



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS Y  
AUTOMÁTICA  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

CONTRIBUCIONES A LA INTERCONEXIÓN DE  
SISTEMAS A TRAVÉS DE RED Y CONTROL  
ROBUSTO

por  
**Juan María Díaz Cano**

Ingeniero en Electrónica Industrial, Robótica y Automática

PROPUESTA DE TESIS DOCTORAL  
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE

DOCTOR POR LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA

SEVILLA, de diciembre de 2023

Tutor

**Dr. Francisco Rodríguez Rubio**

Directores

**Dr. Manuel López Martínez**

**Dr. José Ángel Acosta Rodríguez**

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Memoria para optar al grado de Doctor por la Universidad de Sevilla

Autor: Juan María Díaz Cano

Título: CONTRIBUCIONES A LA INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS  
A TRAVÉS DE RED Y CONTROL ROBUSTO

Departamento: **Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.**

Vº Bº Director:

---

Manuel López Martínez

Vº Bº Director:

---

José Ángel Acosta Rodríguez

Vº Bº Tutor:

---

Francisco Rodríguez Rubio

El autor:

---

Juan María Díaz Cano

# Índice

<b><u>1</u></b>	<b><u>INTRODUCCIÓN, OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN.....</u></b>	<b><u>4</u></b>
1.1	INTRODUCCIÓN.....	4
1.2	OBJETIVOS DE LA TESIS DOCTORAL .....	8
1.3	ESTADO DEL ARTE .....	8
1.4	ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO.....	9
1.5	REFERENCIAS .....	11
<b><u>2</u></b>	<b><u>ESTABILIDAD Y CONTROL A TRAVÉS DE RED BASADO EN GANANCIA <math>L_2</math> .....</u></b>	<b><u>13</u></b>
2.1	CONTROL ASÍNCRONO DE SISTEMAS LINEALES EN RED .....	13
2.1.1	INTRODUCCIÓN .....	13
2.1.2	CONTRIBUCIONES.....	14
2.1.2.1	Descripción del problema.....	15
2.1.2.2	Propiedades de estabilidad de sistemas muestreados asíncronos .....	16
2.1.2.3	Transformación $L_2$ -GAIN. ....	17
2.1.3	CONCLUSIONES .....	18
2.1.4	REFERENCIAS .....	22
2.2	ADAPTADOR DE RED PARA SISTEMAS LINEALES MUESTREADOS DE FORMA ASÍNCRONA Y EN PRESENCIA DE RETRASOS.....	23
2.2.1	INTRODUCCIÓN .....	23
2.2.2	CONTRIBUCIONES.....	24
2.2.3	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....	25
2.2.3.1	Máximo tiempo de muestreo para pequeña ganancia.....	26
2.2.3.2	Resultados teóricos para el algoritmo de cálculo de MASG. ....	27
2.2.3.3	Análisis de estabilidad en una interconexión muestreada con retardos	28
2.2.4	SÍNTESIS Y ANÁLISIS DE DESEMPEÑO DE UN ADAPTADOR DE RED PARA EL CONTROL REMOTO DE LOS ROTORES DE UN QUADROTOR .....	28
2.2.4.1	Descripción de la configuración experimental .....	29
2.2.4.2	Modelo de sistemas y síntesis del adaptador de red .....	29
2.2.4.3	Tiempo máximo de muestreo para mantener la ganancia $L_2$ .....	30
2.2.4.4	Análisis de estabilidad con retrasos en el muestreo. ....	31
2.2.4.5	Resultados experimentales sobre una red móvil 3GPP .....	32
2.2.5	CONCLUSIÓN.....	34
2.2.6	REFERENCIAS .....	35
<b><u>3</u></b>	<b><u>LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN Y MODOS DESLIZANTES. ....</u></b>	<b><u>36</u></b>
3.1	INTRODUCCIÓN.....	36
3.2	APORTACIONES .....	36
3.3	APLICACIONES .....	38
3.3.1	PÉNDULO EN UN CARRITO .....	38
3.3.2	PÉNDULO DE RUEDA DE INERCIA .....	41

<b>3.4</b>	<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>42</b>
<b>3.5</b>	<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b><u>DISEÑO DE CONTROLADORES NO LINEALES Y COMPARATIVA PARA UN EQUIPO QUADROTOR.....</u></b>	<b>44</b>
<b>4.1</b>	<b>LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN ROBUSTA POR MEDIO DE MODOS DESLIZANTES DE UNA PLATAFORMA ROBÓTICA VTOL. EVALUACIÓN EXPERIMENTAL DEL CONTROL REMOTO SOBRE UNA RED WIFI CON INCERTIDUMBRES.....</b>	<b>44</b>
4.1.1	INTRODUCCIÓN .....	44
4.1.2	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA .....	45
4.1.3	SÍNTESIS DE CONTROLADORES VTOL.....	48
4.1.4	CONCLUSIONES .....	53
4.1.5	REFERENCIAS .....	54
<b>4.2</b>	<b>COMPARATIVA DE CONTROLADORES NO LINEALES PARA EL CONTROL A TRAVÉS DE UNA RED WIFI DE UNA PLATAFORMA EXPERIMENTAL DE UN QUAD-ROTOR.</b>	<b>55</b>
4.2.1	INTRODUCCIÓN .....	55
4.2.2	MODELO DEL QUAD-ROTOR .....	56
4.2.3	TRANSFORMACIÓN DEL MODELO CON LAS SEÑALES VIRTUALES $\Delta$ .....	58
4.2.4	DISEÑO DEL CONTROLADOR LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN + MODOS DESLIZANTES .....	58
4.2.5	RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	63
4.2.5.1	Experimento tiempo de muestreo máximo.....	64
4.2.5.2	Experimento aplicando una referencia escalón en los ejes X, Y y Z .	67
4.2.5.3	Experimento aplicando una referencia senoidal.....	71
4.2.6	CONCLUSIONES .....	75
4.2.7	REFERENCIAS .....	77
<b>5</b>	<b><u>CONCLUSIONES DE LA TESIS DOCTORAL.....</u></b>	<b>78</b>
<b>6</b>	<b><u>ANEXO I: DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN QUAD-ROTOR DE BAJO COSTE.....</u></b>	<b>79</b>
<b>6.1</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>79</b>
<b>6.2</b>	<b>PLATAFORMAS. ....</b>	<b>79</b>
6.2.1	PLATAFORMA 1 Y 2 GDL .....	79
6.2.1.1	Plataforma 1GDL .....	81
6.2.1.2	Plataforma de 2GDL:.....	82
6.2.2	PLATAFORMA VTOL .....	88
6.2.2.1	El sistema propulsor: .....	89
6.2.2.2	Identificación parámetros del VTOL.....	90
6.2.3	PLATAFORMA QUAD-ROTOR.....	91
<b>7</b>	<b><u>ANEXO II: DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS.....</u></b>	<b>94</b>
<b>7.1</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>94</b>
<b>7.2</b>	<b>LEMA 1.....</b>	<b>94</b>

---

<b>7.3</b>	<b>PROPOSICIÓN 2</b> .....	<b>94</b>
<b>7.4</b>	<b>LEMA 2</b> .....	<b>95</b>
<b>7.5</b>	<b>PROPOSICIÓN 3</b> .....	<b>95</b>

# 1 Introducción, Objetivos y Organización

## 1.1 Introducción

En la era contemporánea de la tecnología aeroespacial, los Vehículos Aéreos No Tripulados (UAVs), conocidos comúnmente como drones, han surgido como una auténtica revolución en la forma en que concebimos y aprovechamos la exploración de espacios aéreos. Dentro de esta sorprendente diversidad de UAVs, los Quad-Rotor, vehículos aéreos propulsados por cuatro rotores, han prevalecido sobre el resto. Su capacidad para maniobrar con agilidad en entornos tridimensionales los ha convertido en protagonistas fundamentales en aplicaciones que abarcan desde la fotografía aérea hasta la respuesta a emergencias. Esto ha provocado la investigación científica en técnicas de control robustas y en especial aquellas que toleren la incertidumbre y perturbaciones externas. Esta línea de investigación en particular es donde se enmarca la presente tesis, titulada *Contribuciones a la Interconexión de Sistemas a través de Red y Control Robusto*. La principal motivación práctica es la creciente necesidad de aumentar la fiabilidad del control, con el objetivo final de poder ser usados de forma autónoma en entornos realistas, y por ende de las estrategias de control remoto y el control local robusto.

La contribución de esta tesis se centra en la interconexión de sistemas a través de red, presentando por primera vez el diseño módulos para la interconexión de un sistema de control remoto con un sistema lineal a controlar. El diseño de estos módulos busca garantizar la estabilidad robusta de la interconexión entre ambos, y para ello se emplean las técnicas de análisis de estabilidad de Lyapunov [10], el teorema de preservación de pequeña ganancia [5], y el concepto de *scattering* [11, 12]. El diseño de los módulos se realiza en una primera fase de la tesis para el control de sistemas monovariantes (SISO) y en una segunda fase para sistemas multivariantes (MIMO).

No obstante, la base teórica de la contribución mencionada anteriormente puede categorizarse dentro de las técnicas clásicas de control robusto y no lineal, lo que podría enmascarar la novedad del trabajo. En este sentido y dentro del contexto de la línea de investigación en la que se enmarca esta tesis, se han desarrollado trabajos previos necesarios para resaltar la novedad de la contribución y poder hacer una comparación justa con resultados provenientes de dichas técnicas. Para ello, se ha hecho un análisis exhaustivo de las mismas, no solo a nivel del estado del arte sino con desarrollos tanto teóricos como prácticos ajustados al caso de uso de la presente tesis. Si bien, dichos trabajos no pueden considerarse como contribución de la tesis—en sentido estricto—, sí que ha sido absolutamente necesario su desarrollo para llegar a la contribución principal de la misma y para poder hacer la comparación exhaustiva mediante la validación experimental sobre el mismo caso de uso, validación que también es una contribución original de la tesis per se. Dichos resultados también forman parte de este documento de tesis y se referencian para su escrutinio. En particular nos referimos a las técnicas de linealización por realimentación y modos deslizantes, cuya estabilidad y robustez ha sido analizada mediante los teoremas de Lyapunov.

El objetivo global es desarrollar estrategias innovadoras que aseguren la estabilización del vehículo en una variedad de situaciones operativas, desde condiciones climáticas cambiantes hasta maniobras de vuelo complejas. Además, se explora la viabilidad de implementar sistemas de control que utilicen diversas redes de comunicación, como 3G, Wi-Fi y otros,

para mejorar la conectividad y el control remoto de los UAVs, permitiendo operaciones más seguras y eficientes.

Para respaldar y validar la investigación llevada a cabo, se diseña y construye una plataforma experimental dedicada a los Quad-Rotor. Esta plataforma desempeña un papel crucial en la realización de pruebas rigurosas de forma segura para validar las estrategias de control y diseño propuestas. Precediendo a esta etapa, se llevó a cabo una revisión detallada del estado del arte relacionada, con el objetivo de garantizar que la investigación esté alineada con los desarrollos más recientes y prometedores en este campo en constante evolución.

El enfoque teórico también es un componente esencial de la presente tesis. Para ellos se ha realizado un análisis en profundidad de los modelos matemáticos de los diversos componentes utilizados en el proyecto, así como de las técnicas de control aplicables. Este análisis teórico sólido proporciona la base necesaria para las implementaciones prácticas.

### **Control robusto basado en red**

En la actualidad, la evolución constante de las tecnologías de comunicación y control ha impulsado el desarrollo de sistemas de control en red para una variedad de aplicaciones críticas. Dentro de este contexto, este trabajo científico se adentra en un tema de gran relevancia: la estabilidad en sistemas lineales disipativos cuando se enfrentan a desafíos específicos, como el muestreo asíncrono y la presencia de retrasos en el canal de comunicación. A través de un enfoque multidisciplinar que abarca la teoría de control, las comunicaciones y la robótica, nuestro objetivo principal es comprender y superar los obstáculos inherentes a la interconexión de sistemas lineales en condiciones adversas.

En particular, respecto a la interconexión de sistemas a través de red, los sistemas de control desempeñan un papel cada vez más crucial en una amplia gama de aplicaciones, desde la automatización industrial hasta el control de vehículos autónomos. Sin embargo, estos sistemas se enfrentan a desafíos significativos cuando las señales de realimentación y control se muestrean de manera asíncrona, debido a limitaciones en la comunicación inalámbrica o la variabilidad en los tiempos de muestreo. En este contexto, esta tesis presenta un método innovador diseñado para abordar la estabilidad de sistemas lineales interconectados cuando las señales asociadas a la interconexión de realimentación se someten a muestreo asíncrono.

Como estudios previos en este campo se pueden destacar, [16–20] donde se utilizó la transformación de *scattering* para interconectar sistemas pasivos de tal manera que los sistemas resultantes tengan una ganancia  $L_2$  menor o igual a uno. Esto se ha utilizado para sistemas en tiempo continuo, pero apenas está estudiado para sistemas discretos con muestro asíncrono. En el caso de [16, 17] aplican por primera vez la transformación de *scattering* a sistemas de control en red y garantizan la estabilidad en una interconexión en tiempo continuo en presencia de retardos temporales constantes. *Matiakis* et al. [18] obtienen una condición de estabilidad para sistemas de control en red no lineales con retardos temporales constantes y por otro lado en [19, 20] se estudia la estabilidad independiente del retardo de una interconexión de realimentación en tiempo continuo de sistemas no lineales con ganancia  $L_2$  finita.

La base del enfoque propuesto radica en la introducción de una transformación basada en la ganancia  $L_2$  [13, 14] en ambos lados de la interconexión de realimentación. En esta tesis la transformación está diseñada cuidadosamente para poder obtener una cota del tiempo de muestreo máximo posible, garantizando que la interconexión permanezca estable incluso en

condiciones de comunicación asíncrona. Una característica fundamental de esta transformación es que se ha diseñado de manera que ambos sistemas involucrados mantengan una ganancia  $L_2$  finita y cumplan con el teorema de la pequeña ganancia, lo que es esencial para garantizar la estabilidad robusta del conjunto del sistema de control. Esto abre nuevas perspectivas para la implementación de sistemas de control en entornos con comunicación asíncrona y retrasos, lo que tiene un gran potencial en aplicaciones prácticas en tiempo real.

Más aún, el método de diseño propuesto en esta tesis ofrece la ventaja de facilitar la migración de sistemas de control continuos y cableados a configuraciones asíncronas con conexión inalámbrica. Esto se logra aplicando esta transformación a ambos lados de la interconexión, lo que permite una transición suave y eficiente hacia entornos de control inalámbrico.

El análisis se realiza con un enfoque novedoso en el concepto del tiempo de muestreo máximo, un factor crítico que asegura la preservación de los valores de ganancia pequeña (MASG<sup>1</sup>) en sistemas interconectados. Esta propiedad es fundamental para mantener la estabilidad en sistemas de control en red. Una contribución significativa de esta tesis es demostrar que la propiedad MASG se mantiene incluso en presencia de retrasos constantes en la comunicación y, bajo ciertas condiciones rigurosas, puede preservarse en situaciones donde los retrasos varían, lo que amplía el alcance y la aplicabilidad de esta teoría.

Además, se presenta un método de síntesis que permite obtener la transformación necesaria para adaptar los sistemas al tiempo de muestreo disponible en el canal de comunicación. Este método de síntesis implica un proceso iterativo que involucra la resolución de un conjunto de desigualdades matriciales, lo que proporciona una herramienta práctica y eficiente para implementar la transformación en entornos realistas.

Finalmente, para demostrar la efectividad y aplicabilidad de este enfoque, se incluyen experimentos prácticos aplicados al control remoto de las velocidades del rotor de un Quad-Rotor. Estos experimentos llevados a cabo en una red celular de tercera generación (3GPP) de gran incertidumbre resaltando así la viabilidad y el potencial de este método en aplicaciones del mundo real, donde el control en red y la comunicación inalámbrica desempeñan un papel cada vez más importante. En resumen, esta tesis representa una contribución significativa hacia la mejora de la estabilidad y el rendimiento de los sistemas de control en red en condiciones desafiantes de comunicación asíncrona y retrasos.

## **Control robusto basado en modelo**

Como se ha comentado anteriormente, ha sido necesario complementar la contribución de esta tesis con trabajos previos necesarios, fundamentalmente por dos motivos: 1) resaltar la originalidad de la contribución, y 2) poder hacer una comparación justa con resultados provenientes de dichas técnicas y los obtenidos con dicha contribución, mediante una exhaustiva validación experimental, que también es contribución original de la tesis. De ese modo, en esta área complementaria de estudio, se exploró un enfoque innovador y a la vez estructurado en varias etapas de control empleando de forma combinada y constructiva las técnicas de linealización por realimentación y los modos deslizantes. En un principio, y para entender la raíz del problema principal de falta de robustez, se estudió para una clase de sistemas mecánicos subactuados de *fase no mínima* con grandes incertidumbres en sus parámetros físicos. Estos sistemas, caracterizados por su comportamiento altamente no lineal, presentan desafíos sustanciales en términos de estabilización y control robusto. El objetivo

---

<sup>1</sup> MASG: Tiempo de muestreo máximo que preserva la pequeña ganancia



---

era desarrollar una estrategia de control que supere estas dificultades y garantice la estabilidad, incluso en condiciones adversas.

Para abordar este desafío, se define una novedosa superficie de deslizamiento no lineal en el diseño del sistema de control. Esta superficie de deslizamiento se crea mediante la incorporación de una salida ficticia, lo que confiere a nuestro enfoque la propiedad de generar una *fase mínima* en el sistema. Este logro es esencial para garantizar la estabilidad robusta y se sustenta en la teoría de Lyapunov, que proporciona un marco sólido para demostrar la estabilidad de sistemas no lineales. La superficie de deslizamiento no lineal se combina con un controlador externo, también diseñado mediante la teoría de Lyapunov. Esta estrategia integral garantiza no solo la estabilidad exponencial del punto de equilibrio del sistema, sino también una estabilidad robusta frente a las incertidumbres en los parámetros físicos. Este último aspecto es particularmente relevante en aplicaciones del mundo real, donde las variaciones impredecibles en los parámetros pueden ser la norma.

Un beneficio adicional de esta metodología es la prevención de fenómenos indeseados, como los ciclos límite, que pueden comprometer la operación segura y estable de sistemas mecánicos. Para ilustrar la efectividad de nuestro enfoque en este sentido, se llevó a cabo un estudio exhaustivo con simulaciones que evalúan el rendimiento, la respuesta en el tiempo y la robustez paramétrica del sistema controlado.

En particular, se recopilan en este documento diversos diseños novedosos para el control robusto de equipos subactuados, y soluciones para ciertos aspectos del control de UAVs. Entre las técnicas de control empleadas cabe mencionar: la linealización por realimentación constructiva (FL<sup>2</sup>) [1] complementada con modos deslizantes (SMC<sup>3</sup>) [2 - 4, 6] para aumentar su robustez ante incertidumbres en el modelo.

El complemento del control por modos deslizantes (SMC) es esencial cuando se tienen grandes incertidumbres. De hecho, el SMC ha sido objeto de extensa investigación [1–3], y sigue siendo activa como se puede observar en [5] que introduce nuevos enfoques constructivos. Además, se ha investigado la estabilización de sistemas con incertidumbres en diversas clases de sistemas en [15]. Estos trabajos se centraron en abordar el desafío de estabilizar sistemas en presencia de incertidumbres. También hay que resaltar que una característica distintiva del SMC es la discontinuidad en las acciones de control, lo que permite abordar clases de sistemas que no son estabilizables mediante leyes de realimentación de estado continuas.

El diseño del controlador (linealización por realimentación más modos deslizantes, FL+SMC) se hace primero para una clase de sistemas subactuados, como el péndulo invertido [7] y la rueda de inercia [8]. Seguidamente, se amplía el diseño para un equipo bi-rotor de cuatro grados de libertad para una aplicación de aterrizaje y despegue vertical, tipo VTOL (*Vertical Take-Off Landing*) [9]. Finalmente, se diseña un controlador con esta técnica para un Quad-Rotor, con dos lazos de control, uno para rotación y otro para traslación.

En conjunto se presenta una síntesis inteligente de tres métodos clásicos en el campo del control: la linealización por realimentación (FL), el control por modos deslizante (SMC) y el diseño basado en Lyapunov. Esta combinación estratégica permite lograr la estabilización robusta de sistemas mecánicos subactuados intrínsecamente de *fase no mínima*. El enfoque

---

<sup>2</sup> FL: Feedback Linearization

<sup>3</sup> SMC: Sliding Mode Control

SMC, en particular, destaca por su baja sensibilidad a los errores en la estimación de parámetros y a las perturbaciones lo convierte en una opción atractiva, a menudo eliminando la necesidad de modelado extremadamente preciso. En resumen, estos trabajos representan un avance significativo en el campo del control de sistemas mecánicos subactuados, como es por ejemplo el Quad-Rotor, con aplicaciones prometedoras en una variedad de campos, desde la robótica hasta la automatización industrial.

Finalmente, y como se ha comentado anteriormente, para evaluar el funcionamiento de los controladores diseñados y realizar comparaciones significativas, llevamos a cabo simulaciones basadas en los modelos matemáticos previamente desarrollados. Posteriormente, se hace la validación mediante pruebas experimentales en equipos diseñados específicamente para este propósito. Este enfoque exhaustivo garantiza la eficacia y la confiabilidad de los diseños propuestos sobre la plataforma segura UAV Quad-Rotor y sus sistemas de control, y cuya validación experimental proporciona un marco de referencia para futuras líneas de investigación.

## 1.2 *Objetivos de la tesis doctoral*

Los objetivos principales de la tesis son dos:

### **Objetivo 1)**

En relación a la interconexión de sistemas a través de una red de comunicaciones, esta tesis tiene como objetivo presentar contribuciones para el diseño de módulos para la interconexión de un sistema de control remoto con un sistema lineal a controlar. El diseño de estos módulos busca garantizar la estabilidad robusta de la interconexión entre ambos en presencia de incertidumbres y retrasos, y para ello se emplean las técnicas de análisis de estabilidad de Lyapunov, el teorema de preservación de pequeña ganancia, y el concepto de *scattering*.

### **Objetivo 2)**

La validación experimental y comparación exhaustiva con resultados obtenidos con técnicas clásicas de control robusto y no lineal. Para ello, se necesita cumplir un objetivo primario de desarrollo de métodos para el control robusto de sistemas subactuados de fase no mínima, ya que el sistema tomado como caso de estudio (Quad-Rotor) tiene esas características. Las técnicas de control empleadas son: la linealización por realimentación constructiva complementada con modos deslizantes, para aumentar su robustez ante incertidumbres en el modelo y en la red de comunicaciones.

## 1.3 *Estado del arte*

Para el desarrollo de esta tesis, se ha tenido muy presente el estado del arte, con un enfoque práctico centrado en los objetivos.

En relación al estado del arte correspondiente al **Objetivo 1**:

En el caso de sistemas interconectados a través de red aparecen algunos estudios previos [16–20] en los cuales se utilizó la conocida transformación de *scattering* para interconectar

sistemas pasivos de tal manera que los sistemas resultantes tengan una ganancia  $L_2$  menor o igual a uno. Esto se ha utilizado ampliamente en el contexto de un sistema continuo en el tiempo, pero en un escenario en tiempo discreto y muestreo asíncrono, apenas se ha estudiado en la literatura.

En los siguientes trabajos se utiliza la técnica de transformación basada en *scattering* para que los sistemas resultantes tengan una ganancia  $L_2$  menor o igual a uno, [16, 17] aplican por primera vez la transformación de dispersión a sistemas de control en red. Garantizan la estabilidad en una interconexión en tiempo continuo en presencia de retardos temporales constantes y relajan la restricción de la condición de pasividad. Matiakis et al. [18] formulan una condición de estabilidad para sistemas de control en red no lineales con retardos temporales constantes arbitrariamente grandes, basados en la transformación de dispersión utilizada en un análisis en tiempo continuo. *Hirche* et al. [19] introducen un enfoque de control distribuido para sistemas de control en red en tiempo continuo para lograr una estabilidad finita de ganancia  $L_2$ , independientemente del retardo temporal constante. Por otro lado, [20] también estudia la estabilidad independiente del retardo de una interconexión de realimentación en tiempo continuo de sistemas no lineales con ganancia  $L_2$  finita. Los autores muestran que la condición clásica de pequeña ganancia permite la estabilidad de la conexión de realimentación, independientemente del retardo constante. Extienden los resultados a retardos variables en el tiempo y a sistemas pasivos mediante el uso de la transformación de *scattering*. En [21], los autores proponen un marco basado en la pasividad para el control de teleoperadores bilaterales bajo retardos variables en el tiempo y pérdida de datos utilizando la transformación de *scattering*.

Otro trabajo importante relacionado con la interconexión de sistemas asíncronos pasivos es [22]. Los autores aproximan la desigualdad de pasividad en tiempo continuo utilizando la aproximación de Euler de la derivada con respecto al tiempo.

En relación al estado del arte correspondiente al **Objetivo 2**:

En los últimos 30 años, el control por modos deslizante (SMC) ha sido objeto de extensa investigación [1–3]. Además, la investigación en esta área sigue siendo activa y de interés, como se puede observar en [5] que introduce nuevos enfoques constructivos.

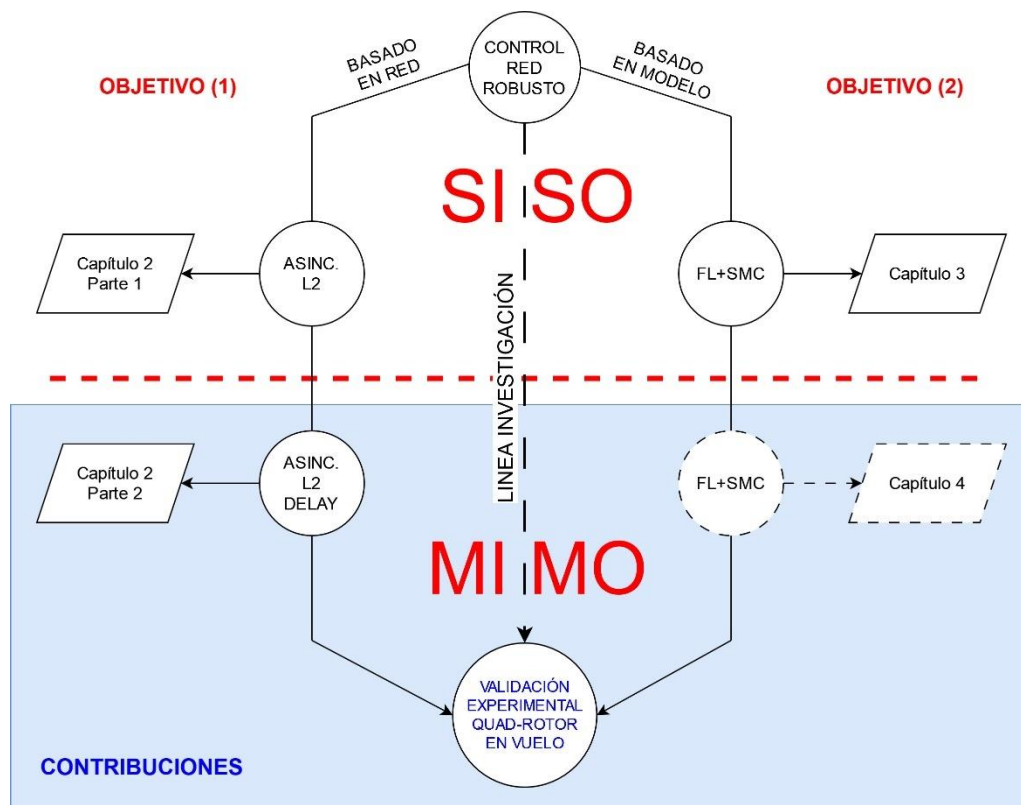
El SMC es especialmente valioso para diseñar controladores robustos en condiciones de incertidumbre, ya que es menos sensible a errores en la estimación de los parámetros de la planta y a perturbaciones. Esto a veces elimina la necesidad de un modelado preciso. Además, el SMC utiliza acciones de control discontinuas, lo que permite estabilizar sistemas no lineales que no pueden ser estabilizados por leyes de linealización por realimentación [15]. Por otro lado, muchos enfoques de diseño de control basados en superficies deslizantes utilizan métodos de linealización de Lyapunov y Jacobiano. Sin embargo, estos enfoques pueden ser complejos. En este contexto, algunos estudios anteriores [23–26] han combinado técnicas de SMC y *flatness*, utilizando una salida ficticia para estabilizar el sistema.

## 1.4 Organización del documento

En este Capítulo 1 se presentan los objetivos del trabajo de investigación propuesto, la introducción, el estado del arte y las referencias. En los Capítulos 2, 3 y 4 se presentan los resultados que sustentan las contribuciones de la tesis.

- Capítulo 2: presenta la contribución principal de esta tesis alineada con el **Objetivo 1)**. Describe el Control asíncrono de sistemas lineales en red mediante transformaciones basadas en ganancia  $L_2$  y diseño un adaptador de red para sistemas lineales muestreados de forma asíncrona y en presencia de retrasos además del control de velocidad remota de un Quad-Rotor a través de red mediante un teléfono móvil: resultados preliminares [27] y contribución [28] (artículo en revista JCR, cuartil Q1).
- Capítulo 3: presenta los resultados teóricos necesarios para el diseño de controladores robustos basados en modelo. Se muestra el diseño y análisis de una superficie de modos deslizantes no-lineal para una clase de sistemas mecánicos subactuados. Se presenta el diseño de controladores de linealización por realimentación y modo deslizante aplicados a un péndulo y a una plataforma experimental de un VTOL<sup>4</sup> [29].
- Capítulo 4: presenta la contribución de la tesis alineada con el **Objetivo 2)**. El diseño de diferentes controladores no lineales y su comparación experimental en una plataforma experimental de un Quad-Rotor.
- Capítulo 5: presenta las conclusiones de la tesis.
- Anexo I: muestra la descripción de las plataformas experimentales fabricadas.
- Anexo II: muestran las demostraciones matemáticas empleadas en la tesis.

La siguiente figura muestra de forma esquematizada la conexión de los estudios realizados en esta tesis. Empleamos diversas técnicas para el desarrollo de nuevos controladores robustos de sistemas SISO y MIMO, analizamos la estabilidad de la interconexión de sistemas a través de red y diseñamos módulos de interconexión para mejorar su robustez empleando el teorema de pequeña ganancia.



<sup>4</sup> VTOL: Vertical Take-off Landing  
 FL: Feedback Linearization  
 SMC: Sliding Mode Control

## 1.5 Referencias

- [1] López-Martínez, M. y Acosta, J. A. (2007) «Linealización por realimentación constructiva de sistemas mecánicos con grado de subactuación 1 inestables con fricción», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 4(4), pp. 70–79.
- [2] Utkin, V.I.: 'Sliding Modes and Their Application to Variable Structure Systems', MIR Publishers, 1978.
- [3] Zinober, A.: 'Variable Structure and Lyapunov Control', Springer, 1994.
- [4] Agrachev, A.A., Morse, A.S., Sontag, E.D., Sussmann, H.J., and Utkin, V.I.: 'Nonlinear and Optimal Control Theory', LNM 1932, Springer, 2004.
- [5] Levant, A.: 'Construction principles of 2-sliding mode design', *Automatica*, 2007, 43, pp. 576–586
- [6] Acosta, J.A., and Lopez-Martinez, M.: 'A Nonlinear Strategy to Control Unstable Underactuated Mechanical Systems with Underactuation  $> 1$ . Applications to Control Augmentations.', *Automation and Control Systems Journal (open)*, 2009, 2, pp. 13-20.
- [7] Gordillo, F., Acosta, J.A. and Aracil, J.: 'A New Swing-Up Law for the Furuta Pendulum.', *International Journal of Control*, 2003, 76, (8), pp. 836–844..
- [8] Spong, M.W., Corke, P., and Lozano, R.: 'Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum', *Automatica*, 2001, 37, pp.1845–1851.
- [9] Abdelhamid Tayebi and Stephen McGilvray, "Attitude Stabilization of a VTOL Quadrotor Aircraft," in *Proc. IEEE transactions on control systems technology*, vol. 14, no. 3, may 2006.
- [10] Brockett, R.W.: 'Asymptotic stability and feedback stabilization', *Differential Geometric Control Theory*, 1983, pp.181–191.
- [11] T. Matiakis, S. Hirche and M. Buss, "The Scattering Transformation for Networked Control Systems". *Proceedings of the Conference on Control Applications*, 2005
- [12] T. Matiakis, S. Hirche and M. Buss, "Control of Networked Systems Using The Scattering Transformation". *IEEE Transactions on control systems technology*, Vol.17,N.1, pp.60-67, 2009.
- [13] A. J. van der Schaft, "L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control". Ed. Springer-Verlag. Berlin (1999).
- [14] N. Chopra and M. Spong, "Delay-Independent Stability for Interconnected Nonlinear Systems with Finite L2 Gain", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, 2007
- [15] QU Z.: 'Global stabilisation of non-linear systems with a class of unmatched uncertainties', *Syst. Control Lett.*, 1992, 18, pp. 301–307
- [16] Matiakis, T., Hirche, S., Buss, M.: 'The scattering transformation for networked control systems'. *Proc. Conf. on Control Applications*, 2005
- [17] Matiakis, T., Hirche, S., Buss, M.: 'Control of networked systems using the scattering transformation', *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2009, 17, (1), pp. 60–67
- [18] Matiakis, T., Hirche, S., Buss, M.: 'Independent-of-delay stability of nonlinear networked control systems by scattering transformation'. *Proc. American Control Conf.*, 2006
- [19] Hirche, S., Matiakis, T., Buss, M.: 'A distributed controller approach for delay-independent stability of networked control systems', *Automatica*, 2009, 45, pp. 1828–1836
- [20] Chopra, N., Spong, M.: 'Delay-independent stability for interconnected nonlinear systems with finite L2 gain'. *Proc. Conf. on Decision and Control*, 2007
- [21] Chopra, N., Spong, M., Lozano, R.: 'Bilateral teleoperation over unreliable communication networks', *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2008, 16, (2), pp. 304–313

- [22] Cueli, J.R., Canudas-de-Wi, C.: 'Passivity of interconnected asynchronous discrete-time systems'. Proc. 2008 World IFAC Congress
- [23] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon, P.: 'A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems', IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44, (5), pp.922–937.
- [24] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon, P.: 'Flatness and defect of nonlinear systems:introductory theory and examples.', International Journal of Control, 1995, 61, pp.1327–1361.
- [25] Fliess, M., and Marquez, R.: 'Continuous-time linear predictive control and flatness: a module-theoretical setting with examples.', International Journal of Control, 2000, 73, pp.606–623.
- [26] Sira-Ramírez, H., and Agrawal, S.K.: 'Differentially Flat Systems', Marcel Dekker, 2004.
- [27] J.M. Cano, M. Lopez-Martínez and F.R. Rubio: 'Asynchronous Networked Control of Linear Systems via  $L_2$ -gain-based Transformations: Analysis and Synthesis', IET Control Theory and Applications, Volume 5, Issue 4, 3 March 2011.
- [28] J. M. Cano, M. Lopez-Martinez, and J. Á. Acosta: 'Network Adapter for Sampled Linear Systems Under Asynchronous and Delayed Communications: Quadrotor Remote Speed Control Through Cellular Network', IEEE Transactions on control systems technology, Volume 30, N° 4, 3 July 2022.
- [29] M. López-Martínez J.A. Acosta J.M. Cano: 'Non-linear sliding mode surfaces for a class of underactuated mechanical systems', IET Control Theory and Applications, Volume 4, Issue 10, 3 October 2010.

## 2 Estabilidad y control a través de red basado en Ganancia $L_2$

### 2.1 Control asíncrono de sistemas lineales en red

En este apartado se presenta un método para analizar la estabilidad de la interconexión de realimentación de una clase de sistemas, cuando las señales asociadas a la interconexión de realimentación se muestrean de forma asíncrona. Se diseña e introduce una transformación basada en la ganancia  $L_2$  a ambos lados de la interconexión. Esta transformación aumenta el tiempo de muestreo máximo para que la interconexión permanezca estable. La transformación se diseña de tal manera que ambos sistemas tengan una ganancia  $L_2$  finita y verifiquen el teorema de la pequeña ganancia. El método de diseño propuesto permitirá facilitar la migración de bucles de control continuos cableados a nuevos sistemas asíncronos con conexión inalámbrica simplemente agregando esta transformación a ambos lados de la interconexión. El análisis se realiza utilizando el concepto de tiempo de muestreo máximo que preserva la pequeña ganancia (MASG), a partir de la definición de tiempo continuo de la propiedad. Finalmente, se incluye un método de síntesis para obtener la transformación, asumiendo que el tiempo de muestreo mínimo disponible en el canal de comunicación se da como una restricción. El método de síntesis implica seguir un procedimiento iterativo, donde se deben resolver un conjunto de desigualdades de matriz. Se incluyen experimentos reales aplicados al control remoto de las velocidades del rotor de un Quad-Rotor.

#### 2.1.1 Introducción

Este capítulo presenta un método para analizar la estabilidad de la interconexión de realimentación de una clase de sistemas, cuando el canal de comunicación tiene restricciones en el tiempo de muestreo mínimo, y esto se puede considerar como asíncrono. Tratar el tiempo de muestreo como asíncrono también permite incluir otros casos de estudio, como el de las pérdidas de paquetes para muestreo sincrónico. El escenario considerado en este trabajo se muestra en la Figura 1.

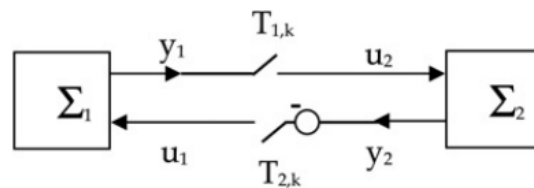


Figure 1: Interconexión asíncrona de realimentación de los sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$

El tiempo de muestreo máximo que preserva la estabilidad de la interconexión en tiempo continuo (MASS) se formulará para el caso de muestreo asíncrono, para sistemas cuya ganancia  $L_2$  es finito y verifica la condición de ganancia pequeña (ver Figura 1).

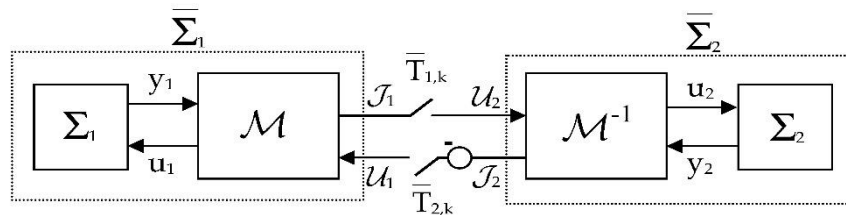
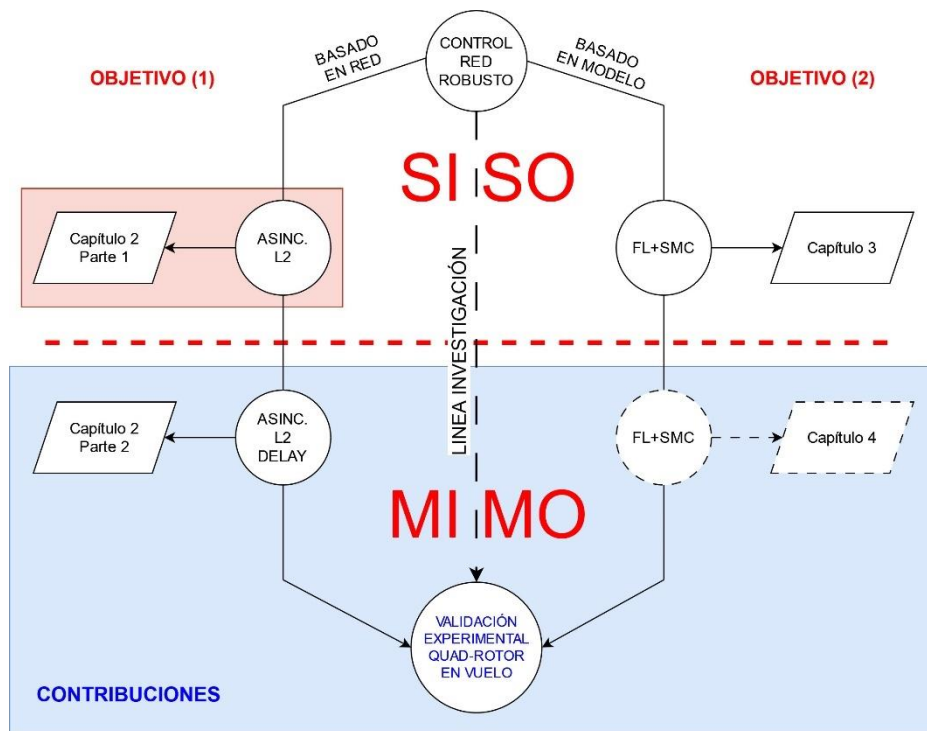


Figure 2: Transformación bilateral basada en ganancia  $L_2$  ( $M$ ).

