

TESIS

T. 192

**CRECIMIENTO DE GRIETAS PEQUEÑAS
POR FATIGA EN COMPONENTES CON
CONCENTRADORES DE TENSIÓN**

por

CARPÓFORO VALLELLANO MARTÍN

Ingeniero Industrial por la E.T.S.I.I. de Sevilla

presentada en la

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS INDUSTRIALES**

de la

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del

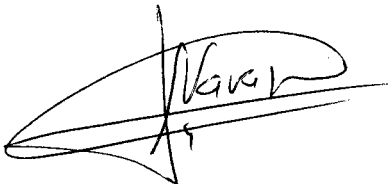
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, diciembre de 1998

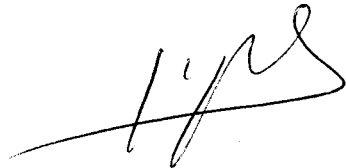
TESIS DOCTORAL

CRECIMIENTO DE GRIETAS PEQUEÑAS POR FATIGA EN COMPONENTES CON CONCENTRADORES DE TENSIÓN

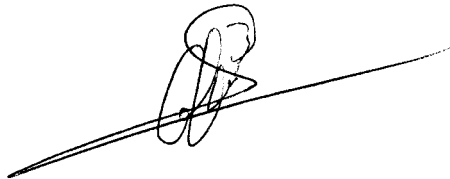
Sevilla, a 21 de diciembre de 1998



Fdo.- A. Navarro Robles
Director de Tesis



Fdo.- J. Domínguez Abascal
Director de Tesis



Fdo.- C. Vallellano Martín
Doctorando

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor D. Alfredo Navarro Robles por su inestimable ayuda, su dedicación y la constante motivación aportada para llevar a buen fin este trabajo.

De igual manera quiero expresar mi profunda gratitud al Profesor D. Jaime Domínguez Abascal por sus valiosos consejos y por brindarme la posibilidad de realizar esta tesis.

También deseo hacer extensivo mi agradecimiento al Profesor D. Javier García-Lomas Jung, a la Profesora Dña. Juana María Mayo Núñez y a todos mis compañeros del Grupo de Ingeniería Mecánica, así como a los profesores y compañeros del Departamento de Estructuras, por su colaboración y estímulo durante la realización de este trabajo.

Por último, agradecer a Dña. María José Borrero Romero su constante apoyo moral y su grata compañía. Y, en especial, agradecer a mis padres el indudable esfuerzo que han realizado para que yo pudiese alcanzar este objetivo.

Sevilla, diciembre 1998

Índice General

Introducción y objetivo	1
1 El fallo por fatiga en materiales metálicos	7
1.1 Antecedentes históricos	8
1.2 El proceso de fatiga	11
1.3 Propagación de grietas por fatiga	14
1.4 Caracterización mediante la Mecánica de la Fractura	17
1.4.1 Mecánica de la Fractura Elástica Lineal	17
1.4.2 Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica	22
1.5 Crecimiento de grietas pequeñas	24
1.5.1 Modelos de crecimiento de grietas pequeñas	31
Bibliografía	41
2 Fatiga en entallas	49
2.1 Caracterización del campo de tensiones en una entalla	50
2.2 Sensibilidad a la entalla	53
2.3 Umbrales de crecimiento de grietas en entallas. Grietas no-propa- gantes	62
2.4 Modelos de los umbrales de crecimiento de grietas en entallas . . .	69
Bibliografía	79

3	Representación de una grieta en un medio infinito mediante dis-	
	locaciones	83
3.1	Formulación general	87
3.2	Desplazamiento relativo entre las caras de la grieta	93
3.3	Tensión en frente de la zona plástica	95
3.4	Resumen	98
	Bibliografía	101
4	Umbral de crecimiento de grietas en componentes sin entallas	103
4.1	El modelo NR de crecimiento de grietas en componentes sin entallas	104
4.2	Umbral microestructural y mecánico. Diagrama de Kitagawa-Takahashi	109
4.3	Ritmo de crecimiento de grieta	123
	Bibliografía	125
5	Una teoría de los límites de fatiga en entallas	129
5.1	Formulación del modelo de grieta en una entalla elíptica	130
5.2	Límite de iniciación de grietas en entallas	140
5.3	Límite de fatiga de un espécimen entallado	155
5.4	Influencia de la plasticidad de la entalla en los umbrales de propa-	
	gación	173
5.4.1	Plasticidad en un espécimen sin entalla	174
5.4.2	Plasticidad en la raíz de la entalla	177
5.4.3	Tamaño de la zona plástica frente a la longitud de grieta	
	no-propagante	181
5.5	Entallas microestructuralmente pequeñas. Defectos en el material .	185
	Bibliografía	193
6	Generalización y Comparación con resultados experimentales	199
6.1	Una expresión más general. Metodología de aplicación	200
6.2	Comparación con resultados experimentales y discusión	208

6.3	Resumen y observaciones	227
	Bibliografía	229
7	Conclusiones y desarrollo futuro	233
A	Número neto de dislocaciones en el dominio	241
B	Expresiones de $f(\zeta)$, $S(\zeta)$ y $\phi(\zeta)$ del modelo NR	243
C	Elasticidad antiplana en variable compleja. Transformación conforme	247
	C.1 Potencial complejo en deformación antiplana	247
	C.2 Potencial complejo de una dislocación de tornillo	249
	C.3 Tensiones en el contorno transformado	250
D	Tamaño de la entalla vs. tamaño microestructural en la iniciación de grietas	253
E	Consideración de medio continuo y homogéneo en la plastificación de la entalla	255

Introducción y objetivo

La mayor parte de los elementos de máquinas presentan, por motivos funcionales o asociados al propio proceso de su fabricación, discontinuidades geométricas, tales como agujeros, cambios de sección, ranuras, marcas superficiales de mecanizado, porosidades, etc. Éstas se denominan de manera genérica entallas y provocan que las tensiones en las proximidades de las mismas sean localmente más elevadas que las que soporta el resto del componente. Bajo la acción de cargas variables con el tiempo, este efecto de concentración de tensiones potencia la aparición y el crecimiento de grietas por fatiga en el material que pueden acabar por arruinar prematuramente la pieza.

El fenómeno de la reducción de resistencia a fatiga de especímenes con concentradores de tensión es conocido de antiguo, y se le ha dedicado, por su claro interés práctico, una gran atención y esfuerzo investigador. Enunciado de manera simple, el problema que se plantea sería el siguiente: determinar la tensión cíclica que puede soportar un componente entallado sin que se fracture en función del tipo de entalla y del comportamiento a fatiga del material.

Los primeros trabajos en este sentido plantean descripciones globales del proceso de daño por fatiga en la entalla, necesariamente fenomenológicas. La idea que subyace en estos estudios es que, una vez que se nuclea una grieta en la raíz del concentrador, ésta siempre se propaga hasta provocar el fallo del componente. El límite de fatiga de un espécimen entallado se asocia, entonces, con la máxima tensión aplicada por debajo de la cual no se nuclea ninguna grieta en el mate-

rial, proponiéndose modelos semi-empíricos para evaluar la resistencia a fatiga que relacionan esencialmente la concentración de tensiones en la entalla y el límite de fatiga del material. Son los que hoy conocemos como Métodos Clásicos del cálculo a fatiga en entallas, ampliamente usados en la práctica, y de los cuales se derivan conceptos tan familiares en este área como el factor de reducción de resistencia a fatiga de la entalla (K_f) y el índice de sensibilidad a la entalla (q).

Sin embargo, la concepción del límite de fatiga en entallas cambia radicalmente cuando se pone de manifiesto que, incluso para tensiones aplicadas inferiores a dicho límite, existen grietas (típicamente del orden de varias centenas de micras) en la raíz de la entalla, pero que éstas no son capaces de propagarse y, por tanto, no causan la rotura de la pieza. A dichas grietas se les denomina tradicionalmente *grietas no-propagantes*. Así, el evento crucial que determina la resistencia a fatiga de un componente entallado no es la nucleación de una microgrieta, sino la capacidad que ésta tiene para crecer o no a través del material sin detenerse.

Para abordar este problema se hace necesario estudiar cuales son los factores que gobiernan la propagación de una grieta en el fondo del concentrador, desde sus primeros estadios hasta que ésta sea capaz de producir la rotura del componente. Se trata, a la luz de del conocimiento actual, de describir el proceso de crecimiento por fatiga de una grieta “pequeña”, sujeta a la acción de un gradiente de tensiones relativamente fuerte como consecuencia de la entalla.

Es bien conocido que durante el período de grieta pequeña el comportamiento de ésta es fuertemente sensitivo a la microestructura del material. La interacción de la grieta con las barreras presentadas por los bordes de grano, la influencia de las diferentes orientaciones cristalográficas de los granos por los que crece, el efecto de la resistencia de las diferentes fases del material, etc., son factores determinantes en el crecimiento de las grietas pequeñas. Su comportamiento no puede ser satisfactoriamente reproducido mediante descripciones esencialmente macroscópicas, como las que plantean los modelos basados en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal o Elasto-Plástica. La base de éstos es considerar el material como un medio

continuo y homogéneo y, por tanto, obvian necesariamente la influencia de la microestructura en la fase de microgrieta.

Recientemente han aparecido en la literatura algunos modelos que plantean descripciones del crecimiento de grietas por fatiga a un nivel mesoscópico, considerando el material como un medio heterogéneo e incorporando la interacción de la grieta con las sucesivas barreras al deslizamiento plástico del material (e.g. bordes de grano). Tales modelos permiten dar una aproximación más realista del proceso físico de propagación de la grietas pequeñas y conforman lo que algunos autores han denominado Mecánica de la Fractura Microestructural. La herramienta básica para modelar la grieta es la teoría de dislocaciones.

El objetivo del presente trabajo es incorporar las bases teóricas de estas últimas aproximaciones para reproducir el proceso de crecimiento de grietas en entallas, de tal forma que permita recoger tanto la influencia de la microestructura del material durante la fase de microgrieta como la influencia del gradiente de tensiones originado por el concentrador. El modelo propuesto deberá permitir determinar bajo qué condiciones una microgrieta en la raíz de la entalla es capaz de crecer hasta llegar a la fase de grieta grande y provocar el fallo por fatiga del componente, o, por el contrario, cuándo ésta va simplemente a quedarse parada, convirtiéndose en no-propagantes. En resumen se trata, de plantear una teoría, al amparo del conocimiento actual sobre el crecimiento de grietas pequeñas, que pueda dar una explicación unificada a los fenómenos que incurrir en la fatiga en entallas, a tensiones inferiores o del orden del límite de fatiga del componente.

Esta tesis está estructurada en siete capítulos:

En el Capítulo 1 se presenta una breve revisión histórica sobre la evolución del conocimiento de la fatiga en materiales metálicos. El interés está centrado en describir las características que diferencian el crecimiento de las grietas pequeñas frente a las grietas grandes, así como de las técnicas y aproximaciones que tradicionalmente se usan para modelar el crecimiento en ambos regímenes.

El Capítulo 2 está dedicado a la fatiga en entallas. Se presentan las evidencias

experimentales y las teorías clásicas y los modelos actuales para el cálculo de la resistencia a fatiga de componentes entallados.

La base matemática para el modelo desarrollado en esta tesis la constituye la representación de una grieta mediante una distribución de dislocaciones infinitesimales, que se presenta en el Capítulo 3. Se desarrolla aquí una formulación compacta para el modelado de una grieta rectilínea en un medio infinito, que engloba los casos en que la distribución de dislocaciones sea acotada y no acotada respectivamente en los extremos del dominio. Esto se hace en el caso general en que la zona plástica de la grieta se extienda sobre un número arbitrario de regiones con diferentes tensiones efectivas sobre las dislocaciones.

En el Capítulo 4 se realiza un análisis detallado del modelo de crecimiento de grietas por fatiga propuesto por Navarro y de los Ríos. Se discuten las condiciones umbrales para el crecimiento de una grieta en un espécimen sin entalla y se propone cómo enmarcar éstas en el modelo anterior.

El Capítulo 5 comienza con el desarrollo de un modelo de crecimiento de grieta en la entallas haciendo uso de la teoría de dislocaciones. Por simplicidad, el tipo de entalla escogido es una entalla elíptica en un medio semi-infinito, sometida a un estado antiplano de tensiones. A través de las técnicas de transformación conforme se reducirá la configuración anterior al caso de un espécimen sin entalla, donde el problema será fácilmente resoluble aplicando los resultados obtenidos en el Capítulo 3.

Se estudian las condiciones mínimas necesarias (condiciones umbrales) para la propagación de una grieta en la raíz de la entalla, lo que permitirá predecir la aparición de grietas no-propagantes, así como interpretar los límites de iniciación y de propagación hasta el fallo, tradicionalmente referidos en la literatura, en términos del crecimiento de grietas pequeñas. Se analizará también el efecto de la microestructura del material en ambos casos.

Asimismo, se desarrolla un modelo de plastificación en la raíz de la entalla desde un punto de vista microestructural, es decir, sin considerar el material continuo y

homogéneo. Éste permitirá evaluar la influencia de la plasticidad desarrollada por la entalla en la aparición de grietas no-propagantes.

Finalmente, como aplicación natural del modelo planteado, se realiza una discusión sobre la influencia de pequeños defectos o microentallas en la resistencia a fatiga del material.

En el Capítulo 6 se plantea un primer paso para la generalización del modelo anterior a geometrías de entallas diferentes a la elíptica y para la aplicación práctica de las expresiones obtenidas a componentes sometidos a cargas axiales. Las predicciones del modelo actual se comparan con resultados experimentales recopilados de la literatura, en un amplio rango de geometrías de entallas y diferentes tipos de materiales.

Por último, el Capítulo 7 recoge las conclusiones aportadas por el presente estudio, así como las posibles vías de mejora y de desarrollo para trabajos futuros.

Capítulo 1

El fallo por fatiga en materiales metálicos

En términos generales el fallo por fatiga de un elemento mecánico sometido a cargas cíclicas es consecuencia de la aparición de pequeñas grietas en el material, generalmente en la superficie, que progresan a través de él reduciendo la capacidad portante de la pieza hasta provocar su rotura.

A lo largo del presente capítulo se hará una breve revisión del estado del conocimiento del fenómeno de la fatiga en componentes metálicos sometidos a cargas de amplitud constante. Se analizarán también los métodos y aproximaciones tradicionalmente empleadas para la estimación de la vida a fatiga de piezas sin concentradores de tensión.

Las sustanciales diferencias observadas en el proceso de propagación de una grieta en función de su tamaño hacen necesario la distinción entre dos períodos de crecimiento: el crecimiento de grietas “pequeñas” y el crecimiento de grietas “grandes”. Se estudiarán las principales características del comportamiento de la grieta en cada régimen y las causas que las provocan. El interés se centrará especialmente en la fatiga alto número de ciclos y en la fase de grieta pequeña,

dado que es ahí donde se consume la mayor parte de la vida del componente. Asimismo, se discutirán los modelos más significativos propuestos en la literatura para la descripción de ambos períodos y su rango de aplicación.

La comprensión de los mecanismos que rigen el comportamiento a fatiga de las grietas en componentes sin entallas, especialmente en los estadíos iniciales de crecimiento, es imprescindible para abordar el estudio del proceso de crecimiento de grietas en piezas con concentradores de tensión, el cual es el objetivo de la presente tesis.

1.1 Antecedentes históricos

A lo largo de la historia reciente han sido numerosos los fallos de elementos de máquinas o estructuras sometidos a cargas variables con el tiempo. Una de las características comunes es que éste se producía sin una marcada deformación y a niveles de carga muy bajos en comparación con las cargas estáticas admisibles por el componente, indicando que la variación de la carga inducía un efecto dañino adicional al propio nivel de la misma. Desde aproximadamente 1840 dicho fenómeno se conoce como fallo por *fatiga* y es el responsable de más de un 50% de los fallos en componentes mecánicos.

Los primeros intentos de estudiar el efecto de solicitaciones cíclicas en elementos mecánicos datan de 1829, cuando el ingeniero de minas W. Albert [1] sometió cadenas elevadoras de material a sucesivas cargas y descargas.

Entre 1850 y 1870 August Wöhler [2] realizó numerosos ensayos para determinar las causas que provocaban el fallo por fatiga de los ejes de las ruedas de ferrocarril. Se diseñó para ello la primera máquina de flexión rotativa. Tales experimentos son considerados como la primera investigación sistemática en este campo. Wöhler extrajo dos sorprendentes conclusiones como resultado de este trabajo:

a) La resistencia a fatiga de un componente dependía fundamentalmente del

número de ciclos de carga y del rango de tensiones aplicadas, más que de la tensión máxima alcanzada.

- b) Los aceros y aleaciones de hierro parecían presentar una tensión límite por debajo de la cual no se producía la rotura, por grande que fuese el número de ciclos aplicados.

A raíz de estos trabajos se introducen dos importantes conceptos en el campo de la fatiga: el límite de fatiga y la curva S-N (tensión vs. número de ciclos). Asimismo, se pone de manifiesto la influencia de los concentradores de tensión, tales como cambios bruscos de sección, agujeros, etc, y del tratamiento térmico del material en la resistencia a fatiga.

Posteriormente, Gerber [3], Goodman [4] y Soderberg [5, 6] investigaron la influencia en el fallo por fatiga de cargas estáticas superpuestas a las cargas cíclicas. De sus trabajos se derivaron las expresiones empíricas que llevan sus nombres y que aún en nuestros días son empleadas para la estimación del efecto de las tensiones medias en el límite de fatiga del material.

A finales del siglo pasado y principios de éste la aparición de fallos por fatiga proliferó enormemente, coincidiendo con el desarrollo de las turbinas de vapor, los motores de combustión interna y el nacimiento de la industria aeronáutica, lo que propicia un mayor interés por el conocimiento de este fenómeno.

Durante la segunda década de este siglo Griffith [7] investigó sobre la fractura de cristales, estableciendo su bien conocida teoría sobre el crecimiento inestable de grietas en materiales frágiles. Su aportación fue de gran importancia y supuso uno de los pilares básicos de la Mecánica de la Fractura.

La primera mitad de este siglo fue prolífica en el estudio experimental del comportamiento de los materiales, relacionándose la resistencia a fatiga con factores tales como la geometría y el tamaño de las piezas, acabados superficiales, condiciones ambientales y estructura metalográfica. Dichos resultados configuraron lo que actualmente se denomina como Métodos Clásicos del Diseño a Fatiga.

En la década de los cuarenta Miner [9] formula matemáticamente un criterio

lineal de acumulación de daño por fatiga respaldado por los trabajos de Palmgren en 1924 [8] y conocido como regla de Palmgren-Miner. Esto permitió el estudio del efecto de cargas irregulares en la resistencia a fatiga. Asimismo, comienzan también los primeros estudios estadísticos del fenómeno de la fatiga, entre los que destacan los trabajos realizados por Weibull [10,11].

Un importante avance se produjo a mitad de siglo cuando George Irwin [12], haciendo uso de los métodos analíticos de Westergaard, introdujo el concepto de Factor de Intensidad de Tensiones (K) para cuantificar el campo de tensiones elástico alrededor de una grieta. Su contribución marcó un punto de inflexión en el estudio de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, sirviendo de base para las posteriores teorías de crecimiento de grietas por fatiga.

A principios de los sesenta, Coffin y Manson [13,14] investigaron el comportamiento a fatiga a bajo número de ciclos, relacionando la amplitud de la deformación plástica aplicada con el número de ciclos de vida de la pieza. Nació así la conocida curva $\epsilon - N$ como una alternativa a la habitual curva $S - N$ en fatiga a alto número de ciclos.

Varios autores, entre otros cabe destacar a Neuber [15], Peterson [16] y Stowell [17], propusieron determinados métodos para el análisis de la vida a fatiga y el cálculo de las deformaciones plásticas en piezas entalladas.

En 1963, Paris [18] correlacionó la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga da/dN con el rango del factor de intensidad de tensiones ΔK , mediante su famosa ley potencial. Dicha relación, conocida como ley de Paris, ha sido la base de numerosos modelos de crecimiento, proporcionando predicciones muy aceptables para grietas de tamaño grande, generalmente superiores a un milímetro para los materiales usuales en ingeniería.

En 1975, Pearson [19] puso de manifiesto que el ritmo de crecimiento de pequeños defectos, típicamente del orden 10 a 100 μm , era varias veces superior al que cabía esperar utilizando las expresiones derivadas de la ley de Paris y la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Posteriormente, Kitagawa y Taka-

hashi [20] estudiaron las condiciones necesarias para la propagación de una grieta en función de su longitud inicial, estableciendo que, para grietas por debajo de un determinado tamaño, los métodos basados en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal no eran apropiados para caracterizar el proceso de crecimiento.

Desde mediados del siglo pasado hasta nuestros días han sido numerosos los logros encaminados a una mejor comprensión del fenómeno de la fatiga de materiales. El desarrollo de nuevas máquinas de ensayo, sistemas de seguimiento y análisis de grietas han permitido un mayor rendimiento en la experimentación. No obstante, pese al gran esfuerzo y dedicación de tantos investigadores, éste es un campo que sigue manteniendo numerosas incógnitas. Además, el vertiginoso avance tecnológico, que lleva aparejado una mayor complejidad en el diseño y en las sollicitaciones de carga, unido al empleo de nuevos materiales hace que este área de conocimiento esté en continua expansión.

1.2 El proceso de fatiga

El fallo por fatiga es consecuencia de la formación y posterior crecimiento de grietas en el material. El fallo final de la pieza se produce cuando una de estas grietas se hace dominante, o se produce la coalescencia de varias grietas pequeñas, alcanzándose un tamaño crítico de defecto por encima del cual el ligamento que queda sin fracturar en el elemento no es capaz de soportar la carga aplicada.

Tradicionalmente se ha considerado que el proceso de rotura por fatiga consta de dos fases: nucleación de la grieta y propagación de ésta hasta el fallo [21]. Sin embargo, las áreas a que se refieren estas denominaciones dentro de la vida de la grieta varía ampliamente dependiendo de la definición del final del período de nucleación.

Desde un punto de vista ingenieril, se ha establecido que la fase de nucleación comprende el período en que la grieta es suficientemente pequeña como para ser detectada con los métodos usuales de inspección, esto es, hasta que la grieta tiene

longitudes del orden del milímetro. A partir de aquí, el resto de la vida corresponde a la fase de propagación. No obstante, esta demarcación es arbitraria y carece totalmente de base física. Así, al amparo de la evidencia experimental, la tendencia actual es considerar la etapa de nucleación como el período en el que aún no existen grietas en el material, entendidas éstas como rotura de vínculos a nivel atómico, y la fase propagación como el período de crecimiento desde que aparecen las primeras microgrietas hasta que se produce el fallo de la pieza. En esta tesis se utilizará además el término iniciación en un sentido bien preciso que será introducido más adelante.

La formación de microgrietas por fatiga se produce invariablemente en defectos o discontinuidades del material, preferentemente en la superficie del componente. Tales defectos, como marcas superficiales, inclusiones, poros, puntos triples de intersección de bordes de grano, etc, provocan una concentración local de tensiones que potencian la aparición de grietas.

Existen numerosos mecanismos que pueden favorecer la nucleación de grietas en el material. Entre los más documentados se encuentran la formación de grietas en bandas de deslizamiento persistentes, por fallo intergranular y a partir de partículas de segunda fase, inclusiones no metálicas u óxidos.

Se ha constatado que en la mayoría de los materiales metálicos sometidos a carga cíclica la deformación plástica se concentra en determinadas bandas, denominadas bandas de deslizamiento persistentes. Las observaciones de Forsyth [22, 23] en especímenes de Al-Cu y de Cottrell y Hull [24] en especímenes de Cu han revelado que dichas bandas de deslizamiento producen en la superficie de la pieza numerosas extrusiones y/o intrusiones de material, las cuales actúan como microentallas, facilitando el inicio de una grieta. Según Wood [25] estas protuberancias aparecen como consecuencia de un cierto grado irreversibilidad en el movimiento de las dislocaciones en los distintos planos de la banda de deslizamiento y que dicha irreversibilidad está significativamente afectada por las condiciones ambientales.

La formación de microgrietas en los límites de grano o fallo intergranular ocurre

generalmente debido a la rotura o degradación del material en los límites de grano. Los factores más usuales para esto son: rotura por incompatibilidad en la deformación de granos adyacentes, por fragilización de los bordes de grano debida a ciertos ambientes agresivos y por cavitación de dicha zona a alta temperatura. La nucleación de grietas desde partículas de segunda fase, inclusiones no metálicas u óxidos es en general debida a la incompatibilidad de deformaciones entre dichas partículas y la matriz metálica.

En términos generales, el mecanismo de nucleación preferente dependerá principalmente del tipo de material, del tratamiento termo-mecánico y del tipo de sollicitación a la que esté sometido el componente. Aún así, es usual que varios de estos mecanismos coexistan y compitan entre sí durante el proceso de fatiga.

Por otra parte, de acuerdo con Forsyth [26], la fase de propagación puede dividirse en dos etapas:

Etapa I: También denominada período de crecimiento cristalográfico. Se corresponde con el estadio inicial del crecimiento, en el que la grieta es del orden del tamaño microestructural característico (e.g. el tamaño de grano). En dicha etapa el crecimiento está altamente influenciado por la microestructura del material y se produce fundamentalmente en los planos de deslizamiento donde la tensión tangencial es máxima.

Etapa II: En esta fase el tamaño de la grieta es varias veces superior que el tamaño microestructural característico. El plano de propagación de la grieta se sitúa generalmente perpendicular a la dirección de la tensión principal máxima.

Según lo anterior, la vida a fatiga de un componente se calcula como la suma del número de ciclos empleados en las fases de iniciación y propagación. El peso relativo de cada una de ellas depende en gran medida del nivel de la carga aplicada. En términos generales, a mayor nivel de carga aplicada la duración relativa de la fase de nucleación es menor que la de propagación. Asimismo, a bajos niveles de

carga, es decir, fatiga a alto número de ciclos, es en la etapa I en la que se consume la mayor parte de la vida a fatiga del espécimen. Mientras que, por el contrario, en fatiga a bajo número de ciclos, es decir, a altas cargas, la etapa II predomina frente a las demás.

En los cálculos actuales de vida a fatiga se tiende a considerar que el período de nucleación o no existe o tiene una duración muy corta, ya que las microgrietas son rápidamente iniciadas a partir de los defectos inherentes del material. Se supone, por tanto, que la grieta comienza a crecer casi desde el primer ciclo de carga [27] y que todo el proceso de fatiga es, en esencia, un proceso de propagación de grietas desde que éstas son nucleadas hasta que se produce el fallo de la pieza. Fruto de esta relativamente nueva filosofía es, por ejemplo, el cambio de concepción sobre el concepto de límite de fatiga. Éste venía siendo considerado como la tensión por debajo de la cual no aparecían grietas en el material. Sin embargo, hoy en día es entendido, y así lo corrobora la experimentación, como el nivel de tensión por debajo del cual ninguna de las grietas nucleadas en el material es capaz de propagarse más allá de un cierto tamaño, determinado éste por la propia microestructura del material [28, 29].

1.3 Propagación de grietas por fatiga

Las primeras investigaciones para caracterizar el proceso de propagación se llevaron a cabo en especímenes que contenían defectos “grandes”, con longitudes típicas de varios milímetros o más, fácilmente observables en el laboratorio. En estas circunstancias, el comportamiento y el ritmo de crecimiento fue satisfactoriamente descrito empleando la Mecánica de la Fractura. Sin embargo, se comprobó que cuando los resultados anteriores se intentaban aplicar al estudio del crecimiento de defectos de “pequeño” tamaño, como son generalmente los que aparecen en elementos de máquinas, las predicciones que se obtenían no eran aceptables. Éstos presentaban un comportamiento radicalmente distinto al observado en los defectos

de mayor tamaño, requiriendo, por tanto, un estudio diferente al que se había venido realizando hasta entonces.

Se considera que una grieta es grande cuando su tamaño es varias veces superior al tamaño microestructural característico de material (e.g. el tamaño de grano) y al tamaño de la zona de deformación plástica que la grieta genera. La única longitud característica distinguible para la caracterización del crecimiento es el tamaño de la propia grieta, pudiendo considerarse que ésta se propaga en un medio continuo y homogéneo. En esta situación, sí es apropiado utilizar los conceptos de la Mecánica de la Fractura para describir el proceso de propagación.

Por el contrario y en términos generales, se entiende por grieta pequeña aquella en la que su tamaño no permite obviar la heterogeneidad del material. Las propiedades microestructurales y las propiedades mecánicas locales tienen una importante influencia en su crecimiento, no siendo posible una descripción de dicho proceso mediante los métodos clásicos de Mecánica de la Fractura.

Una posible clasificación, sugerida por Suresh y Ritchie [30], distingue cuatro tipos de grietas pequeñas:

1. Grietas Microestructuralmente Pequeñas o Microgrietas: Son aquellas cuyo tamaño es comparable a la dimensión microestructural característica, es decir, del orden del espacio libre entre las barreras microestructurales.
2. Grietas Mecánicamente Pequeñas: Se denominan así a las grietas en especímenes sin concentradores de tensión cuya zona plástica es comparable con su propio, o también a aquellas que se encuentran inmersas por entero en la zona plástica generada por una entalla.
3. Grietas Físicamente Pequeñas: Son grietas que, aun siendo su tamaño varias veces mayor que la dimensión microestructural característica o que su zona plástica, su longitud es típicamente menor de 1 ó 2 milímetros.
4. Grietas Químicamente Pequeñas: Estas grietas pueden ser nominalmente grandes pero, por debajo de una determinada longitud, exhiben una anomalía

en su crecimiento debido a influencia de factores ambientales (e.g. la corrosión).

Una característica común a todas las grietas pequeñas es que exhiben ritmos de crecimiento mayores a los predichos extrapolando los resultados del crecimiento de grietas grandes [30,31]. Además, en los estadios iniciales de crecimiento se ha observado que las grietas microestructuralmente pequeñas presentan una progresión oscilante debida fundamentalmente a la interacción de ésta con las barreras microestructurales del material. Sus velocidades de crecimiento comienzan siendo relativamente elevadas, pero a medida que se aproximan a los bordes de grano sufren una pronunciada deceleración. Dependiendo del nivel de carga aplicada y de la resistencia del obstáculo, dichas microgrietas pueden dejar de crecer o simplemente sufrir una demora, acelerándose una vez que el obstáculo ha sido superado. Este patrón de aceleraciones y deceleraciones sucesivas se va desvaneciendo a medida que la grieta progresa en el material, hasta ser casi imperceptible para longitudes de grieta del orden de 10 a 20 diámetros de grano. A partir de este instante la grieta presenta un ritmo de crecimiento relativamente continuo e insensible a la microestructura, propio de una grieta grande. Como consecuencia de las pronunciadas deceleraciones, en las etapas iniciales, gran parte de la vida a fatiga del espécimen transcurre en el período de grieta pequeña, siendo dicha fase de gran interés a la hora de estimar la vida total de la pieza.

Las marcadas diferencias en entre el comportamiento de las grietas pequeñas y las grietas grandes ha requerido, tradicionalmente, el uso de técnicas diferentes para describir el crecimiento en ambos regímenes. El conocimiento de tales técnicas y modelos, así como su rango de aplicación, es imprescindible para un análisis correcto del proceso global de propagación de las grietas por fatiga.

1.4 Caracterización mediante la Mecánica de la Fractura

Una de las aplicaciones más usuales de la teoría de la Mecánica de la Fractura es la caracterización del crecimiento de grietas por fatiga.

La hipótesis principal en la que se apoya dicha teoría es la de homogeneidad del material, la cual introduce intrínsecamente una restricción al tipo de grieta para la que es aplicable. En efecto, para poder considerar que el medio en el que se propaga una grieta es continuo y homogéneo, el tamaño de dicha grieta debe ser varios órdenes de magnitud superior a la dimensión microestructural característica, lo que se corresponde con grietas grandes según la clasificación anterior. En este sentido, el análisis de la propagación de grietas mediante las técnicas tradicionales de Mecánica de la Fractura, entiéndase Elástica Lineal o Elasto-Plástica, está sólo justificado en el régimen de crecimiento de grietas grandes.

1.4.1 Mecánica de la Fractura Elástica Lineal

El primer paso para el estudio del ritmo de crecimiento de una grieta mediante la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) es la descripción del campo de tensiones y deformaciones alrededor del vértice de la grieta.

Para ello, consideremos un sólido con comportamiento elástico y lineal que contiene una grieta. La Figura 1.1 muestra los tres modos de apertura posibles, dependiendo del tipo de desplazamiento relativo entre las caras de la grieta:

- Modo I: Los flancos de la grieta se separan uno respecto del otro. También llamado modo de tracción.
- Modo II: Las caras de la grieta deslizan perpendicularmente al borde de la misma. Modo de deslizamiento tangencial en el plano.
- Modo III: También llamado deslizamiento tangencial fuera del plano. Los flancos de la grieta deslizan paralelamente al frente de la grieta.

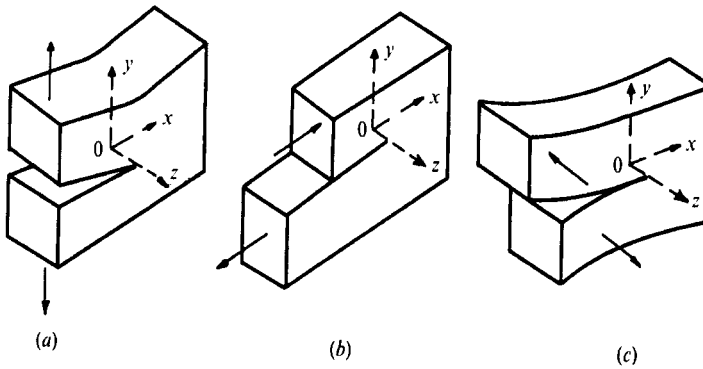


Figura 1.1: Modos de apertura de grieta: (a) Modo I, (b) Modo II y (c) Modo III

Para cualquiera de estos modos, el campo de tensiones próximo al frente de la grieta presenta una singularidad justo en el vértice de ésta. Dicha singularidad es caracterizada mediante un escalar, que recibe el nombre de Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), el cual es función de la carga aplicada, la longitud de la grieta y la geometría de la pieza. Así, por ejemplo, para una grieta en modo I el campo de tensiones σ_{ij} en las proximidades del pico es [12, 32]

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} K_I f_{ij}(\theta) + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (1.1)$$

con

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} K_I f_{ij}(\theta) \quad (1.2)$$

donde r y θ son coordenadas polares centradas en el vértice de la grieta, f_{ij} son funciones adimensionales de θ y K_I es el FIT en Modo I, el cual se suele expresar como

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1.3)$$

donde a es la longitud de grieta e Y es un factor que depende de la geometría del espécimen y de la propia grieta. Nótese que formalmente la expresión (1.2) tiende

a infinito cuando $r \rightarrow 0$, reflejando, como se ha mencionado, la singularidad en el campo de tensiones.

Expresiones análogas a (1.1) y (1.3) se obtienen también para una grieta sometida a tensión tangencial pura (Modos II) y tensión antiplana (Modo III).

Siempre que pueda aceptarse que el anterior campo asintótico de tensiones domina alrededor del vértice de la grieta, en una región grande comparada con la dimensión microestructural característica del material, podrá considerarse que la distribución local de tensiones está biunívocamente caracterizada por el factor de intensidad de tensiones K .

De acuerdo con Paris y Erdogan [18], dado que el FIT proporciona una descripción completa del estado tensional alrededor del pico de la grieta, éste debe también controlar su ritmo de crecimiento. Dicha idea se materializa en la conocida ley de Paris, que expresa el incremento de longitud de grieta por ciclo como

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (1.4)$$

donde C y m son constantes a determinar experimentalmente para cada material y condiciones de carga. ΔK es el rango de variación del FIT en un ciclo de carga, definido como $\Delta K = K_{max} - K_{min}$.

La Figura 1.2 muestra la evolución típica de la velocidad de crecimiento de grieta frente a ΔK en materiales metálicos. Como se aprecia, el ritmo de crecimiento presenta una forma sigmoideal, distinguiéndose tres regiones. Una primera zona (Región A) asociada con la existencia de un rango del FIT umbral $\Delta K_{th\infty}$, en la cual el incremento medio de longitud de grieta por ciclo es del orden, o menor, del espacio interatómico del material (10^{-8} mm/ciclo). Para valores de ΔK inferiores a $\Delta K_{th\infty}$ una grieta de las tipificadas como grandes no se propaga o al menos su crecimiento es indetectable. Asimismo, se ha observado también que para valores ligeramente superiores al FIT umbral el crecimiento es intermitente, existiendo una gran influencia de la microestructura [33, 34]. Seguida a ésta se encuentra una región (Región B) donde existe un aumento progresivo del ritmo de crecimiento al aumentar ΔK . Esta zona es conocida como región de Paris, y la

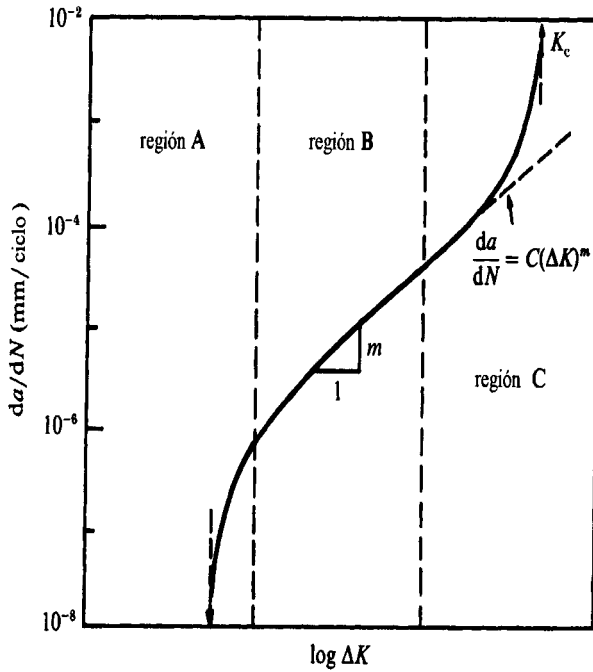


Figura 1.2: Ritmo de crecimiento de grieta vs. ΔK

velocidad de crecimiento exhibe un comportamiento cuasi-lineal, adecuadamente descrito mediante la ley de Paris. Por último, se distingue una zona (Región C) en la que la velocidad de crecimiento se incrementa rápidamente hasta causar el fallo del componente. Éste se produce cuando el valor máximo del FIT (K_{max}) alcanza un cierto valor crítico K_C , denominado tenacidad a fractura del material. K_C es una característica del material y representa el máximo FIT que una grieta puede soportar bajo carga estática antes de propagarse inestablemente.

Existen en la literatura numerosos modelos empíricos y semi-empíricos más complejos que la ley de Paris tratando de incorporar el comportamiento de la grieta en las regiones A y C. Entre otros caben destacar las expresiones de Forman [35]

y Walker [36]. No obstante, la idea básica que es interesante resaltar de todas las aproximaciones basadas en la MFEL es el empleo del FIT como parámetro principal para describir el proceso de crecimiento de la grieta. Esto lleva aparejado el hecho de que, independientemente de la longitud de la grieta y de valor de la carga, dos grietas en especímenes del mismo material que presenten el mismo ΔK tengan el mismo ritmo de propagación. En otras palabras, según la descripción de la MFEL la semejanza física del proceso de crecimiento de una grieta está únicamente determinada por el parámetro ΔK (para un mismo material).

Como veremos más adelante, uno de los factores por el que no será adecuado hacer una descripción del comportamiento de la grietas pequeñas empleando exclusivamente el FIT será la pérdida de dicha semejanza física en este período.

Una de las principales limitaciones al uso de la MFEL es que debe asegurarse un estado de plastificación de pequeña escala en el frente de la grieta. Como se ha comentado, el campo de tensiones presenta formalmente una singularidad infinita justo en el pico de la grieta. Sin embargo, en un material real las tensiones están limitadas por la producción de deformación plástica, relajando la singularidad y apareciendo un cierta zona plástica en los alrededores del vértice de la grieta. Una estimación del tamaño r_y de dicha zona en el caso de una grieta bajo carga estática puede obtenerse mediante la siguiente expresión

$$r_y \approx \frac{1}{\alpha\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (1.5)$$

donde σ_y es el límite de fluencia del material y siendo $\alpha = 1$ para tensión plana o $\alpha = 3$ en deformación plana.

Siempre que el tamaño de la zona plástica sea pequeño comparado con el tamaño de la grieta y las dimensiones globales del cuerpo (típicamente $r_y < a/10$), puede aceptarse que el campo de tensiones en el vértice de la grieta difiere en términos de segundo orden respecto del campo elástico representado por K .

1.4.2 Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica

Cuando el tamaño de la zona plástica alrededor del vértice de la grieta es comparable con el tamaño de la propia grieta, es decir, cuando se viola la condición de plastificación a pequeña escala, el uso del FIT no es apropiado para describir el campo local de tensiones. En este caso, la distribución de tensiones en el frente de la grieta se debe calcular haciendo uso de la teoría de la plasticidad, cuya aplicación al estudio de la fractura de materiales se conoce como Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica (MFEP).

Dos de los conceptos más aceptados para la descripción del comportamiento de grietas a fatiga en estas circunstancias son la Integral J y el desplazamiento de apertura en el pico de la grieta (CTOD, Crack Tip Opening Displacement).

Suponiendo un material con endurecimiento del tipo potencial $\sigma \propto \epsilon_p^n$, la expresión del campo local de tensiones y deformaciones viene dada por la singularidad de Hutchinson-Rice-Rosengren (HRR) [37, 38],

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{E' J}{\sigma_y^2 r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sigma_y f'_{ij}(\theta, n) \quad (1.6)$$

$$\epsilon_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{E' J}{\sigma_y^2 r} \right)^{\frac{1}{n+1}} f''_{ij}(\theta, n) \quad (1.7)$$

donde n es el exponente de endurecimiento, $E' = E$ (Módulo de Young) en tensión plana y $E' = E/(1+\nu^2)$ en deformación plana, σ_y es el límite de fluencia del material, y f'_{ij} y f''_{ij} son funciones adimensionales. J es la integral de una determinada función a lo largo de cualquier camino que rodee el vértice de la grieta desde un flanco hasta el opuesto y representa la tasa de liberación de energía de deformación en un medio elástico no lineal que contiene una grieta [39]. Al igual que K , el parámetro J caracteriza de forma única el campo de tensiones en las proximidades del vértice de la grieta en el régimen elasto-plástico. Se puede comprobar que en el caso en que prevalezcan las condiciones de plastificación a pequeña escala, J coincide con la tasa de liberación de energía de deformación en un sólido elástico

lineal (G) y se relaciona directamente con K según la expresión

$$J = G = \frac{K^2}{E'} \quad (1.8)$$

Haciendo uso de lo anterior, Dowling y Begley [40,41] propusieron una correlación para la velocidad de crecimiento de grietas en régimen elasto-plástico similar a la ley de Paris,

$$\frac{da}{dN} = C \Delta J^m \quad (1.9)$$

donde ΔJ es el rango de variación de la Integral J para un ciclo de carga.

Otra alternativa para cuantificar la intensidad del campo de tensiones elasto-plástico en el frente de grieta es utilizar el CTOD (δ_t), que representa el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta justo en el frente de ésta. Dada la dificultad experimental que supone medir este parámetro, una alternativa práctica es calcular δ_t como la distancia entre los puntos de los flancos superior e inferior de la grieta deformada donde interceptan dos líneas trazadas a 45° desde el vértice de ésta. Así, δ_t se puede expresar como

$$\delta_t = d_n \frac{J}{\sigma_y} \quad (1.10)$$

donde d_n es un factor de proporcionalidad que depende de la ley de endurecimiento del material y que suele variar entre 0.3 y 1. Si la plastificación es pequeña, δ_t se puede escribir en función del FIT

$$\delta_t \propto \frac{K^2}{\sigma_y E'} \quad (1.11)$$

Por analogía con la ley de Paris, la velocidad de crecimiento se expresa ahora como una función del rango de δ_t durante un ciclo de carga

$$\frac{da}{dN} = C \Delta \delta_t^m \quad (1.12)$$

En casos más extremos de plastificación, donde las cargas están por encima del límite de fluencia del material, se han propuesto otras leyes de crecimiento que

incorporan directamente el rango de tensiones o de deformaciones y la longitud de grieta como parámetros independientes. Por ejemplo, Tomkins [42] propone una ley de crecimiento de la forma

$$\frac{da}{dN} = C\Delta\sigma^m a \quad (1.13)$$

De la misma forma Solomon [43] e Ibrahim [44] proponen una expresión similar a la anterior donde $\Delta\sigma$ es sustituido por el rango de deformación plástica

$$\frac{da}{dN} = C\Delta\epsilon_p^m a \quad (1.14)$$

En general, la mayoría de las expresiones derivadas de la Mecánica de la Fractura, bien sea Elástica lineal o Elasto-Plástica, o las expresiones para fatiga por encima del límite elástico, predicen un ritmo de crecimiento que se incrementa con la longitud de la grieta, lo cual está de acuerdo con la evidencia experimental en propagación de grietas grandes. No obstante y como se verá en lo que sigue, dichas aproximaciones no son apropiadas para describir el comportamiento de las grietas pequeñas.

1.5 Crecimiento de grietas pequeñas

Dadas las anomalías observadas en el comportamiento a fatiga de las grietas pequeñas y dado que gran parte de la vida de un componente mecánico transcurre en dicho período, durante los últimos años han sido numerosas las investigaciones centradas en el estudio de este régimen de crecimiento. Como se comentó anteriormente, la característica más relevante que diferencia el período de crecimiento de las grietas pequeñas de las grandes es un ritmo de propagación oscilante: una relativamente elevada velocidad inicial, por encima de la predicha mediante la MFEL, seguida de pronunciadas deceleraciones que provocan períodos de retardo en el crecimiento, para posteriormente acelerarse de nuevo o incluso detenerse completamente (véase la Figura 1.3).

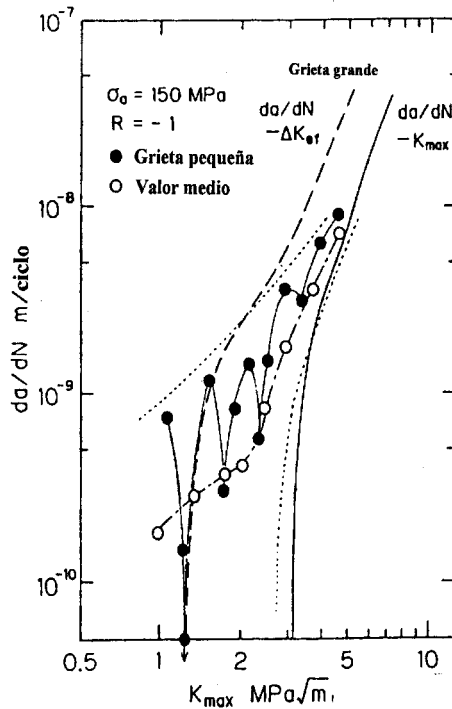


Figura 1.3: Comportamiento típico de las grietas pequeñas.

Las primeras observaciones de este hecho se deben a Pearson en 1975 [19], quien examinó el efecto del tamaño de la grieta en la velocidad de crecimiento en una aleación de aluminio endurecido. Encontró que los pequeños defectos superficiales, de entre $6 \mu m$ a $500 \mu m$ de profundidad, crecían del orden de 100 veces más rápido que grietas de decenas de milímetros, ambos sometidos al mismo ΔK . También se puso de manifiesto que estos pequeños defectos se propagaban incluso por debajo del FIT umbral observado en grietas grandes ($\Delta K_{th\infty}$). Posteriores estudios sobre diferentes aleaciones, tales como los de Lankford [45] y Morris [46,47] en aleaciones de aluminio, Tanaka et al. [48] en acero al carbono y Wagner [49] en aleación de titanio entre otros, han corroborado este crecimiento subcrítico de las grietas microestructuralmente pequeñas, así como el patrón de aceleraciones

y deceleraciones sucesivas. Tales retardos ocurrían generalmente cuando el frente de la grieta alcanzaba los límites de grano del material, presentando un mínimo ritmo de crecimiento para longitudes de grieta de entre uno y tres diámetros de grano. Este comportamiento se atenuaba al aumentar el tamaño de la grieta, hasta mostrar una progresión casi continua e insensitiva a la microestructura para grietas grandes, típicamente de decenas de diámetros de grano.

Este comportamiento pone claramente de manifiesto la incapacidad de la MFEL, vía leyes de crecimiento del tipo de la ley de Paris, para describir el proceso de propagación en el régimen de grieta pequeña. Tres puntos muestran básicamente dicha limitación: (1) en la fase de microgrieta se viola la hipótesis principal de homogeneidad del medio, (2) la MFEL predice ritmos de crecimiento que aumentan con la longitud de la grieta y por tanto no recoge las situaciones de deceleración en el avance de la grieta, y, menos aún, un comportamiento oscilante, (3) no es posible tampoco predecir un crecimiento subcrítico, es decir, grietas que se propagan para valores de ΔK inferiores a $\Delta K_{th\infty}$.

La explicación de tales limitaciones radica en la pérdida de semejanza física en el problema de crecimiento de las grietas pequeñas respecto de las grandes. Se ha comprobado que mientras que en el período de crecimiento de grieta grande, siempre que se cumplan la hipótesis de la MFEL, la semejanza física prevalece, y es reflejada exclusivamente por el FIT, en el rango de grieta pequeña se encuentra que grietas de diferente longitud pero con el mismo valor de ΔK presentan velocidades de crecimiento distintas. Esta falta de semejanza física es principalmente consecuencia de:

1. Un tamaño de la grieta comparable con el tamaño de las características microscópicas, lo que viola la hipótesis de medio homogéneo y continuo.
2. Y un tamaño de la zona plástica generada por la grieta del mismo orden que el tamaño de la propia grieta. Se viola, por tanto, la hipótesis de plasticidad a pequeña escala.

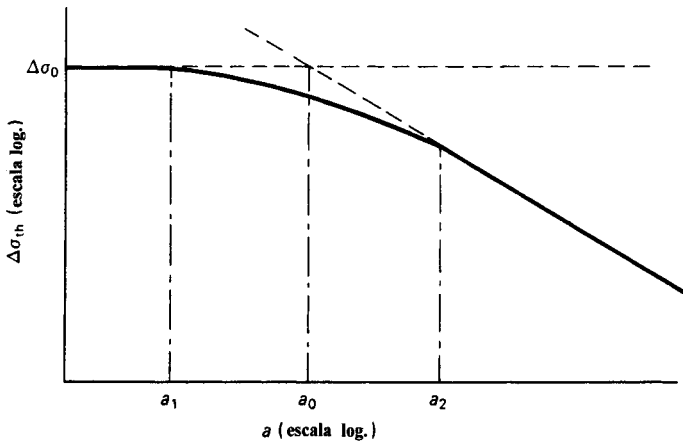


Figura 1.4: Umbral de propagación en función de la longitud de grieta. Diagrama de Kitagawa-Takahashi.

Todas estas características son comunes a las grietas pequeñas y, por tanto, contribuyen a marcar un comportamiento diferente entre éstas y las grietas grandes, incluso cuando ambas están sujetas a la misma fuerza conductora (igual ΔK).

Los trabajos de Kitagawa y Takahashi [20] y posteriormente Taylor y Knott [50, 51] ponen claramente de manifiesto el rango de validez de la MFEL en la descripción del comportamiento de las grietas pequeñas.

Kitagawa y Takahashi estudiaron la mínima tensión necesaria (tensión umbral, $\Delta\sigma_{th}$) para hacer crecer una grieta en función de su tamaño inicial. Como se muestra en el bien conocido diagrama que lleva su nombre (Figura 1.4), las grietas grandes se ajustan a una línea recta de pendiente $-1/2$ en escala logarítmica, independientemente de su longitud. Dicho umbral se corresponde con la tensión predicha empleando $\Delta K_{th\infty}$. Sin embargo, a medida que se reduce el tamaño de la grieta la tensión umbral se aparta de esta línea, tendiendo hacia la horizontal que representa el límite de fatiga del material ($\Delta\sigma_0$ en la Figura 1.4), lo que refleja la posibilidad de crecimiento de las grietas pequeñas por debajo del FIT umbral

de grietas grandes.

A la vista de este diagrama, Taylor y Knott definieron tres longitudes de grieta para delimitar los diferentes tipos de comportamiento (véase Figura 1.4). La primera de ellas, a_1 , representa la máxima longitud de grieta para la que la tensión umbral es constante e igual al límite de fatiga del material. En segundo lugar a_2 , que representa el mínimo tamaño de grieta por encima del cual la tensión umbral se puede expresar en función de $\Delta K_{th\infty}$. Por lo tanto, a_2 es la mínima longitud por encima de la cual la MFEL es aplicable para describir el proceso de propagación. La región comprendida entre a_1 y a_2 es la zona de transición entre las grietas pequeñas y las grandes en el umbral de crecimiento. Por último, se define también una longitud ficticia a_0 , situada entre las dos anteriores y calculada como la intersección de las asíntotas del límite de fatiga y del FIT umbral de grieta larga, que, como se verá, es de gran utilidad práctica.

Los citados autores correlacionaron estas longitudes con el tamaño de grano del material D . Encontraron que a_2 era varias veces superior a D , concretamente $a_2 \approx 10D$ para los casos estudiados. Asimismo, aunque la falta de datos existentes les impidieron una mejor correlación, indicaron que a_1 debía ser del orden de D . Por último, dependiendo del tipo de material, los valores de a_0 se encontraban en una banda acotada por D y $10D$.

A tenor de la evidencia experimental descrita, el estudio del crecimiento de grietas pequeñas requiere necesariamente la caracterización de los mecanismos que contribuyen al anómalo comportamiento de las mismas con respecto de las grietas grandes, los cuales pueden resumirse como sigue:

1. La influencia de la microestructura en relación a:
 - (i) La interacción de la grieta con las barreras microestructurales que provocan períodos de retardo en el crecimiento.
 - (ii) Un crecimiento inicial preferente en determinados planos cristalográficos.
 - (iii) Los cambios en la velocidad de propagación causados por la deflexión

de la grieta y que están asociados con la diferente orientación cristalo-
gráfica de los granos por los que se propaga.

2. Y un incremento del efecto del cierre de grieta a medida que aumenta el tamaño de la grieta, como se verá a continuación.

El cierre de grieta es consecuencia de la interferencia y contacto físico entre las caras de la grieta durante el proceso de descarga, antes de alcanzar la tensión mínima del ciclo. Esto provoca que el período del ciclo durante el que la grieta se encuentra “abierta”, que es cuando se supone que se produce la extensión de la misma, sea menor y, por tanto, también el rango de tensiones efectivo que actúa sobre la grieta ($\Delta\sigma_{eff}$)

$$\Delta\sigma_{eff} = \sigma_{max} - \sigma_{op} \quad (1.15)$$

donde σ_{op} (tensión de apertura) es la tensión a la que desaparece la interferencia entre los flancos de la grieta ($\sigma_{op} \geq \sigma_{min}$) durante el proceso de carga. Como consecuencia de esta disminución del rango útil de tensiones aplicadas ($\Delta\sigma_{eff} \leq \Delta\sigma$), la grieta experimenta una disminución en su ritmo de propagación.

Desde las primeras observaciones de este fenómeno realizadas por Elber en 1970 [52,53] hasta nuestros días se han puesto de manifiesto varios mecanismos de cierre. Los más caracterizados son:

1. El cierre inducido por Plasticidad: Es debido a la deformación plástica residual del material que la grieta deja tras de sí al propagarse. Aparece normalmente en grietas creciendo en Modo I, provocando el contacto entre los flancos de la grieta incluso cuando la tensión neta aplicada es de tracción.
2. El cierre inducido por Óxidos: Está provocado por los residuos de material depositados entre las caras de la grieta como consecuencia de la corrosión.
3. El cierre inducido por Rugosidad: Debido al contacto entre las rugosidades y asperezas de las caras de la grieta, promovidos fundamentalmente por el

crecimiento de ésta en diferentes planos cristalográficos. Este tipo de cierre es más significativo en grietas creciendo en Modo II y III.

4. El cierre inducido por fluidos viscosos: Este tipo de cierre se observó en los rodamientos de bolas lubricados. Se ha comprobado que la presencia de aceites no corrosivos, tal como los aceites minerales o los de silicona promueven un crecimiento más lento de la grieta durante la Etapa II.
5. El cierre inducido por transformaciones de fase: Es producido por la existencia de transformaciones de fase en el frente de grieta, por ejemplo, transformaciones martensíticas, que provocan un aumento del volumen del material, engrosando la estela plástica detrás de la grieta. Este fenómeno se conoce también como plasticidad inducida por transformaciones de fase (TRIP, TRransformation-Induced Plasticity) y sus consecuencias son similares a las del Cierre por Plasticidad.

Durante las dos últimas décadas se ha realizado un extenso trabajo experimental tratando de cuantificar la influencia del cierre en el crecimiento de grietas pequeñas. Un ejemplo de esto es el trabajo de James y Morris [54]. Estos autores midieron la apertura de la grieta a carga neta cero en función del tamaño de la grieta en especímenes de aleación de titanio-aluminio sometidos a fatiga. El tamaño de grano se estimó en 4 y 12 μm para las dos diferentes fases. Se comprobó que para longitudes de grieta variando de 50 μm a 150 μm , se producía un aumento del nivel de cierre principalmente atribuible a las rugosidades en las caras de la grieta. Dicho aumento continuaba hasta una longitud de aproximadamente 200 μm por encima de la cual el efecto del cierre permanecía constante e independiente del tamaño de la grieta. Por otra parte, Lee y Sharpe [55] y Larsen et al. [56] empleando interferometría laser, así como Davison y Lankford [57] mediante microscopía de barrido en aleaciones de aluminio y titanio-aluminio, pusieron de manifiesto que la tensión de cierre en grietas pequeñas era sustancialmente menor que en las grietas grandes, sometidas ambas al mismo ΔK nominal. Un

comportamiento similar fue también observado por Tanaka y Nakai [58] midiendo la tensión de cierre mediante el método de la flexibilidad en acero al carbono.

Estas investigaciones muestran como característica común que el efecto del cierre es menos pronunciado e incluso despreciable cuanto menor es el tamaño de la grieta. Esto se debe fundamentalmente a que las grietas pequeñas presentan una menor rugosidad, nivel de asperezas y plasticidad residual que en las grietas largas, donde los mecanismos de cierre antes citados se presentan en toda su magnitud. De esta forma, para un mismo rango de la carga aplicada, el rango de tensiones efectivas que experimentan las grietas pequeñas será en general mayor que el de las grietas grandes, aumentando así su velocidad de propagación.

El efecto del cierre proporciona una razonable explicación para la mayor velocidad de crecimiento observada en el caso de las grietas pequeñas, así como el crecimiento de éstas por debajo $\Delta K_{th\infty}$. Pero, desafortunadamente, este mecanismo no es suficiente para explicar el crecimiento de las grietas pequeñas a velocidades por encima de la extrapolación del régimen Paris para valores del FIT subumbrales [59], ni de recoger el carácter oscilante en las primeras fases del crecimiento. Así, para un modelado realista del proceso de propagación durante el período de transición de microgrieta a grieta grande es necesario atender también a los factores microestructurales expuestos anteriormente, combinándolos adecuadamente en cada régimen de crecimiento.

1.5.1 Modelos de crecimiento de grietas pequeñas

Existen en la literatura numerosos modelos tratando de explicar y de reproducir el comportamiento de las grietas pequeñas, la mayoría de ellos aplicables a condiciones de carga y tipos de materiales muy concretos, dada la inherente complejidad del problema. En lo que sigue se comentarán aquellos que a juicio del autor son más significativos y que conformarán la base teórica de esta tesis.

En 1978 El Haddad et al. [60] comprobaron que las diferencias entre las curvas de crecimiento de grietas pequeñas y de grietas grandes, representadas ambas en

términos del FIT, desaparecerían al añadir a la longitud real de la grieta a la longitud ficticia a_0 definida en el diagrama de Kitagawa. Se propone, así, usar como expresión del FIT de la forma

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi(a + a_0)} \quad (1.16)$$

siendo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th\infty}}{\sigma_{FL}} \right)^2 \quad (1.17)$$

Esta aproximación, aunque totalmente empírica, permitió seguir empleando en primera aproximación la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal para caracterizar el crecimiento de pequeños defectos. De aquí la importancia práctica del parámetro a_0 , como se apuntó anteriormente.

