Investigación en Educación Matemática XXIII

Valladolid, 4, 5 y 6 de septiembre de 2019

Editores:

José M. Marbán, Matías Arce, Ana Maroto, José M. Muñoz-Escolano y Ángel Alsina

Universidad de Valladolid

Facultad de Educación y Trabajo Social

Campus Miguel Delibes

UniversidaddeValladolid

seiem2019@uva.es/
http://seiem2019.uva.es/
@xxiiiseiem2019

SEIEM

Patrocinan:

Universidad de Valladolid – Área de Didáctica de la Matemática

Educación Matemática GIR

Ayuntamiento de Valladolid

Junta de Castilla y León

feyts facultad de educación y trabajo social

Campus Público María Zambrano Segovia – Universidad de Valladolid – Facultad de Educación

imUVa Instituto de Matemáticas

the travel brand

VA! Valladolid ciudad amiga del turismo

Investigación en Educación Matemática

XXIII

Universidad de Valladolid

Investigación en Educación Matemática

XXIII

José M. Marbán, Matías Arce, Ana Maroto,
José M. Muñoz-Escolano y Ángel Alsina (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Valladolid, 4, 5 y 6 de septiembre de 2019

Investigación en Educación Matemática XXIII

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n
18071 Granada (España)

Dr. José M. Marbán
Dr. Matías Arce
Dra. Ana Maroto
Dr. José M. Muñoz-Escolano
Dr. Ángel Alsina

Diseño del logo, cartel y portada: María Astrid Cuida Gómez
Maquetación de la portada: Laura Conejo Garrote

ISBN: 978-84-09-16492-9
ISSN: 1888-0762

Cítese como:
Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina, Á. (Eds.) (2019). *Investigación en Educación Matemática XXIII*. Valladolid: SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

ÍNDICE

IDENTIFICANDO CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CUANDO DEFINEN[xxvii]

Identifying commognitive conflicts in the discourse of university students when defining

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

Resumen

En este estudio, avanzamos en nuestra investigación sobre la práctica de definir entre estudiantes universitarios. Para ello, adoptamos como marco teórico un marco sociocultural: la teoría de la comognición de Sfard (2008). Dicho marco considera las matemáticas como un tipo particular de discurso, luego este último se convierte en el principal objeto de estudio. Para acceder al discurso de los estudiantes cuando definen, grabamos sus discusiones mientras respondían a una serie de preguntas abiertas sobre la descripción y definición de cuerpos geométricos. También les pedimos que escribiesen sus respuestas consensuadas. Todo este discurso lo analizamos en busca de posibles conflictos comognitivos, que en ocasiones suponen oportunidades de aprendizaje para los estudiantes. Aquí presentamos tres de los conflictos identificados, que aportan información sobre la práctica de definir.

Palabras clave: *conflicto comognitivo, discurso, estudiantes universitarios, práctica matemática de definir.*

Abstract

In this study, we continue our research on the practice of defining of university students. With this aim, we adopt as theoretical framework a sociocultural one: Sfard's (2008) theory of commognition. This framework considers mathematics as a particular type of discourse, thus this discourse becomes the main object of study. In order to access the students' discourse when defining, we recorded their discussions while answering a series of open questions about the description and definition of solids. We also asked them to write down their agreed upon answers. We analysed the discourse in search of possible commognitive conflicts, which sometimes become a source of learning opportunities for students. We present here three of the identified commognitive conflicts, which provide information about the practice of defining.

Keywords: *commognitive conflict, discourse, university students, mathematical practice of defining.*

INTRODUCCIÓN

La investigación vinculada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario ha experimentado un gran auge en los últimos años (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz y Rasmussen, 2016; Nardi, Biza, González-Martín, Gueudet y Winsløw, 2014). Entre los focos de interés en esta área de investigación podemos señalar los estudios sobre prácticas matemáticas (por ejemplo, definir, modelar, conjeturar y probar). En este trabajo entendemos las prácticas matemáticas como aquellas que desarrollan los matemáticos cuando construyen conocimiento matemático.

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Identificando conflictos comognitivos en el discurso de estudiantes universitarios cuando definen. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 373-382). Valladolid: SEIEM.

La importancia de la práctica de definir ha sido resaltada por distintos autores (entre otros, De Villiers, 1998; Freudenthal, 1973; Ouvrier-Buffet, 2006, 2011). Específicamente, Tall (1991) destaca la importancia del proceso de definir en la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado (*advanced mathematical thinking,* en el original), señalando que existe un cambio significativo entre describir y definir.

Una manera de estudiar la práctica de definir, al igual que el resto de las prácticas matemáticas, es usando un marco sociocultural. En este sentido, Planas (2010) sostiene que "los enfoques socioculturales en educación matemática toman el conocimiento matemático como construcción social y centran su atención en el análisis de los procesos por los cuales esta construcción social se produce" (p. 167). Entre los diferentes marcos socioculturales adoptaremos la teoría de la comognición (Sfard, 2008), que considera el discurso como foco principal de estudio. Esta teoría ha sido utilizada por diversos autores, mostrando su eficacia en la investigación en educación matemática en diferentes niveles educativos y, en particular, a nivel universitario (Nardi, Ryve, Stadler y Viirman, 2014; Viirman y Nardi, 2017, 2019).

La teoría de la comognición está siendo utilizada por distintos investigadores para el estudio de la práctica matemática de definir. Por ejemplo, Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014) caracterizan el discurso matemático sobre el proceso de definir en estudiantes de enseñanzas no obligatorias; Martín-Molina, Toscano, González-Regaña, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2018) identifican rutinas de estudiantes universitarios cuando definen, y Schüler-Meyer (2018) estudia cómo estudiantes de secundaria construyen la definición de sucesión convergente.

En la teoría de la comognición, está ganando mucho protagonismo el estudio de los conflictos comognitivos. En esta línea, Sánchez y García (2014) estudian los conflictos comognitivos entre normas que surgen cuando estudiantes universitarios definen, como un paso previo necesario para la identificación de cambios en el discurso. Por otra parte, Jayakody (2015) identifica distintos conflictos comognitivos en el discurso de estudiantes universitarios sobre funciones continuas y Thoma y Nardi (2018) identifican diferentes conflictos comognitivos a partir de pruebas escritas de estudiantes universitarios y de entrevistas con su profesor.

En este estudio pretendemos avanzar en el estudio de la práctica de definir de estudiantes universitarios mediante la identificación de conflictos comognitivos, ya que en muchas ocasiones estos suponen oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

Nuestro foco de atención en este estudio es la práctica matemática de definir, que entendemos como un proceso que consta de varias etapas (Martín-Molina et al., 2018). La primera de ellas consiste en describir el objeto a definir, la segunda en formular una o varias definiciones preliminares de ese objeto y la última en seleccionar la definición que se considera "mejor" de todas las construidas. Esta definición seleccionada se convertirá en la definición "formal" del objeto.

Al igual que Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005), consideramos que las prácticas matemáticas de definir, probar, modelar, etc., son actividades sociales y culturales. Por tanto, adoptaremos para este estudio un marco sociocultural: la teoría de la comognición de Sfard (2008). El término comognición viene de la consideración conjunta de los términos comunicación y cognición en inglés. Para esta autora, no hay diferencia entre pensar y comunicar, pues ella sostiene que pensar es comunicarse con uno mismo. Además, en esta teoría las matemáticas son consideradas como un tipo particular de discurso, que se convierte en el objeto de estudio. Dicho discurso se caracteriza a través de cuatro propiedades: uso de palabras, mediadores visuales, narrativas y rutinas.

La primera propiedad de Sfard (2008), uso de palabras, se refiere tanto al uso de palabras matemáticas (como, por ejemplo, rectángulo, ángulo, prisma, etc.) como al uso de palabras coloquiales con significado matemático (como, por ejemplo, tumbado con el significado de oblicuo). La segunda propiedad, mediadores visuales, hace alusión a los objetos visibles que los participantes utilizan como parte de su comunicación (un gráfico de una función o una fórmula matemática, entre otros). Las narrativas son expresiones, habladas o escritas, sobre los objetos, relaciones entre objetos o actividades con o de los objetos. Estas narrativas están sujetas a aceptación o rechazo por parte de los participantes y, en caso de ser aceptadas por la comunidad, se denominan narrativas asumidas (por ejemplo, las definiciones matemáticas o los teoremas). Por último, las rutinas son patrones repetitivos en el discurso de los participantes, que pueden ser inferidas mediante la detección de regularidades en cualquiera de las otras tres propiedades (por ejemplo, en cómo se realizan los cálculos o cómo se definen los objetos). En un trabajo reciente sobre las rutinas, Lavie, Steiner y Sfard (2019) proponen tener en cuenta no solo el cómo y cuándo se realiza una actividad, sino también cómo el que hace la actividad la interpreta y cuáles son sus experiencias previas.

Además, Sfard (2008) distingue dos tipos de reglas que regulan la comunicación humana: reglas a nivel objeto y meta-reglas. Las reglas a nivel objeto son narrativas que hablan sobre el comportamiento regular de los objetos (por ejemplo, "la suma de los ángulos de un cuadrilátero es de 360 grados") y las meta-reglas son reglas que definen patrones de actividad de los participantes en el discurso cuando estos tratan de producir y justificar narrativas a nivel objeto (por ejemplo, la forma de demostrar la narrativa del ejemplo anterior sobre cuadriláteros podría ser "la suma de los ángulos de un cuadrilátero es de 360 grados porque el cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos").

Por otro lado, en la teoría de la comognición, el aprendizaje se considera un cambio en el discurso de los participantes, que puede ser detectado a partir de un cambio en una o más de las cuatro propiedades del discurso anteriormente mencionadas. Este aprendizaje puede surgir a partir de la resolución de un conflicto comognitivo que, para Sfard (2008), es una situación en la que diferentes participantes usan las mismas palabras o símbolos escritos con diferente significado o actúan regidos por distintas meta-reglas.

En esta investigación, estudiamos el discurso de los estudiantes universitarios cuando definen cuerpos geométricos. Concretamente, identificamos las cuatro propiedades del discurso y sus meta-reglas, con el objetivo de localizar posibles conflictos comognitivos. La resolución de estos conflictos, que no abordamos en esta comunicación, podría conllevar un aprendizaje para estos estudiantes.

METODOLOGÍA

En esta sección, presentamos la metodología que hemos adoptado en este estudio para alcanzar nuestro objetivo. En primer lugar, describimos los participantes y el contexto de esta investigación. Seguidamente, se presentan las principales características del instrumento de investigación y, finalmente, se describen los procesos de recogida y análisis de datos.

Participantes y contexto

En este estudio participaron estudiantes para maestro de Educación Primaria (la mayoría de 18-19 años) que estaban matriculados en una asignatura de contenido matemático del primer curso del grado. Los estudiantes de esta asignatura recibían dos horas de docencia de contenido teórico a la semana y una hora de contenido práctico. Dentro de cada clase práctica, los estudiantes se organizaban en grupos de tres a cinco estudiantes para tratar de resolver un problema de matemáticas que el docente les planteaba al inicio de la clase. En una de las clases prácticas, se les presentó a los estudiantes el instrumento de investigación y se les invitó a participar en el estudio. Fueron 45 estudiantes los que decidieron voluntariamente participar en este estudio. Dichos estudiantes estaban distribuidos en 12 grupos de trabajo (aquí llamados G1, G2, …, G12).

