VARIEDADES CON K - ESTRUCTURA. SUBVARIEDADES.

por

Luis Manuel Fernández Fernández

Trabajo realizado bajo la dirección de los Profesores José Luis Cabrerizo Jaraiz y Manuel Fernández Andrés para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tesis revisada y conforme

Los Directores

CAPÍTULO I

f - estructuras.

La noción de f-estructura sobre una variedad diferenciable M^{2n+s} fue introducida por K. Yano (|45|), llamando así a un tensor f de tipo (1,1) sobre M^{2n+s} y de rango 2n tal que $f^3 + f = 0$. La existencia de dicho tensor es equivalente a una reducción del grupo estructural del fibrado tangente a U(n) x O(s). Casos bien conocidos de f-estructuras son el casi-complejo (s = 0) y el casi-contacto (s = 1). El caso s = 2 aparece en el estudio de hipersuperficies en espacios casi-contacto (|19|, |20|, |21|).

El objeto de este capítulo es introducir en variedades con una f-estructura la noción análoga a la estructura Kaehleriana en el caso casi-complejo y a la estructura Sasakiana en el caso casi-contacto y estudiar las propiedades fundamentales de variedades con tales estructuras. Para ello se estudiará principalmente la conexión de Levi-Civita correspondiente a la métrica Riemanniana que una f-estructura con ciertas condiciones lleva asociada (|45|).

I.1. f-estructuras métricas.-

I.1.1. Definiciones básicas.- Sea M^{2n+s} una variedad diferenciable con una f-estructura, esto es, un tensor de tipo (1,1) tal que $f^3 + f = 0$, de rango 2n. Si existen en M^{2n+s} s campos globales $\xi_1,\dots,\xi_s$ tales que si $\eta_1,\dots,\eta_s$ son sus formas duales entonces:

(I.1.1) $\quad \eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta};\ f\xi_\alpha = 0;\ \eta_\alpha\circ f = 0;\ f^2 = -I + \sum_\alpha \xi_\alpha \otimes \eta_\alpha.$

cualesquiera que sean α y β variando desde 1 hasta s, diremos que la f-estructura tiene referencias complementadas. En estas condiciones, existe en M^{2n+s} una métrica Riemanniana g tal que:

(I.1.2) $\quad g(X,Y) = g(fX,fY) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)$

donde X e Y son campos tangentes a M^{2n+s} (|45|). A g se le llama métrica asociada a la f-estructura y decimos que M^{2n+s} tiene una f-estructura métrica. Poniendo $Y = \xi_\alpha$ en (I.1.2) se obtiene:

(I.1.3) $\quad \eta_\alpha(X) = g(X,\xi_\alpha)$

para todo $\alpha\in\{1,\dots,s\}$ y $X\in T(M)$.

En una variedad (M^{2n+s}, f, g) con una f-estructura métrica, podemos encontrar unas bases locales y ortonormales de campos tangentes particularmente útiles. Sea U un entorno coordenado y tomemos E_1 un campo unitario en U ortogonal a todos los campos $\xi_1,\dots,\xi_s$. Entonces, en virtud de (I.1.2) y (I.1.3), fE_1 es unitario y ortogonal a $\xi_1,\dots,\xi_s$ y a E_1. A continuación, tomemos E_2 un campo unitario en U ortogonal a E_1, a fE_1 y a $\xi_1,\dots,\xi_s$. Es fácil comprobar que fE_2 es unitario y ortogonal a E_1, fE_1, E_2 y a $\xi_1,\dots,\xi_s$. Procediendo de esta manera obtenemos una base local ortonormal $\{E_1,\dots,E_n,fE_1,\dots,fE_n, \xi_1,\dots,\xi_s\}$ llamada f-base.

Definimos, ahora, la 2-forma fundamental F por:

(I.1.4) $\quad F(X,Y) = g(X,fY)$

cualesquiera que sean $X,Y\in T(M)$. Usando (I.1.1) y (I.1.2), obtenemos que, para todos $X,Y\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\dots,s\}$:

(I.1.5) $F(X,Y) = -F(Y,X)$; $F(X,\xi_\alpha) = 0$.

Diremos que la f-estructura es <u>normal</u> si:

(I.1.6) $$[f,f] + 2\sum_\alpha \xi_\alpha \otimes d\eta_\alpha = 0$$

donde $[f,f]$ es el tensor de Nijenhuis de f, dado por:

(I.1.7) $$[f,f](X,Y) = [fX,fY] - f[fX,Y] - f[X,fY] + f^2[X,Y] =$$
$$= (\nabla_{fX}f)Y - (\nabla_{fY}f)X + f(\nabla_Y f)X - f(\nabla_X f)Y$$

para todos $X,Y \in T(M)$ y donde estamos denotando por ∇ a la derivada covariante asociada a la conexión de Levi-Civita de la métrica g.

Definimos, también, los tensores:

(I.1.8) $$N^{(1)}(X,Y) = [f,f](X,Y) + 2\sum_\alpha d\eta_\alpha(X,Y)\xi_\alpha$$
$$N_\alpha^{(2)}(X,Y) = (L_{fX}\eta_\alpha)Y - (L_{fY}\eta_\alpha)X$$
$$N_\alpha^{(3)}(X) = (L_{\xi_\alpha} f)X$$
$$N_{\alpha,\beta}^{(4)}(X) = (L_{\xi_\alpha}\eta_\beta)X$$

con X,Y en T(M) y α,β en $\{1,\ldots,s\}$, donde L_X es el operador corchete de Lie, esto es, $L_X Y = [X,Y]$. Por definición, la f-estructura es normal si y sólo si $N^{(1)} = 0$.

<u>I.1.2. Proposición.-</u> Sea (M^{2n+s},f,g) una f-estructura métrica normal. Entonces, para todos α,β en $\{1,\ldots,s\}$, se tiene que $N_\alpha^{(2)} = 0$, $N_\alpha^{(3)} = 0$ y $N_{\alpha,\beta}^{(4)} = 0$.

Demostración:

Como $N^{(1)} = 0$, para cualquier $X \in T(M)$ y $\beta \in \{1,\ldots,s\}$, obtenemos:

(I.1.9) $$0 = [f,f](X,\xi_\beta) + 2\sum_\delta d\eta_\delta(X,\xi_\beta)\xi_\delta = [\xi_\beta,X] + f[\xi_\beta,fX] - \sum_\delta (\xi_\beta\eta_\delta(X))\xi_\delta,$$

donde hemos utilizado (I.1.1). Aplicando η_α, $\alpha = 1,\ldots,s$, a (I.1.9), obtenemos:

$$\eta_\alpha([\xi_\beta,X]) = \xi_\beta\eta_\alpha(X),$$

lo que es equivalente a que $N_{\alpha,\beta}^{(4)} = 0$. Reemplazando X por fX, se tiene que:

(I.1.10) $$\eta_\alpha([\xi_\beta,fX]) = 0,$$

cualesquieran que sean α y β en $\{1,\ldots,s\}$. Aplicando ahora f a (I.1.9) y por (I.1.10) llegamos a:

$$0 = f[\xi_\beta, X] - [\xi_\beta, fX] + \sum_\delta \eta_\delta([\xi_\beta, fX])\xi_\delta = fL_{\xi_\beta}X - L_{\xi_\beta}fX =$$
$$= -(L_{\xi_\beta}f)X$$

lo que equivale a que $N^{(3)}_\beta = 0$.

Por último, usando de nuevo $N^{(1)} = 0$ para fX e Y, tenemos, en virtud de (I.1.1):

$$0 = [f,f](fX,Y) + 2\sum_\alpha d\eta_\alpha(fX,Y) = -[X,fY] + \sum_\beta \eta_\beta(X)[\xi_\beta, fY] -$$
$$- \sum_\beta (fY\eta_\beta(X))\xi_\beta + f[X,Y] - f(\sum_\beta \eta_\beta(X)[\xi_\beta, Y]) + f(\sum_\beta (Y\eta_\beta(X))\xi_\beta) -$$
$$- f[fX,fY] - [fX,Y] + \sum_\beta (fX\eta_\beta(Y)\xi_\beta).$$

Aplicando η_α y usando (I.1.10), llegamos a:

$$0 = -\eta_\alpha([X,fY]) + \sum_\beta \eta_\beta(X)\eta_\alpha([\xi_\beta, fY]) - fY\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([fX,Y]) +$$
$$+ fX\eta_\alpha(Y) = (L_{fX}\eta_\alpha)Y - (L_{fY}\eta_\alpha)X.$$

y, por tanto, $N^{(2)}_\alpha = 0$, para todo $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$. #

I.1.3. Nota.- Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica. Denotemos por $\mathcal{L}$ la distribución determinada por $-f^2$ y por $\mathcal{M}$ la distribución complementaria. $\mathcal{M}$ está determinada por $f^2 + I$ y generada por $\xi_1,\ldots,\xi_s$. Entonces si un X está en $\mathcal{L}$, se tiene que $\eta_\alpha(X) = 0$, cualquiera que sea $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$ y si un X está en $\mathcal{M}$, entonces $fX = 0$.

I.1.4. Proposición.- Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica. Si para todo α en $\{1,\ldots,s\}$ se cumple que $N^{(2)}_\alpha = 0$, entonces, si $X,Y\in T(M)$, $Z,W\in\mathcal{L}$ y $\beta,\gamma\in\{1,\ldots,s\}$ se tiene que:

(I.1.11) (a) $d\eta_\beta(fX,Y) + d\eta_\beta(X,fY) = 0$

(b) $d\eta_\beta(Z,\xi_\gamma) = 0$

(c) $d\eta_\beta(fZ,fW) = d\eta_\beta(Z,W)$.

Demostración:

Como $N^{(2)}_\alpha = 0$, obtenemos para todos $X,Y\in T(M)$:

$$0 = (L_{fX}\eta_\alpha)Y - (L_{fY}\eta_\alpha)X = fX\eta_\alpha(Y) - \eta_\alpha([fX,Y]) - fY\eta_\alpha(X) +$$
$$+ \eta_\alpha([fY,X]) = 2d\eta_\alpha(fX,Y) - 2d\eta_\alpha(fY,X) = 2d\eta_\alpha(fX,Y) + 2d\eta_\alpha(X,fY).$$

Por otra parte, si $Z\in\mathcal{L}$, sustituyendo en la expresión anterior X por fZ e Y por ξ_β, cualquiera que sea β en $\{1,\ldots,s\}$, tenemos:

$$0 = d\eta_\alpha(f^2Z,\xi_\beta) + d\eta_\alpha(fX,f\xi_\beta) = -d\eta_\alpha(Z,\xi_\beta).$$

Por último, si $Z,W \in \mathcal{L}$, cambiando en (a) X por fZ y usando (I.1.1), llegamos a:

$$0 = d\eta_\alpha(fZ,fW) + d\eta_\alpha(f^2Z,W) = d\eta_\alpha(fZ,fW) - d\eta_\alpha(Z,W). \qquad \#$$

<u>I.1.5. Teorema.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica. Entonces, cualesquiera que sean $X,Y,Z \in T(M)$, se cumple que:

(I.1.12) $$2g((\nabla_X f)Y,Z) = 3dF(X,fY,fZ) + 3dF(X,Y,Z) + g(N^{(1)}(Y,Z),fX) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)N_\alpha^{(2)}(Y,Z) + 2\sum_\alpha d\eta_\alpha(fY,X)\eta_\alpha(Z) - 2\sum_\alpha d\eta_\alpha(fZ,X)\eta_\alpha(Y).$$

Demostración:

En primer lugar, recordemos que se tienen las fórmulas, (|31|):

(I.1.13) $$2g(\nabla_X Y,Z) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X).$$

(I.1.14) $$3dF(X,Y,Z) = XF(Y,Z) + YF(Z,X) + ZF(X,Y) - F([X,Y],Z) - F([Z,X],Y) - F([Y,Z],X).$$

Entonces, como:

$$2g((\nabla_X f)Y,Z) = 2g(\nabla_X fY,Z) - 2g(f\nabla_X Y,Z),$$

aplicando (I.1.2), (I.1.4) y (I.1.13), obtenemos:

$$\begin{aligned}2g((\nabla_X f)Y,Z) &= -XF(Y,Z) + fYF(fZ,X) + fY(\sum_\alpha \eta_\alpha(Z)\eta_\alpha(X)) - \\ &- ZF(X,Y) - F([X,fY],fZ) + \sum_\alpha \eta_\alpha([X,fY])\eta_\alpha(Z) + F([Z,X],Y) - \\ &- g(f[fY,Z],fX) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha([Z,fY]) + XF(fY,fZ) - YF(Z,X) - \\ &- fZF(fX,Y) - fZ\sum_\alpha \eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(X) + F([X,Y],Z) - F([fZ,X],fY) + \\ &+ \sum_\alpha \eta_\alpha([fZ,X])\eta_\alpha(Y) - g(f[Y,fZ],fX) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha([fZ,Y]) + \\ &+ F([Y,Z],X) - g([Y,Z],fX) - F([fY,fZ],X) + g([fY,fZ],fX) + \\ &+ 2\sum_\alpha g(d\eta_\alpha(Y,Z)\xi_\alpha,fX).\end{aligned}$$

Ahora, en virtud de (I.1.6), (I.1.8) y (I.1.14), obtenemos:

$$\begin{aligned}2g((\nabla_X f)Y,Z) &= 3dF(X,fY,fZ) + 3dF(X,Y,Z) + \\ &+ g(([f,f] + 2\sum_\alpha \xi_\alpha \times d\eta_\alpha)(Y,Z),fX) + \sum_\alpha \eta_\alpha(Z)(fY\eta_\alpha(X)) + \\ &+ \sum_\alpha \eta_\alpha(X)(fY\eta_\alpha(Z)) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha([Z,fY]) + \sum_\alpha \eta_\alpha(Z)\eta_\alpha([X,fY]) - \\ &- \sum_\alpha \eta_\alpha(Y)(fZ\eta_\alpha(X)) - \sum_\alpha \eta_\alpha(X)(fZ\eta_\alpha(Y)) + \sum_\alpha \eta_\alpha([fZ,Y])\eta_\alpha(Y) + \\ &+ \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha([fZ,Y]) \doteq\end{aligned}$$

$$= 3dF(X,fY,fZ) + 3dF(X,Y,Z) + g\,(N^{(1)}(Y,Z),fX) +$$

$$+ \sum_\alpha \eta_\alpha(X) N^{(2)}_\alpha (Y,Z) + 2\sum_\alpha d\eta_\alpha(fY,X)\eta_\alpha(Z) - 2\sum_\alpha d\eta_\alpha(fZ,X)\,\eta_\alpha(Y). \quad \#$$

I.2. f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, para todo α en $\{1,\dots,s\}$.-

I.2.1. Definición.- Sea M^{2n+s} una variedad Riemanniana con 1-formas globales linealmente independientes $\eta_1,\dots,\eta_s$ tales que $d\eta_1 = \dots = d\eta_s$ y $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n \neq 0$, para todo α en $\{1,\dots,s\}$. Sea:

$$\mathcal{L}(p) = \{X \in T_p(M),\ p \in M^{2n+s} / \eta_\alpha(X) = 0,\ \alpha = 1,\dots,s\}.$$

Entonces, $\mathcal{L}$ determina una distribución, que junto con su complementaria, reduce el grupo estructural a $O(2n) \times O(s)$. Ahora, si $\xi_1,\dots,\xi_s$ son campos duales a $\eta_1,\dots,\eta_s$ y $X_1,\dots,X_{2n}$ son campos linealmente independientes en , se tiene:

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n)(\xi_1,\dots,\xi_s,X_1,\dots,X_{2n}) =$$
$$= (d\eta_\alpha)^n (X_1,\dots,X_{2n}) \neq 0,$$

cualquiera que sea α, dando $\mathcal{L}$ una estructura simpléctica. Así, el grupo estructural puede ser reducido a $U(n) \times O(s)$ y decimos que M^{2n+s} tiene una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$.

I.2.2. Proposición.- Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$. Entonces, si $X,Y \in T(M)$ y $\alpha \in \{1,\dots,s\}$, se cumple que:

(I.2.1) $\quad N^{(2)}_\alpha (X,Y) = 0.$

Demostración:

En virtud de (I.1.1), (I.1.2), (I.1.4) y (I.1.8), obtenemos que:

$$(L_{fX}\eta_\alpha)Y - (L_{fY}\eta_\alpha)X = fX\eta_\alpha(Y) - \eta_\alpha([fX,Y]) - fY\eta_\alpha(X) +$$
$$+ \eta_\alpha([fY,X]) =$$
$$= 2d\eta_\alpha(fX,Y) + 2\,d\eta_\alpha(X,fY) =$$
$$= 2F(fX,Y) + 2F(X,fY) =$$

$$= 2g(fX,fY) + 2g(X,f^2Y) =$$

$$= 2g(fX,fY) - 2g(X,Y) + 2\sum_\beta \eta_\beta(X)\eta_\beta(Y) = 0. \qquad \#$$

I.2.3. Proposición.- Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$. Entonces:

$$(I.2.2) \qquad N^{(4)}_{\alpha,\beta}(X) = 0$$

para todos $X \in T(M)$, $\alpha,\beta \in \{1,\dots,s\}$.

Demostración:

Si $X \in \mathcal{L}$, tenemos:

$$(L_{\xi_\alpha}\eta_\beta)X = \xi_\alpha\eta_\beta(X) - \eta_\beta([\xi_\alpha,X]) = 2F(\xi_\alpha,X) = 0.$$

Si $X = \xi_\gamma$, $\gamma \in \{1,\dots,s\}$, tenemos:

$$(L_{\xi_\alpha}\eta_\beta)\xi_\gamma = 2F(\xi_\alpha,\xi_\gamma) = 0.$$

Por último, si $X = \sum_\gamma \eta_\gamma(X)\xi_\gamma$, llegamos a:

$$(L_{\xi_\alpha}\eta_\beta)(\sum_\gamma \eta_\gamma(X)\xi_\gamma) = \xi_\alpha\eta_\beta(\sum_\gamma \eta_\gamma(X)\xi_\gamma) - \eta_\beta([\xi_\alpha,\sum_\gamma \eta_\gamma(X)\xi_\gamma]) =$$
$$= \xi_\alpha\eta_\beta(X) - \eta_\beta(\sum_\gamma (\xi_\alpha\eta_\gamma(X))\xi_\gamma + \sum_\gamma \eta_\gamma(X)[\xi_\alpha,\xi_\gamma]) =$$
$$= \xi_\alpha\eta_\beta(X) - \xi_\alpha\eta_\beta(X) - \sum_\gamma \eta_\gamma(X)\eta_\beta([\xi_\alpha,\xi_\gamma]) = 0,$$

ya que $\eta_\beta([\xi_\alpha,\xi_\gamma]) = 2d\eta_\beta(\xi_\alpha,\xi_\gamma) = 2F(\xi_\alpha,\xi_\gamma) = 0.$ #

I.2.4. Nota.- Si (M^{2n+s}, f, g) es una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$, la fórmula (I.1.12) se convierte, por ser F cerrada y por (I.2.1), en:

$$(I.2.3) \qquad 2g((\nabla_X f)Y,Z) = g(N^{(1)}(Y,Z),fX) + 2[\sum_\alpha F(fY,X)\eta_\alpha(Z) - \sum_\alpha F(fZ,X)\eta_\alpha(Y)],$$

si $X,Y,Z \in T(M)$. En particular, como para todo $X \in T(M)$ y $\alpha \in \{1,\dots,s\}$ se tiene que $F(X,\xi_\alpha) = 0$, poniendo $X = \xi_\alpha$ en (I.2.3), tenemos que:

$$(I.2.4) \qquad (\nabla_{\xi_\alpha} f) = 0,$$

para todo $\alpha \in \{1,\dots,s\}$. Además, como sabemos que $g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\alpha,\xi_\alpha) = 0$, si $X \in \mathcal{L}$, obtenemos:

$$g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\alpha,X) = -g(\xi_\alpha,\nabla_{\xi_\alpha}X) = -g(\xi_\alpha,\nabla_X\xi_\alpha + [\xi_\alpha,X]) =$$
$$= -g(\xi_\alpha,\nabla_X\xi_\alpha) - g(\xi_\alpha,[\xi_\alpha,X]) = -\eta_\alpha([\xi_\alpha,X]) =$$
$$= 2d\eta_\alpha(\xi_\alpha,X) = 2F(\xi_\alpha,X) = 0.$$

En consecuencia, cualquiera que sea α en $\{1,\ldots,s\}$, se tiene que:

(I.2.5) $\qquad \nabla_{\xi_\alpha}\xi_\alpha = 0.$

<u>I.2.5. Definición.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$. Definimos s tensores $h_1,\ldots,h_s$ en M^{2n+s} mediante:

(I.2.6) $\qquad h_\alpha = \frac{1}{2}L_{\xi_\alpha} f,$

cualquiera que sea α en $\{1,\ldots,s\}$.

<u>I.2.6. Proposición.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha =1,\ldots,s$. Entonces, para cualquier α en $\{1,\ldots,s\}$, el operador h_α verifica las siguientes propiedades:

(I.2.7) $\qquad$ (a) h_α es simétrico.

(b) $h_\alpha\xi_\beta = 0$, $\beta = 1,\ldots,s$.

(c) $h_\alpha \cdot f = -f\cdot h_\alpha$.

Demostración:

Sabemos que, para todos $X,Y\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$:

$$\begin{aligned} g((L_{\xi_\alpha} f)X,Y) &= g(L_{\xi_\alpha} fX,Y) - g(fL_{\xi_\alpha} X,Y) = \\ &= g(\nabla_{\xi_\alpha} fX,Y) - g(\nabla_{fX}\xi_\alpha,Y) - g(f\nabla_{\xi_\alpha} X,Y) + g(f\nabla_X\xi_\alpha,Y) = \\ &= g((\nabla_{\xi_\alpha} f)X,Y) + g(f\nabla_X\xi_\alpha,Y) - g(\nabla_{fX}\xi_\alpha,Y), \end{aligned}$$

que se anula si X o Y es ξ_α. Si ambos son ortogonales a ξ_α, de (I.2.1) obtenemos:

$$\eta_\alpha([fX,Y]) + \eta_\alpha([X,fY]) = 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g((L_{\xi_\alpha} f)X,Y) &= -g(\nabla_{fX}\xi_\alpha,Y) + g(f\nabla_X\xi_\alpha,Y) = \\ &= -g(\nabla_{fX}\xi_\alpha,Y) - g(\nabla_X\xi_\alpha,fY) = \\ &= -fXg(\xi_\alpha,Y) + g(\nabla_{fX}Y,\xi_\alpha) - Xg(\xi_\alpha,fX) + g(\nabla_X fY,\xi_\alpha) = \\ &= \eta_\alpha(\nabla_{fX}Y) + \eta_\alpha(\nabla_X fY) = \\ &= \eta_\alpha([fX,Y] + \nabla_Y fX) + \eta_\alpha([X,fY] + \nabla_{fY}X) = \\ &= \eta_\alpha(\nabla_Y fX) + \eta_\alpha(\nabla_{fY}X) = g((L_{\xi_\alpha} f)Y,X). \end{aligned}$$

Por tanto, en cualquier caso tenemos (a). Para (b), observemos que:

$$h_\alpha \xi_\beta = \tfrac{1}{2}(L_{\xi_\alpha} f)\xi_\beta = \tfrac{1}{2}L_{\xi_\alpha} f\xi_\beta - \tfrac{1}{2}fL_{\xi_\alpha}\xi_\beta = -\tfrac{1}{2}f[\xi_\alpha,\xi_\beta] =$$
$$= -\tfrac{1}{2}f\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta + \tfrac{1}{2}f\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha = \tfrac{1}{2}(\nabla_{\xi_\alpha} f)\xi_\beta - \tfrac{1}{2}(\nabla_{\xi_\beta} f)\xi_\alpha = 0,$$

en virtud de (I.2.4).

Por último, es claro que (c) es cierto en $\mathcal{M}$ por lo anterior. Si $X\in\mathcal{L}$, tenemos:

$$(h_\alpha f)X = \tfrac{1}{2}(L_{\xi_\alpha} f)fX = \tfrac{1}{2}L_{\xi_\alpha} f^2X - \tfrac{1}{2}fL_{\xi_\alpha} fX = -\tfrac{1}{2}L_{\xi_\alpha} X - \tfrac{1}{2}fL_{\xi_\alpha} fX.$$

Por otra parte:

$$(fh_\alpha)X = \tfrac{1}{2}fL_{\xi_\alpha} fX - \tfrac{1}{2}f^2L_{\xi_\alpha} X = \tfrac{1}{2}fL_{\xi_\alpha} fX + \tfrac{1}{2}L_{\xi_\alpha} X,$$

ya que, para todo γ en $\{1,\ldots,s\}$,

$$\eta_\gamma(L_{\xi_\alpha} X) = \eta_\gamma([\xi_\alpha,X]) = -2d\eta_\gamma(\xi_\alpha,X) = -2F(\xi_\alpha,X) = 0,$$

pues $X\in\mathcal{L}$. #

<u>I.2.7. Corolario.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$. Entonces, se cumple que:

(I.2.8) $\quad [\xi_\alpha,\xi_\beta] = 0,$

cualesquiera que sean α y β en $\{1,\ldots,s\}$.

Demostración:

De (I.2.7) (b) tenemos $f[\xi_\alpha,\xi_\beta] = 0$, para todos $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,s\}$. Entonces:

$$0 = -[\xi_\alpha,\xi_\beta] + \sum_\gamma \eta_\gamma([\xi_\alpha,\xi_\beta])\xi_\gamma.$$

Pero, $\eta_\gamma([\xi_\alpha,\xi_\beta]) = -2F(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0.$ #

<u>I.2.8. Teorema.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$. Se cumple entonces que ξ_α es un campo de Killing si y sólo si $h_\alpha = 0$, cualquiera que sea α en $\{1,\ldots,s\}$.

Demostración:

Sabemos que, (|31|), para todo α en $\{1,\ldots,s\}$:

$$L_{\xi_\alpha} F = di_{\xi_\alpha} F + i_{\xi_\alpha} dF = 0,$$

pues $dF = 0$ y $(i_{\xi_\alpha} F)X = F(\xi_\alpha,X) = 0$, para todo $X\in T(M)$.

Por tanto, si $X,Y\in T(M)$:

$$0 = (L_{\xi_\alpha} F)(X,Y) = \xi_\alpha F(X,Y) - F(L_{\xi_\alpha} X,Y) - F(X,L_{\xi_\alpha} Y) =$$
$$= \xi_\alpha g(X,fY) - g(L_{\xi_\alpha} X,fY) - g(X,f[\xi_\alpha,Y]) =$$
$$= (L_{\xi_\alpha} g)(X,fY) + g(X,(L_{\xi_\alpha} f)Y).$$

Entonces, si ξ_α es un campo de Killing, tenemos que $L_{\xi_\alpha} g = 0$ y, por tanto, $L_{\xi_\alpha} f = 0$ con lo que $h_\alpha = 0$.

Recíprocamente, si $h_\alpha = 0$, entonces $(L_{\xi_\alpha} g)(X,fY) = 0$. Cambiando Y por fY, en virtud de (I.1.1), obtenemos:

$$0 = (L_{\xi_\alpha} g)(X,-Y + \sum_\beta \eta_\beta(Y)\xi_\beta) = \xi_\alpha g(X,-Y + \sum_\beta \eta_\beta(Y)\xi_\beta) -$$
$$- g(L_{\xi_\alpha} X,-Y + \sum_\beta \eta_\beta(Y)\xi_\beta) - g(X,L_{\xi_\alpha}(-Y + \sum_\beta \eta_\beta(Y)\xi_\beta).$$

Desarrollando esta expresión y haciendo uso de (I.2.8) llegamos a:

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X,Y) = \sum_\beta \eta_\beta(Y)(L_{\xi_\alpha}\eta_\beta)X.$$

Pero, de (I.2.2), $L_{\xi_\alpha}\eta_\beta = 0$, con lo que $L_{\xi_\alpha} g = 0$ y ξ_α es un campo de Killing. #

Concluiremos esta sección con dos resultados que nos muestran la importante relación que los tensores h_α tienen con la estructura.

<u>I.2.9. Proposición.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$. Para cualesquiera $X \in T(M)$ y $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$, se tiene que:

$$\text{(I.2.9)} \qquad \nabla_X \xi_\alpha - \sum_\beta \eta_\beta(\nabla_X\xi_\alpha)\xi_\beta = -fh_\alpha X - fX.$$

En consecuencia, la componente en $\mathcal{L}$ de $\nabla_X\xi_\alpha$ viene dada por $-fh_\alpha X - fX$.

Demostración:

Haciendo $Y = \xi_\alpha$ en (I.2.3) conseguimos, ya que $f\xi_\alpha = 0$ y $d\eta_\beta(X,\xi_\alpha) = 0$ para todos $X \in T(M)$, $\alpha,\beta \in \{1,\ldots,s\}$, si $Z \in T(M)$:

$$2g((\nabla_X f)\xi_\alpha,Z) = -2g(f\nabla_X\xi_\alpha,Z) =$$
$$= g(f^2[\xi_\alpha,Z] - f[\xi_\alpha,fZ],fX) - 2\sum_\beta F(fZ,X)\eta_\beta(\xi_\alpha) =$$
$$= -g([\xi_\alpha,Z],fX) - g(f[\xi_\alpha,fZ],fX) - 2F(fZ,X) =$$
$$= -g(f(L_{\xi_\alpha} f)Z,fX) - 2g(fX,fZ).$$

Usando (I.?.2), tenemos:

$$2g((\nabla_X f)\xi_\alpha,Z) = -g((L_{\xi_\alpha} f)Z,X) - 2g(X,Z) + 2\sum_\beta \eta_\beta(X)\eta_\beta(Z).$$

Ahora, por ser h_α simétrico:

$$2g((\nabla_X f)\xi_\alpha, Z) = -g((L_{\xi_\alpha} f)X, Z) - 2g(X,Z) + 2\sum_\beta \eta_\beta(X)\eta_\beta(Z).$$

En consecuencia:

$$-2f\nabla_X\xi_\alpha = -(L_{\xi_\alpha} f)X - 2X + 2\sum_\beta \eta_\beta(X)\xi_\beta = -2h_\alpha X + 2f^2X.$$

Aplicando f:

$$\nabla_X\xi_\alpha - \sum_\beta \eta_\beta(\nabla_X\xi_\alpha)\xi_\beta = -fh_\alpha X + f^3X = -fh_\alpha X - fX. \qquad \#$$

<u>I.2.10. Proposición.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$. Se cumple, para cualesquiera $X\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\dots,s\}$, que:

(I.2.10) $\quad h_\alpha X = \frac{1}{2}f\nabla_X\xi_\alpha - \frac{1}{2}\nabla_{fX}\xi_\alpha.$

Demostración:

De la definición de h_α:

$$\begin{aligned} h_\alpha X &= \tfrac{1}{2}(L_{\xi_\alpha} f)X = \tfrac{1}{2}L_{\xi_\alpha} fX - \tfrac{1}{2}fL_{\xi_\alpha} X = \\ &= \tfrac{1}{2}\nabla_{\xi_\alpha} fX - \tfrac{1}{2}\nabla_{fX}\xi_\alpha - \tfrac{1}{2}f\nabla_{\xi_\alpha} X + \tfrac{1}{2}f\nabla_X\xi_\alpha = \\ &= \tfrac{1}{2}(\nabla_{\xi_\alpha} f)X - \tfrac{1}{2}\nabla_{fX}\xi_\alpha + \tfrac{1}{2}f\nabla_X\xi_\alpha. \end{aligned} \qquad \#$$

I.3. K-Variedades.-

<u>I.3.1. Definiciones básicas.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica. Si es normal y tiene 2-forma fundamental cerrada, diremos que es una <u>K-estructura</u> y a M^{2n+s} la llamaremos <u>K-variedad</u>. Nótese que, como:

$$\eta_1\wedge\dots\wedge\eta_s\wedge F^n \neq 0,$$

toda K-variedad es orientable.

Sea, ahora, una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma funfamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$. Si esta estructura es una K-estructura, la llamaremos <u>S-estructura</u> y diremos que M^{2n+s} es una <u>S-variedad</u>.

Por último, sea M^{2n+s} una variedad Riemanniana con una K-estructura, denotando $\eta_1,\dots,\eta_s$ las referencias complementadas. Si $d\eta_\alpha = 0$, $\alpha = 1,\dots,s$, diremos que M^{2n+s} es una <u>C-variedad</u> y a la estructura la llamaremos <u>C-es-</u>

tructura.

I.3.2. Nota.- De la normalidad de una K-estructura, se deduce inmediatamente, utilizando la Proposición I.1.2, que, para todos $X,Y\in\mathcal{T}(M)$ y α,β en $\{1,\dots,s\}$:

(I.3.1) (a) $(L_{fX}\eta_\alpha)Y = (L_{fY}\eta_\alpha)X.$

(b) $L_{\xi_\alpha} f = 0.$

(c) $L_{\xi_\alpha}\eta_\beta = 0.$

De (c) también es inmediato que:

(I.3.2) (a) $\eta_\beta([\xi_\alpha,X]) = \xi_\alpha\eta_\beta(X).$

(b) $\eta_\beta([\xi_\alpha,fX]) = 0,$

para todos $X\in\mathcal{T}(M)$, $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$.

Las primeras propiedades de las K-estructuras vienen dadas por los siguientes resultados:

I.3.3. Proposición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Para cualesquiera $X\in\mathcal{T}(M)$ y $\alpha\in\{1,\dots,s\}$, se verifica que:

(I.3.3) $[\xi_\alpha,X] = f[fX,\xi_\alpha] + \sum_\beta (\xi_\alpha\eta_\beta(X))\,\xi_\beta.$

Demostración:

Por la normalidad de la estructura, tenemos:

$$0 = N^{(1)}(X,\xi_\alpha) = f^2[X,\xi_\alpha] - f[fX,\xi_\alpha] + 2\sum_\beta d\eta_\beta(X,\xi_\alpha)\,\xi_\beta =$$

$$= -[X,\xi_\alpha] - f[fX,\xi_\alpha] - \sum_\beta (\xi_\alpha\eta_\beta(X))\,\xi_\beta.$$ #

I.3.4. Proposición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Entonces, para cualesquiera $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$, se tiene que:

(I.3.4) $[\xi_\alpha,\xi_\beta] = 0.$

Demostración:

Es inmediata de (I.3.3), haciendo $X = \xi_\beta$. #

La hipótesis de normalidad de la estructura nos permite mejorar los resultados de la Proposición I.1.4. Para ello, utilizaremos la fórmula (I.3.4)

I.3.5. Proposicion.-. En una K-variedad M^{2n+s}, si $X,Y\in\mathcal{T}(M)$ y $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$, se tiene que:

(I.3.5) (a) $d\eta_\alpha(fX,Y) + d\eta_\alpha(X,fY) = 0.$

(b) $d\eta_\alpha(X,\xi_\beta) = 0$

(c) $d\eta_\alpha(fX,fY) = d\eta_\alpha(X,Y):$

Demostración:

De (I.3.1) tenemos que $N^{(2)}_\alpha = 0$, para todo $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$. Por la Proposición I.1.4, obtenemos (a). Además, por (I.3.4), llegamos a:

$$d\eta_\alpha(\xi_\beta,\xi_\gamma) = 0,\quad \alpha,\beta,\gamma\varepsilon\{1,\ldots,s\},$$

con lo cual, junto a (b) de (I.1.11), conseguimos (b). Por último, (c) es consecuencia de (b), cambiando X por fX en (a). #

<u>I.3.6. Teorema.-</u> En una K-variedad M^{2n+s}, los campos $\xi_1,\ldots,\xi_s$ son campos de Killing.

Demostración:

Razonando de modo análogo al Teorema I.2.8, tenemos, para cualesquiera $X,Y\epsilon T(M)$, $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$:

$$(L_{\xi_\alpha} g)(X,fY) = 0,$$

en virtud de (I.3.1), (b). Cambiando Y por fY y aplicando (I.3.1), (c) y (I.3.4), llegamos a $(L_{\xi_\alpha} g)(X,Y) = 0$ y, por tanto, ξ_α es un campo de Killing, para todo α en $\{1,\ldots,s\}$. #

<u>I.3.7. Corolario.-</u> En una K-variedad M^{2n+s}, se cumple que:

(I.3.6) $$(\nabla_X\eta_\alpha)Y - (\nabla_Y\eta_\alpha)X = -2(\nabla_Y\eta_\alpha)X = 2(\nabla_X\eta_\alpha)Y,$$

y, en consecuencia:

(I.3.7) $$d\eta_\alpha(X,Y) = (\nabla_X\eta_\alpha)Y,$$

cualesquiera que sean $X,Y\epsilon T(M)$, $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$.