En una línea distinta, Chang et al. [61] incorporan la influencia de la microestructura en la caracterización de las microgrietas. En este modelo se postula que la propagación de la grieta no ocurre hasta que se alcanza un determinado nivel crítico de energía de deformación en el vértice de la misma. Dicha energía se va acumulando en cada ciclo, lo que conduce a la existencia de un cierto período de incubación más o menos pronunciado al alcanzar la microgrieta el borde de grano. Una extensión de este modelo fue realizada por Morris et al. [62] eliminando la restricción de que el tamaño de la grieta debía ser constante durante el período de incubación. Ambos modelos explican el retardo de la microgrieta al llegar al borde de grano pero no pueden explicar el rápido crecimiento inicial de la grieta antes de llegar a éste.

Chan y Lankford [63,64] han propuesto varios modelos por basados en correcciones del FIT para tener en cuenta la falta de semejanza física en el régimen de grietas pequeñas, así como la influencia de la orientación cristalográfica de los granos por los que ésta se propaga.

En la segunda de las referencias citadas los autores explican las diferencias en el comportamiento de una grieta en función de que ésta presente o no semejanza mecánica y/o semejanza microestructural. La semejanza microestructural aparece

cuando el comportamiento de la grieta es insensitivo a la microestructura del material. De esta forma, una grieta cuyo frente abarque muy pocos granos y, por tanto, su crecimiento esté fuertemente afectado por las propiedades individuales de cada grano (orientación de los planos cristalográficos, resistencia de cada grano, etc), no presentará semejanza microestructural. Por otra parte, una grieta presenta semejanza mecánica cuando su comportamiento no depende del tamaño de la propia grieta, es decir, cuando la grieta es suficientemente grande como para considerar que ya se han estabilizado los efectos asociados a la microestructura, a la plasticidad en el frente de la grieta y al cierre de grieta.

Basándose en estos dos conceptos de semejanza Chan y Lankford clasifican las grietas en tres tipos: pequeñas (small) en las cuales no existe semejanza microestructural ni mecánica; cortas (short) en las que existe semejanza microestructural pero no mecánica, por ejemplo, grietas de poca profundidad pero que atraviesan todo el espesor del espécimen; y largas (long) que satisfacen ambas condiciones de semejanza. Las grietas cortas son simplemente una variante de las largas en las que su comportamiento difiere de éstas últimas por consideraciones de cierre y de plasticidad, y no por efectos de la microestructura.

Las diferentes situaciones de semejanza o falta de ella que presentan las grietas hacen que su comportamiento sea distinto a medida que ésta crece. Para tener en cuenta esta circunstancia, los autores proponen corregir el tradicional FIT de la forma

$$\Delta K^* = q_1 q_2 \Delta K \quad (1.18)$$

con

$$q_1 = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{max}} \right) \left\{ \ln \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{max}}{\sigma_y} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

$$q_2 = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sigma_y}{\Delta\sigma} \sqrt{\frac{b}{a}} \left(1 - \frac{M}{M} \right) \quad (1.20)$$

donde q_1 y q_2 son funciones que cuantifican la falta de semejanza mecánica y microestructural respectivamente, σ_y el límite de fluencia del material, M es un

factor de orientación del tipo Taylor y b el tamaño de la zona plástica. El efecto del cierre de grieta puede ser incluido sin más que sustituir ΔK por ΔK_{eff} (definido en función de $\Delta\sigma_{eff}$) en la expresión anterior.

M varía dependiendo del número de granos afectados por el frente de grieta. Así, para una grieta creciendo dentro de un grano M es próximo a 2, dado que ésta se comportará como inmersa en un monocristal y crecerá según al plano de deslizamiento mejor orientado. El otro extremo aparecerá cuando el frente de grieta contenga un gran número de granos, entonces el factor de orientación es una media de factores de orientación de cada uno de los granos afectados \bar{M} y debe estar en torno a 3, según el análisis de Taylor [65] para materiales con estructura cúbica centrada en las caras (FCC) sometidos a tracción. Se propuso que M variría linealmente entre los límites anteriores en función de la longitud de la grieta, desde una longitud inicial igual a cero hasta una longitud de 5 diámetros de grano, a partir de la cual el factor de orientación se supone constante e igual a \bar{M} .

Asimismo, el tamaño de la zona plástica b se calcula como:

$$b = \frac{D}{2} - a \quad (1.21)$$

para el caso de la grieta creciendo dentro del primer grano y

$$b = 0.05 \left(\frac{\Delta K}{\sigma_y^m} \right)^2 \quad (1.22)$$

una vez sobrepasada la barrera del borde de grano. Donde σ_y^m es la resistencia a la fluencia del material en el frente de la grieta y será función del número de granos afectados, viene dado por $\sigma_y^m = (M/\bar{M})\sigma_y$.

Este modelo ha sido aplicado a varios materiales, como Ti-8Al, Astraloy, In 100, acero 4340 en el régimen de grietas cortas y Aluminio 7075 en el régimen de microgrietas, con aceptables resultados. Predice adecuadamente el elevado ritmo de crecimiento inicial de las grietas pequeñas, así como la deceleración o incluso la parada de ésta al alcanzar el borde de grano. Sin embargo, una vez sobrepasada esta primera barrera el ritmo de crecimiento es continuamente creciente, no reproduciendo el típico patrón intermitente. Por otro lado, introduce una idea

importante como es la oposición al crecimiento que ejerce la microestructura en el período de transición de grietas pequeñas a grandes, reflejada a través del aumento del factor de orientación M hasta alcanzar un valor estable, característico del policristal.

En términos más empíricos, Hobson [66,67] investigó la propagación de grietas por fatiga en acero de bajo contenido en carbono, proponiendo dos ecuaciones diferentes para describir los períodos de crecimiento de grieta pequeña y de grieta grande.

Así, para grietas de longitud $a \leq d$, donde d es la distancia característica entre barreras microestructurales, se sugiere representar el ritmo de crecimiento por la expresión

$$\frac{da}{dN} = C_1(d - a)^{1-\alpha} a^\alpha \quad (1.23)$$

donde C_1 es una función del rango de tensiones o deformaciones y α una constante a determinar para cada material.

Por otro lado, la ecuación empleada para describir el crecimiento de las grietas grandes ($a \geq a_{th} = D/C_2$) fue de la forma

$$\frac{da}{dN} = C_2 a - D \quad (1.24)$$

donde C_2 es una función del rango de deformación aplicada y D una constante a determinar en función del $\Delta K_{th\infty}$.

Haciendo uso de las dos ecuaciones anteriores, Hobson describe el comportamiento global de una grieta diferenciando tres zonas:

1. Zona de grieta pequeña ($a_0 \leq a \leq a_{th}$): La grieta crece desde una longitud inicial a_0 dada por la rugosidad superficial o el tamaño de las inclusiones, hasta una longitud umbral a_{th} dada por el FIT umbral para grieta grande.

$$\Delta K_{th\infty} = Y \Delta \sigma \sqrt{\pi a_{th}} \quad (1.25)$$

El número de ciclos empleado en este período se calcula empleando la ecuación (1.23).

2. Zona de transición ($a_{th} \leq a \leq d$): En este período Hobson argumenta que deben coexistir los mecanismos de crecimiento de grietas pequeñas y grandes, proponiendo como ecuación de transición la suma de las ecuaciones (1.23) y (1.24).
3. Zona de grieta grande ($d \leq a \leq a_f$): Durante este régimen la grieta se propaga hasta el fallo, aumentando su velocidad a medida que crece y siguiendo el ritmo dictado por la ecuación (1.24).

La vida a fatiga del componente se calcula como suma del número de ciclos empleado en cada período.

Es interesante resaltar que para tensiones por debajo del límite de fatiga el modelo de Hobson predice una longitud umbral menor que la dimensión microestructural $d \leq a_{th}$, lo que significa que la grieta crecerá decelerándose hasta pararse en la barrera. En dicho caso, la zona de transición desaparece, no existiendo conexión entre los períodos de grieta pequeña y grande.

Este modelo proporciona una herramienta simple y fácil de usar, reproduciendo correctamente la deceleración en el crecimiento de la microgrieta dentro del primer grano, así como el régimen de grieta larga. No obstante, dicho modelo no ofrece ninguna explicación física sobre la naturaleza del proceso de crecimiento de las grietas pequeñas, aportando tan sólo un conjunto de ecuaciones prácticas de naturaleza puramente fenomenológica. Por otra parte, el período de transición no reproduce el comportamiento oscilatorio debido a los bloqueos en las sucesivas barreras, no existiendo una justificación física clara para suponer que dicha transición pueda modelarse mediante la suma de las ecuaciones representativas de cada régimen.

Como se ha descrito anteriormente, la deformación plástica a nivel microscópico, y por tanto la aparición de las microgrietas, está asociada con la formación en el material de bandas de deslizamiento persistentes y el apilamiento de las dislocaciones en los bordes de grano. En un intento más aproximado de modelar la interacción real de una microgrieta con la microestructura se han propuesto varios

modelos basados en la teoría de dislocaciones.

Así, por ejemplo, el Modelo de Bandas de Deslizamiento Bloqueadas desarrollado por Taira, Tanaka y Nakai [68] considera la interacción de la zona plástica de la grieta con los límites de grano. La idea básica es considerar que el ritmo de crecimiento de la grieta es proporcional al desplazamiento de apertura en el frente de la grieta y, por tanto, función del tamaño de zona plástica. A medida que la grieta crece dentro de un grano, la zona plástica se irá acercando al borde de grano hasta bloquearse al alcanzar éste, permaneciendo ahí mientras que el FIT en el vértice de la zona plástica no alcance un cierto valor crítico. Esto provoca que el tamaño de la zona plástica vaya disminuyendo mientras la grieta avanza, ocasionando una deceleración en el ritmo de propagación. Una vez alcanzado el FIT crítico, la zona plástica penetra en el grano contiguo aumentando el tamaño de la zona plástica, con el consiguiente aumento de la velocidad de propagación.

Este modelo reproduce satisfactoriamente el patrón de aceleraciones y deceleraciones sucesivas en los bordes de grano. No obstante, deja dos puntos oscuros. Uno es el hecho de considerar que el final de la zona plástica pueda encontrarse en el interior del grano. Medidas de deformaciones locales realizadas en granos conteniendo pequeñas grietas indican que éstos se encuentran por entero en estado plástico, indicando que la zona plástica cubre todo el grano [69, 70]. El es la interpretación del límite de fatiga, el cual es considerado como la tensión por debajo de la cual no existen grietas en el material, contrariamente a la evidencia experimental que muestra la existencia de grietas incluso por debajo de ésta tensión.

Otros modelos basados también en la teoría de dislocaciones ha sido propuestos por Weertman [71], Mura [72] y de los Rios et al. [73]. En particular este último simula el apilamiento de dislocaciones en los bordes de grano y emplea consideraciones energéticas para determinar la condición de propagación de la microgrieta en el siguiente grano.

Navarro y de los Rios [74–76] han desarrollado un modelo de crecimiento de

grietas basado en la idealización de la grieta y su zona plástica mediante distribuciones infinitesimales de dislocaciones propuesta por Bilby, Cottrel y Swinden [77].

Los citados autores consideran inicialmente una microgrieta creciendo en el interior de un grano con la zona plástica bloqueada por el borde de grano. Éste actúa como una barrera al deslizamiento plástico, no permitiendo que la grieta se propague más allá de éste a no ser que se produzca deslizamiento plástico en el grano vecino, por ejemplo, por activación de nuevas fuentes de dislocaciones. El ritmo de crecimiento es proporcional al número de dislocaciones en la zona plástica, que a su vez es proporcional al tamaño de la zona plástica en cada instante, es decir, a la distancia relativa entre el vértice de la grieta y la barrera. A medida que la grieta avanza hacia el borde de grano, el tamaño de la zona plástica disminuye y, por tanto, la grieta se decelera. Paralelamente, la concentración de tensiones en la barrera va aumentando, lo que puede provocar que se active deslizamiento plástico en el grano adyacente. Si esto ocurre, la zona plástica se extiende cubriendo totalmente el nuevo grano hasta bloquearse en la siguiente barrera. Este incremento súbito en el tamaño de la zona plástica produce una aceleración en el ritmo de crecimiento. Los sucesivos bloqueos y saltos en los subsiguientes límites de grano confieren al proceso de crecimiento un carácter oscilante. Conforme la grieta crece estas oscilaciones se hacen cada vez menos pronunciadas, siendo casi imperceptibles en el régimen de grietas grandes, lo que refleja la escasa influencia de la microestructura.

Por el contrario, si la tensión alcanzada en alguna de las sucesivas barreras no permite que se genere plasticidad en el grano vecino en ningún instante, la grieta se parará al llegar al borde de grano. Así, el límite de fatiga del material se define como la mínima tensión necesaria para que una grieta se propague más allá de la primera barrera microestructural. Esta interpretación del límite de fatiga es más realista que la propuesta por Taira et al. [68], ya que admite, como se ha observado experimentalmente, la existencia de grietas incluso para tensiones aplicadas inferiores a dicho límite.

La aproximación de Navarro y de los Rios permite dar una descripción física adecuada y razonablemente simple del proceso de crecimiento de grietas pequeñas, así como de la transición hasta grietas grandes. La filosofía de este modelo será la base del estudio propuesto en esta tesis, por lo que una descripción más detallada se realizará en un capítulo posterior.

Esta última categoría de modelos, basados en la descripción del proceso del crecimiento de grietas por fatiga a una escala más microscópica (mesoscópica), ha sido denominada por algunos autores Mecánica de la Fractura Microestructural (MFM) para diferenciarlas de las descripciones macroscópicas proporcionadas por la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal o Elasto-Plástica.

Bibliografía

- [1] Albert, W.A.J. (1938), Arch. Miner. Geognosie Berg. Huttenkunde 10, pp.215
- [2] Wöhler, A. (1871), Test to Determine the Forces Acting on Railway Carriage Axles and the Capacity of Resistance of the Axles, Engineering 11, pp. 199
- [3] Gerber W. (1874), Bestimmung der Zulossigen Spannungen in Eisen Constructionen, Z. Bayer Arch. Ing. Ver. 6
- [4] Goodman, J. (1930), Mechanics Applied to Engineering, Vol.1 (9th Edition
- [5] Soderberg, C.R. (1930), Factor of Safety and Working Stress, Trans. ASTM, 52 (2)
- [6] Soderberg, C.R. (1935), Working Stresses, Trans. ASTM 57, A 106
- [7] Griffith A.A. (1920), The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Trans. R. Soc. (Lond.), Vol. A221, pp. 163
- [8] Palmgren A. (1924), Durability of Ball Bearing, ZDVDI. Vol. 68, No. 14
- [9] Miner M.A. (1945), Cumulative Damage in Fatigue, Trans. ASME, J. of Appl. Mech., Vol. 67, pp. 159
- [10] Weibull W. (1961), Fatigue Testing and Analysis of Results, Pergamon Press, London

- [11] Weibull W. (1951), A Statistical Distribution Function of Wide Applicability, J. of Appl. Mech., Septiembre
- [12] Irwin G.R. (1957), Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 136
- [13] Manson, S.S. (1965), Fatigue: A Complex Subject-Some Simple Approximations, Expt. Mechanics, 5 (7), pp. 193
- [14] Manson, S.S. (1966), Thermal Stress and Low Cycle Fatigue, McGraw-Hill, New York
- [15] Neuber, H. (1961), Theory of Stress Concentration for Shear Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Non-Linear Stress-Strain Law, J. of Appl. Mech., Vol. 28., pp. 544
- [16] Peterson, R.E. (1959), Notch sensitivity, in Metal Fatigue (eds. G. Sines & J. L. Waisman), McGraw-Hill, N.Y., pp. 293-306
- [17] Stowell E.Z. (1950), Stress and Strain Concentration at a Circular Hole in an Infinite Plate, NACA Tech. Note 2073. Washington
- [18] Paris P.C. and Erdogan F. (1963), A critical Analysis of Crack Propagation Law, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 85, No. 4, pp. 528
- [19] Pearson, S. (1975), Initiation of Fatigue Cracks in Commercial Aluminum Alloys and Subsequent Propagation of Very Short Cracks, Engng. Fract. Mech. 7, pp. 235-247
- [20] Kitagawa H. and Takahashi S. (1976), Application of Fracture Mechanics to Very Small Cracks, Int. Conf. Mech. Behaviour of Materials (ICM2), American Society of Metals, pp. 627-631
- [21] Miller, K.J. and Zachariah, K.P. (1977). Cumulative Damage Laws for Fatigue Crack Initiation and Stage I Propagation, Journal of Strain Analysis, Vol. 12, No 4.

- [22] Forsyth, P.J.E. (1953), Exudation of Material from Slip Bands at the Surface of Fatigued Crystals of an Aluminium-Copper Alloy, *Nature* 171, pp. 172-173
- [23] Forsyth, P.J.E. (1957), Slip Band Damage and Extrusion, *Proc. R. Soc. A* 242, pp. 198-202
- [24] Cottrell, A.H. and Hull, D. (1957), Extrusion and Intrusion by Cyclic Slip in Copper, *Proc. R. Soc. A* 242, pp. 211-213
- [25] Wood, W.A. (1958), Formation of Fatigue Cracks, *Phil. Mag.* 28, pp. 692-699
- [26] Forsyth P.J.E. (1969), *The Physical Basis of Metal Fatigue*, American Elsevier Publishing Co. Inc., New York
- [27] Miller, K.J. (1993), The Two Threshold of Fatigue Behaviour, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 16, No. 9, pp. 931-933
- [28] Miller, K.J. (1982) The Short Crack Problem. *Fatigue Eng. Mat. and Struct.*, S., No 3, pp. 223
- [29] Miller K.J. (1984), Initiation and Growth Rates of Short Fatigue Cracks, in *Fundamentals of Deformation and Fracture*, Eshelby Memorial Symposium (Eds. B.A. Bilby K.J. Miller, J. R. Willis), Sheffield, U.K.
- [30] Suresh S. and Ritchie R.O. (1984), The Propagation of Short Fatigue Cracks, *Int. Metals Rev.*, Vol. 29, No. 6, pp.445
- [31] Hudak S.J. (1981), Small Crack Behaviour and the Prediction of Fatigue Life, *J. Engng. Mater. Technol.*, 103, pp. 26
- [32] Williams, M.L. (1957), On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 24 (1), pp. 109
- [33] Stanzl, S. and Tschegg, E. (1980), Fatigue Crack Growth and Threshold Measured at Very High Frequencies (20 KHz), *Met. Sci.* 14, pp. 137

- [34] Hornbogen, E. and Gatz, K.Z. (1976), Microstructure and Fatigue Crack Growth in a Fe-Ni-Al Alloy, *Acta. Metall.* 24, pp. 581.
- [35] Forman, R.G., Kearney, V.E. and Engle, R.M. (1967), Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures, *J. Bas. Engng.* 89, pp. 459-464
- [36] Walker, K. (1970), The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum, *J. Appl. Phys.* 58, pp. 688-691
- [37] Hutchinson J.W. (1968), Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 16, pp. 13-31
- [38] Rice J.R. and Rosengren G.F. (1968), Plate Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power Law Hardening Material, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 16, pp. 1-12
- [39] Rice, J.R. (1968), A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, *J. Appl. Mech.* 35, pp. 379
- [40] Dowling N.E. (1976), in *Crack and Fracture*, ASTM STP 610, 19, Philadelphia, Pa.
- [41] Dowling N.E. and Begley J.A. (1976), in *Mechanics of crack growth*, ASTM STP 590, 82, Philadelphia, Pa.
- [42] Tomkins, B. (1975), *Fatigue Failure*, International on Mechanics and Physics of Fracture, Cambridge
- [43] Solomon, H.D. (1972), Low Cycle Fatigue Crack Propagation in 1018 Steel, *J. Mater.* 7, pp. 299
- [44] Ibrahim, M.F.E. and Miller, K.J. (1980), Determination of Fatigue Crack Initiation Life, *Fatigue Engng. Mater. Struct.* 2, pp. 351

- [45] Lankford, J. (1982), The Growth of Small Fatigue Cracks in 7075-T6 Aluminum, *Fatigue Engng. Mater. Struct.* 5, pp. 233-248
- [46] Morris, W.L. (1979), Microcrack Closure Phenomena for Al 2219-T851. *Metall. Trans.* 10A, pp. 5-11
- [47] Morris, W.L. (1980), The Noncontinuum Crack Tip Deformation Behaviour of Surface Microcracks, *Metall. Trans.* 11A, pp. 1117-1123
- [48] Tanaka, K., Nakai, Y. and Yamashita, M. (1981), Fatigue Growth Threshold of Small Cracks, *Int. J. Fract.* 17, pp. 519-533
- [49] Wagner, L., Gregory, J.K., Gysler, A. and Lütjering, G. (1986), Propagation Behaviour of Short Cracks in Ti-8.6Al Alloy, in *Small Fatigue Cracks* (eds. R.O. Ritchie & J. Lankford), The Metallurgical Society, Warrendale, Pennsylvania, pp. 117-128
- [50] Taylor D. and Knott J.F. (1981), Fatigue Crack Propagation Behaviour of Short Cracks: The Effect of Microstructure, *Fatigue Engng. Mater. Struct.* 4, pp. 147
- [51] Taylor D. (1982), *Euromech Colloquium on Short Fatigue Cracks*, *Fatigue Engng. Mater. Struct.* 5, pp. 305
- [52] Elber, W. (1970), Fatigue Crack Closure Under Cyclic Tension, *Engng. Fract. Mech.* 2, pp. 37-45
- [53] Elber, W. (1971), The Significance of Fatigue Crack Closure, in *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, Special Technical Publication 486, ASTM, Philadelphia, pp. 230-242
- [54] James, M. R. and Morris, W.L. (1983), Effect of Fracture Surface Roughness on Growth of Short Fatigue Cracks, *Metall. Trans.* 14A, pp. 153-155

- [55] Lee, J.J. and Sharpe, W.N. (1986), Short Fatigue Cracks in Notched Aluminum Specimens, in Small Fatigue Cracks (eds. R.O. Ritchie & J. Lankford), The Metallurgical Society, Warrendale, Pennsylvania, pp. 323-339
- [56] Larsen, J.M., Nicholas, T., Thompson, A.W. and Williams, J.C. (1986), Small Crack Growth in Titanium-Aluminum Alloys, in Small Fatigue Cracks (eds. R.O. Ritchie & J. Lankford), The Metallurgical Society, Warrendale, Pennsylvania, pp. 499-512
- [57] Davidson, D.L. and Lankford, J. (1986), High Resolution Techniques for the Study of Small Cracks, in Small Fatigue Cracks (eds. R.O. Ritchie & J. Lankford), The Metallurgical Society, Warrendale, Pennsylvania, pp.455-470
- [58] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1983), Propagation and Non-propagation of Short Fatigue Cracks at a Sharp Notch, *Fat. Engng. Mater. Struct.* 6, pp. 315-327
- [59] Lankford, J. and Davidson, D.L. (1986). The Role of the Metallurgical Factors in Controlling the Growth of Small Fatigue Cracks, in Small Fatigue Cracks (eds. R. O. Ritchie & J. Lankford), The metallurgical Society, Warrendale, Pennsylvania, pp. 51-71.
- [60] El Haddad, M.H., Topper, T.H. and Smith, K.N. (1979), Prediction of Non Propagating Cracks, *Engng. Fract. Mech.* 11, pp.573-584
- [61] Chang, R., Morris, W.L. y Buck, O. (1979), Fatigue Crack Nucleation at Intermetallic Particles in Alloy-A Dislocation Pile-up Model, *Scripta Metall.* 13, pp. 191
- [62] Morris W.L., James M.R. and Buck O. (1981), Growth Rate Models for Short Surface Cracks in Al2219-T851, *Metal Trans.* 12A, pp. 57
- [63] Chan, K.S. and Lankford, J. (1983), A Crack Tip Model for the Growth of Small Fatigue Cracks, *Scripta. Metall.* 17, pp. 529

- [64] Chan, K.S. and Lankford, J. (1988), The Role of Microstructural Dissimilitude in Fatigue and Fracture of Small Cracks, *Acta Metall.*, Vol. 36, No. 1, pp. 193-206
- [65] Taylor, G.I. (1938), Plastic Strain in Metals, *J. Inst. Metals* 62, pp. 307-324
- [66] Hobson, P.D. (1982), The Formulation of a Crack Growth Equation for Short Cracks, *Fat. Engng. Mater. Struct.* 5, pp. 323
- [67] Hobson, P.D. (1985), The Growth of Short Fatigue Cracks in a Medium Carbon Steel, Ph.D. Thesis, University of Sheffield, U.K.
- [68] Taira, S., Tanaka, K. y Nakai, J. (1978), A model of Crack-Tip Band Blocked by Grain Boundary, *Mech. Res. Comm.* 5, pp. 375
- [69] James, M.R. and Morris, W.L. (1986), The Effect of Microplastic Surface Deformation on the Growth of Small Cracks, in *Small Fatigue Cracks* (eds. R. O. Ritchie & J. Lankford), The metallurgical Society, Warrendale, Pennsylvania, pp. 145-156
- [70] Zhang, Y.H. and Edwards, L. (1992), The Effect of Grain Boundaries on the Development of Plastic Deformation Ahead of Small Fatigue Cracks, *Scripta Metallurgica et Materialia*, Vol. 16, pp. 1901-1906
- [71] Weertman J. (1986), Short Crack Theory, *Ibid*, pp. 363-378
- [72] Mura, T. and Nakasone, Y. (1990), The Phenomena of Fatigue Crack Initiation in Solids, *ASME J. Appl. Mech.* 57, pp.1-6
- [73] De los Rios, E.R., Mohamed, H.J. and Miller, K.J. (1985), A Micro-Mechanics Analysis for Short Fatigue Crack Growth, *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, Vol. 8, No. 1, pp. 49
- [74] Navarro A. and de los Rios E.R. (1988), Short and Long Fatigue Crack Growth: A Unified Model, *Phil. Mag.* 57. pp.15-36

-
- [75] Navarro A. and de los Rios E.R. (1988), An Alternative Model for the Blocking of Dislocations at Grain Boundaries, *Phil. Mag.* 57, pp. 37-42
- [76] Navarro A. and de los Rios E.R. (1992), Fatigue Crack Growth Modelling by Successive Blocking of Dislocations, *Proc. R. Soc. Lond. A* 437, pp. 375-390
- [77] Bilby B.A., Cottrell A.H. and Swinden K.H. (1963), The Spread of Plastic Yield from a Notch, *Proc. R. Soc. A* 272, pp. 304-314

Capítulo 2

Fatiga en entallas

En el capítulo anterior se ha descrito en líneas generales el comportamiento a fatiga de componentes que no presentan gradientes acusados de tensiones. Sin embargo, la mayoría de las estructuras y elementos mecánicos presentan, por motivos constructivos, discontinuidades geométricas, tales como agujeros, cambios de sección, ranuras, etc., denominados de forma genérica *concentradores de tensión* o *entallas*. Éstos provocan que, al cargar el componente, las tensiones en las regiones próximas a la entalla sean relativamente más elevadas que las que soporta el resto de la pieza. Si además las cargas son cíclicas, esta concentración de tensiones puede contribuir a una temprana aparición de grietas en el material, reduciendo así la resistencia a fatiga del espécimen. En el presente capítulo se hará una revisión de las principales características que presenta el fallo por fatiga en componentes entallados, centrandó la atención en cuáles deben ser las condiciones necesarias para provocar la rotura o no del espécimen.

Tradicionalmente, la propensión o no al fallo por fatiga de piezas entalladas ha sido determinada mediante el índice de *sensibilidad a la entalla*. Dicho parámetro permite calcular el factor de concentración de tensiones efectivo a fatiga, el cual es por lo general inferior al propio factor de concentración de tensiones de la entalla.

Se analizarán aquí estos conceptos clásicos y se les intentará dar una interpretación en términos del crecimiento de microgrietas.

La distinción entre iniciación y propagación de una grieta por fatiga discutida el capítulo primero cobra aquí especial relevancia, dado que, a diferencia con lo que ocurre en componentes sin concentradores, la iniciación de una grieta en la raíz de la entalla no conlleva necesariamente la propagación de ésta hasta el fallo de la pieza. Existe la posibilidad de encontrar grietas que crecen hasta una cierta distancia y luego cesan su propagación aunque se siga aplicando carga cíclica. A estas grietas se les denomina *grietas no-propagantes* y aparecen frecuentemente en entallas agudas. Así, para determinar la resistencia a fatiga de un componente entallado será necesario conocer bajo qué condiciones las grietas podrán siempre crecer sin detenerse.

El análisis del comportamiento a fatiga de un espécimen entallado requiere como primer paso conocer el estado tensional en las proximidades del concentrador. Parece conveniente, por tanto, comenzar describiendo brevemente las características más importantes de las distribuciones de tensión asociadas a la presencia de una entalla.

2.1 Caracterización del campo de tensiones en una entalla

En términos generales, una entalla altera todas las componentes del tensor de tensiones, teniendo un efecto más notable en aquella cuya dirección coincide con la de aplicación de la carga. Para los propósitos de la presente discusión nos centraremos en dicha tensión, por ser la más representativa en cuanto a su influencia en el comportamiento del espécimen.

La Figura 2.1 muestra la forma típica de la tensión σ_{yy} en el fondo de una entalla genérica sometida a tracción y supuesto que el material permanece en régimen elástico. Dicha distribución presenta un valor máximo en la raíz del concentrador,

disminuyendo progresivamente a medida que nos alejamos de éste. Los puntos fundamentales para caracterizar su evolución serán, por tanto, la tensión máxima en la superficie y el gradiente de tensiones a través del material.

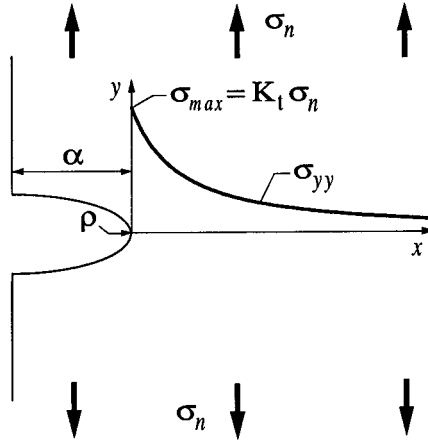


Figura 2.1: Distribución de tensiones σ_{yy} en la raíz de una entalla a tracción.

Es una práctica común expresar la tensión máxima (σ_{max}) en la entalla a través del conocido *factor de concentración de tensiones* K_t . Éste se define como la relación entre σ_{max} y una cierta tensión nominal (σ_n) que se toma como referencia de la tensión aplicada al componente.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (2.1)$$

Generalmente se escoge para σ_n la tensión sobre la sección neta del espécimen, es decir, la sección total descontando la parte ocupada por la entalla. Otras veces se toma directamente la tensión referida a la sección bruta, especialmente cuando las dimensiones del espécimen son mucho mayores que las de la propia entalla. Independientemente del criterio adoptado, K_t es siempre una función de la geometría del concentrador, de la geometría global del espécimen y del tipo de carga aplicada (e.g. tracción, flexión, torsión ...).

Inglis [1] demostró que, en el caso particular de entallas elípticas en un medio infinito sujetas a tracción, el factor de concentración de tensiones es de la forma

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \quad (2.2)$$

donde α es la profundidad de la entalla, ρ el radio de curvatura en el fondo de la misma. A partir de este resultado se puede inferir una expresión más general

$$K_t = 1 + F\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \quad (2.3)$$

siendo F un factor de corrección que depende de la geometría del espécimen y del tipo de sollicitación. Dicha expresión es válida en un gran número de geometrías de entallas y situaciones de carga, permitiendo de manera sencilla expresar K_t en función de parámetros generales de la entalla (α y ρ).

En la actualidad, el cálculo de K_t no comporta ninguna dificultad. La gran mayoría de las geometrías de entallas y situaciones de carga más usuales se encuentran tabuladas en numerosos manuales (e.g. [2-5]). Asimismo, para situaciones complejas o no recogidas en la literatura, la alternativa cada vez más común para determinar K_t es utilizar métodos numéricos como, por ejemplo, el Método de los Elementos Finitos.

En relación al gradiente de tensión, se ha comprobado en una gran variedad de entallas que, cuando se adimensionalizan las distribuciones de tensión mediante la tensión máxima, éstas presentan una evolución muy similar en la región próxima al concentrador, sin exhibir una marcada dependencia de la geometría global del espécimen. El factor principal es la geometría del fondo de la entalla. Este hecho ha llevado a varios investigadores, tales como Schijve [6], Santhanam y Bates [7] y Glinka y Newport [8] entre otros, a concluir que la distribución de las tensiones en la vecindad de una entalla puede ser satisfactoriamente descrita mediante sólo dos parámetros: el factor de concentración de tensiones K_t y el radio de curvatura del concentrador ρ . Se han propuesto, así, varias expresiones aproximadas con la

siguiente forma funcional

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{max} f(x, \rho) \quad (2.4)$$

donde f es una función de la distancia al fondo de la entalla x y el radio de curvatura de ésta. f decrece al aumentar x , siendo su disminución más pronunciada cuanto menor es ρ . Una detallada descripción de las expresiones más significativas puede obtenerse por ejemplo en la referencia de Shin et al. [9].

Tanto el nivel de tensiones como la evolución de las mismas jugarán un papel decisivo en el comportamiento de las grietas en entallas. Para provocar el fallo por fatiga de un componente entallado será necesario: (1) que la elevación de tensiones en la raíz de la entalla permita la nucleación de una microgrieta y (2) que la evolución de dichas tensiones en el material asegure que esta grieta incipiente se pueda propagar hasta la rotura. Así, según lo expuesto en el párrafo anterior, si se consideran dos entallas de igual profundidad pero de distinto radio de curvatura, la de menor radio presentará una concentración de tensiones más elevada en la superficie (K_t mayor, véase ecuación (2.3)), pero, también, una disminución más severa de las tensiones que la entalla de mayor radio. En consecuencia, para una misma tensión aplicada en ambos casos, una grieta se propagará con mayor dificultad en la entalla de menor radio, pudiendo incluso llegar a detenerse si el gradiente de tensiones es suficientemente grande. Atendiendo tan sólo a estos dos factores, nivel y gradiente de tensiones, será posible entender y explicar gran parte de las particularidades que presenta el crecimiento de grietas en entallas.

2.2 Sensibilidad a la entalla

La determinación de la resistencia a fatiga de especímenes que presentan concentradores de tensión ha estado sujeta a una considerable investigación desde mediados de siglo hasta nuestros días. El problema fundamental consiste en determinar la resistencia a fatiga de un componente entallado a partir del conocimiento de la geometría del espécimen y de la resistencia intrínseca a fatiga del material.

La evidencia experimental pone claramente de manifiesto que el límite de fatiga de una pieza entallada es, en general, mayor que el estimado simplemente dividiendo el límite de fatiga del componente sin entalla entre el factor de concentración de tensiones teórico de la entalla K_t . Se define, así, el factor de reducción de resistencia a fatiga de la entalla, o factor de concentración de tensiones efectivo a fatiga, K_f como

$$K_f = \frac{\text{Límite de fatiga del componente sin entalla}}{\text{Límite de fatiga del componente entallado}}, \quad (2.5)$$

ambos límites de fatiga obtenidos, obviamente, bajo el mismo tipo de sollicitación. Según lo anterior, K_f es normalmente menor que K_t .

Un parámetro tradicionalmente empleado para cuantificar las diferencias entre K_f y K_t es el llamado *índice de sensibilidad a la entalla* (q),

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}. \quad (2.6)$$

La ventaja práctica de utilizar dicho índice radica en el hecho de que éste toma por lo general valores entre 0 y 1. Así, q igual a cero indica que la entalla no provoca ninguna reducción en la resistencia a fatiga del componente, es decir, $K_f = 1$. Por el contrario, un valor de q igual a la unidad refleja que el efecto de la entalla es máximo, $K_f = K_t$.

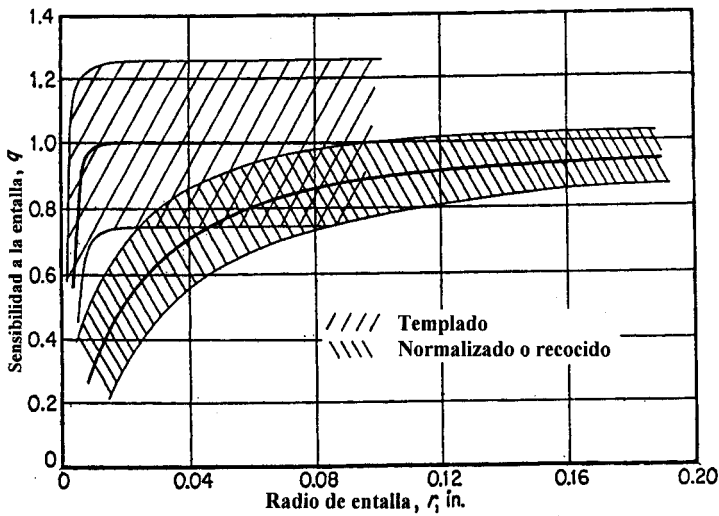
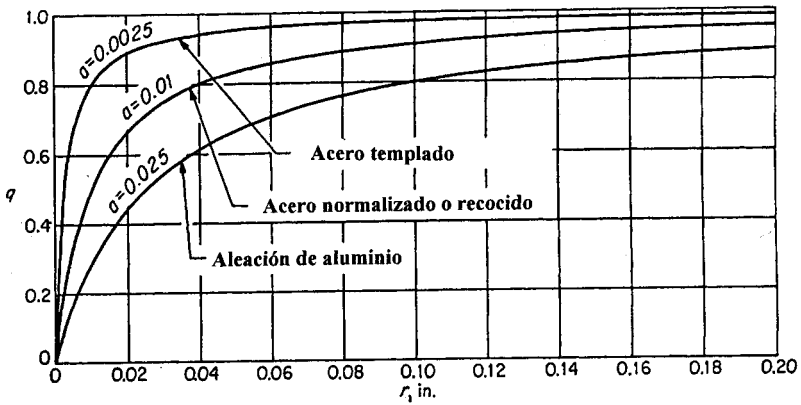


Figura 2.2: q vs. ρ en entallas geoméricamente semejantes: comparación entre varios materiales (superior) y bandas de dispersión experimental (inferior) [10].

La evolución típica de q , e implícitamente la de K_f , en función del radio de curvatura de la entalla se muestra en la Figura 2.2, para entallas geoméricamente semejantes y distintos materiales [10]. En esta figura se pueden observar tres hechos importantes:

1. Para un determinado tipo de material, la sensibilidad a la entalla aumenta

monótonamente desde un valor próximo a cero hasta un valor próximo a la unidad a medida que aumenta el radio de la entalla, lo que indica que las discrepancias entre K_f y K_t son más acusadas cuando la entalla es más aguda. Una conclusión análoga se obtiene también en el caso de entallas con igual profundidad y diferentes radios de curvatura.

2. Los materiales con mayor resistencia a tracción exhiben generalmente valores de q más próximos a la unidad que aquellos de características inferiores. En particular, para materiales de grano muy fino, como, por ejemplo, los aceros templados (véase Figura 2.2(inferior)), es posible encontrar valores del índice de sensibilidad ligeramente superiores a la unidad [10].
3. En todos los casos, el índice de sensibilidad a la entalla se aproxima asintóticamente a la unidad para radios grandes, esto es, $K_f \rightarrow K_t$ al aumentar el tamaño de la pieza.

Estas tres observaciones llevan a concluir que el factor de reducción de resistencia a fatiga de la entalla, a diferencia de K_t , no es simplemente un parámetro geométrico, sino que depende del tipo de material. Asimismo, K_f depende significativamente del tamaño del espécimen (notch-size effect), manifestándose dicha dependencia en una disminución de la resistencia a fatiga del componente al aumentar el tamaño de la entalla, incluso para el mismo K_t .

Dos de las teorías clásicas de mayor aceptación que tratan de explicar el comportamiento a fatiga de componentes con entallas son las propuestas por Neuber [11] y Peterson [10].

Neuber postula que la resistencia a fatiga de una pieza entallada depende de la tensión media sobre un cierto volumen elemental de material situado en el fondo de la entalla. Dicha tensión media es función de la distribución de las tensiones a lo largo de este volumen elemental y, por tanto, inferior a la tensión máxima, dado que los gradientes son siempre negativos. Esto conecta de manera adecuada con la observación de que K_f es generalmente menor que K_t . Según este autor,

para que se produzca el fallo del componente el valor de esta tensión media debe ser al menos igual al límite de fatiga del material. Del resultado de este análisis se deriva la siguiente expresión para K_f

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{A}{\rho}}} \quad (2.7)$$

El índice de sensibilidad de la entalla se expresa, por tanto, como

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{A}{\rho}}}, \quad (2.8)$$

donde ρ es el radio de curvatura de la entalla y A la dimensión representativa del volumen elemental. El valor de A dependerá del tipo de material y del tratamiento térmico y/o mecánico al que haya sido sometido. En particular, Kuhn y Hardrah [12] correlacionaron experimentalmente, para el caso de aceros, A con el límite de rotura del material (véase Figura 2.3).

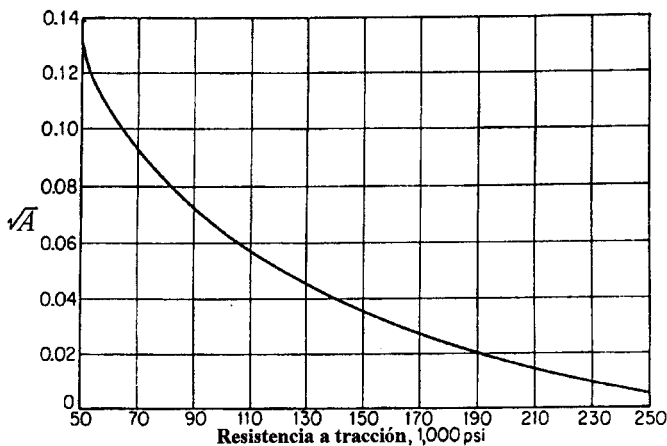


Figura 2.3: Correlación del parámetro A con la resistencia a tracción de aceros.

Una expresión similar a (2.7) ha sido sugerida por Heywood [13], el cual puso de manifiesto que el efecto real en la resistencia a fatiga de pequeños defectos

inherentes al material, tales como inclusiones, porosidades o irregularidades superficiales, era sobreestimado al emplear las relaciones anteriores. El mencionado autor propone una expresión empírica para K_f de la forma

$$K_f = \frac{K_t}{1 + 2 \left[\frac{K_t - 1}{K_t} \right] \sqrt{\frac{a^*}{\rho}}}, \quad (2.9)$$

donde a^* es un parámetro característico del material, que está relacionado con el tamaño del defecto. Dicha expresión predice una reducción en la resistencia a fatiga más acorde con los resultados experimentales en el caso de defectos menores de 0.25 mm (léase defectos circulares), ajustándose a los resultados de Neuber para valores superiores.

Peterson ha propuesto otro método para estimar q basado directamente en el gradiente de tensiones originado por la entalla. Este autor sugiere que el fallo del componente ocurre cuando la tensión local a una distancia característica δ del fondo de la entalla se hace igual al límite de fatiga del material.

Así, expresando el gradiente de tensiones originado por una entalla en la forma

$$\frac{d\sigma}{dy} = -C \frac{\sigma_{max}}{\rho} \quad (2.10)$$

e igualando la tensión a una distancia δ de la superficie al límite de fatiga del material σ_{FL}

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{FL}}{\delta} = C \frac{\sigma_{max}}{\rho}, \quad (2.11)$$

se puede obtener el factor de reducción de resistencia a fatiga de la entalla como

$$K_f = \frac{\sigma_{FL}}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{FL} K_t}{\sigma_{max}} = K_t \left(1 - \frac{C\delta}{\rho} \right), \quad (2.12)$$

donde C es un coeficiente que caracteriza el gradiente de tensiones y el tipo de carga aplicada. Se ha demostrado que valores de $C = 2.5$ para flexión o tracción y $C = 1.2$ para torsión representan razonablemente bien dichos gradientes en un amplio rango de geometrías de entalla.

Tomando como punto de partida la ecuación (2.12) y tras introducir algunas modificaciones matemáticas para imponer que K_f tienda a la unidad cuando ρ

tiende a cero, Peterson expresa finalmente el índice de sensibilidad a la entalla de la forma

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{\rho}} \quad (2.13)$$

para flexión o tracción y

$$q = \frac{1}{1 + 0.6 \frac{a}{\rho}} \quad (2.14)$$

para torsión, siendo $a = C\delta K_t / (K_t - 1)$.

El citado autor comprobó que, a efectos prácticos, el valor de a era poco sensible a los valores de C y K_t en las geometrías de entallas más comunes, y, por tanto, podía ser considerado una distancia característica para cada material. Algunos valores típicos de los materiales más comunes son:

$a = 0.51$ mm para aleaciones de aluminio.

$a = 0.25$ mm para aceros recocidos o normalizados.

$a = 0.064$ mm para aceros templados.

Asimismo, siguiendo la idea de Kunh y Hardrath, Peterson obtuvo también una correlación entre el parámetro a y la resistencia a tracción del acero.

Los modelos de Neuber y Peterson han sido ampliamente utilizados en ingeniería, con resultados muy satisfactorios en gran número de situaciones prácticas. No obstante, como se verá en lo que sigue, la propia naturaleza de estos modelos hace que su rango de aplicabilidad esté restringido a los casos de entallas suaves, esto es, con K_t relativamente bajos.

En efecto, los estudios realizados por Frost [14, 16, 17] y Frost y Dugdale [15] sobre el crecimiento de grietas en concentradores de tensión han puesto de manifiesto que en entallas agudas, sometidas a tensiones menores o iguales al límite de fatiga convencional del componente entallado, se pueden formar grietas en la raíz del concentrador que crecen hasta una cierta distancia, pero que luego se paran sin llegar a provocar la rotura de la pieza, aún cuando se continúe aplicando la carga indefinidamente. Estas grietas se denominan en la literatura *grietas no-propagantes*

y serán discutidas en el apartado siguiente. Este hecho ocurre generalmente en entallas con un factor de concentración de tensiones superior a un determinado valor crítico, típicamente K_t mayor de 4, y tiene como consecuencia que el límite de fatiga del componente y, por tanto, K_f no dependan significativamente de la concentración de tensiones en la entalla. Así, las relaciones del tipo $K_f - K_t$ no serían aplicables a este tipo de situaciones. Tales relaciones sólo son adecuadas cuando la tensión necesaria para iniciar una grieta en la raíz del concentrador es también suficiente para hacer que dicha grieta se propague hasta el fallo del componente. O en otras palabras, cuando, una vez que se inicia la grieta, ésta crece hasta romper la pieza, circunstancia que se da generalmente en aquellas entallas cuyo K_t está por debajo del valor crítico anterior. Tan sólo entonces existe una dependencia directa del límite de fatiga del espécimen entallado con K_t , en particular, como las propuestas por Neuber y Peterson.

La aparición de grietas no-propagantes en un componente hace necesario distinguir entre dos tensiones límites: (a) la mínima tensión necesaria para iniciar una grieta en la raíz de la entalla (límite de iniciación) y (b) la mínima tensión requerida para asegurar que dicha grieta se propague hasta provocar el fallo de la pieza (límite de propagación hasta el fallo o límite de fatiga convencional del espécimen entallado).

En términos generales, se puede decir que los modelos derivados de las propuestas de Neuber y Peterson proporcionan una aproximación adecuada para estudiar las condiciones necesarias que concurren en la iniciación de grietas por fatiga en la raíz del concentrador y permiten estimar el límite de fatiga, o más precisamente, el límite de iniciación de componentes entallados. Las dos ideas importantes que se desprenden de estos modelos se pueden resumir en: (1) la resistencia a fatiga de un espécimen conteniendo una entalla está principalmente influenciada por la evolución de las tensiones en el material y no exclusivamente por la tensión máxima en el fondo del concentrador; y (2) existe una clara dependencia con el tipo de material empleado, reflejada en estos modelos a través de unos parámetros

que representan una cierta distancia característica del material.

En la actualidad está suficientemente bien establecido que la existencia de un límite de fatiga en un espécimen sin entalla está asociada con la presencia de microgrietas en el material que no son capaces de propagarse más allá de las primeras barreras microestructurales (e.g. límites de grano). La existencia de defectos inherentes al material, tales como inclusiones, porosidades, marcas superficiales, etc, hace que dichas microgrietas se formen muy rápidamente durante los primeros ciclos de carga, pudiendo considerarse que siempre están presentes en el material. Así, el período de iniciación puede ser entendido como el proceso de crecimiento de tales microgrietas hasta alcanzar la primera barrera efectiva, dado que una vez superada ésta, la grieta se propaga generalmente hasta la rotura de la pieza. La tensión necesaria para que esto ocurra representará tanto el límite de iniciación como el límite de propagación, es decir, el límite de fatiga.

Extrapolando estas ideas al caso de entallas, el comportamiento a fatiga de un componente entallado en su estado inicial podrá ser abordado como un caso más complejo de propagación de microgrietas, específicamente, microgrietas creciendo bajo un fuerte gradiente de tensiones. Como se argumentará en el Capítulo 5, el límite de iniciación de un componente entallado puede ser interpretado como la tensión mínima requerida para que una microgrieta logre superar la primera barrera efectiva del material en la raíz de la entalla. Esta interpretación permitirá conectar con las ideas de Neuber y Peterson en cuanto a la necesidad de emplear una longitud característica del material para determinar el límite de iniciación, el cual será aquí, de manera natural, el tamaño de grano o la distancia característica entre barreras del material. Como se verá, los resultados obtenidos bajo estas consideraciones reproducen satisfactoriamente las tendencias observadas experimentalmente en relación al concepto de sensibilidad a la entalla.

2.3 Umbrales de crecimiento de grietas en entallas. Grietas no-propagantes

Tal como se ha apuntado en el apartado anterior, Frost y Dugdale, en sus ya clásicos trabajos [14–17] sobre fatiga en entallas, fueron los primeros en poner de manifiesto la existencia de grietas que tras propagarse una cierta distancia llegaban a pararse completamente sin producir el fallo del espécimen. Este fenómeno ocurre generalmente en entallas agudas, esto es, entallas con un factor de concentración de tensiones relativamente elevado y un fuerte gradiente de tensiones, no apareciendo sin embargo en entallas romas.

Los trabajos de los citados investigadores comprendieron diferentes materiales (aceros al carbono, acero Ni-Cr (EN26), Aleación de aluminio BS L65, etc.) y especímenes con distintas geometrías (probetas planas y cilíndricas). El tipo de entalla empleado fue generalmente en forma de V, a la que se le varió el radio del fondo para obtener diferentes K_t , manteniendo su profundidad constante.

Los resultados experimentales se representaron en un gráfico como el mostrado en la Figura 2.4, donde en el eje de abscisas se representa la tensión aplicada al espécimen y en el de ordenadas al factor de concentración de tensiones.

En esta figura se pueden distinguir dos curvas representativas. La primera de ellas (curva (a)), representa el mínimo nivel de tensión necesario para iniciar una grieta en la raíz de la entalla (límite de iniciación). Para cualquier tensión aplicada inferior a dicho límite los citados autores no observaron grietas en el material. Asimismo, se aprecia que las diferencias entre el límite de iniciación y la aproximación obtenida simplemente dividiendo el límite de fatiga del material ($\Delta\sigma_e$ en la figura) entre el factor de concentración de tensiones eran más patentes a medida que K_t aumentaba. La curva (b), en cambio, representa la máxima tensión que podía aplicarse sin que se produjese la rotura del espécimen, es decir, el límite de propagación hasta el fallo o límite de fatiga convencional del componente entallado.

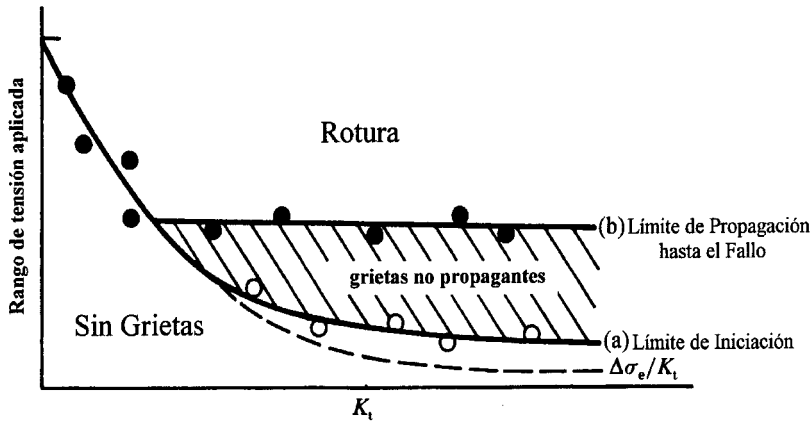


Figura 2.4: Límite de iniciación y límite de propagación hasta el fallo vs. K_t (diagrama de Frost).

El límite de iniciación y el de propagación hasta el fallo eran coincidentes para valores de K_t bajos, indicando que, una vez iniciada una grieta en la raíz de la entalla, ésta era siempre capaz de propagarse hasta provocar la rotura de la probeta. Sin embargo, a medida que K_t aumentaba, existía una marcada diferencia entre dichos umbrales, delimitando entre ambos la que se denominó como región de grietas no-propagantes. En esta zona, para una tensión aplicada entre los umbrales de iniciación y propagación, las grietas se iniciaban en la entalla, pero se paraban definitivamente a una determinada distancia aunque se continuase aplicando carga. Era necesario entonces aumentar la tensión aplicada hasta niveles por encima de la curva (b) para romper el espécimen. El valor de K_t que marcaba la diferencia entre estos dos comportamientos estaba generalmente alrededor de 4, para las geometrías y materiales empleados. Por otra parte, se comprobó que la longitud final de las grietas no-propagantes dependía claramente del nivel de la tensión aplicada, así como de la geometría de la entalla y tipo de material.

Una aportación muy interesante de los estudios anteriores, como se adelantó

en el apartado anterior, fue que siempre que aparecían grietas no-propagantes (en entallas con profundidad constante), el límite de fatiga del espécimen entallado se mostraba aproximadamente constante e independiente de la concentración de tensiones en la entalla. A efectos prácticos, dicho límite se representaba como una recta horizontal hasta cortar al límite de iniciación, como se muestra en la Figura 2.4. No obstante, como sugieren los citados autores, la transición entre los umbrales de iniciación y de propagación hasta el fallo, no debía de ser brusca sino, más bien, progresiva. Aunque las escasas diferencias entre ambos para K_t bajos, unido a la inherente dispersión experimental, hacía muy difícil distinguirlos.

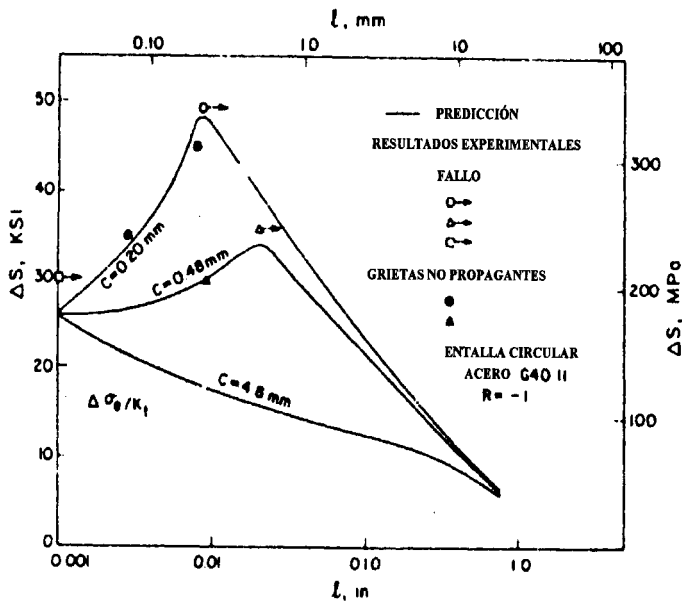


Figura 2.5: Tensión aplicada (ΔS) vs. longitud de grieta (l) en entallas circulares [18].

Más recientemente El-Haddad et al. [18] han analizado las condiciones umbrales para la propagación de grietas en especímenes de acero CSA G40.11 con entallas circulares de diferentes radios (0.2, 0.48 y 4.8 mm). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 2.5, donde se representa la tensión aplicada al espécimen

frente a la longitud de grieta. Junto a estos resultados se muestran también las predicciones del modelo desarrollado por los citados autores y que se comentará más tarde.

Como se puede observar, las entallas de radio 0.2 y 0.48 mm presentan claramente grietas no-propagantes, siendo su longitud mayor a medida que aumenta la tensión aplicada y el radio de la entalla. La evolución de la tensión aplicada en función de la longitud de grieta no-propagante muestra un patrón muy distintivo dependiendo de que puedan aparecer o no tales grietas. En la primera situación, la tensión umbral para propagar una grieta en la raíz de la entalla arranca desde el valor correspondiente al límite de iniciación y presenta una evolución creciente hasta alcanzar un máximo. Dicho máximo representa, obviamente, el límite de propagación hasta el fallo del componente y el tamaño de grieta al que se alcanza se corresponde con la máxima longitud de grieta no-propagante que es posible encontrar en este espécimen y para este material. Por otra parte, si no aparecen grietas no-propagantes, como ocurre en la entalla de 4.8 mm, la tensión umbral es siempre decreciente, indicando que, una vez que se inicia la grieta, ésta se propagará hasta romper el espécimen. El límite de iniciación y el límite de fatiga del componente entallado coinciden, como se comentaba al principio. Es interesante notar que en entallas circulares no es posible encontrar la cuasi-constancia del límite de fatiga en la región de grietas no-propagantes descrita por Frost. et al., dado que al variar el radio de la entalla varía necesariamente su profundidad.

Un completo estudio presentado por Tanaka et al. [19–22] pone también de manifiesto la aparición de grietas no-propagantes en entallas agudas. En este caso, el material empleado fue acero al carbono (JIS SM41B (0.17%C)) y las probetas fueron placas planas con entallas elípticas. La profundidad de la entalla se mantuvo constante (3 mm) y se varió el radio de curvatura.

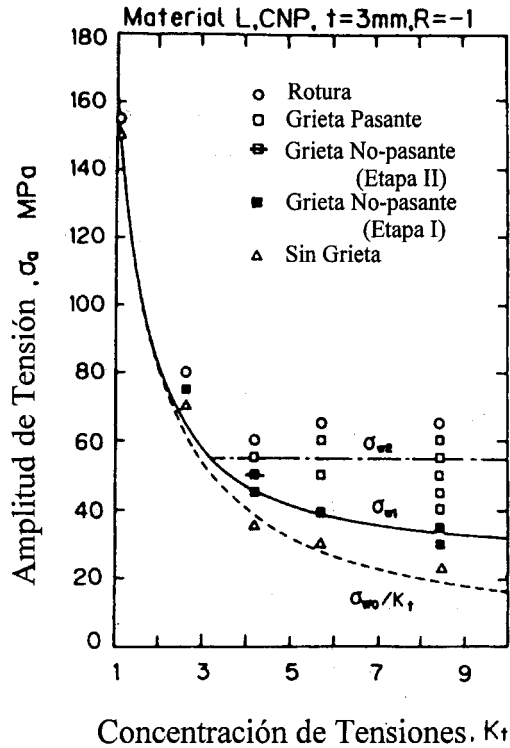


Figura 2.6: Límites de iniciación y de propagación hasta fallo vs. K_t en entallas elípticas [21].

La Figura 2.6 muestra el típico diagrama de Frost con algunos de los resultados obtenidos por los citados autores. Se aprecia claramente que, para K_t superiores a 3, existe una acentuada diferencia entre la tensión necesaria para iniciar una grieta en la entalla y aquella que causa la rotura del componente. En dicha zona, esta última es ligeramente independiente de la concentración de tensiones de la entalla, dentro siempre de la inevitable dispersión experimental. Asimismo, es interesante notar que los resultados reflejan una transición progresiva entre los umbrales de iniciación y de propagación hasta el fallo.

Dos de los mecanismos a los que tradicionalmente se ha recurrido para explicar el fenómeno de la detención de las grietas en entallas agudas han sido la plasticidad local generada en el concentrador, la cual aparece en este tipo de entallas para tensiones inferiores incluso al límite de fatiga, y el desarrollo de cierre de grieta conforme ésta crece.

Smith y Miller [23] y Hammouda et al. [24–26] entre otros han argumentado que el ritmo de crecimiento de una grieta en sus estadíos iniciales está controlado por el campo de deformaciones plásticas de la entalla y por la plasticidad generada por la propia grieta. A medida que la grieta se aleja de la entalla, el primer término decrece relativamente más rápido que el correspondiente aumento del segundo, pudiendo ocasionar que la fuerza conductora sobre la grieta sea insuficiente para mantener su crecimiento y se produzca la parada de la misma. Este razonamiento lleva necesariamente a concluir que la longitud de las grietas no-propagantes debería ser como máximo tan grande como la zona plástica de la entalla.