Instrumento de investigación

En la teoría de la comognición, el discurso se considera el objeto de estudio. Por este motivo, el instrumento de investigación fue diseñado para promover la aparición del discurso de los estudiantes cuando construyen y seleccionan definiciones de cuerpos geométricos. En concreto, este instrumento consta de dos partes diferenciadas. La primera parte trata de recoger información acerca de cómo los estudiantes describen y definen cuerpos geométricos. La segunda parte pone el foco en estudiar cómo los estudiantes seleccionan una definición entre varias disponibles. El estudio que aquí presentamos se centra en los resultados que se derivan del análisis de los datos relativos a la primera parte del instrumento. En esta parte del instrumento aparece una imagen (ver Figura 1) con tres poliedros diseñados con el software dinámico GeoGebra: un cubo; un prisma cuadrangular, oblicuo y convexo; y un prisma cuadrangular, oblicuo y cóncavo. Estos cuerpos geométricos fueron elegidos porque existen algunas propiedades que los tres cuerpos comparten (por ejemplo, los tres poliedros son prismas cuadrangulares) y porque cada uno de los cuerpos se diferencia de los otros por alguna propiedad (por ejemplo, el cubo es regular y los otros no). Tras esta imagen, aparecen nueve preguntas abiertas que tratan de promover la aparición del discurso de los estudiantes cuando describen estos cuerpos geométricos y los definen. En concreto, las cuatro primeras preguntas están relacionadas con la descripción de los cuerpos geométricos y la identificación de similitudes y diferencias entre los mismos. Las otras cinco preguntas tratan de obtener información sobre cómo los estudiantes construyen definiciones de dichos cuerpos geométricos y cómo reflexionan sobre estas definiciones. Algunas de estas preguntas son:

- Pregunta 1. En los 3 cuerpos anteriores se pueden identificar elementos básicos como caras, vértices, aristas, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada uno de estos cuerpos?
- Pregunta 2. De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes solo a dos de los tres cuerpos?
- Pregunta 5. Definid cada uno de los cuerpos.
- Pregunta 7. ¿Podría servir alguna de las definiciones de los cuerpos que habéis dado para otro de los cuerpos? ¿Por qué? (Por ejemplo, la definición del cuerpo 1 para el cuerpo 2 o el 3).

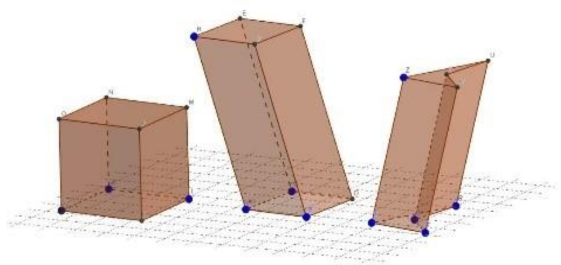

Figura 1. Representación de los cuerpos geométricos del instrumento (Gavilán-Izquierdo, Martín-Molina, González-Regaña, Toscano y Fernández-León, 2019)

Recogida de datos

La recogida de datos se puso en marcha en las clases prácticas de la asignatura cuando se entregó el instrumento de investigación a los asistentes a dichas clases que quisieron participar voluntariamente en la investigación. En concreto, se entregó una copia en papel del instrumento a cada uno de los 12 grupos de estudiantes voluntarios. A algunos grupos se les ofreció un portátil que tenía abierto el programa GeoGebra con los cuerpos geométricos del instrumento construidos. Cada grupo tenía una grabadora de audio que iba recogiendo el discurso de los miembros del grupo cuando trataban de contestar a las preguntas del instrumento. Además, cada grupo debía escribir en su copia del instrumento de investigación la respuesta consensuada a cada una de las preguntas. Es importante resaltar que la recogida de datos de este estudio se produjo cuando los estudiantes ya habían recibido instrucción sobre geometría en el plano en la asignatura de matemáticas que estaban cursando, pero no sobre geometría en el espacio.

Los datos usados en este trabajo son las grabaciones en audio de los 12 grupos y las transcripciones de esas grabaciones (que nos permiten acceder al discurso de los estudiantes) y las respuestas escritas de cada grupo (que nos permiten acceder al consenso del grupo en cada pregunta).

Análisis

El proceso de análisis de los datos se ha llevado a cabo en dos fases. En la primera fase, se identificaron en las transcripciones y en las respuestas escritas de cada grupo las cuatro propiedades y las meta-reglas del discurso (Sfard, 2008). Fruto de esta primera fase surgieron los trabajos de González-Regaña, Martín-Molina, Fernández-León, Toscano-Barragán y Gavilán-Izquierdo (2017) y Gavilán-Izquierdo et al. (2019), en los que puede encontrarse un estudio detallado sobre el uso de palabras y narrativas de estos estudiantes; y el trabajo de Martín-Molina et al. (2018), donde se describen y clasifican las rutinas que caracterizan el proceso de definir de los estudiantes.

En la segunda fase del análisis, se identificaron los conflictos comognitivos en el discurso de los estudiantes. Para identificar estos conflictos, nos basamos en las cuatro propiedades del discurso previamente estudiadas. En concreto, una vez que fueron identificadas y categorizadas cada una de estas propiedades, se localizaron partes del discurso donde las interacciones entre los participantes mostraban discrepancias en el uso de palabras o entre las narrativas, mediadores visuales, rutinas o reglas. Estas discrepancias en el discurso fueron analizadas para determinar qué estaba provocando dicho conflicto.

RESULTADOS

En el análisis del discurso de los estudiantes hemos podido identificar diferentes conflictos comognitivos. En este trabajo vamos a presentar tres de ellos. El primero está vinculado a las distintas formas que tienen los estudiantes de entender el proceso de definir, que en algunos casos refleja una confusión entre definir y describir. El segundo de los conflictos comognitivos es el relativo al choque entre el discurso matemático propio de la geometría plana (2D) que tienen algunos estudiantes con el de la geometría tridimensional (3D) que tienen otros. El tercer conflicto tiene relación con la medición de una superficie y surge cuando una estudiante quiere medir el área de una superficie usando una unidad de medida arbitraria (un “cuadrito”), que otra estudiante no acepta como unidad.

A continuación, pasamos a explicar con más detalle cada uno de estos conflictos comognitivos. Para ello, como evidencia empírica, mostramos algunos protocolos que, junto a otros, nos han permitido identificarlos.

El primer conflicto comognitivo que aquí presentamos muestra el choque que se produce entre las rutinas usadas por los estudiantes cuando, en la pregunta 5 del instrumento de investigación, se les pide que definan cada uno de los cuerpos geométricos. Este choque se observa mediante las narrativas en las que algunos estudiantes afirman que la definición es la respuesta que dieron en la pregunta 1, donde se les pedía que describiesen los elementos de los cuerpos geométricos; mientras otros estudiantes sostienen que la definición es diferente de una mera descripción porque debe incluir tanto una etiqueta como una lista de características; y cuando otros estudiantes consideran que definir es dar tan solo una etiqueta.

Un ejemplo de este primer conflicto comognitivo podemos encontrarlo en el discurso de los estudiantes del grupo G7. En respuesta a la pregunta 5, en la que se les pide que definan cada uno de los cuerpos geométricos, dicen lo siguiente respecto al primer cuerpo:

206. E1: Si hablamos de prismas, es un prisma hexagonal, pero…

207. E4: Ya la hemos definido antes, en…

208. E3: No, hemos dicho qué es lo que tiene.

209. E4: Eah, las características. Claro, que es un cubo con estas características…

Aquí se observa que el estudiante E4 considera que ya han definido el cuerpo en las preguntas anteriores acerca de la descripción. Por otro lado, otros estudiantes no usan esta misma rutina, lo que expresan mediante la siguiente narrativa:

213. E2: El nombre y… las características… es la definición.

Esta afirmación genera una discusión que da como resultado que el grupo dé la siguiente definición consensuada del primer cuerpo en sus respuestas escritas:

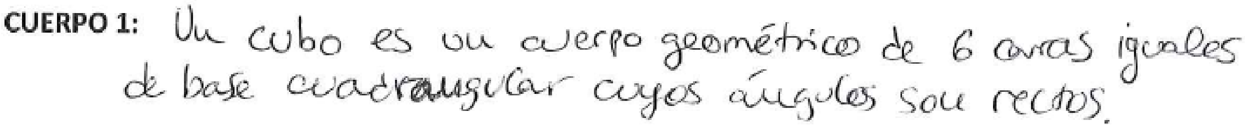
CUERPO 1: Un cubo es un cuerpo geométrico de 6 caras iguales de base cuadrangular cuyos ángulos son rectos.

Figura 2. Respuesta escrita del grupo G7 a la pregunta 5

Por último, nos gustaría resaltar que este grupo deja en blanco la siguiente pregunta del instrumento (pregunta 6), en la cual se les pide a los estudiantes que den otra definición para cada uno de los tres cuerpos geométricos.

El segundo conflicto comognitivo que presentamos en este trabajo muestra un choque entre el discurso matemático que tienen los estudiantes que se mueven en un contexto puramente bidimensional y el que tienen aquellos estudiantes que son capaces de manejar un discurso propio de la geometría tridimensional. Concretamente, hemos observado que algunos estudiantes son capaces de utilizar meta-reglas propias del discurso tridimensional para justificar diferentes narrativas relativas a propiedades geométricas de los cuerpos y otros estudiantes no son capaces de utilizarlas.

Un ejemplo de este segundo conflicto podemos encontrarlo en el discurso del grupo G5 (que disponía de portátil con GeoGebra) cuando sus estudiantes debaten sobre las características de las caras de los cuerpos geométricos que van a incluir en la definición de los mismos. En concreto, el siguiente protocolo del grupo G5 muestra parte de la discusión de este grupo cuando sus estudiantes tratan de justificar si las bases del segundo cuerpo geométrico son o no cuadradas. Aunque los estudiantes del grupo G5 no son los mismos que los del grupo G7 del ejemplo anterior, utilizaremos los mismos nombres, E1, E2, E3 y E4, para denominarlos.

420. E3: Sí es cuadrado. Es un cuadrado.

421. E1: Aquí no.

422. E3: Está coincidiendo ahora mismo la base con lo de abajo.

423. E1: Pero es que ahora mismo no lo tienes puesto los vértices para tú poder comprobarlo.

424. E3: Está uno encima del otro.

425. E1: Pero tienes que tener, para tú poder verlo, tienes que tener los vértices perpendiculares. Si no, no lo estás teniendo objetivo.

426. E4: Ahí lo estás teniendo perpendiculares.

427. E1: No.

428. E3: Espérate.

429. E1: Tienes que tener los ejes así, como los teníamos antes. Es cuando lo vas a ver. Si no, no lo puedes ver. […]

[…]

437. E1: Espérate. Caras iguales… ¿Todas ellas rectangulares, no?

438. E4: Sí.

439. E3: Mira, podemos saber pa[ra] ver si de verdad son…

440. E4: Yo veo que acierta según la perspectiva porque yo, por ejemplo… también las hemos visto antes como cuadrados.

441. E3: Se ve ahora mismo si son…

442. E4: Perpendicular a la base. Son rectangulares, sí.

443. E3: Son rectángulos.

444. E4: Sí, son todos rectángulos, entonces sí.

Finalmente, el grupo G5 escribe en la copia del instrumento la siguiente definición consensuada del segundo cuerpo geométrico, que es una mera descripción de características del cuerpo geométrico:


Caras iguales dos a dos.
Todas ellas rectangulares
El ángulo que forma la base con las caras perpendiculares no forma
90° ya que está inclinado

Figura 3. Respuesta escrita del grupo G5 a la pregunta 6

En la línea 420 del protocolo anterior, la estudiante E3 sostiene que las bases del segundo cuerpo geométrico son cuadradas. Seguidamente, la estudiante E1 niega esa afirmación, lo que genera un debate en el que las estudiantes intentan justificar estos dos diferentes puntos de vista. Este debate pone de manifiesto un conflicto comognitivo entre el discurso de la estudiante E1 y el de la estudiante E3. Aunque en este debate todas las estudiantes construyen sus argumentos haciendo referencia a cómo o desde qué posición están mirando el segundo cuerpo geométrico, no todas lo hacen utilizando las mismas herramientas. En concreto, la estudiante E1 utiliza la posición de los ejes de coordenadas con respecto a las aristas del segundo cuerpo (de ahí que hable de perpendicularidad) para poder deducir que las bases son rectangulares y no cuadrados. La estudiante E3 lo mira inicialmente desde otra posición (ver líneas 422 y 424), de ahí que con la perspectiva del dibujo en GeoGebra crea que las bases son cuadrados y no rectángulos.

El último conflicto que presentamos aquí se manifiesta a través de la diferencia entre las distintas narrativas que usan las estudiantes del grupo G5 cuando discuten sobre qué es una unidad de medida válida. En particular, cuando las estudiantes están buscando una propiedad que sea común a todos los cuerpos, primero afirman que todos los cuerpos tienen el mismo número de caras, vértices y aristas. Después discuten si todas tienen algunas caras paralelas (propiedad que deciden no incluir entre sus respuestas escritas). Finalmente, en su búsqueda de alguna otra propiedad común a los tres cuerpos, dos estudiantes mantienen la siguiente conversación:

131. E3: Pero no sé, a lo mejor el área, a lo mejor si la calculamos es el mismo, pero no tenemos datos suficientes.

132. E1: Hombre, datos sí tienes porque te podrías poner a contar los cuadritos.

133. E3: Pero no sabes cuánto mide cada cuadrito.

134. E1: Pero puedes llamarle una unidad […]

Podemos observar que la estudiante E1 afirma que pueden calcular el área de la superficie de los cuerpos usando como unidad un “cuadrito”, mientras que E3 descarta esa opción porque afirma que no pueden medir sin saber cuánto mide cada “cuadrito”. Entendemos que la estudiante E3 se refiere a que no saben cuántos centímetros mide, es decir, que no acepta una unidad de medida que no sea una de las legales (pertenecientes al sistema internacional de medidas) o sus divisores.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio hemos identificado conflictos comognitivos, que son una posible fuente de aprendizaje matemático, esto es, de cambio en el discurso. Concretamente, presentamos tres conflictos comognitivos en el discurso de los estudiantes cuando están implicados en la práctica de definir cuerpos geométricos.

El primero de ellos muestra el conflicto que se produce cuando algunos estudiantes identifican describir con definir (sin hacer ninguna distinción), mientras que otros estudiantes sostienen que la definición debe ser distinta de una mera descripción. En este sentido, estos últimos estudiantes consideran que la definición debe incluir al menos una etiqueta, pudiendo añadirse una lista de características matemáticas del cuerpo geométrico cuya definición se está construyendo. Por tanto, se trata de un conflicto comognitivo que afecta al proceso de definir más allá del contenido matemático tratado en el instrumento (en este caso, geometría 3D). En este sentido, podríamos decir que este conflicto comognitivo aparece en el meta-discurso de los estudiantes, ya que está vinculado a la existencia de diferentes rutinas. Además, este conflicto comognitivo plantea la problemática de la relación entre describir y definir, aspecto que puede ser abordado desde la perspectiva comognitiva (Tabach y Nachlieli, 2016).

El segundo conflicto comognitivo se produce cuando algunos estudiantes se mueven en un discurso puramente bidimensional mientras que otros estudiantes son capaces de manejar un discurso de geometría tridimensional. Este conflicto está vinculado al contenido matemático específico del instrumento de investigación, por lo que podemos decir que se encuentra en el discurso de nivel objeto de los estudiantes. Por otra parte, este conflicto puede ser también un reflejo de ciertos aspectos curriculares, ya que tradicionalmente la geometría 3D ha tenido menos presencia en las aulas frente a la geometría 2D.

Finalmente, el tercer conflicto comognitivo identificado se produce cuando, a la hora de identificar propiedades comunes a los tres cuerpos geométricos del instrumento, una estudiante propone una unidad de medida no legal para medir la superficie de los cuerpos geométricos, mientras que otro estudiante solo acepta que puedan utilizarse unidades de medida legales. Al igual que el conflicto comognitivo anterior, este conflicto tiene una naturaleza discursiva de nivel objeto.

En resumen, los dos últimos conflictos comognitivos tienen naturaleza discursiva de nivel objeto, ya que los conflictos comognitivos están referidos al contenido matemático. Por el contrario, el primero de ellos es de naturaleza meta-discursiva, ya que afecta a la práctica matemática de definir. Esto pone de manifiesto el potencial explicativo de la teoría de la comognición y del instrumento de investigación utilizado.

Otros autores también han categorizado distintos tipos de conflictos comognitivos en el discurso de los estudiantes. Por ejemplo, Jayakody (2015) identifica conflictos vinculados al discurso sobre funciones continuas, que esta autora considera que pueden ser interpersonales o intrapersonales. El conflicto es interpersonal entre entrevistador y entrevistado (estudiantes de primer año de universidad) sobre un determinado concepto (en su investigación sobre el término “dominio”), es decir, entre dos discursantes distintos. El conflicto es intrapersonal cuando es entre los discursos que surgen de diferentes realizaciones de un mismo concepto para el mismo individuo. En definitiva, para Jayakody (2015), el conflicto comognitivo no solo surge de discrepancias entre dos individuos, interpersonal, sino también entre dos discursos inconmensurables del mismo individuo, intrapersonal. Consideramos que nuestra investigación complementa el trabajo de Jayakody (2015) ya que categorizamos distintos tipos de conflictos, que asociamos al nivel objeto o al nivel meta.

Tabach y Nachlieli (2015) toman los conflictos comognitivos como justificación de que se puede combinar un discurso de nivel objeto (sobre funciones concretas) con un discurso de nivel meta (sobre la definición de palabras específicas). Nuestro análisis llega a un resultado similar, pero en un contexto geométrico, habiendo identificado dos conflictos comognitivos de nivel objeto y otro de nivel meta. Estos conflictos muestran que puede haber una combinación de discursos a nivel objeto y a nivel meta, lo que puede producir aprendizaje de ambos niveles (no solo a nivel objeto).

En un futuro, los resultados de este estudio, de naturaleza exploratoria, podrían ampliarse si se aumentase el número de participantes. Además, considerar otros contenidos matemáticos (análisis, álgebra, etc.) permitiría una visión más global de la práctica de definir entre estudiantes universitarios.

Referencias

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. y Rasmussen, C. (2016). *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-art and Looking Ahead*. Cham, Suiza: Springer.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch y PME.

Escudero, I. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *RELIME*, *17*(1), 7-32.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: Una aproximación sociocultural. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Prácticas sobre el aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 135-156). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano-Barragán, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). Aspectos del discurso de estudiantes universitarios cuando construyen definiciones matemáticas. En FESPM (Ed.), *Libro de Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VIII CIBEM), Vol. 8* (pp. 77-85). Madrid: FESPM.

Jayakody, G. (2015). Commognitive conflicts in the discourse of continuous functions. En T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 611-619). Pittsburgh, EE. UU.: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2018). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 355-362). Umeå, Suecia: PME.

Nardi, E., Biza, I., González-Martín, A. S., Gueudet, G. y Winsløw, C. (2014). Institutional, sociocultural and discursive approaches to research in university mathematic education. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 91-94.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E. y Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: The case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 182-198.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 259-282.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: In-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 165-182.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: Reflexiones y datos bibliométricos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51–73.

Sánchez, V. y García, M. (2014). Sociomathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 305-320.

Schüler-Meyer, A. (2018). Defining as discursive practice in transition – Upper secondary students reinvent the formal definition of convergent sequences. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N. M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2018)* (pp. 537-546). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: The case of function. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 163-187.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 299-306.

Thoma, A. y Nardi, E. (2018). Transition from school to university mathematics: Manifestations of unresolved commognitive conflict in first year students' examination scripts. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 161-180.

Viirman, O. L. y Nardi, E. (2017). From ritual to exploration: The evolution of biology students' mathematical discourse through mathematical modelling activities. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 2274-2281). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Viirman, O. y Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: Biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 233-252.

[xxvii] Este trabajo se ha realizado al amparo de la ayuda IV.4 del Plan Propio de Investigación y transferencia de la Universidad de Sevilla. Además, todos los autores son miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía.