UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

GRUPOS DE LIE ASOCIADOS A ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

Memoria presentada por Ángel Francisco Tenorio Villalón para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Fdo: Ángel Francisco Tenorio Villalón.

V$^{\underline{o}}$. B$^{\underline{o}}$. LOS DIRECTORES:

Fdo.: Francisco J. Echarte Reula.
Catedrático de Universidad
del Departamento de Geometría
y Topología de la Universidad
de Sevilla.

Fdo.: Juan Núñez Valdés.
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de Geometría
y Topología de la Universidad
de Sevilla.

Fdo.: Juan Carlos Benjumea Acevedo.
Profesor Asociado de Universidad,
del Departamento de Geometría
y Topología de la Universidad
de Sevilla.

Sevilla, Septiembre de 2003.

La cultura de las artes y de las ciencias ha sido siempre, y será, el más bello eslabón de unión entre los pueblos, aun los más distantes.

Ludwig van Beethoven

AGRADECIMIENTOS

Dice el saber popular que *ser agradecido es de bien nacido.* Como creo sinceramente en dicha máxima, es conveniente dedicar las próximas líneas a expresar mi gratitud a quienes han participado en la elaboración de esta Memoria, permitiendo así que llegase la misma a buen puerto.

Creo que es de pura lógica el comenzar con las tres personas que más conocen este trabajo ya que han sido partícipes directos en el mismo y sin los cuales no hubiese sido posible su conclusión; me estoy refiriendo a mis tres directores, los profesores D. Francisco J. Echarte, D. Juan Núñez y D. Juan Carlos Benjumea. Todos ellos han compartido sus conocimientos conmigo y me han apoyado durante la elaboración de esta Memoria, contagiándome su ímpetu y entusiasmo.

Al profesor D. Francisco J. Echarte he de agradecerle la labor que ha desempeñado durante todo el proceso de elaboración técnica de este texto, haciéndome caer en la cuenta de errores que cometía y otros caminos mejores que los que a veces había tomado.

Me gustaría dar las gracias al profesor D. Juan Núñez por haberme comentado la posibilidad de realizar el estudio que se presenta en estas páginas y por haberme ido dando la perspectiva apropiada durante estos años para afrontar este reto.

También tengo mucho que agradecer al profesor D. Juan Carlos Benjumea, puesto que sus consejos y guía han permitido en numerosas ocasiones retomar algunas cuestiones desde otro punto de vista y poder llegar así a obtener nuevos resultados.

Agradezco también al profesor D. Vicente Varea sus observaciones y consejos acerca del presente trabajo y que han quedado reflejados a lo largo del mismo.

No puedo dejar de agradecer a mi familia el que haya estado siempre a mi lado apoyándome incondicionalmente y haciendo alarde de paciencia a lo largo de todo este viaje que comenzó cuando les dije que quería estudiar Matemáticas hasta estos instantes en que escribo estas palabras con el fin de optar al grado de doctor.

Índice General

INTRODUCCIÓN

Antes de comentar la estructura que seguiremos en esta Memoria, nos ha parecido conveniente exponer algunas pinceladas sobre el desarrollo histórico del estudio de las álgebras de Lie nilpotentes y, por tanto, de las causas que motivan la presente Memoria. Este estudio está siendo muy desarrollado en la actualidad y, en concreto, son dos las temáticas que suelen existir en el trasfondo de estos trabajos: la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes y la obtención del grupo de Lie simplemente conexo asociado a cada una de ellas.

En primer lugar, no se conoce todavía, pese a los numerosos intentos realizados, la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión mayor o igual que 8, por lo que éste es un problema que continúa abierto actualmente. El interés de conseguir esta clasificación estriba en que como ahora veremos, las álgebras de Lie nilpotentes desempeñan un papel muy importante dentro de las álgebras de Lie en general.

Como ya es sabido, existen varias clases distintas de álgebras de Lie: las *semisimples*, las *resolubles* y aquellas álgebras de Lie que no son ni semisimples ni resolubles. Para estudiar y clasificar entonces las álgebras de Lie en general, bastaría hacerlo con cada uno de estos tres subconjuntos disjuntos.

No obstante, el *Teorema de descomposición* de E. E. Levi, enunciado a finales de los años 50, establece que toda álgebra de Lie puede descomponerse como suma semidirecta de su radical (que es resoluble) y una subálgebra semisimple (la subálgebra de Levi del álgebra de Lie inicial).

Por lo que respecta a las primeras, las semisimples, su clasificación ya es totalmente conocida, dado que toda álgebra de Lie semisimple es suma directa de álgebras de Lie simples y la clasificación de estas álgebras de Lie simples ya fue obtenida en 1890 por Killing y Cartan, entre otros. Estos autores encontraron que existen 4 tipos distintos de álgebras de Lie simples: las del *conjunto especial lineal*, las *ortogonales impares*, las *simplécticas* y las *ortogonales pares*, más otras 5 álgebras de Lie simples, no pertenecientes a ninguno de estos cuatro grupos anteriores y que ellos denominaron álgebras *excepcionales*.

Con respecto a las álgebras de Lie resolubles, sólo es conocida hasta el momento la clasificación de estas álgebras para dimensiones menores o iguales que 5. No obstante, Malcev, en 1945 (véase **[20]**), probó que la determinación de las álgebras de Lie resolubles se podía reducir a la obtención de las álgebras de Lie nilpotentes, que constituyen un subconjunto suyo. En su trabajo, Malcev utiliza ideales nilpotentes maximales para definir un tipo particular de álgebras resolubles, que él denomina *álgebras separadas*, y prueba que toda álgebra de Lie resoluble está contenida en una álgebra separada minimal unívocamente determinada. La relación entre un álgebra de Lie resoluble y sus separadas permite construir todas las álgebras de Lie resolubles que tienen álgebras separadas dadas, lo cual le permite reducir la clasificación de las álgebras de Lie resolubles a la de las nilpotentes.

Respecto a las álgebras de Lie nilpotentes, ya en 1891, K. A. Umlauf (véase **[26]**), discípulo de Engel, clasificó todas las álgebras de Lie nilpotentes complejas hasta dimensión 6, viendo que existían un número finito de ellas. También estudió estas álgebras en dimensiones 7, 8 y 9, encontrando que aparecían varias familias infinitas de álgebras de Lie nilpotentes de estas dimensiones.

Posteriormente, varios autores realizaron diferentes intentos para obtener estas clasificaciones. Así, en la década de los 50 del siglo pasado, se encuentran entre otros algunos trabajos de Morosov, Dixmier y Vranceanu. En particular, Dixmier, en 1957 (véase **[11]**), clasifica las álgebras de Lie nilpotentes sobre un cuerpo conmutativo hasta dimensión 5. En ese mismo año, Morosov (**[21]**) publica un primer intento de clasificar las álgebras de Lie nilpotentes reales de dimensión 6 y clasifica correctamente las complejas de esa dimensión. Previamente, Vranceanu en 1950 y Chevalley en 1957 habían trabajado sobre estas álgebras de Lie nilpotentes (véanse **[27]** y **[9]**, respectivamente).

Vergne y Safiullina son principalmente los que en la década de los 60 (siempre del siglo pasado) realizaron diversos intentos de clasificación de estas álgebras, consiguiendo en muchos casos notables resultados. Así, Safiullina, en 1964, aporta nuevos resultados al estudio de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 (véase **[23]**), pero es realmente M. Vergne, en 1966, en su tesis doctoral (véase **[28]**), posteriormente publicada en **[29]**, la que da un fuerte impulso al tratamiento de estas álgebras. En realidad, Vergne realiza una labor doblemente importante: por un lado, da la clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes reales y complejas de dimensión menor o igual que 6 y por otra parte, define las álgebras de Lie filiformes, tal y como las conocemos actualmente. Estas álgebras de Lie filiformes constituyen un subconjunto de las álgebras de Lie nilpotentes. Chong Yun Chao fue otro de los autores de esta década que también trabajaron en el tema de las álgebras de Lie nilpotentes (véase **[10]**), así como el colectivo Bourbaki **[5]**.

En la década de los 70 del mismo siglo son también varios los autores que continúan trabajando en esta clasificación, entre ellos P. de la Harpe (véase **[19]**) en 1972, Favre y Gauger (véanse **[14]** y **[15]**, respectivamente) en 1973, y Skjelbred y Sund, en 1977 (véase **[25]**).

No obstante, no es hasta la década siguiente cuando se produce un avance sustancial en la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes. Así, en 1988, Ancochea y Goze realizan una clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 8 (véase **[1]**), mediante la introducción de un invariante para estas álgebras, llamado por ellos *sucesión característica*, que definen como la dimensión maximal de las cajas de Jordan de una cierta matriz nilpotente (véanse **[1]** y **[2]**). Este mismo invariante les posibilitó dar una clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 (véase **[2]**). De esos trabajos se deduce que las álgebras de Lie filiformes son las que, dentro de las nilpotentes, tienen la mayor sucesión característica $(n-1,1)$ en un orden natural dado por ellos. Pese a todo, la lista dada en **[1]** no estaba completa y presentaba algunos defectos. Posteriormente, los mismos autores la rectificaron en **[3]**, casi al mismo tiempo que Seeley (véase **[24]**), aunque de manera independiente. Sin embargo, los intentos de estos dos autores de continuar con su método en dimensiones mayores no fructificaron, debido a la aparición de numerosas dificultades.

No obstante, y como ya dijimos anteriormente, no se ha llegado a clasificar el conjunto de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 8 ni los de dimensiones superiores, pese a los numerosos intentos realizados desde entonces, por lo que éste es un problema que continúa abierto en la actualidad.

Al objeto de ir avanzando algo en la resolución del mismo, Gómez y Echarte, en 1991, utilizaron una técnica similar a la ideada por Goze para clasificar las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 9 (véase **[13]**). En esta clasificación aparecen por primera vez familias biparamétricas de álgebras de Lie filiformes. Además, en varias familias, los parámetros no recorren el cuerpo complejo, sino un conjunto cociente de este cuerpo por una relación de equivalencia dada.

Posteriormente, en 1994, Boza, Echarte y Núñez clasifican las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 10 (véase **[6]**). Para ello, introducen un nuevo invariante, que ellos denominan el *par (i, h)*. En esta clasificación aparecen por primera vez familias triparamétricas de álgebras de Lie filiformes.

Más tarde, Gómez, Jiménez y Khakimdjanov, en 1996, aprovechan las ideas de Vergne e introducen los *cambios de base elementales* para clasificar las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 11 y para dar algunas correcciones a clasificaciones anteriores (véase **[16]**).

Finalmente, mediante una nueva técnica de clasificación de álgebras de Lie filiformes, basada en el isomorfismo de álgebras, Boza, Fedriani y Núñez obtuvieron en 1998 la clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 12 (véanse **[7]** y **[8]**).

No obstante, llegados a este punto, surgieron de nuevo las dificultades, sobre todo de tipo computacional, que se habían detectado ya antes en el tratamiento de este problema de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes en dimensiones mayores, por lo que de nuevo apareció con fuerza la idea de reducir este problema considerando nuevos subconjuntos de álgebras de Lie nilpotentes, cuya clasificación fuese más sencilla de conseguir. Al mismo tiempo, también se estaban considerando problemas que se dirigían más a la búsqueda de nuevos resultados relativos a estas álgebras de Lie que a la clasificación en sí de las mismas. Nos referimos a problemas tales como la obtención de nuevos invariantes para estas álgebras o la descripción de los conjuntos algebraicos de leyes de álgebras de Lie filiformes y de sus componentes irreducibles. Desde luego, este estudio requiere también de cálculos largos y complicados, para cuya realización es necesario el uso de programas de computación simbólica.

Otra razón para continuar con el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes obedece a la no muy abundante información que se posee actualmente sobre los grupos de Lie asociados a álgebras de Lie en general, y a álgebras de Lie nilpotentes, en particular.

Como ya es sabido, todo grupo de Lie G tiene asociada un álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$. En esta Memoria nos planteamos entonces el problema recíproco: dada un álgebra de Lie $\mathcal{L}$, determinar cuáles son los grupos de Lie cuya álgebra de Lie es $\mathcal{L}$. Todos estos posibles grupos deben tener la misma dimensión, que coincidirá con la de $\mathcal{L}$. Además, los grupos de Lie no conexos tienen la misma álgebra de Lie que sus respectivas componentes conexas de su unidad, mientras que, por otro lado, si $G_1, \ldots, G_n, \ldots$ son grupos de Lie conexos con $\mathcal{L}(G_i) = \mathcal{L}$, existe entonces uno de ellos, simplemente conexo, que es recubrimiento de los demás.

Vemos por tanto que existe una estrecha relación entre todos los grupos de Lie que tienen la misma álgebra de Lie. El objetivo fundamental de esta Memoria consiste entonces en introducir mecanismos adecuados para hallar un grupo de Lie simplemente conexo asociado a un álgebra de Lie y calcular explícitamente dichos grupos de Lie en álgebras de Lie nilpotentes, de dimensiones menores o iguales que 6.

El contenido de esta Memoria se ha estructurado en tres Capítulos y un Apéndice final. En el Capítulo 0 se indican los conceptos y resultados previos relativos a grupos y álgebras de Lie, ya conocidos, que creemos indispensables para una adecuada comprensión del resto del trabajo. Aunque estos conceptos han sido ya definidos anteriormente, hacemos especial énfasis en aquellos que, a pesar de haber sido ya estudiados, no suelen ser de uso frecuente debido a su especificidad. Entre estos últimos se recuerdan de forma algo más exhaustiva los distintos tipos de grupos de Lie, así como los subgrupos uniparamétricos y las representaciones de éstos.

En el Capítulo 1 se estudian, en una primera sección, los grupos de Lie G_n nilpotentes de dimensión $\binom{n}{2}$ mediante su representación por matrices triangulares unipotentes de orden n, así como el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$ asociada a éstos. Puesto que la correspondencia de Lie entre los subgrupos de Lie de G_n y las subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}_n$ es biunívoca, el Teorema de Fröbenius nos permite hallar el grupo de Lie simplemente conexo asociado a cada una de las subálgebras nilpotentes de dimensión menor que 6 de $\mathfrak{g}_n$, dando una representación matricial de dichos grupos como subgrupos de G_n. Este será el objetivo de este primer capítulo.

Como consecuencia de este estudio se obtiene un resultado que garantiza que el grupo de Lie correspondiente a las álgebras de Lie nilpotentes filiformes de dimensión n no puede ser representado por un subgrupo de del grupo G_{n-1}.

La razón de haber considerado este tipo particular de álgebras de Lie nilpotentes en este capítulo estriba en el hecho de que estas álgebras filiformes, introducidas por M. Vergné en 1966, en su Tesis Doctoral, son las más estructuradas de las nilpotentes, lo cual facilita en cierta forma su estudio y tratamiento.

Se tratan en este capítulo las álgebras de Lie nilpotentes de hasta dimensión 5. Se obtienen los grupos de Lie correspondientes a estas álgebras mediante la utilización de matrices del menor orden posible. Este estudio lo dividiremos en dos secciones, tratando en una las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor que 5 y en la otra las álgebras de dimensión 5.

En el Capítulo 2 se aplica el proceso anterior a todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6, obteniéndose, para todas ellas, los grupos de Lie asociados correspondientes.

El principal resultado de este capítulo es la representación de los grupos de Lie simplementes conexos asociados a las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 por matrices unipotentes de dimensión 5.

Se concluye esta Memoria con un Apéndice final y con la Bibliografía consultada. En el Apéndice se muestran, de forma ordenada y sistemática, todos los resultados obtenidos en los anteriores capítulos, a fin de que pueda disponerse de una visión global y de conjunto de los mismos. En la Bibliografía aparecen todos los artículos, monografías y textos que se referencian en la Memoria.

Capítulo 0

Grupos y Álgebras de Lie: Generalidades

En este capítulo se introducen los conceptos y propiedades más importantes ya conocidos de la teoría de grupos y álgebras de Lie, que van a ser usados en la presente Memoria. Por razones obvias, se omiten todas las demostraciones de estas propiedades, si bien se referencian aquellos textos más generales y los artículos más específicos en los que pueden ser consultadas.

0.1 Grupos de Lie

Definición 0.1.1. *Se denomina* **grupo de Lie** *a un conjunto de puntos, G, que cumplen las siguientes condiciones:*

1.- Constituyen una variedad $\mathcal{C}^\infty$ diferenciable.

2.- Entre ellos está definida una operación interna respecto de la cual G tiene estructura de grupo.

3.- La aplicación $\phi : G \times G \to G$, tal que $\phi : (p, q) \to pq^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Nótese que un grupo de Lie es una variedad diferenciable que además tiene definida una estructura de grupo, donde ϕ relaciona ambas estructuras.

Por ser grupo, existe el elemento unidad e. Además para cada $p \in G$, existe $p^{-1} \in G$ tal que $pp^{-1} = p^{-1}p = e$; de aquí se deduce que la aplicación $(e, p) \to ep^{-1} = p^{-1}$, es $\mathcal{C}^\infty$ diferenciable. En consecuencia, la correspondencia $p \to p^{-1}$ lo es y, por tanto, lo es también $(p, q) \to (p, q^{-1}) \to pq$.

Traslaciones a izquierda y derecha

Definición 0.1.2. *Si fijamos a y hacemos variar x en G, la aplicación $(a, x) \to ax$ que a cada x le hace corresponder ax la denominamos* **traslación a izquierda** *de*

a, y la representaremos por $l_a : x \to ax$.
Análogamente, denominamos **traslación a derecha** *de a a la aplicación $r_a : x \to xa$.*

Lema 0.1.3. *El producto de dos traslaciones a izquierda (resp. derecha) es otra traslación a izquierda (resp. derecha).*

Lema 0.1.4. *La inversa de una traslación a izquierda (resp. derecha) es otra traslación a izquierda (resp. derecha).*

Corolario 0.1.5. *El conjunto de traslaciones a izquierda (resp. derecha) forman grupo.*

De esta forma, las traslaciones a izquierda (resp. derecha) constituyen un subgrupo del grupo de difeomorfismos de G en sí mismo.

Representación adjunta

Definición 0.1.6. *Se define* **representación adjunta** *de un elemento $p \in G$ como el automorfismo interno de G definido por:*

$$\begin{aligned} Ad_p : \ & G \to G \\ & x \to pxp^{-1} \end{aligned}$$

Nótese entonces que se verifican estas propiedades:
1) Si G es conmutativo, Ad_p es la identidad para cada $p \in G$.
2) Notemos que Ad_p es la composición de una traslación a izquierda y otra a derecha, y por ser éstas difeomorfismos, se cumple que Ad_p es automorfismo y además forman subgrupo del grupo de los automorfismos de G en G.

Proposición 0.1.7. *Si G es un grupo de Lie, la componente conexa que contiene al elemento unidad G_e es un subgrupo de G.*

Se prueba además que todas las componentes conexas de G, son difeomorfas entre sí.

Campos invariantes de un grupo de Lie

Un grupo de Lie, como variedad diferenciable que es, tiene definido sobre él campos de vectores. Las traslaciones a izquierda l_a como difeomorfismos de G en G, definen isomorfismos entre $T_b(G)$ y $T_{ab}(G)$ mediante:

$$dl_a : T_b(G) \to T_{ab}(G)$$

y también por ser difeomorfismos transforman campos en campos a través de la aplicación:

$$dl_a : X \in \chi(G) \to dl_a(X) \in \chi(G)$$

verificando:

$$dl_a : X_b \to (dl_a(X))_{ab}.$$

Lo mismo tenemos considerando traslaciones a derecha.

Definición 0.1.8. *Un campo X se dice* **invariante a izquierda** *si se verifica:*

$$dl_a : X \to X$$

para todo $a \in G$ y por tanto:

$$dl_a : X_b \to X_{ab}.$$

Gráficamente se interpreta como que la familia de trayectorias de X se transforman por los l_a en la misma familia, transformándose las trayectorias unas en otras.

Es inmediato que de forma análoga a como se han definido los campos invariantes a izquierda, se pueden definir los campos **invariantes a derecha**, sin más que considerar las traslaciones a derecha.

Teorema 0.1.9. *Cada campo invariante a izquierda (resp. derecha) define un vector tangente en cada punto, y recíprocamente, cada vector tangente en un punto define un campo invariante a izquierda (resp. derecha) y sólo uno que defina a dicho vector tangente.*

En lo que sigue, utilizaremos sólo campos invariantes a izquierda con los que quedan unívocamente determinados todos los vectores tangentes.

Proposición 0.1.10. *Se verifican:*

1) La suma de dos campos invariantes a izquierda (resp. derecha) es otro campo invariante a izquierda (resp. derecha).

2) El producto de un número $a \in \mathbb{C}$ por un campo X invariante a izquierda (resp. derecha) es otro campo aX invariante a izquierda (resp. derecha).

*3) El producto corchete $[X, Y]$ de dos campos invariantes a izquierda (resp. derecha) es otro campo invariante a izquierda (resp. derecha). Este producto satisface la propiedades (**AL1**) y (**AL2**) de la Definición 0.2.1.*

El concepto de *álgebra de Lie* se tratará en la siguiente sección de este capítulo. Damos así la siguiente:

Definición 0.1.11. *Se denomina* **álgebra de Lie** *asociada a G al conjunto de todos los campos invariantes a izquierda de G con la suma usual, el producto por escalares y el producto corchete. La denotamos por $\mathcal{L}(G)$ o simplemente $\mathfrak{g}$.*

Teorema 0.1.12. *Considerado como espacio vectorial, $\mathcal{L}(G)$ es isomorfo al espacio tangente $T_e(G)$ en el elemento unidad.*

Definición 0.1.13. *Sea* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *una base de* $\mathcal{L}(G)$ *y*

$$[X_i, X_j] = \sum_{h=1}^{n} c_{i,j}^h X_h \quad , \quad c_{i,j}^h \in \mathbb{C}$$

A las constantes $c_{i,j}^h$ *se las denominan* **constantes de estructura**.

0.2 Álgebras de Lie

Definición 0.2.1. *Un* **álgebra de Lie** $\mathcal{L}$ *es un espacio vectorial sobre el que se define una segunda operación interna y bilineal (denotada por* [,]*), llamada* **producto corchete** *o* **ley del álgebra**, *que satisface las siguientes propiedades:*

$$[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{L} \qquad \textbf{(AL1)}$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{L} \qquad \textbf{(AL2)}$$

La igualdad **(AL2)** se denomina **identidad de Jacobi**. En adelante, la representaremos por $J(X, Y, Z) = 0$.

Definición 0.2.2. *Un álgebra de Lie se dice* **real** *(resp.* **compleja)** *si su cuerpo base, considerada como espacio vectorial, es* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*).*

En adelante, todas las álgebras de Lie que aparezcan en esta Memoria las supondremos complejas.

Definición 0.2.3. *Se denomina* **dimensión** *del álgebra a la que tiene como espacio vectorial.*

De **(AL1)** se deduce que $[X, Y] = -[Y, X]$, aplicando la bilinealidad al producto $[X + Y, X + Y] = 0$.

Definición 0.2.4. *Se denomina* **subálgebra** *de Lie de* $\mathcal{L}$ *a todo subespacio vectorial* $J \subset \mathcal{L}$ *tal que* $[X, Y] \in J$ *para todo* $X, Y \in J$.

Definición 0.2.5. *Un álgebra de Lie* $\mathcal{L}$ *se dice* **conmutativa** *o* **abeliana** *si* $[X, Y] = 0$ *para todo* X, $Y \in \mathcal{L}$.

Definición 0.2.6. *Se dice que* I *es un* **ideal** *de* $\mathcal{L}$ *si* I *es una subálgebra de* $\mathcal{L}$ *verificando que* $[X, Y] \in I$ *para todo* $X \in I,\ Y \in \mathcal{L}$.

Definición 0.2.7. *Se denomina* **centro** *del álgebra de Lie* $\mathcal{L}$ *al conjunto* $Z(\mathcal{L})$ *de elementos* $X \in \mathcal{L}$ *tales que* $[X, Y] = 0$ *para todo* $Y \in \mathcal{L}$. *El* **centralizador** *en* $\mathcal{L}$ *de un ideal* $I \subseteq \mathcal{L}$ *es el ideal* $Z_{\mathcal{L}}(I)$ *de todos los elementos de* $\mathcal{L}$ *que conmutan con todos los de* I.

Definición 0.2.8. *Sea* $\mathcal{L}$ *un álgebra de Lie. Se denomina* **álgebra derivada** *de* $\mathcal{L}$ *y se denota por* $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ *al conjunto de elementos de la forma* $[X, Y]$, *para todo* X, $Y \in \mathcal{L}$.

Formas invariantes a izquierda

Sea G un grupo de Lie, $\omega \in \Lambda(G)$ una s-forma sobre G y l_a la traslación a izquierda por a. El difeomorfismo l_a subordina entre las formas la aplicación $\delta l_a : \delta l_a(\omega) \leftarrow \omega$ tal que:

$$\delta l_a(\omega)(X_1, ..., X_s) = \omega(dl_a(X_1), ..., dl_a(X_s)) \circ l_a.$$

Si $x \in G$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\delta l_a(\omega)(X_1, ..., X_s)_x = \omega(dl_a(X_1), ..., dl_a(X_s))_{ax}.$$

Definición 0.2.9. *Se dice que ω es* **invariante a izquierda** *si:*

$$\delta l_a(\omega) = \omega$$

para todo $a \in G$.

Si ω es invariante a izquierda, entonces tenemos:

$$\omega(X_1, ..., X_s)_x = \delta l_a(\omega)(X_1, ..., X_s)_x = \omega(dl_a(X_1), ..., dl_a(X_s))_{ax}$$

y si además son invariantes a izquierda todos los campos $X_i \in \mathcal{L}(G)$, tenemos:

$$\delta l_a(\omega)(X_1, ..., X_s)_x = \omega(X_1, ..., X_s)_{ax}$$

La relación entre campos y formas invariantes a izquierda viene dada fundamentalmente por el siguiente teorema:

Teorema 0.2.10. *Una s-forma ω es invariante a izquierda si y sólo si los valores de $\omega(X_1, ..., X_s)$ sobre campos invariantes a izquierda son constantes.*

Puede probarse a partir de esta definición que las formas invariantes a izquierda constituyen una subálgebra de $\Lambda(G)$.

Teorema 0.2.11. *Si X e $Y \in \mathcal{L}(G)$ y $\omega \in \Lambda_1(G)$ son invariantes a izquierda, entonces:*

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]).$$

El siguiente resultado permite expresar $d\omega_i$ en función de las constantes de estructura:

Teorema 0.2.12. *Si $X_1, ..., X_n$ es una base de campos invariantes a izquierda y $\omega_1, ..., \omega_n$ es la base dual, se verifica:*

$$d\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} c^i_{jk}(\omega_j \wedge \omega_k) = -\sum_{j<k} c^i_{jk}(\omega_j \wedge \omega_k)$$

para i=1,...,n siendo c^i_{jk} las constantes de estructura.

Homomorfismos de grupos de Lie

Definición 0.2.13. *Sean H y G dos grupos de Lie. Una aplicación $\phi : H \to G$ se dice que es un* **homomorfismo de grupos de Lie** *si verifica:*

1.- *ϕ es aplicación diferenciable.*

2.- *ϕ es un homomorfismo de grupos, es decir, $\phi(e) = e'$ y $\phi(hh') = \phi(h)\phi(h')$ (donde e y e' son los elementos unidad de G y G', respectivamente, y $h, h' \in G$).*

Si este último homomorfismo es un isomorfismo, se dice que es un **isomorfismo** *de grupos de Lie. Y si el isomorfismo es de un grupo en si mismo, se dice* **automorfismo**.

Definición 0.2.14. *Sean H y G dos grupos de Lie y $\mathcal{L}(G)$ y $\mathcal{L}(H)$ sus respectivas álgebras de Lie. Una aplicación $\xi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(G)$ se dice* **homomorfismo de álgebras de Lie** *si es lineal y tal que para todo par X, $Y \in \mathcal{L}(H)$ se verifica:*

$$\xi[X, Y] = [\xi(X), \xi(Y)].$$

Si además ξ es biyectiva, se dice **isomorfismo de álgebras de Lie**, *y si $H = G$ se dice que el isomorfismo es* **automorfismo de álgebras de Lie** .

