

T. 199

Recibido  
Fonc

**TESIS**

**ANÁLISIS DINÁMICO DE IMPACTOS  
EN BARRAS FLEXIBLES**

presentada por

**José Luis Escalona Franco**  
**Ingeniero Industrial**

en la

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS**

de la

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

para la obtención del  
**Grado de Doctor Ingeniero Industrial**

Sevilla, noviembre de 2000



**TESIS DOCTORAL**

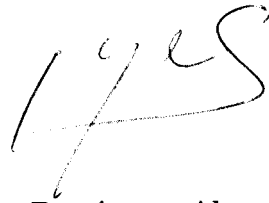
**ANÁLISIS DINÁMICO DE IMPACTOS  
EN BARRAS FLEXIBLES**

Sevilla, a 21 de noviembre de 2000



**Fdo.- Juana Mayo Núñez**

**Directora de Tesis**



**Fdo.- Jaime Domínguez Abascal**

**Director de Tesis**



**Fdo.- José Luis Escalona Franco**

**Doctorando**

# Agradecimientos

Doy las gracias a los Profesores Juana Mayo y Jaime Domínguez por lo que me han enseñado, su dedicación y paciencia. Al Profesor Ahmed Shabana por trasmitirme su entusiasmo.

Agradezco al Profesor Carpóforo Vallellano su ayuda y su compañía y al Profesor Ramón Abascal su interés. Reparto más agradecimientos por mis compañeros y amigos, mi familia y Carmen Seda.

*a Ino*

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisión Bibliográfica</b>	<b>7</b>
2.1	Antecedentes . . . . .	7
2.2	Estado actual del tema . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Métodos Clásicos Aproximados</b>	<b>19</b>
3.1	Introducción . . . . .	19
3.2	Impactos de sólidos rígidos. El coeficiente de restitución . . . . .	20
3.3	Aproximación cuasiestática estructural . . . . .	27
3.4	Aproximación cuasiestática local . . . . .	32
3.4.1	Teoría de Hertz del Contacto . . . . .	33
3.4.2	Aproximación Cuasiestática al Impacto usando la Teoría de Hertz del Contacto . . . . .	35
3.5	Impacto de sólidos masivos y de sólidos dispersos . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Impactos Axiales en Barras</b>	<b>41</b>
4.1	Introducción . . . . .	41
4.2	Propagación de ondas longitudinales en barras flexibles . . . . .	42
4.3	Impacto axial de barras flexibles . . . . .	46
4.4	Impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible libre . . . . .	52

4.5	Impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible empotrada . . . . .	57
4.6	Comparación con la teoría de impactos de sólidos rígidos . . . . .	65
4.7	Procesos de separación . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Análisis de Impactos como Vibraciones Libres</b>	<b>75</b>
5.1	Introducción . . . . .	75
5.2	Representación de ondas elásticas mediante superposición modal . . . . .	76
5.3	Impacto axial en barras elásticas mediante superposición modal . . . . .	80
5.4	Impacto en estructuras ligeras . . . . .	89
5.5	Impacto transversal en barras elásticas mediante superposición modal . . . . .	93
5.6	Propagación de ondas en barras elásticas giratorias . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Balance de Impulso y Cantidad de Movimiento</b>	<b>111</b>
6.1	Introducción . . . . .	111
6.2	Ecuaciones del movimiento de mecanismos flexibles . . . . .	112
6.3	Ecuaciones de conservación de impulso y cantidad de movimiento . . . . .	116
6.4	Aplicación de las ecuaciones de conservación . . . . .	119
6.4.1	Impacto axial de un sólido rígido en una barra elástica empotrada en un extremo . . . . .	120
6.4.2	Impacto transversal de un sólido rígido en una barra elástica giratoria . . . . .	130
6.4.3	Impacto transversal de un sólido rígido en un mecanismo de cuatro barras . . . . .	134
6.4.4	Cambio de juego de modos . . . . .	138
<b>7</b>	<b>Modelos Continuos de Fuerza de Contacto</b>	<b>147</b>
7.1	Introducción y clasificación . . . . .	147
7.2	Modelo elástico lineal . . . . .	149
7.3	Fuerzas anelásticas de contacto . . . . .	149
7.3.1	Fuerzas viscoelásticas . . . . .	149
7.3.2	Fuerzas elastoplásticas . . . . .	152

7.3.3	Modelo elastoplástico de Yigit y Christoforou . . . . .	153
7.3.4	Modelo plástico lineal . . . . .	155
7.3.5	Modelo plástico potencial . . . . .	157
<b>8</b>	<b>Impactos en Estructuras</b>	<b>167</b>
8.1	Introducción . . . . .	167
8.2	Impacto axial con fuerza de contacto elástica lineal . . . . .	168
8.3	Impacto transversal con fuerza de contacto elástica lineal . . . . .	174
8.4	Impactos transversales en barras flexibles con fuerzas elastoplásticas	177
8.4.1	Modelos de vigas de Euler-Bernouilli y Timoshenko . . . . .	180
8.4.2	Resultados numéricos . . . . .	185
8.4.3	Comparación con la aproximación cuasiestática estructural	192
8.4.4	Impacto transversal con pequeños impactores . . . . .	196
<b>9</b>	<b>Experimentos de Impactos en Barras</b>	<b>199</b>
9.1	Introducción . . . . .	199
9.2	Impacto axial en barra elástica libre mediante superposición modal	203
9.3	Impacto en una barra elástica libre con contacto de Hertz . . . . .	208
9.4	Importancia de las deformaciones locales para pequeños impactores	212
9.5	Impacto de un péndulo elástico en una barra con contacto de Hertz	216
9.6	Comparación con resultados experimentales . . . . .	221
<b>10</b>	<b>Influencia de las Condiciones de Referencia</b>	<b>225</b>
10.1	Introducción . . . . .	225
10.2	Impacto axial en barra libre. Conexión rígida y conexión libre . . .	227
10.3	Impacto transversal. Conexiones rígida y articulada . . . . .	236
<b>11</b>	<b>Resumen, Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>245</b>
11.1	Resumen . . . . .	245
11.2	Conclusiones . . . . .	249
11.3	Trabajos futuros . . . . .	253

# Capítulo 1

## Introducción

Cuando el ingeniero diseña un sistema mecánico y quiere estimar los esfuerzos a los que estará sometido durante su funcionamiento no le suele ser complicado encontrar situaciones de carga sencillas similares a la que sufrirá el sistema. Estas estimaciones son muy valiosas, pues la falta de exactitud se suple con creces con el hecho de que mentalmente puede comprender cómo se comporta el sistema.

El primer paso es hacer un modelo sencillo del sistema. Suponer que un rascacielos es una viga en voladizo puede parecer muy atrevido, sin embargo, se puede comprender que le ocurre cuando se llena de gente y muebles, cuando le sopla el viento o cuando hay un terremoto, gracias a ese modelo tan simple. No suele ser complicado hacer hipótesis sencillas, de nuevo, de estos estados de carga. Cargas axiales o transversales distribuidas o un movimiento armónico de la base.

Después vendrá la ingeniería de detalle, con sus cálculos realizados en interminables horas de computación por poderosos ordenadores. Sin embargo, el ingeniero no dormiría tranquilo si estos resultados no guardan similitud con los que se obtienen con sus modelos sencillos. El problema es que estos modelos complicados están fuera de su control, difícilmente podría repasarle las cuentas a la máquina o detectar a ojo un error de entre la multitud de resultados.



Cuando el ingeniero se encuentra ante cargas de impacto en su sistema mecánico no sabe que hacer. No sabe modelar el sistema pues no sabe como afecta el impacto al sistema. No sabe modelar la carga pues no conoce las fuerzas que aparecen, como se distribuyen ni cuanto tiempo actúan.

Newton descifró como cambian la velocidades de los cuerpos cuando chocan y dio un rango dentro del que se debe mantener el impulso asociado a la fuerza de contacto, que es el producto de la fuerza por el tiempo en que actúa. Así se puede calcular el impulso máximo que se puede dar, pero ¿qué se puede hacer con él?

Sería bastante fácil estimar como se comporta una estructura en reposo cuando un objeto mucho mayor que ésta choca con ella. Sin embargo, de poco sirven cuando se sabe que en realidad la estructura probablemente se destruya. También es sencilla la situación en la que el objeto es mucho menor que la estructura, en cuyo caso el problema tampoco es muy grande. Y ¿qué pasa con las situaciones intermedias, las importantes, las que suponen un problema de diseño en la realidad?

El impacto es un problema muy particular. Lo que antes o después gobierna el comportamiento de los cuerpos parece no tener ninguna importancia cuando ocurre el impacto. Se sabe que es rápido y violento. La violencia es el resultado del horror que siente la naturaleza al simple intento de los cuerpos de violar una de sus leyes principales: dos objetos no pueden estar en el mismo lugar al mismo tiempo.

Dos sólidos viajan con ciertas velocidades y entran en contacto. Inicialmente el contacto ocurre entre dos puntos, pero la deformación hace que el contacto se amplíe a dos superficies, las colindantes a los puntos iniciales. Entre estas superficies aparecen tensiones de compresión y tensiones tangenciales debidas a la fricción, que se propagan a través de los sólidos en forma de ondas. Estas ondas se reflejan en los contornos de los sólidos. Las ondas reflejadas pueden alcanzar de nuevo la zona de contacto. Esta situación se mantiene mientras entre las superficies de contacto haya compresión. Cuando la fuerza de contacto se hace nula los sólidos

se separan, aunque puede que no definitivamente, cabe la posibilidad de que entren de nuevo en contacto antes de continuar sus viajes independientemente.

Durante el periodo -o periodos- de contacto los sólidos intercambian energía y cantidad de movimiento. Tras el proceso parte de la energía cinética que inicialmente tenían los sólidos se transforma en energía térmica, debido a los procesos irreversibles de fricción y posiblemente de deformación plástica. Cuando termina el contacto, las ondas de tensión-deformación permanecen viajando en el interior de los sólidos, se dice que los sólidos quedan vibrando. Las energías cinética y potencial de deformación asociadas a la vibración también se habrán abstraído de la energía cinética del movimiento inicial de los sólidos. Aunque el fenómeno es ajeno al impacto, se sabe que esta vibración acabará por amortiguarse, por disiparse de nuevo en energía térmica debido a los procesos de histéresis del material o fricción interna. La energía que ha dejado de transformarse por fricción o plasticidad en energía térmica o en vibración permanecerá en forma de energía cinética de los movimientos de sólido rígido de los cuerpos implicados. Si los cuerpos inicialmente tuvieran algún tipo de energía potencial, como la gravitatoria, ésta no entraría en el juego del intercambio, pues la posición de los sólidos prácticamente no varía durante el proceso de contacto.

Aunque se sabe que así ocurre el proceso, no existe ninguna solución analítica exacta, con hipótesis simplificativas razonables en la práctica, que nos muestre como ocurre cuantitativamente el impacto con cierta generalidad.

Las soluciones analíticas que se conocen ignoran siempre alguno de los efectos principales. Por efectos principales se entiende los que ocurren con toda seguridad, esto es, los procesos de deformación de las superficies de contacto y de propagación de ondas elásticas. Podrían ocurrir impactos en los que no hubiera plasticidad o fricción. Aun así, se han planteado soluciones en las que se ignoran efectos principales, y los que no se ignoran se simplifican en gran medida mediante suposiciones cuasiestáticas. Estas soluciones son bastante intuitivas y pueden ayudar a comprender el proceso en determinadas situaciones. Sin embargo, también pueden

confundir cuando se extrapolan sin conocer su rango de validez.

Los modernos cálculos numéricos abren grandes posibilidades para simular impactos entre sólidos flexibles. Hay detalles técnicos importantes que no están del todo resueltos, y que han dado lugar a diferentes métodos para simular el proceso. El resolver al mismo tiempo el contacto entre los sólidos, que puede ocurrir en zonas de tamaño casi microscópico, y la propagación de las ondas inducidas en sólidos de dimensiones muchísimo mayores, es uno de estos detalles. La propagación de ondas elásticas es también un proceso complejo difícil de simular, más aún cuando las técnicas numéricas están en muchos casos pensadas para realizar cálculos en estructuras, a veces estáticos, y luego ampliadas a sistemas de cuerpos flexibles interconectados que experimentan grandes rotaciones. Hay grandes diferencias de comportamiento entre las primeras y los últimos.

La complejidad del proceso de propagación de ondas elásticas en medios continuos hace que en cualquiera de las soluciones propuestas al problema del impacto se haga algún tipo de aproximación cuasiestática. Las aproximaciones cuasiestáticas suponen que en los sólidos, o en parte de éstos, se alcanza el equilibrio estático de fuerzas instantáneamente. La relativa validez de las aproximaciones cuasiestáticas depende de las relaciones entre el tiempo característico de evolución del proceso del impacto y el de propagación de las ondas elásticas a lo largo de los espacios en los que se realizan dichas aproximaciones.

Existe una idea muy extendida sobre impactos de sólidos que hay que rechazar totalmente. En mecánica de sólidos rígidos se supone que los impactos tienen una duración tan corta que se puede suponer infinitesimal y que las fuerzas de contacto y de reacción vincular son tan grandes que el resto de las que actúan en los sólidos durante el contacto son despreciables. Estas hipótesis han dado lugar a la dinámica impulsiva. En mecánica de sólidos flexibles la duración del impacto no es pequeña. En general las fuerzas de contacto no se pueden aproximar por una delta de Dirac de duración nula. Si bien estas aproximaciones son razonables en mecánica de sólidos rígidos al ser la duración del impacto mucho menor que el

tiempo característico de evolución del estado de los sólidos, no es así cuando se modela la flexibilidad. La explicación es que el impacto, y por tanto su duración, está en gran medida gobernado por la propagación de ondas en los sólidos, que es lo que se pretende modelar con la flexibilidad. La duración del impacto puede ser o del mismo orden o bastante superior al tiempo de propagación de estas ondas en dimensiones características de los sólidos implicados. Por tanto se podría incluso decir en muchos casos que el impacto tiene una larga duración.

Este trabajo está dedicado al impacto entre sólidos flexibles. Se tratarán impactos normales en los que los sólidos implicados tienen velocidad relativa normal, pero no tangencial, evitando así el problema de fricción. Los sólidos pueden ser libres, estructuras sin movimientos de sólido rígido o pertenecientes a mecanismos flexibles. Esta tesis está dividida en nueve bloques. En el primer capítulo se hace una revisión bibliográfica del tema que se va a tratar, recordando los trabajos clásicos y recientes más relevantes. Los tres siguientes muestran aproximaciones analíticas, muchas de ellas bien conocidas y otras no tanto. En estos capítulos se han aportado sobre todo nuevos ejemplos, nuevos puntos de vista y consecuencias. En el capítulo segundo se parte de la teoría clásica del impacto entre sólidos rígidos y luego se muestran los dos tipos fundamentales de aproximaciones cuasi-estáticas clásicas, la locales y las estructurales. En el tercero se introducen los conceptos de propagación de ondas elásticas. Para esto se recurre a las ondas elásticas monodimensionales, que sirven para describir el impacto longitudinal de barras elásticas. En varios ejemplos se ilustra la propagación de ondas inducidas por los impactos y el fenómeno de los impactos múltiples. El capítulo 4 muestra los mismos fenómenos, pero desde el punto de vista de la teoría de vibraciones y la superposición modal, lo que nos permite introducir impactos transversales en barras.

Los siguientes capítulos de esta tesis se dedican a la simulación de impactos mediante integración numérica. En el capítulo 5 se analiza el método del balance del impulso y cantidad de movimiento para impactos en mecanismos flexibles.

Para ello se introduce la formulación en sistemas de referencia flotantes, que es el método más extendido en la actualidad para el análisis de este tipo de sistemas mecánicos. A través de una serie de problemas de impacto en barras elásticas, se discute la forma de aplicación de este método, la selección del coeficiente de restitución y se comparan los resultados. En el capítulo 6 se introducen distintos tipos de modelos continuos de fuerza de contacto para su aplicación a problemas de impacto. Además, se introducen dos nuevos modelos elastoplásticos, basados en resultados analíticos, numéricos y experimentales. Estos modelos, junto con el modelo elástico lineal de fuerza de contacto, son aplicados en el capítulo 7 a impactos axiales y transversales de sólidos rígidos en barras elásticas. Los ejemplos utilizados en este capítulo usan sólidos flexibles sin posibilidades de movimiento de sólido rígido. En este capítulo se utilizan elementos finitos, usando coordenadas nodales o modales si se usa síntesis modal de componentes, y modos definidos analíticamente para describir la elasticidad de los sólidos.

Los capítulos 8 y 9 tratan también el impacto en barras elásticas, pero teniendo éstas posibilidad de movimiento de sólido rígido. Para plantear las ecuaciones del movimiento se usa de nuevo el método de los sistemas de referencia flotantes y modos de vibración definidos analíticamente para describir las deformaciones. Los resultados, que usan modelos continuos de fuerza de contacto para la simulación de impactos, se comparan con resultados experimentales. En el capítulo 9 se hace un estudio de la influencia de las condiciones de referencia, que marcan el tipo de conexión entre el sistema de referencia local en el que se define la deformación con el sólido deformable al que está ligado, en el análisis de ondas inducidas por el impacto.

Finalmente, en el capítulo 10 se hace un resumen de esta tesis, se sacan conclusiones y se enumeran una serie de trabajos futuros para completar los estudios que se presentan.

## Capítulo 2

# Revisión Bibliográfica

### 2.1 Antecedentes

El estudio del impacto de sólidos en la mecánica como ciencia se remonta a los orígenes de ésta. En el siglo XVII Newton (1686) observa que el impacto entre sólidos rígidos es un problema particular que necesita hipótesis adicionales para determinar el movimiento de los cuerpos. La primera hipótesis es que la duración del contacto es tan corta que se puede considerar el proceso instantáneo. Esta hipótesis se plantea por una limitación humana así como por una restricción técnica. Observando el choque entre dos sólidos que se pueden considerar rígidos, nuestros sentidos no son capaces de apreciar el tiempo en que se mantienen en contacto, los vemos aproximarse y de repente separarse. La restricción técnica se observa al comprobar que no se puede mantener la hipótesis de que los sólidos son rígidos y al mismo tiempo permanecer un tiempo finito en contacto cuando se han aproximado con cierta velocidad no nula. Si así fuera, durante ese periodo no se cumpliría la conservación de la energía mecánica. La segunda hipótesis es que la magnitud de las fuerzas de contacto -y de reacción vincular, si los sólidos tuvieran restringido su movimiento- es tan alta que el resto de las fuerzas que

actúan en los sólidos son despreciables durante el tiempo infinitesimal en el que actúan éstas, que se denominan fuerzas impulsivas. Estas dos hipótesis fueron necesarias para plantear la ecuaciones de la mecánica impulsiva y sin embargo aún es indeterminado el movimiento de los sólidos tras el choque; se requiere un dato adicional.

Dos evidencias físicas limitan el movimiento posterior al impacto de los cuerpos, la impenetrabilidad de los sólidos y la conservación de la energía. Newton relaciona estas dos evidencias para añadir como dato el concepto cinemático del *coeficiente de restitución*. El coeficiente de restitución cinemático es la relación entre las velocidades normales de separación de los sólidos y las de aproximación y es una magnitud que se mantiene entre cero y uno. Si en el proceso se conservara la energía mecánica estas velocidades relativas serían iguales y el coeficiente sería igual a la unidad. Sin embargo, durante el contacto aparecen fenómenos disipativos que hacen que se pierda cierta energía mecánica y que el coeficiente de restitución sea menor que la unidad. La condición de impenetrabilidad de los sólidos indica que la velocidad relativa normal de separación debe ser de signo contrario a la de aproximación. El caso límite es aquel en el que la velocidad relativa de separación es nula, los sólidos permanecen unidos tras el impacto, y por tanto el coeficiente de restitución cinemático es igual a cero. Si los sólidos permanecen unidos tras el impacto, el sistema formado por ambos perdería el máximo de energía mecánica posible que permite satisfacer la conservación de la cantidad de movimiento. Por tanto, el coeficiente de restitución cinemático es un número que debe ser menor que la unidad, pues de lo contrario se crearía energía en el sistema, y mayor que cero, pues de lo contrario los sólidos penetrarían. Para determinar el movimiento de los sólidos tras el impacto se necesita conocer su valor, que debe determinarse experimentalmente. La inclusión de este dato en las ecuaciones de la dinámica impulsiva determinará el movimiento posterior al impacto de los sólidos. Con estas ecuaciones no se obtienen las fuerzas de contacto ni las reacciones vinculares durante el impacto sino los impulsos asociados a estas fuerzas.

Posteriormente, en el siglo XIX, Poisson (1833) introduce la definición dinámica del coeficiente de restitución. Poisson estudia el problema del contacto durante el choque y plantea una teoría sobre cómo debería ocurrir el proceso. Para ello supone que los sólidos, aunque rígidos en la mayoría de su volumen, se deforman en una pequeña zona adyacente a las superficies de contacto. El proceso de contacto se divide en dos fases, la fase de compresión y la de expansión o restitución. El fin de la fase de compresión y el inicio de la de restitución se denomina *instante de máxima compresión*. Tres fenómenos se supone que ocurren en dicho instante: el máximo de la fuerza de contacto, la máxima aproximación de los centros de masas de los sólidos -indentación- y la igualdad de la velocidad normal a las superficies de contacto de los sólidos. El impulso de la fuerza de contacto -la integral en el tiempo de ésta- durante el periodo de expansión dividido por el impulso de la fuerza de contacto durante el periodo de restitución es la definición dinámica del coeficiente de restitución. Poisson comprobó que ambas definiciones del coeficiente, la suya, la dinámica, y la cinemática de Newton coinciden. Actualmente se conoce (Stronge, 1990) que la coincidencia entre las definiciones y su límite superior no es cierta en caso de que haya fricción entre las superficies de contacto.

Un impacto elástico es aquel en el que no existen pérdidas de energía mecánica. En este caso, ambos coeficientes de restitución son iguales a la unidad. De la definición cinemática del coeficiente de restitución se deduce que la velocidad relativa normal de aproximación de los sólidos es igual a la de separación, y de la dinámica, que el impulso de la fuerza de contacto en el periodo de expansión es igual a éste en el periodo de compresión. Un impacto perfectamente plástico es aquel en el que ambos coeficientes son iguales a cero. De la definición cinemática se deduce que tras el impacto ambos sólidos tienen una velocidad común en dirección normal a las superficies de contacto. La definición dinámica indica que el impulso de la fuerza de contacto durante el periodo de expansión es igual a cero, o lo que es lo mismo, que no existe periodo de expansión. Estas dos situaciones extremas son ideales y nunca se dan en la práctica; la realidad es siempre intermedia.



Tras este primer estudio sobre la influencia de la flexibilidad de los sólidos en su comportamiento durante el choque, a finales del siglo XIX se presentan dos teorías que permiten comprender de forma mucho más concreta el impacto entre sólidos flexibles: La teoría de Hertz del contacto (1881) y la teoría de impactos axiales en barras elásticas de Saint Venant (1883, 1889).

Hertz resolvió bajo la teoría de la elasticidad el problema del contacto estático entre sólidos de geometría suave en la zona de contacto. Cuando dos sólidos elásticos son presionados por una fuerza externa, la teoría de Hertz permite conocer la distribución de tensiones y desplazamientos en el interior y la superficie de los cuerpos. La hipótesis de que durante el impacto el comportamiento elástico de los sólidos es igual al que aparece durante el contacto estático es la base de la teoría de Hertz del impacto. Esta suposición representa lo que se denomina en este trabajo una aproximación cuasiestática local. En la teoría de Hertz del impacto, las fuerzas externas que mantienen comprimidos a los cuerpos en el problema estático de Hertz se sustituyen por las fuerzas de inercia generadas durante el impacto. Esta teoría es aplicable a impactos elásticos, pues no incluye efectos disipativos. Los resultados corroboran la hipótesis de Poisson sobre el proceso del impacto. En el caso de impactos de baja velocidad de sólidos elásticos de geometría masiva, las soluciones que aporta son muy buenas aproximaciones al proceso (Goldsmith, 1960).

La teoría de Hertz del impacto no considera el fenómeno de propagación de ondas elásticas en el interior de los sólidos. Como se verá en posteriores capítulos no es posible comprender los impactos de sólidos elásticos de geometría dispersa sin considerar la propagación de ondas elásticas. Saint Venant (1883, 1889) encontró las primeras soluciones analíticas al impacto resolviendo la ecuación de propagación de ondas axiales. Dedicó su trabajo al impacto axial en barras elásticas, que tienen la peculiaridad de que las ondas elásticas inducidas en ellas son monodimensionales y no dispersivas, lo que hace que las ecuaciones sean particularmente sencillas de resolver. Para poder encontrar soluciones analíticas al impacto, no se considera el proceso de deformación local en la vecindad de las superficies de

contacto. Estas soluciones muestran que, en este tipo de sólidos, el proceso del impacto poco tiene que ver con el descrito por Poisson en lo referente a las fases de compresión y expansión.

Para estimar el comportamiento en el impacto de sólidos flexibles de geometría dispersa -vigas, láminas, placas...- se puede asumir (Juvinal, 1967) un comportamiento cuasiestático global. Para ello se supone que estos sólidos se deforman durante el impacto de igual forma que lo hacen estáticamente ante cargas puntuales aplicadas en la zona de contacto. De esta forma es relativamente sencillo obtener la evolución de la fuerza de contacto y las deformaciones durante el proceso, aunque para ello no se consideran las fuerzas de inercia debidas a la deformación. Las soluciones que aportan estas aproximaciones son suficientemente válidas tan sólo cuando la duración del impacto es mucho mayor que la frecuencia natural del sólido flexible.

## 2.2 Estado actual del tema

Las teorías hasta aquí comentadas suponen la mayoría del conocimiento teórico del impacto entre sólidos. Ellas aparecen en muchos textos tanto teóricos como de diseño mecánico en capítulos más o menos breves dedicados a las colisiones. Un libro completamente dedicado al impacto es el de Goldsmith (1960). Este texto recoge ampliamente el conocimiento existente hasta la fecha sobre el impacto entre sólidos. Cabe destacar en él el planteamiento y las soluciones numéricas del problema que combina los efectos locales y la propagación de ondas en el impacto de sólidos flexibles y el estudio del comportamiento plástico de los materiales durante el impacto. También aporta gran cantidad de resultados experimentales.

En la actualidad, el impacto entre sólidos flexibles es un tema muy activo de investigación en ingeniería mecánica. Sus aplicaciones son el impacto de vehículos, el comportamiento de robots que colisionan con objetos externos o entre si, el funcionamiento de herramientas o máquinas herramientas, los mecanismos con

movimiento intermitente con topes mecánicos, mecanismos con holguras en sus pares cinemáticos, biomecánica del deporte, impacto de proyectiles... Las teorías clásicas son aplicables en general a sólidos con movimiento libre o completamente restringido. En la actualidad, y tal como se aprecia en las aplicaciones comentadas, los problemas de interés se extienden al impacto de sólidos flexibles interconectados con grandes rotaciones y traslaciones. Por ello los problemas de impactos más generales que se estudian se engloban dentro de la teoría de mecanismos flexibles. Las peculiaridades del problema del impacto hacen que, para su análisis, las formulaciones generalmente utilizadas en mecanismos flexibles se lleven al límite de sus posibilidades de descripción del comportamiento de este tipo de sistemas mecánicos.

Tres son los métodos fundamentales que se han desarrollado para el análisis de impactos en mecanismos flexibles: las ecuaciones generalizadas de conservación de la cantidad de movimiento, la adición-eliminación de restricciones cinemáticas y los modelos continuos de fuerza de contacto-indentación. El primer método es una extensión de la dinámica impulsiva a las ecuaciones de mecanismos flexibles, por tanto los impactos se consideran instantáneos, se incluye el concepto de coeficiente de restitución y no se obtienen fuerzas de contacto ni reacciones vinculares sino los impulsos asociados a estas fuerzas. El segundo método consiste en garantizar la impenetrabilidad de los sólidos durante el impacto mediante ecuaciones algebraicas de restricción del movimiento de los sólidos. Estas ecuaciones imponen un movimiento común de las superficies de contacto mientras exista compresión entre ellas, eliminando la restricción cuando la fuerza entre ellas pasa a ser de tracción. Los modelos continuos de fuerza de contacto-indentación permiten la penetración numérica entre los sólidos que representa la indentación durante el impacto y calculan la fuerza de contacto como función de esta penetración y de la velocidad de penetración. A continuación se comentan los trabajos más destacados sobre estos tres métodos de análisis.

Wehage y Haug (1982) plantean las ecuaciones generalizadas de conservación

de la cantidad de movimiento aplicadas al impacto de mecanismos rígidos usando el concepto del coeficiente de restitución cinemático. Afirman que no es correcto plantear las ecuaciones aislando los sólidos directamente implicados en impacto, pues pueden aparecer reacciones vinculares en todos los pares cinemáticos de los mecanismos. Utilizan para ello la formulación en coordenadas absolutas independientes. Posteriormente, Haug et al. (1985) desarrollan más ampliamente este método en mecanismos rígidos concretando su aplicación en dos y tres dimensiones. A principios de los noventa Gau y Shabana (1991, 1992, 1995) publican una serie de artículos en los que extienden las ecuaciones generalizadas de conservación de la cantidad de movimiento al impacto de mecanismos flexibles utilizando la formulación en sistemas de referencia flotantes y la síntesis modal de componentes para la descripción de la flexibilidad de los sólidos. Lo aplican a impactos axiales en barras elásticas y estudian la evolución de las soluciones en función del tipo y número de coordenadas elásticas utilizadas. Posteriormente Hwang y Shabana (1995) amplían el análisis a impactos transversales en barras elásticas de mecanismos flexibles. Lankarani y Nikravesh (1992) plantean las ecuaciones de conservación del impulso y la cantidad de movimiento para mecanismos rígidos usando ecuaciones canónicas derivadas del principio de Hamilton en vez de las usuales ecuaciones en términos de las aceleraciones, derivadas de las ecuaciones de Lagrange. Los autores justifican el planteamiento de las ecuaciones mediante este procedimiento por una mayor estabilidad de las soluciones numéricas que se obtienen. Yigit et al. (1990) comparan las soluciones teóricas derivadas de la aplicación de las ecuaciones de conservación con resultados experimentales. En su trabajo advierten que pueden ser necesarios varios balances para resolver el impacto, lo cual interpretan como la aparición de impactos múltiples. Yigit y Christoforou (1995) vuelven a usar esta técnica en impactos transversales en vigas. Reconocen que el coeficiente de restitución que se incluye en las ecuaciones con sólidos flexibles no se puede interpretar de igual manera que el que se define para el impacto de sólidos rígidos. Proponen calcular el coeficiente de restitución

que incluyen en sus ecuaciones como función de la velocidad relativa del impacto. Comparan las soluciones con las que se obtienen usando modelos continuos de fuerza-indentación elastoplásticas.

Hughes et al. (1976) publican un amplio artículo en el que muestran el método de la adición-eliminación de restricciones cinemáticas para su aplicación a impactos usando el método de los elementos finitos. Como se indica en este artículo, el punto más complejo de la aplicación de éste método es el cálculo de la velocidades comunes de los nodos en contacto inmediatamente después de que entren en contacto. Esta velocidad común es desconocida y debe ser estimada de alguna manera ya que no es automáticamente satisfecha al imponer la restricción, como ocurre con los desplazamientos. En este artículo se resuelve el problema con estimaciones basadas en la propagación de ondas en el entorno inmediato de las superficies de contacto. Se presentan muchos ejemplos de aplicación numérica, algunos de ellos con sorprendentes resultados. Wu y Haug (1990) presentan su trabajo sobre impactos en mecanismos flexibles utilizando el método de la restricción cinemática y elementos finitos para la descripción de la flexibilidad. En este caso, el problema del cálculo de la velocidad común tras el primer contacto se resuelve planteando las ecuaciones generalizadas de conservación de la cantidad de movimiento usando un coeficiente de restitución igual a cero. Este método del cálculo de la velocidad común, aunque más técnico que el de Hughes et al., hace que instantáneamente se pierda cierta energía en el sistema. Shao et al. (1993) vuelven a usar este método aplicado a mecanismos flexibles usando elementos finitos y un procedimiento similar al de Hughes et al. para el cálculo de la velocidad común tras el primer contacto. Estos autores asimilan la condiciones de separación de los nodos con las de unión haciendo el tiempo correr hacia atrás. Se considera por tanto la posibilidad de que los puntos de contacto se separen con velocidad relativa normal a la superficies de contacto no nula. Hacen una comparación de los resultados numéricos con datos experimentales.

Los modelos continuos de fuerza de contacto-indentación pueden ser elásticos

o anelásticos. Los elásticos no pueden describir pérdidas locales de energía. Los anelásticos pueden ser viscoelásticos, que incluyen fuerzas disipativas proporcionales a la velocidad de penetración y describen un lazo de histéresis, o elastoplásticos, que modelan la plasticidad local y dan lugar a indentaciones permanentes tras el contacto. Dubowsky y Freudenstein (1971) hacen un modelo sencillo de una conexión con holgura entre sólidos rígidos. Resuelven el problema del movimiento de los sólidos incluyendo los impactos que se producen debido a las holguras usando modelos elásticos de Hertz y otros derivados de éste. Dubowsky y Gardner (1977) amplían el problema al caso de sólidos flexibles y fuerzas de contacto que incluyen además fuerzas proporcionales a la velocidad de penetración. Lee et al. (1983) publican su trabajo sobre el impacto en sólidos flexibles usando modelos de masas concentradas y un modelo continuo de fuerzas de contacto de Hertz. El problema de los impactos debidos a las holguras en mecanismos es retomado por Lee y Wang (1983) usando un modelo viscoelástico de las fuerzas de contacto. En este trabajo se indica que la componente de la fuerza de contacto que es función de la velocidad de penetración debe cumplir ciertas propiedades que llaman "condiciones de contorno del ciclo de histéresis". Éstas se expondrán en posteriores capítulos de esta tesis. Para el cálculo de las constantes asociadas a la fuerza de contacto propone utilizar coeficientes de restitución medidos experimentalmente. Khulief y Shabana (1987) proponen un nuevo modelo viscoelástico de fuerza de contacto que es capaz de describir un ciclo de histéresis. Esta expresión de la fuerza de contacto tiene una componente lineal con la penetración y otra no lineal con la velocidad de penetración. Las constantes necesarias para el cálculo de ambas fuerzas se obtendrían experimentalmente basándose en el coeficiente de restitución y en la penetración máxima. Lee y Yoon (1994) utilizan en su trabajo un modelo de fuerza de contacto viscoelástico previamente definido por Lankarani y Nikraves (1994). Éste consta de una componente de fuerza de Hertz más un término función de la velocidad de penetración, cuya constante asociada depende del coeficiente de restitución. Sin embargo, ésta última componente de la fuerza

de contacto no respeta las condiciones de contorno del ciclo de histéresis previamente definidas por Lee y Wang (1983). Yigit y Christoforou (1997) proponen un modelo de fuerza de contacto elastoplástica que es hertziana al principio del periodo de carga, lineal con la penetración en el periodo plástico y pretende ser de nuevo hertziana en la descarga. Como se explicará en el contenido de la tesis esta fuerza en la descarga no es realmente hertziana. Thornton (1997) propone un nuevo modelo elastoplástico para materiales elásticos-perfectamente plásticos que justifica teóricamente mediante un elemental modelo de las tensiones locales. Posteriormente en 1999, y de acuerdo con las observaciones del contacto estático de Johnson, Lim y Stronge (1999) presentan un modelo de fuerza de contacto que divide el proceso de carga en tres periodos en vez de dos, el elástico, el plástico con plasticidad contenida y el completamente plástico.

Los tres métodos de análisis de impactos que se han presentado pueden ser utilizados con diferentes modelos de la flexibilidad de los sólidos. Estos modelos pueden ser discretos o continuos. Los discretos más utilizados son modelos de masas concentradas unidas por elementos elásticos. Los continuos pueden usar funciones de forma obtenidas analíticamente o bien funciones definidas mediante métodos numéricos, el más popular de los cuales es el de elementos finitos. Tanto si se usan modelos discretos o de elementos finitos, se puede reducir el número de coordenadas elásticas mediante la síntesis modal de componentes. Los modelos, así como el tipo de coordenadas más adecuados para ser usados en el análisis de problemas de impacto, han sido un tema importante de discusión entre los investigadores. La discusión se centra esencialmente en la capacidad de las funciones de forma asumidas para representar los desplazamientos elásticos de describir las ondas elásticas inducidas por el impacto. El artículo de Khulief y Shabana (1987), en el que se usan modos obtenidos numéricamente para describir la ondas elásticas inducidas por el impacto, es criticado en el trabajo de Wu y Haug (1990) al destacar que las funciones de forma que afectan a toda la geometría del sólido no son adecuadas, pues el proceso de propagación de ondas se caracteriza porque parte del

sólido puede encontrarse en movimiento mientras otras partes permanecen en reposo. Por este motivo, Wu y Haug usan el método de las subestructuras y usan también modos como funciones de forma, advirtiendo que al principio del impacto solo serán excitadas aquellas coordenadas modales de la subestructura que contiene el punto de contacto. Posteriormente Gau y Shabana (1991) hacen un estudio analítico en el que demuestran, usando modos continuos, que sí es posible la representación de estas ondas sin necesidad de recurrir al método de las subestructuras cuando se utiliza un número suficientemente elevado de funciones de forma modales. Lee y Yoon (1994) desarrollan un tipo de funciones de forma que llaman "vectores de Ritz dependientes de la carga", que se obtienen considerando cargas puntuales en la zona de contacto de los sólidos. Dicen que estos vectores son mucho más eficientes que los modos dinámicos para describir las ondas inducidas por el impacto. En el artículo de Shao et al. (1993), que usa elementos finitos para modelar la flexibilidad de los sólidos, se dice que la síntesis modal de componentes no es apropiada para problemas de impacto, pues no se puede estimar el número de modos que serán excitados por el impacto. Daniel y Doyle (1995) muestran cómo, usando modos de vibración obtenidos analíticamente como funciones de forma o bien elementos finitos, se pueden describir las ondas inducidas por el impacto. Utilizan como ejemplo el impacto en placas flexibles. Tal como se describe en el texto de Goldmith (1960), Hwang y Shabana (1995) proponen el cambio del juego de modos para el análisis de impactos. Así, usan modos continuos que consideran el objeto impactor unido al sólido flexible para describir los movimientos elásticos durante el periodo de contacto. Estas funciones de forma solo se usarían en dicho periodo, teniendo que cambiar el juego de modos en otros periodos. En el caso particular de impactos en vigas, Bark (1997) indica que los modos que se obtienen usando el modelo de Euler-Bernouilli no son apropiados para problemas de impacto. Sí lo serían, sin embargo, los obtenidos mediante el modelo de Timoshenko.

El fenómeno de la *sucesión de impactos* o *impactos múltiples* es característico



de los impactos en sólidos flexibles de geometría dispersa. El impacto no ocurre durante un único periodo de contacto, por en contrario, antes de que los sólidos implicados en el choque se separen definitivamente, ocurren varios periodos de contacto interrumpidos por periodos de separación. Este fenómeno hace que el proceso sea bastante diferente al que supuso Poisson en su teoría sobre los periodos de compresión-expansión y que está muy arraigado. Por tanto, la sucesión de impactos invalida muchos de los conceptos clásicos del impacto entre sólidos y hace el análisis del proceso mucho más complejo. Mason (1935) fue el primero que observó en sus estudios experimentales la sucesión de impactos. En el libro de Goldsmith (1960) aparecen resultados numéricos que indican la aparición del fenómeno. Lee et al. (1983) desarrollan un método para estimar el número de modos necesarios para la simulación de problemas de impacto, sin embargo, el método falla cuando aparecen impactos múltiples. En los trabajos de Yigit (1990, 1995, 1997) se hace referencia constante a la sucesión de impactos. Como resultado de la parametrización de las ecuaciones adimensionalizadas para ciertos tipos de impactos, se dan rangos de estos parámetros para los que los impactos múltiples aparecen. En el artículo de Stoianovici y Hurmuzlu (1996) se encuentran numérica y experimentalmente impactos múltiples en el caso del choque de una barra contra un plano fijo. Se muestra como la aparición de periodos de contacto adicionales no necesariamente hace que aumente la energía perdida de los movimientos de sólido rígido, al contrario, suelen disminuir estas pérdidas.

# Capítulo 3

## Métodos Clásicos

## Aproximados

### 3.1 Introducción

En este capítulo se muestra brevemente la teoría de impactos de sólidos rígidos y las hipótesis básicas de la dinámica impulsiva. Se introduce el concepto de coeficiente de restitución en sus versiones cinemática y dinámica, y se discute su equivalencia. A continuación se presentan las aproximaciones básicas que existen en la literatura para el análisis de impactos de sólidos flexibles, que se han llamado aproximaciones cuasiestáticas local y estructural. La aproximación cuasiestática estructural es aplicable al choque en que intervienen sólidos flexibles, de geometría dispersa, en los que se puede asumir que las deformaciones durante el impacto son equivalentes a aquellas que sufriría si se le aplicaran cargas equivalentes de forma estática. La aproximación cuasiestática local aproxima el comportamiento de sólidos que en el impacto se mantienen prácticamente indeformados, excepto en una pequeña zona cercana a la superficie de contacto. Ambas aproximaciones proporcionan una visión intuitiva de cómo se comportan determinados tipos de

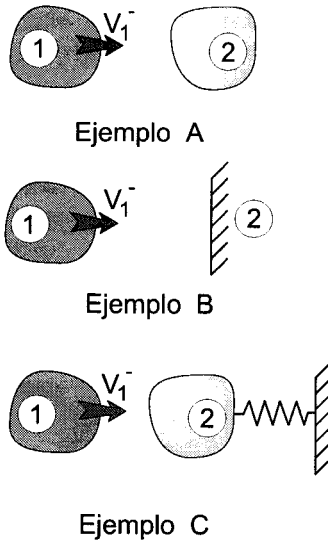


Figura 3.1: Impactos normales

sólidos cuando chocan. A lo largo de este trabajo se harán diversas referencias a estas dos aproximaciones de partida y en especial al coeficiente de restitución.

### 3.2 Impactos de sólidos rígidos. El coeficiente de restitución

A continuación se resume la teoría clásica del impacto de sólidos rígidos. No se pretende ser riguroso sino aclarar lo que se entiende por impacto de sólidos rígidos en el resto de este estudio. Por simplicidad y de acuerdo con el resto de los estudios de esta tesis, se refiere al caso en que los sólidos que intervienen en el impacto tienen tan sólo velocidad relativa normal y no tangencial, así se evita plantear el problema de fricción entre las superficies. Para esto hay que suponer además que el vector normal a las superficies que entran en contacto es paralelo a la dirección del movimiento relativo de los sólidos.

Supóngase que un sólido, el sólido 1, viaja con velocidad  $v_1^-$  antes de chocar con el sólido 2, que está en reposo. Esta situación puede ser cualquiera de las ilustradas en la figura 3.1. En el ejemplo A de dicha figura ambos sólidos están libres, en el ejemplo B el sólido 2 es un subespacio infinito, por lo que su velocidad de referencia siempre es nula, en el ejemplo 3 el sólido 2 está unido a un semiespacio infinito por medio de un elemento elástico sin masa. No hay pérdida de generalidad por el hecho de que tan sólo uno de los sólidos tenga velocidad inicial, pues en caso contrario siempre se puede poner el sistema de referencia en el sólido 2 para conseguirlo. Tras el impacto el sólido 1 adquiere una velocidad  $v_1^+$  y el sólido 2 una velocidad  $v_2^+$ .

El intervalo de tiempo en que los sólidos están en contacto se supone muy corto. En este periodo, que se llamará periodo o tiempo de contacto  $t_c$ , aparece una fuerza de compresión entre las superficies de contacto, que en este caso tan sólo tiene componente normal a éstas. En el primer instante del proceso la fuerza de contacto es nula y aumenta de forma continua hasta alcanzar un valor máximo. Si se admite que los sólidos se deforman al menos durante el periodo de contacto en una zona pequeña próxima a las superficies de contacto, entonces los centros de masas de los cuerpos experimentarán una aproximación durante el impacto. A la diferencia entre la distancia de los centros de masas de los sólidos en el instante inicial del contacto -cuando aún la deformación y la fuerza de contacto son nulas- y esa misma distancia durante el impacto se le llama indentación relativa de los sólidos -normalmente se le llamará simplemente indentación- y se denomina aquí  $\alpha$ . Esta magnitud viene ilustrada en la figura 3.2. Al alcanzar la fuerza de contacto dicho valor máximo se supone que también alcanza su máximo la indentación relativa, que era cero en el instante inicial y aumenta monotonamente hasta este instante. Este momento se llama instante de máxima compresión  $t_{MC}$ , y al intervalo de tiempo transcurrido desde el instante inicial en el que los sólidos entraron en contacto se le llama periodo de compresión. A partir de ese instante comienza el periodo de expansión o restitución. Este periodo comprende el intervalo de tiempo

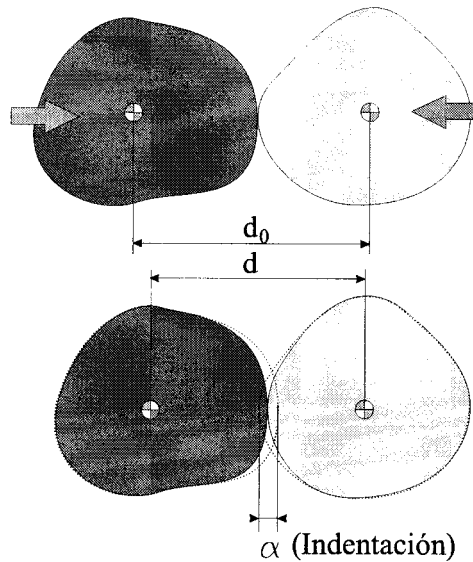


Figura 3.2: Indentación durante el impacto

desde el instante de máxima compresión hasta el instante en que se separan los sólidos,  $t_c$ , que coincide con el instante en que se hace nula la fuerza de contacto. La indentación relativa se supone que irá disminuyendo hasta hacerse de nuevo nula en el instante de la separación. La evolución de la fuerza de contacto se muestra en la figura 3.3.

Al alcanzar la aproximación de los centros de gravedad de los sólidos un máximo relativo -y absoluto- en el instante de máxima compresión, se hace nula la velocidad de aproximación de los centros de gravedad. Por lo tanto, en ese momento los sólidos tienen una velocidad relativa nula. A la velocidad común de ambos sólidos en ese instante se le llama aquí  $\bar{v}$ .

La dinámica impulsiva de sólidos rígidos supone que la magnitud de la fuerza de contacto es tan alta que el resto de las fuerzas que actúan en los sólidos se pueden despreciar durante el periodo de contacto, todas ellas excepto las de reacción vincular, si las hubiera, y las de inercia, naturalmente. Se dice que las fuerzas de

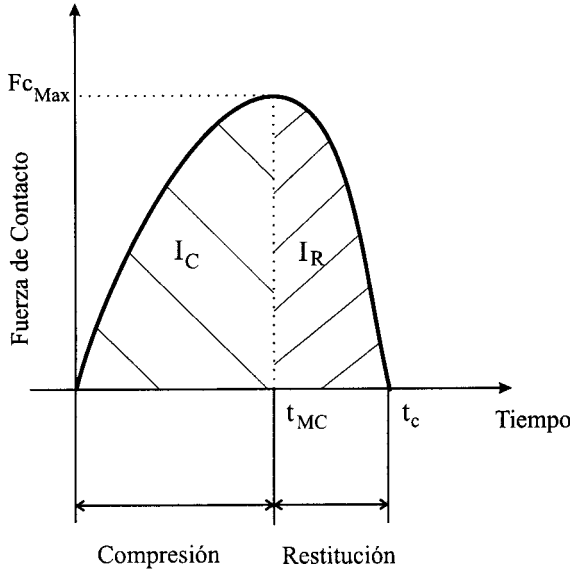


Figura 3.3: Periodos durante el impacto. Evolución de la fuerza de contacto

contacto y las de reacción vincular son de naturaleza impulsiva, por las magnitudes tan altas que alcanzan durante un pequeño periodo de tiempo. En las ecuaciones del movimiento de los sólidos, se pueden modelar estas fuerzas como la función matemática Delta de Dirac, que tienen la propiedad de tener valor nulo en todo el dominio del tiempo excepto en un punto  $t_0$ . Una Delta de Dirac en  $t_0$  se define como

$$\delta(t - t_0) = 0 \text{ si } t \neq t_0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (3.1)$$

La ecuación del movimiento durante el contacto de uno de los sólidos se podría escribir como

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ext} + F_c + R, \quad (3.2)$$

donde  $m_i$  es la masa de uno de los sólidos,  $\ddot{x}_i$  su aceleración,  $F_{ext}$  las fuerzas externas que actúan sobre él,  $F_c$  la fuerza de contacto y  $R$  las reacciones vinculares.

Integrado esta ecuación durante el periodo de contacto queda

$$\int_0^{t_c} m_i \ddot{x}_i dt = \int_0^{t_c} (F_{ext} + F_c + R) dt, \quad (3.3)$$

Si ahora hacemos tender a cero la duración del contacto,  $\Delta t = \{0, t_c\} \rightarrow 0$ , resulta

$$m_i(v_i^+ - v_i^-) = I_c + I_r, \quad (3.4)$$

donde  $I_c$  es el impulso de la fuerza de contacto e  $I_r$ , el impulso de las fuerzas de reacción. La ecuación (3.4) indica que el cambio de cantidad de movimiento de los sólidos durante el impacto es igual al impulso de la fuerza de contacto y de las reacciones vinculares. El impulso asociado al resto de las fuerzas que actúan sobre el sólido durante el impacto es nulo, pues no son de naturaleza impulsiva, lo que indica que su integral en un periodo infinitesimal de tiempo debe tender a cero.

Supóngase que los sólidos implicados en el impacto no están rígidamente vinculados, como les ocurre a todos los sólidos de la figura 3.1. La integración anterior se puede dividir en dos partes, dividiendo el tiempo de contacto de la forma  $\Delta t = \{0, t_c\} = \{0, t_{MC}\} + \{t_{MC}, t_c\}$  resultando

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{MC}} m_i \ddot{x}_i dt &= m_i(\bar{v} - v_i^-) = \int_0^{t_{MC}} F_c dt = I_C, \\ \int_{t_{MC}}^{t_c} m_i \ddot{x}_i dt &= m_i(v_i^+ - \bar{v}) = \int_{t_{MC}}^{t_c} F_c dt = I_E, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $I_C$  es el impulso de la fuerza de contacto en el periodo de compresión e  $I_E$  es el impulso de la fuerza de contacto en el periodo de expansión. Estos impulsos vienen ilustrados en la figura 3.3 como las áreas encerradas por curva de la fuerza de contacto. Por el principio de acción y reacción se sabe que la fuerza de contacto que actúa en cualquiera de los sólidos 1 es en cualquier instante igual en módulo y dirección y de sentido opuesto a la que actúa en cualquiera de los sólidos 2. Por esto se pueden escribir las ecuaciones

$$I_C = m_1(v_1^- - \bar{v}) = m_2(\bar{v}), \quad I_E = m_1(\bar{v} - v_1^+) = m_2(v_2^+ - \bar{v}), \quad (3.6)$$

Si se dividen las ecuaciones anteriores queda

$$e = \frac{I_R}{I_C} = \frac{(\bar{v} - v_1^+)}{(v_1^- - \bar{v})} = \frac{(v_2^+ - \bar{v})}{\bar{v}} = -\frac{v_1^+ - v_2^+}{v_1^-} = -\frac{v_r^+}{v_r^-}, \quad (3.7)$$

donde  $v_r^-$  y  $v_r^+$  son las velocidades relativas de los sólidos antes y después del impacto, respectivamente. A este cociente, que se ha llamado  $e$ , se le conoce como coeficiente de restitución. La ecuación anterior indica que el cociente de los impulsos de la fuerza normal de contacto durante los periodos de restitución y compresión, que se conoce como coeficiente de restitución dinámico o regla de Poisson, es igual al cociente de las velocidades relativas normales después y antes del impacto de los sólidos cambiado de signo, que se conoce como coeficiente de restitución cinemático o regla de Newton. En general la igualdad de los coeficientes de restitución cinemático y dinámico ocurre siempre que no halla fricción entre las superficies o si aun habiéndola no hay deslizamiento relativo entre las superficies en contacto (Stronge, 1990).

La velocidad relativa inicial de los sólidos  $v_r^-$ , de aproximación, debe ser de signo contrario a la final  $v_r^+$ , de separación. Por lo tanto, observando la última fracción de la definición del coeficiente de restitución, se deduce que este valor debe ser siempre positivo.

La suma de las cantidades de movimiento de los sólidos representados en la figura 3.1 debe conservarse durante el choque, puesto que la única fuerza que podría modificarla es la fuerza de contacto. Sin embargo, por ser ésta fuerza interna respecto al sistema formado por cualquiera de las tres parejas de sólidos, no la modifica. Haciendo uso de esta conservación y de la definición cinemática del coeficiente de restitución se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones

$$m_1 v_1^- = m_1 v_1^+ + m_2 v_2^+, \quad e v_1^- = v_2^+ - v_1^+, \quad (3.8)$$

cuya solución es

$$v_2^+ = \frac{1+e}{1+\beta} v_1^-, \quad v_1^+ = \frac{1-e\beta}{1+\beta} v_1^-, \quad (3.9)$$



donde  $\beta = \frac{m_2}{m_1}$  es la relación de masas de los sólidos. Las energías cinéticas de los sólidos antes y después del impacto serán entonces

$$T^- = \frac{1}{2}m_1(v_1^-)^2, \quad T^+ = \frac{1}{2}m_1(v_1^-)^2 \frac{1}{(1+\beta)^2}((1+\beta)(1+e^2\beta)). \quad (3.10)$$

Como ya se dijo en la introducción, durante el impacto, parte de la energía cinética inicial se transforma en energía térmica por los mecanismos de fricción, plasticidad, amortiguamiento u otro comportamiento inelástico de los sólidos. Por lo tanto la diferencia entre la energía cinética inicial de los sólidos y la final deberá ser positiva. Entonces se obtiene

$$T^- - T^+ = \frac{1}{2}m_1(v_1^-)^2 \frac{\beta}{1+\beta}(1-e^2) \geq 0 \quad \Rightarrow e \leq 1. \quad (3.11)$$

Así queda demostrado que el coeficiente de restitución es un número entre cero y uno,

$$0 \leq e \leq 1. \quad (3.12)$$

Cuando el coeficiente de restitución es igual a la unidad no hay pérdida de energía cinética en el sistema y se dice que el impacto es completamente elástico. En este caso, la velocidad de aproximación de los sólidos es igual a la de separación. Cuando el coeficiente de restitución es igual a cero la energía cinética perdida es máxima y los sólidos permanecen unidos tras el impacto, al ser su velocidad relativa final nula. En este caso se dice que el impacto es completamente plástico. Además, utilizando la definición dinámica del coeficiente de restitución se deduce que en impactos completamente elásticos el impulso de la fuerza de contacto en el periodo de compresión es igual al impulso de la fuerza de contacto en el periodo de restitución. A su vez, en impactos completamente plásticos el impulso en el periodo de restitución es cero. Como la fuerza de contacto es siempre de compresión -no cambia el signo- esto indica que no hay periodo de restitución. Por tanto, en impactos completamente plásticos las deformaciones durante el periodo de compresión son permanentes, no existe recuperación elástica de dichas deformaciones. Esto indica que nada de la energía invertida en deformación se recupera en forma energía cinética.

En realidad estos valores extremos del coeficiente de restitución son ideales. En impactos reales la curva de la fuerza de contacto debe ser asimétrica, como se muestra en la figura 3.3, pues debe ser el impulso en el periodo de restitución menor que el impulso en el periodo de compresión. Igualmente la velocidad de separación es siempre menor que la de aproximación de los sólidos.

Resumiendo, se podría decir que el coeficiente de restitución debe ser menor que la unidad, pues de lo contrario se crearía energía cinética durante el impacto, lo cual no es posible, y debe ser mayor que cero pues de lo contrario los sólidos penetrarían uno en el otro.

### 3.3 Aproximación cuasiestática estructural

Existen sólidos muy flexibles que se deforman en gran medida durante los impactos. Además, esta deformación no tiene por qué estar localizada en la zona próxima a la zona de contacto, sino que puede afectar a la geometría completa de estos sólidos. En determinadas circunstancias, que luego se aclararán, se puede admitir que el estado de tensiones y deformaciones en el sólido durante el impacto es equivalente a aquel que sufre si la fuerza de contacto que aparece en cada instante se aplica de forma estática. Un ejemplo de esta situación se muestra en la figura 3.4 en la que un cuerpo rígido choca axialmente contra una barra flexible de sección constante. Se puede aproximar la deformación de la barra durante el impacto mediante aquella que sufre cuando se le aplica una carga puntual  $P$  de variación pseudoestática en el extremo.

Como se dijo en el apartado anterior, en el instante de máxima compresión los cuerpos alcanzan una velocidad común, que en este ejemplo sería nula. Por tanto, toda la energía cinética que llevaba inicialmente el sólido 1 se habría transformado en energía de deformación de la barra flexible 2 en dicho instante. Un simple balance de energía permite conocer, por tanto, las deformaciones y fuerzas de

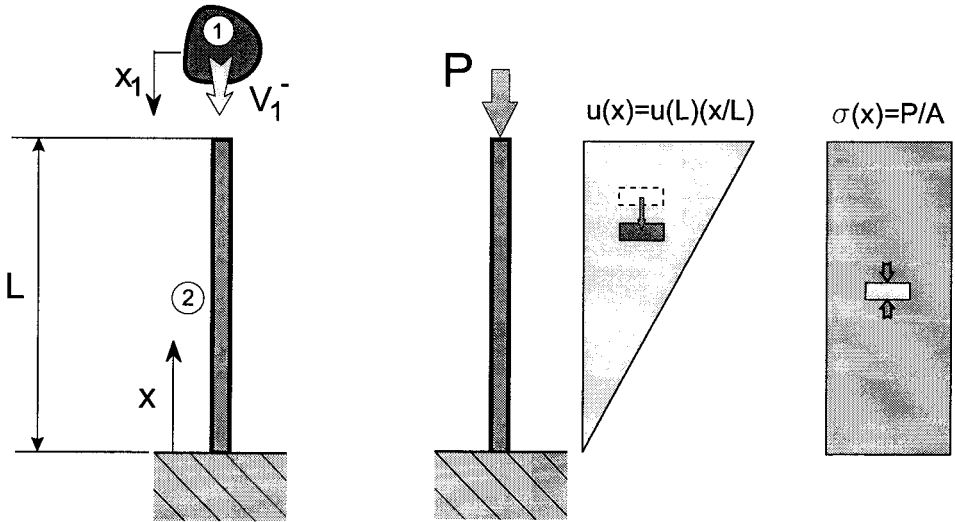


Figura 3.4: Impacto axial en voladizo. Aproximación cuasiestática estructural

contacto máximas durante el impacto:

$$\begin{aligned}
 T^- &= \frac{1}{2} m_1 (v_1^-)^2 = U_{MC} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} x_{1MC}^2 \\
 \Rightarrow x_{1MC} &= \sqrt{\frac{m_1 L}{EA}} v_1^- \quad \Rightarrow F_{cMC} = \frac{EA}{L} x_{1MC},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde  $U$  es la energía de deformación de la barra flexible,  $E$  su módulo de elasticidad,  $A$  el área de su sección transversal,  $L$  su longitud,  $x_1$  el desplazamiento del sólido 1 durante el impacto, que coincide con el desplazamiento de la sección de contacto de la barra empotrada, y el subíndice  $MC$  se refiere al instante de máxima compresión  $t_{MC}$ . Se puede conocer además el proceso completo del impacto planteando las ecuaciones del movimiento en cualquier instante durante el choque usando las ecuaciones de Lagrange, como sigue

$$T(t) = \frac{1}{2} m_1 (v_1(t))^2, \quad U(t) = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} (x_1(t))^2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_1} \right) + \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \tag{3.14}$$

y resulta la siguiente ecuación del movimiento

$$\ddot{x}_1 + \frac{EA}{Lm_1} x_1 = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = -v_1^-, \tag{3.15}$$

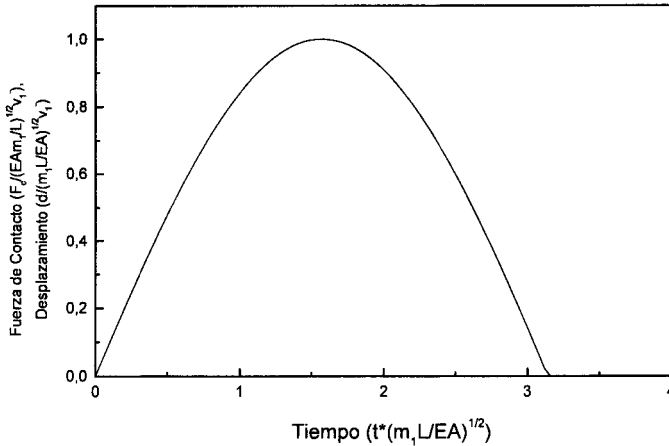


Figura 3.5: Impacto axial en barra fija. Fuerza de contacto y desplazamientos

cuya solución es

$$x_1(t) = -\frac{v_1^-}{\omega} \text{sen}\omega t, \quad \Rightarrow F_c(t) = \frac{EA}{L} \frac{v_1^-}{\omega} \text{sen}\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{EA}{Lm_1}}. \quad (3.16)$$

Esta ecuación es válida mientras la fuerza de contacto sea de compresión. El tiempo de contacto y el instante de máxima compresión resultan así:

$$F_c(t_c) = 0 \Rightarrow t_c = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{Lm_1}{EA}}, \quad F_c(t_{MC}) = F_{c,max} \Rightarrow t_{MC} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{Lm_1}{EA}} \quad (3.17)$$

La fuerza de contacto y los desplazamientos del sólido rígido 1 y de la sección de contacto de la barra flexible se muestran en la figura 3.5. Como se ha supuesto un estado de deformación elástico, no hay pérdida de energía mecánica en el sistema y resulta ser  $v_1^+ = -v_1^-$ . La curva de la fuerza de contacto es simétrica. Obsérvese que al escribir las energías cinética y potencial de deformación del sistema en la ecuación (3.14) no se ha incluido la energía cinética que poseen las secciones de la barra flexible al deformarse. Por tanto, se ha tratado a la barra flexible como un elemento elástico sin masa. Si efectivamente no tuviera masa al terminar el

impacto la viga no vibraría, pues carecería de fuerzas de inercia, y por tanto toda la energía mecánica quedaría de nuevo en forma de energía cinética del sólido 1. Por este motivo, esta aproximación es razonable siempre que el sólido rígido tenga una masa muy superior a la barra flexible, pues la energía cinética que posee haría despreciable la contribución de la energía cinética de las secciones de la barra flexible.

Se podría intentar incluir el efecto de la masa de la barra flexible teniendo en cuenta su energía cinética en el cálculo de la energía del sistema. Esta energía resulta

$$T_2(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{x}{L} \dot{x}_1(t) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m_2}{3} (\dot{x}_1(t))^2, \quad (3.18)$$

donde  $\rho$  es la densidad de la barra flexible.

Si se añade este término a la energía cinética del sistema la ecuación del movimiento queda

$$\ddot{x}_1 + \frac{EA}{L(m_1 + m_2/3)} x_1 = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2/3} v_1^-, \quad (3.19)$$

La velocidad inicial ya no es igual a la que traía el sólido rígido, pues instantáneamente aparece un perfil triangular de velocidades en la barra. La velocidad inicial se obtiene de aplicar la dinámica impulsiva a ambos sólidos. Al incluir de esta forma el efecto de la masa de la estructura, la fuerza de contacto y la deflexión disminuyen con respecto a la solución que no la considera en un factor

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta/3}}, \quad (3.20)$$

donde de nuevo  $\beta = \frac{m_2}{m_1}$ . El tiempo de contacto, inversamente proporcional a la frecuencia natural de vibración del sistema, aumenta a su vez en un factor  $1/\kappa$ .

No es necesario que los sólidos flexibles estén rígidamente vinculados como estructuras para poder realizar este tipo de aproximaciones cuasiestáticas. A continuación se resuelve con esta técnica el impacto axial entre dos barras flexibles iguales que se aproximan con la misma velocidad, como se ilustra en la figura 3.6.

