

# SEIEM 2021



Valencia del 8 al 10 de septiembre de 2021

## INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXIV

Pascual D. Diago  
Dionisio F. Yáñez  
M<sup>a</sup> Teresa González-Astudillo  
Dolores Carrillo



VNIVERSITAT ID VALÈNCIA [UVA]  
Facultat de Magisteri



Departament de  
Didàctica de la Matemàtica

VNIVERSITAT ID VALÈNCIA

Vicerectorat de Cultura i Esport



GOBIERNO  
DE ESPAÑA

MINISTERIO  
DE CIENCIA  
E INNOVACIÓN

Servicio de Formación  
Permanente e Innovación  
Educativa (SFPIE)

VNIVERSITAT ID VALÈNCIA



65 RUBIO



# Investigación en Educación Matemática

## XXIV



VNIVERSITAT  
DE VALÈNCIA



# Investigación en Educación Matemática

## XXIV

Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática  
Valencia, 8, 9 y 10 de septiembre de 2021



# Investigación en Educación Matemática

## XXIV

### EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n 18071 Granada (España)

Dr. Pascual D. Diago

Dr. Dionisio F. Yáñez

Dra. M<sup>a</sup> Teresa González-Astudillo

Dra. Dolores Carrillo

### Comité Científico

Dra. M<sup>a</sup> Teresa T. González-Astudillo (coordinadora)

Dra. Dolores Carrillo (coordinadora)

Dra. Edelmira Badillo

Dra. María C. Cañadas

Dr. Carlos de Castro

Dr. José Antonio González-Calero

Dr. Pedro Ivars

© de los textos: los autores

ISBN: 978-84-09-32184-1

ISSN: 1888-0762

Cítese como:

Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.) (2021).

*Investigación en Educación Matemática XXIV*. Valencia: SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

La publicación de estas actas ha contado con la ayuda del proyecto UV-SFPIE\_PID20-1351257 de la Universitat de València.





# Presentación

En septiembre de 2019 nuestro compañero José María Marbán cerraba las actas del XXIII simposio de la SEIEM, celebrado en Valladolid, con el deseo del mayor de los éxitos al próximo simposio a celebrar en Valencia en 2020. Pocos sabíamos entonces lo que se nos venía, pues el XXIV simposio no se celebraría hasta dos años después, a causa de las medidas restrictivas impuestas para luchar contra la COVID-19. Quizá aquel esperado éxito haya sido el poder haber estado juntos en Valencia en septiembre de 2021, después de un largo periodo de confinamiento personal y académico. Juntos (con las medidas sanitarias de rigor) hemos podido retomar nuevamente del 8 al 10 de septiembre de 2021 nuestra reunión anual para debatir, comentar, razonar o simplemente charlar sobre temas académicos ligados a la Educación Matemática.

En esta ocasión, la Facultat de Magisteri de la Universitat de València ha sido la sede encargada de alojar el evento. A pesar de haber sido este un simposio especialmente marcado por las distancias de seguridad, el uso de mascarillas obligatorio o los “no-coffee breaks”, podemos considerarlo exitoso desde el punto de vista de la asistencia, con un total de 192 congresistas que recogieron su documentación, 66 comunicaciones presentadas y 46 pósteres expuestos.

El simposio arrancó la mañana del miércoles 8 de septiembre con la sesión de formación y docencia universitaria titulada *Relación entre investigación y formación de maestros y profesores de matemáticas*, a cargo de la Dra. Mar Moreno y la Dra. Julia Valls (Universitat d’Alacant). Después de comer, en el edificio de La Nau de la Universitat de València tuvo lugar la inauguración del simposio y el primero de los dos seminarios monográficos que habitualmente se programan. Así, coordinado por la Dra. Gloria Sánchez-Matamoros (Universidad de Sevilla) se abordó el seminario *La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad*. Este primer seminario contó con la participación de la Dra. Ana Cláudia Correia Batalha (Universidade De Lisboa, Portugal), la Dra. Irene Biza (University of East Anglia, UK) y del Dr. Matías Camacho (Universidad de La Laguna).

El segundo día del simposio comenzó con la primera de las dos sesiones dedicadas a comunicaciones, organizadas en 7 espacios paralelos y la primera de las cuatro sesiones de pósteres. Antes de comer tuvo lugar el primero de los bloques de los grupos de trabajo. En este primer bloque compartieron espacio los grupos *Didáctica de la matemática como disciplina científica*, *Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor* e *Historia de las Matemáticas y Educación Matemática*. En particular, cabe destacar el sentido homenaje que se hizo a M<sup>a</sup> Luz Callejo y a Pepe Carrillo en el primero de los grupos<sup>1</sup>. Por la tarde se continuó con el segundo de los bloques dedicado a los grupos de investigación; reuniéndose, en esta ocasión, los grupos transversales de *Investigación en Educación Matemática Infantil*, *Jóvenes investigadores e investigadoras de la SEIEM* y *Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*. Finalmente, la tarde del jueves

---

<sup>1</sup>El homenaje puede verse online en <https://www.youtube.com/watch?v=-vMGWtaqDyk>.

se cerró con la segunda sesión de pósteres, la celebración de la asamblea y la posterior cena en el restaurante Àtic, situado en la Alameda de Valencia.

El viernes 10 de septiembre tuvo lugar la segunda sesión de comunicaciones y la tercera de pósteres. A media mañana la Dra. Marta Molina (Universidad de Salamanca) coordinó, y participó junto al Dr. Miguel Ángel Montes (Universidad de Huelva) y la Dra. María de la Cinta Muñoz (Universidad de Sevilla) en el segundo de los seminarios de investigación: *Metodologías cualitativas de investigación en educación matemática*. Tras la pausa para comida se dedicó un tercer espacio para la reunión de los grupos de investigación: *Aprendizaje de la Geometría, Didáctica del Análisis Matemático, Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria y Pensamiento Numérico y Algebraico*. Tras la última sesión de pósteres, se inició el tercer bloque de comunicaciones para, posteriormente, dar clausura al XXIV Simposio.

Con la edición de estas actas, se deja constancia de las aportaciones científicas que han configurado este XXIV Simposio. Aprovechamos estas líneas para agradecer a todas las personas que han trabajado en el Comité Científico y en el Comité de Organización Local por las horas de trabajo y esfuerzo dedicadas sin las que, sin duda, el XXIV Simposio no habría sido posible. También agradecemos la colaboración e implicación de todas las instituciones participantes, especialmente a la Facultat de Magisteri, al Vicerectorat de Cultura i Esport y al Rectorat de la Universitat de València, quienes desde el primer momento mostraron su apoyo, su interés y su confianza para que este evento pudiera celebrarse y llevarse a cabo en nuestra casa.

En València, a 9 d'octubre de 2021

*Dia de la Comunitat Valenciana*

Pascual D. Diago

Coordinador Local del XXIV Simposio de la SEIEM





# Índice

<b>Presentación</b>	<b>vii</b>
<b>Seminario de investigación I: La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad</b>	<b>1</b>
INTRODUCCIÓN SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD	
<i>Sánchez-Matamoros, G.</i> . . . . .	3
APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR: PRÁTICAS DE NATUREZA EXPLORATÓRIA COM SUPORTE DA TECNOLOGIA	
<i>Henriques, A.</i> . . . . .	5
TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS AT UNIVERSITY LEVEL	
<i>Biza, I.</i> . . . . .	19
AGENDA DE INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
<i>Camacho Machín, M.</i> . . . . .	33
<b>Seminario de investigación II: Metodologías cualitativas de investigación en educación matemática</b>	<b>51</b>
INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO: INVESTIGACIÓN CUALITATIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
<i>Montes, M.</i> . . . . .	53
REFLEXIONES PARA UNA FUNDAMENTACIÓN DEL ESTUDIO DE CASO COMO DISEÑO METODOLÓGICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
<i>Muñoz-Catalán, M. C.</i> . . . . .	65
INVESTIGACIÓN DE DISEÑO EDUCATIVA: UN MARCO METODOLÓGICO EN EVOLUCIÓN	
<i>Molina, M.</i> . . . . .	83
<b>Comunicaciones</b>	<b>99</b>
APRENDIENDO PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: ¿CÓMO INFLUYE EL CONTEXTO DE ENSEÑANZA?	
<i>Acosta, Y. y Alsina, Á.</i> . . . . .	101

COHERENCIA EN LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA EN CIENCIAS Y MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS COMPARATIVO <i>Aguayo, C. G. y Montoro A. B.</i> . . . . .	109
UNIDIMENSIONALIDAD DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO INICIAL DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO <i>Albarracín, L., Rojas, F., Chandia, E., Ubilla, F. M. y Gorgorió, N.</i> . . . . .	117
CORRESPONDENCIA Y GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE ÚLTIMO CURSO DE EDUCACIÓN INFANTIL <i>Anglada, M. L. y Cañadas, M. C.</i> . . . . .	125
ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS <i>Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, Á.</i> . . . . .	133
CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS DE CONVERSIÓN ENTRE REPRESENTACIONES DE INTERVALOS DE LA RECTA REAL PROPUESTAS EN LIBROS DE TEXTO <i>Arce, M. y Conejo, L.</i> . . . . .	141
LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. PERFILES DE PROFESORES EN FORMACIÓN SEGÚN SUS NIVELES DE VAN HIELE <i>Arnal-Bailera, A. y Manero, V.</i> . . . . .	149
ANÁLISIS DE VÍDEOS EDUCATIVOS EN LÍNEA POR ESTUDIANTES DE MÁSTER DE SECUNDARIA <i>Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B.</i> . . . . .	157
UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE POLÍGONO EN ESTUDIANTES DE 9 AÑOS <i>Bernabeu, M., Moreno, M., Llinares, S., y Gutiérrez, Á.</i> . . . . .	165
UN ESTUDIO SOBRE LA COMPRESIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA, BASADO EN APOE Y EOS <i>Borji, V., Sánchez, A., Font, V. y Garcés, W.</i> . . . . .	173
ANSIEDAD MATEMÁTICA Y LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE: EL CASO DE DOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO <i>Bufo, À., Pérez-Tyteca, P. y Monje, J.</i> . . . . .	181
CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE INCERTIDUMBRE <i>Castilla-Mora, L., Rifo, L. y Climent, N.</i> . . . . .	189
EVALUACIÓN DE UNA INTERVENCIÓN FORMATIVA CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA SOBRE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO <i>Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D.</i> . . . . .	197
PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR ESTUDIANTES QUE RESUELVEN DE MANERA EXITOSA TAREAS QUE INVOLUCRAN EL ÁREA DE FIGURAS PLANAS <i>Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.</i> . . . . .	205

UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE ÁREA EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO <i>Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E.</i> . . . . .	213
NEOTRIE VR COMO ESPACIO DE TRABAJO PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA FRACTAL <i>Chavil-Montenegro, D. Y., Rodríguez-Blancas, J. L. y Romero-Albaladejo, I.</i> . . . . .	221
PROCESO DE EVALUACIÓN ENTRE PARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FUTUROS DOCENTES. ESTUDIO DE UN CASO <i>de Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D. N.</i> . . . . .	229
CARACTERIZANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN INFANTIL ENSEÑANDO PRISMAS <i>Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J.</i> . . . . .	237
RECURSOS TECNOLÓGICOS PARA LA INTERVENCIÓN TEMPRANA EN CASOS DE DISCALCULIA <i>Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A.</i> . . . . .	245
DIFICULTADES Y PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA MULTIGRADO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO DESDE LA VISIÓN DE LOS MAESTROS <i>Esteve, S., Barquero, B. y Domingo-Peñañel, L.</i> . . . . .	253
RESPUESTAS NUMÉRICAS RAZONABLES EN ALUMNADO DE SECUNDARIA <i>Fariña, M. y Bruno, A.</i> . . . . .	261
FUNCIONES $F(X) = 3X$ Y $F(X) = 5X$ EN PRIMERO DE PRIMARIA: ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES UTILIZADAS POR ALUMNOS <i>Fuentes, S. y Cañadas, M. C.</i> . . . . .	269
GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA DE CIENCIAS. ANÁLISIS EXPLORATORIO <i>García-Alonso, I.</i> . . . . .	279
ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA: ANÁLISIS EXPLORATORIO <i>García-Alonso, I., Sosa-Martín, D. N. y García-Díaz, A.</i> . . . . .	287
INFLUENCIA DEL TIPO DE TAREA EN EL INTERÉS: RÉPLICA DE UN ESTUDIO EN EL CONTEXTO EDUCATIVO ESPAÑOL <i>García-Cerdá, C. y Ferrando, I.</i> . . . . .	295
ENSEÑANZA ONLINE EN DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS IMPUESTA POR LA COVID-19: VISIÓN DEL ALUMNADO UNIVERSITARIO <i>Gómezescobar, A.</i> . . . . .	303
ESTRATEGIAS POR ALUMNOS CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA AL RESOLVER UNA TAREA QUE INVOLUCRA UNA RELACIÓN FUNCIONAL <i>Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I.</i> . . . . .	311

FORMAS DE RESPONDER SOBRE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA <i>González-Forte, J. M., Fernández C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W.</i> . . . . .	319
NIVELES DE RESPUESTA DE ESTUDIANTES DE TEORÍA DE GRAFOS USANDO DEFINICIONES DESDE EL MODELO DE VAN HIELE <i>González, A., Gallego-Sánchez, I., Puertas, M. L., Gavilán-Izquierdo, J. M.</i> . . . . .	327
PRÁCTICAS DE AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PROMOVIDAS POR FUTUROS PROFESORES <i>Hidalgo-Moncada, D., Vanegas, Y. y Díez-Palomar, J.</i> . . . . .	335
ARGUMENTACIÓN PRÁCTICA SOBRE EL TEOREMA DE PITÁGORAS POR PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN UN CURSO DE FORMACIÓN <i>Hummes, V., Sol, T. y Breda, A.</i> . . . . .	343
CARACTERIZACIÓN DEL PERFIL DE INGRESO A LOS GRADOS EN MAESTRO: RELACIÓN ENTRE BACHILLERATO CIENTÍFICO Y GÉNERO <i>Lasa, A., Belletich, O., Elorza, J., Iribas, H. y Wilhelmi, M. R.</i> . . . . .	351
RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN LA INTERPRETACIÓN DE NOTICIAS <i>Lavela, J. F., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R.</i> . . . . .	359
UN ANÁLISIS ONTO-SEMIÓTICO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN <i>Ledezma, C., Font, V. y Sala, G.</i> . . . . .	367
DESARROLLO DEL EQUIPAMIENTO PRAXEOLÓGICO DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE CLASES <i>Lendínez, E. M. y García, F. J.</i> . . . . .	377
LOS CONOCIMIENTOS LÓGICOS EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICO-DIDÁCTICA DE MAESTROS <i>Lerma, A. M., Barquero, B., García, F. J., Hidalgo-Herrero, M., Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T.</i> . . . . .	385
¿ESTA ECUACIÓN DESCRIBE ESTA SITUACIÓN? EXPLORANDO EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA <i>López Centella, E., Slezáková, J. y Jirotková, D.</i> . . . . .	393
MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA PRENSA ESPAÑOLA DEL SIGLO XVIII: UN INSTRUMENTO PARA SU ANÁLISIS <i>Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C.</i> . . . . .	401
DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UNA ESCALA DE AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE EN CONTEXTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS <i>Marbán, J. M. y Fernández-Gago, J.</i> . . . . .	409
UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LA ESTADÍSTICA <i>Markulin, K., Bosch, M. y Florensa, I.</i> . . . . .	417



GESTIÓN DE NORMAS QUE REGULAN EL PASO DE LA CONJETURA AL TEOREMA EN UN CURSO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO <i>Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L.</i> . . . . .	425
UN AÑO DESPUÉS DE UN MÓDULO DE ENSEÑANZA: ANTICIPACIÓN DE RESPUESTAS DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN MEDIDA CON FRACCIO- NES <i>Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J.</i> . . . . .	433
LA ARITMÉTICA EN LA REAL ACADEMIA MILITAR DE MATEMÁTICAS DE ZAMORA (1789-1808) <i>Monterrubio-Pérez, M. C.</i> . . . . .	441
ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE VÍDEOS EDUCATIVOS SOBRE PROBABILIDAD ELABORADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO <i>Muñiz-Rodríguez, L., Alonso-Castaño, M., y Rodríguez-Muñiz, L. J.</i> . . . . .	449
NOTAS AL PIE EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES DEL SIGLO XIX. EL CASO DE JUAN CORTÁZAR <i>Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M.</i> . . . . .	457
MEDIACIONES UTILIZADAS CON ESTUDIANTES DE SEGUNDO Y CUARTO DE PRIMARIA AL REALIZAR UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN <i>Narváez, R y Cañadas, M. C.</i> . . . . .	465
IMÁGENES EN LOS TEXTOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA: ¿CUÁNTO APOR- TAN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS? <i>Olivares, D., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L.</i> . . . . .	473
COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE TABLAS ESTADÍSTICAS Y SU DISTRIBU- CIÓN EN TEXTOS CHILENOS DE EDUCACIÓN BÁSICA <i>Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P.</i> . . . . .	481
EXPLORANDO LA DEMANDA COGNITIVA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE BÚSQUEDA DE PATRONES DISEÑADAS POR FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA <i>Pincheira, N. y Alsina, Á.</i> . . . . .	489
ESTUDIANTES DE SEXTO DE PRIMARIA COMPARAN FUNCIONES LINEA- LES: EL ROL DEL LENGUAJE NATURAL <i>Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D.</i> . . . . .	497
SIMULACIÓN DE INTERVENCIONES DOCENTES ANTE CONJETURAS DE LOS ESTUDIANTES EN UN ENTORNO DE RESOLUCIÓN DE PROBLE- MAS CON RECURSOS TIC <i>Pochulu, M., Font, V. y Breda, A.</i> . . . . .	505
ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TA- REA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA <i>Porrás, K., Castro-Rodríguez, E. y Aguayo-Arrigada, C. G.</i> . . . . .	513
LA ACTITUD DE FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA ANTE EL USO DE ROBOTS PROGRAMABLES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS <i>Roanes, E., Fernández-Salínero, C.</i> . . . . .	521

DE LA CONSTRUCCIÓN A LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA <i>Rodríguez, M. L., Gómez, B. y Filloy, E.</i> . . . . .	529
SENTIDO ESPACIAL EN FUTUROS MAESTROS <i>Roura, R. y Ramírez, R.</i> . . . . .	537
ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA PARA LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD USANDO UN RECURSO COMPUTACIONAL <i>Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C., Salinas-Hernández, U., Sánchez, E. y Carrillo, J.</i> . . . . .	545
UN ESTUDIO DE CASO DE CÓMO ENTIENDE LA CREATIVIDAD Y SU DESA- RROLLO EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS UN FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS <i>Sánchez, A., Font, V., Diamantidis, D. y Breda, A.</i> . . . . .	553
RELACIONES NUMÉRICAS ESTABLECIDAS POR ALUMNADO DE PRIMARIA <i>Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A.</i> . . . . .	563
SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA HERMENÉUTICA EN LA ENSEÑANZA MA- TEMÁTICA <i>Sanz, H., Cuida, A. y Martínez-Moro, E.</i> . . . . .	571
ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE VISUALIZACIÓN EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3D Y REALIDAD AUMENTADA <i>Sua, C., Gutiérrez, Á. y Jaime, A.</i> . . . . .	579
ESTRATEGIAS DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE EN LAS AULAS DE MATE- MÁTICAS Y DE FÍSICA <i>Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J.</i> . . . . .	587
RESOLUCIÓN E INVENCIÓN DE PROBLEMAS: LA ESTRATEGIA DE RESO- LUCIÓN CON RELACIÓN AL PROBLEMA INVENTADO <i>Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J.</i> . . . . .	595
PRIMERAS EXPERIENCIAS CON UNA TABLA EN SEGUNDO DE EDUCA- CIÓN PRIMARIA. APROXIMACIÓN FUNCIONAL AL PENSAMIENTO AL- GEBRAICO <i>Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A.</i> . . . . .	603
REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE PRI- MARIA Y SECUNDARIA (11-13 AÑOS) EN UNA TAREA FUNCIONAL <i>Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. C.</i> . . . . .	613
LA GESTIÓN DE UN REI EN SECUNDARIA: ¿CUÁNTO TIEMPO SE TARDA EN ABRIR UN CANDADO? <i>Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M.</i> . . . . .	621
CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO A PARTIR DE UNA TAREA FORMATIVA SOBRE VISUALIZACIÓN <i>Vergara, L., Climent, N. y Codes, M.</i> . . . . .	629

LOS MODELOS DE CONOCIMIENTO PROFESIONAL COMO HERRAMIENTAS PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA INVESTIGADORA <i>Aguilar-González, A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J.</i> . . . . .	639
LA COMPRENSIÓN Y HABILIDAD LECTORA EN LA RESOLUCIÓN DE PRO- BLEMAS CON FRACCIONES <i>Atienza-Prieto, A., Sanz, M. T. y López-Iñesta, E.</i> . . . . .	640
CREENCIAS Y EMOCIONES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN ALUMNADO CON DIFICULTADES AFECTIVAS Y/O SOCIALES <i>Blanco, T. F., Conde-Lago, J., y Diego-Mantecón, J. M.</i> . . . . .	641
ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE FUTUROS MAESTROS EN UN PROGRAMA DE ESTÍMULO MATEMÁTICO <i>Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C. y González-Sequeiros, P.</i> . . . . .	642
LA DIFICULTAD PARA OPERAR CON LO DESCONOCIDO EN LA RESOLU- CIÓN ALGEBRAICA MEDIANTE LA HOJA DE CÁLCULO <i>Cabero, I. y Arnau, D.</i> . . . . .	643
REPERCUSIÓN DE LA TIPOLOGÍA DE PRESENTACIÓN DE LOS DATOS EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES <i>Cabero, I., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Wu, Y., Arnau, D. y Arevalillo- Herráez, M.</i> . . . . .	644
IMPLICACIONES DE LA PRÁCTICA DE REFERENCIA EN EL ESTUDIO DEL CAMBIO <i>Cabrera-Chim, L. M. y Martínez-Maldonado, J. A.</i> . . . . .	645
¿QUÉ CARTA SOY? JUGANDO CON LA PROBABILIDAD PARA POTEN- CIAR LOS AFECTOS POSITIVOS <i>De La Fuente, A. y Garrido-Martos, R.</i> . . . . .	646
RESOLVIENDO PROBLEMAS VERBALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA CON UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE: ¿QUÉ PIENSAN LOS ESTU- DIANTES AL RESPECTO? <i>del Olmo-Muñoz, J., Tirado-Olivares, S., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M.</i> . . . . .	647
CONOCIMIENTO DE LOS FUTUROS DOCENTES SOBRE LA HISTORIA DE LA INTEGRAL DEFINIDA <i>Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T.</i> . . . . .	648
MODIFICACIÓN DE UNA TAREA DE LIBRO DE TEXTO SOBRE LONGITUD POR FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA <i>Fernández-Plaza, J. A. y López Centella, E.</i> . . . . .	649
DIVULGACIÓN DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO MEDIO DE FOR- MACIÓN DE PROFESORES <i>Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Cruz-Márquez, G., Flores-Medrano, K. y Quiñones- Baldazo, N.</i> . . . . .	650

UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES SOBRE LOS NÚMEROS COMPLEJOS DE ALUMNOS UNIVERSITARIOS <i>García-Caro, D., Valenzuela, C., García, M. y Sanz, M. T.</i> . . . . .	651
ATENCIÓN A LOS ALUMNOS CON DIFICULTADES EN TAREAS ARITMÉTICAS Y ALGEBRAICAS <i>Garrido, R. G. y Figueroa M. de J.</i> . . . . .	652
CONFLICTOS COMOGNITIVOS EN EL DISCURSO SOBRE TEORÍA DE GRAFOS <i>Gavilán-Izquierdo, J. M., Gallego-Sánchez, I., González, A. y Puertas, M. L.</i> . . . . .	653
ESTRATEGIAS INFORMALES DE ESTUDIANTES CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PRODUCTO CARTESIANO <i>González-De Cos, L., Van Vaerenbergh, S., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I.</i> . . . . .	654
INFLUENCIA DEL CONTEXTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LENGUAJE INCONSISTENTE EN ALUMNADO CON TRANSTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA <i>Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Bruno, A. y Fernandez-Cobos, R.</i> . . . . .	655
ESTUDIO COMPARATIVO DEL ERROR DE INVERSIÓN EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS <i>Gutiérrez-Soto, J. y Liern-García, M.</i> . . . . .	656
EL JUEGO COMO HERRAMIENTA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD <i>Herreros-Torres, D. y Sanz, M. T.</i> . . . . .	657
EL DOCENTE COMO CLAVE EN EL DESEMPEÑO DEL ESTUDIANTADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS <i>Herreros-Torres, D., Sanz, M. T. y Gómez-Ferragud, C. B.</i> . . . . .	658
LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LOS GRADOS DE EDUCACIÓN INFANTIL EN ESPAÑA <i>Hidalgo-Méndez, M. A., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y Casas-Rosal, J. C.</i> . . . . .	659
PREFERENCIAS DE LOS ESQUEMAS PARA LA PRUEBA DE ESTUDIANTES DE LOS GRADOS DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA <i>Jerez-Santana, K. O. y Camacho-Machín, M.</i> . . . . .	660
EL IMPACTO DISCURSIVO DE LAS RESPUESTAS DEL PROFESOR A MOMENTOS ENSEÑABLES CLAVE <i>Kribs, C. y Joswick, C.</i> . . . . .	661
AUTORREGULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL ALUMNADO DEL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA <i>Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M.</i> . . . . .	662

LA PERSPECTIVA DE GÉNERO EN LA BIBLIOGRAFÍA PARA LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS MAESTROS DE INFANTIL EN LAS UNIVERSIDADES CASTELLANOLEONESAS <i>Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Jiménez-Fanjul, N.</i> . . . . .	663
ANÁLISIS DE LA FLEXIBILIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN POR FUTUROS MAESTROS <i>Martínez-Lastras, S., Cáceres-García, M. J., González-Astudillo, M. T., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Sánchez-Barbero, B.</i> . . . . .	664
CARACTERÍSTICAS DE FLEXIBILIDAD MOSTRADAS POR ESTUDIANTES OLÍMPICOS DE ENSEÑANZA PRIMARIA <i>Mora, M., Jaime, A. y Gutiérrez, Á.</i> . . . . .	665
DISCURSO MATEMÁTICO DE UN PROFESOR DURANTE LA ENSEÑANZA <i>Múnera, N.</i> . . . . .	666
CLASIFICACIÓN DE TAREAS CREADAS POR EL ALUMNADO PARA UNA RUTA MATEMÁTICA HISTÓRICAMENTE CONTEXTUALIZADA <i>Olmos, R. y Martí-Contreras, O.</i> . . . . .	667
¿NOS AYUDA LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A NO DEJARNOS ENGAÑAR POR LAS FAKE NEWS? <i>Olmos, R. y Martí-Contreras, O.</i> . . . . .	668
CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE PRIMARIA SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL <i>Olvera, C., García, E. y Escudero-Ávila, D.</i> . . . . .	669
CUESTIONARIO PARA IDENTIFICAR EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO SOBRE NECESIDADES ESPECÍFICAS DE APOYO EDUCATIVO EN MATEMÁTICAS <i>Padilla-Padilla, E., González, M. J. y Van Vaerenbergh, S.</i> . . . . .	670
ANÁLISIS TEMPORAL DE UNA TAREA DE MODELIZACIÓN BASADA EN LA MEDIDA DE MAGNITUDES <i>Pla-Castells, M., Chaparro, G. y Melchor-Borja C.</i> . . . . .	671
PROGRAMAS EFECTIVOS DE DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE. UN ESTUDIO DE CASO CENTRADO EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA <i>Ramos-Rodríguez, E., Fernández-Ahumada, E., Adamuz-Povedano, N. y Morales, A.</i> . . . . .	672
VISUALIZANDO LA TERCERA DIMENSIÓN DESDE DIFERENTES REALIDADES <i>Rotger, L., Ribera, J. M. y Cuadrado, M. L.</i> . . . . .	673
ESTRATEGIAS DE PARTICIPANTES DE OLIMPIADA EN UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL <i>Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P.</i> . . . . .	674

EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR APROXIMACIÓN DE LA REGLA MEDIA DE ANDRÉS PUIG (1672). UNA EXPERIENCIA EN EL AULA <i>Ruiz-Catalán, J. y de la Torre-Molina, F. A.</i> . . . . .	675
PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN ALUMNADO CON TEA: PROPUESTA DE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN <i>Sabariego, P., García-Moya, M., Goñi-Cervera, J. y Polo-Blanco, I.</i> . . . . .	676
LOS HUERTOS ESCOLARES COMO ESPACIOS PARA APRENDER MATEMÁTICAS Y CIENCIAS EXPERIMENTALES: UNA REALIDAD O UNA INNOVACIÓN EDUCATIVA EN LA PROVINCIA DE CASTELLÓN <i>Salvador-Beltri, A., Lorenzo-Valentín, G, Santágueda-Villanueva, M. y Monferrer-Sales, L.</i> . . . . .	677
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON FRACCIONES: UN ESTUDIO COMPARATIVO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO <i>Sanz, M. T., Valenzuela, C., Figueras, O. y Gómez, B.</i> . . . . .	678
RESULTADOS DE DIFERENTES SISTEMAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DE CUESTIONARIOS DE PRIMER CICLO DE ED. PRIMARIA <i>Sotos, M.</i> . . . . .	679
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL <i>Terroba, M., Ribera, J. M. y Lapresa, D.</i> . . . . .	680
“NO SÉ HACERLO, PREGÚNTAME MÁS”. UNA EXPERIENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON HINTS <i>Tirado-Olivares, S., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M.</i> . . . . .	681
INTELIGENCIA ARTIFICIAL PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: RESUMEN Y TAXONOMÍA <i>Van Vaerenbergh, S. y Pérez-Suay, A.</i> . . . . .	682
ENSEÑANZA INDIVIDUALIZADA DE MATEMÁTICAS MEDIANTE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN ENTORNOS ESCOLARES TRADICIONALES <i>Varela-Uribe, A., Van Vaerenbergh, S., y Pérez-Suay, A.</i> . . . . .	683
DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE SÓLIDOS POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA <i>Vargas-Herrera, J., Giménez, J. y Vanegas, Y.</i> . . . . .	684
<b>Índice de autores</b>	<b>685</b>
<b>Palabras Clave</b>	<b>689</b>
<b>Keywords</b>	<b>693</b>

# NIVELES DE RESPUESTA DE ESTUDIANTES DE TEORÍA DE GRAFOS USANDO DEFINICIONES DESDE EL MODELO DE VAN HIELE<sup>1</sup>

## Levels of response of graph theory students using definitions through the lens of the van Hiele model

González, A.<sup>a</sup>, Gallego-Sánchez, I.<sup>a</sup>, Puertas, M. L.<sup>b</sup>, Gavilán-Izquierdo, J. M.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidad de Sevilla, <sup>b</sup>Universidad de Almería

### Resumen

*En este trabajo analizamos las respuestas de estudiantes de ingeniería informática a dos tareas que implican el uso de definiciones propias de la teoría de grafos, concretamente, las de número cromático y árbol. Estas respuestas son categorizadas desde la óptica del modelo de van Hiele con el fin de dar soporte a una propuesta teórica de extensión de este modelo al ámbito de la teoría de grafos. Obtenemos como resultado de nuestra investigación que las respuestas analizadas cubren todos los descriptores de las categorías propuestas a nivel teórico para el proceso de uso de definiciones, y que estas se adecúan a las características propias de los niveles de van Hiele.*

**Palabras clave:** *teoría de grafos, modelo de van Hiele, procesos de razonamiento, uso de definiciones*

### Abstract

*In this work, we analyze the answers provided by a sample of computer engineering students to two tasks involving the use of definitions in the context of graph theory, specifically, chromatic number and tree. These answers have been categorized through the lens of the van Hiele model in order to give support to a theoretical approach of an extension of this model to the field of graph theory. Our results show that the answers provided cover all the descriptors of the theoretical categories for the process of use of definitions, and also that they fit the characteristics of the van Hiele levels.*

**Keywords:** *graph theory, van Hiele model, processes of reasoning, use of definitions*

### INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario es un área de investigación emergente y relevante en educación matemática (González-Regaña, Martín-Molina, Toscano, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2021). Algunos autores señalan la importancia de la matemática discreta como una rama de la matemática relativamente nueva que tiene numerosas aplicaciones tanto en matemáticas (Heinze, Anderson y Reiss, 2004) como en otras disciplinas, por ejemplo, ciencias de la computación (Kasyanov, 2001). Esta importancia de la matemática discreta hace que los investigadores hayan puesto el foco en la necesidad de desarrollar marcos teóricos que permitan realizar investigaciones didácticas sobre sus conceptos en el nivel universitario (Ouvrier-Buffet, Meyer y Modeste, 2018). Dentro del amplio campo de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta, nuestra investigación se centra en el aprendizaje de la teoría de grafos, temática sobre la cual existen pocos estudios (Hazzan y Hadar, 2005; Medová, Páleníková, Rybanský y Naštická, 2019).

---

<sup>1</sup> Los autores primero, segundo y cuarto son miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía y la tercera autora es miembro del grupo Supercomputación-Algoritmos TIC-146 de la Junta de Andalucía.

La investigación que estamos desarrollando (Gavilán y González, 2016; González, Gallego-Sánchez, Gavilán-Izquierdo y Puertas, en prensa; González y Gavilán, 2017) tiene como objetivo caracterizar niveles de aprendizaje de la teoría de grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Este modelo ha sido tradicionalmente considerado en el ámbito de la geometría (Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Sarasua, 2013), aunque también se ha extendido a otras áreas de la matemática tales como el análisis (Navarro y Pérez-Carreras, 2006; Nisawa, 2018). En grafos surge de forma natural al considerar la analogía existente entre figuras geométricas planas y grafos, pues los vértices y las aristas de los grafos pueden recordarnos a los vértices y los lados de las figuras geométricas. Además, las transformaciones que dejan invariantes a las figuras geométricas, los movimientos rígidos, son un caso particular de las que dejan invariantes a los grafos, que son aquellas transformaciones continuas que conservan las conexiones entre vértices (González et al., en prensa). Este último trabajo propone una caracterización de niveles de van Hiele en el contexto de la teoría de grafos desarrollada a través de un análisis teórico estructurado a través de cinco procesos de razonamiento: reconocimiento, uso y formulación de definiciones, clasificación y demostración. Estos procesos, originalmente propuestos por Gutiérrez y Jaime (1998) en el contexto de la geometría, han sido traducidos a la teoría de grafos para poder vertebrar dicha propuesta teórica de niveles de razonamiento.

El objetivo de esta comunicación es dar soporte empírico a la validez de los descriptores propuestos por González et al. (en prensa) para el proceso concreto de uso de definiciones, para lo cual categorizamos las respuestas de los estudiantes que han participado en el estudio según los cuatro niveles propuestos por los autores. Se trata, por lo tanto, de comprobar que estas respuestas se adaptan a las categorías esperadas y que sus características responden a las particularidades de los niveles de van Hiele.

## MARCO TEÓRICO

Presentamos primeramente algunas nociones básicas de la teoría de grafos (Biggs, 2003) que vamos a utilizar en el desarrollo del presente trabajo. Un grafo es un conjunto de elementos relacionados entre sí mediante una relación binaria. Formalmente, se define un *grafo*  $G$  como un par  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (llamado conjunto de *vértices*) y  $E$  (conjunto de *aristas*) es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V$ . Dos vértices que forman una arista se dice que están conectados por dicha arista o bien que son *adyacentes* y se define el *grado* de un vértice como el número de vértices adyacentes a él. Por otra parte, se dice que un grafo  $G'$  es *subgrafo* de otro grafo  $G$  si los vértices y aristas de  $G'$  están contenidos en los vértices y aristas de  $G$ , respectivamente.

Un grafo se dice *conexo* si cualquier par de vértices puede unirse mediante una secuencia de vértices adyacentes. Esta propiedad permite definir las siguientes familias de grafos: un *camino* es un grafo conexo que tiene dos vértices de grado uno y el resto de grado dos; un *ciclo* es un grafo conexo con todos sus vértices de grado dos; un *árbol* es un grafo conexo que no contiene ningún ciclo como subgrafo. Finalmente, una *coloración con  $k$  colores* de los vértices de un grafo  $G$  es una asignación de un elemento de  $\{1, 2, \dots, k\}$  (que llamamos conjunto de *colores*) a cada vértice de  $G$ , de modo que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color; el mínimo  $k$  tal que esto es posible se denomina *número cromático* de  $G$ .

El referente teórico de este trabajo es el modelo de van Hiele, cuyas características generales han sido estudiadas en numerosos trabajos (Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1988; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Mayberry, 1983). Específicamente, consideramos la particularización de este modelo al ámbito de la teoría de grafos propuesta por González et al. (en prensa) en la que se plantean cuatro niveles de razonamiento. Si bien en dicho trabajo se analizan en términos de la evolución de cada uno de los cinco procesos de razonamiento mencionados anteriormente, podemos describirlos en términos generales empezando por un primer nivel de



carácter puramente visual, en el cual se percibe el grafo como un todo, pudiendo los estudiantes realizar clasificaciones exclusivas de familias de grafos, de manera que identifican, por ejemplo, los árboles y los caminos como familias disjuntas. En este nivel se manejan algunas propiedades globales (es decir, asociadas al grafo en su totalidad, como por ejemplo la conectividad) y se usa un lenguaje no matemático. En el segundo nivel, de carácter analítico, se manejan propiedades globales y locales (es decir, asociadas a subgrafos del grafo, como por ejemplo el grado) de forma aislada, pues las reglas lógicas que se pueden usar a este nivel son muy básicas (e.g., conjunción, disyunción o negación), y no permiten relacionarlas entre sí mediante deducciones lógicas. Las clasificaciones que pueden realizarse en este nivel, aunque en base a propiedades de los grafos, aún son de tipo exclusivo. El tercer nivel, de carácter preformal, supone una mejora en las habilidades lógicas suficiente para comprender y reconocer relaciones entre propiedades y para hacer razonamientos informales y clasificaciones inclusivas de familias de grafos, admitiendo ahora que los caminos están incluidos en la familia de los árboles. Finalmente, en el cuarto nivel, de carácter formal, los grafos pueden ser tratados como objetos matemáticos abstractos, pudiéndose construir razonamientos formales sobre los mismos. Estos cuatro niveles verifican las características generales del modelo de van Hiele, entre las que destacan la jerarquización y la secuencialidad.

Específicamente, con respecto al proceso de uso de definiciones, en dicha propuesta se plantea el nivel 1 como un nivel inicial en el que los estudiantes pueden utilizar definiciones que no requieren conocimientos ni habilidades en teoría de grafos, salvo la mera distinción visual de las partes más elementales del grafo: vértices y aristas. En el nivel 2, pueden usar definiciones con estructura lógica simple (e.g., que incluyan los conectores lógicos “y” u “o”) siempre y cuando estén basadas en propiedades de los grafos que ya conocen. En el nivel 3 pueden utilizar cualquier definición, incluyendo a aquellas que implican un uso de relaciones lógicas más complejas (e.g., cuantificador existencial, cuantificador universal, mínimo, máximo, etc.), ya que poseen un mayor dominio de los razonamientos deductivos. Finalmente, en el nivel 4, los estudiantes adquieren una comprensión de la estructura lógica de las matemáticas que les permite aceptar que distintos términos en teoría de grafos puedan tener definiciones equivalentes.

## **METODOLOGÍA**

Participaron en el estudio 39 estudiantes (que numeramos del 1 al 39) de un grupo de la asignatura de primer curso “Lógica y Matemática Discreta”, impartida en el primer semestre. En este grupo había alumnos de distintos grados en ingeniería informática de la Universidad Politécnica de Madrid. Durante la última clase del semestre, los estudiantes respondieron a un cuestionario (instrumento de recogida de datos de nuestro estudio) cuyos resultados serían considerados para la evaluación de la asignatura y como datos para esta investigación, dando expresamente su consentimiento para este último fin. Este cuestionario, cuyas tareas podían realizarse con los conocimientos adquiridos en la asignatura, fue respondido de forma escrita e individual por cada uno de los participantes.

El cuestionario impartido contenía cinco ítems de respuesta abierta diseñados con el objeto de evaluar los procesos de uso y formulación de definiciones en teoría de grafos desde la perspectiva del modelo de van Hiele. Para ello, hemos seguido el planteamiento de Gutiérrez y Jaime (1998) a la hora de diseñar ítems para tal fin. En efecto, hemos considerado por una parte que los estudiantes tengan la oportunidad de explicitar sus razonamientos en las respuestas, y por otra que todos los niveles sean evaluados al menos por un ítem.

La metodología empleada en esta investigación es de corte cualitativo-interpretativo, de manera que analizamos las respuestas de los estudiantes asignando un nivel en función de las categorías que hemos mencionado en el marco teórico. Para ello, cada investigador analizó las respuestas en primer lugar de manera individual, para posteriormente realizar una puesta en común en la que se discutieron los casos discrepantes y llegar así a un consenso.

En esta comunicación presentamos los resultados correspondientes a dos de los ítems del cuestionario correspondientes al proceso de uso de definiciones:

Ítem 1. *Colorear los vértices de un grafo consiste en asignar un color a cada uno de ellos de manera que dos vértices unidos por una arista no tengan el mismo color. Colorea el siguiente grafo (Figura 1) usando solo 3 colores. [Nota: si no tienes lápices de colores puedes usar números para asignar a cada vértice: rojo = 1, azul = 2, verde = 3.]*

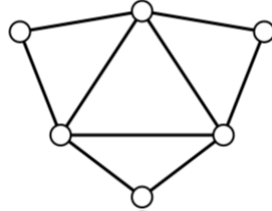


Figura 1. Grafo correspondiente al ítem 1.

*El número cromático de un grafo es el mínimo número de colores necesarios para colorearlo. ¿Cuál es el número cromático del grafo dibujado justo arriba? ¿Por qué?*

Ítem 2. *Dadas las siguientes definiciones: árbol (grafo conexo y sin ciclos), arbusto (grafo tal que dos vértices cualesquiera están conectados por un único camino), seto (grafo conexo con  $n$  vértices y  $n-1$  aristas). Dibuja un ejemplo para cada una de ellas. ¿Qué relación(es) existen entre las tres definiciones?*

Las definiciones que incluyen estos ítems son de distinta complejidad. Concretamente, la definición de coloración del primer ítem no requiere de conocimientos sobre grafos para usarla correctamente (más allá de distinguir visualmente vértices y aristas), con lo cual esta parte de este ítem puede ser respondida correctamente por estudiantes de nivel 1. Sin embargo, la definición de número cromático es una definición más compleja, pues aparece la palabra “mínimo”. Entonces, para responder de forma correcta a esta segunda parte hay que justificar, por un lado, que se puede colorear el grafo con 3 colores, pues así ha podido hacerse en el apartado anterior, y por otro, que no se puede colorear con menos. Para esto último, es necesario razonar que, como el grafo contiene ciclos de orden 3, cuyo número cromático es 3, el grafo dado debe tener un número cromático igual o superior. Así, las respuestas de nivel 2 se remiten a un uso aislado de propiedades, sin muestra alguna de relaciones entre las mismas, mientras que las de nivel 3 contienen al menos parte de los argumentos que hemos mencionado, mostrando un manejo de la lógica propio de este nivel. Por tanto, las respuestas al primer ítem permiten evaluar los niveles 1, 2 y 3 en el uso de definiciones. (Notar que este ítem no evalúa el nivel 4, pues en él no aparecen definiciones equivalentes, cuya aceptación permite reconocer razonamientos de este nivel).

En el segundo ítem aparecen tres definiciones equivalentes de árbol, dos de ellas etiquetadas con nombres arbitrarios escogidos por los investigadores (arbusto y seto), de manera que los estudiantes no sepan de entrada que estas caracterizan a la misma familia. Las definiciones de árbol y seto tienen estructura lógica simple, pues contienen propiedades de grafos unidas por la conjunción lógica “y”, por lo que se espera que los estudiantes de nivel 2 sean capaces de hallar ejemplos de estos. En contraste, la definición de arbusto es más compleja, pues contiene un cuantificador universal y un cuantificador de existencia única, por lo que se espera que suponga una dificultad para los estudiantes de nivel 2 pero no para los de nivel 3, que tienen habilidades lógicas para comprender esta definición. Sin embargo, estas destrezas no son suficientes para responder correctamente a la última pregunta, sobre la relación entre las definiciones, lo que nos permitirá saber si los estudiantes detectan la equivalencia entre las mismas, característica de nivel 4. Así, el segundo ítem permite discriminar entre los niveles 2, 3 y 4 en las respuestas. (Notar que este ítem no evalúa el nivel 1, pues las definiciones empleadas requieren del conocimiento de ciertas propiedades de los grafos).

## RESULTADOS

En el primer ítem hemos obtenido respuestas de todos los niveles esperados. Por ejemplo, el estudiante 30 realiza una coloración correcta del grafo, pero afirma que “su número cromático es 1 porque puede colorearse con un color”. Así, el alumno muestra nivel 1 en este ítem porque es capaz de realizar una tarea que no requiere de conocimientos sobre teoría de grafos, pero después da una justificación que no demuestra ningún tipo de habilidad lógica ni uso de propiedades de grafos. Solo muestra comprensión de la tarea concreta de colorear con 3 colores, pero no ha sabido usar esa definición para comprender la de número cromático.

El estudiante 27 da una respuesta de nivel 2 a este ítem, pues realiza correctamente la primera parte y en la segunda justifica que el número cromático es 3 porque “no puede colorearse con un número menor de colores puesto que tiene algunos vértices de grado 4”. Muestra nivel 2 porque es capaz de usar propiedades matemáticas para justificar su respuesta, pues es cierto que el grafo posee vértices de grado 4, pero no muestra capacidad para relacionarlas entre sí. De hecho, el grado máximo de los vértices de un grafo no sirve para acotar inferiormente el número cromático, sino superiormente.

El estudiante 15, que también colorea correctamente el grafo, en la segunda parte hace alusión solamente a la necesidad de usar 3 colores: “El número cromático es 3. El grafo lo puedes dividir en subgrafos (ciclos) de forma que quedan triángulos; en un triángulo el número cromático mínimo es 3”. Ubicamos esta respuesta en el nivel 3 porque, aunque el estudiante no alude a la condición suficiente (o sea, que puede colorearse con 3 colores como acaba de comprobar) y tiene alguna imprecisión (“número cromático mínimo”), muestra que la colorabilidad es una característica hereditaria de los grafos (i.e., el número cromático de un grafo es mayor o igual que el de cualquiera de sus subgrafos), lo cual supone una destreza lógica característica de este nivel.

En la segunda pregunta, sobre la noción de árbol, también hemos obtenido respuestas de todos los niveles que esperábamos. Un ejemplo de respuesta de nivel 2 fue dada por el estudiante 23, que solo da ejemplos correctos de árbol y seto pero no de arbusto. Además, proporciona una justificación muy elemental para relacionar las definiciones, pues dice que “árboles y setos no tienen ciclos. Los tres son conexos”. Así, alude a propiedades que aparecen textualmente en las definiciones, salvo en el caso de la conectividad de los arbustos, que es inmediata de ver aunque en ella no aparezca explícitamente el término “conexo”.

Una respuesta de nivel 3 es dada por el estudiante 13 (ver Figura 2), que realiza correctamente los tres ejemplos, mostrando así comprensión de las tres definiciones. Además, para relacionar estos tres conceptos, realiza correctamente una inclusión de clases, lo cual supone un uso considerable de la lógica que caracteriza a este nivel.

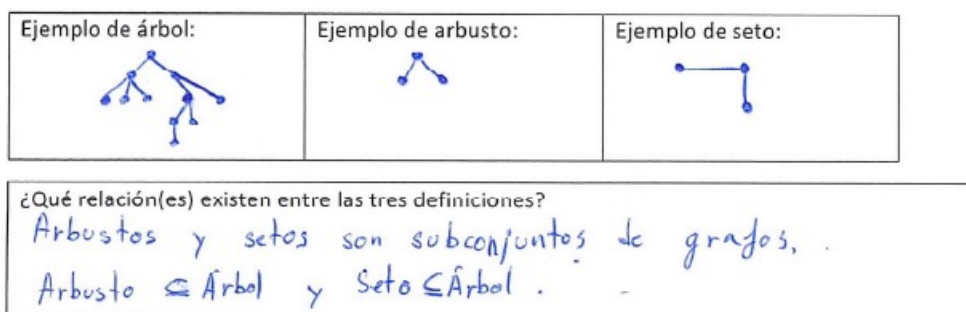


Figura 2. Respuesta de nivel 3 para el ítem 2.

Finalmente, el estudiante 38 (ver Figura 3), proporciona la respuesta que demuestra el mayor grado de comprensión posible para este ítem, pues además de dar tres ejemplos correctos, afirma que “las

tres definiciones son equivalentes”. Así, ubicamos este tipo de respuestas en el nivel 4 por mostrar que acepta que un concepto puede definirse de distintas formas.

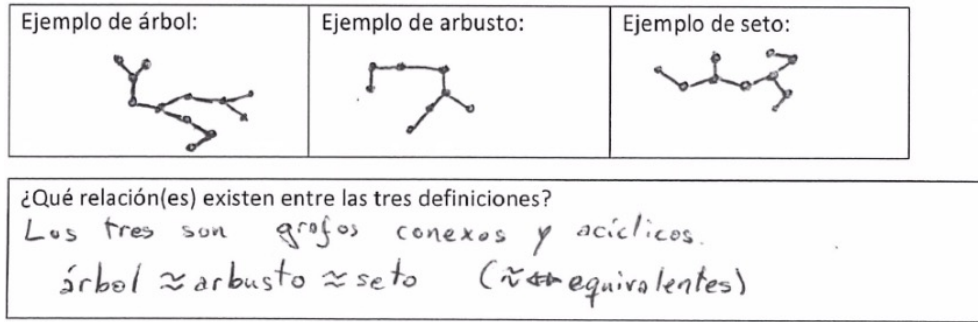


Figura 3. Respuesta de nivel 4 para el ítem 2.

Los resultados obtenidos en cada ítem aparecen reflejados en la Tabla 1. Notamos además que el 77% de los alumnos obtuvieron en ambos ítems o bien el mismo nivel (46%) o bien una diferencia de un solo nivel (31%).

Tabla 1. Resultados obtenidos en cada ítem.

	Número de estudiantes (Porcentaje)	
	Ítem 1	Ítem 2
Sin clasificar	1 (3%)	4 (10%)
Nivel 1	4 (10%)	—
Nivel 2	22 (56%)	19 (49%)
Nivel 3	12 (31%)	12 (31%)
Nivel 4	—	4 (10%)

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las categorías de respuestas obtenidas en este trabajo atienden a la jerarquización y secuencialidad que caracteriza a los niveles, pues reflejan que el nivel  $n$  supone una sofisticación en el razonamiento matemático del nivel  $n-1$ , además de que un estudiante no puede tener nivel  $n$  sin la capacidad de razonamiento del nivel  $n-1$  (Jaime y Gutiérrez, 1990). En efecto, en ambos ítems, las categorías de respuestas de cada nivel han sido construidas añadiendo nuevos descriptores de habilidades a los de la categoría correspondiente al nivel anterior. Además, las categorías han sido definidas no solo a partir de las habilidades que muestran los alumnos, sino también a la vista de sus dificultades, tal y como se caracterizan los niveles van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998). Por tanto, estos hechos suponen un factor de validación del instrumento que hemos diseñado.

Por otra parte, hemos podido comprobar que todas las categorías de respuestas esperadas para ambos ítems han tenido soporte empírico, pues hemos hallado distintos ejemplos por cada categoría entre las respuestas de los estudiantes. Efectivamente, el análisis del ítem 1 ha revelado respuestas de nivel 1, en los casos donde solo se manejan definiciones que no demandan más que la mera distinción visual entre vértices y aristas, pero sin manifestar comprensión de propiedades matemáticas de los grafos. Igualmente, hemos registrado respuestas de nivel 2 mediante ambos ítems, en los casos en los que los estudiantes muestran comprensión de definiciones formuladas a

partir de conectores lógicos elementales, como la conjunción y la disyunción, pero sin ser capaces de establecer relaciones entre las mismas. También, ambos ítems han dado lugar a respuestas de nivel 3, en las que hemos encontrado estudiantes capaces de manejar definiciones más complejas, que requieren de la comprensión de expresiones lógicas menos elementales, como por ejemplo el cuantificador existencial único. Finalmente, el ítem 2 ha mostrado a una minoría de estudiantes capaces de aceptar que una misma noción puede tener definiciones equivalentes. Estos hechos permiten dar una primera validación a los descriptores propuestos por González et al. (en prensa) para el proceso de uso de definiciones en teoría de grafos, cumpliendo con el objetivo que planteamos en esta comunicación. Más aun, hemos obtenido descriptores de los niveles para los contenidos específicos de cada ítem (i.e., número cromático y árbol), lo cual nos permite refinar la propuesta general, como ya se ha realizado con contenidos específicos de geometría (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990).

Respecto a la proximidad observada en los niveles de las respuestas de un mismo estudiante a ambos ítems, notamos que nuestros resultados muestran discrepancias similares a las que han sido observadas en otros trabajos. Por ejemplo, estudios clásicos sobre este modelo en el ámbito de la geometría (Gutiérrez y Jaime, 1988; Mayberry, 1983) revelan discrepancias entre los niveles de respuesta según el concepto por el que se le pregunte al estudiante. Aunque esto podría parecer una contradicción con los planteamientos del modelo de van Hiele, Gutiérrez y Jaime (1988) señalan que ello podría deberse a que los estudiantes, especialmente de niveles 1, 2 y 3, tienen una visión local fragmentada de las matemáticas que inhibe su transferencia de conocimientos y habilidades de razonamiento de un área de la matemática a otra.

Por tanto, al haber cubierto todos los descriptores esperados y no haber encontrado ninguna disonancia con el modelo teórico (González et al., en prensa), no sería necesario por el momento la modificación de los descriptores propuestos inicialmente. Para ello, es preciso destacar limitaciones de este trabajo, como por ejemplo la graduación de las categorías empleadas para analizar las respuestas de los estudiantes. Aunque nos han permitido alcanzar nuestro objetivo, hemos detectado distintas respuestas a una tarea que muestran un mismo nivel pero distinta calidad en los razonamientos. Esta limitación podría superarse considerando una metodología que incluyera otros parámetros además de los niveles de van Hiele, como por ejemplo el método de cálculo de los grados de adquisición (Gutiérrez et al., 1991), que considera aspectos como la corrección y la completitud de las respuestas. Dicho método, que ha sido empleado en distintas investigaciones, como por ejemplo la de Sarasua (2013), proporciona una ponderación del porcentaje de adquisición de cada uno de los niveles que posee el estudiante. Así, el uso de esta metodología serviría también para analizar el resto de los ítems del cuestionario, superando así otra de las limitaciones de este trabajo, como son el número de tareas analizadas y la restricción a un único proceso. Ello nos permitiría obtener perfiles de razonamiento de los estudiantes en el uso y formulación de definiciones y, además, profundizar en las discrepancias de los niveles obtenidos en cada respuesta mediante alguna medida de consenso, como la que propone Mayberry (1983) para analizar la dispersión de la asignación de niveles de razonamiento según el contenido matemático involucrado.

## Referencias

- Biggs, N. L. (2003). *Discrete mathematics* (2ª ed.). Oxford University Press.
- Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1), 31–48.
- Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3). Reston, VA: N.C.T.M.

- Gavilán-Izquierdo, J. M. y González, A. (2016). Investigación sobre el concepto de grafo a través del modelo de Van Hiele. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 597). Málaga, España: SEIEM.
- González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M y Puertas, M. L. (en prensa). Characterizing the Cognitive Development of Graph Theory Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. Aceptado para su publicación.
- González, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). Analizando el reconocimiento de grafos a través del modelo de Van Hiele. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 286–293). Madrid, España: FESPM.
- González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(1), 81–97.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1988). Globality versus locality of the van Hiele levels of geometric reasoning. *Unpublished manuscript*. Valencia, España: Universitat de Valencia.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning problems in Mathematics*, 20(2/3), 27–46.
- Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237–251.
- Hazzan, O. y Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(3), 255–272.
- Heinze, A., Anderson, I. y Reiss, K. (2004). Discrete mathematics and proof in the high school. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36, 44–45.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295–384). Sevilla, España: Alfar.
- Kasyanov, V. N. (2001). Graph applications in programming. *Programming and Computer Software*, 27, 146–164.
- Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for research in mathematics education*, 14(1), 58–69.
- Medová, J., Páleníková, K., Rybanský, Ľ. y Naštická, Z. (2019). Undergraduate students' solutions of modeling problems in algorithmic graph theory. *Mathematics*, 7(7), 572.
- Navarro, M. A. y Pérez-Carreras, P. (2006). Constructing a concept image of convergence of sequences in the van Hiele framework. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 13, 61–98.
- Nisawa, Y. (2018). Applying Van Hiele's Levels to basic research on the difficulty factors behind understanding functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2), 61-65.
- Ouvrier-Bufferet, C., Meyer, A. y Modeste, S. (2018). Discrete mathematics at university level. Interfacing mathematics, computer science and arithmetic. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N.M Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 255–264). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.
- Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43–65). Bilbao, España: SEIEM.