Demostración:

Observemos que:

$$(\nabla_X\eta_\alpha)Y - (\nabla_Y\eta_\alpha)X = X\eta_\alpha(Y) - \eta_\alpha(\nabla_X Y) - Y\eta_\alpha(X) + \eta_\alpha(\nabla_Y X) =$$

$$= g(\nabla_X\xi_\alpha,Y) - g(\nabla_Y\xi_\alpha,X).$$

Ahora bien, como ξ_α es un campo de Killing, tenemos que, (|18|):

$$g(\nabla_X\xi_\alpha,Y) = -g(\nabla_Y\xi_\alpha,X),$$

con lo que (I.3.6) queda demostrada. Por otra parte:

$$d\eta_\alpha(X,Y) = \tfrac{1}{2}((\nabla_X\eta_\alpha)Y - (\nabla_Y\eta_\alpha)X) = (\nabla_X\eta_\alpha)Y. \qquad \#$$

A continuación, vamos a estudiar el valor de la derivada covariante de la conexión de Levi-Civita de los campos ξ_α en una K-variedad, así como el significado de ∇f. Para ello, demostramos los siguientes resultados:

<u>I.3.8. Proposición.-</u> Sea M^{2n+s} una K-variedad. Entonces, si $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,s\}$, se tiene que:

$$\text{(I.3.8)} \qquad \nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta = 0.$$

Demostración:

Como ξ_α es un campo de Killing, tenemos, si $X\in T(M)$, que, para todo $\beta\in\{1,\ldots,s\}$:

$$g(\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha,X) + g(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0.$$

Por otra parte, como ξ_β también es un campo de Killing:

$$\begin{aligned} 0 = Xg(\xi_\alpha,\xi_\beta) &= g(\xi_\beta,\nabla_X\xi_\alpha) + g(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\beta) = \\ &= -g(\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha,X) + g(\xi_\alpha,\nabla_X\xi_\beta) = \\ &= -g(\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha,X) - g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta,X). \end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta = -\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha$. Pero de (I.3.4), $\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta = \nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha$ y, en consecuencia, $\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta = 0$. #

<u>I.3.9. Proposición.-</u> Sea M^{2n+s} una K-variedad. Para todos $X,Y,Z\in T(M)$, se verifica que:

$$\text{(I.3.9)} \qquad g((\nabla_X f)Y,Z) = \sum_\alpha [d\eta_\alpha(fY,X)\,\eta_\alpha(Z) - d\eta_\alpha(fZ,X)\,\eta_\alpha(Y)]$$

Demostración:

Es inmediata del Teorema I.1.5. #

<u>I.3.10. Proposición.-</u> Sea M^{2n+s} una K-variedad. Para cualesquiera $X\in T(M)$ y $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$, se tiene que:

$$\text{(I.3.10)} \qquad (\nabla_X f)\xi_\alpha = -\nabla_{fX}\xi_\alpha,$$

y, en consecuencia,

$$\text{(I.3.11)} \qquad \nabla_X\xi_\alpha = -f\nabla_{fX}\xi_\alpha.$$

Demostración:

Sea cualquier $Y\in T(M)$. Por (I.3.7) y (I.3.9), tenemos:

$$g((\nabla_X f)\xi_\alpha, Y) = d\eta_\alpha(Y, fX) = -(\nabla_{fX}\eta_\alpha)Y =$$
$$= -fX\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha(\nabla_{fX}Y) = -g(Y, \nabla_{fX}\xi_\alpha),$$

y, por tanto, llegamos a (I.3.10).

Por otra parte:

$$(\nabla_X f)\xi_\alpha = -f\nabla_X\xi_\alpha,$$

y de (I.3.10):

(I.3.12) $\quad f\nabla_X\xi_\alpha = \nabla_{fX}\xi_\alpha.$

Como $X = -f^2X + \sum_\beta \eta_\beta(X)\xi_\beta$, obtenemos:

$$\nabla_X\xi_\alpha = \nabla_{-f^2X + \sum_\beta \eta_\beta(X)\xi_\beta}\xi_\alpha = -\nabla_{f^2X}\xi_\alpha + \sum_\beta \eta_\beta(X)\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha =$$
$$= -f\nabla_{fX}\xi_\alpha, \text{ en virtud de (I.3.8) y (I.3.12).}$$ #

I.3.11. Nota.- (I.3.11) nos prueba, en realidad, que $\nabla_X\xi_\alpha \in \mathcal{L}$, para todos $X \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$.

I.3.12. Corolario.- En una K-variedad M^{2n+s} se tiene que:

(I.3.13) (a) $g((\nabla_X f)\xi_\alpha, Y) = d\eta_\alpha(Y, fX)$.

(b) $g(\nabla_X\xi_\alpha, fY) = -\frac{1}{2}(L_{fX}\eta_\alpha)Y$.

(c) $g(\nabla_X\xi_\alpha, Y) = d\eta_\alpha(X, Y)$,

para todos $X, Y \in T(M)$, $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$.

Demostración:

(a) es inmediato de (I.3.9). Para (b), partiendo de (a) tenemos:

$$g((\nabla_X f)\xi_\alpha, Y) = g(\nabla_X\xi_\alpha, fY) = d\eta_\alpha(Y, fX) =$$
$$= \tfrac{1}{2}Y\eta_\alpha(fX) - \tfrac{1}{2}fX\eta_\alpha(Y) - \tfrac{1}{2}\eta_\alpha([Y, fX]) =$$
$$= -\tfrac{1}{2}(L_{fX}\eta_\alpha)Y.$$

Para (c), cambiamos Y por fY y, aplicando $\eta_\alpha(fX) = 0$ y (I.3.11), obtenemos el resultado. #

I.3.13. Proposición.- Sea una K-variedad M^{2n+s}. Para todos $X, Y, Z \in T(M)$ se tiene que:

(I.3.14) $\quad (\nabla_X F)(Y, Z) = \sum_\alpha [\eta_\alpha(Y)d\eta_\alpha(fZ, X) + \eta_\alpha(Z)d\eta_\alpha(X, fY)].$

Demostración:

Tenemos que:

$$(\nabla_X F)(Y, Z) = XF(Y, Z) - F(\nabla_X Y, Z) - F(Y, \nabla_X Z) =$$

$= Xg(Y,fZ) - g(\nabla_X Y,fZ) - g(Y,f\nabla_X Z) =$

$= Xg(Y,fZ) - g(\nabla_X Y,fZ) + g(Y,(\nabla_X f)Z) - g(Y,\nabla_X fZ) =$

$= g(Y,(\nabla_X f)Z).$

Aplicando (I.3.9) se obtiene el resultado deseado. #

I.3.14. Proposición.- En una K-variedad M^{2n+s}, se tiene que:

(I.3.15) $(\nabla_{\xi_\alpha} f) = 0,$

para todo $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$.

Demostración:

Es fácil comprobar que para todo $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$ si $X\in T(M)$:

$d\eta_\alpha(fX,\xi_\alpha) = 0.$

Entonces, de (I.3.9), si $Y\in T(M)$, tenemos:

$g((\nabla_{\xi_\alpha} f)X,Y) = 0.$ #

Pasamos a continuación a estudiar los caso particulares de S-variedad y de C-variedad.

I.3.15. Proposición.- Si M^{2n+s} es una S-variedad, entonces:

(I.3.16) $\nabla_X \xi_\alpha = -fX,$

y si M^{2n+s} es una C-variedad, entonces:

(I.3.17) $\nabla_X \xi_\alpha = 0,$

cualesquiera que sean $X\in T(M)$ y $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$.

Demostración:

En el caso de S-variedad, si $X,Y\in T(M)$ y $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$, tenemos:

$F(Y,X) = d\eta_\alpha(Y,X) = -g(\nabla_X \xi_\alpha,Y),$

en virtud de (I.3.13) (c) y de ser ξ_α un campo de Killing. Ahora bien, $F(Y,X) = g(Y,fX)$ y, por tanto, obtenemos (I.3.16).

En el caso de C-variedad, también por (I.3.13) (c):

$0 = d\eta_\alpha(X,Y) = g(\nabla_X \xi_\alpha,Y)$

y, de aquí, (I.3.17). #

I.3.16. Proposición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad. Entonces, si $X,Y\in T(M)$, se cumple que:

(I.3.18) $(\nabla_X f)Y = \sum_\alpha [g(fX,fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X].$

Demostración:

De (I.3.9), por ser M^{2n+s} una S-variedad, si $Z\varepsilon T(M)$, tenemos:

$$g((\nabla_X f)Y,Z) = \sum_\alpha [F(fY,X)\eta_\alpha(Z) - F(fZ,X)\eta_\alpha(Y)] =$$
$$= \sum_\alpha [g(fY,fX)\eta_\alpha(Z) - g(fZ,fX)\eta_\alpha(Y)] =$$
$$= \sum_\alpha [g(fY,fX)\eta_\alpha(Z) + g(f^2X,Z)\eta_\alpha(Y)]. \qquad \#$$

I.3.17. Proposición.- Si M^{2n+s} es una S-variedad, se tiene:

$$(\nabla_X F)(Y,Z) = \sum_\alpha [\eta_\alpha(Y)g(X,Z) - \eta_\alpha(Z)g(X,Y)] - \tag{I.3.19}$$
$$- \sum_\alpha \sum_\beta \eta_\beta(X)[\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z) - \eta_\alpha(Z)\eta_\beta(Y)],$$

para todos $X,Y,Z\varepsilon T(M)$.

Demostración:

De modo idéntico a como se razona en la Proposición I.3.13, llegamos a:

$$(\nabla_X F)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X f)Z).$$

y, aplicando (I.3.18) obtenemos la expresión deseada. #

Para finalizar la sección , daremos a continuación algunas caracterizaciones de las S-variedades y las C-variedades a partir de las K-variedades.

I.3.18. Teorema.- Una K-variedad M^{2n+s} es una S-variedad si y sólo si se verifica la fórmula (I.3.18).

Demostración:

Vamos a probar que en una K-estructura cumpliendo (I.3.18) se tiene que $F(X,Y) = d\eta_\alpha(X,Y)$, cualesquiera que sean $X,Y\varepsilon T(M)$ y $\alpha\varepsilon\{1,\dots,s\}$, con lo cual tendríamos una S-estructura.. Por (I.3.7):

$$d\eta_\alpha(X,Y) = -(\nabla_Y \eta_\alpha)X = -Y\eta_\alpha(X) + \eta_\alpha(\nabla_Y X) = -g(X,\nabla_Y \xi_\alpha).$$

Usando ahora (I.3.10) y (I.3.11), tenemos:

$$d\eta_\alpha(X,Y) = g(X,f\nabla_{fY}\xi_\alpha) = -g(fX,\nabla_{fY}\xi_\alpha) =$$
$$= g(fX,(\nabla_Y f)\xi_\alpha).$$

En virtud de (I.3.18):

$$d\eta_\alpha(X,Y) = g(fX,\sum_\beta g(fY,f\xi_\alpha)\xi_\beta + \sum_\beta \eta_\beta(\xi_\alpha)f^2Y) =$$
$$= g(fX,f^2Y) = -g(X,f^3Y) = g(X,fY) = F(X,Y). \qquad \#$$

Los dos siguientes resultados son debidos a Blair. Omitiremos las demostraciones, que pueden encontrarse en |5|.

I.3.19. Teorema.- En una K-variedad M^{2n+s}, las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) M^{2n+s} es una C-variedad.

(b) $\nabla F = 0$.

(c) $\nabla f = 0$.

I.3.20. Teorema.- Una C-variedad M^{2n+s} es una variedad Riemanniana localmente descomponible, que es localmente el producto de una variedad de Kaehler M_1^{2n} y de un grupo de Lie abeliano M_2^s.

I.4. Ejemplos.-

Como ya se ha indicado, una estructura cas-compleja es una f-estructura y corresponde al caso s = 0. Así, si la estructura es normal y la 2-forma fundamental es cerrada, tenemos una variedad Kaehleriana.

Para s = 1, las f-estructuras métricas corresponden a las estructuras casi-contacto. Si la 1-forma es η y la 2-forma fundamental verifica $F = d\eta$, tenemos una estructura de contacto. Por último, una S-variedad con s = 1 es una variedad Sasakiana.

El caso s = 2 aparece en el estudio de las hipersuperficies de espacios casi-contacto. Goldberg y Yano (|19|, |20|, |21|) lo han estudiado en profundidad.

Otro ejemplo de f-estructura métrica con referencias complementadas está motivado por una carta de E. Cartan a Vranceanu.En R^6 definamos la estructura como sigue:

$$\eta_1 = dx_1 - x_5 dx_3 - x_2 dx_4,$$

$$\eta_2 = dx_2 - x_1 dx_3 - x_6 dx_4,$$

$$\xi_1 = \partial/\partial x_1,$$

$$\xi_2 = \partial/\partial x_2.$$

Es fácil comprobar que $\eta_1 \wedge d\eta_1^2 \neq 0$, $\eta_2 \wedge d\eta_2^2 \neq 0$, $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge d\eta_\alpha^2 = 0$, $\alpha = 1,2$ y $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge d\eta_1 \wedge d\eta_2 \neq 0$. Además, se tienen:

$$f = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & x_2 & -x_5 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ & & x_6 & x_1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ & & 1 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right],$$

y:

$$g = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -x_5 & -x_2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 1 & -x_1 & -x_6 & & \\ \hline -x_5 & -x_1 & 1 + x_1^2 + x_5^2 & x_2x_5 + x_1x_6 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ -x_2 & -x_6 & x_2x_5 + x_1x_6 & 1 + x_2^2 + x_6^2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Con estas expresiones es también fácil comprobar que la estructura no es normal.

Por último, Blair (|5| y |6|), nos provee del ejemplo canónico de S-variedad, de la siguiente forma:

Sea M^{2n+s} el espacio fibrado de una fibración principal toroidal sobre una variedad de Kaehler N^{2n}. En el caso $s = 1$, tenemos los fibrados principales circulares.

<u>I.4.1. Teorema.-</u> Sea $\gamma = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$ una Algebra de Lie-valuada forma de conexión en M^{2n+s} tal que $d\eta_\alpha = \pi^*\Omega$, $\alpha = 1,\ldots,s$, donde π es la aplicación proyección y Ω la 2-forma fundamental de N^{2n}. Entonces, M^{2n+s} es una S-variedad.

La demostración la omitiremos, pues puede encontrarse en los artículos antes reseñados. Sin embargo, diremos aquí que f y g se definen sobre M^{2n+s} mediante:

(I.4.1) $\qquad fX = \tilde{\pi} J \pi_* X$

$$(I.4.2) \qquad g(X,Y) = G(\pi_* X, \pi_* Y) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y),$$

donde J es la estructura casi-compleja de N^{2n} y G su métrica Hermítica, y $\tilde{\pi}$ representa a la elevación horizontal. Como $\xi_1,\dots,\xi_s$ consideraremos a los campos duales de $\eta_1,\dots,\eta_s$.

También en |5| puede encontrarse la construcción de la conexión Riemanniana de g sobre M^{2n+s}. Para aplicar todo esto a un caso concreto, consideremos el ejemplo canónico de variedad Sasakiana, que es la esfera S^{2n+1} como un fibrado circular sobre el espacio proyectivo PC^n, por la fibración de Hopf, $\pi'\colon S^{2n+1} \longrightarrow PC^n$. Usando la aplicación diagonal Δ definimos un fibrado principal toroidal sobre PC^n mediante el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^{2n+s} & \xrightarrow{\quad\tilde{\Delta}\quad} & S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} \\ \big\downarrow & \# & \big\downarrow \pi' \times \dots \times \pi' \\ PC^n & \xrightarrow{\quad\Delta\quad} & PC^n \times \dots \times PC^n \end{array}$$

esto es, $H^{2n+s} = \{(p_1,\dots,p_s) \in S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} / \pi'(p_1) = \dots = \pi'(p_s)\}$.

Sea ahora η'_α la forma de contacto de S^{2n+1}_α, $\alpha = 1,\dots,s$ y definamos η_α en H^{2n+s} por $\eta_\alpha = \tilde{\Delta}^*|_{S^{2n+1}}\, \eta'_\alpha = \tilde{\Delta}^*_\alpha \eta'_\alpha$. Entonces:

$$d\eta_\alpha = d\tilde{\Delta}^*_\alpha \eta'_\alpha = \tilde{\Delta}^*_\alpha d\eta'_\alpha = \tilde{\Delta}^*_\alpha \pi'^*_\alpha \Omega_\alpha = \pi^* \Delta^*_\alpha \Omega_\alpha = \pi^*\Omega,$$

donde Ω_α es la 2-forma fundamental de PC^n_α y Ω la de PC^n. Como $\gamma = (\eta_1,\dots,\eta_s)$ está en las condiciones del Teorema I.4.1, H^{2n+s} es una S-variedad.

CAPITULO II

La curvatura en K - variedades.

En este capítulo empezaremos estudiando la forma del tensor de curvatura en las K-variedades, para obtener, después, unas caracterizaciones a partir de él. También estudiaremos la curvatura f-seccional invariante, que determina completamente la curvatura en los casos de S-variedades y C-variedades, obteniendo la versión correspondiente del Teorema de Schur. Por último, analizaremos la relación entre la curvatura f-seccional invariante y la curvatura f-seccional antiinvariante.

II.1. El tensor de curvatura.-

Aunque nuestro principal objetivo es estudiar la curvatura de las K-variedades y, en particular, de las S-variedades, empezaremos trabajando con una estructura más débil.

II.1.1. Proposición.- Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$. Entonces, para todos $X\in T(M)$ y $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$, si denotamos por R al tensor de curvatura de M^{2n+s}, se verifica que:

$$\text{(II.1.1)} \qquad \tfrac{1}{2}R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = \tfrac{1}{2}f(R(\xi_\alpha,fX)\xi_\beta + \nabla_{fX}\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta) -$$
$$- f\nabla_X\xi_\alpha - \tfrac{1}{2}\nabla_X\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta + f\nabla_{h_\alpha X}\xi_\beta +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_\gamma [\eta_\gamma(\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_X\xi_\beta - \nabla_{[\xi_\alpha,X]}\xi_\beta)\xi_\gamma].$$

Demostración:

En virtud de (I.2.9), tenemos:

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = \nabla_{\xi_\alpha}\nabla_X\xi_\tau - \nabla_X\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta - \nabla_{[\xi_\alpha,X]}\xi_\beta =$$
$$= \nabla_{\xi_\alpha}(-fX - fh_\beta X + \sum_\gamma \eta_\gamma(\nabla_X\xi_\beta)\xi_\gamma) - \nabla_X(\sum_\gamma \eta_\gamma(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta)\xi_\gamma) +$$
$$+ f[\xi_\alpha,X] + fh_\beta[\xi_\alpha,X] - \sum_\gamma \eta_\gamma(\nabla_{[\xi_\alpha,X]}\xi_\beta)\xi_\gamma.$$

Aplicando ahora (I.2.4) y (I.2.10), llegamos a:

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = \tfrac{1}{2}f(\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_{fX}\xi_\beta - \nabla_{f[\xi_\alpha,X]}\xi_\beta) - f\nabla_X\xi_\alpha + \tfrac{1}{2}\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_X\xi_\beta -$$
$$- \nabla_X\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta - \tfrac{1}{2}\nabla_{[\xi_\alpha,X]}\xi_\beta + \tfrac{1}{2}\sum_\gamma [\eta_\gamma(\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_X\xi_\beta - \nabla_{[\xi_\alpha,X]}\xi_\beta)\xi_\gamma].$$

Sumando y restando $\tfrac{1}{2}f\nabla_{\nabla_{fX}\xi_\alpha}\xi_\beta$, obtenemos:

$$\tfrac{1}{2}R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = \tfrac{1}{2}f(R(\xi_\alpha,fX)\xi_\beta + \nabla_{fX}\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta) - f\nabla_X\xi_\alpha -$$
$$- \tfrac{1}{2}\nabla_X\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta + \tfrac{1}{2}\sum_\gamma [\eta_\gamma(\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_X\xi_\beta - \nabla_{[\xi_\alpha,X]}\xi_\beta)\xi_\gamma] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}f\nabla_{f\nabla_X\xi_\alpha}\xi_\beta - \tfrac{1}{2}f\nabla_{\nabla_{fX}\xi_\alpha}\xi_\beta$$

y, por (I.2.10), se concluye la demostración. #

<u>II.1.2. Corolario.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$. Entonces, cualesquiera que sean $X\in T(M)$ y $\alpha\in\{1,\dots,s\}$, se cumple:

$$\text{(II.1.2)} \qquad \tfrac{1}{2}(R(\xi_\alpha,X)\xi_\alpha - fR(\xi_\alpha,fX)\xi_\alpha) - \tfrac{1}{2}\sum_\gamma \eta_\gamma(R(\xi_\alpha,X)\xi_\alpha)\xi_\gamma =$$
$$= f^2X + h_\alpha^2X.$$

Demostración:

De (I.2.5) y (II.1.1), tenemos:

$$\tfrac{1}{2}R(\xi_\alpha,X)\xi_\alpha = \tfrac{1}{2}fR(\xi_\alpha,fX)\xi_\alpha - f\nabla_X\xi_\alpha + f\nabla_{h_\alpha X}\xi_\alpha +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_\gamma \eta_\gamma(\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_X\xi_\alpha - \nabla_{[\xi_\alpha,X]}\xi_\alpha)\xi_\gamma.$$

Aplicando (I.2.5) y (I.2.9), obtenemos:

$$\tfrac{1}{2}R(\xi_\alpha,X)\xi_\alpha = \tfrac{1}{2}fR(\xi_\alpha,fX)\xi_\alpha + \tfrac{1}{2}\sum_\gamma \eta_\gamma(R(\xi_\alpha,X)\xi_\alpha)\xi_\gamma +$$
$$+ f^2X + h_\alpha^2X,$$

ya que, al ser h_α simétrico, $\eta_\gamma(h_\alpha X) = 0$, para todo $\gamma\in\{1,\dots,s\}$, pues, por

(I.2.7) (b), $h_\alpha \xi_\gamma = 0$. #

<u>II.1.3. Teorema.-</u> Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\dots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,s$. Sea $\beta\in\{1,\dots,s\}$ tal que todas las curvaturas seccionales de secciones planas generadas por ξ_β y ξ_γ, $\gamma\in\{1,\dots,s\}$, sean nulas. Entonces, ξ_β es un campo de Killling si y sólo si la curvatura de Ricci en la dirección de ξ_β vale 2n.

Demostración:

Consideremos localmente f-bases de la forma:

$$\{E_1,\dots,E_n,fE_1,\dots,fE_n,\xi_1,\dots,\xi_s\}.$$

Sea β el de las hipótesis. Por ellas, si denotamos por K la curvatura seccional de M^{2n+s}, $K(\xi_\beta,\xi_\gamma) = R(\xi_\beta,\xi_\gamma,\xi_\gamma,\xi_\beta) = 0$. Además, para E_i, con $1\leq i\leq n$, por (II.1.2) tenemos:

$$\tfrac{1}{2}g(R(\xi_\beta,E_i)\xi_\beta,E_i) - \tfrac{1}{2}g(fR(\xi_\beta,fE_i)\xi_\beta,E_i) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\sum_\gamma (\eta_\gamma(R(\xi_\beta,E_i)\xi_\beta)g(\xi_\gamma,E_i) =$$
$$= g(f^2E_i + h_\beta^2E_i,E_i).$$

Para fE_i, $1\leq i\leq n$, por (II.1.2):

$$\tfrac{1}{2}g(R(\xi_\beta,fE_i)\xi_\beta,fE_i) - \tfrac{1}{2}g(fR(\xi_\beta,f^2E_i)\xi_\beta,fE_i) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\sum_\gamma (\eta_\gamma(R(\xi_\beta,fE_i)\xi_\beta)g(\xi_\gamma,fE_i) = g(f^3E_i + h_\beta^2fE_i,fE_i).$$

Ahora bien, como $f^2E_i = -E_i$, $f^3E_i = -fE_i$, $g(fX,Y) = -g(X,fY)$ y $g(E_i,\xi_\gamma) = g(fE_i,\xi_\gamma) = 0$, $1\leq i\leq n$, $\gamma = 1,\dots,s$, sumando ambas expresiones para un mismo i:

$$g(R(\xi_\beta,E_i)\xi_\beta,E_i) + g(R(\xi_\beta,fE_i)\xi_\beta,fE_i) = -2 + g(h_\beta^2E_i,E_i) +$$
$$+ g(h_\beta^2fE_i,fE_i).$$

Entonces, llamando S al tensor de Ricci de M^{2n+s}, la curvatura de Ricci en la dirección de ξ_β es:

$$S(\xi_\beta,\xi_\beta) = \sum_{i=1}^n [R(E_i,\xi_\beta,\xi_\beta,E_i) + R(fE_i,\xi_\beta,\xi_\beta,fE_i)]=$$
$$= 2n - \sum_{i=1}^n [g(h_\beta^2E_i,E_i) + g(h_\beta^2fE_i,fE_i)] =$$
$$= 2n - Tr(h_\beta^2),$$

pues $h^2_{\beta}\xi_{\gamma} = 0$, para todo $\gamma\varepsilon\{1,\ldots,s\}$. En consecuencia, $S(\xi_\beta,\xi_\beta) = 2n$ si y sólo si $Tr(h^2_\beta) = 0$ y como h_β es simétrico, esto ocurre si y sólo si $h_\beta = 0$, lo cual es equivalente a que ξ_β sea un campo de Killing.

II.1.4. Nota.- Este resultado debe compararse con el correspondiente en el caso $s = 1$, de las variedades de contacto. Para ello, véase |9|. Más adelante, comprobaremos que añadir la hipótesis de que las curvaturas seccionales de secciones planas generadas por campos de $\mathcal{M}$ no es pérdida de generalidad para las S-variedades.

Ahora vamos a estudiar la forma del tensor de curvatura en K-variedades. Empezaremos con un resultado que se debe exclusivamente al hecho de que los campos $\xi_1,\ldots,\xi_s$ sean de Killling.

II.1.5. Proposición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Entonces, para cualesquiera $X,Y\varepsilon T(M)$, $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$, se cumple que:

$$(II.1.3) \qquad R(X,\xi_\alpha)Y = \nabla_X\nabla_Y\xi_\alpha - \nabla_{\nabla_X Y}\xi_\alpha.$$

Demostración:

Como ξ_α es un campo de Killing, se tiene (|18|):

$$L_{\xi_\alpha}\nabla_X Y - \nabla_X L_{\xi_\alpha}Y = \nabla_{[\xi_\alpha,X]}Y.$$

Por tanto:

$$[\xi_\alpha,\nabla_X Y] - \nabla_X[\xi_\alpha,Y] = \nabla_{[\xi_\alpha,X]}Y$$

y, de aquí:

$$\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_X Y - \nabla_{\nabla_X Y}\xi_\alpha - \nabla_X\nabla_{\xi_\alpha}Y + \nabla_X\nabla_Y\xi_\alpha = \nabla_{[\xi_\alpha,X]}Y. \qquad \#$$

II.1.6. Corolario.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Entonces, para cualesquiera $\alpha,\beta,\gamma\varepsilon\{1,\ldots,s\}$, se cumple que:

$$(II.1.4) \qquad R(\xi_\alpha,\xi_\beta)\xi_\gamma = 0.$$

Demostración:

Es inmediata de (I.3.8) y (II.1.3). #

II.1.7. Corolario.- Sea M^{2n+s} Una K-variedad. Entonces, las curvaturas seccionales de secciones planas generadas por cualesquiera dos campos de $\mathcal{M}$, son todas nulas.

Demostración:

Se obtiene directamente de (II.1.4), pues:

$$K(\xi_\alpha,\xi_\beta) = R(\xi_\alpha,\xi_\beta,\xi_\beta,\xi_\alpha) = 0. \qquad \#$$

II.1.8. Proposición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Se tiene que, cualesquiera que sean $X\in T(M)$ y $\alpha,\beta,\gamma\in\{1,\dots,s\}$:

(II.1.5) $\quad R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,\xi_\gamma) = 0.$

Además si M^{2n+s} es una S-variedad, entonces:

(II.1.6) $\quad R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = f^2X = -X + \sum_\delta \eta_\delta(X)\xi_\delta$,

y, si M^{2n+s} es una C-variedad:

(II.1.7) $\quad R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = 0.$

Demostración:

En el caso de K-variedad, tenemos, por (II.1.4):

$$R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,\xi_\gamma) = g(R(\xi_\beta,\xi_\gamma)\xi_\alpha,X) = 0.$$

Si M^{2n+s} es una S-variedad, por (I.3.16) y (II.1.3):

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = \nabla_{\nabla_X\xi_\beta}\xi_\alpha = -\nabla_{fX}\xi_\alpha = f^2X.$$

Por último, si M^{2n+s} es una C-variedad, tenemos, por (I.3.17) y (II.1.3), que $R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = 0$. #

En realidad, hemos demostrado el siguiente resultado, (|5|):

II.1.9. Teorema.- En una K-estructura, la distribución $\mathcal{M}$ es llana, esto es, todas las curvaturas seccionales $K(X,Y)$ para secciones generadas por $X,Y\in\mathcal{M}$ se anulan. En una S-estructura, las curvaturas seccionales $K(X,Y)$ con $X\in\mathcal{L}$ e $Y = \xi_\alpha$ $\alpha = 1,\dots,s$, valen 1. En una C-estructura, las curvaturas seccionales con $X\in\mathcal{M}$, $Y\in\mathcal{L}$, se anulan.

Demostración:

Como tenemos, tomando X e Y unitarios:

$$K(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = g(R(X,Y)Y,X),$$

es inmediata de (II.1.5), (II.1.6) y (II.1.7). #

II.1.10. Corolario.- Una C-variedad M^{2n+s}, $s\geqslant 2$, de curvatura constante es localmente llana.

II.1.11. Corolario.- No existen S-variedades M^{2n+s}, $s \geqslant 2$, de curvatura constante.

Demostración:

Si $X \in \mathcal{L}$ y es unitario, tenemos, por (II.1.6):

$$K(X,\xi_\alpha) = R(X,\xi_\alpha,\xi_\alpha,X) = 1,$$

para todo $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$. Por otra parte, del Corolario II.1.7, $K(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0$, para todos $\alpha,\beta \in \{1,\ldots,s\}$. #

II.1.12. Nota.- Este último resultado, nos prueba la importancia de s. Para los caso s= 0 (variedades Kaehlerianas) y s = 1 (variedades Sasakianas), existe una amplia bibliografía acerca de las variedades de curvatura constante, así como numerosos e importantes ejemplos de ellas. Pueden consultarse, entre otros, |4|, |18|, |31|, |43|, |47|, |49|.

II.1.13. Proposición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Entonces, si $X,Y \in T(M)$, $\alpha,\beta \in \{1,\ldots,s\}$, se verifica que:

$$R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,Y) = -g(\nabla_X\xi_\beta,\nabla_Y\xi_\alpha). \tag{II.1.8}$$

Demostración:

Por (II.1.3), tenemos:

$$R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,Y) = -g(R(\xi_\beta,Y)X,\xi_\alpha) = -g(\nabla_{\nabla_Y X}\xi_\beta,\xi_\alpha) + $$
$$+ g(\nabla_Y\nabla_X\xi_\beta,\xi_\alpha).$$

Ahora bien, por ser ξ_β un campo de Killing, obtenemos:

$$R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,Y) = g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta,\nabla_Y X) + Y\eta_\alpha(\nabla_X\xi_\beta) - g(\nabla_X\xi_\beta,\nabla_Y\xi_\alpha).$$

Utilizando (I.3.8) y (I.3.11), llegamos a:

$$R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,Y) = -Y\eta_\alpha(f\nabla_{fX}\xi_\beta) - g(\nabla_X\xi_\beta,\nabla_Y\xi_\alpha)$$

y pues $\eta_\alpha.f = 0$, se concluye la demostración. #

II.1.14. Corolario.- En una K-variedad M^{2n+s}, se cumple que:

$$K(\xi_\alpha,X) = ||\nabla_X\xi_\alpha||^2, \tag{II.1.9}$$

cualesquiera que sean $X \in T(M)$ unitario y $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$.

Demostración:

Es inmediata de (II.1.8) pues:

$$K(\xi_\alpha,X) = R(\xi_\alpha,X,X,\xi_\alpha).$$ #

II.1.15. Corolario.- En una K-variedad M^{2n+s}, se tiene, para todos $X,Y\in\mathcal{L}$, $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$, que:

(II.1.10) $$R(\xi_\alpha,fX,\xi_\beta,fY) = R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,Y).$$

Demostración:

En virtud de (II.1.8), tenemos que:

$$R(\xi_\alpha,fX,\xi_\beta fY) = -g(\nabla_{fX}\xi_\beta,\nabla_{fY}\xi_\alpha).$$

Aplicando ahora (I.3.10) y (I.3.11):

$$R(\xi_\alpha,fX,\xi_\beta,fY) = -g((\nabla_X f)\xi_\beta,(\nabla_Y f)\xi_\alpha) = -g(f\nabla_X\xi_\beta,f\nabla_Y\xi_\alpha) =$$
$$= -g(\nabla_X\xi_\beta,\nabla_Y\xi_\alpha) = R(\xi_\alpha,X,\xi_\beta,Y),$$

por (II.1.8) de nuevo. #

La expresión (II.1.8) nos permite, además, caracterizar las C-variedades. En efecto, tenemos el siguiente:

II.1.16. Teorema.- Una K-variedad M^{2n+s} es una C-variedad si y sólo si, para todos $X\in T(M)$ y $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$, se tiene:

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = 0.$$

Demostración:

Utilizando (II.1.8):

$$o = R(\xi_\alpha,X,\xi_\alpha,X) = -g(\nabla_X\xi_\alpha,\nabla_X\xi_\alpha).$$

Por tanto, $\nabla_X\xi_\alpha = 0$. De (c) de (I.3.13), tenemos que para cualquier $Y\in T(M)$, $d\eta_\alpha(X,Y) = 0$, con lo cual M^{2n+s} es una C-variedad. #

Otras expresiones del tensor de curvatura que nos resultarán de gran utilidad vienen dadas en los siguientes resultados.

II.1.17. Proposición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Se cumple que, cualesquiera que sean $X,Y\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\dots,s\}$:

(a) Si M^{2n+s} es una S-variedad, entonces:

(II.1.11) $$R(X,Y)\xi_\alpha = \sum_\beta [\eta_\beta(X)f^2Y - \eta_\beta(Y)f^2X].$$

(b) Si M^{2n+s} es una C-variedad, entonces:

(II.1.12) $$R(X,Y)\xi_\alpha = 0.$$

Demostración:

En el caso de S-variedad tenemos, por (I.3.16):

$$R(X,Y)\xi_\alpha = \nabla_X\nabla_Y\xi_\alpha - \nabla_Y\nabla_X\xi_\alpha - \nabla_{[X,Y]}\xi_\alpha =$$
$$= -\nabla_X fY + \nabla_Y fX + f[X,Y] =$$
$$= -(\nabla_X f)Y + (\nabla_Y f)X.$$

Ahora bien, por (I.3.18):

$$R(X,Y)\xi_\alpha = \sum_\beta [-g(fX,fY)\xi_\beta - \eta_\beta(Y)f^2X + g(fX,fY)\xi_\beta + \eta_\beta(X)f^2Y].$$

en el caso de C-variedad, la demostración es inmediata de (I.3.17).#

II.1.18. Proposición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Se cumple que para todos $X,Y\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$:

(a) Si M^{2n+s} es una S-variedad, entonces:

(II.1.13) $R(X,\xi_\alpha)Y = -(\nabla_X f)Y.$

(b) Si M^{2n+s} es una C-variedad, entonces:

(II.1.14) $R(X,\xi_\alpha)Y = 0.$

Demostración:

En el caso de S-variedad, por (I.3.16) y (II.1.3):

$$R(X,\xi_\alpha)Y = \nabla_X\nabla_Y\xi_\alpha - \nabla_{\nabla_X Y}\xi_\alpha = -\nabla_X fY + f\nabla_X Y = -(\nabla_X f)Y.$$

En el caso de C-variedad, se sigue inmediatamente de (I.3.17) y (II.1.3). #

II.1.19. Corolario.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Para cualquier $X\in\mathcal{L}$ y cualquier $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$, se verifica que:

(a) Si M^{2n+s} es una S-variedad, entonces:

(II.1.15) $R(X,\xi_\alpha)X = -\sum_\beta g(X,X)\xi_\beta.$

(b) Si M^{2n+s} es una C-variedad, entonces:

(II.1.16) $R(X,\xi_\alpha)X = 0.$

Demostración:

Se sigue inmediatamente de (I.3.18), (II.1.13) y (II.1.14). #

Vamos, a continuación a demostrar unos teoremas de caracterización que nos darán las condiciones que hay que exigir a una variedad Riemanniana para que tenga alguna de las estructuras que estamos estudiando. Estos resultados deben compararse con los correspondientes en el caso s = 1. Para ello, pueden consultarse |4| y |12|.