No obstante, existen evidencias experimentales que contradicen la idea anterior y que indican que la detención de las grietas en la entalla se produce generalmente más allá de zona plástica. En efecto, El-Haddad et al. [18] han contrastado los resultados experimentales obtenidos con probetas entalladas de diferentes aceros (CSA G40.11 y SAE 1015) con las predicciones de dos tipos de modelos, uno que tiene en cuenta el efecto de la plasticidad de la entalla y otro basado en consideraciones puramente elásticas. En dicho análisis se pone de manifiesto que la plasticidad afecta al ritmo de crecimiento inicial de la grieta, de acuerdo con la ideas de los autores citados anteriormente, encontrándose que las predicciones del modelo elasto-plástico reproduce satisfactoriamente las observaciones experimentales, mientras que el modelo elástico difiere sustancialmente de éstas. Sin embargo, cuando se produce la parada de la grieta ambos modelos coinciden, reflejando que dicha detención se produce siempre en régimen elástico y, por tanto, fuera de la zona plástica de la entalla. Se concluye, así, que el efecto de la plasticidad local en

la condición de propagación o no de las grietas es despreciable o, cuando menos, no debe ser el factor determinante de la parada de éstas.

Similares conclusiones han sido también aportadas por Tanaka et al. [19,20]. En este caso, los autores estiman los tamaños de la zona plástica generada por la entalla a distintos niveles de carga y los comparan con los tamaños de las grietas no-propagantes obtenidos experimentalmente. Se observa que, para tensiones del orden del límite de fatiga del especimen entallado, dichas longitudes de grieta son varias veces superiores a los tamaños de zona plástica.

Un razonamiento ilustrativo debido Taylor podría dar explicación a las observaciones anteriores. Según este autor, sería razonable considerar que la longitud final de grieta no-propagante debería ser mayor que la región plástica del concentrador, ya que mientras la grieta se encuentre inmersa en la zona plástica experimentará tensiones del orden del límite elástico del material, condición bajo la que una grieta siempre se propagará [28]. Fuera de esta zona, el gradiente de tensiones puede hacer que los niveles de tensión sobre la grieta sean insuficientes para que continúe creciendo.

El otro mecanismo al que frecuentemente se alude para explicar la aparición de grietas no-propagantes en entallas es el cierre de grieta [19-22, 29]. En efecto, es bien conocido que a medida que la grieta crece los niveles de cierre sobre ella aumentan, principalmente el cierre inducido por rugosidad y por plasticidad, reduciendo así la fuerza conductora. Esto, unido a la fuerte disminución de las tensiones conforme la grieta se aleja del concentrador, podría contribuir a la parada de la grieta.

La aplicación de ecuaciones basadas en argumentos de cierre es normalmente difícil, ya que en general la tensión de cierre se determina con expresiones derivadas ad hoc, como por ejemplo en los trabajos de Tanaka et al. [19,20] que se comentarán más adelante. Aunque estos modelos han proporcionado resultados satisfactorios con los datos experimentales de los propios autores, es cuestionable su generalidad debido a lo particular de las expresiones utilizadas para los factores de intensidad

de tensiones efectivos.

Por último, es importante reseñar que las longitudes de las grietas no-propagantes son en general pequeñas. Por ejemplo, en entallas mucho mayores que la microestructura del material son del orden de las centenas de micras, e incluso menores cuando el tamaño del concentrador es del orden del tamaño microestructural característico. En este régimen de longitudes es de esperar que la microestructura del material juegue también un papel importante.

2.4 Modelos de los umbrales de crecimiento de grietas en entallas

Existen en la literatura un gran número de modelos que tratan de analizar cuáles deben ser las condiciones necesarias para que una grieta pueda propagarse o no en la raíz de una entalla. La base común a la mayoría de ellos es la descripción macroscópica del proceso de propagación de la grieta a través de los parámetros derivados de la Mecánica de la Fractura, generalmente, el Factor de Intensidad de Tensiones K (FIT). A continuación se hará una breve revisión de aquellos que a juicio del autor son más representativos.

En 1977 Smith y Miller [23, 27] proponen modificar la expresión del FIT de tal manera que recogiese la influencia de la entalla conforme la grieta avanza. Para ello, comparan la longitud (L) de una grieta creciendo en un espécimen sin concentrador con la longitud (a) de una grieta en el espécimen entallado, bajo una misma tensión aplicada σ , en el instante en que las dos tienen la misma velocidad de propagación. La diferencia entre ambas longitudes les permite cuantificar de manera simple el efecto de la entalla ($e = L - a$) y obtener, así, una expresión del factor de intensidad de tensiones para la grieta en el espécimen entallado

$$K = \sigma \sqrt{\pi(a + e)}, \quad (2.15)$$

donde la longitud ficticia e varía a medida que aumenta la longitud real de la

grieta. Tras analizar el crecimiento de grietas en diferentes entallas, los autores proponen emplear como ley de variación la siguiente

$$e = \begin{cases} 7.96a\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} & \text{cuando } 0 < a < 0.13\sqrt{\alpha\rho} \\ \alpha & \text{cuando } a \geq 0.13\sqrt{\alpha\rho} \end{cases} \quad (2.16)$$

donde α y ρ son respectivamente la profundidad y el radio de curvatura de la entalla. La cota $0.13\sqrt{\alpha\rho}$ corresponde aproximadamente con la distancia desde la raíz de la entalla a partir de la cual la influencia de la concentración de tensiones desaparece. En otras palabras, es la distancia más allá de la que no existen diferencias apreciables entre el crecimiento de una grieta de longitud $a + \alpha$ en un espécimen sin concentrador y el de una grieta de longitud a en la pieza entallada (la cota de $0.13\sqrt{\alpha\rho}$ fue modificada en un trabajo posterior de uno de los autores, como se comentará en el Capítulo 5).

Según lo anterior, para una grieta dentro de la zona de influencia de la entalla el factor de intensidad de tensiones toma la forma

$$K = \left[1 + 7.96\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \right]^{0.5} \sigma\sqrt{\pi a}, \quad (2.17)$$

donde el término entre corchetes puede ser interpretado como un cierto factor de concentración de tensiones a fatiga (K_{FATIGA}). Los autores proponen que la tensión necesaria para la iniciación de una grieta en la raíz de una entalla puede obtenerse dividiendo el límite de fatiga del material (σ_{FL}) entre K_{FATIGA} ,

$$\sigma = \sigma_{FL} / [1 + 7.96\sqrt{\alpha/\rho}]^{0.5}. \quad (2.18)$$

Por otra parte, los citados investigadores razonan que, en entallas agudas, donde la zona de influencia de la entalla es muy pequeña, e aumenta muy rápidamente hasta el valor $a + \alpha$. Así, la condición para que una grieta pueda siempre propagarse se obtendrá igualando el FIT al factor de intensidad de tensiones umbral $K_{th\infty}$ dado por la MFEL, de donde resulta la siguiente expresión para el umbral de propagación hasta el fallo en el espécimen entallado

$$\sigma = \frac{K_{th\infty}}{1.12\sqrt{\pi(a + \alpha)}} \quad (2.19)$$

donde 1.12 es el habitual factor de corrección geométrico que representa el efecto de la superficie libre. Considerando que en la mayoría de los casos prácticos la longitud de grieta no-propagante es mucho menor que el tamaño de la propia entalla ($a \ll \alpha$), la ecuación (2.19) queda finalmente como

$$\sigma \approx \frac{0.5 K_{th\infty}}{\sqrt{\alpha}} \quad (2.20)$$

la cual ha sido ampliamente utilizada en la práctica con excelentes resultados.

La expresión (2.20) pone de manifiesto un claro efecto del tamaño de la entalla y de las propiedades del material en la resistencia a fatiga de la pieza, de acuerdo con las observaciones experimentales. Asimismo, deja entrever que las grietas no-propagantes pueden aparecer, también, en entallas menos severas (K_t más bajos) para materiales con $K_{th\infty}$ relativamente altos, como son generalmente los materiales de grano basto.

En un intento de incorporar la influencia de la plasticidad de la entalla en los primeros estadios del crecimiento de la grieta, El-Haddad et al. [18] proponen emplear una expresión del FIT en términos de las deformaciones locales en la entalla,

$$\Delta K_\epsilon = E \Delta\epsilon \sqrt{\pi(a + a_0)}, \quad (2.21)$$

donde E es el módulo de Young y $\Delta\epsilon$ es el rango de la deformación local a una distancia igual a la longitud de la grieta, pero en una entalla sin grieta. Por otra parte, se le añade a la longitud real de la grieta la longitud ficticia a_0 , obtenida a partir del diagrama de Kitagawa como $a_0 = (\Delta K_{th\infty} / \Delta\sigma_{FL})^2 / \pi$, lo cual, según muestran los citados autores, permite seguir empleando las expresiones derivadas de la MFEL en el régimen de las grietas pequeñas. Alternativamente, la ecuación (2.21) se puede expresar en términos del factor de concentración de deformaciones (k'_ϵ) y el rango de deformaciones aplicadas al espécimen (Δe)

$$\Delta K = E k'_\epsilon \Delta e \sqrt{\pi(a + a_0)}, \quad (2.22)$$

$\Delta\epsilon = k'_\epsilon \Delta e$ se calcula usando, por ejemplo, el método propuesto por Neuber [30].

Si el nivel de tensiones aplicado es suficientemente bajo para que el campo de deformaciones en la entalla permanezca en estado elástico la expresión (2.22) se reduce a

$$\Delta K = k' \Delta \sigma \sqrt{\pi(a + a_0)}, \quad (2.23)$$

donde k' es un factor de concentración de tensiones elástico. A medida que la grieta avanza, k' decrece desde un valor máximo inicial de $1.12K_t$ hasta un valor de $\sqrt{(a + a_0 + \alpha)/(a + a_0)}$ cuando la grieta ha salido de la zona de influencia de la entalla. La variación específica para cada geometría de entalla se puede obtener a partir de las expresiones del FIT en función de la longitud de grieta tabuladas en manuales o mediante análisis numérico.

Las predicciones de las ecuaciones (2.22) y (2.23) fueron comparadas con los resultados experimentales obtenidos en entallas elípticas, empleando diferentes materiales, y con algunos de los resultados de Frost et al. para entallas en V. Se observó que la condición de no-propagación en entallas agudas se alcanzaba cuando ΔK caía por debajo del factor de intensidad de tensiones umbral $\Delta K_{th\infty}$. Además, las predicciones de ambas ecuaciones eran idénticas en dicho instante, en perfecto acuerdo con los datos experimentales, indicando que las grietas dejaban de crecer fuera de la zona plástica del concentrador. Por tanto, una descripción elástica del proceso de crecimiento era suficiente para determinar el límite de fatiga del espécimen entallado.

A tenor de lo anterior, los autores proponen que la tensión umbral para hacer crecer una grieta de una longitud a en el fondo de la entalla se puede obtener a partir de (2.23) como

$$\Delta \sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th\infty}}{k' \sqrt{a + a_0}} = \frac{\Delta \sigma_{FL}}{k'} \sqrt{\frac{a_0}{a + a_0}}, \quad (2.24)$$

donde se ha introducido la expresión de a_0 . La progresión de $\Delta \sigma_{th}$ en función de la longitud de grieta ha sido discutida en el apartado anterior para el caso de entallas circulares (véase Figura 2.5 y comentarios). Tan sólo recordar que, en entallas donde aparecen grietas no-propagantes, $\Delta \sigma_{th}$ es inicialmente creciente

hasta alcanzar un máximo, el cual corresponde con el límite de propagación hasta el fallo. En caso contrario, la progresión de $\Delta\sigma_{th}$ es siempre decreciente, esto es, el límite de iniciación coincide con el umbral de propagación hasta el fallo.

Por último, en la citada referencia se sugiere que el límite de propagación hasta el fallo ($\Delta\sigma_p$) en entallas agudas puede obtenerse de manera aproximada sustituyendo $k' = \sqrt{(a + a_0 + \alpha)/(a + a_0)}$ en (2.24), es decir,

$$\Delta\sigma_p = \Delta\sigma_{FL} \sqrt{\frac{a_0}{a + a_0 + \alpha}} \quad (2.25)$$

Dado que en la mayoría de los casos prácticos a y a_0 son mucho menores que la profundidad de la entalla (α), se llega a una expresión análoga a la sugerida por Smith y Miller

$$\Delta\sigma_p = \Delta\sigma_{FL} \sqrt{\frac{a_0}{\alpha}} \approx \frac{\Delta K_{th\infty}}{2\sqrt{\alpha}} \quad (2.26)$$

Yates y Brown [31] han propuesto un modelo muy intuitivo para predecir la longitud de las grietas no-propagantes en entallas, basado en el diagrama de Kitagawa-Takahashi del material. Como se refirió en el capítulo anterior, este gráfico representa la tensión umbral para la propagación hasta el fallo o la no propagación de una grieta por fatiga en un espécimen sin concentrador. Expresando dicho diagrama en términos del FIT (ΔK_{th}), los autores razonan que, para que una grieta crezca por fatiga en la raíz de la entalla, el rango del FIT de dicha grieta debido a la tensión aplicada debe ser siempre superior al umbral dado por el diagrama de Kitagawa. Por tanto, la condición límite para la propagación de una grieta en la entalla será simplemente $\Delta K = \Delta K_{th}$.

En primera aproximación el diagrama de Kitagawa-Takahashi se puede representar mediante dos rectas de la forma (línea llena en la Figura 2.7)

$$\Delta K_{th} = \begin{cases} Y\Delta\sigma_{FL}\sqrt{\pi a} & \text{cuando } 0 < a < a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th\infty}}{Y\Delta\sigma_{FL}} \right)^2 \\ \Delta K_{th\infty} & \text{cuando } a > a_0 \end{cases} \quad (2.27)$$

donde Y es un factor de corrección geométrico. Los autores emplean esta aproximación en una primera versión de su modelo, aunque posteriormente utilizan una

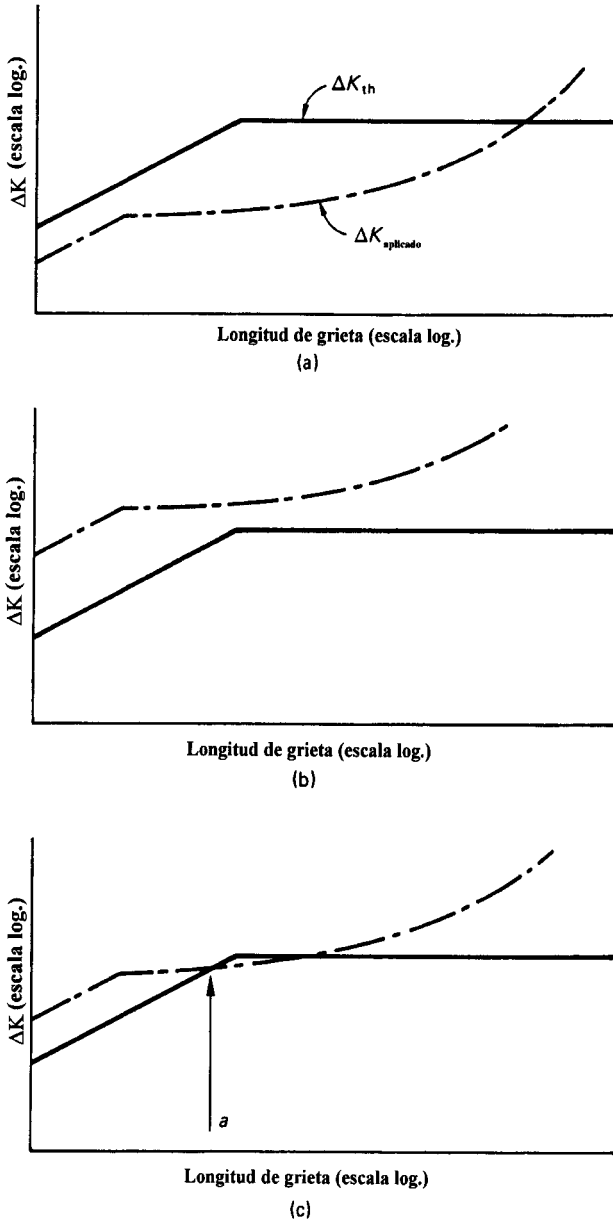


Figura 2.7: Modelo de Yates y Brown [31]. Tres situaciones posibles en función de la tensión aplicada: (a) la grieta no crece; (b) propagación hasta el fallo y (c) aparece una grieta no-propagante de longitud a .

expresión más realista a fin de obtener mejores predicciones. Dado que emplear una u otra no aporta ninguna novedad conceptual, seguiremos aquí con la versión simplificada. Para estimar el FIT de una grieta creciendo desde la raíz de la entalla se sugieren las expresiones (línea de trazos en la Figura 2.7)

$$\Delta K = \begin{cases} Y K_t \Delta\sigma\sqrt{\pi a} & \text{dentro de la zona de influencia de la entalla} \\ \Delta\sigma\sqrt{\pi(a + \alpha)} & \text{fuera de la zona de influencia de la entalla} \end{cases} \quad (2.28)$$

Superponiendo en un mismo diagrama las curvas de ΔK y ΔK_{th} dadas por (2.27) y (2.28) respectivamente, se pueden obtener tres situaciones diferentes (Figura 2.7):

1. Si la curva del factor de intensidad de tensiones de la grieta está por debajo de la curva del diagrama de Kitagawa, la grieta no se propagará (Figura 2.7 a).
2. Si el factor de intensidad de tensiones de la grieta está por encima del diagrama de Kitagawa, la grieta crecerá continuamente hasta la rotura del componente (Figura 2.7 b).
3. Por último, puede ocurrir que la curva del FIT de la grieta comience por encima de la curva del diagrama de Kitagawa pero interseccione a ésta en un determinado punto. En estas circunstancias, la grieta comenzará a crecer en la raíz del concentrador pero se detendrá al alcanzar la longitud dada por la intersección de ambas curvas (Figura 2.7 c). Dicha longitud se corresponde con la longitud de grieta no-propagante a esa determinada tensión aplicada.

Este modelo proporciona predicciones razonables respecto de los resultados experimentales con los que fue comparado. Es significativo resaltar que la intersección entre ambas curvas ocurría siempre fuera de la zona de influencia de la entalla. No obstante, propone una aproximación demasiado simplista acerca de la influencia de concentrador, donde no se considera en ningún instante el gradiente de tensiones generado por la entalla. Asimismo, teniendo en cuenta que el tamaño de las grietas no-propagantes está habitualmente dentro del rango de

grietas pequeñas, la validez del uso del FIT para representar la fuerza conductora de la grieta es muy cuestionable.

Finalmente, Tanaka et al. han desarrollado una serie de modelos incorporando la contribución del cierre de grieta en las condiciones umbrales de propagación de las grietas en entallas. Así, por ejemplo, Tanaka y Nakai [19] proponen una aproximación muy parecida, en esencia, al modelo elástico de El-Haddad et al., pero utilizando ahora el FIT efectivo (ΔK_{eff}).

En general, el rango del FIT de una grieta de longitud c en la raíz de la entalla se puede expresar como

$$\Delta K = F(c)\Delta\sigma\sqrt{\pi c} \quad (2.29)$$

o, eliminando el tramo del ciclo en el que la grieta está cerrada, como

$$\Delta K_{eff} = F(c)\Delta\sigma_{eff}\sqrt{\pi c} \quad (2.30)$$

con $\sigma_{eff} = \sigma_{max} - \sigma_{op}$ y $F(c)$ un factor de corrección geométrico que tiene en cuenta la geometría de la entalla, del espécimen y de la propia grieta.

La condición límite para hacer crecer una grieta de longitud genérica c se alcanzará cuando ΔK_{eff} sea igual al rango del FIT efectivo umbral para dicha longitud ΔK_{effth} . Para calcular este último se proponen las expresiones siguientes

$$\frac{\Delta K_{effth}}{\Delta K_{effth\infty}} = \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K_{th\infty}} \left[\frac{c + a_0}{c + a'_0} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.31)$$

con

$$\frac{\Delta K_{th}}{\Delta K_{th\infty}} = \left[\frac{c}{c + c'_0} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{F(c)}{F(c + c'_0)}, \quad (2.32)$$

donde $\Delta K_{th\infty}$ y $\Delta K_{effth\infty}$ son respectivamente el rango del FIT umbral y el rango del FIT umbral efectivo para una grieta grande en un espécimen sin concentrador, $a_0 = (\Delta K_{th\infty}/\Delta\sigma_{FL})^2/\pi$ y $a'_0 = (\Delta K_{effth\infty}/\Delta\sigma_{FL})^2/\pi$ son longitudes ficticias, denominadas por los autores longitud de grieta intrínseca y longitud de grieta intrínseca efectiva del espécimen sin entalla respectivamente, y

$c_0 = (\Delta K_{th\infty}/1.122\Delta\sigma_{FL})^2/\pi$ y $c'_0 = (\Delta K_{effth\infty}/1.122\Delta\sigma_{FL})^2/\pi$ son la longitud de grieta intrínseca y longitud de grieta intrínseca efectiva del espécimen entallado. Combinando adecuadamente las expresiones anteriores, la tensión umbral que finalmente se obtiene es

$$\Delta\sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th\infty}}{\sqrt{\pi(c+a_0)}F(c+c'_0)} \sqrt{\frac{c+a'_0}{c+c'_0}}, \quad (2.33)$$

Alternativamente, en una referencia posterior de Tanaka y Akiniwa [22] se sugiere no hacer distinción entre las longitudes intrínsecas del espécimen sin y con entalla ($a_0 = c_0$ y $a'_0 = c'_0$), siendo la expresión propuesta en este caso

$$\Delta\sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th\infty}}{\sqrt{\pi(c+c_0)}F(c+c'_0)} \quad (2.34)$$

Empleando una función adecuada para el factor geométrico F , las ecuaciones (2.33) y (2.34) permiten obtener la evolución de la tensión umbral en la entalla en función de la longitud de grieta. Las predicciones de (2.34) pueden verse en la Figura 2.6, junto a los resultados experimentales obtenidos con entallas elípticas [21]. Según los citados autores, el límite de iniciación se obtiene haciendo cero la longitud de grieta en la entalla ($c = 0$), es decir, $\Delta\sigma_{w1} = 1.122\Delta\sigma_{FL}/F(c'_0)$. El límite de propagación hasta el fallo ($\Delta\sigma_{w2}$) se obtiene calculando el valor del máximo de $\Delta\sigma_{th}$, el cual será igual o superior que $\Delta\sigma_{w1}$ dependiendo de la severidad de la entalla.

Este modelo proporciona una alternativa razonable para tener en cuenta la influencia del cierre de grieta en entallas. No obstante, dicho efecto se reduce simplemente al cálculo de las longitudes intrínsecas efectivas c'_0 y/o a'_0 , cuyo sentido físico no es del todo claro. Por otra parte, redundante de nuevo en el dudoso empleo del FIT como parámetro descriptor del crecimiento en el régimen de grietas pequeñas.

En general, existen en la literatura una extensa variedad de modelos, de los cuales los presentados aquí pueden ser representativos, basados tanto en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal como en la Elasto-Plástica. Éstos proporcionan

una descripción macroscópica del proceso de crecimiento en entallas considerando el material como un medio continuo y homogéneo y, por tanto, obviando el régimen de grietas pequeñas. En esta situación, el comportamiento de la grieta, al igual que en especímenes sin entallas, estará afectado en gran parte por la microestructura del material, es decir, bloqueos de la grieta en los bordes de grano, diferente orientación de los planos de crecimiento en los diferentes granos por los que se extiende la grieta, etc. Por tanto, parece razonable pensar que para una descripción más realista de los primeros estadios de propagación de una grieta en la entalla, etapa la que la grieta consume la mayor parte de su vida en condiciones normales de uso, será más conveniente emplear modelos capaces de recoger las características típicas de las grietas pequeñas.

En el presente trabajo, el crecimiento de la grieta en una entalla será analizado en términos del modelo de crecimiento de grietas pequeñas desarrollado por Navarro y de los Rios [32]. La influencia de la microestructura del material se verá reflejada en los sucesivos bloqueos de la zona plástica de la grieta con las barreras microestructurales (e.g. bordes de grano). El gradiente de tensiones generado por la entalla estará incorporado de manera natural en la formulación propuesta y, así, su influencia a medida que la grieta avanza en el material será tenida en cuenta sin necesidad de introducir ningún parámetro o longitud de grieta ficticia. El análisis de los sucesivos bloqueos de la grieta con las barreras microestructurales y la resistencia que éstas oponen al paso de la misma permitirá determinar las condiciones de propagación de una grieta en el campo de tensiones de la entalla. De esta manera, se podrá predecir la aparición de grietas no-propagantes en aquellas situaciones en las que la grieta no sea capaz de superar alguna de las barreras microestructurales que encuentre a su paso y quede bloqueada por ella. Por otro lado, se desarrollará un modelo de plastificación en la raíz del concentrador que permitirá estudiar la influencia de la plasticidad de la entalla en la aparición de tales grietas.

Bibliografía

- [1] Inglis, C.E. (1913), Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners, Transactions of the Institute of Naval Architects, 55, pp. 219-241
- [2] Neuber, H. (1958), Kerbspannungslehre, Springer Verlag, FRG
- [3] Peterson, R.E. (1974), Stress Concentration Factors, John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Savin, G.N. and Tulchii, V.I. (1976), Handbook on Stress Concentration, High School Publisher House, Chinese Translation, Heilongjiang Science and Technology Press (1983).
- [5] Hardy, S.J. and Malik, N.M. (1992), A Survey of post-Peterson Stress Concentration Factor Data, Int. J. Fatigue, Vol. 14, No. 3, pp. 147-153
- [6] Schijve, J. (1980), Stress Gradient around Notches, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. Vol. 3, pp. 325-332
- [7] Santhanam, A.T. and Bates, R.C. (1979), The Influence of Notch-tip Geometry on the Distribution of Stresses and Strains, Mater. Sci. And Engng., Vol. 41, No. 2, pp. 107-114
- [8] Glinka, G. and Newport, A. (1987), Universal Features of Elastic Notch-tip Stress Fields, Int. J. Fatigue, Vol. 9, No. 3, pp. 143-150

- [9] Shin, C.S., Man, K.C. and Wang, C.M. (1994), A Practical Method to Estimate the Stress Concentration of Notches, *Int. J. Fatigue*, Vol. 16, pp. 242-256
- [10] Peterson, R. E. (1959), Notch Sensitivity, in *Metal Fatigue* (eds. G. Sines & J. L. Waisman), McGraw-Hill, N.Y., pp.293-306
- [11] Neuber, H. (1946), *Theory of Notch Stresses*, J.W. Edwards, Publisher, Inc., Ann Arbor, Michigan, pp.163
- [12] Kunh, P. and Hardrath, H. F. (1952), An Engineering Method for Estimating Notch-size Effect in Fatigue Tests of Steel, *NACA Tech. Note* 2805
- [13] Heywood, R. B. (1962), *Designing against Fatigue*, Chapman & Hall Ltd., London
- [14] Frost, N. E. (1955), Non-propagating Cracks in Vee-notched Specimens Subjected to Fatigue Loading. *Aeronaut. Q.* 8, pp.1-20
- [15] Frost, N. E. and Dugdale, D. S. (1957), Fatigue Tests on Notched Mild Steel Plates with Measurement of Fatigue Cracks, *J. Mech. Phy. Solids* 5, pp.182-192
- [16] Frost, N. E. (1960), Notch Effects and Critical Alternating Stress Required to Propagate a Crack in Aluminium Alloy Subject to Fatigue Loading, *J. Mech. Engng. Sci.* 2, pp.109-119
- [17] Frost, N. E. (1961), Significance of Non-propagating Cracks in the Interpretation of Notched Fatigue Data, *J. Mech. Engng. Sci.* 3(4), pp.299-302
- [18] El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith, K. N. (1979), Prediction of Non Propagating Cracks, *Engng. Fract. Mech.* 11, pp.573-584
- [19] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1983), Propagation and Non-propagation of Short Fatigue Cracks at a Sharp Notch. *Fat. Engng. Mater. Struct.* 6, pp.315-327

- [20] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1984), Prediction of Fatigue Threshold of Notched Components, *ASME J. Engng. Mater. and Tech.* 106, pp.192-199
- [21] Tanaka, K. and Akiniwa, Y. (1987), Notch-Geometry Effect on Propagation Threshold of Short Fatigue Cracks in Notched Components, *Fatigue'87* (R.O. Ritchie and E.A. Starke, Jr.), Third International Conference on Fatigue and Fatigue Thresholds, Vol. II, pp. 739-748, Charlottesville, Va.
- [22] Tanaka, K. and Akiniwa, Y. (1988), The Propagation of Short Fatigue Cracks at Notches, in *Basic Questions in Fatigue*, Vol. 1, ASTM STP 924 (Eds. J.T. Fong and R.J. Fields), American Society for Testing Materials, Philadelphia, pp. 281-298
- [23] Smith, R. A. and Miller, K. J. (1978), Prediction of Fatigue Regimes in Notched Components, *Int. J. Mech. Sci.* 20, pp.201-206
- [24] Hammouda, M. M. and Miller, K. J. (1979), Elastic-plastic Fracture Analyses of Notches, in *Elastic-Plastic Fracture*, ASTM STP 668 (eds. J. D. Landes, J. A. Begley & G. A. Clarke), American Society for Testing and Materials, pp.703-719
- [25] Hammouda, M. M., Smith, R. A. and Miller, K. J. (1979), Elastic-plastic Fracture Mechanics for Initiation and Propagation of Notch Fatigue Cracks, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 2, pp.139-154
- [26] Hammouda, M. M. and Miller, K. J. (1980), Prediction of Fatigue Lifetime of Notched Members, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 2, pp.377-386
- [27] Smith, R. A. and Miller, K. J. (1977), Fatigue Crack at Notches, *Int. J. Mech. Sci.* 19, pp.11-22
- [28] Taylor, D. (1989), *Fatigue Thresholds*, Butterworth & Co. (Publishers) Ltd.
- [29] McKeivily, A.J. and Minakawa, K. (1987), On Crack Closure and the Notch Size Effect in Fatigue, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 28, No. 5/6, pp. 519-527

- [30] Neuber, H. (1961), The Theory of the Stress Concentration for Shear Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Non-Linear Stress-Strain Law, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 28, pp. 544-550
- [31] Yates, J. R. and Brown, M. W. (1987), Prediction of the Length of Non-propagating Fatigue Cracks, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 10, pp.187-201
- [32] Navarro A. and de los Rios E.R. (1992), Fatigue Crack Growth Modelling by Successive Blocking of Dislocations, *Proc. R. Soc. Lond.* A437, pp.375-390

Capítulo 3

Representación de una grieta en un medio infinito mediante dislocaciones

La representación de una grieta mediante la teoría de dislocaciones ha proporcionado una herramienta muy útil para abordar el estudio y caracterización del proceso de crecimiento de grietas por fatiga [1–5].

La grieta y su zona plástica se modelan mediante una distribución de dislocaciones infinitesimales, las cuales experimentan una cierta resistencia a su movimiento. Dicha resistencia se representa a través de diferentes *tensiones de fricción*: σ_1 sobre las dislocaciones de la grieta propiamente dicha ($|x| < a$) y σ_f en las dislocaciones de la zona plástica (véase Figura 3.1). En particular, si no existe contacto entre las caras de la grieta puede suponerse $\sigma_1 = 0$.

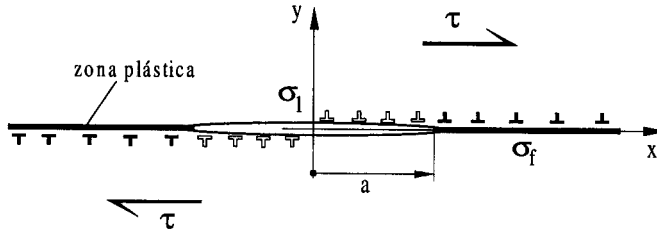


Figura 3.1: Representación esquemática de una grieta.

Si se considera la grieta en un sólido infinito, la ecuación que determina el equilibrio de las dislocaciones es una ecuación integral del tipo Cauchy e independiente del tipo de dislocaciones empleadas. Así, una distribución de dislocaciones de borde con vectores de Burgers paralelos al plano de la grieta, sometidas a una tensión $\sigma_{xy} = \tau$, reproduce el Modo II de apertura de grieta, mientras que si los vectores de Burgers son perpendiculares a dicho plano y la tensión es de tracción ($\sigma_{yy} = \sigma$) modela una grieta abierta en Modo I. Por último, una distribución de dislocaciones de tornillo con vectores de Burgers paralelos al plano de la grieta y sometidas a una tensión $\sigma_{yz} = \tau$, representa una grieta abierta en Modo III.

Dependiendo de las condiciones de contorno al final del dominio de dislocaciones, la ecuación de equilibrio admite soluciones distintas. Las condiciones comúnmente usadas para el modelado de grietas son: que la distribución de dislocaciones esté acotada o que sea singular en ambos extremos del dominio.

En general, la solución acotada aparece cuando la tensión aplicada es inferior a la tensión que se opone al movimiento de las dislocaciones ($\tau < \sigma_f$). En estas condiciones, las dislocaciones de la zona plástica se extienden en el material como consecuencia de la concentración de tensiones provocada por la grieta, cubriendo una distancia finita a partir del vértice de la misma. Esta distancia viene determinada por la relación τ/σ_f . La distribución de dislocaciones cae a cero al final de la zona plástica y las tensiones en el plano de la grieta son finitas en todo punto.

Bilby et al. [2] han empleado esta solución para el estudio del comportamiento

elasto-plástico de una grieta. Dicho modelo, conocido como modelo de Bilby-Cotrell-Swinden, considera que la zona plástica se concentra en una delgada región a partir del vértice de la grieta, cubriendo un gran número de granos del material. La tensión de fricción σ_f se identifica con el límite elástico inferior. Con esta misma filosofía, Weertman [3] ha desarrollado un modelo de propagación de grietas por fatiga. La hipótesis básica es que la extensión de la grieta se produce cuando, como consecuencia de la carga cíclica, el desplazamiento plástico en el fondo de la grieta alcanza un determinado valor crítico, lo cual le permite obtener una ley de crecimiento para grietas grandes.

Por otra parte, la solución no acotada se obtiene cuando la tensión externa es superior a la tensión que se opone al movimiento de las dislocaciones ($\tau > \sigma_f$). En este caso, las dislocaciones tienden a alejarse de la grieta hacia el infinito, pero la presencia de barreras al deslizamiento, tales como los bordes de grano del material o límites de segundas fases, impiden este alejamiento, bloqueando las dislocaciones de cabeza. Esto provoca que las dislocaciones se apilen contra el obstáculo, apareciendo en la función de distribución de dislocaciones una singularidad en los extremos del dominio. A diferencia de la solución acotada, la tensión al final del apilamiento es ahora infinita.

Esta solución se ha utilizado para modelar el comportamiento a fatiga de las grietas pequeñas, en las cuales la interacción de su zona plástica con las barreras microestructurales juega un papel importante. Por ejemplo, Taira et al. [6, 7] y Tanaka et al. [4] han señalado que, cuando la grieta es del orden del tamaño de grano, la zona plástica puede considerarse como una banda de deslizamiento cristalográfica, la cual interacciona con los límites de grano. Estos autores emplearon la solución anterior para analizar las condiciones de crecimiento de microgrietas. Asimismo, Eastabrook [8], siguiendo los trabajos de Lardner [9], ha hecho uso también de la solución no acotada para estudiar el ritmo de crecimiento de las grietas en la Etapa I.

Más recientemente, Navarro y de los Rios [10] se han servido de la solución

no acotada para modelar el proceso de propagación de grietas por fatiga, desde el estadio de grieta pequeña hasta el de grieta grande. El crecimiento oscilante que muestran las grietas pequeñas es satisfactoriamente reproducido a través de los sucesivos bloqueos de las dislocaciones en los bordes de grano. Alternativamente y en un intento más realista de modelar el bloqueo de las dislocaciones, estos autores proponen introducir al final de la zona plástica una pequeña zona extra, con una elevada tensión de fricción, lo que les permite emplear la solución acotada y asegurar así que no existen tensiones infinitas en ningún punto del dominio [5].

Navarro y de los Rios presentaron una formulación compacta para la representación de una grieta en un medio infinito que englobaba la solución acotada y no acotada [11]. Sin embargo, se ha detectado un error en el procedimiento de resolución propuesto por dichos autores que provoca que en las expresiones dadas originariamente falten ciertos términos en el caso de configuraciones no simétricas. En este capítulo se corrige este error y se presentan las expresiones completas, válidas para el caso acotado y no acotado, para calcular la distribución de dislocaciones, el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta y la distribución de tensiones en el frente de la grieta. Esto se hace en el caso general en el que la zona plástica de la grieta se extienda sobre un número arbitrario de regiones con diferentes tensiones de fricción, siendo éstas y la tensión aplicada funciones arbitrarias.

Como se verá, las magnitudes anteriores se podrán expresar de forma compacta como la suma de la solución acotada más dos términos que contienen la singularidad multiplicados respectivamente por la *condición de existencia* del problema acotado y la denominada *condición de grieta*, cuyo significado se explica más adelante. El desplazamiento relativo entre las caras de la grieta y la distribución de tensiones en frente de la zona plástica se expresarán en función de la tensión efectiva sobre las dislocaciones, sin necesidad, como se ha venido haciendo hasta ahora, de calcular explícitamente la función de distribución de dislocaciones.

3.1 Formulación general

Considérese el caso general de una grieta en un medio infinito, sujeta a una tensión externa $\tau(x)$, y cuya zona plástica se extiende a través de $2k - 1$ ($k > 0$) zonas con diferentes tensiones de fricción $\sigma_j(x)$ ($j = -k, \dots, -1, 1, \dots, k$) en cada una de ellas (véase Figura 3.2 para la notación). Nótese que tanto las tensiones de fricción como la tensión externa pueden variar a lo largo del plano de deslizamiento de la grieta.

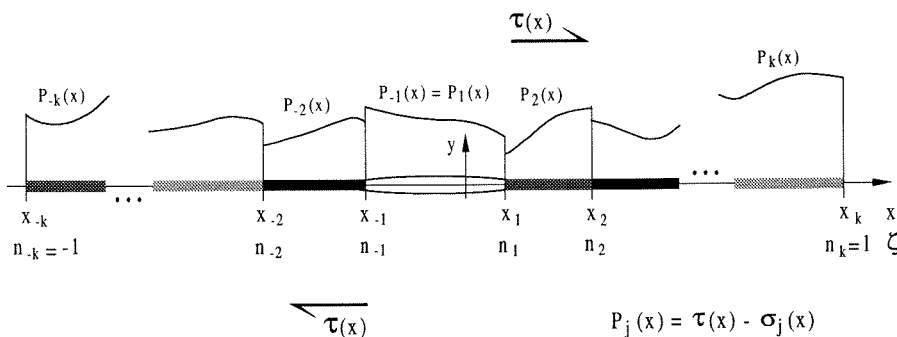


Figura 3.2: Representación esquemática de la grieta en el modelo multizonas.

Cuando se considera una distribución de dislocaciones infinitesimales, el equilibrio de cada una de las dislocaciones viene representado por una ecuación integral singular del tipo Cauchy de la forma [2, 12, 13]

$$\int_{x_{-k}}^{x_k} \frac{f(x')dx'}{x_0 - x'} + \frac{P(x_0)}{A} = 0, \tag{3.1}$$

donde $A = Gb/2\pi$ para dislocaciones de tornillo o $A = Gb/2\pi(1 - \nu)$ para dislocaciones de borde. G es el módulo de cizalladura, b el módulo del vector de Burgers y ν el coeficiente de Poisson. $f(x)$ es la función de distribución de dislocaciones y por tanto $f(x)dx$ es el número neto de dislocaciones existentes entre x y $x + dx$. $P(x_0)$ es la tensión efectiva que tiende a mover una dislocación situada en un

punto genérico x_0 del dominio, la cual viene dada por

$$P(x) = P_j(x) = \tau(x) - \sigma_j(x) \quad , \quad \forall j = -k, \dots, -1, 1, \dots, k \quad (3.2)$$

donde se cumplirá siempre que $P_{-1}(x) = P_1(x)$. El único requerimiento que impondrenos a $P(x)$ es que sea continua a trozos y acotada en el dominio de definición.

Como se ha comentado en la introducción, la ecuación (3.1) admite dos soluciones diferentes dependiendo de que se imponga que la función de distribución de dislocaciones sea acotada o no acotada en x_{-k} y x_k [12, 13].

Sea ζ la coordenada adimensional en el plano de deslizamiento de la grieta, definida de la forma

$$\zeta = \frac{x - (x_{-k} + x_k)/2}{\delta} \quad , \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (3.3)$$

donde $\delta = (x_k - x_{-k})/2$ es la semilongitud del dominio de definición, y en particular, sea n_j el correspondiente valor de ζ en cada uno de los puntos x_j que delimitan las diferentes zonas

$$n_j = \frac{x_j - (x_{-k} + x_k)/2}{\delta} \quad , \quad \forall j = -k, \dots, -1, 1, \dots, k \quad (3.4)$$

donde $n_{-k} = -1$ y $n_k = 1$. En estas nuevas coordenadas la distribución de dislocaciones para el caso acotado (cero) en los extremos del dominio ($n_{-k} = -1$ y $n_k = 1$) puede escribirse como [11, 13]

$$f(\zeta_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} (1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta, \quad (3.5)$$

la cual existe si y sólo si se cumple la siguiente condición (en lo que sigue denominada *condición de existencia*)

$$\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta = 0 \quad (3.6)$$

En las expresiones anteriores y de aquí en adelante, las integrales entre -1 y 1 que contengan a $P(\zeta)$ en el integrando deben ser entendidas como el siguiente

sumatorio

$$\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{\Psi(\zeta)} d\zeta = \sum_{j=1}^k \left[\int_{n_{(j-1)}}^{n_j} \frac{P_j(\zeta)}{\Psi(\zeta)} d\zeta - \int_{n_{-(j-1)}}^{n-j} \frac{P_{-j}(\zeta)}{\Psi(\zeta)} d\zeta \right] \quad (3.7)$$

donde $\Psi(\zeta)$ representa una función genérica.

Por otra parte, la distribución de dislocaciones en el caso no acotado se expresa [11, 13]

$$f(\zeta_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} \frac{1}{(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta - \zeta_0)} d\zeta + \frac{Q}{\delta(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.8)$$

donde Q es una constante arbitraria a determinar.

Descomponiendo la integral de (3.8) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta - \zeta_0)} d\zeta = & (1 - \zeta_0^2) \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \\ & - \zeta_0 \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta - \int_{-1}^1 \frac{\zeta P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta, \end{aligned} \quad (3.9)$$

la solución no acotada puede reescribirse como

$$\begin{aligned} f(\zeta_0) = & \frac{-1}{\pi^2 A} (1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \\ & + \frac{1}{\pi^2 A} \frac{\zeta_0}{(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \\ & + \frac{1}{\pi^2 A} \frac{1}{(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{\zeta P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta + \frac{Q}{\delta(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se observa que el primer sumando se corresponde con la solución acotada (3.5) y que los términos restantes son los que aportan la singularidad $(1/(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}})$ en los extremos del dominio. Nótese además que la integral que aparece en el segundo sumando corresponde a la integral de la *condición de existencia* citada anteriormente (ecuación (3.6)).

Navarro y de los Rios [11] argumentaron que la solución no acotada debería reducirse a la solución acotada si se eliminara directamente la singularidad en (3.10), lo que les llevó a proponer que Q se debería obtener de manera que esto quedara siempre garantizado, es decir, calcular Q de forma que el último sumando

de (3.10) (donde aparece Q) cancele al tercero. De esta forma, el cumplimiento de la *condición de existencia* transforma automáticamente la solución no acotada en la solución acotada y, por tanto, la solución de ambos problemas se podría expresar a través de una única expresión. Sin embargo, este razonamiento, por muy atractivo que parezca, conduce a resultados físicos erróneos. Como veremos a continuación, la idea original puede mantenerse, pero el proceso ha de ser un poco más sofisticado. En cualquier caso hay que señalar que las expresiones dadas por los citados autores resultan ser correctas en el caso particular en que la tensión efectiva $P(\zeta)$ sea simétrica respecto del punto medio del dominio de definición, que ha sido el caso que los autores han utilizado en todas las aplicaciones posteriores de dichas ecuaciones.

Siguiendo el razonamiento de Navarro y de los Rios, si los términos de (3.10) que acompañan a la singularidad se anulasen automáticamente al considerar el problema acotado, dicha expresión representaría a la vez la solución de ambos problemas. Obviamente, esto se cumple con el segundo término, como se ha mencionado antes. Sólo queda, por tanto, analizar que ocurre con los dos últimos sumandos.

Si se piensa en el problema físico de una grieta existe aún una condición extra que debe satisfacerse siempre, ésta es la de asegurar que las caras de la grieta estén en contacto en los extremos del dominio (desplazamiento relativo nulo en -1 y 1). En otras palabras, se debe cumplir que si uno se mueve desde un extremo al otro de la grieta, el número neto de dislocaciones debe ser cero. Esta condición adicional se establece imponiendo [14, 15] (véase Apéndice A)

$$\int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (3.11)$$

que de aquí en adelante denominaremos *condición de grieta*.

Introduciendo en (3.11) las expresiones de la densidad de dislocaciones de la solución acotada (3.5) y no acotada (3.8) respectivamente, se puede demostrar que

la *condición de grieta* se impone simplemente haciendo (véase Apéndice A)

$$Q = 0 \quad \text{en el problema } \textit{No acotado} \quad (3.12)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\zeta P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta = 0 \quad \text{en el problema } \textit{Acotado} \quad (3.13)$$

Es inmediato comprobar que la condición anterior tiene como consecuencia que se anule por completo la singularidad en la expresión (3.10) al considerar el problema acotado. Por tanto, la solución de la distribución de dislocaciones para el problema de una grieta en un medio infinito puede escribirse de forma compacta como

$$\begin{aligned} f(\zeta_0) = & \frac{-1}{\pi^2 A} (1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \\ & + \frac{1}{\pi^2 A} \frac{\zeta_0}{(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \\ & + \frac{1}{\pi^2 A} \frac{1}{(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{\zeta P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \end{aligned} \quad (3.14)$$

de donde, la solución acotada se obtiene simplemente eliminando la singularidad, es decir, satisfaciendo la *condición de existencia* (3.6) y la *condición de grieta* (3.13) respectivamente. Nótese que el cumplimiento de la *condición de grieta* (3.12) para el caso no acotado está implícito en (3.14).

En la expresión compacta de la distribución de dislocaciones, en el caso de $P(\zeta)$ constante en cada intervalo, obtenida por Navarro y de los Rios [11] el último término de la ecuación (3.14) no aparece. Este sumando fue erróneamente cancelado a lo largo del desarrollo matemático con el término de Q , como se ha comentado. En general este término no tiene por qué ser cero y, por tanto, debe ser mantenido. Sin embargo, en el caso particular en que $P(\zeta)$ sea simétrica respecto de $\zeta = 0$, el integrando será una función impar y la integral será siempre cero, anulando dicho sumando. Sólo en este caso las conclusiones establecidas en la citada referencia son correctas, encontrándose que la expresión general que contiene las soluciones del problema no acotado y acotado se puede expresar simplemente como el término correspondiente a la solución acotada más un único término que representa la

singularidad multiplicado por la expresión de la *condición de existencia*, es decir,

$$f(\zeta_0) = \frac{-1}{\pi^2 A} (1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \\ + \frac{1}{\pi^2 A} \frac{\zeta_0}{(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \quad , \quad \text{si } P(\zeta) \text{ es simétrica} \quad (3.15)$$

Dos configuraciones de gran interés práctico son aquellas en las que la tensión efectiva es constante en cada tramo y constante y simétrica. En el caso de $P(\zeta)$ constante en cada intervalo ($P_j(\zeta) = P_j$) la ecuación (3.14) queda como

$$f(\zeta_0) = \frac{1}{\pi^2 A} \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ (P_j - P_{j+1}) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_j \zeta_0}{\zeta_0 - n_j} \right| \right) \right. \\ \left. - (P_{-j} - P_{-(j+1)}) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_{-j} \zeta_0}{\zeta_0 - n_{-j}} \right| \right) \right\} \\ + \frac{1}{\pi^2 A} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k \left\{ (P_j - P_{j+1}) \sin^{-1} n_j - (P_{-j} - P_{-(j+1)}) \sin^{-1} n_{-j} \right\} \\ - \frac{1}{\pi^2 A} \frac{1}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k \left\{ (P_j - P_{j+1})(1 - n_j^2)^{\frac{1}{2}} - (P_{-j} - P_{-(j+1)})(1 - n_{-j}^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.16)$$

Si además existe simetría, es decir, $P_{-j} = P_j$ y $n_{-j} = -n_j$, expresión anterior se reduce a

$$f(\zeta_0) = \frac{1}{\pi^2 A} \sum_{j=1}^{k-1} (P_j - P_{j+1}) \left\{ \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_j \zeta_0}{\zeta_0 - n_j} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_j \zeta_0}{\zeta_0 + n_j} \right| \right) \right\} \\ + \frac{2}{\pi^2 A} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k \left\{ (P_j - P_{j+1}) \sin^{-1} n_j \right\} , \quad (3.17)$$

la cual coincide con la expresión dada originalmente por Navarro y de los Rios [11].

3.2 Desplazamiento relativo entre las caras de la grieta

El desplazamiento relativo entre las caras de la grieta es de gran interés ya que permite obtener el desplazamiento de apertura en el vértice de la grieta (Crack Tip Opening Displacement (CTOD) para Modo I o Crack Tip Sliding Displacement (CTSD) para los Modos II y III), el cual es ampliamente utilizado en fatiga para caracterizar el crecimiento de grietas en régimen elasto-plástico. Veamos ahora como queda la expresión compacta de esta magnitud.

En general, el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta en un punto ζ_0 ($-1 \leq \zeta_0 \leq 1$) viene dado por [11]

$$\phi(\zeta_0) = b\delta \int_{\zeta_0}^1 f(\zeta) d\zeta \quad (3.18)$$

Dicha expresión requiere conocer inicialmente la solución explícita de la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$, para lo cual es necesario resolver primero la ecuación (3.14). Esto no es siempre una tarea sencilla y puede ser más conveniente desde el punto de vista práctico obtener la expresión general del desplazamiento relativo en función de las tensiones aplicadas, es decir, a partir de $P(\zeta)$.

Sustituyendo (3.14) en (3.18) se tiene que

$$\phi(\zeta_0) = \frac{b\delta}{\pi^2 A} \left\{ - \int_{\zeta_0}^1 (1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(\zeta' - \zeta)(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \right. \\ \left. + \int_{\zeta_0}^1 \frac{\zeta}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \right. \\ \left. + \int_{\zeta_0}^1 \frac{1}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \right\} \quad (3.19)$$

Si se intercambia ahora el orden de la integración

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_0) = \frac{b\delta}{\pi^2 A} \left\{ - \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{\zeta_0}^1 \frac{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta' - \zeta)} d\zeta \right] d\zeta' \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{\zeta_0}^1 \frac{\zeta}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right] d\zeta' \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{\zeta_0}^1 \frac{1}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right] d\zeta' \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Desarrollando la integral entre corchetes del primer sumando de manera análoga a como se hace en el Apéndice A (expresión (A.4)) y reordenando los términos, se obtiene

$$\phi(\zeta_0) = - \frac{b\delta}{\pi^2 A} \int_{-1}^1 P(\zeta') (1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\zeta_0}^1 \frac{d\zeta}{(\zeta' - \zeta)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \right] d\zeta' \quad (3.21)$$

Finalmente, realizando la integral entre corchetes, la expresión compacta del desplazamiento relativo entre las caras de la grieta se puede escribir como

$$\phi(\zeta_0) = \frac{b\delta}{\pi^2 A} \int_{-1}^1 P(\zeta') \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - \zeta' \zeta_0}{\zeta_0 - \zeta'} \right| \right) d\zeta' \quad (3.22)$$

Nótese que la expresión anterior es válida tanto para el problema acotado como para el problema no acotado. La única diferenciación entre ambos problemas estriba en que para el caso acotado se deben satisfacer tanto la *condición de existencia* (3.6) como la *condición de grieta* (3.13). En los casos habituales en los que emplea la solución acotada $P(\zeta)$ es conocido a priori, sin embargo, el dominio está indefinido y de hecho éste se determina a partir de las dos condiciones anteriores.

En el caso particular en que $P(\zeta)$ sea constante en cada intervalo ($P_j(\zeta) = P_j$) la expresión de $\phi(\zeta_0)$ queda

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_0) = \frac{b\delta}{\pi^2 A} \sum_{j=1}^k \left\{ (P_j - P_{j+1}) \left[(n_j - \zeta_0) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_j \zeta_0}{\zeta_0 - n_j} \right| \right) + (1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} n_j \right] \right. \\ \left. - (P_{-j} - P_{-(j+1)}) \left[(n_{-j} - \zeta_0) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_{-j} \zeta_0}{\zeta_0 - n_{-j}} \right| \right) + (1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} n_{-j} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $P_{-(k+1)} = P_{k+1} = 0$.

Si además existe simetría ($P_{-j} = P_j$ y $n_{-j} = -n_j$) la ecuación (3.23) se reduce a

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_0) = & \frac{b\delta}{\pi^2 A} \sum_{j=1}^k (P_j - P_{j+1}) \left[(\zeta_0 + n_j) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_j \zeta_0}{\zeta_0 + n_j} \right| \right) \right. \\ & \left. - (\zeta_0 - n_j) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_j \zeta_0}{\zeta_0 - n_j} \right| \right) + 2(1 - \zeta_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} n_j \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.3 Tensión en frente de la zona plástica

La tensión que existe en un punto situado a una cierta distancia ζ_0 del final del dominio de definición ($|\zeta_0| > 1$) se expresa en función de la distribución de dislocaciones como [11, 13]

$$S(\zeta_0) = \tau(\zeta_0) + A \int_{-1}^1 \frac{f(\zeta)}{(\zeta_0 - \zeta)} d\zeta \quad , \quad |\zeta_0| > 1 \quad (3.25)$$

Al igual que en el apartado anterior puede obtenerse una expresión cerrada de la distribución de tensiones en función de $P(\zeta)$.

En efecto, sustituyendo en (3.14) en (3.25)

$$\begin{aligned} S(\zeta_0) = \tau(\zeta_0) + \frac{1}{\pi^2} \left\{ - \int_{-1}^1 \frac{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta_0 - \zeta)} \left[\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(\zeta' - \zeta)(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \right. \\ + \int_{-1}^1 \frac{\zeta}{(\zeta_0 - \zeta)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \\ \left. + \int_{-1}^1 \frac{1}{(\zeta_0 - \zeta)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Intercambiando de nuevo el orden de integración, se tiene

$$\begin{aligned} S(\zeta_0) = \tau(\zeta_0) + \frac{1}{\pi^2} \left\{ - \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta_0 - \zeta)(\zeta' - \zeta)} d\zeta \right] d\zeta' \right. \\ + \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\zeta}{(\zeta_0 - \zeta)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right] d\zeta' \\ \left. + \int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{(\zeta_0 - \zeta)(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right] d\zeta' \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por último, si se calculan las integrales entre corcheteres de la ecuación anterior y se reordenan convenientemente los términos, la expresión compacta de la distribución de tensiones en el frente de la zona plástica de la grieta queda

$$\begin{aligned}
 S(\zeta_0) = \tau(\zeta_0) - \frac{1}{\pi}(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(\zeta_0 - \zeta')(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \\
 + \frac{1}{\pi} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \\
 + \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta'
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Nótese que las integrales de los dos últimos términos representan, de nuevo, las integrales de la *condición de existencia* y *condición de grieta* respectivamente, las cuales deben ser idénticamente nulas en la situación acotada.

Es interesante comprobar que, para ζ_0 muy alejado del dominio de dislocaciones, la tensión $S(\zeta_0)$ es muy próxima a la tensión aplicada $\tau(\zeta_0)$. En efecto, si se saca ζ_0 fuera de la primera integral y se toma el límite cuando $\zeta_0 \rightarrow \infty$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \lim_{|\zeta_0| \rightarrow \infty} (S(\zeta_0) - \tau(\zeta_0)) = \lim_{|\zeta_0| \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\pi} \frac{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\zeta_0} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'/\zeta_0)(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right. \\
 \left. + \frac{1}{\pi} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' + \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right\}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Se puede ver que el último sumando se anula y que los dos primeros se cancelan entre sí, teniéndose que

$$\lim_{|\zeta_0| \rightarrow \infty} (S(\zeta_0) - \tau(\zeta_0)) = 0 \tag{3.30}$$

En el caso en que $P(\zeta)$ sea constante en cada intervalo la distribución de

tensiones $S(\zeta_0)$ queda

$$\begin{aligned}
 S(\zeta_0) = & \tau(\zeta_0) + \frac{1}{\pi} \left[\sum_{j=1}^{k-1} \left\{ (P_j - P_{j+1}) \sin^{-1} \left(\frac{1 - n_j \zeta_0}{\zeta_0 - n_j} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (P_{-j} - P_{-(j+1)}) \sin^{-1} \left(\frac{1 - n_{-j} \zeta_0}{\zeta_0 - n_{-j}} \right) \right\} - \frac{\pi}{2} (P_k + P_{-k}) \right] \\
 & + \frac{1}{\pi} \frac{|\zeta_0|}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k \left\{ (P_j - P_{j+1}) \sin^{-1} n_j - (P_{-j} - P_{-(j+1)}) \sin^{-1} n_{-j} \right\} \\
 & - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k \left\{ (P_j - P_{j+1})(1 - n_j^2)^{\frac{1}{2}} - (P_{-j} - P_{-(j+1)})(1 - n_{-j}^2)^{\frac{1}{2}} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Es fácil comprobar que para la solución acotada (obtenida haciendo cero los dos últimos términos) se tiene que

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow 1} S(\zeta_0) = \sigma_k(1) \quad , \quad \zeta_0 > 1 \tag{3.32}$$

y

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow -1} S(\zeta_0) = \sigma_{-k}(-1) \quad , \quad \zeta_0 < -1 \tag{3.33}$$

como cabía esperar.

Por último, si prevalecen además las condiciones de simetría, la ecuación (3.31) se expresa como

$$\begin{aligned}
 S(\zeta_0) = & \tau(\zeta_0) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{k-1} (P_j - P_{j+1}) \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{1 - n_j \zeta_0}{\zeta_0 - n_j} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{1 + n_j \zeta_0}{\zeta_0 + n_j} \right) \right\} \\
 & + \frac{2}{\pi} \frac{|\zeta_0|}{(\zeta_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^k \left\{ (P_j - P_{j+1}) \sin^{-1} n_j \right\} - P_k
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.4 Resumen

En este capítulo se ha presentado una formulación compacta de la representación de una grieta rectilínea en un medio infinito mediante la teoría de dislocaciones, que engloba los casos en los que la distribución de dislocaciones al final del dominio sea acotada y no acotada. Se han obtenido las expresiones generales del desplazamiento relativo entre las caras de la grieta y de la distribución de tensiones en frente de la zona plástica directamente en función de la tensión efectiva actuando sobre la línea de la grieta $P(\zeta)$, con $P(\zeta)$ cualquier función acotada y continua a trozos en el dominio de definición. Esto permite, a diferencia de como se venía haciendo hasta ahora, conocer dichas magnitudes sin necesidad de calcular explícitamente la función de distribución de dislocaciones $f(\zeta)$. Así, por ejemplo, la función

$$\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - \zeta' \zeta_0}{\zeta_0 - \zeta'} \right| \right)$$

que aparece la ecuación (3.22) cumple el cometido de una función Green o función de peso para el desplazamiento relativo, permitiendo el cálculo directo de la “forma” de la grieta abierta por la acción de la carga aplicada.

El patrón seguido por la solución general de la distribución de dislocaciones y de tensiones en el plano de la grieta es similar: ambas se expresan como la suma de la solución correspondiente al problema acotado más dos términos singulares en los extremos del dominio, multiplicados éstos últimos por las expresiones de la *condición de existencia* y la *condición de grieta* para el problema acotado respectivamente. Es interesante resaltar que, en el caso particular en que $P(\zeta)$ sea simétrica respecto al punto medio del dominio, la *condición de grieta* de la solución acotada es automáticamente satisfecha y, por tanto, la presencia de la singularidad está únicamente asociada al cumplimiento, o no, de la *condición de existencia* del problema acotado. La expresión para el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta en cualquier punto de la misma es única, dado que el desplazamiento relativo debe ser siempre finito.

