



Departamento de Matemática Aplicada I

GEOMETRÍA COMPUTACIONAL EN SUPERFICIES DE ÓRBITAS

Jesús Valenzuela Muñoz
Sevilla, 2003

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

**Geometría Computacional en Superficies de
Órbitas**

Memoria presentada por

Jesús Valenzuela Muñoz

para optar al grado de
Doctor por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
de los Directores:

Fdo: Dra. Carmen Cortés Parejo
Dpto. Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla

Fdo: Dr. Alberto Márquez Pérez
Dpto. Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2003

A Natalia

Resumen

En los casi treinta años de historia de la Geometría Computacional, sólo recientemente se han comenzado a estudiar problemas en superficies distintas del plano. Estudio que es necesario desde el momento en que surgen problemas para cuya modelización se requiere el uso de otros espacios. En esta memoria se aborda la extensión de las estructuras clásicas de la Geometría Computacional a las superficies de órbitas euclídeas (*Euclidean 2-orbifolds*) o caleidoscopios.

Para ello es necesario en primer lugar distinguir cuándo un conjunto sobre una superficie está lo suficientemente agrupado como para presentar un comportamiento *plano*. Se dice que un conjunto está en *posición euclídea* cuando sobre él pueden aplicarse algoritmos planos para construir estructuras típicas de la Geometría Computacional. En esta memoria se presenta una definición del término para las superficies de órbitas euclídeas que generaliza la existente para el cilindro, el cono y el toro, junto con algoritmos que permiten su determinación.

Se estudia también la construcción de la envolvente métricamente convexa sobre estas superficies, comprobándose que, si el conjunto está en posición euclídea, la forma de su envolvente es la que tendría de estar sobre el plano. En caso contrario la envolvente convexa es demasiado grande, perdiendo gran parte de su utilidad.

En el caso de que un conjunto no esté en posición euclídea, se presentan métodos para la búsqueda de sus subconjuntos con mayor cardinal que sí cumplan la propiedad, llamados *subconjuntos máximos para la posición euclídea* o *SMPE*.

También se establece la relación entre la conexión del grafo de triangulaciones de un polígono o una nube de puntos en una superficie cerrada y conexa y la métrica de la superficie, probándose que siempre puede construirse una métrica para la que aparecen grafos de triangulaciones no conexos. Para su métrica habitual se estudia la conexión del grafo en las superficies localmente euclídeas (cilindro, toro, cilindro retorcido y botella de Klein).

Agradecimientos

El problema con los agradecimientos es que suelen ser lo último de la Tesis (y es que llegados a este momento uno se siente tentado de ponerla en mayúsculas), y se escriben normalmente poco antes de entregarla. Esto hace que, por mucho que uno se haya estado quebrando la cabeza para buscar una manera bonita de dar las gracias, lo que de verdad apetezca sea poner un “gracias a todo el mundo”, mandar a imprimir e irse por ahí a olvidarse de la Tesis por unos días.

Sin embargo, luego se pone uno a repasar lo que se lleva hecho y empieza a acordarse de unos y de otros, así que poco menos que nos sentimos obligados a escribir algo que deje constancia de las personas cuyos nombres, en muchos casos, merecerían firmar al lado del nuestro. Además, hay que tener en cuenta que los agradecimientos, y tal vez el resumen, va a ser lo único que muchas personas van a leer de nuestro trabajo. Así que allá vamos.

No resulta fácil hacer un resumen de todas las personas que han contribuido a que esto saliera adelante, sobre todo cuando tenemos en cuenta que se ha escrito a caballo entre cuatro ciudades. En cualquier caso los primeros en ser nombrados deben ser, sin duda, los otros padres de la criatura; Alberto y Carmen (o Jefe y Jefa), que han tenido que aguantar a un doctorando que en cuanto se descuidaban se les cambiaba de ciudad y correo electrónico. Gracias a los dos por esas reuniones improvisadas de prisa y corriendo, por los deadlines a los que no podía hacer frente y por el trabajo de mantener a un alumno en la distancia. En la vertiente investigadora también tengo que agradecer su colaboración a Clara, que alguna vez se ha visto de jefa suplente, Ferrán Hurtado, Paco Santos, que con sus comentarios redondeó (o más bien esferizó) el capítulo referente a triangulaciones, y muy especialmente a Manuel y Gregorio, que tan bien me atendieron humana y académicamente durante mi estancia en Madrid.

Pero hacer una tesis no sólo requiere de colaboración en la investigación, sino que también es necesario ayuda en el duro trabajo de vivir con un doctorando. Aquí hay que darle las gracias a mis padres y a mi hermano, que me aguantaron mis manías (entre ellas, la afición a las matemáticas). También están muy relacionados

con el nacimiento de esta tesis toda la peña de Reina y alrededores, sin los cuales posiblemente esta tesis llevaría más tiempo escrita, pero sin duda mi salud mental se habría resentido aún más. Gracias a Jorge por ser un crack, a Carlos por estar siempre dispuesto a tomarse una cervecita, a Fernando y Malole por tener la puerta de su piso siempre abierta, a Manolo por esos raros momentos de fraternidad y al Búho por su toque personal.

También merecen atención mis compañeros de piso en las distintas ciudades: el Picoletto, Antonio (que me devolvió la afición al cómic), Ramón (que contribuyó a que me mantuviera cuerdo en Valladolid), Valentín y Juan Antonio.

Un párrafo más (tranquilos, que ya quedan pocos) para homenajear a mis compañeros de trabajo, que tan bien atendieron a un recién llegado con continua cara de despiste. En especial MariÁngeles y Pedro Reyes en Aparejadores y Paco Ortega y Ana Diánez en Arquitectura en Sevilla (y por supuesto a Juanma, que tan bien me ha guiado por las tinieblas de tercer ciclo). De Valladolid habría que destacar a Ángel, MariPaz, Ernesto, Isaías, Bego y César. Y de Cáceres no puedo señalar a nadie en particular, porque sería dejar de lado a otros igual de importantes. En cualquier caso, y por su ayuda fundamental nada más aterrizar, quiero destacar a Rosa y Fer, las Cármenes, Pablo A. y Jacinto. Claro que no sería justo mencionar a estos y no hablar de Yolanda, Rosendo, Carper, Pablo G., María Jesús, Juan Carlos, las geodésicas y Manolo.

Y como punto final hay que dedicar un párrafo sólo a quien debería aparecer como coautora de este trabajo por todo lo que ha tenido que aguantar, a pesar de lo cual siempre ha estado a mi lado apoyándome y soportando mis manías, hipocondrias, dudas, depres y tantas otras cosas. Gracias Natalia porque sin ti es muy posible que esto sólo fuera un cuaderno garabateado y unos cuantos ceros y unos en el disco duro.

A todos, otra vez, gracias.

Introducción

Podría decirse que la Geometría Computacional nace del encuentro entre la Geometría y los ordenadores. Las nuevas tecnologías presentaban nuevas exigencias, ante las que ya no resultaban válidas las respuestas del tipo “existencia y unicidad”. La aparición de las máquinas de cálculo hacía que cuestiones como “encontrar el punto más cercano a uno dado” no pudieran responderse sólo con “medimos todas las distancias y escogemos la más pequeña”. Este método, que habría sido considerado válido hasta entonces, resultaba demasiado costoso en tiempo de computación si el conjunto de partida era muy grande y había que repetir la búsqueda a menudo, lo que era fácil que ocurriera en las nuevas aplicaciones.

Junto a preguntas relativas a necesidades nuevas, o que hasta entonces no habían recibido bastante atención, aparecían otras relativas a construcciones clásicas, como la envolvente convexa. No era suficiente con caracterizarla, ahora había que construirla realmente; y no sólo eso, había que “explicarle” a un ordenador cómo debía hacerlo. Y todo esto en el menor tiempo posible.

Estas nuevas necesidades tal vez no habrían requerido la atención debida de no ser porque no se referían sólo a problemas geométricos de interés teórico. Los puntos con los que se trataba eran datos, y la pregunta que había detrás de ellos a menudo se medía en costes de tiempo y dinero.

Fue necesaria entonces una aproximación a la Geometría centrada en el diseño de algoritmos como modo de resolver los problemas. Este enfoque no está basado sólo en su gran número de aplicaciones, sino que se justifica también por la belleza y el interés de los problemas y soluciones a los que da lugar.

La gran aplicabilidad de sus resultados es una de las razones de la gran expansión de la Geometría Computacional. Tal y como se menciona en [20, 64] se pueden distinguir tres tipos de aplicaciones de los ordenadores según los objetos que presentan. Una primera centrada en los cálculos numéricos aplicados fundamentalmente a problemas científicos y técnicos. La segunda incorpora largas listas de datos que surgen de necesidades comerciales y administrativas. Pero es en la

tercera generación de aplicaciones, dedicada al procesamiento de información geométrica y gráfica donde surge la necesidad de desarrollar una disciplina que haga de puente entre las técnicas geométricas y algorítmicas. Podemos encontrar aplicaciones de la Geometría Computacional en campos tan diversos como el tratamiento de imágenes [53, 99], reconocimiento de objetos basado en modelos [8, 12], localización [98], Robótica [109, 110], Cristalografía [107], Meteorología [66, 117], Biología, Geografía y Ecología [26, 78, 54], Química [125], Ciencias Sociales [22], procesos industriales [65, 122, 123, 126, 128], etc. Sobre posibles futuros campos de aplicación de la Geometría Computacional se recomienda la lectura de [11].

Como en todos los inicios, no hay unanimidad a la hora de situar el comienzo de la relación entre Geometría y Algorítmica que dio lugar a la Geometría Computacional. Podemos retroceder hasta el año 1972 para encontrar uno de los primeros trabajos reconocidos en este área, en el que Graham [59] presenta uno de los algoritmos clásicos para el cálculo de la envolvente convexa en el plano en tiempo óptimo. Más lejos se remonta Toussaint [119], hasta 1967, indicando que varias de las ideas para el cálculo de la envolvente pueden encontrarse en el trabajo de Bass y Schubert [16]. Sin embargo, es común situar el nacimiento de la disciplina en 1978 con la tesis de Shamos [111]. Apenas 25 años de vida, un tiempo que puede parecer escaso teniendo en cuenta que hace más de 2600 que en la Grecia Clásica se abordaba de manera constructiva (es decir, mediante algoritmos) los problemas geométricos [51]. Sin embargo, en estos años la Geometría Computacional ha vivido una gran eclosión, multiplicándose las revistas especializadas, congresos e investigadores dedicados a ella.

El lector que quiera dar sus primeros pasos en la disciplina puede recurrir a libros que se han convertido ya en clásicos, como los de Preparata y Shamos [94], O'Rourke [91] o Edelsbrunner [42]. También merece la pena mencionar otros más recientes como los de Goodman y O'Rourke [58], Sack y Urrutia [104], Berg et al. [17] o Boissonnat e Yvinec [23]. En cuanto a los recursos disponibles en la red, hay que destacar la página *Geometry in Action* de David Eppstein

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/geom.html>,

dedicada a las aplicaciones de la Geometría Computacional y el directorio de páginas sobre Geometría Computacional mantenido por Jeff Erickson

<http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/compgeom/index.html>.

También de Jeff Erickson, junto con Bill Jones y Otfried Schwarzkopf es la página

http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/compgeom/geombib/geombib_1.html,

desde donde se accede una extensa base bibliográfica. Más bibliografía puede encontrarse en

<http://www.cs.uu.nl/usr/cgi-bin/bib-search/geom>.

Por otra parte, si lo que se busca es una introducción a un nivel muy básico a los conceptos se puede recurrir a

<http://geometryalgorithms.com/overview.htm>.

Existen multitud de páginas con software para implementar algoritmos geométricos relativos a conceptos tales como envolvente convexa, diagramas de Voronoi, triangulaciones, etc. Entre estas hay que destacar la de Nina Amenta,

<http://www.geom.umn.edu/software/cglist/welcome.html>.

Es posible encontrar paquetes de Geometría Computacional para el programa de cálculo simbólico *Mahtematica* buscando “geometry” en MathSource,

<http://library.wolfram.com/infocenter>.

Por su parte, en

<http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomcomp/aplicaciones.html>

se puede acceder a una serie de programas en Java realizados por alumnos del Dpto. de Matemática Aplicada de la Univ. Politécnica de Madrid.

Sin embargo, a pesar del gran desarrollo que ha vivido la Geometría Computacional, son pocos los trabajos que la extienden a superficies distintas del plano. Este estudio es, a nuestro entender, importante en el sentido de que hay ocasiones en que no es posible dar una modelización apropiada de un problema en los espacios euclídeos. Puede suceder que los datos aparezcan sobre una superficie distinta del plano. En este sentido es clásica la referencia al movimiento de robots consistentes en brazos articulados que recorren una cierta variedad algebraica. También resulta interesante distribuir los datos sobre el cilindro cuando se trata de modelizar situaciones periódicas en el tiempo.

Aunque existen varios trabajos anteriores centrados en el estudio de diferentes estructuras de la Geometría Computacional en superficies (como, por ejemplo, la construcción de diagramas de Voronoi [77, 88]), el primer trabajo en afrontar esto desde una perspectiva más general aparece con la tesis de Grima [60], en 1998. En ella se abordaba el estudio de estructuras clásicas, como la envolvente convexa o las triangulaciones, en superficies tan habituales como la esfera, el cilindro, el cono

y el toro. Este trabajo se completó dando lugar en el año 2001 al libro de Grima y Márquez [61], que resulta el trabajo más completo sobre Geometría Computacional en superficies hasta el momento.

Nuestra elección como objeto de estudio de las superficies de órbitas euclídeas no ha sido arbitraria. Por un lado generaliza el trabajo realizado hasta el momento en superficies. La mayoría de las construcciones que aparecen en [61] hacen referencia a la esfera, el cilindro, el cono y el toro, siendo estas tres últimas superficies de órbitas, al igual que otras tan conocidas como la banda de Moebius, la botella de Klein o el plano proyectivo. Además, estas superficies admiten un desarrollo plano por medio de *órbitas* que simplifica el trabajo sobre las mismas.

Aunque, ante la gran variedad de temas que tienen cabida dentro de la Geometría Computacional, el título de esta memoria puede parecer demasiado ambicioso, creemos que está justificado. Existen tres estructuras, envolvente convexa, diagramas de Voronoi y triangulaciones, que son sin duda las bases que deben tratarse con vistas a un desarrollo de la Geometría Computacional en superficies. Además, al abandonar el plano, surge un nuevo concepto que se complementa con los anteriores: el de *posición euclídea*. Un conjunto sobre una superficie está en posición euclídea cuando presenta un comportamiento plano. Dicho de otra forma, cuando pueden aplicarse sobre él los algoritmos planos destinados a la construcción de las estructuras básicas de la Geometría Computacional. La necesidad del estudio de la posición euclídea no se debe tan sólo a que los conjuntos con esta propiedad admitan el uso de algoritmos conocidos. Al estudiar la envolvente convexa en el Capítulo 3, veremos que existen construcciones que pierden gran parte de las buenas propiedades que poseen en el plano si el conjunto no está en posición euclídea.

De las tres estructuras a las que hacíamos referencia anteriormente, necesarias para llevar la Geometría Computacional a las superficies de órbitas, una ya ha sido tratado. En [77] Mazón y Recio abordan la construcción del diagrama de Voronoi en estas superficies, aportando algoritmos que permiten su construcción con coste $O(n \log n)$. Quedaban entonces pendientes de estudio la envolvente convexa y las triangulaciones, a las que debe añadirse, como hemos mencionado, la posición euclídea.

En lo referente a la posición euclídea es común que se asuma un comportamiento plano cuando los datos aparecen muy agrupados sobre una superficie o si ésta es lo bastante regular. Nos preguntamos entonces hasta dónde se puede forzar esto: qué marca la diferencia entre una aproximación plana correcta y el cometer errores por no tener en cuenta las peculiaridades de la superficie. Dicho de otro modo, cómo determinar cuando un conjunto está o no en posición euclídea.

Este término aparece por primera vez en [60, 61] al estudiar el comportamiento de nubes de puntos sobre el cilindro, el toro, el cono o la esfera. Buscando desarrollar algoritmos para el cálculo de la envolvente convexa, el diámetro de un conjunto, etc., se comprobó que determinadas configuraciones de puntos presentan un comportamiento *plano*: los algoritmos conocidos en el plano son válidos sobre ellos, con ligeras modificaciones. Sin embargo, no se dio una definición general del término, sino que dependía de la superficie, por lo que existía una definición de posición euclídea para el cilindro, otra para el toro, e igualmente para el cono y la esfera. En este trabajo se extienden las definiciones de posición euclídea dadas anteriormente a las superficies de órbitas euclídeas, generalizando y unificando las definiciones existentes para el cilindro, el toro y el cono.

Continuando en esta línea estudiaremos la envolvente convexa en superficies de órbitas. Aunque existen diversas formas de generalizar la envolvente, en este trabajo se ha optado por la *envolvente métricamente convexa*, que surge de manera natural al considerar como convexos a los conjuntos que contienen el menor arco de geodésica (*segmento*) uniendo cualesquiera dos de sus puntos [80]. No creemos que sea necesario mencionar la importancia de la envolvente convexa, tanto en Geometría Computacional como en otras áreas de las matemáticas. Basta considerar, por ejemplo, que la gran mayoría de los métodos desarrollados en Geometría Computacional tienen lugar dentro de la envolvente.

En esta memoria nos centraremos en el estudio de la envolvente convexa de conjuntos en posición euclídea. Veremos como podemos construir dicha envolvente a partir de una copia plana del conjunto, sin necesidad de desarrollar nuevos métodos sobre la superficie. El centrarnos en los conjuntos en posición euclídea tiene su explicación ya que, como veremos, en los conjuntos que no cumplen esta propiedad la envolvente pierde las buenas propiedades que posee en el plano. Por ejemplo, la envolvente convexa de tres puntos en posición no euclídea en el toro es toda la superficie [61], lo que le resta toda posible utilidad a la estructura.

Esta falta de utilidad de la envolvente convexa en conjuntos en posición no euclídea nos lleva a pensar que la construcción de otras estructuras sobre estos conjuntos va a tener un interés limitado. Sin embargo, tal y como se muestra en [61], la probabilidad de que un conjunto distribuido de manera aleatoria sobre la superficie esté en posición euclídea es muy baja. Se hace necesario entonces realizar un estudio de los conjuntos en posición no euclídea, surgiendo de manera natural la idea de estudiarlos a partir de sus subconjuntos de mayor cardinal que sí cumplan tal propiedad, que son los *subconjuntos máximos en posición euclídea* (*SMPE*, para abreviar).

El tamaño de un SMPE es un indicador de la dispersión del conjunto sobre la superficie. Si el cardinal de sus SMPE es cercano al del conjunto, entonces éste

se encuentra agrupado sobre la superficie. A pesar de la baja probabilidad de que un conjunto cualquiera esté en posición euclídea, hay que señalar que el cardinal de los SMPE es bastante grande, oscilando entre la cuarta parte y la mitad del cardinal del conjunto de partida.

Uno de los aspectos que otorga gran interés a la búsqueda de los SMPE es su relación con otros problemas de la Geometría Computacional. Así, se encuentran conexiones con la localización óptima de un convexo, el cálculo de la profundidad máxima en arreglos de convexos, la iluminación mediante focos o la profundidad por subespacios. En este último caso, la búsqueda de SMPE en la esfera nos permite mejorar el tiempo necesario para el cálculo de la profundidad por subespacios en \mathbb{R}^3 dado por Rousseeuw y Struyf [102]. Además, veremos que los SMPE están relacionados con una clase de grafos geométricos que surgen de manera natural al considerar las relaciones de cercanía entre puntos en una superficie de órbitas. En la mayoría de estos grafos, precisamente por su relación con los SMPE, es posible encontrar subgrafos completos (*cliques*) maximales en tiempo polinómico.

En el cálculo de los SMPE encontramos otra diferencia entre las superficies de órbitas euclídeas orientables y la no orientables. Así, mientras la búsqueda de SMPE en las primeras requiere tiempo polinómico, que varía según la superficie, en las no orientables pueden encontrarse conjuntos con un número exponencial de SMPE, no habiendo sido posible determinar hasta el momento si es posible encontrar sólo uno de ellos en tiempo polinómico.

En lo referente a triangulaciones, estudiaremos la conexión del grafo de triangulaciones métricas de polígonos y nubes de puntos. Las triangulaciones métricas son aquellas cuyas diagonales son arcos de geodésica minimizantes. A partir de aquí se define el *grafo de triangulaciones métricas* como el grafo que tiene como vértices las distintas triangulaciones del polígono o de la nube de puntos, siendo dos de ellas adyacentes si puede transformarse una en la otra realizando la conocida operación local de *flip diagonal* (Figura 1).

Determinar si el grafo de triangulaciones es conexo es entonces equivalente a demostrar que dadas dos triangulaciones arbitrarias de un mismo conjunto, siempre es posible pasar de una a otra mediante flips diagonales. Esto resulta de importancia ya que indica si es posible o no alcanzar ciertas triangulaciones con propiedades óptimas (en el sentido de maximizar el mínimo ángulo, la valencia de los vértices, etc.) a partir de una arbitraria. También tiene relevancia desde el punto de vista de la generación aleatoria de triangulaciones, ya que, si el grafo de triangulaciones es conexo, es posible construir fácilmente conjuntos aleatorios de triangulaciones mediante flips, que pueden utilizarse a la hora de estimar el tiempo medio de computación de algoritmos que tengan triangulaciones como entrada.

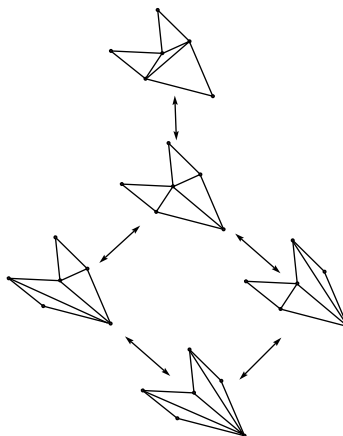


Figura 1: Grafo de triangulaciones de un polígono.

Hasta ahora, los trabajos al respecto se limitaban a tratar la conexión del grafo con la métrica habitual de la superficie [32, 61]. Sin embargo, existe una fuerte relación entre la conexión del grafo y la métrica considerada, siendo posible construir una métrica que permite la existencia de polígonos y nubes de puntos con grafo de triangulaciones no conexo en toda superficie cerrada y conexa.

Nos dedicaremos también a estudiar la conexión del grafo de triangulaciones para las superficies localmente euclídeas. Estas superficies son un caso particular de superficies de órbitas euclídeas, existiendo cuatro de ellas: el cilindro, el toro, el cilindro retorcido y la botella de Klein. En la tesis de Cortés [32] se demuestra la conexión del grafo en el cilindro para polígonos y para nubes de puntos cumpliendo ciertas condiciones. Nosotros probaremos que, para el caso de polígonos, el grafo de triangulaciones es siempre conexo en el toro generado a partir de traslaciones ortogonales (toro plano). No ocurre así para el toro torcido (traslaciones arbitrarias) ni para las superficies que incluyen simetrías con deslizamiento entre sus generadores (cilindro retorcido y botella de Klein). Además, en estas superficies pueden encontrarse también nubes de puntos con grafo de triangulaciones no conexo.

El esquema que sigue esta memoria es el siguiente: empezaremos fijando, en el Capítulo 1, las definiciones y notación que nos permitirán trabajar en las superficies de órbitas euclídeas. Tras esto nos centraremos, en el Capítulo 2, en el estudio de la posición euclídea en estas superficies. Definiremos el término para las superficies de órbitas, comprobándose que esta definición generaliza la dada en [61] para el cilindro, el cono y el toro. También se presentan algoritmos que permiten determinar si un conjunto se encuentra en posición euclídea en tiempo lineal para todas las superficies salvo aquellas que contengan una simetría con deslizamiento

entre sus generadores (las no orientables), que requerirán coste $O(n \log n)$.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de la envolvente convexa. Veremos que es posible dibujarla a partir de una copia plana del conjunto, demostrando que existe una isometría entre la envolvente convexa sobre la superficie y la envolvente convexa de toda copia plana del conjunto. Esto permite su cálculo recurriendo a los algoritmos planos ya conocidos. Además, esta identificación entre la envolvente convexa sobre la superficie con la envolvente convexa en el plano para los conjuntos en posición euclídea constituye la primera, e importante, prueba de la bondad de la definición de posición euclídea dada en el Capítulo 2. La envolvente convexa se convierte entonces en una muestra del comportamiento plano que motiva la definición del término.

Con el cálculo de los SMPE en el Capítulo 4 se cierra el estudio de la posición euclídea. Se darán métodos para encontrar tanto uno como todos los SMPE de un conjunto en una SOE o la esfera, así como su número y cardinal mínimo. También se dedicará una sección a estudiar su relación con otros problemas de la Geometría Computacional.

Aunque el concepto de posición euclídea se haya extendido a una importante familia de superficies, el trabajo que aquí se presenta no debe ser visto sino como un paso intermedio para extender el concepto a las superficies en general. Al final del Capítulo 2 se presentan varias ideas (algunas de las cuales ya aparecen en [61]) en este sentido.

El último capítulo de esta memoria está dedicado al estudio de la conexión del grafo de triangulaciones de polígonos y nubes de puntos. Se establece la relación entre la conexión del grafo y la métrica de la superficie en las superficies cerradas y conexas. También se estudia la conexión del grafo en las superficies localmente euclídeas con su métrica habitual, que heredan del plano al tomar el cociente.

A la hora de estudiar la eficiencia de los métodos presentados, se entenderá que trabajamos con el modelo RAM Real [7]. Con respecto a la complejidad de un algoritmo, esto supone que las operaciones aritméticas, comparaciones y funciones como la exponencial, logarítmica o la extracción de raíces tienen un coste unitario. No haremos un estudio del coste en memoria de los métodos expuestos, entendiéndose que éste viene determinado por el tamaño de las listas que se manejan, considerando que cada número real ocupa una posición de memoria.

Los resultados que aparecen en esta memoria han sido presentados en diversos foros especializados. Aquellos referentes a posición euclídea han dado lugar a la próxima aparición de la publicación [36] de la bibliografía, además de aparecer en los trabajos [1, 2, 3, 34]. Por su parte, los temas referentes a la conexión del grafo

de triangulaciones han aparecido en [33, 35].

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	III
Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Introducción	1
1.2. Movimientos	2
1.3. Superficies de Orbitas Euclídeas	4
2. Posición Euclídea	15
2.1. Introducción	15
2.2. Definiciones	18
2.3. Determinación de la posición euclídea	22
2.4. Conclusiones y problemas abiertos	39
3. Envolverte métricamente convexa	43
3.1. Introducción	43
3.2. Envolverte convexa y posición euclídea	46
3.3. E. C. de conjuntos en posición no euclídea	51

3.4. Conclusiones y problemas abiertos	54
4. Subconjuntos máximos en posición euclídea	57
4.1. Introducción	57
4.2. Subconjuntos máximos en posición euclídea	60
4.2.1. Buscando <i>todos</i> los SMPE	61
4.2.2. Buscando <i>un</i> SMPE	85
4.2.3. Cardinal mínimo de un SMPE	89
4.3. SMPE en la esfera	91
4.4. Problemas relacionados	94
4.5. Conclusiones y problemas abiertos	106
5. Conexión del grafo de triangulaciones	109
5.1. Introducción. Flips	109
5.2. Superficies cerradas y conexas	114
5.3. Superficies localmente euclídeas	117
5.3.1. Cilindro	118
5.3.2. Toro	119
5.3.3. Superficies localmente euclídeas no orientables	125
5.3.4. Triangulaciones de nubes de puntos	127
5.4. Conclusiones y problemas abiertos	130

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este capítulo se verán las definiciones y se fijará la notación básica que se usará a lo largo de esta memoria. El objetivo principal será resumir los conceptos referentes a las superficies de órbitas euclídeas, también conocidas como *Euclidean 2-orbifolds* o caleidoscopios. Para ello se introducen los conceptos de movimiento en el plano, órbita, segmento, dominio fundamental y dominio de Dirichlet, que constituirán la base a partir de la cual se irán desgranando los distintos resultados que se presentan en este trabajo. Al lector interesado en profundizar más en estas superficies se le recomienda el libro de Nikulin y Shafarevich [87]. En lo referente a dominios de Dirichlet, puede encontrarse un estudio más detallado de los mismos en la tesis doctoral de Bochiş [21].

Como ya mencionamos en la Introducción, este trabajo se enmarca dentro de la Geometría Computacional, buscando generalizar algunos de sus principales conceptos a las superficies de órbitas euclídeas. Aunque se definen los conceptos utilizados, para el lector que se introduzca en este campo se recomienda la lectura de algunos de los libros considerados como clásicos, como son los de Preparata y Shamos [94], O'Rourke [91], Berg et al. [17] o Edelsbrunner [42], donde podrá encontrar una visión general junto con las definiciones y procedimientos básicos. En lo referente a la extensión de los conceptos de Geometría Computacional a superficies distintas del plano, resulta fundamental el libro de Grima y Márquez [61], estando este trabajo dedicado a la continuación de varias de las vías abiertas en éste.

1.2. Movimientos

Un *movimiento* o *isometría* en \mathbb{R}^d es una aplicación que conserva las distancias. Es decir, f es un movimiento en \mathbb{R}^d si para todo $P, Q \in \mathbb{R}^d$,

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

La composición de movimientos es también un movimiento. Además, todo movimiento es invertible, siendo su inversa también un movimiento. Los movimientos en el plano forman un grupo, que notaremos por $Mo(\mathbb{R}^2)$. El elemento unitario de este grupo recibe el nombre de *identidad*, que es el movimiento que lleva todo punto sobre sí mismo, y que denotaremos por Id .

Como es sabido, existen cuatro tipos de movimientos en el plano: traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento, que aparecen representados en la Figura 1.1. Curiosamente, esta clasificación, obra de Chasles en 1871, es posterior a la de los movimientos en el espacio, que fue dada por Euler en 1776.

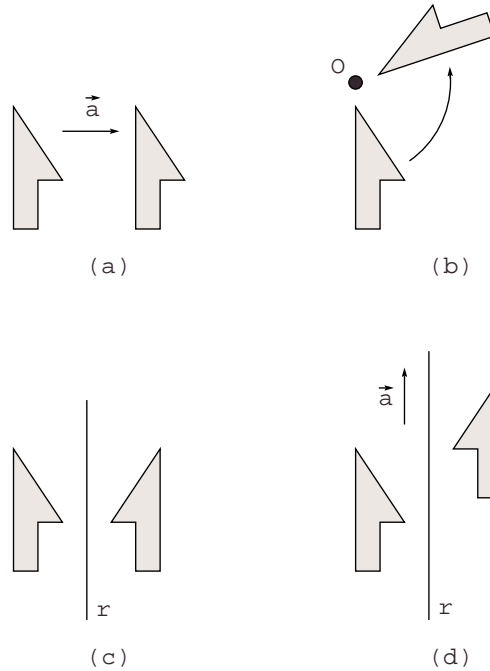


Figura 1.1: Ejemplo de (a) una traslación de vector \vec{a} , (b) un giro de centro O , (c) una simetría de eje r y (d) una simetría con deslizamiento de eje r y vector \vec{a} .

Los movimientos que dejan puntos fijos son los giros y las simetrías. En el primer caso permanece fijo su centro, mientras que en el segundo lo hacen todos los puntos de su eje. Es importante conocer los puntos fijos ya que, como veremos en el Capítulo 2, no existe ningún conjunto en posición euclídea (salvo los unitarios) que los contenga.

La *órbita* de un punto $P \in \mathbb{R}^2$ bajo la acción de un subgrupo $\Gamma \subset Mo(\mathbb{R}^2)$ es el conjunto $\Gamma P = \{f(P) : f \in \Gamma\}$.

Un subgrupo $\Gamma \subset Mo(\mathbb{R}^2)$ se denomina *grupo discreto* si $\forall P \in \mathbb{R}^2$ existe una constante positiva $c(P)$ tal que $\forall f \in \Gamma$ con $f(P) \neq P$, se cumple que $d(P, f(P)) \geq c(P)$. Equivalentemente, un grupo es discreto si toda órbita suya es un conjunto discreto. Una clasificación de los grupos discretos puede encontrarse en [75, 87].

Los grupos discretos pueden clasificarse según contengan ninguno, uno o dos subgrupos de traslaciones linealmente independientes. Los grupos sin traslaciones son los grupos cíclicos o dihedrales, que son los únicos finitos. Los grupos cíclicos C_m son los generados por un giro de ángulo $\frac{360}{m}$ grados, mientras los dihedrales D_m son los generados por dos simetrías cuyos ejes forman un ángulo de $\frac{360}{m}$ grados. Los grupos finitos se caracterizan además por ser los únicos que dejan algún punto fijo. Estos grupos eran ya conocidos por Leonardo da Vinci (1452-1519), que los utilizó para el diseño de capillas dentro de las iglesias [68, 76, 97].

En cuanto a los grupos discretos infinitos, se dividen en aquellos que contienen uno o dos grupos de traslaciones linealmente independientes. Existen siete grupos del primer tipo, que reciben el nombre de *grupos de friso*. Históricamente han recibido más interés los *grupos cristalográficos*, que son los que contienen dos grupos de traslaciones. Existen diecisiete de estos grupos, que fueron clasificados por Fedorov en 1891 en lo que se conoce como el teorema de Fedorov (para una demostración pueden consultarse [72, 75, 87]). Este teorema fue redescubierto por Fricke y Klein en 1897, y por Polya y Niggli en 1924. Sin embargo, estos grupos pueden rastrearse más atrás en el tiempo, apareciendo algunos de ellos en los mosaicos de la Alhambra [83]. Existe una notación internacional o cristalográfica para estos grupos que puede consultarse en [75, 106]. En este trabajo no haremos uso de ella, sino que nos referiremos a los grupos según la clasificación en familias de superficies que haremos más adelante, por considerarla más intuitiva y adecuada al estudio que vamos a realizar sobre ellas.

1.3. Superficies de Orbitas Euclídeas

Las *superficies de órbitas euclídeas (SOEs)*, también llamadas *caleidoscopios* o *Euclidean 2-orbifolds*, se obtienen como el espacio cociente del plano a partir de la acción de un subgrupo discreto de movimientos. Las agruparemos en distintas familias en función de su comportamiento a la hora de buscar en ellas conjuntos en posición euclídea, tal y como se verá reflejado en el Capítulo 4.

Dentro de las SOEs se encuentran superficies tan conocidas como las localmente euclídeas (cilindro, toro, cilindro retorcido y botella de Klein), la banda de Moebius, el cono o el plano proyectivo. Además, estas superficies presentan la ventaja de admitir, por construcción, un desarrollo plano que permite trabajar con ellas de manera sencilla sin necesidad de recurrir directamente a la superficie, que en algunas ocasiones no es representable en \mathbb{R}^3 .

A partir de las órbitas puede definirse una relación de equivalencia. Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ y un grupo discreto de movimientos Γ , diremos que P y Q son *equivalentes* si pertenecen a la misma órbita. Es decir,

$$P \sim Q \Leftrightarrow \Gamma P = \Gamma Q.$$

Los espacios cocientes obtenidos a partir de esta relación de equivalencia son superficies que reciben el nombre de *superficies de órbitas euclídeas* (en adelante *SOEs*), *caleidoscopios* o *Euclidean 2-orbifolds* (Figura 1.2).

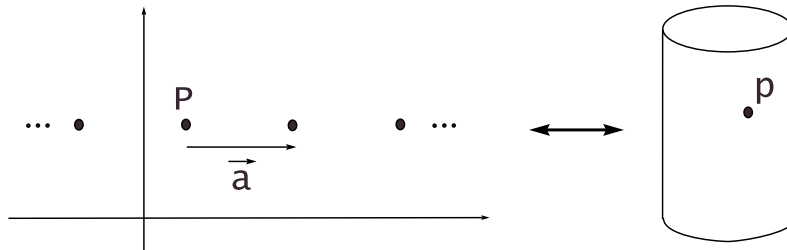


Figura 1.2: Órbita de un punto P en el plano con respecto al grupo generado por una traslación de vector \vec{a} . Identificando los puntos de una misma órbita se obtiene la superficie de órbitas representada por el cilindro.

A la hora de trabajar sobre una SOE suele hacerse uso de los *dominios fundamentales*, que son regiones cerradas tales que

- a) contienen un elemento de cada órbita y

- b) no existen pares de puntos equivalentes en su interior; es decir, los puntos equivalentes sólo pueden estar en su frontera.

Si un dominio contiene puntos equivalentes en su frontera, se suelen colocar flechas en ésta para indicar las identificaciones entre puntos de una misma órbita. En la Figura 1.3 podemos ver un dominio fundamental para la superficie obtenida a partir de un grupo cíclico C_4 .

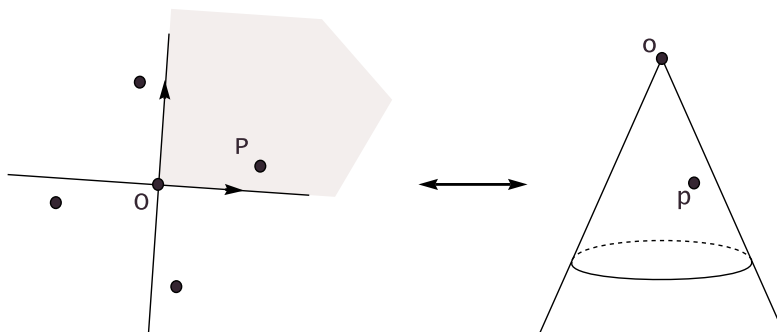


Figura 1.3: Dominio fundamental para el grupo discreto C_4 . Identificando los puntos equivalentes de su frontera obtenemos una representación de la superficie, en este caso un cono.

Denotaremos por φ a la aplicación cociente

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma \sim \mathcal{S}$$

que asociada a cada órbita un punto sobre la superficie. Utilizaremos letras minúsculas (p, q, \dots) para referirnos a los puntos sobre una SOE y mayúsculas (P, Q, \dots) para los puntos del plano. Dado un punto p sobre la superficie, denotaremos a los elementos de su órbita con la misma letra añadiéndole tildes si se hace referencia a más de uno: $\varphi^{-1}(p) = \{P, P', P'', \dots\}$.

Vamos a construir un tipo importante de dominio fundamental que más adelante nos ayudará a decidir qué elementos de las órbitas debemos escoger para obtener una representación plana, con buenas propiedades, de un conjunto. La *región de dominancia estricta* de un punto P sobre otro punto Q es el conjunto de puntos del plano más cercanos a P que a Q (Figura 1.4,(a)),

$$D(P, Q) = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(P, X) < d(Q, X)\}.$$

Dado un conjunto discreto $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_n\}$, la *región de Voronoi* $V_{\mathcal{C}}(P_i)$ de un punto P_i con respecto a \mathcal{C} está formada por los puntos más cercanos a P_i que al

resto de los puntos de \mathcal{C} (Figura 1.4,(b)):

$$V_{\mathcal{C}}(P_i) = \bigcap_{i \neq j} D(P_i, P_j).$$

Equivalentemente,

$$V_{\mathcal{C}}(P_i) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : d(Q, P_i) < d(Q, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n, j \neq i\}.$$

A partir de las regiones de Voronoi se obtiene un tipo importante de dominios fundamentales que usaremos ampliamente en este trabajo. Se dice que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ tiene *estabilizador trivial* si el único movimiento f que verifica $f(P) = P$, es la identidad. Dado un grupo discreto Γ , se denomina *dominio* o *estereoedro de Dirichlet* asociado a un punto P con estabilizador trivial a la clausura de la región de Voronoi de P con respecto a los puntos de su órbita:

$$D_P = V_{\Gamma P}(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : d(Q, P) \leq d(Q, f(P)), \quad \forall f \in \Gamma, f \neq Id\}.$$

Los dominios de Dirichlet son dominios fundamentales (para una demostración ver [45, 75]).

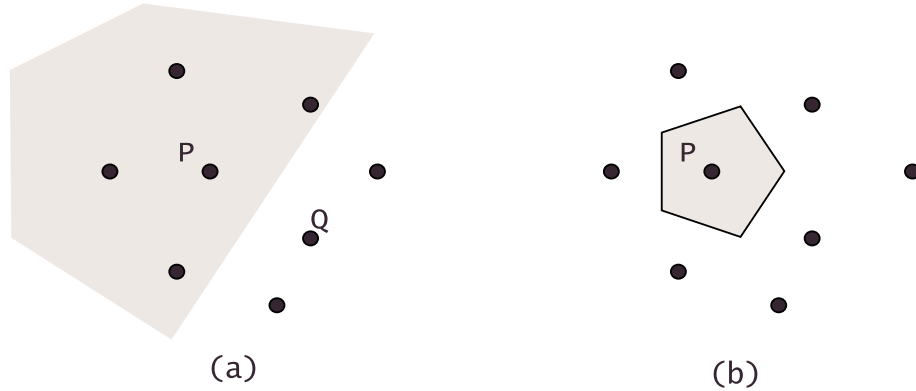


Figura 1.4: (a) Región de dominancia estricta de P sobre Q y (b) región de Voronoi de P .

A lo largo de este trabajo se usará fundamentalmente el interior de los dominios de Dirichlet, por motivos que quedarán claros en el Capítulo 2. Por ello, y para abreviar la notación, al referirnos a un dominio de Dirichlet, y salvo que se indique expresamente lo contrario, entenderemos que nos estamos refiriendo a su interior.

Las SOEs son espacios métricos con la métrica cociente, donde la distancia entre dos puntos en la superficie viene dada por la distancia entre sus órbitas en el plano:

$$\forall p, q \in \mathcal{S}, \quad d(p, q) = \text{mín}\{d(P, Q) : P \in \varphi^{-1}(p), Q \in \varphi^{-1}(q)\}.$$

Una ventaja de esta métrica es que identifica las geodésicas sobre la superficie con las rectas de su desarrollo plano. De este modo, los arcos de geodésica uniendo dos puntos en una SOE se corresponden con los segmentos de recta que unen un elemento de la órbita de uno de los puntos con todos los elementos de la órbita del otro (Figura 1.5). Se denomina *segmento* al menor arco de geodésica uniendo dos puntos en la superficie. Por lo anterior, un segmento será la imagen del segmento de recta que da la menor distancia entre las órbitas en el plano, que llamaremos *segmento mínimo* (o simplemente *segmento* cuando no haya posibilidad de confusión con el segmento en la superficie). Diremos que dos puntos son *diametralmente opuestos* si existe más de un segmento que los une.

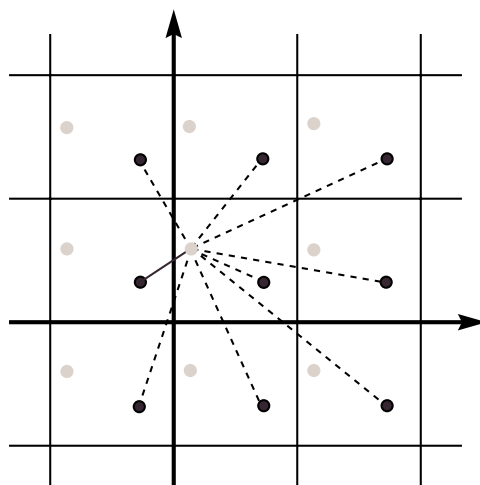


Figura 1.5: Representación plana de las geodésicas uniendo dos puntos en el toro (generado por dos traslaciones ortogonales). La línea continua representa la menor distancia entre las órbitas (segmento mínimo), que se corresponde con el segmento entre los puntos sobre la superficie.