Por simetría, este ejemplo es completamente equivalente al impacto de una de las barras con un cuerpo rígido e inmóvil. La sección de contacto no tendrá

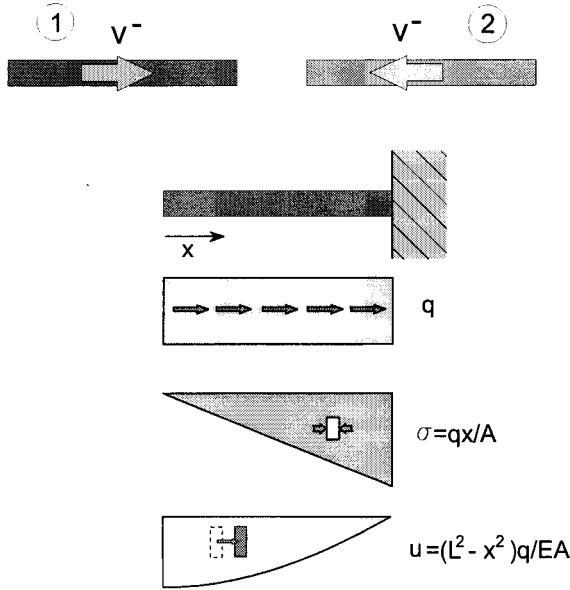


Figura 3.6: Impacto axial de barras flexibles. Aproximación cuasiestática estructural

movimiento alguno durante el impacto. Supóngase que las barras flexibles se deforman como lo haría una barra flexible empotrada en un extremo ante una carga distribuida uniforme. Esta carga distribuida representa las fuerzas de inercia de las secciones durante el contacto. El campo de tensiones y desplazamientos que aparecería en la barra se muestra en la figura 3.6. Queda la siguiente ecuación del movimiento

$$\frac{128}{135}m_1\ddot{x}_1 + \frac{64}{27}\frac{EA}{L}x_1 = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_1^-, \quad (3.21)$$

donde  $x_1$  representa el desplazamiento de la sección media de la barra. La solución de esta ecuación es

$$x_1(t) = \frac{v_1^-}{\omega_3} \text{sen}\omega_3 t, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{135}{54} \frac{EA}{Lm_1}}, \quad (3.22)$$

y por tanto se obtiene la siguiente fuerza de contacto

$$F_c(t) = \frac{8EA}{3L} \frac{v_1^-}{\omega_3} \text{sen}\omega_3 t \quad (3.23)$$

Al hacer las aproximaciones cuasiestáticas estructurales se está asumiendo que los cuerpos reaccionan instantáneamente en toda su geometría a las cargas y aceleraciones que impone el choque en la zona de contacto. Sin embargo, las excitaciones se transmiten en el interior de los sólidos al ritmo que marca la propagación de ondas elásticas, que ocurre a velocidad finita. Por ejemplo, en el caso ilustrado en la figura 3.4 la sección empotrada de la barra flexible no estaría sometida a estado de tensión alguno durante los primeros instantes del contacto, hasta que se viera alcanzada por los efectos de una onda elástica de compresión. En el ejemplo de la figura 3.6 las secciones alejadas de las de contacto continúan con la velocidad que traían antes del choque durante los primeros instantes y será cuando les alcance la onda de compresión cuando modificarán su velocidad. Esto ocurrirá algo después del primer contacto entre las secciones extremas. Para estudiar la propagación de ondas elásticas es necesario asumir que cada punto de los cuerpos tiene unas posibilidades de movimiento independiente del resto, es decir, que el sólido flexible se deforma con infinitos grados de libertad. Son pocos los impactos que se saben resolver considerando infinitos grados de libertad y en general habrá que conformarse con incluir en las ecuaciones un número suficiente de ellos.

En el siguiente capítulo se mostrará la teoría de propagación de ondas elásticas axiales en barras flexibles, pues son particularmente sencillas de estudiar. Será entonces cuando se comprobará la bondad de las aproximaciones cuasiestáticas que aquí se han analizado.

### 3.4 Aproximación cuasiestática local

En este apartado se aproxima el comportamiento durante el impacto de sólidos que se deforman apreciablemente tan solo en una pequeña zona próxima a la superficie de contacto, manteniéndose prácticamente indeformados en el resto de sus

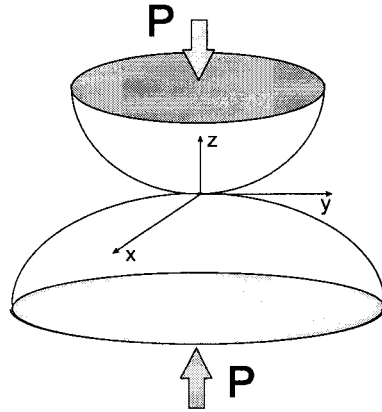


Figura 3.7: Sólidos comprimidos en contacto

geometrías. Para esto se hace uso de la teoría de Hertz del contacto (Hertz, 1881). Esta teoría resuelve el problema elástico de dos sólidos en contacto presionados por una fuerza. Para que sea aplicable la teoría del contacto de Hertz las superficies de los sólidos en la zona próxima al área de contacto deben ser no conformes -no encajan la una en la otra- y de geometría suave -sin picos o aristas. Esta solución estática se usará para aproximar el proceso de deformación local en el impacto -proceso dinámico. La fuerza que presiona los sólidos en la teoría de Hertz representa en este caso la resultante de las fuerzas de inercia durante el choque.

### 3.4.1 Teoría de Hertz del Contacto

Supóngase dos sólidos que están presionados entre sí bajo la acción de dos fuerzas de magnitud  $P$ , como se muestra en la figura 3.7. La hipótesis geométrica necesaria para que sea aplicable la teoría que a continuación se expone es que la superficie de los sólidos alrededor de la zona de contacto debe estar bien aproximada por un paraboloides, definido por la ecuación

$$z = Ax^2 + By^2 + Cxy \tag{3.24}$$



donde  $x, y, z$  son las coordenadas de los puntos de las superficies definidas en el sistema local de referencia que se muestra en la figura 3.7. Cumplen estas condiciones multitud de parejas de superficies de aplicación práctica, como cilindros cuyos ejes se cruzan en cualquier ángulo, esfera-plano, esfera-esfera, cilindro-esfera, cilindro-plano, etc. La teoría de Hertz del contacto predice que la superficie de contacto entre los sólidos resulta ser una elipse dentro de la cual la presión se distribuye como un semielipsoide, tal como se muestra en la figura 3.8. Los semiejes  $a$  y  $b$  de la superficie de contacto son función de la geometría local -radios de curvatura de las superficies en dos planos perpendiculares-, de las propiedades de los materiales -módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson, y de la carga aplicada  $P$  (Goldsmith, 1960; Timoskenko, 1970; Johnson, 1985; Hills et al., 1993).

Las compresiones se distribuyen de tal forma que la presión máxima se da en el centro de la elipse de contacto y es 1.5 veces la presión media en dicha elipse

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}. \quad (3.25)$$

La relación fundamental que se obtiene de la teoría de Hertz del contacto para su aplicación al impacto de sólidos es la relación fuerza de contacto-indentación. Si bien se ha definido en apartados anteriores la indentación como la aproximación que experimentan los centros de masas de los sólidos, una definición más correcta es la aproximación que experimentan dos puntos pertenecientes a los sólidos suficientemente alejados de la zona de contacto de manera que no se vean afectados por la deformación. Para que la teoría de Hertz del contacto sea válida, las dimensiones de la elipse de contacto tienen que ser mucho menores que las dimensiones características de los sólidos en contacto. Por lo tanto, los centros de masas pueden considerarse suficientemente alejados como para ser usados en la medida de la indentación. La relación entre fuerza de contacto e indentación es

$$P = K_h \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (3.26)$$

donde  $K_h$  es una constante que depende de las geometrías locales de los cuerpos en la zona de contacto y de las propiedades elásticas de los materiales y  $\alpha$  representa

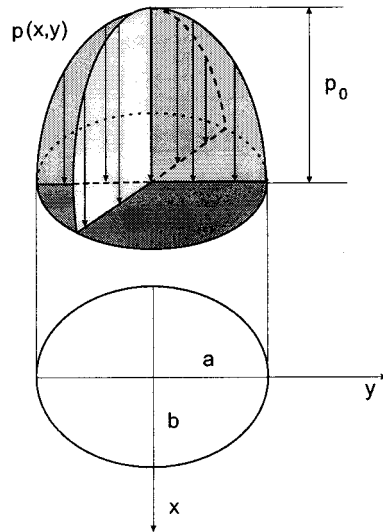


Figura 3.8: Elipsoide de presiones

de nuevo la indentación. En el caso de esferas en contacto esta constante vale

$$K_h = \frac{4}{3} \frac{1}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.27)$$

donde  $R_i$  es el radio de la esfera  $i$ ,  $E_i$  su módulo de elasticidad y  $\nu_i$  su coeficiente de Poisson.

### 3.4.2 Aproximación Cuasiestática al Impacto usando la Teoría de Hertz del Contacto

Supongamos dos sólidos esféricos que chocan, como lo hacen los sólidos del ejemplo A de la figura 3.1. En realidad no tienen por qué ser esféricos sino que en la zona cercana a la de contacto se puedan aproximar sus superficies por casquetes esféricos y sus centros de masas deben estar situados en la recta normal a la superficie de contacto. Durante el periodo de contacto las ecuaciones del movimiento de los sólidos 1 y 2, suponiendo sentido positivo de las coordenadas el inicial de avance

del sólido 1, son

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F_c, \quad m_2 \ddot{x}_2 = F_c \quad (3.28)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  representan la posición de los centros de gravedad de los sólidos 1 y 2, respectivamente. Por tanto, se podrá definir la indentación entre los sólidos como  $\alpha = x_1 - x_2$ . Restando las dos ecuaciones anteriores se tendrá

$$\ddot{\alpha} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F_c. \quad (3.29)$$

Si se supone que la indentación local debido a las fuerzas de inercia se comporta de la forma propuesta por Hertz para el caso de contacto estático, se tiene

$$F_c = K_h \alpha^{\frac{3}{2}}. \quad (3.30)$$

Sustituyendo (3.30) en (3.29) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la indentación

$$\ddot{\alpha} = -r \alpha^{\frac{3}{2}}, \quad r = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} K_h. \quad (3.31)$$

La solución de esta ecuación diferencial describiría completamente el problema. Aunque la ecuación no es integrable se pueden obtener algunos datos exactos de ella. Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $d\alpha$  e integrando se obtiene

$$\frac{1}{2} d(\dot{\alpha})^2 = -r \alpha^{\frac{3}{2}} d\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 - v_1^{-2}) = -\frac{2}{5} r \alpha^{\frac{5}{2}}. \quad (3.32)$$

Como se ha mostrado en el primer apartado, en el momento de máxima indentación la velocidad de aproximación de los sólidos es nula. Así, haciendo en la ecuación anterior  $\dot{\alpha} = 0$ , se obtendrá la máxima indentación durante el impacto y con ello la máxima fuerza de contacto. La máxima indentación resulta

$$\alpha_{MC} = \left( \frac{5}{4} \frac{v_1^{-2}}{r} \right)^{\frac{2}{5}}. \quad (3.33)$$

Una aproximación razonable para la función indentación y fuerza de contacto es (Goldsmith, 1960)

$$\alpha = \alpha_{MC} \operatorname{sen} \frac{1.068 v_1^- t}{\alpha_{MC}}, \quad F_c = \frac{1.14 v_1^{-2} m_2 m_1}{(m_2 - m_1) \alpha_{MC}} \operatorname{sen} \frac{1.068 v_1^- t}{\alpha_{MC}}, \quad 0 < t < \frac{\pi \alpha_{MC}}{1.068 v_1^-}. \quad (3.34)$$

Estos valores guardan un buen acuerdo con resultados experimentales (Goldsmith, 1960). De nuevo se ha asumido una deformación elástica de los cuerpos implicados y además no se consideran fuerzas de inercia asociadas a dichas deformaciones. Por tanto se asume que cuando cesa la fuerza de contacto cesa la deformación, no hay vibración de los sólidos tras el impacto. Con estas hipótesis no se puede representar ninguna pérdida de energía cinética durante el impacto, por lo que el coeficiente de restitución asociado a este tipo de problemas es siempre la unidad.

### 3.5 Impacto de sólidos masivos y de sólidos dispersos

Para que una aproximación cuasiestática sea válida es necesario que el proceso dinámico que trata de describir ocurra lentamente. Hablar del impacto como un proceso lento puede parecer absurdo, a no ser que se compare con un fenómeno mucho más rápido que él. En efecto, el equilibrio estático en cualquier proceso de carga se alcanza cuando las ondas elásticas generadas recorren los sólidos un número importante de veces, proceso que está provocado por sucesivas reflexiones de las ondas en los contornos del sólido. Una medida del tiempo que tardan las ondas en atravesar los cuerpos es el periodo fundamental de vibración. Por esto, las aproximaciones cuasiestáticas en los impactos son en general suficientemente aproximadas cuando la duración del impacto es mucho mayor que el periodo natural de vibración de los sólidos.

Se distinguen, a efectos de su comportamiento en el impacto, dos tipos de sólidos, los de geometría masiva y los de geometría dispersa. Se consideran sólidos de geometría masiva aquellos que tienen dimensiones características del mismo orden en las tres direcciones del espacio. Una esfera, un cubo, un cilindro o prisma de base y altura proporcionadas -ni disco ni varilla- son ejemplos de formas que podrían tener estos sólidos masivos. Sólidos de geometría dispersa son aquellos con dimensiones mucho mayores en una o dos de las direcciones del espacio que

en las otras. Barras, placas y láminas son cuerpos de geometría dispersa.

La velocidad de propagación de ondas en materiales elásticos es constante y función de las propiedades elásticas del material -módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson- y de su densidad. Si se toman dos porciones idénticas de un material elástico y moldeamos dos cuerpos, uno de geometría masiva y otro de geometría dispersa, el periodo natural de vibración del masivo será mucho mas corto que el periodo del disperso. La razón es que las ondas elásticas emplean más tiempo en recorrer las dimensiones "largas" del sólido disperso. Por tanto para considerar un proceso de carga como cuasiestático debe ser mucho más lento cuando ocurre en el sólido de geometría dispersa que cuando ocurre en el de geometría masiva. En la literatura sobre impactos y en esta tesis en muchas ocasiones se llaman sólidos rígidos a los de geometría masiva y sólidos flexibles a los de geometría dispersa. El sólido disperso que antes se había moldeado con la misma porción de material que el masivo se deforma en general en mayor medida que éste último ante la misma sollicitación.

Las aproximaciones cuasiestáticas locales funcionan bastante bien al describir el impacto entre dos sólidos masivos (Goldsmith, 1960). Si la geometría de las superficies que entran en contacto no responden a las que son necesarias para usar la teoría de Hertz del contacto, se podría usar otra ley fuerza-indentación apropiada y probablemente se obtendrían buenos resultados. La duración del contacto en este tipo de impactos es mucho mayor que el periodo natural de vibración de los sólidos implicados. En este caso el impacto puede ser considerado como un proceso lento. Las consecuencias que se pueden obtener de la bondad de esta aproximación es que la energía que queda en forma de vibración interna en estos sólidos tras el impacto es despreciable frente a la que se conserva en forma de energía cinética de los movimientos de sólido rígido. Por tanto, no es necesario estudiar el proceso de propagación de ondas elásticas en estos sólidos para saber con suficiente aproximación como se comportarán en la colisión. Sin embargo, esto no significa que se comprenda por qué esto es así, es decir, no se comprende del

todo cómo, tras repetirse numerosas veces el proceso de propagación y reflexión de ondas en el cuerpo, éste queda en un estado similar al que tiene cuando se carga estáticamente.

Cuando un sólido masivo choca con uno de geometría dispersa pueden darse varias situaciones (Yigit y Christoforou, 1997):

1. Si el sólido masivo tiene una masa mucho menor que el disperso se podría hacer una aproximación cuasiestática local y obtener una buena representación del proceso. En este caso no sería importante la forma de los cuerpos, tan sólo la zona próxima a las superficies de contacto.

2. Si el sólido masivo fuera mucho mayor que el disperso se usaría la aproximación cuasiestática estructural en el sólido disperso para analizar el proceso. En estos casos el proceso local tiene poca importancia en el impacto y por tanto no es esencial conocer la forma de las superficies de contacto. Del sólido masivo tan sólo se necesitaría conocer su masa y velocidad inicial. Los errores que se cometen al usar esta aproximación, que se han descrito anteriormente, no tendrían gran importancia en esta situación.

3. Cuando ambos sólidos tienen masas similares, ninguna de las dos aproximaciones cuasiestáticas posibles son válidas y es necesario estudiar el proceso de propagación de ondas elásticas para representar el impacto. En estos casos no es razonable separar el proceso de deformación local del de propagación de ondas elásticas, y además, las ondas no actúan un tiempo suficientemente largo como para que las leyes de deformación estática sean válidas. La duración del impacto en estos casos es del mismo orden y algo superior al periodo natural de vibración del sólido disperso.

El caso del impacto entre dos sólidos de geometría dispersa depende de la orientación de estos en el choque. En general, en este caso tampoco son válidas las aproximaciones cuasiestáticas.

En lo anterior no se ha mencionado nada respecto a las velocidades relativas del impacto. En general lo indicado es válido para velocidades moderadas de impacto.

Son velocidades moderadas de impacto aquellas que no destruyen los sólidos tras el choque, es decir, que las deformaciones que experimentan son elásticas, excepto, quizás, en una pequeña zona próxima a las superficies de contacto. Estas afirmaciones son consecuencia de evidencias teóricas y experimentales que aparecen en la literatura, parte de las cuales serán analizadas en el resto de este trabajo.

# Capítulo 4

## Impactos Axiales en Barras

### 4.1 Introducción

En este capítulo se estudian analíticamente las ondas elásticas inducidas por el impacto. Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, el proceso de propagación de ondas en medios continuos es muy complejo, por lo que es difícil encontrar soluciones analíticas para este problema. Las ondas elásticas longitudinales en barras son especialmente sencillas de analizar. Son las que aparecen en barras prismáticas cuando son cargadas axialmente si es despreciable la inercia lateral de las secciones por efecto Poisson.

El estudio de las ondas longitudinales inducidas por el impacto es fundamental para comprender lo que ocurre dentro del material durante el choque, lo que ocurre cuando entran en contacto y por qué se separan. En el capítulo anterior se han mostrado una serie de técnicas que se pueden usar para analizar algunos tipos de impactos. Sin embargo, no se ha mostrado nada de lo que realmente ocurre dentro de los cuerpos. Las soluciones que aquí se presentan, aunque restringidas a sólidos y condiciones de impacto muy particulares, son las únicas soluciones analíticas exactas conocidas al problema del impacto. Además, en este capítulo se



va a mostrar un fenómeno muy importante y bastante desconocido en impactos de sólidos flexibles: la sucesión de impactos.

## 4.2 Propagación de ondas longitudinales en barras flexibles

La ecuación del movimiento longitudinal libre de las secciones de una barra flexible se obtiene de plantear la ecuación de equilibrio de fuerzas elásticas y de inercia en una sección de la barra, tal como se indica en la figura 4.1, y resulta la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

donde  $c = \sqrt{E/\rho}$  es la velocidad de propagación de ondas axiales en la barra,  $u(x, t)$  es el desplazamiento de la sección en cualquier instante,  $x$  es la coordenada longitudinal a lo largo de la línea neutra de la barra y  $t$  el tiempo. Esta ecuación es la ecuación monodimensional de ondas. Se puede probar por sustitución que cualquier función del tipo  $f(x - ct)$  o  $g(x + ct)$  es solución particular de ésta. Estas funciones representan ondas elásticas que se propagan en la barra en el sentido del eje de la barra y en el opuesto, respectivamente. Las variables asociadas a cada sección de la barra vendrán dadas por funciones de onda, como sigue

$$\begin{aligned} u &= f(x - ct) + g(x + ct), \\ v &= \frac{\partial u}{\partial t} = c(-f' + g'), \quad \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E(f' + g'), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $v$  es la velocidad de la sección y  $\sigma$  la tensión axial y el símbolo  $'$  significa derivada con respecto a  $x - ct$  en la función  $f$  y derivada con respecto a  $x + ct$  en el caso de la función  $g$ . De esta expresión se deduce que los valores de tensión y velocidad de las secciones asociadas a cada una de las ondas son proporcionales, de forma que

$$|\sigma| = \sqrt{E\rho} |v|. \quad (4.3)$$

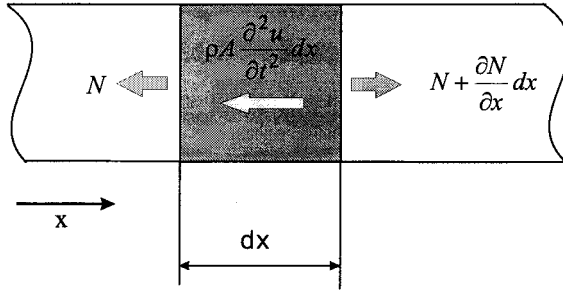


Figura 4.1: Equilibrio de fuerzas en barra flexible

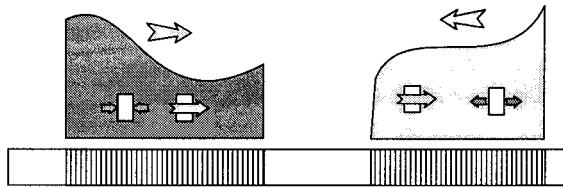


Figura 4.2: Ondas elásticas axiales

Cuando la velocidad de las secciones tiene el mismo sentido que la velocidad de propagación de la onda las secciones están sometidas a compresión, si la velocidad de las secciones es de sentido contrario a la de propagación de ondas la tensión es de tracción. Esta relación viene ilustrada en la figura 4.2. En esta figura, y en las que siguen ilustrando la propagación de ondas, la flecha sobre las funciones de onda representan la dirección de propagación; las rebanadas en su interior muestran la velocidad material de las éstas, las que tienen una sola flecha y la tensión que experimentan -de tracción o compresión-, las que tienen dos flechas.

Cuando una onda elástica alcanza una sección en la que se produce una discontinuidad, ya sea un cambio de área de la sección transversal o un cambio de material, da lugar a dos nuevas ondas elásticas, una que se transmite a la parte de la barra con distintas propiedades -onda transmitida- y otra que se refleja en la misma zona de la barra y que viajará en sentido opuesto a la incidente -onda

reflejada. La reflexión y transmisión de ondas viene gobernado por el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad en desplazamientos en la sección donde se encuentra la discontinuidad. A continuación se muestran dos casos de particular interés para el problema del impacto, la reflexión de ondas en un extremo libre y la reflexión en un extremo empotrado de una barra flexible.

Cuando una onda elástica que recorre una barra alcanza un extremo libre ésta se refleja, apareciendo otra onda que viaja en sentido contrario. La condición de contorno en la sección libre indica que la tensión debe ser nula en todo momento, por tanto la onda reflejada debe tener una tensión asociada igual y de signo contrario a la incidente. Por la relación entre tensión y velocidad de las secciones anteriormente explicada, la onda reflejada llevará asociada una velocidad de las secciones igual a la incidente. Por el principio de superposición que se deduce de las ecuaciones lineales de la elasticidad, como la ecuación (4.1), la sección libre tiene en todo instante tensión nula y velocidad igual al doble de la velocidad asociada a la onda incidente. Este proceso de reflexión viene ilustrado en la figura 4.3.

Una onda elástica, que recorriendo una barra flexible alcanza un extremo empotrado de ésta, se refleja dando lugar a otra onda que recorre la barra en sentido contrario. En este caso la condición de contorno es de desplazamiento nulo de la sección fija en todo instante. Por tanto, la velocidad de dicha sección debe ser también nula. La onda reflejada tendrá velocidad material asociada igual y de sentido contrario a la incidente, para que se anule por superposición la velocidad de la sección fija, y, por la proporcionalidad entre tensión y velocidad, la misma tensión que la incidente. Así, la sección empotrada tendrá velocidad nula en todo instante y soportará una tensión igual al doble de la que lleva asociada la onda incidente. La figura 4.4 muestra este proceso.

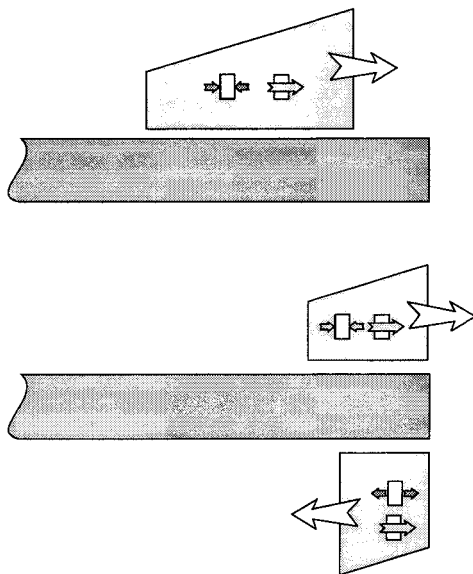


Figura 4.3: Reflexión en extremo libre

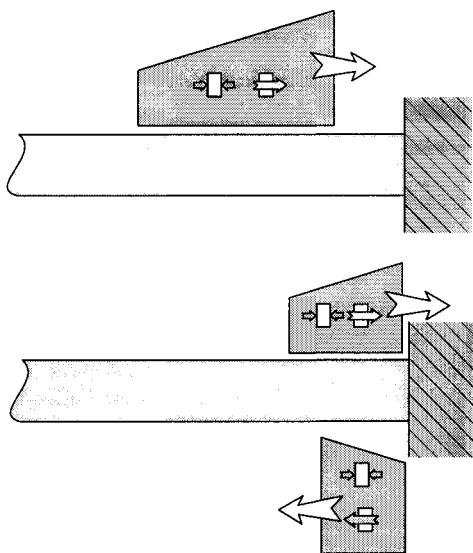


Figura 4.4: Reflexión en extremo empotrado

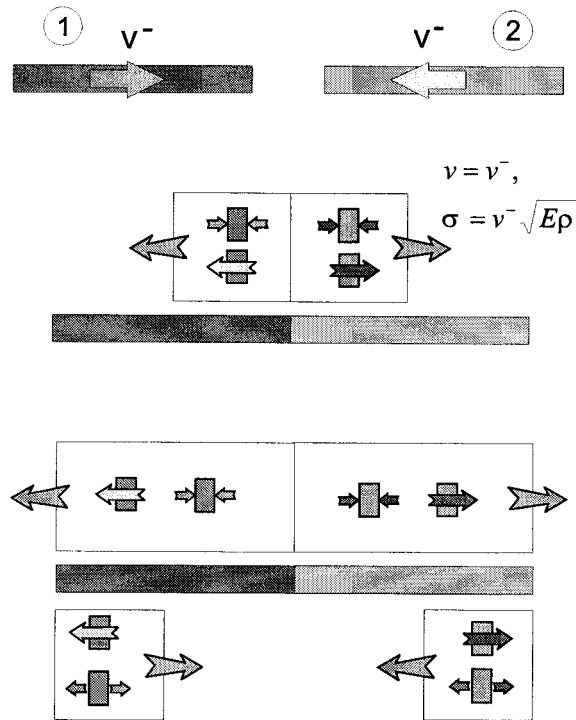


Figura 4.5: Impacto axial de barras flexibles iguales

### 4.3 Impacto axial de barras flexibles

En este y los dos siguientes apartados se resuelven, usando la teoría de propagación de ondas elásticas longitudinales, varios problemas de impactos axiales en barras flexibles. Para ello, aparte de las hipótesis usadas para deducir la ecuación de ondas, se hacen las siguientes hipótesis sobre las condiciones del contacto:

1. Las superficies de contacto son planas, el contacto se produce en la totalidad de dichas superficies y la tensión de compresión debida al impacto es uniforme en ellas.

2. No existe fricción por microdeslizamiento entre las superficies.

Se resuelve ahora de nuevo el problema de las dos barras iguales que se despla-

zan con velocidades idénticas pero de signo contrario que se resolvió en el capítulo anterior usando la aproximación cuasiestática. El problema se muestra en la figura 4.5.

En general, con barras de cualesquiera longitudes y velocidades, en el primer instante del impacto las secciones extremas de las barras deben adquirir una velocidad común, para mantenerse en contacto durante un periodo de tiempo. Dicha velocidad común será aquella que conserve la cantidad de movimiento de dicha pareja de secciones. En el caso de barras iguales con velocidades idénticas pero opuestas, es obvio que dicha velocidad común es nula por las razones de simetría que ya se indicaron en el capítulo anterior. Así, en cada barra aparece una onda elástica que la recorre hacia sus extremos libres. Esta onda elástica tendrá una velocidad asociada tal que a su paso la velocidad de las secciones quede nula. La condición impuesta en las superficies de contacto se transmite a través del material por medio de esta onda elástica. Al cabo de un cierto tiempo  $t = \frac{L}{c}$ , donde  $L$  es la longitud de las barras, estas ondas habrán alcanzado el extremo libre. En ese instante, en toda la longitud se superpone la velocidad de sólido rígido previa de cada barra con la impuesta por la onda elástica generada en el impacto, resultando que todas las secciones de ambas barras están en reposo. En ese instante existe una tensión de compresión entre ellas a lo largo de toda la longitud de la barra uniforme de valor  $\sigma = v\sqrt{E\rho}$ . Esta tensión se ha calculado usando la relación de proporcionalidad entre tensión y velocidad que se ha descrito en el apartado anterior.

Un instante después la ondas se reflejan en los contornos libres como indican las leyes de reflexión. La onda reflejada hace que las secciones adquieran una velocidad igual y de sentido opuesto a la que tenían antes del impacto. Además, como la onda reflejada tiene asociada una tensión de igual magnitud que la incidente, pero de tracción, las secciones quedan sin tensión. Cuando las ondas reflejadas llegan a las secciones de contacto hacen que desaparezca instantáneamente la tensión entre ellas y se separen. La duración del impacto sería de  $t_c = 2\frac{L}{c}$ . El proceso

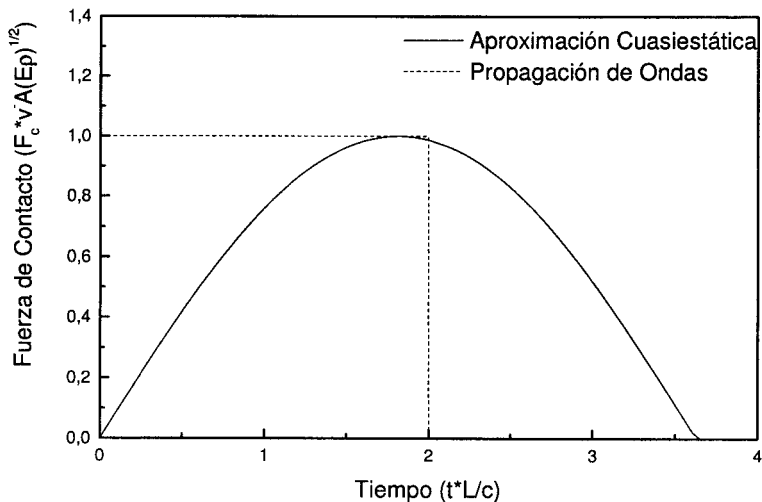


Figura 4.6: Fuerzas de contacto en impacto de barras

de propagación de ondas viene ilustrado en la figura 4.5.

En la figura 4.6 se comparan las fuerzas de contacto obtenidas en este problema con la aproximación cuasiestática realizada en el capítulo anterior -aquella que no considera la masa de la estructura- y la obtenida usando la propagación de ondas elásticas. En el primer caso, la curva es un arco de seno, mientras que en el segundo es constante durante el periodo de contacto. Obsérvese que al resultar las velocidades finales de las barras iguales en ambos problemas, los impulsos de ambas fuerzas de contacto -el área bajo las curvas- son iguales. Si bien no se ha usado ningún concepto ondulatorio en el anterior capítulo, se observa que las curvas que representan ambas fuerzas de contacto se pueden adimensionalizar usando los mismos factores, entre los que se incluye la velocidad de propagación de ondas o el tiempo empleado por ellas en recorrer las longitudes de las barras. Se observa en la figura 4.6 que el pico de fuerza de contacto es idéntico en ambos casos y el tiempo de contacto 1.82 veces mayor en la aproximación cuasiestática que en la solución ondulatoria.

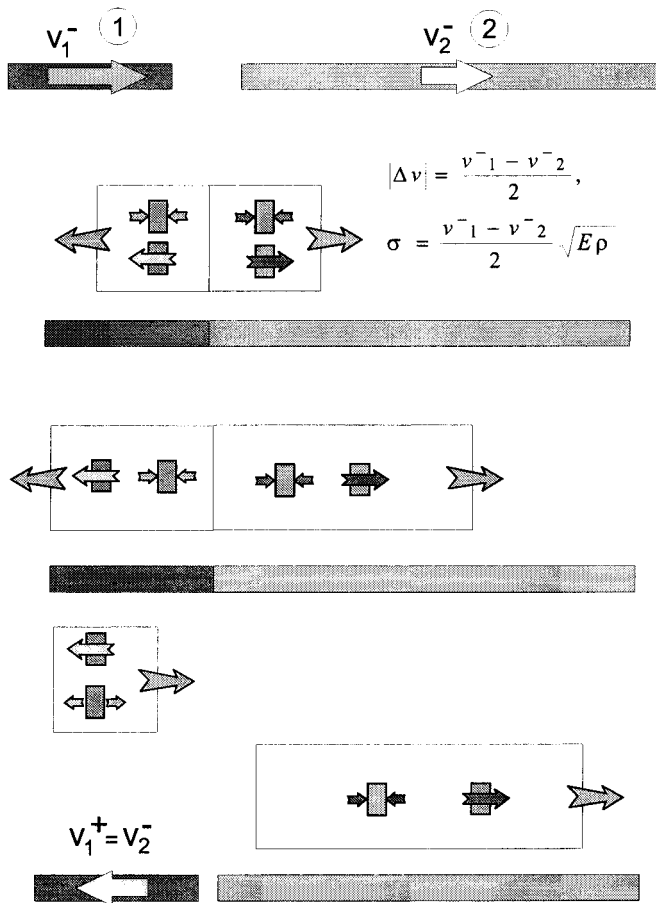


Figura 4.7: Impacto axial de barras flexibles desiguales



En la solución al impacto axial de barras iguales, éstas quedan tras el impacto con la misma velocidad en todas sus secciones y sin tensión entre ellas. Es decir, no hay vibración superpuesta al movimiento de sólido rígido. No es éste el caso general. Se plantea ahora el impacto axial de dos barras desiguales en longitud, pero iguales en sección y propiedades del material. Se supone también que la barra 2 tiene una longitud mayor que el doble de la longitud de la barra 1. El proceso viene ilustrado en la figura 4.7. La conservación de la cantidad de movimiento de la secciones que entran en contacto indica que la velocidad común que alcanzan ambas secciones en el instante del impacto es igual a

$$\rho Av_1^- + \rho Av_2^- = \rho A(v + v) \Rightarrow v = \frac{v_1^- + v_2^-}{2}, \quad (4.4)$$

por tanto el salto de velocidades que deben experimentar dichas secciones es

$$\Delta v_1 = v - v_1^- = -\frac{v_1^- - v_2^-}{2}, \quad \Delta v_2 = v - v_2^- = \frac{v_1^- - v_2^-}{2}. \quad (4.5)$$

De nuevo tras el contacto parten dos frentes de onda desde las superficies de contacto, con saltos de velocidad asociadas  $\Delta v_1$  y  $\Delta v_2$ , que dejan a su paso las secciones de ambas barra con velocidad  $v$  y comprimidas una cantidad  $\sigma = v\sqrt{E\rho}$ . El frente de onda de la barra corta llega al extremo libre y se refleja para alcanzar de nuevo la sección de contacto y dar fin al periodo de contacto. Mientras tanto la onda en la barra larga sigue avanzando a lo largo de ella. A partir de este instante la barra corta adquiere una velocidad igual a la velocidad inicial de la barra larga,  $v_1^+ = v_2^-$ , que se obtiene por superposición de la velocidad de sólido rígido inicial más la que resulta de la onda incidente y reflejada. Además no existe tensión en esta barra. Por el contrario, la barra larga no tiene una velocidad común para todas sus secciones, pues la onda elástica generada durante el impacto, e interrumpida por la repentina separación, continúa propagándose y reflejándose en su interior indefinidamente. Por esto se dice que la barra larga, tras el impacto, tiene superpuesto un movimiento de sólido rígido con la vibración de sus secciones. Justo en el instante en el que termina el impacto, la zona más próxima a las secciones de contacto de la barra larga tiene una velocidad modificada respecto

a la inicial de la barra, mientras que la zona más alejada continúa imperturbada con su velocidad de antes del impacto. En la sección en que se unen las dos zonas se encuentra el frente de ondas elásticas. La velocidad de las secciones de la barra larga en el instante de la separación se puede escribir como

$$v_2(x, t = \frac{2l_1}{c}) = \begin{cases} \frac{v_1^- + v_2^-}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2l_1 \\ v_2^- & \text{si } 2l_1 < x \leq l_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

En la figura 4.8 se muestran los desplazamientos reales de la sección  $x = 2l_1$  de la barra larga en el caso en que  $l_2 = 3.5l_1$ . Su velocidad es una función periódica, de periodo  $2l_2/c$ . Cada ciclo se divide en dos partes, en cada una de ellas la sección tiene una velocidad constante pero diferente una de otra. Todas las secciones de la barra experimentan un movimiento similar a éste, pero con cierto desfase.

Si las barras están hechas de un material relativamente rígido, a un observador externo le parecería que ambas se mueven tras el impacto con velocidad uniforme en todas sus secciones, aunque eso no sería cierto para la barra larga. A esta velocidad aparente se le llama aquí velocidad equivalente de sólido rígido o velocidad de sólido rígido del cuerpo flexible. Si se considera la barra flexible como un conjunto de infinitas secciones, esta velocidad equivalente coincidiría con la velocidad del centro de masas del conjunto de secciones y se calcularía como tal. Este concepto se usará en varias ocasiones a lo largo de este trabajo. La velocidad equivalente de sólido rígido es una magnitud constante incluso para la barra larga tras el impacto, pues no actúan fuerzas externas al conjunto de secciones, por tanto puede calcularse en cualquier instante tras el impacto. Usando la ecuación (4.6) la evaluamos justo en el momento en el que termina el impacto y se obtiene

$$v_2^+ = \frac{\int_0^{l_2} \rho A v_2(x, t) dx}{m_2} = (v_1^- - v_2^-) \frac{l_1}{l_2} + v_2^- \quad (4.7)$$

En la figura 4.8 viene representado el desplazamiento de la sección en el caso de que tuviera dicha velocidad de sólido rígido constante. Obsérvese que ninguna sección de la barra larga en ningún instante tiene esta velocidad de sólido rígido. En realidad, tras un cierto periodo de tiempo tras el impacto el amortiguamiento

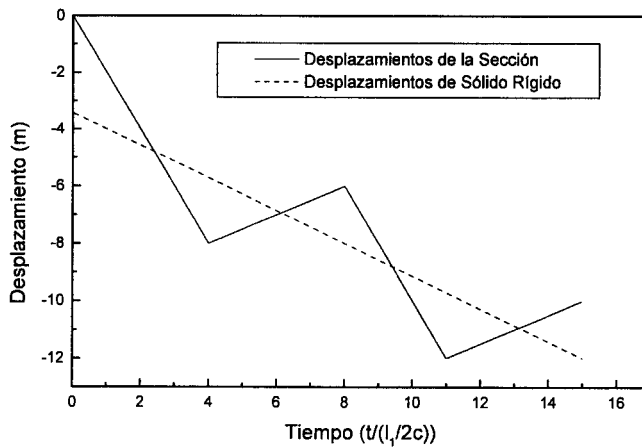


Figura 4.8: Desplazamientos de la sección  $x = 2l_1$  de la barra larga

hará que las velocidades de las secciones se uniformicen y adquieran todas esta velocidad de sólido rígido.

#### 4.4 Impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible libre

En este apartado se estudia el impacto axial de un sólido libre sobre un extremo de una barra flexible libre (Love, 1944; Goldsmith, 1960; Timoshenko y Goodier, 1970). El sólido rígido -sólido 1- tiene una velocidad inicial  $v_1^-$  y la barra flexible -sólido 2- está inicialmente en reposo. La situación antes del choque se muestra en la figura 4.9.

En el instante inicial del impacto se supone que la sección de contacto de la barra flexible adquiere instantáneamente la misma velocidad que el sólido rígido. La razón para asumir esta condición inicial es que los desplazamientos entre el sólido rígido y de la sección de contacto de la barra flexible deben ser compatibles,



Figura 4.9: Impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible libre

ambos deben adquirir la misma velocidad. No es posible que el sólido rígido cambie instantáneamente su velocidad, pues esto requeriría una fuerza infinita. Sin embargo, la sección de contacto de la barra flexible si puede cambiar instantáneamente su velocidad por la acción de fuerzas finitas, pues tiene masa infinitesimal. La ecuación del movimiento del sólido rígido tras el contacto es

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + A\sigma = 0, \tag{4.8}$$

que indica que la fuerza de inercia en el sólido rígido es igual a la fuerza de contacto. En esta ecuación  $A$  es el area de la sección transversal de la barra y  $\sigma$  la tensión que soporta. La tensión de contacto  $\sigma$  se supone positiva cuando es de compresión. Esta ecuación es válida también para la sección de contacto de la barra flexible mientras ambos sólidos estén en contacto. Sustituyendo la ecuación de proporcionalidad entre tensión y velocidad de las secciones dada por la ecuación (4.3) se obtiene

$$\frac{m_1}{A\sqrt{E\rho}} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0 \Rightarrow \sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{A\sqrt{E\rho}}{m_1} t} \tag{4.9}$$

donde la tensión inicial de contacto es  $\sigma_0 = v_0\sqrt{E\rho}$ . Esta ecuación se puede expresar también de la forma

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{2\beta}{T} t}, \tag{4.10}$$

donde  $\beta = \frac{m_2}{m_1}$  es la relación de masas de los sólidos y  $T = \frac{2L_2}{c}$  es el tiempo empleado por el frente de ondas elásticas en recorrer la longitud de la barra dos veces. La velocidad del sólido rígido durante el contacto será

$$v_1(t) = v_1^- e^{-\frac{2\beta}{T} t}, \tag{4.11}$$

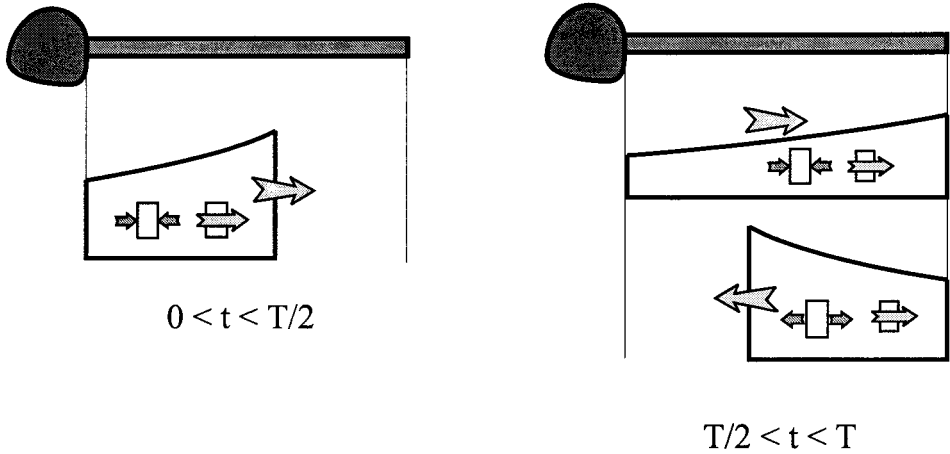


Figura 4.10: Propagación y reflexión de ondas elásticas durante el impacto

Esta tensión y esta velocidad se propagan de nuevo a lo largo de la barra mediante ondas elásticas que se reflejan en el extremo libre ésta. Dos instantes del proceso de propagación se muestran en la figura 4.10. En este caso las ondas elásticas no tienen perfil de tensión y velocidad constante, como en el ejemplo del impacto axial de barras, sino exponencial. En el instante en que el frente de ondas elásticas llega de nuevo a la sección de contacto de la barra, ésta se acelera, sufriendo un salto de velocidad igual al que sufrió en el instante inicial del impacto. Este salto de velocidad no puede ser acompañado por el sólido rígido, pues la tensión que aparecería entre las superficies de contacto sería de tracción, que no puede ser soportada por esta unión. Por tanto, las superficies se separan, terminando el impacto. La duración del impacto es por tanto  $t_c = T$  y la fuerza de contacto viene dada por

$$F_c(t) = v_1^- A \sqrt{E\rho e^{-\frac{2\beta}{T}t}} \quad 0 < t < T, \quad (4.12)$$

La figura 4.11 muestra la fuerza de contacto adimensionalizada en el caso de  $\beta = 1$ , esto es, cuando ambos sólidos tienen la misma masa. El máximo de la fuerza de contacto aparece en el primer instante del contacto. En el instante final,

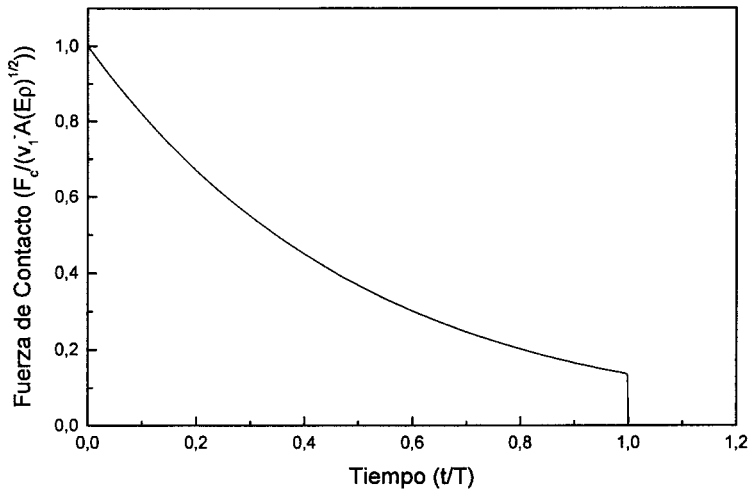


Figura 4.11: Fuerza de contacto en impacto de sólido rígido en barra libre

la fuerza de contacto baja instantáneamente desde un valor finito hasta un valor nulo. En la figura 4.12 se representan los desplazamientos del sólido rígido y de la sección de contacto durante y tras el impacto. Se aprecia que la separación ocurre con una cierta velocidad relativa.

La velocidad del sólido rígido tras el impacto es

$$v_1^+ = v_1^- e^{-2\beta}, \quad (4.13)$$

y la velocidad de la sección de contacto es

$$v_1(0, T) = v_1^- (1 + e^{-2\beta}). \quad (4.14)$$

Obsérvese que en el instante posterior al choque la velocidad relativa entre el sólido rígido y la sección de contacto es igual a la que tenían antes de impacto. Otro dato importante es que la velocidad final del sólido rígido es siempre positiva, es decir, que el sólido rígido no cambia el sentido de su movimiento tras el impacto.

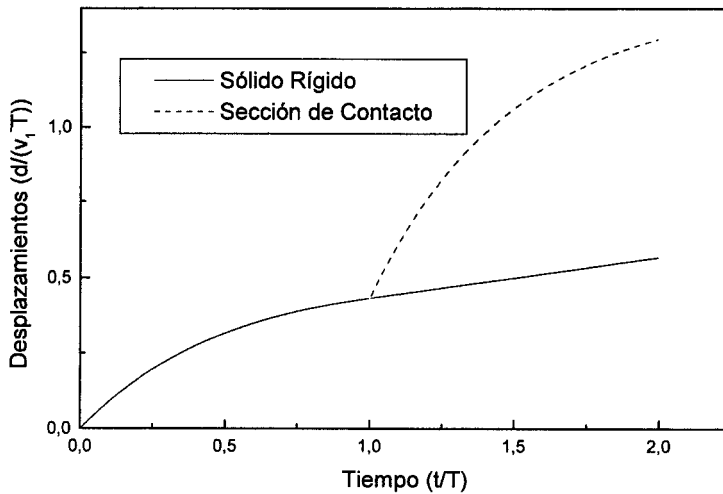


Figura 4.12: Desplazamientos del sólido rígido y sección de contacto

La teoría clásica del impacto sí permite inversión del sentido del movimiento del sólido 1. Si se asimila este problema al ejemplo A de la figura 3.1 se puede obtener que la velocidad final del sólido 1, ecuación 3.9, puede ser positiva o negativa tras el impacto, dependiendo del valor de  $\beta$  y del coeficiente de restitución.

El movimiento posterior de la sección de contacto, y de cualquier otra de la barra flexible, es periódico, pues es debido al efecto de la onda generada durante el impacto, que continúa propagándose en el seno de la barra indefinidamente. El periodo de dicho movimiento será  $T$ . La velocidad de sólido rígido de la barra flexible durante el impacto se puede calcular de nuevo como la media ponderada por la masa de las velocidades de las secciones. Durante el impacto la velocidad

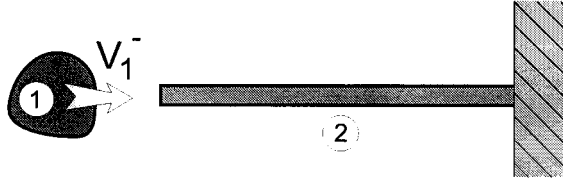


Figura 4.13: Impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible empotrada

de la secciones de definen por la ecuación

$$v_2(x, t) = \begin{cases} v_1^- e^{-\frac{2\beta}{T}(t-\frac{x}{c})} & \text{si } 0 \leq x < ct \\ 0 & \text{si } ct < x \leq l_2 \end{cases}$$

para  $0 \leq t < \frac{l_2}{c}$

$$v_2(x, t) = \begin{cases} v_1^- e^{-\frac{2\beta}{T}(t-\frac{x}{c})} & \text{si } 0 \leq x < 2l_2 - ct \\ v_1^- \left[ e^{-\frac{2\beta}{T}(t-\frac{x}{c})} + e^{-\frac{2\beta}{T}(t-T+\frac{x}{c})} \right] & \text{si } 2l_2 - ct < x \leq l_2 \end{cases} \quad (4.15)$$

para  $\frac{l_2}{c} \leq t < \frac{2l_2}{c}$ .

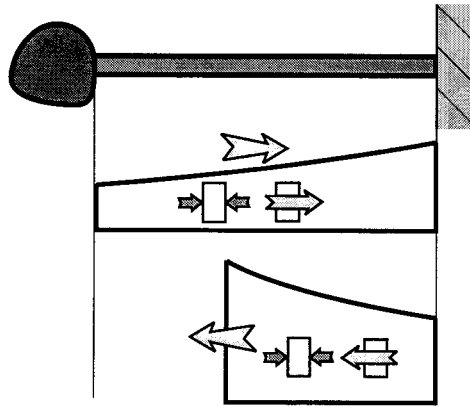
La velocidad de sólido rígido de la barra flexible durante el impacto resulta de integrar estas expresiones, como sigue

$$v_2(t) = \frac{\int_0^{l_2} v_2(x, t) dm}{m_2} = \frac{v_1^-}{\beta} (1 - e^{-\frac{2\beta}{T}t}) \quad 0 < t < T. \quad (4.16)$$

## 4.5 Impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible empotrada

El problema que se plantea en esta sección (Love, 1944; Goldsmith, 1960; Timoshenko y Goodier, 1970) se muestra en su situación inicial en la figura 4.13. Este impacto tiene como particularidad respecto a los anteriores estudiados la aparición de reacciones vinculares, que al ser fuerzas externas harán que no se conserve la cantidad de movimiento del par de sólidos.





$$T/2 < t < T$$

Figura 4.14: Propagación de ondas elásticas en barra empotrada

Es fácil comprender que el comportamiento de los sólidos en los primeros instantes del impacto será idéntico al que tienen los sólidos en el problema anterior en el que la barra flexible estaba libre. Será cuando vuelva la onda reflejada del extremo empotrado de la barra cuando las secciones de ésta experimentarán el efecto del empotramiento. La sección de contacto es la última que siente este efecto. Por tanto, las expresiones de tensión y velocidad obtenidas para el sólido rígido y la sección de contacto en el apartado anterior son válidas para este problema hasta el instante  $t = T$  en el que llega la onda reflejada. La onda reflejada es en este caso de compresión y por tanto no produce la separación de las superficies de contacto, sino que incrementa súbitamente la que existía en ese instante. El proceso de propagación de ondas en un cierto instante  $\frac{T}{2} < t < T$  viene ilustrado en la figura 4.14.

Al llegar la onda reflejada al extremo de contacto se refleja de nuevo como si el extremo estuviera empotrado. Esto es así de nuevo porque el sólido rígido no puede cambiar instantáneamente su velocidad. Por tanto, como el frente de ondas

reflejadas tiene una tensión de compresión igual a la que hubo en el primer instante del impacto, la compresión aumentará bruscamente un valor  $2\sigma_0$ . Este fenómeno de aumento brusco de la compresión de contacto ocurrirá periódicamente cada intervalo  $\Delta t = T$  hasta terminar el impacto. A partir del instante  $t = T$  y en cada intervalo de tiempo  $nT < t < (n+1)T$  la compresión en las superficies de contacto será

$$\sigma(0, t) = s_n(t) + s_{n-1}(t - T) \quad (4.17)$$

y la velocidad del sólido rígido y la sección de contacto serán

$$v(0, t) = \frac{1}{\sqrt{E\rho}}(s_n(t) - s_{n-1}(t - T)) \quad (4.18)$$

donde  $s_0(t) = \sigma_0 e^{-\frac{2\beta}{T}t}$ . El resto de las funciones de ondas generadas  $s_i(t)$  en las superficies de contacto deben calcularse incluyendo las ecuaciones (4.17) y (4.18) en la ecuación (4.8) de equilibrio de fuerzas en el sólido rígido. Queda entonces

$$\frac{d}{dt}[s_n(t) - s_{n-1}(t - T)] + \frac{2\beta}{T}[s_n(t) + s_{n-1}(t - T)] = 0. \quad (4.19)$$

Multiplicando la ecuación por  $e^{\frac{2\beta}{T}t}$  e integrando se obtiene

$$s_n(t) = s_{n-1}(t - T) - \frac{4\beta}{T}e^{-\frac{2\beta}{T}t} \left[ \int e^{\frac{2\beta}{T}t} s_{n-1}(t - T) dt + C \right], \quad (4.20)$$

donde  $C$  es una constante de integración. Sustituyendo en esta última ecuación  $s_{n-1}$  por  $s_0$  se obtiene

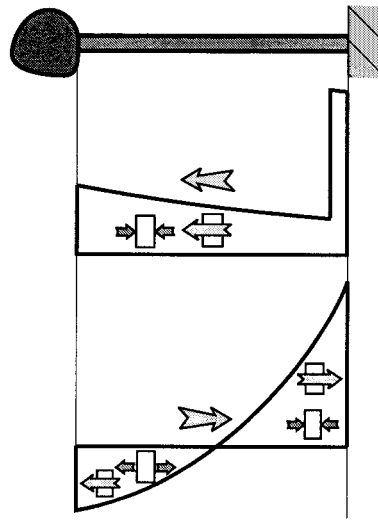
$$s_1(t) = \sigma_0 e^{-2\beta(\frac{t}{T}-1)} \left( 1 - \frac{4\beta}{T}t \right) - C \frac{4\beta}{T} e^{-\frac{2\beta}{T}t}. \quad (4.21)$$

Para el cálculo de la constante de integración se usa la condición de que la velocidad del sólido rígido debe ser continua en el instante  $t = T$ , pues éste no puede cambiar instantáneamente su velocidad, como ya se ha mencionado. Queda entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{E\rho}} [s_1(T) - s_0(t - T)] = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} [s_0(T)], \quad (4.22)$$

y resulta la expresión

$$s_1(t) = s_0(t) + \sigma_0 e^{-2\beta(\frac{t}{T}-1)} \left[ 1 + 4\beta \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (4.23)$$



$$t = 1.534T$$

Figura 4.15: Propagación de ondas elásticas en el instante de separación

Este mismo procedimiento se usa para obtener las expresiones de  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$ , etc. El impacto finaliza cuando en cualquier intervalo se anule la tensión de contacto. Esto es

$$s_n(t_c) + s_{n-1}(t_c - T) = 0. \quad (4.24)$$

Se usa como ejemplo el problema particular en el que ambos sólidos tienen la misma masa, es decir  $\beta = 1$ . La ecuación anterior tiene en este caso solución para el intervalo  $T < t_c < 2T$ , resultando

$$s_1(t_c) + s_0(t_c - T) = 0 \Rightarrow t_c = 1.534T. \quad (4.25)$$

Las ondas elásticas en la barra flexible en el instante de la separación se representan en la figura 4.15. Se observa como la tensión asociada a la onda generada es igual y de signo contrario a la tensión de la onda incidente en la sección de contacto.

La velocidad final del sólido rígido será

$$v_1(t = 1.534T) = \frac{1}{\sqrt{E\rho}}(s_1(1.534T) - s_0(0.534T)) = -0.688v_1^- \quad (4.26)$$

La ecuación de la fuerza de contacto resulta ser

$$F_c(t) = \begin{cases} As_0(t) & 0 < t < T \\ A[s_1(t) + s_0(t - T)] & T < t < 1.534T. \end{cases} \quad (4.27)$$

A partir de este instante, el movimiento de las secciones de la barra vendrá dictado por la propagación y reflexión en su seno de las ondas generadas durante el impacto. La reflexión de estas ondas en el extremo que antes era el de contacto se produce ahora de forma diferente a como ocurría durante el contacto. Tras la separación, se reflejarán la ondas como lo hacen en un extremo libre, naturalmente, y no se comporta como un extremo fijo, como ocurría durante el contacto con el sólido rígido.

La velocidad del sólido rígido en cualquier instante durante el impacto viene dada por

$$v_1(t) = \begin{cases} v_1^- s_0(t) & 0 < t < T \\ v_1^- [s_1(t) - s_0(t - T)] & T < t < 1.534T. \end{cases} \quad (4.28)$$

Como se comprobará a continuación, la barra flexible, aunque empotrada, tiene una velocidad equivalente de sólido rígido no nula. No obstante, ésta debe ser oscilante con media nula, pues su movimiento está restringido. El cálculo de la velocidad equivalente de sólido rígido de la barra flexible se hace de nuevo como la velocidad del centro de gravedad de sus secciones, y resulta durante el periodo de contacto:

$$v_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E\rho l_2}} \int_0^{ct} s_0(t - \frac{x}{c}) dx & 0 < t < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{E\rho l_2}} \left[ \int_0^{l_2} s_0(t - \frac{x}{c}) dx - \int_{c(T-t)}^{l_2} s_0(t - T + \frac{x}{c}) dx \right] & \frac{T}{2} < t < T \\ \frac{1}{\sqrt{E\rho l_2}} \left[ \int_{c(t-T)}^{l_2} s_0(t - \frac{x}{c}) dx - \int_0^{l_2} s_0(t - T + \frac{x}{c}) dx \right. \\ \left. + \int_0^{c(t-T)} s_1(t - \frac{x}{c}) dx \right] & T < t < \frac{3T}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{E\rho l_2}} \left[ - \int_0^{l_2} s_0(t - T + \frac{x}{c}) dx + \int_0^{l_2} s_1(t - \frac{x}{c}) dx \right. \\ \left. - \int_{c(2T-t)}^{l_2} s_1(t - \frac{x}{c}) dx \right] & \frac{3T}{2} < t < 1.534T \end{cases} \quad (4.29)$$

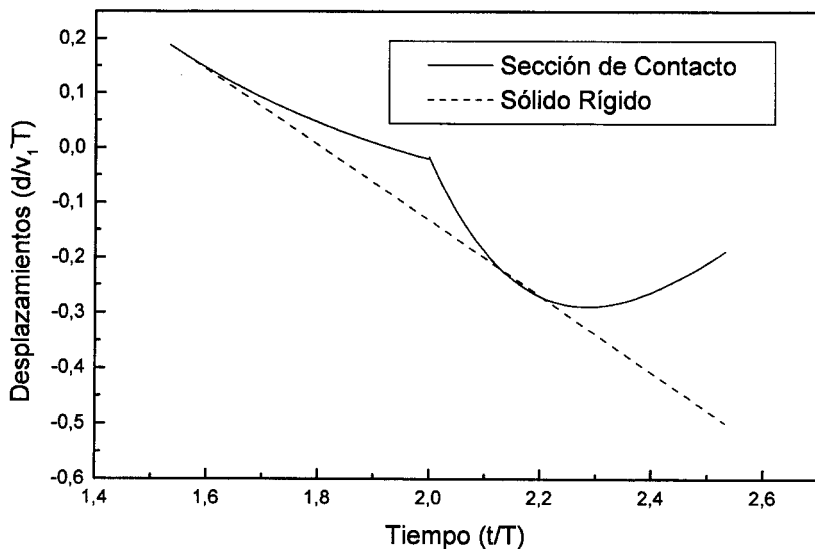


Figura 4.16: Desplazamientos tras el primer contacto para  $\beta = 1$

Los desplazamientos del sólido rígido y de la sección de contacto tras el impacto vienen dados por

$$\begin{aligned}
 d_1(t) &= d_1(t_c) - v_1(t_c)(t - t_c), \\
 d_2(0, t) &= d_1(t_c) + \int_{1.534T}^t -\frac{2}{\sqrt{E\rho}} s_0(t - T) dt, \quad 1.534T < t \leq 2T \\
 d_2(0, t) &= d_2(0, 2T) + \int_{2T}^t -\frac{2}{\sqrt{E\rho}} s_1(t - T) dt, \quad 2T < t \leq 3.534T.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

La figura 4.16 muestra la representación gráfica de estos desplazamientos. Se observa que tras una fase de desaceleración la sección de contacto vuelve a acelerarse por la llegada de un frente de ondas elásticas, de tal forma que alcanza de nuevo al sólido rígido. Este será el comienzo de un nuevo periodo de contacto, por tanto, el impacto no había terminado tras la primera separación de las superficies.

El inicio del segundo periodo de contacto es

$$d_1(t_2) = d_2(0, t_2) \Rightarrow t_2 = 2.125T. \quad (4.31)$$

Por tanto la parte de las curvas de la figura 4.16 donde  $t > t_2$  no tiene realidad física. Para conocer como evoluciona el sistema a partir de ese instante hay que analizar la reflexión y generación de ondas en el segundo periodo de contacto. La onda incidente en la sección de contacto en el instante  $t = 2.125T$  es  $s_1(t - T)$ . Para calcular la generada en este segundo periodo de contacto,  $s_2(t)$ , se procede como se hizo anteriormente. La ecuación del movimiento del sólido rígido y la sección de contacto de la barra flexible sigue siendo 4.8, por tanto

$$s_2(t) = s_1(t - T) - \frac{4\beta}{T} e^{-\frac{2\beta}{T}t} \left[ \int e^{\frac{2\beta}{T}t} s_1(t - T) dt + C \right]. \quad (4.32)$$

Para el cálculo de la constante de integración  $C$  se impone como condición inicial de nuevo la continuidad de la velocidad del sólido rígido en el instante inicial del segundo contacto y queda

$$s_2(t) = 436.785\sigma_0 e^{-\frac{2\beta}{T}t} \left[ -2.979 + \frac{t}{T} \right] \left[ -2.089 + \frac{t}{T} \right]. \quad (4.33)$$

La tensión en el instante inicial del segundo periodo de contacto será

$$\sigma_{02} = s_2(2.125T) + s_1(2.125T - T) = 0.299v_1^- \sqrt{E\rho}. \quad (4.34)$$

El segundo periodo de contacto acabará cuando la presión de contacto sea nula, esto es

$$s_2(t_{s2}) + s_1(t_{s2} - T) = 0 \Rightarrow t_{s2} = 2.163T, \quad (4.35)$$

y por tanto la duración del segundo periodo de contacto será

$$t_{c2} = t_{s2} - t_2 = 0.037T. \quad (4.36)$$

La velocidad tras el segundo periodo de contacto del sólido rígido sería

$$v_1^+ = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} (s_2(t_{s2}) - s_1(t_{s2} - T)) = -0.698v_1^- \quad (4.37)$$

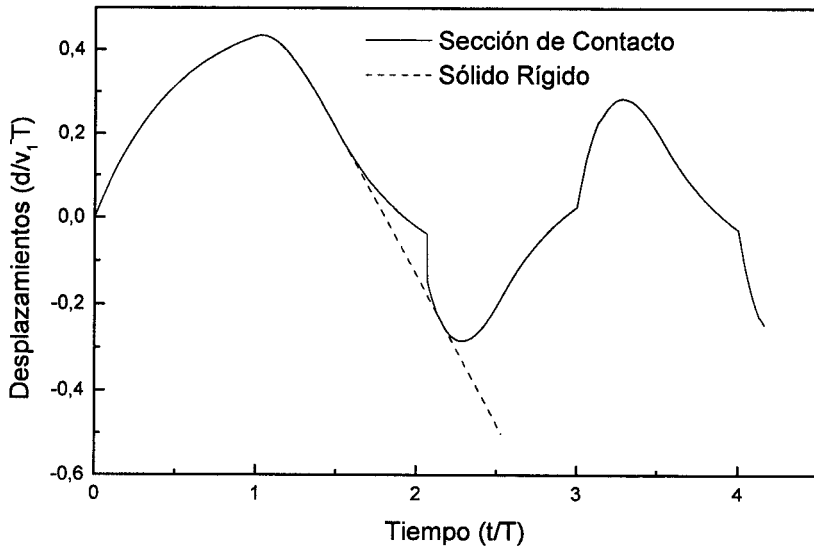


Figura 4.17: Desplazamientos del sólido rígido y la sección de contacto

En la figura 4.17 se representan los desplazamientos del sólido rígido y de la sección de contacto de la barra flexible durante el proceso completo. En la figura 4.18 se muestran las fuerzas de contacto durante ambos periodos de contacto. En el segundo periodo, las fuerzas de contacto y su duración son mucho menores que en el primero, por lo que el cambio de velocidad del sólido rígido es mucho menor. Este fenómeno, comprobado analíticamente en un caso particular, es conocido como el fenómeno de impactos múltiples o sucesión de impactos. En el segundo periodo de contacto el sólido rígido recupera parte de la energía cinética que había perdido en el primero, pues aumenta su velocidad. Por tanto, la existencia de periodos de contacto adicionales no significa necesariamente un aumento de pérdidas de energía mecánica, como cabría esperar.

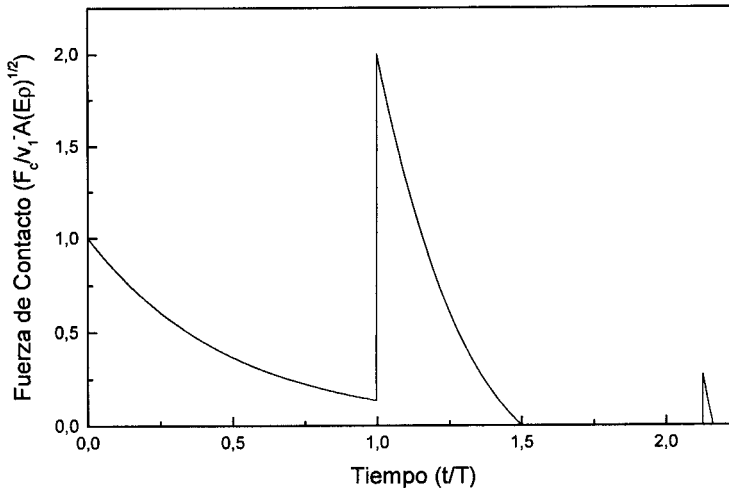


Figura 4.18: Fuerza de contacto

## 4.6 Comparación con la teoría de impactos de sólidos rígidos

Aunque las deformaciones durante el impacto de los sólidos flexibles que se han mostrado en este capítulo no son tan sólo significativas en el entorno de la zona de contacto, como se suponía en el capítulo anterior, algunas de las hipótesis sobre el proceso del contacto pueden ser verificadas con los análisis realizados en este capítulo. Se realiza este estudio en los dos últimos ejemplos desarrollados.

El problema del impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible libre se plantearía, en mecánica de sólidos rígidos, como el ejemplo A de la figura 3.1. Se calcula ahora el coeficiente de restitución que debería usarse en este problema para representar las pérdidas energéticas debidas a las ondas elásticas inducidas. En este sentido, se usa como velocidad del sólido rígido 2 de la figura 3.1 la velocidad



equivalente de sólido rígido de la barra flexible 2 de la figura 4.9, que hemos calculado. En el caso de que la barra flexible esté empotrada se proponen dos opciones para modelar el sistema con sólidos rígidos, los mostrados en el ejemplo B y C de la figura 3.1. Si se usa el modelo B se asume que la barra empotrada no tiene posibilidad de movimiento de sólido rígido y por tanto su velocidad equivalente sería nula, la energía de las ondas elásticas inducidas se consideraría energía perdida. En cambio, usando el modelo C se podría representar de una forma muy simplista dicha energía de vibración y en este caso al sólido 2, que representa a la barra flexible empotrada, si se le asignaría posibilidad de movimiento. Por tanto, los coeficientes de restitución que se usarían en los problemas B y C para representar el problema del impacto axial en una barra empotrada serían distintos, aunque pretendan modelar el mismo problema real. Más adelante se discutirán sus valores.

Se calcula ahora el coeficiente de restitución apropiado para que el ejemplo A de la figura 3.1 represente el impacto de un sólido rígido en una barra flexible libre. Se usa para calcular el instante de máxima compresión la condición de que en ese instante ambos sólidos alcanzan la misma velocidad. Por tanto, igualando las ecuaciones (4.11) y (4.16) queda

$$t_{MC} = \frac{\log(1 + \beta)}{2\beta} T, \quad v_1(t_{MC}) = v_2(t_{MC}) = \frac{1}{1 + \beta} v_1^-. \quad (4.38)$$

El coeficiente de restitución dinámico será entonces

$$e_D = \frac{\int_{t_{MC}}^{t_c} F_c(t) dt}{\int_0^{t_{MC}} F_c(t) dt} = \frac{v_1^- \frac{\sqrt{E\rho AT}}{2\beta} \left( \frac{1}{1+\beta} - e^{-2\beta} \right)}{v_1^- \frac{\sqrt{E\rho AT}}{2(1+\beta)}} = \frac{1}{\beta} [1 - (1 + \beta)e^{-2\beta}], \quad (4.39)$$

y el cinemático

$$e_C = -\frac{v_1^+ - v_2^+}{v_1^-} = -\frac{v_1(T) - v_2(T)}{v_1(0)} = \frac{1}{\beta} [1 - (1 + \beta)e^{-2\beta}]. \quad (4.40)$$

Por tanto, efectivamente ambos coeficientes coinciden  $e_D = e_C$ . Si se utiliza este coeficiente de restitución en las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento de la dinámica impulsiva, se obtendrían las mismas velocidades

de sólido rígido que las que se obtienen en el problema que considera sólidos deformables.

Es importante resaltar que lo que se ha definido como la velocidad de sólido rígido de los sólidos flexibles no coincide con la velocidad real de ninguna de sus secciones, como ocurría en el tipo de sólidos deformables que se asumían en la teoría clásica del impacto de sólidos rígidos. Por esto, y porque en estos casos la deformación no está localizada, no tiene sentido hablar de indentación como se hizo en el capítulo anterior. Por otro lado, se observa que el instante de máxima compresión no coincide con el máximo de la fuerza de contacto, puesto que éste ocurre en el instante inicial del contacto -el nombre *instante de máxima compresión* no es muy afortunado en este caso.

En el caso del impacto de un sólido rígido en una barra flexible empotrada con masas iguales, se supone ahora por simplicidad que sólo existe un periodo de contacto, el primero, lo que se puede imaginar como si tras el primer periodo de contacto el sólido es artificialmente extraído de la zona próxima a la barra flexible. Las velocidades de sólido rígido dadas por las ecuaciones (4.28) y (4.29) vienen representadas en la figura 4.19.

Se observa en la figura cómo las velocidades de sólido rígido de ambos cuerpos coinciden en tres ocasiones durante el primer periodo de contacto. Estos resultados no concuerdan con el proceso explicado en el capítulo anterior sobre el impacto de sólidos rígidos por la aparición de reacciones vinculares en el empotramiento de la barra durante el contacto, que son de naturaleza impulsiva. Sin embargo, podría razonablemente pensarse que si el sólido rígido tiene una velocidad después del impacto  $-0.688$  veces la inicial y la barra empotrada no tiene posibilidad de movimiento, el coeficiente de restitución debería ser  $0.688$ . Si no existe ningún interés en modelar la flexibilidad de la barra el problema se puede asimilar al ejemplo B de la figura 3.1 en el que un sólido 1 impacta en un subespacio infinito. Así, a la barra flexible, como al subespacio infinito, se le asigna una velocidad nula de sólido rígido en todo instante. Por tanto, en este caso el instante de máxima

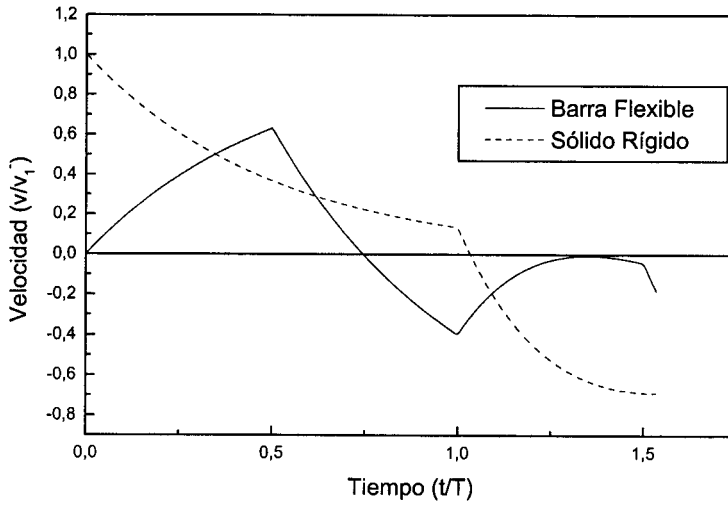


Figura 4.19: Velocidades durante el impacto

compresión sería aquel en el que se anula la velocidad del sólido 1, por tanto se obtiene de igualar a cero la ecuación 4.28, como sigue

$$v_1(t) = 0 \Rightarrow t_{MC}^b = 1.034T, \quad (4.41)$$

donde el superíndice  $b$  se refiere al ejemplo B del capítulo anterior. El coeficiente de restitución dinámico sería

$$e_D^b = \frac{\int_{t_{MC}^b}^{t_c} F_c(t) dt}{\int_0^{t_{MC}^b} F_c(t) dt} = 0.688, \quad (4.42)$$

y el cinemático

$$e_C^b = -\frac{v_1(1.534T)}{v_1(0)} = 0.688. \quad (4.43)$$

Por tanto, ambos coinciden. El modelo más sencillo que podría usarse para simular el comportamiento de la barra flexible sería una masa concentrada unida mediante un elemento elástico sin masa al extremo empotrado, como el ejemplo

C del capítulo anterior. Para el cálculo de las constantes equivalentes se asume la deformada estática de la barra comprimida con una carga puntual en un extremo como deformada supuesta. Así se obtiene una rigidez equivalente del elemento elástico  $K = \frac{EA}{L}$  y una masa equivalente de la masa concentrada  $m_{eq} = \frac{m_2}{3}$ , que se llama sólido  $2b$ . No conocemos el coeficiente de restitución que debería ser usado en este problema para obtener resultados concordantes con el problema en el que se analiza la propagación de ondas. Se comienza suponiendo un coeficiente de restitución igual a la unidad. Resolviendo las ecuaciones de conservación de la dinámica impulsiva, resulta:

$$v_1^{+,i} = \frac{1}{2}v_1^-, \quad v_{2b}^{+,i} = \frac{3}{2}v_1^-, \quad (4.44)$$

donde el superíndice  $+, i$  indica que no son realmente velocidades finales tras el impacto, pues aún no ha concluido el proceso. Efectivamente, como las velocidades resultantes son positivas, ambos sólidos continúan moviéndose en dirección del extremo empotrado. Inevitablemente volverán a chocar tras un cierto periodo de separación. Cuando se usa un coeficiente de restitución igual a la unidad, son necesarios tres balances distintos para describir el proceso completo. En los periodos intermedios de separación se resuelven las ecuaciones de movimiento libre de ambos sólidos. Los desplazamientos vienen ilustrados en la figura 4.20. Tras la separación definitiva el sólido rígido adquiere una velocidad final  $v_1^+ = -0.89v_1^-$ . Por tanto, y como cabía esperar, el coeficiente de restitución unidad no es el correcto. Es importante observar que los diferentes balances que son necesarios para describir el impacto en esta simplificación del problema no guardan relación con los distintos periodos de contacto que podrían tener lugar en el fenómeno real, que ha sido descrito en el análisis de las ondas inducidas en el impacto. En esta simplificación, el sólido rígido pierde menos energía cinética que en el problema descrito con propagación de ondas elásticas. Esto se puede explicar observando que el modelo masa-muelle que representa el sólido flexible tan sólo puede describir vibraciones de baja frecuencia y por tanto tiene menos capacidad de absorber energía que el sólido flexible real. Este efecto se podría compensar

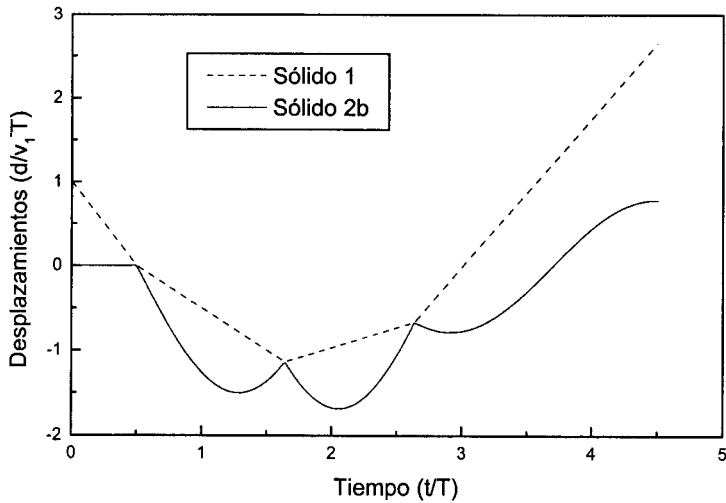


Figura 4.20: Desplazamientos de los sólidos con  $e=1$

usando un coeficiente de restitución menor que la unidad, quedando así como energía perdida en el problema aquella que no se puede representar. Sin embargo, el proceso necesario para evaluar dicho coeficiente sería complejo, en caso de ser posible. Obsérvese que el número e intensidad -velocidad relativa inicial- de los balances necesarios para concluir el proceso son desconocidos a priori. La solución al problema usando diferentes coeficientes de restitución puede evolucionar de forma inesperada debida a esta incertidumbre, como se explica a continuación.

El problema equivalente con el modelo masa-muelle se ha resuelto usando los coeficientes de restitución  $e = 0.9$  y  $e = 0.8$ . La evolución de los desplazamientos se representan en las figuras 4.21 y 4.22.

Las velocidades de salida del sólido rígido son  $v_1^+ = -0.67v_1^-$  para  $e = 0.9$  y  $v_1^+ = -0.74v_1^-$  para  $e = 0.8$ . Esta situación sería imposible si el problema se resolviera con un único balance, pues mayores coeficientes de restitución deben

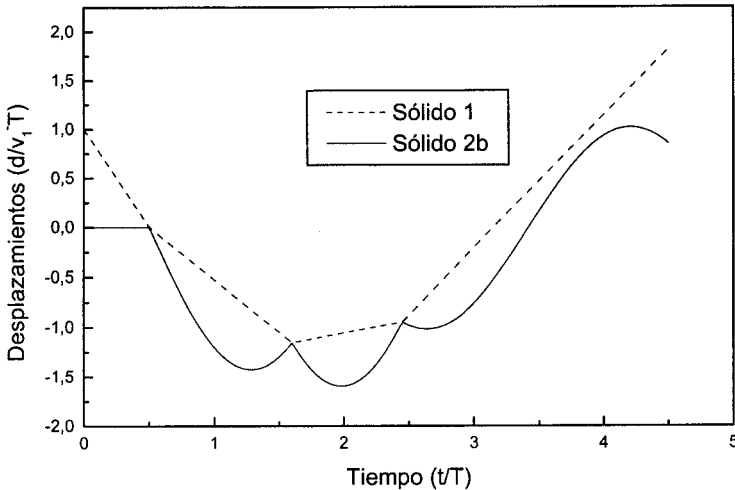


Figura 4.21: Desplazamientos de los sólidos con  $e=0.9$

dar lugar a un módulo mayor de la velocidad final de sólido 1. Existe un cambio cualitativo en la evolución de la respuesta que da lugar a estos resultados, pues son necesarios tres balances para resolver el problema con  $e = 0.9$  y cuatro en el problema con  $e = 0.8$ , como se observa en las figuras 4.21 y 4.22. Las pérdidas de energía mecánica en los dos problemas son el 20% de la energía inicial para  $e = 0.9$  y el 35% para  $e = 0.8$ . En el sentido de medida de energía perdida durante el impacto, estos problemas dan los resultados congruentes, sin embargo, nada nos garantiza que al disminuir el coeficiente de restitución aumente monótonamente la energía mecánica perdida en el proceso. El motivo es, de nuevo, el desconocimiento a priori del número e intensidad de los balances intermedios.

En estos cálculos se ha supuesto un coeficiente de restitución constante en todos los balances. Algunos autores (Yigit y Christoforou, 1995) han propuesto usar un coeficiente de restitución variable dependiente de la velocidad relativa

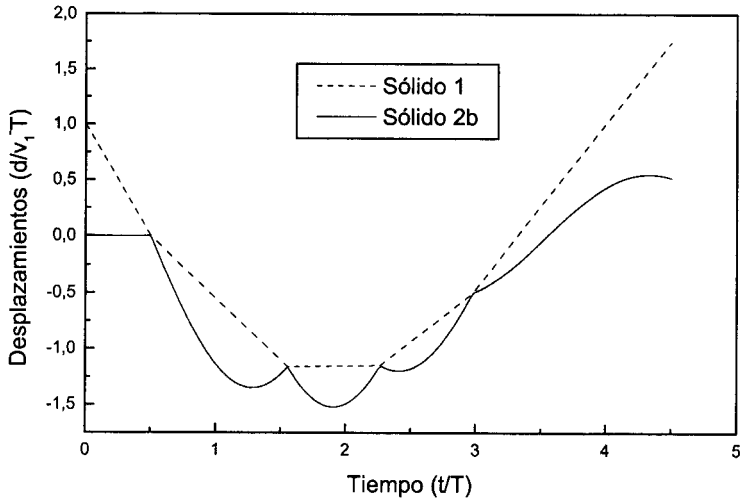


Figura 4.22: Desplazamientos de los sólidos con  $e=0.8$

inicial de los cuerpos. Una mayor velocidad relativa necesitaría un coeficiente de restitución menor, pues se conoce que son mayores las pérdidas de energía mecánica en estos casos. Sin embargo, como se ha probado, los balances no se corresponden con impactos reales ni tan siquiera con periodos de contacto distintos. El proceso intermedio es completamente ficticio, por tanto parece no tener sentido el argumento de coeficiente de restitución dependiente de la velocidad relativa.

En cualquier caso, resulta obvio del análisis previo que el coeficiente de restitución asociado al problema del impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible dependería del modelo que se utilice. Cuando no existe interés alguno en modelar la flexibilidad de la barra, y ésta se sustituye por un subespacio infinito la energía absorbida en forma de vibración en la barra sería energía mecánica perdida en el modelo. Sin embargo, no lo sería del todo cuando de alguna manera se modela la flexibilidad de la barra, pues, con mayor o menor precisión, el modelo

es capaz de describir dichas vibraciones. Así, queda claro que cuando se aplica la dinámica impulsiva al impacto con sólidos flexibles el coeficiente de restitución, en caso de existir o de ser capaz de evaluarlo, no es una magnitud física asociada al impacto en sí, sino al modelo matemático que se usa para describir la flexibilidad de los sólidos. No habría manera de medir el valor del coeficiente asociado a uno de los balances intermedios cuando no ocurre en la realidad.

## 4.7 Procesos de separación

En las figuras 4.12 y 4.17 se han mostrado los desplazamientos del sólido rígido y de la sección de contacto en los ejemplos de la barra elástica libre y la barra elástica en voladizo, respectivamente, durante y tras el impacto. En ellas se puede observar que, en el caso de la barra libre, el sólido rígido y la sección de contacto se separan con velocidad relativa no nula, mientras que en el caso de la barra en voladizo se separan con velocidad relativa nula.

En posteriores capítulos se plantearán las *ecuaciones generalizadas de conservación del impulso y la cantidad de movimiento*, que son la extensión de la dinámica impulsiva al impacto entre sólidos rígidos y flexibles interconectados. En estas ecuaciones generalizadas no se define el coeficiente de restitución en función de las velocidades de sólido rígido de los sólidos implicados en el impacto, sino en función de las velocidades reales de las superficies o puntos de contacto. En el caso de los problemas de impacto de un sólido rígido en una barra flexible, libre o empotrada, la definición cinemática del coeficiente de restitución quedaría modificada, resultando

$$e_C = -\frac{v_1^+ - v_2(0, t_c)}{v_1^-}. \quad (4.45)$$

En el caso del impacto de un sólido rígido en una barra flexible libre resulta

$$e_C = -\frac{v_1^+ - v_2(0, T)}{v_1^-} = -\frac{v_1^- e^{-2\beta} - v_1^- (1 + e^{-2\beta})}{v_1^-} = 1. \quad (4.46)$$



Mientras que en el caso de una barra flexible empotrada, tras el segundo periodo de contacto, resulta

$$e_C = -\frac{v_1^+ - v_2(0, 1.534T)}{v_1^-} = -\frac{0.688v_1^- - 0.688v_1^-}{v_1^-} = 0. \quad (4.47)$$

También resulta cero al evaluarlo tras el primer periodo de contacto.

Las dos situaciones dan lugar a coeficientes de restitución, definidos localmente, completamente opuestos. Esto nos hace pensar que el coeficiente de restitución así definido no guarda relación con las pérdidas de energía mecánica durante el proceso del impacto, pues los procesos locales son idénticos en ambos casos: sin pérdida de energía por fricción o plasticidad.

Se observa en el análisis de propagación de ondas elásticas que en el impacto en una barra libre las superficies de contacto se separan con motivo de la llegada del frente de ondas cuando  $t = T$ . La sección de contacto de la barra flexible se acelera instantáneamente. Ésta no puede ser acompañada por el sólido rígido, pues eso requeriría que el contacto soportara tensiones de tracción. Por eso, la tensión de contacto cae súbitamente a cero y los sólidos se separan con una velocidad relativa finita igual a la que tenían inicialmente. En el caso del impacto en una barra flexible empotrada el proceso de separación es diferente. Al final de cualquiera de los dos periodos de contacto la separación ocurre tras la disminución gradual de la presión de contacto. Cuando ésta se hace cero, las superficies de contacto se separan con velocidad relativa nula. Los valores obtenidos de los coeficientes de restitución cinemáticos locales son diferentes porque resultan de dos procesos de separación de las superficies de contacto diferentes. Por tanto, queda claro que estos coeficientes no guardan relación con la energía mecánica perdida en el proceso.

## Capítulo 5

# Análisis de Impactos como Vibraciones Libres

### 5.1 Introducción

En este capítulo se analizarán impactos de sólidos rígidos en barras elásticas, tanto axiales como transversales. Para ello se resolverán, usando superposición modal, las ecuaciones de vibración libre de los sólidos. Si bien la propagación de ondas elásticas y las vibraciones en medios continuos representan el mismo fenómeno y por tanto están gobernadas por las mismas ecuaciones, en la literatura se suelen tratar por separado. Además, las técnicas matemáticas que se utilizan para su estudio son diferentes. Tras hacer un ligero apunte sobre cómo los modos de vibración representan ondas que se propagan en el seno de los sólidos, se va a analizar en este capítulo impactos en sólidos flexibles usando la teoría de vibraciones libres. Esto permitiría obtener teóricamente soluciones exactas en el caso de impactos transversales, que generan ondas elásticas dispersivas. Los resultados en el caso de impactos axiales deben coincidir con los obtenidos en el capítulo anterior. De nuevo va a tratarse el problema de las deformaciones locales durante

el impacto de forma bastante simplista, lo que restringe el rango de aplicabilidad práctica de estas ecuaciones.

Al final de éste capítulo se analiza la propagación de ondas elásticas en barras giratorias. Con esto se observa que la propagación de ondas elásticas en barras flexibles se ve afectada por los movimientos de sólido rígido que pueda experimentar.

## 5.2 Representación de ondas elásticas mediante superposición modal

En mecánica de medios continuos con comportamiento lineal las ecuaciones de vibración de sólidos flexibles se suelen resolver mediante superposición modal. Por ejemplo, para resolver la ecuación de ondas elásticas axiales en barras flexibles, ecuación (4.1) del capítulo anterior, se usa la técnica de separación de variables. Así, el desplazamiento de las secciones se supone una función del tipo

$$u(x, t) = \phi(x)q(t). \quad (5.1)$$

Tras ensayar esta solución en la ecuación diferencial del movimiento, se deduce que existen infinitas parejas de funciones del tiempo y de la coordenada longitudinal que la satisfacen, debiendo ser la solución real a un problema concreto una combinación lineal de ellas. Además, tanto las funciones del tiempo como las de la coordenada longitudinal, llamadas modos de vibración, son funciones armónicas. Así se llega al conocido resultado

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i \sin(k_i x) + B_i \cos(k_i x)][C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)], \quad (5.2)$$

donde  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$  son constantes que se obtienen de las condiciones de contorno y condiciones iniciales del problema particular que se quiere resolver,  $\omega_i$  son las frecuencias naturales del sistema, dependientes de las condiciones de contorno, y  $k_i = \frac{\omega_i}{c}$  son los números de onda, siendo  $c$  la velocidad de propagación de ondas

axiales. Alternativamente, esta función se puede poner de la forma

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \sin(k_i x + \varphi_i) \sin(\omega_i t + \psi_i), \quad (5.3)$$

siendo de nuevo  $E_i$ ,  $\varphi_i$  y  $\psi_i$  constantes a determinar.

En el capítulo anterior, cuando se resolvía la ecuación del movimiento desde el punto de vista de la propagación de ondas elásticas, se indicó que las soluciones eran funciones del tipo  $f(x - ct)$  ó  $g(x + ct)$ , que representan funciones de onda que se trasladan en una y otra dirección de la barra a una velocidad  $c$ . Puede parecer que las ecuaciones 5.2 y 5.3 no son funciones de este tipo, sin embargo, una simple manipulación trigonométrica de la ecuación (5.3), por ejemplo, nos muestra esta dependencia funcional. Así la ecuación (5.3) es equivalente a

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} E_i \left[ \cos\left(x - ct + \frac{\varphi_i}{k_i} - \frac{\psi_i}{k_i}\right) - \cos\left(x + ct + \frac{\varphi_i}{k_i} + \frac{\psi_i}{k_i}\right) \right]. \quad (5.4)$$

Esto demuestra que la separación de variables supuesta para obtener la solución al problema mediante superposición modal no contradice a la solución obtenida mediante funciones de onda. Como se ha visto, la velocidad de propagación de ondas se obtiene dividiendo la frecuencia natural asociada a cada modo por su número de onda. En este caso es la constante  $c$  para todos los modos. Cada una de las funciones sumando de la ecuación 5.4 representan funciones de onda que se propagan a la misma velocidad. Por esto las ondas elásticas axiales se denominan no dispersivas. Este no es el caso de las ondas elásticas transversales o de flexión, que se denominan dispersivas. La ecuación de vibraciones transversales libres en vigas elásticas uniformes, según la teoría de vigas de Euler-Bernouilli es

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -(c_t)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (5.5)$$

donde  $v(x, t)$  es el desplazamiento transversal de las secciones de la viga,  $x$  es la coordenada longitudinal a lo largo de la viga y  $c_t$  es una constante definida como

$$c_t = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.6)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es el segundo momento del área de la sección transversal,  $\rho$  es la densidad del material y  $A$  el área de la sección transversal de la viga. Tras aplicar separación de variables, como se ha hecho en el caso de la vibraciones axiales, se obtiene la solución general de la ecuación, que resulta

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i \sin(k_i x) + B_i \cos(k_i x) + C_i \sinh(k_i x) + D_i \cosh(k_i x)] [E_i \sin(\omega_i t) + F_i \cos(\omega_i t)], \quad (5.7)$$

donde los símbolos son equivalentes a los dados para la solución de ondas axiales. En este caso el número de onda se relaciona con la frecuencia natural de cada modo mediante la expresión

$$\omega_i = c_t (k_i)^2. \quad (5.8)$$

Como se observa en esta ecuación la funciones modales constan de términos que son funciones armónicas y términos que son funciones hiperbólicas. Efectuando una manipulación trigonométrica de la ecuación (5.7), como la realizada para la expresión (5.3) de la solución a la vibraciones axiales, se obtienen también funciones de onda. La velocidad de propagación de estas viene dada por

$$c_i = \frac{\omega_i}{k_i} = \sqrt{\omega_i c_t}. \quad (5.9)$$

Por tanto, las respuestas asociadas diferentes modos de vibración representarán ondas elásticas que se propagan con distintas velocidades. La velocidad de propagación sería proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia natural de vibración de cada modo. La parte de la ecuación (5.7) que contiene a las funciones hiperbólicas se denomina *componente evanescente* y no representa ondas propagantes (Graff, 1975).

De la ecuación (5.5) resultan infinitas frecuencias naturales e infinitos modos que la satisfacen. Las frecuencias naturales tienden a infinito al aumentar el orden del modo, por tanto, la velocidad de propagación también sería tendente a infinito, como se deduce de la ecuación (5.9). Este resultado es físicamente incorrecto. No

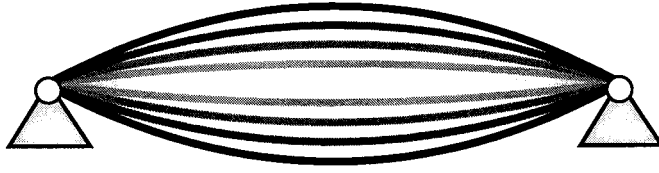


Figura 5.1: Vibración en el primer modo

se pueden propagar ondas elásticas en los materiales a una velocidad superior a la velocidad de propagación de ondas volumétricas, que es ligeramente superior a la velocidad de propagación de ondas axiales  $c$  (Graff, 1975). De hecho esto representa una limitación de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Sin embargo, en la práctica, se usan series finitas de modos para aproximar las respuestas, que constan de un número más o menos pequeño de modos, cuyas velocidades de propagación se suelen mantener por debajo de este valor límite. No es usual usar el criterio de máxima velocidad de propagación para truncar la serie de modos, suele ser más restrictiva la condición de que la longitud de onda  $\lambda_i = \frac{2\pi}{k_i}$  del modo, que es tendente a cero, sea siempre superior al canto de la viga. Para la solución de problemas de impacto, el uso de modos con velocidades de propagación superiores a las físicamente posibles introduciría errores, pues las ondas inducidas por el impacto se reflejarían y alcanzarían la de nuevo la zona de contacto antes que en la realidad. Si se usa la teoría de vigas de Timoshenko, que considera la deformación por cortante y la inercia al giro de las secciones, se obtienen modos de vibración con velocidades de propagación acotadas cuando su orden tiende a infinito, esto se mostrará en posteriores capítulos.

La solución al problema de vibraciones mediante separación de variables es fácil de visualizar físicamente. En la figura 5.1 se representa una viga biapoyada vibrando en el primer modo. Una función de forma, en este caso "medio seno", representa la deformada de la viga en cualquier instante. Al multiplicar su amplitud por una función armónica del tiempo, se representa matemáticamente

las vibraciones que se aprecian de forma cotidiana. Sin embargo, aunque se ha demostrado matemáticamente, no es inmediato visualizar que esta vibración es debida a la propagación de ondas elásticas. La figura ?? puede ayudar a comprender este proceso. En ella se representan tres instantáneas del proceso mostrado en la figura 5.1. De nuevo las flechas fuera de las funciones de onda indican el sentido de la velocidad de propagación y las flechas sobre las rebanadas la dirección de la velocidad material de éstas. En el instante de máxima amplitud del movimiento, dos ondas, con forma de medio seno y cada una con una amplitud asociada igual a la mitad del máximo de la amplitud total, se propagan a lo largo de la viga, una en cada dirección. La reflexión de éstas en los extremos articulados se produce como se indicó en el capítulo anterior, de forma que la onda reflejada tiene valores de amplitud asociada igual y de sentido contrario que la incidente para garantizar la condición de contorno de desplazamiento nulo. Representando esta reflexión y usando el principio de superposición de la elasticidad lineal, asignando a cada sección de la barra un estado igual al que produce la suma de las ondas que la recorren, se puede apreciar que estas ondas propagantes dan lugar al estado de vibración representado en la figura 5.1. En la última instantánea de la figura 5.2 se muestra la posición de las ondas que dan lugar a una amplitud nula en toda la barra.

### **5.3 Impacto axial en barras elásticas mediante superposición modal**

En este apartado se muestra la solución al impacto axial de sólidos rígidos en barras elásticas mediante superposición modal. Las soluciones deben coincidir con las dadas en el capítulo anterior mediante el análisis de la propagación de las ondas inducidas. Para ello se calculan los modos de vibración del sólido compuesto por la barra elástica y el sólido rígido unido a un extremo de ésta imponiendo las condiciones de contorno apropiadas. Se comienza por el caso del impacto en una

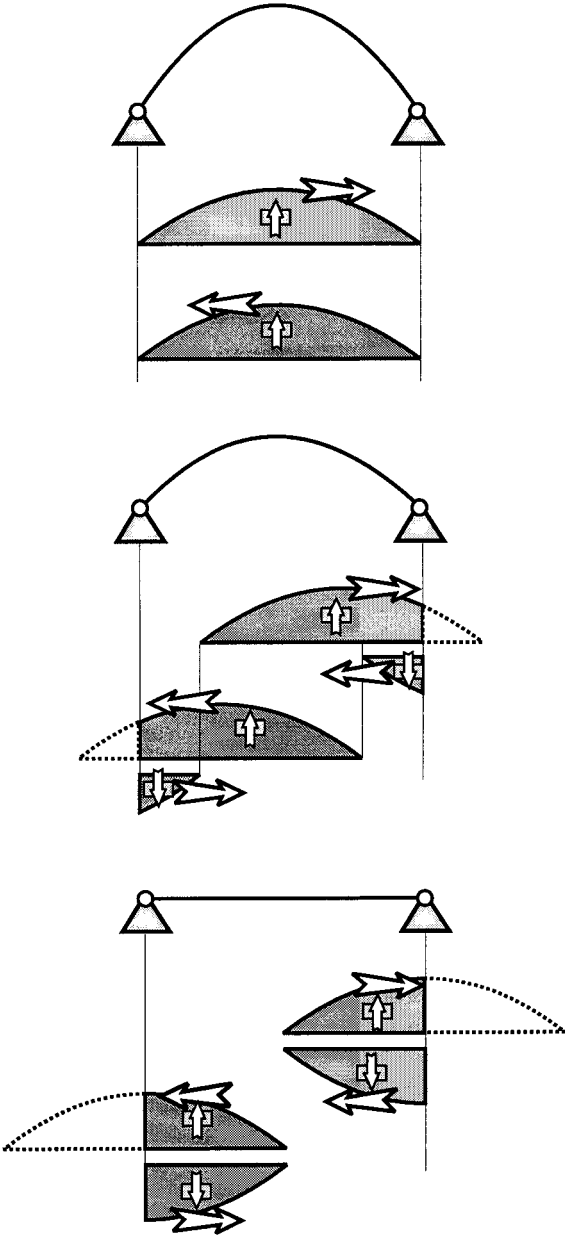


Figura 5.2: Vibración en el primer modo generada por ondas elásticas



barra fija en un extremo.

Por comodidad, en este apartado se invierte el sentido de la coordenada longitudinal de la barra, estando el origen  $x = 0$  en el extremo fijo, siendo  $x = L$  la coordenada del extremo de contacto. La condición de contorno en el extremo empotrado es desplazamiento nulo. En el extremo de contacto la condición de contorno indica que el esfuerzo axial es igual a la fuerza de inercia que aparece en el sólido rígido. Partiendo de la solución general dada en la ecuación (5.2), estas condiciones de contorno se escriben matemáticamente de la forma:

Extremo empotrado:

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow \phi_i(0) = 0 \Rightarrow B_i = 0 \quad (5.10)$$

Extremo de contacto:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} = -EA \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} &\Rightarrow -m_1 \omega_i^2 \phi_i(L) = -EA \phi_i'(L) \\ &\Rightarrow \frac{\omega_i L}{c} \tan\left(\frac{\omega_i L}{c}\right) = \frac{m_2}{m_1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

La última de las expresiones de la ecuación (5.11) es la ecuación de frecuencias, que habrá que resolver numéricamente. Los modos de vibración quedan de la forma

$$\phi_i(x) = A_i \sin(k_i x). \quad (5.12)$$

Estos modos de vibración cumplen las siguientes condiciones de ortogonalidad (Shabana, 1991)

$$\int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dm = 0, \quad \int_0^L EA \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx = 0, \quad \forall i \neq j \quad (5.13)$$

En este caso particular, considerando que la masa del sólido rígido está concentrada en el extremo de contacto, estas condiciones quedan

$$m_1 \phi_i(L) \phi_j(L) + \rho A \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0, \quad \int_0^L \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx = 0, \quad \forall i \neq j \quad (5.14)$$

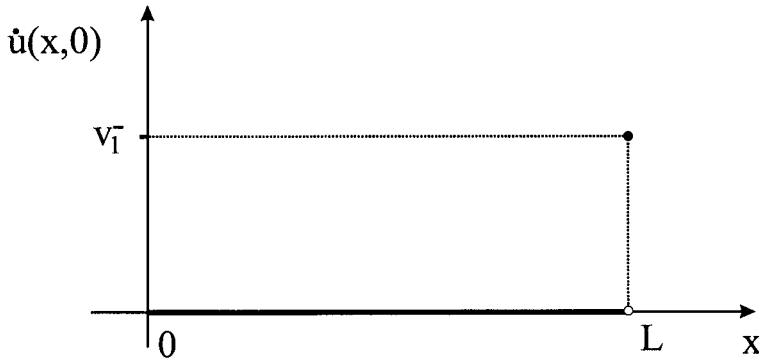


Figura 5.3: Condición de contorno en velocidad

La condición inicial para el problema del impacto axial indica que el desplazamiento elástico de las secciones de la barra es nulo, entonces, de acuerdo con la ecuación (5.2) se obtiene

$$u(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_i = 0. \quad (5.15)$$

La condición inicial en velocidad es de velocidad nula de todas las secciones de la barra excepto la de contacto, que instantáneamente adquiere la misma velocidad que el sólido rígido, como se concluyó en el capítulo anterior. Esta función discontinua está representada en la figura 5.3 y matemáticamente se escribe de la forma

$$\dot{u}(x, 0) = F(x); \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < L \\ v_1^- & \text{si } x = L \end{cases} \quad (5.16)$$

Imponiendo esta condición de contorno se obtiene

$$\sum_i C_i \omega_i \phi_i(x) = F(x). \quad (5.17)$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por  $\rho A \phi_j(x)$  e integrando en la longitud de la barra resulta

$$\sum_i C_i \omega_i \rho A \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \rho A \int_0^L F(x) \phi_j(x) dx. \quad (5.18)$$

Por otro lado, evaluando la ecuación (5.17) en  $x = L$  y multiplicando ambos lados por  $m_1 \phi_j(L)$  se obtiene

$$\sum_i C_i \omega_i m_1 \phi_i(L) \phi_j(L) = m_1 F(L) \phi_j(L). \quad (5.19)$$

Sumando las ecuaciones (5.18) y (5.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_i C_i \omega_i [\rho A \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_1 \phi_i(L) \phi_j(L)] = \\ \rho A \int_0^L F(x) \phi_j(x) dx + m_1 F(L) \phi_j(L). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Obviamente, el primer término del segundo miembro de la ecuación es cero, pues sólo la sección de contacto tiene velocidad no nula. Usando las condiciones de ortogonalidad definidas en la ecuación (9.20) se obtienen los siguientes valores para las constantes  $C_i$

$$C_i = \frac{m_1 v_1^- \phi_i(L)}{\omega_i [\rho A \int_0^L (\phi_i(x))^2 dx + m_1 (\phi_i(L))^2]} \quad (5.21)$$

Evaluando las integrales que aparecen en esta ecuación se obtiene la siguiente solución al problema del impacto axial:

$$u(x, t) = \sum_i C_i \sin(k_i x) \sin(\omega_i t)$$

$$\text{Ecuación de Frecuencias: } k_i L \tan(k_i L) = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.22)$$

$$\text{Coeficientes: } C_i = \frac{v_1^- \sin(k_i L)}{\omega_i [\frac{\rho A}{m_1} (\frac{L}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin(2k_i L)) + (\sin(k_i L))^2]}$$

Estas ecuaciones sólo son válidas mientras exista contacto entre el sólido rígido y el extremo de contacto de la barra flexible. A partir de ese instante deberá cambiarse el juego de modos de vibración por los modos de vibración libre de una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, tomando por condiciones iniciales de posición y velocidad de las secciones las del instante de separación.

El instante de separación ocurrirá cuando se haga nula la tensión en la sección de contacto, instante que se calcula al resolver numéricamente la ecuación

$$EAu'(x, t_c) = 0. \quad (5.23)$$

La solución general de vibración libre de una barra elástica fija en un extremo se obtiene de imponer en la ecuación (5.2) las condiciones de desplazamiento nulo en el extremo empotrado y tensión nula en el extremo libre, y resulta

$$u_L(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin(k_{L,i}x) [C_{L,i} \sin(\omega_{L,i}t) + D_{L,i} \cos(\omega_{L,i}t)], \quad (5.24)$$

donde el subíndice  $L$  atiende al extremo libre, que sustituye al extremo de contacto durante el impacto. Los números de onda  $k_{L,i} = \frac{\omega_{L,i}}{c}$  y las frecuencias naturales vienen dadas por la expresión

$$\omega_{L,i} = \frac{(2i-1)\pi c}{2L}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

Las constantes de la ecuación (5.24) se obtienen de imponer las condiciones iniciales

$$u_L(x, 0) = u(x, t_c), \quad \dot{u}_L(x, 0) = \dot{u}(x, t_c), \quad (5.26)$$

donde se ha cambiado el origen del tiempo tras el cambio de juego de modos por comodidad en los cálculos. Los modos de vibración de la barra fija en un extremo y libre en el otro también cumplen las condiciones de ortogonalidad dadas por la ecuación (5.13). Es necesario su uso para imponer las condiciones iniciales dadas, de manera similar a como se ha hecho para imponer la condición de velocidad al inicio del impacto. Quedan entonces los siguientes valores para las constantes

$$D_{L,i} = \frac{\int_0^L u(x, t_c) \sin(k_{L,i}x) dx}{\int_0^L [\sin(k_{L,i}x)]^2 dx}, \quad C_{L,i} = \frac{\int_0^L \dot{u}(x, t_c) \sin(k_{L,i}x) dx}{\omega_{L,i} \int_0^L [\sin(k_{L,i}x)]^2 dx}. \quad (5.27)$$

Como se ha expuesto en el capítulo anterior, es posible que el impacto ocurra en varios periodos de contacto. Si se detectara la ocurrencia de otros periodos de contacto habría que volver a cambiar el juego de modos. El proceso se repetiría hasta la separación definitiva de los sólidos. El cálculo de las constantes en los subsiguientes periodos de contacto se hace imponiendo la igualdad de condiciones de posición y velocidad de las secciones en el instante del inicio de cada contacto. Todas excepto la sección de contacto, que tendrá en el primer instante del contacto la misma posición, pero habrá adquirido instantáneamente la misma velocidad que

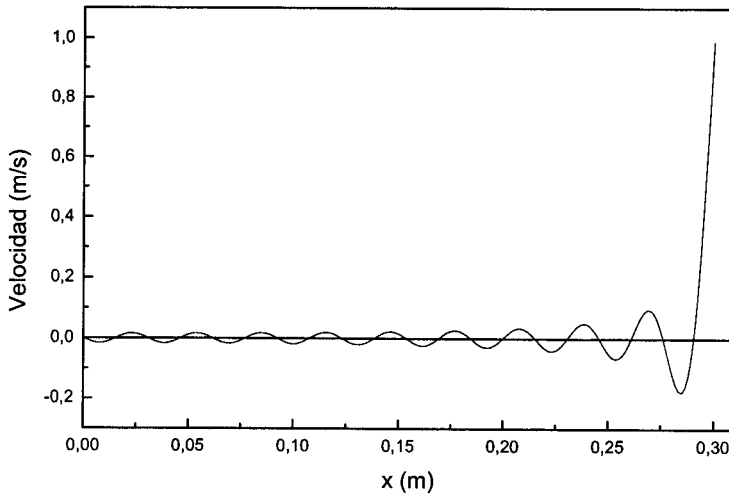


Figura 5.4: Velocidades en el inicio del contacto

el sólido rígido. Usando el mismo proceso que en el instante del primer contacto, queda la siguiente solución para los contactos subsecuentes

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_i (C_i \sin(k_i x) + D_i \cos(k_i x)) \sin(\omega_i t) \\
 C_i &= \frac{\frac{\rho A}{m_1} \int_0^L \dot{u}_L(x, t_{c,n}) \sin(k_i x) dx + v_1^n \sin(k_i L)}{\omega_i \left[ \frac{\rho A}{m_1} \left( \frac{L}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin(2k_i L) \right) + (\sin(k_i L))^2 \right]} \\
 D_i &= \frac{\frac{\rho A}{m_1} \int_0^L u_L(x, t_{c,n}) \sin(k_i x) dx + u_L(L, t_{c,n}) \sin(k_i L)}{\left[ \frac{\rho A}{m_1} \left( \frac{L}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin(2k_i L) \right) + (\sin(k_i L))^2 \right]}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde  $t_{c,n}$  indica el instante del inicio del  $n$ -ésimo periodo de contacto,  $u_L(x, t_{c,n})$  y  $\dot{u}_L(x, t_{c,n})$  son las posiciones y velocidades de las secciones justo antes del contacto, expresadas en términos de los modos de extremo libre y  $v_1^n$  es la velocidad del sólido rígido en dicho instante.

El proceso descrito para evaluar la solución al impacto mediante superposición

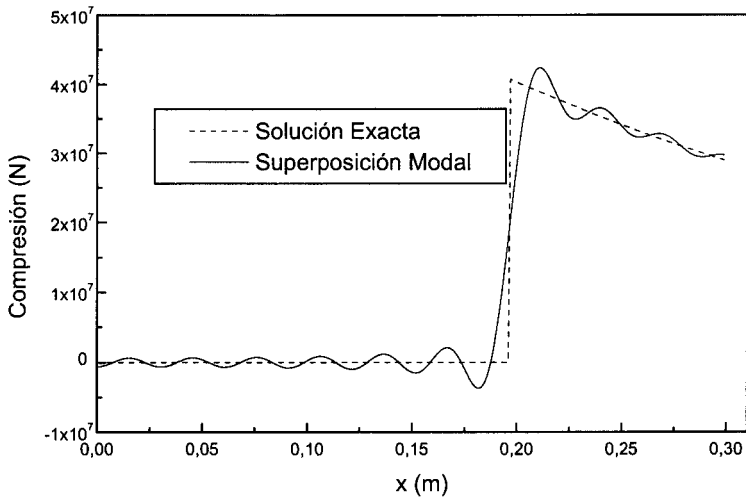


Figura 5.5: Compresiones en  $t = 2e - 5s$

modal es muy costoso numéricamente. Si se usan  $n$  modos en la respuesta del sistema es necesario calcular numéricamente  $2n^2$  integrales para obtener las constantes cada vez que se cambia el juego de modos. El problema en el que la masa del sólido rígido y la barra flexible son iguales, cuya solución se ha obtenido usando la teoría de ondas en capítulo anterior, se ha resuelto usando superposición modal. Se ha supuesto una masa común de  $2.133 \text{ kg}$ , longitud de la barra  $L = 0.3 \text{ m}$  que se supone de acero, con un módulo de Young  $E = 210 \text{ GPa}$ , densidad  $\rho = 7.9e3 \text{ kg/m}^3$ , sección transversal cuadrada de  $3 \text{ cm}$  de lado, y una velocidad inicial del sólido rígido de  $1 \text{ m/s}$ .

Como se mostró en el capítulo anterior este choque consta de dos periodos de contacto. Esto supone que hay que hacer tres cambios del juego de modos para obtener las cuatro soluciones analíticas de las que consta la solución. Se han usado en este ejemplo 20 modos para representar la respuesta. En la figura 5.4 se muestra

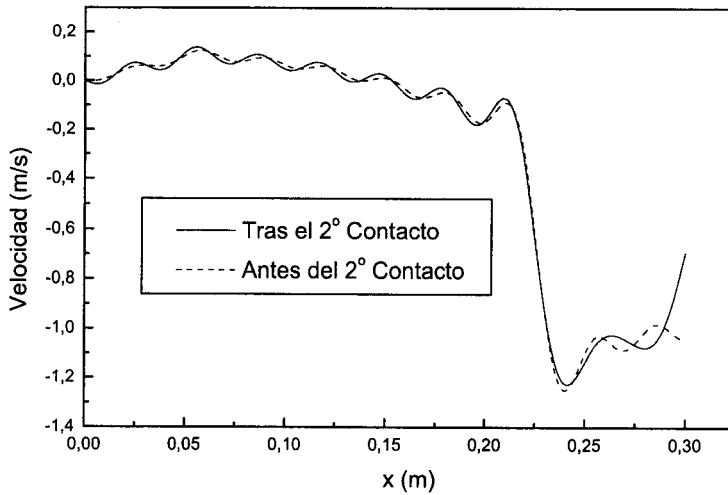
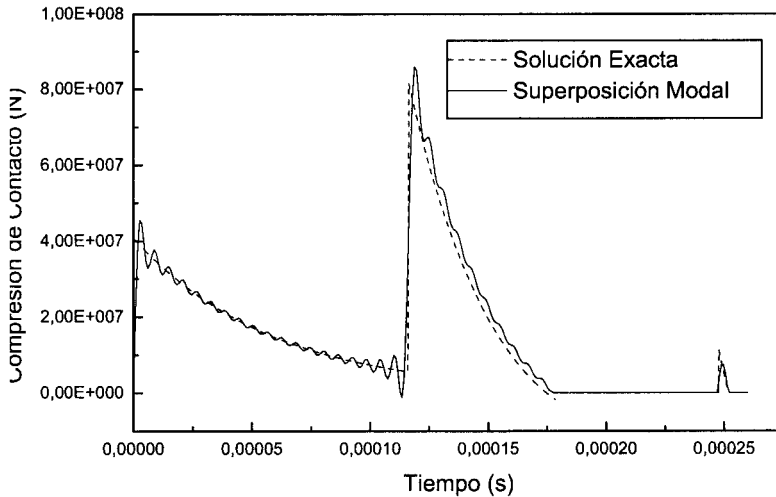


Figura 5.6: Velocidades antes y después del inicio del segundo contacto

el campo de velocidades en la barra en el primer instante tras el impacto, que debe coincidir con el mostrado en la figura 5.3, si se usa un conjunto infinito de modos. Naturalmente la velocidad no es exactamente cero en las secciones interiores de la barra, aunque bastante menores que la que se obtiene en el extremo de contacto. En la figura 5.5 se muestra el estado de tensión en el interior de la barra flexible en el instante  $t = 20 \mu\text{s}$ , en el cual el frente de onda de compresión aún no ha llegado al extremo empotrado. De la comparación de la solución exacta, como se obtuvo en el capítulo anterior, con la solución mediante superposición modal se deduce lo mismo que en el estado de velocidad en el instante del contacto.

La figura 5.6 muestra la velocidad de las secciones de la barra inmediatamente antes y después del inicio del segundo contacto. Las funciones representadas son pues series de dos familias de modos distintas. Las velocidades deben coincidir en todos los puntos excepto en la sección de contacto, ya que ésta adquiere ins-

Figura 5.7: Fuerza de contacto con  $\beta = 1$ 

tantáneamente la velocidad del sólido rígido, como consecuencia del contacto. En la figura 5.7 se compara la fuerza de contacto evaluada mediante superposición modal y la que se obtiene de la teoría de ondas. Los tiempos y fuerzas de contacto están bastante bien evaluados con 20 modos de vibración.

## 5.4 Impacto en estructuras ligeras

Como se mencionó en el capítulo anterior, el impacto de sólidos rígidos libres en estructuras flexibles se puede resolver haciendo una aproximación cuasiestática estructural. En este caso, las fuerzas de inercia debidas a la masa de la estructura no son tenidas en cuenta y se hace un modelo de un grado de libertad para describir la deformación de la estructura durante el impacto. Se obtienen resultados admisibles con esta aproximación siempre que la masa del impactor libre sea mucho mayor que la masa de la estructura, pues en ese caso serán mucho más importantes



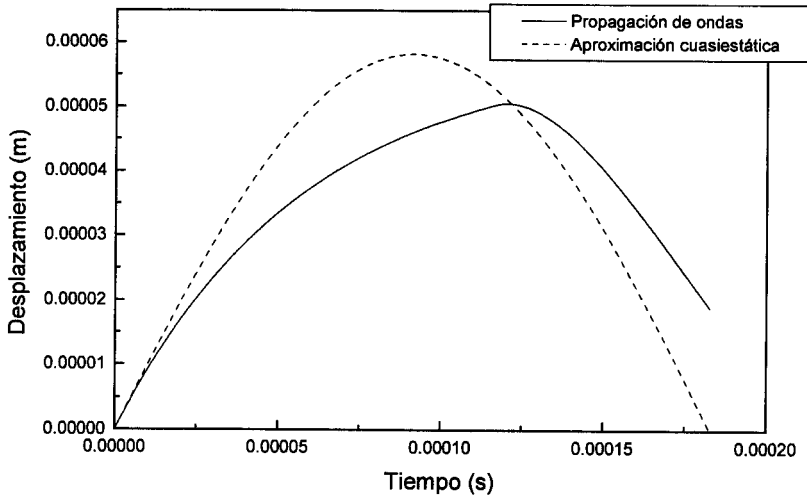


Figura 5.8: Desplazamientos durante el contacto con  $\beta = 1$

las fuerzas de inercia del impactor. Para comprobar esto, además del ejemplo del apartado anterior, se ha resuelto el impacto axial de un sólido rígido en una barra elástica en voladizo de masa diez veces menor usando superposición modal y la aproximación cuasiestática. Las propiedades de la barra son las mismas que las del apartado anterior. Por tanto, el sólido rígido tiene masa 21.33 Kg. La velocidad inicial coincide también con la del capítulo anterior. Para realizar la aproximación cuasiestática se ha supuesto que la barra en voladizo se deforma como lo haría al ser cargada estáticamente mediante una fuerza puntual en su extremo de contacto.

En la figura 5.8 se muestran los desplazamientos durante el impacto del sólido libre y la sección de contacto, usando superposición modal y la aproximación cuasiestática, del ejemplo en que las masas del impactor y la estructura coinciden. En este caso no se ha representado el segundo periodo de contacto. Cuando se usa la aproximación cuasiestática, el impacto termina en el instante en que la estruc-

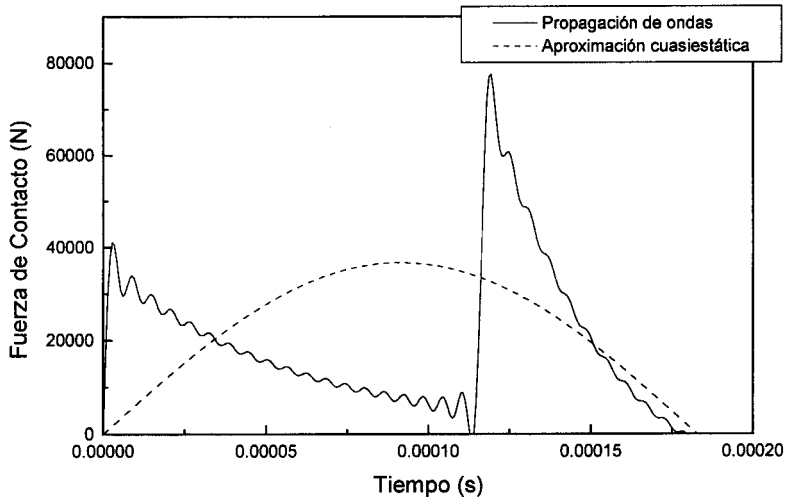


Figura 5.9: Fuerzas de contacto con  $\beta = 1$

tura tiene deflexión nula, pues en ese caso se anula la fuerza de contacto al ser evaluada cuasiestáticamente. No resulta así cuando se analiza el problema con propagación de ondas. Sin embargo, se aprecia en la figura 5.8 que de la aproximación cuasiestática resulta una buena estimación del tiempo de contacto y los desplazamientos máximos. En la figura 5.9 se comparan las fuerzas de contacto obtenidas. De nuevo no se ha representado el segundo periodo que aparece en el problema con propagación de ondas. En la figura se observa que la evolución de la fuerza de contacto en ambos problemas no guarda relación, y que el máximo obtenido con la aproximación cuasiestática es la mitad que el obtenido con propagación de ondas.

Las figuras 5.10 y 5.11 muestran las comparaciones de desplazamientos y fuerzas de contacto, respectivamente, de los problemas resueltos con propagación de ondas y aproximación cuasiestática para el caso en que el impactor tiene diez veces más

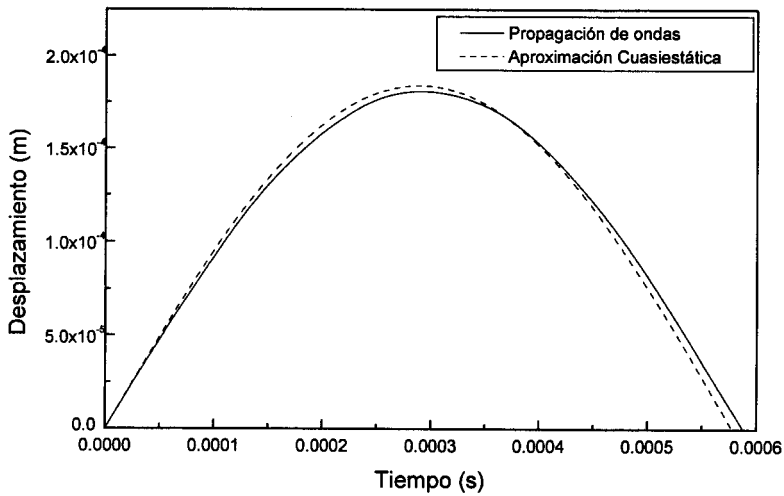
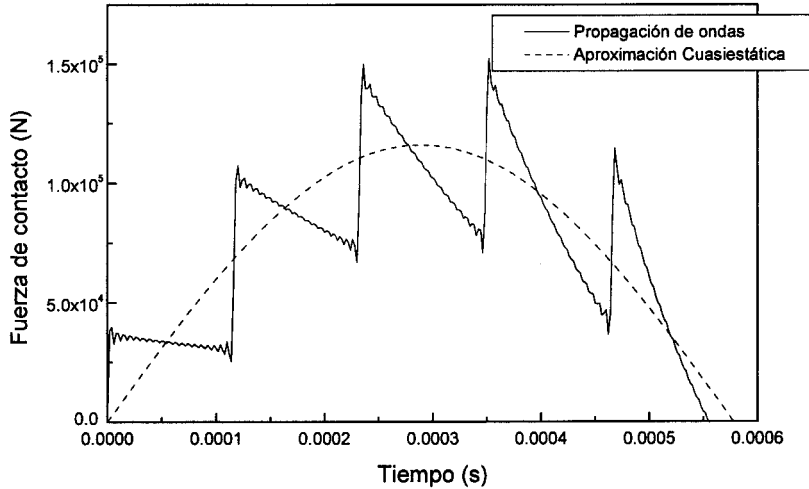


Figura 5.10: Desplazamientos durante el contacto con  $\beta = 0.1$

masa que la estructura. Se observa que en este caso los desplazamientos dados por ambas aproximaciones coinciden en gran medida y que en este caso si hay relación entre las evoluciones de las fuerzas de contacto. El haber obtenido un mejor acuerdo en este segundo caso es debido a que el impactor tiene más masa y por tanto dejan de tener tanta importancia las fuerzas de inercia de las secciones de la barra elástica. Si se aumentase aún más la masa del impactor, los picos en la fuerza de contacto, debidos a las sucesivas reflexiones del frente de onda, disminuirán su valor con respecto al máximo absoluto de la fuerza de contacto. En este caso, la fuerza de contacto dada con la aproximación cuasiestática, que no muestra estos saltos debidos a las reflexiones de onda, se asimilaría aún más a la fuerza de contacto dada con propagación de ondas.

Figura 5.11: Fuerzas de contacto con  $\beta = 0.1$ 

## 5.5 Impacto transversal en barras elásticas mediante superposición modal

En este apartado se va a analizar el impacto transversal de un sólido rígido en una barra flexible en voladizo. Como ya se ha mostrado, las ondas elásticas de flexión son dispersivas. Esta propiedad hace inviable el análisis de la propagación y reflexión de las ondas inducidas por el impacto, como se hizo con las ondas axiales en el capítulo anterior. Sin embargo, una vez comprobado que el método de superposición modal aporta soluciones aceptables en el caso axial, se puede tener confianza en la calidad de la solución para el caso transversal. El proceso de solución mediante superposición modal para el impacto transversal es equivalente al mostrado para el caso axial. El problema que se va a resolver se ilustra en la figura 5.12.

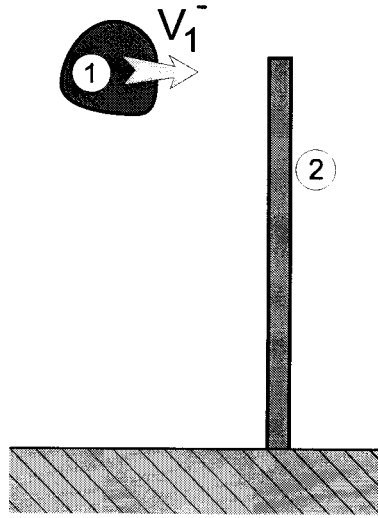


Figura 5.12: Impacto transversal en barra elástica

Los modos de vibración que se usan en el cálculo de la respuesta de la barra durante el contacto son los de una viga empotrada en un extremo y unida a un sólido rígido puntual en el extremo opuesto. Se supone que el sólido carece de inercia a la rotación. Esta simplificación se podría relajar sin aumentar la complejidad conceptual del problema, aunque sí de la evaluación numérica de la solución; por tanto, por simplicidad, se mantiene en este apartado. Las condiciones iniciales y de contorno se imponen en la solución general dada en (5.7). Se llaman aquí  $\varphi_c(x)$  a los modos de vibración dados en dicha ecuación, que se denominan modos de contacto. En lo que sigue se usa el subíndice  $c$  también para las constantes asociadas a la solución con estos modos. Quedan las siguientes condiciones de contorno:

Extremo empotrado:

$$v(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{c,i}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{c,i} + D_{c,i} = 0 \quad (5.29)$$

$$v'(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'_{c,i}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{c,i} + C_{c,i} = 0 \quad (5.30)$$

Extremo de contacto:

$$v''(0, t) = 0 \Rightarrow \varphi''_{c,i}(0) = 0 \quad (5.31)$$

$$m_1 \frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial t^2} = EI \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^3} \quad (5.32)$$

La segunda condición de contorno en el extremo de contacto indica que el esfuerzo cortante en dicha sección es igual a la inercia del sólido rígido. Si se hubiera supuesto inercia a la rotación del sólido rígido, la primera condición de contorno en el extremo de contacto debería indicar que el flector es igual al momento producido por dicha inercia, en vez de nulo como en este caso. Imponiendo las condiciones de contorno del extremo empotrado y la primera del extremo de contacto y eliminando una de las constantes que no es necesaria, quedan los modos

$$\varphi_{c,i}(x) = \frac{\sin(k_{c,i}x) - \sinh(k_{c,i}x)}{\sin(k_{c,i}L) + \sinh(k_{c,i}L)} - \frac{\cos(k_{c,i}x) - \cosh(k_{c,i}x)}{\cos(k_{c,i}L) + \cosh(k_{c,i}L)} \quad (5.33)$$

Queda por imponer la segunda condición de contorno en el extremo de contacto, que dará lugar a la ecuación de frecuencias. Las condiciones iniciales para el problema del impacto son

Desplazamientos:

$$v(x, 0) = 0 \Rightarrow F_i = 0 \quad (5.34)$$

Velocidad:

$$\dot{v}(x, 0) = F(x); \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < L \\ v_1^- & \text{si } x = L \end{cases} \quad (5.35)$$

La condición inicial de velocidad es igual que en el caso del impacto axial, aunque con velocidad transversal, y por tanto representada en la figura 5.3. De la segunda condición de contorno en el extremo de contacto resulta

$$k_{c,i}L \frac{\sin(k_{c,i}L)\cosh(k_{c,i}L) - \sinh(k_{c,i}L)\cos(k_{c,i}L)}{1 + \cos(k_{c,i}L)\cosh(k_{c,i}L)} = \frac{m_2}{m_1} \quad (5.36)$$

que es la ecuación de frecuencias de una viga empotrada en un extremo y unida a un sólido rígido en el otro.

Las condiciones de ortogonalidad para estos modos son (Shabana, 1991)

$$m_1 \varphi_{c,i}(L) \varphi_{c,j}(L) + \rho A \int_0^L \varphi_{c,i}(x) \varphi_{c,j}(x) dx = 0, \quad \int_0^L \varphi_{c,i}''(x) \varphi_{c,j}''(x) dx = 0, \quad \forall i \neq j \quad (5.37)$$

Condiciones que son necesarias para imponer la condición inicial de velocidad de las secciones de la barra. El proceso es idéntico al empleado en el caso del impacto axial. En este caso, quedan los siguientes valores para las constantes que quedan por evaluar

$$E_{c,i} = \frac{m_1 v_1^- \varphi_{c,i}(L)}{\omega_{c,i} [\int_0^L \rho A \varphi_{c,i}^2(x) dx + m_1 \varphi_{c,i}^2(L)]} = \frac{2v_1^- R_i + \sinh(k_{c,i}L)(\cos(k_{c,i}L) + \cosh(k_{c,i}L))}{\omega_{c,i} \left[ R_i^2 + \frac{m_1^2}{m_1} (\sin(k_{c,i}L) + \sinh(k_{c,i}L))^2 \right]} \quad (5.38)$$

donde

$$R_i = \sin(k_{c,i}L) \cosh(k_{c,i}L) - \sinh(k_{c,i}L) \cos(k_{c,i}L) \quad (5.39)$$

Queda entonces la solución

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \varphi_{c,i}(x) \sin(\omega_{c,i} t) \quad (5.40)$$

donde los modos vienen dados por la ecuación (5.33), las constantes por la ecuación (5.38) y las frecuencias son la soluciones de la ecuación (5.36). Recuérdese que los números de onda están relacionados con las frecuencias de vibración mediante la expresión (5.8).

La validez de esta solución está limitada al periodo de contacto. Dicho periodo termina cuando la fuerza de contacto se hace nula, lo que se detecta numéricamente por un cambio de signo del esfuerzo cortante en el extremo de la barra empotrada. La solución en el periodo o periodos en que no hay contacto hay que evaluarla usando los modos de vibración de una barra empotrada-libre. De nuevo hay que alternar las dos familias de modos durante los periodos de contacto y separación. Las constantes de las distintas soluciones se evalúan de forma idéntica al caso axial, sustituyendo los modos por sus equivalentes modos transversales. Los modos de

vibración de una barra en voladizo -con extremo libre- tienen expresión idéntica a los modos que se han denominado de contacto, dada en la ecuación (5.33). Sin embargo, de imponer la condición de cortante nulo en el extremo libre resulta la ecuación de frecuencias

$$\cos(k_{l,i}L)\cosh(k_{l,i}L) = -1, \quad (5.41)$$

cuyas distintas soluciones dan lugar a los números de onda de estos modos de extremo libre. En lo que sigue se usa el subíndice  $l$  para distinguir los modos de extremo libre y sus constantes asociadas.

Cada vez que, estando en situación de contacto, se detecta que se hace nulo es esfuerzo cortante en el extremo de contacto, se cambia el juego de modos, pasando de modos de contacto a modos de extremo libre. Para ello se impone la igualdad en desplazamientos y velocidades de todas las secciones de la barra, haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de los modos. Las constantes  $E_i$  y  $F_i$  que aparecen en la solución general (5.7) se obtienen de

$$F_{l,i} = \frac{\int_0^L \varphi_{L,i}(x)v(x, t_f)dx}{\int_0^L \varphi_{l,i}^2(x)dx}, \quad E_{l,i} = \frac{\int_0^L \varphi_{L,i}(x)\dot{v}(x, t_f)dx}{\frac{1}{\omega_{l,i}}(\int_0^L \varphi_{l,i}^2(x)dx)}, \quad (5.42)$$

donde  $t_f$  es el instante en el que se anula el cortante y  $v(x, t_f)$  y  $\dot{v}(x, t_f)$  son el desplazamiento y velocidad de las secciones en ese instante, respectivamente, que se obtienen por superposición de modos de contacto. Análogamente, cada vez que estando el sólido rígido separado de la sección extrema se detecta que vuelven a entrar en contacto, las constantes  $E_i$  y  $F_i$  se calculan mediante las expresiones

$$F_{c,i} = \frac{\rho A(\int_0^L \varphi_{c,i}(x)v(x, t_p)dx) + m_1\varphi_{c,i}(L)v(L, t_p)}{\rho A(\int_0^L \varphi_{l,i}^2(x)dx) + m_1\varphi_{c,i}^2(L)}, \quad (5.43)$$

$$E_{c,i} = \frac{\rho A(\int_0^L \varphi_{c,i}(x)\dot{v}(L, t_p)dx) + m_1\varphi_{c,i}(L)\dot{x}_1(t_p)}{\frac{1}{\omega_{c,i}}[\rho A(\int_0^L \varphi_{c,i}^2(x)dx) + m_1\varphi_{c,i}^2(L)]},$$

donde  $t_p$  es el instante en que se cruzan las trayectorias del sólido rígido y la sección de contacto,  $v(x, t_p)$  y  $\dot{v}(x, t_p)$  son el desplazamiento y velocidad de las secciones en ese instante, respectivamente, que se obtienen por superposición de modos de



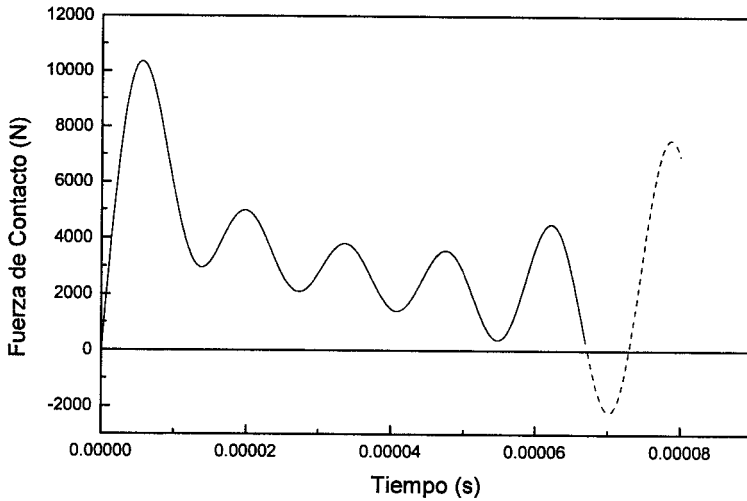


Figura 5.13: Fuerza de contacto en impacto transversal

extremo libre, y  $\dot{x}_1(t_p)$  es la velocidad del sólido rígido en dicho instante que, en caso de que no actúen fuerzas sobre él cuando no hay contacto, coincide con el de la sección de contacto cuando terminó el periodo de contacto anterior.

Estas ecuaciones se han resuelto usando los mismos sólidos que en el caso axial, tan sólo cambiando la dirección del movimiento inicial del sólido rígido. Se han usado 10 modos de vibración para el cálculo de la solución. En la figura 5.13 se muestra el esfuerzo cortante -igual a la fuerza de contacto- durante el primer periodo de contacto. En el instante  $t = 67 \mu s$ , éste cambia de signo, lo que significa que termina el primer periodo de contacto. En este instante se cambia el juego de modos pasando a la solución con modos de extremo libre. En las figuras 5.14 y 5.15 se muestran las posiciones y velocidades de las secciones con ambas familias de modos en el instante de la separación. La aproximación es excelente en el caso de los desplazamientos y muy buena en el caso de las velocidades, excepto en el

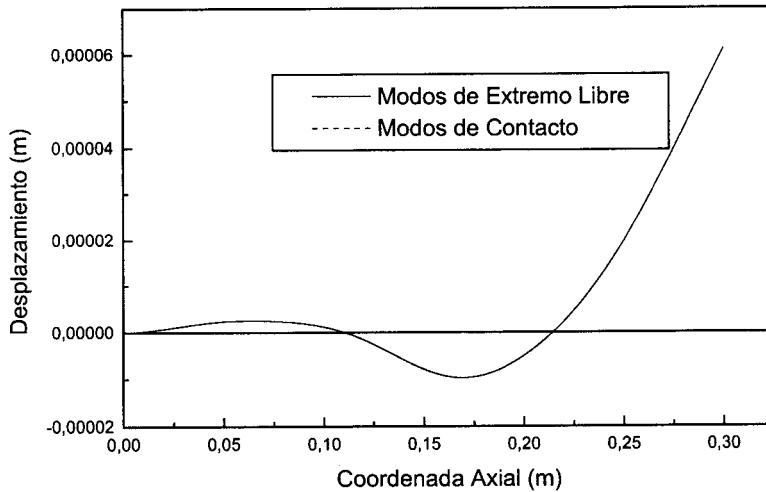


Figura 5.14: Desplazamientos en la barra en instante de separación

entorno de la zona de contacto donde se aprecia una diferencia sustancial en las velocidades. En concreto la velocidad del sólido rígido y por tanto de la sección de contacto es de  $0.87 \text{ m/s}$  en el instante de la separación, pero la aproximada con los modos de extremo libre es de  $0.92 \text{ m/s}$ . Por tanto, tras este primer periodo de contacto el sólido rígido continúa moviéndose en la dirección inicial y ha perdido muy poca velocidad. Se podría decir que el proceso del impacto no ha hecho más que empezar.

En la figura 5.16 se muestran los desplazamientos de la sección de contacto y del sólido rígido tras este primer periodo de contacto. En el instante  $t = 77.8 \mu\text{s}$  vuelven a entrar en contacto. De nuevo hay que cambiar el juego de modos. En las figuras 5.17 y 5.18 se representan el desplazamiento y la velocidad de las secciones de la barra en el instante del inicio del segundo periodo de contacto. En estas gráficas, las curvas obtenidas con modos de extremo libre representan

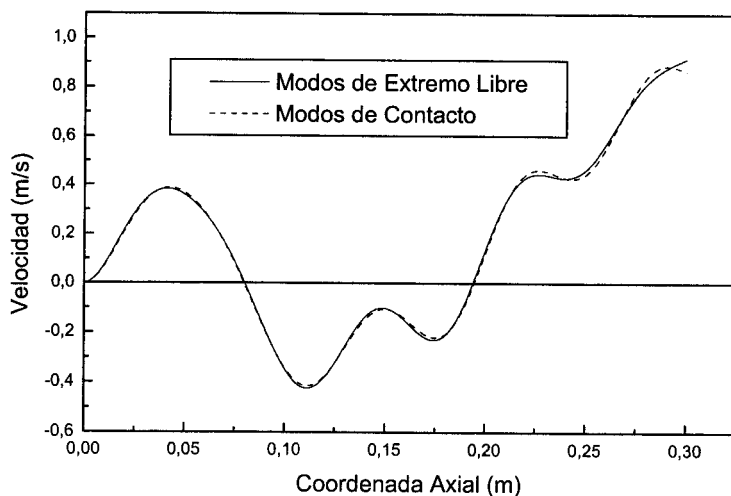


Figura 5.15: Velocidades en la barra en instante de separación

un instante antes del segundo contacto y las curvas con modos de contacto un instante después. Como se ha indicado, las curvas de desplazamiento debieran ser idénticas, y las de velocidad deben serlo en todas las secciones excepto en la de contacto. Se observa que la aproximación obtenida es excelente en desplazamientos y aceptable en velocidades. La exigencia de representar una función discontinua en velocidades hace que la aproximación obtenida al hacer el cambio de modos no sea tan buena como lo es en desplazamientos.

Tras analizar la evolución del esfuerzo cortante en el segundo periodo de contacto se vuelve a cambiar el juego de modos cuando éste se anula. Tras esta separación aparece un nuevo periodo de contacto. En el ejemplo analizado, el proceso continúa un total de 66 periodos de contacto hasta la separación definitiva. Por tanto, ha sido necesario realizar la operación de cambio de juego de modos 122 veces, 66 cambios de modos de extremo libre a modos de contacto y 66 cambios

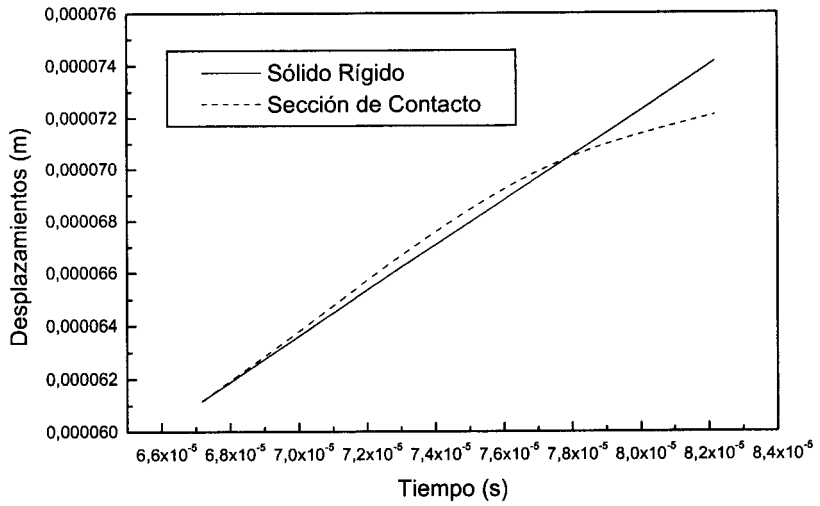


Figura 5.16: Desplazamientos de sólido rígido y sección de contacto

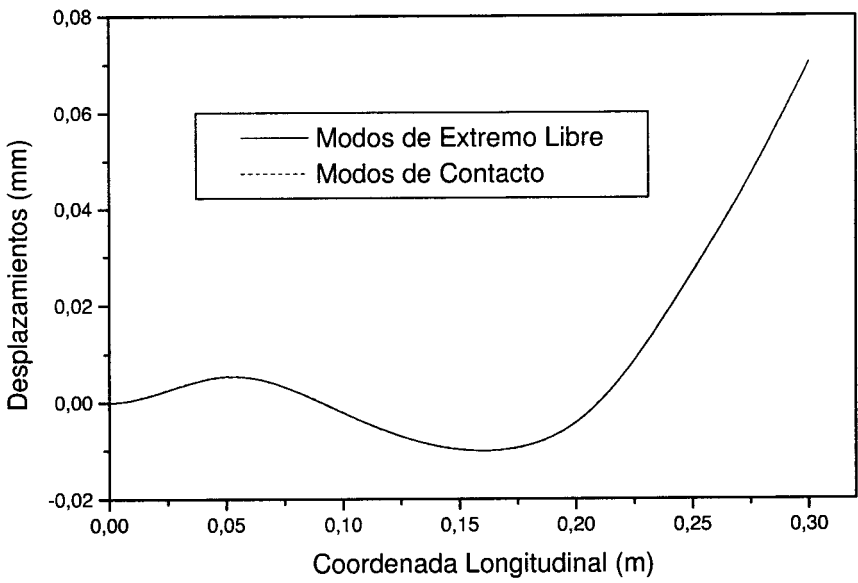


Figura 5.17: Desplazamientos en el instante del segundo contacto

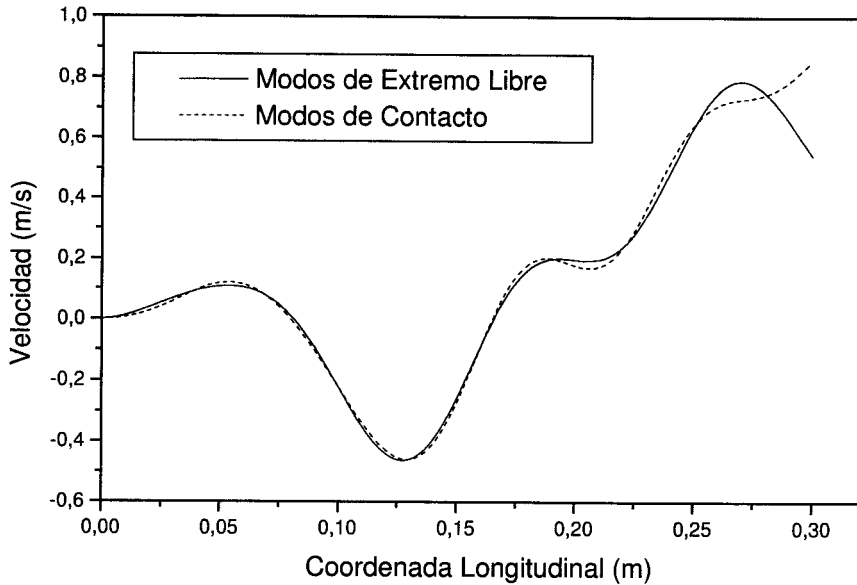


Figura 5.18: Velocidades en el instante del segundo contacto

de modos de contacto a modos de extremo libre. Para efectuar cada una de estas operaciones hay que evaluar numéricamente  $2 * n^2$  integrales, siendo  $n$  el número de modos utilizados.

En la figura 5.19 están representados los desplazamientos durante y tras el contacto del sólido rígido y de la sección de contacto de la barra en voladizo, además del esfuerzo cortante en dicho extremo cambiado de signo. Cada una de estas tres curvas representan funciones definidas a trozos, en 122 intervalos diferentes en este caso. Se observa que el proceso de contacto y separación dura aproximadamente  $4 \text{ ms}$ , que coincide con la mitad del periodo fundamental de vibración de la barra con el sólido unido en su extremo.

El esfuerzo cortante sólo es no nulo cuando se usan modos de contacto, es decir, cuando barra y sólido rígido están unidos. En este caso debe coincidir en valor absoluto con la fuerza de contacto. Sin embargo, se aprecia en la figura que en determinados instantes la fuerza de contacto es negativa, de tracción, lo

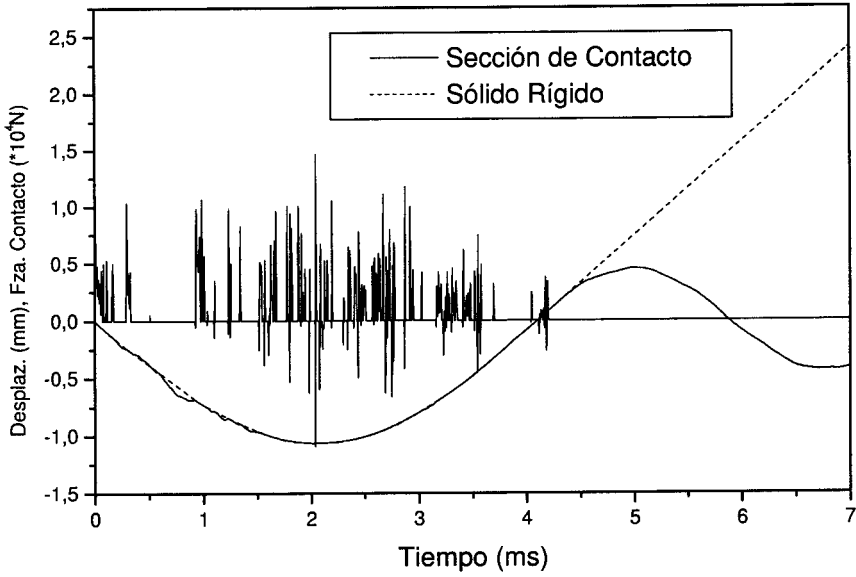


Figura 5.19: Desplazamientos de sólido rígido y sección de contacto

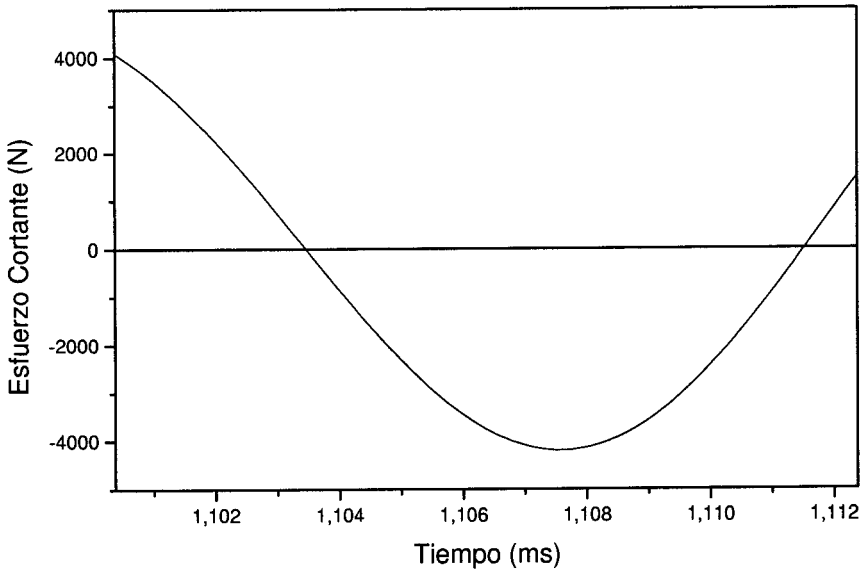


Figura 5.20: Esfuerzo cortante en extremo. Contacto n° 11

cual es físicamente imposible. Este error es debido a imprecisiones numéricas. Cuando se comienza un nuevo periodo de contacto se igualan los desplazamientos de todas las secciones. Si el cambio fuera perfecto, y la curva de desplazamientos fuera idéntica con ambos juegos de modos, también lo sería su derivada tercera con respecto a la coordenada longitudinal, a la que está asociada el cortante de las secciones. Así, como el cortante es siempre nulo con modos de extremo libre, debería también serlo al comienzo de cualquiera de los periodos de contacto. Sin embargo, en la evaluación numérica que se ha realizado, aunque las curvas de desplazamiento aparentemente resultan idénticas con ambos juegos de modos, no lo son tanto pues al comienzo de los distintos periodos de contacto el cortante no es nulo en la sección de contacto. En la figura 5.20 se muestra el esfuerzo cortante en el periodo de contacto número 11. La primera parte de la curva, en la que el esfuerzo es positivo, carece de sentido físico. En este caso se ha tomado como instante de separación el segundo corte de la curva con el eje de abscisas. La integral del esfuerzo cortante representa el impulso de la fuerza de contacto, que coincide con el salto de velocidad que experimenta el sólido rígido. Para el cálculo de los instantes de separación se ha tomado como criterio que dicha integral sea negativa en dicho instante, para que de ningún modo el sólido rígido pueda ganar velocidad en la dirección que traía inicialmente.

## 5.6 Propagación de ondas en barras elásticas giratorias

Las ecuaciones diferenciales de vibraciones axiales y transversales, (4.1) y (5.5) respectivamente, son válidas para barras que no experimentan grandes rotaciones. En caso de que así fuera, la expresión de las fuerzas de inercia incluiría las centrífugas y de Coriolis, que hacen que el proceso de propagación de ondas elásticas se modifique. Supóngase el caso de una barra elástica que gira en un plano alrededor de uno de sus extremos con velocidad angular  $\Omega$  constante, como se ilustra en

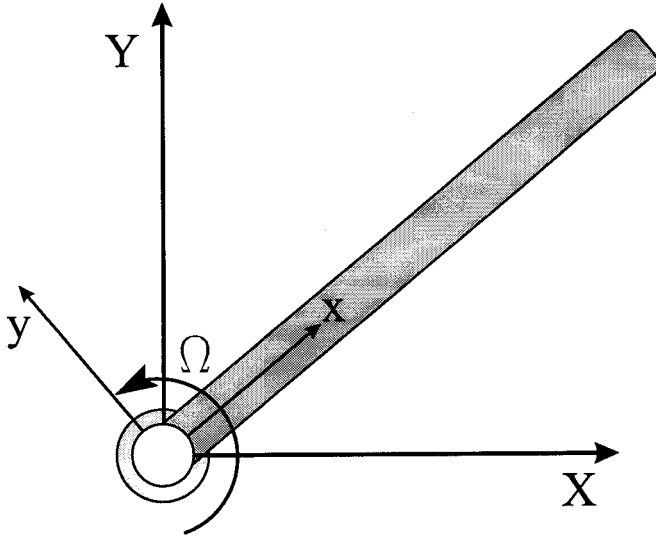


Figura 5.21: Barra elástica giratoria

la figura 5.21. Para plantear las ecuaciones de vibración en esta barra giratoria se usan dos sistemas de referencia, cuyo origen coincide con el eje de giro de la barra, como se muestra en la figura 5.22. El sistema de referencia  $OXY$  está fijo en el espacio mientras que el sistema  $Oxy$  gira con la barra elástica, de tal forma que el eje  $Ox$  es siempre tangente a la línea neutra de la barra elástica en su sección unida al par de rotación. Los desplazamientos axiales  $u$  y transversales  $v$  de las secciones están definidos en el sistema local de referencia  $Oxy$ .

Las ecuaciones del movimiento quedan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Omega^2(x + u) - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (c_t)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \Omega^2 v + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (5.45)$$

Los dos últimos términos de ambas ecuaciones las diferencian de las ecuaciones (4.1) y (5.5), válidas para barras que no experimentan movimientos de sólido



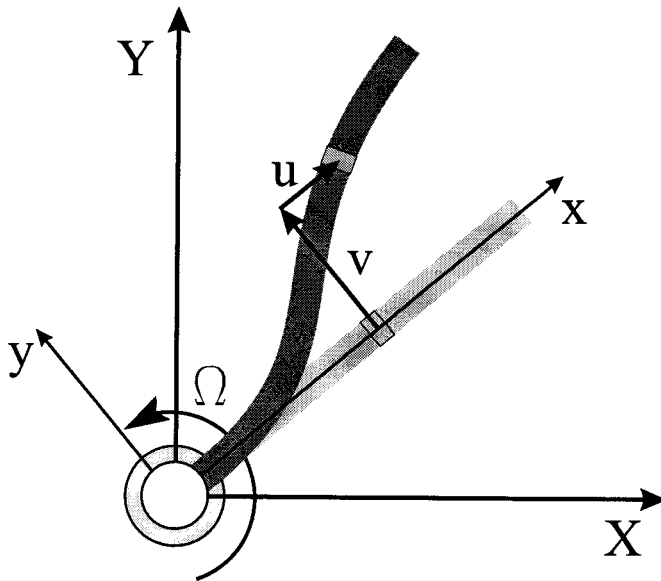


Figura 5.22: Deformaciones de barra elástica giratoria

rígido. Estos términos son las fuerzas centrífugas y de Coriolis.

Supóngase ahora una barra tal que sea infinitamente rígida transversalmente pero flexible axialmente, o bien, como este tipo de sólidos no existen, que la barra elástica está dentro de un tubo muy rígido de tal forma que éste permite los desplazamientos elásticos axiales pero no los transversales. En este caso la ecuación diferencial para los desplazamientos axiales queda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Omega^2 u = \Omega^2 x \quad (5.46)$$

Se trata de una ecuación diferencial en derivadas parciales con coeficientes constantes. La solución general de esta ecuación es igual a la ecuación general de la homogénea más una solución particular de la completa. Por tanto, se ensaya una solución como la de la ecuación (5.3) en la ecuación anterior y resulta la siguiente

ecuación general de la homogénea

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(k_i x) [C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)], \quad (5.47)$$

donde

$$k_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L}, \quad \omega_i = k_i c \sqrt{1 - \eta_i^2}, \quad \eta_i = \frac{\Omega}{ck_i} \quad (5.48)$$

y los siguientes valores para las velocidades de propagación asociadas a los modos de vibración

$$c_i = \frac{\omega_i}{k_i} = c \sqrt{1 - \eta_i^2} \quad (5.49)$$

La velocidad de propagación deja de ser independiente del número de onda y por tanto las ondas elásticas pasan a ser dispersivas. Hay que tener en cuenta que el factor  $\eta_i$  es un número que suele ser muy pequeño y tanto más pequeño cuanto mayor es el número de onda. Si el factor  $1 - \eta_i^2$  pasara a ser negativo, la ecuación anterior daría un valor imaginario para la velocidad de propagación, y por tanto también sería imaginaria la frecuencia de vibración. El significado físico de esto es que el sistema no es estable por encima de una cierta velocidad angular, pues los desplazamientos elásticos crecen exponencialmente en vez de variar armónicamente. Efectivamente, la velocidad angular que haría que la frecuencia fundamental del sistema fuera cero sería

$$\omega_{cr,1} = ck_1 = \frac{c\pi}{2L} \quad (5.50)$$

Calculando la solución particular de la completa, que resulta exponencial positiva en vez de oscilatoria, se observa que no se puede superar esta velocidad angular pues las fuerzas de inercia que se generarían no podrían ser soportadas por el material. Como solución particular de la completa se busca el estado permanente, con desplazamientos elásticos constantes. Para ello se busca la solución de la ecuación (5.46) eliminando el término de aceleración, que queda

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Omega^2 u = -\Omega^2 x \quad (5.51)$$

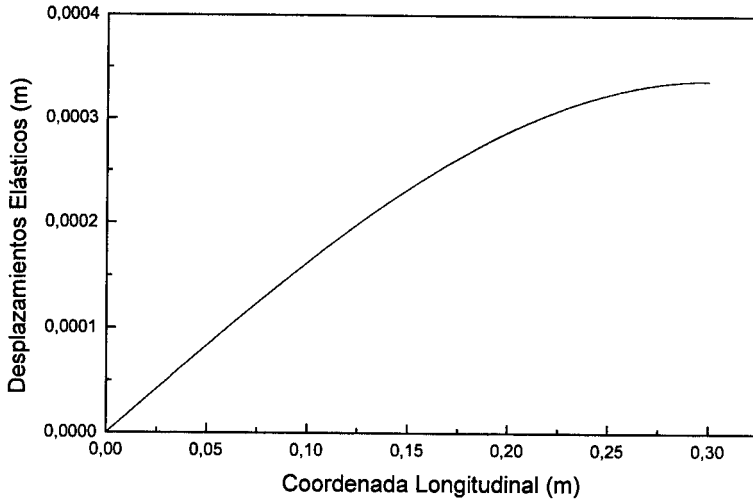


Figura 5.23: Desplazamientos por fuerza centrífuga en estado permanente

El primer término de la ecuación, el de fuerzas centrífugas constantes, se puede poner en forma de serie, resolviendo

$$-\Omega^2 x = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin(k_i x) \quad (5.52)$$

Usando las condiciones de ortogonalidad resultan las constantes

$$B_i = \frac{-\Omega^2 \int_0^L x \sin(k_i x) dx}{\int_0^L (\sin(k_i x))^2 dx} \quad (5.53)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (5.51) y asumiendo el campo permanente de desplazamientos  $u_c(x)$  también en forma de serie resulta

$$u_c(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{i+1}}{(\frac{1}{\eta_i^2} - 1)k_i^2 L} \sin(k_i x) \quad (5.54)$$

Los desplazamientos elásticos axiales en el estado permanente para una barra con la misma geometría y material que la usada en los ejemplos anteriores están

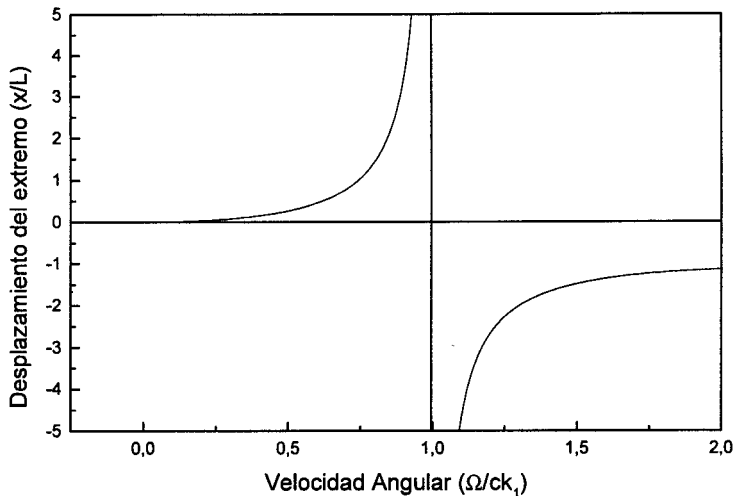


Figura 5.24: Deflexión en función de velocidad angular

representados en la figura 5.23. La forma de esta función de la coordenada axial  $x$  es la misma para cualquier velocidad angular  $\Omega$ , variando la amplitud de ésta. Representando el desplazamiento de la sección en  $x = L$  en los estados permanentes en función de  $\Omega$  se obtiene la gráfica 5.24. En ella se observa que los desplazamientos divergen en torno a la velocidad angular  $\omega_{cr,1} = ck_1$ , como también divergen en torno a las velocidades  $\omega_{cr,i} = ck_i$ , aunque estas no vienen representadas en la figura. Por tanto, la velocidad angular necesaria para que el primer modo de vibración sea no-oscilatorio no se puede alcanzar, pues el sistema es inestable, al ser excesiva la fuerza centrífuga.

Para el caso de barra elásticas que son muy rígidas axialmente las ecuaciones (5.44) y (5.45) se pueden simplificar y desacoplar suponiendo que el desplazamiento axial  $u$  es nulo. Así queda la siguiente ecuación para los desplazamientos elásticos

transversales

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (c_t)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \Omega^2 v = 0 \quad (5.55)$$

Ensayando una solución como la definida en la ecuación 5.7 se obtiene la siguiente relación entre las frecuencias y los números de onda de los modos

$$\omega_i = \sqrt{c_t^2 k_i^4 - \Omega^2} \quad (5.56)$$

y por tanto la siguiente velocidad de propagación para los modos

$$c_i = \frac{\omega_i}{k_i} = c_t k_i \sqrt{1 - \mu_i^2} \quad (5.57)$$

donde

$$\mu_i = \frac{\Omega}{c_t k_i^2} \quad (5.58)$$

Por tanto la relación de dispersión de las ondas elásticas transversales también varía entre barras giratorias y no-giratorias.

## Capítulo 6

# Balance de Impulso y Cantidad de Movimiento

### 6.1 Introducción

Existen diferentes métodos numéricos que se aplican para analizar impactos de sólidos flexibles. Estos métodos son el método del balance de impulso y cantidad de movimiento, los modelos continuos de fuerza de contacto y la adición de restricciones cinemáticas. El primero de ellos es una extensión de lo que en mecánica de sólidos rígidos se llama dinámica impulsiva. Se supone que los impactos son instantáneos y que las fuerzas externas que actúan en los cuerpos en el instante del choque, excepto las de reacción vincular, son despreciables frente a las fuerzas de contacto. Al usar este método se introduce en las ecuaciones el coeficiente de restitución, que debe ser conocido. Los resultados de los balances no aportan los valores de las fuerzas de contacto, sino los impulsos asociados a éstas. El segundo método consiste en permitir que los volúmenes de los sólidos en contacto penetren una cierta cantidad pequeña y evaluar la fuerza de contacto en función de esta penetración y de la velocidad de penetración. Existen diferentes tipos de

funciones para evaluar las fuerzas de contacto, que se basan en aproximaciones cuasiestáticas locales. El tercer método consiste en restringir los desplazamientos asociados a las superficies de contacto, mediante ecuaciones algebraicas en las coordenadas que describen su posición. Estas restricciones igualan los desplazamientos normales a las superficies, y relacionan los transversales en caso de que exista fricción, mientras exista compresión entre los sólidos. Cuando la fuerza de contacto, que se evalúa como una reacción vincular, pasa a ser de tracción se eliminan las restricciones, terminando el periodo de contacto.

En éste capítulo se va a analizar el método del balance de impulso y cantidad de movimiento. Los sistemas mecánicos cuyo comportamiento se van a estudiar son sólidos interconectados rígidos o flexibles que pueden experimentar grandes rotaciones y traslaciones. Por tanto, se comienza por el planteamiento de las ecuaciones del movimiento de este tipo de sistemas usando el método de los sistemas de referencia flotantes, que es actualmente el más popular de los métodos posibles para ello.

## **6.2 Ecuaciones del movimiento de mecanismos flexibles**

Existen diversas formulaciones para plantear las ecuaciones del movimiento de mecanismos flexibles. Los movimientos de los puntos de los sólidos se pueden dividir en movimientos de referencia y desplazamientos elásticos, en cuyo caso estos últimos son evaluados en un sistema local de referencia, o no. En caso de no hacerlo, las coordenadas de los puntos se obtendrán usando un único sistema global de referencia. Si se separan los dos tipos de movimientos, como se hará a continuación, la posición de referencia de los sólidos se puede evaluar usando coordenadas cartesianas y ángulos de orientación (Shabana, 1989), coordenadas naturales o de punto (García de Jalón y Bayo, 1993), o bien coordenadas relativas (Hartenberg y Denavit, 1964). En la formulación que se resume en este apartado

se usa la primera opción .

Para describir la posición de un punto cualquiera de un sólido flexible en la formulación con sistemas de referencia flotantes se requieren dos tipos de sistemas de referencia. En un sistema inercial se definen la posición y orientación de un conjunto de sistemas de referencia locales, asociados a los sólidos rígidos o flexibles. Estos sistemas de referencia locales no tienen por qué estar rígidamente conectados a un punto material de los sólidos flexibles. Para modelar la elasticidad de los cuerpos se usan modos de deformación supuestos, lo que se conoce en esta disciplina como *síntesis modal de componentes* (Shabana, 1989). Los modos de deformación pueden obtenerse analíticamente, experimentalmente o a través del método de los elementos finitos.

Así, la posición de un punto cualquiera  $P$  de un sólido flexible se escribe (figura 6.1)

$$\mathbf{r}_P(\bar{\mathbf{r}}_0, t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{r}}_P(\bar{\mathbf{r}}_0, t), \quad \bar{\mathbf{r}}_P = \bar{\mathbf{r}}_0(t) + \mathbf{r}_f(\bar{\mathbf{r}}_0, t), \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{R}$  es la posición del origen del sistema local en el sistema inercial de referencia,  $\mathbf{A}$  es la matriz de giro del sistema local al inercial,  $\bar{\mathbf{r}}_P$  es la posición del punto en el sistema local de coordenadas, que es la suma de  $\bar{\mathbf{r}}_0$ , que indica su posición en el estado indeformado del sólido flexible, y  $\mathbf{r}_f$ , que es el vector de desplazamientos elásticos. Estos vectores vienen ilustrados en la figura 6.1 para un sistema plano.

El vector de desplazamientos elásticos se representa como el producto de unas funciones de forma por el vector de amplitudes de estas funciones, que se les llama coordenadas elásticas o, en este caso, coordenadas modales. Esto se expresa matricialmente

$$\mathbf{r}_f(\bar{\mathbf{r}}_0, t) = \mathbf{S}^T(\bar{\mathbf{r}}_0)\mathbf{q}_f(t) \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{S}^T$  es un vector que contiene las funciones de forma y  $\mathbf{q}_f$  es el vector de coordenadas modales.

Para conectar diferentes sólidos mediante pares cinemáticos se usan ecuaciones algebraicas de restricción. Se usa como ejemplo los sólidos planos de la figura 6.2. La restricción al movimiento relativo que supone el par de rotación se impone



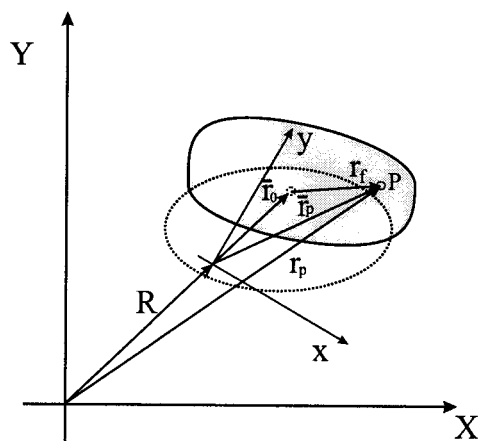


Figura 6.1: Posición de un punto perteneciente a un sólido flexible

mediante una ecuación que iguala los desplazamientos del punto donde está el par cinemático para uno y otro sólido. En este caso se escribe

$$\mathbf{r}_Q^1 = \mathbf{r}_Q^2 \Rightarrow \mathbf{R}^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{r}}_Q^1 - \mathbf{R}^2 - \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{r}}_Q^2 = 0 \quad (6.3)$$

donde los superíndices indican el sólido al que se refieren los vectores. Estas ecuaciones de restricción son en general no lineales, como en este caso, al ser los elementos de las matrices de giro  $\mathbf{A}_i$  funciones trigonométricas de las coordenadas de orientación del sistema local de referencia. Estas ecuaciones se resolverán junto a las ecuaciones diferenciales del movimiento. Para ello se puede usar el método de los multiplicadores de Lagrange

Las ecuaciones del movimiento se plantean, por ejemplo, usando las ecuaciones de Lagrange. Para ello se calcula la expresión de la velocidad derivando respecto al tiempo la expresión (6.1) y la energía cinética de los sólidos integrando en el volumen de éstos la energía cinética de todos sus puntos. Tras evaluar la energía de deformación y las fuerzas generalizadas externas se obtienen las ecuaciones del

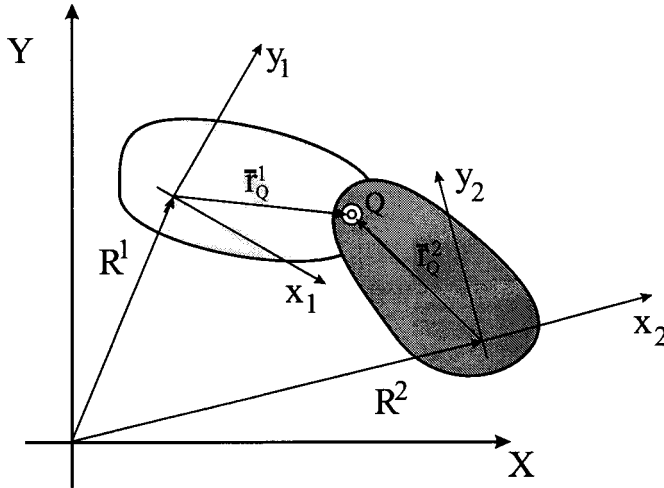


Figura 6.2: Sólidos conectados por un par de revolución

movimiento, que planteadas para todas las coordenadas del sistema quedan

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}_q^T \lambda &= \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa, que depende no linealmente de las coordenadas del sistema y es simétrica,  $\mathbf{q}$  es el vector de coordenadas del sistema, tanto de referencia como elásticas,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez, también simétrica pero constante,  $\mathbf{C}_q$  es el jacobiano del sistema de ecuaciones de restricción y  $\lambda$  es el vector de multiplicadores de Lagrange. Del producto del jacobiano de las restricciones por el vector de multiplicadores de Lagrange resultan las fuerzas generalizadas de reacción. El vector  $\mathbf{Q}_v$ , conocido como *vector de fuerzas cuadráticas en velocidad*, contiene las fuerzas centrífugas y de Coriolis.  $\mathbf{Q}_e$  contiene las fuerzas generalizadas externas aplicadas en el sistema y  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$  representa el conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales de restricción.

El sistema de ecuaciones (6.4) se puede resolver directamente, como sistema de ecuaciones algebraicas y diferenciales, o bien manipularlo previamente para

una resolución más fácil de realizar. Si se derivan respecto al tiempo dos veces las ecuaciones de restricción todas las ecuaciones pasan a ser diferenciales ordinarias, por lo que se pueden tratar todas las ecuaciones por el mismo procedimiento aunque se pierde precisión. Otra alternativa es manipular el sistema (6.4) para integrar sólo las coordenadas independientes. En este caso desaparecen las ecuaciones algebraicas del sistema y las fuerzas de reacción vincular, y se llega a un sistema con menos ecuaciones e incógnitas pero más difícil de integrar.

### 6.3 Ecuaciones de conservación de impulso y cantidad de movimiento

Las ecuaciones de conservación de impulso y cantidad de movimiento ya se han mostrado para el caso del impacto central de sólidos rígidos en el capítulo 2. En este apartado, para dar mayor generalidad al método, se plantean las ecuaciones de balance para el caso del impacto de cuerpos que forman parte de mecanismos que conectan sólidos rígidos y flexibles (Gau y Shabana, 1991, 1992a y 1992b, Lankarani y Nikravesh, 1992, Yigit et al., 1995).

Supongamos que en un instante  $t_0$  entran en contacto dos sólidos que forman parte de cierto mecanismo flexible. Como se hizo en el capítulo 2 se supone que la duración del impacto  $t_c$  es tan corta que se puede considerar que no cambia la configuración del sistema en dicho periodo. De nuevo, se integran las ecuaciones del movimiento durante el periodo de contacto y se hace tender éste a cero. En este caso se incluye en el segundo miembro de la ecuación (6.4) el vector  $\mathbf{Q}_{F_c}$ , que contiene el vector de fuerzas de contacto generalizadas. Para evaluarlo, se calcula el trabajo virtual de la fuerza de contacto en dirección de la normal común a las superficies de contacto, que queda

$$\delta W = F_c(t)\delta\alpha = F_c(t)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right)^T\delta\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{F_c}^T\delta\mathbf{q} \quad (6.5)$$

donde  $\alpha$  es la indentación entre los sólidos. Los impulsos de las fuerzas elásticas,

las fuerzas externas y los términos cuadráticos en velocidad son nulos pues estas son fuerzas acotadas, no impulsivas. Tan sólo son no nulos los impulsos de la fuerza de contacto y de las reacciones vinculares, que son fuerzas impulsivas. Estos impulsos deben ser iguales al incremento de cantidad de movimiento generalizada del sistema. Matemáticamente se escribe

$$\lim_{t_c \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+t_c} (\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}_q^T \lambda) dt = \lim_{t_c \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+t_c} (\mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_{Fc}) dt \Rightarrow \quad (6.6)$$

$$\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \mathbf{H}^\lambda = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{q}}\right)^T H$$

donde  $\Delta\dot{\mathbf{q}}$  es el salto de velocidades de todas las coordenadas, tanto de referencia como elásticas,  $\mathbf{H}^\lambda$  son los impulsos de las fuerzas de reacción y  $H$  es el impulso de la fuerza de contacto.

Las ecuaciones de restricción, así como sus derivadas sucesivas respecto al tiempo, deben ser satisfechas en cualquier instante, por tanto

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t = 0 \quad (6.7)$$

donde  $\mathbf{C}_t$  son es el vector de derivadas parciales de las ecuaciones de restricción respecto al tiempo. Este término es no nulo sólo en caso de que el tiempo aparezca explícitamente en las ecuaciones de restricción, lo cual no suele ocurrir. Particularizando esta expresión en los instantes  $t_0$  y  $t_0 + t_c$ , substrayendo las expresiones y haciendo  $t_c \rightarrow 0$  resulta

$$\mathbf{C}_q \Delta\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (6.8)$$

La segunda ecuación matricial en (6.6) junto con (6.8) es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuyas incógnitas son los saltos de velocidad, los impulsos de reacción y el impulso de la fuerza de contacto. En total  $n_q + n_r + 1$  incógnitas, siendo  $n_q$  el número de coordenadas y  $n_c$  el número de ecuaciones de restricción. Como sólo hay  $n_q + n_r$  ecuaciones, el sistema es indeterminado. Se necesita una ecuación adicional para poder resolver el sistema: la relación de restitución. Como se hace en la dinámica impulsiva de sólidos rígidos, se va a suponer conocido el

coeficiente de restitución cinemático, cuyo valor se podría obtener experimentalmente o por algún procedimiento analítico, dependiendo de algunos parámetros que caractericen al choque. La relación cinemática de restitución se escribiría en nuestro sistema

$$\dot{\alpha}^+ = -e\dot{\alpha}^- \quad (6.9)$$

donde de nuevo los superíndices + y - indican el instante posterior y anterior al impacto, respectivamente, y  $e$  es el coeficiente de restitución cinemático. Desarrollando esta ecuación se obtiene

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}^+ = -e\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}^- \quad (6.10)$$

Si ahora se resta de ambos lados de esta ecuación el término  $\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}^-$  resulta

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right)\Delta\dot{\mathbf{q}} = -(1+e)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}^- \quad (6.11)$$

El conjunto de ecuaciones (6.6), (6.8) y (6.11) se escriben en forma matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T & -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right)^T \\ \mathbf{C}_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{H}^\lambda \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \nu \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

donde

$$\nu = -(1+e)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}^- \quad (6.13)$$

El sistema de ecuaciones lineales (6.12) se denomina ecuaciones generalizadas de conservación de impulso y cantidad de movimiento. Para analizar problemas de impacto usando estas ecuaciones, se debe contar con un algoritmo de detección de contacto entre los sólidos, que indicaría en qué instante puede tener lugar un impacto. Este algoritmo evalúa la distancia entre las superficies de los sólidos. En caso de que se detectara penetración pueden ocurrir dos cosas, que esta penetración sea excesiva o que no lo sea. En cualquier caso las ecuaciones del movimiento no se han evaluado correctamente pues no ha habido fuerza de contacto y los sólidos han

penetrado. Sin embargo, como normalmente no es posible conocer exactamente el instante del contacto, se puede admitir un cierto valor pequeño de penetración admisible. Si la penetración alcanzada supera este valor admisible se volvería atrás en la integración de las ecuaciones del movimiento y se disminuiría el paso de tiempo para así disminuir la penetración alcanzada. A continuación se plantea y resuelve el sistema de ecuaciones (6.12) para obtener los impulsos de las fuerzas de contacto y reacción y los saltos de velocidad. Para ello hay que conocer el valor del coeficiente de restitución. Seguidamente, se actualizan las velocidades sumándoles los saltos calculados y se continúa el proceso de integración de las ecuaciones, hasta que una pareja de sólidos vuelva a entrar en contacto.

Uno de los atractivos de esta técnica es su simplicidad. La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones (6.12) es igual a la matriz de masa más una fila y una columna adicionales. Por tanto, el planteamiento y solución del sistema es computacionalmente muy eficiente. Sin embargo, la información que proporciona sobre el proceso es limitada. No se obtienen fuerzas de contacto, ni fuerzas elásticas durante el contacto, ni siquiera la duración de éste. Este método es apropiado, por tanto, para un análisis en el que el proceso del impacto no es realmente de interés sino lo que ocurre tras éste: la evolución del sistema tras el choque. Sin embargo, la aplicación práctica del método cuando hay sólidos flexibles involucrados en el choque puede no resultar como cabría esperar. Además, al comparar la solución que se obtiene con este método con la obtenida con otros procedimientos se plantea el significado y aplicabilidad de algunas de la hipótesis realizadas.

## 6.4 Aplicación de las ecuaciones de conservación

Para ilustrar la aplicación práctica de las ecuaciones de conservación con sólidos flexibles, se va a volver a resolver el problema del impacto axial en la barra empotrada en un extremo. No es necesario plantear las ecuaciones de conservación en este caso como se muestran en (6.12) pues la restricción en el empotramiento

se introduce eliminando los grados de libertad asociados al nodo correspondiente. El conjunto completo de ecuaciones mostrado en (6.12) se emplea para el análisis del impacto transversal de un sólido rígido en una barra rotativa y el también transversal de un sólido rígido una barra elástica de un mecanismo flexible de cuatro barras.

#### 6.4.1 Impacto axial de un sólido rígido en una barra elástica empotrada en un extremo

Para resolver este problema se emplea en este caso el *método de los elementos finitos* para modelar el comportamiento de la barra elástica. Como sólo existen deformaciones axiales se usan elementos que sólo permiten este tipo de deformación. Se supone que los desplazamientos elásticos dentro de cada elemento varían de forma lineal. Las coordenadas nodales del problema son los desplazamientos axiales de los nodos.

Las ecuaciones dinámicas se pueden obtener usando las coordenadas nodales como variables del sistema o, alternativamente, se pueden usar otro tipo de coordenadas del sistema: las coordenadas modales. Para ello, antes de resolver el problema dinámico se resuelve el problema de autovalores de la barra en voladizo y se evalúan los autovectores del problema. Tras esto, se supone que la posición de la barra elástica en cada instante es una combinación lineal de los autovectores. Los coeficientes de esta combinación son las coordenadas modales. Las ecuaciones diferenciales del movimiento se escriben en este caso en función de estas coordenadas.

La primera cuestión que surge al resolver este problema es qué coeficiente de restitución debe usarse para la correcta simulación del problema. Las hipótesis para este caso son las mismas que las que se hicieron en el capítulo 3 al resolver el problema analíticamente, no hay pérdida local de energía, ni plasticidad ni fricción, ni ningún comportamiento anelástico del material y la inercia transversal de las secciones por el efecto Poisson es despreciable. De la solución analítica se sabe que

el sólido rígido termina adquiriendo una velocidad que es  $v_1^+ = -0.692v_1^-$  y como la barra elástica no tiene posibilidad de movimiento de sólido rígido el coeficiente cinemático de restitución debería ser 0.692. Sin embargo, este valor no puede ser un dato del problema sino un resultado, es precisamente lo que se pretende obtener de la simulación dinámica. Si se usa este valor no se obtienen los resultados que cabe esperar. Téngase en cuenta el concepto energético del coeficiente de restitución. Cuando este se define en mecánica de sólidos rígidos, indica la cantidad de energía transformada en formas que la mecánica de sólidos rígidos no puede representar, como la energía de vibración interna. Si en mecánica de sólidos deformables esta energía sí se puede representar no tiene sentido considerarlo una pérdida de energía. Los saltos de velocidad de las coordenadas elásticas debieran introducir las vibraciones mecánicas debidas al impacto. Como en el problema analítico se conserva la energía, el coeficiente de restitución debiera ser la unidad. Por tanto, se deduce que el coeficiente de restitución que se debe usar cuando hay sólidos flexibles es conceptualmente distinto al definido para el impacto de sólidos rígidos.

Existe aún una tercera interpretación posible para el coeficiente de restitución. Si se quiere modelar el periodo de contacto como se hizo en el capítulo anterior, modelando el sólido compuesto por la barra elástica y el sólido rígido durante el periodo de contacto, se pueden utilizar las ecuaciones de conservación con un coeficiente de restitución nulo en el primer instante del impacto y a continuación usar el modelo de sólido compuesto. El uso de un coeficiente de restitución nulo es apropiado pues en el primer instante tras el contacto el sólido rígido y la sección de contacto adquieren la misma velocidad. Sin embargo, eso no debería suponer pérdida de energía del sistema. Esto sería una versión discreta del problema analizado en el capítulo anterior, usando autovectores como base en vez de modos definidos analíticamente.

Para resolver el problema del impacto axial mediante elementos finitos se divide la barra en elementos que sólo se deforman axialmente, cuyos nodos están



uniformemente distribuidos. Para integrar las ecuaciones del movimiento se usa el método de Newmark (Bathe, 1982) con los parámetros  $\delta = 0.5$  y  $\alpha = 0.25$ . Los valores supuestos para los parámetros geométricos, masas y propiedades elásticas de los materiales de la barra deformable y el sólido rígido son los mismos que los dados en los capítulos 3 y 4 para el impacto con masas iguales de la barra y el impactor. La velocidad inicial del sólido rígido es de nuevo  $1 \text{ m/s}$ .

Las ecuaciones del movimiento antes y después del impacto para el sistema formado por el sólido rígido y la barra elástica se reducen a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (6.14)$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ p_{f1} \\ \vdots \\ p_{fn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

donde  $x_1$  es la coordenada que indica la posición del sólido rígido,  $p_{fi}$  representa las coordenadas nodales,  $m_1$  es la masa del sólido rígido y

$$\mathbf{M}_f = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{3n} & \frac{m_2}{6n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{m_2}{6n} & \frac{2m_2}{3n} & \frac{m_2}{6n} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{6n} & \frac{2m_2}{3n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{m_2}{6n} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{6n} & \frac{2m_2}{3n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} K & -K & 0 & \cdots & 0 \\ -K & 2K & -K & \cdots & 0 \\ 0 & -K & 2K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -K \\ 0 & 0 & 0 & -K & 2K \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

son las matrices de masa y rigidez de las coordenadas elásticas, siendo  $m_2$  la masa total de la barra elástica,  $n$  el número de elementos en que se divide la barra y  $K = \frac{EA_n}{L}$  la rigidez axial de cada elemento. Para reducir el número de coordenadas elásticas del sistema se calcula la matriz de autovectores  $\tilde{\mathbf{B}}$  cuyas  $n$  columnas  $\mathbf{B}_i$  son solución de la ecuación

$$(\mathbf{K}_f - \lambda\mathbf{M}_f)\mathbf{B}_i = \mathbf{0} \quad (6.17)$$

De la matriz de autovectores  $\tilde{\mathbf{B}}$  se selecciona una submatriz  $\mathbf{B}$  que contiene un subconjunto de  $m$  autovectores, normalmente los de menor frecuencia natural asociada, y se asume que las coordenadas nodales  $\mathbf{p}_f$  son una combinación lineal de los autovectores, cuyos coeficientes  $\mathbf{q}_f$  son las coordenadas modales, esto es

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{B}\mathbf{q}_f \quad (6.18)$$

El sistema de ecuaciones del movimientos pasa a ser

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (6.19)$$

donde

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ q_{f1} \\ \vdots \\ q_{fm} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_f \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_f \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

donde  $\mathbf{m}_f = \mathbf{B}^T \mathbf{M}_f \mathbf{B}$  y  $\mathbf{k}_f = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_f \mathbf{B}$  son las matrices de masa y rigidez modales, respectivamente, ambas diagonales.

Para ilustrar el progreso del sistema mecánico, se muestra a continuación la solución al balance de cantidad de movimiento cuando la barra se divide en tres elementos y se usa un coeficiente de restitución igual a la unidad. En la tabla 6.1 se indican las velocidades iniciales, los saltos de velocidad y las velocidades finales del sólido rígido y de los tres nodos con movimiento de que consta el modelo de la barra. Se han usado las siglas NC para el nodo de contacto y NI1 y NI2 para los nodos interiores de la barra, siendo el último el más próximo al extremo empotrado. Para obtener estos resultados se han usado coordenadas nodales. Los resultados son idénticos a los que se obtendrían con coordenadas modales si se usa un conjunto completo de autovectores. Se ha considerado como sentido positivo de las velocidades el del eje que va desde la sección libre de la barra a la sección empotrada.

De la tabla 6.1 se deduce que tras el balance el sentido del movimiento del sólido rígido continúa inalterado, que tan sólo ha perdido cierta velocidad y que

	Sólido rígido	NC	NI1	NI2
Velocidad inicial	1	0	0	0
Salto de velocidad	-0.175	1.825	-0.487	0.122
Velocidad final	0.825	1.825	-0.487	0.122

Tabla 6.1: Impacto axial. Balance con tres elementos finitos

inevitablemente volverá a chocar con la barra elástica en breves instantes. Por otro lado, todos los nodos de la barra han adquirido cierta velocidad, observándose una velocidad final mayor en los nodos más próximos al área de contacto. En la solución analítica se observó que en el instante inicial tan sólo la sección de contacto adquiere cierta velocidad. Palas et al. (1992) demostraron analíticamente que cuando el número de grados de libertad de la barra flexible tiende a infinito, el impulso de la fuerza de contacto tiende a cero y tan sólo adquiere velocidad no nula tras el impacto el nodo asociado a la superficie de contacto. Además, la reacción en el empotramiento tiende a cero. Se observa que estas condiciones coinciden con las que ocurren en el primer instante del periodo finito de contacto, tal como se describe en la solución analítica, y no con las condiciones al final del periodo de contacto.

Para resolver numéricamente el impacto axial, se necesita implementar la lógica del impacto, que son las condiciones que deben cumplirse para que se esté en condiciones de contacto y se resuelva un balance de cantidad de movimiento. Estas condiciones son

$$u_1 - u_2^1 \geq 0, \quad v_1 - v_2^1 \geq 0, \quad (6.21)$$

donde  $u$  indica posición y  $v$  velocidad, el subíndice 1 indica el sólido rígido, 2 la barra flexible y el superíndice 1 indica el nodo de contacto. La primera condición indica que hay penetración numérica entre los sólidos y es condición necesaria pero no suficiente, como se explicará a continuación. La segunda indica que la

velocidad relativa de las superficies de contacto es de aproximación y no de separación. Si existe penetración pero no se cumple la segunda condición, no se está en condiciones de plantear un balance, pues los sólidos tienden a separarse. En general, durante la integración numérica, no se conoce exactamente el instante en que los sólidos entrarán en contacto, aunque se puede determinar con bastante precisión, por tanto se puede definir una tolerancia de penetración, que sería la distancia entre los nodos de contacto que se puede asumir nula. Durante la integración numérica de las ecuaciones se detecta en cierto instante penetración entre los sólidos, que normalmente será excesiva. Entonces se invalida el instante actual y se retrocede al estado en el último paso de integración, disminuyendo el valor del incremento de tiempo. La operación se repite hasta conseguir que

$$|u_1 - u_2^1| \leq tol, \quad (6.22)$$

siendo  $tol$  un número suficientemente pequeño.

Cuando se usa un número relativamente elevado de grados de libertad se obtiene muy buen acuerdo entre los resultados analíticos y los numéricos. En la figura 6.3 se muestra la comparación entre los resultados cuando se usan 20 elementos para discretizar la geometría de la barra. Sin embargo, aunque no es fácil de observar en la figura, no se detecta el segundo periodo de contacto. La figura 6.4 muestra los resultados numéricos comparados con los analíticos cuando se usan 20 modos de vibración como coordenadas modales, que se obtienen usando 100 elementos para discretizar la barra. En este caso sí se detecta el segundo periodo de contacto. Por tanto, en este sentido, en el caso que se ha resuelto, se puede decir que para un mismo número de coordenadas dan mejor resultado las coordenadas modales que las nodales. Sin embargo, hay que tener en cuenta las operaciones adicionales que hay que realizar para usar las coordenadas modales.

En la figura 6.5 se muestra por un lado la fuerza de contacto de la solución analítica. Por otro lado, los impulsos de la fuerza de contacto de los distintos balances divididos por el paso de tiempo están representados por círculos. Estos

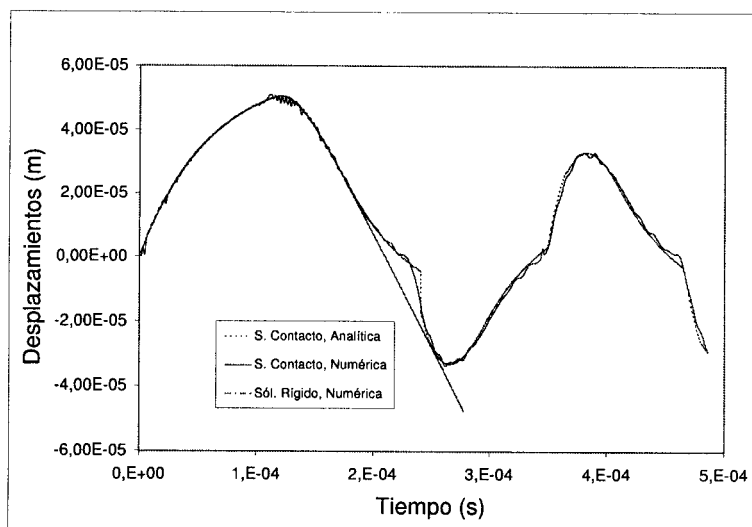


Figura 6.3: Desplazamientos de sólido rígido y sección de contacto. Problema nodal

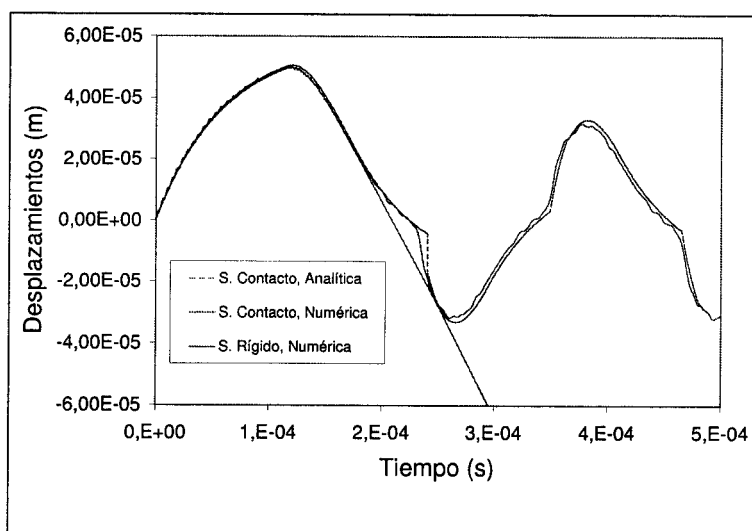


Figura 6.4: Desplazamientos de sólido rígido y sección de contacto. Problema modal

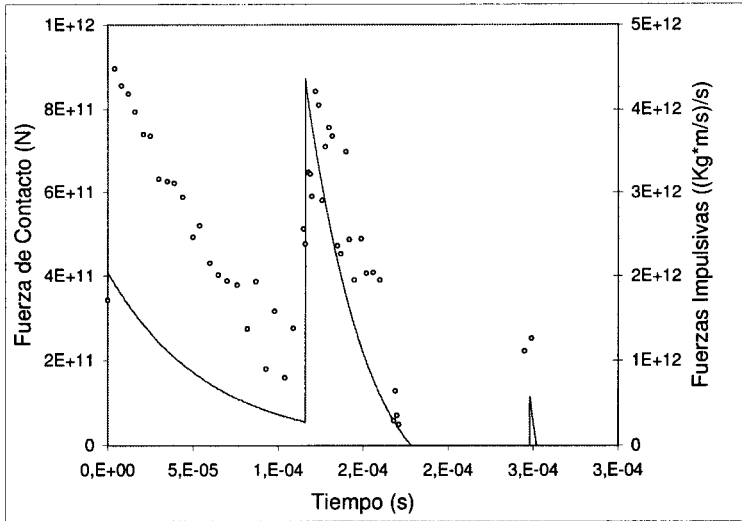


Figura 6.5: Fuerzas de contacto vs. impulsos

impulsos son los obtenidos en el problema modal. Aunque estos valores no pueden ser interpretados como fuerzas, se observa en la figura que existe una relación entre el valor de estos impulsos y el valor instantáneo de la fuerza en el problema analítico. Como se ve en la figura se han resuelto dos balances en el periodo correspondiente al segundo periodo de contacto.

De estos resultados queda claro que para simular numéricamente el impacto axial mediante la aplicación de la dinámica impulsiva es necesario plantear y resolver varias veces el sistema de ecuaciones algebraicas. Además, no existe relación entre los diferentes balances con el fenómeno de los impactos múltiples. Un balance no representa un periodo de contacto entre los sólidos que chocan. Los balances por tanto no *resumen* el periodo de contacto a un instante sino que los resuelven en varios procesos discretos. Como se verá en el análisis posterior el número de balances necesarios depende de las discretizaciones espaciales y temporales del proceso.