Teorema 0.2.15. *Si H y G son dos grupos de Lie y $\phi : H \to G$ es un homomorfismo entre ellos, la aplicación $d\phi$ es un homomorfismo entre sus álgebras $\mathcal{L}(H)$ y $\mathcal{L}(G)$.*

En general, puede definirse el concepto de homomorfismo de álgebras de Lie a partir del dado en la Definición 0.2.14 para las álgebras asociadas a dos grupos de Lie:

Definición 0.2.16. *Un* **homomorfismo de álgebras de Lie** *es una aplicación lineal $\xi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ que conserva el producto corchete:*

$$\xi([X, Y]_{\mathcal{L}}) = [\xi(X), \xi(Y)]_{\mathcal{L}'} \quad , \qquad \forall X, Y \in \mathcal{L}$$

Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ y ξ es un isomorfismo se dirá que es un **automorfismo de álgebras de Lie**. *El grupo $\mathrm{Aut}(\mathcal{L})$ de todos los automorfismos de álgebras de Lie de $\mathcal{L}$ es un subgrupo del grupo general lineal de $\mathcal{L}$.*

Un automorfismo ξ de álgebras de Lie se dice **unipotente** *si $\xi - 1$ es nilpotente, es decir, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\xi - 1)^n = 0$.*

0.3 Representaciones de grupos de Lie

Definición 0.3.1. *Se denomina* **representación** *de un grupo de Lie G de dimensión n a todo homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \to GL(n, \mathbb{C})$. Si el homomorfismo es inyectivo, G se representa isomórficamente sobre $\phi(G)$, lo que permite expresar el grupo G matricialmente.*

En adelante, cuándo hablemos de representación nos referiremos a representaciones en la que el homomorfismo ϕ es inyectivo.

Un ejemplo particularmente importante resulta el siguiente. Sea $a \in G$ y τ_a el automorfismo interno definido por:

$$\tau_a : x \in G \to axa^{-1} \in G$$

automorfismo que se descompone como $\tau_a = r_a^{-1} \circ l_a$, por lo que se trata de un difeomorfismo y, en consecuencia, de un automorfismo de grupos de Lie. τ_a subordina entre las álgebras la aplicación:

$$\mathrm{d}\tau_a : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G) \ : X \to \mathrm{d}\tau_a(X)$$

que, en el elemento unidad, permite expresar:

$$\mathrm{d}\tau_a : X_e \to (\mathrm{d}\tau_a(X))_e = M_a(X_e)$$

siendo M_a una matriz regular $n \times n$.

Definición 0.3.2. *A la aplicación:*

$$Ad : a \in G \to M_a \in GL(n, \mathbb{C})$$

se la denomina **representación adjunta***.*

Ad es realmente una representación de G, puesto que $Ad : G \to GL(n, \mathbb{C})$ es un homomorfismo, al ser:

$$\tau_{ab} = \tau_a \tau_b \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\tau_{ab} = \mathrm{d}\tau_a \mathrm{d}\tau_b \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\tau_{ab}(X_e) = M_{ab}(X_e)$$

Además,

$$\mathrm{d}\tau_{ab}(X_e) = \mathrm{d}\tau_a(\mathrm{d}\tau_b(X_e)) = \mathrm{d}\tau_a(M_b(X_e)) = M_a M_b(X_e)$$

y comparando,

$$M_{ab} = M_a M_b$$

La representación adjunta $Ad : G \to GL(n, \mathbb{C})$ induce una aplicación $\mathrm{d}(Ad)$ entre las correspondientes álgebras de Lie. Esto lleva a la siguiente:

Definición 0.3.3. *Se denomina* **representación adjunta** *de las álgebras de Lie a la aplicación:*

$$\mathrm{d}(Ad) : \mathcal{L}(G) \to GL(n, \mathbb{C})$$

inducida por la representación Ad. Se denota por ad a la aplicación $\mathrm{d}(Ad)$.

0.4 Subgrupos de Lie.

Definición 0.4.1. *Un* **subgrupo de Lie** *de un grupo de Lie G es un par (H, ϕ) que verifica:*

1.- H es un grupo de Lie.

2.- $\phi(H)$ es una subvariedad de G, es decir, $\phi : H \to G$ es una inmersión, inyectiva y diferenciable.

3.- $\phi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

Definición 0.4.2. *Se dice que (H, ϕ) es un subgrupo* **cerrado** *de G, si el subconjunto $\phi(H)$ es cerrado en G.*

Definición 0.4.3. *Un subespacio $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}(G)$ se dice* **subálgebra de Lie** *de $\mathcal{L}(G)$ si verifica:*

1.- Es subespacio vectorial de $\mathcal{L}(G)$.

2.- Para todo $X, Y \in \mathcal{J}$ se sigue que $[X, Y] \in \mathcal{J}$.

Teorema 0.4.4. *Si H es subgrupo de Lie de G, entonces $\mathcal{L}(H)$ es subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(G)$. Además $\mathrm{d}\phi$ transforma $\mathcal{L}(H)$ en $\mathcal{L}(\phi(H))$ y $\mathrm{d}\phi$ es isomorfismo.*

Teorema 0.4.5. *Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{L}(G)$ su álgebra. Para cada subálgebra $\mathcal{J}$ de $\mathcal{L}(G)$ existe un único subgrupo de Lie conexo cuya álgebra coincide con $\mathcal{J}$, salvo isomorfismo.*

Obsérvese que como consecuencia de los dos últimos teoremas, hay una correspondencia biyectiva entre los subgrupos de Lie conexos de un grupo G y las subálgebras del álgebra $\mathcal{L}(G)$.

Subgrupos uniparamétricos y aplicación exponencial

Definición 0.4.6. *Un* **subgrupo uniparamétrico** *de G es un homomorfismo $\varphi : \mathbb{C} \to G$, entre el grupo aditivo $\mathbb{C}$ de los números complejos y G.*

A cada $t \in \mathbb{C}$ le corresponde un $\varphi(t) \in G$. El subgrupo $\varphi(t)$ depende de un solo parámetro y además, por ser φ homomorfismo, se verifican:

1.- $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$

2.- $\varphi(0) = e$

3.- $\varphi(-t) = \varphi(t)^{-1}$.

Por ser $\varphi(t)$ un subgrupo conexo de G de dimensión 1, se corresponderá biyectivamente con un álgebra de dimensión 1 subálgebra de $\mathcal{L}(G)$, que vendrá definida por un elemento X y todos los de la forma aX con $a \in \mathbb{C}$.

Parece natural entonces plantearse los siguientes problemas:
- Conocido $\varphi(t)$, hallar la subálgebra aX correspondiente
- Conocido X, calcular $\varphi_X(t)$ (donde a partir de ahora designamos por $\varphi_X(t)$ al subgrupo uniparamétrico correspondiente al campo X).

Para su resolución, se tiene en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 0.4.7. *Las curvas $g \cdot \varphi(t)$ para todo $g \in G$, son las trayectorias de un campo invariante a izquierda.*

Este campo en el origen resulta ser:

$$X_e = \frac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}$$

lo que también permite obtener φ_X a partir de X:

$$\varphi_X(t) = \exp(tX_e)$$

Definición 0.4.8. *A la aplicación*

$$exp : \mathcal{L}(G) \to G \ : tX_e \to \varphi_X(t)$$

la denominamos **aplicación exponencial**.

Teorema 0.4.9. *La aplicación exponencial tiene las siguientes propiedades:*

1.- $exp((t_1 + t_2)X_e) = exp(t_1X_e)exp(t_2X_e)$

2.- $exp(-tX_e) = exp(tX_e)^{-1}$.

Teorema 0.4.10. *Si $\phi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, se verifica que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathcal{L}(H) & \xrightarrow[\mathrm{d}\phi]{} & \mathcal{L}(G) \end{array} \tag{1}$$

Dicho de otro modo, si $X \in \mathcal{L}(H)$, se verifica que $\phi(\varphi_X(t)) = \varphi_{\mathrm{d}\phi(X)}(t)$.

En el caso particular que ϕ sea el automorfismo interno τ_a ($a \in G$), podemos escribir (1) como sigue:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\tau_a} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathcal{L}(H) & \xrightarrow[\mathrm{d}\tau_a]{} & \mathcal{L}(G) \end{array}$$

o lo que es lo mismo, si $X \in \mathcal{L}(H)$, entonces $\tau_a(\varphi_X(t)) = \varphi_{\mathrm{d}\tau_a(X)}(t)$.

Si el homomorfismo ϕ es la representación adjunta, podemos escribir:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{Ad} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathcal{L}(H) & \xrightarrow[ad]{} & \mathcal{L}(G) \end{array}$$

lo que equivale a que si $X \in \mathcal{L}(H)$, se verifica $Ad(\varphi_X(t)) = \varphi_{ad(X)}(t)$.

Una condición necesaria y suficiente para la conmutatividad en $\mathcal{L}(G)$ de un campo invariante a izquierda X viene dada por la siguiente:

Proposición 0.4.11. *El campo X invariante a izquierda asociado al subgrupo uniparamétrico $\varphi_X(t)$ es conmutativo en $\mathcal{L}(G)$ si y sólo si:*

$$g \cdot \varphi_X(t) = \varphi_X(t) \cdot g.$$

0.5 Tipos de álgebras de Lie

Definición 0.5.1. *Un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se dice* **simple** *si no es conmutativa ni contiene ideales no triviales (los ideales triviales son la propia álgebra $\mathcal{L}$ y el álgebra nula $\{0\}$).*

Las álgebras simples verifican $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = \mathcal{L}$, ya que $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ es un ideal de $\mathcal{L}$ no nulo (pues $\mathcal{L}$ no es conmutativa) y no existe otro ideal.

Definición 0.5.2.

Un álgebra de Lie se dice **semisimple** *cuando no contiene ideales abelianos (conmutativos) no triviales.*

Es claro que toda álgebra de Lie simple es semisimple, pero el recíproco no es cierto. Se prueba que las álgebras de Lie semisimples verifican $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = \mathcal{L}$ y que toda álgebra semisimple es suma directa de álgebras simples.

Además de las álgebras de Lie simples y semisimples, hay otros dos tipos de álgebras de Lie muy importantes: las *resolubles* y las *nilpotentes*.

Definición 0.5.3. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie y consideremos la siguiente sucesión, denominada* **sucesión de resolubilidad***:*

$$\mathcal{C}_1(\mathcal{L}) = \mathcal{L},\ \mathcal{C}_2(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}, \mathcal{L}],\ \mathcal{C}_3(\mathcal{L}) = [\mathcal{C}_2(\mathcal{L}), \mathcal{C}_2(\mathcal{L})],\ \ldots,$$
$$\mathcal{C}_k(\mathcal{L}) = [\mathcal{C}_{k-1}(\mathcal{L}), \mathcal{C}_{k-1}(\mathcal{L})],\ \ldots$$

Se dice que $\mathcal{L}$ es **resoluble** *cuando existe un número natural m tal que $\mathcal{C}_m(\mathcal{L}) \equiv \{0\}$. Al menor m verificando dicha propiedad se le denomina* **índice de resolubilidad** *del álgebra.*

Definición 0.5.4. *Consideremos, a partir de $\mathcal{L}$, otra sucesión, denominada* **sucesión de nilpotencia***:*

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{L}) = \mathcal{L}, \mathcal{C}^2(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}, \mathcal{L}], \mathcal{C}^3(\mathcal{L}) = [\mathcal{C}^2(\mathcal{L}), \mathcal{L}], \ldots, \mathcal{C}^k(\mathcal{L}) = [\mathcal{C}^{k-1}(\mathcal{L}), \mathcal{L}], \ldots$$

Se dice que $\mathcal{L}$ es **nilpotente** *cuando existe un número natural m tal que $\mathcal{C}^m(\mathcal{L}) \equiv \{0\}$. Al menor m verificando dicha propiedad se le denomina* **índice de nilpotencia** *del álgebra.*

Se prueba fácilmente que $\mathcal{C}_k(\mathcal{L}) \subset \mathcal{C}^k(\mathcal{L})$, de donde se deduce que toda álgebra nilpotente es resoluble. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Hasta ahora, se han visto dos grandes tipos de álgebras de Lie: las semisimples y las resolubles, de las que las simples y las nilpotentes son casos particulares respectivos. Sin embargo, no todas las álgebras pertenecen a alguno de estos tipos. Esto ocurre porque si derivamos un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ y formamos la sucesión $\mathcal{C}_1(\mathcal{L})$, $\mathcal{C}_2(\mathcal{L})$, ..., $\mathcal{C}_k(\mathcal{L}), \ldots$, puede ocurrir que las álgebras de esta sucesión vayan disminuyendo de dimensión hasta que se llega a una $\mathcal{C}_k(\mathcal{L})$ tal que $\mathcal{C}_k(\mathcal{L}) = \mathcal{C}_{k+1}(\mathcal{L})$ y a partir de ella ya se repiten todas. Por tanto, en este caso, el álgebra de Lie inicial $\mathcal{L}$ no sería ni semisimple ni resoluble.

Álgebras de Lie resolubles

Se acaba de recordar que un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se dice **resoluble** si existe un término de la sucesión $\mathcal{L} \supset \mathcal{C}_2(\mathcal{L}) \supset \mathcal{C}_3(\mathcal{L}) \supset \ldots \supset \mathcal{C}_k(\mathcal{L}) \supset \ldots$ tal que $\mathcal{C}_m(\mathcal{L}) \equiv \{0\}$. Obviamente entonces, $\mathcal{C}_p(\mathcal{L}) \equiv \{0\} \quad \forall p \geq m$.

Algunas propiedades de estas álgebras son las siguientes:

Teorema 0.5.5. *Toda subálgebra (y como consecuencia, todo ideal) de un álgebra de Lie resoluble $\mathcal{L}$ es resoluble. Más aún, $\mathcal{C}_k(\mathcal{L})$ es ideal de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{C}_{k-1}(\mathcal{L})$.*

Proposición 0.5.6. *Si dos álgebras de Lie $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son resolubles y $\mathcal{L}$ es subálgebra de $\mathcal{L}'$, entonces se verifica:*

$$\mathcal{C}_k(\mathcal{L}) \subset \mathcal{C}_k(\mathcal{L}'), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se prueba también que la intersección, la suma y el producto de dos ideales resolubles de un álgebra de Lie (no necesariamente resoluble) son también ideales resolubles.

Consecuencia de lo anterior es la siguiente:

Proposición 0.5.7. *La suma de todos los ideales resolubles de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ es otro ideal resoluble del álgebra, que se denota por $\mathrm{rad}\,\mathcal{L}$, denominado* **radical** *de $\mathcal{L}$.*

Nótese que si $\mathcal{L}$ es resoluble, entonces $\mathcal{L} \equiv rad\,\mathcal{L}$. Por otra parte, también se prueba que si S es un álgebra de Lie semisimple, entonces $rad\,S \equiv 0$. A partir de esta propiedad, se prueba el siguiente:

Teorema 0.5.8 (Teorema de descomposición de Levi). *Toda álgebra de Lie $\mathcal{L}$ puede descomponerse en suma de su radical y de un álgebra semisimple.*

Álgebras de Lie nilpotentes

Recordamos que un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ es **nilpotente** cuando algún término de la sucesión:

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{L}) = \mathcal{L}, \mathcal{C}^2(\mathcal{L}) = [\mathcal{L},\mathcal{L}], \mathcal{C}^3(\mathcal{L}) = [\mathcal{C}^2(\mathcal{L}),\mathcal{L}], \ldots, \mathcal{C}^k(\mathcal{L}) = [\mathcal{C}^{k-1}(\mathcal{L}),\mathcal{L}], \ldots$$

es nulo. Se van a ver a continuación aquellas propiedades de estas álgebras, de las que nos valdremos en la presente Memoria.

Se prueba que toda álgebra nilpotente no nula tiene un centro no nulo y también que si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie nilpotente y $\mathcal{C}^m(\mathcal{L}) \equiv \{0\}$, entonces todo $x \in \mathcal{L}$ es tal que $(ad_x)^{m-1} \equiv 0$.

En las álgebras de Lie nilpotentes, se verifican los dos siguientes resultados:

Proposición 0.5.9. *Si dos álgebras de Lie $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son nilpotentes y $\mathcal{L}$ es subálgebra de $\mathcal{L}'$, entonces se verifica:*

$$\mathcal{C}^k(\mathcal{L}) \subset \mathcal{C}^k(\mathcal{L}')\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 0.5.10. *En toda álgebra de Lie nilpotente $\mathcal{L}$, de dimensión n, existen un elemento $X_1 \notin \mathcal{C}^2(\mathcal{L})$ y una base que lo contiene, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, tales que:*

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0 \\ [X_1, X_k] = \varepsilon_{k-1}\ X_{k-1}, \quad k = 3, \ldots, n, \quad \varepsilon_{k-1} = 0, 1 \end{cases}$$

Álgebras de Lie filiformes

Un caso particular importante de álgebras de Lie lo constituyen aquellas álgebras de Lie nilpotentes para las que $\varepsilon_k = 1, \ \forall k$, en el Teorema 0.5.10. Estas álgebras fueron introducidas por Vergne (véase [28]) en 1966 y se denominan *filiformes*.

Hay otra forma, muy usual, de definir las álgebras de Lie filiformes; se puede probar (ver [29], [13], [18]) que la definición anterior es equivalente a la siguiente:

Definición 0.5.11. *Un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n, $\mathcal{L}$ se denomina* **filiforme** *si las dimensiones de los ideales $\mathcal{C}^2(\mathcal{L}), \ldots, \mathcal{C}^k(\mathcal{L}), \ldots, \mathcal{C}^n(\mathcal{L})$ son, respectivamente, $n-2, \ldots, n-k, \ldots, 0$.*

Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ una base de $\mathcal{L}$ tal que $[X_1,X_2]=0$ y $[X_1,X_h]=X_{h-1}$, con $h=3,\ldots,n$, donde X_1 es un vector de $\mathcal{L}$, no perteneciente a $\mathcal{C}^2(\mathcal{L})$, que viene definido por el Teorema 0.5.10. Por tanto, se verificarán:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C}^2(\mathcal{L}) & \equiv & \langle X_2,\ldots\ldots,X_{n-1}\rangle, \\
\mathcal{C}^3(\mathcal{L}) & \equiv & \langle X_2,\ldots,X_{n-2}\rangle, \\
 & \vdots & \\
\mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{L}) & \equiv & \langle X_2\rangle, \\
\mathcal{C}^{n}(\mathcal{L}) & \equiv & \{0\}.
\end{array}$$

Entonces, para un $h>2$, se deduce que:

$$[X_h,X_n]=c_{hn}^{h-1}X_{h-1}+\ldots+c_{hn}^{2}X_2$$

pudiendo algunos coeficientes o todos ser nulos.

De dicha igualdad se tiene que $[X_3,X_n]=\alpha\ X_2$. Si $\alpha\neq 0$, el cambio de base dado por $X'_n=X_n+\alpha\ X_1$, nos permite conseguir que $[X_3,X'_n]=0$, sin que cambien los demás elementos de la base ya que $[X_1,X'_n]=[X_1,X_n+\alpha\ X_1]=X_{n-1}$ y análogo para los siguientes.

Por esta razón puede suponerse entonces que todas las bases que utilizamos verifican:

$$[X_1,X_2]=0\ ;\ \ [X_1,X_h]=X_{h-1}\ (h=3,\ldots,n);\ \ [X_3,X_h]=0\ (h=2,\ldots,n)$$

Se tiene así la siguiente:

Definición 0.5.12. *Una base $\{X_1,\ldots,X_n\}$ del álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se denomina* **base adaptada** *si verifica:*

$$[X_1,X_2]=0,\quad [X_1,X_h]=X_{h-1}\ \ (h=3,\ldots,n),\quad [X_3,X_h]=0\ (h=2,\ldots,n).$$

Definición 0.5.13. *Un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$, de dimensión n, se denomina* **modelo** *si sus únicos productos no nulos, respecto de una base adaptada $\{X_1,\ldots,X_n\}$ son los $[X_1,X_h]=X_{h-1}\quad (h=3,\ldots,n)$.*

Se prueba que hay un álgebra de Lie filiforme modelo en cada dimensión.

Tipos de grupos de Lie

Los grupos de Lie reciben el mismo nombre que sus respectivas álgebras de Lie. De este modo, hay grupos de Lie **simples**, **semisimple**, **resolubles**, **nilpotentes**, **filiformes**, ...

Respecto a las representaciones de grupos de Lie se tienen los dos siguientes teoremas:

Teorema 0.5.14. *Los elementos de un grupo de Lie resoluble simplemente conexo pueden representarse por matrices cuadradas triangulares superiores que sean regulares.*

Teorema 0.5.15. *Los elementos de un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo pueden representarse por matrices cuadradas triangulares superiores unipotentes (elementos de la diagonal principal iguales a 1).*

En virtud del teorema anterior, los grupos de Lie nilpotentes son subgrupos de los grupos de Lie G_n de la forma:

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1,n} \\ 0 & 1 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y cuya dimensión resulta ser:

$$\dim(G_n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Estos grupos serán estudiados en profundidad en la Sección 1.1, obteniéndose un algoritmo para determinar la ley de su álgebra de Lie asociada. Como es bien sabido, los elementos del álgebra $\mathfrak{g}_n$ asociada al grupo de Lie G_n vienen dados por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1,n} \\ 0 & 0 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

También queremos recordar las dos representaciones tradicionales del grupo de Lie conmutativo simplemente conexo de dimensión n. La primera de ella viene dada por matrices $(n+1) \times (n+1)$ siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

que es el grupo de traslaciones de $\mathbb{C}^n$. La segunda representación viene dada por las matrices diagonales $n \times n$ siguientes:

$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{x_n} \end{pmatrix} \tag{4}$$

En los capítulos de esta Memoria vamos a dar representaciones de los grupos conmutativos de dimensión n mediante matrices de orden no superior a $n \times n$, para $n = 5, 6$. En concreto, se representarán estos dos grupos de Lie conmutativos por matrices de orden 5×5.

Capítulo 1

ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES DE DIMENSIÓN MENOR QUE 6.

En este capítulo se va a obtener una representación de los grupos de Lie asociados a cada una de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor que 6 y que no se descompongan en suma directa de otras. La propiedad fundamental de dichas representaciones es que serán mínimas, en el sentido de que no se podrá obtener una representación con matrices de menor orden que el obtenido en cada caso.

La pauta que seguiremos será hallar subálgebras de Lie de las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_n$ asociadas a los grupos de Lie G_n, con $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el grupo G_n está constituido por las matrices cuadradas triangulares superiores de orden n, con diagonal principal formada por "1".

El motivo por el que se van a utilizar los grupos de Lie G_n para obtener los grupos de Lie asociados a las álgebras de Lie nilpotentes reside en que estos grupos de Lie son nilpotentes y, en virtud del Teorema 0.5.15, los grupos de Lie nilpotentes son representables por subgrupos de G_n.

Para ello, la primera sección de este capítulo se dedicará al estudio de las álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}_n$ asociadas a los grupos de Lie G_n. Daremos un procedimiento para deducir la ley del álgebra $\mathfrak{g}_n$ sin necesidad de realizar cálculo álguno, una vez establezcamos el procedimiento antes mencionado y que se apoyará en el Teorema 1.1.7. Igualmente daremos una obstrucción a la integrabilidad de las álgebras de Lie filiformes de dimensión n en el grupo G_{n-1}.

Una vez hecho esto, veremos cuál será el orden mínimo en el que podremos hallar el grupo de Lie simplemente conexo asociado a cada álgebra de Lie nilpotente que estemos tratando en cada momento. Seguidamente buscaremos un ejemplo de cada uno de los casos que no hayamos descartado en el G_n con menor n posible.

Queremos aclarar que las dimensiones que nos ocupan en este capítulo (dimensiones 1, 2, 3, 4 y 5) sólo requerirán de los grupos:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_5 = \begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1 Estudio general de los grupos de Lie G_n.

En esta sección estudiamos de forma general los grupos G_n y tendremos como objetivo principal el de representar, respecto de cierta base, la ley del álgebra de Lie asociada a dicho grupo, que resulta ser nilpotente de dimensión $\binom{n}{2}$. Como consecuencia podremos establecer el siguiente resultado:

Teorema. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado a un álgebra de Lie filiforme de dimensión n no puede representarse como un subgrupo del grupo de matrices G_{n-1}.*

Antes de dar la demostración de este teorema, necesitaremos algunos resultados previos.

Para disponer de una notación apropiada, denotaremos a las matrices del grupo G_n, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, del siguiente modo:

$$g_n(x_{1,2}, x_{1,3}, \ldots, x_{n-2,n}, x_{n-1,n}) = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1,n} \\ 0 & 1 & x_{2,3} & x_{2,4} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & x_{3,4} & \cdots & x_{3,n-1} & x_{3,n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & x_{4,n-1} & x_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Con la notación usada en (1.1), podemos observar fácilmente cómo G_{n-1} está contenido en G_n, sin más que eliminar la última fila y la última columna, como puede verse a continuación:

$$G_n = \left(\begin{array}{cccccc|c} & & & & & & x_{1,n} \\ & & & & & & x_{2,n} \\ & & G_{n-1} & & & & x_{3,n} \\ & & & & & & x_{4,n} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & x_{n-1,n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1.2}$$

La dimensión del grupo G_n es:

$$\dim(G_n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En virtud de (1.1), la columna j-ésima ($j = 1, \ldots, n$) de los elementos del grupo G_n es de la forma:

$$\left(x_{1,j} \ \ x_{2,j} \ , \ \ldots \ , \ x_{j-1,j} \ , \ \underbrace{1}_{j} \ , \ 0 \ , \ \ldots \ , \ 0 \right)^t$$

El siguiente paso que daremos será la obtención de un conjunto de campos de vectores invariantes a izquierda que formen una base del álgebra de Lie asociada al grupo G_n. Para ello vamos a considerar los subgrupos uniparamétricos del grupo G_n que aparecen a continuación:

$$\varphi_{i,j}(t) = g_n(0, \ldots, 0, x_{i,j} = t, 0, \ldots, 0), \qquad \begin{array}{l} (j = 2, \ldots, n,) \\ (i = 1, \ldots, j-1) \end{array} \tag{1.3}$$

que consisten en considerar el grupo formado por las matrices cuadradas de orden n con diagonal principal sólo de "1" y todos sus elementos nulos salvo $x_{i,j}$, que es igual a t.

Dichos grupos son subgrupos uniparamétricos, ya que se verifica de forma inmediata:

1. $\varphi_{i,j}(0) = Id_n$.
2. $\varphi_{i,j}(t + s) = \varphi_{i,j}(t)\varphi_{i,j}(s)$.
3. $\varphi_{i,j}(-t) = \varphi_{i,j}(t)^{-1}$.

Una vez tenemos los $\binom{n}{2}$ subgrupos uniparamétricos, vamos a hallar los campos asociados a éstos. Para ello, recordemos que el campo $X_{i,j}$ asociado al subgrupo uniparamétrico $\varphi_{i,j}(t)$ se obtiene como la componente en el origen de las tangentes a las trayectorias $g_n \cdot \varphi_{i,j}(t)$ que pasan por un punto genérico de G_n. Para ello, basta calcular:

$$\frac{d}{dt}(g_n \cdot \varphi_{i,j}(t))|_{t=0}.$$

El resultado de ese proceso es el campo invariante a izquierda asociado a $\varphi_{i,j}(t)$, expresado como una matriz triangular superior de orden n con diagonal principal de "0".

Recuérdese que el subíndice (i, j) de los términos $x_{i,j}$ de la matriz G_n estaba determinado por la fila y la columna en la que se encontraban, respectivamente. Por tanto, los subíndices correspondientes a la columna j-ésima de G_n son los siguientes:

$$\{(i, j) \,:\, i = 1, \ldots, j-1\}\,.$$

Volviendo al estudio del producto $g_n \cdot \varphi_{i,j}(t)$, el término a_{hl} de la matriz resultante se obtiene multiplicando la fila h-ésima de g_n por la columna l-ésima de $\varphi_{i,j}(t)$.

De este modo, para hallar el campo $X_{k,j}$ asociado al subgrupo uniparamétrico $\varphi_{k,j}(t)$, vamos a ver que los únicos términos en $g_n \cdot \varphi_{k,j}(t)$ que contienen la variable t son los obtenidos al multiplicar por la columna j-ésima de $\varphi_{k,j}(t)$ las filas h-ésimas de g_n, con $h \leq j$. Llegamos, por tanto, a la siguiente:

Proposición 1.1.1. *En las condiciones anteriores, sean $j \in \{2, \ldots, n\}$ y $k \in \{1, \ldots, j-1\}$. La columna i-ésima del producto $g_n \cdot \varphi_{k,j}$ tiene la siguiente expresión:*

$$\begin{cases} (x_{1,i}, \ldots, x_{i-1,i}, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)^t, & si\ i \neq j. \\ (tx_{1,k} + x_{1,j}, \ldots, tx_{k-1,k} + x_{k-1,j}, t + x_{k,j}, x_{k+1,j}, \cdots, x_{j-1,j}, \underbrace{1}_{j}, 0 \ldots, 0)^t, & si\ i = j. \end{cases}$$

Demostración. El subgrupo uniparamétrico $\varphi_{k,j}(t)$ tiene diagonal principal de "1" y los restantes elementos nulos, salvo el que ocupa el lugar (k, j), cuyo valor es t. Recuérdese que la coordenada $x_{k,j}$ de g_n es la correspondiente a la situada en la fila k-ésima y en la columna j-ésima. Por tanto, la columna s-ésima de $\varphi_{k,j}(t)$ tiene una de las dos siguientes expresiones:

$$\begin{cases} (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{s}, 0, \ldots, 0)^t, & \text{si} \quad s \neq j. \\ (0, \ldots, 0, \underbrace{t}_{k}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)^t, & \text{si} \quad s = j. \end{cases} \tag{1.4}$$

Si la matriz $M = (a_{rs})_{rs}$ es la obtenida con el producto $g_n \cdot \varphi_{k,j}(t)$, entonces M tiene por término a_{rs} al producto de la fila r-ésima de g_n con la columna s-ésima de $\varphi_{k,j}(t)$.