Un entorno esférico centrado en un punto $p \in \mathcal{S}$ de radio $r > 0$ es el conjunto

$$E(p, r) = \{q \in \mathcal{S} : d(p, q) < r\}.$$

Una superficie se denomina *localmente euclídea* si existe un $r > 0$ tal que para todo punto p de la superficie, el entorno esférico $E(p, r)$ es isométrico, por la aplicación

cociente, a un disco en el plano. Sólo pueden ser localmente euclídeas aquellas superficies que no contengan en su grupo discreto asociado giros ni simetrías, que son el cilindro (generado por una traslación), el toro (dos traslaciones), el cilindro retorcido (una simetría con deslizamiento) y la botella de Klein (una traslación y una simetría con deslizamiento). Esto se debe a que no existen entornos isométricos al plano centrados en los centros de giro ni en los puntos sobre un eje de simetría. En ambos casos todo entorno del punto contiene más de un elemento de la misma órbita, por lo que no es posible la isometría.

Sea \mathcal{S} una SOE tal que su grupo discreto asociado contenga giros y O el centro de uno de ellos. Entonces existe un entorno esférico de $o = \varphi(O) \in \mathcal{S}$ isométrico a un entorno del centro de giro de un grupo cíclico C_m . Se dice entonces que o es *localmente* C_m . Del mismo modo, los puntos sobre un eje de simetría se denominan *localmente* D_m (punto Q en la Figura 1.6). Al conjunto de los puntos localmente D_m lo denominaremos en adelante *borde* de la superficie. Como vemos en la Figura 1.6, las simetrías “doblan” el plano sobre su eje: el efecto para la superficie resultante es como si se recortase el plano siguiendo dicho eje.

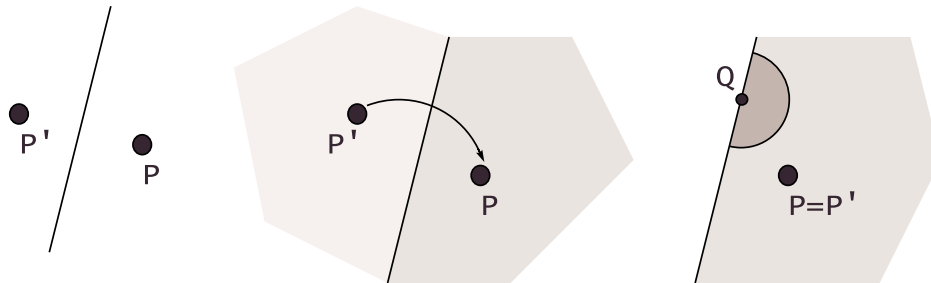


Figura 1.6: Al identificar los puntos equivalentes a ambos lados de un eje de simetría “doblamós” el plano sobre dicho eje. Los puntos sobre el eje en el plano forman el *borde* de la superficie. Estos puntos son localmente D_m .

A efectos de su comportamiento al trabajar sobre ellas en el Capítulo 4 dividiremos las SOEs en varias familias. Así, por ejemplo, llamaremos cilindros tanto al cilindro en sí como a los semicilindros o cilindros acotados que se obtienen añadiendo una o dos simetrías a los movimientos que generan la superficie, que provocan la aparición de uno o dos bordes en esta. Las distintas familias en las que dividiremos las SOEs son:

- a) *Recortes de plano*: Sus grupos discretos están generados a partir de simetrías. Se representan como la porción de plano comprendida entre los ejes de

simetría. Es como si se recortase el plano a partir de estos ejes. Tienen bordes pero no puntos localmente C_m (Figura 1.7).

- b) *Cilindros*: Sus grupos discretos están generados a partir de una traslación y entre cero y dos simetrías. Si añadimos las simetrías, el efecto es recortar el cilindro obteniendo, bien un semicilindro (una simetría) o un cilindro acotado (dos simetrías). Pueden presentar bordes (Figura 1.8).
- c) *Conos*: Sus grupos discretos están generados a partir de un giro con posibilidad de incluir también una simetría. Tienen un único punto localmente C_m y pueden presentar borde (Figura 1.9).
- d) *Toros*: Sus grupos discretos están generados a partir de dos traslaciones. Si estas son ortogonales, la superficie recibe el nombre de *toro plano*. En otro caso se denomina *toro torcido*. Son localmente euclídeas (Figura 1.10).
- e) *Almohadas*: Sus grupos discretos admiten varios giros y entre cero y dos simetrías, y no contienen simetrías con deslizamiento. Tienen entre dos y cuatro puntos localmente C_m y pueden presentar borde (Figura 1.11).
- f) *Superficies con simetrías con deslizamiento*. Pueden presentar tanto puntos localmente C_m como borde, e incluso ambos al tiempo. Son no orientables (Figura 1.12).

En las Figuras 1.7 a 1.12, que aparecen al final de este capítulo, se muestra para cada superficie un dominio fundamental, un conjunto generador del grupo discreto y, en las superficies en las que esto es posible, una representación de la misma en \mathbb{R}^3 (para una descripción más completa se recomienda acudir a [87]). En las figuras hemos denotado por $t_{\vec{a}}$ a la traslación de vector \vec{a} , por $g_{A,\alpha}$ al giro de centro A y ángulo α , por s_l a la simetría de eje la recta l y por $s_l^{\vec{a}}$ a la simetría con deslizamiento con eje la recta l y vector \vec{a} .

Aunque no influya en el estudio que vamos a hacer de ellas, cabe destacar que una SOE es no orientable si y sólo si contiene en su grupo discreto asociado una simetría con deslizamiento. A lo largo de este trabajo veremos que estas superficies presentan un comportamiento diferenciado del resto de las SOEs.

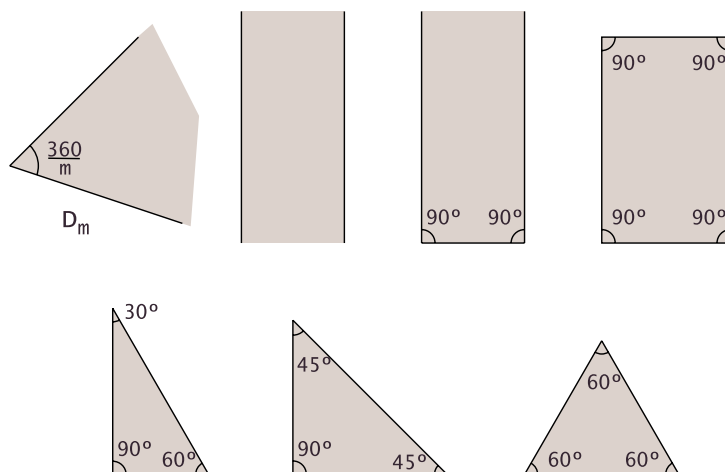


Figura 1.7: Recortes de plano. Las superficies están generadas por simetrías con ejes sobre los bordes.

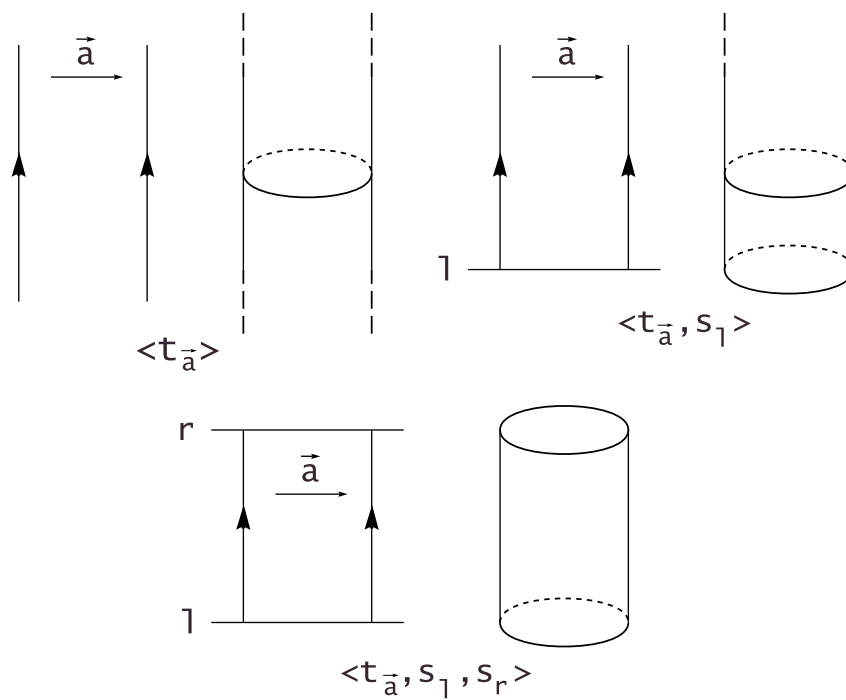


Figura 1.8: Cilindros.

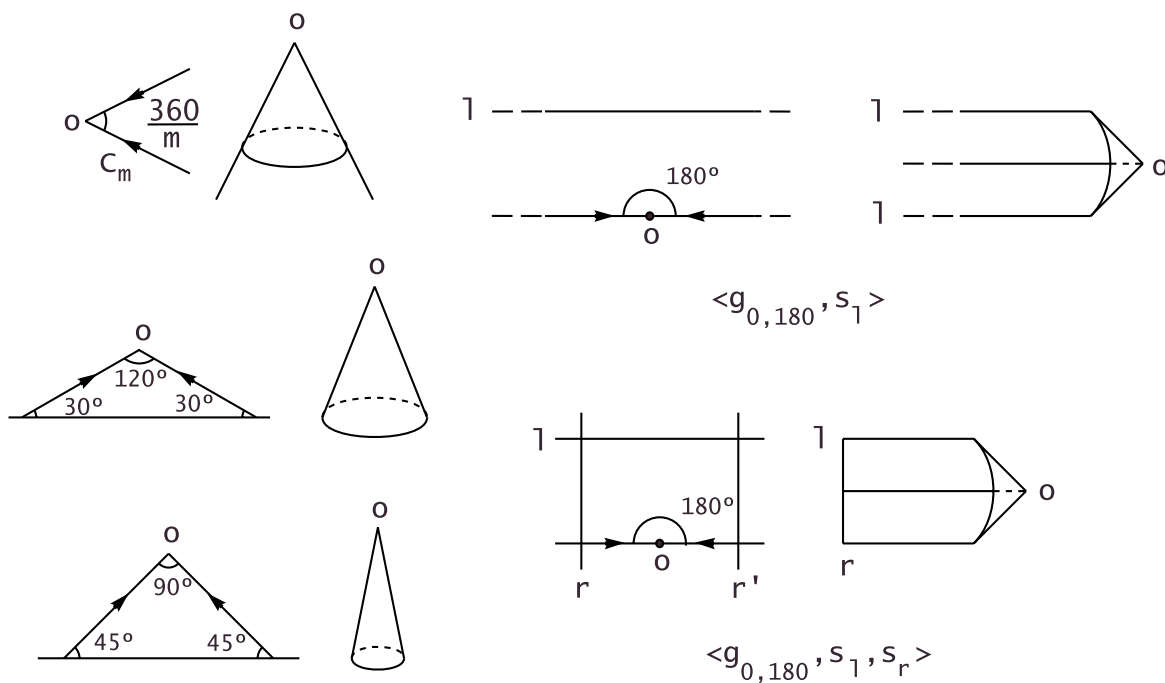


Figura 1.9: Conos.

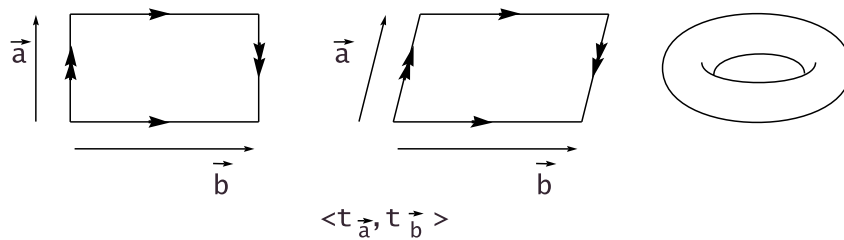


Figura 1.10: Toros.

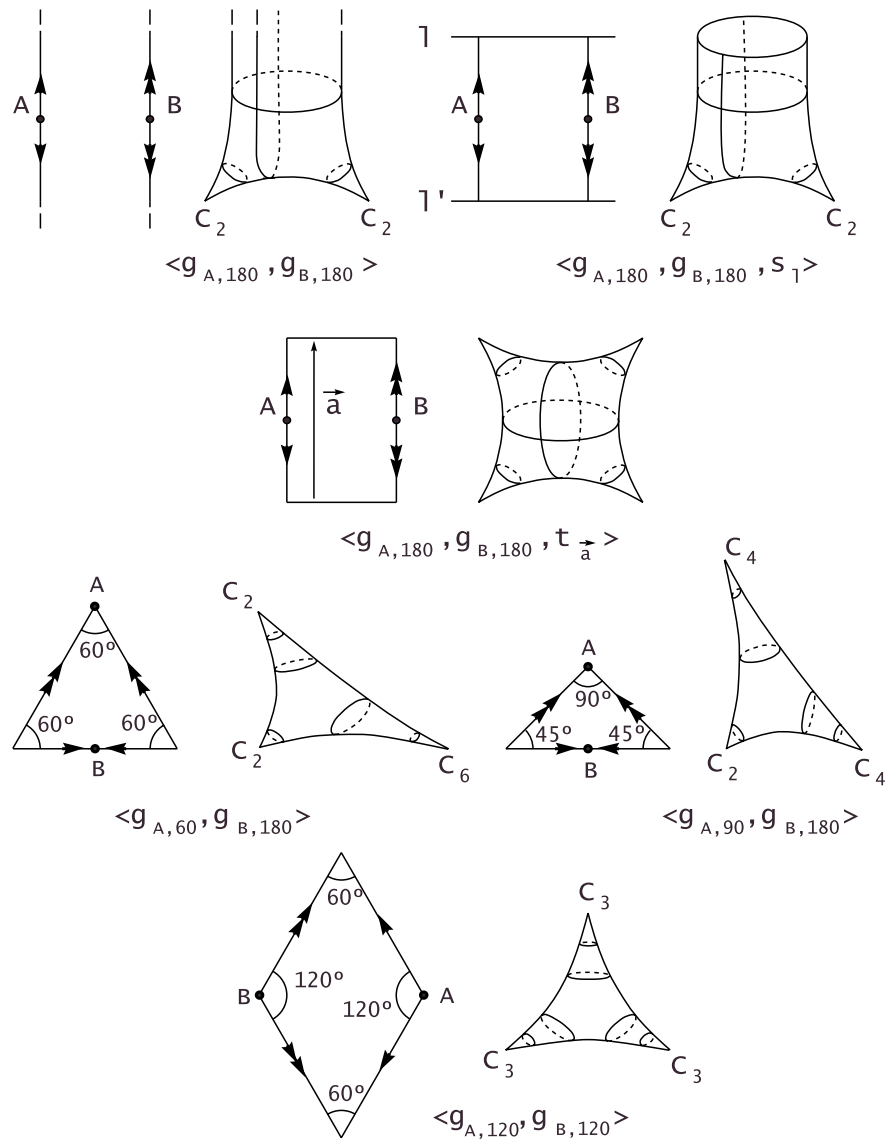


Figura 1.11: Almohadas. En la representación de cada superficie aparecen señalados los puntos localmente C_m .

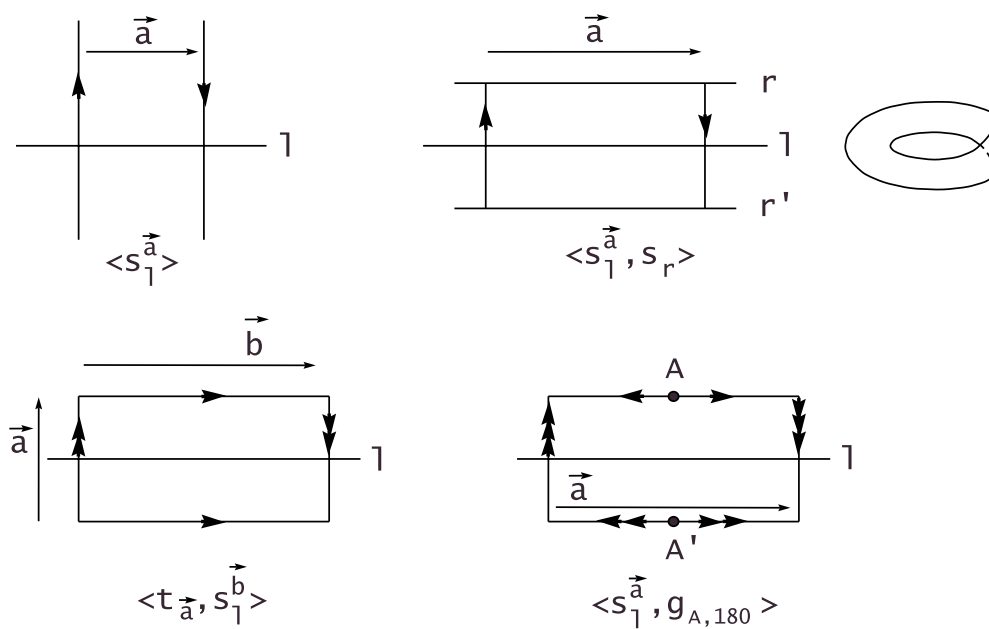


Figura 1.12: Superficies con simetrías con deslizamiento. La única que admite una inmersión en \mathbb{R}^3 es la banda de Moebius. Son no orientables.

Capítulo 2

Posición Euclídea

A la hora de estudiar ciertas propiedades geométricas de un conjunto de puntos sobre una superficie, resulta interesante distinguir ciertas configuraciones para las cuales, al estar los puntos próximos entre sí, es posible utilizar con leves modificaciones los algoritmos desarrollados para el plano. El que un conjunto cumpla esta propiedad, denominada *posición euclídea*, puede suponer una simplificación del proceso o una reducción del tiempo de computación a la hora de calcular estructuras como la envolvente convexa, el diagrama de Voronoi o triangulaciones con ciertas propiedades óptimas. En este capítulo formalizaremos la definición para las superficies de órbitas euclídeas, desarrollando a continuación algoritmos que nos permitan estudiar cuándo un conjunto de puntos sobre una de estas superficies verifica dicha propiedad.

2.1. Introducción

Durante siglos una gran parte de la humanidad estuvo convencida de vivir sobre un plano (Figura 2.1). Desde su perspectiva limitada tenían motivos para pensar que no estaban equivocados: ninguna de las situaciones a las que se enfrentaban en su (nuestra) vida cotidiana podía hacerles pensar que se encontraban sobre una esfera. Podían realizar sus actividades habituales razonando como si se encontraran sobre el plano a pesar de hallarse sobre otra superficie. Aún para nosotros, al consultar el *plano* de una ciudad no pensamos que estamos trabajando con una representación plana de una realidad sobre la esfera. A ese nivel, la ciudad, podemos trabajar con una ficción de *planaridad* sin temor a cometer errores que resulten apreciables.



Figura 2.1: Mapamundi del Beatus, copia de Osma, 1203 (orientado con el Este arriba y con retratos de los 12 apóstoles).

Consideremos ahora un área mayor, como puede ser la comprendida entre los dos trópicos. ¿Puede seguir manteniéndose la impresión de planaridad? Evidentemente, la respuesta es no. Una sencilla comprobación podría ser el diseñar una ruta que nos llevase por el camino más corto de Sevilla a Manila, de allí a México D.C., y de nuevo a Sevilla. De estar sobre el plano, el dibujo resultante sería un triángulo con vértices en cada una de las ciudades. Sin embargo, el dibujo que resulta sobre la esfera terrestre es muy distinto: una cadena que da la vuelta al mundo (Figura 2.2).

¿En qué momento se pierde la sensación de planaridad? ¿Hasta dónde podemos seguir aumentando nuestra área de trabajo sin perder sus “buenas propiedades”? O, pensando ya en términos de Geometría Computacional, ¿cuál es la mayor región sobre una superficie dada en la que pueden emplearse algoritmos planos?

Hasta el momento, la única respuesta a esta pregunta ha sido la dada en [61] al introducir el término *posición euclídea*. Estudiando la generalización de varios conceptos de la Geometría Computacional a la esfera, el toro, el cilindro o el cono, Grima y Márquez encontraron que, para determinadas configuraciones de puntos próximos entre sí, se podía calcular su envolvente convexa o su diámetro usando las mismas estrategias que en el plano.

En [61] se presentan diferentes definiciones del término en función de la superficie tratada. Basándonos en ellas, diremos que un conjunto de puntos verifica la propiedad *posición euclídea local (PEL)* cuando se encuentra



Figura 2.2: Si visitamos las tres ciudades tomando el camino más corto damos una vuelta al mundo.

- a) entre dos generatrices diametralmente opuestas en el cilindro o el cono;
- b) contenido en un cuadrante (región limitada por dos meridianos y dos paralelos diametralmente opuestos) en el toro;
- c) en un hemisferio de la esfera.

Aunque puede parecer que el verdadero interés al trabajar en superficies no planas consiste en desarrollar estrategias para conjuntos de puntos en posición no euclídea (que suelen ser las configuraciones más probables), no podemos dejar de lado el estudio de cómo determinar si un conjunto cumple o no esta propiedad. Los puntos en posición euclídea tienen un comportamiento sencillo, por conocido. Así, el desarrollo de algoritmos que permitan determinar rápidamente si se cumple esta propiedad puede facilitarnos el trabajar con estos conjuntos. Además hay que tener en cuenta que, por ejemplo, la envolvente convexa (como se verá en el Capítulo 3) pierde las buenas propiedades que posee en el plano cuando se parte de un conjunto en posición no euclídea.

En este capítulo se presenta una definición de posición euclídea extendida a las superficies de órbitas euclídeas (SOEs) que generaliza a la de PEL. Tras ello nos centraremos en la búsqueda de algoritmos que nos permitan decidir en el menor tiempo posible si un conjunto de puntos presenta dicha configuración. Veremos que es posible determinar si un conjunto de n puntos está en posición euclídea sobre una SOE en tiempo lineal para la mayoría de estas superficies, salvo para aquellas generadas por un grupo de movimientos que contiene una simetría con deslizamiento, las cuales requerirán tiempo $O(n \log n)$.

2.2. Definiciones

El ejemplo de las tres ciudades al que nos referíamos en la introducción puede trasladarse fácilmente al cilindro. Considerando las poblaciones como puntos sobre esta superficie, pueden presentarse dos posibilidades: o bien los segmentos que las unen dibujan una curva homotópicamente no nula (una curva que *da la vuelta* al cilindro), o bien obtenemos un triángulo, tal y como puede verse en la Figura 2.3.

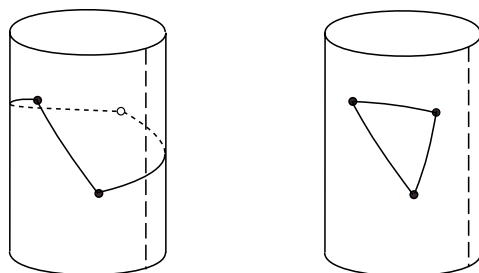


Figura 2.3: En la figura de la izquierda los segmentos que unen los tres puntos dibujan una curva homotópicamente no nula.

En el primer caso nos encontramos con una curva que corta a cualquier generatriz del cilindro. Son los segmentos del dibujo de la derecha los que presentan una disposición similar al caso plano. Si añadimos un nuevo punto, su situación determinará que se siga formando una figura *plana* (cuando todos los ciclos sean homotópicamente nulos) o no. Mientras que podamos encontrar una generatriz que no interseque a ninguno de los segmentos que unen los puntos de nuestro conjunto, estos dibujarán una figura *plana*.

Llamaremos *desarrollo fundamental* sobre una SOE a la imagen por la aplicación cociente de un dominio fundamental menos sus puntos dobles. Los puntos dobles de los dominios fundamentales en el cilindro se corresponden con una de sus generatrices, mientras que en el toro, como vemos en la Figura 2.4, pasan a formar un meridiano y un paralelo. Diremos que un conjunto \mathcal{A} de puntos sobre una SOE está en *posición euclídea* si existe un desarrollo fundamental que contenga a todos los segmentos que unen puntos del conjunto. Si éste es el caso, $df(\mathcal{A})$ denotará a uno de tales desarrollos fundamentales.

Como hemos comentado anteriormente, si \mathcal{A} se encuentra en posición euclídea podremos aplicar sobre él algoritmos planos. De hecho, en el caso de trabajar sobre SOEs podremos servirnos de subconjuntos de la antiimagen -mediante la

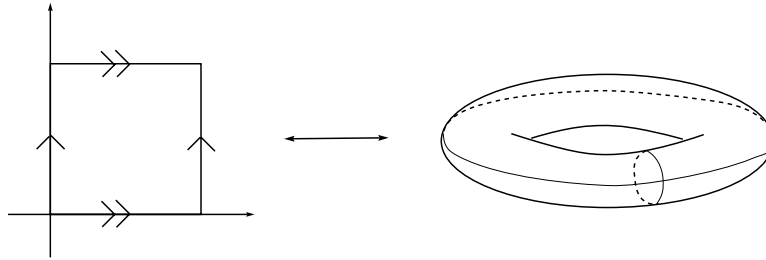


Figura 2.4: Un dominio fundamental en el toro es toda la superficie salvo las curvas correspondientes a la imagen de la frontera (formada por puntos dobles) de un dominio fundamental.

aplicación cociente- de \mathcal{A} en el plano, sobre los que podremos trabajar para llevar luego el resultado de vuelta a la superficie (tal y como haremos con la envolvente convexa en el Capítulo 3). Ahora bien, dicho conjunto deberá escogerse de manera que represente adecuadamente las propiedades métricas de \mathcal{A} . No podremos limitarnos a escoger un representante cualquiera de cada órbita ni, en el caso de conjuntos conexos, elegir una de las componentes conexas de la antiimagen, ya que éstas pueden contener a más de un elemento de cada órbita (Figura 2.5).

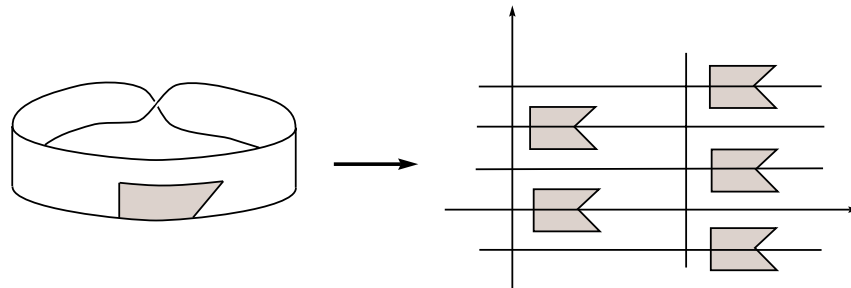


Figura 2.5: Las componentes conexas de la antiimagen del conjunto sombreado en la banda de Moebius están formadas por dos elementos de su órbita.

Llamaremos *copia plana* de \mathcal{A} a cualquiera de los conjuntos $\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \cap D$, siendo D el dominio de Dirichlet de uno de los puntos de la órbita de \mathcal{A} . En caso de que \mathcal{A} se encuentre en posición euclídea, no tendrá relevancia el punto a partir del cual se construya la copia plana, tal y como se deduce a partir del siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea \mathcal{A} un conjunto sobre una SOE; entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) \mathcal{A} está en posición euclídea,
- b) para todo $p \in \mathcal{A}$ y para cualesquiera $P, P' \in \varphi^{-1}(\mathcal{A})$, no existen poligonales formadas por segmentos mínimos que unan P y P' con vértices en puntos de la órbita de \mathcal{A} ,
- c) toda copia plana \mathcal{B} de \mathcal{A} está contenida en la intersección de los interiores de los dominios de Dirichlet de sus puntos.

Demostración: a) \Rightarrow b): Razonamos por reducción al absurdo: sean $p, q, r \dots$ puntos de \mathcal{S} y P, P', Q, R, \dots representantes de sus respectivas órbitas de manera que la poligonal $\overline{PQR \dots P'}$ esté formada por segmentos mínimos. Como P y P' pertenecen a la misma órbita, la cadena no puede estar contenida en el interior de ningún dominio fundamental, y su imagen es un conjunto de segmentos entre puntos de \mathcal{A} que no está contenido en ningún desarrollo fundamental, lo que contradice la hipótesis de que \mathcal{A} está en posición euclídea.

b) \Rightarrow c): Sea ahora P un punto de una copia plana de \mathcal{A} ; P podrá unirse mediante segmentos mínimos a un elemento de la órbita de cada punto de \mathcal{A} . Todos estos puntos pertenecerán entonces al dominio de Dirichlet D_P de P y forman una copia plana \mathcal{B} del conjunto. Ningún punto de esta copia puede caer sobre la frontera de D_P , ya que de existir un punto R con estas características, éste se encontraría sobre la mediatriz entre P y otro elemento de su órbita P' , y podríamos trazar la poligonal de segmentos mínimos PRP' .

Si consideramos ahora los segmentos mínimos entre un punto Q de \mathcal{B} y las órbitas asociadas a los puntos de \mathcal{A} , por hipótesis Q deberá quedar unido sólo a puntos de \mathcal{B} , luego \mathcal{B} está contenido en D_Q . Además, y por un razonamiento anterior, \mathcal{B} no interseca a la frontera de D_Q .

c) \Rightarrow a): Si todos los puntos de una copia plana están contenidos en la intersección de los interiores de sus dominios de Dirichlet, los segmentos que los unen son mínimos. La imagen de uno de dichos dominios es entonces un desarrollo fundamental que contiene todos los segmentos entre puntos de \mathcal{A} , que estará en posición euclídea. □

La tercera condición del teorema nos va a permitir determinar si un conjunto se encuentra o no en posición euclídea a partir de los dominios de Dirichlet de los

puntos de una de sus copias planas. Recordemos que dichos dominios se definieron en el Capítulo 1 a partir de puntos con estabilizador trivial; es decir, puntos que no se encuentran sobre el eje de una simetría ni centros de giro. Uno de estos puntos, P , se encuentra siempre en la frontera de los dominios de Dirichlet de cualquier punto con estabilizador trivial, ya que $d(P, Q) = d(P, f(Q))$ con f la simetría o giro para la que P es punto doble. Luego, por el teorema anterior, ningún conjunto en posición euclídea, salvo los unitarios, puede contener puntos con estabilizador no trivial.

Proposición 2.1 *Si un conjunto de puntos no unitario contiene un punto con estabilizador no trivial entonces no está en posición euclídea.*

Es necesario hacer notar también que, tal y como señalamos en el Capítulo 1, estamos considerando los interiores de los dominios de Dirichlet. Este hecho adquiere relevancia cuando se consideran conjuntos con pares de puntos degenerados. Recordemos que esto sucede cuando existe más de un segmento uniendo los puntos, como puede verse, por ejemplo, en la Figura 2.6. En una SOE esta situación tiene lugar cuando la órbita de un punto se encuentra en la frontera de los dominios de Dirichlet asociados a la órbita del otro. Según nuestra definición, y por el Teorema 2.1, un par de puntos en posición degenerada no puede estar en posición euclídea. Otro tratamiento para esta situación es el que aparece en [61], donde en estas configuraciones se aplica la técnica *S.o.S. (Simulation of Simplicity)* de Edelsbrunner [42].

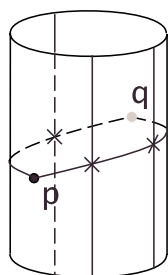


Figura 2.6: Los desarrollos fundamentales en el cilindro se corresponden con toda la superficie menos una generatriz. Es imposible encontrar una generatriz que no interseque a los segmentos uniendo p y q , luego no están en posición euclídea.

2.3. Determinación de la posición euclídea

Una vez hemos extendido la definición de posición euclídea de manera que abarque al conjunto de todas las SOEs, la siguiente cuestión es determinar cuándo un conjunto de puntos sobre una de estas superficies cumple esta propiedad. El Teorema 2.1 traslada esta cuestión a la de comprobar si las copias planas del conjunto se encuentran contenidas en el interior de los dominios de Dirichlet de sus puntos, lo que nos llevará a desarrollar algoritmos que decidan sobre la posición euclídea en tiempo $O(n)$ u $O(n \log n)$ dependiendo de los movimientos que compongan el grupo que genera la superficie.

En el Capítulo 1 se definía la *región de dominancia estricta* de un punto P sobre otro punto Q como el conjunto $D(P, Q) = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(P, X) < d(Q, X)\}$. Esta región nos interesará especialmente cuando los puntos pertenezcan a una misma órbita, de manera que el interior del dominio de Dirichlet de un punto P venga dado por la intersección de las regiones $D(P, f(P))$ cuando f recorre los elementos del grupo generador Γ de la superficie, salvo la identidad. Así, por el Teorema 2.1, un conjunto \mathcal{A} sobre una SOE está en posición euclídea si puede encontrarse una de sus copias planas, \mathcal{B} , tal que

$$\mathcal{B} \subset \bigcap_{P \in \mathcal{B}} V_{\Gamma P} = \bigcap_{P \in \mathcal{B}} \left(\bigcap_{f \in \Gamma \setminus \{Id\}} D(P, f(P)) \right).$$

De este modo, para comprobar si \mathcal{B} está contenida en el interior de la región de Voronoi de un punto P , tendríamos que ver que está dentro de cada una de las regiones $D(P, f(P))$ para cada $f \in \Gamma$, lo que supondría, en general, realizar un número infinito de comprobaciones. Sin embargo, esto no será necesario gracias al resultado que enunciamos a continuación y que fue demostrado por Mazón y Recio en [77], según el cual los puntos que pueden afectar métricamente a un punto dado se encuentran confinados en el interior de una región determinada por un número finito de copias de un dominio de Dirichlet. Según esto, para ver si un conjunto está en el interior del dominio de Dirichlet de un punto P sólo sería necesario comprobar si está dentro de un número finito de regiones de dominancia.

Lema 2.1 [77] *Dado un grupo discreto de movimientos Γ y un dominio de Dirichlet D , existe un subconjunto finito $\Gamma^* = \{f_1 = Id, f_2, \dots, f_m\}$ de Γ tal que para todo punto $P \in D$ y todo punto $Q \in \mathbb{R}^2 - \bigcup_{j=1}^m f_j(D)$, existe otro punto $Q^* \in \bigcup_{j=1}^m f_j(D)$ tal que Q^* pertenece a la misma órbita que Q y $d(P, Q^*) < d(P, Q)$.*

Como consecuencia se tiene

$$V_{\Gamma P}(P_i) \subset \bigcup_{j=1}^m f_j(D). \quad (2.1)$$

En [77] también se afirma que m está acotado, y se establece $m = 37$ como su valor máximo tras examinar todos los posibles casos en cada uno de los grupos, número que se corresponde con todas las copias de primer y segundo orden de adyacencia (las adyacentes y las adyacentes a éstas) al dominio fundamental.

De este modo, la contención (2.1) podría reescribirse como

$$\mathcal{B} \subset \bigcap_{P \in \mathcal{B}} \left(\bigcap_{f \in \Gamma^*} D(P, f(P)) \right) = \bigcap_{f \in \Gamma^*} \left(\bigcap_{P \in \mathcal{B}} D(P, f(P)) \right).$$

Para simplificar, diremos que \mathcal{B} cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ si dado cualquier movimiento f , \mathcal{B} está contenido en la intersección de los $D(P, f(P))$ para todo P de \mathcal{B} . De este modo, un conjunto se encuentra en posición euclídea si existe una copia plana \mathcal{B} tal que, para todo f de Γ^* , se cumple $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$.

Geoméricamente, la propiedad $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ nos dice que, para todo P en \mathcal{B} , el conjunto se encuentra en su totalidad a uno de los lados de la mediatriz $r_f(P)$ de los puntos P y $f(P)$.

A continuación vamos a buscar procedimientos que nos permitan determinar eficientemente si un conjunto de puntos sobre el plano cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ para cada uno de los cuatro posibles movimientos. Una vez hecho esto, cerraremos la sección con el teorema principal de este capítulo, que resume los tiempos necesarios para determinar cuándo un conjunto de puntos sobre una SOE está en posición euclídea.

Simetrías

Los movimientos con un comportamiento más sencillo son las simetrías. La mediatriz de un punto y su imagen mediante uno de estos movimientos es, precisamente, el eje de la simetría. Como esta mediatriz es la misma para todos los puntos del conjunto, basta con efectuar una única comprobación y se requerirá, por tanto, tiempo $O(n)$.

Traslaciones y giros

Estos dos movimientos presentan un comportamiento bastante similar. Empecemos considerando una traslación t que podemos suponer de vector horizontal, sentido hacia la parte positiva del eje de abscisas y módulo la unidad. La mediatriz de un punto y su imagen es una recta vertical a distancia un medio de ambos, lo que nos lleva al siguiente resultado:

Lema 2.2 *La propiedad $D(\mathcal{B}, t(\mathcal{B}))$ se cumple si y sólo si los puntos de \mathcal{B} se encuentran comprendidos en una banda vertical de anchura menor que un medio.*

Demostración: Empecemos suponiendo que se cumple $D(\mathcal{B}, t(\mathcal{B}))$. Sean P y Q , respectivamente, los puntos de menor y mayor abscisa de \mathcal{B} . Si la distancia entre las proyecciones de estos puntos sobre el eje OX fuese mayor que un medio, Q estaría al mismo lado de $r_t(P)$ que $t(P)$, luego $d(Q, t(P)) < d(Q, P)$, lo que nos lleva a una contradicción.

Supongamos ahora que la distancia horizontal entre P y Q es menor que un medio. En este caso las rectas r_t separarán siempre los conjuntos \mathcal{B} y $t(\mathcal{B})$. Si esto no fuese así, tendríamos que $t(P)$ estaría en el mismo semiplano que Q para $r_t(Q)$, por lo que

$$d(Q, t(P)) < d(t(Q), t(P)) = d(Q, P) < \frac{1}{2}.$$

Ahora bien, en este caso se verificaría

$$1 = d(P, t(P)) \leq d(P, Q) + d(Q, t(P)) = 2 \cdot d(P, Q) < 1,$$

de lo que se deduce que \mathcal{B} debe cumplir la propiedad $D(\mathcal{B}, t(\mathcal{B}))$. □

Los mismos argumentos sirven para probar el enunciado equivalente cuando consideramos un giro g de centro O y ángulo θ . Sólo hace falta tener en cuenta que las bisectrices $r_g(P)$ son rectas pasando por O y que forman un ángulo $\frac{\theta}{2}$ con la recta OP .

Lema 2.3 *La propiedad $D(\mathcal{B}, g(\mathcal{B}))$ se cumple si y sólo si los puntos de \mathcal{B} se encuentran comprendidos en un sector angular con vértice en O y ángulo $\frac{\theta}{2}$.*

Evidentemente, si \mathcal{B} cumple $D(\mathcal{B}, t(\mathcal{B}))$ (resp., $D(\mathcal{B}, g(\mathcal{B}))$), también cumplirá $D(\mathcal{B}, t^{-1}(\mathcal{B}))$ (resp., $D(\mathcal{B}, g^{-1}(\mathcal{B}))$). A partir de aquí es fácil probar que la posición euclídea coincide con la propiedad PEL definida por Grima y Márquez en

[61] sobre el cilindro y el cono. Para ello vamos a estudiar previamente la forma de los dominios de Dirichlet para puntos sobre estas superficies.

Los dominios de Dirichlet de un punto en el cilindro o el cono son bandas verticales de anchura la unidad en la primera superficie o sectores angulares de vértice el centro de giro y mismo ángulo, tal y como puede verse en la Figura 2.7. Estas bandas o sectores angulares están definidos por las rectas r_f y r_{f-1} , siendo f la traslación o giro que da lugar a la superficie.

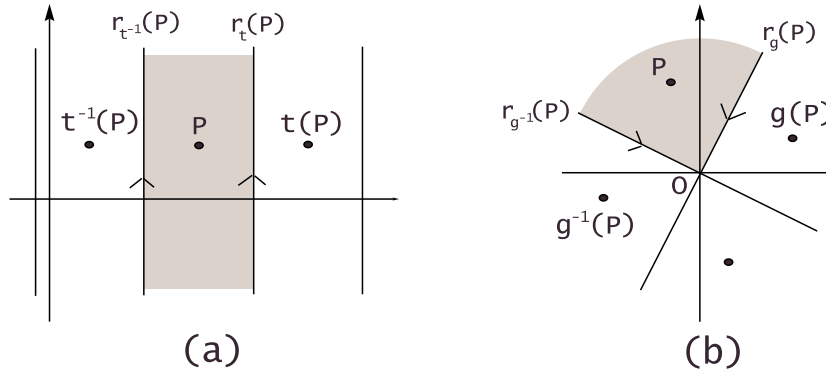


Figura 2.7: Dominios de Dirichlet de un punto en (a) el cilindro y (b) el cono.

Teorema 2.2 *Sea \mathcal{A} un conjunto sobre el cilindro (resp. el cono); entonces \mathcal{A} está en posición euclídea si y sólo si cumple la propiedad PEL.*

Demostración: Sea \mathcal{B} una copia plana de \mathcal{A} ; entonces, en virtud del Teorema 2.1, \mathcal{A} está en posición euclídea si y sólo si \mathcal{B} está contenida en la intersección de los dominios de Dirichlet de sus puntos. Ahora bien, por la forma de estos dominios, un punto sólo se ve afectado métricamente por sus dos imágenes adyacentes. Luego \mathcal{A} estará en posición euclídea si y sólo si se cumplen las propiedades $D(\mathcal{B}, t(\mathcal{B}))$ y $D(\mathcal{B}, t^{-1}(\mathcal{B}))$ (resp., $D(\mathcal{B}, g(\mathcal{B}))$ y $D(\mathcal{B}, g^{-1}(\mathcal{B}))$). O, lo que es equivalente, si \mathcal{B} está contenido en una banda horizontal de anchura menor que un medio (resp., en un sector angular de vértice en el centro de giro y ángulo la mitad de éste). Y la imagen de dicha banda es precisamente la región comprendida entre dos generatrices diametralmente opuestas en el cilindro (resp., el cono).

De este modo, \mathcal{A} está en posición euclídea si y sólo si está contenido entre dos generatrices diametralmente opuestas, tal y como establece la PEL. \square

En [61] se demostraba que el tiempo necesario para determinar la posición euclídea en el cilindro o el cono es de $\Theta(n)$ trabajando directamente sobre la superficie. Es fácil ver que este tiempo se mantiene cuando trabajamos a partir de una copia plana del conjunto, comprobando si ésta cumple las propiedades $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$.

Para terminar de demostrar la correspondencia entre posición euclídea y posición euclídea local en lo que se refiere a las SOEs, sólo nos faltaría estudiar qué ocurre en el toro. Si consideramos, de la manera habitual, un toro plano generado a partir de dos traslaciones de vectores ortogonales y unitarios, los dominios de Dirichlet de un punto sobre el toro serán cuadrados de lado la unidad como el que se ve en la Figura 2.8

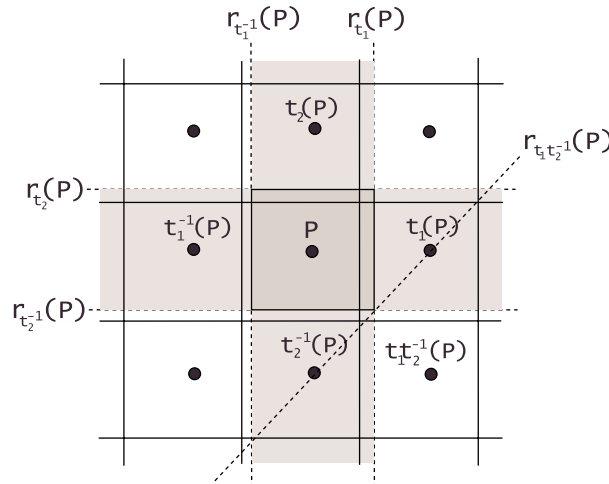


Figura 2.8: Dominio de Dirichlet de un punto sobre un toro generado a partir de dos traslaciones t_1 y t_2 de vectores ortogonales y unitarios.