El objetivo es Figura 2: Transformación bilateral basada en ganancia  $L_2$  (M) y proponer una transformación bilateral general M, para interconectar los sistemas  $\bar{\Sigma}_1$  y  $\bar{\Sigma}_2$  (ver Figura 2), asegurando que la estabilidad de la interconexión esté garantizada para un tiempo de muestreo asíncrono mínimo, dado como una restricción de comunicación. Los resultados podrán aplicarse también a sistemas  $\Sigma_1$  inestables, donde la transformación bilateral asegura que el sistema resultante  $\bar{\Sigma}_1$  sea  $L_2$ -estable. El método de diseño permitirá facilitar la migración de bucles de control en tiempo continuo cableados a bucles asíncronos con conexión inalámbrica simplemente agregando esta sencilla transformación. Esto se ha utilizado ampliamente en sistemas en tiempo continuo, pero el impacto potencial de un muestreo asíncrono, en el escenario mostrado en la Figura 2, ha sido poco estudiado, siendo esto una de las principales contribuciones de este trabajo. Otro trabajo importante relacionado con este capítulo es [12], donde se estudió la interconexión de sistemas asíncronos pasivos, introduciendo un método de diseño de control basado en un conjunto de inecuaciones matriciales lineales. Nuestro trabajo extiende las ideas de [12], para introducir el método de síntesis de una transformación bilateral para otra clase de sistemas disipativos, a saber, sistemas  $L_2$ -estables.

### 2.1.2 Contribuciones

La novedad en este trabajo se centra en la introducción de una transformación basada en la ganancia  $L_2$  en la interconexión de sistemas muestreados de forma asíncrona. Esta transformación aumenta el tiempo de muestreo máximo permitiendo que la interconexión permanezca estable. El método de diseño propuesto facilita la migración de bucles de control continuos cableados a bucles asíncronos con conexión inalámbrica, tan solo añadiendo esta transformación a ambos lados de la interconexión. También se presenta un método de síntesis para obtener esta transformación, considerando el tiempo de muestreo mínimo disponible como restricción. Este estudio presenta las condiciones para garantizar la estabilidad de la interconexión, así como experimentos reales relacionados con el control remoto de las velocidades del rotor de un Quad-Rotor.



Progreso en la investigación.



## • Contribución

La principal contribución de este estudio es el diseño de un método para analizar la estabilidad de sistemas interconectados cuando el tiempo de muestreo es asíncrono. Pudiendo obtener el MASG (máximo tiempo de muestreo que mantiene las propiedades del teorema de pequeña ganancia) al resolver las inecuaciones matriciales.

En segundo lugar, se implementa un método para diseñar la transformación basada en ganancia  $L_2$ , que se necesita incluir en una interconexión entre dos sistemas a través de red para garantizar su estabilidad.

### 2.1.2.1 Descripción del problema

Considere una interconexión de realimentación de tiempo continuo estable de dos sistemas lineales,  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , Fig. 1. La dinámica de tiempo continuo de cada sistema  $\Sigma_i$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Sigma_i: \quad \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \quad (1)$$

$$y_i = C_i x_i + D_i u_i \quad (2)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $y_i \in \mathbb{R}^m$  representa el vector de salida,  $u_i \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $n \geq m > 0$ , sujeto a la condición disipativa de ganancia  $L_2$  finita ([13, 14]) dada por  $\dot{V}_i(x,u) \leq -\gamma_i^T y_i + \gamma_i^2 u_i^T u_i - \rho_i V_i(x)$  (3)

donde  $V_i(x) = x^T P_i x > 0$ , con  $P_i > 0$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}^+$  y  $\rho_i \in \mathbb{R}^+$ .

El problema considerado en este trabajo es encontrar una transformación  $M$ , figura 2, de tal manera que la interconexión de ambos sistemas permanezca estable, con las siguientes restricciones:

- C1: El muestreo en ambos lados de la interconexión es asíncrono.
- C2: Existe un valor mínimo  $T_M$  para el tiempo de muestreo, tal que  $\bar{T}_{1,K} \geq T_M$  y  $\bar{T}_{2,K} \geq T_M$ , como consecuencia de la implementación de un protocolo de red específico.

Dadas estas condiciones presentaremos una forma de obtener el máximo tiempo de muestreo que mantenga las propiedades de los sistemas de pequeña ganancia. Para ello se reformular el problema en el marco de tiempo discreto comenzando con la representación de tiempo discreto del sistema  $\Sigma_i$  en (1),

$$\Sigma_{i,k}: \quad x_{i,k+1} = A_{i,k} x_{i,k} + B_{i,k} u_{i,k} \quad (4)$$

$$y_{i,k} = C_i x_{i,k} + D_i u_{i,k} \quad (5)$$

donde  $A_{i,k} = e^{A_i T_k}$  y  $B_{i,k} = A_i^{-1} (A_{i,k} - I) B_i$ .

La definición equivalente de la propiedad de ganancia pequeña necesita ser reformulada en este marco de tiempo discreto, usando la aproximación de Euler, y teniendo en cuenta la desigualdad asociada a la propiedad de ganancia  $L_2$  (6), evaluada en la configuración de la Figura 1, se obtiene (7).

Los valores de  $\gamma_i$ ,  $\rho_i$  y  $P_i$  se dan a partir de las propiedades del sistema original, y después hay que buscar el valor máximo del tiempo de muestreo  $T_{i,k}$ , que verifique esta desigualdad de matriz, existiendo una solución límite para  $T_i^* > 0$ . La definición de MASG,  $T_i^* > 0$ , será:

$$W_i^d(T_{i,k}) \doteq \begin{pmatrix} A_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} A_{i,k} - \frac{P_i}{T_{i,k}} & A_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} B_{i,k} \\ B_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} A_{i,k} & B_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} B_{i,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_i^\top C_i + \rho_i P_i & C_i^\top D_i \\ D_i^\top C_i & -\gamma_i^2 + D_i^\top D_i \end{pmatrix} \leq 0 \quad (7)$$

$$T_i^* = \arg \max_{T_{i,k} > 0} \{T_{i,k} : W_i(T_{i,k}) + G_i \leq 0\} \quad (8)$$

Una forma de obtener una aproximación de esta MASG es trabajar con la aproximación lineal del determinante de  $W_i^d$ . Por lo tanto, la MASG se determinará como un cruce cero de este determinante y la primera aproximación de la MASG se calcula como (10), porque necesita menos carga computacional y representa un límite conservador de la MASG.

$$T_i^a = \frac{-1}{\sigma_{\min}((W_i + G_i)^{-1} W_{1,i})} \quad (10)$$

### 2.1.2.2 Propiedades de estabilidad de sistemas muestreados asíncronos

Los problemas de estabilidad bajo tal marco de interconexión se estudian a continuación. Supongamos que cada sistema se muestrea usando una retención de orden cero, y como antes, que el tiempo de muestreo  $T_{2,k}$  y  $T_{1,k}$  no son constantes sino múltiplos enteros. Por simplicidad, solo consideraremos el caso en el que  $T_{2,k} = n_k T_{1,k}$ , con  $n_k \in \{1, 2, \dots, n_{\max}\}$ .

**Proposición 1** Considere dos sistemas de ganancia finita  $L_2$ , cumpliendo cada uno con su respectiva desigualdad de ganancia finita  $L_2$  (6). También considere que están interconectados de forma asíncrona como se muestra en la Figura 1. Suponga que existe para cada sistema,  $\Sigma_i$ , un MASG  $T_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , verificando.

$$T_{2,k} = n_k T_{1,k} \leq \min\{T_1^*, T_2^*\},$$

Entonces, lo siguiente se aplica:

- Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en (6) verifican que  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ , y ambos sistemas son detectables de cero estado (ZSD), entonces la interconexión de retroalimentación asíncrona de ambos sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , es estable asintóticamente.
- Si también  $\rho_1 > 0$  y  $\rho_2 > 0$  en (6), entonces la interconexión asíncrona es exponencialmente estable.

**Prueba.** Suponiendo que existen, verificando, de modo que cada sistema  $\Sigma_i$  cumpla con su propiedad de ganancia  $L_2$  respectiva desigualdad (6), implica que ambos sistemas deben verificar la propiedad de ganancia  $L_2$  para el tiempo de muestreo más pequeño,  $T_{1,k}$ , entonces

$$\Sigma_1 : V_{1,k+1} - V_{1,k} \leq -T_{1,k} (y_{1,k}^\top y_{1,k} - \gamma_1^2 u_{1,k}^\top u_{1,k} + \rho_1 V_{1,k})$$

$$\Sigma_2 : V_{2,k+1} - V_{2,k} \leq -T_{1,k} (y_{2,k}^\top y_{2,k} - \gamma_2^2 u_{2,k}^\top u_{2,k} + \rho_2 V_{2,k})$$

Como ambos sistemas están interconectados en retroalimentación, se sigue que  $u_{2,k} = y_{1,k}$  y  $y_{2,k} = -u_{1,k}$ . Tomando como candidato a la función de Lyapunov,  $V_k = V_{1,k} + \alpha V_{2,k}$ , siendo  $\gamma_1 < \alpha < 1/\gamma_2$ , la tasa de cambio de esta función  $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$  se da como

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= V_{1,k+1} - V_{1,k} + \alpha^2 V_{2,k+1} - \alpha^2 V_{2,k} \leq \\ &\leq -T_{1,k} (y_{1,k}^\top y_{1,k} - \gamma_1^2 y_{2,k}^\top y_{2,k} + \rho_1 V_{1,k} + \alpha^2 y_{2,k}^\top y_{2,k} - \alpha^2 \gamma_2^2 y_{1,k}^\top y_{1,k} + \alpha^2 \rho_2 V_{2,k}) \end{aligned}$$

finalmente introduciendo  $\bar{\rho} \doteq \min(\rho_1, \alpha^2 \rho_2)$  da como resultado

$$\Delta V_k \leq -T_{1,k} \left( y_{1,k}^\top (1 - \alpha^2 \gamma_2^2) y_{1,k} + y_{2,k}^\top (\alpha^2 - \gamma_1^2) y_{2,k} + \bar{\rho} V_k \right)$$

Si  $\bar{\rho} = 0$ , la estabilidad se puede alcanzar si los parámetros  $\gamma_1 < \alpha$  y  $\alpha < 1/\gamma_2$ , verifican que  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ , asegurando que  $\Delta V_k \leq 0$ . Además, si ambos sistemas también son ZSD, entonces la estabilidad asintótica está garantizada. La segunda afirmación en la proposición se prueba observando que si  $\bar{\rho} > 0$ , entonces  $\Delta V_k \leq -T_{1,k} \bar{\rho} V_k$  y por lo tanto la interconexión se vuelve exponencialmente estable. La condición dada por la proposición anterior, también se puede usar de manera inversa para buscar el tiempo de muestreo máximo más adecuado para preservar la estabilidad de la interconexión (MASS). Además, es posible utilizar este análisis para el diseño de control.

### 2.1.2.3 Transformación L<sub>2</sub>-GAIN.

Se diseña una transformación para interconectar dos sistemas de tal manera que la interconexión asíncrona permanezca estable para un tiempo de muestreo máximo especificado. La idea es garantizar que la interconexión asíncrona sea estable utilizando los conceptos de. La nueva interconexión se implementará como se muestra en la Figura 2.

Esta transformación se diseña para que el sistema de lazo cerrado no cambie con respecto al original, introduciendo una ganancia de realimentación  $K_1$  en ambos lados de la interconexión, Figura 3. Además, si el diseño de la transformación se realiza siguiendo un criterio de modularidad, se introduce una ganancia de escalado  $K_2$  para que ambos sistemas tengan una ganancia L<sub>2</sub> menor que uno.

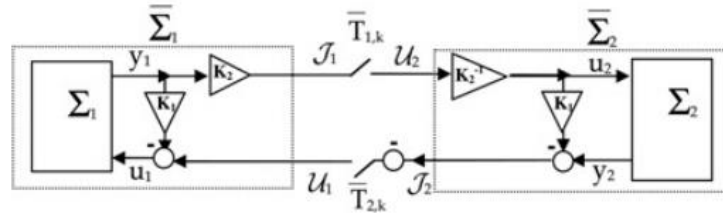


Figura 3: Interconexión mediante la transformación basada en la ganancia L<sub>2</sub> (M). La transformación se utiliza como un medio para mejorar la estabilidad del sistema bajo una interconexión muestreada asíncrona.

La Figura 3 muestra la transformación realizada en ambos lados del canal de comunicación.

#### 2.1.2.3.1 Síntesis de la transformación basada en la ganancia L<sub>2</sub>

De manera similar a la sección anterior, podemos realizar un análisis en las coordenadas de los sistemas resultantes después de aplicar la transformación dada por la Figura 3. Procediendo como antes, se obtiene

$$W_i^d(T_{i,k}) \doteq \begin{pmatrix} \bar{A}_{i,k}^\top \frac{\bar{P}_i}{T_{i,k}} \bar{A}_{i,k} - \frac{\bar{P}_i}{T_{i,k}} & \bar{A}_{i,k}^\top \frac{\bar{P}_i}{T_{i,k}} \bar{B}_{i,k} \\ \bar{B}_{i,k}^\top \frac{\bar{P}_i}{T_{i,k}} \bar{A}_{i,k} & \bar{B}_{i,k}^\top \frac{\bar{P}_i}{T_{i,k}} \bar{B}_{i,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{C}_i^\top \bar{C}_i + \rho_i P_i & \bar{C}_i^\top \bar{D}_i \\ \bar{D}_i^\top \bar{C}_i & -\bar{\gamma}_i^2 + \bar{D}_i^\top \bar{D}_i \end{pmatrix} \leq 0. \quad (12)$$

La desigualdad de matriz se puede escribir para cada sistema de una manera compacta como  $\bar{W}_i(\bar{T}_{i,k}) + \bar{G}_i \leq 0$ . Entonces, la definición de MASG para cada sistema,  $\bar{T}_i^* > 0$ , se puede plantear de dos maneras:

- Siguiendo un criterio de modularidad: Entonces cada sistema tiene que verificar tener una ganancia  $L_2$  menor que 1.

Para obtener el tiempo de muestreo máximo que preserva la estabilidad, que se llamará MASS, entonces el problema a resolver es encontrar definido como

$$\begin{aligned} \bar{T}_{12}^* = \arg \max_{\bar{T}_{12,k} > 0} \{ & \bar{T}_{12,k} : \bar{W}_1(\bar{T}_{12,k}) + \bar{G}_1 \leq 0, \bar{W}_2(\bar{T}_{12,k}) \\ & + \bar{G}_2 \leq 0, K_1 \geq 0, K_2 > 0, 0 < \gamma_1 < 1, 0 < \gamma_2 < 1 \} \end{aligned} \quad (14)$$

- Enfocándose en el teorema de pequeña ganancia para la interconexión y simplificando la transformación: En este caso  $K_2 = I$ , y  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son valores finitos y tales que  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ .

$$\begin{aligned} \bar{T}_{12}^* = \arg \max_{\bar{T}_{12,k} > 0} \{ & \bar{T}_{12,k} : \bar{W}_1(\bar{T}_{12,k}) + \bar{G}_1 \leq 0, \bar{W}_2(\bar{T}_{12,k}) \\ & + \bar{G}_2 \leq 0, K_1 \geq 0, K_2 = I, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \gamma_1 \gamma_2 < 1 \} \end{aligned} \quad (15)$$

Además, en el caso de que la propiedad preservada en la interconexión sea pasividad en lugar de ganancia  $L_2$ , es posible aprovechar la transformación de dispersión para convertir la propiedad de pasividad en una propiedad de ganancia  $L_2$  en tiempo continuo. Por lo tanto, para el caso asíncrono, el nuevo esquema propuesto consiste en introducir la transformación de dispersión y luego la transformación de ganancia  $L_2$ .

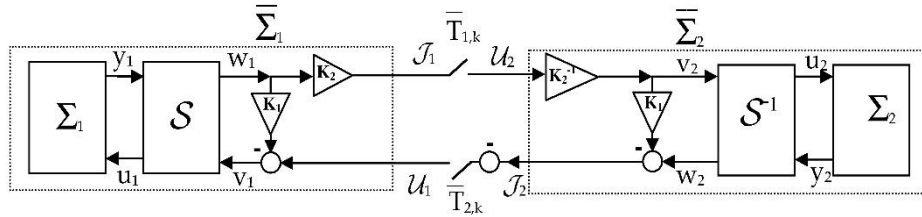


Figure 4: Transformación de dispersión bilateral basada en ganancia  $L_2$  (SM).

### 2.1.3 Conclusiones

En este trabajo se ha presentado, en primer lugar, un método para analizar la estabilidad de la interconexión de realimentación de una clase de sistemas lineales cuando el muestreo es asíncrono. El análisis se ha realizado teniendo en cuenta las propiedades de pequeña ganancia del sistema original de tiempo continuo. Por lo tanto, hemos caracterizado condiciones específicas en términos de desigualdades matriciales que permiten calcular el tiempo de muestreo máximo que preserva las propiedades de pequeña ganancia del sistema. Además, se han planteado condiciones de estabilidad suficientes para la interconexión asíncrona de dos sistemas de ganancia finita  $L_2$ . En segundo lugar, hemos desarrollado un método de síntesis para obtener una transformación bilateral basada en ganancia  $L_2$ , de tal manera que las propiedades de estabilidad de una interconexión de tiempo continuo de dos sistemas se preservan en una interconexión asíncrona para un tiempo de muestreo máximo dado. El método se aplica con éxito con sistemas  $L_2$  estables y, bajo algunas consideraciones, puede aplicarse cuando se controlan sistemas inestables con controladores de pequeña ganancia finitos. Además, para hacer frente a la interconexión de sistemas pasivos (en lugar

de sistemas de ganancia finita  $L_2$ ), también se ha introducido la conocida transformación de dispersión en el esquema. Finalmente, el método de síntesis se ha aplicado a una configuración experimental, un Quad-Rotor. El objetivo ha sido controlar remotamente las velocidades de los rotores del sistema, donde la comunicación entre la estación base y el Quad-Rotor se ha realizado a través de una red inalámbrica insegura (protocolo wifi / UDP). Los resultados experimentales obtenidos han sido concluyentes, poniendo en valor el diseño de la transformación bilateral.

Para llevar a cabo los experimentos será necesario utilizar la plataforma diseñada y fabricada para tal fin descrita en el Anexo I.

Con la plataforma en funcionamiento se debe modelar el sistema de velocidad del rotor, que modelamos como un sistema de primer orden después de linealizar su dinámica no lineal, mediante la identificación de cuadrados mínimos ( $k = 255.4$  y  $a = 5.96$ ). Se ha diseñado el controlador en tiempo continuo con  $k_c = 2$  y  $a_c = 0.85$ . El problema es el de diseñar la transformación de ganancia  $L_2$  para lograr un MASG deseado. En este ejemplo se ha utilizado el método P2. De esta manera,  $K_2$  se fija en 1 y el problema es encontrar  $K_1$  de tal manera que se cumpla un MASG dado. Se han obtenido varios valores de  $K_1$  teniendo en cuenta hasta un cincuenta por ciento de pérdidas de paquetes (equivalente a 100 ms).

La Tabla 1 muestra los valores de  $K_1$  y los valores de ganancia  $L_2$  que se aseguran.

MASG	$K_1^c$	$\varepsilon$	$K_1$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_1 \cdot \gamma_2$
0.050	1.100	$10^{-4}$	1.013	0.967	0.987	0.955
0.100	1.021	$10^{-4}$	1.015	0.964	0.986	0.951

Table 1: Valores de  $K_1$  dado un MASG

Se han realizado 3 experimentos a 50 ms. En el primero, la interconexión entre el Quad-Rotor y la estación base se ha realizado sin transformaciones,  $K_1 = 0$ . La Figura 7 muestra un comportamiento inestable, oscilando demasiado alrededor de los puntos.

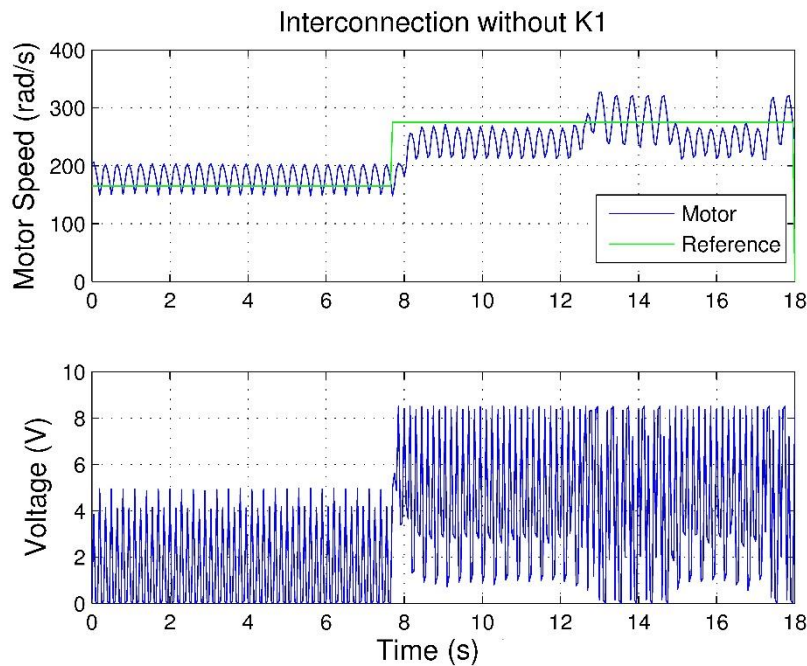


Figure 7: Experimento 1. Interconexión sin transformación bilateral.

En el Segundo, se ha usado una transformación bilateral definida por  $K_1$ , Tabla 1. Los resultados están en la Figura 8. Mostrando los puntos estables. En la misma figura, se incluye una simulación usando un modelo no lineal del sistema con las mismas condiciones, para comparar los resultados.

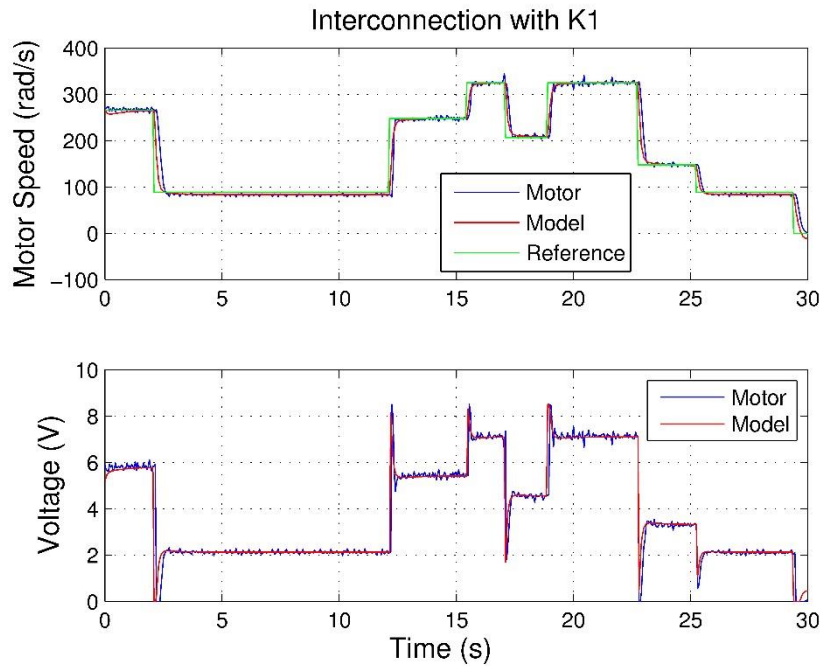


Figure 8: Experimento 2. Interconexión con una transformación bilateral  $K_1$ .

En el último experimento, pérdidas de paquetes adicionales se han incluido para deteriorar el comportamiento del sistema. Se ha fijado un 10% de pérdidas de paquetes. La Figura 9 muestra algunos picos que aparecen alrededor de los puntos como consecuencia de la pérdida de paquetes y como las perturbaciones son rechazadas para mantener estable el sistema en los puntos. La Figura 10 es un zoom de la figura anterior, incluyendo los puntos exactos donde los paquetes se han perdido intencionadamente.

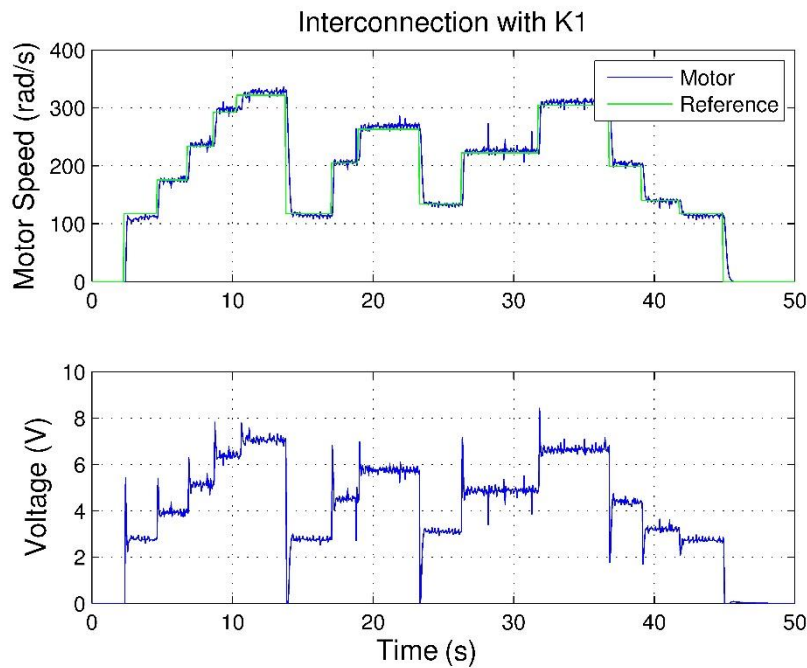


Figure 9: Experimento 3. 10% de Perdida de paquetes

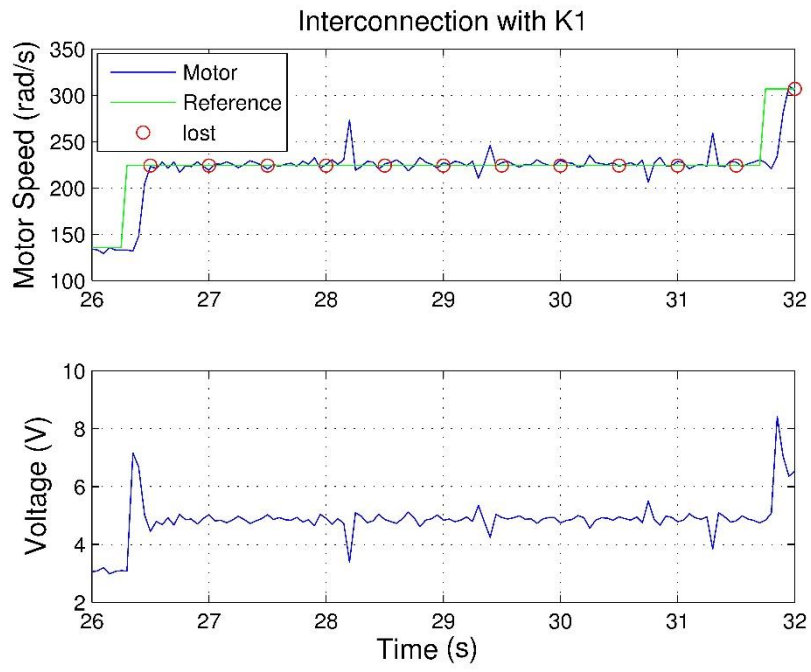


Figure 10: Representación de la Perdida de paquetes del experimento 3.

---

## 2.1.4 Referencias

- [1] Peter, F. Hokayem, Mark, W. Spong: ‘Bilateral teleoperation: an historical survey’, *Automática*, 2006, 42, (12), pp. 2035–2057
- [2] van der Schaft, A.J.: ‘L2-gain and passivity techniques in nonlinear control’ (Springer-Verlag, Berlin, 1999, 2nd edn.)
- [3] Khalil, Hassan, K.: ‘Nonlinear control systems’ (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002, 3rd edn.)
- [4] Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B., Egeland, O.: ‘Dissipative systems analysis and control: theory and applications’ (Springer-Verlag, London, 2007, 2nd edn.)
- [5] Matiakis, T., Hirche, S., Buss, M.: ‘The scattering transformation for networked control systems’. Proc. Conf. on Control Applications, 2005
- [6] Matiakis, T., Hirche, S., Buss, M.: ‘Control of networked systems using the scattering transformation’, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2009, 17, (1), pp. 60–67
- [7] Matiakis, T., Hirche, S., Buss, M.: ‘Independent-of-delay stability of nonlinear networked control systems by scattering transformation’. Proc. American Control Conf., 2006
- [8] Hirche, S., Matiakis, T., Buss, M.: ‘A distributed controller approach for delay-independent stability of networked control systems’, *Automática*, 2009, 45, pp. 1828–1836
- [9] Chopra, N., Spong, M.: ‘Delay-independent stability for interconnected nonlinear systems with finite L2 gain’. Proc. Conf. on Decision and Control, 2007
- [10] Chopra, N., Spong, M., Lozano, R.: ‘Bilateral teleoperation over unreliable communication networks’, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2008, 16, (2), pp. 304–313
- [11] Cueli, J.R., Canudas-de-Wi, C.: ‘Passivity of interconnected asynchronous discrete-time systems’. Proc. 2008 World IFAC Congress
- [12] Chellaboina, V., Haddad, W.: ‘Exponentially dissipative nonlinear dynamical systems: a nonlinear extension of strict positive realness’. Proc. American Control Conf., Chicago, 2000
- [13] Navarro-Lopez, E.: ‘Several dissipativity and passivity implications in the linear discrete time-setting’, *Math. Probl. Eng.*, 2005, 6, pp. 599–616



## 2.2 Adaptador de red para sistemas lineales muestreados de forma asíncrona y en presencia de retrasos

Este trabajo analiza la estabilidad de la interconexión de realimentación de una clase de sistemas lineales disipativos, y más específicamente, cuando las señales se muestrean de forma asíncrona y hay retrasos en el canal de comunicación. El análisis se realiza teniendo en cuenta el tiempo de muestreo máximo que garantiza la preservación de los valores de ganancia pequeña (MASG). Se demuestra que esta propiedad se mantiene en presencia de retrasos constantes y puede ser preservada bajo ciertas condiciones con retrasos variables. Se utiliza una transformación basada en ganancia  $L_2$  para interconectar los sistemas con el objetivo de hacer que tengan ganancia  $L_2$  finita y garantizar el teorema de pequeña ganancia. El principal beneficio observado con esta transformación, es que el tiempo de muestreo máximo que garantiza la estabilidad de la interconexión puede modificarse y ampliarse. La última parte del trabajo está dedicado a la aplicación experimental de la metodología para el control remoto de las velocidades de los rotores de un Quad-Rotor. Se presenta un análisis de rendimiento para el control remoto basado en experimentos reales para una red celular de proyecto de asociación de tercera generación (3GPP).

### 2.2.1 Introducción

En los últimos diez años, el uso de sistemas controlados remotamente se ha extendido a todos los segmentos del mercado donde se requiere recopilación de datos y acciones de control sin poner en riesgo la integridad del operador y aumentar la eficiencia de las operaciones ([1], [2]). Los sistemas controlados remotamente pueden ser estáticos o móviles. Los ejemplos de aplicaciones estáticas están vinculados a la infraestructura fija donde el sistema de control no se implementa localmente ya que hay una instalación central a cargo de eso (por ejemplo, redes eléctricas). Los sistemas controlados remotamente móviles se utilizan en una amplia gama de aplicaciones en tierra (agricultura), en el mar (vehículos de sondeo del fondo marino) y en el aire (vehículos aéreos no tripulados). En el caso de los sistemas móviles, dependiendo de las condiciones ambientales, el control remoto manual puede ser muy difícil y requerir operadores altamente cualificados. Por lo tanto, se usa cada vez más el controlador remoto robusto diseñado para hacer frente a las incertidumbres y perturbaciones externas ([2]), ya que la industria busca mayor eficiencia en las operaciones que, al final, se traduce en beneficios económicos. En este capítulo, se analiza la estabilidad de la interconexión de realimentación de una clase de sistemas lineales disipativos, y más específicamente, cuando las señales se muestrean de forma asíncrona y hay retrasos en el canal de comunicación. La Figura 1 muestra un esquema de la interconexión analizada. Este trabajo se beneficia del hecho de que, si la interconexión en tiempo continuo de dos sistemas cumple con el teorema de ganancia pequeña, entonces la interconexión es estable (ver, por ejemplo, [5]–[7]). En este trabajo revisamos la definición del tiempo de muestreo máximo que garantiza la preservación de la ganancia pequeña (MASG) de la interconexión y el impacto de los retrasos. Usaremos esta definición para proceder con la síntesis de un límite teórico conservador inferior para el MASG.

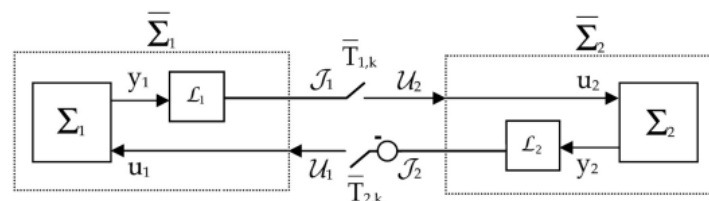


Fig. 1. Interconexión asíncrona con retardos en la comunicación.

### Caso de estudio:

El objetivo es controlar la velocidad angular de los rotores a una referencia prescrita  $r$  con un controlador remoto conectado a la entrada de voltaje del motor a través de una red inalámbrica. La red de comunicación es asíncrona con retrasos variables en el tiempo. Se usa un controlador de ganancia finita  $L_2$ , asegurando la estabilidad de la interconexión con un adaptador de red formado por  $K_1$  y  $K_2$ . El problema a resolver es el cálculo de la MASG para un par dado  $K_1, K_2$ .

Como se muestra en la Fig. 2, se definen nuevos sistemas  $\bar{\Sigma}_i$  al integrar juntos  $\Sigma_i$  y el adaptador de red ( $K_1, K_2$ ). La MASG para la interconexión se obtiene usando la descripción de los sistemas dados en (13) y resolviendo.

$$T_{12}^a \doteq \arg \max_{T_{12,k} > 0} \{T_{12,k} : W_1^l(T_{12,k}) \leq 0, W_2^l(T_{12,k}) \leq 0, K_1 > 0, K_2 = I, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_{d1} \gamma_{d2} < 1\}.$$

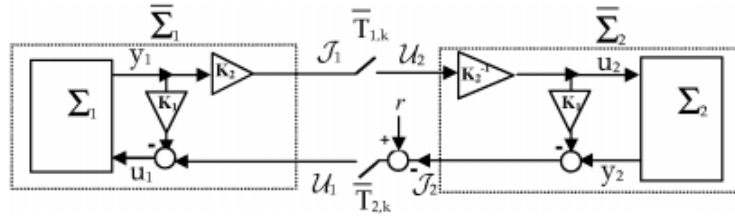
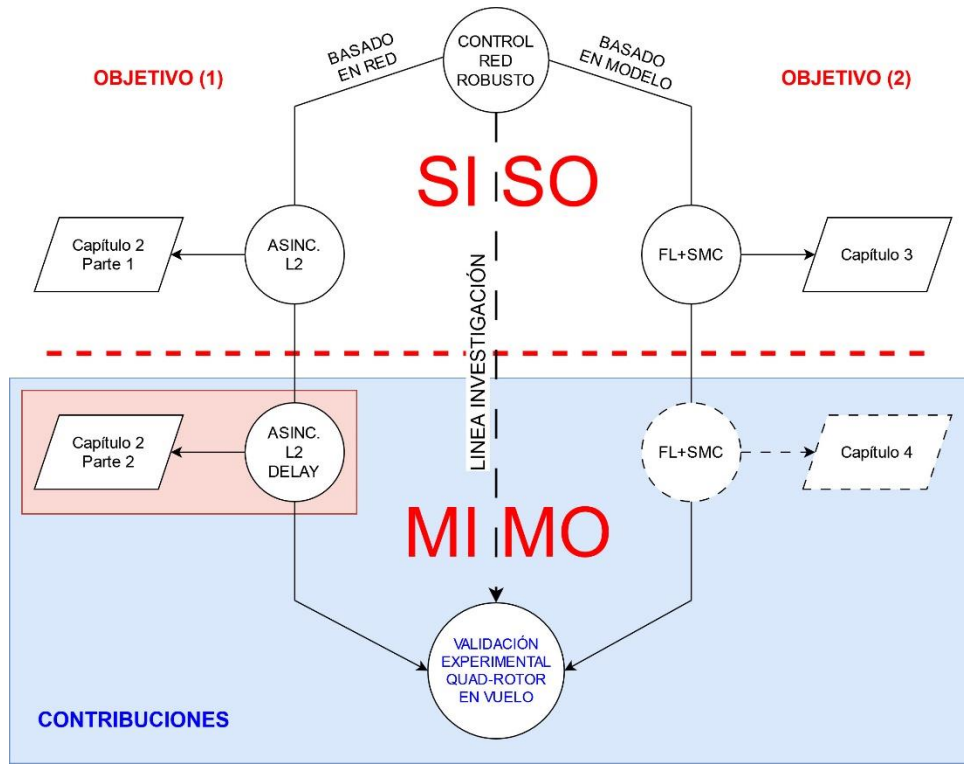


Fig. 2. Implementación del adaptador de red.

### 2.2.2 Contribuciones

La novedad en este trabajo se centra en analizar la estabilidad de la interconexión de sistemas lineales disipativos cuando las señales se muestrean de forma asíncrona con retardos en la comunicación. Introduce una innovadora transformación basada en la ganancia  $L_2$  que permite extender el tiempo de muestreo máximo, garantizando la preservación de la pequeña ganancia. Este enfoque demuestra que la propiedad de pequeña ganancia se mantiene incluso en presencia de retardos variables. La aplicación práctica de esta metodología se ilustra mediante el control remoto de las velocidades de un Quad-Rotor a través de una red móvil 3GPP, confirmando su eficacia y estabilidad.



Progreso en la investigación.

- **Contribución principal**

La principal contribución de este trabajo reside en el desarrollo de un método para analizar la estabilidad de las interconexiones de realimentación entre una clase de sistemas lineales multivariables disipativos. Específicamente, el enfoque se centra en escenarios en los que las señales de realimentación se muestrean de forma asincrónica con retardos variables en el canal de comunicación.

### 2.2.3 Formulación del problema

Consideremos dos sistemas lineales multivariables,  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , con una interconexión de retroalimentación estable en tiempo continuo. Cada sistema  $\Sigma_i$  con la siguiente dinámica en tiempo continuo

$$\Sigma_i : \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \quad (1)$$

$$y_i = C_i x_i + D_i u_i \quad (2)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}_n$ ,  $y_i \in \mathbb{R}_m$  y  $u_i \in \mathbb{R}_m$  son los vectores de estado, salida e entrada, respectivamente,  $n \geq m > 0$ , cumpliendo con la condición de disipación exponencial de ganancia  $L_2$  finita ([17], [18])

$$\dot{V}_i(x, u) \leq -y_i^T y_i + \gamma_i^2 u_i^T u_i - \rho_i V_i(x) \quad (3)$$

Donde  $V_i(x) = x_i^T P_i x_i > 0$ , con  $P_i > 0$ ,  $\gamma_i, \rho_i \in \mathbb{R}^+$ .

Los principales objetivos son 1) encontrar las condiciones bajo las cuales se garantiza la estabilidad de la interconexión con las siguientes restricciones.

- 1)  $C_1$ : La información entre los sistemas se intercambia de forma asíncrona.
- 2)  $C_2$ : Existe una limitación para el tiempo de muestreo mínimo  $T_m$ .
- 3)  $C_3$ : Existen retrasos variables en el tiempo en la interconexión. y 2) encontrar un límite teórico para el tiempo de muestreo máximo que preserve la propiedad de pequeña ganancia (MASG).

### 2.2.3.1 Máximo tiempo de muestreo para pequeña ganancia.

Esta sección caracteriza el tiempo de muestreo máximo permitido para que un sistema mantenga su ganancia  $L_2$  bajo un límite finito (por ejemplo, ganancia  $L_2$  menor que 1) y para probar la estabilidad de la interconexión asíncrona de dos sistemas en presencia de retrasos.