El modelado de una grieta creciendo desde una entalla que se presentará en esta tesis tendrá como base la representación multizonas desarrollada en este capítulo, principalmente en el caso particular de configuración simétrica.

Bibliografía

- [1] Smith, E. (1968), Planar Distributions of Dislocations, Proc. R. Soc. A305, pp.387-404
- [2] Bilby B.A., Cottrell A.H. and Swinden K.H. (1963), The Spread of Plastic Yield from a Notch, Proc. R. Soc. A272, pp.304-314
- [3] Weertman, J. (1966), Rate of Growth of Fatigue Cracks Calculated from the Theory of Infinitesimal Dislocation Distributed on a Plane, Int. J. Fracture Mech. 2, pp.460-467
- [4] Tanaka, K., Nakai, Y. and Yamashita, M. (1981), Fatigue Growth Threshold of Small Cracks. Int. J. Fract. 17, pp.519-533
- [5] Navarro A. and de los Rios E.R. (1992), Fatigue Crack Growth Modelling by Successive Blocking of Dislocations, Proc. R. Soc. Lond. A437, pp.375-390
- [6] Taira, S., Tanaka, K. and Nakai, Y. (1978), A Model of Crack Tip Band Blocked by Grain Boundary, Mech. Res. Commun. 5, pp.357
- [7] Taira, S., Tanaka, K. and Hoshina, M. (1979), Grain Size Effect on Crack Nucleation and Growth in Long-life Fatigue in Low Carbon Steel, in Fatigue Mechanisms, ASTM STP 675, pp.135
- [8] Eastabrook, J. N. (1984), A Dislocation Model for the Initial Growth of Stage I Fatigue Cracks, Int. J. Fracture 24, R43

-
- [9] Lardner, R. W. (1968), A Dislocation Model for Fatigue Crack Growth in Metals, *Phil. Mag.* 17, pp.71
- [10] Navarro A. and de los Rios E.R. (1988), Short and Long Fatigue Crack Growth: A Unified Model, *Phil. Mag.* 57. pp.15-36
- [11] Navarro, A. and de los Rios, E. R. (1988), Compact Solution for a Multizone BCS Crack Model with Bounded or Bounded End Conditions, *Phil. Mag.* 57, No. 1, pp.43-50
- [12] Muskhelishvili, N. I. (1953), *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff, N. V., Groningen
- [13] Head, A. K. and Louat, N. (1955), The Distribution of Dislocations in Linear Arrays, *Aust. J. Phys.* 8, pp.1-7
- [14] Erdogan, F., Gupta, G. D. and Cook, T.S. (1973), Numerical Solution of Singular Integral Equations, in *Methods of Analysis and Solutions of Cracks Problems* (ed. G. C. Sih), Noordhoff, Leyden, pp.368-425
- [15] Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N. and Korsunsky, A.M. (1996), *Solution of Crack Problems: The Distributed Dislocation Technique*. Kluwer Academic Publishers, *Solid Mechanics and its Applications*, Volume 44

Capítulo 4

Umbrales de crecimiento de grietas en componentes sin entallas

El objetivo de esta tesis es el desarrollo de un modelo de propagación de grietas en entallas que sea capaz de recoger en la fase de microgrieta la influencia tanto de la microestructura del material como de los fuertes gradientes de tensión que se producen en las proximidades del concentrador. Asimismo, el modelo debe permitir determinar en qué condiciones estas microgrietas son capaces de propagarse, llegando a la fase de grieta grande y pudiendo provocar la rotura del componente, o, por el contrario, cuándo estas microgrietas van simplemente a quedarse paradas.

Las bases teóricas inmediatas del modelo propuesto las constituyen las técnicas de Mecánica de la Fractura Microestructural desarrolladas en la última década, especialmente por Navarro y de los Ríos [1–3], y en la idea de los dos umbrales de crecimiento descritos por Miller [4–6], el umbral “material” y el umbral “mecánico”.

En este capítulo se presenta un análisis detallado del modelo de crecimiento

de grietas desarrollado por Navarro y de los Rios. Se discutirán las condiciones umbrales para la propagación de una grieta en componentes sin concentradores de tensión y cómo se enmarcan estas de forma natural en el citado modelo.

4.1 El modelo NR de crecimiento de grietas en componentes sin entallas

Navarro y de los Rios han desarrollado un modelo de crecimiento de grietas por fatiga que caracteriza razonablemente bien el comportamiento de las grietas pequeñas en especímenes sin entallas [1–3].

Los citados autores suponen que la deformación plástica asociada con el daño por fatiga se concentra en bandas de deslizamiento rectilíneas que se extienden a través de los granos del material. Los bordes de grano son considerados como barreras al deslizamiento plástico, cuya resistencia viene determinada por la facilidad de generar deformación plástica en forma de una nueva banda de deslizamiento en el grano adyacente.

En base a esto, el proceso de crecimiento de una grieta por fatiga se puede describir como sigue: se considera que la microgrieta aparece en aquellos granos en los que, por su tamaño y orientación cristalográfica, se produce más fácilmente la formación de bandas de deslizamiento persistentes y que dicha grieta incipiente comienza a crecer a lo largo de una de éstas. La zona plástica asociada a la grieta se extiende desde el vértice de ésta hasta la primera barrera microestructural (un límite de grano generalmente), y permanece ahí bloqueada hasta que la grieta alcanza una cierta longitud crítica, a la cual la tensión local en la barrera permita activar deslizamiento plástico en el grano vecino. En este instante la zona plástica se extiende cubriendo totalmente el siguiente grano, bloqueándose de nuevo en la siguiente barrera. La hipótesis crucial del modelo es precisamente que la zona plástica avanza a saltos. Este proceso se repite en cada una de las barreras microestructurales a medida que la grieta avanza en el material. Los sucesivos

bloqueos y extensiones de la zona plástica provocan que el ritmo de crecimiento presente un patrón oscilante de deceleraciones y aceleraciones sucesivas acorde con el observado experimentalmente en las grietas pequeñas. Asimismo, conforme el tamaño de la grieta aumenta, tales oscilaciones van disminuyendo hasta ser casi imperceptibles para longitudes de grieta suficientemente grandes. Se predice, como era de esperar, un ritmo de propagación para grietas grandes que es esencialmente creciente con la longitud de la grieta.

En este modelo, la grieta, su zona plástica asociada y las barreras al deslizamiento (bordes de grano) se representan mediante distribuciones continuas de dislocaciones infinitesimales, siguiendo las ideas básicas del modelo de Bilby-Cottrell-Swinden [7].

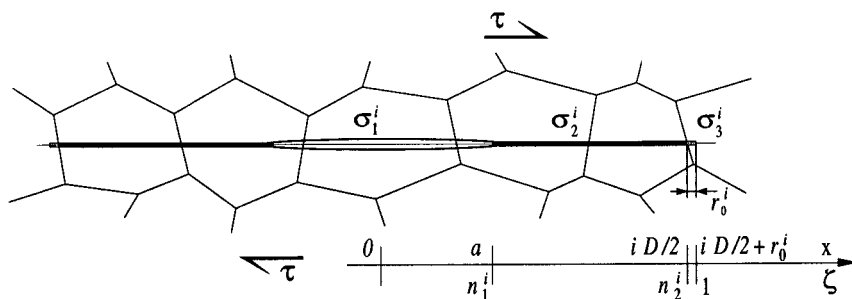


Figura 4.1: Representación esquemática de la grieta, la zona plástica y la barrera microestructural.

Considérese un espécimen infinito de un material policristalino, con un tamaño medio de grano D , sujeto a una tensión uniforme (τ) y que contiene una grieta de longitud $2a$. La zona plástica asociada a la grieta se encuentra bloqueada en el i -ésimo borde de grano (ver Figura 4.1 y Apéndice B para la notación). La posición del límite de grano será $iD/2$, donde $i = 1, 3, 5, \dots$ representa el número de medios granos atravesados por la zona plástica. En la región de la grieta propiamente dicha ($|\zeta_i| \leq n_1^i$), existe una resistencia al movimiento de las dislocaciones σ_1^i , que representa físicamente la oposición al movimiento relativo entre las caras de

la grieta. Así, $\sigma_1^i = 0$ reproduce el caso en el que no existe interferencia entre las caras de la grieta. Entre el vértice de la grieta y la barrera microestructural ($n_1^i \leq |\zeta_i| \leq n_2^i$) se extiende la zona plástica. Las dislocaciones en dicha región experimentan una resistencia al movimiento σ_2^i , que representa la interacción de estas dislocaciones con el resto de dislocaciones existentes en el material fuera de la banda de deslizamiento, así como con partículas de segunda fase y precipitados dentro de ésta. Es de suponer que inicialmente dicha tensión sea del orden de la tensión de fricción (τ_0) que opone el material al movimiento de una dislocación en su plano de deslizamiento, y, por tanto, generalmente mucho menor que la tensión aplicada. Esto provoca que las dislocaciones tiendan en un principio a apilarse contra el borde de grano. A partir de este instante y como consecuencia del aumento de la densidad de dislocaciones en la zona plástica, σ_2^i experimentará un progresivo aumento por endurecimiento. En particular, Bilby et al. [7] consideran que cuando el número de granos abarcados por la zona plástica es suficientemente grande, σ_2^i puede ser comparable al límite elástico inferior del material. Por último, la barrera microestructural se modela mediante una pequeña zona de longitud r_0^i ($r_0^i \ll D$), que representa el tamaño típico de la interfase entre granos adyacentes, o bien la distancia típica a la que se sitúan las fuentes de dislocaciones que son susceptibles de activación en el grano siguiente. La oposición que dicha barrera interpone al movimiento de las dislocaciones se representa a través de una tensión de fricción σ_3^i .

En la Figura 4.2 se muestran esquemáticamente (a) la distribución de dislocaciones ($f(\zeta_i)$), (b) la distribución de tensiones ($S(\zeta_i)$) y (c) desplazamiento relativo de las caras de la grieta ($\phi(\zeta_i)$) en el plano de ésta, obtenidos para la configuración descrita anteriormente (el índice i se ha omitido en la citada figura). Las expresiones analíticas de estas magnitudes se han desarrollado en detalle en el Apéndice A. A la vista de la citada figura, es interesante destacar que $f(\zeta_i)$ presenta antisimetría respecto del eje $\zeta = 0$, mientras que obviamente $S(\zeta_i)$ y $\phi(\zeta_i)$ son simétricas.

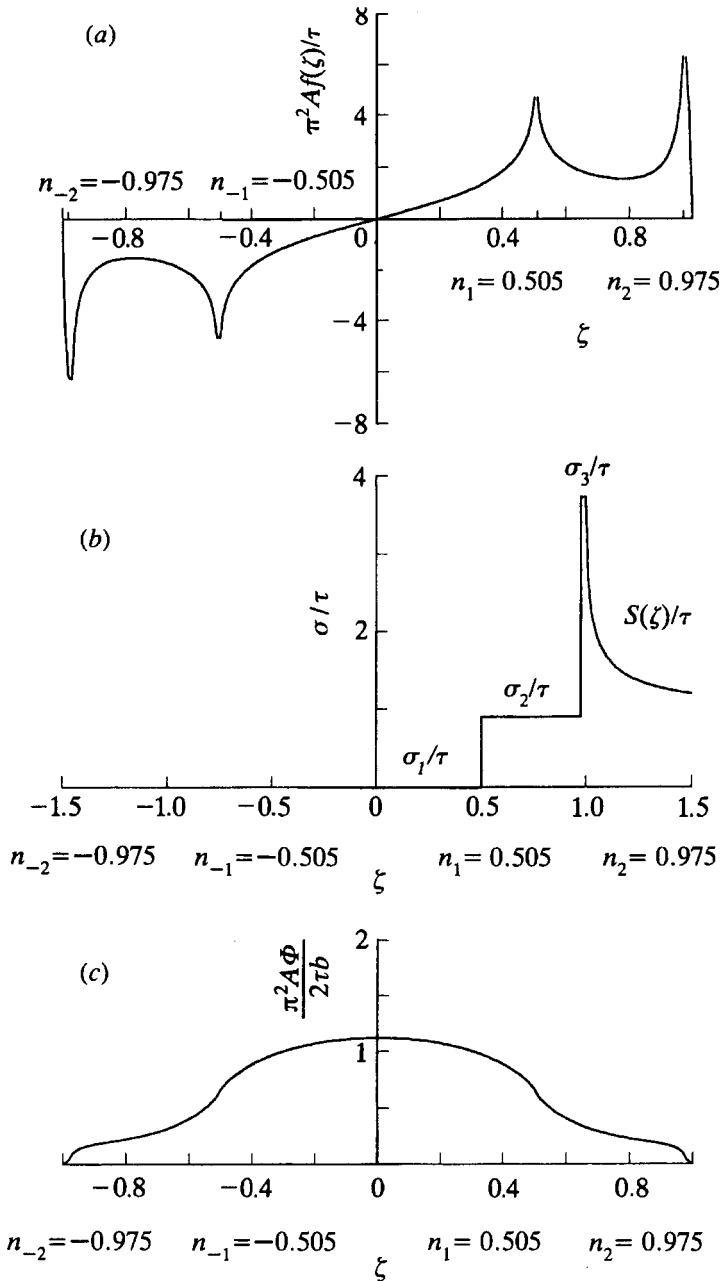


Figura 4.2: Representación gráfica de: (a) distribución de dislocaciones, (b) distribución de tensiones y (c) desplazamiento relativo entre las caras de la grieta, en el plano de la grieta ($\sigma_1^i = 0$, $\sigma_2^i/\tau = 0.9$).

Mientras que la zona plástica se encuentra bloqueada en el límite de grano, la tensión σ_3^i que soporta la barrera será en todo instante la necesaria para mantener en equilibrio las dislocaciones del dominio. Esta tensión se calcula a partir de la *condición de existencia* del problema acotado (véase Apéndice A), cuya expresión es

$$(\sigma_2^i - \sigma_1^i) \sin^{-1} n_1^i + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \sin^{-1} n_2^i + \frac{\pi}{2}(\tau - \sigma_3^i) = 0 \quad (4.1)$$

Particularizando la expresión anterior al caso en que no se considere interferencia entre las caras de la grieta ($\sigma_1^i = 0$) y teniendo en cuenta que $n_2^i = (iD/2)/c \approx 1$ ($c = iD/2 + r_0^i$) se obtiene

$$\sigma_3^i = \frac{1}{\cos^{-1} n_2^i} \left[\frac{\pi}{2} \tau - \sigma_2^i \cos^{-1} n_1^i \right] \quad (4.2)$$

Esta expresión relaciona, en cada instante, el valor de la tensión σ_3^i en la barrera con la posición de la grieta respecto del borde de grano ($n_1^i = a/c$), en función de la tensión aplicada (τ) y la tensión de fricción en la zona plástica (σ_2^i). Es inmediato comprobar que a medida que la grieta se aproxima al límite de grano (n_1^i se aproxima a la unidad) la tensión σ_3^i aumenta, obteniéndose el valor máximo justo en el momento en el que el vértice de la grieta alcanza la barrera.

La generación de deslizamiento plástico en el grano adyacente se producirá siempre y cuando, como consecuencia del avance de la grieta, la tensión σ_3^i alcance un cierto valor crítico que posibilite o bien la activación de fuentes de dislocaciones dentro del grano vecino, o bien que las dislocaciones apiladas contra el borde de grano penetren a través de él. Si este valor crítico no se alcanzara, no se produciría deslizamiento plástico más allá de la barrera y la grieta se pararía, como se estudiará más adelante. La condición crítica de activación se escribe en general como

$$\sigma_3^i = m_i^* \tau_c^i \quad (4.3)$$

donde m_i^* es el factor de orientación cristalográfica en el grano adyacente a la i -ésima barrera y τ_c^i la tensión crítica necesaria para activar fuentes de dislocaciones

en el material. El producto $m_i^* \tau_c^i$ define, pues, la resistencia intrínseca de la barrera. Al alcanzarse ésta, la zona plástica de la grieta se extenderá cubriendo un nuevo grano hasta bloquearse en la siguiente barrera, permitiendo así que la grieta se propague a través del borde de grano.

La tensión τ_{Li} que es necesario aplicar como mínimo para activar deslizamiento plástico más allá de las barreras microestructurales se obtiene cuando la grieta está justo en el límite de grano ($n_1^i = n_2^i \approx 1$). A partir de las ecuaciones (4.2) y (4.3), y empleando la aproximación $\cos^{-1} n_2^i \approx (2(1 - n_2^i))^{\frac{1}{2}} \approx 2(r_0^i/iD)^{\frac{1}{2}}$, se obtiene la siguiente expresión

$$\tau_{Li} = (4/\pi) m_i^* \tau_c^i (r_0^i/iD)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

τ_{Li} es por tanto la mínima tensión requerida para que una grieta de longitud $iD/2$ crezca por fatiga más allá de la i -ésima barrera microestructural.

Para tensiones aplicadas mayores que τ_{Li} , la longitud crítica de grieta $n_c^i = a/(iD/2)$ a la cual se alcanza la condición de activación, y por tanto se sobrepasa la barrera microestructural, se obtiene de las expresiones (4.2), (4.3) y (4.4) como

$$n_c^i = \cos \left(\frac{\pi \tau - \tau_{Li}}{2 \sigma_2^i} \right) \quad (4.5)$$

Esta ecuación que permite asimismo calcular el tamaño de la zona plástica. Es interesante destacar que en el caso de que la grieta sea suficientemente grande ($\tau_{Li} \rightarrow 0$), la ecuación (4.5) se reduce a una expresión similar a la propuesta por Bilby et al. [7]

$$n_c^\infty = \cos \left(\frac{\pi \tau}{2 \sigma_2^i} \right) \quad (4.6)$$

4.2 Umbrales microestructural y mecánico. Diagrama de Kitagawa-Takahashi

Como se ha comentado antes, la ecuación (4.4) permite calcular la tensión umbral que es necesario aplicar para que una grieta de una cierta longitud se propague

por fatiga.

En particular, cuando se considera un componente sin concentradores ni defectos, el umbral de fatiga está asociado a la capacidad de las barreras microestructurales para contener de forma efectiva, hasta parar, el crecimiento de las microgrietas. Efectivamente, existen muchos trabajos en la literatura que describen observaciones de grietas en especímenes metálicos ensayados a tensiones relativamente bajas, poniéndose de manifiesto cómo las grietas han crecido hasta encontrar una barrera microestructural suficientemente robusta. Elevando adecuadamente el nivel de tensiones, es posible superar esas barreras y provocar la propagación hasta el fallo. Ese nivel de tensión mínimo que es necesario aplicar para que las grietas que se han propagado entre dos barreras consecutivas sean capaces de superarlas se identifica con el límite de fatiga del material. Miller [4–6] habla de un umbral “basado en el material” (a material based threshold) y que, en el contexto de este trabajo, nosotros podríamos denominar UMBRAL MICROESTRUCTURAL. El matiz importante al hacer énfasis en la palabra material es que el tamaño de la grieta cuya propagación se estudia lo fija el material: hay un orden de tamaño típico mínimo que es el tamaño microestructural característico. En la práctica, cualquier tensión cíclica aplicada por baja que sea (aunque siempre superior, al menos, a la tensión de fricción del material) será capaz de propagar una grieta hasta ese tamaño. Se ha hecho uso del término “orden de tamaño” porque, como se verá más adelante, un análisis de la resistencia relativa ofrecida por las tres o cuatro primeras barreras hace que, en términos prácticos, a niveles de tensiones aplicadas cercanos al límite de fatiga, la probabilidad de encontrar grietas bloqueadas en la primera, segunda o incluso tercera barrera, sea muy similar.

Con la formulación presentada hasta aquí, el límite de fatiga se obtiene formalmente haciendo $i = 1$ en la ecuación (4.4),

$$\tau_{FL} = (4/\pi)m_1^*\tau_c^1(r_0^1/D)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

La típica dependencia de este parámetro característico del material con el inverso de la raíz cuadrada del tamaño de grano está bien descrita en la literatura [8–10].

Ésta pone de manifiesto que puede aumentarse el límite de fatiga refinando el tamaño de grano, siguiendo la regla general de otras propiedades mecánicas como, por ejemplo, el límite elástico o el límite de rotura.

La ecuación anterior puede ser reescrita de forma que permitirá conectar el límite de fatiga y el término usado anteriormente de umbral microestructural con el concepto de factor de intensidad de tensiones umbral empleado en el contexto de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal

$$\tau_{FL} \sqrt{\pi D/2} = 0.9 m_1^* \tau_c^1 \sqrt{\pi r_0^1} \quad (4.8)$$

Sería muy difícil predecir la evolución precisa de los parámetros microestructurales que aparecen en la ecuación (4.4). En el caso del factor de orientación, es posible hacer una estimación del rango esperado de variación haciendo uso de las ideas propuestas por Taylor [11] en su clásico análisis del límite elástico de policristales. Como se verá un poco más adelante, una comparación entre datos experimentales y los límites umbrales que este modelo predice utilizando los valores del factor de orientación obtenidos mediante el análisis de Taylor, sugiere que es necesario ampliar la interpretación que se dio a m_i^* en la formulación original del modelo NR.

En cuanto a los parámetros r_0^i y τ_c^i , lo más que podría hacerse es una discusión cualitativa. Pueden darse argumentos razonables, basados en el propio proceso de deformación, para justificar tanto aumentos como disminuciones en ambos parámetros. Por ejemplo, cabría citar la generación de fuentes de dislocaciones no bloqueadas (un-locked sources), alteraciones en el grosor y espaciamiento de las bandas de deslizamiento, incremento en la densidad de dislocaciones, endurecimiento por deformación, etc. Puesto que la influencia de algunos de estos factores tenderá a oponerse a la de otros, ha parecido razonable considerar que la relación entre ambos parámetros se mantiene constante. Bajo esta suposición y empleando las expresiones (4.4) y (4.7) es posible obtener una relación entre τ_{Li} y el límite

de fatiga del material

$$\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} = \left(\frac{m_i^*}{m_1^*} \right) \frac{1}{\sqrt{i}}, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (4.9)$$

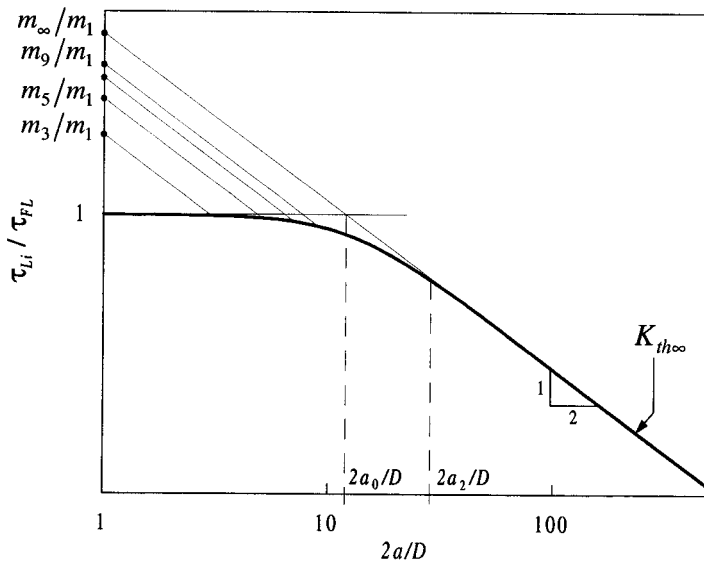


Figura 4.3: Método de de los Rios [12] para obtener la progresión de m_i^*/m_1^* a partir del diagrama de Kitagawa. a_0 es la longitud de intersección de las dos rectas límites y a_2 es la longitud de grieta donde comienza el comportamiento de grieta grande.

La representación de la ecuación anterior en coordenadas logarítmicas, introduciendo como variable la longitud de grieta $a_i = iD/2$ (en el instante de alcanzar la barerra), es el conocido diagrama de Kitagawa-Takahashi,

$$\log \left(\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} \right) = \log \left(\frac{m_i^*}{m_1^*} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{a_i}{D/2} \right) \quad (4.10)$$

Por tanto, y como fue señalado por de los Rios [12], a partir del diagrama de Kitagawa del material obtenido experimentalmente, puede determinarse la secuencia de los cocientes (m_i^*/m_1^*) conforme crece i (ver Figura 4.3). En efecto, trazando rectas de pendiente $-1/2$ a partir de los puntos del diagrama correspondientes

a los valores de i en abcisas, se obtienen los sucesivos valores de (m_i^*/m_1^*) en la intersección con la vertical trazada por $i = 1$.

Puede comprobarse que, con la forma usual del diagrama de Kitagawa para la gran mayoría de los materiales metálicos, se obtiene una progresión de los ratios (m_i^*/m_1^*) siempre creciente y convergente hacia un valor correspondiente a la posición de la recta representativa del factor de intensidad de tensiones umbral obtenido en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal en la zona de grietas grandes. Este límite al que tiende la serie (m_i^*/m_1^*) se denota aquí formalmente por (m_∞^*/m_1^*) . De la misma forma, $K_{th\infty}$ representa el factor de intensidad de tensiones umbral para grietas grandes.

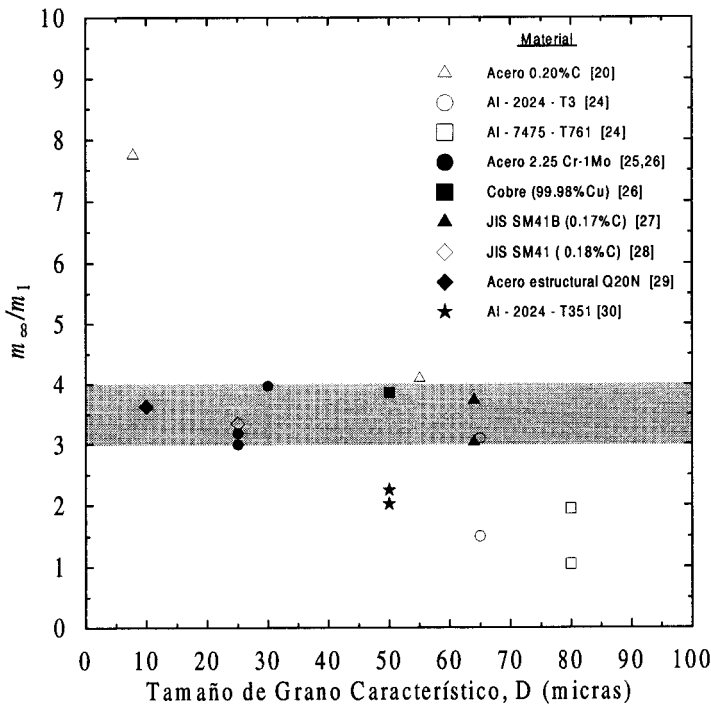


Figura 4.4: Valor límite m_∞^*/m_1^* (ecuación (4.12)) en varios materiales FCC ($-1 \leq R \leq 0$).

La Figura 4.4 muestra una recopilación de valores (m_{∞}^*/m_1^*) obtenidos de diversas fuentes, para materiales FCC sometidos a tensión de amplitud constante de tracción ($R = -1$ y $R \approx 0$). Como puede verse, la mayoría de los valores se encuentran en una banda del 3 al 4.

La interpretación de los m_i^* como factores de orientación exclusivamente es coherente con la obtención de una sucesión creciente y convergente de ratios (m_i^*/m_1^*) . Sin embargo, los valores calculados del límite al que debiera tender la sucesión difieren notablemente de los valores experimentales mostrados en la figura anterior. En efecto, si consideramos una grieta creciendo en Modo I, la ecuación (4.3) relaciona la tensión normal en la zona de la barrera con la tensión cortante que hace falta alcanzar en los sistemas de deslizamiento que deben ser activados para producir la deformación plástica en el grano vecino. Esta es la idea que subyace en la teoría de Taylor para el cálculo de la curva de fluencia de policristales a partir de la de monocristales.

Para una grieta que se encuentra en las etapas iniciales de su crecimiento, cuando su propio tamaño y el de su zona plástica son todavía de uno o dos granos, el proceso de deformación plástica se producirá mediante la activación de uno o dos sistemas de deslizamiento, es decir, predominará en las etapas iniciales el denominado "single slip". En estas condiciones, sólo se activarán los sistemas mejor orientados y, por tanto, el factor de orientación tendrá un valor próximo a 2.2, de acuerdo con el análisis de Sachs [13] en metales FCC.

Por el contrario, cuando se tiene una grieta mayor, cuyo frente cubre un número grande de granos, la necesidad de mantener la compatibilidad entre las deformaciones producidas en todos ellos requiere que en los procesos de deformación plástica se activen el mayor número posible de sistemas de deslizamiento, por lo cual el factor de orientación tenderá, en media, al valor calculado en un análisis tipo Taylor. Para materiales FCC el valor medio de Taylor es de 3.1 aproximadamente. Al ir considerando grietas cada vez mayores, desde un grano hasta muchos granos, se entiende que el valor de m_i^* irá variando gradualmente entre 2.2 y 3.1. Por

otra parte, la transición entre un valor y otro debe ser bastante rápida si se piensa que el número de granos involucrados en el proceso aumenta muy rápidamente al crecer la grieta: imagínese, por ejemplo, el proceso de crecimiento de una grieta semicircular que vaya abarcando cada vez más granos.

De acuerdo con el análisis anterior, el valor al que debería tender la sucesión (m_i^*/m_1^*) en el caso de metales FCC debería estar en torno a 1.5, valor muy alejado de la banda del 3 al 4 reflejada en los experimentos, aunque para nada despreciable.

Esta discrepancia puede entenderse si se tiene en cuenta que en el modelo descrito, en su formulación actual, no se ha introducido ningún elemento que modele el fenómeno de cierre de grieta. En efecto, por simplicidad matemática, las ecuaciones se han desarrollado fijando la tensión σ_1 en la zona de la grieta igual a cero, y, por tanto, se ha eliminado del modelo la posibilidad de interacción entre las caras de la grieta. Como es bien conocido, la aparición de cierre se traduce en que la grieta no está totalmente abierta durante todo el ciclo de carga, lo que equivale a una reducción de la fuerza efectiva que gobierna el crecimiento de la grieta. Con respecto a la condición de activación, ecuación (4.3), una reducción debida al cierre en el nivel de la tensión σ_3^{\ddagger} podría representarse igualmente por un aumento del valor m_i^* , y, por tanto, si no se modela el cierre, la aplicación del modelo a resultados experimentales proporcionaría valores de m_i^* mayores que los basados en consideraciones de orientación exclusivamente. Además, y esto es muy importante en este contexto, es bien sabido que el nivel de cierre depende mucho de la longitud de grieta, siendo despreciable para grietas muy pequeñas y creciendo hasta estabilizarse para grietas cada vez más grandes. De hecho es este comportamiento el que ha hecho que algunos autores atribuyan al cierre la explicación de por qué las grietas pequeñas crecen comparativamente más rápido que las grietas grandes a los mismos niveles de ΔK . En cualquier caso, ese patrón de variación del nivel de cierre es compatible con el tipo de variación descrita en los factores de orientación y, por tanto, una combinación de ambos fenómenos, cierre y orientación, pueden explicar la progresión creciente de la sucesión (m_i^*/m_1^*) y su

convergencia hacia los valores entre 3 y 4 señalados.

En este trabajo se utilizarán las ecuaciones (4.9) o (4.10), calculando la progresión (m_i^*/m_1^*) a partir del diagrama de Kitagawa del material y aceptando que la base física de su variación está tanto en consideraciones de cierre como de orientación cristalográfica.

Es interesante considerar la influencia de los dos términos que aparecen en el lado derecho de la ecuación (4.9). Por un lado, la disminución de τ_{Li} con $1/\sqrt{i}$ indica que la “presión” que se aplica sobre las barreras aumenta conforme la grieta considerada es mayor. Esta es una forma de entender una de las enseñanzas clásicas de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal: cuanto mayor sea la grieta menor es la tensión que puede aplicarse sin que se produzca la fractura. Por otra parte, en el otro término, la sucesión creciente (m_i^*/m_1^*) refleja el aumento progresivo en la resistencia efectiva de las barreras.

La forma típica del diagrama de Kitagawa es el resultado de una competencia entre estos dos mecanismos, el de aumento de la resistencia de las barreras frente al de aumento de la capacidad de la grieta para superar esas barreras. El hecho de que las bases físicas de la sucesión (m_i^*/m_1^*) comentadas anteriormente impliquen una convergencia hacia un valor característico de grieta grande, con el frente de grieta cubriendo muchos granos y el nivel de cierre estabilizado, implica que, a partir de una cierta longitud, la curva de Kitagawa se confundirá con la recta representativa del factor de intensidad de tensiones umbral (véase Figura 4.3).

La longitud a_2 a partir de la cual ésto ocurre indicará la longitud por debajo de la cual no es correcto aplicar la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Se trata, pues, de un parámetro de gran importancia práctica y ha recibido mucha atención [14–17]. Taylor [14,15] sugiere que a_2 es del orden de diez veces el tamaño de grano, lo que confirma la rapidez con que se estabiliza la serie (m_i^*/m_1^*).

En la zona de grietas muy pequeñas, los diagramas de Kitagawa presentan un límite horizontal correspondiente al límite de fatiga. Para grietas iniciales menores de un grano, este límite viene dado por la ecuación (4.7) y se sabe que estas grietas

crecerán hasta ocupar todo el grano, propagándose hasta el fallo sólo si la tensión cíclica aplicada es mayor que el límite de fatiga. En la zona de longitudes de grieta de hasta 4 o 5 granos, puede ocurrir que el aumento en la resistencia de las barreras compense aproximadamente el efecto de la longitud de grieta, lo que se traducirá en que el diagrama de Kitagawa se mantendrá aproximadamente horizontal en esta zona. Para grietas mayores de esos tamaños, parece razonable esperar que el aumento de resistencia empiece a perder importancia relativa y, por tanto, la curva del diagrama de Kitagawa comenzará a separarse significativamente de la horizontal, curvándose hacia abajo e iniciando la zona de transición hacia la recta del factor de intensidad de tensiones umbral. En este límite, la resistencia de las barreras está totalmente estabilizada y la condición que controla la propagación es puramente mecánica, determinada por la demanda que la grieta ejerce sobre unas barreras cuya resistencia se ha saturado. Miller [4–6] habla por ello de que este es un UMBRAL MECÁNICO.

En términos del factor de intensidad de tensiones, este umbral viene dado formalmente a través de las ecuaciones (4.4) y (4.9) como

$$K_{th\infty} = \lim_{i \rightarrow \infty} \tau_{Li} \sqrt{\pi i D / 2} = \left(\frac{m_{\infty}^*}{m_1^*} \right) \tau_{FL} \sqrt{\pi D / 2} \quad (4.11)$$

Es decir,

$$K_{th\infty} = \left(\frac{m_{\infty}^*}{m_1^*} \right) \tau_{FL} \sqrt{\pi D / 2} \quad (4.12)$$

Sin entrar en un análisis detallado de ritmos de propagación de grieta, la ecuación anterior pone claramente de manifiesto que cuando se represente el ritmo de crecimiento de grieta en función de la amplitud (o el rango de variación) del factor de intensidad de tensiones, como es usual en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, las curvas obtenidas con grietas grandes tenderán a ponerse verticales en la zona de velocidades pequeñas a valores de K de entre 3 y 4 veces mayores que el valor correspondiente a los mínimos más pronunciados (o el valor de parada) obtenidos para grietas pequeñas (véase Figura 4.7). Este comportamiento ha sido ampliamente descrito en la literatura [4, 18, 19].

Para finalizar este apartado, se propone a continuación una expresión para la progresión (m_i^*/m_1^*) que permite reproducir las características típicas de los diagramas de Kitagawa-Takahashi comentadas anteriormente. La ecuación es

$$\frac{m_i^*}{m_1^*} = \frac{\sqrt{\bar{a}_0}}{\left(i^f - \bar{a}_0^f - 1\right)^{\frac{1}{2f}}} \sqrt{i}, \quad (4.13)$$

que conduce, a través de (4.9), a la siguiente expresión de la tensión umbral de propagación de una grieta en un espécimen sin entalla

$$\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} = \frac{\sqrt{\bar{a}_0}}{\left(i^f + \bar{a}_0^f - 1\right)^{\frac{1}{2f}}} \quad (4.14)$$

siendo $\bar{a}_0 = a_0/(D/2)$ la longitud de grieta (adimensional) correspondiente a la intersección entre las dos rectas límites del diagrama de Kitagawa, la horizontal del límite de fatiga y la del umbral de grieta grande, la cual se expresa habitualmente como

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{th\infty}}{Y\tau_{FL}} \right)^2 \quad (4.15)$$

donde Y es un factor de corrección geométrico que tiene en cuenta la geometría de la grieta y del espécimen. En general, Y toma valores cercanos a la unidad. Así, por ejemplo, para grietas creciendo en Modo I y II desde una superficie libre, Y suele estar entre 0.65 y 1 para el caso de grietas semicirculares o elípticas que no hayan atravesado el espesor de la probeta y 1.12 en el caso de grietas pasantes con un frente suficientemente recto. Es interesante notar que \bar{a}_0 contiene la información sobre el valor límite de la sucesión (m_i^*/m_1^*) ; es fácil demostrar a partir de (4.12) y (4.15) que

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{Y^2} \left(\frac{m_\infty^*}{m_1^*} \right)^2 \quad (4.16)$$

El exponente f , por su parte, controla la rapidez de la transición entre las dos rectas límites del diagrama de Kitagawa. La Figura 4.5 ilustra el comportamiento obtenido con distintos valores de f .

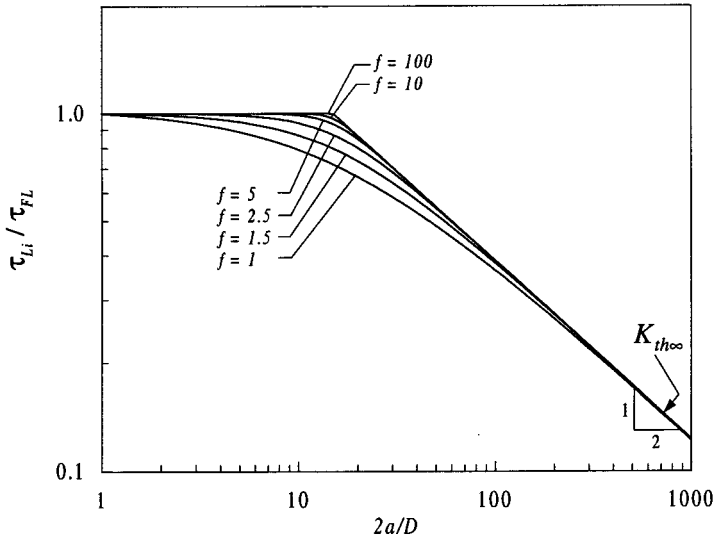


Figura 4.5: Evolución del diagrama de Kitagawa obtenido con la expresión (4.14) para distintos valores del exponente f ($\bar{a}_0 = 15$).

En la citada figura se puede observar que valores muy altos de f representan una transición muy brusca, asociada con el mayor ritmo posible de crecimiento de la resistencia de las barreras [12]. Este comportamiento se ha detectado más comúnmente en los materiales metálicos de alta resistencia [16, 17, 20]. En el otro extremo, $f = 1$ reproduce una progresión relativamente lenta en el aumento de la resistencia de las barreras del material. En este caso, la ecuación (4.14) reproduce aproximadamente la ecuación propuesta por El-Haddad et al. [21].

Para comprobar la capacidad de la expresión (4.14) para modelar la evolución de la tensión umbral de propagación en especímenes sin concentrador, se muestran en la Figura 4.6 los diagramas de Kitagawa experimentales de varios metales junto con los ajustes de la citada ecuación. Las propiedades mecánicas de los materiales se resumen en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Propiedades mecánicas de los materiales

Material [Ref.]	R	$\Delta\sigma_{FL}/2$ (MPa)	$\Delta K_{th\infty}/2$ (MPa \sqrt{m})	D (μm)
Acero HT80 [31]	0	280	2.45	5 ^(†)
Acero 2.25Cr-1Mo [25, 26]	-1	250	5	25
	0	170	3.2	25
SM41 (0.18%C) [28]	0	155	3.25	25

[†]referencia [15]

A la vista de la Figura 4.6, la ecuación (4.14) reproduce adecuadamente el comportamiento esperado y, por tanto, permite, a falta de resultados precisos sobre el diagrama de Kitagawa del material, obtener una aproximación razonable de éste con un reducido número de datos experimentales. En los cálculos y simulaciones que se muestran en los capítulos siguientes de esta tesis, en aquellos casos en los que no se tengan datos experimentales, se adoptará un valor de $f = 2.5$, el cual supone, según lo anterior, un comportamiento medio suficientemente aproximado al comportamiento habitualmente observado en los material reales.

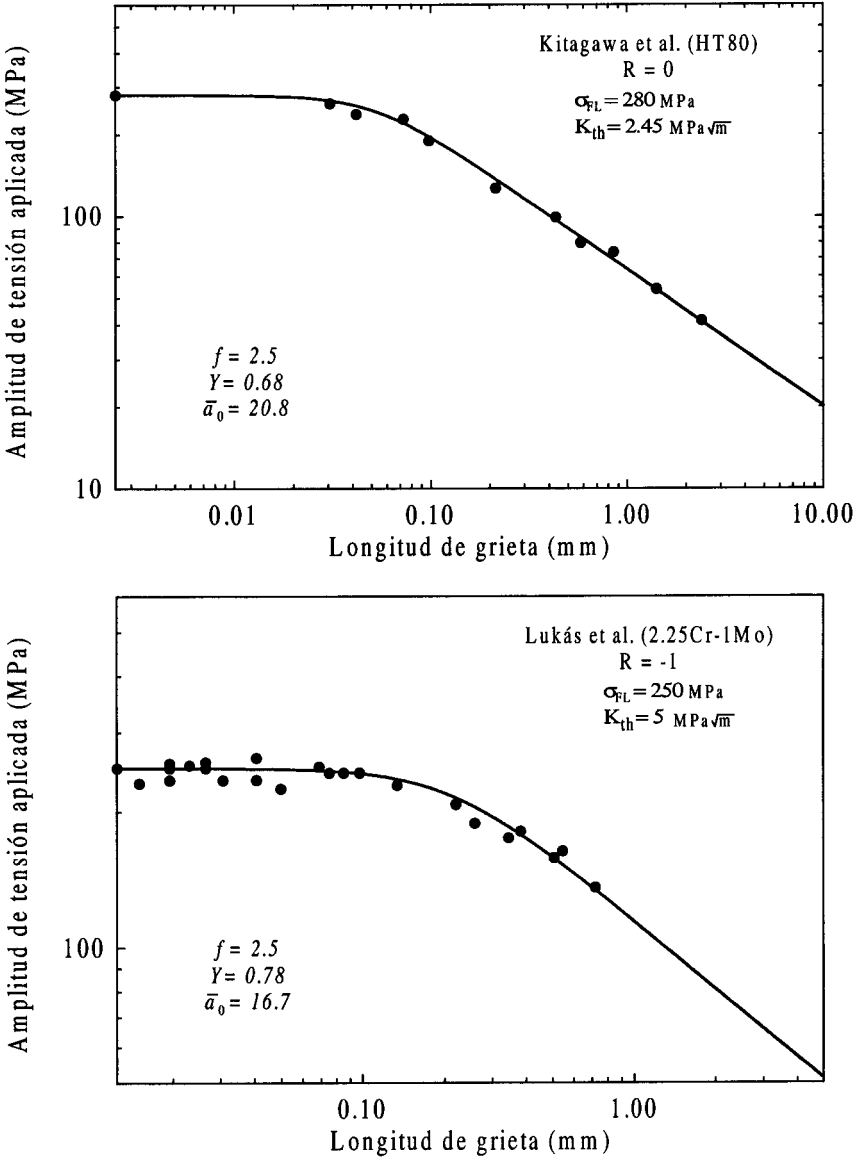


Figura 4.6: Ajuste de la expresión (4.14) a diferentes resultados experimentales [25, 26, 28, 31].

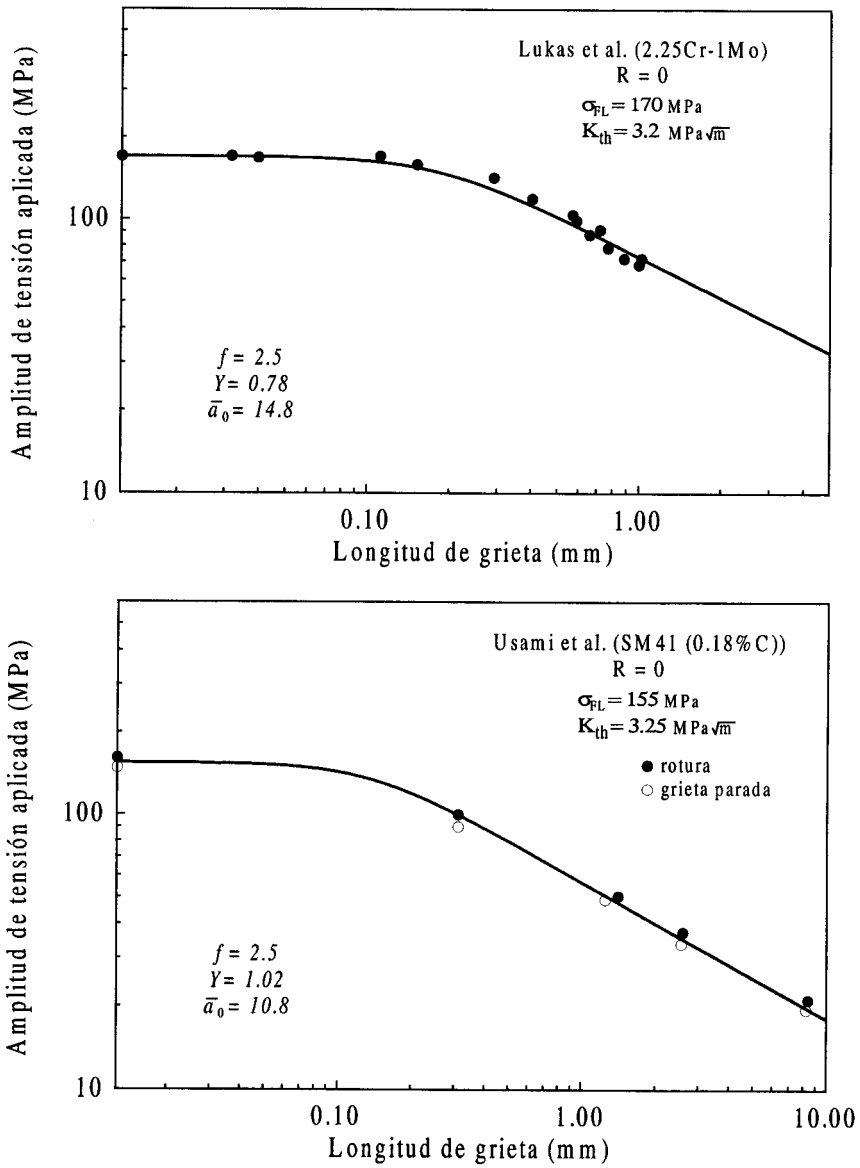


Figura 4.6: (continuación).

4.3 Ritmo de crecimiento de grieta

Numerosos investigadores han sugerido que el ritmo de propagación se puede considerar proporcional al desplazamiento relativo entre las caras de la grieta en el vértice de la misma ($da/dN \propto \phi_i$) [22, 23]. En la configuración emplada aquí, la expresión de dicho desplazamiento viene dada por (véase Apéndice B)

$$\phi_i = 2 \frac{bc}{\pi^2 A} \left\{ \sigma_2^i n_1^i \ln \left(\frac{1}{n_1^i} \right) + \frac{\pi}{2} \tau \sqrt{1 - (n_1^i)^2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_2^i}{\tau} \cos^{-1} n_1^i \right] \right\}, \quad (4.17)$$

En la expresión anterior puede apreciarse que ϕ_i disminuye mientras la grieta se aproxima al borde de grano y se hace cero si se alcanza la barrera con las dislocaciones aún confinadas por el límite de grano ($n_c^i \approx 1$). Alternativamente, para un valor crítico $n_c^i < 1$ derivado de la expresión (4.5) la zona plástica se extenderá sobre el grano vecino, cubriéndolo por completo, y haciendo que n_1^i pasase del valor n_c^i a un valor $n_s^{i+2} < n_c^i$ dado por

$$n_s^{i+2} = n_c^i \left(\frac{i}{i+2} \right) \quad (4.18)$$

En dicho instante, ϕ_i y, por tanto, la velocidad de crecimiento, aumenta súbitamente para comenzar de nuevo a disminuir mientras la grieta se aproxima a la siguiente barrera. La repetición de este proceso en las sucesivas barreras microestructurales confiere al ritmo de crecimiento predicho por este modelo el típico patrón oscilante, sucesivas deceleraciones y aceleraciones, mostrado por las grietas pequeñas. Por último, es interesante destacar que el máximo y mínimo ritmo de propagación se obtiene simplemente sustituyendo los valores de $n_1^i = n_s^i$ y $n_1^i = n_c^i$ respectivamente en (4.17) y que delimitan la región donde es esperable que se encuentren las velocidades de crecimiento de grieta en un caso real. La Figura 4.7 muestra el ritmo de crecimiento predicho por este modelo, así como los límites de superior e inferior del ritmo de propagación de la grieta. Se puede observar que el carácter oscilante de la velocidad de crecimiento disminuye a medida que la grieta se hace mayor, siendo casi imperceptible en el régimen de grietas grandes.

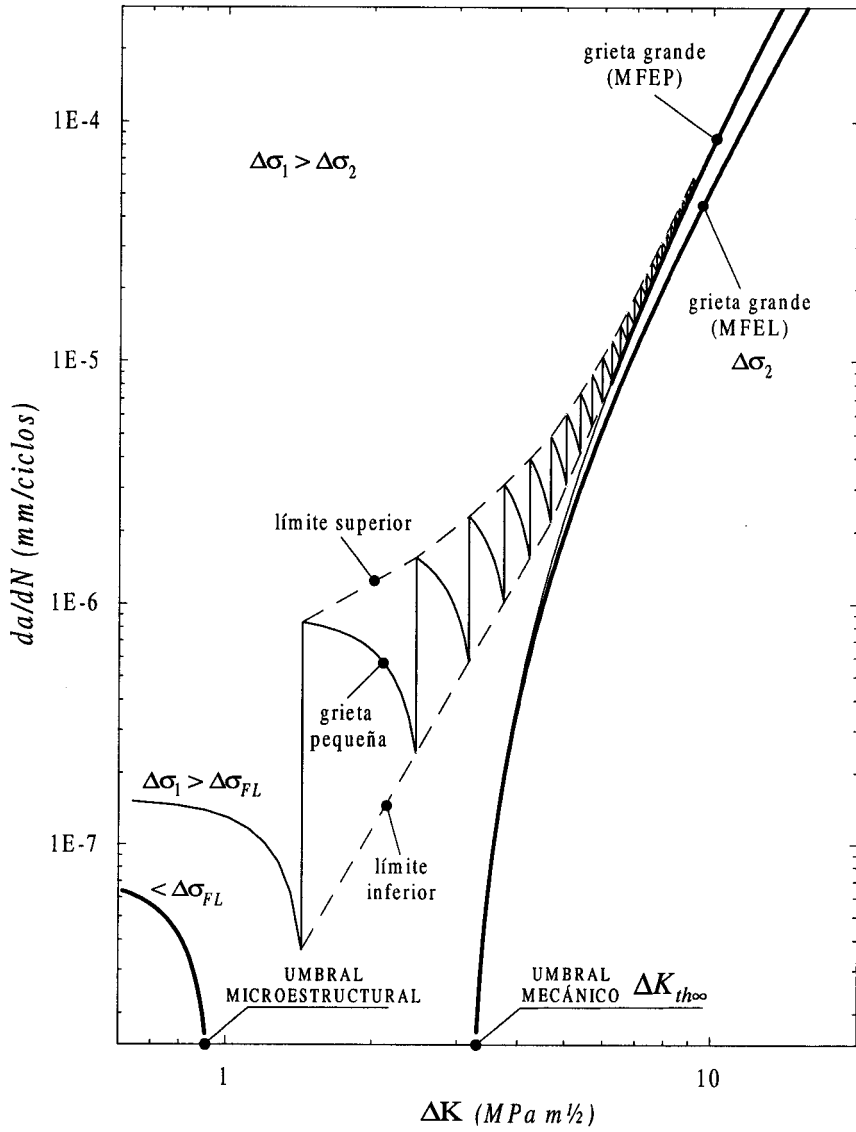


Figura 4.7: Ritmo de crecimiento de las grietas pequeñas. Umbrales microestructural y mecánico.

Bibliografía

- [1] Navarro A. and de los Rios E.R. (1988), Short and Long Fatigue Crack Growth: A Unified Model, *Phil. Mag.* 57, pp. 15-36
- [2] Navarro A. and de los Rios E.R. (1988), An Alternative Model for the Blocking of Dislocations at Grain Boundaries, *Phil. Mag.* 57, pp. 37-42
- [3] Navarro A. and de los Rios E.R. (1992), Fatigue Crack Growth Modelling by Successive Blocking of Dislocations, *Proc. R. Soc. Lond. A* 437, pp. 375-390
- [4] Miller, K.J. (1993), The Two Thresholds of Fatigue Behaviour, *Fatigue Fract. Engng. Struct.*, Vol. 16, No. 9, pp. 931-939
- [5] Miller, K.J. (1993), Material Science Perspective of Metal Fatigue Resistance, *Material Science and Technology*, Vol. 9, pp. 453-462
- [6] Miller, K.J. (1997), The Three Thresholds for Fatigue Crack Propagation, in *Fatigue and Fracture Mechanics: 27th Volume*, ASTM STP 1296 (Eds. R.S. Piascik, J.C. Newman & N.E. Dowling), American Society for Testing and Materials, pp. 267-286
- [7] Bilby B.A., Cottrell A.H. and Swinden K.H. (1963), The Spread of Plastic Yield from a Notch, *Proc. R. Soc. A* 272, pp. 304-314
- [8] Hall, E.O. (1951), The Deformation and Ageing of Mild Steel III, Discussion of Results, *Proc. Phys. Soc. Lond. B* 64, pp. 747-753

- [9] Petch, N.J. (1953), The Cleavage Strength of Polycrystals, *J. Iron Steel Inst.*, Vol. 174, pp. 25-28
- [10] Armstrong, R.W. (1970), The Influence of Polycrystal Grain Size on Several Mechanical Properties of Materials, *Metallurgical Transactions*, Vol. 1, pp. 1169-1176
- [11] Taylor, G.I. (1938), Plastic strain in metals, *J. Inst. Metals* 62, pp. 307-324
- [12] de los Rios, E.R. and Navarro, A. (1990), Consideration of Grain Orientation and Work Hardening on Short-fatigue-crack Modelling, *Phil. Mag.*, Vol. 61, No. 3, pp. 435-449
- [13] Sachs, G. (1928), *Z. d. Ver. deut. Ing.* 72, pp. 734
- [14] Taylor D. and Knott J.F. (1981), Fatigue Crack Propagation Behaviour of Short Cracks: The Effect of Microstructure, *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, Vol. 4, pp. 147-155
- [15] Taylor D. (1982), *Euromech Colloquium on Short Fatigue Cracks*, *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, Vol. 5, pp. 305-309
- [16] Lal, D.N. (1993) The Effect of Stress Ratio on the Fatigue Threshold Condition of Physically Small Cracks, *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, Vol. 16, No. 4, pp. 405-418
- [17] Lal, D.N. (1993) The Influence of Strength and Stress Ratio on Short-Cracks Thresholds and Non-propagation Fatigue Cracks, *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, Vol. 16, No. 4, pp. 419-428
- [18] Lankford, J. and Davidson, D. L. (1987). The Micromechanisms of Small Fatigue Crack Growth and the Influence of Metallurgical Factors, in *Fatigue 87* (R. O. Ritchie and E. A. Starke, Jr (eds.)) *Engineering Materials Advisory Services Ltd., Warley, West Midlands*, Vol. 3, pp. 1769-1797.

- [19] de los Rios E.R., Tang Z. and Miller, K.J. (1984), Short Crack Fatigue Behaviour in a Medium Carbon Steel, *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, Vol. 17, No. 2, pp. 97-108
- [20] Tanaka, K., Nakai, Y. and Yamashita, M. (1981), Fatigue Growth Threshold of Small Cracks, *Int. J. Fract.*, Vol. 17, pp. 519-533
- [21] El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith, K. N. (1979), Prediction of Non Propagating Cracks, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 11, pp. 573-584
- [22] Lardner, R. W. (1968), A Dislocation Model for Fatigue Crack Growth in Metals, *Phil. Mag.* 17, pp. 71
- [23] Eastabrook, J. N. (1984), A Dislocation Model for the Initial Growth of Stage I Fatigue Cracks, *Int. J. Fracture*, Vol. 24, R43
- [24] Blom, A. F., Hedlund, A., Zhao, W., Fathulla, A., Weis, B. and Stickler, R. (1986). Short Fatigue Crack Growth Behaviour in Al 2024 and Al 7475, in *The Behaviour of Short Fatigue Cracks*, EGF Pub.1 (K. J. Miller and E. R. de los Rios (eds.)), Mechanical Engineering Publications, London, pp. 37-66.
- [25] Lukas, P. and Kunz, L. (1992). Effect of Mean Stress on Short Crack Threshold, in *Short Cracks*, ESIS 13 (K. J. Miller and E. R. de los Rios (eds.)). Mechanical Engineering Publications, London, pp. 265-275.
- [26] Lukas, P., Kunz, L., Weiss, B. and Stickler, R. (1986). Non-damaging Notches in Fatigue. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 9, No. 3, pp. 195-204.
- [27] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1983). Propagation and Non Propagation of Short Fatigue Cracks at a Sharp Notch, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 6, No. 4, pp. 315-327.
- [28] Usami, S. and Shida, S. (1979). Elastic-plastic Analysis of Fatigue Limit for a Material with Small Flaws, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 1, pp. 471-481.

-
- [29] Wu, X. J. and Akid, R. (1995). Propagation Behaviour of Short Fatigue Cracks in Q2N Steel, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 18, No. 4, pp. 443-454.
- [30] Abbel-Raouf, H., Du Quesnay, D.L., Topper, T.H. and Plumtree, A. (1992), Notch-Size Effects in Fatigue Based on Surface Strain Redistribution and Crack Closure, *Int. J. Fatigue*, Vol. 14, No. 1, pp. 57-62
- [31] Kitagawa H. and Takahashi S. (1976), Application of Fracture Mechanics to Very Small Cracks, *Int. Conf. Mech. Behaviour of Materials (ICM2)*, American Society of Metals, pp. 627-631

Capítulo 5

Una teoría de los límites de fatiga en entallas

En el capítulo anterior se ha establecido el marco teórico que permite caracterizar el proceso de propagación de una grieta pequeña en un espécimen sin concentración de tensiones. El paso natural para alcanzar el objetivo de este trabajo será, por tanto, analizar qué ocurre con este proceso cuando existe un gradiente de tensiones como el generado por una entalla.

Para ello, se desarrollará un modelo que permitirá incorporar tanto el efecto de la microestructura como la evolución de las tensiones en la entalla. La geometría empleada inicialmente será una entalla elíptica en un medio semi-infinito. La grieta se modela de nuevo mediante una distribución de dislocaciones infinitesimales en la raíz del concentrador. Dicha configuración se reducirá al caso simple de una grieta en un espécimen sin entalla haciendo uso de las técnicas de transformación conforme.

La existencia de una distribución de tensiones decrecientes en el material, en la región de la entalla, provoca que las condiciones que asisten a la grieta a la hora de vencer cada una de las barreras microestructurales sean claramente diferentes.

El interés de este estudio se centrará en analizar cuáles deben ser las condiciones mínimas necesarias (condiciones umbrales) para hacer crecer dicha grieta hasta provocar el fallo por fatiga del componente. En estos términos se podrá predecir la aparición de grietas no-propagantes en la raíz de la entalla, así como interpretar los límites de iniciación y de propagación hasta el fallo establecidos en los clásicos trabajos de Frost.

Existe cierta controversia sobre la posible influencia que la plasticidad desarrollada por la propia entalla puede ejercer en la aparición de grietas no-propagantes, especialmente en entallas agudas. En este capítulo se hará una descripción del proceso de plastificación en la entalla desde el punto de vista microestructural que permitirá evaluar el efecto de ésta en las condiciones umbrales para la propagación de la grieta.

Finalmente se discutirá a la luz del modelo desarrollado la influencia de pequeños defectos o microentallas en la resistencia a fatiga de un componente.

5.1 Formulación del modelo de grieta en una entalla elíptica

Considérese una entalla elíptica en la superficie de un sólido semi-infinito sometido a un estado de tensión/deformación antiplano. Supóngase también una grieta pequeña en la raíz del concentrador que crece por fatiga y cuya zona plástica se encuentra bloqueada por una de las barreras microestructurales del material (véase Figura 5.1).

Al igual que en el modelo descrito en el capítulo anterior, la grieta puede modelarse mediante una distribución de dislocaciones comenzando en la raíz del concentrador y donde se distinguen las mismas tres regiones: la grieta propiamente dicha, donde existe una tensión de fricción σ_1^i , la zona plástica, donde las dislocaciones soportan una tensión σ_2^i que se opone a su movimiento y la zona de la barrera (r_0^i), que presenta una oposición σ_3^i al paso de las dislocaciones. El tipo

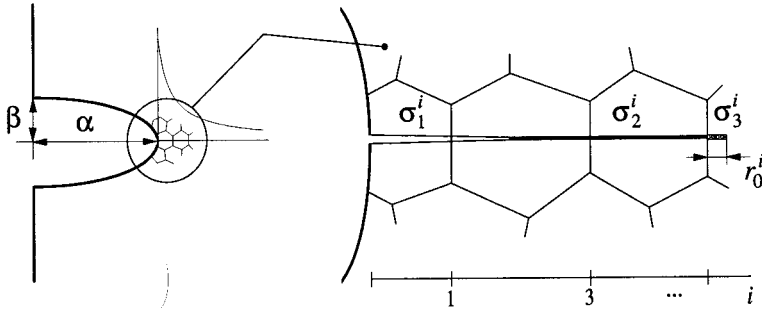


Figura 5.1: Representación esquemática de la grieta, la zona plástica y la barrera en la raíz de la entalla.

de dislocaciones apropiado para reproducir el estado antiplano de tensión será el de dislocaciones de tornillo con vectores de Burgers perpendiculares al plano del espécimen.

Empleando las técnicas de transformación conforme en el plano complejo y la representación del problema elástico antiplano a través de potenciales complejos, es posible transformar matemáticamente el problema de una grieta en el espécimen entallado al caso simple de una grieta creciendo en un espécimen infinito [1, 2].

Analicemos en primer lugar la transformación de la geometría y de la carga externa aplicada. Sea el sistema de coordenadas xyN mostrado en la Figura 5.2. α y β son los semiejes de la elipse, que corresponden a la profundidad y el semi-ancho de la entalla respectivamente. El espécimen se encuentra sometido a una tensión tangencial uniforme $\tau_{xN}^\infty = \tau$, aplicada en una región suficientemente alejada del concentrador. Definiendo la variable compleja $z = x + iy$, el problema a resolver

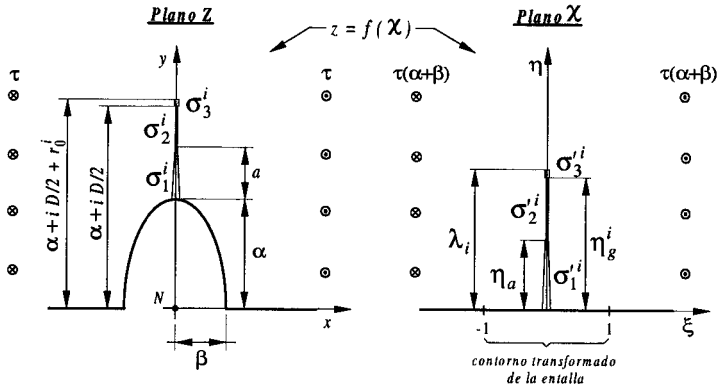


Figura 5.2: Transformación conforme de la entalla y el conjunto de dislocaciones.

se reduce (véase Apéndice C) a encontrar la función compleja $F(z)$ que cumple

$$\tau_{xN} - i\tau_{yN} = \frac{dF}{dz}$$

con condiciones de contorno:

$$\tau_{nN} = 0, \quad z \in \partial D \quad (5.1)$$

$$\tau_{xN} = \tau, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\tau_{yN} = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

donde n es la normal exterior al contorno del espécimen (∂D).

La transformación conforme

$$z = f(\chi) = \beta\chi + \alpha(\chi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

convierte el plano Z en un nuevo plano χ ($\chi = \xi + i\eta$), transformando el espécimen entallado en el semiplano superior $\eta > 0$ (Figura 5.2). La expresión que relaciona las tensiones en ambas configuraciones es

$$\tau_{\xi N} - i\tau_{\eta N} = \frac{dF}{d\chi} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{d\chi} = (\tau_{xN} - i\tau_{yN}) \frac{dz}{d\chi} \quad (5.3)$$

En esta nueva configuración (plano χ) el cálculo de la función potencial se simplifica bastante. En efecto, como se detalla en el Apéndice C una transfor-

mación conforme hace que los contornos libres de tensiones en el plano original permanezcan a su vez libres de tensiones en el problema transformado. Por lo que la condición de tensión cero sobre el contorno del espécimen en el problema (5.1) se escribe directamente en el plano χ como: $\tau_{\eta N} = 0$ en $\eta = 0$.

Por otra parte, empleando la relación (5.3) las condiciones de tensión en $x \rightarrow \infty$ se transforman en

$$(\tau_{xN} - i\tau_{yN})|_{x \rightarrow \infty} = (\tau_{\xi N} - i\tau_{\eta N})|_{\xi \rightarrow \infty} \frac{d\chi}{dz} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \quad (5.4)$$

de donde se obtiene

$$(\tau_{\xi N} - i\tau_{\eta N})|_{\xi \rightarrow \infty} = \tau \frac{dz}{d\chi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = (\alpha + \beta)\tau \quad (5.5)$$

y, por tanto, las nuevas condiciones de contorno en el plano χ cuando $\xi \rightarrow \infty$ son: $\tau_{\xi N} = \tau(\alpha + \beta)$ y $\tau_{\eta N} = 0$.

Según lo anterior, el problema a resolver en la configuración transformada se expresa como

$$\begin{aligned} \tau_{\xi N} - i\tau_{\eta N} &= \frac{dF}{d\chi} \\ \text{con condiciones de contorno:} \\ \tau_{\eta N} &= 0, \quad \eta = 0 \\ \tau_{\xi N} &= \tau(\alpha + \beta), \quad \xi \rightarrow \infty \\ \tau_{\eta N} &= 0, \quad \xi \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es inmediato comprobar que la elección de un potencial complejo F tal que

$$\frac{dF}{d\chi} = \tau(\alpha + \beta) \quad (5.7)$$

cumple las condiciones de contorno anteriores, y, por consiguiente, representa la solución del problema del espécimen entallado sometido a una tensión τ .

Consideremos ahora en la raíz de la entalla la distribución de dislocaciones que simula la grieta, la zona plástica y la barrera, situadas en el eje imaginario del plano Z y veamos como se transforman en el plano χ (Figura 5.2). Comprobaremos

primero que una dislocación en el plano Z se transforma también en una dislocación de la misma magnitud en el plano χ .

Para ello, supongamos en primera instancia una dislocación de tornillo situada en un punto genérico z_0 del plano original, y sea γ una curva cerrada y simple que rodea dicho punto. Atendiendo a su propia definición, la existencia de una dislocación en z_0 provoca que al recorrer la curva γ se produzca un salto finito en los desplazamientos normales al plano (u_N), cuyo valor es el vector de Burgers de la dislocación (b).

En efecto, empleando la expresión del potencial complejo de una dislocación de tornillo deducida en el Apéndice C

$$F(z) = -\frac{Gb}{2\pi}i \log(z - z_0), \quad (5.8)$$

es fácil comprobar que la integral del desplazamiento a lo largo de γ se puede escribir como

$$\int_{\gamma} du_N(x, y) = \frac{1}{G} \operatorname{Re} \left[\int_{\gamma} dF(z) \right] = b \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \right] \quad (5.9)$$

Puede verse que aplicando la Fórmula Integral de Cauchy (véase por ejemplo [3]) el último término entre corchetes es la unidad, obteniéndose así que

$$\int_{\gamma} du_N(x, y) = b \quad (5.10)$$

Supongamos ahora una transformación conforme genérica $z = f(\chi)$ ($\chi = f^{-1}(z)$), la cual transforma el punto z_0 y la curva γ en un punto χ_0 y en una curva γ' respectivamente en el plano χ . Las propiedades de la transformación conforme garantizan que la curva γ' será también cerrada y rodeará al punto χ_0 . Al realizar la transformación del plano Z al plano χ la regla para el cálculo del potencial $F(\chi)$ es simplemente

$$F(\chi) = F(f^{-1}(\chi)) \quad (5.11)$$

por lo que se cumplirá siempre que

$$u_N(\xi, \eta) = u_N(x, y) \quad (5.12)$$

donde el punto (ξ, η) es el transformado de (x, y) . Se podrá escribir entonces

$$\int_{\gamma'} du_N(\xi, \eta) = \int_{\gamma} du_N(x, y) = b \quad (5.13)$$

La ecuación (5.13) indica que debe existir también una dislocación en χ_0 y que, además, ésta tiene el mismo vector de Burgers que la dislocación original. Así, se puede concluir que una transformación conforme transforma las dislocaciones de tornillo del plano original en dislocaciones de tornillo de la misma magnitud en el plano transformado, como se apuntaba al principio. Idéntico resultado se podía haber obtenido atendiendo simplemente a la analogía que existe entre una dislocación de tornillo en deformación antiplana y un vórtice en el movimiento plano de fluidos incompresibles. Como se puede ver, por ejemplo, en la referencia [4], al aplicar una transformación conforme los vórtices se transforman en vórtices de igual intensidad.

Según lo anterior, es inmediato concluir que la distribución de dislocaciones en el eje $x = 0$ se convierte mediante la transformación conforme (5.2) en una nueva distribución de dislocaciones en el plano χ , situada ahora sobre el eje $\xi = 0$. La posición de cada nueva dislocación viene dada por

$$\eta(y) = \chi(z|_{x=0}) = \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{y^2 - \gamma^2} - \beta y \right], \quad \text{con } y \geq \alpha \quad (5.14)$$

donde $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Nótese que si $y = \alpha$ se tiene $\eta = 0$. En el caso en que la entalla sea circular ($\alpha = \beta$) la expresión anterior se reduce a

$$\eta(y) = \frac{y}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{y} \right)^2 \right] \quad (5.15)$$

La tensión de fricción transformada en cada una de las tres zonas se obtiene a

través de la ecuación (5.3) como

$$\begin{aligned}\sigma_1^i &= \sigma_1^i \left. \frac{dz}{d\chi} \right|_{\xi=0} = \sigma_1^i \left(\beta + \frac{\alpha\eta}{\sqrt{\eta^2 + 1}} \right) \quad \text{en } 0 \leq \eta < \eta_a \\ \sigma_2^i &= \sigma_2^i \left(\beta + \frac{\alpha\eta}{\sqrt{\eta^2 + 1}} \right) \quad \text{en } \eta_a \leq \eta < \eta_g^i \\ \sigma_3^i &= \sigma_3^i \left(\beta + \frac{\alpha\eta}{\sqrt{\eta^2 + 1}} \right) \quad \text{en } \eta_g^i \leq \eta \leq \lambda_i\end{aligned} \quad (5.16)$$

donde $\eta_a = \eta(\alpha + a)$, $\eta_g^i = \eta(\alpha + iD/2)$ y $\lambda_i = \eta(\alpha + iD/2 + r_0^i)$ son las posiciones transformadas de la grieta, del principio del límite de grano y del final de la barrera respectivamente (véase Figura 5.2).

Por último, para cerrar el problema del modelado de la grieta en la raíz de la entalla, tan sólo falta considerar la interacción entre las dislocaciones del plano transformado y la superficie libre. La teoría de dislocaciones establece que cuando una dislocación de tornillo se encuentra cerca de un contorno libre, las tensiones adicionales que ésta experimenta por la presencia de dicho contorno son idénticas a las que produciría sobre dicha dislocación una dislocación de tornillo de signo contrario situada simétricamente respecto de la superficie [5,6]. La tensión aplicada y tensión de fricción a la que debe estar sometida esta dislocación ficticia deberá ser idéntica a la que soporta la dislocación real. A dicha dislocación se le denomina *dislocación imagen*. En base a esto, el análisis de la distribución de dislocaciones en el semiespacio transformado con la superficie libre es equivalente a considerar una distribución de dislocaciones en un sólido infinito formado por las dislocaciones originales más sus correspondientes dislocaciones imágenes (Figura 5.3).

En resumen, el problema del modelado de una grieta mediante dislocaciones en la raíz de la entalla se reduce a resolver el problema de una grieta en sólido infinito, donde el estudio del equilibrio de las dislocaciones, desplazamiento de apertura y tensiones en el plano de la grieta es mucho más simple y se puede llevar a cabo empleando las expresiones generales obtenidas en el Capítulo 3. En este caso la configuración es simétrica (en geometría y cargas) y la tensión efectiva que tiende

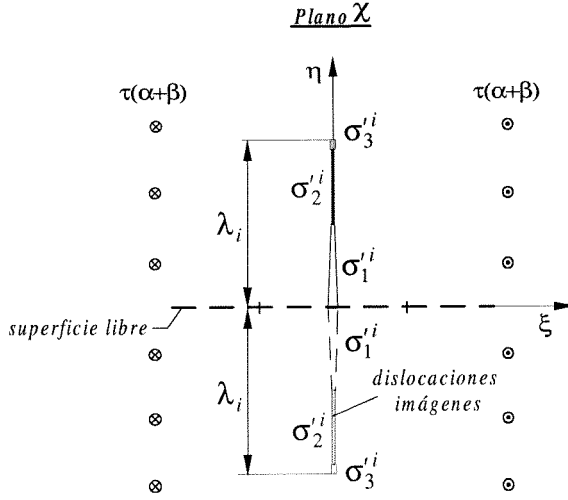


Figura 5.3: Conjunto de dislocaciones imágenes para considerar el efecto de la superficie libre.

a mover las dislocaciones en cada zona es

$$P(\eta) = \begin{cases} \tau(\alpha + \beta) - \sigma_1^i \left(\beta + \frac{\alpha|\eta|}{\sqrt{\eta^2+1}} \right), & \text{en } |\eta| < \eta_a \\ \tau(\alpha + \beta) - \sigma_2^i \left(\beta + \frac{\alpha|\eta|}{\sqrt{\eta^2+1}} \right), & \text{en } \eta_a \leq |\eta| < \eta_g^i \\ \tau(\alpha + \beta) - \sigma_3^i \left(\beta + \frac{\alpha|\eta|}{\sqrt{\eta^2+1}} \right), & \text{en } \eta_g^i \leq |\eta| \leq \lambda_i \end{cases} \quad (5.17)$$

Definiendo la variable adimensional $\zeta_i = \eta(y)/\lambda_i$ en la configuración transformada e imponiendo que la distribución de dislocaciones esté acotada en ambos extremos del dominio, la *condición de existencia* del problema se escribe como

$$\tau\Omega^{-1}(1) - [(\Omega^{-1}(n_1^i) - \Omega^{-1}(0)) \sigma_1^i + (\Omega^{-1}(n_2^i) - \Omega^{-1}(n_1^i)) \sigma_2^i + (\Omega^{-1}(1) - \Omega^{-1}(n_2^i)) \sigma_3^i] = 0 \quad (5.18)$$

donde $n_1^i = \eta_a/\lambda_i$ y $n_2^i = \eta_g^i/\lambda_i$ son las coordenadas adimensionales en el plano transformado del vértice de la grieta y del límite de grano respectivamente. La

función $\Omega^{-1}(\)$ es de la forma

$$\Omega^{-1}(\theta) = \beta \sin^{-1}(\theta) + \alpha \cos^{-1} \left(\lambda_i \sqrt{\frac{1 - \theta^2}{1 + \lambda_i^2}} \right) \quad (5.19)$$

Al igual que en el caso de un componente sin entalla, la *condición de existencia* permite conocer en cada instante la tensión σ_3^i que actúa sobre la barrera en función de la posición relativa de la grieta respecto del límite de grano, la posición de la barrera y la tensión aplicada sobre el espécimen. Sin embargo, ahora dicha tensión depende también de la geometría de la entalla, la cual determina el nivel y la evolución de las tensiones a lo largo del componente.

Como se discutió en el Capítulo 3, la *condición de grieta*, la cual impone que el desplazamiento relativo en los extremos del dominio de definición sea nulo, se satisface automáticamente dada la simetría del problema.

El desplazamiento relativo entre las caras de la grieta $\phi(\zeta_i)$ en el plano transformado viene dado por

$$\begin{aligned} \phi(\zeta_i) = & \frac{b}{\pi^2 A} \left\{ 2\sigma_3^i \alpha \left[\cosh^{-1} \left| \frac{1}{\zeta_i} \right| + (1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\zeta_i \sqrt{1 + \lambda_i^2}}{\sqrt{1 - \zeta_i^2} + \sqrt{1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2}} \right| \right] \right. \\ & + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \beta \lambda_i \left[(n_2^i - \zeta_i) \cosh^{-1} \left| \frac{1 - n_2^i \zeta_i}{\zeta_i - n_2^i} \right| + (n_2^i + \zeta_i) \cosh^{-1} \left| \frac{1 + n_2^i \zeta_i}{\zeta_i + n_2^i} \right| \right] \\ & + (\sigma_2^i - \sigma_1^i) \beta \lambda_i \left[(n_1^i - \zeta_i) \cosh^{-1} \left| \frac{1 - n_1^i \zeta_i}{\zeta_i - n_1^i} \right| + (n_1^i + \zeta_i) \cosh^{-1} \left| \frac{1 + n_1^i \zeta_i}{\zeta_i + n_1^i} \right| \right] \\ & + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \alpha \left[(1 + (n_2^i)^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \left(\cosh^{-1} \left| \frac{1 - n_2^i \zeta_i}{\zeta_i - n_2^i} \right| + \cosh^{-1} \left| \frac{1 + n_2^i \zeta_i}{\zeta_i + n_2^i} \right| \right) \right. \\ & \left. - (1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\zeta_i^2 (\sqrt{(1 - \zeta_i^2)(1 + (n_2^i)^2 \lambda_i^2)} + \sqrt{(1 - (n_2^i)^2)(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)})^2}{((n_2^i)^2 - \zeta_i^2)(\sqrt{1 - \zeta_i^2} + \sqrt{1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2})^2} \right| \right] \\ & + (\sigma_2^i - \sigma_1^i) \alpha \left[(1 + (n_1^i)^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \left(\cosh^{-1} \left| \frac{1 - n_1^i \zeta_i}{\zeta_i - n_1^i} \right| + \cosh^{-1} \left| \frac{1 + n_1^i \zeta_i}{\zeta_i + n_1^i} \right| \right) \right. \\ & \left. - (1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\zeta_i^2 (\sqrt{(1 - \zeta_i^2)(1 + (n_1^i)^2 \lambda_i^2)} + \sqrt{(1 - (n_1^i)^2)(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)})^2}{((n_1^i)^2 - \zeta_i^2)(\sqrt{1 - \zeta_i^2} + \sqrt{1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2})^2} \right| \right] \\ & \left. - 2(\sigma_3^i - \sigma_2^i) \alpha \cosh^{-1} \left| \frac{1}{\zeta_i} \right| - 2(\sigma_2^i - \sigma_1^i) \alpha \cosh^{-1} \left| \frac{1}{\zeta_i} \right| \right\} \quad (5.20) \end{aligned}$$

Éste es igual al desplazamiento relativo en la configuración original, ya que, como se ha comentado anteriormente, el valor del desplazamiento u_N en un punto del plano Z es numéricamente igual al desplazamiento en el correspondiente punto transformado del plano χ .

Asimismo, la distribución de tensiones en frente de la zona plástica en la configuración transformada se expresa como

$$\begin{aligned}
 T^x(\zeta_i) = & \beta\sigma_3^i - \frac{1}{\pi} \left\{ \beta(\sigma_3^i - \sigma_2^i) \left[\sin^{-1} \left(\frac{1 - n_2^i \zeta_i}{n_2^i - \zeta_i} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{1 + n_2^i \zeta_i}{n_2^i + \zeta_i} \right) \right] \right. \\
 & + \beta(\sigma_2^i - \sigma_1^i) \left[\sin^{-1} \left(\frac{1 - n_1^i \zeta_i}{n_1^i - \zeta_i} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{1 + n_1^i \zeta_i}{n_1^i + \zeta_i} \right) \right] \\
 & - \alpha\sigma_3^i \frac{\zeta_i \lambda_i}{(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{2(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)}{\zeta_i^2(1 + \lambda_i^2)} - 1 \right) \right] \\
 & + \alpha(\sigma_3^i - \sigma_2^i) \frac{\zeta_i \lambda_i}{(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\sin^{-1} \left(\frac{2(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)}{\zeta_i^2(1 + \lambda_i^2)} - 1 \right) \right. \\
 & \left. - \sin^{-1} \left(\frac{(1 - (n_2^i)^2)(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2) + (1 - \zeta_i^2)(1 + (n_2^i)^2 \lambda_i^2)}{(\zeta_i^2 - (n_2^i)^2)(1 + \lambda_i^2)} \right) \right] \\
 & + \alpha(\sigma_2^i - \sigma_1^i) \frac{\zeta_i \lambda_i}{(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\sin^{-1} \left(\frac{2(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2)}{\zeta_i^2(1 + \lambda_i^2)} - 1 \right) \right. \\
 & \left. - \sin^{-1} \left(\frac{(1 - (n_1^i)^2)(1 + \zeta_i^2 \lambda_i^2) + (1 - \zeta_i^2)(1 + (n_1^i)^2 \lambda_i^2)}{(\zeta_i^2 - (n_1^i)^2)(1 + \lambda_i^2)} \right) \right] \left. \right\} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

con $\zeta_i \geq 1$. La distribución de tensiones en el plano original se obtiene, vía la relación (5.3), como

$$T^Z(y) = \frac{T^x(\zeta_i)}{\frac{dz}{dx} \Big|_{\xi=0}} = \frac{T^x(\lambda_i \eta(y))}{\beta + \frac{\alpha \eta(y)}{\sqrt{1 + \eta^2(y)}}}, \quad y \geq \alpha + iD/2 + r_0^i \quad (5.22)$$

Por último, es fácil comprobar que la distribución de tensiones en la entalla en ausencia de grieta ($T_0(y)$) se obtiene simplemente sustituyendo en la expresión (5.22) $T^x(\zeta_i)$ por la tensión aplicada en el plano transformado $\tau(\alpha + \beta)$, esto es,

$$T_0(y) = \frac{\tau(\alpha + \beta)}{\beta + \frac{\alpha \eta(y)}{\sqrt{1 + \eta^2(y)}}}, \quad y \geq \alpha \quad (5.23)$$

La Figura 5.4 muestra esquemáticamente el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta y la distribución de tensiones en el plano de la grieta, así como la

distribución de tensiones originada por la entalla en ausencia de grieta, obtenidas a partir de las expresiones anteriores.

La representación de la grieta descrita en este apartado proporciona una herramienta apropiada para describir las condiciones de propagación de una grieta inmersa en el campo de tensiones de una entalla. Es de destacar que esta formulación incorpora intrínsecamente los dos principales factores que influyen en el crecimiento de una grieta pequeña en la raíz de un concentrador: el efecto del gradiente de tensiones y la influencia de la microestructura, representada a través de la interacción de la grieta con las barreras microestructurales del material. De esta manera y como se verá en lo que sigue, muchas de las conclusiones establecidas a la luz del estudio del crecimiento de grietas pequeñas en componentes sin concentraciones de tensión serán fácilmente exportables a situaciones en las que existan gradientes de tensión originados por entallas.

5.2 Límite de iniciación de grietas en entallas

Está actualmente bien establecido que, en componentes exentos de concentraciones de tensión sometidos a cargas de amplitud constante cercanas al límite de fatiga, las grietas consumen la mayor parte de la vida a fatiga del espécimen creciendo dentro de los primeros granos del material. En particular, se ha observado que para tensiones inferiores a dicho límite, tales microgrietas llegan a pararse al alcanzar el primer borde de grano o, para ser más preciso, en la primera barrera microestructural significativa [7].

En los materiales metálicos usados normalmente en ingeniería el proceso de iniciación física o nucleación de una grieta, es decir, la primera rotura de vínculos a nivel atómico, carece de interés, al existir numerosos elementos que pueden actuar como núcleo inicial de fractura a escala microscópica, tales como imperfecciones superficiales, marcas de mecanizado, microporosidades, despegues entre matriz y partículas de segunda fase utilizadas para reforzar la aleación, etc. Cualquier carga

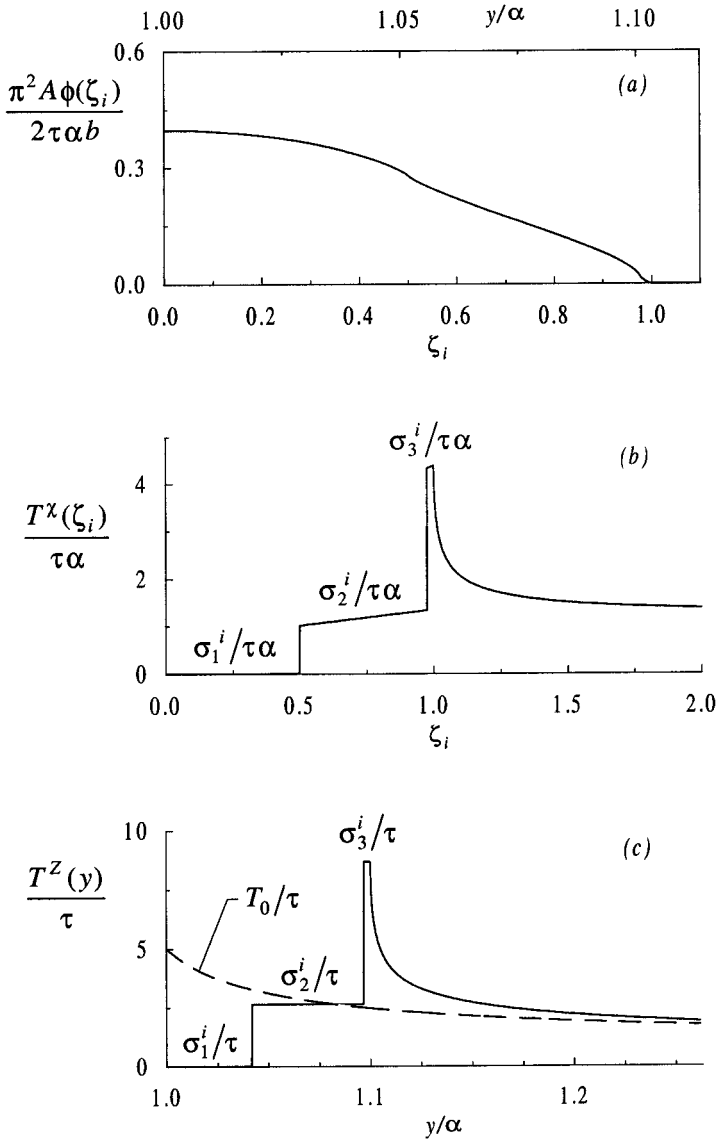


Figura 5.4: Representación gráfica en el plano de la grieta de: (a) desplazamiento relativo entre las caras de la grieta ($\phi(\zeta_i)$), (b) distribución de tensiones en la configuración transformada ($T^x(\zeta_i)$) y (c) distribución de tensiones en la configuración original, con grieta ($T^Z(y)$) y sin grieta ($T_0(y)$). Las condiciones de carga y geométricas consideradas son: $n_1^i = 0.5$, $n_2^i = 0.975$, $\sigma_1^i = 0$, $\sigma_2^i/\tau = 2.65$, $\alpha/\beta = 4$ y $(iD/2 + r_0^i)/\alpha = 0.1$.

cíclica aplicada, incluso muy por debajo del límite de fatiga, provoca el crecimiento de una microgrieta desde ese núcleo inicial hasta la barrera microestructural. El evento crítico desde el punto de vista del fallo del espécimen es, por tanto, la superación o no de dicha barrera.

En componentes sin concentradores de tensión sometidos a carga de amplitud constante, el crecimiento de una grieta más allá del primer borde de grano implica generalmente la propagación de dicha grieta hasta la rotura de la pieza. Este hecho hace que el límite de fatiga sea entendido, no como una tensión umbral por debajo de la cual no existen grietas en el componente sino, como la mínima tensión necesaria para hacer que las microgrietas existentes en el material sean capaces de superar la primera barrera microestructural.

Este comportamiento puede verse sustancialmente alterado en el caso de componentes entallados, caracterizados por la existencia de una disminución de tensiones relativamente importante en el material circundante al concentrador y a través del cual la grieta debe crecer. Así, dependiendo del gradiente de tensiones originado por la entalla, pueden encontrarse situaciones en las que la grieta sea capaz de superar el primer borde de grano pero se pare en alguna de las siguientes barreras microestructurales sin llegar a provocar el fallo del espécimen. Por ello, es necesario distinguir en estas situaciones entre iniciación y propagación hasta el fallo, entendiendo el término iniciación en este contexto como la capacidad de que una microgrieta supere la primera barrera microestructural. Se acepta implícitamente, según se ha discutido con anterioridad, que, por baja que sea la carga aplicada, si el número de ciclos es suficientemente alto, siempre se encontrarán en el material grietas del orden del tamaño microestructural característico. El interés práctico reside, por tanto, en determinar bajo qué circunstancias tales grietas quedarán o no bloqueadas en alguna de las barreras del material.

Frost et al. [8–12] y más recientemente otros investigadores [13–17] han puesto de manifiesto la existencia de dos tensiones umbrales en el crecimiento de grietas desde entallas: el límite de iniciación y el límite de propagación hasta el fallo.

El último hace referencia a la mínima tensión necesaria para propagar una grieta hasta la rotura del componente, correspondiendo, por tanto, con el límite de fatiga convencional del componente entallado. En cambio, el primero, algo más subjetivo en la práctica, representa, de acuerdo con los citados autores, la mínima tensión requerida para apreciar la presencia de grietas en la raíz del concentrador. Se observa que, para niveles de tensión entre estos dos límites, la grieta comienza a crecer en el fondo de la entalla pero cesa su propagación tras alcanzar una cierta longitud, dando lugar a grietas no-propagantes. El tamaño final de éstas depende fundamentalmente de la severidad del gradiente de tensiones en la entalla y del tipo de material.

En términos generales y para los tamaños de entallas usuales en la práctica, las diferencias entre el límite de iniciación y de propagación se acentúan a medida que la entalla se hace más aguda, siendo ambos indistinguibles en entallas cuyo factor de concentración de tensiones teórico está por debajo de un determinado valor, típicamente $K_t \leq 3$. En particular, esto concuerda con el hecho de que en un componente sin entalla ($K_t = 1$), que no es más que el caso extremo de los anteriores, el umbral de iniciación y de propagación coinciden y, por tanto, ambos responden al mismo hecho físico, es decir, la propagación de las microgrietas más allá del primer borde de grano. A la vista de esto y de acuerdo con el conocimiento actual del comportamiento de las grietas pequeñas, el límite de iniciación de un componente entallado debe ser interpretado como la mínima tensión que es necesario aplicar para que alguna de las microgrietas, previamente nucleadas, supere la primera barrera microestructural y pueda, al menos potencialmente, continuar propagándose en el material.

Supóngase una grieta incipiente creciendo dentro del primer grano situado en el fondo de la entalla. Inicialmente su zona plástica se encontrará bloqueada por el borde de grano, y permanecerá allí hasta que, como consecuencia del avance de la grieta, la tensión en la zona de la barrera sea suficiente para activar deslizamiento plástico en el grano adyacente. Ocurrido esto, la grieta podrá propagarse dentro

del grano vecino. En caso contrario, ésta se parará al alcanzar el borde de grano.

Obviamente el proceso físico por el cual la microgrieta supera la barrera microestructural es el mismo que el descrito para el caso de un componente sin entalla. Sin embargo, en un espécimen entallado, el grano en el que se propaga la grieta está sometido a un campo de tensiones decreciente como consecuencia del concentrador, lo que inducirá un comportamiento a fatiga diferente al caso de un espécimen sin entalla, donde la caída de tensiones a través del grano es muy pequeña o en teoría nula. Dicha distribución de tensiones provocará un rápido crecimiento inicial de la grieta desde la superficie, pero a medida que ésta avanza hacia el límite de grano, irá experimentando una reducción en su fuerza conductora, más o menos pronunciada dependiendo de la severidad del gradiente de tensiones de la entalla. Una vez alcanzada la barrera microestructural, la tensión requerida para activar deslizamiento plástico en el grano vecino, y superar, así, la barrera, dependerá de la tensión real que asiste a la grieta en ese punto, esto es, del nivel y evolución de las tensiones en el material y de la posición de la barrera. Las condiciones mínimas necesarias para que esto se produzca determinarán el umbral de iniciación del espécimen entallado.

Según lo anterior, el efecto de la entalla en el límite de iniciación no puede ser caracterizado solamente a partir de la tensión máxima alcanzada en la superficie (i.e. K_t), sino que debe tenerse en cuenta la caída de tensiones a través del material hasta la distancia a la que se encuentra la barrera. En general, tanto K_t como el gradiente de tensiones están determinados por la geometría del concentrador, fundamentalmente por el radio y la profundidad de la entalla. De esta manera, una entalla aguda, que presentará una elevada concentración de tensiones pero, por el contrario, un fuerte gradiente, inmersa en un material de grano grande, propiciará un rápido crecimiento inicial de la grieta, sin embargo, al alcanzar ésta el borde de grano, la tensión puede haber disminuido tanto que la influencia de la entalla en el proceso de iniciación no sea apreciable. En cambio, si el material es de grano fino, la influencia del concentrador será mucho mayor, ya que la tensión

que asiste ahora a la grieta al alcanzar la barrera estará próxima a la tensión en la superficie, aunque siempre por debajo. Se pone, así, de manifiesto una inherente dependencia del proceso de iniciación con la geometría de la entalla y el tipo de material.

El modelo presentado en el apartado anterior permite describir las condiciones umbrales que gobiernan la propagación de una microgrieta en la raíz de una entalla elíptica a través de las barreras representadas por los bordes de grano. La interacción de la grieta con las barreras microestructurales, así como la evolución de las tensiones originadas por la entalla a través del material, son tenidas en cuenta intrínsecamente en esta formulación.

Como se ha obtenido en el apartado anterior, la tensión σ_3^i que soporta una barrera genérica i en cada instante en el componente entallado viene determinada a través de la *condición de existencia* del problema acotado, ecuación (5.18). Particularizando ésta para el primer grano ($i = 1$) y suponiendo que no existe contacto entre las caras de la grieta ($\sigma_1^i = 0$), se obtiene

$$\begin{aligned} \tau \frac{\pi}{2}(\alpha + \beta) - \sigma_2^1 \left[\beta(\sin^{-1} n_2^1 - \sin^{-1} n_1^1) + \alpha \left(\cos^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_2^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_1^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \right) \right) \right] = \sigma_3^1 \left[\beta \cos^{-1} n_2^1 + \alpha \sin^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_2^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde n_1^1 y n_2^1 y λ_1 son las posiciones adimensionales en la configuración transformada del vértice de la grieta, del borde de grano y del final de la barrera. α y β son la profundidad y el ancho de la entalla. En general, el perfil de la entalla intersectará aleatoriamente los granos del material y, por tanto, la distancia desde el fondo de la entalla a la primera barrera se podrá expresar como kD , siendo k una variable aleatoria y D es el tamaño medio de grano del material o, más concretamente, la distancia media entre las barreras al deslizamiento plástico. Teniendo en cuenta que en un componente real la entalla contendrá un gran número de granos a lo largo del espesor del mismo, parece, pues, razonable que un valor

medio $k = 0.5$ represente un compromiso apropiado de entre todos los casos posibles. Así, se considerará inicialmente que a efectos prácticos la distancia media a la que se encuentra la barrera de la raíz de la entalla es $D/2$ y la influencia de la aleatoriedad de la posición de la barrera en el límite de iniciación de la entalla será estudiada al final de este apartado. λ_1 se expresa entonces como (véase ecuación (5.14))

$$\lambda_1 = \eta(\alpha + D/2 + r_0^1) = \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + D/2 + r_0^1)^2 - \gamma^2} - \beta(\alpha + D/2 + r_0^1) \right] \quad (5.25)$$

Una expresión más simple de la ecuación (5.24) puede obtenerse si se tiene en cuenta que $r_0^1 \ll D/2$, es decir, $n_2^1 \approx 1$. Así, empleando las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned} \sin^{-1} n_2^1 &\approx \frac{\pi}{2} \\ \cos^{-1} n_2^1 &\approx \sqrt{2} \sqrt{1 - n_2^1} \\ \cos^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_2^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \right) &\approx \frac{\pi}{2} \\ \sin^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_2^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \right) &\approx \lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_2^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \approx \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \sqrt{2} \sqrt{1 - n_2^1} \end{aligned} \quad (5.26)$$

y sustituyéndolas en (5.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \tau \frac{\pi}{2} (\alpha + \beta) - \sigma_2^1 \left[\beta \cos^{-1} n_1^1 + \alpha \sin^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_1^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \right) \right] = \\ \sigma_3^1 \left[\beta + \frac{\alpha \lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \right] \sqrt{2} \sqrt{1 - n_2^1} \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + D/2)^2 - \gamma^2} - \beta(\alpha + D/2) \right] \quad (5.28)$$

El símbolo de aproximación en (5.28) viene de despreciar r_0^1 frente a $D/2$. Por

último, expresando el término que contiene a n_2^1 como

$$1 - n_2^1 = 1 - \frac{\eta(\alpha + D/2)}{\eta(\alpha + D/2 + r_0^1)} \approx \frac{r_0^1}{\lambda_1} \frac{d\eta(y)}{dy} \Big|_{\alpha+D/2} \approx \frac{r_0^1}{\lambda_1 \left[\beta + \frac{\alpha\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \right]} \quad (5.29)$$

la ecuación (5.27) queda finalmente de la forma

$$\tau \frac{\pi}{2} (\alpha + \beta) - \sigma_2^1 \left[\beta \cos^{-1} n_1^1 + \alpha \sin^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - (n_1^1)^2}{1 + \lambda_1^2}} \right) \right] = \sigma_3^1 \sqrt{2r_0^1} \left[\frac{\beta}{\lambda_1} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.30)$$

La relación (5.30) permite obtener, para una determinada tensión aplicada τ , la tensión σ_3^1 que existe en la barrera a medida que la grieta crece. Se puede comprobar que σ_3^1 aumenta progresivamente mientras la grieta se aproxima a la barrera (n_1^1 se aproxima a la unidad), alcanzando su valor máximo cuando el vértice de ésta se encuentra justo en el borde de grano ($n_1^1 \approx 1$). Nótese que en dicho instante el término que acompaña a σ_2^1 , el cual es siempre positivo, cae a cero.

Para que la grieta pueda superar el borde de grano será necesario generar deslizamiento plástico, en forma de una nueva banda de deslizamiento, dentro del siguiente grano. Esto se producirá cuando la tensión en la barrera alcance el valor crítico necesario para que se activen fuentes de dislocaciones en el nuevo grano o, bien, para que las dislocaciones de la zona plástica de la grieta puedan ser empujadas a través de la barrera hacia el interior de dicho grano. Para el primer borde de grano esta condición se expresa, según se discutió en el Capítulo 4, como

$$\sigma_3^1 = m_1^* \tau_c^1$$

o bien, expresada a partir del límite de fatiga del componente sin entalla, como

$$\sigma_3^1 = (\pi/4) \tau_{FL} (D/r_0^1)^{\frac{1}{2}} \quad (5.31)$$

Así, sustituyendo (5.31) en (5.30) se obtiene la relación

$$\tau - \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_2^1}{\alpha + \beta} \left[\beta \cos^{-1} n_1^1 + \alpha \sin^{-1} \left(\lambda_1 \sqrt{\frac{1 - n_1^{12}}{1 + \lambda_1^2}} \right) \right] = \tau_{FL} \frac{\sqrt{D/2}}{\alpha + \beta} \left[\frac{\beta}{\lambda_1} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.32)$$

la cual permite determinar la tensión necesaria τ que se debe aplicar al espécimen entallado para que las dislocaciones sobrepasen la primera barrera microestructural, en función de la longitud relativa de la grieta respecto del borde de grano n_1^1 y la geometría de la entalla.

De acuerdo con las ideas anteriores, el límite de iniciación del componente entallado (τ_{L1}^N), que representa la mínima tensión necesaria para que una grieta creciendo dentro del primer grano en la raíz del concentrador sea capaz de superar la barrera microestructural, se obtiene haciendo simplemente $n_1^1 \approx 1$ en la ecuación (5.32)

$$\tau_{L1}^N = \frac{\tau_{FL}}{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} \left[\frac{\bar{\beta}}{\lambda_1} + \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.33)$$

siendo

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left[\bar{\alpha} \sqrt{(\bar{\alpha} + 1)^2 - \bar{\gamma}^2} - \bar{\beta}(\bar{\alpha} + 1) \right] \quad (5.34)$$

y donde $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{D/2}$, $\bar{\beta} = \frac{\beta}{D/2}$ y $\bar{\gamma}^2 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2$.

En la práctica es usual expresar la relación (5.33) de forma adimensional, como el cociente entre el límite de fatiga del espécimen sin entalla y el límite de iniciación del componente entallado (K_{f1})

$$K_{f1} = \frac{\tau_{FL}}{\tau_{L1}^N} = K_t \bar{\beta}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.35)$$

donde se ha introducido además la expresión del factor de concentración de tensiones $K_t = 1 + \alpha/\beta$. Por analogía con el tradicional factor de reducción de resistencia a fatiga de la entalla K_f , el factor K_{f1} se denomina factor de reducción de resistencia a la iniciación de grietas por fatiga de la entalla.

Las ecuaciones (5.33) o (5.35) muestran una dependencia explícita del límite de iniciación con la geometría de la entalla y la microestructura del material. En efecto, como se discutió anteriormente, la geometría determina el nivel y evolución de tensiones a través del material, mientras que la influencia de la microestructura se manifiesta al establecer la distancia media a la que se encuentra la primera barrera significativa. Sin embargo, como se puede apreciar, tal dependencia está establecida en términos relativos a través de las magnitudes $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$, indicando que la influencia de la entalla en el proceso de iniciación dependerá del tamaño relativo de ésta respecto del tamaño microestructural característico. Es de esperar, por tanto, y así lo corrobora la evidencia experimental, que dos especímenes del mismo material conteniendo entallas geoméricamente semejantes, pero de distinto tamaño, muestren diferentes valores de K_{f1} , dado que los parámetros $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ serán distintos. Este hecho se conoce como efecto de tamaño de la entalla (notch-size effect), el cual pone de manifiesto la imposibilidad de utilizar directamente los resultados obtenidos en laboratorio, generalmente empleando entallas pequeñas, a componentes reales de diferente tamaño. Asimismo y por idéntica razón, dos especímenes de distinto material (distinto tamaño de grano) con entallas idénticas presentarán K_{f1} diferentes.

La Figura 5.5 muestra la evolución del factor de reducción de resistencia a la iniciación predicha por la ecuación (5.35) para entallas elípticas geoméricamente semejantes (K_t fijado arbitrariamente a 2.66), en función del radio de la entalla y para diferentes tamaños de grano. En dicha gráfica se representa el parámetro q_1 , equivalente a K_{f1} , definido como

$$q_1 = \frac{K_{f1} - 1}{K_t - 1} \quad (5.36)$$

y que denominaremos en adelante índice de sensibilidad a la iniciación en la entalla. Nótese que un valor de q_1 próximo a cero, es decir, $K_{f1} \ll K_t$, indica que la entalla tiene una escasa influencia en el proceso de iniciación de las grietas. Se dice que el especimen es poco sensible a la presencia de la entalla. Por el contrario, un valor de q_1 cercano a la unidad refleja una gran influencia de la entalla, $K_{f1} \approx K_t$.

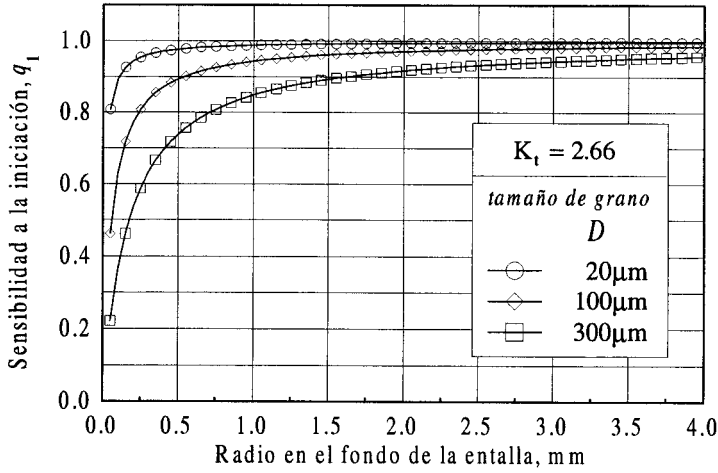


Figura 5.5: Evolución de la sensibilidad a la iniciación q_1 en entallas geoméricamente semejantes ($K_t = 2.66$) y diferentes tamaños de grano.

En la citada figura se puede apreciar que en todos los casos q_1 es menor que la unidad, esto es, $K_{f1} \leq K_t$, tomando valores cercanos a cero para radios de entalla pequeños y aumentando progresivamente hasta valores próximos a la unidad a medida que el radio de la entalla se hace mayor, o, lo que es lo mismo, a medida que el tamaño de la entalla aumenta. Dicha tendencia refleja el efecto característico del tamaño de la entalla mencionado anteriormente. Por otra parte, se puede observar también una clara influencia de la microestructura en el proceso de iniciación, prediciéndose valores de q_1 menores a medida que aumenta el tamaño de grano y, por tanto, la distancia media hasta la primera barrera.

Este comportamiento está en perfecta concordancia con los datos experimentales referidos en la literatura. Por ejemplo, en los resultados de Peterson [18], obtenidos empleando entallas suaves ($K_t \leq 3$) en especímenes geoméricamente semejantes y distintos materiales (véase Figura 2.2), se puede observar que los materiales con un grano basto, como es el caso de aceros recocidos y aleaciones de aluminio, presentan una sensibilidad a la entalla bastante inferior que los aceros

templados o normalizados, en los cuales el tamaño medio de grano es más pequeño. Asimismo, para todos los materiales ensayados, el coeficiente de sensibilidad aumenta al aumentar el radio del concentrador, en perfecto acuerdo con la tendencia predicha por la ecuación (5.35).

Es importante aclarar que, aunque formalmente los resultados de Peterson se refieren al límite de fatiga del componente entallado (límite de propagación hasta la rotura), éstos fueron obtenidos en su mayor parte para entallas con K_t bajos, en las que es de esperar que el límite de iniciación y el de propagación sean indistinguibles según se ha comentado al principio de este apartado. En estas circunstancias, como se verá en el apartado siguiente, las expresiones (5.33) o (5.35) representan exactamente el límite de fatiga del componente entallado.

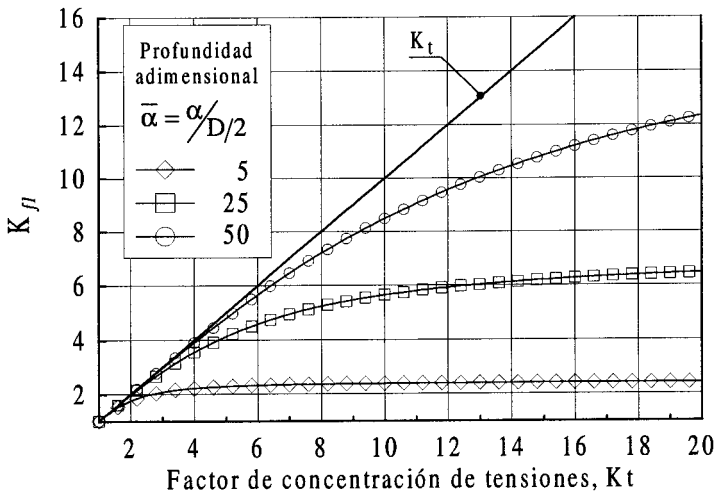


Figura 5.6: Diferencias entre K_{f1} y K_t para distintas profundidades relativas de la entalla $\bar{\alpha}$.

La evidencia experimental muestra que, para entallas de la misma profundidad, las discrepancias entre K_{f1} y K_t se acentúan a medida que aumenta el factor de concentración de tensiones [9, 12, 15, 16]. La Figura 5.6 reproduce este hecho, donde se representa el valor de K_{f1} predicho por la relación (5.35) para una serie de

entallas con igual profundidad adimensional $\bar{\alpha}$ y cuyo radio se ha ido disminuyendo progresivamente. En dicha gráfica se observa una significativa diferencia entre K_{f1} y K_t al aumentar K_t . Además, tales diferencias comienzan a apreciarse antes y con mayor intensidad a medida que disminuye el parámetro $\bar{\alpha}$.

Los resultados anteriores ponen claramente de manifiesto que el empleo de K_t como estimación del factor de reducción de resistencia a la iniciación es inadecuado en términos generales, pudiendo obtenerse predicciones que son excesivamente conservativas, especialmente en aquellos casos en los que el tamaño de la entalla es comparable con el tamaño medio microestructural. No obstante, esta práctica común en ingeniería puede justificarse en cierta medida si se tiene en cuenta que para los materiales y geometrías de entallas habitualmente empleados el tamaño relativo de la entalla es en general varios ordenes de magnitud superior a los tamaños medios de grano (i.e. $\bar{\alpha} \gg 1$), provocando que las diferencias entre K_{f1} y K_t no sean relevantes y estén, además, del lado de la seguridad. Dichas diferencias serán más importantes en entallas muy agudas, las cuales son generalmente evitadas en la práctica.

Existen determinados casos prácticos en los que es necesario afinar más en el cálculo para establecer la influencia real de una entalla, como por ejemplo, conocer cual es el efecto de pequeños defectos existentes en el material, tales como inclusiones, porosidades o marcas superficiales aisladas, que no por ser pequeños son menos dañinos. Para ilustrar esto es interesante analizar los valores límites de K_{f1} en los casos extremos en que $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ sean muy grandes o muy pequeños. Tomando límites en la expresión (5.35) cuando $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow \infty$ y $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow 0$ y manteniendo K_t constante, es fácil comprobar que (véase Apéndice D)

$$K_{f1} \xrightarrow{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow \infty} K_t \quad (5.37)$$

$$K_{f1} \xrightarrow{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow 0} 1 \quad (5.38)$$

Este resultado refleja que un mismo defecto inmerso en un material de grano muy fino, por ejemplo, en aceros de alta resistencia, tendrá una repercusión

importante en el proceso de iniciación ($K_{f1} \rightarrow K_t$), mientras que no producirá una reducción apreciable en la resistencia a fatiga cuando su tamaño sea varias veces inferior al tamaño de grano del material ($K_{f1} \rightarrow 1$). Una vez más, la clave para cuantificar el efecto de una entalla en el comportamiento a fatiga radica en el tamaño relativo de ésta frente a la microestructura del material y no en el tamaño absoluto de la entalla.

Según lo visto hasta ahora, la distancia a la que se encuentra la primera barrera microestructural juega un papel muy importante en el modelo descrito. Como se apuntó anteriormente, dicha magnitud es en general una variable aleatoria asociada principalmente a la aleatoriedad de la propia distribución de granos del material y a la disposición aleatoria con respecto a la microestructura. Una primera aproximación que permite apreciar este efecto puede obtenerse a partir de la formulación presentada haciendo que la distancia a la primera barrera varíe aleatoriamente respecto del valor medio elegido, es decir, escribiendo ésta como $kD/2$ y siendo k una variable aleatoria. Los resultados obtenidos con esta filosofía se muestran en la Figura 5.7, donde se ha representado el intervalo de confianza del 95% de la sensibilidad a la iniciación para un material de grano fino y de grano basto respectivamente. Para los propósitos ilustrativos de este estudio, se ha supuesto el caso simple en el que k varía según una distribución de densidad de probabilidad uniforme. El muestreo se realizó tomando 20 muestras de 15 puntos cada una.

Como se puede apreciar en la Figura 5.7 el modelo reproduce satisfactoriamente el inherente carácter aleatorio observado en la fatiga en entallas, véase por ejemplo los resultados experimentales de Peterson [18] mostrados en la Figura 2.2. En estos ensayos existe una significativa dispersión, resaltándose la posibilidad de encontrar valores de la sensibilidad a la entalla ligeramente superiores a la unidad, especialmente en los materiales de mayor resistencia. Este mismo comportamiento puede también observarse en la Figura 5.7.

En resumen, el modelo presentado, basado en la interacción de la microgrieta con las barreras microestructurales, permite describir de manera simple el com-

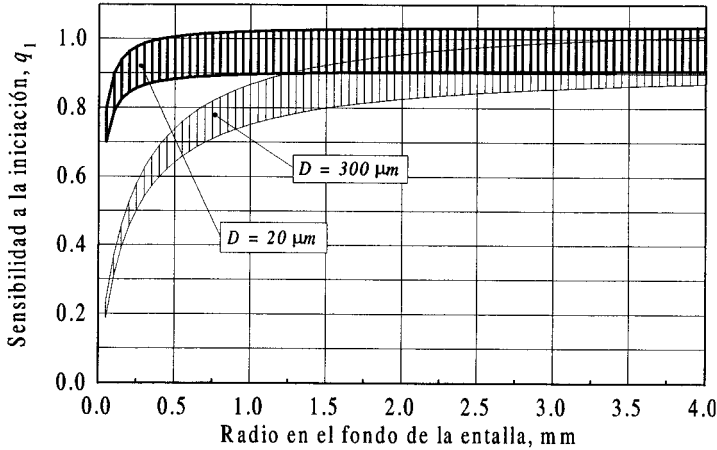


Figura 5.7: Banda de confianza del 95% en el valor de q_1 para entallas geoméricamente semejantes ($K_t = 2.66$).

plejo proceso de la iniciación de grietas por fatiga en componentes entallados y permite racionalizar de manera correcta el comportamiento observado en especímenes reales. Se pone, así, de manifiesto que el proceso de iniciación no está regido de manera absoluta por el nivel y distribución de tensiones originadas en la entalla, y mucho menos por el valor máximo de la tensión en la superficie, sino que está controlado por la evolución de tensiones sobre una cierta porción muy concreta de material (la distancia hasta la primera barrera microestructural). Este hecho se materializa en una dependencia explícita de K_{f1} con el tamaño relativo de la entalla respecto al tamaño microestructural característico del material. No es correcto, por tanto, a la hora de cuantificar el efecto de real de una entalla, hablar de entallas grandes o pequeñas sin definir una magnitud de referencia apropiada, la cual debe ser el tamaño microestructural característico. Por último, el modelo planteado permite abordar la naturaleza aleatoria del problema, así como razonar de manera sencilla sobre las causas que provocan la dispersión de resultados en este tipo de ensayos.

5.3 Límite de fatiga de un espécimen entallado

Para que se produzca el fallo del componente la grieta deberá ser capaz de superar no sólo la primera barrera microestructural, sino todas las demás barreras del material que encuentre a su paso. Dicho proceso está gobernado por la resistencia de las sucesivas barreras y por las condiciones de tensión a las que se encuentre sometida la grieta al enfrentarse con cada una de ellas. En especímenes entallados, paralelamente a la creciente resistencia del material en los primeros estadios del crecimiento de la grieta, existe también una reducción relativamente acusada en las tensiones, que puede alterar el balance entre ambos efectos. Así, incluso para tensiones inicialmente superiores al umbral de iniciación, será posible encontrar situaciones en las que, dependiendo del nivel y severidad del gradiente de tensiones, una grieta crezca una cierta distancia pero se bloquee en alguna de las siguientes barreras microestructurales, sin llegar a provocar la rotura de la pieza. Por tanto, para caracterizar el fallo a fatiga de un componente entallado será necesario estudiar cuales deben ser las condiciones necesarias para que una grieta pueda superar cada una de las barreras del material. La mínima tensión aplicada que provoque esto determinará el límite de propagación hasta el fallo o límite de fatiga convencional del espécimen entallado.

Para ello, supóngase una grieta en la raíz del concentrador que ha crecido a través de un cierto número de granos y cuya zona plástica se encuentra bloqueada por la i -ésima barrera microestructural ($i = 3, 5, 7, \dots$). De manera similar al caso anterior, la tensión σ_3^i que soporta la barrera en cada instante se obtiene a partir de la ecuación (5.18), la cual, teniendo en cuenta que $n_2^i \approx 1$ y suponiendo por simplicidad que $\sigma_1^i = 0$, se expresa como

$$\tau \frac{\pi}{2} (\alpha + \beta) - \sigma_2^i \left[\beta \cos^{-1} n_1^i + \alpha \sin^{-1} \left(\lambda_i \sqrt{\frac{1 - (n_1^i)^2}{1 + \lambda_i^2}} \right) \right] = \sigma_3^i \sqrt{2r_0^i} \left[\frac{\beta}{\lambda_i} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.39)$$

donde

$$\lambda_i \approx \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + iD/2)^2 - \gamma^2} - \beta(\alpha + iD/2) \right] \quad (5.40)$$

Al igual que en el apartado anterior, λ_i se puede escribir en términos de las cantidades adimensionales $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{D/2}$, $\bar{\beta} = \frac{\beta}{D/2}$ y $\bar{\gamma}^2 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2$

$$\lambda_i \approx \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \left[\bar{\alpha} \sqrt{(\bar{\alpha} + i)^2 - \bar{\gamma}^2} - \bar{\beta}(\bar{\alpha} + i) \right] \quad (5.41)$$

A medida que la grieta se aproxima al borde de grano donde están bloqueadas las dislocaciones σ_3^i aumentará paulatinamente. La condición para la activación de deslizamiento plástico más allá de la barrera se puede seguir expresando como $\sigma_3^i = m_i^* \tau_c^i$, donde, según se ha comentado en el Capítulo 4, el factor m_i^* reflejará la contribución tanto de orientación cristalográfica como de cierre de grieta y τ_c^i es la tensión crítica media para la activación de fuentes de dislocaciones en el material.

En general, la mínima tensión aplicada (τ_{Li}^N) requerida para superar la i -ésima barrera microestructural se obtiene cuando la grieta ha alcanzado el borde de grano ($n_1^i = n_2^i \approx 1$), en cuyo caso la expresión (5.39) se reduce a

$$\tau_{Li}^N \frac{\pi}{2} (\alpha + \beta) = m_i^* \tau_c^i \sqrt{2r_0^i} \left[\frac{\beta}{\lambda_i} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.42)$$

Al igual que en el caso de un espécimen sin concentrador, la propagación o no de una grieta a través de las sucesivas barreras está controlada por la competición de dos mecanismos: por un lado, el aumento de la resistencia de las barreras representado por la sucesión creciente de m_i^* , y por otro lado, el mayor poder concentrador de tensiones que tiene la grieta sobre la barrera conforme aumenta su longitud. La diferencia crucial entre el caso sin entalla y el caso con entalla es que en éste último, puesto que la grieta progresa a través de un campo de tensiones decreciente, el ritmo al que aumentan las demandas de la grieta sobre las barreras es sensiblemente menor que en el caso sin entalla.

La ecuación anterior se puede escribir de manera más conveniente en términos de variables macroscópicas y de la propia longitud de la grieta, sustituyendo el

factor $m_i^* \tau_c^i \sqrt{2r_0^i}$ en función de la tensión umbral τ_{Li} necesaria para sobrepasar la i -ésima barrera en el componente sin entalla, ($m_i^* \tau_c^i \sqrt{2r_0^i} = (\pi/4) \tau_{Li} \sqrt{2iD}$). τ_{Li} se podrá determinar a partir del diagrama de Kitagawa-Takahashi del material. Se obtiene, por tanto,

$$\frac{\tau_{Li}^N}{\tau_{FL}} = \left(\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} \right) \frac{\sqrt{i}}{\bar{\alpha} + \bar{\beta}} \left[\frac{\bar{\beta}}{\lambda_i} + \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.43)$$

o, alternativamente, en función de K_t

$$\frac{\tau_{Li}^N}{\tau_{FL}} = \left(\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} \right) \frac{\sqrt{i}}{\bar{\beta}^{\frac{1}{2}} K_t} \left[\frac{1}{\lambda_i} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.44)$$

Nótese que haciendo $i = 1$ en (5.43) o (5.44) ($\tau_{L1} = \tau_{FL}$) se obtiene, obviamente, el límite de iniciación.