A partir de la forma de los dominios de Dirichlet, y aplicando el Lema 2.1, se deduce que los puntos de uno de estos dominios sólo van a estar afectados métricamente por los pertenecientes a sus ocho dominios adyacentes. Esto da lugar a un conjunto Γ^* de nueve elementos formado por la identidad, las dos traslaciones, sus inversas y las composiciones de los movimientos anteriores. Para ver si un conjunto \mathcal{B} está contenido en la intersección de los interiores de los dominios de Dirichlet de sus puntos habría que realizar, entonces, ocho comprobaciones de la propiedad $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$, una para cada $f \in \Gamma^*$, salvo la identidad. Ahora bien, como se ilustra en la Figura 2.8, si las traslaciones son ortogonales y unitarias es suficiente con realizar cuatro, ya que si el conjunto cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ para

t_1 y t_2^{-1} , inmediatamente lo cumplirá para $t_1 \circ t_2^{-1}$. Esto no ocurre, sin embargo, cuando se considera el toro generado a partir de dos traslaciones arbitrarias (Figura 2.9); en esta situación es necesario realizar dos comprobaciones más. Este especial comportamiento del toro torcido se reflejará también en los Capítulos 4 y 5, cuando se estudien los mayores subconjuntos en posición euclídea y el grafo de triangulaciones en esta superficie.

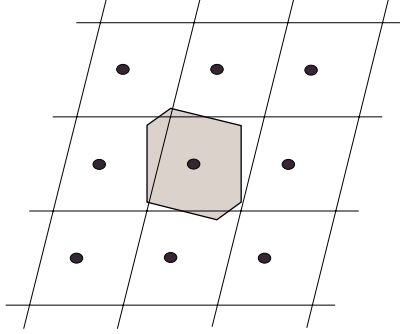


Figura 2.9: Si no imponemos restricciones a las traslaciones que lo generan, los dominios de Dirichlet en el toro pasan a ser hexágonos.

Si nos mantenemos sobre el toro plano vemos que de nuevo coinciden las definiciones de posición euclídea y la propiedad de posición euclídea local.

Teorema 2.3 *Sea \mathcal{A} un conjunto sobre el toro plano, entonces \mathcal{A} está en posición euclídea si y sólo si cumple la propiedad PEL .*

Demostración: Tal y como vimos cuando estudiamos el caso de una única traslación, para que un conjunto cumpla la propiedad $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ para los pares formado por una traslación y su inversa, sólo es necesario que los puntos estén en un banda ortogonal a la dirección de la traslación y de anchura un medio. En este caso, al trabajar con dos de estos movimientos, será necesario que el conjunto esté contenido en la intersección de dos bandas ortogonales de este tipo, lo que da lugar a un cuadrado cuya imagen es un cuadrante sobre el toro. Luego un conjunto sobre el toro plano está en posición euclídea si y sólo si está contenido en un cuadrante, tal y como afirma la propiedad PEL . \square

Simetrías con deslizamiento

Llegados a este punto hemos estudiado cómo determinar si un conjunto \mathcal{B} cumple con la propiedad de cercanía $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ cuando f es una simetría, una traslación o un giro y, por extensión, comprobado la correspondencia entre posición euclídea y posición euclídea local en el cilindro, cono y toro. Además, se comprueba que verificar esta propiedad supone sólo un coste de tiempo lineal (óptimo, ya que deben comprobarse todos los puntos). Para cerrar este estudio sólo resta desarrollar un método que nos permita decidir si un conjunto se encuentra o no en posición euclídea sobre una superficie entre cuyos generadores se encuentre una simetría con deslizamiento. Estas superficies presentan peculiaridades que van a dificultar esta determinación, obligándonos a desarrollar un algoritmo más costoso, que requerirá tiempo $O(n \log n)$.

Tanto para ilustrar las diferencias entre estas superficies y las tratadas anteriormente, como para apoyarnos en un modelo sencillo a la hora de buscar representaciones gráficas que ilustren nuestro trabajo, vamos a detenernos en la más sencilla de estas superficies, el cilindro retorcido, que resulta de la acción sobre el plano del grupo generado a partir de una simetría con deslizamiento.

La primera característica que distingue a las superficies generadas a partir de simetrías con deslizamiento es la forma de los dominios de Dirichlet. Vamos a considerar un sistema de referencia ortonormal cuyo eje OX esté sobre el eje de la simetría y una simetría con deslizamiento s cuya traslación asociada tenga módulo unitario. Dado un punto $P = (a, b)$ su imagen tiene coordenadas $s(P) = (a+1, -b)$ y la recta mediatriz de ambos tendrá como ecuación

$$r_s(P) : y = \frac{1}{2b} \left(x - \left(a + \frac{1}{2} \right) \right), \quad b \neq 0.$$

Del mismo modo la recta mediatriz de P y $s^{-1}(P) = (a-1, -b)$ es

$$r_{s^{-1}}(P) : y = -\frac{1}{2b} \left(x - \left(a - \frac{1}{2} \right) \right), \quad b \neq 0.$$

Si $b = 0$ tendremos las rectas $r_s(P) : y = a + \frac{1}{2}$ y $r_{s^{-1}}(P) : y = a - \frac{1}{2}$.

De las ecuaciones de $r_s(P)$ y $r_{s^{-1}}(P)$ se deduce que sus pendientes dependen sólo de la altura del punto, cortando al eje de simetría en los puntos $(a + \frac{1}{2}, 0)$ y $(a - \frac{1}{2}, 0)$, respectivamente.

A la hora de dibujar los dominios de Dirichlet para puntos con ordenada no negativa habrá que tener en cuenta también los puntos de la forma $s \circ s(P)$ y $s^{-1} \circ s^{-1}(P)$. Como la composición de dos simetrías con deslizamiento da lugar

a una traslación con la misma dirección y sentido y módulo el doble del de la simetría, las bisectrices entre P y los puntos anteriores son las rectas $x = a + 1$ y $x = a - 1$ respectivamente.

A partir de aquí podemos dibujar los dominios de Dirichlet asociados a un punto sobre el cilindro retorcido, algunos de los cuales se muestran en la Figura 2.10. A diferencia de lo que ocurre para superficies sin simetrías con deslizamiento entre sus generadores (como el cilindro, el cono o el toro vistos anteriormente) la forma de los dominios depende de la altura del punto. Para puntos sobre el eje de la simetría estos dominios son bandas verticales (suponemos el eje de simetría sobre el eje OX) infinitas, de anchura igual al módulo de la traslación asociada al movimiento. Pero si nos separamos del eje, la banda pasa a tener anchura dos, al tiempo que se cierra por uno de sus lados, presentando el dominio de Dirichlet dos nuevos segmentos en forma de cuña en su frontera, que van aproximándose al eje de abscisas a medida que aumenta la altura del punto. En el límite se tendría una semi-banda de anchura el doble del módulo de la traslación y acotada en uno de sus lados por el eje OX .

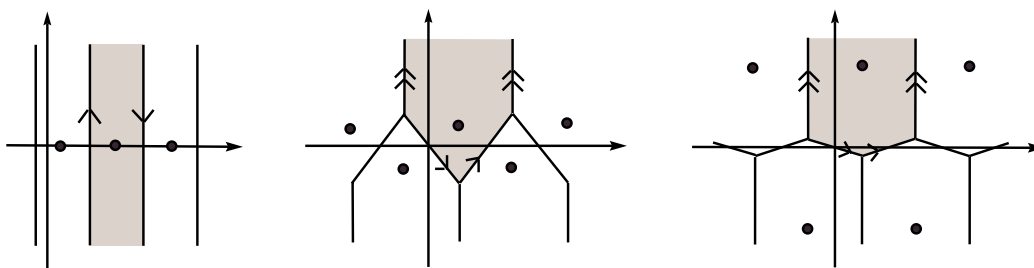


Figura 2.10: Dominios de Dirichlet de puntos en el cilindro retorcido.

De la observación de los dominios de Dirichlet se deduce también que sus puntos están afectados métricamente sólo por aquellos que se encuentran en los cuatro dominios adyacentes, a diferencia de lo que ocurre para las otras superficies generadas a partir de un único movimiento (cilindro y cono), en las que están afectados únicamente por dos.

A la hora de determinar si un conjunto sobre el cilindro retorcido (u otras superficies con simetrías con deslizamiento) se encuentra o no en posición euclídea, la primera tentativa se orientó a generalizar el trabajo desarrollado en [61] para el cilindro, el cono y el toro. Éste se basa en la existencia de conjuntos *maximales* para la posición euclídea, en el sentido de que cumplen la propiedad y además no están contenidos en ningún otro que esté en posición euclídea: la región comprendida entre dos generatrices diametralmente opuestas en el cilindro y el cono y los

cuadrantes en el toro. Además dichos conjuntos maximales son únicos. Luego, a la hora de determinar si un conjunto está o no en posición euclídea, basta con comprobar si está o no contenido en uno de ellos.

Sin embargo esto no resulta apropiado en el cilindro retorcido, donde es posible construir de manera sencilla familias infinitas de conjuntos con esta propiedad y seguir encontrando conjuntos en posición euclídea que no pertenezcan a ninguna de ellas. Para ilustrar esto, y con vistas a profundizar en el comportamiento de los conjuntos en posición euclídea en esta superficie, vamos a presentar las familias \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 y \mathcal{F}_3 de conjuntos maximales para la posición euclídea:

- Construcción de la familia \mathcal{F}_1 : Partimos de los arcos de las curvas $u_1 : x = \frac{1}{4} - y^2$ y $u_2 : x = \frac{3}{4} + y^2$ contenidas en la banda vertical D limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 1$ (que es un dominio fundamental para el cilindro retorcido [87]). Para cada par de puntos $P \in u_1 \cap D$, $Q \in u_2 \cap D$ con la misma coordenada y , denotamos por m_1 (resp. m_2) al segmento de recta tangente a u_1 (resp. u_2) en P (resp. Q), con extremos en P (resp. Q) y sobre el eje OX (Figura 2.11.(a)). La región abierta limitada por las dos semirrectas verticales de extremo P y Q , los segmentos m_1 y m_2 y la porción del eje OX que determinan (las regiones sombreadas en la Figura 2.11) es un conjunto que coincide con la intersección de los dominios de Dirichlet de sus puntos. Variando la posición de P y Q sobre las curvas u_1 y u_2 , respectivamente, se construye el resto de conjuntos de la familia.

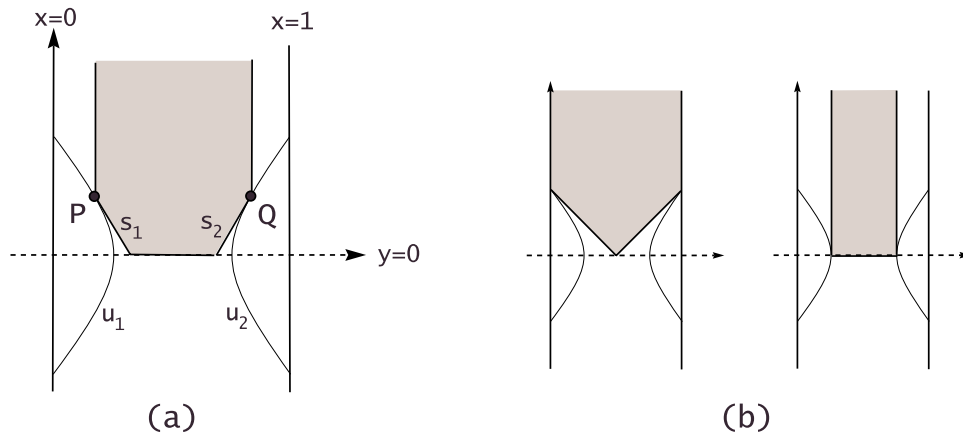


Figura 2.11: (a) Construcción de la familia \mathcal{F}_1 y (b) sus dos casos extremos.

- Construcción de la familia \mathcal{F}_2 : Sean P y Q como antes, y n_1 y n_2 los segmentos de ambas rectas tangentes a u_1 y u_2 por P y Q , respectivamente, que van desde dichos puntos hasta el punto de corte entre las tangentes. Nos fijamos ahora en las rectas que unen el origen de coordenadas con P y el punto $(0, 1)$ con Q . Llamaremos l_1 y l_2 a los segmentos de dichas rectas comprendidos entre su punto de corte y los puntos P y Q respectivamente. La familia está formada por los interiores de los conjuntos limitados por los segmentos l_1 , l_2 , n_1 y n_2 al variar P y Q (Figura 2.12).

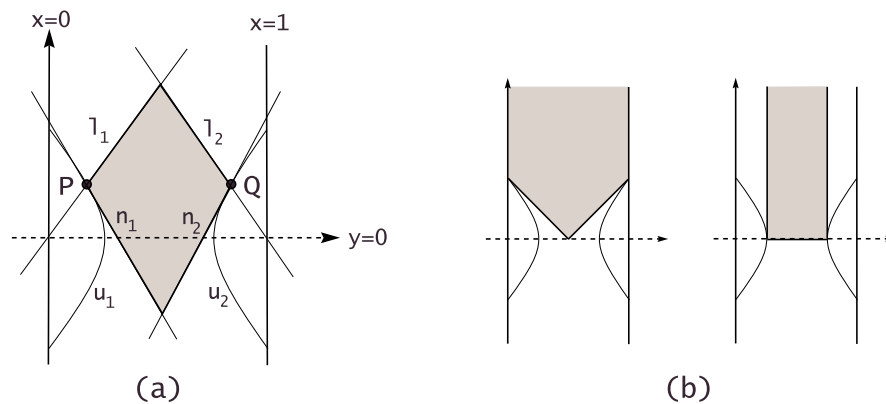


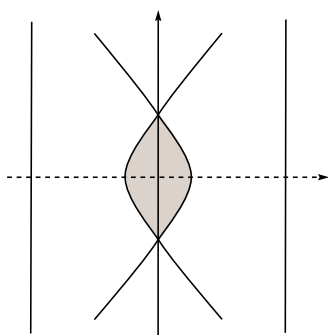
Figura 2.12: (a) Construcción de la familia \mathcal{F}_2 y (b) sus dos casos extremos.

- Construcción de la familia \mathcal{F}_3 : Formada por los trasladados de la región limitada por las curvas u_1 y la resultante de desplazar una unidad hacia la izquierda u_2 (Figura 2.13).

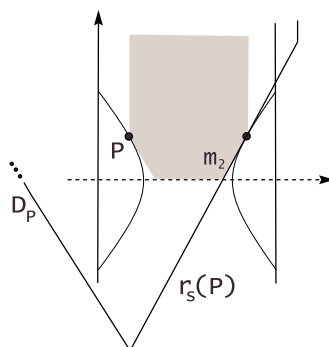
La construcción de los conjuntos de \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 y \mathcal{F}_3 se ha hecho de forma que estén contenidos en el interior de los dominios de Dirichlet de cualquiera de sus puntos. De este modo se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.2 *La imagen sobre el cilindro retorcido de todo conjunto de las familias \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 y \mathcal{F}_3 es un conjunto maximal para la posición euclídea.*

Demostración: Los argumentos usados para probar la proposición son los mismos independientemente de la familia a la que pertenezca el conjunto, por lo que sólo lo probaremos para los conjuntos de \mathcal{F}_1 .

Figura 2.13: Conjunto \mathcal{F}_3 .

Sea \mathcal{B} un conjunto de \mathcal{F}_1 . Las curvas u_1 y u_2 son tales que si consideramos un punto X sobre la primera, entonces la recta $r_s(X)$ es tangente a la segunda en un punto Y con la misma ordenada que X y a la inversa (para la recta $r_{s-1}(Y)$). Según esto, si P y Q son, respectivamente, los puntos sobre u_1 y u_2 a partir de los cuales construimos \mathcal{B} , entonces los segmentos m_1 y m_2 están contenidos en las rectas $r_s(P)$ y $r_{s-1}(Q)$, respectivamente. De este modo \mathcal{B} está contenido en el interior de D_P , tal y como se ve en la Figura 2.14.

Figura 2.14: \mathcal{B} está contenido en el dominio de Dirichlet de P .

Como su forma depende sólo de la altura del punto, si consideramos puntos de \mathcal{B} con la misma ordenada que P , sus dominios de Dirichlet son iguales que D_P pero trasladados hacia la derecha. Si nos movemos en esta dirección manteniendo el punto a la misma altura, su dominio de Dirichlet seguirá conteniendo en su interior a \mathcal{B} hasta que alcancemos el punto Q , donde las fronteras de D_Q y \mathcal{B} coincidirán sobre el segmento m_2 (Figura 2.15).

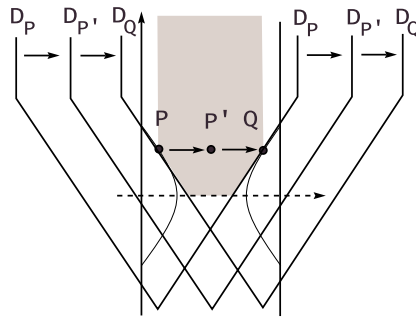


Figura 2.15: Si nos desplazamos por puntos de \mathcal{B} con la misma ordenada que P , sus dominios de Dirichlet siguen conteniendo el conjunto.

Si consideramos ahora un punto H sobre la vertical de P pero a mayor altura, la recta $r_s(H)$ seguirá cortando al eje de abscisas en el mismo punto, ya que el punto de corte sólo depende de la primera coordenada. Ahora bien, como la segunda coordenada de H es mayor que la de P , la pendiente de $r_s(H)$ es menor que la de $r_s(P)$ (Figura 2.16). De este modo, \mathcal{B} seguirá contenido en D_H y, siguiendo el razonamiento anterior, en el dominio de Dirichlet de cualquier otro de sus puntos con la misma altura que H . Con esto queda probada la contención para todos los puntos cuya segunda coordenada sea mayor o igual que P . Sólo falta hacer notar que si seguimos aumentando la altura de H , la recta $r_s(H)$ se confundiría con el eje OX en el límite.

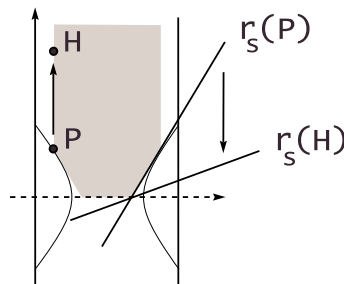


Figura 2.16: Conforme aumenta la altura del punto, la recta r_s se acerca al eje.

Quedan por estudiar los puntos situados en el trapecio limitado por los segmentos \overline{PQ} , m_1 , m_2 y el eje OX . Sea ahora H un punto sobre el segmento m_1 ;

como m_1 está contenido en $r_{s^{-1}}(Q)$,

$$d(H, Q) = d(H, s^{-1}(Q)) < d(H, s^n(Q)), \quad n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}.$$

Como los movimientos preservan las distancias,

$$d(H, Q) = d(s(H), Q) < d(s^m(H), Q), \quad m \in \mathbb{Z} - \{0, 1\},$$

luego Q pertenece a la recta $r_s(H)$. Además, como H tiene mayor abscisa que P , la recta $r_s(H)$ cortará al eje OX más a la derecha que $r_s(P)$, con lo que \mathcal{B} estará contenido dentro de D_H y, siguiendo el razonamiento anterior, también dentro de los dominios de Dirichlet de los puntos con su misma altura.

De este modo se prueba que \mathcal{B} coincide con la intersección de los interiores de los dominios de Dirichlet de sus puntos, luego, por el Teorema 2.1, está en posición euclídea y no puede existir ningún otro conjunto con esta propiedad que lo contenga. \square

La Proposición 2.2 demuestra la existencia de infinitos conjuntos maximales para la posición euclídea en el cilindro retorcido, hecho que complica bastante el problema de decidir cuándo un conjunto está en posición euclídea en esta superficie. Más aún, esta colección de conjuntos no es exhaustiva: pueden encontrarse conjuntos en posición euclídea que no están contenidos en ninguna de las familias anteriores.

Para ello basta considerar P y Q dos puntos de igual ordenada (positiva) situados sobre las curvas u_1 y u_2 restringidas a la banda limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Denotemos por R_1 y R_2 a dos puntos sobre las verticales de P y Q , respectivamente, tal y como se ve en la Figura 2.17. Como P y R_1 tienen la misma abscisa, las rectas $r_s(P)$ y $r_s(R_1)$ cortan al eje OX en el mismo punto, pero la segunda tiene menor pendiente. Podemos entonces escoger un tercer punto R_3 situado entre las rectas $r_s(P)$ y $r_s(R_1)$ (Figura 2.17) que, por construcción, estará dentro de los dominios de Dirichlet de R_1 y R_2 . Entonces, el conjunto $\{R_1, R_2, R_3\}$ está en posición euclídea y no hay ningún conjunto de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ o \mathcal{F}_3 que lo contenga.

Todo esto hace que no parezca viable la idea de buscar una lista exhaustiva de conjuntos maximales para la posición euclídea que nos permita adaptar las estrategias desarrolladas en el cilindro, el cono o el toro, por lo que trataremos de desarrollar un procedimiento nuevo para abordar el problema. Recurriremos a las propiedades $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$, con f una simetría con deslizamiento, y veremos que es posible diseñar un algoritmo que decida en tiempo $O(n \log n)$ si un conjunto de puntos cumple esta propiedad. De esta manera habremos desarrollado técnicas

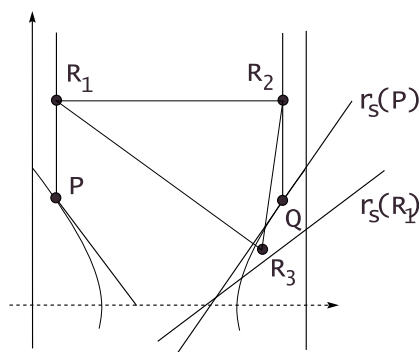


Figura 2.17: $\{R_1, R_2, R_3\}$ está en posición euclídea.

que comprueban las propiedades $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ de un conjunto *para un movimiento cualquiera*, último paso para poder determinar cuándo un conjunto se encuentra en posición euclídea en una *SOE*.

Buscamos entonces un método que nos permita decidir cuándo un conjunto $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ sobre el plano cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$, siendo s una simetría con deslizamiento.

Vamos a suponer el caso general en que \mathcal{B} es un conjunto con puntos a ambos lados del eje OX . En primer lugar construimos la envolvente convexa $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ de vértices $\{P_{i_1}, \dots, P_{i_M}\}$, que a partir de ahora supondremos ordenados en el sentido de las agujas del reloj. Dividimos la envolvente en hasta seis poligonales de la siguiente forma: llamamos tr a la poligonal que va desde el vértice de mayor ordenada hasta el de mayor abscisa o, si se alcanza antes, hasta el último con ordenada positiva. De igual forma, pero en sentido contrario a las agujas del reloj construimos la poligonal tl . Repitiendo este argumento partiendo del vértice de menor abscisa obtenemos las poligonales br y bl . Si encontramos vértices de la envolvente entre los vértices de menor o mayor ordenada y el eje OX , estos forman la poligonal mr o ml , según aparezcan al dirigirnos hacia el vértice de mayor o menor abscisa, respectivamente. Un ejemplo de esta división en poligonales se muestra en la Figura 2.18.

En adelante, en aras de una mayor simplicidad y claridad, vamos a trabajar sobre la poligonal tr , en la seguridad de que el razonamiento empleado puede trasladarse fácilmente al resto de poligonales.

Vamos a asociar a la poligonal tr una partición del eje OX en intervalos cuyos extremos sean los puntos de corte con dicho eje de las rectas resultantes de prolongar los segmentos de la poligonal. En caso de que exista, también incluiremos entre

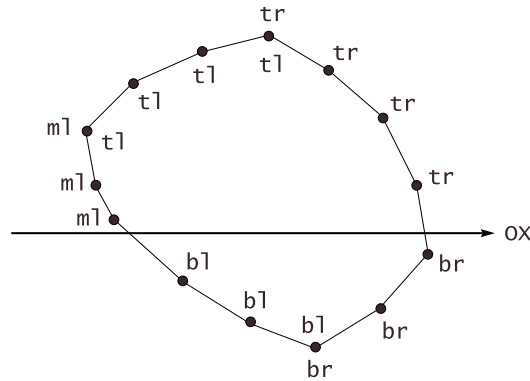


Figura 2.18: Un ejemplo de envolvente convexa dividida en cinco poligonales.

los intervalos de la partición al segmento de eje contenido en la envolvente, que denotaremos por \overline{se} . Estos intervalos serán cerrados en su extremo más próximo a la envolvente y abierto en el otro, por lo que \overline{se} es un intervalo abierto. En la Figura 2.19 puede verse la partición asociada a la poligonal tr del ejemplo anterior.

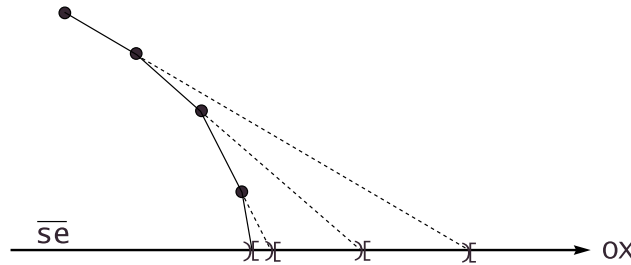


Figura 2.19: Partición del eje OX a partir de la poligonal tr .

Una vez hemos construido la partición, recorremos los vértices de la envolvente convexa procediendo de la siguiente forma: dado un vértice Q de la envolvente, calculamos el punto de corte, R , entre la recta $r_s(Q)$ y el eje OX . Este punto pertenecerá a uno y sólo un intervalo de la partición. Si está en \overline{se} , entonces $r_s(Q)$ divide a $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ y, por extensión a \mathcal{B} , en dos subconjuntos y no se cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$. En otro caso, R estará sobre uno de los intervalos cuyo extremo cerrado se ha hallado a partir de la prolongación de un cierto segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$. De los dos vértices que definen el segmento, tomamos el más alejado del eje OX , en este caso P_i , y trazamos la recta que lo une a R . Comparamos ahora las pendientes de $r_s(Q)$ y RP_i . Si la pendiente de $r_s(Q)$ es mayor o igual, entonces

$r_s(Q)$ corta a $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ por lo que existirá algún punto de la envolvente que no se encuentre en el mismo semiplano abierto que Q , y no puede cumplirse la propiedad $D(CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B}), s(CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})))$. En el caso en que la pendiente de $r_s(Q)$ sea menor que la de RP_i continuamos con el siguiente vértice.

Tras agotar todos los vértices de cada una de las poligonales, si no se ha producido ningún corte con la envolvente concluimos que se cumple $D(CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B}), s(CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})))$. Y, si la propiedad se cumple para su envolvente, también lo hará para \mathcal{B} , ya que, en caso contrario, podríamos encontrar un punto $Q \in \mathcal{B}$ para el que existiría algún otro vértice del conjunto al que $r_s(Q)$ dejaría en distinto semiplano (o bien pertenecería a la recta). Por convexidad, ésto también debería ocurrir para alguno de los vértices de la poligonal, digamos P (Figura 2.20). Esto implicaría que

$$d(s(Q), P) < d(Q, P) = d(s(Q), s(P)),$$

por lo que la recta $r_s(P)$ dividiría en dos la envolvente convexa de $s(\mathcal{B})$. En particular, existiría un vértice $s(R) \in CH_{\mathbb{R}^2}(s(\mathcal{B}))$ tal que

$$d(s(R), P) < d(R, s(P)) = d(R, P),$$

lo que contradice que se cumpla la propiedad $D(CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B}), s(CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})))$.

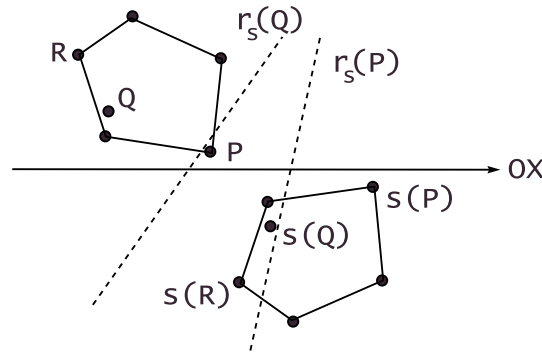


Figura 2.20: P está más próximo a $r_s(R)$ que a R .

El razonamiento anterior nos proporciona un algoritmo que decide en tiempo $O(n \log n)$ si un conjunto \mathcal{B} de n puntos cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$, cuando s es una simetría con deslizamiento.

Algoritmo D-SIMDES

Entrada: $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un conjunto de puntos sobre el plano.

Salida: \mathcal{B} cumple o no la propiedad $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$, siendo s una simetría con deslizamiento.

1. Cálculo de la envolvente convexa de \mathcal{B} : $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B}) = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_h}\}$.
2. Cálculo de las poligonales tr , tl , br , bl , mr y ml , de sus particiones del eje OX asociadas y del intervalo \overline{se} .
3. Desde $j = 1$ hasta h calculamos el punto de corte, $R(P_{i_j})$, entre la recta $r_s(P_{i_j})$ y el eje OX .
 - a) ¿Están sobre \overline{se} ?
 SI \rightarrow No se cumple $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$.
 NO \rightarrow Paso 3b.
 - b) Para cada poligonal localizamos sobre qué intervalo de sus particiones asociadas se encuentra $R(P_{i_j})$ y comparamos la pendiente de la recta $r_s(P_{i_j})$ con la recta que une el punto con el correspondiente vértice de la envolvente. ¿Corta la recta a la envolvente?
 SI \rightarrow No se cumple $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$.
 NO $\rightarrow [j \rightarrow j+1]$.
4. Sí se cumple $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$.

El Paso 1 requiere tiempo $O(n \log n)$, frente al tiempo lineal del Paso 2. Cada iteración del Paso 3 tiene un coste logarítmico, siendo necesarias n en el peor de los casos, por lo que el coste total del algoritmo es $O(n \log n)$, tal y como se recoge en el siguiente resultado:

Proposición 2.3 Sean $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de n puntos y $s \in Mo(\mathbb{R}^2)$ una simetría con deslizamiento. Entonces, es posible decidir si \mathcal{B} cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, s(\mathcal{B}))$ en tiempo $O(n \log n)$.

Según la posición del vértice, puede que algunas de las comprobaciones del Paso 3 no sean necesarias. Además, si todos los puntos de \mathcal{B} se encuentran al mismo lado del eje de simetría, basta considerar sólo las cadenas tl y tr si los puntos tienen ordenada negativa, y bl y br en caso contrario.

Con el resultado anterior cerramos la relación de métodos que nos permiten decidir si un conjunto cumple las propiedades $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ para cualquier movimiento f , lo que nos deja en disposición de enunciar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 2.4 *Dado un conjunto \mathcal{A} de n puntos sobre una superficie de órbitas euclídea $S = \mathbb{R}^2/\Gamma$, es posible determinar si \mathcal{A} está en posición euclídea en tiempo*

- a) $\Theta(n)$, si Γ no contiene ninguna simetría con deslizamiento;
- b) $O(n \log n)$, en otro caso.

Demostración: Sea \mathcal{B} una copia plana de \mathcal{A} . Por el Teorema 2.1 es suficiente comprobar si \mathcal{B} está contenido en la intersección de los interiores de los dominios de Dirichlet de sus puntos. Esto sucederá si y sólo si se cumple $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ para todo movimiento f de Γ . Ahora bien, en virtud del Lema 2.1 es suficiente comprobarlo para un número finito de movimientos. El tiempo requerido para ello es lineal (óptimo, ya que debemos visitar todos los puntos de \mathcal{B}) si los movimientos son simetrías, traslaciones o giros, y $O(n \log n)$ si son simetrías con deslizamiento (Proposición 2.3). □

2.4. Conclusiones y problemas abiertos

Una vez que hemos desarrollado técnicas que permiten determinar cuándo un conjunto se encuentra en posición euclídea, podemos preguntarnos cómo es de probable que un conjunto de n puntos escogidos uniforme e independientemente de forma aleatoria sobre una SOE cumpla esta propiedad. De nuevo volvemos la vista a [61], donde dicha probabilidad se calcula para conjuntos sobre el cilindro, el cono y el toro. Así, para un conjunto de n puntos sobre el cilindro o el cono, la probabilidad de que se encuentre en posición euclídea es de $n/2^{n-1}$. Esto significa, que para un conjunto de $n = 7$ puntos, esta probabilidad es aproximadamente del 10%, mientras que para $n = 15$ puntos es menor del 0'1%. Para el toro dicha probabilidad es $n^2/2^{2n-2}$.

Dicho cálculo se basa en la definición de posición euclídea local; lo que se calcula es la probabilidad que los conjuntos se encuentre entre dos generatrices diametralmente opuestas (o entre dos paralelos y dos meridianos diametralmente opuestos en el toro). Desgraciadamente, y debido a la falta de caracterizaciones sencillas para estas superficies, estos cálculos no pueden exportarse directamente a superficies que contengan simetrías con deslizamiento entre sus generadores. Queda entonces pendiente la búsqueda de alguna expresión que nos determine la probabilidad de que un conjunto sobre una SOE cualquiera se encuentre en posición euclídea.

El siguiente paso lógico, tras dar una definición y métodos para su determinación en las SOEs, sería extender el concepto *posición euclídea* a otras superficies. De nuevo volvemos a encontrar ideas en este sentido en [61], donde se presenta una definición más general basándose en términos de la Topología Algebraica. Dado un conjunto \mathcal{A} de puntos sobre una superficie cualquiera, se considera el conjunto $G(\mathcal{A})$ formado por todos los segmentos uniendo puntos de \mathcal{A} . Del mismo modo, se define el conjunto $T(\mathcal{A})$ como el formado por todos los segmentos uniendo puntos de $G(\mathcal{A})$. Se dirá que \mathcal{A} está en posición euclídea si $T(\mathcal{A})$ es simplemente conexo.

Así, el hecho de que un conjunto no estuviese en posición euclídea podría deberse a

- la existencia de una curva cerrada esencial (homotópicamente no nula);
- que $T(P)$ tenga un agujero (Figura 2.21);

lo que coincide con nuestra idea intuitiva de un conjunto *no plano*.

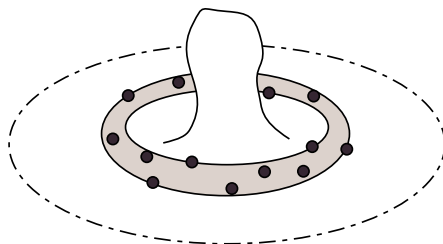


Figura 2.21: Los altos valores de la curvatura en una región de la superficie provocan que $T(P)$ (en gris) tenga un agujero, luego no está en posición euclídea.

Otra posible generalización puede hacerse a partir del concepto de *punto de corte* perteneciente a la Geometría Diferencial. Un punto de corte de un punto p es un punto q tal que si prolongamos la geodésica minimizante uniendo p y q , esta deja de serlo [19, 28]. El conjunto de todos los puntos de corte asociados a un punto se denomina *conjunto de corte*. A partir de aquí podríamos definir la posición euclídea de la siguiente forma: sea \mathcal{A} un conjunto de puntos y $H(\mathcal{A})$ la región acotada por segmentos que unen puntos de \mathcal{A} ; diremos que \mathcal{A} está en posición euclídea cuando $H(\mathcal{A})$ no contenga ningún elemento de los conjuntos de corte de sus puntos. Esta definición recuerda a la caracterización dada a partir de dominios de Dirichlet en el Teorema 2.1. Si consideramos, por ejemplo, superficies homeomorfas

al cilindro, bajo ciertas condiciones el conjunto de corte de un punto es precisamente su meridiano diametralmente opuesto [115], situación muy similar a la que se da en el cilindro. Pueden encontrarse más resultados sobre la determinación de los puntos y conjuntos de corte en superficies en [9, 46, 84, 85, 73].

Faltaría comprobar si estas dos posibles generalizaciones son consistentes con la que se presenta en este trabajo para las superficies de órbitas euclídeas, así como encontrar métodos que nos permitan decidir, basándonos en ellas, si un conjunto se encuentra en posición euclídea.

Capítulo 3

Envolvente métricamente convexa

La envolvente convexa es una de las estructuras básicas en Geometría Computacional, siendo un paso intermedio en muchos algoritmos. En superficies de órbitas esta construcción mantiene su importancia sólo si el conjunto de partida está en posición euclídea. En este caso la envolvente sobre la superficie coincide con la imagen de la envolvente convexa de una de sus copias planas, lo que permite trazarla usando los algoritmos planos conocidos. Si no, la envolvente convexa pasa a ser demasiado grande como para ser de utilidad.

3.1. Introducción

La envolvente convexa es una estructura en la que van de la mano simplicidad y belleza. Parte de una idea intuitiva y fácilmente comprensible, presenta la armonía que uno suele asociar a los conjuntos convexos y puede construirse mediante algoritmos sencillos y fáciles de entender.

Y además es útil.

Basta con hacer la prueba de introducir *convex hull* en un buscador cualquiera. El número de entradas resultantes será, seguro, bastante alto. Entre ellas, las pocas que se refieran a la estructura en sí estarán en su mayor parte relacionadas con la docencia o divulgación. El resto harán referencia a trabajos o artículos en las que la envolvente toma parte como herramienta o paso intermedio en algoritmos.

Podemos encontrar la envolvente dentro de trabajos dedicados al reconocimiento de patrones [8, 12, 41], procesamiento de imágenes [53, 99], cálculo del diámetro de un conjunto [48, 127], cálculo de una transversal [43, 89, 96], profundidad de

un punto en un conjunto [30], etc. Además, hay que destacar que la mayoría de las construcciones de interés en Geometría Computacional se desarrollan dentro de la envolvente.

La envolvente convexa es también una de las primeras estructuras estudiadas en la Geometría Computacional. Según Toussaint podemos rastrear los intentos de cálculo de la envolvente hasta 1967 [16], aunque es común retrasar esta fecha a 1972 [59].

Todo esto hace de la envolvente convexa un paso obligado a la hora de extender la Geometría Computacional a las SOEs. En la literatura existen distintas formas de generalizar el concepto de convexidad en el plano a otras superficies [62, 74]; continuando en la línea de este trabajo, nos basaremos en el concepto de conjuntos métricamente convexos dado en [80]. De este modo, diremos que un conjunto sobre una SOE es *métricamente convexo* si contiene a cualquier segmento que una pares de puntos del conjunto. La *envolvente métricamente convexa* (en adelante *envolvente convexa*) de un conjunto \mathcal{A} de puntos en una superficie es el menor conjunto métricamente convexo que contiene a \mathcal{A} , que denotaremos por $CH_S(\mathcal{A})$.

Al igual que en el plano, es fácil ver que la intersección de conjuntos convexos en una SOE es también convexo, y que la envolvente convexa $CH_S(\mathcal{A})$ puede obtenerse como la intersección de los conjuntos convexos que contienen a \mathcal{A} .

Un primer estudio de la envolvente convexa en SOEs puede encontrarse en el trabajo de Grima y Márquez [61] para los casos particulares del cilindro, el cono y el toro. Ahí se distinguía si el conjunto se encontraba en posición euclídea local (PEL), en cuyo caso presentaban un comportamiento similar al que tendría de estar en el plano. En cambio, si el conjunto no verificaba esta propiedad su envolvente resulta un conjunto demasiado *grande* como para poder aprovechar alguna de las propiedades que la caracterizan en el plano. Un ejemplo lo podemos ver en la Figura 3.1, donde se muestra la envolvente convexa de tres puntos que no están en posición euclídea sobre el cilindro. En este caso, la envolvente es una banda alrededor de la superficie, mientras que en el cono da lugar a un conjunto conteniendo el vértice o incluso puede llegar a ser toda la superficie en el toro. Esto impide usar la envolvente convexa como paso previo de otros algoritmos. Un ejemplo de esto lo podemos encontrar en [61] referido al cálculo del diámetro de un conjunto (Figura 3.2).

Esto sigue siendo cierto en las SOEs en general. Veremos que existe una isometría entre un conjunto en posición euclídea y cualquiera de sus copias planas, isometría que se mantiene cuando se considera la aplicación cociente restringida a las envolventes. Luego, a la hora de construir la envolvente convexa de un conjunto en posición euclídea en una SOE, será suficiente trazar la envolvente de una de sus

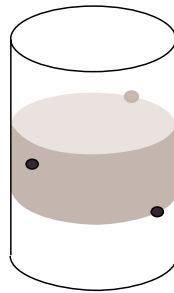


Figura 3.1: La envolvente convexa en el cilindro de tres puntos que no están en posición euclídea es una banda.

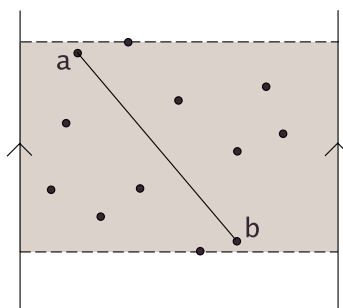


Figura 3.2: El diámetro de este conjunto en el cilindro es la distancia entre a y b , pero los puntos no pertenecen a la frontera de la envolvente convexa (región sombreada).

copias planas y tomar su imagen mediante dicha aplicación. Esto permite construir la envolvente convexa de conjuntos en posición euclídea utilizando los algoritmos clásicos del plano.

Además, esta identidad entre la envolvente convexa sobre la superficie y en el plano se convierte en la primera muestra de la correspondencia entre la definición de posición euclídea que dimos en el Capítulo 2 y su idea intuitiva: si un conjunto está en posición euclídea, su envolvente tendrá un aspecto plano sobre la superficie. El que sea la envolvente convexa la primera estructura en probar la bondad de la definición de posición euclídea no es casual. No en vano este término apareció por primera vez al estudiar la forma de la envolvente convexa en la esfera, el cilindro, el cono y el toro [61].

No sucede lo mismo para conjuntos en posición no euclídea donde, como ya se apuntó en [61], la envolvente convexa es demasiado grande (toda la superficie en algunas ocasiones) como para resultar de utilidad.

Este capítulo se divide en dos partes bien diferenciadas, en las que se estudiará la envolvente convexa de un conjunto sobre una SOE según éste se encuentre o no en posición euclídea. El principal resultado se encuentra en la Sección 3.2, donde se demuestra que existe una isometría entre un conjunto en posición euclídea y cada una de sus copias planas. A partir de aquí se prueba que la envolvente convexa $CH_{\mathcal{S}}(\mathcal{A})$ de un conjunto \mathcal{A} sobre una SOE se corresponde con la imagen mediante la aplicación cociente de la envolvente convexa $\varphi(CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B}))$ de una de sus copias planas \mathcal{B} . Posteriormente, en la Sección 3.3 se verá que para conjuntos en posición no euclídea la envolvente convexa resulta demasiado grande, restándole interés a su construcción, por lo que nos limitamos a dar algunas indicaciones sobre su forma.

3.2. Envolverte convexa y posición euclídea

Tal y como hemos indicado en la introducción, vamos a comenzar estudiando la envolvente convexa de conjuntos en posición euclídea. En estos conjuntos la envolvente convexa sobre la superficie puede construirse tomando la imagen de la envolvente de una de sus copias planas. Además de facilitar el cálculo de la envolvente, pues nos permite recurrir a los algoritmos conocidos en el plano, esto también sirve para ilustrar cómo la definición dada en el Capítulo 2 para posición euclídea en SOEs se corresponde con la idea intuitiva de *comportamiento plano*. Sin embargo, no es necesario llegar a la construcción de la envolvente para encontrar pruebas de la planaridad de los conjuntos en posición euclídea. Esto es ya evidente a partir del siguiente resultado, en el que se muestra que existe una isometría entre un conjunto en posición euclídea y cada una de sus copias planas.

Proposición 3.1 *Sea \mathcal{S} una SOE, $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ y \mathcal{B} una de sus copias planas. Entonces, \mathcal{A} está en posición euclídea si y sólo si φ restringida a \mathcal{B} , $\varphi|_{\mathcal{B}}$, es una isometría.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que \mathcal{A} está en posición euclídea y veamos que $\varphi|_{\mathcal{B}}$ es una isometría. Por el Teorema 2.1, \mathcal{B} está contenida en el interior del dominio de Dirichlet de cualquiera de sus puntos, luego todo par de puntos $P, Q \in \mathcal{B}$, están unidos por un segmento mínimo y $d(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q))$, que es lo que queríamos probar.