Ahora pasamos de la representación en tiempo continuo del sistema (1) y (2) a su representación en tiempo discreto, obteniendo

$$\Sigma_{i,k} : x_{i,k+1} = A_{i,k}x_{i,k} + B_{i,k}u_{i,k} \quad (4)$$

$$y_{i,k} = C_i x_{i,k} + D_i u_{i,k} \quad (5)$$

Donde

$$A_{i,k} = e^{A_i T_{i,k}} \text{ and } B_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} (T_{i,k}^{j+1}) / ((j+1)!) A_i^j B_i.$$

En segundo lugar, reformulamos la definición de la propiedad de pequeña ganancia para el tiempo discreto, introduciendo una aproximación discreta de (3) usando la aproximación de Euler para la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov candidata. Procediendo de esta manera, la derivada queda  $V_i \approx (V_{i,k+1} - V_{i,k}) / T_{i,k}$ , donde  $V_{i,k} = x^T P_i x_{i,k}$ , con  $P_i > 0$  la misma matriz utilizada en tiempo continuo. A partir de este punto, obtenemos al sustituir en (3) las desigualdades de matriz asociadas en tiempo discreto que se utilizarán para encontrar el valor máximo para  $T_{i,k}$ , que garantiza la preservación de los valores de pequeña ganancia. Manteniendo los mismos valores para  $\gamma_i$  y  $\rho_i$  que en el caso de tiempo continuo, se lee

$$V_{i,k+1} - V_{i,k} \leq -T_{i,k} (y_{i,k}^T y_{i,k} - \gamma_i^2 u_{i,k}^T u_{i,k} + \rho_i V_{i,k}). \quad (6)$$

La desigualdad para la propiedad de ganancia  $L_2$  (6), evaluada siguiendo la Fig. 1, da como resultado

$$W_i^d(T_{i,k}) \doteq W_i(T_{i,k}) + G_i, \leq 0 \quad (7)$$

donde hemos definido

$$W_i(T_{i,k}) \doteq \begin{pmatrix} A_{i,k}^T \frac{P_i}{T_{i,k}} A_{i,k} - \frac{P_i}{T_{i,k}} & A_{i,k}^T \frac{P_i}{T_{i,k}} B_{i,k} \\ B_{i,k}^T \frac{P_i}{T_{i,k}} A_{i,k} & B_{i,k}^T \frac{P_i}{T_{i,k}} B_{i,k} \end{pmatrix}$$

$$G_i \doteq \begin{pmatrix} C_i^T C_i + \rho_i P_i & C_i^T D_i \\ D_i^T C_i & -\gamma_i^2 + D_i^T D_i \end{pmatrix}.$$

Es importante destacar que (1) la primera matriz  $W_i(T_{i,k})$  depende del tiempo de muestreo a través de  $A_{i,k}$  y  $B_{i,k}$ , y (2) que la segunda matriz  $G_i$  es independiente del tiempo de muestreo e incluye el límite de ganancia  $L_2$ . También es importante destacar que los valores de  $P_i$ ,  $\gamma_i$  y  $\rho_i$ , se fijan como los dados por las propiedades del sistema original en tiempo continuo, y por lo tanto el único desconocido es el valor máximo del tiempo de muestreo  $T_{i,k}$ , que se utilizará para cumplir la desigualdad de matriz. También es importante destacar que, a partir de la continuidad de la solución, siempre existirá una solución límite para  $T^* > 0$ . El MASG denominado como  $T^* > 0$ , se define como

$$T_i^* \doteq \arg \max_{T_{i,k} > 0} \{T_{i,k} : W_i(T_{i,k}) + G_i \leq 0\} \quad (8)$$

### 2.2.3.2 Resultados teóricos para el algoritmo de cálculo de MASG.

En [10] se usó una primera aproximación de (8) en lugar de obtener el MASG aproximado para los sistemas SISO. Sin embargo, la falta de convexidad en (8) no garantiza que el límite obtenido para el MASG con las primeras aproximaciones satisfaga la desigualdad de matriz no lineal (8). Por lo tanto, en este trabajo, establecemos las condiciones necesarias para garantizar que la primera aproximación propuesta en [10] es válida para sistemas MIMO de forma general.

Una aproximación de  $W_i^d$  que es lineal en  $T_{i,k}$ . Este hecho nos permite resolver el MASG mediante una desigualdad de matriz lineal. Primero expresamos las matrices  $A_{i,k}$  y  $B_{i,k}$ , definidas en (4) como la siguiente expansión de series  $A_{i,k} = I + A_i T_{i,k} + (A_i^2 T_{i,k}^2)/2 + O(T_{i,k}^3)$ , y  $B_{i,k} = B_i T_{i,k} + (A_i B_i T_{i,k}^2)/2 + O(T_{i,k}^3)$  y  $B_{i,k} = B_i T_{i,k} + (A_i B_i T_{i,k}^2)/2 + O(T_{i,k}^3)$ , donde  $O$  se refiere al símbolo de Landau para el resto.

Por lo tanto, ambas series permiten expandir la matriz  $W_i^d(T_{i,k})$  como

$$W_i^d(T_{i,k}) = W_i + G_i + W_{1,i} T_{i,k} + W_{2,i} \frac{T_{i,k}^2}{2} + O(T_{i,k}^3) \quad (9)$$

y definiendo la matriz  $n \times (n + m)$   $U_i = (A_i \dots B_i)$  se obtiene

$$Q_i \doteq -(P_i A_i + A_i^T P_i), \quad W_i \doteq \begin{pmatrix} Q_i & P_i B_i \\ B_i^T P_i & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$W_{1,i} = U_i^T P_i U_i + \frac{1}{2} \left( U_i^T A_i^T P_i (I_n \ 0) + \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} P_i A_i U_i \right) \quad (11)$$

$$W_{2,i} = -U_i^T Q_i U_i. \quad (12)$$

Es importante destacar la necesidad de la expansión hasta el segundo orden para establecer la afirmación convexa. Por lo tanto, dejemos que  $W_i^l(T_{i,k})$  denote la parte de  $W_i^d(T_{i,k})$  lineal en  $T_{i,k}$ .

$$W_i^l(T_{i,k}) = W_i + G_i + W_{1,i} T_{i,k} \quad (13)$$

y así nos preguntamos si la siguiente ecuación se cumple

$$T_i^* = \arg \max_{T_{i,k} > 0} \{T_{i,k} : W_i^l(T_{i,k}) \leq 0\} \implies W_i(T_i^*) + G_i \leq 0$$

que todavía es una pregunta sin respuesta de [10]. La importante observación es que el uso de  $W_i^l(T_{i,k})$  para el cálculo del MASG en lugar del  $W_i^d$  original ( $T_{i,k}$ ), de (7), no

garantiza que sea un límite para el MASG (8) porque el problema no lineal no es a priori convexo. Afortunadamente, bajo las suposiciones generales del enfoque, la respuesta es positiva, lo que significa que el límite para el MASG obtenido con el LMI es suficiente para garantizar la estabilidad para la interconexión no lineal. Este resultado se establece en el siguiente lema. Lema 1 (Convexidad): La estabilidad  $L_2$  de ganancia finita de los sistemas  $\Sigma_i$  garantiza que la solución  $T_i^a$  de

$$T_i^a = \arg \max_{T_{i,k} > 0} \{T_{i,k} : W_i^l(T_{i,k}) \leq 0\} \quad (14)$$

con  $W_i^l(T_{i,k})$  dado por (13), satisface  $W_i^d(t) \leq 0$  dado por (7), para cualquier  $t \in [0, T_i]$ .

### 2.2.3.3 Análisis de estabilidad en una interconexión muestreada con retardos

En esta sección se presentan condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de una interconexión asíncrona de sistemas con respecto al tiempo de muestreo máximo y cuando hay retrasos en la interconexión. Suponemos que  $\bar{\Sigma}_i$  sistemas se muestrean usando una retención de orden cero y que los tiempos de muestreo  $T_{i,k}$  se consideran constantes pero diferentes para cada sistema. Definimos una nueva variable de tiempo como  $T_k \doteq \min(T_i, k)$ . También asumimos que todas las salidas son cero para  $t < 0$ .

Primero mostramos que los bloques de retraso son disipativos con respecto a la tasa de suministro  $s(u_k, y_k) = \gamma_d^2 u_k^T u_k - y_k^T y_k$ . Para un bloque de retraso, podemos dar un límite superior  $\gamma_d$  para su valor de ganancia  $L_2$ . Definamos  $L_k$  como el Latencia para el instante  $k$  en la interconexión,  $\Delta L_k$  como la variación de la Latencia y  $\delta$  como un límite superior de la variación relativa máxima de la Latencia. Por lo tanto, el valor de  $\gamma_d^2$  se da por  $1/(1 - \delta)$ , con  $(\Delta L_k)/L_k \leq \delta < 1$ . Esto significa que mientras  $\Delta L_k < L_k$  entonces se puede obtener el límite  $\delta$  con una ganancia  $L_2$  finita. Tenga en cuenta que si  $\delta > 0$  entonces  $\gamma_d > 1$  y si  $\delta < 0$  entonces  $\gamma_d < 1$ . Además, si  $L_k = 0 \forall k$ , entonces  $\delta = 0$  y  $\gamma_d = 1$ . Esto también sucede sin retraso ( $L = 0$  constante). Esto se resume en el siguiente lema.

**Lema 1:** Un bloque de retardo variable con  $\Delta L_k < L_k$  tiene un ganancia  $L_2$  finita.

**Proposición 2:** Considere dos sistemas  $\bar{\Sigma}_i$  con ganancia  $L_2$  finita igual o menor que  $\gamma_i$ , cumpliendo la desigualdad (6). Considere también que ambos sistemas están interconectados de forma asíncrona y en presencia de bloques de retardo de tiempo como se muestra en la Fig. 1, con ganancia  $L_2$  igual o menor que  $\gamma_{di}$ . Entonces, si todos los bloques verifican la condición de disipación en ganancia  $L_2$  finita con  $\gamma_1 \gamma_{d1} \gamma_2 \gamma_{d2} < 1$ , y ambos sistemas son detectables de estado cero (ZSD), la interconexión de retroalimentación asíncrona de  $\bar{\Sigma}_1$  y  $\bar{\Sigma}_2$  es asintóticamente estable independientemente del retardo de tiempo variable.

### 2.2.4 Síntesis y análisis de desempeño de un adaptador de red para el control remoto de los rotores de un quadrotor

Este apartado presenta un estudio de caso para la aplicación de los resultados anteriores en el control remoto de un Quad-Rotor. El objetivo es controlar la velocidad angular de los rotores a una referencia prescrita  $r$  con un controlador remoto conectado a la entrada de voltaje del motor a través de una red inalámbrica. Recuerde que la red de comunicación es asíncrona con retrasos variables en el tiempo. Se usa un controlador de ganancia finita  $L_2$ , asegurando la estabilidad de la interconexión con un adaptador de red formado por  $K_1$  y  $K_2$ . El problema a resolver es el cálculo de la MASG para un par dado  $K_1, K_2$ .

### 2.2.4.1 Descripción de la configuración experimental

El Quad-Rotor es un pequeño vehículo aéreo con cuatro rotores. Este sistema se controla de forma remota a través de una conexión wifi por una computadora de estación base usando el protocolo UDP [20] [ver Fig. 3 (a)]. La velocidad angular de los rotores se mide con codificadores ópticos colocados en los motores [ver Fig. 3 (b)].

Todas las mediciones se procesan por una tarjeta de microcontrolador basada en un  $\mu\text{C-PIC-18F4431}$  que trabaja a 20 MHz [21]. La tarjeta contiene entradas digitales y analógicas, que se utilizan para leer las señales de los codificadores ópticos; también proporciona salidas PWM a los transistores conectados a los motores de los rotores, y que representan las entradas de control al sistema. El tiempo de muestreo mínimo se establece en 10 ms. En cada muestra, el microcontrolador recibe los datos de velocidad, los procesa utilizando la información que proviene de la red a través de los bloques de ganancia  $L_2$ , y envía las entradas de control a los motores de corriente continua [ver Fig. 3 (c)]. El controlador remoto se implementa en una PC (2 GHz con 2 GB de RAM) ubicada en la estación base, procesando y enviando los paquetes de datos a través de una red inalámbrica (IEEE 802.11) con protocolo UDP cada 50 ms.

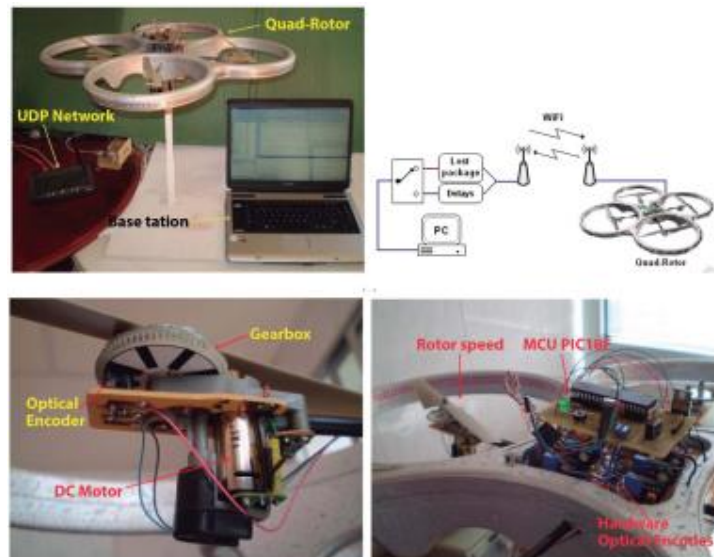


Fig. 3. (a) Configuración experimental e interconexión celular 3GPP de Internet. (b) Rotor, actuador y sensores. (c) Microcontrolador.

### 2.2.4.2 Modelo de sistemas y síntesis del adaptador de red

El sistema de motor del rotor se ha identificado como el primer sistema interconectado  $\Sigma_1$  en la Fig. 2.  $y_1$  es la velocidad angular del rotor.  $u_1$  es la entrada de voltaje al motor. Después de linealizar su dinámica no lineal, la relación entre la entrada de voltaje y la velocidad angular se puede modelar como un sistema de primer orden con la siguiente función de transferencia  $G(s) = k / (s + a)$ , con  $k = 255.4$  y  $a = 5.96$  identificados usando mínimos cuadrados.

El controlador remoto se denota como  $\Sigma_2$ .  $u_2$  es la entrada del controlador y  $y_2$  es la salida del controlador. Está diseñado en tiempo continuo y tiene una ganancia finita  $L_2$ , donde  $C(s) = kc (acs + 1) / (s + 1)$ , con  $kc = 2$  y  $ac = 0.85$ .

Siguiendo el esquema de implementación mostrado en la Fig. 2, el objetivo es diseñar un adaptador de red de parámetros  $K_1$  y  $K_2$ , de modo que el teorema de la pequeña ganancia

se preserve para un tiempo de muestreo máximo deseado (MASG). La configuración para el adaptador de red ( $K_1$  y  $K_2$ ) se asemeja a la transformación de *Scattering* en [19]. De hecho, para simplificar el primer diseño,  $K_2$  se ha fijado en 1. Por lo tanto, para destacar que se incluye el adaptador de red, las matrices que describen la desigualdad (7) se denominan con  $(\bar{\cdot})$  (ver Fig. 2) y leer;

- 1) para  $\bar{\Sigma}_1$ :  $\bar{A}_1 = A_1 - K_1\xi$ ,  $\bar{B}_1 = B_1$ ,  $\bar{C}_1 = K_2\xi$  y  $\bar{D}_1 = 0$ , con  $\xi = (1 + D_1 K_1)^{-1}C_1$ ,
- 2) para  $\bar{\Sigma}_2$ :  $\bar{A}_2 = A_2$ ,  $\bar{B}_2 = B_2K_2^{-1}$ ,  $\bar{C}_2 = C_2$  y  $\bar{D}_2 = (D_2 - K_1)K_2^{-1}$ .

Se han calculado varios valores de  $K_1$  de tal manera que se satisfaga un MASG propuesto.

Por simplicidad, se considera para el cálculo de  $K_1$  que el retraso es constante, lo que significa que  $\gamma_d = 1$ . Luego, analizaremos el margen disponible para la variación de retrasos en la interconexión aprovechando que  $\gamma_1\gamma_2\gamma_{d1}\gamma_{d2} < 1$ . Por lo tanto, se han evaluado dos valores de  $K_1$ . Para  $K_1 = 1.013$ , el MASG es de 50 ms y  $\gamma_1\gamma_2\gamma_{d1}\gamma_{d2} = 0.955$ . Para  $K_1 = 1.015$ , el MASG es de 100 ms y  $\gamma_1\gamma_2\gamma_{d1}\gamma_{d2} = 0.958$ .

Dado que hay varias estrategias potenciales para hacer frente al retraso en la comunicación, la estrategia propuesta en este experimento es hacer que el tiempo de muestreo  $T_k$  sea mayor que el máximo ( $\Delta L$ ) observado.

En este experimento, se propone como estrategia para afrontar el retraso en la comunicación hacer que el tiempo de muestreo  $T_k$  sea mayor que el máximo ( $\Delta L$ ) observado en los experimentos iniciales.

### 2.2.4.3 Tiempo máximo de muestreo para mantener la ganancia $L_2$ .

Esta sección caracteriza el tiempo de muestreo máximo permitido para que un sistema mantenga su ganancia  $L_2$  bajo un límite finito (por ejemplo, ganancia  $L_2$  menor que uno y para probar la estabilidad de la interconexión asíncrona de dos sistemas en presencia de retrasos.

Para la formulación del problema utilizaremos el sistema en tiempo discreto, obteniendo

$$\begin{aligned} \Sigma_{i,k} : \quad x_{i,k+1} &= A_{i,k}x_{i,k} + B_{i,k}u_{i,k} \\ y_{i,k} &= C_i x_{i,k} + D_i u_{i,k} \end{aligned}$$

En segundo lugar, reformulamos la definición de la propiedad de pequeña ganancia para el tiempo discreto, introduciendo una aproximación discreta usando la aproximación de Euler para la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov candidata.

$$\dot{V}_i(x, u) \leq -y_i^\top y_i + \gamma_i^2 u_i^\top u_i - \rho_i V_i(x)$$

A partir de este punto, obtenemos las desigualdades de matriz asociadas en tiempo discreto que se utilizarán para encontrar el valor máximo para  $T_{i,k}$ , que garantiza la preservación de los valores de pequeña ganancia. Manteniendo los mismos valores para  $\gamma_i$  y  $\rho_i$  que en el caso de tiempo continuo, se lee

$$V_{i,k+1} - V_{i,k} \leq -T_{i,k} (y_{i,k}^\top y_{i,k} - \gamma_i^2 u_{i,k}^\top u_{i,k} + \rho_i V_{i,k}). \quad (6)$$



La desigualdad para la propiedad de ganancia  $L_2$  (6), evaluada siguiendo la Fig. 1, da como resultado

$$W_i^d(T_{i,k}) \doteq W_i(T_{i,k}) + G_i, \leq 0$$

donde hemos definido

$$W_i(T_{i,k}) \doteq \begin{pmatrix} A_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} A_{i,k} - \frac{P_i}{T_{i,k}} & A_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} B_{i,k} \\ B_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} A_{i,k} & B_{i,k}^\top \frac{P_i}{T_{i,k}} B_{i,k} \end{pmatrix}$$

$$G_i \doteq \begin{pmatrix} C_i^\top C_i + \rho_i P_i & C_i^\top D_i \\ D_i^\top C_i & -\gamma_i^2 + D_i^\top D_i \end{pmatrix}.$$

es importante destacar que los valores de  $P_i$ ,  $\gamma_i$  y  $\rho_i$ , se fijan como los dados por las propiedades del sistema original en tiempo continuo, y por lo tanto el único desconocido es el valor máximo del tiempo de muestreo  $T_{i,k}$ , que se utilizará para cumplir la desigualdad de matriz. Siempre existirá una solución límite para  $T^* > 0$ . El MASG denominado como  $T^* > 0$ , se define como

$$T_i^* \doteq \arg \max_{T_{i,k} > 0} \{T_{i,k} : W_i(T_{i,k}) + G_i \leq 0\}$$

#### 2.2.4.4 Análisis de estabilidad con retrasos en el muestreo.

Para garantizar la estabilidad de una interconexión asíncrona de sistemas con respecto al tiempo de muestreo máximo y cuando hay retrasos en la interconexión. Suponemos que  $\bar{\Sigma}_1$  sistemas se muestrean usando una retención de orden cero y que los tiempos de muestreo  $T_{i,k}$  se consideran constantes pero diferentes para cada sistema. Definimos una nueva variable de tiempo como  $T_k = \min(T_{i,k})$ . También asumimos que todas las salidas son cero para  $t < 0$ .

Los bloques de retraso son disipativos con respecto a la tasa de suministro  $s(u_k, y_k) = \gamma_d^2 u_k^t u_k - y_k^t y_k$ . Para un bloque de retraso, podemos dar un límite superior  $\gamma_d$  para su valor de ganancia  $L_2$ . Definamos  $L_k$  como la latencia para el instante  $k$  en la interconexión,  $\Delta L_k$  como la variación de la Latencia y  $\delta$  como un límite superior de la variación relativa máxima de la Latencia. Por lo tanto, el valor de  $\gamma_d^2$  se da por  $1/(1 - \delta)$ , con  $(\Delta L_k)/L_k \leq \delta < 1$ . Esto significa que mientras  $\Delta L_k < L_k$  entonces se puede obtener el límite  $\delta$  con una ganancia  $L_2$  finita. Tenga en cuenta que si  $\delta > 0$  entonces  $\gamma_d > 1$  y si  $\delta < 0$  entonces  $\gamma_d < 1$ . Además, si  $\Delta L_k = 0 \forall k$ , entonces  $\delta = 0$  y  $\gamma_d = 1$ . Esto también sucede sin retraso ( $L = 0$  constante). Esto se resume en el siguiente lema.

**Lema 2:** Un bloque de retardo variable con  $\Delta L_k < L_k$  tienen una ganancia  $L_2$  finita.

**Proposición 3:** Considere dos sistemas  $\bar{\Sigma}_i$  con ganancia  $L_2$  finita igual o menor que  $\gamma_i$ , cumpliendo la desigualdad (6). Considere también que ambos sistemas están interconectados de forma asíncrona y en presencia de bloques de retardo de tiempo como se muestra en la Fig. 1, con ganancia  $L_2$  igual o menor que  $\gamma_{di}$ .

$$\begin{aligned}
 \Delta V_k \leq & -\bar{T}_k \left( \underbrace{(1 - \alpha_1)}_{\varepsilon_1} y_{1,k}^\top y_{1,k} + \underbrace{(\beta - \alpha_2)}_{\varepsilon_2} y_{2,k}^\top y_{2,k} \right. \\
 & + \underbrace{(\alpha_2 \bar{\delta}_2 - \gamma_1^2)}_{\varepsilon_3} y_{2,k-d_{2,k}}^\top y_{2,k-d_{2,k}} + \rho_1 V_{1,k} \\
 & \left. + \underbrace{(\alpha_1 \bar{\delta}_1 - \beta \gamma_2^2)}_{\varepsilon_4} y_{1,k-d_{1,k}}^\top y_{1,k-d_{1,k}} + \rho_2 V_{2,k} \right) \\
 \leq & -\bar{T}_k \left( \varepsilon_1 y_{1,k}^\top y_{1,k} + \varepsilon_2 y_{2,k}^\top y_{2,k} + \varepsilon_3 y_{2,k-d_{2,k}}^\top y_{2,k-d_{2,k}} \right. \\
 & \left. + \varepsilon_4 y_{1,k-d_{1,k}}^\top y_{1,k-d_{1,k}} + \rho_1 V_{1,k} + \rho_2 V_{2,k} \right)
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \beta \gamma_2^2 \gamma_{d1}^2 < \alpha_1 < 1 &\Rightarrow \beta < \frac{1}{\gamma_2^2 \gamma_{d1}^2} \\
 \gamma_1^2 \gamma_{d2}^2 < \alpha_2 < \beta &\Rightarrow \beta > \gamma_1^2 \gamma_{d2}^2
 \end{aligned} \right\} \gamma_1^2 \gamma_{d2}^2 < \beta < \frac{1}{\gamma_2^2 \gamma_{d1}^2} \tag{21}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (20) y (21), si todos los bloques verifican la condición de disipación en ganancia  $L_2$  finita con  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_{d1} \gamma_{d2} < 1$ , y ambos sistemas son detectables de estado cero (ZSD), la interconexión de realimentación asíncrona de  $\bar{\Sigma}_1$  y  $\bar{\Sigma}_2$  es asintóticamente estable independientemente del retardo de tiempo variable.

#### 2.2.4.5 Resultados experimentales sobre una red móvil 3GPP

En los experimentos, el control de las velocidades del rotor se ha realizado en una red celular 3GPP, utilizando el protocolo UDP sobre IP. El esquema de interconexión se muestra en la Fig. 4 (a).

Antes de diseñar el adaptador de red, hemos analizado el tiempo de ida y vuelta en la red celular 3GPP, como se muestra en la Fig. 4 (b), y de donde hemos obtenido valores estadísticos para el tiempo de ida y vuelta medio de 267 ms con una desviación estándar de 49 ms. Por lo tanto, podemos tomar como el retardo nominal para las comunicaciones de un solo sentido los valores  $L = 134$  ms y  $\sigma_{\max} = 25$  ms. Hemos elegido el tiempo de muestreo como dos veces la desviación estándar del retardo, es decir, el tiempo de muestreo nominal se establece en 50 ms. El adaptador de red se ha elegido como  $K_1 = 1.015$ , que, como se mencionó antes, garantiza un MASG de 100 ms. La Fig. 4 (c) muestra la respuesta temporal de este experimento con el adaptador de red. En ella puede observarse como independientemente de régimen de velocidades elegido como referencia, con cambios en escalón, la interconexión del sistema se mantiene estable y la salida sigue la referencia.

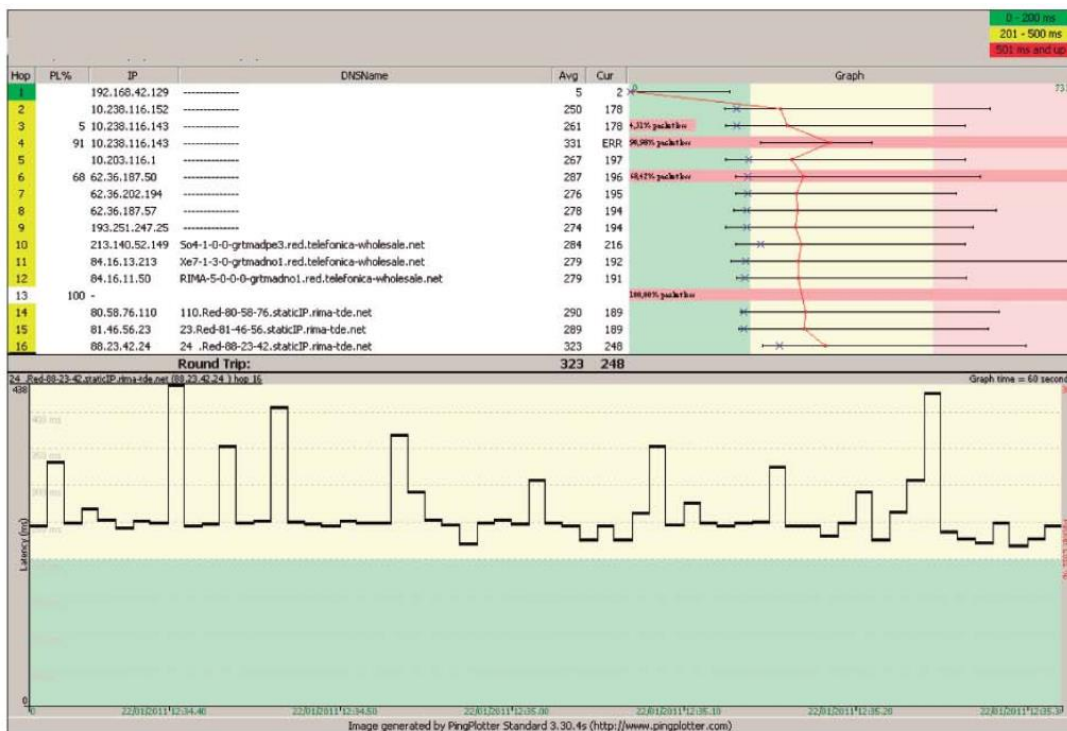
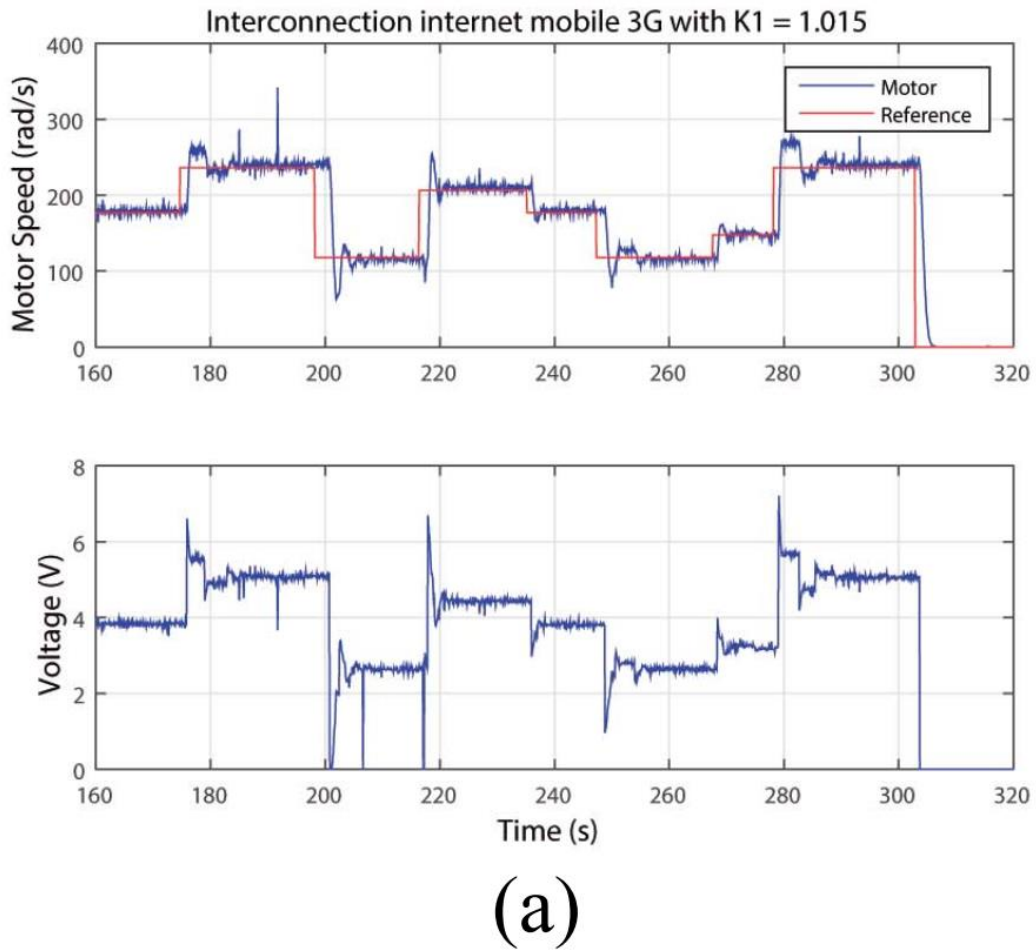


Fig. 4. (a) Red celular 3GPP con adaptador K1 = 1.015. (b) Latencia de ida y vuelta - Red celular 3GPP.

### **2.2.5 Conclusión**

Se ha presentado un método para analizar la estabilidad de la interconexión de muestreo de realimentación de una clase de sistemas lineales multivariables disipativos, y más específicamente, cuando las señales asociadas con la interconexión de realimentación se muestrean de forma asíncrona con retrasos variables en el canal de comunicación. El análisis se ha realizado teniendo en cuenta las propiedades de pequeña ganancia de los sistemas originales de tiempo continuo interconectados. Por lo tanto, hemos formulado inecuaciones matriciales que nos permiten calcular el tiempo de muestreo máximo que preserva las propiedades de pequeña ganancia. Además, se han establecido condiciones de estabilidad suficientes para la interconexión asíncrona de dos sistemas de ganancia  $L_2$  finitos para el caso de retrasos variables en el canal de comunicación.

Además, el método fue validado controlando remotamente las velocidades del rotor de un dron. Se implementó una red de comunicación inalámbrica entre la estación base y el dron (protocolo wifi / UDP). La interconexión se implementó experimentalmente a través de una red celular 3GPP. Los experimentos mostraron un muy buen rendimiento de la interconexión entre el dron y la estación base en presencia de retrasos. De hecho, la interconexión fue estable asintóticamente.

## 2.2.6 Referencias

- [14] GNSS Market Report, Publications Office Eur. Union, Eur. GNSS Agency, Prague, Czechia, 2019, no. 6.
- [15] GNSS User Technology Report, Publications Office Eur. Union, Eur. GNSS Agency, Prague, Czechia, 2018, no. 2.
- [16] J. A. Fax and R. M. Murray, “Information flow and cooperative control of vehicle formations,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, Sep. 2004.
- [17] P. F. Hokayem and M. W. Spong, “Bilateral teleoperation: An historical survey,” *Automática*, vol. 42, no. 12, pp. 2035–2057, Dec. 2006.
- [18] A. J. van der Schaft, *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1999.
- [19] H. Khalil, *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson Education International, 2001.
- [20] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland, “Dissipative systems analysis and control,” in *Theory and Applications*, 2nd ed. London, U.K.: Springer-Verlag, 2007.
- [21] N. Chopra and M. W. Spong, “Delay-independent stability for interconnected nonlinear systems with finite L2 gain,” in *Proc. 46th IEEE Conf. Decis. Control*, Dec. 2007, pp. 3847–3852.
- [22] J. R. Cueli and C. Canudas-de-Wit, “Passivity of interconnected asynchronous discrete-time systems,” in *Proc. World IFAC Congr.*, 2008, pp. 10277–10282.
- [23] J. M. Cano, M. López-Martínez, and F. R. Rubio, “Asynchronous networked control of linear systems via L2-gain-based transformations: Analysis and synthesis,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 5, no. 4, pp. 647–654, Mar. 2011.
- [24] K. Halder et al., “Controller design for networked control systems—An approach based on L2 induced norm,” *Nonlinear Anal., Hybrid Syst.*, vol. 19, pp. 134–145, Feb. 2016.
- [25] I. Masaki and K. Urata, “Dissipative reinforcement in interconnected systems,” *Automática*, vol. 95, pp. 73–85, Sep. 2018.
- [26] E. P. van Horssen and S. Weiland, “Synthesis of distributed robust H-infinity controllers for interconnected discrete time systems,” *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, vol. 3, no. 3, pp. 286–295, Sep. 2016.
- [27] X. Liang and J. Xu, “Control for networked control systems with remote and local controllers over unreliable communication channel,” *Automática*, vol. 98, pp. 86–94, Dec. 2018.
- [28] Y. Oishi, “Passivity degradation under the discretization with the zeroorder hold and the ideal sampler,” in *Proc. CDC*, 2010, pp. 7613–7617.
- [29] M. Xia, P. J. Antsaklis, V. Gupta, and F. Zhu, “Passivity and dissipativity analysis of a system and its approximation,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 62, no. 2, pp. 620–635, Feb. 2017.
- [30] V. Chellaboina and W. Haddad, “Exponentially dissipative nonlinear dynamical systems: A nonlinear extension of strict positive realness,” in *Proc. Amer. Control Conf.*, Chicago, IL, USA, 2000, pp. 3123–3127.
- [31] E. M. Navarro-López, “Several dissipativity and passivity implications in the linear discrete-time setting,” *Math. Problems Eng.*, vol. 2005, no. 6, pp. 599–616, 2005.
- [32] T. Masiakakis, S. Hirche, and M. Buss, “Control of networked systems using the scattering transformation,” *IEEE Trans. control Syst. Technol.*, vol. 17, no. 1, pp. 60–67, Jan. 2009.
- [33] [https://es.wikipedia.org/wiki/Protocolo\\_de\\_datagramas\\_de\\_usuario](https://es.wikipedia.org/wiki/Protocolo_de_datagramas_de_usuario)
- [34] <https://www.microchip.com/en-us/product/pic18f4431>

### 3 Linealización por realimentación y modos deslizantes.

Este estudio presenta una nueva superficie de deslizamiento no lineal para controlar una clase de sistemas mecánicos de fase no mínima, teniendo en cuenta las incertidumbres en sus parámetros físicos. La superficie no lineal se diseña a través de una salida ficticia, que proporciona la propiedad de fase mínima y permite demostrar la estabilidad mediante la teoría de Lyapunov. La superficie no lineal se basa en la salida ficticia y se complementa con un controlador externo no lineal diseñado mediante la teoría de Lyapunov. El presente enfoque asegura la estabilidad exponencial del punto de equilibrio y la estabilidad robusta a las incertidumbres paramétricas, evitando la aparición de fenómenos no deseados, como los ciclos límite. El rendimiento, la respuesta en el tiempo y la robustez paramétrica se muestran a través de simulaciones.

#### 3.1 Introducción

En este trabajo se presenta un esquema de control en el que se combinan tres métodos clásicos: linealización por realimentación, diseño de Lyapunov y control por modos deslizantes (SMC del inglés *Sliding Mode Control*), para lograr la estabilización robusta del punto de equilibrio de una clase de sistemas mecánicos subactuados de fase no mínima.

El enfoque SMC [1-3] es una herramienta eficaz para diseñar controladores robustos para sistemas que operan bajo condiciones de incertidumbre. La principal ventaja con respecto a otras técnicas de control es la baja sensibilidad a los errores de estimación en los parámetros de la planta y a las perturbaciones [5, 6], lo que a veces elimina la necesidad de un modelado exacto. Otra ventaja adicional del SMC es la discontinuidad de las acciones de control, que permite estabilizar algunas clases de sistemas no estabilizables por leyes de realimentación de estado continuas.

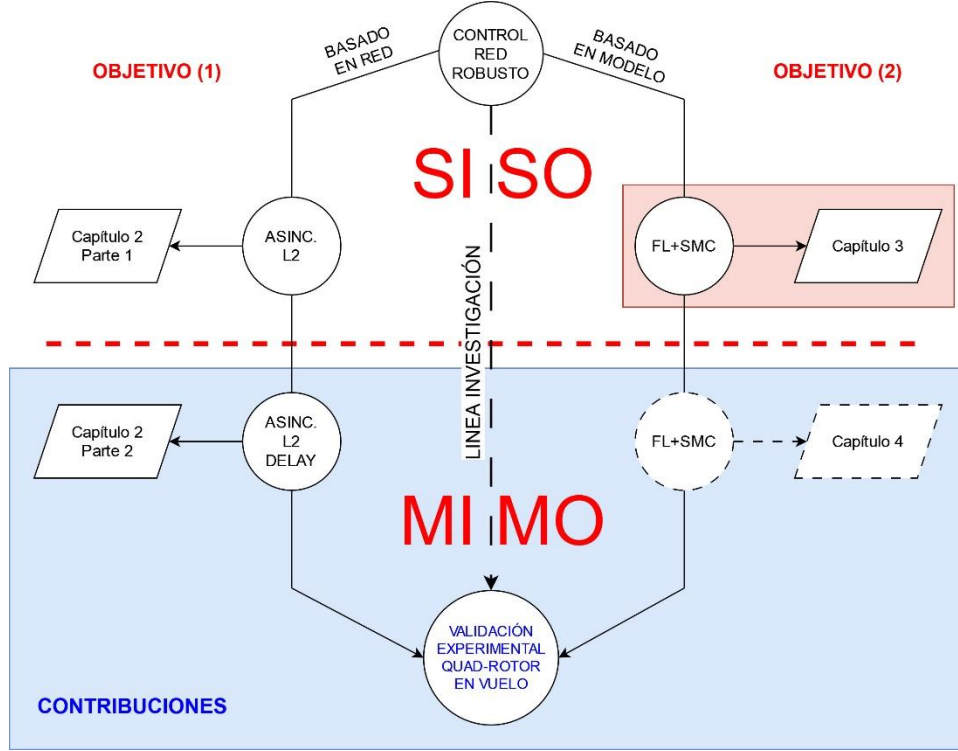
Por otro lado, la mayoría de los enfoques de diseño de control que utilizan superficies deslizantes se basan en los métodos de Lyapunov y linealización de un Jacobiano. La complejidad del enfoque de Lyapunov, junto con la facilidad de la linealización de un Jacobiano, hace que sea útil combinar técnicas para aprovechar lo mejor de cada enfoque. Por ejemplo, en este trabajo utilizamos un enfoque cercano a la combinación de SMC y flatness [8-11], en el sentido de que utilizamos una salida ficticia para estabilizar el sistema. La principal diferencia en el enfoque presente es la combinación de diseño de Lyapunov y linealización por realimentación. La ventaja de este enfoque, con respecto al método basado en la planitud, es que este último solo es válido si el grado relativo del sistema con respecto a su salida es igual al orden del sistema. El esquema de control propuesto en este trabajo es el siguiente: primero, se define una salida no lineal ficticia tal que garantice la propiedad de fase mínima, y luego se diseña un controlador SMC para la salida ficticia.

En segundo lugar, se propone un controlador externo diseñado a través de Lyapunov. Finalmente, se realiza un rediseño mediante una superficie deslizante no lineal para hacer frente a incertidumbres paramétricas.

#### 3.2 Aportaciones

Con este enfoque, garantizamos la estabilidad exponencial (local) del equilibrio natural inestable de la clase de sistemas de fase no mínima propuestos.

La novedad del enfoque se puede resumir de la siguiente manera: primero, se usa el controlador basado en Lyapunov para hacer el equilibrio estable. En segundo lugar, se propone un controlador externo, diseñado a través de Lyapunov. Finalmente, se realiza un rediseño, mediante una superficie de deslizamiento no lineal, para hacer frente a incertidumbres paramétricas.



Progreso en la investigación.