Como la fila r-ésima de g_n tiene por expresión:

$$(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{r}, x_{r,r+1}, \ldots, x_{r,n}),$$

el termino a_{rs} de la matriz M se obtiene con el producto:

$$(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{r},x_{r,r+1},\ldots,x_{r,n})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \underbrace{1}_{s}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{cases}0, & \text{si} \quad s<r,\\ 1, & \text{si} \quad s=r,\\ x_{r,s}, & \text{si} \quad s>r,\end{cases}\tag{1.5}$$

si $s \neq j$; y con el producto:

$$(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{r},x_{r,r+1},\ldots,x_{r,n})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \underbrace{t}_{k}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \underbrace{1}_{j}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{cases}0, & \text{si} \quad k,j<r,\\ 1, & \text{si} \quad k<r=j,\\ x_{r,j}, & \text{si} \quad k<r<j,\\ t+x_{r,j}, & \text{si} \quad k=r<j,\\ tx_{r,k}+x_{r,j}, & \text{si} \quad r<k,j,\end{cases}\tag{1.6}$$

si $s = j$.

En consecuencia, la columna i-ésima de $g_n \cdot \varphi_{k,j}(t)$ es la formada por los términos a_{ri} con $r = 1,\ldots,n$. Las expresiones de los términos a_{ri} dadas en (1.5) y (1.6) permiten concluir la prueba. □

A continuación, obtendremos los campos diferenciables de vectores tangentes asociados a los subgrupos uniparamétricos $\varphi_{i,j}(t)$ que hemos indicado en (1.3). Esto es lo que hacemos en la siguiente:

Proposición 1.1.2. *Sea $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. El subgrupo uniparamétrico de G_n definido como:*

$$\varphi_{k,j}(t) = g_n(0,\ldots,0,x_{k,j}=t,0,\ldots,0), \qquad \begin{matrix}(j=2,\ldots,n)\\ (k=1,\ldots,j-1)\end{matrix}$$

tiene asociado el siguiente campo invariante a izquierda:

$$X_{k,j} = e_{k,j} + \sum_{h=1}^{k-1} x_{h,k}e_{h,j}.\tag{1.7}$$

Demostración. Sea el subgrupo uniparamétrico $\varphi_{k,j}(t)$ del grupo de Lie G_n. En virtud de la Proposición 1.1.1, tenemos las expresiones de las columnas del producto $g_n \cdot \varphi_{k,j}(t)$. De las n columnas que componen dicho producto, sólo la j-ésima contiene términos en los que aparece la variable t. Por lo tanto, al derivar respecto de t los términos de $g_n \cdot \varphi_{k,j}(t)$, en las restantes columnas obtenemos 0.

Estudiemos detenidamente la columna j-ésima de $g_n \cdot \varphi_{k,j}(t)$. La expresión de esta columna, según la Proposición 1.1.1, es:

$$(tx_{1,k} + x_{1,j}, \ldots, tx_{k-1,k} + x_{k-1,j}, t + x_{k,j}, x_{k+1,j}, \cdots, x_{j-1,j}, \underbrace{1}_{j}, 0 \ldots, 0)^t.$$

Al derivar cada uno de los términos, nos queda la columna siguiente:

$$(x_{1,k}, \ldots, x_{k-1,k}, \underbrace{1}_{k}, 0, \cdots, 0)^t. \tag{1.8}$$

Como el elemento unidad se obtiene en el subgrupo uniparamétrico $\varphi_{k,j}(t)$ cuando se considera $t = 0$, entonces la columna dada en (1.8) resulta ser la correspondiente columna j-ésima del campo $X_{k,j}$ diferenciable invariante a izquierda asociado al subgrupo uniparamétrico $\varphi_{k,j}(t)$. Esto concluye la demostración. □

Nota 1.1.3. *Los puntos de G_n se corresponden biyectivamente con los de $\mathbb{C}^{\binom{n}{2}}$. Por tanto, los campos de vectores invariantes a izquierda podemos expresarlos como combinación de la base canónica de $\mathbb{C}^{\binom{n}{2}}$:*

$$e_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}, \qquad (j = 2, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, j-1),$$

donde $(x_{i,j})_{i,j}$ son las coordenadas cartesianas globales de $\mathbb{C}^{\binom{n}{2}}$ dadas en (1.1).

Nota 1.1.4. *La Proposición 1.1.2 viene a decir que el campo $X_{k,j}$ proveniente de la coordenada $x_{k,j}$, situada en la columna j-ésima y en la fila k-ésima, se obtiene multiplicando la traspuesta de la columna k-ésima de g_n por la columna dada por:*

$$(e_{1,j}, \ldots, e_{j-1,j}, 0, \ldots, 0)^t,$$

esto es, se obtiene mediante el siguiente producto:

$$(x_{1,k}, \ldots, x_{k-1,k}, \underbrace{1}_{k}, 0 \ldots, 0) \begin{pmatrix} e_{1,j} \\ \vdots \\ e_{j-1,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seguidamente demostraremos que el conjunto $\{X_{k,j}\}_{k,j}$ de campos diferenciables invariantes a izquierda obtenido anteriormente forman una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$ asociada al grupo G_n.

Corolario 1.1.5. *El conjunto $\{X_{k,j}\}_{k,j}$ de campos diferenciables invariantes a izquierda obtenido en la Proposición 1.1.2 es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$ asociada al grupo G_n.*

Demostración. En virtud de la Proposición 1.1.2, los campos $X_{k,j}$ correspondientes a la columna j-ésima del grupo G_n pertenecen al submódulo de $\chi(G_n)$ generado por el conjunto $\{e_{k,j}\}_{k=1}^{j-1}$. En consecuencia, todo campo que provenga de una columna distinta a la que pertenecen $\{X_{k,j}\}_{k=1}^{j-1}$ es linealmente independiente de éstos.

Por tanto, quedaría por probar que el conjunto $\{X_{k,j}\}_{k=1}^{j-1}$ de los campos correspondientes a la columna j-ésima es linealmente independiente. Pero esto es inmediato, ya que si fijamos el par (k,j), el campo $X_{k,j}$ es combinación funcional del conjunto $\{e_{h,j}\}_{h=1}^{k}$. Luego el campo $X_{k,j}$ es linealmente independiente de $\{X_{h,j}\}_{h=1}^{k-1}$, ya que en los campos que aparecen en este último conjunto no aparece el campo $e_{k,j}$.

En consecuencia, tenemos $\binom{n}{2}$ campos diferenciables invariantes a izquierda linealmente independientes, por lo que forman una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$. $\square$

Nota 1.1.6. *Obsérvese que la base de campos $\{X_{k,j}\}_{k,j}$ que se obtiene en la Proposición 1.1.2 para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$, está contenida en la base que se obtiene al cortar por los hiperplanos $x_{1,n+1}=0, \ldots, x_{n,n+1}=0$ en $\mathfrak{g}_{n+1}$, en virtud de la expresión que tienen estos campos en* (1.7).

A continuación, daremos un resultado que permitirá establecer la ley del álgebra respecto de la base $\{X_{k,j}\}_{k,j}$. Para ello, calculamos los productos corchete en los que interviene un campo cualquiera proveniente de la columna n-ésima de G_n. Esto no es un impedimento para el cálculo de los restantes productos, ya que si $k<n$, la columna k-ésima de G_n puede verse como la columna k-ésima de G_k sin más que eliminar las $n-k$ últimas columnas y filas de G_n.

Teorema 1.1.7. *Sea $X_{k,n}$ el campo diferenciable invariante a izquierda asociado al subgrupo uniparamétrico $\varphi_{k,n}(t)$. Entonces los productos corchetes con los restantes campos de $\{X_{i,j}\}_{i,j}$ son todos nulos, a excepción de los que se obtienen multiplicando por los campos correspondientes a la columna k-ésima de G_n:*

$$[X_{i,k}, X_{k,n}] = X_{i,n}, \qquad \forall i = 1, \ldots, k-1. \tag{1.9}$$

Demostración. En virtud de (1.7), la expresión del campo $X_{k,n}$ es:

$$X_{k,n} = e_{k,n} + \sum_{i=1}^{k-1} x_{i,k} e_{i,n}.$$

Para que un campo $X_{i,j}$ no conmute con $X_{k,n}$ debe cumplirse una de las dos siguientes condiciones:

1. Debe tener como coeficiente a alguna función de $x_{h,n}$ $(h = 1, \ldots, k)$.

2. Debe haber algún $e_{h,k}$ $(h = 1, \ldots, k-1)$ entre los campos que lo generan.

Para ver cuáles son los campos que verifican alguna de estas dos condiciones vamos a recurrir a la expresión de los campos dada en (1.7). De este modo, podemos afirmar que la condición 1 no es satisfecha por ninguno de los campos $X_{i,j}$, mientras que la condición 2 sólo la verifican los campos $X_{i,j}$ que provienen de la columna k-ésima. En consecuencia, todos los campos $X_{i,j}$ conmutan con $X_{k,n}$, excepto los que provienen de la columna k-ésima.

Únicamente resta hallar el resultado de estos productos no nulos. Para ello, debemos recordar cuál era la expresión de los campos $X_{h,k}$ $(h = 1, \ldots, k-1)$, que son los que provienen de la columna k-ésima. Dicha expresión se obtiene por (1.7) y resulta ser:

$$X_{h,k} = e_{h,k} + \sum_{j=1}^{h-1} x_{j,h} e_{j,k}, \quad h = 1, \ldots, k-1.$$

Recuérdese que el producto corchete entre dos campos viene dado por :

$$[X_{h,k}, X_{k,n}] = X_{h,k} X_{k,n} - X_{k,n} X_{h,k}.$$

Por tanto, calcular el corchete consiste en calcular $X_{h,k}X_{k,n}$ y $X_{k,n}X_{h,k}$.

Es evidente que $X_{k,n}X_{h,k}$ es 0, ya que $X_{h,k}$ no posee ningún coeficiente que sea función de algún $x_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Por otro lado, $X_{h,k}X_{k,n}$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
X_{h,k}X_{k,n} &= (e_{h,k} + \textstyle\sum_{j=1}^{h-1} x_{j,h} e_{j,k})(e_{k,n} + \sum_{i=1}^{k-1} x_{i,k} e_{i,n}) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} e_{h,k}(x_{i,k}) e_{i,n} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{h-1} x_{j,h} e_{j,k}(x_{i,k}) e_{i,n} \\
&= e_{h,n} + \textstyle\sum_{j=1}^{h-1} x_{j,h} e_{j,n}.
\end{aligned}$$

En virtud de (1.7), se tiene que:

$$X_{h,k}X_{k,n} = X_{h,n},$$

con lo que se concluye la prueba. □

Nota 1.1.8. *El Teorema 1.1.7 se resume de la siguiente forma: en la columna n-ésima, el campo $X_{k,n}$ asociado al término de la fila k-ésima sólo posee productos no nulos al multiplicarlo por los campos correspondientes a la columna k-ésima.*

Además, el resultado del producto del campo $X_{h,k}$ (perteneciente a la fila h-ésima en la columna k-ésima) por el campo $X_{k,n}$ es el campo $X_{h,n}$ correspondiente a la fila h-ésima en la columna n-ésima. Por tanto, se obtienen todos los campos de la columna n-ésima que tienen por subíndice al par (h, n) con $h < k$, y sólo esos campos.

Consecuencia directa del Teorema 1.1.7 es el siguiente:

Teorema 1.1.9 (Ley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$). *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$. Entonces se verifica:*

$$[X_{i,h}, X_{h,k}] = X_{i,k}\,, \qquad \begin{matrix}(h = 1, \ldots, k-1)\\ (i = 1, \ldots, h-1).\end{matrix}$$

□

Los Teoremas 1.1.7 y 1.1.9 permiten, como dijimos antes, calcular la ley del álgebra de Lie respecto de la base $\{X_{i,j}\}_{i,j}$ de $\mathfrak{g}_n$, dada en la Proposición 1.1.2. Esta ley se puede obtener hallando los productos siguiendo el siguiente proceso:

1. Hallar los productos de cada campo $X_{k,n}$, proveniente de la columna n-ésima, por los campos provenientes de la columna k-ésima, para $k = 1, \ldots, n-1$.

2. Hallar los productos de cada campo $X_{k,n-1}$, proveniente de la columna $(n-1)$-ésima, por los campos provenientes de la columna k-ésima, para $k = 1, \ldots, n-2$.

3. Repetir este proceso columna por columna hasta llegar al campo $X_{1,2}$, el único de la columna 2-ésima. Con este campo ya no se puede continuar y se concluye, por tanto, el proceso.

Nuestro siguiente propósito es calcular la sucesión central de nilpotencia del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$. Para ello, se requiere previamente el siguiente:

Lema 1.1.10. *El ideal $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n)$ de $\mathfrak{g}_n$ está generado por los campos $X_{i,j}$ cuyos subíndices corresponden a los que están por encima de la diagonal superior $(k-1)$-ésima de G_n , para $k = 2, \ldots, n-1$.*

Demostración. Se hará por inducción sobre el orden n del grupo G_n. Para ello, debe tenerse en cuenta que el resultado se probará, más adelante, para los grupos G_2 y G_3 (véanse Proposiciones 1.2.1 y 1.2.4).

Supongamos el resultado cierto para n y probémoslo para $n+1$. De nuevo usaremos inducción, pero en este caso sobre el superíndice k de la sucesión de nilpotencia.

Para $k = 2$, se verifica el enunciado del lema si no contamos con los campos provenientes de la columna $(n+1)$-ésima, en virtud de la hipótesis de inducción sobre n.

Con los productos en los que interviene algún campo proveniente de la columna $(n+1)$-ésima, sólo se obtienen los campos de esa misma columna cuyo subíndice es un par $(h, n+1)$ tal que $h < n$. Por lo tanto, se verifica el enunciado para el caso $k = 2$.

Supongamos el resultado cierto para k y probémoslo para el caso $k+1$.

Si no consideramos los campos provenientes de la columna $(n+1)$-ésima, se verifica el enunciado del lema, por la hipótesis de inducción en n. Considerando los campos provenientes de la columna $(n+1)$-ésima y la hipótesis de inducción en k, se tiene que los campos de dicha columna que están en $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_{n+1})$ son:

$$X_{h,n+1} \qquad \text{con } h = 1, \ldots, n+1-k. \tag{1.10}$$

Como hicimos para calcular $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_{n+1})$, lo que haremos será multiplicar los campos que aparecen en (1.10) por todos los de la base de $\mathfrak{g}_n$. En virtud de la Proposición 1.1.7, los campos que se obtienen a partir de productos por los campos de (1.10) son los campos:

$$X_{h,n+1} \qquad \text{con } h = 1, \ldots, n-k,$$

por lo que se verifica también el enunciado para el caso $k+1$. □

Ahora estamos preparados para demostrar la siguiente:

Proposición 1.1.11. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$ es nilpotente y su sucesión central de nilpotencia viene dada por:*

$$\begin{aligned} dim\,\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n) &= dim\,\mathfrak{g}_{n-(k-1)} = \tfrac{(n-k+1)(n-k)}{2}, \qquad k = 1, \ldots, n-1; \\ dim\,\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_n) &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Demostración. Para el caso $k = 1$, basta recordar que la dimensión de $\mathfrak{g}_n$ es $\binom{n}{2}$, que es igual a $\frac{n(n-1)}{2}$.

Por otro lado, en virtud del Lema 1.1.10, el ideal $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n)$ $(k = 2, \ldots, n-1)$ está generado por los campos provenientes de los términos que están por encima de la diagonal superior $(k-1)$-ésima.

Si llamamos A_i al número de términos en la diagonal superior i-ésima, entonces la dimensión de $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n)$ es:

$$\dim \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} A_i.$$

Como la diagonal superior i-ésima posee $n-i$ términos, entonces se verifica:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n) &= \tfrac{n(n-1)}{2} - \textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(n-i) = \sum_{j=1}^{n-1} j - \sum_{j=n-k+1}^{n-1} j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-k} j = \tfrac{(n-k+1)(n-k)}{2} = \dim \mathfrak{g}_{n-(k-1)}. \end{aligned}$$

Para el caso $k = n$, partimos de que $\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}_n)$ está generado por el campo $X_{1,n}$. Pero este campo conmuta con todos los campos de $\mathfrak{g}_n$, por lo que se verifica $\dim \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_n) = \{0\}$. Este hecho implica además que $\mathfrak{g}_n$ es un álgebra de Lie nilpotente. □

Nota 1.1.12. *Si consideramos la notación matricial vista en* (2) *para los elementos de las álgebras de Lie* $\mathfrak{g}_n$*, podemos escribir los elementos de la subálgebra* $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n)$ *de su sucesión central de nilpotencia haciendo 0 los elementos por debajo de la* k*-ésima diagonal superior. Veamos pues como quedarían dichos elementos matriciales:*

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_n) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{1,k+1} & x_{1,k+2} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_{2,k+2} & \cdots & x_{2,n-1} & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-k-1,n-1} & x_{n-k-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-k,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez que conocemos la sucesión central de nilpotencia de las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_n$, vamos a demostrar la imposibilidad de representar mediante un subgrupo de G_{n-1} a los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión n. Este teorema fue el que enunciamos al principio de la sección.

Teorema 1.1.13. *Los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión* n *no admiten como representación a un subgrupo del grupo de Lie* G_{n-1}.

Demostración. La demostración se basará en probar la imposibilidad de que las álgebras de Lie filiformes de dimensión n sean subálgebras de $\mathfrak{g}_{n-1}$. Esto lo haremos fijándonos en las sucesiones centrales de nilpotencia tanto de las álgebras de Lie filiformes como del álgebra $\mathfrak{g}_{n-1}$.

Por un lado, sabemos que la sucesión de nilpotencia de cualquier álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}$ de dimensión n es:

$$(n-2, n-3, \ldots, 1, 0).$$

En particular, se verifica:

$$\dim \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{n}) = 1. \tag{1.12}$$

Por otro lado, en virtud de la Proposición 1.1.11, se tiene:

$$\dim \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}_{n-1}) = 0. \tag{1.13}$$

Por tanto, se tiene la siguiente desigualdad estricta:

$$\dim \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{n}) > \dim \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}_{n-1}),$$

que entra en contradicción con que $\mathfrak{n}$ sea subálgebra de $\mathfrak{g}_{n-1}$, en virtud de la Proposición 0.5.9. $\square$

Concluimos esta sección aplicando los resultados generales que hemos obtenido a los casos particulares en que n recorre los naturales entre 2 y 6, ambos inclusive. Para ello, damos la expresión del grupo G_6, que contiene como subgrupos a los grupos G_n $(n = 2,3,4,5)$, sin más que considerar que G_n está formado por las primeras n filas y n columnas de la matriz que representa a G_6.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} & x_{1,6} \\ 0 & 1 & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} & x_{2,6} \\ 0 & 0 & 1 & x_{3,4} & x_{3,5} & x_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{4,5} & x_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, el álgebra $\mathfrak{g}_2$ está generado por el campo $X_{1,2}$, no habiendo productos corchetes no nulos.

Para obtener una base del álgebra $\mathfrak{g}_3$ nos basta ampliar la base que tenemos para $\mathfrak{g}_2$ con los campos $\{X_{1,3}, X_{2,3}\}$, obteniéndose un único producto no nulo:

$$[X_{1,2}, X_{2,3}] = X_{1,3},$$

por lo que se verifica:

$$\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_3) =< X_{1,3} > \longrightarrow \dim(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_3)) = 1.$$

Consideremos ahora el álgebra $\mathfrak{g}_4$. Una base suya se obtiene ampliando la que ya tenemos para $\mathfrak{g}_3$ con los campos $\{X_{1,4}, X_{2,4}, X_{3,4}\}$, Por tanto, la ley de $\mathfrak{g}_4$ consiste en añadir los siguientes productos no nulos a los que ya teníamos en $\mathfrak{g}_3$:

$$\begin{aligned} [X_{1,3}, X_{3,4}] &= X_{1,4}, \\ [X_{2,3}, X_{3,4}] &= X_{2,4}, \\ [X_{1,2}, X_{2,4}] &= X_{1,4}. \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica la siguiente sucesión de nilpotencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_4) &=< X_{1,3}, X_{1,4}, X_{2,4} > &\longrightarrow \dim(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_4)) = 3, \\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_4) &=< X_{1,4} > &\longrightarrow \dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_4)) = 1. \end{aligned}$$

Seguimos con el álgebra $\mathfrak{g}_5$, para el cual obtenemos una base ampliando la dada para $\mathfrak{g}_4$ mediante los campos $\{X_{1,5}, X_{2,5}, X_{3,5}, X_{4,5}\}$. Sus productos corchetes no nulos resultan ser los que ya se tenían en $\mathfrak{g}_4$ y los que se añaden a continuación:

$$\begin{aligned} [X_{1,2}, X_{2,5}] &= X_{1,5}, & [X_{1,4}, X_{4,5}] &= X_{1,5}, \\ [X_{1,3}, X_{3,5}] &= X_{1,5}, & [X_{2,4}, X_{4,5}] &= X_{2,5}, \\ [X_{2,3}, X_{3,5}] &= X_{2,5}, & [X_{3,4}, X_{4,5}] &= X_{3,5}, \end{aligned}$$

obteniéndose la sucesión de nilpotencia siguiente:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_5) & =< X_{1,3}, X_{1,4}, X_{2,4}, X_{1,5}, X_{2,5}, X_{3,5} > & \longrightarrow \ \dim(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_5)) = 6, \\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_5) & =< X_{1,4}, X_{1,5}, X_{2,5} > & \longrightarrow \ \dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_5)) = 3, \\ \mathcal{C}^4(\mathfrak{g}_5) & =< X_{1,5} > & \longrightarrow \ \dim(\mathcal{C}^4(\mathfrak{g}_5)) = 1. \end{array}$$

Se concluye con el álgebra $\mathfrak{g}_6$, para la que obtenemos una base al ampliar la base de $\mathfrak{g}_5$ con los campos $\{X_{1,6}, X_{2,6}, X_{3,6}, X_{4,6}, X_{5,6}\}$. Así, los productos corchetes no nulos de $\mathfrak{g}_6$ son los que provienen de $\mathfrak{g}_5$ y estos otros que siguen:

$$\begin{array}{llllll} [X_{1,2}, X_{2,6}] & = X_{1,6}, & [X_{1,4}, X_{4,6}] & = X_{1,6}, & [X_{1,5}, X_{5,6}] & = X_{1,6}, \\ [X_{1,3}, X_{3,6}] & = X_{1,6}, & [X_{2,4}, X_{4,6}] & = X_{2,6}, & [X_{2,5}, X_{5,6}] & = X_{2,6}, \\ [X_{2,3}, X_{3,6}] & = X_{2,6}, & [X_{3,4}, X_{4,6}] & = X_{3,6}, & [X_{3,5}, X_{5,6}] & = X_{3,6}, \\ & & & & [X_{4,5}, X_{5,6}] & = X_{4,6}. \end{array}$$

Se obtiene de este modo la sucesión de nilpotencia siguiente:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_6) & =< X_{1,3}, X_{1,4}, X_{2,4}, X_{1,5}, X_{2,5}, X_{3,5}, X_{1,6}, X_{2,6}, X_{3,6}, X_{4,6} >, \\ \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_6) & =< X_{1,4}, X_{1,5}, X_{2,5}, X_{1,6}, X_{2,6}, X_{3,6} >, \\ \mathcal{C}^4(\mathfrak{g}_6) & =< X_{1,5}, X_{1,6}, X_{2,6} >, \\ \mathcal{C}^5(\mathfrak{g}_6) & =< X_{1,6} >, \end{array}$$

cuyas dimensiones son las que siguen:

$$\begin{array}{rclrcl} \dim(\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_6)) & = & 10, \qquad & \dim(\mathcal{C}^4(\mathfrak{g}_6)) & = & 3, \\ \dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_6)) & = & 6, \qquad & \dim(\mathcal{C}^5(\mathfrak{g}_6)) & = & 1. \end{array}$$

1.2 Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor que 5.

En esta sección se va a dar una representación de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor que 5. Es conveniente notar que todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual que 4 son filiformes o abelianas. Una representación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión menor o igual que 6 fue dada en **[4]**. Nosotros vamos a demostrar que para estas dimensiones esa representación no es mejorable desde el punto de vista de obtener otra cuyos ordenes sean menores.

Antes de comenzar con la obtención de los grupos, creemos oportuno dar una relación con las leyes de las álgebras de Lie nilpotentes que vamos a estudiar. Dicha clasificación es la que dan Goze y Khakimdjanov en **[17]**.

1. **Dimensión 1:**

$$\mathsf{n}_1^1: \quad \text{abeliana.}$$

2. **Dimensión 2:**

$$\mathsf{n}_2^1: \quad \text{abeliana.}$$

3. **Dimensión 3:**

$$\begin{array}{ll} \mathsf{n}_3^1: & [Y_1, Y_3] = Y_2 \quad \text{(Heissenberg).} \\ \mathsf{n}_3^2: & \text{abeliana.} \end{array}$$

4. **Dimensión 4:**

$$\begin{array}{ll} \mathsf{n}_4^1: & [Y_1, Y_4] = Y_3 \quad , \quad [Y_1, Y_3] = Y_2. \\ \mathsf{n}_4^2: & \text{abeliana.} \end{array}$$

Obsérvese que las álgebras de Lie n_3^1 y n_4^1 son las filiformes modelos de dimensión 3 y 4, respectivamente. Además, cada una en su respectiva dimensión, es la única álgebra de Lie no abeliana existente, siempre que no consideremos las álgebras de Lie nilpotentes que se puedan descomponer en suma directa, ya que en ese caso existiría un álgebra más en dimensión 4: la que se obtiene por la suma directa $\mathsf{n}_1^1 \oplus \mathsf{n}_3^1$.

Para la obtención de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a dichas álgebras, vamos a empezar por el grupo G_n de menor dimensión, esto es, con el grupo G_2. El álgebra de Lie asociada al grupo G_2 es la que se indica en la siguiente:

Proposición 1.2.1. *El álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G_2 es la abeliana de dimensión 1.*

Demostración. El grupo G_2 tiene dimensión 1, por lo que su álgebra de Lie asociada debe poseer esa misma dimensión. De hecho, un campo invariante a izquierda se obtiene con el subgrupo uniparamétrico $\varphi_1(t)$ definido como:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El campo asociado a $\varphi_1(t)$ es $X_1 = e_1$, que es la base del álgebra de Lie abeliana de dimensión 1. □

Es conocido que la única álgebra de Lie de dimensión 1 es precisamente la abeliana, por lo que podemos pasar al estudio de las álgebras de dimensión 2. Además el grupo G_2, al ser de dimensión 1, no puede contener subgrupos de Lie que tengan asociadas álgebras de Lie nilpotentes de dimensión mayor o igual que 2.

En vista de esto, pasamos a estudiar el grupo G_3. Para ello, vamos a ver cuál es la ley del álgebra de Lie asociada a G_3, con el fin de ver cúales son las álgebras que podemos hallar a partir de este grupo. Por tanto, necesitamos la siguiente:

Proposición 1.2.2. *El álgebra de Lie asociada a G_3 es el álgebra de Heissenberg* n_3^1.

Demostración. Como se vió al comienzo del capítulo, el grupo G_3 es de la forma:

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el álgebra de Lie asociada es de dimensión 3, que es la dimensión de G_3.

Una base del álgebra la hallamos considerando los subgrupos uniparamétricos definidos por:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Los campos asociados a cada uno de los subgrupos uniparamétricos vienen dados, respectivamente, por:

$$X_1 = e_1 + x_3 e_2, \quad X_2 = e_2 \quad \text{y} \quad X_3 = e_3. \tag{1.14}$$

La ley de este álgebra es la que sigue:

$$[X_1, X_3] = -X_2. \tag{1.15}$$

Con el cambio de base definido por:

$$\begin{cases} Y_1 = & X_1 \\ Y_2 = & -X_2 \\ Y_3 = & X_3 \end{cases} \tag{1.16}$$

obtenemos la ley del álgebra de Heissenberg n_3^1. □

Nota 1.2.3. *La Proposición 1.2.2 puede demostrarse mediante la representación matricial de los elementos del álgebra* g_3 *que se vio en* (2). *De este modo, tomamos como base de* g_3 *los siguientes elementos:*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y realizamos los correspondientes corchetes:

$$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$[X_1, X_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -X_2$$

$$[X_2, X_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Obsérvese que la ley obtenida de este modo para g_3 *es la misma que la obtenida en la proposición anteriormente citada.*

Como el grupo G_3 tiene dimensión 3, sólo podríamos hallar álgebras de Lie a lo sumo de dimensión 3. Vamos a ver a continuación que el álgebra abeliana de dimensión 2 se puede representar por un subgrupo del grupo G_3.

Proposición 1.2.4. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie* n_2^1 *abeliana de dimensión 2 es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Si observamos la expresión (1.15) que da la ley del álgebra n_3^1, observamos que la subálgebra suya generada por $\{X_1 \ , \ X_2\}$ es precisamente el álgebra de Lie n_2^1 abeliana de dimensión 2.

La base dual de n_3^1 viene dada por $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. El Teorema de Fröbenius afirma que integrando la ecuación $\omega_3 = 0$ se obtienen las ecuaciones del grupo asociado a n_2^1.

Como buscamos el grupo de Lie consistente en la componente conexa de la unidad (esto es, la matriz identidad), tomaremos $x_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ como condiciones iniciales en la integración de $\omega_3 = 0$.

La expresión de ω_3 es:

$$\omega_3 = dx_3,$$

y su integración da la ecuación

$$x_3 = 0,$$

con lo que se obtiene el grupo buscado. □

En adelante, cada vez que se vaya a obtener el grupo de Lie asociado al álgebra de Lie con la que estemos tratando en ese momento, actuaremos de manera análoga a la que hemos usado en la proposición anterior. Esto es, obtener en el álgebra de Lie asociada a algún G_n una subálgebra suya isomorfa al álgebra que estemos estudiando y hacer uso del Teorema de Fröbenius para obtener el subgrupo de Lie de G_n que tiene asociada. Además, la integración de las formas que conlleva este último resultado se hará siempre buscando la componente de la matriz identidad, por lo que las condiciones iniciales serán $x_i = 0$, para todo i.

Cabe preguntarse si el grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{n}_3^2$, la abeliana de dimensión 3, puede representarse por un subgrupo de G_3. La respuesta es que no es posible hallar tal representación porque el álgebra asociada a G_3 es $\mathfrak{n}_3^1$ y no contiene subálgebras propias de dimensión 3. Por lo tanto, tenemos la siguiente:

Proposición 1.2.5. *El grupo de Lie simplemente conexo del álgebra de Lie abeliana de dimensión 3 no puede representarse en G_3.*

$\square$

Una vez obtenidas todas las álgebras de Lie posibles a partir de la asociada a G_3, comenzaremos el estudio de las que se obtienen a partir de G_4. Para ello, debemos ver primero cuál es la ley del álgebra de Lie asociada al grupo G_4, que es lo que se obtiene en la siguiente:

Proposición 1.2.6. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_4$ asociada a G_4 es el álgebra de Lie de dimensión 6 cuya ley es:*

$$\begin{cases} [X_1, X_6] = X_5, & [X_3, X_6] = X_2, \\ [X_1, X_4] = -X_3, & [X_4, X_5] = X_2. \end{cases} \tag{1.17}$$

Demostración. El grupo G_4 posee dimensión 6, por lo que su álgebra asociada posee esa misma dimensión.

En virtud de los Teoremas 1.1.7 y 1.1.9, se obtuvo al final de la Sección 1.1 la ley del álgebra $\mathfrak{g}_4$, que coincide con (1.17), con la ordenación de las coordenadas dada en esta proposición. $\square$

Considerando la sucesión central de nilpotencia del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_4$, obtenemos el siguiente:

Corolario 1.2.7. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_4$ asociada al grupo G_4 es nilpotente y tiene sucesión de nilpotencia (3,1,0).* $\square$

Recordemos que en dimensión 3 nos quedaba por hallar el álgebra abeliana. Veamos que sí podemos obtenerla a partir de G_4, como hacemos en la siguiente:

Proposición 1.2.8. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{n}_3^2$ abeliana de dimensión 3 puede representarse por:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. En la expresión de la ley de $\mathfrak{g}_4$ que aparece en (1.17), se puede observar que los campos X_2, X_5 y X_6 conmutan entre sí. En consecuencia, la subálgebra de $\mathfrak{g}_4$ generada por $\{X_2, X_5, X_6\}$ es el álgebra de Lie abeliana de dimensión 3, esto es, el álgebra $\mathfrak{n}_3^2$.

La base dual de la base de $\mathfrak{g}_4$ obtenida en la Proposición 1.2.6 es $\{\omega_i\}_{i=1}^6$. De nuevo, utilizando el Teorema de Fröbenius, tenemos que las ecuaciones del grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{n}_3^2$ se obtienen integrando las ecuaciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \omega_1 &= 0 \\ \omega_3 &= 0 \\ \omega_4 &= 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Las expresiones de ω_1, ω_3 y ω_4 son:

$$\{\omega_1 = dx_1 \ , \ \omega_3 = -x_4 dx_1 + dx_3 \ , \ \omega_4 = dx_4\}\,, \tag{1.19}$$

con lo que la integración del sistema aparecido en (1.18) da la siguiente solución:

$$\{x_1 = 0 \ , \ x_3 = 0 \ , \ x_4 = 0\}\,.$$

Todo lo anterior lleva a obtener la representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{n}_3^2$ que dimos en el enunciado. □

Esta última proposición concluye la obtención de una representación de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 3.

Pasamos, a continuación, al estudio de las álgebras de Lie de dimensión 4. Como necesitamos que el grupo posea dimensión 4, estudiaremos la posibilidad de obtenerlas como subálgebras del álgebra asociada a G_4.

Vamos a obtener el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_4^2$ de dimensión 4 a partir del grupo G_4. Para ello damos la siguiente:

Proposición 1.2.9. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_4^2$ es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. La ley del álgebra $\mathfrak{g}_4$, que aparece en (1.17), permite afirmar que los campos X_1, X_2, X_3 y X_5 conmutan entre sí. Por tanto, estos cuatro campos generan al álgebra de Lie $\mathfrak{n}_4^2$.

Si $\{\omega_i\}_{i=1}^6$ es la base dual de la base obtenida en la Proposición 1.2.6 para el álgebra $\mathfrak{g}_4$, las ecuaciones del grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{n}_4^2$ proceden de integrar el sistema formado por las siguientes dos ecuaciones:

$$\omega_4 = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega_6 = 0. \tag{1.20}$$

Las expresiones de ω_4 y de ω_6 son, respectivamente:

$$\omega_4 = dx_4 \qquad \text{y} \qquad \omega_6 = dx_6.$$

Si las sustituimos en las ecuaciones de (1.20) y las integramos posteriormente, obtenemos las ecuaciones:

$$x_4 = 0 \qquad \text{y} \qquad x_6 = 0.$$

En consecuencia, llegamos a la representación indicada del grupo de Lie simplemente conexo asociado. □

Quedaría, por tanto, encontrar una representación del álgebra de Lie filiforme modelo $\mathfrak{n}_4^1$ de dimensión 4. Esto es lo que haremos a continuación.

Proposición 1.2.10. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme modelo* $\mathfrak{n}_4^1$ *es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^6$ de $\mathfrak{g}_4$ que se obtiene en la Proposición 1.2.6, y tomemos la siguiente subálgebra de dicha álgebra:

$$\epsilon = < -(X_1 + X_6), X_4, X_3, X_2 > .$$

En virtud de (1.17), la ley de esta subálgebra es la que sigue:

$$[-(X_1 + X_6), X_4] = X_3 \qquad , \qquad [-(X_1 + X_6), X_3] = X_2, \tag{1.21}$$

con el resto de los productos nulos. Entonces si realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} Y_1 = & -(X_1 + X_6) \\ Y_2 = & X_2 \\ Y_3 = & X_3 \\ Y_4 = & X_4 \end{cases}$$

la ley del álgebra ϵ, expresada en (1.21), se transforma en:

$$[Y_1, Y_4] = Y_3 \qquad , \qquad [Y_1, Y_3] = Y_2,$$

que es la ley de la álgebra de Lie filiforme modelo de dimensión 4.

Por tanto, si ampliamos la base de ϵ a la de $\mathfrak{g}_4$ con los elementos

$$\{Y_5 = X_5 \ , \ Y_6 = X_6\}$$

y consideramos la base dual $\{\omega_i\}_{i=1}^6$ de $\{Y_i\}_{i=1}^6$, obtenemos una representación del grupo de Lie asociado a ϵ resolviendo el sistema que se obtiene al integrar:

$$\{\omega_5 = 0 \ , \ \omega_6 = 0\}. \tag{1.22}$$

Como las expresiones de (1.22) son:

$$\{\omega_5 = dx_5 - x_1 dx_6, \quad \omega_6 = -dx_1 + dx_6\},$$

la resolución del sistema que se obtiene al integrarlo es:

$$x_6 = x_1 \qquad , \qquad x_5 = \frac{x_1^2}{2},$$

con lo que se obtiene la representación dada en el enunciado. □

Nota 1.2.11. *Esta misma representación ya fue obtenida en* **[4]**, *pero partiendo del sugbrupo de Lie de G_4 dado por las matrices cuya expresión es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En esta Memoria, hemos dado una subálgebra de $\mathfrak{g}_4$ que es isomorfa al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_4^1$ y seguidamente la hemos integrado para obtener la representación del grupo de Lie asociado a la misma.

Por tanto, en esta sección hemos dado representaciones mediante matrices de orden mínimo para los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie de dimensión menor que 5. De hecho, la siguiente tabla sistematiza los grupos G_n en el que podemos representar los grupos asociados.

Álgebra	G_n
$\mathfrak{n}_1^1$	G_2
$\mathfrak{n}_2^1$	G_3
$\mathfrak{n}_3^1$	G_3
$\mathfrak{n}_3^2$	G_4
$\mathfrak{n}_4^1$	G_4
$\mathfrak{n}_4^2$	G_4

De ahora en adelante, no utilizaremos álgebras que puedan descomponerse en suma directa de otras (a excepción del álgebra de Lie abeliana).

1.3 Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5.

En esta sección se hará para dimensión 5 lo llevado a cabo en la sección anterior para dimensiones inferiores. Esto es, se hallarán representaciones para cada uno de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5. Para ello, utilizaremos el método aplicado en la sección anterior y buscaremos dichas álgebras de Lie nilpotentes como subgrupos de G_n.

Observemos que no podemos buscar tales representaciones en G_3 ya que el álgebra de Lie que tiene asociada, $\mathfrak{n}_3^1$, es de dimensión 3 y no puede contener subálgebras de dimensión 5. Por tanto, habrá que comenzar el estudio con el grupo G_4 y continuar a partir de éste. De hecho, nos bastará usar los grupos G_4 y G_5 para obtener una representación de cada uno de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie nilpotentes en dimensión 5.

Antes de comenzar creemos conveniente dar la lista de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5. Esta clasificación es la indicada en **[17]** siguiendo el orden de las sucesiones de nilpotencia. Es por ello que, en primer lugar, aparecen las dos álgebras de Lie filiformes, que son las que poseen mayor sucesión de nilpotencia entre todas las nilpotentes.

$$\mathfrak{n}_5^1 : \quad [Y_1, Y_5] = Y_4 \ , \ [Y_1, Y_4] = Y_3 \ , \ [Y_1, Y_3] = Y_2 \quad \text{(Filiforme modelo).}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_5^2 : \quad & [Y_1, Y_5] = Y_4 \ , \ [Y_1, Y_4] = Y_3 \ , \ [Y_1, Y_3] = Y_2 \ ; \quad \text{(Filiforme)} \\ & [Y_4, Y_5] = Y_2 \ . \end{aligned}$$

$$\mathfrak{n}_5^3 : \quad [Y_1, Y_5] = Y_4 \ , \ [Y_1, Y_4] = Y_3 \ , \ [Y_4, Y_5] = Y_2 \ .$$

$$\mathfrak{n}_5^4 : \quad [Y_1, Y_5] = Y_4 \ , \ [Y_1, Y_3] = Y_2 \ , \ [Y_2, Y_3] = Y_4 \ .$$

$$\mathfrak{n}_5^5 : \quad [Y_1, Y_5] = Y_4 \ , \ [Y_1, Y_3] = Y_2 \ , \qquad \text{(Heissenberg)}$$

$$\mathfrak{n}_5^6 : \quad [Y_1, Y_5] = Y_4 \ , \ [Y_2, Y_3] = Y_4 \ ,$$

$$\mathfrak{n}_5^7 : \qquad \text{abeliana.}$$

Esta clasificación está hecha en función de la sucesión de nilpotencia de cada una de las álgebras de Lie nilpotentes y en sentido decreciente. De hecho, calculando la sucesión central de nilpotencia de cada álgebra de Lie nilpotente no filiforme de dimensión 5 se llega a la siguiente:

Proposición 1.3.1. *La sucesión de nilpotencia de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 son las que se dan a continuación:*

i. n_5^1 *y* n_5^2*: sucesión de nilpotencia (3,2,1,0).*

ii. n_5^3*: sucesión de nilpotencia (3,2,0).*

iii. n_5^4*: sucesión de nilpotencia (2,1,0).*

iv. n_5^5*: sucesión de nilpotencia (2,0).*

v. n_5^6*: sucesión de nilpotencia (1,0).* □

Vistas las sucesiones de nilpotencia de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5, podemos descartar aquellas que no van a poder representarse en el grupo G_4. Esto es lo que afirmamos en la siguiente:

Proposición 1.3.2. *Los grupos de Lie simplemente conexos asociados a cada una de las álgebras de Lie filiformes,* n_5^1 *y* n_5^2*, no pueden representarse como subgrupo de* G_4*.*

Demostración. Lo probaremos por reducción al absurdo. Para ello, supondremos que $\mathsf{n}_5^k \subset \mathsf{g}_4$ para $k = 1, 2$.

Según la Proposición 0.5.9, para cada $j \in \mathbb{N}$, se verifica:

$$\mathcal{C}^j(\mathsf{n}_5^k) \subset \mathcal{C}^j(\mathsf{g}_4).$$

En particular, se tiene para $j = 3$ que $\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_5^k) \subset \mathcal{C}^3(\mathsf{g}_4)$ y, por tanto:

$$\dim(\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_5^k)) \leq \dim(\mathcal{C}^3(\mathsf{g}_4)) \qquad (k = 1, 2). \tag{1.23}$$

Pero la sucesión de nilpotencia de n_5^k, para $k = 1, 2$, es (3,2,1,0) mientras que la de g_4 es (3,1,0). Por lo tanto, la dimensión de $\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_5^k)$ es 2 y la de $\mathcal{C}^3(\mathsf{g}_4)$ es 1; lo cual entra en contradicción con (1.23).

En consecuencia, los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión 5 no pueden representarse en G_4. □

Pero además de las álgebras de Lie filiformes, existe otra álgebra de Lie nilpotente de dimensión 5 cuyo grupo de Lie simplemente conexo no admite una representación como subgrupo de G_4. Dicha álgebra es n_5^3 como se observa a continuación.

Proposición 1.3.3. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado a* n_5^3 *no admite representación como subgrupo del grupo* G_4*.*

Demostración. El argumento que usaremos será análogo al de la Proposición 1.3.2. Por tanto, realizaremos de nuevo una reducción al absurdo.

La Proposición 0.5.9 asegura que $\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_5^3)$ es subespacio de $\mathcal{C}^3(\mathsf{g}_4)$. Por tanto, debe verificarse:

$$\dim(\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_5^3)) \leq \dim(\mathcal{C}^3(\mathsf{g}_4)). \tag{1.24}$$

Por otro lado, la sucesión de nilpotencia de $\mathfrak{n}_5^3$ es (3,2,0), con lo que se tiene:

$$\dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{n}_5^3)) = 2.$$

Además, la sucesión de nilpotencia de $\mathfrak{g}_4$ es (3,1,0), con lo que se tiene:

$$\dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_4)) = 1.$$

Por tanto,

$$\dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}_4)) < \dim(\mathcal{C}^3(\mathfrak{n}_5^3));$$

lo que entra en contradicción con (1.24). En consecuencia, el grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{n}_5^3$ no es representable como subgrupo de G_4. □

Según lo visto en las Proposiciones 1.3.2 y 1.3.3, sólo podríamos hallar representaciones de los grupos de Lie simplemente conexos de las álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{n}_5^4$, $\mathfrak{n}_5^5$ y $\mathfrak{n}_5^6$. Por lo tanto, nuestro siguiente paso consistirá en obtener dichas representaciones en G_4.

Comenzaremos hallando la representación del grupo de Lie asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{n}_5^4$, mediante la siguiente:

Proposición 1.3.4. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^4$ admite la siguiente representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^6$ de $\mathfrak{g}_4$ que se obtiene en la Proposición 1.2.6. Tomemos la siguiente subálgebra suya:

$$\sigma := < X_1 + X_4, X_2, X_3, X_5, X_6 > .$$

En virtud de (1.17), la ley de la subálgebra anterior viene dada por:

$$\begin{cases} [X_1 + X_4, X_6] = X_5, \quad [X_3, X_6] = X_2, \\ [X_1 + X_4, X_5] = X_2, \end{cases} \tag{1.25}$$

Sin más que realizar el cambio de base definido por:

$$\begin{cases} Y_1 = & X_6 \ , \\ Y_2 = & X_5 \ , \\ Y_3 = & -(X_1 + X_4) \ , \\ Y_4 = & X_2 \ , \\ Y_5 = & -X_3 \ , \end{cases}$$

la ley de la subálgebra σ se transforma en:

$$\begin{cases} [Y_1, Y_5] = Y_4, \\ [Y_1, Y_3] = Y_2, \quad [Y_2, Y_3] = Y_4, \end{cases}$$

que es la ley de $\mathfrak{n}_5^4$.

Por tanto, para obtener una representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^4$, nos basta obtener la del grupo asociado a la subálgebra σ.

Calculemos la representación del grupo asociado a σ. Para ampliar la subálgebra σ al álgebra $\mathfrak{g}_4$ necesitamos el campo $Y_6 = X_1$.

Si consideramos la base dual $\{\omega_i\}_{i=1}^6$ de la base $\{Y_i\}_{i=1}^6$, la ecuación del grupo asociado a σ se obtiene integrando la ecuación $\omega_6 = 0$, en virtud del Teorema de Fröbenius.

La expresión de ω_6 es $\omega_6 = dx_1 - dx_4$. Por tanto, el resultado de integrarla es:

$$x_4 = x_1,$$

obteniéndose la representación indicada para el grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_5^4$. $\square$

Seguimos con el estudio del grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra $\mathfrak{n}_5^5$, mediante la siguiente:

Proposición 1.3.5. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^5$ admite la siguiente representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^6$ de $\mathfrak{g}_4$ que se obtiene en la Proposición 1.2.6, y la siguiente subálgebra suya:

$$\tau := < X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 > .$$

Basándonos en la ley (1.17) del álgebra $\mathfrak{g}_4$, la ley de la subálgebra τ está definida como:

$$[X_1, X_4] = -X_3 \quad , \quad [X_4, X_5] = X_2, \tag{1.26}$$

Si hacemos uso del cambio de base definido por:

$$\begin{cases} Y_1 = & X_4 \ , \\ Y_2 = & X_3 \ , \\ Y_3 = & X_1 \ , \\ Y_4 = & X_2 \ , \\ Y_5 = & X_5 \ , \end{cases}$$

la ley de la subálgebra τ resulta ser:

$$[Y_1, Y_5] = Y_4 \quad , \quad [Y_1, Y_3] = Y_2 \ ,$$

es decir, la ley de $\mathfrak{n}_5^5$.

Por tanto, una representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^5$ es la que se obtiene para el grupo asociado a la subálgebra τ.

Calculemos la representación de este último grupo. Para ello, hemos de ampliar la subálgebra τ al álgebra $\mathfrak{g}_4$; lo cual hacemos añadiendo el campo X_6 a la base de τ.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^6$ la base dual de la base $\{X_i\}_{i=1}^6$. Entonces la ecuación del grupo asociado a τ la obtendremos integrando la ecuación $\omega_6 = 0$.

Como se verifica que:

$$\omega_6 = dx_6,$$

el resultado de integrar $\omega_6 = 0$ es:

$$x_6 = 0,$$

concluyéndose la prueba. □

Ahora, sólo resta obtener una representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^6$. Para ello, consideremos la siguiente:

Proposición 1.3.6. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{n}_5^6$ *admite como representación a:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^6$ de $\mathfrak{g}_4$ que se obtiene en la Proposición 1.2.6 y tomemos la siguiente subálgebra suya:

$$\eta := < X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 > .$$

Basándonos en la ley (1.17) del álgebra $\mathfrak{g}_4$, la ley de la subálgebra η está definida como:

$$[X_3, X_6] = X_2 \quad , \quad [X_4, X_5] = X_2. \tag{1.27}$$

Si realizamos el siguiente cambio de base definido por:

$$\begin{cases} Y_1 = & X_3 \ , \\ Y_2 = & X_4 \ , \\ Y_3 = & X_5 \ , \\ Y_4 = & X_2 \ , \\ Y_5 = & X_6 \ , \end{cases}$$

la ley de la subálgebra η se transforma en:

$$[Y_1, Y_5] = Y_4 \quad , \quad [Y_2, Y_3] = Y_4 \ ,$$

que es la ley de $\mathfrak{n}_5^6$.

En consecuencia, una representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^6$ la obtenemos representando el grupo asociado al subálgebra η.

Para representar este último grupo, ampliamos el subálgebra η al álgebra $\mathfrak{g}_4$, añadiendo el campo X_1 a la base de η.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^6$ la base dual de la base $\{X_i\}_{i=1}^6$. Entonces la ecuación del grupo asociado a η la obtendremos integrando la ecuación $\omega_1 = 0$, en virtud del Teorema de Fröbenius. Como se verifica que:

$$\omega_1 = dx_1 \ ,$$

el resultado de integrar $\omega_1 = 0$ es:

$$x_1 = 0,$$

obteniéndose la representación indicada del grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_5^6$. □

Tras esta última proposición, hemos encontrado una representación en G_4 para las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 que no fueron descartadas en las Proposiciones 1.3.2 y 1.3.3, esto es, las álgebras $\mathfrak{n}_5^4$, $\mathfrak{n}_5^5$ y $\mathfrak{n}_5^6$. Por consiguiente, aún queda hallar una representación de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las dos álgebras de Lie filiformes, $\mathfrak{n}_5^1$ y $\mathfrak{n}_5^2$, y a la nilpotente $\mathfrak{n}_5^3$. Dichas representaciones hemos de buscarlas, en principio, en G_5. Esto es lo que vamos a hacer en esta última parte de la sección.

Para ello, lo primero que se necesita es tener la ley del álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G_5. Esto se muestra en la siguiente:

Proposición 1.3.7. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$ asociada a G_5 es el álgebra de Lie de dimensión 10 cuya ley es:*

$$\left\{\begin{array}{lll} [X_1,X_5]=-X_4, & [X_1,X_8]=X_6, & [X_1,X_9]=X_7, \\ [X_3,X_{10}]=X_2, & [X_4,X_8]=X_3, & [X_4,X_9]=X_2, \\ [X_5,X_6]=X_3, & [X_5,X_7]=X_2, & \\ [X_6,X_{10}]=X_7, & [X_8,X_{10}]=X_9. & \end{array}\right. \tag{1.28}$$

Demostración. El grupo G_5 posee dimensión 10 y, por tanto, su álgebra asociada también posee esa dimensión.

En virtud de los Teoremas 1.1.7 y 1.1.9, se dio la expresión de la ley del álgebra $\mathfrak{g}_5$ al final de la Sección 1.1. Con la ordenación de las coordenadas dada en esta proposición, la ley anterior resulta ser (1.28). □

Una vez disponemos de la ley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$ se calcula la sucesión central de nilpotencia, la cual nos lleva al siguiente:

Corolario 1.3.8. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$ asociada al grupo G_5 es nilpotente y tiene sucesión de nilpotencia (6,3,1,0).*

□

Una vez tenemos la ley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$, podemos buscar las representaciones de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie nilpotentes que nos quedaban. En primer lugar, hallaremos una representación correspondiente al álgebra $\mathfrak{n}_5^3$ en la siguiente:

Proposición 1.3.9. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^3$ admite como representación a:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} & x_4 - x_1 x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & -x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene en la Proposición 1.3.7. Sea la subálgebra suya definida como :

$$\zeta := < X_1 + X_8, X_5 - X_9, X_4 + X_7, X_3, X_2 > .$$

En base a la ley (1.28) del álgebra $\mathfrak{g}_5$, la ley de la subálgebra ζ está definida como:

$$\begin{cases} [X_1+X_8, X_5-X_9] = -X_4-X_7, \qquad [X_4+X_7, X_5-X_9] = -2X_2, \\ [X_1+X_8, X_4+X_7] = -X_3, \end{cases} \tag{1.29}$$

En virtud del siguiente cambio de base definido por:

$$\begin{cases} Y_1 = & X_1+X_8 \ , \\ Y_2 = & 2X_2 \ , \\ Y_3 = & X_3 \ , \\ Y_4 = & -(X_4+X_7) \ , \\ Y_5 = & X_5-X_9 \ , \end{cases}$$

la ley de la subálgebra ζ resulta ser:

$$\begin{cases} [Y_1, Y_5] = Y_4, \qquad [Y_1, Y_4] = Y_3, \\ [Y_4, Y_5] = Y_2, \end{cases}$$

que es precisamente la ley del álgebra $\mathfrak{n}_5^3$.

Por tanto, una representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado al subálgebra ζ es isomorfa a la del asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_5^3$. Hallemos, pues, una representación del grupo asociado a ζ.

Para ello ampliamos la base del álgebra ζ a la del álgebra $\mathfrak{g}_5$, añadiendo los siguientes campos a la base de ζ:

$$\begin{array}{ccccccccc} Y_6 & = & X_1, & Y_7 & = & X_4, & Y_8 & = & X_5, \\ Y_9 & = & X_6, & Y_{10} & = & X_{10}. \end{array}$$

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$. La ecuación del grupo asociado a ζ se obtiene integrando, en virtud del Teorema de Fröbenius, el sistema de ecuaciones dado por:

$$\{\omega_6 = 0 \ , \ \omega_7 = 0 \ , \ \omega_8 = 0 \ , \ \omega_9 = 0 \ , \ \omega_{10} = 0\}.$$

Como la expresión de estos elementos en la base dual es:

$$\begin{array}{ll} \omega_6 = dx_1 - dx_8 \ , & \omega_9 = dx_6 - x_1 dx_8 \ , \\ \omega_7 = -x_5 dx_1 + dx_4 - dx_7 + x_1 dx_9 + (x_6 - x_1 x_8) dx_{10} \ , & \omega_{10} = dx_{10} \ , \\ \omega_8 = dx_5 + dx_9 - x_8 dx_{10} \ , & \end{array}$$

el resultado de integrar y resolver este sistema es:

$$\begin{cases} x_6 &= \frac{1}{2}x_1^2, \\ x_7 &= x_4 - x_1x_5, \\ x_8 &= x_1, \\ x_9 &= -x_5, \\ x_{10} &= 0, \end{cases}$$

resultando la representación indicada para el grupo de Lie asociado al álgebra $\mathfrak{n}_5^3$. $\square$

Pasamos a indicar los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión 5, esto es, las álgebras $\mathfrak{n}_5^1$ y $\mathfrak{n}_5^2$. Las representaciones que vamos a exponer en esta Memoria ya fueron obtenidas por Benjumea en **[4]**. Sin embargo, nosotros lo que haremos en las dos próximas proposiciones es obtener dichas representaciones a partir del grupo G_5, ya que en **[4]** Benjumea las obtenía a partir de cierto grupo de automorfismos unipotentes de orden 5.

Estamos ya en condiciones de ver las álgebras de Lie filiformes $\mathfrak{n}_5^1$ y $\mathfrak{n}_5^2$ como subálgebras del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$.

Proposición 1.3.10. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_5^1$ admite como representación a:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene en la Proposición 1.3.7 y la subálgebra suya generada por los campos:

$$\begin{cases} Y_1 = -(X_1 + X_8 + X_{10}), & Y_2 = X_2, \\ Y_3 = X_3, & Y_4 = X_4, \qquad Y_5 = X_5. \end{cases}$$

En base a la ley (1.28) del álgebra $\mathfrak{g}_5$, la ley de la subálgebra anterior resulta ser la del álgebra de Lie filiforme modelo $\mathfrak{n}_5^1$.

Luego para ampliar la base de esta subálgebra a la base de $\mathfrak{g}_5$, necesitamos los campos:

$$\begin{cases} Y_6 = X_1, & Y_7 = X_6, \\ Y_8 = X_7, & Y_9 = X_8, \qquad Y_{10} = X_9 + X_6. \end{cases}$$

Por tanto, si $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ es la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$, para obtener la representación del grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_5^1$, debemos resolver el sistema de ecuaciones que obtenemos al integrar este otro sistema:

$$\{\omega_6 = 0\ ,\ \omega_7 = 0\ ,\ \omega_8 = 0\ ,\ \omega_9 = 0\ ,\ \omega_{10} = 0\}, \tag{1.30}$$

cuya expresión es la siguiente:

$$\begin{cases} \omega_6 & = dx_1 - dx_{10}, \\ \omega_7 & = dx_6 - x_1 dx_8 - dx_9 + x_8 dx_{10}, \\ \omega_8 & = dx_7 - x_1 dx_9 + (x_1 x_8 - x_6) dx_{10}, \\ \omega_9 & = dx_8 - dx_{10}, \\ \omega_{10} & = dx_9 - x_8 dx_{10}. \end{cases} \tag{1.31}$$

En consecuencia, tenemos la siguiente solución:

$$\begin{cases} x_1 & = x_8 = x_{10}, \\ x_6 & = x_9 = \frac{1}{2}x_1^2, \\ x_7 & = \frac{1}{6}x_1^3, \end{cases}$$

que es la representación que aparece en el enunciado. □

Nota 1.3.11. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme* $\mathfrak{n}_5^1$ *es el mismo que obtuvo Benjumea en la Proposición 1.2.2 de* **[4]**.

Del mismo modo, se puede dar el siguiente resultado para el álgebra de Lie $\mathfrak{n}_5^2$.

Proposición 1.3.12. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme* $\mathfrak{n}_5^2$ *admite como representación a:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_5 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_1 x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene en la Proposición 1.3.7 y la subálgebra suya generada por los campos:

$$\begin{cases} Y_1 = -(X_1 + X_8 + X_{10}), & Y_2 = X_2, & Y_3 = X_3, \\ Y_5 = X_5 + X_6 + X_9, & Y_4 = X_4. \end{cases}$$

En base a la ley (1.28) del álgebra $\mathfrak{g}_5$, la ley de la subálgebra anterior resulta ser la del álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_5^2$.

Ampliamos así la base de esta subálgebra a la base de $\mathfrak{g}_5$ añadiendo los elementos:

$$\begin{cases} Y_6 = X_1, & Y_7 = X_5, \quad Y_8 = X_6, \\ Y_9 = X_7, & Y_{10} = X_8. \end{cases}$$

Resolvemos, por tanto, el sistema de ecuaciones obtenido al integrar el sistema dado por:

$$\{\omega_6 = 0 \ , \ \omega_7 = 0 \ , \ \omega_8 = 0 \ , \ \omega_9 = 0 \ , \ \omega_{10} = 0\}, \tag{1.32}$$

cuya expresión resulta ser:

$$\begin{cases} \omega_6 &= dx_1 - dx_{10}, \\ \omega_7 &= dx_5 - dx_9 + x_8 dx_{10}, \\ \omega_8 &= dx_6 - x_1 dx_8 - dx_9 + x_8 dx_{10}, \\ \omega_9 &= dx_7 - x_1 dx_9 + (x_1 x_8 - x_6) dx_{10}, \\ \omega_{10} &= dx_8 - dx_{10}, \end{cases} \tag{1.33}$$

La solución al sistema que se obtiene al integrar (1.32) es:

$$\begin{cases} x_1 &= x_8 = x_{10}, \\ x_6 &= x_9 = \frac{x_1^2}{2} + x_5, \\ x_7 &= \frac{x_1^3}{6} + x_1 x_5, \end{cases}$$

que es la representación indicada. □

Nota 1.3.13. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme* $\mathfrak{n}_5^2$ *es el mismo que obtuvo Benjumea en la Sección 2.3 de* **[4]**.

Para concluir el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5, nos resta estudiar el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_5^7$. Lo primero que haremos será demostrar que no podemos representar el grupo de Lie simplemente conexo como un grupo de matrices cuadradas de orden 4.

Pero previamente debemos realizar algunas aclaraciones. Recordemos la base $\{X_i\}_{i=1}^6$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_4$ obtenida en la Proposición 1.2.6 y consideremos un conjunto $\{Y_i\}_{i=1}^5$ de campos arbitrarios en esta álgebra. Por tanto, la expresión de cada uno de estos campos Y_i es:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{6} a_{i,j} X_j \ , \quad (a_{i,j} \in \mathbb{C}) \ , \ (i = 1, \ldots, 5). \tag{1.34}$$

Si exigimos que el conjunto $\{Y_i\}_{i=1}^5$ sea linealmente independiente, entonces la matriz formada por los coeficientes de los campos Y_i debe tener rango 5, es decir:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \end{pmatrix} = 5. \tag{1.35}$$

En consecuencia, la matriz que aparece en (1.35) es equivalente a una matriz de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1,6} \\ 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & b_{2,6} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & 0 & 0 & b_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,4} & 0 & b_{4,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{5,5} & b_{5,6} \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

En virtud de (1.36), podemos enunciar el siguiente:

Lema 1.3.14. *Toda subálgebra de $\mathfrak{g}_4$ con dimensión 5 posee una base cuyos elementos vienen dados por la combinación lineal de dos campos de la base $\{X_i\}_{i=1}^6$, siendo uno de estos sumandos común a todos los campos Y_i ($i = 1, \ldots, 5$).*

□

En consecuencia, se está en condiciones de probar la siguiente:

Proposición 1.3.15. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_5^7$ no admite representación como subgrupo del grupo de Lie G_4.*

Demostración. En virtud del Lema 1.3.14, todas las subálgebras de dimensión 5 en $\mathfrak{g}_4$ deben tener una base de alguno de los siguientes seis tipos:

El primer tipo de base es aquella en la que el campo común a los cinco campos de la base es X_6. Esto es, una base de la forma:

$$\begin{cases} Y_1 &= \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_6, \\ Y_2 &= \lambda_2 X_2 + \mu_2 X_6, \\ Y_3 &= \lambda_3 X_3 + \mu_3 X_6, \\ Y_4 &= \lambda_4 X_4 + \mu_4 X_6, \\ Y_5 &= \lambda_5 X_5 + \mu_5 X_6. \end{cases} \tag{1.37}$$

Al hacer los diez productos posibles entre los campos de $\{Y_i\}_{i=1}^5$ e igualarlos a cero, resulta un sistema de ecuaciones entre las que tenemos:

$$\begin{cases} \lambda_1\mu_2 &= 0, \\ \lambda_1\mu_3 &= 0, \\ \lambda_3\mu_1 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1\mu_4 &= 0, \end{cases}$$

que es incompatible, como puede verse si lo resolvemos siguiendo el orden en que damos las ecuaciones y teniendo en cuenta que $\{Y_i\}_{i=1}^5$ es linealmente independiente.

El segundo tipo de base se obtiene considerando a X_5 como campo común a los cinco campos de $\{Y_i\}_{i=1}^5$, por lo que éstos poseen la expresión:

$$\begin{cases} Y_1 &= \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_5, \\ Y_2 &= \lambda_2 X_2 + \mu_2 X_5, \\ Y_3 &= \lambda_3 X_3 + \mu_3 X_5, \\ Y_4 &= \lambda_4 X_4 + \mu_4 X_5, \\ Y_5 &= \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_5. \end{cases} \tag{1.38}$$

Realizando nuevamente los diez productos posibles obtenemos un sistema en el que aparecen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_3\lambda_5 &= 0, \end{cases}$$

que es de nuevo incompatible por ser $\{Y_i\}_{i=1}^5$ linealmente independiente.

Como tercero de los casos, tenemos que el campo común sea X_4, con lo que los campos Y_i son:

$$\begin{cases} Y_1 &= \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_4, \\ Y_2 &= \lambda_2 X_2 + \mu_2 X_4, \\ Y_3 &= \lambda_3 X_3 + \mu_3 X_4, \\ Y_4 &= \lambda_4 X_5 + \mu_4 X_4, \\ Y_5 &= \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_4. \end{cases} \tag{1.39}$$

Al realizar los respectivos productos obtenemos un sistema de ecuaciones en el que aparecen:

$$\begin{cases} \lambda_1\mu_2 &= 0, \\ \lambda_1\mu_3 &= 0, \\ \lambda_1\mu_4 &= 0, \\ \mu_1\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_5 &= 0, \\ \lambda_1\mu_5 &= 0. \end{cases}$$

Este sistema es de nuevo es incompatible, como puede verse tal como se hizo en el primer tipo.

El siguiente caso es que el campo común en los cinco campos Y_i sea el X_3, con lo que quedaría:

$$\begin{cases} Y_1 &= \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_3, \\ Y_2 &= \lambda_2 X_2 + \mu_2 X_3, \\ Y_3 &= \lambda_3 X_4 + \mu_3 X_3, \\ Y_4 &= \lambda_4 X_5 + \mu_4 X_3, \\ Y_5 &= \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_3. \end{cases} \tag{1.40}$$

Por tanto, el sistema que se obtiene a partir de los productos de estos cinco campos contiene:

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_5 &= 0, \\ \lambda_3\lambda_4 &= 0, \end{cases}$$

y el sistema vuelve a ser incompatible, por ser $\{Y_i\}_{i=1}^5$ linealmente independiente.

El quinto de los casos resulta al considerar a X_2 como sumando común de los Y_i. En este caso, tendríamos la siguiente expresión:

$$\begin{cases} Y_1 &= \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2, \\ Y_2 &= \lambda_2 X_3 + \mu_2 X_2, \\ Y_3 &= \lambda_3 X_4 + \mu_3 X_2, \\ Y_4 &= \lambda_4 X_5 + \mu_4 X_2, \\ Y_5 &= \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_2. \end{cases} \tag{1.41}$$

Como parte del sistema de ecuaciones que se obtiene de los productos correspondientes, tenemos:

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_2\lambda_5 &= 0, \end{cases}$$

y ello produce nuevamente incompatibilidad debido a la independencia lineal de $\{Y_i\}_{i=1}^5$.

El último de los casos se obtiene al considerar a X_1 como el sumando común. De este modo, la expresión de los campos Y_i es la que sigue:

$$\begin{cases} Y_1 &= \lambda_1 X_2 + \mu_1 X_1, \\ Y_2 &= \lambda_2 X_3 + \mu_2 X_1, \\ Y_3 &= \lambda_3 X_4 + \mu_3 X_1, \\ Y_4 &= \lambda_4 X_5 + \mu_4 X_1, \\ Y_5 &= \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_1. \end{cases} \tag{1.42}$$

Al hacer nulos los productos correspondientes se obtienen la siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_5 &= 0, \\ \lambda_3\lambda_4 &= 0, \end{cases}$$

con la misma consecuencia de incompatibilidad.

Como los seis casos anteriores abarcan todas las posibles subálgebras, podemos afirmar que el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_5^7$ no es subálgebra de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}_4$. En consecuencia, el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{n}_5^7$ no admite como representación a un subgrupo del grupo G_4. □

Vista la imposibilidad de hallar una representación en G_4, cabe preguntarse si sería posible hacerlo en G_5. La respuesta a dicha pregunta es afirmativa, como puede verse en la siguiente:

Proposición 1.3.16. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_5^7$ admite como representación a:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$ que dimos en la Proposición 1.3.7. Se verifica que la subálgebra suya dada por:

$$\nu =< X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 >$$

es el álgebra de Lie abeliana de dimensión 5.

Para ampliar la base dada para ν a la que tenemos para $\mathfrak{g}_5$, debemos utilizar el conjunto:

$$\{X_5, X_7, X_8, X_9, X_{10}\}.$$

En consecuencia, si $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ es la base dual de $\{X_i\}_{i=1}^{10}$, para hallar las ecuaciones en G_5 del grupo de Lie simplemente conexo asociado a ν hemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{\omega_5 = 0\ ,\ \omega_7 = 0\ ,\ \omega_8 = 0\ ,\ \omega_9 = 0\ ,\ \omega_{10} = 0\}. \tag{1.43}$$

Como las expresiones de estos ω_i son:

$$\begin{cases} \omega_5 &= dx_5, \\ \omega_7 &= dx_7 - x_1 dx_9 + (x_1 x_8 - x_6) dx_{10}, \\ \omega_8 &= dx_8, \\ \omega_9 &= dx_9 - x_8 dx_{10}, \\ \omega_{10} &= dx_{10}, \end{cases} \tag{1.44}$$

el sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar las ecuaciones de (1.43), según las expresiones dadas en (1.44), resulta ser:

$$\begin{cases} x_5 &= 0, \\ x_7 &= 0, \\ x_8 &= 0, \\ x_9 &= 0, \\ x_{10} &= 0. \end{cases}$$

En consecuencia se obtiene la representación pedida para el grupo de Lie asociado al álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_5^7$. □

Capítulo 2

ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES DE DIMENSIÓN 6.

En este segundo capítulo proseguiremos el estudio comenzado en el anterior pero aumentando una unidad en la dimensión de las álgebras de Lie que trataremos. Es decir, vamos a hallar una representación como grupo de matrices cuadradas del menor orden posible para los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6.

El resultado principal que vamos a ver es que todas las álgebras de Lie nilpotentes de esta dimensión que no son filiformes verifican que los grupos de Lie simplemente conexos asociados admiten como representación a un subgrupo del grupo G_5 de matrices cuadradas de orden 5 cuyos elementos son de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (x_i)_{i=1}^{10} \in \mathbb{C}^{10}.$$

Además, como se vio en la Sección 1.1, para las álgebras de Lie filiformes de esta misma dimensión no basta el grupo G_5 para hallar una representación de sus grupos de Lie simplemente conexos asociados, sino que dicha representación se encontrará en el grupo de Lie G_6 de las matrices cuadradas de orden 6 cuyos elementos tienen como expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_7 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 1 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (x_i)_{1=1}^{15} \in \mathbb{C}^{15}.$$

Como los grupos de Lie que buscamos son nilpotentes, por ser los asociados a álgebras de Lie nilpotentes, tenemos la certeza de que representaciones de tales grupos pueden hallarse en los grupos G_n, en virtud del Teorema 0.5.15. Este hecho ya fue advertido en el capítulo anterior pero creemos que no debe perderse de vista el por qué se consideran estos grupos de Lie genéricos y no otros.

2.1 Álgebras de Lie filiformes de dimensión 6.

En esta primera sección daremos una representación de los grupos de Lie asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión 6. Como ya dijimos anteriormente buscaremos la que se obtenga por matrices del menor orden posible.

Antes de exponer el camino que seguiremos, indicamos las cinco álgebras de Lie filiformes existentes en esta dimensión, según la clasificación dada en **[22]** por Osuna:

$$\mathfrak{n}_6^1: \quad [Y_1,Y_6]=Y_5\ ,\ [Y_1,Y_5]=Y_4\ ,\ [Y_1,Y_4]=Y_3\ ,\ [Y_1,Y_3]=Y_2 \quad \text{(Modelo)}.$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_6^2: \quad & [Y_1,Y_6]=Y_5\ ,\ [Y_1,Y_5]=Y_4\ ,\ [Y_1,Y_4]=Y_3\ ,\ [Y_1,Y_3]=Y_2\ ; \\ & [Y_5,Y_6]=Y_2\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_6^3: \quad & [Y_1,Y_6]=Y_5\ ,\ [Y_1,Y_5]=Y_4\ ,\ [Y_1,Y_4]=Y_3\ ,\ [Y_1,Y_3]=Y_2\ ; \\ & [Y_4,Y_6]=Y_2\ ,\ [Y_5,Y_6]=Y_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_6^4: \quad & [Y_1,Y_6]=Y_5\ ,\ [Y_1,Y_5]=Y_4\ ,\ [Y_1,Y_4]=Y_3\ ,\ [Y_1,Y_3]=Y_2\ ; \\ & [Y_4,Y_5]=Y_2\ ,\ [Y_4,Y_6]=Y_3\ ,\ [Y_5,Y_6]=Y_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_6^5: \quad & [Y_1,Y_6]=Y_5\ ,\ [Y_1,Y_5]=Y_4\ ,\ [Y_1,Y_4]=Y_3\ ,\ [Y_1,Y_3]=Y_2\ ; \\ & [Y_4,Y_5]=Y_2\ ,\ [Y_4,Y_6]=Y_3+Y_2\ ,\ [Y_5,Y_6]=Y_4+Y_3\ . \end{aligned}$$

Esta clasificación es equivalente a la dada por Goze y Khakimdjanov en **[17]**.

El camino que seguiremos será ver, en primer lugar, que es imposible hallar una representación de sus grupos asociados en subgrupos del grupo G_5 y, en consecuencia, de los grupos G_4, G_3 ó G_2. La imposibilidad de dicha representación será debida a la imposibilidad de que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$ asociada al grupo G_5 pueda contener a las álgebras de Lie filiformes de dimensión 6.

Posteriormente veremos que en el grupo G_6 podemos hallar una representación para cada uno de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes en dimensión 6. Obsérvese que con ello rebajamos el orden de las matrices utilizadas por Benjumea en **[4]**, ya que se recurre a una representación por un grupo de matrices cuadradas de orden 7 para las álgebras $\mathfrak{n}_6^4$ y $\mathfrak{n}_6^5$ (en **[4]** son, respectivamente, μ_6^2 y μ_6^1).

Comenzaremos, pues, exponiendo la imposibilidad de hallar una representación en G_5 de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión 6. Para ello, enunciamos la siguiente:

Proposición 2.1.1. *Los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión 6 no admiten como representación a un subgrupo del grupo G_5.*

Demostración. Consecuencia inmediata del Teorema 1.1.13 para el caso $n = 6$. □

Pasaremos a estudiar las representaciones en el grupo G_6 de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes. Recordemos que representaciones de los grupos asociados a las álgebras $\mathfrak{n}_6^1$, $\mathfrak{n}_6^2$ y $\mathfrak{n}_6^3$ en G_6 ya han sido obtenidas en **[4]** mediante un grupo de automorfismos unipotentes. En la presente sección, vamos a dar explícitamente la subálgebra del álgebra $\mathfrak{g}_6$ que da cada una de estas tres álgebras de Lie filiformes. Por lo tanto, es necesario establecer previamente la ley del álgebra $\mathfrak{g}_6$ asociada al grupo de Lie G_6, que es lo que hacemos en la siguiente:

Proposición 2.1.2. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_6$ asociada al grupo de Lie G_6 es el álgebra de Lie de dimensión 15 cuya ley es:*

$$\left\{\begin{array}{lll}
[X_1, X_6] = -X_5, & [X_5, X_{10}] = X_4, & [X_7, X_{13}] = X_8, \\
[X_1, X_{10}] = X_7, & [X_5, X_{11}] = X_3, & [X_7, X_{14}] = X_9, \\
[X_1, X_{11}] = X_8, & [X_5, X_{12}] = X_2, & [X_8, X_{15}] = X_9, \\
[X_1, X_{12}] = X_9, & [X_6, X_7] = X_4, & [X_{10}, X_{13}] = X_{11}, \\
[X_3, X_{15}] = X_2, & [X_6, X_8] = X_3, & [X_{10}, X_{14}] = X_{12}, \\
[X_4, X_{13}] = X_3, & [X_6, X_9] = X_2, & [X_{11}, X_{15}] = X_{12}, \\
[X_4, X_{14}] = X_2, & & [X_{13}, X_{15}] = X_{14}.
\end{array}\right. \tag{2.1}$$

Demostración. Como el grupo de Lie G_6 posee dimensión 15, entonces su álgebra de Lie asociada, $\mathfrak{g}_6$, también posee esa misma dimensión.

En virtud del Teorema 1.1.7 y del Corolario 1.1.9, se obtiene una expresión de la ley de $\mathfrak{g}_6$ al término de la Sección 1.1. Dicha expresión con la ordenación dada en esta proposición resulta ser (2.1) □

Como consecuencia de esta última proposición, tenemos que el álgebra $\mathfrak{g}_6$ tiene como sucesión de nilpotencia la que se indica en el siguiente:

Corolario 2.1.3. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_6$ asociada al grupo G_6 es nilpotente y tiene sucesión de nilpotencia (10,6,3,1,0).* □

Una vez tenemos la ley del álgebra $\mathfrak{g}_6$ podemos buscar las subálgebras suyas que son isomorfas a las filiformes de dimensión 6.

Comenzaremos por las representaciones que ya fueron dadas en **[4]** para las álgebras de Lie filiformes $\mathfrak{n}_6^1$, $\mathfrak{n}_6^2$ y $\mathfrak{n}_6^3$. Dichas representaciones fueron obtenidas como subgrupos de un grupo de automorfismos unipotentes, formado por determinadas matrices unipotentes de orden 6.

Pasamos pues a representar los grupos asociados a las álgebras de Lie filiformes $\mathfrak{n}_6^1$, $\mathfrak{n}_6^2$ y $\mathfrak{n}_6^3$. Comenzaremos con el álgebra $\mathfrak{n}_6^1$:

Proposición 2.1.4. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme modelo $\mathfrak{n}_6^1$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 & \frac{1}{24}x_1^4 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{15}$ de $\mathfrak{g}_6$ dada en la Proposición 2.1.2 y su subálgebra $\mathfrak{g}$ generada por los campos:

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} Y_1 & = & -(X_1 + X_{10} + X_{13} + X_{15}), & Y_4 & = & X_4, \\ Y_2 & = & X_2, & Y_5 & = & X_5, \\ Y_3 & = & X_3, & Y_6 & = & X_6. \end{array} \right.$$

Ampliamos a una base de $\mathfrak{g}_6$ la base dada de $\mathfrak{g}$ mediante los campos:

$$\left\{ \begin{array}{lcllcllcl} Y_7 & = & X_1, & Y_{10} & = & X_9, & Y_{13} & = & X_{12}, \\ Y_8 & = & X_7, & Y_{11} & = & X_{10}, & Y_{14} & = & X_{13}, \\ Y_9 & = & X_8, & Y_{12} & = & X_{11}, & Y_{15} & = & X_{14}. \end{array} \right.$$

Consideremos la base $\{\omega_i\}_{i=1}^{15}$ dual de la base de $\mathfrak{g}_6$ dada por $\{Z_i\}_{i=1}^{15}$, siendo éstos definidos como:

$$\begin{cases} Z_i & = & X_i, & i = 1, \ldots, 14, \\ Z_{15} & = & X_{15} + X_{13} + X_{10} + X_1. & \end{cases}$$

Para hallar el grupo de Lie asociado al álgebra de Lie filiforme modelo $\mathfrak{n}_6^1$, debe resolverse el sistema de ecuaciones obtenido con la integración del sistema siguiente:

$$\begin{cases} \omega_1 & = & 0, & \omega_7 & = & 0, & \omega_8 & = & 0, \\ \omega_9 & = & 0, & \omega_{10} & = & 0, & \omega_{11} & = & 0, \\ \omega_{12} & = & 0, & \omega_{13} & = & 0, & \omega_{14} & = & 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Como las expresiones de los ω_i involucrados son las que siguen:

$$\begin{cases} \omega_1 & = & dx_1 - dx_{15}, \\ \omega_7 & = & dx_7 - x_1 dx_{10}, \\ \omega_8 & = & dx_8 - x_1 dx_{11} + (x_1 x_{10} - x_7) dx_{13}, \\ \omega_9 & = & dx_9 - x_1 dx_{12} + (x_1 x_{10} - x_7) dx_{14} \\ & & -(x_8 - x_1 x_{11} + x_1 x_{10} x_{13} - x_7 x_{13}) dx_{15}, \\ \omega_{10} & = & dx_{10} - dx_{15}, \\ \omega_{11} & = & dx_{11} - x_{10} dx_{13}, \\ \omega_{12} & = & dx_{12} - x_{10} dx_{14} + (x_{10} x_{13} - x_{11}) dx_{15}, \\ \omega_{13} & = & dx_{13} - dx_{15}, \\ \omega_{14} & = & dx_{14} - x_{13} dx_{15}, \end{cases} \tag{2.3}$$

al integrar las ecuaciones (2.2) con las expresiones dadas en (2.3), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{15} & = & x_{13} & = & x_{10} & = & x_1, \\ x_{14} & = & x_{11} & = & x_7 & = & \frac{1}{2} x_1^2, \\ x_{12} & = & x_8 & = & \frac{1}{6} x_1^3, \\ x_9 & = & \frac{1}{24} x_1^4, \end{cases}$$

obteniéndose como representación del grupo asociado al álgebra $\mathfrak{n}_6^1$ la que indicábamos. □

Nota 2.1.5. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^1$ es el mismo que obtuvo Benjumea en la Proposición 1.2.2 de* **[4]**.

Seguimos con las álgebras de Lie $\mathfrak{n}_6^2$ y $\mathfrak{n}_6^3$, cuyos grupos admiten las representaciones dadas en los dos siguientes resultados.

Proposición 2.1.6. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^2$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_6 & \frac{1}{24}x_1^4 + x_1x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{15}$ de $\mathfrak{g}_6$ dada en la Proposición 2.1.2 y su subálgebra $\mathfrak{g}$ generada por los campos:

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} Y_1 & = & -(X_1 + X_{10} + X_{13} + X_{15}), & & Y_4 & = & X_4, \\ Y_2 & = & X_2, & & Y_5 & = & X_5, \\ Y_3 & = & X_3, & & Y_6 & = & X_6 + X_8 + X_{12}. \end{array} \right.$$

Esta base de $\mathfrak{g}$ podemos ampliarla a una base de $\mathfrak{g}_6$ sin más que considerar los campos:

$$\left\{ \begin{array}{rclrclrcl} Y_7 & = & X_1, & Y_{10} & = & X_8, & Y_{13} & = & X_{11}, \\ Y_8 & = & X_6, & Y_{11} & = & X_9, & Y_{14} & = & X_{13}, \\ Y_9 & = & X_7, & Y_{12} & = & X_{10}, & Y_{15} & = & X_{14}. \end{array} \right.$$

Denotemos por $\{\omega_i\}_{i=1}^{15}$ a la base dual de la base de $\mathfrak{g}_6$ definida por:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Z_i & = & X_i, & i = 1, \ldots, 11, 13, 14, \\ Z_{12} & = & X_6 + X_8 + X_{12}, & \\ Z_{15} & = & X_{15} + X_{13} + X_{10} + X_1. & \end{array} \right.$$

El grupo de Lie asociado al álgebra $\mathfrak{n}_6^2$ se obtiene con las ecuaciones que se obtienen al integrar el sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rclrclrcl} \omega_1 & = & 0, & \omega_6 & = & 0, & \omega_7 & = & 0, \\ \omega_8 & = & 0, & \omega_9 & = & 0, & \omega_{10} & = & 0, \\ \omega_{11} & = & 0, & \omega_{13} & = & 0, & \omega_{14} & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Las expresiones de las formas ω_i involucradas son las que siguen:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\omega_1 & = & dx_1 - dx_{15},\\ \omega_6 & = & dx_6 - dx_{12} + x_{10}dx_{14} + (x_{11} - x_{10}x_{13})dx_{15},\\ \omega_7 & = & dx_7 - x_1dx_{10},\\ \omega_8 & = & dx_8 - x_1dx_{11} - dx_{12} + (x_1x_{10} - x_7)dx_{13} + x_{10}dx_{14}\\ & & +(x_{11} - x_{10}x_{13})dx_{15},\\ \omega_9 & = & dx_9 - x_1dx_{12} + (x_1x_{10} - x_7)dx_{14}\\ & & +(x_7x_{13} + x_1x_{11} - x_8 - x_1x_{10}x_{13})dx_{15},\\ \omega_{10} & = & dx_{10} - dx_{15},\\ \omega_{11} & = & dx_{11} - x_{10}dx_{13},\\ \omega_{13} & = & dx_{13} - dx_{15},\\ \omega_{14} & = & dx_{14} - x_{13}dx_{15}.\end{array}\right. \tag{2.5}$$

El sistema de ecuaciones que queda al integrar (2.4) con las expresiones dadas en (2.5) es:

$$\left\{\begin{array}{lclclcl}x_{15} & = & x_{13} & = & x_{10} & = & x_1,\\ x_{14} & = & x_{11} & = & x_7 & = & \frac{1}{2}x_1^2,\\ x_{12} & = & x_8 & = & \frac{1}{6}x_1^3 + x_6, & & \\ x_9 & = & \frac{1}{24}x_1^4 + x_1x_6, & & & & \end{array}\right.$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Nota 2.1.7. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^2$ es el mismo que obtuvo Benjumea en la Proposición 2.4.2 de* **[4]**.

Proposición 2.1.8. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^3$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix}1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2\\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_6 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_6 & \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2x_6 + \frac{1}{2}x_6^2\\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_6 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{15}$ de $\mathfrak{g}_6$ dada en la Proposición 2.1.2 y su subálgebra $\mathfrak{g}$ generada por los campos:

$$\left\{\begin{array}{lcllcl}Y_1 & = & -(X_1 + X_{10} + X_{13} + X_{15}), & Y_4 & = & X_4,\\ Y_2 & = & X_2, & Y_5 & = & X_5,\\ Y_3 & = & X_3, & Y_6 & = & X_6 + X_7 + X_{11} + X_{14}.\end{array}\right.$$

La anterior base de $\mathfrak{g}$ se amplia a una base de $\mathfrak{g}_6$ mediante los campos:

$$\begin{cases} Y_7 = X_1, & Y_{10} = X_8, & Y_{13} = X_{11}, \\ Y_8 = X_6, & Y_{11} = X_9, & Y_{14} = X_{12}, \\ Y_9 = X_7, & Y_{12} = X_{10}, & Y_{15} = X_{13}. \end{cases}$$

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{15}$ la base dual de la base de $\mathfrak{g}_6$ dada por:

$$\begin{cases} Z_i = X_i, & i = 1, \ldots, 13, \\ Z_{14} = X_{14} + X_{11} + X_7 + X_6, & \\ Z_{15} = X_{15} + X_{13} + X_{10} + X_1. & \end{cases}$$

Las ecuaciones del grupo de Lie asociado al álgebra $\mathfrak{n}_6^3$ se obtienen integrando el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \omega_1 = 0, & \omega_6 = 0, & \omega_7 = 0, \\ \omega_8 = 0, & \omega_9 = 0, & \omega_{10} = 0, \\ \omega_{11} = 0, & \omega_{12} = 0, & \omega_{13} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Las expresiones de las formas ω_i que aparecen en (2.6) son las siguientes:

$$\begin{cases} \omega_1 = dx_1 - dx_{15}, \\ \omega_6 = dx_6 - dx_{14} + x_{13}dx_{15}, \\ \omega_7 = dx_7 - x_1 dx_{10} - dx_{14} + x_{13}dx_{15}, \\ \omega_8 = dx_8 - x_1 dx_{11} + (x_1x_{10} - x_7)dx_{13}, \\ \omega_9 = dx_9 - x_1 dx_{12} + (x_1x_{10} - x_7)dx_{14} \\ \qquad +(x_7x_{13} + x_1x_{11} - x_8 - x_1x_{10}x_{13})dx_{15}, \\ \omega_{10} = dx_{10} - dx_{15}, \\ \omega_{11} = dx_{11} - x_{10}dx_{13} - dx_{14} + x_{13}dx_{15}, \\ \omega_{12} = dx_{12} - x_{10}dx_{14} + (x_{10}x_{13} - x_{11})dx_{15}, \\ \omega_{13} = dx_{13} - dx_{15}. \end{cases} \tag{2.7}$$

El sistema de ecuaciones obtenido al integrar (2.4) con las expresiones dadas en (2.5) es:

$$\begin{cases} x_{15} = x_{13} = x_{10} = x_1, \\ x_{14} = x_{11} = x_7 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_6, \\ x_{12} = x_8 = \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_6, \\ x_9 = \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2x_6 + \frac{1}{2}x_6^2, \end{cases}$$

con lo que se concluye la prueba. □

Nota 2.1.9. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^3$ es el mismo que obtuvo Benjumea en la Proposición 2.4.1 de* **[4]**.

La última parte de esta sección tiene por objetivo dar representaciones de los grupos de Lie asociados a las álgebras de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^4$ y $\mathfrak{n}_6^5$. Dichas representaciones serán como subgrupo del grupo G_6. Este resultado mejora el ya obtenido en **[4]**, en el que se daban representaciones de dichos grupos de Lie pero como subgrupos del grupo de matrices G_7, cuyos elementos son de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \\ 0 & 0 & 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{16} & x_{17} & x_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{19} & x_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (x_i)_{i=1}^{21} \in \mathbb{C}^{21}.$$

Damos primero la representación del grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_6^4$, como puede observarse en la siguiente:

Proposición 2.1.10. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^4$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 & \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{6}x_1^3x_6 - \frac{1}{2}x_1^2x_5 + x_1x_4 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_6 - x_1x_5 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_6 - x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 + x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_6$ engendrada por los campos:

$$\begin{cases} Z_1 = X_1 - X_6 + X_{10} + X_{13}, \\ Z_2 = -X_2, \\ Z_3 = X_9 - X_3, \\ Z_4 = X_4 + X_{12}, \\ Z_5 = -X_5 + X_{14}, \\ Z_6 = X_6 + X_{15}. \end{cases} \tag{2.8}$$

La ley del álgebra g, respecto de la base dada en (2.8), es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} [Z_1, Z_6] & = & Z_5, & [Z_3, Z_6] & = & 2Z_2, \\ [Z_1, Z_5] & = & Z_4, & [Z_4, Z_5] & = & -2Z_2, \\ [Z_1, Z_4] & = & Z_3, & & & \\ [Z_1, Z_3] & = & Z_2. & & & \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Vemos que esta ley es isomorfa a la del álgebra de Lie filiforme n_6^4, ya que el cambio de base:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} Y_1 & = & Z_1, & Y_4 & = & -\frac{1}{2}Z_4, \\ Y_2 & = & -\frac{1}{2}Z_2, & Y_5 & = & -\frac{1}{2}Z_5, \\ Y_3 & = & -\frac{1}{2}Z_3, & Y_6 & = & -\frac{1}{2}Z_6 - Z_1, \end{array} \right.$$

transforma (2.9) en:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} [Y_1, Y_6] & = & Y_5, & [Y_5, Y_6] & = & Y_4, \\ [Y_1, Y_5] & = & Y_4, & [Y_4, Y_6] & = & Y_3, \\ [Y_1, Y_4] & = & Y_3, & [Y_4, Y_5] & = & Y_2, \\ [Y_1, Y_3] & = & Y_2, & & & \end{array} \right.$$

que es la ley de n_6^4.

Ampliamos la base $\{Y_i\}_{i=1}^6$ de n_6^4 con los campos:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} Y_7 & = & X_1, & Y_{12} & = & X_{10}, \\ Y_8 & = & X_3, & Y_{13} & = & X_{11}, \\ Y_9 & = & X_6, & Y_{14} & = & X_{12}, \\ Y_{10} & = & X_7, & Y_{15} & = & X_{14}. \\ Y_{11} & = & X_8, & & & \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{15}$ la base dual de $\{Y_i\}_{i=1}^{15}$. Las ecuaciones del grupo de Lie simplemente conexo asociado a n_6^4 se obtienen integrando el sistema:

$$\omega_i = 0, \qquad i = 7, \ldots, 15,$$

cuyas expresiones son las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\omega_7 & = & dx_1 - dx_{13}, \\
\omega_8 & = & dx_3 - x_6 dx_8 + dx_9 + (x_1x_6 - x_5)dx_{11} - x_1 dx_{12} \\
 & & +(x_6x_7 + x_5x_{10} - x_1x_6x_{10} - x_4)dx_{13} + (x_1x_{10} - x_7)dx_{14} \\
 & & +(x_7x_{13} + x_1x_{11} - x_8 - x_1x_{10}x_{13})dx_{15}, \\
\omega_9 & = & dx_{13} + dx_6 - dx_{15}, \\
\omega_{10} & = & dx_7 - x_1 dx_{10}, \\
\omega_{11} & = & dx_8 - x_1 dx_{11} + (x_1x_{10} - x_7)dx_{13}, \\
\omega_{12} & = & dx_{10} - dx_{13}, \\
\omega_{13} & = & dx_{11} - x_{10} dx_{13}, \\
\omega_{14} & = & -dx_4 + x_6 dx_7 + (x_5 - x_1x_6)dx_{10} + dx_{12} - x_{10}dx_{14} \\
 & & +(x_{10}x_{13} - x_{11})dx_{15}, \\
\omega_{15} & = & -x_6 dx_1 + dx_5 + dx_{14} - x_{13}dx_{15}.
\end{array}\right.$$

La solución del sistema que se obtiene al integrar (2.10) es:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
x_1 & = & x_{10} = x_{13}, \\
x_7 & = & x_{11} = \frac{1}{2}x_1^2, \\
x_8 & = & \frac{1}{6}x_1^3, \\
x_9 & = & \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{6}x_1^3x_6 - \frac{1}{2}x_1^2x_5 + x_1x_4 - x_3, \\
x_{12} & = & \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_6 - x_1x_5 + x_4, \\
x_{14} & = & \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_6 - x_5, \\
x_{15} & = & x_1 + x_6,
\end{array}\right.$$

obteniéndose la representación indicada. □

Continuaremos dando una representación del grupo de Lie asociado al álgebra $\mathfrak{n}_6^5$ como subgrupo del grupo G_6. Pero antes vamos a expresar la ley de esta álgebra de una forma más manejable.

Lema 2.1.11. *La ley del álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^5$ puede expresarse como:*

$$\left\{\begin{array}{lclclclclcl}
[Z_1, Z_2] & = & Z_3, & [Z_1, Z_3] & = & Z_4, & [Z_1, Z_4] & = & Z_5, \\
[Z_1, Z_5] & = & Z_6, & [Z_2, Z_3] & = & Z_5, & [Z_2, Z_4] & = & Z_6, \\
[Z_2, Z_5] & = & -Z_6, & [Z_3, Z_4] & = & Z_6, & & &
\end{array}\right.$$

Demostración. Sea $\{Y_i\}_{i=1}^6$ la base del álgebra $\mathfrak{n}_6^5$ que nos da la expresión de la ley del álgebra que aparece en la clasificación expuesta al comienzo de esta sección.

El cambio de base definido por:

$$\begin{cases} Z_1 = Y_1, & Z_4 = -Y_4, \\ Z_2 = -(Y_6+Y_1), & Z_5 = -Y_3, \\ Z_3 = -Y_5, & Z_6 = -Y_2, \end{cases}$$

convierte la ley del álgebra en la del enunciado. □

La expresión de la ley del álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^5$ dada en el lema anterior va a ser el punto de partida que vamos a tomar para la obtención de una representación del grupo de Lie asociado a dicha álgebra mediante un subgrupo de G_6.

Proposición 2.1.12. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{n}_6^5$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \begin{array}{c}\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{3}x_1 \\ +\frac{1}{3}x_6\end{array} & \frac{1}{6}x_1^3-\frac{1}{3}x_1x_6+\frac{2}{3}x_5 & \begin{array}{c}\frac{1}{3}x_3+\frac{4}{3}x_4+\frac{4}{9}x_5-\frac{5}{18}x_1^2-\frac{2}{9}x_6^2 \\ +\frac{1}{3}x_1x_4-\frac{5}{9}x_1x_5-x_1x_6+\frac{1}{9}x_5x_6 \\ -\frac{1}{6}x_1^2x_5+\frac{1}{18}x_1^4+\frac{1}{18}x_1^3x_6\end{array} \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_6 & \begin{array}{c}-x_1+\frac{1}{3}x_4-\frac{4}{9}x_5-x_6-\frac{2}{9}x_1^2-\frac{1}{9}x_6^2 \\ -\frac{1}{9}x_1x_6-\frac{1}{3}x_1x_5+\frac{2}{9}x_1^3+\frac{1}{6}x_1^2x_6\end{array} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{2}{3}x_1^2+\frac{1}{3}x_1x_6-\frac{1}{3}x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}x_6+\frac{4}{3}x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_6$ generada por la base:

$$\begin{cases} Z_1 = -X_1+X_6-X_{10}-X_{13}-X_{15}, \\ Z_2 = X_6+\frac{1}{3}X_7-\frac{1}{3}X_{11}-X_{12}+\frac{1}{3}X_{15}, \\ Z_3 = X_5+\frac{1}{3}X_4+\frac{2}{3}X_8+X_9-\frac{1}{3}X_{12}-\frac{1}{3}X_{14}, \\ Z_4 = X_2+X_3+X_4+X_9+\frac{1}{3}X_{12}, \\ Z_5 = 2X_2+X_3-\frac{1}{3}X_9, \\ Z_6 = \frac{2}{3}X_2. \end{cases} \tag{2.11}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ respecto de la base dada en (2.11) resulta ser:

$$\begin{cases} [Z_1, Z_k] = Z_{k+1}, \quad k = 2,3,4,5, \\ [Z_2, Z_3] = Z_5, \qquad [Z_2, Z_4] = Z_6, \\ [Z_2, Z_5] = -Z_6, \qquad [Z_3, Z_4] = Z_6, \end{cases}$$

que es la ley del álgebra $\mathfrak{n}_6^5$, en virtud del Lema 2.1.11.

Para integrar el álgebra $\mathfrak{g}$ con el fin de obtener el grupo de Lie simplemente conexo asociado, vamos a realizar algunos cambios en la base dada en (2.11). Consideraremos la siguiente base de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{cases} Y_1 = -\frac{1}{3}X_1 + 12X_3 + 3X_4 + \frac{4}{3}X_6 + \frac{1}{3}X_7 - \frac{1}{3}X_{10} - \frac{1}{3}X_{11} - \frac{1}{3}X_{13}, \\ Y_2 = 12X_3 + 3X_4 + X_6 + \frac{1}{3}X_7 - \frac{1}{3}X_{11} + \frac{1}{3}X_{15}, \\ Y_3 = 7X_3 + \frac{4}{3}X_4 + X_5 + \frac{2}{3}X_8 - \frac{1}{3}X_{14}, \\ Y_4 = 4X_3 + X_4 + \frac{1}{3}X_{12}, \\ Y_5 = X_3 - \frac{1}{3}X_9, \\ Y_6 = X_2, \end{cases}$$

que se amplia a G_6 con los siguientes campos:

$$\begin{cases} Y_7 = X_1, \qquad Y_{10} = X_5, \qquad Y_{13} = X_8, \\ Y_8 = X_3, \qquad Y_{11} = X_6, \qquad Y_{14} = X_{10}, \\ Y_9 = X_4, \qquad Y_{12} = X_7, \qquad Y_{15} = X_{11}. \end{cases}$$

Si $\{\omega_i\}_{i=1}^{15}$ es la base dual de $\{Y_i\}_{i=1}^{15}$, entonces debemos integrar el sistema definido por la formas diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega_7 & = & dx_1 - dx_{13} \hfill = \ 0, \\ \omega_8 & = & dx_3 - x_6 dx_8 + 3dx_9 + (x_1x_6 - x_5)dx_{11} \\ & & -(12+3x_1)dx_{12} + (36 - x_1x_6x_{10} + x_5x_{10} \\ & & +x_6x_7 - x_4)dx_{13} + (21 + 12x_{10} + 3x_1x_{10} - 3x_7)dx_{14} \\ & & +(-36 - 21x_{13} - 12x_{10}x_{13} - 3x_1x_{10}x_{13} + 3x_7x_{13} \\ & & +12x_{11} + 3x_1x_{11} - 3x_8)dx_{15} \hfill = \ 0, \\ \omega_9 & = & dx_4 - x_6dx_7 + (x_1x_6 - x_5)dx_{10} - 3dx_{12} + 9dx_{13} \\ & & +(4+3x_{10})dx_{14} + (-9 - 4x_{13} - 3x_{10}x_{13} + 3x_{11})dx_{15} = 0, \\ \omega_{10} & = & -x_6dx_1 + dx_5 + 3dx_{14} - 3x_{13}dx_{15} \hfill = \ 0, \\ \omega_{11} & = & dx_6 + 4dx_{13} - 3dx_{15} \hfill = \ 0, \\ \omega_{12} & = & dx_7 - x_1dx_{10} + dx_{13} - dx_{15} \hfill = \ 0, \\ \omega_{13} & = & dx_8 - x_1dx_{11} + (x_1x_{10} - x_7)dx_{13} + 2dx_{14} - 2x_{13}dx_{15} = 0, \\ \omega_{14} & = & dx_{10} - dx_{13} \hfill = \ 0, \\ \omega_{15} & = & dx_{11} - (1+x_{10})dx_{13} + dx_{15} \hfill = \ 0. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

La solución del sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar (2.12) es:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_{10} = x_{13}, \\ x_{15} & = & \frac{1}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_1, \\ x_{14} & = & \frac{2}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1x_6 - \frac{1}{3}x_5, \\ x_7 & = & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_6, \\ x_{11} & = & \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_6, \\ x_8 & = & \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1x_6 + \frac{2}{3}x_5, \\ x_{12} & = & -x_1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{9}x_5 - x_6 - \frac{2}{9}x_1^2 - \frac{1}{9}x_6^2 - \frac{1}{3}x_1x_5 - \frac{1}{9}x_1x_6 + \frac{2}{9}x_1^3 + \frac{1}{6}x_1^2x_6, \\ x_9 & = & \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{4}{9}x_5 - \frac{5}{18}x_1^2 - \frac{2}{9}x_6^2 + \frac{1}{3}x_1x_4 - \frac{5}{9}x_1x_5 - x_1x_6 + \frac{1}{9}x_5x_6 \\ & & -\frac{1}{6}x_1^2x_5 + \frac{1}{18}x_1^4 + \frac{1}{18}x_1^3x_6, \end{array}\right.$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Los resultados que hemos obtenido en la presente sección permiten llegar a la conclusión que enunciamos en el siguiente:

Teorema 2.1.13. *Todo grupo de Lie simplemente conexo asociado a un álgebra de Lie filiforme de dimensión 6 admite como representación a un subgrupo del grupo de Lie G_6.*

□

2.2 Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 no filiformes.

Como objetivo de esta segunda sección, perseguimos obtener representaciones de los grupos de Lie simplemente conexos asociados a cada una de las álgebras de Lie nilpotentes que no son filiformes en dimensión 6.

El número de álgebras de Lie nilpotentes no filiformes en dimensión 6 es significativo, pues encontramos 16 de estas álgebras. Recuérdese que en dimensión 5 sólo había 4 y en dimensiones inferiores sólo existía la abeliana.

Las leyes de estas 16 álgebras son las que indicamos a continuación, que coinciden, salvo ordenación, con las dadas por Goze y Khakimdjanov en **[17]**:

$\mathfrak{n}_6^6$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_5, Y_6] = Y_2$.

$\mathfrak{n}_6^7$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_1, Y_3] = Y_2$, $[Y_4, Y_6] = Y_2$, $[Y_5, Y_6] = Y_3$.

$\mathfrak{n}_6^8$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_2, Y_6] = Y_3$.

$\mathfrak{n}_6^9$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_2, Y_6] = Y_3$, $[Y_5, Y_6] = Y_3$.

$\mathfrak{n}_6^{10}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_2, Y_5] = Y_3$, $[Y_2, Y_6] = Y_4$.

$\mathfrak{n}_6^{11}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_3, Y_6] = Y_4$, $[Y_5, Y_6] = Y_2$.

$\mathfrak{n}_6^{12}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_3, Y_6] = Y_2$, $[Y_5, Y_6] = Y_2$.

$\mathfrak{n}_6^{13}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_5, Y_6] = Y_3$, $[Y_4, Y_6] = Y_2$.

$\mathfrak{n}_6^{14}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_5, Y_6] = Y_2$.

$\mathfrak{n}_6^{15}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_3, Y_6] = -Y_2$, $[Y_4, Y_5] = Y_2$.

$\mathfrak{n}_6^{16}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_5, Y_6] = Y_3$, $[Y_4, Y_6] = Y_2$.

$\mathfrak{n}_6^{17}$: $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_1, Y_3] = Y_2$, $[Y_2, Y_3] = Y_4$.

n_6^{18} : $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_4, Y_6] = Y_2$.

n_6^{19} : $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_5] = Y_4$, $[Y_2, Y_3] = Y_4$.

n_6^{20} : $[Y_1, Y_6] = Y_5$, $[Y_1, Y_4] = Y_3$, $[Y_2, Y_6] = Y_3$.

n_6^{21} : abeliana.

Esta ordenación, al igual que se hizo en dimensión 5, está hecha en base a la sucesión central de nilpotencia de dichas álgebras. Esto se muestra en la siguiente:

Proposición 2.2.1. *La sucesión de nilpotencia de las álgebras de Lie nilpotentes no filiformes de dimensión 6 son las siguientes:*

i. n_6^6 *y* n_6^7*: sucesión de nilpotencia (4,3,1,0).*

ii. n_6^8*,* n_6^9 *y* n_6^{10}*: sucesión de nilpotencia (3,2,1,0).*

iii. n_6^{11} *y* n_6^{12}*: sucesión de nilpotencia (3,2,0).*

iv. n_6^{13}*,* n_6^{14}*,* n_6^{15}*,* n_6^{16} *y* n_6^{17}*: sucesión de nilpotencia (3,1,0).*

v. n_6^{18}*: sucesión de nilpotencia (3,0).*

vi. n_6^{19}*: sucesión de nilpotencia (2,1,0).*

vii. n_6^{20}*: sucesión de nilpotencia (2,0).*

viii. n_6^{21}*: sucesión de nilpotencia (0).* □

El resultado principal de esta sección va a ser obtener representaciones en el grupo de Lie G_5 de cada uno de los grupos de Lie simplemente conexo asociados a las álgebras de Lie nilpotentes no filiformes en dimensión 6. Éstas se obtendrán buscando en el álgebra de Lie g_5, asociada al grupo G_5, una subálgebra suya que sea isomorfa al álgebra de Lie nilpotente que estemos estudiando.

Recordemos que en la Proposición 1.3.7 se obtenía una base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ del álgebra de Lie g_5 asociada al grupo de Lie G_5 para la que la ley del álgebra tenía la siguiente expresión:

$$\left\{ \begin{array}{rclrclrcl} [X_1, X_5] & = & -X_4, & [X_1, X_8] & = & X_6, & [X_1, X_9] & = & X_7, \\ [X_3, X_{10}] & = & X_2, & [X_4, X_8] & = & X_3, & [X_4, X_9] & = & X_2, \\ [X_5, X_6] & = & X_3, & [X_5, X_7] & = & X_2, & & & \\ [X_6, X_{10}] & = & X_7, & [X_8, X_{10}] & = & X_9. & & & \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Partiremos entonces de esta base para obtener las álgebras de Lie nilpotentes no filiformes de dimensión 6.

Por otro lado, el orden que seguiremos en la sección para dar las representaciones de los grupos será empezar por el álgebra $\mathfrak{n}_6^{21}$ hasta llegar a la $\mathfrak{n}_6^{6}$, esto es, en orden descendente. Así pues, comenzaremos nuestro estudio con el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{n}_6^{21}$.

Proposición 2.2.2. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{21}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. La subálgebra $\mathfrak{g}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$ obtenida al considerar como base al conjunto dado por:

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7\}$$

tiene todos sus productos corchetes nulos. Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie abeliana de dimensión 6.

Si ampliamos la base de $\mathfrak{g}$ a la que teníamos en $\mathfrak{g}_5$, esto es, $\{X_i\}_{i=1}^{10}$, las ecuaciones que determinan la representación del grupo asociado al álgebra de Lie vienen dadas por la integración de las ecuaciones:

$$\{\omega_5 = 0\,, \qquad \omega_8 = 0\,, \qquad \omega_9 = 0\,, \qquad \omega_{10} = 0\}. \tag{2.14}$$

Al tener las formas diferenciales ω_i $(i = 5, 8, 9, 10)$ las expresiones siguientes:

$$\omega_5 = dx_5\,, \qquad \omega_8 = dx_8\,, \qquad \omega_9 = dx_9 - x_8 dx_{10}\,, \qquad \omega_{10} = dx_{10}\,.$$

el resultado de la integración de (2.14) es:

$$x_5 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Proposición 2.2.3. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{20}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Consideremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ y la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ engendrada por la siguiente base:

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} Z_1 & = & X_5, & Z_4 & = & X_7, \\ Z_2 & = & X_4, & Z_5 & = & X_3, \\ Z_3 & = & X_2, & Z_6 & = & X_6 + X_9. \end{array}\right. \tag{2.15}$$

Esta subálgebra resulta tener como ley la del álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{20}$.

La base dada en (2.15) se amplia a una base de $\mathfrak{g}_5$ mediante los siguientes campos:

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} Z_7 & = & X_1, & Z_9 & = & X_8, \\ Z_8 & = & X_6, & Z_{10} & = & X_{10}. \end{array}\right.$$

Si $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ es la base dual de $\{Z_i\}_{i=1}^{10}$, para hallar una representación del grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_6^{20}$ basta resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0. \tag{2.16}$$

La expresión de los ω_i, con $i = 7, 8, 9, 10$, es la que damos a continuación:

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} \omega_7 & = & dx_1, & \omega_9 & = & dx_8, \\ \omega_8 & = & dx_6 - x_1 dx_8 - dx_9 + x_8 dx_{10}, & \omega_{10} & = & dx_{10}. \end{array}\right.$$

La solución del sistema que se obtiene al integrar (2.16) es la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & 0, & x_8 & = & 0, \\ x_6 & = & x_9, & x_{10} & = & 0, \end{array}\right.$$

con lo que se llega a la representación indicada. □

Proposición 2.2.4. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{19}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Consideremos la subálgebra $\mathfrak{g}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5$ engendrada por la base $\{Y_i\}_{i=1}^{6}$, cuyos elementos tienen como expresión:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_1 & = & X_1 + X_5, & Y_4 & = & X_2, \\ Y_2 & = & X_3, & Y_5 & = & X_7, \\ Y_3 & = & X_{10}, & Y_6 & = & X_9. \end{array}$$

De este modo, la ley de la subálgebra $\mathfrak{g}$ resulta ser la del álgebra $\mathfrak{n}_6^{19}$.

Consideremos la base dual $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene ampliando la base de $\mathfrak{n}_6^{19}$ con los campos:

$$\begin{array}{rclcrcl} Y_7 & = & X_1, & \quad & Y_9 & = & X_6, \\ Y_8 & = & X_4, & & Y_{10} & = & X_8. \end{array}$$

Para obtener el grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{19}$ debemos resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar este otro sistema:

$$\omega_7 = 0, \qquad \omega_8 = 0, \qquad \omega_9 = 0, \qquad \omega_{10} = 0. \tag{2.17}$$

La expresión de los ω_i, con $i = 7, 8, 9, 10$, es la que damos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} \omega_7 & = & dx_1 - dx_5, & \quad & \omega_9 & = & dx_6 - x_1 dx_8, \\ \omega_8 & = & dx_4 - x_5 dx_1, & & \omega_{10} & = & dx_8. \end{array} \right.$$

La solución del sistema que se obtiene al integrar (2.17) es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} x_1 & = & x_5, & \quad & x_6 & = & 0, \\ x_4 & = & \frac{1}{2}x_1^2, & & x_8 & = & 0. \end{array} \right.$$

En consecuencia, llegamos a la representación indicada. □

Proposición 2.2.5. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{18}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & \frac{1}{2}x_4^2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ que genera la siguiente base:

$$\begin{array}{rclcrcl} Y_1 & = & X_1, & \quad & Y_4 & = & X_9 + X_4, \\ Y_2 & = & X_3, & & Y_5 & = & X_6, \\ Y_3 & = & X_7, & & Y_6 & = & X_8. \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ resulta ser la del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{18}$.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene al ampliar la base de $\mathfrak{n}_6^{18}$ con los campos:

$$\begin{array}{rclcrcl} Y_7 & = & X_2, & \quad & Y_9 & = & X_9, \\ Y_8 & = & X_5, & & Y_{10} & = & X_{10}. \end{array}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.18}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\begin{cases} \omega_7 &= dx_2 - x_5 dx_7 + (x_1x_5 - x_4)dx_9 + (x_5x_6 - x_3 + x_4x_8 - x_1x_5x_8)dx_{10}, \\ \omega_8 &= dx_5, \\ \omega_9 &= dx_9 - x_8dx_{10} - dx_4 + x_5dx_1 \\ \omega_{10} &= dx_{10}. \end{cases}$$

El resultado de integrar (2.18) es el que sigue:

$$x_2 = \frac{1}{2}x_4^2, \qquad x_5 = 0, \qquad x_9 = x_4, \qquad x_{10} = 0,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Proposición 2.2.6. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{17}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_5 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & \frac{1}{2}x_8^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ que genera la siguiente base:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_1 &=& X_8 + X_{10}, & Y_4 &=& X_2, \\ Y_2 &=& -X_7, & Y_5 &=& -X_3, \\ Y_3 &=& X_5 + X_6, & Y_6 &=& X_4. \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ resulta ser la del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{17}$.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene al ampliar la base de $\mathfrak{n}_6^{17}$ con los campos:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_7 &=& X_1, & Y_9 &=& X_9, \\ Y_8 &=& X_6, & Y_{10} &=& X_{10}. \end{array}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.19}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\begin{cases} \omega_7 & = & dx_1, \\ \omega_8 & = & -dx_5 + dx_6 - x_1 dx_8, \\ \omega_9 & = & dx_9 - x_8 dx_{10}, \\ \omega_{10} & = & dx_{10} - dx_8. \end{cases}$$

El resultado de integrar (2.19) es el que sigue:

$$x_1 = 0, \qquad x_6 = x_5, \qquad x_9 = \frac{1}{2}x_8^2, \qquad x_{10} = x_8,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Proposición 2.2.7. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{16}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ que genera la siguiente base:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_1 & = & X_4, & Y_4 & = & X_9, \\ Y_2 & = & -X_7, & Y_5 & = & X_3, \\ Y_3 & = & X_2, & Y_6 & = & X_1 + X_8 + X_{10}. \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ resulta ser la del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{16}$.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene al ampliar la base de $\mathfrak{n}_6^{16}$ con los campos:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_7 & = & X_1, & Y_9 & = & X_6, \\ Y_8 & = & X_5, & Y_{10} & = & X_8. \end{array}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.20}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\begin{cases} \omega_7 = dx_1 - dx_{10}, & \omega_9 = dx_6 - x_1 dx_8, \\ \omega_8 = dx_5, & \omega_{10} = dx_8 - dx_{10}. \end{cases}$$

El resultado de integrar (2.20) es el que sigue:

$$x_1 = x_8 = x_{10}, \qquad x_5 = 0, \qquad x_6 = \frac{1}{2}x_1^2,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Proposición 2.2.8. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente* n_6^{15} *admite como representación al grupo de Lie* G_4.

Demostración. Según se vio en la Proposición 1.2.6, la ley del álgebra de Lie asociada al grupo G_4 puede escribirse como:

$$\begin{array}{rclcrcl} [X_1, X_6] & = & X_5, & \qquad & [X_3, X_6] & = & X_2 \\ [X_1, X_4] & = & -X_3, & \qquad & [X_4, X_5] & = & X_2. \end{array}$$

Sin más que considerar el siguiente cambio de base:

$$\left\{ \begin{array}{rclcrclcrcl} Y_1 & = & X_1, & \qquad & Y_3 & = & -X_3, & \qquad & Y_5 & = & X_5, \\ Y_2 & = & X_2, & \qquad & Y_4 & = & X_4, & \qquad & Y_6 & = & X_6, \end{array} \right.$$

se obtiene la expresión de la ley del álgebra de Lie nilpotente n_6^{15}. □

Proposición 2.2.9. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente* n_6^{14} *admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra g de g_5 que genera la siguiente base:

$$\begin{array}{rclcrcl} Y_1 & = & X_5, & \qquad & Y_4 & = & X_7, \\ Y_2 & = & X_3, & \qquad & Y_5 & = & X_4, \\ Y_3 & = & X_2, & \qquad & Y_6 & = & X_1 + X_8. \end{array}$$

La ley de g resulta ser la del álgebra de Lie n_6^{14}.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de g_5 que se obtiene al ampliar la base de n_6^{14} con los campos:

$$\begin{array}{rclcrcl} Y_7 & = & X_1, & \qquad & Y_9 & = & X_9, \\ Y_8 & = & X_6, & \qquad & Y_{10} & = & X_{10}. \end{array}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.21}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\begin{cases} \omega_7 = dx_1 - dx_8, & \omega_9 = dx_9 - x_8 dx_{10}, \\ \omega_8 = dx_6 - x_1 dx_8, & \omega_{10} = dx_{10}. \end{cases}$$

El resultado de integrar (2.21) es el que sigue:

$$x_8 = x_1, \qquad x_6 = \frac{1}{2}x_1^2, \qquad x_9 = 0, \qquad x_{10} = 0,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Proposición 2.2.10. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{13}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & \frac{1}{2}x_8^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ que genera la siguiente base:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, & Y_4 &= X_3, \\ Y_2 &= X_2, & Y_5 &= X_6, \\ Y_3 &= X_7, & Y_6 &= X_8 + X_{10}. \end{aligned}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ resulta ser la del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{13}$.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene al ampliar la base de $\mathfrak{n}_6^{16}$ con los campos:

$$\begin{aligned} Y_7 &= X_4, & Y_9 &= X_9, \\ Y_8 &= X_5, & Y_{10} &= X_{10}. \end{aligned}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.22}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\begin{cases} \omega_7 = -x_5 dx_1 + dx_4, & \omega_9 = dx_9 - x_8 dx_{10}, \\ \omega_8 = dx_5, & \omega_{10} = -dx_8 + dx_{10}. \end{cases}$$

El resultado de integrar (2.22) es el que sigue:

$$x_4 = 0, \qquad x_5 = 0, \qquad x_9 = \frac{1}{2}x_8^2, \qquad x_{10} = x_8,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Proposición 2.2.11. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{12}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ que genera la siguiente base:

$$\begin{array}{rclcrcl} Y_1 &=& X_5+X_8, && Y_4 &=& X_3, \\ Y_2 &=& X_2, && Y_5 &=& X_6, \\ Y_3 &=& X_4, && Y_6 &=& X_1+X_9. \end{array}$$

Sea el siguiente cambio de bases:

$$\begin{array}{rclcrcl} Z_1 &=& Y_1, && Z_4 &=& -2Y_4, \\ Z_2 &=& Y_2, && Z_5 &=& Y_3-Y_5, \\ Z_3 &=& Y_3+Y_5, && Z_6 &=& Y_6. \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ que se obtiene respecto de la base $\{Z_i\}_{i=1}^6$ resulta ser la del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{12}$.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene al ampliar la base de $\mathfrak{n}_6^{12}$ con los campos:

$$\begin{array}{rclcrcl} Y_7 &=& X_1, && Y_9 &=& X_7, \\ Y_8 &=& X_5, && Y_{10} &=& X_{10}. \end{array}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.23}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} \omega_7 &=& dx_1 - dx_9 - x_8 dx_{10}, && \omega_9 &=& dx_7 - x_1 dx_9 + (x_1x_8 - x_6)dx_{10}, \\ \omega_8 &=& dx_5 - dx_8, && \omega_{10} &=& dx_{10}. \end{array} \right.$$

El resultado de integrar (2.23) es el que sigue:

$$x_9 = x_1, \qquad x_8 = x_5, \qquad x_7 = \frac{1}{2}x_1^2, \qquad x_{10} = 0,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

Proposición 2.2.12. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{11}$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & -x_4 + x_1x_5 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ que genera la siguiente base:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_1 &=& X_1 + X_9, & Y_4 &=& X_2, \\ Y_2 &=& X_3, & Y_5 &=& X_4 - X_6, \\ Y_3 &=& X_7, & Y_6 &=& X_5 + X_8. \end{array}$$

Sea el siguiente cambio de bases:

$$\begin{array}{rclrcl} Z_1 &=& Y_1, & Z_4 &=& Y_4, \\ Z_2 &=& -2Y_2, & Z_5 &=& -Y_5, \\ Z_3 &=& -Y_3, & Z_6 &=& Y_6. \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ que se obtiene respecto de la base $\{Z_i\}_{i=1}^6$ resulta ser la del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{11}$.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene al ampliar la base de $\mathfrak{n}_6^{11}$ con los campos:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_7 &=& X_1, & Y_9 &=& X_5, \\ Y_8 &=& X_4, & Y_{10} &=& X_{10}. \end{array}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.24}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \omega_7 &=& dx_1 - dx_9 - x_8dx_{10}, & \omega_9 &=& dx_5 - dx_8, \\ \omega_8 &=& -x_5dx_1 + dx_4 + dx_6 - x_1dx_8, & \omega_{10} &=& dx_{10}. \end{array} \right.$$

El resultado de integrar (2.24) es el que sigue:

$$x_9 = x_1, \qquad x_8 = x_5, \qquad x_6 = -x_4 + x_1x_5, \qquad x_{10} = 0,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. $\square$

Proposición 2.2.13. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{n}_6^{10}$ *admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_1x_6 - \frac{1}{3}x_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideremos nuevamente la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ y tomemos ahora la subálgebra de $\mathfrak{g}_5$ engendrada por:

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} Z_1 & = & -(X_1 + X_8 + X_{10}), & Z_4 & = & X_3, \\ Z_2 & = & -(X_6 + X_9), & Z_5 & = & X_4, \\ Z_3 & = & X_2, & Z_6 & = & X_5. \end{array} \right. \tag{2.25}$$

La ley de este álgebra es precisamente la del álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^{10}$.

La base dada en (2.25) se amplia a una base de $\mathfrak{g}_5$ mediante los siguientes campos:

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} Z_7 & = & X_1, & Z_9 & = & X_7, \\ Z_8 & = & X_6, & Z_{10} & = & X_8. \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Si $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ es la base dual de $\{Z_i\}_{i=1}^{10}$, para hallar una representación del grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_6^{10}$ basta resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar:

$$\{\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0\}.$$

La expresión de los ω_i, con $i = 7, 8, 9, 10$, es la que damos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} \omega_7 & = & dx_1 - dx_{10}, & \omega_9 & = & dx_7 - x_1dx_9 + (x_1x_8 - x_6)dx_{10}, \\ \omega_8 & = & dx_6 - x_1dx_8 - dx_9 + x_8dx_{10}, & \omega_{10} & = & dx_8 - dx_{10}. \end{array} \right.$$

La solución del sistema que se obtiene al integrar (2.26) es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_8 = x_{10}, \\ x_6 & = & x_9, \\ x_7 & = & x_1x_6 - \frac{1}{3}x_1^3. \end{array} \right.$$

En consecuencia, llegamos a la representación indicada. $\square$

Proposición 2.2.14. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente* n_6^9 *admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_5 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Seguimos considerando la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ de g_5. Sea la subálgebra de g_5 generada por los siguientes campos:

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} Z_1 & = & -(X_1 + X_8 + X_{10}), & & Z_4 & = & X_3, \\ Z_2 & = & -X_7, & & Z_5 & = & X_4, \\ Z_3 & = & X_2, & & Z_6 & = & X_5 + X_6 + X_9. \end{array} \right. \tag{2.27}$$

Se verifica que la ley de esta subálgebra es precisamente la del álgebra de Lie nilpotente n_6^9.

La base dada en (2.27) se amplia a una base de g_5 mediante los siguientes campos:

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} Z_7 & = & X_1, & & Z_9 & = & X_6, \\ Z_8 & = & X_5, & & Z_{10} & = & X_8. \end{array} \right.$$

Si $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ es la base dual de $\{Z_i\}_{i=1}^{10}$, para hallar una representación del grupo de Lie asociado a n_6^9 basta resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0. \tag{2.28}$$

La expresión de los ω_i, con $i = 7, 8, 9, 10$, es la que damos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} \omega_7 & = & dx_1 - dx_{10}, & & \omega_9 & = & dx_6 - x_1 dx_8 - dx_9 + x_8 dx_{10}, \\ \omega_8 & = & dx_5 - dx_9 + x_8 dx_{10}, & & \omega_{10} & = & dx_8 - dx_{10}. \end{array} \right.$$

La solución del sistema que se obtiene al integrar (2.28) es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & = & x_8 & = & x_{10}, \\ x_6 & = & x_9 & = & x_5 + \frac{1}{2}x_1^2. \end{array} \right.$$

En consecuencia, llegamos a la representación indicada. $\square$

Proposición 2.2.15. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{n}_6^8$ *admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Continuamos trabajando con la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ del álgebra $\mathfrak{g}_5$. Sea la subálgebra de $\mathfrak{g}_5$ engendrada por los siguientes campos:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} Z_1 & = & -(X_1+X_8+X_{10}), & Z_4 & = & X_3, \\ Z_2 & = & -X_7, & Z_5 & = & X_4, \\ Z_3 & = & X_2, & Z_6 & = & X_5. \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Esta subálgebra resulta tener como ley la del álgebra $\mathfrak{n}_6^8$, siendo por tanto la misma.

La base dada en (2.29) se amplia a una base de $\mathfrak{g}_5$ mediante los siguientes campos:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} Z_7 & = & X_1, & Z_9 & = & X_8, \\ Z_8 & = & X_6, & Z_{10} & = & X_9. \end{array} \right.$$

Si $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ es la base dual de $\{Z_i\}_{i=1}^{10}$, para hallar una representación del grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_6^8$ basta resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0. \tag{2.30}$$

La expresión de los ω_i, con $i = 7, 8, 9, 10$, es la que damos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \omega_7 & = & dx_1 - dx_{10}, & \omega_9 & = & dx_8 - dx_{10}, \\ \omega_8 & = & dx_6 - x_1 dx_8, & \omega_{10} & = & dx_9 - x_8 dx_{10}. \end{array} \right.$$

La solución del sistema que se obtiene al integrar (2.30) es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} x_1 & = & x_8 & = & x_{10}, \\ x_6 & = & x_9 & = & \frac{1}{2}x_1^2. \end{array} \right.$$

En consecuencia, llegamos a la representación indicada. $\square$

Proposición 2.2.16. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{n}_6^7$ *admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & \frac{1}{2}x_8^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Consideramos la subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_5$ que genera la siguiente base:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_1 & = & X_1 + X_5, & Y_4 & = & X_3, \\ Y_2 & = & X_2, & Y_5 & = & X_6, \\ Y_3 & = & X_7, & Y_6 & = & X_8 + X_{10}. \end{array}$$

La ley de $\mathfrak{g}$ que se obtiene respecto a esta base resulta ser la del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^7$.

Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^{10}$ la base dual de la base $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ de $\mathfrak{g}_5$ que se obtiene al ampliar la base de $\mathfrak{n}_6^7$ con los campos:

$$\begin{array}{rclrcl} Y_7 & = & X_1, & Y_9 & = & X_9, \\ Y_8 & = & X_4, & Y_{10} & = & X_{10}. \end{array}$$

Hemos de integrar el siguiente sistema:

$$\omega_7 = 0, \quad \omega_8 = 0, \quad \omega_9 = 0, \quad \omega_{10} = 0, \tag{2.31}$$

cuyas expresiones vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \omega_7 & = & dx_1 - dx_5, & \omega_9 & = & dx_9 - x_8 dx_{10}, \\ \omega_8 & = & -x_5 dx_1 + dx_4, & \omega_{10} & = & -dx_8 + dx_{10}. \end{array} \right.$$

El resultado de integrar (2.31) es el que sigue:

$$x_5 = x_1, \qquad x_4 = \frac{1}{2}x_1^2, \qquad x_9 = \frac{1}{2}x_8^2, \qquad x_{10} = x_8,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

2.2.1 Grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_6^6$.

Llegados hasta aquí en esta Memoria, nos queda por obtener una representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^6$. Este grupo ha sido el más costoso de encontrar, por lo que expondremos exhaustivamente el procedimiento que se ha seguido para obtenerlo.

Como punto de partida para la obtención de esta álgebra haremos algunas consideraciones acerca de su sucesión central de nilpotencia y su relación con la del álgebra g_5.

Así, según la Proposición 2.2.1, la sucesión central de nilpotencia del álgebra n_6^6 es (4,3,1,0). Además, de la expresión de la ley de este álgebra dada al comienzo de la Sección 2.2, se deduce que este álgebra posee centro de dimensión 2. Dicho centro está constituido por el campo que genera $\mathcal{C}^4(\mathsf{n}_6^6)$ y por un segundo campo perteneciente a $\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_6^6)$ y distinto del anterior.

Al ser (6,3,1,0) la sucesión central de nilpotencia de g_5 según el Corolario 1.3.8, pueden verificarse las inclusiones:

$$\mathcal{C}^k(\mathsf{n}_6^6) \subset \mathcal{C}^k(\mathsf{g}_5), \qquad \forall k \in \{1,2,3,4,5\}.$$

Por lo tanto, se cumple la condición necesaria (pero no suficiente) para que n_6^6 pueda ser subálgebra de g_5.

Lo que haremos en la presenta subsección es precisamente eso: demostrar que n_6^6 es subálgebra de g_5 y obtener a partir de este hecho una representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra n_6^6. Para ello, **vamos a suponer que el resultado es cierto** y vamos a ir exigiendole al grupo de Lie G_5 las condiciones que nos vayan siendo necesarias hasta obtener al álgebra n_6^6 como subálgebra de g_5.

En adelante, consideraremos la base $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ de g_5 con su expresión en la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{10}$ de campos diferenciables de G_5 que se obtuvo al término de la Sección 1.1.

Calculemos ahora los términos de la sucesión central de nilpotencia de g_5 para $k=3$ y $k=4$, esto es, los ideales $\mathcal{C}^3(\mathsf{g}_5)$ y $\mathcal{C}^4(\mathsf{g}_5)$. Ambos ideales verifican:

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{C}^3(\mathsf{n}_6^6) & \subset & \mathcal{C}^3(\mathsf{g}_5) & = & < X_2, X_3, X_7 > \\ \mathcal{C}^4(\mathsf{n}_6^6) & \subset & \mathcal{C}^4(\mathsf{g}_5) & = & < X_2 > \end{array} \tag{2.32}$$

Como la dimensión tanto de $\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_6^6)$ como de $\mathcal{C}^3(\mathsf{g}_5)$ es 3, entonces, en virtud de (2.32), se verifica la igualdad entre ambas y, por tanto, se tiene que:

$$< X_2, X_3, X_7 > \subset \mathsf{n}_6^6.$$

La expresión de la ley del álgebra g_5 dada en (2.13), implica que el campo X_2 es un elemento del centro de g_5 y, en consecuencia, del centro de n_6^6.

Como el segundo campo de n_6^6 que sería necesario para generar el centro debe pertenecer a $\mathcal{C}^3(\mathsf{n}_6^6)$, tiene que ser una combinación lineal de X_3 y de X_7, ya que X_2 es un elemento del centro.

Sea pues el campo $Y = \lambda X_3 + \mu X_7$ el segundo generador del centro de n_6^6. Su expresión en la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^{10}$ es la siguiente:

$$Y = \lambda e_3 + \mu e_7 + \mu x_5 e_2. \tag{2.33}$$

y su expresión matricial es la que sigue:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

Sea $e = Id_5$ el elemento unidad del grupo G_5 (esto es, la matriz identidad de dimensión 5), entonces se verifica que:

$$G_5(0)_{i=1}^{10} = e,$$

con lo que las coordenadas de e en G_5 son (0,0,0,0,0). En consecuencia, el vector tangente Y_e es el que sigue:

$$Y_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nuestro siguiente paso consistirá en obtener el subgrupo uniparamétrico de G_5 que está asociado al campo diferenciable Y. La existencia del subgrupo uniparamétrico viene dada por ser Y un campo perteneciente a $\mathfrak{g}_5$. Según la Definición 0.4.8, el subgrupo uniparamétrico asociado a este campo es el obtenido en la siguiente expresión:

$$\varphi_Y(t) = e^{tY_e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t\mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Para que el campo Y esté en el centro de una subálgebra del álgebra $\mathfrak{g}_5$, el subgrupo uniparamétrico asociado debe verificar la siguiente condición:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t\mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t\mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando los productos, esta condición se convierte en:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & t\lambda + x_3 & t\mu x_5 + x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & t\mu + x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 + t\lambda & x_2 + t\lambda x_{10} \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 + t\mu \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.36)$$

Igualando elemento a elemento en la igualdad (2.36), obtenemos la condición:

$$t\mu x_5 = t\lambda x_{10}, \qquad \forall t \in \mathbb{C}.$$

En consecuencia, nos quedaría:

$$\mu x_5 = \lambda x_{10}. \qquad (2.37)$$

Para cualquier par (λ, μ) de números reales tal que $(\lambda, \mu) \neq 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^6$ sería subálgebra de la asociada al subgrupo de G_5 determinado por (2.37).

Si $\lambda = 0$ ó $\mu = 0$, obtenemos los subgrupos de G_5 cuyos elementos son, respectivamente, de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.38)$$

Ambos grupos tienen asociados álgebras de Lie nilpotentes cuya sucesión central de nilpotencia es (5,2,0), que es incompatible con la sucesión (4,3,1,0) del álgebra $\mathfrak{n}_6^6$. Por lo tanto, λ y μ deben ser distintos de 0.

No hemos realizado los cálculos correspondientes para obtener las álgebras de Lie nilpotentes asociadas a estos grupos y sus respectivas sucesiones de nilpotencia, ya que esta obtención es análoga a la de los grupos G_n que hemos visto a lo largo de la Memoria.

Al verificarse $\lambda \neq 0 \neq \mu$, la condición (2.37) se convierte en:

$$x_{10} = \frac{\mu}{\lambda} x_5.$$

Por tanto, el subgrupo de G_5 que estudiaremos para la obtención del álgebra $\mathfrak{n}_6^6$ resulta ser:

$$\bar{G}_5 = \begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\mu}{\lambda} x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.2.17. *El álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_5$ asociado al grupo de Lie $\bar{G}_5$ es el álgebra de dimensión 9 que tiene por ley:*

$$\left\{\begin{array}{lclllcllcl} [X_1, X_5] & = & -X_4, & [X_1, X_8] & = & X_6, & [X_1, X_9] & = & X_7, \\ [X_3, X_5] & = & \frac{\mu}{\lambda}X_2, & [X_4, X_8] & = & X_3, & [X_4, X_9] & = & X_2, \\ [X_5, X_6] & = & X_3 - \frac{\mu}{\lambda}X_7, & [X_5, X_7] & = & X_2, & [X_5, X_8] & = & -\frac{\mu}{\lambda}X_9. \end{array}\right.$$

Demostración. Al ser $\bar{G}_5$ un grupo de Lie de dimensión 9, su álgebra de Lie asociada, $\bar{\mathfrak{g}}_5$ posee dimensión 9. Vamos a hallar una base para $\bar{\mathfrak{g}}_5$.

Vamos a denotar a los elementos de $\bar{G}_5$ por:

$$\bar{G}_5(x_1, x_2, \ldots, x_8, x_9) = \begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\mu}{\lambda}x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los campos de la base del álgebra $\bar{\mathfrak{g}}_5$, se obtienen considerando los siguientes:

$$\varphi_i(t) = \bar{G}_5(0, \ldots, 0, \underbrace{t}_{i}, 0, \ldots, 0) \qquad i = 1, \ldots, 9.$$

Los respectivos campos invariantes a izquierda obtenidos por estos subgrupos uniparamétricos son los que siguen:

$$\left\{\begin{array}{lllll} X_1 = & e_1 + x_5 e_4, & & X_6 = & x_5 e_3 + e_6, \\ X_2 = & e_2, & & X_7 = & x_5 e_2 + e_7, \\ X_3 = & e_3, & & X_8 = & x_4 e_3 + x_1 e_6 + e_8, \\ X_4 = & e_4, & & X_9 = & x_4 e_2 + x_1 e_7 + e_9, \\ X_5 = & \frac{\mu}{\lambda}x_3 e_2 + e_5 + \frac{\mu}{\lambda}x_6 e_7 + \frac{\mu}{\lambda}x_8 e_9. & & & \end{array}\right. \tag{2.39}$$

En esta base, la ley del álgebra $\bar{\mathfrak{g}}_5$ es precisamente:

$$\left\{\begin{array}{lclllcllcl} [X_1, X_5] & = & -X_4, & [X_1, X_8] & = & X_6, & [X_1, X_9] & = & X_7, \\ [X_3, X_5] & = & \frac{\mu}{\lambda}X_2, & [X_4, X_8] & = & X_3, & [X_4, X_9] & = & X_2, \\ [X_5, X_6] & = & X_3 - \frac{\mu}{\lambda}X_7, & [X_5, X_7] & = & X_2, & [X_5, X_8] & = & -\frac{\mu}{\lambda}X_9. \end{array}\right. \tag{2.40}$$

□

Corolario 2.2.18. *El centro del álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_5$ tiene dimensión 2 y consiste en $< X_2, X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7 >$.*

Demostración. Tanto el campo X_2 como el $X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7$ son elementos del álgebra como puede comprobarse al realizar los productos corchetes por la base $\{X_i\}_{i=1}^9$ de $\bar{\mathfrak{g}}_5$ obtenida en la Proposición 2.2.17. De hecho, el grupo $\bar{G}_5$ se obtuvo al imponer la condición de que los dos campos perteneciesen al centro.

Sólo resta probar que no hay más elementos en el centro. Para ello, sea Y un campo arbitrario que pertenezca a $\bar{\mathfrak{g}}_5$. Entonces este campo es de la forma:

$$Y = \sum_{i=1}^{9} a_i X_i,$$

con $a_i \in \mathbb{C}$, para todo $i = 1, \ldots, 9$.

Multiplicando el campo Y por los de la base $\{X_i\}_{i=1}^9$ obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{lccl}
[X_1, Y] & = & -a_5X_4 + a_8X_6 + a_9X_7 & = 0, \\
[X_2, Y] & & & = 0, \\
[X_3, Y] & = & a_5\frac{\mu}{\lambda}X_2 & = 0, \\
[X_4, Y] & = & a_8X_3 + a_9X_2 & = 0, \\
[X_5, Y] & = & a_1X_4 - \frac{\mu}{\lambda}a_3X_2 + a_6(X_3 - \frac{\mu}{\lambda}X_7) + a_7X_2 - a_8\frac{\mu}{\lambda}X_9 & = 0, \\
[X_6, Y] & = & -a_5(X_3 - \frac{\mu}{\lambda}X_7) & = 0, \\
[X_7, Y] & = & -a_5X_2 & = 0, \\
[X_8, Y] & = & -a_1X_6 - a_4X_3 + a_5\frac{\mu}{\lambda}X_9 & = 0, \\
[X_9, Y] & = & -a_1X_7 - a_4X_2 & = 0,
\end{array}\right.$$

cuya solución resulta ser:

$$a_1 = a_4 = a_5 = a_6 = a_8 = a_9 = 0, \qquad a_7 = \frac{\mu}{\lambda}a_3.$$

En consecuencia, la expresión del campo Y es:

$$Y = a_2X_2 + a_3(X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7),$$

de donde se deduce que Y pertenece a $< X_2, X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7 >$, lo que concluye la prueba. $\square$

Anteriormente se comentó que los dos subgrupos de G_5 dados en (2.38) no podían contener un subgrupo que fuese representación del grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_6^6$. Este hecho obligaba a buscar el grupo de Lie en $\bar{G}_5$, que es el mayor subgrupo de G_5 cuya álgebra asociada tiene centro de dimensión 2 formado por los dos vectores X_2 y $X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7$ (como se vio en el Corolario 2.2.18). En consecuencia, antes de seguir sería conveniente comprobar si es un candidato factible, esto es, si la sucesión de nilpotencia de $\bar{\mathfrak{g}}_5$ es compatible con el hecho de que $\mathfrak{n}_6^6$ fuese subálgebra suya. El cálculo de tal sucesión de nilpotencia permite dar la siguiente:

Proposición 2.2.19. *El álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_5$ es nilpotente y su sucesión de nilpotencia es (6,3,1,0).*

□

Al ser (4,3,1,0) la sucesión de nilpotencia de $\mathfrak{n}_6^6$, no se entra en contradicción con la Proposición 0.5.9 si se supone que es subálgebra de $\bar{\mathfrak{g}}_5$. Obsérvese además que han de verificarse las siguientes dos condiciones:

$$\mathcal{C}^3(\mathfrak{n}_6^6) = \mathcal{C}^3(\bar{\mathfrak{g}}_5) =< X_2, X_3, X_7 > \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^4(\mathfrak{n}_6^6) = \mathcal{C}^4(\bar{\mathfrak{g}}_5) =< X_2 >, \tag{2.41}$$

en virtud de la Proposición 0.5.9 y poseer la misma dimensión. Por lo tanto, tenemos al menos tres campos que tendrían que estar en la subálgebra $\mathfrak{n}_6^6$, a saber: X_2, X_3 y X_7. Además, estos tres campos deben encontrarse en $\mathcal{C}^3(\mathfrak{n}_6^6)$.

En base a lo visto hasta el momento en esta sección, buscaremos a $\mathfrak{n}_6^6$ como subálgebra del álgebra $\bar{\mathfrak{g}}_5$.

Consideremos el conjunto de campos formado por $\{X_2, X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7, X_7\}$. Los tres campos sabemos que deben estar en la subálgebra de $\bar{\mathfrak{g}}_5$ que sea isomorfa a $\mathfrak{n}_6^6$ y además sabemos cuáles son los generadores del centro de $\mathfrak{n}_6^6$ y que los tres campos están en $\mathcal{C}^3(\mathfrak{n}_6^6)$. Para obtener el álgebra buscada vamos a considerar tres campos Y_1, Y_6 e Y_5 que posean las siguientes expresiones:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} Y_1 & = & a_1X_1+ & a_4X_4+ & a_5X_5+ & a_6X_6+ & a_8X_8+ & a_9X_9, \\ Y_6 & = & b_1X_1+ & b_4X_4+ & b_5X_5+ & b_6X_6+ & b_8X_8+ & b_9X_9, \\ Y_5 & = & & aX_4+ & & bX_6+ & & cX_9. \end{array}\right. \tag{2.42}$$

donde a, b, c, a_i, $b_j \in \mathbb{C}$.

Explicamos a continuación por qué poseen estos tres campos las expresiones que hemos indicado.

En primer lugar, dos de los campos que generen a $\mathfrak{n}_6^6$ deben pertenecer a $\mathfrak{n}_6^6 \setminus \mathcal{C}^2(\mathfrak{n}_6^6)$, que está contenido en $\bar{\mathfrak{g}}_5$. Esos dos campos deben ser una combinación lineal arbitraria de la base $\{X_i\}_{i=1}^9$ de $\bar{\mathfrak{g}}_5$. Pero recordemos que hemos supuesto que X_2, X_3 y X_7 están en $\mathfrak{n}_6^6$, por lo que pueden eliminarse estos tres campos de la expresión de Y_1 e Y_6.

En segundo lugar, necesitamos además un campo que esté en $\mathcal{C}^2(\mathfrak{n}_6^6) \setminus \mathcal{C}^3(\mathfrak{n}_6^6)$ y que está contenido en $\mathcal{C}^2(\bar{\mathfrak{g}}_5)$. Entonces este campo debe ser combinación lineal de los campos de la base $\{X_i\}_{i=1}^9$ que generan a $\mathcal{C}^2(\bar{\mathfrak{g}}_5)$, esto es, combinación lineal de $\{X_2, X_3, X_4, X_6, X_7, X_9\}$. De nuevo, pueden eliminarse los sumandos correspondientes a X_2, X_3 y X_7, con lo que se obtiene la expresión dada para Y_5.

Por lo tanto, consideraremos el conjunto definido por:

$$\mathcal{A} = \{X_2, X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7, X_7, Y_1, Y_6, Y_5\}, \tag{2.43}$$

como candidato de la base del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^6$. Para ello, escribiremos los corchetes no nulos que surgen al realizar los productos entre ellos. Dichos productos son:

$$\begin{aligned}
[Y_1, X_7] &= a_5 X_2,\\
[Y_6, X_7] &= b_5 X_2,\\
[Y_6, Y_5] &= (b_4 c - b_9 a) X_2 + (b_5 b - b_8 a) X_3 + (b_1 c - b_5 b \tfrac{\mu}{\lambda}) X_7,\\
[Y_1, Y_5] &= (a_4 c - a_9 a) X_2 + (a_5 b - a_8 a) X_3 + (a_1 c - \tfrac{\mu}{\lambda} a_5 b) X_7,\\
[Y_1, Y_6] &= (a_4 b_9 - a_9 b_4) X_2 + (a_5 b_6 + a_4 b_8 - a_6 b_5 - a_8 b_4) X_3\\
&\quad + (-a_1 b_5 + a_5 b_1) X_4 + (a_1 b_8 - a_8 b_1) X_6\\
&\quad + (a_1 b_9 - a_5 b_6 \tfrac{\mu}{\lambda} + a_6 b_5 \tfrac{\mu}{\lambda} - a_9 b_1) X_7 + \tfrac{\mu}{\lambda}(a_8 b_5 - a_5 b_8) X_9
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Para obtener una sucesión de nilpotencia (4,3,1,0), debemos tener al menos 4 productos no nulos que no sean linealmente independientes. Como poseemos cinco productos y dos de ellos son proporcionales a X_2, los productos no nulos han de ser:

$$[Y_1, Y_6], \quad [Y_6, Y_5], \quad \text{y} \quad [Y_1, Y_5],$$

además de alguno de los dos productos restantes: $[Y_1, X_7]$ ó $[Y_6, X_7]$.

Obsérvese que también Y_5 debe obtenerse del producto $[Y_1, Y_6]$, ya que es el único de los productos que contiene los sumandos necesarios para obtener el campo Y_5. En consecuencia, existe un escalar $k_1 \in \mathbb{C}$ que verifica:

$$\left\{\begin{aligned}
-a_1 b_5 + a_5 b_1 &= k_1 a,\\
a_1 b_8 - a_8 b_1 &= k_1 b,\\
\tfrac{\mu}{\lambda}(a_8 b_5 - a_5 b_8) &= k_1 c.
\end{aligned}\right. \tag{2.45}$$

Supondremos en adelante que $\boxed{k_1 = 1}$, por lo que (2.45) quedaría:

$$\left\{\begin{aligned}
a &= -a_1 b_5 + a_5 b_1,\\
b &= a_1 b_8 - a_8 b_1,\\
c &= \tfrac{\mu}{\lambda}(a_8 b_5 - a_5 b_8).
\end{aligned}\right. \tag{2.46}$$

Sustituyendo en (2.44) las expresiones de a, b y c obtenidas en (2.46), tenemos la siguiente expresión para los productos:

$$\begin{array}{rcl}
[Y_1, X_7] & = & a_5 X_2, \\
[Y_6, X_7] & = & b_5 X_2, \\
[Y_6, Y_5] & = & (\frac{\mu}{\lambda} b_4 a_8 b_5 - \frac{\mu}{\lambda} b_4 a_5 b_8 - b_9 a_5 b_1 + b_9 a_1 b_5) X_2 \\
 & & +(b_5 a_1 b_8 - b_5 a_8 b_1 - b_8 a_5 b_1 + b_8 a_1 b_5) X_3 \\
 & & +(b_1 a_8 b_5 \frac{\mu}{\lambda} - b_1 a_5 b_8 \frac{\mu}{\lambda} - b_5 a_1 b_8 \frac{\mu}{\lambda} + b_5 a_8 b_1 \frac{\mu}{\lambda}) X_7, \\
[Y_1, Y_5] & = & (a_4 a_8 b_5 \frac{\mu}{\lambda} - a_4 a_5 b_8 \frac{\mu}{\lambda} - a_9 a_5 b_1 + a_9 a_1 b_5) X_2 \\
 & & +(a_5 a_1 b_8 - a_5 a_8 b_1 + a_8 a_1 b_5 - a_8 a_5 b_1) X_3 \\
 & & +(a_1 a_8 b_5 \frac{\mu}{\lambda} - a_1 a_5 b_8 \frac{\mu}{\lambda} - a_5 a_1 b_8 \frac{\mu}{\lambda} + a_5 a_8 b_1 \frac{\mu}{\lambda}) X_7, \\
[Y_1, Y_6] & = & (a_4 b_9 - a_9 b_4) X_2 + (a_5 b_6 + a_4 b_8 - a_6 b_5 - a_8 b_4) X_3 \\
 & & +(-a_1 b_5 + a_5 b_1) X_4 + (a_1 b_8 - a_8 b_1) X_6 \\
 & & +(a_1 b_9 - a_5 b_6 \frac{\mu}{\lambda} + a_6 b_5 \frac{\mu}{\lambda} - a_9 b_1) X_7 + \frac{\mu}{\lambda}(a_8 b_5 - a_5 b_8) X_9
\end{array} \tag{2.47}$$

A partir de ahora vamos a ir dando valores a las familias de parámetros $\{a_i\}_i$ y $\{b_j\}_j$ para obtener una base del álgebra $\mathfrak{n}_6^6$.

Como se necesita que el producto $[Y_1, X_7]$ ó $[Y_6, X_7]$ fuese no nulo, exigiremos que:

$$[Y_1, X_7] = X_2 \qquad \text{y} \qquad [Y_6, X_7] = 0. \tag{2.48}$$

Esto se debe a que necesitamos que el vector Y_1 ó Y_6 tenga productos no nulos con al menos tres campos. Además nos da igual hacer la suposición sobre Y_1 que sobre Y_6 por que el comportamiento de ambos, en este punto, es simétrico. La condición $[Y_6, X_7] = 0$ la exigimos para eliminar uno de los productos por X_7.

Las condiciones exigidas en (2.48) son equivalentes a:

$$\boxed{a_5 = 1} \qquad \text{y} \qquad \boxed{b_5 = 0},$$

con lo que (2.46) y (2.47) se convierten, respectivamente, en:

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
a & = & b_1, \\
b & = & a_1 b_8 - a_8 b_1, \\
c & = & -\frac{\mu}{\lambda} b_8,
\end{array} \right. \tag{2.49}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
[Y_1, X_7] & = & X_2, \\
[Y_6, Y_5] & = & -(\frac{\mu}{\lambda} b_4 b_8 + b_9 b_1) X_2 - b_1 b_8 X_3 - b_1 b_8 \frac{\mu}{\lambda} X_7 \\
 & = & -(\frac{\mu}{\lambda} b_4 b_8 + b_9 b_1) X_2 - b_1 b_8 (X_3 + \frac{\mu}{\lambda} X_7), \\
[Y_1, Y_5] & = & -(a_4 b_8 \frac{\mu}{\lambda} + a_9 b_1) X_2 + (a_1 b_8 - 2 a_8 b_1) X_3 \\
 & & +(-2 a_1 b_8 + a_8 b_1) \frac{\mu}{\lambda} X_7, \\
[Y_1, Y_6] & = & (a_4 b_9 - a_9 b_4) X_2 + (b_6 + a_4 b_8 - a_8 b_4) X_3 + b_1 X_4 \\
 & & +(a_1 b_8 - a_8 b_1) X_6 + (a_1 b_9 - b_6 \frac{\mu}{\lambda} - a_9 b_1) X_7 - \frac{\mu}{\lambda} b_8 X_9,
\end{array} \right. \tag{2.50}$$

Obsérvese que, hasta el momento, tenemos como resultados de productos corchetes tanto a X_2 como a $X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7$, por mediación de los productos $[Y_1, X_7]$ y $[Y_6, Y_5]$, respectivamente.

El producto $[Y_1, Y_5]$ es combinación lineal de los campos X_2, X_3 y X_7. Para obtener un campo linealmente independiente a los dos que ya tenemos como resultado de productos, los coeficientes de X_3 y de X_7 en $[Y_1, Y_5]$ deben ser distintos. Exigimos entonces que:

$$\begin{cases} a_1b_8 - 2a_8b_1 &= 1, \\ a_8b_1 - 2a_1b_8 &= 2, \end{cases}$$

de donde:

$$\boxed{a_1b_8 = -\frac{5}{3}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{a_8b_1 = -\frac{4}{3}}. \tag{2.51}$$

En consecuencia, (2.50) se convierte en:

$$\begin{cases} [Y_1, X_7] &= X_2, \\ [Y_6, Y_5] &= -b_1b_8(X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7) - (\frac{\mu}{\lambda}b_4b_8 + b_9b_1)X_2, \\ [Y_1, Y_5] &= \frac{\mu}{\lambda}X_7 + (X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7) - (a_4b_8\frac{\mu}{\lambda} + a_9b_1)X_2, \\ [Y_1, Y_6] &= Y_5 + (b_6 + a_4b_8 - a_8b_4)X_3 + (a_4b_9 - a_9b_4)X_2 \\ & \quad +(a_1b_9 - b_6\frac{\mu}{\lambda} - a_9b_1)X_7. \end{cases} \tag{2.52}$$

Obsérvese que obtenemos como resultados de los productos corchetes a X_2, $X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7$, X_7 e Y_5. Para simplificar los resultados de los productos exigiremos que se anulen los restantes sumandos, es decir, exigiremos:

$$\boxed{b_4 = b_6 = b_9 = 0} \qquad \text{y} \qquad \boxed{a_4 = a_6 = a_9 = 0}.$$

Los productos no nulos que aparecían en (2.52) se quedan en:

$$\begin{cases} [Y_1, X_7] = X_2, & [Y_6, Y_5] = -b_1b_8(X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7), \\ [Y_1, Y_5] = \frac{\mu}{\lambda}X_7 + (X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7), & [Y_1, Y_6] = Y_5, \end{cases}$$

Exigiendo además que se verifique $b_1b_8 = -1$ y considerando las condiciones de (2.51), obtenemos el sistema dado por las ecuaciones:

$$a_1b_8 = -\frac{5}{3}, \qquad a_8b_1 = -\frac{4}{3}, \qquad b_1b_8 = -1.$$

Una solución para este sistema es la dada por:

$$\boxed{b_1 = 1} \quad \boxed{b_8 = -1} \quad \boxed{a_1 = \frac{5}{3}} \quad \boxed{a_8 = -\frac{4}{3}} \tag{2.53}$$

En virtud de (2.53), el sistema dado en (2.49) tiene la siguiente solución:

$$\boxed{a = 1} \quad \boxed{b = -\frac{1}{3}} \quad \boxed{c = \frac{\mu}{\lambda}}$$

De este modo, los campos Y_1, Y_5 e Y_6 tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{5}{3}X_1 + X_5 - \frac{4}{3}X_8, \\ Y_5 &= X_4 - \frac{1}{3}X_6 + \frac{\mu}{\lambda}X_9, \\ Y_6 &= X_1 - X_8. \end{aligned}$$

Estamos ya en condiciones de obtener a $\mathfrak{n}_6^6$ como subálgebra de $\bar{\mathfrak{g}}_5$. Para ello damos el siguiente:

Lema 2.2.20. *El subálgebra de $\bar{\mathfrak{g}}_5$ definida como:*

$$\mathfrak{g} = < Y_1, X_2, X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7, X_7, Y_5, Y_6 >$$

es isomorfa al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^6$.

Demostración. Si consideramos el cambio de base dado por:

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} Z_1 &=& Y_1 - Y_6, & & Z_4 &=& \frac{\mu}{\lambda}X_7, \\ Z_2 &=& -(X_3 + \frac{\mu}{\lambda}X_7), & & Z_5 &=& Y_5, \\ Z_3 &=& \frac{\mu}{\lambda}X_2, & & Z_6 &=& Y_6, \end{array} \right.$$

la ley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se convierte en:

$$[Z_1, Z_6] = Z_5, \quad [Z_1, Z_5] = Z_4, \quad [Z_1, Z_4] = Z_3, \quad [Z_5, Z_6] = Z_2.$$

Pero esta ley es la de $\mathfrak{n}_6^6$, con lo que se concluye la prueba. □

Por lo tanto, hemos obtenido el álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^6$ como subálgebra de Lie de $\bar{\mathfrak{g}}_5$ y, en consecuencia, de $\mathfrak{g}_5$. Por tanto podemos obtener como representación del grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{n}_6^6$ a un subgrupo del grupo G_5. Esto es lo que veremos en la siguiente:

Proposición 2.2.21. *El grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_6^6$ admite como representación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1x_5 - \frac{1}{3}x_4 & x_7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}x_5 - x_1 & x_4 - x_1x_5 + \frac{1}{6}x_5^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Considerando la expresión del álgebra $\mathfrak{n}_6^6$ que se obtiene en el Lema 2.2.20 para $\frac{\mu}{\lambda} = 1$, podemos ampliar a una base de $\bar{G}_5$ sin más que considerar los siguientes campos:

$$Z_7 = X_6, \qquad Z_8 = X_8 \qquad \text{y} \qquad Z_9 = X_9,$$

donde $\{X_i\}_{i=1}^9$ es la base de $\bar{\mathfrak{g}}_5$ obtenida en el Lema 2.2.17.

Para obtener el grupo de Lie asociado a $\mathfrak{n}_6^6$, haremos uso del Teorema de Fröbenius. Por tanto, resolveremos el sistema de ecuaciones que se obtiene al integrar este otro sistema:

$$\omega_7 = 0, \qquad \omega_8 = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega_9 = 0,$$

donde las formas ω_i $(i = 7, 8, 9)$ tienen por expresión:

$$\begin{aligned}
\omega_7 &= -\tfrac{1}{3}x_5 dx_1 + \tfrac{1}{3}dx_4 + dx_6 - x_1 dx_8, \\
\omega_8 &= dx_1 - \tfrac{1}{3}dx_5 + dx_8, \\
\omega_9 &= x_5 dx_1 - x_8 dx_5 - dx_4 + dx_9.
\end{aligned}$$

La resolución del sistema resultante de la integración de estas formas diferenciales es:

$$x_6 = \frac{1}{3}x_1x_5 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{3}x_4, \quad x_8 = \frac{1}{3}x_5 - x_1 \quad \text{y} \quad x_9 = x_4 - x_1x_5 + \frac{1}{6}x_5^2,$$

con lo que se obtiene la representación indicada. □

En la Sección 2.1 se demostró que los grupos de Lie simplemente conexos asociados a las álgebras de Lie filiformes de dimensión 6 son subgrupos de G_6 pero no de G_5. A la vista de lo demostrado en la presente sección tenemos el siguiente:

Teorema 2.2.22. *Todo grupo de Lie simplemente conexo asociado a un álgebra de Lie nilpotente no filiforme de dimensión 6 que no se descomponga como suma directa de otras, admite como representación a un subgrupo del grupo de Lie G_5.*

□

Nota 2.2.23. *Recuérdese que, en virtud de la Proposición 2.2.8, G_4 representa el grupo de Lie simplemente conexo asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{n}_6^{15}$, por lo que el orden de las matrices de esta representación mejora en una unidad al caso general.*

Apéndice

A modo de resumen incluimos en esta Memoria un cuadro general en el que aparecen todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual que 6 que no se descomponen en suma directas de otras, junto con la ley que define al álgebra y con la representación obtenida del grupo de Lie simplemente conexo asociado.

Dimensión 1

Álgebra $\mathfrak{n}_1^1$ (abeliana)

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimensión 2

Álgebra $\mathfrak{n}_2^1$ (abeliana)

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimensión 3

Álgebra $\mathfrak{n}_3^1$ (filiforme modelo, Álgebra de Heissenberg)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$[X_1, X_3] = X_2,$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_3^2$ (abeliana)

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimensión 4

Álgebra $\mathfrak{n}_4^1$ (filiforme modelo)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_4] & = & X_3 \\ [X_1, X_3] & = & X_2 \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_4^2$ (abeliana)

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimensión 5

Álgebra $\mathfrak{n}_5^1$ (filiforme modelo)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:

$$[X_1, X_k] = X_{k-1}\,,\ k = 3,4,5$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} & \frac{x_1^3}{6} \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_5^2$ (filiforme)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, & k = 3,4,5 \\ [X_4, X_5] & = & X_2 & \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} + x_5 & \frac{x_1^3}{6} + x_1 x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_5^3$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, & k = 4,5 \\ [X_4, X_5] & = & X_2 & \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} & x_4 - x_1 x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & -x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_5^4$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} [X_1, X_5] & = & X_4 \\ [X_1, X_3] & = & X_2 \\ [X_2, X_3] & = & X_4 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_5^5$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} [X_1, X_5] & = & X_4 \\ [X_1, X_3] & = & X_2 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_5^6$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} [X_1, X_5] & = & X_4 \\ [X_2, X_3] & = & X_4 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_5^7$ (abeliana)

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimensión 6

Álgebra $\mathfrak{n}_6^1$ (filiforme modelo)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$[X_1, X_k] = X_{k-1}\,,\; k = 3, 4, 5, 6$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 & \frac{1}{24}x_1^4 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^2$ (filiforme)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, \quad k = 3, 4, 5, 6 \\ [X_5, X_6] & = & X_2 \end{array} \right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_6 & \frac{1}{24}x_1^4 + x_1x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^3$ (filiforme)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, \quad k = 3,4,5,6 \\ [X_4, X_6] & = & X_2 \\ [X_5, X_6] & = & X_3 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_6 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_6 & \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2x_6 + \frac{1}{2}x_6^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_6 & \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^4$ (filiforme)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, \quad k = 3,4,5,6 \\ [X_4, X_5] & = & X_2 \\ [X_4, X_6] & = & X_3 \\ [X_5, X_6] & = & X_4 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 & \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{6}x_1^3x_6 - \frac{1}{2}x_1^2x_5 + x_1x_4 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_6 - x_1x_5 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_6 - x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 + x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^5$ (filiforme)

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, & k = 3,4,5,6 \\ [X_4, X_5] & = & X_2 & \\ [X_4, X_6] & = & X_3 + X_2 & \\ [X_5, X_6] & = & X_4 + X_3 & \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \begin{array}{c}\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1 \\ +\frac{1}{3}x_6\end{array} & \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1x_6 + \frac{2}{3}x_5 & \begin{array}{c}\frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{4}{9}x_5 - \frac{5}{18}x_1^2 - \frac{2}{9}x_6^2 \\ +\frac{1}{3}x_1x_4 - \frac{5}{9}x_1x_5 - x_1x_6 + \frac{1}{9}x_5x_6 \\ -\frac{1}{6}x_1^2x_5 + \frac{1}{18}x_1^4 + \frac{1}{18}x_1^3x_6\end{array} \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_6 & \begin{array}{c}-x_1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{9}x_5 - x_6 - \frac{2}{9}x_1^2 - \frac{1}{9}x_6^2 \\ -\frac{1}{9}x_1x_6 - \frac{1}{3}x_1x_5 + \frac{2}{9}x_1^3 + \frac{1}{6}x_1^2x_6\end{array} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{2}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1x_6 - \frac{1}{3}x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^6$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, & k = 4,5,6 \\ [X_5, X_6] & = & X_2 & \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1x_5 - \frac{1}{3}x_4 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}x_5 - x_1 & x_4 - x_1x_5 + \frac{1}{6}x_5^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^7$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_k] &= X_{k-1}\,, \quad k = 3, 5, 6 \\ [X_4, X_6] &= X_2 \\ [X_5, X_6] &= X_3 \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 & \frac{1}{2}x_6^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^8$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_k] &= X_{k-1}\,, \quad k = 4, 5, 6 \\ [X_2, X_6] &= X_3 \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^9$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_k] &= X_{k-1}\,, \quad k = 4, 5, 6 \\ [X_2, X_6] &= X_3 \\ [X_5, X_6] &= X_3 \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{10}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_k] = X_{k-1}\,, \quad k = 4,5,6 \\ [X_2, X_5] = X_3 \\ [X_2, X_6] = X_4 \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & x_1x_6 - \frac{1}{3}x_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{11}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_k] = X_{k-1}\,, \quad k = 5,6 \\ [X_3, X_6] = X_4 \\ [X_5, X_6] = X_2 \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & -x_4 + x_1x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{12}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}, \quad k = 5, 6 \\ [X_3, X_6] & = & X_2 \\ [X_5, X_6] & = & X_2 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_6 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{13}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} [X_1, X_6] & = & X_5 \\ [X_5, X_6] & = & X_3 \\ [X_4, X_6] & = & X_2 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{14}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}, \quad k = 4, 6 \\ [X_5, X_6] & = & X_2 \end{array}\right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{15}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, \quad k = 4, 6 \\ [X_3, X_6] & = & -X_2 \\ [X_4, X_5] & = & X_2 \end{array} \right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{16}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, \quad k = 4, 6 \\ [X_5, X_6] & = & X_3 \\ [X_4, X_6] & = & X_2 \end{array} \right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{17}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, \quad k = 3, 5, 6 \\ [X_2, X_3] & = & X_4 \end{array} \right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{18}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_1, X_6] = X_5 \\ [X_1, X_4] = X_3 \\ [X_4, X_6] = X_2 \end{array} \right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_3 & x_2 & \frac{1}{2}x_3^2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_6 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{19}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [X_1, X_k] & = & X_{k-1}\,, \quad k = 5, 6 \\ [X_2, X_3] & = & X_4 \end{array} \right.$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{20}$

Ley del álgebra respecto de $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$:

$$\begin{cases} [X_1, X_6] &= X_5 \\ [X_1, X_4] &= X_3 \\ [X_2, X_6] &= X_3 \end{cases}$$

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Álgebra $\mathfrak{n}_6^{21}$ (abeliana)

Grupo de Lie asociado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

También se ha querido ofrecer un esquema de cuáles son los grupos de Lie simplemente conexos que se obtienen de cada uno de los G_n de los que hemos hecho uso en esta Memoria:

G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
n_1^1	n_2^1	n_3^2	n_5^1	n_6^1
	n_3^1	n_4^1	n_5^2	n_6^2
		n_4^2	n_5^3	n_6^3
		n_5^4	n_5^7	n_6^4
		n_5^5	n_6^6	n_6^5
		n_5^6	n_6^7	
			n_6^8	
			n_6^9	
			n_6^{10}	
			n_6^{11}	
			n_6^{12}	
			n_6^{13}	
			n_6^{14}	
			n_6^{15}	
			n_6^{16}	
			n_6^{17}	
			n_6^{18}	
			n_6^{19}	
			n_6^{20}	
			n_6^{21}	

Bibliografía

[1] J.M. Ancochea et M. Goze, Classificatiòn des algèbres de Lie filiformes de dimension 8, *Archiv. Math.* **50** (1988), 511-525.

[2] J.M. Ancochea et M. Goze, Classificatiòn des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7, *Archiv. Math.* **52** (1989), 175-185.

[3] J.M. Ancochea and M. Goze, On the varietes of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8, *J. of Pure and Appl. Algebra* **77** (1992), 431-440.

[4] J.C. Benjumea, Grupos de Lie asociados a álgebras de Lie filiformes. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2002.

[5] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie. Chap. 1, Hermann, París, 1960.

[6] L. Boza, F.J. Echarte and J. Núñez, Classification of Complex Filiform Lie Algebras of Dimension 10, *Algebra, Groups and Geometries* **11**:3 (1994), 253-276.

[7] L. Boza, E. M. Fedriani and J. Núñez, Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 12, *Prepublicación nº 38 de la Fac. Matemáticas Univ. Sevilla (sección Álgebra, Computación, Geometría y Topología).* Sevilla, 1997.

[8] L. Boza, E. M. Fedriani and J. Núñez, A new method for classifying complex filiform Lie algebras, *Applied Mathematics and Computations*, **2**:3 (2001), 169-175.

[9] C. Chevalley, Unpublished work, quoted by J. Dixmier in [12].

[10] Chong Yun Chao, Uncountably many non isomorphics nilpotent Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 903-906.

[11] J. Dixmier and W.G. Lister, Derivations of nilpotent Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc,* **8** (1957), 155-158.

[12] J. Dixmier, Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotentes II, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), 325-388.

[13] F.J. Echarte and J.R. Gómez, Clasification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9, *Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Universitá Cagliari* **61** fasc.1 (1991), 21-29.

[14] G. Favre, Systéme de poids sur une algèbre de Lie nilpotente, *Manuscripta Math* **9** (1973), 53-90.

[15] M. A. Gauger, On the classification of metabelian Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **179** (1973), 293-329.

[16] J.R. Gómez, A. Jiménez and Y. Khakimdjanov, On the Variety of Nilpotent Lie Algebra Laws of Dimension 11, *Rendiconti Cagliari* **66** (1996), 137-142.

[17] M. Goze and Y. Khakimdjanov, Nilpotent Lie Algebras, Kluwer Academic Publisher, Dordretch, The Netherlands, 1996.

[18] Y. Khakimdjanov, Variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes, *Geometria Dedicata* **40** (1991), 229-295.

[19] P. de la Harpe, On complex varieties of nilpotent Lie algebras, *Global Analysis and its Applications* II, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1974.

[20] A. I. Malcev, Solvable Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc. Transl.* **9** (1962), 228-262.

[21] V.V. Morozov, Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 (en ruso en el original), *Isvestia Vyschih Uchebnyh Zavedenii* **4**:5 (1958), 161-171.

[22] A. Osuna, Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 6. Tesis de Licenciatura, Universidad de Sevilla, 1992.

[23] Safiullina, Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (in Russian the original), *Candidate's works Math. Mech. Phys.* (1964), 66-69.

[24] C. Seeley, Some nilpotent Lie algebras of even dimensions, *Bull. Austral. Math. Soc.* **45** (1992), 71-77.

[25] T. Skjelbred and T. Sund, On the classification of nilpotent Lie algebras, *Preprint no 8, May 3* (1977), Matematick Institutt Universitet i Oslo, Norway.

[26] K.A. Umlauf, Über die Zusammensetzung der endlichen continuierliechen Transformationsgruppen insbesondere der gruppen vom range null. Tesis, Univ. Leipzig, 1891.

[27] G. Vranceanu, Classificarea grupurilor lui Lie de rang zero, *Acad. Rep. Pop. Rom. Stud. Cerc. Mat.* **1** (1950), 40-86.

[28] M. Vergne, Sur la variété des algèbres de Lie nilpotentes, Thèse 3^e cycle, Paris, 1966.

[29] M. Vergne, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algebres de Lie nilpotentes, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970), 81-116.