II.1.20. Teorema.- Sea (M^{2n+s}, g) una variedad Riemanniana admitiendo s campos globales de Killing $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ unitarios y ortogonales dos a dos, tal que su tensor de curvatura satisfaga, para todos $X,Y\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\dots,s\}$:

$$\text{(II.1.17)}\qquad R(X,Y)\xi_\alpha = \sum_\beta [g(Y,\xi_\beta)X - g(X,\xi_\beta)Y] + \sum_{\beta\gamma}\sum [g(X,\xi_\beta)g(Y,\xi_\gamma)\xi_\gamma - g(Y,\xi_\beta)g(X,\xi_\gamma)\xi_\gamma].$$

Entonces, M^{2n+s} es una S-variedad.

Demostración:

La haremos en varias etapas:

1ª Etapa: Definición de la f-estructura.

Definimos un tensor f de tipo (1,1) sobre M^{2n+s} mediante $fX = -\nabla_X\xi_\alpha$. Vamos a probar que está bien definido, esto es, que para todos $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$ se tiene que $\nabla_X\xi_\alpha = \nabla_X\xi_\beta$, $X\in T(M)$. Para ello, observemos los siguientes hechos:

(a) $\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\alpha = 0$, pues ξ_α es un campo de Killing, para todo $\alpha\in\{1,\dots,s\}$.

(b) Tenemos la fórmula (II.1.3), $R(X,\xi_\alpha)Y = \nabla_X\nabla_Y\xi_\alpha - \nabla_{\nabla_X Y}\xi_\Delta$, $X,Y\in T(M)$, $\alpha = 1,\dots,s$, ya que para demostrarla sólo utilizamos que los campos $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ son de Killing.

(c) $\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta = 0$, $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$. En efecto, de (II.1.17), tenemos:

$$R(\xi_\alpha,\xi_\beta)\xi_\alpha = (\xi_\alpha - \xi_\beta) + (\xi_\beta - \xi_\alpha) = 0.$$

Por tanto, de (II.1.3), $\nabla_{\xi_\alpha}\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha = 0$.

(d) De (II.1.17) se deduce que $R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta$ no depende ni de α ni de β, ya que:

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = -X + \sum_\delta g(X,\xi_\delta)\xi_\delta,$$

y esto para todos $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$.

(e) $\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta = 0$, para todos $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$. En primer lugar, por ser ξ_α y ξ_β campos de Killing, tenemos, para cualquier $X\in T(M)$, que:

$$0 = Xg(\xi_\alpha,\xi_\beta) = g(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\beta) + g(\xi_\alpha,\nabla_X\xi_\beta) = -g(\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha,X) - g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta,X)$$

con lo que:

$$\text{(II.1.18)}\qquad \nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha = -\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta.$$

Por otra parte, de (c) y (d), obtenemos:

$$0 = R(\xi_\alpha,\xi_\beta)\xi_\alpha = R(\xi_\alpha,\xi_\beta)\xi_\beta = -\nabla_{\xi_\beta}\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta - \nabla_{[\xi_\alpha,\xi_\beta]}\xi_\beta.$$

Por (II.1.18):

$$0 = \nabla_{\xi_\beta}\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha - \nabla_{2\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta}\xi_\beta$$

y de (c), llegamos a:

$$\nabla_{\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta}\xi_\beta = 0.$$

Ahora bien, al ser ξ_β un campo de Killing:

$$0 = g(\nabla_{\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta}\xi_\beta,\xi_\alpha) = -g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta,\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta)$$

con lo que $\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta = 0.$

Estamos ahora en condiciones de probar que para todo $X\in T(M)$ y para todos $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$, $\nabla_X\xi_\alpha = \nabla_X\xi_\beta$. En efecto, como por (d) sabemos que:

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = R(\xi_\beta,X)\xi_\alpha,$$

entonces, por (II.1.3):

$$\nabla_{\nabla_X\xi_\beta}\xi_\alpha - \nabla_X\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha = \nabla_{\nabla_X\xi_\alpha}\xi_\beta - \nabla_X\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta$$

y, en consecuencia, por (e):

$$\nabla_{\nabla_X\xi_\beta}\xi_\alpha = \nabla_{\nabla_X\xi_\alpha}\xi_\alpha,$$

es decir,

(II.1.19) $\quad \nabla_{\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha)}\xi_\alpha = 0.$

De aquí, como ξ_α y ξ_β son campos de Killing:

$$0 = g(\nabla_{\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha)}\xi_\beta, X) = -g(\nabla_X\xi_\alpha,\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha)).$$

Como (II.1.19) se tiene para todos α y β, también obtenemos:

$$0 = g(\nabla_{\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha)}\xi_\beta, X) = -g(\nabla_X\xi_\beta,\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha)).$$

Luego:

$$g(\nabla_X\xi_\alpha,\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha)) = g(\nabla_X\xi_\beta,\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha))$$

y, entonces:

$$g(\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha),\nabla_X(\xi_\beta - \xi_\alpha)) = 0$$

con lo que $\nabla_X\xi_\alpha = \nabla_X\xi_\beta$ y f está bien definido.

2ª Etapa: Definición del resto de los elementos y comprobación de que tenemos una f-estructura métrica con referencias complementadas.

En primer lugar, definamos las 1-formas $\eta_\alpha(X) = g(X,\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,\ldots,s$ y la 2-forma $F(X,Y) = g(X,fY)$, $X,Y\in T(M)$. Es claro que:

$$F(X,Y) = g(X,fY) = -g(X,\nabla_Y\xi_\alpha) = g(\nabla_X\xi_\alpha,Y) = -g(Y,fX) = -F(Y,X),$$

pues ξ_α es un campo de Killing. Por otra parte:

$$f\xi_\alpha = -\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\alpha = 0,\ \alpha = 1,\ldots,s.$$

Además, si $X\in T(M)$:

$$f^2X = ffX = -\nabla_{fX}\xi_\alpha = \nabla_{\nabla_X\xi_\alpha}\xi_\alpha = \nabla_X\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\alpha - R(X,\xi_\alpha)\xi_\alpha,$$

por (II.1.3). Entonces, por (II.1.17):

$$f^2 = -I + \sum_\beta \xi_\beta \otimes \eta_\beta.$$

También:

$$\eta_\xi(fX) = g(fX,\xi_\alpha) = -g(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\alpha) = g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\alpha,X) = 0,$$

$\alpha = 1,\ldots,s$, pues ξ_α es un campo de Killing. Por último, veamos que la métrica g es la adaptada a la f-estructura. Ello se debe a que si $X,Y\in T(M)$:

$$g(fX,fY) = F(fX,Y) = -F(Y,fX) = -g(Y,f^2X) =$$

$$= g(X,Y) - \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y).$$

<u>3ª Etapa</u>: $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$ y, por tanto, F es cerrada.

En efecto, si $X,Y\in T(M)$, al ser ξ_α un campo de Killing, tenemos:

$$d\eta_\alpha(X,Y) = \tfrac{1}{2}(X\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([X,Y])) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(X\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha(\nabla_XY) + \eta_\alpha(\nabla_YX)) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(g(\nabla_X\xi_\alpha,Y) - g(\nabla_Y\xi_\alpha,X)) = g(\nabla_X\xi_\alpha,Y) = -g(fX,Y) = F(X,Y).$$

<u>4ª Etapa</u>: La f-estructura es normal. Para ello, probemos primero que, para todos $X,Y\in T(M)$, se tiene el siguiente resultado, en las hipótesis del teorema.

(II.1.20) $$(\nabla_Xf)Y = \sum_\beta[g(fX,fY)\xi_\beta + \eta_\beta(Y)f^2X].$$

En efecto:

$$(\nabla_Xf)Y = \nabla_XfY - f\nabla_XY = -\nabla_X\nabla_Y\xi_\alpha + \nabla_{\nabla_XY}\xi_\alpha = R(\xi_\alpha,X)Y,$$

en virtud de (II.1.3). Entonces, si $Z\in T(M)$, por (II.1.17), tenemos:

$$g((\nabla_Xf)Y,Z) = R(\xi_\alpha,X,Y,Z) = R(Y,Z,\xi_\alpha,X) =$$

$$= \sum_\beta [\eta_\beta(Z)g(X,Y) - \eta_\beta(Y)g(X,Z)] +$$

$$+ \sum_\beta \sum_\gamma [\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\gamma(X) - \eta_\beta(Z)\eta_\gamma(Y)\eta_\gamma(X)],$$

de lo cual se deducue, inmediatamente, (II.1.20). De todo esto obtenemos:

$$[f,f](X,Y) = f(\nabla_Y f)X - (\nabla_{fY} f)X - f(\nabla_X f)Y + (\nabla_{fX} f)Y =$$

$$= 2\sum_\beta g(fY,X)\xi_\beta = -2\sum_\beta F(X,Y)\xi_\beta = -2\sum_\beta d\eta_\beta(X,Y)\xi_\beta,$$

con lo que la f-estructura es normal.

Por tanto, M^{2n+s} es una S-variedad. #

Utilizando sólo las tres primeras etapas de la demostración anterior, tenemos el siguiente:

II.1.21. Teorema.- Sea (M^{2n+s}, g) una variedad Riemanniana tal que:

(a) Existen s campos globales $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ ortonormales y de Killing en M^{2n+s}.

(b) Su tensor de curvatura verifica:

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = - X + \sum_\gamma \eta_\gamma(X)\xi_\gamma$$

cualesquiera que sean $X\in T(M)$, $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,s\}$ Entonces, M^{2n+s} es una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$, siendo $\eta_1,\ldots,\eta_s$ las 1-formas duales de los campos $\xi_1,\ldots,\xi_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$, donde $F(X,Y) = g(X,fY)$.

También podemos demostrar:

II.1.22. Teorema.- Sea (M^{2n+s}, f, g) una f-estructura métrica con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$. Si su tensor de curvatura verifica:

$$\text{(II.1.21)} \quad R(X,Y)\xi_\alpha = \sum_\beta [\eta_\beta(X)f^2Y - \eta_\beta(Y)f^2X],$$

cualesquiera que sean $X,Y\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$, entonces M^{2n+s} es una S-variedad.

Demostración:

Nos basta probar que la f-estructura es normal para tener una S-variedad. De (II.1.21), tenemos que si $X\in\mathcal{L}$, entonces, para cualesquiera α y λ en $\{1,\ldots,s\}$:

$$R(\xi_\alpha,X)\xi_\beta = -X.$$

Aplicando esto en (II.1.2), como $X\in\mathcal{L}$, tenemos:

$$h_\alpha^2 X = 0.$$

Por tanto, en virtud de (I.2.7), obtenemos que $h_\alpha^2 = 0$ y, como h_α es simétrico, que $h_\alpha = 0$. Por el Teorema I.2.8, ξ_α es un campo de Killing y esto se ha hecho para todo $\alpha\varepsilon\{1,\dots,s\}$. En consecuencia:

$$g(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\beta) + g(\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha,X) = 0.$$

Pero, también ξ_β es un campo de Killing, luego:

$$g(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\beta) + g(\xi_\alpha,\nabla_X\xi_\beta) = -g(\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha,X) - g(\nabla_{\xi_\alpha}\xi_\beta,X) = 0.$$

Por (I.2.8):

$$0 = 2g(\nabla_{\xi_\beta}\xi_\alpha,X)$$

y, de aquí que, para todos $\alpha,\beta\varepsilon\{1,\dots,s\}$:

$$g(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0.$$

Aplicando ahora (I.2.9):

$$\nabla_X\xi_\alpha = -fX.$$

Con esto podemos terminar la demostración, probando que f es normal de la misma manera que se hace en la 4ª Etapa de la demostración del Teorema II.1.20. #

Para terminar esta sección, daremos algunos resultados acerca de la curvatura de Ricci. Para ello, consideraremos siempre f-bases localmente, de la forma:

$$\{E_1,\dots,E_n,fE_1,\dots,fE_n,\xi_1,\dots,\xi_s\}.$$

II.1.23. Lema.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Localmente, para todo $\alpha\varepsilon\{1,\dots,s\}$, se tiene que:

(II.1.22) $$S(\xi_\alpha,\xi_\alpha) = 2\sum_{i=1}^{n} ||\nabla_{E_i}\xi_\alpha||^2.$$

Demostración:

Tenemos, en virtud de (II.1.4), (II.1.8) y (II.1.10):

$$S(\xi_\alpha,\xi_\alpha) = 2\sum_{i=1}^{n} R(E_i,\xi_\alpha,\xi_\alpha,E_i) = 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\xi_\alpha,\nabla_{E_i}\xi_\alpha).$$ #

I.1.24. Proposición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad. La curvatura de Ricci en la dirección de cualquier ξ_α vale 2n. Si M^{2n+s} es una C-variedad, la curvatura de Ricci en la dirección de cualquier ξ_α vale 0.

Demostración:

En el caso de S-variedades se deduce de (I.3.16) y (II.1.22) y en el caso de C-variedades se deduce de (I.3.17) y (II.1.22). #

<u>II.1.25. Proposición.-</u> Sea M^{2n+s} una K-variedad y sean $X \in T(M)$, $\alpha \in \{1,\dots,s\}$. Se verifica que:

(a) Si M^{2n+s} es una S-variedad:

(II.1.23) $$S(X,\xi_\alpha) = 2n\sum_\beta \eta_\beta(X).$$

(b) Si M^{2n+s} es una C-variedad:

(II.1.24) $$S(X,\xi_\alpha) = 0.$$

Demostración:

Supongamos que tenemos una f-base y escribamos $fE_i = E_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$. En el caso de S-variedad se cumple, en virtud de (II.1.6) y (II.1.11):

$$S(X,\xi_\alpha) = \sum_{i=1}^{2n} R(E_i,X,\xi_\alpha,E_i) + \sum_\beta R(\xi_\beta,X,\xi_\alpha,\xi_\beta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}\sum_\beta g(\eta_\beta(X)E_i,E_i) = 2n\sum_\beta \eta_\beta(X).$$

En el caso de C-variedad, es inmediato de (II.1.7) y (II.1.12). #

<u>II.1.26. Nota.-</u> De (II.1.23) se deduce que no existen S-variedades einstenianas, si $s \geqslant 2$. Sin embargo, en el caso $s = 1$ (variedades Sasakianas) tenemos condiciones equivalentes a que una S-variedad sea einsteniana. Véase, por ejemplo, |41|.

<u>II.1.27. Proposición.-</u> Sea M^{2n+s} una K-variedad y sean $X,Y \in T(M)$. Entonces, se verifica que:

(a) Si M^{2n+s} es una S-variedad:

(II.1.25) $$S(X,Y) = S(\bar{X},\bar{Y}) + 2n\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y).$$

(b) Si M^{2n+s} es una C-variedad:

(II.1.26) $$S(X,Y) = S(\bar{X},\bar{Y}),$$

donde estamos escribiendo $X = \bar{X} + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha$, $Y = \bar{Y} + \sum_\beta \eta_\beta(Y)\xi_\beta$, con $\bar{X},\bar{Y} \in \mathcal{L}$.

Demostración:

Observemos que:

$$S(X,Y) = S(\bar{X} + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha,\ \bar{Y} + \sum_\beta \eta_\beta(Y)\xi_\beta) =$$

$$= S(\bar{X},\bar{Y}) + \sum_\beta \eta_\beta(Y) S(\bar{X},\xi_\beta) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X) S(\xi_\alpha,\bar{Y}) +$$
$$+ \sum_\alpha \sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) S(\xi_\alpha,\xi_\beta).$$

Entonces, las fórmulas (II.1.25) y (II.1.26) se deducen de (II.1.23) y (II.1.24), respectivamente, haciendo uso de que $\bar{X},\bar{Y}\varepsilon\mathcal{L}$. #

II.2. La curvatura f-seccional invariante en S-variedades.-

Empezaremos dando una serie de resultados que relacionan el tensor de curvatura de una S-variedad con la f-estructura. Aunque nuestro principal objetivo son las S-variedades, también daremos las versiones correspondientes en el caso de C-variedades, pero sin profundizar en las demostraciones.

II.2.1. Proposición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad. Si $X,Y,Z,W\varepsilon T(M)$, se cumple que:

(II.2.1) $$R(X,Y,fZ,W) + R(X,Y,Z,fW) = s[F(Y,Z)g(X,W) - F(X,Z)g(Y,W) -$$
$$- F(Y,W)g(X,Z) + F(X,W)g(Y,Z)] - F(X,W)[s\sum_\alpha \eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Z) -$$
$$- \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z)] + F(Y,W)[s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Z) - \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)]+$$
$$+ F(X,Z)[s\sum_\alpha \eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(W) - \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W)] -$$
$$- F(Y,Z)[s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(W) - \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(W)] .$$

Demostración:

En primer lugar, observamos que:

$$(\nabla_X\nabla_Y f - \nabla_Y\nabla_X f - \nabla_{[X,Y]}f)Z = \nabla_X((\nabla_Y f)Z) - (\nabla_Y f)\nabla_X Z -$$
$$- \nabla_Y((\nabla_X f)Z) + (\nabla_X f)\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}fZ + f\nabla_{[X,Y]}Z =$$
$$= \nabla_X\nabla_Y fZ - f\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Y\nabla_X fZ - f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}fZ + f\nabla_{[X,Y]}Z =$$
$$= R(X,Y)fZ - fR(X,Y)Z.$$

Utilizando (I.3.18) en el primer miembro, tenemos, entonces, el resultado. #

II.2.2. Proposición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad y $X,Y,Z,W\varepsilon T(M)$, Entonces, se cumple que:

$$(II.2.2)\qquad R(fX,fY,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma[\eta_\beta(X)\eta_\gamma(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\alpha(W) -$$

$$- \eta_\gamma(X)\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\alpha(W) + \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\alpha(W) -$$

$$- \eta_\beta(X)\eta_\alpha(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\alpha(W)] + \sum_\alpha\sum_\beta[g(X,Z)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W) -$$

$$- g(Y,Z)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(W) - g(X,W)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z) + g(Y,W)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z) -$$

$$-s(\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\alpha(W) - \eta_\beta(X)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\alpha(W))] +$$

$$+s\sum_\alpha[g(Y,Z)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(W) - g(X,Z)\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(W) + g(X,W)\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Z) -$$

$$- g(Y,W)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Z)] + s[F(X,W)F(Y,Z) - F(X,Z)F(Y,W) +$$

$$+ g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)].$$

Demostración:

Utilizamos (II.2.1), poniendo fW en lugar de W. El primer miembro queda:

$$R(X,Y,fZ,fW) + R(X,Y,Z,f^2W) = R(X,Y,fZ,fW) - R(X,Y,Z,W) +$$

$$+ \sum_\beta \eta_\beta(W)R(X,Y,Z,\xi_\beta).$$

Ahora empleamos (II.1.13) y reordenando, llegamos a (II.2.2). #

<u>II.2.3. Proposición.-</u> Sea M^{2n+s} una S-variedad y $X,Y,Z,W\in T(M)$. Entonces, se tiene que:

$$(II.2.3)\qquad R(fX,Y,fZ,W) - R(fX,Y,fW,Z) = s[F(X,Z)F(Y,W) - F(X,W)F(Y,Z) -$$

$$- g(X,Z)g(Y,W) + g(X,W)g(Y,Z)] + \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma[\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\alpha(Z)\eta_\gamma(W) -$$

$$- \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\alpha(W)] + \sum_\alpha\sum_\beta[g(X,W)\eta_\alpha(Z)\eta_\beta(Y) -$$

$$- g(X,Z)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W) + s(\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\alpha(W) -$$

$$- \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\alpha(Z)\eta_\beta(W))] + s\sum_\alpha[g(Y,W)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Z) -$$

$$- g(Y,Z)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(W) - g(X,W)\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Z) + g(X,Z)\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(W)].$$

Demostración:

Es inmediata de (II.2.1), cambiando X por fX. #

Definamos ahora un tensor sobre una S-variedad M^{2n+s} de tipo $(0,4)$ mediante:

(II.2.4) $$P(X,Y,Z,W) = F(Y,Z)g(X,W) - F(X,Z)g(Y,W) - F(Y,W)g(X,Z) + F(X,W)g(Y,Z),$$

cualesquiera que sean $X,Y,Z,W \in T(M)$. En primer lugar, tenemos:

<u>II.2.4. Lema.-</u> Para P se cumplen las siguientes propiedades:

(a) Si $X,Y,Z,W \in T(M)$, entonces:

(II.2.5) $$P(X,Y,Z,W) = -P(Z,W,X,Y).$$

(b) Si $X,Y \in \mathcal{L}$ son ortonormales y llamando $g(X,fY) = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces:

$$P(X,Y,X,fY) = \operatorname{sen}^2\theta.$$

Demostración:

Es inmediata de (II.2.4). #

<u>II.2.5. Lema.-</u> Sea M^{2n+s} una S-variedad y sean $X,Y,Z,W \in \mathcal{L}$. Entonces, se cumplen:

(II.2.6)

(a) $R(X,Y,fX,fY) = R(X,Y,X,Y) + sP(X,Y,X,fY)$.

(b) $R(X,fX,Y,fY) = R(X,Y,X,Y) + R(X,fY,X,fY) + 2sP(X,Y,X,fY)$.

(c) $R(X,fY,fX,Y) = -R(X,fY,X,fY) - sP(X,Y,X,fY)$.

(d) $R(fX,Y,fX,Y) = R(X,fY,X,fY)$.

(e) $R(fX,fY,fZ,fW) = R(X,Y,Z,W)$.

Demostración:

(a) se obtiene de (II.2.2) pues $X,Y \in \mathcal{L}$. Para (b), ponemos:

$$R(X,fX,Y,fY) = -R(X,Y,fY,fX) - R(X,fY,fX,Y)$$

y aplicamos (a) y (II.2.1). (c) se obtiene fácilmente de (II.2.1), pues tenemos que $X,Y \in \mathcal{L}$. Para (d), aplicamos dos veces (II.2.1) y la definición de P, (II.2.4). Por último, (e) se obtiene de (II.2.2), aplicándola dos veces, en virtud de la simetría del tensor de curvatura. #

Con esto podemos demostrar otra interesante propiedad del tensor de curvatura de Ricci.

II.2.6. Proposición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad y $X,Y\in T(M)$. Se cumple que:

(II.2.7) $$S(fX,fY) = S(X,Y) - 2n\sum_{\alpha}\sum_{\beta} \eta_{\alpha}(X)\eta_{\beta}(Y).$$

Demostración:

Elijamos unas f-bases locales de la forma:

$$\{E_1,\ldots,E_n,E_{n+1}=fE_1,\ldots,E_{2n}=fE_n,\xi_1,\ldots,\xi_s\}.$$

en primer lugar, supongamos que $X,Y\in\mathcal{L}$. Entonces, por (II.1.13) y (II.2.6) (e), tenemos:

$$S(fX,fY) = \sum_{i=1}^{n} [R(fE_i,fX,fY,fE_i) + R(E_i,fX,fY,E_i)] +$$

$$+ \sum R(\xi_\alpha,fX,fY,\xi_\alpha) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [R(fE_i,f^2X,f^2Y,fE_i) + R(E_i,X,Y,E_i)] +$$

$$+ \sum_{\alpha} g((\nabla_{fX}f)fY,\xi_\alpha).$$

Ahora, como $X,Y\in\mathcal{L}$ y por (I.3.18):

$$S(fX,fY) = \sum_{i=1}^{n} [R(fE_i,X,Y,fE_i) + R(E_i,X,Y,E_i)] + \sum R(\xi_\alpha,X,Y,\xi_\alpha) =$$

$$= S(X,Y).$$

Por último, supongamos que $X = \bar{X} + \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X)\xi_\alpha$, $Y = \bar{Y} + \sum_{\beta} \eta_\beta(Y)\xi_\beta$, con $\bar{X},\bar{Y}\in\mathcal{L}$. Entonces $fX = f\bar{X}$, $fY = f\bar{Y}$, con lo cual, de (II.1.25):

$$S(X,Y) = S(\bar{X},\bar{Y}) + 2n \sum_{\alpha}\sum_{\beta} \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) =$$

$$= S(f\bar{X},f\bar{Y}) + 2n\sum_{\alpha}\sum_{\beta} \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) = S(fX,fY) + 2n\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y),$$

pues $\bar{X},\bar{Y}\in\mathcal{L}$. #

Con respecto a las C-variedades tenemos las siguientes resultados:

II.2.7. Proposición.- Sea M^{2n+s} una C-variedad. Se cumple, para cualesquiera $X,Y,Z,W\in T(M)$, que:

(II.2.8) (a) $R(X,Y,fZ,W) + R(X,Y,Z,fW) = 0.$

(b) $R(fX,fY,Z,W) = R(X,Y,Z,W).$

(c) $R(fX,Y,fZ,W) = R(fX,Y,fW,Z).$

(d) $R(fX,fY,fZ,fW) = R(X,Y,Z,W).$

Demostración:

Se hacen igual que en el caso de S-variedades, utilizando, en esta ocasión, el Teorema I.3.19 y la fórmula (II.1.14). #

II.2.8. Proposición.- Sea M^{2n+s} una C-variedad. Si $X,Y\varepsilon T(M)$, se verifica que:

(II.2.9) $s(fX,fY) = S(X,Y)$.

Demostración:

Es inmediata de (II.2.8). #

II.2.9. Definición.- Sea M^{2n+s} una K-variedad. Una sección plana π en un punto $p\varepsilon M^{2n+s}$ se llama una f-sección invariante si $f\pi = \pi$. Estará determinada por un vector $X\varepsilon\mathcal{L}(p)$, tal que $\{X,fX\}$ sea un par ortonormal generando la sección. La curvatura seccional $K(X,fX)$, denotada por $H(X)$, se llama una curvatura f-seccional invariante.

Es conocido el hecho de que la curvatura f-seccional invariante determina completamente la curvatura en las S-variedades. Este resultado es debido a Blair, (|5|). Para su demostración son necesarios algunos preliminares.

Consideremos $X,Y\varepsilon\mathcal{L}$, y escribamos:

(II.2.10) $B(X,Y) = R(X,Y,Y,X)$.

$D(X) = B(X,fX)$.

Se tiene entonces:

II.2.10. Lema.- Sea M^{2n+s} una S-variedad y $X,Y\varepsilon\mathcal{L}$. Se verifica, entonces, que:

(II.2.11) $B(X,Y) = \frac{1}{32}[3D(X+fY) + 3D(X-fY) - D(X+Y) - D(X-Y) - 4D(X) - 4D(Y) + 24sP(X,Y,X,fY)]$.

Demostración:

La hacemos mediante un desarrollo directo, utilizando (II.2.6) y (II.2.10). #

Si ahora $\{X,Y\}$ es un par ortonormal en $\mathcal{L}$ y, de nuevo $g(X,fY) = \cos\theta$,

$0 \leq \theta \leq \pi$, entonces $K(X,Y) = B(X,Y)$ y, además, $D(X) = H(X)$, $D(Y) = H(Y)$, $D(X+fY) = 4(1+\cos\theta)^2 H(X+fY)$, $D(X-fY) = 4(1-\cos\theta)^2 H(X-fY)$, $D(X+Y) = 4H)X+Y)$, $D(X-Y) = 4H(X-Y)$, donde si X no es unitario se tiene:

$$H(X) = \frac{R(X,fX,fX,X)}{g(X,X)^2}$$

Por tanto, utilizando (b) del Lema II.2.4 y (II.2.11) tenemos la siguiente:

II.2.11. Proposición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad y $\{X,Y\}$ un par ortonormal en $\mathcal{L}$. Entonces, se cumple:

$$\text{(II.2.12)} \quad K(X,Y) = \frac{1}{8}[3(1+\cos\theta)^2 H(X+fY) + 3(1-\cos\theta)^2 H(X-fY) - \\ - H(X+Y) - H(X-Y) - H(X) - H(Y) + 6s \operatorname{sen}^2\theta],$$

donde $\cos\theta = g(X,fY)$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

II.2.12. Teorema.- La curvatura f-seccional invariante determina completamente la curvatura de una S-variedad M^{2n+s}.

La demostración puede encontrarse en |5|.

Con estos resultados podemos dar una serie de consecuencias geométricas.

II.2.13. Proposición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad. Las curvaturas seccionales $K(X,Y)$, con $X,Y \in \mathcal{L}$, satisfacen, si la variedad tiene curvatura f-seccional invariante constante $k<s$:

$$\text{(II.2.13)} \quad k \leq K(X,Y) \leq \tfrac{1}{4}(k+3s)$$

donde el límite inferior se alcanza para una f-sección invariante. Si $k>s$, entonces:

$$\text{(II.2.14)} \quad \tfrac{1}{4}(k+3s) \leq K(X,Y) \leq k$$

donde el límite superior se alcanza para una f-sección invariante. Por último, si $k=s$:

$$\text{(II.2.15)} \quad K(X,Y) = k.$$

Demostración:

(II,2.12) nos permite escribir:

$$K(X,Y) = \tfrac{1}{4}(k + 3s + 3(k-s)\cos^2\theta).$$

Hallando el máximo y el mínimo de esta expresión respecto a θ , se observa que se alcanzan para $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \pi$. Entonces:

En $\theta = \frac{1}{2}\pi$: $K(X,Y) = \frac{1}{4}(k + 3s)$

En $\theta = \pi$: $K(X,Y) = k$.

Es claro que $\theta = \pi$ es una f-sección invariante con lo que se concluye la demostración.

<u>II.2.14. Corolario.-</u> Una variedad Sasakiana (s = 1) M^{2n+1} con curvatura f-seccional invariante constante igual a 1 tiene curvatura constante.

Vamos a ver la aplicación práctica de estos resultados al ejemplo canónico de S-variedad (sección I.4).Sea N^{2n} una variedad Kaehleriana y sea M^{2n+s} un fibrado principal toroidal sobre ella. Si convenimos que los índices van a variar según la tabla:

$x,y,z,t = 1,\dots,2n+s$

$A,B,C,D = 1,\dots,2n$

$\alpha,\beta = 1,\dots,s,$

si llamamos Ω a la 2-forma fundamental de N^{2n}, S a su tensor de curvatura y R al tensor de curvatura de M^{2n+s}, se tiene que, (|5|):

$$R_{ABCD} = S_{ABCD} - \tfrac{1}{4}s(2\Omega_{AB}\Omega_{CD} + \Omega_{AC}\Omega_{BD} - \Omega_{AD}\Omega_{BC}) \tag{II.2.16}$$

Supongamos, ahora, que N^{2n} tiene curvatura seccional holomorfa constante K, esto es:

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{4}K(G_{AD}G_{BC} - G_{AC}G_{BD} + \Omega_{AD}\Omega_{BC} - \Omega_{AC}\Omega_{BD} - 2\Omega_{AB}\Omega_{CD}).$$

Entonces, si {X,fX} generan una f-sección invariante de M^{2n+s}, con X unitario, obtenemos que la curvatura f-seccional invariante de esta sección es, en virtud de (II.2.16):

$$R_{xyzt}X^x(fX)^y(fX)^zX^t = R_{ABCD}X^A(fX)^B(fX)^CX^D = \tfrac{1}{4}3s + K.$$

Por tanto:

<u>II.2.15. Teorema.-</u> Sea M^{2n+s} un fibrado principal toroidal sobre una variedad Kaehleriana N^{2n}. Si N^{2n} tiene curvatura secciona holomorfa constante K, entonces la S-variedad M^{2n+s} tiene curvatura f-seccional invariante constante igual a $K + \frac{1}{4}3s$.

II.2.16. Ejemplo.- Sea H^{2n+s} (ver sección I.4) Recordemos que PC^n tiene curvatura seccional holomorfa constante $K = \frac{1}{4}$ (métrica de Fubini-Study) y que S^{2n+1} (como variedad Sasakiana con la métrica de curvatura constante) tiene curvatura constante 1. De la Proposición II.2.13 y del Teorema II.2.15, deducimos que H^{2n+s} tiene curvatura f-seccional invariante constante $k=\frac{1}{4}(1+3s)$. Además, tenemos:

II.2.17. Teorema.- Sea $X,Y\in\mathcal{L}$ en H^{2n+s}, $s \quad 2$. Entonces:

$$\tfrac{1}{4}(1+3s) \leq K(X,Y) \leq \frac{1}{16}(1+15s).$$

Demostración:

$s>1$ implica que $\frac{1}{4}s>\frac{1}{4}$ y, por tanto, $s>\frac{1}{4}(1+3s)$. De la Proposición II.2.13:

$$\tfrac{1}{4}(1+3s) \leq K(X,Y) \leq \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}3s + 3s) = \frac{1}{16}(1 + 15s). \qquad \#$$

Con respecto a C-variedades se consiguen resultados totalmente análogos. Se pueden resumir de la siguiente manera:

II.2.18. Teorema.- Sea M^{2n+s} una C-variedad. Su curvatura f-seccional invariante determina completamente su curvatura.

En la demostración de este teorema, habrá que utilizar, naturalmente, la Proposición II.2.7.

II.2.19. Teorema.- Sea M^{2n+s} una C-variedad. Las curvaturas seccionales $K(X,Y)$, con $X,Y\in\mathcal{L}$, verifican, si la variedad es de curvatura f-seccional invariante constante $k<0$:

(II.2.17) $\quad k \leq K(X,Y) \leq \frac{1}{4}k.$

Si $k>0$:

(II.2.18) $\quad \frac{1}{4}k \leq K(X,Y) \leq k.$

Si $k = 0$, la variedad es localmente llana.

Volviendo a las S-variedades, observemos que en la demostración del hecho de que la curvatura f-seccional invariante determina completamente la curvatura de una S-variedad, no se usan sólo los valores de las curvaturas f-seccionales invariantes, sino también (II.1.11), (II.1.13) y (II.2.1).

Por tanto, tenemos probado que cualquier tensor de tipo (0,4) en una S-variedad, que satisfaga las simetrías del tensor de curvatura, la 1ª Identidad de Bianchi, (II.1.11), (II.1.13), (II.2.1) y que coincida con los valores de las curvaturas f-seccionales invariantes, debe ser el tensor de curvatutura. En estas condiciones podemos demostrar el siguiente resultado:

II.2.20. Teorema.- Sea M^{2n+s} una S-variedad, $n \geqslant 2$. Si la curvatura f-seccional invariante en cada punto de la variedad es independiente de la elección de la f-sección invariante en el punto, entonces es constante en la variedad y el tensor de curvatura está dado, si $X,Y,Z,W \in T(M)$, por:

$$
\begin{aligned}
\text{(II.2.19)} \quad R(X,Y,Z,W) = {} & \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\gamma} [\eta_\alpha(X)\eta_\gamma(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\gamma(W) + \\
& + \eta_\gamma(X)\eta_\alpha(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\beta(W) - \eta_\gamma(X)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\gamma(W) - \\
& - \eta_\alpha(X)\eta_\gamma(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\beta(W)] + \tfrac{1}{4}(k+3s)[g(X,W)g(Y,Z) - \\
& - g(X,Z)g(Y,W)] + \tfrac{1}{4}(k+3s)\sum_{\alpha}\sum_{\beta} [\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\alpha(W) - \\
& - \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\alpha(Z)\eta_\beta(W)] + \tfrac{1}{4}(k-s)[F(X,W)F(Y,Z) - \\
& - F(X,Z)F(Y,W) - 2F(X,Y)F(Z,W)] + \\
& + g(X,Z)[\tfrac{1}{4}(k+3s)\sum_{\alpha}\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(W) - \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W)] - \\
& - g(X,W)[\tfrac{1}{4}(k+3s)\sum_{\alpha}\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Z) - \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z)] + \\
& + g(Y,W)[\tfrac{1}{4}(k+3s)\sum_{\alpha}\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Z) - \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)] - \\
& - g(Y,Z)[\tfrac{1}{4}(k+3s)\sum_{\alpha}\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(W) - \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\eta_\alpha(X)\eta_\beta(W)],
\end{aligned}
$$

donde k es la curvatura f-seccional invariante constante:

Demostración:

En vista de la observación anterior, para ver que el tensor de curvatura verifica (II.2.19) con k una función en la variedad, tenemos sólamente que comprobar las condiciones necesarias, lo cual se hace fácilmente.