- **Aportación del trabajo**

La principal aportación de este trabajo es el diseño de una nueva superficie de deslizamiento no lineal, para la clase de sistemas mecánicos subactuados de fase no mínima a los que se ha aplicado previamente la linealización por realimentación constructiva [23]. La superficie de deslizamiento permite lidiar con la incertidumbre en los términos cancelados por la linealización por realimentación. El método de diseño se puede resumir en la siguiente proposición.

$$\dot{\eta} = \bar{\alpha}(z, \dot{q}) - \Delta(z)u, \quad \dot{\eta} \in \mathbb{R} \quad (19)$$

Se asumirá que la función  $\bar{\alpha}(z, q)$  no se conoce exactamente, siendo estimada por la función  $\alpha(z, q)$ , donde el error de estimación está limitado por una función positiva definida  $A(z, q)$

$$A(z, \dot{q}) \geq |\bar{\alpha}(z, \dot{q}) - \alpha(z, \dot{q})| > 0$$

Considere la superficie de deslizamiento

$$s = \dot{\eta} + k_3 p \eta + k_3 \int_0^z m_{12}(\mu) d\mu, \quad (20)$$

Con  $s \in \mathbb{R}$  (20) donde  $\dot{\eta}$  se da por (9), con una ley de control modificada como (21) y donde  $u_L$  corresponde a la ley de linealización preliminar dada por (10). Entonces, (21)

estabiliza asintóticamente el origen del sistema (6) en presencia de incertidumbres paramétricas no modeladas.

$$u \triangleq u_L + \Delta^{-1} k_4(z, \dot{q}) \text{sign}(s), \quad k_4(z, \dot{q}) > A(z, \dot{q}) \quad (21)$$

Con este enfoque aseguramos la estabilidad exponencial del equilibrio natural inestable de la clase de sistemas de fase no mínima propuestos. Entonces, primero hacemos que el equilibrio del lazo cerrado sea estable, además de LES, y luego considerando incertidumbres no modeladas se hace robusto el diseño preliminar.

Considere la superficie de deslizamiento definida como en (20) con una ley de control modificada dada por

$$\begin{aligned} u \triangleq u_L + \Delta^{-1} k_4(z, \dot{q}) \text{sign}(s), \quad k_4 \in \mathbb{R}^+ \\ k_4(z, \dot{q}) \geq B|(\bar{\alpha} - \alpha) - (\bar{\Delta} - \Delta)u_L| > 0, \quad B > \Delta\bar{\Delta}^{-1} > 0 \end{aligned} \quad (26)$$

y donde  $u_L$  es la ley de linealización correspondiente dada por (10). Entonces, (26) estabiliza asintóticamente el origen del sistema (6) en presencia de incertidumbres paramétricas no modeladas.

### 3.3 Aplicaciones

Se presentan dos ejemplos como aplicaciones de la teoría desarrollada: el péndulo en un carrito (PoC) y el péndulo de rueda de inercia (IWP). La Fig. 2 muestra un esquema de estos dos sistemas bien conocidos [19, 20].

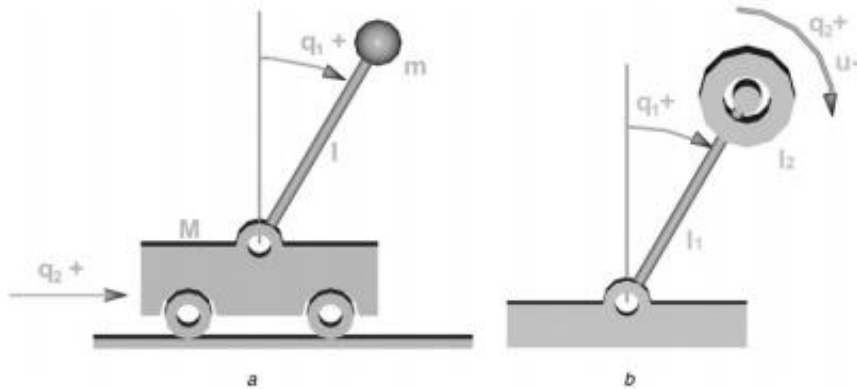


Figure 2 caso estudiado a) PoC, b) IWP

#### 3.3.1 Péndulo en un carrito

Las ecuaciones dinámicas del Péndulo sobre un Carrito (PoC) se pueden escribir de la siguiente manera (ver [19]):

$$ml^2\ddot{z} + ml \cos z \dot{z} \dot{x} - mgl \sin z = 0 \quad (30)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos z \dot{z} \dot{x} - ml \sin z \dot{z}^2 = v \quad (31)$$



Usando el control de realimentación parcial colocado de [14], se pueden expresar de una forma más compacta (ver [18]), aprovechando la relación entre la entrada  $v$  y la aceleración  $\ddot{x}$ :

$$\ddot{z} = a \sin z - b \cos zu \quad (32)$$

$$\ddot{x} = u \quad (33)$$

donde  $a = (mgl/J)$ ,  $b = (1/l)$ ,  $m$  es la masa del péndulo,  $l$  es la longitud del péndulo,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $J$  es el momento de inercia con respecto al eje  $z$  y  $u$  es la nueva entrada de control. La Tabla 1 presenta un resumen de los parámetros físicos relevantes del sistema relacionados con la función potencial y la matriz de inercia.

La matriz de inercia es el parámetro más difícil de medir, por lo que es aceptable asumir que hay una incertidumbre paramétrica en la medición de  $J$ , y por lo tanto en  $a$ . Esta incertidumbre paramétrica se puede limitar usando la teoría del error, por lo que podemos afirmar que  $|\bar{a} - a|$  está limitado, siendo  $a$  el valor estimado del parámetro real y desconocido.

- **Simulaciones.**

Para comprobar el rendimiento del controlador de modos deslizantes constructivo, se ha desarrollado un experimento simulado y se muestra en la Fig. 3. Consiste en cambiar el valor estimado de la inercia del péndulo, en la ley de control (37), hasta que el rendimiento del lazo cerrado se degrade de un comportamiento estable en el origen a uno inestable. En este caso, esto da lugar a un ciclo límite. En el segundo experimento, todavía en la Fig. 3, la ley de control se ha aumentado, introduciendo el nuevo término  $k_4 \tanh(s)$  (aproximación continua de  $\text{sign}(s)$  para reducir el *chattering*). Para las simulaciones, hemos elegido como parámetros  $m = l = 1$ ,  $k_1 = 10$  y  $a = 10$  y  $a = 9.5$ . Esto representa un error relativo del 5% en la estimación de  $a$ . De esta manera, a partir de los cálculos anteriores, el valor de la ganancia  $k_4$  en (6) tiene que ser mayor que 2.5, de (40), para garantizar la estabilidad asintótica en el origen (robustez).

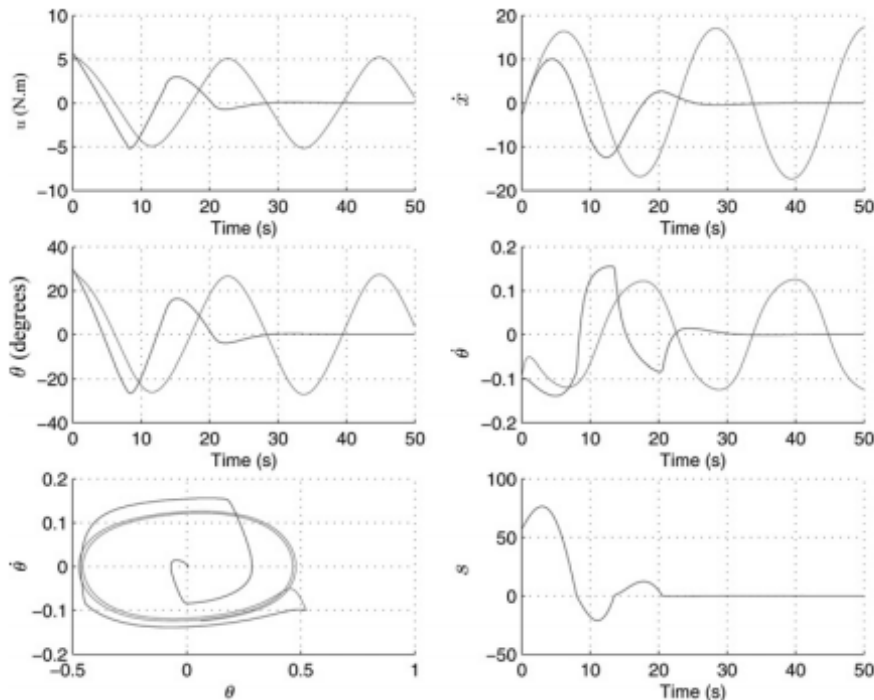
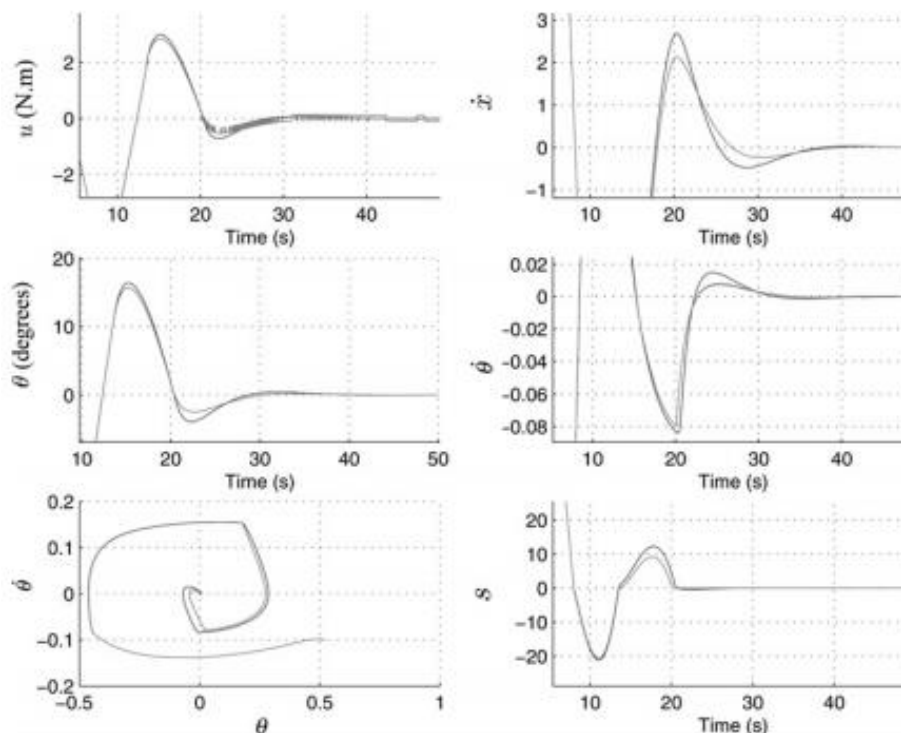


Figura 3 Prueba de concepto: simulaciones con incertidumbres paramétricas usando el controlador (37) y el controlador aumentado (6)

En el retrato de fase (abajo a la izquierda en la Fig. 3), se puede observar cómo evolucionan los estados  $(u, \dot{u})$  hacia el origen, cuando se usa la ley de control aumentada (6). Además, también se puede ver que el nuevo término agregado a la señal de entrada, mejora la respuesta en términos de reducir el tiempo de asentamiento y las oscilaciones. Con respecto a la evolución de la superficie deslizante, se puede notar en la Fig. 3 abajo a la derecha que  $s$  converge rápidamente a cero, lo cual es necesario para garantizar que la ley aumentada (6) haga que el origen sea asintóticamente estable.

En el diagrama de fase (abajo a la izquierda en la Fig. 3), se puede observar cómo los estados  $(u, \dot{u})$  evolucionan hacia el origen, cuando se usa la ley de control aumentada (6). Además, también se puede ver que el nuevo término agregado a la señal de entrada, mejora la respuesta en tiempo en términos de reducción del tiempo de establecimiento y las oscilaciones. Con respecto a la evolución de la superficie deslizante, se puede notar en la Fig. 3 abajo a la derecha que  $s$  converge rápidamente a cero, lo cual es necesario para garantizar que la ley aumentada (6) haga que el origen sea asintóticamente estable.

La Fig. 4 muestra el fenómeno de chateo que aparece cuando se usa la función signo  $(s)$  en lugar de la suave función sigmoide  $\tanh(s)$ . Se han hecho simulaciones comparativas usando estas dos funciones.



**Figura 4** Prueba de concepto: simulaciones con incertidumbres paramétricas usando controlador (6) Comparación entre el uso de signo  $(s)$  y una aproximación suave  $\tanh(s)$ , para eliminar el fenómeno de *chattering*

Para la implementación práctica de la ley de control, es necesario cumplir algunos requisitos de hardware para realizar estas computaciones.

### 3.3.2 Péndulo de rueda de inercia

Este sistema se describe a fondo en [22], donde no se tiene en cuenta la fricción. En esta sección, se incluye el modelo de fricción, dando

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= a \sin z - k_f \dot{z} - bu \\ \ddot{x} &= u\end{aligned}\tag{41}$$

con  $a = (mgl/(J_1 + J_2))$ ,  $b = (J_2/(J_1 + J_2))$ , donde  $J_i$  son momentos de inercia.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, podemos obtener la ley de linealización

$$\begin{aligned}u_L &= \Delta^{-1} \left( k_1 \frac{J_2}{J_1 + J_2} (mgl \sin z - k_f \dot{z}) + k_2 J_2 \dot{z} - v \right) \\ \Delta &= k_1 \frac{J_2^2}{J_1 + J_2} - 1 \\ v &= -k_3 (P\dot{\eta} + J_2 \dot{z})\end{aligned}\tag{42}$$

que corresponde a la solución particular de (10) y (11). Tenga en cuenta que, en este ejemplo, el término de fricción  $k_f$  puede ser dominado por  $k_2$ , lo que podría usarse para extender la clase de sistemas en la Proposición 1 (ver [15] para más detalles).

La ley final a aplicar, usando la superficie deslizante, se da por (26), dando

$$u = u_L + \Delta^{-1} k_4(z, \dot{q}) \text{sign}(s)$$

Donde

$$k_4(z, \dot{q}) \geq B|\tilde{\alpha} + \tilde{\Delta}u_L| \quad B > \frac{\Delta}{\tilde{\Delta}}\tag{43}$$

donde  $k_4(z, \dot{q})$  tiene que ser estimado.

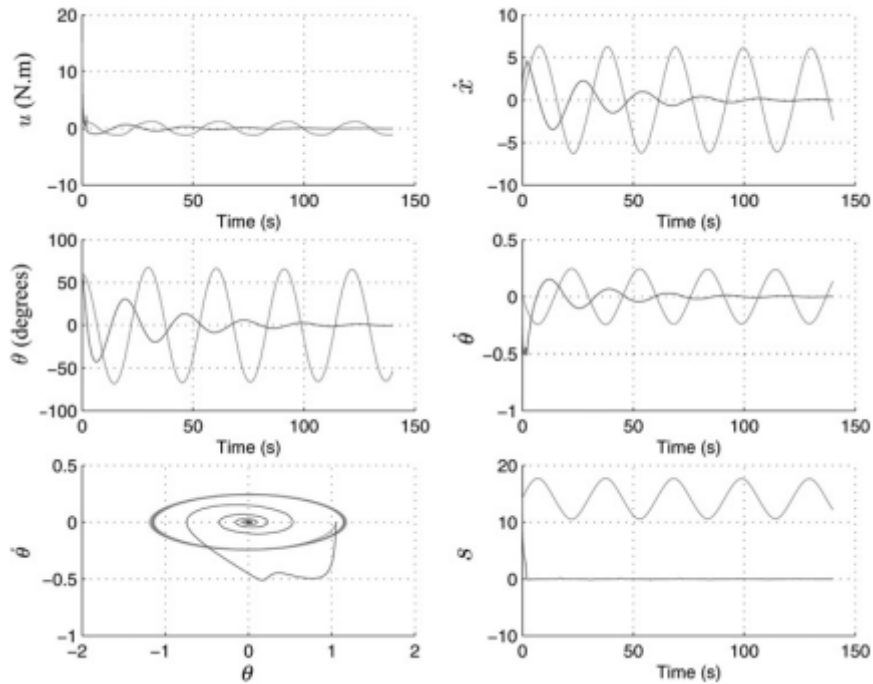
Por simplicidad, asumiremos que solo el parámetro  $J_1$  no está bien estimado. En ese caso, podemos obtener las siguientes expresiones de parámetros

$$\begin{aligned}B &> \frac{\bar{J}_1 + J_2}{J_1 + J_2} \\ \tilde{\Delta} &= k_1 J_2^2 \left( \frac{1}{\bar{J}_1 + J_2} - \frac{1}{J_1 + J_2} \right) \\ \tilde{\alpha} &= k_1 J_2 mgl \sin z \left( \frac{1}{\bar{J}_1 + J_2} - \frac{1}{J_1 + J_2} \right)\end{aligned}\tag{44}$$

- **Simulaciones.**

En esta sección, hemos seguido el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior. Para las simulaciones, se consideran los siguientes valores de los parámetros:  $\bar{J}_1 = 4$ ,  $J_1 = 2$ ,  $\bar{J}_2 = J_2 = 1$ ,  $mgl = 1$ . Tenga en cuenta que el error relativo de  $\bar{J}_1$  es  $(\bar{J}_1 - J_1) / \bar{J}_1 = 50\%$ . La Fig. 5

ilustra cómo el SMC es capaz de lidiar con incertidumbres paramétricas acotadas cuando afectan tanto al término  $a$  como a  $D$ , incluso cuando la incertidumbre es grande.



**Figura 5** IWP: simulaciones con incertidumbres paramétricas, usando la ley de control (42) [equivalente a (43) con  $k_4 = 0$ ], y el controlador aumentado (43) con  $k_4 \geq B$ . 0

### 3.4 Conclusiones

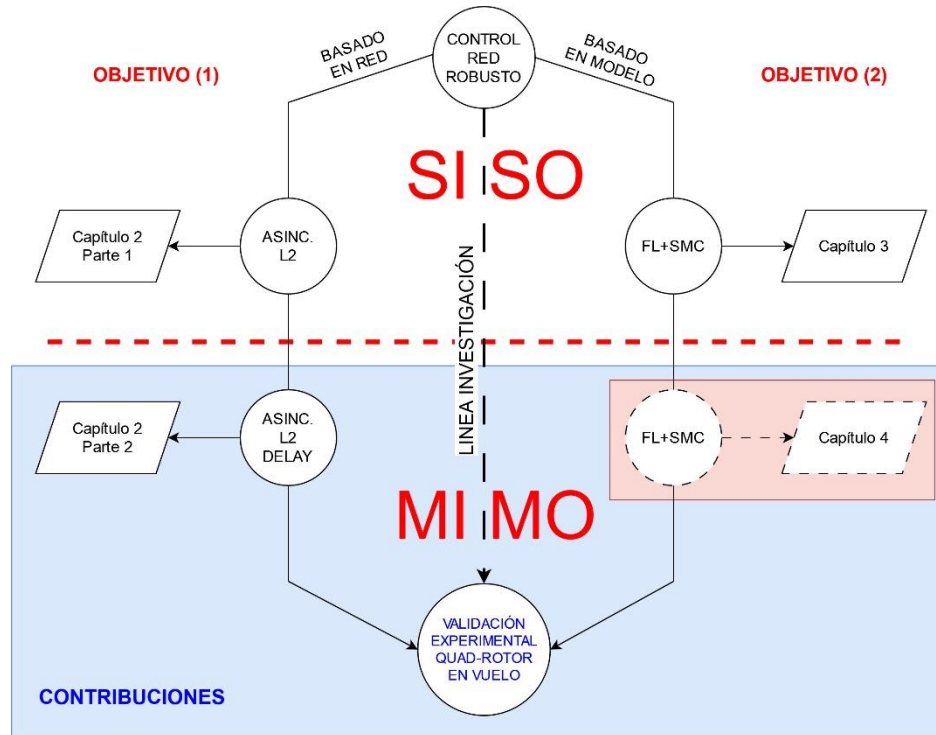
En este capítulo, presentamos una nueva superficie de modos deslizantes no lineal para controlar una clase de sistemas mecánicos subactuados de fase no mínima. La superficie se ha diseñado mediante una salida ficticia, su derivada y un término no lineal adicional de un rediseño de Lyapunov. Esta superficie garantiza un rendimiento robusto no solo en el sentido de incertidumbres paramétricas, sino también en el rechazo de perturbaciones, el equilibrio es LES. Finalmente, las simulaciones han ilustrado el buen rendimiento del controlador, aplicado a dos ejemplos conocidos, como el PoC y el IWP, con incertidumbre en los términos inerciales.

### 3.5 Referencias

- [1] UTKIN V.I.: ‘Sliding modes and their application to variable structure systems’ (MIR Publishers, 1978)
- [2] ZINOBER A.: ‘Variable structure and Lyapunov control’ (Springer, 1994)
- [3] AGRACHEV A.A., MORSE A.S., SONTAG E.D., SUSSMANN H.J., UTKIN V.I.: ‘Nonlinear and optimal control theory’, LNM, 2004, 1932
- [4] LEVANT A.: ‘Construction principles of 2-sliding mode design’, *Automática*, 2007, 43, pp. 576–586
- [5] BARMISH B.R., LEITMANN G.: ‘On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumption’, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1982, 27, pp. 153–158
- [6] QU Z.: ‘Global stabilisation of non-linear systems with a class of unmatched uncertainties’, *Syst. Control Lett.*, 1992, 18, pp. 301–307
- [7] BROCKETT R.W.: ‘Asymptotic stability and feedback stabilisation’, *Diff. Geom. Control Theory*, 1983, pp. 181–191
- [8] FLIESS M., LE’VINE J., MARTIN P., ROUCHON P.: ‘A lie-backlund approach to equivalence and flatness of non-linear systems’, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, 44, (5), pp. 922–937
- [9] FLIESS M., LE’VINE J., MARTIN P., ROUCHON P.: ‘Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples’, *Int. J. Control*, 1995, 61, pp. 1327–1361
- [10] FLIESS M., MARQUEZ R.: ‘Continuous-time linear predictive control and flatness: a module-theoretical setting with examples’, *Int. J. Control*, 2000, 73, pp. 606–623
- [11] SIRA-RAMI REZ H., AGRAWAL S.K.: ‘Differentially flat systems’ (Marcel Dekker, 2004)
- [12] SLOTINE J.E., LI W.: ‘Applied nonlinear control’ (PrenticeHall, 1991)
- [13] BLANCHINI F.: ‘Set invariance in control’, *Automática*, 1999, 35, pp. 1747–1767
- [14] SPONG M.W.: ‘Energy-based control of a class of underactuated mechanical systems’. IFAC World Congress, 1996, pp. 431–435
- [15] ACOSTA J.A. , LOPEZ-MARTINEZ M.: ‘A nonlinear strategy to control unstable underactuated mechanical systems with underactuation . 1. Applications to control augmentations’, *Autom. Control Syst. J.*, 2009, 2, pp. 13–20
- [16] LI Z., KRSTIC M.: ‘Maximizing regions of attraction via backstepping and CLFs with singularities’, *Syst. Control Lett.*, 1997, 30, (4), pp. 195–207
- [17] KHALIL H.K.: ‘Nonlinear systems’ (Prentice-Hall, 2002, 3<sup>rd</sup> edn.)
- [18] TEEL A.R.: ‘A nonlinear small gain theorem for analysis of systems with saturation’, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, 41, (9), pp. 1256–1270
- [19] FANTONI I., LOZANO R.: ‘Non-linear control for underactuated mechanical systems’ (Springer, London, 2002)
- [20] KRSTIC M.: ‘Feedback linearizability and explicit integrator forwarding controllers for classes of feedforward systems’, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2004, 49, (10), pp. 1668–1682
- [21] GORDILLO F., ACOSTA J.A., ARACIL J.: ‘A new swing-up law for the furuta pendulum’, *Int. J. Control*, 2003, 76, (8), pp. 836–844
- [22] SPONG M.W., CORKE P., LOZANO R.: ‘Nonlinear control of the reaction wheel pendulum’, *Automática*, 2001, 37, pp. 1845–1851
- [23] López-Martínez, M. y Acosta, J. A. (2007) «Linealización por realimentación constructiva de sistemas mecánicos con grado de subactuación 1 inestables con fricción», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 4(4), pp. 70–79

## 4 Diseño de controladores no lineales y comparativa para un equipo Quadrotor

En esta sección se detallará dos trabajos que están pendientes de publicación que corresponden al diseño y validación del controlador de linealización por realimentación más *Sliding* sobre una red wifi para controlar un VTOL. En el segundo trabajo se realizará una comparativa de controladores no lineales (PID lineal, Linealización por realimentación, Backstepping,  $H^\infty$ , Lyapunov) diseñados para controlar una plataforma de un Quad-Rotor.



Progreso en la investigación.

### 4.1 Linealización por realimentación robusta por medio de modos deslizantes de una plataforma robótica VTOL<sup>5</sup>. Evaluación experimental del control remoto sobre una red wifi con incertidumbres

#### 4.1.1 Introducción

Este trabajo presenta controladores de linealización por realimentación y modos deslizantes aplicados a una plataforma experimental de un VTOL diseñado en [1], demostrando la robustez de los controladores. En [1], el controlador de modos deslizantes se diseña utilizando un nuevo método constructivo. Estos controladores son robustos y operan con sistemas en condiciones de incertidumbre debido a la baja sensibilidad a la estimación de errores en los parámetros del sistema y a las perturbaciones. Por lo tanto, no se requiere el modelado exacto de los parámetros del sistema. El control de la señal es discontinuo, lo que permite estabilizar sistemas no lineales que no se pueden estabilizar de forma asintótica mediante leyes de control continuas [8].

<sup>5</sup> Vertical Take-off Landing

Esta técnica de control constructivo no lineal se encuentra en [17]. Se basa en una linealización por realimentación parcial y un controlador externo utilizando la teoría de Lyapunov. Este trabajo está diseñado para sistemas mecánicos con grado de subactuación uno y fuerzas de fricción en las coordenadas no actuadas. En este control, es necesario diseñar una salida ficticia que dependa de los momentos conjugados. La fricción en las coordenadas no actuadas se puede controlar teniendo en cuenta que no es posible estabilizar asintóticamente la dinámica cero. Para resolver este problema, se rediseña la salida basándose en un método constructivo.

El diseño del controlador propuesto [1] selecciona una salida que proporciona la propiedad de fase mínima para el sistema, se diseña un controlador externo no lineal basado en la teoría de Lyapunov y, finalmente, se aplica un rediseño del controlador utilizando el Modos deslizantes teniendo en cuenta las incertidumbres del sistema.

#### 4.1.2 Descripción del problema

Para aplicar los controladores, es necesario utilizar la mecánica Lagrangiana para obtener las ecuaciones de movimiento de los sistemas subactuados con grado de subactuación 1, donde 'n' es el grado de libertad y 'm' es el número de entradas. Las coordenadas generalizadas y las velocidades son  $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , y las ecuaciones de Lagrange son las siguientes:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla U(q) + D(\dot{q}) = [0 \ I_m]^\top \tau \quad (1)$$

Donde:

- $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Matriz de inercia simétrica y definida positiva.
- $U \in \mathbb{R}$ : Función de potencial.
- $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Fuerzas de Coriolis y centrífugas.
- $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Fuerzas de fricción.
- $\tau \in \mathbb{R}^m$ : Número de entradas de control independientes, siendo  $m-n = 1$ .

Los sistemas con grado de subactuación uno tiene coordenadas subactuadas 'z' y coordenadas actuadas 'X'. El sistema se expresa como sigue:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}^T \\ m_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} F_1(q, \dot{q}) \\ F_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ I_{n-1} \end{bmatrix} \tau \quad (2)$$

Donde:

$$m_{11} \in \mathbb{R}, m_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}, M_{22} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, F_1(q, \dot{q}) \in \mathbb{R} \text{ y } F_2(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{(n-1)}$$

Si la ecuación de movimiento se linealiza parcialmente como se describe en la referencia [15], el sistema se expresa como sigue (3), donde la nueva señal de control es 'u'.

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_{11}(q)} F_1(q, \dot{q}) \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{m_{12}^T(q)}{m_{11}(q)} \\ I_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (3)$$

Definiendo  $F_1(q, \dot{q})$  como:

$$F_1(q, \dot{q}) \triangleq e_1^\top [C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla U(q) + D(\dot{q})] \quad (4)$$

El bucle interno se expresa como:

$$\tau \equiv \begin{bmatrix} -\frac{m_{12}}{m_{11}} & \vdots & I_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(q, \dot{q}) \\ F_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{22} - \frac{m_{12}m_{12}^\top}{m_{11}} \end{bmatrix} u \quad (5)$$

Una vez que se define el sistema de movimiento, es necesario establecer la teoría general para este tipo de sistemas.

**Suposición 1:** Se asumirá que:

- Los elementos de la matriz de inercia  $m_{11}$  y  $m_{12}$  dependen solo de la coordenada no actuada 'z', y también verifican que  $m_{11}(z) > 0$  y  $m_{12}(z) \neq 0$ .
- $m_{22}$  satisface que es una constante o una función de las coordenadas actuadas, es decir,  $\partial z_{22} / \partial m = 0$ .
- La función de potencial tiene la forma  $U(q) = V(z) + \Phi(x)$ , donde  $V(z) \geq 0$ ,  $\Phi(x) \geq 0$ , y cumple con  $d^2V/dz^2(0) < 0$  y  $dV/dz \neq 0, \forall z \neq 0$ , lo que significa que existe un equilibrio aislado de lazo abierto inestable.

○ **Linealización de realimentación**

Para esta clase de sistemas, es posible diseñar una salida ficticia y un bucle de control externo basado en la linealización entrada-salida. La definición de los estados es  $q = (z, x)^\top$  y  $\dot{q} = (\dot{z}, \dot{x})^\top$ , siendo z la coordenada no actuada. El sistema (3) es linealizable entrada-salida a través de la toma de la salida (6).

$$\dot{\eta}(z, \dot{q}) = [k_1 m_{12}(z) \quad I_{n-1}] \dot{q} + k_2 \int_0^z m_{12}(\mu) d\mu, \quad \dot{\eta}(\cdot) \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Tomando el controlador  $u = u_L$  dado por

$$u_L = \Delta(z)^{-1} \left( k_1 \left( \frac{dm_{12}(z)}{dz} \dot{z}^2 - \frac{m_{12}(z)}{m_{11}(z)} F_1 \right) + k_2 m_{12}(z) \dot{z} - \nu \right) \quad (7)$$

Donde:

$$\Delta(z) = k_1 \frac{m_{12}^2(z)}{m_{11}(z)} - 1 \in \mathbb{R}^+, \text{ with } k_1 > \frac{m_{11}(z)}{m_{12}^2(z)} \in \mathbb{R}^+, k_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \nu = -k_3 (m_{12}(z)\dot{z} + p\dot{\eta}), k_3 \in \mathbb{R}^+, p \in \mathbb{R}^+.$$

Además, el origen  $(z, \dot{z}, \dot{\eta}) = (0, 0, 0)$  del sistema en lazo cerrado es asintóticamente y localmente exponencialmente estable (LES), la prueba del controlador se desarrolla en [1].



o **Control de modos deslizantes**

Se diseña una nueva superficie para el controlador de deslizamiento para eliminar las incertidumbres en los términos cancelados por la linealización de realimentación. Para ello, se utiliza la salida propuesta en la sección anterior (6), expresada como (8).

$$\dot{\eta} = \bar{\alpha}(z, \dot{q}) - \bar{\Delta}(z)u, \quad \text{with} \quad \dot{\eta} \in \mathfrak{R}^{n-1} \quad (8)$$

Se asumirá que las funciones  $\bar{\alpha}(z, \dot{q})$  y  $\bar{\Delta}(z)$  no son conocidas exactamente, pero se estiman a través de  $\alpha(z, \dot{q})$  y  $\Delta(z)$ , siendo el error limitado por  $A(z, \dot{q}) \geq |\bar{\alpha}(z, \dot{q}) - \alpha(z, \dot{q})|$  y  $B(z) > \Delta \bar{\Delta}^{-1} > 0$ .

Utilizando la superficie definida (9) y modificando la ley de control obtenida por la linealización de realimentación (7), se obtiene (10).

$$s = \dot{\eta} + k_3 p \eta + k_3 \int_0^z m_{12}(\mu) d\mu \quad (9)$$

$$u \triangleq u_L + \Delta^{-1} K_4(z, \dot{q}) \overline{\text{sign}}(s), \quad (10)$$

$$K_4(z, \dot{q}) \geq B(z) |(\bar{\alpha} - \alpha) - (\bar{\Delta} - \Delta)u_L| > 0, \quad B(z) > \Delta \bar{\Delta}^{-1} > 0$$

Para probar la estabilidad, es necesario definir una nueva función  $\text{sign}(s)$  para el caso MIMO. Para ello, se utiliza  $\overline{\text{sign}} = s/\|s\|_2 = s_u$ , donde 's<sub>u</sub>' es el vector unitario.

Definiendo la norma como '2' para un vector, como:

$$\|s\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |s|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{s^T s}$$

usando la función de signo  $\text{sign}(s)$ ,  $A \geq |\bar{\alpha} - \alpha|$ ,  $\Delta = |\bar{\Delta} - \Delta|$  y  $B(z) > \Delta \bar{\Delta}^{-1} > 0$ . Seleccionando una función de Lyapunov  $V = s^2/2$ , calculando la derivada con respecto al tiempo, la ecuación es:

$$\dot{V} = s^T \underbrace{(A - u_L \tilde{\Delta})}_T - \underbrace{\bar{\Delta} \Delta^{-1} K_4 \overline{\text{sign}}(s)}_{KM}$$

Donde:

- $T \in \mathbb{R}^{n-1}$
- $K = K_4 I \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$
- $M = \Delta \bar{\Delta}^{-1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$

Luego, utilizando la propiedad de la matriz  $-s^T M s \leq -s^T \underline{\lambda}(M) s$ , donde  $\underline{\lambda}(M)$  es el valor propio más bajo de la matriz 'M':

$$\dot{V} = s^T (T - K M \overline{\text{sign}}(s)) = s^T (T - K M \overline{\text{sign}}(s)) \leq \|s\|_2 (\|T\|_2 - K \underline{\lambda}(M)) < 0$$

Para demostrar que 's' tiende asintóticamente a cero, se debe cumplir:

$$K > \frac{\|A - u_L \tilde{\Delta}\|_2}{\underline{\lambda}(M)}$$

### 4.1.3 Síntesis de controladores VTOL

En esta sección, se aplicará el controlador diseñado en la sección anterior al caso de un VTOL (sistema MIMO). En primer lugar, se diseñará el controlador interno de linealización por realimentación y, finalmente, se aplicará un controlador externo basado en modos deslizantes.

#### ○ *Modelo VTOL*

Se utiliza el modelo (11) para el diseño, donde 'z' es la coordenada no actuada y 'x<sub>1</sub>' y 'x<sub>2</sub>' son las coordenadas actuadas. Como salida, se utiliza (6).

$$\begin{aligned}\ddot{Z} &= \lambda u_2 \\ \ddot{X}_1 &= -u_1 \sin(z) + \varepsilon u_2 \cos(z) \\ \ddot{X}_2 &= u_1 \cos(z) + \varepsilon u_2 \sin(z) - g\end{aligned}\tag{11}$$

Donde:

$$u_1 = \frac{T}{m}, u_2 = \frac{2F}{m} \cos(\alpha), \varepsilon = \tan(\alpha), \lambda = \frac{ml}{J}$$

Es necesario manipular el sistema (11) para obtener nuevas señales de control 'v<sub>1</sub>' y 'v<sub>2</sub>', como en (12).

$$\begin{aligned}\ddot{Z} &= \frac{\lambda g}{\varepsilon} \sin(z) + \frac{\lambda}{\varepsilon} \cos(z) \nu_1 + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sin(z) \nu_2; \\ \ddot{X}_1 &= \nu_1; \\ \ddot{X}_2 &= \nu_2;\end{aligned}\tag{12}$$

#### ○ *Linealización por realimentación*

Para aplicar el control del lazo interno al sistema (12), se elige la salida descrita en (6), obteniendo (13).

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \hat{k}_1 \begin{pmatrix} \cos(z) \\ \sin(z) \end{pmatrix} \dot{z} - \hat{k}_2 \begin{pmatrix} \sin(z) \\ 1 - \cos(z) \end{pmatrix}\tag{13}$$

Donde:

$$\eta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \hat{k}_1 \begin{pmatrix} \sin(z) \\ -\cos(z) \end{pmatrix} - \hat{k}_2 \begin{pmatrix} \int \sin(z) \\ \int (1 - \cos(z)) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la señal de control de la linealización de realimentación es:

$$u_L = \Delta^{-1}(\alpha - \nu)\tag{14}$$

Con:

$$\Delta = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \hat{k}_1 \cos^2(z) - E & \frac{\hat{k}_1}{2} \sin(2z) \\ \frac{\hat{k}_1}{2} \sin(2z) & \hat{k}_1 \sin^2(z) - E \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\hat{k}_1 \frac{g}{E} \sin(z) \cos(z) + \hat{k}_1 \dot{z}^2 \sin(z) - \hat{k}_2 \dot{z} \cos(z) \\ -\hat{k}_1 \frac{g}{E} \sin(z)^2 - \hat{k}_1 \dot{z}^2 \cos(z) - \hat{k}_2 \dot{z} \sin(z) \end{pmatrix}$$

$$\nu = -k_3 \left( \hat{P} \dot{\eta} - \dot{z} \begin{pmatrix} \cos(z) \\ \sin(z) \end{pmatrix} \right)$$

$$\hat{k}_i = K_i \frac{ml}{\tan(\alpha)}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ con } K_1 > E$$

$$E = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{J \tan(\alpha)}{ml}$$

○ **Control de modos deslizantes**

Calculando la derivada con respecto al tiempo de la salida (13) y sustituyendo (12), se obtiene:

$$\ddot{\eta}(z, \dot{q}) = \bar{\alpha}(z, \dot{q}) - \bar{\Delta} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \bar{\alpha}(z, \dot{q}) - \bar{\Delta} u(z)$$

Con:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \hat{k}_1 \cos^2(z) - E & \frac{\hat{k}_1}{2} \sin(2z) \\ \frac{\hat{k}_1}{2} \sin(2z) & \hat{k}_1 \sin^2(z) - E \end{bmatrix}$$

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} -\hat{k}_1 \frac{g}{E} \sin(z) \cos(z) + \hat{k}_1 \dot{z}^2 \sin(z) - \hat{k}_2 \dot{z} \cos(z) \\ -\hat{k}_1 \frac{g}{E} \sin(z)^2 - \hat{k}_1 \dot{z}^2 \cos(z) - \hat{k}_2 \dot{z} \sin(z) \end{pmatrix}$$

$$\hat{k}_i = K_i \frac{ml}{\tan(\alpha)}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ con } K_1 > E$$

$$E = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{J \tan(\alpha)}{ml}$$

El siguiente paso consiste en obtener el control de superficie 's', aplicando la ecuación (9) y obteniendo (15)

$$s = \dot{\eta} - \int_0^z \nu d\tau = \dot{\eta} + \hat{k}_3 \int_0^z \left( \hat{P} \dot{\eta} - \dot{z} \begin{pmatrix} \cos(z) \\ \sin(z) \end{pmatrix} \right) d\tau = \dot{\eta} + K_3 \left( \hat{P} \eta - \begin{pmatrix} \sin(z) \\ 1 - \cos(z) \end{pmatrix} \right) \quad (15)$$

Donde:

$$\hat{P} = \frac{\tan(\alpha)}{ml} \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times (n-1)}, p_i > 0$$

La señal para controlar el sistema bajo incertidumbres es:

$$u = u_L + \Delta^{-1} K_4 \overline{\text{sgn}}(s), \quad \text{con } K_4 \in \mathfrak{R} \quad (16)$$

Donde:

$$K = K_4 I \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, K_4 \in \mathbb{R}$$

$$M = \bar{\Delta} \Delta^{-1} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

$$\overline{\text{sgn}}(s) = \frac{s}{\|s\|_2}$$

Siendo el valor de K:

$$K > \frac{\|A - u_L \tilde{\Delta}\|_2}{\underline{\lambda}(M)} = \frac{\|A - u_L \tilde{\Delta}\|_2}{\underline{\lambda}(M)}$$

Con  $A \geq |\bar{\alpha} - \alpha|$ ,  $\Delta = |\bar{\Delta} - \Delta|$ , y  $\underline{\lambda}(M)$  es el valor propio más bajo de la matriz 'M'. Las funciones  $\alpha$  y  $\Delta$  tienen incertidumbres en los parámetros (m, l, g, J,  $\alpha$ ).

### ○ *Resultados Experimentales*

Se realizaron pruebas experimentales para validar el controlador diseñado. La Figura 3 muestra las coordenadas controladas ( $\theta$ , x, y) y las señales de control calculadas en la estación base, u1 y u2. Inicialmente, el sistema se encuentra estable en el origen ( $\theta = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ). En  $t=[14s, 19s, 28s]$ , se aplican perturbaciones externas a  $\dot{x}$  al sistema, mientras que en  $t=23s$  se aplica una perturbación a  $\dot{y}$ . Como se muestra en la figura, el VTOL se estabiliza después de una respuesta rápida (2 segundos como máximo) cuando el ángulo  $\theta$  ha cambiado  $21^\circ$ .