Esta ecuación permite establecer las condiciones umbrales para la propagación de una grieta en un componente entallado en función de la longitud de ésta, es decir, permite determinar el diagrama de Kitagawa para la pieza entallada. El límite de propagación hasta el fallo τ_{FL}^N se corresponderá con la máxima tensión umbral en dicho diagrama, esto es,

$$\tau_{FL}^N = \max_i \tau_{Li}^N \quad (5.45)$$

Cualquier tensión aplicada superior a ésta provocará que la grieta sea capaz de superar todas las barreras existentes en el material. El valor de i para el que se alcanza dicho máximo determinará la máxima longitud de grieta no-propagante que puede obtenerse en el especimen.

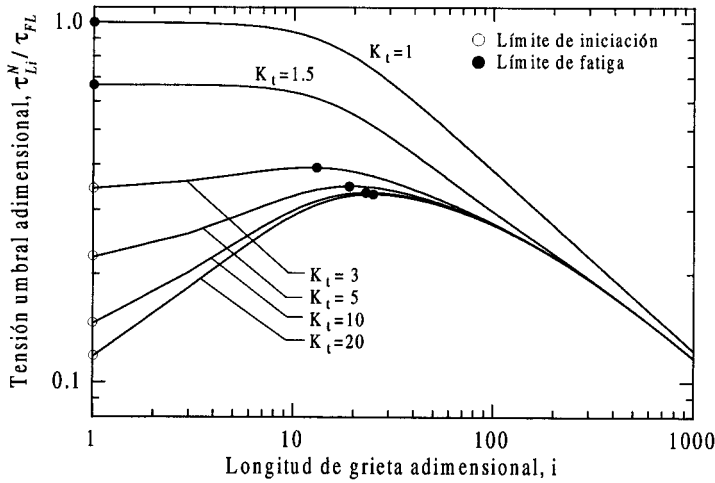


Figura 5.8: Tensión umbral τ_{Li}^N vs. longitud de grieta no-propagante. Diagrama de Kitagawa del espécimen entallado ($\bar{\alpha} = 100$).

La Figura 5.8 ilustra la idea anterior. Para realizar la simulación se ha considerado conocido el diagrama de Kitagawa del componente sin entalla, el cual, según se discutió en el Capítulo 4, puede ser expresado con suficiente aproximación por la expresión

$$\frac{\tau_{Li}}{\tau_{FL}} = \frac{\sqrt{\bar{a}_0}}{\left(i^f + \bar{a}_0^f - 1\right)^{\frac{1}{2f}}} \quad (5.46)$$

siendo $\bar{a}_0 = 2a_0/D$. Por simplicidad, se ha considerado un valor de $\bar{a}_0 = 15$, el cual parece suficientemente razonable de acuerdo con los resultados de Taylor [19–21] ($D \leq a_0 \leq 10D$). El exponente f se ha fijado arbitrariamente a 2.5, que como se vio en el capítulo anterior reproduce un comportamiento adecuado para numerosos materiales.

La citada figura muestra la tensión umbral τ_{Li}^N para propagar una grieta en un componente entallado en función de la posición de la barrera microestructural (i), para una entalla de profundidad constante y distintos factores de concentración de tensiones (K_t). El valor de la profundidad utilizado fue $\bar{\alpha} = 100$. Para tener

un orden de magnitud, este valor de $\bar{\alpha}$ puede corresponder al de una entalla típica de profundidad 4 mm en un material con un tamaño medio de grano D de 80 μm .

Como se puede apreciar, el patrón de comportamiento es claramente distinto dependiendo de la severidad de la entalla. Las entallas suaves (K_t típicamente inferior a 3) presentan una tensión umbral que es siempre decreciente a partir de la primera barrera ($i = 1$) (véase la curva para $K_t = 1.5$). Esto indica que, sometido el espécimen a una tensión de amplitud constante, una vez que la grieta logra superar el primer borde de grano se propagará hasta provocar el fallo de la pieza. Por tanto, el límite de fatiga del componente entallado está asociado, en este caso, con la tensión para superar la primera barrera microestructural y coincide, al igual que ocurre en especímenes sin concentrador, con el límite de iniciación ($\tau_{FL}^N = \tau_{L1}^N$).

Sin embargo, a medida que K_t aumenta, comienza a aparecer un máximo en las curvas, situado más allá de la primera barrera. Cuando la tensión aplicada se encuentre por encima de dicho máximo, la grieta no encontrará en el material ninguna barrera capaz de pararla, creciendo hasta provocar la rotura del componente. La tensión umbral asociada a dicho máximo se corresponde, como se apuntó, con el límite de fatiga del componente entallado (τ_{FL}^N).

El tramo creciente de la curva, delimitado por el límite de iniciación y el límite de fatiga, acota la región en la que es posible observar grietas no-propagantes en la raíz de la entalla. Como puede verse esquematizado en la Figura 5.9, si el nivel de tensión aplicada (τ) se encuentra entre el umbral de iniciación y el de fatiga, la grieta es capaz de atravesar algunas de las barreras, pero queda bloqueada por una barrera más interna. La posición de ésta última barrera determina la longitud máxima que la grieta puede alcanzar en estas condiciones de tensión. Como se puede observar las longitudes de las grietas no-propagantes son función del nivel de tensiones aplicado. Obviamente, la máxima longitud posible se obtendrá justo en el límite de fatiga del espécimen entallado.

Existen en la literatura numerosos estudios experimentales que corroboran el

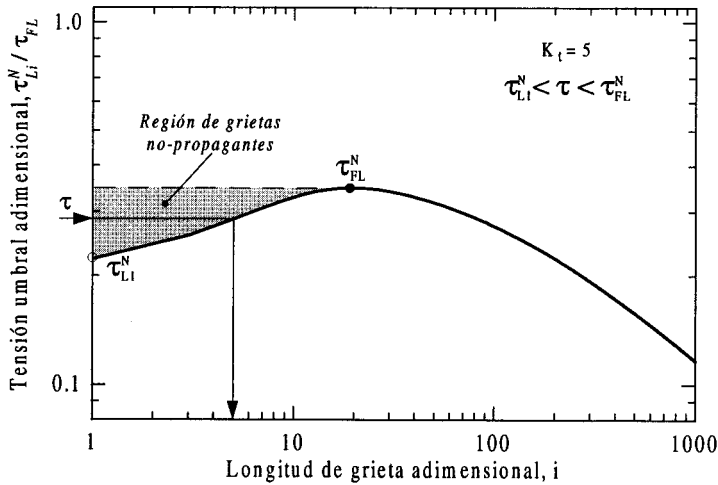


Figura 5.9: Evolución típica de la tensión umbral cuando aparecen grietas no-propagantes.

patrón de comportamiento predicho por el modelo presentado. Entre los más significativos, por ejemplo, se pueden citar los trabajos de Frost et al. [8–12], El-Haddad et al. [13], Tanaka y Nakai [14, 15] y Tanaka y Akiniwa [16, 17]. Los resultados de Frost y Dugdale [9], realizados con especímenes entallados en V (profundidad 5.08 mm) en aceros al carbono, establecen claramente la existencia de los límites de iniciación y de propagación hasta el fallo en el componente entallado, así como la existencia de grietas no-propagantes en la raíz del concentrador. Hasta entonces la mayoría de los estudios acerca de fatiga en entallas se habían realizado utilizando probetas cilíndricas, lo que impedía observar la existencia de grietas no-propagantes por debajo del límite de fatiga convencional del espécimen. Se observó que las grietas no-propagantes aparecían casi invariablemente en las entallas con factores de concentración de tensiones superiores a 4 ó 5, para las cuales existía una sustancial diferencia entre el límite de iniciación y el límite de fatiga. Sin embargo, en entallas suaves, ambos límites eran coincidentes, reflejando que una vez que se iniciaba una grieta se propagaba hasta romper la pieza. El tamaño

de las grietas no-propagantes dependía del nivel de la carga aplicada. Asimismo, sus longitudes máximas eran, en general, mucho menores que la profundidad de la entalla.

Los estudios realizados por El-Haddad et al. [13] evidenciaron inequívocamente la dependencia de la longitud de grietas no-propagantes con la tensión aplicada, en perfecto acuerdo con la tendencia mostrada en las figuras anteriores. Los resultados fueron obtenidos empleando probetas con entallas elípticas y circulares en aceros SAE 1050 y G40.11. Al representar la tensión aplicada frente a la longitud de grieta no propagante, se observó que, por debajo de un cierto radio en el fondo de la entalla, dicho diagrama mostraba inicialmente una evolución creciente hasta alcanzar un máximo, el cual correspondía con el límite de fatiga del componente entallado. Para radios de entallas superiores a este radio crítico no era posible apreciar la presencia de grietas no-propagantes y el fallo de la pieza estaba gobernado por la iniciación, mostrando el espécimen un comportamiento similar al de un componente sin concentrador. Idéntico comportamiento fue también observado por Tanaka y Nakai [14, 15] y Tanaka y Akiniwa [16, 17] al ensayar probetas con entallas elípticas en acero aleado JIS SM41B con diferentes tratamientos térmicos.

Una característica común en la mayoría de los resultados experimentales recogidos en la literatura es que, en aquellos especímenes con la misma profundidad de entalla en los que se detectan grietas no-propagantes, el límite de fatiga es aproximadamente independiente de la concentración de tensiones de la entalla. Dicho efecto se aprecia para valores de K_t superiores a un cierto valor crítico, típicamente K_t superior a 4.

Para ilustrar este hecho es más adecuado representar los resultados de la Figura 5.8 en un gráfico como el mostrado en la Figura 5.10. En el eje de ordenadas se representa la tensión aplicada, adimensionalizada por el límite de fatiga del componente sin concentrador, y en abscisas el factor de concentración de tensiones teórico de la entalla. En adelante se hará referencia a este tipo de representación como diagrama de Frost.

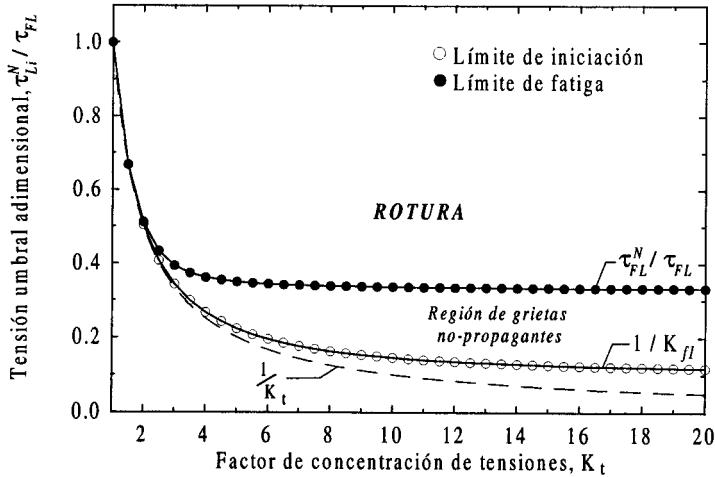


Figura 5.10: Tensión umbral τ_{Li}^N vs. K_t ($\bar{\alpha} = 100$): límite de iniciación y límite de propagación hasta el fallo (Diagrama de Frost).

En dicha figura se aprecia claramente la evolución del límite de iniciación y del límite de fatiga a medida que aumenta la severidad de la entalla, así como la región de grietas no-propagantes. De acuerdo con las tendencias experimentales descritas arriba, se puede observar que ambos límites son coincidentes, o discurren muy próximos, hasta un valor de K_t próximo a 3. A partir de aquí, las diferencias comienzan a hacerse cada vez más acusadas al aumentar el factor de concentración de tensiones. La figura muestra también la diferencia existente entre el límite de iniciación y la aproximación que se obtiene empleando K_t como factor de reducción de resistencia a la iniciación, según se discutió en el apartado anterior. Como puede verse, en el rango de valores de K_t correspondientes a la región de grietas no-propagantes, el umbral de iniciación muestra una disminución comparativamente más suave que el límite de propagación hasta el fallo. Este último tiende rápidamente a colocarse casi horizontal y es, por tanto, prácticamente insensible a K_t , en perfecto acuerdo con las tendencias observadas.

Smith y Miller [22, 23] sugieren que este fenómeno se produce como consecuen-

cia de que, en entallas agudas sometidas a tensiones próximas al límite de fatiga, el tamaño de grieta no-propagante es, en general, superior al tamaño de la zona de influencia de la entalla. Dicha región se define como aquella distancia l , medida desde la raíz del concentrador, más allá de la cual no se aprecian diferencias sustanciales entre el comportamiento de una grieta de longitud a ($a > l$) en el espécimen entallado y el de una grieta de longitud $\alpha + a$ en un espécimen sin entalla. En esta situación, las condiciones de propagación en ambas configuraciones serán muy parecidas y, por tanto, independientes de la concentración de tensiones de la entalla.

Los citados autores proponen que, si la entalla es suficientemente profunda, tal que permita considerar que la grieta ficticia ($\alpha + a$) se comporta como una grieta grande, es posible obtener el umbral de propagación de dicha grieta haciendo uso de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. El límite de fatiga del espécimen entallado se puede expresar, entonces, como

$$\sigma_{FL}^N = \frac{K_{th\infty}}{Y \sqrt{\pi(\alpha + a_{npmax})}} \quad (5.47)$$

donde a_{npmax} es la máxima longitud de grieta no-propagante. Dado que, en general, $a_{npmax} \ll \alpha$ [12], la ecuación (5.47) se expresa de manera simplificada como

$$\sigma_{FL}^N = \frac{K_{th\infty}}{Y \sqrt{\pi\alpha}}, \quad (5.48)$$

la cual proporciona una estimación suficientemente aproximada del límite de fatiga en la región de K_t elevados para gran número de entallas y de materiales de uso común en la práctica.

Smith y Miller estimaron experimentalmente el tamaño de zona de influencia en probetas entalladas sometidas a carga axial, obteniendo que ésta era aproximadamente de $0.13\sqrt{\alpha\rho}$, donde α y ρ son la profundidad y el radio de la entalla. Más recientemente, Cameron y Smith [24] han propuesto una relación más precisa que la anterior y válida en un amplio rango de entallas con $\sqrt{\alpha\rho} \leq 3$

$$l = 0.21\sqrt{\alpha\rho} \quad (5.49)$$

En cualquier caso, las observaciones experimentales realizadas por otros autores corroboran también el hecho de que, cuando el umbral de propagación hasta el fallo queda virtualmente constante, las longitudes de grietas no-propagantes son varias veces superiores al tamaño de la zona de influencia del concentrador [14,15].

Exploremos ahora este hecho en los términos del modelo propuesto. Considérese en primer lugar una entalla prácticamente tan aguda como una grieta ($\rho \rightarrow 0$) (cuasi-grieta). Esta configuración permitirá obtener el límite al que tiende la curva del umbral de propagación hasta el fallo en el diagrama de Frost. Para este caso, las condiciones de propagación de una grieta de longitud (adimensional) i se obtienen fácilmente haciendo $\beta \rightarrow 0$ en (5.43)

$$\tau_{Li}^N \Big|_{\beta \rightarrow 0} = \tau_{Li} \sqrt{\frac{i}{\bar{\alpha} + i}}, \quad (5.50)$$

La zona de influencia de la entalla, establecida en los términos propuestos por Smith y Miller, se corresponderá con aquella longitud de grieta por encima de la que el comportamiento del espécimen entallado difiera muy poco del comportamiento en la configuración límite de una cuasi-grieta. Esto es,

$$l = i \quad \text{tal que} \quad \left| 1 - \frac{\tau_{Li}^N \Big|_{\beta \rightarrow 0}}{\tau_{Li}^N} \right| \leq \epsilon, \quad (5.51)$$

siendo ϵ la mínima diferencia apreciable en la práctica. Dado el gran número de factores que intervienen en el proceso de fatiga, ϵ suele estar en la práctica en torno a un 10% , en el mejor de los casos.

Introduciendo en (5.51) las expresiones (5.50) y (5.43), y denotando $\delta = i/\bar{\alpha} = l/\alpha$ y $k = 1/(K_t - 1)$, se obtiene la zona de influencia de la entalla más allá de la cual las diferencias entre los comportamientos del espécimen real y el de una cuasi-grieta son siempre inferiores al error considerado

$$\left| 1 - \frac{1+k}{\sqrt{1+\delta}} \left[\frac{k}{\lambda_i} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right| \leq \epsilon \quad (5.52)$$

con $\lambda_i = [\sqrt{(1+\delta)^2 - 1 + k^2} - k(1+\delta)]/(1-k^2)$. Nótese que esta expresión depende únicamente de la geometría del concentrador.

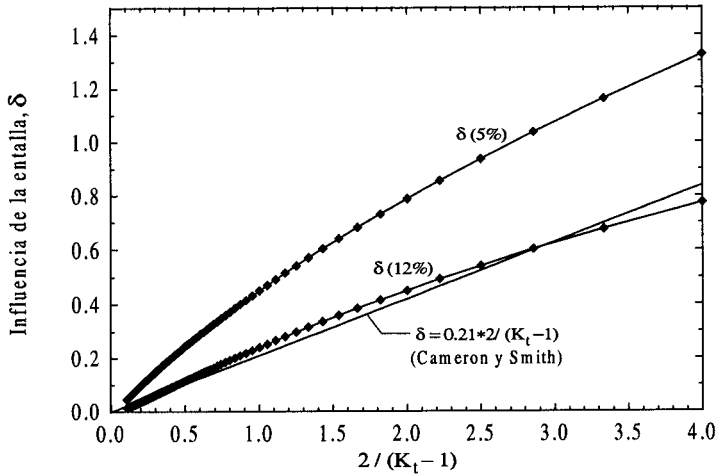


Figura 5.11: Distancia de influencia de la entalla $\delta = l/\alpha$ ($\delta_{5\%}$ y $\delta_{12\%}$) frente a K_t . Comparación con la expresión propuesta por Cameron y Smith [24].

En la Figura 5.11 se muestra la distancia adimensional δ que asegura diferencias menores a un 12% ($\delta_{12\%}$) y un 5% ($\delta_{5\%}$) respectivamente, en función del factor de concentración de tensiones en la entalla. Como se puede observar, ambas relaciones son bastante lineales, tal como proponen Cameron y Smith [24]. La expresión de estos autores, ecuación (5.49), se ha representado también en la citada figura, la cual, expresada en función de δ y K_t , tiene la forma

$$\delta = 0.21 \frac{2}{K_t - 1}, \quad (5.53)$$

donde se ha tomado $K_t = 1 + 2\sqrt{\alpha/\rho}$. Puede verse que ésta discurre extraordinariamente próxima a $\delta_{12\%}$, en perfecto acuerdo con la dispersión esperable de este tipo de ensayos.

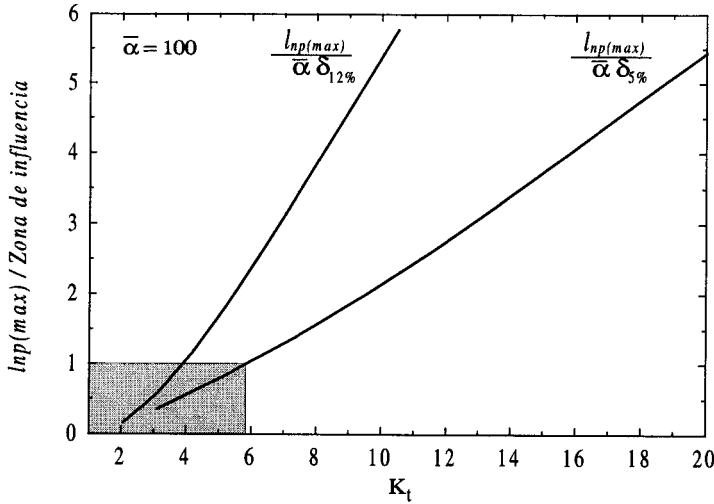


Figura 5.12: Tamaño relativo de la longitud de grieta no-propagante máxima y la zona de influencia de la entalla frente a K_t ($\bar{\alpha} = 100$).

La Figura 5.12 muestra el tamaño relativo de la longitud de grieta no-propagante máxima (a_{npmax}) respecto de las zonas de influencia $\delta_{12\%}$ y $\delta_{5\%}$ para la configuración representada en las Figuras 5.8 y 5.10. Como era de esperar, se observa que, en el peor de los casos ($\delta_{5\%}$), el tamaño de a_{npmax} es siempre superior al de la zona de influencia a partir de un cierto valor crítico (e.g. $K_t = 6$). Esto asegura que, por encima de este valor de K_t , todos los especímenes presentarán un comportamiento muy similar y, por tanto, su límite de fatiga será bastante parecido con independencia de la concentración de tensiones en la entalla. En particular, el límite de fatiga corresponderá aproximadamente el umbral de propagación hasta el fallo en el caso extremo de una quasi-grieta, es decir,

$$\tau_{FL}^N \approx \tau_{FL}^N |_{\beta \rightarrow 0} = \max_i \tau_{Li}^N |_{\beta \rightarrow 0} \quad (5.54)$$

Sustituyendo en (5.54) la expresión general del diagrama de Kitagawa del componente sin entalla (5.46) e igualando a cero la primera derivada, se obtiene que

el límite de fatiga del espécimen entallado en la zona de grietas no-propagantes es

$$\tau_{FL}^N \approx \tau_{FL} \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\bar{\alpha}}} \frac{1}{\left[1 + \frac{i_{npmax}}{\bar{\alpha}}\right]^{\frac{1+f}{2f}}} \quad (5.55)$$

donde i_{npmax} es la longitud máxima (adimensional) de grieta no-propagante en la configuración de una cuasi-grieta y viene dada por

$$\frac{i_{npmax}}{\bar{\alpha}} = \left(\frac{\bar{a}_0^f - 1}{\bar{\alpha}^f}\right)^{\frac{1}{f+1}} \quad (5.56)$$

En la mayoría de los casos prácticos las entallas son muy grandes en relación al tamaño microestructural característico, siendo las longitudes de grietas no-propagantes muy pequeñas comparadas con el tamaño de la entalla [12]. En efecto, se puede comprobar de (5.56) que si $\bar{\alpha} \gg \bar{a}_0$ se tendrá que $i_{npmax} \ll \bar{\alpha}$. Bajo estas premisas, la expresión (5.55) se reduce a la relación propuesta por Smith y Miller [22, 23],

$$\tau_{FL}^N \approx \tau_{FL} \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\bar{\alpha}}} = \frac{K_{th\infty}}{Y\sqrt{\pi\bar{\alpha}}} \quad (5.57)$$

La expresión (5.55) refleja un claro efecto de la profundidad de la entalla en el límite de fatiga del componente, en la región de grietas no-propagantes. Dos hechos bien establecidos en este sentido son [10, 12, 13, 21]:

1. En entallas geoméricamente semejantes (igual K_t), una disminución de la profundidad de la misma provoca un aumento del límite de fatiga del componente, es decir, el tramo horizontal del diagrama de Frost se sitúa más arriba.
2. La aparición de grietas no-propagantes se produce para valores de K_t cada vez más altos al aumentar la profundidad de la entalla, esto es, la región de grietas no-propagantes se desplaza hacia la derecha en el diagrama de Frost.

La Figura 5.13 muestra que el modelo desarrollado predice apropiadamente ambas observaciones. Se han representado los diagramas de Frost correspondientes

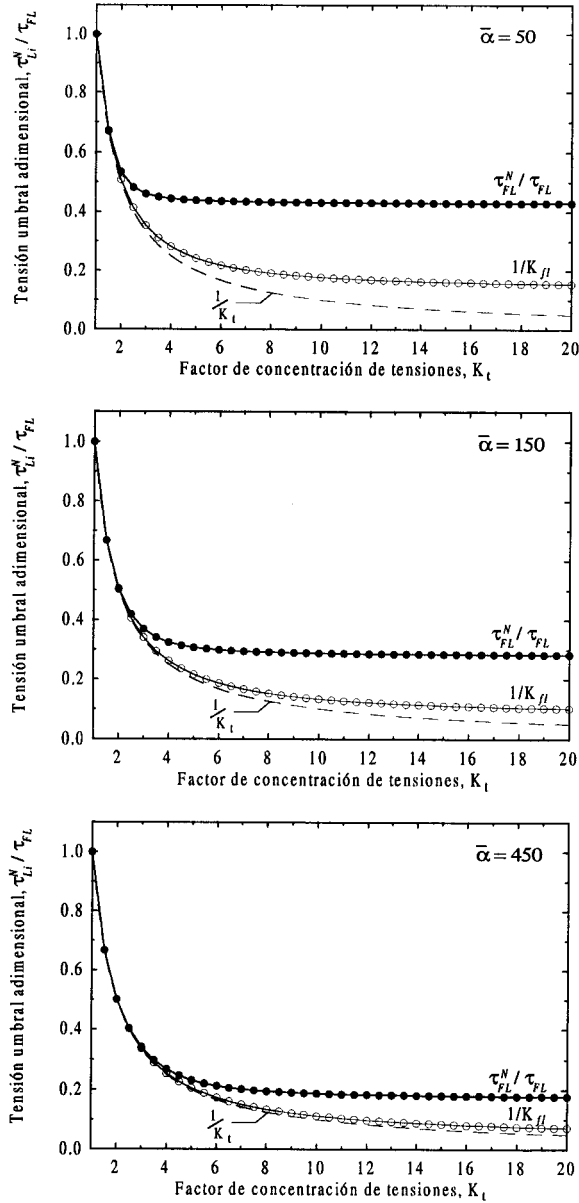


Figura 5.13: Efecto de la profundidad de la entalla en los límites de iniciación y de propagación hasta el fallo. Diagramas de Frost para entallas con profundidades relativas $\bar{\alpha} = 50$ (superior), $\bar{\alpha} = 150$ (medio) y $\bar{\alpha} = 450$ (inferior).

a tres profundidades de entallas típicamente grandes en relación a la microestructura ($\bar{\alpha} \geq \bar{a}_0$), $\bar{\alpha} = 50, 150, 450$. Como se puede apreciar, el límite de fatiga tiende a aumentar al disminuir la profundidad de la entalla, de acuerdo con la primera observación. Este comportamiento es debido a que una menor profundidad de la entalla, manteniendo K_t constante, implica un menor radio de curvatura y, por tanto, una disminución más pronunciada de las tensiones en el material, resultando en una menor profundidad de campo de la entalla. Será necesario, entonces, aplicar al espécimen una tensión mayor para conseguir que una grieta supere cualquiera de las barreras microestructurales y, por tanto, el límite de propagación hasta el fallo aumentará. Obviamente, este razonamiento es válido también para el límite de iniciación, que, como puede verse en las citadas figuras, aumenta sensiblemente al reducirse la profundidad del concentrador.

Por otra parte, se puede observar que, a medida que aumenta $\bar{\alpha}$, el límite de iniciación y el de propagación hasta el fallo permanecen coincidentes para valores de K_t cada vez mayores. La región de grietas no-propagantes se va estrechando cada vez más y desplazándose hacia la derecha, como se refiere en el segundo punto. La explicación de este hecho reside, una vez más, en la influencia del gradiente de la entalla mencionado arriba. En efecto, supóngase una grieta que ha sido capaz de superar el primer borde de grano en dos especímenes con entallas geoméricamente semejantes pero con profundidades distintas. El incremento de tensión que será necesario aplicar para que dicha grieta supere las sucesivas barreras del material será menor en el espécimen más grande, dado que el gradiente de tensiones es más suave. Es de esperar, por tanto, que sea éste el que muestre una menor diferencia entre el límite de iniciación y el de propagación hasta el fallo.

Aunque implícitamente la influencia del tamaño de la microestructura (D) en el comportamiento del espécimen entallado está reflejado a través de las variables adimensionales $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, \bar{a}_0 , \dots , hasta ahora se ha hecho sólo mención del efecto del tamaño de la entalla suponiendo que todos los especímenes eran del mismo material. Es interesante comentar brevemente algunas de las implicaciones más

importantes que tiene el tipo de material en la fatiga en entallas.

Está bastante bien establecido que la resistencia a fatiga en especímenes sin concentrador aumenta al disminuir el tamaño de grano del material, siguiendo aproximadamente una relación del tipo Hall-Petch [25], $\sigma_{FL} = A + B/\sqrt{D}$ (A y B son constantes para cada familia de materiales). Sin embargo, este mismo patrón no es seguido por el FIT umbral $K_{th\infty}$, el cual muestra, por el contrario, una reducción en su valor a medida que disminuye el tamaño de grano, aproximadamente del tipo $K_{th\infty} = A' + B'\sqrt{D}$ (A' y B' son constantes del material) [21, 26].

Las repercusiones que este peculiar comportamiento tiene en la fatiga en entallas se pueden ver reflejadas en la Figura 5.14, donde se ha representado el límite de fatiga de un espécimen conteniendo una entalla de profundidad $\alpha = 4$ mm, en un material con tamaños de grano distintos. Con el fin de obtener un orden de magnitud apropiado de las variaciones relativas del límite de fatiga del material y del factor de intensidad de tensiones umbral con el tamaño de grano, se han usado para esta simulación los valores de estos parámetros obtenidos por Taira et al. [27], correspondientes a un acero al carbono S20C cuya estructura fue modificada mediante tratamiento térmico (véase Tabla 5.1).

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas del acero S20C con diferentes tamaños de grano.

R=-1	D (μm)	$\Delta\sigma_{FL}/2$ (MPa)	$\Delta K_{th\infty}/2$ (MPa \sqrt{m})	\bar{a}_0	$\bar{\alpha}$
Material1	7.8	235	5.2	40	1026
Material2	20.5	178	5.8	33	390
Material3	55	163	6.8	20	145

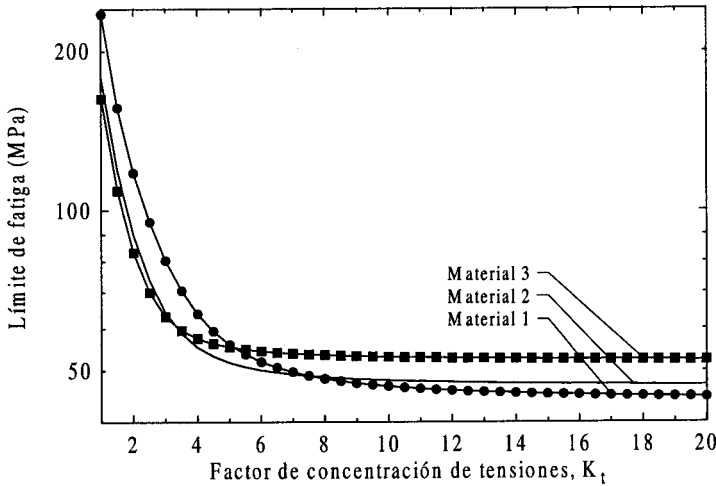


Figura 5.14: Influencia del tamaño de microestructural característico en el límite de fatiga en función de la severidad de la entalla.

En la citada figura se observa que el material más “resistente” (Material1) muestra, como era de esperar, un mejor comportamiento a fatiga para entallas con K_t bajos que el material con mayor tamaño de grano (Material3). Sin embargo, esta tendencia se invierte al aumentar la severidad del concentrador, mostrando el Material1 una peor resistencia a fatiga que el Material3. El comportamiento del Material2 se sitúa entre los dos anteriores. Nótese también que el régimen en el que el límite de fatiga es prácticamente insensible a K_t se alcanza antes en los materiales de grano más basto.

La explicación de este comportamiento reside en el tipo de parámetro que controla el fallo del espécimen en cada período. En efecto, para bajos K_t , el proceso de fallo está gobernado por el proceso de iniciación y, por tanto, el parámetro controlante será el límite de fatiga del material, que es inversamente proporcional a \sqrt{D} . De esta manera, los materiales de grano más fino mostrarán una mejor resistencia en entallas suaves, baste pensar en el caso extremo de un espécimen sin concentrador. En cambio, para K_t altos y para una misma profundidad de

entalla, la aparición de grietas no-propagantes varias veces superior al tamaño microestructural hace que el fallo del espécimen pase a estar gobernado principalmente por el factor de intensidad de tensiones umbral $K_{th\infty}$. Éste es directamente proporcional a \sqrt{D} , haciendo que los materiales de grano basto sean más idóneos para trabajar con entallas muy agudas. Estos dos patrones de comportamiento permiten decidir a grandes rasgos cual puede ser el material más adecuado para un determinado tipo de entalla.

De acuerdo con el modelo presentado en este trabajo, el fallo por fatiga de un componente entallado puede ser racionalizado, al igual que ocurre en especímenes sin concentrador, a partir de un mismo hecho físico: la capacidad de la grieta para vencer las sucesivas barreras microestructurales existentes en el material. En términos generales, dicho proceso involucra dos factores: el nivel y la evolución de las tensiones que asisten a la grieta al enfrentarse con cada una de las barreras microestructurales y la resistencia efectiva interpuesta por las mismas. La contribución relativa de ambos factores permite establecer las condiciones umbrales para que una grieta se propague o no hasta provocar el fallo de la pieza.

Como resultado del estudio anterior y tal como corrobora la evidencia experimental, en un componente con una entalla suficientemente grande en relación a la microestructura del material, se pueden distinguir dos patrones de comportamiento bien diferenciados dependiendo de la severidad del concentrador:

1. En el caso de entallas con K_t bajos, típicamente menor de 3 ó 4, el fallo del componente está controlado por el proceso de iniciación [13], es decir, la tensión necesaria para que una grieta supere la primera barrera microestructural es, en general, suficiente para que ésta se propague hasta romper la pieza. El límite de fatiga del componente entallado coincide con el límite de iniciación, pudiéndose encontrar una relación directa de éste con la concentración de tensiones en la raíz de la entalla y el límite de fatiga del material [12]. El tamaño de las grietas no-propagantes es del orden del tamaño medio de grano del material.

2. En entallas muy agudas, por el contrario, el límite de propagación hasta el fallo se muestra prácticamente insensible a la severidad del concentrador [12]. Esto es debido a que, bajo tensiones próximas al límite de fatiga, la longitud máxima de grieta no-propagante es tan grande en comparación con la zona de influencia de la entalla que las condiciones que gobiernan su propagación son independientes de la concentración de tensiones. En estas circunstancias, el comportamiento de la grieta es muy parecido al de una grieta de longitud $\alpha + a$ en un espécimen sin entalla, pudiendo ser estudiado a partir de las aproximaciones derivadas de la MFEL. El límite de fatiga del componente entallado está relacionado principalmente con la profundidad de la entalla y el factor de intensidad de tensiones umbral $K_{th\infty}$.

El rango de valores de K_t en el que cada uno de estos regímenes es operativo depende principalmente, como se ha visto más arriba, de la profundidad relativa de la entalla $\bar{\alpha}$, es decir, de la profundidad de la entalla y del tamaño medio microestructural. Asimismo, la transición entre ambos comportamientos deberá hacerse de manera suave [9], de acuerdo con la evolución mostrada en las Figuras 5.10 y 5.13.

5.4 Influencia de la plasticidad de la entalla en los umbrales de propagación

Uno de los interrogantes que se suscitan al estudiar el crecimiento de grietas en entallas agudas es la posibilidad de que la zona plástica originada en la entalla influya de manera significativa en la aparición de grietas no-propagantes. Existe cierta controversia acerca de si las grietas no-propagantes se paran dentro de la zona plástica o, por el contrario, lo hacen siempre más allá de ésta.

Varios autores, como Smith y Miller [23] y Hammouda et al. [28] han sugerido que la existencia de grietas no-propagantes en entallas agudas es consecuencia de la plasticidad generada en la raíz del concentrador. De acuerdo con estas ideas, una grieta puede extenderse, como máximo, hasta la frontera de la zona plástica

antes de cesar su crecimiento.

Otros autores, en cambio, mantienen que la condición umbral de propagación no está asociada con la existencia o no de deformaciones plásticas en la entalla. Así, por ejemplo, El-Haddad et al. [13] observan que las grietas no-propagantes cesan de crecer en la zona donde el comportamiento del material es ya esencialmente elástico, y por tanto la plasticidad de la entalla no determina la propagación o no-propagación de la mismas. Similares conclusiones han sido aportadas también por Tanaka y Nakai [14, 15]. Estos autores estiman, de manera conservativa, el tamaño de la zona plástica en entallas con diferentes factores de concentración de tensiones y lo comparan con las longitudes de grietas no-propagantes obtenidas experimentalmente. Se observa que las longitudes de dichas grietas, obtenidas a los niveles de tensión del límite de fatiga, son varias veces superiores a los tamaños de zona plástica generada por la entalla.

En este mismo sentido, Taylor [21] sugiere que mientras la grieta está dentro de la zona plástica del concentrador siempre se propagará, ya que ésta experimentará tensiones del orden del límite elástico del material. Bajo estas condiciones, parece razonable pensar que la condición de no-propagación deba de alcanzarse generalmente fuera de la zona plástica de la entalla.

En este apartado se pretende evaluar la influencia de la plasticidad de la entalla en el límite de fatiga del componente. Para ello, se estimarán los tamaños de la zona plástica generada por entallas con distintos K_t y se compararán con las longitudes de grietas no-propagantes predichas por el modelo desarrollado.

5.4.1 Plasticidad en un espécimen sin entalla

La interpretación del fenómeno de plástificación presentada por Navarro y de los Ríos [29, 30], basada en sucesivos bloqueos de bandas de deslizamiento en las barreras microestructurales, representa un marco de trabajo apropiado para abordar el proceso de plástificación en la raíz de una entalla. En lo que sigue se verá una rápida revisión de dicho modelo, dado que gran parte de los conceptos y desarrollos

matemáticos son similares a los expuestos anteriormente en el Capítulo 4.

La deformación plástica es consecuencia de la generación y movimiento de dislocaciones a través del material. Los bordes de grano o, en general, las barreras microestructurales dificultan este movimiento, evitando que las dislocaciones se extiendan indefinidamente.

Supóngase, así, una banda de deslizamiento generada al aplicar sobre el espécimen una carga externa τ (estática) y cuyas dislocaciones se encuentran bloqueadas por un borde de grano genérico i . La condición de equilibrio de dicha configuración se obtiene a partir de la expresión dada en el Capítulo 4 y que reproducimos de nuevo aquí, sin más que imponer $n_1^i = 0$ (no existe grieta),

$$\frac{\pi}{2}\tau = \sigma_2^i \sin^{-1} n_2^i + \sigma_3^i \cos^{-1} n_2^i \quad (5.58)$$

donde, al igual que anteriormente, σ_3^i representa la tensión en la barrera, σ_2^i reproduce la oposición al movimiento de las dislocaciones en el material y $n_2^i = iD/2/(iD/2 + r_0^i)$ (véase Capítulo 4 para la notación).

A medida que la tensión en el espécimen aumenta, la tensión σ_3^i necesaria para preservar el equilibrio de las dislocaciones se incrementa también, hasta alcanzar el valor crítico necesario para activar el deslizamiento plástico en el grano vecino. Esta condición crítica se expresa, como es habitual,

$$\sigma_3^i = m_i' \tau_c^i \quad (5.59)$$

donde, m_i' es un factor de orientación que refleja la diferente orientación cristalográfica entre los granos adyacentes y τ_c^i es la tensión crítica necesaria para activar fuentes de dislocaciones en el material o la resistencia intrínseca de la barrera al paso de las dislocaciones a través de ella. Por simplicidad, τ_c^i y r_0^i se considerarán constantes del material τ_c y r_0 .

El mínimo valor de la tensión aplicada para extender la zona plástica más allá de la i -ésima barrera se obtendrá sustituyendo (5.59) en (5.58), la cual, imponiendo

que $r_0 \ll D$ ($n_2^i \approx 1$), se expresa como

$$\tau_{yi} = \sigma_2^i + \frac{4}{\pi} m_i' \tau_c \left(\frac{r_0}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{i}} \quad (5.60)$$

Particularizando la expresión anterior para el primer grano $i = 1$, se obtiene,

$$\tau_{y1} = \sigma_2^1 + \frac{4}{\pi} m_1' \tau_c \left(\frac{r_0}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.61)$$

τ_{y1} es, por tanto, la mínima tensión para hacer que las dislocaciones de la banda de deslizamiento, hasta ahora confinadas dentro en los granos del material, se extiendan más allá de las primeras barreras. El espécimen comenzará entonces a mostrar los primeros indicios de comportamiento plástico a nivel macroscópico. El valor de la tensión aplicada (τ_{y1}) en este estadio crítico representa el límite elástico del material. Nótese que la ecuación (5.61) establece una relación funcional del tipo de Hall-Petch entre el límite elástico y el tamaño medio de grano del material.

Una vez superado τ_{y1} , si la carga aplicada continúa aumentando, el núcleo plástico se extenderá hasta bloquearse en las siguientes barreras del material, repitiéndose el proceso anterior. Debido al incremento en la densidad de dislocaciones, la oposición al movimiento de las dislocaciones σ_2^i se incrementará gradualmente en los sucesivos granos, es decir, $\sigma_2^1 > \sigma_2^2 > \sigma_2^3 > \dots$. Paralelamente, a medida que la región plástica aumenta, el término correspondiente a la resistencia local de la barrera (segundo sumando en la expresión (5.60)) también variará debido al creciente número de granos involucrados en la extensión del núcleo plástico. Éste término aumenta, por un lado, al variar m_i' , el cual se incrementa relativamente rápido hasta alcanzar un valor estable, y, por otro lado, disminuye a medida que i aumenta como consecuencia de la dependencia inversa con \sqrt{i} . Dependiendo de la variación relativa de ambos sumandos, será posible encontrar diferentes comportamientos macroscópicos:

- $\frac{d\tau_{yi}}{di} > 0$, es decir, un aumento en la tensión de fricción σ_2^i más rápido que la disminución en la resistencia local de las barreras. Esta evolución se corresponderá con un progresivo endurecimiento por deformación en la curva de comportamiento del material, una vez superado el límite elástico.

- $\frac{d\tau_{yi}}{di} < 0$, esto es, una disminución de la resistencia local de las barreras más rápida que el aumento en σ_2^i . En este caso, una vez superado el límite elástico, la curva de comportamiento presentaría una evolución decreciente (i.e. un ablandamiento).
- Por último, el caso particular en el que se cumpliera $\frac{d\tau_{yi}}{di} = 0$ representaría el comportamiento ideal de un material elasto-plástico perfecto.

Este último caso permite avanzar en el desarrollo teórico y por tanto se supondrá en lo siguiente que el material es elasto-plástico perfecto ($\tau_{y1} = \tau_{y2} = \tau_{y3} = \dots = \tau_y$). Esta hipótesis permite obtener el ritmo de endurecimiento de σ_2^i directamente de (5.60) y (5.61), el cual se expresa como

$$\sigma_2^i = \tau_y \left(1 - \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{m'_i}{m'_1} \right) + \frac{\sigma_2^1}{\sqrt{i}} \frac{m'_i}{m'_1} \quad (5.62)$$

Nótese que, cuando el núcleo plástico abarca un gran número de granos ($i \gg 1$), la tensión de fricción que se opone al movimiento de las dislocaciones es próxima al propio límite elástico del material $\sigma_2^i \approx \tau_y$.

5.4.2 Plasticidad en la raíz de la entalla

Considérese ahora el proceso de plastificación en la raíz del concentrador en los términos expuestos en el apartado anterior. La extensión de la zona plástica en la entalla vendrá determinada por la posición de aquella barrera que sea capaz de bloquear las dislocaciones. Para una determinada tensión aplicada (τ), dado que el campo de tensiones originado por la entalla decrece a medida que nos alejamos del concentrador, podría ocurrir que las dislocaciones fueran capaces de superar las primeras barreras del material, pero se pararan en alguna de las barreras situadas más adentro.

El proceso de carga puede imaginarse como sigue: a medida que la carga aumenta, comenzarán a formarse bandas de deslizamiento en los granos situados en el fondo de la entalla, extendiéndose hasta quedar bloqueadas en el primer borde de

grano; a partir de un cierto nivel en la tensión aplicada, se activará deslizamiento plástico en el grano vecino, lo que permitirá que la zona plástica se extienda dentro de éste. Normalmente, ésta quedará de nuevo bloqueada en el siguiente límite de grano, hasta que la tensión alcance un valor suficiente para superar la barrera interpuesta por el siguiente borde de grano, repitiéndose el proceso. Al llegar a la tensión τ la zona plástica se habrá extendido una cierta distancia, permaneciendo bloqueada por aquella barrera en la cual no se cumplieron las condiciones necesarias para la activación de deslizamiento plástico. La posición de dicha barrera y, por tanto, el tamaño de la zona plástica dependerá del gradiente de tensiones de la entalla, del grado de endurecimiento en σ_2^i y, por supuesto, del nivel de la tensión aplicada.

Al igual que en el espécimen sin concentrador, el equilibrio del conjunto de dislocaciones bloqueadas por una barrera genérica i en la raíz de la entalla estará asegurado si se cumple la ecuación (5.18), la cual, haciendo $n_1^i = 0$, se puede expresar de manera simplificada como (véanse los apartados 5.2 y 5.3)

$$\tau = \sigma_2^i \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right) \right] + \frac{2}{\pi} \sigma_3^i \frac{\sqrt{2r_0}}{\alpha + \beta} \left[\frac{\beta}{\lambda_i} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.63)$$

con

$$\lambda_i \approx \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + iD/2)^2 - \gamma^2} - \beta(\alpha + iD/2) \right] \quad (5.64)$$

Al aumentar la tensión aplicada, la extensión de la zona plástica en el grano vecino se producirá cuando $\sigma_3^i = m'_i \tau_c^i$. Sustituyendo ésta en (5.63), y reordenando los términos convenientemente para expresarlos en función de K_t , se obtiene

$$\tau = \sigma_2^i \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right) \right] + \frac{4}{\pi} m'_i \tau_c^i \left(\frac{r_0}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{D/2}}{K_t \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{\lambda_i} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.65)$$

Finalmente, reconociendo en el último sumando de la expresión anterior la re-

sistencia local de la barrera dada por la ecuación (5.60), se obtiene

$$\tau = \sigma_2^i \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right) \right] + (\tau_{yi} - \sigma_2^i) \frac{\sqrt{iD/2}}{K_t \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{\lambda_i} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.66)$$

La expresión (5.66) permite calcular la tensión necesaria para que la zona plástica de la entalla se extienda más allá de una barrera genérica i . En otras palabras, permite obtener el tamaño de la zona plástica en la raíz del concentrador para una determinada tensión sobre el espécimen, supuesto que el comportamiento del material es conocido. En el caso particular en que el material sea elasto-plástico perfecto, la ecuación anterior se reduce a

$$\tau = \tau_y \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right) \right] + \frac{\tau_y - \sigma_2^1}{\sqrt{i}} \left(\frac{m'_i}{m'_1} \right) \left[\frac{\sqrt{iD/2}}{K_t \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{\lambda_i} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right) - 1 \right] \quad (5.67)$$

Para poder aplicar la ecuación anterior será necesario conocer σ_2^1 y la progresión m'_i/m'_1 . σ_2^1 se obtiene a partir de la relación del tipo Hall-Petch en función del tamaño medio de grano y el límite elástico del material (5.61), de manera esquemática $\tau_y = \sigma_2^1 + k/D^{\frac{1}{2}}$. En general, k es positivo, por lo que $\sigma_2^1 \leq \tau_y$. No obstante, debe reseñarse que ha sido también descrito en la literatura algún caso en el que k es negativo [31].

La progresión de factores de orientación m'_i/m'_1 es complicada de obtener en la práctica. Parece razonable pensar que en la raíz de la entalla el proceso de plastificación se desarrolle rápidamente a lo largo del espesor del espécimen, abarcando un gran número de granos. Así, aún siendo la zona plástica pequeña en profundidad, el factor de orientación promedio de todos los granos involucrados en los primeros estadios será próximo al valor representativo del comportamiento policristalino del material. Existirá, por tanto, poca diferencia entre el factor

promedio m'_i en una barrera más interna y el factor m'_1 a la distancia de la primera barrera en profundidad. Una hipótesis razonable, desde el punto de vista práctico, será considerar $m'_i/m'_1 \approx 1$.

Es interesante resaltar que cuando el número de granos afectados por la zona plástica sea muy grande, la influencia de la microestructura en el proceso de plastificación será escasa, y el material mostrará, desde un punto de vista macroscópico, un comportamiento similar al de un medio continuo y homogéneo. La expresión (5.67) conecta perfectamente con este comportamiento.

En efecto, un medio continuo puede ser idealizado en este modelo haciendo el tamaño de grano D muy pequeño con respecto a cualquier otra longitud física del espécimen, tal como el tamaño característico de la entalla, el tamaño de zona plástica, etc. Veamos, bajo esta hipótesis, cual es tensión necesaria para comenzar la plastificación en la raíz de la entalla, esto es, para extender la zona plástica más allá de la primera barrera microestructural. Particularizando la expresión (5.67) para $i = 1$ y haciendo que D sea muy pequeño, idealmente $D \rightarrow 0$, es inmediato comprobar (véase Apéndice E) que la tensión para hacer que la zona plástica se extienda más allá de la primera barrera del material es

$$\tau \rightarrow \frac{\tau_y}{K_t} \quad (5.68)$$

Resultado que, como era de esperar, se corresponde con la solución de la teoría de la elasticidad para un medio continuo y homogéneo. Asimismo, es fácil comprobar que la tensión necesaria para hacer que la zona plástica se extienda una longitud finita ($s = iD/2$) desde la raíz de la entalla resulta simplemente (véase Apéndice E)

$$\tau \rightarrow \tau_y \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_s}{\sqrt{1 + \lambda_s^2}} \right) \right] \quad (5.69)$$

siendo $\lambda_s = \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + s)^2 - \gamma^2} - \beta(\alpha + s) \right]$. Expresión que resulta ser matemáticamente idéntica a la obtenida por E. Smith en 1967 [1], para un medio elasto-plástico perfecto y continuo, sin considerar bloqueos de las dislocaciones en

las barreras microestructurales. Así, por tanto, la solución del medio continuo y homogéneo no es más que un caso límite dentro del modelo de plastificación propuesto.

En lo que sigue se empleará la expresión (5.67) para estimar la zona plástica en la raíz del concentrador. No obstante, es necesario recordar que este modelo considera que la zona plástica se concentra en una región unidimensional muy delgada en la raíz de la entalla, mientras que la realidad es bien distinta. La plasticidad se extiende en un cierto volumen alrededor del fondo del concentrador. Sin embargo, esta hipótesis de trabajo ha sido ampliamente utilizada en la práctica con muy buenos resultados, baste referenciar las aproximaciones de Dugdale [32] y Bilby, Cottrell y Swinden [33] y otros muchos basados en las anteriores, para el caso de grietas. Es razonable pensar que en estas circunstancias los tamaños de zona plástica predichos sean, en general, superiores a los reales [34] y, por tanto, conservativos para los objetivos del posterior análisis.

5.4.3 Tamaño de la zona plástica frente a la longitud de grieta no-propagante

El proceso lógico que puede ocurrir en la entalla al aplicar una determinada tensión cíclica por debajo del límite de fatiga del material será, en general, el siguiente:

1. Si la entalla es suficientemente aguda, ésta desarrollará una zona plástica durante el primer ciclo de carga. Dicha zona se extenderá a través de las barreras microestructurales hasta quedar bloqueada por alguna de éstas.
2. Como consecuencia del proceso de fatiga, se nucleará una grieta en la raíz del concentrador que avanzará a través de la zona plástica. Dado que en dicha región las barreras microestructurales han sido previamente eliminadas por el propio proceso de plastificación, la grieta no encontrará ninguna oposición efectiva a su paso. La primera barrera efectiva será, por tanto, la frontera de la zona plástica.

La pregunta que se suscita entonces es: ¿superará la grieta dicha barrera, bloqueándose en una barrera más interna, o, por el contrario, es esta primera barrera efectiva la que determina la parada completa de la grieta?.

En la Figura 5.15 se muestra, para diferentes K_t , la tensión aplicada requerida para extender la zona plástica más allá de una determinada barrera microestructural, junto con la tensión necesaria para que una grieta supere dicha barrera. O, en otras palabras, el tamaño de zona plástica generado por la entalla y la longitud de grieta no-propagante respectivamente, para una cierta tensión aplicada.

La profundidad de la entalla fue $\bar{\alpha} = 100$ y los parámetros del material fueron los mismos que los considerados en los análisis anteriores ($\bar{\alpha}_0 = 15$ y $f = 2.5$). Para la estimación de la zona plástica de la entalla a partir de la expresión (5.67), se ha supuesto una relación entre el límite de fatiga y el límite de elástico del material de $\tau_{FL}/\tau_y = 0.8$. Dicho ratio suele ser usual en aceros de bajo contenido en carbono (0.1%-0.2%C) [35]. Nótese que según los datos existentes en la literatura los ratios más usuales son [36]: 0.65 ± 0.2 en el caso aceros, 0.35 ± 0.1 en aleaciones de aluminio (límite de fatiga estimado a $5 \cdot 10^8$ ciclos) y 0.58 ± 0.1 para aleaciones de titanio, por lo que un valor de 0.8 resulta ser suficientemente conservativo.

Como se ha comentado anteriormente, la tensión σ_2^1 es generalmente menor que τ_y , por tanto, la relación σ_2^1/τ_y estará entre 0 y 1. Se ha comprobado que cualquier valor en este rango conduce a predicciones muy similares, dado que el peso relativo del segundo término de la expresión (5.67) es generalmente pequeño en relación al primero. La influencia mayor de dicho término ocurre en la primera barrera $i = 1$, cayendo rápidamente a medida que i crece. Para el peor de los casos $K_t = 20$, y en $i = 1$, el segundo término de (5.67) representa tan sólo un 7% del valor del primero, con σ_2^1/τ_y variando entre 0 y 1. Así, un valor de $\sigma_2^1/\tau_y = 0.5$ ha sido el utilizado para el análisis mostrado aquí.

En los casos de $K_t = 3$ y $K_t = 5$ en la Figura 5.15 puede apreciarse que la longitud de grieta no-propagante, para cualquier tensión inferior al límite de fatiga del componente, es superior al tamaño de la zona plástica. En particular, en el

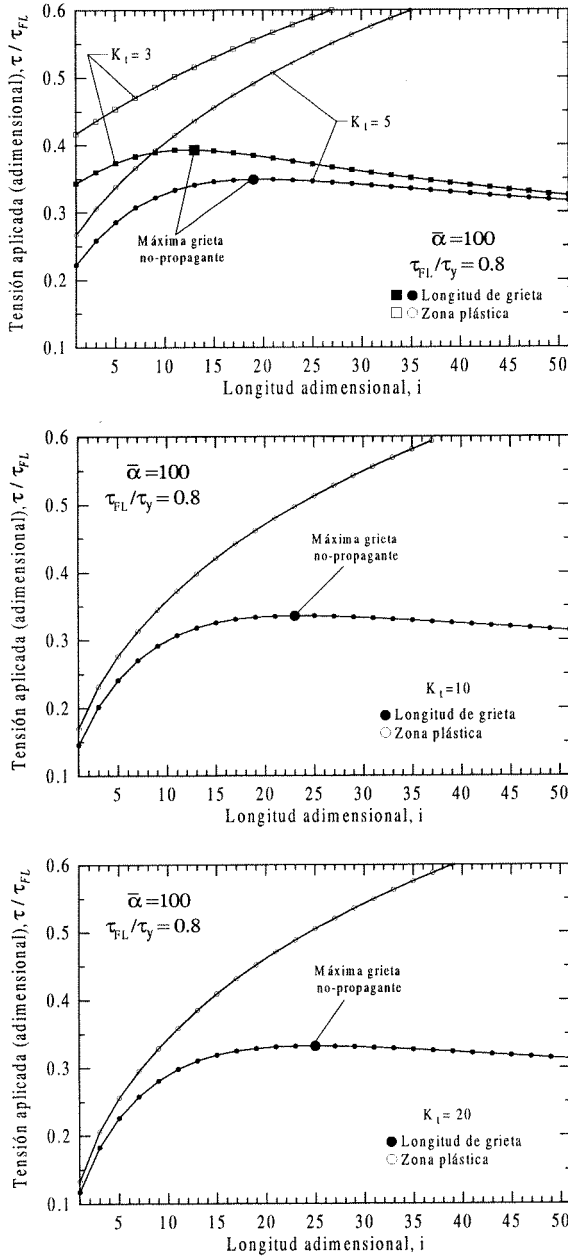


Figura 5.15: Tamaño de zona plástica y longitud de grieta (adimensional) en función de la tensión aplicada y para diferentes factores de concentración de tensiones: $K_t = 3$ y $K_t = 5$ (superior), $K_t = 10$ (medio) y $K_t = 20$ (inferior). Profundidad relativa de la entalla $\bar{\alpha} = 100$.

límite de fatiga, la longitud máxima de grieta no-propagante es sustancialmente mayor que la zona plástica correspondiente. Nótese, que para $K_t = 3$, incluso a la tensión del límite de fatiga, la zona plástica está siempre confinada dentro del primer grano.

Asimismo, para las entallas más agudas, $K_t = 10$ y $K_t = 20$ en la Figura 5.15, se puede apreciar también que la tensión requerida para extender la zona plástica de la entalla más allá de una determinada barrera es siempre superior a la necesaria para propagar una grieta por fatiga más allá de dicha barrera. Por tanto, la longitud de grieta no propagante es siempre superior a la zona plástica originada por la entalla.

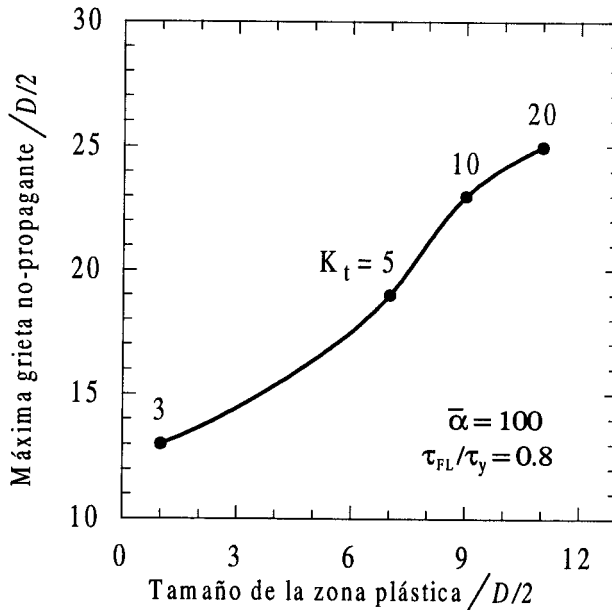


Figura 5.16: Longitud de grieta no-propagante en el límite de fatiga del componente frente al tamaño de zona plástica en la raíz de la entalla.

El tamaño relativo de la longitud máxima de grieta no-propagante respecto de la zona plástica se ha representado en la Figura 5.16. De acuerdo con las

observaciones de El-Haddad et al. y Tanaka y Nakai comentadas en la introducción de este apartado, la longitud de grieta no-propagante en el límite de fatiga del componente es superior a la zona plástica generada inicialmente por la entalla.

A tenor del análisis mostrado aquí y de las observaciones de los citados autores, se puede concluir que la plasticidad de la entalla no es la responsable de la aparición de grietas no-propagantes en la raíz de la entalla. Éstas se forman más allá de la zona plástica de la entalla y, por tanto, el evento que realmente controla la parada de éstas es la oposición interpuesta por el material como consecuencia de las barreras microestructurales.

No obstante, es de esperar, que la plasticidad sí tenga una influencia muy apreciable en el ritmo de crecimiento inicial de la grieta en la raíz de la entalla. En efecto, la formación de una zona plástica durante los primeros ciclos de carga, como consecuencia de que varias barreras sucesivas en dicha región han sido superadas por los mecanismos de generación de dislocaciones detrás de ellas, hace que el número de dislocaciones disponibles para el crecimiento y la región por donde éstas se pueden extender sea muy superior al caso en que las dislocaciones se vayan bloqueando de barrera en barrera. Por lo tanto, una grieta que se inicie en estas condiciones presentará un ritmo de propagación relativamente alto, como ocurre normalmente en las entallas agudas.

5.5 Entallas microestructuralmente pequeñas. Defectos en el material

Según se ha visto hasta el momento, el modelo de crecimiento de grietas pequeñas en la raíz de una entalla propuesto en este trabajo permite describir de manera apropiada el comportamiento a fatiga de especímenes con entallas “macroscópicas”, es decir, aquellas cuyo tamaño es mucho mayor que el tamaño medio microestructural. La influencia de éstas en la resistencia a fatiga del componente es, en términos generales, bastante considerable, no pudiéndose obviar su presencia. Sin

embargo, en determinadas ocasiones es necesario evaluar la influencia de pequeños concentradores de tensión, tales como poros, inclusiones, arañazos o marcas superficiales aisladas, originados por el propio proceso de fabricación, manufactura o transporte del componente. El tamaño de estos defectos es en muchos casos del mismo orden de magnitud que la propia microestructura del material y es de esperar, por tanto, que su comportamiento a fatiga difiera del observado en entallas macroscópicas. En adelante se hará referencia a este tipo de entallas como microentallas o, simplemente, defectos.

Diversos estudios ponen de manifiesto la existencia de un tamaño crítico por debajo del cual la presencia de un defecto no afecta apreciablemente la resistencia a fatiga del material [37–40].

Murakami y Endo [37] han estudiado la reducción en la resistencia a fatiga inducida por defectos artificiales en forma circular con diámetros variando entre 40 y 200 μm , en aceros de bajo y medio contenido en carbono, 0.13%C (S10C) y 0.46%C (S45C) respectivamente. El tamaño medio de los granos de ferrita era de 34 μm y 19 μm , y la distancia media entre las bandas de perlita de 125 μm y 34 μm , en cada uno de ellos. La longitud máxima de grietas no-propagantes, en el límite de fatiga, para los especímenes “libres de defectos” era de 100 μm (S10C) y 50 μm (S45C), dicha longitud es comparable con el tamaño medio entre bandas de perlita. Se observó que la resistencia a fatiga de los especímenes con defectos aumentaba al disminuir el tamaño del agujero, hasta hacerse aproximadamente constante para defectos inferiores a 70 μm y 35 μm de diámetro en cada uno de los materiales. En ambos casos, el tamaño del defecto crítico era menor que la longitud de grieta no-propagante existente en el material a tensiones del orden del límite de fatiga del material. Asimismo, se constató la presencia de grietas no-propagantes en los especímenes con defectos a la tensión del límite de fatiga.

Similares conclusiones fueron también obtenidas por Weiss et al. [38] y Lukáš et al. [39]. El material empleado fue cobre electrolítico (99.98%Cu) con un tamaño de grano de 50 μm , encontrándose que para agujeros de radio inferior a 50 $\mu\text{m} \pm$

5 μm la resistencia del espécimen no disminuía apreciablemente. El mismo estudio se realizó también con un acero 2.25Cr-1Mo ($D \approx 30 \mu\text{m}$), estimándose el radio crítico del defecto por debajo de 60 μm , aunque la dispersión de resultados en este caso fue grande. Nuevamente, se pone de manifiesto que el tamaño de defecto crítico es del orden de la magnitud microestructural característica del material.

Exploremos ahora la capacidad del modelo propuesto en esta tesis para reproducir el comportamiento a fatiga de defectos pequeños. Dado el planteamiento microestructural en el que está basado, este análisis resulta una aplicación natural.

En la Figura 5.17 se muestra la evolución de la tensión umbral frente a la longitud de grieta (adimensional) predicha por el presente modelo, para el caso de entallas inferiores al tamaño medio microestructural ($\bar{\alpha} = 0.1, 0.5, 1$) y distintos factores de concentración de tensiones K_t . Tres hechos destacables se ponen de manifiesto en la citadas figuras:

1. A medida que el tamaño del defecto disminuye, todas las curvas tienden hacia el comportamiento del espécimen sin defecto, independientemente del factor de concentración de tensiones. Nótese que la escala de las figuras es distinta.
2. En todos los casos, el defecto contribuye a la iniciación de una grieta en el material. No obstante, esta grieta se convierte en no-propagante a una distancia muy reducida, típicamente en los dos o tres granos adyacentes al concentrador.
3. El umbral de propagación hasta el fallo disminuye sensiblemente al aumentar el tamaño del defecto, pero se mantiene siempre muy próximo al valor del límite de fatiga del espécimen sin entalla.

Estas tres indicaciones están en perfecto acuerdo con el comportamiento experimental descrito por los investigadores citados anteriormente.

Por otra parte, la Figura 5.18 representa el diagrama de Frost para dos de los casos anteriores $\bar{\alpha} = 0.1, 1$ y para una entalla algo mayor $\bar{\alpha} = 10$. En estas figuras

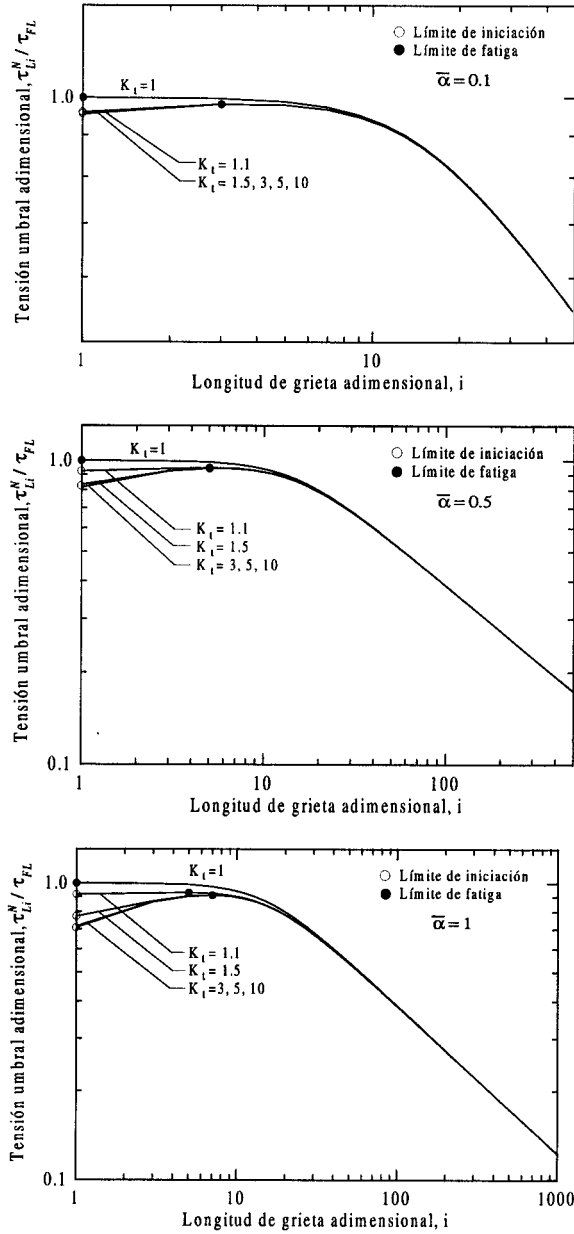


Figura 5.17: Diagramas de Kitagawa de especímenes con microentallas: $\bar{\alpha} = 0.1$ (superior), $\bar{\alpha} = 0.5$ (medio) y $\bar{\alpha} = 1$ (inferior).

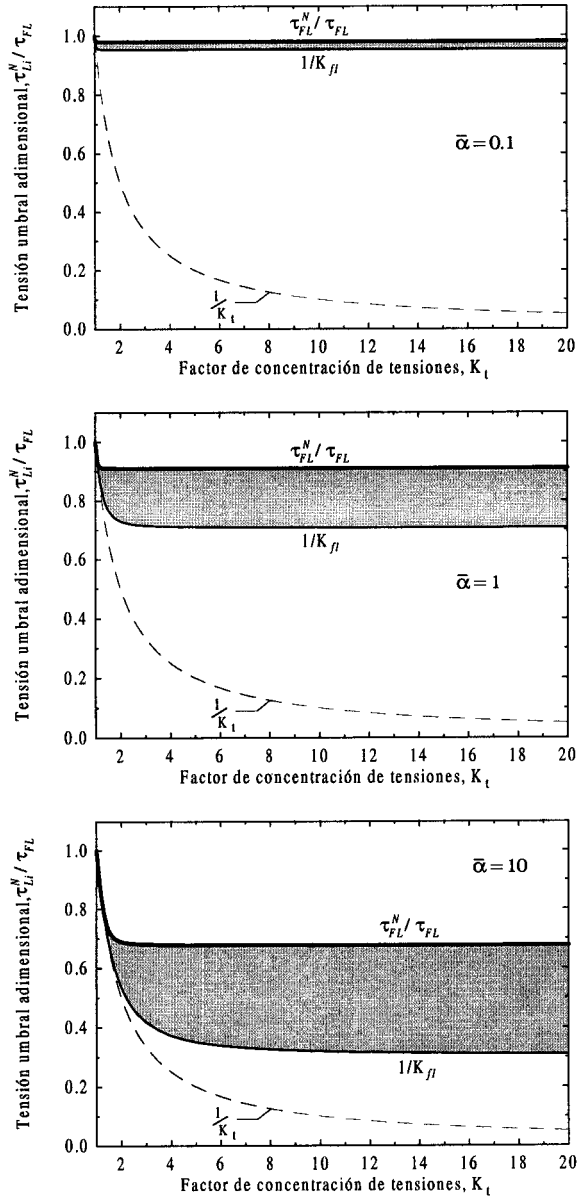


Figura 5.18: Diagramas de Frost en especímenes con microentallas: $\bar{\alpha} = 0.1$ (superior), $\bar{\alpha} = 1$ (medio) y $\bar{\alpha} = 10$ (inferior).

se aprecia claramente una relativa independencia del límite de fatiga del espécimen con la severidad del concentrador. Esto es debido fundamentalmente a que, dada las dimensiones tan reducidas de la entalla, la zona de influencia de la misma es extremadamente pequeña y, por tanto, cualquier grieta iniciada en el material sale rápidamente de dicha zona.

Estudios realizados por Murakami y Endo [41], acerca de la estimación del límite de fatiga de un espécimen conteniendo defectos de distintas geometría (artificiales o no), han puesto de manifiesto que tales defectos pueden ser tratados como grietas, definiendo una longitud equivalente en función de la raíz cuadrada del área proyectada del defecto sobre la normal a la dirección de la tensión principal máxima. Se deduce de esto que, a igualdad de dicho parámetro, la concentración de tensiones del defecto no influye de manera representativa en el límite de fatiga del espécimen, de acuerdo con las predicciones obtenidas por el modelo presentado.

A medida que el tamaño de la entalla aumenta (véase $\bar{\alpha} = 10$ en la Figura 5.18) el patrón de comportamiento comienza a mostrar las mismas características descritas para el caso de entallas macroscópicas. No obstante, ahora la longitud de grieta no-propagante no es, en general, despreciable frente al tamaño de la entalla. Asimismo, aún cuando la grieta hubiera salido de la zona de influencia de la entalla y su comportamiento pudiera ser idealizado como el de una grieta de longitud $\alpha + a$, dicha grieta ficticia sería todavía pequeña en el sentido clásico y su proceso de propagación no podría ser descrito a través de propiedades macroscópicas derivadas de la MFEL para grieta grandes, como es el caso de $K_{th\infty}$ en entallas macroscópicas. Este hecho es correctamente tenido en cuenta en la expresión (5.55). Es fácil comprobar que en el caso de un concentrador extremadamente pequeño $\bar{\alpha} \ll \bar{a}_0$, se tendrá que $i_{nprmax}/\bar{\alpha} \approx (\bar{a}_0/\bar{\alpha})^{1+T} \ll 1$ y, por tanto, dicha ecuación se reduce simplemente a

$$\tau_{FL}^N \approx \tau_{FL} \quad (5.70)$$

La expresión (5.55) permite dar de manera natural una descripción global del

umbral de propagación hasta el fallo tanto en el régimen de entallas macroscópicas como en el régimen de microentallas, cuando aparecen grietas no-propagantes.

Es importante hacer hincapié en que, como se observa en las figuras anteriores, cualquier defecto, por pequeño que sea, tiene una notable capacidad para iniciar grietas en el material. Sin embargo, su influencia efectiva en el límite de fatiga del material es muy pequeña. No resulta extraño, por tanto, la posibilidad de encontrar en los materiales ingenieriles grietas no-propagantes nucleadas relativamente pronto en pequeños defectos inherentes al propio material. La longitud de estas grietas no-propagantes, a niveles de tensiones cercanos al límite de fatiga, oscilará entre uno y tres o cuatro tamaños de grano, correspondiendo a la extensión de la zona horizontal del diagrama de Kitagawa del material, hacia el final de la cual se sitúan los máximos en el caso de entallas muy pequeñas. Este resultado puede explicar el hecho de que el diagrama de Kitagawa de un espécimen que no haya sido preparado para evitar en la medida de lo posible la existencia de tales defectos, pueda presentar un tramo inicial ligeramente creciente hasta alcanzar el máximo.

Por último reseñar que, si bien la influencia de estas microentallas es poco apreciable en el diseño de componentes para vida infinita, su repercusión puede ser bastante importante para vida finita, especialmente en el régimen de vidas altas. Es de esperar que, dado que el proceso de vencer las primeras barreras microestructurales es donde se emplea una parte importante de la vida del espécimen (hasta un 90% de la vida total en muchos casos) y ya que este proceso está muy favorecido por la presencia de pequeños defectos, se obtengan vidas menores en el caso de un espécimen con microentallas que en el de un espécimen libre de ellas a igualdad de tensión aplicada. No obstante, no se tiene constancia de la existencia de resultados experimentales adecuados a este nivel, por lo que la confirmación de este punto necesita de un exhaustivo estudio experimental.

Bibliografía

- [1] Smith, E. (1967), Fracture Initiation at a Sharp Notch, Proc. Roy. Soc. A. 299, pp. 455-463
- [2] Bilby, B.A. and Heald, P.T. (1968), Crack Growth in Notch Fatigue, Proc. Roy. Soc. A. 305, pp. 429-439
- [3] Saff, E.B. and Snider, A.D. (1993), Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering (*2nd* edition), Prentice-Hall Inc., New Jersey
- [4] Milne-Thomson, L.M. (1960), Theoretical Hydrodynamic, The MacMillan Company, New York
- [5] Hull, D. and Bacon, D.J. (1984), Introduction to Dislocations (*3th* edition), International Series on Materials Science and Technology, Vol. 37, Pergamon Press
- [6] Weertman, J. (1964), Continuum Distribution of Dislocations on Faults with Finite Friction, Bull. Seism. Soc. Amer., Vol. 54, No. 4, pp. 1035-1058
- [7] Miller, K.J. (1985), Initiation and Growth Rates of Short Fatigue Cracks, Fundamentals of Deformation and Fracture (Ed. Cambridge Univ. Press), Eshelby Memorial Symposium, Sheffield, pp. 477-500.

- [8] Frost, N. E. (1955), Non-propagating Cracks in Vee-notched Specimens Subjected to Fatigue Loading. *Aeronaut. Q.* 8, pp.1-20
- [9] Frost, N. E. and Dugdale, D. S. (1957), Fatigue Tests on Notched Mild Steel Plates with Measurement of Fatigue Cracks, *J. Mech. Phys. Solids* 5, pp.182-192
- [10] Frost, N. E. (1959), A Relation Between the Critical Alternating Propagation Stress and Crack Length for Mild Steel, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 173, No. 35, pp. 811-827
- [11] Frost, N. E. (1960), Notch Effects and Critical Alternating Stress Required to Propagate a Crack in Aluminium Alloy Subject to Fatigue Loading, *J. Mech. Engng. Sci.* 2, pp.109-119
- [12] Frost, N. E. (1961), Significance of Non-propagating Cracks in the Interpretation of Notched Fatigue Data, *J. Mech. Engng. Sci.* 3(4), pp.299-302
- [13] El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith, K. N. (1979), Prediction of Non Propagating Cracks, *Engng. Fract. Mech.* 11, pp.573-584
- [14] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1983), Propagation and Non-propagation of Short Fatigue Cracks at a Sharp Notch, *Fat. Engng. Mater. Struct.* 6, No. 4, pp. 315-327
- [15] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1984), Prediction of Fatigue Threshold of Notched Components, *ASME J. Engng. Mater. and Tech.* 106, pp.192-199
- [16] Tanaka, K. and Akiniwa, Y. (1987), Notch-Geometry Effect on Propagation Threshold of Short Fatigue Cracks in Notched Components, *Fatigue'87* (R.O. Ritchie and E.A. Starke, Jr.), Third International Conference on Fatigue and Fatigue Thresholds, Vol. II, pp. 739-748, Charlottesville, Va.
- [17] Tanaka, K. and Akiniwa, Y. (1988), The Propagation of Short Fatigue Cracks at Notches, in *Basic Questions in Fatigue*, Vol. 1, ASTM STP 924 (Eds. J.T.

- Fong and R.J. Fields), American Society for Testing Materials, Philadelphia, pp. 281-298
- [18] Peterson, R. E. (1959), Notch Sensitivity, in Metal Fatigue (eds. G. Sines & J. L. Waisman), McGraw-Hill, N.Y., pp.293-306
- [19] Taylor D. and Knott J.F. (1981), Fatigue Crack Propagation Behaviour of Short Cracks: The Effect of Microstructure, Fatigue Engng. Mater. Struct., Vol. 4, pp. 147-155
- [20] Taylor D. (1982), Euromech Colloquium on Short Fatigue Cracks, Fatigue Engng. Mater. Struct., Vol. 5, pp. 305-309
- [21] Taylor, D. (1989), Fatigue Thresholds, Butterworth & Co. (Publishers) Ltd.
- [22] Smith, R. A. and Miller, K. J. (1977), Fatigue Crack at Notches, Int. J. Mech. Sci. 19, pp.11-22
- [23] Smith, R. A. and Miller, K. J. (1978), Prediction of Fatigue Regimes in Notched Components, Int. J. Mech. Sci. 20, pp.201-206
- [24] Cameron A.D. and Smith, R.A. (1987), Upper and Lower Bounds for the Lengths of Non-propagating Cracks, Int. J. Fatigue, Vol. 3, pp. 9-15
- [25] Armstrong, R.W. (1970), The Influence of Polycrystal Grain Size on Several Mechanical Properties of Materials, Metallurgical Transactions, Vol. 1, pp. 1169-1176
- [26] Masounave, J. and Bailon, J.P. (1976), Effect of Grain Size on the Threshold Stress Intensity Factor in Fatigue of a Ferritic Steel, Scripta Metall., Vol. 10, pp. 165-170
- [27] Taira, S., Tanaka, K. and Hoshina, M. (1979), Grain Size Effect on Crack Nucleation and Growth in Long-life Fatigue in Low Carbon Steel, in Fatigue Mechanisms, ASTM STP 675, pp. 135-162

- [28] Hammouda, M. M., Smith, R. A. and Miller, K. J. (1979), Elastic-plastic Fracture Mechanics for Initiation and Propagation of Notch Fatigue Cracks, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 2, pp.139-154
- [29] Navarro A. and de los Rios E.R. (1988), An Alternative Model for the Blocking of Dislocations at Grain Boundaries, *Phil. Mag.* 57, pp.37-42
- [30] Navarro A. and de los Rios E.R. (1992), Fatigue Crack Growth Modelling by Successive Blocking of Dislocations, *Proc. R. Soc. Lond.* A437, pp.375-390
- [31] Al-Haidary, J.T., Petch, N.J. and de los Rios, E.R. (1983), The Plastic Deformation of Polycrystals. I. Aluminium between Room Temperature and 400°C. *Phil. Mag. A* 47, pp. 869-890
- [32] Dugdale, D.S. (1960), Yielding of Steel Sheets Containing Slits, *Journal of the Mechanics and Physics Solids* 8, pp. 100-108.
- [33] Bilby B.A., Cottrell A.H. and Swinden K.H. (1963), The Spread of Plastic Yield from a Notch, *Proc. R. Soc.* A272, pp.304-314
- [34] Taira, S., Tanaka, K. and Yokomaku, T. (1975), Some Approximation of Bilby-Cottrell-Swinden Model Analysis, *Journal of the Society of Materials Science, Japan*, Vol. 24, pp. 733-740
- [35] Kage, M., Miller, K.J. and Smith, R.A. (1992). Fatigue Crack Initiation and Propagation in a Low-Carbon Steel of Two Different Grain Sizes, *Fatigue Engng. Mater. Struct.*, Vol. 15, No. 8, pp. 147-155
- [36] Hertzberg, R.W. (1996), *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials* (4th edition), John Wiley and Sons, Inc.
- [37] Murakami, Y. and Endo, T. (1980), Effects of Small Defects on Fatigue Strength of Metals, *Int. J. Fatigue*, Vol. 2, pp. 23-30

- [38] Weiss, B., Stickler, R., Lukas, P. and Kunz, L. (1986). Non-damaging Notches in Fatigue - A Short Crack Problem?, in Small Fatigue Cracks (R.O. Ritchie and J. Lankford (eds.)), The Metallurgical Society, Inc.
- [39] Lukas, P., Kunz, L., Weiss, B. and Stickler, R. (1986). Non-damaging Notches in Fatigue, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., Vol. 9, No. 3, pp. 195-204.
- [40] Yamada, K., Kim, M.G. and Kunio, T. (1986), Tolerant Microflaw Sizes and Non-propagating Crack Behaviour, in The Behaviour of Short Fatigue Cracks, EGF Pub.1 (K. J. Miller and E. R. de los Rios (eds.)), Mechanical Engineering Publications, London, pp. 261-274.
- [41] Murakami, Y. and Endo, T. (1980), Effects of Hardness and Crack Geometries on ΔK_{th} of Small Cracks Emanating from Small Defects, in The Behaviour of Short Fatigue Cracks, EGF Pub.1 (K. J. Miller and E. R. de los Rios (eds.)), Mechanical Engineering Publications, London, pp. 275-293.

Capítulo 6

Generalización y Comparación con resultados experimentales

El modelo desarrollado en el presente trabajo establece las condiciones necesarias para hacer crecer una grieta a través de las barreras microestructurales del material en la raíz de una entalla. Dicho proceso puede ser entendido como una competencia entre la creciente resistencia interpuesta por las barreras a medida que la grieta crece y la capacidad de dicha grieta para superarlas.

Por simplicidad matemática, la configuración empleada para abordar el problema ha sido un espécimen semi-infinito conteniendo una entalla elíptica y una grieta creciendo en Modo III. Desafortunadamente el número de trabajos experimentales existentes en la literatura acerca del comportamiento a fatiga de componentes entallados sometidos a estados de tensiones antiplanos es muy escaso. La mayoría de éstos no han sido diseñados para estudiar las condiciones umbrales de propagación, lo cual hace muy difícil la contrastación directa del modelo. Ello hubiera requerido

el desarrollo de un completo plan de ensayos, contemplando el estudio de entallas con distintas geometrías y en diferentes materiales, que por razones de tiempo no ha podido ser realizado paralelamente al desarrollo de la presente teoría. Por otra parte, los conceptos físicos de los que se han hecho uso son de carácter más general e independientes del tipo de entalla, pudiendo éstos ser extrapolados a otros modos de crecimiento más usuales en la práctica, por ejemplo, grietas creciendo en Modo I o Modo II.

A lo largo de este capítulo se presentará en primer lugar una generalización de las expresiones obtenidas en este trabajo. La generalización se refiere a dos aspectos. Por un lado se escriben las ecuaciones del modelo de manera que puedan aplicarse a grietas en Modo III en entallas de geometría arbitraria y por otro lado se presenta y discute la forma de extrapolar dichas expresiones al Modo I. Esto permitirá, en términos prácticos, la estimación de los umbrales de iniciación y de propagación hasta el fallo en componentes entallados sometidos a cargas de tracción-compresión. Las predicciones obtenidas de dicho análisis serán comparadas con resultados experimentales existentes en la literatura en un variado rango de geometrías de entallas y materiales, cubriendo desde entallas macroscópicas hasta concentradores microestructuralmente pequeños.

6.1 Una expresión más general. Metodología de aplicación

Para facilitar de lectura empecemos recopilando algunas de las expresiones obtenidas en los capítulos precedentes.

La mínima tensión requerida (τ_{Li}^N) para que una grieta en la raíz de una entalla elíptica, sometida a un estado antiplano de tensiones, supere una barrera genérica i se expresa como

$$\tau_{Li}^N = \tau_{Li} \frac{\sqrt{iD/2}}{\alpha + \beta} \left[\frac{\beta}{\lambda_i} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

siendo $\lambda_i = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + iD/2)^2 - \alpha^2 + \beta^2} - \beta(\alpha + iD/2) \right]$. El límite de iniciación se obtiene simplemente haciendo $i = 1$ en la expresión anterior (τ_{Li}^N). Asimismo, el límite de propagación hasta el fallo del espécimen, o límite de fatiga del componente entallado, se expresó como

$$\tau_{FL}^N = \max_i \tau_{Li}^N, \quad (6.2)$$

donde el valor de i^* para el cual se produce el máximo determina la máxima longitud de grieta no-propagante que es posible encontrar en la raíz del concentrador ($a_{npmax} = i^* D/2$).

Dos casos extremos de interés son:

1. El umbral de iniciación coincide aproximadamente con el límite de fatiga del material dividido por el factor de concentración de tensiones en la entalla cuando el tamaño de la entalla es mucho mayor que el tamaño microestructural característico. Dicho resultado se obtiene fácilmente tomando el límite cuando $D \rightarrow 0$ e $i = 1$ en (6.1)

$$\tau_{Li}^N \xrightarrow{D \rightarrow 0} \frac{\tau_{FL}}{1 + \frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\tau_{FL}}{K_t} \quad (6.3)$$

2. Por otro lado, a medida que la entalla es más aguda, su la zona de influencia de la entalla disminuye y su comportamiento se hace más parecido al de una "grieta" de longitud igual a la profundidad de la entalla más la longitud de la grieta real en la raíz del concentrador. Esto queda determinado haciendo β tender a cero en (6.1), de donde se obtiene

$$\tau_{Li}^N \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \tau_{Li} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + iD/2}} \quad (6.4)$$

Es también importante, para el análisis que sigue, recordar la expresión de la distribución de tensiones en la entalla obtenida en la presente formulación,

$$T_0(x) = \frac{\tau(\alpha + \beta)}{\beta + \frac{\alpha\eta(x)}{\sqrt{1+\eta^2(x)}}} \quad (6.5)$$

con $\eta(x) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + x)^2 - \alpha^2 + \beta^2} - \beta(\alpha + x) \right]$. Por claridad, se ha adoptado la nomenclatura recogida habitualmente en la literatura, donde x es la coordenada medida desde la raíz de la entalla y en la dirección de la profundidad de la misma (véase el esquema de la Figura 6.1).

En rigor, la expresión (6.1) es matemáticamente correcta para modelar las condiciones umbrales de una grieta creciendo en Modo III en el fondo de una entalla elíptica, tanto para un sólido infinito como semi-infinito. No obstante, desde un punto de vista ingenieril, puede todavía obtenerse gran información acerca de las condiciones umbrales para el crecimiento de una grieta en diferentes geometrías de entallas, modificando convenientemente las expresiones anteriores.

En efecto, para un determinado material, el factor principal que controla el comportamiento de una grieta en una entalla genérica es la distribución de tensiones generada por dicha entalla. De acuerdo con las ideas expuestas en esta tesis, es esperable que el comportamiento de una grieta creciendo por fatiga en dos entallas distintas, pero que presenten la misma distribución de tensiones, sea el mismo. La distribución de tensiones viene determinada por el valor máximo en el fondo del concentrador y por el gradiente de tensiones. La tensión máxima está caracterizada por el factor de concentración de tensiones K_t , el cual depende de la geometría de la propia entalla, del tipo de carga aplicada y de la geometría global del componente. Sin embargo, en cuanto a los gradientes de tensión en los alrededores del concentrador, numerosos estudios han puesto de manifiesto que, cuando se normalizan las tensiones mediante la tensión máxima, las distribuciones presentan una evolución muy similar para un amplio rango de entallas, sin exhibir una fuerte dependencia de la geometría global del espécimen [1–3]. Las diferencias parecen asociadas fundamentalmente a la geometría en el fondo de la entalla, hecho que ha llevado a varios autores a proponer que la distribución de tensiones en la vecindad de una entalla arbitraria puede ser satisfactoriamente descrita a través del factor de concentración de tensiones (K_t) y del radio de curvatura en el fondo de la entalla (ρ).

Un primer paso, por tanto, para abordar el estudio de geometrías de entallas diferentes a la elíptica sería expresar las ecuaciones (6.1) y (6.5) en función de parámetros más generales como K_t , el radio de curvatura de la entalla ρ y la profundidad de la entalla α . Teniendo en cuenta las relaciones $\beta = \sqrt{\rho\alpha}$ y $K_t = 1 + \alpha/\beta$, dichas expresiones pueden escribirse, entonces, como

$$T_0(x) = \frac{\tau K_t}{1 + \frac{(K_t-1)\eta(x)}{\sqrt{1+\eta^2(x)}}} \quad (6.6)$$

donde

$$\eta(x) = \frac{\sqrt{\alpha\rho}}{\alpha - \rho} \left[\sqrt{1 + \frac{x}{\rho} \left(2 + \frac{x}{\alpha}\right)} - \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) \right] \quad (6.7)$$

para la distribución de tensiones y

$$\tau_{Li}^N = \tau_{Li} \frac{\sqrt{iD/2}}{K_t} \left[\frac{1}{\lambda_i \sqrt{\alpha\rho}} + \frac{(K_t-1)^2}{\alpha \sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

para el umbral de propagación, siendo

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{\alpha\rho}}{\alpha - \rho} \left[\sqrt{1 + \frac{iD/2}{\rho} \left(2 + \frac{iD/2}{\alpha}\right)} - \left(1 + \frac{iD/2}{\alpha}\right) \right] \quad (6.9)$$

En el caso de una entalla genérica el factor de concentración de tensiones se puede expresar de forma general como $K_t = 1 + F\sqrt{\alpha/\rho}$, donde F es un factor de corrección adimensional que tiene en cuenta la geometría de la entalla y del componente [4]. Es fácil comprobar que en esta situación la ecuación (6.8) conduce a los mismos límites obtenidos para la expresión (6.1), es decir,

$$\begin{aligned} \tau_{L1}^N &\xrightarrow{D \rightarrow 0} \frac{\tau_{FL}}{K_t} \\ \tau_{Li}^N &\xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \tau_{Li} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + iD/2}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

En componentes sometidos a cargas axiales, la tensión representativa es la tensión axial σ_{yy} , según el sistema de coordenadas adoptado. Sería, por tanto, de esperar que si la ecuación (6.6) fuese capaz de representar adecuadamente la evolución de dichas tensiones para una entalla genérica bajo tensión axial, sin

más que sustituir en ésta la tensión tangencial τ por la tensión normal σ , las condiciones umbrales para la propagación de una grieta bajo carga axial deberían ser muy parecidas a las predichas por la expresión (6.8). Así, desde un punto de vista ingenieril, sería también posible emplear (6.8), expresada ahora en función de σ_{yy} , para caracterizar los umbrales de crecimiento de una grieta por fatiga en componentes sometidos a tensión axial.

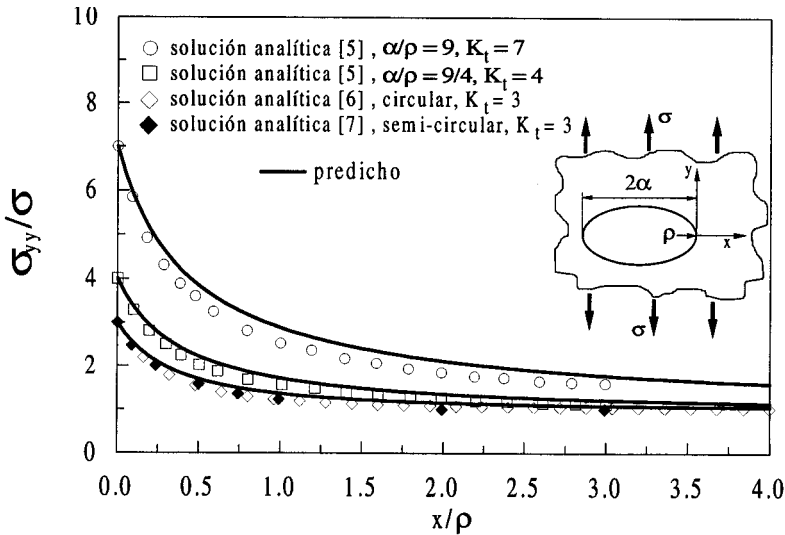


Figura 6.1: Distribución de tensiones σ_{yy} en entallas elípticas sometidas a una tensión de tracción σ . Comparación con las predicciones de la ecuación (6.6).

La Figura 6.1 y 6.2 muestran la evolución de las tensiones σ_{yy} (adimensionalizada por la tensión aplicada), obtenidas por distintos autores, para diferentes configuraciones de entallas elípticas sometidas a tracción frente a la distribución de tensiones obtenida empleando la ecuación (6.6). En la primera de ellas (Figura 6.1) se representan las soluciones analíticas para entallas elípticas en un medio infinito ($K_t = 7$ y $K_t = 4$) obtenidas por Schijve [5], la clásica solución de Timoshenko y Goodier [6] para un agujero circular en una placa infinita ($K_t = 3$) y la solución analítica para una entalla semi-circular en un medio semi-infinito ($K_t = 3$) debida

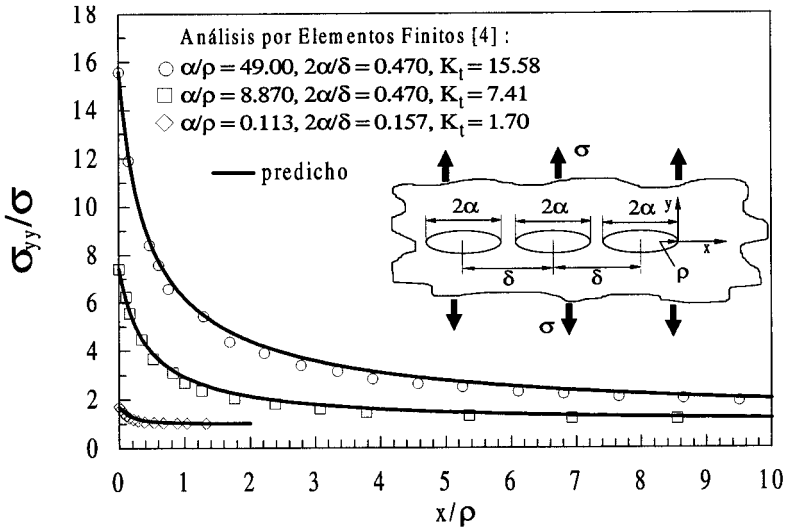


Figura 6.2: Distribución de tensiones σ_{yy} al final de una sucesión de tres entallas elípticas idénticas sometidas tracción (σ). Comparación con las predicciones de la ecuación (6.6).

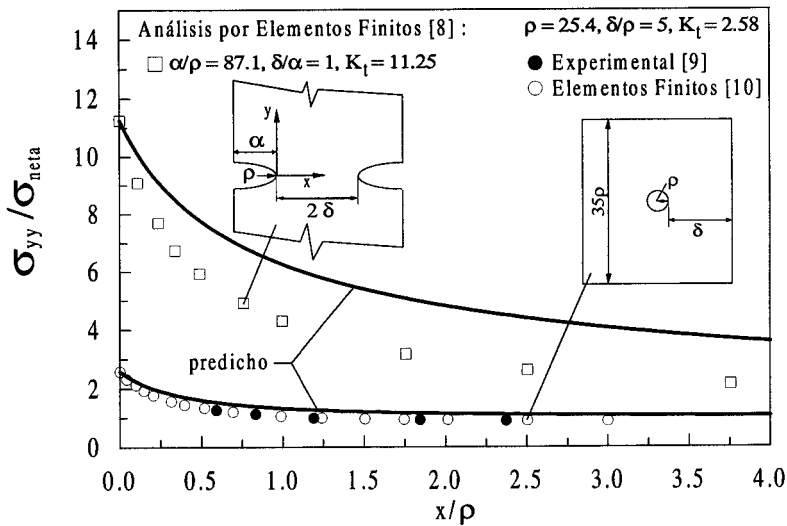


Figura 6.3: Distribución de tensiones σ_{yy} en especímenes finitos. Comparación con las predicciones de la ecuación (6.6).

a Maunsell [7]. Asimismo, la Figura 6.2 muestra la tensión σ_{yy} en tres de las configuraciones analizadas por Shin [4] mediante Elementos Finitos ($K_t = 15.58, 7.41$ y 1.70), correspondientes a una sucesión de tres entallas elípticas idénticas en un medio infinito (véase esquema adjunto). Como se puede observar en ambas figuras, la evolución predicha por la ecuación (6.6) es suficientemente aproximada en todos los casos, exhibiendo diferencias respecto de la solución de referencia que tan sólo puntualmente son cercanas, pero siempre inferiores, al 10%.

Obviamente, dado que la expresión (6.6) fue obtenida en la hipótesis de que el sólido fuese semi-infinito (también válida para medio infinito), es de esperar que la bondad de los resultados anteriores no siga manteniéndose cuando las dimensiones de la entalla sean comparables a la anchura del espécimen. La Figura 6.3 ilustra esta situación. La citada figura compara las predicciones de la ecuación (6.6) con la distribución de tensión σ_{yy} en una placa finita doblemente entallada [8] y en una placa finita con un agujero circular [9, 10]. Nótese que ahora la tensión está adimensionalizada por la tensión local sobre la sección neta del espécimen. Se puede observar que en la primera configuración, donde el tamaño del nexo de unión es del orden del tamaño de la entalla ($\delta/\alpha = 1$, véase esquema adjunto), la predicción sobrestima demasiado la solución real y, por tanto, el uso de la ecuación (6.6) no sería adecuado. No obstante, en el segundo caso, en el que la influencia del contorno de la placa es menor ($\delta/\rho = 5$), la aproximación propuesta sigue conduciendo a buenos resultados.

Por tanto, se puede concluir que la ecuación (6.6) representa apropiadamente la distribución de tensiones en la raíz de una entalla sometida a tracción, cuando no existe una fuerte influencia del carácter finito del componente (típicamente $\delta/\alpha > 5$). En estas situaciones, la aplicación directa de la expresión (6.8) puede resultar de gran utilidad práctica para estimar las condiciones umbrales de propagación de una grieta en especímenes bajo tensión axial. La metodología a seguir se reduce, por tanto, a:

1. Caracterizar la mínima tensión necesaria σ_{Li} para hacer crecer una grieta a

través de la microestructura del material en función de su longitud. Para ello, será necesario conocer la distancia característica entre las barreras microestructurales del material D (generalmente, el tamaño medio de grano) y el diagrama de Kitagawa-Takahashi de un espécimen sin entalla sometido al mismo tipo de carga al que se solicitará el componente entallado. Como alternativa práctica, en el caso de no disponer de un conjunto completo de datos experimentales, se sugiere emplear la relación aproximada propuesta en el Capítulo 4,

$$\sigma_{Li} = \sigma_{FL} \frac{\sqrt{a_0}}{\left((iD/2)^f + a_0^f - (D/2)^f \right)^{\frac{1}{2f}}} \quad (6.11)$$

con $a_0 = [K_{th\infty}/(Y\sigma_{FL})]^2/\pi$, la cual se reduce a conocer el límite de fatiga del material σ_{FL} , el factor de intensidad de tensiones umbral de grieta grande $K_{th\infty}$ y el exponente f para cada tipo de material. Éste último es, en general, superior a la unidad, encontrándose en torno a 2.5, para la mayoría de los materiales analizados en este trabajo. Se ha comprobado que el modelo es bastante robusto con respecto del parámetro f , es decir, las predicciones no se alteran significativamente al variar f . No obstante, lo ideal, volvemos a repetir, sería tener los datos reales del diagrama de Kitagawa para cada material. El factor geométrico Y dependerá de la forma de la grieta y de la geometría del espécimen empleado.

2. Emplear la ecuación (6.8), escrita ahora de la forma

$$\sigma_{Li}^N = \sigma_{Li} \frac{\sqrt{iD/2}}{K_t} \left[\frac{1}{\lambda_i \sqrt{\alpha \rho}} + \frac{(K_t - 1)^2}{\alpha \sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.12)$$

de la cual se obtendrá el límite de iniciación y el límite de fatiga del componente entallado en función de la tensión aplicada, así como la longitud de grieta no-propagante.

6.2 Comparación con resultados experimentales y discusión

Para comprobar la validez del modelo desarrollado en esta tesis, las predicciones de éste han sido comparadas con resultados experimentales obtenidos de la literatura. Los materiales analizados comprenden aceros al carbono, aleación de aluminio 2024- T351, aleación de acero (2.25Cr-1Mo) y cobre electrolítico (99.98% Cu). Los especímenes y tipos de entallas estudiados incluyen placa con entalla central elíptica y circular (CNP, Center Notch Plate), placa con doble entalla en V en los extremos (DENP, Double Edge Noch Plate) y probeta cilíndrica con entalla circunferencial (CNB, Cicumferential Notch Cylindrical Bar). Los tamaños de entallas variaron desde unas 10 μm hasta aproximadamente 5 mm.

A continuación se presenta un análisis detallado de los estudios clásicos de El-Haddad et al., Frost y Dugdale y Tanaka y Akiniwa. Finalmente, se mostrará también la comparación con los resultados experimentales de otros autores, tales como Lukáš et al., Du Quesnay et al., etc.

Resultados de El-Haddad et al. [11,12]

En las citadas referencias se presenta un estudio de las condiciones umbrales de propagación de grietas por fatiga en especímenes conteniendo entallas circulares. El tipo de probeta fue una placa plana (CNP) con agujeros de diferente tamaño ($\rho = 0.2, 0.48$ y 4.8 mm) y un ancho total W de 70 mm.

Las propiedades del material empleado, de interés para la aplicación del modelo actual, se recogen en la Tabla 6.1. Asimismo, los citados autores proporcionan el diagrama de Kitagawa-Takahashi para un espécimen sin concentrador, lo cual permite obtener una completa caracterización sobre el proceso de crecimiento de una grieta en dicho material y, por tanto, determinar las tensiones σ_{Li} .

Tabla 6.1: Características mecánicas del material.

Material	R	σ_y (MPa)	$\sigma_{FL}^{(*)}$ (MPa)	$K_{th\infty}^{(*)}$ (MPa \sqrt{m})	D (μm)
CSA G40.11	-1	376	280	8	30 ^(†)

*amplitud

†estimado a partir de aceros con propiedades similares

La Figura 6.4 muestra el ajuste de la expresión (6.11) a los puntos experimentales del diagrama de Kitagawa del material. El valor para el exponente f en dicha expresión fue de 1.1 y el valor del factor de corrección geométrico Y muy próximo a la unidad, en perfecto acuerdo con los resultados de las referencias anteriores, $Y = 1.02$.

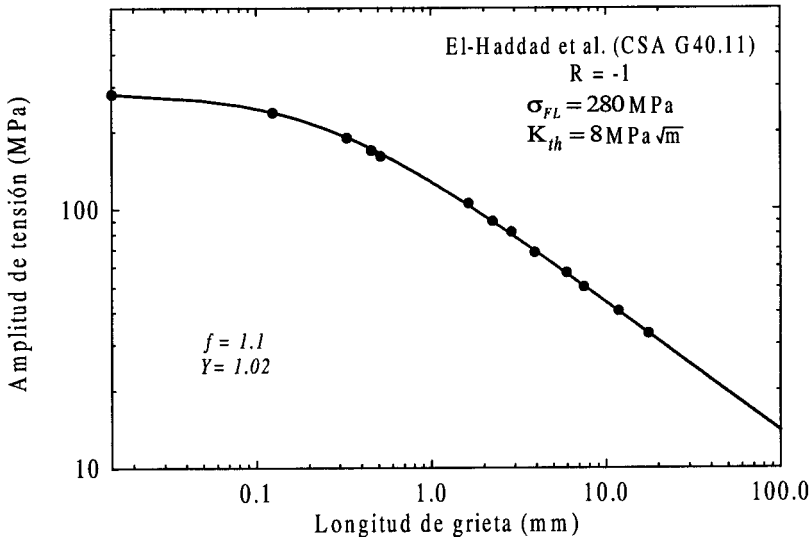


Figura 6.4: Diagrama de Kitagawa del espécimen sin entalla.

Introduciendo σ_{Li} dada por (6.11), con los valores específicos para este material, en la expresión (6.12) se obtienen las condiciones umbrales para la propagación

de una grieta en el componente entallado. Es importante indicar que en el proceso habitual de crecimiento de la grieta en el espécimen entallado el factor geométrico Y variará dependiendo de la forma y longitud de la propia grieta, así como de la geometría del componente. En términos generales, las grietas comienzan teniendo una forma aproximadamente elíptica exhibiendo un factor geométrico inferior a la unidad (e.g. en torno a 0.7 para grietas semicirculares no-pasantes). Este factor aumenta progresivamente hasta un valor ligeramente superior a la unidad cuando la grieta abarca por completo el espesor de la pieza (e.g. 1.12 para grietas pasantes). Dado que no se tiene información acerca de la progresión real de Y , se ha adoptado, por sencillez, un valor de $Y = 1$ en los cálculos siguientes.

Las predicciones obtenidas empleando la ecuación (6.12), junto con los resultados experimentales de las referencias anteriores, se muestran en las Figuras 6.5 y 6.6, y se resumen en la Tabla 6.2. El factor de concentración de tensiones sobre la sección neta del espécimen se ha calculado a partir de la expresión propuesta por Feddersen y recogida en el libro de Peterson [13].

Tabla 6.2: Datos del espécimen entallado ($R = -1$). Comparación con las predicciones.

Tipo	$\alpha = \rho$ (mm)	K_t (*)	σ_{FL}^N (Exp.) (MPa \sqrt{m})(*)	σ_{FL}^N (Pred.) (MPa \sqrt{m})(*)	Error ^(†) (%)	Observ.
CNP	0.20	2.98	168	156.7	6.7	$W = 70$ mm $\delta/\rho \geq 6.3$
	0.48	2.96	124	123.5	0.4	
	4.80	2.62	104	107.4	-3.3	

*Referido a la sección neta

† $Error = (Exp. - Pred.) / Exp. \times 100$

La Figura 6.5 muestra el umbral de propagación hasta el fallo y el límite de iniciación del componente en función del radio de la entalla. La región de grietas no-propagantes discurre, obviamente, entre ambos límites. Asimismo, se muestran los niveles de tensión para los cuales se detectaron grietas no-propagantes y el fallo

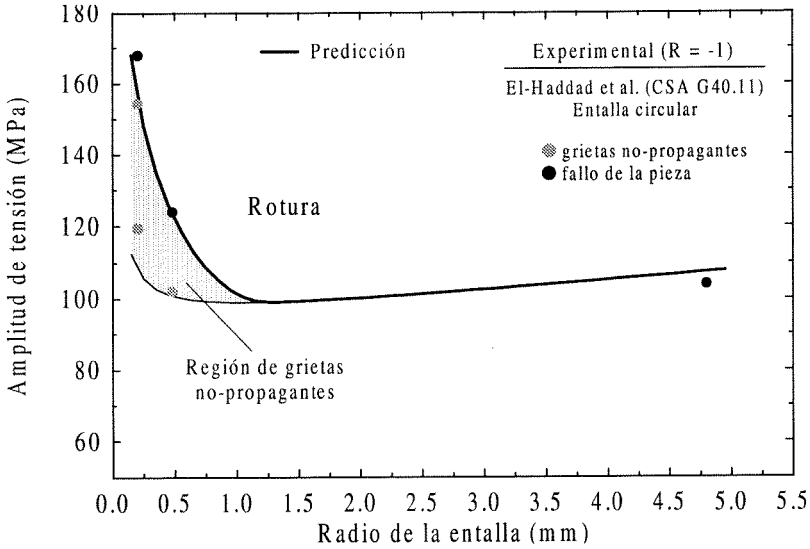


Figura 6.5: Límite de iniciación y de fallo predichos vs. resultados experimentales.

del espécimen. Como puede comprobarse, existe un acuerdo excelente entre las predicciones del modelo y los datos experimentales.

Es interesante notar que la región de grieta no-propagantes se estrecha a medida que aumenta el radio del agujero, siendo el límite de fatiga coincidente con el límite de iniciación para radios superiores a 1.25 mm. Por otra parte, la tendencia ascendente de ambos límites a partir de dicho valor es consecuencia del aumento de la tensión máxima en la raíz del concentrador debido al carácter finito del espécimen.

En la Figura 6.6 se muestra la tensión umbral σ_{Li}^N en función de la longitud de grieta, para la entalla de radio $\rho = 0.2$ mm. Se puede apreciar que la concordancia entre la predicción y los resultados experimentales es razonablemente buena, en especial, en cuanto a la posición del máximo, esto es, la máxima longitud de grieta no-propagante que es posible encontrar en el espécimen. Las diferencias son más acusadas para longitudes de grieta inferiores a dicho máximo.

La razón de tales diferencias puede encontrarse en la natural dispersión de los

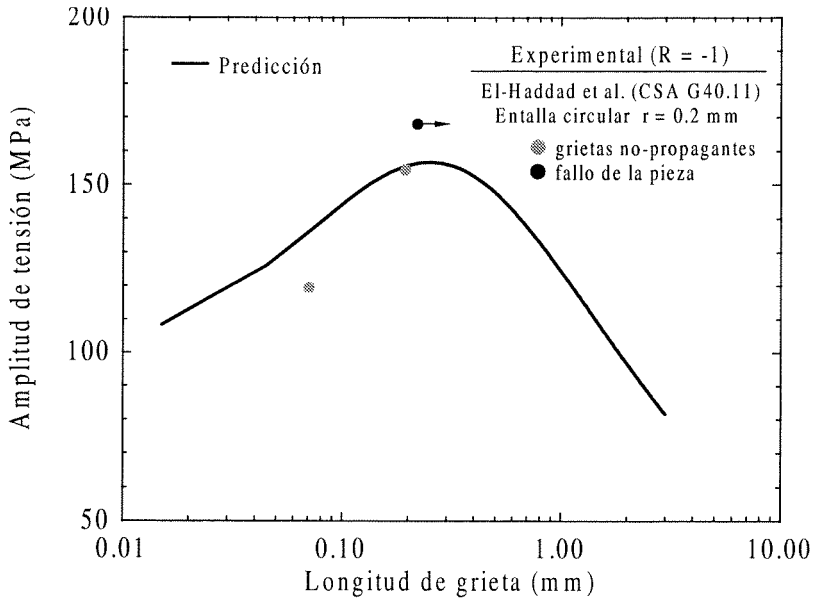


Figura 6.6: Tensión umbral σ_{Li}^N frente a la longitud de grieta. Diagrama de Kitagawa del espécimen entallado.

tamaños de grano del material. Recordemos que la magnitud que se está utilizando para modelar la microestructura del material es el tamaño medio de grano. La inherente aleatoriedad de dicha magnitud en los materiales reales hace que la probabilidad de encontrar tamaños de grano varias veces superiores o inferiores al tamaño medio microestructural sea muy elevada. Este hecho tiene una especial repercusión cuando la grieta es pequeña, y su longitud final estará irremisiblemente sujeta al mismo rango de variabilidad que los tamaños de grano. Ello conduciría necesariamente a abordar el problema de la estimación de las longitudes de grietas no-propagantes en términos estadísticos y, por tanto, requeriría del conocimiento de la distribución estadística de todas las variables involucradas en el proceso de crecimiento de la grieta, léase tamaño de grano, límite de fatiga del material, etc. Dicho estudio excede el objetivo inicial de este trabajo, aunque, se piensa que la formulación desarrollada presenta un marco de trabajo simple y robusto para un

primer análisis de este problema.

En términos generales y a tenor de las predicciones del modelo, se puede concluir que éste muestra una excelente capacidad de predicción. Teniendo presente la inevitable fuente de dispersión asociada con las magnitudes microestructurales características, las predicciones serán más aproximadas en relación al cálculo de las tensiones umbrales que en relación a las longitudes de las grietas no-propagantes. Como se muestra en la Tabla 6.2 los errores en la estimación del límite de fatiga del componente entallado respecto de los valores experimentales son inferiores a un 10%. Diferencias menores no son esperables en los propios datos experimentales en el campo de la fatiga de materiales.

Resultados de Frost y Dugdale [14, 15]

El tipo de probetas empleado en este estudio fue una placa plana de ancho (W) 63.5 mm, entallada por ambas caras (DENP), con entallas en V de profundidad (α) 5.08 mm y diferentes radios de curvatura en el fondo. El ángulo total de la entalla fue 55° . Las propiedades mecánicas del material empleado se muestran en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3: Características mecánicas del material.

Material	R	σ_y (MPa)	$\sigma_{FL}^{(*)}$ (MPa)	$K_{th\infty}^{(*)}$ (MPa \sqrt{m})	D (μm)
Acero (0.22%C)	-1	295	202	6.5 ^(†)	20-40 ^(†)

* amplitud

† referencia [16]

† estimado de las micrograffas

Los especímenes entallados fueron sometidos a una carga de tensión-compresión de amplitud constante y simétrica ($R = -1$). Cada serie de entallas se sometió a diferentes niveles de tensión, determinándose la presencia o no de grietas no-propagantes en la raíz del concentrador. El número de ciclos que se aplicó al espécimen fue superior a 10 millones, incrementándose como mínimo a 15 millones

si se observaba la existencia de grietas no-propagantes. Los resultados de los distintos especímenes se muestran en la Tabla 6.4.

En la Figura 6.7 se muestran los resultados obtenidos por el presente modelo junto con los datos experimentales listados en la Tabla 6.4. Por falta de resultados experimentales precisos a cerca del diagrama de Kitagawa del material, se ha empleado para el exponente f de la ecuación (6.11) un valor de 2.5, el cual, según se mostró en el Capítulo 4, reproduce una progresión apropiada en gran número de materiales. En cuanto al tamaño de grano, se ha comprobado que no existen diferencias sustanciales en las predicciones de las tensiones umbrales de propagación si se escoge cualquiera de los valores extremos (20 ó 40 μm), por lo que se ha utilizado como valor representativo el valor medio $D = 30\mu\text{m}$. Para el cálculo del factor de concentración de tensiones en la sección neta del especimen se han utilizado las expresiones recogidas en la referencia [17].

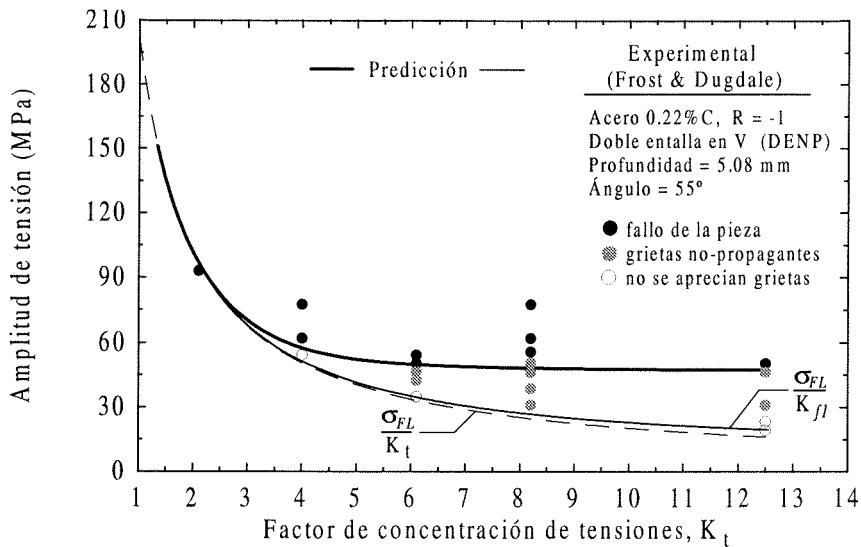


Figura 6.7: Límite de iniciación $\sigma_{L1}^N = \sigma_{FL}/K_{f1}$ y límite de fatiga predichos vs. resultados experimentales.

Como se puede observar en la citada figura las predicciones tanto para el límite

Tabla 6.4: Datos del espécimen entallado y resultados experimentales ($R = -1$).

Tipo	α (mm)	ρ (mm)	K_t (*)	σ^N (Exp.) (MPa)(*)	Observaciones
DENP Entalla en V $W = 63.5$ mm	5.08	0.102	12.5	50.4	(R)
				46.5	(NR-G)
				31.0	(NR-G)
				23.25	(NG)
				19.4	(NG)
		0.254	8.2	77.5	(R)
				62.0	(R)
				55.8	(R)
				50.4	(NR-G)
				46.5	(NR-G)
		0.508	6.1	38.75	(NR-G)
				31.0	(NR-G)
				54.25	(R)
				50.4	(R)
				46.5	(NR-G)
		1.27	4.0	42.6	(NR-G)
				34.9	(NG)
				77.5	(R)
		7.62	2.1	62.0	(R)
				54.25	(NG)
		93.0	(R)		

*Referido a la sección neta

(R)= Rotura

(NR-G)= Especimen No Roto pero con Grieta

(NG)= No se apreció Grieta

Tabla 6.5: Comparación entre los datos experimentales y las predicciones.

α (mm)	ρ (mm)	K_t (*)	σ_{FL}^N (Exp.) (MPa)(*)	σ_{FL}^N (Pred.) (MPa)(*)	Error ^(†) (%)	Observ.
5.08	0.102	12.5	50.4 - 46.5	47.3	2.4	$W = 63.5$ mm $\delta/\alpha = 5.25$
	0.254	8.2	55.8 - 50.4	48.2	9.2	
	0.508	6.1	50.4 - 46.5	49.7	-2.5	
	1.27	4.0	62.0 - 54.25	57.6	0.9	
	7.62	2.1	93	96.8	-4.1	

*Referido a la sección neta

† $Error = (Exp. - Pred.) / Exp. \times 100$, calculado con el valor medio los dos valores experimentales

de iniciación como para el límite de fatiga del espécimen entallado muestran un excelente acuerdo con los resultados experimentales. En la Tabla 6.5 se resume la información de la gráfica anterior en cuanto al límite de fatiga. Las diferencias entre los valores predichos y los observados se mantienen siempre por debajo del 10 %.

Algo menos aproximadas se muestran las predicciones referentes a las longitudes de grietas no-propagantes como cabía esperar. La Figura 6.8 representa los datos disponibles en la referencia [14] para los especímenes de radio $\rho = 0.102$ mm y $\rho = 0.254$ mm. En el segundo de los casos la predicción parece estar en mejor concordancia con la longitud de grieta no-propagante observada. En el primero, en cambio, el acuerdo es mucho menor. En ambos casos las predicciones subestiman los tamaños de grietas no-propagantes observados.

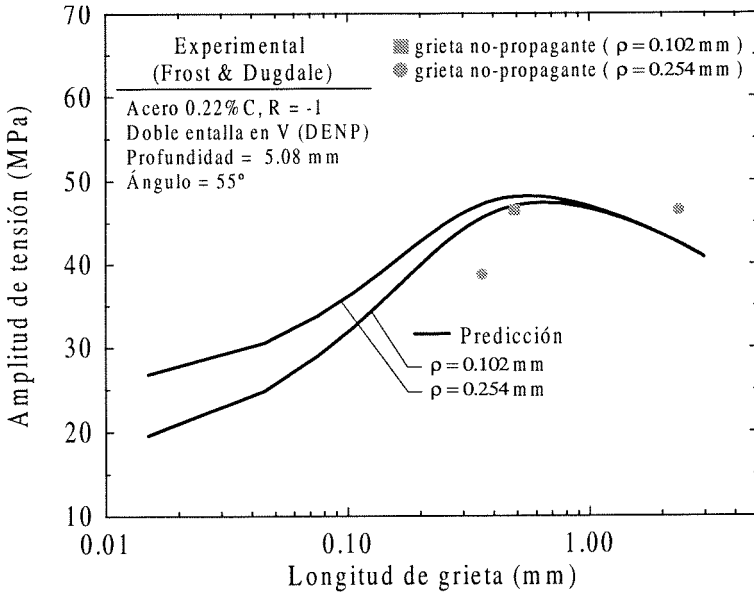


Figura 6.8: Tensión umbral $\sigma_{L_i}^N$ frente a la longitud de grieta.

Otros ensayos realizados empleando la misma geometría de entalla pero en especímenes cilíndricos (CNB), sometidos también a tracción-compresión ($R = -1$), se recogen en la referencia [15]. El material es ligeramente diferente al empleado en los especímenes de placa plana, aunque es también un acero al carbono (límite de fatiga entre 215-225 MPa). Tan sólo por completitud y con fines ilustrativos, en la Figura 6.9 se muestran dichos resultados junto con los analizados en este apartado. Como se puede apreciar en la citada figura, el comportamiento global de todos los datos experimentales sigue bastante bien el patrón obtenido con el modelo actual.

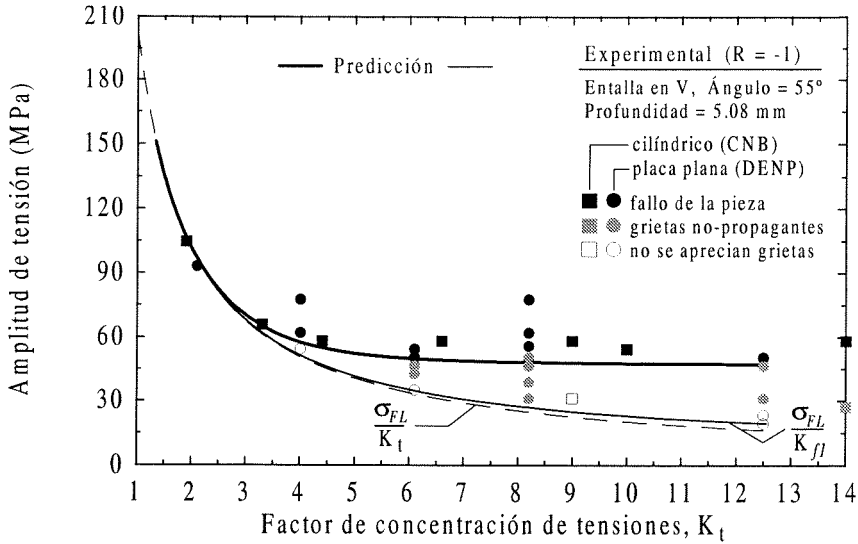


Figura 6.9: Límite de iniciación y de fallo predichos frente a los resultados experimentales en placa plana (DENP) y en especímenes cilíndricos (CNB).

Resultados de Tanaka y Akiniwa [18]

En este caso el espécimen empleado fue una placa plana de 43 mm de ancho y 4 mm de espesor con una entalla elíptica en el centro de la misma (CNP). El semieje mayor de la entalla se mantuvo constante ($\alpha = 3$ mm), mientras que se varió el radio de curvatura de la misma. La probeta se sometió a tracción-compresión de amplitud constante y simétrica ($R = -1$). Las propiedades del material utilizado se muestran en la Tabla 6.6.

Tabla 6.6: Características mecánicas del material.

Material	R	σ_y (MPa)	$\sigma_{FL}^{(*)}$ (MPa)	$K_{th\infty}^{(*)}$ (MPa \sqrt{m})	D (μm)
Acero JIS SM41B (0.17%C)	-1	194	163	6.18	64

* amplitud

Los resultados experimentales obtenidos con cada serie de entallas se reproducen en la Tabla 6.7.

Las predicciones del modelo y los resultados experimentales de la citada referencia se muestran en las Figuras 6.10 y 6.11. El exponente f empleado ha sido 2.5, el mismo valor exhibido por un material similar SM41 (véase Capítulo 4). El K_t referido a la sección neta del espécimen se ha calculado utilizando la expresión propuesta por Feddersen [13].

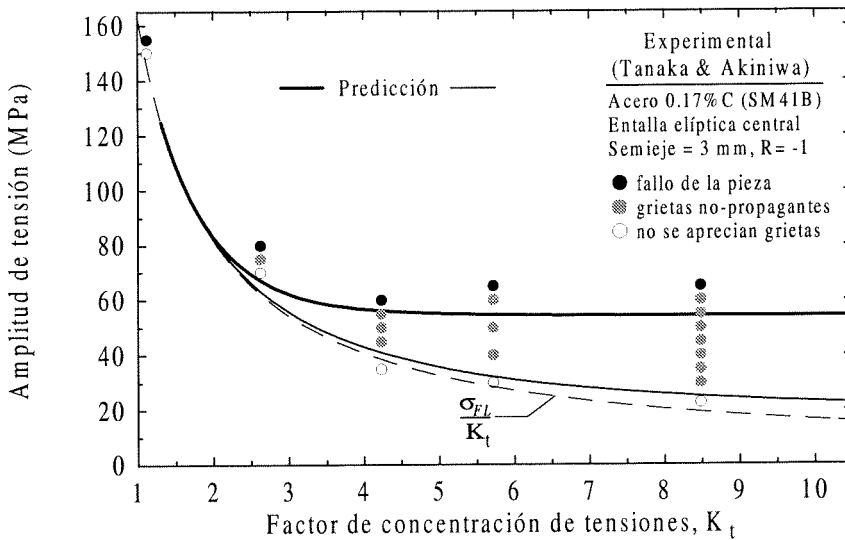


Figura 6.10: Límite de iniciación $\sigma_{L1}^N = \sigma_{FL}/K_{f1}$ y límite de fatiga predichos vs. resultados experimentales.

Como puede apreciarse en la Figura 6.10, la estimación obtenida de los umbrales de iniciación y de propagación hasta el fallo muestra un razonable acuerdo con los datos experimentales. En este caso, el límite de iniciación muestra una buena correlación con las observaciones de los citados autores. En cambio, el límite de fatiga predicho subestima ligeramente dichos resultados experimentales. La Tabla 6.8 muestra la magnitud de tales diferencias. Se puede comprobar que en tres de los casos los errores son superiores al 10% y tan sólo uno de ellos es

Tabla 6.7: Datos del espécimen entallado y resultados experimentales ($R = -1$).

Tipo	α (mm)	ρ (mm)	K_t (*)	σ^N (Exp.) (MPa)(*)	Observaciones
CNP Elíptica $W = 45$ mm	3	3	2.65	80	(R)
				75	(NR-G)
				70	(NG)
		0.83	4.23	60	(R)
				55	(NR-G)
				50	(NR-G)
				45	(NR-G)
		0.39	5.72	35	(NG)
				65	(R)
				60	(NR-G)
				50	(NR-G)
				40	(NR-G)
		0.16	8.48	30	(NG)
				65	(R)
				60	(NR-G)
				55	(NR-G)
				50	(NR-G)
				45	(NR-G)
40	(NR-G)				
35	(NR-G)				
30	(NR-G)				
22.6	(NG)				

*Referido a la sección neta

(R)= Rotura

(NR-G)= Especimen No Roto pero con Grieta

(NG)= No se apreció Grieta

inferior a este último.

Tabla 6.8: Datos del espécimen entallado ($R = -1$). Comparación con las predicciones.

α (mm)	ρ (mm)	K_t (*)	σ_{FL}^N (Exp.) (MPa)(*)	σ_{FL}^N (Pred.) (MPa)(*)	Error ^(†) (%)	Observ.
3	3	2.65	80 - 75	66.6	14	$W = 45$ mm $\delta/\alpha = 6.5$
	0.83	4.23	60 - 55	56.1	2.4	
	0.39	5.72	65 - 60	54.7	12.5	
	0.16	8.48	65 - 60	54.2	13.3	

*Referido a la sección neta

† $Error = (Exp. - Pred.) / Exp. \times 100$, calculado con el valor medio los dos valores experimentales

No obstante, es importante hacer mención que estos mismos investigadores muestran en otras publicaciones resultados obtenidos sobre el mismo material y el mismo tipo de espécimen, con rangos de variación ligeramente diferentes a los empleados aquí, indicando que los propios resultados experimentales están sujetos a diferencias del mismo orden que los errores estimados. Por ejemplo, para la entalla más aguda ($\rho = 0.16$ mm), se puede comprobar que en las referencias de Tanaka y Nakai [19,20] el rango de variación del límite de fatiga se encontró entre 49.6 y 53 MPa, en lugar de entre 60-65 MPa, lo que conduciría a una diferencia respecto del valor predicho de un 5.6%, en lugar de 13.3%.

Dicha dispersión en los resultados experimentales se hace más patente en la Figura 6.11, donde se muestran las longitudes de grietas no-propagantes predichas y observadas, en función de la tensión aplicada al espécimen. La capacidad predictiva del modelo en este caso es menos aproximada que en los anteriores, no obstante, está razonablemente dentro de las diferencias obtenidas en los propios resultados experimentales.

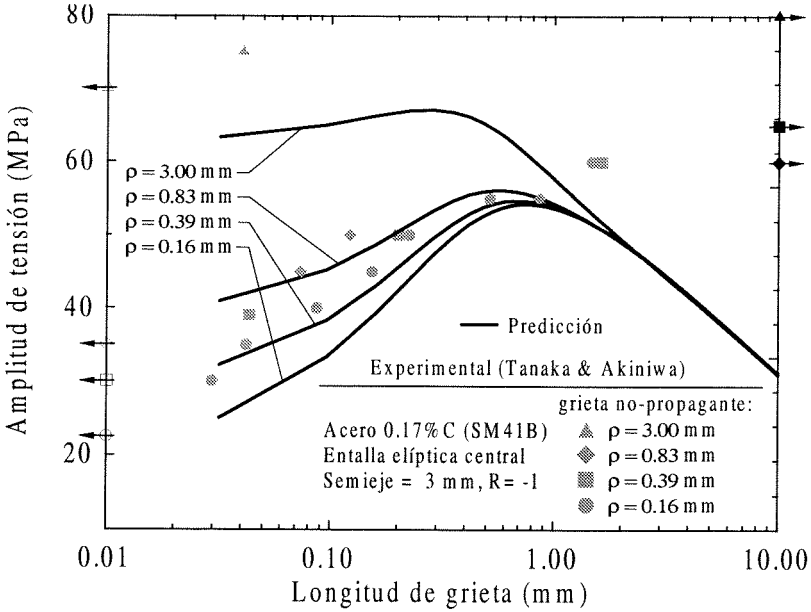


Figura 6.11: Tensión umbral σ_{Li}^N frente a la longitud de grieta.

Resultados de otros autores

A continuación se muestra la comparación de las predicciones del modelo con otros resultados experimentales recogidos en la literatura. En particular, se han analizado los resultados de Du Quesnay et al. [21, 22] para entallas circulares en placa plana (CNP) y aleación de aluminio (Al 2024-T351) y los de Lukáš et al. [23, 24] en especímenes cilíndricos con entalla circunferencial circular (CNB) en acero 2.25Cr-1Mo y en cobre electrolítico. Los tamaños de estas últimas variaron desde la decena de micra hasta el milímetro. Asimismo, se incluyen otros resultados de Tanaka et al. [20, 25] para entallas agudas, empleando el mismo tipo de espécimen que en el subapartado anterior. En uno de los casos el material fue SM41B, como anteriormente, pero la probeta se solicitó a tensión-tensión ($R = 0$) y en el otro se afinó el tamaño de grano, siendo la carga aplicada simétrica ($R = -1$). Las características mecánicas de los materiales empleados y los datos experimentales referentes a cada

especimen entallado se muestran en las Tablas 6.9 y 6.10 respectivamente.

Tabla 6.9: Características mecánicas de los materiales.

Material [Ref.]	R	σ_y (MPa)	$\sigma_{FL}^{(*)}$ (MPa)	$K_{th\infty}^{(*)}$ (MPa \sqrt{m})	D (μm)
Al 2024-T351 [21, 22]	-1	460	124	2.2	25×50×120
	0	460	85	1.7	(†)
Acero 2.25Cr-1Mo [23, 24]	-1	380	220	6	30
Cobre (99.98%Cu) [23, 24]	-1	40	73	2.5	50
JIS SM41B (0.17%C) [20]	0	194	137	4.18	64
idem (modificado) [25]	-1	280	198	5.09	14

* amplitud

† 50 μm en la dirección de crecimiento de la grieta

Las predicciones del modelo presentado y las diferencias respecto de los valores experimentales se muestran en la Tabla 6.10. Para los dos materiales empleados por Lukáš et al., el exponente f necesario para reproducir el diagrama de Kitagawa del material ha sido obtenido a partir de los datos experimentales, siendo el valor de éste 2.5 en ambos. En los demás casos, para los cuales no se posee dicha información, se ha tomado también un valor de 2.5 como valor representativo.

Como puede verse en dicha tabla, de entre todos los especímenes analizados, tan sólo ocho de ellos presentan un error respecto del valor medio experimental superior al 10%, de los cuales tres presentan una relación $\delta/\alpha \leq 5$. En estos tres casos debe existir una fuerte influencia del contorno del espécimen y, por tanto, la aplicación de las expresiones propuestas es cuestionable, según se discutió en el apartado anterior. La capacidad de predicción del modelo en los demás casos es muy razonable y dentro de la dispersión esperada en este tipo de ensayos.

En la Figura 6.12 se resumen todos los datos experimentales analizados en este apartado junto con las predicciones del presente modelo. Se han eliminado los 4

Tabla 6.10: Datos del espécimen entallado. Comparación con las predicciones.

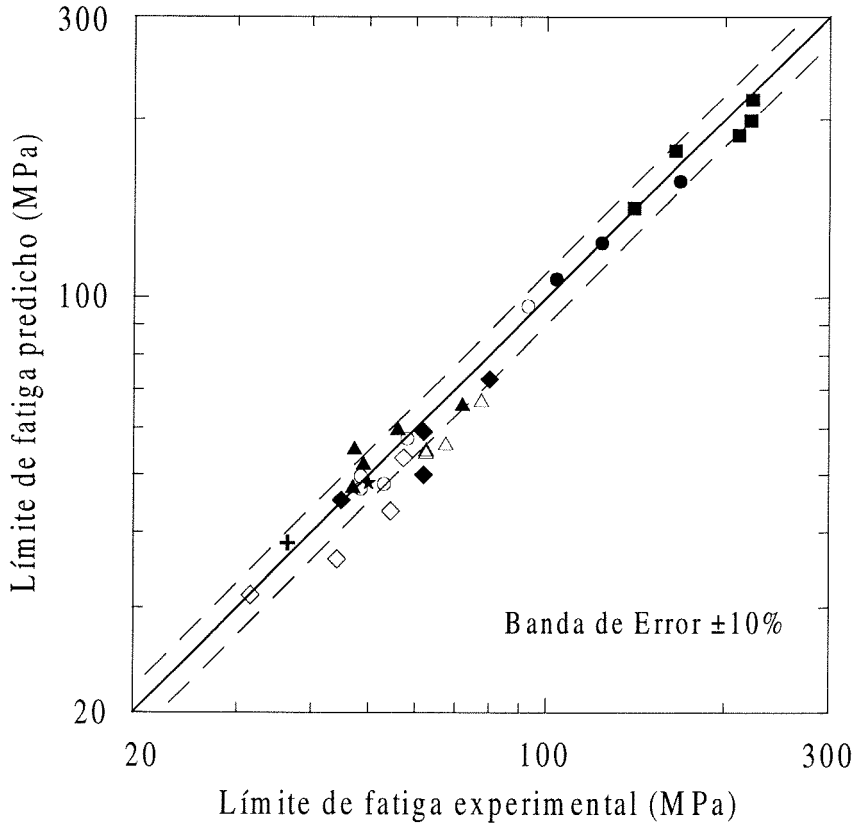
Tipo	R	α (mm)	ρ (mm)	K_t (*)	σ_{FL}^N (Exp.) (MPa)(*)	σ_{FL}^N (Pred.) (MPa)(*)	Error ^(†) (%)	Observ.
CNP	-1	0.12	0.12	3	80	72.9	8.8	Al 2024-T351 Ref. [21,22] $W = 44.6$ mm
		0.25	0.25	2.96	62	59.2	4.6	
		0.50	0.50	2.94	62	50	19	
		1.50	1.50	2.82	45	45.3	0.4	
	0	0.12	0.12	3	57.3	53.4	6.8	
		0.25	0.25	2.96	54.5	43.4	20	
		0.50	0.50	2.94	44.2	36.1	18	
		1.50	1.50	2.82	31.6	31.45	0.5	
CNB	-1	0.01	0.01	3.04	222.5±6	216.3	2.8	2.25Cr-1Mo Ref. [23,24] $\phi = 5$ mm ($\delta/\alpha = 5$) ($\delta/\alpha = 2.3$)
		0.03	0.03	2.99	221±7	199	9.9	
		0.05	0.05	2.95	211±15	187.5	11	
		0.07	0.07	2.92	165±5	176.5	-7	
		0.20	0.20	2.67	140.5±5	141.2	-5	
		0.41	0.41	2.32	150±5	120.8	19.5	
		0.76	0.76	1.87	160±5	124.1	22	
CNB	-1	0.05	0.05	2.95	72±2	65.5	9	Cobre Ref. [23,24] $\phi = 5$ mm ($\delta/\alpha = 4$) ($\delta/\alpha = 2.1$)
		0.10	0.10	2.87	56±2	59.5	-6.2	
		0.15	0.15	2.76	47.3±2	55.1	-16.6	
		0.20	0.20	2.67	49±2	51.9	-5.9	
		0.30	0.30	2.51	47±2	47.3	-0.6	
		0.50	0.50	2.19	46±2	43	-6.5	
		0.80	0.80	1.83	49±2	43.5	-11.2	
CNP	0	3	0.16	8.48	36.5±1.5	38.4	-5.2	Ref. [20]
CNP	-1	3	0.16	8.48	50±5	48.4	3.3	Ref. [25]

* Referido a la sección neta

† $Error = (Exp. - Pred.) / Exp. \times 100$, calculado con el valor medio experimental

especímenes en los que la relación δ/α es menor o igual a 5 con el fin de asegurar que el carácter finito de la pieza no influye en los resultados obtenidos. Como se puede apreciar, la gran mayoría de los puntos se sitúan dentro de una banda de error del $\pm 10\%$. Los restantes puntos se encuentran muy próximos a dicha banda, subestimando en general los datos experimentales y, por tanto, del lado de la seguridad.

En términos generales y a tenor de lo expuesto en este apartado, se puede concluir que el modelo propuesto proporciona una herramienta adecuada y simple de usar para la estimación de las condiciones umbrales de propagación de una grieta por fatiga en especímenes entallados. Las predicciones en cuanto a las tensiones límites, léase límite de iniciación y límite de fatiga, están en excelente acuerdo con las observaciones experimentales en un amplio rango de materiales y geometrías de especímenes y entallas, sometidos a cargas axiales de amplitud constante. Respecto al cálculo de las longitudes de grietas no-propagantes, los resultados obtenidos son razonables dentro de la inherente dispersión en tamaños que muestran las grietas en estos primeros estadios de crecimiento. Un conocimiento más preciso de las distribuciones estadística de las magnitudes microestructurales (e.g. tamaño de grano) permitiría abordar el estudio de este factor de manera más realista.



R	Material	Autor
◆ ◇	Al 2024-T351	Du Quesnay et al.
■	Acero 2.25Cr-1Mo	Lukás et al.
▲	Cobre 99.98% Cu	Lukás et al.
△ +	JIS SM41B (64 μm)	Tanaka et al.
★	JIS SM41B (14 μm)	Tanaka et al.
●	CSA G40.11	El-Haddad et al.
○	Acero 0.22% C	Frost & Dugdale

Figura 6.12: Comparación entre el límite de fatiga predicho y el límite de fatiga experimental para todos los casos analizados.

6.3 Resumen y observaciones

Las expresiones deducidas inicialmente para el caso simple de una entalla elíptica sometida a un estado antiplano de tensiones han sido generalizadas a otro tipo de geometrías de entallas. El factor clave para ello ha sido la similitud que presentan las distribuciones de tensión en diferentes entallas, las cuales pueden ser cuantificadas con suficiente aproximación a través del factor de concentración de tensiones, la profundidad de la entalla y el radio de curvatura de la misma.

El siguiente paso en la generalización fue evaluar la posibilidad de aplicar esta formulación a otro tipo de solicitaciones de carga de más interés práctico, en particular, las tensiones axiales de amplitud constante. Con este fin, se realizó una comparación entre las distribuciones de tensión σ_{yy} en especímenes sometidos a tracción uniforme con la expresión obtenida del análisis anterior, encontrándose un razonable acuerdo entre ambas siempre que exista una escasa influencia del carácter finito de la pieza. Así, tomando como base la probada similitud entre los gradientes de tensión para distintas entallas y teniendo en cuenta que la principal aportación de la entalla al proceso de propagación de una grieta en el material circundante al concentrador es a través del nivel y evolución de dichas tensiones, se ha propuesto aplicar directamente las expresiones deducidas a componentes entallados sometidos a tensiones axiales. Los resultados obtenidos al comparar las predicciones del modelo con los datos experimentales existentes en la literatura validan claramente las hipótesis prácticas realizadas. Los conceptos físicos expuestos para el desarrollo de dicha teoría prevalecen sobre tales hipótesis y permiten explicar el comportamiento a fatiga de una grieta en un componente entallado. No obstante, es importante hacer mención de algunos puntos claves que se han omitido a lo largo de este último paso de generalización en aras de la simplicidad matemática.

Abordar el estudio de un especimen entallado sometido a tensiones axiales mediante las técnicas de transformación conforme tiene dos diferencias fundamentales respecto del caso antiplano. Por un lado, la formulación de las ecuaciones de la

elasticidad en variable compleja requieren el uso de dos potenciales complejos (potenciales de Kolosov) en lugar de un solo potencial como en el caso antiplano [6]. Y, por otra parte, las dislocaciones a emplear para el modelado de la grieta deben de ser dislocaciones de borde, las cuales reproducen adecuadamente el Modo I de apertura de la grieta a través de los movimientos de escalada (climb) y deslizamiento (glide) [26]. El uso de este tipo de dislocaciones implica que la influencia de la superficie libre no puede ser tomada en cuenta simplemente mediante la técnica de las dislocaciones imágenes. Una consideración rigurosa de este efecto lleva al uso de términos adicionales al núcleo de Cauchy en la ecuación integral de equilibrio. Esto aumenta sensiblemente el grado de complejidad del proceso de resolución, pudiéndose realizar ésta solamente de forma numérica, no aportando ninguna novedad al conocimiento del proceso físico del crecimiento de grietas por fatiga en entallas, el cual es el objetivo planteado en esta tesis.

Bibliografia

- [1] Schijve, J. (1980), Stress Gradient around Notches, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* Vol. 3, pp. 325-332
- [2] Santhanam, A.T. and Bates, R.C. (1979), The Influence of Notch-tip Geometry on the Distribution of Stresses and Strains, *Mater. Sci. And Engng.*, Vol. 41, No. 2, pp. 107-114
- [3] Glinka, G. and Newport, A. (1987), Universal Features of Elastic Notch-tip Stress Fields, *Int. J. Fatigue*, Vol. 9, No. 3, pp. 143-150
- [4] Shin, C.S., Man, K.C. and Wang, C.M. (1994), A Practical Method to Estimate the Stress Concentration of Notches, *Int. J. Fatigue*, Vol. 16, pp. 242-256
- [5] Schijve, J. (1980), Stress Gradient around Notches, Report LR-397, Dept. Aero. Engng., Delft University of Technology.
- [6] Timoshenko, S. and Goodier, J.N. (1951), *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York
- [7] Maunsell, F.G. (1936), Stresses in a Notched Plate under Tension, *Phil. Mag.* XXI, No. CXLII, pp. 765-773
- [8] Shin, C.S. (1986), A Discussion on Various Estimations of Elastic Stress Distributions and Stress Concentration Factors for Sharp Edge Notches, *Int. J. Fatigue*, Vol. 8, No. 4, pp. 235-237

- [9] Howland, R.C.J. (1930), On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole, Trans. R. Soc. Lond., A 229, pp. 49-86
- [10] Armen, H., Pifko, A. and Levine, S. (1971), Finite Element Analysis of Structures in the Plastic Range, NASA CR-1649
- [11] El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith, K. N. (1979), Prediction of Non Propagating Cracks, Engng. Fract. Mech. 11, pp.573-584
- [12] El Haddad, M. H., Dowing, N. E., Topper, T. H. and Smith, K. N. (1980), J-integral Applications for Short Fatigue Cracks at Notches, Int. J. Fract. 16, pp.15-30
- [13] Peterson, R.E. (1974), Stress Concentration Factors, John Wiley & Sons, Inc.
- [14] Frost, N. E. and Dugdale, D. S. (1957), Fatigue Tests on Notched Mild Steel Plates with Measurement of Fatigue Cracks, J. Mech. Phy. Solids 5, pp.182-192
- [15] Frost, N. E. (1959), A Relation Between the Critical Alternating Propagation Stress and Crack Length for Mild Steel, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 173, No. 35, pp. 811-827
- [16] Frost, N.E., Pook, L.P. and Denton, K. (1971), A Fracture Mechanics Analysis of Fatigue Crack Growth Data for Varios Materials, Engng. Fract. Mech., Vol. 3, pp. 109-126
- [17] Young, W.C. (1989), Roark's Formulas for Stress and Strain (6th Edition), McGraw-Hill, Inc.
- [18] Tanaka, K. and Akiniwa, Y. (1987), Notch-Geometry Effect on Propagation Threshold of Short Fatigue Cracks in Notched Components, Fatigue'87 (R.O. Ritchie and E.A. Starke, Jr.), Third International Conference on Fatigue and Fatigue Thresholds, Vol. II, pp. 739-748, Charlottesville, Va.

- [19] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1984), Prediction of Fatigue Threshold of Notched Components, *J. Engng. Mater. and Tech., Trans. ASME*, Vol. 106, pp. 192-199
- [20] Tanaka, K. and Nakai, Y. (1983), Propagation and Non-propagation of Short Fatigue Cracks at a Sharp Notch, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* Vol. 6, No. 4, pp. 315-327
- [21] Du Quesnay, D.L., Topper, T.H. and Yu, M.T. (1986), The Effect of Notch Radius on the Fatigue Notch Factor and the Propagation of Short Cracks, in *The Behaviour of Short Fatigue Cracks*, EGF Pub. 1 (Eds. K.J. Miller and E.R. de los Rios), Mechanical Engineering Publications, London, pp. 323-335
- [22] Abbel-Raouf, H., Du Quesnay, D.L., Topper, T.H. and Plumtree, A. (1992), Notch-Size Effects in Fatigue Based on Surface Strain Redistribution and Crack Closure, *Int. J. Fatigue*, Vol. 14, No. 1, pp. 57-62
- [23] Lukáš, P., Kunz, L. Weiss, B. and Stickler, R. (1986), Non-damaging Notches in Fatigue, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 9, No. 3, pp. 195-204
- [24] Lukáš, P., Kunz, L. Weiss, B. and Stickler, R. (1989), Notch Size Effect in Fatigue, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 12, No. 3, pp. 175-186
- [25] Tanaka, K. and Akiniwa, Y. (1988), The Propagation of Short Fatigue Cracks at Notches, in *Basic Questions in Fatigue*, Vol. 1, ASTM STP 924 (Eds. J.T. Fong and R.J. Fields), American Society for Testing Materials, Philadelphia, pp. 281-298
- [26] Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N. and Korsunsky, A.M. (1996), *Solution of Crack Problems: The Distributed Dislocation Technique*. Kluwer Academic Publishers, Solid Mechanics and its Applications, Volume 44

Capítulo 7

Conclusiones y desarrollo futuro

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo para el estudio de las condiciones umbrales de propagación de grietas en entallas, incorporando, a diferencia de los modelos existentes, la influencia de la microestructura del material en el proceso de crecimiento, la cual es especialmente importante en la fase de grieta pequeña. Dicha influencia es considerada a través de la interacción de la grieta con las sucesivas barreras al deslizamiento plástico existentes en el material (generalmente los bordes de grano).

El proceso físico de crecimiento de la grieta a través de las barreras microestructurales puede entenderse como una competencia entre la resistencia de cada una de las barreras y la capacidad de dicha grieta para vencerlas. Por resistencia de las barreras se entiende aquella tensión local en la zona de la barrera que es necesario alcanzar para activar deslizamiento plástico en los granos contiguos, tal que permita que la grieta crezca dentro de ellos. En términos generales, esta tensión dependerá de dos factores: por un lado, la diferente orientación entre el plano de crecimiento de la grieta y los planos de los sistemas cristalográficos susceptibles de

ser activados en los granos adyacentes y, por otro lado, el efecto inducido por el cierre de grieta. Ambos factores aumentan en intensidad a medida que la grieta crece, aumentando así la resistencia de las sucesivas barreras y tendiendo a un valor estable para longitudes de grieta suficientemente grandes. Por otra parte, la capacidad de la grieta para superar cada una de estas barreras dependerá de la tensión a la que esté sometida la grieta, del tamaño de la misma y de la posición de la barrera.

Del análisis de las condiciones umbrales para propagar una grieta en un espécimen sin entalla se extrae, a la vista de los resultados experimentales, una conclusión importante: tanto el efecto de orientación como el efecto de cierre pueden ser del mismo orden de magnitud para materiales FCC sometidos a cargas axiales de amplitud constante y coeficiente de asimetría $-1 \leq R \leq 0$, y por tanto ambos factores deben ser tenidos en cuenta a la hora de estimar la resistencia de las sucesivas barreras microestructurales. El ritmo al que crece y se estabiliza la resistencia de las sucesivas barreras del material puede ser obtenido a partir del diagrama de Kitagawa-Takahashi del material (obtenido en un componente sin entalla).

En el caso de un espécimen entallado el balance entre la resistencia de las barreras microestructurales y la demanda de la grieta sobre cada una de ellas se ve sensiblemente alterado como consecuencia del fuerte gradiente de tensiones originado por el concentrador. El modelo planteado tiene en cuenta la influencia relativa de ambos factores, y permite definir claramente los umbrales de iniciación y de propagación hasta el fallo de una grieta en una pieza entallada, así como predecir la aparición de grietas no-propagantes.

El límite de iniciación se ha interpretado como la mínima tensión que es necesaria para que una grieta, creciendo dentro de un grano situado en el fondo de la entalla, sea capaz de superar la primera barrera microestructural. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en un espécimen libre de entallas, la iniciación no condiciona la propagación de la grieta hasta la rotura del componente. El fallo se

producirá sólo si la tensión aplicada es suficiente para que dicha grieta sea capaz de superar todas las barreras microestructurales que encuentre a su paso. La mínima tensión que provoca esto es interpretada como el límite de propagación hasta el fallo o límite de fatiga convencional del espécimen entallado. En última instancia, si la tensión aplicada está por debajo del umbral de propagación, la grieta siempre encontrará una barrera suficientemente resistente como para contener su crecimiento y convertirla en una grieta no-propagante.

La mayor parte de los comportamientos observados experimentalmente por diferentes autores en los especímenes entallados han tenido explicación dentro de la teoría planteada, en particular, el efecto del tamaño de la entalla, la dependencia del límite de fatiga con la microestructura y el tipo de material, la cuasi-constancia de dicho límite en la región de grietas no-propagantes en entallas con igual profundidad, la influencia de la plasticidad de la entalla en la aparición de grietas no-propagantes y el efecto de pequeños defectos o microentallas en la resistencia a fatiga del material.

En relación a la influencia de la plasticidad, el modelo desarrollado ha permitido estudiar la plastificación en la raíz de la entalla. Se ha podido estimar el tamaño de la zona plástica de la entalla y compararlo con el tamaño de las grietas no-propagantes en función de la tensión aplicada al componente, comprobándose que estas últimas eran siempre mayores que la zona plástica. La conclusión que se extrae de esto, avalada también por varios autores, es que la plasticidad de la entalla no determina la aparición de grietas no-propagantes.

Es interesante resaltar que el modelo de plastificación propuesto, el cual incorpora por su concepción el carácter heterogéneo del material en cuanto a la existencia de barreras al deslizamiento plástico, reproduce como caso extremo el comportamiento de un material continuo y homogéneo cuando el número de granos abarcados por la zona plástica es suficientemente grande. En particular, bajo la hipótesis de medio continuo y considerando que el material tiene un comportamiento elasto-plástico perfecto, dicho modelo coincide con el propuesto por E. Smith.

Las expresiones derivadas de la presente formulación, obtenidas originariamente en el caso simple de una entalla elíptica sometida a un estado antiplano de tensiones, han sido generalizadas para su aplicación a otro tipo de entallas y situaciones de carga, específicamente carga axial de amplitud constante. La clave para ello ha sido la similitud que presentan las distribuciones de tensión en entallas conteniendo los mismos parámetros característicos, es decir, igual factor de concentración de tensiones, profundidad y radio en el fondo de la entalla. El modelo planteado se ha comparado con un amplio rango de resultados experimentales existentes en la literatura, encontrándose, dentro de las diferencias esperables en este tipo de ensayos, muy buena concordancia. En particular, las predicciones obtenidas para el límite de fatiga se encuentran dentro de una banda de error del $\pm 10\%$ respecto de las observaciones experimentales.

Como contribución adicional del presente trabajo se ha desarrollado de una formulación compacta para el modelado, mediante la teoría de dislocaciones, de grietas en un medio infinito cuya zona plástica se extiende sobre un número arbitrario de regiones con diferentes tensiones de fricción, incluyendo los casos en que la distribución de dislocaciones sea acotada o no acotada en ambos extremos del dominio. Tanto la tensión de fricción como la tensión aplicada pueden ser funciones arbitrarias, de tal forma que la tensión efectiva en cada intervalo sea simplemente una función continua y acotada.

Se han obtenido las expresiones compactas del desplazamiento relativo entre las caras de la grieta y de la distribución de tensiones en frente de la zona plástica en función de la tensión efectiva sobre las dislocaciones, la cual suele ser el dato de partida en este tipo de problemas. Ello permite, a diferencia de como se venía haciendo hasta ahora, obtener dichas magnitudes sin necesidad de calcular explícitamente la función de distribución de dislocaciones. Además, en el caso del desplazamiento relativo de apertura se obtiene una expresión muy simple, que permite calcular la "forma" de la grieta a partir de la carga aplicada de manera similar a la técnicas que emplean funciones de Green o funciones de peso.

El patrón general que sigue la solución compacta de la distribución de dislocaciones y de las tensiones en el frente de la grieta comprende la suma de la solución correspondiente al problema acotado más dos términos singulares en los extremos del dominio, multiplicados estos por las expresiones de la *condición de existencia* y la *condición de grieta* para el caso acotado respectivamente. En el caso en que la tensión efectiva sobre las dislocaciones sea simétrica respecto de punto medio del dominio la *condición de grieta* de la solución acotada se satisface automáticamente, es decir, es idénticamente nula, y, por tanto, la presencia o no de la singularidad está asociada al cumplimiento de la *condición de existencia* del problema acotado. Por otra parte, la expresión compacta del desplazamiento relativo entre las caras de la grieta es idéntica en ambos problemas (acotado y no acotado).

A juicio del autor, los posibles desarrollos futuros del presente trabajo se centrarían en tres líneas:

En primer lugar, extender la formulación presentada al caso de un sólido semi-infinito con una entalla de forma genérica y sometido a un estado antiplano de tensiones. La clave sería básicamente poder transformar el dominio entallado a un semiplano sin entalla, donde todo el problema es fácilmente resoluble. En este sentido, el teorema de Riemann establece que, si el dominio original es simplemente conexo, como será nuestro caso, dicha transformación conforme es siempre posible. No obstante, el problema estará en encontrar su expresión matemática.

Una alternativa viable para esto sería hacer uso de la transformación de Schwarz-Christoffel, la cual permite obtener la expresión de la transformación conforme para pasar de un dominio poligonal en un semiplano infinito. Así se podría abordar el estudio de entallas con contorno poligonal, como caso más simple el de una entalla en V con radio tendiendo a cero, y por extensión el de cualquier otro tipo de entalla cuyo contorno sea convenientemente discretizado en tramos rectos. La obtención de la transformación conforme, salvo casos simples como el citado, requiere necesariamente un tratamiento numérico, aunque no excesivamente com-

plicado, existiendo hoy en día paquetes matemáticos especializados en el cálculo de este tipo de transformaciones.

Otra alternativa en la que ya se está trabajando es obtener las distribuciones de tensión mediante Elementos Finitos u otros métodos numéricos e interpretar dichas soluciones como una cierta "codificación" de la transformación conforme. De este forma se espera poder obtener expresiones para la sensibilidad a la entalla y el límite de fatiga directamente en función de las tensiones calculadas en la zona de la entalla.

La segunda línea sería abordar la resolución rigurosa del problema de una grieta en un espécimen entallado sometido a cargas axiales, por simplicidad e interés práctico con una entalla de geometría elíptica, mediante la técnica de transformación conforme y la teoría de dislocaciones. Los puntos claves son dos: por un lado la transformación de las ecuaciones de la elasticidad desde el dominio entallado al plano semi-infinito y por otro lado la influencia de la superficie libre en la distribución de dislocaciones que simula la grieta.

En relación al primer punto, las ecuaciones de equilibrio de la elasticidad en el plano complejo se expresan ahora en función de dos potenciales complejos, los potenciales de Kolosov, en lugar de uno sólo como es el caso antiplano. Para la determinación de dichos potenciales se emplean generalmente los métodos de expansión en serie de potencias, obteniéndose sus coeficientes a partir de las condiciones de contorno del problema. El segundo punto hace referencia a que ahora las dislocaciones que son necesarias para modelar la grieta deben ser dislocaciones de borde, las cuales se ven ligeramente afectadas por el contorno libre de la pieza. Baste recordar, por ejemplo, que la diferencia entre la existencia o no de una superficie libre en el cálculo del FIT para una grieta grande es aproximadamente de un 12%. En este caso, no es posible reproducir la presencia de éste contorno colocando únicamente dislocaciones imágenes simétricas respecto de la superficie libre, sino que es necesario colocar una distribución de dislocaciones extra a lo largo de la propia superficie. Esto se traduce simplemente en que en la ecuación

integral de equilibrio de las dislocaciones aparecen además del término de Cauchy otros términos adicionales que reflejan la interacción con el contorno libre y la resolución de las ecuaciones debe hacerse numéricamente.

La tercera línea de acción sería incorporar directamente en el modelo la descripción del mecanismo de cierre de grieta. Esto sería un paso muy interesante para reproducir de manera más realista las curvas de propagación de grietas en entallas bajo tensiones superiores al límite de fatiga del componente.

El cierre inducido por rugosidad, el cual es generalmente debido a los cambios de dirección que sufre la grieta al atravesar los granos aleatoriamente orientados, podría ser abordado en primera instancia permitiendo que la tensión de fricción en la grieta propiamente dicha sea distinta de cero y diferente en cada uno de los granos que ésta abarca. La representación multizona presentada en el Capítulo 3 podría servir como base matemática para este fin y habría que estudiar detenidamente en base a qué parámetros (orientación de los sucesivos granos, tensión local en el plano de crecimiento, etc.) cuantificar el nivel de interferencia en cada una de las zonas, así como considerar la orientación aleatoria de los granos, por ejemplo, mediante simulaciones del tipo Monte-Carlo. Por otro lado, para modelar el cierre inducido por plasticidad es necesario reproducir detalladamente el proceso completo de carga y descarga de la grieta, y simular la estela plástica a medida que la grieta crece. Una posible alternativa para esto último sería permitir que a medida que la grieta avanza queden sobre las caras de la misma dislocaciones residuales de la propia zona plástica que reproduzcan el material previamente deformado.

Apéndice A

Número neto de dislocaciones en el dominio

A partir de la función de distribución de dislocaciones, el número neto de dislocaciones N en el dominio viene dado por

$$N = \int_{x-k}^{x_k} f(x)dx = \delta \int_{-1}^1 f(\zeta)d\zeta \quad (\text{A.1})$$

Introduciendo en (A.1) la expresión de la distribución de dislocaciones del problema no acotado (ecuación (3.10))

$$\begin{aligned} \frac{N}{\delta} = \frac{1}{\pi^2 A} \left\{ - \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(\zeta' - \zeta)(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \right. \\ + \int_{-1}^1 \frac{\zeta}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta \\ \left. + \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1 - \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' \right] d\zeta + \frac{Q}{\delta} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Si se intercambia el orden de la integración en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{N}{\delta} = \frac{1}{\pi^2 A} \left\{ - \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1-\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta' - \zeta)} d\zeta \right] d\zeta' \right. \\ + \int_{-1}^1 \frac{P(\zeta')}{(1-\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right] d\zeta' \\ \left. + \int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1-\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right] d\zeta' + \frac{Q}{\delta} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Expandiendo la integral del primer sumando de la forma

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta' - \zeta)} d\zeta = (1-\zeta'^2) \int_{-1}^1 \frac{1}{(\zeta' - \zeta)(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta \\ + \zeta' \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta + \int_{-1}^1 \frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

y reordenando los términos se tiene

$$\frac{N}{\delta} = \frac{-1}{\pi^2 A} \int_{-1}^1 P(\zeta') (1-\zeta'^2)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}(\zeta' - \zeta)} d\zeta \right] d\zeta' + \frac{\pi}{\delta} Q \quad (\text{A.5})$$

Es fácil comprobar que la integral definida entre corchetes es siempre nula y, por tanto, el primer sumando es siempre nulo ($P(\zeta')$ acotada). En efecto,

$$(1-\zeta'^2)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}(\zeta' - \zeta)} d\zeta = \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1-\zeta'\zeta}{\zeta - \zeta'} \right| \right) \Big|_{\zeta=-1}^{\zeta=1} = 0, \quad (\text{A.6})$$

Así, para la solución no acotada, Q representa el número de dislocaciones en el dominio dividido por π

$$Q = \frac{N}{\pi} \quad , \quad \text{solución No acotada} \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo ahora la función de distribución de dislocaciones del problema acotado (ecuación (3.5)) y procediendo de manera análoga al caso anterior, se obtiene que

$$- \int_{-1}^1 \frac{\zeta' P(\zeta')}{(1-\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}} d\zeta' = \frac{\pi A}{\delta} N \quad , \quad \text{solución Acotada} \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Expresiones de $f(\zeta)$, $S(\zeta)$ y $\phi(\zeta)$ del modelo NR

Para la configuración mostrada en la Figura 4.1, la tensión efectiva sobre cada dislocación viene dada por

$$P(\zeta_i) = \begin{cases} \tau - \sigma_1^i, & \text{si } |\zeta_i| < n_1^i \\ \tau - \sigma_2^i, & \text{si } n_1^i < |\zeta_i| < n_2^i \\ \tau - \sigma_3^i, & \text{si } n_2^i < |\zeta_i| < 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde $\zeta_i = x/c$ es la coordenada adimensional en el plano de la grieta y $c = iD/2 + r_0^i$ la posición final del apilamiento. n_1^i y n_2^i son las posiciones adimensionales del vértice de la grieta y de la barrera del borde de grano respectivamente. El índice $i = 1, 2, 3, \dots$ representa el número de medios granos atravesados por las dislocaciones.

Particularizando las expresiones obtenidas en el Capítulo 3 al caso simple de una grieta simétrica y $P(\zeta_i)$ constante en cada intervalo ($k = 3$), la función de

distribución de dislocaciones en forma compacta se expresa como

$$f(\zeta_i) = \frac{1}{\pi^2 A} \left\{ (\sigma_2^i - \sigma_1^i) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_1^i \zeta_i}{n_1^i - \zeta_i} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_1^i \zeta_i}{n_1^i + \zeta_i} \right| \right) \right] \right. \\ \left. + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \left[\cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_2^i \zeta_i}{n_2^i - \zeta_i} \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_2^i \zeta_i}{n_2^i + \zeta_i} \right| \right) \right] \right\} \\ + \frac{2}{\pi^2 A} \frac{\zeta_i}{(1 - \zeta_i^2)^{\frac{1}{2}}} \left[(\sigma_2^i - \sigma_1^i) \sin^{-1} n_1^i + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \sin^{-1} n_2^i + \frac{\pi}{2} (\tau - \sigma_3^i) \right] \quad (\text{B.2})$$

Dado que en el material no pueden aparecer singularidades en la distribución de tensiones, la solución que se adopta es la acotada, la cual se obtiene haciendo cero el último sumando de la expresión (B.2), es decir, imponiendo la condición de existencia del problema acotado. Por tanto, debe cumplirse que

$$(\sigma_2^i - \sigma_1^i) \sin^{-1} n_1^i + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \sin^{-1} n_2^i + \frac{\pi}{2} (\tau - \sigma_3^i) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Esta expresión permite determinar el valor que σ_3^i debe tener en cada instante para mantener en equilibrio las dislocaciones del dominio.

Por otra parte, la distribución de tensiones $S(\zeta_i)$ en un punto genérico ζ_i ($|\zeta_i| > 1$) se obtiene directamente de las expresiones del capítulo anterior en la forma

$$S(\zeta_i) = \tau - \frac{1}{\pi} \left\{ (\sigma_2^i - \sigma_1^i) \left[\sin^{-1} \left(\frac{1 - n_1^i \zeta_i}{n_1^i - \zeta_i} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{1 + n_1^i \zeta_i}{n_1^i + \zeta_i} \right) \right] \right. \\ \left. + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \left[\sin^{-1} \left(\frac{1 - n_2^i \zeta_i}{n_2^i - \zeta_i} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{1 + n_2^i \zeta_i}{n_2^i + \zeta_i} \right) \right] \right\} \\ - 2 \left[(\sigma_2^i - \sigma_1^i) \sin^{-1} n_1^i + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \sin^{-1} n_2^i \right] \quad (\text{B.4})$$

Asimismo, el desplazamiento relativo entre las caras de la grieta queda

$$\phi(\zeta_i) = \frac{bc}{\pi^2 A} \left\{ (\sigma_2^i - \sigma_1^i) \left[(\zeta_i + n_1^i) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_1^i \zeta_i}{n_1^i + \zeta_i} \right| \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (\zeta_i - n_1^i) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_1^i \zeta_i}{n_1^i - \zeta_i} \right| \right) \right] \right. \\ \left. + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \left[(\zeta_i + n_2^i) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_2^i \zeta_i}{n_2^i + \zeta_i} \right| \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (\zeta_i - n_2^i) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_2^i \zeta_i}{n_2^i - \zeta_i} \right| \right) \right] \right\} \quad (\text{B.5})$$

Finalmente, el desplazamiento de apertura en el vértice de la grieta se obtiene particularizando (B.5) para $\zeta_i = n_1^i$, esto es,

$$\begin{aligned} \phi_i = \phi(n_1^i) = \frac{bc}{\pi^2 A} \left\{ 2(\sigma_2^i - \sigma_1^i) n_1^i \ln \left(\frac{1}{n_1^i} \right) \right. \\ \left. + (\sigma_3^i - \sigma_2^i) \left[(n_1^i + n_2^i) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 + n_2^i n_1^i}{n_2^i + n_1^i} \right| \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (n_2^i - n_1^i) \cosh^{-1} \left(\left| \frac{1 - n_2^i n_1^i}{n_2^i - n_1^i} \right| \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Teniendo en cuenta que la longitud de la barrera es mucho menor que el tamaño del apilamiento, en particular $r_0^i \ll D$, n_2^i será en todo instante muy próximo a la unidad. Así, sustituyendo en (B.6) la expresión de σ_3^i dada por (B.6) y considerando que $n_2^i \approx 1$, se obtiene una expresión más manejable para el desplazamiento de apertura en el vértice de la grieta, que en el caso de que no exista interacción entre las caras de la grieta ($\sigma_1^i = 0$) toma la forma siguiente

$$\phi_i = 2 \frac{bc}{\pi^2 A} \left\{ \sigma_2^i n_1^i \ln \left(\frac{1}{n_1^i} \right) + \frac{\pi}{2} \tau \sqrt{1 - (n_1^i)^2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_2^i}{\tau} \cos^{-1} n_1^i \right] \right\}, \quad (\text{B.7})$$

Se puede comprobar fácilmente que a medida que la grieta se aproxima a la barrera ϕ_i decrece, en particular, cuando ésta alcanza el borde de grano ($n_1^i = n_2^i \approx 1$) ϕ_i es cero,

$$\lim_{n_1^i \rightarrow 1} \phi_i = 0 \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Elasticidad antiplana en variable compleja.

Transformación conforme

C.1 Potencial complejo en deformación antiplana

El estado de deformación antiplana ocurre cuando las condiciones del problema elástico son tales que sólo existe desplazamiento en una única dirección del espacio, por ejemplo x_3 , e independiente de dicha coordenada, es decir,

$$u_1 = u_2 = 0 \quad u_3 = u_3(x_1, x_2) \neq 0 \quad (\text{C.1})$$

Haciendo uso de la ecuación de compatibilidad y de la ley de Hooke es fácil obtener el campo de tensiones y deformaciones en el sólido:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \tau_{12} = 0 \\ \tau_{13} &= G \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \tau_{23} &= G \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{C.3}$$

Las ecuaciones de equilibrio se reducen simplemente a la expresión

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} = 0\tag{C.4}$$

Sustituyendo (C.3) en (C.4) se obtiene

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \nabla^2 u_3 = 0,\tag{C.5}$$

lo que indica que u_3 debe ser una función armónica.

Las técnicas de variable compleja proporcionan una potente herramienta para la resolución de la ecuación de Laplace (C.5). Considérese la variable compleja z definida como $z = x_1 + ix_2$. Es fácil comprobar que las partes real e imaginaria de cualquier función compleja analítica $F(z)$ son necesariamente funciones reales armónicas y, por tanto, posibles soluciones de la ecuación de Laplace. En efecto, sea $F(z) = f_1(x_1, x_2) + if_2(x_1, x_2)$ una función analítica. La condición necesaria de analiticidad requiere el cumplimiento de las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\tag{C.6}$$

Haciendo uso de estas relaciones es inmediato comprobar que se cumple siempre

$$\nabla^2 f_1 = \nabla^2 f_2 = 0\tag{C.7}$$

Así, la solución general de la ecuación (C.5) puede escribirse como

$$u_3 = \frac{1}{G} f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{G} \operatorname{Re}(F(z))\tag{C.8}$$

El problema a resolver se reduce, por tanto, a encontrar una función analítica que cumpla las condiciones de contorno del problema. A dicha función se le conoce como *Potencial Complejo*.

Empleando las reglas de derivación en variable compleja

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = -i \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad (\text{C.9})$$

se pueden obtener las expresiones de las tensiones y deformaciones en función del potencial complejo como sigue

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= 2G\varepsilon_{13} = \operatorname{Re} \left(\frac{dF}{dz} \right) \\ \tau_{23} &= 2G\varepsilon_{13} = -\operatorname{Im} \left(\frac{dF}{dz} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Combinando las expresiones anteriores se llega a la relación

$$\tau_{13} - i\tau_{23} = \frac{dF}{dz} \quad (\text{C.11})$$

C.2 Potencial complejo de una dislocación de tornillo

Sea una dislocación de tornillo en un sólido infinito y situada en el origen del sistema de referencia. El campo de desplazamientos asociado a dicha dislocación viene dado por

$$u_3 = \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (\text{C.12})$$

donde b es el vector de Burgers. Asimismo, el campo de tensiones es

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \tau_{12} = 0 \\ \tau_{13} &= -\frac{Gb}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \tau_{23} &= \frac{Gb}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Utilizando (C.13) en la relación (C.11) se obtiene que

$$\frac{dF}{dz} = \tau_{13} - i\tau_{23} = -\frac{Gb}{2\pi} \left[\frac{x_2 + ix_1}{x_1^2 + x_2^2} \right] = -\frac{Gb}{2\pi} \frac{i}{z} \quad (\text{C.14})$$

Así, el potencial complejo de una dislocación de tornillo es

$$F(z) = -\frac{Gb}{2\pi} i \log z \quad (\text{C.15})$$

Si la dislocación se encuentra emplazada en un punto genérico z_0 el potencial que se obtiene es simplemente

$$F(z) = -\frac{Gb}{2\pi} i \log(z - z_0) \quad (\text{C.16})$$

C.3 Tensiones en el contorno transformado

Se probará que, al aplicar sobre un sólido elástico sometido a un estado antiplano de deformaciones una transformación conforme, las tensiones tangenciales que actúan sobre cada punto de una curva suave en el plano transformado se calculan como el producto de las tensiones existentes sobre dicha curva en la configuración original, por el módulo de la derivada de la transformación en el punto correspondiente.

En efecto, sea una curva suave γ en el plano Z que se transforma de manera conforme mediante la función $\chi = \chi(z)$ en una curva γ' del plano χ (véase Figura C.1). Sobre un elemento diferencial en la curva γ existe una tensión aplicada τ , la cual se transformará en una cierta tensión τ' sobre γ' .

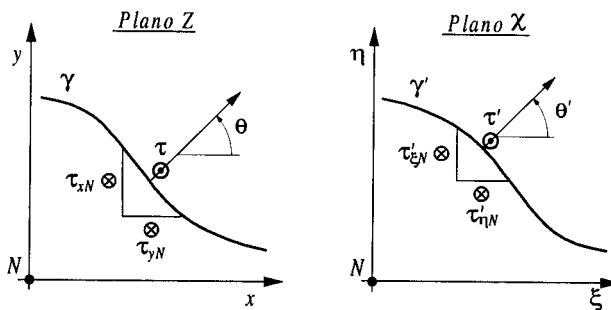


Figura C.1: Tensión en el contorno original y en el correspondiente contorno transformado.

Imponiendo el equilibrio en tensiones sobre el elemento $d\gamma$ se obtiene que

$$\tau = \tau_{xN} \frac{dy}{d\gamma} + \tau_{yN} \frac{dx}{d\gamma} = \tau_{xN} \cos \theta + \tau_{yN} \sin \theta \quad (\text{C.17})$$

donde θ es el ángulo que forma la normal a la curva con el eje horizontal. Esta relación de equilibrio puede expresarse de forma más compacta empleando la representación de las tensiones mediante el potencial complejo. Así, empleando la relación entre las tensiones tangenciales y el potencial complejo F , $\tau_{xN} - i\tau_{yN} = dF/dz$, es fácil comprobar que (C.17) se puede expresar como

$$\tau = \text{Re} \left(e^{i\theta} \frac{dF}{dz} \right) \quad (\text{C.18})$$

Procediendo de la misma forma sobre el elemento $d\gamma'$ en el plano transformado y teniendo en cuenta la relación $\tau'_{\xi N} - i\tau'_{\eta N} = dF/d\chi$, la ecuación de equilibrio se expresa

$$\tau' = \text{Re} \left(e^{i\theta'} \frac{dF}{d\chi} \right) \quad (\text{C.19})$$

donde θ' es el ángulo entre la transformada de la normal a γ y la horizontal en el plano χ . Atendiendo a las propiedades de la transformada conforme, el vector transformado de la normal a γ será también normal a γ' .

Por otra parte, existe una relación directa entre los ángulos θ y θ' y el argumento de la derivada de la transformación, la cual se expresa como

$$\arg \left(\frac{dz}{d\chi} \right) = \arg(dz) - \arg(d\chi) = \theta - \theta' \quad (\text{C.20})$$

Así, teniendo en cuenta que $\frac{dF}{d\chi} = \frac{dz}{d\chi} \frac{dF}{dz}$ e introduciendo (C.20) en la expresión (C.19) se obtiene

$$\tau' = \text{Re} \left(e^{i\theta} e^{-i\arg\left(\frac{dz}{d\chi}\right)} \frac{dz}{d\chi} \frac{dF}{dz} \right) = \left| \frac{dz}{d\chi} \right| \text{Re} \left(e^{i\theta} \frac{dF}{dz} \right) \quad (\text{C.21})$$

Por último, atendiendo a la ecuación (C.18), se obtiene

$$\tau' = \left| \frac{dz}{d\chi} \right| \tau, \quad (\text{C.22})$$

como se pretendía demostrar.

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, se desprende que los contornos libres de tensiones en la configuración original ($\tau = 0$) seguirán siendo contornos libres de tensiones en el plano transformado ($\tau' = 0$), cualquiera que sea la transformación conforme empleada.

Apéndice D

Tamaño de la entalla vs. tamaño microestructural en la iniciación de grietas

Dada la dependencia explícita del límite de iniciación con el tamaño relativo de la entalla y el tamaño medio microestructural, es interesante estudiar los casos extremos en los que una de las dimensiones es claramente superior a la otra, es decir, $\alpha, \beta \ll D/2$ o bien $\alpha, \beta \gg D/2$.

Considérese para ello una serie de entallas geoméricamente semejantes (K_t constante), es decir, α/β permanece constante en todas ellas. Tomando límites en las expresión (5.35) cuando $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow \infty$ se tiene

$$\lim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow \infty} K_{f1} = K_t \lim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\bar{\beta} \lambda_1} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{\bar{\beta}^2 + (\bar{\beta} \lambda_1)^2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.1})$$

Expresando λ_1 (5.34) en función de $\bar{\alpha}$ y K_t ($\bar{\beta} = \bar{\alpha}/(K_t - 1)$) es fácil comprobar

que

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow \infty} \bar{\beta} \lambda_1 &= \lim_{\bar{\alpha} \rightarrow \infty} \frac{1}{K_t(K_t - 2)} \left[(K_t - 1) \sqrt{(\bar{\alpha} + 1)^2 - \bar{\alpha}^2 + \frac{\bar{\alpha}^2}{(K_t - 1)^2}} - (\bar{\alpha} + 1) \right] \\ &= \frac{(K_t - 1)^2 - 1}{K_t(K_t - 2)} = 1 \end{aligned} \tag{D.2}$$

Sustituyendo este resultado en (D.1) se obtiene que

$$\lim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow \infty} K_{f1} = K_t \tag{D.3}$$

con K_t constante. El valor límite de iniciación será, por tanto, el valor del límite de fatiga del componente sin entalla dividido entre el factor de concentración de tensiones teórico de la entalla.

Por otra parte, tomando ahora límites en las expresiones anteriores cuando $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow 0$ se obtiene

$$\lim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow 0} \bar{\beta} \lambda_1 = \frac{1}{K_t} \tag{D.4}$$

y, por tanto,

$$\lim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow 0} K_{f1} = K_t \lim_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\bar{\beta} \lambda_1} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{\bar{\beta}^2 + (\bar{\beta} \lambda_1)^2}} \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 \tag{D.5}$$

Esta situación refleja el hecho de que la influencia de la entalla en el comportamiento a fatiga del especimen es despreciable siempre que su tamaño sea muy pequeño en comparación al tamaño microestructural característico. El límite de iniciación será muy próximo al límite de fatiga del componente sin entalla.

Apéndice E

Consideración de medio continuo y homogéneo en la plastificación de la entalla

En la gran mayoría de las aplicaciones prácticas la magnitud microestructural característica del material es tan pequeña en relación a las magnitudes características del problema, que puede permitir utilizar la hipótesis de que el material se comporta idealmente como un medio continuo y homogéneo. Haciendo D muy pequeño, en el límite $D \rightarrow 0$, la expresión (5.67), que reescribimos aquí

$$\begin{aligned} \tau = \tau_y \left[1 - \frac{2 K_t - 1}{\pi K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right) \right] + \\ \frac{\tau_y - \sigma_2^1}{\sqrt{i}} \left(\frac{m'_i}{m'_1} \right) \left[\frac{\sqrt{iD/2}}{K_t \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{\lambda_i} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2 K_t - 1}{\pi K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

con $\lambda_i = \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + iD/2)^2 - \gamma^2} - \beta(\alpha + iD/2) \right]$, reproduce el comportamiento de un medio continuo y homogéneo.

Calculemos el valor de la tensión aplicada a la que comienza la plastificación en la raíz de la entalla bajo la hipótesis anterior. Para ello, bastará particularizar (E.1) para la primera barrera $i = 1$ y hacer que $D \rightarrow 0$. Los siguientes límites son inmediatos:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \lambda_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{D \rightarrow 0} \frac{D/2}{\lambda_1} = \beta \quad (\text{E.2})$$

Introduciendo dichos límites en (E.1) se tiene

$$\tau = \tau_y \left[1 - \frac{K_t - 1}{K_t} \right] + (\tau_y - \sigma_2^1) \left(\frac{m'_i}{m'_1} \right) \left[\frac{1}{K_t} + \frac{K_t - 1}{K_t} - 1 \right] = \frac{\tau_y}{K_t}, \quad (\text{E.3})$$

que coincide con el bien conocido resultado obtenido aplicando directamente la teoría de la elasticidad (recuérdese que estamos en un problema antiplano).

Por encima de la tensión anterior, la zona plástica se desarrollará hasta alcanzar una cierta extensión (finita) desde la raíz de la entalla. Denotemos por $s = iD/2$ esta distancia. Nótese que para obtener un valor de s finito al hacer $D \rightarrow 0$, necesariamente, el valor de i debe tender a infinito. Así, manteniendo $s = iD/2$ finito y, por tanto, $\lambda_i = \lambda_s$ finito, y haciendo $D \rightarrow 0$ e $i \rightarrow \infty$ en la expresión (E.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \tau = \tau_y & \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_s}{\sqrt{1 + \lambda_s^2}} \right) \right] + \\ (\tau_y - \sigma_2^1) & \left(\frac{m'_i}{m'_1} \right) \left[\lim_{D \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{D/2}}{K_t \sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{\lambda_s} + \frac{K_t - 1}{\sqrt{1 + \lambda_s^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \right. \\ & \left. \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{\sqrt{i} \pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_s}{\sqrt{1 + \lambda_s^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{i}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

El primer término entre corchetes siempre será finito, pero, en cambio, el segundo término tenderá a cero. Por tanto, la tensión necesaria para extender la zona plástica una cantidad finita s , en la hipótesis de medio continuo y homogéneo, se puede escribir como

$$\tau = \tau_y \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{K_t - 1}{K_t} \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_s}{\sqrt{1 + \lambda_s^2}} \right) \right] \quad (\text{E.5})$$

con $\lambda_s = \frac{1}{\gamma^2} \left[\alpha \sqrt{(\alpha + s)^2 - \gamma^2} - \beta(\alpha + s) \right]$.