Por otra parte, eligiendo f-bases locales de la forma:

$$\{E_1,\dots,E_n,fE_1,\dots,fE_n,\xi_1,\dots,\xi_s\},$$

tenemos que, por (II.2.19), si $X,Y\in T(M)$, el tensor de Ricci tiene la expresión:

(II.2.20) $$S(X,Y) = \tfrac{1}{2}(n(k+3s) + k-s)g(X,Y) + 2n \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) + $$
$$+ \tfrac{1}{2}(s-k - n(k+3s))\sum_{\alpha} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y).$$

Para la curvatura escalar ρ :

(II.2.21) $$\rho = \sum_{i=1}^{n} [S(E_i,E_i) + S(fE_i,fE_i)] + \sum_{\alpha} S(\xi_\alpha,\xi_\alpha) =$$
$$= \tfrac{1}{2}[n(2n+1)(k+3s) + n(k-s)].$$

Ahora, de la 2ª Identidad de Bianchi:

$$2\nabla_a S^a_j - \nabla_j\rho = 0,$$

donde S^a_j son las componentes del tensor de Ricci de tipo (1,1). Utilizando (II.2.20) y (II.2.21), tenemos que:

$$(n+1)(n-1)\nabla_j k + (n+1)\sum_{\alpha} \eta^j_\alpha \xi^a_\alpha \nabla_a k = 0,$$

es decir:

$$(n-1)dk + \sum_{\alpha} (\xi_\alpha k)\eta_\alpha = 0.$$

Aplicando esta expresión a un ξ_β, se obtiene:

$$(n-1)(dk)\xi_\beta + \xi_\beta k = 0$$

y, por tanto, $\xi_\beta k = 0$, $\beta = 1,\dots,s$.

Luego $dk = 0$, para $n \neq 1$, con lo cual k es constante y esto concluye la demostración. #

II.2.21. Nota.- La fórmula (II.2.19) nos da en los casos $s = 0$ y $s = 1$, las bien conocidas expresiones para variedades Kaehlerianas y variedades Sasakianas, respectivavente. Véanse, por ejemplo, |31| y |39|. Dicha fórmula se ha obtenido siguiendo un razonamiento análogo al que se hace en |39| para el caso Sasakiano.

II.3. La curvatura f-seccional antiinvariante en S-variedades.-

II.3.1. Definición.- Sea M^{2n+s} una S-variedad. Una sección plana π en un punto $p \in M^{2n+s}$ se llamará <u>f-sección antiinvariante</u> si $f\pi$ es ortogonal a π. Una f-sección antiinvariante está determinada por vectores ortonormales $X,Y \in \mathcal{L}(p)$ y la curvatura seccional $K(X,Y)$ se llamará una <u>curvatura f-seccional antiinvariante.</u>

<u>II.3.2. Nota.-</u> Es fácil observar que $X,Y \in \mathcal{L}(p)$, $p \in M^{2n+s}$, generan una f-sección antiinvariante si y sólo si $\{X,Y,fX\}$ forman un sistema ortonormal.

<u>II.3.3. Proposición.-</u> Sea $M^{2n+s}(k)$ un a S-variedad de curvatura f-seccional invariante constante k. Entonces, $M^{2n+s}(k)$ tiene curvatura f-seccional antiinvariante constante $c = \frac{1}{4}(k+3s)$.

Demostración:

En virtud de (II.2.19), si $\{X,Y\}$ es un par de campos de $\mathcal{L}$ que generan una f-sección antiinvariante, tenemos que:

$$K(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = \tfrac{1}{4}(k+3s). \qquad \#$$

<u>II.3.4. Lema.-</u> Sea M^{2n+s} una S-variedad. Si $X,Y \in \mathcal{L}$, se tiene que:

(II.3.1) (a) $K(X,Y) = K(fX,fY)$.

(b) $K(X,fY) = K(fX,Y)$.

(c) Si X e Y generan una f-sección antiinvariante:

$$R(X,fX,fY,Y) = K(X,Y) + K(X,fY) - 2s.$$

Demostración:

(a) se deduce inmediatamente de (II.2.6) (e) y (b) de (a). Para (c), observemos que por la 1ª Identidad de Bianchi:

$$R(X,fX,fY,Y) = -R(X,Y,fX,fY) + R(X,fY,fX,Y).$$

Utilizando (II.2.6) (a), como:

$$0 = g(X,fY) = g(Y,fX) = g(X,fX) = g(Y,fY),$$

tenemos:

$$R(X,Y,fX,fY) = R(XfX,fY,X,Y) = -R(X,Y,Y,X) + s = -K(X,Y) + s.$$

Por último. de (II.2.6) (c):

$$R(X,fY,fX,Y) = -R(X,fY,X,fY) - s = K(X,fY) - s.$$

Sustituyendo, se tiene (c). #

II.3.5. Teorema.- Sea M^{2n+s} una S-variedad con $n \geq 3$. Si la curvatura f-seccional antiinvariante es constante c, entonces la variedad tiene curvatura f-seccional invariante constante $k = 4c - 3s$.

Demostración:

Sean $X, Y \in \mathcal{L}$ un par de campos ortonormales que generen una f-sección antiinvariante. Entonces $X+Y$ y $fX-fY$ también generan una f-sección antiinvariante, en virtud de la Nota II.3.2. Por tanto, utilizando (II.2.6) y (II.3.1), tenemos que:

$$c = K(X+Y, fX-fY) = \tfrac{1}{4}R(X+Y, fX-fY, fX-fY, X+Y) =$$

$$= \tfrac{1}{4}[H(X) + H(Y) - 2K(X,Y) - 2K(X,fY) + 6s].$$

Como $K(X,Y) = K(X,fY) = c$,

obtenemos que:

$$H(X) + H(Y) = 8c - 6s.$$

Sea p un punto arbitrario de M^{2n+s} y sean U y V vectores unitarios en $\mathcal{L}(p)$. Como $n \geq 3$, podemos coger un vector unitario W en $\mathcal{L}(p)$ ortogonal a las secciones planas generadas por $\{U, fU\}$ y $\{V, fV\}$. Es fácil comprobar que las secciones planas generadas por $\{U, W\}$ y $\{V, W\}$ son f-secciones antiinvariantes. Entonces $H(U) + H(W) = 8c - 6s$ y $H(V) + H(W) = 8c - 6s$, con lo cual $H(U) = H(V)$. Como U y V son arbitrarios, la curvatura f-seccional invariante no depende de la elección de la f-sección invariante en p y como p también es arbitrario, por el Teorema II.2.20 se llega a que la variedad tiene curvatura f-seccional invariante constante $k = 4c - 3s$. #

II.3.6. Nota.- Estos resultados deben compararse con aquellos que se obtienen en variedades Kaehlerianas $(s = 0)$. Véase, por ejemplo, |17|.

CAPITULO III

Subvariedades de K-variedades.

En este capítulo empezaremos el estudio de las subvariedades en las estructuras que estamos tratando, analizando especialmente el caso de S-variedades. Primero daremos unos preliminares acerca de las nociones generales de subvariedades que necesitaremos y que pueden encontrarse, por ejemplo, en |13|, |18|, |31| , |47|. A continuación, veremos algunas generalidades en subvariedades de K-variedades. Luego, nos centraremos en el estudio de las subvariedades integrales de la distribución $\mathcal{L}$. Por último, trataremos el cumplimiento o no de los axiomas de los planos f-invariantes o f-antiinvariantes y su relación con la curvatura f-seccional invariante de la variedad.

III.1. Preliminares.-

Sea $\bar{M}^n$ una variedad Riemanniana y sea M^m una subvariedad isométricamente inmersa en $\bar{M}^n$. Denotaremos por g la métrica de $\bar{M}^n$ y la de M^m inducida por aquélla. por $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $\bar{M}^n$ y por ∇ la de M^m. Sean $T(M)^{\perp}$ y $T(M)$ los fibrados normal y tangente, respectivamente, de M^m y $T(\bar{M})$ el fibrado tangente de $\bar{M}^n$. Se tienen, para $X,Y\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$, las fórmulas de Gauss y Weingarten:

(III.1.1) $\quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y)$.

(III.1.2) $\quad \bar{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V$,

donde σ es la <u>2ª Forma Fundamental de la inmersión</u>, A_V el <u>Endomorfismo de Weingarten</u> asociado a V y D la conexión lineal inducida en el fibrado normal $T(M)^{\perp}$ sobre M^m, llamada <u>conexión normal</u>. σ y A están relacionados por:

(III.1.3) $\quad g(A_V X,Y) = g(\sigma(X,Y),V)$.

Definimos la <u>derivación de Van der Waerden-Bortolotti</u> de σ por:

$$(\nabla'_X\sigma)(Y,Z) = D_X\sigma(Y,Z) - \sigma(\nabla_X Y,Z) - \sigma(Y,\nabla_X Z),$$

donde $X,Y,Z\in T(M)$. Diremos que la 2ºF.F. σ es <u>paralela</u> si:

(III.1.4) $\quad \nabla'\sigma = 0$.

Sean ahora $\bar{R}$, R, R^D los tensores de curvatura asociados a las conexiones $\bar{\nabla},\nabla$ y D, respectivamente. Tenemos las siguientes relaciones, (|18|):

(III.1.5) $\quad \bar{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) - g(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z))$,

(ecuación de Gauss).

(III.1.6) $\quad \mathrm{Norm}(\bar{R}(X,Y)Z) = (\nabla'_X\sigma)(Y,Z) - (\nabla'_Y\sigma)(X,Z)$,

(ecuación de Coddazzi).

(III.1.7) $\quad \bar{R}(X,Y,U,V) = R^D(X,Y,U,V) - g([A_U,A_V]X,Y)$,

(ecuación de Ricci),

donde $X,Y,Z,W\in T(M)$, $U,V\in T(M)^{\perp}$, $\mathrm{Norm}(\bar{R}(X,Y)Z)$ es la componente normal de $\bar{R}(X,Y)Z$ y $[A_U,A_V]X = A_UA_VX - A_VA_UX$.

Llamaremos <u>vector curvatura media de la inmersión</u> al campo normal sobre M^m definido por:

(III.1.8) $\quad H = (1/m)\,\mathrm{Tr}(\sigma)$.

Diremos que la subvariedad M^m es <u>minimal</u> si $H = 0$, ó equivalentemente, si $Tr(A_V) = o$, para todo $V \epsilon T(M)^{\perp}$. Diremos que M^m es totalmente geodésica si $\sigma(X,Y) = 0$, para todos $X,Y \epsilon T(M)$ ó, equivalentemente, $A_V = 0$, para todo $V \epsilon T(M)^{\perp}$ y diremos que es totalmente umbilical si $\sigma(X,Y) = g(X,Y)H$, para todos $X,Y \epsilon T(M)$.

III.2. Subvariedades de K-variedades.-

III.2.1. Definiciones básicas.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una K-variedad y M^m una subvariedad de $\bar{M}^{2n+s}$. Para un campo $X \epsilon T(M)$, ponemos:

(III.2.1) $\quad fX = TX + NX,$

donde TX (respectivamente, NX) denota la componente tangente (respectivamente, la componente normal) de fX. Entonces T es un endomorfismo de $T(M)$ y N es una 1-forma valuada en $T(M)^{\perp}$ de $T(M)$. La subvariedad se dira, entonces, subvariedad invariante si N se anula idénticamente, esto es, $fX \epsilon T(M)$, para todo $X \epsilon T(M)$ y se dirá subvariedad antiinvariante si T se anula idénticamente, esto es, $fX \epsilon T(M)^{\perp}$, para todo $X \epsilon T(M)$. En este último caso, $2m \quad 2n+s$.

Para un campo $V \epsilon T(M)^{\perp}$, ponemos:

(III.2.2) $\quad fV = tV + nV,$

donde tV (respectivamente, nV) denota la componente tangente (respectivamente, la componente normal) de fV. Entonces, t es una 1-forma valuada en $T(M)$ de $T(M)^{\perp}$ y n es un endomorfismo de $T(M)^{\perp}$.

Definimos las derivadas covariantes de T,N,t y n por:

(III.2.3) $\quad (\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y.$

(III.2.4) $\quad (\nabla_X N)Y = D_X NY - N\nabla_X Y$

(III.2.5) $\quad (\nabla_X t)Y = \nabla_X tV - tD_X V$

(III.2.6) $\quad (\nabla_X n)Y = D_X nV - nD_X V$

donde $X,Y \epsilon T(M)$ y $V \epsilon T(M)^{\perp}$.

III.2.2. Observación.- Todas estas definiciones podrían haberse hecho en estructuras más debiles. Nosotros nos dedicaremos fundamentalmente a estudiar las S-variedades, aunque siempre haremos notar resultados importantes en esas estructuras más débiles.

III.2.3. Lema.- Si M^m es una subvariedad de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, entonces, dados $X,Y\in T(M)$, $U,V\in T(M)^{\perp}$, se verifican:

(III.2.7) $g(TX,Y) = -g(X,TY)$

(III.2.8) $g(nV,U) = -g(V,nU)$

(III.2.9) $g(NX,U) = -g(X,tV)$..

Demostración:

Es inmediata de (I.1.5). #

III.2.4. Lema.- Sea M^m una subvariedad de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tal que $\xi_1,\dots,\xi_s$ son tangentes a M^m. Se tienen entonces, si $X\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$:

(III.2.10) $-X + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha = T^2X + tNX.$

(III.2.11) $NTX + nNX = 0$

(III.2.12) $TtV + tnV = 0$

(III.2.13) $-V = NtV + n^2V.$

Demostración:

Se obtiene aplicando f en (III.2.1) y (III.2.2) y separando las componentes tangente y normal. #

III.2.5. Proposición.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una K-variedad y M^{n+s} una subvariedad antiinvariante. Entonces $\xi_1,\dots,\xi_s$ son tangentes a M^{n+s}.

Demostración:

Por la hipótesis, $fT_p(M) = T_p^{\perp}(M)$, para todo $p\in M^{n+s}$. Por tanto, para cada campo $X\in T(M)$, ya que $\eta_\alpha\circ f = 0$ para todo $\alpha\in\{1,\dots,s\}$, tenemos que ξ_α está en $T(M)$, para todo α. #

III.2.6. Lema.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad y M^m una subvariedad tal que $\xi_1,\dots,\xi_s$ son tangentes a M^m. Entonces, si $X\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$, $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$, se verifican:

(III.2.14) $\nabla_X\xi_\alpha = -TX.$

(III.2.15) $\sigma(X,\xi_\alpha) = -NX.$

(III.2.16) $A_V\xi_\alpha = tV.$

(III.2.17) $\sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0.$

Demostración:

Si $X\in T(M)$, tenemos, en virtud de (I.3.16), (III.1.1) y (III.2.1)

$$-\bar{\nabla}_X\xi_\alpha = fX = TX + NX = -\nabla_X\xi_\alpha - \sigma(X,\xi_\alpha),$$

y separando las componentes tangente y normal, obtenemos (III.2.14) y (III.2.15). Además, si $V\in T(M)^\perp$, por (III.1.3) y (III.2.9):

$$g(A_V\xi_\alpha,X) = g(\sigma(\xi_\alpha,X),V) = -g(NX,V) = g(X,tV)$$

y, de aquí, (III.2.16). Por último, de (III.2.15),

$$\sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta) = -N\xi_\beta = 0,$$

ya que $f\xi_\beta = 0$. #

III.2.7. Proposición.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad y M^m una subvariedad tangente a $\xi_1,\dots,\xi_s$. Si $X,Y\in T(M)$, $V\in T(M)^\perp$, se cumplen:

(III.2.18) $(\nabla_X T)Y = \sum_\alpha [g(fX,fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X] - A_{NY}X + t\sigma(X,Y).$

(III.2.19) $(\nabla_X N)Y = n\sigma(X,Y) - \sigma(X,TY).$

(III.2.20) $(\nabla_X t)V = A_{nV}X - TA_VX$

(III.2.21) $(\nabla_X n)V = -\sigma(X,tV) - NA_VX.$

Demostración:

En virtud de (I.3.18), si $X,Y\in T(M)$:

$$(\bar{\nabla}_X f)Y = \sum_\alpha [g(fX,fY)\xi_\alpha - \sum_\alpha \eta_\alpha(Y)X + \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(Y)\eta_\beta(X)\xi_\beta.$$

Por otra parte:

$$(\bar{\nabla}_X f)Y = \bar{\nabla}_X fY - f\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X(TY + NY) - f(\nabla_X Y + \sigma(X,Y)) =$$

$$= \nabla_X TY + \sigma(X,TY) - A_{NY}X + D_X NY - T\nabla_X Y - N\nabla_X Y - t\sigma(X,Y) -$$

$$-n\sigma(X,Y).$$

Separando las componentes tangente y normal, se obtienen (III.2.18) y (III.2.19), por (III.2.3) y (III.2.4). De nuevo, por (I.3.18), si $X\in T(M)$ y $V\in T(M)^\perp$:

$$(\bar{\nabla}_X f)V = \bar{\nabla}_X fV - f\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_X(tV + nV) - f(-A_VX + D_XV) =$$

$$= \nabla_X tV + \sigma(X,tV) - A_{nV}X + D_X nV + TA_VX + NA_VX - tD_XV - nD_XV.$$

Separando las componentes tangente y normal se obtienen (III.2.20) y (III.2.21), usando (III.2.5) y (III.2.6). #

III.2.8. Proposición.- Sea M^m una subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si ξ_α es tangente a M^m, entonces es paralelo, esto es, $\nabla_X\xi_\alpha = 0$, para todo $X\in T(M)$, si y sólo si M^m es antiinvariante.

Demostración:

Si $\xi_\alpha \in T(M)$, para todo $X\in T(M)$, tenemos:

$$fX = -\bar{\nabla}_X\xi_\alpha = \nabla_X\xi_\alpha + \sigma(X,\xi_\alpha).$$

Por tanto, $\nabla_X\xi_\alpha = 0$ si y sólo si $fX = \sigma(X,\xi_\alpha)$, es decir, si y sólo si $fX\in T(M)^\perp$. #

III.2.9. Proposición.- Sea M^m una subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si $m>r$, donde r es el número de campos ξ_α tangentes a M^m y si existe algún ξ_α normal a M^m, entonces M^m es antiinvariante y $m-r\leq n$.

Demostración:

Si $\xi_\alpha\in T(M)^\perp$, tenemos, para todos $X,Y\in T(M)$:

$$g(fX,Y) = -g(\bar{\nabla}_X\xi_\alpha,Y) = g(A_{\xi_\alpha}X,Y) - g(D_X\xi_\alpha,Y) = g(A_{\xi_\alpha}X,Y).$$

Como f es antisimétrico y A_{ξ_α} es simétrico, entonces $A_{\xi_\alpha} = 0$, con lo que $fX\in T(M)^\perp$. Además, ningún campo tangente a M^m, independiente de los ξ_α, puede transformarse por f en un ξ_β, pues si $fX = \xi_\beta$, entonces $f^2X = -X = 0$. De aquí que $m-r\leq n$. #

III.2.10. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, con $m>r$, siendo r el número de campos ξ_α tangentes a M^m. Entonces, si $r>0$, M^m no puede ser totalmente umbilical.

Demostración:

Si la subvariedad fuese totalmente umbilical, entonces, para cualesquiera $X,Y\in T(M)$, $\sigma(X,Y) = g(X,Y)H$, siendo H el vector curvatura media. De la Proposición III.2.8, $\sigma(\xi_\alpha,\xi_\alpha) = 0$, para todo $\xi_\alpha\in T(M)$ y así, $g(\xi_\alpha,\xi_\alpha)H = 0$, con lo que la subvariedad es minimal y, por tanto, totalmente geodésica. Ahora, si $X\in\mathcal{L}$ es tangente a M^m, entonces:

$$0 \neq fX = -\sigma(X,\xi_\alpha),$$

lo cual es contradicción. #

Sea ahora M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ y sea $p\varepsilon M^m$. Llamemos ν_p al complemento ortogonal de $fT_p(M)$ en $T_p^{\perp}(M)$. Entonces, para cada $p\varepsilon M^m$:

(III.2.22) $T_p^{\perp}(M) = fT_p(M) \oplus \nu_p$.

Claramente, $f\nu_p \subseteq \nu_p$.

Además, al ser M^m antiinvariante, n es una f-estructura. En efecto:

Si $X\varepsilon T(M)$, entonces $fX = NX$. Pero $f^2X = -X + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha = tfX + nfX$, con lo que $nfX = 0$, pues si $\xi_\alpha \varepsilon T(M)^{\perp}$, $\eta_\alpha(X) = 0$. En consecuencia $nN = 0$.

Si $V\varepsilon T(M)^{\perp}$, entonces $fV = tV + nV$. Pero $f^2V = NtV + tnV + n^2V$ y, de aquí, $f^3V = -fV = tNtV + NtnV + n^3V = -tV - nV$. Por otra parte, como tenemos $f^2V = -V + \sum_\alpha \eta_\alpha(V)\xi_\alpha = ftV + tnV + n^2V$, deducimos que $tn = 0$, pues si $\xi_\alpha \varepsilon T(M)$, $\eta_\alpha(V) = 0$. En resumen, $n^3 + n = 0$.

Diremos que, en este caso, la f-estructura n es paralela si $\nabla n = 0$.

<u>III.2.11. Proposición.-</u> Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si la f-estructura n es paralela, entonces, para todo $W\varepsilon\nu$, se cumple que:

(III.2.23) $A_W = 0$.

Demostración:

De (III.2.21), si $X\varepsilon T(M)$ y $V\varepsilon T(M)^{\perp}$:

$$0 = (\nabla_X n)V = -\sigma(X,tV) - NA_V X.$$

Si $W\varepsilon\nu$, entonces $tW = 0$, con lo que $NA_W X = 0$. Pero, como M^m es antiinvariante, $fA_W X = 0$, con lo que:

$$0 = f^2A_W X = -A_W X + \sum_\alpha \eta_\alpha(A_W X)\xi_\alpha.$$

Sin embargo, $g(A_W X,\xi_\alpha) = 0$, para todo $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$, pues si ξ_α es mormal a M^m es evidente y si ξ_α es tangente a M^m, $g(A_W X,\xi_\alpha) = g(\sigma(X,\xi_\alpha),W) = 0$, pues (III.2.15) es cierto en este caso, con lo que $\sigma(X,\xi_\alpha)\varepsilon fT(M)$. En cualquier caso $A_W X = 0$, para todo $X\varepsilon T(M)$. #

III.3. Subvariedades integrales de la distribución $\mathcal{L}$ en S-variedades.-

III.3.1. Teorema.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad. Entonces existen subvariedades integrales de la distribución $\mathcal{L}$ de dimensión n, pero no de dimensión mayor.

Demostración:

Por ser $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad, se tiene que:

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n \neq 0,$$

para todo $\alpha\in\{1,\dots,s\}$. Por tanto:

$$\eta_1 \wedge (d\eta_1)^n \neq 0.$$

Mas aún:

$$(d\eta_1)^{n+1} = 0.$$

Efectivamente, sea $p\in\bar{M}^{2n+s}$ y sea $\{X_1,\dots,X_{2n},\xi_1,\dots,\xi_s\}$ una base de $T_p(\bar{M})$. Para cualesquiera $Y_1,\dots,Y_{2n+2}\in\{X_1,\dots,X_{2n},\xi_1,\dots,\xi_s\}$ tenemos que:

$$(d\eta_1)^{n+1}(Y_1,\dots,Y_{2n+2}) = 0,$$

ya que $d\eta_1(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0$, para cualesquiera $\alpha,\beta\in\{1,\dots,s\}$.

Entonces, por el Teorema de Darboux, existe V(p) entorno de p y funciones $f^1,x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n$ en V(p) tales que:

$$\eta_1|_V = df^1 + \sum_{j=1}^{n} x^j dy^j$$

Por tanto:

$$d\eta_1 = \sum_j dx^j \wedge dy^j$$

y, en consecuencia:

$$(d\eta_1)^n = n!(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Como $d\eta_1 = \dots = d\eta_s$, observamos que $\eta_\alpha - \eta_1$ es una 1-forma cerrada, para todo $\alpha\in\{1,\dots,s\}$. Por el Lema de Poincare, existe un entorno $W(p)\subseteq V(p)$ tal que $\eta_\alpha - \eta_1$ es exacta en él, $\alpha = 1,\dots,s$. De aquí que existen funciones diferenciables $g^1,\dots,g^s$ en W(p) tales que, para todo $\alpha\in\{1,\dots,s\}$:

$$\eta_\alpha = \eta_1 + dg^\alpha.$$

Entonces, localmente, podemos tomar las funciones:

$$f^\alpha = f^1 + g^\alpha, \quad \alpha = 2,\ldots,s$$

y se verifica:

$$\eta_\alpha = dg^\alpha + \eta_1 = df^\alpha - df^1 + \eta_1 = df^\alpha + \sum_j x^j dy^j.$$

Tomando ahora $z^1 = f^1$, $z^\alpha = f^\alpha - f^\alpha(p)$, $\alpha = 2,\ldots,s$ (con lo cual, $z^\alpha(p) = 0$ y $dz^\alpha = df^\alpha$), hemos encontrado una carta local en p:

$$(U;\ x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n,z^1,\ldots,z^s)$$

tal que:

$$\eta_\alpha|_U = dz^\alpha + \sum_j x^j dy^j.$$

Por tanto, $z^1 = cte.$, ..., $z^s = cte.$, $y^1 = cte.$, ..., $y^n = cte.$ es una subvariedad integral de $\mathcal{L}$ de dimensión n en el entorno U y una subvariedad integral maximal conteniendo estos entornos es una subvariedad integral de $\mathcal{L}$ en $\bar{M}^{2n+s}$.

Supongamos ahora que M^m es una subvarieda integral de $\mathcal{L}$ de dimensión $m > n$. Sean $X_1,\ldots,X_m$ campos locales linealmente independientes, tangentes a M^m. Extendámoslos a una base:

$$\{X_1,\ldots,X_m,X_{m+1},\ldots,X_{2n},\xi_1,\ldots,\xi_s\}$$

para $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, para $i,j = 1,\ldots,m$, tenemos:

$$\eta_\alpha(X_i) = 0;\ d\eta_\alpha(X_i,X_j) = 0, \alpha = 1,\ldots,s.$$

Como $m > n$:

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_s \wedge (d\eta_\alpha)^n)(X_1,\ldots,X_{2n},\xi_1,\ldots,\xi_s) = 0$$

lo cual es contradicción. Luego no existen subvariedades integrales de $\mathcal{L}$ de dimensión mayor que n. #

Durante la demostración de este teorema, hemos visto que si X e Y son vectores tangentes a una subvariedad integral de $\mathcal{L}$, entonces:

$$\eta_\alpha(X) = \eta_\alpha(Y) = 0;\ d\eta_\alpha(X,Y) = 0,\ \alpha = 1,\ldots,s.$$

Tenemos, pues, el siguiente resultado:

<u>III.3.2. Proposición.-</u> Sea M^m una subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, M^m es una subvariedad integral de $\mathcal{L}$ si y sólo si η_α y $d\eta_\alpha$ restringidas a M^m se anulan, para todo $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$. Más aún, M^m es una subvariedad

integral de $\mathcal{L}$ si y sólo si para cada vector tangente a M^m perteneciente a $\mathcal{L}$, se cumple que su transformado por f es normal a M^m en $\bar{M}^{2n+s}$.

Demostración:

La necesidad de la primera afirmación se deduce de la demostración del teorema anterior.

Sean ahora $X,Y\varepsilon T(M)$, supuesto que $\eta_\alpha(X) = \eta_\alpha(Y) = d\eta_\alpha(X,Y) = 0$, para todo $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$. Entonces:

$$0 = d\eta_\alpha(X,Y) = \tfrac{1}{2}(X\eta_\alpha(Y) - Y\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha([X,Y])) = -\tfrac{1}{2}\eta_\alpha([X,Y]),$$

con lo cual $[X,Y]\varepsilon\mathcal{L}$ y M^m es una subvariedad integral de $\mathcal{L}$.

Para la segunda afirmación, basta con observar que, para cualquier $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$:

$$d\eta_\alpha(X,Y) = F(X,Y) = g(X,fY). \qquad \#$$

III.3.3. Corolario.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad. Cualquie subvariedad integral de $\mathcal{L}$ es una subvariedad antiinvariante de $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\xi_1,\ldots,\xi_s$.

III.3.4. Nota.- LOs resultados anteriores son bien conocidos en el caso $s = 1$. Puede consultarse, por ejemplo, |4|. Por otra parte, podemos reducir las hipótesis a f-estructura con referencias complementadas $\eta_1,\ldots,\eta_s$ y 2-forma fundamental $F = d\eta_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,s$.

III.4. Los axiomas de los f-planos invariantes y antiinvariantes en las S-variedades.-

Empezaremos esta sección demostrando dos lemas sobre el tensor de curvatura en S-variedades que utilizaremos posteriormente.

III.4.1. Lema.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad. Si $X,Y,Z,W\varepsilon T(\bar{M})$, se verifica que:

$$\text{(III.4.1)} \quad \bar{R}(fX,Y,fZ,W) - \bar{R}(fX,W,fZ,Y) = \bar{R}(X,Z,Y,W) +$$

$$+ \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma [\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\gamma(W) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\gamma(W) +$$

$$+ \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\alpha(W) - \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\gamma(W)] +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_\beta [g(X,Y)\eta_\alpha(Z)\eta_\beta(W) - g(Y,Z)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(W) - g(X,W)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z) +$$

$$+ g(Z,W)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)] + s\sum_{\alpha}\sum_{\beta} [\eta_\alpha(X)\ \eta_\alpha(Y)\ \eta_\beta(Z)\ \eta_\beta(W) -$$

$$- \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\alpha(W)] + s\sum_\alpha [g(Y,Z)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(W) -$$

$$- g(X,Y)\eta_\alpha(Z)\eta_\alpha(W) + g(X,W)\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Z) - g(Z,W)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)] +$$

$$+ s[g(X,Y)g(Z,W) - g(X,W)g(Y,Z) - F(X,W)F(Y,Z) - F(X,Y)F(Z,W)].$$

Demostración:

Por la 1ª Identidad de Bianchi:

$$\bar{R}(fX,Y,fZ,W) - \bar{R}(fX,W,fZ,Y) = -\bar{R}(fX,fZ,W,Y) = \bar{R}(fX,fZ,Y,W)$$

y, aplicando (II.2.2) se concluye la demostración. #

III.4.2. Lema.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad. Si $X,Y,Z,W \in T(\bar{M})$, entonces:

(III.4.2) $\bar{R}(fX,W,fZ,Y) - \bar{R}(fZ,X,fY,W) = -\bar{R}(X,Y,Z,W) +$

$$+ \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma [2\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\alpha(Z)\eta_\gamma(W) - 2\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\gamma(W) -$$

$$- \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\alpha(W) + \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\gamma(Z)\eta_\beta(W)] +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_\beta [2g(Y,Z)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(W) - 2g(X,Z)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W) + g(X,W)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z) -$$

$$- g(Y,W)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)] + 2s\sum_\alpha \sum_\beta [\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\beta(Z)\eta_\alpha(W) -$$

$$- \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\eta_\alpha(Z)\eta_\beta(W)] + 2s\sum_\alpha [g(X,Z)\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(W) -$$

$$- g(Y,Z)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(W) - g(X,W)\eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Z) + g(Y,W)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Z)] +$$

$$+ 2s[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) + F(X,Y)F(Z,W)].$$

Demostración:

Aplicamos (II.2.3) a $-\bar{R}(fY,W,fZ,X)$. El primer sumando resultante es:

$-\bar{R}(fY,W,fX,Z)$, que por la 1ª Identidad de Bianchi se convierte en:

$$\bar{R}(fY,fX,Z,W) + \bar{R}(fY,Z,W,fX) = -\bar{R}(fX,fY,Z,W) - \bar{R}(fX,W,fY,Z).$$

Aplicamos ahora (II.2.3) a $-\bar{R}(fX,W,fY,Z)$ y el primer sumando resultante es $-\bar{R}(fX,W,fZ,Y)$. Por último, cambiando $-\bar{R}(fX,fY,Z,W)$ según (II.2.2), se concluye la demostración. #

III.4.3. Definición.- Diremos que una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ admite el axioma de los f-planos invariantes si por cada punto $p\in\bar{M}^{2n+s}$ y por cada f-sección invariante en p, siempre existe una subvariedad de dimensión 2 y totalmente geodésica pasando por p y tangente a la f-sección.

III.4.4. Nota.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad y $p\in\bar{M}^{2n+s}$. Dada una sección plana en p, supongamos que existe una subvariedad totalmente geodésica de dimensión 2 pasando por p y siendo tangente a la sección dada. Representemos tal subvariedad por sus ecuaciones paramétricas:

$$x^h = x^h(y^\lambda), \quad \lambda,\mu,\nu,\delta = 1,2. \tag{III.4.3}$$

Entonces, el hecho de que la subvariedad sea totalmente geodésica se representa por:

$$\partial^2 x^h/\partial y^\nu \partial y^\mu + \partial x^j \partial x^i/\partial y^\nu \partial y^\mu \, \bar{\Gamma}^h_{ji} - \partial x^h/\partial y^\lambda \, \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0, \tag{III.4.4}$$

donde $\bar{\Gamma}^h_{ji}$ son los símbolos de Christoffel de la métrica de $\bar{M}^{2n+s}$ y $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ los de la métrica riemanniana inducida en la subvariedad. Las condiciones de integrabilidad de las ecuaciones diferenciales (III.4.4) son:

$$B^k_\nu B^j_\mu B^i_\lambda \bar{R}^h_{kji} = B^h_\delta R^\delta_{\nu\mu\lambda} \tag{III.4.5}$$

donde $B^i_\lambda = \partial x^i/\partial y^\lambda$, $\bar{R}^h_{kji}$ es el tensor de curvatura de $\bar{M}^{2n+s}$ y $R^\delta_{\nu\mu\lambda}$ es de la subvariedad. (III.4.5) significa que $B^k_\nu B^j_\mu B^i_\lambda \bar{R}^h_{kji}$ debe ser combinación lineal de B_1 y B_2.

III.4.5. Teorema.- Si una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ admite el axioma de los f-planos invariantes, entonces es una variedad de curvatura f-seccional invariante constante. El recíproco también es cierto.

Demostración:

Supongamos que la S-variedad admite el axioma de los f-planos invariantes, esto es, para cada f-sección invariante en un punto p de la variedad, existe siempre una subvariedad de dimensión 2 y totalmente geodésica, pasando por p y tangente a la f-sección. Pongamos $B_1 = fu$, $B_2 = f^2u$ como generadores de la f-sección. De (III.4.5), se obtienen:

$$(f_s^n u^s)(f_q^m f_j^q u^j)(f_p^1 f_i^p u^i)\bar{R}_{nml}^h = R_{122}^1 f_i^h u^i + R_{122}^2 f_r^h f_i^r u^i. \qquad \text{(III.4.6)}$$

$$(f_s^n u^s)(f_q^m f_j^q u^j)(f_i^1 u^i)\bar{R}_{nml}^h = R_{121}^1 f_i^h u^i + R_{121}^2 f_r^h f_i^r u^i. \qquad \text{(III.4.7)}$$

De (III.4.6), haciendo uso de (II.1.11) y (II.1.13) y llamando:

$$A = R_{122}^1, \quad B = R_{122}^2:$$

$$(f_n^s \bar{R}_{njih} + \sum_\alpha \sum_\beta f_{si}\eta_\beta^h \eta_\alpha^j - \sum_\alpha \sum_\beta f_{sh}\eta_\alpha^j \eta_\beta^i) u_s u_j u_i =$$

$$= (Ag_{sj} f_{ih} - Bg_{sj} g_{ih} + B\sum_\alpha g_{sj}\eta_\alpha^h \eta_\alpha^i) u_s u_j u_i .$$

Haciendo "transvecting" con u^h y usando la antisimetría de $\bar{R}_{njih}$ y f_{si}, obtenemos $B = 0$. Pongamos ahora:

$$k = \frac{1}{||fu||} A = \frac{g_{sj} u_s u_j}{(g_{sj} - \sum_\alpha \eta_\alpha^s \eta_\alpha^j) u_s u_j} A$$

Con esto y lo anterior llegamos a:

$$f_s^n \bar{R}_{nji}^h + f_s^n \bar{R}_{nij}^h + f_j^n \bar{R}_{nsi}^h + f_j^n \bar{R}_{nis}^h + f_i^n \bar{R}_{nsj}^h + f_i^n \bar{R}_{njs}^h -$$

$$- 2\sum_\alpha \sum_\beta [f_s^h \eta_\alpha^j \eta_\beta^i + f_j^h \eta_\alpha^s \eta_\beta^i + f_i^h \eta_\alpha^s \eta_\beta^j] =$$

$$= 2k[g_{sj} f_i^h + g_{si} f_j^h + g_{ij} f_s^h] - 2k\sum_\alpha [\eta_\alpha^s \eta_\alpha^j f_i^h +$$

$$+ \eta_\alpha^s \eta_\alpha^i f_j^h + \eta_\alpha^i \eta_\alpha^j f_s^h].$$

Haciendo "transvecting" con f_k^s y tomando la parte antisimétrica respecto a k a j, obtenemos:

$$-4\bar{R}_{kji}^h - 2\bar{R}_{kij}^h + 2\bar{R}_{jik}^h + f_j^n f_k^s \bar{R}_{nis}^h + f_i^n f_k^s \bar{R}_{njs}^h - f_k^n f_j^s \bar{R}_{nis}^h -$$

$$- f_i^n f_j^s \bar{R}_{nks}^h + \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma [6\eta_\alpha^k \eta_\beta^j \eta_\gamma^i \xi_\beta^h - 5\eta_\alpha^k \eta_\beta^j \eta_\beta^i \xi_\gamma^h + 5\eta_\alpha^k \eta_\beta^j \eta_\alpha^i \xi_\gamma^h -$$

$$-6\eta_\alpha^k \eta_\beta^j \eta_\gamma^i \xi_\alpha^h] + \sum_\alpha \sum_\beta [5g_{ji}\eta_\alpha^k \xi_\beta^h - 5g_{ki}\eta_\alpha^j \xi_\beta^h + 6\delta_k^h \eta_\alpha^j \eta_\beta^i - 6\delta_j^h \eta_\alpha^k \eta_\beta^i] +$$

$$+ s\sum_\alpha \sum_\beta [3\eta_\alpha^k \eta_\beta^j \eta_\beta^i \xi_\alpha^h - 3\eta_\alpha^k \eta_\beta^j \eta_\alpha^i \xi_\beta^h] + s\sum_\alpha [3g_{ki}\eta_\alpha^j \xi_\alpha^h - 3g_{ji}\eta_\alpha^k \xi_\alpha^h -$$

$$- 3\delta_k^h \eta_\alpha^j \eta_\alpha^i + 3\delta_j^h \eta_\alpha^k \eta_\alpha^i] + s[f_{ji} f_k^h - 2f_{kj} f_i^h - f_{ki} f_j^h + 3\delta_k^h g_{ji} -$$

$$- 3\delta_j^h g_{ki}] + 2k[2f_{kj} f_i^h + f_{ki} f_j^h - f_{ji} f_k^h + \delta_k^h g_{ji} - \delta_j^h g_{ki} -$$

$$- \sum_\alpha g_{ji}\eta_\alpha^k \xi_\alpha^h + \sum_\alpha g_{ki}\eta_\alpha^j \xi_\alpha^h - \sum_\alpha \delta_k^h \eta_\alpha^j \eta_\alpha^i + \sum_\alpha \delta_j^h \eta_\alpha^k \eta_\alpha^i + \sum_\alpha \sum_\beta \eta_\alpha^k \eta_\beta^j \eta_\beta^i \xi_\alpha^h -$$

$$- \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \eta^k_\alpha \eta^j_\beta \eta^i_\alpha \xi^h_\beta] = 0.$$

Usando la expresión (III.4.1) para:

$$-f^n_j f^s_k R^{h}_{nis} + f^n_j f^s_k R^{h}_{nis}$$

y la expresión (III.4.2) para:

$$f^n_i f^s_k R^{h}_{njs} - f^n_i f^s_j R^{h}_{nks} \text{,}$$

obtenemos (II.2.19) con lo que $\bar{M}^{2n+s}$ tiene curvatura f-seccional invariante constante k.