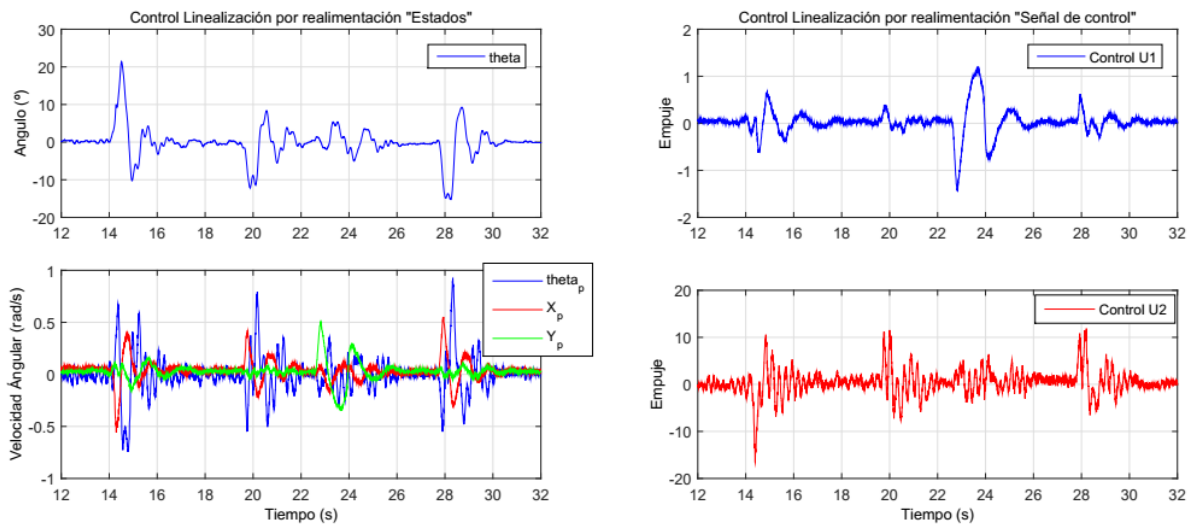


Figure 3: Respuesta ante perturbaciones externas

El segundo experimento figura 4 y 5 compara el controlador diseñado con un controlador LQR. Inicialmente, el VTOL tiene un ángulo constante,  $\theta = -180^\circ$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ , y el sistema de propulsión está apagado. Cuando se enciende el equipo, el controlador de linealización de realimentación estabiliza el VTOL en el punto de equilibrio en 6 segundos,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ , sin saturar la señal de control calculada. En el caso del controlador LQR, el sistema no se estabiliza y las señales de control se saturan.

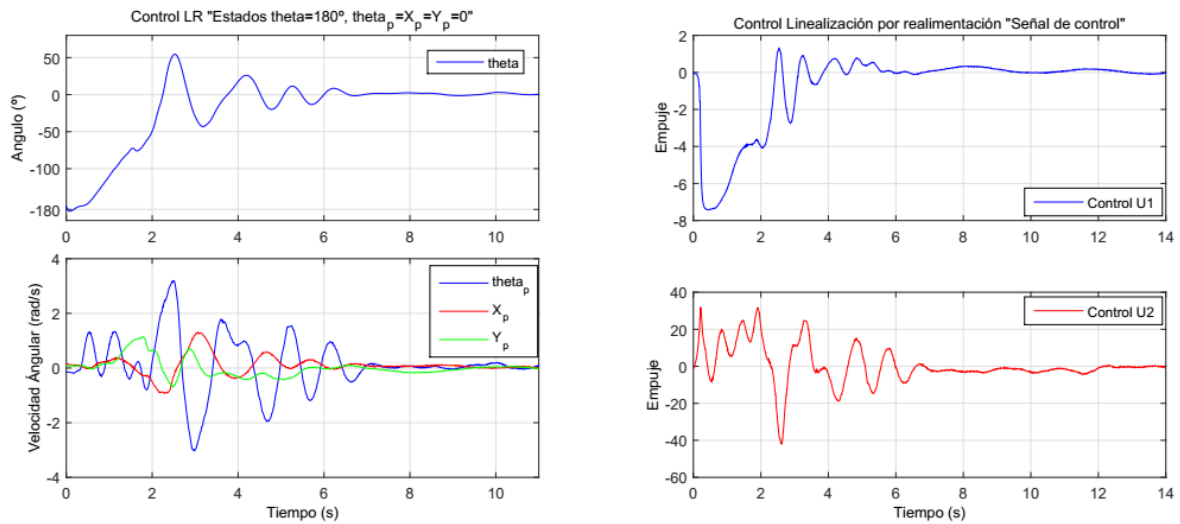


Figure 4: regulación pasar de  $-180^\circ$  a  $0^\circ$  y velocidades a 0 control LR.

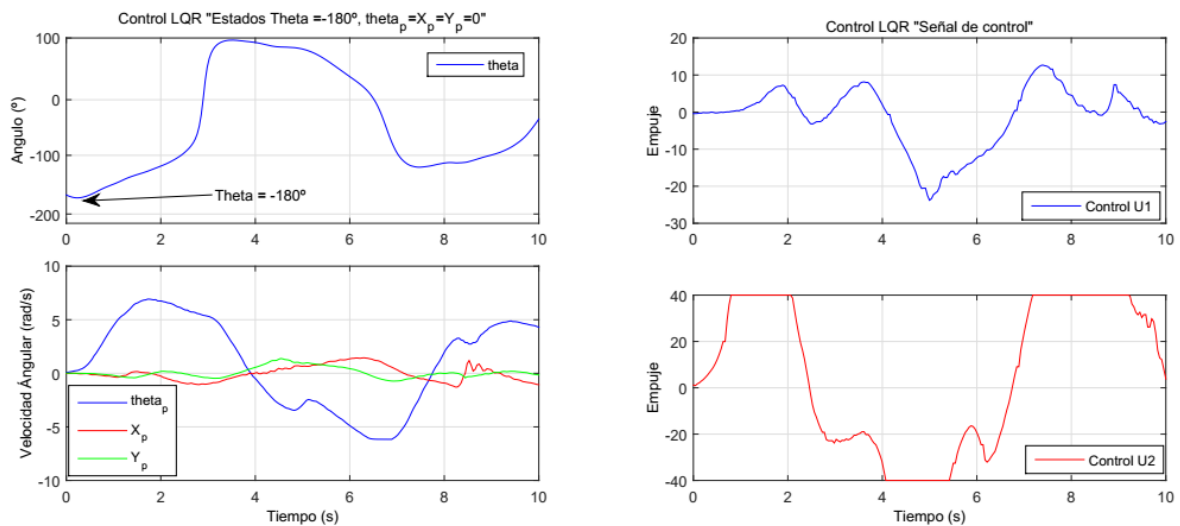


Figure 5: regulación pasar de  $-180^\circ$  a  $0^\circ$  y velocidades a 0 LQR

La Figura 6 muestra el rendimiento del controlador para el seguimiento de trayectoria. En este experimento, se aplica una velocidad de referencia  $x_{ref}=0.3 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ,  $\dot{y} = 0$ . El controlador es capaz de alcanzar la referencia impuesta.

El experimento de la Figura 7 presenta la robustez del controlador al probar el control de linealización de realimentación a través de una red. Para ello, se aumenta el período de latencia de la red UDP hasta alcanzar el valor máximo de  $T_k$  obtenido. Por lo tanto, se puede comparar y evaluar la robustez del sistema. Inicialmente,  $T_k$  es de 5 ms y luego alcanza un valor de 30 ms, 50 ms y 60 ms. Para  $T_k=60ms$ , como se muestra en la Figura 7a, el sistema se vuelve inestable. Cada vez que se cambia  $T_k$ , se aplica una perturbación externa,  $\dot{x} = 1.5 \text{ rad/s}$ , para verificar que el sistema se estabiliza nuevamente y es robusto para ese valor de  $T_k$ . En este caso, el valor máximo para  $T_k$  es de 50 ms.

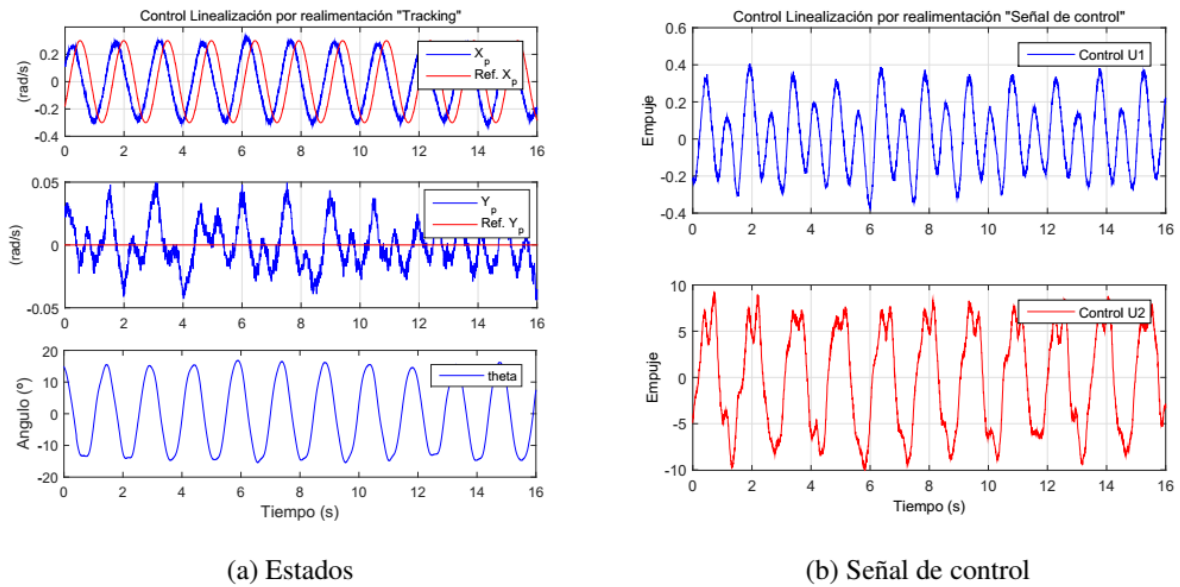


Figura 6. seguimiento de trayectoria en el eje X e Y

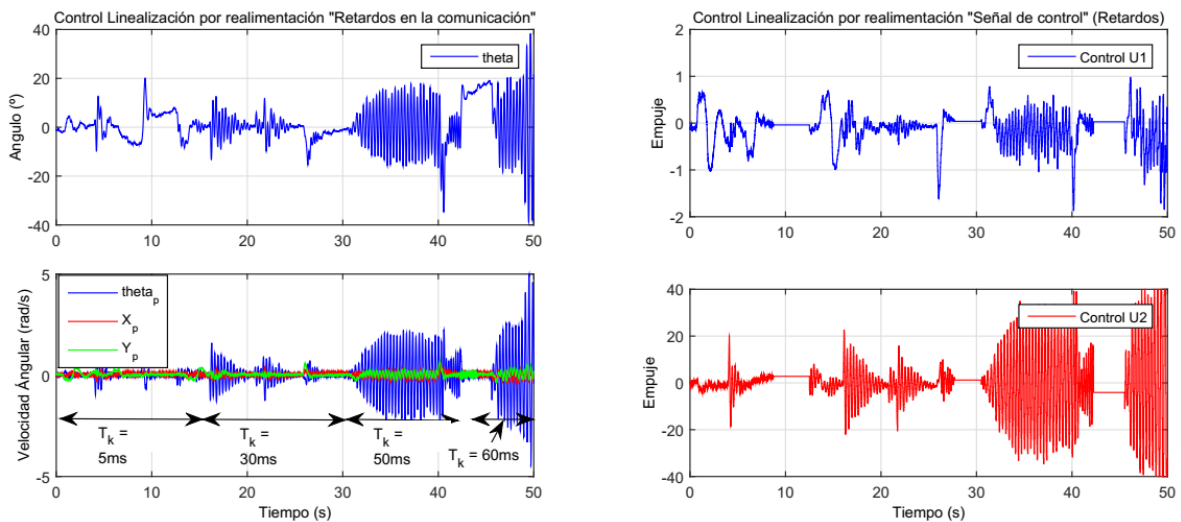


Figure 7: comprobar robustez a través de red variando  $T_k$  LR

Se implementa un controlador de modos deslizantes para proporcionar robustez a los parámetros bajo incertidumbre. Para validar el rendimiento, se realiza un experimento donde se aplica incertidumbre con un valor del 37% a la inercia, 47% a la masa y 15% al parámetro  $\alpha$ . Inicialmente, el sistema se encuentra estable en el punto de equilibrio ( $\theta=0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ). Se aplican perturbaciones externas a  $\dot{x}$  en  $t=[37s,42s,62s]$  y una perturbación a  $\dot{y}$  en  $t=54s$ . En todos los casos, el VTOL se estabiliza y las señales de control no se saturan.

Estos resultados experimentales demuestran la efectividad y robustez del controlador diseñado para el VTOL en una variedad de situaciones, incluyendo perturbaciones externas, cambios en la latencia de la red y parámetros inciertos.

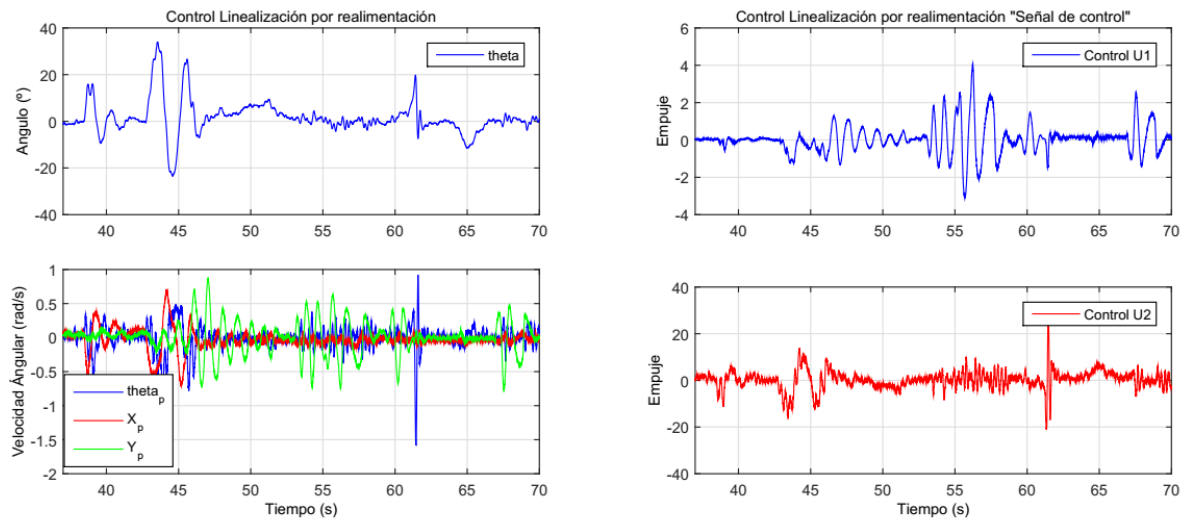


Figure 8: incertidumbre control LR+SM

#### 4.1.4 Conclusiones

En esta sección, se ha aplicado el controlador diseñado previamente en [1] a una plataforma VTOL de grado de subactuación uno. El controlador consta de un lazo de control interno basado en la linealización por realimentación y un control externo basado en modos deslizantes.

Se han llevado a cabo cinco experimentos diferentes para verificar el funcionamiento del controlador en el VTOL:

1. En el primer experimento, se demostró que el controlador rechaza las perturbaciones externas y estabiliza el VTOL en un tiempo máximo de 2 segundos.
2. En el segundo experimento, se comprobó que el controlador es capaz de estabilizar el VTOL comenzando desde una inclinación de  $-180^\circ$  sin saturar las señales de control. Se comparó con un controlador LQR, que no pudo estabilizar el sistema.
3. El tercer experimento demostró que el controlador puede seguir trayectorias, en este caso, se aplicó una trayectoria sinusoidal.
4. En el cuarto experimento, se probó la robustez del sistema al aumentar el tiempo de muestreo  $T_k$  de manera iterativa y aplicar perturbaciones. El controlador pudo estabilizar el sistema hasta un valor máximo de  $T_k$ .
5. En el quinto experimento, se verificó que el controlador es capaz de controlar el VTOL de manera suave y sin oscilaciones incluso cuando existen incertidumbres en los parámetros del sistema, que llegaron alrededor del 40% del valor real.

En resumen, los resultados experimentales respaldan la efectividad y robustez del controlador diseñado para el VTOL en diversas situaciones, incluyendo perturbaciones externas, cambios en la latencia de la red y parámetros inciertos. El controlador demuestra una capacidad notable para estabilizar y controlar el sistema VTOL en condiciones desafiantes.

#### 4.1.5 Referencias

- [1] M. Lopez-Martinez, J.A. Acosta and J.M. Cano.: 'Nonlinear Sliding Mode Surfaces for a Class of Underactuated Mechanical Systems', IET Control Theory Applications, 2010.
- [2] Utkin, V.I.: 'Sliding Modes and Their Application to Variable Structure Systems', MIR Publishers, 1978.
- [3] Zinober, A.: 'Variable Structure and Lyapunov Control', Springer, 1994.
- [4] Agrachev, A.A., Morse, A.S., Sontag, E.D., Sussmann, H.J., and Utkin, V.I.: 'Nonlinear and Optimal Control Theory', LNM 1932, Springer, 2004.
- [5] Levant, A.: 'Construction principles of 2-sliding mode design', Automática, 2007, 43, pp. 576-586.
- [6] Barmish, B.R., and Leitmann, G.: 'On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumption', IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27, pp.153-158.
- [7] Qu, Z.: 'Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties', Systems and Control Letters, 1992, 18, pp.301-307.
- [8] Brockett, R.W.: 'Asymptotic stability and feedback stabilization', Differential Geometric Control Theory, 1983, pp.181-191.
- [9] Fliess, M., L'evine, J., Martin, P., and Rouchon, P.: 'A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems', IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44, (5), pp.922-937.
- [10] Fliess, M., L'evine, J., Martin, P., and Rouchon, P.: 'Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples.', International Journal of Control, 1995, 61, pp.1327-1361.
- [11] Fliess, M., and Marquez, R.: 'Continuous-time linear predictive control and flatness: a module-theoretical setting with examples.', International Journal of Control, 2000, 73, pp.606-623.
- [12] Sira-Ramírez, H., and Agrawal, S.K.: 'Differentially Flat Systems', Marcel Dekker, 2004.
- [13] Slotine, J.E., and Li, W.: 'Applied Nonlinear Control', Prentice Hall, 1991.
- [14] Blanchini, F.: 'Set invariance in Control', Automática, 1999, 35, pp.1747-1767.
- [15] Spong, M.W.: 'Energy based control of a class of underactuated mechanical systems', IFAC World Congress, 1996, pp.431-435.
- [16] Li, Z., and Krstic, M.: 'Maximizing regions of attraction via backstepping and CLFs with singularities', Systems and Control Letters, 1997, 30, (4), pp.195-207.
- [17] Acosta, J.A., and Lopez-Martinez, M.: 'A Nonlinear Strategy to Control 1 Unstable Underactuated Mechanical Systems with Underactuation  $> 1$ . Applications to Control Augmentations.', Automation and Control Systems Journal (open), 2009, 2, pp. 13-20.



## 4.2 Comparativa de controladores no lineales para el control a través de una red Wifi de una Plataforma experimental de un Quad-Rotor.

### 4.2.1 Introducción

En esta sección se pretende realizar el control en posición del modelo completo de un Quad-Rotor de 6GDL, consiguiendo error nulo en el seguimiento y robustez del controlador. Para realizar el control se propone dividir el sistema en dos subsistemas, posiciones y ángulos, siendo necesario controlar estos dos subsistemas para posicionar al helicóptero en unas coordenadas determinadas.

La plataforma permite las medidas de todas las variables, tanto aceleraciones como velocidades angulares en los tres ejes X, Y y Z. Para ello es necesario utilizar un filtro que fusione algunas medidas de los sensores para obtener los ángulos y las posiciones del equipo. Con este fin se ha utilizado el filtro DCM (*Direction Cosine Matrix*) [1, 2]. Así pues, se utiliza un acelerómetro y magnetómetro que, junto con la matriz de rotaciones, conseguimos las medidas de ángulos y velocidades. Para el diseño de los controladores no se tendrán en cuenta el filtro "DCM".

Los controladores que se proponen en este capítulo serán implementados en un servidor fig 2. Este servidor tendrá un enlace Wireless mediante el protocolo UDP que conectará con el Quad-Rotor. De esta forma tendremos un controlador centralizado, siendo el UAV el encargado de enviar los parámetros de los sensores al servidor y el servidor enviara las señales de control obtenidas de los controladores.

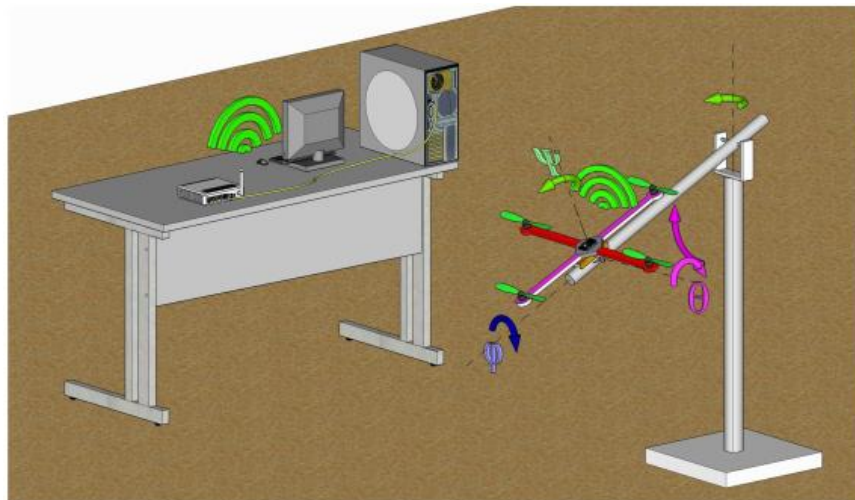


Figure 2: Servidor

Por último, se estudiará la robustez de los diferentes controladores no lineales diseñados, para ello se propone un experimento nuevo para comprobar la estabilidad y robustez. El indicador que tomaremos para medir la robustez del controlador será el tiempo máximo de muestreo que soporta el controlador sin volverse inestable cuando se le aplican perturbaciones. En los experimentos se irá aumentando el tiempo de muestreo de las señales enviadas y recibidas del servidor al Quad-Rotor y viceversa, hasta que se vuelva inestable. Con los resultados obtenidos se construirá una tabla donde se ordenarán de mejor a peor los diferentes controladores según el tiempo máximo de muestreo que soporte.

Los controladores estudiados serán: control lineal PID, controladores no lineales basados en funciones de Lyapunov, linealización por realimentación,  $H_\infty$  no lineal y

*backstepping*. En total se proponen cinco estrategias de control y en todas ellas se controlarán las posiciones, realizando seguimiento de trayectorias.

El primer controlador que se propone es un control PID lineal, que nos servirá de base para poder compararlos con el resto de estrategias de control. Los controladores lineales han sido utilizados para el control de los ángulos de rotación [3] y las traslaciones y rotaciones en [4], aunque en este último se diseñe un LQR lineal.

Los siguientes controladores que se estudiarán serán estrategias de control no lineales. La primera de ellas será un control de linealización por realimentación entrada-estado, se estudiarán dos casos utilizando un control LQR con efecto integral y en el segundo caso se utilizará *sliding* para robustificar el control ante incertidumbres paramétricas. En ambos casos los controladores serán diseñados para realizar un seguimiento de trayectorias y probarlos en el sistema real. En [5] se aplica un controlador de linealización por realimentación a un modelo simulado, donde se realiza seguimiento de trayectorias en posiciones. En el caso de [6] se utiliza la técnica de *sliding* para controlar solo los ángulos de un modelo real de un Quad-Rotor.

El segundo control no lineal será un control basado en ganancia L2, en [7] se presenta el diseño de un control  $H^\infty$  no lineal para el control de las rotaciones del Quad-Rotor ante incertidumbres paramétricas, comprobando el controlador en simulaciones. En nuestro caso se diseñará un controlador  $H^\infty$  para las rotaciones y otro para las traslaciones comprobando el funcionamiento de forma experimental.

En tercer lugar, se diseñará un controlador basado en funciones de Lyapunov, se diseñará un controlador *backstepping* para los ángulos y otro para las posiciones. De esta forma se pretende implementar el controlador en la plataforma y comprobar el funcionamiento en seguimiento de trayectorias. En [8] se presenta el diseño de un Quad-Rotor, con ángulos y altura controlados mediante funciones de Lyapunov en una plataforma experimental. En el trabajo [9, 10], para el control de la aeronave se hace uso de técnicas de *backstepping* y modos deslizantes para controlar de forma experimental los ángulos. En [4] se controla el sistema completo utilizando un controlador basado en Lyapunov.

Todas estas técnicas serán probadas en la plataforma descrita en el apartado 7.2.3. Por último el mejor controlador será implementado en un Quad-Rotor para realizar un vuelo sin plataforma.

## 4.2.2 Modelo del Quad-Rotor

En esta sección se mostrará una técnica que permite dividir el modelo del Quad-Rotor en dos subsistemas y poder controlarlo en posición. El problema que presenta el modelo de 6GDL es que es un sistema subactuado, ya que solo disponemos de cuatro señales de control y se dispone de 6GDL. Al dividir el modelo en dos subsistemas, rotaciones (1) y traslaciones (2), se observa que (2) es actuado, ya que presenta una entrada para cada ángulo  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ . (1) son subactuados, porque presenta una señal de control para los ejes X, Y, Z.

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\psi)}{m} U_1 \\ \ddot{y} = \frac{\cos(\varphi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cos(\psi)}{m} U_1 \\ \ddot{z} = -g + \frac{\cos(\varphi) \cos(\theta)}{m} U_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \dot{\theta}\dot{\psi} \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta}\Omega + \frac{1}{I_x} U_2 \\ \ddot{\theta} = \dot{\varphi}\dot{\psi} \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r}{I_y} \dot{\varphi}\Omega + \frac{1}{I_y} U_3 \\ \ddot{\Psi} = \dot{\varphi}\dot{\theta} \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} U_4 \end{cases} \quad (2)$$

El sistema de traslaciones no está desacoplado del de rotaciones y además no sería posible ir a una posición en los ejes X, Y, Z con los ángulos a cero. El sistema no cumple "Brockett" [11]. Por ello, el sistema no se puede controlar en dos subsistemas independientes con controladores continuos, por un lado, las traslaciones y por otro las rotaciones.

El control de rotaciones es necesario que siga dichas referencias impuestas y de esta forma conseguir que el sistema completo del Quad-Rotor se coloque en la posición deseada, fig 5.

Utilizando la técnica descrita en [12], es posible realizar un diseño de controladores continuos en cascada, de tal forma que utilizando el sistema de traslaciones podemos generar una señal de referencia para el subsistema de ángulos, utilizando éstas como entradas del control de rotaciones.

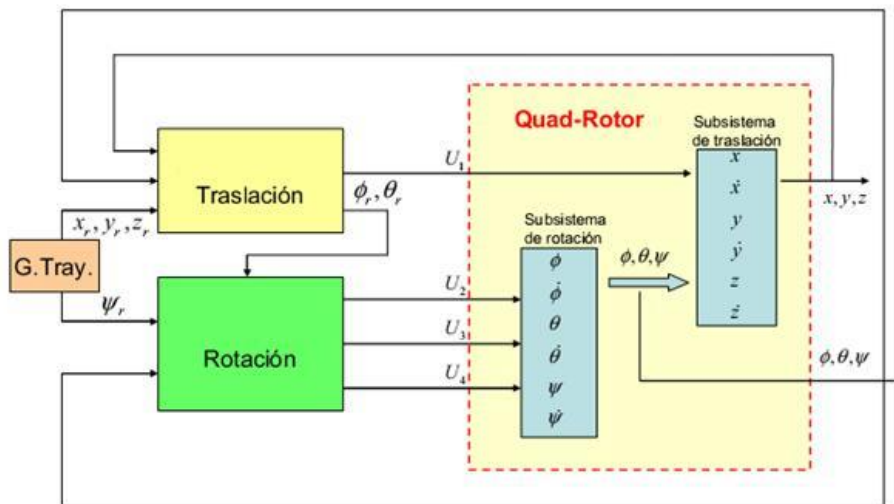


Figure 5: Sistema con transformación de rotación y traslación.

Se realizará una ampliación de las señales de control del sistema en posición, creando tres señales de control virtuales ( $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ) una para cada eje (x, y, z), pasando de un sistema subactuado a un sistema actuado.

$$GU_1 = \Delta \quad (4)$$

La intención es buscar una combinación de ángulos  $\phi, \theta, \psi$  que al sustituir en la matriz G hagan que cumpla las restricciones [11]. Para poder conseguir esto, es necesario despejar los ángulos en función de las nuevas señales de control virtuales ( $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ).

### 4.2.3 Transformación del modelo con las señales virtuales $\Delta$ .

Partiendo del modelo no lineal de Quad-Rotor (1, 2) se convierten a ecuaciones en errores  $e_1(X)$ ,  $e_2(X)$ , en el caso de las posiciones será  $e_{1xyz} = (e_x, e_y, e_z)^T$ ,  $e_{2xyz} = (\dot{e}_x, \dot{e}_y, \dot{e}_z)^T$  y para los ángulos es  $e_{1\phi\theta\psi} = (e_\phi, e_\theta, e_\psi)^T$ ,  $e_{2\phi\theta\psi} = (\dot{e}_\phi, \dot{e}_\theta, \dot{e}_\psi)^T$ .

Modelo no lineal. Pasando el sistema a errores queda

– Posiciones.

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = A(x, x^r) + \frac{1}{m}G(\varphi, \theta, \psi)U_1 \end{cases} \quad (16)$$

– Ángulos.

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \bar{H}(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \Omega, x, \dot{x}) + C^{-1}U \end{cases} \quad (17)$$

Modelo no lineal con parámetros. Este modelo se rediseña para recoger los parámetros del sistema en dos vectores  $\rho$  y  $\sigma$ , colocando el sistema en errores queda

– Posiciones. En este modelo el vector  $\rho \in \mathfrak{R}^{4 \times 1}$  contiene parámetros del modelo, pero el único que tiene significado físico es la gravedad. Además, la señal de control será el vector delta  $\Delta \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$ ,

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = A(x, x^r)\rho + \frac{1}{m}\Delta \end{cases} \quad (18)$$

– Ángulos. En el subsistema de ángulos  $H^- \in \mathfrak{R}^{3 \times 8}$ ,  $\sigma \in \mathfrak{R}^{8 \times 1}$  son parámetros del sistema que corresponden a relaciones entre las inercias del sistema. La matriz  $C \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  contiene las inercias del Quad-Rotor  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  y  $U \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$  serán las señales de control.

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \bar{H}(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \Omega, x, \dot{x}) + C^{-1}U \end{cases} \quad (19)$$

### 4.2.4 Diseño del controlador Linealización por realimentación + modos deslizantes

En esta sección estudiaremos el controlador no lineal de linealización por realimentación al que se le añadirá Sliding, con el que se conseguirá dar robustez el controlador LR.

Cuando no se conoce con precisión el modelo de nuestro sistema, el controlador que se diseña tiene que ser robusto para que sea capaz de compensar esa incertidumbre. Usualmente se diseña un controlador para compensar la dinámica que es conocida y se añade un término que será el encargado de controlar las incertidumbres.

En nuestro caso usaremos modos deslizantes (*sliding modes*) descrito en [13].

- Control por modos deslizantes para las posiciones.

Se usa el subsistema (18) y se considera que el modelo presenta incertidumbres en los parámetros de la masa y la gravedad  $m$ ,  $g$ . Para poder estimar estos parámetros se redefinirá el vector  $\rho$  para incluir el parámetro de la masa  $m$  que cumple que  $m > 0$ , obteniendo el nuevo vector  $\Theta = m\rho$ . Además, definimos el vector de errores

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{1}{m}(A\Theta + \Delta) \end{cases} \quad (28)$$

Ahora se diseña una señal de control equivalente que coja toda la dinámica no lineal  $T_{xyz} = (A\Theta + \Delta)$ ,  $\in \mathcal{R}^{3 \times 1}$ . La señal de control  $\Delta$  se obtiene de la relación anterior  $\Delta = (T_{xyz} - A\Theta)$ . Con este cambio el sistema se reescribe en función de  $T$ , obteniéndose un sistema lineal donde se pretende estabilizar la nueva dinámica usando la nueva entrada  $T_{xyz}$ .

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{1}{m}T_{xyz} \end{cases} \quad (29)$$

Dada la nueva dinámica lineal y controlable, se aplicará el siguiente control lineal  $T_{xyz} = -K_1e_1 - K_2e_2$ . Al deshacer la transformación para obtener la ley de control  $\Delta$  se obtiene:

$$\Delta_{FL} = T_{xyz} - A\Theta \quad (30)$$

Sliding Ahora se diseñará la parte del control Sliding. Al aplicar el controlador Sliding se le añade robustez al controlador. Como suponemos que no conocemos con exactitud los parámetros del sistema, se define la señal de control de FL con las estimaciones de los parámetros, obteniendo:

$$\hat{\Delta}_{FL} = T_{xyz} - A \cdot \hat{\Theta} \quad (31)$$

El control por modos deslizantes consiste en añadir el término " $K \cdot \text{sgn}(S)$ " a la nueva señal de control. Gracias a este término, en la función de Lyapunov será posible dominar a los términos de los errores de los parámetros que no se conocen con exactitud, consiguiendo que la derivada de Lyapunov sea definida negativa.

Añadiendo el termino de *sliding* al control 31 queda:

$$\Delta_{FL} = \hat{\Delta}_{FL} - K \text{sgn}(s) = -K_1e_1 - K_2e_2 - A\hat{\Theta} - K \text{sgn}(s) \quad (32)$$

Los parámetros cuyos valores exactos no son conocidos están en ' $\Theta$ '. Al incluir las estimaciones, es necesario definir los errores de los parámetros para asegurar que converjan a cero  $\Theta = \tilde{\Theta} - \hat{\Theta}$ .

La función de Lyapunov que se propone es:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} e^T \begin{bmatrix} K_1 + \beta K_2 & m\beta I_3 \\ m\beta I_3 & mI_3 \end{bmatrix} e; \\
 \dot{V} &= e^T \begin{bmatrix} K_1 + \beta K_2 & m\beta I_3 \\ m\beta I_3 & mI_3 \end{bmatrix} \dot{e};
 \end{aligned} \tag{33}$$

Las condiciones para que  $V > 0$  es:

$$K_1 = K_1^T > 0, K_2 = K_2^T > 0, \Gamma > 0;$$

$$\lambda_{\min}(K_1 + \Gamma K_2) > 0$$

$$\lambda_{\min}(K_1 + \Gamma K_2) > \Gamma 2$$

Si se sustituye  $\dot{e}_1, \dot{e}_2$  en la función de Lyapunov y se opera queda:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= [e_1^T (K_1 + \beta K_2) + e_2^T m\beta I_3] e_2 + [e_1^T m\beta I_3 + e_2^T mI_3] \frac{1}{m} (A\Theta + \Delta_{FL}) = \\
 &= e_1^T (K_1 + \beta K_2) e_2 + e_2^T m\beta e_2 + (e_1^T \beta + e_2^T) (A\Theta + \Delta_{FL}) \leq 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

Si incluimos la ley de control (32) en (34) podremos obtener la ley de control robusta.

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= e_1^T (K_1 + \beta K_2) e_2 + e_2^T m\beta I_3 e_2 + (e_1^T \beta + e_2^T) (A\Theta - A\hat{\Theta} - K_1 e_1 - K_2 e_2 - K \operatorname{sgn}(s)) \leq \\
 &\leq e_1^T (K_1 + \beta K_2) e_2 + e_2^T m\beta I_3 e_2 + \underbrace{(e_1 \beta + e_2)}_s (A\tilde{\Theta} - K_1 e_1 - K_2 e_2 - K \operatorname{sgn}(s)) \leq \\
 &\leq -e_1^T \beta K_1 e_1 - e_2^T (K_2 - m\beta I_3) e_2 + S^T \cdot A\tilde{\Theta} - S^T \cdot K \operatorname{sgn}(S) \leq 0
 \end{aligned}$$

El objetivo es encontrar el valor de la variable 'K' para conseguir que el termino de Sliding domine al error de los parámetros  $\tilde{\Theta}$  (sea mayor que el término del error de los parámetros  $\tilde{\Theta}$ ). Para ello se puede decir que  $S^T \cdot K \operatorname{sgn}(S) \leq K \cdot \|S\|$ . Con esta sustitución en (35) se obtiene el valor de 'K'.

$$\dot{V} \leq -e_1^T \beta K_1 e_1 - e_2^T (K_2 - m\beta I_3) e_2 + S^T \cdot A \cdot \tilde{\Theta} - K \cdot \|S\| \leq 0$$

Donde

$$K > A\tilde{\Theta} + \eta$$

y  $\eta$  es una matriz diagonal con autovalores positivos.

$$\dot{V} \leq -e_1^T \beta K_1 e_1 - e_2^T (K_2 - m\beta I_3) e_2 - \sum_i^3 \eta_i \|S_i\| \leq 0$$

Para que  $V \leq 0$ , se diseña la matriz  $K_2$  para que  $\lambda_{\min}(K_2) > m\beta$ .

Los valores utilizados en la implementación de este controlador son los siguientes, donde se ha supuesto una estimación de la masa que se ha incrementado en un 50%. En el caso de la gravedad se aplicará un aumento del 10% en el valor estimado.

$$K_1^{xyz} = \text{diag} (1.2, 2.0, 12.0, ) ;$$

$$K_2^{xyz} = \text{diag} (1.6, 1.0, 12.2, ) ;$$

$$K^{xyz} = \text{diag} (2.0, 0.05, 0.05, ) ;$$

$$\beta^{xyz} = \text{diag} (0.1, 0.1, 0.1, ) ;$$

$$\tilde{\Theta}^{xyz} = (0.3, 0.3, 3.3, 0.3, )^T ;$$

- Control por modos deslizantes para los ángulos.

En el caso de los ángulos (19), las incertidumbres se encuentran en los parámetros del Quad-Rotor, es decir, en las inercias  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ . Estos parámetros se encuentran dentro del vector  $\sigma$ . Es necesario redefinir la matriz  $C$  como  $C_d \in \mathfrak{R}^{8 \times 8}$  para ajustar las dimensiones, definiendo el nuevo vector  $\xi = C\sigma \in \mathfrak{R}^{8 \times 1}$ .

$$C_d = \text{Block\_Diag} \left( \text{diag} [C_1, C_1, C_1] \quad \text{diag} [C_2, C_2, C_2] \quad \text{diag} [C_3, C_3] \right) \quad (42)$$

$$xi = C_d \sigma = \begin{bmatrix} C_1 b_1 & C_1 b_2 & C_1 b_3 & C_2 b_4 & C_2 b_5 & C_2 b_6 & C_3 b_7 & C_3 b_8 \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

Con esta nueva definición se reescribe las ecuaciones (19). Además,  $C > 0$  y definimos el vector de errores

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}^T, \dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = C^{-1} (\bar{H}\xi + U) \end{cases} \quad (44)$$

El siguiente paso es el diseño de una señal de control equivalente que coja toda la dinámica no lineal  $\mu = (\bar{H}\xi + U)$ ,  $\in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$ . La señal de control  $U$  se obtiene de la relación anterior  $U = (\mu - \bar{H}\xi)$ . Con este cambio el sistema se reescribe en función de  $\mu$ , obteniéndose un sistema lineal donde se pretende estabilizar la nueva dinámica usando la nueva entrada  $\mu$ .

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = C^{-1} \mu \end{cases} \quad (45)$$

Dada la nueva dinámica lineal y controlable, se aplicará el siguiente control lineal  $\mu = -K_1 e_1 - K_2 e_2$ . Al deshacer la transformación para obtener la ley de control  $\mu$  se obtiene:

$$U_{FL} = \mu - \bar{H}\xi \quad (46)$$

Sliding Ahora se diseñará la parte del control Sliding para añadir robustez al controlador. Como suponemos que no conocemos con exactitud las inercias del sistema, se define la señal de control de FL con las estimaciones de los parámetros, obteniendo (47).

$$\hat{U}_{FL} = \mu - \bar{H}\hat{\xi} \quad (47)$$

El control Sliding consiste en añadir el término “ $K \cdot \text{sgn}(S)$ ” a la nueva señal de control. Gracias a este término, en la función de Lyapunov será posible dominar a los términos de los errores de los parámetros que no se conocen con exactitud, consiguiendo que la derivada de Lyapunov sea definida negativa.

Añadiendo el termino de *sliding* al control Sliding (47) queda.

$$U_{FL} = \mu - \bar{H}\hat{\xi} - K \text{sgn}(s) = -K_1 e_1 - K_2 e_2 - \bar{H}\hat{\xi} - K \text{sgn}(s) \quad (48)$$

Los parámetros cuyos valores exactos no son conocidos son ‘ $\xi$ ’. Al incluir las estimaciones es necesario definir los errores de los parámetros para asegurar que converjan a cero  $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$ .

La función de Lyapunov que se propone es:

$$V = \frac{1}{2} e^T \begin{bmatrix} K_1 + \gamma K_2 & C\gamma \\ C\gamma & C \end{bmatrix} e; \quad (49)$$

$$\dot{V} = e^T \begin{bmatrix} K_1 + \gamma K_2 & C\gamma \\ C\gamma & C \end{bmatrix} \dot{e};$$

Las condiciones para que  $V > 0$  es:

$$K_1 = K_1 T > 0, K_2 = K_2 T > 0, \Gamma > 0;$$

$$\lambda_{\min}(K_1 + \beta K_2) > 0$$

$$\lambda_{\min}(K_1 + \beta K_2) > \beta 2$$

Si se sustituye  $\dot{e}_1, \dot{e}_2$  en la función de Lyapunov y se opera queda:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [e_1^T (K_1 + \gamma K_2) + e_2^T C\gamma] e_2 + [e_1^T C\gamma + e_2^T C] C^{-1} (\bar{H}\xi + U) = \\ &= e_1^T (K_1 + \gamma K_2) e_2 + e_2^T C\gamma e_2 + (e_1^T \gamma + e_2^T) (\bar{H}\xi + U_{FL}) \leq 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Si incluimos la ley de control (48) en (50) podremos obtener la ley de control robusta.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1^T (K_1 + \gamma K_2) e_2 + e_2^T C\gamma e_2 + (e_1^T \gamma + e_2^T) (\bar{H}\xi - K_1 e_1 - K_2 e_2 - \bar{H} \cdot \hat{\xi} - K \text{sgn}(s)) \leq \\ &\leq e_1^T (K_1 + \gamma K_2) e_2 + e_2^T C\gamma e_2 + \underbrace{(e_1^T \gamma + e_2^T)}_s (\bar{H}\tilde{\xi} - K_1 e_1 - K_2 e_2 - K \text{sgn}(s)) \leq \end{aligned} \quad (51)$$

$$\dot{V} \leq -e_1^T \gamma K_1 e_1 - e_2^T (K_2 - C\gamma) e_2 + S^T \bar{H}\tilde{\xi} - S^T K \text{sgn}(S) \leq 0$$

Para encontrar el valor de la variable ‘ $K$ ’ se dice que

$$S^T \cdot K \text{sgn}(S) \leq K \cdot \|S\|$$

. Con esta sustitución en (51) se obtiene el valor de ‘ $K$ ’.

$$\dot{V} \leq -e_1^T \gamma K_1 e_1 - e_2^T (K_2 - C\gamma) e_2 + S^T \bar{H}\tilde{\xi} - K \|S\| \leq 0$$

Donde

$$K > \left| \bar{H}\tilde{\xi} \right| + \eta$$



y  $\eta$  es una matriz diagonal con autovalores positivos.

$$\dot{V} \leq -e_1^T \gamma K_1 e_1 - e_2^T (K_2 - C\gamma) e_2 - \sum_i^3 \eta_i \|S_i\| \leq 0$$

Para que  $\dot{V} \leq 0$ , se diseña la matriz  $K_2$  para que  $\lambda_{\min}(K_2) > C\gamma$ .

Los valores utilizados en la implementación de este controlador son los siguientes, donde se ha supuesto una estimación de las inercias donde su valor se ha incrementado en un 50%.

$$K_1 = \text{diag} (1.8, 2.0, 0.7, ) ;$$

$$K_2 = \text{diag} (0.6, 0.9, 0.4, ) ;$$

$$K = \text{diag} (0.2, 0.2, 0.2, ) ;$$

$$\beta = \text{diag} (2.3, 4.5, 1.1, ) ;$$

$$\hat{\xi} = (2.50, 12, 37.00, 35.00, 0.12, 36.00, 2.00, 34.00, )^T * 10^{-3};$$

#### 4.2.5 Resultados experimentales

Los siguientes apartados recogen los experimentos realizados con la plataforma del Quad-Rotor implementando los controladores diseñados anteriormente. Están ordenados de menor a mayor robustez según el criterio de medida que se propone en este artículo, basada en la medida del tiempo de muestreo máximo ( $T_{k_{\max}}$ ) que soporta el controlador manteniendo estable al sistema.

Para poder comparar los controladores se realizan los mismos experimentos con todos ellos. En un primer experimento se aplican cambios de tipo escalón en los ejes X, Y y Z y en el segundo experimento se le aplicara una señal de seguimiento  $\sin(t)$ .

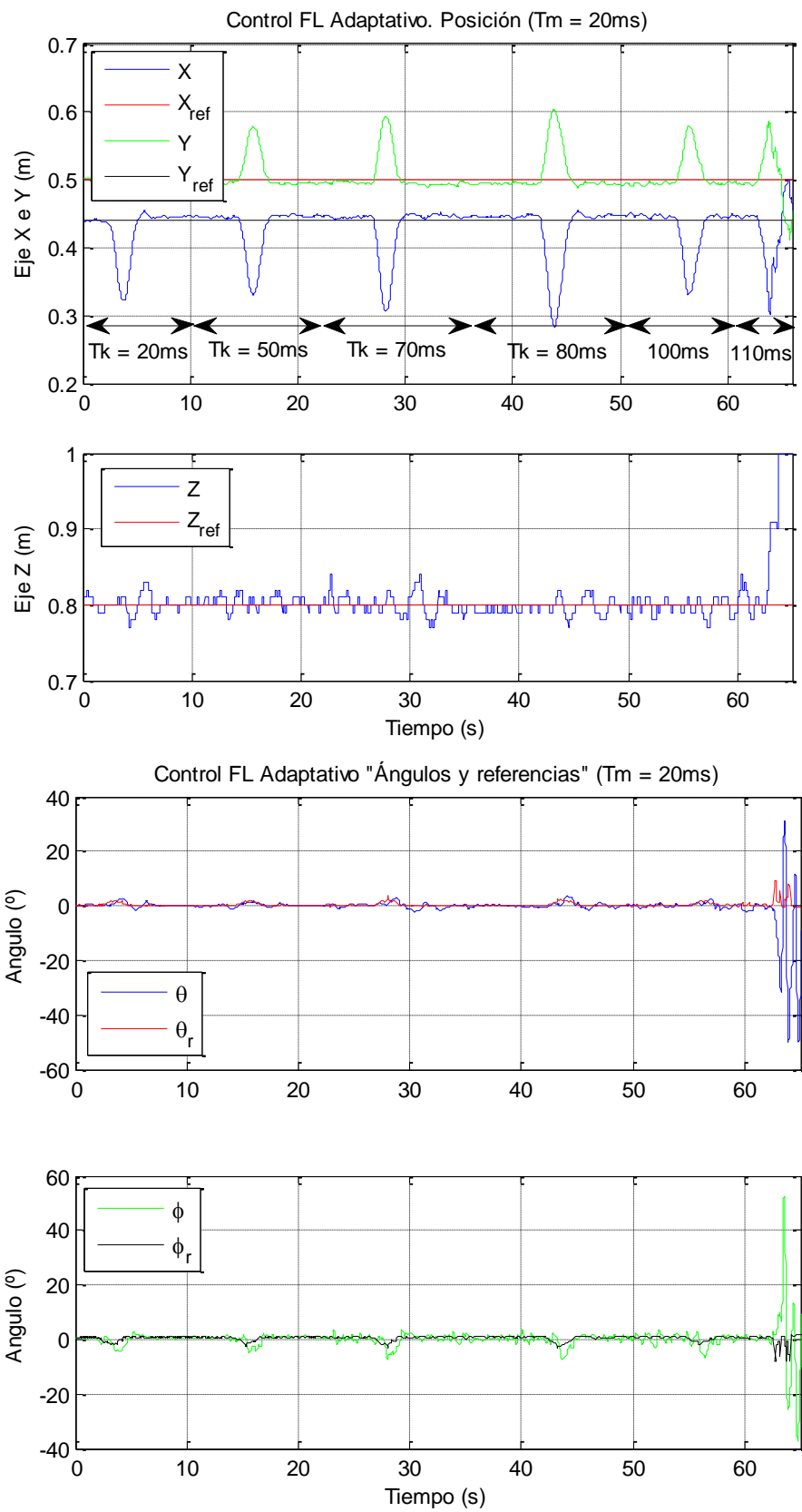
En este primer experimento se comprueba la robustez del controlador comprobando cual es el  $T_{k_{\max}}$ , aplicando una perturbación y comprobando que el sistema no se vuelve inestable. Este controlador soporta un tiempo máximo de muestreo de 100ms.

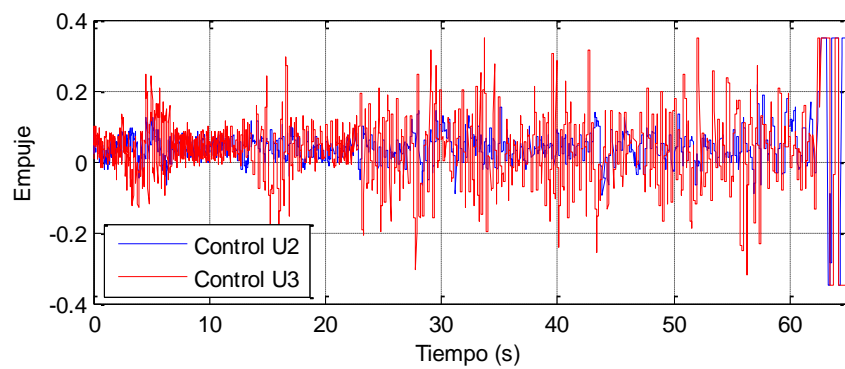
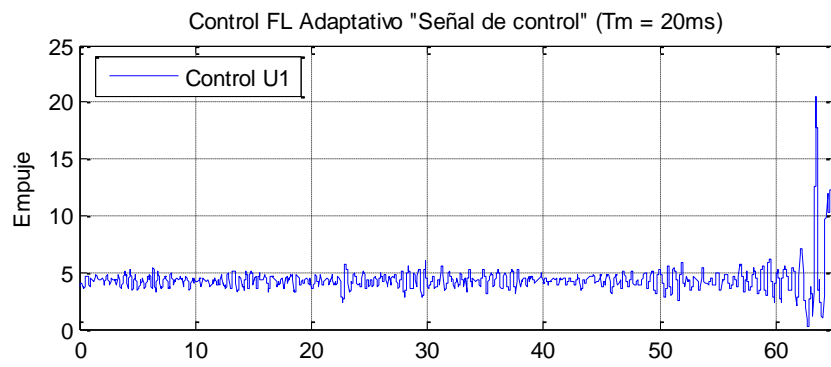
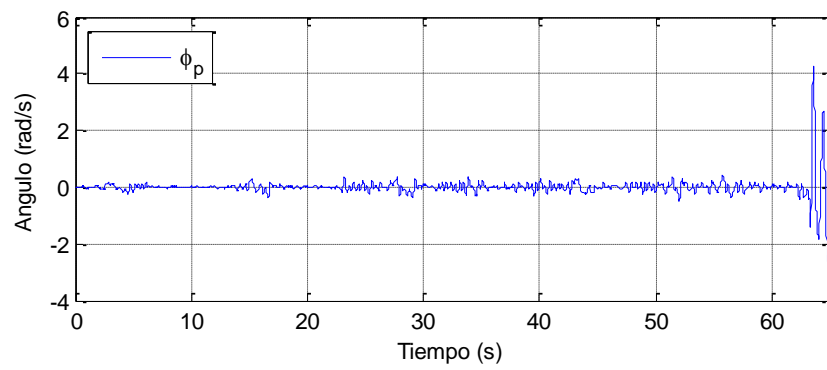
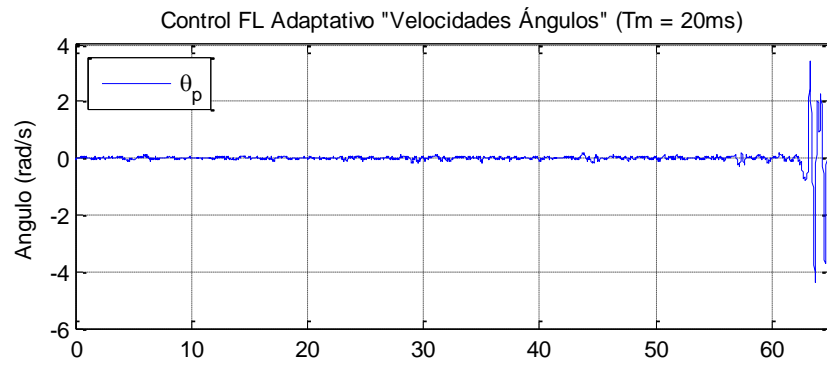
Para el Segundo experimento, se aplicará unas señales escalón para comprobar que, los ejes X e Y permanecen constantes hasta el instante 100s donde se aplican escalones de amplitud 0.06m en el eje X y 0.1m en el eje Y, estabilizándose la plataforma en las nuevas posiciones sin aparecer sobreoscilaciones. En el instante 115s y 155s se vuelven a cambiar las referencias de los ejes X e Y con amplitudes de 0.07m y 0.1m respectivamente, donde aparece una sobreoscilación de 0.05m.

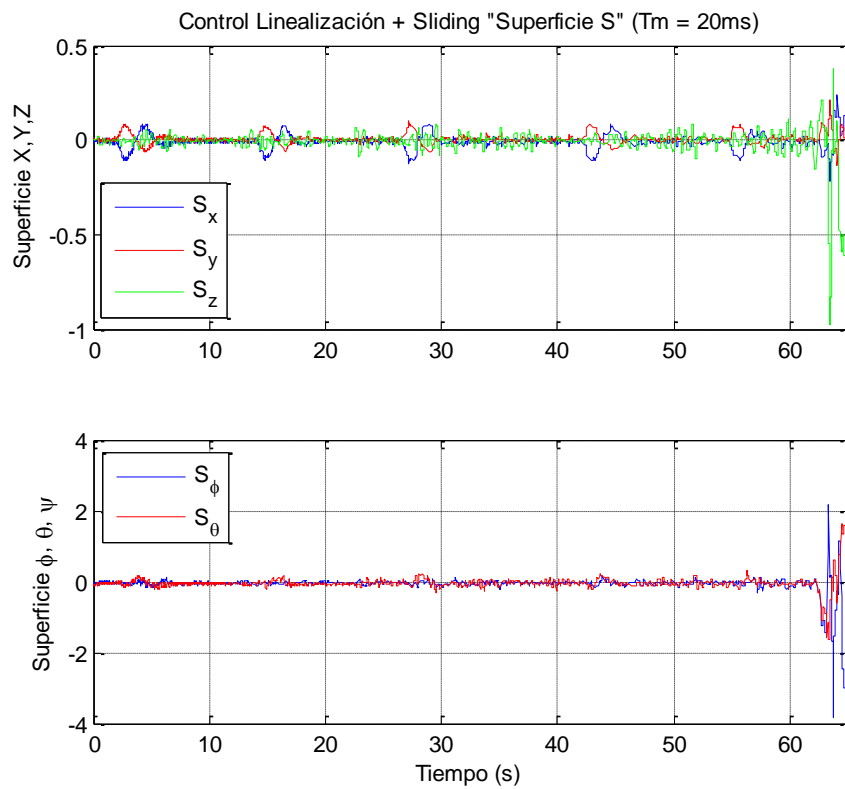
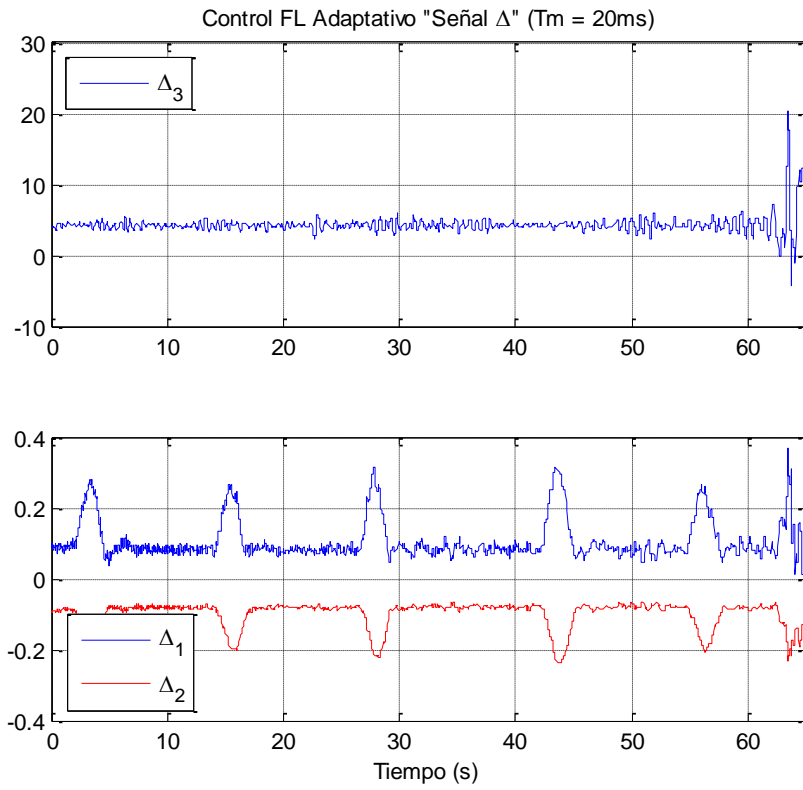
El eje Z comienza en una altura de 0.69m. En los instantes 44s y 60s se aplica un escalón de 0.11m de amplitud y el sistema alcanza el nuevo valor de referencia. Lo mismo sucede en el instante 84s donde se aplica un descenso en la altura de 0.11m. En todos los casos el sistema alcanza la referencia de forma rápida y sin error en régimen permanente.

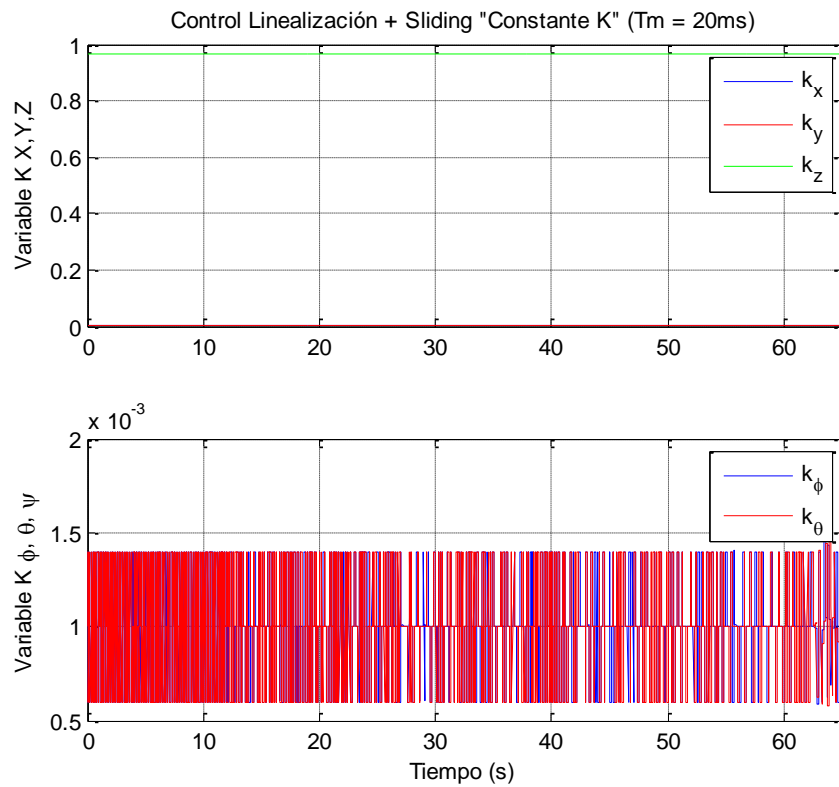
En el tercer experimento, el controlador sigue la referencia sinusoidal impuesta en los tres ejes, presentando un error de 0.03m en la subida.

### 4.2.5.1 Experimento tiempo de muestreo máximo.

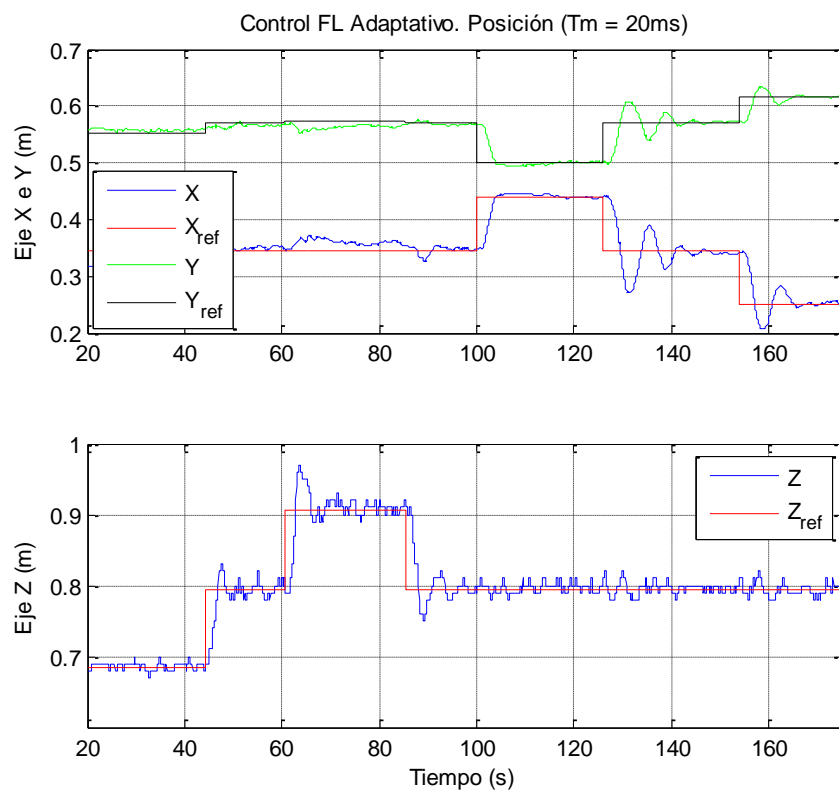


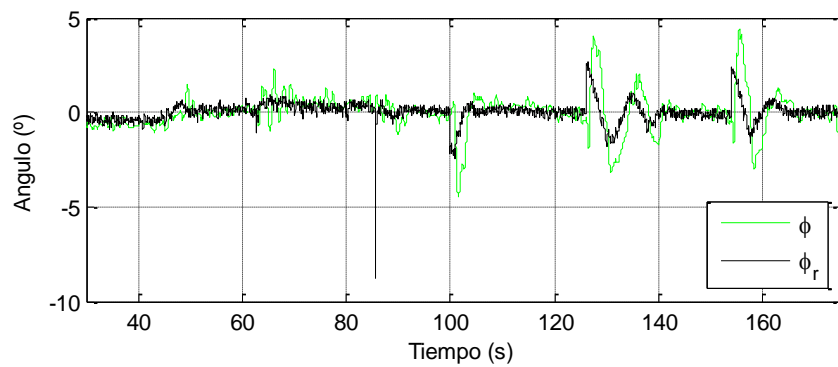
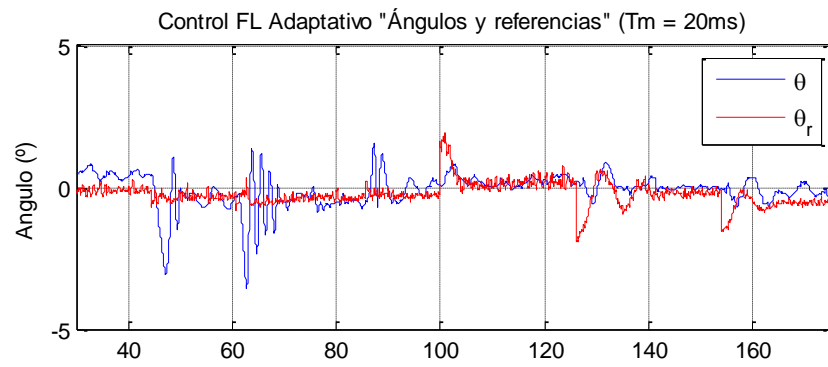
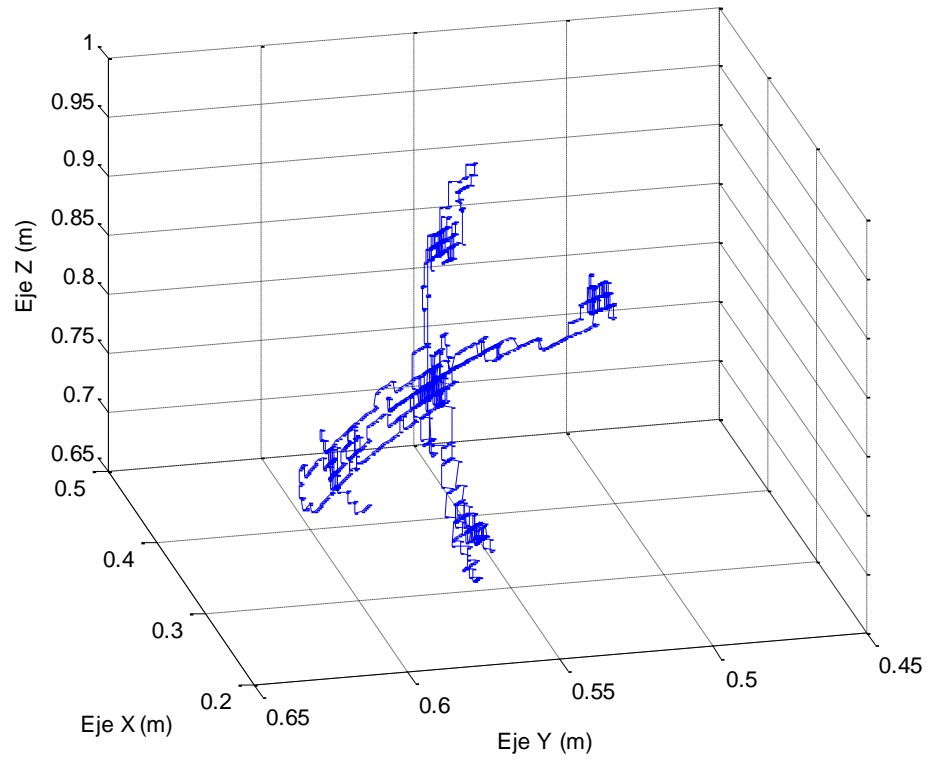


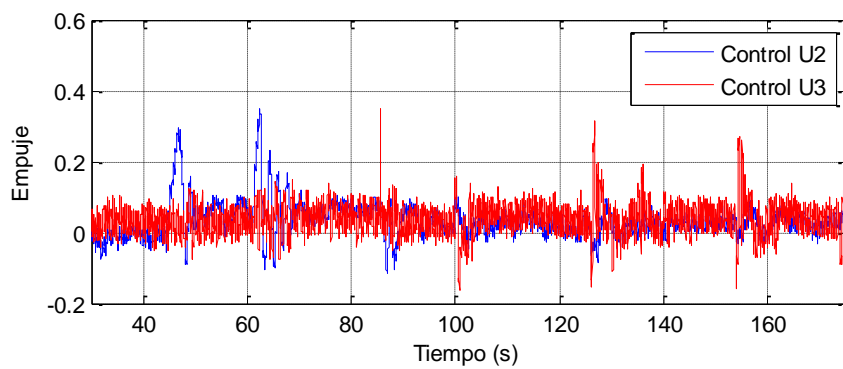
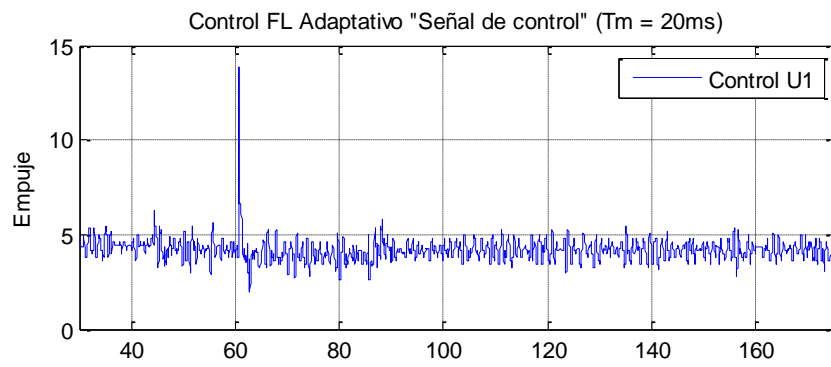
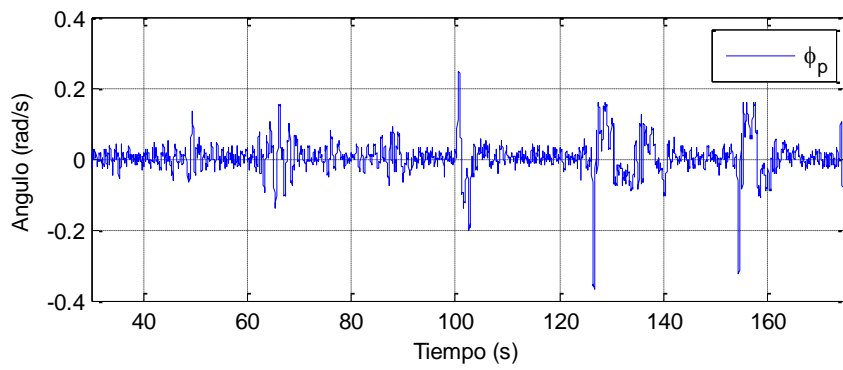
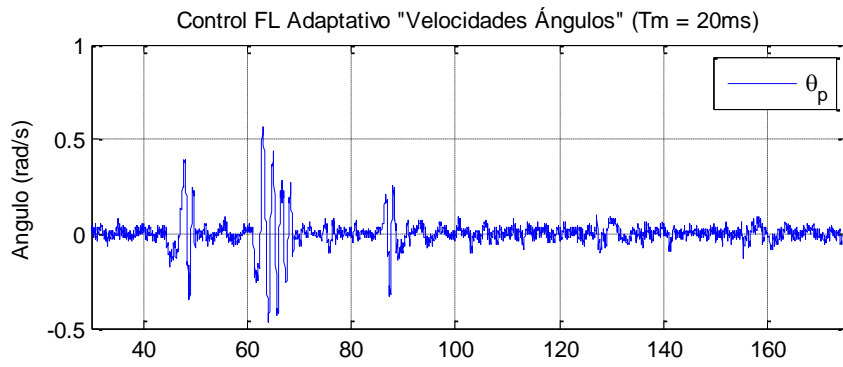


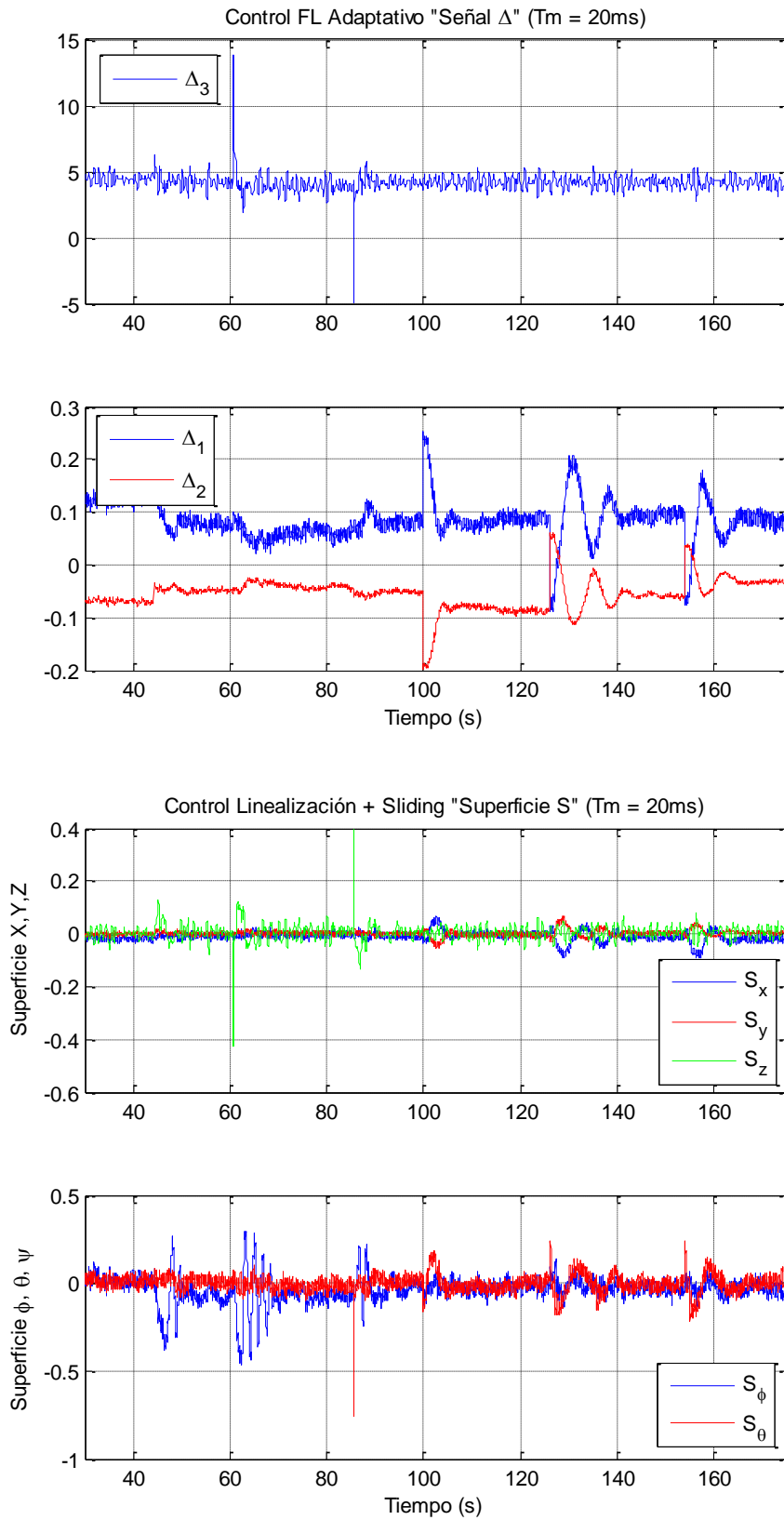


#### 4.2.5.2 Experimento aplicando una referencia escalón en los ejes X, Y y Z

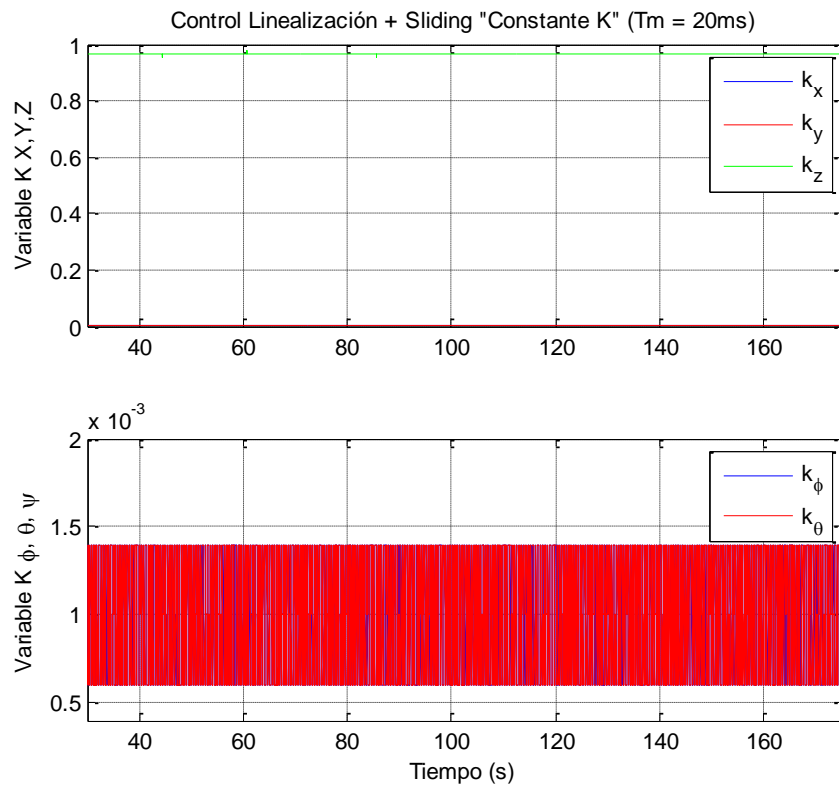




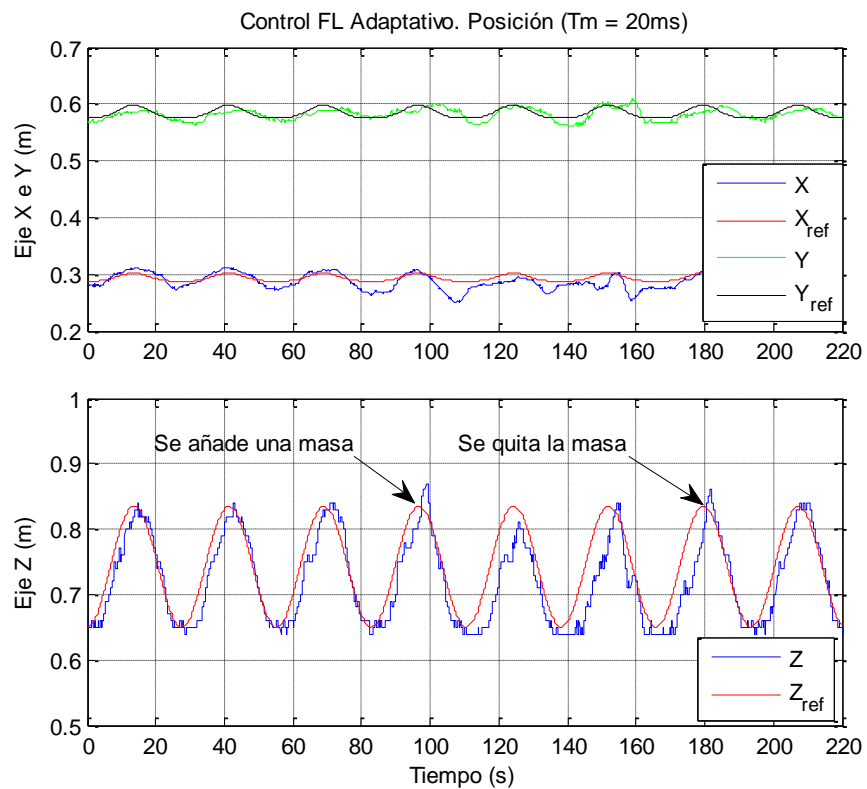


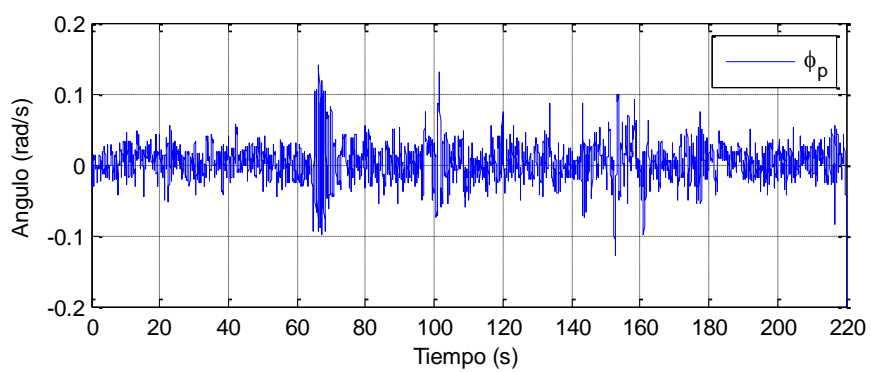
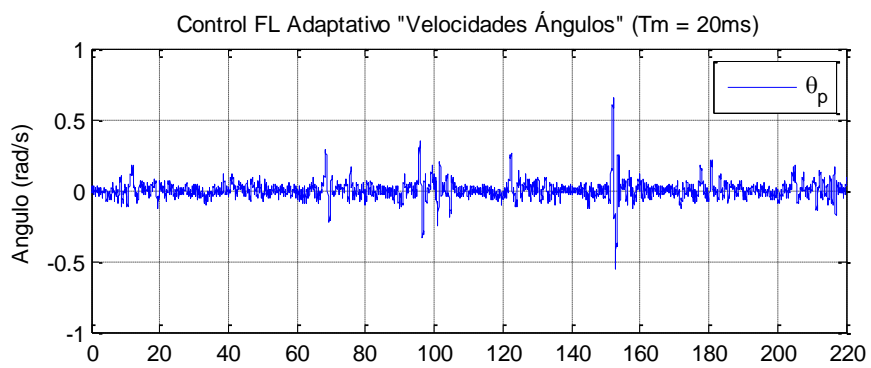
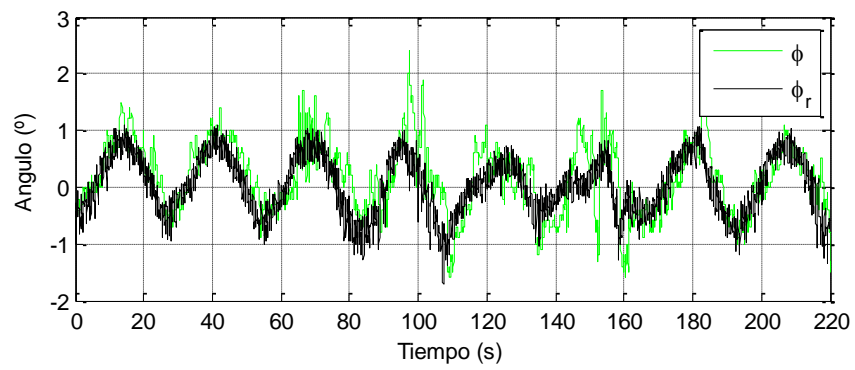
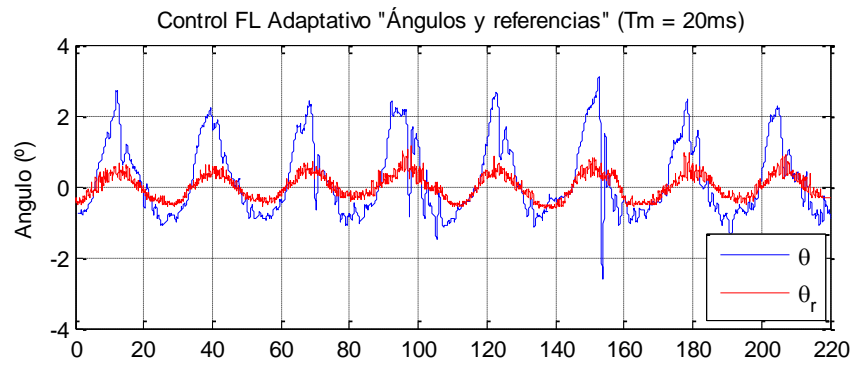


