Casos terminales 75
1.4.1 El caso $r_2 = n - 3$ 76
1.4.2 El caso $r_2 = n - 4$ 81
1.4.3 El caso $r_2 = n - 5$ 87
1.4.4 El caso $r_2 = n - 6$ 93
1.5 El caso general 100

2 Álgebras de derivaciones y aplicaciones 111

2.1 Estudio de la familia $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ 113
2.2 Estudio de la familia $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$ 122
2.3 Estudio de la familia $\tau(n, r_1, n-5)$ 132
2.4 Estudio de la familia $\tau(n, r_1, n-4)$ 144
2.5 Álgebras excepcionales 153

2.5.1 Dimensiones menores a 8 154

2.5.2 Dimensión 8 155

2.5.3 Dimensión 9 157

2.5.4 Dimensión 10 159

2.6 Álgebras escindidas 163

2.6.1 Estudio de $\mathcal{L}(n-1,r)\oplus\mathbf{C}$ 163

2.6.2 Estudio de $\mathcal{Q}(n-1,r)\oplus\mathbf{C}$ 166

2.6.3 Estudio de $\tau(n-1,n-5)\oplus\mathbf{C}$ 168

2.6.4 Estudio de $\tau(n-1,n-4)\oplus\mathbf{C}$ 169

2.6.5 Estudio de $\mathcal{L}_{n-2}\oplus\mathbf{C}^2$ 170

2.6.6 Estudio de $\mathcal{Q}_{n-2}\oplus\mathbf{C}^2$ 172

2.6.7 Estudio de $\epsilon_{(7,3)}\oplus\mathbf{C}$ 173

2.6.8 Estudio de $\epsilon^1_{(9,5)}\oplus\mathbf{C}$ 174

2.6.9 Estudio de $\epsilon^2_{(9,5)}\oplus\mathbf{C}$ 175

Problemas abiertos **177**

Referencias **179**

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo se recuerdan algunas definiciones y resultados bien conocidos que serán necesarios para el desarrollo del trabajo de investigación que se presenta.

Para aclarar dudas que puedan suscitarse en la lectura de esta memoria, pueden ser referencias clásicas de interés, entre otras, los textos de Chow [24], Jacobson [46], Humphreys [45], Belifante y Kolman [7] y Bauerle y Kerf [6]. Un excelente texto específico sobre álgebras de Lie nilpotentes es el de Goze y Khakimdjanov [40].

0.1 Notaciones y terminología

• Un *álgebra de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu)$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbf{K}$ provisto de una aplicación bilineal, llamada *producto o ley del álgebra* $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que verifica, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, las condiciones

1) $\mu(x, x) = 0$
2) $\mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(z, x)) + \mu(z, \mu(x, y)) = 0$ (identidad de Jacobi).

Habitualmente se denotará $\mu(x, y)$ por $[x, y]$ y se le designará el *producto corchete* de x e y. Por $\mathfrak{g}$ se denota indistintamente el álgebra o el espacio vectorial subyacente. La *dimensión del álgebra* $\mathfrak{g}$ es la dimensión del espacio vectorial $\mathfrak{g}$. En este trabajo se van a considerar álgebras de Lie sobre $\mathbf{C}$ de dimensión finita.

• Si $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ es el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ en $\mathbf{C}^n$ y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbf{C}^n$, cualquier elemento $\alpha \in \mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ puede determinarse mediante unos escalares $C_{i,j}^k$, llamados *constantes de estructura* y definidos por

$$\alpha(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k e_k$$

De esta forma se consigue dotar a $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ de estructura de espacio afín. Por tanto, se puede considerar un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como un elemento de $\mathcal{B}^2(\mathbf{C}^n)$ y el conjunto de leyes de álgebras de Lie sobre $\mathbf{C}^n$ es un conjunto algebraico definido por las relaciones polinomiales

$$C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k$$

$$\sum_{l=1}^{n} (C_{i,j}^l C_{k,l}^s + C_{j,k}^l C_{i,l}^s + C_{k,i}^l C_{j,l}^s) = 0$$

y parametrizado por las $\frac{n^3-n^2}{2}$ constantes de estructura $C_{i,j}^k$.

• Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si es no abeliana y sus únicos ideales son $\mathfrak{g}$ y $\{0\}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si no posee ideales abelianos no triviales, excluyéndose el álgebra nula. Toda álgebra de Lie simple es semisimple. Toda álgebra semisimple se puede expresar como suma directa de álgebras simples y éstas han sido clasificadas por Killing y Cartan [40],[45].

• La *sucesión derivada* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se define por

$$\begin{cases} \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) & = & \mathfrak{g} \\ \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) & = & [\mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g})], \quad i \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Si existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $\mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ y $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es *resoluble* de *índice de resolubilidad k.*

• La *sucesión central descendente* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se define por

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) & = & \mathfrak{g} \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})], \quad i \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Si existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $\mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ y $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es *nilpotente* de *índice de nilpotencia (o nilíndice) k.* Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, con $dim\ \mathfrak{g} = n$, se dice *filiforme* si es de nilíndice $n-1$, *casifiliforme* si es de nilíndice $n-2$ y *abeliana* si es de nilíndice 1.

• Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, se denota por $ad(X)$ el endomorfismo de $\mathfrak{g}$ definido por

$$\begin{array}{rccl} ad(X): & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & Y & \longrightarrow & ad(X)(Y) = [X, Y]. \end{array}$$

y se le llama *aplicación adjunta* de X.

La aplicación

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(\mathfrak{g})$$

es una representación de $\mathfrak{g}$, denominada *representación adjunta* del álgebra. El teorema de *Engel* dice que *"un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $ad(X)$ es nilpotente para todo elemento X de $\mathfrak{g}$"*.

- Un endomorfismo δ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es una *derivación* del álgebra si

$$\delta([X,Y]) = [\delta(X),Y] + [X,\delta(Y)] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

El conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$, denotado por $Der(\mathfrak{g})$, es un álgebra de Lie definiendo

$$[\delta,\delta^*] = \delta \circ \delta^* - \delta^* \circ \delta.$$

Si todas las derivaciones son nilpotentes, el álgebra se dice *característicamente nilpotente.* Se tiene que, $\forall X \in \mathfrak{g}$, el endomorfismo $ad(X)$ es una derivación que se dice *interior* del álgebra. El conjunto de las derivaciones interiores, $Ad(\mathfrak{g})$, es un ideal de $Der(\mathfrak{g})$.

- El álgebra de Lie de las derivaciones de una suma directa de álgebras generalmente no coincide con la suma directa de las álgebras de derivaciones. Sin embargo, existe un teorema que sí las relaciona en el sentido de que si $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{g}_i$, donde los $\mathfrak{g}_i$ son ideales del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se cumple que

$$Der\Big(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{g}_i \Big) = \Big(\bigoplus_{i=1}^{p} Der(\mathfrak{g}_i) \Big) \quad \bigoplus \quad \Big(\bigoplus_{i \neq j} D(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j) \Big)$$

$D(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j)$ es el conjunto de derivaciones d de $\mathfrak{g}$ tales que

$$\begin{array}{lcll} d(\mathfrak{g}_k) & = & 0 & \text{si} \quad k \neq i \\ d(\mathfrak{g}_i) & \subset & \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_j) & \text{y} \\ d([\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]) & = & 0. & \end{array}$$

- El teorema de *Lévi* [40],[46] afirma que toda álgebra de Lie se puede descomponer en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y una subálgebra semisimple. Módulo las derivaciones, la clasificación de las álgebras de Lie resolubles se reduce, en cierto sentido, a la de las nilpotentes [40]. Esto justifica la enorme importancia de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes.

0.2 Álgebras de Lie p-filiformes

• El teorema de *Engel* justifica que toda álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión n admite una base, $\{X_i,\ 0 \leq i \leq n-1\}$, tal que

$$\begin{array}{lcl} X_0 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] & & \\ [X_0, X_i] & = & \epsilon_{i+1} X_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-2,\ \text{con } \epsilon_j \in \{0,1\},\ 2 \leq j \leq n-1 \\ [X_0, X_{n-1}] & = & 0. \end{array}$$

Estas *bases* se llaman *adaptadas* y al correspondiente vector X_0 se le denomina *vector característico* de $\mathfrak{g}$.

• Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita n, para todo $X \in \mathfrak{g}$ se denota $c(X)$ a la sucesión, ordenada decrecientemente, de las dimensiones de los bloques de Jordan del operador nilpotente $ad(X)$. Se denomina *invariante de Goze* o *sucesión característica* de $\mathfrak{g}$ a

$$c(\mathfrak{g}) = Max\{c(X) : \quad X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\}$$

Las álgebras de Lie filiformes, casifiliformes y abelianas, de dimensión n, tienen por sucesión característica $(n-1,1), (n-2,1,1)$ y $(1,1,\ldots,1)$, respectivamente.

• Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, de dimensión n, se denomina *p-filiforme* si su invariante de Goze es $(n-p,1,\ldots,1)$. Las álgebras de Lie filiformes, casifiliformes y abelianas son las 1-filiformes, 2-filiformes y $(n-1)$-filiformes, respectivamente. De la definición se sigue que todo álgebra de Lie p-filiforme $\mathfrak{g}$, de dimensión n, tiene índice de nilpotencia $n-p$ (pero el recíproco no es cierto), que $1 \leq p \leq n-1$ y que siempre podrá hallarse una base adaptada de $\mathfrak{g}$, que se denotará $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-p}, Y_1, \ldots, Y_{p-1}\}$, siendo $X_0 \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ un vector característico y verificándose que

$$\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-p-1 \\ [X_0, X_{n-p}] & = & 0 & \\ [X_0, Y_j] & = & 0 & 1 \leq j \leq p-1. \end{array}$$

En esta memoria se clasifica una familia de álgebras de Lie 3-filiformes en dimensión arbitraria.

0.3 Graduaciones de álgebras de Lie

- Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **Z**-*graduada* si admite la descomposición

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$$

donde los subespacios $\mathfrak{g}_i$ verifican que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbf{Z}$. Se dice que $\bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$ es una **Z**-graduación del álgebra y en lo que resta de la memoria se usa el término graduación como sinónimo de **Z**-graduación. Si el conjunto de índices i para los que $\mathfrak{g}_i$ es no nulo es finito, la graduación se dice finita.

- Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se llama *filtrada* si se cumple que $\mathfrak{g} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} S_i$, con S_i subespacio de $\mathfrak{g}$ para todo i verificándose que $[S_i, S_j] \subset S_{i+j}$ $i, j \in \mathbf{Z}$. Si $S_i \subset S_j$, para $i > j$ la filtración se dice *descendente*. Una filtración $(S_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de $\mathfrak{g}$ se dice finita si existen $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ tal que

$$\begin{cases} S_i = \mathfrak{g}, & i \leq n_1 \\ S_i = \{0\}, & i \geq n_2 \end{cases}$$

- Si un álgebra de Lie es graduada, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$, se puede definir una filtración asociada a la graduación tomando $S_k = \bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{g}_i$. Si un álgebra de Lie es filtrada, $\mathfrak{g} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} S_i$, se puede definir un álgebra de Lie graduada, con espacio vectorial subyacente isomorfo a $\mathfrak{g}$, considerando $gr\ \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$ donde $\mathfrak{g}_i = \frac{\mathrm{S_i}}{\mathrm{S_{i+1}}}$ y definiendo en $gr\ \mathfrak{g}$ el producto $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$ donde $\overline{[X, Y]}$ es la clase del elemento $[X, Y] \in S_{i+j}$, cuando X e Y son representantes en S_i y S_j de las clases $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ respectivamente.

- Es evidente que una misma álgebra puede tener distintas graduaciones. Por mostrar un ejemplo, se citan a continuación cuatro graduaciones diferentes del álgebra modelo $\mathcal{L}_n$, siendo $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una base adaptada:

1. $\mathfrak{g}_0 = \mathcal{L}_n$.

2. $\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >$, $1 \leq i \leq n-1$.

3. $\mathfrak{g}_1 =< X_0, X_1 >$; $\mathfrak{g}_i =< X_i >$, $2 \leq i \leq n-1$.

4. $\mathfrak{g}_k =< X_{k+n-4} >, \ -1 \leq k \leq 5-n; \ \mathfrak{g}_0 =< X_{n-4} >; \ \mathfrak{g}_1 =< X_0, X_{n-3} >;$

$\mathfrak{g}_2 =< X_{n-2} >; \ \mathfrak{g}_3 =< X_{n-1} > .$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de nilíndice k, la sucesión central descendente $(\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}))_{0\leq i\leq k}$ define una filtración finita $(S_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, denominada *filtración natural*, considerando

$$S_{i+1} = \begin{cases} \mathfrak{g} & \text{si } i \leq 0 \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & \text{si } 1 \leq i \leq k-1 \\ \{0\} & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

Dicha filtración natural asocia a $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie graduada de igual índice de nilpotencia, dada por

$$gr\ \mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_i = \mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$$

Por nilpotencia, la anterior graduación es finita; es decir

$$gr\ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$$

con $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, para $i+j \leq k$.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que está *graduada naturalmente* si $gr\ \mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}$, y se denotará por $gr\ \mathfrak{g}$=$\mathfrak{g}$. En el ejemplo dado anteriormente de graduaciones del álgebra $\mathcal{L}_n$, la tercera corresponde a su graduación natural.

0.4 Álgebras de Lie filiformes graduadas naturalmente

Las álgebras de Lie filiformes se caracterizan por tener el índice de nilpotencia máximo en cada dimensión ($n-1$ si la dimensión es n).

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme graduada naturalmente de dimensión n, se cumple que

$$\begin{cases} dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) & = & n-2 \\ dim(\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})) & = & n-i-1 \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

y que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ donde

$$dim\ \mathfrak{g}_1 = 2; \quad dim\ \mathfrak{g}_i = 1, \ 2 \leq i \leq n-1$$

Siendo $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$, se obtiene que

$$\mathfrak{g}_1 = < X_0, X_1 >; \quad \mathfrak{g}_i = < X_i >, \ 2 \leq i \leq n-1$$

Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ filiformes graduadas naturalmente de dimensión n han sido determinadas por Vergne [56], resultando que $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_n$ *si* n *es impar o* $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_n$ *o* $\mathcal{Q}_n$ *cuando* n *es par, siendo*

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_n : \{ \ [X_0, X_i] = X_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-2. \\ n \geq 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{Q}_n : \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1} & 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1. \end{array} \right. \\ n \geq 6, \ n \text{ par} \end{array}$$

0.5 Álgebras de Lie 2-filiformes graduadas naturalmente

Las álgebras de Lie 2-filiformes se caracterizan por tener el índice de nilpotencia $n-2$ si la dimensión es n.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión n, admite una descomposición de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$, cumpliéndose alguna de las siguientes condiciones:

1. $dim\ \mathfrak{g}_1 = 3, \ dim\ \mathfrak{g}_i = 1, \ 2 \leq i \leq n-2$

2. $dim\ \mathfrak{g}_1 = 2, \ \exists r\ dim\ \mathfrak{g}_r = 2, \ dim\ \mathfrak{g}_i = 1, \ 2 \leq i \leq n-2, \ i \neq r$

Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ 2-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n han sido determinadas por Gómez y Jiménez Merchán [31]. Dichos autores demuestran que no todas las situaciones anteriores son admisibles, que otras dan lugar a un álgebra escindida ($\mathcal{L}_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ o $\mathcal{Q}_{n-1} \oplus \mathbf{C}$) y que las dimensiones pequeñas ($n \leq 9$) requieren un estudio particular por su excepcionalidad. Obtienen que, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ una base adaptada, el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes

$\mathcal{L}(n,r)$ $\left(n \geq 5,\ 3 \leq r \leq 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1,\ r \text{ impar}\right)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{r-i}] = (-1)^{i-1}\, Y & 1 \leq i \leq \dfrac{r-1}{2}. \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n,r)$ $(n \geq 7,\ n \text{ impar};\ 3 \leq r \leq n-4,\ r \text{ impar})$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{r-i}] = (-1)^{i-1}\, Y & 1 \leq i \leq \dfrac{r-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \dfrac{n-3}{2}. \end{cases}$$

$\tau(n, n-4)$ $(n \text{ impar},\ n \geq 7)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}\,(X_{n-4} + Y) & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}\,\frac{(n-3-2i)}{2}\, X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i}\,(i-1)\,\frac{(n-3-i)}{2}\, X_{n-2} & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [X_i, Y] = \frac{(5-n)}{2}\, X_{n-4+i} & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$\tau(n, n-3)$ $(n \text{ par},\ n \geq 6)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}\,(X_{n-3} + Y) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\,\frac{(n-2-2i)}{2}\, X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_1, Y] = \frac{(4-n)}{2}\, X_{n-2}. \end{cases}$$

0.6 Cohomología

Dados un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre el cuerpo $\mathbf{K}$ y un $\mathfrak{g}$-módulo V, se llama *cocadena* de grado j, $j \geq 1$, a cada aplicación multilineal alternada de $\bigotimes^j \mathfrak{g}$ en V. Si $C^j(\mathfrak{g}, V)$ es el espacio de las j-cocadenas, se tiene que

$$C^j(\mathfrak{g}, V) = Hom(\Lambda^j \mathfrak{g}, V) \quad j \geq 1.$$

Una cocadena de $\mathfrak{g}$ es un elemento de $C^*(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} C^j(\mathfrak{g}, V)$.

Si el endomorfismo $d : C^*(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^*(\mathfrak{g}, V)$ es el operador coborde, se designa por d_j a la restricción de d a $C^j(\mathfrak{g}, V)$, $d_j : C^j(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{j+1}(\mathfrak{g}, V)$.

Los subespacios de $C^j(\mathfrak{g}, V)$ definidos por

$$Z^j(\mathfrak{g}, V) = Ker\ d_j \quad \text{y} \quad B^j(\mathfrak{g}, V) = Im\ d_{j-1}$$

se denominan, respectivamente, espacio de los *cociclos* de grado j y espacio de los *cobordes* de grado j. Como $B^j(\mathfrak{g}, V)$ resulta ser un subespacio de $Z^j(\mathfrak{g}, V)$, tiene sentido hablar del espacio cociente $H^j(\mathfrak{g}, V) = Z^j(\mathfrak{g}, V)/B^j(\mathfrak{g}, V)$, al que se conoce como *espacio de cohomología* de grado j o j-ésimo espacio de cohomología (de $\mathfrak{g}$ con valores en V).

Si se considera $\mathfrak{g}$ como el $\mathfrak{g}$-módulo V anterior, se puede identificar $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con el espacio de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $Der(\mathfrak{g})$, y $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con el de las derivaciones interiores de $\mathfrak{g}$, $Ad(\mathfrak{g})$, de donde surge una fácil interpretación de $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Si se denota mediante $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ la *órbita* correspondiente a la ley de $\mathfrak{g}$ en la variedad de leyes de álgebras de Lie de dimensión n, $\mathcal{L}^n$, inducida por la acción de $GL(n, \mathbf{C})$, resulta que $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ puede ser provista de una estructura de variedad diferenciable, y que

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})).$$

Capítulo 1

Álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente

Se aborda en este capítulo la clasificación, en dimensión cualquiera, de las álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}$ de dimensión n e invariante de Goze $(n-3,1,1,1)$, que sean graduadas naturalmente; es decir, aquellas álgebras que, siendo graduadas, con la graduación inducida por la sucesión central descendente, son isomorfas al álgebra de partida.

El caso filiforme, caracterizado por ser el nilíndice máximo en cada dimensión, fue abordado por Vergne. En el estudio que realiza de la cohomología de las álgebras de Lie nilpotentes y que aplica al estudio de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes, la clasificación de las álgebras filiformes graduadas naturalmente desempeña un papel importante al permitir expresar un álgebra filiforme de una forma simplificada. Vergne obtiene su clasificación probando que, salvo isomorfismos, sólo existe un álgebra filiforme graduada naturalmente cuando la dimensión es impar (designada por $\mathcal{L}_n$) y existen dos álgebras para dimensiones pares ($\mathcal{L}_n$ y otra designada por $\mathcal{Q}_n$).

Goze y Khakimdjanov demuestran que cada álgebra de Lie filiforme es una deformación de $\mathcal{L}_n$ o $\mathcal{Q}_n$. Ellos han obtenido la descripción geométrica de las álgebras de Lie filiformes utilizando las álgebras de Lie filiformes y graduadas naturalmente. Su conocimiento ha permitido, también, obtener resultados relevantes sobre las dimensiones de las componentes irreducibles de la variedad de álgebras de Lie nilpotentes o en la descripción de álgebras filiformes característicamente nilpotentes.

Resulta claro que la determinación de las álgebras graduadas naturalmente de una familia de álgebras de Lie nilpotentes, aporta información relevante al estudio de la misma.

El caso casifiliforme es bastante más complicado. Gómez y Jiménez-Merchán lo resuelven y obtienen la clasificación de las álgebras de Lie de dimensión n y nilíndice $n-2$. Obtienen que solamente existe una familia de álgebras casifiliformes graduadas naturalmente cuando la dimensión es par (designada por $\mathcal{L}(n,r)$) y existen dos familias de álgebras cuando n es impar ($\mathcal{L}(n,r)$ y otra designada por $\mathcal{Q}(n,r)$). Estas álgebras desempeñan un papel análogo al de las álgebras $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{Q}_n$ en la familia de las filiformes.

También encuentran un álgebra más (terminal), distinta según la paridad de la dimensión n.

En esta memoria se continúa trabajando con álgebras de Lie de índice de nilpotencia elevado. Se aborda la clasificación de las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente en dimensión cualquiera.

La estructura del capítulo que se presenta, con un desarrollo que sugiere una "forma natural" de obtener los resultados es, sin duda, una consecuencia que produce el conocimiento completo de la solución del problema y que permite presentarlo de una forma tan elaborada que puede dejar oculta la dificultad que presentó encontrar pautas para su resolución.

1.1 Estructura de las AL3FGN

En esta sección, en primer lugar, se obtendrá una primera aproximación a la estructura de las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente [15]. Luego se estudiarán todas las situaciones admisibles que den lugar a álgebras de este tipo, ya sean escindidas o no. Se finalizará con el teorema de estructura de las citadas álgebras.

En toda la sección $\mathfrak{g}$ designará un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n.

Siempre será posible encontrar un vector (característico) $X_0 \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ y una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ tales que

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad 1 \le i \le n-4 \\ [X_0, X_{n-3}] &= 0 \\ [X_0, Y_1] &= 0 \\ [X_0, Y_2] &= 0 \end{cases}$$

por lo que la sucesión central descendente verificará que

$$\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) \supset < X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_{n-3} >, \quad 1 \le i \le n-4$$

Se tiene, además, el siguiente resultado técnico pero de gran importancia práctica.

Lema 1.1.1. *Sea $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, 3-filiforme y de dimensión n. Entonces*

$$X_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \quad \text{e} \quad Y_1, Y_2 \notin \mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g})$$

Demostración. Las condiciones de Jacobi aplicadas a los vectores X_0, X_i, Y_j, $1 \le i < j \le n-3$, permiten escribir

$$\begin{array}{lcll} [X_0, [X_i, X_j]] &=& [X_{i+1}, X_j] + [X_i, X_{j+1}], & 1 \le i < j \le n-4 \\ [X_0, [X_i, X_{n-3}]] &=& [X_{i+1}, X_{n-3}], & 1 \le i \le n-4 \end{array}$$

Se deduce que los diferentes productos corchete entre vectores de la base, $[X_i, X_j]$, pueden obtenerse con la ayuda del siguiente proceso recurrente:

$$[X_{n-4}, X_{n-3}], [X_{n-5}, X_{n-3}], [X_{n-5}, X_{n-4}], \dots, [X_t, X_{n-3}], \dots, [X_t, X_{t+1}], \dots$$

Vamos a demostrar, primeramente, que $X_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y lo vamos a hacer en distintos pasos.

- $X_1 \notin [Y_1, Y_2]$.

Si $X_1 \in [Y_1, Y_2]$, la relación de Jacobi $Jac(X_0, Y_1, Y_2)$ muestra que

$$0 \neq [X_0, [Y_1, Y_2]] = [[X_0, Y_1], Y_2] + [Y_1, [X_0, Y_2]] = 0$$

lo cual es una contradicción.

- $X_1 \notin [X_i, Y_j], \ 1 \le i \le n-3, \ 1 \le j \le 2$.

Si $X_1 \in [X_i, Y_j]$, $2 \le i \le n-3$, $1 \le j \le 2$, la relación de Jacobi $Jac(X_0, X_{i-1}, Y_j)$ implica que $[X_0, [X_{i-1}, Y_j]] = [X_i, Y_j]$ y se deduce que $X_1 \in Im(adX_0)$, lo cual es una contradicción.

Que $X_1 \notin [X_1, Y_j]$, $1 \leq j \leq 2$ es ahora evidente por nilpotencia de Y_j.

• $X_1 \notin [X_i, X_j]$, $1 \leq i < j \leq n-3$.

Si $X_1 \in [X_i, X_{n-3}]$, $2 \leq i \leq n-4$, se sigue de $Jac(X_0, X_{i-1}, X_{n-3})$ que

$$[X_0, [X_{i-1}, X_{n-3}]] = [X_i, X_{n-3}]$$

y se deduce que $X_1 \in Im(adX_0)$, lo cual es una contradicción.

Que $X_1 \notin [X_1, X_{n-3}]$ es evidente por nilpotencia.

Sea ahora (r,s) con $2 \leq r < s$ tal que $[X_r, X_s]$ es el primer producto que contiene X_1 como sumando, con coeficiente no nulo, en la combinación lineal en que se expresa. Entonces,

$$Jac(X_0, X_r, X_{s-1}) \Rightarrow [X_0, [X_r, X_{s-1}]] = [X_{r+1}, X_{s-1}] + [X_r, X_s] \Rightarrow X_1 \in Im(adX_0)$$

lo cual es una contradicción.

Que $X_1 \notin [X_1, X_k]$, $2 \leq k \leq n-3$ es evidente por nilpotencia

Para finalizar la demostración del lema hay que comprobar que los vectores Y_1, Y_2 no pertenecen a $\mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g})$. Basta observar que si fuese $Y_j \in \mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g})$ para algún $j \in \{1, 2\}$, el índice de nilpotencia de $\mathfrak{g}$ sería $n-2$ o $n-1$, con lo que $\mathfrak{g}$ sería casifiliforme o filiforme, contra lo supuesto. □

Obsérvese que si se identifica cada vector a su clase se obtienen las relaciones

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) & \supset & < X_0, X_1 > \\ \mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & \supset & < X_i >, \qquad 2 \leq i \leq n-3 \end{array}$$

y se deduce el siguiente corolario

Corolario 1.1.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme de dimensión n, graduada naturalmente $gr\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$, y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$. Se tiene entonces que*

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{g}_1 & \supset & < X_0, X_1 > & & \\ \mathfrak{g}_i & \supset & < X_i > & & 2 \leq i \leq n-3 \\ \mathfrak{g}_i & = & \{0\} & & \text{si} \quad i \leq 0 \quad \text{o} \quad i \geq n-2 \end{array}$$

Demostración. Los subespacios que constituyen la graduación natural son

$$\mathfrak{g}_i = \mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) \ , \ 1 \leq i \leq n-3$$

y de lo visto anteriormente son evidentes las citadas relaciones de contenido. □

Los vectores Y_1 e Y_2 deben pertenecer a alguno de los cocientes y ello va a motivar la consideración de notaciones distintas relacionadas con el o los subespacios a los que pertenezcan dichos vectores.

Se acaba de probar que las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente son graduaciones finitas con exactamente, $n-3$ subespacios no nulos, es decir, que

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-3} \mathfrak{g}_i, \ < X_0, X_1 > \subset \mathfrak{g}_1, \ < X_i > \subset \mathfrak{g}_i, \ 2 \leq i \leq n-3, \ [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \ \forall i, j$$

verificándose que

$$2 \leq dim(\mathfrak{g}_1) \leq 4, \quad 1 \leq dim(\mathfrak{g}_i) \leq 3, \quad 2 \leq i \leq n-3, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n-3} dim(\mathfrak{g}_i) = n.$$

Se va a representar por $\mu(n, r_1, r_2)$ a la familia de leyes de álgebras de Lie 3-filiformes, donde n es la dimensión y r_1 y r_2 las posiciones de los subespacios de la graduación natural donde aparecen los vectores Y_1 e Y_2, $1 \leq r_1, r_2 \leq n-3$, respectivamente. Además, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $r_1 \leq r_2$. En lo sucesivo, siempre que no haya lugar a confusión, se hablará del caso (n, r_1, r_2).

1.1.1 Valores admisibles de r_1 y r_2

Se va a probar en esta sección que si el álgebra correspondiente es no escindida r_1 y r_2 tienen que ser impares y distintos y ambos mayores que 1. Se abordarán también los casos en los que se obtienen álgebras escindidas.

I) Caso $(n, 1, 1)$

I.1) Subcaso $(4, 1, 1)$

Las álgebras 3-filiformes tienen por invariante de Goze $(1,1,1,1)$ y es evidente que sólo hay una, la abeliana.

I.2) Subcaso $(5,1,1)$

Proposición 1.1.3. *Las álgebras de ley* $\mu(5,1,1)$ *son isomorfas o bien a una suma directa* $\mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{C}^2$ *o bien a* $\mathcal{H}_2$.

Demostración. Las álgebras $\mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{C}^2$ y $\mathcal{H}_2$ son, obviamente, no isomorfas. Tienen, por ejemplo, diferente dimensión del centro.

Los subespacios de la graduación natural son ahora

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= < X_0, X_1, Y_1, Y_2 > \\ \mathfrak{g}_2 &= < X_2 > \end{aligned}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [X_0, X_1] &=& X_2 \\ [X_1, Y_1] &=& d_1 X_2 \\ [X_1, Y_2] &=& f_1 X_2 \\ [Y_1, Y_2] &=& h X_2 \end{array} \right.$$

Se puede suponer $d_1 = 0 = f_1$, sin más que aplicar el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_i' &=& X_i & \quad 0 \leq i \leq 2 \\ Y_1' &=& Y_1 + d_1 X_0 & \\ Y_2' &=& Y_2 + f_1 X_0 & \end{array} \right.$$

y se obtiene la familia de leyes expresada mediante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [X_0, X_1] &=& X_2 \\ [Y_1, Y_2] &=& h X_2 \end{array} \right.$$

Se puede suponer $h = \epsilon \in \{0, 1\}$ porque, si $h \neq 0$, el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_i' &=& X_i & \quad 0 \leq i \leq 2 \\ Y_1' &=& \frac{1}{h} Y_1 & \\ Y_2' &=& Y_2 & \end{array} \right.$$

permite suponer $h = 1$. En consecuencia, resulta el álgebra de ley

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_1] &=& X_2 & \\ [Y_1, Y_2] &=& \epsilon X_2 & \quad \epsilon \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

que se corresponde con un álgebra $\mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{C}^2$ si $\epsilon = 0$ y con el álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_2$ si $\epsilon = 1$. □

I.3) Subcaso $(n,1,1),\ n \geq 6$

Proposición 1.1.4. *Las álgebras de leyes* $\mu(n,1,1)$, $n \geq 6$, *son isomorfas a una suma directa* $\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$, *donde* $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ *representa un álgebra filiforme graduada naturalmente de dimensión* $n-2$.

Demostración. Los subespacios de la graduación natural son ahora

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1, Y_1, Y_2 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-3 \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3 \\ [X_i, Y_1] & = & d_i X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, Y_2] & = & f_i X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [Y_1, Y_2] & = & h X_2 & \end{array} \right.$$

Al aplicar la identidad de Jacobi se obtienen las siguientes restricciones

$Jac(X_0, Y_1, Y_2) \Rightarrow [X_0, [Y_1, Y_2]] = 0 \Rightarrow hX_3 = 0 \Rightarrow h = 0$

$Jac(X_0, X_i, Y_j),\ 1 \leq i \leq n-5,\ 1 \leq j \leq 2 \Rightarrow [X_0, [X_i, Y_j]] = [X_{i+1}, Y_j] \Rightarrow$
$\Rightarrow\ d_i = d_{i+1},\ f_i = f_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-5 \Rightarrow d_i = d_1,\ f_i = f_1,\ 1 \leq i \leq n-4$

y la ley de $\mathfrak{g}$ se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3 \\ [X_i, Y_1] & = & d_1 X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, Y_2] & = & f_1 X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \end{array} \right.$$

Además, se puede suponer $d_1 = 0 = f_1$, sin más que efectuar el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X'_i & = & X_i & 0 \leq i \leq n-3 \\ Y'_1 & = & Y_1 + d_1 X_0 & \\ Y'_2 & = & Y_2 + f_1 X_0 & \end{array} \right.$$

por lo que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley dada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3 \end{array} \right.$$

que se corresponde con un álgebra $\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$, siendo $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ filiforme de dimensión $n-2$ y graduada naturalmente. □

II) Caso (n, r_1, r_1), $2 \leq r_1 \leq n-3$

Proposición 1.1.5. *No existe ningún álgebra de ley* $\mu(n, r_1, r_1)$, $2 \leq r_1 \leq n-3$, *cualquiera que sea la dimensión* $n \in \mathbf{N}$.

Demostración. Los subespacios de la graduación natural resultan ser

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-3, \ i \neq r_1 \\ \mathfrak{g}_{r_1} & = & < X_{r_1}, Y_1, Y_2 > & \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3, \ i+j \neq r_1 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & a_{i,r_1-i} X_{r_1} + b_i Y_1 + c_i Y_2 & 1 \leq i < \frac{r_1}{2} \\ [X_i, Y_1] & = & d_i X_{i+r_1} & 1 \leq i \leq n-3-r_1 \\ [X_i, Y_2] & = & f_i X_{i+r_1} & 1 \leq i \leq n-3-r_1 \\ [Y_1, Y_2] & = & h X_{2r_1} & h = 0 \quad \text{si} \quad r_1 > \frac{n-3}{2} \end{array} \right.$$

Al aplicar la identidad de Jacobi se obtienen las siguientes restricciones

$$Jac(X_0, X_i, X_{r_1-1-i}), \ 1 \leq i < \tfrac{r_1}{2} - 1, \ r_1 \geq 5 \Rightarrow [X_0, [X_i, X_{r_1-1-i}]] = [X_i, X_{r_1-i}] +$$

$$+[X_{i+1}, X_{r_1-1-i}] \Rightarrow b_i = -b_{i+1}, \ c_i = -c_{i+1} \Rightarrow b_i = (-1)^{i-1} b_1, \ c_i = (-1)^{i-1} c_1, \quad 1 \leq i < \tfrac{r_1}{2}, \ r_1 \geq 5$$

Si $r_1 = 3, 4$ sólo existen b_1 y c_1, luego

$$b_i = (-1)^{i-1} b_1, \ c_i = (-1)^{i-1} c_1, \ 1 \leq i < \frac{r_1}{2}, \ r_1 \geq 3$$

Como la ley de $\mathfrak{g}$ ha quedado determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3, \\ & & & i+j \neq r_1 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & a_{i,r_1-i} X_{r_1} + (-1)^{i-1}(b_1 Y_1 + c_1 Y_2) & 1 \leq i < \frac{r_1}{2} \\ [X_i, Y_1] & = & d_i X_{i+r_1} & 1 \leq i \leq n-3-r_1 \\ [X_i, Y_2] & = & f_i X_{i+r_1} & 1 \leq i \leq n-3-r_1 \\ [Y_1, Y_2] & = & h X_{2r_1} & h = 0 \quad \text{si} \quad r_1 > \frac{n-3}{2} \end{array} \right.$$

se deduce que $\mathfrak{g}_{r_1} =< X_{r_1}, b_1 Y_1 + c_1 Y_2 > \Rightarrow dim(\mathfrak{g}_{r_1}) \leq 2$, lo que es imposible. $\square$

III) Caso $(n, 1, r_2)$, $2 \leq r_2 \leq n-3$

III.1) Subcaso $(n, 1, 2)$

Proposición 1.1.6. *No existe ningún álgebra de ley* $\mu(n, 1, 2)$ *cualquiera que sea la dimensión* $n \in \mathbf{N}$.

Demostración. Los subespacios de la graduación natural son ahora

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_2 & = & < X_2, Y_2 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & \qquad 3 \leq i \leq n-3 \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\left\{ \begin{array}{rcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & \quad 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & \quad 1 \leq i < j \leq n-i-3 \\ [X_1, Y_1] & = & d_1 X_2 + e Y_2 & \\ [X_i, Y_1] & = & d_i X_{i+1} & \quad 2 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, Y_2] & = & f_i X_{i+2} & \quad 1 \leq i \leq n-5 \\ [Y_1, Y_2] & = & h X_3 & \quad h = 0 \ \text{ si } \ n < 6 \end{array} \right.$$

$\forall A \in \mathbf{C}$ se cumple que $AX_0 + X_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, siendo su matriz adjunta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & A & 0 & \ldots & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & A + a_{12} & \ldots & 0 & 0 & 0 & f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A + a_{1,n-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix}$$

En dicha matriz no puede haber ningún menor de orden $n-3$ no nulo por ser $(n-3, 1, 1, 1)$ el invariante de Goze de $\mathfrak{g}$. En particular, debe ser cero el menor

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & A+a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A+a_{13} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A+a_{1,n-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e \end{vmatrix} = eA\prod_{i=2}^{n-4}(A+a_{1i})$$

Siempre se puede elegir A tal que

$$A \neq 0 \quad \text{y} \quad \prod_{i=2}^{n-4}(A+a_{1i}) \neq 0$$

por lo que se deduce que $e = 0$. Luego, $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, lo que correspondería al caso $(n,1,1)$ ya estudiado. □

III.2) Subcaso $(n,1,r_2)$, $3 \leq r_2 \leq n-3$

Los subespacios de la graduación natural son ahora

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-3,\ i \neq r_2 \\ \mathfrak{g}_{r_2} & = & < X_{r_2}, Y_2 > & \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] = a_{ij}X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3,\ i+j \neq r_2 \\ [X_i, X_{r_2-i}] = a_{i,r_2-i}X_{r_2} + c_iY_2 & 1 \leq i < \frac{r_2}{2} \\ [X_i, Y_1] = d_iX_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4\ ,\ i+1 \neq r_2 \\ [X_{r_2-1}, Y_1] = d_{r_2-1}X_{r_2} + eY_2 & \\ [X_i, Y_2] = f_iX_{i+r_2} & 1 \leq i \leq n-3-r_2 \\ [Y_1, Y_2] = hX_{1+r_2} & h = 0 \quad \text{si} \quad r_2 = n-3 \end{cases}$$

Al aplicar la identidad de Jacobi se obtienen las siguientes restricciones

$$Jac(X_0, X_{r_2-2}, Y_1) \Rightarrow [X_0, [X_{r_2-2}, Y_1]] = [X_{r_2-1}, Y_1] \Rightarrow d_{r_2-1} = d_{r_2-2} \quad \text{y} \quad e = 0$$

$Jac(X_0, X_i, Y_1),\ 1 \le i \le n-5,\ i \ne r_2 - 2 \Rightarrow [X_0, [X_i, Y_1]] = [X_{i+1}, Y_1] \Rightarrow$

$\Rightarrow d_i = d_{i+1},\ 1 \le i \le n-5,\ i \ne r_2 - 2$

De ambas, se sigue que $d_i = d_1,\ 1 \le i \le n-4$

$Jac(X_0, X_i, Y_2),\ 1 \le i \le n - r_2 - 4 \Rightarrow [X_0, [X_i, Y_2]] = [X_{i+1}, Y_2] \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f_i = f_{i+1},\ \ 1 \le i \le n - r_2 - 4 \Rightarrow f_i = f_1 \quad 1 \le i \le n - r_2 - 3$

$Jac(X_0, X_i, X_{r_2-1-i}),\ 1 \le i < \frac{r_2}{2} - 1,\ r_2 \ge 5 \Rightarrow [X_0, [X_i, X_{r_2-1-i}]] = [X_i, X_{r_2-i}] +$

$+[X_{i+1}, X_{r_2-1-i}] \Rightarrow c_i = -c_{i+1},\ \Rightarrow\ c_i = (-1)^{i-1}c_1,\ 1 \le i < \frac{r_2}{2},\ r_2 \ge 5$

Si $r_2 = 3, 4$ sólo existe c_1, luego $c_i = (-1)^{i-1}c_1,\ 1 \le i < \frac{r_2}{2},\ r_2 \ge 3$

Además, el cambio de base definido por las relaciones

$$\begin{cases} X'_i &= X_i & 0 \le i \le n-3 \\ Y'_1 &= Y_1 + d_1 X_0 & \\ Y'_2 &= Y_2 & \end{cases}$$

demuestra que d_1 se puede suponer nulo.

La familia de leyes resultante se expresa mediante

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le n-4 \\ [X_i, X_j] &= a_{ij} X_{i+j} & 1 \le i < j \le n-i-3,\ i+j \ne r_2 \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= a_{i,r_2-i} X_{r_2} + (-1)^{i-1} c_1 Y_2 & 1 \le i < \frac{r_2}{2} \\ [X_i, Y_2] &= f_1 X_{i+r_2} & 1 \le i \le n-3-r_2 \\ [Y_1, Y_2] &= h X_{1+r_2} & h = 0 \quad \text{si} \quad r_2 = n-3 \end{cases}$$

Se van a estudiar ahora, separadamente, cuando r_2 es par y cuando es impar.

III.2.1) Subcaso $(n, 1, r_2),\ 3 \le r_2 \le n-3,\ r_2$ par

Proposición 1.1.7. *No existe ningún álgebra de ley $\mu(n, 1, r_2),\ 3 \le r_2 \le n-3$, r_2 par, cualquiera que sea la dimensión $n \in \mathbf{N}$.*

Demostración. Se tiene que

$Jac(X_0, X_{\frac{r_2-2}{2}}, X_{\frac{r_2}{2}}) \Rightarrow [X_0, [X_{\frac{r_2-2}{2}}, X_{\frac{r_2}{2}}]] = [X_{\frac{r_2-2}{2}}, X_{\frac{r_2+2}{2}}] \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, lo que correspondería, de nuevo, al caso $(n, 1, 1)$ ya estudiado. □

III.2.2) Subcaso $(n, 1, r_2)$, $3 \leq r_2 \leq n-5$, r_2 impar

Proposición 1.1.8. *Las álgebras de ley $\mu(n, 1, r_2)$, $3 \leq r_2 \leq n-5$, r_2 impar, son isomorfas a una suma directa $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ representa un álgebra 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-1$.*

Demostración. Se cumple que

$Jac(X_0, Y_1, Y_2) \Rightarrow h = 0$ con lo que la ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3,\ i+j \neq r_2 \\ [X_i, X_{r_2-i}] & = & a_{i,r_2-i} X_{r_2} + (-1)^{i-1} c_1 Y_2 & 1 \leq i < \frac{r_2}{2} \\ [X_i, Y_2] & = & f_1 X_{i+r_2} & 1 \leq i \leq n-3-r_2 \end{cases}$$

Se ha de cumplir que $c_1 \neq 0$, porque de lo contrario, $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y se trataría del caso $(n, 1, 1)$.

Como $Y_1 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ e $Y_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, se deduce que la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde a la de una suma directa $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ es un álgebra casifiliforme de dimensión $n-1$ graduada naturalmente. □

III.2.3) Subcaso $(n, 1, n-4)$, $n-4$ impar

Proposición 1.1.9. *Las álgebras de ley $\mu(n, 1, n-4)$, $n-4$ impar, son isomorfas a una suma directa $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ representa un álgebra 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-1$.*

Demostración. Se verifica que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3, \\ & & & i+j \neq n-4 \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & a_{i,n-4-i} X_{n-4} + (-1)^{i-1} c_1 Y_2 & 1 \leq i < \frac{n-4}{2} \\ [X_1, Y_2] & = & f_1 X_{n-3} & \\ [Y_1, Y_2] & = & h X_{n-3} & \end{cases}$$

$Jac(X_i, X_{n-4-i}, Y_1)$, $1 \leq i < \frac{n-4}{2} \Rightarrow [Y_1, [X_i, X_{n-4-i}]] = 0 \Rightarrow c_1 h = 0$.

Se debe cumplir que $c_1 \neq 0$ porque, si $c_1 = 0$, entonces $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$. Por tanto, se deduce que $h = 0$ y como $Y_1 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ e $Y_1 \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde a la de una suma directa $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ representa un álgebra casifiliforme de dimensión $n-1$ graduada naturalmente. □

III.2.4) Subcaso $(n, 1, n-3)$, $n-3$ impar

Proposición 1.1.10. *Las álgebras de ley $\mu(n, 1, n-3)$, $n-3$ impar, son isomorfas o bien a una suma directa $\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$, donde $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ representa un álgebra filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-2$ o bien a $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ representa a un álgebra 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-1$.*

Demostración. La ley de $\mathfrak{g}$ está determinada ahora por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le n-4 \\ [X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j} & 1 \le i < j \le n-i-3, \\ & i+j \ne n-3 \\ [X_i, X_{n-3-i}] = a_{i,n-3-i} X_{n-3} + (-1)^{i-1} c_1 Y_2 & 1 \le i < \frac{n-3}{2} \end{cases}$$

Si $c_1 = 0$ el álgebra se puede expresar como $\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$, donde $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ es filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-2$ y si $c_1 \ne 0$ corresponde a un álgebra $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ es casifiliforme graduada naturalmente de dimensión $n-1$.□

IV) Caso (n, r_1, r_2), r_1 par, $2 \le r_1 \le n-4$, $r_1 < r_2 \le n-3$

IV.1) Subcaso $(n, 2, r_2)$, $3 \le r_2 \le n-3$

Proposición 1.1.11. *No existe ningún álgebra de ley $\mu(n, 2, r_2)$, $3 \le r_2 \le n-3$, cualquiera que sea la dimensión $n \in \mathbf{N}$.*

Demostración. Los subespacios de la graduación natural son ahora

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= < X_0, X_1 > \\ \mathfrak{g}_2 &= < X_2, Y_1 > \\ \mathfrak{g}_{r_2} &= < X_{r_2}, Y_2 > \\ \mathfrak{g}_i &= < X_i > \qquad 2 \le i \le n-3,\ i \ne 2, r_2 \end{aligned}$$

Al ser $\mathfrak{g}_2 = \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$, se deduce que $Y_1 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y, por tanto, dicho vector Y_1 debe aparecer en $[X_0, X_1]$, lo que es imposible. □

IV.2) Subcaso (n, r_1, r_2), r_1 par, $4 \le r_1 \le n-4$, $r_1 < r_2 \le n-3$

Proposición 1.1.12. *No existe ningún álgebra de ley $\mu(n, r_1, r_2)$, $4 \le r_1 \le n-4$, $r_1 < r_2 \le n-3$, r_1 par, cualquiera que sea la dimensión $n \in \mathbf{N}$.*

Demostración. Los subespacios de la graduación natural son ahora

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_{r_1} & = & < X_{r_1}, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_{r_2} & = & < X_{r_2}, Y_2 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-3, \ i \neq r_1, r_2 \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_j] & = & a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq n-i-3, \ i+j \neq r_1, r_2 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & a_{i,r_1-i} X_{r_1} + b_i Y_1 & 1 \leq i < \frac{r_1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] & = & a_{i,r_2-i} X_{r_2} + c_i Y_2 & 1 \leq i < \frac{r_2}{2} \\ [X_i, Y_1] & = & d_i X_{i+r_1} & 1 \leq i \leq n-3-r_1, \ i \neq r_2 - r_1 \\ [X_{r_2-r_1}, Y_1] & = & d_{r_2-r_1} X_{r_2} + e Y_2 & \\ [X_i, Y_2] & = & f_i X_{i+r_2} & 1 \leq i \leq n-3-r_2 \\ [Y_1, Y_2] & = & h X_{r_1+r_2} & h = 0 \quad \text{si} \quad r_2 > n-3-r_1 \end{array} \right.$$

Al aplicar la identidad de Jacobi se obtienen las siguientes restricciones

$Jac(X_0, X_i, X_{r_1-1-i})$, $1 \leq i < \frac{r_1}{2}-1$, $r_1 \geq 6 \Rightarrow b_i = -b_{i+1}$, $1 \leq i < \frac{r_1}{2}-1$, $r_1 \geq 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_i = (-1)^{i-1} b_1, \ 1 \leq i < \tfrac{r_1}{2}, \ r_1 \geq 6$$

Si $r_1 = 4$ sólo existe $b_1 \Rightarrow b_i = (-1)^{i-1} b_1, \ 1 \leq i < \frac{r_1}{2}, \ r_1 \geq 4$

$Jac(X_0, X_{\frac{r_1}{2}-1}, X_{\frac{r_1}{2}}) \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow Y_1 \notin C^1(\mathfrak{g})$ lo que correspondería al caso $(n, 1, r_2)$ ya estudiado. □

V) Caso (n, r_1, r_2), r_1 impar, r_2 par, $3 \leq r_1 \leq n-4$, $r_1 + 1 \leq r_2 \leq n-3$

Proposición 1.1.13. *No existe ningún álgebra de ley $\mu(n, r_1, r_2)$, r_1 impar, r_2 par, $3 \leq r_1 \leq n-4$, $r_1 + 1 \leq r_2 \leq n-3$, cualquiera que sea la dimensión $n \in \mathbf{N}$.*

Demostración. Los subespacios de la graduación natural son ahora

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_{r_1} & = & < X_{r_1}, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_{r_2} & = & < X_{r_2}, Y_2 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-3, \ i \neq r_1, r_2 \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ vendrá determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le n-4 \\ [X_i, X_j] &= a_{ij}X_{i+j} & 1 \le i < j \le n-i-3,\ i+j \ne r_1, r_2 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= a_{i,r_1-i}X_{r_1} + b_iY_1 & 1 \le i < \frac{r_1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= a_{i,r_2-i}X_{r_2} + c_iY_2 & 1 \le i < \frac{r_2}{2} \\ [X_i, Y_1] &= d_iX_{i+r_1} & 1 \le i \le n-3-r_1,\ i \ne r_2 - r_1 \\ [X_{r_2-r_1}, Y_1] &= d_{r_2-r_1}X_{r_2} + eY_2 & \\ [X_i, Y_2] &= f_iX_{i+r_2} & 1 \le i \le n-3-r_2 \\ [Y_1, Y_2] &= hX_{r_1+r_2} & h = 0 \quad \text{si} \quad r_2 > n-3-r_1 \end{cases}$$

$$Jac(X_0, X_i, X_{r_2-1-i}),\ 1 \le i < \tfrac{r_2}{2} - 1 \Rightarrow c_i = -c_{i+1},\ 1 \le i < \tfrac{r_2}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_i = (-1)^{i-1}c_1,\ 1 \le i < \tfrac{r_2}{2}$$

Se verifican dichas igualdades, independientemente de que sean $r_1 \ne r_2 - 1$ ó $r_1 = r_2 - 1$ ya que $[X_0, Y_1] = 0$

$$Jac(X_0, X_{\frac{r_2}{2}-1}, X_{\frac{r_2}{2}}) \ \Rightarrow\ c_1 = 0$$

$$Jac(X_0, X_{r_2-r_1-1}, Y_1) \ \Rightarrow\ e = 0$$

Se deduce que $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ lo que es imposible, pues sería $r_2 = 1$. □

Nota 1.1.14. Se acaba de demostrar lo que se indicaba al principio de la subsección, es decir, que los casos (n, r_1, r_2) con r_1 o r_2 par no son admisibles y que no puede ocurrir que los vectores Y_1 e Y_2 estén en el mismo subespacio de la graduación natural excepto en el primero (cuando esto último sucede, es decir, en los casos $(n, 1, 1)$ aparecen álgebras escindidas trivialmente esperables, salvo cuando $n = 5$ que surge también el álgebra de Heisenberg).

1.1.2 Teorema de estructura de las AL3FGN

Vamos a obtener, a continuación, la estructura general de la ley de un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente de dimensión arbitraria n.

Teorema 1.1.15. (de estructura de las AL3FGN) *Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, con $dim(\mathfrak{g}) = n$, $n \ge 8$, 3-filiforme graduada naturalmente es isomorfa a una* *de la familia de leyes siguiente, que puede ser expresada, en una base adaptada* $\{X_0,\ X_1,\ldots,X_{n-3},\ Y_1,\ Y_2\}$, *por*

$$\left\{\begin{array}{lll} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le n-4 & \\ [X_i,X_j]=a_{ij}X_{i+j} & 1\le i<j\le n-3-i & i+j\notin\{r_1,r_2\} \\ [X_i,X_{r_1-i}]=a_{i,r_1-i}X_{r_1}+(-1)^{i-1}Y_1 & 1\le i\le \frac{r_1-1}{2} & \\ [X_i,X_{r_2-i}]=a_{i,r_2-i}X_{r_2}+(-1)^{i-1}Y_2 & 1\le i\le \frac{r_2-1}{2} & \\ [X_i,Y_1]=dX_{i+r_1} & 1\le i\le n-3-r_1 & \\ [X_i,Y_2]=fX_{i+r_2} & 1\le i\le n-3-r_2 & \\ [Y_1,Y_2]=hX_{n-3} & h=0 \text{ si } r_1+r_2\ne n-3 & \end{array}\right.$$

siendo $3\le r_1<r_2\le n-3$, r_1 y r_2 *impares.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente de dimensión n y sea $\{X_0,\ X_1,\ldots,X_{n-3},\ Y_1,\ Y_2\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$.

Analizados todos los casos anteriores, podemos suponer que la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde al tipo $\mu(n,r_1,r_2)$, con $3\le r_1<r_2\le n-3$, r_1 y r_2 impares.

Se cumple que $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^{n-3}\mathfrak{g}_i$, donde

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{g}_1 &=& <X_0,X_1> \\ \mathfrak{g}_i &=& <X_i> \qquad 2\le i\le n-3,\ i\ne r_1,r_2 \\ \mathfrak{g}_{r_1} &=& <X_{r_1},Y_1> \\ \mathfrak{g}_{r_2} &=& <X_{r_2},Y_2> \end{array}$$

y, en consecuencia, la ley de $\mathfrak{g}$, vendrá determinada, salvo antisimetría, por los siguientes productos corchete:

$$\left\{\begin{array}{lll} [X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le n-4 & \\ [X_i,X_j]=a_{ij}X_{i+j} & 1\le i<j\le n-3-i & i+j\notin\{r_1,r_2\} \\ [X_i,X_{r_1-i}]=a_{i,r_1-i}X_{r_1}+b_iY_1 & 1\le i\le \frac{r_1-1}{2} & \\ [X_i,X_{r_2-i}]=a_{i,r_2-i}X_{r_2}+c_iY_2 & 1\le i\le \frac{r_2-1}{2} & \\ [X_i,Y_1]=d_iX_{i+r_1} & 1\le i\le n-3-r_1 & i\ne r_2-r_1 \\ [X_{r_2-r_1},Y_1]=d_{r_2-r_1}X_{r_2}+eY_2 & & \\ [X_i,Y_2]=f_iX_{i+r_2} & 1\le i\le n-3-r_2 & \\ [Y_1,Y_2]=hX_{r_1+r_2} & \text{si } r_1+r_2\le n-3 & \end{array}\right.$$

De $Jac(X_0,X_{r_2-r_1-1},Y_1)$ se sigue que $d_{r_2-r_1}=d_{r_2-r_1-1}$ y $e=0$.

De $Jac(X_0, X_i, Y_1)$, $1 \leq i \leq n-4-r_1$, $i \neq r_2 - r_1$ junto a $d_{r_2-r_1} = d_{r_2-r_1-1}$ se sigue que $d_i = d$, $1 \leq i \leq n-3-r_1$.

De $Jac(X_0, X_i, Y_2)$, $1 \leq i \leq n-4-r_2$, se sigue que $f_i = f$, $1 \leq i \leq n-3-r_2$.

Si $r_1 + r_2 \neq n-3$, de $Jac(X_0, Y_1, Y_2)$ se sigue que $h = 0$ (Obsérvese que para $r_1 + r_2 = n-3$ la identidad de Jacobi anterior resulta trivialmente).

Si $r_1 = 3$ sólo existe $b_1 = b$.

Si $r_1 \geq 5$, de $Jac(X_0, X_i, X_{r_1-i-1})$, $1 \leq i \leq \frac{r_1-3}{2}$, se sigue que

$$[X_0, a_{i,r_1-i-1}X_{r_1-1}] + [X_i, -X_{r_1-i}] + [X_{r_1-i-1}, X_{i+1}] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{i,r_1-i-1}X_{r_1} - a_{i,r_1-i}X_{r_1} - b_iY_1 - a_{i+1,r_1-i-1}X_{r_1} - b_{i+1}Y_1 = 0$$

(Obsérvese que $1 \leq i \leq \frac{r_1-3}{2} \Leftrightarrow i < \frac{r_1-2}{2} \Leftrightarrow 2i < r_1 - 2 \Leftrightarrow i+1 < r_1 - i - 1$)

En consecuencia, se cumple que $-b_i - b_{i+1} = 0$, $1 \leq i \leq \frac{r_1-3}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_{i+1} = -b_i, \ 1 \leq i \leq \tfrac{r_1-3}{2} \Rightarrow b_i = (-1)^{i-1}b, \ 1 \leq i \leq \tfrac{r_1-1}{2}$$

Análogamente, de $Jac(X_0, X_i, X_{r_2-i-1})$, $1 \leq i \leq \frac{r_2-3}{2}$, se sigue que

$$c_i = (-1)^{i-1}c, \qquad 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2}$$

Es evidente que $b \neq 0$ y $c \neq 0$ porque de lo contrario $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ o $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ y se trataría de una situación inadmisible ya que $Y_1 \in \mathcal{C}^{r_1-1}(\mathfrak{g})$ e $Y_2 \in \mathcal{C}^{r_2-1}(\mathfrak{g})$.

El cambio de base definido por las relaciones $X'_i = X_i$, $0 \leq i \leq n-3$, $Y'_1 = bY_1$, $Y'_2 = cY_2$, permite suponer que $b = 1 = c$ y, por tanto,

$$\begin{array}{rcll} b_i & = & (-1)^{i-1}, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ c_i & = & (-1)^{i-1}, & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \end{array}$$

En consecuencia, se ha demostrado el teorema de estructura de las álgebras 3-filiformes graduadas naturalmente. □

Nota 1.1.16. En el caso $(4,1,1)$ sólo hay un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente, la abeliana.

Nota 1.1.17. En el caso $(5, 1, 1)$ solamente hay un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente escindida $\mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{C}^2$, y una no escindida, $\mathcal{H}_2$ (álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 5).

Nota 1.1.18. En el caso $(n, 1, 1)$, $n \geq 6$, todas las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente posibles son de la forma $\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$, donde $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ representa un álgebra de Lie filiforme y graduada naturalmente de dimensión $n-2$.

Nota 1.1.19. El caso $(n, 1, r_2)$, $3 \leq r_2 \leq n-4$, r_2 impar, se reduce a una suma directa $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ representa un álgebra de Lie casifiliforme y graduada naturalmente de dimensión $n-1$.

Nota 1.1.20. El case $(n, 1, n-3)$, n par, se reduce o bien a una suma directa $\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$, donde $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ representa un álgebra de Lie filiforme y graduada naturalmente de dimensión $n-2$ o bien a $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ representa un álgebra de Lie casifiliforme y graduada naturalmente de dimensión $n-1$.

1.2 Ejemplos

Se presentan aquí algunas álgebras de Lie o familias de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente no escindidas y no isomorfas dos a dos. Aunque se presenten como ejemplos, se verá a lo largo del desarrollo de todo el capítulo que son, precisamente, todas las graduadas naturalmente no escindidas existentes para cada dimensión n.

Para cada valor de $n \geq 11$ habrá que considerar dos familias bi-paramétricas y localmente finitas de álgebras dos a dos no isomorfas que generalizan, en cierto sentido, a las álgebras filiformes $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{Q}_n$ (de manera análoga a lo que ocurre con éstas, la primera será válida para todas las dimensiones y la segunda solamente para dimensiones pares). Por analogía, se designarán mediante $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ y $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$, respectivamente. También hay que considerar dos familias uni-paramétricas y localmente finitas de álgebras dos a dos no isomorfas, que llamaremos "terminales" y de las cuales, una de ellas será válida solamente para dimensiones impares y la otra será válida solamente para dimensiones pares. Por razones que quedarán claras más adelante, se designarán mediante $\tau(n, r_1, n-5)$ la familia correspondiente a las dimensiones pares y $\tau(n, r_1, n-4)$ la correspondiente a las impares. Demostraremos en las dos siguientes secciones que estas álgebras mencionadas son las álgebras 3-filiformes graduadas naturalmente y no escindidas en el caso general para dimensión $n \geq 11$.

Las dimensiones menores a 11 precisan un estudio singular [10]. Así, en dimensión 5 existe un álgebra no escindida (la de Heisenberg); en dimensión 8 existe otra álgebra aparte de la $\mathcal{L}(8,3,5)$; en dimensión 9 la situación es parecida, con un álgebra excepcional y las álgebras $\mathcal{L}(9,3,5)$ y $\tau(9,3,5)$; finalmente, en dimensión 10 existen tres excepcionales y una familia infinita uni-paramétrica además de las álgebras $\mathcal{L}(10,3,5)$, $\mathcal{L}(10,3,7)$, $\mathcal{L}(10,5,7)$ y $\mathcal{Q}(10,3,5)$.

Todos los ejemplos están expresados por leyes referidas a una base adaptada $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$, siendo n la dimensión del álgebra y X_0 un vector característico.

Ejemplo 1.- Se va a denotar mediante $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$, $\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$, $\tau(n,r_1,n-5)$ y $\tau(n,r_1,n-4)$, respectivamente, a las familias localmente finitas de álgebras de Lie de dimensión n cuyas leyes vienen definidas por

$\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$ $\quad (n \geq 8,\ r_1,\ r_2$ impar, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-3)$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_j - i}] & = & (-1)^{i-1} Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2 \end{array}\right.$$

$\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$ $\quad (n$ par, $n \geq 10$, $r_1,\ r_2$ impar, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-5)$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_j - i}] & = & (-1)^{i-1} Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2 \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{array}\right.$$

$\tau(n,r,n-5)$ $\quad (n$ par, $n \geq 12$, r impar, $3 \leq r \leq n-7)$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1} (X_{n-5} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} \frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i} (i-1) \frac{(n-4-i)}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_i, Y_2] & = & \frac{(6-n)}{2} X_{n-5+i} & 1 \leq i \leq 2 \end{array}\right.$$

$\tau(n,r,n-4)$ (n impar, $n \geq 9$, r impar, $3 \leq r \leq n-6$) :

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i,X_{r-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2} \\ [X_i,X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}(X_{n-4}+Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i,X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2}X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1,Y_2] & = & \frac{(5-n)}{2}X_{n-3} & \end{array}\right.$$

Nota 1.2.1. El álgebra de Heisenberg de dimensión 5 se denota mediante $\mathcal{H}_2$ y viene dada por

$$\mathcal{H}_2 : \left\{\begin{array}{l} [X_0,X_1] = X_2 \\ [Y_1,Y_2] = X_2 \end{array}\right.$$

Ejemplo 2.- Se van a denotar mediante $\epsilon(8,3,5)$, $\epsilon(9,3,5)$ $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$ y $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$, respectivamente, a las álgebras de Lie o familias de álgebras de Lie (de dimensiones respectivas 8, 9, 10 y 10) tales que sus leyes vienen dadas por

$\epsilon(8,3,5)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0,X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1,X_2] = Y_1 & \\ [X_1,X_4] = Y_2 & \\ [X_2,X_3] = -Y_2 & \\ [X_1,Y_1] = X_4 & \\ [X_2,Y_1] = X_5 & \end{array}\right.$$

$\epsilon(9,3,5)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0,X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1,X_2] = Y_1 & \\ [X_1,X_4] = Y_2 & \\ [X_2,X_3] = -Y_2 & \\ [X_i,Y_1] = X_{i+3} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1,Y_2] = X_6 & \end{array}\right.$$

$\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0,X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1,X_2] = Y_1 & \\ [X_1,X_4] = Y_2 & \\ [X_1,X_6] = \gamma X_7 & \\ [X_2,X_3] = -Y_2 & \\ [X_2,X_5] = -\gamma X_7 & \\ [X_3,X_4] = \gamma X_7 & \\ [X_i,Y_1] = X_{i+3} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_i,Y_2] = X_{i+5} & 1 \leq i \leq 2 \end{array}\right.$$

$\gamma = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} [X_0,X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1,X_2] = Y_1 & \\ [X_1,X_4] = X_5 + Y_2 & \\ [X_1,X_5] = 2X_6 & \\ [X_1,X_6] = (3-\gamma)X_7 & \\ [X_2,X_3] = -X_5 - Y_2 & \\ [X_2,X_4] = -X_6 & \\ [X_2,X_5] = (-1+\gamma)X_7 & \\ [X_3,X_4] = -\gamma X_7 & \\ [X_i,Y_2] = -2X_{i+5} & 1 \leq i \leq 2 \end{array}\right.$$

$\gamma \in \{0,1,3\}$

Teorema 1.2.2. *Las álgebras $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$, $\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$, $\tau(n,r_1,n-5)$ y $\tau(n,r_1,n-4)$, descritas anteriormente en el ejemplo* **1** *(con las correspondientes restricciones para n, r_1 y r_2 indicadas en cada caso), son todas álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente y dos a dos no isomorfas.*

Demostración. Es evidente que todas las álgebras citadas son 3-filiformes y graduadas naturalmente.

Si $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}$ son álgebras de Lie cuyas leyes son, respectivamente, de tipos $\mu(n,r_1,r_2)$ y $\mu(n,r_1',r_2')$ con $(r_1,r_2) \neq (r_1',r_2')$, se tiene que $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}$ son no isomorfas pues, en tal caso, no son iguales las dimensiones de alguna de las parejas de ideales $\mathcal{C}^{r_1}(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{C}^{r_1}(\bar{\mathfrak{g}})$, $\mathcal{C}^{r_2}(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{C}^{r_2}(\bar{\mathfrak{g}})$, $\mathcal{C}^{r_1'}(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{C}^{r_1'}(\bar{\mathfrak{g}})$, $\mathcal{C}^{r_2'}(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{C}^{r_2'}(\bar{\mathfrak{g}})$.

En efecto, si $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie de tipo $\mu(n,r_1,r_2)$ y $\{X_0,X_1,X_2,\ldots,X_{n-3},Y_1,Y_2\}$ una base adaptada, entonces, los subespacios r_1 y r_2-ésimos de la graduación natural son

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{g}_{r_1} & = \mathcal{C}^{r_1-1}(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^{r_1}(\mathfrak{g}) & = \; < X_{r_1}, Y_1 > \\ \mathfrak{g}_{r_2} & = \mathcal{C}^{r_2-1}(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^{r_2}(\mathfrak{g}) & = \; < X_{r_2}, Y_2 > \end{array}$$

Análogamente, si la ley de $\bar{\mathfrak{g}}$ es del tipo $\mu(n,r_1',r_2')$ y $\{U_0,U_1,U_2,\ldots,U_{n-3},V_1,V_2\}$ una base adaptada, se cumple que

$$\begin{array}{lll} \bar{\mathfrak{g}}_{r_1'} & = \mathcal{C}^{r_1'-1}(\bar{\mathfrak{g}})/\mathcal{C}^{r_1'}(\bar{\mathfrak{g}}) & = \; < U_{r_1'}, V_1 > \\ \bar{\mathfrak{g}}_{r_2'} & = \mathcal{C}^{r_2'-1}(\bar{\mathfrak{g}})/\mathcal{C}^{r_2'}(\bar{\mathfrak{g}}) & = \; < U_{r_2'}, V_2 > \end{array}$$

Caso 1: $r_2 \neq r_2'$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $r_2 < r_2'$.

Si $\mathfrak{g}$ es del tipo $\mu(n,r_1,r_2)$ y como se verifica que $r_1 < r_2$, $r_1' < r_2'$ y

$$\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) \supset < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3} >, \quad 1 \leq i \leq n-4$$

se cumple que

$$\begin{array}{l} Y_2 \in \mathcal{C}^{r_2-1}(\mathfrak{g}) \wedge Y_2 \notin \mathcal{C}^{r_2}(\mathfrak{g}) \\ Y_1 \in \mathcal{C}^{r_1-1}(\mathfrak{g}) \wedge Y_1 \notin \mathcal{C}^{r_1}(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{C}^{r_2}(\mathfrak{g}) \Rightarrow Y_1 \notin \mathcal{C}^{r_2}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Se deduce que $\mathcal{C}^{r_2}(\mathfrak{g}) = < X_{r_2+1}, X_{r_2+2}, \ldots, X_{n-3} > \Rightarrow dim(\mathcal{C}^{r_2}(\mathfrak{g})) = n - r_2 - 3$.

Si $\bar{\mathfrak{g}}$ es del tipo $\mu(n,r_1',r_2')$ y como $r_2 < r_2' \Rightarrow r_2 \leq r_2' - 1$ se cumple que

$$V_2 \in \mathcal{C}^{r_2'-1}(\bar{\mathfrak{g}}) \Rightarrow V_2 \in \mathcal{C}^{r_2}(\bar{\mathfrak{g}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}^{r_2}(\bar{\mathfrak{g}}) \supset < U_{r_2+1}, U_{r_2+2}, \ldots, U_{n-3}, V_2 > \Rightarrow dim(\mathcal{C}^{r_2}(\bar{\mathfrak{g}})) \geq n - r_2 - 2$$

Más concretamente, se verifica que

$$dim(\mathcal{C}^{r_2}(\bar{\mathfrak{g}})) = \begin{cases} n - r_2 - 2 & \text{si } V_1 \notin \mathcal{C}^{r_2}(\bar{\mathfrak{g}}) \\ n - r_2 - 1 & \text{si } V_1 \in \mathcal{C}^{r_2}(\bar{\mathfrak{g}}) \end{cases}$$

y, en consecuencia, la dimensión del subespacio r_2-ésimo de la sucesión central descendente es diferente y queda demostrado en este caso que cualquier álgebra de tipo $\mu(n, r_1, r_2)$ es no isomorfa a cualquiera de tipo $\mu(n, r'_1, r'_2)$.

Caso 2: $r_2 = r'_2$

Como $(r_1, r_2) \neq (r'_1, r'_2)$ se deduce que $r_1 \neq r'_1$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r_1 < r'_1$.

Si $\mathfrak{g}$ es del tipo $\mu(n, r_1, r_2)$ y como $r_1 < r_2 \Rightarrow r_1 \leq r_2 - 1$, se cumple que

$$\begin{array}{l} Y_1 \in \mathcal{C}^{r_1-1}(\mathfrak{g}) \wedge Y_1 \notin \mathcal{C}^{r_1}(\mathfrak{g}) \\ Y_2 \in \mathcal{C}^{r_2-1}(\mathfrak{g}) \Rightarrow Y_2 \in \mathcal{C}^{r_1}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Se deduce que $\mathcal{C}^{r_1}(\mathfrak{g}) =< X_{r_1+1}, X_{r_1+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_2 >\Rightarrow dim(\mathcal{C}^{r_1}(\mathfrak{g})) = n - r_1 - 2$.

Si $\bar{\mathfrak{g}}$ es del tipo $\mu(n, r'_1, r'_2)$ y como $r_1 < r'_1 \Rightarrow r_1 \leq r'_1 - 1$, $r_1 < r_2 = r'_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow r_1 \leq r'_2 - 1$, se cumple que

$$\begin{array}{l} V_1 \in \mathcal{C}^{r'_1-1}(\bar{\mathfrak{g}}) \Rightarrow V_1 \in \mathcal{C}^{r_1}(\bar{\mathfrak{g}}) \\ V_2 \in \mathcal{C}^{r'_2-1}(\bar{\mathfrak{g}}) \Rightarrow V_2 \in \mathcal{C}^{r_1}(\bar{\mathfrak{g}}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}^{r_1}(\bar{\mathfrak{g}}) =< U_{r_1+1}, U_{r_1+2}, \ldots, U_{n-3}, V_1, V_2 >\Rightarrow dim(\mathcal{C}^{r_1}(\bar{\mathfrak{g}})) = n - r_1 - 1$$

y, en consecuencia, la dimensión del subespacio r_1-ésimo de la sucesión central descendente es diferente y queda demostrado en este caso que cualquier álgebra de tipo $\mu(n, r_1, r_2)$ y cualquier álgebra de tipo $\mu(n, r'_1, r'_2)$ son no isomorfas.

A continuación, veamos que dos álgebras cualesquiera, aunque sean del mismo tipo $\mu(n, r_1, r_2)$, pero pertenecientes a dos familias distintas, son no isomorfas.

- $\mathcal{L}(n, r_1, r_2) \not\simeq \mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$

Se cumple que, por ejemplo, el invariante $[\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})]$ tiene dimensión distinta, ya que

$$\begin{aligned} dim([\mathcal{C}^1(\mathcal{L}(n, r_1, r_2)), \mathcal{C}^1(\mathcal{L}(n, r_1, r_2))]) &= \begin{cases} 1 & \text{si } r_1 = 3 \\ 2 & \text{si } r_1 \neq 3 \end{cases} \\ dim([\mathcal{C}^1(\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)), \mathcal{C}^1(\mathcal{Q}(n, r_1, r_2))]) &= \begin{cases} 2 & \text{si } r_1 = 3 \\ 3 & \text{si } r_1 \neq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- $\mathcal{L}(n, r_1, r_2) \not\simeq \tau(n, r_1, r_2), \; r_2 = n-4, \; n-5$

Se cumple que, por ejemplo, el centro de $\mathfrak{g}$ tiene dimensión distinta, ya que

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{Z}(\mathcal{L}(n, r_1, r_2))) &= 3 \\ dim(\mathcal{Z}(\tau(n, r_1, r_2))) &= 2 \end{aligned}$$

- $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2) \not\simeq \tau(n, r_1, r_2), \; r_2 = n-4, \; n-5$

Se cumple también que, por ejemplo, el centro de $\mathfrak{g}$ tiene dimensión distinta, ya que

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{Z}(\mathcal{Q}(n, r_1, r_2))) &= 3 \\ dim(\mathcal{Z}(\tau(n, r_1, r_2))) &= 2 \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.3. *Las álgebras* $\mathcal{H}_2$, $\epsilon(8,3,5)$, $\epsilon(9,3,5)$ $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$ $(\gamma \in \mathbf{C}, \gamma = re^{i\theta}, r \geq 0, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ *y* $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$ $(\gamma \in \{0,1,3\})$, *descritas anteriormente en el ejemplo* **2**, *son todas álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente y dos a dos no isomorfas.*

Demostración. Es inmediato que todas las álgebras citadas son 3-filiformes y graduadas naturalmente.

Es evidente que dos álgebras cualesquiera que tengan dimensión diferente son no isomorfas dos a dos. En consecuencia, habrá que demostrarlo solamente para las álgebras $\epsilon^{1,\gamma_1}(10,3,5)$ y $\epsilon^{2,\gamma_2}(10,3,5)$, donde $\gamma_1 \in \mathbf{C}$, $\gamma_1 = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $\gamma_2 \in \{0,1,3\}$, que son todas de dimensión 10. Habrá que intentar buscar al menos un invariante que permita distinguir que se trata de dos familias no isomorfas. Para las álgebras de cada una de estas dos familias habrá que efectuar cambios de base genéricos.

- $\epsilon^{1,\gamma_1}(10,3,5) \not\simeq \epsilon^{2,\gamma_2}(10,3,5)$

Se cumple que, por ejemplo, tienen el centro de dimensión distinta, ya que

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{Z}(\epsilon^{1,\gamma_1}(10,3,5))) &= 1 \\ dim(\mathcal{Z}(\epsilon^{2,\gamma_2}(10,3,5))) &= 2 \end{aligned}$$

El problema de la clasificación de las álgebras de Lie de una determinada familia consiste en la determinación de todas las álgebras de la familia anterior que no sean isomorfas entre sí. Estos isomorfismos deberán corresponder, bien a cambios de base de Jordan de adX_0 (manteniéndose invariante el propio vector característico X_0), bien a transformaciones que cambien el vector característico o a composiciones de ambas. Es debido a que cualquier cambio de base genérico puede expresarse como combinación lineal de los dos mencionados. Vamos a analizar las dos posibilidades en cada una de los dos familias.

- $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5) \not\simeq \epsilon^{1,\gamma'}(10,3,5), \ \gamma' \neq \gamma, \ -\gamma$

Recordamos que, siendo $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, la ley de $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$, salvo antisimetría, viene determinada por los siguientes productos corchete:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_1, X_6] = \gamma X_7 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \\ [X_2, X_5] = -\gamma X_7 & \\ [X_3, X_4] = \gamma X_7 & \\ [X_i, Y_1] = X_{i+3} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_i, Y_2] = X_{i+5} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

- $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5) \not\simeq \epsilon^{1,\gamma'}(10,3,5)$ **(Cambios de base de Jordan)**

Una nueva base de Jordan del operador adX_0 se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} X_0' &= X_0 \\ X_1' &= A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4X_4 + A_5X_5 + A_6X_6 + A_7X_7 + B_1Y_1 + \\ & \quad + B_2Y_2 \\ X_2' &= A_1X_2 + A_2X_3 + A_3X_4 + A_4X_5 + A_5X_6 + A_6X_7 \\ X_3' &= A_1X_3 + A_2X_4 + A_3X_5 + A_4X_6 + A_5X_7 \\ X_4' &= A_1X_4 + A_2X_5 + A_3X_6 + A_4X_7 \\ X_5' &= A_1X_5 + A_2X_6 + A_3X_7 \\ X_6' &= A_1X_6 + A_2X_7 \\ X_7' &= A_1X_7 \\ Y_1' &= A_0A_1X_3 + A_0A_2X_4 + (A_0A_3 - A_1B_1)X_5 + (A_0A_4 - A_2B_1)X_6 + \\ & \quad + [A_0A_5 - A_3B_1 - A_1B_2 + (2A_1A_5 - 2A_2A_4 + A_3^2)\gamma]X_7 + A_1^2Y_1 + \\ & \quad + (2A_1A_3 - A_2^2)Y_2 \\ Y_2' &= A_0A_1X_5 + A_0A_2X_6 + [A_0A_3 - A_1B_1 + (2A_1A_3 - A_2^2)\gamma]X_7 + A_1^2Y_2 \end{cases}$$

donde se han elegido los coeficientes de manera que no cambie el vector característico en la nueva base, es decir, se ha de cumplir que

$$\begin{array}{lcll} [X_0', X_i'] &=& X_{i+1}', & 1 \leq i \leq 6 \\ Y_1' &=& [X_1', X_2'] & \\ Y_2' &=& [X_1', X_4'] & \end{array}$$

El determinante de la matriz de paso de la inicial a la nueva base es A_1^{11} y para que constituya isomorfismo necesariamente ha de ser $A_1 \neq 0$.

También se debe cumplir que

$$0 = [X_0', Y_1'] = (A_0A_1)X_4 + (A_0A_2)X_5 + (A_0A_3 - A_1B_1)X_6 + (A_0A_4 - A_2B_1)X_7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} A_0A_1 & = & 0 & \Rightarrow A_0 = 0 \text{ al ser } A_1 \neq 0 \\ A_0A_2 & = & 0 & \text{evidentemente} \\ A_0A_3 - A_1B_1 & = & 0 & \Rightarrow A_1B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \\ A_0A_4 - A_2B_1 & = & 0 & \text{evidentemente} \end{array} \right.$$

$$0 = [X_0', Y_2']$$
$$0 = [X_1', X_3']$$
$$0 = [X_1', X_5']$$

$$[X_1', X_6'] = A_1^2\gamma X_7 = A_1\gamma X_7' = \gamma' X_7' \Leftrightarrow A_1\gamma = \gamma'$$

Se observa que se puede simplificar la expresión de los vectores Y_1' e Y_2':

$$Y_1' = [-A_1B_2 + (2A_1A_5 - 2A_2A_4 + A_3^2)\gamma]X_7 + A_1^2Y_1 + (2A_1A_3 - A_2^2)Y_2$$

$$Y_2' = (2A_1A_3 - A_2^2)\gamma X_7 + A_1^2Y_2$$

$$\begin{array}{l} X_4' = [X_1', Y_1'] = A_1^3X_4 + A_2A_1^2X_5 + (3A_1^2A_3 - A_1A_2^2)X_6 + \\ \quad +(2A_1A_2A_3 - A_2^3 + A_1^2A_4)X_7 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A_1 & = & A_1^3 \Rightarrow A_1^2 = 1 \Rightarrow A_1 = 1 \text{ ó } A_1 = -1 \\ A_2 & = & A_2A_1^2 \Rightarrow A_2 = A_2 \\ A_3 & = & 3A_1^2A_3 - A_1A_2^2 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{2}A_1A_2^2 \Rightarrow Y_2' = Y_2 \\ A_4 & = & 2A_1A_2A_3 - A_2^3 + A_1^2A_4 \Leftrightarrow A_4 = A_4 \end{array} \right.$$

Se verifican también las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{lcll} [X_1', Y_2'] & = & X_6' & \\ [X_2', X_3'] & = & -Y_2' & \\ [X_2', X_4'] & = & 0 & \\ [X_2', X_5'] & = & -A_1^2\gamma X_7 = (-A_1\gamma)A_1X_7 = -\gamma' X_7' & \\ [X_2', X_6'] & = & [X_2', X_7'] = 0 & \\ [X_2', Y_1'] & = & X_5' & \\ [X_2', Y_2'] & = & X_7' & \\ [X_3', X_4'] & = & A_1^2\gamma X_7 = \gamma' X_7' & \\ [X_3', X_k'] & = & 0, & 5 \leq k \leq 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
[X_3', Y_1'] & = & X_6' & \\
[X_3', Y_2'] & = & 0 & \\
[X_4', X_k'] & = & 0, & 5 \leq k \leq 7 \\
[X_4', Y_1'] & = & X_7' & \\
[X_4', Y_2'] & = & 0 & \\
[X_5', X_k'] & = & 0, & 6 \leq k \leq 7 \\
[X_5', Y_i'] & = & 0, & 1 \leq i \leq 2 \\
[X_6', X_7'] & = & 0 & \\
[X_6', Y_i'] & = & 0, & 1 \leq i \leq 2 \\
[X_7', Y_i'] & = & 0, & 1 \leq i \leq 2
\end{array}$$

En consecuencia, se ha demostrado que resultan válidos los cambios de base de Jordan que cumplan:

$$\begin{array}{lcl}
A_0 & = & 0 \\
A_1 & = & 1 \text{ ó } A_1 = -1 \\
A_3 & = & \frac{1}{2} A_1 A_2^2 \\
B_1 & = & 0 \\
A_i,\ B_2 & \in & \mathbf{C} \qquad 2 \leq i \leq 7
\end{array}$$

Al ser $\gamma' = A_1 \gamma \Rightarrow \gamma' = \gamma$ ó $\gamma' = -\gamma$, se deduce que con estos cambios de base sólo se puede transformar un álgebra $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$ en otra $\epsilon^{1,\gamma'}(10,3,5)$ si $\gamma' = \pm\gamma$.

- $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5) \not\simeq \epsilon^{1,\gamma'}(10,3,5)$ **(Cambios de vector característico)**

Para que un vector del álgebra pueda ser vector característico, no tiene que estar en la derivada y, por tanto, será de la forma

$X_0' = C_0X_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 + C_5X_5 + C_6X_6 + C_7X_7 + D_1Y_1 + D_2Y_2$ con $C_0 \neq 0$ ó $C_1 \neq 0$.

Considerando $X_1' = X_1$, se tendrán que cumplir las siguientes igualdades

$$[X_0', X_1'] = X_2' = C_0X_2 - D_1X_4 - D_2X_6 - C_6\gamma X_7 - C_2Y_1 - C_4Y_2$$

$$\begin{aligned}[X_0', X_2'] = X_3' = {} & C_0^2X_3 - C_1C_2X_4 - (2C_0D_1 + C_2^2)X_5 - (C_1C_4 + C_2C_3)X_6 + \\ & + [D_1^2 - 2C_0D_2 - 2C_2C_4 + (C_0C_5 - D_1C_3 - C_1D_2)\gamma]X_7 + C_0C_1Y_1 + \\ & + (C_0C_3 - C_1D_1)Y_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X_0', X_3'] = X_4' = {} & C_0(C_0^2 + C_1^2)X_4 + (-3C_0^2D_1 - C_0C_2^2 - C_1^2D_1 + 2C_0C_1C_3)X_6 + \\ & + (-C_1^2C_4 - C_0^2C_4 - 2C_1C_2C_3 + 2C_0C_2D_1 + C_2^3)\gamma X_7 - C_2(C_0^2 + C_1^2)Y_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X_0', X_4'] = X_5' = {} & C_0^2(C_0^2 + C_1^2)X_5 - C_1C_2(C_0^2 + C_1^2)X_6 + [(C_0 + C_1)(-3C_0^2D_1 + \\ & - C_0C_2^2 - C_1^2D_1 + 2C_0C_1C_3) - (C_0^2 + C_1^2)(C_2^2 + C_0D_1) + C_3C_0(C_0^2 + C_1^2)\gamma]X_7 + \\ & + C_0C_1(C_0^2 + C_1^2)Y_2\end{aligned}$$

$$[X_0', X_5'] = X_6' = C_0(C_0^2 + C_1^2)^2 X_6 - C_2(C_0^2 + C_1^2)^2 \gamma X_7$$

$$[X_0', X_6'] = X_7' = (C_0^2 + C_1^2)^2 C_0(C_0 + C_1\gamma) X_7$$

$$[X_1', X_2'] = Y_1' = -C_2X_4 - C_4X_6 - D_2\gamma X_7 + C_0Y_1 - D_1Y_2$$

$$\begin{aligned}[X_1', X_4'] = Y_2' = & -C_2(C_0^2+C_1^2)X_6 + (-3C_0^2D_1 - C_0C_2^2 - C_1^2D_1 + 2C_0C_1C_3)\gamma X_7 + \\ & + C_0(C_0^2 + C_1^2)Y_2\end{aligned}$$

El determinante del cambio de base resulta valer $C_0^{11}(C_0^2 + C_1^2)^7(C_0 + C_1\gamma)$ con lo que, para que sea un cambio de base admisible hay que exigir que

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_0 & \neq & 0 \\ C_0^2 + C_1^2 & \neq & 0 \\ C_0 + C_1\gamma & \neq & 0 \end{array}\right.$$

A continuación consideramos el resto de productos corchete e igualamos cada uno de ellos al vector correspondiente para que la ley del álgebra siga siendo de la familia considerada:

$$[X_1', X_3'] = 0 = C_0C_1X_4 + (C_0C_3 - C_1D_1)X_6 - (C_1C_4 + C_2C_3)\gamma X_7 - C_1C_2Y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} C_0C_1 & = & 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ C_0C_3 - C_1D_1 & = & 0 \Rightarrow C_0C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ (C_1C_4 + C_2C_3)\gamma & = & 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \\ C_1C_2 & = & 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \end{array}\right.$$

Se observa que con las condiciones anteriores se simplifica la expresión de los vectores de la nueva base en función de la antigua:

$$\begin{array}{lcl} X_0' & = & C_0X_0 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 + C_5X_5 + C_6X_6 + C_7X_7 + D_1Y_1 + D_2Y_2 \\ X_1' & = & X_1 \\ X_2' & = & C_0X_2 - D_1X_4 - D_2X_6 - C_2Y_1 - C_4Y_2 \\ X_3' & = & C_0^2X_3 - (2C_0D_1 + C_2^2)X_5 + [D_1^2 - 2C_0D_2 - 2C_2C_4 + C_0C_5\gamma]X_7 \\ X_4' & = & C_0^3X_4 + (-3C_0^2D_1 - C_0C_2^2)X_6 + (-C_0^2C_4 + 2C_0C_2D_1 + C_2^3)\gamma X_7 - C_2C_0^2Y_2 \\ X_5' & = & C_0^4X_5 - (4C_0^3D_1 + 2C_0^2C_2^2)X_7 \\ X_6' & = & C_0^5X_6 - C_2C_0^4\gamma X_7 \\ X_7' & = & C_0^6X_7 \\ Y_1' & = & -C_2X_4 - C_4X_6 - D_2\gamma X_7 + C_0Y_1 - D_1Y_2 \\ Y_2' & = & -C_2C_0^2X_6 + (-3C_0^2D_1 - C_0C_2^2)\gamma X_7 + C_0^3Y_2 \end{array}$$

Se verifican también las siguientes igualdades:

$[X_0', Y_1'] = 0$

$$[X'_0, Y'_2] = 0 = (-C_0^3C_2 + C_0C_2)X_7 \Rightarrow C_0C_2(1 - C_0^2) = 0$$

$$[X'_1, X'_5] = 0$$

$$[X'_1, X'_6] = \gamma' X'_7 = C_0^5\gamma X_7 \Rightarrow \gamma' X'_7 = \frac{\gamma C_0^6}{C_0} X_7 = \frac{\gamma}{C_0} X'_7 \Rightarrow \gamma' = \frac{\gamma}{C_0}$$

$$[X'_1, Y'_1] = X'_4 = C_0X_4 - D_1X_6 - C_4\gamma X_7 - C_2Y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 & = & C_0^3 \Rightarrow C_0^2 = 1 \text{ al ser } C_0 \neq 0 \Rightarrow C_0 = 1 \text{ ó } C_0 = -1 \\ 3C_0^2D_1 + C_0C_2^2 & = & D_1 \Rightarrow D_1 = -\frac{1}{2}C_0C_2^2 \end{cases}$$

$$[X'_1, Y'_2] = C_0X_6 - C_2\gamma X_7 = C_0^5X_6 - C_2C_0^4\gamma X_7 = X'_6$$

$$\begin{aligned}[X'_2, X'_3] &= C_2X_6 + (2C_0^2D_1 + C_0C_2^2 + D_1)\gamma X_7 - C_0Y_2 = \\ &= C_2C_0^2X_6 + (3C_0^2D_1 + C_0C_2^2)\gamma X_7 - C_0^3Y_2 = -Y'_2\end{aligned}$$

$$[X'_2, X'_4] = -C_2C_0^3X_7 + C_2C_0^3X_7 = 0$$

$$[X'_2, X'_5] = -C_0^5\gamma X_7 = -\gamma' X'_7$$

$$[X'_2, X'_k] = 0, \quad 6 \leq k \leq 7$$

$$[X'_2, Y'_1] = C_0^2X_5 - (2C_0D_1 + C_2^2)X_7 = C_0^4X_5 - (4C_0^3D_1 + 2C_0^2C_2^2)X_7 = X'_5$$

$$[X'_2, Y'_2] = C_0^4X_7 = C_0^6X_7 = X'_7$$

$$[X'_3, X'_4] = C_0\gamma X_7 = \frac{\gamma}{C_0}X_7 = \gamma' X'_7$$

$$[X'_3, X'_k] = 0, \quad 5 \leq k \leq 7$$

$$[X'_3, Y'_1] = -C_2\gamma X_7 + C_0X_6 = X'_6$$

$$[X'_3, Y'_2] = 0$$

$$[X'_4, X'_k] = 0, \quad 5 \leq k \leq 7$$

$$[X'_4, Y'_1] = C_0^2X_7 = X_7 = X'_7$$

$$[X'_4, Y'_2] = 0$$

$[X'_5, X'_k] = 0, \quad 6 \leq k \leq 7$

$[X'_5, Y'_i] = [X'_6, Y'_i] = [X'_7, Y'_i] = 0, \quad 1 \leq i \leq 2$

$[X'_6, X'_7] = 0$

$[Y'_1, Y'_2] = 0$

En consecuencia, se ha demostrado que resultan válidos los cambios de base (variando el vector característico) que cumplan

$$\begin{cases} C_0 &=& 1 \text{ ó } C_0 = -1 \\ C_1 &=& 0 \\ C_3 &=& 0 \\ D_1 &=& -\frac{1}{2}C_0C_2^2 \\ \gamma' &=& \gamma \text{ ó } \gamma' = -\gamma \end{cases}$$

siendo la expresión más simplificada de cada vector de la nueva base respecto a la inicial la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} X'_0 &=& C_0X_0 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 + C_5X_5 + C_6X_6 + C_7X_7 - \frac{1}{2}C_0C_2^2Y_1 + D_2Y_2 \\ X'_1 &=& X_1 \\ X'_2 &=& C_0X_2 + \frac{1}{2}C_0C_2^2X_4 - D_2X_6 - C_2Y_1 - C_4Y_2 \\ X'_3 &=& X_3 + [\frac{1}{4}C_2^4 - 2C_0D_2 - 2C_2C_4 + C_0C_5\gamma]X_7 \\ X'_4 &=& C_0X_4 + \frac{1}{2}C_0C_2^2X_6 - C_4\gamma X_7 - C_2Y_2 \\ X'_5 &=& X_5 \\ X'_6 &=& C_0X_6 - C_2\gamma X_7 \\ X'_7 &=& X_7 \\ Y'_1 &=& -C_2X_4 - C_4X_6 - D_2\gamma X_7 + C_0Y_1 + \frac{1}{2}C_0C_2^2Y_2 \\ Y'_2 &=& -C_2X_6 + \frac{1}{2}C_0C_2^2\gamma X_7 + C_0Y_2 \end{array}$$

Por tanto, se deduce de nuevo que con estos cambios de base sólo se puede transformar un álgebra $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$ en otra $\epsilon^{1,\gamma'}(10,3,5)$ si $\gamma' = \pm\gamma$.

- $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5) \not\simeq \epsilon^{2,\gamma'}(10,3,5), \ \gamma \neq \gamma', \ \gamma, \gamma' \in \{0,1,3\}$

A continuación, vamos a abordar la otra familia de álgebras de Lie 3-filiformes, $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$, graduadas naturalmente y de dimensión 10.

Recordamos que, siendo $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, su ley, salvo antisimetría, viene determinada por los siguientes productos corchete:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y_2 & \\ [X_1, X_5] = 2X_6 & \\ [X_1, X_6] = (3-\gamma)X_7 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 - Y_2 & \\ [X_2, X_4] = -X_6 & \\ [X_2, X_5] = (-1+\gamma)X_7 & \\ [X_3, X_4] = -\gamma X_7 & \\ [X_i, Y_2] = -2X_{i+5} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

- $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5) \not\simeq \epsilon^{2,\gamma'}(10,3,5)$ **(Cambios de base de Jordan)**

Una nueva base de Jordan del operador adX_0 se puede escribir en la forma

$X_0' = X_0$

$X_1' = A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4X_4 + A_5X_5 + A_6X_6 + A_7X_7 + B_1Y_1 + B_2Y_2$

$X_2' = A_1X_2 + A_2X_3 + A_3X_4 + A_4X_5 + A_5X_6 + A_6X_7$

$X_3' = A_1X_3 + A_2X_4 + A_3X_5 + A_4X_6 + A_5X_7$

$X_4' = A_1X_4 + A_2X_5 + A_3X_6 + A_4X_7$

$X_5' = A_1X_5 + A_2X_6 + A_3X_7$

$X_6' = A_1X_6 + A_2X_7$

$X_7' = A_1X_7$

$$\begin{aligned} Y_1' = {} & (A_0A_1)X_3 + (A_0A_2)X_4 + (A_0A_3 + 2A_1A_3 - A_2^2)X_5 + \\ & +(A_0A_4 + 3A_1A_4 - A_2A_3)X_6 + [A_0A_5 + 4A_1A_5 - A_2A_4 + 2A_1B_2 + \\ & +(2A_2A_4 - 2A_1A_5 - A_3^2)\gamma]X_7 + A_1^2Y_1 + (2A_1A_3 - A_2^2)Y_2 \end{aligned}$$

$Y_2' \in < X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, Y_1, Y_2 >$

donde se han elegido los coeficientes de manera que no cambie el vector característico en la nueva base, es decir, se ha de cumplir que

$$\begin{aligned} [X_0', X_i'] &= X_{i+1}', \ 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1', X_2'] &= Y_1' \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} X_5'+Y_2' &= [X_1', X_4'] = (A_0A_1+A_1^2)X_5+(A_0A_2+A_1A_2)X_6+[A_0A_3+3A_1A_3-A_2^2+ \\ &+(2A_1A_3 + A_2^2)\gamma]X_7 + A_1^2Y_2 \end{aligned}$$

$$-X_5' - Y_2' = [X_2', X_3'] = -A_1^2X_5 - A_1A_2X_6 + [-A_1A_3 + (2A_1A_3 - A_2^2)\gamma]X_7 - A_1^2Y_2$$

con lo que aparecen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &A_0A_1 + A_1^2 = A_1^2 \Leftrightarrow A_0A_1 = 0 \Leftrightarrow A_0 = 0 \text{ al ser } A_1 \neq 0, \text{ ya que } X_7' = A_1X_7 \\ &A_0A_2 + A_1A_2 = A_1A_2 \Leftrightarrow A_0A_2 = 0 \\ &A_0A_3 + 3A_1A_3 - A_2^2 + (A_2^2 - 2A_1A_3)\gamma = A_1A_3 - (2A_1A_3 - A_2^2)\gamma \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow A_0A_3 + 2A_1A_3 - A_2^2 = 0 \Rightarrow 2A_1A_3 - A_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión del vector Y_2' es

$$Y_2' = (A_1^2 - A_1)X_5 + (A_1A_2 - A_2)X_6 + (A_1A_3 - A_3)X_7 + A_1^2Y_2$$

Comprobamos que es un isomorfismo, hallando el determinante de la matriz de paso de la inicial a la nueva base. Su valor es $A_1^{11} \neq 0$.

También se debe cumplir que

$$\begin{aligned} &[X_1', X_5'] = 2X_6' \Leftrightarrow 2A_1^2X_6 + 2A_1A_2X_7 = 2A_1X_6 + 2A_2X_7 \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow 2A_1^2 = 2A_1 \Rightarrow A_1 = 1 \quad \text{al ser } A_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Se deduce que, entonces, ha de ser

$$Y_1' = (3A_4 - A_2A_3)X_6 + [4A_5 - A_2A_4 + 2B_2 + (2A_2A_4 - 2A_5 - A_3^2)\gamma]X_7 + Y_1$$

$$Y_2' = Y_2$$

y se verifica que

$$\begin{aligned} &[X_0', Y_1'] = (3A_4 - A_2A_3)X_7 = 0 \Rightarrow 3A_4 - A_2A_3 = 0 \Rightarrow A_4 = \tfrac{1}{3}A_2A_3 \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow A_4 = \tfrac{1}{6}A_2^3 \Rightarrow Y_1' = [4A_5 - A_2A_4 + 2B_2 + (2A_2A_4 - 2A_5 - A_3^2)\gamma]X_7 + Y_1 \end{aligned}$$

$$[X_1', X_3'] = (2A_3 - A_2^2)X_6 + (3A_4 - A_2A_3)X_7 = 0$$

$$[X_1', X_6'] = (3 - \gamma)X_7 = (3 - \gamma')X_7' \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

$$[X_1', Y_2'] = -2X_6 - 2A_2X_7 = -2X_6'$$

$$[X_2', X_4'] = -X_6 - A_2X_7 = -X_6'$$

$$[X_2', X_5'] = (-1 + \gamma)X_7 = (-1 + \gamma')X_7'$$

$$[X_2', Y_2'] = -2X_7 = -2X_7'$$

$$[X_3', X_4'] = -\gamma X_7 = -\gamma' X_7'$$

El resto de productos corchete entre vectores de la base se verifica trivialmente que son igual a cero y en consecuencia, se ha demostrado que sólo resultan válidos los cambios de base de Jordan que cumplan

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & 0 \\ A_1 & = & 1 \\ A_3 & = & \frac{1}{2}A_2^2 \\ A_4 & = & \frac{1}{6}A_2^3 \end{array}$$

resultando, además, $\gamma' = \gamma$ y siendo la expresión más simplificada de cada vector de la nueva base respecto a la inicial la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} X_0' & = & X_0 \\ X_1' & = & X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4X_4 + A_5X_5 + A_6X_6 + A_7X_7 + B_1Y_1 + B_2Y_2 \\ X_2' & = & X_2 + A_2X_3 + A_3X_4 + A_4X_5 + A_5X_6 + A_6X_7 \\ X_3' & = & X_3 + A_2X_4 + A_3X_5 + A_4X_6 + A_5X_7 \\ X_4' & = & X_4 + A_2X_5 + A_3X_6 + A_4X_7 \\ X_5' & = & X_5 + A_2X_6 + A_3X_7 \\ X_6' & = & X_6 + A_2X_7 \\ X_7' & = & X_7 \\ Y_1' & = & [4A_5 - A_2A_4 + 2B_2 + (2A_2A_4 - 2A_5 - A_3^2)\gamma]X_7 + Y_1 \\ Y_2' & = & Y_2 \end{array}$$

En consecuencia, no hay ningún cambio de base de este tipo que transforme un álgebra $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$ en otra $\epsilon^{2,\gamma'}(10,3,5)$, salvo si $\gamma = \gamma'$.

- $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5) \not\simeq \epsilon^{2,\gamma'}(10,3,5)$ **(Cambios de vector característico)**

Para que un vector del álgebra pueda ser vector característico, no tiene que estar en la derivada y, por tanto, será de la forma

$X_0' = C_0X_0+C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+C_4X_4+C_5X_5+C_6X_6+C_7X_7+D_1Y_1+D_2Y_2$ con $C_0 \neq 0$ ó $C_1 \neq 0$.

Considerando $X_1' = X_1$, se tendrán que cumplir las siguientes igualdades

$$[X_0', X_1'] = X_2' = C_0X_2 - C_4X_5 + (-2C_5 + 2D_2)X_6 - C_6(3-\gamma)X_7 - C_2Y_1 - C_4Y_2$$

$$[X_0', X_2'] = X_3' = C_0^2X_3 + C_0C_3X_5 + [-C_0C_5 + 4C_0D_2 - 6C_1C_5 + 6C_1D_2 + \\ +3C_2C_4 + (2C_1C_5 - 2C_1D_2 - C_2C_4 - C_0C_5)\gamma]X_7 + C_0C_1Y_1 + C_0C_3Y_2$$

$$[X_0', X_3'] = X_4' = C_0^3X_4 - C_0^2C_2X_5 + C_0^2C_3X_6 + [-3C_0C_2C_3 + (C_0C_2C_3 + C_4C_0^2)\gamma]X_7 + \\ -C_0^2C_2Y_2$$

$$[X_0', X_4'] = X_5' = C_0^3(C_0 + C_1)X_5 - 2C_0^3C_2X_6 + C_0^2[C_0C_3 + 3C_1C_3 + 3C_2^2 + \\ -(C_1C_3 + C_2^2 + C_0C_3)\gamma]X_7 + C_1C_0^3Y_2$$

$$[X_0', X_5'] = X_6' = C_0^4(C_0 + 3C_1)X_6 + C_0^3[-3C_0C_2 - 9C_1C_2 + (C_0C_2 + 3C_1C_2)\gamma]X_7$$

$$[X_0', X_6'] = X_7' = C_0^4(C_0 + 3C_1)(C_0 + 3C_1 - C_1\gamma)X_7$$

$$[X_1', X_2'] = Y_1' = [6D_2 - 6C_5 + (2C_5 - 2D_2)\gamma]X_7 + C_0Y_1$$

$$[X_1', X_4'] = C_0^3X_5 + C_0^2C_3(3-\gamma)X_7 + C_0^3Y_2$$

Como $Y_2' = [X_1', X_4'] - X_5'$, su expresión resulta ser

$$Y_2' = C_0^3(1 - C_0 - C_1)X_5 + 2C_0^3C_2X_6 + C_0^2[3C_3 - C_0C_3 - 3C_1C_3 - 3C_2^2 + \\ +(C_1C_3 + C_2^2 + C_0C_3 - C_3)\gamma]X_7 + C_0^3(1 - C_1)Y_2$$

El determinante del cambio de base resulta valer $C_0^{23}(C_0+3C_1)^2(C_0+3C_1-C_1\gamma)$ con lo que, para que sea un cambio de base admisible hay que exigir que

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_0 & \neq & 0 \\ C_0 + 3C_1 & \neq & 0 \\ C_0 + 3C_1 - C_1\gamma & \neq & 0 \end{array}\right.$$

A continuación consideramos el resto de productos corchete e igualamos cada uno de ellos al vector correspondiente para que la ley del álgebra siga siendo de la familia considerada:

$$[X_1', X_5'] = 2X_6' = 2C_0^4X_6 - 2C_0^3C_2(3-\gamma)X_7 \Rightarrow C_0 + 3C_1 = 1$$

$$[X'_3, X'_4] = -C_0^5\gamma X_7 = -\gamma' X'_7 \Rightarrow C_0\gamma = \gamma'(1 - C_1\gamma) \Rightarrow \gamma' = \frac{C_0\gamma}{1-C_1\gamma}$$

$$[X'_1, X'_6] = C_0^4(C_0 + 3C_1)(3-\gamma)X_7 = C_0^4(3-\gamma)X_7 = (3-\gamma')X'_7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 - \gamma = (3-\gamma')(1 - C_1\gamma) \text{ al ser } C_0 \neq 0$$

Esta condición no es nueva ya que $3 - \gamma' = 3 - \frac{C_0\gamma}{1-C_1\gamma} = \frac{3-(C_0+3C_1)\gamma}{1-C_1\gamma} = \frac{3-\gamma}{1-C_1\gamma}$

Entonces, las expresiones más simplificadas de los vectores X'_6 y X'_7 son

$$X'_6 = C_0^4 X_6 - C_0^3 C_2(3-\gamma)X_7$$

$$X'_7 = C_0^4(1 - C_1\gamma)X_7$$

$$[X'_2, X'_5] = C_0^4[-1 + (C_0 + C_1)\gamma]X_7 = C_0^4[-1 + \gamma'(1 - C_1\gamma) + C_1\gamma]X_7 =$$
$$= (-1+\gamma')C_0^4(1 - C_1\gamma)X_7 = (-1+\gamma')X'_7$$

$$[X'_2, X'_4] = -C_0^4 X_6 + C_0^3 C_2(3-\gamma)X_7 = -X'_6$$

$$[X'_1, Y'_2] = -2C_0^4 X_6 + 2C_0^3 C_2(3-\gamma)X_7 = -2X'_6$$

$$[X'_2, Y'_2] = -2C_0^4(1 - C_1\gamma)X_7 = -2X'_7$$

Se cumple que X_7 e Y_1 son elementos centrales del álgebra y teniendo en cuenta las condiciones obtenidas, a continuación se comprueba fácilmente que son cero el resto de productos corchete.

Resumiendo, se puede afirmar que resultan válidos todos los cambios de base (variando el vector característico) que cumplan

$$\begin{cases} C_0 & \neq & 0 \\ C_0 + 3C_1 & = & 1 \\ 1 - C_1\gamma & \neq & 0 \\ C_0\gamma & = & (1 - C_1\gamma)\gamma' \end{cases}$$

siendo la expresión más simplificada de cada vector de la nueva base respecto a la inicial la siguiente:

$$X'_0 = C_0X_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 + C_5X_5 + C_6X_6 + C_7X_7 + D_1Y_1 + D_2Y_2$$

$$X'_1 = X_1$$

$$X'_2 = C_0X_2 - C_4X_5 + (-2C_5 + 2D_2)X_6 - C_6(3-\gamma)X_7 - C_2Y_1 - C_4Y_2$$

$$X_3' = C_0^2X_3 + C_0C_3X_5 + [-C_0C_5 + 4C_0D_2 - 6C_1C_5 + 6C_1D_2 + \\ +3C_2C_4 + (2C_1C_5 - 2C_1D_2 - C_2C_4 - C_0C_5)\gamma]X_7 + C_0C_1Y_1 + C_0C_3Y_2$$

$$X_4' = C_0^3X_4 - C_0^2C_2X_5 + C_0^2C_3X_6 + [-3C_0C_2C_3 + (C_0C_2C_3 + C_4C_0^2)\gamma]X_7 + \\ -C_0^2C_2Y_2$$

$$X_5' = C_0^3(C_0 + C_1)X_5 - 2C_0^3C_2X_6 + C_0^2[C_0C_3 + 3C_1C_3 + 3C_2^2 + \\ -(C_1C_3 + C_2^2 + C_0C_3)\gamma]X_7 + C_1C_0^3Y_2$$

$$X_6' = C_0^4X_6 - C_0^3C_2(3-\gamma)X_7$$

$$X_7' = C_0^4(1 - C_1\gamma)X_7$$

$$Y_1' = [6D_2 - 6C_5 + (2C_5 - 2D_2)\gamma]X_7 + C_0Y_1$$

$$Y_2' = C_0^3(1 - C_0 - C_1)X_5 + 2C_0^3C_2X_6 + C_0^2[3C_3 - C_0C_3 - 3C_1C_3 - 3C_2^2 + \\ +(C_1C_3 + C_2^2 + C_0C_3 - C_3)\gamma]X_7 + C_0^3(1 - C_1)Y_2$$

- Las condiciones siguientes son equivalentes:

$$\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma' = 0$$
$$\gamma = 3 \Leftrightarrow \gamma' = 3$$

En efecto,

* Si $\gamma = 0$, entonces $0 = (1 - C_1\gamma)\gamma' = \gamma'$

* Si $\gamma' = 0$, entonces $C_0\gamma = 0$ y como $C_0 \neq 0$, se deduce que $\gamma = 0$.

* Si $\gamma = 3$, entonces $\gamma' = \frac{3C_0}{1-3C_1} = \frac{3C_0}{C_0} = 3.$

* Si $\gamma' = 3$, entonces $C_0\gamma = (1 - C_1\gamma)3 = 3 - 3C_1\gamma = 3 - (1 - C_0)\gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 = 3 - \gamma \Rightarrow \gamma = 3$

- Si $\gamma \neq 0$ y $\gamma \neq 3$, se pueden elegir C_0 y C_1 tales que $\gamma' = 1$. En concreto, $C_0 = \frac{3-\gamma}{2\gamma}$ y $C_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$ cumplen las restricciones requeridas y $\gamma' = \frac{C_0\gamma}{1-C_1\gamma} = 1$.

Por consiguiente, todas las álgebras $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$, con $\gamma \in \mathbf{C} - \{0,3\}$ son isomorfas entre sí y no existe cambio de vector característico que pueda convertirlas en $\epsilon^{2,0}(10,3,5)$ ni en $\epsilon^{2,3}(10,3,5)$.

Como cualquier cambio de base de Jordan sólo transforma $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$ en sí misma se sigue el resultado; es decir, las álgebras $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$, $\gamma \in \{0,1,3\}$ son no isomorfas dos a dos. □

Teorema 1.2.4. *Las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, expresadas en los dos teoremas precedentes, son no isomorfas dos a dos.*

Demostración. Si las álgebras son de dimensiones distintas, es evidente que son no isomorfas. Luego, habrá que considerar los casos en que la dimensión del álgebra $\mathfrak{g}$ sea 8, 9 ó 10. Van a diferir, por ejemplo, en la dimensión del centro.

Para mayor claridad, los datos los resumimos en las siguientes tablas, una para cada dimensión.

	$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$
$\mathcal{L}(8,3,5)$	3
$\epsilon(8,3,5)$	2

	$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$
$\mathcal{L}(9,3,5)$	3
$\tau(9,3,5)$	2
$\epsilon(9,3,5)$	1

	$dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$
$\mathcal{L}(10,3,5)$	3
$\mathcal{Q}(10,3,5)$	3
$\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$	1
$\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$	2

Queda demostrado el teorema y para finalizar solamente recordar que las álgebras $\mathcal{L}(10,3,5)$ y $\mathcal{Q}(10,3,5)$ difieren, por ejemplo, en la dimensión del invariante $[\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}),\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})]$. □

1.3 Dimensiones menores o iguales a 12

En esta sección vamos a dar la clasificación explícita de todas las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión n pequeña y que sean no escindidas. Concretamente, abordaremos hasta los casos $n = 11$ y $n = 12$, porque como ya quedará demostrado al final del capítulo, se trata del primer par de dimensiones en el cual la situación general se estabiliza.

Partimos del teorema de estructura dado en la sección **1.1**. Se van a considerar las álgebras de leyes $\mu(n, r_1, r_2)$ en todos los posibles valores de (r_1, r_2), exceptuando los que den lugar a casos no admisibles o bien correspondan a sumas directas. Al iniciar el estudio correspondiente a cada dimensión, dichos valores se mostrarán en un lema que no necesitará demostración por ser, en realidad, un corolario del teorema de estructura.

En toda la sección, se representará por $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada del álgebra $\mathfrak{g}$.

La graduación natural asociada a $\mathfrak{g}$ va a ser

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} = &< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \ldots \oplus < X_{r_1-1} > \oplus < X_{r_1}, Y_1 > \oplus < X_{r_1+1} > \oplus \\ &\oplus \ldots \oplus < X_{r_2-1} > \oplus < X_{r_2}, Y_2 > \oplus < X_{r_2+1} > \oplus \ldots \oplus < X_{n-4} > \oplus < X_{n-3} >\end{aligned}$$

es decir, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-3} \mathfrak{g}_i$ donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i >, & 2 \leq i \leq n-3, \ i \neq r_1, r_2 \\ \mathfrak{g}_{r_j} & = & < X_{r_j}, Y_j >, & j = 1, 2 \end{array}$$

cumpliéndose que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, para cualesquiera i, j tales que $i + j \leq n - 3$.

Esta última propiedad se tendrá en cuenta para obtener una expresión inicial de la ley de $\mathfrak{g}$.

1.3.1 Clasificación de las AL3FGN hasta dimensión 8

Vamos a demostrar que solamente hay tres álgebras no escindidas de dimensión menor o igual a 8. Una solamente en dimensión 5, el álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_2$, y dos en dimensión 8. Estas últimas son $\mathcal{L}(8, 3, 5)$ y otra excepcional $\epsilon(8, 3, 5)$, que sólo surge en esta dimensión.

En primer lugar, se fijarán el tipo de las leyes donde aparecerán dichas álgebras para posteriormente, obtenerlas. Resulta evidente el siguiente lema.

Lema 1.3.1. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme, no escindida, de dimensión menor o igual a 8, entonces la graduación natural solamente puede cumplir*

$$(n, r_1, r_2) \in \{(5, 1, 1), (8, 3, 5)\}$$

A continuación, es fácil probar que, en dimensión 5, el único álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, no escindida, y que sea 3-filiforme y graduada naturalmente es $\mathcal{H}_2$. La ley de $\mathfrak{g}$, al ser de tipo $\mu(5,1,1)$, podrá expresarse, salvo antisimetría, por los siguientes productos corchete:

$$\begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [Y_1, Y_2] = hX_2. \end{cases}$$

Entonces, si $h = 0$ se obtiene una escindida, $\mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{C}^2$, y si $h \neq 0$ se obtiene el álgebra de Heisenberg mediante un sencillo cambio de escala.

Proposición 1.3.2. (Familia de AL3FGN de dimensión 8) *En dimensión* 8*, toda álgebra de Lie* 3*-filiforme y graduada naturalmente, no escindida, es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada* $\{X_0, X_1, \ldots, X_5, Y_1, Y_2\}$*, está determinada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \\ [X_1, Y_1] = dX_4 \\ [X_2, Y_1] = dX_5 \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, de dimensión 8.

No considerando álgebras escindidas, la ley de $\mathfrak{g}$ sólo puede ser del tipo $\mu(8,3,5)$ y se puede expresar mediante

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + bY_1 \\ [X_1, X_3] = a_{13}X_4 \\ [X_1, X_4] = a_{14}X_5 + c_1Y_2 \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 + c_2Y_2 \\ [X_1, Y_1] = d_1X_4 \\ [X_2, Y_1] = d_2X_5 + eY_2 \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, X_2)$ se obtiene que

$$[X_0, [X_1, X_2]] = [X_1, X_3] \Rightarrow a_{12}X_4 = a_{13}X_4 \Rightarrow a_{12} = a_{13} = a$$

De $Jac(X_0, X_1, X_3)$ se obtiene que

$$[X_0,[X_1,X_3]] = [X_2,X_3] + [X_1,X_4] \Rightarrow a_{13}X_5 = a_{23}X_5 + c_2Y_2 + a_{14}X_5 + c_1Y_2$$

Por tanto, se verifica que $\begin{cases} a_{14} = a - a_{23} \\ c_2 = -c_1 \end{cases}$

De $Jac(X_0, X_1, Y_1)$, se consigue que $d_1 = d_2 = d$, y además $e = 0$.

El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' = X_i & 0 \le i \le 5,\ i \ne 1 \\ X_1' = X_1 - aX_0 & \\ Y_j' = Y_j & 1 \le j \le 2 \end{cases}$$

hace que podamos suponer $a = 0$ y, en consecuencia, se satisface que $a_{23} = -a_{14}$, resultando estar definida la ley de $\mathfrak{g}$ por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = bY_1 & \\ [X_1, X_4] = -a_{23}X_5 + cY_2 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 - cY_2 & \\ [X_1, Y_1] = dX_4 & \\ [X_2, Y_1] = dX_5 & \end{cases}$$

Se puede suponer que $b \ne 0$ y $c \ne 0$, porque de lo contrario $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ó $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ lo cual es absurdo.

Un nuevo cambio de base dado por las relaciones

$$\begin{cases} X_i' = X_i & 0 \le i \le 5 \\ Y_1' = bY_1 & \\ Y_2' = -a_{23}X_5 + cY_2 & \end{cases}$$

permite hacer $b = c = 1$ y $a_{23} = 0$, con lo que queda demostrada la proposición. □

Teorema 1.3.3. (de clasificación de las AL3FGN hasta dimensión 8**)** *Salvo isomorfismo, las únicas álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión menor o igual a 8, son:*

$$\mathcal{H}_2 : \begin{cases} [X_0, X_1] = X_2 \\ [Y_1, Y_2] = X_2 \end{cases}$$

correspondiendo la ley de $\mathfrak{g}$ *al tipo* $\mu(5,1,1)$ *y*

$$\mathcal{L}(8,3,5):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_2\\ [X_2,X_3]=-Y_2\end{cases}$$

$$\epsilon(8,3,5):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_2\\ [X_2,X_3]=-Y_2\\ [X_1,Y_1]=X_4\\ [X_2,Y_1]=X_5\end{cases}$$

correspondiendo en ambas álgebras su ley al tipo $\mu(8,3,5)$.

Demostración. De lo obtenido hasta ahora, solamente falta hallar, en dimensión 8, las álgebras $\mathfrak{g}$ que cumplan las hipótesis del teorema.

Se ha demostrado que ley de $\mathfrak{g}$ viene determinada por

$$\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\le i\le 4\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_2\\ [X_2,X_3]=-Y_2\\ [X_1,Y_1]=dX_4\\ [X_2,Y_1]=dX_5\end{cases}$$

- Si $d=0$, la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde a $\mathcal{L}(8,3,5)$.

- Si $d\neq 0$, mediante el siguiente cambio de escala:

$$\begin{cases}X_0'=d^{\frac{1}{2}}X_0\\ X_1'=X_1\\ X_i'=d^{\frac{i-1}{2}}X_i & 2\le i\le 5\\ Y_1'=d^{\frac{1}{2}}Y_1\\ Y_2'=d^{\frac{3}{2}}Y_2\end{cases}$$

se obtiene que la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde a $\epsilon(8,3,5)$.

En el teorema **1.2.4** queda demostrado que las álgebras halladas son no isomorfas dos a dos. □

1.3.2 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 9

Vamos a demostrar que solamente hay tres álgebras no escindidas de dimensión 9. En concreto, $\mathcal{L}(9,3,5)$; otra excepcional, $\epsilon(9,3,5)$; y otra "terminal", $\tau(9,3,5)$.

La denominación de "terminal" es debido a que el vector Y_2 va a estar en un subespacio graduante situado muy cerca del final de la graduación natural. En concreto, en el penúltimo, $\mathfrak{g}_{n-4}$, y se trata de la primera dimensión donde aparece dicha álgebra. Ya demostraremos más adelante que, en realidad, van a existir dos familias de álgebras terminales, una cuando las dimensiones sean impares y otra cuando sean pares.

A continuación, en el siguiente lema fijamos el tipo de las leyes admisibles para estas álgebras y, posteriormente, las obtendremos.

Lema 1.3.4. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme, no escindida, de dimensión 9, entonces la única graduación natural admisible es del tipo*

$$(n, r_1, r_2) = (9, 3, 5)$$

Proposición 1.3.5. (Familia de AL3FGN de dimensión 9) *En dimensión 9, toda álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida, es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_6, Y_1, Y_2\}$, está determinada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = -a_{23}X_5 + Y_2 & \\ [X_1, X_5] = -2a_{23}X_6 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 - Y_2 & \\ [X_2, X_4] = a_{23}X_6 & \\ [X_i, Y_1] = dX_{3+i} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, Y_2] = fX_6 & \end{cases}$$

cumpliéndose las restricciones

$$\begin{cases} a_{23}d & = & 0 \\ 2a_{23}^2 & = & d - f \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente, de dimensión 9, no escindida.

La ley de $\mathfrak{g}$ sólo puede ser del tipo $\mu(9,3,5)$ e inicialmente está definida por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + bY_1 & \\ [X_1, X_4] = a_{14}X_5 + c_1Y_2 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 + c_2Y_2 & \\ [X_i, X_j] = a_{ij}X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq 6 - i \quad i + j \neq 3, 5 \\ [X_i, Y_1] = d_iX_{3+i} & 1 \leq i \leq 3 \quad i \neq 2 \\ [X_2, Y_1] = d_2X_5 + eY_2 & \\ [X_1, Y_2] = fX_6 & \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, X_2)$ se sigue que $a_{13} = a_{12}$

De $Jac(X_0, X_1, X_3)$ se obtiene que

$[X_0, [X_1, X_3]] = [X_2, X_3] + [X_1, X_4] \Rightarrow a_{13}X_5 = a_{23}X_5 + c_2Y_2 + a_{14}X_5 + c_1Y_2$

luego

$$\begin{cases} a_{14} = a_{12} - a_{23} \\ c_1 = -c_2 = c \end{cases}$$

Análogamente, de $Jac(X_0, X_1, X_4)$ y $Jac(X_0, X_2, X_3)$ y, teniendo en cuenta restricciones anteriores, se cumple que

$$\begin{cases} a_{15} = a_{12} - 2a_{23} \\ a_{24} = a_{23} \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_2, Y_1)$ se obtiene que

$$\begin{cases} d_1 = d_2 = d_3 = d \\ e = 0 \end{cases}$$

De $Jac(X_1, X_2, X_3)$ se deduce que

$$\begin{aligned} [X_1, [X_2, X_3]] &= [[X_1, X_2], X_3] + [X_2, [X_1, X_3]] \Rightarrow [X_1, a_{23}X_5 + c_2Y_2] = \\ &= [a_{12}X_3 + bY_1, X_3] + [X_2, a_{13}X_4] \Rightarrow a_{23}a_{15} - a_{13}a_{24} + c_2f + bd = 0 \end{aligned}$$

y, aplicando las condiciones ya obtenidas, resulta que

$$2a_{23}^2 = bd - cf$$

De forma análoga al paso anterior, $Jac(X_1, X_2, Y_1)$ nos proporciona la restricción

$$a_{23}d = 0$$

Por tanto, la ley de $\mathfrak{g}$ viene determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + bY_1 & \\ [X_1, X_3] = a_{12}X_4 & \\ [X_1, X_4] = (a_{12} - a_{23})X_5 + cY_2 & \\ [X_1, X_5] = (a_{12} - 2a_{23})X_6 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 - cY_2 & \\ [X_2, X_4] = a_{23}X_6 & \\ [X_i, Y_1] = dX_{3+i} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, Y_2] = fX_6 & \end{cases}$$

cumpliéndose las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} a_{23}d &= 0 \\ 2a_{23}^2 &= bd - cf \end{cases}$$

Se puede suponer que $b \neq 0$ y $c \neq 0$ porque de lo contrario $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ó $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, lo cual es absurdo.

El cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' = & X_i \quad 0 \leq i \leq 6 \\ Y_1' = & bY_1 \\ Y_2' = & cY_2 \end{cases}$$

permite suponer $b = c = 1$.

Un nuevo cambio de base definido por

$$\begin{cases} X_i' = & X_i & 0 \leq i \leq 6 \quad i \neq 1 \\ X_1' = & X_1 - a_{12}X_0 & \\ Y_j' = & Y_j & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

hace que podamos considerar $a_{12} = 0$. □

Teorema 1.3.6. (de clasificación de las AL3FGN de dimensión 9) *Salvo isomorfismo, las únicas álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión 9, son:*

$$\mathcal{L}(9,3,5) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \end{cases}$$

$$\tau(9,3,5):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=X_5+Y_2\\ [X_1,X_5]=2X_6\\ [X_2,X_3]=-X_5-Y_2\\ [X_2,X_4]=-X_6\\ [X_1,Y_2]=-2X_6\end{cases}$$

$$\epsilon(9,3,5):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_2\\ [X_2,X_3]=-Y_2\\ [X_i,Y_1]=X_{i+3} & 1\leq i\leq 3\\ [X_1,Y_2]=X_6\end{cases}$$

Demostración. La ley de $\mathfrak{g}$ está expresada por

$$\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=-a_{23}X_5+Y_2\\ [X_1,X_5]=-2a_{23}X_6\\ [X_2,X_3]=a_{23}X_5-Y_2\\ [X_2,X_4]=a_{23}X_6\\ [X_i,Y_1]=dX_{3+i} & 1\leq i\leq 3\\ [X_1,Y_2]=fX_6\end{cases}$$

cumpliéndose que $a_{23}d=0$ y $2a_{23}^2=d-f$.

Hay que distinguir dos casos, según sea a_{23} nulo o no.

• **Caso 1:** $a_{23}=0$

Por las restricciones anteriores si $a_{23}=0$, se verifica que $d=f$.

* Si $d=0$ la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 5\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_2\\ [X_2,X_3]=-Y_2\end{cases}$$

que se corresponde con $\mathcal{L}(9,3,5)$.

* Si $d \neq 0$, se puede suponer $d = 1$, sin más que aplicar el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = & dX_0 \\ X_i' = & d^{i-\frac{1}{2}}X_i \quad 1 \leq i \leq 6 \\ Y_j' = & d^{2j}Y_j \quad\ \ 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

y la ley de $\mathfrak{g}$ queda expresada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \\ [X_i, Y_1] = X_{3+i} \quad 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, Y_2] = X_6 \end{cases}$$

que corresponde a $\epsilon(9, 3, 5)$.

- **Caso 2:** $a_{23} \neq 0$

De la restricción $a_{23}d = 0$, se sigue que $d = 0$ y, como además $2a_{23}^2 = d - f$, se tiene que $f = -2a_{23}^2$.

La ley de $\mathfrak{g}$ está determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = -a_{23}X_5 + Y_2 \\ [X_1, X_5] = -2a_{23}X_6 \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 - Y_2 \\ [X_2, X_4] = a_{23}X_6 \\ [X_1, Y_2] = -2a_{23}^2X_6 \end{cases}$$

y el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' = & a_{23}X_0 \\ X_i' = & -a_{23}^{i-1}X_i \quad 1 \leq i \leq 6 \\ Y_1' = & a_{23}Y_1 \\ Y_2' = & a_{23}^3Y_2 \end{cases}$$

permite suponer $a_{23} = -1$.

La ley de $\mathfrak{g}$ resultante es la expresada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y_2 & \\ [X_1, X_5] = 2X_6 & \\ [X_2, X_3] = -(X_5 + Y_2) & \\ [X_2, X_4] = -X_6 & \\ [X_1, Y_2] = -2X_6 & \end{cases}$$

que se corresponde con $\tau(n, r_1, n-4)$, para los valores particulares de $n = 9$ y $r_1 = 3$.

En el teorema **1.2.4** queda demostrado que las álgebras halladas son no isomorfas dos a dos. □

1.3.3 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 10

Esta dimensión va ser la última donde aparecen álgebras excepcionales. Es también peculiar porque es la única dimensión donde aparece una familia infinita de álgebras; en concreto, una uni-paramétrica, $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$. Asimismo, se encuentran las álgebras $\mathcal{L}(10, r_1, r_2)$, $3 \leq r_1 < r_2 \leq 7$, r_1 y r_2 impares.

La dimensión 10 es también novedosa porque es en la primera dimensión par (en las impares no existe) donde surgen álgebras del tipo $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$, aunque sólo cuando $(r_1, r_2) = (3, 5)$.

Además, en esta dimensión no se halla ninguna álgebra de las denominadas "terminales".

A continuación, en el siguiente lema y como consecuencia del teorema de estructura, se fija el tipo de las leyes donde aparecen todas estas álgebras y posteriormente, se obtienen.

Lema 1.3.7. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme, no escindida, de dimensión 10, entonces la graduación natural solamente puede cumplir*

$$(n, r_1, r_2) \in \{(10, 3, 5), (10, 3, 7), (10, 5, 7)\}$$

Proposición 1.3.8. (Familia de AL3FGN de leyes $\mu(10, 3, 5)$) *En dimensión 10, toda álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley*

$\mu(10,3,5)$, *es isomorfa a una cuya ley, respecto de* $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, Y_2\}$ *una base adaptada, está determinada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = -a_{23}X_5 + Y_2 & \\ [X_1, X_5] = -2a_{23}X_6 & \\ [X_1, X_6] = (-3a_{23} + \gamma)X_7 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 - Y_2 & \\ [X_2, X_4] = a_{23}X_6 & \\ [X_2, X_5] = (a_{23} - \gamma)X_7 & \\ [X_3, X_4] = \gamma X_7 & \\ [X_i, Y_1] = dX_{3+i} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_i, Y_2] = fX_{5+i} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

cumpliéndose las siguientes restricciones

$$\begin{cases} a_{23}d &= 0 \\ 2a_{23}^2 &= d - f \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente, de dimensión 10, no escindida, y de ley $\mu(10,3,5)$.

La ley de $\mathfrak{g}$ está definida por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + bY_1 & \\ [X_1, X_4] = a_{14}X_5 + c_1Y_2 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 + c_2Y_2 & \\ [X_i, X_j] = a_{ij}X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq 7 - i \quad i + j \neq 3, 5 \\ [X_i, Y_1] = d_iX_{3+i} & 1 \leq i \leq 4 \quad i \neq 2 \\ [X_2, Y_1] = d_2X_5 + eY_2 & \\ [X_i, Y_2] = f_iX_{5+i} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, X_2)$, $Jac(X_0, X_1, X_3)$, $Jac(X_0, X_1, X_4)$,$Jac(X_0, X_1, X_5)$, $Jac(X_0, X_2, X_3)$ y $Jac(X_0, X_2, X_4)$ se obtienen las siguientes restricciones entre los parámetros:

$a_{13} = a_{12}$, $a_{14} = a_{12} - a_{23}$, $a_{15} = a_{12} - 2a_{23}$, $a_{16} = a_{12} - 3a_{23} + a_{34}$, $a_{24} = a_{23}$, $a_{25} = a_{23} - a_{34}$ y además $c_1 = c$, $c_2 = -c$.

De $Jac(X_0, X_1, Y_1)$, $Jac(X_0, X_2, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_3, Y_1)$ se obtiene que $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d$ y también que $e = 0$.

De $Jac(X_0, X_1, Y_2)$ se llega a que $f_1 = f_2 = f$.

Se cumple que $b \neq 0$ y $c \neq 0$ porque, de lo contrario, $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ó $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ lo que es una contradicción.

Se puede considerar $b = c = 1$ sin más que aplicar el cambio de base:

$$\begin{cases} X'_i = & X_i \quad 0 \leq i \leq 7 \\ Y'_1 = & bY_1 \\ Y'_2 = & cY_2 \end{cases}$$

De $Jac(X_1, X_2, X_3)$ y $Jac(X_1, X_2, Y_1)$ se obtiene que $2a_{23}^2 = d - f$ y $a_{23}d = 0$, respectivamente.

Un nuevo cambio de base definido por

$$\begin{cases} X'_i = & X_i & 0 \leq i \leq 7 \quad i \neq 1 \\ X'_1 = & X_1 - a_{12}X_0 & \\ Y'_j = & Y_j & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

hace que podamos considerar $a_{12} = 0$.

Como consecuencia de todo lo anterior y llamando $a_{34} = \gamma$, resulta como ley de $\mathfrak{g}$ la que figura en el enunciado de la proposición. □

Proposición 1.3.9. (Clasificación de AL3FGN de leyes $\mu(10, 3, 5)$) *Salvo isomorfismo, las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, no escindidas y de leyes $\mu(10, 3, 5)$, son $\mathcal{L}(10, 3, 5)$, $\mathcal{Q}(10, 3, 5)$, $\epsilon^{1,\gamma}(10, 3, 5)$, $\gamma \in \mathbf{C}$, $\gamma = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y $\epsilon^{2,\gamma}(10, 3, 5)$, $\gamma \in \{0, 1, 3\}$.*

Demostración. Se sabe que la ley de $\mathfrak{g}$ está expresada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = -a_{23}X_5 + Y_2 & \\ [X_1, X_5] = -2a_{23}X_6 & \\ [X_1, X_6] = (-3a_{23} + \gamma)X_7 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 - Y_2 & \\ [X_2, X_4] = a_{23}X_6 & \\ [X_2, X_5] = (a_{23} - \gamma)X_7 & \\ [X_3, X_4] = \gamma X_7 & \\ [X_i, Y_1] = dX_{3+i} & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_i, Y_2] = fX_{5+i} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

cumpliéndose que

$$\begin{cases} a_{23}d & = & 0 \\ 2a_{23}^2 & = & d-f \end{cases}$$

Hay que distinguir dos casos según sea a_{23} nulo ó no.

- **Caso 1:** $a_{23} = 0$

Por las restricciones anteriores, si $a_{23} = 0$, se verifica que $d = f$.

* Si $d = 0$ y $\gamma = 0$, la ley de $\mathfrak{g}$ está determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \end{cases}$$

que corresponde a $\mathcal{L}(10,3,5)$.

* Si $d = 0$ y $\gamma \neq 0$, el cambio de base de ecuaciones

$$\begin{cases} X_0' = & \gamma X_0 \\ X_1' = & X_1 \\ X_i' = & \gamma^{i-1} X_i \quad 2 \leq i \leq 7 \\ Y_1' = & \gamma Y_1 \\ Y_2' = & \gamma^3 Y_2 \end{cases}$$

permite hacer $\gamma = 1$. En consecuencia, la ley de $\mathfrak{g}$ resulta ser

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_1, X_6] = X_7 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \\ [X_2, X_5] = -X_7 \\ [X_3, X_4] = X_7 \end{cases}$$

y se observa que corresponde a $\mathcal{Q}(10,3,5)$.

* Si $d \neq 0$, efectuando el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 = & X_0 \\ X'_i = & \frac{1}{\sqrt{d}} X_i \quad 1 \leq i \leq 7 \\ Y'_j = & \frac{1}{d} Y_j \quad 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

se obtiene que la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde a $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$.

• **Caso 2:** $a_{23} \neq 0$

Por las restricciones $a_{23}d = 0$ y $2a_{23}^2 = d - f$ obtenidas anteriormente, si $a_{23} \neq 0$, se verifica que $d = 0$ y $f = -2a_{23}^2$. En este caso, la ley de $\mathfrak{g}$ está definida por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = -a_{23}X_5 + Y_2 & \\ [X_1, X_5] = -2a_{23}X_6 & \\ [X_1, X_6] = (-3a_{23} + \gamma)X_7 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 - Y_2 & \\ [X_2, X_4] = a_{23}X_6 & \\ [X_2, X_5] = (a_{23} - \gamma)X_7 & \\ [X_3, X_4] = \gamma X_7 & \\ [X_i, Y_2] = -2a_{23}^2 X_{5+i} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Al ser $a_{23} \neq 0$, se puede suponer $a_{23} = 1$, sin más que hacer el cambio de base dado por las relaciones

$$\begin{cases} X'_0 = & a_{23}X_0 \\ X'_i = & a_{23}^{i-1}X_i \quad 1 \leq i \leq 7 \\ Y'_1 = & a_{23}Y_1 \\ Y'_2 = & a_{23}^3 Y_2 \end{cases}$$

Efectuando un nuevo cambio de base, el expresado por

$$\begin{cases} X'_0 = & X_0 \\ X'_i = & -X_i \quad 1 \leq i \leq 7 \\ Y'_i = & Y_i \quad 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

se observa que la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde a $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$.

En la demostración del **Teorema 1.2.3** se ha comprobado que para cualquier $\gamma \in \mathbb{C} - \{0,3\}$ el álgebra correspondiente es isomorfa a $\epsilon^{2,1}(10,3,5)$. $\square$

Proposición 1.3.10. (Familia de AL3FGN de leyes $\mu(10,3,7)$) *En dimensión 10, toda álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley $\mu(10,3,7)$, es isomorfa a una cuya ley, respecto de $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, está determinada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + Y_1 & \\ [X_1, X_3] = a_{12}X_4 & \\ [X_1, X_4] = a_{12}X_5 & \\ [X_1, X_5] = a_{12}X_6 & \\ [X_1, X_6] = (a_{12} + a_{34})X_7 + Y_2 & \\ [X_2, X_5] = -a_{34}X_7 - Y_2 & \\ [X_3, X_4] = a_{34}X_7 + Y_2 & \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme de dimensión 10, no escindida, y de ley $\mu(10,3,7)$.

La ley de $\mathfrak{g}$ está determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_i, X_j] = a_{ij}X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq 7 - i \quad i + j \neq 3, 7 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + bY_1 & \\ [X_1, X_6] = a_{16}X_7 + c_1Y_2 & \\ [X_2, X_5] = a_{25}X_7 + c_2Y_2 & \\ [X_3, X_4] = a_{34}X_7 + c_3Y_2 & \\ [X_i, Y_1] = d_iX_{3+i} & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_4, Y_1] = d_4X_7 + eY_2 & \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, X_2)$, $Jac(X_0, X_1, X_3)$, $Jac(X_0, X_1, X_4)$, $Jac(X_0, X_1, X_5)$, $Jac(X_0, X_2, X_3)$ y $Jac(X_0, X_2, X_4)$, se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_{12} \\ a_{14} &= a_{12} - a_{23} \\ a_{15} &= a_{12} - 2a_{23} \\ a_{16} &= a_{12} - 3a_{23} + a_{34} \\ a_{24} &= a_{23} \\ a_{25} &= a_{23} - a_{34} \\ c_1 &= -c_2 = c_3 = c \end{aligned}$$

Se ha de verificar que $b \neq 0$ y $c \neq 0$ porque de lo contrario $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ó $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$.

Se puede suponer que $b = c = 1$ sin más que efectuar el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = & X_i \quad 0 \leq i \leq 7 \\ Y_1' = & bY_1 \\ Y_2' = & cY_2 \end{cases}$$

Además, $Jac(X_0, X_1, Y_1)$, $Jac(X_0, X_2, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_3, Y_1)$ nos proporcionan que $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d$ y también que $e = 0$.

De $Jac(X_1, X_2, X_3)$ se obtiene que $d = 2a_{23}^2$ y de $Jac(X_1, X_2, Y_1)$ que $a_{23}d = 0$. En consecuencia, se verifica que $d = a_{23} = 0$.

La ley de $\mathfrak{g}$ resultante es la indicada en el enunciado de la proposición. □

Proposición 1.3.11. (Clasificación de AL3FGN de leyes $\mu(10,3,7)$) *Salvo isomorfismo, la única álgebras de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley $\mu(10,3,7)$, es $\mathcal{L}(10,3,7)$.*

Demostración. Se sabe que la ley de $\mathfrak{g}$ está expresada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + Y_1 \\ [X_1, X_3] = a_{12}X_4 \\ [X_1, X_4] = a_{12}X_5 \\ [X_1, X_5] = a_{12}X_6 \\ [X_1, X_6] = (a_{12} + a_{34})X_7 + Y_2 \\ [X_2, X_5] = -a_{34}X_7 - Y_2 \\ [X_3, X_4] = a_{34}X_7 + Y_2 \end{cases}$$

Realizando el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = & X_i & 0 \leq i \leq 7 \quad i \neq 1 \\ X_1' = & X_1 - a_{12}X_0 \\ Y_1' = & Y_1 \\ Y_2' = & a_{34}X_7 + Y_2 \end{cases}$$

obtenemos que la ley de $\mathfrak{g}$ es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_6] = Y_2 & \\ [X_2, X_5] = -Y_2 & \\ [X_3, X_4] = Y_2 & \end{cases}$$

que corresponde a $\mathcal{L}(10, 3, 7)$. □

Para terminar con la dimensión 10, solamente falta considerar la ley $\mu(10, 5, 7)$. Al ser éste un caso totalmente análogo al analizado anteriormente, a continuación nos limitamos a enunciar las dos proposiciones con la familia y la clasificación correspondientes.

Proposición 1.3.12. (Familia de AL3FGN de leyes $\mu(10, 5, 7)$) *En dimensión* 10*, toda álgebra de Lie* 3*-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley* $\mu(10, 5, 7)$*, es isomorfa a una cuya ley puede expresarse, respecto de una base adaptada* $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, Y_2\}$*, mediante*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_i, X_j] = a_{12} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq 7 - i \quad i + j \neq 5, 7 \\ [X_1, X_4] = a_{12} X_5 + Y_1 & \\ [X_1, X_6] = (a_{12} + a_{34}) X_7 + Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_1 & \\ [X_2, X_5] = -a_{34} X_7 - Y_2 & \\ [X_3, X_4] = a_{34} X_7 + Y_2 & \end{cases}$$

Proposición 1.3.13. (Clasificación de AL3FGN de leyes $\mu(10, 5, 7)$) *Salvo isomorfismo, la única álgebras de Lie* 3*-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley* $\mu(10, 5, 7)$*, es* $\mathcal{L}(10, 5, 7)$.

Para finalizar esta dimensión, se va a resumir todo lo obtenido y se va a enunciar un teorema de clasificación de todas las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, de dimensión 10.

Teorema 1.3.14. (de clasificación de las AL3FGN de dimensión 10) *Salvo isomorfismo, las únicas álgebras* $\mathfrak{g}$ *de Lie* 3*-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión* 10*, son:*

$$\mathcal{L}(10,r_1,r_2):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 6\\ [X_i,X_{r_j-i}]=(-1)^{i-1}Y_j & 1\leq i\leq \frac{r_j-1}{2} \quad j=1,2\end{cases}$$

$(r_1,r_2)\in\{(3,5),(3,7),(5,7)\}$

$$\mathcal{Q}(10,3,5):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 6\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_2\\ [X_2,X_3]=-Y_2\\ [X_1,X_6]=X_7\\ [X_2,X_5]=-X_7\\ [X_3,X_4]=X_7\end{cases}$$

$$\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 6\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=Y_2\\ [X_1,X_6]=\gamma X_7\\ [X_2,X_3]=-Y_2\\ [X_2,X_5]=-\gamma X_7\\ [X_3,X_4]=\gamma X_7\\ [X_i,Y_1]=X_{i+3} & 1\leq i\leq 4\\ [X_i,Y_2]=X_{i+5} & 1\leq i\leq 2 \qquad \gamma=re^{i\theta},\ \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

$$\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5):\begin{cases}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 6\\ [X_1,X_2]=Y_1\\ [X_1,X_4]=X_5+Y_2\\ [X_1,X_5]=2X_6\\ [X_1,X_6]=(3-\gamma)X_7\\ [X_2,X_3]=-X_5-Y_2\\ [X_2,X_4]=-X_6\\ [X_2,X_5]=(-1+\gamma)X_7\\ [X_3,X_4]=-\gamma X_7\\ [X_1,Y_2]=-2X_6\\ [X_2,Y_2]=-2X_7 & \qquad \gamma\in\{0,1,3\}\end{cases}$$

En el **Teorema 1.2.4** queda demostrado que las álgebras halladas son no isomorfas dos a dos.

1.3.4 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 11

Como se verá al final del presente capítulo, 11 es la primera dimensión impar en la cual la situación general se va a estabilizar, no encontrándose álgebras excepcionales.

Después de fijar en un lema el tipo de las leyes de las citadas álgebras, vamos a demostrar que aparece la familia $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$, que va a estar presente en todas las dimensiones. Asimismo, cuando el vector Y_2 pertenece al penúltimo subespacio de la graduación natural, aparece la familia de álgebras "terminales", $\tau(11, r_1, 7)$.

Lema 1.3.15. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme, no escindida, de dimensión 11, entonces la graduación natural solamente puede cumplir*

$$(n, r_1, r_2) \in \{(11,3,5), (11,3,7), (11,5,7)\}$$

Ahora, en cada uno de los tres tipos, vamos a determinar la correspondiente familia de leyes y su clasificación.

Proposición 1.3.16. (Familia de AL3FGN de leyes $\mu(11,3,5)$) *En dimensión 11, toda álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley $\mu(11,3,5)$, es isomorfa a una cuya ley puede ser expresada, en una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_8, Y_1, Y_2\}$, mediante*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 7 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + Y_1 & \\ [X_1, X_4] = a_{12}X_5 + Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \\ [X_1, X_i] = a_{12}X_{1+i} & i = 3,\ 5 \le i \le 7 \end{cases}$$

Demostración. La ley de $\mathfrak{g}$ puede ser expresada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 7 \\ [X_i, X_j] = a_{ij}X_{i+j} & 1 \le i < j \le 8-i \quad i+j \ne 3,5 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + bY_1 & \\ [X_1, X_4] = a_{14}X_5 + c_1Y_2 & \\ [X_2, X_3] = a_{23}X_5 + c_2Y_2 & \\ [X_i, Y_1] = d_iX_{3+i} & 1 \le i \le 5 \quad i \ne 2 \\ [X_2, Y_1] = d_2X_5 + eY_2 & \\ [X_i, Y_2] = f_iX_{5+i} & 1 \le i \le 3 \\ [Y_1, Y_2] = hX_8 & \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, X_i)$, $2 \leq i \leq 6$, $Jac(X_0, X_2, X_i)$, $3 \leq i \leq 5$, y $Jac(X_0, X_3, X_4)$ se obtienen las restricciones siguientes

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_{12} \\ a_{14} &= a_{12} - a_{23} \\ a_{15} &= a_{12} - 2a_{23} \\ a_{16} &= a_{12} - 3a_{23} + a_{34} \\ a_{17} &= a_{12} - 4a_{23} + 3a_{34} \\ a_{24} &= a_{23} \\ a_{25} &= a_{23} - a_{34} \\ a_{26} &= a_{23} - 2a_{34} \\ c_1 &= -c_2 = c \end{aligned}$$

Se cumple que $b \neq 0$ y $c \neq 0$, porque de lo contrario $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ *ó* $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$, lo que es absurdo.

Se puede considerar $b = c = 1$ sin más que aplicar el siguiente cambio de base

$$\left\{ \begin{aligned} X_i' &= X_i \quad 0 \leq i \leq 8 \\ Y_1' &= bY_1 \\ Y_2' &= cY_2 \end{aligned} \right.$$

De $Jac(X_0, X_i, Y_1)$, $1 \leq i \leq 4$, se tiene que $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d$ y $e = 0$.

De $Jac(X_0, X_1, Y_2)$ y $Jac(X_0, X_2, Y_2)$ se deduce que $f_1 = f_2 = f_3 = f$.

De las restantes identidades de Jacobi, se consiguen más restricciones entre los parámetros.

$Jac(X_1, X_2, X_3) \Rightarrow 2a_{23}^2 = d - f$

$Jac(X_1, X_2, X_5) \Rightarrow d = 2a_{23}^2 - 3a_{23}a_{34} + 3a_{34}^2$

$Jac(X_1, X_3, X_4) \Rightarrow f = 3a_{34}^2 - 3a_{23}a_{34}$

$Jac(X_1, X_2, Y_1) \Rightarrow a_{23}d = 0$

$Jac(X_1, X_4, Y_1) \Rightarrow 3a_{34}d + h = 0$

$Jac(X_1, X_2, Y_2) \Rightarrow 5f(-a_{23} + a_{34}) = h$

Resolviendo el sistema formado por todas las ecuaciones anteriores, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17}\\
&a_{23} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = a_{34} = a_{35} = 0\\
&d = f = h = e = 0
\end{aligned}$$

y queda demostrada la proposición. □

Proposición 1.3.17. (Clasificación de AL3FGN de leyes $\mu(11,3,5)$) *Salvo isomorfismo, la única álgebras de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley $\mu(11,3,5)$, es $\mathcal{L}(11,3,5)$.*

Demostración. Se sabe que la ley de $\mathfrak{g}$ se reduce a

$$\begin{cases}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 7\\
[X_1, X_2] = a_{12}X_3 + Y_1 & \\
[X_1, X_4] = a_{12}X_5 + Y_2 & \\
[X_2, X_3] = -Y_2 & \\
[X_1, X_i] = a_{12}X_{1+i} & i = 3,\ 5 \leq i \leq 7
\end{cases}$$

Se puede considerar $a_{12} = 0$, sin más que realizar el siguiente cambio de base

$$\begin{cases}
X_i' = \ X_i & 0 \leq i \leq 8,\ i \neq 1\\
X_1' = \ X_1 - a_{12}X_0 & \\
Y_j' = \ Y_j & j = 1,2
\end{cases}$$

obteniéndose la ley

$$\begin{cases}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 7\\
[X_1, X_2] = Y_1 & \\
[X_1, X_4] = Y_2 & \\
[X_2, X_3] = -Y_2 &
\end{cases}$$

que corresponde a $\mathcal{L}(11,3,5)$. □

Proposición 1.3.18. (Familia de AL3FGN de leyes $\mu(11,3,7)$) *En dimensión 11, toda álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley $\mu(11,3,7)$, es isomorfa a una cuya ley puede ser expresada, en una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_8, Y_1, Y_2\}$, mediante*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 7 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_6] = a_{34}X_7 + Y_2 \\ [X_1, X_7] = 3a_{34}X_8 \\ [X_2, X_5] = -a_{34}X_7 - Y_2 \\ [X_2, X_6] = -2a_{34}X_8 \\ [X_3, X_4] = a_{34}X_7 + Y_2 \\ [X_3, X_5] = a_{34}X_8 \\ [X_1, Y_2] = -3a_{34}^2X_8 \end{cases}$$

Demostración. Inicialmente la ley de $\mathfrak{g}$ se pude expresar mediante

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 7 \\ [X_i, X_j] = a_{ij}X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq 8 - i \quad i + j \neq 3, 7 \\ [X_1, X_2] = a_{12}X_3 + bY_1 \\ [X_1, X_6] = a_{16}X_7 + c_1Y_2 \\ [X_2, X_5] = a_{25}X_7 + c_2Y_2 \\ [X_3, X_4] = a_{34}X_7 + c_3Y_2 \\ [X_i, Y_1] = d_iX_{3+i} & 1 \leq i \leq 5 \quad i \neq 4 \\ [X_4, Y_1] = d_4X_7 + eY_2 \\ [X_1, Y_2] = fX_8 \end{cases}$$

De forma similar que con la familia de ley $\mu(11, 3, 5)$ se obtienen las siguientes restricciones, algunas diferentes:

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_{12} \\ a_{14} &= a_{12} - a_{23} \\ a_{15} &= a_{12} - 2a_{23} \\ a_{16} &= a_{12} - 3a_{23} + a_{34} \\ a_{17} &= a_{12} - 4a_{23} + 3a_{34} \\ a_{24} &= a_{23} \\ a_{25} &= a_{23} - a_{34} \\ a_{26} &= a_{23} - 2a_{34} \\ c_1 &= -c_2 = c_3 = c = 1 \\ b &= 1 \\ d_1 &= d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= 0\\
2a_{23}^2 &= d\\
d-f &= 2a_{23}^2 - 3a_{23}a_{34} + 3a_{34}^2\\
f &= -3a_{34}^2 + 3a_{23}a_{34}\\
a_{23}d &= 0\\
a_{34}d &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por todas las ecuaciones anteriores, se obtiene que

$$\begin{aligned}
a_{12} &= a_{13} = a_{14} = a_{15}\\
a_{16} &= a_{12} + a_{34}\\
a_{17} &= a_{12} + 3a_{34}\\
a_{23} &= a_{24} = 0\\
a_{25} &= -a_{34}\\
a_{26} &= -2a_{34}\\
a_{35} &= a_{34}\\
d &= 0\\
f &= -3a_{34}^2
\end{aligned}$$

Se puede considerar $a_{12} = 0$, sin más que realizar un sencillo cambio de base y resulta la ley de $\mathfrak{g}$ pretendida. $\square$

Proposición 1.3.19. (Clasificación de AL3FGN de leyes $\mu(11,3,7)$) *Salvo isomorfismo, las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, no escindidas y de ley $\mu(11,3,7)$, son $\mathcal{L}(11,3,7)$ y $\tau(11,3,7)$.*

Demostración. Hay que distinguir dos casos, según sea nulo o no a_{34}.

- **Caso 1:** $a_{34} = 0$

  En este supuesto la ley de $\mathfrak{g}$ está definida por

$$\begin{cases}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 7\\
[X_1, X_2] = Y_1\\
[X_1, X_6] = Y_2\\
[X_2, X_5] = -Y_2\\
[X_3, X_4] = Y_2
\end{cases}$$

que corresponde a $\mathcal{L}(11,3,7)$.

• **Caso 2:** $a_{34} \neq 0$

El cambio de base dado por las relaciones

$$\begin{cases} X_0' = & a_{34}X_0 \\ X_1' = & X_1 \\ X_i' = & a_{34}^{i-1}X_i \quad 2 \leq i \leq 8 \\ Y_1' = & a_{34}Y_1 \\ Y_2' = & a_{34}^5 Y_2 \end{cases}$$

hace que la ley de $\mathfrak{g}$ pueda escribirse de la forma

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 7 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_6] = X_7 + Y_2 \\ [X_1, X_7] = 3X_8 \\ [X_2, X_5] = -X_7 - Y_2 \\ [X_2, X_6] = -2X_8 \\ [X_3, X_4] = X_7 + Y_2 \\ [X_3, X_5] = X_8 \\ [X_1, Y_2] = -3X_8 \end{cases}$$

la cual corresponde a $\tau(11,3,7)$. □

En el tipo de leyes que falta considerar, $\mu(11,5,7)$, nos limitamos a enunciar las proposiciones con la familia y la clasificación correspondiente, por ser análogo al anterior tipo, al pertenecer, en ambos, el vector Y_2 a $\mathfrak{g}_{n-4}$.

Proposición 1.3.20. (Familia de AL3FGN de leyes $\mu(11,5,7)$) *En dimensión 11, toda álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley $\mu(11,3,7)$, es isomorfa a una cuya ley puede ser expresada, en una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_8, Y_1, Y_2\}$, mediante*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 7 \\ [X_1, X_4] = Y_1 \\ [X_2, X_3] = -Y_1 \\ [X_1, X_6] = a_{34}X_7 + Y_2 \\ [X_1, X_7] = 3a_{34}X_8 \\ [X_2, X_5] = -a_{34}X_7 - Y_2 \\ [X_2, X_6] = -2a_{34}X_8 \\ [X_3, X_4] = a_{34}X_7 + Y_2 \\ [X_3, X_5] = a_{34}X_8 \\ [X_1, Y_2] = -3a_{34}^2 X_8 \end{cases}$$

Proposición 1.3.21. **(Clasificación de AL3FGN de leyes $\mu(11,5,7)$)** *Salvo isomorfismo, las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, no escindidas y de ley $\mu(11,5,7)$, son $\mathcal{L}(11,5,7)$ y $\tau(11,5,7)$.*

Para finalizar, todas las álgebras halladas las reuniremos en un único teorema, el de la clasificación de todas las álgebras de Lie 3-filiformes, graduadas naturalmente y de dimensión 11.

Teorema 1.3.22. **(Clasificación de AL3FGN de dimensión 11)** *Salvo isomorfismo, las únicas álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión 11, son:*

$$\mathcal{L}(11,r_1,r_2):\left\{\begin{array}{lll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 7 & \\ [X_i,X_{r_j-i}]=(-1)^{i-1}Y_j & 1\leq i\leq \frac{r_j-1}{2} & j=1,2\end{array}\right.$$
$(r_1,r_2)\in\{(3,5),(3,7),(5,7)\}$

$$\tau(11,r_1,7):\left\{\begin{array}{ll}[X_0,X_i]=X_{i+1} & 1\leq i\leq 7\\ [X_i,X_{r_1-i}]=(-1)^{i-1}Y_1 & 1\leq i\leq \frac{r_1-1}{2}\\ [X_i,X_{7-i}]=(-1)^{i-1}(X_7+Y_2) & 1\leq i\leq 3\\ [X_i,X_{8-i}]=(-1)^{i-1}(4-i)X_8 & 1\leq i\leq 3\\ [X_1,Y_2]=-3X_8 & \end{array}\right.$$
$r_1=3,5$

En el teorema **1.2.2** queda demostrado que las álgebras halladas son no isomorfas dos a dos.

1.3.5 Clasificación de las AL3FGN de dimensión 12

Como se verá al final del presente capítulo, 12 es la primera dimensión par en la cual la situación general se va a estabilizar, no encontrándose álgebras excepcionales.

La estabilización general, para cualquiera que sea la dimensión $n\geq 11$, será distinta según sea la paridad de n y requerirá de un proceso inductivo. En él, será necesario comprobar los resultados que se pretenden demostrar, en los primeros casos; en concreto, $n=11$ y $n=12$, dependiendo de que la dimensión del álgebra sea impar o par. El primero de ellos se ha abordado anteriormente.

Si $n=12$ y como consecuencia del teorema de estructura, se enuncia mediante un lema los tipos admisibles de las leyes de álgebras de Lie 3-filiformes, graduadas naturalmente y no escindidas.

Lema 1.3.23. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme, no escindida, de dimensión 12, entonces la graduación natural solamente puede cumplir*

$$(n, r_1, r_2) \in \{(12,3,5), (12,3,7), (12,3,9), (12,5,7), (12,5,9), (12,7,9)\}$$

En esta subsección sólo se va a abordar la clasificación de las álgebras de leyes $\mu(12,3,5)$. Los tipos del resto de álgebras son de la forma $\mu(12,r_1,7)$ y $\mu(12,r_1,9)$, y son considerados posteriormente en la sección siguiente, dedicada a los casos en que el vector Y_2 está "cerca" del final de la graduación natural ($n-6 \leq r_2 \leq n-3,\ n \geq 12$).

En dimensión 12 van a aparecer las familias $\mathcal{L}(12,r_1,r_2)$ y $\mathcal{Q}(12,r_1,r_2)$. Asimismo, cuando el vector Y_2 pertenece al antepenúltimo subespacio de la graduación natural, aparece la familia de álgebras "terminales", $\tau(12,r_1,7)$.

Proposición 1.3.24. (Familia de AL3FGN de leyes $\mu(12,3,5)$) *En dimensión 12, toda álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, no escindida y de ley $\mu(11,3,5)$, es isomorfa a una cuya ley puede expresarse, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_9, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, mediante*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 8 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_1, X_8] = -a_{45} X_9 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \\ [X_2, X_7] = a_{45} X_9 & \\ [X_3, X_6] = -a_{45} X_9 & \\ [X_4, X_5] = a_{45} X_9 & \end{cases}$$

Demostración. El álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 8 \\ [X_i, X_j] = a_{ij} X_{i+j} & 1 \leq i < j \leq 9-i \quad i+j \neq 3,5 \\ [X_1, X_2] = a_{12} X_3 + b Y_1 & \\ [X_1, X_4] = a_{14} X_5 + c_1 Y_2 & \\ [X_2, X_3] = a_{23} X_5 + c_2 Y_2 & \\ [X_i, Y_1] = d_i X_{3+i} & 1 \leq i \leq 6 \quad i \neq 2 \\ [X_2, Y_1] = d_2 X_5 + e Y_2 & \\ [X_i, Y_2] = f_i X_{5+i} & 1 \leq i \leq 4 \\ [Y_1, Y_2] = h X_8 & \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, X_i)$, $2 \leq i \leq 7$, $Jac(X_0, X_2, X_i)$, $3 \leq i \leq 6$ y $Jac(X_0, X_3, X_i)$, $i = 4, 5$, se obtienen las restricciones

$$
\begin{aligned}
a_{13} = &\ a_{12} \\
a_{14} = &\ a_{12} - a_{23} \\
a_{15} = &\ a_{12} - 2a_{23} \\
a_{16} = &\ a_{12} - 3a_{23} + a_{34} \\
a_{17} = &\ a_{12} - 4a_{23} + 3a_{34} \\
a_{18} = &\ a_{12} - 5a_{23} + 6a_{34} - a_{45} \\
a_{24} = &\ a_{23} \\
a_{25} = &\ a_{23} - a_{34} \\
a_{26} = &\ a_{23} - 2a_{34} \\
a_{27} = &\ a_{23} - 3a_{34} + a_{45} \\
a_{35} = &\ a_{34} \\
a_{36} = &\ a_{34} - a_{45} \\
c_1 = &\ -c_2 = c
\end{aligned}
$$

Se cumple que $b \neq 0$ y $c \neq 0$ porque, de lo contrario, $Y_1 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ ó $Y_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$.

Se puede considerar $b = c = 1$, sin más que aplicar el cambio de base definido por

$$
\begin{cases}
X_i' = & X_i \quad 0 \leq i \leq 9 \\
Y_1' = & bY_1 \\
Y_2' = & cY_2
\end{cases}
$$

$Jac(X_0, X_i, Y_1)$, $1 \leq i \leq 5 \Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d$ y $e = 0$.

$Jac(X_0, X_i, Y_2)$, $1 \leq i \leq 3 \Rightarrow f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$.

$Jac(X_1, X_2, X_3) \Rightarrow d - f = 2a_{23}^2$

$Jac(X_1, X_3, X_4) \Rightarrow f = -3a_{23}a_{34} + 3a_{34}^2$

$Jac(X_1, X_3, X_5) \Rightarrow a_{12}(a_{34} - a_{45}) = 0$

$Jac(X_1, X_2, Y_1) \Rightarrow a_{23}d = 0$

$Jac(X_1, X_4, Y_1) \Rightarrow 3a_{34}d + h = 0$

$Jac(X_1, X_5, Y_1) \Rightarrow a_{34}d = 0$

$Jac(X_2, X_4, Y_1) \Rightarrow a_{45}d = 0$

$Jac(X_1, X_2, Y_2) \Rightarrow (a_{34} - a_{23})f = 0$

Resolviendo el sistema formado por todas las ecuaciones obtenidas anteriormente se obtiene que

$$\begin{aligned}
&a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} \\
&a_{18} = a_{12} - a_{45} \\
&a_{23} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = 0 \\
&a_{27} = a_{45} \\
&a_{34} = a_{35} = 0 \\
&a_{36} = -a_{45} \\
&d = f = h = e = 0 \\
&a_{12}a_{45} = 0
\end{aligned}$$

Se puede suponer $a_{12} = 0$, sin más que realizar el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} X_i' = & X_i & 1 \leq i \leq 9, i \neq 1 \\ X_1' = & X_1 - a_{12}X_0 & \\ Y_j' = & Y_j & j = 1, 2 \end{cases}$$

obteniéndose la ley enunciada en la proposición. □

Proposición 1.3.25. (Clasificación de AL3FGN de leyes $\mu(12,3,5)$) *Salvo isomorfismo, las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, no escindidas y de ley $\mu(12,3,5)$, son $\mathcal{L}(12,3,5)$ y $\mathcal{Q}(12,3,5)$.*

Demostración. Hay que distinguir dos casos, según sea a_{45} nulo o no.

- **Caso 1:** $a_{45} = 0$

El álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 8 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \end{cases}$$

la cual corresponde a $\mathcal{L}(12,3,5)$.

- **Caso 2:** $a_{45} \neq 0$

Con el cambio de base

$$\begin{cases} X_0' = & -a_{45}X_0 \\ X_i' = & (-a_{45})^{i-1}X_i \quad 1 \leq i \leq 9 \\ Y_1' = & -a_{45}Y_1 \\ Y_2' = & -a_{45}^3 Y_2 \end{cases}$$

se obtiene la ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 8 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \\ [X_i, X_{9-i}] = (-1)^{i-1}X_9 & 1 \leq i \leq 4 \end{cases}$$

que corresponde a $\mathcal{Q}(12, 3, 5)$. □

Nota 1.3.26. Resta considerar las leyes de tipos $\mu(12, 3, 7)$, $\mu(12, 3, 9)$, $\mu(12, 5, 7)$, $\mu(12, 5, 9)$ y $\mu(12, 7, 9)$. Su estudio se va a incluir en la sección **1.4** por ser casos particulares de los que en esta memoria denominamos casos terminales. Aparecerán las álgebras $\mathcal{L}(12, r_1, r_2)$, $\mathcal{Q}(12, r_1, r_2)$, donde $(r_1, r_2) \in \{(3, 7), (3, 9), (5, 7), (5, 9), (7, 9)\}$, y $\tau(12, r_1, 7)$, $r_1 \in \{3, 5\}$.

1.4 Casos terminales

Vamos a estudiar en esta sección las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n y leyes $\mu(n, r_1, r_2)$ cuando r_2 es "terminal"; es decir, cuando r_2 es "próximo" a $n-3$ o lo que es lo mismo, cuando el vector Y_2 pertenece a uno de los subespacios próximos al último ($\mathfrak{g}_{n-3}$) de la graduación natural (Y_2 está "cerca" de X_{n-3}).

Estos casos especiales ocurren solamente cuando $n-6 \leq r_2 \leq n-3$ y se estudian separadamente porque el método que se utiliza consiste en cocientar por el ideal $\mathfrak{g}_{n-3} \equiv \mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$. Los resultados obtenidos son diferentes a los del caso general, que se analiza con todo detalle en la próxima sección.

Hemos abordado anteriormente las dimensiones pequeñas. A partir de ahora suponemos siempre que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ cumple que $n \geq 11$, porque como ya quedará demostrado después de la sección siguiente, los primeros valores para n, donde la situación general se estabiliza, son 11 y 12. También supondremos que $3 \leq r_1 < r_2$ y ambos r_1 y r_2 deben ser impares, como ya se ha demostrado en el teorema de estructura. Además, los otros casos ya han sido analizados y recordamos que o bien eran inadmisibles o bien aparecían álgebras escindidas. Vamos a referir siempre la ley de $\mathfrak{g}$ en una base adaptada que denotamos por $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$. Para no complicar la notación, vamos a utilizar la misma notación para la base de $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$, aun siendo conscientes de que un vector de esta base es, en realidad, una "clase" de vectores.

1.4.1 El caso $r_2 = n-3$

Como r_2 es impar se deduce que n es par y se cumple que r_1 es impar, $3 \leq r_1 \leq n-5$. Ahora el vector Y_2 acompaña a X_{n-3} en una base del último de los subespacios graduantes.

Teorema 1.4.1. (de clasificación de las AL3FGN de ley $\mu(n, r_1, n-3)$, n par) $(3 \leq r_1 \leq n-5)$

Cualquier álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, de dimensión n y de ley $\mu(n, r_1, n-3)$, con n par, $n \geq 12$, r_1 impar, $3 \leq r_1 \leq n-5$, es isomorfa a $\mathcal{L}(n, r_1, n-3)$, cuya ley respecto de una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ viene expresada por

$$\mathcal{L}(n, r_1, n-3) : \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Demostración. Sea, pues, $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de ley $\mu(n, r_1, n-3)$, con $dim(\mathfrak{g}) = n$ par, $n \geq 12$, r_1 impar y $3 \leq r_1 \leq n-5$. La graduación natural asociada a $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{g} = < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \ldots \oplus < X_{r_1-1} > \oplus < X_{r_1}, Y_1 > \oplus \ldots \oplus < X_{r_1+1} > \oplus \\ \oplus \ldots \oplus < X_{n-4} > \oplus < X_{n-3}, Y_2 >$$

es decir,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-3} \mathfrak{g}_i$$

donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-4,\ i \neq r_1 \\ \mathfrak{g}_{r_1} & = & < X_{r_1}, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_{n-3} & = & < X_{n-3}, Y_2 > & \end{array}$$

Como $\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g}) =< X_{n-3}, Y_2 >= \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, se sigue que el álgebra cociente $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Lie 2-filiforme graduada también naturalmente y de dimensión $n-2$. Por [31] sabemos que $\mathfrak{g}'$ es isomorfa a

$$\mathcal{L}(n-2, r_1)\ (n-2 \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 7) \quad \text{ó} \quad \text{a} \quad \tau(n-2, n-5)\ (n-2 \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 8)$$

Aunque cada vector de $\mathfrak{g}'$ es una clase de vectores al tratarse de un álgebra cociente, seguimos representando por $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-4}, Y_1\}$ una base suya adaptada.

Analicemos, a continuación, cada uno de los dos casos posibles:

- **Caso 1:** $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-2, r_1)\ (n-2 \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 7)$

La correspondiente expresión de la ley de $\mathfrak{g}'$, salvo antisimetría, viene determinada por

$$\mathfrak{g}' : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \end{array} \right.$$

y, en consecuencia, la ley de $\mathfrak{g}$, extensión central de $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3}, Y_2 >$ y teniendo en cuenta que

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \forall 1 \leq i,j \leq n-3$$

se puede escribir en la forma

$$\mathfrak{g} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} + \beta Y_2 & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & a_i X_{n-3} + c_i Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] & = & d X_{n-3} + e Y_2 & \end{array} \right.$$

A continuación, hay que exigir que se verifique la identidad de Jacobi para cualesquiera tres vectores. Para algunos se satisface trivialmente y para otros surgen restricciones.

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}$, se sigue que

$$[X_0, [X_i, X_{n-4-i}]] = [X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = (a_{i+1} + a_i)X_{n-3} + (c_{i+1} + c_i)Y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} a_{i+1} + a_i = 0 \Rightarrow a_i & = & (-1)^{i-1}a & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ c_{i+1} + c_i = 0 \Rightarrow c_i & = & (-1)^{i-1}c & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{array} \right.$$

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ se deduce que $d = 0 = e$ y la ley de $\mathfrak{g}$ queda expresada por

$$\mathfrak{g} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} + \beta Y_2 & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}(aX_{n-3} + cY_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{array} \right.$$

Vamos a considerar todas las posibilidades resultantes de los distintos valores que puede tomar $s = rango \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & c \end{pmatrix} \in \{0, 1, 2\}$.

Si $s = 0$, entonces el centro de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< X_{n-4}, X_{n-3}, Y_1, Y_2 > \Rightarrow dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 4$, y se observa que $\mathfrak{g}$ no es un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente.

Si $s = 1$ existe $t \in \mathbf{C}$ tal que $aX_{n-3} + cY_2 = t(\alpha X_{n-3} + \beta Y_2)$ y el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_i' & = & X_i & 0 \leq i \leq n-4 \\ X_{n-3}' & = & \alpha X_{n-3} + \beta Y_2 & \\ Y_1' & = & Y_2 & \\ Y_2' & = & Y_1 & \end{array} \right.$$

prueba que $Y_1' \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \wedge Y_1' \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Se deduce que el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las álgebras de Lie escindidas de leyes $\mu(n, 1, r_1)$ ($r_1' = 1$ y $r_2' = r_1$) y esto, evidentemente, es una contradicción, porque no estaríamos en el caso que se está considerando.

Si $s = 2$ el cambio de base determinado por las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X_i' & = & X_i & 0 \leq i \leq n-4 \\ X_{n-3}' & = & \alpha X_{n-3} + \beta Y_2 & \\ Y_1' & = & Y_1 & \\ Y_2' & = & aX_{n-3} + cY_2 & \end{array} \right.$$

prueba que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{array} \right.$$

y, en consecuencia, $\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, n-3)$.

- **Caso 2:** $\mathfrak{g}' \simeq \tau(n-2, n-5)$ $(n-2 \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 8)$

Ahora la correspondiente expresión de la ley de $\mathfrak{g}'$ es

$$\mathfrak{g}': \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1}(X_{n-5} - Y_1) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_1, Y_1] & = & \frac{(n-6)}{2}X_{n-4} & \end{cases}$$

Extendemos por $< X_{n-3}, Y_2 >$ para obtener $\mathfrak{g}$ y exigiéndole que sea álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente. Su ley, en principio, vendrá determinada por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} + \beta Y_2 & \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1}(X_{n-5} - Y_1) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & a_i X_{n-3} + c_i Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_1, Y_1] & = & \frac{(n-6)}{2}X_{n-4} & \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] = [X_2, Y_1] & = & dX_{n-3} + eY_2 & \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}$, se deduce que

$$[X_0, [X_i, X_{n-4-i}]] = [X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}(\alpha X_{n-3} + \beta Y_2) = (a_{i+1} + a_i)X_{n-3} + (c_{i+1} + c_i)Y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{i+1} + a_i & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}\alpha & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ c_{i+1} + c_i & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}\beta & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i & = & (-1)^{i-1}(a_1 - \frac{(n-4-i)}{2}(i-1)\alpha) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ c_i & = & (-1)^{i-1}(c_1 - \frac{(n-4-i)}{2}(i-1)\beta) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_1, Y_1)$ se obtiene que

$$[X_0, [X_1, Y_1]] = [X_2, Y_1] \Rightarrow \frac{(n-6)}{2}(\alpha X_{n-3} + \beta Y_2) = dX_{n-3} + eY_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{(n-6)}{2}\alpha, \; e = \frac{(n-6)}{2}\beta$$

De $Jac(X_1, X_2, X_{n-6})$ se obtiene que

$$[X_1,[X_2,X_{n-6}]] = [X_2,[X_1,X_{n-6}]] \Rightarrow [X_1, -\tfrac{n-8}{2}X_{n-4}] = [X_2,X_{n-5}] - [X_2,Y_1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\tfrac{n-8}{2}(a_1X_{n-3}+c_1Y_2) = (a_2-d)X_{n-3}+(c_2-e)Y_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{n-8}{2}a_1 & = & a_2-d \\ -\frac{n-8}{2}c_1 & = & c_2-e \end{array} \right.$$

y por las igualdades obtenidas antes para d y e se deduce que

$$\frac{(10-n)}{2}a_1 = 0, \quad \frac{(10-n)}{2}c_1 = 0$$

pero $n \geq 12$, por lo que resulta que $a_1 = 0 = c_1$ y se simplifican más las expresiones de a_i y c_i, $1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$, concretamente

$$\begin{array}{rcll} a_i & = & (-1)^i\frac{(n-4-i)}{2}(i-1)\alpha & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ c_i & = & (-1)^i\frac{(n-4-i)}{2}(i-1)\beta & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ queda determinada por

$$\mathfrak{g}: \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0,X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3}+\beta Y_2 & \\ [X_i,X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1}(X_{n-5}-Y_1) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i,X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i,X_{n-3-i}] & = & (-1)^i\frac{(n-4-i)}{2}(i-1)(\alpha X_{n-3}+\beta Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_1,Y_1] & = & \frac{(n-6)}{2}X_{n-4} & \\ [X_{n-3-r_1},Y_1] = [X_2,Y_1] & = & \frac{n-6}{2}(\alpha X_{n-3}+\beta Y_2) & \end{array} \right.$$

Si $(\alpha,\beta) = (0,0)$ el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X'_i & = & X_i & 0 \leq i \leq n-3 \\ Y'_1 & = & Y_2 & \\ Y'_2 & = & Y_1 & \end{array} \right.$$

prueba que $Y'_1 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \wedge Y'_1 \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Se deduce que el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las álgebras de Lie escindidas de leyes $\mu(n,1,r_1)$ ($r'_1 = 1$ y $r'_2 = r_1$) y esto, evidentemente, es una contradicción, porque no estaríamos en el caso que se está considerando.

Si $\alpha \neq 0$ el cambio de base determinado por las igualdades

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X'_i & = & X_i & 0 \leq i \leq n-4 \\ X'_{n-3} & = & \alpha X_{n-3}+\beta Y_2 & \\ Y'_1 & = & Y_2 & \\ Y'_2 & = & Y_1 & \end{array} \right.$$

prueba que volvemos a estar en la misma situación anteriormente reseñada, lo cual es una contradicción. Lo mismo ocurre si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ al realizar el cambio de base definido por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} X'_i & = & X_i & 0 \leq i \leq n-4 \\ X'_{n-3} & = & \beta Y_2 & \\ Y'_1 & = & Y_1 & \\ Y'_2 & = & X_{n-3} & \end{array} \right.$$

Queda así demostrado el teorema de clasificación de las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente y de ley $\mu(n, r_1, n-3)$, n par. □

1.4.2 El caso $r_2 = n - 4$

Como r_2 es impar se deduce que n es impar y se cumple que r_1 es impar, $3 \leq r_1 \leq n-6$. Ahora el vector Y_2 acompaña a X_{n-4} en el penúltimo de los subespacios graduantes.

Teorema 1.4.2. (de clasificación de las AL3FGN de ley $\mu(n, r_1, n-4)$, n impar) $(3 \leq r_1 \leq n-6)$

Cualquier álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, de dimensión n y de ley $\mu(n, r_1, n-4)$, con n impar, $n \geq 11$, r_1 impar, $3 \leq r_1 \leq n-6$, es isomorfa a $\mathcal{L}(n, r_1, n-4)$ o bien a $\tau(n, r, n-4)$, cuyas leyes respecto de una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ vienen expresadas por

$$\mathcal{L}(n, r_1, n-4) : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1 - i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{array} \right.$$

$$\tau(n, r_1, n-4) : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1 - i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1} \frac{(n-3-2i)}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1, Y_2] & = & \frac{(5-n)}{2} X_{n-3} & \end{array} \right.$$

Demostración. El caso $n = 11$ se ha estudiado aparte en la subsección **1.3.4**. Si se ha incluido en el enunciado del teorema es debido a que el resultado es idéntico en ese caso y así se presenta todo de forma más compacta.

Sea, pues, $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de ley $\mu(n, r_1, n-4)$, con $dim(\mathfrak{g}) = n$ impar, $n \geq 13$, r_1 impar y $3 \leq r_1 \leq n-6$. La graduación natural asociada a $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{g} = < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \ldots \oplus < X_{r_1-1} > \oplus < X_{r_1}, Y_1 > \oplus \ldots \oplus < X_{r_1+1} > \oplus \\ \oplus \ldots \oplus < X_{n-4}, Y_2 > \oplus < X_{n-3} >$$

es decir, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-3} \mathfrak{g}_i$, donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-3, \ i \neq r_1, n-4 \\ \mathfrak{g}_{r_1} & = & < X_{r_1}, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_{n-4} & = & < X_{n-4}, Y_2 > & \end{array}$$

Como $\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g}) =< X_{n-3} >$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, se sigue que el álgebra cociente $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Lie 3-filiforme graduada también naturalmente y de dimensión una unidad menos; es decir, $n-1$. Dicha álgebra $\mathfrak{g}'$ será de ley $\mu(n-1, r_1, (n-1)-3)$, con dimensión $(n-1)$ par, que ya fue estudiada en la subsección **1.4.1.**

Si se sigue representando por $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-4}, Y_1, Y_2\}$ una base suya adaptada, se deduce, entonces, que $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-1, r_1, (n-1)-3)$ y, en consecuencia, podemos escribir la ley de $\mathfrak{g}'$ de la siguiente forma

$$\mathfrak{g}' : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{array} \right.$$

Por extensión de $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3} >$ y teniendo en cuenta que se ha de verificar que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n-3$, la ley de $\mathfrak{g}$ queda determinada por

$$\mathfrak{g} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_0, Y_2] & = & \beta X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] & = & d X_{n-3} & \\ [X_1, Y_2] & = & f X_{n-3} & \end{array} \right.$$

A continuación verificamos que se cumple la identidad de Jacobi para cualesquiera tres vectores. Para ello se deben anular algunos parámetros y, además, aparecen más restricciones.

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ y $Jac(X_1, X_2, X_{n-6})$ se deduce que $d = 0 = f$.

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-7}{2}$, se deduce que

$$[X_0, [X_i, X_{n-4-i}]] = [X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{i-1}\beta X_{n-3} = (a_{i+1} + a_i)X_{n-3} \Rightarrow a_{i+1} + a_i = (-1)^{i-1}\beta, \quad 1 \leq i \leq \tfrac{n-7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}(a_1 - (i-1)\beta), \quad 1 \leq i \leq \tfrac{n-5}{2}.$$

De $Jac(X_0, X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}})$ se obtiene que $[X_0, [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}}]] = [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-1)^{\frac{n-7}{2}}\beta X_{n-3} = a_{\frac{n-5}{2}} X_{n-3} \Rightarrow a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-7}{2}}\beta$$

Como $a_i = (-1)^{i-1}(a_1 - (i-1)\beta)$, $\quad 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$, se deduce que

$$\beta\tfrac{(n-5)}{2} = a_1 \Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}\tfrac{(n-3-2i)}{2}\beta, \quad 1 \leq i \leq \tfrac{n-5}{2}.$$

En consecuencia, la ley de $\mathfrak{g}$ queda definida, salvo antisimetría, por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_0, Y_2] & = & \beta X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2}\beta X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

Es necesario que $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ porque, si $(\alpha, \beta) = (0,0)$ $\mathfrak{g}$ no es un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente. Se trataría de un álgebra de Lie con las mismas características, pero 4-filiforme, y además, escindida, ya que $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 4$, al ser $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< X_{n-4}, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >$.

- **Caso 1:** $\beta \neq 0$

Ahora se puede suponer $\beta = 1$, sin más que realizar el siguiente cambio de base:

$$\begin{cases} X'_0 & = & X_0 & \\ X'_i & = & \frac{1}{\beta}X_i & 1 \leq i \leq n-3 \\ Y'_j & = & \frac{1}{\beta^2}Y_j & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

Vamos a distinguir dos subcasos según sea $\alpha \neq 0$ o $\alpha = 0$.

- **Subcaso 1.1:** $\alpha \neq 0$

El cambio de base definido por las relaciones

$$\begin{cases} X'_0 & = & \frac{1}{\alpha}X_0 & \\ X'_i & = & \frac{1}{\alpha^{i-1}}X_i & 1 \leq i \leq n-4 \\ X'_{n-3} & = & \frac{1}{\alpha^{n-5}}X_{n-3} & \\ Y'_1 & = & \frac{1}{\alpha^{r_1-2}}Y_1 & \\ Y'_2 & = & \frac{1}{\alpha^{n-6}}Y_2 & \end{cases}$$

permite suponer $\alpha = 1$.

Un nuevo cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_i & = & X_i & 0 \leq i \leq n-3 \\ Y'_1 & = & Y_1 & \\ Y'_2 & = & Y_2 - X_{n-4} & \end{cases}$$

permite obtener la ley de $\mathfrak{g}$ siguiente

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}(X_{n-4}+Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2}X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1, Y_2] & = & \frac{(5-n)}{2}X_{n-3} & \end{cases}$$

la cual demuestra que $\mathfrak{g} \simeq \tau(n, r_1, n-4)$.

- **Subcaso 1.2:** $\alpha = 0$

Recordamos que la ley de $\mathfrak{g}$ está, en este caso, determinada por

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, Y_2] & = & X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2}X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

Se aplica el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_0' &= X_0 + X_1 \\ X_i' &= \frac{(n-3)}{2} X_i & 1 \leq i \leq n-5,\ i \neq r_1 \\ X_{r_1}' &= \frac{(n-3)}{2}(X_{r_1} + Y_1) \\ X_{n-4}' &= \frac{(n-3)}{2}(X_{n-4} + Y_2) \\ X_{n-3}' &= \frac{(n-3)^2}{4} X_{n-3} \\ Y_1' &= \frac{(n-3)^2}{4} Y_1 \\ Y_2' &= \frac{(n-3)(n-5)}{4} Y_2 - \frac{(n-3)}{2} X_{n-4} \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que se satisface la siguiente expresión vectorial deducida de Y_2:

$$\frac{2}{(n-3)} X_{n-4}' = X_{n-4} + Y_2 \Rightarrow X_{n-4} = \frac{2}{(n-3)} X_{n-4}' - Y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n-3)(n-5)}{4} Y_2 = \frac{(n-3)}{2}\left(\frac{2}{(n-3)} X_{n-4}' - Y_2\right) + Y_2' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n-3)(n-5)}{4} Y_2 + \frac{(n-3)}{2} Y_2 = X_{n-4}' + Y_2' \Rightarrow \frac{(n-3)^2}{4} Y_2 = X_{n-4}' + Y_2'$$

se obtienen los siguientes productos corchete:

$$[X_0', X_i'] = [X_0 + X_1, \tfrac{(n-3)}{2} X_i] = \tfrac{(n-3)}{2} X_{i+1} = X_{i+1}',\ i \leq i \leq n-6,\ i \neq r_1 - 1, r_1$$

$$[X_0', X_{r_1-1}'] = [X_0 + X_1, \tfrac{(n-3)}{2} X_{r_1-1}] = \tfrac{(n-3)}{2}(X_{r_1} + Y_1) = X_{r_1}'$$

$$[X_0', X_{r_1}'] = [X_0 + X_1, \tfrac{(n-3)}{2}(X_{r_1} + Y_1)] = \tfrac{(n-3)}{2} X_{r_1+1} = X_{r_1+1}'$$

$$[X_0', X_{n-5}'] = [X_0 + X_1, \tfrac{(n-3)}{2} X_{n-5}] = \tfrac{(n-3)}{2}(X_{n-4} + Y_2) = X_{n-4}'$$

$$\begin{aligned}[X_0', X_{n-4}'] &= [X_0 + X_1, \tfrac{(n-3)}{2}(X_{n-4} + Y_2)] = \tfrac{(n-3)}{2} X_{n-3} + \tfrac{(n-3)}{2}\tfrac{(n-5)}{2} X_{n-3} = \\ &= \tfrac{(n-3)^2}{4} X_{n-3} = X_{n-3}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X_0', Y_2'] &= [X_0 + X_1, \tfrac{(n-3)(n-5)}{4} Y_2 - \tfrac{n-3}{2} X_{n-4}] = \tfrac{(n-3)(n-5)}{4} X_{n-3} - \tfrac{(n-3)(n-5)}{4} X_{n-3} = \\ &= 0\end{aligned}$$

$$[X_i', X_{r_1-i}'] = [\tfrac{(n-3)}{2} X_i, \tfrac{(n-3)}{2} X_{r_1-i}] = \tfrac{(n-3)^2}{4}(-1)^{i-1} Y_1 = Y_1',\ 1 \leq i \leq \tfrac{r_1-1}{2}$$

$$\begin{aligned}[X_i', X_{n-4-i}'] &= [\tfrac{(n-3)}{2} X_i, \tfrac{(n-3)}{2} X_{n-4-i}] = \tfrac{(n-3)^2}{4}(-1)^{i-1} Y_2 = (-1)^{i-1}(X_{n-4}' + Y_2'), \\ & 1 \leq i \leq \tfrac{n-5}{2}\end{aligned}$$

$$[X'_1, X'_{n-4}] = [\tfrac{(n-3)}{2}X_1, \tfrac{(n-3)}{2}(X_{n-4}+Y_2)] = \tfrac{(n-3)^2}{4}[X_1, X_{n-4}] = \tfrac{(n-3)^2}{4}\tfrac{(n-5)}{2}X_{n-3} =$$

$$= \tfrac{(n-3)^2}{4}\tfrac{(n-5)}{2}\tfrac{4}{(n-3)^2}X_{n-3} = \tfrac{(n-5)}{2}X'_{n-3}$$

$$[X'_i, X'_{n-3-i}] = [\tfrac{(n-3)}{2}X_i, \tfrac{(n-3)}{2}X_{n-3-i}] = \tfrac{(n-3)^2}{4}(-1)^{i-1}\tfrac{(n-2i-3)}{2}X_{n-3} =$$

$$= \tfrac{(n-3)^2}{4}(-1)^{i-1}\tfrac{(n-2i-3)}{2}\tfrac{4}{(n-3)^2}X'_{n-3} = (-1)^{i-1}\tfrac{(n-2i-3)}{2}X'_{n-3},$$

$$2 \leq i \leq \tfrac{n-5}{2}$$

$$[X'_1, Y'_2] = [\tfrac{(n-3)}{2}X_1, \tfrac{(n-3)(n-5)}{4}Y_2 - \tfrac{(n-3)}{2}X_{n-4}] = -\tfrac{(n-3)^2}{4}\tfrac{n-5}{2}X_{n-3} = \tfrac{(5-n)}{2}X'_{n-3}$$

$$[X'_i, X'_{r_1}] = [\tfrac{(n-3)}{2}X_i, \tfrac{(n-3)}{2}(X_{r_1} + Y_1)] = \tfrac{(n-3)^2}{4}[X_i, X_{r_1}] = 0, \ 1 \leq i < r_1,$$

$$i \neq n-4-r_1, n-3-r_1$$

$$[X'_i, Y'_2] = 0, \ 2 \leq i \leq n-4$$

$$[X'_i, X'_{n-4}] = 0, \ 2 \leq i \leq n-5$$

Los productos corchete en los cuales interviene X'_{n-3} e Y'_1 son, evidentemente nulos, al ser dichos vectores combinación lineal de X_{n-3} e Y_1 respectivamente, que son centrales. Queda demostrado que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley definida por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}(X_{n-4}+Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2}X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1, Y_2] & = & \frac{(5-n)}{2}X_{n-3} & \end{cases}$$

que corresponde a $\mathfrak{g} \simeq \tau(n, r_1, n-4)$.

- **Caso 2:** $\beta = 0$

Como $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, se deduce que $\alpha \neq 0$ y la ley de $\mathfrak{g}$ viene expresada por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

Con el cambio de base definido por

$$\begin{cases} X'_0 &= X_0 & \\ X'_i &= \frac{1}{\alpha}X_i & 1 \leq i \leq n-4 \\ X'_{n-3} &= X_{n-3} & \\ Y'_j &= \frac{1}{\alpha^2}Y_j & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

se obtiene la ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

que corresponde a $\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, n-4)$ y queda demostrado el teorema de clasificación de las álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de leyes $\mu(n, r_1, n-4)$, n impar. □

1.4.3 El caso $r_2 = n - 5$

Como r_2 es impar se deduce que n es par y se cumple que r_1 es impar, $3 \leq r_1 \leq n-7$. Ahora el vector Y_2 acompaña a X_{n-5} en una base del antepenúltimo de los subespacios graduantes.

Teorema 1.4.3. (de clasificación de las AL3FGN de ley $\mu(n, r_1, n-5)$, n par) $(3 \leq r_1 \leq n-7)$

Cualquier álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, de dimensión n y de ley $\mu(n, r_1, n-5)$, con n par, $n \geq 12$, r_1 impar, $3 \leq r_1 \leq n-7$, es isomorfa a una de las familias $\mathcal{L}(n, r_1, n-5)$, $\mathcal{Q}(n, r_1, n-5)$ o $\tau(n, r, n-5)$, cuyas leyes respecto de una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ vienen expresadas por

$$\mathcal{L}(n, r_1, n-5) : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}(n, r_1, n-5) : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1}X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

$$\tau(n,r_1,n-5):\begin{cases}[X_0,X_i] &= X_{i+1} & 1\le i\le n-4\\ [X_i,X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1\le i\le \frac{r_1-1}{2}\\ [X_i,X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-5}+Y_2) & 1\le i\le \frac{n-6}{2}\\ [X_i,X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}\frac{(n-2i-4)}{2}X_{n-4} & 1\le i\le \frac{n-6}{2}\\ [X_i,X_{n-3-i}] &= (-1)^{i}(i-1)\frac{(n-i-4)}{2}X_{n-3} & 1\le i\le \frac{n-4}{2}\\ [X_i,Y_2] &= \frac{(6-n)}{2}X_{n-5+i} & 1\le i\le 2\end{cases}$$

Demostración. Sea, pues, $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de ley $\mu(n,r_1,n-5)$, con $dim(\mathfrak{g})=n$ par, $n\ge 12$, r_1 impar y $3\le r_1\le n-7$. La graduación natural asociada a $\mathfrak{g}$ es

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}=&<X_0,X_1>\oplus<X_2>\oplus\ldots\oplus<X_{r_1-1}>\oplus<X_{r_1},Y_1>\oplus\ldots\oplus<X_{r_1+1}>\oplus\\ &\oplus\ldots\oplus<X_{n-5},Y_2>\oplus<X_{n-4}>\oplus<X_{n-3}>\end{aligned}$$

es decir, $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^{n-3}\mathfrak{g}_i$ donde

$$\begin{array}{lcll}\mathfrak{g}_1 &=& <X_0,X_1> & \\ \mathfrak{g}_i &=& <X_i> & 2\le i\le n-3,\ i\ne r_1,n-5\\ \mathfrak{g}_{r_1} &=& <X_{r_1},Y_1> & \\ \mathfrak{g}_{n-5} &=& <X_{n-5},Y_2> & \end{array}$$

Como $\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})=<X_{n-3}>$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, se sigue que el álgebra cociente $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Lie 3-filiforme graduada también naturalmente y de dimensión una unidad menos; es decir, $n-1$. Dicha álgebra $\mathfrak{g}'$ será de ley $\mu(n-1,r_1,(n-1)-4)$, con dimensión $(n-1)$ impar, que ya fue estudiada en la subsección **1.4.2**.

Si se sigue representando por $\{X_0,X_1,\ldots,X_{n-4},Y_1,Y_2\}$ una base suya adaptada, se deduce, entonces, que

$$\mathfrak{g}'\simeq\mathcal{L}(n-1,r_1,(n-1)-4)\quad \text{ó}\quad \mathfrak{g}'\simeq\tau(n-1,r_1,(n-1)-4)$$

y, en consecuencia, habrá que distinguir estos dos casos.

Vamos a demostrar que si $\mathfrak{g}'\simeq\mathcal{L}(n-1,r_1,n-5)$ es $\mathfrak{g}\simeq\mathcal{L}(n,r_1,n-5)$ ó $\mathfrak{g}\simeq\mathcal{Q}(n,r_1,n-5)$ y si $\mathfrak{g}'\simeq\tau(n-1,r_1,n-5)$ es $\mathfrak{g}\simeq\tau(n,r_1,n-5)$.

- **Caso 1:** $\mathfrak{g}'\simeq\mathcal{L}(n-1,r_1,n-5)$

Ahora, la ley de $\mathfrak{g}'$ está determinada por

$$\begin{cases}[X_0,X_i] &= X_{i+1} & 1\le i\le n-5\\ [X_i,X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1\le i\le \frac{r_1-1}{2}\\ [X_i,X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}Y_2 & 1\le i\le \frac{n-6}{2}\end{cases}$$

y extendiendo $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3} >$ y exigiendo que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, $\forall 1 \leq i, j \leq n-3$ se obtiene la ley de $\mathfrak{g}$ siguiente:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] & = & d X_{n-3} & \\ [X_2, Y_2] & = & f X_{n-3} & \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}$, se deduce que

$$[X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_{i+1} + a_i) X_{n-3} = 0 \Rightarrow a_{i+1} + a_i = 0 \Rightarrow a_i = (-1)^{i-1} a_1, \ 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$$

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_1, Y_2)$ se deduce que $d = 0 = f$.

En consecuencia, la ley de $\mathfrak{g}$ queda definida por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1} a_1 X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Vamos a distinguir cuatro subcasos según sea nulo o no a_1 y por cada posibilidad analizaremos si α es nulo o no.

- **Subcaso 1.1:** $a_1 = \alpha = 0$

Este subcaso no es admisible, ya que la ley de $\mathfrak{g}$ está expresada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \end{cases}$$

y se observa que corresponde a un álgebra de Lie 4-filiforme y graduada naturalmente. Se cumple que $dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 4$, al ser $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< X_{n-4}, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >$, lo que es una contradicción.

- **Subcaso 1.2:** $a_1 = 0$ **y** $\alpha \neq 0$

Ahora $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] &= \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \end{cases}$$

Se puede suponer $\alpha = 1$, sin más que efectuar el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' &= X_i & 0 \leq i \leq n-4 \\ X_{n-3}' &= \alpha X_{n-3} & \\ Y_j' &= Y_j & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

y queda demostrado que la ley de $\mathfrak{g}$ corresponde a $\mathcal{L}(n, r_1, n-5)$.

- **Subcaso 1.3:** $a_1 \neq 0$ **y** $\alpha = 0$

Ahora $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} a_1 X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Con el cambio de base definido por las relaciones

$$\begin{cases} X_0' &= X_0 + X_1 & \\ X_i' &= X_i & 1 \leq i \leq n-4, \ i \neq r_1, n-5 \\ X_{r_1}' &= X_{r_1} + Y_1 & \\ X_{n-5}' &= X_{n-5} + Y_2 & \\ X_{n-3}' &= a_1 X_{n-3} & \\ Y_j' &= Y_j & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

se obtienen los siguientes productos corchete no nulos, salvo antisimetría:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

y dicha ley se observa que corresponde a $\mathcal{Q}(n, r_1, n-5)$.

- **Subcaso 1.4:** $a_1 \neq 0$ **y** $\alpha \neq 0$

Recordamos que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1} a_1 X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Se puede suponer $\alpha = 1 = a_1$, sin más que efectuar el cambio de escala determinado por

$$\begin{cases} X'_0 & = & X_0 & \\ X'_i & = & \frac{\alpha}{a_1} X_i & 1 \leq i \leq n-4 \\ X'_{n-3} & = & \frac{\alpha^2}{a_1} X_{n-3} & \\ Y'_j & = & \frac{\alpha^2}{a_1^2} Y_j & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

y, entonces, la ley se observa que corresponde a $\mathcal{Q}(n, r_1, n-5)$.

- **Caso 2:** $\mathfrak{g}' \simeq \tau(n-1, r_1, n-5)$

Ahora, la ley de $\mathfrak{g}'$ está determinada por

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1} (X_{n-5} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} \frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_1, Y_2] & = & \frac{(6-n)}{2} X_{n-4} & \end{cases}$$

Por extensión de $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3} >$ y teniendo en cuenta que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n-3$, la ley de $\mathfrak{g}$ se expresa mediante

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] & = & (-1)^{i-1} (X_{n-5} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} \frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] & = & d X_{n-3} & \\ [X_1, Y_2] & = & \frac{(6-n)}{2} X_{n-4} & \\ [X_2, Y_2] & = & f X_{n-3} & \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}$, se deduce que

$$[X_0, [X_i, X_{n-4-i}]] = [X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{i-1}\tfrac{(n-4-2i)}{2}\alpha X_{n-3} = (a_{i+1} + a_i)X_{n-3} \Rightarrow (-1)^{i-1}\tfrac{(n-4-2i)}{2}\alpha = a_{i+1} + a_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}(a_1 - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(n-4-2k)}{2}\alpha), \quad 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}(a_1 - \frac{(n-4-i)}{2}(i-1)\alpha), \quad 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$$

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_1, Y_2)$ se obtiene que

$$\begin{array}{rcl} d &=& 0 \\ f &=& \frac{(6-n)}{2}\alpha \end{array}$$

De $Jac(X_1, X_2, X_{n-6})$ se deduce que

$$[X_1, [X_2, X_{n-6}]] = [X_2, [X_1, X_{n-6}]] \Rightarrow [X_1, -\tfrac{n-8}{2}X_{n-4}] = [X_2, X_{n-5}] + [X_2, Y_2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\tfrac{n-8}{2}a_1 X_{n-3} = (a_2 + f)X_{n-3} \Rightarrow \tfrac{n-8}{2}a_1 + a_2 + f = 0 \Rightarrow \tfrac{(n-10)}{2}a_1 = 0$$

Como $n > 10$, se deduce que $a_1 = 0$ y, entonces, se obtiene la expresión más simplificada para a_i:

$$a_i = (-1)^i(i-1)\frac{(n-4-i)}{2}\alpha, \quad 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$$

Por tanto, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] &=& \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] &=& (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &=& (-1)^{i-1}(X_{n-5} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &=& (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2}X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &=& (-1)^i(i-1)\frac{(n-4-i)}{2}\alpha X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_1, Y_2] &=& \frac{(6-n)}{2}X_{n-4} & \\ [X_2, Y_2] &=& \frac{(6-n)}{2}\alpha X_{n-3} & \end{array} \right.$$

A continuación, habrá que distinguir si α es nulo o no.

Si $\alpha = 0$, la ley de $\mathfrak{g}$ queda determinada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-5} + Y_2) & 1 \le i \le \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4} & 1 \le i \le \frac{n-6}{2} \\ [X_1, Y_2] &= \frac{(6-n)}{2} X_{n-4} & \end{cases}$$

Se observa que $\mathfrak{g}$ es escindida porque $\mathfrak{g}$ es suma directa de un álgebra de Lie 3-filiforme, graduada naturalmente y de dimensión $n-1$ y $\mathbf{C}$. En consecuencia, dicha ley es la de un álgebra 4-filiforme, lo que es una contradicción.

Si $\alpha \neq 0$, se puede suponer $\alpha = 1$, sin más que hacer el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X_i' &= X_i & 0 \le i \le n-4 \\ X_{n-3}' &= \alpha X_{n-3} & \\ Y_j' &= Y_j & 1 \le j \le 2 \end{cases}$$

y queda que la ley de $\mathfrak{g}$ está definida por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \le i \le \frac{r-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-5} + Y_2) & 1 \le i \le \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4} & 1 \le i \le \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i}(i-1) \frac{(n-4-i)}{2} X_{n-3} & 1 \le i \le \frac{n-4}{2} \\ [X_i, Y_2] &= \frac{(6-n)}{2} X_{n-5+i} & 1 \le i \le 2 \end{cases}$$

la cual corresponde a $\tau(n, r_1, n-5)$.

Queda demostrado que en este caso terminal $r_2 = n-5$, el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las familias $\mathcal{L}(n, r_1, n-5)$, $\mathcal{Q}(n, r_1, n-5)$ ó $\tau(n-1, r_1, n-5)$. □

1.4.4 El caso $r_2 = n - 6$

Este es el último caso que es necesario estudiar como terminal. En realidad, para $r_2 = n-6$ se obtiene la "estabilización". Como r_2 es impar se deduce que n es impar y se cumple que r_1 es impar, $3 \le r_1 \le n-8$. Ahora los vectores Y_1 e Y_2 acompañan a X_{r_1} y X_{n-6}, respectivamente, en una base del correspondiente subespacio graduante.

Teorema 1.4.4. (de clasificación de las AL3FGN de ley $\mu(n, r_1, n-6)$, n impar) $(3 \leq r_1 \leq n-8)$

Cualquier álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, de dimensión n y de ley $\mu(n, r_1, n-6)$, con n impar, $n \geq 11$, r_1 impar, $3 \leq r_1 \leq n-8$, es isomorfa a $\mathcal{L}(n, r_1, n-6)$, cuya ley respecto de una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ viene expresada por

$$\mathcal{L}(n, r_1, n-6) : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \end{cases}$$

Demostración. El caso $n = 11$ ya se estudió en la subsección **1.3.4**. Se incluye en el enunciado del teorema dado que el resultado es, en este caso, idéntico.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente de ley $\mu(n, r_1, n-6)$, con $dim(\mathfrak{g}) = n$ impar, $n \geq 13$, r_1 impar y $3 \leq r_1 \leq n-8$. La graduación natural asociada a $\mathfrak{g}$ es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = &< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \dots \oplus < X_{r_1}, Y_1 > \oplus < X_{r_1+1} > \oplus \dots \oplus \\ &\oplus < X_{n-6}, Y_2 > \oplus < X_{n-5} > \oplus < X_{n-4} > \oplus < X_{n-3} > \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g}) =< X_{n-3} >$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, se sigue que el álgebra cociente $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Lie 3-filiforme graduada también naturalmente y de dimensión una unidad menos; es decir, $n-1$. Dicha álgebra $\mathfrak{g}'$ será de ley $\mu(n-1, r_1, (n-1)-5)$, con dimensión $(n-1)$ par, que ya fue estudiada en la subsección **1.4.3**.

Si se sigue representando por $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-4}, Y_1, Y_2\}$ una base suya adaptada, se deduce, entonces, por lo demostrado en la subsección mencionada, que

$$\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-1, r_1, n-6) \text{ o bien } \mathfrak{g}' \simeq \mathcal{Q}(n-1, r_1, n-6) \text{ o bien } \mathfrak{g}' \simeq \tau(n-1, r_1, n-6)$$

y, en consecuencia, habrá que distinguir estos tres casos.

Vamos a demostrar que el único caso admisible es $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-1, r_1, n-6)$ y, entonces, $\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, n-6)$.

Tanto si $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{Q}(n-1, r_1, n-6)$ como si $\mathfrak{g}' \simeq \tau(n-1, r_1, n-6)$, resulta ser $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie graduada naturalmente, pero 4-filiforme.

- **Caso 1:** $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-1, r_1, n-6)$

La ley de $\mathfrak{g}'$ está determinada por

$$\mathfrak{g}' : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \end{cases}$$

y extendiendo $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3} >$ y exigiendo que

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \ \forall 1 \leq i, j \leq n-3$$

se sigue que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar por

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] = \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] = a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] = d X_{n-3} & \\ [X_3, Y_2] = f X_{n-3} & \\ [Y_1, Y_2] = h X_{n-3} & \text{si } r_1 = 3 \qquad (h = 0 \text{ si } r_1 \neq 3) \end{cases}$$

$Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i}), \ 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \ \Rightarrow a_i = (-1)^{i-1} a_1, \ 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$

$Jac(X_0, X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}}), \ \Rightarrow a_{\frac{n-5}{2}} = 0 \ \Rightarrow a_1 = 0 \ \Rightarrow a_i = 0 \ 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$

$Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1), \ \Rightarrow d = 0$

$Jac(X_0, X_2, Y_2), \ \Rightarrow f = 0$

$Jac(X_1, X_2, Y_2), \ (r_1 = 3) \Rightarrow h = 0$ (Si $r_1 \neq 3$, se verifica trivialmente)

La ley de $\mathfrak{g}$ queda simplificada de la forma siguiente:

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] = \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \end{cases}$$

Estudiemos, a continuación, esta ley, distinguiendo dos subcasos: $\alpha = 0$ ó $\alpha \neq 0$.

- **Subcaso 1.1:** $\alpha = 0$

Es evidente que, entonces, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \supset < X_{n-4}, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >$ y que él álgebra dada $\mathfrak{g}$ es, en realidad, igual a $\mathcal{L}(n-1, r_1, (n-1)-5) \oplus \mathbf{C}$. Se trata de un álgebra de Lie 4-filiforme graduada naturalmente.

- **Subcaso 1.2:** $\alpha \neq 0$

Se puede suponer $\alpha = 1$, sin más que efectuar el siguiente cambio de base:

$$\begin{cases} X'_t = X_t & 1 \leq t \leq n-4 \\ X'_{n-3} = \alpha X_{n-3} & \\ Y'_i = Y_i & i = 1,2 \end{cases}$$

por lo que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \end{cases}$$

y, por tanto, $\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, n-6)$.

- **Caso 2:** $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{Q}(n-1, r_1, n-6)$

Ahora, la ley de $\mathfrak{g}'$ está definida por

$$\mathfrak{g}' : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

y extendiendo $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3} >$ y exigiendo que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ $\forall 1 \leq i, j \leq n-3$, se sigue que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar por

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] = \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] = a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] = d X_{n-3} & \\ [X_3, Y_2] = f X_{n-3} & \\ [Y_1, Y_2] = h X_{n-3} & \text{si } r_1 = 3 \ (h = 0 \text{ si } r_1 \neq 3) \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-7}{2}$, se deduce que

$$[X_0, [X_i, X_{n-4-i}]] = [X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{i-1}\alpha X_{n-3} = (a_{i+1} + a_i)X_{n-3} \Rightarrow a_{i+1} + a_i = (-1)^{i-1}\alpha, \quad 1 \leq i \leq \tfrac{n-7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}(a_1 - (i-1)\alpha), \quad 1 \leq i \leq \tfrac{n-5}{2}.$$

De $Jac(X_1, X_2, X_{n-6})$ se obtiene que $a_1 = 0 \Rightarrow a_i = (-1)^i(i-1)\alpha$, $1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$.

De $Jac(X_0, X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}})$ se obtiene que $[X_0, [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}}]] = [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-1)^{\frac{n-7}{2}}\alpha X_{n-3} = a_{\frac{n-5}{2}} X_{n-3} \Rightarrow a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-7}{2}}\alpha$$

Como $a_i = (-1)^i(i-1)\alpha$, $1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$, se deduce para $i = \frac{n-5}{2}$ que

$$\frac{(5-n)}{2}\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{5-n}{2} = 0 & \Leftrightarrow \ n = 5 \text{ (imposible ya que } n \geq 13) \\ \text{ó} & \\ \alpha = 0 & \Rightarrow \ a_i = 0 \quad 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_2, Y_2)$ se obtiene, respectivamente, que $d = 0$ y $f = 0$.

De $Jac(X_1, X_2, Y_2)$ cuando $r_1 = 3$, se deduce que $h = 0$.

Considerando las restricciones obtenidas, la ley de $\mathfrak{g}$, salvo antisimetría, queda definida por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

Se observa que $X_{n-3} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y $X_{n-3} \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, luego $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< X_{n-4}, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >$, por lo que $\mathfrak{g}$ es escindida porque es suma directa de un álgebra de Lie 3-filiforme, graduada naturalmente y de dimensión $n-1$, concretamente $\mathcal{Q}(n-1, r_1, (n-1)-5)$, y $\mathbf{C}$. En consecuencia, dicha ley es la de un álgebra 4-filiforme, lo que es una contradicción.

- **Caso 3:** $\mathfrak{g}' \simeq \tau(n-1, r_1, n-6)$

En este caso, el álgebra $\mathfrak{g}'$ es isomorfa a una de ley

$$\mathfrak{g}' : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1}(X_{n-6} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] = (-1)^{i-1} \frac{(n-5-2i)}{2} X_{n-5} & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i}(i-1) \frac{(n-5-i)}{2} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, Y_2] = \frac{(7-n)}{2} X_{n-6+i} & i = 1, 2 \end{cases}$$

y extendiendo $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3} >$ y exigiendo que

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n-3$$

se sigue que la ley de $\mathfrak{g}$ se puede expresar por

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] = \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1}(X_{n-6} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] = (-1)^{i-1} \frac{(n-5-2i)}{2} X_{n-5} & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i}(i-1) \frac{(n-5-i)}{2} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] = a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] = d X_{n-3} & \\ [X_i, Y_2] = \frac{(7-n)}{2} X_{n-6+i} & i = 1, 2 \\ [X_3, Y_2] = f X_{n-3} & \\ [Y_1, Y_2] = h X_{n-3} & \text{si } r_1 = 3 \ (h = 0 \text{ si } r_1 \neq 3) \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_2, Y_2)$ se deduce, respectivamente, que

$$d = 0 \quad \text{y} \quad f = \frac{(7-n)}{2}\alpha$$

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-7}{2}$, se deduce que

$$[X_0, [X_i, X_{n-4-i}]] = [X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{i}(i-1) \frac{(n-5-i)}{2} \alpha X_{n-3} = (a_{i+1} + a_i) X_{n-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}(a_1 + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{(n-5-k)}{2}(k-1)\alpha), \quad 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$$

Se observa, por ejemplo, que $a_2 = -a_1$ y de $Jac(X_0, X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}})$ se obtiene que $[X_0, [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}}]] = [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}] \Rightarrow a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{(n-7)(n-5)}{8} \alpha$

De $Jac(X_1, X_2, Y_2)$ se obtiene que $[X_1, [X_2, Y_2]] = [[X_1, X_2], Y_2] + [X_2, [X_1, Y_2]] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(7-n)}{2} a_1 X_{n-3} = [Y_1, Y_2] + \frac{(7-n)}{2} a_2 X_{n-3}$

$$\text{Luego} \begin{cases} \text{si } r_1 = 3 \Rightarrow h = \frac{7-n}{2}(a_1 - a_2) \\ \text{si } r_1 \neq 3 \Rightarrow \frac{7-n}{2}(a_1 - a_2) = 0, \text{como } n \geq 13 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ h = 0 \text{ (desde el principio)} \end{cases} \end{cases}$$

Es necesario, en el resto, estudiar por separado los subcasos $r_1 = 3$ y $r_1 \neq 3$

- **Subcaso 3.1:** $r_1 = 3$

De $Jac(X_1, X_{n-7}, Y_1)$ se obtiene que $[X_{n-6} + Y_2, Y_1] = 0 \Rightarrow [Y_1, Y_2] = 0 \Rightarrow h = 0.$

Como $h = \frac{7-n}{2}(a_1 - a_2)$ y por otra parte se sabe que $a_2 = -a_1$ y que $n \geq 13$, en consecuencia, resulta ser $a_1 = 0$.

Se han obtenido, anteriormente, para $a_{\frac{n-5}{2}}$ dos expresiones:

$$a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{(n-7)(n-5)}{8} \alpha$$

$$a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-7}{2}} \alpha \sum_{k=2}^{\frac{n-7}{2}} \frac{(n-5-k)}{2} (k-1)$$

Igualándolas entre sí se obtiene que

$$((n-4) \sum_{k=2}^{\frac{(n-7)}{2}} k - \sum_{k=2}^{\frac{(n-7)}{2}} k^2 + \frac{(5-n)n-9)}{2})\alpha = \frac{(7-n)(n-5)}{4} \alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow (n^3 - 18n^2 + 107n - 210 = 0 \Rightarrow (n-5)(n-6)(n-7)\alpha = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (n-5)(n-6)(n-7)\alpha = 0$$

Como $n \geq 13$, resulta $\alpha = 0$.

Sustituyendo en las correspondientes expresiones resulta

$$\begin{cases} f &= 0 \\ a_i &= 0 \qquad 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

Se obtiene que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley expresada por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-6-i}] = (-1)^{i-1}(X_{n-6} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] = (-1)^{i-1} \frac{(n-5-2i)}{2} X_{n-5} & 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i}(i-1) \frac{(n-5-i)}{2} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, Y_2] = \frac{(7-n)}{2} X_{n-6+i} & i = 1, 2 \end{cases}$$

y como $X_{n-3} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y $X_{n-3} \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, corresponde a la de un álgebra de Lie 4-filiforme graduada naturalmente, lo que nos lleva a una contradicción.

- **Subcaso 3.2:** $r_1 \neq 3$

Se verifica simultáneamente que $a_2 = -a_1$ y $a_1 = a_2$, por lo que se anulan ambos parámetros, $a_1 = a_2 = 0$.

Realizando los mismos pasos que en el caso de $r_1 = 3$, se obtiene el mismo resultado anterior.

Queda demostrado que en este último caso terminal $r_2 = n - 6$, el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de la familia $\mathcal{L}(n, r_1, n-6)$. □

1.5 El caso general

Hemos demostrado que las posiciones r_1 y r_2 donde se encuentran los vectores Y_1 e Y_2 en la graduación natural de un álgebra de Lie 3-filiforme, de dimensión finita n, $n \geq 6$, deben ser impares, distintas y mayores o iguales a 3 para que resulte ser $\mathfrak{g}$ no escindida.

Si $r_1 = r_2 = 1$, se trata de una extensión trivial de un álgebra de Lie filiforme y graduada naturalmente, salvo para el caso evidente $n = 4$ (sólo hay una, la abeliana) y para $n = 5$, que también puede ser isomorfa al álgebra de Heisenberg.

En los casos $r_1 = 1 < r_2$, se trata también de extensiones triviales, bien de una filiforme o bien de una casifiliforme graduada naturalmente.

En dimensiones pequeñas, ($n \leq 10$), aparecen álgebras excepcionales e incluso, en $n = 10$, surge una familia infinita uni-paramétrica de álgebras de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente.

En el caso general ($n \geq 11$) la situación se estabiliza. Si la dimensión es impar, hay dos familias localmente finitas: una bi-paramétrica, $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ (r_1 y r_2 son los parámetros), y otra uni-paramétrica, $\tau(n, r_1, n-4)$, (r_1 es el parámetro). Si la dimensión es par hay, en cambio, tres familias localmente finitas: dos bi-paramétricas, $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ y $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$, y otra uni-paramétrica, $\tau(n, r_1, n-5)$. La demostración, como vamos a ver a continuación, utiliza un proceso de inducción finita.

Teorema 1.5.1. (de clasificación de las AL3FGN de ley $\mu(n, r_1, r_2)$) ($3 \leq r_1 < r_2 \leq n-6$) *Cualquier álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente, de dimensión n y de ley $\mu(n, r_1, r_2)$, con $n \geq 11$, r_1 y r_2 ambos impares, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-6$, es isomorfa a una de la familia $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ si n es impar, y a un álgebra de las familias $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ o $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$ si n es par. Sus leyes, respecto de una cierta base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$, vienen expresadas por*

$$\mathcal{L}(n, r_1, r_2) : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}(n, r_1, r_2) : \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Demostración. Este teorema se va a demostrar mediante un procedimiento inductivo para la dimensión n del álgebra $\mathfrak{g}$, distinguiendo su paridad.

Para los primeros casos que tiene sentido considerar, $n = 11$ y $n = 12$, se ha comprobado (en las secciones **1.3** y **1.4**) que se verifica el teorema.

El caso $r_2 = n-6$ se ha estudiado en la subsección **1.4.4**.

Sea, pues, $\mathfrak{g}$, un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de ley $\mu(n, r_1, r_2)$, con $dim(\mathfrak{g}) = n$, $n \geq 13$, r_1 y r_2 impares y $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-7$.

Sea $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$.

La graduación natural asociada a $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{g} =< X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \ldots \oplus < X_{r_1-1} > \oplus < X_{r_1}, Y_1 > \oplus < X_{r_1+1} > \oplus$$
$$\oplus \ldots \oplus < X_{r_2-1} > \oplus < X_{r_2}, Y_2 > \oplus < X_{r_2+1} > \oplus \ldots \oplus < X_{n-3} >$$

es decir,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-3} \mathfrak{g}_i$$

donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i > & 2 \leq i \leq n-3, \ i \neq r_1, r_2 \\ \mathfrak{g}_{r_1} & = & < X_{r_1}, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_{r_2} & = & < X_{r_2}, Y_1 > & \end{array}$$

Como $\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g}) =< X_{n-3} >$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, se sigue que el álgebra cociente $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente y de dimensión una unidad menos, es decir, $n-1$. Dicha álgebra $\mathfrak{g}'$ será de ley $\mu(n-1, r_1, r_2)$, con dimensión de paridad diferente a la de n. Además, como $r_2 \leq n-7$ se cumple $r_2 \leq (n-1) - 6$, y es claro que $\mathfrak{g}'$ cumple la hipótesis de inducción, es decir, verifica las hipótesis del teorema.

Aunque cada vector de $\mathfrak{g}'$ es una clase de vectores al tratarse de un álgebra cociente, seguiremos representando por $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-4}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada de dicha álgebra.

Habrá que distinguir dos casos, dependiendo de que n sea par o impar.

- **Caso 1: n par**

Como $n-1$ es impar, por hipótesis de inducción, se verificará que

$$\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-1, r_1, r_2)$$

es decir, su ley vendrá determinada por

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \end{array} \right.$$

Al extender $\mathfrak{g}'$ por $< X_{n-3} >$ y teniendo en cuenta que

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n-3$$

la ley de $\mathfrak{g}$ se expresa mediante

$$\mathfrak{g}:\left\{\begin{array}{lcll}[X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\leq i\leq n-5\\ [X_0,X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i,X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1\leq i\leq \frac{r_1-1}{2}\\ [X_i,X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1\leq i\leq \frac{r_2-1}{2}\\ [X_i,X_{n-3-i}] & = & a_iX_{n-3} & 1\leq i\leq \frac{n-4}{2}\\ [X_{n-3-r_1},Y_1] & = & dX_{n-3} & \\ [X_{n-3-r_2},Y_2] & = & fX_{n-3} & \end{array}\right.$$

Se observa que $[Y_1,Y_2]=0$ ya que en otro caso debería ser $r_1+r_2=n-3$, lo que es imposible al ser r_1,r_2 y $n-3$ impares.

De $Jac(X_0,X_{n-4-r_1},Y_1)$ y $Jac(X_0,X_{n-4-r_2},Y_2)$ se deduce que $d=0=f$.

De $Jac(X_0,X_i,X_{n-4-i})$, $1\leq i\leq \frac{n-6}{2}$, se deduce que

$$[X_{i+1},X_{n-4-i}]+[X_i,X_{n-3-i}]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_{i+1}+a_i)X_{n-3}=0\Rightarrow a_{i+1}+a_i=0\Rightarrow a_i=(-1)^{i-1}a_1,\ 1\leq i\leq \frac{n-4}{2}$$

En consecuencia, la ley de $\mathfrak{g}$ queda definida por

$$\mathfrak{g}:\left\{\begin{array}{lcll}[X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\leq i\leq n-5\\ [X_0,X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i,X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1\leq i\leq \frac{r_1-1}{2}\\ [X_i,X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1\leq i\leq \frac{r_2-1}{2}\\ [X_i,X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}a_1X_{n-3} & 1\leq i\leq \frac{n-4}{2}\end{array}\right.$$

Habrá que distinguir, a continuación, si $a_1=0$ ó $a_1\neq 0$. En cada situación, habrá que considerar la nulidad o no del parámetro α. Vamos a obtener que solamente podemos encontrar álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente si $(a_1,\alpha)\neq(0,0)$. Si $a_1=0$ será $\mathfrak{g}\simeq\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$ y si $a_1\neq 0$ será $\mathfrak{g}\simeq\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$.

- **Subcaso 1.1:** $a_1=0$ y $\alpha=0$

Este caso no es admisible por resultar el álgebra $\mathfrak{g}$ de características diferentes a las que tratamos de encontrar. Al anularse los dos parámetros, su ley se convierte en

$$\mathfrak{g}:\left\{\begin{array}{lcll}[X_0,X_i] & = & X_{i+1} & 1\leq i\leq n-5\\ [X_i,X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1\leq i\leq \frac{r_1-1}{2}\\ [X_i,X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1\leq i\leq \frac{r_2-1}{2}\end{array}\right.$$

Se cumple que $X_{n-3} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ y $X_{n-3} \notin [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, luego $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< X_{n-4}, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >$, por lo que $\mathfrak{g}$ es escindida porque es suma directa de un álgebra de Lie 3-filiforme, graduada naturalmente y de dimensión $n-1$, concretamente $\mathcal{L}(n-1, r_1, r_2)$, con $\mathbf{C}$. En consecuencia, dicha ley es la de un álgebra 4-filiforme, lo que es una contradicción.

- **Subcaso 1.2:** $a_1 = 0$ y $\alpha \neq 0$

Ahora la ley de $\mathfrak{g}$ está determinada por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] &= \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \end{cases}$$

Se puede suponer $\alpha = 1$, sin más que aplicar el cambio de base definido por las relaciones

$$\begin{cases} X'_t &= X_t & 1 \leq t \leq n-4 \\ X'_{n-3} &= \alpha X_{n-3} & \\ Y'_i &= Y_i & i = 1,2 \end{cases}$$

por lo que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$.

- **Subcaso 1.3:** $a_1 \neq 0$ y $\alpha = 0$

En este caso, la ley de $\mathfrak{g}$ está expresada por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} a_1 X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Al realizar el cambio de base dado por

$$\begin{cases} X'_0 &= X_0 + X_1 & \\ X'_i &= X_i & 1 \leq i \leq n-4,\ i \neq r_1, r_2 \\ X'_{r_1} &= X_{r_1} + Y_1 & \\ X'_{r_2} &= X_{r_2} + Y_2 & \\ X'_{n-3} &= a_1 X_{n-3} & \\ Y'_j &= Y_j & i = 1,2 \end{cases}$$

se convierte en

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \le i \le \frac{r_2-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}X_{n-3} & 1 \le i \le \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

que corresponde a $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$.

- **Subcaso 1.4:** $a_1 \neq 0$ y $\alpha \neq 0$

En este último caso, el cambio de base expresado por

$$\begin{cases} X'_0 & = & a_1 X_0 & \\ X'_i & = & a_1^{i-1}\alpha X_i & 1 \le i \le n-4 \\ X'_{n-3} & = & a_1^{n-4}\alpha^2 X_{n-3} & \\ Y'_1 & = & a_1^{r_1-2}\alpha^2 Y_1 & \\ Y'_2 & = & a_1^{r_2-2}\alpha^2 Y_2 & \end{cases}$$

demuestra que $\mathfrak{g}$ es isomorfa también a $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$.

Por tanto, queda demostrado el teorema cuando la dimensión de $\mathfrak{g}$ es par.

Se aborda, a continuación, el caso en que la dimensión de $\mathfrak{g}$ es impar.

- **Caso 2: n impar**

Como $n-1$ es par, por hipótesis de inducción, se verificará que

$$\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-1, r_1, r_2) \quad \text{ó} \quad \mathfrak{g}' \simeq \mathcal{Q}(n-1, r_1, r_2)$$

Se va a demostrar que la segunda posibilidad es inadmisible y que en la primera se va a obtener el álgebra de ley $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$.

- **Subcaso 2.1:** $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{L}(n-1, r_1, r_2)$

Al extender $\mathfrak{g}'$ de ley

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \le i \le n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \le i \le \frac{r_2-1}{2} \end{cases}$$

por $< X_{n-3} >$ y teniendo en cuenta que

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \ \forall 1 \leq i, j \leq n-3$$

es, entonces, posible expresar la ley de $\mathfrak{g}$ por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] &= \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] &= d X_{n-3} & \\ [X_{n-3-r_2}, Y_2] &= f X_{n-3} & \\ [Y_1, Y_2] &= h X_{n-3} & \text{si } r_1 + r_2 = n-3 \end{cases}$$

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_{n-4-r_2}, Y_2)$ se deduce que $d = f = 0$.

Cuando $r_1 + r_2 = n - 3$, de $Jac(X_1, X_{r_1-1}, Y_2)$ se obtiene que $h = 0$.

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-7}{2}$, se expresan todos los a_i en función de uno de ellos; en concreto, $a_i = (-1)^{i-1} a_1$, $1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$.

De $Jac(X_0, X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}})$, se deduce que $a_{\frac{n-5}{2}} = 0$ y, en consecuencia, $a_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_i = 0, \ 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$$

Se simplifica la ley de $\mathfrak{g}$, la cual queda determinada, salvo antisimetría y productos corchete nulos, por

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] &= \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, el vector X_{n-3} es central y no está en el álgebra derivada y la dimensión del centro de $\mathfrak{g}$ es 4 por lo que $\mathfrak{g}$ es suma directa de $\mathcal{L}(n-1, r_1, r_2)$ y $\mathbf{C}$. Se trataría de un álgebra 4-filiforme graduada naturalmente, lo que es una contradicción.

Si $\alpha \neq 0$, se puede hacer $\alpha = 1$, sin más que hacer el cambio de base

$$\begin{cases} X'_t &= X_t & 1 \leq t \leq n-4 \\ X'_{n-3} &= \alpha X_{n-3} & \\ Y'_i &= Y_i & i = 1, 2 \end{cases}$$

y el álgebra $\mathfrak{g}$ resulta ser isomorfa a $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$.

- **Subcaso 2.2:** $\mathfrak{g}' \simeq \mathcal{Q}(n-1, r_1, r_2)$

Al extender $\mathfrak{g}'$ de ley

$$\left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \end{array} \right.$$

por $< X_{n-3} >$ y teniendo en cuenta que

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \ \forall 1 \leq i, j \leq n-3$$

es, entonces, posible expresar la ley de $\mathfrak{g}$ por

$$\mathfrak{g} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-5 \\ [X_0, X_{n-4}] & = & \alpha X_{n-3} & \\ [X_i, X_{r_1-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_2 & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & a_i X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_{n-3-r_1}, Y_1] & = & d X_{n-3} & \\ [X_{n-3-r_2}, Y_2] & = & f X_{n-3} & \\ [Y_1, Y_2] & = & h X_{n-3} & \text{si } r_1 + r_2 = n-3 \end{array} \right.$$

De $Jac(X_0, X_{n-4-r_1}, Y_1)$ y $Jac(X_0, X_{n-4-r_2}, Y_2)$ se deduce que $d = f = 0$.

Cuando $r_1 + r_2 = n-3$, de $Jac(X_1, X_{r_1-1}, Y_2)$ se obtiene que $h = 0$.

De $Jac(X_0, X_i, X_{n-4-i})$, $1 \leq i \leq \frac{n-7}{2}$, se deduce que

$$[X_0, [X_i, X_{n-4-i}]] = [X_{i+1}, X_{n-4-i}] + [X_i, X_{n-3-i}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{i-1} \alpha X_{n-3} = (a_{i+1} + a_i) X_{n-3} \Rightarrow a_{i+1} + a_i = (-1)^{i-1} \alpha, \quad 1 \leq i \leq \frac{n-7}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}(a_1 - (i-1)\alpha), \quad 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}.$$

De $Jac(X_0, X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}})$ se obtiene que $[X_0, [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}}]] = [X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-1)^{\frac{n-7}{2}}\alpha X_{n-3} = a_{\frac{n-5}{2}} X_{n-3} \Rightarrow a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-7}{2}}\alpha$$

Como $a_i = (-1)^{i-1}(a_1 - (i-1)\alpha)$, $\quad 1 \le i \le \frac{n-5}{2}$, se deduce que

$$\alpha\frac{(n-5)}{2} = a_1 \Rightarrow a_i = (-1)^{i-1}\frac{(n-2i-3)}{2}\alpha, \quad 1 \le i \le \frac{n-5}{2}.$$

De $Jac(X_1, X_2, X_{n-6})$ se obtiene que

$$[X_1, X_{n-4}] = 0 \Rightarrow a_1 X_{n-3} = 0 \Rightarrow \frac{(n-5)}{2}\alpha = 0$$

Como $n \ge 13$ se deduce que $\alpha = 0 \Rightarrow a_i = 0,\ 1 \le i \le \frac{n-5}{2}$.

En consecuencia, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de ley

$$\mathfrak{g}: \begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \le i \le n-5 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1}Y_1 & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{r_2-i}] &= (-1)^{i-1}Y_2 & 1 \le i \le \frac{r_2-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}X_{n-4} & 1 \le i \le \frac{n-5}{2} \end{cases}$$

la cual corresponde a un álgebra 4-filiforme $(\mathcal{Q}(n-1, r_1, r_2) \oplus \mathbf{C})$ lo que es una contradicción.

Queda demostrado el teorema en la situación que faltaba, la correspondiente al caso en que la dimensión de $\mathfrak{g}$ sea un número impar. □

Nota 1.5.2. Obsérvese que se han encontrado $\mathcal{O}(n^2)$ álgebras de Lie 3-filiformes, no escindidas, y graduadas naturalmente; exactamente, $\frac{n^2-8n+7}{8}$ si n es impar, y $\frac{n^2-10n+20}{4}$ si n es par.

Nota 1.5.3. Álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente escindidas hay tantas como 1-filiformes y 2-filiformes graduadas naturalmente no escindidas, es decir, $n-2$ si n es impar y $\frac{n+2}{2}$ si n es par.

Para mayor claridad, se resumen todas las álgebras obtenidas en la siguiente tabla, donde $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ y $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ representan, respectivamente, un álgebra de Lie filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-2$ y un álgebra de Lie 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión $n-1$.

Dimensión	Ley	AL3FGN
5	$(5,1,1)$	$\mathcal{H}_2,\ \mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{C}^2$
$n \neq 5$	$(n,1,1)$	$\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$
n	$(n,1,r),\ r$ impar $3 \leq r \leq n-5$ o $r = n-3$	$\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$ $\mathfrak{g}_{(n-2)} \oplus \mathbf{C}^2$
n n impar	$(n,1,n-4)$	$\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$
8	$(8,3,5)$	$\mathcal{L}(8,3,5), \epsilon(8,3,5)$
9	$(9,3,5)$	$\mathcal{L}(9,3,5),\ \tau(9,3,5),\ \epsilon(9,3,5)$
10	$(10,3,5)$ $(10,3,7)$ $(10,5,7)$	$\mathcal{L}(10,r_1,r_2),\ r_1,r_2$ impar, $3 \leq r_1 < r_2 \leq 7$ $\mathcal{Q}(10,3,5)$ $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5),\ \gamma = re^{i\theta},\ r \geq 0,\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5),\ \ \gamma \in \{0,1,3\}$
$n \geq 11$ n impar	$(n,r_1,r_2),\ r_1,r_2$ impares $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-6$	$\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$
$n \geq 11$ n par	$(n,r_1,r_2),\ r_1,r_2$ impares $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-7$	$\mathcal{L}(n,r_1,r_2),\ \mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$
$n \geq 11$ n par	$(n,r,n-5),\ r$ impar $3 \leq r \leq n-7$	$\mathcal{L}(n,r,n-5),\ \mathcal{Q}(n,r,n-5),\ \tau(n,r,n-5)$
$n \geq 11$ n impar	$(n,r,n-4),\ r$ impar $3 \leq r \leq n-6$	$\mathcal{L}(n,r,n-4),\ \tau(n,r,n-4)$
$n \geq 11$ n par	$(n,r,n-3),\ r$ impar $3 \leq r \leq n-5$	$\mathcal{L}(n,r,n-3)$

La situación que se presenta en el caso 3-filiforme generaliza los resultados obtenidos en los casos 1-filiforme y 2-filiforme, aunque tiene una complejidad mucho mayor. El caso filiforme es bien simple pues sólo hay un álgebra, $\mathcal{L}_n$, o dos, $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{Q}_n$, según la paridad de la dimensión. En el caso casifiliforme aparecen familias localmente finitas de álgebras no isomorfas dependientes de un parámetro (una o dos en función de la paridad de la dimensión) que son, en realidad, una generalización de $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{Q}_n$, aparte de un álgebra terminal más; aparecen también un álgebra más en dimensión 7 y dos en dimensión 9.

En el caso 3-filiforme se encuentran una o dos familias localmente finitas (en función, de nuevo, de la paridad de la dimensión) que dependen de dos parámetros y que son una generalización clara de las familias que aparecen en el caso 2-filiforme.

El álgebra terminal que aparecía en el caso 2-filiforme (de expresión diferente según la dimensión fuera, otra vez, par o impar) se generaliza a una familia localmente finita, dependiente de un parámetro (y, de nuevo, con expresión distinta según la paridad de la dimensión), de álgebras terminales. Finalmente, también surgen dificultades adicionales en dimensiones pequeñas; la diferencia, otra vez, es una mucho mayor complejidad en estos casos excepcionales.

La situación en el caso p-filiforme, $p \geq 4$, parece que va a complicarse extraordinariamente. Lo único que parece claro es que van a aparecer una o dos familias de álgebras (según la dimensión de $n-p$ sea par o impar, respectivamente) que generalizan a las conocidas $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{Q}_n$.

Si designamos por $\mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$, $3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-1} \leq n-p$, r_i impar, y $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$, $n-p$ impar, $3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-1} \leq n-p$, r_i impar, a las álgebras p-filiformes tales que, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-p-1}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}\}$ una cierta base adaptada, sus leyes se expresen mediante

$$\mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-p-1 \\ [X_i, X_{r_j - i}] = (-1)^{i-1} Y_j, \ 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2}, & 1 \leq j \leq p-1 \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-p-1 \\ [X_i, X_{r_j - i}] = (-1)^{i-1} Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2}, \ 1 \leq j \leq p-1 \\ [X_i, X_{n-p-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-p} & 1 \leq i \leq \frac{n-p-1}{2} \end{cases}$$

es fácil probar que todas son graduadas naturalmente y no isomorfas dos a dos.

En cualquier caso, el estudio del caso general se antoja extraordinariamente complejo.

Capítulo 2

Álgebras de derivaciones y aplicaciones

Se aborda en este capítulo el estudio de algunas propiedades geométricas de las álgebras encontradas en el capítulo precedente. Se va a proceder a encontrar una base y la dimensión del primer espacio de cohomología y las dimensiones del espacio de cobordes de grado 2 y del espacio de las órbitas de cada una de las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente en dimensión cualquiera. Todo ello se hará vía la determinación del álgebra de derivaciones correspondiente.

Tal como se indicó en el capítulo sobre Preliminares, el primer espacio de cohomología de un álgebra $\mathfrak{g}$ con valores en el $\mathfrak{g}$-módulo $\mathfrak{g}$, $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, se define como

$$H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})/B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$$

donde $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ y $B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ son, respectivamente, el espacio de los 1-cociclos y el de los 1-cobordes.

Como $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ se identifica con el espacio de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $Der(\mathfrak{g})$, y $B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ con el de las derivaciones interiores, $Ad(\mathfrak{g})$, se puede interpretar el primer espacio de cohomología $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ como el espacio de las derivaciones "exteriores" del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ módulo las derivaciones interiores. Por tanto, si se pretende encontrar el primer espacio de cohomología $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, bastará calcular $Der(\mathfrak{g})$ y $Ad(\mathfrak{g})$.

La órbita de una ley de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n, $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, se identifica con $GL(n,\mathbf{C})$ / $Aut(\mathfrak{g})$ y como el álgebra de Lie $Aut(\mathfrak{g})$ no es sino $Der(\mathfrak{g})$, resulta

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g}))$$

con lo que se puede obtener directamente la dimensión de la órbita de $\mathfrak{g}$ sin más que conocer $dim(Der(\mathfrak{g}))$.

Finalmente, dado que el espacio de los 2-cobordes $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ coincide con el espacio tangente a la ley de $\mathfrak{g}$ (considerada como punto de la variedad $\mathcal{L}^n$ de las álgebras de Lie de dimensión n) en la órbita $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, se ha encontrado también, en realidad, la dimensión de $B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.

El cálculo de $Der(\mathfrak{g})$ se simplifica bastante dado que, por construcción, las álgebras que se consideran admiten graduaciones "relativamente largas", esto es, con un número de subespacios homogéneos próximo a la dimensión (de hecho, la mayor parte de los subespacios homogéneos son unidimensionales). Cuando las álgebras resultan escindidas (las extensiones triviales de las álgebras 1-filiformes o 2-filiformes graduadas naturalmente) es útil aplicar el teorema que da las derivaciones de una suma directa.

Se estructura el capítulo en 6 secciones. Las cuatro primeras se dedican al estudio de las cuatro familias de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente y no escindidas (las principales, $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$ y $\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$, y las terminales, $\tau(n,r_1,n-5)$ y $\tau(n,r_1,n-4)$. En la sección quinta se estudian las álgebras excepcionales que aparecen en dimensiones pequeñas y en la última sección se abordan las familias escindidas.

En todo el capítulo se designa por $\mathfrak{g}$ a un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n, y por $\{X_0,X_1,X_2,\ldots,X_{n-3},Y_1,Y_2\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$, siendo X_0 el vector característico.

La graduación natural asociada a $\mathfrak{g}$ resulta ser

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} =&< X_0,X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \ldots \oplus < X_{r_1-1} > \oplus < X_{r_1},Y_1 > \oplus < X_{r_1+1} > \oplus \\ &\oplus \ldots \oplus < X_{r_2-1} > \oplus < X_{r_2},Y_2 > \oplus < X_{r_2+1} > \oplus \ldots \oplus < X_{n-3} >\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-3} \mathfrak{g}_i$$

donde

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{g}_1 & = & < X_0, X_1 > & \\ \mathfrak{g}_i & = & < X_i >, & 2 \leq i \leq n-3, \ i \neq r_1, r_2 \\ \mathfrak{g}_{r_1} & = & < X_{r_1}, Y_1 > & \\ \mathfrak{g}_{r_2} & = & < X_{r_2}, Y_1 > & \end{array}$$

Para calcular el espacio de derivaciones, $Der(\mathfrak{g})$, se tendrá en cuenta que si $\bar{d} \in Der(\mathfrak{g})$, entonces

$$\bar{d} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} d_j$$

donde $d_j \in Der(\mathfrak{g})$ y $d_j(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, siendo $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ para $k < 1$ o $k > n-3$. En otras palabras, cada d_j pertenece al subespacio de las derivaciones homogéneas de orden j.

Como $d_{n-4}(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_{n-3}$ y $d_{-n+4}(\mathfrak{g}_{n-3}) \subset \mathfrak{g}_1$, se deduce que $d_j = 0$ para $j > n-4$ y $j < -n+4$ y, por tanto $\bar{d} = \sum\limits_{j=-n+4}^{n-4} d_j$.

Se expresará cada d_j, $-n+4 \leq j \leq n-4$, como una combinación lineal de un cierto conjunto, B_j, $-n+4 \leq j \leq n-4$, de derivaciones linealmente independientes de $\mathfrak{g}$ cumpliéndose que

$$\bigcup_{j=-n+4}^{n-4} B_i$$

es una base de $Der(\mathfrak{g})$ con lo que, evidentemente,

$$dim(Der(\mathfrak{g}) = \sum_{j=-n+4}^{n-4} dim < B_j > .$$

En los cálculos se tendrá en cuenta que los ideales de la sucesión central descendente, $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$, $0 \leq i \leq n-3$, son característicos, es decir, estables para cualquier derivación.

2.1 Estudio de la familia $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$

Se considera $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(n, r_1, r_2)$, $n \geq 8$, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-3$, r_1, r_2 impares, esto es, la familia de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente cuyas leyes, referidas a una base adaptada, $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$, vienen dadas por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_j - i}] & = & (-1)^{i-1} Y_j, & 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

Se va a proceder, en primer lugar, al cálculo del espacio de derivaciones.

Nota 2.1.1. Es trivial probar que los endomorfismos de $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ denotados mediante $t_0^1, t_0^2, t_0^3, f_{r_1-1}^1, f_{r_1-1}^2, f_{r_1-1}^3, f_{r_1-1}^4, g_{r_2-r_1}^1, g_{r_2-r_1}^2, h_{r_2-1}^1, h_{r_2-1}^2, h_{r_2-1}^3, h_{r_2-1}^4, u_j^1, u_j^2$, $1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1$, y definidos por

$t_0^1(X_0) = X_0,\ t_0^1(X_k) = (k-1)X_k\ \ 2 \leq k \leq n-3,\ t_0^1(Y_j) = (r_j - 2)Y_j\ \ 1 \leq j \leq 2;$

$t_0^2(X_0) = X_1,\ t_0^2(X_{r_j}) = Y_j\ \ 1 \leq j \leq 2;$

$t_0^3(X_k) = X_k\ \ 1 \leq k \leq n-3,\ t_0^3(Y_j) = 2Y_j\ \ 1 \leq j \leq 2;$

$f_{r_1-1}^1(X_0) = X_{r_1},\ f_{r_1-1}^1(X_{r_2-r_1+1}) = Y_2;$

$f_{r_1-1}^2(X_k) = X_{k+r_1-1}\ \ 1 \leq k \leq n-2-r_1,\ f_{r_1-1}^2(Y_1) = 2Y_2$ si $2r_1 - 1 = r_2;$

$f_{r_1-1}^3(X_0) = Y_1;$

$f_{r_1-1}^4(X_1) = Y_1;$

$g_{r_2-r_1}^1(X_0) = X_{r_2-r_1+1},\ g_{r_2-r_1}^1(X_{r_1}) = Y_2,\ g_{r_2-r_1}^1(X_{2r_1-r_2}) = Y_1;$

$g_{r_2-r_1}^2(X_k) = X_{r_2-r_1+k}\ \ 1 \leq k \leq n-3+r_1-r_2,\ g_{r_2-r_1}^2(Y_1) = 2Y_2;$

$h_{r_2-1}^1(X_0) = X_{r_2};$

$h_{r_2-1}^2(X_k) = X_{k+r_2-1}\ \ 1 \leq k \leq n-2-r_2;$

$h_{r_2-1}^3(X_0) = Y_2;$

$h_{r_2-1}^4(X_1) = Y_2;$

$u_j^1(X_0) = X_{1+j},\ u_j^1(X_{r_1-j}) = (-1)^j Y_1\ \ 1 \leq j \leq r_1 - 2,\ u_j^1(X_{r_2-j}) = (-1)^j Y_2$ $1 \leq j \leq r_2 - 2,\quad (1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1);$

$u_j^2(X_k) = X_{k+j}\ \ 1 \leq k \leq n-3-j\ \ k \neq r_1 - j, r_2 - j,\ u_j^2(X_{r_1-j}) = X_{r_1}\ \ 1 \leq j \leq r_1 - 2,$ $u_j^2(X_{r_2-j}) = X_{r_2}\ \ 1 \leq j \leq r_2 - 2,\quad (1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1);$

son derivaciones de $\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$. El teorema siguiente prueba que constituyen una base de $Der(\mathcal{L}(n, r_1, r_2))$.

Teorema 2.1.2. *Con las notaciones del comentario precedente, se tiene que,*

$$\{t_0^1, t_0^2, t_0^3, f_{r_1-1}^1, f_{r_1-1}^2, f_{r_1-1}^3, f_{r_1-1}^4, g_{r_2-r_1}^1, g_{r_2-r_1}^2, h_{r_2-1}^1, h_{r_2-1}^2, h_{r_2-1}^3, h_{r_2-1}^4, u_j^1, u_j^2\}$$

$$1 \leq j \leq n-4, \; j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1$$

constituyen una base de $Der(\mathcal{L}(n, r_1, r_2))$, $n \geq 8$, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-3$, r_1, r_2 *impares, con lo que*

$$dim(Der(\mathcal{L}(n, r_1, r_2))) = 2n - 1$$

Demostración. Se va a demostrar que los endomorfismos citados constituyen una base del espacio de derivaciones.

Si $\bar{d} \in Der(\mathfrak{g})$, entonces $\bar{d} = \sum_{j=-n+4}^{n-4} d_j$.

Como los ideales de la sucesión central descendente

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) & = & < X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 > & \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >, & 1 \leq i \leq r_1 - 1 \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_2 >, & r_1 \leq i \leq r_2 - 1 \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3} >, & r_2 \leq i \leq n-4 \\ \mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g}) & = & < 0 > & \end{array}$$

son característicos, resultan ser nulas las derivaciones d_j, $4 - n \leq j \leq -1$.

* Cálculo de d_0

Como $d_0(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i \; \forall i$, se puede suponer que

$$d_0 : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^0 X_0 + \alpha_0^1 X_1 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1^0 X_0 + \alpha_1^1 X_1 & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_k, & 2 \leq k \leq n-3, \; k \neq r_1, r_2 \\ X_{r_1} & \rightarrow & \alpha_{r_1} X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1} Y_1 & \\ X_{r_2} & \rightarrow & \alpha_{r_2} X_{r_2} + \bar{\alpha}_{r_2} Y_2 & \\ Y_1 & \rightarrow & \bar{\beta}_1 X_{r_1} + \beta_1 Y_1 & \\ Y_2 & \rightarrow & \bar{\beta}_2 X_{r_2} + \beta_2 Y_2 & \end{array} \right.$$

Al exigir que d_0 sea derivación, se obtiene que

- $d_0([X_0, Y_1]) = [d_0(X_0), Y_1] + [X_0, d_0(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0.$

- $d_0([X_0, Y_2]) = [d_0(X_0), Y_2] + [X_0, d_0(Y_2)] \Rightarrow \bar{\beta}_2 = 0.$

- $d_0([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow \alpha_{r_1} = \alpha_0^0 + \alpha_{r_1-1},\ \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0^1.$

- $d_0([X_0, X_{r_2-1}]) = [d_0(X_0), X_{r_2-1}] + [X_0, d_0(X_{r_2-1})] \Rightarrow \alpha_{r_2} = \alpha_0^0 + \alpha_{r_2-1},\ \bar{\alpha}_{r_2} = \alpha_0^1.$

- $d_0([X_0, X_k]) = [d_0(X_0), X_k] + [X_0, d_0(X_k)],\ 1 \leq k \leq n-4,\ k \neq r_1 - 1, r_2 - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_0^0 + \alpha_1^1,\ \alpha_{k+1} = \alpha_0^0 + \alpha_k,\ 2 \leq k \leq n-4,\ k \neq r_1 - 1, r_2 - 1.$$

Por las restricciones hasta ahora obtenidas y mediante un proceso de inducción finita se tiene que $\alpha_k = \alpha_1^1 + (k-1)\alpha_0^0,\ 2 \leq k \leq n-3$.

- $d_0([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow \alpha_1^0 = 0,\ \beta_1 = 2\alpha_1^1 + (r_1-2)\alpha_0^0.$

- $d_0([X_1, X_{r_2-1}]) = [d_0(X_1), X_{r_2-1}] + [X_1, d_0(X_{r_2-1})] \Rightarrow \beta_2 = 2\alpha_1^1 + (r_2-2)\alpha_0^0.$

En consecuencia, se verifica que

$$d_0 : \left\{ \begin{array}{lll} X_0 & \to & \alpha_0^0 X_0 + \alpha_0^1 X_1 \\ X_1 & \to & \alpha_1^1 X_1 \\ X_k & \to & (\alpha_1^1 + (k-1)\alpha_0^0) X_k, \qquad\qquad 2 \leq k \leq n-3,\ k \neq r_1, r_2 \\ X_{r_1} & \to & (\alpha_1^1 + (r_1-1)\alpha_0^0) X_{r_1} + \alpha_0^1 Y_1 \\ X_{r_2} & \to & (\alpha_1^1 + (r_2-1)\alpha_0^0) X_{r_2} + \alpha_0^1 Y_2 \\ Y_1 & \to & (2\alpha_1^1 + (r_1-2)\alpha_0^0) Y_1 \\ Y_2 & \to & (2\alpha_1^1 + (r_2-2)\alpha_0^0) Y_2 \end{array} \right.$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se pueden tomar como parámetros libres los $\alpha_0^0, \alpha_0^1, \alpha_1^1$. Una base de $< B_0 >$ vendrá dada por

$$B_0 = \{t_0^1, t_0^2, t_0^3\}$$

*** Cálculo de** $d_j,\ 1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1$

Ahora se ha de verificar que

$$d_j : \left\{ \begin{array}{llll} X_0 & \to & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_k & \to & \alpha_k^j X_{k+j}, & 1 \leq k \leq n-3-j,\ k \neq r_1 - j, r_2 - j \\ X_{r_1-j} & \to & \alpha_{r_1-j}^j X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1-j}^j Y_1, & 1 \leq j \leq r_1 - 2 \\ X_{r_2-j} & \to & \alpha_{r_2-j}^j X_{r_2} + \bar{\alpha}_{r_2-j}^j Y_2, & 1 \leq j \leq r_2 - 2 \\ Y_1 & \to & \bar{\beta}_1^j X_{r_1+j}, & 1 \leq j \leq n-3-r_1 \\ Y_2 & \to & \bar{\beta}_2^j X_{r_2+j}, & 1 \leq j \leq n-3-r_2 \end{array} \right.$$

Al exigir que d_j sea derivación, se obtiene que

- $d_j([X_0, Y_1]) = [d_j(X_0), Y_1] + [X_0, d_j(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1^j = 0,\ j \leq n-4-r_1.$

(El único $\bar{\beta}_1^j$ que puede ser no nulo, por ahora, es $\bar{\beta}_1^{n-3-r_1}$)

- $d_j([X_0, Y_2]) = [d_j(X_0), Y_2] + [X_0, d_j(Y_2)] \Rightarrow \bar{\beta}_2^j = 0,\ j \leq n-4-r_2.$

(El único $\bar{\beta}_2^j$ que puede ser no nulo, por ahora, es $\bar{\beta}_2^{n-3-r_2}$)

- $d_j([X_0, X_{r_1-j-1}]) = [d_j(X_0), X_{r_1-j-1}] + [X_0, d_j(X_{r_1-j-1})],\ 1 \leq j \leq r_1-2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1-j}^j = \alpha_{r_1-j-1}^j,\quad \bar{\alpha}_{r_1-j}^j = (-1)^j \alpha_0^j,\quad 1 \leq j \leq r_1-2.$$

- $d_j([X_0, X_{r_2-j-1}]) = [d_j(X_0), X_{r_2-j-1}] + [X_0, d_j(X_{r_2-j-1})],\ 1 \leq j \leq r_2-2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_2-j}^j = \alpha_{r_2-j-1}^j,\quad \bar{\alpha}_{r_2-j}^j = (-1)^j \alpha_0^j,\quad 1 \leq j \leq r_2-2.$$

- $d_j([X_0, X_k]) = [d_j(X_0), X_k] + [X_0, d_j(X_k)], 1 \leq k \leq n-4-j, k \neq r_i-j-1, i = 1, 2$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1}^j = \alpha_k^j,\ 1 \leq k \leq n-4-j,\ k \neq r_1-j-1, r_2-j-1$$

De las restricciones obtenidas se deduce que $\alpha_k^j = \alpha_1^j,\ 2 \leq k \leq n-3-j.$

Si $j = n-3-r_1$ se tiene que

- $d_j([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_j(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_j(X_{r_1-1})] \Rightarrow \bar{\beta}_1^j = 0$

Si $j = n-3-r_2$ se tiene que

- $d_j([X_1, X_{r_2-1}]) = [d_j(X_1), X_{r_2-1}] + [X_1, d_j(X_{r_2-1})] \Rightarrow \bar{\beta}_2^j = 0$

En consecuencia, se verifica que

$$d_j : \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_1^j X_{k+j}, & 1 \leq k \leq n-3-j,\ k \neq r_1-j, r_2-j \\ X_{r_1-j} & \rightarrow & \alpha_1^j X_{r_1} + (-1)^j \alpha_0^j Y_1, & 1 \leq j \leq r_1-2 \\ X_{r_2-j} & \rightarrow & \alpha_1^j X_{r_2} + (-1)^j \alpha_0^j Y_2, & 1 \leq j \leq r_2-2 \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, α_0^j, α_1^j pueden tomarse como parámetros libres. Una base de $< B_j >$, $1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1-1$, $j \neq r_2-r_1, r_2-1$ vendrá dada por

$$B_j = \{u_j^1, u_j^2\}$$

* Cálculo de d_{r_1-1}

Análogamente a lo visto anteriormente, sea

$$d_{r_1-1}:\left\{\begin{array}{lll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_1}+\bar{\alpha}_0 Y_1 \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_1}+\bar{\alpha}_1 Y_1 \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_{k+r_1-1}, \qquad 2\leq k\leq n-2-r_1, \\ & & \qquad\qquad k\neq r_2-r_1+1 \\ X_{r_2-r_1+1} & \rightarrow & \alpha_{r_2-r_1+1}X_{r_2}+\bar{\alpha}_{r_2-r_1+1}Y_2 \\ Y_1 & \rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} \bar{\beta}_1 X_{2r_1-1}, & r_1\leq\frac{n-2}{2}, 2r_1-1\neq r_2 \\ \bar{\beta}_1 X_{r_2}+\beta_1 Y_2, & r_1\leq\frac{n-2}{2}, 2r_1-1=r_2 \end{array}\right. \\ Y_2 & \rightarrow & \bar{\beta}_2 X_{r_1+r_2-1}, \qquad r_1+r_2-1\leq n-3 \end{array}\right.$$

Al exigir que d_{r_1-1} sea derivación, se obtiene que

- $d_{r_1-1}([X_0,Y_1])=[d_{r_1-1}(X_0),Y_1]+[X_0,d_{r_1-1}(Y_1)]\Rightarrow\bar{\beta}_1=0.$

- $d_{r_1-1}([X_0,Y_2])=[d_{r_1-1}(X_0),Y_2]+[X_0,d_{r_1-1}(Y_2)]\Rightarrow\bar{\beta}_2=0$, si $r_1+r_2<n-2$.

 Cuando $r_1+r_2=n-2$, como se debe cumplir que

 $d_{r_1-1}([X_1,X_{r_2-1}])=[d_{r_1-1}(X_1),X_{r_2-1}]+[X_1,d_{r_1-1}(X_{r_2-1})],$

 también se deduce que $\bar{\beta}_2=0$.

- $d_{r_1-1}([X_0,X_{r_2-r_1}])=[d_{r_1-1}(X_0),X_{r_2-r_1}]+[X_0,d_{r_1-1}(X_{r_2-r_1})]\Rightarrow$

 $$\Rightarrow\alpha_{r_2-r_1+1}=\alpha_{r_2-r_1},\quad\bar{\alpha}_{r_2-r_1+1}=\alpha_0.$$

- $d_{r_1-1}([X_0,X_k])=[d_{r_1-1}(X_0),X_k]+[X_0,d_{r_1-1}(X_k)]$, $1\leq k\leq n-3-r_1$, $k\neq r_2-r_1$

 $$\Rightarrow\alpha_{k+1}=\alpha_k,\ 1\leq k\leq n-3-r_1,\ k\neq r_2-r_1\Rightarrow$$

 $$\Rightarrow\alpha_k=\alpha_1,\ 1\leq k\leq n-2-r_1.$$

- $d_{r_1-1}([X_i,X_{r_1-i}])=[d_{r_1-1}(X_i),X_{r_1-i}]+[X_i,d_{r_1-1}(X_{r_1-i})]$, $1\leq i\leq\frac{r_1-1}{2}$

Esta condición se verifica trivialmente si $2r_1-1\neq r_2$ y cuando $2r_1-1=r_2$ implica que $\beta_1=2\alpha_1$.

En consecuencia, se verifica que

$$d_{r_1-1}: \begin{cases} X_0 & \rightarrow \alpha_0 X_{r_1} + \bar{\alpha}_0 Y_1 \\ X_1 & \rightarrow \alpha_1 X_{r_1} + \bar{\alpha}_1 Y_1 \\ X_k & \rightarrow \alpha_1 X_{k+r_1-1}, \quad 2 \leq k \leq n-2-r_1, \\ & \qquad\qquad\qquad k \neq r_2 - r_1 + 1 \\ X_{r_2-r_1+1} & \rightarrow \alpha_1 X_{r_2} + \alpha_0 Y_2 \\ Y_1 & \rightarrow 2\alpha_1 Y_2, \quad 2r_1 - 1 = r_2 \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, $\alpha_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1$ pueden tomarse como parámetros libres. Una base de $< B_{r_1-1} >$ vendrá dada por

$$B_{r_1-1} = \{f^1_{r_1-1}, f^2_{r_1-1}, f^3_{r_1-1}, f^4_{r_1-1}\}$$

* **Cálculo de** $d_{r_2-r_1}$, $r_2 - r_1 \neq r_1 - 1$

Sea, ahora

$$d_{r_2-r_1}: \begin{cases} X_0 & \rightarrow \alpha_0 X_{r_2-r_1+1} \\ X_k & \rightarrow \alpha_k X_{r_2-r_1+k}, \quad 1 \leq k \leq n-3+r_1-r_2, \\ & \qquad\qquad\qquad k \neq 2r_1 - r_2, r_1 \\ X_{2r_1-r_2} & \rightarrow \alpha_{2r_1-r_2} X_{r_1} + \bar{\alpha}_{2r_1-r_2} Y_1 \\ X_{r_1} & \rightarrow \alpha_{r_1} X_{r_2} + \bar{\alpha}_{r_1} Y_2 \\ Y_1 & \rightarrow \bar{\beta}_1 X_{r_2} + \beta_1 Y_2 \\ Y_2 & \rightarrow \bar{\beta}_2 X_{2r_2-r_1}, \quad 2r_2 - r_1 \leq n-3 \end{cases}$$

Al exigir que $d_{r_2-r_1}$ sea derivación, se obtiene que

- $d_{r_2-r_1}([X_0, X_{2r_1-r_2-1}]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), X_{2r_1-r_2-1}] + [X_0, d_{r_2-r_1}(X_{2r_1-r_2-1})]$

Como $r_2 - r_1 + 1 \neq 2r_1 - r_2 - 1 \Leftrightarrow 2r_2 + 2 \neq 3r_1$, por ser $2r_2 + 2$ par y $3r_1$ impar, se obtiene que

$$\alpha_{2r_1-r_2-1} = \alpha_{2r_1-r_2}, \; \bar{\alpha}_{2r_1-r_2} = \alpha_0.$$

- $d_{r_2-r_1}([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_{r_2-r_1}(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1-1} = \alpha_{r_1}, \; \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0.$$

- $d_{r_2-r_1}([X_0, X_k]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), X_k] + [X_0, d_{r_2-r_1}(X_k)]$,

$$1 \leq k \leq n-4+r_1-r_2, \; k \neq r_1 - 1, 2r_1 - r_2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k, \; 1 \leq k \leq n-4+r_1-r_2, \; k \neq r_1 - 1, 2r_1 - r_2 - 1.$$

De las restricciones halladas se obtiene que $\alpha_k = \alpha_1$, $1 \leq k \leq n-3+r_1-r_2$.

• $d_{r_2-r_1}([X_i, X_{r_1-i}]) = [d_{r_2-r_1}(X_i), X_{r_1-i}] + [X_i, d_{r_2-r_1}(X_{r_1-i})]$, $1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2}$

Como $r_2 \neq 2r_1 - 2i$, por ser r_2 impar y $2r_1 - 2i$ par, se obtiene que

$$\bar{\beta}_1 = 0, \quad \beta_1 = 2\alpha_1$$

independientemente de que $r_2 < 2r_1 - 2i$ o $r_2 > 2r_1 - 2i$.

• $d_{r_2-r_1}([X_i, X_{r_2-i}]) = [d_{r_2-r_1}(X_i), X_{r_2-i}] + [X_i, d_{r_2-r_1}(X_{r_2-i})]$, $1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\beta}_2 = 0.$$

En consecuencia, se verifica que

$$d_{r_2-r_1} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_2-r_1+1} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_2-r_1+k}, & 1 \leq k \leq n-3+r_1-r_2, \\ & & & k \neq 2r_1 - r_2, r_1 \\ X_{2r_1-r_2} & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_1} + \alpha_0 Y_1 & \\ X_{r_1} & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_2} + \alpha_0 Y_2 & \\ Y_1 & \rightarrow & 2\alpha_1 Y_2 & \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, en consecuencia, pueden ser considerados libres los parámetros α_0, α_1. Una base de $< B_{r_2-r_1} >$ vendrá dada por

$$B_{r_2-r_1} = \{g^1_{r_2-r_1}, g^2_{r_2-r_1}\}$$

*** Cálculo de d_{r_2-1}**

Como siempre se cumple que $r_1 - 1 \neq r_2 - 1 \neq r_2 - r_1$, se puede suponer que

$$d_{r_2-1} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_2} + \bar{\alpha}_0 Y_2 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_2} + \bar{\alpha}_1 Y_2 & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_{k+r_2-1}, & 2 \leq k \leq n-2-r_2 \\ Y_1 & \rightarrow & \bar{\beta}_1 X_{r_2+r_1-1}, & r_2 + r_1 - 1 \leq n-3 \\ Y_2 & \rightarrow & \bar{\beta}_2 X_{2r_2-1}, & 2r_2 - 1 \leq n-3 \end{cases}$$

Al exigir que d_{r_2-1} sea derivación, se obtiene que

• $d_{r_2-1}([X_0, X_k]) = [d_{r_2-1}(X_0), X_k] + [X_0, d_{r_2-1}(X_k)]$, $1 \leq k \leq n-3-r_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k,\ 1 \leq k \leq n-3-r_2 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_1,\ 1 \leq k \leq n-2-r_2.$$

- $d_{r_2-1}([X_i,X_{r_1-i}]) = [d_{r_2-1}(X_i),X_{r_1-i}] + [X_i,d_{r_2-1}(X_{r_1-i})],\ 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0 \text{ sólo cuando } r_1 + r_2 - 1 \le n-3.$$

- $d_{r_2-1}([X_i,X_{r_2-i}]) = [d_{r_2-1}(X_i),X_{r_2-i}] + [X_i,d_{r_2-1}(X_{r_2-i})],\ 1 \le i \le \frac{r_2-1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\beta}_2 = 0 \text{ sólo cuando } 2r_2 - 1 \le n-3.$$

En consecuencia, se verifica que

$$d_{r_2-1}: \begin{cases} X_0 & \to & \alpha_0 X_{r_2} + \bar{\alpha}_0 Y_2 \\ X_1 & \to & \alpha_1 X_{r_2} + \bar{\alpha}_1 Y_2 \\ X_k & \to & \alpha_1 X_{k+r_2-1}, & 2 \le k \le n-2-r_2 \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1$ pueden considerarse parámetros libres. Una base de $< B_{r_2-1} >$ vendrá dada por

$$B_{r_2-1} = \{h^1_{r_2-1}, h^2_{r_2-1}, h^3_{r_2-1}, h^4_{r_2-1}\}$$

Esto termina la demostración del teorema. □

Nota 2.1.3. Se puede comprobar fácilmente que cuando $r_2 = 2r_1 - 1$ el cálculo de la dimensión del espacio de derivaciones no da lugar a un caso excepcional ya que sigue siendo $2n-1$.

Las derivaciones interiores son

$$\begin{cases} ad(X_0) & = & u_1^2 \\ ad(X_i) & = & -u_i^1, & 1 \le i \le n-4 \\ ad(X_{n-3}) & = & 0 \\ ad(Y_j) & = & 0, & 1 \le j \le 2 \end{cases}$$

En consecuencia, se deducen del teorema anterior los siguientes corolarios, donde se dan las dimensiones del espacio de los 1-cobordes, del primer espacio de cohomología, del espacio de las órbitas y de los cobordes de grado 2, del álgebra $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(n,r_1,r_2),\ n \ge 8,\ 3 \le r_1 < r_2 \le n-3,\ r_1, r_2$ impares.

Corolario 2.1.4. *Se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= n-3, \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= n+2. \end{aligned}$$

Demostración. Se obtienen estos dos resultados trivialmente, sin más que tener en cuenta, al ser $ad(X_{n-3}) = ad(Y_1) = ad(Y_2) = 0$, que
$B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = Ad(\mathfrak{g}) =< ad(X_0), ad(X_1), ad(X_2), \ldots, ad(X_{n-4}) >$ y que
$dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = dim(Der(\mathfrak{g})) - dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$. □

Nota 2.1.5. Obsérvese que, en realidad, se podría dar fácilmente la descripción de $H^1(\mathcal{L}(n,r_1,r_2),\mathcal{L}(n,r_1,r_2))$ puesto que conocemos explícitamente $Der(\mathcal{L}(n,r_1,r_2))$ y $Ad(\mathcal{L}(n,r_1,r_2))$.

Corolario 2.1.6. *Se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = n^2 - 2n + 1.$$

Demostración. Basta recordar que se cumple que
$dim(O(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$. □

2.2 Estudio de la familia $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$

Se considera $\mathfrak{g} = \mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$, n par, $n \geq 10$, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-5$, r_1, r_2 impares, esto es, la familia de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente cuyas leyes, referidas a una base adaptada, $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$, vienen dadas por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_j - i}] & = & (-1)^{i-1} Y_j, & 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2 \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1} X_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Se va a proceder, en primer lugar, al cálculo del espacio de derivaciones.

Nota 2.2.1. Es trivial probar que los endomorfismos de $\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$ denotados mediante $t_0^1, t_0^2, t_0^3, f_{r_1-1}^1, f_{r_1-1}^2, f_{r_1-1}^3, f_{r_1-1}^4, g_{r_2-r_1}^1, g_{r_2-r_1}^2, h_{r_2-1}^1, h_{r_2-1}^2, h_{r_2-1}^3, h_{r_2-1}^4, u_j^1, u_j^2$, $1 \leq j \leq n-4$, $j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1$, y definidos por

$t_0^1(X_0) = X_0$, $t_0^1(X_k) = (k-1)X_k$ $2 \leq k \leq n-3$, $t_0^1(Y_j) = (r_j - 2)Y_j$ $1 \leq j \leq 2$;

$t_0^2(X_0) = X_1$, $t_0^2(X_{r_j}) = Y_j$ $1 \leq j \leq 2$, $t_0^2(X_{n-3}) = X_{n-3}$;

$t_0^3(X_k) = X_k$ $1 \leq k \leq n-3$, $t_0^3(Y_j) = 2Y_j$ $1 \leq j \leq 2$;

$f^1_{r_1-1}(X_0) = X_{r_1},\ f^1_{r_1-1}(X_{n-2-r_1}) = X_{n-3},\ f^1_{r_1-1}(X_{r_2-r_1+1}) = Y_2;$

$f^2_{r_1-1}(X_k) = X_{k+r_1-1} \quad 1 \leq k \leq n-2-r_1,\ f^2_{r_1-1}(Y_1) = 2Y_2 \ si\ 2r_1 - 1 = r_2,$
$f^2_{r_1-1}(Y_2) = 2X_{n-3}$ si $r_2 + r_1 - 1 = n - 3$; (Ha de cumplirse que $r_1 \neq \frac{n-2}{2}$)

$f^3_{r_1-1}(X_0) = Y_1;$

$f^4_{r_1-1}(X_1) = Y_1;$

$g^1_{r_2-r_1}(X_0) = X_{r_2-r_1+1},\ g^1_{r_2-r_1}(X_{2r_1-r_2}) = Y_1,\ g^1_{r_2-r_1}(X_{r_1}) = Y_2,$
$g^1_{r_2-r_1}(X_{n-3+r_1-r_2}) = X_{n-3};$

$g^2_{r_2-r_1}(X_k) = X_{r_2-r_1+k} \quad 1 \leq k \leq n-3+r_1-r_2,\ g^2_{r_2-r_1}(Y_1) = 2Y_2,$
$g^2_{r_2-r_1}(Y_2) = 2X_{n-3}$ si $2r_2 - r_1 = n - 3$;

$h^1_{r_2-1}(X_0) = X_{r_2},\ h^1_{r_2-1}(X_{n-2-r_2}) = X_{n-3};$

$h^2_{r_2-1}(X_k) = X_{k+r_2-1} \quad 1 \leq k \leq n-2-r_2,\ h^2_{r_2-1}(Y_1) = 2X_{n-3}$ si $r_2 + r_1 = n-2$,
$h^2_{r_2-1}(Y_2) = 2X_{n-3}$ si $2r_2 - 1 = n - 3$;

$h^3_{r_2-1}(X_0) = Y_2;$

$h^4_{r_2-1}(X_1) = Y_2;$

$u^1_j(X_0) = X_{1+j},\ u^1_j(X_{r_1-j}) = (-1)^j Y_1 \quad 1 \leq j \leq r_1 - 2,\ u^1_j(X_{r_2-j}) = (-1)^j Y_2$
$1 \leq j \leq r_2 - 2,\ u^1_j(X_{n-3-j}) = (-1)^j X_{n-3},$
$(1 \leq j \leq n-4 \quad j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1);$

$u^2_j(X_k) = X_{k+j} \quad 1 \leq k \leq n-3-j \quad k \neq r_1-j, r_2-j,\ u^2_j(X_{r_1-j}) = X_{r_1} \quad 1 \leq j \leq r_1 - 2,$
$u^2_j(X_{r_2-j}) = X_{r_2} \quad 1 \leq j \leq r_2 - 2,\ u^2_j(Y_1) = 2X_{n-3}$ si $j = n - 3 - r_1$,
$u^2_j(Y_2) = 2X_{n-3}$ si $j = n - 3 - r_2$,
$(1 \leq j \leq n-4 \quad j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1);$

son derivaciones de $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$. El teorema siguiente prueba que constituyen una base de $Der(\mathcal{Q}(n, r_1, r_2))$.

Teorema 2.2.2. *Con las notaciones del comentario precedente, se tiene que,*

$$\{t^1_0, t^2_0, t^3_0, f^1_{r_1-1}, f^2_{r_1-1}, f^3_{r_1-1}, f^4_{r_1-1}, g^1_{r_2-r_1}, g^2_{r_2-r_1}, h^1_{r_2-1}, h^2_{r_2-1}, h^3_{r_2-1}, h^4_{r_2-1}, u^1_j, u^2_j\}$$
$$1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1$$

constituyen una base de $Der(\mathcal{Q}(n, r_1, r_2))$, *n par*, $n \geq 10$, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-5$, r_1, r_2 *impares, si* $r_1 \neq \frac{n-2}{2}$.

Si $r_1 = \frac{n-2}{2}$, *la derivación* $f^2_{r_1-1}$ *no aparece y el resto de endomorfismos constituyen una base del citado espacio de derivaciones, con lo que*

$$dim(Der(\mathcal{Q}(n, r_1, r_2))) = \begin{cases} 2n-1 & si \quad r_1 \neq \frac{n-2}{2} \\ 2n-2 & si \quad r_1 = \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

Demostración. Se va a demostrar que los endomorfismos citados constituyen una base del espacio de derivaciones.

Si $\bar{d} \in Der(\mathfrak{g})$, entonces $\bar{d} = \sum\limits_{j=-n+4}^{n-4} d_j$.

Como los ideales de la sucesión central descendente

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) & = & < X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 > & \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >, & 1 \leq i \leq r_1 - 1 \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_2 >, & r_1 \leq i \leq r_2 - 1 \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3} >, & r_2 \leq i \leq n-4 \\ \mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g}) & = & < 0 > & \end{array}$$

son característicos, resultan ser nulas las derivaciones d_j, $4-n \leq j \leq -1$.

*** Cálculo de** d_0

Como $d_0(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$ $\forall i$, se puede suponer que

$$d_0 : \begin{cases} X_0 & \to & \alpha_0^0 X_0 + \alpha_0^1 X_1 & \\ X_1 & \to & \alpha_1^0 X_0 + \alpha_1^1 X_1 & \\ X_k & \to & \alpha_k X_k, & 2 \leq k \leq n-3, \ k \neq r_1, r_2 \\ X_{r_1} & \to & \alpha_{r_1} X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1} Y_1 & \\ X_{r_2} & \to & \alpha_{r_2} X_{r_2} + \bar{\alpha}_{r_2} Y_2 & \\ Y_1 & \to & \bar{\beta}_1 X_{r_1} + \beta_1 Y_1 & \\ Y_2 & \to & \bar{\beta}_2 X_{r_2} + \beta_2 Y_2 & \end{cases}$$

Al exigir que d_0 sea derivación, se obtiene que

- $d_0([X_0, Y_1]) = [d_0(X_0), Y_1] + [X_0, d_0(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0.$

- $d_0([X_0, Y_2]) = [d_0(X_0), Y_2] + [X_0, d_0(Y_2)] \Rightarrow \bar{\beta}_2 = 0.$

- $d_0([X_0, X_1]) = [d_0(X_0), X_1] + [X_0, d_0(X_1)] \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_0^0 + \alpha_1^1.$

- $d_0([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1} = \alpha_0^0 + \alpha_{r_1-1}, \quad \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0^1.$$

- $d_0([X_0, X_{r_2-1}]) = [d_0(X_0), X_{r_2-1}] + [X_0, d_0(X_{r_2-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_2} = \alpha_0^0 + \alpha_{r_2-1}, \quad \bar{\alpha}_{r_2} = \alpha_0^1.$$

- $d_0([X_0, X_{n-4}]) = [d_0(X_0), X_{n-4}] + [X_0, d_0(X_{n-4})] \Rightarrow \alpha_{n-3} = \alpha_0^0 + \alpha_0^1 + \alpha_{n-4}.$

- $d_0([X_0, X_k]) = [d_0(X_0), X_k] + [X_0, d_0(X_k)], \ 2 \leq k \leq n-5, \ k \neq r_1 - 1, r_2 - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_0^0 + \alpha_k, \ 2 \leq k \leq n-5, \ k \neq r_1 - 1, r_2 - 1.$$

Por las restricciones hasta ahora obtenidas y mediante un proceso de inducción finita se tiene que

$$\alpha_k = \alpha_1^1 + (k-1)\alpha_0^0, \ 2 \leq k \leq n-4 \ \text{y} \ \alpha_{n-3} = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 + (n-4)\alpha_0^0.$$

- $d_0([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1^0 = 0, \ \beta_1 = 2\alpha_1^1 + (r_1 - 2)\alpha_0^0.$$

- $d_0([X_1, X_{r_2-1}]) = [d_0(X_1), X_{r_2-1}] + [X_1, d_0(X_{r_2-1})] \Rightarrow \beta_2 = 2\alpha_1^1 + (r_2 - 2)\alpha_0^0$

En consecuencia, se verifica que

$$d_0 : \begin{cases} X_0 & \to \ \alpha_0^0 X_0 + \alpha_0^1 X_1 & \\ X_1 & \to \ \alpha_1^1 X_1 & \\ X_k & \to \ (\alpha_1^1 + (k-1)\alpha_0^0) X_k, & 2 \leq k \leq n-4, \ k \neq r_1, r_2 \\ X_{r_1} & \to \ (\alpha_1^1 + (r_1 - 1)\alpha_0^0) X_{r_1} + \alpha_0^1 Y_1 & \\ X_{r_2} & \to \ (\alpha_1^1 + (r_2 - 1)\alpha_0^0) X_{r_2} + \alpha_0^1 Y_2 & \\ X_{n-3} & \to \ (\alpha_0^1 + \alpha_1^1 + (n-4)\alpha_0^0) X_{n-3} & \\ Y_1 & \to \ (2\alpha_1^1 + (r_1 - 2)\alpha_0^0) Y_1 & \\ Y_1 & \to \ (2\alpha_1^1 + (r_2 - 2)\alpha_0^0) Y_2 & \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se pueden tomar como parámetros libres los $\alpha_0^0, \alpha_0^1, \alpha_1^1$. Una base de $< B_0 >$ vendrá dada por

$$B_0 = \{t_0^1, t_0^2, t_0^3\}$$

*** Cálculo de** $d_j,\ 1 \le j \le n-4,\ j \ne r_1-1, r_2-r_1, r_2-1$

Ahora se puede suponer que

$$d_j : \begin{cases} X_0 & \to & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_k & \to & \alpha_k^j X_{k+j}, & 1 \le k \le n-3-j,\ k \ne r_1-j, r_2-j \\ X_{r_1-j} & \to & \alpha_{r_1-j}^j X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1-j}^j Y_1, & 1 \le j \le r_1-2 \\ X_{r_2-j} & \to & \alpha_{r_2-j}^j X_{r_2} + \bar{\alpha}_{r_2-j}^j Y_2, & 1 \le j \le r_2-2 \\ Y_1 & \to & \bar{\beta}_1^j X_{r_1+j}, & 1 \le j \le n-3-r_1 \\ Y_2 & \to & \bar{\beta}_2^j X_{r_2+j}, & 1 \le j \le n-3-r_2 \end{cases}$$

Al exigir que d_j sea derivación, se obtiene que

- $d_j([X_0, Y_1]) = [d_j(X_0), Y_1] + [X_0, d_j(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1^j = 0,\ j \le n-4-r_1$

  (El único $\bar{\beta}_1^j$ que puede ser no nulo, por ahora, es $\bar{\beta}_1^{n-3-r_1}$)

- $d_j([X_0, Y_2]) = [d_j(X_0), Y_2] + [X_0, d_j(Y_2)] \Rightarrow \bar{\beta}_2^j = 0,\ j \le n-4-r_2$

  (El único $\bar{\beta}_2^j$ que puede ser no nulo, por ahora, es $\bar{\beta}_2^{n-3-r_2}$)

- $d_j([X_0, X_{r_1-j-1}]) = [d_j(X_0), X_{r_1-j-1}] + [X_0, d_j(X_{r_1-j-1})],\ 1 \le j \le r_1-2 \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \alpha_{r_1-j}^j = \alpha_{r_1-j-1}^j, \quad \bar{\alpha}_{r_1-j}^j = (-1)^j \alpha_0^j, \quad 1 \le j \le r_1-2.$$

- $d_j([X_0, X_{r_2-j-1}]) = [d_j(X_0), X_{r_2-j-1}] + [X_0, d_j(X_{r_2-j-1})],\ 1 \le j \le r_2-2 \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \alpha_{r_2-j}^j = \alpha_{r_2-j-1}^j, \quad \bar{\alpha}_{r_2-j}^j = (-1)^j \alpha_0^j, \quad 1 \le j \le r_2-2.$$

- $d_j([X_0, X_{n-4-j}]) = [d_j(X_0), X_{n-4-j}] + [X_0, d_j(X_{n-4-j})] \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \alpha_{n-3-j}^j = (-1)^j \alpha_0^j + \alpha_{n-4-j}^j.$$

- $d_j([X_0, X_k]) = [d_j(X_0), X_k] + [X_0, d_j(X_k)],$

  $$1 \le k \le n-5-j,\ k \ne r_i-j-1,\ i = 1,2 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \alpha_{k+1}^j = \alpha_k^j,\ 1 \le k \le n-5-j,\ k \ne r_1-j-1, r_2-j-1$$

De las restricciones obtenidas se observa que

$$\alpha_k^j = \alpha_1^j, \quad 2 \le k \le n-4-j;\ \alpha_{n-3-j}^j = (-1)^j \alpha_0^j + \alpha_1^j.$$

Si $j = n-3-r_1$ se tiene que

- $d_j([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_j(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_j(X_{r_1-1})] \Rightarrow \bar{\beta}_1^j = 2\alpha_1^j$.

Si $j = n-3-r_2$ se tiene que

- $d_j([X_1, X_{r_2-1}]) = [d_j(X_1), X_{r_2-1}] + [X_1, d_j(X_{r_2-1})] \Rightarrow \bar{\beta}_2^j = 2\alpha_1^j$

En consecuencia, se verifica que

$$d_j : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_1^j X_{k+j}, & 1 \leq k \leq n-4-j, \\ & & & k \neq r_1 - j, r_2 - j, n-3-j \\ X_{r_1-j} & \rightarrow & \alpha_1^j X_{r_1} + (-1)^j \alpha_0^j Y_1, & 1 \leq j \leq r_1 - 2 \\ X_{r_2-j} & \rightarrow & \alpha_1^j X_{r_2} + (-1)^j \alpha_0^j Y_2, & 1 \leq j \leq r_2 - 2 \\ X_{n-3-j} & \rightarrow & ((-1)^j \alpha_0^j + \alpha_1^j) X_{n-3} & \\ Y_1 & \rightarrow & 2\alpha_1^j X_{n-3}, & \text{si } j = n-3-r_1 \\ Y_2 & \rightarrow & 2\alpha_1^j X_{n-3}, & \text{si } j = n-3-r_2 \end{array} \right.$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, α_0^j, α_1^j pueden tomarse como parámetros libres.

Una base de $< B_j >$, $1 \leq j \leq n-4$, $j \neq r_1 - 1, r_2 - r_1, r_2 - 1$ vendrá dada por

$$B_j = \{u_j^1, u_j^2\}$$

*** Cálculo de d_{r_1-1}**

Se ha de verificar ahora que

$$d_{r_1-1} : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_1} + \bar{\alpha}_0 Y_1 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_1} + \bar{\alpha}_1 Y_1 & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_{k+r_1-1}, & 2 \leq k \leq n-2-r_1, \\ & & & k \neq r_2 - r_1 + 1 \\ X_{r_2-r_1+1} & \rightarrow & \alpha_{r_2-r_1+1} X_{r_2} + \bar{\alpha}_{r_2-r_1+1} Y_2 & \\ Y_1 & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\beta}_1 X_{2r_1-1}, & \\ \bar{\beta}_1 X_{r_2} + \beta_1 Y_2, & \end{array} \right. & \begin{array}{l} r_1 \leq \frac{n-2}{2}, 2r_1 - 1 \neq r_2 \\ r_1 \leq \frac{n-2}{2}, 2r_1 - 1 = r_2 \end{array} \\ Y_2 & \rightarrow & \beta_2 X_{r_1+r_2-1}, & r_1 + r_2 - 1 \leq n-3 \end{array} \right.$$

Al exigir que d_{r_1-1} sea derivación, se obtiene que

- $d_{r_1-1}([X_0, Y_1]) = [d_{r_1-1}(X_0), Y_1] + [X_0, d_{r_1-1}(Y_1)] \Rightarrow \beta_1 = 0$.

- $d_{r_1-1}([X_0,Y_2]) = [d_{r_1-1}(X_0),Y_2] + [X_0,d_{r_1-1}(Y_2)] \Rightarrow \bar{\beta}_2 = 0$ si $r_1+r_2 < n-2$.

  Cuando $r_1+r_2 = n-2$, como se debe cumplir que

  $$d_{r_1-1}([X_1,X_{r_2-1}]) = [d_{r_1-1}(X_1),X_{r_2-1}] + [X_1,d_{r_1-1}(X_{r_2-1})],$$

  también se deduce que $\bar{\beta}_2 = \alpha_1 + \alpha_{r_2-1}$.

- $d_{r_1-1}([X_0,X_{r_2-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_0),X_{r_2-r_1}] + [X_0,d_{r_1-1}(X_{r_2-r_1})] \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \alpha_{r_2-r_1+1} = \alpha_{r_2-r_1},\ \bar{\alpha}_{r_2-r_1+1} = \alpha_0.$$

- $d_{r_1-1}([X_0,X_{n-3-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_0),X_{n-3-r_1}] + [X_0,d_{r_1-1}(X_{n-3-r_1})] \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \alpha_{n-2-r_1} = \alpha_0 + \alpha_{n-3-r_1}.$$

- $d_{r_1-1}([X_0,X_k]) = [d_{r_1-1}(X_0),X_k]+[X_0,d_{r_1-1}(X_k)]$, $1 \le k \le n-4-r_1$, $k \neq r_2-r_1$

  $$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k,\ 1 \le k \le n-4-r_1,\ k \neq r_2-r_1 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \alpha_k = \alpha_1,\ 2 \le k \le n-3-r_1; \quad \alpha_{n-2-r_1} = \alpha_0 + \alpha_1.$$

- $d_{r_1-1}([X_1,X_{r_1-1}]) = [d_{r_1-1}(X_1),X_{r_1-1}] + [X_1,d_{r_1-1}(X_{r_1-1})]$

Esta condición se verifica trivialmente si $2r_1-1 \neq r_2, n-3$. En cambio, si $2r_1-1 = r_2$, debe satisfacerse que $\beta_1 = 2\alpha_1$. Y si $2r_1-1 = n-3$, debe ser $\alpha_1 = 0$. En consecuencia, si $2r_1-1 \neq n-3 \Leftrightarrow r_1 \neq \frac{n-2}{2}$ se verifica que

$$d_{r_1-1}:\left\{\begin{array}{lll} X_0 & \to & \alpha_0 X_{r_1} + \bar{\alpha}_0 Y_1 \\ X_1 & \to & \alpha_1 X_{r_1} + \bar{\alpha}_1 Y_1 \\ X_k & \to & \alpha_1 X_{k+r_1-1}, \qquad 2 \le k \le n-3-r_1, \\ & & \qquad\qquad\qquad\ \ k \neq r_2-r_1+1 \\ X_{r_2-r_1+1} & \to & \alpha_1 X_{r_2} + \alpha_0 Y_2 \\ X_{n-2-r_1} & \to & (\alpha_0+\alpha_1)X_{n-3} \\ Y_1 & \to & 2\alpha_1 Y_2, \qquad\qquad\ \ \text{si } 2r_1-1 = r_2 \\ Y_2 & \to & 2\alpha_1 X_{r_2+r_1-1}, \qquad \text{si } r_2+r_1-1 = n-3 \end{array}\right.$$

siendo nulo α_1 si $2r_1-1 = n-3 \Leftrightarrow r_1 = \frac{n-2}{2}$.

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, $\alpha_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1$ pueden ser considerados parámetros libres si $2r_1-1 \neq n-3$. Una base de $< B_{r_1-1} >$

vendrá dada por

$$B_{r_1-1} = \{f^1_{r_1-1}, f^2_{r_1-1}, f^3_{r_1-1}, f^4_{r_1-1}\}$$

desapareciendo el parámetro α_1 y la derivación $f^2_{r_1-1}$ si $2r_1 - 1 = n - 3$.

*** Cálculo de** $d_{r_2-r_1}$, $r_2 - r_1 \neq r_1 - 1$

Sea, ahora

$$d_{r_2-r_1} : \begin{cases} X_0 & \to & \alpha_0 X_{r_2-r_1+1} & \\ X_k & \to & \alpha_k X_{r_2-r_1+k}, & 1 \leq k \leq n-3+r_1-r_2, \\ & & & k \neq 2r_1 - r_2, r_1 \\ X_{2r_1-r_2} & \to & \alpha_{2r_1-r_2} X_{r_1} + \bar{\alpha}_{2r_1-r_2} Y_1 & \\ X_{r_1} & \to & \alpha_{r_1} X_{r_2} + \bar{\alpha}_{r_1} Y_2 & \\ Y_1 & \to & \bar{\beta}_1 X_{r_2} + \beta_1 Y_2 & \\ Y_2 & \to & \bar{\beta}_2 X_{2r_2-r_1}, & \text{si } 2r_2 - r_1 \leq n-3 \end{cases}$$

Al exigir que $d_{r_2-r_1}$ sea derivación, se obtiene que

- $d_{r_2-r_1}([X_0, Y_1]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), Y_1] + [X_0, d_{r_2-r_1}(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0.$

- $d_{r_2-r_1}([X_0, Y_2]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), Y_2] + [X_0, d_{r_2-r_1}(Y_2)]$

Si $2r_2 - r_1 \leq n - 4 \Rightarrow \bar{\beta}_2 = 0$. Si $2r_2 - r_1 = n - 3$ no se obtiene condición alguna para $\bar{\beta}_2$.

- $d_{r_2-r_1}([X_1, X_{r_2-1}]) = [d_{r_2-r_1}(X_1), X_{r_2-1}] + [X_1, d_{r_2-r_1}(X_{r_2-1})]$

Esta condición se verifica trivialmente si $2r_2 - r_1 \leq n - 4$. Si $2r_2 - r_1 = n - 3$ se deduce que $\bar{\beta}_2 = \alpha_1 + \alpha_{r_2-1}$.

- $d_{r_2-r_1}([X_0, X_{2r_1-r_2-1}]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), X_{2r_1-r_2-1}] + [X_0, d_{r_2-r_1}(X_{2r_1-r_2-1})]$ y al verificarse siempre que $r_2 - r_1 + 1 \neq 2r_1 - r_2 - 1 \Leftrightarrow 2r_2 + 2 \neq 3r_1$ ya que $2r_2 + 2$ es par y $3r_1$ es impar, se deduce de la anterior condición que

$$\alpha_{2r_1-r_2-1} = \alpha_{2r_1-r_2}, \ \bar{\alpha}_{2r_1-r_2} = \alpha_0.$$

- $d_{r_2-r_1}([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_{r_2-r_1}(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1-1} = \alpha_{r_1}, \ \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0.$$

- $d_{r_2-r_1}([X_0, X_{n-4-r_2+r_1}]) = [d_{r_2-r_1}(X_0), X_{n-4-r_2+r_1}] + [X_0, d_{r_2-r_1}(X_{n-4-r_2+r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-3-r_2+r_1} = \alpha_0 + \alpha_{n-4-r_2+r_1}.$$

- $d_{r_2-r_1}([X_0,X_k]) = [d_{r_2-r_1}(X_0),X_k] + [X_0,d_{r_2-r_1}(X_k)],$

$$1 \le k \le n-5+r_1-r_2,\ k \ne r_1-1, 2r_1-r_2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k,\ 1 \le k \le n-5+r_1-r_2,\ k \ne r_1-1, 2r_1-r_2-1.$$

De las restricciones obtenidas se deduce que

$$\alpha_k = \alpha_1,\ 1 \le k \le n-4+r_1-r_2 \text{ y } \alpha_{n-3-r_2+r_1} = \alpha_0+\alpha_1.$$

También, se cumple que $\bar{\beta}_2 = 2\alpha_1$ si $2r_2 - r_1 = n-3$.

- $d_{r_2-r_1}([X_1,X_{r_1-1}]) = [d_{r_2-r_1}(X_1),X_{r_1-1}] + [X_1,d_{r_2-r_1}(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta_1 = 2\alpha_1 \text{ si } 2r_1-r_2 \ne r_1-1.$$

En consecuencia, se verifica que

$$d_{r_2-r_1}: \begin{cases} X_0 & \to & \alpha_0 X_{r_2-r_1+1} & \\ X_k & \to & \alpha_1 X_{r_2-r_1+k}, & 1 \le k \le n-4+r_1-r_2, \\ & & & k \ne 2r_1-r_2, r_1 \\ X_{2r_1-r_2} & \to & \alpha_1 X_{r_1} + \alpha_0 Y_1 & \\ X_{r_1} & \to & \alpha_1 X_{r_2} + \alpha_0 Y_2 & \\ X_{n-3+r_1-r_2} & \to & (\alpha_0+\alpha_1) X_{n-3} & \\ Y_1 & \to & 2\alpha_1 Y_2 & \\ Y_2 & \to & 2\alpha_1 X_{n-3}, & \text{si } 2r_2-r_1 = n-3 \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, pueden tomarse libres los α_0, α_1. Una base de $< B_{r_2-r_1} >$ vendrá dada por

$$B_{r_2-r_1} = \{g^1_{r_2-r_1}, g^2_{r_2-r_1}\}$$

*** Cálculo de d_{r_2-1}**

Como siempre se cumple que $r_1 - 1 \ne r_2 - 1 \ne r_2 - r_1$, se puede suponer que

$$d_{r_2-1}: \begin{cases} X_0 & \to & \alpha_0 X_{r_2} + \bar{\alpha}_0 Y_2 & \\ X_1 & \to & \alpha_1 X_{r_2} + \bar{\alpha}_1 Y_2 & \\ X_k & \to & \alpha_k X_{k+r_2-1}, & 2 \le k \le n-2-r_2 \\ Y_1 & \to & \bar{\beta}_1 X_{r_2+r_1-1}, & r_2+r_1-1 \le n-3 \\ Y_2 & \to & \bar{\beta}_2 X_{2r_2-1}, & 2r_2-1 \le n-3 \end{cases}$$

Al exigir que d_{r_2-1} sea derivación, se obtiene que

- $d_{r_2-1}([X_0, X_1]) = [d_{r_2-1}(X_0), X_1] + [X_0, d_{r_2-1}(X_1)] \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1.$

- $d_{r_2-1}([X_0, X_{n-3-r_2}]) = [d_{r_2-1}(X_0), X_{n-3-r_2}] + [X_0, d_{r_2-1}(X_{n-3-r_2})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-2-r_2} = \alpha_0 + \alpha_{n-3-r_2}.$$

- $d_{r_2-1}([X_0, X_k]) = [d_{r_2-1}(X_0), X_k] + [X_0, d_{r_2-1}(X_k)],\ 2 \leq k \leq n-4-r_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k,\ 2 \leq k \leq n-4-r_2 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_1,\ 1 \leq k \leq n-3-r_2.$$

- $d_{r_2-1}([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_{r_2-1}(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_{r_2-1}(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\beta}_1 = 0 \text{ si } r_2 + r_1 \neq n-2, \\ \bar{\beta}_1 = 2\alpha_1 \text{ si } r_2 + r_1 = n-2. \end{cases}$$

- $d_{r_2-1}([X_1, X_{r_2-1}]) = [d_{r_2-1}(X_1), X_{r_2-1}] + [X_1, d_{r_2-1}(X_{r_2-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\beta}_2 = 0 \text{ si } r_2 \neq \frac{n-2}{2}, \\ \bar{\beta}_2 = 2\alpha_1 \text{ si } r_2 = \frac{n-2}{2}. \end{cases}$$

Por tanto, se verifica que

$$d_{r_2-1}: \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_2} + \bar{\alpha}_0 Y_2 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_2} + \bar{\alpha}_1 Y_2 & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_1 X_{k+r_2-1}, & 2 \leq k \leq n-3-r_2 \\ X_{n-2-r_2} & \rightarrow & (\alpha_0 + \alpha_1) X_{n-3} & \\ Y_1 & \rightarrow & 2\alpha_1 X_{n-3}, & r_2 + r_1 = n-2 \\ Y_2 & \rightarrow & 2\alpha_1 X_{n-3}, & 2r_2 - 1 = n-3 \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, en consecuencia, pueden ser considerados libres los parámetros $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1$. Una base de $< B_{r_2-1} >$ vendrá dada por

$$B_{r_2-1} = \{h^1_{r_2-1}, h^2_{r_2-1}, h^3_{r_2-1}, h^4_{r_2-1}\}$$

Esto termina la demostración del teorema. □

Nota 2.2.3. Se observa que para que se dé la igualdad entre $r_2 - r_1$ y $r_1 - 1$ se debe cumplir que $r_1 \neq \frac{n-2}{2}$, porque de lo contrario r_2 debería ser $n-3$, lo cual es imposible ya que en la familia $Q(n, r_1, r_2)$ se verifica que $r_2 \leq n-5$.

En dicho supuesto $r_2 = 2r_1 - 1$, el cálculo de la dimensión del espacio de derivaciones no da lugar a un caso excepcional ya que sigue siendo $2n-1$.

Las derivaciones interiores de $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$ son

$$\begin{cases} ad(X_0) & = & u_1^2 \\ ad(X_i) & = & -u_i^1, \quad 1 \leq i \leq n-4 \\ ad(X_{n-3}) & = & 0 \\ ad(Y_j) & = & 0, \quad 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

En consecuencia, se deducen del teorema anterior los siguientes corolarios, donde se dan las dimensiones del espacio de los 1-cobordes, del primer espacio de cohomología, del espacio de las órbitas y de los cobordes de grado 2, del álgebra $\mathfrak{g} = \mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-5$, n par, $n \geq 10$, r_1 y r_2 impares.

Corolario 2.2.4. *Se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) &= n-3 \\ dim(H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) &= \begin{cases} n+2 & si \quad r_1 \neq \frac{n-2}{2} \\ n+1 & si \quad r_1 = \frac{n-2}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración. Se obtienen estos dos resultados trivialmente, sin más que tener en cuenta, al ser $ad(X_{n-3}) = ad(Y_1) = ad(Y_2) = 0$, que
$B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = Ad(\mathfrak{g}) =< ad(X_0), ad(X_1), ad(X_2), \ldots, ad(X_{n-4}) >$ y que
$dim(H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) = dim(Der(\mathfrak{g})) - dim(B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$. □

Nota 2.2.5. De nuevo, de manera implícita, se ha descrito $H^1(\mathcal{Q}(n, r_1, r_2), \mathcal{Q}(n, r_1, r_2))$.

Corolario 2.2.6. *Se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) = \begin{cases} n^2 - 2n + 1 & si \quad r_1 \neq \frac{n-2}{2} \\ n^2 - 2n + 2 & si \quad r_1 = \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

Demostración. Basta recordar que
$dim(O(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$. □

2.3 Estudio de la familia $\tau(n, r_1, n-5)$

Se considera $\mathfrak{g} = \tau(n, r_1, n-5)$, n par, $n \geq 12$, $3 \leq r_1 \leq n-7$, r_1 impar, esto es, la familia de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente cuyas leyes, referidas a una base adaptada, $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$, vienen dadas por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-5}+Y_2), & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4}, & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i}(i-1)\frac{(n-4-i)}{2} X_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_i, Y_2] &= \frac{(6-n)}{2} X_{n-5+i}, & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Se va a proceder, en primer lugar, al cálculo del espacio de derivaciones.

Nota 2.3.1. Es trivial probar que los endomorfismos de $\tau(n, r_1, n-5)$ denotados mediante

$$t_0^1, t_0^2, f_{r_1-1}^1, f_{r_1-1}^2, f_{r_1-1}^3, g_{n-5-r_1}^1, h_{n-6}^1, h_{n-6}^2, h_{n-6}^3, h_{n-6}^4,$$

$$u_j^1 (1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1-1, n-5-r_1, n-6),$$

$$u_j^2\ (j = 1, n-4-r_1, n-5),$$

y definidos por

$t_0^1(X_0) = X_0 - X_1$, $t_0^1(X_k) = (k-1)X_k$ $2 \leq k \leq n-6$, $t_0^1(X_{n-5}) = (n-7)X_{n-5} - Y_2$, $t_0^1(X_{n-4}) = (n-7)X_{n-4}$, $t_0^1(X_{n-3}) = (n-6)X_{n-3}$, $t_0^1(Y_1) = (r_1-2)Y_1$, $t_0^1(Y_2) = (n-6)Y_2$;

$t_0^2(X_0) = X_1$, $t_0^2(X_k) = X_k$ $1 \leq k \leq n-6$, $t_0^2(X_{n-5}) = 2X_{n-5} + Y_2$, $t_0^2(X_{n-4}) = 3X_{n-4}$, $t_0^2(X_{n-3}) = 3X_{n-3}$, $t_0^2(Y_1) = 2Y_1$, $t_0^2(Y_2) = Y_2$;

$f_{r_1-1}^1(X_0) = X_{r_1}$, $f_{r_1-1}^1(X_{n-4-r_1}) = X_{n-5}$, $f_{r_1-1}^1(X_{n-3-r_1}) = \frac{(n-2-2r_1)}{2} X_{n-4}$, $f_{r_1-1}^1(X_{n-2-r_1}) = \frac{((2-r_1)n+r_1^2-3r_1+2)}{2} X_{n-3}$, $f_{r_1-1}^1(Y_2) = \frac{(n-2)}{2} X_{n-3}$ si $r_1 = 3$;

$f_{r_1-1}^2(X_0) = Y_1$;

$f_{r_1-1}^3(X_1) = Y_1$;

$g_{n-5-r_1}^1(X_0) = X_{n-4-r_1}$, $g_{n-5-r_1}^1(X_{2r_1-n+5}) = Y_1$, $g_{n-5-r_1}^1(X_{r_1}) = X_{n-5} + Y_2$, $g_{n-5-r_1}^1(X_{r_1+1}) = \frac{(-n+2r_1+6)}{2} X_{n-4}$, $g_{n-5-r_1}^1(X_{r_1+2}) = \frac{((-r_1)n+r_1^2+7r_1+6)}{2} X_{n-3}$, $g_{n-5-r_1}^1(Y_2) = -3X_{n-3}$ si $r_1 = n-7$;

$h^1_{n-6}(X_0) = X_{n-5},\ h^1_{n-6}(X_2) = \frac{(6-n)}{2}X_{n-4},\ h^1_{n-6}(X_3) = (6-n)X_{n-3};$

$h^2_{n-6}(X_0) = Y_2,\ h^2_{n-6}(X_2) = \frac{(n-6)}{2}X_{n-4},\ h^2_{n-6}(X_3) = (n-6)X_{n-3};$

$h^3_{n-6}(X_1) = X_{n-5} + Y_2$ si $r_1 \neq 3,\ h^3_{n-6}(X_1) = X_{n-5}$ si $r_1 = 3,$
$h^3_{n-6}(X_2) = X_{n-4},\ h^3_{n-6}(X_3) = X_{n-3},\ h^3_{n-6}(Y_1) = \frac{(6-n)}{2}X_{n-3}$ si $r_1 = 3;$

$h^4_{n-6}(X_1) = Y_2,\ h^4_{n-6}(Y_1) = \frac{(n-6)}{2}X_{n-3};$ (Ha de cumplirse que $r_1 = 3$)

$u^1_j(X_0) = X_{1+j},\ u^1_j(X_{r_1-j}) = (-1)^j Y_1\ 1 \leq j \leq r_1-2,\ u^1_j(X_{n-5-j}) = (-1)^j(X_{n-5}+Y_2)$
$1 \leq j \leq n-7,\ \ u^1_j(X_{n-4-j}) = (-1)^j\frac{(n-4-2j)}{2}X_{n-4}\ \ 1 \leq j \leq n-7,$
$u^1_j(X_{n-3-j}) = (-1)^j\frac{(n-4+(3-n)j+j^2)}{2}X_{n-3}\ \ 1 \leq j \leq n-7,$
$u^1_j(Y_2) = \frac{(n-6)}{2}X_{n-5+j}\ \ 1 \leq j \leq 2;$
$(1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1-1, n-5-r_1, n-6)$

$u^2_j(X_k) = X_{k+j}\ \ 1 \leq k \leq n-3-j;$
$(j = 1, n-4-r_1, n-5)$

son derivaciones de $\tau(n, r_1, n-5)$. El teorema siguiente prueba que constituyen una base de $Der(\tau(n, r_1, n-5))$.

Teorema 2.3.2. *Con las notaciones del comentario precedente, se tiene que,*

$$\{t^1_0, t^2_0, f^1_{r_1-1}, f^2_{r_1-1}, f^3_{r_1-1}, g^1_{n-5-r_1}, h^1_{n-6}, h^2_{n-6}, h^3_{n-6}, h^4_{n-6},$$

$$u^1_j(1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1-1, n-5-r_1, n-6), u^2_j(j = 1, n-4-r_1, n-5)\}$$

constituyen una base de $Der(\tau(n, r_1, n-5))$, n par, $n \geq 12$, si $r_1 = 3$.

Si r_1 es impar y y verificándose que $5 \leq r_1 \leq n-7$, la derivación h^4_{n-6} no aparece y el resto de endomorfismos constituyen una base del citado espacio de derivaciones, con lo que

$$dim(Der(\tau(n, r_1, n-5))) = \begin{cases} n+5 & si \quad r_1 \neq 3 \\ n+6 & si \quad r_1 = 3 \end{cases}$$

Demostración. Se va a demostrar que los endomorfismos citados constituyen una base del espacio de derivaciones.

Si $\bar{d} \in Der(\mathfrak{g})$, entonces $\bar{d} = \sum_{j=-n+4}^{n-4} d_j$.

Como los ideales de la sucesión central descendente

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) & = & < X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 > & \\
\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >, & 1 \leq i \leq r_1 - 1 \\
\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_2 >, & r_1 \leq i \leq n-6 \\
\mathcal{C}^{n-5}(\mathfrak{g}) & = & < X_{n-4}, X_{n-3} > & \\
\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g}) & = & < X_{n-3} > & \\
\mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g}) & = & < 0 > &
\end{array}$$

son característicos, resultan ser nulas las derivaciones d_j, $4 - n \leq j \leq -1$.

*** Cálculo de d_0**

Se puede suponer que

$$d_0 : \left\{ \begin{array}{lcll}
X_0 & \rightarrow & \alpha_0^0 X_0 + \alpha_0^1 X_1 & \\
X_1 & \rightarrow & \alpha_1^0 X_0 + \alpha_1^1 X_1 & \\
X_k & \rightarrow & \alpha_k X_k, & 2 \leq k \leq n-3, \ k \neq r_1, n-5 \\
X_{r_1} & \rightarrow & \alpha_{r_1} X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1} Y_1 & \\
X_{n-5} & \rightarrow & \alpha_{n-5} X_{n-5} + \bar{\alpha}_{n-5} Y_2 & \\
Y_1 & \rightarrow & \bar{\beta}_1 X_{r_1} + \beta_1 Y_1 & \\
Y_2 & \rightarrow & \bar{\beta}_2 X_{n-5} + \beta_2 Y_2 &
\end{array} \right.$$

Al exigir que d_0 sea derivación, se obtiene que

- $d_0([X_0, Y_1]) = [d_0(X_0), Y_1] + [X_0, d_0(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0$.

- $d_0([X_0, Y_2]) = [d_0(X_0), Y_2] + [X_0, d_0(Y_2)] \Rightarrow \bar{\beta}_2 = \frac{(n-6)}{2} \alpha_0^1$.

- $d_0([X_0, X_1]) = [d_0(X_0), X_1] + [X_0, d_0(X_1)] \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_0^0 + \alpha_1^1$.

- $d_0([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1} = \alpha_0^0 + \alpha_{r_1-1}, \quad \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0^1.$$

- $d_0([X_0, X_{n-6}]) = [d_0(X_0), X_{n-6}] + [X_0, d_0(X_{n-6})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-5} = \alpha_0^0 + \alpha_0^1 + \alpha_{n-6}, \quad \bar{\alpha}_{n-5} = \alpha_0^1.$$

- $d_0([X_0, X_{n-5}]) = [d_0(X_0), X_{n-5}] + [X_0, d_0(X_{n-5})] \Rightarrow \alpha_{n-4} = \alpha_0^0 + \alpha_0^1 + \alpha_{n-5}$.

- $d_0([X_0, X_{n-4}]) = [d_0(X_0), X_{n-4}] + [X_0, d_0(X_{n-4})] \Rightarrow \alpha_{n-3} = \alpha_0^0 + \alpha_{n-4}$.

- $d_0([X_0, X_k]) = [d_0(X_0), X_k] + [X_0, d_0(X_k)],\ 2 \le k \le n-7,\ k \neq r_1 - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_0^0 + \alpha_k,\ 2 \le k \le n-7,\ k \neq r_1 - 1.$

- $d_0([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1^0 = 0,\ \beta_1 = 2\alpha_1^1 + (r_1 - 2)\alpha_0^0.$

- $d_0([X_1, X_{n-6}]) = [d_0(X_1), X_{n-6}] + [X_1, d_0(X_{n-6})] \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_0^1 = \alpha_1^1 - \alpha_0^0,\ \beta_2 = \alpha_1^1 + (n-6)\alpha_0^0.$

Por las restricciones hasta ahora obtenidas y mediante un proceso de inducción finita se tiene que

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k & = & \alpha_1^1 + (k-1)\alpha_0^0, & 2 \le k \le n-6 \\ \alpha_{n-5} & = & 2\alpha_1^1 + (n-7)\alpha_0^0 & \\ \alpha_{n-4} & = & 3\alpha_1^1 + (n-7)\alpha_0^0 & \\ \alpha_{n-3} & = & 3\alpha_1^1 + (n-6)\alpha_0^0 & \end{array}$$

En consecuencia, se verifica que

$$d_0 : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^0 X_0 + (\alpha_1^1 - \alpha_0^0) X_1 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1^1 X_1 & \\ X_k & \rightarrow & (\alpha_1^1 + (k-1)\alpha_0^0) X_k, & 2 \le k \le n-6 \\ X_{n-5} & \rightarrow & (2\alpha_1^1 + (n-7)\alpha_0^0) X_{n-5} + (\alpha_1^1 - \alpha_0^0) Y_2 & \\ X_{n-4} & \rightarrow & (3\alpha_1^1 + (n-7)\alpha_0^0) X_{n-4} & \\ X_{n-3} & \rightarrow & (3\alpha_1^1 + (n-6)\alpha_0^0) X_{n-3} & \\ Y_1 & \rightarrow & (2\alpha_1^1 + (r_1-2)\alpha_0^0) Y_1 & \\ Y_2 & \rightarrow & (\alpha_1^1 + (n-6)\alpha_0^0) Y_2 & \end{array} \right.$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, pueden ser considerados libres los parámetros α_0^0, α_1^1. Una base de $< B_0 >$ vendrá dada por

$$B_0 = \{t_0^1, t_0^2\}$$

*** Cálculo de** $d_j,\ 1 \le j \le n-4,\ j \neq r_1 - 1, n-5-r_1, n-6$

Se ha de verificar ahora que

$$d_j : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k^j X_{k+j}, & 1 \le k \le n-3-j, \\ & & & k \neq r_1 - j, n-5-j \\ X_{r_1-j} & \rightarrow & \alpha_{r_1-j}^j X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1-j}^j Y_1, & 1 \le j \le r_1 - 2 \\ X_{n-5-j} & \rightarrow & \alpha_{n-5-j}^j X_{n-5} + \bar{\alpha}_{n-5-j}^j Y_2, & 1 \le j \le n-7 \\ Y_1 & \rightarrow & \beta_1^j X_{r_1+j}, & 1 \le j \le n-3-r_1 \\ Y_2 & \rightarrow & \beta_2^j X_{n-5+j}, & 1 \le j \le 2 \end{array} \right.$$

Al exigir que d_j sea derivación, se obtiene que

- $d_j([X_0, Y_1]) = [d_j(X_0), Y_1] + [X_0, d_j(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1^j = 0,\ j \leq n-4-r_1$
(El único $\bar{\beta}_1^j$ que puede ser no nulo, por ahora, es $\bar{\beta}_1^{n-3-r_1}$)

- $d_j([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_j(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_j(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\beta}_1^j = -\tfrac{(r_1-2)(n-3-r_1)}{2}\alpha_1^j, \text{ para } j = n-3-r_1.$$

- $d_j([X_0, Y_2]) = [d_j(X_0), Y_2] + [X_0, d_j(Y_2)]$

Esta condición se verifica trivialmente si $j \neq 1$. En cambio si $j = 1$, se deduce que debe cumplirse que $\beta_2^j = \frac{(n-6)}{2}\alpha_0^j$.
Se observa que para $j = 2$ no se obtiene restricción alguna para β_2^j.

- $d_j([X_1, X_{n-6}]) = [d_j(X_1), X_{n-6}] + [X_1, d_j(X_{n-6})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\beta}_2^j = \tfrac{(n-6)}{2}\alpha_0^j - (n-6)\alpha_1^j, \text{ para } j = 2.$$

- $d_j([X_0, X_{r_1-j-1}]) = [d_j(X_0), X_{r_1-j-1}] + [X_0, d_j(X_{r_1-j-1})],\ 1 \leq j \leq r_1 - 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1-j}^j = \alpha_{r_1-j-1}^j,\ \bar{\alpha}_{r_1-j}^j = (-1)^j\alpha_0^j,\ 1 \leq j \leq r_1 - 2.$$

- $d_j([X_0, X_{n-6-j}]) = [d_j(X_0), X_{n-6-j}] + [X_0, d_j(X_{n-6-j})],\ 1 \leq j \leq n-7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-5-j}^j = \alpha_{n-6-j}^j + (-1)^j\alpha_0^j,\ \bar{\alpha}_{n-5-j}^j = (-1)^j\alpha_0^j,\ 1 \leq j \leq n-7.$$

- $d_j([X_0, X_{n-5-j}]) = [d_j(X_0), X_{n-5-j}] + [X_0, d_j(X_{n-5-j})],\ 1 \leq j \leq n-7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-4-j}^j = \alpha_{n-5-j}^j + (-1)^j\tfrac{(n-6-2j)}{2}\alpha_0^j.\ 1 \leq j \leq n-7.$$

- $d_j([X_0, X_{n-4-j}]) = [d_j(X_0), X_{n-4-j}] + [X_0, d_j(X_{n-4-j})],\ 1 \leq j \leq n-7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-3-j}^j = \alpha_{n-4-j}^j - (-1)^j j\tfrac{(n-5-j)}{2}\alpha_0^j.\ 1 \leq j \leq n-7.$$

- $d_j([X_0, X_k]) = [d_j(X_0), X_k] + [X_0, d_j(X_k)],\ 1 \leq k \leq n-7-j,\ k \neq r_1 - j - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1}^j = \alpha_k^j,\ 1 \leq k \leq n-7-j,\ k \neq r_1 - j - 1.$$

De las restricciones obtenidas se deduce que

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k^j & = & \alpha_1^j, & 2 \leq k \leq n-6-j \\ \alpha_{n-5-j}^j & = & \alpha_1^j + (-1)^j \alpha_0^j & \\ \alpha_{n-4-j}^j & = & \alpha_1^j + (-1)^j \frac{(n-4-2j)}{2} \alpha_0^j & \\ \alpha_{n-3-j}^j & = & \alpha_1^j + (-1)^j \frac{(n-4+(3-n)j+j^2)}{2} \alpha_0^j & \end{array}$$

- $d_j([X_1, X_{n-5-j}]) = [d_j(X_1), X_{n-5-j}] + [X_1, d_j(X_{n-5-j})]$, $1 \leq j \leq n-7,\ j \neq 1, n-4-r_1 \Rightarrow \alpha_1^j = 0,\ 2 \leq j \leq n-7,\ j \neq n-4-r_1$.

Por las condiciones obtenidas, se cumple que $\bar{\beta}_1^j = 0$ para $j = n-3-r_1$ y que $\bar{\beta}_2^j = \frac{(n-6)}{2}\alpha_0^j$ para $j = 2$.

Se deduce que si j, $2 \leq j \leq n-4$, $j \neq r_1 - 1, n-5-r_1, n-4-r_1, n-6, n-5$, entonces, se verifica que

$$d_j : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_{r_1-j} & \rightarrow & (-1)^j \alpha_0^j Y_1, & 1 \leq j \leq r_1 - 2 \\ X_{n-5-j} & \rightarrow & (-1)^j \alpha_0^j (X_{n-5} + Y_2), & 1 \leq j \leq n-7 \\ X_{n-4-j} & \rightarrow & (-1)^j \frac{(n-4-2j)}{2} \alpha_0^j X_{n-4}, & 1 \leq j \leq n-7 \\ X_{n-3-j} & \rightarrow & (-1)^j \frac{(n-4+(3-n)j+j^2)}{2} \alpha_0^j X_{n-3}, & 1 \leq j \leq n-7 \\ Y_2 & \rightarrow & \frac{(n-6)}{2} \alpha_0^j X_{n-5+j}, & j = 2 \end{array} \right.$$

En los citados casos se puede tomar como parámetro libre α_0^j. Una base de $< B_j >$, $2 \leq j \leq n-4$, $j \neq r_1 - 1, n-5-r_1, n-4-r_1, n-6$ vendrá dada por

$$B_j = \{u_j^1\}$$

En cambio si $j = 1$, $j = n-4-r_1$ o $j = n-5$, la derivación d_j actúa de la siguiente forma

$$d_j : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_1^j X_{k+j}, & 1 \leq k \leq n-6-j, \\ & & & k \neq r_1 - j \\ X_{r_1-j} & \rightarrow & \alpha_1^j X_{r_1} + (-1)^j \alpha_0^j Y_1, & 1 \leq j \leq r_1 - 2 \\ X_{n-5-j} & \rightarrow & (\alpha_1^j + (-1)^j \alpha_0^j) X_{n-5} + (-1)^j \alpha_0^j Y_2, & 1 \leq j \leq n-7 \\ X_{n-4-j} & \rightarrow & (\alpha_1^j + (-1)^j \frac{(n-4-2j)}{2} \alpha_0^j) X_{n-4}, & 1 \leq j \leq n-7 \\ X_{n-3-j} & \rightarrow & (\alpha_1^j + (-1)^j \frac{(n-4+(3-n)j+j^2)}{2} \alpha_0^j) X_{n-3}, & 1 \leq j \leq n-7 \\ Y_2 & \rightarrow & \frac{(n-6)}{2} \alpha_0^j X_{n-5+j}, & 1 \leq j \leq 2 \end{array} \right.$$

En los citados casos se pueden considerar como libres los parámetros α_0^j, α_1^j. Una base de $< B_j >$, $j = 1$, $j = n-4-r_1$ ó $j = n-5$, vendrá dada por

$$B_j = \{u_j^1, u_j^2\}$$

Para terminar este apartado, sólo citar que el cálculo de estas derivaciones d_j, $1 \leq j \leq n-4$, $j \neq r_1 - 1, n-5-r_1, n-6$ van a proporcionar $n-4$ vectores a la base pretendida de $Der(\tau(n, r_1, n-5))$.

*** Cálculo de d_{r_1-1}**

Sea, ahora

$$d_{r_1-1}: \left\{ \begin{array}{lll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_1} + \bar{\alpha}_0 Y_1 \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_1} + \bar{\alpha}_1 Y_1 \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_{k+r_1-1}, \qquad\qquad 2 \leq k \leq n-2-r_1, \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad k \neq n-4-r_1 \\ X_{n-4-r_1} & \rightarrow & \alpha_{n-4-r_1} X_{n-5} + \bar{\alpha}_{n-4-r_1} Y_2 \\ Y_1 & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\beta}_1 X_{2r_1-1}, & r_1 \leq \frac{n-2}{2}, r_1 \neq \frac{n-4}{2} \\ \bar{\beta}_1 X_{n-5} + \beta_1 Y_2, & r_1 = \frac{n-4}{2} \end{array} \right. \\ Y_2 & \rightarrow & \beta_2 X_{n-3}, \qquad\qquad r_1 = 3 \end{array} \right.$$

Al exigir que d_{r_1-1} sea derivación, se obtiene que

- $d_{r_1-1}([X_0, Y_1]) = [d_{r_1-1}(X_0), Y_1] + [X_0, d_{r_1-1}(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0.$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_1]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_1] + [X_0, d_{r_1-1}(X_1)] \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1.$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_{n-5-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_{n-5-r_1}] + [X_0, d_{r_1-1}(X_{n-5-r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-4-r_1} = \alpha_0 + \alpha_{n-5-r_1}, \ \bar{\alpha}_{n-4-r_1} = \alpha_0.$$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_{n-4-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_{n-4-r_1}] + [X_0, d_{r_1-1}(X_{n-4-r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-3-r_1} = \frac{(n-4-2r_1)}{2}\alpha_0 + \alpha_{n-4-r_1}.$$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_{n-3-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_{n-3-r_1}] + [X_0, d_{r_1-1}(X_{n-3-r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-2-r_1} = -\frac{(r_1-1)(n-4-r_1)}{2}\alpha_0 + \alpha_{n-3-r_1}.$$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_k]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_k] + [X_0, d_{r_1-1}(X_k)], \ 2 \leq k \leq n-6-r_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k, \ 2 \leq k \leq n-6-r_1.$$

De las restricciones obtenidas se deduce que

$$\begin{array}{lll} \alpha_k & = & \alpha_1, \qquad 2 \leq k \leq n-5-r_1, \\ \alpha_{n-4-r_1} & = & \alpha_0 + \alpha_1, \end{array}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{n-3-r_1} &= \tfrac{(n-2-2r_1)}{2}\alpha_0+\alpha_1,\\ \alpha_{n-2-r_1} &= \tfrac{(2-r_1)n+r_1^2-3r_1+2}{2}\alpha_0+\alpha_1.\end{aligned}$$

- $d_{r_1-1}([X_1,X_{n-4-r_1}])=[d_{r_1-1}(X_1),X_{n-4-r_1}]+[X_1,d_{r_1-1}(X_{n-4-r_1})]\Rightarrow \alpha_1=0.$

- $d_{r_1-1}([X_1,X_{r_1-1}])=[d_{r_1-1}(X_1),X_{r_1-1}]+[X_1,d_{r_1-1}(X_{r_1-1})]$
  Esta condición se verifica trivialmente si $r_1\neq\frac{n-4}{2}$. En cambio, si $r_1=\frac{n-4}{2}$, debe satisfacerse que $\beta_1=0$.

- $d_{r_1-1}([X_1,X_{n-6}])=[d_{r_1-1}(X_1),X_{n-6}]+[X_1,d_{r_1-1}(X_{n-6})]$
  Esta condición se cumple evidentemente si $r_1\neq 3$. En cambio, si $r_1=3$, debe verificarse que $\beta_2=\frac{(n-2)}{2}\alpha_0$.

En consecuencia, se obtiene que

$$d_{r_1-1}:\left\{\begin{array}{lll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0X_{r_1}+\bar{\alpha}_0Y_1\\ X_1 & \rightarrow & \bar{\alpha}_1Y_1\\ X_{n-4-r_1} & \rightarrow & \alpha_0X_{n-5}\\ X_{n-3-r_1} & \rightarrow & \frac{(n-2-2r_1)}{2}\alpha_0X_{n-4}\\ X_{n-2-r_1} & \rightarrow & \frac{(2-r_1)n+r_1^2-3r_1+2}{2}\alpha_0X_{n-3}\\ Y_2 & \rightarrow & \frac{(n-2)}{2}\alpha_0X_{n-3}, \qquad\qquad r_1=3\end{array}\right.$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, pueden tomarse como parámetros libres los $\alpha_0,\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1$. Una base de $< B_{r_1-1} >$ vendrá dada por

$$B_{r_1-1}=\{f^1_{r_1-1},f^2_{r_1-1},f^3_{r_1-1}\}$$

*** Cálculo de d_{n-5-r_1}, $r_1\neq\frac{n-4}{2}$**

Se ha de cumplir que $n-5-r_1\neq r_1-1\Leftrightarrow r_1\neq\frac{n-4}{2}$.
Se puede suponer ahora que

$$d_{n-5-r_1}:\left\{\begin{array}{llll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0X_{n-4-r_1} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_kX_{n-5-r_1+k}, & 1\leq k\leq r_1+2,\\ & & & k\neq 2r_1-n+5,r_1\\ X_{2r_1-n+5} & \rightarrow & \alpha_{2r_1-n+5}X_{r_1}+\bar{\alpha}_{2r_1-n+5}Y_1 & \\ X_{r_1} & \rightarrow & \alpha_{r_1}X_{n-5}+\bar{\alpha}_{r_1}Y_2 & \\ Y_1 & \rightarrow & \bar{\beta}_1X_{n-5}+\beta_1Y_2 & \\ Y_2 & \rightarrow & \bar{\beta}_2X_{n-3}, & r_1=n-7\end{array}\right.$$

Al exigir que d_{n-5-r_1} sea derivación, se obtiene que

- $d_{n-5-r_1}([X_0,Y_1])=[d_{n-5-r_1}(X_0),Y_1]+[X_0,d_{n-5-r_1}(Y_1)]\Rightarrow\bar{\beta}_1=0.$

- $d_{n-5-r_1}([X_0, X_{2r_1-n+4}]) = [d_{n-5-r_1}(X_0), X_{2r_1-n+4}] + [X_0, d_{n-5-r_1}(X_{2r_1-n+4})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{2r_1-n+5} = \alpha_{2r_1-n+4},\ \bar{\alpha}_{2r_1-n+5} = \alpha_0.$$

- $d_{n-5-r_1}([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_{n-5-r_1}(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_{n-5-r_1}(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1} = \alpha_{r_1-1} + \alpha_0,\ \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0.$$

- $d_{n-5-r_1}([X_0, X_{r_1}]) = [d_{n-5-r_1}(X_0), X_{r_1}] + [X_0, d_{n-5-r_1}(X_{r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1+1} = \alpha_{r_1} - \tfrac{(n-4-2r_1)}{2}\alpha_0.$$

- $d_{n-5-r_1}([X_0, X_{r_1+1}]) = [d_{n-5-r_1}(X_0), X_{r_1+1}] + [X_0, d_{n-5-r_1}(X_{r_1+1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1+2} = \alpha_{r_1+1} - \tfrac{r_1(n-5-r_1)}{2}\alpha_0.$$

- $d_{n-5-r_1}([X_0, X_k]) = [d_{n-5-r_1}(X_0), X_k] + [X_0, d_{n-5-r_1}(X_k)],$
  $1 \le k \le r_1+2,\ k \ne r_1-1, r_1, r_1+1, 2r_1-n+4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k,\ 1 \le k \le r_1-2,\ k \ne 2r_1-n+4.$$

De las restricciones obtenidas se deduce que

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k & = & \alpha_1, & 2 \le k \le r_1-1 \\ \alpha_{r_1} & = & \alpha_0+\alpha_1 & \\ \alpha_{r_1+1} & = & \frac{(-n+2r_1+6)}{2}\alpha_0+\alpha_1 & \\ \alpha_{r_1+2} & = & \frac{(-r_1)n+r_1^2+7r_1+6}{2}\alpha_0+\alpha_1 & \end{array}$$

- $d_{n-5-r_1}([X_1, Y_1]) = [d_{n-5-r_1}(X_1), Y_1] + [X_1, d_{n-5-r_1}(Y_1)] \Rightarrow \beta_1 = 0.$

- $d_{n-5-r_1}([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_{n-5-r_1}(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_{n-5-r_1}(X_{r_1-1})] \Rightarrow \alpha_1 = 0.$

- $d_{n-5-r_1}([X_1, X_{n-6}]) = [d_{n-5-r_1}(X_1), X_{n-6}] + [X_1, d_{n-5-r_1}(X_{n-6})]$

  Esta condición se verifica trivialmente si $r_1 < n-7$. Para $r_1 = n-7$, el último de sus posibles valores, se debe cumplir que $\bar{\beta}_2 = -3\alpha_0$.

En consecuencia, si $r_1 \ne n-7$, se verifica que

$$d_{n-5-r_1}: \left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & \to & \alpha_0 X_{n-4-r_1} \\ X_{2r_1-n+5} & \to & \alpha_0 Y_1 \\ X_{r_1} & \to & \alpha_0(X_{n-5}+Y_2) \\ X_{r_1+1} & \to & \frac{(-n+2r_1+6)}{2}\alpha_0 X_{n-4} \\ X_{r_1+2} & \to & \frac{(-r_1)n+r_1^2+7r_1+6}{2}\alpha_0 X_{n-3} \end{array} \right.$$

y si $r_1 = n-7$, entonces

$$d_{n-5-r_1} = d_2 : \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{n-3} \\ X_{n-11} & \rightarrow & \alpha_0 Y_1 \\ X_{n-7} & \rightarrow & \alpha_0(X_{n-5}+Y_2) \\ X_{n-6} & \rightarrow & \frac{(n-8)}{2}\alpha_0 X_{n-4} \\ X_{n-5} & \rightarrow & 3\alpha_0 X_{n-3} \\ Y_2 & \rightarrow & -3\alpha_0 X_{n-3} \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, independientemente del valor de r_1, puede considerarse libre el parámetro α_0. Una base de $< B_{n-5-r_1} >$ vendrá dada por

$$B_{n-5-r_1} = \{g^1_{n-5-r_1}\}$$

*** Cálculo de d_{n-6}**

Sea, ahora

$$d_{n-6} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{n-5} + \bar{\alpha}_0 Y_2 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{n-5} + \bar{\alpha}_1 Y_2 & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_{k+n-6}, & 2 \leq k \leq 3 \\ Y_1 & \rightarrow & \bar{\beta}_1 X_{n-3}, & r_1 = 3 \end{cases}$$

Al exigir que d_{n-6} sea derivación, se obtiene que

- $d_{n-6}([X_0, X_1]) = [d_{n-6}(X_0), X_1] + [X_0, d_{n-6}(X_1)] \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(n-6)}{2}(-\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) + \alpha_1.$

- $d_{n-6}([X_0, X_2]) = [d_{n-6}(X_0), X_2] + [X_0, d_{n-6}(X_2)] \Rightarrow \alpha_3 = (n-6)(-\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) + \alpha_1.$

- $d_{n-6}([X_1, X_2]) = [d_{n-6}(X_1), X_2] + [X_1, d_{n-6}(X_2)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = 3 \Rightarrow \bar{\beta}_1 = \frac{(n-6)}{2}(-\alpha_1 + \bar{\alpha}_1), \\ r_1 \neq 3 \Rightarrow \bar{\alpha}_1 = \alpha_1. \end{cases}$$

En consecuencia, se verifica que

$$d_{n-6} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{n-5} + \bar{\alpha}_0 Y_2 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{n-5} + \bar{\alpha}_1 Y_2, & \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \text{ si } r_1 \neq 3 \\ X_2 & \rightarrow & (\frac{(n-6)}{2}(-\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) + \alpha_1) X_{n-4}, & \\ X_3 & \rightarrow & ((n-6)(-\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) + \alpha_1) X_{n-3} & \\ Y_1 & \rightarrow & (\frac{(n-6)}{2}(-\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)) X_{n-3}, & r_1 = 3 \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, ahora pueden tomarse como parámetros libres los $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1$ si $r_1 = 3$. Una base de $< B_{n-6} >$

vendrá dada por

$$B_{n-6} = \{h^1_{n-6}, h^2_{n-6}, h^3_{n-6}, h^4_{n-6}\}$$

no existiendo el parámetro $\bar{\alpha}_1$ y la derivación h^4_{n-6} si $5 \leq r_1 \leq n-7$.

Esto termina la demostración del teorema. $\square$

Las derivaciones interiores de $\tau(n, r_1, n-5)$ son

$$\begin{cases} ad(X_0) & = & u^2_1 \\ ad(X_i) & = & -u^1_i, \quad 1 \leq i \leq n-4 \\ ad(X_{n-3}) & = & 0 \\ ad(Y_1) & = & 0, \\ ad(Y_2) & = & \frac{(n-6)}{2} u^2_{n-5} \end{cases}$$

En consecuencia, se deducen del teorema anterior los siguientes corolarios, donde se dan las dimensiones del espacio de los 1-cobordes, del primer espacio de cohomología, del espacio de las órbitas y de los cobordes de grado 2, del álgebra $\mathfrak{g} = \tau(n, r_1, n-5)$, n par, $n \geq 12$, $3 \leq r_1 \leq n-7$, r_1 impar.

Corolario 2.3.3. *Se verifica que*

$$\begin{array}{rcl} dim(B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) & = & n-2 \\ dim(H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) & = & \begin{cases} 7 & si \quad r_1 \neq 3 \\ 8 & si \quad r_1 = 3 \end{cases} \end{array}$$

Demostración. Se obtienen estos dos resultados trivialmente, sin más que tener en cuenta, al ser $ad(X_{n-3}) = ad(Y_1) = 0$, que
$B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = Ad(\mathfrak{g}) =< ad(X_0), ad(X_1), ad(X_2), \ldots, ad(X_{n-4}), ad(Y_2) >$ y que
$dim(H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) = dim(Der(\mathfrak{g})) - dim(B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$. $\square$

Nota 2.3.4. De manera implícita se ha descrito el primer espacio de cohomología $H^1(\tau(n, r_1, n-5), \tau(n, r_1, n-5))$.

Corolario 2.3.5. *Se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) = \begin{cases} n^2 - n - 5 & si \quad r_1 \neq 3 \\ n^2 - n - 6 & si \quad r_1 = 3 \end{cases}$$

Demostración. Basta recordar que
$dim(O(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$. $\square$

2.4 Estudio de la familia $\tau(n, r_1, n-4)$

Se considera $\mathfrak{g} = \tau(n, r_1, n-4)$, n impar, $n \geq 9$, $3 \leq r_1 \leq n-6$, r_1 impar, esto es, la familia de álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente cuyas leyes, referida a una base adaptada, $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$, vienen dadas por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_1-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-4} + Y_2), & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{(n-3-2i)}{2} X_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1, Y_2] &= \frac{(5-n)}{2} X_{n-3} \end{cases}$$

Se va a proceder, en primer lugar, al cálculo del espacio de derivaciones.

Nota 2.4.1. Es trivial probar que los endomorfismos de $\tau(n, r_1, n-4)$ denotados mediante $t_0^1, t_0^2, f_{r_1-1}^1, f_{r_1-1}^2, f_{r_1-1}^3, g_{n-4-r_1}^1, h_{n-5}^1, h_{n-5}^2, h_{n-5}^3, h_{n-5}^4, u_j^1, u_j^2$ $(1 \leq j \leq n-4$, $j \neq r_1 - 1, n-4-r_1, n-5)$, y definidos por

$t_0^1(X_0) = X_0$, $t_0^1(X_k) = kX_k$ $1 \leq k \leq n-3$, $t_0^1(Y_1) = r_1 Y_1$, $t_0^1(Y_2) = (n-4)Y_2$;

$t_0^2(X_0) = X_1$, $t_0^2(X_k) = \frac{(n-3)}{2} X_k$ $1 \leq k \leq n-5$ $k \neq r_1$, $t_0^2(X_{r_1}) = \frac{(n-3)}{2} X_{r_1} + Y_1$, $t_0^2(X_{n-4}) = \frac{(n-1)}{2} X_{n-4} + Y_2$, $t_0^2(X_{n-3}) = (n-3)X_{n-3}$, $t_0^2(Y_1) = (n-3)Y_1$, $t_0^2(Y_2) = \frac{(n-5)}{2} X_{n-4} + (n-4)Y_2$;

$f_{r_1-1}^1(X_0) = X_{r_1}$, $f_{r_1-1}^1(X_{n-3-r_1}) = X_{n-4} + Y_2$, $f_{r_1-1}^1(X_{n-2-r_1}) = \frac{(n-1-2r_1)}{2} X_{n-3}$;

$f_{r_1-1}^2(X_0) = Y_1$;

$f_{r_1-1}^3(X_1) = Y_1$;

$g_{n-4-r_1}^1(X_0) = X_{n-3-r_1}$, $g_{n-4-r_1}^1(X_{2r_1-n+4}) = Y_1$ si $r_1 \neq \frac{2(n-3)}{3}$, $g_{n-4-r_1}^1(X_{r_1}) = X_{n-4} + Y_2$, $g_{n-4-r_1}^1(X_{r_1+1}) = \frac{(-n+2r_1+5)}{2} X_{n-3}$;

$h_{n-5}^1(X_0) = X_{n-4}$, $h_{n-5}^1(X_2) = \frac{(5-n)}{2} X_{n-3}$;

$h_{n-5}^2(X_0) = Y_2$, $h_{n-5}^2(X_2) = \frac{(n-5)}{2} X_{n-3}$;

$h_{n-5}^3(X_1) = X_{n-4}$, $h_{n-5}^3(X_2) = X_{n-3}$;

$h^4_{n-5}(X_1) = Y_2;$

$u^1_j(X_0) = X_{1+j},\ u^1_j(X_{r_1-j}) = (-1)^j Y_1\ \ 1 \leq j \leq r_1-2,\ \ u^1_j(X_{n-4-j}) = (-1)^j(X_{n-4} + Y_2)$
$1 \leq j \leq n-6,\ \ u^1_j(X_{n-3-j}) = (-1)^j \frac{(n-3-2j)}{2} X_{n-3}\ \ 1 \leq j \leq n-6,$
$u^1_j(Y_2) = \frac{(n-5)}{2} X_{n-3}$ si $j = 1;$
$(1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1-1, n-4-r_1, n-5)$

$u^2_j(X_k) = X_{k+j}\ \ 1 \leq k \leq n-3-j,\ \ u^2_j(Y_1) = (n-3-r_1)X_{n-3}$ si $j = 1;$
$(1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1-1, n-4-r_1, n-5)$

son derivaciones de $\tau(n, r_1, n-4)$. El teorema siguiente prueba que constituyen una base de $Der(\tau(n, r_1, n-4))$.

Teorema 2.4.2. *Con las notaciones del comentario precedente, se tiene que,*

$$\{t^1_0, t^2_0, f^1_{r_1-1}, f^2_{r_1-1}, f^3_{r_1-1}, g^1_{n-4-r_1}, h^1_{n-5}, h^2_{n-5}, h^3_{n-5}, h^4_{n-5}, u^1_j, u^2_j\}$$

$$1 \leq j \leq n-4,\ j \neq r_1-1, n-4-r_1, n-5$$

forman una base de $Der(\tau(n, r_1, n-4))$, n impar, $n \geq 9$, $3 \leq r_1 \leq n-6$, r_1 impar, *con lo que*

$$dim(Der(\tau(n, r_1, n-4))) = 2n-4$$

Demostración. Se va a demostrar que los endomorfismos citados constituyen una base del espacio de derivaciones.

Si $\bar{d} \in Der(\mathfrak{g})$, entonces $\bar{d} = \sum_{j=-n+4}^{n-4} d_j$.

Como los ideales de la sucesión central descendente

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) & = & < X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 > & \\
\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2 >, & 1 \leq i \leq r_1 - 1 \\
\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) & = & < X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-3}, Y_2 >, & r_1 \leq i \leq n-5 \\
\mathcal{C}^{n-4}(\mathfrak{g}) & = & < X_{n-3} > & \\
\mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g}) & = & < 0 > &
\end{array}$$

son característicos, resultan ser nulas las derivaciones

$$d_j,\ 4-n \leq j \leq -1$$

* Cálculo de d_0

Se ha de verificar ahora que

$$d_0 : \begin{cases} X_0 & \to & \alpha_0^0 X_0 + \alpha_0^1 X_1 & \\ X_1 & \to & \alpha_1^0 X_0 + \alpha_1^1 X_1 & \\ X_k & \to & \alpha_k X_k, & 2 \leq k \leq n-3, \ k \neq r_1, n-4 \\ X_{r_1} & \to & \alpha_{r_1} X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1} Y_1 & \\ X_{n-4} & \to & \alpha_{n-4} X_{n-4} + \bar{\alpha}_{n-4} Y_2 & \\ Y_1 & \to & \bar{\beta}_1 X_{r_1} + \beta_1 Y_1 & \\ Y_2 & \to & \bar{\beta}_2 X_{n-4} + \beta_2 Y_2 & \end{cases}$$

Al exigir que d_0 sea derivación, se obtiene que

- $d_0([X_0, Y_1]) = [d_0(X_0), Y_1] + [X_0, d_0(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0.$

- $d_0([X_0, Y_2]) = [d_0(X_0), Y_2] + [X_0, d_0(Y_2)] \Rightarrow \bar{\beta}_2 = \frac{(n-5)}{2}\alpha_0^1.$

- $d_0([X_0, X_1]) = [d_0(X_0), X_1] + [X_0, d_0(X_1)] \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_0^0 + \alpha_1^1.$

- $d_0([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1} = \alpha_0^0 + \alpha_{r_1-1}, \ \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0^1.$$

- $d_0([X_0, X_{n-5}]) = [d_0(X_0), X_{n-5}] + [X_0, d_0(X_{n-5})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-4} = \alpha_0^0 + \alpha_0^1 + \alpha_{n-5}, \ \bar{\alpha}_{n-4} = \alpha_0^1.$$

- $d_0([X_0, X_{n-4}]) = [d_0(X_0), X_{n-4}] + [X_0, d_0(X_{n-4})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-3} = \alpha_0^0 + \frac{(n-5)}{2}\alpha_0^1 + \alpha_{n-4}.$$

- $d_0([X_0, X_k]) = [d_0(X_0), X_k] + [X_0, d_0(X_k)], \ 2 \leq k \leq n-6, \ k \neq r_1 - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_0^0 + \alpha_k, \ 2 \leq k \leq n-6, \ k \neq r_1 - 1.$$

Por las restricciones hasta ahora obtenidas y mediante un proceso de inducción finita se tiene que

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k & = & \alpha_1^1 + (k-1)\alpha_0^0, & 2 \leq k \leq n-5 \\ \alpha_{n-4} & = & \alpha_1^1 + (n-5)\alpha_0^0 + \alpha_0^1 & \\ \alpha_{n-3} & = & \alpha_1^1 + (n-4)\alpha_0^0 + \frac{(n-3)}{2}\alpha_0^1 & \end{array}$$

- $d_0([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_0(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_0(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1^0 = 0,\ \beta_1 = 2\alpha_1^1 + (r_1-2)\alpha_0^0.$$

- $d_0([X_1, X_{n-5}]) = [d_0(X_1), X_{n-5}] + [X_1, d_0(X_{n-5})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1^1 = \alpha_0^0 + \tfrac{(n-3)}{2}\alpha_0^1,\ \beta_2 = (n-4)(\alpha_0^0 + \alpha_0^1).$$

En consecuencia, se deduce que

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k & = & k\alpha_0^0 + \frac{(n-3)}{2}\alpha_0^1, & 2 \le k \le n-5 \\ \alpha_{n-4} & = & (n-4)\alpha_0^0 + \frac{(n-1)}{2}\alpha_0^1 & \\ \alpha_{n-3} & = & (n-3)(\alpha_0^0 + \alpha_0^1) & \\ \beta_1 & = & r_1\alpha_0^0 + (n-3)\alpha_0^1 & \end{array}$$

y se verifica que

$$d_0 : \left\{ \begin{array}{lll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^0 X_0 + \alpha_0^1 X_1 \\ X_k & \rightarrow & (k\alpha_0^0 + \frac{(n-3)}{2}\alpha_0^1)X_k, \qquad\qquad 1 \le k \le n-5,\ k \ne r_1 \\ X_{r_1} & \rightarrow & (r_1\alpha_0^0 + \frac{(n-3)}{2}\alpha_0^1)X_{r_1} + \alpha_0^1 Y_1 \\ X_{n-4} & \rightarrow & ((n-4)\alpha_0^0 + \frac{(n-1)}{2}\alpha_0^1)X_{n-4} + \alpha_0^1 Y_2 \\ X_{n-3} & \rightarrow & (n-3)(\alpha_0^0 + \alpha_0^1)X_{n-3} \\ Y_1 & \rightarrow & (r_1\alpha_0^0 + (n-3)\alpha_0^1)Y_1 \\ Y_2 & \rightarrow & \frac{(n-5)}{2}\alpha_0^1 X_{n-4} + (n-4)(\alpha_0^0 + \alpha_0^1)Y_2 \end{array} \right.$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, pueden tomarse como parámetros libres los α_0^0, α_0^1. Una base de $< B_0 >$ vendrá dada por

$$B_0 = \{t_0^1, t_0^2\}$$

*** Cálculo de** $d_j,\ 1 \le j \le n-4,\ j \ne r_1 - 1, n-4-r_1, n-5$

Sea, ahora

$$d_j : \left\{ \begin{array}{llll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0^j X_{1+j} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k^j X_{k+j}, & 1 \le k \le n-3-j, \\ & & & k \ne r_1 - j, n-4-j \\ X_{r_1-j} & \rightarrow & \alpha_{r_1-j}^j X_{r_1} + \bar{\alpha}_{r_1-j}^j Y_1, & 1 \le j \le r_1 - 2 \\ X_{n-4-j} & \rightarrow & \alpha_{n-4-j}^j X_{n-4} + \bar{\alpha}_{n-4-j}^j Y_2, & 1 \le j \le n-6 \\ Y_1 & \rightarrow & \bar{\beta}_1^j X_{r_1+j}, & 1 \le j \le n-3-r_1 \\ Y_2 & \rightarrow & \bar{\beta}_2^j X_{n-3}, & j = 1 \end{array} \right.$$

Al exigir que d_j sea derivación, se obtiene que

- $d_j([X_0, Y_1]) = [d_j(X_0), Y_1] + [X_0, d_j(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1^j = 0,\ j \le n-4-r_1.$
  (El único $\bar{\beta}_1^j$ que puede ser no nulo, por ahora, es $\bar{\beta}_1^{n-3-r_1}$)

- $d_j([X_0, X_{r_1-j-1}]) = [d_j(X_0), X_{r_1-j-1}] + [X_0, d_j(X_{r_1-j-1})], \ 1 \le j \le r_1 - 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha^j_{r_1-j} = \alpha^j_{r_1-j-1}, \ \bar{\alpha}^j_{r_1-j} = (-1)^j \alpha^j_0, \ 1 \le j \le r_1 - 2.$$

- $d_j([X_0, X_{n-5-j}]) = [d_j(X_0), X_{n-5-j}] + [X_0, d_j(X_{n-5-j})], \ 1 \le j \le n - 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha^j_{n-4-j} = \alpha^j_{n-5-j} + (-1)^j \alpha^j_0, \ \bar{\alpha}^j_{n-4-j} = (-1)^j \alpha^j_0, \ 1 \le j \le n - 6.$$

- $d_j([X_0, X_{n-4-j}]) = [d_j(X_0), X_{n-4-j}] + [X_0, d_j(X_{n-4-j})], \ 1 \le j \le n - 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha^j_{n-3-j} = \alpha^j_{n-4-j} + (-1)^j \tfrac{(n-5-2j)}{2} \alpha^j_0. \ 1 \le j \le n - 6.$$

- $d_j([X_0, X_k]) = [d_j(X_0), X_k] + [X_0, d_j(X_k)], \ 1 \le k \le n - 6 - j, \ k \ne r_1 - j - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha^j_{k+1} = \alpha^j_k, \ 1 \le k \le n - 6 - j, \ k \ne r_1 - j - 1.$$

De las restricciones obtenidas se deduce que

$$\begin{array}{lcll} \alpha^j_k & = & \alpha^j_1, & 2 \le k \le n - 5 - j \\ \alpha^j_{n-4-j} & = & \alpha^j_1 + (-1)^j \alpha^j_0 & \\ \alpha^j_{n-3-j} & = & \alpha^j_1 + (-1)^j \frac{(n-3-2j)}{2} \alpha^j_0 & \end{array}$$

- $d_j([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_j(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_j(X_{r_1-1})] \ (j = n - 3 - r_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\beta}^j_1 = (n - 3 - r_1)\alpha^j_1, \text{ para } j = n - 3 - r_1.$$

- $d_j([X_1, X_{n-5}]) = [d_j(X_1), X_{n-5}] + [X_1, d_j(X_{n-5})] \ (j = 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\beta}^j_2 = \tfrac{(n-5)}{2} \alpha^j_0, \text{ para } j = 1.$$

En consecuencia, se deduce que si $j, \ 1 \le j \le n-4, \ j \ne r_1 - 1, n - 4 - r_1, n - 5$, entonces, se verifica que

$$d_j : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha^j_0 X_{1+j} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha^j_1 X_{k+j}, & 1 \le k \le n - 5 - j, \\ & & & k \ne r_1 - j \\ X_{r_1-j} & \rightarrow & \alpha^j_1 X_{r_1} + (-1)^j \alpha^j_0 Y_1, & 1 \le j \le r_1 - 2 \\ X_{n-4-j} & \rightarrow & (\alpha^j_1 + (-1)^j \alpha^j_0) X_{n-4} + (-1)^j \alpha^j_0 Y_2, & 1 \le j \le n - 6 \\ X_{n-3-j} & \rightarrow & (\alpha^j_1 + (-1)^j \frac{(n-3-2j)}{2} \alpha^j_0) X_{n-3}, & 1 \le j \le n - 6 \\ Y_1 & \rightarrow & (n - 3 - r_1)\alpha^j_1 X_{n-3}, & j = n - 3 - r_1 \\ Y_2 & \rightarrow & \frac{(n-5)}{2} \alpha^j_0 X_{n-3}, & j = 1 \end{array} \right.$$

En los citados casos pueden considerarse libres los parámetros α_0^j, α_1^j. Una base de $< B_j >$ vendrá dada por

$$B_j = \{u_j^1, u_j^2\}$$

Para terminar este apartado, sólo citar que el cálculo de estas derivaciones d_j, $1 \leq j \leq n-4$, $j \neq r_1 - 1, n-4-r_1, n-5$ van a proporcionar $2n-14$ vectores a la base pretendida de $Der(\tau(n, r_1, n-4))$.

*** Cálculo de d_{r_1-1}**

Se puede suponer ahora que

$$d_{r_1-1} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_1} + \bar{\alpha}_0 Y_1 & \\ X_1 & \rightarrow & \alpha_1 X_{r_1} + \bar{\alpha}_1 Y_1 & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_{k+r_1-1}, & 2 \leq k \leq n-2-r_1, \\ & & & k \neq n-3-r_1 \\ X_{n-3-r_1} & \rightarrow & \alpha_{n-3-r_1} X_{n-4} + \bar{\alpha}_{n-3-r_1} Y_2 & \\ Y_1 & \rightarrow & \begin{cases} \bar{\beta}_1 X_{2r_1-1}, & r_1 < \frac{n-3}{2} \\ \bar{\beta}_1 X_{n-4} + \beta_1 Y_2, & r_1 = \frac{n-3}{2} \end{cases} & \end{cases}$$

Al exigir que d_{r_1-1} sea derivación, se obtiene que

- $d_{r_1-1}([X_0, Y_1]) = [d_{r_1-1}(X_0), Y_1] + [X_0, d_{r_1-1}(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0.$

- $d_{r_1-1}([X_1, Y_1]) = [d_{r_1-1}(X_1), Y_1] + [X_1, d_{r_1-1}(Y_1)] \Rightarrow \beta_1 = 0.$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_{n-4-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_{n-4-r_1}] + [X_0, d_{r_1-1}(X_{n-4-r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-3-r_1} = \alpha_0 + \alpha_{n-4-r_1}, \ \bar{\alpha}_{n-3-r_1} = \alpha_0.$$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_{n-3-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_{n-3-r_1}] + [X_0, d_{r_1-1}(X_{n-3-r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{n-2-r_1} = \tfrac{(n-3-2r_1)}{2}\alpha_0 + \alpha_{n-3-r_1}$$

- $d_{r_1-1}([X_0, X_k]) = [d_{r_1-1}(X_0), X_k] + [X_0, d_{r_1-1}(X_k)]$, $1 \leq k \leq n-5-r_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k, \ 1 \leq k \leq n-5-r_1.$$

De las restricciones obtenidas se deduce que

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k & = & \alpha_1, & 2 \leq k \leq n-4-r_1 \\ \alpha_{n-3-r_1} & = & \alpha_0 + \alpha_1 & \\ \alpha_{n-2-r_1} & = & \frac{(n-1-2r_1)}{2}\alpha_0 + \alpha_1 & \end{array}$$

- $d_{r_1-1}([X_1, X_{r_1-1}]) = [d_{r_1-1}(X_1), X_{r_1-1}] + [X_1, d_{r_1-1}(X_{r_1-1})]$

Esta condición se verifica trivialmente si $r_1 \neq \frac{n-3}{2}$. En cambio, si $r_1 = \frac{n-3}{2}$, debe satisfacerse que $\alpha_1 = 0$.

- $d_{r_1-1}([X_1, X_{n-3-r_1}]) = [d_{r_1-1}(X_1), X_{n-3-r_1}] + [X_1, d_{r_1-1}(X_{n-3-r_1})]$

Esta condición se verifica trivialmente si $r_1 = \frac{n-3}{2}$. En cambio, si $r_1 \neq \frac{n-3}{2}$, debe satisfacerse que $\alpha_1 = 0$.

Se ha demostrado, en consecuencia, que independientemente del valor de r_1, siempre es nulo el parámetro α_1. Luego

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k & = & 0, & 2 \leq k \leq n-4-r_1 \\ \alpha_{n-3-r_1} & = & \alpha_0 & \\ \alpha_{n-2-r_1} & = & \frac{(n-1-2r_1)}{2}\alpha_0 & \end{array}$$

Se obtiene que

$$d_{r_1-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{r_1} + \bar{\alpha}_0 Y_1 \\ X_1 & \rightarrow & \bar{\alpha}_1 Y_1 \\ X_{n-3-r_1} & \rightarrow & \alpha_0 (X_{n-4} + Y_2) \\ X_{n-2-r_1} & \rightarrow & \frac{(n-1-2r_1)}{2}\alpha_0 X_{n-3} \end{array} \right.$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, pueden tomarse libres los parámetros $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1$. Una base de $< B_{r_1-1} >$ vendrá dada por

$$B_{r_1-1} = \{f^1_{r_1-1}, f^2_{r_1-1}, f^3_{r_1-1}\}$$

*** Cálculo de d_{n-4-r_1}, $r_1 \neq \frac{n-3}{2}$**

Se ha de cumplir que $n-4-r_1 \neq r_1 - 1 \Leftrightarrow r_1 \neq \frac{n-3}{2}$.

Se verifica ahora que

$$d_{n-4-r_1} : \left\{ \begin{array}{lcll} X_0 & \rightarrow & \alpha_0 X_{n-3-r_1} & \\ X_k & \rightarrow & \alpha_k X_{n-4-r_1+k}, & 1 \leq k \leq r_1+1, \\ & & & k \neq 2r_1 - n + 4, r_1 \\ X_{2r_1-n+4} & \rightarrow & \alpha_{2r_1-n+4} X_{r_1} + \bar{\alpha}_{2r_1-n+4} Y_1 & \\ X_{r_1} & \rightarrow & \alpha_{r_1} X_{n-4} + \bar{\alpha}_{r_1} Y_2 & \\ Y_1 & \rightarrow & \bar{\beta}_1 X_{n-4} + \beta_1 Y_2 & \end{array} \right.$$

Se observa que se tiene directamente que $d_{n-4-r_1}(Y_2) = 0$ por ser $r_1 \leq n-6$ y no verificarse la condición $2(n-4) - r_1 \leq n-3 \Leftrightarrow n-5 \leq r_1$.

Al exigir que d_{n-4-r_1} sea derivación, se obtiene que

- $d_{n-4-r_1}([X_0, Y_1]) = [d_{n-4-r_1}(X_0), Y_1] + [X_0, d_{n-4-r_1}(Y_1)] \Rightarrow \bar{\beta}_1 = 0.$

- $d_{n-4-r_1}([X_1, Y_1]) = [d_{n-4-r_1}(X_1), Y_1] + [X_1, d_{n-4-r_1}(Y_1)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tfrac{(5-n)}{2}\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \text{ al ser } n \geq 9.$$

- $d_{n-4-r_1}([X_0, X_{2r_1-n+3}]) = [d_{n-4-r_1}(X_0), X_{2r_1-n+3}] + [X_0, d_{n-4-r_1}(X_{2r_1-n+3})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{2r_1-n+4} = \alpha_{2r_1-n+3},\ \bar{\alpha}_{2r_1-n+4} = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si} \quad r_1 \neq \frac{2(n-3)}{3} \\ 0 & \text{si} \quad r_1 = \frac{2(n-3)}{3} \end{cases}$$

- $d_{n-4-r_1}([X_0, X_{r_1-1}]) = [d_{n-4-r_1}(X_0), X_{r_1-1}] + [X_0, d_{n-4-r_1}(X_{r_1-1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1} = \alpha_{r_1-1} + \alpha_0,\ \bar{\alpha}_{r_1} = \alpha_0$$

- $d_{n-4-r_1}([X_0, X_{r_1}]) = [d_{n-4-r_1}(X_0), X_{r_1}] + [X_0, d_{n-4-r_1}(X_{r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_{r_1+1} = \alpha_{r_1} - \tfrac{(n-3-2r_1)}{2}\alpha_0.$$

- $d_{n-4-r_1}([X_0, X_k]) = [d_{n-4-r_1}(X_0), X_k] + [X_0, d_{n-4-r_1}(X_k)],$

$$1 \leq k \leq r_1 + 1,\ k \neq r_1 - 1, r_1, 2r_1 - n + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k,\ 1 \leq k \leq r_1 - 2,\ k \neq 2r_1 - n + 3.$$

De las restricciones obtenidas se deduce que

$$\begin{array}{lcll} \alpha_k & = & \alpha_1, & 2 \leq k \leq r_1 - 1 \\ \alpha_{r_1} & = & \alpha_0 + \alpha_1 & \\ \alpha_{r_1+1} & = & \frac{(-n+2r_1+5)}{2}\alpha_0 + \alpha_1 & \end{array}$$

- $d_{n-4-r_1}([X_1, X_{r_1}]) = [d_{n-4-r_1}(X_1), X_{r_1}] + [X_1, d_{n-4-r_1}(X_{r_1})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2r_1 - 2)\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \text{ al ser } r_1 \neq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lcll} \alpha_k & = & 0, & 2 \leq k \leq r_1 - 1 \\ \alpha_{r_1} & = & \alpha_0 & \\ \alpha_{r_1+1} & = & \frac{(-n+2r_1+5)}{2}\alpha_0 & \end{array}$$

En consecuencia, se verifica que

$$d_{n-4-r_1} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow \alpha_0 X_{n-3-r_1} \\ X_{2r_1-n+4} & \rightarrow \alpha_0 Y_1, \qquad\qquad r_1 \neq \frac{2(n-3)}{3} \\ X_{r_1} & \rightarrow \alpha_0(X_{n-4}+Y_2) \\ X_{r_1+1} & \rightarrow \frac{(-n+2r_1+5)}{2}\alpha_0 X_{n-3} \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se puede tomar libre el parámetro α_0. Una base de $< B_{n-4-r_1} >$ vendrá dada por

$$B_{n-4-r_1} = \{g^1_{n-4-r_1}\}$$

*** Cálculo de d_{n-5}**

Se puede suponer ahora que

$$d_{n-5} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow \alpha_0 X_{n-4} + \bar{\alpha}_0 Y_2 \\ X_1 & \rightarrow \alpha_1 X_{n-4} + \bar{\alpha}_1 Y_2 \\ X_2 & \rightarrow \alpha_2 X_{n-3} \end{cases}$$

Al exigir que d_{n-5} sea derivación, se obtiene que

- $d_{n-5}([X_0, X_1]) = [d_{n-5}(X_0), X_1] + [X_0, d_{n-5}(X_1)] \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(n-5)}{2}(-\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) + \alpha_1.$

Las demás condiciones se verifican trivialmente y, en consecuencia, se verifica que

$$d_{n-5} : \begin{cases} X_0 & \rightarrow \alpha_0 X_{n-4} + \bar{\alpha}_0 Y_2 \\ X_1 & \rightarrow \alpha_1 X_{n-4} + \bar{\alpha}_1 Y_2 \\ X_2 & \rightarrow (\frac{(n-5)}{2}(-\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) + \alpha_1) X_{n-3} \end{cases}$$

No hay más restricciones respecto a los parámetros y, por tanto, se pueden considerar libres los parámetros $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1$. Una base de $< B_{n-5} >$ vendrá dada por

$$B_{n-5} = \{h^1_{n-5}, h^2_{n-5}, h^3_{n-5}, h^4_{n-5}\}$$

Esto termina la demostración del teorema. □

Las derivaciones interiores de $\tau(n, r_1, n-4)$ son

$$\begin{cases} ad(X_0) & = u^2_1 \\ ad(X_i) & = -u^1_i, \qquad 1 \leq i \leq n-4 \\ ad(X_{n-3}) & = 0 \\ ad(Y_1) & = 0 \\ ad(Y_2) & = \frac{(n-5)}{2} u^2_{n-4} \end{cases}$$

En consecuencia, se deducen del teorema anterior los siguientes corolarios, donde se dan las dimensiones del espacio de los 1-cobordes, del primer espacio de cohomología, del espacio de las órbitas y de los cobordes de grado 2, del álgebra $\mathfrak{g} = \tau(n, r_1, n-4)$, n impar, $n \geq 9$, $3 \leq r_1 \leq n-6$, r_1 impar.

Corolario 2.4.3. *Se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= n-2 \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= n-2 \end{aligned}$$

Demostración. Se obtienen estos dos resultados trivialmente, sin más que tener en cuenta, al ser $ad(X_{n-3}) = ad(Y_1) = 0$, que
$B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = Ad(\mathfrak{g}) =< ad(X_0), ad(X_1), ad(X_2), \ldots, ad(X_{n-4}), ad(Y_2) >$ y que
$dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = dim(Der(\mathfrak{g})) - dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}))$. □

Nota 2.4.4. De manera implícita se ha descrito el primer espacio de cohomología $H^1(\tau(n, r_1, n-4), \tau(n, r_1, n-4))$.

Corolario 2.4.5. *Se verifica que*

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = n^2 - 2n + 4.$$

Demostración. Basta recordar que

$$dim(O(\mathfrak{g})) = n^2 - dim(Der(\mathfrak{g})) = dim(B^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})).$$ □

2.5 Álgebras excepcionales

En dimensiones menores a 11 aparecen otras álgebras no escindidas y graduadas naturalmente y tales que no se presentan homólogas a ellas en dimensiones mayores. Estas álgebras se han denominado en el capítulo **1** como excepcionales. Esta sección se va a dedicar a estudiarlas.

Se van a estudiar para cada álgebra las mismas aplicaciones geométricas que en la sección anterior y también mediante la determinación del álgebra de derivaciones correspondiente. Dichas álgebras tienen una coincidencia y es que en su graduación natural el vector Y_1 pertenece a $\mathfrak{g}_3$ ($r_1 = 3$) y el vector Y_2 pertenece a $\mathfrak{g}_5$ ($r_2 = 5$), por lo que $r_2 = 2r_1 - 1$.

Para una mayor claridad se van a considerar cuatro subsecciones, la primera dedicada a las dimensiones menores a 8 y las restantes, respectivamente, a las dimensiones 8, 9 y 10. Las demostraciones son similares a las de la sección anterior, pero más sencillas al tratarse de dimensiones concretas. Por dicha razón se van a omitir y se van a enunciar solamente los resultados correspondientes.

2.5.1 Dimensiones menores a 8

Solamente hay un álgebra excepcional, no escindida y graduada naturalmente, de dimensión menor o igual a 8. Aparece en dimensión 5 y se trata del álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_2$. Su ley, siendo $\{X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, está determinada por

$$\mathcal{H}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} [X_0, X_1] & = & X_2 \\ [Y_1, Y_2] & = & X_2 \end{array} \right.$$

Nota 2.5.1. Los endomorfismos de $\mathcal{H}_2$ denotados mediante δ_i, $1 \leq i \leq 15$, y definidos por

$$\begin{array}{lcl}
\delta_1(Y_1) & = & Y_2; \\
\delta_2(X_0) & = & Y_2, \quad \delta_2(Y_1) = X_1; \\
\delta_3(X_0) & = & X_1; \\
\delta_4(Y_1) & = & X_2; \\
\delta_5(X_0) & = & X_2; \\
\delta_6(X_1) & = & Y_2, \quad \delta_6(Y_1) = -X_0; \\
\delta_7(X_0) & = & X_0, \quad \delta_7(X_2) = X_2, \quad \delta_7(Y_2) = Y_2; \\
\delta_8(X_1) & = & X_1, \quad \delta_8(X_2) = X_2, \quad \delta_8(Y_2) = Y_2; \\
\delta_9(Y_1) & = & Y_1, \quad \delta_9(Y_2) = -Y_2; \\
\delta_{10}(X_0) & = & Y_1, \quad \delta_{10}(Y_2) = -X_1; \\
\delta_{11}(X_1) & = & X_2; \\
\delta_{12}(X_1) & = & X_0; \\
\delta_{13}(Y_2) & = & X_2; \\
\delta_{14}(X_1) & = & Y_1, \quad \delta_{14}(Y_2) = X_0; \\
\delta_{15}(Y_2) & = & Y_1;
\end{array}$$

son derivaciones de $\mathcal{H}_2$.

Teorema 2.5.2. *Se verifica que $\{\delta_i\}_{1 \leq i \leq 15}$ forman una base de $Der(\mathcal{H}_2)$, con lo que*

$$dim(Der(\mathcal{H}_2)) = 15$$

Las derivaciones interiores de $\mathcal{H}_2$ son

$$\begin{cases} ad(X_0) &= \delta_{11} \\ ad(X_1) &= -\delta_5 \\ ad(X_2) &= 0 \\ ad(Y_1) &= \delta_{13} \\ ad(Y_2) &= -\delta_4 \end{cases}$$

Corolario 2.5.3. *Se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2)) &= 4 \\ dim(H^1(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_2)) &= 11 \\ dim(\mathcal{O}(\mathcal{H}_2)) &= 10 \end{aligned}$$

2.5.2 Dimensión 8

Sólo hay un álgebra excepcional, no escindida y graduada naturalmente, de dimensión 8. Se trata de $\epsilon(8,3,5)$ cuya ley, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_5, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, está determinada por

$$\mathfrak{g} = \epsilon(8,3,5) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \le i \le 4 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \\ [X_1, Y_1] = X_4 \\ [X_2, Y_1] = X_5 \end{cases}$$

Nota 2.5.4. Los endomorfismos de $\epsilon(8,3,5)$ denotados mediante

$$t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_2^4, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_3^2$$

y definidos por

$t_0^1(X_0) = X_0,\ t_0^1(X_k) = kX_k \ \ 1 \le k \le 5,\ t_0^1(Y_1) = 3Y_1,\ t_0^1(Y_2) = 5Y_2;$

$t_0^2(X_0) = X_1,\ t_0^2(X_1) = -X_0,\ t_0^2(X_3) = Y_1,\ t_0^2(X_5) = Y_2,\ t_0^2(Y_1) = -X_3,$
$t_0^2(Y_2) = -X_5;$

$f_2^1(X_0) = X_3,\ f_2^1(X_3) = Y_2;$

$f_2^2(X_k) = X_{k+2} \;\; 1 \leq k \leq 3, \; f_2^2(Y_1) = 2Y_2;$

$f_2^3(X_0) = Y_1, \; f_2^3(X_2) = -X_4, \; f_2^3(X_3) = -2X_5, \; f_2^3(Y_1) = -Y_2;$

$f_2^4(X_1) = Y_1, \; f_2^4(Y_1) = -X_5;$

$h_4^1(X_0) = X_5;$

$h_4^2(X_1) = X_5;$

$h_4^3(X_0) = Y_2;$

$h_4^4(X_1) = Y_2;$

$u_1^1(X_0) = X_2, \; u_1^1(X_2) = -Y_1, \; u_1^1(X_4) = -Y_2, \; u_1^1(Y_1) = -X_4;$

$u_1^2(X_k) = X_{k+1} \;\; 1 \leq k \leq 4;$

$u_3^1(X_0) = X_4, \; u_3^1(X_2) = -Y_2;$

$u_3^2(X_k) = X_{k+3} \;\; 1 \leq k \leq 2;$

son derivaciones de $\epsilon(8,3,5)$.

Teorema 2.5.5. *Se verifica que*

$$\{t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_2^4, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_3^2\}$$

forman una base de $Der(\epsilon(8,3,5))$*, con lo que*

$$dim(Der(\epsilon(8,3,5))) = 14$$

Las derivaciones interiores de $\epsilon(8,3,5)$ son

$$\left\{ \begin{array}{lcr} ad(X_0) & = & u_1^2 \\ ad(X_1) & = & -u_1^1 \\ ad(X_2) & = & -f_2^2 - f_2^4 \\ ad(X_3) & = & -u_3^1 \\ ad(X_4) & = & -h_4^1 - h_4^4 \\ ad(X_5) & = & 0 \\ ad(Y_1) & = & -u_3^2 \\ ad(Y_2) & = & 0 \end{array} \right.$$

Corolario 2.5.6. *Para* $\mathfrak{g} = \epsilon(8,3,5)$, *se verifica que*

$$\begin{array}{lcl} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & 6 \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & 8 \\ dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) & = & 50 \end{array}$$

2.5.3 Dimensión 9

Solamente hay un álgebra excepcional, no escindida y graduada naturalmente, de dimensión 9. Se trata de $\epsilon(9,3,5)$ cuya ley, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_6, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, está determinada por

$$\mathfrak{g} = \epsilon(9,3,5) : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5 \\ [X_1, X_2] = Y_1 \\ [X_1, X_4] = Y_2 \\ [X_2, X_3] = -Y_2 \\ [X_i, Y_1] = X_{i+3}, & 1 \leq i \leq 3 \\ [X_1, Y_2] = X_6 \end{cases}$$

Nota 2.5.7. Los endomorfismos de $\epsilon(9,3,5)$ denotados mediante

$$t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_3^2, u_5^1, u_5^2$$

y definidos por

$t_0^1(X_0) = X_0,\ t_0^1(X_k) = kX_k \quad 1 \leq k \leq 6,\ t_0^1(Y_1) = 3Y_1,\ t_0^1(Y_2) = 5Y_2;$

$t_0^2(X_0) = X_1,\ t_0^2(X_1) = -X_0,\ t_0^2(X_3) = Y_1,\ t_0^2(X_5) = Y_2,\ t_0^2(Y_1) = -X_3,$
$t_0^2(Y_2) = -X_5;$

$f_2^1(X_0) = X_3,\ f_2^1(X_1) = Y_1,\ f_2^1(X_3) = Y_2,\ f_2^1(Y_1) = -X_5;$

$f_2^2(X_0) = -Y_1,\ f_2^2(X_1) = X_3,\ f_2^2(X_k) = kX_{k+2} \quad 2 \leq k \leq 4,\ f_2^2(Y_1) = 3Y_2;$

$h_4^1(X_0) = X_5;$

$h_4^2(X_1) = X_5,\ h_4^2(X_2) = X_6;$

$h_4^3(X_0) = Y_2,\ h_4^3(X_2) = -X_6;$

$h_4^4(X_1) = Y_2;$

$u_1^1(X_0) = X_2,\ u_1^1(X_2) = -Y_1,\ u_1^1(X_4) = -Y_2,\ u_1^1(Y_1) = -X_4,$
$u_1^1(Y_2) = -X_6;$

$u_1^2(X_k) = X_{k+1} \quad 1 \leq k \leq 5;$

$u_3^1(X_0) = X_4,\ u_3^1(X_2) = -Y_2,\ u_3^1(Y_1) = -X_6;$

$u_3^2(X_k) = X_{k+3} \quad 1 \leq k \leq 3;$

$u_5^1(X_0) = X_6;$

$u_5^2(X_1) = X_6;$

son derivaciones de $\epsilon(9,3,5)$.

Teorema 2.5.8. *Se verifica que*

$$\{t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_3^2, u_5^1, u_5^2\}$$

forman una base de $Der(\epsilon(9,3,5))$, *con lo que*

$$dim(Der(\epsilon(9,3,5))) = 14$$

Las derivaciones interiores de $\epsilon(9,3,5)$ son

$$\left\{\begin{array}{lcr} ad(X_0) & = & u_1^2 \\ ad(X_1) & = & -u_1^1 \\ ad(X_2) & = & -f_2^1 \\ ad(X_3) & = & -u_3^1 \\ ad(X_4) & = & -h_4^1 - h_4^4 \\ ad(X_5) & = & -u_5^1 \\ ad(X_6) & = & 0 \\ ad(Y_1) & = & -u_3^2 \\ ad(Y_2) & = & -u_5^2 \end{array}\right.$$

Corolario 2.5.9. *Para* $\mathfrak{g} = \epsilon(9,3,5)$, *se verifica que*

$$\begin{array}{lcl} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & 8 \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & 6 \\ dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) & = & 67 \end{array}$$

2.5.4 Dimensión 10

Esta dimensión es la última donde aparecen álgebras excepcionales, no escindidas y graduadas naturalmente. En concreto, una familia infinita y uniparamétrica de álgebras, $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$, y tres álgebras más, $\epsilon^{2,0}(10,3,5)$, $\epsilon^{2,1}(10,3,5)$, $\epsilon^{2,3}(10,3,5)$, cuyas leyes, respecto de una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, Y_2\}$, están definidas salvo antisimetría mediante

$\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = Y_2 & \\ [X_1, X_6] = \gamma X_7 & \\ [X_2, X_3] = -Y_2 & \\ [X_2, X_5] = -\gamma X_7 & \\ [X_3, X_4] = \gamma X_7 & \\ [X_i, Y_1] = X_{i+3}, & 1 \leq i \leq 4 \\ [X_i, Y_2] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

$\gamma = re^{i\theta},\ r \geq 0,\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6 \\ [X_1, X_2] = Y_1 & \\ [X_1, X_4] = X_5 + Y_2 & \\ [X_1, X_5] = 2X_6 & \\ [X_1, X_6] = (3-\gamma) X_7 & \\ [X_2, X_3] = -X_5 - Y_2 & \\ [X_2, X_4] = -X_6 & \\ [X_2, X_5] = (-1+\gamma) X_7 & \\ [X_3, X_4] = -\gamma X_7 & \\ [X_i, Y_2] = -2X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

$\gamma \in \{0, 1, 3\}$

Nota 2.5.10. Los endomorfismos de $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$ denotados mediante

$$t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_3^2, u_5^1, u_5^2, u_6^1, u_6^2$$

y definidos por

$$t_0^1(X_0) = X_0,\ t_0^1(X_k) = kX_k\ \ 1 \leq k \leq 7,\ t_0^1(Y_1) = 3Y_1,\ t_0^1(Y_2) = 5Y_2;$$

$$t_0^2(X_0) = X_1,\ t_0^2(X_1) = -X_0,\ t_0^2(X_3) = Y_1,\ t_0^2(X_5) = Y_2,\ t_0^2(X_7) = \gamma X_7,$$
$$t_0^2(Y_1) = -X_3,\ t_0^2(Y_2) = -X_5;\ \text{(Ha de cumplirse que } \gamma = \sqrt{-1})$$

$$f_2^1(X_0) = X_3,\ f_2^1(X_1) = Y_1,\ f_2^1(X_3) = Y_2,\ f_2^1(X_5) = \gamma X_7,\ f_2^1(Y_1) = -X_5,$$
$$f_2^1(Y_2) = -X_7;$$

$$f_2^2(X_0) = -Y_1,\ f_2^2(X_k) = kX_{k+2}\ \ 1 \leq k \leq 5,\ f_2^2(Y_1) = 3Y_2,\ f_2^2(Y_2) = 5\gamma X_7;$$

$$h_4^1(X_0) = X_5,\ h_4^1(X_3) = \gamma X_7;$$

$h_4^2(X_1) = X_5,\ h_4^2(X_2) = X_6,\ h_4^2(X_3) = X_7,\ h_4^2(Y_1) = 2\gamma X_7;$

$h_4^3(X_0) = Y_2,\ h_4^3(X_2) = -X_6,\ h_4^3(X_3) = -2X_7,\ h_4^3(Y_1) = -\gamma X_7;$

$h_4^4(X_1) = Y_2,\ h_4^4(Y_1) = -X_7;$

$u_1^1(X_0) = X_2,\ u_1^1(X_2) = -Y_1,\ u_1^1(X_4) = -Y_2,\ u_1^1(X_6) = -\gamma X_7,$
$u_1^1(Y_1) = -X_4,\ u_1^1(Y_2) = -X_6;$

$u_1^2(X_k) = X_{k+1}\ \ 1 \leq k \leq 6;$

$u_3^1(X_0) = X_4,\ u_3^1(X_2) = -Y_2,\ u_3^1(X_4) = -\gamma X_7,\ u_3^1(Y_1) = -X_6;$

$u_3^2(X_k) = X_{k+3}\ \ 1 \leq k \leq 4;$

$u_5^1(X_0) = X_6,\ u_5^1(X_2) = -\gamma X_7;$

$u_5^2(X_1) = X_6,\ u_5^1(X_2) = X_7;$

$u_6^1(X_0) = X_7;$

$u_6^2(X_1) = X_7;$

son derivaciones de $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$.

Teorema 2.5.11. *Se verifica que*

$$\{t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_3^2, u_5^1, u_5^2, u_6^1, u_6^2\}$$

constituyen una base de $Der(\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5))$, *si* $\gamma = \sqrt{-1}$.

Si $\gamma \in \mathbf{C}$, $\gamma = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\gamma \neq \sqrt{-1}$, *la derivación* t_0^2 *no aparece y el resto de endomorfismos constituyen una base del citado espacio de derivaciones, con lo que*

$$dim(Der(\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5))) = \begin{cases} 15 & si \quad \gamma \neq \sqrt{-1} \\ 16 & si \quad \gamma = \sqrt{-1} \end{cases}$$

Las derivaciones interiores de $\epsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$ son

$$\begin{aligned} ad(X_0) &= u_1^2 \\ ad(X_1) &= -u_1^1 \\ ad(X_2) &= -f_2^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad(X_3) &= -u_3^1 \\ ad(X_4) &= -h_4^1 - h_4^4 \\ ad(X_5) &= -u_5^1 \\ ad(X_6) &= -u_6^1 - \gamma u_6^2 \\ ad(X_7) &= 0 \\ ad(Y_1) &= -u_3^2 \\ ad(Y_2) &= -u_5^2 \end{aligned}$$

Corolario 2.5.12. *Para* $\mathfrak{g} = \epsilon^{1,\gamma}(10,3,5))$, $\gamma \in \mathbf{C}$, $\gamma = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *se verifica que*

$$dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = 9$$

$$dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = \begin{cases} 6 & si \quad \gamma \neq \sqrt{-1} \\ 7 & si \quad \gamma = \sqrt{-1} \end{cases}$$

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 85 & si \quad \gamma \neq \sqrt{-1} \\ 84 & si \quad \gamma = \sqrt{-1} \end{cases}$$

Nota 2.5.13. Los endomorfismos de $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$, $\gamma \in \{0,1,3\}$, denotados mediante

$$t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, f_2^3, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_5^1, u_5^2, u_6^1, u_6^2$$

y definidos por

$t_0^1(X_0) = X_0,\ t_0^1(X_k) = kX_k \quad 1 \leq k \leq 7,\ t_0^1(Y_1) = 3Y_1,\ t_0^1(Y_2) = 5Y_2;$

$t_0^2(X_0) = X_1,\ t_0^2(X_i) = 3X_i \quad 1 \leq i \leq 4 \quad i \neq 3,\ t_0^2(X_3) = 3X_3 + Y_1,$
$t_0^2(X_5) = 4X_5 + Y_2,\ t_0^2(X_6) = 6X_6,\ t_0^2(X_7) = 9X_7,\ t_0^2(Y_1) = 6Y_1,$
$t_0^2(Y_2) = 2X_5 + 5Y_2;$ (Ha de cumplirse que $\gamma = 0$)

$f_2^1(X_0) = X_3,\ f_2^1(X_3) = X_5 + Y_2,\ f_2^1(X_4) = X_6,\ f_2^1(X_5) = (1-\gamma)X_7,$
$f_2^1(Y_2) = 2X_7;$

$f_2^2(X_0) = Y_1;$

$f_2^3(X_1) = Y_1;$

$h_4^1(X_0) = X_5,\ h_4^1(X_2) = -2X_6,\ h_4^1(X_3) = (-1-\gamma)X_7,$
$h_4^1(Y_1) = (-6+2\gamma)X_7;$

$h_4^2(X_1) = X_5,\ h_4^2(X_2) = X_6,\ h_4^2(X_3) = X_7,\ h_4^2(Y_1) = (4-2\gamma)X_7;$

$h_4^3(X_0) = Y_2,\ h_4^3(X_2) = 2X_6,\ h_4^3(X_3) = 4X_7,\ h_4^3(Y_1) = (6-2\gamma)X_7;$

$h_4^4(X_1) = Y_2,\ h_4^4(Y_1) = 2X_7;$

$u_1^1(X_0) = X_2,\ u_1^1(X_2) = -Y_1,\ u_1^1(X_4) = -X_5 - Y_2,\ u_1^1(X_5) = -2X_6,$
$u_1^1(X_6) = (-3+\gamma)X_7,\ u_1^1(Y_2) = 2X_6;$

$u_1^2(X_k) = X_{k+1}\quad 1 \leq k \leq 6;$

$u_3^1(X_0) = X_4,\ u_3^1(X_2) = -X_5 - Y_2,\ u_3^1(X_4) = \gamma X_7;$

$u_5^1(X_0) = X_6,\ u_5^1(X_2) = (-3+\gamma)X_7;$

$u_5^2(X_1) = X_6,\ u_5^1(X_2) = X_7;$

$u_6^1(X_0) = X_7;$

$u_6^2(X_1) = X_7;$

son derivaciones de $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$.

Teorema 2.5.14. *Se verifica que*

$$\{t_0^1, t_0^2, f_2^1, f_2^2, f_2^3, h_4^1, h_4^2, h_4^3, h_4^4, u_1^1, u_1^2, u_3^1, u_5^1, u_5^2, u_6^1, u_6^2\}$$

forman una base de $Der(\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5))$ si $\gamma = 0$.

Si $\gamma = 1$ o $\gamma = 3$, la derivación t_0^2 no aparece y el resto de endomorfismos constituyen una base del citado espacio de derivaciones, con lo que

$$dim(Der(\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5))) = \begin{cases} 15 & si \quad \gamma \in \{1,3\} \\ 16 & si \quad \gamma = 0 \end{cases}$$

Las derivaciones interiores de $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$ son

$$\begin{array}{rcr} ad(X_0) & = & u_1^2 \\ ad(X_1) & = & -u_1^1 \\ ad(X_2) & = & -f_2^1 - f_2^3 \\ ad(X_3) & = & -u_3^1 \\ ad(X_4) & = & -h_4^1 - h_4^2 - h_4^4 \\ ad(X_5) & = & -u_5^1 - 2u_5^2 \\ ad(X_6) & = & -u_6^1 - (3+\gamma)u_6^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} ad(X_7) &= 0 \\ ad(Y_1) &= 0 \\ ad(Y_2) &= -2u_5^2 \end{aligned}$$

Corolario 2.5.15. *Para* $\mathfrak{g} = \epsilon^{2,\gamma}(10,3,5))$, $\gamma \in \{0,1,3\}$, *se verifica que*

$$dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = 8$$

$$dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) = \begin{cases} 7 & si \quad \gamma \in \{1,3\} \\ 8 & si \quad \gamma = 0 \end{cases}$$

$$dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 85 & si \quad \gamma \in \{1,3\} \\ 84 & si \quad \gamma = 0 \end{cases}$$

2.6 Álgebras escindidas

Resta por estudiar las álgebras escindidas; éstas son del tipo $\mathfrak{g}_{(n-1)}\oplus$ **C** ó $\mathfrak{g}_{(n-2)}\oplus$ $\mathbf{C}^2$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ y $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ son, respectivamente, álgebras de Lie 2-filiforme y 1-filiforme graduadas naturalmente de dimensiones $n-1$ y $n-2$.

Por el teorema que da las derivaciones de una suma directa queda reducido el problema a la determinación de los espacios de derivaciones $Der(\mathfrak{g}')$, $D(\mathfrak{g}',\mathbf{C}^k)$, $D(\mathbf{C}^k,\mathfrak{g}')$ y $Der(\mathbf{C}^k)$, donde $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(n-1)}$ ó $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(n-2)}$ y $k = 1,2$ según los casos.

En realidad, están estudiados por diversos autores [40],[18],[13], salvo $D(\mathfrak{g}',\mathbf{C}^k)$, y $D(\mathbf{C}^k,\mathfrak{g}')$, por lo que nos vamos a limitar en esta sección a estudiar con algún detalle un caso y dar los resultados en los restantes.

2.6.1 Estudio de $\mathcal{L}(n-1,r)\oplus\mathbf{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n y sea $\{X_0,X_1,\ldots,X_{n-3},Y_1,Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a analizar ahora, con detalle, el caso de ser el álgebra $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0,X_1,\ldots,X_{n-3},Y_1 >$ y $\mathbf{C}\simeq< Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie 2-filiforme y graduada naturalmente $\mathcal{L}(n-1,r)$, de dimensión $n-1$, cuya ley está determinada por

$\mathcal{L}(n-1,r) \quad (n \geq 6,\ 3 \leq r \leq n-3,\ r \text{ impar})$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_0, X_i] & = & X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] & = & (-1)^{i-1} Y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2} \end{array}\right.$$

Teorema 2.6.1. *Sean los endomorfismos*

$ad(X_i)\ 0 \leq i \leq n-4, h_3, h_5, \ldots, h_{r-4}, h_{r-2}, h_{r-1}, \ldots, h_{n-5}, h_{n-4}, t_0, t_1, t_2, g_{r-1}, f_{r-1}$, $\delta_j\ 1 \leq j \leq 5$, *(y* t_3 *sólo para* $n = 6$*)*

de $\mathcal{L}(n-1,r) \oplus \mathbf{C}$ *definidos por*

$$\begin{array}{lcll} h_k(X_i) & = & X_{k+i} & (1 \leq i \leq n-3-k) \\ & & & si\ (r-3 < k \leq n-4)\ ó\ (k \leq r-3\ y\ k\ impar); \\ t_0(X_0) & = & X_0, & t_0(X_i) = (i-1)X_i \ \ 1 \leq i \leq n-3,\ t_0(Y_1) = (r-2)Y_1; \\ t_1(X_0) & = & X_1, & t_1(X_r) = Y_1; \\ t_2(X_i) & = & X_i & 1 \leq i \leq n-3,\ t_2(Y_1) = 2Y_1; \\ t_3(X_1) & = & X_0, & t_3(Y_1) = X_3;\ (Ha\ de\ cumplirse\ que\ n = 6) \\ g_{r-1}(X_0) & = & X_r; & \\ f_{r-1}(X_0) & = & Y_1; & \\ \delta_1(Y_2) & = & Y_2; & \\ \delta_2(X_0) & = & Y_2; & \\ \delta_3(X_1) & = & Y_2; & \\ \delta_4(Y_2) & = & X_{n-3}; & \\ \delta_5(Y_2) & = & Y_1. & \end{array}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de $Der(\mathcal{L}(n-1,r) \oplus \mathbf{C})$*, con lo que*

$$dim(Der(\mathcal{L}(n-1,r) \oplus \mathbf{C})) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{4n+7-r}{2} & \text{si} \quad n > 6 \\ 15 & \text{si} \quad n = 6 \end{array}\right.$$

Demostración. Por ser $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(n-1,r) \oplus \mathbf{C}$ se tiene que

$$Der(\mathfrak{g}) = Der(\mathcal{L}(n-1,r)) \oplus Der(\mathbf{C}) \oplus D(\mathcal{L}(n-1,r), \mathbf{C}) \oplus D(\mathbf{C}, \mathcal{L}(n-1,r)).$$

Si $d \in Der(\mathfrak{g})$, entonces

$$\begin{array}{l} \exists \bar{d}_1 \in Der(\mathcal{L}(n-1,r)),\ \bar{d}_2 \in Der(\mathbf{C}) \text{ y} \\ \exists \bar{d}_{1,2} \in D(\mathcal{L}(n-1,r), \mathbf{C}),\ \bar{d}_{2,1} \in D(\mathbf{C}, \mathcal{L}(n-1,r)) \end{array}$$

tales que $d = \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_{1,2} + \bar{d}_{2,1}$, verificándose que

$$\bar{d}_{1,2} \in D(\mathcal{L}(n-1,r),\mathbf{C}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{d}_{1,2}(\mathcal{L}(n-1,r)) & \subset \mathcal{Z}(\mathbf{C}) \\ \bar{d}_{1,2}([\mathcal{L}(n-1,r),\mathcal{L}(n-1,r)]) & = \{0\} \\ \bar{d}_{1,2}(\mathbf{C}) & = \{0\} \end{cases}$$

$$\bar{d}_{2,1} \in D(\mathbf{C},\mathcal{L}(n-1,r)) \Rightarrow \begin{cases} \bar{d}_{2,1}(\mathbf{C}) & \subset \mathcal{Z}(\mathcal{L}(n-1,r)) \\ \bar{d}_{2,1}([\mathbf{C},\mathbf{C}]) & = \{0\} \\ \bar{d}_{2,1}(\mathcal{L}(n-1,r)) & = \{0\} \end{cases}$$

Cálculo de $Der(\mathcal{L}(n-1,r))$

En [18] se ha obtenido que una base de $Der(\mathcal{L}(n-1,r))$ está formada por los endomorfismos de $\mathcal{L}(n-1,r)$ siguientes:

$ad(X_i)\ \ 0 \leq i \leq n-4, h_3, h_5, \ldots, h_{r-4}, h_{r-2}, h_{r-1}, \ldots, h_{n-5}, h_{n-4}, t_0, t_1, t_2, g_{r-1}, f_{r-1}$ (y t_3 sólo para $n=6$).

Por consiguiente

$$dim(Der(\mathcal{L}(n-1,r))) = \begin{cases} \frac{4n-3-r}{2} & \text{si} \quad n > 6 \\ 10 & \text{si} \quad n = 6 \end{cases}$$

Cálculo de $Der(\mathbf{C})$

Es evidente, que una base de $Der(\mathbf{C})$ está formada por el endomorfismo de $\mathbf{C}$, denotado por $\delta_1 = Id_{\mathbf{C}}$. Por tanto, $dim(Der(\mathbf{C})) = 1$.

Cálculo de $D(\mathcal{L}(n-1,r),\mathbf{C})$

Si $\bar{d}_{1,2} \in D(\mathcal{L}(n-1,r),\mathbf{C})$, entonces se ha de cumplir que

$$\bar{d}_{1,2}([\mathcal{L}(n-1,r),\mathcal{L}(n-1,r)]) = \{0\} \Rightarrow \bar{d}_{1,2}(X_i) = 0,\ 2 \leq i \leq n-3,\ \bar{d}_{1,2}(Y_1) = 0.$$

$\bar{d}_{1,2}(\mathbf{C}) = \{0\} \Rightarrow \bar{d}_{1,2}(Y_2) = 0.$

$\bar{d}_{1,2}(\mathcal{L}(n-1,r)) \subset \mathcal{Z}(\mathbf{C}) =< Y_2 > \Rightarrow \bar{d}_{1,2}(X_0) = \bar{\alpha}_0 Y_2, \ \bar{d}_{1,2}(X_1) = \bar{\alpha}_1 Y_2.$

Se pueden tomar como libres los parámetros $\bar{\alpha}_0$ y $\bar{\alpha}_1$ y se deduce que una base de $D(\mathcal{L}(n-1,r),\mathbf{C})$ está formada por los endomorfismos δ_2 y δ_3. Por consiguiente

$$dim(D(\mathcal{L}(n-1,r),\mathbf{C})) = 2$$

Cálculo de $D(\mathbf{C},\mathcal{L}(n-1,r))$

Si $\bar{d}_{2,1} \in D(\mathbf{C},\mathcal{L}(n-1,r))$, entonces se ha de cumplir que

$\bar{d}_{2,1}(\mathcal{L}(n-1,r)) = \{0\} \Rightarrow \bar{d}_{2,1}(X_i) = 0, \ 0 \leq i \leq n-3; \ \bar{d}_{2,1}(Y_1) = 0.$

$\bar{d}_{2,1}(\mathbf{C}) \subset \mathcal{Z}(\mathcal{L}(n-1,r)) =< X_{n-3}, Y_1 > \Rightarrow \bar{d}_{2,1}(Y_2) = \bar{\alpha}_2 X_{n-3} + \beta_2 Y_1.$

Se verifica, evidentemente, que $\bar{d}_{2,1}([\mathbf{C},\mathbf{C}]) = \{0\}$ y se pueden tomar como libres los parámetros $\bar{\alpha}_2$ y β_2. Se deduce que una base de $D(\mathbf{C},\mathcal{L}(n-1,r))$ está formada por los endomorfismos δ_4 y δ_5. Por consiguiente

$$dim(D(\mathbf{C},\mathcal{L}(n-1,r))) = 2$$

Esto termina la demostración del teorema. □

Corolario 2.6.2. *Para $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(n-1,r)\oplus\mathbf{C}$ se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= n-3 \qquad\qquad n \geq 6 \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= \begin{cases} \frac{2n+13-r}{2} & \text{si } n > 6 \\ 12 & \text{si } n = 6 \end{cases} \\ dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) &= \begin{cases} \frac{2n^2-4n-7+r}{2} & \text{si } n > 6 \\ 21 & \text{si } n = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

2.6.2 Estudio de $\mathcal{Q}(n-1,r)\oplus\mathbf{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1 >$ y $\mathbf{C} \simeq < Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie 2-filiforme y graduada naturalmente $\mathcal{Q}(n-1,r)$, de dimensión $n-1$, cuya ley está determinada por

$$\mathcal{Q}(n-1,r) \quad (n \geq 8,\ n \text{ par};\ 3 \leq r \leq n-5,\ r \text{ impar}):$$

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Teorema 2.6.3. *Sean los endomorfismos*

$ad(X_i)\ \ 0 \leq i \leq n-4,\ h_3,\ h_5,\ \ldots,\ h_{n-5},\ h_{n-4},\ t_0,\ t_1,\ g_{r-1},\ f_{r-1},\ \delta_j\ \ 1 \leq j \leq 5,$
(y h_{r-1} *si* $r = \frac{n-2}{2}$ *ó* h_{n-3-r} *si* $r \leq \frac{n-4}{2}$*)*

de $\mathcal{Q}_{(n-1,r)} \oplus \mathbf{C}$*, definidos por*

$$\begin{array}{lcll} h_k(X_i) &=& X_{k+i} & 1 \leq i \leq n-3-k \ \ 3 \leq k \leq n-5, \ \ k \ \ impar, \\ & & & y \ \ k = n-4; \\ t_0(X_0) &=& X_0, & t_0(X_i) = iX_i \ \ 1 \leq i \leq n-3, \ \ t_0(Y_1) = rY_1; \\ t_1(X_0) &=& X_1, & t_1(X_i) = X_i \ \ 1 \leq i \leq n-4, \ \ t_1(X_r) = X_r + Y_1, \\ t_1(X_{n-3}) &=& 2X_{n-3}, & t_1(Y_1) = 2Y_1; \\ g_{r-1}(X_0) &=& X_r, & g_{r-1}(X_{n-2-r}) = X_{n-3}; \\ f_{r-1}(X_0) &=& Y_1; & \\ h_{r-1}(X_i) &=& X_{r-1+i}, & 1 \leq i \leq n-2-r, \ \ h_{r-1}(Y_1) = 2X_{n-3}; \\ & & & (Ha\ de\ ser\ r = \frac{n-2}{2}) \\ h_{n-3-r}(X_i) &=& X_{i+n-3-r}, & 1 \leq i \leq r, \ \ h_{n-3-r}(Y_1) = 2X_{n-3}; \\ & & & (Ha\ de\ ser\ r \leq \frac{n-4}{2}) \\ \delta_1(Y_2) &=& Y_2; & \\ \delta_2(X_0) &=& Y_2; & \\ \delta_3(X_1) &=& Y_2; & \\ \delta_4(Y_2) &=& X_{n-3}; & \\ \delta_5(Y_2) &=& Y_1. & \end{array}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de
$$Der(\mathcal{Q}(n-1,r) \oplus \mathbf{C})$$
con lo que para $n \geq 8$

$$dim(Der(\mathcal{Q}(n-1,r) \oplus \mathbf{C})) = \begin{cases} \frac{3n+10}{2} & \text{si} \quad r \leq \frac{n-2}{2} \\ \frac{3n+8}{2} & \text{si} \quad r > \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

Corolario 2.6.4. *Para* $\mathfrak{g} = \mathcal{Q}(n-1,r)\oplus\mathbf{C}$, $n \geq 8$, *se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= n-3 \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= \begin{cases} \frac{\text{n+16}}{2} & \text{si } r \leq \frac{n-2}{2} \\ \frac{\text{n+14}}{2} & \text{si } r > \frac{n-2}{2} \end{cases} \\ dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) &= \begin{cases} \frac{2\text{n}^2-3\text{n}-10}{2} & \text{si } r \leq \frac{n-2}{2} \\ \frac{2\text{n}^2-3\text{n}-8}{2} & \text{si } r > \frac{n-2}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2.6.3 Estudio de $\tau(n-1, n-5)\oplus\mathbf{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1 >$ y $\mathbf{C}\simeq< Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie 2-filiforme y graduada naturalmente $\tau(n-1, n-5)$, de dimensión $n-1$, cuya ley está determinada por

$\tau(n-1, n-5)$ (n par, $n \geq 8$):

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, Y_1] &= \frac{(6-n)}{2} X_{n-5+i}, & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-5} + Y_1), & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4}, & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^i (i-1)\frac{(n-4-i)}{2} X_{n-3}, & 2 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Teorema 2.6.5. *Sean los endomorfismos*

$$ad(X_i) \;\; 0 \leq i \leq n-4,\; ad(Y_1),\; h_{n-4},\; t_0,\; t_1,\; l_{n-6},\; f_{n-6},\; \delta_j \;\; 1 \leq j \leq 4,$$

de $\tau(n-1, n-5)\oplus\mathbf{C}$ *definidos por*

$$\begin{aligned} h_{n-4}(X_1) &= X_{n-3}; \\ t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) &= iX_i \;\; 1 \leq i \leq n-3, \\ t_0(Y_1) &= (n-5)Y_1; \\ t_1(X_0) &= X_1, & t_1(X_i) &= \tfrac{n-4}{2} X_i \;\; 1 \leq i \leq n-6, \\ t_1(X_{n-5}) &= \tfrac{n-2}{2} X_{n-5} + Y_1, & t_1(X_{n-4}) &= (n-4)X_{n-4}, \\ t_1(X_{n-3}) &= (n-4)X_{n-3}, & t_1(Y_1) &= \tfrac{n-6}{2} X_{n-5} + (n-5)Y_1; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} l_{n-6}(X_1) & = & X_{n-5}+Y_1, \quad l_{n-6}(X_2)=X_{n-4}, \ l_{n-6}(X_3)=X_{n-3}; \\ f_{n-6}(X_0) & = & Y_1, \qquad\qquad f_{n-6}(X_2)=\frac{n-6}{2}X_{n-4}, \ f_{n-6}(X_3)=(n-6)X_{n-4}; \\ \delta_1(Y_2) & = & Y_2; \\ \delta_2(X_0) & = & Y_2; \\ \delta_3(X_1) & = & Y_2; \\ \delta_4(Y_2) & = & X_{n-3}. \end{array}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de

$$Der(\tau(n-1,n-5)\oplus \mathbf{C})$$

con lo que para $n\geq 8$, n par,

$$dim(Der(\tau(n-1,n-5)\oplus \mathbf{C}))=n+7$$

Corolario 2.6.6. *Para $\mathfrak{g}=\tau(n-1,n-5)\oplus\mathbf{C}$, $n\geq 8$, n par, se verifica que*

$$\begin{array}{lll} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & n-2 \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & 9 \\ dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) & = & n^2-n-7 \end{array}$$

2.6.4 Estudio de $\tau(n-1,n-4)\oplus\mathbf{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n y sea $\{X_0,X_1,\ldots,X_{n-3},Y_1,Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}'=<X_0,X_1,\ldots,X_{n-3},Y_1>$ y $\mathbf{C}\simeq<Y_2>$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie 2-filiforme y graduada naturalmente $\tau(n-1,n-4)$, de dimensión $n-1$, cuya ley está determinada por

$\tau(n-1,n-4)$ (n impar, $n\geq 7$):

$$\left\{\begin{array}{lll} [X_0,X_i] & = & X_{i+1}, \qquad 1\leq i\leq n-4 \\ [X_1,Y_1] & = & \frac{(5-n)}{2}X_{n-3} \\ [X_i,X_{n-4-i}] & = & (-1)^{i-1}(X_{n-4}+Y_1), \quad 1\leq i\leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i,X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2}X_{n-3}, \quad 1\leq i\leq \frac{n-5}{2} \end{array}\right.$$

Teorema 2.6.7. *Sean los endomorfismos*

$$ad(X_i)\ \ 0 \leq i \leq n-4,\ ad(Y_1),\ h_{n-5},\ t_0,\ t_1,\ g_{n-5}\ f_{n-5},\ \delta_j\ \ 1 \leq j \leq 4,$$

de $\tau(n-1,n-4) \oplus \mathbf{C}$ *definidos por*

$$\begin{array}{lcll}
h_{n-5}(X_i) & = & X_{i+n-5} & 1 \leq i \leq 2; \\
t_0(X_0) & = & X_0, & t_0(X_i) = iX_i \ \ 1 \leq i \leq n-3, \\
t_0(Y_1) & = & (n-4)Y_1; & \\
t_1(X_0) & = & X_1, & t_1(X_i) = \frac{n-3}{2}X_i \ \ 1 \leq i \leq n-5, \\
t_1(X_{n-4}) & = & \frac{n-1}{2}X_{n-4} + Y_1, & t_1(X_{n-3}) = (n-3)X_{n-3}, \\
t_1(Y) & = & \frac{n-5}{2}X_{n-4} + (n-4)Y_1; & \\
g_{n-5}(X_0) & = & X_{n-4}, & g_{n-5}(X_2) = -\frac{n-5}{2}X_{n-3}; \\
f_{n-5}(X_0) & = & Y_1, & f_{n-5}(X_2) = \frac{n-5}{2}X_{n-3}; \\
\delta_1(Y_2) & = & Y_2; & \\
\delta_2(X_0) & = & Y_2; & \\
\delta_3(X_1) & = & Y_2; & \\
\delta_4(Y_2) & = & X_{n-3}. &
\end{array}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de

$$Der(\tau(n-1,n-4) \oplus \mathbf{C})$$

con lo que para $n \geq 7$*, n impar,*

$$dim(Der(\tau(n-1,n-4) \oplus \mathbf{C})) = n+7$$

Corolario 2.6.8. *Para* $\mathfrak{g} = \tau(n-1,n-4) \oplus \mathbf{C},\ \ n \geq 7$*, n impar, se verifica que*

$$\begin{array}{lcl}
dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & n-2 \\
dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) & = & 9 \\
dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) & = & n^2-n-7
\end{array}$$

2.6.5 Estudio de $\mathcal{L}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0, X_1, \ldots, X_{n-3} >$ y de $\mathbf{C}^2 \simeq < Y_1, Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie filiforme y graduada naturalmente $\mathcal{L}_{n-2}$, de dimensión $n-2$, cuya ley está determinada por

$$\mathcal{L}_{n-2},\ n \geq 5: \quad \left\{ [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-4 \right.$$

Teorema 2.6.9. *Sean los endomorfismos*

$$ad(X_i) \ \ 0 \leq i \leq n-4,\ t_0,\ t_1,\ t_2,\ h_2, \ldots,\ h_{n-4},\ \delta_j \ \ 1 \leq j \leq 10,$$

de $\mathcal{L}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2$ *definidos por*

$$\begin{array}{rcll}
t_0(X_0) &=& X_0, & t_0(X_i) = (i-1)X_i \ \ 2 \leq i \leq n-3; \\
t_1(X_0) &=& X_1; & \\
t_2(X_i) &=& X_i & 1 \leq i \leq n-3; \\
h_k(X_i) &=& X_{k+i} & 1 \leq i \leq n-3-k \quad 2 \leq k \leq n-4; \\
\delta_1(Y_1) &=& Y_1; & \\
\delta_2(Y_1) &=& Y_2; & \\
\delta_3(Y_2) &=& Y_1; & \\
\delta_4(Y_2) &=& Y_2; & \\
\delta_5(X_0) &=& Y_1; & \\
\delta_6(X_0) &=& Y_2; & \\
\delta_7(X_1) &=& Y_1; & \\
\delta_8(X_1) &=& Y_2; & \\
\delta_9(Y_1) &=& X_{n-3}; & \\
\delta_{10}(Y_2) &=& X_{n-3}. &
\end{array}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de $Der(\mathcal{L}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2)$, *con lo que para* $n \geq 5$,

$$dim(Der(\mathcal{L}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2)) = 2n + 5$$

Corolario 2.6.10. *Para* $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2$, $n \geq 5$, *se verifica que*

$$\begin{array}{rcl}
dim(B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) &=& n-3 \\
dim(H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})) &=& n+8 \\
dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) &=& n^2 - 2n - 5
\end{array}$$

2.6.6 Estudio de $\mathcal{Q}_{n-2}\oplus\mathbf{C}^2$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión n y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0, X_1, \ldots, X_{n-3} >$ y de $\mathbf{C}^2 \simeq< Y_1, Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie filiforme y graduada naturalmente $\mathcal{Q}_{n-2}$, de dimensión $n-2$, cuya ley está determinada por

$$\mathcal{Q}_{n-2}, n \geq 8,\ n \text{ par}:$$

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

Teorema 2.6.11. *Sean los endomorfismos*

$$ad(X_i)\ \ 0 \leq i \leq n-4,\ t_0,\ t_1,\ h_3,\ h_5,\ h_7, \ldots,\ h_{n-5},\ h_{n-4},\ \delta_j\ \ 1 \leq j \leq 10,$$

de $\mathcal{Q}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2$ *definidos por*

$$\begin{array}{lcl}
t_0(X_0) & = & X_0, \quad t_0(X_i) = iX_i\ \ 1 \leq i \leq n-3; \\
t_1(X_0) & = & X_1, \quad t_1(X_i) = X_i\ \ 1 \leq i \leq n-4,\ t_1(X_{n-3}) = 2X_{n-3}; \\
h_k(X_i) & = & X_{k+i} \quad 1 \leq i \leq n-3-k, \quad 3 \leq k \leq n-5\ \ k\ \textit{impar},\ \ y\ \ k = n-4; \\
\delta_1(Y_1) & = & Y_1; \\
\delta_2(Y_1) & = & Y_2; \\
\delta_3(Y_2) & = & Y_1; \\
\delta_4(Y_2) & = & Y_2; \\
\delta_5(X_0) & = & Y_1; \\
\delta_6(X_0) & = & Y_2; \\
\delta_7(X_1) & = & Y_1; \\
\delta_8(X_1) & = & Y_2; \\
\delta_9(Y_1) & = & X_{n-3}; \\
\delta_{10}(Y_2) & = & X_{n-3}.
\end{array}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de $Der(\mathcal{Q}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2)$*, con lo que para* $n \geq 8$*,* n par*,*

$$dim(Der(\mathcal{Q}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2)) = \frac{3n+14}{2}$$

Corolario 2.6.12. *Para* $\mathfrak{g} = \mathcal{Q}_{n-2} \oplus \mathbf{C}^2$, $n \geq 8$, n par, *se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= n-3 \\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= \tfrac{\mathrm{n+20}}{2} \\ dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) &= \tfrac{\mathrm{2n^2-3n-14}}{2} \end{aligned}$$

Entre las álgebras de Lie filiformes graduadas naturalmente no surgen álgebras excepcionales pero sí entre las casifiliformes; en concreto una en dimensión 7, $\epsilon_{(7,3)}$, y dos álgebras en dimensión 9, $\epsilon^1_{(9,5)}$ y $\epsilon^2_{(9,5)}$. Por dicha razón, resta estudiar los casos en que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ es alguna de las álgebras citadas.

2.6.7 Estudio de $\epsilon_{(7,3)} \oplus \mathbf{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión 8 y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_5, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0, X_1, \ldots, X_5, Y_1 >$ y de $\mathbf{C} \simeq< Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie 2-filiforme y graduada naturalmente $\epsilon_{(7,3)}$, de dimensión 7, cuya ley está determinada por

$$\epsilon_{(7,3)} : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 4 \\ [Y_1, X_i] = X_{3+i}, & 1 \leq i \leq 2 \\ [X_1, X_2] = X_3 + Y_1 & \\ [X_1, X_i] = X_{i+1}, & 3 \leq i \leq 4 \end{cases}$$

Teorema 2.6.13. *Sean los endomorfismos*

$$ad(X_i) \ \ 0 \leq i \leq 4,\ ad(Y_1),\ t_0,\ h_2,\ h_4,\ g_2,\ f_2,\ \delta_j \ \ i \leq j \leq 4,$$

de $\epsilon_{(7,3)} \oplus \mathbf{C}$ *definidos por*

$$\begin{aligned} t_0(X_0) &= X_0, \quad t_0(X_i) = iX_i \ \ 1 \leq i \leq 5,\ t_0(Y_1) = 3Y_1; \\ h_k(X_i) &= X_{k+i} \ \ 1 \leq i \leq 5-k \ \ k \in \{2,4\}; \\ g_2(X_0) &= X_3, \quad g_2(X_2) = -X_4,\ g_2(X_3) = -X_5; \\ f_2(X_0) &= Y_1, \quad f_2(X_2) = X_4,\ f_2(X_3) = 2X_5,\ f_2(Y_1) - X_5; \\ \delta_1(Y_2) &= Y_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_2(X_0) &= Y_2;\\ \delta_3(X_1) &= Y_2;\\ \delta_4(Y_2) &= X_5.\end{aligned}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de $Der(\epsilon_{(7,3)} \oplus \mathbf{C})$, con lo que $dim(Der(\epsilon_{(7,3)} \oplus \mathbf{C})) = 15$.

Corolario 2.6.14. *Para $\mathfrak{g} = \epsilon_{(7,3)} \oplus \mathbf{C}$, se verifica que*

$$\begin{aligned} dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= 6\\ dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= 9\\ dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) &= 49\end{aligned}$$

2.6.8 Estudio de $\epsilon^1_{(9,5)} \oplus \mathbf{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión 10 y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1 >$ y de $\mathbf{C} \simeq < Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie 2-filiforme y graduada naturalmente $\epsilon^1_{(9,5)}$, de dimensión 9, cuya ley está determinada por

$$\epsilon^1_{(9,5)} : \left\{ \begin{array}{lcll} [X_0, X_i] &=& X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6\\ [Y_1, X_i] &=& 2X_{5+i}, & 1 \leq i \leq 2\\ [X_1, X_4] &=& X_5 + Y_1 &\\ [X_1, X_5] &=& 2X_6 &\\ [X_1, X_6] &=& 3X_7 &\\ [X_2, X_3] &=& -X_5 - Y_1 &\\ [X_2, X_4] &=& -X_6 &\\ [X_2, X_5] &=& -X_7 & \end{array}\right.$$

Teorema 2.6.15. *Sean los endomorfismos*

$$ad(X_i) \ \ 0 \leq i \leq 6, \ ad(Y_1), \ t_0, \ h_4, \ h_{6,}, \ f_4, \ \delta_j \ \ i \leq j \leq 4,$$

de $\epsilon^1_{(9,5)} \oplus \mathbf{C}$ definidos por

$$t_0(X_0) = X_0, \ \ t_0(X_i) = iX_i \ \ 1 \leq i \leq 7, \ \ t_0(Y_1) = 5Y_1;$$

$$\begin{aligned}
h_4(X_1) &= X_5 - 2Y_1, \quad h_4(X_i) = X_{4+i} \quad 2 \leq i \leq 3;\\
h_6(X_1) &= X_7;\\
f_4(X_0) &= Y_1, \qquad f_4(X_1) = -3Y_1, \; f_4(X_2) = 2X_6, \; f_4(X_3) = 4X_7;\\
\delta_1(Y_2) &= Y_2;\\
\delta_2(X_0) &= Y_2;\\
\delta_3(X_1) &= Y_2;\\
\delta_4(Y_2) &= X_7.
\end{aligned}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de $Der(\epsilon^1_{(9,5)} \oplus \mathbf{C})$, *con lo que* $dim(Der(\epsilon^1_{(9,5)} \oplus \mathbf{C})) = 16$.

Corolario 2.6.16. *Para* $\mathfrak{g} = \epsilon^1_{(9,5)} \oplus \mathbf{C}$, *se verifica que*

$$\begin{aligned}
dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= 8\\
dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= 8\\
dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) &= 84
\end{aligned}$$

2.6.9 Estudio de $\epsilon^2_{(9,5)} \oplus \mathbf{C}$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 3-filiforme y graduada naturalmente de dimensión 10 y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada.

Se va a considerar ahora $\mathfrak{g}$ suma directa de $\mathfrak{g}' =< X_0, X_1, \ldots, X_7, Y_1 >$ y de $\mathbf{C} \simeq< Y_2 >$, donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie 2-filiforme y graduada naturalmente $\epsilon^2_{(9,5)}$, de dimensión 9, cuya ley está determinada por

$$\epsilon^2_{(9,5)} : \begin{cases}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 6\\
[Y_1, X_i] = 2X_{5+i} & 1 \leq i \leq 2\\
[X_1, X_4] = X_5 + Y_1 & \\
[X_1, X_5] = 2X_6 & \\
[X_1, X_6] = X_7 & \\
[X_2, X_3] = -X_5 - Y_1 & \\
[X_2, X_4] = -X_6 & \\
[X_2, X_5] = X_7 & \\
[X_3, X_4] = -2X_7 &
\end{cases}$$

Teorema 2.6.17. *Sean los endomorfismos*

$$ad(X_i) \ \ 0 \leq i \leq 6, \ ad(Y_1), \ t_0, \ h_4, \ h_6,, \ f_4, \ \delta_j \ \ i \leq j \leq 4,$$

de $\epsilon^2_{(9,5)} \oplus \mathbf{C}$ *definidos por*

$$\begin{aligned}
t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) = iX_i \ \ 1 \leq i \leq 7, \ t_0(Y_1) = 5Y_1;\\
h_4(X_1) &= X_5 - 2Y_1, & h_4(X_i) = X_{4+i} \ \ 1 \leq i \leq 3;\\
h_6(X_1) &= X_7;\\
f_4(X_0) &= Y_1, & f_4(X_1) = -Y_1, \ f_4(X_2) = 2X_6, \ f_4(X_3) = 4X_7;\\
\delta_1(Y_2) &= Y_2;\\
\delta_2(X_0) &= Y_2;\\
\delta_3(X_1) &= Y_2;\\
\delta_4(Y_2) &= X_7.
\end{aligned}$$

Entonces los endomorfismos anteriores constituyen una base de $Der(\epsilon^2_{(9,5)} \oplus \mathbf{C})$, *con lo que* $dim(Der(\epsilon^2_{(9,5)} \oplus \mathbf{C})) = 16$.

Corolario 2.6.18. *Para* $\mathfrak{g} = \epsilon^2_{(9,5)} \oplus \mathbf{C}$, *se verifica que*

$$\begin{aligned}
dim(B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= 8\\
dim(H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})) &= 8\\
dim(\mathcal{O}(\mathfrak{g})) &= 84
\end{aligned}$$

Problemas abiertos

Entre otros, se pueden proponer los siguientes problemas abiertos:

- Una continuación natural de este trabajo puede ser el estudio de las graduaciones naturales en la familia de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n y nilíndice $n-3$. Puesto que hemos estudiado ya las 3-filiformes, sólo restarían las de invariante de Goze $(n-3,2,1)$.

- Otra continuación natural puede ser la clasificación de las álgebras de Lie graduadas naturalmente 4-filiformes en dimensión arbitraria.

- Un problema más general que el anterior es el de la clasificación de las álgebras de Lie graduadas naturalmente p-filiformes para $p \geq 4$. En este caso, es muy probable que el estudio deba limitarse a las familias que aparezcan en el caso general (que, quizás, serán generalizaciones de las $\mathcal{L}(n,r_1,r_2)$, $\mathcal{Q}(n,r_1,r_2)$ y las terminales), pues las dificultades que probablemente surgirán en las dimensiones pequeñas (!) deben ser considerables.

- En [41] Goze y Khakimdjanov hacen notar el relevante papel que juegan $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{Q}_n$ en el estudio de las álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes. Tiene sentido, por tanto, plantearse si las álgebras de Lie graduadas naturalmente 2-filiformes y 3-filiformes juegan un papel análogo.

- Caso de que la respuesta fuese afirmativa se podría extender este estudio al caso de las álgebras de Lie graduadas naturalmente p-filiformes con $p \geq 4$ o al caso de las de nilíndice $n-3$ que no sean 3-filiformes.

- Puesto que todas las graduaciones naturales de un álgebra 3-filiforme poseen $n-3$ subespacios homogéneos, surge la conveniencia de determinar las álgebras 3-filiformes que admitan graduaciones con mayor número de subespacios, lo que facilita enormemente el cálculo de las correspondientes álgebras de derivaciones. De forma más general, se plantea el problema de determinar álgebras p-filiformes de longitud mayor que el nilíndice.

- Otro problema que puede ser considerado es el de la determinación de los correspondientes espacios de derivaciones y, a partir de ellos, el estudio de algunas propiedades geométricas (cobordes, cociclos, dimensión de las órbitas, etc.) de las álgebras o familias de álgebras que resulten al resolver cualquiera de los problemas anteriores.

- Para todos los problemas abiertos propuestos puede ser muy conveniente (o, acaso, resultar imprescindible) realizar un tratamiento computacional de los mismos. Así, en la clasificación de las diferentes familias de álgebras puede ser muy grande la ayuda proporcionada al estudiar las dimensiones "pequeñas" o también para determinar a partir de qué dimensiones y en qué familias se estabiliza la situación. La ayuda que puede proporcionar el tratamiento computacional en la determinación de los espacios de derivaciones es también grande.

Referencias

[1] J. M. Ancochea, J.R. Gómez, M. Goze, G. Valeiras, *Sur les composantes irréductibles de la variété des lois nilpotentes*, J. of Pure and Appl. Algebra, 106, 11-22, 1996.

[2] J. M. Ancochea-Bermúdez, M. Goze, *Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8*, Arch. Math., 50, 511-525, 1988.

[3] J. M. Ancochea-Bermúdez, M. Goze, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7*, Arch. Math., 52:2, 175-185, 1989.

[4] J. M. Ancochea-Bermúdez, M. Goze, *On the varietes of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8*, J. of Pure and Appl. Algebra, 77, 131-140, 1992.

[5] J. M. Ancochea-Bermúdez, M. Goze, You. B. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Sur la réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, C. R. A. S. Paris, 313:1, 59-62, 1991.

[6] G.G.A. Bäuerle and E.A. de Kerf, *Lie Algebras. Part 1: Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics*, North-Holland, 1990.

[7] J.F.G. Belifante and B. Kolman, *A survey of Lie groups and Lie algebras with Applications and Computational Methods.* SIAM, Philadelphia, 1989.

[8] F. Bratzlavsky, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension n, de classe $n-1$, dont l'idéal dérivé est commutatif*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., 560, 858-865, 1974.

[9] J.M. Cabezas, L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *A class of nilpotent Lie algebras*, Communications in Algebra, 28:9, 4489-4499, 2000.

[10] J.M. Cabezas, L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, E. Pastor, *Low-dimensional naturally graded 3-filiform Lie algebras*, SAGA V Meeting León, 1999.

[11] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, *Las álgebras de Lie* $(n-3)$*-filiformes como extensiones por derivaciones*, Extracta Mathematicae, 13:3, 383-391, 1998.

[12] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, $(n-4)$*-filiform Lie algebras*, Communications in Algebra, 27:10, 4803-4819, 1999.

[13] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, *Derivation algebras of certain nilpotent Lie algebras*, Journal of Lie Theory, 11, 2001.

[14] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, *Family of p-filiform Lie algebras,* Algebra and Operator Theory. Kluwer Academic Publishers, 93-102, 1998.

[15] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, E. Pastor, *Structure theorem for naturally graded 3-filiform Lie algebras*, I Colloquium on Lie Theory and Applications, Vigo (Spain), 2000.

[16] L.M. Camacho, *Álgebras de Lie p-filiformes* PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2000.

[17] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, I. Rodríguez. *Effective computation of algebra of derivations of Lie algebras.* Computer Algebra in Scientific Computing CASC, Springer, 101-111, 2000.

[18] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Cohomology of some Nilpotent Lie Algebras*, Extracta Mathematicae, 15:1, 155-174, 2000.

[19] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *3-filiform Lie algebras of dimension 8*, Ann. Math. Blaise Pascal, 6:2, 1-13, 1999.

[20] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Family of laws of* $(n-6)$*-filiform Lie algebras*, SAGA V Meeting León, 1999.

[21] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Algebra of derivations of* $(n-3)$*-filiform Lie algebras*, ILAS'99 Meeting Barcelona, 1999.

[22] O.R. Campoamor Stursberg, *Álgebras de Lie característicamente nilpotentes* PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2000.

[23] A. Cerezo, *Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6*, Preprint N°. 27, Université de Nice, 1984.

[24] Y. Chow, *General theory of Lie algebras*, Gordon and Breach Science Publishers, Vol. 1 y 2, 1985.

[25] J. Dixmier, *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents III.* Canad. J. Math., 10, 321-348, 1958.

[26] F. J. Echarte, J. R. Gómez, *Classification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, 61:1, 21-29, 1991.

[27] F. J. Echarte, J. R. Gómez and J. Núñez, *A necessary and sufficient condition for a complex filiform Lie algebra to be a characteristically nilpotent Lie algebra*, Bull. Math. S.S.M. Romania, 37:85, n.3-4, 63-72, 1993.

[28] J.R. Gómez, M. Goze, Y. Khakimdjanov, *On the k-abelian Filiform Lie Algebras*, Communications in Algebra, 25:2, 431-450, 1997.

[29] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, The graded algebras of a class of Lie algebras in *Mathematics with Vision*, Computational Mechanics Publications, 151-158, 1995.

[30] J.R. Gómez and A. Jiménez-Merchán, *Algèbres de Lie nilpotentes graduées*, Colloque Franco-Ouzbek, Mulhouse (Francia), Mayo 1995.

[31] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, *Naturally Graded Quasi-Filiform Lie Algebras*, Enviado a Journal of Algebra.

[32] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, You. B. Hakimjanov (Khakimdjanov), *On the Variety of Nilpotent Lie Algebra Laws of Dimension 11*, Rendiconti Cagliari 66:2, 137-142, 1996.

[33] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, Y. Khakimdjanov, *Low-Dimensional Filiform Lie Algebras.* Journal of Pure and Applied Algebra 130, 133-158, 1998.

[34] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, J. Reyes. *Tratamiento simbólico de álgebras de Lie filiformes graduadas conexas.* Actas del Segundo Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones, EACA'97, 136-142, 1996.

[35] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, J. Reyes. *Quasi-Filiform Lie Algebras of Length* $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]+2$. ILAS'99 Meeting Barcelona, 1999.

[36] J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Espacios de derivaciones de álgebras de Lie con Mathematica*, Proc. of IV Encuentro de Álgebra Computacional y Alicaciones. EACA, Sigüenza, 1998.

[37] J.R. Gómez, I. Rodríguez. *Model metabelian Lie algebras.* SAGA V Meeting León, 1999.

[38] J.R. Gómez, I. Rodríguez. *A special case of family of Lie algebras with nilindex* 3. ILAS'99 Meeting Barcelona, 1999.

[39] J.R. Gómez, I. Rodríguez. *Metabelian Lie algebras with maximal derived.* ILAS'99 Meeting Barcelona, 1999.

[40] M. Goze, You. B. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Nilpotent Lie algebras*, Kluwer Academics Publishers, 1996.

[41] M. Goze, You. B. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivations*, Manuscripta Math. 84, 115-224, 1994.

[42] Yu. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Sur les variétés d'algèbre de Lie*, Communications in Algebra, 18:4, 1147-1187, 1990.

[43] You. B. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes*, Geometriae Dedicata, 40:3, 269-295, 1991.

[44] Yu. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Characteristically nilpotent Lie algebras*, Mat. Sbornik, 181:5, 65-78, 1990 (russian). English transl. in Math. USSR Sbornik, 70:1, 1991.

[45] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer Verlag, New York, 1972.

[46] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[47] V. Morozov, *Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order.* Izv. Vysch. U. Zaved. Mat., 4:5, 161-171, 1958.

[48] O. A. Nielsen, *Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 63, 1983.

[49] J. Reyes. *Álgebras de Lie casifiliformes graduadas de longitud maximal.* PhD Thesis, Universidad de Sevilla, 1998.

[50] I. Rodríguez. *Álgebras de Lie con invariante de Goze dado.* PhD Thesis, Universidad de Sevilla, 2000.

[51] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Linear and Multilinear Algebra, 24, 167-189, 1989.

[52] C. Seeley, *Seven-dimensional nilpotent Lie algebras over the complex numbers*, PhD. Thesis, Chicago, 1988.

[53] K. A. Umlauf, *Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen insbesondere der Gruppen vom Range null*, Thesis, Leipzig, 1891.

[54] G. Valeiras, *Sobre las componentes irreducibles de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 8*, PhD. Thesis, Univ. Sevilla, 1992.

[55] M. Vergne, *Variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Tesis, París, 1966.

[56] M. Vergne, *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France 98, 81-116, 1970.

[57] G. Vranceanu, *Classificarea grupurilor lui Lie de rang zero*, Acad. Rep. Pop. Rom., Stud. Cerc. Mat., 1, 40-86, 1950.

FE DE ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
xii	-4	$1 \leq i \leq \mathbf{q-1}$	$1 \leq i \leq \mathbf{\frac{n-2}{2}}$
xvi	-14	siendo $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ un álgebra **filiforme**	siendo $\mathfrak{g}_{(n-1)}$ un álgebra **casifiliforme**
xvi	-13	y $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ un álgebra **casifiliforme**	y $\mathfrak{g}_{(n-2)}$ un álgebra **filiforme**
5	-2	$\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >,\ 1 \leq i \leq \mathbf{n-1}$	$\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >,\ 1 \leq i \leq \mathbf{n}$
13	11	los vectores $X_0,\ X_i,\ \mathbf{Y_j}$,	los vectores $X_0,\ X_i,\ \mathbf{X_j}$,
23	3 y 4	son isomorfas **o bien a una suma directa** $\mathfrak{g}_{\mathbf{(n-2)}} \oplus \mathbf{C^2}$, **donde** $\mathfrak{g}_{\mathbf{(n-2)}}$ **representa un álgebra filiforme graduada naturalmente de dimensión n-2 o bien** a $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde ...	son isomorfas a $\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$, donde ...
23	11	Si $c_1 = 0$ **el álgebra se puede expresar como** $\mathfrak{g}_{\mathbf{(n-2)}} \oplus \mathbf{C^2}$, **donde** $\mathfrak{g}_{\mathbf{(n-2)}}$ **es filiforme graduada naturalmente de dimensión n-2 y si** $c_1 \neq 0$ corresponde a un ...	Si $c_1 = 0$, **entonces** $\mathbf{Y_2} \notin \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$ **y se trataría del caso (n,1,1), luego** $c_1 \neq 0$ **y** corresponde a un ...
28	7	El caso $(n,1,r_2)$, $3 \leq r_2 \leq$ **n-4**, r_2 impar	El caso $(n,1,r_2)$, $3 \leq r_2 \leq$ **n-3**, r_2 impar
28	10	Nota 1.1.20	Quitar toda la Nota 1.1.20
46	-9		Añadir después de la última tabla: **Las álgebras $\mathcal{L}$(10,3,7) y $\mathcal{L}$(10,5,7) son no isomorfas a ninguna otra de dimensión 10 porque al tener distinto valor del par ($\mathbf{r_1}$,$\mathbf{r_2}$) las dimensiones de los ideales de las respectivas sucesiones características serían distintas (en dos o cuatro de los valores).**
49	-4	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión menor o igual a 8 ...	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, **no escindidas,** de dimensión menor o igual a 8 ...
53	-6	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión 9 ...	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, **no escindidas,** de dimensión 9 ...
63	-2	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión 10 ...	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente, **no escindidas,** de dimensión 10 ...

Página	Línea	Dice	Debe decir
66	10 y 11	$a_{26} = a_{23} - 2a_{34}, \quad c_1 = -c_2 = c$	$a_{26} = a_{23} - 2a_{34}$, $\mathbf{a_{34}{=}a_{35}}$, $c_1 = -c_2 = c$
68	-4 y -3	$a_{26} = a_{23} - 2a_{34},\ c_1 = -c_2 = c_3 = c = 1$	$a_{26} = a_{23} - 2a_{34}$, $\mathbf{a_{34}{=}a_{35}}$, $c_1 = -c_2 = c_3 = c = 1$
71	8	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente de dimensión 11 ...	álgebras $\mathfrak{g}$ de Lie 3-filiformes y graduadas naturalmente**, no escindidas,** de dimensión 11 ...
85	-3	$\frac{(n-3)^2}{4}(-1)^{i-1}Y_1 = Y_1'$	$\frac{(n-3)^2}{4}(-1)^{i-1}Y_1 = \mathbf{(-1)^{i-1}}Y_1'$
101	1 y 2	extensiones triviales**, bien de una filiforme o bien** de una casifiliforme graduada naturalmente.	extensiones triviales de una casifiliforme graduada naturalmente.
109	Tercera línea de la tabla (derecha)	$\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$ $\mathfrak{g}_{(\mathbf{n-2})} \oplus \mathbf{C}^2$	$\mathfrak{g}_{(n-1)} \oplus \mathbf{C}$ Nota.- Las líneas tercera y cuarta de la tabla pueden ahora escribirse juntas en una sola.
111	-2	el álgebra de Lie $Aut(\mathfrak{g})$	el álgebra de Lie **del grupo de Lie** $Aut(\mathfrak{g})$
113	12	$\bigcup_{j=-n+4}^{n-4} B_{\mathbf{i}}$	$\bigcup_{j=-n+4}^{n-4} B_{\mathbf{j}}$
138	-15	$j \neq r_1 - 1,\ n-5-r_1,\ n-4-r_1,\ n-6$	$j \neq r_1 - 1,\ n-5-r_1,\ n-4-r_1,\ n-6$**, n-5**