Recíprocamente, si la curvatura f-seccional invariante de $\bar{M}^{2n+s}$ es constante, entonces su tensor de curvatura tiene la forma de (II.2.19). De aquí es fácil comprobar que se tiene (III.4.5), lo que concluye la demostración. #

III.4.6. Nota.- Este resultado es conocido para variedades Kaehlerianas (s = 0), véase |43| y para variedades Sasakianas (s = 1), véase |39|.

III.4.7. Definición.- Diremos que una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ admite el axioma de los f-planos antiinvariantes si para cada punto p de la variedad y para cada f-sección antiinvariante en p, siempre existe una subvariedad totalmente geodésica de dimensión 2 tangente a la f-sección y pasando por p.

III.4.8. Teorema.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad, con $n \geqslant 3$, admitiendo el axioma de los f-planos antiinvariantes. Entonces $\bar{M}^{2n+s}$ tiene curvatura f-seccional invariante constante.

Demostración:

Sea p un punto arbitrario de la S-variedad y sean $X,Y \in \mathcal{L}(p)$ dos vectores arbitrarios y ortonormales generando una f-sección antiinvariante π. Sea N una subvariedad totalmente geodésica y de dimensión 2 de la S-variedad tal que pase por p y sea tangente a π. Como π es antiinvariante, fX es normal a N. Por tanto, $\bar{R}(X,Y,fX,X) = 0$. En efecto, como $A_{fX} = 0$ al ser N totalmente geodésica y $g(D_{[X,Y]}fX,X) = 0$, pues X es tangente a N, tenemos, por (III.1.1) Y (III.1.2):

$$\bar{R}(X,Y,fX,X) = g(\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y fX,X) - g(\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X fX,X) - g(\bar{\nabla}_{[X,Y]}fX,X) =$$

$$= g(\bar{\nabla}_X D_Y fX,X) - g(\bar{\nabla}_Y D_X fX,X) = g(-A_{D_Y fX}X + D_X D_Y fX,X) -$$

$$- g(-A_{D_X fX}Y + D_Y D_X fX,X) = 0,$$

pues N es totalmente geodésica.

Como X e Y generan una f-sección antiinvariante en p, entonces X+Y y fX-fY también generan una f-sección antiinvariante, en virtud de la Nota II.3.2. Entonces, razonando de modo análogo:

$$\bar{R}(X+Y,fX-fY,fX+fY,X+Y) = 0$$

y, por tanto, aplicando (II.2.6) y (II.3.1) al desarrollo de la expresión anterior:

$$0 = H(X) - H(Y).$$

Sean U y V vectores arbitrarios y unitarios en $\mathcal{L}(p)$. Si la sección {U,V} es invariante, entonces H(U) = H(V). Si no lo es, como $n \geqslant 3$, podemos coger W ortogonal a las secciones {U,fU} y {U,fV}. Por tanto, H(U) = H(W) = = H(V) por lo probado anteriormente. Luego H(U) = H(V) y, de aquí, como U y V son arbitrarios, la curvatura f-seccional invariante no depende de la elección de la f-sección invariante en p, para todo punto p de la S-variedad. Entonces, el Teorema II.2.20 nos prueba que la curvatura f-seccional invariante es constante en la S-variedad. #

III.4.9. Nota.- Este resultado es conocido en el caso de variedades Kaehlerianas (s = 0). Puede encontrarse en |17|.

CAPITULO IV

Subvariedades invariantes y antiinvariantes de K-variedades.

La clasificación de subvariedades es un problema clásico de Geometría Diferencial. En variedades con una f-estructura, la primera distinción se hace atendiendo a la invariancia o no del fibrado tangente por la f-estructura. Así, en variedades Kaehlerianas tenemos las subvariedades complejas y totalmente reales (ver, por ejemplo |13|), profusamente estudiadas por varios autores. En variedades Sasakianas, tenemos subvariedades invariantes y antiinvariantes, también muy estudiadas (|23|, |26|, |32|, |33|, |34|, |35|, |44|, |46|, |47|). nuestro objetivo en este capítulo es analizar las propiedades de las subvariedades invariantes y antiinvariantes en las K-variedades, especialmente en el caso de S-variedades, distinguiendo según la posición de la subvariedad respecto de la distribución $\mathcal{M}$.

IV.1. Subvariedades invariantes de K-variedades.-

IV.1.1. Proposición.- Sea M^m una subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, se cumple que $t = 0$.

Demostración:

Sean $X\varepsilon T(M)$, $V\varepsilon T(M)^{\perp}$. Por (III.2.9):

$$g(X,tV) = -g(NX,V) = 0$$

pues, como M^m es invariante, $N = 0$. #

En consecuencia, la imagen por f de un campo normal a la subvariedad es cero o un campo normal a la subvariedad. Además, n es una f-estructura en $T(M)$, pues:

$$fV = nV,\ f^2V = n^2V \text{ y } f^3V = n^3V = -fV = -nV,\ V\varepsilon T(M)^{\perp}.$$

Estudiemos ahora el caso de que la subvariedad sea normal a los campos $\xi_1,\ldots,\xi_s$. Tenemos los siguientes resultados:

<u>IV.1.2. Proposición.-</u> Sea M^m una subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Se verifica, si $X,Y\varepsilon T(M)$:

(IV.1.1) $\quad (\bar{\nabla}_X f)Y = 0.$

Demostración:

Sea Z un campo cualquiera de $T(\bar{M})$. En virtud de (I.3.9), tenemos:

$$g((\bar{\nabla}_X f)Y,Z) = \sum_\alpha d\eta_\alpha(fY,X)\eta_\alpha(Z),$$

pues $\eta_\alpha(Y) = 0$, para todo $\alpha\varepsilon\{1,\ldots,s\}$, ya que $Y\varepsilon T(M)$. Ahora bien, como X e Y están en $T(M)$, entonces $[fY,X]\varepsilon T(M)$ al ser la subvariedad invariante. Por tanto, $d\eta_\alpha(fY,X) = 0$, $\alpha = 1,\ldots,s$, lo que concluye la demostración. #

<u>IV.1.3. Proposición.-</u> Sea M^m una subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si $X,Y\varepsilon T(M)$, $V\varepsilon T(M)^{\perp}$, se cumplen:

(IV.1.2) $\quad \sigma(X,fY) = f\sigma(X,Y) = \sigma(fX,Y).$

(IV.1.3) $\quad A_{fV}X = fA_VX = -A_VfX.$

(IV.1.4) $\quad (\bar{\nabla}_X f)V = D_XfV - fD_XV.$

Demostración:

Por (IV.1.1) se tiene que si $X,Y\varepsilon T(M)$, $(\bar{\nabla}_X f)Y = 0$, con lo cual:

$$0 = \bar{\nabla}_X fY - f\bar{\nabla}_X Y = \sigma(X,fY) + \nabla_X fY - f\nabla_X Y - f\sigma(X,Y).$$

Por la Proposición IV.1.1, $\sigma(X,fY) - f\sigma(X,Y)$ es normal a M^m, luego se tiene (IV.1.2). Por otra parte, si $X\varepsilon T(M)$, $V\varepsilon T(M)^{\perp}$ y $Z\varepsilon T(M)$, observamos que, por (I.3.9):

$$0 = g((\bar{\nabla}_X f)V, Z)$$

con lo que $(\bar{\nabla}_X f)V$ es normal a M^m. Pero, por la Proposición IV.1.1:

$$(\bar{\nabla}_X f)V = \bar{\nabla}_X fV - f\bar{\nabla}_X V = -A_{fV}X + D_X fV + fA_V X - fD_X V.$$

Separando las componentes tangente y normal se obtienen la 1ª igualdad de (IV.3.1) y (IV.1.4). Por último, en virtud de (III.1.3):

$$g(\sigma(fX,Y),V) = g(A_V fX,Y).$$

Pero también, por (IV.1.2):

$$g(\sigma(fX,Y),V) = g(f\sigma(X,Y),V) = -g(\sigma(X,Y),fV) = -g(A_{fV}X,Y). \qquad \#$$

<u>IV.1.4. Corolario.-</u> Sea M^m una subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Se verifica, entonces, para todo $\beta\in\{1,\dots,s\}$:

(IV.1.5) $\quad A_{\xi_\beta} = 0.$

Demostración:

De (IV.1.3), tomando $V = \xi_\beta$ y como $f\xi_\beta = 0$, se tiene que $fA_{\xi_\beta} = 0$. Luego $f^2A_{\xi_\beta} = -A_{\xi_\beta} = 0.$ #

<u>IV.1.5. Teorema.-</u> Toda subvariedad invariante M^m de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ normal a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ es una variedad Kaehleriana. En consecuencia, m debe ser par.

Demostración:

Definimos sobre M^m un tensor J de tipo (1,1) mediante:

$$JX = fX, \quad X\in T(M).$$

Esta definición tiene sentido, pues M^m es una subvariedad invariante. Entonces:

$$J^2X = f^2X = -X,$$

ya que $\eta_\alpha(X) = 0$, $\alpha = 1,\dots,s$, al ser los ξ_α normales a M^m. Por tanto, J es una estructura casi-compleja en M^m y m es par. La métrica g sobre M^m es casi Hemítica, ya que:

$$g(JX,JY) = g(fX,fY) = g(X,Y).$$

Definimos también una 2-forma sobre M^m por:

$$\Omega(X,Y) = F(X,Y), \quad X,Y \in T(M).$$

Es claro que Ω es cerrada y, además:

$$\Omega(JX,JY) = F(fX,fY) = -g(fX,Y) = g(X,fY) = F(X,Y) = \Omega(X,Y).$$

Por último, $(\nabla_X J) = 0$, $X,Y \in T(M)$, pues de la Proposición IV.1.2, se tiene inmediatamenye. Esto es equivalente a $[J,J] = 0$ y de aquí que M^m es Kaehleriana. #

IV.1.6. Teorema.- Toda subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ es minimal.

Demostración:

Sea M^{2p} dicha subvariedad invariante. Localmente, podemos conseguir bases de campos ortonormales y tangentes a M^{2p} de la forma:

$$\{E_1,\ldots,E_p,fE_1,\ldots,fE_p\}.$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{p} [\sigma(E_i,E_i) + \sigma(fE_i,fE_i)] = \sum_{i=1}^{p} [\sigma(E_i,E_i) + f^2\sigma(E_i,E_i)] =$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{\alpha} g(\sigma(E_i,E_i),\xi_\alpha)\xi_\alpha = 0,$$

pues $g(\sigma(E_i,E_i),\xi_\alpha) = g(A_{\xi_\alpha}E_i,E_i) = 0$, por (IV.1.5), $\alpha = 1,\ldots,s$. #

IV.1.7. Corolario.- Toda subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ es totalmente umbilical si y sólo si es totalmente geodésica.

Demostración:

Es inmediata del teorema anterior. #

Con respecto al caso de S-variedades y C-variedades, tenemos los siguientes resultados:

IV.1.8. Teorema.- No existen subvariedades invariantes M^m en una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normales a algún ξ_α, supuesto que $m > r$, con r el número de campos ξ_α tangentes a la subvariedad.

Demostración:

Es inmediata de la Proposición III.2.9. #

IV.1.9. Proposición.- Sea M^{2p} una subvariedad invariante de una C-variedad

$\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Entonces, si $X\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$, se tiene que:

(IV.1.6) $\quad D_X fV = fD_X V.$

Demostración:

Al trabajar con una C-variedad, tenemos que $(\bar{\nabla}_X f)V = 0$ y el resultado se sigue de (IV.1.4). #

Pasemos ahora a estudiar las subvariedades M^{m+s} de una K-variedad, tangentes a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. En primer lugar observemos que M^{m+s} hereda la estructura de $\bar{M}^{2n+s}$, con lo cual m=2p. Lo mismo ocurre si $\bar{M}^{2n+s}$ es S-variedad o C-variedad.

<u>IV.1.10. Nota.-</u> Si M^{2p+s} es una subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ tenemos que, en virtud de la Proposición IV.1.1 y de (III.2.10) y (III.2.13), si $X\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$:

(IV.1.7) $\quad T^2X = -X + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha.$

(IV.1.8) $\quad n^2V = -V.$

<u>IV.1.11. Lema.-</u> Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si $X\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$, $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,s\}$, se tienen las siguientes igualdades:

(IV.1.9) $\quad \sigma(\xi_\alpha,fX) = f\sigma(X,\xi_\alpha).$

(IV.1.10) $\quad \sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0$

(IV.1.11) $\quad fA_V\xi_\alpha = A_{fV}\xi_\alpha.$

(IV.1.12) $\quad \eta_\alpha(A_V fX) = -\eta_\alpha(A_{fV}X).$

Demostración:

Al ser M^{2p+s} y $\bar{M}^{2n+s}$ K-variedades, se tiene que $\bar{\nabla}_{\xi_\alpha} f = 0$, $\nabla_{\xi_\alpha} f = 0$, $\alpha = 1,\ldots,s$. Por tanto, si $X\in T(M)$, por (III.1.1):

$$0 = (\bar{\nabla}_{\xi_\alpha} f)X = \bar{\nabla}_{\xi_\alpha} fX - f\bar{\nabla}_{\xi_\alpha} X = \nabla_{\xi_\alpha} fX + \sigma(\xi_\alpha,fX) - f\nabla_{\xi_\alpha} X -$$
$$- f\sigma(\xi_\alpha,X) = (\nabla_{\xi_\alpha} f)X + \sigma(\xi_\alpha,fX) - f\sigma(\xi_\alpha,X)$$

y de aquí (IV.1.9). Cambiando X por ξ_β, como $f\xi_\beta = o$, se tiene (IV.1.10), al ser $\sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta)$ normal a la subvariedad. Por otra parte, de (III.1.3), si $V\in T(M)^{\perp}$:

$$g(\sigma(\xi_\alpha,fX),V) = g(A_V fX,\xi_\alpha).$$

Además:

$$g(\sigma(\xi_\alpha,fX),V) = g(f\sigma(\xi_\alpha,X),V) = -g(\sigma(\xi_\alpha,X),fV) = -g(A_{fV}X,\xi_\alpha),$$

con lo cual obtenemos (IV.1.12). Por último, también de (III.1.3):

$$g(\sigma(\xi_\alpha,fX),V) = g(A_V\xi_\alpha,fX) = -g(fA_V\xi_\alpha,X),$$

pero:

$$g(\sigma(\xi_\alpha,fX),V) = g(f\sigma(\xi_\alpha,X),v) = -g(\sigma(\xi_\alpha,X),fV) = -g(A_{fV}\xi_\alpha,X)$$

y esto es (IV.1.11). #

<u>IV.1.12. Lema.-</u> Sea M^{2p+s}, $p>0$, una subvariedad invariante de una K-variedada $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si $X\varepsilon T(M)$, $Y\varepsilon\mathcal{L}$ y es tangente a M^{2p+s}, $V\varepsilon T(M)^{\perp}$, se cumplen:

(IV.1.13) $\quad \sigma(X,fY) = f\sigma(X,Y).$

(IV.1.14) $\quad A_V fY = -A_{fV}Y$

Demostración:

En efecto, de (I.3.9):

$$g(\sigma(X,fY),V) = g(\bar\nabla_X fY,V) = g((\bar\nabla_X f)Y,V) + g(f\bar\nabla_X Y,V) = g(f\sigma(X,Y),V),$$

pues $\eta_\alpha(Y) = \eta_\alpha(V) = 0$, $\alpha = 1,\ldots s$. Por otra parte, de (III.1.3):

$$g(A_V fY,X) = g(\sigma(X,fY),V) = g(f\sigma(X,Y),V) = -g(\sigma(X,Y),fV) =$$

$$= -g(A_{fV}Y,X).$$ #

<u>IV.1.13. Teorema.-</u> Toda subvariedad invariante M^{2p+s} de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$, es minimal.

Demostración:

Es idéntica a la del Teorema IV.1.6, usando (IV.1.10), (IV.1.13) y teniendo en cuenta el hecho de que la 2ºF.F. toma sus valores en el fibrado normal de la subvariedad. #

<u>IV.1.14. Corolario.-</u> Una subvariedad invariante M^{2p+s} de una K-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$, es totalmente geodésica si y sólo si es totalmente umbilical.

Con respecto a las S-variedades y a las C-variedades, obtenemos los siguientes resultados:

IV.1.15. Lema.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Se cumplen, para todos $X,Y\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$, $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$, las siguientes igualdades

(IV.1.15) $\sigma(X,\xi_\alpha) = 0.$

(IV.1.16) $A_V\xi_\alpha = 0$

(IV.1.17) $\sigma(X,fY) = f\sigma(X,Y) = \sigma(fX,Y).$

(IV.1.18) $A_{fV}X = fA_VX = -A_VfX.$

Demostración:

(IV.1.15(y (IV.1.16) son inmediatos de (III.2.15) y (III.2.16). Las otras dos se obtienen de las anteriores usando el Lema IV.1.11. #

IV.1.16. Lema.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una C-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si $X,Y\in T(M)$, $V\in T(M)^{\perp}$, $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$, se cumplen las siguientes igualdades:

(IV.1.19) $\sigma(X,\xi_\alpha) = 0.$

(IV.1.20) $A_V\xi_\alpha = 0.$

(IV.1.21) $\sigma(X,fY) = f\sigma(X,Y) =\sigma(fX,Y).$

(IV.1.22) $A_{fV}X = fA_VX = -A_VfX.$

(IV.1.23) $Df = 0.$

Demostración:

Por ser $\bar{M}^{2n+s}$ una C-variedad, usando (III.1.1):

$$0 = (\bar{\nabla}_X f)Y = \bar{\nabla}_X fY - f\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X fY + \sigma(X,fY) - f\nabla_X Y - f\sigma(X,Y).$$

Por tanto, obtenemos (IV.1.21) y, haciendo $Y = \xi_\alpha$, (IV,1,19). Además por (III.1.2):

$$0 = (\bar{\nabla}_X f)V = \bar{\nabla}_X fV - f\bar{\nabla}_X V = -A_{fV}X + D_X fV + fA_VX - fD_XV,$$

de donde deducimos (IV.1.23). Por último de (IV.1.19) tenemos (IV.1.20) y por tanto, (IV.1.22). #

A continuación, vamos a estudiar las subvariedades invariantes de una S-variedad. Por tanto, los campos $\xi_1,\ldots,\xi_s$ deben ser tangentes a la subvariedad. Supondremos también, salvo que se explicite lo contrario, que $p > 0$. Tenemos, entonces:

IV.1.17. Proposición.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces la subvariedad es totalmente geodésica si y sólo si los endomorfismos de Weingarten son conmutativos, esto es, $[A_V, A_W] = 0$, para todos $V, W \in T(M)^{\perp}$.

Demostración:

Si la subvariedad es totalmente geodésica, entonces $A_V = 0$, para todo $V \in T(M)$. Luego la condición necesaria es trivial.

Recíprocamente, si $[A_V, A_W] = 0$, $V, W \in T(M)^{\perp}$, como por la Proposición IV.1.1, $fV \in T(M)^{\perp}$, entonces $[A_V, A_{fV}] = 0$. Luego, si $Y \in T(M)$, $Y \in \mathcal{L}$ (lo cogemos así, pues si $Y \in \mathcal{M}$, el resultado es inmediato de (IV.1.16)), se tiene, por (IV.1.18):

$$0 = A_V A_{fV} Y - A_{fV} A_V Y = A_V f A_V Y - f A_V^2 Y = -2 f A_V^2 Y.$$

Aplicando f:

$$A_V^2 Y = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(A_V^2 Y)\xi_{\alpha}.$$

Ahora bien,

$$g(A_V^2 Y, \xi_{\alpha}) = g(A_V Y, A_V \xi_{\alpha}) = 0$$

por (IV.1.16). Esto quiere decir que:

$$0 = g(A_V^2 Y, Y) = g(A_V Y, A_V Y)$$

con lo que $A_V = 0$, para todo $V \in T(M)^{\perp}$ y la subvariedad es totalmente geodésica. #

IV.1.18. Lema.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Se cumple, entonces, que si $X \in T(M)$:

$$R(X,fX,fX,X) = \bar{R}(X,fX,fX,X) - 2\|\sigma(X,X)\|^2. \tag{IV.1.24}$$

Demostración:

De la ecuación de Gauss (III.1.5):

$$\bar{R}(X,fX,fX,X) = R(X,fX,fX,X) + g(\sigma(X,fX),\sigma(X,fX)) -$$
$$- g(\sigma(X,X),\sigma(fX,fX)).$$

Utilizando (I.1.2), (IV.1.17) y el hecho de que los campos ξ_α son tangentes a la subvariedad, se tiene el resultado. #

IV.1.19. Proposición.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, si H denota la curvatura f-seccional invariante de M^{2p+s} y $\bar{H}$ la de $\bar{M}^{2n+s}$, se cumple que $H \leq \bar{H}$. Además, la igualdad se da si y sólo si la subvariedad es totalmente geodésica.

Demostración:

La primera afirmación es evidente de (IV.1.24). Para la segunda, es obvio que si M^{2p+s} es totalmente geodésica, $\sigma(X,X) = 0$, $X \in T(M)$. Recíprocamente, si $H = \bar{H}$, esto quiere decir que para todo $X \in T(M)$, $\sigma(X,X) = 0$. Sean ahora $Y,Z \in T(M)$ ortonormales. Entonces, $(Y+Z)/\sqrt{2}$ también es tangente a M^{2p+s} y unitario. Por tanto:

$$0 = \sigma((Y+Z)/\sqrt{2},(Y+Z)/\sqrt{2}) = \sigma(Y,Z),$$

con lo que la subvariedad es totalmente geodésica. #

IV.1.20. Proposición.- Si la 2ªF.F. σ de una subvariedad invariante M^{2p+s} de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ es paralela, entonces M^{2p+s} es totalmente geodésica.

Demostración:

Como la 2ªF.F. es paralela, entonces $\nabla'\sigma = 0$. Sean $X,Y \in T(M)$ y sea $\alpha \in \{1,\dots,s\}$. Se cumple entonces que, usando (IV.1.15) y el hecho de que la subvariedad también es una S-variedad:

$$0 = (\nabla'_X\sigma)(Y,\xi_\alpha) = f\sigma(X,Y).$$

Aplicando f,

$$0 = f^2\sigma(X,Y) = -\sigma(X,Y)$$

con lo que M^{2p+s} es totalmente geodésica. #

Vamos a intentar, ahora, mejorar este resultado. Para ello, necesitaremos un lema previo:

IV.1.21. Lema.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, si $X,Y,Z,W \in T(M)$, se cumple que:

$$(IV.1.25)\qquad (\bar{R}(X,Y).\sigma)(Z,W) = R^D(X,Y)(\sigma(Z,W)) - \sigma(R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W).$$

Demostración:

Se tiene que:

$$(\bar{R}(X,Y).\sigma)(Z,W) = (\nabla'_X\nabla'_Y\sigma)(Z,W) - (\nabla'_Y\nabla'_X\sigma)(Z,W) -$$
$$- (\nabla'_{[X,Y]}\sigma)(Z,W)$$

y haciendo el desarrollo directamente, se obtiene el resultado. #

<u>IV.1.22. Proposición.-</u> Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, totalmente geodésica. Entonces, se cumple que, para todos X,Y en T(M):

$$(IV.1.26)\qquad \bar{R}(X,Y).\sigma = 0.$$

Demostración:

Es inmediata de (IV.1.25). #

<u>IV.1.23. Proposición.-</u> Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces M^{2p+s} es totalmente geodésica si y sólo si existen α y β en $\{1,\ldots,s\}$ tales que, para todos $X,Y\in T(M)$, se cumpla $(\nabla'_X\nabla'_Y\sigma)(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0$.

Demostración:

En primer lugar, por (IV.1.15) y por ser la subvariedad también una S-variedad:

$$(IV.1.27)\qquad (\nabla'_Y\sigma)(X,\xi_\beta) = -\sigma(X,\nabla_Y\xi_\beta) = \sigma(X,fY).$$

Por tanto:

$$\sigma(fX,fY) = (\nabla'_Y\sigma)(fX,\xi_\beta) = -(\nabla'_Y\sigma)(\nabla_X\xi_\alpha,\xi_\beta) =$$
$$= (\nabla'_X\nabla'_Y\sigma)(\xi_\alpha,\xi_\beta) - D_X((\nabla'_Y\sigma)(\xi_\alpha,\xi_\beta)) + (\nabla'_Y\sigma)(\xi_\alpha,\nabla_X\xi_\beta) =$$
$$= (\nabla'_X\nabla'_Y\sigma)(\xi_\alpha,\xi_\beta) - \sigma(fX,fY),$$

en virtud de (IV.1.15) y (IV.1.27). Entonces:

$$\sigma(fX,fY) = \tfrac{1}{2}(\nabla'_X\nabla'_Y\sigma)(\xi_\alpha,\xi_\beta).$$

Ahora bien, $\sigma(fX,fY) = -\sigma(X,Y)$ por (IV 1.17). #

Obsérvese que, en realidad, la condición se tiene para todo α y para todo β en $\{1,\ldots,s\}$.

<u>IV.1.24. Proposición.-</u> Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-varie-

dad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces M^{2p+s} es totalmente geodésica si y sólo si $\bar{R}(X,\xi_\alpha).\sigma = 0$ para algún ξ_α y para todo $X\in T(M)$.

Demostración:

Si M^{2p+s} es totalmente geodésica, se tiene la condición en virtud de la Proposición IV.1.22. Recíprocamente, si $\bar{R}(X,\xi_\alpha).\sigma = 0$, entonces, por (IV.1.25), se tiene que, para todos $Y,Z\in T(M)$:

$$R^D(X,\xi_\alpha)(\sigma(Y,Z)) = \sigma(R(X,\xi_\alpha)Y,Z) + \sigma(Y,R(X,\xi_\alpha)Z).$$

Poniendo $Y = \xi_\beta$, por (IV.1.15), llegamos a:

$$\sigma(R(X,\xi_\alpha)\xi_\beta,Z) = 0.$$

Ahora bien, como M^{2p+s} también es S-variedad, por (II.1.11):

$$R(X,\xi_\alpha)\xi_\beta = X - \sum_\gamma \eta_\gamma(X)\xi_\gamma.$$

Por tanto, por (IV.1.15) de nuevo:

$$\sigma(X,Z) = 0,$$

para todos $X,Z\in T(M)$, con lo que M^{2p+s} es totalmente geodésica. #

También se ha demostrado, en realidad, que la condición se tiene para todo $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$. En consecuencia, tenemos el siguiente teorema:

<u>IV.1.25. Teorema.-</u> Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) M^{2p+s} es totalmente geodésica.

(b) $(\nabla'_X\nabla'_Y\sigma)(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0$, $X,Y\in T(M)$, $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,s\}$.

(c) $\bar{R}(X,\xi_\alpha).\sigma = 0$, $X\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$.

(d) $\bar{R}(X,Y).\sigma = 0$, $X,Y\in T(M)$.

Supondremos, a partir de ahora y hasta el final de la sección que $\bar{M}^{2n+s}(k)$ es una S-variedad de curvatura f-seccional invariante constante k y que M^{2p+s} es una subvariedad invariante de $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Escojamos referencias locales ortonormales de campos en $\bar{M}^{2n+s}(k)$ de la forma:

$$\{E_1,\ldots, E_p,E_{p+1}=fE_1,\ldots,E_{2p}=fE_p,E_{2p+1},\ldots,E_{2n},\xi_1,\ldots,\xi_s\},$$

donde:

$$\{E_1,\ldots,E_{2p},\xi_1,\ldots,\xi_s\}$$

son referncias locales ortonormales de campos en M^{2p+s}. Utilizaremos los siguientes convenios de notación. Para los campos ξ_α los pondremos en los índices. Para los demás:

$A,B,C,D = 1,\dots,2n,\xi_1,\dots,\xi_s.$

$i,j,k,l = 1,\dots,2p.$

$\lambda,\nu,\mu = 2p+1,\dots,2n.$

$t,u,v = 1,\dots,p.$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,\dots,s.$

Utilizando (II.2.19) y la ecuación de Gauss (III.1.5), tenemos, si $X,Y\in T(M)$:

$$R(E_i,X,Y,E_i) = g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(X,Y)) - g(\sigma(X,E_i),\sigma(Y,E_i)) +$$
$$+ \tfrac{1}{4}(k+3s)[g(X,Y) - g(X,E_i)g(Y,E_i)] + 3\tfrac{1}{4}(k-s)g(X,fE_i)g(Y,fE_i) -$$
$$- \tfrac{1}{4}(k+3s)\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y).$$

Por las mismas expresiones y por (IV.1.15):

$$R(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) = g(X,Y) - \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y).$$

En consecuencia, como M^{2p+s} es minimal por el Teorema IV.1.13, sumando en i, $1\leqslant i\leqslant 2p$ y en γ, $1\leq\gamma\leq s$, se tiene que, denotando por S el tensor deRicci de M^{2p+s}:

$$S(X,Y) = \tfrac{1}{2}(p(k+3s) + k-s)g(X,Y) + \tfrac{1}{2}(s-k - p(k+3s))\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) +$$
$$+ 2p\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - \sum_t [g(\sigma(X,E_t),\sigma(Y,E_t)) +$$
$$+ g(\sigma(X,fE_t),\sigma(Y,fE_t))].$$

Observemos ahora que:

$$\sum_t [g(\sigma(X,E_t),\sigma(Y,E_t)) + g(\sigma(X,fE_t),\sigma(Y,fE_t))] =$$
$$= \sum_t\sum_\lambda[g(\sigma(X,E_t),E_\lambda)g(\sigma(Y,E_t),E_\lambda) + g(\sigma(X,fE_t),E_\lambda)g(\sigma(Y,fE_t),E_\lambda)] =$$
$$= \sum_t\sum_\lambda[g(A_\lambda X,E_t)g(A_\lambda Y,E_t) + g(A_\lambda X,fE_t)g(A_\lambda Y,fE_t)] =$$
$$= \sum_\lambda g(A_\lambda X,A_\lambda Y),$$

donde estamos denotando por A_λ a A_{E_λ} y hemos utilizado (III.1.3) y (IV.1.16).
Por otra parte, la curvatura escalar ρ de M^{2p+s} viene dada por:

$$= p^2(k+3s) + p(k+s) - ||\sigma||^2.$$

Sean ahora $X,Y\in T(M)$, ortonormales y en $\mathcal{L}$. Por la ecuación de Gauss (III.1.5) y por (II.2.19), si denotamos por K la curvatura seccional de la subvariedad:

$$K(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = \tfrac{1}{4}(k+3s) + 3\tfrac{1}{4}(k-s)g(X,fY)^2 + $$
$$+ g(\sigma(X,X),\sigma(Y,Y)) - ||\sigma(X,Y)||^2.$$

Por último, si $X\in T(M)$ es unitario y está en $\mathcal{L}$, tenemos, por la Proposición IV.1.19:

$$H(X) = k - 2||\sigma(X,X)||^2.$$

Todos estos resultados pueden escribirse en las siguientes:

IV.1.26. Proposición.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Entonces, se cumplen, para el tensor de Ricci S, la curvatura escalar ρ, la curvatura seccional K y la curvatura f-seccional invariante H de M^{2p+s}, que:

(IV.1.28) $S(X,Y) = \tfrac{1}{2}(p(k+3s) + k-s)g(X,Y) + (s-k - p(k+3s))\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) +$
$+ 2p\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - \sum_\lambda g(A_\lambda X,A_\lambda Y)$, $X,Y\in T(M)$.

(IV.1.29) $\rho = p^2(k+3s) + p(k+s) - ||\sigma||^2.$

(IV.1.30) $K(X,Y) = \tfrac{1}{4}(k+3s) + 3\tfrac{1}{4}(k-s)g(X,fY)^2 + g(\sigma(X,X),\sigma(Y,Y)) -$
$- ||\sigma(X,Y)||^2$, $X,Y\in T(M)$, ortonormales y en $\mathcal{L}$.

(IV.1.31) $H(X) = k - 2||\sigma(X,X)||^2$, $X\in T(M)$, unitario y en $\mathcal{L}$.

IV.1.27. Proposición.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Entonces, se cumplen, para el tensor de Ricci S, la curvatura escalar ρ y la curvatura f-seccional invariante H de M^{2p+s}:

(IV.1.32) $S - \tfrac{1}{2}(p(k+3s) + k-s)g - \tfrac{1}{2}(s-k - p(k+3s))\sum_\alpha \eta_\alpha\otimes\eta_\alpha -$
$- 2p\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha\otimes\eta_\beta$ es un tensor simétrico semidefinido negativo.

(IV.1.33) $\rho \leq p^2(k+3s) + p(k+s).$

(IV.1.34) $H \leq k$

IV.1.28. Teorema.- Sea M^{2p+s} una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Entonces, M^{2p+s} es totalmente geodésica si y sólo si se da una de las siguientes condiciones:

(IV.1.35) $\min\{k,\frac{1}{4}(k+3s)\} \leqslant K(X,Y) \leqslant \max\{k,\frac{1}{4}(k+3s)\}$, X,Y ortonormales, en $T(M)$ y en $\mathcal{L}$, $p \geqslant 2$.

(IV.1.36) $H(X) = k$, $X \in T(M)$, unitario y en $\mathcal{L}$.

(IV.1.37) $$S = \tfrac{1}{2}(p(k+3s) + k-s)g + \tfrac{1}{2}(s-k + p(k+3s)) \sum_{\alpha} \eta_\alpha \otimes \eta_\alpha + 2p\sum_{\alpha}\sum_{\beta} \eta_\alpha \otimes \eta_\beta.$$

(IV.1.38) $\rho = p^2(k+3s) + p(k+s)$.

Demostración:

(a) La restricción $p \geqslant 2$ es natural, ta que si $p = 1$, entonces $K = H$. Supongamos, en primer lugar, que $k \geqslant s$. La condición se convierte, por tanto, en:

$$\tfrac{1}{4}(k+3s) \leqslant K(X,Y) \leqslant k.$$

Dados $t,u \in \{1,\ldots,p\}$, como E_t y E_u son ortonormales y en $\mathcal{L}$, supuesto $t \neq u$, se tiene, por (IV.1.30):

$$K(E_t,E_u) = \tfrac{1}{4}(k+3s) + g(\sigma(E_t,E_t),\sigma(E_u,E_u)) - ||\sigma(E_t,E_u)||^2.$$

Como también E_t y fE_u son ortonormales y en $\mathcal{L}$, por (IV.1.30) y (IV.1.17), llegamos a:

$$K(E_t,fE_u) = \tfrac{1}{4}(k+3s) - g(\sigma(E_t,E_t),\sigma(E_u,E_u)) - ||\sigma(E_t,E_u)||^2$$

Sumando ambas expresiones, obtenemos:

$$K(E_t,E_u) + K(E_t,fE_u) = \tfrac{1}{2}(k+3s) - 2||\sigma(E_t,E_u)||^2.$$

Como $\frac{1}{4}(k+3s) \leqslant K(E_t,E_u)$, $K(E_t,fE_u)$, llegamos a que $\sigma(E_t,E_u) = 0$ y por (IV.1.17), $\sigma(E_t,fE_u) = 0$.

El mismo proceso se podría haber seguido con campos $X,Y \in T(M)$ tales que $\{X,Y,fY\}$ formen un sitema ortonormal en $\mathcal{L}$. Así, por ejemplo, tomando:

$$X = \frac{E_t + E_u}{\sqrt{2}},\quad Y = \frac{E_t - E_u}{\sqrt{2}},\quad fY = \frac{fE_t - fE_u}{\sqrt{2}}$$

se tiene:

$$0 = \sigma(X,Y) = \tfrac{1}{2}\sigma(E_t,E_t) - \tfrac{1}{2}\sigma(E_u,E_u).$$

Tomando ahora:

$$X = \frac{E_t + fE_u}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{E_t - fE_u}{\sqrt{2}}, \quad fY = \frac{fE_t + E_u}{\sqrt{2}}$$

tenemos:

$$0 = \sigma(X,Y) = \tfrac{1}{2}\sigma(E_t,E_t) + \tfrac{1}{2}\sigma(E_u,E_U)$$

y, por tanto, $\sigma(E_t,E_t) = 0$. Por (IV.1.17), $\sigma(fE_t,fE_t) = 0$.

Como $\{E_1,\ldots,E_{2p},\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ es una referencia local ortonormal para campos de M^{2p+s}, haciendo uso de nuevo de (IV.1.17), se llega a que $\sigma = 0$, con lo que la subvariedad es totalmente geodésica.

Recíprocamente, por (IV.1.30), si M^{2p+s} es totalmente geodésica:

$$K(X,Y) = \tfrac{1}{4}(k+3s) + 3\tfrac{1}{4}(k-s)g(X,fY)^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-schwarz para g, tenemos:

$$g(X,fY)^2 \leq g(X,X)g(fY,fY) = g(X,X)g(Y,Y) = 1,$$

y de aquí, que $K(X,Y) \leq k$. Por (IV.1.30), es claro que, siendo la subvariedad totalmente geodésica, $\tfrac{1}{4}(k+3s) \leq K(X,Y)$.

Para $k \leq s$, la demostración es totalmente análoga, cambiando las desigualdades.

(b) La demostración de (IV.1.36) es idéntica a la de la Proposición IV.1.19.

(c) Para (IV.1.37), si $\sigma = 0$, entonces $A_\lambda = 0$, para todo λ en $\{2p+1,\ldots,2n\}$ y por (IV.1.28), S tiene la expresión deseada.

Recíprocamente, si S verifica (IV.1.37), por (IV.1.28), llegamos a:

$$\sum_\lambda g(A_\lambda X, A_\lambda X) = 0,$$

para todo $X \in T(M)$. Como g es definida positiva, $A_\lambda = 0$, para todo λ y, entonces la subvariedad es totalmente geodésica.

(d) (IV.1.38) es inmediata de (IV.1.29). #

Supondremos ahora que tenemos una subvariedad invariante $M^{2p+s}(c)$ de curvatura f-seccional invariante constante c, de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$ de curvatura f-seccional invariante constante k. En virtud de la Proposición IV.1.19, podemos demostrar:

IV.1.29. Proposición.- Sea $M^{2p+s}(c)$ una subvariedad invariante de una

S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Entonces, $c \leq k$ y la igualdad se da si y sólo si la subvariedad es totalmente geodésica.

IV.1.30. Teorema.- Sea $M^{2p+s}(c)$ una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Entonces, se verifican:

(IV.1.39) $\sum_{\lambda} A_{\lambda}^2 = \frac{1}{2}(p+1)(c-k)f^2$.

(IV.1.40) $||\sigma||^2 = p(p+1)(k-c)$.

(IV.1.41) $||\sigma(X,X)||^2 = \frac{1}{2}(k-c)$, $X\varepsilon T(M)$ unitario y en $\mathcal{L}$.

(IV.1.42) $||\sigma(X,Y)||^2 = \frac{1}{4}(k-c)$, $X,Y\varepsilon T(M)$ y tales que $\{X,Y,fY\}$ formen un sisteme ortonormal en $\mathcal{L}$.

Demostración:

Como M^{2p+s} tiene curvatura f-seccional invariante constante c, de (II.2.20) tenemos, para todo $X,Y\varepsilon T(M)$:

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}(p(c+3s) + c-s)g(X,Y) + 2p \sum_{\alpha}\sum_{\beta}\eta_{\alpha}(X)\eta_{\beta}(Y) + $$
$$+ \frac{1}{2}(s-c - p(c+3s)) \sum_{\alpha}\eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y).$$

Por otra parte, se cumple (IV.1.28). Como $g(A_{\lambda}X,A_{\lambda}Y) = g(A_{\lambda}^2X,Y)$, restando la expresión anterior y (IV.1.28), se llega a (IV.1.39).

Ahora, por (II.2.21), se tiene:

$$\rho = p^2c + 3p^2s + pc + ps.$$

Restando esta expresión de (IV.1.29), obtenemos (IV.1.40).

Para (IV.1.41) sólo debemos observar que $H(X) = c$ y comparando con (IV.1.31) se tiene..

Por ultimo, de (II.2.19), si X e Y están en las condiciones del enunciado, entonces:

(IV.1.43) $K(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = \frac{1}{4}(c+3s)$.

De (IV.1.30):

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}(k+3s) + g(\sigma(X,X),\sigma(Y,Y)) - ||\sigma(X,Y)||^2.$$

También de (II.2.19):

(IV.1.44) $K(X, fY) = \frac{1}{4}(c+3s)$,

y de (IV.1.17) y (IV.1.30):

$$K(X,fY) = \tfrac{1}{4}(k+3s) - g(\sigma(X,X),\sigma(Y,Y)) - ||\sigma(X,Y)||^2.$$

Sumando estas expresiones, se obtiene (IV.1.42). #

IV.1.31. Lema.- Sea $M^{2p+s}(c)$ una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Entonces, los $p(p+1)$ campos normales a $M^{2p+s}(c)$, $\sigma(E_i,E_j)$, $f\sigma(E_i,E_j)$, $i \leq j$, son ortogonales dos a dos.

Demostración:

Si $\{X,Y,fY\}$ forman un sistema ortonormal en $\mathcal{L}$ de campos tangentes a la subvariedad, utilizando (IV.1.30), (IV.1.42) y (IV.1.43), tenemos:

(IV.1.45) $\quad g(\sigma(X,X),\sigma(Y,Y)) = 0.$

Asi, para $X = E_i$, $Y = E_j$, si $i \neq j$:

(IV.1.46) $\quad g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_j,E_j)) = 0.$

Para $i \neq j$, $j \neq m$, $i \neq m$, se tiene que, tomando $X = E_i$, $Y = \dfrac{E_j - E_m}{\sqrt{2}}$ en virtud de (IV.1.45):

$$\tfrac{1}{2}g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_j,E_j)) + \tfrac{1}{2}g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_m,E_m)) -$$
$$- g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_j,E_m)) = 0$$

y por (IV.1.46):

$$g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_j,E_m)) = 0, \quad i \neq j,\ j \neq m,\ i \neq m.$$

Ahora bien, por (II.2.19), si $i \neq j$:

$$\bar{R}(E_i,fE_i,fE_j,E_i) = R(E_i,fE_i,fE_j,E_i) = 0$$

De la ecuación de Gauss (III.1.5) y de (IV.1.17):

$$g(\sigma(E_i,E_j),\sigma(E_i,E_i)) + g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_i,E_j)) = 0$$

y, por tanto:

(IV.1.48) $\quad g(\sigma(E_i,E_j),\sigma(E_i,E_i)) = 0, \quad i \neq j$

Poniendo en (IV.1.47) en lugar de E_i, $\dfrac{E_i - E_n}{\sqrt{2}}$, llegamos a:

(IV.1.49) $\quad g(\sigma(E_i,E_j),\sigma(E_m,E_n)) = 0$, para índices distintos.

Lo mismo se podría haber hecho usando fE_j en lugar de E_j y (IV.1.30), (IV.1.42) y (IV.1.43). Obtendríamos:

(IV.1.50) $\quad g(\sigma(E_i,E_j),f\sigma(E_m,E_n)) = 0$, para índicies distintos. #

IV.1.32. Teorema.- Sea $M^{2p+s}(c)$ una subvariedad invariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$. Si $n-p<\frac{1}{2}p(p+1)$, entonces la subvariedad es totalmente geodésica.

Demostración:

Si en tales condiciones, la subvariedad no fuera totalmente geodésica, por la Proposición IV.1.29, $c<k$. Pero por (IV.1.42), si i es distinto de j, entonces:

$$\sigma(E_i,E_j) \neq 0, \ f\sigma(E_i,E_j) \neq 0.$$

Luego, por el Lema IV.1.31, hay al menos p(p+1) campos normales independientes sobre M^{2p+s}. Entonces, $2(n-p) \geq p(p+1)$, lo cual contradice las hipótesis. #

IV.2. Subvariedades antiinvariantes de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ tangentes a los campos $\xi_1,\ldots,\xi_s$.-

Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad y sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Elijamos unas referencias locales ortonormales de campos tangentes a $\bar{M}^{2n+s}$ de la forma:

$$\{E_1,\ldots,E_m,E_{m+1},\ldots,E_n,E_{1*}=fE_1,\ldots,E_{m*}=fE_m,E_{(m+1)*}=fE_{m+1},\ldots,$$
$$E_{n*}=fE_n,\xi_1,\ldots,\xi_s\}.$$

tales que:

$$\{E_1,\ldots,E_m,\xi_1,\ldots,\xi_s\}$$

formen referencias locales ortonormales de campos tangentes a M^{m+s}. Sean las formas duales:

$$\{\omega^1,\ldots,\omega^n,\omega^{1*},\ldots,\omega^{n*},\xi_1,\ldots,\xi_s\}.$$

Seguiremos los siguientes convenios de notación:

Para los campos ξ_α los pondremos en los índices. Esto quiere decir que, por ejemplo, al escribir E_{ξ_α} estamos escribiendo en realidad ξ_α. Para los demás:

$A,B,C,D = 1,\dots,n,1^*,\dots,n^*, {}_1,\dots, {}_s.$

$i,j,k,l,t,s = 1,\dots,m, {}_1,\dots, {}_s.$

$x,y,z,v,w = 1,\dots,m$

$a,b,c,d = m+1,\dots,n,1^*,\dots,n^*.$

$\lambda, \nu, \mu = m+1,\dots,n,(m+1)^*,\dots,n^*.$

$\delta, \varepsilon = m+1,\dots,n.$

Cuando cualquier índice de estos se ponga con una estrella, querrá decir que se ha aplicado f, esto es E_{x^*} será fE_x. Como siempre:

$\alpha, \beta, \gamma = 1,\dots,s.$

En nuestro caso son fáciles de comprobar las siguientes relaciones para las formas de conexión de la conexión de Levi-Civita asociada a g:

(IV.2.1) $\omega_y^x = \omega_{y^*}^{x^*};\ \omega_y^{x^*} = \omega_x^{y^*}.$

$\omega_\varepsilon^\delta = \omega_{\varepsilon^*}^{\delta^*};\ \omega_\varepsilon^{\delta^*} = \omega_\delta^{\varepsilon^*}.$

$\omega_\delta^x = \omega_{\delta^*}^{x^*};\ \omega_\delta^{x^*} = \omega_x^{\delta^*}.$

$\omega_{\xi_\alpha}^{x^*} = -\omega^x;\ \omega_{\xi_\alpha}^{\delta^*} = -\omega^\delta.$

$\omega_{\xi_\alpha}^x = \omega^{x^*},\ \omega_{\xi_\alpha}^\delta = \omega^{\delta^*}.$

$\omega_{\xi_\beta}^{\xi_\alpha} = 0.$

Restringiendo estas formas a M^{m+s}, tenemos que $\omega^a = 0$, para todo a. Llamando $\sigma_{ij}^a = g(\sigma(E_i,E_j),E_a) = g(A_aE_i,E_j)$, donde estamos escribiendo A_{E_a} com A_a y por las ecuaciones de estructura de la conexión, tenemos:

(IV.2.2) $\sigma_{yz}^{x^*} = \sigma_{xz}^{y^*} = \sigma_{xy}^{z^*}.$

Además:

(IV.2.3) $\sigma_{\xi_\alpha i}^{\lambda} = 0.$

(IV.2.4) $\sigma_{\xi_\alpha i}^{x^*} = -\delta_{ix}$

Por otra parte A_a puede ser considerada como una matriz simétrica $(m+s) \times (m+s)$, $A_a = (\sigma_{ij}^a)$. Tenemos, pues que para cada a, la 2ªF.F. está representada por las matrices simétricas:

$$A_{x^*} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad s \times s \quad & \qquad\qquad x \qquad \end{array} \\ \begin{array}{c} s \times s \\ \\ \\ \\ \\ \\ x \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \bigcirc & \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \ldots -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots -1 & \ldots & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} & \sigma^{x^*}_{yz} \end{array}\right] \end{array} \qquad \text{para todo } x.$$

$$A_\lambda = \begin{array}{cc} & s \times s \\ s \times s & \left[\begin{array}{c|c} \bigcirc & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & \sigma^{\lambda}_{yz} \end{array}\right] \end{array} \qquad \text{para todo } \lambda .$$

Pongamos ahora $H_a = (\sigma^a_{yz})$ que son matrices simétricas $m \times m$. Denotemos por $C = \sum_{a,i,j} (\sigma^a_{ij})^2 = \sum_a \mathrm{Tr}(A_a^2)$ y por $D = \sum_{a,x,y} (\sigma^a_{xy})^2 = \sum_a \mathrm{Tr}(H_a^2)$.

Es claro que $C = D + 2ms$. Además, vemos que $\mathrm{Tr}(A_a) = \sum_i \sigma^a_{ii} = \sum_x \sigma^a_{xx} = \mathrm{Tr}(H_a)$. Por tanto:

IV.2.1. Proposición.- Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Entonces, M^{m+s} es minimal si y sólo si $\mathrm{Tr}(H_a) = 0$, para todo a.

Demostramos ahora unos lemas que utilizaremos más tarde:

IV.2.2. Lema.- Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Entonces, se cumple que:

(IV.2.5) $\quad f\nu =$.

Demostración:

Sabemos que $f\nu \subseteq \nu$, en general. Si $W\in\nu$, entonces $W = -f^2W = -ffW$ y $fW\in\nu$ por lo anterior. #

IV.2.3. Lema.- Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ Entonces, si $X\in T(M)$ y $V\in T(M)^{\perp}$, se cumplen:

(IV.2.6) $tfX = -X + \sum_{\alpha} \eta_\alpha(X)\,\xi_\alpha$.

(IV.2.7) $nfX = 0$.

(IV.2.8) $tnV = 0$.

(IV.2.9) $n^2V = -V - ftV$.

(IV.2.10) $(\nabla_X n)V = -\sigma(X,tV) - fA_VX$.

Demostración:

Son inmediatas de (III.2.10), (III.2.11), (III.2.12), (III.2.13) y (III.2.21) en virtud de que $fX = NX$, para todo $X\in T(M)$. #

IV.2.4. Nota.- Sabemos que elhecho de que n sea paralela implica que $A_W = 0$ para todo $W\in\nu$. Se pueden elegir unas referencias locales ortonormales de campos tangentes a $\bar{M}^{2n+s}$ como al principio, de forma que:

$$\{E_{m+1},\dots,E_n,E_{(m+1)^*},\dots,E_{n^*}\}$$

formen unas referencias locales ortonormales para ν_p, $p\in M^{m+s}$. Entonces, $A_W = 0$ puede reescribirse como $A_\lambda = 0$, o lo que es lo mismo, $\sigma^{\lambda}_{ij} = 0$. Más aun, si $H_a = 0$, para todo a, entonces por (II.2.10), n es paralela.

IV.2.5. Lema.- Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Si $m\geq 2$, se tiene que, para todos $X,Y\in T(M)$ y que estén en $\mathcal{L}$, se verifica, si $Z,W\in T(M)$:

(IV.2.11) $\bar{R}(fX,fY,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W) + s\,[g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)]$.

Demostración:

Es inmediata de (II.2.2). #

IV.2.6. Lema.- Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Entonces, si $X,Y,Z\in T(M)$, $\alpha\in\{1,\dots,s\}$, se cumple que:

(IV.2.12) $R(X,Y,\xi_\alpha,Z) = 0 = R(X,Y,Z,\xi_\alpha)$.

Demostración:

Es inmediata de la Proposición II.2.8, pues $\nabla_X \xi_\alpha = 0$, para todo $X \varepsilon T(M)$. #

<u>IV.2.7. Nota.-</u> Las fórmulas (IV.2.11) y (IV.2.12) pueden reescribirse en coordenadas locales, referidas a una base como la del principio de la sección como:

$$\bar{R}^{y^*}_{x^*ij} = \bar{R}^{y}_{xij} + s(\delta_{ix}\delta_{jy} - \delta_{xj}\delta_{yi}).$$

$$R^{\xi_\alpha}_{ijk} = R^{i}_{\xi_\alpha jk} = 0,$$

donde $\bar{R}^{A}_{BCD} = R(E_C, E_D, E_B, E_A)$.

Podemos ahora demostrar los siguientes resultados:

<u>IV.2.8. Teorema.-</u> Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariantede una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1, \ldots, \xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela, entonces M^{m+s} es llana si su conexión normal es llana.

Demostración:

De la ecuación de Ricci (III.1.7), tenemos que:

$$R^{y^*}_{x^*ij} = \bar{R}^{y^*}_{x^*ij} + \sum_k (\sigma^{y^*}_{ki}\sigma^{x^*}_{kj} - \sigma^{y^*}_{kj}\sigma^{x^*}_{ki}) =$$

$$= \bar{R}^{y^*}_{x^*ij} + \sum_\alpha (\sigma^{y^*}_{\xi_\alpha i}\sigma^{x^*}_{\xi_\alpha j} - \sigma^{y^*}_{\xi_\alpha j}\sigma^{x^*}_{\xi_\alpha i}) + \sum_z (\sigma^{y^*}_{zi}\sigma^{x^*}_{zj} - \sigma^{y^*}_{zj}\sigma^{x^*}_{zi}).$$

Supuesto que $i,j \neq \xi_\alpha$, para todo α y, en virtud de (IV.2.3) y (IV.2.4), tenemos que, usando también (IV.2.11):

$$R^{y^*}_{x^*ij} = \bar{R}^{y}_{xij} + \sum_z (\sigma^{z^*}_{iy}\sigma^{z^*}_{jx} - \sigma^{z^*}_{jy}\sigma^{z^*}_{ix}).$$

Esta fórmula también es cierta si i ó j (ó ambos) es un ξ_α. En efecto, en primer lugar observamos que en ese caso (IV.2.11) se reduce a:

$$\bar{R}^{y^*}_{x^*ij} = \bar{R}^{y}_{xij}.$$

Además, por (IV.2.3) y (IV.2.4), si, por ejemplo, $i = \xi_\beta$:

$$\sum_\alpha (\sigma^{y^*}_{\xi_\alpha i}\sigma^{x^*}_{\xi_\alpha j} - \sigma^{y^*}_{\xi_\alpha j}\sigma^{x^*}_{\xi_\alpha i}) + \sum_z (\sigma^{y^*}_{zi}\sigma^{x^*}_{zj} - \sigma^{y^*}_{zj}\sigma^{x^*}_{zi}) = 0$$

por (IV.2.3). Por ser la f-estructura n paralela, para todo λ se tiene que $\sigma^{\lambda}_{ij} = 0$. Por tanto, de la ecuación de Gauss (III.1.5), obtenemos:

$$R^{y}_{xij} = \bar{R}^{y}_{xij} + \sum_z (\sigma^{z^*}_{iy}\sigma^{z^*}_{jx} - \sigma^{z^*}_{jy}\sigma^{z^*}_{ix}).$$

En consecuencia:

$$R^{y^*}_{x^*ij} = R^{y}_{xij}$$

y esto, junto con (IV.2.12), termina la demostración. #

IV.2.9. Teorema.- Sea M^{n+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Entonces M^{n+s} es llana si y sólo si su conexión normal es llana.

Demostración:

Como en el teorema anterior, por la ecuación de Ricci (III.1.7) y por (IV.2.11):

$$R^{y^*}_{x^*ij} = \bar{R}^{y}_{xij} + \sum_z (\sigma^{z^*}_{iy}\sigma^{z^*}_{jx} - \sigma^{z^*}_{jy}\sigma^{z^*}_{ix}).$$

Pero, por hipótesis, $T(M)^{\perp} = fT(M)$ y, por tanto la ecuación de Gauss (III.1.5) se escribe:

$$R^{y}_{xij} = \bar{R}^{y}_{xij} + \sum_z (\sigma^{z^*}_{iy}\sigma^{z^*}_{jx} - \sigma^{z^*}_{jy}\sigma^{z^*}_{ix}).$$

En consecuencia:

$$R^{y}_{xij} = R^{y^*}_{x^*ij}$$

y esto, junto con (IV.2.12), termina la demostración. #

IV.2.10. Proposición.- Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si $H_aH_b = H_bH_a$, para todos a y b, entonces, podemos elegir una referencia ortonormal tal que en ella, H_{x^*} es de la forma:

$$H_{x^*} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \lambda_x & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ x \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

donde $x = 1,\ldots,m$, esto es, $\sigma^{x^*}_{yz} = 0$, salvo si $X = y = z$.

Demostración:

Si $H_aH_b = H_bH_a$, podemos elegir una referencia ortonormal para los campos tangentes:

$$\{E_1,\dots,E_m,\xi_1,\dots,\xi_s\}$$

para la cual todas las H_a son simultáneamente diagonales, esto es, $\sigma^a_{yz} = 0$ cuando $y \neq z$. En particular, $\sigma^{x*}_{yz} = 0$, si $y \neq z$. Pero por (IV.2.2):

$$\sigma^{z*}_{xy} = \sigma^{y*}_{xz} = \sigma^{x*}_{yz},$$

con lo cual:

$$\sigma^{x*}_{yz} = 0,$$

a menos que $x = y = z$. #

<u>IV.2.11. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela y si $H_aH_b = H_bH_a$, para todos a y b, entonces $H_a = 0$, para todo a.

Demostración:

Por la Proposición IV.2.1, como M^{m+s} es minimal, $\mathrm{Tr}(H_a) = 0$, para todo a. Por tanto, de la Proposición IV.2.10, $\lambda_x = 0$ y, en consecuencia, $H_{x*} = 0$. Además, como n esparalela, $\sigma^{\lambda}_{ij} = 0$, para todos λ, i, j, luego $H_\lambda = 0$. #

<u>IV.2.12. Definición.-</u> Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Si para todos x,y,a, se cumple que:

$$\sigma^a_{xy} = \delta_{xy}(\mathrm{Tr}(H_a))/m,$$

diremos que la subvariedad es <u>H-totalmente umbilical</u>.

<u>IV.2.13. Proposición.-</u> Sea M^{m+s}, $m > 1$, una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Si M^{m+s} es H-totalmente umbilical y si la f-estructura n es paralela, entonces $H_a = 0$, para todo a.

Demostración:

Como $\sigma^a_{yx} = \delta_{yx}(\mathrm{Tr}(H_a))/m$, entonces $H_aH_b = H_bH_a$, para todos a y b. Por la Proposición IV.2.10, $\sigma^{x*}_{yz} = 0$, salvo si $x = y = z$. Por otra parte, $\sigma^{x*}_{yz} = \delta_{yz}(\lambda_x)/m$. Tomando $y = z \neq x$, se tiene que $\lambda_x = 0$, con lo que $H_{x*} = 0$. Como n es paralela, $H_\lambda = 0$. #

<u>IV.2.14. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela y

si $H_aH_b = H_bH_a$, para todos a y b, entonces:

(IV.2.13) $R^v_{yzx} = \bar{R}^v_{yzx}$.

Demostración.-

Es inmediata de la ecuación de Gauss (III.1.5), aplicando las hipótesis y (IV.2.3). #

Supongamos ahora que la S-variedad ambiente $\bar{M}^{2n+s}(k)$ tiene curvatura f-seccional invariante constante k. Entonces, su tensor de curvatura verifica (II.2.9). Elijamos referencias locales ortonormales para $\bar{M}^{2n+s}(k)$ como al principio de la sección. Sea una subvariedad de $\bar{M}^{2n+s}(k)$ antiinvariante y tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Por la ecuación de Gauus (III.1.5), por (II.2.19) y por (IV.2.12), el tensor de Ricci de la subvariedad antiinvariante M^{m+s} tiene la forma, para $X,Y\in T(M)$:

(IV.2.14) $$S(X,Y) = \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)g(X,Y) - \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + m\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) + \sum_i [g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(X,Y)) - g(\sigma(X,E_i),\sigma(Y,E_i))].$$

También de (IV.2.12), la curvatura escalar ρ de M^{m+s} vale:

(IV.2.15) $$\rho = \tfrac{1}{4}(m(m-1)(k+3s)) + \sum_{i,j} [g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_j,E_j)) - ||\sigma(E_i,E_j)||^2].$$

<u>IV.2.15. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ y minimal. Entonces, para el tensor de Ricci S de M^{m+s} y su curvatura escalar ρ, se verifican:

(IV.2.16) $$S - \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)g + \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)\sum_\alpha \eta_\alpha \times \eta_\alpha - m\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha \times \eta_\beta$$
es un tensor simétrico semidefinido negativo.

(IV.2.17) $\rho \leq \tfrac{1}{4}(m(m-1)(k+3s))$.

Demostración:

Es inmediata de (IV.2.14) y (IV.2.15), pues al ser M^{m+s} minimal:

$$\sum_i \sigma(E_i,E_i) = 0.$$ #

<u>IV.2.16. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela

y si $H_aH_b = H_bH_a$, para todos a y b, entonces M^{m+s} es llana si y sólo si $k = -3s$..

Demostración:

Sean $X,Y,Z,W\in T(M)$ y en $\mathcal{L}$. Si no existieran el resultado sería evidente en virtud de (IV.2.12). Ahora, por (IV.2.13):

$$R(X,Y,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W)$$

y, por (II.2.19):

$$R(X,Y,Z,W) = \tfrac{1}{4}(k+3s)[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)], \tag{IV.2.18}$$

que junto con (IV.2.12), nos permite obtener el resultado. #

<u>IV.2.17. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela y si $H_aH_b = H_bH_a$, para todos a y b, entonces la curvatura escalar de M^{m+s} vale:

$$\rho = \tfrac{1}{4}(m(m-1)(k+3s)). \tag{IV.2.19}$$

Demostración:

Según las hipótesis, podemos llegar a la expresión (IV.2.18). Por tanto, escogiendo refencias locales de campos como al principio de la sección, tenemos, si $1\leq i\leq m$, $X,Y\in T(M)$ y están en $\mathcal{L}$:

$$R(E_i,X,Y,E_i) = \tfrac{1}{4}(k+3s)[g(X,Y) - g(X,E_i)g(Y,E_i)].$$

Utilizando (IV.2.12):

$$S(X,Y) = \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)g(X,Y)$$

pues X e Y están en $\mathcal{L}$. De aquí que:

$$S(E_i,E_i) = \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)$$

con lo cual, sumando en $i = 1,\ldots,m$ y utilizando de nuevo (IV.2.12), obtenemos (IV.2.19). #

<u>IV.3. Subvariedades antiinvariantes de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ normales a algún campo ξ_α.-</u>

<u>IV.3.1. Proposición.-</u> Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-varie-

dad $\bar{M}^{2n+s}$ tal que uno de los campos ξ_α sea normal a M^m. Entonces, $\xi_\alpha \in \nu$.

Demostración:

Si $\xi_\alpha \in fT(M)$, entonces existiría $Y \in T(M)$ tal que $\xi_\alpha = fY$ con lo que $0 = f\xi_\alpha = f^2Y = -Y + \sum_\alpha \eta_\alpha(Y)\xi_\alpha$. Esto quiere decir que $Y \in \mathcal{N}$, con lo cual $fY = 0 = \xi_\alpha$, lo cual es contradicción. Por tanto, $\xi_\alpha \in \nu$. #

IV.3.2. Nota.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ tal que uno de los campos ξ_α sea normal a M^m. Entonces, por la fórmula de Weingarten (III.1.2), si $X \in T(M)$:

$$fX = -\bar{\nabla}_X\xi_\alpha = A_{\xi_\alpha}X + \sigma(X,\xi_\alpha).$$

Como $fX \in T(M)$ se tiene que:

(IV.3.1) $\quad A_{\xi_\alpha} = 0.$

(IV.3.2) $\quad \sigma(X,\xi_\alpha) \in fT(M).$

IV.3.3. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ tal que uno de los campos ξ_α sea normal a M^m. Entonces, si la 2ªF.F. σ de M^m es paralela, para todo $X \in T(M)$, se tiene:

(IV.3.3) $\quad A_{fX} = 0.$

Demostración:

Si $X,Y,Z \in T(M)$, entonces tenemos:

$$0 = (\nabla'_X\sigma)(Y,Z).$$

Por tanto, si ξ_α es el de las hipótesis:

$$0 = g((\nabla'_X\sigma)(Y,Z),\xi_\alpha) = g(D_X\sigma(Y,Z),\xi_\alpha)$$

ya que:

$$g(\sigma(\nabla_XY,Z),\xi_\alpha) = 0 = g(\sigma(Y,\nabla_XZ),\xi_\alpha)$$

en virtud de (IV.3.1). Pero observamos que, por (III.1.2) y (IV.3.1):

$$0 = g(D_X\sigma(Y,Z),\xi_\alpha) = g(\bar{\nabla}_X\sigma(Y,Z),\xi_\alpha) = -g(\bar{\nabla}_X\xi_\alpha,\sigma(Y,Z)) =$$

$$= g(fX,\sigma(Y,Z)) = g(A_{fX}Y,Z).$$ #

IV.3.4. Corolario.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tal que uno de los campos ξ_α es normal a M^m. Si la f-estructura n es paralela y si la 2ªF.F. es paralela, entonces M^m es totalmente geodésica.

Demostración:

Es inmediata de las Proposiciones II.2.11 y IV.3.3. #

IV.3.5. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ tal que uno de los campos ξ_α es normal a M^m. Si la f-estructura n es paralela y si el vector curvatura media H es paralelo, entonces M^m es minimal.

Demostración:

De la Proposición III.2.8, si $\xi_\beta \epsilon T(M)$, entonces $\sigma(\xi_\beta,\xi_\beta) = 0$. Por otra parte, si $\{E_1,\dots, E_m\}$ es una referencia local ortonormal para campos tangentes a M^m, entonces tenemos, para el ξ_α de las hipótesis:

$$g(\sum_{i=1}^{n} \sigma(E_i,E_i),fX) = -g(\sum_{i=1}^{n} \sigma(E_i,E_i),\bar{\nabla}_X\xi_\alpha) =$$

$$= Xg(\sum_{i=1}^{n} \sigma(E_i,E_i),\xi_\alpha) + g(\bar{\nabla}_X(\sum_{i=1}^{n} \sigma(E_i,E_i)),\xi_\alpha) =$$

$$= g(D_X(\sum_{i=1}^{n} \sigma(E_i,E_i)),\xi_\alpha) = 0,$$

pues H es paralelo y, por tanto, $D_X H = 0$, para todo $X\epsilon T(M)$, donde hemos utilizado (III.1.2) y (IV.3.1). Ahora, por la Proposición III.2.10, $A_W = 0$, si $W\epsilon\nu$. De aquí que $g(H,W) = 0$ y $H = 0$, con lo que M^m es minimal. #

IV.3.6. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ tal que:

(a) $\nu\cap\mathcal{L} = 0$.

(b) Uno de los campos ξ_α es normal a M^m.

(c) El vector curvatura media H es paralelo.

Entonces M^m es minimal.

Demostración:

Como $g(H,\xi_\alpha) = 0$ para cualquier $\xi_\alpha \epsilon T(M)^\perp$ y como $g(H,fX) = 0$, $X\epsilon T(M)$, pues H es paralelo, M^m es minimal. #

Supondremos, a continuación, que M^m es una subvariedad antiinvarinate de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\dots,\epsilon_s\}$. Elijamos unas referencias locales ortonormales de campos tangentes a $\bar{M}^{2n+s}$ de la forma:

$$\{E_1,\ldots,E_m,E_{m+1},\ldots,E_n,fE_1=E_{1*},\ldots,fE_n=E_{n*},\xi_1,\ldots,\xi_s\}$$

tales que $\{E_1,\ldots,E_m\}$ formen referencias locales ortonormales para M^m. Sean las 1-formas duales:

$$\{\omega^1,\ldots,\omega^n,\omega^{1*},\ldots,\omega^{n*},\eta_1,\ldots,\eta_s\}.$$

Seguieremos los siguientes convenios de notación:

Para los campos ξ_α los pondremos en los índices. Para los demás:

$A,B,C,D = 1,\ldots,n,1^*,\ldots,n^*,\xi_1,\ldots,\xi_s$.

$i,j,k,l,t,s = 1,\ldots,m$.

$a,b,c,d = m+1,\ldots,n,1^*,\ldots,n^*,\xi_1,\ldots,\xi_s$.

$x,y,z = 1^*,\ldots,m^*,\xi_1,\ldots,\xi_s$.

$\delta,\varepsilon = m+1,\ldots,m$.

$p,q,r = m+1,\ldots,n,1^*,\ldots,n^*$.

$\lambda,\nu,\mu = m+1,\ldots,n,(m+1)^*,\ldots,n^*,\xi_1,\ldots,\xi_s$.

$\alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,s$.

Cuando uno de estos índices se ponga con una estrella, querrá decir que se ha aplicado f, esto es, E_{x*}, por ejemplo, será fE_x.

Tenemos, entonces, las siguientes relaciones con las formas de conexión de la conexión de Levi-Civita de la métrica de la variedad:

$$\text{(IV.3.4)}\qquad \omega_j^i = \omega_{j*}^{i*};\ \omega_j^{i*} = \omega_i^{j*};\ \omega^i = -\omega_{\xi_\alpha}^{i*};\ \omega^{i*} = \omega_{\xi_\alpha}^i;$$

$$\omega_\delta^\varepsilon = \omega_{\delta*}^{\varepsilon*};\ \omega_\delta^{\varepsilon*} = \omega_\varepsilon^{\delta*};\ \omega^\delta = -\omega_{\xi_\alpha}^{\delta*};\ \omega^{\delta*} = \omega_{\xi_\alpha}^\delta,$$

$$\omega_\delta^i = \omega_{\delta*}^{i*};\ \omega_\delta^{i*} = \omega_i^\delta.$$

Restringiendo estas fórmulas a M^m, tenemos $\omega^a = 0$, para todo a y, por tanto,

$$\omega_{\xi_\alpha}^{\delta*} = \omega_{\xi_\alpha}^\delta = \omega_{\xi_\alpha}^i = 0.$$

Para la 2ªF.F, poniendo $\sigma_{ij}^a = g(\sigma(E_i,E_j),E_a) = g(A_aE_i,E_j)$, donde A_a representa a A_{E_a}, sabemos, por (IV.3.1), que:

$$\sigma_{ij}^{\xi_\alpha} = 0,\ \text{para todos } i,j,\alpha.$$

Además, de (IV.3.4):

(IV.3.5) $\sigma^{k*}_{ij} = \sigma^{j*}_{ik} = \sigma^{i*}_{jk}$.

Demostraremos ahora algunos lemas técnicos:

IV.3.7. Lema.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si $X\epsilon T(M)$, $V\epsilon T(M)^{\perp}$ se tienen:

(IV.3.6) $tnV = 0.$

(IV.3.7) $n^2V = -V - ftV + \sum_\alpha \eta_\alpha(V)\,\xi_\alpha.$

(IV.3.8) $tfX = -X.$

(IV.3.9) $nfX = 0.$

(IV.3.10) $(\nabla_X n)V = -\sigma(X,tV) - fA_VX.$

Demostración:

Si $V\epsilon T(M)^{\perp}$, por (III.2.2), $fV = tV + nV$. Aplicando f, se tiene:

$$-V + \sum_\alpha \eta_\alpha(V)\,\xi_\alpha = f^2V = ftV + fnV.$$

Separando las componentes tangente y normal, se obtienen (IV.36) y (IV.3.7). Poniendo ahora $V = fX$, con $X\epsilon T(M)$, se llega fácilmente a (IV.3.8) y (IV.3.9). Por último, observemos que, de (I.3.18):

$$(\bar{\nabla}_X f)V = -\sum \eta_\alpha(V)X = \bar{\nabla}_X fV - f\bar{\nabla}_X V =$$
$$= \nabla_X tV + \sigma(X,tV) - A_{nV}X + D_X nV + fA_VX - fD_XV.$$

La componente normal de esta igualdad es (IV.1.10). #

Vamos a estudiar a continuación la conexión normal de M^m. Si la f-estructura n es paralela, tenemos que $A_W = 0$, $W\,\epsilon\,\nu$ y por tanto, $\sigma^\lambda_{ij} = 0$, para todos i,j,λ. Entonces, la ecuación de Gauss (III.1.5) se escribe:

(IV.3.11) $R^i_{jkl} = \bar{R}^i_{jkl} + \sum_t (\sigma^{t*}_{ik}\sigma^{t*}_{jl} - \sigma^{t*}_{il}\sigma^{t*}_{jk}).$

En virtud de (IV.3.5), la ecuación de Ricci se escribe:

(IV.3.12) $R^{i*}_{j*kl} = \bar{R}^{i*}_{j*kl} + \sum_t (\sigma^{t*}_{ik}\sigma^{t*}_{jl} - \sigma^{t*}_{il}\sigma^{t*}_{jk})$.

Por tanto, tenemos:

(IV.3.13) $R^{i*}_{j*kl} - \bar{R}^{i*}_{j*kl} = R^i_{jkl} - \bar{R}^i_{jkl}.$

IV.3.8. Lema.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si $X,Y,Z,W\epsilon T(M)$, entonces:

(IV.3.14) $\bar{R}(fX,fY,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W) - s[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)]$.

Demostración:

Se obtiene directamente de (II.2.2) pues $fZ,fW\in T(M)^{\perp}$, al ser M^m una subvariedad antiinvariante. #

IV.3.9. Lema.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ y tal que la f-estructura n es paralela. Entonces, si $X,Y,Z,W\in T(M)$, se tiene:

(IV.3.15) $R^D(Z,W,fX,fY) = R(X,Y,Z,W) - s[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)]$.

Demostración:

Es inmediata de (IV.3.13) y (IV.3.14). #

IV.3.10. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela y la conexión normal de M^m es llana, entonces M^m es de curvatura constante s.

Demostración:

Es inmediata de (IV.3.15). #

IV. 3.11. Corolario.- Sea M^n una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Entonces, la conexión normal de M^m es llana si y sólo si M^m tiene curvatura constante s.

Demostración:

De la ecuación de Ricci (III.17), se puede obtener (IV.3.13) sin restricciones, pues $\sigma_{ij}^{\xi_\alpha} = 0$, para todos i,j,α. Por tanto, llegamos a (I.3.15) sin restricciones y con eso tenemos el resultado. #

Otras propiedades importantes nos las da el hecho de que los endomorfismos de Weingarten sean conmutativos. En esta línea, tenemos los siguientes resultados:

IV.3.12. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si los endomorfismos de Weingarten son conmutativos, entonces podemos elegir referencias locales ortonormales de campos como al principio, donde A_{fE_i} es de la forma:

$$A_{fE_i} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$1 \leq i \leq m$, esto es, $\sigma^{i*}_{jk} = 0$, a menos que $i = j = k$. Más aun, si la f-estructura n es paralela, entonces los endomorfismos de Weingarten son conmutativos si y sólo si podemos elegir unas referencias locales ortonormales de campos tangentes como al principio, donde $\sigma^{i*}_{jk} = 0$, a menos que $i = j = k$.

Demostración:

Como $A_a A_b = A_b A_a$, para todos a y b, podemos elegir unas referencias locales ortonormales de campos tangentes, para las cuales A_a sean simultáneamente diagonales, para todo a, esto es, $\sigma^{a}_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por tanto, $\sigma^{t*}_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Pero de (IV.3.5), tenemos que $\sigma^{t*}_{ij} = 0$, salvo si $i = j = t$.

Si la f-estructura n es paralela, la Proposición III.2.11 concluye la demostración. #

<u>IV.3.13. Proposición.-</u> Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si el vector curvatura media H de M^m es paralelo, si la f-estructura n es paralela y si los endomorfismos de Weingarten son conmutativos, entonces M^m es totalmente geodésica.

Demostración:

De la Proposición IV.3.5, se tiene que M^m es minimal. Entonces, $Tr(A_{i*}) = 0$, $i = 1,\ldots m$. Por otra parte, la Proposición IV.3.12 nos dice que por lo anterior tenemos $A_{i*} = 0$, $i = 1,\ldots,m$. Por último, la Proposición III.2.11 nos asegura que $A_\lambda = 0$, para todo λ. Luego, M^m es totalmente geodésica. #

<u>IV.3.14. Proposición.-</u> Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, con $m \geq 2$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela y si M^m es totalmente umbilical, entonces M^m es totalmente geodésica.

Demostración:

Por la Proposición III.2.11, $A_W = 0$ si $W \in \nu$. Si $X \in T(M)$, por ser M^m totalmente umbilical, se tiene que:

$$g(A_{fX}E_i,E_j) = g(\sigma(E_i,E_j),fX) = g(\delta_{ij}H,fX) =$$
$$= (1/m)\delta_{ij} \sum_k g(\sigma(E_k,E_k),fX) = (1/m)\delta_{ij} \sum_k g(A_{fX}E_k,E_k) =$$
$$= (1/m)\delta_{ij} Tr(A_{fX}) .$$

Por tanto, A_{fX} es diagonal ,para todo $X \in T(M)$. Esto quiere decir que los endomorfismos de Weingarten son conmutativos. Por la Proposición IV.3.12, se tiene, entonces, que $\sigma_{ij}^{k*} = 0$, salvo si $i = j = k$. Del mismo cálculo anterior se deduce que:

$$\sigma_{ij}^{k*} = (1/m)\delta_{ij}\lambda_k .$$

como $m \geqslant 2$, tomamos $i \neq j$ y se obtiene que $\lambda_k = 0$ para cada k. Por tanto, $A_V = 0$, para todo $V \in T(M)^{\perp}$ y M^m es totalmente geodésica. #

Vamos a suponer ahora y hasta el final, que la S-variedad ambiente $\bar{M}^{2n+s}(k)$ tiene curvatura f-seccional invariante constante k. Sea M^m una subvariedad antiinvariante de $\bar{M}^{2n+s}(k)$, normal a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Entonces, por (II.2.19) y por la ecuación de Gauss (III.1.5), si $X,Y,Z,W \in T(M)$, se tienen:

(IV.3.16) $$R(X,Y,Z,W) = \tfrac{1}{4}(k+3s)[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)] + g(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)) - g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)).$$

(IV.3.17) $$S(X,Y) = \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)g(X,Y) + \sum_i [g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(X,Y)) - g(\sigma(X,E_i),\sigma(Y,E_i))].$$

(IV.3.18) $$\rho = \tfrac{1}{4}(m(m-1)(k+3s)) + \sum_{i,j} [g(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_j,E_j)) - ||\sigma(E_i,E_j)||^2]$$

IV.3.15. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, normal a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Si M^m es totalmente geodésica, entonces M^m es de curvatura constante $\tfrac{1}{4}(k+3s)$.

Demostración:

Es inmediata de (IV.3.16). #

IV.3.16. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, normal a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$. Entonces, si S es el tensor de Ricci de

M^m y ρ su curvatura escalar, se tiene que, supuesto que M^m sea minimal:

(IV.3.19) $\quad S - \frac{1}{4}(m-1)(k+3s)g$ es un tensor simétrico semi-definido negativo.

(IV.3.20) $\quad \rho \quad \frac{1}{4}(m(m-1)(k+3s))$.

Demostración:

Es inmediata de (IV.3.17) y (IV.3.18), pues $\sum_i \sigma(E_i,E_i) = 0$. #

IV.3.17. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante y minimal de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) M^m es totalmente geodésica.

(b) M^m es de curvatura constante $\frac{1}{4}(k+3s)$.

(c) $S = \frac{1}{4}(m-1)(k+3s)g$.

(d) $\rho = \frac{1}{4}(m(m-1)(k+3s))$,

donde S es el tensor de Ricci de M^m y ρ su curvatura escalar.

Demostración:

En primer lugar observamos que, usando (IV.3.1):

$$\sum_i g(\sigma(X,E_i),\sigma(Y,E_i)) = \sum_i \sum_p g(\sigma(X,E_i),E_p)g(\sigma(Y,E_i),E_p) =$$

$$= \sum_i \sum_p g(A_{E_p}X,E_i)g(A_{E_p}Y,E_i) = \sum_p g(A_pX,A_pY).$$

Por tanto, si $X,Y\in T(M)$ se tienen, al ser M^m minimal:

$$S(X,Y) = \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)g - \sum_p g(A_pX,A_pY).$$

$$\rho = \tfrac{1}{4}(m(m-1)(k+3s)) - ||\sigma||^2,$$

con lo cual es inmediato que (a) implica (b), (c) y (d) y que (c) y (d) implican (a). Para probar que (b) implica (a), observemos que, por (b), si $i = 1,\ldots,m$:

$$S(E_i,E_i) = \sum_j R(E_j,E_i,E_i,E_j) = \tfrac{1}{4}(m-1)(k+3s)$$

y, por tanto, se tiene (d) y de ahí, (a). #

IV.3.18. Corolario.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si el vector curvatura media H de M^m es paralelo, si la f-estructura n es paralela y si los endomorfismos de

Weingarten son conmutativos, entonces M^m es de curvatura constante $\frac{1}{4}(k+3s)$.

Demostración:

Es inmediata de las Proposiciones IV.3.13 y IV.3.17. #

IV.3.19. Corolario.- Sea $M^m, m > 1$, una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si la f-estructura n es paralela y si M^m es totalmente umbilical, entonces M^m es de curvatura constante $\frac{1}{4}(k+3s)$.

Demostración:

Es inmediata de las Proposiciones IV.3.14 y IV.3.17. #

IV.3.20. Proposición.- Sea M^m una subvariedad antiinvariante de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}(k)$, normal a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ con la f-estructura n paralela. Entonces M^m es de curvatura constante $\frac{1}{4}(k+3s)$ si y sólo si los endomorfismos de Weingarten son conmutativos.

Demostración:

En virtud de (IV.3.), (IV.3.16) y la Proposición III.2.11, tene,os:

$$R^i_{jkl} = \tfrac{1}{4}(k+3s)[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}] + \sum_t [\sigma^{t*}_{ik}\sigma^{t*}_{jl} - \sigma^{t*}_{il}\sigma^{t*}_{jk}] =$$
$$= \tfrac{1}{4}(k+3s)[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}] + \sum_t [\sigma^{i*}_{tk}\sigma^{j*}_{tl} - \sigma^{i*}_{tl}\sigma^{j*}_{tk}].$$

La Proposición IV.3.12 concluye la demostración. #

CAPITULO V

CR - Subvariedades de S-variedades.

En 1.978, Bejancu introdujo el concepto de CR-subvariedad de una variedad Kaehleriana, (|2|). Desde entonces, las CR-subvariedades han sido profusamente estudiadas en varias estructuras. Así, por ejemplo, pueden consultarse |1|, |2|, |3|, |10|, |14|, |15| en el caso de estructuras casi-complejas y variedades Kaehlerianas y |28|, |29| , |30| para variedades Sasakianas. También para f-estructuras métricas con referencias complementadas puede verse |36|. El propósito de este capítulo es profundizar en alguno tópicos acerca de las CR-subvariedades de S-variedades, como caso más general de subvariedades invariantes o antiinvariantes.

V.1. CR-subvariedades de S-variedades y CR-variedades.-

Vamos a definir las CR-subvariedades en el caso de S-variedades, a dar algunas caracterizaciones y, por último, a relacionar este concepto con en de CR-variedad.

V.1.1. Definición.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad y sea M^{m+s} una subvariedad de $\bar{M}^{2n+s}$ tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Diremos que M^{m+s} es una CR-subvariedad de $\bar{M}^{2n+s}$ si existe una distribución diferenciable $\mathcal{D}: p\in M^{m+s} \longmapsto \mathcal{D}_p \subseteq T_p(M)$ tal que $f\mathcal{D}_p \subseteq \mathcal{D}_p$ y $f\mathcal{D}_p^{\perp} \subseteq T_p(m)$, donde $\mathcal{D}_p^{\perp}$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{D}_p$ en $T_p(M)$. Obsérvese que la condición de que los campos ξ_α, $\alpha = 1,\ldots,s$, sean tangentes es natural en virtud de la Proposición III.2.9.

Llamaremos a $(\mathcal{D},\mathcal{D}^{\perp})$ ξ-horizontal (respectivamente, ξ-vertical) si ${\xi_1}_p,\ldots,{\xi_s}_p \in \mathcal{D}_p$ (respectivamente, ${\xi_1}_p,\ldots,{\xi_s}_p \in \mathcal{D}_p^{\perp}$), $p\in M^{m+s}$.

V.1.2. Ejemplo.- Sea $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad. Consideremos M una hipersuperficie de $\bar{M}^{2n+s}$ tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ y sea $\mathcal{D}$ la distribución complementaria en T(M) de $fT(M)^{\perp} \oplus \mathcal{M}$. Entonces, M es una CR-subvariedad. En efecto, si $X\in\mathcal{D}$, entonces:

$$fX = X_1 + X_2 + X_3$$

donde $X_1\in\mathcal{D}$, $X_2\in\mathcal{D}^{\perp}$, $X_3\in T(M)^{\perp}$. Pero $f^2X = -X$ y de aquí que $fX_3 = 0$, pues $fX_3\in T(M)^{\perp}$. Por tanto, $X_3 = 0$. Por otra parte, si $fX_2\in\mathcal{D}$,entonces $f^2X_2 = -X_2$. Pero $X_2\in\mathcal{D}^{\perp}$ con lo que ó $X_2 = fY$, $Y\in T(M)^{\perp}$, y de aquí que $fX_2 = -Y\in T(M)^{\perp}$ (contradicción), ó $X_2\in\mathcal{M}$ con lo que $fX_2 = 0$, ó X_2 es suma de ambas posibilidades, con lo que $fX_2\in T(M)^{\perp}$, contradicción.

Por tanto, $fX_2 = 0$ y $fX\in\mathcal{D}$. Claramente, si $X\in\mathcal{D}^{\perp}$, $fX\in T(M)^{\perp}$.

V.1.3. Nota.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Paraun $X\in T(M)$, ponemos $X = PX + QX$, donde PX es la proyección de X sobre $\mathcal{D}$ y QX la proyección de X sobre $\mathcal{D}^{\perp}$. Entonces, se tienen:

(V.1.1) $\quad P + Q = I.$

(V.1.2) $\quad P^2 = P.$

(V.1.3) $\quad Q^2 = Q.$

(V.1.4) $\quad PQ = QP = 0.$

Tenemos ahora el siguiente teorema de caracterización.

V.1.4. Teorema.- Sea M^{m+s} una subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Entonces, M^{m+s} es una CR-subvariedad de $\bar{M}^{2n+s}$ si y sólo si se cumple:

(V.1.5) $NT = 0.$

Demostración.

Supongamos que M^{m+s} es una CR-subvariedad de $\bar{M}^{2n+s}$ y sea $X\epsilon T(M)$. De (III.2.1) se tiene que $fPX = TPX + NPX$. Como $f\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$, entonces $NP = 0$ y $QTP = 0$. También de (III.2.1), $fQX = TQX + NQX$ y, como $f\mathcal{D}^{\perp}\subseteq T(M)^{\perp}$, entonces $TQ = 0$ y, por tanto, $TP = T$ en virtud de (V.1.1). Ahora bien, de (III.2.11), $NTX + nNX = 0$ y, de aquí, $NTPX + nNPX = 0$, es decir, $NTPX = 0$, ya que $NP = 0$ y como $TP = T$, entonces se tiene (V.1.5)

Recíprocamente, sea una subvariedad M^{m+s} de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ tangente a $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ tal que $NT = 0$. Entonces, de (III.2.11), $nN = 0$. Ahora bien, si $V\epsilon T(M)^{\perp}$, por (III.2.8) y (III.2.9), si $X\epsilon T(M)$:

$$g(tnV,X) = -g(NX,nV) = g(nNX,V) = 0$$

con lo que $tn = 0$ y de (III.2.12), $Tt = 0$. También de (III.2.10) se obtiene que T es una f-estructura en $T(M)$ y de (III.2.13) que n es una f-estructura en $T(M)^{\perp}$. Pongamos ahora:

$$P = -T^2 + \sum_\alpha \xi_\alpha \otimes \eta_\alpha;\quad Q = I - P.$$

Es fácil comprobar que $P + Q = I$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ y $PQ = QP = 0$, lo que significa que P y Q son operadores proyección complementarios y, por tanto, definen distribuciones ortogonales $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^{\perp}$, respectivamente.

De la definición de P, puesto que $T^3 = -T$ y $T\xi_\alpha = 0$, para todo α en $\{1,\dots,s\}$, se tiene que $TP = T$, es decir, $TQ = 0$. Por otra parte, si $X,Y\epsilon T(M)$:

$$g(TQX,Y) = g(TX,Y) - g(PTX,Y) = g(TX,Y) + g(T^3X,Y) + \sum_\alpha \eta_\alpha(TX)g(\xi_\alpha,Y) = 0$$

y, en consecuencia, $QT = 0$. De aquí que $QTP = 0$.

También de la definición de P y de (V.1.5), $NP = 0$ ya que $N\xi_\alpha = 0$ $\alpha = 1,\dots,s$. Las ecuaciones anteriores demuestran que la distribución $\mathcal{D}$ es invariante y la distribución $\mathcal{D}^{\perp}$ es antiinvariante por f. Más aun, tenemos:

$$P\xi_\alpha = \xi_\alpha,\ Q\xi_\alpha = 0,\quad \alpha = 1,..s$$

con lo cual $\xi_\alpha \in \mathcal{D}$, para todo α .

Sin embargo poniendo:

$P = -T^2$; $Q = I - P$

podemos ver, también, que P y Q definen distribuciones complementarias ortogonales $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^\perp$, respectivamente, pues T es una f-estructura. Además, se comprueban:

$$TP = T,\ QT = 0,\ NP = 0,\ TQ = 0$$

con lo que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^\perp$ son invariante y antiinvariante por f, respectivamente. Además:

$$P\xi_\alpha = 0,\ Q\xi_\alpha = \xi_\alpha,\quad \alpha = 1,...,s$$

con lo que $\mathcal{D}^\perp$ contiene a todos los ξ_α . #

<u>IV.1.5. Nota.-</u> Hemos visto en el teorema anterior que si M^{m+s} es una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, se verifican:

(V.1.6) $nN = 0.$

(V.1.7) $tn = 0.$

(V.1.8) $Tt = 0.$

(V.1.9) $T^3 + T = 0.$

(V.1.10) $n^3 + n = 0.$

(V.1.11) $NP = 0.$

(V.1.12) $QTP = 0.$

(V.1.13) $TQ = 0.$

(V.1.14) $TP = T.$

Vamos a demostrar a continuación unos lemas técnicos.

<u>V.1.6. Lema.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si $X\in T(M)$, $Y\in\mathcal{D}$, $Z\in\mathcal{D}^\perp$, $V\in T(M)^\perp$, $\alpha,\beta\in\{1,...,s\}$, se verifican:

(V.1.15) $\nabla_X\xi_\alpha = -fPX.$

(V.1.16) $\sigma(X,\xi_\alpha) = -fQX.$

(V.1.17) $\nabla_Z\xi_\alpha = 0.$

(V.1.18) $\sigma(Y,\xi_\alpha) = 0.$

(V.1.19) $\sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0.$

(V.1.20) $A_V\xi_\alpha \varepsilon$.

Demostración:

(V.1.15) y (V.1.16) son inmediatas de ser $\bar{\nabla}_X\xi_\alpha = -fX$ y de la fórmula de Gauss (III.1.1). (V.1.17), (V.1.18) y (V.1.19) se obtienen fácilmente de las anteriores. Por último, para (V.1.20), por (V.1.18), si $Y\varepsilon\mathcal{D}$, en virtud de (III.1.3):

$$g(A_V\xi_\alpha,Y) = g(\sigma(Y,\xi_\alpha),V) = 0. \qquad \#$$

Pongamos ahora:

$$T(M)^{\perp} = f\mathcal{D}^{\perp} \oplus \mu .$$

Es fácil comprobar que $f\mu\subseteq\mu$ ya que $g(fW,X) = g(fW,fY) = 0$, para todos $X\varepsilon T(M)$, $Y\varepsilon\mathcal{D}^{\perp}$.

Elijamos ahora unas referencias locales ortonormales de campos tangentes a $\bar{M}^{2n+s}$ de la siguiente forma:

$$\{E_1,\ldots,E_p,E_{p+1}=fE_1,\ldots,E_{2p}=fE_p,E_{2p+1}=F_1,\ldots,E_{2p+q}=F_q=E_m,$$

$$E_{m+1}=fE_{2p+1},\ldots,E_{m+q}=fE_m,E_{m+q+1}=N_1,\ldots,E_{m+q+t}=N_t,$$

$$E_{m+q+t+1}=fN_1,\ldots,E_{2n}=fN_t,\xi_1,\ldots,\xi_s\},$$

donde estamos suponiendo que $\dim\mathcal{D} = 2p+p_1$, con p_1 el número de campos ξ_α en $\mathcal{D}$, $\dim\mathcal{D}^{\perp} = q+q_1$, con q_1 el número de campos ξ_α pertenecientes a $\mathcal{D}^{\perp}$, $\dim\mu = 2t$ y donde:

$$\{E_1,\ldots,E_{2p},\xi_{\alpha_1},\ldots,\xi_{\alpha_{p_1}}\}$$

son referencias locales para $\mathcal{D}$,

$$\{F_1,\ldots,F_q,\xi_{\alpha_1},\ldots,\xi_{\alpha_{q_1}}\}.$$

son referncias locales para $\mathcal{D}^{\perp}$ y

$$\{N_1,\ldots,N_{2t}\}$$

son referncias locales para μ. Usaremos los siguientes convenios de índices:

Los ξ_α se pondrán en los índices.

$A,B,C,D = 1,\ldots,2n,\xi_1,\ldots,\xi_s$.

$i,j,k = 1,\ldots,2p$.

$a,b,c,d = 2p+1,\ldots,m$ ó $1,\ldots,q$.

$\lambda,\nu,\psi = m+q+1,\ldots,m+q+t$ ó $1,\ldots,t$.

$\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,\ldots,s$.

Todos estos convenios se mantendrán a lo largo del capítulo.

V.1.7. Lema.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si X,Y están en T(M), se cumplen:

(V.1.21) $$P\nabla_X fPY - PA_{fQY}X = fP\nabla_X Y + \sum_\alpha g(fX,fY)P\xi_\alpha - \sum_\alpha \eta_\alpha(Y)PX + \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(Y)\eta_\beta(X)P\xi_\beta.$$

(V.1.22) $$Q\nabla_X fPY - QA_{fQY}X = t\sigma(X,Y) + \sum_\alpha g(fX,fY)Q\xi_\alpha - \sum_\alpha \eta_\alpha(Y)QX + \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(Y)\eta_\beta(X)Q\xi_\beta.$$

(V.1.23) $$\sigma(X,fPY) + D_X fQY = fQ\nabla_X Y + n\sigma(X,Y).$$

Demostración:

En virtud de (I.3.18):

$$(\bar{\nabla}_X f)Y = \sum_\alpha [g(fX,fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X].$$

Por otra parte, de (III.1.1) y (III.1.2):

$$(\bar{\nabla}_X f)Y = \bar{\nabla}_X fY - f\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X PY + \bar{\nabla}_X QY - f\nabla_X Y - f\sigma(X,Y) =$$
$$= P\nabla_X fPY + Q\nabla_X fPY + \sigma(X,fPY) - PA_{fQY}X - QA_{fQY}X + D_X fQY -$$
$$- fP\nabla_X Y - fQ\nabla_X Y - t\sigma(X,Y) - n\sigma(X,Y).$$

Separando las componentes en $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^\perp$ y $T(M)^\perp$ se tienen las fórmulas deseadas. #

V.1.8. Lema.- Sea M^m una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ y supongamos que M^{m+s} es ξ-horizontal. Si $X,Y\in\mathcal{D}$, se verifica:

(V.1.24) $$\sum_a \bar{R}(fF_a,X,Y,fF_a) = \sum_a [R(F_a,fX,fY,F_a) + g(\sigma(fX,F_a),\sigma(fY,F_a)) - g(\sigma(F_a,F_a),\sigma(X,Y))] + q\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y).$$

Demostración:

En virtud de (II.2.3), si $a = 1,\ldots,q$:

$$\bar{R}(fF_a,X,Y,fF_a) = -\bar{R}(fF_a,X,fF_a,Y) = \bar{R}(F_a,fX,fY,F_a) +$$
$$+ \sum_\alpha \sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y).$$

Aplicando ahora la ecuación de Gauss (III.1.5) y sumando en a, se obtiene (V.1.21). #

V.1.9. Proposición.- Sea M^{m+s} una subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, tangente a $\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Si N ó t son paralelos, entonces M^{m+s} es una CR-subvariedad.

Demostración:

Si N es paralelo, entonces $(\nabla_X N)Y = 0$, si $X,Y\in T(M)$. En virtud de (III.2.19), $n\sigma(X,Y) = \sigma(X,TY)$. Por (III.2.15), si $\alpha\in\{1,\ldots,s\}$, $X\in T(M)$:

$$NTX = -\sigma(TX,\xi_\alpha) = -n\sigma(X,\xi_\alpha) = -\sigma(X,T\xi_\alpha) = 0$$

y el Teorema V.1.4 nos prueba que M^{m+s} es una CR-subvariedad.

Por otra parte, si t es paralelo, entonces $(\nabla_X t)V = 0$, si $X\in T(M)$ y $V\in T(M)$. En virtud de (III.2.20), $A_{nV}X = TA_VX$. Por (III.2.8), si $Y\in T(M)$:

$$g(A_{nV}X,Y) = g(\sigma(X,Y),nV) = -g(n\sigma(X,Y),V)$$

y por (III.2.7):

$$g(TA_VX,Y) = -g(A_VX,TY) = -g(\sigma(X,TY),V)$$

donde hemos usado (III.2.1). Con esto, $n\sigma(X,Y) = \sigma(X,TY)$ y nos reducimos al caso anterior. #

V.1.10. Teorema.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces T es paralelo si y sólo si M^{m+s} es antiinvariante.

Demostración:

Si T es paralelo, $(\nabla_X T)Y = 0$, para todos $X,Y\in T(M)$. Usando (III.2.18) y (V.1.16), si $Y = \xi_\gamma$, tenemos:

$$0 = (\nabla_X T)\xi_\gamma = f^2X + t\sigma(X,\xi_\gamma) = -X + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha - tfQX.$$

Aplicando T, como $Tt = 0$, se tiene que $TX = 0$, para todo $X\in T(M)$, con lo que M^{m+s} es antiinvariante. Recíprocamente, es evidente. #

V.1.11. Lema.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si $X\in T(M)$, $Z\in \mathcal{D}^\perp$, se tiene:

(V.1.25) $$T\nabla_X Z = -\sum_\alpha\sum_\beta [\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)\xi_\beta - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Z)\xi_\beta] + $$
$$+ \sum_\alpha [\eta_\alpha(Z)X - g(X,Z)\xi_\alpha] - A_{fZ}X - t\sigma(X,Z).$$

(V.1.26) $$N\nabla_X Z = D_X fZ - n\sigma(X,Z).$$

Demostración:

De (III.2.18), como $TZ = 0$, $NZ = fZ$, se cumple:

$$(\nabla_X T)Z = \nabla_X TZ - T\nabla_X Z = -T\nabla_X Z = \sum_\alpha [g(X,Z)\xi_\alpha - \sum_\beta \eta_\beta(X)\eta_\beta(Z)\xi_\alpha -$$
$$- \eta_\alpha(Z)X + \sum_\beta \eta_\alpha(Z)\eta_\beta(X)\xi_\beta] + A_{NZ}X + t\sigma(X,Z).$$

Por otra parte, de (III.2.19):

$$(\nabla_X N)Z = n\sigma(X,Z) - \sigma(X,TZ) = n\sigma(X,Z).$$

Pero, $(\nabla_X N)Z = D_X NZ - N\nabla_X Z$. #

<u>V.1.12. Lema.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Se tiene que, si $X\in\mathcal{D}$, $Y\in T(M)$, $Z\in\mathcal{D}^\perp$, $W\in\mu$:

(V.1.27) $$g(\nabla_Y Z, X) = g(TA_{fZ}Y, X) + \sum_\alpha [g(Y,TX)\eta_\alpha(Z) + \eta_\alpha(\nabla_Y Z)\eta_\alpha(X)].$$

(V.1.28) $$A_W fX = -A_{fW}X.$$

Demostración:

De (V.1.25), como $fX = TX$:

$$g(\nabla_Y Z, X) = g(f\nabla_Y Z, fX) + \sum_\alpha \eta_\alpha(\nabla_Y Z)\eta_\alpha(X) =$$
$$= g(T\nabla_Y Z, TX) + \sum_\alpha \eta_\alpha(\nabla_Y Z)\eta_\alpha(X)$$

y usando (I.1.2), se llega a (V.1.27).

Por otra parte, de (III.1.1):

$$g(A_W TX, Y) = g(\sigma(Y,TY),W) = g(\bar{\nabla}_Y TX, W) = g(f\bar{\nabla}_Y X, W) =$$
$$= g(f\sigma(X,Y),W) + g(f\nabla_Y X, W) = -g(\sigma(X,Y),fW) = -g(A_{fW}X,Y). \quad \#$$

Vamos ahora a justificar el nombre de CR-subvariedad. Observemos que si M^{m+s} es una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, en virtud de (V.1.5) podemos suponer que M^{m+s} es ξ-vertical, utilizando las distribuciones:

$$\mathcal{D} = \{X / T^2X + X = 0\}.$$
$$\mathcal{D}^\perp = \{X / T^2X = 0\},$$

(véase la demostración del Teorema V.1.4) . Definimos ahora un tensor G de tipo (1,1) en M^{m+s} mediante:

(V.1.29) $GX = fPX,\ X \in T(M)$

donde P es el operador proyección sobre $\mathcal{D}$ y definimos en M^{m+s} un subfibrado complejo por:

(V.1.30) $\mathcal{D}_o = \{X - \sqrt{-1}GX / X \in \mathcal{D}\}$.

En estas condiciones, podemos demostrar:

V.1.13. Lema.- Para todo $p \in M^{m+s}$, $(\mathcal{D}_o)_p \cap \overline{(\mathcal{D}_o)_p} = \{0\}$.

Demostración:

Sea $Z \in (\mathcal{D}_o)_p \cap \overline{(\mathcal{D}_o)_p}$. Esto quiere decir que:

$$Z = X - \sqrt{-1}GX,$$

$$Z = Y + \sqrt{-1}GY$$

donde $X, Y \in \mathcal{D}_p$. De aquí que $X = Y$ y $GX = -GY$. Pero $GX = fPX = fX$ y $GY = fPY = fY$ con lo que $f^2X = -X = -f^2Y = Y$. De todo esto $X = Y = 0$ y, por tanto $Z = 0$. #

V.1.14. Lema.- $-G(X - \sqrt{-1}GX) \in \mathcal{D}_o$, para todo $X \in T(M)$.

Demostración:

Tenemos que $-G(X - \sqrt{-1}GX) = -GX + \sqrt{-1}G^2X$. Ahora bien, $G^2X = fPfPX$ y como $PX \in \mathcal{D}$, entonces $fPX \in \mathcal{D}$ con lo que $PfPX = fPX$ y de aquí que $fPfPX = f^2PX = -PX$ al ser M^{m+s} ξ-vertical. Sea $Y = -fPX \in \mathcal{D}$. Entonces $-GX + \sqrt{-1}G^2X = Y - \sqrt{-1}GY$, que, claramente, está en $\mathcal{D}_o$. #

V.1.15. Lema.- Si $X, Y \in \mathcal{D}$, entonces $[X, fY] + [fX, Y] \in \mathcal{D}$.

Demostración:

Como la S-variedad es normal:

$$0 = ([f,f] + 2\sum_\alpha \xi_\alpha \otimes d\eta_\alpha)(fX,Y) = -[X,fY] + f[X,Y] - f[fX,fY] - [fX,Y],$$

ya que M^{m+s} es ξ-vertical. Luego:

$$[X,fY] + [fX,Y] = f([X,Y] - [fX,fY])$$

y como $f^2([X,Y] - [fX,fY]) \in T(M)$, esto quiere decir que $[X,fY] + [fX,Y]$ no puede tener componente en $\mathcal{D}^\perp$. #

V.1.16. Teorema.- Una CR-subvariedad M^{m+s} de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ es una

CR-variedad.

Demostración:

Por todo lo visto, nos queda probar que $[Z,W]\in\mathcal{D}_o$ si $Z,W\in\mathcal{D}_o$. Pero si $X,Y\in\mathcal{D}$, tenemos:

$$[X - \sqrt{-1}GX, Y - \sqrt{-1}GY] =$$
$$= [X,Y] - \sqrt{-1}[fX,Y] - \sqrt{-1}[X,fY] - [fX,fY].$$

Ahora bien, al ser la f-estructuta normal:

$$[fX,fY] - [X,Y] = f[fX,Y] + f[X,fY],$$

y de aquí que:

$$[X - \sqrt{-1}GX, Y - \sqrt{-1}GY] =$$
$$= -f[fX,Y] - \sqrt{-1}[fX,Y] - f[X,fY] - \sqrt{-1}[X,fY] =$$
$$= -fP[fX,Y] - fQ[fX,Y] + \sqrt{-1}G^2[fX,Y] - \sqrt{-1}Q[fX,Y] - fP[X,fY] -$$
$$- fQ[X,fY] - \sqrt{-1}G^2[X,fY] - \sqrt{-1}Q[X,fY].$$

Por el Lema V.1.15, $Q[fX,Y] + Q[X,fY] = 0$ con lo que:

$$[X - \sqrt{-1}GX, Y - \sqrt{-1}GY] = -G([fX,Y] - \sqrt{-1}G[fX,Y]) -$$
$$- G([X,fY] - \sqrt{-1}G[fX,Y])\in\mathcal{D}_o$$ en virtud del Lema V.1.14

Por tanto M^{m+s} es una CR-variedad. #

V.1.17. Nota.- Este resultado debe compararse con resultados análogos en los casos de variedad Kaehleriana (s = 0), véase |10| y variedad Sasakiana (s = 1), véase |4|.

V.2. Integrabilidad de las distribuciones $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^{\perp}$. Estudio de algunos tópicos.-

Recientemente, Mihai, |36|, ha estudiado las condiciones de integrabilidad de las CR-subvariedades de una S-variedad. Nosotros aquí vamos a establecer dichas condiciones sin demostración para poder estudiar posteriormente algunos tópicos de CR-subvariedades. Dichas demostraciones pueden encontrarse en |36|.

V.2.1. Teorema.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces $\mathcal{D}$ es integrable si y sólo si se cumple, para todos $X,Y\in\mathcal{D}$, $Z\in\mathcal{D}^{\perp}$:

$$(V.2.1)\qquad g(\sigma(X,TY) - \sigma(Y,TX),NZ) = \sum_{\alpha}[2g(X,TY)\eta_{\alpha}(Z) - \eta_{\alpha}(\nabla_{Y}Z)\eta_{\alpha}(X) + \eta_{\alpha}(\nabla_{X}Z)\eta_{\alpha}(Y)].$$

De aquí se deduce que si la CR-subvariedad es ξ-horizontal, $\mathcal{D}$ es integrable si y sólo si, para todos $X,Y\in\mathcal{D}$:

$$(V.2.2)\qquad \sigma(X,fY) = \sigma(fX,Y).$$

Este resultado podemos mejorarlo de la siguiente forma:

V.2.2. Teorema.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si existe un $\xi_{\alpha}\in\mathcal{D}^{\perp}$, $\alpha = 1,\dots,s$, entonces $\mathcal{D}$ no puede ser integrable, a menos que $\dim\mathcal{D} = p_1$, con p_1 el número de ξ_{β} que pertenezcan a $\mathcal{D}$.

