

## DIFERENTES ENFOQUES PARA LA FRACTURA DÚCTIL BASADOS EN LA METODOLOGÍA PHASE-FIELD: APLICACIÓN A MODELOS DE PLASTICIDAD ASOCIADA Y NO ASOCIADA

P. Olivares-Rodríguez<sup>ab\*</sup>, A. Quintanas-Corominas<sup>cd</sup>, E. Martínez-Pañeda<sup>d</sup>, J. Reinoso<sup>a</sup>, P. Durand<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, E.T.S. de Ingeniería, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, España

<sup>b</sup>Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno, E.T.S. de Arquitectura, Universidad de Sevilla  
Av. Reina Mercedes 2, 41012 Sevilla, España

<sup>c</sup>AMADE, Escuela Politécnica, Universidad de Girona, Campus Montilivi s/n, 17073 Girona, España

<sup>d</sup>Imperial College, Exhibition Rd, South Kensington, SW7 2BX Londres, Reino Unido

\*Persona de contacto: polivares@us.es

### RESUMEN

Los procesos de fractura son una de las principales causas de fallo en diferentes materiales y estructuras en diferentes aplicaciones en Ingeniería. Por ello, a lo largo de las últimas décadas, su estudio ha estado enfocado en tareas como el desarrollo de criterios de prevención en fase de proyección de estructuras o la modelización del comportamiento de materiales ante situaciones (estados de carga) que conlleven la iniciación y el desarrollo de grietas. En el caso concreto de la Ingeniería Civil, los materiales de naturaleza geomecánica (suelos y rocas) sufren a su vez este tipo de procesos de carácter inelástico. En el contexto de la Mecánica Computacional, se han propuesto diversas metodologías de análisis de procesos de fractura basadas en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, modelos de grieta cohesiva, entre otros muchos. Recientemente, una de las técnicas con mayor impacto en la comunidad científica ha sido la denominada Phase Field Approach of Fracture (PFAF), basada en la visión energética originalmente propuesta por Griffith incluida en un enfoque variacional desde el punto de vista matemático. En este trabajo, se desarrolla la extensión de la PFAF para la modelización de la fractura conjuntamente con leyes materiales no lineales siguiendo diversas formulaciones propuestas en la literatura y aplicadas a modelos de fractura con flujo asociativo y no asociativo. El trabajo concierne un profundo análisis de las diferentes opciones de modelización de fuerzas precursoras de fractura en el contexto de PFAF así como su correspondiente implementación numérica empleando el método de los elementos finitos.

**PALABRAS CLAVE:** mecánica computacional, plasticidad, phase field, elementos finitos, mecánica de la fractura

### ABSTRACT

Fracture events are one of the most common causes of failure that occur in different materials used in different engineering applications. Therefore, over the last decades, the comprehensive understanding of these phenomena has been received a great deal of attention with focus on the prevention criteria development in the designing and dimensioning stages of structures or the modelling of the material behaviour in situations (related to load states) that lead the development of cracks. In Civil Engineering applications, geomaterials (soils and rock) are prone to develop this type of inelastic process. Within the context of Computational Mechanics, several fracture methodologies based on Linear Elastic Fracture Mechanics, cohesive crack models, among many others, have been proposed so far. Recently, one of the techniques with the greatest impact on the scientific community has been the so-called Phase Field Approach of Fracture (PFAF), based on the energetic vision originally proposed by Griffith included in a variational approach from a mathematical point of view. In this work, the extension of the PFAF for material nonlinear effects prior fracture occurrence is developed following several formulations proposed in the literature and applied to fracture models with associative and non-associative flow. The work concerns with an in-depth analysis of the different options for modelling fracture driving forces in the context of PFAF as well as their corresponding numerical implementation using the finite element method.

**KEYWORDS:** computational mechanics, plasticity, phase field, finite element method, fracture mechanics

La motivación que persigue este trabajo desde el punto de vista computacional se basa en desarrollar un modelo para la aplicación de diversas formulaciones de fractura siguiendo la metodología PFAF acoplada con una ley constitutiva de carácter elastoplástico.

La mayoría de modelos ideados para modelar procesos de fractura según la aproximación de tipo variacional PFAF siguen el modelo canónico propuesto por Francfort y Marigo [1], para obtener una versión regularizada. Dicho procedimiento se conoce como la formulación tipo phase-

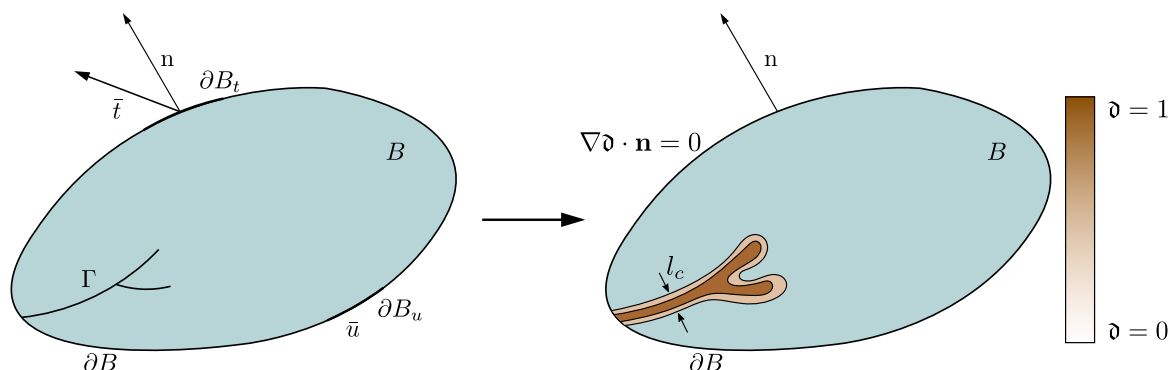


Figura 1: Situación de grieta discreta y grieta regularizada según PFAF.

field. Esta formulación se basa en regularizar la superficie discontinua de la grieta a través de una variable auxiliar de tipo difuso, por la que se obtiene un campo continuo de la variable daño evaluable en cada punto del dominio, veáse [2]. En la Figura 1 se puede observar como la grieta (representada por el campo discreto  $\Gamma$ ) se aproxima a través de la variable phase-field, que actúa en la zona delimitada por la longitud característica  $l_c$  (parámetro de control).

La variable de phase-field se define como  $d : \Omega \times [0, t] \rightarrow [0, 1]$ . Es decir,  $d$  interpola entre el estado intacto del material ( $d = 0$ ) y el estado totalmente dañado ( $d = 1$ ), donde los estados intermedios suponen una pérdida progresiva de rigidez.

Por otro lado, los fenómenos no lineales de tipo material se tienen en cuenta en este trabajo a partir de un modelo elasto-plástico [3] definido por: (i) criterio de plastificación, (ii) regla de flujo y (iii) la correspondiente ley de endurecimiento. En este trabajo se ha implementado el modelo de Mohr-Coulomb con una ley de endurecimiento afectando a la variable de cohesión, siguiendo las directrices de [4]. El carácter asociativo o no asociativo del modelo plástico reside en la diferencia entre los valores del ángulo de rozamiento  $\phi$  y el ángulo de dilatancia  $\psi$ , parámetros de la función de plastificación y el potencial plástico respectivamente.

Por tanto, las variables independientes del problema son el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ , el campo de deformaciones plásticas  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  y la variable phase-field  $d$ . Estas variables entran dentro del montaje del modelo de carácter acoplado a través de la formulación de la densidad de energía interna total, propia de formulaciones de tipo variacional. La densidad de energía presenta la siguiente forma [5]:

$$\begin{aligned}
 W_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \nabla d, \alpha, \nabla \alpha) &:= \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d, \alpha, \nabla \alpha) + \Delta(d, \nabla d, \alpha) = \\
 &= \underbrace{g(d)\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}_{\mathbf{E}} + \underbrace{h(d)\psi_p(\alpha, \nabla \alpha)}_{\mathbf{H}} + \underbrace{\Delta_f(d, \nabla d)}_{\mathbf{F}} + \\
 &+ \underbrace{p(d)\Delta_p(\alpha)}_{\mathbf{P}}
 \end{aligned} \tag{1}$$

En la que  $\alpha$  es la variable de endurecimiento. En un primer desarrollo la energía se divide en dos términos: la energía libre  $\psi$  y el trabajo disipativo  $\Delta$ , que puede ser local o no local para el campo de fractura en función de si se considera el término de  $\nabla d$ . Pasando a un segundo nivel contamos con cuatro términos, cuyo desarrollo puede consultarse en [5], enfocándonos en este documento en el término de fractura  $\mathbf{F}$ :

- **E**: Término correspondiente a la energía elástica degradada. Dicha energía se degrada a partir de una función  $g(d)$  cuyo valor disminuye desde 1 a 0 a medida que el valor de  $d$  aumenta.
- **H**: Término correspondiente a la energía plástica degradada. De nuevo existe una función  $h(d)$  que cumple el mismo propósito y condiciones que  $g(d)$ .
- **F**: Término correspondiente al trabajo disipativo de daño. En el contexto que se trata toma la forma:

$$\Delta_f(d, \nabla d) := \frac{G_c}{c_\omega} \left( \frac{\omega(d)}{l_c} + l_c |\nabla d|^2 \right) \tag{2}$$

Donde  $G_c$  es la tenacidad a fractura del material, y  $\omega(d)$  y  $c_\omega$  son los coeficientes propios del funcional de Ambrosio-Tortorelli. En el caso más común (conocido como AT-2) se considera la función de densidad de superficie de grieta definida en [2]:

$$\Delta_f(d, \nabla d) := \frac{G_c}{2} \left( \frac{d^2}{l_c} + l_c |\nabla d|^2 \right) \tag{3}$$

Puede comprobarse que utilizando este tipo de formulación se da la  $\Gamma$ -Convergencia al modelo de fractura frágil de Griffith llevando a 0 la longitud característica  $l_c$ , véase [2, 6]. Sin embargo, tiene el inconveniente de que el daño empieza a entrar en juego desde que se inicia el estado de carga. Esta desventaja se suele suplir mediante el uso de *thresholds*, por los que se impone un umbral para el comienzo del desarrollo del daño [7, 8]. También existen otros autores que emplean un funcional tipo AT-1, que desarrolla un tramo lineal previo al daño, aunque es necesario realizar ajustes para mantener la condición de irreversibilidad [9].

- **P**: Término correspondiente al trabajo disipativo plástico, degradado a partir de la función  $p(\delta)$ .

Con estos términos, se ensambla la densidad de energía y se integra en el dominio de estudio para después obtener la formulación energética propia del método de los elementos finitos. La organización del artículo se estructura como sigue: En primer lugar, se describe y se detalla el modelo computacional desarrollado (Secs. 1 y 2), para posteriormente extraer una serie de resultados de carácter cualitativo a través de un ejemplo sencillo para una serie de metodologías reconocidas (Sec. 3). Finalmente se resumen las principales conclusiones en la Sec. 4.

### 1. MODELO COMPUTACIONAL

El modelo computacional desarrollado se basa en el método de los elementos finitos y fue desarrollado en ABAQUS. La forma de resolver el problema acoplado pasa por implementar un procedimiento tipo *Staggered Algorithm* [10]. En ABAQUS, se trabajará con los entornos personalizables tipo UEL y UMAT. Una UEL (*User Element*) es un tipo de interfaz que permite implementar elementos finitos según una metodología propuesta por el usuario. Las aportaciones de este entorno son las contribuciones al vector de residuos y a la matriz de rigidez del sistema de ecuaciones del MEF. Por otro lado, la UMAT se encarga de definir el modelo de comportamiento del material a través de la actualización del estado de tensiones y de la matriz de rigidez en base al modelo plástico implementado. Como variables generales de entrada se detalla el valor estimado del campo de desplazamientos y de daño, que deben converger en cada paso de tiempo por el carácter desacoplado del algoritmo empleado.

Dentro del procedimiento, uno de los aspectos más destacables es el cálculo de las energías. Para la energía elástica (término **E** sin degradar) la formulación en materiales isotropos toma la forma [11]:

$$\Psi_e = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + \mu \text{tr} [(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2] \quad (4)$$

Se puede observar que la Ec.(4) es combinación lineal de los invariantes del tensor de deformaciones elástico. En este trabajo se utilizará la descomposición de Miehe [7], que se basa en la diferenciación de la parte positiva (tracción) y negativa (compresión) haciendo uso de las deformaciones elásticas del sistema principal, que son los autovalores del tensor de deformaciones elástico ( $\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e$ ):

$$\Psi_{e_{\pm}} = \frac{\lambda}{2} \langle \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e \rangle_{\pm}^2 + \mu \left( \langle \varepsilon_1^e \rangle_{\pm}^2 + \langle \varepsilon_2^e \rangle_{\pm}^2 + \langle \varepsilon_3^e \rangle_{\pm}^2 \right) \quad (5)$$

El operador  $\langle z \rangle_{\pm}$  son los paréntesis de Macaulay, que representan la función a trozos  $\langle z \rangle_{\pm} := (z \pm |z|)/2$ .

Por otro lado, la energía disipativa plástica  $\Psi_{pd}$  (término **H** + **P** sin degradar) se calcula a través de la obtención

del área bajo la curva de tensión-deformación plástica, de forma que:

$$\Psi_{pd} = \Psi_{pd} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^{n+1} + \sigma_i^n}{2} (\varepsilon_{pi}^{n-1} - \varepsilon_{pi}^n) \quad (6)$$

Siendo  $n$  el número de componentes del pseudovector de deformaciones plásticas. Tal y como se muestra en la figura 2 para una componente genérica, la energía se calcula mediante la discretización de la integral o suma discreta de áreas sucesivas, añadiendo en cada paso la encerrada entre los valores de deformación plástica del paso anterior y del actual.

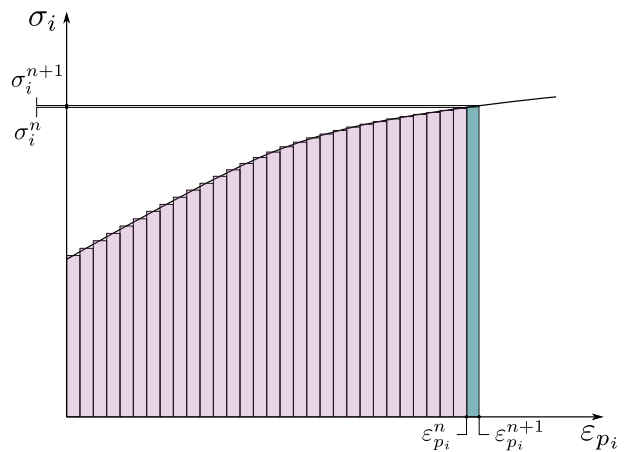


Figura 2: Obtención de la energía disipativa plástica.

Se observa que este tipo de disipación se calcula en función de las tensiones efectivas, que no están afectadas del campo daño. Se emplean este tipo de tensiones, y no las nominales (afectadas del campo de daño), ya que la energía se degrada posteriormente a través de la función de degradación.

Tras la obtención de todas las variables necesarias, se añaden como contribuciones a los vectores de residuos y matrices de rigidez, a través de las expresiones definidas del procedimiento tipo *Staggered Algorithm* en [10].

### 2. ANÁLISIS DE METODOLOGÍAS

En esta sección se hará especial énfasis en el cálculo del residuo y parte de la matriz de rigidez dependiente del campo de daño  $\delta$ ,  $r_i^{\delta}$  y  $\mathbf{K}_{ij}^{\delta\delta}$ . Estas variables dependen, además de la discretización del MEF realizada, del término de *Driving Force*. Dicho término tiene su origen en la ecuación de evolución local del daño [8]:

$$\frac{G_c}{l_c} [\delta - l_c^2 \Delta \delta] = \frac{2(1 - \delta)\mathcal{H}}{\text{R. Geométrica} \quad \text{Driving Force}} \quad (7)$$

Donde el crecimiento de grieta se basa en un equilibrio, a modo de competición, entre el término de la resistencia geométrica y la *Driving Force*, gobernada por la variable

histórica  $\mathcal{H}$ , responsable de la condición de irreversibilidad del daño en modelos AT-2.

Diferentes autores, en aras de desarrollar un modelo de fractura dúctil que acople los campos de plasticidad y daño, han propuesto y desarrollado diversas formulaciones para el término de *Driving Force*. En este trabajo se estudiará la derivación de las metodologías de Borden [12] y Miehe [13], que son los que más versatilidad ofrecen a la hora de modelar este tipo de comportamiento en materiales.

En ambos casos, se parte de la ecuación de evolución de la superficie de grieta (7) realizando una serie de modificaciones a través de parámetros y *thresholds*. A continuación, se muestra como obtener las componentes del vector de residuos y matriz de rigidez asociados al daño para cada metodología.

- Metodología propuesta por Borden et al.: En este caso, la ecuación de evolución sufre cambios en la definición de  $\mathcal{H}$  y  $g(\delta)$ , partiendo de la Ec. (3), quedando de la siguiente forma:

$$\frac{G_c}{l_c} (\delta - l_c^2 \Delta \delta) = -g'(\delta) [\beta_e \mathcal{H} + \beta_p \langle \Psi_{pd} - W_0 \rangle_+] \quad (8)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \max_{s \in [0,1]} [\Psi_e(\epsilon^e)] \\ g(\delta) &= (1 - \delta)^2 (1 + \delta(2 - m)), \quad m > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Por facilitar la comprensión en el desarrollo, se ha obviado intencionadamente la descomposición en parte positiva y negativa de la energía elástica en ambas metodologías, teniendo solo que afectar la función de degradación a la parte positiva.

En base a la discusión ofrecida en [5], Borden y coautores utilizan una función de degradación cúbica con AT-2 para poder generar un tramo lineal previo a alcanzar la deformación correspondiente a la tensión pico (como comparación al comportamiento de la de carácter cuadrático consultar [12]) y así suplir el defecto del comienzo inmediato del daño con la puesta en carga propia de la combinación  $\{g(\delta) \text{ cuadrática} + \text{AT-2}\}$ . Para conseguir mantener el mismo nivel de deformaciones al alcanzar la tensión pico que en el caso cuadrático y mantener la semejanza con un modelo AT-2, el parámetro  $m$  se debe ajustar. Dicho ajuste se corresponde a un valor mucho menor que la unidad, pero sin alcanzar su nulidad ya que no se podría producir la nucleación de defectos para el estado intacto del material. En [12], siguiendo diversas modelizaciones, se opta por un valor de  $m = 10^{-4}$ . Por otro lado, Borden separa la *Driving Force* en dos términos afectados por unos coeficientes de ponderación  $\beta_e$  y  $\beta_p$ . El primer término afecta a la energía elástica y el segundo a la disipación plástica controlada además

por un *threshold*  $W_0$ . Los coeficientes de ponderación modelan la contribución de cada término al crecimiento de grieta, que es el fin último de la *Driving Force*.

Para obtener la componente asociada al daño del vector de residuos y matriz de rigidez es necesario utilizar la discretización propia del MEF:

$$\begin{aligned} \delta &= \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \\ \nabla \delta &= \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i \end{aligned} \quad (10)$$

Por la cual, sustituyendo en (8) y derivando se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^\delta &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \left[ \frac{G_c}{l_c} \delta + g'(\delta) (\beta_e \mathcal{H} + \beta_p \langle \Psi_{pd} - W_0 \rangle_+) \right] \mathbf{N}_i + G_c l_c (\mathbf{B}_i^T \nabla \delta) \right\} dV \\ \mathbf{K}_{ij}^{\delta\delta} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i^\delta}{\partial \mathbf{d}_j} = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \left[ \frac{G_c}{l_c} + g''(\delta) (\beta_e \mathcal{H} + \beta_p \langle \Psi_{pd} - W_0 \rangle_+) \right] \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j + G_c l_c \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_j \right\} dV \end{aligned} \quad (11)$$

- Metodología propuesta Miehe y coautores: Por su parte, Miehe et al. [8] realizan la modificación del término  $\mathbf{F}$  de (1). En dicho término establece una extensión del modelo AT-2:

$$\Delta_f(\delta, \nabla \delta) := 2 \frac{\omega_c}{\xi} \left( \frac{\delta^2}{l_c} + l_c |\nabla \delta|^2 \right) + (1 - g(\delta)) \omega_c \quad (12)$$

En el que añade un término adicional controlado por la energía crítica de fractura  $\omega_c$  que actúa a modo de *threshold*. Desarrollando la energía total del sistema y derivando con respecto a la variable daño para obtener la ecuación de evolución queda:

$$2 \frac{\omega_c}{\xi} (\delta - l_c^2 \Delta \delta) = -g'(\delta) \mathcal{H} \quad (13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \max_{s \in [0,1]} [\langle \Psi_e + \Psi_{pd} - \omega_c \rangle] \\ g(\delta) &= (1 - \delta)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Como puede observarse, esta formulación introduce el *threshold* de manera natural en el término de energía de fractura, que deriva en la ecuación de evolución, a diferencia de otros autores que optan por establecerlo en los términos de energía elástica o plástica. De esta forma, consigue asemejarse a un modelo AT-1 con un tramo previo lineal sin daño apreciable, pero con las ventajas propias de un modelo AT-2. Además, emplea un parámetro  $\xi$  para controlar la caída de la fase postcrítica de daño.

De forma análoga al proceso realizado en Borden et al. [12], se obtienen las contribuciones al sistema

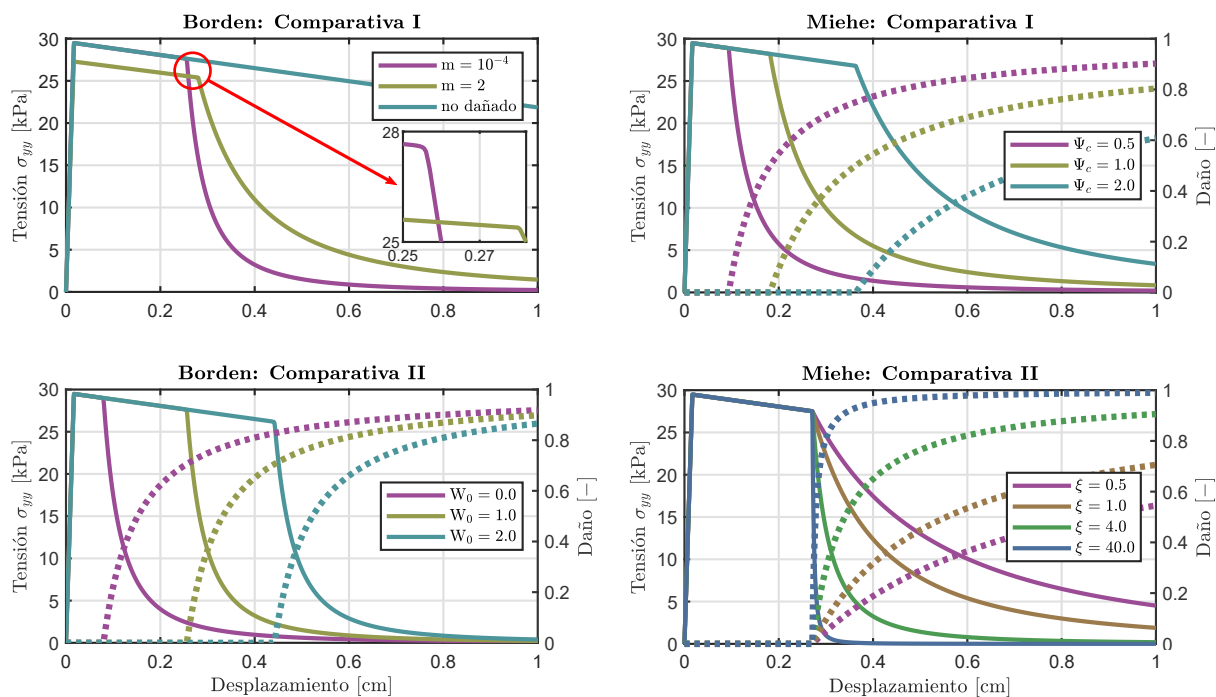


Figura 3: Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua).

del MEF:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^{\text{d}} &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ 2 \frac{\omega_c}{\xi} \mathbf{d} + g'(\mathbf{d}) \mathcal{H} \right\} \mathbf{N}_i + \\ &+ \frac{2\omega_c l_c^2}{\xi} \left( \mathbf{B}_i^T \nabla \mathbf{d} \right) dV \\ \mathbf{K}_{ij}^{\text{dd}} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i^{\text{d}}}{\partial \mathbf{d}_j} = \int_{\mathcal{B}} \left\{ 2 \frac{\omega_c}{\xi} + g''(\mathbf{d}) \mathcal{H} \right\} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j + \\ &+ \frac{2\omega_c l_c^2}{\xi} \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_j dV \end{aligned} \quad (15)$$

### 3. RESULTADOS

Para verificar las metodologías presentadas en la sección anterior con el modelo computacional desarrollado, se comprobará de forma cualitativa su efectividad a través de un ejemplo sencillo. Dicho ejemplo supone la modelización de un elemento sometido a tracción en condiciones de deformación plana. El elemento utilizado es de tipo bilineal de 4 nodos, con 4 puntos de integración. Dentro de la modelización de la plasticidad a partir del modelo de Mohr-Coulomb se propone la siguiente ley de endurecimiento de carácter lineal para la cohesión, en función de la deformación plástica acumulada  $\bar{\varepsilon}^p$  (variable de endurecimiento):

$$c(\bar{\varepsilon}^p) = c_0 + H\bar{\varepsilon}^p \quad (16)$$

Las propiedades empleadas en la modelización son las recogidas en la Tabla 1. Estas propiedades modelizan de forma cualitativa un suelo tipo arcilloso en condiciones no drenadas (simulación a corto plazo), material característico de aplicación del modelo Mohr-Coloumb, con

un módulo de endurecimiento  $H$  negativo ya que la tracción va asociada a una pérdida de resistencia en suelos.

| Material | $E$ [kPa]        | $\nu$ | $G_c$ [kPa·m] | $l_c$ [m] |
|----------|------------------|-------|---------------|-----------|
| Arcilla  | $8.0 \cdot 10^3$ | 0.2   | 0.5           | 0.2       |

| Material | $c_0$ [kPa] | $H$ [kPa] | $\phi$ [°] | $\psi$ [°] |
|----------|-------------|-----------|------------|------------|
| Arcilla  | 15.0        | -10.0     | 1.0        | 1.0        |

Tabla 1: Propiedades y parámetros utilizados para las metodologías de Borden y Miehe.

A continuación, a la vista de los resultados ilustrados en la Figura 3 puede concluirse:

- En la comparativa I de Borden se denota la diferencia entre la aproximación de Borden et al. ( $m = 10^{-4}$ ) y un AT-2 ( $m = 2$ ) sin *threshold*, con referencia al estado no dañado. Se observa que mientras que la aproximación de Borden et al. conserva una fase no dañada antes de darse la caída súbita de resistencia, en AT-2 la degradación comienza desde la fase elástica. Además, gracias al zoom en la gráfica se puede apreciar una transición más suave a la caída en Borden et al. que en AT-2.
- En la comparativa II de Borden se observa el efecto del *threshold* en la parte plástica de la *Driving Force*. Como era de esperar, a mayor valor del *threshold* más se retrasa el inicio de la fase de daño en el elemento.
- De forma análoga al caso anterior, en la comparativa I de Miehe se comprueba el efecto de la energía

crítica  $\omega_c$ . A mayor valor de este parámetro mayor es la energía necesaria para desencadenar el proceso de daño.

- Por último, en la comparativa II de Miehe observamos las diferentes formas de caída propias de la fase post-crítica debido al parámetro  $\xi$ . A medida que aumenta el valor de este parámetro la pendiente va creciendo, asemejándose a una fase de daño sin mucho recorrido en deformaciones propia de la fractura de tipo frágil.

#### 4. CONCLUSIONES

El presente trabajo muestra la capacidad de las distintas metodologías descritas empleando el modelo computacional desarrollado. En este caso, el carácter asociado o no asociado de la plasticidad viene dada por una aplicación sencilla del modelo de Mohr-Coulomb.

Gracias al problema planteado, se ha podido comprobar como cada parámetro influye en la solución. Con este conocimiento se podría trabajar con el ajuste de resultados experimentales. Sin embargo, cabe destacar que detrás de cada metodología y de la obtención del valor de cada parámetro debería existir un trasfondo físico que le aporte rigor científico a la modelización efectuada.

Finalmente, se denota la versatilidad del modelo computacional para incluir otro tipo de leyes de comportamiento distintas a través del desarrollo de UMAT específicas, que pueden acoplarse fácilmente al entorno de la UEL implementado en ABAQUS. Además, una vez verificado los resultados para un elemento, los problemas planteados pueden asemejarse a geometrías y condiciones más realistas.

#### AGRADECIMIENTOS

JR, PD y POR agradecen su apoyo al Ministerio de Ciencia e Innovación y a la Agencia Estatal de Investigación a través de la subvención del proyecto PID2019-109723GB-I00. Además, POR agradece el apoyo de la Universidad de Sevilla a través del contrato predoctoral otorgado en la convocatoria VIPPIT-2020-II.2. Por su parte, AQC agradece su apoyo al Ministerio de Universidades del Gobierno Español y a los fondos del programa Next Generation EU de la Unión Europea.

#### REFERENCIAS

[1] G. A. Francfort and J. J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46, 1998.

[2] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field fe

implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83, 2010.

[3] Jacob Lubliner. Plasticity theory: Revised edition. *Journal of Applied Mechanics*, 59, 2006.

[4] E. A. De Souza Neto, D. Perić, and D. R.J. Owen. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. 2008.

[5] R. Alessi, M. Ambati, T. Gerasimov, S. Vidoli, and L. De Lorenzis. Comparison of phase-field models of fracture coupled with plasticity. *Computational Methods in Applied Sciences*, 46, 2018.

[6] Gilles A. Francfort, Blaise Bourdin, and Jean Jacques Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91:5–148, 4 2008.

[7] Christian Miehe, Lisa Marie Schänzel, and Heike Ulmer. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. part i. balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294, 2015.

[8] C. Miehe, M. Hofacker, L. M. Schänzel, and F. Aldakheel. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. part ii. coupled brittle-to-ductile failure criteria and crack propagation in thermo-elastic-plastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294, 2015.

[9] Roberto Alessi, Jean Jacques Marigo, Corrado Maurini, and Stefano Vidoli. Coupling damage and plasticity for a phase-field regularisation of brittle, cohesive and ductile fracture: One-dimensional examples. *International Journal of Mechanical Sciences*, 149, 2018.

[10] Jianguang Fang, Chengqing Wu, Timon Rabczuk, Chi Wu, Conggan Ma, Guangyong Sun, and Qing Li. Phase field fracture in elasto-plastic solids: Abaqus implementation and case studies. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 103, 2019.

[11] N. P.van Dijk, J. J. Espadas-Escalante, and P. Isaksson. Strain energy density decompositions in phase-field fracture theories for orthotropy and anisotropy. *International Journal of Solids and Structures*, 196-197, 2020.

[12] Michael J. Borden, Thomas J.R. Hughes, Chad M. Landis, Amin Anvari, and Isaac J. Lee. A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312, 2016.

[13] C. Miehe, S. Teichtmeister, and F. Aldakheel. Phase-field modelling of ductile fracture: A variational gradient-extended plasticity-damage theory and its micromorphic regularization. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374, 2016.