En la tabla 6.2 se muestra la evolución del impacto simulado cuando el número

Nº Nodos	Duración ( $\times 10^{-4} s$ )	Velocidad final	Nº Balances
5	1.56	-0.702	12
10	1.78	-0.715	30
20	(1.82) 2.54	(-0.687) -0.695	63
Analítico	(1.78) 2.52	(-0.688) -0.692	

Tabla 6.2: Impacto axial. Evolución con el número de modos

de grados de libertad varía. En esta tabla y en las que siguen se indica entre paréntesis el fin del primer periodo real de contacto y la velocidad del sólido rígido tras éste en caso de que se detecte el segundo periodo de contacto. Se observa la convergencia de la solución a la solución analítica cuando aumenta el número de grados de libertad del sistema y un aumento del número de balances necesarios para simular el problema. La sucesión de balances es debida a que el sólido rígido entra en contacto con una masa equivalente que, debido a la discretización espacial de la barra elástica, es mucho menor que la suya propia. Por tanto, son necesarios muchos balances para invertir el sentido del movimiento del sólido rígido, pues la masa con la directamente choca, al ser relativamente pequeña, le roba poca cantidad de movimiento en cada balance. Al aumentar el número de grados de libertad de la barra elástica, usando coordenadas nodales o modales, se está refinando la discretización espacial de la barra, por lo que se disminuye la masa equivalente con la que impacta directamente el sólido rígido y es por tanto mayor el número de balances necesarios para simular el impacto.

En la tabla 6.3 se muestra la evolución de la solución cuando varía el coeficiente de restitución si se usan veinte coordenadas modales para representar el sistema. La duración del impacto es bastante similar para todos los coeficientes. Cabría esperar una disminución monótona de la velocidad de salida del sólido rígido cuando disminuye el coeficiente de restitución, sin embargo no queda clara esta evolución. Por otro lado, aumenta el número de balances realizados cuando disminuye el coe-

e	Duración ( $\times 10^{-4}s$ )	Velocidad final	Nº Balances
1	(1.71) 2.49	-0.712	49
0.7	(1.80) 2.46	-0.741	296
0.3	(1.86) 2.47	-0.712	338
0	(1.94) 2.46	-0.615	352
Analítico	(1.78) 2.52	-0.692	

Tabla 6.3: Impacto axial. Evolución con el coeficiente de restitución

Paso ( $\times 10^{-8}s$ )	Duración ( $\times 10^{-4}s$ )	$v_1^+$	Nº balances	Energía perdida
58.9	2.47	-0.42	400	74%
29.5	2.48	-0.58	731	52%
5.89	2.51	-0.75	1954	24%
2.95	2.51	-0.73	3117	16%

Tabla 6.4: Impacto axial con  $e=0$ . Evolución con paso de tiempo

ficiente de restitución. Esto se puede explicar por la menor velocidad de separación entre los nodos de contacto para bajos coeficientes de restitución.

En las tablas 6.4 y 6.5 se muestran soluciones al problema con distintos pasos de integración y coeficientes de restitución 0 y 0.3, respectivamente. En ambas, tan sólo se observa un buen acuerdo en la duración de los impactos. El número de balances y la velocidad de salida aumentan al disminuir el paso de tiempo y la energía perdida disminuye enormemente. Los cambios son más bruscos con  $e = 0$  que con  $e = 0.3$ . Se ha comprobado que con  $e = 1$  no aparece tal desacuerdo cuando cambia el paso de tiempo. Podemos decir que los resultados no son consistentes cuando se usan coeficientes de restitución menores que la unidad y son tanto más inconsistentes cuanto menor es el valor del coeficiente de restitución.

El hecho de que ocurra un balance no indica un proceso de contacto entre los sólidos. Esto hace que el coeficiente de restitución pierda su significado físico.



Paso ( $\times 10^{-8} s$ )	Duración ( $\times 10^{-4} s$ )	$v_1^+$	Nº balances	Energía perdida
58.9	2.47	-0.57	365	54%
29.5	2.48	-0.69	680	34%
5.89	2.51	-0.73	1849	14%
2.95	2.51	-0.72	2907	9%

Tabla 6.5: Impacto axial con  $e=0.3$ . Evolución con paso de tiempo

Si se pudiera controlar el proceso numérico se podría *repartir* la energía total perdida localmente entre los coeficientes de los distintos balances. Pero no existe control a priori del número e intensidad de los impactos instantáneos, por lo que no es posible este reparto. Algunos autores (Yigit, 1990) han propuesto para los distintos balances usar un coeficiente de restitución dependiente de la velocidad relativa inicial de los puntos de contacto. Esta alternativa carece de sentido físico cuando los balances no representan impactos o al menos periodos de contacto.

#### 6.4.2 Impacto transversal de un sólido rígido en una barra elástica giratoria

El sistema estudiado en este apartado se representa en la figura 6.6. Se trata una barra giratoria con la que choca transversalmente un sólido rígido. En la barra se impone como restricción que tenga velocidad angular constante  $\omega_0$ . El planteamiento y solución de las ecuaciones se realiza usando el programa DAMS (Shabana, 1986) de propósito general. La velocidad angular de la barra es  $\omega_0 = 3.142 \text{ rad/s}$  y la velocidad del sólido rígido  $0.0574 \text{ m/s}$ , la longitud de la barra es  $0.3 \text{ m}$ , por tanto la velocidad de aproximación antes del impacto es  $v_r^- = 1 \text{ m/s}$ . La masa de ambos sólidos es  $1.138 \text{ kg}$ . La barra elástica se supone de acero con módulo de Young  $E = 207 \text{ GPa}$ , sección transversal rectangular de  $6 \text{ cm} \times 0.8 \text{ cm}$  y momento de inercia  $I = 2.56e - 9 \text{ m}^4$ . Para modelar la flexibilidad de la barra se divide ésta en 15 elementos finitos de igual longitud y se usa un sistema local

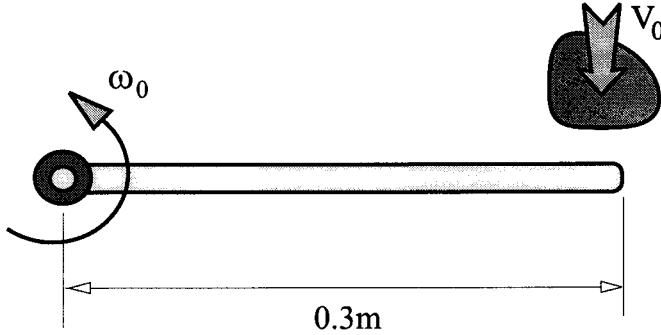


Figura 6.6: Impacto transversal en una barra giratoria

de coordenadas rígidamente unido a la sección de la barra donde se encuentra la articulación. Por tanto, para obtener el modelo de elementos finitos se usan las condiciones de contorno de una viga en voladizo y se resuelve el problema de autovalores. En este caso, se usaron sólo coordenadas modales para resolver el problema, siendo 5, 10 y 15 el número de modos utilizados.

En el problema que se simula se supondrá que no hay pérdidas locales de energía mecánica y se usará un coeficiente de restitución igual a la unidad. La solución al problema en el que la barra giratoria se considera rígida nos da un límite superior para la velocidad final del sólido rígido en el caso de considerar la flexibilidad de la barra. Para calcular esta velocidad, el impulso de la reacción vertical en la rótula y el impulso angular del momento de reacción en la rótula, se resuelven simultáneamente las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, de momento cinético y de conservación de la energía. Esta última ecuación es equivalente a asumir un coeficiente de restitución igual a la unidad. Las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned}
 m_1 v_1^- + P &= m_1 v_1^+ \\
 m_1 v_1^- L - M &= m_1 v_1^+ L \\
 \frac{1}{2} m_1 (v_1^-)^2 + M \omega_0 &= \frac{1}{2} m_1 (v_1^+)^2
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

donde  $m_1$  es la masa del sólido rígido,  $v_1$  su velocidad,  $P$  es el impulso de la reacción vertical en la rótula y  $M$  es el impulso angular del par que se debe aplicar en la rótula para mantener la velocidad angular de la barra constante. Obsérvese que si bien  $P$  no realiza ningún trabajo  $M$  sí lo hace y es necesario incluirlo en la ecuación de conservación de la energía. La solución de este sistema lineal resulta:

$$v_1^+ = 1.943 \frac{m}{s}, \quad M = 0.683 kg \frac{m^2}{s}, \quad P = 2.276 kg \frac{m}{s} \tag{6.24}$$

En la tabla 6.6 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas. Las tres últimas columnas indican el salto de velocidad medio del sólido rígido que ocurre en los distintos balances, la suma de los impulsos angulares en la rótula y la suma de los impulsos debidos a la reacción vertical. De los resultados se aprecia que la velocidad del sólido rígido disminuye cuando aumenta el número de modos. Se podría interpretar que al aumentar el número de coordenadas elásticas aumenta la *capacidad* del modelo elástico de absorber energía de vibración, sin embargo se mostrará en el próximo ejemplo que esta regla puede fallar. El tiempo de contacto se ha estimado como la diferencia entre los instantes en que ocurrieron el último y el primer balance. Se aprecia que el resultado es muy similar en los tres casos. Se confirma que al aumentar el número de grados de libertad del modelo elástico aumenta el número de balances necesarios para simular el impacto y que en cada uno de ellos es menor el salto de velocidad resultante y las reacciones en los vínculos.

En las figuras 6.7 y 6.8 se muestran los desplazamientos del sólido rígido y del nodo de contacto de la barra elástica giratoria durante y tras el impacto. Ambas gráficas resultan muy similares y no se aprecian los saltos finitos de velocidad ni penetraciones excesivas. De acuerdo a las posiciones relativas de ambos sólidos

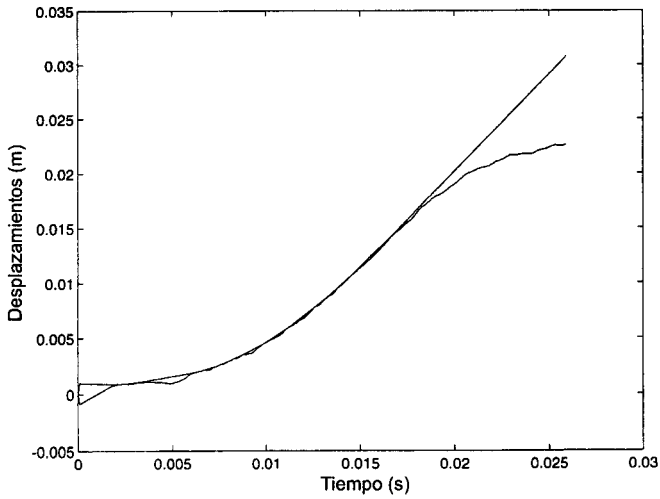


Figura 6.7: Desplazamientos durante el periodo de contacto, 10 modos

Nº modos	$v_1^+$	$t_c$	Nº balances	Salto medio	$\sum M_i$	$\sum P_i$
5	1.874	1.53e-2	15	0.129	8.43e-3	0.278
10	1.786	1.32e-2	34	0.054	1.17e-2	0.168
15	1.736	1.31e-2	51	0.035	2.2e-3	0.109
S. Rígidos	1.943	0	1	2	0.342	2.276

Tabla 6.6: Impacto en barra giratoria. Evolución con el número de modos

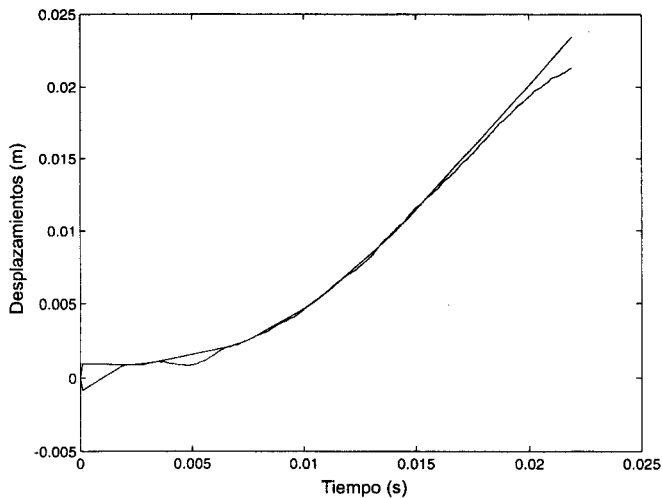


Figura 6.8: Desplazamientos durante el periodo de contacto, 15 modos

durante el impacto, el proceso parece simulado de forma continua en lugar de una sucesión discreta de eventos.

En las figuras 6.9 y 6.10 están representadas las reacciones verticales en el eje de giro durante el impacto, en las soluciones usando 10 y 15 modos respectivamente. En ellas se puede apreciar un cierto retraso en entre el inicio del proceso del impacto y la aparición de reacciones verticales, lo cual es congruente con el proceso de propagación de ondas elásticas. Sin embargo también se aprecia un nivel de reacciones mucho mayor cuando se usan 15 modos que cuando se usan 10 modos. Las reacciones han sido obtenidas evaluando el esfuerzo cortante en el extremo de la barra.

### 6.4.3 Impacto transversal de un sólido rígido en un mecanismo de cuatro barras

Un ejemplo más complejo ha sido simulado usando el programa DAMS. Se trata del impacto transversal de un sólido rígido en una barra flexible que forma parte

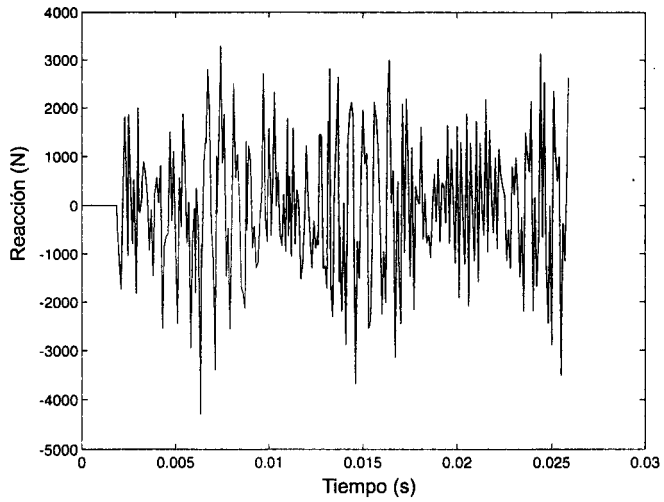


Figura 6.9: Reacciones verticales en articulación, 10 modos

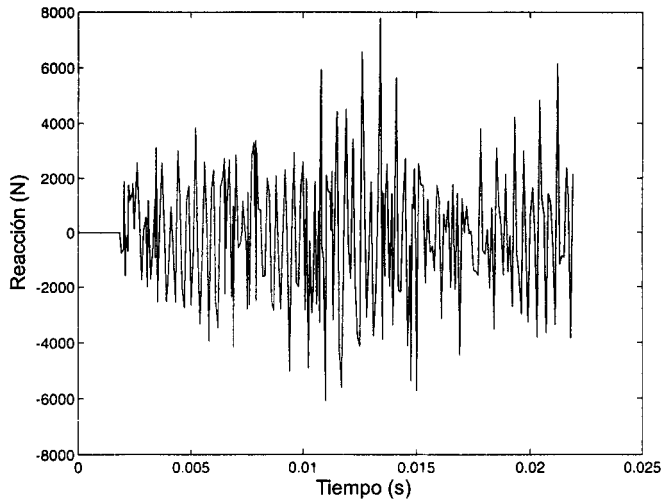


Figura 6.10: Reacciones verticales en articulación, 15 modos

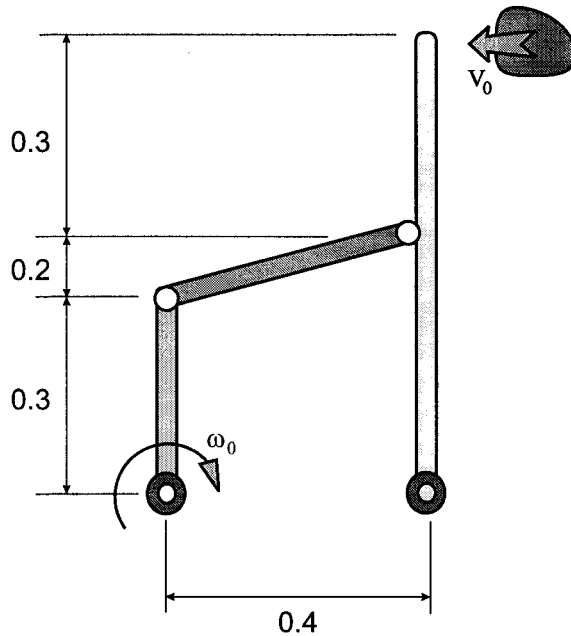


Figura 6.11: Impacto en un mecanismo de cuatro barras

de un mecanismo de cuatro barras. El sistema está representado en la figura 6.11. Se supone que la manivela rígida del cuatro barras se mueve con velocidad angular constante de valor  $-5.236 \text{ rad/s}$ . El acoplador también se supone rígido. De nuevo se resuelve el problema mediante un coeficiente de restitución igual a la unidad. Se han considerado los siguientes datos que aparecen en la tabla 6.7.

La barra elástica se supone de acero con módulo de Young  $207 \text{ GPa}$ , sección rectangular de  $0.6 \text{ cm} \times 0.8 \text{ cm}$  y momento de inercia  $2.56e - 9 \text{ m}^4$ . La simulación numérica del comportamiento de la barra elástica se hace de nuevo mediante discretización por elementos finitos y posterior reducción de coordenadas mediante síntesis modal de componentes. Para ello se usa un sistema local de coordenadas cuyo origen se encuentra en el par fijo y el eje  $x$  siempre pasa por el par móvil. Esto significa usar como condiciones de referencia las de una viga biapoyada. Para la discretización de la barra se usan 15 elementos viga 2D. Se han resuelto tres

Velocidad angular de la barra elástica durante el choque:	3.142 rad/s
Velocidad inicial del sólido rígido:	-1.513 m/s
Velocidad de aproximación en el impacto:	1 m/s
Masa de la barra flexible:	3.034 kg
Masa del sólido rígido:	2.133 kg
Masa de la biela:	2.133 kg
Masa del acoplador:	3.178 kg

Tabla 6.7: Datos del impacto en mecanismo de cuatro-barras

Modos	Velocidad final (m/s)	Duración (s)
5	3.2712	3.18e-2
10	3.2865	3.11e-2
15	3.3175	3.54e-2

Tabla 6.8: Impacto en mecanismo de cuatro-barras. Evolución con número de modos

casos, usando de nuevo 5, 10 y 15 modos de vibración como funciones de forma.

El problema equivalente en el que todas las barras son rígidas se ha resuelto también, dando como resultado una velocidad final del sólido rígido  $v_1^+ = 3.511$  m/s. De nuevo ésta debe ser una cota superior de las velocidades finales de sólido rígido de los problemas resueltos con coordenadas elásticas. Algunos datos de los problemas resueltos se dan en la tabla 6.8.

De nuevo se observa un buen acuerdo en la duración del impacto. En este caso, al contrario del ejemplo de la barra giratoria, al aumentar el número de coordenadas elásticas aumenta también la velocidad final del sólido rígido. Esta velocidad se mantiene siempre bajo la cota dada por el problema en el que todas las barras son rígidas.

En lo relativo a desplazamientos durante el impacto y esfuerzos elásticos se



han obtenido las mismas conclusiones en este ejemplo que en el anterior, esto es, los resultados son consistentes para los primeros pero no para los segundos.

#### **6.4.4 Cambio de juego de modos**

Como ya se ha mencionado existe una forma alternativa de simular los impactos usando las ecuaciones de conservación. Este procedimiento es equivalente al usado en el capítulo anterior cuando se usaban los modos del sólido compuesto por los dos que chocan durante el periodo en que permanecen en contacto. De antemano se sabe que debido a los impactos múltiples puede que deban cambiarse varias veces las coordenadas y modos del problema -modos libres y modos de contacto- antes de simular el proceso completo del impacto.

En el problema del impacto axial en una barra empotrada que se resolvió analíticamente en el capítulo anterior mediante superposición modal, se imponía como condición inicial para el cambio de juego de modos que la sección de contacto adquiriera la misma velocidad que el sólido rígido inmediatamente después de entrar en contacto. Si se emplea el método de los elementos finitos para discretizar la geometría de los sólidos y se asigna un nodo al punto de contacto del sólido flexible, se podría asignar de forma análoga la misma velocidad a este nodo que al sólido rígido al comenzar el periodo de contacto. En la solución analítica, esta condición de contorno no supone incremento alguno en la energía mecánica del sistema porque la sección de contacto tiene masa nula. Por el contrario, en el método de los elementos finitos, debido a la discretización espacial, los nodos tienen asignada una masa finita y este procedimiento incrementaría de forma ficticia la energía mecánica del sistema. Para evitar esto, se puede recurrir a las ecuaciones de balance de impulso y cantidad de movimiento con un coeficiente de restitución igual a cero para evaluar las nuevas velocidades de los nodos cada vez que cambia el juego de modos -contacto o separación. El uso de un coeficiente de restitución nulo hace que, tras plantear las ecuaciones de balance y añadir los saltos de velocidad, los nodos de contacto no sólo coinciden aproximadamente en posición sino también

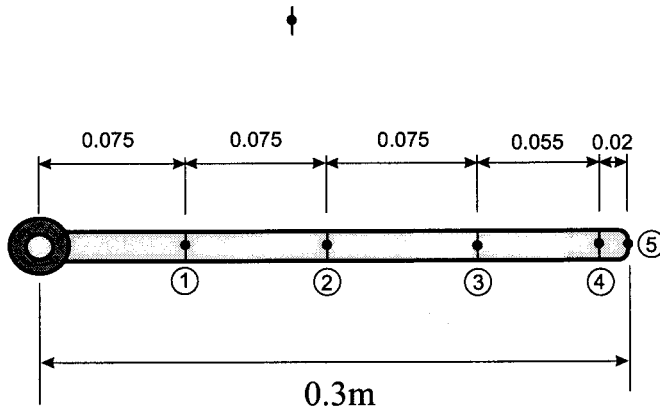


Figura 6.12: Distribución de nodos para barra elástica giratoria

en velocidad. Con esto no se garantiza la conservación de la energía mecánica, al contrario, se pierde cierta energía por el uso del coeficiente nulo. Esta energía es tanto menor cuanto más fina es la discretización espacial de la barra, pues el nodo de contacto tendría asignada una masa menor. Por otro lado, sí se garantiza la conservación de la cantidad de movimiento.

Al evaluar las condiciones iniciales mediante las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, ya no es sólo la sección de contacto la que modifica su velocidad por entrar en contacto o separación, sino que, inicialmente, todos los nodos definidos en el elemento flexible experimentan un cambio de velocidad. Sin embargo, como está demostrado (Gau y Shabana, 1991) y comprobado en este capítulo, cuando se incrementa el número de grados de libertad existe una tendencia a quedar localizado este salto de velocidad en la zona de contacto y ser cada vez menor el salto de velocidad cuanto más lejano es el nodo al punto de contacto.

El procedimiento descrito se ha aplicado al caso del impacto transversal de un sólido rígido en una barra giratoria representado en la figura 6.6. En este caso la barra se ha discretizado usando 5 elementos tipo viga 2D. El espaciado de los

elementos se muestra en la figura 6.12. Se ha supuesto que el impacto no ocurre exactamente en el extremo libre de la barra sino ligeramente en el interior de ésta: en el nodo 4. El motivo es que si se supone que el impactor contacta exactamente en la sección extrema de la barra, debido a la vibración que experimenta la barra por la rotación impuesta y al ser considerado el sólido rígido como puntual, podía ocurrir que el sólido rígido pasara de largo sin llegar a chocar.

Usando esta discretización se ha resuelto el problema de autovectores y tomando un subconjunto de ellos -los de menor frecuencia asociada- se forman las columnas de la matriz  $\mathbf{B}_1$ . Así, las coordenadas nodales  $\mathbf{p}$  se asumen como una combinación lineal de los autovectores elegidos, cuyos coeficientes son las coordenadas modales  $\mathbf{q}_1$ . Simplemente, añadiendo la masa del sólido rígido a la masa asignada al nodo de contacto se modifica la matriz de masa del sistema y se obtiene el segundo conjunto de autovectores. Estos representan los modos de vibración de una barra elástica con un sólido rígido unido a su extremo. Para este modelo elástico se llaman  $\mathbf{q}_2$  a las coordenadas modales y  $\mathbf{B}_2$  a la matriz de modos.

Se comienza la integración numérica de las ecuaciones usando el primer modelo elástico y cuando se detecta el contacto entre el sólido rígido y la barra elástica se resuelven las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento con  $e = 0$ . Tras su aplicación, el sólido rígido y el nodo de contacto adquieren instantáneamente la misma velocidad. Este instante es entonces aprovechado para cambiar el modelo elástico usando el segundo conjunto de modos. Para dicho cambio se usan las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1 = \mathbf{B}_2 \mathbf{q}_2, \quad (6.25)$$

que indican que las coordenadas nodales deben coincidir cuando se usa uno u otro juego de modos. Un sistema de ecuaciones con la mismas matrices de coeficientes -las matrices modales- se obtienen al hacer coincidir las velocidades nodales. Ambos sistemas de ecuaciones deben ser resueltos cuando se cambia el juego de modos para obtener las  $\mathbf{q}_2$  y  $\dot{\mathbf{q}}_2$  a partir de las  $\mathbf{q}_1$  y  $\dot{\mathbf{q}}_1$ , o viceversa. Como en general se usa un

juego incompleto de autovectores, las matrices modales  $\mathbf{B}_i$  no son cuadradas y por tanto no invertibles y la solución de estos sistemas de ecuaciones no es inmediata. Para resolver los sistemas, se hace uso de las propiedades de ortogonalidad de las matrices modales, que se escriben

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{m}_i, \quad \mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{k}_i \quad (6.26)$$

donde  $\mathbf{m}_i$  y  $\mathbf{k}_i$  son las matrices de masa y rigidez modales, diagonales y definidas positivas y  $\mathbf{M}_i$  y  $\mathbf{K}_i$  las matrices de masa y rigidez nodales, todas ellas correspondientes a juego de modos  $i$ . En nuestro ejemplo  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2$  pero  $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_2$ . Si se quiere, por ejemplo, obtener las coordenadas y velocidades modales del juego de modos 2 a partir de las correspondientes del juego 1 se procede como sigue. Se multiplican ambos lados de la última igualdad (6.25) por  $\mathbf{B}_2^T \mathbf{M}_2$  y queda

$$\mathbf{B}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{q}_2 = \mathbf{B}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1, \quad (6.27)$$

y haciendo uso de la ortogonalidad de los autovectores a través de la matriz de masa se obtiene

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{m}_2^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1, \quad (6.28)$$

De forma idéntica resulta

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{m}_2^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (6.29)$$

El procedimiento a seguir para resolver el problema del impacto transversal de un sólido rígido en una barra elástica giratoria es el que sigue. Inicialmente se usan los autovectores de una barra en voladizo -juego 1- para describir la deformación de la barra. Una vez que se detecta el contacto se resuelven las ecuaciones de conservación de impulso y cantidad de movimiento con un coeficiente de restitución igual a cero. A continuación se actualizan las velocidades nodales y se procede al cambio de juego de modos, al mismo tiempo que se abandonan las coordenadas de referencia del sólido rígido. El nuevo juego de modos -juego 2- se obtiene añadiendo una masa concentrada en el nodo 4. Estos autovectores *de contacto* se

Nodo	$u_1$	$u_2$	$v_1$	$v_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
1	-0.432e-8	-0.221e-12	-0.237e-11	-0.289e-11	-0.054e-9	0.121e-7
2	-0.465e-8	-0.338e-12	-0.112e-10	-0.154e-11	-0.174e-9	-0.097e-9
3	-0.616e-8	-0.386e-12	-0.245e-10	-0.132e-10	-0.186e-9	-0.290e-9
4	-0.516e-8	-0.440e-12	-0.410e-10	-0.392e-10	-0.239e-9	-0.376e-9
5	-0.516e-8	-0.441e-12	-0.413e-10	-0.395e-10	-0.181e-8	-0.376e-9

Tabla 6.9: Coordenadas nodales con dos juegos de autovectores

usan mientras dure el periodo de contacto, el cual termina cuando cambia de signo el esfuerzo cortante en el nodo de contacto. En ese instante se deberá volver al juego de modos inicial y recuperar las coordenadas de referencia del sólido rígido que vuelve a tener un movimiento independiente.

En las tablas 6.9 y 6.10 se muestran los valores de las coordenadas nodales  $\mathbf{p}_i$  y sus correspondientes velocidades  $\dot{\mathbf{p}}_i$  para todos los nodos obtenidos de los dos juegos de 12 modos cada uno. Los valores están dados en el instante del cambio de coordenadas y tras la actualización de las velocidades mediante la suma de los saltos de velocidad obtenidos de la solución de las ecuaciones de conservación. En estas tablas se indican por  $u_i$ ,  $v_i$  y  $\theta_i$  a las coordenadas nodales axiales, transversales y de giro correspondientes al juego de modos  $i$ . Se advierte que, en contra de lo establecido en (6.25), los valores de las coordenadas nodales y sus derivadas no coinciden, y que además los valores correspondientes no son en muchos casos ni siquiera parecidos. También se observa que tras el primer instante el impactor ha perdido cierta velocidad, pasando de  $-1\frac{m}{s}$  a  $-0.981\frac{m}{s}$ , por el efecto del impulso ya calculado. Como ya se ha explicado este salto de velocidad, que hace que el proceso aquí propuesto no sea del todo continuo, es tanto menor cuanto más fina es la discretización geométrica del sólido elástico.

La diferencia entre los valores de las coordenadas nodales y sus derivadas con los dos juegos de modos es explicable mediante el álgebra de espacios vectoriales. Por

Nodo	$\frac{du_1}{dt}$	$\frac{du_2}{dt}$	$\frac{dv_1}{dt}$	$\frac{dv_2}{dt}$	$\frac{d\theta_1}{dt}$	$\frac{d\theta_2}{dt}$
1	0.116e-3	-0.826e-3	-0.649e-2	-0.611e-2	-0.761	0.730e-1
2	-0.148e-3	-0.161e-2	-0.201e-1	-0.222e-1	-3.197	-0.263
3	0.364e-3	-0.232e-2	-0.805e-1	-0.449e-1	-12.045	-0.333
4	-0.486e-3	-0.293e-2	<b>-0.981</b>	-84.458	-0.239e-9	-0.355
5	-0.486e-3	-0.293e-2	-1.065	-0.712e-1	-87.532	-0.355

Tabla 6.10: Velocidades nodales con dos juegos de autovectores

ejemplo, en un espacio de tres dimensiones una pareja de vectores definen una base. Todos los vectores generados con esta base estarán contenidos en planos paralelos y no se podrá representar un vector que forme un cierto ángulo con dichos planos. Lógicamente con una base de dos vectores no se puede representar cualquier vector de un espacio de tres dimensiones. Otra pareja distinta de vectores formarán una base que engendren vectores contenidos en planos paralelos diferentes. Por tanto, los vectores generados con una base no podrán ser generados en la otra base pues pertenecen a planos distintos. Así, las coordenadas nodales y las derivadas, resultantes de usar como base un determinado juego incompleto de autovectores, no puede ser representado en general con otro juego incompleto de modos. Esto explica el resultado obtenido que aparece en las tablas anteriores. Realmente el *error* cometido en las ecuaciones (6.25) es la hipótesis inicial, pues en general no es posible la igualdad del vector obtenido en el espacio de las coordenadas nodales. La hipótesis inicial es tan sólo cierta en general si se usan juegos completos de autovectores como base, en cuyo caso se obtiene una aproximación perfecta. Sin embargo, el uso de juegos completos de modos va en contra del objeto fundamental de la síntesis modal de componentes, que es la reducción de coordenadas elásticas.

Sin embargo se demuestra (Strang, 1980) que de la solución del sistema de ecuaciones (6.25) resulta la mejor aproximación de un vector definido en una base al ser representado en otra según el criterio de los mínimos cuadrados. Por otro

Nodo	$u_1$	$u_2$	$v_1$	$v_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
1	-0.432e-8	-0.432e-8	-0.237e-11	-0.109e-8	-0.5445e-10	0.263e-6
2	-0.465e-8	-0.465e-8	-0.112e-10	-0.378e-8	-0.174e-9	0.426e-7
3	-0.616e-8	-0.616e-8	-0.245e-10	-0.727e-8	-0.186e-9	0.493e-7
4	-0.516e-8	-0.516e-8	-0.410e-10	-0.110e-7	-0.239e-9	0.508e-7
5	-0.516e-8	-0.515e-8	-0.413e-10	-0.111e-7	-0.181e-8	0.508e-7

Tabla 6.11: Coordenadas nodales con dos juegos de autovectores

lado mejor es la aproximación obtenida cuanto más próximo es el número de vectores usados como base respecto a la dimensión del espacio. Se han usado 12 autovectores de entre los 15 posibles -dimensión del espacio: cinco nodos con tres grados de libertad cada uno-, un número que parece elevado y en cambio el resultado da una aproximación muy mala, tanto que no se puede trabajar con ella.

Existe un procedimiento alternativo para evaluar las coordenadas modales durante un cambio de juego de modos. Consiste en usar la propiedad de ortogonalidad de los autovectores a través de la matriz de rigidez que aparece en la ecuación (9.20). Mediante un procedimiento similar al hecho con las matrices de masa se obtiene

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_2^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1, \quad (6.30)$$

Usando este procedimiento no se consigue mejora alguna en el cambio de coordenadas como se aprecia en los resultados mostrados en las tablas 6.11 y 6.12. Por tanto, no ha sido posible usar el método del cambio del modelo elástico para analizar el impacto por no poder expresar el estado de deformación con ambos juegos de modos en el mismo instante.

Nodo	$\frac{du_1}{dt}$	$\frac{du_2}{dt}$	$\frac{dv_1}{dt}$	$\frac{dv_2}{dt}$	$\frac{d\theta_1}{dt}$	$\frac{d\theta_2}{dt}$
1	0.116e-3	0.116e-3	-0.649e-2	3.640	-0.761	-26076.523
2	-0.148e-3	-0.148e-3	-0.201e-1	32.627	-3.197	642.785
3	0.364e-3	0.363e-3	-0.805e-1	101.429	-12.045	1153.055
4	-0.486e-3	-0.482e-3	<b>-0.981</b>	198.577	-0.239e-9	1294.099
5	-0.486e-3	-0.490e-3	-1.065	199.870	-87.532	1294.039

Tabla 6.12: Velocidades nodales con dos juegos de autovectores



# Capítulo 7

## Modelos Continuos de Fuerza de Contacto

### 7.1 Introducción y clasificación

En este capítulo se muestran distintos modelos continuos de fuerza de contacto. Dicha fuerza se calcula en función de la indentación entre los sólidos y de la velocidad de indentación. Para ello, en la simulación numérica de problemas de impacto, se *permite* que los volúmenes de los sólidos que chocan se solapen durante el tiempo que se considera que dura el contacto. Los modelos elásticos de fuerza de contacto consideran reversible el proceso del contacto, por lo que no representan la posibles pérdidas de energía, mientras que otros modelos si pueden evaluar dichas pérdidas, aproximadamente. Estos últimos modelos pueden ser elastoplásticos, que asume el proceso de carga elástico hasta un límite en el que aparece plasticidad, o viscoelásticos, que modelan la energía perdida mediante una componente de la fuerza proporcional a la velocidad de indentación.

Estos modelos se pueden usar tanto en sólidos considerados rígidos como en los flexibles. Cuando se usa en sólidos flexibles se asume que el modelo elástico

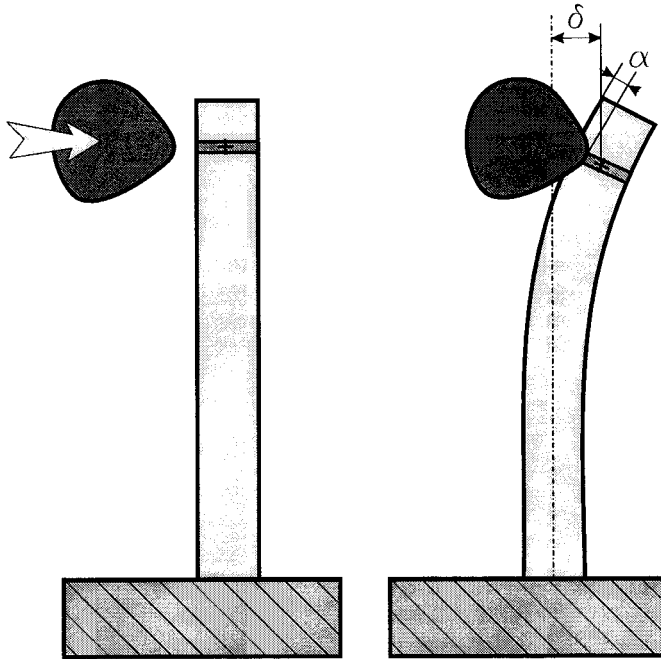


Figura 7.1: Impacto en un sólido elástico

utilizado no es capaz de representar adecuadamente las deformaciones locales debidas al impacto. Esta situación se muestra en la figura 7.1, donde  $\delta$  representa el desplazamiento transversal que el modelo de vigas sí puede representar, y  $\alpha$  la indentación local, que no puede. La fuerza de contacto se evalúa en este caso en función sólo de  $\alpha$ , incluyendo también su derivada con respecto al tiempo en caso de usar un modelo viscoelástico. El valor de  $\delta$  no afecta a la fuerza de contacto. Se comprende de esta figura que la indentación admisible tiene unos límites en función, en este caso, del canto de la barra.

En este capítulo se clasifican y comentan estos modelos y se aportan dos alternativas de fuerza elastoplástica. Para ello se van a usar resultados experimentales de procesos cuasistáticos de carga.

## 7.2 Modelo elástico lineal

La alternativa más sencilla para representar el proceso de contacto es suponer que la fuerza de contacto es proporcional a la indentación de los sólidos. Por tanto, la constante de rigidez es el parámetro que caracteriza las deformaciones locales durante el impacto. La fuerza de contacto se obtiene entonces de la expresión

$$F_c = \begin{cases} K_I \alpha & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases}, \quad (7.1)$$

si la indentación se define de tal forma que resulte positiva cuando hay penetración entre los sólidos. Este tipo de fuerza puede ser modelada en los códigos de elementos finitos comerciales mediante la inclusión de lo que se llama un *elemento de contacto*, que en general puede incluir también un elemento amortiguador. Entre sólidos reales no es común que la fuerza de contacto sea proporcional a la indentación. Sin embargo, si el impacto que se pretende analizar no está gobernado por el comportamiento local de los sólidos, sino por el proceso de propagación de ondas, se pueden obtener buenas aproximaciones de la fuerza de contacto.

## 7.3 Fuerzas anelásticas de contacto

Los modelos continuos de fuerza de contacto pueden representar pérdidas de energía del sistema por dos mecanismos distintos, la plasticidad o la inclusión de una componente equivalente a una fuerza de amortiguamiento viscosa. A las fuerzas que consideran estos mecanismos se llaman en este trabajo fuerzas elastoplásticas y viscoelásticas, respectivamente. No se tiene noticia de modelos que combinen ambos mecanismos disipativos.

### 7.3.1 Fuerzas viscoelásticas

Las fuerzas viscoelásticas de contacto constan de dos términos: el asociado a la indentación o componente elástico y el asociado a la velocidad de indentación o

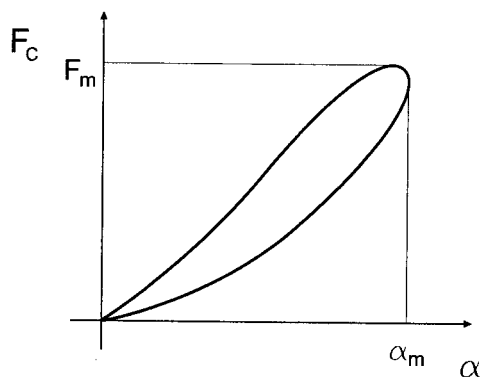


Figura 7.2: Ciclo de carga viscoelástico

componente viscosa. Este último es el responsable de la disipación de energía durante el impacto. En general estas fuerzas tienen por expresión

$$F_c = F_e(\alpha) + F_v(\alpha, \dot{\alpha}), \quad (7.2)$$

donde  $F_e$  es la componente elástica y  $F_v$  la viscosa. Ambas dependen también de propiedades geométricas y constantes elásticas de los sólidos. La evolución de esta fuerza durante un periodo de contacto tiene forma de lazo de histeresis, como se observa en el esquema de la figura 7.2. El área encerrada por este lazo representa la energía disipada durante el ciclo de carga. Se observa en la figura que con estos modelos la fuerza máxima de contacto no coincidiría en general con el instante de máxima indentación.

La componente de la fuerza de contacto proporcional a la velocidad de indentación puede ser debida a que el material es efectivamente viscoelástico. Por tanto la tensión que experimenta tiene una componente lineal con la deformación y otra lineal con la velocidad de deformación -modelo de Kelvin-Voigt (Goldsmith, 1960). Sin embargo, la componente viscosa de la fuerza no puede ser sólo función lineal de la velocidad de indentación, como se explicará a continuación.

La energía radiada hacia el interior de los sólidos en forma de ondas elásticas

puede ser modelada con este tipo de fuerzas de contacto. En el libro de Jonhson (1985), se muestra que cuando una carga puntual se aplica normalmente a un subespacio infinito, y se hace variar armónicamente el módulo de la fuerza, el punto de aplicación de la carga se desplaza con un retraso en su respuesta respecto de la oscilación de la fuerza. El sistema reacciona como si la carga estuviera aplicada sobre un muelle en paralelo con un amortiguador -modelo de Kelvin-Voigt. Así, el muelle tendría una rigidez igual a la rigidez estática del semiespacio -independiente de la frecuencia de la carga- y el amortiguador disiparía una energía igual a la radiada en el semiespacio en forma de ondas elásticas. Obsérvese que, como el subespacio es infinito, carece de contornos donde se puedan reflejar las ondas elásticas y volver al punto de contacto.

La componente viscosa de la fuerza de contacto debe cumplir ciertas condiciones para ser físicamente posible (Lee y Wang, 1983). En el primer instante del contacto, cuando es tan solo una pareja de puntos la que entra en contacto, la fuerza de contacto debe ser nula: debe partir de cero. En ese instante la velocidad de indentación es máxima y, por tanto, también lo sería la fuerza viscosa en caso de ser lineal con la velocidad de indentación y en ese caso el modelo daría una fuerza de contacto que no partiría de cero. Por otro lado, como la velocidad de indentación cambia de signo en el periodo de restitución, la fuerza viscosa, de ser lineal con esta velocidad, sería negativa en este periodo. Como la fuerza total de contacto no puede ser negativa, se interrumpiría el contacto antes de hacerse nula la indentación, lo cual no tiene sentido. Para evitar estas situaciones, se puede usar una componente viscosa que también depende de la indentación, de la forma (Lee y Wang, 1983)

$$F_v = C_v \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\alpha}) \dot{\alpha} \quad (7.3)$$

donde  $C_v$  es una constante, y la función  $\operatorname{sgn}()$  indica el signo de la velocidad de indentación.

Si la componente viscosa de la fuerza representa la pérdida de energía por propagación de ondas elásticas, no sería razonable utilizar este tipo de fuerza de

contacto cuando se trabaja con modelos de sólidos flexibles. De hacerlo, como el modelo del sólido puede de alguna manera representar estas ondas, se estaría representando dos veces el mismo efecto.

### **7.3.2 Fuerzas elastoplásticas**

El proceso físico representado por los modelos elastoplásticos es sencillo. El proceso de carga y descarga local se divide en tres periodos. La carga comienza siendo elástica hasta que la indentación alcanza un valor crítico al partir del cual cambia la ley fuerza-indentación. La plasticidad local generada es responsable de este cambio. El periodo plástico, si se alcanza, se mantiene hasta que comience la descarga, que vuelve a ser elástica. Cuando la fuerza de contacto se anula queda una indentación permanente, que corresponde al cráter que queda en los sólidos tras el choque. Por tanto, en estos modelos la fuerza de contacto es función de la indentación, de parámetros geométricos locales de los sólidos y de sus constantes elastoplásticas. La fuerza no depende de la velocidad de indentación.

Si los sólidos que entran en contacto tienen geometrías no conformes y redondeadas en el entorno de los puntos de contacto es aplicable la teoría de Hertz (Johnson, 1985) y durante el periodo de carga elástica la fuerza de contacto vendrá dada por la expresión (3.29). En otros casos se suele poder definir una relación fuerza indentación del tipo (Goldsmith, 1960)

$$F_c = K_l \alpha^n \quad (7.4)$$

donde  $K_l$  es una constante que depende de los mismos factores que la  $K_h$  de Hertz y el exponente  $n$  es una constante. Ambos factores se pueden determinar analítica o experimentalmente. Este tipo de fuerza es aplicable a periodos elásticos con sólidos que no cumplen las condiciones de Hertz y también a periodos plásticos en sólidos que pueden o no cumplirlas (Goldsmith, 1960). No obstante, es bastante común (Yigit y Christoforou, 1997; Thorton, 1997) suponer que en el periodo plástico la fuerza es lineal con la indentación.

En el proceso de descarga, aunque elástico, la relación fuerza indentación cambia con respecto a la carga elástica si ha habido periodo plástico. Como las superficies han modificado sus curvaturas con respecto a las que tenían al principio por plastificación local, la constante de rigidez, que denominaremos  $K_{h2}$ , sería distinta de la inicial  $K_h$ . Sin embargo, a veces este efecto puede ser insignificante y en estos casos se suelen considerar las cargas y descargas elásticas gobernadas por leyes con las mismas constantes asociadas.

### 7.3.3 Modelo elastoplástico de Yigit y Christoforou

En este apartado se presenta el modelo de fuerza de contacto elastoplástico propuesto por Yigit y Christoforou (1997). Este modelo es aplicable a sólidos que cumplen las condiciones de la teoría de Hertz. Se presenta aquí el caso del contacto de una esfera rígida en un semiespacio plano. Durante el periodo de carga elástico se supone la siguiente relación fuerza-indentación:

$$F_c = F_{ce} = K_h \alpha^{1.5} \quad 0 < \alpha < \alpha_Y, \quad (7.5)$$

donde  $\alpha_Y$  es la indentación crítica a partir de la cual cambia la rigidez local. La constante de Hertz, para el caso esfera rígida-plano es

$$K_h = \frac{2}{3} E' \sqrt{R} \quad (7.6)$$

Para calcular la indentación crítica, Yigit y Christoforou usan el criterio de plastificación de tensiones tangenciales máximas, resultando entonces

$$\alpha_Y = \frac{2.72 \pi^2 \sigma_Y^2 R}{(E')^2}, \quad (7.7)$$

donde  $\sigma_Y$  es la tensión de plastificación y  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ , siendo  $E$  el módulo de Young y  $\nu$  el coeficiente de Poisson, todos ellos relativos al material del semiespacio. La carga plástica se supone lineal con la indentación y la rigidez se supone igual a la pendiente de la curva elástica cuando se alcanza la indentación crítica. Por tanto la constante de rigidez durante el periodo plástico es

$$K_Y = \frac{\partial F_c}{\partial \alpha}(\alpha = \alpha_Y) = \frac{3}{2} K_h \alpha_Y^{0.5} \quad (7.8)$$

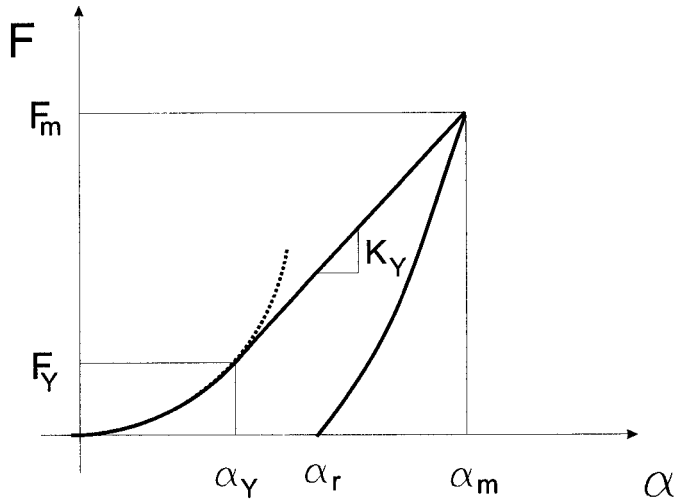


Figura 7.3: Ciclo de carga elasto-plástico

La relación fuerza indentación durante el periodo plástico resulta entonces

$$F_c = F_{cp} = K_Y(\alpha - \alpha_Y) + K_h \alpha_Y^{1.5} \quad \alpha_Y < \alpha < \alpha_m, \quad (7.9)$$

donde  $\alpha_m$  es la indentación máxima que se alcanza al final del periodo de carga. La fuerza de contacto en la descarga elástica propuesta por estos autores es

$$F_c = F_{de} = K_h(\alpha^{1.5} - \alpha_m^{1.5} + \alpha_Y^{1.5}) + K_Y(\alpha_m - \alpha_Y), \quad (7.10)$$

En la figura 7.3 se muestra un ciclo de carga con esta ley de contacto. El área encerrada entre la curva de carga y el eje de abscisas representa la energía disipada durante el ciclo de carga.

Este modelo presenta dudas en dos aspectos. La elección de la constante de rigidez durante el periodo plástico no está justificada. Además, debido al carácter potencial de la relación fuerza indentación durante el periodo de carga elástico, ligeros errores en la determinación de la indentación crítica induciría diferencias importantes en la rigidez adoptada durante el periodo plástico. Si el proceso de descarga se supone elástico, parece lógico que debiera ser de Hertz, como el de



carga, sin embargo esta ley no lo es. En el caso de contacto entre esfera y plano, la constante de Hertz para la descarga  $K_{h2}$ , siendo rigurosos, se calcularía como el de una esfera en un casquete esférico -curvatura negativa- que es el cráter residual que queda tras la carga plástica. Aún asumiendo que las constantes  $K_{h2} = K_h$ , se comprueba que la ley de descarga propuesta por Yigit y Christoforou,  $F_{de}$ , no es de la forma

$$F_d = K_h(\alpha - \alpha_r)^{1.5}, \quad F_{de} \neq F_d, \quad (7.11)$$

que es la forma que deberían tener para que la descarga, y por tanto una posible carga posterior, sigan la curva de Hertz. Para comprobarlo basta observar que la indentación permanente  $\alpha_r$  que se obtiene usando la fórmula de descarga resulta

$$F_{de} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_r = \left[ \frac{K_h}{K_Y}(\alpha - \alpha_m) + \alpha_m^{1.5} - \alpha_Y^{1.5} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (7.12)$$

### 7.3.4 Modelo plástico lineal

El modelo fuerza-indentación plástico lineal que se propone es idéntico al de Yigit y Christoforou, pero modificando la descarga para que sea elástica y siga el proceso de Hertz. Por tanto, la ley de descarga elástica que aquí se propone será la dada por la ecuación (7.11). Falta por concretar el valor de la indentación residual  $\alpha_r$ . Usando el modelo de carga de Yigit y Christoforou, en el instante de máxima indentación, suponiendo que se ha superado la indentación crítica, la fuerza tiene por valor

$$F_m = K_h \alpha_Y^{1.5} + K_Y(\alpha_m - \alpha_Y) \quad (7.13)$$

La ley de descarga debe cumplir  $F_d(\alpha_m) = F_m$ . Al imponer esta condición resulta

$$\begin{aligned} K_{h2}(\alpha_m - \alpha_r)^{1.5} &= K_h \alpha_Y^{1.5} + K_Y(\alpha_m - \alpha_Y) \quad \Rightarrow \\ \alpha_r &= \alpha_m - \left[ \frac{1}{K_{h2}}(K_h \alpha_Y^{1.5} + K_Y(\alpha_m - \alpha_Y)) \right]^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Asumiendo que las deformaciones permanentes son pequeñas, puede ser suficientemente aproximado asumir  $K_{h2} = K_h$  y entonces la indentación permanente

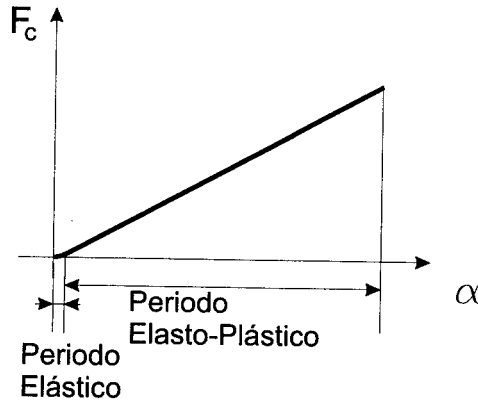


Figura 7.4: Periodos elástico y plástico durante un impacto

resulta

$$\alpha_r = \alpha_m - \left[ \alpha_Y^{1.5} + \frac{K_Y}{K_h} (\alpha_m - \alpha_Y) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (7.15)$$

El modelo fuerza-indentación plástico lineal se resume como sigue

Carga Elástica:	$F_c = F_{ce} = K_h \alpha^{1.5}$	$0 < \alpha < \alpha_Y$
Carga Plástica:	$F_c = F_{cp} = K_h \alpha_Y^{1.5} + K_Y (\alpha - \alpha_Y)$	$\alpha_Y < \alpha < \alpha_m$
Descarga Elástica:	$F_c = F_{de} = K_h (\alpha - \alpha_r)^{1.5}$	$\alpha_Y < \alpha < \alpha_m$

(7.16)

donde la indentación residual  $\alpha_r$  viene dada por la expresión (7.15) y la rigidez en el periodo plástico por la expresión (7.8).

En los problemas de impacto en los que se va a aplicar esta ley de contacto la indentación alcanzada puede ser cientos de veces superior a la indentación crítica, como se indica en la figura 7.4. Por tanto, lo que ocurrió durante la carga elástica es irrelevante, tanto que se podría dejar de representar este periodo y casi no se notaría la diferencia. Este hecho hace que sea muy importante la elección de la rigidez en el periodo plástico.

### 7.3.5 Modelo plástico potencial

En este apartado se propone un nuevo modelo de fuerza de contacto elastoplástica. Se plantea de nuevo para el problema del contacto de una esfera rígida en un semiespacio infinito. Se supone de nuevo que durante la carga elástica la relación fuerza-indentación es la dada por Hertz, expresada en la ecuación (7.5). También se usa el mismo criterio que usan Yigit y Christoforou para el inicio del periodo plástico, siendo por tanto la indentación crítica la dada por (7.7). Para aproximar la relación fuerza-indentación durante el periodo plástico, se van a utilizar datos experimentales que se presentan a continuación.

En la literatura de mecánica del contacto (Johnson, 1985) se divide el proceso de carga en tres periodos y no en dos, como hemos venido haciendo. Tras el periodo de carga elástico comienza la *carga elastoplástica*. Esta comienza con la plastificación de un sólo punto que se encuentra, no en la superficie, sino en el interior del sólido con menor tensión de plastificación. Durante todo el periodo elastoplástico aumenta la zona plástica alrededor de este punto. En la literatura se suele denominar este periodo como periodo de plasticidad contenida. Cuando la zona plastificada alcanza la superficie de los sólidos comienza el *periodo completamente plástico*. Para materiales cuyo comportamiento es próximo al perfectamente plástico, este periodo se caracteriza porque la presión de contacto se mantiene aproximadamente constante e igual a  $2.8\sigma_f$ , siendo  $\sigma_f$  la tensión de fluencia del material (Tabor, 1951; Johnson, 1985; Sinclair et al., 1985). Los conocidos ensayos de Tabor dan lugar a la gráfica mostrada en la figura 7.5 que representa la evolución de la presión media de contacto,  $p_m$ , de diversos metales endurecidos por deformación en los tres periodos. En la magnitud mostrada en el eje de abscisas, que tiene escala logarítmica, aparece el término  $a$ , que es el radio de la superficie de contacto.

La evolución de la presión media en el periodo elastoplástico se puede aproximar como una parábola en la escala logarítmica, de forma

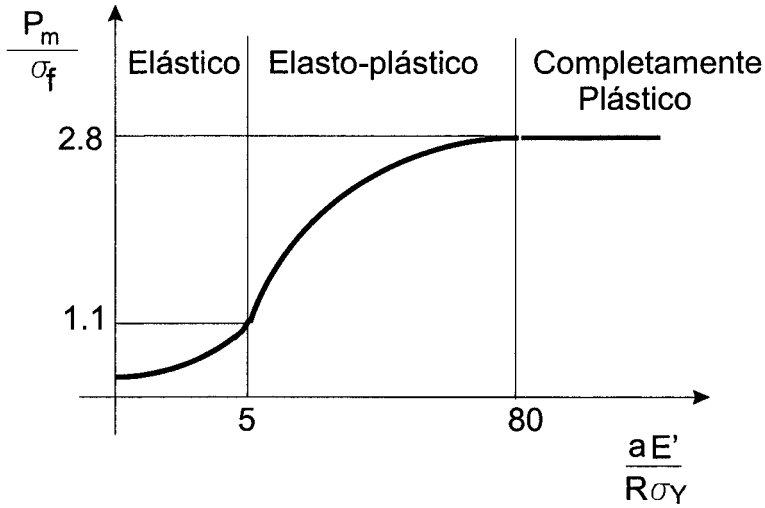


Figura 7.5: Resultados de los ensayos de Tabor

$$y = A(\log x)^2 + B \log x + C, \quad (7.17)$$

donde

$$y = \frac{p_m}{\sigma_f}, \quad x = \frac{aE'}{R\sigma_Y}. \quad (7.18)$$

Las constantes A, B y C se obtienen de resolver las siguientes ecuaciones algebraicas no lineales:

$$y[\log(5)] = 1.1, \quad y[\log(80)] = 2.8, \quad y'[\log(80)] = 0. \quad (7.19)$$

Esta última ecuación indica que la parábola presenta su máximo al inicio del periodo completamente plástico. La solución de este sistema de ecuaciones no lineales da lugar a los siguientes valores para las constantes de la ecuación (7.17)

$$A = -1.18, \quad B = 4.49, \quad C = -1.47. \quad (7.20)$$

Quedaría entonces la ecuación empírica

$$\frac{p_m}{\sigma_f} = -1.18 \left[ \log\left(\frac{aE'}{R\sigma_Y}\right) \right]^2 + 4.49 \log\left(\frac{aE'}{R\sigma_Y}\right) - 1.47, \quad 5 < \frac{aE'}{R\sigma_Y} < 80. \quad (7.21)$$

Para transformar esta ecuación en una ley fuerza-indentación hay que hacer varias aproximaciones. En primer lugar, a falta de conocimiento del flujo plástico del material, se supone que es perfectamente plástico, por lo que la tensión de fluencia se supone constante e igual a la de primera plastificación,  $\sigma_f = \sigma_Y$ . Si se tuviesen datos sobre el material se podría relacionar la tensión de fluencia con la de plastificación a través del coeficiente  $n$  de endurecimiento (Dowling, 1993).

En la ecuación (7.21), la deformación está caracterizada por el radio de las superficies deformadas  $a$ . Es necesario conocer la ecuación que relaciona la indentación y el radio de la superficie de contacto para poder escribir la expresión (7.21) en términos de la indentación. En el periodo elástico se tiene (Jonhson, 1985)

$$a^2 = \alpha R. \quad (7.22)$$

Esta situación se muestra en la figura 7.6. Cuando la plasticidad es importante, la relación  $a-\alpha$  es más parecida a la indicada en la figura 7.7 (Goldsmith, 1960). En este caso se relacionan indentación y radio de contacto geoméricamente mediante

$$\begin{aligned} R \cos \beta &= R - \alpha, & R \sin \beta &= a, & (\sin \beta \simeq \beta, & \cos \beta \simeq 1 - (\beta)^2) \\ \Rightarrow a^2 &= 2\alpha R. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Se va a suponer que la relación dada por (7.23) tiene lugar cuando se alcanza el periodo completamente plástico, y que durante el periodo elastoplástico la relación entre el cuadrado del radio del área de contacto y la indentación varía linealmente, de tal forma que se cumple

$$a_Y^2 = \alpha_Y R, \quad a_{fp}^2 = \alpha_{fp} R. \quad (7.24)$$

donde el subíndice  $fp$  indica el comienzo del periodo completamente plástico, dado por la curva de Tabor. Queda entonces la siguiente relación para el periodo elastoplástico:

$$a^2(\alpha) = \left( 1 + \frac{\alpha - \alpha_Y}{\alpha_{fp} - \alpha_Y} \right) \alpha R, \quad (7.25)$$

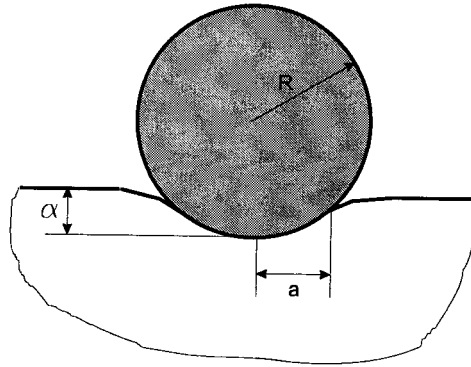


Figura 7.6: Radio de contacto e indentación en el periodo elástico

donde

$$\alpha_Y = \left( \frac{1.6\sigma_Y\pi}{E'} \right)^2 R = 25.27R \left( \frac{\sigma_Y}{E'} \right)^2, \quad \alpha_{fp} = \left( \frac{80\sigma_Y\pi}{\sqrt{2}E'} \right)^2 R = 3200R \left( \frac{\sigma_Y}{E'} \right)^2. \quad (7.26)$$

La fuerza de contacto se relaciona con la presión media mediante la expresión

$$F_c = \pi a^2 p_m \quad (7.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.25) y (7.27) en la ecuación (7.21) se obtiene la siguiente ley de fuerza de contacto en el periodo elastoplástico

$$F_c = \pi\sigma_Y [a(\alpha)]^2 \left[ -1.18 \left( \log \left[ \frac{a(\alpha)E'}{R\sigma_Y} \right] \right)^2 + 4.49 \log \left[ \left[ \frac{a(\alpha)E'}{R\sigma_Y} \right] - 1.47 \right] \right] \quad (7.28)$$

$$5 < \frac{a(\alpha)E'}{R\sigma_Y} < 80$$

Esta última ecuación viene representada en la figura 7.8. La curva anterior podría ser aproximada por una curva potencial del tipo

$$F_c = K_{hY}(\alpha)^n. \quad (7.29)$$

Interpolando esta curva haciendo coincidir los valores para la fuerza de la indentación crítica y el comienzo del periodo completamente plástico, resultan las

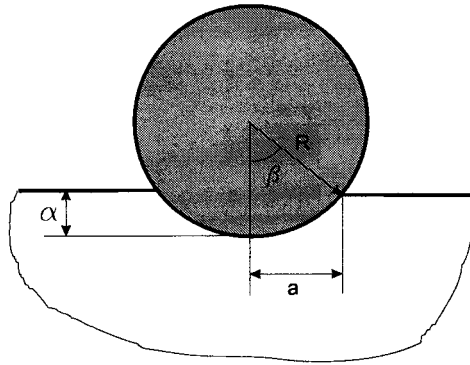


Figura 7.7: Radio de contacto e indentación en el periodo plástico

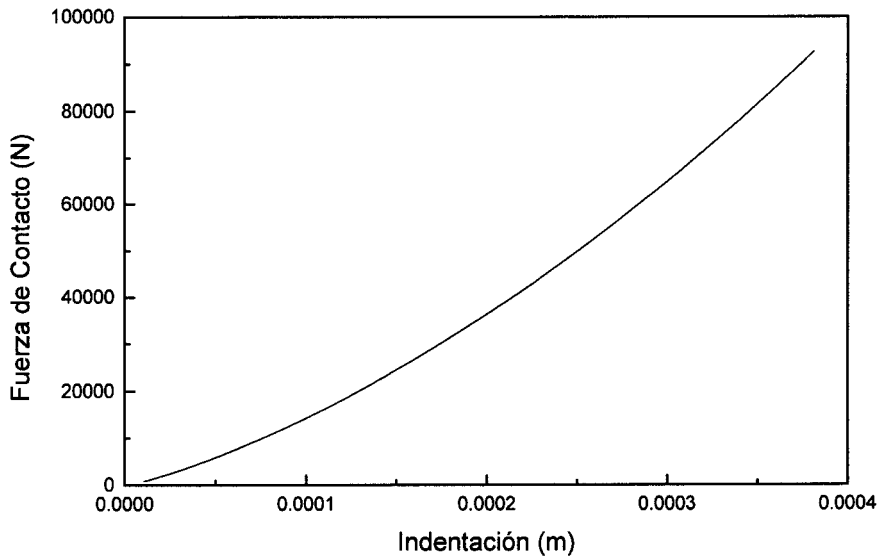


Figura 7.8: Fuerza de contacto dada por la fórmula

constantes

$$n = \frac{\log F_Y - \log F_{fp}}{\log \alpha_Y - \log \alpha_{fp}}, \quad \log K_{hY} = \log F_Y - n \log \alpha_Y. \quad (7.30)$$

También se puede hacer un ajuste por mínimos cuadrados en coordenadas logarítmicas, que da lugar a constantes muy parecidas.

Para comprobar la validez de la ley potencial propuesta, se compara esta relación con datos que aparecen en la literatura. De resultados numéricos y experimentales (Johnson, 1985), se conoce que en el periodo completamente plástico existe una relación lineal entre fuerza e indentación dada por

$$\frac{F_c}{F_Y} = 5.5 \frac{\alpha_c}{\alpha_Y} \Rightarrow K_J = 5.5 \frac{F_Y}{\alpha_Y} \quad (7.31)$$

Al valor de esta rigidez se llamará *criterio de Johnson* (Cr.J.).

La rigidez tangente que aparece en el instante de la carga crítica  $F_Y$ , usando la expresión (7.29), vendrá dada por

$$K_{Yt} = \frac{\partial F_c}{\partial \alpha} (\alpha = \alpha_Y) = n K_{hY} \alpha_Y^{n-1}. \quad (7.32)$$

Según la ley propuesta por Yigit y Christoforou, esta rigidez debe coincidir con la pendiente de la curva elástica de Hertz, dada por (7.8). Este valor se llamará *criterio de Yigit* (Cr.Y.).

En la tabla 7.1 se muestran los valores de las constantes de las leyes potenciales de carga así como la rigidez tangente en el momento de la fuerza crítica y la rigidez secante entre los puntos de primera plastificación y de carga completamente plástica -pendiente de la recta que une ambos puntos en la curva fuerza-indentación. Estos últimos se comparan con los criterios de Yigit y de Johnson, respectivamente.

Se observa que las interpolaciones de la ecuación (7.8), aparte de ajustarla muy bien, cumplen con razonable exactitud ambos criterios. Por tanto una alternativa sencilla para el cálculo de las constantes de la ley potencial (7.29) es imponer ambos criterios, para lo cual es necesario añadir una constante, y queda



	Int. 2 puntos	Min. Cuad.	Cr.Y.	Cr.J.	Nueva Ec.
$K_{hY}$	3.97e9	3.31e9			3.78e9
$n$	1.34	1.32			1.33
$K_{Yt}$	7.4e7	7.4e7	8e7		8e7
$K_{Ysecante}$	2.67e8	2.83e8		2.95e8	2.95e8

Tabla 7.1: Comparación de modelos fuerza-indentación

$$F_c = K_{hY}(\alpha^n - \alpha_Y^n) + F_Y. \quad (7.33)$$

Las constantes  $K_{hY}$  y  $n$  se obtienen de resolver la siguiente pareja de ecuaciones algebraicas

$$nK_{hY}\alpha_Y^{n-1} = \frac{3}{2}K_h\alpha_Y^{0.5}, \quad \frac{K_{hY}(\alpha_Y^n - \alpha_{fp}^n)}{\alpha_Y - \alpha_{fp}} = 5.5\frac{P_Y}{\alpha_Y}, \quad (7.34)$$

que representan lo que se ha llamado criterios de Yigit y Johnson. En el caso del ejemplo que se viene mostrando se obtienen los valores  $K_{hY} = 3.78e9$  y  $n = 1.33$ .

La ecuación así obtenida aproxima muy bien la curva (7.8). Los coeficientes obtenidos son muy parecidos a los que se obtienen con la interpolación con dos puntos y la interpolación con mínimos cuadrados, además, en este caso, ambas constantes son intermedias. Por sencillez de cálculo, parece lo más acertado usar la ecuación (7.33) para la carga plástica.

En el modelo de fuerza de contacto que se propone se va a suponer también que la descarga es elástica y sigue el comportamiento descrito por Hertz. Sin embargo, al contrario de lo asumido para el modelo plástico lineal, se va a suponer que si se ha alcanzado el periodo plástico la constante de la ley de Hertz en la descarga  $K_{h2}$  no es igual a dicha contante en la carga previa,  $K_{h2} \neq K_h$ . Esto es debido a que las deformaciones permanentes tras la plastificación hacen que la curvatura de la superficie de contacto se halla modificado. Se procede ahora al cálculo aproximado de  $K_{h2}$ .

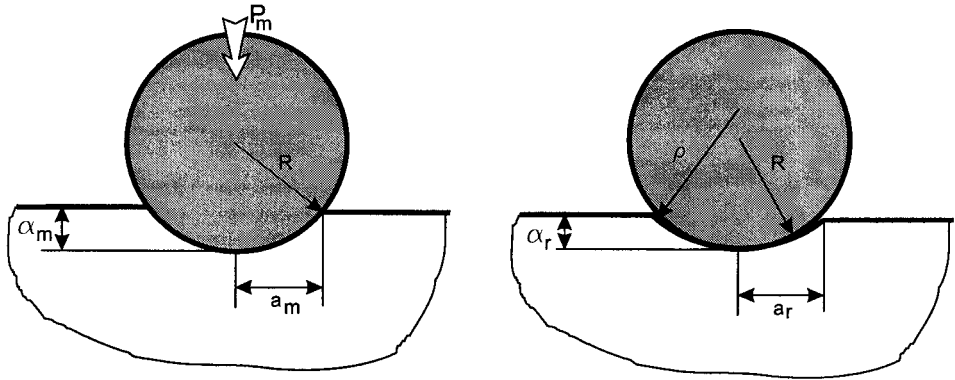


Figura 7.9: Deformaciones en carga máxima y tras contacto plástico

En la figura 7.9 se muestran los estados de deformación durante la carga máxima plástica y al término de la descarga elástica. La constante de Hertz asociada al estado de descarga mostrado en la figura resulta

$$K_{h2} = \frac{2}{3} E' \sqrt{R^*}, \quad \frac{1}{R^*} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}. \quad (7.35)$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura del cráter residual.

Durante un nuevo proceso de carga elástica entre las superficies deformadas, la relación entre el radio de la superficie de contacto y la carga vendrá dada por

$$a = \left( \frac{3F_c R^*}{2E'} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.36)$$

Particularizando el radio de la superficie de contacto en el instante de máxima indentación  $\alpha_m$  mediante su expresión dada por (7.25) resulta

$$R^* = \frac{2E' (a^2(\alpha_m))^{1.5}}{3F_m} \quad (7.37)$$

Usando este radio equivalente, se obtiene la siguiente expresión para la constante de Hertz en descarga

$$K_{h2} = \frac{2}{3} E' \left[ \frac{2E' (a^2(\alpha_m))^{1.5}}{3F_m} \right]^{0.5} \quad (7.38)$$

La indentación permanente se obtiene ahora de la fórmula

$$\alpha_r = \alpha_m - \left[ \frac{1}{K_{h2}} (K_h \alpha_Y^{1.5} + K_Y (\alpha_m - \alpha_Y)) \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (7.39)$$

y la durante la descarga elástica se cumple la ecuación

$$F_c = K_{h2} (\alpha - \alpha_r)^{1.5}. \quad (7.40)$$

La relación definitiva propuesta entre la fuerza de contacto y la indentación queda

Carga Elástica:	$F_c = F_{ce} = K_h \alpha^{1.5}$	$0 < \alpha < \alpha_Y$
Carga Plástica:	$F_c = F_{cp} = K_{hY} (\alpha^n - \alpha_Y^n) + F_Y$	$\alpha_Y < \alpha < \alpha_m$
Descarga Elástica:	$F_c = F_{de} = K_{h2} (\alpha - \alpha_r)^{1.5}$	$\alpha_Y < \alpha < \alpha_m$

(7.41)

donde las constantes de la carga plástica se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones (7.34). Para obtener la indentación residual  $\alpha_r$  se resuelve

$$K_{hY} (\alpha_m^n - \alpha_Y^n) + F_Y = K_{h2} (\alpha_m - \alpha_Y)^{1.5}, \quad (7.42)$$

y se obtiene

$$\alpha_r = \alpha_m - \left[ \frac{1}{K_{h2}} (K_{hY} [\alpha_m^n - \alpha_Y^n] + F_Y) \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (7.43)$$

Para obtener  $K_{h2}$  se usa la aproximación (7.38).

# Capítulo 8

## Impactos en Estructuras

### 8.1 Introducción

En este capítulo se aplican los modelos continuos de fuerza de contacto descritos en el capítulo anterior al impacto de sólidos rígidos en barras flexibles. Las barras flexibles que se modelan en este capítulo no tienen posibilidad de movimiento de sólido rígido, por tanto, sólo se utilizan coordenadas elásticas para describir el movimiento de sus secciones.

En la primera parte de este capítulo se usa el modelo elástico lineal para los impactos axial y transversal en el extremo libre de una barra en voladizo. Para modelar la deformación de las barras se usa el método de los elementos finitos. Además de resolver estos problemas de impacto con coordenadas nodales, se usa el método de la síntesis modal de componentes, que usa un conjunto incompleto de autovectores como base para describir la deformación de las barras. A los coeficientes de estos autovectores se les llama coordenadas modales. Las soluciones con coordenadas nodales y modales se comparan con soluciones analíticas en el caso del impacto axial. Se va a analizar la influencia de la rigidez del contacto local en la respuesta del sistema.

Los modelos elastoplásticos lineal y potencial, descritos en el capítulo anterior, se van a aplicar al impacto transversal en una barra en voladizo. En este caso, se usarán modos con expresión analítica como funciones de forma para describir la deformación de la barra. Se van a usar dos grupos distintos de modos: los que se obtienen usando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y los que se obtienen usando la teoría de vigas de Timoshenko. Se va a realizar un estudio de cómo se reparte la energía del sistema durante y tras el impacto. Por último, se va a estudiar la validez de las aproximaciones cuasiestáticas local y estructural para este tipo de impactos.

## 8.2 Impacto axial con fuerza de contacto elástica lineal

El problema del impacto axial de un sólido rígido en una barra empotrada en un extremo se ha resuelto utilizando este tipo de fuerza de contacto. La barra y el sólido rígido tienen de nuevo la misma masa y las propiedades de ambos son las mismas que las dadas en los capítulos previos. La barra elástica se ha discretizado mediante el método de los elementos finitos tal como se hizo en el capítulo 6 cuando se usaron las ecuaciones de balance. De nuevo se han resuelto los problemas usando coordenadas nodales y modales, siendo estas últimas los coeficientes de los autovectores de la barra empotrada en un extremo que se usan como funciones de forma. Para integrar las ecuaciones del movimiento se ha usado en este caso el método de Newmark (Bathe, 1982) o de la aceleración media constante. A usarlo se han elegido los parámetros  $\delta = 0.5$  y  $\alpha = 0.25$  pues conducen a un esquema *incondicionalmente estable*.

En algunos códigos comerciales de elementos finitos (Ansys, 1992) se recomienda que al usar estos elementos de contacto se les asigne una rigidez que sea uno o dos ordenes de magnitud superior a la de los elementos adyacentes. Con esto se supone que los nodos de contacto se comportan de forma más parecida a como lo

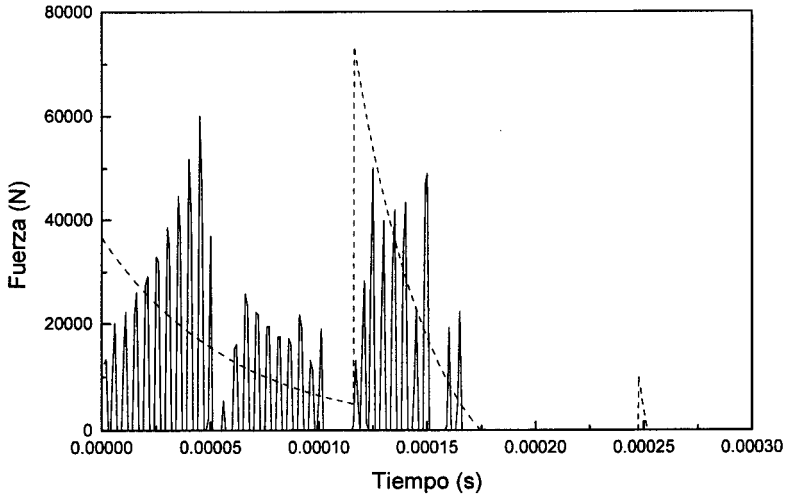


Figura 8.1: Fuerza de contacto con rigidez local  $K_l = 10K_e$

hacen los puntos de contacto en la realidad - *acompañándose* durante el contacto. También se recomienda que esta rigidez no sea excesivamente grande pues podría dar problemas de convergencia de la solución. En nuestro caso, cuando se usa una rigidez del elemento de contacto 100 veces superior a la rigidez del elemento adyacente la solución diverge. Cuando se usa una rigidez diez veces superior a la del elemento adyacente, la fuerza de contacto viene dada por una sucesión de golpes interrumpidos. En la figura 8.1 se presenta la fuerza de contacto obtenida con esta rigidez del elemento de contacto frente a la analítica que se obtuvo sin considerar efectos locales. Se han usado 20 elementos finitos y coordenadas nodales para obtener esta solución. Como consecuencia de estos golpes, en la respuesta vibratoria del sistema se introducen artificialmente altas frecuencias, como se muestra en la figura 8.2, donde está representado el desplazamiento de la sección de contacto durante y tras el impacto y comparado con la solución analítica.

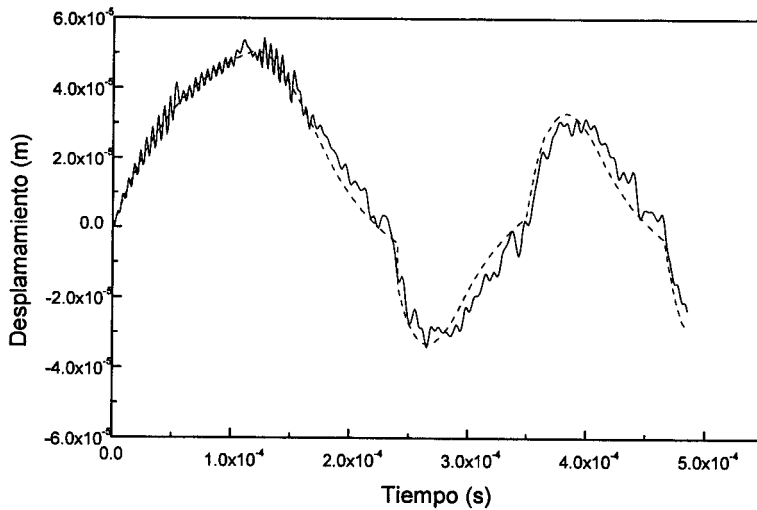


Figura 8.2: Desplazamiento de sección de contacto con rigidez local  $K_l = 10K_e$

Es posible que en problemas de contacto pseudoestáticos pueda ser acertada la recomendación de usar rigideces del elemento de contacto mucho más altas que las de los elementos adyacentes, pero parece claro que en el caso que nos ocupa este criterio no es apropiado. Por eso en las simulaciones siguientes se ha optado por usar la misma rigidez para la fuerza de contacto que la que presentan los elementos que forman la barra. En las tablas 8.1 y 8.2 vienen algunos datos de los problemas resueltos con coordenadas nodales y modales. Los autovectores usados en los problemas con coordenadas modales están obtenidos de un modelo con 100 elementos. Las columnas indican el número de elementos finitos en que se divide la barra, la fuerza máxima de contacto expresada en Newton y el instante en que ocurre en milisegundos desde que comenzó el contacto, la duración del impacto en milisegundos, la velocidad de salida del sólido rígido en metros por segundo y el tiempo de computación empleado en segundos. El segundo periodo

Elementos	Fmax (t)	Duración	$V^+$	CPU
10	51484 (13.8)	18.9	-0.781	1
30	63961 (12.6)	18.0	-0.717	5
50	85683 (12.4)	18.2	-0.704	13
80*	88085 (12.4)	18.5	-0.696	33
100*	91804 (12.4)	18.4	-0.690	52
Analítica	89960 (11.6)	17.8	-0.692	-

Tabla 8.1: Impacto axial con coordenadas nodales

de contacto se detecta en las simulaciones con 80 y 100 coordenadas nodales y con 50 coordenadas modales. De las tablas se deduce una buena aproximación en general de los instantes durante el contacto. La fuerza máxima de contacto está muy bien aproximada cuando se usan más de 50 coordenadas nodales o más de 30 modales. Respecto a la velocidad de salida del sólido rígido, se observa que ésta disminuye en módulo cuando aumenta el número de coordenadas elásticas. Esto significa que los modelos de flexibilidad que cuentan con un mayor número de grados de libertad absorben más energía en forma de vibración. Atendiendo al tipo de coordenadas usadas, las tablas indican una ligera ventaja en precisión a las simulaciones con coordenadas modales, si bien es necesario un mayor número de cálculos para integrar el sistema y por tanto mayores tiempos de computación.

En las figuras 8.3 y 8.4 están representadas las fuerzas de contacto de los problemas con 30 nodos y 30 modos, respectivamente, mientras que en las figuras 8.5 y 8.6 se muestran los desplazamientos de la sección de contacto en estas mismas simulaciones. En estas gráficas se representa también los resultados analíticos. En ambos casos se aprecia que la fuerza de contacto obtenida numéricamente oscila con una frecuencia que no aparece en la solución analítica. La amplitud de esta oscilación es tan alta en el problema modal que hace que el contacto entre los sólidos se interrumpa numerosas veces. En lo relativo a desplazamientos elásticos



Modos	Fmax (t)	Duración	V <sup>+</sup>	CPU
5	41950 (13.2)	16.3	-0.848	1
10	41615 (16.4)	17.9	-0.714	3
20	56397 (4.3)	18.1	-0.705	13
30	85535 (11.9)	18.7	-0.703	30
50*	85006 (12.0)	18.0	-0.698	102
Teórico	89960 (11.6)	17.8	-0.692	-

Tabla 8.2: Impacto axial con coordenadas modales

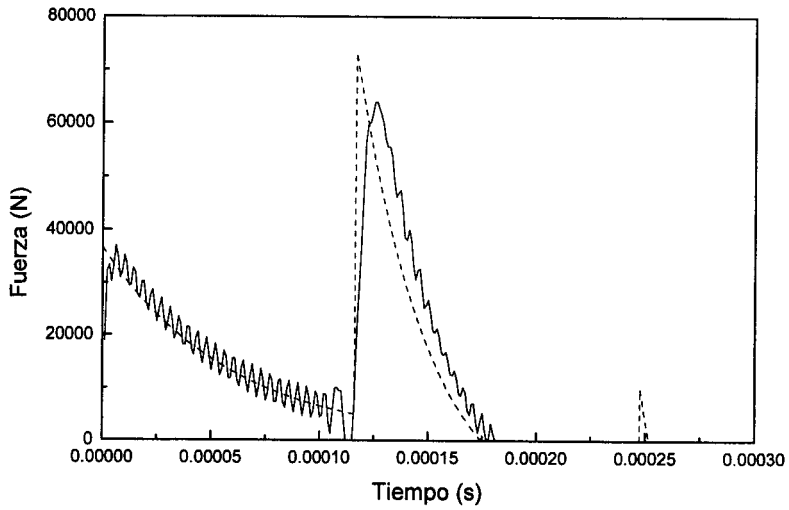


Figura 8.3: Fuerza de contacto. 30 nodos

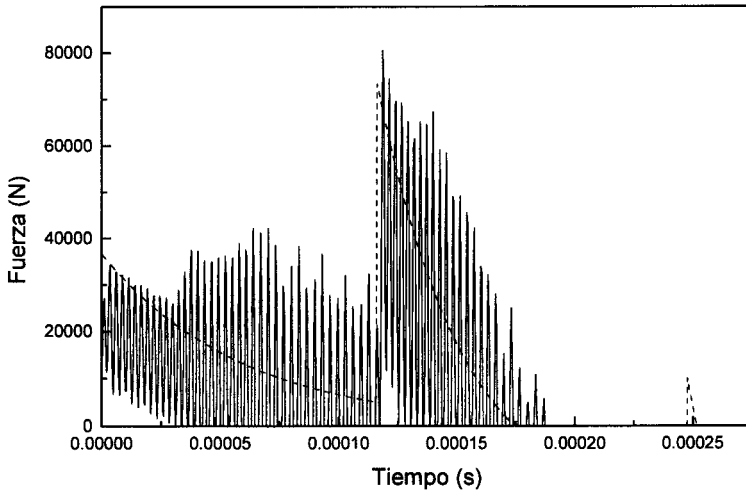


Figura 8.4: Fuerza de contacto. 30 modos

también se aprecia esta alta frecuencia en la solución modal, pero no en la nodal. Por otro lado, la curva de desplazamientos en el problema nodal presenta un cierto retraso con respecto a la solución analítica que no aparece en la solución con coordenadas modales. La introducción de altas frecuencias es atribuible a la reflexión de las ondas elásticas en los límites de los elementos. Debido a que la frecuencia natural de los elementos aumenta al disminuir su tamaño, o dicho de otra forma, que las ondas elásticas tardan menos tiempo en recorrer la longitud de elementos más cortos, estas altas oscilaciones introducidas artificialmente aumentan su frecuencia cuando se hace una discretización más fina de la barra.

Las figuras 8.7 y 8.8 representan la onda elástica de compresión a los  $20 \mu s$  del inicio del impacto, en los problemas con 30 nodos y 30 modos, respectivamente. En ambas gráficas se aprecia cómo en dicho instante sólo parte de la barra está afectada por la onda elástica, permaneciendo en reposo la zona de ésta más

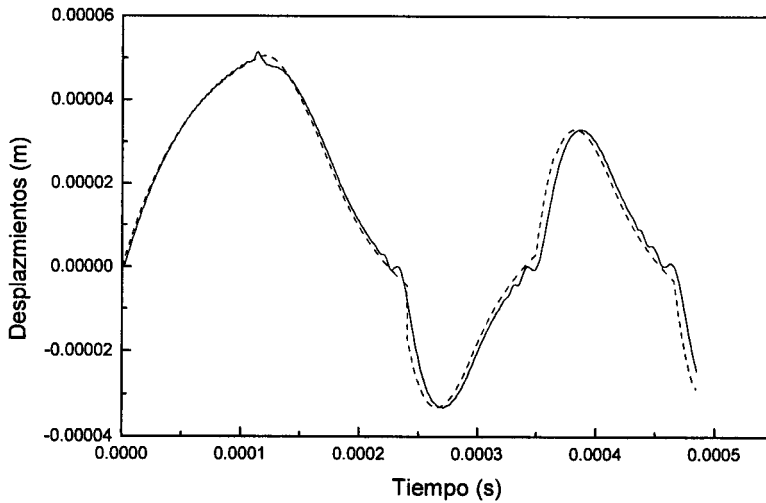


Figura 8.5: Desplazamiento de sección de contacto. 30 nodos

próxima al empotramiento. El estado de reposo es prácticamente absoluto en el problema nodal y no tanto, aunque bastante aproximado, en el problema modal. Hay que tener en cuenta que los autovectores usados como funciones de forma en el problema modal afectan a la barra completa, por lo que los nodos no tienen un movimiento totalmente independiente, como en el problema nodal. En ambas representaciones se aprecia un rizado artificial de la curva, que es más suave en el problema modal, porque usa 100 elementos frente a los 30 del problema nodal.

### 8.3 Impacto transversal con fuerza de contacto elástica lineal

El problema del impacto transversal de un sólido rígido en el extremo de una barra elástica en voladizo ha sido también resuelto usando elementos finitos y

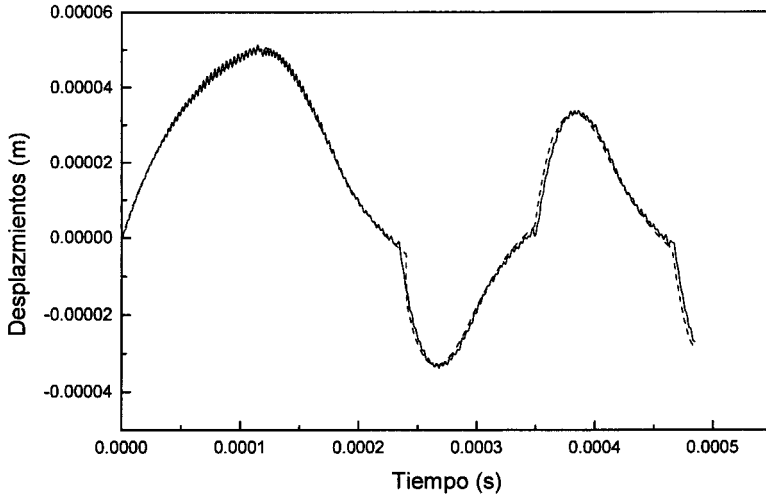


Figura 8.6: Desplazamiento de sección de contacto. 30 modos

fuerza de contacto lineal con la indentación. De nuevo, el problema es idéntico en propiedades y geometría al caso del impacto axial. En este caso sólo se han usado coordenadas nodales.

En las figuras 8.9 y 8.10 se representan al mismo tiempo los desplazamientos del sólido rígido y de la sección de contacto y la fuerza de contacto. La diferencia entre ambas gráficas es que en la primera se ha usado una rigidez local  $k_l = k_e = \frac{EI}{l_e^3}$ , donde  $l_e$  es la longitud de cada elemento y  $k_e$  una rigidez representativa del elemento, y en la segunda la rigidez local es diez veces esta cantidad. Ambos problemas se han resuelto discretizando la barra en 15 elementos finitos de igual longitud. Cuando la línea discontinua, que representa los desplazamientos del sólido rígido, queda por debajo de la continua, que representa los desplazamientos de la sección de contacto, hay penetración y por lo tanto fuerza de contacto. Tras la separación definitiva el sólido rígido queda con velocidad constante y la

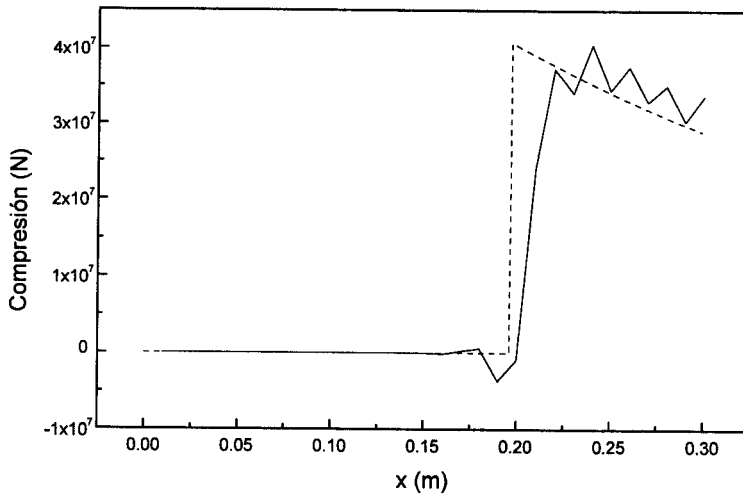


Figura 8.7: Compresiones en la barra cuando  $t=2e-5$ s. 30 nodos

sección de contacto con movimiento armónico. Lo primero que se aprecia es que el choque consiste en una sucesión de impactos cortos. Este fenómeno, que se ha demostrado analíticamente en el caso del impacto axial, aparece de esta forma en impactos transversales, siempre que las masas de los sólidos que chocan sean del mismo orden. Se llama aquí *periodo aparente de contacto* al periodo transcurrido desde que comienza el primer periodo de contacto hasta que termina el último y *periodo real de contacto* a la suma de los intervalos de tiempo en los que los sólidos permanecen en contacto. Se observa en ambas figuras que los periodos reales de contacto son bastante menores que los aparentes. En general se puede decir que cuando los impactos no están gobernados por el proceso local -solo lo estaría si la masa del impactor fuese mucho menor que la de la barra elástica- el periodo aparente de contacto es invariablemente del mismo orden que el periodo natural de vibración de la barra elástica. Sin embargo el periodo real de contacto

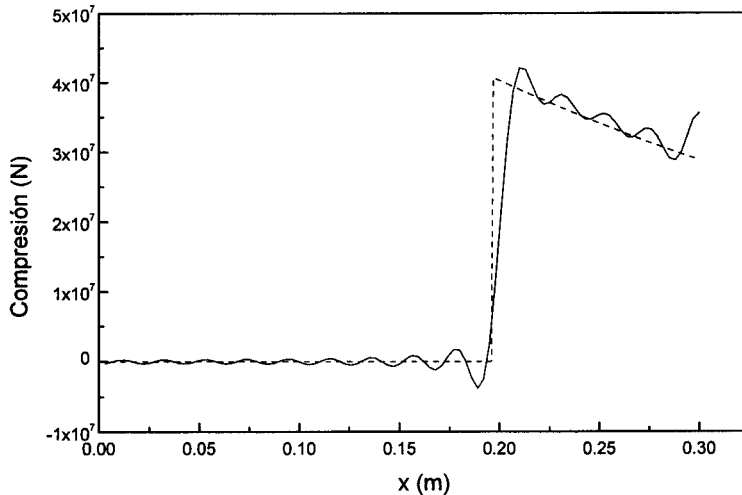


Figura 8.8: Compresiones en la barra cuando  $t=2e-5$ s. 30 modos

si depende del proceso local. En las figuras 8.9 y 8.10 se aprecia que una mayor rigidez local da lugar a picos mayores de fuerza de contacto y menores tiempos reales de contacto para cada uno de los periodos. El hecho de que el problema no esté gobernado por el proceso local se aprecia en que los desplazamientos son muy parecidos en ambos ejemplos. Los procesos locales son bastante diferentes, pero el intercambio final de energía y cantidad de movimiento es bastante similar.

## 8.4 Impactos transversales en barras flexibles con fuerzas elastoplásticas

En este apartado se aplica el modelo de fuerza de contacto descrito al impacto transversal de un sólido rígido en una barra elástica en voladizo. En este caso no se usará el método de los elementos finitos para discretizar la geometría de la

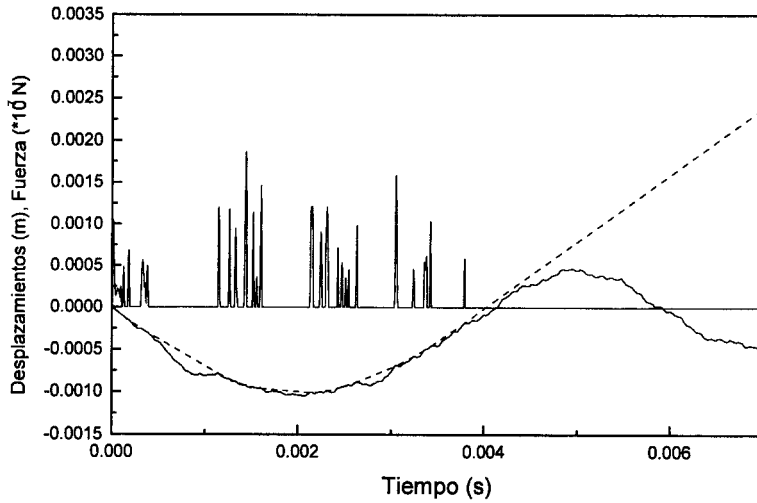


Figura 8.9: Desplazamientos y fuerzas de contacto.  $k_l = k_e$

barra, sino que se usarán como funciones de forma las expresiones analíticas de los modos de vibración de la barra elástica. Se comienza planteando el problema de un sólido rígido y libre que impacta en una estructura elástica de la que se conocen sus modos de vibración.

Considérese un sólido rígido con coordenadas  $\mathbf{R}_1(t)$  que impacta en un punto del sólido flexible con coordenadas locales  $\mathbf{r}_0$ . Los desplazamientos elásticos de cualquier punto de la barra flexible en cualquier instante puede aproximarse mediante una combinación de los modos de vibración de ésta, como sigue

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \mathbf{q}_i(t) \quad (8.1)$$

donde  $\phi_i(\mathbf{r})$  son los modos de vibración del sólido elástico y  $\mathbf{q}_i(t)$  las coordenadas modales.

La ecuación del movimiento de este sólido elástico en coordenadas modales

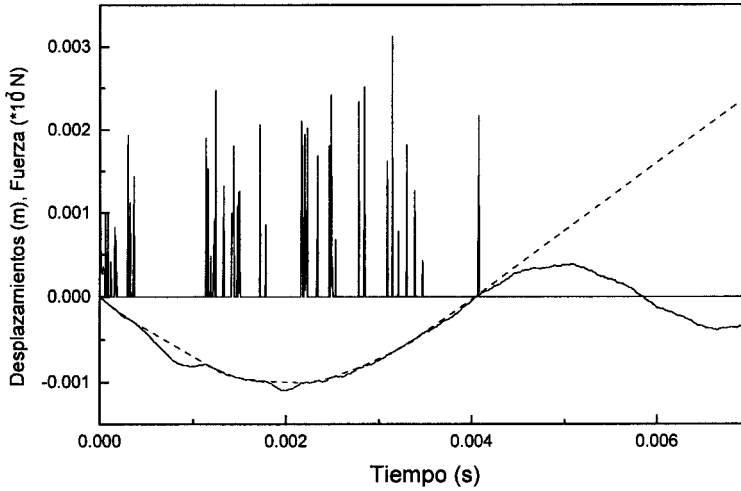


Figura 8.10: Desplazamientos y fuerzas de contacto.  $k_l = 10 * k_e$

queda

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \int_V \phi^T \mathbf{F} dV \quad (8.2)$$

donde las matrices de masa modal  $\mathbf{m}$  y rigidez modal  $\mathbf{k}$  son diagonales por ser los modos ortogonales. El término de la derecha de la ecuación representa las fuerzas modales. En el caso del contacto esfera-plano que se va a tratar en este capítulo, se suponen las fuerzas de contacto como puntuales, lo que simplifica la evaluación de las integrales necesarias para calcular las fuerzas modales. Haciendo uso de la función delta de Dirac, la fuerza de contacto puntual puede expresarse como

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, t) = F_c(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (8.3)$$

donde  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  es la función delta de Dirac aplicada en el punto de contacto  $\mathbf{r}_0$ . Teniendo en cuenta las propiedades de la delta de Dirac, las componentes modales



de la fuerza de contacto quedan

$$\int_V \phi^T \mathbf{F} dV = F_c \phi(\mathbf{r}_0) \quad (8.4)$$

Para calcular la fuerza de contacto hay que evaluar la indentación entre los sólidos. Es precisamente este término el que acopla las ecuaciones del movimiento del sólido rígido y del elástico. La indentación es función de las coordenadas del sólido rígido y del punto de contacto del flexible, como sigue

$$F_c = F_c(\alpha), \quad \delta = \delta(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_0) = \alpha(\mathbf{R}_1, \sum_i \phi_i(\mathbf{r}_0) \mathbf{q}_i). \quad (8.5)$$

Para el caso particular del impacto en el extremo libre de una barra elástica en voladizo, mostrado en la figura 7.1 del capítulo anterior, en el que la geometría del sólido elástico se describe mediante una sola coordenada axial, quedan las siguientes  $n + 1$  ecuaciones con sus correspondientes condiciones iniciales para el impacto:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}_i + k_i q_i &= \phi_i(L) \tilde{F}_c(\alpha), \quad i = 1, \dots, n \\ m_1 \ddot{x}_1 &= -\tilde{F}_c(\alpha) \\ \tilde{F}_c &= \begin{cases} F_c(\alpha) & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha(t) = x_1(t) - \sum_i \phi_i(L) q_i(t) \\ x_1(0) &= 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_1^-, \\ q_i(0) &= 0, \quad \dot{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde la expresión de  $F_c(\alpha)$  será alguna del tipo propuesto en el apartado anterior.

### 8.4.1 Modelos de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko

Se pueden usar dos tipos de modos de vibración con expresión analítica para describir el comportamiento de la viga en voladizo, los que se obtienen de asumir el modelo de Euler-Bernoulli y los que se obtienen con el modelo de Timoshenko. La diferencia entre estos dos modelos es que el primero considera nula la deformación debida al esfuerzo cortante y la inercia de las secciones a la rotación, al contrario

que el segundo. Geométricamente, ambos modelos consideran que las secciones transversales planas de la viga se mantienen planas tras la deformación, pero el modelo de Euler-Bernouilli además considera que se mantienen perpendiculares a la línea neutra, hipótesis que no hace la teoría de Timoshenko.

Los modos de vibración que se obtienen de usar la teoría de Euler-Bernouilli ya se obtuvieron en el capítulo 4. Como ya se indicó mediante la ecuación (5.9), con esta teoría se obtienen modos cuya velocidad de propagación asociada tiende a infinito al aumentar el orden del modo. A partir de un cierto orden, aquel que hace que la velocidad de propagación sea mayor que las de las ondas elásticas volumétricas, que son las que se propagan más rápidamente en el material, los modos dejan de tener sentido físico. Si se usan estos modos en el problema del impacto, al hacer tender el número de modos a infinito, e incluir por tanto modos con velocidades de propagación ficticias, las ondas elásticas generadas en el punto de contacto volverían instantáneamente a éste tras reflejarse en los contornos del sólido. Por tanto, no se representaría bien el proceso de propagación de ondas. Además, existen otras limitaciones al número de modos a usar. Cuando la longitud de onda es aproximadamente igual o menor que el canto de la viga no es admisible no considerar la deformación por cortante. Para vigas esbeltas esta limitación suele ser más restrictiva que la de la velocidad de propagación asociada.

La diferencia entre los modos y frecuencias naturales obtenidas mediante una u otra teoría es mucho más acusada para los modos de alta frecuencia que para los de baja. Los efectos que no considera la teoría de Euler-Bernouilli -deformación por cortante e inercia a la rotación- se hacen comparativamente más importantes cuando la longitud de onda del modo disminuye y se aproxima al canto de la viga, esto es, al aumentar el orden del modo y por tanto su frecuencia natural de vibración. Por esto, es particularmente interesante trabajar con modos de Timoshenko, más complejos en expresión y propiedades, en problemas donde aparecen altas frecuencias de vibración, como en el caso de los impactos.

En lo que sigue, se usa el superíndice *eb* para indicar las funciones y constantes

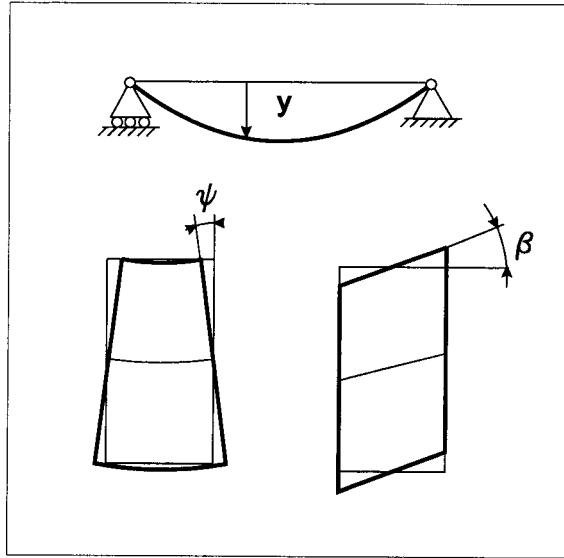


Figura 8.11: Variables de la teoría de vigas de Timoshenko

asociadas al modelo de Euler-Bernouilli y el superíndice  $t$  para éstas asociadas al modelo de Timoshenko. Los modos de vibración transversal de una barra en voladizo, usando la teoría de Euler-Bernouilli, resultan (Meirovitch, 1967)

$$\varphi_i^{eb}(x) = \frac{\text{sen}(\xi_i x) - \text{senh}(\xi_i x)}{\text{senh}(\xi_i L) + \text{senh}(\xi_i L)} - \frac{\text{cos}(\xi_i x) - \text{cosh}(\xi_i x)}{\text{cos}(\xi_i L) - \text{cosh}(\xi_i L)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8.7)$$

donde los valores  $\xi_i$  son las soluciones de la ecuación

$$\text{cos}(\xi_i L) \text{cosh}(\xi_i L) = -1. \quad (8.8)$$

Las masas y rigideces modales que aparecen en la ecuación (8.6) se obtienen de las siguientes integrales

$$m_i^{eb} = \int_0^L \rho A [\varphi_i^{eb}(x)]^2 dx, \quad k_i^{eb} = \int_0^L EI \left[ \frac{\partial^2 \varphi_i^{eb}(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (8.9)$$

Si se usa la teoría de Timoshenko se consideran tres variables para definir la deformación transversal de la barra, que se muestran en la figura 8.11. Éstas son

el desplazamiento transversal de las secciones  $y$ , el ángulo girado por flexión  $\psi$  y el ángulo debido a la deformación por cortante  $\beta$ . Estas tres variables están relacionadas mediante (Timoshenko, 1955)

$$\frac{dy}{dx} = \psi + \beta, \tag{8.10}$$

por tanto, no son independientes. Eligiendo  $y$  y  $\psi$  como variables independientes y representando la deformada en cada instante como combinación lineal de unas funciones de forma, puede escribirse

$$y(x, t) = \sum_i \theta_i^t(x) q_i(t), \quad \psi(x, t) = \sum_i \varphi_i^t(x) q_i(t), \tag{8.11}$$

donde las funciones de forma  $\theta_i^t(x)$  y  $\varphi_i^t(x)$  son combinaciones de funciones trigonométricas e hiperbólicas (Huang, 1961). Las condiciones de ortogonalidad de estas funciones de forma también son diferentes a las de los modos de vibración de Euler-Bernouilli. Usándolas, resultan las siguientes masas y rigideces modales para el caso de una viga en voladizo (Huang, 1961):

$$\begin{aligned} m_i^t &= \rho I \int_0^L [\varphi_i^t(x)]^2 dx + \rho A \int_0^L [\theta_i^t(x)]^2 dx, \\ k_i^t &= EI \int_0^L \left[ \frac{d\varphi_i^t(x)}{dx} \right]^2 dx + A_s G \int_0^L \left[ [\varphi_i^t(x)]^2 + \left[ \frac{d\theta_i^t(x)}{dx} \right]^2 - 2 \frac{d\theta_i^t(x)}{dx} \varphi_i^t(x) \right] dx, \end{aligned} \tag{8.12}$$

donde  $A_s$  es el *área a cortante* (Timoshenko, 1955) y  $G$  el módulo de rigidez del material. La velocidad de propagación de los modos de Timoshenko, en contra de lo que ocurre con la teoría de Euler-Bernouilli, permanece finita cuando tiende a infinito la frecuencia de vibración (Huang, 1961).

Los modos de vibración y frecuencias naturales de la viga en voladizo de  $0.3m$  que se ha venido usando en apartados anteriores se han evaluado usando los modelos de Euler-Bernouilli y Timoshenko. Las seis primeras frecuencias naturales, expresadas en radianes por segundo, se muestran en la tabla 8.3 y los modos en la figura 8.12. Se observa como al aumentar el orden del modo aumentan las diferencias en frecuencia y forma del modo.

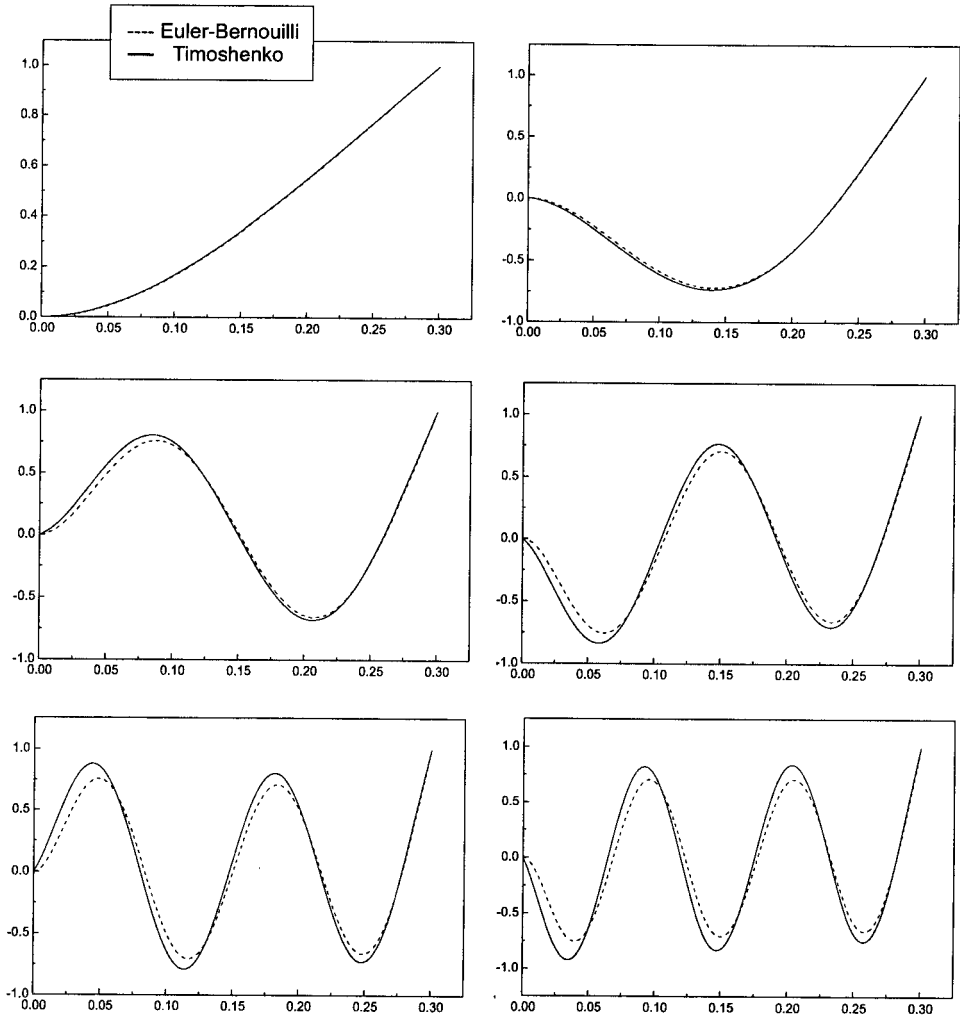


Figura 8.12: Modos de Euler-Bernoulli y modos de Timoshenko

E-B	Timoshenko
1736	1747
10423	10959
27480	30687
49979	60134
76266	99406
105040	148495

Tabla 8.3: Primeras frecuencias naturales de viga en voladizo

### 8.4.2 Resultados numéricos

Se han resuelto numéricamente cuatro problemas distintos, resultado de combinar modos de Euler-Bernouilli o modos de Timoshenko y la fuerza de contacto plástica lineal o plástica potencial dadas en el capítulo anterior.

La barra elástica empotrada con la que se viene trabajando se ha usado también en estas simulaciones. La barra tiene por longitud  $0.3\text{ m}$  y masa  $2.133\text{ Kg}$ , igual que el impactor rígido. El impactor tiene una velocidad inicial de  $1\text{ m/s}$ . La barra elástica se supone localmente plana alrededor de la zona de contacto y el sólido rígido tiene un radio de curvatura en el punto de contacto de  $25\text{ mm}$ . Todas las simulaciones se han hecho usando 5 modos de vibración como funciones de forma. Para integrar las ecuaciones se usó el método de Runge Kutta con un paso de tiempo de  $10^{-6}\text{ s}$ .

En la tabla 8.4 aparecen los valores de velocidad de sólido rígido tras el impacto y la energía mecánica perdida en plasticidad local. Para identificar los problemas se han usado los códigos EB para los modos de Euler-Bernouilli y T para los de Timoshenko; L para la fuerza plástica lineal y P para la fuerza plástica potencial. El acuerdo en velocidades de estos cuatro problemas es aceptable, siendo superiores cuando se usa la fuerza de contacto plástica potencial, pues da lugar a menores pérdidas de energía mecánica. También es mayor la absorción de energía en forma

	Energía Perdida	Velocidad Final
EB-L	0.2047 J	0.8611 m/s
T-L	0.1917 J	0.8448 m/s
EB-P	0.0975 J	0.7620 m/s
T-P	0.0815 J	0.8203 m/s

Tabla 8.4: Impacto transversal con contacto elastoplástico

de vibración interna cuando se usan modos de Timoshenko que cuando se usan modos de Euler-Bernouilli.

En las figuras 8.13 y 8.14 se muestran las evoluciones de las fuerzas de contacto frente al tiempo y frente a la indentación. Se observa que de nuevo aparece el fenómeno de los impactos múltiples, uniéndose y separándose numerosas veces los sólidos antes de separarse definitivamente. Sin embargo, para las condiciones geométricas locales y propiedades mecánicas supuestas para los materiales, no son tantos los periodos de contacto y bastante mayores los tiempos reales de contacto, comparados con los de las figuras 8.9 y 8.10, obtenidas con el método del muelle lineal y elementos finitos. El motivo es que las rigideces locales que ahora aparecen con estos dos modelos, que en este caso tienen sentido físico, son inferiores a las que se supusieron en el apartado previo, que no tenía sentido físico.

Se observa que el modelo plástico potencial da lugar a mayores rigideces locales, lo que trae por consecuencia valores mayores de la fuerza de contacto y tiempos más cortos de contacto. Los procesos de carga parecen muy similares usando modos de Timoshenko o de Euler-Bernouilli.

En la figura 8.15 están representados los desplazamientos de la sección de contacto durante y tras el impacto para la fuerza de contacto plástica potencial usando las dos familias de modos. Una gráfica muy similar se obtiene para la fuerza de contacto plástica lineal. El periodo aparente de contacto es en ambos casos ligeramente inferior a 4 ms. El periodo aparente de contacto suele ser ligeramente

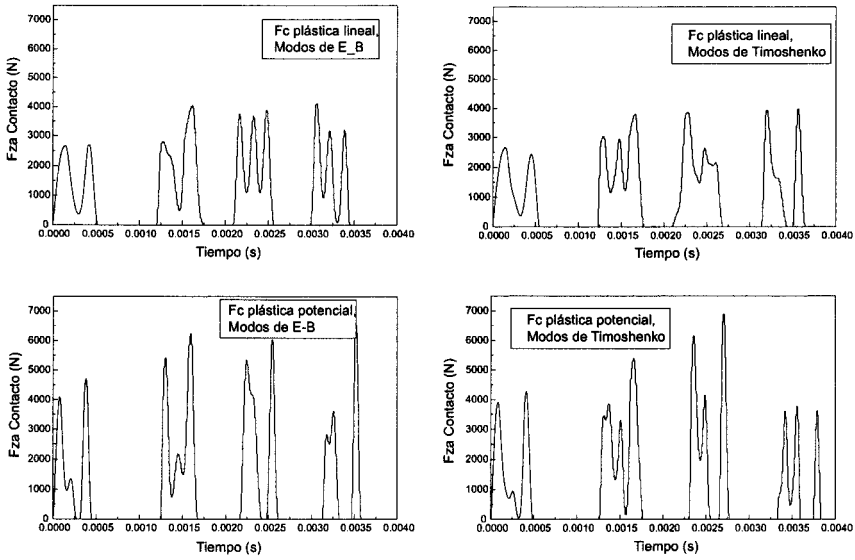


Figura 8.13: Fuerzas de contacto frente al tiempo

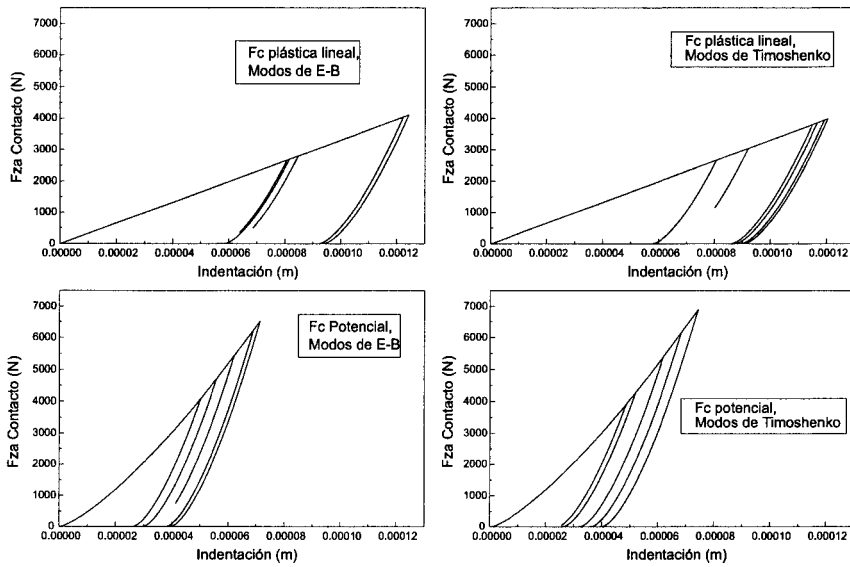


Figura 8.14: Fuerzas de contacto frente a la indentación



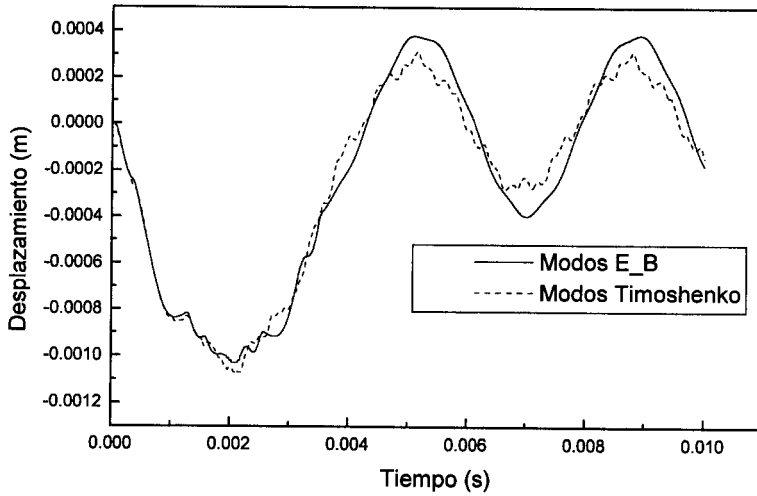


Figura 8.15: Desplazamientos de la sección de contacto

superior a la mitad del periodo fundamental de vibración libre de la barra. En la gráfica 8.15 se observa que la vibración libre de la barra tras el impacto tiene una mayor amplitud cuando se usan modos de Euler-Bernoulli y su contenido en altas frecuencias es mayor cuando se usan modos de Timoshenko.

Se ha realizado un estudio de la evolución de la solución al cambiar el número de modos. En las figuras 8.16 y 8.17 se representa la evolución del desplazamiento de la sección de contacto con fuerza de contacto plástica potencial y modos de Euler-Bernoulli y Timoshenko, respectivamente. Se han resuelto los problemas con 3, 5 y 10 modos en ambos casos. Se observa que cuando se usan modos de Euler-Bernoulli, la solución varía muy ligeramente al aumentar el número de modos. Sin embargo, cuando se usan modos de Timoshenko, la solución se modifica sustancialmente, disminuyendo la amplitud del primer modo de vibración. Mucho más significativa es la evolución con el número de modos de las tensiones obtenidas

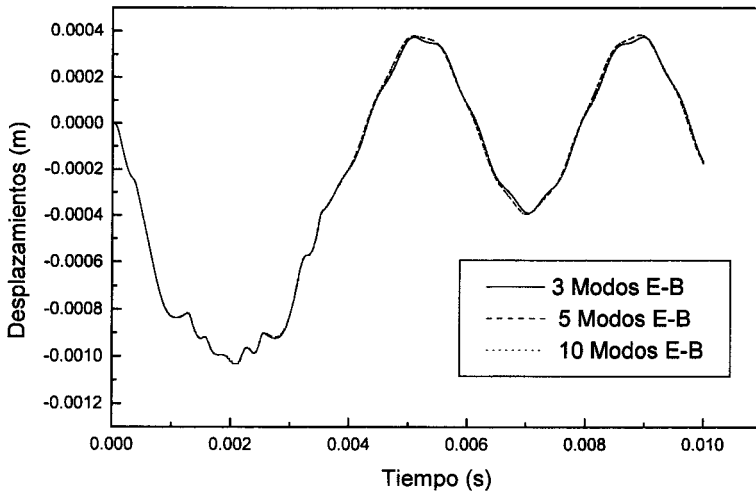


Figura 8.16: Desplazamiento de la sección de contacto. Modos de Euler-Bernouilli

por superposición modal. En las figuras 8.17 y 8.18 se representa la evolución del esfuerzo cortante de reacción en el extremo empotrado usando las dos familias de modos. La solución numérica con modos de Euler-Bernouilli es casi invariante, mientras que la solución con modos de Timoshenko varía de forma importante: los esfuerzos elásticos aumentan mucho al aumentar el número de modos. Cuando se usan 3 modos los esfuerzos evaluados con los dos juegos de modos se parecen bastante. No se excitan los modos de alta frecuencia cuando se usan modos de Euler-Bernouilli, pero sí cuando se usan modos de Timoshenko. Además la influencia de estos altos modos de Timoshenko es muy grande en las fuerzas elásticas evaluadas numéricamente.

Otra forma de analizar el comportamiento del sistema en el impacto es considerar el intercambio de distintas formas de energía durante el proceso. Las gráficas 8.20 y 8.21 muestran este intercambio, donde se consideran: la energía

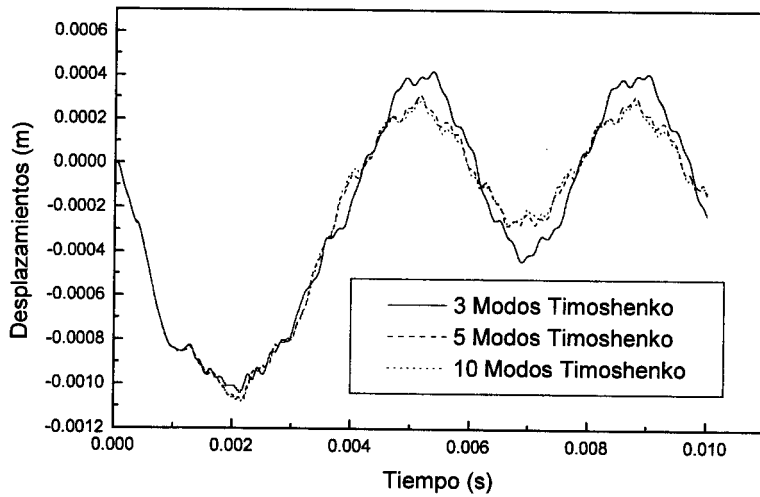


Figura 8.17: Desplazamiento de la sección de contacto. Modos de Timoshenko

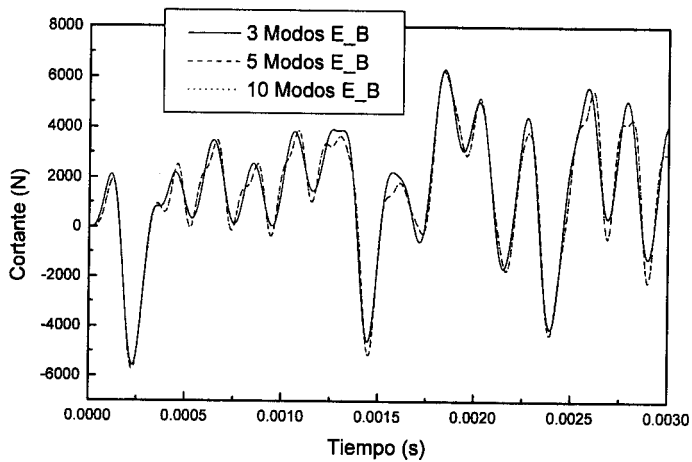


Figura 8.18: Cortante de reacción en el extremo empotrado. Modos de Euler-Bernoulli

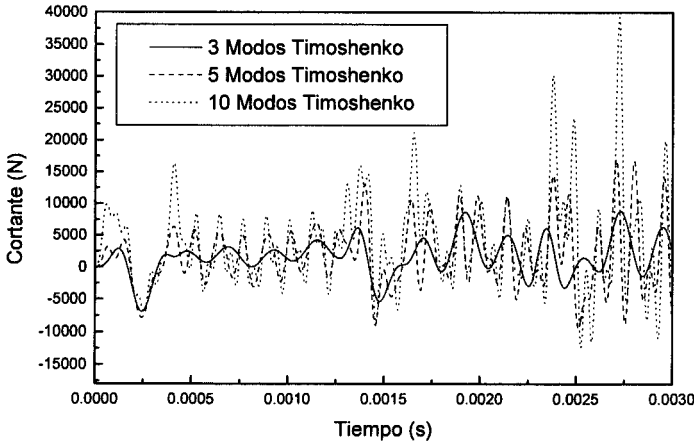


Figura 8.19: Cortante de reacción en el extremo empotrado. Modos de Timoshenko

por deformación local, la energía cinética del impactor rígido y la energía de las ondas elásticas, que se divide en energía cinética por deformación y energía de deformación de las secciones. Además se representa en cada instante la energía total del sistema y la perdida por plastificación local. Al principio toda la energía mecánica es cinética del impactor. Al entrar en contacto, parte de esa energía se transforma en energía de deformación local. A su vez, parte de esta energía de deformación local se traspa al interior de la barra mediante ondas elásticas y otra parte se pierde por plasticidad local. A partir de cierto instante, que en la teoría clásica de impactos se llamaría instante de máxima compresión, el proceso se invierte y es la barra elástica la que devuelve parte de su energía mecánica al impactor, el cual aumenta su energía cinética e invierte el sentido de su movimiento. Esta devolución de energía mecánica vuelve a realizarse pasando por energía local de deformación y perdiéndose en el proceso, por tanto, parte de ella por plasticidad.

### 8.4.3 Comparación con la aproximación cuasiestática estructural

Aunque el proceso de contacto entre los sólidos poco tiene que ver con el descrito por la teoría clásica -descrito en el capítulo 2- por ser esencialmente discontinuo, existen otros aspectos coincidentes con ésta. En los impactos transversales simulados, y en otros casos estudiados, existe un instante en el cual el sólido rígido tiene velocidad nula y casi toda la energía de vibración en la barra está en forma de energía de deformación, siendo prácticamente nula la energía cinética de vibración. Este instante no se puede determinar exactamente aunque ocurre aproximadamente para  $t = 2ms$  en este caso. Supóngase que la barra en voladizo se deforma como lo haría estáticamente ante una carga puntual  $P$  transversal en su extremo. La ley de desplazamientos y la energía de deformación en función del desplazamiento de la sección extrema  $y_L$  quedan:

$$y(x) = 3\left(\frac{x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{6L^3}\right)y_L, \quad U = \int_0^L \frac{EI}{2}(y''(x))^2 dx = \frac{3EIy_L^2}{2L^3}. \quad (8.13)$$

Suponiendo que en el instante de máxima compresión el sólido rígido está en reposo y toda su energía se ha convertido en energía de deformación de la barra, queda el siguiente valor de la deflexión del extremo en dicho instante:

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^-)^2 = \frac{3EIy_L^2}{2L^3} \Rightarrow y_L = \sqrt{\frac{m_1(v_1^-)^2 L^3}{3EI}} = 1.164 * 10^{-3}m. \quad (8.14)$$

Se observa que este valor es muy parecido al valor de la deflexión máxima en el extremo de la barra en los problemas simulados. En la figura 8.22 se representa la deformación de la barra en el instante de máxima deflexión del extremo para la solución con modos de Euler-Bernouilli y fuerza de contacto plástica potencial y para la solución de la aproximación cuasiestática estructural. Se aprecia que el acuerdo es bastante razonable, más aún si se piensa en la simplicidad conceptual y práctica utilizada para obtener la aproximación cuasiestática estructural. Sin embargo, en lo que a fuerzas de contacto se refiere, el acuerdo no es tan bueno.

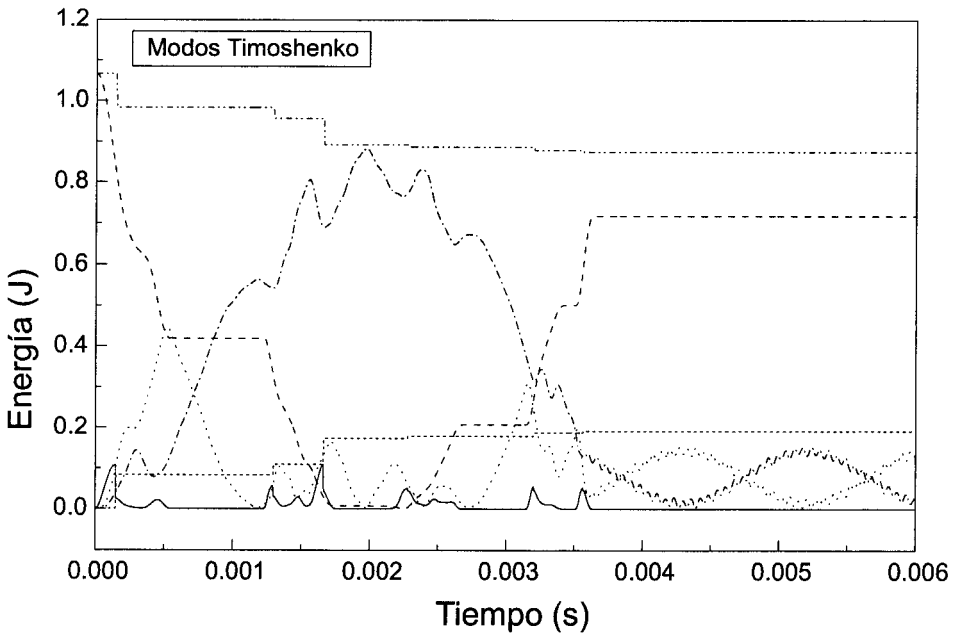
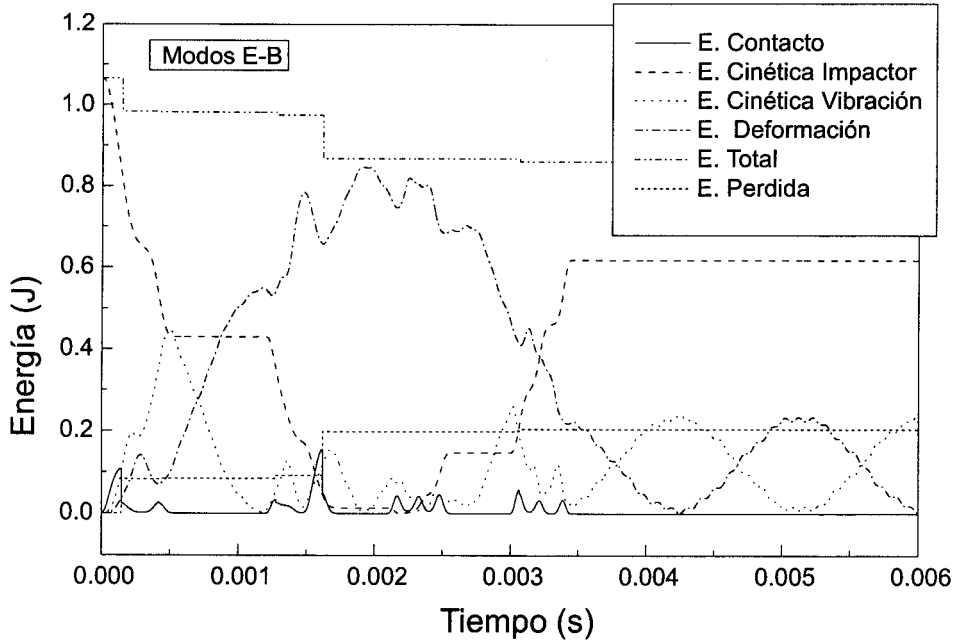


Figura 8.20: Energías durante el impacto. Fuerza plástica lineal

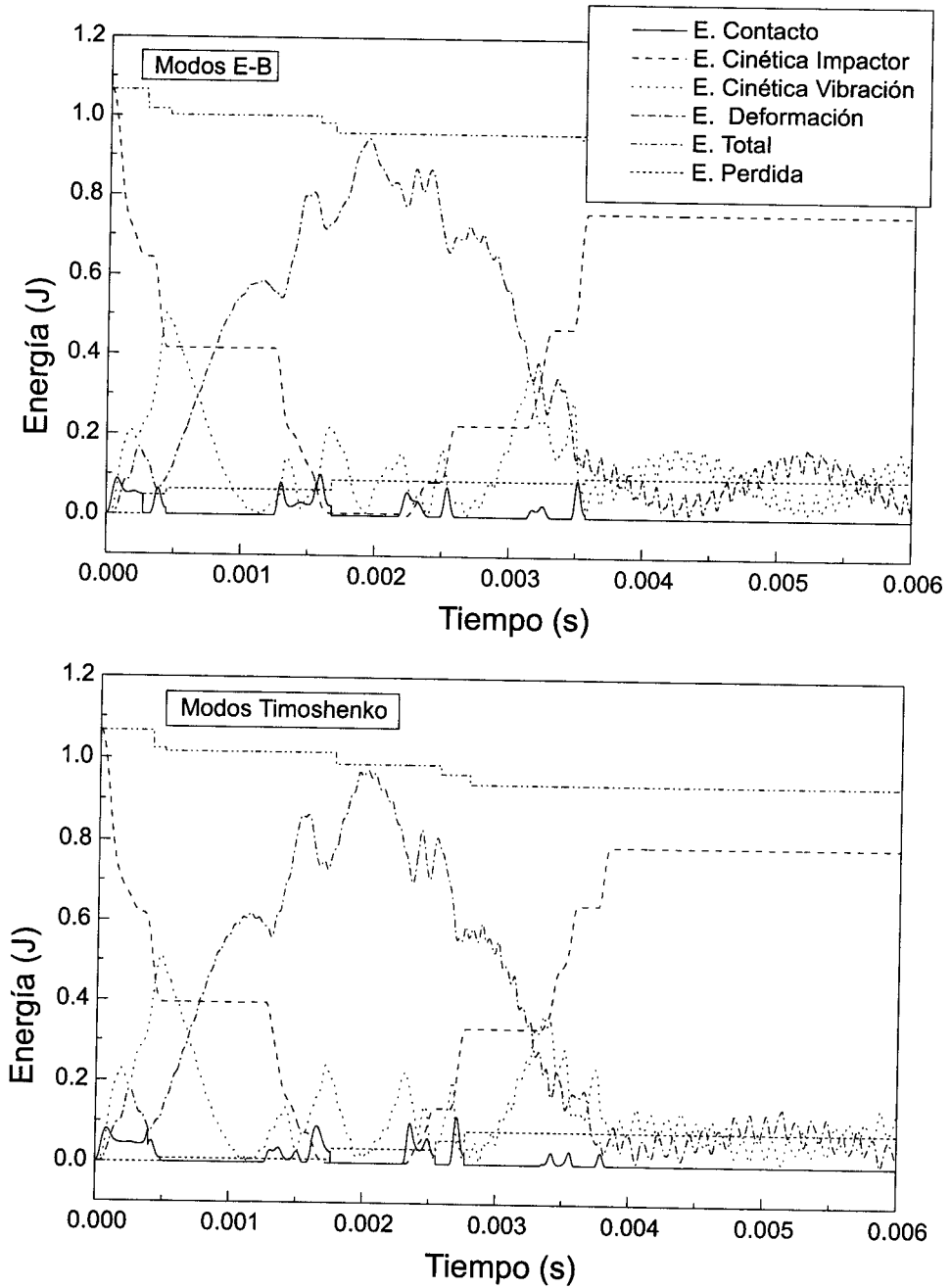


Figura 8.21: Energías durante el impacto. Fuerza plástica potencial

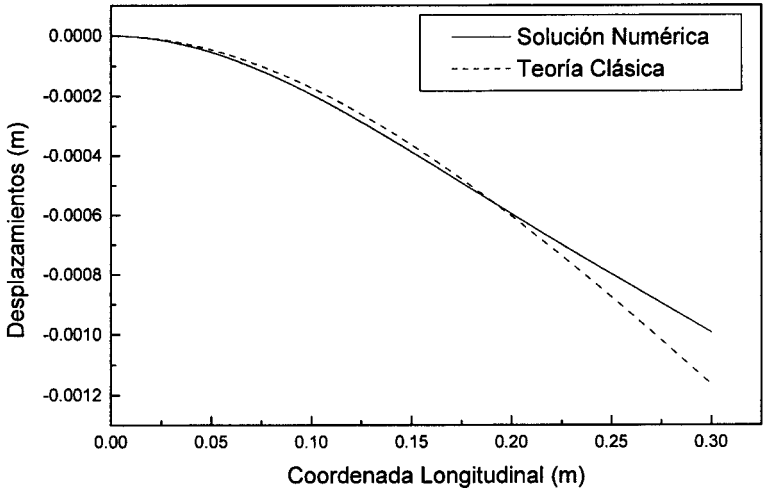


Figura 8.22: Deformación de la barra para deflexión máxima del extremo

Si se evalúa ahora la fuerza de contacto como aquella carga que estáticamente provocaría la flecha máxima obtenida, resulta:

$$P = \frac{3EIy_L}{L^3} = 1833N, \tag{8.15}$$

valor que es muy inferior al de las fuerzas de contacto obtenidas. El error obtenido en la fuerza de contacto al usar la aproximación cuasiestática estructural es explicable por la discontinuidad del proceso real. En la aproximación cuasiestática se supone que durante todo el proceso los sólidos están en contacto. Para llevar al sólido rígido al reposo hay que transferir una cantidad de movimiento determinada mediante el impulso de la fuerza de contacto. Si el periodo real de contacto en el problema numérico es menor que en el de la aproximación cuasiestática, las fuerzas de contacto deben ser mayores para que se transfiera la misma cantidad de movimiento.



#### 8.4.4 Impacto transversal con pequeños impactores

El impacto transversal que se ha comentado hasta ahora, en el que la masa de ambos sólidos es la misma, necesita ser analizado acoplando los efectos locales y la propagación de ondas. Sin embargo, como ya se ha comentado en este trabajo, cuando la masa del impactor se hace muy pequeña con respecto a la barra elástica, el problema local y la propagación de ondas se pueden estudiar separadamente (Yigit y Christoforou, 1997). Así, se podría resolver el problema del impacto del pequeño sólido rígido en un semiespacio infinito, obtener la fuerza de contacto e incluirla como fuerza externa para estudiar el problema de vibraciones de la barra. Físicamente, la disminución de la masa del impactor se aprecia en que no aparecen múltiples contactos, en que los periodos real y aparente de contacto coinciden y que, al menos para las rigideces locales que se vienen manejando, el periodo de contacto pasa a ser mucho menor que la mitad del periodo natural de vibración de la barra elástica. Cuando la velocidad inicial del impactor sigue siendo de  $1m/s$ , el impacto tiene lugar en un sólo periodo de contacto cuando la masa del impactor es aproximadamente de  $50 g$  o menor. La relación de masas entre el impactor y la estructura es  $0.023$  en este caso.

En la figura 8.23 se muestran las fuerzas de contacto para el caso del impactor de  $50 g$  cuando se usan los dos juegos de modos y los dos modelos de fuerza. Como cabe esperar, las diferencias dependientes del juego de modos que se use son mínimas en este caso y la influencia del modelo de fuerza de contacto es muy grande. De nuevo la fuerza de contacto plástica potencial da lugar a mayores fuerzas de contacto, menores tiempos de contacto y menos energía perdida por plasticidad. En el caso de usar modos de Timoshenko la energía perdida por plasticidad local es de  $0.0083 J$  con fuerza plástica potencial frente a  $0.013 J$  con fuerza plástica lineal.

En la figura 8.24 se representan los desplazamientos de la sección de contacto y del sólido rígido obtenidos mediante modos de Timoshenko con ambas leyes de fuerza de contacto. La mayor energía perdida por plasticidad con la fuerza plástica

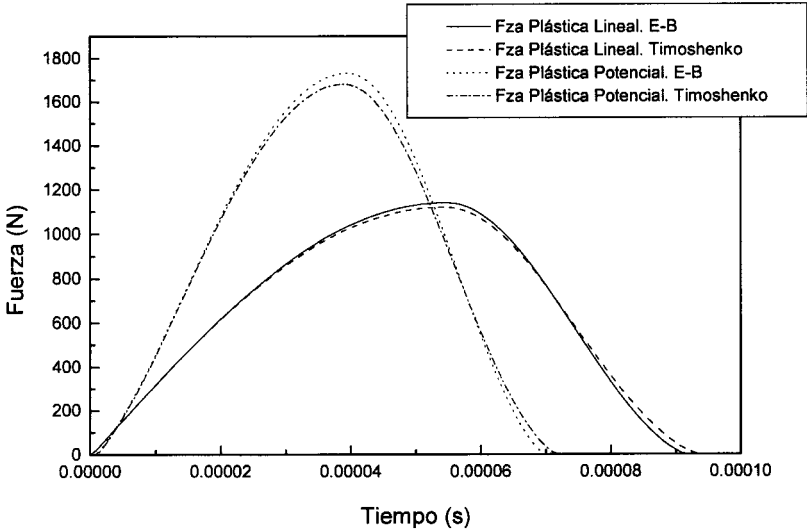


Figura 8.23: Fuerzas de contacto para  $m_1 = 50g$

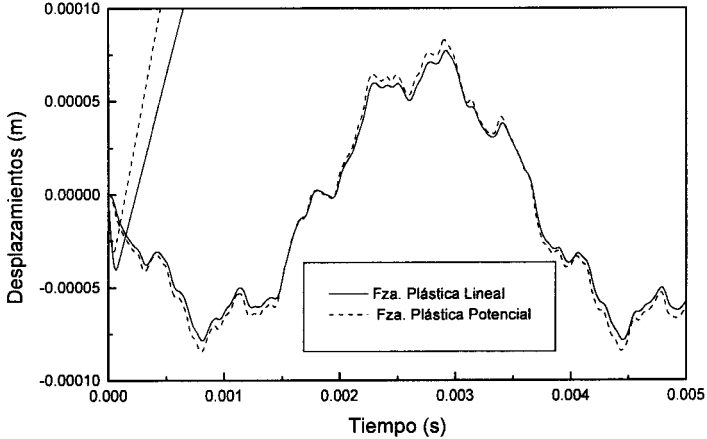


Figura 8.24: Desplazamientos de sección de contacto e impactor para  $m_1 = 50g$

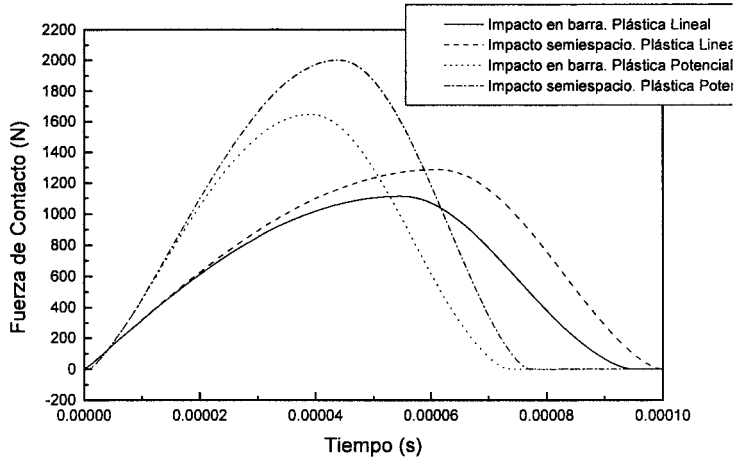


Figura 8.25: Fuerzas de Contacto en barra y en subespacio

lineal se traduce en una menor velocidad de salida del sólido rígido.

En la figura 8.25 se muestran, para el caso del impactor de 50 g, las fuerzas de contacto que aparecen con los dos modelos cuando el sólido rígido impacta en la barra flexible frente a las que aparecerían si lo hiciera en un semiespacio infinito. Como se ha observado antes, deben ser similares. El parecido es razonable, manteniéndose siempre la fuerza de contacto en el caso del impacto con la barra con valores menores y por tanto se perderá menos energía por plasticidad. Esto vuelve a mostrar que la flexibilidad siempre disminuye la violencia del impacto. Recuérdese que la masa de 50 g es aproximadamente el límite superior de las masas que dan lugar a impactos únicos, en este caso. Si se disminuye la masa del impactor, aumenta el parecido entre las fuerzas que aparecen cuando el choque ocurre con la barra elástica o con el subespacio infinito.

## Capítulo 9

# Experimentos de Impactos en Barras

### 9.1 Introducción

En este capítulo se aplican diferentes aproximaciones al impacto tratadas en esta tesis al caso del axial en barras libres. Los resultados, numéricos y analíticos, se comparan con unos experimentos desarrollados en el *Institut B für Mechanik* de la *Universidad de Stuttgart*. El montaje experimental consistía en una barra cilíndrica de bronce de 1.5 m de longitud y 1 cm de radio de la sección transversal que estaba suspendida horizontalmente de una estructura por unos hilos de nylon. La barra recibía un impacto axial en uno de sus extremos libres y, mediante parejas de galgas extensométricas dispuestas en dos secciones distintas, se adquirían las deformaciones inducidas. El montaje está esquematizado en la figura 9.1. El impacto se hacía mediante un péndulo. En principio el péndulo era una barra rígida de aluminio con sección transversal en forma de  $I$  y con varios orificios alargados para aligerarla, como se muestra en la figura 9.2. Este péndulo se sustituyó por otro que consistía en una esfera de acero colgada de un hilo. En este capítulo se

mostrará la influencia del uso de uno u otro impactor.

De la teoría clásica de impactos de sólidos rígidos se sabe que cuando un sólido libre 1 de masa  $m_1$ , moviéndose con velocidad inicial  $v_1^-$ , experimenta un choque central con un sólido 2, en reposo, las velocidades finales de ambos resultan

$$v_1^+ = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1^-, \quad v_2^+ = \frac{m_1(1 + e)}{m_1 + m_2} v_1^-, \quad (9.1)$$

donde  $e$  es el coeficiente de restitución. Supóngase que el sólido 1 es un péndulo rígido como el representado en las figuras 9.1 y 9.2, con longitud  $L_t$ , masa  $m_p$ , momento de inercia con respecto a su eje de rotación  $I_0$ , con el punto de contacto a una distancia  $L_p$  del eje de giro y con velocidad angular inicial  $\omega^-$ . En este caso, para obtener las velocidades tras el impacto mediante la dinámica impulsiva, se plantean las ecuaciones de conservación del momento cinético y la definición cinemática del coeficiente de restitución, como sigue:

$$I_0\omega^- = I_0\omega^+ + m_2v_2^+L_p, \quad v_2^+ - L_p\omega^+ = -eL_p\omega^-, \quad (9.2)$$

y resulta

$$\omega^+ = \frac{I - em_2L^2}{I + m_2L_p^2} \omega^-, \quad v_2^+ = \frac{I_0(1 + e)}{I_0 + m_2L_p^2} L_p\omega^-, \quad (9.3)$$

Comparando los resultados obtenidos con ambos impactores se observa que el estado final del sólido 2 es el mismo siempre que se cumpla

$$m_1 = \frac{I}{L_p^2} \quad (9.4)$$

Usando esta última expresión se puede calcular la masa equivalente del péndulo rígido con respecto al sólido libre a efectos del impacto axial. Esta equivalencia es importante para poder comparar los resultados obtenidos con el impactor de aluminio con los obtenidos con la bola de acero.

En el capítulo 3 se analizó este problema mediante el análisis de generación y reflexión de ondas elásticas. La velocidad final del sólido libre y la velocidad equivalente de sólido rígido final de la barra elástica son:

$$v_1^+ = v_1^- e^{-2\beta}, \quad v_2^+ = v_1^- \frac{1 - e^{-2\beta}}{\beta}, \quad (9.5)$$

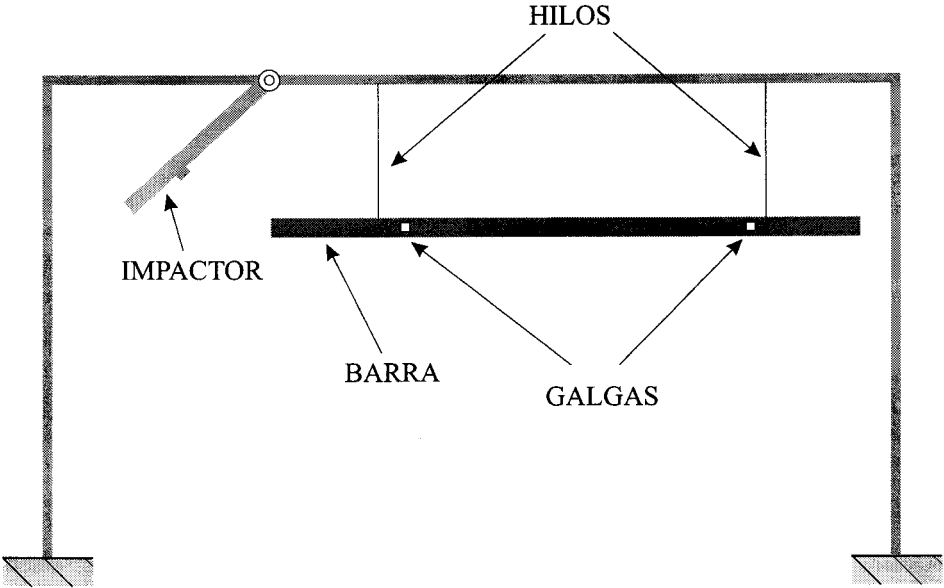


Figura 9.1: Esquema del montaje experimental

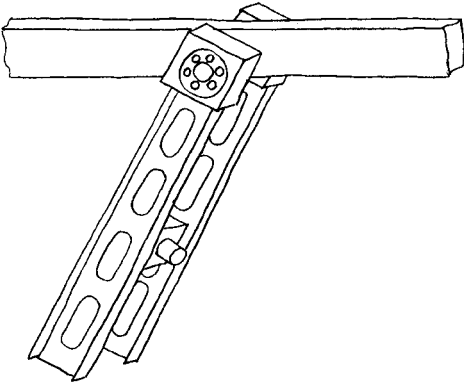


Figura 9.2: Péndulo rígido de aluminio

y por tanto el coeficiente de restitución resulta

$$e = \frac{1 - e^{-2\beta}(1 + \beta)}{\beta}, \quad (9.6)$$

donde  $\beta = \frac{m_1}{m_2}$ . Obsérvese que usando este procedimiento, en el que no se consideran pérdidas locales de energía, la velocidad final del sólido 1 es siempre positiva, es decir, que al final el impactor mantiene su velocidad en el mismo sentido que la inicial. Sin embargo, la teoría clásica del impacto de Newton predice velocidades del sólido 1 tanto positivas como negativas, como se deduce de la ecuación (9.1), dependiendo tanto de la relación de masas como del coeficiente de restitución.

El objetivo de este capítulo es la simulación y comparación con resultados experimentales del impacto, considerando el comportamiento local de las superficies de contacto y las ondas elásticas inducidas. Sin embargo, se comienza planteando y resolviendo el problema del impacto axial de un sólido rígido en una barra flexible libre, sin considerar efectos locales, con superposición modal. Este problema es idéntico al resuelto en el capítulo 3 mediante el análisis de la propagación de ondas. Aquí se resuelve usando el método de los sistemas de referencia flotantes, pues la existencia de modos de sólido rígido hace que no sea posible su solución mediante la teoría de vibraciones, como se hizo para otros problemas de impacto en el capítulo 4. También se va a resolver este problema mediante integración numérica considerando las deformaciones locales. No se considerarán pérdidas locales de energía por plasticidad porque las masas y velocidades de los impactores eran relativamente pequeñas y se observó experimentalmente que este efecto era pequeño. Se simulará numéricamente el problema del impacto axial con un sólido rígido libre y con un péndulo que se deforma por flexión. De la comparación con los resultados experimentales se deduce la influencia de las deformaciones locales y de la elasticidad del impactor.

## 9.2 Impacto axial en barra elástica libre mediante superposición modal

Para resolver este problema sin considerar efectos locales se puede proceder de dos maneras. Se pueden considerar los sólidos independientes y, tras detectar el contacto, añadir una restricción que imponga la igualdad en desplazamientos del sólido rígido y de la sección de contacto mientras dure el impacto. Para ello se usa el método de los multiplicadores de Lagrange y se evalúa continuamente la fuerza de contacto, que aparece como una fuerza de reacción. Cuando esta fuerza cambie de signo se da por terminado el impacto y se elimina la restricción cinemática. El otro procedimiento, totalmente análogo, considera el sólido rígido y la barra elástica como un único cuerpo mientras dura el impacto, lo que implica automáticamente la restricción al movimiento que se debe imponer en el otro procedimiento. Esta situación se mantiene mientras exista compresión entre el sólido rígido y el flexible. Cuando el número de coordenadas elásticas que se usa con uno u otro método tiende a infinito, las soluciones deben coincidir. Se describe y resuelve ahora el segundo procedimiento, que presenta la ventaja de dar lugar sólo a ecuaciones diferenciales, no a ecuaciones diferenciales y algebraicas, y no necesita de multiplicadores de Lagrange. Además, no es necesaria la integración numérica para resolver el problema por este procedimiento.

Se usan dos sistemas de referencia para resolver el problema. La coordenada de referencia  $X_1(t)$  indicará la posición de un origen de referencia local y móvil con respecto a un sistema de referencia fijo. Los modos de vibración definen la posición de las secciones de la barra elástica con respecto al sistema de referencia móvil. Por tanto la posición del sólido rígido respecto al sistema de referencia móvil también viene dado por la coordenadas modales, pues éste se mueve igual que la sección de contacto mientras dura el impacto. Por comodidad en el cálculo de modos, se ha elegido el eje local  $x$  en sentido opuesto al global  $X$ , como se muestra en la figura 9.3. El origen del sistema de referencia local inicialmente



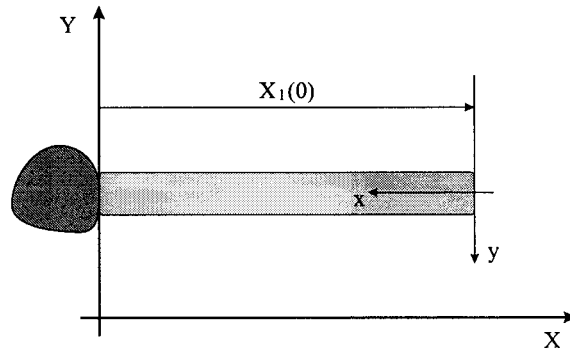


Figura 9.3: Sistemas de referencia fijo y móvil

coincide con la sección libre de la barra elástica, pero no está rígidamente unida a ésta, pues los modos de vibración permiten el desplazamiento elástico de dicha sección.

La posición de cualquier sección de la barra elástica viene dada por la expresión

$$r(x, t) = X_1(t) - \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) + x \right], \quad (9.7)$$

donde las funciones  $\phi_i(x)$  son los modos de una barra elástica libre con un sólido rígido unido a una de sus secciones extremas y  $x$  es la coordenada longitudinal de la sección a lo largo de la línea neutra de la barra indeformada. La velocidad de las secciones se obtienen de derivar la expresión de la posición, resultando:

$$\dot{r}(x, t) = \dot{X}_1(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{q}_i(t). \quad (9.8)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma matricial como:

$$\dot{r}(x, t) = [1 \quad -\Phi^T] \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{p}}, \quad (9.9)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de coordenadas elásticas,  $\Phi$  es el vector de funciones de forma y  $\mathbf{p}$  es un vector que incluye las coordenadas elásticas y la de referencia. La energía

cinética del sólido compuesto resulta:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{p}} dV = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{p}}, \quad (9.10)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masas definida como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & \mathbf{m}_{rf} \\ \mathbf{m}_{fr} & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix}, \quad (9.11)$$

donde

$$\mathbf{m}_{fr} = \mathbf{m}_{rf}^T = \begin{bmatrix} -\left(\rho A \int_0^L \phi_1(x) dx + m_1 \phi_1(L)\right) \\ \vdots \\ -\left(\rho A \int_0^L \phi_n(x) dx + m_1 \phi_n(L)\right) \end{bmatrix}, \quad (9.12)$$

y

$$(\mathbf{m}_{ff})_{ij} = \rho A \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_1 \phi_i(L) \phi_j(L) \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (9.13)$$

La energía de deformación en la barra viene dada por la expresión

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \int_0^L \frac{EA}{L} (\Phi')^T (\Phi)' dx \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (9.14)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez modal, cuyos coeficientes son:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_0^L \frac{EA}{L} \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (9.15)$$

Usando las ecuaciones de Lagrange resultan las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & \mathbf{m}_{rf} \\ \mathbf{m}_{fr} & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (9.16)$$

donde no existen fuerza externas, pues las fuerzas de contacto son planteadas como fuerzas internas al sólido compuesto.

El cálculo de los modos de vibración de una barra libre con una masa concentrada unida a uno de sus extremos es completamente análogo al cálculo de dichos modos para una barra fija en un extremo y una masa concentrada unida al otro

extremo, que se mostró en el capítulo 3. Tan sólo hay que sustituir la condición de contorno de empotramiento en el extremo opuesto por la condición de contorno de sección libre. Usando estos modos, resultan los siguientes desplazamientos elásticos para las secciones de la barra:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos\left(\frac{\omega_i}{c}x\right) \sin(\omega_i t), \quad (9.17)$$

por tanto

$$\phi_i(x) = \cos\left(\frac{\omega_i}{c}x\right), \quad q_i(t) = C_i \sin(\omega_i t), \quad (9.18)$$

son las funciones de forma y coordenadas elásticas, respectivamente, y las frecuencias  $\omega_i$  son las distintas soluciones de la ecuación

$$-\frac{c}{\omega_i L} \tan\left(\frac{\omega_i L}{c}\right) = \frac{m_2}{m_1}. \quad (9.19)$$

Usando la funciones de forma dadas en (9.18) es fácil mostrar que cumplen la siguiente propiedad (Shabana, 1991)

$$\rho A \int_0^L \phi_1(x) dx + m_1 \phi_1(L) = 0. \quad (9.20)$$

Por tanto los términos cruzados en la matriz de masa son nulos:

$$\mathbf{m}_{fr} = \mathbf{m}_{rf}^T = \mathbf{0}, \quad (9.21)$$

Esto significa que la evolución de las coordenadas de referencia está totalmente desacoplada de la de las coordenadas elásticas.

La propiedad de ortogonalidad de los modos dada por (9.20) se utiliza para poder imponer la condición inicial de velocidad, como se hizo en el capítulo 3. Esta condición inicial, junto con la condición de desplazamientos elásticos nulos de todas las secciones, se usan para obtener los coeficientes  $C_i$ , que en este caso resultan:

$$C_i = \frac{v_1^- \cos(k_i L)}{\omega_i \left[ \frac{\rho A}{m_1} \left( \frac{L}{2} + \frac{1}{4k_i} \sin(2k_i L) \right) + (\cos(k_i L))^2 \right]} \quad (9.22)$$

Se plantea ahora el problema de las condiciones iniciales para la coordenada de referencia. Su valor inicial se toma  $X_1(0) = L$ , como se muestra en la figura 9.3.

La derivada respecto al tiempo de esta variable representa la velocidad inicial del sólido compuesto, pero ¿cual es dicha velocidad, cuando el sólido que se describe está compuesto por uno rígido con una velocidad inicial no nula unido a uno elástico cuyas secciones están todas en reposo? La respuesta la encontramos al observar que debido a la ausencia de fuerzas externas y desacoplamiento de las ecuaciones, esta velocidad se mantendrá constante durante el tiempo que dura el impacto, al ser  $\ddot{X}_1 = 0$ . Por tanto, mientras dura el contacto, la derivada con respecto al tiempo de la coordenada de referencia es constante. Por el principio de conservación de la cantidad de movimiento, esta velocidad puede calcularse mediante la ecuación:

$$\dot{X}_1(0) = \dot{X}_1(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1^- \tag{9.23}$$

Para analizar el movimiento del sistema una vez finalizado el periodo de contacto se debe dividir el sólido compuesto en dos independientes, el rígido y el flexible y, tal como se describió en el capítulo 3, se deber cambiar el juego de modos de la barra elástica.

En la figura 9.4 se muestra la evolución de la fuerza de contacto para el caso del impacto axial de un sólido rígido en una barra elástica libre de igual masa. Se muestran la solución analítica dada en el apartado capítulo 3 y la solución a las ecuaciones (9.16) con 20 modos. Como se observa, la curva dada por superposición modal muestra unas oscilaciones cuyos picos difieren más de la solución analítica al principio y final del contacto. En ambos instantes se producen discontinuidades en la fuerza de contacto. Se trata de un fenómeno similar al fenómeno de Gibbs (Oppenheim y Schafer, 1975) que aparece cuando se aproxima una función discontinua con superposición de funciones armónicas. La fuerza de contacto dada por superposición modal no comienza por un valor finito no nulo como en la solución analítica. Sin embargo, al tender el número de modos a infinito, el tiempo que tarda la fuerza de contacto en alcanzar el primer máximo tiende a cero.

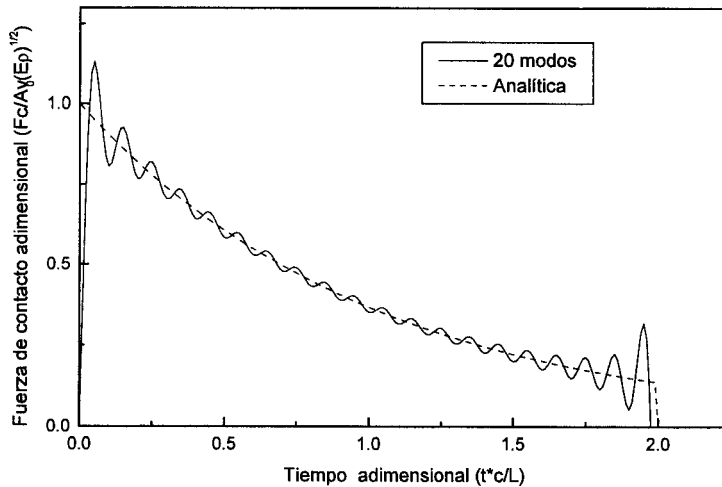


Figura 9.4: Fuerza de contacto en el impacto axial en una barra libre

### 9.3 Impacto en una barra elástica libre con contacto de Hertz

En este apartado se va a usar una ley continua indentación-fuerza de contacto para introducir estas fuerzas durante el choque y con ello los efectos locales en el impacto. En este caso, los sólidos se modelan independientemente y las fuerzas de contacto no se presentan como fuerzas internas al sistema sino externas. Se necesitan por tanto dos coordenadas de referencia, una para el sólido elástico y otra para el rígido, y un conjunto de coordenadas elásticas para describir el sistema. Se eligen los sistemas locales de referencia de tal forma que inicialmente ambos coinciden con la superficie de contacto, como se indica en la figura 9.5. Para describir los desplazamientos elásticos de las secciones se toman como funciones de forma los modos de vibración de una barra libre en ambos extremos. Por

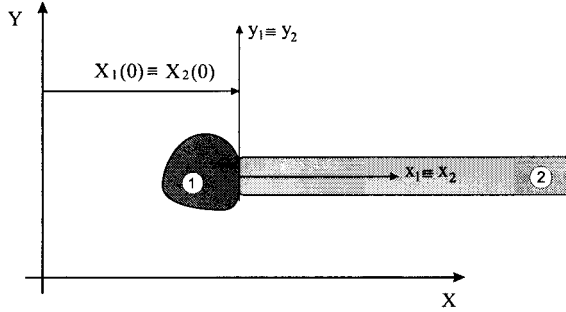


Figura 9.5: Sistemas de referencia fijo y móvil

tanto el sistema de referencia local asociado al sólido elástico no está rígidamente unido a ninguna sección de la barra, aunque inicialmente coincida con la sección de contacto. Las ecuaciones del movimiento resultan ahora:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \mathbf{m}_{rf} \\ \mathbf{m}_{fr} & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{cr} \\ \mathbf{F}_{cf} \end{bmatrix}, \quad (9.24)$$

donde

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_{rr} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (9.25)$$

y  $\mathbf{F}_{cf}$  y  $\mathbf{F}_{cr}$  son las fuerzas generalizadas de contacto asociadas a las coordenadas elásticas y de referencia, respectivamente. Los modos de vibración de una barra libre-libre son

$$\phi_i(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.26)$$

que dan lugar a las siguientes masas y rigideces modales

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}_{ff})_{ij} &= \rho A \int_0^L \phi_i(x)\phi_j(x)dx \quad i, j = 1, \dots, n, \\ (\mathbf{K})_{ij} &= EA \int_0^L \phi'_i(x)\phi'_j(x)dx \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (9.27)$$

Debido a las propiedades de ortogonalidad de estos modos, sólo los términos

de la diagonal son no nulos, como sigue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}_{ff})_{ij} &= \frac{m_2}{2} \quad \text{si } i = j, \quad (\mathbf{m}_{ff})_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \\ (\mathbf{K}_{ff})_{ij} &= \frac{EA n^2 \pi^2}{2L} \quad \text{si } i = j, \quad (\mathbf{K}_{ff})_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \end{aligned} \quad (9.28)$$

Los terminos cruzados en la matriz de masa resultan:

$$(\mathbf{m}_{fr})_i = (\mathbf{m}_{rf}^T)_i = \rho A \int_0^L \phi_i(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.29)$$

Por tanto, la evolución de las coordenadas elásticas y de referencia es independiente, con la diferencia con respecto a la solución anterior de este problema de que ahora sí hay fuerzas externas, las de contacto.

La fuerza de contacto se supone que sigue el comportamiento de la teoría de Hertz, donde la indentación se define como la diferencia entre la coordenada de referencia del sólido 1 y la posición de la sección de contacto, como sigue:

$$\alpha = X_1 - \left[ X_2 + \sum_{i=1}^n \phi_i(0) q_i \right], \quad (9.30)$$

El trabajo virtual de la fuerza de contacto viene dado entonces por la expresión:

$$\begin{aligned} F_c \delta \alpha &= F_c \left( \delta X_1 - \left[ \delta X_2 + \sum_{i=1}^n \phi_i(0) \delta q_i \right] \right), \\ F_c &= K_h \alpha^{\frac{3}{2}} \quad \text{si } \alpha > 0, \quad F_c = 0 \quad \text{si } \alpha \leq 0 \end{aligned} \quad (9.31)$$

Por tanto, los vectores de fuerzas externas generalizas son:

$$\mathbf{F}_{cr} = \begin{bmatrix} -F_c \\ F_c \end{bmatrix}, \quad (9.32)$$

$$\mathbf{F}_{cf} = F_c \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_n(0) \end{bmatrix}. \quad (9.33)$$

A continuación se plantean las ecuaciones del movimiento para el caso de que el impactor no sea un sólido rígido libre sino un péndulo rígido. En este caso, el origen

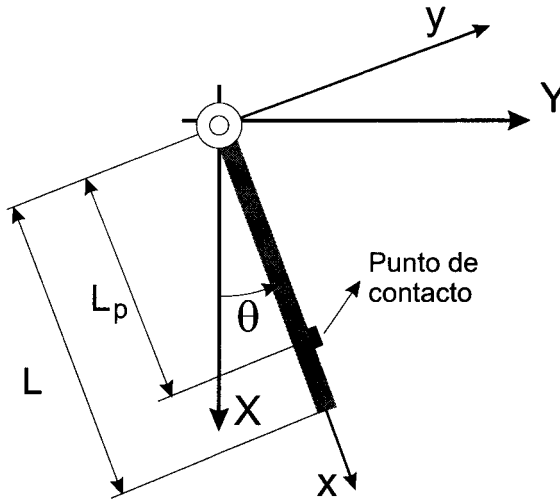


Figura 9.6: Péndulo impactor

del sistema de referencia asociado al péndulo rígido se sitúa en la articulación de éste, haciendo coincidir el eje  $x$  local con el eje del péndulo. Utilizaremos el ángulo de referencia  $\theta$  para describir la posición del péndulo, como se muestra en la figura 9.6. La expresión de la indentación en función de las coordenadas del sistema queda ahora:

$$\alpha = L_p \sin \theta - \left[ X_2 + \sum_{i=1}^n \phi_i(0) q_i \right] \quad (9.34)$$

y la fuerza de contacto generalizada aplicada en el péndulo resulta:

$$(F_c)_\theta = -F_c L_p \cos \theta. \quad (9.35)$$

La ecuación del movimiento del péndulo viene dada por:

$$I_0 \ddot{\theta} = -F_c L_p \cos \theta. \quad (9.36)$$

Alternativamente, se podría usar la traslación del punto de contacto como coordenada para describir la posición del péndulo. La expresión del cambio de variable sería

$$x_p = L_p \theta. \quad (9.37)$$



Al estar el péndulo en el instante del choque en posición aproximadamente vertical, se pueden linealizar la ecuaciones haciendo las siguientes aproximaciones

$$\theta \simeq 0, \quad \cos \theta \simeq 1 \quad (9.38)$$

Al hacer el cambio de variable y aplicar estas simplificaciones en la ecuación del movimiento del péndulo queda

$$\frac{I_0}{L_p^2} \ddot{x}_p = -F_c \quad (9.39)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación del movimiento del sólido rígido libre se comprueba de nuevo la equivalencia entre ambos sólidos en el impacto, como se mostró en la ecuación (9.4).

## 9.4 Importancia de las deformaciones locales para pequeños impactores

Habiendo analizado el proceso del impacto axial en una barra libre, considerando y sin considerar las deformaciones locales, se va a analizar en este apartado el caso en el que el sólido rígido tenga mucho menos masa que la barra elástica en la que impacta.

Como se mostró en el capítulo 3, la solución de St. Venant, que analiza el proceso de propagación de ondas elásticas y que no considera las deformaciones locales, predice una velocidad final del sólido rígido siempre positiva, siendo  $v_1^+ = v_1^- e^{-2\beta}$ . La ley de desplazamientos de la sección de contacto durante y tras el impacto se obtiene de integrar las velocidades, que se obtuvieron en el capítulo 3, resultando

$$d_0(t) = \frac{v_1^- T}{2\beta} (1 - e^{-\frac{2\beta}{T}t}), \quad t \leq T \quad (9.40)$$

$$d_n(t) = d_{n-1}(nT) + \frac{v_1^- T}{\beta} (1 - e^{-\frac{2\beta}{T}(t-nT)}) \quad n = 1, \dots, \infty \quad t > T \quad (9.41)$$

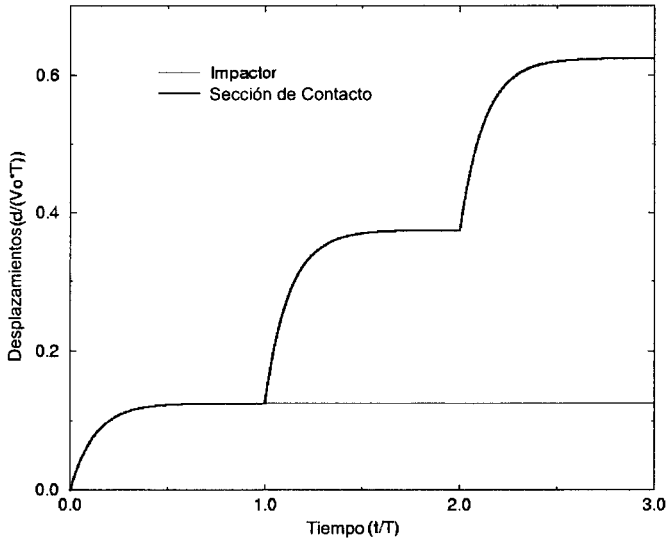


Figura 9.7: Desplazamientos en el impacto. Teoría de St. Venant

donde la primera expresión es válida durante el periodo de contacto y la segunda es la expresión periódica válida en cualquier instante tras el impacto. Estas expresiones, junto con los desplazamientos del sólido impactor, están representados adimensionalmente en la figura 9.7 para el caso de que la masa del impactor sea un cuarto de la masa de la barra elástica. Por otro lado, una solución típica de la ecuación (9.24) que considera efectos locales, correspondiente a la misma relación de masas, se muestra en la figura 9.8. En la figura 9.9 se representa la fuerza de contacto frente al tiempo en los dos problemas mencionados.

De la solución de St. Venant a este problema, y tal como se observa en las figuras 9.7 y 9.9, la duración del contacto sin considerar efectos locales es siempre  $T = \frac{2L}{c}$ , que es el tiempo que emplean las ondas elásticas axiales en recorrer dos veces la longitud de la barra. Sin embargo, cuando se tienen en cuenta dichas deformaciones locales, como se observa en las figuras 9.8 y 9.9, la duración del impacto es menor que  $T$ . Esto ocurre siempre que las rigideces locales del problema de Hertz sean suficientemente grandes. La sección de contacto en el problema

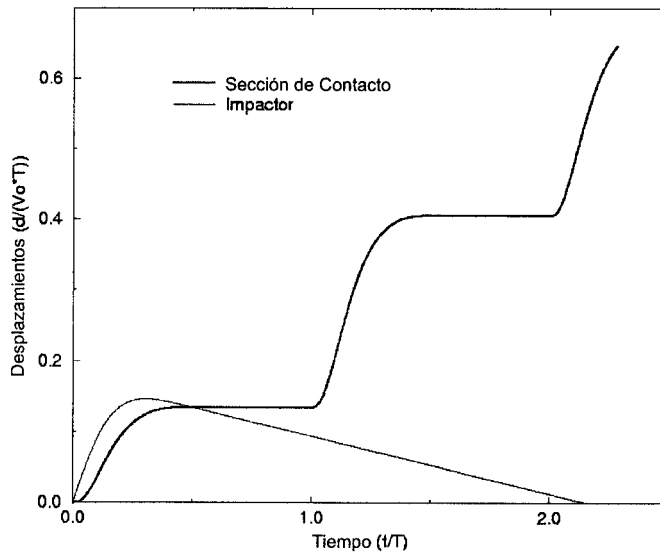


Figura 9.8: Desplazamientos en el impacto. Contacto de Hertz

que considera las deformaciones locales queda en reposo desde que termina el contacto hasta que vuelve desde el extremo opuesto la onda elástica generada. Debido a esto, el sólido rígido debe terminar con velocidad negativa pues no puede penetrar en la barra. Esto se aprecia gráficamente en la representación 9.8: el desplazamiento de sólido rígido tras el impacto viene representada por una recta cuya pendiente debe ser siempre negativa, pues el desplazamiento de la sección de contacto es nulo, por lo que éste viene representado por una recta horizontal. Por tanto, el efecto de considerar o no deformaciones locales en este tipo de impactos da lugar a resultados opuestos en cuanto al movimiento final del impactor. Para pequeños impactores, si no se consideran deformaciones locales, sólo velocidades finales positivas del impactor son posibles, mientras que si se consideran estas deformaciones sólo velocidades negativas del impactor son posibles. Por tanto, para los problemas con deformaciones locales se puede dar un límite inferior al impulso de la fuerza de contacto, aquel que deja al impactor con velocidad nula,

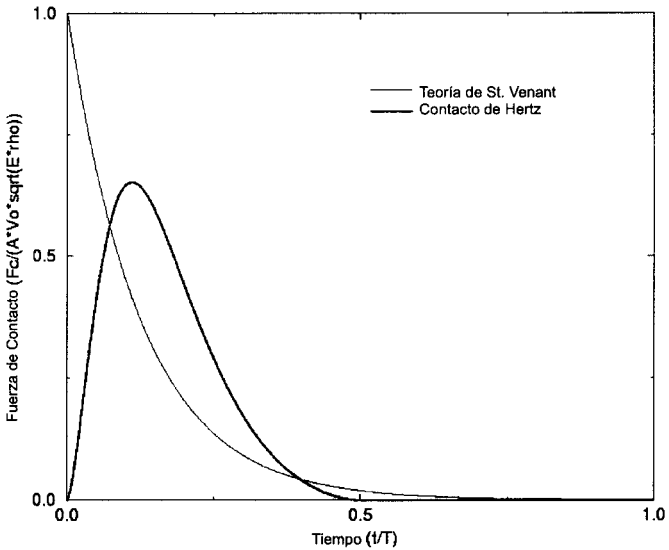


Figura 9.9: Fuerza de contacto en impacto axial

esto es:

$$Imp = \int_0^{t_{cont}} F_c(t) dt \geq m_1 v_1^- \tag{9.42}$$

En las fuerzas de contacto de la figura 9.9 se observa que la fuerza de contacto de St. Venant comienza con un valor no nulo que además es el máximo absoluto, mientras que la solución con contacto de Hertz, comienza con un valor nulo. Esto es debido a que la solución de St. Venant supone inicialmente contacto entre caras planas, al contrario de lo que ocurre con la solución con contacto de Hertz, que inicialmente asume que el contacto ocurre entre dos puntos. La pareja inicial de puntos de contacto no pueden soportar cargas finitas hasta que se deformen y pasen a ser superficies las que se mantengan en contacto. El máximo de la fuerza de contacto cuando se considera contacto de Hertz ocurre instantes después y es menor que el máximo de la solución de St. Venant. Por otro lado se observa que aunque la fuerza de contacto de la solución de St. Venant actúa durante un

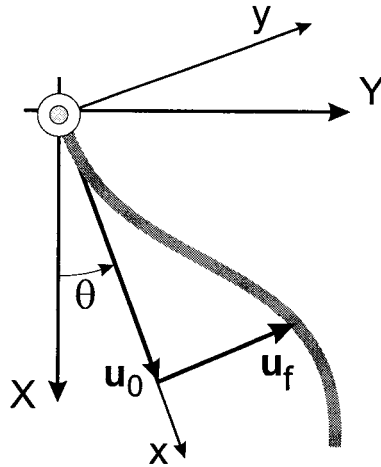


Figura 9.10: Sistemas de referencia para el péndulo elástico

periodo de tiempo  $T$ , la fuerza es prácticamente nula desde casi la mitad de este periodo.

## 9.5 Impacto de un péndulo elástico en una barra con contacto de Hertz

En apartados previos se ha comprobado que el impacto de un péndulo rígido en una barra elástica producía los mismos efectos que el impacto de un sólido rígido libre con una cierta masa equivalente. Cuando el péndulo es flexible esta equivalencia no es válida. Además, la flexibilidad del péndulo tiene efectos importantes en el impacto, como se muestra en este apartado y se comprobará con resultados experimentales.

Las ecuaciones del movimiento del péndulo elástico se obtienen de nuevo mediante el método de los sistemas de referencia flotantes. Se supone que el péndulo sólo se deforma transversalmente y para describir dichas deformaciones se usan modos continuos de vibración obtenidos usando la teoría de Euler-Bernouilli.

La coordenada de referencia del péndulo será de nuevo el ángulo  $\theta$  y el sistema de referencia local se supone rígidamente unido a la sección del péndulo que queda junto a la rótula fija. En la figura 9.10 se muestra el péndulo elástico y los sistemas de referencia utilizados. Para describir los movimientos elásticos de las secciones de la barra libre se usa el mismo sistema local, que inicialmente coincide con la sección de contacto, y las mismas funciones de forma que el apartado anterior. Los modos de vibración de una viga en voladizo son apropiados para describir los desplazamientos elásticos del péndulo cuando se usan estas condiciones de referencia.

La posición de cualquier sección del péndulo se obtiene como:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{A}\mathbf{u}, \tag{9.43}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{9.44}$$

es la matriz de giro y

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_0(x) + \mathbf{u}_f(x, t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{S}\mathbf{p}_f \tag{9.45}$$

es la posición de cualquier sección del péndulo relativa al sistema de referencia flotante. Los vectores  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{u}_f$  contienen las coordenadas de las sección en estado indeformado y los desplazamientos debidos a la deformación, respectivamente. La matriz  $\mathbf{S}$  contiene las funciones de forma y  $\mathbf{p}_f$  las coordenadas modales elásticas para el péndulo. Estas matrices y vectores se definen como:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \xi_1(x) & \cdots & \xi_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_f = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \tag{9.46}$$

donde  $\xi_i(x)$  son las funciones de forma.

Las ecuaciones del movimiento se pueden obtener usando las ecuaciones de Lagrange. La matriz de masa resulta:

$$\begin{bmatrix} m_{\theta\theta} & \mathbf{m}_{\theta f} \\ \mathbf{m}_{f\theta} & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

donde

$$(\mathbf{m}_{ff})_{ij} = \rho A \int_0^L \xi_i(x) \xi_j(x) dx \quad i, j = 1, \dots, n \quad (9.48)$$

$$m_{\theta\theta} = I_0 + \mathbf{p}_f^T \mathbf{m}_{ff} \mathbf{p}_f, \quad (9.49)$$

siendo  $I_0$  el momento de inercia del péndulo indeformado respecto del punto donde se encuentra la rótula, y

$$(\mathbf{m}_{f\theta})_i = (\mathbf{m}_{\theta f}^T)_i = \rho A \int_0^L x \xi_i(x) dx \quad i = 1, \dots, n \quad (9.50)$$

Los términos de la matriz de rigidez vienen dados por

$$(\mathbf{K})_{ij} = EI \int_0^L \xi_i'(x) \xi_j'(x) dx \quad i, j = 1, \dots, n \quad (9.51)$$

donde  $I$  es el segundo momento del área de la sección del péndulo.

Los términos cuadráticos en velocidad, debidos a la inercia centrífuga y la aceleración de Coriolis resultan:

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} (Q_v)_\theta \\ (Q_v)_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\dot{\theta} \dot{\mathbf{p}}_f^T \mathbf{m}_{ff} \mathbf{p}_f \\ \dot{\theta}^2 (\mathbf{m}_{ff} \mathbf{p}_f) \end{bmatrix} \quad (9.52)$$

Las funciones de forma para el péndulo, no normalizadas, tienen por expresión (Goldsmith, 1960)

$$\xi_i^*(x) = \frac{\cosh \mu_i x - \cos \mu_i x}{\cosh \mu_i L_t + \cos \mu_i L_t} - \frac{\sinh \mu_i x - \sin \mu_i x}{\sinh \mu_i L_t + \sin \mu_i L_t} \quad (9.53)$$

donde las frecuencias adimensionales son las soluciones de la ecuación

$$\cosh \mu_i L_t \cos \mu_i L_t = -1 \quad (9.54)$$

En este problema se usan funciones de forma normalizadas de la forma:

$$\xi_i(x) = \frac{1}{\xi_i^*(L_t)} \xi_i^*(x) \quad (9.55)$$

Como se explicó en el capítulo anterior estas funciones de forma presentan las siguientes propiedades de ortogonalidad.

$$\rho A \int_0^{L_t} \xi_i(x) \xi_j(x) dx = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (9.56)$$

$$EI \int_0^{L_t} \xi_i'(x) \xi_j'(x) dx = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (9.57)$$

Por tanto sólo son no nulos los términos diagonales de las matrices de masa y rigidez modales, que vienen dados por:

$$(\mathbf{m}_{ff})_{ii} = \frac{m_p}{4} \quad i = 1, \dots, n \quad (9.58)$$

$$(\mathbf{K})_{ii} = \frac{EI}{\rho A} \left( \frac{\mu_i}{L_t} \right)^4 \frac{m_p}{4} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (9.59)$$

donde  $m_p$  es la masa del péndulo y los otros términos tienen su significado habitual.

La expresión de la indentación entre el péndulo y la barra elástica resulta:

$$\alpha = L_p \sin \theta + \cos \theta \sum_{i=1}^n \xi_i(L_p) p_i - X_2 - \sum_{i=1}^n \phi_i(0) q_i \quad (9.60)$$

El trabajo virtual de la fuerza de contacto se obtiene como:

$$\begin{aligned} F_c \delta \alpha = F_c [ & \left( L_p \cos \theta - \sin \theta \sum_{i=1}^n \xi_i(L_p) p_i \right) \delta \theta \\ & + \cos \theta \sum_{i=1}^n \xi_i(L_p) \delta p_i - \delta X_2 - \sum_{i=1}^n \phi_i(0) \delta q_i ] \end{aligned} \quad (9.61)$$

Por tanto, la expresión de las fuerzas generalizadas de contacto aplicadas en la barra no varían respecto del problema en el que el impactor era considerado rígido. Son por tanto  $F_c$  para la coordenada de referencia y las dadas por (9.33)



para las coordenadas elásticas. Las aplicadas en el péndulo resultan:

$$\mathbf{Q}_{fc} = \begin{bmatrix} L_p \cos \theta - \sin \theta \sum_{i=1}^n \xi_i(L_p) p_i \\ \cos \theta \xi_i(L_p) \end{bmatrix} \quad (9.62)$$

Las ecuaciones del movimiento del péndulo son entonces:

$$\begin{bmatrix} m_{\theta\theta} & \mathbf{m}_{\theta f} \\ \mathbf{m}_{f\theta} & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q_{fc})_{\theta} \\ (Q_{fc})_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (Q_v)_{\theta} \\ (Q_v)_f \end{bmatrix} \quad (9.63)$$

La simulación numérica realizada para representar el montaje experimental usa un módulo de Young para la barra de  $9.8 \times 10^{10} Pa$ , densidad  $8600 kg/m^3$ , sección transversal  $3.142 \times 10^{-4} m^2$  y longitud  $1.48 m$ . Como el péndulo, que se muestra en la figura 9.2, tiene una geometría compleja se han usado unas propiedades ficticias para asimilarlo a una viga de sección transversal constante, usando las técnicas de cálculo de estructuras de vigas de celosía (Norma española de estructuras de acero, 1975). Las propiedades asumidas son un módulo de Young de  $7.1 \times 10^{10} Pa$ , densidad  $4100 kg/m^3$ , sección transversal  $1.92 \times 10^{-4} m^2$ , longitud  $0.25 m$  y distancia desde el punto de contacto al par de rotación de  $0.19 m$ . La velocidad de la sección del péndulo que choca con la barra antes del impacto es de  $1.93 m/s$ .

En la figura 9.11 están comparadas las fuerzas de contacto de péndulo supuesto rígido y de éste supuesto elástico. En las simulaciones numéricas se usan 5 coordenadas elásticas para el péndulo y 30 para la barra elástica. Como se observa en la figura el efecto de la flexibilidad del péndulo es disminuir la fuerza máxima de contacto y aumentar la duración del periodo de contacto e interrumpirlo. A su vez, la fuerza de contacto presenta varios máximos relativos. Estos efectos se producen porque las ondas elásticas generadas durante el contacto alcanzan el par de revolución y regresan, alcanzando de nuevo la sección de contacto antes de finalizar el choque. Cuando se simula un péndulo rígido, al igual que si se usa un sólido libre rígido, el periodo de contacto es siempre único y tiene un único máximo.

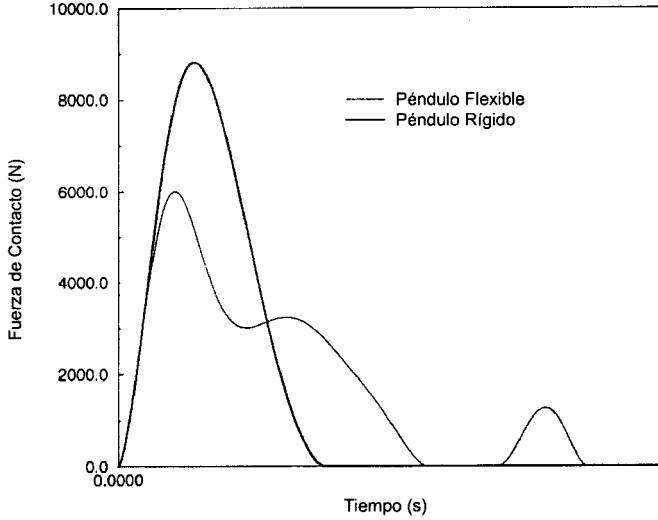


Figura 9.11: Fuerza de contacto con péndulo impactor

## 9.6 Comparación con resultados experimentales

Como se dijo al comenzar este capítulo, se han usado dos tipos de impactores para el choque axial en la barra libre de bronce. El primer impactor consiste en una esfera de acero colgada de un hilo. Como la rigidez a flexión del hilo es insignificante, este impactor está bien representado por un sólido libre. En realidad en el instante del choque la bola tiene cierta velocidad angular y el punto de contacto tiene una componente de velocidad vertical, por no coincidir su posición con la prolongación de la línea del hilo. Sin embargo por ser el radio de la bola mucho menor que la longitud del hilo estos efectos son poco significativos. El segundo impactor es el péndulo de aluminio representado en la figura 9.2.

Al ser las ondas elásticas axiales no dispersivas, la tensión, y por tanto la deformación, medida en cualquiera de las secciones de la barra, es directamente proporcional a la fuerza de contacto unos instantes antes. Por tanto, la deformación medida experimentalmente nos da una réplica de la fuerza de contacto. Este

fenómeno es bien conocido y ha dado lugar a la *barra de Hopkinson* (Goldsmith, 1960) que se puede usar, por ejemplo, para calibrar acelerómetros.

En la figura 9.12 se muestra la tensión medida experimentalmente frente a la obtenida numéricamente para el impacto con la bola de acero en una sección de la barra situada a 1 m del extremo de contacto. La bola tiene radio 15 mm, masa 0.11 kg y una velocidad antes del impacto de  $2.03 \frac{m}{s}$ . Se observa un excelente acuerdo entre la simulación y los resultados experimentales. En la figura 9.13 se explica el proceso de propagación de ondas para este impacto. La onda elástica generada en el impacto se propaga a través de la barra como un pulso de compresión que tiene la misma forma que la curva de la fuerza de contacto frente al tiempo. Al alcanzar este pulso el extremo opuesto de la barra se refleja cambiando el signo de la tensión que lo acompaña. Este proceso se repite indefinidamente, hasta que el amortiguamiento estructural, que no ha sido modelado en la simulación, ni parece ser importante en los rangos de tiempo que se muestran, lo disipa.

Comparando con resultados experimentales las soluciones de St. Venant, que no considera efectos locales, y la solución obtenida asumiendo la relación fuerza-indentación de Hertz, se observará que la realidad es mucho más parecida al problema resuelto con contacto de Hertz. Como ocurría con los impactos transversales del capítulo anterior para pequeños impactores, el impacto que se analizó experimentalmente está dominado por las deformaciones locales, por lo que este problema está casi desacoplado de la propagación de ondas elásticas. En estas circunstancias no se puede dejar de considerar deformaciones locales como lo hace la solución de St. Venant, pues los resultados son muy incorrectos. Este no sería el caso si la masa del impactor fuera igual o mayor que la de la barra elástica, en cuyo caso el impacto estaría dominado por la propagación de ondas elásticas y por tanto la solución de St. Venant daría resultados razonables. Lo dicho para la solución de St. Venant es extensible a aquellos métodos que no consideran deformaciones locales, como los de adición y eliminación de restricciones cinemáticas.

La figura 9.13 representa la tensión medida experimentalmente en una sección

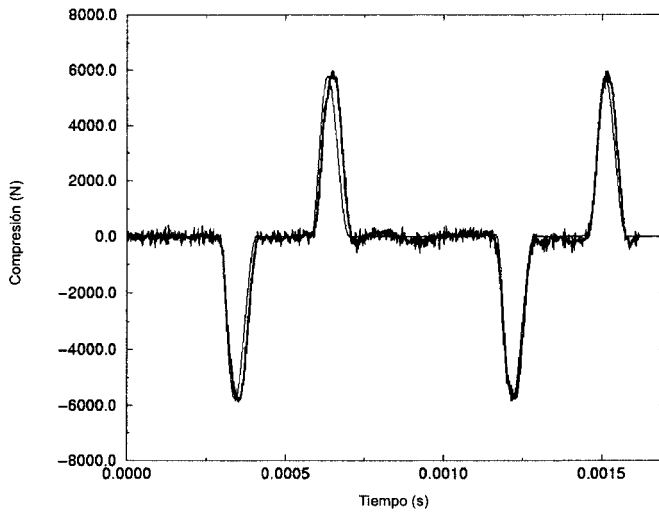


Figura 9.12: Fuerza de contacto con péndulo impactor

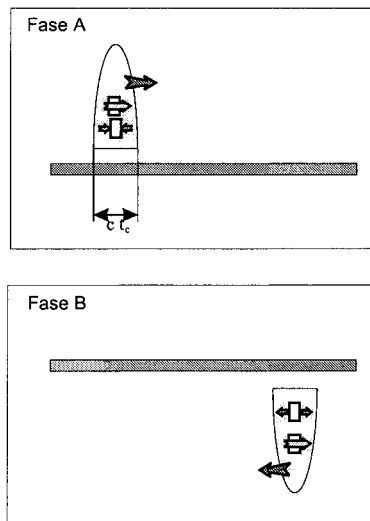


Figura 9.13: Fuerza de contacto con péndulo impactor

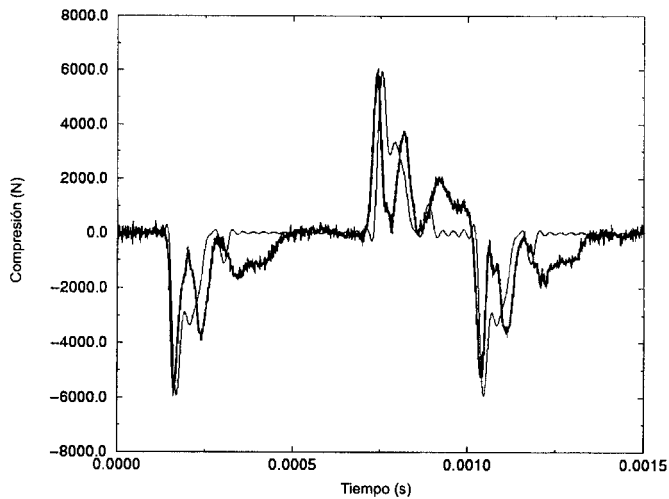


Figura 9.14: Fuerza de contacto con péndulo impactor

situada a  $0.5\text{ m}$  de la sección de contacto para el caso del impacto con el péndulo de aluminio. El pulso de tensión en este caso tiene un aspecto muy diferente. El acuerdo no es tan bueno como en el caso del impacto con la bola, sin embargo, considerando la complejidad de la geometría del péndulo y el modelo tan simple que se ha usado, resulta bastante satisfactorio. La fuerza de contacto medida experimentalmente presenta un mayor tiempo de contacto. Se confirma experimentalmente la existencia de tres máximos relativos y unos niveles de fuerza muy similares. A la vista de los resultados no es posible asegurar que se ha interrumpido el contacto entre el segundo y el tercer máximo relativo, pero puede haber ocurrido. Queda claro que es esencial incluir la flexibilidad del péndulo para modelar este problema. En caso de no hacerlo, como se muestra en la figura 9.11, el pulso hubiera sido muy similar al inducido por el impacto con la bola rígida.

# Capítulo 10

## Influencia de las Condiciones de Referencia

### 10.1 Introducción

En este capítulo se analiza la influencia de las condiciones de referencia en problemas de impacto en mecanismos flexibles. Como se mostró en el capítulo 5, las condiciones de referencia marcan el tipo de conexión que existe entre los sistemas de referencia locales y los sólidos elásticos a los que están ligados. Las condiciones de referencia indican las condiciones de contorno que deben cumplir las funciones de forma que se pueden emplear para describir la flexibilidad del sólido. Las condiciones de referencia que cumplen las llamadas *mean axis conditions* (Agrawal, 1984), que se traduce aquí por *condiciones de eje medio*, tienen la propiedad de minimizar la energía cinética del movimiento asociado a las coordenadas elásticas. Además, si se cumplen estas condiciones se hace mínimo el acoplamiento entre las coordenadas elásticas y de referencia, lo que facilita la solución de las ecuaciones del movimiento.

Se van a analizar dos problemas de impacto en los que aparecen movimientos

de sólido rígido para estudiar la influencia de las condiciones de referencia: el impacto axial en una barra libre y el transversal en una barra articulada. Ambos problemas ya se han planteado en el capítulo anterior. En el impacto en la barra libre resuelto en el capítulo anterior, para el cálculo de las funciones de forma, se ha usado como condición de contorno en el extremo de contacto la condición de tensión nula. Por tanto, el sistema de referencia flotante no está ligado rígidamente a ninguna sección de la barra. En este capítulo se va a volver a plantear el mismo problema pero ligando rígidamente el sistema de referencia flotante a la sección de contacto. En este caso, se van a usar los modos de una barra fija en un extremo y libre en el otro como funciones de forma para describir la deformación. Para el caso del impacto transversal de una barra articulada, se va a usar el mismo ejemplo del capítulo anterior, cuando se simulaba el efecto del péndulo impactor, pero para simplificar el problema se supondrá que éste choca en un tope fijo. En el capítulo anterior se suponía que el sistema de referencia flotante estaba rígidamente ligado a la sección de la barra unida a la rótula, lo que permitía el uso de los modos de una barra en voladizo. En este capítulo, además de ésta condición de referencia, se usará un sistema de referencia flotante que no gire igual que dicha sección extrema. Esto nos permitirá usar los modos de una barra articulada-libre como funciones de forma. En ambos problemas, cuando el sistema de referencia flotante no está ligado rígidamente a ninguna sección, se cumplen las condiciones de eje medio. En estos casos, las condiciones de contorno usadas para el cálculo de las funciones de forma coinciden con las reales del problema a resolver, al menos cuando no hay contacto.

El significado físico de las coordenadas de referencia cambia según el tipo de conexión del sistema de referencia flotante. En este apartado se va a investigar en qué casos la derivada temporal de dichas coordenadas representa las velocidades equivalentes de sólido rígido de los cuerpos. Se llama aquí velocidad equivalente de sólido rígido a la velocidad del centro de gravedad del sólido elástico considerado como un sistema de partículas con movimiento independiente -un conjunto infinito

de secciones en el caso de barras. Si las derivadas de las coordenadas de referencia coinciden con estas velocidades equivalentes, en ausencia de fuerzas externas, deben mantenerse constantes, como debe ocurrir tras el impacto. El cálculo de estas velocidades equivalentes es importante, por ejemplo, para conocer el valor del coeficiente de restitución cinemático del impacto que ha tenido lugar.

## 10.2 Impacto axial en barra libre. Conexión rígida y conexión libre

En el capítulo anterior se planteó y resolvió el impacto axial de un sólido rígido en una barra elástica libre con contacto de Hertz. Para ello se usó un sistema local de referencia que no estaba ligado a ninguna sección particular de la barra, lo que permitía el uso de modos de vibración de una barra libre como funciones de forma. Aquí se plantea el mismo problema usando un sistema de referencia local rígidamente unido a la sección de contacto de la barra elástica. En este caso, el desplazamiento elástico de esta sección será siempre nulo y, por tanto, los modos de vibración de una barra fija en un extremo son apropiados para describir la deformación del sólido. En la figura 10.1 se muestran ambas configuraciones.

Existe una diferencia conceptual importante entre ambos planteamientos del problema. En el método de los sistemas de referencia flotantes, para encontrar funciones de forma apropiadas para describir la deformación de los sólidos, se recurre al cálculo de los autovalores de un problema elástico lineal cuyas condiciones de contorno coinciden con las condiciones de referencia del sistema local de coordenadas. En general, estas funciones de forma son autovalores del problema ficticio elástico lineal, pero tan sólo *funciones admisibles* (Meirovitch, 1967) para el problema con grandes traslaciones y rotaciones del sólido flexible. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se usan los modos de una barra fija en un extremo para representar la deformación de una libre en ambos extremos. Sin embargo, en circunstancias particulares, las condiciones de referencia y las condiciones de contorno necesarias



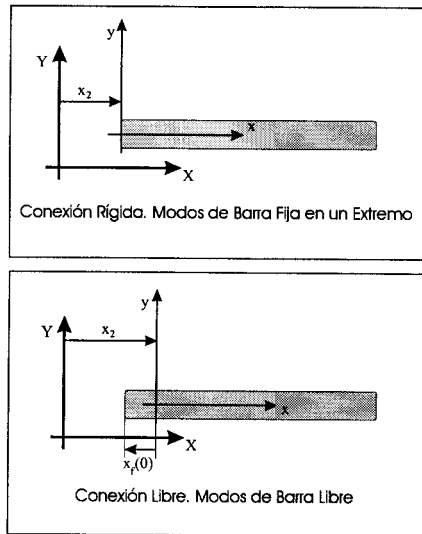


Figura 10.1: Sistemas locales de referencia para la barra elástica

para el cálculo de los autovalores coinciden. Este es el caso cuando se usan modos de vibración de una barra libre. Estas funciones de forma son los autovalores del problema, no sólo funciones admisibles, al menos cuando la barra deja de estar en contacto. Para vigas y barras elásticas esto ocurre cuando las condiciones de referencia cumplen las condiciones de eje medio (Agrawal, 1984).

El uso de estas dos familias diferentes de funciones de forma tiene otras consecuencias en problemas de impacto. Con modos de barra libre siempre se obtiene tensión nula en las sección de contacto por condición de contorno, lo cual no es cierto mientras dura el impacto. Esta incongruencia no trae grandes consecuencias porque la tensión de contacto se puede obtener fácilmente a través de la fuerza de contacto, evaluada a través de la indentación mediante la expresión de Hertz, por ejemplo. Con modos de voladizo se obtienen tensiones no nulas en la sección de contacto, tanto cuando hay contacto como cuando no lo hay. Obviamente la tensión es siempre nula cuando no hay contacto, por tanto la tensión que se pueda obtener tras el contacto es siempre ficticia.

En este apartado se usa el superíndice  $f$  para indicar las funciones de forma, constantes y coordenadas asociadas a los modos de barra libre -conexión libre- y el superíndice  $c$  para indicar las asociadas a los modos de barra fija en un extremo -conexión rígida.

El planteamiento de las ecuaciones del movimiento cuando se usan modos de voladizo es idéntico al usado en el capítulo anterior con modos de barra libre. Las ecuaciones con modos de voladizo son formalmente idénticas a las dadas por la expresión (23) del capítulo anterior, tan sólo habrá que cambiar las constantes asociadas a las integrales de las funciones de forma. Los modos de voladizo tienen por expresión

$$\varphi_i^c(x) = \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2L}x\right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

Las masas modales, rigideces modales e integrales de las funciones de forma resultan:

$$\begin{aligned} m_i^c &= (\mathbf{m}_{ff})_{ii} = \rho A \int_0^L [\varphi_i^c(x)]^2 dx = \frac{m_2}{2}, \\ k_i^c &= (\mathbf{K})_{ii} = EA \int_0^L \left[\frac{d\varphi_i^c(x)}{dx}\right]^2 dx = \frac{EA(2i-1)^2\pi^2}{8L}, \\ \bar{m}_i^c &= (\mathbf{m}_{rf})_{2,i} = \rho A \int_0^L \varphi_i^c(x) dx = \frac{2m_2}{(2i-1)\pi} \end{aligned} \quad (10.2)$$

Las matrices de masa y rigidez modales vuelven a ser diagonales siendo  $m_i^c$  y  $k_i^c$  los términos de la diagonal. Las integrales de las funciones de forma dan lugar a los términos cruzados de masas  $\bar{m}_i^c$ , que acoplan la coordenadas de referencia con las coordenadas elásticas de la barra en las ecuaciones del movimiento. Estos términos eran siempre nulos cuando se usaban modos de barra libre, pero no lo son ahora que se usan modos de barra en voladizo.

La cantidad de movimiento asociada a las coordenadas elásticas de la barra en un instante dado, tanto si se usan unos modos u otros, resulta de la expresión:

$$p(t) = \rho A \sum_i \left( \int_0^L \varphi_i(x) dx \right) \dot{q}_i \quad (10.3)$$

La integral de las funciones de forma que aparece en esta expresión es siempre nula

en caso de usar modos de barra libre, como se mostró en el capítulo anterior. No son nulas estas integrales cuando se usan modos de barra fija, sus valores vienen dados en la ecuación (10.2). Por tanto, la cantidad de movimiento asociada a las coordenadas elásticas es siempre nula cuando se usan modos de barra libre y en general no nula cuando se usan modos de voladizo. Puede resultar curioso observar que los autovalores de una barra libre, con posibilidad de grandes traslaciones, tienen cantidad de movimiento asociada siempre nula y que los autovalores de una barra en voladizo, que no tiene posibilidad de grandes traslaciones, dan lugar en general a cantidad de movimiento no nula.

Cuando se usan modos de barra en voladizo, los desplazamientos elásticos de la sección de contacto resultan siempre nulos, por tanto la expresión de la indentación entre los sólidos resulta ahora

$$\alpha = X_1 - X_2 \quad (10.4)$$

El trabajo virtual de la fuerza de contacto resulta:

$$F_c \delta \alpha = F_c (\delta X_1 - \delta X_2), \quad (10.5)$$

y por tanto el vector de fuerzas generalizadas carece de términos asociados a las coordenadas elásticas, siendo su expresión:

$$\mathbf{Q}_{F_c} = \begin{pmatrix} -F_c \\ F_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.6)$$

Así, en el problema con modos de barra libre, los términos cruzados de masa entre la coordenada de referencia y las coordenadas elásticas son nulos y los términos de fuerza generalizada de contacto asociados a las coordenadas elásticas no nulos; en el problema con modos de voladizo los términos de masa cruzados son no nulos y las fuerzas generalizadas de contacto asociados a las coordenadas elásticas

nulos. Estos valores tienen una clara interpretación física. Cuando se usan modos de barra libre la ecuación diferencial para la coordenada de referencia está desacoplada de las ecuaciones para las coordenadas elásticas. Durante el periodo de contacto la fuerza de contacto excita ambos movimientos, los elásticos y el de referencia. Cuando termina el periodo de contacto el vector de fuerzas generalizadas tiene todos los términos nulos. Por tanto, la solución será de velocidad constante para la coordenada de referencia y movimiento armónico simple para las elásticas. Sin embargo, en el problema con modos de barra en voladizo, al ser nula la fuerza generalizada asociada a las coordenadas elásticas, la fuerza de contacto no puede excitar el movimiento asociado a las coordenadas elásticas. Es a través de los términos cruzados de masa como se inducen los desplazamientos elásticos, por tanto, éstos no podrían ser nulos. Como las ecuaciones diferenciales no están desacopladas en este caso, tras el contacto, la solución no es de velocidad constante para la coordenada de referencia ni movimiento armónico para las elásticas. Aunque las coordenadas de referencia que se usan en el método de los sistemas de referencia flotantes describen grandes rotaciones y traslaciones del sistema local de coordenadas, no se deben interpretar éstos en general como los movimientos equivalentes de sólido rígido. El problema que nos ocupa es un buen ejemplo para ilustrar la diferencia. Tras el contacto no existen fuerzas externas aplicadas en la barra elástica y sin embargo la velocidad de referencia cuando se usa la conexión rígida no es constante, por tanto, esa velocidad no coincide con la velocidad equivalente de sólido rígido, que sí es constante por el primer principio de la mecánica. En cambio, cuando se usan modos de barra libre la velocidad de referencia es constante tras el impacto y coincide con la velocidad equivalente de sólido rígido de la barra elástica. Como se hizo en el capítulo 3, se ha definido esta velocidad equivalente de sólido rígido de la barra elástica como la cantidad de movimiento de todas las secciones dividido por la masa total de la barra. Por tanto, estas velocidades resultan

$$\begin{aligned}
 v_2^f &= \frac{m_2^f \dot{x}_2^f + \sum_i (\rho A \int_0^L \varphi_i^f(x) dx) \dot{q}_i^f}{m_2} = \dot{x}_2^f \\
 v_2^c &= \frac{m_2^c \dot{x}_2^c + \sum_i (\rho A \int_0^L \varphi_i^c(x) dx) \dot{q}_i^c}{m_2} = \dot{x}_2^c + \sum_i \frac{2}{(2i-1)\pi} \dot{q}_i^c.
 \end{aligned}
 \tag{10.7}$$

Por tanto, para el problema con modos de barra fija, esta combinación lineal de las coordenadas del problema debe mantenerse constante. Si cualquiera de las dos expresiones de la cantidad de movimiento del sistema dadas por (10.7) se iguala a una constante arbitraria y se deriva la ecuación resultante con respecto al tiempo, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento para la coordenada de referencia en ausencia de fuerzas externas. Esto prueba que la cantidad de movimiento está bien definida, al ser una integral primera de las ecuaciones del movimiento. El motivo de la definición de las velocidades equivalentes es el cálculo del coeficiente de restitución del impacto. Si en el problema con modos de voladizo se confundiera velocidad de referencia con velocidad equivalente de sólido rígido, se podrían obtener coeficientes de restitución absurdos, negativos o mayores que la unidad.

Un problema idéntico al del experimento con la bola de acero se ha resuelto usando ambas formulaciones, tan sólo se ha modificado la masa de la bola, que en este caso es de 0.2 kg. Cuando se usan 30 modos de vibración en ambos problemas, las velocidades de la bola tras el impacto son  $v_1^+ = -1.009 \text{ m/s}$  con modos de barra libre y  $v_1^+ = -1.018 \text{ m/s}$  con modos de voladizo. Las velocidades equivalentes de sólido rígido definidas por las ecuaciones (10.7) para la barra elástica son  $v_2^+ = 0.1519 \text{ m/s}$  con modos de barra libre y  $v_2^+ = 0.1524 \text{ m/s}$  con modos de voladizo. Por tanto los coeficientes de restitución respectivos son  $e^f = 0.580$  y  $e^c = 0.585$ . Se ha confirmado numéricamente que la magnitud que se ha definido como velocidad equivalente de sólido rígido de la barra para el problema con modos de voladizo se mantiene constante tras el impacto. En la figura 10.2 se muestra la fuerza de contacto obtenida en ambos problemas, apreciándose un muy buen acuerdo. En la figura 10.3 se muestran los desplazamientos de las coordenadas de referencia

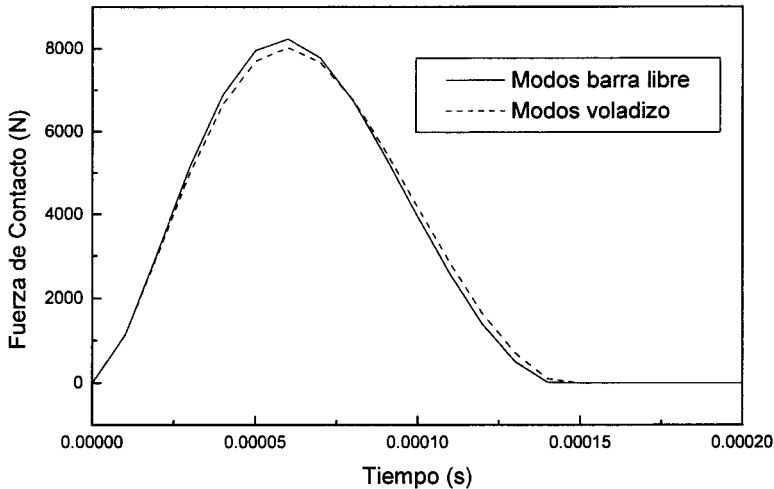


Figura 10.2: Fuerza de contacto en impacto axial con esfera libre

cuando se usan modos de voladizo. La coordenada de referencia de la barra se mueve como lo hace la sección de contacto, que se mostró en la figura 10.5 del capítulo anterior, pues el sistema local de referencia esta rígidamente unido a ésta. Presenta, por tanto, periodos de reposo, mientras la sección no está siendo alcanzada por la onda generada, y periodos de movimiento, cuando sí está siendo alcanzada.

Se analiza ahora la representación del proceso de propagación de ondas mediante ambos juegos de modos. En este análisis se usan los resultados de las simulaciones que usan 30 funciones de forma en cada caso. En la figura 10.4 se muestra la evolución con el tiempo del esfuerzo de compresión en la sección media de la barra, cuando se usan ambos juegos de modos. Se observa que, mientras la solución con modos de barra libre presenta el comportamiento explicado por la propagación del pulso de tensión, ilustrada en la figura 12 del capítulo anterior, no

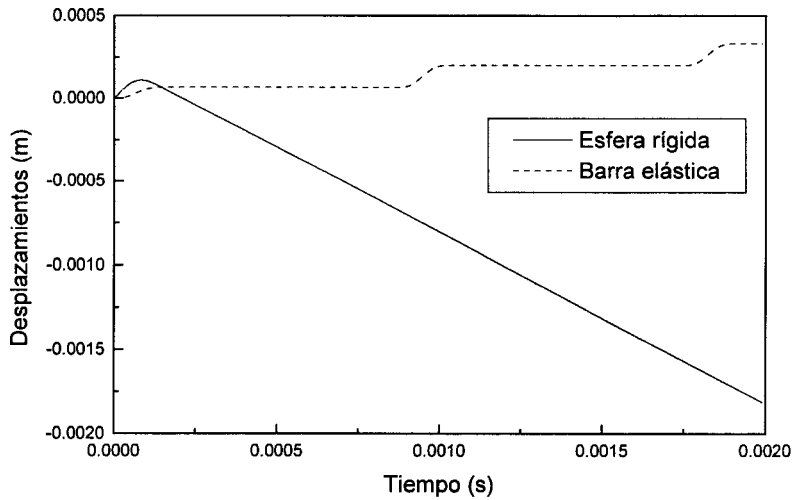


Figura 10.3: Evolución de las coordenadas de referencia

es así cuando se usan modos de barra fija. En efecto, la compresión representada con modos de voladizo no muestra los periodos de tensión nula que debieran aparecer. En la figura 10.5 se muestra la compresión en la sección de contacto en función del tiempo con modos de voladizo. En los instantes iniciales coincide con la fuerza de contacto, como debe ser. Tras el impacto presenta periódicamente un pico y un valle de tensión durante el periodo en el que el pulso se refleja en la sección de contacto, que en esos instantes es una sección libre. Por tanto esas tensiones son ficticias. Como los modos de voladizo no tienen por condición de contorno tensión nula en el extremo empotrado, no está garantizado el cumplimiento de la condición de contorno en tensión en el problema en el que se están usando. Si se hubiera representado la tensión de contacto en el problema con modos de barra libre, ésta sería nula en todo instante, incluso en el periodo de contacto, lo cual tampoco es correcto. La solución para representar correctamente ambos periodos podría estar

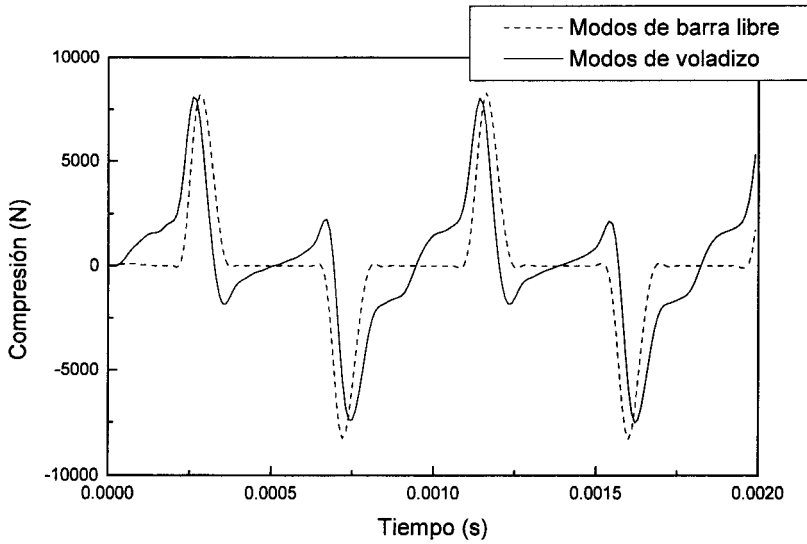


Figura 10.4: Compresión en la sección media de la barra

en el cambio de juego de modos dependiendo de las condiciones de contorno, el cual ya se ha intentado en capítulos anteriores, presentando dificultades.

En las figuras 10.6 y 10.7 se muestra la evolución de las compresiones evaluadas en las secciones media y de contacto de la barra, respectivamente, cuando cambia el número de modos de voladizo usados. Se observa que si bien los picos y valles que aparecen periódicamente en la sección de contacto disminuyen, no se aprecia ninguna mejora en la evolución de la tensión en la sección media cuando aumenta el número de modos.



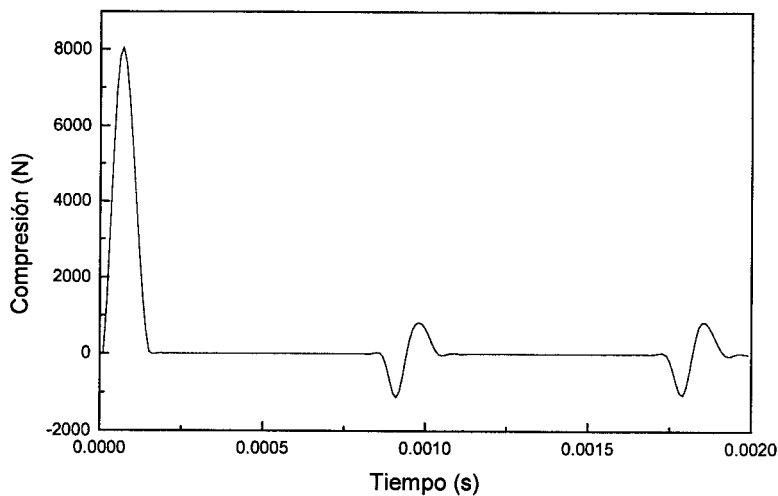


Figura 10.5: Compresión en la sección de contacto

### 10.3 Impacto transversal. Conexiones rígida y articulada

En este apartado se estudia el efecto de las condiciones de referencia en el estudio del impacto transversal en una barra elástica giratoria en un tope fijo. Para esto se ha aprovechado la situación estudiada en el capítulo anterior, pero en este caso el péndulo no impacta axialmente en una barra libre sino en un tope fijo, para poder así aislar efectos.

En el capítulo anterior se planteó este problema situando el sistema local de referencia rígidamente unido a la sección del péndulo unida al par de rotación. Ahora se compara este planteamiento con el que se obtiene de situar el origen del sistema local de referencia en la misma sección pero no unido rígidamente a ella. En este caso, las condiciones de referencia permiten el uso de las autofunciones

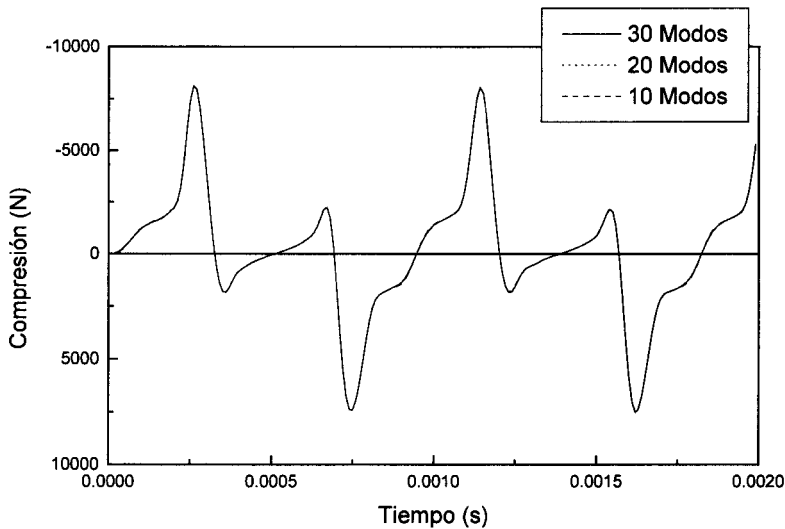


Figura 10.6: Evolución con el número de modos de la compresión en sección media

de una barra libre en un extremo y articulada en el otro -las llamaremos modos articulado-libre- como funciones de forma para describir la deformación transversal del péndulo. De nuevo, este tipo de condiciones de referencia cumplen las condiciones de eje medio que se mencionaron previamente. Ambos sistemas locales de referencia vienen ilustrados en la figura 10.9. Los modos de voladizo que se usaron en el capítulo anterior son funciones admisibles para el problema que nos ocupa, mientras que los modos articulado-libre son autofunciones de éste.

En este apartado se usa el superíndice  $c$  para indicar las funciones de forma, coordenadas y constantes asociadas a los modos de voladizo -conexión rígida- y el superíndice  $a$  para las asociadas a los modos articulado-libre -conexión articulada.

Las ecuaciones del movimiento usando modos de voladizo son las dadas en el capítulo anterior en la ecuación (62). Lo único que varía respecto al problema del impacto con la barra libre es la expresión de la indentación, en la que

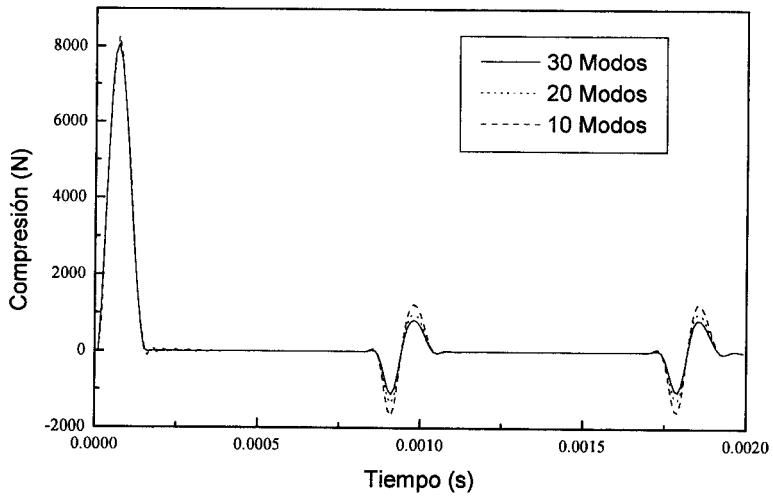


Figura 10.7: Evolución con el número de modos de la compresión en sección de contacto

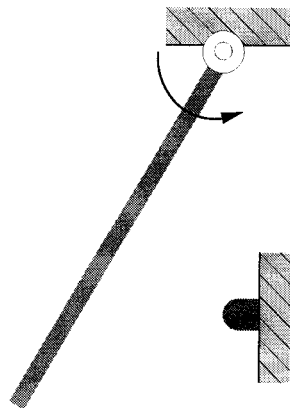


Figura 10.8: Impacto transversal de un péndulo elástico

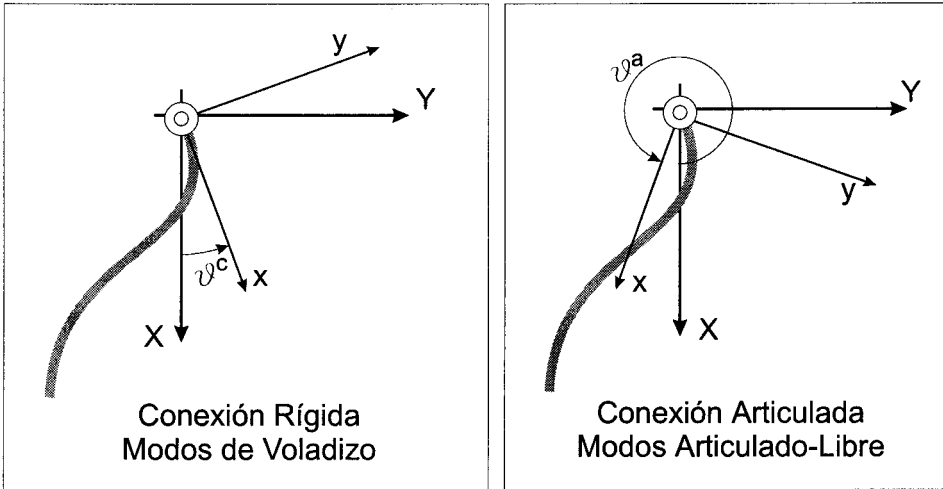


Figura 10.9: Condiciones de referencia para barra elástica articulada

desaparecen los términos asociados a las coordenadas elásticas y de referencia de la barra, lógicamente. Recuérdese que los términos de masa cruzados entre la coordenada de referencia  $\theta^c$  y las coordenadas elásticas había que evaluarlos numéricamente y eran no nulos. Las ecuaciones cuando se usan modos articulado-libre son completamente equivalentes, basta sustituir unas funciones por otras.

La expresión de los modos de vibración de una barra articulada-libre es:

$$\phi_i^a = \text{sen}\left(\frac{\eta_i}{L}x\right) + \frac{\text{sen}(\eta_i)}{\text{senh}(\eta_i)} \text{senh}\left(\frac{\eta_i}{L}x\right) \tag{10.8}$$

donde las constantes  $\eta_i$  son las soluciones de la ecuación

$$\text{senh}(\eta_i)\text{cos}(\eta_i) = \text{cosh}(\eta_i)\text{sen}(\eta_i) \tag{10.9}$$

Las propiedades de ortogonalidad de esta familia de modos son las mismas que las de los modos transversales de voladizo. Además estos modos cumplen la siguiente propiedad:

$$\int_0^L x\phi_i^a(x)dx = 0. \tag{10.10}$$

El momento cinético asociado a las coordenadas elásticas usando cualquiera de los dos juegos de modos resulta:

$$L(t) = \rho A \sum_i \int_0^L x \phi_i(x) dx. \quad (10.11)$$

Análogamente a lo que ocurría con la cantidad de movimiento asociada a las coordenadas elásticas de traslación en el problema de la barra, en este caso el momento cinético es nulo cuando se usan modos articulado-libre y en general no nulo cuando se usan modos de voladizo. Por otro lado, los términos cruzados de masa entre coordenadas elásticas y de referencia, que son múltiplos de las integrales en esta última ecuación, son por tanto no nulos con modos de voladizo y nulos con modos articulado-libre.

El momento cinético del péndulo flexible respecto al par de revolución será la suma del momento cinético de cada una de sus secciones respecto a dicho par. En nuestros casos queda:

$$L^c = (I_0 + \mathbf{q}_f^{cT} \mathbf{m}_{ff} \mathbf{q}_f^c) \dot{\theta}^c + \rho A \sum_i \left( \int_0^L x \phi_i^c(x) dx \right) (\dot{\mathbf{q}}_f^c)_i \quad (10.12)$$

$$L^a = (I_0 + \mathbf{q}_f^{aT} \mathbf{m}_{ff} \mathbf{q}_f^a) \dot{\theta}^a$$

donde el término  $\mathbf{q}_f^T \mathbf{m}_{ff} \mathbf{q}_f$  de ambas expresiones representa el incremento del momento de inercia respecto de la articulación que experimenta la barra por deformación. Cuando se usan modos articulado-libre la expresión carece de términos dependientes de las velocidades modales, pues el momento angular asociado a estos modos de vibración son nulos, como se ha demostrado mediante la ecuación (10.10). No es así en el caso de usar modos de voladizo. Tras el impacto, el momento de las fuerzas externas en el par de rotación es nulo, por tanto el momento cinético respecto a dicho punto debe mantenerse constante. Análogamente a lo que ocurría en el apartado anterior con la expresión de la cantidad de movimiento, si igualamos las expresiones anteriores del momento cinético a una constante y se deriva la ecuación resultante respecto al tiempo se obtiene la ecuación del movimiento de

la coordenada de referencia para momento externo nulo. Sin embargo, no se ha encontrado una analogía para la velocidad de sólido rígido equivalente, angular en este caso. Aunque cuando se usan modos articulado-libre las velocidades modales no aportan momento angular, el momento de inercia de la barra se modifica por la deformación. El incremento en el valor del momento de inercia de la barra por deformación lo aporta el término  $\mathbf{q}_f^{aT} \mathbf{m}_{ff} \mathbf{q}_f^a$  y éste no es constante tras el impacto. Por tanto, si la expresión completa del momento cinético debe mantenerse constante, la velocidad  $\dot{\theta}^a$  no puede ser constante.

Cuando los desplazamientos elásticos se mantienen pequeños, la modificación que sufre el momento de inercia de la barra por deformación es muy pequeña. Así las velocidades angulares definidas como

$$\omega_1^+ = \frac{L}{I_0} \quad (10.13)$$

se mantienen casi constantes tras el impacto. Esta definición coincide con la derivada de la coordenada de referencia solo en el caso de usar modos articulado-libre, que cumplen las condiciones de eje medio. En las simulaciones que se han hecho con una barra idéntica al impactor rígido del capítulo anterior, en ambos casos, el valor de esta velocidad angular tras el impacto no se modificaba más que en la séptima cifra decimal y siguientes. Por tanto, a efectos prácticos y en caso de pequeños desplazamientos elásticos, se pueden interpretar estos valores como las velocidades angulares equivalentes de sólido rígido de la barra deformable, y usar así los valores obtenidos para evaluar el coeficiente de restitución.

En el caso del péndulo que choca con un tope fijo con una velocidad angular inicial  $\omega_1^- = -10.6 \text{ rad/s}$  las simulaciones con modos articulado-libre y con modos de voladizo dan lugar a unas velocidades finales tras el impacto de  $6.282 \text{ rad/s}$  y  $6.302 \text{ rad/s}$ , respectivamente. Por tanto los respectivos coeficientes de restitución serían  $e^a = 0.593$  y  $e^c = 0.595$ . La evolución de las fuerzas de contacto en ambos problemas está comparada en la figura 10.10. La coincidencia es tan buena que las gráficas son casi indistinguibles.

La condición de contorno usada en el extremo unido a la rótula de la barra

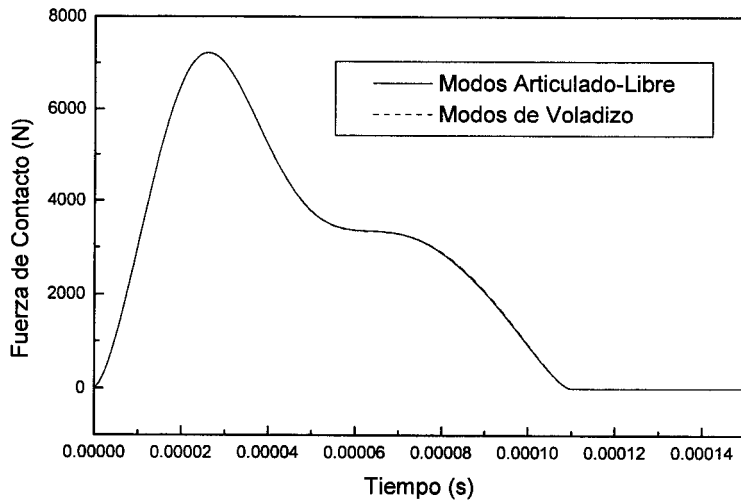


Figura 10.10: Fuerza de contacto en el impacto transversal de un péndulo

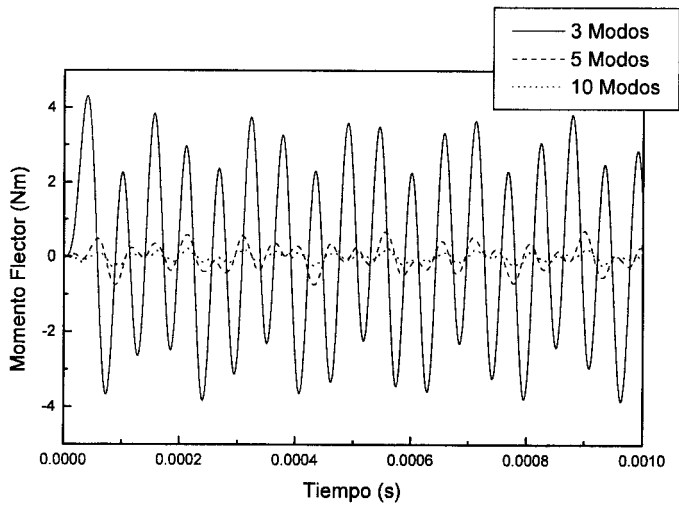


Figura 10.11: Momento flector en par de revolución

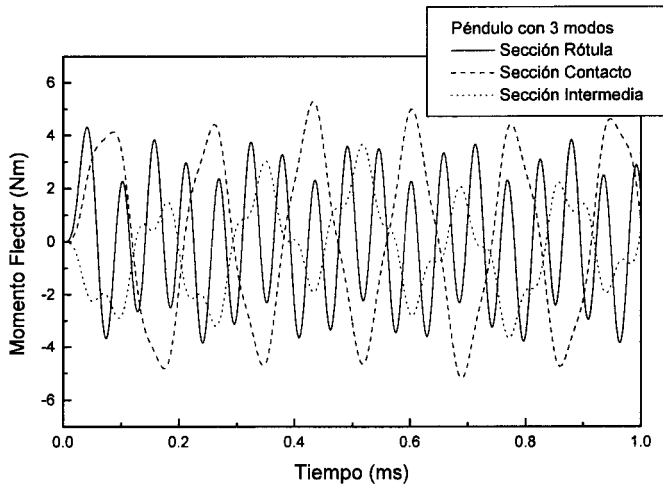


Figura 10.12: Momento flector en varias secciones

garantiza que el momento flector es nulo en caso de usar modos articulado-libre, pero no cuando se usan modos de voladizo. En la figura 10.11 se muestra la evolución del momento flector en dicha sección como consecuencia del impacto evaluado con diferente número de modos. Evidentemente estos valores son ficticios. En la figura 10.12 está representado la evolución frente al tiempo del momento flector en la sección unida a la rótula, en la sección de contacto y en la equidistante a éstas, de la solución que usa 3 modos para la flexión del péndulo. Se observa que los valores ficticios del flector en la rótula para bajo número de modos no son nada despreciables frente a los que aparecen en otras secciones.



# Capítulo 11

## Resumen, Conclusiones y Trabajos Futuros

### 11.1 Resumen

Esta tesis presenta diversos aspectos de la dinámica de impactos de sólidos. Se centran en impactos de baja o moderada velocidad, tras los que los sólidos permanecen íntegros excepto, quizás, en una pequeña zona alrededor de donde se produce el choque. Se ha considerado el caso de contacto entre superficies que tienen velocidad relativa normal, pero no tangencial, evitándose así el problema de fricción. Los estudios se centran en el proceso de contacto y especialmente la propagación de ondas elásticas. Se han estudiado estos procesos de forma analítica, numérica y experimental. Los modelos de sólidos más generales que se han analizado son barras elásticas, interconectadas con otros sólidos, que pueden experimentar grandes rotaciones y traslaciones.

Tras la introducción y revisión bibliográfica de los trabajos clásicos y recientes más relevantes sobre este tema, se comienza por desarrollar en el capítulo 3 las teorías clásicas de Newton y Poisson y con ellas los conceptos de coeficientes de

restitución cinemático y dinámico. Para plantear estas teorías es necesario hacer hipótesis sobre el proceso de contacto -las fases de compresión y restitución. En el capítulo 3 también se recuerdan otros procedimientos clásicos simplificados que aparecen en los libros de diseño mecánico, que se han llamado aproximaciones cuasiestáticas. La aproximación cuasiestática estructural es aplicable, fundamentalmente, cuando chocan sólidos rígidos en estructuras flexibles. La aproximación cuasiestática local, sin embargo, se usa para evaluar el proceso de contacto en sólidos de geometría masiva, que se supone que se deforman apreciablemente tan sólo en una pequeña zona adyacente a las superficies de contacto. Se ha usado la teoría de Hertz del contacto como ejemplo para obtener una ley fuerza-indentación.

En el capítulo 4 se desarrolla analíticamente el proceso que se ha dejado atrás en el capítulo anterior: la propagación de ondas elásticas inducidas por el impacto. Para ello se recurre al impacto axial de barras elásticas, entre ellas o con sólidos rígidos, pues las ondas que se inducen son no dispersivas, particularmente sencillas de analizar. Se demuestra analíticamente la interrupción y reaparición del contacto -impactos múltiples- que no parece estar previsto por las teorías clásicas, ni se puede concebir sin analizar el proceso de propagación de ondas. Al final del capítulo 4, se presentan dos alternativas a lo que podría definirse como coeficientes de restitución en estos problemas analíticos. Los que resultan de definir el coeficiente de restitución cinemático con las velocidades de los centros de masas de los sólidos elásticos o bien las velocidades de las superficies de contacto. En este caso último caso el coeficiente pierde su significado físico, pues deja de caracterizar las pérdidas energéticas durante el impacto.

El capítulo 5 analiza el mismo tipo de impactos que el capítulo 4 -en sólidos elásticos, de geometría dispersa, con proceso local simplificado- pero con un tratamiento formal distinto. En este caso se desarrolla bajo la teoría de vibraciones en medios continuos con superposición modal. Este método matemático nos permite estudiar la propagación de ondas elásticas en otro tipo de impactos: los transversales en barras, que dan lugar a ondas elásticas dispersivas. La solución aproximada

en los casos de impactos axiales en barras tiene un buen acuerdo con las soluciones exactas del capítulo 4. Sin embargo, el proceso no es eficiente en el caso de impactos transversales, debido a la inexactitud de las aproximaciones cuando se usa un número razonablemente alto de modos. Al final del capítulo 5, se muestra, usando como ejemplo una barra elástica giratoria, que las grandes rotaciones afectan al proceso de propagación de ondas elásticas en las barras, dándoles una componente adicional de dispersividad.

El capítulo 6 se dedica al primero de los métodos numéricos que se describen para el estudio de impactos en mecanismos flexibles: las ecuaciones generalizadas de conservación del impulso y cantidad de movimiento. Para plantearlas, se comienza por describir las ecuaciones del movimiento de estos sistemas mecánicos mediante la formulación en sistemas de referencia flotantes, que es la más popular hoy en día. Se comprueba que para completar el proceso del impacto es necesario plantear y resolver estos sistemas de ecuaciones algebraicas no una sino multitud de veces. Además, esta sucesión de balances no guarda relación con el proceso de físico de los impactos múltiples. Respecto al coeficiente de restitución, se observa que no puede ser interpretado de la misma forma que el que se define para el impacto de sólidos rígidos, pues no puede incluir pérdidas de energía por vibración de los sólidos. Cuando se usan coeficientes de restitución menores que la unidad, se obtienen resultados no congruentes al modificar la discretización espacial y temporal del problema.

En el capítulo 7 se clasifican los distintos tipos de relaciones fuerza-indentación que se pueden usar para analizar impactos con el método de los modelos continuos de fuerza de contacto. Se comienza por usar una fuerza lineal con la indentación, que carece de interpretación física. También se analizan modelos de fuerza de contacto que pueden representar pérdidas de energía se han dividido en viscoelásticos y elastoplásticos. Se han comentado los primeros, observándose que no parecen apropiados cuando se usan con sólidos flexibles. Se han introducido dos nuevos modelos de fuerza elastoplástica de contacto, basada en consideraciones analíticas

y experimentales, que se han llamado modelo plástico lineal y modelo plástico potencial.

En el capítulo 8 se aplican estos modelos a los impactos en barras elásticas. Se ha aplicado el modelo lineal usando elementos finitos para describir la elasticidad de las barras, obteniéndose resultados aceptables cuando los impactos están dominados por la propagación de ondas elásticas. Los modelos elastoplásticos desarrollados en el capítulo 7 se han aplicado al impacto transversal en una barra en voladizo. En este caso se han usado modos continuos como funciones de forma para describir la deformación de las barras, usando dos modelos: el de Euler-Bernouilli y el de Timoshenko. En este aspecto, se comprueba que los modos de Timoshenko dan lugar a respuestas con mayor contenido en altas frecuencias. Las simulaciones numéricas muestran que, para masas del impactor rígido del mismo orden que la de la barra flexible, aparecen múltiples periodos de contacto. Por último, se ha hecho un estudio sobre la evolución en el reparto de energía en el proceso del impacto.

En el capítulo 9 se comparan los resultados numéricos con datos experimentales de impactos axiales en barras flexibles libres. Los experimentos realizados usan dos tipos de impactores: una bola de acero y un péndulo de aluminio. Inicialmente, se plantea el problema del impacto de un sólido rígido en una barra elástica con superposición modal, sin considerar efectos locales. A continuación se resuelve el mismo problema, pero independizando ambos cuerpos e incluyendo un modelo continuo de fuerza de contacto, para considerar los efectos locales. Los resultados analíticos y experimentales demuestran que no se puede dejar de considerar los efectos locales cuando la masa del sólido impactor es relativamente pequeña. Mediante la simulación de la deformaciones por flexión del péndulo de aluminio, se explica la evolución de la fuerza de contacto cuando se usa este impactor. Se demuestra numérica y experimentalmente que en este caso la fuerza de contacto presenta varios máximos relativos. Sin embargo, no queda del todo claro de los resultados experimentales que se llegue a interrumpir el contacto durante el

impacto.

En el capítulo 10 se hace un estudio sobre la influencia de las condiciones de referencia en la simulación numérica de los problemas de impacto. Se distinguen dos tipos de condiciones de referencia: la conexión rígida y las que cumplen condiciones de eje medio. Se han estudiado dos situaciones para analizar este problema: el impacto de un sólido rígido en una barra libre y el de un péndulo elástico en un tope fijo. Se muestra numéricamente que cuando se usan conexiones rígidas el proceso de propagación de ondas no está bien representado, y que se obtienen esfuerzos ficticios en los contornos libres de los cuerpos flexibles.

## 11.2 Conclusiones

1. El impacto entre sólidos flexibles, particularmente cuando alguno de ellos tiene geometría dispersa, puede ocurrir en una sucesión de periodos de contacto. La fuerza de contacto puede presentar varios máximos relativos en cada uno de los periodos de contacto. Es necesario analizar la propagación de ondas elásticas inducidas por el impacto para comprender este fenómeno. Se ha comprobado que periodos adicionales de contacto no tienen porqué incrementar la energía disipada en el proceso.

2. Para el caso del impacto entre sólidos elásticos, el coeficiente de restitución cinemático puede ser definido usando las velocidades de sus centros de masas o bien las velocidades de los puntos de contacto. Si se usa la primera opción, éste coincide con el coeficiente de restitución dinámico y puede representar las pérdidas de energía por irradiación de ondas elásticas. Sin embargo, no tiene sentido pretender incluirlo como dato en problemas donde se modele la elasticidad de los sólidos, y por tanto dichas ondas. Si se usan las velocidades de los puntos de contacto, el coeficiente de restitución que se obtiene no representa pérdidas energéticas en el impacto.

3. Se pueden obtener soluciones analíticas, sin considerar efectos locales, al

impacto de cuerpos rígidos en sólidos elásticos mediante superposición modal. Para ello es necesario utilizar dos juegos de modos de vibración: los correspondientes a los dos sólidos unidos y los correspondientes al sólido elástico. Un número reducido de dichos modos pueden describir con bastante exactitud el proceso de propagación de ondas para el caso del impacto axial. En el caso del impacto transversal estas soluciones son muy costosas de evaluar numéricamente y el grado de exactitud obtenido no es del todo satisfactorio. Los impactos múltiples son en gran medida responsables de la complejidad de evaluar estas soluciones.

4. Cuando se usan las ecuaciones generalizadas de conservación del impulso y cantidad de movimiento para la simulación de impactos, en general, es necesario plantear y resolver balances varias veces durante la integración numérica. Esta sucesión de balances no guarda relación con el fenómeno de los impactos múltiples y su número e intensidad son desconocidos a priori. Estos aspectos varían mucho para un mismo problema cuando se modifica la discretización temporal y espacial, dando lugar a resultados incongruentes cuando el coeficiente de restitución que se usa es menor que la unidad. El coeficiente de restitución es conceptualmente distinto al definido para el impacto de sólidos rígidos. El coeficiente que se incluye en estas ecuaciones debería representar sólo pérdidas de energía en el proceso local, no la invertida en ondas elásticas.

5. Si no se tiene por objeto introducir pérdidas locales de energía, se puede usar un modelo lineal fuerza-indentación para simular impactos en sólidos elásticos y obtener una buena representación del proceso de propagación de ondas. Para esto, y en caso de usar el método de los elementos finitos, la rigidez del contacto local debe ser del mismo orden que la del elemento adyacente al punto de contacto.

6. Si las fuerzas de contacto viscoelásticas modelan las pérdidas de energía durante el impacto por radiación de ondas elásticas, no tiene sentido usarlas cuando se trabaja con modelos de sólidos flexibles. Si se hiciera, se estaría considerando dos veces el mismo proceso.

7. Se han desarrollado dos modelos de fuerza de contacto elastoplástica, que

se han llamado plástica lineal y plástica potencial, basados en consideraciones analíticas y experimentales. Al simular impactos con la fuerza de contacto plástica potencial aparecen menores pérdidas de energía, menores periodos de contacto y mayores picos de fuerza que cuando se usa el modelo plástico lineal.

8. Cuando se usa el modelo de vigas de Timoshenko para problemas de impacto, aparecen vibraciones de mayor frecuencia en la respuesta que cuando se usa el modelo de Euler-Bernouilli. Esto no significa grandes diferencias en los desplazamientos elásticos que resultan, pero sí en los esfuerzos internos en el sólido flexible. Estos esfuerzos son bastante mayores cuando se usa el modelo de Timoshenko.

9. En el caso del impacto de sólidos rígidos en estructuras flexibles, cuando las masas de ambos sólidos es del mismo orden, la aproximación cuasiestática estructural puede dar una buena aproximación en lo que a desplazamientos y deformaciones elásticas se refiere. Sin embargo, debido a la aparición de impactos múltiples, las fuerzas de contacto que se obtienen con la aproximación cuasiestática pueden ser bastante menores que las reales. Se ha observado numéricamente que existe un instante en el que toda la energía de la estructura elástica está en forma de energía de deformación y casi nada en forma de energía cinética de vibración. Este instante coincide aproximadamente con el instante de máxima compresión.

10. En el impacto transversal de un sólido rígido en una barra elástica, el periodo aparente de contacto -que es el tiempo transcurrido desde el inicio del primer periodo de contacto hasta el final del último- es aproximadamente igual a la mitad del periodo fundamental de vibración de la barra elástica cuando tiene unido el sólido rígido en su extremo. Sin embargo, el tiempo real de contacto -suma de los periodos de tiempo en que ambos cuerpos están realmente en contacto- puede ser bastante menor. El tiempo real de contacto es tanto mayor cuanto menor es la rigidez local de las superficies de contacto. Los picos de fuerza de contacto son tanto mayores cuanto mayores son dichas rigideces locales.

11. En el impacto axial de sólidos rígidos en barras elásticas libres, cuando la masa del impactor es mucho menor que la de la barra, es necesario considerar

efectos locales para analizar el impacto. Si no se consideran, se sobreestiman las fuerzas de contacto y la duración del impacto, que en este caso siempre coincide con el tiempo que tardan las ondas elásticas en recorrer dos veces la longitud de la barra. Además, el impactor no cambia el sentido del movimiento tras el impacto. Modelos que consideran efectos locales presentan un excelente acuerdo con resultados experimentales. Se observa que el impacto concluye en un periodo mucho menor de tiempo y que no es necesario que vuelvan a la zona de contacto las ondas elásticas generadas para terminar el proceso. Además, el impactor rígido siempre cambia el sentido de su movimiento tras el impacto.

12. En el impacto axial en barras elásticas libres, si se sustituye el impactor rígido y libre por un péndulo elástico, se modifica en gran medida la evolución de la fuerza de contacto. Debido a la flexión del péndulo, disminuye el máximo de la fuerza de contacto y aumenta la duración del periodo de contacto. Cuando se usa el péndulo, la fuerza presenta varios máximos relativos y se puede interrumpir el contacto durante el choque.

13. Se han analizado dos tipos condiciones de referencia para simular el impacto de sólidos elásticos con posibilidad de movimientos de sólido rígido. Se han usado conexiones rígidas y conexiones no rígidas que cumplen las condiciones de eje medio. Cuando se usan estas últimas, se obtienen modos de vibración para describir la deformación que son autofunciones del problema a resolver cuando el sólido que impacta queda libre. En este caso, la derivada temporal de la coordenada de referencia coincide con la velocidad equivalente de sólido rígido del cuerpo elástico. Las ecuaciones del movimiento asociadas a las coordenadas elásticas y de referencia resultan totalmente desacopladas, excepto a efectos del cálculo de la indentación. Usando condiciones de eje medio, se describe adecuadamente la propagación de ondas inducidas por el impacto. En cambio, cuando se usan conexiones rígidas, se obtienen modos de vibración para describir la deformación del cuerpo elástico que son tan sólo funciones admisibles para este fin. Las conexiones rígidas dan lugar a coordenadas de referencia cuyas derivadas no indican la veloci-



dad equivalente de sólido rígido. En este caso, las ecuaciones del movimiento están totalmente acopladas. La propagación de ondas elásticas no está bien descrita con estas funciones de forma y aparecen esfuerzos ficticios en el contorno libre al que se une el sistema local de referencia. Sin embargo, excepto en este último aspecto, se obtienen buenos acuerdos entre los resultados de usar unas u otras condiciones de referencia.

## 11.3 Trabajos futuros

1. Encontrar los parámetros que controlen la validez de las aproximaciones cuasi-estáticas, locales o estructurales, en casos generales. En los ejemplos sencillos que se han resuelto se observa que la relación de masas entre los sólidos implicados y su geometría -compacta o dispersa- son los parámetros fundamentales. Cuando no se consideran no linealidades en el comportamiento de los materiales y se consideran pequeños desplazamientos elásticos, la velocidad relativa del impacto no influye en el tipo de respuesta. Esta velocidad relativa será uno de los parámetros fundamentales cuando se consideren dichas no linealidades.

2. Estudiar la fricción en el contacto para analizar impactos oblicuos. La fricción en un proceso disipativo que afecta al proceso de deformación local y a la propagación de ondas. Puede darse con adherencia o deslizamiento, condiciones que pueden cambiar durante el impacto. Los aspectos geométricos en la zona de contacto se complican mucho cuando hay velocidad relativa transversal.

3. Estudiar el efecto de grandes desplazamientos elásticos en el impacto. Cuando se consideran, deja de tener un sentido claro los que son impactos normales u oblicuos. En estos casos, la hipótesis de que la configuración de los sólidos no cambia durante el impacto deja de tener sentido, al cambiar la orientación relativa de la superficies de contacto por deformación.

4. Comprobar experimentalmente la existencia del fenómeno de los impactos múltiples. Este fenómeno es característico de los impactos en que intervienen

sólidos elásticos de geometría dispersa. Parece complicado evaluar con exactitud los distintos periodos de contacto y separación durante el impacto. Debido a los impactos múltiples, pequeñas variaciones en las condiciones del impacto dan lugar a grandes diferencias en las respuestas.

5. Obtener experimentalmente los esfuerzos internos inducidos por el impacto en los sólidos flexibles. En esta tesis se han obtenido resultados muy dispares en este sentido, dependiendo del número o tipo de modos que se incluyen en las simulaciones.

6. Estudiar experimentalmente el proceso de deformación local durante el impacto. En esta tesis se ha trabajado con dos modelos distintos. Los impactos axiales en barras libres se pueden usar para determinar la validez de estos modelos. En esta tesis se ha comprobado que se puede simular con bastante exactitud este tipo de impactos. De los datos que se obtienen de la deformación de la barra elástica se puede obtener abundante información sobre cómo ha sido el proceso local en el impacto.

7. Estudiar la transmisión y reflexión de ondas elásticas entre las barras de mecanismos flexibles, y la influencia en el proceso de las grandes rotaciones y traslaciones. En esta tesis se ha encontrado que puede ser inapropiado el análisis con síntesis modal de componentes de las ondas inducidas por el impacto.

# Capítulo 12

## Referencias

- Agrawal, O.P. (1984), *Application of Deformable Body Mean Axis to Flexible Mechanical Systems*, Doctoral Dissertation, Mechanical Engineering, University of Illinois, Chicago.
- Ansys User's Manual* (1992), Swanson Analysis Systems, Houston.
- Bakr, E.M. (1997), Impact Analysis of Flexible Multi-Armed Terrestrial Robots, *Proceedings of DETC'97*, Sacramento, California.
- Bathe, K.J. (1982), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Danial, A.N. y Doyle, J.F. (1995), Transverse Impact of a Damped Plate near a Straight Edge, *Journal of Vibrations and Acoustics*, **117** pp. 103-108.
- Dowling, N.E. (1993), *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Dubowsky, S. y Freudenstein, F. (1971), Dynamic Analysis of Mechanical Systems With Clearances, Part 1: Formation of Dynamic Model; Part 2: Dynamic Response, *Journal of Engineering for Industry*, **931** pp. 305-316.
- Dubowsky, S. y Gardner, T.N. (1977), Design and Analysis of Multilink Flexible Mechanisms With Multiple Clearance Connections, *Journal of Engineering for Industry*, **991** pp. 88-96.

- Escalona, J.L., Mayo, J. y Domínguez, J. (1998), A Critical Study of the Use of the Generalised Impulse Momentum Balance Equations in Flexible Multibody Systems, *Journal of Sound and Vibration*, **2173** pp. 523-545.
- Escalona, J.L. (1998), Axial Impacts of Rigid Bodies on Flexible Rods, Forshungbericht FB-36, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart.
- Escalona, J.L., Mayo, J. y Domínguez, J. (1999), New Numerical Method for the Dynamic Analysis of Impact Loads in Flexible Beams, *Mechanisms and Machine Theory*, **34** pp. 765-780.
- Escalona, J.L., Mayo, J., Eberhard, P. y Hu, B. (1999), Dynamics of Axial Impacts on Rods , *Proceedings of the Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, IFToMM, Oulu (Finland).
- Escalona, J.L., Mayo, J. y Domínguez, J. (1999), Defining the Coefficient of Restitution for the Impact of Free and Constrained Bodies, *17th Bienial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, ASME, Las Vegas (Nevada, USA).
- Escalona, J.L., Mayo, J. y Domínguez, J. (1999), Influence of Reference Conditions in the Analysis of Impact-induced Elastic Waves , *Euromech 404. Advances in Computational Multibody Dynamics*, Lisbon (Portugal).
- Gau, W.H. y Shabana, A.A. (1991), Use of Generalized Impulse Momentum Equations in Analysis of Wave Propagation, *Journal of Vibration and Acoustics*, **113** pp. 532-542.
- Gau, W.H. y Shabana, A.A. (1992), Effect of Finite Rotation on the Propagation of Elastic Waves in Constrained Mechanical Systems, *Journal of Mechanical Design*, **114** pp. 384-393.
- Gau, W.H. y Shabana, A.A. (1992), Use of Finite Element Method in the Analysis of Impact-Induced Longitudinal Waves in Constrained Elastic Systems, *Journal of Mechanical Design*, **117** pp. 336-342.
- Goldsmith, W. (1960), *Impact. The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids*, Edward Arnold, London.
- Graff, K.F. (1991), *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, New York.

- Hartenberg, R.S. y Denavit, I. (1964), *Kinematic Synthesis of Linkages*, Mc. Graw-Hill, New York.
- Haug, E.J., Wu, S.C. y Yang, S.M. (1986), Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact and Constraint Addition-Deletion - Partes I,II y III. *Mechanisms and Machine Theory*, **21** pp. 401-425.
- Hertz, H. (1881), Über die Berührung Fester Elastischer Körper, *J. Reine Angew. Math.* (Crelle), **92**.
- Hills, D.A., Nowell, D. y Sackfield, A. (1993), *Mechanics of Elastic Contacts*, Butterworth-Heinemann.
- Huang, T.C. (1961), The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple End Conditions, *Journal of Applied Mechanics*, **28** pp. 579-584.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Sackman, J.L., Curnier A. y Kanoknukulchai, W. (1976), A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **8** pp. 249-276.
- Hwang, K.H. y Shabana, A.A. (1995), Effect of Mass Capture on the Propagation of Transverse Waves in Rotating Beams, *Journal of Sound and Vibration*, **186**(3) pp. 495-525.
- Johnson, K.L. (1985), *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Juvinall, R.C. (1967), *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill, New York.
- Khulief Y.A. y Shabana A.A. (1987), A Continuous Force Model for the Impact Analysis of Flexible Multibody Systems, *Mechanisms and Machine Theory*, **223** pp. 213-224.
- Lankarani, H.M. y Nikravesh, P.E. (1992), Canonical Impulse-Momentum Equations for Impact Analysis of Multibody Systems, *Journal of Mechanical Design*, **114** pp. 180-186.
- Lankarani, H.M. y Nikravesh, P.E. (1994), Continuous Contact Force Models for Impact Analysis of Multibody Systems, *Nonlinear Dynamics*, **5** pp. 193-207.

- Lee, Y., Hamilton, J.F. y Sullivan J.W. (1983), The Lumper Parameter Method for Elastic Impact Problems, *Journal of Applied Mechanics*, **50** pp. 823-827.
- Lee, T.W. y Wang A.C. (1983), On the Dynamics of Interminent Motion Mechanisms, Part I. Dynamic Model and Response, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **105** pp. 534-540.
- Lee, H.S. y Yoon, Y.S. (1994), Impact Analysis of Flexible Mechanical Systems using Load-Dependent Ritz Vectors, *Finite Elements in Analysis and Design*, **15** pp. 201-217.
- Lim, C.T. y Stronge, W.J. (1999), Oblique Elastic-Plastic Impact between Rough Cylinders in Plane Strain, *International Journal of Engineering Science*, **37** pp. 97-122.
- Love, A.E.H. (1944), *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York.
- Mason, H.L. (1936), Impact on Beams, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **58**, A-55.
- Meirovitch, L. (1967), *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company, New York.
- Newton, I. (1686), *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (Traducido al inglés por A. Motte, (1848)), New York, D. Adee.
- Norma Básica de Edificación NBE-MV103-1972. Cálculo de Estructuras de Acero Laminado en Edificación* (1975), Ministerio de Obras Públicas y Transportes.
- Oppenheim, A.V. y Schafer R.W. (1975), *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall.
- Palas, H., Hsu, W.C. y Shabana, A.A. (1992), On the Use of Momentum Balance and the Assumed Modes Method in Transverse Impact Problems, *Journal of Acoustics and Vibration*, **114** pp. 364-373.
- Poisson, S.D. (1833), *Traité de Mécanique*, **2**. 2 Edicion. Paris, Bechelier.
- Shabana, A.A. (1986), *User's Guide to DAMS: Dynamic Analysis of Multibody Systems*, University of Illinois at Chicago, Chicago.
- Shabana, A.A. (1989), *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley and Sons.
- Shabana, A.A. (1991), *Theory of Vibrations*, Springer-Verlag, New York.

- Shao, C.W., Liou, F.W. y Patra, A.K. (1993), A Contact Phase Model for the Analysis of Flexible Mechanisms Under Impact Loading, *Computers & Structures*, **494** pp. 617-623.
- Sinclair, G., Follansbee, P.S., Johnson, K.L. (1985), Quasi-static Normal Indentation of an Elasto-plastic Half-space by a Rigid Sphere II. Results, *International Journal of Solid Structures*, **21.8** pp. 865-888.
- Stoianovici, D., Hurmuzlu, Y. (1996), A Critical Study of the Applicability of the Rigid-Body Collision Theory, *Journal of Applied Mechanics* , **63**, pp. 307-316.
- Strang, G. (1980), *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York.
- Stronge, W.J. (1990), Rigid Body Collisions with Friction, *Proc. R. Soc. Lond.*, **431** pp. 169-181.
- St. Venant, B.D. y Flamant (1883), Résistance Vive ou Dynamique des Solides. Représentation Graphique des Lois du Choc Longitudinal, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **97**.
- St. Venant, B.D. y Flamant (1889), Courbes Représentatives des Lois du Choc Longitudinal et du Choc Transversal d'une Barre Prismatique, *J. École Polytech.*, Paris, **59**.
- Tabor, D. (1951), *Hardness of Metals*, Oxford University Press.
- Thorton, C. (1997), Coefficient of Restitution for Collinear Collisions of Elastic-Perfectly Plastic Spheres, *Journal of Applied Mechanics*, **64** pp. 383-386.
- Timoshenko, S.P. (1955), *Vibration Problems in Engineering*, Van Nostrand Company.
- Timoshenko, S.P. y Goodier, J.N. (1970), *Theory of Elasticity*, Mc. Graw-Hill, 3 Edición, New York.
- Wehage, R.A. y Haug E. J. (1982), Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Intermittent Motion, *Journal of Mechanical Design*, **104** pp. 778-784.
- Wu, S.C. y Haug, E.J. (1990), A Substructure Technique for Dynamics of Flexible Mechanical Systems With Contact-Impact, *Journal of Mechanical Design*, **112** pp. 390-398.
- Yigit, A.S., Ulsoy, A.G. y Scott, R.A. (1990), Dynamics of a Radially Rotating Beam With Impact, Part 1: Theoretical and Computational Model; Part 2: Experimen-

- tal and Simulation Results. *Journal of Vibration and Acoustics*, **112** pp. 65-77.
- Yigit, A.S. y Christoforou, A.P. (1995), Impact Dynamics of Composite Beams. *Composite Structures*, **32** pp. 187-195.
- Yigit, A.S. y Christoforou, A.P. (1997), Effect of Flexibility in Transverse Impact Problems *Proceedings of DETC'97*, Sacramento, California.