Recíprocamente, si $\varphi|_{\mathcal{B}}$ es una isometría, para todo $P \in \mathcal{B}$ el segmento uniendo P con cualquier otro punto de \mathcal{B} debe ser mínimo, por lo que \mathcal{B} está contenida en los dominios de Dirichlet de sus puntos. \square

Nótese que para que el hecho de que $\varphi|_{\mathcal{B}}$ sea una isometría implique que \mathcal{A} esté en posición euclídea es necesario que \mathcal{B} sea una de sus copias planas y, por tanto, se haya obtenido a partir de la intersección de la órbita de \mathcal{A} con un dominio de Dirichlet (abierto). En caso contrario, se podrían construir contraejemplos como el que se muestra en la Figura 3.3; aquí $\mathcal{A} = \varphi(\mathcal{B}) = \{p, q\}$ y $\mathcal{B} = \{P, Q\}$ son isométricos, pero \mathcal{A} no está en posición euclídea.

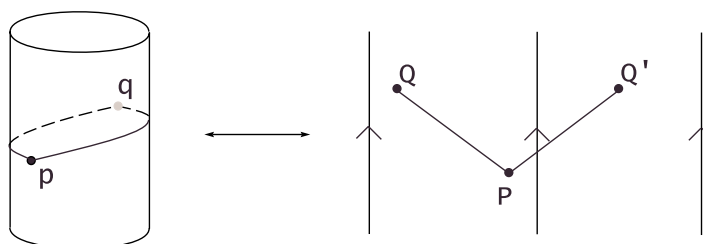


Figura 3.3: $\{p, q\}$ no está en posición euclídea aunque $d(P, Q') = d(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(p, q)$.

Esto se debe a que, como ya discutimos en el Capítulo 2, los puntos Q y Q' , que pertenecen a la misma órbita, se encuentran en la frontera del dominio de Dirichlet de P (P y Q son diametralmente opuestos). A partir de aquí podemos dar una versión más restringida de la Proposición 3.1.

Corolario 3.1 *Sea \mathcal{B} un conjunto de \mathbb{R}^2 y $\mathcal{A} = \varphi(\mathcal{B})$. Si \mathcal{A} está en posición euclídea, entonces $\varphi|_{\mathcal{B}}$ es una isometría.*

El recíproco, como hemos visto, no es cierto en general, sin embargo, si se mantiene la siguiente propiedad:

Proposición 3.2 *Sea \mathcal{B} un conjunto de \mathbb{R}^2 . Entonces, si $\varphi|_{\mathcal{B}}$ es una isometría, \mathcal{B} está contenido en la clausura de los dominios de Dirichlet de sus puntos.*

Demostración: Para todo punto $P \in \mathcal{B}$, como la aplicación cociente es una isometría sobre \mathcal{B} , el segmento uniendo P con cualquier otro punto $Q \in \mathcal{B}$ debe ser mínimo,

y Q está en la clausura del dominio de Dirichlet de P . □

A partir de la Proposición 3.1 se deduce de manera inmediata el siguiente resultado.

Corolario 3.2 *Si \mathcal{A} está en posición euclídea y \mathcal{B} es una de sus copias planas, entonces \mathcal{A} es convexo si y sólo si \mathcal{B} es convexo.*

Demostración: Si \mathcal{A} está en posición euclídea, por la Proposición 3.1 la aplicación cociente restringida a \mathcal{B} es una isometría, llevando segmentos mínimos en segmentos sobre la superficie. Luego si el segmento mínimo uniendo dos puntos de \mathcal{B} está en su interior, el segmento que une sus imágenes está en \mathcal{A} y viceversa. □

Podría pensarse en otra versión del Corolario 3.2, que afirmase que para todo conjunto conexo \mathcal{A} en una SOE, se tiene que \mathcal{A} es convexo si y sólo si las componentes conexas de $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$ son convexas. Sin embargo es fácil encontrar contraejemplos a este enunciado, tal y como ya vimos en la Figura 2.5 (pág. 19).

Antes de enunciar el resultado que relaciona la envolvente convexa de un conjunto en posición euclídea con la de sus copias planas, necesitaremos de un lema previo.

Lema 3.1 *Sea \mathcal{S} una SOE y $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ un conjunto en posición euclídea. Entonces su envolvente convexa $CH_{\mathcal{S}}(\mathcal{A})$ está en posición euclídea.*

Demostración: En virtud del Teorema 2.1, el desarrollo fundamental $df(\mathcal{A})$ puede escogerse como la imagen, salvo puntos dobles, del dominio de Dirichlet D_R construido a partir de un punto R de $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$. Denotamos por \mathcal{B} a la copia plana de \mathcal{A} así obtenida. Como D_R es convexo, contiene a $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$.

$CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ debe estar contenida en los dominios de Dirichlet de cualquiera de sus puntos. En caso contrario, existiría un punto $P \in CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ tal que D_P deja fuera parte de la envolvente. Como tanto $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ como D_P son convexas, podremos encontrar uno de los vértices de la envolvente, U , fuera de D_P . Recíprocamente, P no estaría en D_U y, haciendo uso de nuevo de la convexidad, podemos encontrar otro vértice de la envolvente, V , fuera de D_U (Figura 3.4). Pero como los vértices de $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ son puntos de \mathcal{B} , hemos encontrado dos puntos $U, V \in \mathcal{B}$ tal que el segmento que los une no es mínimo, lo que contradice la hipótesis de que \mathcal{B} es la copia plana de un conjunto en posición euclídea.

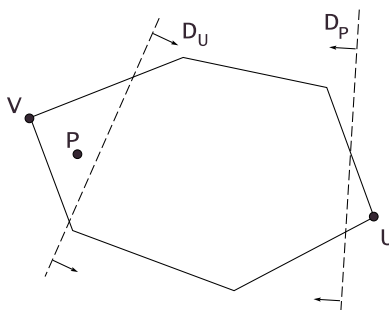


Figura 3.4: Si U no está en D_P , entonces D_U no contiene a P ni, por convexidad, a algún vértice V de $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$.

Como $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ está contenida en los dominios de Dirichlet de sus puntos, aplicando la Proposición 3.1 obtenemos que su imagen está en posición euclídea. Como además, por el Corolario 3.2, $CH_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{B})$ es convexa, contiene a $CH_S(\mathcal{A})$, que está en posición euclídea. \square

Llegados a este punto, estamos en condiciones de enunciar el teorema que identifica la envolvente convexa de un conjunto en posición euclídea en una SOE con la imagen, mediante la aplicación cociente, de la envolvente de cualquiera de sus copias planas.

Teorema 3.1 *Sea \mathcal{S} una SOE, $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ un conjunto de puntos en posición euclídea y $df(\mathcal{A})$ un dominio fundamental obtenido a partir del dominio de Dirichlet D de un punto de $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$. Entonces*

$$CH_S(\mathcal{A}) = \varphi(CH_{\mathbb{R}^2}(\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \cap D)).$$

Demostración: En la prueba del Lema 3.1 se demuestra que $\varphi(CH_{\mathbb{R}^2}(\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \cap D))$ está en posición euclídea y contiene a $CH_S(\mathcal{A})$, así que sólo es necesario probar la otra inclusión.

Por el Corolario 3.2, $\varphi^{-1}(CH_S(\mathcal{A})) \cap D$ es convexa, ya que es la copia plana de un conjunto, $CH_S(\mathcal{A})$, convexo y, por el Lema 3.1, en posición euclídea. Además, $\varphi^{-1}(CH_S(\mathcal{A})) \cap D$ contiene a $\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \cap D$, por lo que

$$CH_{\mathbb{R}^2}(\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \cap D) \subseteq \varphi^{-1}(CH_S(\mathcal{A})) \cap D,$$

y por tanto

$$\varphi(CH_{\mathbb{R}^2}(\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \cap D)) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(CH_S(\mathcal{A})) \cap D) = CH_S(\mathcal{A}),$$

de donde se obtiene la igualdad. \square

El Teorema 3.1 proporciona una manera sencilla de construir la envolvente convexa de un conjunto en posición euclídea. Cuando queramos calcularla bastará con considerar una copia plana del conjunto, construir sobre ella la envolvente y llevar la estructura de vuelta a la superficie mediante la aplicación cociente (Figura 3.5). No va a ser necesario desarrollar nuevos procedimientos sobre la superficie, sino que basta con recurrir a los bien conocidos algoritmos sobre el plano. Se mantiene entonces en las SOEs la complejidad $O(n \log n)$ necesaria para construir la envolvente en el plano. El hecho de que previamente haya sido necesario determinar que el conjunto se encuentra en posición euclídea no supone ningún incremento en el tiempo de computación ya que, como vimos en el Teorema 2.4, esto también supone, a lo sumo, $O(n \log n)$.

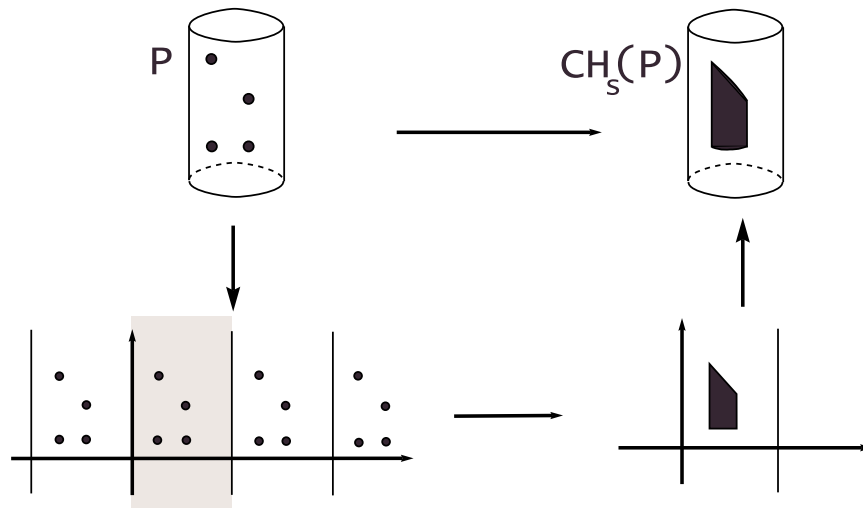


Figura 3.5: La envolvente convexa de un conjunto en posición euclídea sobre una SOE puede obtenerse a partir de una de sus copias planas.

La identidad entre las envolventes sobre la superficie y en el plano que muestra el teorema cobra importancia también si tenemos en cuenta que la mayoría de los métodos usados en Geometría Computacional tienen lugar en el interior de la envolvente. Cuando el conjunto esté en posición euclídea esto nos va a permitir operar dentro de la envolvente de una de sus copias planas, lo que apunta hacia una simplificación en los procedimientos con respecto a trabajar directamente sobre la superficie.

Además, el Teorema 3.1 refleja el comportamiento plano que se pretendía establecer en el Capítulo 2 al definir el concepto de posición euclídea, pudiendo entenderse una prueba de la bondad de la definición dada entonces.

3.3. E. C. de conjuntos en posición no euclídea

En la sección anterior quedaba establecida la isometría que existe entre la envolvente convexa de un conjunto en posición euclídea y la envolvente de sus copias planas, lo que nos permite construir la envolvente convexa en la superficie de manera sencilla. Además, ésta va a seguir manteniendo las buenas propiedades que la distinguen en el plano y que nos permiten usarla, por ejemplo, para encontrar el diámetro de un conjunto.

No va a suceder lo mismo si el conjunto de partida no está en posición euclídea. En este caso la envolvente convexa va a ser demasiado grande, perdiéndose casi toda la información que pudiese resultar de ayuda para otras construcciones. Esto refuerza el carácter plano que motivó la definición de posición euclídea y acentúa la importancia de distinguir cuándo un conjunto cumple esta propiedad.

Como en el Capítulo 2, partimos del trabajo desarrollado en [61] para el cilindro, el cono y el toro. Recordamos que dado un conjunto en posición no euclídea sobre estas superficies, su envolvente convexa es

- a) una banda en el cilindro;
- b) un conjunto que contiene al vértice en el cono;
- c) una banda contenida entre dos generatrices del toro si los puntos están en posición cilíndrica (entre dos generatrices diametralmente opuestas); o
- d) toda la superficie para puntos en posición no cilíndrica en el toro.

Estos resultados pueden interpretarse también, de una manera más general, para conjuntos en posición no euclídea con respecto a una traslación, un giro, o dos traslaciones con distintas direcciones respectivamente. Así, podríamos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.2 *Sea $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ una SOE, $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ y \mathcal{B} una copia plana de \mathcal{A} . Si no se cumple la propiedad $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ para $f \in \Gamma$, entonces la envolvente convexa $CH_{\mathcal{S}}(\mathcal{A})$*

- a) contiene a la imagen de una banda si f es una traslación, una simetría o una simetría con deslizamiento; o
- b) incluye un punto localmente C_m si f es un giro.

Demostración: Vamos a empezar la demostración para el caso en que f sea una traslación. Si no se cumple $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$, siguiendo un desarrollo similar al realizado en la demostración del Teorema 2.1, podemos obtener una poligonal formada por segmentos mínimos $\overline{P_1 P_2 \dots P_m f(P_1)}$ uniendo un punto $P_1 \in \mathcal{B}$ con su imagen mediante f .

Para cada tres puntos consecutivos no alineados de la poligonal, el interior del triángulo que definen está contenido en $CH_S(\mathcal{A})$. Esto es evidente si los puntos están en posición euclídea. En caso contrario razonamos como en [61]. Supongamos que P_1, P_2 y P_3 no están en posición euclídea. Entonces P_3 queda fuera del dominio de Dirichlet de P_1 . Sea Q el punto de corte entre D_{P_1} y el segmento $\overline{P_2 P_3}$ (Figura 3.6); P_1, P_2 y Q forman un triángulo de segmentos mínimos, y la imagen de su interior está contenida en $CH_S(\mathcal{A})$.

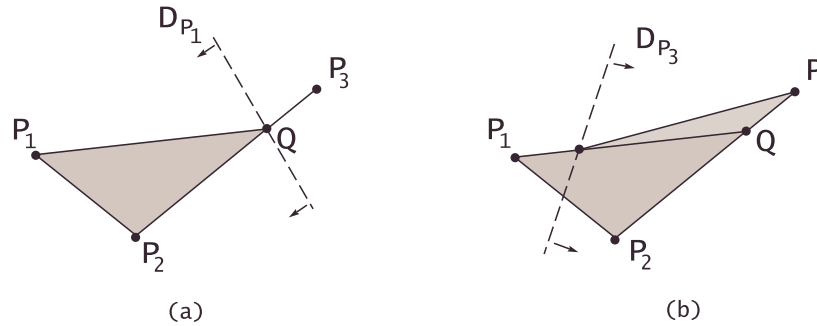


Figura 3.6: Los puntos P_1, P_2 y Q están unidos por segmentos mínimos.

Repetimos el mismo argumento para el punto de corte entre el segmento $\overline{P_1 Q}$ y la frontera de D_{P_3} , obteniendo un nuevo triángulo. Continuando de esta forma, asintóticamente se tiene que el interior del triángulo de vértices P_1, P_2, P_3 está contenido en $CH_S(\mathcal{A})$. Reiterando el proceso con el resto de triángulos de la poligonal, e incluyendo en ella los nuevos segmentos (como el $\overline{P_1 P_3}$) se completa, tal y como muestra la Figura 3.7, una banda en la dirección de la traslación f .

El mismo proceso se sigue cuando f es una simetría o simetría con deslizamiento. Sólo hay que tener en cuenta que la composición de dos de estos movimientos es una traslación.

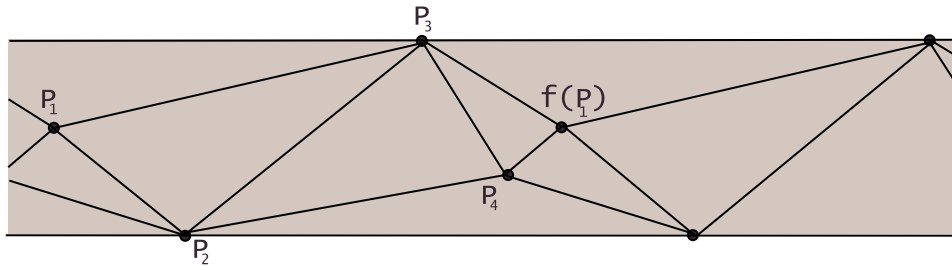


Figura 3.7: La envolvente convexa de \mathcal{A} contiene la imagen de una banda definida por los puntos de \mathcal{B} .

Finalmente, consideremos el caso en que f es un giro y veamos que la envolvente contiene a su centro, O . Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que la imagen de O no está contenida en $CH_S(\mathcal{A})$. Sea entonces P el punto de \mathcal{B} más cercano a O ; podemos trazar una circunferencia centrada en O que pase por P y que no contiene ningún otro punto de la envolvente. Ahora bien, utilizando los mismos argumentos que antes se demuestra que la envolvente contiene al segmento uniendo P y $g(P)$, lo que contradice que P sea el punto más cercano a O (Figura 3.8). Luego la imagen de O , que es un punto singular, está en $CH_S(\mathcal{A})$. \square

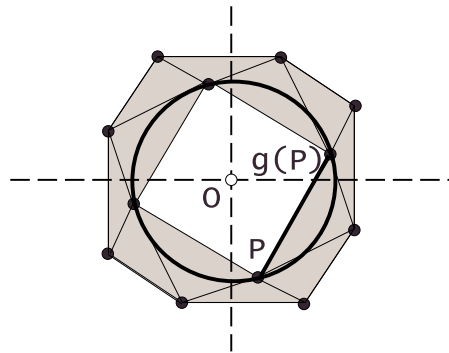


Figura 3.8: El segmento uniendo P y $g(P)$ debe pertenecer a la envolvente, lo que contradice que P sea el punto más cercano al centro del giro O .

Hemos de hacer notar que el Teorema 3.2 indica que la envolvente convexa *contiene* una banda o al vértice de giro, sin afirmar cuál es su forma final. Esto es

así porque la forma de $CH_S(\mathcal{A})$ va a depender también del resto de movimientos que constituyan Γ . Así, en el toro, si el conjunto no está en posición euclídea pero se encuentra entre dos generatrices diametralmente opuestas (*posición cilíndrica*), su envolvente es una banda, pero si tampoco está en posición cilíndrica la envolvente es toda la superficie (en general esto se cumple para cualquier Γ que contenga dos traslaciones).

Sin embargo, entrar a detallar las posibles casuísticas en cada una de las SOEs no forma parte de los objetivos de este trabajo. Los casos reflejados en el Teorema 3.2 son suficientes como para hacernos ver que el estudio de la envolvente de conjuntos en posición no euclídea no presenta el mismo interés que cuando nos reducíamos a los conjuntos que sí cumplían dicha propiedad. Una envolvente tan grande no resulta de utilidad a la hora de usarla como parte del preprocesamiento para otros algoritmos. Como vimos al iniciar este capítulo, ya no tiene sentido apoyarse en la envolvente convexa de un conjunto en posición no euclídea para encontrar su diámetro (mayor distancia entre dos puntos del conjunto), ya que ésta puede ser toda la superficie o, como ya se vio en la Figura 3.2, una banda que la rodea. En cambio, en el plano este cálculo puede hacerse en tiempo $\Theta(n \log n)$ usando la envolvente convexa del conjunto. La pérdida de utilidad de la envolvente se refleja también al llevar a las SOEs otros problemas como el cálculo de la anchura de un conjunto [61].

Surge entonces la pregunta de si es posible encontrar una construcción que aporte la información que da la envolvente convexa en el plano para conjuntos en posición no euclídea. En [61] se apunta la idea del *polígono contenedor mínimo*. Si llamamos *polígono euclídeo* a toda región de una superficie homeomorfa a un disco cerrado cuya frontera está formada por un conjunto finito de segmentos, el polígono contenedor mínimo asociado a un conjunto de puntos es el polígono euclídeo de menor perímetro que lo contiene. Podría ser interesante, entonces, estudiar la construcción de dichos polígonos y ver si la información que aportan sobre el conjunto puede suplir de alguna forma la que, para conjuntos en el plano, proporciona la envolvente.

3.4. Conclusiones y problemas abiertos

Los resultados expuestos en este capítulo, junto con los del Capítulo 2, nos permiten detectar si un conjunto se encuentra en posición euclídea y, en el caso de que así sea, trazar su envolvente en tiempo $O(n \log n)$. Esto es importante, ya que supone que se puede calcular la envolvente sin que se incremente el tiempo necesario para el plano.

También se ha visto que, si el conjunto no está en posición euclídea, su envolvente convexa resulta demasiado grande como para resultar de utilidad, por lo que habría que diseñar algoritmos alternativos para aquellas construcciones que se apoyan en ella en el plano (ver [61] para ejemplos en el cilindro, el cono y el toro). Todo ello refuerza la idea de comportamiento plano que se encuentra detrás de la posición euclídea.

La naturaleza de este capítulo no deja mucho margen para futuros desarrollos. Como líneas abiertas podríamos plantearnos extender el estudio de la relación entre posición euclídea y otros ámbitos de la Geometría Computacional. También puede plantearse el cálculo detallado de las posibles configuraciones de puntos en las SOEs y las distintas envolventes a las que dan lugar si los puntos no están en posición euclídea, aunque en ese caso la construcción de la envolvente puede no resultar ya de ayuda si se piensa en ella como paso intermedio de algún otro algoritmo.

Finalmente está pendiente la búsqueda de estructuras que suplan la falta de utilidad de la envolvente para conjuntos en posición no euclídea. Tal y como se apuntaba en la sección anterior, una de las ideas al respecto pasa por el estudio de los polígonos contenedores mínimos. Sería necesario comprobar si estos pueden llegar a jugar el papel de la envolvente convexa como paso previo en algoritmos sobre la superficie.

Capítulo 4

Subconjuntos máximos en posición euclídea

En el capítulo anterior vimos que la envolvente convexa perdía su utilidad en conjuntos en posición no euclídea. En estos casos puede resultar de ayuda trabajar con los subconjuntos de mayor cardinal que sí tengan esta propiedad: los *subconjuntos máximos en posición euclídea (SMPE)*. El cardinal de sus SMPE es una medida de la dispersión del conjunto sobre la superficie. Los SMPE presentan además un interés añadido debido a que en su estudio surgen abundantes relaciones con otros problemas de la Geometría Computacional para los que se aportan nuevos o se mejoran antiguos resultados, como en el cálculo de la profundidad máxima de un arreglo, la profundidad por subespacios de un punto, la iluminación por focos de un conjunto o los subgrafos completos maximales en una cierta clase de grafos geométricos. En este capítulo se estudia la complejidad necesaria para encontrar tanto uno como todos los SMPE de un conjunto, su número y cardinal mínimo, tanto para las SOEs como para la esfera. Estos tiempos son polinómicos en general, salvo para las SOEs con simetrías con deslizamiento, donde aparecen conjuntos con un número exponencial de SMPE.

4.1. Introducción

En capítulos anteriores se ha presentado una definición de posición euclídea en SOEs que generaliza la dada por Grima y Márquez en [61] para el cilindro, el cono y el toro. La importancia de esta propiedad proviene de que en los conjuntos que la cumplen pueden adaptarse fácilmente los algoritmos planos conocidos.

Sin embargo es difícil que un conjunto tomado al azar sobre una SOE esté en posición euclídea. Esto hace que para completar nuestro estudio sea necesario volvernos hacia los conjuntos que no cumplen esta propiedad. En el capítulo anterior, al asomarnos al cálculo de su envolvente convexa, hemos visto cuánto se alejan estos conjuntos del comportamiento plano que había motivado nuestro estudio, lo que traía como consecuencia la pérdida de utilidad de la envolvente.

Como modo de aproximarse al estudio de estos conjuntos surge de manera natural la posibilidad de trabajar sobre sus subconjuntos de mayor cardinal en posición euclídea: los *subconjuntos máximos en posición euclídea (SMPE)*. Veremos más adelante que, aunque estadísticamente sea muy difícil que un conjunto cualquiera sobre una SOE tenga esta propiedad (ver [61] para un cálculo sobre el cilindro, el cono y el toro), siempre vamos a encontrar subconjuntos suyos bastante grandes que sí la cumplen.

El uso de los SMPE se asocia a la medida de la planaridad del conjunto. Dado un conjunto de 30 puntos sobre una SOE, si el cardinal de sus SMPE es, por ejemplo, 15, nos indica que éste se haya muy disperso sobre la superficie. En cambio, un cardinal de 28 o 29, se traduce en un conjunto bastante agrupado, con un comportamiento cercano a la planaridad. Esto puede hacer que nos planteemos trabajar en algunos casos con los subconjuntos en posición euclídea para aprovechar sus buenas propiedades aún a costa de despreciar algunos datos. Incluso podríamos plantearnos dar una aproximación rápida a un problema prescindiendo de un número reducido de puntos si a cambio conseguimos la planaridad. Este no va a ser el objetivo de este capítulo, sino que nos centraremos en la búsqueda de los SMPE. Veremos que los conjuntos en las SOEs orientables tienen un número polinómico de SMPE (a lo sumo $O(n^3)$), y proporcionaremos algoritmos que los encuentran en tiempo óptimo. Esto no es así en aquellas superficies con simetrías con deslizamiento entre sus generadores, en las que pueden aparecer conjuntos con un número exponencial de SMPE.

Si lo que buscamos es medir la planaridad del conjunto sólo es necesario calcular el cardinal de los SMPE, para lo que basta encontrar uno de ellos. Veremos la manera de hacerlo en las SOEs orientables, lo que disminuye, en la mayor parte de los casos, el tiempo de computación necesario para encontrarlos todos. Estos algoritmos serán, en general, óptimos. Sin embargo no hemos sido capaces hasta el momento de determinar si es posible encontrar algún algoritmo polinómico que encuentre un SMPE en una SOE no orientable, ni de probar que este problema sea NP-duro.

Hemos mencionado a lo largo de esta memoria que nuestro trabajo continúa el desarrollado por Grima y Márquez [61], que presentaron por primera vez la posición euclídea para el cilindro, el cono, el toro y la esfera. Los capítulos anteriores han

buscado generalizar el trabajo en las tres primeras superficies extendiéndolo a la clase de las SOEs, a la que pertenecen. Tras hacer esto vemos como paso lógico, al introducir el nuevo concepto de SMPE, que nuestro estudio englobe también la otra superficie sobre la que surgió la posición euclídea, esto es, la esfera. Veremos así cómo encontrar tanto uno como todos los SMPE en esta superficie, así como su número y cardinal mínimo.

Además de lo dicho hasta ahora, una de las principales motivaciones para trabajar con SMPE, y que podría por sí sola justificar su estudio, son las numerosas relaciones con otros problemas de la Geometría Computacional y la Teoría de Grafos que surgen al trabajar con ellos.

El primero de ellos es el del emplazamiento óptimo de un conjunto: dónde colocarlo de manera que cubra el mayor número de puntos de una nube [5, 14, 31, 47]. Veremos que encontrar un SMPE en las SOEs orientables se convierte en un problema de emplazamiento óptimo para polígonos convexos en el plano o cubos en \mathbb{R}^3 .

También hay una relación entre los SMPE y el cálculo de la profundidad por semiespacios de un punto, que es el cardinal del menor subconjunto de una nube de entre todos los que se forman al intersecarla con los hiperespacios conteniendo a un punto fijo [10, 102]. A partir de resultados conocidos para la profundidad por semiplanos podemos establecer que los algoritmos que presentamos para encontrar un SMPE en varias superficies son óptimos. Y la relación entre la búsqueda de SMPE en la esfera con la profundidad por semiespacios en \mathbb{R}^3 nos conducirá a mejorar el tiempo necesario para el cálculo de dicha profundidad.

Además, la búsqueda de SMPE en las almohadas puede relacionarse con un problema de iluminación por focos fijos: dados varios focos en el plano, cómo situarlos de manera que iluminen simultáneamente el mayor número posible de puntos de un conjunto [25, 39, 49, 92, 114].

Finalmente veremos que es posible asociar un grafo geométrico a todo conjunto sobre una SOE, asignando un vértice a cada elemento de su órbita y siendo dos de ellos adyacentes cuando los una un segmento mínimo. En esta clase de grafos, encontrar un subgrafo completo maximal es equivalente a dar con un SMPE del conjunto original. Este problema, que es NP-duro en general [24, 56], resulta tener así solución en tiempo polinómico para los grafos de segmentos obtenidos a partir de conjuntos sobre una SOE orientable.

Este capítulo se organiza como sigue: en primer lugar, en la Sección 4.2, formalizaremos la definición de SMPE y desarrollaremos métodos para encontrarlos, ya sea a todos o a sólo uno, estudiaremos su número y cuál es su cardinal mínimo.

La Sección 4.3 lleva el estudio de estos problemas a la esfera. En la Sección 4.4 se hará un repaso a los problemas de otros campos de la Geometría Computacional o la Teoría de Grafos que intervienen en el estudio de los SMPE, y cerraremos el capítulo con una sección dedicada a conclusiones y problemas abiertos.

4.2. Subconjuntos máximos en posición euclídea

Dado un conjunto \mathcal{A} sobre una superficie, diremos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es un *subconjunto máximo en posición euclídea (SMPE)* de \mathcal{A} si:

- a) \mathcal{B} está en posición euclídea, y
- b) para todo $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ en posición euclídea, $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}|$.

La relación entre el cardinal de un conjunto y el de sus SMPE es un indicador de la dispersión del conjunto sobre la superficie.

A partir de la definición surgen de manera natural varias preguntas, como

- a) cuántos SMPE puede tener un conjunto en una SOE y cuánto tiempo se requiere para encontrarlos todos;
- b) si es posible reducir este tiempo cuando únicamente se pretenda encontrar *un único* SMPE y, de este modo, determinar su cardinal; y
- c) cuál es el tamaño mínimo de los SMPE.

La respuesta a estas cuestiones marcará el desarrollo de esta sección.

El estudio de los SMPE no puede abordarse desde la misma perspectiva que la determinación de la posición euclídea. En el Capítulo 2 nos basábamos en las relaciones de cercanía entre un conjunto y sus copias respecto a cada tipo de movimiento para dar un resultado general. Se partía de un conjunto finito de movimientos del grupo que generaba la superficie y se comprobaba que el conjunto estuviese en posición euclídea para cada uno de ellos. El procedimiento era el mismo para todas las superficies, dependiendo el tiempo de computación de si entre los generadores se encontraban o no simetrías con deslizamiento. Sin embargo, a la hora de estudiar los SMPE no puede razonarse *movimiento a movimiento*, sino que hay que considerarlos en su conjunto. Como veremos al buscar los SMPE de conjuntos sobre el toro, considerar por separado las dos traslaciones que generan

el grupo discreto lleva a resultados erróneos, siendo necesario trabajar con las dos al tiempo.

Frente al criterio seguido en el Capítulo 2, en éste trabajaremos *superficie a superficie*, que es la razón que subyace tras la división de las SOEs en familias dada en el Capítulo 1. Cada una de ellas (recortes de plano, cilindros, conos, toros, almohadas y SOEs con simetrías con deslizamiento) presenta un comportamiento similar en lo que a la búsqueda de SMPE se refiere.

4.2.1. Buscando *todos* los SMPE

Nuestro primer paso va a ser elaborar métodos que nos permitan encontrar todos los SMPE de un conjunto en una SOE y, como consecuencia, calcular el número de los que puede llegar a tener. En ambos casos va a jugar un papel importante la familia a la que pertenezca la superficie, obteniéndose el siguiente resultado:

Teorema 4.1 *El número de SMPE de un conjunto de puntos sobre una SOE \mathcal{S} es*

- a) *uno, si \mathcal{S} es un recorte de plano y es posible encontrarlo en tiempo $\Theta(n)$;*
- b) *$O(n)$, si \mathcal{S} es un cilindro o un cono, siendo necesario tiempo $\Theta(n \log n)$ para encontrarlos todos;*
- c) *$O(n^2)$, si \mathcal{S} es un toro o una almohada con 2 o 3 puntos localmente C_m , requiriéndose tiempo $\Theta(n^2)$ para encontrarlos;*
- d) *$O(n^3)$, si \mathcal{S} es una almohada con 4 puntos localmente C_2 , que se encuentran en tiempo $\Theta(n^3)$, y,*
- e) *$O(2^{\frac{n}{2}})$, si \mathcal{S} es una superficie con simetrías con deslizamiento, pudiendo encontrarse en tiempo $O(2^n)$.*

Destaca en la lista anterior el salto a un número exponencial de SMPE en las superficies con simetrías con deslizamiento, salto que remarca aún más el diferente comportamiento de estas superficies que ya empezó a vislumbrarse en el Capítulo 2.

Para demostrar el Teorema 4.1 necesitaremos trabajar en cada una de las familias de superficies por separado. Con el objeto de facilitar la discusión en aquellas

superficies generadas a partir de traslaciones y giros, introduciremos un nuevo término basado en el estudio de la posición euclídea local realizado en [61]. Llamaremos *región euclídea* asociada a un movimiento f a:

- a) la banda limitada por dos rectas paralelas, perpendiculares a la dirección de la traslación y de anchura la mitad de su módulo, si f es una traslación;
- b) la región angular de amplitud la mitad del ángulo de giro y vértice en su centro, si f es un giro.

Las regiones euclídeas están muy relacionadas con las propiedades $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ que utilizamos en el Capítulo 2. Es fácil comprobar que un conjunto \mathcal{B} está en la región euclídea de una traslación o giro f si y sólo si cumple las propiedades $D(\mathcal{B}, f(\mathcal{B}))$ y $D(\mathcal{B}, f^{-1}(\mathcal{B}))$. La razón para introducir el nuevo término es que a partir de ahora no partiremos de un conjunto para comprobar si está en posición euclídea, sino que moveremos la región euclídea buscando conjuntos con esta propiedad. Partiendo de esta relación y teniendo en cuenta los resultados vistos en el Capítulo 2 se demuestra de manera inmediata la siguiente proposición:

Proposición 4.1 *Sea $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ una SOE, $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ y \mathcal{B} una de sus copias planas. Si \mathcal{A} está en posición euclídea, entonces \mathcal{B} está contenida en la región euclídea de toda traslación o giro de Γ .*

El recíproco es cierto si Γ sólo contiene giros y traslaciones.

A la hora de determinar si un conjunto en el plano está en el interior de las regiones euclídeas asociadas a las traslaciones y giros de Γ , no será necesario considerarlos todos. Así, para un conjunto de traslaciones de vectores paralelos, es fácil darse cuenta que basta probarlo para la región euclídea de la traslación de menor módulo. Análogamente, si tenemos varios giros con el mismo centro, un conjunto estará dentro de sus regiones euclídeas si y sólo si está en el interior de la región correspondiente al de menor ángulo de giro. De este modo, cuando trabajemos con un grupo discreto con traslaciones paralelas o giros con centro en un mismo punto nos referiremos solamente a *la* traslación o *el* giro, dando por sobreentendido que se trata de la de menor módulo o ángulo respectivamente.

A partir de aquí vamos a desarrollar la demostración del Teorema 4.1 por medio de varios resultados parciales, cada uno de ellos referido a una familia de SOEs.

Recortes de plano

Como vimos en el Capítulo 1, estas superficies son las generadas a partir de un conjunto de simetrías, y su nombre se debe a que son isométricas a polígonos en el plano. Esto hace de ellas las superficies más sencillas de estudiar, pero también las que menos interés presentan. Tanto para estudiar estas superficies como, en general, aquellas en las que interviene alguna simetría, nos van a resultar de gran ayuda varios de los resultados que aparecen en [21]. En el trabajo citado se define la *celda de reflexión* de un grupo discreto como la menor región (abierta) de \mathbb{R}^d que tiene todas las caras contenidas en hiperplanos de reflexión. En nuestro caso, las celdas de reflexión son las menores regiones acotadas por los ejes de las simetrías del grupo. Las celdas de reflexión cumplen dos importantes propiedades:

Proposición 4.2 [21] *Sea R una celda de reflexión y $P \in R$. Sea $\mathcal{B} = \Gamma P \cap R$ el subconjunto de la órbita ΓP de P dentro de R . Entonces:*

$$Vor_{\Gamma P}(P) = R \cap Vor_{\mathcal{B}}(P)$$

En particular, si el grupo está generado a partir de simetrías, como es el caso que nos ocupa ahora, se tiene:

Corolario 4.1 [21] *Si existe un dominio fundamental D para Γ tal que D es una celda de reflexión, (es decir, si G está generado por simetrías) entonces:*

$$Vor_{\Gamma P}(P) = D_P = D, \quad \forall P \in D$$

donde D_P representa el dominio de Dirichlet de P .

A partir de estos resultados puede deducirse el comportamiento de los SMPE en estas superficies:

Proposición 4.3 *Un conjunto de n puntos sobre un recorte de plano tienen un único SMPE que puede hallarse en tiempo $\Theta(n)$.*

Demostración: Un conjunto está en posición euclídea si y sólo si está contenido en la intersección de los interiores de los dominios de Dirichlet de sus puntos, lo que, según el Corolario 4.1, en estas superficies sucede si y sólo si está contenido en una celda de reflexión. Luego todo conjunto sobre un recorte de plano tiene un único SMPE, que es el resultante de eliminar del conjunto inicial todos los puntos en la

frontera de la celda de reflexión, que son precisamente los puntos localmente D_m (aquellos cuya órbita se encuentra sobre los ejes de las simetrías).

Para construir el SMPE basta eliminar los puntos sobre los ejes de simetría, lo que supone tiempo $\Theta(n)$, que es óptimo ya que debemos recorrer todos los puntos.

□

A partir de la Corolario 4.1 se deduce que el efecto de las simetrías puede observarse como si *plegasen* o *recortasen* la superficie sobre el eje de éstas, tal y como se veía en la Figura 1.6 (pág. 8). Cuando más adelante estudiemos los SMPE en otras familias de superficies, desarrollaremos métodos que se apoyan en las copias planas de los conjuntos. Al dar los algoritmos para buscar SMPE nos limitaremos a aquellas SOEs cuyo grupo discreto asociado no contenga simetrías. En el caso de que el grupo contuviese alguna, los métodos no varían; simplemente habría que reducir el conjunto de datos de partida a aquellos que estén contenidos en una misma celda de reflexión.

Cilindros y conos

Tras los recortes de plano, las SOEs con un comportamiento más sencillo son los cilindros y conos. Los cilindros son superficies generadas a partir de grupos formados por traslaciones de vectores paralelos (lo que da lugar a la superficie que da nombre a la familia), donde puede aparecer también una o dos simetrías (de donde resultan el cilindro semiacotado y el acotado, respectivamente, que tienen uno o dos conjuntos conexos de puntos localmente D_m o bordes). En la Figura 1.8 (pág. 10) se mostraba una representación de estas superficies.

La superficie que da nombre a la familia de los conos es la generada a partir de un grupo cíclico C_m , formado por giros con centro común que puede generarse a partir de un único giro de $\frac{360}{m}$ grados. Pueden añadirse una o dos simetrías, de donde resultan las superficies que aparecían en la Figura 1.9 (pág. 11). En este caso el plano queda dividido en celdas de reflexión conteniendo cada una de ellas un centro de giro, que dan lugar al único punto localmente C_m de la superficie.

En estas superficies podemos encontrar los SMPE haciendo uso del algoritmo que se usaba en [61] para determinar la posición euclídea local (PEL; ver Capítulo 2). Recordamos que un conjunto sobre el cilindro o el cono cumplía la propiedad PEL si y sólo si estaba contenido entre dos generatrices diametralmente opuestas. Además, vimos que sobre el cilindro y el cono la PEL y la posición euclídea son equivalentes. A partir de estas ideas llegamos al siguiente resultado:

Proposición 4.4 *Un conjunto de n puntos en una superficie cilíndrica o cónica tiene $O(n)$ SMPE que pueden hallarse en tiempo $O(n \log n)$.*

Demostración: Vamos a adaptar el algoritmo dado en [100] para calcular la profundidad por subespacios de un punto (haremos referencia a este problema más adelante) de manera que nos permita encontrar todos los SMPE.

Sea \mathcal{A} un conjunto de puntos en un cilindro o cono. Vamos a proyectar los puntos de \mathcal{A} sobre una circunferencia c tal y como se hacía en [61]. En dicho trabajo se construía c intersecando la superficie con un plano ortogonal a su eje de simetría. Como esta definición puede llevar a confusión en algunos conos, tomamos c como la imagen sobre la superficie de una recta en dirección de la traslación en el cilindro, o de una circunferencia centrada en un centro de giro (y de radio lo suficientemente pequeño como para no contener a ningún otro centro ni intersectar a los ejes de simetría, de haberlas) en el cono.

Proyectamos los puntos de \mathcal{A} sobre c , ortogonalmente en el caso de los cilindros, o siguiendo el segmento que los une con el vértice para los conos. Esto convierte la búsqueda de los SMPE en la de encontrar los mayores conjuntos contenidos en un arco de 180 grados. Para ello tomamos una recta que pase por el centro de c y contamos los puntos en cada una de las semicircunferencias resultantes. Llamaremos a estos conjuntos I y D , y ambos están en posición euclídea (Figura 4.1). Si hacemos girar r dejando fijo el centro de la circunferencia llegará un momento en que uno de los dos perderá un punto que ganará el otro. Continuamos el barrido de la circunferencia actualizando los cardinales hasta que r complete un giro de 180 grados, momento en el que volveremos a tener los conjuntos I y D de partida. Los conjuntos de mayor cardinal que hayamos encontrado por el camino son precisamente los SMPE.

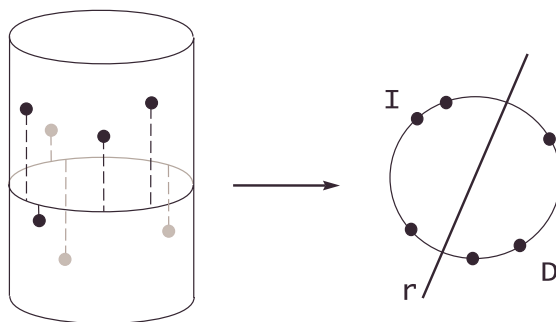


Figura 4.1: Construcción de los conjuntos I y D .

El tiempo de computación viene dominado por el $O(n \log n)$ necesario para la ordenación radial de los puntos, ya que tanto la construcción de I y D como su actualización requieren tiempo lineal.

Además, en el desarrollo anterior queda claro que un conjunto de n puntos puede tener a lo sumo n SMPE, para el caso en que el conjunto estuviese repartido uniformemente sobre c . \square

En la Proposición 4.4 aparece implícita la cota inferior $\Omega(n)$, dada por el número de SMPE, en el número de operaciones para encontrarlos todos. Podemos plantearnos entonces si es posible reducir la complejidad $O(n \log n)$ que da la proposición hasta un orden lineal o si, por el contrario, ésta es óptima. En la búsqueda de problemas relacionados que puedan dar indicaciones al respecto, es interesante señalar la semejanza del problema anterior y la búsqueda del menor arco de circunferencia cubriendo un conjunto n puntos. En [105] se demuestra que esto requiere coste $\Omega(n \log n)$, aunque si sólo se quiere conocer si este arco es menor que 180 grados, el tiempo puede reducirse a $\Theta(n)$ utilizando distintos procedimientos [61, 105]. Aunque en nuestro caso no buscamos el menor arco que cubra a un número fijo de puntos, sino la posición de un arco de amplitud fija que cubra un mayor número de puntos, los resultados anteriores parecen apuntar a que el tiempo dado en la Proposición 4.4 es óptimo. Sin embargo, para probar esto es necesario recurrir a un nuevo problema: el cálculo de la profundidad por semiplanos en \mathbb{R}^2 .

Dada \mathcal{A} una nube de puntos de \mathbb{R}^d , la *profundidad por semiespacios* de un punto $P \in \mathbb{R}^d$ con respecto a \mathcal{A} es el menor número de puntos de \mathcal{A} contenidos en cualquier subespacio que incluya a P . En [10] se prueba que el cálculo de la profundidad por semiplanos en \mathbb{R}^2 requiere un tiempo de computación de $\Theta(n \log n)$. La relación entre éste problema y la búsqueda de SMPE en cilindros y conos prueba la optimalidad del tiempo dado en la Proposición 4.4.