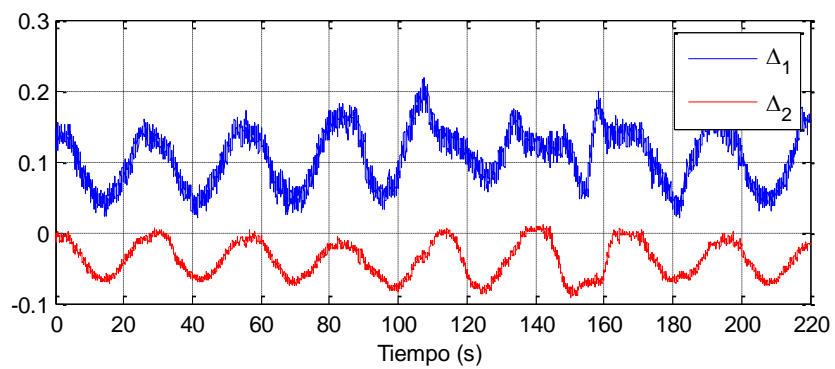
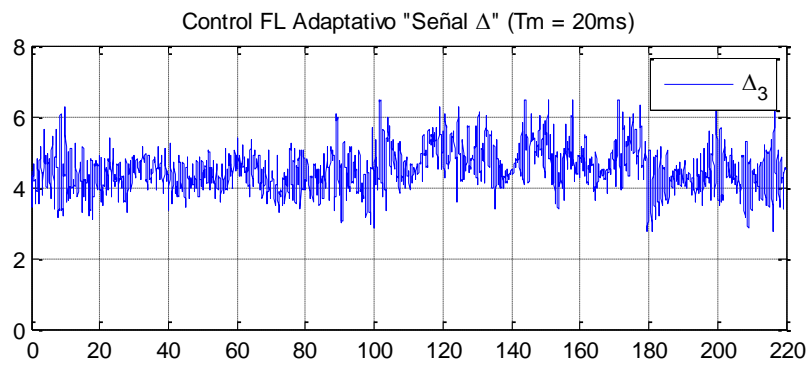
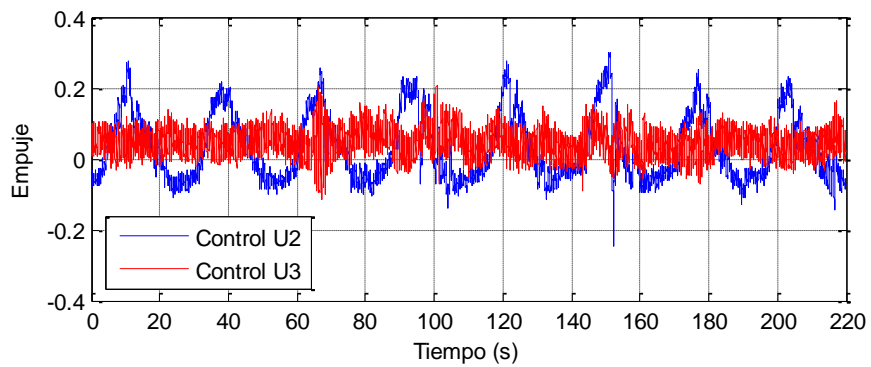
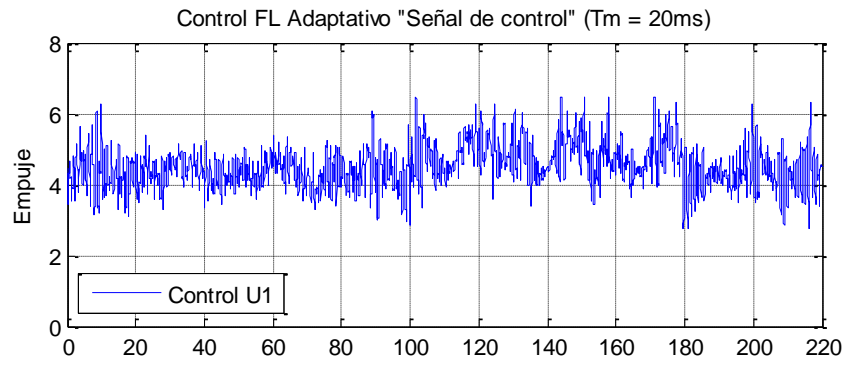


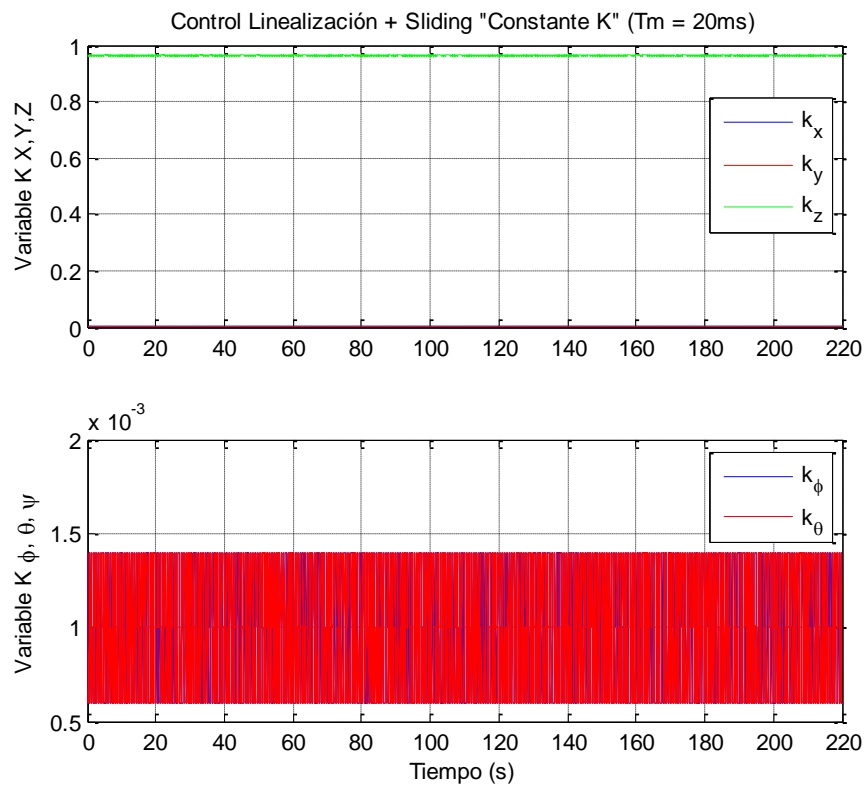
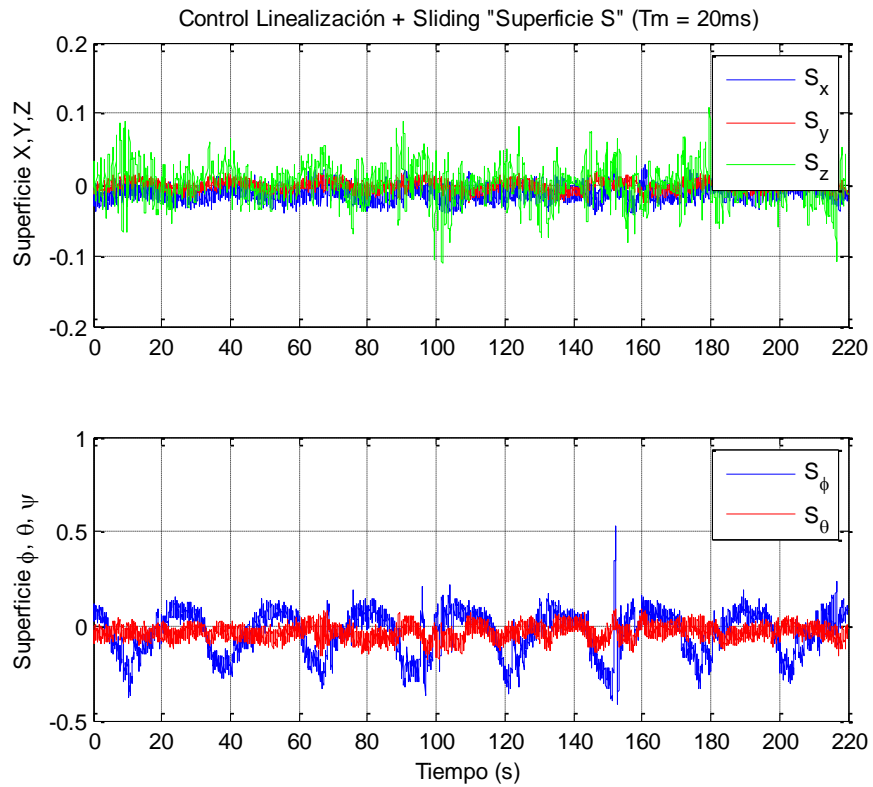


### 4.2.5.3 Experimento aplicando una referencia senoidal.









## 4.2.6 Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto el diseño de cinco controladores que han sido probados en una plataforma experimental de un Quad-Rotor. Se ha realizado una comparativa con estos controladores para comprobar cuál de ellos es el más robusto y presenta mejores características. Para ello se ha propuesto una nueva medida de la robustez que se ha definido como el valor máximo de tiempo de muestreo  $T_{kmax}$  que es capaz de soportar el Quad-Rotor sin volverse inestable. La plataforma del Quad-Rotor está conectada a una estación base mediante una red wifi usando el protocolo UDP.

Se han realizado tres tipos de experimentos, el primero de ellos consiste en aumentar el tiempo de muestreo manteniendo fija las referencias de los ejes X, Y y Z. En el segundo en aplicar una señal escalón a los ejes X, Y y Z y en el tercero se aplica una señal senoidal para que el sistema siga la trayectoria impuesta y el tercer experimento consiste en.

De los controladores probados, el PID es el que presenta peores prestaciones ya que aparecen muchas oscilaciones ante cambios escalones y no es capaz de seguir sin errores las referencias de tipo senoidal, Además solo soporta 30 ms como máximo tiempo de muestreo. El mejor controlador para seguir trayectorias es el Backstepping porque presenta un error de 0.02m, seguido del FL + Sliding con un error de 0.03m. Si tenemos en cuenta cambios de referencias de tipo escalón y máximo tiempo de muestreo el controlador FL + Sliding no presenta sobreoscilaciones y alcanza la referencia impuesta de forma suave, Además de soportar un  $T_{kmax}$  de 100ms. Con todos los datos recogidos decimos que el controlador que presenta una mejor característica en robustez y seguimiento es FL + Sliding.

En la siguiente tabla se recoge los resultados de los diferentes controladores probados en el Quad-Rotor.

Controlador	$T_{kmax}$
FL + Sliding	100 ms
Backstepping	90 ms
$H_{\infty}$	90 ms
FL + LQRi	60 ms
PID	30 ms

Tabla de  $T_{kmax}$

Controlador	Error rms "señal escalón"				
	Eje (X)	Eje (Y)	Eje (Z)	$\theta(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$
<b>PID</b>	$1.60 * 10^{-3}$	$0.92 * 10^{-3}$	$1.62 * 10^{-3}$	$5.92 * 10^{-3}$	$3.50 * 10^{-3}$
<b>FL+LQRi</b>	$0.97 * 10^{-3}$	$0.91 * 10^{-3}$	$1.20 * 10^{-3}$	$5.70 * 10^{-3}$	$3.76 * 10^{-3}$
<b><math>H_{\infty}</math></b>	$3.05 * 10^{-3}$	$2.70 * 10^{-3}$	$1.67 * 10^{-3}$	$4.26 * 10^{-3}$	$4.68 * 10^{-3}$
<b>Backstepping</b>	$2.00 * 10^{-3}$	$2.50 * 10^{-3}$	$1.50 * 10^{-3}$	$4.31 * 10^{-3}$	$2.53 * 10^{-3}$
<b>FL+Sliding</b>	$1.30 * 10^{-3}$	$1.01 * 10^{-3}$	$0.52 * 10^{-3}$	$3.65 * 10^{-3}$	$1.25 * 10^{-3}$

Tabla del error rms cometido por cada controlador.

Controlador	Error rms "señal sinusoidal"				
	Eje (X)	Eje (Y)	Eje (Z)	$\theta(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$
<b>PID</b>	$3.12 * 10^{-3}$	$3.70 * 10^{-3}$	$3.70 * 10^{-3}$	$6.55 * 10^{-3}$	$4.69 * 10^{-3}$
<b>FL+LQRi</b>	$1.27 * 10^{-3}$	$0.31 * 10^{-3}$	$0.51 * 10^{-3}$	$2.94 * 10^{-3}$	$0.78 * 10^{-3}$
<b>H<math>\infty</math></b>	$2.10 * 10^{-3}$	$0.98 * 10^{-3}$	$0.76 * 10^{-3}$	$3.06 * 10^{-3}$	$2.17 * 10^{-3}$
<b>Backstepping</b>	$0.26 * 10^{-3}$	$0.29 * 10^{-3}$	$0.57 * 10^{-3}$	$1.04 * 10^{-3}$	$0.85 * 10^{-3}$
<b>FL+Sliding</b>	$1.50 * 10^{-3}$	$1.76 * 10^{-3}$	$1.01 * 10^{-3}$	$3.66 * 10^{-3}$	$1.24 * 10^{-3}$

Tabla del error rms cometido por cada controlador.

## 4.2.7 Referencias

- [18] T. H. Robert Mahony and J.-M. Pflimlin, “Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group,” *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, vol. 53, pp. 1203–1218, 2008.
- [19] R. M. J. K. Mark Euston, Paul Coote and T. Hamel, “A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing uav,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2008.
- [20] A. N. S. Bouabdallah and R. Siegwart, “Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor,” *IEEE/RSJ International Conference*, vol. 3, p. 2451–2456, 2004.
- [21] G. P. L. R. A. P. Castillo, P., “Modelado y estabilización de un helicóptero de cuatro rotores.” *RIAI: Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 4, p. 41–57, 2007.
- [22] B. A. M. N. Mistler, V., “Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via Dynamic feedback,” *10th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication*, vol. 26, p. 586–593, 2001.
- [23] H. O. Sofiane Seghour, Mouloud Bouchoucha, “From integral backstepping to integral sliding mode attitude stabilization of a quadrotor system: Real time implementation on an embedded control system based on a dspic j.1c,” *IEEE International Conference on Mechatronics*, 2011.
- [24] O. M. R. F. Raffo, G.V., “An integral predictive/nonlinear h1 control structure for a quadrotor helicopter.” *Automática*, vol. 46, p. 29–39, 2010.
- [25] M. P. S. R. Bouabdallah, S., “Design and control of an indoor micro quadrotor,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics*, 2004.
- [26] S. R. Bouabdallah, S., “Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor,” *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 2259–2264, 2005.
- [27] G. J. Lining Tan, Libin Lu, “Attitude stabilization control of a quadrotor helicopter using integral backstepping,” *Automatic Control and Artificial Intelligence (ACAI 2012)*, pp. 573–577, 2012.
- [28] R. S. M. R.W. Brockett and H. J. Sussmann, “R.w. brockett, “asymptotic stability and feedback stabilization,” in *differential geometric control theory*,” *Progress in Mathematics*, ISBN 3-7643-3091-0, vol. 27, pp. 181–191, 1982.
- [29] Z. Zuo, “Adaptive trajectory tracking control design with command filtered compensation for a quadrotor,” *Journal of Vibration and Control*, 2012.
- [30] L. W. SLOTINE J.E., *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [31] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. NJ, USA: Prentice Hall, 2002.
- [32] A. Isidori, *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, 1995.
- [33] J. S. Bay, *Fundamentals of Linear State Space Systems*. McGraw-Hill, 1999.
- [34] R. Kwakernaak, H. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*. Willey-Interscience, 1972.
- [35] J. B. Burl, *Linear Optimal Control*. Addison-Wesley, 1999.
- [36] A. J. van der Schaft, *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [37] C. V. F. R. M. L’opez-Martinez, M.G. Ortega, “Nonlinear l2 control of a laboratory helicopter with variable speed rotors,” *Automática*, vol. 43, p. 655–661, 2007.
- [38] P. V. Kokotović, “Joy of feedback: Nonlinear and adaptive, (1991 bode prize lecture),” no. CCEC-92- 0207, 1992, published in *Control Systems Magazine*, 12:7-17, June 1992.
- [39] P. Kokotović, “Constructive nonlinear control: Progress in the 90’s,” no. CCEC98-1209, 1998, extended Text of the Plenary Talk, 14th Triennial World Congress, Beijing, China, July 5-9, 1999

## 5 Conclusiones de la tesis doctoral

Este estudio ha representado un avance significativo en el campo del control de sistemas lineales, abordando con éxito desafíos relacionados con el muestreo asíncrono y los retrasos en la comunicación. A lo largo de nuestra investigación, hemos obtenido resultados sustanciales y aplicables, que se resumen en las siguientes conclusiones:

1. **Análisis de Estabilidad en Sistemas Lineales Asíncronos:** Hemos desarrollado un método riguroso para analizar la estabilidad de sistemas lineales cuando las señales de realimentación se muestrean de forma asíncrona. Nuestra aproximación, basada en la teoría de pequeña ganancia, ha permitido establecer condiciones específicas en forma de desigualdades matriciales. Estas condiciones no solo determinan el tiempo de muestreo máximo que preserva las propiedades de pequeña ganancia, sino que también proporcionan una base sólida para la toma de decisiones en el diseño de sistemas de control.
2. **Síntesis de Transformación Basada en Ganancia  $L_2$ :** Hemos presentado un método de síntesis que permite obtener una transformación bilateral basada en ganancia  $L_2$ . Esta transformación garantiza que las propiedades de estabilidad de una interconexión de tiempo continuo se mantengan en una interconexión asíncrona, considerando un tiempo de muestreo máximo específico. Nuestro enfoque ha demostrado ser versátil al aplicarse con éxito en sistemas estables, y bajo ciertas condiciones, incluso en sistemas inestables controlados por controladores de pequeña ganancia finitos.
3. **Validación en un Quad-Rotor con Comunicación Inalámbrica:** Hemos llevado a cabo experimentos prácticos para validar nuestra metodología en un Quad-Rotor. Nuestro objetivo era controlar de forma remota las velocidades de los rotores a través de una red inalámbrica insegura utilizando el protocolo wifi/UDP. Los resultados experimentales han sido altamente alentadores. En particular, hemos observado un comportamiento estable y robusto incluso en condiciones desafiantes con hasta un 10% de pérdida de paquetes.
4. **Superficie de Modos deslizantes No Lineal:** En una etapa preliminar de nuestra investigación, hemos introducido una superficie de modos deslizantes no lineal innovadora para el control de sistemas mecánicos subactuados de fase no mínima. Esta superficie se diseñó mediante una salida ficticia, su derivada y un término no lineal adicional basado en una reevaluación de Lyapunov. Nuestra propuesta ha demostrado un rendimiento robusto no solo en términos de incertidumbres paramétricas, sino también en la capacidad de rechazar perturbaciones, lo que garantiza la estabilidad asintótica.

En resumen, este trabajo representa un logro sobresaliente en el campo del control de sistemas lineales y mecánicos subactuados. Los resultados numéricos concretos, como los valores de ganancia  $L_2$  y los porcentajes de pérdida de paquetes, subrayan la efectividad y aplicabilidad de nuestras propuestas. Estas conclusiones destacan la importancia de la investigación para el desarrollo de soluciones prácticas y efectivas, con un potencial significativo en áreas que van desde la robótica hasta la automatización industrial.



## 6 Anexo I: Diseño y construcción de un Quad-Rotor de bajo coste.

### 6.1 Introducción.

En este capítulo se describirá las diferentes plataformas diseñadas para la realización de los experimentos de esta tesis. Se han diseñado tres plataformas diferentes, construyendo la electrónica y mecánica necesaria para su funcionamiento. En primer lugar, se diseñó una plataforma que tiene uno y dos grados de libertad (GDL). El de 1 GDL está compuesto por el sistema propulsor del Quad-Rotor, El de 2 GDL consiste en el ángulo de inclinación (Roll) del Quad-Rotor.

Para la siguiente plataforma se diseñó la estructura, el sistema propulsor y la electrónica. Con esta plataforma se pueden realizar experimentos que simulan una aeronave de despegue vertical (VTOL) y un Quad-Rotor.

Por último, se diseñó la electrónica para un Quad-Rotor donde tiene la posibilidad de poder hacer experimentos al aire libre y con el sistema suelto.

### 6.2 Plataformas.

#### 6.2.1 Plataforma 1 y 2 GDL

Esta plataforma es un Quad-Rotor del cual vamos a utilizar un solo rotor para poder realizar experimentos con un sistema de 1er orden al que llamaremos plataforma con 1 GDL y una segunda variante que consistirá en el movimiento del ángulo Theta (Roll) con la ayuda de dos rotores, este sistema será un sistema de 2º orden y llamaremos plataforma 2 GDL.

Ambas plataformas se conectarán mediante una red UDP a una estación base Fig. 1.

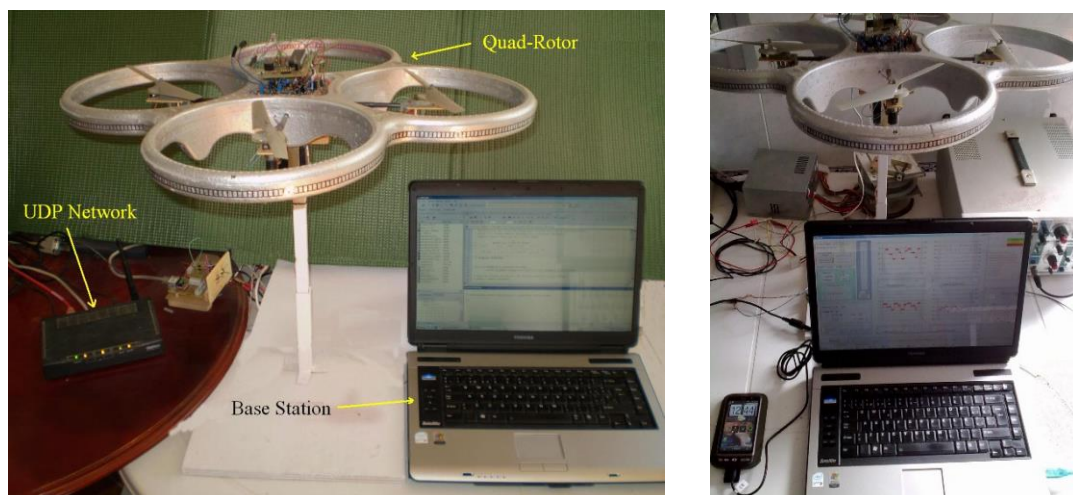


Fig. 1: Equipo de experimentación.

En los experimentos se controlará la velocidad de los rotores (rad) de la aeronave. Para ello los rotores están dotados de encoders ópticos situados en la reductora del motor, de esta forma los sensores se encuentran situados a la sombra para evitar interferencias de la luz artificial o solar y obtener medidas precisas Fig. 2.

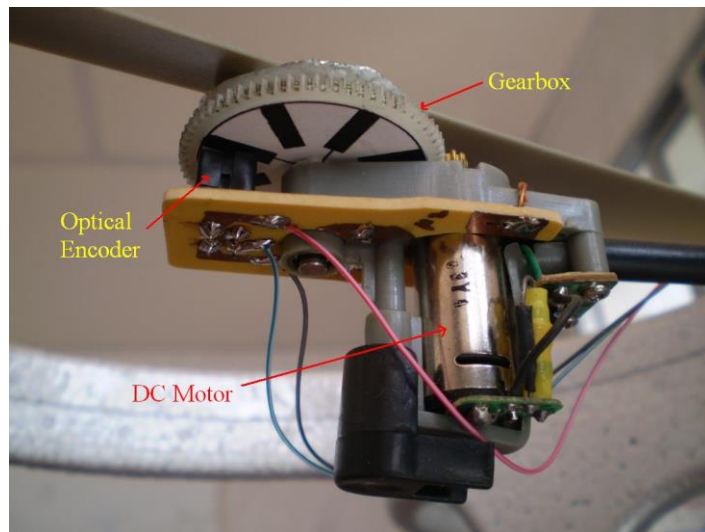


Fig. 2: Sistema propulsor del Quad Rotor.

La información de los sensores de velocidad es recogida por una tarjeta controladora diseñada mediante un microcontrolador PIC 18F. La tarjeta está dividida en dos partes: la primera es la formada por las entradas digitales y analógicas, donde se dispone del hardware necesario para recoger las señales de los cuatro encoders ópticos del Quad-Rotor para su procesado en el microcontrolador; la segunda es la etapa de potencia, que aplica la señal de control PWM proporcionada por el microcontrolador a los transistores MOSFET que alimentan a los motores DC del sistema propulsor.

El microcontrolador PIC 18F4431 trabaja a una frecuencia de 20MHz y permite el envío y recepción de información de las velocidades angulares de los rotores y las señales de control con un tiempo de muestreo mínimo de 10ms, Fig. 3. En el experimento se ha escogido como tiempo de muestreo de las velocidades angulares del sistema propulsor  $T = 10\text{ms}$ .

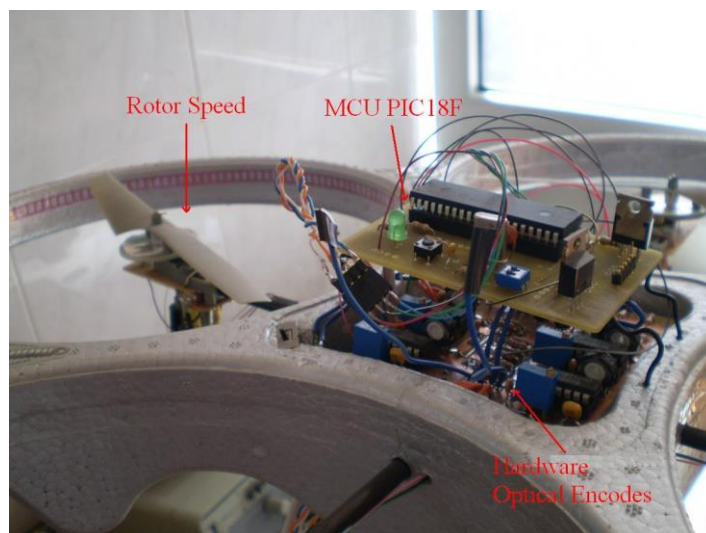


Fig. 3: Sistema de control del Quad Rotor.

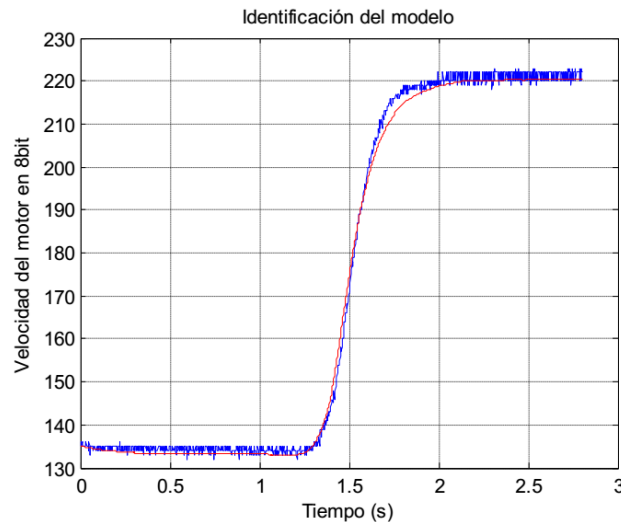
La estación base consiste en un PC a 2GHz con 2Gbyte de RAM, y el sistema operativo que está instalado es Windows XP. Se ha diseñado un software capaz de recibir y enviar los paquetes de información a la aeronave.

### 6.2.1.1 Plataforma 1GDL

Se identificarán los parámetros del sistema propulsor con el que se realizarán los experimentos al igual que se obtendrá las ecuaciones linealizadas del sistema.

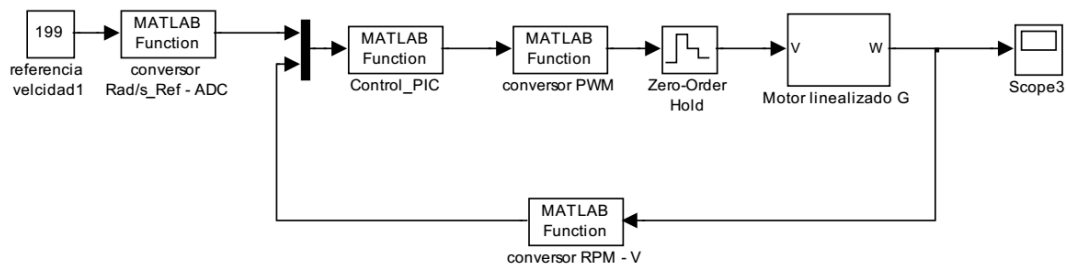
#### 6.2.1.1.1 Identificación del motor DC.

Será necesario identificar el modelo linealizado del sistema propulsor de la plataforma de 1GDL, para ello se utilizará Matlab para ajustar las ecuaciones del sistema de primer orden en base a unos experimentos realizados.



En azul esta el sistema real al que se le aplica un escalon con referencia de 220rad/s y en rojo el resultado del sistema linealizado de primer orden con un tiempo de muestreo de  $T_m = 20\text{ms}$ . La ecuacion de trnasferencia obtenida será  $G(s)$  en continuo y  $G(z)$  en discreto.

$$G(s) = \frac{260}{s - 5.2}; \quad G(z) = \frac{4.939}{z - 0.901} \quad C(z) = \frac{17.9z - 15.56}{z - 1}$$



#### 6.2.1.1.2 El sistema propulsor:

El modelo matemático del Quad-Rotor tiene como entrada del sistema el empuje  $U_i$  (N). Existe una relación algebraica entre la velocidad de cada rotor  $\omega_i$  (velocidad de la hélice) y el empuje  $U_i$ , ecuación 22.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2); \\
 U_2 &= lb(-\omega_2^2 + \omega_4^2); \\
 U_3 &= lb(-\omega_1^2 + \omega_3^2); \\
 U_4 &= d(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2);
 \end{aligned} \tag{1}$$

A partir de las ecuaciones 1, se obtiene el empuje máximo y mínimo que puede producir cada rotor.

Los parámetros son:  $\mathbf{b} = 3.13 \cdot 10^{-5} \text{ N s}^2$ ,  $\mathbf{d} = 7.5 \cdot 10^{-7} \text{ N m s}^2$  y  $\omega_{\max} = 500 \text{ rad/s}$   $l = 0.235 \text{ m}$ . Estos valores se sustituyen en la ecuación 1 y se obtiene los valores máximos y mínimos de  $U_i$ , ecuación 2.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) = 4b\omega_{\max}^2 [0,1] \Rightarrow 0 \leq U_1 < 31.3 \\
 U_2 &= lb(\omega_4^2 - \omega_2^2) = lb\omega_{\max}^2 [-1,1] \Rightarrow -1.84 \leq U_2 < 1.84 \\
 U_3 &= lb(\omega_3^2 - \omega_1^2) = lb\omega_{\max}^2 [-1,1] \Rightarrow -1.84 \leq U_3 < 1.84 \\
 U_4 &= d(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) = 2d\omega_{\max}^2 [-1,1] \Rightarrow -0.38 \leq U_4 < 0.38
 \end{aligned} \tag{23}$$

### 6.2.1.2 Plataforma de 2GDL:

En este punto se describirá los parámetros restantes de la plataforma que serán las inercias, fricción y el modelo de segundo orden linealizado. El modelo de la plataforma está formado por las ecuaciones 6.

$$I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + Lmg \sin(\theta) = lb(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \Rightarrow I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + Lmg \sin(\theta) = U \tag{6}$$

Para conseguir las ecuaciones que modelan la plataforma en el ángulo  $\theta$ , se linealizan las ecuaciones, suponiendo que para ángulos pequeños de  $\theta$  el  $\sin(\theta) = \theta$ , quedando:

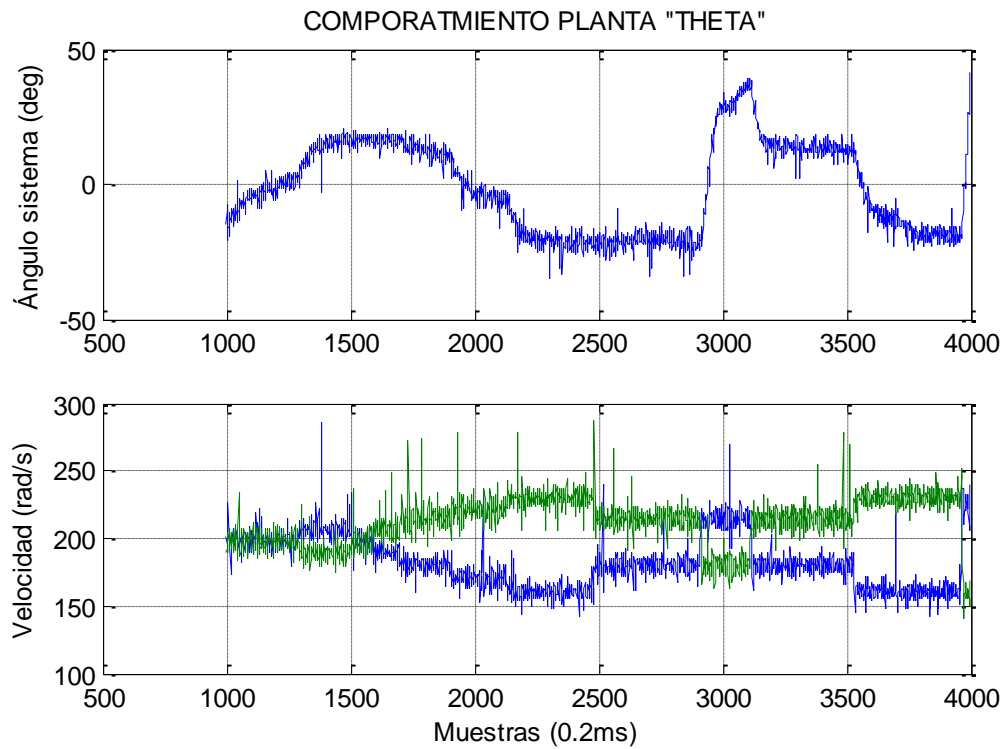
$$I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + Lmg\theta = U$$

La función de transferencia será:

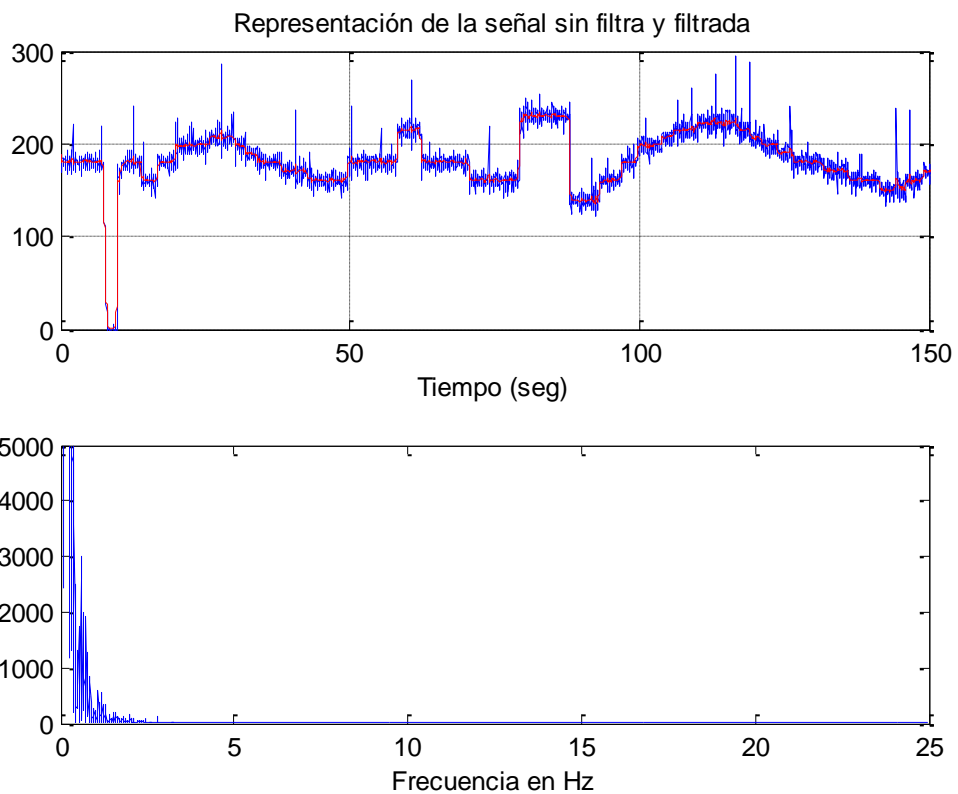
$$I\theta s^2 + K\theta s + Lmg\theta = U \Rightarrow \frac{\theta}{U} = \frac{1}{Is^2 + Ks + Lmg}$$

#### 6.2.1.2.1 Identificación del modelo:

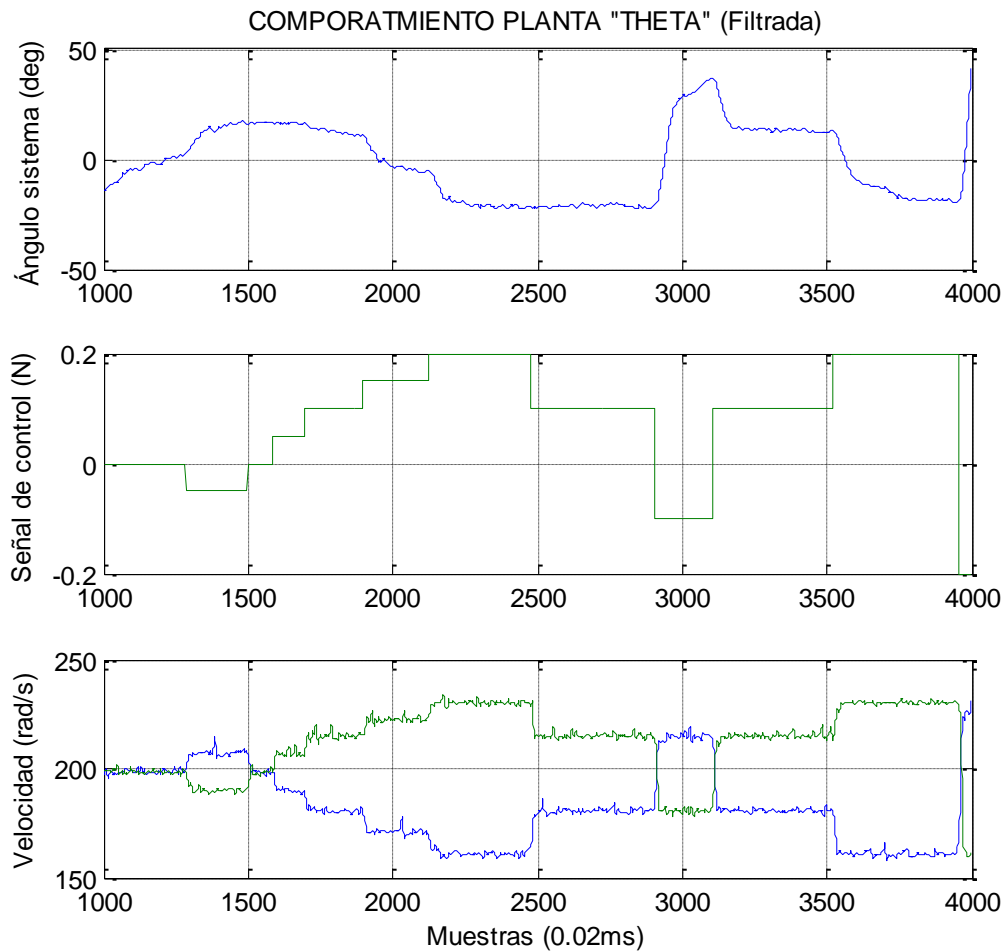
Para la identificación se han realizado diferentes experimentos para aplicar las técnicas de identificación y obtener un modelo.



En el experimento se observa que es necesario realizar un filtrado de la señal, para ello se utiliza un filtro digital paso bajo de segundo orden, con la frecuencia de corte a los 5Hz.



Aplicando el filtro paso bajo a las señales del experimento, se obtiene:



### 6.2.1.2.2 Identificación:

Para la identificación ha sido necesario realizar dos tipos de experimentos el primero el experimento estático y el segundo experimento el dinámico, obteniendo de esta forma los diferentes parámetros del modelo de la plataforma.

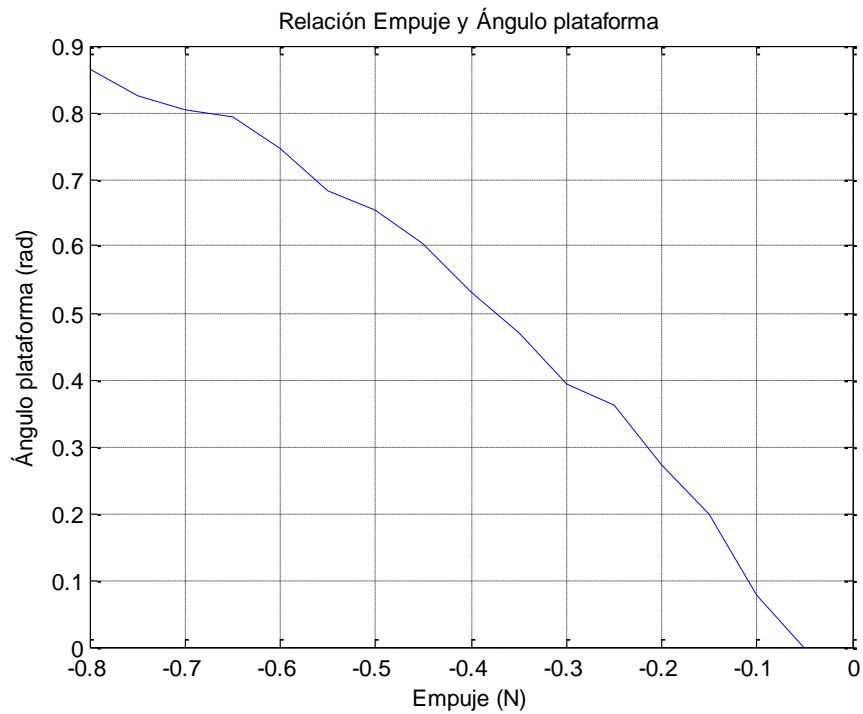
$$\text{Modelo: } I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + Lmg \sin(\theta) = U$$

- Experimento estático:

Con este experimento se consigue eliminar la dinámica del modelo y se obtiene la ganancia estática, para ello en estática el valor de  $\ddot{\theta} = 0$  y  $\dot{\theta} = 0$ , quedando la ecuación:

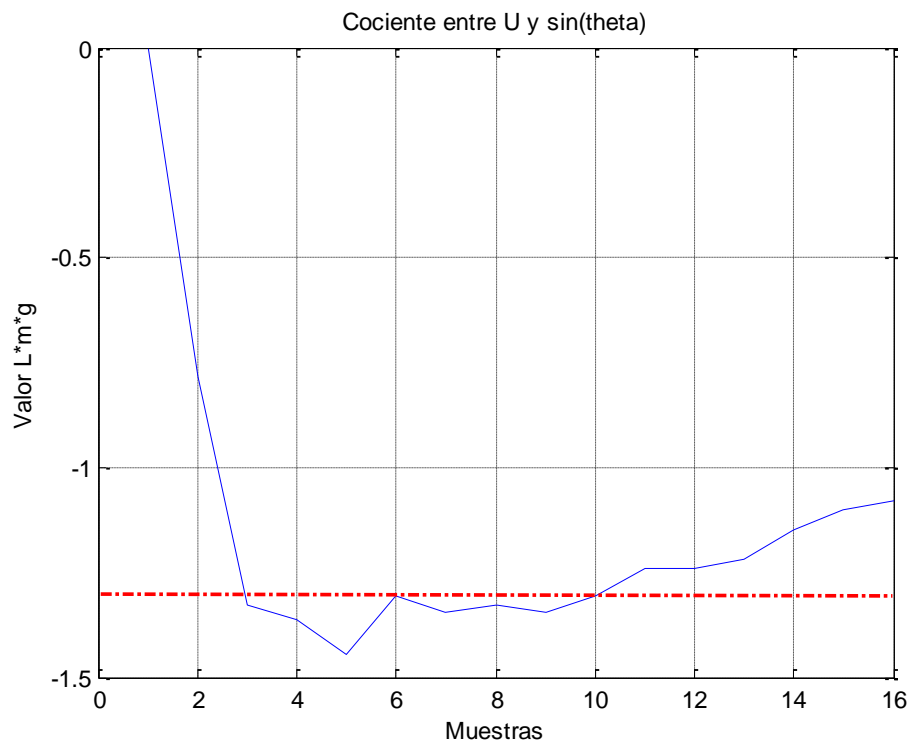
$$Lmg \sin(\theta) = U$$

La siguiente gráfica muestra el experimento estático:



Para obtener los valores de m, g, y L se puede utilizar mínimos cuadrados, pero se ha utilizado el cociente entre la entrada y la salida, obteniendo la siguiente gráfica:

$$Lmg = \frac{U}{\sin(\theta)}$$



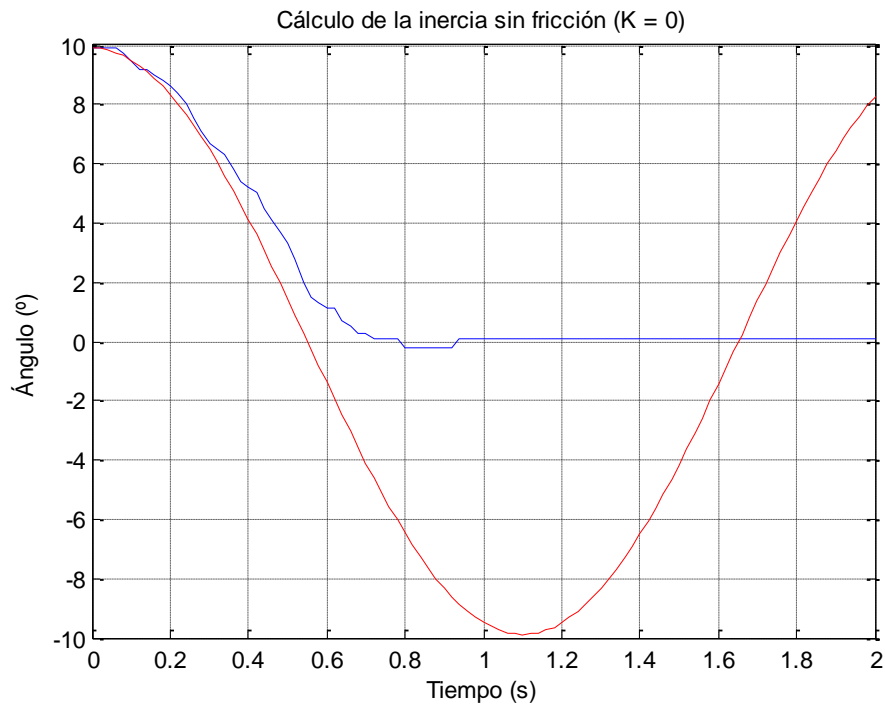
Con estos valores se puede concluir que  $L*m*g = 1.5$ , como el valor de  $g = 9.8m/s^2$  y  $L = 0.18m$  el valor de  $m = 0.377Kg$ . ESTOS RESULTADOS SON PARA  $U < 0$

- Experimento cálculo inercia (I):

En primer lugar, se obtendrá el valor de la inercia “I” eliminando la fricción de la ecuación  $K = 0$ . Para la identificación se realizará un experimento donde la señal de actuación  $U = 0$  y se deja evolucionar la planta desde la condición inicial.

$$I\ddot{\theta} + Lmg \sin(\theta) = 0$$

La siguiente gráfica muestra el experimento y la simulación del modelo con el valor de la inercia.



El valor obtenido para la inercia es de  **$I = 0.07\text{Kgm}$** . **ESTOS RESULTADOS SON PARA  $U < 0$**

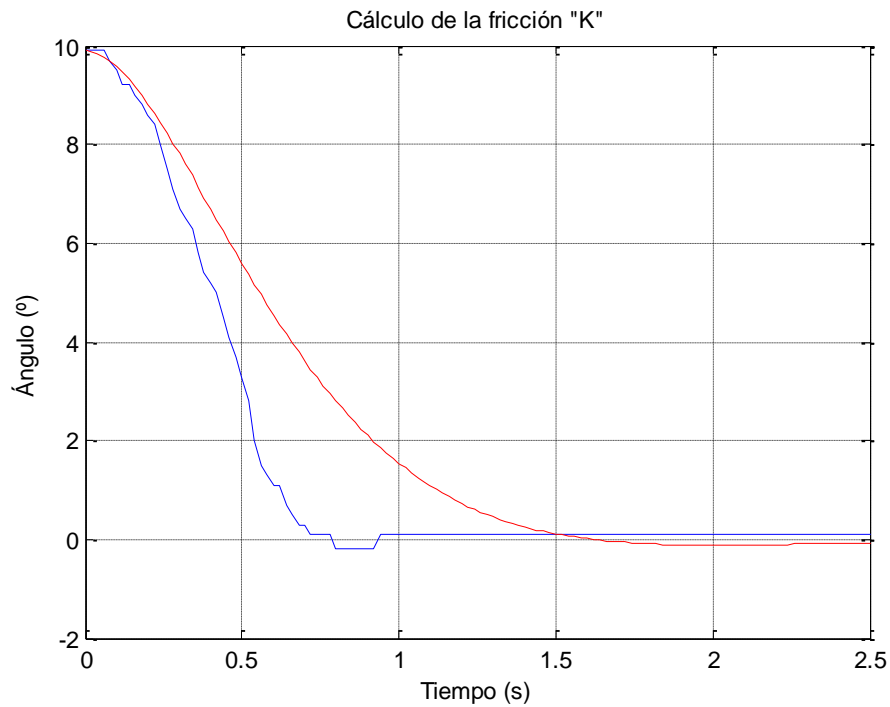
- Experimento cálculo fricción (K):

Con el experimento de la inercia y al valor de la inercia se pretende ajustar la respuesta del modelo a la del experimento con el valor de  $U = 0$ .

$$I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + Lmg \sin(\theta) = 0$$

La siguiente gráfica muestra la respuesta real de la planta y el modelo:





El valor obtenido para la fricción es de **K = 0.19**. **ESTOS RESULTADOS SON PARA U < 0**

- Validación del modelo:

El modelo resultante será:

$$l = 0.235m$$

$$b = 3.13 \cdot 10^{-5}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$m = 0.377\text{Kg}$$

$$L = 0.18m$$

$$I = 0.09\text{Kgm}$$

$$K = 0.39$$

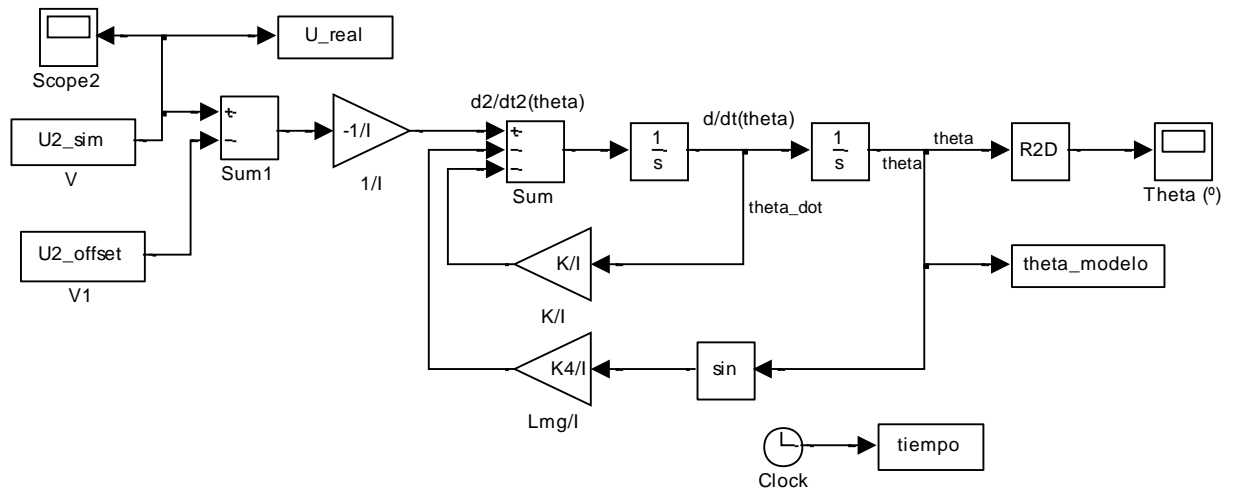
Modelo no lineal:

$$I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + Lmg \sin(\theta) = lb(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \Rightarrow I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + Lmg \sin(\theta) = U$$

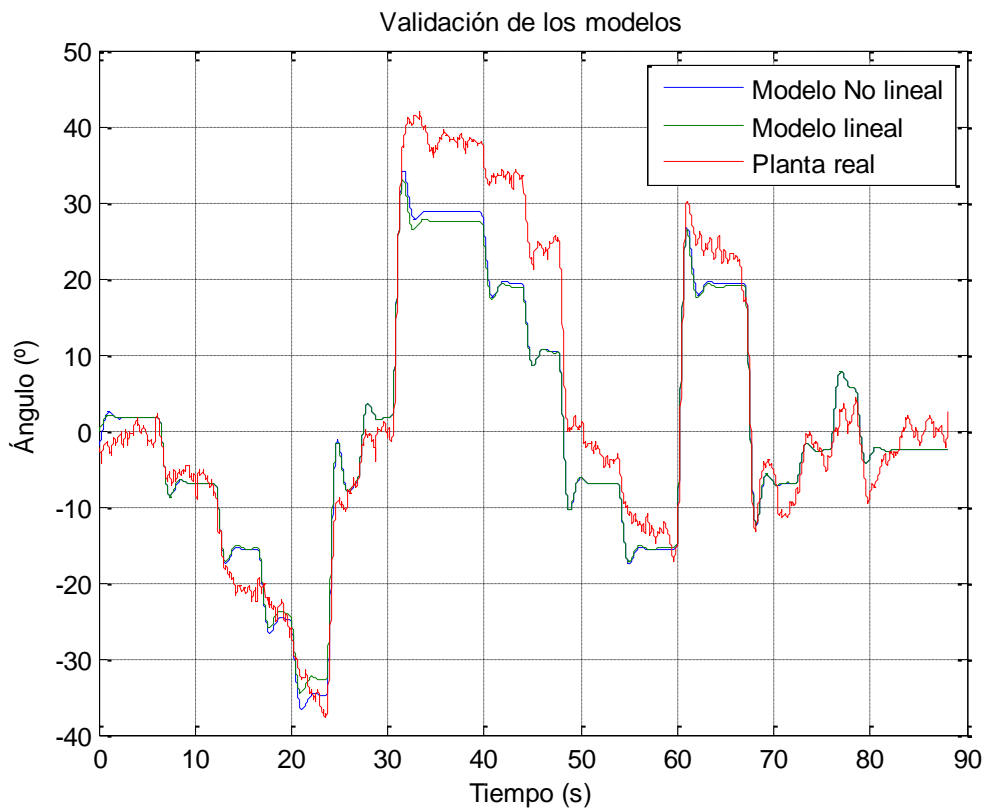
Modelo Lineal:

$$I\theta s^2 + K\theta s + Lmg\theta = U \Rightarrow G(s) \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{Is^2 + Ks + Lmg}$$

Modelo simulink:

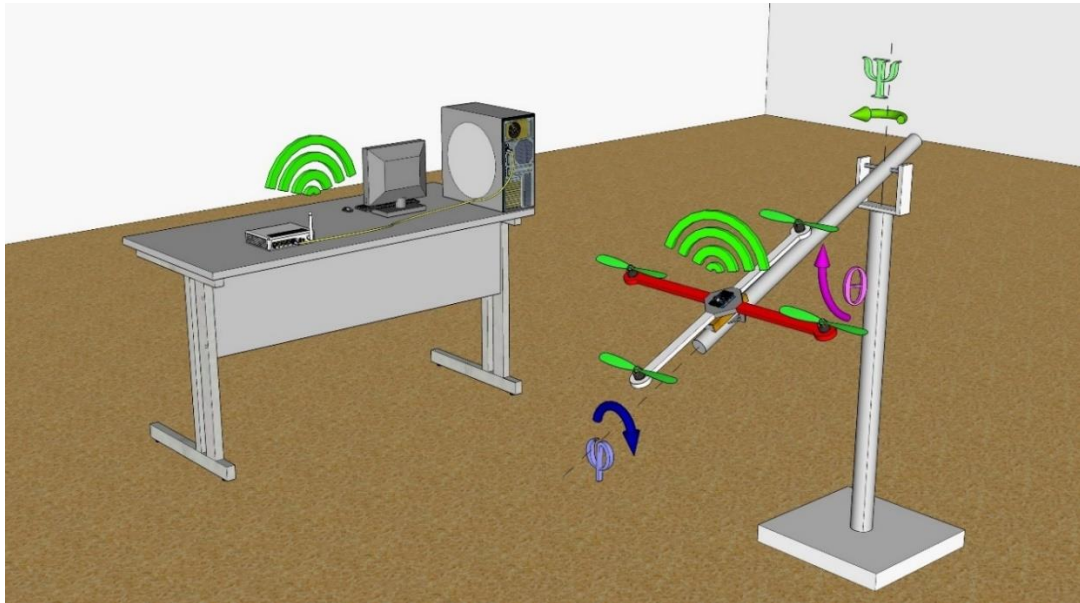


La siguiente gráfica muestra la validación del modelo no lineal, lineal y la planta real.



## 6.2.2 Plataforma VTOL

Para simular un VTOL se ha diseñado una plataforma que está compuesto por una estructura giratoria que sujeta a un Quad-Rotor el cual sólo funciona dos sistemas propulsores. Además, se han rediseñado los motores y se ha diseñado la electrónica.



Sistema implementado



Sistema implementado

### 6.2.2.1 El sistema propulsor:

El modelo matemático del VTOL tiene como entrada del sistema el empuje  $U_i$  (N). Existe una relación algebraica entre la velocidad de cada rotor  $\omega_i$  (velocidad de la hélice) y el empuje  $U_i$ , ecuación 7.

$$\begin{aligned} U_1 &= b(\omega_2^2 + \omega_4^2); \\ U_2 &= lb(-\omega_2^2 + \omega_4^2); \end{aligned} \quad (7)$$

A partir de las ecuaciones 7, se obtiene el empuje máximo y mínimo que puede producir cada rotor.

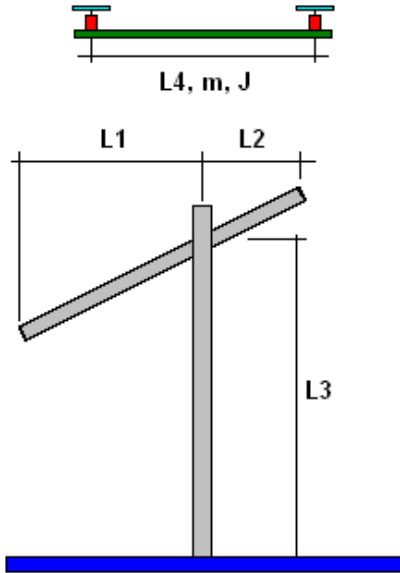
Los parámetros son:  $\mathbf{b} = 4.9 \cdot 10^{-6} \text{ N s}^2$ ,  $\mathbf{d} = 6.6 \cdot 10^{-7} \text{ N m s}^2$  y  $\omega_{2,\text{max}} = 930 \text{ rad/s}$ , que corresponde a la máxima velocidad que puede girar la hélice. Estos valores se sustituyen en la ecuación 3.22 y se obtiene los valores máximos y mínimos de  $U_i$ , ecuación 3.23.

$$U_1 = b(\omega_2^2 + \omega_4^2) = 2b\omega_{2,\max}^2 [0,1] \Rightarrow 0N \leq U_1 < 8.45N$$

$$U_2 = lb(\omega_4^2 - \omega_2^2) = lb\omega_{2,\max}^2 [-1,1] \Rightarrow -1.53N \leq U_2 < 1.53N$$

### 6.2.2.2 Identificación parámetros del VTOL

En esta sección están descritos los parámetros del VTOL:



$$L1 = 0.5m, L2 = 0.23m, L3 = 0.9m$$

$$L4 = 0.51m.$$

$$m = 0.6Kg.$$

$$g = 9.8m/s^2.$$

$$J = 2.467 \cdot 10^{-2} Kg\,m^2.$$

$$\alpha = 5^\circ = 0.08726rad.$$

#### 6.2.2.2.1 Cálculo de inercia "J"

El modelo del Quad-Rotor tiene un dato que es necesario calcular, la inercia debido al giro del modelo, el valor de J tiene tres componentes la inercia en el eje X, Y, y Z.

Para medir la inercia del sistema J se obtendrá de forma experimental utilizando la técnica del péndulo bifilar, la siguiente figura muestra cómo montar el experimento. Este método consiste en calcular el periodo de oscilación del sistema cuando se le aplica una fuerza puntual.

La fórmula para obtener la inercia será:

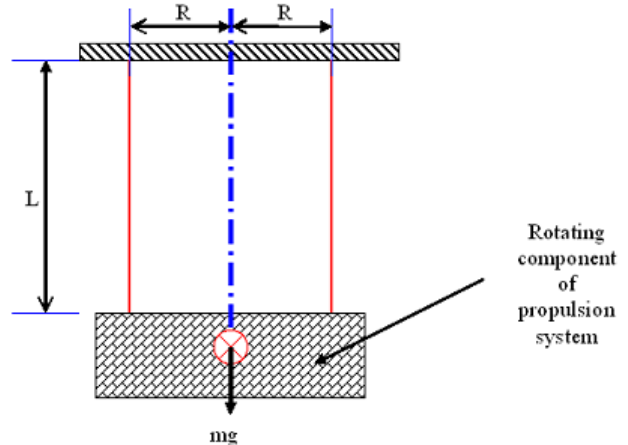
$$J = \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 \frac{mgR^2}{L}$$

Donde:

J = momento de inercia (Kg/m<sup>2</sup>).

Tn = Periodo de oscilación (s).

M = masa del sistema (Kg).



El experimento se ha realizado con los siguientes valores:

$$L = 66\text{cm} = 0.66\text{m}$$

$$R = 19\text{cm} = 0.19\text{m}$$

$$m = 600\text{g} = 0.6\text{Kg}$$

Se realizarán cuatro experimentos obteniendo el valor de cinco periodos para posteriormente obtener el tiempo de un periodo  $T_n$ .

n = 5	Eje Z	Eje X
$T_1$ (s)	8.34	8.72
$T_2$ (s)	8.56	8.72
$T_3$ (s)	8.29	8.75
$T_4$ (s)	8.75	8.68
$T_m$	8.48	8.71
<b><math>T_n = T_m/n</math></b>	<b>1.69</b>	<b>1.74</b>

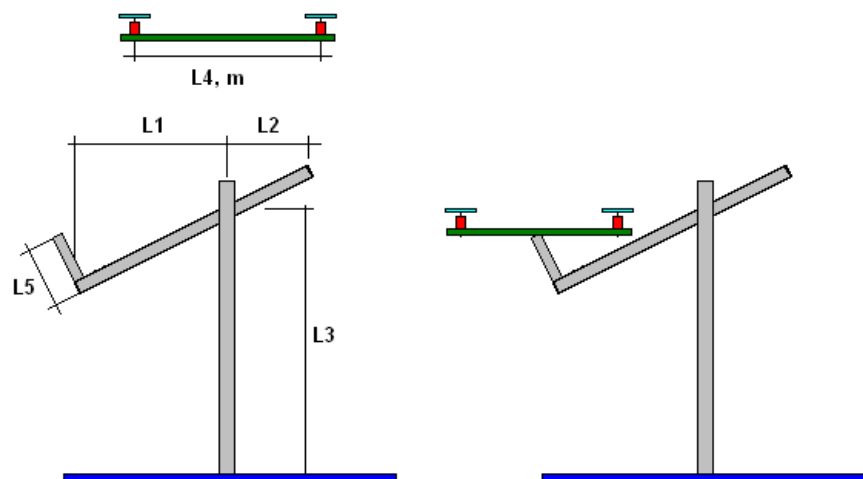
El valor de la inercia J es:

$$J_x = \left(\frac{T_{n,x}}{2\pi}\right)^2 \frac{m \cdot g \cdot R^2}{L} = \left(\frac{1.74}{2\pi}\right)^2 \cdot 0.3216 = 2.467 \cdot 10^{-2} \text{Kgm}^2$$

$$J_z = \left(\frac{T_{n,z}}{2\pi}\right)^2 \frac{m \cdot g \cdot R^2}{L} = \left(\frac{1.69}{2\pi}\right)^2 \cdot 0.3216 = 2.326 \cdot 10^{-2} \text{Kgm}^2$$

### 6.2.3 Plataforma Quad-Rotor

Se ha construido una plataforma para la experimentación de diferentes estrategias de control. La plataforma permite la experimentación del sistema VTOL como del Quad-Rotor, permitiendo una movilidad de hasta seis grados de libertad “6DOF”.



Los parámetros de la plataforma son:

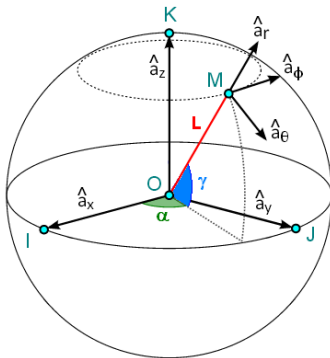
$$L1 = 0.67m, L2 = 0.23m, L3 = 0.87m, L5 = 0.27m, L4 = 0.51m.$$

$$m = 0.3Kg, g = 9.8m/s^2.$$

La siguiente foto muestra la plataforma real donde se realizarán los experimentos. La plataforma está alimentada con una batería de 12v, la cual alimenta los rotores del Quad-Rotor y el sistema de control de los motores e IMU.



La plataforma permite el movimiento del sistema sobre la superficie de una esfera, donde según la transformación de coordenadas esféricas en cartesianas, podemos realizar un posicionamiento en coordenadas cartesianas X, Y, Z. Para ello se necesita conocer la esfera que describe la plataforma, esta superficie está dada por las ecuaciones siguientes.



Ecuaciones de las posiciones en ejes cartesianos

$$\begin{cases} x = L_1 \cos(\gamma) \cos(\alpha) \\ y = L_1 \cos(\gamma) \sin(\alpha) \\ z = L_1 \sin(\gamma) \end{cases}$$

Ecuaciones de las velocidades en ejes cartesianos

$$\begin{cases} \dot{x} = -L_1 \dot{\gamma} \sin(\gamma) \cos(\alpha) - L_1 \dot{\alpha} \cos(\gamma) \sin(\alpha) \\ \dot{y} = -L_1 \dot{\gamma} \sin(\gamma) \sin(\alpha) + L_1 \dot{\alpha} \cos(\gamma) \cos(\alpha) \\ \dot{z} = L_1 \dot{\gamma} \cos(\gamma) \end{cases}$$

En el caso de que se indique una referencia al sistema, esta referencia es necesaria que se encuentre dentro de la esfera, donde la plataforma se pueda posicionar, de lo contrario, las referencias impuestas en ejes cartesianas nunca se podrán alcanzar por el sistema.

La plataforma realiza medidas sobre el eje 'Z' (mide la altura), pero no mide el ángulo 'gamma', para obtener dicho ángulo y aplicarlas a las ecuaciones cilíndricas se puede obtener por la relación trigonométrica del eje 'Z' con el eje 'Y', obteniendo.

$$\sin(\gamma) = \frac{Z - L_3}{L_1} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{Z - L_3}{L_1}\right)$$

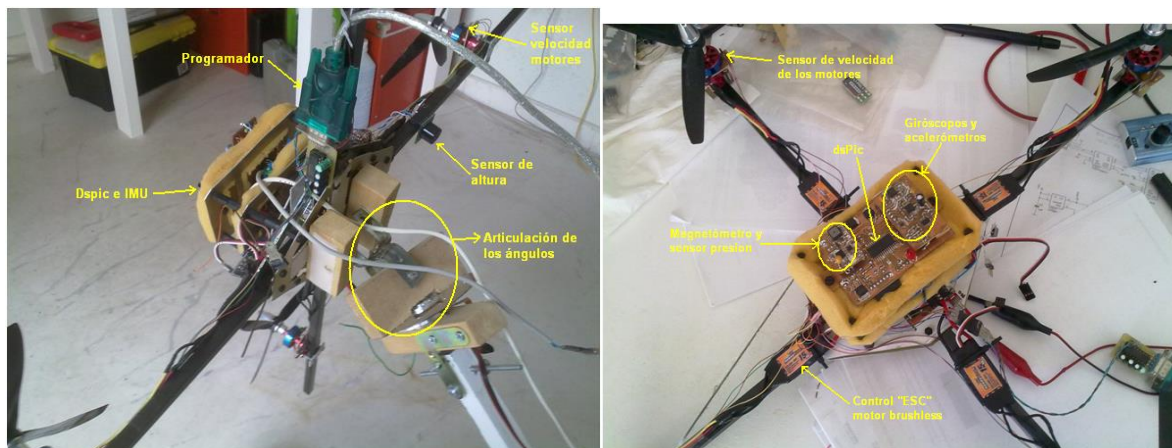
El ángulo ‘ $\alpha$ ’ en la plataforma corresponde al ángulo de giro y será medido por medio de la IMU.

Cuando se quiere aplicar una referencia en ejes cartesianos, es posible hacerla de dos formas. La primera forma sería indicar los ángulos ‘ $\gamma$ ’, ‘ $y$ ’, ‘ $\alpha$ ’ y con las ecuaciones esféricas obtener las coordenadas X, Y, Z.

La segunda forma es dando dos puntos en los ejes ‘X’ y ‘Z’ con la ayuda de la ecuación del radio, obtener la coordenada en el eje ‘Y’ que satisface esas condiciones.

$$x^2 + y^2 + z^2 = L_1^2 \Rightarrow y = \sqrt{L_1^2 - x^2 - z^2}$$

El equipo (Quad-Rotor) está formado por un dsPIC30F3011 que es el encargado de procesar todas las señales recibidas por los sensores que forman la IMU y de obtener los ángulos de Euler. La IMU está formada por tres giróscopos, un acelerómetro y un magnetómetro. Con estos sensores y utilizando el algoritmo DCM es posible fusionarlos y obtener los ángulos de Euler del sistema sin errores. La medida de la altura se realiza mediante un sensor de ultrasonidos, que presenta un rango de 6m y una precisión de 1cm. El controlador estará situado en un PC con Windows XP. La comunicación es posible realizarla mediante un módulo de radiofrecuencia, un módulo wifi y a través de una red local wifi con protocolo UDP o TCP-IP.



## 7 Anexo II: Demostraciones matemáticas.

### 7.1 Introducción

En este Anexo se expondrán las demostraciones utilizadas en el capítulo 2 para demostrar el Lema 1, proposición 2, Lema 2 y proposición 3.

### 7.2 Lema 1

Fijando un vector constante  $v \in \mathbb{R}_n + m$  y el escalar  $T^* > 0$ , se define  $T > 0$  y definamos la siguiente función continua  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = T W(t) + G v$ , cuyo dominio es un intervalo cerrado. Bajo la suposición general de diferenciabilidad continua, la expansión en serie con resto diferencial para cualquier  $\xi \in [0, T]$  da como resultado

$$\begin{aligned} f_v(t) &= v^\top (W_i(0) + G_i)v + \frac{d}{dt}(v^\top W_i(t)v) \Big|_{t=0} T \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(v^\top W_i(t)v) \Big|_{t=\xi} T^2 \\ &= v^\top (W_i + G_i)v + v^\top \left( \frac{d}{dt} W_i(t) \Big|_{t=0} \right) v T \\ &\quad + \frac{1}{2} v^\top \left( \frac{d^2}{dt^2} W_i(t) \Big|_{t=\xi} \right) v T^2 \\ &= v^\top (W_i + G_i + W_{1,i}T)v + \frac{1}{2} v^\top W_{2,i}(\xi) v T^2. \end{aligned}$$

La suposición de estabilidad  $L_2$  de ganancia finita para "i" asegura que las matrices definidas positivas  $Q_i$  de (10) existan. Además, para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), la estabilidad  $L_2$  también garantiza que la matriz  $W_{2,i}$  de (12) sea definida negativa si y solo si  $Q_i > 0$ . Por lo tanto, al reorganizar la última ecuación obtenida anteriormente, obtenemos:

$$\begin{aligned} &v^\top (W_i(t) + G_i)v - v^\top (W_i + G_i + W_{1,i}T)v \\ &= \frac{1}{2} v^\top W_{2,i}(\xi) v T^2, \quad \xi \in [0, T] \\ &v^\top (W_i(t) + G_i)v - v^\top (W_i + G_i + W_{1,i}T)v \leq 0 \\ &v^\top (W_i^d(t))v \leq v^\top (W_i^l(T))v. \end{aligned}$$

Finalmente, una solución  $T_i^a$  de (14) satisface  $W_i^l(T_i^a) \leq 0$ , lo que de la última desigualdad y teniendo en cuenta que  $v$  es arbitrario implica que  $W_i^d(t) \leq 0$  para  $t \in [0, T_i^a]$ .

### 7.3 Proposición 2

Reorganizando la desigualdad  $W_i^l(T_{i,k}) = W_i + G_i + W_{1,i}T_{i,k} \leq 0$  como  $W_i + G_i \leq -W_{1,i}T_{i,k}$ , que junto con la suposición de la solución para el problema de tiempo continuo, es decir,  $W_i + G_i < 0$ , se convierte en

$$I_{n+m} > -(W_i + G_i)^{-1} W_{1,i} T_{i,k}.$$



Por lo tanto,  $\det(W_{1,k}) = 0$  asegura que no hay un valor propio cero y proporciona (15), y (16) con  $(W_i + G_i)^{-1} W_{1,i} < 0$ .

#### 7.4 Lema 2

Tomando como la función de almacenamiento positiva

$$V = \int_{t-L}^t y(\tau)^\top y(\tau) d\tau.$$

usando la aproximación de Euler de esta expresión y denotando  $d_k = L_k/T_k$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} V_{d,k} &= y_k^\top y_k L_k > 0, \\ \Delta V_{d,k} &= V_k - V_{k-d_k} = y_k^\top y_k L_k - y_{k-d_k}^\top y_{k-d_k} L_{k-d_k} \\ \Delta V_{d,k} &= L_k \left( y_k^\top y_k - \left( 1 - \frac{L_k - L_{k-d_k}}{L_k} \right) y_{k-d_k}^\top y_{k-d_k} \right) \\ \Delta V_k &= L_k \left( y_k^\top y_k - \left( 1 - \frac{\Delta L_k}{L_k} \right) y_{k-d_k}^\top y_{k-d_k} \right) \\ &\leq L_k (y_k^\top y_k - (1 - \delta) y_{k-d_k}^\top y_{k-d_k}). \end{aligned}$$

Definiendo  $\gamma_d^2 = 1/(1 - \delta)$  y multiplicando ambos lados de la última ecuación por  $\gamma_d^2$  obtenemos

$$\gamma_d^2 \Delta V_k \leq L_k (\gamma_d^2 y_k^\top y_k - y_{k-d_k}^\top y_{k-d_k})$$

#### 7.5 Proposición 3

Asumiendo que los tiempos de muestreo son  $T_{1,k} \leq T * 1$  y  $T_{2,k} \leq T * 2$  tales que cada sistema  $i$  cumple la desigualdad (6), entonces ambos sistemas deben verificar la propiedad de ganancia  $L_2$  para el menor tiempo de muestreo  $T_k \doteq \min(T_{1,k}, T_{2,k})$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta V_{i,k} &\leq -T_{i,k} (y_{i,k}^\top y_{i,k} - \gamma_i^2 u_{i,k}^\top u_{i,k} + \rho_i V_{i,k}) \\ &\leq -T_k (y_{i,k}^\top y_{i,k} - \gamma_i^2 u_{i,k}^\top u_{i,k} + \rho_i V_{i,k}) \end{aligned} \tag{17}$$

con  $V_{i,k} = x_{i,k}^\top P_i x_{i,k} > 0$ . Del mismo modo para los bloques de retardo y definiendo  $L_k \doteq \min(L_{1,k}, L_{2,k})$  y  $\bar{\delta}_i \doteq 1 - \delta_i$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta V_{d_i,k} &\leq -L_{i,k} \left( -y_{i,k}^\top y_{i,k} + \left( y_{i,k-d_{i,k}}^\top y_{i,k-d_{i,k}} \right) \bar{\delta}_i \right) \\ &\leq -L_k \left( -y_{i,k}^\top y_{i,k} + \left( y_{i,k-d_{i,k}}^\top y_{i,k-d_{i,k}} \right) \bar{\delta}_i \right) \end{aligned} \tag{18}$$

con  $\delta_i < 1$ ,  $i = \{1, 2\}$ , y con  $V_{d_i,k} = y_{i,k} y_{i,k}^\top L_{i,k} > 0$ . Por lo tanto, para el sistema de retroalimentación completo en la Fig. 1, deje que  $V_k$  sea la función de almacenamiento definida como

$$V_k \doteq V_{1,k} + \beta V_{2,k} + \alpha_1 V_{d1,k} + \alpha_2 V_{d2,k} > 0.$$

Entonces, la variación de la función de almacenamiento  $V_k$ , con  $\beta$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  escalares positivos, y sustituyendo (17) y (18) da

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= \Delta V_{1,k} + \beta \Delta V_{2,k} + \alpha_1 \Delta V_{d1,k} + \alpha_2 \Delta V_{d2,k} \\ &\leq -T_k (y_{1,k}^\top y_{1,k} - \gamma_1^2 u_{1,k}^\top u_{1,k} + \rho_1 V_{1,k}) \\ &\quad - \beta T_k (y_{2,k}^\top y_{2,k} - \gamma_2^2 u_{2,k}^\top u_{2,k} + \rho_2 V_{2,k}) \\ &\quad - \alpha_1 L_k \left( -y_{1,k}^\top y_{1,k} + \left( y_{1,k-d_1,k}^\top y_{1,k-d_1,k} \right) \bar{\delta}_1 \right) \\ &\quad - \alpha_2 L_k \left( -y_{2,k}^\top y_{2,k} + \left( y_{2,k-d_2,k}^\top y_{2,k-d_2,k} \right) \bar{\delta}_2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Como ambos sistemas están interconectados en retroalimentación bajo bloques de retardo de tiempo, entonces  $u_{2,k} = y_{1,k-d_1}$  y  $u_{1,k} = -y_{2,k-d_2}$ , y notando que  $\bar{T}_k \leq \min(T_k, L_k)$  (19) se convierte en

$$\begin{aligned} \Delta V_k &\leq -\bar{T}_k \left( \underbrace{(1 - \alpha_1) y_{1,k}^\top y_{1,k}}_{\varepsilon_1} + \underbrace{(\beta - \alpha_2) y_{2,k}^\top y_{2,k}}_{\varepsilon_2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(\alpha_2 \bar{\delta}_2 - \gamma_1^2) y_{2,k-d_2,k}^\top y_{2,k-d_2,k}}_{\varepsilon_3} + \rho_1 V_{1,k} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(\alpha_1 \bar{\delta}_1 - \beta \gamma_2^2) y_{1,k-d_1,k}^\top y_{1,k-d_1,k}}_{\varepsilon_4} + \rho_2 V_{2,k} \right) \\ &\leq -\bar{T}_k \left( \varepsilon_1 y_{1,k}^\top y_{1,k} + \varepsilon_2 y_{2,k}^\top y_{2,k} + \varepsilon_3 y_{2,k-d_2,k}^\top y_{2,k-d_2,k} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_4 y_{1,k-d_1,k}^\top y_{1,k-d_1,k} + \rho_1 V_{1,k} + \rho_2 V_{2,k} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Para asegurar la estabilidad asintótica de los sistemas interconectados entonces  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ , y por lo tanto

$$\varepsilon_1 > 0 : 1 - \alpha_1 > 0 \Rightarrow \alpha_1 < 1 \quad (21)$$

$$\varepsilon_2 > 0 : \beta - \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_2 < \beta \quad (22)$$

$$\varepsilon_3 > 0 : \alpha_2(1 - \delta_2) - \gamma_1^2 > 0, \quad \alpha_2 > \frac{\gamma_1^2}{1 - \delta_2} = \gamma_1^2 \gamma_{d2}^2 \quad (23)$$

$$\varepsilon_4 > 0 : \alpha_1(1 - \delta_1) - \beta \gamma_2^2 > 0, \quad \alpha_1 > \frac{\beta \gamma_2^2}{1 - \delta_1} = \beta \gamma_2^2 \gamma_{d1}^2 \quad (24)$$

Finalmente, usando los límites de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en las ecuaciones (21)–(24), obtenemos los límites para el parámetro  $\beta$  junto con las condiciones para la estabilidad asintótica como

$$\left. \begin{array}{l} \beta \gamma_2^2 \gamma_{d1}^2 < \alpha_1 < 1 \Rightarrow \beta < \frac{1}{\gamma_2^2 \gamma_{d1}^2} \\ \gamma_1^2 \gamma_{d2}^2 < \alpha_2 < \beta \Rightarrow \beta > \gamma_1^2 \gamma_{d2}^2 \end{array} \right\} \gamma_1^2 \gamma_{d2}^2 < \beta < \frac{1}{\gamma_2^2 \gamma_{d1}^2}$$

lo que implica que  $\gamma_1 \gamma_{d1} \gamma_2 \gamma_{d2} < 1$ . Por lo tanto, desde (20) y teniendo en cuenta este último resultado, concluimos que si  $\gamma_1 \gamma_{d1} \gamma_2 \gamma_{d2} < 1$  y ambos sistemas son ZSD, entonces su interconexión en presencia de retrasos de tiempo variables es asintóticamente estable para cualquier  $\rho_1, \rho_2 \geq 0$ .