Demostración:

Sea ξ_{α} el de las hipótesis y supongamos que en $\mathcal{D}$ hay un campo X no nulo y que también está en $\mathcal{L}$. Entonces $fX\in\mathcal{D}$ y como $fX\in\mathcal{L}$ también, tenemos que:

$$g([fX,X],\xi_{\alpha}) = g(\bar{\nabla}_{fX}X,\xi_{\alpha}) - g(\bar{\nabla}_{X}fX,\xi_{\alpha}) = -g(X,\bar{\nabla}_{fX}\xi_{\alpha}) + g(fX,\bar{\nabla}_{X}\xi_{\alpha}) = 2g(X,f^{2}X) = -2g(X,X).$$

Si $[fX,X]\in\mathcal{D}$, como $\xi_{\alpha}\in\mathcal{D}^{\perp}$, entonces $g(X,X) = 0$, lo cual es contradicción. Luego $\mathcal{D}$ no es integrable.

Si $\mathcal{D}\cap\mathcal{L} = 0$, esto es, si $\dim\mathcal{D} = p_1$, es claro que $\mathcal{D}$ es integrable pues $[\xi_{\beta},\xi_{\gamma}] = 0$, para todos $\beta,\gamma\in\{1,\dots,s\}$. #

Con respecto a la distribución $\mathcal{D}^{\perp}$, Mihai, |36|, prueba:

V.2.3. Teorema.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, la distribución $\mathcal{D}^{\perp}\oplus\mathcal{M}$ es integrable.

Podemos ahora demostrar los siguientes resultados:

V.2.4. Proposición.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad ξ-vertical de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, las hojas $M^{\perp}$ de la distribución $\mathcal{D}^{\perp}$ son totalmente geodésicas en M^{m+s} si y sólo si se cumple:

$$(V.2.3)\qquad g(\sigma(\mathcal{D},\mathcal{D}^{\perp}),f\mathcal{D}^{\perp}) = 0$$

Demostración:

Sean $Y\epsilon\mathcal{D}$, $Z,W\epsilon\ \mathcal{D}^{\perp}$. En virtud de (V.1.25):

$$g(T\nabla_W Z,TY) = g(\nabla_W Z,Y) - g(\sigma(W,TY),fZ).$$

Ahora bien, M^{m+s} es ξ-vertical, luego para todo $X\epsilon\mathcal{D}$ se tiene que $fX = TX$ y $f^2X = -X = T^2X$ con lo cual si $Y = TX\epsilon\mathcal{D}$, entonces $X = -TY$. Por tanto, $M^{\perp}$ es totalmente geodésica en M^{m+s} si y sólo si $\nabla_W Z\epsilon\mathcal{D}^{\perp}$, para todos $Z,W\epsilon\ \mathcal{D}^{\perp}$ y esto se da si y sólo si $g(\sigma(W,TY),fZ) = 0$. #

<u>V.2.5. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Las hojas M^T de $\mathcal{D}$ son totalmente geodésicas en M^{m+s} si y sólo si se cumple, supuesto que M^{m+s} sea ξ-horizontal:

(V.2.4) $\quad g(\sigma(\mathcal{D},\mathcal{D}),f\mathcal{D}^{\perp}) = 0.$

Demostración:

Sean $X,Y\epsilon\ \mathcal{D}$ y $Z\epsilon\ \mathcal{D}^{\perp}$. Si las hojas de $\mathcal{D}$ son totalmente geodésicas en M^{m+s}, entonces $\nabla_X fY\epsilon\mathcal{D}$. Luego, por (V.1.25), como M^{m+s} es ξ-horizontal:

$$0 = g(\nabla_X fY,Z) = -g(\nabla_X Z,fY) = g(T\nabla_X Z,Y) = g(\sigma(X,Y),fZ).$$

Recíprocamente, si se verifica (V.2.4), entonces $\mathcal{D}$ es integrable por (V.2.2) y además, por (III.1.1):

$$0 = g(\sigma(X,Y),fZ) = g(\bar{\nabla}_X fY,fZ) = g((\bar{\nabla}_X f)Y,fZ) + g(f\bar{\nabla}_X Y,fZ) =$$
$$= g(\bar{\nabla}_X Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z),$$

con lo que $\nabla_X Y\epsilon\ \mathcal{D}$ y las hojas de $\mathcal{D}$ son totalmente geodésicas en M^{m+s}. #

<u>V.2.6. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad ξ-horizontal de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, las hojas $M^{\perp}$ de $\mathcal{D}^{\perp}$ son totalmente geodésicas en M^{m+s} si y sólo si, para $Y\epsilon\mathcal{D}$, $Z,W\epsilon\mathcal{D}^{\perp}$:

(V.2.5) $\quad g(\sigma(Y,W),fZ) + \sum_\alpha g(Z,W)\eta_\alpha(Y) = 0.$

Demostración:

En virtud de (V.1.25):

$$g(T\nabla_W Z,Y) = -\sum_\alpha g(Z,W)\eta_\alpha(Y) - g(\sigma(W,Y),fZ).$$

Sea ahora $X\epsilon T(M)$ tal que $TX\epsilon\ \mathcal{D}^{\perp}$. Entonces $fTZ = T^2Z\epsilon T(M)^{\perp}$, luego $T^2Z = 0$. Entonces, de (III.2.10), $X = \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha + tNX$. Aplicando T, al ser

M^{m+s} una CR-subvariedad, obtenemos TX = 0, con lo que fX = NX. Por tanto, $f^2X = -X + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha = tNX$ y si $Y\in\mathcal{D}$, $g(tNX,Y) = -g(NX,NY) = 0$, con lo que $X\in\mathcal{D}^\perp$.

En consecuencia, $\nabla_W Z\in\mathcal{D}^\perp$ si y sólo si se cumple (V.2.5). #

Estudiemos ahoraalgunos conceptos habituales en el tratamiento de CR-subvariedades.

V.2.7. Definición.- Llamaremoa a una CR-subvariedad M^{m+s} de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$, $\mathcal{D}$-umbilical (respectivamente, $\mathcal{D}^\perp$-umbilical) si $\sigma(X,Y) = g(X,Y)H$, para todos $X,Y\in\mathcal{D}$ (respectivamente, $X,Y\in\mathcal{D}^\perp$), con H un cierto vector normal a M^{m+s}, La llamaremos $\mathcal{D}$-totalmente geodésica (respectivamente, $\mathcal{D}^\perp$-totalmente geodésica) si $\sigma(X,Y) = 0$, para todos $X,Y\in\mathcal{D}$ (respectivamente, para todos $X,Y\in\mathcal{D}^\perp$).

V.2.8. Proposición.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si M^{m+s} es $\mathcal{D}$-umbilical y si uno de los campos ξ_α pertenece a $\mathcal{D}$, entonces M^{m+s} es $\mathcal{D}$-totalmente geodésica.

Demostración:

Sea ξ_α el de las hipótesis. En virtud de (V.1.18), $\sigma(\xi_\alpha,\xi_\alpha) = 0$. Como $\sigma(X,Y) = g(X,Y)H$, $X,Y\in\mathcal{D}$, entonces $H = 0$ y de aquí que $\sigma(X,Y) = 0$, para todos $X,Y\in\mathcal{D}$. #

V.2.9. Definición.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Elijamos referencias locales ortonormales de campos tangentes a $\bar{M}^{2n+s}$ como en la sección V.1. Diremos que M^{m+s} es $\mathcal{D}$-minimal (respectivamente, $\mathcal{D}^\perp$-minimal) si:

$$\sum_{i=1}^{2p} \sigma(E_i,E_i) = 0,$$

(respectivamente, si:

$$\sum_{a=1}^{q} \sigma(F_a,F_a) = 0).$$

V.2.10. Definición.- Diremos que una CR-subvariedad M^{m+s} de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ es totalmente geodésica mixta si se verifica:

(V.2.6) $\sigma(\mathcal{D},\mathcal{D}^{\perp}) = 0.$

V.2.11. Proposición.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, si M^{m+s} es totalmente geodésica mixta, se satisfacen las siguientes condiciones:

(V.2.7) $A_W X \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{D}$, $W \in \mu$.

(V.2.8) $A_W Y \in \mathcal{D}^{\perp}$, $Y \in \mathcal{D}^{\perp}$, $W \in \mu$.

Demostración:

Es inmediata de (III.1.3) ya que:

$$g(\sigma(X,Y),W) = g(A_W X,Y) = g(A_W Y,X).$$ #

V.2.12. Proposición.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad totalmente geodésica mixta de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, para todos $X \in \mathcal{D}$ y $W \in \mu$, se verifican:

(V.2.9) $A_{fW} X = f A_W X.$

(V.2.10) $D_X fW = f D_X W.$

(V.2.11) $D_X W \in \mu.$

Demostración:

En primer lugar, al ser $\bar{M}^{2n+s}$ una S-variedad y ser $\xi_1,\ldots,\xi_s$ tangentes a M^{m+s}, se tiene, en virtud d e (I.3.18) que:

$$(\bar{\nabla}_X f)W = 0, \ X \in \mathcal{D}, \ W \in \mu,$$

con lo que:

$$0 = \bar{\nabla}_X fW - f\bar{\nabla}_X W = -A_{fW}X + D_X fW + fA_W X - fD_X W$$

con lo que se obtienen (V.2.9) y (V.2.10), en virtud de (V.2.7). Además, si $Y \in \mathcal{D}^{\perp}$:

$$g(D_X W,fY) = -g(fD_X W,Y) = -g(D_X fW,Y) = 0$$

con lo que $D_X W \in \mu$. #

V.2.13. Proposición.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad totalmente geodésica mixta de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si $X \in \mathcal{D}$ y $W \in \mu$, se cumple que:

(V.2.12) $fA_W X = -A_W fX.$

Demostración:

Como, en virtud de (V.2.7), $A_W fX$, $A_{fW} X$, $fA_W X \in \mathcal{D}$, entonces, para todo $Z \in \mathcal{D}$, por (V.2.9):

$$g(A_W fX,Z) = g(A_W Z,fX) = -g(fA_W Z,X) = -g(A_{fW}Z,X) =$$
$$= -g(A_{fW}X,Z) = -g(fA_W X,Z).$$ #

<u>V.2.14. Definición.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Un campo $V\in T(M)^{\perp}$ se dirá <u>$\mathcal{D}$-paralelo</u> si $D_X V = 0$, para todo $X\in\mathcal{D}$.

<u>V.2.15. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad totalmente geodésica mixta de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Supongamos que cada ξ_α ó bien está en $\mathcal{D}$, ó bien está en $\mathcal{D}^{\perp}$, $\alpha = 1,\ldots,s$. Entonces, $V\in f\mathcal{D}^{\perp}$ es $\mathcal{D}$-paralelo si y sólo si $\nabla_X fV\in\mathcal{D}$, para todo $X\in\mathcal{D}$.

Demostración:

Consideremos $Y\in\mathcal{D}^{\perp}$ tal que $fY = V$. Entonces, tenemos que $fV = -Y + \sum_\alpha \eta_\alpha(Y)\xi_\alpha$ y, además, por (V.1.23), al ser M^{m+s} totalmente geodésica mixta:

$$D_X fY = D_X V = fQ\nabla_X Y = -fQ\nabla_X fV + \sum_\alpha (X\eta_\alpha(Y))fQ + \sum_\alpha \eta_\alpha(Y)fQ\nabla_X\xi_\alpha =$$
$$= -fQ\nabla_X fV$$

ya que $\nabla_X\xi_\alpha = -fX\in\mathcal{D}$ al ser $X\in\mathcal{D}$. Entonces, $D_X V = -fQ\nabla_X fV$ y $D_X V = 0$ si y sólo si $Q\nabla_X fV = \sum_\beta \eta_\beta(Q\nabla_X fV)\xi_\beta = 0$ ya que si $\xi_\alpha\in\mathcal{D}$ es evidente que $\eta_\alpha(Q\nabla_X fV) = 0$ y si $\xi_\alpha\in\mathcal{D}^{\perp}$, $g(\xi_\alpha,Q\nabla_X fV) = g(\xi_\alpha,\nabla_X fV) = -g(\nabla_X\xi_\alpha,fV) =$
$= g(fX,fV) = 0$.

De aquí que $D_X V = 0$ si y sólo si $\nabla_X fV\in\mathcal{D}$. #

<u>V.2.16. Definición.-</u> Diremos que la conexión normal D de una CR-subvariedad M^{m+s} de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ es <u>$(\mathcal{D},\mu)$-llana</u> si $R^D(X,Y)V = 0$, $X,Y\in\mathcal{D}$, $V\in\mu$.

<u>V.2.17. Teorema.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad ξ-horizontal, con $\mathcal{D}$ integrable y totalmente geodésica mixta de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, la conexión normal es $(\mathcal{D},\mu)$-llana si y sólo si localmente existen $2t$ campos ortonormales $N_\lambda\in\mu$ tales que cada N_λ es $\mathcal{D}$-paralelo, donde $\dim\mu = 2t$.

Demostración:

Supongamos que la conexión normal D es $(\mathcal{D},\mu)$-llana. Entonces, tomemos por M_p la subvariedad integral maximal de $\mathcal{D}$ que pasa por p. Para cada campo X tangente a M_p, ponemos:

(V.2.13) $$D_X N_\lambda = \sum_\nu \omega_\lambda^\nu (X) N_\nu$$

para cualesquiera 2t campos ortonormales N_ν en μ, en virtud de (V.2.11).

De ser $R^D(X,Y)N_\nu = 0$, $X,Y\in\mathcal{D}$, obtenemos:

$$d\omega_\lambda^\nu = -\sum_\psi \omega_\lambda^\psi \wedge \omega_\psi^\nu \quad y \quad \omega_\lambda^\nu + \omega_\nu^\lambda = 0$$

Entonces, (|13|, pag. 31) podemos encontrar una matriz no singular (2t x 2t) - dimensional, $A = (A_\lambda^\nu)$, tal que:

$$dA_\lambda^\nu = -\sum_\psi A_\lambda^\psi \omega_\psi^\nu \qquad y \quad A^t = A^{-1}.$$

Pongamos ahora $N'_\lambda = \sum_\nu A_\lambda^\nu N_\nu$. Los N'_λ son unitarios y ortogonales dos a dos en μ. Si escribimos:

$$D_X N'_\lambda = \sum_\nu \omega'^\nu_\lambda (X) N'_\nu$$

tenemos que:

$$\sum_\nu \omega'^\nu_\lambda A_\nu^\psi = dA_\lambda^\psi + \sum_\nu A_\lambda^\nu \omega_\nu^\psi = 0$$

Por tanto:

$$D_X N'_\lambda = 0,$$

para todo X y, en consecuencia, los N'_λ son $\mathcal{D}$-paralelos.

Recíprocamente, si existen esos 2t campos ortonormales N_λ y $\mathcal{D}$-paralelos, esto quiere decir que $D_X N_\lambda = 0$, para todo $X\in\mathcal{D}$. Luego $R^D(X,Y)N_\lambda = 0$. Ahora, si $N\in\mu$, entonces $N = \sum_\lambda g(N,N_\lambda)N_\lambda$ y, por tanto:

$$R^D(X,Y)N = D_X D_Y N - D_Y D_X N - D_{[X,Y]}N =$$

$$= \sum_\lambda \{(XY - YX)g(N,N_\lambda) - [X,Y]g(N,N_\lambda)\}N_\lambda = 0$$

y, entonces, D es $(\mathcal{D},\mu)$-llana. #

<u>V.2.18. Teorema.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad ξ-horizontal, con $\mathcal{D}$ integrable y totalmente geodésica mixta de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si la conexión D es $(\mathcal{D},\mu)$ - llana y M^{m+s} es $\mathcal{D}^\perp$-minimal, entonces los tensores de Ricci $\bar{S}$ y S de $\bar{M}^{2n+s}$ y M^{m+s} cumplen, para todos $X,Y\in\mathcal{D}$:

(V.2.14) $$S(X,Y) = \bar{S}(X,Y) - \sum_{\bar{a}} [g(P\nabla_X F_a, P\nabla_Y F_a) + \bar{R}(fF_a,X,Y,fF_a)] -$$
$$- 2t[\sum_\alpha \sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + sg(X,Y)].$$

Demostración:

Cojamos refencias locales ortonormales de campos tangentes como en la sección V.1, donde $N_1,\dots,N_t,fN_1,\dots,fN_t$ son $\mathcal{D}$-paralelos, por el Teorema V.2.17. De la ecuación de Gauss, (III.1.5), como $\sigma(X,F_a) = 0 = \sigma(Y,F_a)$, $a = 1,\dots,q$, al ser la CR-subvariedad totalmente geodésica mixta, como $\sum_a \sigma(F_a,F_a) = 0$, al ser la CR-subvariedad $\mathcal{D}^{\perp}$-minimal y como $\sigma(fE_i,fE_i) = \sigma(E_i,f^2E_i) = -\sigma(E_i,E_i)$, $i = 1,\dots,2p$, pues $\mathcal{D}$ es integrable, tenemos que:

$$\text{(V.2.15)} \quad S(X,Y) = \bar{S}(X,Y) - \sum_i g(\sigma(X,E_i),\sigma(Y,E_i)) -$$

$$- \sum_a \bar{R}(fF_a,X,Y,fF_a) - \sum_\lambda[\bar{R}(N_\lambda,X,Y,N_\lambda) + \bar{R}(fN_\lambda,X,Y,fN_\lambda)].$$

De (V.1.21), como M^{m+s} es ξ-horizontal y $\sigma(X,F_a) = 0$, $a = 1,\dots,q$:

$$\text{(V.2.16)} \quad -A_{fF_a}X = fP\nabla_X F_a, \quad a = 1,\dots,q$$

pues de (V.1.22), $QA_{fF_a}X = 0$, $a = 1,\dots,q$. Ahora bien, puesto que, de (V.2.16), $A_{fF_a}X$, $A_{fF_a}Y \in \mathcal{D}$, de (V.2.7), $A_{N_\lambda}X$, $A_{N_\lambda}Y$, $A_{fN_\lambda}X$, $A_{fN_\lambda}Y \in \mathcal{D}$ y de (V.1.16) $g(A_W X,\xi_\alpha) = g(\sigma(X,\xi_\alpha),W) = 0$, $X,Y \in \mathcal{D}$, $W \in \mu$, $\alpha = 1,\dots,s$, $a = 1,\dots,q$, $\lambda = 1,\dots,t$, se tiene que:

$$\sum_i g(\sigma(X,E_i),\sigma(Y,E_i)) = \sum_i \sum_a g(\sigma(Y,E_i),fF_a)g(\sigma(Y,E_i),fF_a) +$$

$$+ \sum_i \sum_\lambda [g(\sigma(X,E_i),N_\lambda)g(\sigma(Y,E_i),N_\lambda) + g(\sigma(X,E_i),fN_\lambda)g(\sigma(Y,E_i),fN_\lambda)] =$$

$$= \sum_a [g(P\nabla_X F_a,P\nabla_Y F_a) - \sum_\alpha \eta_\alpha(P\nabla_X F_a)\eta_\alpha(P\nabla_Y F_a)] +$$

$$+ 2\sum_\lambda g(A_{N_\lambda}X,A_{N_\lambda}Y),$$

donde hemos aplicado (V.2.16). Pero, observamos que si $\alpha \in \{1,\dots,s\}$:

$$\eta_\alpha(\nabla_X F_a) = g(\nabla_X F_a,\xi_\alpha) = -g(F_a,\nabla_X\xi_\alpha) = -g(F_a,\bar{\nabla}_X\xi_\alpha) =$$

$$= g(F_a,fX) = 0$$

si $X \in \mathcal{D}$, con lo que $\eta_\alpha(P\nabla_X F_a) + \eta_\alpha(Q\nabla_X F_a) = 0$ y, al ser M^{m+s} ξ-horizontal, $\eta_\alpha(P\nabla_X F_a) = 0$. Por tanto, obtenemos:

$$\text{(V.2.17)} \quad \sum_i g(\sigma(X,E_i),\sigma(Y,E_i)) = \sum_a g(P\nabla_X F_a,P\nabla_Y F_a) + 2\sum_\lambda g(A_{N_\lambda}X,A_{N_\lambda}Y).$$

Por otra parte, de (II.2.2):

$$\text{(V.2.18)} \quad \bar{R}(N_\lambda,X,fY,fN_\lambda) = \bar{R}(N_\lambda,X,Y,N_\lambda) - \sum_\alpha \sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) +$$

$$+ s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - sg(X,Y)$$

y de (II.2.3):

(V.2.19) $$\bar{R}(fN_\lambda,X,Y,fN_\lambda) = -\bar{R}(fN_\lambda,X,fY,N_\lambda) + \sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + sg(X,Y).$$

Utilizando la 1ª Identidad de Bianchi, (V.2.18) y (V.2.19), obtenemos:

(V.2.20) $$\sum_\lambda [\bar{R}(N_\lambda,X,Y,N_\lambda) + \bar{R}(fN_\lambda,X,Y,fN_\lambda)] = -\sum_\lambda \bar{R}(X,fY,N_\lambda,fN_\lambda) + 2t[\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + sg(X,Y)].$$

De la ecuación de Ricci (III.1.7), como D es $(\mathcal{D},\mu)$-llana, utilizando (V.2.9) a (V.2.12) y ya que $\eta_\alpha(A_{N_\lambda}X) = 0$, $X\epsilon\mathcal{D}$, $\lambda = 1,\ldots,t$, $\alpha = 1,\ldots,s$, tenemos que:

$$\bar{R}(X,fY,N_\lambda,fN_\lambda) = 2g(A_{N_\lambda}X,A_{N_\lambda}Y).$$

Llevando esta expresión a (V.2.20):

(V.2.21) $$\sum_\lambda [\bar{R}(N_\lambda,X,Y,N_\lambda) + \bar{R}(fN_\lambda,X,Y,fN_\lambda)] = -2\sum_\lambda g(A_{N_\lambda}X,A_{N_\lambda}Y) + 2t[\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + sg(X,Y)] .$$

Sustituyendo (V.2.17) y (V.2.21) en (V.2.15), se obtiene (V.2.14). #

<u>V.2.19. Definición.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Se dirá que $\mathcal{D}^\perp$ es <u>paralela a lo largo de $\mathcal{D}$</u> si $\nabla_X\mathcal{D}^\perp \subseteq \mathcal{D}^\perp$ para todo $X\epsilon\mathcal{D}$.

<u>V.2.20. Proposición.-</u> Sea M^{m+s} una CR-subvariedad ξ-horizontal con $\mathcal{D}$ integrable y totalmente geodésica mixta de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Si la conexión normal D es $(\mathcal{D},\mu)$-llana, si M^{m+s} es $\mathcal{D}^\perp$-minimal, si $\mathcal{D}^\perp$ es paralela a lo largo de $\mathcal{D}$ y si el tensor de curvatura R de M^{m+s} cumple $R(X,Z)Y\epsilon\,\mathcal{D}$, para todos $X,Y\epsilon\mathcal{D}$, $Z\epsilon\,\mathcal{D}^\perp$, entonces, si $X,Y\epsilon\,\mathcal{D}$, se tiene que:

(V.2.22) $$S(X,Y) = \bar{S}(X,Y) - q\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - 2t[\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y) - s\sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + sg(X,Y)] .$$

Demostración:

Como $\nabla_X F_a$, $\nabla_Y F_a \epsilon\,\mathcal{D}^\perp$, $a = 1,\ldots,q$ al ser $\mathcal{D}^\perp$ paralela a lo largo de $\mathcal{D}$, como $\sum_a \bar{R}(fF_a,X,Y,fF_a) = q\sum_\alpha\sum_\beta \eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)$, de (V.1.24) al ser M^{m+s} $\mathcal{D}^\perp$-minimal y totalmente geodésica mixta y como por hipótesis se tiene:

$$R(F_a,fX,fY,F_a) = -g(R(fX,F_a)fY,F_a) = 0$$

entonces (V.2.22) se obtiene directamente de (V.2.14). #

V.3 CR-productos en S-variedades.-

V.3.1. Definición.- Una CR-subvariedad M^{m+s} de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$ se llamará un CR-producto si es localmente el producto Riemanniano de una subvariedad invariante M^T de $\bar{M}^{2n+s}$ y de una subvariedad antiinvariante $M^\perp$ de $\bar{M}^{2n+s}$.

De esta definición es inmediato que todo CR-producto es ξ-horizontal.

V.3.2. Teorema.- Sea M^{m+s} una CR-subvariedad ξ-horizontal de una S-variedad $\bar{M}^{2n+s}$. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) M^{m+s} es un CR-producto.

(b) $A_{f\mathcal{D}^\perp} f\mathcal{D} = 0$.

(c) $(\nabla_U T)\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, $U\in T(M)$.

(d) $(\nabla_U T)\mathcal{D}^\perp \subseteq \mathcal{D}^\perp$, $U\in T(M)$.

Demostración:

(a) $\Longrightarrow$ (b). Por ser M^{m+s} un CR-producto, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^\perp$ son integrables y su hojas son totalmente geodésicas en M^{m+s}. Entonces, si $U\in T(M)$, $X\in\mathcal{D}$, se tiene que $\nabla_U X\in\mathcal{D}$. En efecto, si $U\in\mathcal{D}$ es evidente. Si $U\in\mathcal{D}^\perp$, para todo $Z\in\mathcal{D}^\perp$, $g(\nabla_U X,Z) = -g(X,\nabla_U Z) = 0$, pues $\nabla_U Z\in\mathcal{D}^\perp$ al ser las hojas de $\mathcal{D}^\perp$ totalmente geodésicas en M^{m+s}. Similarmente, $\nabla_U Z\in\mathcal{D}^\perp$, $U\in T(M)$, $Z\in\mathcal{D}^\perp$. Entonces, en virtud de (V.1.27):

$$0 = g(\nabla_U X,Z) = -g(X,\nabla_U Z) = -g(TA_{fZ}U,X) - \sum_\alpha \eta_\alpha(\nabla_U Z)\eta_\alpha(X) =$$
$$= g(A_{fZ}U,TX) = g(A_{fZ}TX,U)$$

pues la CR-subvariedad es ξ-horizontal.

(b) $\Longrightarrow$ (a). En primer lugar, tenemos que $\mathcal{D}^\perp$ es integrable por ser M^{m+s} ξ-horizontal. Además, si $U\in T(M)$, $X\in\mathcal{D}$, $Z\in\mathcal{D}^\perp$:

$$g(\sigma(U,X),fZ) = g(\sigma(U,-f^2X + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha),fZ) =$$
$$= -\sum_\alpha \eta_\alpha(X)g(fQU,fZ),$$

aplicando (V.1.16) y la hipótesis (b). Entonces:

(V.3.1) $$g(\sigma(U,X),fZ) = -\sum_\alpha \eta_\alpha(X) g(QU,Z).$$

Si $U\in\mathcal{D}^\perp$, $QU = U$ y por (V.2.5), las hojas de $\mathcal{D}^\perp$ son totalmente geodésicas en M^{m+s}. Por otra parte, si $X,Y\in\mathcal{D}$, $Z\in\mathcal{D}^\perp$, usando (V.1.18):

$$g(\sigma(X,Y),fZ) = g(\sigma(Y,-f^2X),fZ) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X) g(\sigma(Y,\xi_\alpha),fZ) =$$

$$= -g(A_{fZ}f^2X,Y) = 0$$

por hipótesis. Por tanto, en virtud de (V.2.2) y (V.2.3), $\mathcal{D}$ es integrable y sus hojas son totalmente geodésicas en M^{m+s}. En consecuencia, M^{m+s} es un CR-producto.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c). Sea $X\in\mathcal{D}$, $Z\in\mathcal{D}^\perp$. Por (III.2.18):

$$g((\nabla_U T)X,Z) = g(t\sigma(U,X),Z) + \sum_\alpha \eta_\alpha(X) g(f^2U,Z) =$$

$$= -g(\sigma(U,X),NZ) - \sum_\alpha \eta_\alpha(X) g(U,Z),$$

al ser M^{m+s} ξ-horizontal. Si se verifica (c), $g(\sigma(U,TX),fZ) = g(A_{fZ}TX,U) = 0$ y, por tanto, se verifica (b). Si se verifica (b), por la expresión anterior $(\nabla_U T)TX\in\mathcal{D}$ con $X\in\mathcal{D}$. Entonces:

$$\nabla_U T^2X - T\nabla_U TX\in\mathcal{D},$$

es decir,

$$-\nabla_U X + \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\nabla_U\xi_\alpha + \sum_\alpha (U\eta_\alpha(X))\xi_\alpha - T\nabla_U TX\in\mathcal{D}.$$

De (V.1.15):

$$-\nabla_U X - \sum_\alpha \eta_\alpha(X) fX + \sum_\alpha (U\eta_\alpha(X))\xi_\alpha - T\nabla_U TX\in\mathcal{D}$$

con lo que $\nabla_U X\in\mathcal{D}$, si $X\in\mathcal{D}$. Por tanto, $(\nabla_U T)X = \nabla_U TX - T\nabla_U X\in\mathcal{D}$ y se tiene (c).

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) Es inmediato, debido a que $\nabla_U T$ es un operador antisimétrico. #

REFERENCIAS

|1| Bejancu, A. GEOMETRY OF CR-SUBMANIFOLDS. Mathematics and its applications. D.Reidel Publishing Company. Dovdrecht - Boston - Lancaster - - Tokyo. (1.986).

|2| ---------- "CR-Submanifolds of a Kaehler Manifold, I". Proc. Am. Math. Soc. Vol.69, nº1. (1.978). 135 - 142.

|3| ---------- "CR-Submanifolds of a Kaehler Manifold, II". Trans. Am. Math. Soc., 250. (1.979). 333 - 345.

|4| Blair, D.E. CONTACT MANIFOLDS IN RIEMANNIAN GEOMETRY. Lecture notes in Mathematics, 509. Springer Verlag. Berlin - Heidelberg - New York. (1.976).

|5| ---------- "Geometry of Manifolds with Structural Group U(N) x O(S)". J. Diff. Geom., 4. (1.970). 155 - 167.

|6| ---------- "On a generalization of the Hopf Fibration". An. Stiin. Univ. „Al. I. Cuza". Din Iasi. (Serie nova). T. XVII. Fasc. 1. (1.971). 171 - 177.

|7| ---------- "On the non-existence of flat Contact Metric Structures". Tôhoku Math. J., 28. (1.976). 373 - 379.

|8| ---------- "The Theory of Quasi-Sasakian Structures". J. Diff. Geom., 1. (1.967). 331 - 345.

|9| ---------- "Two remarks on Contact Metric Structures". Tôhoku Math. J., 29. (1.977). 319 - 324.

|10| Blair, D.E. Chen, B.Y. "On CR-Submanifolds of Hermitian Manifolds". Israel J. of Math. Vol. 34, nº 4. (1.979). 353 - 363.

|11| Blair, D.E. Ludden, G.D. Yano, K. "Differential Geometric Structures on Principal Toroidal Bundles". Trans. Am. Math. Soc., 181. (1.973). 175 - 184.

|12| Blair, D.E. Patnak, J.N. "Contact Manifolds with Characteristic Vector Field annihilated by the Curvature". Bull. of the Institute of Math. Academia Sinica. Vol. 9, nº 4. (1.981). 533 - 545.

|13| Chen, B.Y. GEOMETRY OF SUBMANIFOLDS. Marcel Dekker, Inc. New york. (1.973).

|14| ---------- "CR-Submanifolds of a Kaehler Manifold, I". J. Diff. Geom., 16. (1.981). 305 - 322.

|15| ---------- "CR-Submanifolds of a Kaehler Manifold, II". J. Diff. Geom., 16. (1.981). 493 - 509.

|16| Chen, B.Y. Ogiue, K. "On the Scalar curvature and Sectional Curvatures of a Kaehler Submanifold". Proc. of the Am. Math. Soc. Vol.41, nº1. (1.973). 247 - 250.

|17| ---------- "Some characterizations of Complex Space Forms". Duke Math. J. Vol 40, nº4. (1.973). 797 - 799.

|18| Do Carmo, M.P. GEOMETRIA RIEMANNIANA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro. (1.979).

|19| Goldberg, S.I. Yano, K. "Globally Framed f-manifolds". Illinois J. Math., 15. (1.971). 456 - 474.

|20| ---------- "Non-invariant Hypersurfaces of Almost Contact Manifolds". J. Math . Soc. Japan. 22, nº1. (1.970). 25 - 34.

|21| ---------- "On Normal Globally Framed f-manifolds". Tôhoku Math. J., 22. (1.970). 362 - 370.

|22| Gray, J.W. "Some global Properties of Contact Structures". Ann of Math., 69. (1.959). 421 - 450.

|23| Harada, M. "On Sasakian Submanifolds". Tôhoku Math. J. 25 (1.973). 103 - 109.

|24| Hatakeyama, Y. Ogawa, Y. Tanno, S. "Some properties of Manifolds with Contact Metric Structure". Tôhoku Math. J., 15. (1.963). 42 - 48.

|25| Ishihara, S. "Normal Structure f satisfying $f^3 + f = 0$". Kodai Math. Sem. Rep., 18. (1.966). 36 - 47.

|26| Kenmotsu, K. "Invariant Submanifolds in a Sasakian Manifold". Tôhoku Math. J., 21. (1.969). 495 - 500.

|27| Kiricenko, V.F. "The Axiom of Holomorphic Planes in Generalized Hermitian Geometry". Soviet Math. Dokl. Vol 24, nº 2. (1.981). 336 - 341.

|28| Kobayashi, M. "Contact CR-products of Sasakian Manifolds". Tensor N.S., 36. (1.982). 281 - 287.

|29| ---------- "CR-submanifolds of a Sasakian Manifold". Tensor N.S., 35. (1.981). 297 - 307.

|30| ---------- "CR-submanifolds of a Sasakian Space Form with flat normal Connection". Tensor N.S., 36. (1.982). 207 - 214.

|31| Kobayashi, S. Nomizu, K. FOUNDATIONS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY I, II. Interscience Publishers. New York - London. (1.963), (1.969).

|32| Kon, M. "Invariant Submanifolds of Normal Contact Metric Manifolds". Kodai Math. Sem. Rep., 25. (1.973). 330 - 336.

|33| ---------- "Invariant Submanifolds in Sasakian Manifolds". Math Ann., 219. (1.976). 277 - 290.

|34| ---------- "On some Invariant Submanifolds of Normal Contact Metric Manifolds". Tensor N.S., 28. (1.974). 133 - 138.

|35| Ludden, G.D. Okumura, M. Yano, K. "Anti-invariant Submanifolds of Almost Contact Metric Manifolds". Math. Ann., 225. (1.977). 253 - 261.

|36| Mihai, I. "CR-subvarietati ale unei f-varietati cu repere complementare". Stud. Cerc. Mat., 35, nº2. (1.983). 127 - 136.

|37| Morimoto, A. "On Normal Almost Contact Structures". J. Math. Soc. Japan. Vol 15, nº 4. (1.963). 420 - 436.

|38| Nakagawa, H. "f-structures induced on Submanifolds in Spaces Almost Hermitian or Kaehlerian". Kodai Math. Sem. Rep., 18. (1.966).161-183.

|39| Ogiue, K. "On Almost Contact Manifolds Admitting Axiom of planes or Axiom of free mobility". Kodai Math. Sem. Rep., 16. (1.964). 223 - 232.

|40| Okumura, M. "Some remarks on Spaces with a certain Contact Structure". Tôhoku Math. J., 14. (1.962). 135 - 145.

|41| Tanno, S. "Isometric Inmersions of Sasakian Manifolds in Spheres". Kodai Math. Sem. Rep., 21. (1.969). 448 - 458.

|42| ---------- "Sasakian Manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional Curvature". Tôhoku. Math. J., 21. (1.969). 501 - 507.

|43| Yano, K. DIFFERENTIAL GEOMETRY ON COMPLEX AND ALMOST COMPLEX SPACES. Pergamon Press Ltd. Oxford. (1.964).

|44| ---------- "Differential Geometry of Antiinvariant Submanifolds of a Sasakian Manifold". Boll. U.M.I. (4) 12. Suppl. fasc. 3. (1.975). 279 - 296.

|45| ---------- "On a Structure defined by a Tensor Field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$". Tensor, 14. (1.963). 99 - 109.

|46| Yano, K. Ishihara, S. "Invariant Submanifolds of an Almost Contact Manifold". Kodai Math. Sem. Rep., 21. (1.969). 350 - 364.

|47| Yano, K. ANTIINVARIANT SUBMANIFOLDS. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 21. Marcel Dekker, Inc. New York - Bessel. (1.976)

|48| ---------- CR-SUBMANIFOLDS OF KAEHLERIAN AND SASAKIAN MANIFOLDS. Progress in Mathematics, 30. Birkhäuser. Boston - Bassel - Stuttgart. (1.983).

|49| ---------- STRUCTURES ON MANIFOLDS. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific. Singapore. (1.984).

|50| ---------- "Generic Submanifolds of Sasakian Manifolds". Kodai Math. J., 3. (1.980). 163 - 196.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. ....

titulada ....

....

....

acordó otorgarle la calificación de ....

....

Sevilla, ... de .... 1.9......

El Vocál, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorado