ESTIMANDO ENGEL ELASTICIDADES A PARTIR DE CURVAS DE LORENZ Y DE CONCENTRACIÓN. EJEMPLO DE LA TABLA 8 DE ERNEST ENGEL (1857)

JESÚS BASULTO SANTOS

JOSÉ ANTONIO CÁMUÑEZ RUÍZ

Universidad Sevilla

e-mail: basulto@us.es

Resumen

Desde el trabajo pionero de Engel en 1857, la estimación de las curvas de Engel y el cálculo de sus elasticidades ha ocupado una posición central en todos los estudios sobre los presupuestos de las familias. Una curva de Engel relaciona los gastos sobre un bien particular de un hogar sobre los gastos totales del hogar. Mientras que la elasticidad de Engel sobre un bien mide el porcentaje de cambio en el gasto realizado sobre dicho bien dividido por el porcentaje de cambio del gasto total del hogar. La aproximación tradicional para estimar una curva de Engel consiste en seleccionar una forma funcional apropiada para cada bien, estimar sus parámetros y, finalmente, obtener la elasticidad a nivel de cada gasto total. Una alternativa es usar curvas de concentración que permiten calcular las elasticidades para cada valor de los gastos totales y sus correspondientes errores de estimación. En plan de este trabajo es ilustrar el método de las curvas de concentración a partir de los datos de renta anual y gasto en alimentos, medidos en francos, de la Tabla 8 que Engel uso en su trabajo 1857.

Palabras clave: Curvas de Engel, Curvas de Concentración, Elasticidades.

Área Temática: Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa.

Abstract

The traditional parametric approach of estimating Engel is to select an appropriate functional form for each good, estimate it and use the estimated parameters to obtain the elasticity at any level of total expenditure. An alternative to the direct estimation approach is to infer total expenditure elasticity from concentration curves and the calculation of standard errors evaluated at different levels of total expenditure.

Key Words: Engel Curves, Concentration Curves, Elasticities.

Thematic Area: Quantitative Methods for Economic and Business.

1. INTRODUCCIÓN

Una curva de Engel es una función $Y = g(X)$ que relaciona la variable Y, que recoge el gasto en un bien de consumo para distintos hogares, con la variable X, la renta de cada hogar, bajo el supuesto de que el precio del bien permanezca fijo. Para m bienes de consumo deberemos definir m funciones $Y_k = g_k(X)$, $k = 1,2,...,m$. Una alternativa a la renta del hogar es el gasto total en los m bienes.

Ernst Engel (1821,1896) publicó en 1857 un trabajo sobre "The relations of production and consumption in the Kingdom of Saxony", donde afirmaba que "The poorer a family, greater the part of total expenditures must be spent on food". Por esta sentencia, que sería denominada "Ley de Engel", Engel es recordado para siempre. Engel propuso su empírica Ley a partir de los presupuestos familiares recogidos en distintas partes de Bélgica por el estadístico Éd. Ducpetiaux (1804,1868), un total de 199 presupuestos, y también, de los 36 presupuestos del estadístico Frédéric Le Play (1806,1882) recogidos a lo largo de Europa. Estos tres autores fueron muy influidos por las aplicaciones estadísticas a las ciencias sociales de Quetelet..

Nuestros interés en el artículo de Engel de 1857 es la Tabla de Datos identificada como "Table 8", donde Engel recoge 29 valores de la variable X, "Annual income of a family in francs" (francos Belgas), y los correspondientes valores del cociente $w = \frac{Y}{X}$, la proporción de gastos en alimentación respecto de la renta, "Food expenditure in percentages". Nosotros hemos calculado la variable Y que recoge los gastos en alimentación en francos Belgas. En la **Tabla 4** del apéndice se recogen los valores de X e Y en las columnas 1 y 2, que llamamos renta y Food (grupo de alimentos), respectivamente.

Estos datos construidos por Engel han sido estudiados por D. Perthel (1975) a partir de los 199 presupuestos de Ducpetiaux.

Una vez que se ha estimado la curva de Engel, $Y = g(X)$, la principal aplicación es el cálculo de las elasticidades de gastos en alimentación para cada valor de la renta.

Para estimar una curva de Engel podemos seguir tres alternativas: (1) Proponer distintos modelos que se ajusten a los datos. Un ejemplo es el modelo lineal $q = \alpha + \beta x$ de Allen y Bowley (1935) siendo $q = \frac{y}{p}$ la cantidad del bien de consumo de cada hogar y p es su precio. Otro ejemplo es modelo $w = \alpha + \beta \log(x)$ de Working (1943) y Leser (1963). (2) Proponer modelos no paramétricos que se ajusten a los datos. Un ejemplo es el artículo de Del Oro, Riobóo Almanzor y Rodriguez Rey (2000). (3) Proponer curvas de Lorenz para la renta y curvas de concentración para distintos tipos de gastos de cada uno de los bienes considerados. Artículo que siguen este procedimientos son: Binh Tran-Nan and Nripesh Podder (1992), Nripesh Podder and Binh Tran-Nan (1994). Nosotros seguiremos esta última alternativa.

2. CURVAS DE LORENZ DE LA RENTA Y DE CONCENTRACIÓN DEL GRUPO ALIMENTACIÓN

Las curvas de Lorenz y de Concentración son estudiadas en profundidad por Kakwani, N. (1980). Vamos a definir las curvas de Concentración siguiendo a Kakwani (1980) .

Partiendo una variable aleatoria $X \geq 0$ con función de densidad $f(X)$ y su correspondiente función de distribución $F(X)$, y una función $Y = g(X)$ continua y, en alguna fórmula, supondremos que su primera derivada es continua, siendo $g(X) \geq 0$, definimos una curva de concentración a partir de las dos siguientes funciones:

$$F_1\left(g\left(x\right)\right)=\frac{1}{E\left(g\left(X\right)\right)}\int_0^x g\left(X\right)f\left(X\right)dX \ ,$$

y la función de distribución $F\left(X\right)$. Suponemos que existe la esperanza de $g\left(X\right)$.

Donde $F_1\left(g\left(x\right)\right)=0$ cuando $x\rightarrow 0$, y $F_1\left(g\left(x\right)\right)=1$ cuando $x\rightarrow\infty$.

La relación entre las funciones $F_1\left(g\left(x\right)\right)$ y $F\left(X\right)$ define la curva de concentración de la función $Y=g\left(X\right)$. La curva de concentración se obtiene invirtiendo dichas funciones y eliminando la variable x, si las funciones son invertibles. Otra alternativa, es representar gráficamente los valores de las funciones $F_1\left(g\left(x\right)\right)$ (en la ordenada) y $F\left(x\right)$ (en la abscisa, para cada valor de x, que genera la curva de concentración $C\left(u\right)$ en el cuadrado unidad, siendo $u=F\left(x\right)$.

Las derivadas primera y segunda de la curva de concentración $C\left(u\right)$ son:

$$C^{'}\left(u\right)=\frac{g\left(x\right)}{E\left(g\left(X\right)\right)} \ , \ C^{"}\left(u\right)=\frac{g^{'}\left(x\right)}{E\left(g\left(X\right)\right)f\left(x\right)}.$$

Cuando $g^{'}\left(x\right)>0$ para todo $x\geq 0$, la curva de concentración $C\left(u\right)$ es convexa y está por debajo del segmento de igualdad.

Cuando $g^{'}\left(x\right)<0$ para todo $x\geq 0$, la curva de concentración $C\left(u\right)$ es cóncava y está por encima del segmento de igualdad. Cuando $g^{'}\left(x\right)=0$ para todo $x\geq 0$, la curva coincide con el segmento de igualdad.

Cuando $g\left(X\right)=X$ la curva de concentración es la curva de Lorenz.

Las curvas de Lorenz de la renta y de concentración del grupo alimentación son recogidas en la siguiente gráfica.

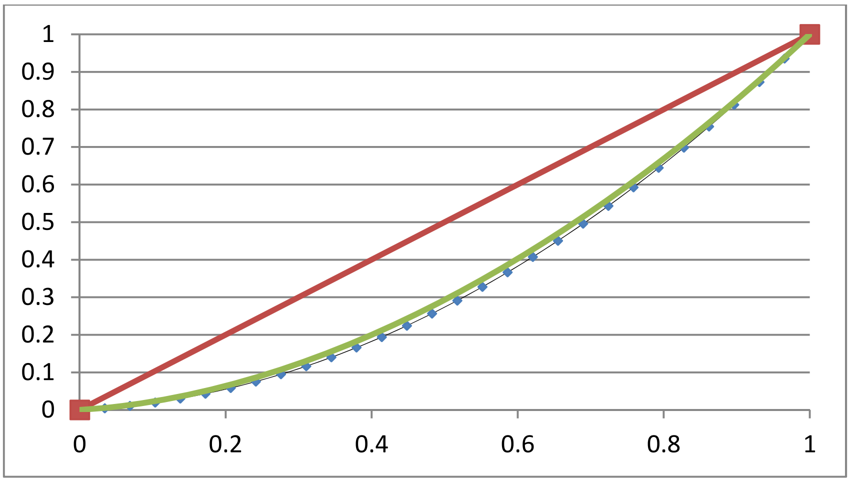

Figura 1. Curva de Lorenz y de Concentración

Vemos que la curva de concentración de alimentos está por encima de la curva de Lorenz de la renta, que nos dice que se trata de un bien necesario. Estas curvas empíricas son $L[u]$ y $C[u]$.

El índice de Gini de la renta es 0,3017, y el índice de concentración del grupo alimentación es igual a 0,2768.

La fórmula para calcular el índice de Gini de la renta es:

$$G_x = \frac{\sum_{k=1}^{29-1}\left(x_{k+1}-x_k\right)F_k\left(1-F_k\right)}{\overline{x}},$$

con una media de la renta es $\overline{x}=1600$ francos belgas.

Para el índice de concentración de Y (alimentación), la fórmula es:

$$C_y = \frac{\sum_{k=1}^{29-1}\left(y_{k+1}-y_k\right)F_k\left(1-F_k\right)}{\overline{y}},$$

Con una media del gasto en el grupo de alimentación $\overline{y}=952{,}172759$ francos belgas.

3. AJUSTE DE FUNCIONES CONTINÚAS A LAS CURVAS DE LORENZ Y DE CONCENTRACIÓN

A continuación ajustamos Curvas matemáticas a estas dos curvas para trabajar con funciones continuas y derivables. Estas curvas matemáticas son de la forma:

$$H\left[u\right]=u^{\alpha}e^{\beta(u-1)}e^{\varepsilon},$$

donde u es la variable que está en el intervalo [0,1], que corresponden a los datos de la columna F, Tabla 1, y los parámetros α y β son dos variables positivas que debemos calcular buscando el mejor ajuste a las curvas de Lorenz, $L[u]$y de concentración, $C[u]$, observadas.

El modelo que utilizamos es:

$$\log\left(H\left(u\right)\right)=\alpha\log\left(u\right)+\beta\left(u-1\right)+\varepsilon,$$

Los valores observados de la variable dependiente son las observaciones de la curva de Lorenz y de la curva de Concentración, siendo u igual a la columna F de la Tabla 1. El valor ε son las perturbaciones del modelo que suponemos que cumplen las hipótesis de independencia, homoscedasticidad, y esperanza cero. Estos modelos los ajustamos por mínimos cuadrados ordinarios con el programa Gretl.

Los valores de los parámetros estimados para la curva Lorenz de las rentas son: $\hat{\alpha}_1=1{,}46$ y $\hat{\beta}_1=0{,}548$. Para la curva de Concentración de alimentación los valores de los parámetros son: $\hat{\alpha}_2=1{,}441$ y $\hat{\beta}_2=0{,}45$.

La Tabla 2 recoge los valores ajustados de las dos funciones teóricas, viendo que el valor estimado del índice de Gini de la renta igual a 0,3010 y la estimación del índice de concentración del grupo alimentación es igual a 0,277.

A continuación recogemos los gráficos de las curvas de Lorenz observada y ajustada.

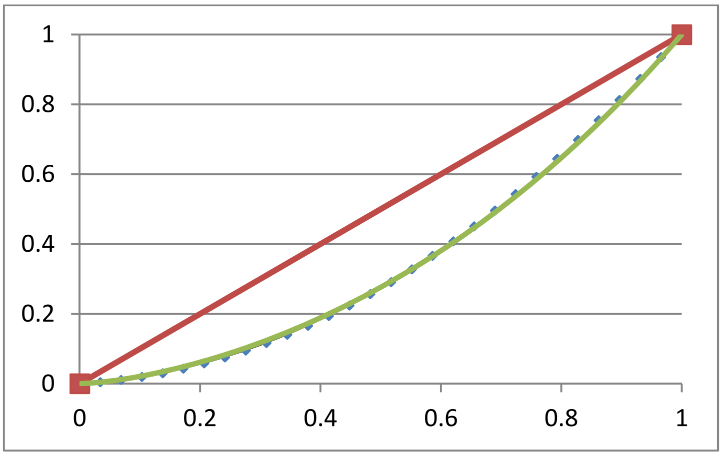

Figura 2. Curvas de Lorenz observada y ajustada

Y las curvas de concentración observada y ajustada.

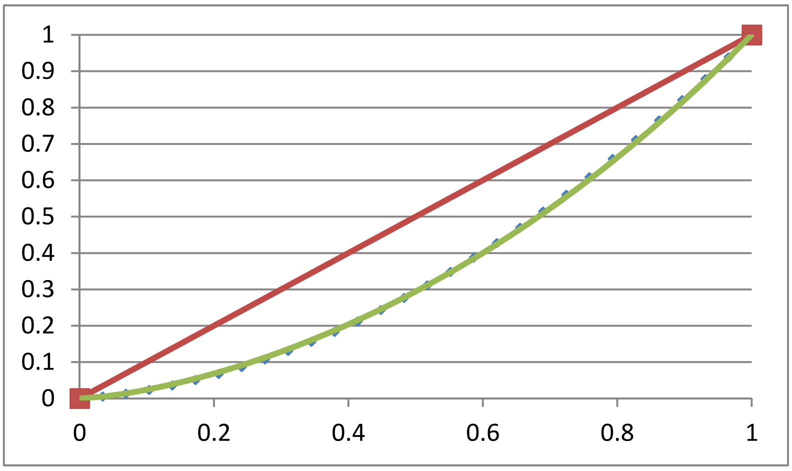

Figura 3. Curvas de concentración observada y ajustada

4. CÁLCULO DE ELASTICIDADES DEL CONSUMO DE ALIMENTOS SOBRE LAS RENTAS

A continuación vamos a calcular las elasticidades de la función de Engel que relaciona Consumo de alimentos con la Renta, formalmente $Y = g(X)$. Esta función no es necesaria conocerla para calcular las elasticidades de consumo de alimentación versus rentas.

Recordemos que la curva de Lorenz relaciona dos funciones: la función de distribución $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, que es la proporción de familias con rentas menores o iguales a x. La función $f(x)$ es la función de densidad de la renta (empíricamente sería un histograma). La derivada primera de $F(x)$ es: $f(x)$.

Para la acumulación de rentas divididas por la renta media resulta la función: $F_1(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{E(X)}$, que es la suma de rentas hasta la renta x dividida por el total de todas las rentas. La derivada de es igual a $\frac{xf(x)}{E(X)}$.

Ahora, llamando u=F(x) y $v = F_1(x)$, ahora derivando la curva de Lorenz, es decir $\frac{dv}{du}$, resulta la expresión: $L'(u) = \frac{dF_1(x)}{dF(x)} = \frac{x_u}{E(X)}$, siendo x_u el cuantil u, es decir el un valor de la renta que tiene la proporción u de familias con rentas por debajo de la renta x. También podemos expresar x_u como una función cuanti $Q(u)$ que relaciona una proporción de familias con la renta x_u.

Así escribiremos la derivada de la función de Lorenz como: $L'(u) = \frac{Q(u)}{E(X)}$. Ahora, la integral es $\int_0^1 L'(u)du = 1 = \int_0^1 \frac{Q(u)}{E(X)} du$.

Si ahora multiplicamos la derivada $L'(u)$ por la renta media observada $E(X)$,que es igual a 1600 francos belgas, resulta la siguiente función cuantil $L'(u)E(X) = Q(u)$, cuya integral es igual a $E(X)$.

En la Tabla 3 recogemos la función cuantil $L'(u)E(X)$:

El valor medio de la renta (1600 francos) que genera una función Cuantil con área por debajo igual a la media 1600 resulta un valor de 1599,672.

A partir de la función Cuantil, $L'(u)E(X)$, invertimos las variables y así ya podemos estimar la Función de Distribución F(x) de la renta X , siguiente:

El gráfico de la función de distribución de la renta es:

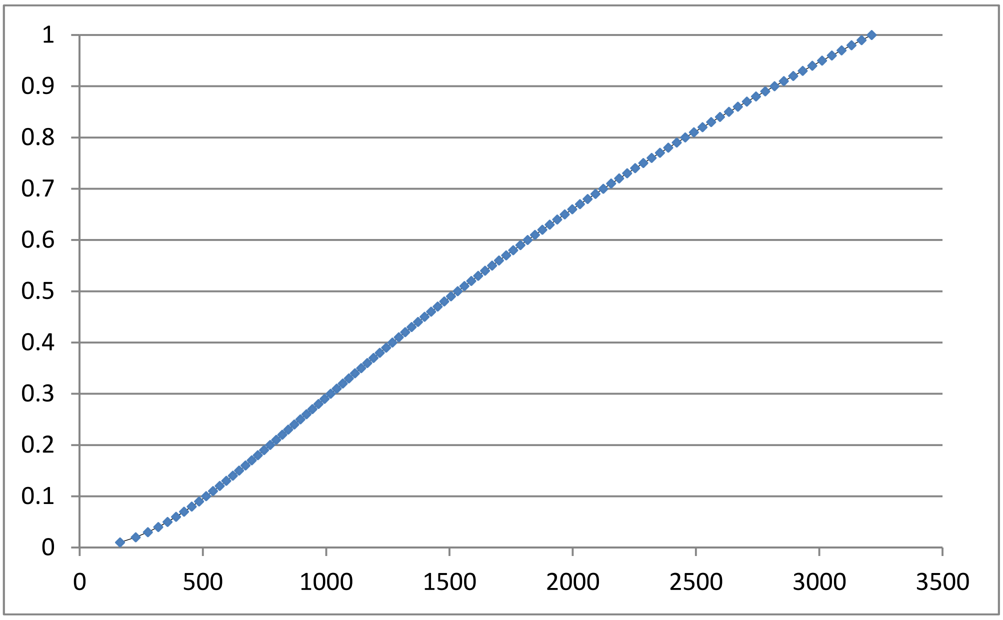

Figura 4. Función de Distribución de la renta

Con estos cálculos ya podemos pasar de proporciones, u, a cuantiles x_u. Así vamos a calcular elasticidades del grupo de alimentos y valores de las rentas.

Veamos a continuación como podemos calcular las elasticidades de la función de Engel.

Derivadas de la función de Lorenz:

1) $L^{'}(u)=\dfrac{x}{E(X)}$.

2) $L^{''}(u)=\dfrac{1}{E(X)f(x)}$

Derivadas de la función de Concentración:

1) $C^{'}(u)=\dfrac{g(x)}{E(Y)}$.

2) $C^{''}(u)=\dfrac{g^{'}(x)}{E(Y)f(x)}$.

Las elasticidades de la función $Y=g(X)$ es:

$$\eta(y/x)=g^{'}(x)\frac{x}{g(x)},$$

que es igual a

$$\eta(y/x)=\frac{C^{''}(u)L^{'}(u)}{C^{'}(u)L^{''}(u)}. \quad (1)$$

Sustituyendo en esta última fórmula las expresiones 1, 2, 3 y 4 se obtiene la fórmula de la elasticidad de $Y=g(X)$.

Usando los coeficientes estimados de α y β de los modelos ajustados.

Se prueba directamente que la elasticidad (1) se puede escribir a partir de los parámetros estimados.

$$\eta(y/x)=\frac{\left[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right]}{\left[\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right)^2-\hat{\alpha}_1\right]}\frac{\left[\left(\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right)^2-\hat{\alpha}_2\right]}{\left[\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right]}. \quad (2)$$

Vemos que la formula (1) depende de las proporciones u del intervalo [0,1], que nos permite expresar las elasticidades según u. Veamos algunos cálculos en la Tabla 1. Los cocientes corresponden al numerador y denominador de (2). Y si ahora queremos calcular estas elasticidades con los valores de la renta, debemos usar la Función de Distribución calculada, que resulta en la recogida en la Tabla 2.

Vemos que la elasticidad disminuye con el aumento de las rentas, y los valores están en el intervalo (0,88; 0,94).

De la comparación entre la curva de Lorenz de la renta y la curva de concentración de los alimentos, observamos que ambas curvas están muy próximas entre ellas, lo que explica el recorrido de las elasticidades. Cuando ambas curvas, Lorenz y Concentración, coinciden entonces las elasticidades entonces, según (1), son iguales a la unidad, lo que también explica el recorrido de las elasticidades. Cuando las elasticidades son iguales la unidad, entonces los consumos de alimentos son proporcionales a las rentas.

Tabla 1.Elasticidades según u

valores de u			cociente1			cociente 2	elasticidades
0,1	1,5148	0,83461904	1,81495979	0,767196	1,486	0,516282638	0,93703223
0,2	1,5696	1,00364416	1,56390089	0,902961	1,531	0,589785108	0,922365458
0,3	1,6244	1,17867536	1,37815726	1,042776	1,576	0,661659898	0,91187139
0,4	1,6792	1,35971264	1,23496682	1,186641	1,621	0,732042566	0,904048283
0,5	1,734	1,546756	1,12105594	1,334556	1,666	0,801054022	0,898026368
0,6	1,7888	1,73980544	1,02816094	1,486521	1,711	0,868802455	0,89326875
0,7	1,8436	1,93886096	0,95086757	1,642536	1,756	0,935384966	0,889427225
0,8	1,8984	2,14392256	0,88547974	1,802601	1,801	1,000888951	0,886266892
0,9	1,9532	2,35499024	0,82938773	1,966716	1,846	1,065393283	0,883624112
0,95	1,9806	2,46277636	0,80421431	2,05029225	1,8685	1,09729315	0,882458857

Tabla 2.Elasticidades según rentas

valores de u	elasticidades	Valores de rentas
0,1	0,93703223	513,193611
0,2	0,92236546	772,65936
0,3	0,91187139	1017,87249
0,4	0,90404828	1268,74393
0,5	0,89802637	1533,55229
0,6	0,89326875	1817,33083
0,7	0,88942722	2123,89855
0,8	0,88626689	2456,57726
0,9	0,88362411	2818,50568
0,95	0,88245886	3011,41041

Que las elasticidades caigan en el intervalo (0,1), implica lo siguiente: $0 < \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} < 1$, luego $\frac{y_2 - y_1}{y_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1}$, y así $\frac{y_2}{y_1} - 1 < \frac{x_2}{x_1} - 1$, es decir $\frac{y_2}{x_2} < \frac{y_1}{x_1}$. Así se observa que las proporciones de consumo de alimentos respecto de la renta disminuyen cuando aumentan las rentas.

5. CÁLCULOS DE LOS ERRORES DE LAS ELASTICIDADES

Veamos ahora como calcular los errores de la elasticidad en cada valor de la renta.

La fórmula de la elasticidad (2) podemos calcularla como

$$\eta\left(y/x\right) = l_1\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1\right).l_2\left(u;\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right) = l\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right),$$

donde $l_1\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1\right)=\dfrac{\left[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right]}{\left[\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right)^2-\hat{\alpha}_1\right]}$, $l_2\left(u;\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right)=\dfrac{\left[\left(\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right)^2-\hat{\alpha}_2\right]}{\left[\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right]}$.

Definiendo

$$l\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right)=l_1\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1\right)*l_2\left(u;\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right).$$

Aplicando Taylor.

$$\begin{aligned}l\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right)&\approx l\left(u;\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)+\left(\frac{\partial l}{\partial\alpha_1}\right)\left[\hat{\alpha}_1-\alpha_1\right]+\left(\frac{\partial l}{\partial\beta_1}\right)\left[\hat{\beta}_1-\beta_1\right]+\\&+\left(\frac{\partial l}{\partial\alpha_2}\right)\left[\hat{\alpha}_2-\alpha_2\right]+\left(\frac{\partial l}{\partial\beta_2}\right)\left[\hat{\beta}_2-\beta_2\right].\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}l\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right)&\approx l\left(u;\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)+l_2\left(\frac{\partial l_1}{\partial\alpha_1}\right)\left[\hat{\alpha}_1-\alpha_1\right]+l_2\left(\frac{\partial l_1}{\partial\beta_1}\right)\left[\hat{\beta}_1-\beta_1\right]+\\&+l_1\left(\frac{\partial l_2}{\partial\alpha_2}\right)\left[\hat{\alpha}_2-\alpha_2\right]+l_1\left(\frac{\partial l_2}{\partial\beta_2}\right)\left[\hat{\beta}_2-\beta_2\right].\end{aligned}$$

Tomando varianzas de cada estimador, resulta

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left[l\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right)-l\left(u;\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\right)\right]&=l_2^2\left(\frac{\partial l_1}{\partial\alpha_1}\right)^2\operatorname{var}\left[\hat{\alpha}_1-\alpha_1\right]+l_2^2\left(\frac{\partial l_1}{\partial\beta_1}\right)^2\operatorname{var}\left[\hat{\beta}_1-\beta_1\right]+\\&+l_1^2\left(\frac{\partial l_2}{\partial\alpha_2}\right)^2\operatorname{var}\left[\hat{\alpha}_2-\alpha_2\right]+l_1^2\left(\frac{\partial l_2}{\partial\beta_2}\right)^2\operatorname{var}\left[\hat{\beta}_2-\beta_2\right]+2l_2^2\frac{\partial l_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial l_1}{\partial\beta_1}\operatorname{cov}\left[\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1\right]+\\&+2l_1^2\frac{\partial l_2}{\partial\alpha_2}\frac{\partial l_2}{\partial\beta_2}\operatorname{cov}\left[\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right],\end{aligned}$$

lo que nos permite estimar el error de estimación de cada elasticidad tomando la raíz cuadrada de la varianza.

Antes debemos calcular las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial l_1\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1\right)}{\partial\hat{\alpha}_1}=\frac{\left[\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right)^2-\hat{\alpha}_1\right]-\left[2(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u)-1\right]\left[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right]}{\left[\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right)^2-\hat{\alpha}_1\right]^2},$$

$$\frac{\partial l_1\left(u;\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1\right)}{\partial\hat{\beta}_1}=\frac{u\left[\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right)^2-\hat{\alpha}_1\right]-\left[2(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u)u\right]\left[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right]}{\left[\left(\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 u\right)^2-\hat{\alpha}_1\right]^2}.$$

$$\frac{\partial l_2\left(u;\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right)}{\partial\hat{\alpha}_2}=\frac{\left[2\left(\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right)-1\right]\left[\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right]-\left[\left(\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right)^2-\hat{\alpha}_2\right]}{\left[\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 u\right]^2},$$

$$\frac{\partial l_2\left(u;\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2\right)}{\partial\beta_2}=\frac{\left[2\left(\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2u\right)u\right]\left[\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2u\right]-u\left[\left(\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2u\right)^2-\hat{\alpha}_2\right]}{\left[\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2u\right]^2}$$

Veamos ahora los resultados.

Tabla 3.Errores de las Elasticidades según rentas

valores de u	elasticidades	Valores de rentas	Errores de las elasticidades
0,1	0,93703223	513,193611	0,0946
0,2	0,92236546	772,65936	0,0449
0,3	0,91187139	1017,87249	0,0342
0,4	0,90404828	1268,74393	0,0518
0,5	0,89802637	1533,55229	0,0713
0,6	0,89326875	1817,33083	0,0879
0,7	0,88942722	2123,89855	0,1017
0,8	0,88626689	2456,57726	0,11323
0,9	0,88362411	2818,50568	0,1229
0,95	0,88245886	3011,41041	0,1272

Suponiendo que la v. a. de las elasticidades son normales, con n=29 datos, podemos construir un intervalo de confianza al 95%. De las tablas de la Normal obtenemos un valor al 5% de 1,959, luego los intervalos son:

Tabla 4.Intervalos de confianza de las elasticidades

valores de u	elasticidades	cuantiles	intervalo al 95%	
0,1	0,93703223	513,193611	0,74878097	1,12528349
0,2	0,92236546	772,65936	0,83295567	1,01177525
0,3	0,91187139	1017,87249	0,8436992	0,98004358
0,4	0,90404828	1268,74393	0,80078371	1,00731286
0,5	0,89802637	1533,55229	0,75607303	1,0399797
0,6	0,89326875	1817,33083	0,71830515	1,06823235
0,7	0,88942722	2123,89855	0,68701387	1,09184058
0,8	0,88626689	2456,57726	0,66092423	1,11160956
0,9	0,88362411	2818,50568	0,6389274	1,12832083
0,95	0,88245886	3011,41041	0,6291862	1,13573151

APÉNDICE

Tabla 5. Datos, índices de Gini y Concetración, Curvas de Lorenz y Concentración

	renta	Food		Grenta	Cconsumo	L(renta)	C(consumo)
	2	3	4	5	6	7	8
1	200	145,92	0,0344828	3,3293698	2,28128419	0,00431034	0,00528447
2	300	214,44	0,0689655	6,42092747	4,23781213	0,01077586	0,01305037
3	400	280,44	0,1034483	9,27467301	5,91816885	0,01939655	0,02320645
4	500	344,25	0,137931	11,8906064	7,36623068	0,03017241	0,0356734
5	600	406,2	0,1724138	14,2687277	8,61117717	0,04310345	0,05038386
6	700	466,55	0,2068966	16,4090369	9,67640904	0,05818966	0,06727988
7	800	525,52	0,2413793	18,3115339	10,5785731	0,07543103	0,08631149
8	900	583,29	0,2758621	19,9762188	11,3285137	0,09482759	0,10743523
9	1000	640	0,3103448	21,4030916	11,9322235	0,11637931	0,13061271
10	1100	695,75	0,3448276	22,5921522	12,3917955	0,14008621	0,15580916
11	1200	750,6	0,3793103	23,5434007	12,7369798	0,16594828	0,182992
12	1300	804,7	0,4137931	24,2568371	12,9774078	0,19396552	0,21213406
13	1400	858,2	0,4482759	24,7324614	13,1205707	0,22413793	0,24321362
14	1500	911,25	0,4827586	24,9702735	13,1718193	0,25646552	0,27621436
15	1600	964	0,5172414	24,9702735	13,0919144	0,29094828	0,31112544
16	1700	1016,43	0,5517241	24,7324614	12,9177646	0,32758621	0,34793527
17	1800	1068,66	0,5862069	24,2568371	12,6499405	0,36637931	0,38663659
18	1900	1120,81	0,6206897	23,5434007	12,2873008	0,40732759	0,42722651
19	2000	1173	0,6551724	22,5921522	11,8269917	0,45043103	0,46970649
20	2100	1225,35	0,6896552	21,4030916	11,2173603	0,49568966	0,51408231
21	2200	1277,76	0,7241379	19,9762188	10,4995006	0,54310345	0,56035615
22	2300	1330,32	0,7586207	18,3115339	9,66848989	0,59267241	0,60853344
23	2400	1383,12	0,7931034	16,4090369	8,71812128	0,64439655	0,65862287
24	2500	1436,25	0,8275862	14,2687277	7,64090369	0,69827586	0,7106364
25	2600	1489,8	0,862069	11,8906064	6,39595719	0,75431034	0,76458923
26	2700	1543,59	0,8965517	9,27467301	5,01667063	0,8125	0,82049005
27	2800	1597,68	0,9310345	6,42092747	3,49619501	0,87284483	0,87834973
28	2900	1652,13	0,9655172	3,3293698	1,82682521	0,93534483	0,93818131
29	3000	1707	1	0	0	1	1
	46400	27613,01		482,758621	263,582901		
	1600	952,172759		0,30172414	0,27682256		

Las columnas 2 de Renta X y los bienes de alimentación Y, columna 3, están medidas en francos Belgas.

La columna 4 son las frecuencias acumuladas, F. Dividimos la columna 1 por 29 (incluimos un valor cero).

La columna 5 calcula el índice de Gini que vale 0,30172414, y en la columna 6 calculamos el índice de concentración de la variable alimentación, que es igual a 0,27682256.

En las columnas 7 y 8 calculamos la Curva de Lorenz de la renta y la Curva de Concentración de la variable alimentación.

Tabla 6. Estimación de Curvas e Índices

L(renta) esti	G(renta) esti	C(consumo) esti	Concentra esti
0	0	0	0
0,00431631	7,44191E-05	0,005058142	8,72093E-05
0,01210104	0,000283058	0,013948076	0,000327693
0,02229064	0,00059296	0,025409777	0,000678584
0,03457322	0,000980411	0,039063992	0,001111617
0,04880172	0,001437499	0,054722132	0,001617002
0,06490025	0,001960379	0,072277352	0,002189646
0,08283147	0,002547099	0,091666703	0,002826622
0,10258179	0,00319678	0,112854026	0,003526219
0,12415369	0,003909232	0,135820991	0,0042875
0,14756122	0,00468474	0,160561897	0,00511005
0,17282725	0,005523939	0,187080449	0,005993834
0,19998167	0,00642774	0,215387637	0,006939105
0,22906014	0,007397273	0,245500295	0,007946344
0,26010328	0,008433852	0,277440079	0,009016213
0,29315601	0,009538953	0,311232726	0,010149531
0,32826714	0,010714192	0,346907509	0,011347245
0,36548902	0,011961313	0,384496821	0,012610419
0,4048773	0,013282178	0,424035864	0,013940219
0,44649078	0,01467876	0,465562403	0,015337901
0,49039124	0,016153138	0,509116577	0,01680481
0,53664335	0,017707493	0,554740751	0,018342368
0,5853146	0,019344103	0,6024794	0,019952072
0,6364753	0,021065343	0,652379015	0,02163549
0,69019847	0,022873686	0,704488037	0,02339426
0,74655991	0,024771696	0,758856797	0,025230083
0,80563812	0,026762035	0,815537476	0,027144729
0,86751438	0,028847457	0,874584074	0,029140027
0,93227273	0,031030812	0,936052389	0,03121787
1	0,033315047	1	0,033380214
	0,349495587		0,361284875
	0,301008825		0,277430249

L(renta) es la curva de Lorenz estimada, Gr(renta) es la estimación del índice de Gini de la renta; C(consumo) es la curva de concentración del consumo de alimentos y Concentra es el índice de concentración del consumo de alimentos.

Tabla 7. Caculo de la Función Cuantil de la renta

u	$Q(u)$	u	$Q(u)$	u	$Q(u)$	u	$Q(u)$
0	0	0,31	1042,5252	0,62	1876,71045	0,93	2933,25256
0,01	163,86509	0,32	1067,2517	0,63	1906,75123	0,94	2972,16338
0,02	227,48938	0,33	1092,0614	0,64	1937,03048	0,95	3011,41041
0,03	276,6674	0,34	1116,9633	0,65	1967,55154	0,96	3050,99681
0,04	318,72688	0,35	1141,9657	0,66	1998,3177	0,97	3090,92576
0,05	356,43493	0,36	1167,0763	0,67	2029,33225	0,98	3131,20047
0,06	391,18364	0,37	1192,3027	0,68	2060,59843	0,99	3171,82414
0,07	423,78679	0,38	1217,6517	0,69	2092,11946	1	3212,8
0,08	454,76717	0,39	1243,13	0,7	2123,89855		
0,09	484,48339	0,4	1268,7439	0,71	2155,93888		
0,1	513,19361	0,41	1294,4995	0,72	2188,24364		
0,11	541,09073	0,42	1320,4024	0,73	2220,81596		
0,12	568,32323	0,43	1346,4583	0,74	2253,65901		
0,13	595,0082	0,44	1372,6723	0,75	2286,7759		
0,14	621,23987	0,45	1399,0496	0,76	2320,16977		
0,15	647,09537	0,46	1425,5952	0,77	2353,84374		
0,16	672,63879	0,47	1452,3137	0,78	2387,8009		
0,17	697,92408	0,48	1479,2097	0,79	2422,04437		
0,18	722,99715	0,49	1506,2878	0,8	2456,57726		
0,19	747,89749	0,5	1533,5523	0,81	2491,40265		
0,2	772,65936	0,51	1561,0074	0,82	2526,52365		
0,21	797,31275	0,52	1588,6571	0,83	2561,94335		
0,22	821,88408	0,53	1616,5056	0,84	2597,66486		
0,23	846,39682	0,54	1644,5568	0,85	2633,69127		
0,24	870,87192	0,55	1672,8145	0,86	2670,02569		
0,25	895,32821	0,56	1701,2825	0,87	2706,67123		
0,26	919,78271	0,57	1729,9646	0,88	2743,631		
0,27	944,25086	0,58	1758,8642	0,89	2780,90811		
0,28	968,74677	0,59	1787,9851	0,9	2818,50568		
0,29	993,28334	0,6	1817,3308	0,91	2856,42686		
0,3	1017,8725	0,61	1846,9048	0,92	2894,67477		

La **Tabla 7** recoge una estimación de la función cuantil de la Renta. La estimación de la inversa de esta función cuanti es la Función de Distribución de la Renta.

REFERENCIAS

ALLEN R.G.D.; BOWLEY. A.L. (1935)*: Family expenditure*. London.

BINH-TRAN-NAM; PODDER. N. (1992): On the Estimation of Total Expenditure Elasticities from Derived Engel Functions with Applications to Australian Micro-Data. *Economic Record*, 68, 201, 142-150.

DEL ORO Y OTROS. (2000): Estimación de curvas de Engel: un enfoque no paramétrico y su aplicación al caso gallego*. Estudios de Economía Aplicada*, 16,37-61.

DUCPETIAUX, E. (1855): *Budgest économiques des classes ouvriéres*. Belgique, Bruxelles.

ENGEL, E. (1857): *Die Produktions und Comsumtionsverhältnisse des Königreichs Sachsen*, reprinted with Engel (1895), Anlage I, 1-54.

ENGEL, E. (1895): Das Lebenskosten belgischer Arbeiterfamilien früher und jetzt. Bulletin de Institute International de Statistique., 9, 1-124.

KAKWANI, N. (1980*): Income inequality and poverty. Methods of estimation and policy application. Report 10092. A World Bank Research Publication*. Oxford University Press.

LE PLAY (1855): European Workers.

LESER, C.E.V. (1991): Forms of Engel Functions. Econometrica, 31, 694-703.

PERTHEL, D. (1975): Engel's law revisited. International Statistical Review, 43, (2) 211-218.

PODDER, N. ; BINH-TRAN-NAM. (1994): A New Approach To Estimating Engel Elasticities From Concentration Curves. *Oxford Economic Papers* 46, 262-276.

WORKING, H. (1943): Statistical Law of Family Expenditure. *Journal of the American Statistical Association*, 38, 43-56.