Proposición 4.5 *Hallar los $O(n)$ SMPE de un conjunto de n puntos en cilindros y conos requiere tiempo $\Theta(n \log n)$.*

Demostración: Por la Proposición 4.4 sabemos que los SMPE pueden hallarse en $O(n \log n)$ operaciones en el peor de los casos. Vamos a ver que este tiempo es óptimo a partir del cálculo de la profundidad por semiplanos en \mathbb{R}^2 . Partimos de una nube de n puntos \mathcal{A} y sea P el punto al que queremos calcular su profundidad con respecto a \mathcal{A} . Trazamos una circunferencia con centro en P y proyectamos los puntos de \mathcal{A} sobre ella siguiendo la recta que los une con P . Identificamos entonces esta circunferencia con una curva en la superficie de un cilindro o un cono como la

que construimos al demostrar la Proposición 4.4 y buscamos sus SMPE haciendo girar una recta r tal y como hacíamos entonces (Figura 4.2). Cada posición de r que dé lugar a un SMPE determina también, de vuelta al plano, dos semiplanos con P en su frontera, que dan lugar a dos subconjuntos de \mathcal{A} , uno de ellos con cardinal mínimo que da la profundidad por subespacios de P , cuyo valor es n menos el cardinal de uno de los SMPE de \mathcal{A} .

Como calcular la profundidad por subespacios en el plano requiere $\Theta(n \log n)$ operaciones [10], encontrar un SMPE requerirá al menos $\Omega(n \log n)$, lo que prueba la proposición. \square

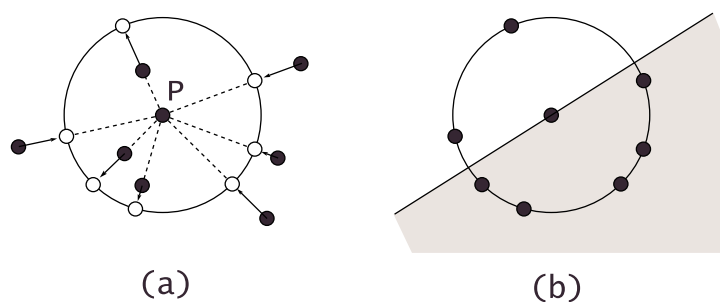


Figura 4.2: La profundidad por semiplanos puede hallarse proyectando los puntos sobre una circunferencia, (a), y buscando el arco de 180 grados que contenga el menor número de ellos, (b).

Toros

Los toros son SOEs cuyo grupo discreto está generado por dos traslaciones con distintas direcciones. Si el ángulo que forman es de 90 grados, entonces la superficie resultante recibe el nombre de *toro plano*. Caso contrario hablaremos de un *toro torcido*. Esta diferencia entre ambos toros, que podría parecer poco importante, origina un cambio en la métrica de la superficie que da lugar a diferencias de comportamiento que veremos más adelante, en especial cuando estudiemos el grafo de triangulaciones en el Capítulo 5.

A la hora de buscar los SMPE en el toro, se puede estar tentado de, al estar generado por dos traslaciones, aplicar por veces los métodos vistos en el cilindro. Así, podríamos buscar en primer lugar los SMPE con respecto a una de las traslaciones y, dentro de ellos, repetir la búsqueda en la dirección de la otra traslación. Sin

embargo este procedimiento no es válido, pues pueden encontrarse configuraciones de puntos como la que se muestra en la Figura 4.3, donde el método anterior da lugar a conjuntos con cardinal menor que el de un SMPE. En la Figura 4.3, (a), se han buscado en primer lugar los SMPE como si se tratara de un cilindro generado por la traslación horizontal, lo que da lugar al conjunto de 17 puntos dentro de la banda vertical. Se considera entonces esta banda como un cilindro generado por la traslación vertical y se repite la búsqueda, lo que da lugar al conjunto de 13 puntos que aparece en el cuadrante sombreado. Sin embargo, en la Figura 4.3, (b), vemos un conjunto en posición euclídea con 16 puntos.

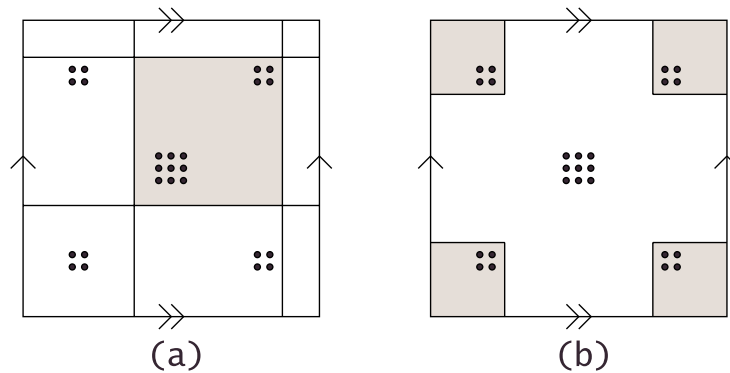


Figura 4.3: Si se trabaja sobre cada traslación por separado, (a), se obtiene un subconjunto en posición euclídea con menor cardinal que el de un SMPE, (b).

Nos vemos obligados entonces a desarrollar nuevos procedimientos a partir de los cuales obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.6 *Un conjunto de n puntos sobre un toro tiene $O(n^2)$ SMPE que pueden hallarse en tiempo $\Theta(n^2)$.*

Demostración: A diferencia de los cilindros y conos, en el caso de los toros trabajaremos a partir de una copia plana del conjunto. Dado un conjunto \mathcal{A} en un toro, llamaremos \mathcal{B} a una de sus copias planas. Aunque el resultado final es el mismo, la demostración presenta ligeras diferencias dependiendo de si \mathcal{A} está sobre un toro plano o torcido, así que distinguiremos los dos casos.

Supongamos en primer lugar \mathcal{A} sobre un toro plano. Recordamos que el dominio de Dirichlet de todo punto en esta superficie es un rectángulo de lados paralelos a la dirección de las traslaciones que generan la superficie y longitud la del módulo de la

traslación correspondiente. El Teorema 2.3 establecía la identidad entre posición euclídea y PEL en el toro plano, de donde se deducía que un conjunto en esta superficie está en posición euclídea si y sólo si está contenido en un cuadrante, que es la región limitada entre dos meridianos y dos paralelos diametralmente opuestos de la superficie. En el plano, un cuadrante es el rectángulo de medidas la mitad de un dominio de Dirichlet, resultante de la intersección de las regiones euclídeas de las dos traslaciones que generan el toro.

Para buscar todos los SMPE a partir de \mathcal{B} , necesitamos tener en cuenta los elementos de la órbita de \mathcal{A} que se encuentren en el mismo cuadrante que un punto de \mathcal{B} . Sea D el dominio de Dirichlet a partir del cual se obtiene \mathcal{B} ; llamaremos \mathcal{B}^+ al subconjunto de $\Gamma\mathcal{B}$ contenido en el rectángulo resultante de tomar todos los cuadrantes con puntos en D (Figura 4.4).

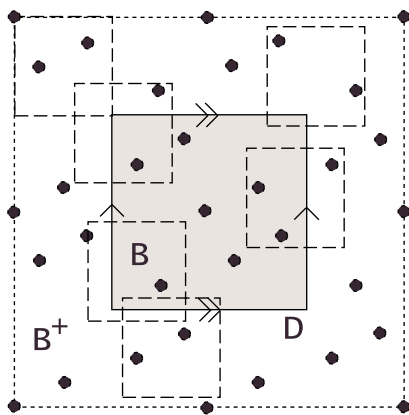


Figura 4.4: Los puntos de \mathcal{B}^+ son los de la órbita de \mathcal{B} que están dentro de un cuadrante con un punto en el dominio de Dirichlet D (sombreado).

Ordenamos los puntos de \mathcal{B}^+ tanto por abscisas como por ordenadas. Sea P el punto de menor abscisa (si hubiese más de uno escogemos el de menor ordenada). Situamos la región euclídea asociada a la traslación horizontal, que es una banda vertical, de manera que la recta de menor abscisa de las que forman su frontera, que notaremos por i , pase por P . Partiendo del punto de mayor ordenada de los que estén en su interior, vamos desplazando dentro de la banda un cuadrante hasta llegar al punto de menor ordenada (Figura 4.5). Cada vez que el cuadrante pierda o gane un punto actualizamos el cardinal de los puntos de \mathcal{B}^+ en su interior. De aquí resulta una lista de n conjuntos, entre los que seleccionamos aquellos de cardinal máximo.

Una vez recorrida la banda en su totalidad, la desplazamos hacia la derecha

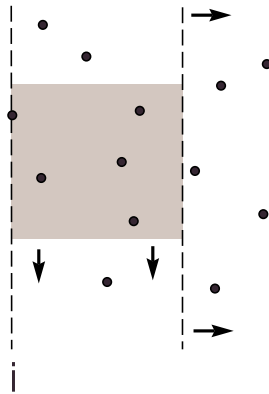


Figura 4.5: Una vez fijada la región euclídea realizamos un barrido en su interior. Cada conjunto dentro del cuadrante sombreado está en posición euclídea. Cuando acabamos con una banda, la desplazamos hasta el siguiente punto de menor abscisa.

hasta que la recta de menor abscisa de su frontera alcance al siguiente punto con abscisa mayor estricta que P y repetimos el razonamiento hasta agotar los puntos de \mathcal{B}^+ . Los conjuntos de mayor cardinal entre los hallados son todos los SMPE de \mathcal{A} .

\mathcal{B}^+ contiene $4n$ puntos, por lo que es necesario tiempo $O(n \log n)$ para ordenarlos. El barrido en cada una de las $O(n)$ bandas requiere $O(n)$ operaciones, de donde resulta un tiempo $O(n^2)$. Por construcción hemos hallado a lo sumo $O(n^2)$ candidatos a SMPE, que habrá que recorrer seleccionando aquellos con mayor cardinal. El proceso en su totalidad requiere entonces un tiempo de computación cuadrático.

Igual complejidad se obtiene en el toro torcido, aunque en esta superficie hay que tener en cuenta que los dominios de Dirichlet de sus puntos son hexágonos de tamaño fijo [21]. Con los mismos argumentos usados en el toro plano es fácil comprobar que un conjunto en el toro torcido se encuentra en posición euclídea si y sólo si una de sus copias planas está contenida en un hexágono de lados paralelos a los de un dominio de Dirichlet pero cuya longitud es la mitad de la de éstos. Estos hexágonos, que llamaremos *hexágonos euclídeos*, son precisamente la intersección de las regiones euclídeas de las traslaciones del grupo discreto asociado a la superficie.

El proceso para hallar los SMPE es el mismo del toro plano, salvo que \mathcal{B}^+ se construye recubriendo por hexágonos euclídeos el dominio de Dirichlet hexagonal

que da lugar a \mathcal{B} , y que son estos hexágonos los que se utilizan para encontrar los SMPE. Si probamos que el barrido mediante hexágonos euclídeos dentro de la banda (que se corresponde con una región euclídea asociada a la traslación horizontal) tiene coste lineal, obtendremos que el tiempo total necesario es, al igual que en el toro plano, cuadrático.

Veamos cómo realizar este barrido. Los hexágonos euclídeos están formado por dos rectas paralelas verticales unidas por dos poligonales, que denotaremos por p_e (a la superior) y por p_s (la inferior). A cada punto $Q \in \mathcal{B}^+$ dentro de la región euclídea donde queremos realizar el barrido le asociamos los puntos Q_e y Q_s que resultan del corte de la recta i con las poligonales p_e y p_s pasando por Q , que llamaremos, respectivamente, *punto de entrada* y *punto de salida* de Q (Figura 4.6). Si Q está sobre i , será su propio punto de entrada y de salida.

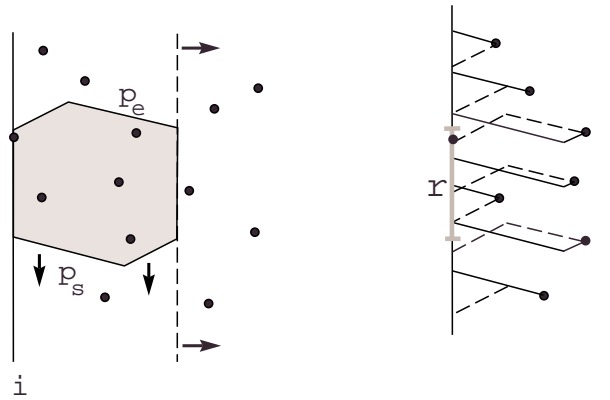


Figura 4.6: A cada punto le asignamos un punto de entrada y otro de salida a partir de p_s y p_i . Estos puntos son los que vamos a tener en cuenta a la hora de realizar el barrido.

Para hacer el barrido recorreremos i de arriba a abajo con un segmento r de longitud la de los segmentos verticales que definen un hexágono euclídeo. En cada paso, r llevará asociado un conjunto en posición euclídea formado por los puntos cuyos punto de entrada y de salida estén sobre él. Cada vez que r encuentra un nuevo punto de entrada, añadimos el punto correspondiente al conjunto y lo eliminamos cuando su punto de salida deje r . Los subconjuntos de mayor cardinal hallados de esta forma son candidatos a SMPE.

El proceso supone $O(n)$ operaciones en cada una de las $O(n)$ bandas, más un tiempo $O(n^2)$ para recorrer los $O(n^2)$ candidatos a SMPE.

Tanto en el toro plano como en el torcido podemos encontrar todos los SMPE en tiempo cuadrático, lo cual es también una cota para su número. Veamos que existen conjuntos con $O(n^2)$ SMPE, con lo que se probará que el tiempo necesario para encontrarlos es óptimo.

Para ello basta considerar los conjuntos que aparecen en la Figura 4.7. En (a) vemos un conjunto sobre el toro plano. La región sombreada representa un cuadrante, y los puntos de su interior forman un SMPE. Si desplazamos el cuadrante horizontal o verticalmente el conjunto gana y pierde al tiempo un elemento, por lo que su cardinal se mantiene. Existen $\frac{n}{4}$ posiciones horizontales para situar el cuadrante de manera que de lugar a un SMPE, y cada una de ellas permite $\frac{n}{4}$ posiciones verticales, lo que da un total de $\frac{n^2}{16}$ SMPE. En (b) sucede lo mismo para el toro torcido.

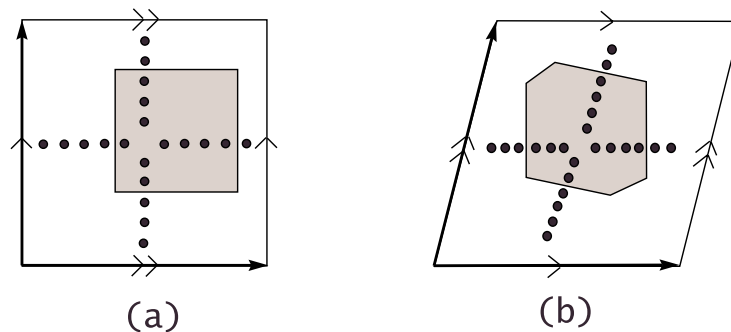


Figura 4.7: Conjuntos en el toro plano, (a), y torcido, (b), con un número cuadrático de SMPE.

De este modo hemos construido conjuntos en ambos toros con un número cuadrático de SMPE, lo que finaliza la demostración. \square

Almohadas

Como se dijo en el Capítulo 1, las almohadas son SOEs con entre dos y cuatro puntos localmente C_m en las que no intervienen simetrías con deslizamiento. Además, el grupo discreto asociado a una almohada puede generarse siempre a partir de giros y, en algunas de ellas, simetrías. A diferencia de las superficies vistas anteriormente, la forma de los dominios de Dirichlet de un punto en estas superficies no es fija, sino que depende de la posición de éste, como se ve en la

Figura 4.8 para la almohada generada a partir de dos giros de 180 grados (para una descripción detallada de las formas de los dominios de Dirichlet asociados a grupos cristalográficos se recomienda el trabajo de Bochiş [21]). Podría parecer que esto añade una complicación extra que nos obligaría a diseñar nuevos métodos para buscar los SMPE. Afortunadamente no es así, ya que los dominios de Dirichlet siguen siendo regulares si pensamos en ellos a partir de los ángulos que forman los puntos con respecto a los centros de giro.

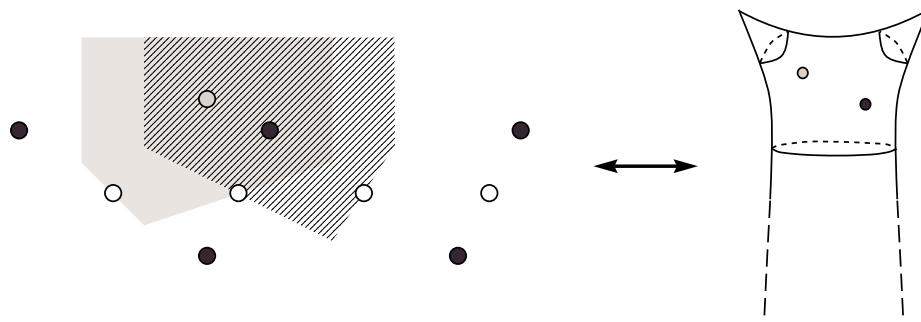


Figura 4.8: A la izquierda vemos dos puntos (en gris y en negro) y sus correspondientes dominios de Dirichlet (en gris y rallado resp.), además de la órbita de uno de ellos. A la derecha, una representación en \mathbb{R}^3 de la superficie. Los centros de giro (círculos blancos) se corresponden con los puntos localmente C_2 (*picos*) de la superficie.

Al no tener los dominios de Dirichlet una forma fija en estas superficies tampoco existen, a priori, regiones que cumplan el papel de los cuadrantes o los hexágonos euclídeos en el toro. Esto nos fuerza a cambiar los métodos de búsqueda de los SMPE, debiendo en primer lugar delimitar las regiones del plano donde podemos encontrarlos (sus copias planas). Se define una *zona de búsqueda* como la región limitada por el eje OX y dos rectas verticales pasando por centros de giro consecutivos. Puede comprobarse fácilmente que las zonas de búsqueda cumplen las siguientes propiedades que nos ayudarán en la determinación de los SMPE.

Proposición 4.7

- a) Siempre es posible situar las regiones euclídeas de todos los giros de Γ de manera que cubran un zona de búsqueda dada.
- b) Un conjunto en posición euclídea puede estar en, a lo sumo, dos zonas de búsqueda adyacentes.

La demostración de ambas propiedades es inmediata a partir de la forma de las regiones euclídeas en esta superficie.

Las zonas de búsqueda van a ayudarnos a encontrar los SMPE en las almohadas. Empezaremos por la almohada con dos puntos localmente C_2 que veíamos en la Figura 4.8.

Proposición 4.8 *Un conjunto de n puntos sobre una almohada con dos puntos localmente C_2 tiene $O(n^2)$ SMPE que pueden hallarse en tiempo $\Theta(n^2)$.*

Demostración: Estas superficies están generadas bien a partir de dos giros de 180 grados (Figura 4.8), bien a partir de dos giros más una simetría paralela a la línea que une sus centros. La composición de los giros da lugar a un conjunto infinito de ellos, cuyos centros se disponen sobre una recta que fijaremos como eje OX . Para que un conjunto esté en posición euclídea sus copias planas deberán estar contenidas en las regiones euclídeas de todos los giros (y en una celda de reflexión, caso de que aparezcan simetrías), que son sectores angulares de amplitud 90 grados con vértice en los centros de giro. Además, hay que tener en cuenta que la composición de dos giros de centros consecutivos da lugar a una traslación de módulo dos veces la distancia entre éstos (que a partir de ahora fijaremos como la unidad), que también habrá de considerarse a la hora de determinar cuándo un conjunto está en posición euclídea.

La Proposición 4.7 nos dice que debemos buscar las SMPE en zonas de búsqueda adyacentes. Si las dos zonas comparten un segmento del eje OX , entonces para que un conjunto esté en posición euclídea es suficiente con que esté en el interior de las regiones euclídeas de los dos giros cuyos centros comparten. Para que las demás regiones también lo contengan basta con que el resto de las regiones formen con el eje OX el mismo ángulo que la región más cercana de entre las dos originales. No es necesario preocuparse de la región euclídea de la traslación, ya que las zonas de búsqueda están ya dentro de ella (Figura 4.9).

Si, en cambio, las dos zonas comparten una semirrecta vertical, para que un conjunto esté en posición euclídea debe estar contenido en la región euclídea del giro cuyo centro comparten y la asociada a la traslación. Basta con fijar las regiones del resto de los giros con uno de sus lados sobre el eje OX para que también contengan al conjunto (Figura 4.10).

En cualquiera de los dos casos, para determinar si un conjunto se encuentra en posición euclídea sólo es necesario considerar dos movimientos. En función de esto, veamos cómo podemos encontrar los SMPE en estas superficies.

Partimos en primer lugar de un dominio fundamental D formado por dos zonas

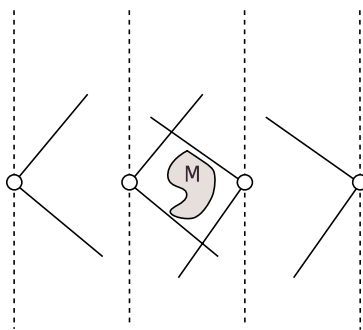


Figura 4.9: Si M está en la región euclídea de los giros centrales, también lo estará de los del resto.

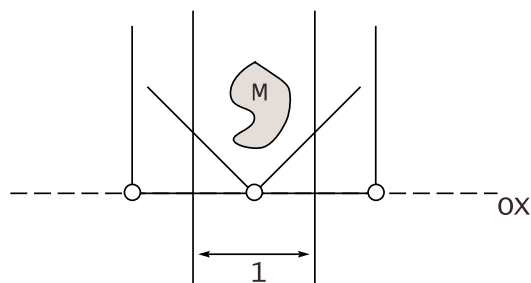


Figura 4.10: A cada punto le hacemos corresponder los ángulos que forman con la horizontal los segmentos que le unen a los centros de giro.

de búsqueda adyacentes que comparten un segmento sobre el eje OX . En este caso deberemos buscar conjuntos de cardinal máximo contenidos en las regiones euclídeas de los dos giros que se encuentran en la frontera de D , y a cuyos centros denotaremos por a y b . Para ello vamos a realizar un cambio de coordenadas que va a convertir la situación en una similar a la que se daba en el toro plano.

A cada punto de la órbita de \mathcal{A} contenido en D le vamos a asignar la dupla formada por los ángulos que forman con el eje OX los segmentos que lo unen a a y b . Considerando los ángulos en los sentidos adecuados, tenemos que a todo punto en el interior de D le corresponde un punto del cuadrado $(-90, 90) \times (-90, 90)$. Obsérvese que, tal y como se ve en la Figura 4.11, los puntos sólo pueden ir sobre el primer y tercer cuadrante en el plano, y que todos los puntos sobre la recta uniendo los centros de giro van a parar sobre el origen de coordenadas.

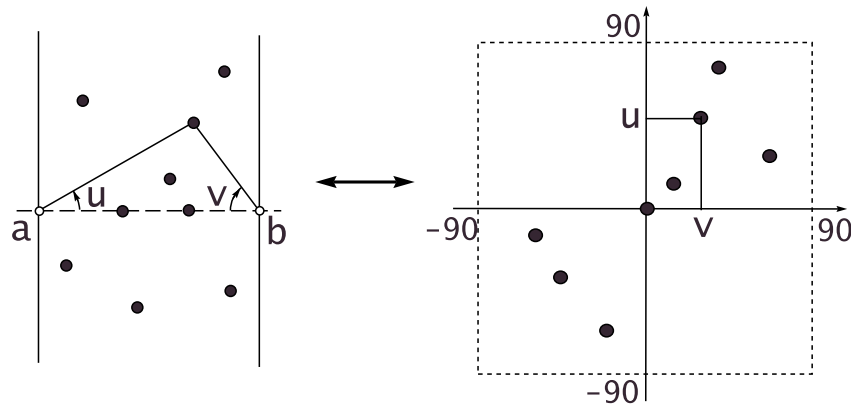


Figura 4.11: En este caso sólo hemos de tener en cuenta uno de los giros y la traslación.

Realizando este cambio de coordenadas hemos conseguido que las regiones euclídeas, originalmente sectores angulares de 45 grados con vértices en a o b , se conviertan en bandas verticales u horizontales, respectivamente, de anchura 45. Los conjuntos en posición euclídea en el interior de D son aquellos cuyos transformados están en el interior de un cuadrado de 45×45 . Esto nos permite, utilizando las técnicas vistas en el toro plano, encontrar todos los candidatos a SMPE contenidos en D en tiempo $O(n^2)$.

Pasemos ahora a estudiar la otra búsqueda que puede darse en esta superficie, la que implica a un giro y a una traslación. En este caso trabajamos sobre dos zonas de búsqueda que comparten una semirrecta vertical, formando un dominio fundamental que denotaremos por D' . Llamaremos a al centro de giro que comparten las dos zonas de búsqueda que dan lugar a D' .

A cada punto de D' le hacemos corresponder el par dado por el ángulo que forma con el eje OX el segmento que lo une a a , y por la distancia del punto a la recta vertical pasando por a . De este modo, los puntos de D' van a parar sobre un rectángulo de medidas $(0, 180) \times (-1, 1)$. Ahora los conjuntos en posición euclídea son los contenidos en un rectángulo de 90×1 y volvemos a aplicar los razonamientos vistos en el toro plano.

Queda probado entonces que el problema de encontrar todos los SMPE de una almohada con dos puntos localmente C_2 puede convertirse en el de realizar varias búsquedas de $O(n^2)$ operaciones cada una. Falta estudiar, para finalizar, cuántas de estas búsquedas son necesarias.

Supongamos que partimos de un dominio fundamental D formado por una banda vertical limitada por dos centros de giro consecutivos sobre el eje OX . Dado un conjunto en posición euclídea, podemos tomar uno de sus transformados por los movimientos del grupo de tal forma que tenga al menos un punto en D , por lo que podemos restringirnos a estos conjuntos para hallar los SMPE. Como un conjunto en posición euclídea sólo puede estar en dos zonas de búsqueda adyacentes, las opciones vienen dadas bien por buscar en las dos zonas que forman D , bien por tomar una de ellas junto con otra con la que comparta una semirrecta vertical. Esto nos daría una búsqueda de dos giros (la que tiene lugar dentro de D) y cuatro de un giro y una traslación. Ahora bien, es fácil darse cuenta que estas cuatro últimas en realidad son dos que se repiten sobre los mismos puntos, tal y como se muestra en la Figura 4.12. Tenemos que realizar entonces tres búsquedas, cada una con un número cuadrático de operaciones.

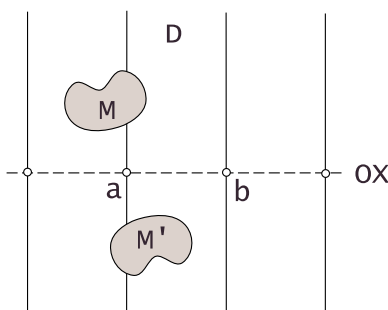


Figura 4.12: El conjunto M aparecerá en las dos búsquedas realizadas a partir de la traslación y el giro de centro a .

Una vez realizadas las búsquedas, se compara el cardinal de los conjuntos hallados. Por construcción esto supone estudiar, a lo sumo, un número cuadrático de conjuntos. Aquellos de mayor cardinal son los SMPE buscados.

Sólo resta ver que el número cuadrático de operaciones necesario es también una cota inferior, pero esto se obtiene fácilmente al adaptar el ejemplo de conjunto con $O(n^2)$ SMPE visto en el toro. Basta con repartir el conjunto en dos mitades, que se distribuyen alrededor de los centros de giro como se en la Figura 4.13. Cada región euclídea contiene un número fijo de puntos de los que están alrededor de su centro y a todos los agrupados junto al otro, dando lugar a un SMPE. Podemos rotar las regiones euclídeas de manera que se obtengan nuevos conjuntos en posición euclídea con el mismo cardinal. Como cada región puede situarse de $O(n)$ formas distintas, obtenemos un número cuadrático de SMPE. \square

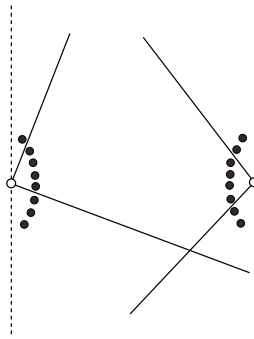


Figura 4.13: Ejemplo de conjunto con $O(n^2)$ SMPE.

Argumentos similares nos van a permitir encontrar los SMPE en las tres almohadas con tres puntos localmente C_m .

Proposición 4.9 *Un conjunto de n puntos sobre una almohada con tres puntos localmente C_m tiene $O(n^2)$ SMPE que pueden encontrarse en tiempo $\Theta(n^2)$.*

Demostración: Desarrollaremos la demostración para la almohada con un punto localmente C_2 y dos puntos localmente C_4 . El grupo discreto de movimientos que da lugar a esta superficie puede generarse a partir de dos giros, de 180 y 90 grados. Como dominio fundamental en estas superficies suele presentarse un triángulo con vértices en centros de giro de 90 grados (señalados por a y b en la Figura 4.14, (a)), y con el centro de un giro de 180 grados en el punto medio de uno de sus lados (punto c en la Figura 4.14, (b)). Dividimos estos dominios en zonas de búsqueda, tal y como hacíamos en la demostración de la Proposición 4.8, uniendo los centros de giro que forman uno de estos dominios fundamentales. Al igual que sucedía en la proposición anterior, los giros que constituyen Γ pueden situarse de manera que recubran una zona de búsqueda, y un conjunto en posición euclídea sólo puede estar en, a lo sumo, dos zonas de búsqueda que compartan un lado.

Si partimos de los puntos de la órbita del conjunto dentro de un dominio fundamental (sombreado en oscuro en la Figura 4.14, (b)), los SMPE que tengan un punto sobre el dominio podrán estar entonces, a lo sumo, en las zonas de búsqueda adyacentes (sombreado claro en la Figura 4.14, (b)). Esto supone realizar cinco búsquedas envolviendo a los giros ab , ab' , ac , bc y $b'c$ según la notación que aparece en la Figura 4.14. En este caso no es necesario tener en cuenta las traslaciones del grupo, ya que dos zonas de búsqueda adyacentes están siempre dentro de sus regiones euclídeas. Repitiendo los argumentos de la Proposición 4.8

el número de operaciones necesario para hallar los SMPE es $O(n^2)$. Además, como el ejemplo dado en la Figura 4.13 es también válido para esta superficie, concluimos que este tiempo es óptimo.

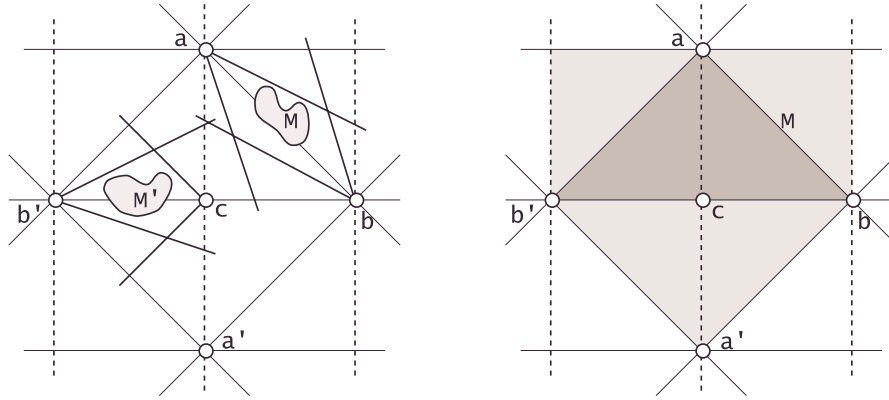


Figura 4.14: En (a) vemos alguna de las posibles búsquedas que hay que realizar en esta superficie junto con la división en zonas de búsqueda. En (b) aparece sombreado un dominio fundamental y la región a su alrededor donde debemos buscar los SMPE.

Los razonamientos anteriores pueden aplicarse también a las otras dos SOEs con tres puntos localmente C_m ; la almohada con dos puntos localmente C_2 y uno localmente C_6 (que puede generarse a partir de dos giros de 180 y 60 grados, Figura 4.15, (a)), y la que tiene tres puntos localmente C_3 (generada a partir de dos giros de 120 grados, Figura 4.15, (b)). En la Figura 4.15 aparece un dominio fundamental de cada una de ellas y la división en zonas de búsqueda. \square

La última de estas superficies a considerar es la que presenta un comportamiento más complicado de entre todas las SOEs orientables. Además es la que, por su forma, da nombre a la familia de las almohadas. Es la única SOE con cuatro puntos localmente C_m (concretamente C_2), y cuyo grupo discreto puede generarse a partir de dos giros de 180 grados y una traslación de módulo el doble de la distancia entre los centros de giro (Figura 4.16), distancia que a partir de ahora consideraremos la unidad. Además es la superficie, de las estudiadas hasta ahora, con un mayor número de SMPE.

Proposición 4.10 *Un conjunto de n puntos sobre una almohada con cuatro puntos localmente C_2 tiene $O(n^3)$ SMPE que pueden encontrarse en tiempo $\Theta(n^3)$.*

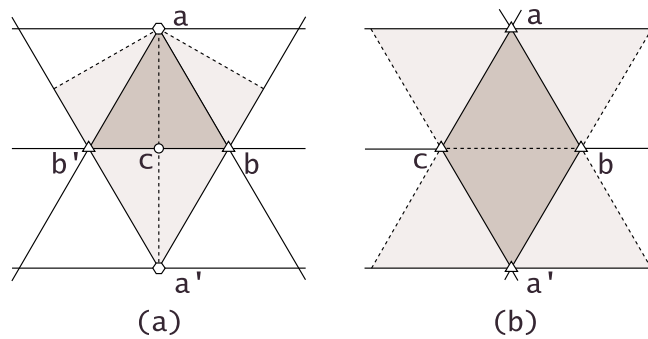


Figura 4.15: Regiones donde hay que realizar la búsqueda en almohadas con tres puntos localmente C_m . Las líneas continuas indican la frontera entre dominios fundamentales, mientras que las discontinuas señalan las zonas de búsqueda.

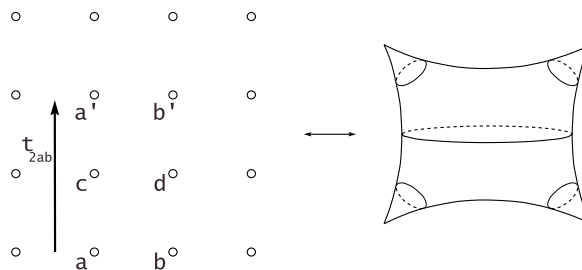


Figura 4.16: Almohada con cuatro puntos localmente C_2 generada a partir de dos giros de centros a y b y una traslación vertical de módulo el doble de la distancia entre ellos.

Demostración: Empezamos, como en el resto de las almohadas, dividiendo el plano en zonas de búsqueda, esta vez uniendo los centros de giro, de lo que resulta una malla ortogonal. De nuevo, un conjunto en posición euclídea puede estar en, a lo sumo, dos zonas que compartan uno de sus lados. El procedimiento para buscar los SMPE es el mismo que el que vimos en las Proposiciones 4.8 y 4.9, con la diferencia de que aquí van a verse envueltos tres movimientos al mismo tiempo.

Esto es así debido a la existencia de traslaciones en dirección vertical y horizontal de módulo dos, luego al buscar los SMPE tendremos que tener en cuenta sus regiones euclídeas. Las posibles situaciones con las que podemos encontrarnos aparecen reflejadas en la Figura 4.17, (a), donde vemos la división en zonas de búsqueda y dos ejemplos de conjuntos en posición euclídea, contenidos dentro de

las regiones euclídeas de dos giros y una traslación. No es necesario considerar más regiones para probar que un conjunto esté en posición euclídea, ya que las regiones del resto de los movimientos pueden disponerse de manera que recubran las zonas donde se esté trabajando en cada momento. En la Figura 4.17, (b), se muestra, como hemos hecho hasta ahora, un dominio fundamental junto con las zonas que hemos de considerar para encontrar todos los SMPE de un conjunto.

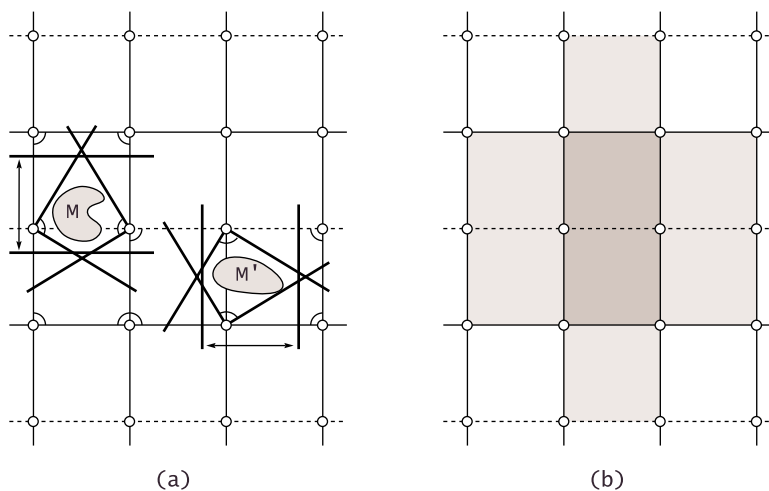


Figura 4.17: (a) Ejemplos de búsqueda en una almohada con cuatro puntos localmente C_2 y, (b), región donde deben realizarse.

Con vistas a encontrar los SMPE realizamos un número fijo de búsquedas, cada una de ellas envolviendo dos giros y una traslación. Para ello realizamos un cambio de coordenadas similar al realizado en la demostración de la Proposición 4.8, asignando a cada punto una terna formada por dos ángulos (los que forman los segmentos que lo unen con cada centro de giro con la recta que une éstos), más una tercera coordenada dada por la distancia del punto a una recta horizontal fija, si la traslación tiene dirección vertical y viceversa. Este cambio lleva a los puntos del interior de un dominio fundamental a un cubo de medidas $180 \times 180 \times 2$, de manera que un conjunto está en posición euclídea si y sólo si su transformado está contenido en un cubo de medidas $90 \times 90 \times 1$.

Consideramos los puntos de \mathbb{R}^3 contenidos en el cubo y ordenamos los puntos de menor a mayor con respecto a cada una de sus tres coordenadas. Tomamos un par de planos paralelos a distancia uno, de manera que el superior pase por el punto de menor coordenada z . Proyectamos los puntos entre ambos planos sobre uno de ellos y en este plano realizamos el barrido visto en la Proposición 4.6 para el toro.

Una vez terminado, pasamos al siguiente punto con coordenada z estrictamente mayor y repetimos el proceso. Tras recorrer el conjunto habremos encontrado, a lo sumo, $O(n^3)$ SMPE en tiempo $O(n^3)$.

Para ver que este tiempo es óptimo veamos que existen conjuntos en la almohada con un número cúbico de SMPE. Para ello consideremos un par de giros cuyos centros sean consecutivos en la recta que los une, que llamaremos m . Además notaremos por r a la recta mediatriz entre ambos centros de giro. Si colocamos las regiones euclídeas de ambos giros formando el mismo ángulo con r y de manera que ésta no sea su bisectriz, el segmento de m que cae en el interior de ambas tiene un longitud mayor que uno. Esto quiere decir que no puede estar contenido en su totalidad dentro de la región euclídea de la traslación vertical, que es una banda horizontal de anchura la unidad.

De este modo podemos repartir un conjunto a partes iguales en los alrededores de los centros de giro y sobre la recta m , de manera que cada región euclídea contenga siempre a dos de los tercios del conjunto y a un número fijo del otro tercio, tal y como puede verse en la Figura 4.18, formando distintos SMPE. Como vemos en la región ampliada, si la región euclídea de uno de los giros (línea continua) se mueve entre los límites marcados por las líneas discontinuas, entonces contiene siempre a todos los puntos alrededor del otro centro de giro y sobre la recta m , pero sólo a un número fijo de los que están a su alrededor. Además, si movemos la región euclídea, el conjunto de puntos que contiene mantiene su cardinal, dando lugar a nuevos SMPE. Cada una de las regiones euclídeas tiene un número lineal de posiciones, lo que conduce a un total de $O(n^3)$ posibles SMPE. Esto supone que un algoritmo que busque todos los SMPE en esta superficie debe realizar $\Omega(n^3)$ operaciones, con lo que se prueba el resultado buscado. \square

Con este resultado terminamos con las SOEs orientables y queda sólo por considerar aquellas donde intervengan simetrías con deslizamiento, que veremos que tienen un comportamiento muy distinto a las estudiadas hasta ahora.

Superficies con simetrías con deslizamiento

Hasta ahora todas las superficies que hemos examinado han presentado un número de SMPE de, a lo sumo, orden cúbico. La situación es distinta en las SOEs con simetrías con deslizamiento donde, como veremos a continuación, pueden construirse conjuntos con un número exponencial de SMPE. Esto supone una radical diferencia de comportamiento entre las SOEs orientables y las no orientables. Aunque esta diferencia había aparecido anteriormente en cuanto a los tiempos

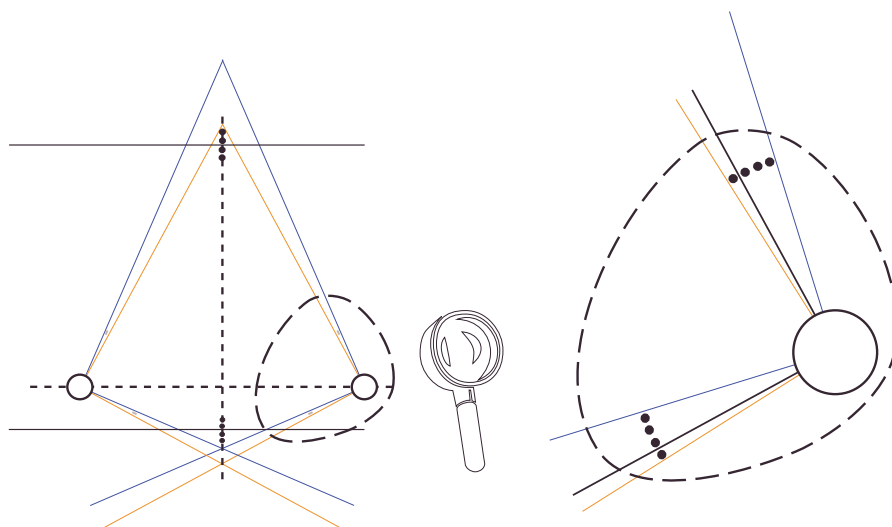


Figura 4.18: Un ejemplo de conjunto con un número cúbico de SMPE. El conjunto está distribuido alrededor de ambos centros de giro y en la mediatriz entre ambos.

necesarios para determinar la posición euclídea (ver Teorema 2.4), ésta se reducía a un factor de orden logarítmico. Ahora nos encontramos, sin embargo, que mientras que en las SOEs orientables podemos encontrar todos los SMPE de un conjunto en tiempo óptimo de a lo sumo $\Theta(n^3)$, para las no orientables va a ser necesario un tiempo exponencial.

Este comportamiento cobra mayor importancia cuando observamos como entre estas superficies (cilindro retorcido, banda de Moebius, botella de Klein y plano proyectivo) se incluyen algunas de las SOEs más conocidas.

Como vimos en el Capítulo 2, los dominios de Dirichlet para las simetrías con deslizamiento son los responsables de esta situación, ya que no presentan una forma *regular*, sino que ésta depende fuertemente de la posición del punto a partir del cual se generan. Esto, al tiempo que complica la determinación de la posición euclídea, permite más libertad a la hora de colocar los dominios y jugar con sus intersecciones.

Para estas superficies se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 4.11 *Sea $\mathcal{S} \simeq \mathbb{R}^2/\Gamma$ una SOE tal que Γ incluye una simetría con deslizamiento. Entonces pueden construirse conjuntos en \mathcal{S} con $O(2^{\frac{n}{2}})$ SMPE.*

Demostración: Partimos de la superficie más sencilla, el cilindro retorcido, cuyo grupo discreto está generado a partir de una única simetría con deslizamiento. Sobre él consideramos, de la manera habitual, un sistema de referencia ortogonal con el eje OX sobre el eje de simetría y asumimos la traslación de módulo unidad. Denotamos por u_1 al arco de la curva $x = y^2 + \frac{1}{4}$ restringido a $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{y > 0\}$ y por u_2 al arco de $x = \frac{3}{4} - y^2$ restringido a $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times \{y < 0\}$. Dado un punto P sobre u_1 (resp., u_2), mediante cálculos sencillos se prueba que su dominio de Dirichlet D_P contiene a u_1 y u_2 y que es tangente a u_2 (resp., u_1) en un punto Q .

Sean $\{P_1, \dots, P_{\frac{n}{2}}\}$ puntos de u_1 . Para cada P_i , denotamos por Q_i al punto donde D_{P_i} interseca a u_2 ; de esta forma obtenemos un conjunto $\mathcal{A} = \{P_1, \dots, P_{\frac{n}{2}}, Q_1, \dots, Q_{\frac{n}{2}}\}$. Para todo $P_i \in \mathcal{A}$ su dominio de Dirichlet contiene a todo \mathcal{A} salvo al punto Q_i y a la inversa (Figura 4.19). Luego, por el Teorema 2.1, cualquier subconjunto de \mathcal{A} en posición euclídea sólo puede contener a uno de los miembros de cada par (P_i, Q_i) , $i = 1, \dots, \frac{1}{2}$. Los SMPE deben contener a un elemento de cada pareja, y como existen $2^{n/2}$ formas de escogerlos, tenemos $2^{n/2}$ SMPE.

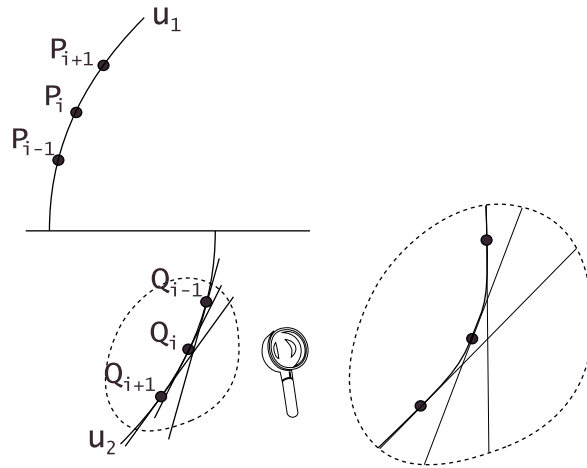


Figura 4.19: El dominio de Dirichlet de P_i es tangente a u_2 en Q_i , siendo el único punto de \mathcal{A} que no está en su interior.

Este ejemplo puede adaptarse fácilmente al resto de SOEs generadas a partir de simetrías con deslizamiento, por lo que en todas estas superficies el número de SMPE de un conjunto es de orden exponencial. □

Una vez que nos encontramos con un número exponencial de SMPE, una forma de encontrarlos todos sería examinar los 2^n posibles subconjuntos y comprobar si

están en posición euclídea, lo que, por el Teorema 2.4, requiere tiempo $O(n \log n)$ por conjunto. El número total de operaciones sería entonces $O(2^n)$.

El tiempo exponencial al buscar los SMPE viene forzado por el gran número de estos conjuntos que pueden aparecer. La pregunta que surge de manera natural es si podemos reducir este tiempo hasta orden polinómico si sólo estamos interesados en encontrar un SMPE. Sin embargo no ha sido posible hasta el momento responder a esta pregunta, aunque nos inclinamos a conjeturar que se trata de un problema NP-duro.

Es destacable la gran diferencia entre los $O(n^3)$ SMPE que puede tener un conjunto en una SOE orientable frente al número exponencial en las no orientables. Esta diferencia no puede estar relacionada con el tamaño de los SMPE, ya que en la Sección 4.2.3 veremos que el cardinal mínimo de estos conjuntos es el mismo para, por ejemplo el toro, que para el cilindro retorcido. Una explicación puede proceder de la forma de los dominios de Dirichlet, que varía fuertemente según la posición del punto en las SOEs no orientables de manera que, como ya comentamos en el Capítulo 2, no es posible encontrar regiones euclídeas para las simetrías con deslizamiento.

4.2.2. Buscando *un* SMPE

Como comentamos al principio de este capítulo, podemos considerar el cardinal de un SMPE como una magnitud que mide la planaridad de un conjunto. El interés pasa entonces de buscar los SMPE a medir su cardinal, para lo que basta encontrar uno de ellos. Una forma de hacerlo sería usar los algoritmos desarrollados en la sección anterior, basados en buscar los conjuntos maximales en posición euclídea e ir comparando sus cardinales. Nos preguntamos entonces si no existe una forma de encontrar un único SMPE directamente, sin necesidad de todo este proceso. Esto supone ser capaces de detectar cuando un conjunto es un SMPE sin necesidad de comparar su cardinal con el del resto de conjuntos en posición euclídea. Para la mayoría de las SOEs, la respuesta es afirmativa, lo que va a suponer una disminución del tiempo de computación frente a los vistos en la Sección 4.2.1. Sin embargo no ha sido posible determinar si va a ser posible encontrar un SMPE en conjuntos sobre SOEs no orientables en tiempo polinómico.

Al igual que en la sección anterior, daremos un resultado general que probaremos a partir de resultados específicos para cada familia de superficies.

Teorema 4.2 *Sean $\mathcal{S} \simeq \mathbb{R}^2/\Gamma$ una SOE tal que Γ no incluye simetrías con deslizamiento y $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ un conjunto de n puntos. Entonces, es posible encontrar un SMPE*

de \mathcal{A} en tiempo:

- a) $\Theta(n)$ si S es un recorte de plano;
- b) $\Theta(n \log n)$ si S es un cilindro o un cono;
- c) $\Theta(n \log n)$ si S es un toro plano o una almohada con dos o tres puntos localmente C_m ;
- d) $O(n^{1.5} \log n)$ u $O(nk \log n)$, con k el cardinal de un SMPE, si S es un toro torcido; y
- e) $O(n^{1.5} \log n)$ si S es una almohada con cuatro puntos localmente C_2 .

En los dos primeros casos el número de operaciones necesarias para encontrar tanto uno como todos los SMPE es el mismo. Esto es evidente en los recortes de plano, donde existe un único SMPE. Por su parte, al relacionar la búsqueda de SMPE con la de la profundidad por semiplanos en cilindros y conos, quedaba establecido que el tiempo necesario para encontrar un SMPE debía ser $\Omega(n \log n)$, por lo que el algoritmo que se presentaba en la Proposición 4.4 es óptimo tanto para encontrar *uno* como *todos* los SMPE. Esto nos lleva a enunciar el siguiente resultado:

Proposición 4.12 *El tiempo necesario para encontrar un SMPE es*

- a) $\Theta(n)$, para recortes de plano y
- b) $\Theta(n \log n)$, para cilindros y conos.

En el toro plano y en la mayoría de las almohadas va a mantenerse el tiempo $\Theta(n \log n)$ de los cilindros y conos, mientras que para el toro torcido y la almohada con cuatro puntos localmente C_2 daremos algoritmos que permiten encontrar un SMPE con un número de operaciones $O(n^{1.5} \log n)$. Estos tiempos se consiguen relacionando la búsqueda de SMPE con el problema del *emplazamiento óptimo* (*optimal placement*) de un conjunto, que consiste en, dada una nube de puntos \mathcal{A} y un conjunto \mathcal{C} , encontrar el punto $P \in \mathbb{R}^2$ tal que el trasladado $P + \mathcal{C}$ de \mathcal{C} contenga el mayor número de puntos de \mathcal{A} .

La relación entre ambos problemas es evidente en el caso del toro plano, donde un conjunto está en posición euclídea si y sólo si sus copias planas están contenidas en un cuadrante. Se conocen resultados para este problema cuando \mathcal{C} es un disco [31], un rectángulo [47], un polígono convexo [14] o un conjunto compacto [5].

Un método habitual para resolver el problema del emplazamiento óptimo es construir un arreglo de copias de \mathcal{C} a partir de la nube de partida \mathcal{A} y buscar la región de profundidad máxima. En el caso de los rectángulos, que es el que mayor interés presenta para nosotros, se coloca un rectángulo con centro en todos los puntos de \mathcal{A} de manera que un punto Q pertenece al rectángulo centrado en P si y sólo si P está en el interior del rectángulo centrado en Q . Esto convierte el problema del emplazamiento óptimo en el de calcular la región de profundidad máxima (la que está recubierta por un mayor número de rectángulos) del arreglo. Un nuevo rectángulo centrado en un punto de dicha región contendrá el mayor número posible de puntos del conjunto \mathcal{A} (Figura 4.20). La región de profundidad máxima en un arreglo de hipercubos en \mathbb{R}^d puede hallarse, como se indica en [47], en tiempo $O(n^{d/2} \log n)$ adaptando un algoritmo dado en [93] para calcular la medida de Klee.

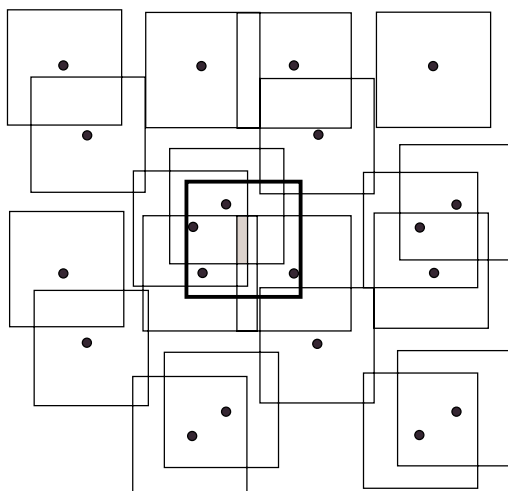


Figura 4.20: Un rectángulo centrado en la región de profundidad máxima del arreglo (sombreada) contiene el mayor número de puntos posible de la nube de partida.

A partir de aquí podemos enunciar los siguientes resultados referidos a la búsqueda de un SMPE:

Proposición 4.13 *El coste necesario para encontrar un SMPE de un conjunto de n puntos en el toro plano es $\Theta(n \log n)$.*

Demostración: Dado un conjunto \mathcal{A} sobre el toro plano, construimos \mathcal{B}^+ a partir de la órbita de \mathcal{A} tal y como hacíamos en la demostración de la Proposición 4.6.

Emplazamos un cuadrante centrado en cada punto de \mathcal{B}^+ y buscamos la región de profundidad máxima del arreglo resultante. Por [47], esto puede hacerse en tiempo $O(n \log n)$. La imagen de los puntos dentro de un cuadrante centrado en esta región es un SMPE de \mathcal{A} .

Resta ver que el tiempo obtenido es óptimo, pero como los puntos situados entre dos generatrices diametralmente opuestas en el toro tienen un comportamiento cilíndrico [61], la cota $\Omega(n \log n)$ dada en la Proposición 4.4 sigue siendo válida en el toro. \square

Si el conjunto está sobre el toro torcido, no podemos mantener la complejidad dada para el toro plano.

Proposición 4.14 *Es posible encontrar un SMPE de un conjunto de n puntos en el toro torcido en tiempo de computación $O(n^{1.5} \log n)$ u $O(nk \log n)$, siendo k el cardinal de un SMPE.*

Demostración: El tiempo $O(nk \log n)$ surge de manera inmediata a partir de los resultados que aparecen en [14] relacionados con el emplazamiento óptimo de polígonos convexos. Ahora bien, veremos en la Sección 4.2.3 que el cardinal mínimo de un SMPE en el toro torcido es $\frac{n}{4}$, por lo que para $n > 16$, k es mayor de \sqrt{n} . Podemos reducir el tiempo de computación en estos casos transformando el problema en el del emplazamiento óptimo de un cubo en \mathbb{R}^3 .

Nos basaremos en que, como vimos en la sección anterior, un conjunto en el toro torcido está en posición euclídea si y sólo si está contenido en un hexágono euclídeo, que es la intersección de tres regiones euclídeas correspondientes a tres traslaciones de Γ . Consideramos tres rectas arbitrarias pero fijas, en las direcciones de las regiones euclídeas. Vamos a llevar cada punto del conjunto a \mathbb{R}^3 asignándole como coordenadas las distancias a estas rectas. Un conjunto estará entonces en posición euclídea si y sólo si está contenido en un prisma rectangular de medidas las anchuras de las regiones euclídeas. Utilizando el razonamiento hecho en [47], el emplazamiento óptimo de uno de estos prismas se calcula en tiempo $O(n^{1.5} \log n)$. \square

Como consecuencia de la demostración anterior obtenemos una mejora parcial en el problema del emplazamiento óptimo.

Corolario 4.2 *El emplazamiento óptimo de un hexágono de lados paralelos dos a dos en una nube de n puntos puede calcularse en tiempo $O(n^{1.5} \log n)$.*

Los resultados obtenidos para el toro pueden extenderse a las almohadas de manera similar a como hacíamos cuando buscábamos todos los SMPE.

Proposición 4.15 *El coste necesario para encontrar un SMPE de un conjunto de n puntos en una almohada es:*

- a) $\Theta(n \log n)$, para almohadas con dos y tres puntos localmente C_m y
- b) $O(n^{1.5} \log n)$, para almohadas con cuatro puntos localmente C_2 .

Demostración: Para almohadas con dos y tres puntos localmente C_m , vimos en las demostraciones de las Proposiciones 4.8 y 4.9 cómo, mediante un cambio de coordenadas, pasábamos a la situación del toro, que en este caso requiere tiempo $\Theta(n \log n)$.

Del mismo modo, el cambio de coordenadas que se presentaba en la demostración de la Proposición 4.10 convierte el problema en el del emplazamiento óptimo de un prisma rectangular en \mathbb{R}^3 , lo que puede hacerse en tiempo $O(n^{1.5} \log n)$ siguiendo el razonamiento que aparece en [47]. □

Con este último resultado termina la demostración del Teorema 4.2 enunciado al inicio de esta sección. Como ya hemos comentado, queda abierto el problema de determinar si es posible bajar la complejidad necesaria para encontrar todos los SMPE de un conjunto en las SOEs no orientables si sólo pretendemos hallar uno de ellos. Aunque hasta el momento no hemos encontrado ningún problema NP-duro con el que pueda relacionarse, nuestra conjetura es que no va a ser posible su resolución en tiempo polinomial.

4.2.3. Cardinal mínimo de un SMPE

Al comenzar este capítulo hemos comentado que el cardinal de los SMPE de un conjunto da una medida de la dispersión del conjunto sobre la superficie. Así, mientras más agrupado se encuentre el conjunto, menor será la diferencia entre su cardinal y el de sus SMPE. Por contra, ésta aumentará cuanto más repartido se encuentre sobre la superficie. A partir de aquí puede parecer que el cardinal de un SMPE puede llegar a ser muy bajo cuando el conjunto esté repartido por toda la superficie, lo que no es cierto. En realidad los SMPE de un conjunto de n puntos tienen un cardinal mínimo de $\frac{n}{2}$ o $\frac{n}{4}$ según la SOE considerada, lo que supone un tamaño relativamente grande teniendo en cuenta la baja probabilidad

de encontrar un conjunto en posición euclídea [61]. Estas magnitudes se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 4.3 *El cardinal mínimo de un SMPE de un conjunto de n puntos en una SOE \mathcal{S} es $\frac{n}{4}$ si \mathcal{S} es un toro o una superficie con simetrías con deslizamiento; y $\frac{n}{2}$ en otro caso.*

Demostración: En la mayoría de las SOEs el cardinal mínimo de un SMPE se calcula de manera inmediata tras comprobar cómo puede recubrirse un dominio fundamental a partir de las regiones euclídeas de los movimientos que forman Γ .

La región euclídea de una traslación es una banda de anchura la mitad del módulo de ésta. En el cilindro, se traduce en que podemos recubrir (un dominio fundamental de) la superficie con dos de estas regiones. Llevado al problema que nos ocupa, esto implica que al menos la mitad de los puntos de todo conjunto está en posición euclídea. Dicho de otro modo, por mucho que repartamos el conjunto sobre la superficie al menos la mitad de sus puntos van a comportarse como en el plano. Podemos pensar que esto se debe a que se trata de una superficie localmente euclídea, pero el mismo razonamiento puede aplicarse también al cono a pesar de tener un punto singular.

Por su parte, cualquier SMPE en el toro contiene siempre al menos una cuarta parte de los puntos del conjunto original. Esto es fácil de ver tanto en el toro plano, donde cuatro cuadrantes recubren un dominio fundamental, como en el torcido, donde también podemos recubrir un dominio fundamental a partir de cuatro hexágonos euclídeos (Figura 4.21, (a)).

Cuando en la Sección 4.2.1 estudiamos las almohadas, dividíamos el plano en zonas de búsqueda, de manera tal que un conjunto en posición euclídea sólo podía estar contenido, a lo sumo, en dos de ellas adyacentes. Estas regiones cubrían la mitad de un dominio fundamental y, por construcción, siempre podemos situar las regiones euclídeas de manera que contengan a una de ellas. De este modo se tiene que en estas superficies al menos la mitad de los puntos de todo el conjunto está en posición euclídea. Vemos varios ejemplos en la Figura 4.21, (b), (c) y (d).

Para terminar nos queda comprobar qué sucede en las superficies con simetrías con deslizamiento. En el Capítulo 2, al estudiar el cilindro retorcido, presentamos una familia \mathcal{F}_1 de conjuntos en posición euclídea. Uno de ellos consistía en una banda infinita, perpendicular al eje de la simetría, limitada por éste y de anchura la mitad del módulo de la traslación asociada a la simetría con deslizamiento. Cuatro de estos conjuntos recubren el cilindro retorcido, por lo que en esta superficie siempre están en posición euclídea un cuarto de los puntos de todo conjunto. Lo

mismo sucede para la banda de Moebius o la botella de Klein, donde la región euclídea de la traslación contiene por completo a la región en posición euclídea para la simetría con deslizamiento, tal y como se muestra en la Figura 4.21, (e). En el plano proyectivo basta situar las regiones euclídeas de los giros cubriendo medio dominio fundamental, dentro del cual se considera la región asociada a la simetría con deslizamiento, que vuelve a cubrir un cuarto de la superficie (Figura 4.21, (f)).

□

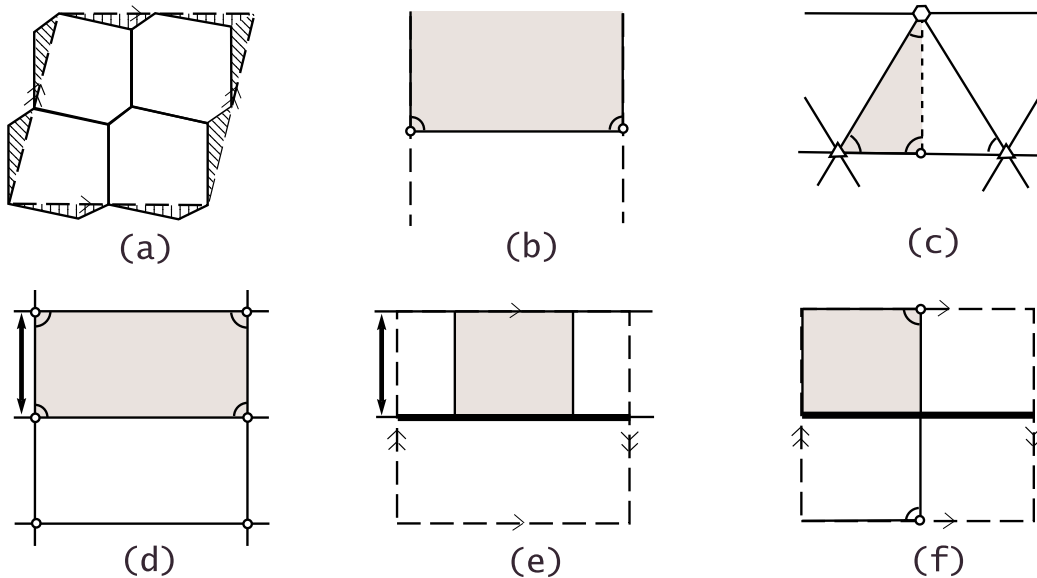


Figura 4.21: Formas de situar las regiones euclídeas en algunas superficies de manera que cubran la mayor parte de éstas.

4.3. SMPE en la esfera

Como hemos repetido varias veces a lo largo de esta memoria, este trabajo puede considerarse continuación de alguno de los aspectos abordados en el libro de Grima y Márquez [61] y la tesis de Grima [60]. Es en estos trabajos donde aparece por primera vez el término posición euclídea, referido a conjuntos sobre el cilindro, el cono, el toro y la esfera. En los Capítulos 2 y 3 hemos extendido el

estudio generalizando el término a las SOEs, englobando así a las tres primeras superficies.

En este capítulo hemos introducido un nuevo concepto, el de los subconjuntos máximos en posición euclídea, que no aparecía en los trabajos anteriormente citados. Las secciones anteriores han estado dedicadas a la búsqueda de estos conjuntos en las SOEs, pero entendemos que este trabajo queda incompleto si no se extiende a la otra superficie en la que se definió originalmente la posición euclídea: la esfera. A este deseo de completar el estudio original se suma también el hecho de que la búsqueda de SMPE en esta superficie nos va a permitir mejorar la complejidad de los algoritmos hasta ahora conocidos para calcular la profundidad por subespacios de un punto en \mathbb{R}^3 .

Recordemos que un conjunto en la esfera está en posición euclídea si y sólo si está dentro de un hemisferio. Esto nos dice que al menos la mitad de todo conjunto en esta superficie está siempre en posición euclídea. Encontrar un SMPE en la esfera es equivalente a buscar el hemisferio que contenga un mayor número de puntos del conjunto. Para ello podemos usar las técnicas vistas anteriormente para las SOEs.

Teorema 4.4 *Los $O(n^2)$ SMPE de un conjunto de n puntos en la esfera, pueden encontrarse en tiempo $\Theta(n^2)$.*

Demostración: Partimos de un conjunto \mathcal{A} de n puntos sobre la esfera. Para cada uno de sus puntos consideramos el hemisferio que lo tiene como polo, construyendo así un arreglo sobre la superficie. Si se escoge un punto en la región de máxima profundidad del arreglo y el hemisferio que lo tiene como polo, los puntos de \mathcal{A} que estén en su interior formarán un SMPE.

Tanto para buscar uno como todos los SMPE procedemos mediante un algoritmo incremental que registre en cada paso las regiones de profundidad máxima, lo que supone n inserciones, cada con un coste lineal, de donde resulta tiempo $O(n^2)$. Este tiempo es óptimo si buscamos todos los SMPE, ya que pueden encontrarse conjuntos en la esfera con un número cuadrático de ellos, como el que se muestra en la Figura 4.22. En ella se considera un conjunto de n puntos repartido uniformemente sobre dos círculos máximos ortogonales. Los puntos sobre cada uno de ellos determinan $\frac{n}{2}$ intervalos. Para cada par de intervalos diametralmente opuestos se toma una recta r uniéndolos y un círculo máximo pasando por ella. Este círculo define dos hemisferios, conteniendo cada uno de ellos la mitad de los puntos del conjunto. Si rotamos el círculo recién construido sobre r , y el conjunto está bien distribuido, por cada punto que pierde un hemisferio, se gana uno nuevo, por lo

que el número de puntos en su interior permanece constante. De este modo obtenemos $n/4$ diferentes SMPE para cada una de las $n/4$ posibles posiciones iniciales de r . □

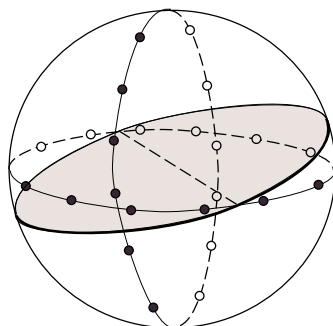


Figura 4.22: Conjunto con $O(n^2)$ SMPE en la esfera.

Si sólo buscamos un SMPE, no está garantizado que el tiempo $O(n^2)$ sea óptimo. A diferencia de las SOEs, no hemos encontrado ningún algoritmo que disminuya el tiempo de computación en este caso. Sin embargo, es nuestra opinión que a partir de una estructura de datos adecuada como la que se encontró para el toro, el tiempo necesario para encontrar un único SMPE (y, por tanto, para el cálculo de la profundidad por semiespacios en \mathbb{R}^3) pueda reducirse hasta $O(n \log n)$. A pesar de ello, el tiempo obtenido nos va a permitir, de manera indirecta, mejorar las cotas obtenidas para otro importante problema; el de la búsqueda de la profundidad por subespacios en \mathbb{R}^3 .

Este problema es análogo al de la búsqueda por semiplanos que utilizamos para probar la optimalidad de los tiempos de búsqueda de un SMPE en algunas SOEs. En este caso, dada una nube de puntos $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$, la profundidad por semiespacios de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ con respecto a \mathcal{A} es el menor número de puntos de \mathcal{A} contenidos en cualquier subespacio que incluya a P . El mejor resultado conocido para su cálculo hasta el momento es debido a Rousseeuw y Struyf [102] y requiere un tiempo de computación $O(n^2 \log n)$, coste que puede reducirse en un factor $\log n$ relacionando este problema con la búsqueda de SMPE en la esfera de manera similar a como hacíamos en el cilindro para la profundidad por semiplanos.

Corolario 4.3 *La profundidad por subespacios de un punto con respecto a una nube de n puntos en \mathbb{R}^3 puede calcularse en tiempo $O(n^2)$.*

Demostración: Partimos de una nube de n puntos \mathcal{A} y queremos calcular la profundidad por subespacios de un punto P . Para ello consideramos P como centro de una esfera, sobre la que proyectamos los puntos de \mathcal{A} según las rectas que los unen con P . Buscamos un SMPE en el conjunto resultante sobre la esfera, que estará contenido en un hemisferio. Uno de los semiespacios definidos por el plano que define este hemisferio (el opuesto al que da lugar el SMPE) es el que da la profundidad por subespacios, cuyo valor será el cardinal de \mathcal{A} menos el de sus SMPE. \square

Para finalizar esta sección, sólo hacer notar que la búsqueda de un SMPE en la esfera puede relacionarse con otro problema: dada una nube de puntos en \mathbb{R}^3 y un punto P , determinar cuál es el mayor subconjunto de la nube cuya envolvente convexa deja fuera P . Esto da lugar al último resultado de esta sección, que surge también como corolario del Teorema 4.4.

Corolario 4.4 *Dado un conjunto \mathcal{A} de n puntos en el espacio y un punto $P \in \mathbb{R}^3$, es posible encontrar el mayor subconjunto de \mathcal{A} cuya envolvente convexa no contiene a P en tiempo $O(n^2)$.*

Demostración: Es fácil comprobar que, dado un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, se cumple que P no pertenece a la envolvente de \mathcal{B} si y sólo si existe un semiplano que contiene a P y no corta a dicha envolvente. Luego nuestro problema es equivalente a la búsqueda de la profundidad por subespacios de P con respecto a \mathcal{A} que, por el Corolario 4.3, sabemos que puede calcularse en tiempo $O(n^2)$ \square

4.4. Problemas relacionados

Una de las razones que hacen interesante el estudio de los SMPE es la gran variedad de problemas con los que está relacionado. A lo largo de este capítulo han aparecido varios, relativos a otros campos de la Geometría Computacional, algunos aportando metodología que permitiese resolver cuestiones sobre la búsqueda de SMPE, otros para los que esta búsqueda ha aportado nuevas soluciones, y algunos que se encuentran a caballo entre los dos casos. A todos ellos hay que sumar otros que surgen por primera vez al calor de este estudio. Antes de finalizar este capítulo creemos que es interesante dedicar una sección a recopilar todos estos problemas.

Emplazamiento óptimo de un conjunto / Profundidad máxima en arreglos

Un problema ampliamente estudiado dentro de la Geometría Computacional es el de situar determinada región en el plano de manera que recubra todo o parte de una nube de puntos cumpliendo ciertas condiciones prefijadas. En este sentido es clásico el problema de buscar el menor círculo que contenga un conjunto de puntos [94], problema que se ha generalizado para el menor triángulo [29, 69, 6], cuadrado o rectángulo [118]. Incluso podríamos considerar el cálculo de la envolvente convexa como una derivación de este problema cuando se busca el menor convexo conteniendo el conjunto.

Este problema ha admitido múltiples variaciones, imponiendo condiciones bien a la región continente, bien al conjunto contenido. Por ejemplo, buscar la región que minimice cierta característica (área, perímetro, radio, etc.) de entre todas las que contienen k puntos del conjunto original [44, 47] (Figura 4.23, (a)). O, por el contrario, fijar la forma de la región y maximizar número de puntos en su interior (Figura 4.23, (b)). Este último problema se conoce como el del *emplazamiento óptimo* de un conjunto, y su relación con la búsqueda de SMPE nos ha permitido desarrollar algoritmos para encontrar un único SMPE en tiempo óptimo (ver Sección 4.2.2).

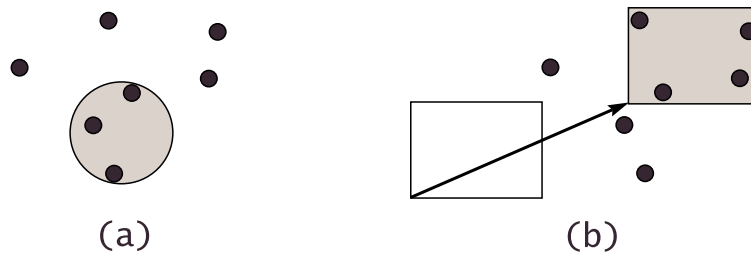


Figura 4.23: (a) Menor círculo conteniendo tres puntos y (b) emplazamiento óptimo de un rectángulo.

El problema del emplazamiento óptimo consiste en, dada una nube de puntos \mathcal{A} y un conjunto \mathcal{C} , buscar el emplazamiento de \mathcal{C} de manera que contenga el mayor número de puntos de \mathcal{A} . Si sólo se permiten traslaciones de \mathcal{C} , el problema ha sido resuelto en tiempo $O(n^2)$ cuando \mathcal{C} es un círculo [31], en $O(n \log n)$ si es un rectángulo [47] o en $O(n \log n + nk \log(mk) + m)$ para polígonos convexos [14] (donde k es el número de puntos de la solución y m el número de vértices del polígono). Para este último caso en [5] se presenta un algoritmo de complejidad

$O((n^{1+\delta} + n/\varepsilon) \log m)$ (con δ una constante arbitraria positiva), dándose también un algoritmo de Monte Carlo casi lineal para calcular el emplazamiento óptimo de un compacto. Existen también algoritmos para el caso en que se permita girar \mathcal{C} [40], aunque esto se aleja de nuestro problema.

Un método habitual a la hora de afrontar este problema es construir un arreglo asociando un conjunto \mathcal{C} a cada punto de la nube, de manera que un punto P pertenezca al conjunto asociado a otro punto Q si y sólo si el conjunto asociado a P contiene a su vez a Q . De este modo el problema del emplazamiento óptimo se convierte en el de encontrar la profundidad máxima de un arreglo (como se veía en la Figura 4.20, pág. 87).

En el Capítulo 2 vimos que un conjunto en el toro está en posición euclídea si y sólo si está contenido en un cuadrante. Esto convertía la búsqueda de un SMPE en el problema de emplazamiento óptimo de un rectángulo, de manera que contuviese el mayor número de puntos de la órbita del conjunto. Este enfoque nos permitía bajar del tiempo cuadrático (óptimo) que se requería para dar una lista de todos los SMPE al tiempo $\Theta(n \log n)$ dado en la Sección 4.2.2 para encontrar un único SMPE. Lo mismo ocurría para la búsqueda de un SMPE en las almohadas con dos y tres puntos localmente C_m gracias al cambio de coordenadas visto en la Proposición 4.8. Para las almohadas con cuatro puntos localmente C_2 y el toro torcido ha sido necesario, en cambio, convertir el problema en el del emplazamiento óptimo de un cubo en \mathbb{R}^3 , problema que Eppstein y Erickson [47] indican que es posible resolver en $O(n^{1.5} \log n)$ adaptando un algoritmo de Overmars y Yap [93].

Aunque este problema es el que más ha aportado a la búsqueda de SMPE, ésta también le ha devuelto algún resultado parcial. Como ejemplo encontramos el Corolario 4.2, que reduce el tiempo de computación de la región de profundidad máxima en un arreglo de hexágonos de lados paralelos cuando el tamaño de éste es mayor de dieciséis. El resto de resultados hacen referencia a arreglos periódicos y los trataremos en el siguiente punto.

Profundidad máxima en arreglos periódicos

Los arreglos de conjuntos convexos con los que hemos trabajado en este capítulo presentan la particularidad de ser periódicos, al proceder de las órbitas de un conjunto en una SOE. Al redactar este trabajo no hemos encontrado en la literatura ninguna referencia a estos arreglos periódicos, por lo que los introduciremos ahora.

Llamaremos a un arreglo de conjuntos convexos *periódico* si existe una traslación que lo deje fijo, cuyo vector recibe en nombre de *período* del arreglo. El *tamaño* de un arreglo periódico es el número mínimo de conjuntos necesarios para generar el

arreglo.

A partir de los resultados vistos para el cilindro obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.16 *La profundidad máxima de un arreglo periódico de tamaño n formado por bandas perpendiculares al vector período y anchura la mitad de su módulo es $\frac{n}{2}$. Además, la región de profundidad máxima del arreglo puede hallarse en tiempo $\Theta(n \log n)$.*

Por su parte, a partir de las propiedades de los arreglos asociados al toro tenemos, para el toro plano:

Proposición 4.17 *La profundidad máxima de un arreglo de tamaño n periódico en dos direcciones ortogonales, formado por rectángulos de lados paralelos a los vectores período y longitud la mitad de sus módulos es $\frac{n}{4}$. Además, la región de profundidad máxima del arreglo puede hallarse en tiempo $\Theta(n \log n)$.*

Y para el toro torcido:

Proposición 4.18 *La profundidad máxima de un arreglo de tamaño n periódico en dos direcciones no ortogonales, formado por hexágonos de lados paralelos dos a dos y paralelos a los vectores período y al vector composición de ellos y longitud la mitad de sus módulos es $\frac{n}{4}$. Además, la región de profundidad máxima del arreglo puede hallarse en tiempo $O(n^{1.5} \log n)$.*

Profundidad por subespacios

El cálculo de la profundidad de un punto dentro de un conjunto de datos es un problema gran de interés en el campo de la Estadística [82, 100, 101]. De entre las diversas definiciones de profundidad, nuestro interés se centra en la *profundidad por semiespacios* de un punto $P \in \mathbb{R}^d$ con respecto a una nube de puntos $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, que es el menor número de puntos de \mathcal{A} contenidos en cualquier subespacio que incluya a P (Figura 4.24).

Para $d = 2$, el problema se relaciona con el de la búsqueda de SMPE en el cilindro y el cono, lo que proporciona una cota inferior de $\Omega(n \log n)$ [10] que nos ha permitido probar que los tiempos dados en cilindros, conos, toro plano y algunas almohadas son óptimos.

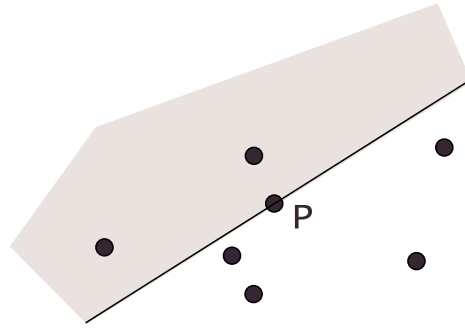


Figura 4.24: La profundidad por semiplanos de P es dos.

Si $d = 3$, Rousseeuw y Struyf [102] calculan la profundidad por subespacios en $O(n^2 \log n)$. Ahora bien, en la Sección 4.3 hemos visto como, proyectando el conjunto de datos sobre una esfera centrada en el punto para el que se quiere calcular la profundidad, el problema se convierte en el de buscar un SMPE en la esfera. Esto nos ha permitido enunciar el Corolario 4.3, que mejora la cota anterior dando un tiempo de computación cuadrático.

Mayor envolvente convexa excluyente

Al estudiar la búsqueda de SMPE en la esfera surgió un nuevo problema, relacionado con el cálculo de la profundidad por semiespacios, y que hemos bautizado como la búsqueda de la *mayor envolvente convexa excluyente*: dada una nube de puntos \mathcal{A} y un punto P , encontrar el mayor subconjunto de \mathcal{A} cuya envolvente convexa no contenga a P .

En la Sección 4.3 hemos visto que este problema es equivalente al cálculo de la profundidad por semiplanos (Figura 4.25) o, lo que es lo mismo, a la búsqueda de SMPE en el cilindro o el cono. Esto nos permite resolver el problema en $O(n^2)$ operaciones, siendo n el tamaño de la nube.

Iluminación máxima por focos

En términos generales, un problema de iluminación consiste en determinar el menor número y / o la posición de varias fuentes de luz necesarias para iluminar ciertos objetos o recintos prefijados. Por ejemplo, es bien sabido que para iluminar la frontera de un convexo en el plano son suficientes, y a veces necesarias, tres

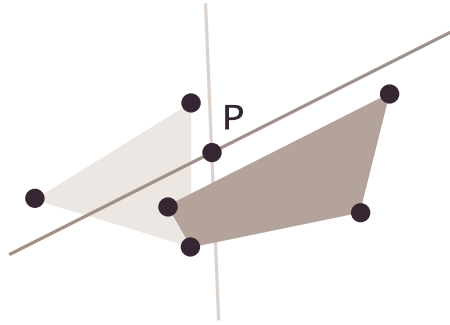


Figura 4.25: Dos conjuntos de cardinal máximo (cuatro) cuya envolvente no contiene a P junto a las rectas que definen un semiplano de profundidad mínima.

fuentes de luz.

Normalmente el problema se plantea en el plano, donde la región a iluminar es un polígono y la luz procede de una *bombilla* que emite luz en 360 grados. Los problemas de iluminación han dado origen a multitud de resultados en Geometría Computacional relacionados, por ejemplo, con el problema de la galería de arte [90, 112]. Otros resultados en este sentido pueden encontrarse en [37, 38].

Una variación del problema surge al considerar como fuentes de luz reflectores o focos que emiten un cono de luz (un sector angular en el plano), cuyo ángulo de apertura recibe el nombre de *tamaño* del foco. En este caso el problema pasa de determinar la posición de las fuentes de luz a, fijada la posición de los focos, determinar el ángulo de rotación que deben adoptar para iluminar uno o varios objetivos. Existen diversas variaciones de este problema agrupadas bajo el nombre genérico de *iluminación por focos* (*Floodlight Illumination problem*) [25, 39, 50, 92, 113, 114].

El primer problema de iluminación por focos fue propuesto en el año 1992 por Urrutia [25] y consiste en decidir si es posible rotar los reflectores de un teatro de manera que iluminen todo el escenario (*Stage Illumination problem*). Su formulación matemática sería la siguiente: dado un segmento de recta L y un conjunto de focos f_1, \dots, f_n , situados al mismo lado de la recta que define L y que iluminan cada uno un sector angular de tamaño $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respectivamente, ¿es posible rotar los focos de manera que L quede completamente iluminado? (Figura 4.26). Este problema permanece abierto hasta el momento (para una lista con este y otros problemas abiertos relacionados con la iluminación por focos puede visitarse la página web <http://www.site.uottawa.ca/~jorge/openprob/Floodlights>).

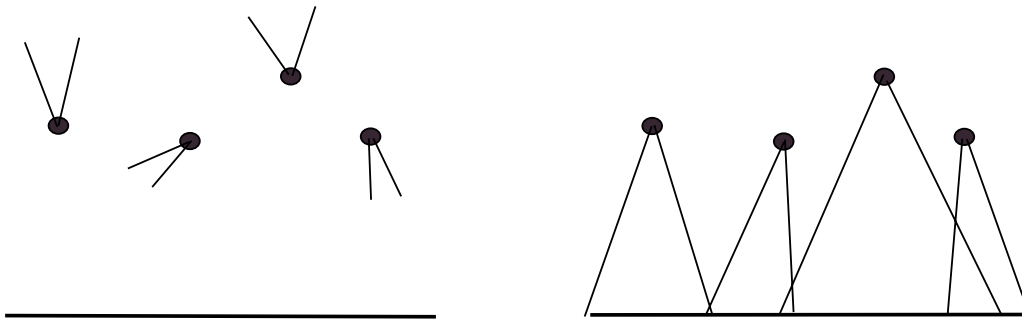
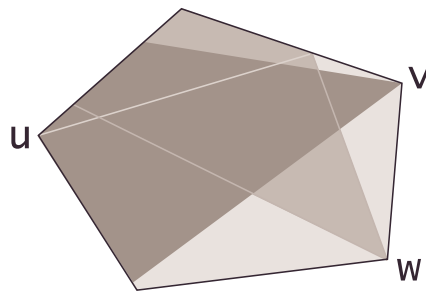


Figura 4.26: Problema de iluminación de un escenario.

También se ha estudiado el problema de iluminar mediante focos polígonos simples y ortogonales (de lados paralelos a los ejes de coordenadas), utilizando focos de tamaño menor que π en el caso de polígonos simples y menores de $\frac{\pi}{2}$ en los ortogonales (Figura 4.27). Si el foco se coloca sobre un vértice del polígono recibe el nombre *v-foco* (o *v-reflector*). Para un resumen de los resultados obtenidos en estos problemas se recomienda consultar [4, 49, 121].

Figura 4.27: Polígono iluminado por focos en los vértices u, v y w .

Existen más variaciones del problema de iluminación por focos [25, 113] además de las que hemos referido anteriormente, pero no hemos encontrado nada similar a lo que hemos bautizado como el problema de la *iluminación máxima por focos*: dada una nube de puntos y k focos, dar el ángulo de giro de cada foco de manera que iluminen conjuntamente el mayor número posible de puntos de la nube (Figura 4.28). El problema admite varias modificaciones, como puede ser la determinación del menor número de focos que iluminen un subconjunto de tamaño fijo, o los derivados de la adición de obstáculos que oscurezcan zonas del plano.

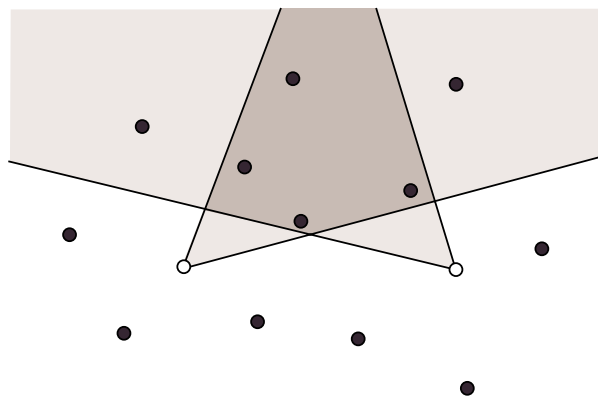


Figura 4.28: Mayor subconjunto iluminado por dos focos.

Este problema surge al buscar SMPE en las almohadas, donde se ven envueltas las regiones euclídeas de varios giros, situándose los focos sobre los centros de giro y siendo el tamaño de los focos el de las regiones euclídeas correspondientes. Utilizando las técnicas que se apuntaban al estudiar estas superficies obtenemos el siguiente resultado del problema de iluminación máxima por focos:

Proposición 4.19 *Sea \mathcal{A} un conjunto de n puntos en el plano y f_1, \dots, f_k ($k > 2$) focos fijos de tamaño $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Entonces, encontrar el ángulo de rotación en el que deben situarse los focos para iluminar simultáneamente el mayor número posible de puntos de \mathcal{A} requiere tiempo $O(n^{\frac{k}{2}} \log n)$.*

Demostración: Empezaremos probándolo para $k = 2$ usando el mismo esquema que seguimos de la demostración de la Proposición 4.8. Si denotamos por $\alpha_i(P)$ con $i = 1, 2$, al ángulo que debe de formar el foco f_i para que la bisectriz del cono de luz α_i pase por P , entonces es inmediato comprobar que para todo Q iluminado para $\alpha_i(P)$, se tiene que P está iluminado cuando f_i está en $\alpha_i(Q)$. Esto nos lleva a un problema de profundidad en un arreglo como los que vimos al estudiar las almohadas.

Realizamos el cambio de coordenadas descrito en la demostración de la Proposición 4.8, asignando a cada punto la dupla formada por los ángulos que forma con la recta uniendo ambos focos. Los puntos de \mathcal{A} pasan entonces a estar distribuidos en el interior de los cuadrados, $[0, 180] \times [0, 180] \cup [180, 360] \times [180, 360]$. Esto haría que se perdiese la relación de cercanía entre los puntos a ambos lados de la recta que une los focos, por lo que ampliamos el segundo cuadrado contando dos veces los

puntos con un ángulo menor que α_i . De este modo tenemos un conjunto de $O(n)$ puntos dentro de $[0, 180] \times [0, 180] \cup [180, 360 + \alpha_1] \times [180, 360 + \alpha_2]$. Además, un punto está en $\alpha_i(P)$ si y sólo si su transformado está en el interior de un rectángulo de medidas $\alpha_1 \times \alpha_2$ centrado en el transformado de P .

Nuestro problema se ha convertido entonces en el del cálculo de la profundidad de un arreglo de rectángulos en \mathbb{R}^2 . Una vez hallado, en tiempo $O(n \log n)$, un punto R en la región de profundidad máxima, deshacemos el cambio y situamos los focos con ángulos $\alpha_i(R)$, $i = 1, 2$. El subconjunto de \mathcal{A} en la intersección de ambos es el mayor que podemos iluminar simultáneamente.

Si $k > 2$, añadimos una nueva coordenada por cada foco extra. Debemos buscar entonces la profundidad máxima de un arreglo de $O(n)$ hipercubos en \mathbb{R}^k , lo que puede hacerse en tiempo $O(n^{\frac{k}{2}} \log n)$ modificando, tal y como se indica en [47], en algoritmo de Overmars y Yap [93]. \square

Podemos plantearnos seguir haciendo uso de los métodos desarrollados en las almohadas para buscar todos los conjuntos de cardinal máximo iluminados por los focos, o ver si es posible aplicarlos a nuevas situaciones como las que mencionábamos anteriormente, lo que puede ser un punto de partida para futuros trabajos.

Grafos de segmentos

De entre todos los problemas relacionados con la búsqueda del SMPE este es el único que no ha aparecido hasta ahora. Los grafos de segmentos son una clase de grafos geométricos que aparece de manera natural al estudiar la relación entre los puntos de la órbita de un conjunto.

Al trabajar con un conjunto sobre una SOE o, más concretamente, con su desarrollo plano, resulta de especial importancia conocer qué puntos están más cerca unos de otros. En los capítulos anteriores esto venía reflejado por la pertenencia o no a los dominios de Dirichlet y resultaba fundamental a la hora de determinar si el conjunto estaba o no en posición euclídea.

Estas relaciones de cercanía entre los puntos pueden modelizarse también mediante un grafo que asocie cada punto con los elementos más cercanos del resto de las órbitas. Dado un conjunto \mathcal{A} sobre una SOE, llamamos *grafo de segmentos* de \mathcal{A} , y lo denotaremos por $gs(\mathcal{A})$, al grafo geométrico que tiene como vértices los elementos de la órbita de \mathcal{A} , siendo dos vértices adyacentes si el segmento que une sus puntos asociados es mínimo.

Es evidente que para un conjunto \mathcal{A} de n puntos, cada vértice de $gs(\mathcal{A})$ está unido a exactamente $n - 1$ vértices. El grafo de segmentos es infinito, salvo para las SOEs obtenidas a partir de los grupos cíclicos y diédricos, además de periódico. Una representación inmediata del grafo de segmentos de un conjunto viene dada por la imagen inversa, mediante la aplicación cociente, del grafo completo con vértices en \mathcal{A} y cuyas aristas son segmentos sobre la superficie (Figura 4.29).

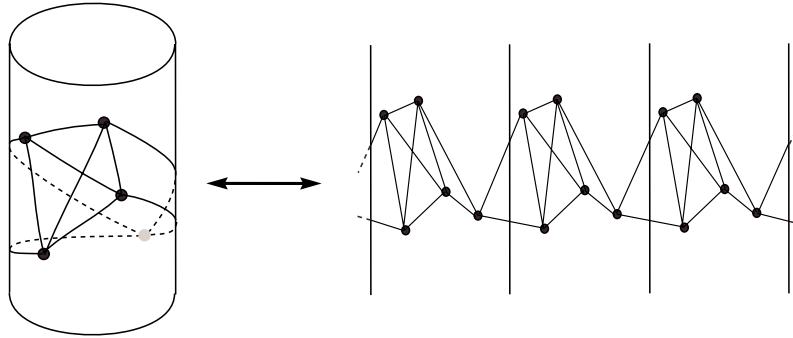


Figura 4.29: La imagen inversa del grafo completo de un conjunto de cinco puntos sobre el cilindro proporciona una representación del grafo de segmentos asociado.

Veamos la relación entre estos grafos y la posición euclídea. Un vértice de $gs(\mathcal{A})$ está unido a los vértices cuyos puntos asociados pertenezcan al dominio de Dirichlet del primero. Luego si un conjunto de vértices forma un grafo completo K_n , el conjunto de puntos asociado constituye una copia plana que está contenida en la intersección de los dominios de Dirichlet de sus elementos, por lo que su imagen está en posición euclídea. De este modo podemos enunciar el siguiente resultado que complementa la caracterización de posición euclídea dada en el Teorema 2.1.

Teorema 4.5 *Un conjunto de n puntos sobre una SOE está en posición euclídea si y sólo si su grafo de segmentos es no conexo y todas sus componentes conexas son K_n .*

Demostración: Por el razonamiento anterior es inmediato que si un conjunto de puntos se encuentra en posición euclídea su grafo de segmentos consiste en una colección de K_n . Vamos a probar la implicación contraria.

Supongamos que todas las componentes conexas de $gs(\mathcal{A})$ son K_n . Ninguna de tales componentes conexas puede contener a más de un elemento de la misma

órbita, ya que estos no pueden estar unidos por segmentos. Tenemos entonces un subconjunto de $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$ con un elemento de cada órbita y que está contenido en la intersección de los dominios de Dirichlet de sus puntos, lo que implica, por el Teorema 2.1, que \mathcal{A} está en posición euclídea. \square

Este resultado puede extenderse fácilmente a los SMPE.

Corolario 4.5 *Un subconjunto \mathcal{B} de m puntos de un conjunto en posición euclídea \mathcal{A} sobre una SOE es un SMPE si sólo si $gs(\mathcal{B})$ es no conexo y sus componentes conexas son subgrafos completos K_m maximales de $gs(\mathcal{A})$.*

Demostración: Si \mathcal{B} es un SMPE de \mathcal{A} , por el Teorema 4.5 las componentes conexas de $gs(\mathcal{B})$ son K_m . Además, no puede existir ningún $K_{m'} \subset gs(\mathcal{A})$ con $m' > m$, ya que en ese caso sus vértices se corresponderían con un SMPE de cardinal mayor que \mathcal{B} .

Recíprocamente, si las componentes conexas de $gs(\mathcal{B})$ son subgrafos completos K_m maximales de $gs(\mathcal{A})$, por el Teorema 4.5 es inmediato que \mathcal{B} es un SMPE de \mathcal{A} . \square

Esto convierte el problema de encontrar SMPE en el de buscar subgrafos completos maximales en grafos de segmentos. Por ejemplo, el grafo de segmentos de los cuatro puntos de la cara visible del cilindro en la Figura 4.29 está formado por copias de K_4 , luego los puntos asociados a sus vértices están en posición euclídea sobre la superficie. Además, como K_4 es el mayor subgrafo completo del grafo de segmentos, dichos puntos forman un SMPE.

Como es sabido, la búsqueda de subgrafos completos (*cliques*) máximos es un problema NP-duro para grafos en general [24, 56]. Sin embargo, a partir de los resultados obtenidos para SMPE se comprueba que los grafos de segmentos asociados a conjuntos sobre SOEs orientables forman una clase de grafos geométricos en los que puede encontrarse subgrafos completos maximales en tiempo polinomial. Además, estos grafos de segmentos tienen, a lo sumo, un número polinomial de subgrafos completos máximos, pudiendo darse una lista exhaustiva de ellos en tiempo óptimo. No ocurre lo mismo con los grafos de segmentos obtenidos a partir de conjuntos sobre SOEs no orientables.

A partir del Teorema 4.1 obtenemos el siguiente corolario relacionado con la búsqueda de todos los subgrafos completos maximales de un grafo de segmentos.

Corolario 4.6 *El número de subgrafos completos maximales del grafo de segmen-*

tos asociado a un conjunto de n puntos sobre una SOE \mathcal{S} es

- a) uno, si \mathcal{S} es un recorte de plano, que se encuentra en tiempo $\Theta(n)$;
- b) $O(n)$, si \mathcal{S} es un cilindro o un cono, que se encuentran en tiempo $\Theta(n \log n)$;
- c) $O(n^2)$, si \mathcal{S} es un toro o una almohada con 2 o 3 puntos localmente C_m , requiriéndose tiempo $\Theta(n^2)$ para encontrarlos;
- d) $O(n^3)$, si \mathcal{S} es una almohada con 4 puntos localmente C_2 , que se encuentran en tiempo $\Theta(n^3)$ y
- e) $O(2^{\frac{n}{2}})$, si \mathcal{S} es una superficie con simetrías con deslizamiento, pudiendo encontrarse en tiempo $O(2^n)$.

Si sólo se pretende encontrar un único subgrafo completo maximal, a partir del Teorema 4.2 obtenemos:

Corolario 4.7 *El tiempo necesario para encontrar un subgrafo completo maximal del grafo de segmentos asociado a un conjunto sobre una SOE orientable es*

- a) $\Theta(n)$ si S es un recorte de plano;
- b) $\Theta(n \log n)$ si S es un cilindro o un cono;
- c) $\Theta(n \log n)$ si S es un toro plano o una almohada con dos o tres puntos localmente C_m ;
- d) $O(n^{1.5} \log n)$ u $O(nk \log n)$, siendo k el cardinal de un SMPE, si S es un toro torcido, y
- e) $O(n^{1.5} \log n)$ si S es una almohada con cuatro puntos localmente C_2 .

En este caso, y al igual que ocurre en la búsqueda de un SMPE, no ha sido posible determinar si es posible encontrar en tiempo polinómico un subgrafo completo maximal en grafos de segmentos asociados a conjuntos sobre SOEs no orientables.

4.5. Conclusiones y problemas abiertos

Durante este capítulo se han abordado diferentes problemas, cuyos resultados aparecen resumidos en la Tabla 4.1. Hemos empezado calculando el número de SMPE que puede tener un conjunto sobre una SOE. Este número es de un orden muy reducido para las SOEs orientables, $O(n^3)$ a lo sumo, comparado con los 2^n posibles subconjuntos en las no orientables. El caso más extremo en este sentido se da en el cilindro y el cono, con un número lineal de SMPE.

Distinto comportamiento presenta la superficie cuando está generada a partir de una simetría con deslizamiento. En este caso encontramos conjuntos con un número exponencial de SMPE. Esta diferencia de comportamiento en las SOEs cuando aparece este movimiento se volverá a ver en el Capítulo 5 referido a triangulaciones.

	Determ. la P. E.	Encontrar un SMPE	Num. de SMPE	Enc. todos los SMPE	Card. mín.
Cilindro y cono	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n)$	$\Theta(n \log n)$	$n/2$
Toro	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$n/4$
Toro torcido	$\Theta(n)$	$O(n^{1.5} \log n)$	$O(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$n/4$
2 y 3-Almohadas	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$O(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$n/2$
4-Almohada	$\Theta(n)$	$O(n^{1.5} \log n)$	$O(n^3)$	$\Theta(n^3)$	$n/2$
Superficies con sim. con desl.	$O(n \log n)$?	$O(2^{\frac{n}{2}})$	$O(2^n)$	$n/4$
Esfera	$\Theta(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$n/2$

Cuadro 4.1: Esquema de los problemas tratados y tiempo de computación obtenidos.

Al mismo tiempo que calculábamos el número de SMPE de un conjunto, desarrollamos algoritmos que nos permiten encontrarlos todos en tiempo óptimo. Ahora bien, para conocer el cardinal de un SMPE basta con encontrar uno de ellos. En este caso el tiempo de computación se reduce, lo que se logra relacionando el problema con el del emplazamiento óptimo. Además se prueba que los tiempos logrados de esta forma son óptimos, gracias a la relación que se establece con un nuevo problema, el del cálculo de la profundidad por semiplanos.

Aún así, el uso de los algoritmos dados para el problema del emplazamiento óptimo / profundidad máxima de un arreglo, aumenta la complejidad a $O(n^{1.5} \log n)$ para el toro torcido y la almohada. La razón es que hay que tener en cuenta tres movimientos simultáneamente, en lugar de los dos necesarios en el resto de las superficies. A pesar de ello no hay que descartar que este tiempo pueda reducirse

también a $O(n \log n)$. Esto parece más evidente en el toro torcido, donde la tercera traslación que interviene a la hora de dibujar un dominio de Dirichlet es composición de las otras dos. Esta relación entre las traslaciones nos hace pensar que es posible, diseñando una estructura adecuada, incluir la información de la tercera traslación mientras que se trabaja con las otras dos, reduciendo el tiempo de computación.

Más difícil parece esto en la almohada, donde los tres movimientos son independientes. Aún así, hay que tener en cuenta que en el cambio de variable que se presenta, la tercera coordenada (que mide la distancia horizontal o vertical a una recta) puede obtenerse también a partir de las dos primeras (las dadas en función de los centros de giro), por lo que no es descartable que la información que aporta pueda incluirse de algún modo en las otras dos.

Siguiendo con la búsqueda de un único SMPE, probablemente el problema más importante de los que quedan abiertos tiene que ver con las SOEs no orientables. La diferencia de comportamiento de estas superficies se debe a que la introducción de la simetría con deslizamiento permite relaciones entre órbitas más amplias que en el resto de superficies. Nuestra hipótesis es que encontrar un SMPE en una superficie con simetrías con deslizamiento es un problema NP-duro. Aún así, el comportamiento de estas SOEs sigue siendo muy regular, lo que complica buscar configuraciones que reflejen alguno de los problemas NP-duros conocidos.

Otro problema que queda pendiente es estudiar si es posible reducir aún más el tiempo de computación necesario para encontrar un SMPE en la esfera. A primera vista el problema parece presentar similitudes con el que tiene lugar en el toro. Esto nos hace pensar que, desarrollando la estructura de datos adecuada, el tiempo podría reducirse hasta $O(n \log n)$. No olvidemos que esto supondría también mejorar el tiempo necesario para calcular la profundidad por subespacios de un punto en \mathbb{R}^3 , o el mayor conjunto en el espacio cuya envolvente convexa deja fuera un punto dado.

Uno de los datos que puede resultar más llamativo en este estudio es el del tamaño mínimo de los subconjuntos en posición euclídea. Es difícil que un conjunto elegido al azar sobre una superficie esté en posición euclídea [61], lo que podría hacernos pensar que los SMPE son, en general, pequeños. Sin embargo hemos visto que en muchas superficies suponen la mitad del cardinal del conjunto de partida. A partir de aquí podemos plantearnos algo que ya se apuntaba al principio del capítulo: ¿pueden servir los SMPE como paso intermedio en la construcción de estructuras en las SOEs para conjuntos en posición no euclídea? Habría que estudiar si su utilización supone una simplificación en los cálculos o una reducción en el tiempo de computación y si va a ser posible pasar fácilmente de una conclusión parcial en estos subconjuntos a una general en el conjunto de partida, lo que apunta

a una futura línea de investigación.

Para finalizar, queremos destacar de nuevo uno de los aspectos que creemos que prestan a los SMPE gran parte de su interés: su vinculación con una gran variedad de problemas en Matemática Discreta. Problemas que van desde el cálculo de la profundidad máxima en un arreglo hasta la búsqueda de subgrafos completos maximales, y que han aportado soluciones al estudio de los SMPE en la misma medida que éste ha aportado nuevos resultados a estos campos.

Capítulo 5

Conexión del grafo de triangulaciones

Las triangulaciones son una estructura ampliamente estudiada en distintas áreas. Uno de los aspectos en los que suele incidirse es en las transformaciones locales, que permiten ir de unas triangulaciones a otras, y que se reducen al estudio de la conexión del grafo de triangulaciones. Este estudio se ha extendido hasta ahora a triangulaciones y nubes de puntos en la esfera, el cilindro y el cono con sus métricas habituales. En este capítulo mostraremos la relación entre la métrica de la superficie y la conexión del grafo de triangulaciones mediante la operación de flip diagonal, construyendo una métrica que permite la existencia de polígonos y nubes de puntos con grafo de triangulaciones no conexo en toda superficie cerrada y conexas. También se estudiará el grafo de triangulaciones de polígonos sobre superficies localmente euclídeas, viendo que es conexo en el cilindro y el toro, pero no en el toro torcido, cilindro retorcido y botella de Klein. En estas últimas superficies también se dan ejemplos de nubes de puntos con grafo de triangulaciones disconexo.

5.1. Introducción. Flips

Este capítulo está dedicado a la última de las estructuras claves de la Geometría Computacional a las que hacíamos referencia en la Introducción: las triangulaciones. Son comunes los algoritmos que, como parte del preprocesamiento, triangulan una región o conjunto [17, 42, 91, 94]; esta estrategia no es exclusiva de la Geometría Computacional, sino que aparece en otras ramas de las matemáticas como, por ejemplo, en el método de los elementos finitos [15, 81, 116] o en la

interpolación de datos [95]. También se recurre a las triangulaciones en otras disciplinas, como en la informática gráfica, el modelado de sólidos o los sistemas de información geográfica [13, 18, 55, 88, 103, 108, 120, 124, 129].

En estas aplicaciones no suele ser suficiente construir una triangulación, sino que esta debe ser *buen*a en algún sentido, como que se maximice el mínimo ángulo [52] o la valencia máxima de los vértices [18]. Esto nos lleva al problema de, dada una triangulación, modificarla mediante alguna operación local hasta alcanzar otra con mejores propiedades. Una de las operaciones de este tipo más conocidas es el flip diagonal.

Dados $\{v_i, v_j, v_k\}$ y $\{v_i, v_j, v_l\}$ dos triángulos de una triangulación compartiendo la diagonal $v_i v_j$, el *flip diagonal* (o simplemente *flip*) de la arista $v_i v_j$ consiste en reemplazarla por la otra diagonal $v_k v_l$ del cuadrilátero $v_i v_k v_j v_l$ (Figura 5.1).

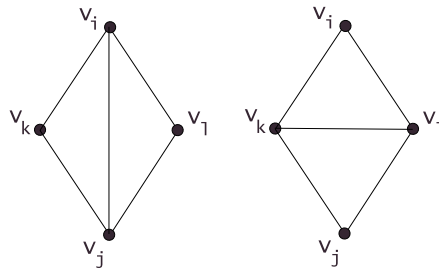


Figura 5.1: Flip diagonal de la arista $v_i v_j$.

Podemos plantearnos entonces si dadas dos triangulaciones es posible ir de una a otra realizando flips. Se define el *grafo de triangulaciones* de una nube de puntos o de un polígono P como el grafo $GT(P)$ que tiene como vértices las triangulaciones de P , siendo dos de ellas adyacentes si puede pasarse de una a otra mediante un flip (Figura 5.2). Nuestra pregunta se convierte entonces en la cuestión de si dicho grafo es conexo. En este trabajo nos hemos centrado en la conexión del grafo para polígonos, dando también algunos ejemplos de nubes de puntos con grafo no conexo para ciertas superficies.

Si se prueba la conexión del grafo de triangulaciones, entonces puede asegurarse que podemos llegar a alguna de las triangulaciones *buen*as a las que hacíamos referencia anteriormente desde cualquier otra triangulación de partida. Además, un grafo de triangulaciones conexo permite crear fácilmente triangulaciones aleatorias. Mientras que es sencillo generar un punto, una nube o un polígono *al azar*, esto no es tan fácil para el caso de triangulaciones, más aún, como veremos en la Sección 5.3, en algunas superficies en las que no es posible generar triangulaciones

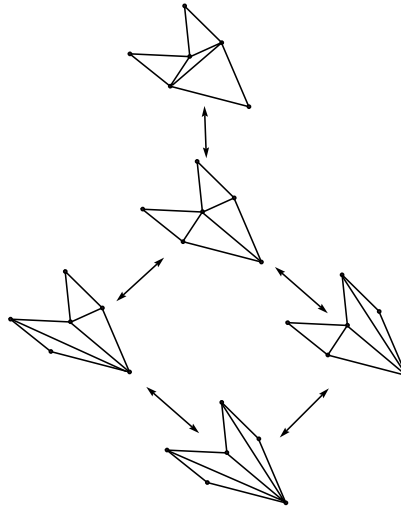


Figura 5.2: Grafo de triangulaciones de un polígono.

simplemente añadiendo diagonales hasta que no se pueda incluir ninguna más. En cambio, si el grafo es conexo, partiendo de una triangulación y generando las demás realizando flips al azar puede construirse un conjunto aleatorio de triangulaciones, que pueden usarse para probar el comportamiento de algoritmos que las tengan como entrada.

Es conocido que el grafo de triangulaciones de cualquier polígono en el plano es siempre conexo [18, 52, 71, 88], lo que permite desarrollar métodos que necesitan como parte de su proceso construir triangulaciones cumpliendo condiciones óptimas [57, 70], y de diámetro a lo sumo cuadrático. Lo mismo ocurre para nubes de puntos, para las que existe un algoritmo voraz que transforma cualquier triangulación en la triangulación de Delaunay [52].

El estudio del grafo de triangulaciones no se ha restringido al plano. Se ha probado que es conexo para polígonos y nubes de puntos sobre la esfera y para polígonos en el cilindro [32]. En esta última superficie nos encontramos con que la región triangulada a partir de una nube de puntos no es única, pudiendo variar para el mismo conjunto de partida. Esto hace que, en general, el grafo de triangulaciones no sea conexo, salvo que nos restrinjamos a las triangulaciones de una misma región, donde sí puede establecerse la conexión.

El estudio en estas superficies ha estado siempre restringido a la métrica habitual en ellas. Parece lógico, no obstante, que al tratarse de triangulaciones métricas, una variación en la distancia considerada pueda alterar los resultados anteriores.

Esto se muestra en la Sección 5.2, donde se modifica la métrica natural en la esfera de tal manera que aparecen polígonos y nubes de puntos cuyo grafo de triangulaciones es no conexo. Haciendo uso de un conocido teorema de topología de superficies, este resultado se extiende al conjunto de las superficies cerradas y conexas.

Posteriormente, en la Sección 5.3 nos centraremos en una clase particular de las SOEs: las superficies localmente euclídeas. Estas son el cilindro, el toro, el cilindro retorcido y la botella de Klein. Estudiaremos la conexión del grafo bajo la métrica cociente, que es la que se considera de manera habitual en estas superficies. En particular, nos centraremos en triangulaciones de polígonos.

Como ya hemos señalado, es conocida la conexión del grafo para polígonos y, si la región a triangular es fija, para nubes de puntos en el cilindro [32]. Además, al igual que ocurre en el plano, cualquier polígono es triangulable. Esta importante propiedad se pierde en el toro, donde es fácil encontrar polígonos que no admiten triangulaciones en el sentido de división en caras triangulares. Incluso en los polígonos triangulables no es posible actuar como en otras superficies, donde es posible construir una triangulación simplemente añadiendo diagonales. De hecho, puede ocurrir que al fijar una determinada diagonal no sea posible completar la triangulación de un polígono que sí sea triangulable eligiendo otras diagonales. A pesar de ello veremos, si el polígono es triangulable, que su grafo de triangulaciones es conexo.

Esta propiedad no es *robusta* en el toro, en el sentido de que basta un ligero cambio en la métrica cociente para que deje que cumplirse. Así, pueden encontrarse ejemplos de polígonos con grafo de triangulaciones no conexo en el toro torcido. Esto también sucede en las superficies generadas a partir de simetrías con deslizamiento.

Además, en las superficies en las que se encuentran ejemplos de polígonos con grafo de triangulaciones no conexo (toro torcido, cilindro retorcido y botella de Klein), veremos que añadiendo algunos puntos extra es posible construir nubes de puntos con la misma propiedad. Aunque el objetivo original de este capítulo se restringía a estudiar la conexión del grafo para polígonos, hemos creído conveniente incluir estos ejemplos que dan una idea del comportamiento de las superficies y que pueden servir de partida para un estudio más completo de triangulaciones de nubes de puntos en el resto de las SOEs.

Antes de proseguir vamos a formalizar algunos de los conceptos que usaremos más adelante. Una *triangulación de una nube de puntos* \mathcal{A} en una superficie localmente euclídea es una partición de su envolvente convexa en regiones triangulares por medio de segmentos (que reciben el nombre de *diagonales* de la triangulación)

que no se cortan salvo en sus extremos, que son los puntos de \mathcal{A} . De las dos posibles formas de definir una triangulación, como una subdivisión en caras triangulares de una cierta región o como un conjunto maximal de segmentos, hemos escogido la primera. Esta elección está condicionada por el comportamiento de los polígonos en el toro, tal y como veremos en la Sección 5.3.

Un *polígono euclídeo* en una superficie localmente euclídea es una región homeomorfa a un disco cerrado cuya frontera está formada por un conjunto finito de segmentos. Una triangulación de un polígono euclídeo es una partición en regiones triangulares del interior del polígono por medio de segmentos que no se cortan salvo en sus extremos.

Hay que tener en cuenta que, según la definición, si hablamos de triangulaciones de polígonos no es posible trazar una diagonal entre cualesquiera dos de sus vértices. Puede ocurrir que, como se ve en la Figura 5.3, el segmento uniendo dos vértices del polígono sea exterior a éste, por lo que no podemos trazar la diagonal. En este caso se hablará de diagonales *no admisibles*.

Nótese que el desarrollo plano de un polígono euclídeo en una superficie localmente euclídea es un polígono simple y acotado, aunque puede no estar contenido en un único dominio fundamental. Las triangulaciones de un polígono euclídeo son las mismas que las triangulaciones en un polígono simple, salvo que no podemos usar diagonales que no sean segmentos mínimos.

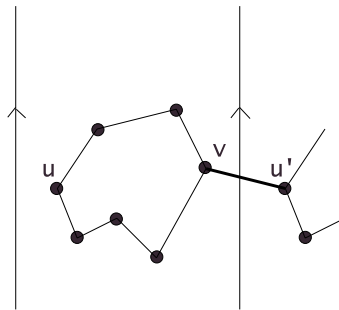


Figura 5.3: En este ejemplo en el cilindro, el segmento que une u y v es exterior al polígono, por lo que la diagonal uv no es admisible.

5.2. Superficies cerradas y conexas

Como su propio nombre indica, es de esperar que el comportamiento de las triangulaciones métricas en una superficie vaya a depender fuertemente de la métrica considerada: una leve modificación puede hacer pasar una diagonal de admisible a no admisible, o a la inversa, determinando cuando un flip es posible o no. A pesar de ello, los estudios realizados hasta el momento para triangulaciones métricas en la esfera, el cilindro o el toro [32, 61] se limitaban a tratar el problema para las métricas que suelen darse por defecto para estas superficies, sin plantearse cómo su modificación podía afectar a la conexión del grafo de triangulaciones. A continuación daremos una métrica en la esfera que permite la existencia de conjuntos con grafo de triangulaciones disconexo. Posteriormente extenderemos esta métrica a todas las superficies cerradas y conexas.

La definición de polígono euclídeo dada para superficies localmente euclídeas se extiende de manera inmediata a la esfera, pero hay que remarcar que en este caso una poligonal cerrada de segmentos define dos posibles interiores. Las triangulaciones en la esfera han sido ampliamente estudiadas en diferentes contextos [27, 86, 88]; en lo que concierne a nuestro estudio, es conocido que el grafo de triangulaciones tanto de una nube de puntos como de un polígono es conexo [32]. Nosotros vamos a perturbar la métrica natural de la esfera para que estos resultados dejen de ser ciertos.

Consideremos seis puntos sobre un círculo máximo de la esfera, que desplazamos ligeramente hacia uno de sus polos. Si tomamos la poligonal formada por segmentos que unen estos vértices (Figura 5.4, (a)), la esfera queda dividida en dos regiones. Según la práctica habitual, se tomaría como polígono el de menor área, que es el que admite triangulaciones métricas. En lugar de eso vamos a denotar por P al polígono determinado por la región de mayor área. En un primer momento P no admite ninguna diagonal interior, por lo que no sería triangulable. Para cambiar esto, vamos a deformar continuamente la esfera elevando pequeñas regiones hasta que la distancia entre dos vértices no adyacentes, salvo para ad , be y cf , aumente lo suficiente como para que las diagonales en el complementario de P dejen de ser admisibles (Figura 5.4, (b)).

P admite ahora cualquier diagonal salvo las ya citadas ad , be y cf . Esto permite dos triangulaciones diferentes, cuyo esquema se muestra en la Figura 5.5, pero no es posible realizar ningún flip ya que el resto de las diagonales no son admisibles. Hemos construido entonces una métrica sobre la esfera que permite la existencia de un polígono con grafo de triangulaciones disconexo.

Este ejemplo puede extenderse fácilmente a triangulaciones de nubes de puntos.

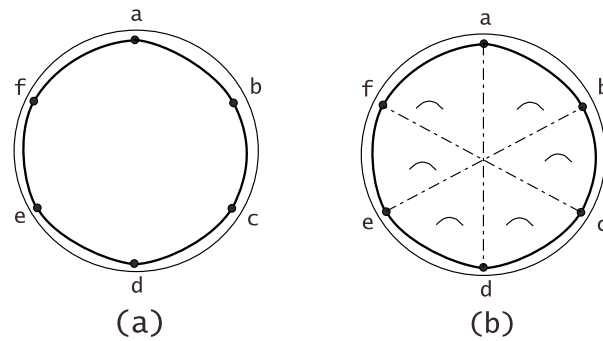


Figura 5.4: Construcción de un polígono con dos triangulaciones disjuntas.

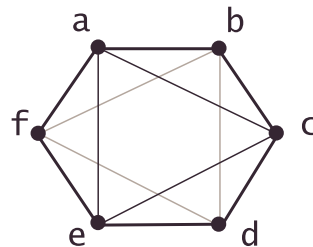


Figura 5.5: Con las diagonales admisibles es posible construir dos triangulaciones, pero no puede realizarse ningún flip para pasar de una a otra.

Para ello basta añadir un nuevo punto, que denotaremos como g , tal y como se muestra en la Figura 5.6, uniéndolo mediante segmentos al resto. Las deformaciones que hemos realizado en la esfera impiden realizar ningún flip en ninguno de los cuadriláteros que tienen a g como vértice. De este modo, se mantienen las dos posibles triangulaciones del polígono original P sin que de nuevo sea posible realizar flip alguno.

Vemos entonces que la métrica que hemos construido permite la existencia tanto de nubes de puntos como de polígonos cuyo grafo de triangulaciones es no conexo. Esto puede extenderse al resto de las superficies cerradas y conexas utilizando un conocido teorema de la teoría topológica de superficies:

Teorema 5.1 *Toda superficie cerrada y conexa es topológicamente equivalente a una esfera, o a la suma conexa de toros, o a la suma conexa de planos proyectivos.*

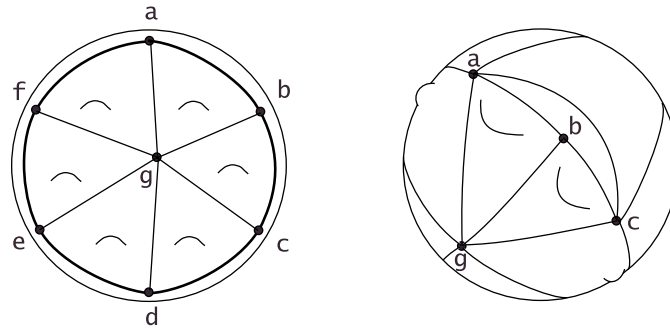


Figura 5.6: Añadiendo un nuevo punto a la construcción anterior obtenemos un conjunto con dos triangulaciones disjuntas.

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [63], junto con una definición del término *suma conexa*. Brevemente, la *suma conexa* de dos superficies es la nueva superficie obtenida cortando un disco de cada una de ellas y uniéndolas por el borde de los discos (Figura 5.7).

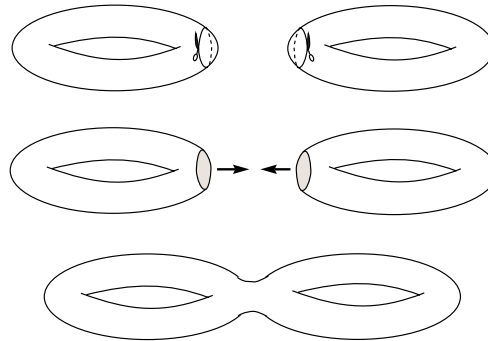


Figura 5.7: Suma conexa de dos toros.

A partir del Teorema 5.1 y repitiendo el razonamiento seguido en la esfera, es posible encontrar una métrica en toda superficie cerrada y conexa que permita la existencia de conjuntos y polígonos con grafo de triangulaciones no conexo. En la Figura 5.8 vemos el polígono anterior en la esfera con dos asas. Esto nos lleva al resultado principal de esta sección.

Teorema 5.2 *Toda superficie cerrada y conexa admite una métrica que permite nubes de puntos y polígonos cuyo grafo de triangulaciones (métricas) es no conexo.*

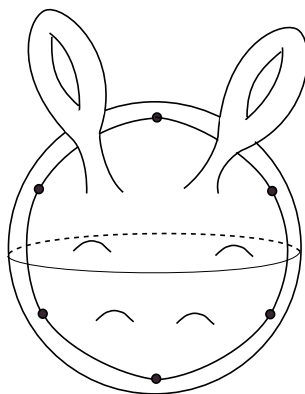


Figura 5.8: Añadiendo toros o planos proyectivos al ejemplo anterior obtenemos polígonos o conjuntos con grafo de triangulaciones no conexo en el resto de superficies cerradas y conexas.

5.3. Superficies localmente euclídeas

Entre las superficies más usadas y conocidas se encuentran las superficies de órbitas euclídeas (SOEs), debido a la gran ventaja que supone poder representarlas en el plano. Sin embargo, entre las mismas SOEs hay algunas que destacan especialmente por su importancia y buenas propiedades. Éstas son las cuatro superficies localmente euclídeas, que se dividen en dos orientables (cilindro y toro) y dos no orientables (cilindro retorcido y botella de Klein). En estas superficies vamos a llevar a cabo un estudio sobre la conexión del grafo de triangulaciones cuando se considera la métrica que heredan del plano a partir de la aplicación cociente (ver Capítulo 1).

Como ya comentamos en la Sección 5.1, nuestro trabajo se ha centrado en estudiar la conexión del grafo de triangulaciones de polígonos. En este sentido es interesante destacar las diferencias de comportamiento entre unas superficies localmente euclídeas y otras. Así, mientras cualquier polígono tiene un grafo de triangulaciones conexo en el cilindro y el toro plano, esto deja de ser cierto en las no orientables, donde pueden encontrarse fácilmente polígonos con grafo de triangulaciones disconexo. Esto sucede incluso si modificamos ligeramente la métrica del toro, pasando a considerar como generadores dos traslaciones no ortogonales.

Esta sección se divide en cuatro partes. En primer lugar repasaremos los resultados ya conocidos para el cilindro [32, 61], que resultan significativos a la hora de

mostrar el contraste entre el comportamiento de esta superficie y el toro. A esta última superficie estará dedicada la segunda parte, donde veremos que es posible construir en ella polígonos que no admiten triangulaciones, aunque también se probará que si el polígono es triangulable, su grafo es conexo. Esta propiedad se pierde si la superficie viene generada por traslaciones no ortogonales (toro torcido). La Sección 5.3.3 está dedicada a mostrar ejemplos de polígono con grafo de triangulaciones disconexo que pueden construirse siempre que entre los movimientos que generen la superficie se encuentre una simetría con deslizamiento. Finalmente repasaremos los resultados conocidos sobre la conexión del grafo de triangulaciones para nubes de puntos en el cilindro y veremos que en aquellas superficies donde aparecen polígonos con grafos disconexos, este comportamiento también se extiende a nubes de puntos.

5.3.1. Cilindro

En [32, 61] puede encontrarse un estudio de las triangulaciones para conjuntos y polígonos en el cilindro, en el que se hace uso del siguiente resultado:

Lema 5.1 [61] *Cualquier polígono euclídeo en el cilindro con cuatro o más vértices admite una diagonal. De hecho, cualquier polígono euclídeo en el cilindro es triangulable.*

A partir de esta propiedad se demuestra la conexión del grafo de triangulaciones:

Teorema 5.3 [32] *El grafo de triangulaciones de cualquier polígono en el cilindro es conexo.*

La prueba es inductiva [32] y se basa en el Lema 5.1 y en el hecho que toda triangulación de un polígono en el cilindro tiene dos orejas (una *oreja* es un triángulo de la triangulación con sólo una diagonal interna) [79, 91]. Dadas dos triangulaciones T_1 y T_2 de un polígono, se escoge una oreja en cada una de ellas, e_1 y e_2 ; se elimina e_1 de T_1 y, sobre el polígono de $n - 1$ vértices resultante, se fija e_2 y se completa hasta formar una nueva triangulación. Si volvemos a añadir e_1 obtenemos una triangulación T' que coincide en una oreja tanto con T_1 como con T_2 . Por inducción, podemos llevar tanto T_1 como T_2 hasta T' realizando flips (Figura 5.9).

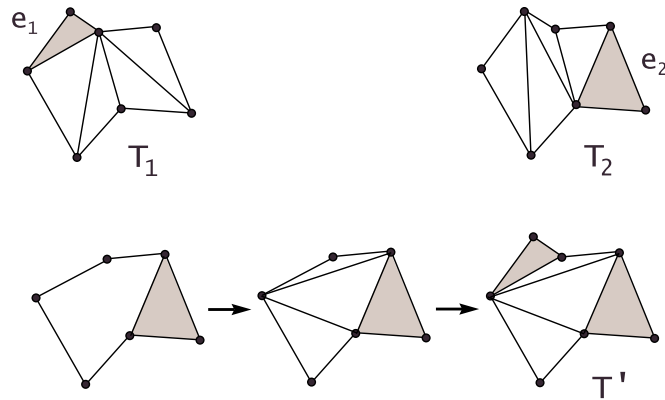


Figura 5.9: Por inducción podemos llegar a T' tanto desde T_1 como desde T_2 .

5.3.2. Toro

A la hora de trabajar con triangulaciones métricas, el estudio en el toro es más complicado que el del cilindro. En primer lugar, aparece de nuevo la diferencia de comportamiento ya vista en el Capítulo 4 dependiendo de si el toro está generado o no por traslaciones ortogonales. Mientras que en el toro plano se prueba que todo polígono tiene un grafo de triangulaciones conexo, basta con modificar algo la métrica para que esto deje de ser cierto, tal y como veremos al final de esta sección. Hasta entonces nos centraremos en el toro plano, que es el que presenta mayor interés.

Si suponemos el toro generado a partir de una traslación horizontal de módulo h y otra vertical con módulo v , es fácil ver que para que en su desarrollo plano una diagonal sea admisible (un segmento mínimo) basta con que sus proyecciones sobre los ejes OX y OY sean menores, respectivamente, que $\frac{h}{2}$ y $\frac{v}{2}$. Por comodidad, y sabiendo que esto no va a significar ningún cambio en los resultados, en adelante supondremos ambas traslaciones unitarias. De este modo una diagonal será admisible cuando las distancias horizontales y verticales entre los vértices que la definan sean menores que $\frac{1}{2}$.

Las demostraciones de la conectividad del grafo de triangulaciones en el plano o el cilindro se basan, de alguna forma, en que cualquier polígono es triangulable. O, como se enunciaba en el Lema 5.1, en que cualquier polígono con cuatro o más vértices admite una diagonal. Esto ya no es cierto en el toro [32], en el que pueden encontrarse ejemplos como el de la Figura 5.10, donde aparece un polígono que no admite una triangulación en términos de caras triangulares, lo que ocurre cuando

el polígono contiene un cuadrante sin vértices en su interior. Este es el motivo de que la definición de triangulación dada en la Sección 5.1 se estableciese a partir de regiones triangulares en lugar de conjuntos maximales de diagonales.

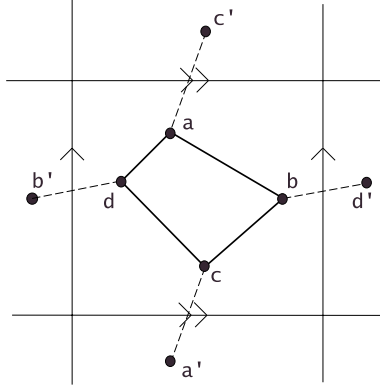


Figura 5.10: El segmento mínimo que une a con un elemento de la órbita de c es exterior al polígono. Lo mismo ocurre con b y d , por lo que el polígono no tiene ninguna diagonal admisible.

Además, aunque el polígono admitiese una triangulación hay diagonales que, pese a ser admisibles, no pueden formar parte de ninguna de ellas. En la Figura 5.11, (a), se observa una triangulación de un polígono, pero si en el mismo polígono imponemos la existencia de la diagonal bc (Figura 5.11, (b)), ya no puede añadirse ninguna otra diagonal admisible y no es posible completar hasta obtener una triangulación.

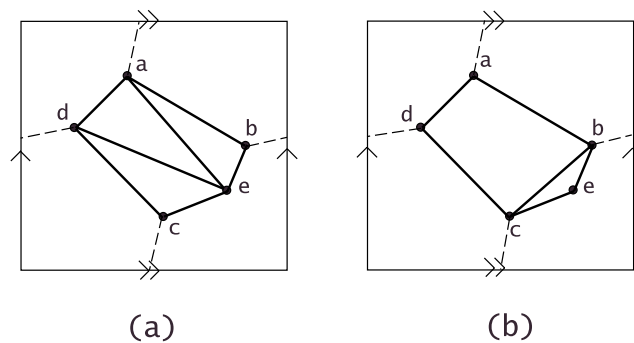


Figura 5.11: Fijar una diagonal puede hacer imposible completar una triangulación, aunque el polígono sea triangulable.

Este comportamiento anómalo en el toro complica el estudio del grafo de triangulaciones. En primer lugar supone la aparición de polígonos no triangulables, y además obliga a desarrollar nuevas técnicas a la hora de trabajar con aquellos que sí lo sean. Ya no es válido el método usado en el cilindro, ya que, como se ve en la Figura 5.12, el hecho de fijar una diagonal puede suponer que el polígono no pueda triangularse.

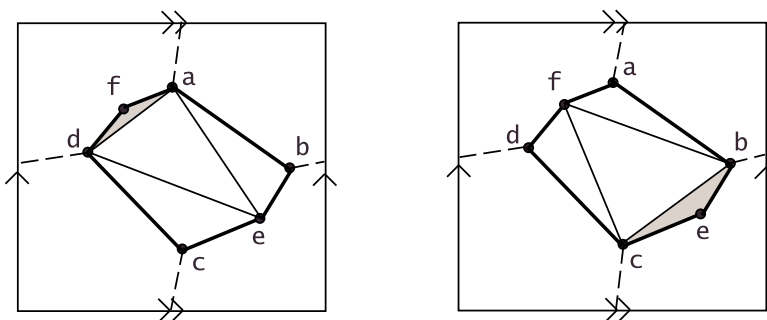


Figura 5.12: En el cilindro se fijaba una oreja de cada triangulación (triángulos sombreados en la figura) y se construía una triangulación que contuviera ambas diagonales. Sin embargo a partir de los ejemplos anteriores se deduce que fijar ambas al mismo tiempo hace que la triangulación no pueda completarse.

Son estas aristas *prohibidas*, en el sentido de que su inclusión hace que no pueda completarse una triangulación, las que complican el trabajo en el toro. Una forma de evitar este problema es encontrar diagonales o, más concretamente, orejas, que podamos asegurar que forman parte de alguna triangulación. Llamaremos *orejable* a todo vértice tal que la diagonal que une sus vértices adyacentes sea admisible. Que un vértice sea orejable no nos asegura que exista alguna triangulación conteniendo dicha oreja. Ahora bien, existe una clase de vértices donde es seguro que siempre podremos encontrar una oreja.

Dado un polígono P sobre una superficie, se dice que un vértice de P es *convexo* si su ángulo interior es menor de 180 grados. Diremos que un vértice es *superior* (resp., *inferior*) si es convexo y sus dos vértices adyacentes tienen menor (resp., mayor) ordenada que él (Figura 5.13). De igual forma, se dice que un vértice es *derecho* (resp., *izquierdo*) si es convexo y sus dos vértices adyacentes tienen menor (resp., mayor) abscisa que él. Llamaremos *vértice extremo* a los vértices que pertenezcan a cualquiera de las categorías anteriores. La importancia de estos vértices viene dada por el siguiente lema:

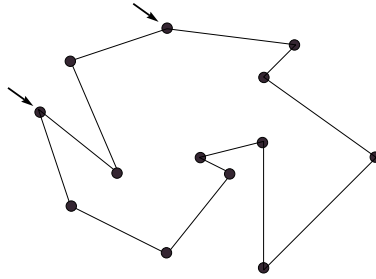


Figura 5.13: Polígono donde se han marcado los vértices *superiores*.

Lema 5.2 *Todo polígono triangulable con $n \geq 4$ vértices en el toro admite una triangulación con una oreja en uno de sus vértices extremos.*

Demostración: Empezaremos por el caso base $n = 4$. Las dos orejas de un cuadrilátero triangulable son vértices opuestos, y como todo polígono debe tener al menos dos vértices extremos, el único caso no trivial es aquel donde los dos vértices no extremos son opuestos y están unidos por una diagonal. Este cuadrilátero debe estar contenido en el rectángulo isotético que tiene a los vértices extremos como vértices (Figura 5.14). Como la diagonal que los une es admisible, las medidas de los lados del rectángulo son menores que $\frac{1}{2}$, y como los dos vértices no extremos están en su interior, la diagonal que los une debe ser admisible y podemos realizar un flip que deje a los extremos como orejas.

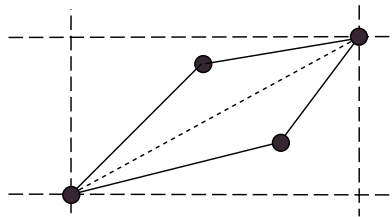


Figura 5.14: Las distancias horizontal y vertical de la diagonal que une los vértices no extremos deben ser menores que las distancias de la que une a los extremos, luego ésta es admisible.

Supongamos ahora un polígono triangulable P_{n+1} con $n + 1$ lados, $n \geq 4$, y T una triangulación de P_{n+1} . Sea v una oreja de P_{n+1} y a y b sus vértices adyacentes. Si v es un vértice extremo de P_{n+1} , hemos terminado. En otro caso, eliminamos

v del polígono, obteniendo un nuevo polígono P_n con n lados. Por hipótesis de inducción, P_n admite una triangulación T' con una oreja en un vértice extremo w .

Si w no es a ni b , entonces también es un vértice extremo de P_{n+1} y $T'' = T' \cup \{\Delta avb\}$ es una triangulación de P_{n+1} con un vértice extremo en w , que es lo que queríamos probar.

Supongamos entonces que T' tiene una oreja extrema Δabc en a . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que a es un vértice derecho. Sea R el triángulo, exterior a P_n , definido por la diagonal ab y dos segmentos paralelos a los ejes de coordenadas (área sombreada en la Figura 5.15). Como v no es extremo, deberá estar contenido en R , lo que implica que a también es un vértice derecho en P_{n+1} .

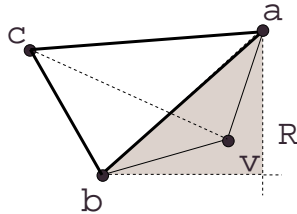


Figura 5.15: Si v estuviera fuera de R , sería un vértice extremo. En caso contrario podemos realizar un flip para obtener una oreja extrema en a .

La distancia horizontal (resp., vertical) entre v y c es menor, por ser a extremo, que la distancia horizontal entre a y c (resp., a y b), y como tanto ac como ab son diagonales admisibles, también lo es vc . Podemos entonces hacer un flip en la arista ab de $T'' = T' \cup \{\Delta avb\}$, obteniendo una triangulación de P_{n+1} con una oreja Δcav en un vértice extremo a . □

Acabamos de probar que cualquier polígono admite una triangulación con una oreja en un vértice extremo. Nuestro siguiente paso para demostrar la conexión del grafo de triangulaciones será ver que es posible llevar una triangulación cualquiera a una que contenga dichas orejas.

Lema 5.3 *Sea P un polígono triangulable en el toro plano y v un vértice extremo orejable. Entonces, toda triangulación de P puede llevarse, mediante flips, hasta otra triangulación con una oreja en v .*

Demostración: Por simplicidad, supongamos que v es un vértice derecho. Sea T una

triangulación de P de forma que v no sea una oreja. Sea P' el subpolígono formado por los triángulos de T que tienen a v como vértice (Figura 5.16). Claramente v es el vértice más a la derecha de este subpolígono, y todas las diagonales que parten de v son admisibles. Esto implica que la distancia horizontal entre cualesquiera dos vértices de P es menor que $\frac{1}{2}$.

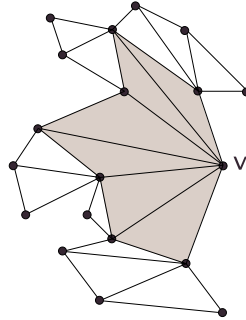


Figura 5.16: P' (área sombreada) se construye a partir de los triángulos que tienen a v como vértice.

De este modo las diagonales admisibles de P' son exactamente las mismas que tendría de estar sobre el cilindro. En particular, a partir de [32], se prueba que P' admite una triangulación con una oreja en v , y que esta triangulación está conectada mediante flips a la restricción de T a P' , lo que finaliza la demostración. \square

A partir de los dos lemas anteriores se deduce de manera inmediata la conexión del grafo de triangulaciones.

Teorema 5.4 *El grafo de triangulaciones (métricas) de un polígono en el toro es vacío o conexo.*

Demostración: Sean T_1 y T_2 dos triangulaciones de un polígono P en el toro plano. Por el Lema 5.2, sabemos que existe un vértice extremo v orejable. Y por el Lema 5.3, tanto T_1 como T_2 pueden llevarse mediante una serie de flips hasta sendas triangulaciones T'_1 y T'_2 , respectivamente, con una oreja en v . Por hipótesis de inducción, si fijamos una oreja en v podemos llevar T'_1 hasta T'_2 mediante flips, obteniéndose la secuencia de transformación de triangulaciones $T_1 \rightarrow T'_1 \rightarrow T'_2 \rightarrow T_2$, lo que demuestra el resultado. \square

De este modo queda probado que dadas dos triangulaciones cualesquiera en el toro, es posible ir de una a otra realizando flips, pero ¿cuántos flips son, a lo sumo,

necesarios para ello? Esta cuestión, es equivalente a calcular el diámetro del grafo de triangulaciones. En la demostración del teorema anterior, hemos procedido por inducción en el número de vértices y en cada uno de los pasos hay que llevar la triangulación hasta una que tenga una oreja en un vértice extremo. En el peor de los casos, que el vértice escogido esté unido a todos los demás, harán falta $n - 1$ flips, lo que nos conduce a un número de operaciones cuadrático, que es el diámetro del grafo. Además, es una cota ajustada al serlo también en el plano [67], ya que basta con sumergir en el toro, convenientemente reducido para que los vértices estén en posición euclídea, algún polígono plano con esa característica.

Sin embargo, como dijimos al principio de esta sección, la conexión del grafo de triangulaciones se pierde si efectuamos un ligero cambio en la métrica del toro. Basta con que las traslaciones que lo generan dejen de ser ortogonales para que la forma de los dominios de Dirichlet pase de ser un rectángulo a un hexágono, por lo que ya no son sólo los puntos de los dominios adyacentes horizontal y verticalmente los que influyen métricamente a la hora de determinar si una diagonal es o no admisible. Esto nos permite construir polígonos con un mayor número de diagonales no admisibles.

Consideremos el toro torcido generado a partir de dos traslaciones cuyos vectores forman un ángulo de $\arccos \sqrt{5}$ grados. Para simplificar las coordenadas de los vértices, se fija una traslación horizontal de módulo la unidad, siendo la otra de módulo $2\sqrt{5}$, por lo que un dominio fundamental tiene altura uno. Usando un sistema de coordenadas ortogonal de la manera habitual, construimos un hexágono de vértices $a(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{3}{4})$, $b(1 - \varepsilon, \frac{3}{4})$, $c(1 + \frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{2})$, $d(1 - \varepsilon, \frac{1}{4})$, $e(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{4})$ y $f(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{2})$, con $\varepsilon < \frac{1}{8}$. En la Figura 5.17 aparece representada de un mismo color la órbita de cada vértice.

Unos sencillos cálculos permiten comprobar que las diagonales ad , be y cf no son admisibles, luego sólo pueden construirse las dos triangulaciones que se muestran en la Figura 5.17 y no es posible realizar ningún flip.

5.3.3. Superficies localmente euclídeas no orientables

Veamos ahora qué sucede en las superficies localmente euclídeas no orientables. Como hemos visto en capítulos anteriores, la aparición de una simetría con deslizamiento entre los generadores de una superficie suele traer consigo cambios en el comportamiento de la misma. En este caso, el cilindro retorcido y la botella de Klein se diferencian del cilindro y el toro plano en que, al igual que ocurre en el toro torcido, pueden encontrarse polígonos con grafo de triangulaciones no conexo. Estos polígonos son además más sencillos de encontrar que en el toro torcido, y son

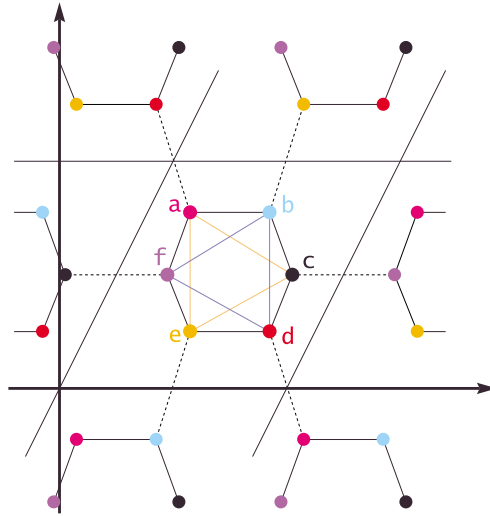


Figura 5.17: Hexágono en el toro torcido donde están marcados todos los posibles segmentos entre sus vértices.

exportables al resto de SOEs generadas a partir de simetrías con deslizamiento.

Partimos del cilindro retorcido con un sistema de referencia ortogonal, fijando OX sobre el eje de la simetría con deslizamiento, que supondremos con módulo unitario. El hexágono de vértices $a(\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{4})$, $b(\frac{3}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4})$, $c(\frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{3}, 0)$, $d(\frac{3}{4} - \varepsilon, -\frac{1}{4})$, $e(\frac{3}{4} + \varepsilon, -\frac{1}{4})$ y $f(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{3}, 0)$, con $\varepsilon < \frac{1}{16}$, que puede verse en la Figura 5.18, admite dos posibles triangulaciones y no es posible realizar ningún flip para pasar de una a otra.

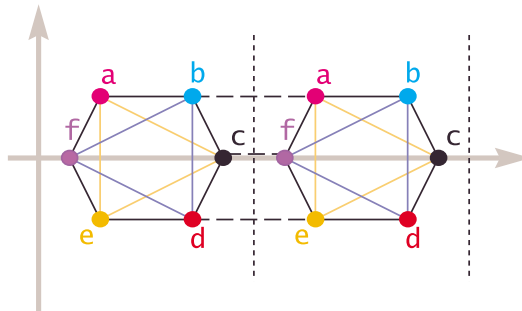


Figura 5.18: Hexágono con grafo de triangulaciones no conexo en el cilindro retorcido.

Este mismo hexágono puede sumergirse en cualquier otra SOE que tenga una

simetría con deslizamiento entre sus generadores, como la botella de Klein o el plano proyectivo con la métrica cociente. Con respecto a esta última superficie, hay que hacer notar que esta métrica no es la que se usa habitualmente sobre ella, lo que deja la puerta abierta a una revisión del resultado para dicha métrica.

5.3.4. Triangulaciones de nubes de puntos

Al realizar este trabajo nuestro objetivo era estudiar la conexión del grafo de triangulaciones de polígonos en superficies localmente euclídeas. Sin embargo, al presentar los ejemplos de polígonos con grafo no conexo vimos que, incluyendo algunos puntos extra, se obtenía una nube de puntos con grafo de triangulaciones no conexo. En esta sección presentamos algunos de estos ejemplos.

Cilindro

Empezaremos recordando los resultados conocidos sobre la conexión del grafo de triangulaciones de una nube de puntos en el cilindro. Evidentemente, si los puntos se encuentran en posición euclídea el comportamiento es el mismo que en el plano y el grafo es conexo. En caso contrario, la región que se triangula está acotada por dos poligonales homotópicamente no nulas que no están unívocamente determinadas por la nube de puntos. Si nos restringimos al conjunto de triangulaciones de una nube fijando dichas poligonales, entonces su grafo de triangulaciones es conexo. Sin embargo, si las poligonales no coinciden es imposible realizar flips que pasen de una a otra, por lo que el grafo es desconexo. Un ejemplo de esto último, extraído de [32], lo podemos ver en la Figura 5.19.

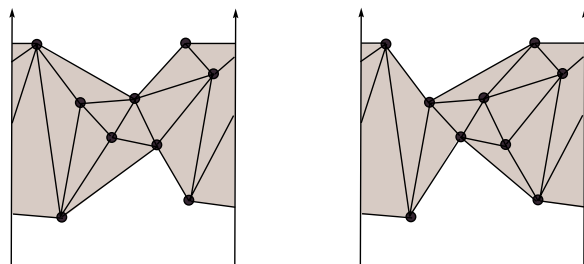


Figura 5.19: A pesar de partir de la misma nube de puntos, la región triangulada es distinta. Al no poder realizarse ningún flip sobre las diagonales de la frontera el grafo es desconexo.

Toro

En el toro también se presentan distintos casos según se halle de repartida por la superficie la nube de puntos a triangular. Si los puntos están en posición euclídea, su comportamiento es plano y el grafo es conexo. Si, por el contrario, no están en posición euclídea, pero sí entre dos generatrices diametralmente opuestas, su comportamiento es el mismo que en el cilindro. El último caso es que los puntos se encuentren repartidos por toda la superficie; sin embargo, hasta ahora no se conoce ningún resultado sobre la conexión del grafo en el toro plano para esta situación, aunque nos inclinamos a conjeturar que el grafo seguirá siendo conexo.

Distinto es lo que sucede en el toro torcido, donde el ejemplo que se presentaba en la Sección 5.3.2 de un polígono con grafo de triangulaciones no conexo puede generalizarse, añadiendo nuevos puntos, a una nube con la misma propiedad. Consideremos el ejemplo ya mencionado al que le añadimos los puntos $g(0, \frac{3}{4})$, $h(\frac{1}{4}, \frac{3}{5})$, $i(\frac{2}{5}, \frac{1}{4})$ y $j(0, \frac{1}{4})$, tal y como se ve en la Figura 5.20. El hexágono central (en rojo en el dibujo) sigue admitiendo dos triangulaciones diferentes (en azul y verde), y las diagonales que lo delimitan no pueden reemplazarse mediante flips. Veamos esto último.

Supongamos que hemos elegido una triangulación que incluye las diagonales azules, y fijémonos en la diagonal bc , que divide el cuadrilátero de vértices $bhcd$. Como éste no es convexo, no podemos realizar el flip. Esto sigue siendo así aunque cambiemos el vértice h por otro. Si ponemos en su lugar la copia del vértice g que está sobre ellos, el flip no puede realizarse ya que d está más cerca de g . Estos mismos argumentos pueden usarse para descartar cualquier otro vértice del conjunto y son aplicables al resto de diagonales rojas.

El grafo de triangulaciones de este conjunto tiene entonces al menos dos componentes conexas, y la pertenencia a una u otra componente depende de la triangulación que aparezca en el hexágono central, que podrá ser la dada por el triángulo $\triangle ace$ o $\triangle bdf$.

Superficies localmente euclídeas no orientables

En el cilindro retorcido ocurre como en el cilindro; las triangulaciones de un conjunto se reducen a una región del mismo. La diferencia es que esta región está acotada por una única poligonal que da “dos vueltas” a la superficie. Como ocurría en el cilindro, si el conjunto da lugar a dos poligonales distintas no será posible convertir una triangulación en otra, al no poder realizar flips sobre las diagonales que la forman.

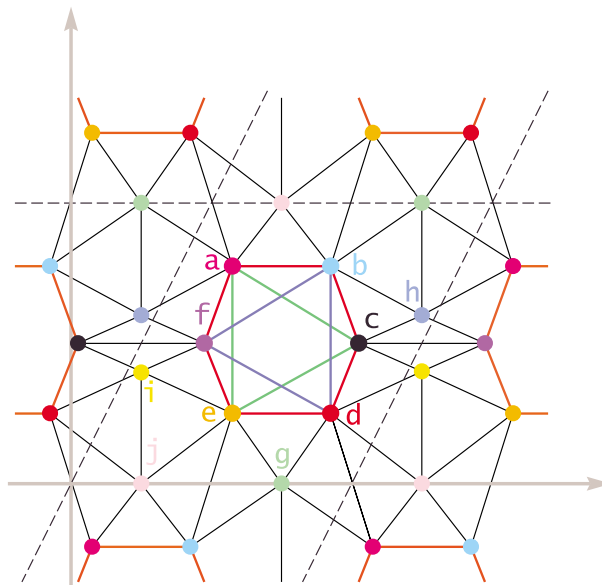


Figura 5.20: No es posible realizar ningún flip que elimine cualquiera de las diagonales rojas, por lo que no va a ser posible pasar de una triangulación que contenga las diagonales azules a otra que contenga a las verdes.

Pero, al contrario que en el cilindro, aquí sí pueden darse dos triangulaciones de una misma región sin que sea posible pasar de una a otra. Esta situación es la que se muestra en la Figura 5.21. Los seis puntos centrales son los que formaban el polígono del ejemplo anterior (Figura 5.17, pag. 126), a los que hemos añadido dos nuevos puntos. Al igual que ocurría para el toro torcido, las diagonales que dibujan el hexágono central están fijas en todas las triangulaciones, aunque sí es posible realizar flips con las diagonales dentro del área sombreada.

El mismo ejemplo puede llevarse a la botella de Klein, aunque también es posible construir un nuevo conjunto con las mismas características que triángule toda la superficie, como el que aparece en la Figura 5.22.

Al contrario de lo que ocurría con los polígonos, estos ejemplos no son directamente trasladables al resto de las SOEs con simetrías con deslizamiento. Pudiera ocurrir que, al incluir nuevos movimientos e incrementar las órbitas, aparecieran nuevas diagonales admisibles. En cualquier caso, a partir de los ejemplos vistos parece que va a ser posible construir uno de tales conjuntos en las demás SOEs con simetrías con deslizamiento.

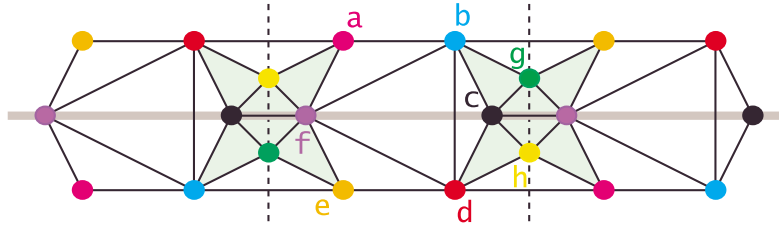


Figura 5.21: Sólo es posible realizar flips en el área sombreada; el resto de diagonales están fijas. Cambiando el triángulo $\triangle ace$ por el $\triangle bdf$ obtendríamos una nueva triangulación a la que no es posible llegar realizando flips.

5.4. Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo ha quedado establecida la relación entre la conexión del grafo de triangulaciones (métricas) y la métrica de la superficie. Así, mientras que los resultados dados hasta ahora en la esfera establecían la conexión del grafo con la métrica habitual, basta con deformarla un poco para que este hecho deje de ser cierto. Esto nos ha permitido construir una métrica que permite la existencia de polígonos y nubes de puntos cuyo grafo de triangulaciones es no conexo en toda superficie cerrada y conexa. Queda pendiente comprobar si se cumple también lo contrario, es decir, si para toda superficie cerrada y conexa es posible construir una métrica tal que todo polígono y/o nube de puntos tenga grafo de triangulaciones conexo.

Posteriormente, hemos visto el diferente comportamiento de las superficies localmente euclídeas según estén generadas o no a partir de una simetría con deslizamiento (y por tanto, según sean o no orientables). Para sus métricas naturales, el grafo es conexo en el cilindro y el toro, mientras que es fácil encontrar ejemplos de lo contrario en el cilindro retorcido y la botella de Klein. Aún así, basta una ligera modificación en la métrica del toro para aparezcan polígonos con grafo no conexo.

El siguiente paso que se apunta es el problema equivalente para triangulaciones de nubes de puntos. En [32] se ve que para el cilindro, la conexión del grafo depende de que la región triangulada sea la misma, en cuyo caso el grafo es conexo. Y hemos visto que para las no orientables y el toro torcido los ejemplos de grafo no conexo dados para polígonos admiten una transformación sencilla a nubes de puntos. Quedaría entonces por estudiar qué ocurre en el toro plano. Nuestra conjetura es que el grafo de triangulaciones va a ser conexo, aunque para probarlo (caso de

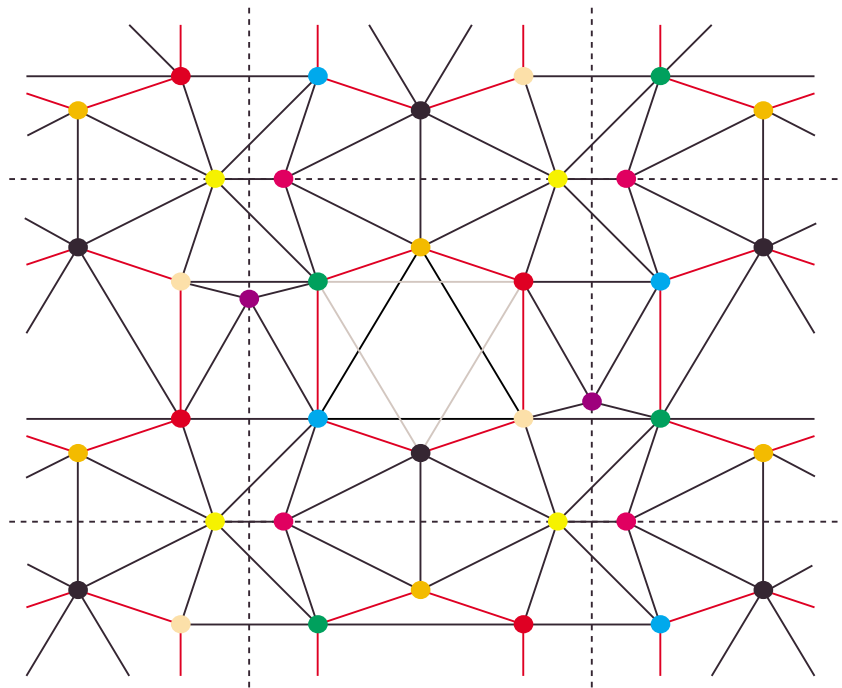


Figura 5.22: No puede realizarse ningún flip sobre las aristas rojas. Esto divide a las triangulaciones del conjunto en dos componentes conexas, según la triangulación que aparezca en el hexágono central.

que sea cierto) hará falta desarrollar nuevas herramientas, ya que las que hemos usado aquí se basan siempre en la existencia de aristas (las que forman el polígono) comunes a todas las triangulaciones.

También puede plantearse la extensión de estos estudios al resto de las SOEs o, en las superficies anteriormente tratadas, comprobar qué sucede si se considera la métrica que heredan del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 en lugar de la cociente.

Bibliografía

- [1] M. Abellanas, C. Cortés, G. Hernández, A. Márquez y J. Valenzuela. Maximum subsets in Euclidean position in Euclidean 2-orbifolds and the sphere. En *19th European Workshop on Computational Geometry*, páginas 81–83, Bonn, 2003.
- [2] M. Abellanas, C. Cortés, G. Hernández, A. Márquez y J. Valenzuela. Sets in Euclidean position in 2-orbifolds. En *Primer Congreso entre la RSME y la AMS*, Sevilla, 2003. Abstract disponible en <http://www.us.es/rsmeams/sesionpdf/sesion14.pdf>.
- [3] M. Abellanas, C. Cortés, G. Hernández, A. Márquez y J. Valenzuela. Subconjuntos máximos en superficies de órbitas y la esfera. En *X Encuentros de Geometría Computacional*, páginas 69–74, Sevilla, 2003.
- [4] J. Abello, V. Estivill-Castro, T.C. Shermer y J. Urrutia. Illumination of orthogonal polygons with orthogonal floodlight. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 8:25–38, 1998.
- [5] P.K. Agarwal, T. Hagerup, R. Ray, M. Sharir, M. Smid y E. Welzl. Translating a planar object to maximize point containment. En R.H. Möhring y R. Raman, editores, *10th Annual European Sympos. Algorithms (ESA 2002)*, número 2461 en *Lectures Notes in Computer Science*, páginas 42–53. Springer-Verlag, Sep. 2002.
- [6] A. Aggarwal, M. Baldwin, J. O'Rourke y S. Maddila. An optimal algorithm for finding minimal enclosing triangles. *J. Alg.*, 7:258–269, 1986.
- [7] A.V. Aho, J.E. Hopcroft y J.D. Ullman. *Data Structures and Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [8] S.G. Akl y G.T. Toussaint. Efficient convex hull algorithms for pattern recognition applications. En *Proc. 4th. Int. Joint Conf. on Pattern Recognition*, páginas 483–487, Japón, 1978.

- [9] S.B. Alexander, I.D. Berg y R.L. Bishop. Cut loci, minimizers, and wavefronts in riemannian manifolds with boundary. *The Michigan Mathematical Journal*, 40(2):229–237, 1993.
- [10] G. Aloupis, C. Cortés, F. Gómez, M. Soss y G. Toussaint. Lower bounds for computing statistical depth. *Computational Statistics and Data Analysis*, 40:223–229, 2002.
- [11] N. Amenta et al. Application challenges to computational geometry. cg impact task force report. Disponible en <http://graphics.lcs.mit.edu/~seth/pubs/taskforce/techrep.html>.
- [12] H.C. Andrews. *Introduction to mathematical techniques in pattern recognition*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [13] E. Arkin, M. Held, J. Mitchell y S. Skiena. Hamiltonian triangulations for fast rendering. En J. van Lecuwen, editor, *Algorithms-ESA '94*, volumen 855, páginas 36–47. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 1994.
- [14] G. Barequet, M. Dickerson y P. Pau. Translating a convex polygon to contain a maximum number of points. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 8:167–179, 1997.
- [15] R.E. Barnhill. *Representation and approximation of images*. J. Rice, 1993. Vol. 3 of *Mathematical Software III*.
- [16] L.J. Bass y S.R. Schubert. On finding the disc of minimum radius containing a given set of points. *Math. Comput.*, 12:712–714, 1967.
- [17] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars y O. Scharzkopf. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, 1997.
- [18] M. Bern y D. Eppstein. Mesh generation and optimal triangulation. En *Computing in Euclidean Geometry*, páginas 23–90. D. Z. Du and F. K. Hwang, World Scientific, 1992.
- [19] R.L. Bishop. Decomposition of cut loci. *Proc. of the American Mathematical Society*, 65(1):133–136, 1977.
- [20] G. Blanco. Geometría computacional. Notas del curso 98/99. Dpto. de Matemática Aplicada. Escuela Universitaria de Informática. Univ. Politécnica de Madrid, 1998.
- [21] D. Bochiş. *Estereoedreos de Dirichlet en 2 y 3 dimensiones*. Tesis doctoral, Universidad de Cantabria, 1998. Disponible en <http://www.matesco.unican.es/~dacib/tesis/>.

- [22] D.J. Bogue. The structure of the metropolitan community: A study of dominance and subdominance. Technical report, Ann Arbor: Horace M Rackham School of Graduate Studies, University of Michigan, Michigan, 1949.
- [23] J.D. Boissonnat y M. Yvinec. *Algorithmic Geometry*. Cambridge University Press, 1998.
- [24] I.M. Bomze, M. Budinich, P.M. Pardalos y M. Pelillo. The maximum clique problem. En D.-Z. Du y P. M. Pardalos, editores, *Handbook of Combinatorial Optimization (Supplement Volume A)*, páginas 1–74. Kluwer Academic, Boston, Massachusetts, U.S.A., 1999.
- [25] P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine y J. Urrutia. The floodlight problem. *International Journal of Computational Geometry*, 12(7):153–163, 1997.
- [26] G.S. Brown. Point density in stems per acre. *New Zealand Forestry Service Research Notes*, 38:1–11, 1965.
- [27] K.Q. Brown. *Geometric transformations for fast geometric algorithms*. Tesis doctoral, Dept. of Computer Science, Carnegie Mellon Univ., 1980.
- [28] M.P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, 1976.
- [29] S. Chandran y D. Mount. A parallel algorithm for enclosed and enclosing triangles. *Int. J. Computational Geometry and Applications*, 2:2:191–214, 1992.
- [30] B. Chazelle. Optimal algorithms for computing depths and layers. En *Proc. 21st Allerton Conference on Comm., Control and Comput.*, páginas 427–436, 1983.
- [31] B. Chazelle y D.T. Lee. On a circle placement problem. *Computing*, 36:1–16, 1986.
- [32] C. Cortés. *Triangulaciones de Superficies*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1999.
- [33] C. Cortés, D. I. Grima, F. Hurtado, A. Márquez, F. Santos y J. Valenzuela. Transforming triangulations of polygons on non planar surfaces. En *17th European Workshop on Computational Geometry*, páginas 31–34, Berlin, 2001.
- [34] C. Cortés, A. Márquez y J. Valenzuela. Euclidean position in 2-orbifolds. En *18th European Workshop in Computational Geometry*, páginas 65–67, Varsovia, 2002.

- [35] C. Cortés, A. Márquez y J. Valenzuela. Posición euclídea en superficies de órbitas euclídeas. En *III Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica*, páginas 77–80, Mairena del Aljarafe (Sevilla), 2002.
- [36] C. Cortés, A. Márquez y J. Valenzuela. Euclidean position in 2-orbifolds. Por aparecer en *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2003.
- [37] J. Czyzowicz, I. Rival y J. Urrutia. Galleries, light matchings and visibility graphs. En *Proc. Algorithms and Data Structures Workshop, WADS. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag*, volumen 382, 1989.
- [38] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo y J. Urrutia. Illuminating rectangles and triangles in the plane. *Journal of Combinatorial Theory. B*, 57:1–17, 1993.
- [39] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo y J. Urrutia. Optimal floodlight illumination of stages. En *Proc. 5th Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 393–398, Univ. of Waterloo, Waterloo, 1993.
- [40] M. Dickerson y D. Schrstein. Optimal placement of convex polygons to maximize point containment. *Computational Geometry, Theory and Applications*, 11:1–16, 1998.
- [41] R.O. Duda y P.E. Hart. *Pattern clasification and Scene Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1973.
- [42] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [43] H. Edelsbrunner, H.A. Maurer, F.P. Preparata, A.L. Rosenberg, E. Welzl y D. Wood. Stabbing line segments. *BIT*, 22:274–281, 1982.
- [44] A. Efrat, M. Sharir y A. Ziv. Computing the smallest k -enclosing circle and related problems. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 4:119–136, 1994.
- [45] P.E. Ehrlich y H.C. Im Hof. Dirichlet regions in manifolds without conjugate points. *Comment. Math. Helvetici*, 54:642–658, 1979.
- [46] D. Elerath. An improved Toponogov comparison theorem for non-negative curved manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 15:187–216, 1980.
- [47] D. Eppstein y J. Erickson. Iterated nearest neighbors and finding minimal polytopes. *Discrete Computational Geometry*, 11:321–350, 1994.
- [48] P. Erdos. On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly*, 53:248–250, 1946.

- [49] V. Estivill-Castro, J. O'Rourke, J. Urrutia y D. Xu. Illumination of polygons with vertex floodlights. *Information Processing Letters*, 1(56):62–73, 1995.
- [50] V. Estivill-Castro y J. Urrutia. Optimal floodlight illumination of orthogonal art galleries. En *Proc. 6th Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 81–86, Saskatoon, Sask. Canada, 1994.
- [51] Euclides. *Elementos. Libro VII*.
- [52] S. Fortune. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. En *Computing in Euclidean Geometry*, páginas 193–234. D.Z. Du and F.K. Hwang, World Scientific, 1992.
- [53] H. Freeman. Computer processing of line-drawing images. *Comput. Surveys*, 6:57–97, 1974.
- [54] A. Fujii y A. Okabe. The statistical analysis through a computational method of a distribution of points in relation to its surrounding network. *Environment and Plannings*, 16:107–114, 1984.
- [55] G. Garequet y M. Sharir. Piecewise-linear interpolation between polygonal slices. En *Proc. of the 10th ACM Symposium on Computational Geometry*, páginas 93–102, 1994.
- [56] M. Garey y D. Johnson. *Computers and Intractability*. W.H. Freeman, 1979.
- [57] C.D. Gelatt, S. Kirkpatrick y M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.
- [58] J.E. Goodman y J. O'Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 1997.
- [59] R.L. Graham. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Inform. Process. Lett.*, 1:132–133, 1972.
- [60] C.I. Grima. *Geometría Computacional en Superficies no Planas*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1998.
- [61] C.I. Grima y A. Márquez. *Computational Geometry on Surfaces*. Kluwer Academic Publisher, 2001.
- [62] P.M. Gruber. History of convexity. En P.M Gruber y J.M. Wills, editores, *Handbook of convex Geometry*, volumen I, páginas 1–16. Elsevier Science, 1993.

- [63] M. Henle. *A combinatorial introduction to topology*. Dover publications, Inc., 1994.
- [64] K. Hinrichs y J. Nievergelt. *Algorithms and Data Structures*. Prentice Hall, 1993.
- [65] C. M. Hoffmann. *Geometric and solid modeling*. Morgan Kaufmann, 1989.
- [66] R.N. Horton. Rational study of rainfall data makes possible better estimates of water yield. *Engineering News-Record*, 79:211–213, 1917.
- [67] F. Hurtado, M. Noy y J. Urrutia. Flipping edges in triangulations. *Discrete and Computational Geometry*, 22:333–346, 1999.
- [68] C.S. Kaplan. *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*. Tesis doctoral, 2002. Disponible en <http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/phd/>.
- [69] V. Klee y M.L. Laskowski. Finding the smallest triangles containing a given convex polygon. *J. of Algorithms*, 6:359–375, 1985.
- [70] P.J.M. van Laarhoven y E. H. L. Aarts. *Simulated Annealing: Theory and Practice*. Kluwer Academic Publ., 1987.
- [71] C. L. Lawson. Transforming triangulations. *Discrete Mathematics*, 3:365–372, 1972.
- [72] E.H. Lockwood y R.H. Macmillan. *Geometric Symmetry*. Cambridge University Press, 1978.
- [73] H. von Mangoldt. Über diejenigen punkte auf positive gekrümmten flächen, welche die eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen linien nie aufhören, kürzeste linien zu sein. *J. Reine Angew. Math.*, 91:23–53, 1881.
- [74] P. Mani-Levitska. Characterizations of convex sets. En P.M Gruber y J.M. Wills, editores, *Handbook of convex Geometry*, volumen I, páginas 19–42. Elsevier Science, 1993.
- [75] G.E. Martin. *Transformation Geometry. An Introduction to Symetry*. Springer-Verlag, New York Inc., 1982.
- [76] G.E. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer-Verlag, 1998.
- [77] M. Mazón y T. Recio. Voronoi diagrams on orbifolds. *Computational Geometry*, 8:219–230, 1997.

- [78] R. Mead. A relationship between individual plant-spacing and yield. *Annals of Botany, N. S.*, 30:301–309, 1966.
- [79] G.H. Meister. Polygons have ears. *Amer. Math. Monthly*, 82:648–651, 1975.
- [80] K. Menger. Urtersuchungen über allgemeine Metrik. *Math. Ann.*, (100):75–163, 1928.
- [81] N. Meshkat, L.R. Nackman, F. Srinivasan y J.M. Tang. Automatic mesh generation using the symmetric axis transformation of polygonal domains. *Proceedings of the IEEE*, 80 (9):1485–1501, 1992.
- [82] K. Miller, S. Ramaswami, P. Rousseeuw, T. Sellares, D. Souvaine, I. Streinu y A. Strugf. Fast implementation of depth contours using topological sweep. En *Proc. 12th. Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, Washington D.C., 2001.
- [83] J.M. Montesinos. *Classical Tessellations and Three-Manifolds*. Springer-Verlag, 1987.
- [84] S.B. Myers. Connections between differential geometry and topology I. *Duke Mathematics Journal*, 1:376–391, 1935.
- [85] S.B. Myers. Connections between differential geometry and topology II. *Duke Mathematics Journal*, 2:95–102, 1936.
- [86] M. Nielson y R. Ramaraj. Interpolation over a sphere based upon a minimum norm network. *Computer Aided Geometric Design*, 4:41–57, 1987.
- [87] V. V. Nikulin y I. R. Shafarevich. *Geometries and Groups*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer, Berlin, 1987.
- [88] A. Okabe, B. Boots y K. Sugihara. *Spatial Tesselations. Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, 1992.
- [89] J. O’Rourke. An on-line algorithm for fitting straight lines between data ranges. *Comm. ACM.*, 24:574–578, 1981.
- [90] J. O’Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [91] J. O’Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.

- [92] J. O'Rourke y D. Xu. Illumination of polygons with 90° vertex lights. En *Snapshots in Computational Geometry*, páginas 108–117, Univ. Saskatchewan, 1994.
- [93] M.H. Overmars y C. Yap. New upper bounds in Klee's measure problem. *SIAM J. Computing*, 20:1034–1045, 1991.
- [94] F. P. Preparata y M. I. Shamos. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, 1985.
- [95] E. Quak y L.L. Schumaker. Cubic spline fitting using data dependent triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 7:811–830, 1990.
- [96] D. Rappaport. A convex hull algorithm for discs, and applications. *Computational Geometry Theory and Applications*, 1(3):171–187, 1992.
- [97] F. Rivero. Grupos cristalográficos planos. *Boletín de la Asociación Venezolana*, 6(1):141–156, 1999.
- [98] J. Robert y G. Toussaint. Computational geometry and facility location. En *Intern. Conf. of Operation Research and Management Science*, páginas B1–B19, 1990.
- [99] A. Rosenfeld. *Picture Processing by Computers*. Academic Press, New York, 1969.
- [100] P.J. Rousseeuw y I. Ruts. Bivariate location depth. *Applied Statistics*, 45:516–526, 1996.
- [101] P.J. Rousseeuw y I. Ruts. The depth function of a population distribution. *Metrika*, 49 (3):213–244, 1999.
- [102] P.J. Rousseeuw y A. Struyf. Computing location depth and regression depth in higher dimensions. *Statistics and Computing*, 8:193–203, 1998.
- [103] A. Saalfeld. Joint triangulations and triangulated maps. En *Proceedings of the 3er Annual ACM Symposium in Computational Geometry*, páginas 195–204, 1987.
- [104] J. Sack y J. Urrutia. *Handbook of Computational Geometry*. Elsevier Science, The Netherlands, 1982.
- [105] V. Sacristán. *Optimización Geométrica y Aplicaciones en Visibilidad*. Tesis doctoral, Univ. Politécnica de Cataluña, 1997.

- [106] D. Schattschneider. The plane symmetry groups: their recognition and notation. *American Mathematical Monthly*, 85:439–450, 1978.
- [107] B. Schaudt y R.L. Drysdale. Multiplicatively weighted crystal growth Voronoi diagrams. *Proc. 7th Annu. Symp. Comp. Geom. ACM*, páginas 214–223, 1991.
- [108] W. Schroeder y M. Shephard. Geometry-based fully automatic mesh generation and the Delaunay triangulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2503–2515, 1988.
- [109] J. Schwartz, M. Sharir y J. Hopcroft. *Algorithmic and Geometric Robotics*. Lawrence Earlbaum Assoc., 1987.
- [110] J. Schwartz y C.K. Yap. *Planning Geometry and Complexity of Robot Motion*. Ablex Publishing, 1987.
- [111] M. I. Shamos. *Computational Geometry*. Tesis doctoral yale University, 1977.
- [112] T. Shermer. Recent results in art galleries. En *Proceedings of the IEEE*, volumen 80, páginas 1384–1399, 1992.
- [113] W. Steiger y I. Streinu. Positive and negative results on the floodlight problem. En *Proc. Sixth Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 87–92, 1994.
- [114] W. Steiger y I. Streinu. Illumination by floodlights. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 10:57–70, 1998.
- [115] M. Tanaka. On the cut loci of a von Mangoldt's surface of revolution. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 44(4):631–641, 1992.
- [116] R.E. Taylor y O.Z. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1989.
- [117] A.H. Thiessen. Precipitation averages for large areas. *Monthly Weather Review*, 39:1082–1084, 1911.
- [118] G.T. Toussaint. Solving geometric problems with rotating calipers. En *IEEE Melecon'83*, 1983.
- [119] G.T. Toussaint. A historical note on convex hull finding algorithms. *Patt. Recogn. Lett.*, 3:335–375, 1985.

- [120] G.T. Toussaint. New results in computational geometry relevant to pattern recognition in practice. En E.S. Gelsema y L.N. Kanal, editores, *Pattern Recognition in Practice II*, páginas 135–146, 1986.
- [121] J. Urrutia. Iluminando polígonos con reflectores. En *Proc. VI Encuentros de Geometría Computacional*, páginas 59–72, Barcelona, 1995.
- [122] H.B. Voelcker y A.A.G. Requicha. *Research in solid modeling at the University of Rochester: 1972-1987*. Academic Press Ltd., London, England, 1993.
- [123] H.B. Voelcker, A.A.G. Requicha y R.W. Conway. Computer applications in manufacturing. En J.F. Traub, editor, *Annual Review of Computer Science*, volumen 3, páginas 349–387, Palo Alto, CA: Annual Reviews Inc., 1988.
- [124] K. Watson y F.M. Philips. Systematic triangulations. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 26:217–223, 1984.
- [125] E. Wigner y F. Seitz. On the constitution of metallic sodium. *Physical Review*, 43:804–810, 1933.
- [126] M.J. Wozny y W.C. Regli. Computer science in manufacturing. En *Special issue of Comm. ACM*, volumen 39, páginas 33–85, 1996.
- [127] I.M. Yaglom y V.G. Boltyanskii. *Convex figures*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.
- [128] C. Yap. Report on NSF workshop on manufacturing and computational geometry. *IEEE Computational Science and Engineering*, 2:82–84, 1995.
- [129] P. Yoeli. Compilation of data for computer-assisted relief cartography. En *Display and Analysis of Spatial Data*, 1975.