

T.S-161

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

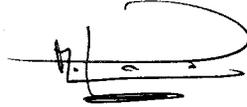
Don D. JOSÉ ENRIQUE GARCÍA RAMOS, DOCTOR EN FÍSICA, COLECCION Y NOCIONES  
de la FÍSICA DE LAS PARTÍCULAS

de la Universidad de Sevilla desde el día 24 FEBRUERO 1999

hasta el día 16 MARZO 1999

Sevilla 24 de FEBRUERO de 1999

EL DIRECTOR DE



“EXTENSIONES DEL MODELO DE BOSONES EN INTERACCIÓN PARA SU  
APLICACIÓN A PROBLEMAS ACTUALES DE ESTRUCTURA NUCLEAR.”

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LAS PARTÍCULAS

Sevilla, a las 80 horas de la tarde del día 24 FEB. 1999  
del libro 83  
Sevilla, 24 FEB. 1999

El Jefe del Departamento de Física,



José Enrique García Ramos

Tesis Doctoral

LBS

1175656

Sevilla, Febrero de 1999.



R. 10.599

*Universidad de Sevilla*  
*Departamento de*  
*Física Atómica Molecular y Nuclear.*

“Extensiones del modelo de bosones en interacción para su  
aplicación a problemas actuales de estructura nuclear.”

Memoria presentada para optar  
al grado de Doctor en Física por  
**José Enrique García Ramos.**

Sevilla, Febrero de 1999.

DIRECTORES:

**José Miguel Arias Carrasco**

**Pieter Van Isacker**



*Los abajo firmantes José Miguel Arias Carrasco, Profesor Titular del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Universidad de Sevilla y Pieter Van Isacker, Investigador del Grand Accélérateur National d'Ions Lourds (GANIL),*

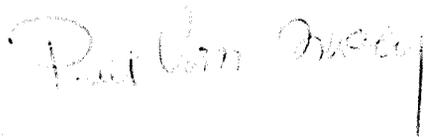
CERTIFICAN que la presente Memoria de Tesis, titulada **“Extensiones del modelo de bosones en interacción para su aplicación a problemas actuales de estructura nuclear”**, ha sido realizada bajo nuestra dirección por José Enrique García Ramos para optar al grado de Doctor en Física.

Para que así conste, y en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos el presente certificado.

Sevilla, a doce de Febrero de 1999.

**José Miguel Arias Carrasco**

**Pieter Van Isacker**

Handwritten signature of José Miguel Arias Carrasco, consisting of a stylized cursive script with a horizontal line underneath.Handwritten signature of Pieter Van Isacker, consisting of a cursive script.A large, stylized handwritten signature or mark, possibly a stylized 'A' or a similar symbol, located at the bottom center of the page.

*a Ana Mari.*

## Agradecimientos

Aunque ésta es la primera página con la que se encuentra el lector de esta memoria, estas líneas representan el final de varios años de “trabajo”. Este “trabajo” se ha llevado a cabo de forma muy grata gracias a las personas que me han ayudado durante todo este tiempo.

En primer lugar me gustaría agradecer todo el apoyo prestado por mis dos directores de tesis. Por un lado Pepe Arias, aquí en Sevilla y, por otro, Piet Van Isacker en GANIL (Caen, Francia). Ambos han sabido ayudarme y orientarme cuando el trabajo se resistía a avanzar y, han sido capaces de hacerme ver la utilidad de todo el esfuerzo realizado.

Asimismo no quisiera olvidar el apoyo material obtenido de proyectos y acuerdos de investigación concedidos por distintas instituciones: U.E. , IN2P3 (Francia)-DIGCYT, DIGCYT, Junta de Andalucía, así como a través de una beca de F.P.D. e I. de la Junta de Andalucía.

Me encuentro especialmente agradecido a todos mis compañeros del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear: Juan Antonio Caballero, José Rodríguez Quintero, José María López, Maribel Gallardo, José Manuel Quesada, Manuel Lozano, Clara Alonso, José Manuel Espino, Sara Cruz, Edoardo Lanza, María Victoria Andrés, Antonio Moro, Miguel Carvajal, Curro Pérez Bernal, Joaquín Gómez y Pepe Díaz. Éstos han hecho que mis largas horas de trabajo hayan sido verdaderamente agradables. Seguramente se me olvidará citar a algunos compañeros, pero para ellos también hago extensivo mi agradecimiento.

Igualmente importante ha sido el apoyo dado por mis hermanos y padres. Todos ellos han sabido aguantarme durante mucho tiempo y facilitarme mi trabajo, tanto a lo largo de toda mi licenciatura como durante mi etapa de doctorando. Posiblemente sin haber contado con ellos este trabajo no habría sido posible.

Finalmente me gustaría resaltar el papel de Ana Mari, novia y futura esposa. Ella sí es la que más ha pagado el coste de esta tesis, principalmente por los numerosos días en los que no nos hemos visto, así como por las numerosas separaciones causadas por mis salidas al extranjero.

## Prólogo

El núcleo atómico es un sistema físico singular debido fundamentalmente a dos razones:

- No se conoce una expresión analítica para la interacción nucleón-nucleón, al contrario de lo que ocurre con los potenciales coulombiano y gravitatorio. La interacción nucleón-nucleón sólo se conoce parcialmente a partir del análisis fenomenológico de la dispersión nucleón-nucleón [Mah83, PB75].
- La estructura nuclear es un problema de muchos cuerpos, donde “muchos” significa cualquier número entre 3 y 200. Esto supone que, por una parte se tienen pocas partículas para aplicar en rigor las potentes técnicas de la física estadística, y por otra demasiadas para intentar resolver exactamente el problema.

Ello hace que el núcleo atómico sea un laboratorio único y el estudio de su estructura suponga un desafío intelectual de primer orden.

Además de las anteriores dificultades, hay problemas adicionales como el hecho de que los nucleones no son partículas elementales [Hey90] y que el tratamiento apropiado del problema requeriría el uso de dinámica relativista. No obstante, se espera que la subestructura nucleónica sea relevante sólo a energías muy superiores a las típicas, de 1 a 10 MeV, correspondientes al reordenamiento de nucleones y a la emisión o absorción de un nucleón por parte del núcleo, y que la velocidad de los nucleones en el núcleo, que es del orden de una décima parte de la velocidad de la luz, haga que la aproximación no relativista resulte aceptable [PB75].

El desconocimiento de la forma exacta de la interacción nuclear hace necesario el desarrollo de modelos. Desde los años 50 se han propuesto multitud de modelos de estructura nuclear que en grandes líneas pueden agruparse en dos categorías: modelos colectivos y modelos de partícula independiente. Junto a estos modelos se ha venido desarrollando desde finales de los años 70 un modelo algebraico que explota de un modo sistemático el concepto de simetría dinámica en física nuclear. Este modelo se conoce con el nombre de Modelo de Bosones en Interacción (IBM) [IA87] y ha demostrado ampliamente su utilidad en el estudio de muchas propiedades nucleares.

El objetivo de esta memoria es presentar extensiones del IBM que permitan abordar problemas recientes de estructura nuclear. En particular se estudia el problema de la anarmonicidad de la excitación colectiva  $\gamma$  en núcleos par-par deformados. Dicho problema se aborda tanto desde el sistema laboratorio como desde el sistema intrínseco, para buscar su conexión con el Modelo Colectivo. Esta discusión se muestra en detalle en el capítulo II de esta memoria. Otro tema de interés actual, debido al desarrollo reciente de instalaciones que permiten el uso de haces radiactivos, es el papel que juega el isospín en núcleos con  $N \approx Z$ . En el capítulo III se discuten algunos límites de especial interés del IBM con isospín (IBM-3) [EW80]. En el capítulo IV se estudia la estructura geométrica del IBM-3 proponiendo un nuevo formalismo de estado intrínseco. El capítulo V se dedica a discutir el problema de la competencia entre *pairing* isoscalar e isovectorial. El tratamiento de este problema en IBM requiere la introducción de un nuevo grado de libertad, pares isoscalares protón-neutrón. La extensión del IBM que incluye ese grado de libertad se conoce como IBM-4 [EE81]. En esta memoria se propone un acercamiento al problema desde el sistema intrínseco. Para finalizar se presentan el resumen y las conclusiones de este trabajo. Además de los capítulos citados anteriormente, que son la parte original de esta memoria de tesis, en el capítulo I se hace una breve revisión del Modelo de Capas, del Modelo Colectivo y de los aspectos básicos de los Modelos Algebraicos.

# Índice

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
I.1	El Modelo de Capas nuclear (SM) . . . . .	6
I.1.1	El potencial promedio y la interacción espín-órbita . . . . .	7
I.1.2	Cálculos en el Modelo de Capas . . . . .	10
I.1.3	La deformación del campo medio y la interacción de pairing . . . . .	16
I.2	El Modelo Colectivo (MC) . . . . .	18
I.2.1	Las coordenadas . . . . .	19
I.2.2	El hamiltoniano . . . . .	22
I.3	Los métodos algebraicos . . . . .	25
I.3.1	Simetrías en Mecánica Cuántica. Los grupos de Lie . . . . .	25
I.3.2	El modelo de quasi-espín para la interacción de pairing . . . . .	29
I.3.3	El modelo $SU(3)$ de Elliott . . . . .	31
I.4	El modelo de bosones en interacción . . . . .	35
I.4.1	Interpretación microscópica del IBM . . . . .	36
I.4.2	Estructura algebraica del IBM . . . . .	39
I.4.3	Las simetrías dinámicas . . . . .	46
I.4.4	Operadores de transición electromagnética . . . . .	49
I.4.5	Los estados coherentes y el IBM . . . . .	52
I.5	Algunas extensiones del IBM . . . . .	55
I.5.1	El problema de la anarmonicidad . . . . .	56
I.5.2	El isospín en el IBM . . . . .	58

<b>II Vibraciones en núcleos deformados: estudio de su anarmonicidad en el IBM</b>	<b>63</b>
II.1 El IBM y el sistema intrínseco . . . . .	65
II.1.1 Estados de uno y dos fonones: la extensión de la TDA . . . . .	68
II.1.2 Eliminación de bosones espúreos . . . . .	71
II.1.3 ¿Es el IBM un modelo armónico? . . . . .	74
II.2 Cálculos esquemáticos en el sistema intrínseco . . . . .	76
II.2.1 Simetrías dinámicas . . . . .	76
II.2.2 Situaciones intermedias . . . . .	80
II.2.3 Influencia de las excitaciones multifonónicas . . . . .	84
II.2.4 Transiciones electromagnéticas . . . . .	85
II.2.5 Simulación de triaxialidad en las teorías de campo medio . . . . .	91
II.3 Los términos a tres cuerpos . . . . .	93
II.3.1 Análisis en el sistema intrínseco . . . . .	94
II.3.2 Análisis en el sistema laboratorio . . . . .	94
II.3.3 Cálculos realistas . . . . .	98
<b>III El isospín en el IBM: IBM-3 en el sistema laboratorio</b>	<b>101</b>
III.1 Estructura algebraica . . . . .	104
III.2 El hamiltoniano IBM-3 . . . . .	107
III.3 Simetrías dinámicas . . . . .	110
III.3.1 El límite $U(5)$ . . . . .	111
III.3.2 El límite $SU(3)$ . . . . .	114
III.3.3 El límite $O(6)$ . . . . .	116
III.4 Transiciones electromagnéticas. . . . .	118
III.4.1 Transiciones entre estados simétricos . . . . .	121
III.4.2 Transiciones entre estados simétricos y no simétricos . . . . .	125
III.5 Transferencia de dos nucleones . . . . .	130
III.6 Valor promedio de los números de bosones . . . . .	132
III.7 Predicciones y comparación con observaciones experimentales . . . . .	135

<b>IV El isospín en el IBM: IBM-3 en el sistema intrínseco</b>	<b>143</b>
IV.1 El estado intrínseco en IBM-3 . . . . .	144
IV.1.1 Estados excitados de un fonón . . . . .	149
IV.1.2 Modos espúreos, bosones de Goldstone . . . . .	150
IV.2 ¿Está bien definido el isospín de los estados intrínsecos? . . . . .	152
IV.2.1 Proyección en isospín . . . . .	154
IV.3 Cálculos esquemáticos . . . . .	156
IV.3.1 Estado fundamental. Comparación con el formalismo de GL . . . . .	156
IV.3.2 Cálculo de los números promedio de bosones . . . . .	158
IV.3.3 Límite $SU(3)$ orbital . . . . .	161
IV.3.4 Transición de IBM-3 a IBM-2 . . . . .	163
<b>V Sistema intrínseco en IBM-4: pairing isoscalar e isovectorial</b>	<b>167</b>
V.1 Estructura algebraica de IBM-4 . . . . .	168
V.1.1 Hamiltoniano IBM-4 esquemático . . . . .	171
V.2 El formalismo de estado intrínseco para IBM-4 . . . . .	173
<b>VI Síntesis y conclusiones</b>	<b>177</b>
<b>Apéndice A: Convenciones de fase al definir el producto escalar y el operador <math>\tilde{\gamma}_\ell</math></b>	<b>181</b>
A.1 Definición de producto escalar . . . . .	181
A.2 Definición de los operadores $\tilde{\gamma}_\ell$ . . . . .	182



# Capítulo I

## Introducción

El desconocimiento de la estructura exacta de la interacción nuclear ha propiciado el desarrollo de numerosos modelos. Cada uno de ellos se centra en la descripción de un problema nuclear concreto, teniendo un campo de aplicabilidad limitado. De hecho, se acepta desde hace mucho tiempo que un modelo que describa bien determinados fenómenos falle estrepitosamente a la hora de describir otros [Eli85]. Se ha dedicado gran cantidad de esfuerzo a reconciliar los resultados de distintos modelos cuando éstos pueden ser aplicados en una misma región. A pesar de los muchos modelos de estructura nuclear existentes, todos ellos pueden agruparse en dos categorías: Modelo Colectivo (MC), en el que de entre los múltiples grados de libertad nucleares se seleccionan sólo unos pocos que son considerados como los más relevantes para describir fenómenos colectivos y Modelo de Partícula Independiente, cuya base física es la existencia de un campo promedio en el cual se mueven libremente los nucleones. El desarrollo en los últimos años de los Modelos Algebraicos ha proporcionado en cierto modo un nexo entre el Modelo Colectivo y el modelo más representativo de partícula independiente como es el Modelo de Capas (SM). El Modelo de Bosones en Interacción (IBM) representa uno de los máximos exponentes de modelo algebraico y explota el concepto de simetría dinámica aplicada al núcleo atómico.

En esta memoria se desarrollan extensiones del IBM para el tratamiento de distintos problemas de estructura nuclear. Para poner el modelo en contexto, se dedica esta introducción a describir los principales aspectos del SM y del MC. Además, se presenta un repaso de la utilización de los métodos algebraicos en física, ilustrando su uso en física

nuclear con el modelo de Elliott [Ell58] y el modelo de quasi-espín para la interacción de *pairing*<sup>1</sup> [Rac43, Ker61]. Finalmente se da una visión general del IBM, haciendo especial énfasis en los problemas abiertos que serán analizados en profundidad en esta memoria de tesis.

## I.1 El Modelo de Capas nuclear (SM)

El modelo por excelencia para describir la estructura nuclear es el SM, ya que con él se consiguen explicar, de una forma conceptualmente simple, multitud de propiedades del núcleo atómico. La hipótesis básica del SM es la existencia de un potencial promedio en el cual se mueven los nucleones, de forma que cada partícula reside en una órbita que esencialmente no está perturbada por el resto de los nucleones. Esto es equivalente a decir que el camino libre medio de un nucleón entre colisiones con otros nucleones es comparable al tamaño del núcleo atómico.

Es evidente que el SM nuclear fue propuesto a imagen y semejanza del modelo de capas atómico, modelo que sin lugar a dudas ha sido de tremendo éxito en la descripción de las propiedades atómicas y cuya base teórica, la existencia de un potencial promedio esférico, está bien justificada. **El SM nuclear fue un modelo que en sus comienzos carecía de base teórica** [EL57], ya que, en contraste con el átomo el núcleo no posee un centro natural de potencial. Al ser la interacción nuclear de corto alcance no se esperaba que diera lugar a un potencial promedio suave y, por tanto, los nucleones tendrían fuertes fluctuaciones en su movimiento. Por otra parte, la existencia del modelo de la gota líquida [BK37, RS80], que describía en primer orden diversas propiedades nucleares (energías de ligadura, distribuciones de carga u oscilaciones colectivas), estaba en total desacuerdo con la existencia de un potencial promedio y la nula perturbación de la órbita de un nucleón por parte del resto de nucleones. La suposición básica del modelo de gota líquida es que el recorrido libre medio de los nucleones en la materia nuclear es pequeño en comparación con el diámetro nuclear. Esta imagen se asemeja a la de una gota en la que

---

<sup>1</sup>En toda esta memoria se emplea el vocablo inglés *pairing*. por no existir ninguna traducción adecuada, aunque se han propuesto traducciones como apareamiento o emparejamiento

el recorrido libre medio de las moléculas es pequeño en comparación con el tamaño de la gota. Esto supone que el núcleo debe ser considerado como un sistema de partículas altamente correlacionado [Boh36, BK37], lo cual está en franca contradicción con el SM. A pesar de esto, existían fuertes evidencias experimentales (abundancia relativa de los distintos elementos, números mágicos, desviaciones de la masa promedio predicha por el modelo de gota líquida, energía de separación del último nucleón, energía de excitación del estado  $2_1^+$ , etc.) que sugerían la existencia de una estructura de capas.

¿Cómo puede justificarse la existencia de un potencial nuclear promedio? La respuesta está en el Principio de Exclusión de Pauli, según el cual dos partículas no pueden estar simultáneamente en el mismo estado cuántico. Así, a pesar de lo altamente fluctuante que es el potencial al que se ve sometido un nucleón, su recorrido debe ser bastante suave debido a que los nucleones están ocupando todos los estados por debajo del nivel de Fermi y apenas existen huecos a los que dispersar al nucleón en su movimiento. Tan sólo aquellos nucleones próximos al nivel de Fermi podrán perturbar a otros nucleones en su movimiento, al promocionarlos a estados vacíos no muy alejados energéticamente.

### I.1.1 El potencial promedio y la interacción espín-órbita

La existencia de un campo promedio en el cual se mueven los nucleones supone que se tenga que resolver la siguiente ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\sum_{i=1}^A \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(r_i) \right] \Phi_0 = E_0 \Phi_0, \quad (\text{I.1})$$

donde se ha supuesto adicionalmente que el campo promedio es central.  $\Phi_0$  es un producto de funciones de onda monoparticulares (determinante de Slater) y es función de las coordenadas monoparticulares de los  $A$  nucleones. Las funciones de onda monoparticulares se obtienen resolviendo un conjunto de ecuaciones de Schrödinger desacopladas,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \phi_\alpha(\vec{r}, \xi) = \epsilon_\alpha \phi_\alpha(\vec{r}, \xi), \quad (\text{I.2})$$

donde  $\xi$  representa el resto de coordenadas (espín, isospín, etc.) que definen el espacio de trabajo. Se verifica,

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{i=1}^A \epsilon_{\alpha_i}, \\ \Phi_0 &= \mathcal{A}[\prod_{i=1}^A \phi_{\alpha_i}], \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

donde  $\mathcal{A}$  es el operador de antisimetrización, siendo los estados ocupados los más bajos en energía. Cada uno de estos estados está ocupado por un único nucleón debido al Principio de Exclusión de Pauli.

Los potenciales promedio que suelen emplearse son:

- *Pozo esférico infinito.* Su forma funcional es,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{para } r \leq R_0 \\ +\infty & \text{para } r > R_0 \end{cases}, \quad (\text{I.4})$$

donde  $V_0 \approx 50 - 60$  MeV y  $R_0 = r_0 A^{1/3}$ , siendo  $r_0 \approx 1.2$  fm y  $A$  el número másico.

- *Potencial armónico.* Su forma funcional es,

$$V(r) = -V_0[1 - (\frac{r}{R_0})^2] = \frac{m}{2}\omega_0^2(r^2 - R_0^2), \quad (\text{I.5})$$

donde  $V_0$  y  $R_0$  tienen los mismos valores que para el pozo esférico infinito. La solución de la ecuación de Schrödinger (I.2) correspondiente a este potencial es perfectamente conocida y puede encontrarse en cualquier texto de mecánica cuántica [CTDL77, Sch49]. El espectro de energías es,

$$E = \hbar\omega(2k + \ell + 3/2) = \hbar\omega(N + 3/2), \quad (\text{I.6})$$

donde

$$\begin{aligned} N &= 0, 1, 2, \dots \\ \ell &= N, N - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0, \\ k &= (N - \ell)/2 \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

siendo  $N$  el número cuántico de oscilador,  $\ell$  el número cuántico orbital y  $k$  el número cuántico radial (algunos autores definen otro número cuántico radial  $n = k + 1$  [dST63]). La degeneración de los niveles (I.6), teniendo en cuenta que los nucleones tienen espín  $\frac{1}{2}$  será,

$$D(N) = (N + 1)(N + 2), \quad (\text{I.8})$$

Tanto el potencial de pozo cuadrado como el de oscilador armónico a priori no describen bien el potencial nuclear ya que no poseen estados no ligados, por tanto a la hora de realizar cálculos donde intervengan estados del continuo, habrá que realizar alguna hipótesis adicional.

- *Potencial de Woods-Saxon* [WS54, MMNS56]. Se sabe que el potencial nuclear promedio al que se encuentran sometidos los nucleones debe verificar aproximadamente las siguientes propiedades,

$$V(r) = \begin{cases} \left( \frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \\ \left( \frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)_{r < R_0} > 0 \\ V(r)_{r > R_0} \approx 0 \end{cases}, \quad (\text{I.9})$$

que también son verificadas por las distribuciones de carga y masa del núcleo. Un potencial que cumple todas estas propiedades es el potencial de Woods-Saxon (WS),

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} \quad (\text{I.10})$$

donde  $V_0$  y  $R_0$  tienen los mismos valores que para los potenciales anteriores y la difusividad vale  $a \approx 0.5$  fm.

Una característica común a estos tres potenciales para la descripción de los estados ligados es la existencia de estados degenerados o casi degenerados denominados capas, siendo la separación energética entre capas distintas grande comparada con la separación entre niveles de una misma capa. El problema reside en que el llenado de las distintas capas no conduce en ninguno de los tres casos a los bien conocidos números mágicos: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Con el potencial de pozo cuadrado sólo se reproducen los números 2 y 8, mientras para el oscilador armónico o el WS se reproducen 2, 8, 20. La solución a esta discrepancia entre experimento y teoría fue dada independientemente por M.G. Mayer [May49, May50] y por O. Haxel, J.H.D. Jensen y H.E. Suess [HJS49] y consistía en la introducción en el hamiltoniano de un intenso término espín-órbita,

$$H_o = H_{central} + \zeta(r)\vec{\ell} \cdot \vec{s}. \quad (\text{I.11})$$

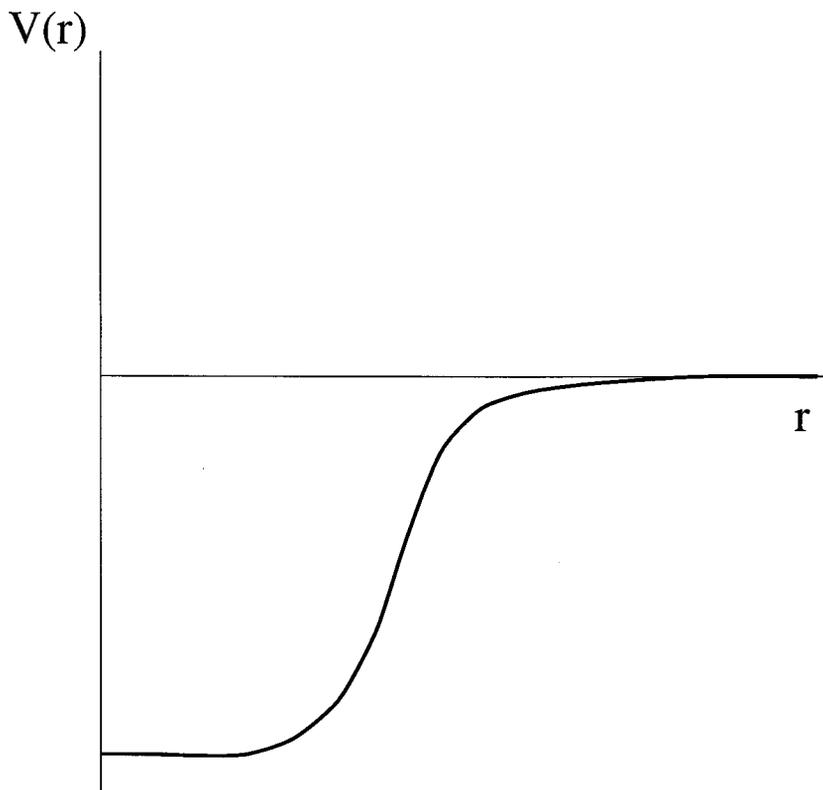


Figura I.1: *Potencial de Woods-Saxon*

Con este término adicional se reproducían perfectamente todos los números mágicos. Aparte de esta evidencia acerca de la existencia de una fuerte interacción espín-órbita, existen otras pruebas experimentales que apoyan este hecho [EG70].

### I.1.2 Cálculos en el Modelo de Capas

Los potenciales fenomenológicos empleados en la sección anterior se pueden obtener de forma microscópica a partir del potencial nucleón-nucleón y la aproximación de Hartree-Fock [RS80, Hey90]. El potencial promedio que se obtiene, así como la función de onda, apoyan firmemente el concepto de partícula independiente y el esquema de niveles de la Fig. I.2.

Las partículas que se mueven en el campo promedio sí interaccionan entre ellas, es decir, existe una interacción residual que desdobra los niveles no perturbados, siendo el hamiltoniano real,

$$H = H_0 + H_{res}. \quad (I.12)$$

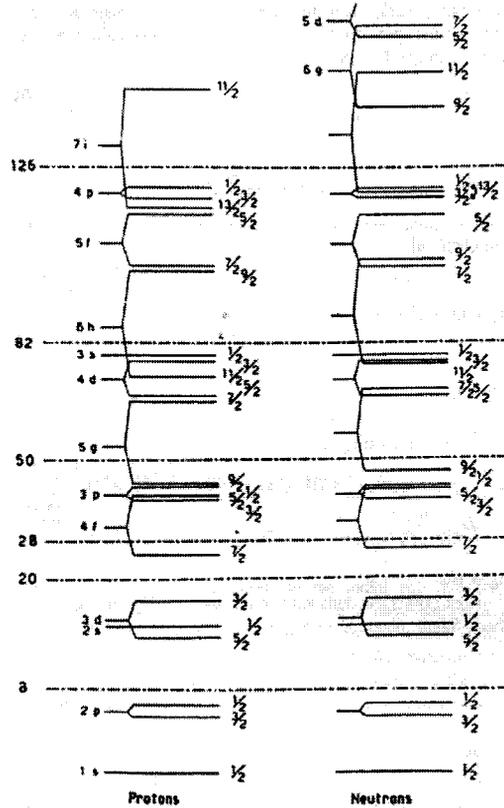


Figura I.2: Espectro monoparticular para un hamiltoniano formado por un potencial central más un término de espín-órbita. En la parte izquierda se señalan las capas correspondientes al oscilador armónico.

La forma funcional de la interacción residual es complicada de obtener ya que no corresponde a la interacción entre dos nucleones libres, sino inmersos en la materia nuclear. Esencialmente existen tres formas de obtener dicha interacción.

- *Elementos de matriz efectivos de dos cuerpos.* Se toman como parámetros a ajustar las energías monoparticulares y todos los elementos de matriz correspondientes a dos cuerpos,

$$\epsilon_{j_i}, \quad \langle j_1 j_2; JM | H | j_3 j_4; JM \rangle. \quad (I.13)$$

Con valores iniciales de estos parámetros se resuelve la ecuación de Schrödinger para un determinado núcleo, obteniendo los estados excitados. A continuación se

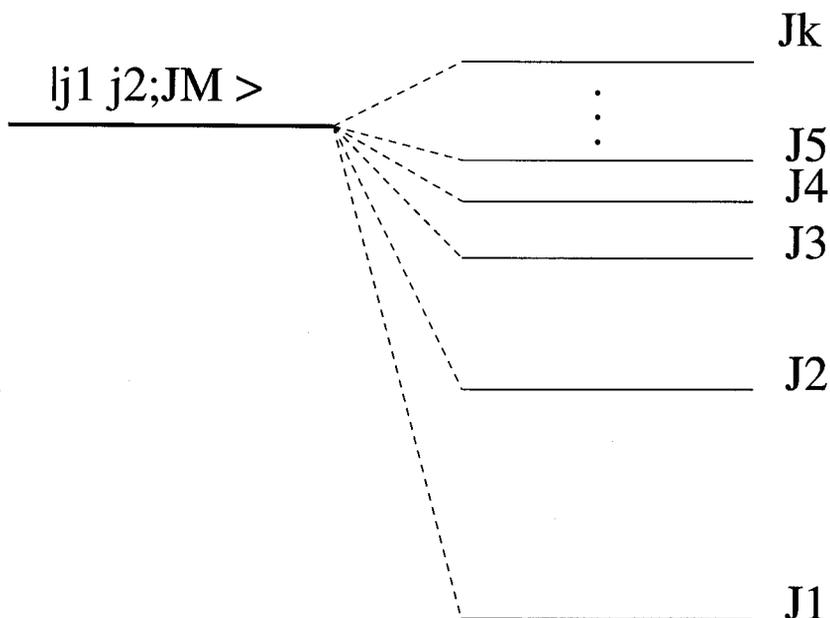


Figura I.3: Desdoblamiento de un estado no-perturbado de dos partículas debido a la interacción residual. Las partículas ocupan los estados monoparticulares  $j_1$  y  $j_2$ .

comparan los resultados obtenidos con los experimentales, comenzando un proceso de ajuste de mínimos cuadrados. Se repite el proceso hasta obtener el mejor ajuste posible [BG77]. Por ejemplo, en la capa  $sd$  (para núcleos entre el  $^{16}\text{O}$  y el  $^{40}\text{Ca}$ ) se requieren para realizar el cálculo, 2 energías monoparticulares relativas, más 63 elementos de matriz de dos cuerpos [Wil76, Wil85].

- *Interacciones realistas.* En este método se comienza a partir de la interacción entre nucleones libres y se introducen las modificaciones necesarias para tener en cuenta la presencia de la materia nuclear. Los primeros trabajos realizados en esta línea fueron llevados a cabo por Brown y Kuo [BK67, KB66, KBB66b, KBB66a]. Algunos ejemplos de estos potenciales son el potencial de Hamada-Johnston [HJ62], el potencial de Yale [L<sup>+</sup>62], el potencial de Tabakin [Tab64] o el potencial “soft-core” de Reid [Rei68].
- *Interacciones esquemáticas o fenomenológicas.* Este método es mucho más simple que los anteriores y puede ser empleado directamente en el estudio de una región másica determinada sin necesidad de complicados cálculos previos. La idea es pro-

poner un potencial dependiente de varios parámetros que puedan obtenerse a partir del mejor ajuste a un conjunto de datos experimentales [RS80]. En determinados casos, usando un número reducido de parámetros ajustables, pueden describirse una gran variedad de núcleos. Las interacciones esquemáticas no se usan sólo para describir la interacción residual, sino que también pueden emplearse como potenciales promedio, o como potenciales nucleón-nucleón para realizar un cálculo de Hartree-Fock.

A continuación se presentan brevemente algunas de las interacciones esquemáticas más empleadas:

– *Potencial Gaussiano.*

$$V(r) = -V_0 e^{-r^2/r_0^2}. \quad (\text{I.14})$$

– *Potencial de contacto.*

$$V(\vec{r}) = -V_0 \delta\left(\frac{\vec{r}}{r_0}\right). \quad (\text{I.15})$$

– *Potencial exponencial.*

$$V(r) = -V_0 e^{-r/r_0}. \quad (\text{I.16})$$

– *Potencial de Yukawa.*

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-r/r_0}}{r/r_0}, \quad (\text{I.17})$$

obteniéndose en todos los casos anteriores, mediante el ajuste de datos experimentales,  $V_0 \approx 50$  MeV y  $r_0 \approx 1 - 2$  fm.

– *Potencial delta de superficie (SDI).* El significado físico de este potencial proviene de la suposición de que los nucleones se mueven libremente en el interior del núcleo y la interacción residual es realmente importante sólo en las proximidades de la superficie nuclear

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -4\pi V'_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(r_1 - r_0). \quad (\text{I.18})$$

– *Interacción de Skyrme [Sky56, Sky59].* La interacción de Skyrme es una de las interacciones efectivas más usadas. Contiene tanto términos a dos como

términos a tres cuerpos,

$$V = \sum_{i < j} V(i, j) + \sum_{i < j < k} V(i, j, k), \quad (\text{I.19})$$

siendo la interacción a dos cuerpos,

$$\begin{aligned} V(1, 2) = & t_0(1 + x_0 P^\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ & + \frac{t_1}{2} [\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k}^2 + \vec{k}^2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] + t_2 \vec{k} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k} \\ & + i W_0 (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \vec{k} \times \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k}, \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

donde

$$\vec{k} = \frac{1}{2i} (\vec{\nabla}_1 - \vec{\nabla}_2), \quad (\text{I.21})$$

$\vec{\sigma}$  es la matriz de Pauli y  $P^\sigma$  es el operador de intercambio de espín. La interacción a tres cuerpos es

$$V(1, 2, 3) = t_3 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3). \quad (\text{I.22})$$

El valor de los parámetros proviene de la realización de ajustes sobre un gran número de datos experimentales correspondientes a diversos núcleos. Como ejemplo se presenta el juego de parámetros Skyrme-III [B<sup>+</sup>75],

$$\begin{aligned} t_0 = -1128.75 \text{MeV fm}^3, \quad t_1 = 395.0 \text{MeV fm}^5, \\ t_2 = -95.0 \text{MeV fm}^5, \quad t_3 = 14000.0 \text{MeV fm}^6, \\ W_0 = 120 \text{MeV fm}^5, \quad x_0 = 0.45. \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Una vez que se conoce la interacción residual, sólo queda por definir el espacio en el que actuará dicha interacción. Para ilustrar este proceso se considerarán núcleos entre el <sup>16</sup>O y el <sup>40</sup>Ca, es decir en la capa *sd* ( $3s_{1/2}$  y  $2d_{5/2}$ ). Sea un núcleo de esta zona, para saber cuantos nucleones intervienen en el cálculo sólo habrá que contar el número de nucleones de valencia, es decir por encima de las capas cerradas (<sup>16</sup>O) en el caso de partículas o por debajo (<sup>40</sup>Ca) en el caso de huecos. El conjunto de estados que definen el espacio de

trabajo será<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned}
 & |(d_{5/2})^n (s_{1/2})^0; \alpha JM\rangle \\
 & |(d_{5/2})^{n-1} (s_{1/2})^1; \alpha JM\rangle \\
 & \quad \vdots \\
 & |(d_{5/2})^1 (s_{1/2})^{n-1}; \alpha JM\rangle \\
 & |(d_{5/2})^0 (s_{1/2})^n; \alpha JM\rangle
 \end{aligned} \tag{I.24}$$

donde  $n$  es el número de nucleones de valencia y  $\alpha$  representa todos los números cuánticos no especificados, necesarios para definir completamente cada uno de los estados. Finalmente para cada  $JM$  habrá que diagonalizar el hamiltoniano ( $H = H_0 + H_{res}$ ) en la base (I.24),

$$H_{lk}^{JM} = E_k^0 \delta_{lk} + \langle \psi_l^{JM} | H_{res} | \psi_k^{JM} \rangle, \tag{I.25}$$

donde  $\psi_k^{JM}$  corre sobre los estados (I.24) y  $E_k^0$  da cuenta de la contribución del campo medio, la cual es diagonal. Una vez obtenidas las autoenergías se conocerá el espectro nuclear, mientras que gracias al conocimiento de las autofunciones se podrán calcular otros observables tales como las transiciones electromagnéticas.

El proceso de construcción de una base con buen momento angular<sup>3</sup> y correctamente antisimetrizada, así como el de diagonalización, aunque conceptualmente simple, resulta de gran complejidad cuando se lleva a la práctica. Para núcleos más allá de la capa *sd* las dimensiones de las matrices y bases implicadas comienzan a ser intratables. Por ejemplo, en el <sup>48</sup>Cr la dimensión del subespacio con  $M = 0$  es 1,963,461 [CZPMP94] mientras que para el <sup>56</sup>Ni dicha dimensión queda multiplicada por un factor 500 [OM98]. Durante los últimos 30 años se han ido desarrollando diferentes códigos informáticos, en paralelo al avance de los computadores, que han permitido tratar con dimensiones cada vez mayores. Algunos ejemplos de estos códigos son: "Oak Ridge Code" [F<sup>+</sup>69], "VLADIMIR-CRUNCHER" [Hau76, RG88], "Manchester-Glasgow Code" [WWCM77], "RITSSCHIL"

---

<sup>2</sup>Si en el núcleo existen protones y neutrones de valencia, el espacio de trabajo será el producto directo del espacio de los protones por el de los neutrones.

<sup>3</sup>Durante esta descripción esquemática de los cálculos en el SM se está obviando el denominado esquema  $m$ , en el que no se realiza explícitamente el acoplamiento a momento angular total, sino que se emplea  $jm$  para cada uno de los nucleones, consiguiéndose el acoplamiento correcto cuando se diagonaliza el hamiltoniano [dST63].

[Zwa85, JV87], "Oxford-Buenos Aires Shell Model Code" (OXBASH) [Etc85], "FDU0 Code", [WV89], "Drexel University Shell Model" (DUSM) [VNG89], "Strasbourg-Madrid Code" (ANTOINE) [Cau89] (NATHAN) [NC95].

### I.1.3 La deformación del campo medio y la interacción de pairing

Las interacciones residuales descritas en el apartado anterior tienden a destruir la esfericidad del campo medio y el movimiento independiente de los nucleones, es decir crean una correlación en el movimiento de las distintas partículas. En primer lugar existe una componente de largo alcance que tiende a deformar el campo medio y puede expresarse en forma multipolar como,

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r_1, r_2) \sum_{m=-k}^k (-1)^m \frac{4\pi}{2k+1} Y_{km}(\theta_1, \phi_1) Y_{k-m}(\theta_2, \phi_2). \quad (\text{I.26})$$

Las componentes de mayor importancia son las de menor orden en  $k$ . La componente monopolar contribuye a la esfericidad del campo medio, y como los términos impares no conservan la paridad, la primera componente que produce deformación nuclear es la cuadrupolar,  $k = 2$ . Ésta da lugar a una deformación cuadrupolar, lo que se demuestra fácilmente considerando la denominada interacción cuadrupolar,

$$V_Q = \sum_{i < j} r_i^2 r_j^2 P_2(\cos \theta_{ij}), \quad (\text{I.27})$$

donde  $P_2$  es el polinomio de Legendre de orden 2.

Para comprender cuál es el efecto de la interacción cuadrupolar, o en general de la interacción de largo alcance, considérese una capa cerrada a la que se añade un nuevo nucleón que se sitúa en la siguiente capa ( $j$ ). Si dicha partícula se sitúa en ( $m = j$ ), existirá una perturbación de la densidad localizada sobre el plano ecuatorial, y por tanto, se generará un campo axialmente deformado de tipo oblato <sup>4</sup> (con los dos semiejes iguales mayores que el diferente). Otra posibilidad es que el nucleón se sitúe en una órbita

---

<sup>4</sup>Los términos prolato y oblato son palabras inexistentes en castellano y corresponden a la castellanización de los vocablos ingleses prolate y oblate. Prolato y oblato se emplearán frecuentemente a lo largo de esta memoria de tesis.

( $m = 1/2$ ), con lo que la distribución de densidad estará concentrada a lo largo del eje polar, produciendo un campo axialmente deformado de tipo prolato (con los dos semiejes iguales menores que el semieje diferente). En cualquiera de las anteriores situaciones, si se siguen añadiendo nucleones y predomina la interacción de largo alcance, éstos tenderán a alinearse con el primero dando lugar a una forma global oblata o prolata según el caso. En este tipo de alineamiento el momento angular deja de ser un buen número cuántico y, por tanto, el elipsoide resultante debe estar girando para dar lugar a estados con buen momento angular.

Una situación opuesta a la anteriormente descrita aparece cuando predomina una interacción atractiva de corto alcance como es la interacción  $\delta$  o de contacto, que tiende a destruir el campo medio. En este caso uno no puede quedarse con los primeros términos de la expresión (I.26) ya que la interacción de contacto contribuye a todos los órdenes. En esta situación dos nucleones tenderán a estar juntos el mayor tiempo posible, por lo que estarán en órbitas conjugadas ( $m, -m$ ). La función de onda de este par de nucleones es,

$$\psi_{J=0}^j = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^{+j} \psi_m^j(1)\psi_{-m}^j(2). \quad (\text{I.28})$$

En general, en un núcleo con un número par de nucleones donde predomina la interacción de corto alcance, éstos estarán agrupados por pares en el estado fundamental, dando lugar a un momento angular total  $J = 0$ . A esta interacción que tiende a crear pares de nucleones con  $J = 0$  se la denomina interacción de *pairing*.

En un núcleo arbitrario existirá una competencia entre ambos tipos de alineamiento, es decir existirá una contribución de la interacción cuadrupolar y otra de la interacción de *pairing*. Normalmente en la mitad de una capa tiende a predominar la forma deformada del núcleo, es decir la interacción cuadrupolar es dominante, mientras que al principio o al final de una capa los núcleos tienden a ser esféricos, dominando por tanto la interacción de *pairing*.

El empleo de la interacción cuadrupolar y la de *pairing*, además de dar un imagen simple de la distribución de los nucleones, permite la obtención de funciones de onda analíticas [Hey90, Ell58] que sirven como punto de partida a la hora de abordar otras situaciones más complicadas, pero próximas a alguno de los dos casos extremos.

## I.2 El Modelo Colectivo (MC)

El SM presenta la gran ventaja, respecto a otros modelos de estructura nuclear, de proporcionar un espacio de trabajo que es completo, es decir no queda fuera de él ningún grado de libertad nuclear. Se pueden describir tanto fenómenos en los que intervengan unos pocos nucleones, como aquellos otros en los que participen todos los nucleones. La dificultad para realizar un cálculo de SM para tratar fenómenos colectivos es que hay que considerar la mezcla de múltiples configuraciones y las matrices a diagonalizar se vuelven intratables. Por tanto, se han desarrollado otros modelos en los que las propiedades colectivas surgen de una forma natural, aunque no hay que olvidar que, en principio, de un cálculo de SM “completo” siempre será posible extraer dichas propiedades aunque en muchos casos de una forma muy complicada.

La existencia de un campo promedio central en el seno del cual se mueven los nucleones es en si mismo un efecto colectivo de todos los nucleones. Aparte del anterior existen multitud de fenómenos que sugieren la existencia de comportamientos colectivos en el núcleo. Por ejemplo valores del momento cuadrupolar nuclear 10 veces superior al valor correspondiente al de un único nucleón, que denotan una fuerte deformación nuclear. La aparición de espectros rotacionales, es decir la existencia de bandas en las que la secuencia de niveles es proporcional a  $J(J + 1)$ , también sugiere efectos cooperativos entre los nucleones. En resumen, existen en el núcleo fuerzas de largo alcance que inducen comportamientos colectivos y dan lugar a deformaciones nucleares [EG70, BM75, RS80].

El modelo colectivo es un modelo fenomenológico para la descripción de las propiedades nucleares colectivas de baja energía ( $< 8$  MeV) de núcleos con un número par de protones y de neutrones (núcleos par-par) pesados y medios. En el MC se considera que el núcleo se comporta como un líquido incompresible, no teniéndose por tanto en cuenta las excitaciones monoparticulares. El núcleo se describe en términos de las variables que parametrizan su superficie. Por tanto, se realiza una descripción del núcleo en términos “clásicos”, siendo las excitaciones nucleares vibraciones y rotaciones.

### I.2.1 Las coordenadas

En núcleos pesados y medios no es necesario emplear los  $3A$  ( $\vec{r}$ ) grados de libertad nucleónicos orbitales, sino que es posible introducir un conjunto reducido de coordenadas dependientes de las anteriores,  $\alpha_\lambda(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ . Éstas se suponen suficientes para describir satisfactoriamente las propiedades nucleares colectivas. A este nuevo conjunto de coordenadas se le conoce como *coordenadas colectivas*. Es importante hacer notar que la relación explícita entre coordenadas nucleónicas y colectivas no se conoce y de hecho ni tan siquiera es necesaria.

Considérese el módulo del radio vector que parametriza la superficie nuclear,

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \alpha_{00} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right), \quad (\text{I.29})$$

donde  $Y_{\lambda\mu}$  son armónicos esféricos y  $R_0$  es el radio de una esfera con idéntico volumen al que encierra la superficie (I.29). Algunos términos de (I.29) pueden ser eliminados, así desarrollando hasta 2° orden el volumen nuclear, se encuentra [EG70],

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 1} |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \quad (\text{I.30})$$

Por otro lado,  $\alpha_{1\mu}$  describe fundamentalmente un movimiento traslacional y, si se considera que el origen de coordenadas coincide con el centro de masa, las tres coordenadas  $\alpha_{1\mu}$  pueden hacerse idénticamente cero. Finalmente si sólo se consideran pequeñas deformaciones, es suficiente con llevar el desarrollo de (I.29) hasta el término cuadrupolar ( $\lambda = 2$ ),

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu}^* Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right). \quad (\text{I.31})$$

La ecuación (I.31) representa el radio vector de una superficie elipsoidal. Los parámetros  $\alpha_{2\mu}^*$  son conocidos como parámetros de deformación.

Es importante recordar que las nuevas coordenadas  $\alpha$  tendrán una serie de propiedades provenientes de que  $R(\theta, \phi)$  debe tener ciertas propiedades bajo rotación y reflexión del sistema de referencia [EG70, RS80]:

- Bajo una transformación de paridad,

$$\hat{P} \alpha_{\lambda\mu} \hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda \alpha_{\lambda\mu}. \quad (\text{I.32})$$

- Bajo rotaciones deben comportarse como los armónicos esféricos,

$$(Y_{\lambda\mu})_{\text{nuevo}} = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu'\mu}^{\lambda}(\Omega) (Y_{\lambda\mu'})_{\text{antiguo}}, \quad (\text{I.33})$$

por tanto,

$$a_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu'\mu}^{\lambda}(\Omega) \alpha_{\lambda\mu'}, \quad (\text{I.34})$$

donde  $a_{\lambda\mu}$  son los parámetros de deformación en el nuevo sistema de referencia y  $\mathcal{D}_{\mu'\mu}^{\lambda}(\Omega)$  son las matrices de rotación.

- Para garantizar que  $R$  sea real se debe verificar,

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda\mu}, \quad (\text{I.35})$$

ya que

$$Y_{\lambda\mu}^* = (-1)^{\mu} Y_{\lambda\mu}. \quad (\text{I.36})$$

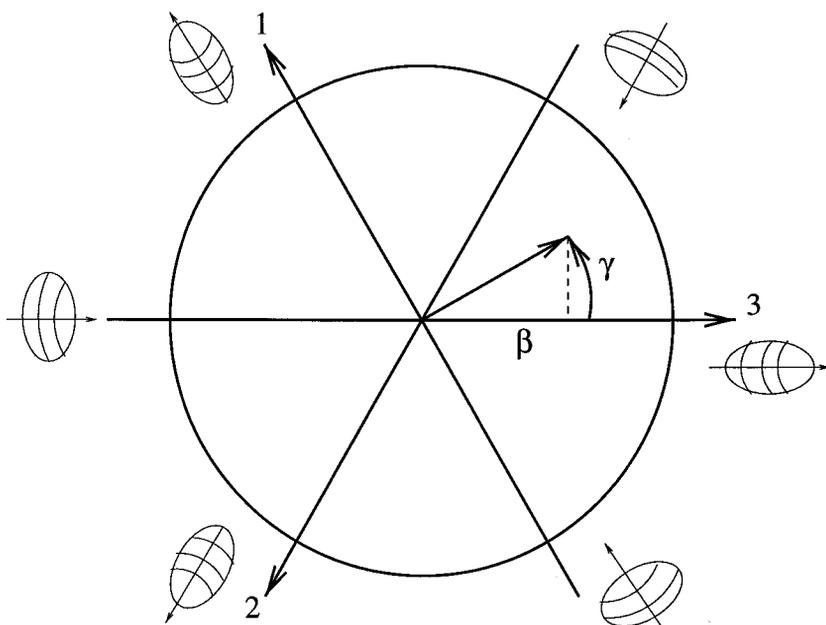


Figura I.4: *Diferentes tipos de elipsoides representados en el plano  $\beta - \gamma$ .*

Aunque existen cinco parámetros de deformación, sólo dos de ellos describen la superficie, mientras que los tres restantes determinan la orientación del elipsoide en el espacio. Mediante una rotación (I.34), se puede hacer coincidir el sistema de referencia con los

ejes principales del núcleo, reduciéndose el número de parámetros de deformación independientes a 2,

$$a_{20}, \quad a_{22} = a_{2-2}, \quad a_{21} = a_{2-1} = 0. \quad (\text{I.37})$$

A éstos habría que añadir los tres ángulos de Euler para fijar la orientación del núcleo. Generalmente no se trabaja con  $a_{20}$  y  $a_{22}$ , sino que se introducen las coordenadas de Hill-Wheeler [HW53], denominadas  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) y  $\gamma$ , cuya definición es,

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma. \quad (\text{I.38})$$

Aunque  $\gamma$  puede variar entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , es suficiente con considerar  $\gamma$  acotada entre  $0^\circ$  y  $60^\circ$ , ya que el resto de situaciones podrá describirse mediante el intercambio de ejes principales. La superficie quedará parametrizada (referida a los ejes principales) en términos de  $\beta$  y  $\gamma$  como,

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left[ 1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left( \cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\phi \right) \right]. \quad (\text{I.39})$$

Pueden distinguirse diferentes situaciones en función de los valores que tomen  $\beta$  y  $\gamma$ :

- $\beta = 0$ . Núcleo esférico.
- $\beta > 0$ . Núcleo deformado.
  - Núcleo con simetría axial (dos semiejes iguales y uno diferente).
    - \* Para  $\gamma$  igual a  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $240^\circ$  se tiene un **elipsoide prolato** (los dos semiejes iguales son menores que el semieje diferente) estando el eje de simetría orientado sobre el eje principal 3, 1 ó 2 respectivamente.
    - \* Para  $\gamma$  igual a  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $300^\circ$  se tiene un **elipsoide oblato** (los dos semiejes iguales son mayores que el semieje diferente) con el eje de simetría orientado sobre el eje principal 2, 3 y 1 respectivamente.
  - Núcleo triaxial (los tres semiejes diferentes).  $\gamma$  no es igual a un múltiplo de  $60^\circ$ .

Para entender la anterior clasificación simplemente hay que tener en cuenta lo que se aleja el elipsoide de la esfericidad sobre cada uno de los semiejes principales [RS80] (ver

figura I.4),

$$\delta R_k = R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right), \quad k = 1, 2, 3. \quad (\text{I.40})$$

## I.2.2 El hamiltoniano

Para núcleos en los que sólo se consideran deformaciones cuadrupolares, se puede construir un hamiltoniano en términos de dichas deformaciones y de sus derivadas temporales,

$$H = \frac{1}{2}B_2 \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 + \frac{1}{2}C_2 \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2, \quad (\text{I.41})$$

donde se ha realizado el desarrollo sólo hasta el primer orden en los parámetros de deformación. Se observa una clara analogía con el hamiltoniano para el oscilador armónico, pudiendo definirse el operador bosónico,

$$\hat{b}_{\mu}^{\dagger} = -\frac{1}{2r} \alpha_{2\mu} + (-1)^{\mu} r \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu}}, \quad (\text{I.42})$$

donde  $r = (\hbar^2/4B_2C_2)$ . Los operadores  $\hat{b}_{\mu}^{\dagger}$  y sus conjugados verifican las usuales reglas de conmutación  $[\hat{b}_{\mu}, \hat{b}_{\mu'}^{\dagger}] = \delta_{\mu\mu'}$ . El hamiltoniano resultante, en función de operadores de creación y destrucción, es,

$$H = \hbar\omega \left( \sum_{\mu} \hat{b}_{\mu}^{\dagger} \hat{b}_{\mu} + \frac{5}{2} \right) \quad (\text{I.43})$$

donde  $\omega = \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}$ . El hamiltoniano (I.41) es, en consecuencia, el de un oscilador armónico en un espacio de cinco dimensiones y geoméricamente corresponde a un núcleo esférico que realiza vibraciones manteniendo la simetría esférica.

Considérese a continuación un hamiltoniano general donde  $V(\alpha_{2\mu})$  es un potencial genérico,

$$H = \frac{1}{2}B_2 \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 + V(\alpha_{2\mu}). \quad (\text{I.44})$$

Un resultado importante es que la parte correspondiente a su energía cinética se puede expresar como [EG70],

$$T = \frac{1}{2}B_2 \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 = \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\hat{M}'_{\kappa}{}^2}{2\mathcal{I}_{\kappa}} + \frac{1}{2} \sum_{\nu} |\dot{\alpha}_{2\nu}|^2. \quad (\text{I.45})$$

$\hat{M}'_{\kappa}$  son las proyecciones del momento angular sobre los ejes principales del elipsoide y

$$\mathcal{I}_{\kappa} = 4B_2\beta^2 \sin\left(\gamma - \kappa\frac{2\pi}{3}\right), \quad \text{con } \kappa = 1, 2, 3. \quad (\text{I.46})$$

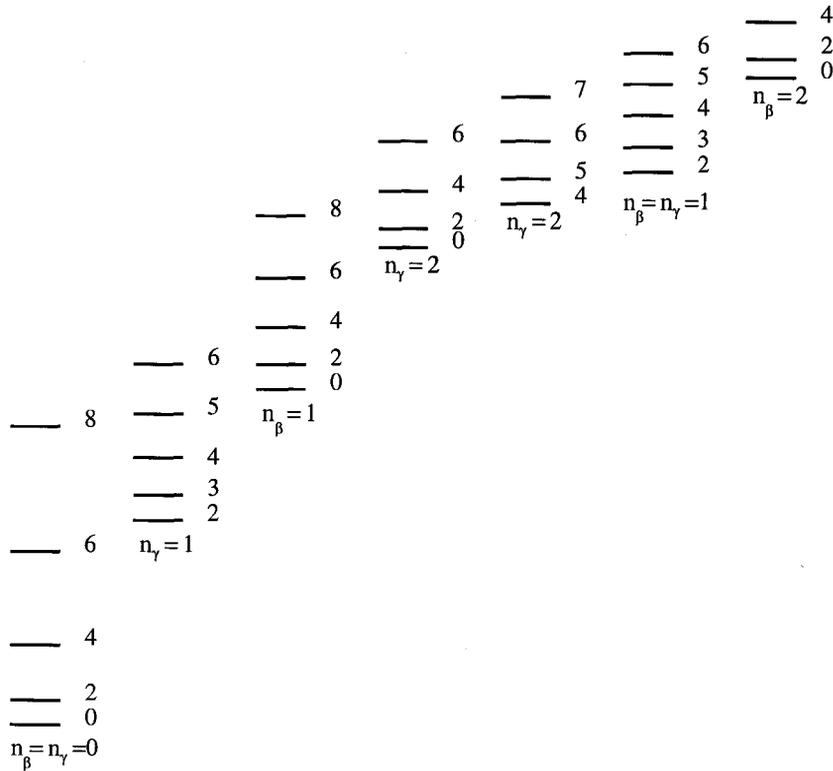


Figura I.5: Espectro esquemático vibro-rotacional

Los parámetros  $a_{2\mu}$  son las coordenadas colectivas también referidas a los ejes principales. La energía cinética queda claramente separada en una parte asociada a la rotación del elipsoide, más otra parte correspondiente a la energía cinética de las vibraciones. Esta separación carece de sentido a menos que el potencial  $V(\alpha_{2\mu})$  dé lugar a mínimos suficientemente pronunciados en  $\beta \neq 0$  y  $\gamma$ . En ese caso, las vibraciones y las rotaciones se encontrarán aproximadamente desacopladas y se obtendrá un espectro rotacional superpuesto al vibracional. Si se obtiene un mínimo para  $\beta = 0$  se habrá recuperado el hamiltoniano (I.41). Es conveniente para el tratamiento de las rotaciones y vibraciones emplear la expresión de (I.44) derivada originalmente por A. Bohr [Boh52, BM53],

$$H_{BM} = \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\hat{M}_{\kappa}^2}{2\mathcal{I}_{\kappa}(\beta, \gamma)} + -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + V(\alpha_{2\mu}). \quad (I.47)$$

Este hamiltoniano será referido en múltiples ocasiones como hamiltoniano de Bohr-Mottelson (BM). Al propio MC se le llama a veces modelo de Bohr-Mottelson.

Si se considera un núcleo deformado axialmente ( $\beta \neq 0, \gamma = 0$ ) que puede realizar

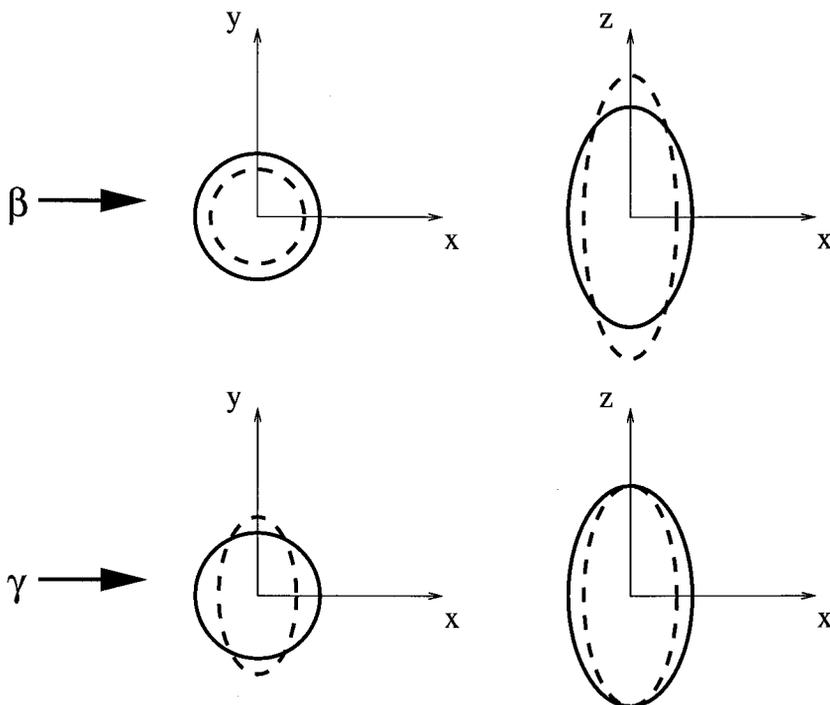


Figura I.6: Representación geométrica de las vibraciones  $\beta$  y  $\gamma$

pequeñas vibraciones en torno a su posición de equilibrio, los autoestados correspondientes a dicho sistema son,

$$\psi_{LKM} = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left( \mathcal{D}_{MK}^L \phi_K(\xi) + (-1)^{L+K} \mathcal{D}_{M-K}^L \phi_{\bar{K}}(\xi) \right), \quad (\text{I.48})$$

donde  $\phi_K(\xi)$  es la parte intrínseca de la función de onda, es decir aquella no dependiente de los ángulos de Euler.  $\phi_{\bar{K}}(\xi)$  corresponde a la rotación de  $\phi_K(\xi)$  un ángulo  $\pi$  en torno a un eje perpendicular al eje de simetría.  $K$  es la proyección del momento angular sobre el eje de simetría. La parte rotacional de la energía será,

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} [L(L+1) - K^2], \quad (\text{I.49})$$

donde  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$  (suponiendo que el eje de simetría es  $\kappa = 3$ ) y los posibles valores de  $L$  para núcleos par-par son,

$$\begin{aligned} L = 0, 2, 4, \dots & \quad \text{para } K = 0 \\ L = K, K+1, \dots & \quad \text{para } K \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Un espectro típico vibro-rotacional puede verse en la figura I.5.

Al permitirse sólo deformaciones cuadrupolares, habrá dos tipos de vibraciones independientes: excitaciones  $\beta$  ( $K = 0$ ) que corresponden a vibraciones que aumentan y reducen la longitud del eje de simetría, manteniendo la simetría axial y excitaciones  $\gamma$  ( $K = 2$ ) correspondientes a vibraciones que modifican el tamaño uno de los ejes perpendiculares al eje de simetría (ver figura I.6). Por supuesto existen también combinaciones de ambas ( $\beta\gamma$ ), o múltiples vibraciones superpuestas ( $\beta^{n\beta}\gamma^{n\gamma}$ ).

## I.3 Los métodos algebraicos

### I.3.1 Simetrías en Mecánica Cuántica. Los grupos de Lie

El concepto de simetría juega un papel esencial en todas las ramas de la Física. La teoría matemática que formula apropiadamente el concepto de simetría para su uso en la resolución de problemas físicos es la **Teoría de Grupos**. Un grupo es un conjunto de elementos  $G = \{\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots\}$  que cumplen las siguientes propiedades:

- *Cierre*. La composición de dos elementos cualesquiera de  $G$ , mediante una operación de composición interna definida previamente, que se escribe genéricamente como  $\cdot$ , da lugar a un elemento perteneciente también a  $G$ .
- *Identidad*. Existe un elemento de  $G$  denominado  $\hat{\mathcal{S}}$  que verifica,

$$\forall \hat{g}_i \in G, \quad \hat{g}_i \cdot \hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}} \cdot \hat{g}_i = \hat{g}_i. \quad (\text{I.51})$$

- *Elemento inverso*. Para todo elemento de  $G$  existe otro elemento denominado elemento inverso, tal que el producto de ambos es la identidad,

$$\hat{g}_i \cdot \hat{g}_i^{-1} = \hat{g}_i^{-1} \cdot \hat{g}_i = \hat{\mathcal{S}}. \quad (\text{I.52})$$

- *Asociatividad*. La ley de composición de elementos de  $G$  es asociativa, es decir se verifica,

$$\forall \hat{g}_i, \hat{g}_j, \hat{g}_k \in G, \quad \hat{g}_i \cdot (\hat{g}_j \cdot \hat{g}_k) = (\hat{g}_i \cdot \hat{g}_j) \cdot \hat{g}_k. \quad (\text{I.53})$$

El número de elementos de  $G$  puede ser tanto finito como infinito. Dentro de los grupos infinitos los hay discretos y continuos. Los grupos continuos son los denominados grupos de Lie (estrictamente todos los grupos continuos no son de Lie, aunque todos los que se analizarán en esta memoria de tesis sí lo serán). Para estos grupos existe un conjunto de operadores  $\{\hat{X}_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots, s$ , denominados generadores, que constituyen el álgebra de Lie. El número de generadores de los grupos continuos más relevantes aparece en la tabla I.1. Todos los elementos del grupo pueden obtenerse mediante la exponenciación de los generadores,

$$\hat{g}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = e^{-i(\sum_{k=1}^s \alpha_k \hat{X}_k)}. \quad (\text{I.54})$$

Los generadores definen un álgebra de Lie si cierran bajo conmutación,

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_k c_{ij}^k \hat{X}_k \quad (\text{I.55})$$

y verifican la identidad de Jacobi,

$$[\hat{X}_i, [\hat{X}_j, \hat{X}_k]] + [\hat{X}_k, [\hat{X}_i, \hat{X}_j]] + [\hat{X}_j, [\hat{X}_k, \hat{X}_i]] = 0. \quad (\text{I.56})$$

El conjunto de constantes  $c_{ij}^k$  son las denominadas constantes de estructura, cuyos valores definen las propiedades del álgebra de Lie y por supuesto del grupo. Unos operadores de especial relevancia son los operadores de Casimir. Éstos por definición conmutan con todos los generadores del grupo. Cada grupo puede tener operadores de Casimir lineales,  $\hat{C}_1[G]$ , cuadráticos  $\hat{C}_2[G]$ , etc., que se construyen a partir de combinaciones lineales, cuadráticas, etc., de los generadores. Como ejemplo se puede analizar el grupo correspondiente a las

Tabla I.1: *Número de generadores de diferentes grupos de Lie.*

Grupo	Nº gen.
$U(n)$	$n^2$
$SU(n)$	$n^2 - 1$
$O(n)$	$\frac{1}{2}n(n - 1)$
$Sp(n)$	$\frac{1}{2}n(n + 1)$

rotaciones en el espacio tridimensional,  $O(3)$ , cuyos generadores son las tres componentes del momento angular  $\{\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\}$  que verifican las bien conocidas reglas de conmutación,

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hat{L}_z, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hat{L}_y, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hat{L}_x. \quad (\text{I.57})$$

El Casimir cuadrático del grupo será,

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \quad (\text{I.58})$$

no existiendo para este grupo operador de Casimir lineal.

Los elementos del grupo, es decir las rotaciones en el espacio tridimensional, pueden expresarse en función de los generadores del grupo,

$$R(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = e^{i(\alpha_x \hat{L}_x + \alpha_y \hat{L}_y + \alpha_z \hat{L}_z)}, \quad (\text{I.59})$$

donde  $\alpha_x, \alpha_y$  y  $\alpha_z$  son los ángulos de rotación en torno a los ejes  $x, y$  y  $z$  respectivamente.

Se dice que la simetría de un hamiltoniano  $\hat{H}$  es  $G$ , que  $\hat{H}$  es invariante bajo  $G$ , o que  $G$  ( $g$ ) es el grupo (**álgebra**) de simetría de  $\hat{H}$  si,

$$[\hat{H}, \hat{X}_i] = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{I.60})$$

Esto quiere decir que  $\hat{H}$  debe estar compuesto por una combinación lineal de operadores de Casimir de  $G$ . La existencia de un álgebra de simetría supone la aparición de degeneraciones, ya que

$$\hat{H}\phi = E\phi \quad \Rightarrow \quad \hat{H}(\hat{X}_i\phi) = E(\hat{X}_i\phi), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{I.61})$$

A la hora de etiquetar los estados se usa una etiqueta que es diferente para cada energía, denominada etiqueta de la representación irreducible ( $\Gamma$ ) y otra etiqueta que sirve para diferenciar los distintos estados degenerados ( $\gamma$ ),

$$\hat{H}|\Gamma\gamma\rangle = E(\Gamma)|\Gamma\gamma\rangle. \quad (\text{I.62})$$

Los generadores no mezclan estados pertenecientes a diferentes representaciones irreducibles ( $\Gamma$ ), sino que sólo pueden cambiar ( $\gamma$ ), verificándose,

$$\hat{X}_i|\Gamma\gamma\rangle = \sum_{\gamma'} a_{\gamma\gamma'}^\Gamma(i)|\Gamma\gamma'\rangle, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, s. \quad (\text{I.63})$$

Esta última ecuación es la definición de representación irreducible. Por tanto, una representación irreducible  $a^\Gamma$  es una matriz, referida a una determinada base  $|\Gamma\gamma\rangle$  que no puede hacerse diagonal por cajas mediante ninguna transformación lineal de dicha base. Se dice entonces que la base  $|\Gamma\gamma\rangle$  porta la representación irreducible  $\Gamma$ . Si la matriz  $a_{\gamma\gamma'}$  se puede hacer diagonal por cajas se dice que la representación es reducible. Es importante señalar que en múltiples ocasiones se emplea el término representación irreducible cuando en realidad uno se refiere a las etiquetas que la caracterizan. El número de etiquetas, linealmente independientes, necesarias para identificar las representaciones irreducibles de un grupo es igual al número de generadores que conmutan, o equivalentemente al número de operadores de Casimir existentes, y se denomina rango del grupo. En la tabla I.2 se enumeran los rangos de diferentes grupos. Volviendo al grupo  $O(3)$ ,  $\Gamma$  es el momento angular  $L$  y  $\gamma$  su proyección sobre un eje,  $M$ , y su rango es 1.

Tabla I.2: *Rango de diferentes grupos de Lie.*

Grupo	Rango
$U(n)$	$n$
$SU(n)$	$n - 1$
$O(n)$ , $n$ par	$\frac{n}{2}$
$O(n)$ , $n$ impar	$\frac{n-1}{2}$
$Sp(n)$	$\frac{n}{2}$

Un tipo de simetría mucho más general que la anterior es el **álgebra dinámica**. En este caso cualquier operador dinámico del sistema se puede expresar como una combinación de generadores del álgebra dinámica. Por ejemplo, el álgebra dinámica de un sistema donde existen  $n$  clases de partículas, sean bosones o fermiones, será  $U(n + 1)$  (el grupo unitario de  $n + 1$  dimensiones).

Finalmente se introduce el concepto de **simetría dinámica**, como una forma particular de romper la invariancia de un hamiltoniano frente a un determinado grupo. Con-

sidérese el siguiente conjunto de subgrupos,

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \supset & G_2 & \supset & G_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_1 & & \Gamma_2 & & \Gamma_3 \end{array}, \quad (\text{I.64})$$

donde  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  son las representaciones irreducibles de  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  respectivamente. Los estados se pueden clasificar mediante las etiquetas de las representaciones irreducibles de los distintos grupos,

$$|\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\gamma_3\rangle, \quad (\text{I.65})$$

donde se supone que es necesario usar la etiqueta adicional  $\gamma_3$  para especificar completamente los estados. El conocimiento de una de estas cadenas de subgrupos proporciona una forma sencilla de obtener una base. Sea un hamiltoniano con simetría  $G_1$ , la manera de romper dinámicamente dicha simetría será añadir al Casimir de  $G_1$ , operadores de Casimir de los subgrupos  $G_2$  y  $G_3$ ,

$$\hat{H}' = a_1\hat{C}[G_1] + a_2\hat{C}[G_2] + a_3\hat{C}[G_3], \quad (\text{I.66})$$

siendo dichos operadores de Casimir de cualquier orden. Ahora el álgebra de simetría del hamiltoniano será  $G_3$ . Este hamiltoniano tiene como principal característica la de seguir siendo diagonal en la base (I.65),

$$\hat{H}'|\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\gamma_3\rangle = [a_1E(\Gamma_1) + a_2E(\Gamma_2) + a_3E(\Gamma_3)]|\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\gamma_3\rangle. \quad (\text{I.67})$$

En resumen, la ruptura dinámica de una simetría produce el desdoblamiento de niveles originalmente degenerados, aunque sin llegar a mezclar estados pertenecientes a distintas representaciones irreducibles. Como ejemplo, la ruptura dinámica del grupo  $SU(3)$  fue empleada con gran éxito por Gell-Mann y Okubo [GM62, Oku62] para clasificar gran variedad de hadrones.

### **I.3.2 El modelo de quasi-espín para la interacción de pairing**

La interacción de *pairing* supone una simplificación de la interacción de contacto o interacción  $\delta$ . Como ya se ha descrito en la sección I.1.3, la interacción de *pairing* tiene la

propiedad de actuar sólo sobre los pares de nucleones acoplados a  $J = 0$ . El hamiltoniano de la interacción expresado en segunda cuantización es,

$$\hat{H}_p = -\frac{G}{4} \sum_{m,m'} a_{jm}^\dagger a_{j-m}^\dagger a_{j-m'} a_{jm'} (-1)^{2j+m+m'}, \quad (\text{I.68})$$

donde  $G$  es la intensidad de la interacción y se ha considerado una única capa con un único tipo de nucleón (protón o neutrón). Para resolver el problema correspondiente a la interacción de  $n$  nucleones en la capa  $j$  dada por el hamiltoniano (I.68), es conveniente definir los operadores,

$$\hat{S}_{+,j} = \sqrt{\Omega_j} A^\dagger(jj; 0, 0), \quad \hat{S}_{-,j} = (S_{+,j})^\dagger, \quad \hat{S}_{0,j} = \frac{\hat{n} - \Omega_j}{2} \quad (\text{I.69})$$

donde

$$A^\dagger(jj'; J, M) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{jj'}}} [a_j^\dagger \times a_{j'}^\dagger]_M^J. \quad (\text{I.70})$$

En las anteriores expresiones el producto tensorial se define como,

$$[a_j^\dagger \times a_{j'}^\dagger]_M^J = \sum_{mm'} \langle jmj'm' | JM \rangle a_{jm}^\dagger a_{j'm'}^\dagger \quad (\text{I.71})$$

y  $\hat{n}$  es el operador de número,

$$\hat{n} = \sum_m a_{jm}^\dagger a_{jm} \quad (\text{I.72})$$

siendo  $a_j^\dagger$  el operador de creación de un nucleón en el orbital  $j$  y  $\Omega_j$  es el tamaño de la capa ( $\Omega_j = j + 1/2$ ). La importancia de estos operadores radica en que cierran bajo conmutación,

$$[\hat{S}_{+,j}, \hat{S}_{-,j}] = 2\hat{S}_{0,j}, \quad [\hat{S}_{+,j}, \hat{S}_{0,j}] = -\hat{S}_{+,j}, \quad [\hat{S}_{-,j}, \hat{S}_{0,j}] = \hat{S}_{-,j}, \quad (\text{I.73})$$

y dichas reglas son las mismas que verifica el momento angular, por lo que esta estructura se conoce como esquema de cuasi-espín [Rac43, Tal93].

Haciendo uso de los operadores de cuasi-espín (I.69) el hamiltoniano de *pairing* (I.68) se puede escribir como,

$$\hat{H}_p = -G \hat{S}_{+,j} \hat{S}_{-,j}. \quad (\text{I.74})$$

Para obtener los autovalores de este hamiltoniano simplemente hay que apoyarse en las propiedades del grupo  $O(3)$ . Así es fácil obtener,

$$\hat{H}_p = -G [\hat{S}_j^2 - \frac{1}{4} (\Omega_j - \hat{n})(\Omega_j + 2 - \hat{n})], \quad (\text{I.75})$$

siendo sus autovalores,

$$E = -G[s(s+1) - \frac{1}{4}(\Omega_j - n)(\Omega_j + 2 - n)], \quad (\text{I.76})$$

donde  $s$  es un número entero o semientero. Su valor queda determinado al aplicar  $\hat{H}_p$  sobre un estado sin pares acoplados a cero, es decir, con el número de nucleones igual a la *seniority*<sup>5</sup> [Tal93],  $\nu$ . Teniendo en cuenta que el resultado debe ser cero, se obtiene

$$s = \frac{1}{2}(\Omega_j - \nu), \quad (\text{I.77})$$

donde  $\nu < \Omega_j$ . Por tanto, expresando la energía en función de  $n$  y  $\nu$ ,

$$E(n, \nu) = -\frac{G}{4}(n - \nu)(2\Omega_j + 2 - n - \nu). \quad (\text{I.78})$$

Los autoestados de  $\hat{H}_p$  son aquellos en los que la *seniority* ( $\nu$ ) está bien definida,

$$|j^n \nu \xi JM\rangle, \quad (\text{I.79})$$

donde  $\xi$  son el resto de números cuánticos necesarios para caracterizar completamente el estado.

### I.3.3 El modelo $SU(3)$ de Elliott

El modelo de Elliott supone en primer lugar la existencia de un esquema de clasificación de la parte orbital de los estados nucleares de acuerdo al grupo  $SU(3)$ . Esta base así obtenida resultará especialmente útil a la hora de diagonalizar el hamiltoniano correspondiente a núcleos ligeros. Para éstos, la interacción espín-órbita es débil y se considera adecuado el acoplamiento  $LS$  o Russel-Saunders.

Considérese un hamiltoniano esquemático donde el potencial promedio es el correspondiente al oscilador armónico,

$$\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^A \left( \frac{p_k^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_k^2 \right). \quad (\text{I.80})$$

---

<sup>5</sup>La *seniority* se define como el número de nucleones no acoplados por pares a  $J = 0$ . En esta memoria se mantendrá el vocablo inglés *seniority*., aunque en la literatura se han empleado traducciones como solera o antigüedad

El álgebra de simetría de este hamiltoniano no es  $O(3)$  sino que es una más amplia, el álgebra  $U(3)$  [JH40]. En total hay 9 operadores que conmutan con  $H_0$ ,

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hbar\omega(\hat{n} + \frac{3}{2}), \quad \hat{L}_\mu = \sum_k (\vec{r}_k \wedge \vec{p}_k)_\mu / \hbar \\ \hat{Q}_\mu &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \left( \sum_k r_k^2 Y_{2\mu}(\theta_k, \phi_k) / b^2 + \sum_k b^2 p_k^2 Y_{2\mu}(\theta_k, \phi_k) / \hbar^2 \right),\end{aligned}\tag{I.81}$$

donde  $\hat{L}_\mu$  son las tres componentes del momento angular y  $\hat{Q}_\mu$  las cinco del momento cuadrupolar que han sido construidas adimensionalmente empleando para ello el parámetro  $b$ . Esta simetría adicional es la responsable de la degeneración descrita en la sección I.1.1. Suele ser más conveniente para evitar problemas con las fases, trabajar con el grupo especial unitario  $SU(3)$ , que es el que resulta de eliminar el operador  $\hat{H}_0$  ( $\hat{n}$ ) (I.81). Las reglas de conmutación del álgebra  $SU(3)$  son,

$$\begin{aligned}[\hat{L}_\mu, \hat{L}_\nu] &= -\sqrt{2} \langle 1\mu 1\nu | 1\mu + \nu \rangle \hat{L}_{\mu+\nu}, \\ [\hat{Q}_\mu, \hat{L}_\nu] &= -\sqrt{6} \langle 2\mu 1\nu | 2\mu + \nu \rangle \hat{Q}_{\mu+\nu}, \\ [\hat{Q}_\mu, \hat{Q}_\nu] &= 3\sqrt{10} \langle 2\mu 2\nu | 1\mu + \nu \rangle \hat{L}_{\mu+\nu}.\end{aligned}\tag{I.82}$$

Los autoestados de  $\hat{H}_0$  se pueden clasificar de acuerdo a las representaciones irreducibles de  $SU(3)$ . Para que los estados queden completamente caracterizados se deben usar las representaciones irreducibles de una cadena de subgrupos de  $SU(3)$ . En el caso de la Física Nuclear donde el momento angular es un buen número cuántico, hay que exigir que el grupo  $O(3)$  esté contenido en la cadena de subgrupos. En consecuencia, la única reducción posible de  $SU(3)$  es,

$$\begin{array}{ccccc}U(3) & \supset & SU(3) & \supset & O(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [f_1 f_2 f_3] & & (\lambda, \mu) & & \kappa L\end{array},\tag{I.83}$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  son las longitudes de las filas de un diagrama de Young para  $U(3)$  [Wyb74, Ham62],  $\lambda = f_1 - f_2$  y  $\mu = f_2 - f_3$  son las etiquetas de  $SU(3)$  definidas de acuerdo a la convención de Elliott [Ell58],  $L$  es el momento angular y  $\kappa$  una etiqueta adicional para caracterizar completamente cada estado. A la etiqueta  $\kappa$  se le denominada genéricamente “etiqueta perdida”. A partir de la reducción (I.83) los estados quedan etiquetados como,

$$|(\lambda, \mu)\kappa L\rangle.\tag{I.84}$$

La base antes descrita (I.84) sólo clasifica la parte orbital de los autoestados de  $\hat{H}_0$ . Para dar lugar a una función de onda totalmente antisimétrica, habrá que realizar el producto de (I.84) por la función de onda apropiada en el espacio de espín-isospín.

La clasificación anterior será relevante cuando el hamiltoniano que se emplee sea aproximadamente diagonal en (I.84), lo cual significa que deberá verificarse de forma aproximada el desacoplamiento entre la parte orbital y la de espín-isospín en la función de onda. La cadena completa de subálgebras que proporcionan las etiquetas de los estados para este caso será,

$$\begin{array}{ccccccc}
 U(4\omega) \supset & (U_L(\omega) \supset & U_L(3) \supset & \dots) & \otimes & (U_{TS}(4) \supset & \dots) \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 [1^n] & & [f'_1 f'_2 f'_3 f'_4] & & & & [f_1 f_2 f_3]
 \end{array}, \quad (I.85)$$

donde  $\omega$  es el tamaño de la capa,  $f'_1, f'_2, f'_3, f'_4$  son las longitudes de las filas del diagrama de Young para  $U_L(\omega)$  y el diagrama de Young para  $U_{TS}(4)$  es el complementario del correspondiente para  $U_L(\omega)$ , de forma que los estados sean totalmente antisimétricos. Se observa a partir de la anterior cadena de subálgebras (I.85) que el punto de partida del modelo de Elliott es la existencia del supermultiplete de Wigner [VI98, Wig37, Hun37]. Los estados correspondientes a la anterior reducción serán,

$$|[1^n][f'_1 f'_2 f'_3 f'_4](\lambda, \mu)_{\kappa L; ST}\rangle. \quad (I.86)$$

Para la construcción de la base es preciso conocer el conjunto de representaciones  $(\lambda, \mu)$  contenidas en cada  $[f'_1 f'_2 f'_3 f'_4]$ , así como el conjunto de  $\kappa L$  contenidas en  $(\lambda, \mu)$ .

Se han realizado diversos cálculos en núcleos ligeros para conocer el solapamiento entre los estados provenientes de un cálculo de SM y los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de  $SU(3)$  [Ell58], obteniéndose en general un buen acuerdo (ver tabla I.3). Esto demuestra que el hamiltoniano empleado es aproximadamente diagonal en la base (I.86).

A pesar del buen acuerdo mostrado en la tabla I.3, se sabe que el álgebra de simetría de un hamiltoniano de SM no es  $SU(3)$ , ya que en general  $[\hat{H}_{SM}, \hat{Q}] \neq 0$ . Por tanto, para explicar esta aparente paradoja se puede suponer que  $[\hat{H}_{SM}, \hat{Q}] \approx 0$  o considerar que  $SU(3)$  es la simetría dinámica del hamiltoniano  $\hat{H}_{SM}$ . Ello supone que las representaciones

Tabla I.3: Comparación entre los estados  $SM$  y los provenientes de la clasificación  $U(3)$ .

Núcleo	T	J	$(\lambda, \mu)L$	% $U(3)$
$^{18}F$	0	1	(40)0	92
	0	3	(40)2	96
	0	5	(40)4	100
$^{18}O$	1	0	(40)0	72
	1	2	(40)2	72
$^{19}F$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(60)0	92
	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	(60)2	74
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	(60)2	74
	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	(60)4	85

irreducibles de  $SU(3)$  ya no están degeneradas, pero  $\hat{H}_{SM}$  no las mezcla, por lo que los estados (I.86) siguen siendo una “buena” base. La forma más simple para este tipo de hamiltoniano fue propuesta por Elliott,

$$\hat{H}_{Eu} = \sum_{k=1}^A \left( \frac{p_k^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r_k^2 \right) - \chi \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \quad (\text{I.87})$$

donde  $\hat{Q}$  es el operador cuadrupolar (I.81) y  $\cdot$  indica el producto escalar. Los estados (I.86) son autoestados del anterior hamiltoniano con autovalores,

$$\begin{aligned} & \hat{H}_{Eu} |[1^n][f'_1 f'_2 f'_3 f'_4](\lambda\mu)\kappa L; ST\rangle \\ &= \left( \hbar\omega(f_1 + f_2 + f_3 + \frac{3}{2}) - 4\chi(\lambda^2 + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + \lambda\mu) + 3\chi L(L+1) \right) \\ & \quad \times |[1^n][f'_1 f'_2 f'_3 f'_4](\lambda\mu)\kappa L; ST\rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.88})$$

Para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que el número de nucleones es  $f_1 + f_2 + f_3$  y que

$$\hat{Q} \cdot \hat{Q} = 4\hat{C}_2[SU(3)] - 3\hat{L}^2. \quad (\text{I.89})$$

$\hat{C}_2[SU(3)]$  es el operador de Casimir cuadrático de  $SU(3)$  con valor medio en la base (I.86),

$$\langle \hat{C}_2[SU(3)] \rangle = \lambda^2 + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + \lambda\mu. \quad (\text{I.90})$$

La importancia del modelo de Elliott radica en que da lugar a la existencia de bandas rotacionales, caracterizadas por  $(\lambda, \mu)\kappa$ , donde los posibles valores de  $L$  son,

$$\begin{aligned} L &= \kappa, \kappa + 1, \dots, \kappa + \max[\lambda, \mu] && \text{para } \kappa \neq 0 \\ L &= \max[\lambda, \mu], \max[\lambda, \mu] - 2, \dots, 0 \text{ ó } 1 && \text{para } \kappa = 0. \end{aligned} \tag{I.91}$$

El número cuántico  $\kappa$  que surge de la estructura algebraica del modelo se asocia con la proyección del momento angular sobre el eje de simetría nuclear, con lo que se obtiene una conexión simple entre el SM y el modelo colectivo [BM53]. Los valores de  $L$  contenidos en cada banda coinciden con los del MC (I.50). Los estados de la base (I.86) corresponden a la mezcla de múltiples configuraciones de nucleones (I.24) [Ell58], lo cual demuestra que la estructura rotacional surge espontáneamente de un cálculo de SM cuando se considera un espacio suficientemente grande y la mezcla de configuraciones.

## I.4 El modelo de bosones en interacción

La descripción del IBM debería estar incluida en la sección correspondiente a los métodos algebraicos, pero debido a su extensión y por tratarse del modelo en el que se enmarca esta memoria de tesis se va a desarrollar de una forma separada. Sobre el IBM existen excelentes referencias [IA87, CW88, Ell85, FVI94], donde se puede encontrar una descripción completa del modelo. En esta introducción no se hará un análisis detallado del IBM, sino que se presenta el modelo en conexión con el SM y el MC. Aquí sólo se muestran algunas de las principales características de la estructura del modelo que serán necesarias para desarrollar otros capítulos de esta memoria y se remite al lector interesado en los detalles a las referencias antes citadas.

El IBM es un modelo que puede entenderse como proveniente de la segunda cuantización de las variables de forma del MC [JJD74], o bien como una truncación y posterior bosonización del espacio del SM [AOIT77, OAIT78]. La hipótesis básica del modelo es considerar que los estados colectivos más bajos en energía de los núcleos par-par pueden describirse en función de un conjunto de bosones con momentos angulares  $L = 0$  y  $L = 2$  [AI75],

$$s^\dagger (s), \quad d_\mu^\dagger (d_\mu), \quad \text{con } \mu = -2, -1, 0, 1, 2. \tag{I.92}$$

Estos operadores suelen expresarse de forma compacta como,

$$\gamma_{lm}^\dagger (\gamma_{lm}), \quad \text{con } l = 0, 2 \text{ y } m = -l, -l + 1, \dots, l. \quad (\text{I.93})$$

Las etiquetas  $lm$  pueden tratarse como un único índice  $i$  que toma valores que van de 1 a 6. Los anteriores operadores verifican las reglas de conmutación bosónicas usuales,

$$[\gamma_{lm}, \gamma_{l'm'}^\dagger] = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad [\gamma_{lm}^\dagger, \gamma_{l'm'}^\dagger] = 0, \quad [\gamma_{lm}, \gamma_{l'm'}] = 0. \quad (\text{I.94})$$

Cualquier operador de un cuerpo (como los operadores de transición) o de dos (como el hamiltoniano) se puede expresar en función de los anteriores operadores bosónicos,

$$\begin{aligned} \hat{O}^{(1)} &= \sum_{ij} \epsilon_{ij} \gamma_i^\dagger \gamma_j, \\ \hat{O}^{(2)} &= \sum_{ijkl} \epsilon_{ijkl} \gamma_i^\dagger \gamma_j^\dagger \gamma_k \gamma_l, \end{aligned} \quad (\text{I.95})$$

donde sólo se han considerado operadores que conserven el número total de bosones.

### I.4.1 Interpretación microscópica del IBM

Aunque originalmente el IBM fue propuesto como un modelo puramente fenomenológico, pronto se vio que los bosones podían ser identificados con pares de nucleones de valencia [AOIT77, OAI78, OAIT78], de la misma forma que pares de electrones (pares de Cooper) son bosones en la teoría BCS.

Existen evidencias experimentales y teóricas [ST76] de que en núcleos par-par medios y pesados las configuraciones que dan una mayor contribución a las excitaciones de baja energía son aquellas constituidas por pares de nucleones acoplados a momento angular 0 (pares  $S$ ) o momento angular 2 (pares  $D$ ) (ver figura I.7). Los pares de nucleones pueden estar formados bien por protones o bien por neutrones. No pueden estar formados por un protón y un neutrón ya que en núcleos medios o pesados las capas de valencia para protones y neutrones están bastante alejadas y, en consecuencia, la formación de dicho par es energéticamente desfavorable. En el caso de núcleos ligeros con  $N \approx Z$  la imagen anterior debe ser modificada y el IBM debe ser reformulado como se verá más adelante.

Los operadores de creación y destrucción de los pares  $S$  y  $D$  se definen como,

$$S^\dagger = \sum_j \alpha_j A^\dagger(jj; 0, 0) \quad (\text{I.96})$$

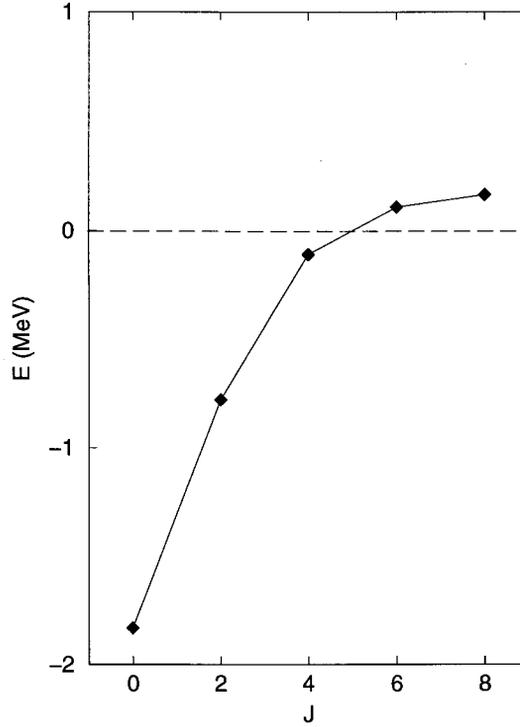


Figura I.7: Elementos de matriz de una interacción efectiva entre nucleones idénticos con las configuraciones de dos protones  $(g_{9/2})^2 J$  [ST76].

y

$$D_M^\dagger = \sum_{jj'} \beta_{jj'} A^\dagger(jj'; 2, M), \quad (I.97)$$

donde  $A^\dagger$  está definido en la ecuación (I.70).

Si se conocen las amplitudes  $\alpha_j$  y  $\beta_{jj'}$ , la función de onda nucleónica será,

$$(S^\dagger)^{N_S} [(D^\dagger)^{N_D}]_{JM} |0\rangle, \quad (I.98)$$

donde  $|0\rangle$  es el estado correspondiente a capas cerradas y  $N_S + N_D = n/2$  ( $n$  es el número total de nucleones de valencia). Los estados (I.98) pueden construirse de múltiples formas, ya que el acoplamiento de los pares  $D$  puede realizarse de muy variadas maneras, y en general los estados obtenidos no serán ortogonales. La forma usual de evitar el problema de la no ortogonalidad es proyectar sobre estados con buena *seniority*  $\nu = 2N_D$ , de forma que el estado  $SD$  se define como,

$$|S^{N_S}, D^{N_D}; JM, \xi\rangle \propto \hat{\mathcal{P}}_F (S^\dagger)^{N_S} [(D^\dagger)^{N_D}]_{JM} |0\rangle, \quad (I.99)$$

donde  $\hat{\mathcal{P}}_F$  es el operador que proyecta sobre *seniority*.

Una vez definido el espacio  $SD$  se debe realizar la proyección de este espacio sobre el espacio bosónico  $sd$ . En primer lugar hay que realizar la proyección del estado de referencia <sup>6</sup>,

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad (\text{I.100})$$

a continuación el estado bosónico proyectado será por definición,

$$|S^{N_S}, D^{N_D}; JM, \xi\rangle \rightarrow \hat{\mathcal{P}}_B (s^\dagger)^{N_s} [(d^\dagger)^{N_d}]_{JM} |0\rangle, \quad (\text{I.101})$$

donde  $\hat{\mathcal{P}}$  es el operador bosónico de proyección sobre los números cuánticos del límite  $U(5)$  (ver sección I.4.2). Este tipo de proyección se denomina proyección OAI (Otsuka, Arima e Iachello) [OAI78] y puede verse esquemáticamente en la figura I.8. Aunque no se ha hecho mención alguna, los pares nucleónicos podrán ser tanto de protones como de neutrones.

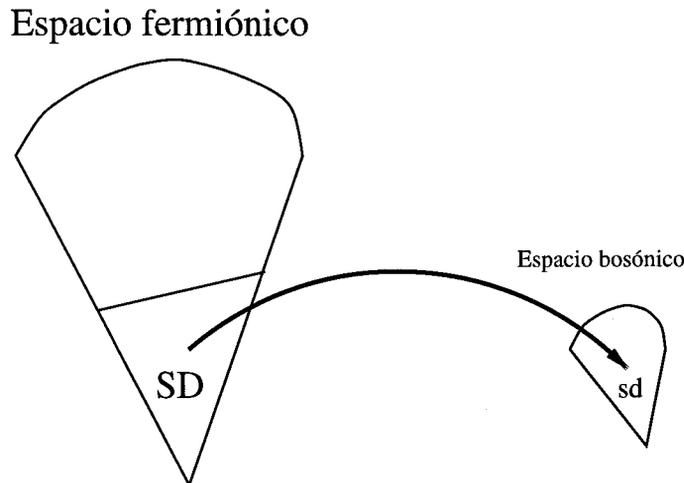


Figura I.8: Representación esquemática de la proyección OAI.

Para que la proyección sea completa se requiere el conocimiento de la imagen bosónica de los operadores. La imagen bosónica  $\mathcal{O}^B$  de un operador fermiónico  $\mathcal{O}^F$  se obtiene imponiendo la siguiente condición,

$$(\psi | \mathcal{O}^B | \psi') = \langle \Psi | \mathcal{O}^F | \Psi' \rangle, \quad (\text{I.102})$$

<sup>6</sup>En el resto de esta memoria de tesis el estado de referencia será denominado  $|0\rangle$ , aunque siempre se tratará de un estado formado por bosones.

donde  $|\psi\rangle$  es la imagen bosónica de  $|\Psi\rangle$ , debiendo verificarse la anterior condición para cualquier par de estados.

## I.4.2 Estructura algebraica del IBM

Considérense las siguientes combinaciones bilineales de operadores bosónicos,

$$\hat{G}_{ij} = \gamma_i^\dagger \gamma_j, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad (\text{I.103})$$

que son un total de 36 al existir 6 tipos de bosones. Estos operadores son los generadores del álgebra  $U(6)$  y satisfacen,

$$[\hat{G}_{ij}, \hat{G}_{kl}] = \hat{G}_{il} \delta_{jk} - \hat{G}_{jk} \delta_{il}. \quad (\text{I.104})$$

$U(6)$  será el **álgebra dinámica del IBM**<sup>7</sup>, pudiendo expresarse cualquier operador dinámico del sistema en función de los generadores de  $U(6)$ .

Ya que el momento angular es un buen número cuántico, es conveniente definir los generadores del grupo con buen momento angular. Los operadores  $\gamma_{lm}^\dagger$  son tensores esféricos de orden  $l$ , es decir se transforman bajo rotaciones como los vectores de un espacio de dimensión  $2l + 1$ ,

$$\mathcal{R} \gamma_{lm}^\dagger \mathcal{R}^{-1} = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^l \gamma_{lm'}^\dagger. \quad (\text{I.105})$$

Los operadores  $\gamma_{lm}$  no se transforman de forma adecuada bajo rotaciones, por lo que hay que definir otro nuevo operador con las propiedades adecuadas respecto a las rotaciones,

$$\tilde{\gamma}_{lm} = (-1)^{l+m} \gamma_{l-m}. \quad (\text{I.106})$$

En general dos tensores esféricos se pueden acoplar para formar un nuevo tensor esférico,

$$\hat{T}_M^L = [\hat{T}^{L_1} \times \hat{T}^{L_2}]_M^L = \sum_{M_1 M_2} \langle L_1 M_1 L_2 M_2 | LM \rangle \hat{T}_{M_1}^{L_1} \hat{T}_{M_2}^{L_2}, \quad (\text{I.107})$$

---

<sup>7</sup>Aunque en notación estándar los grupos se designan con letras mayúsculas y las álgebras asociadas con minúsculas, en esta memoria, así como en la mayor parte de la bibliografía del IBM, no se hace distinción entre álgebra y grupo, empleándose siempre letras mayúsculas para designar a ambos.

donde  $\langle \dots | \dots \rangle$  son coeficientes de Clebsch-Gordan. En particular, podrán definirse los generadores del IBM con buen momento angular [Tal93],

$$\hat{G}_{LM}(l, l') = [\gamma_l^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l'}]_M^L, \quad l, l' = 0, 2. \quad (\text{I.108})$$

Éstos verifican las siguientes reglas de conmutación [IA87],

$$\begin{aligned} [\hat{G}_{LM}(l, l'), \hat{G}_{L'M'}(l'', l''')] = & \\ & \sum_{L''M''} \sqrt{2L+1} \sqrt{2L'+1} \langle LML' M'' | L'' M'' \rangle (-1)^{L-L'} \\ & \times \left[ (-1)^{L+L'+L''} \begin{Bmatrix} L & L' & L'' \\ l''' & l & l' \end{Bmatrix} \delta_{l''l'''} \hat{G}_{L''M''}(l, l''') \right. \\ & \left. - \begin{Bmatrix} L & L' & L'' \\ l'' & l' & l \end{Bmatrix} \delta_{l''l'''} \hat{G}_{L''M''}(l'', l') \right], \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

donde las cantidades  $\{:::\}$  son símbolos  $6j$  de Wigner. Se observa que estos conmutadores siguen cerrando bajo conmutación y que, por tanto, forman un álgebra. A esta forma del álgebra se la conoce como representación de Racah. La forma explícita de los 36 generadores en forma acoplada es,

$$\begin{aligned} \hat{G}_{00}(0, 0) &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^0 \\ \hat{G}_{00}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^0 \\ \hat{G}_{1\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1 \\ \hat{G}_{2\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2 \\ \hat{G}_{3\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3 \\ \hat{G}_{4\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^4 \\ \hat{G}_{2\mu}(2, 0) &= [d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^2 \\ \hat{G}_{2\mu}(0, 2) &= [s^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2. \end{aligned} \quad (\text{I.110})$$

Una vez conocida el álgebra dinámica del problema, se requiere conocer el conjunto de subálgebras posibles. El momento angular es un buen número cuántico, por lo que el álgebra de las rotaciones en el espacio tridimensional,  $O(3)$ , debe ser una subálgebra contenida en cualquier cadena de álgebras. Bajo esta restricción las únicas descomposiciones posibles de  $U(6)$  son [IA87]:

- I. Una subálgebra de  $U(6)$  que resulta trivial de obtener es  $U(5)$  ya que proviene de eliminar de entre los generadores (I.110) aquellos que contengan  $s^\dagger(\tilde{s})$ ,

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{00}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^0 \\
\hat{G}_{1\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1 \\
\hat{G}_{2\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2 \\
\hat{G}_{3\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3 \\
\hat{G}_{4\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^4.
\end{aligned} \tag{I.111}$$

De estos 25 generadores existen 10 que cierran bajo conmutación y forman el álgebra  $O(5)$ . Éstos son sus generadores,

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{1\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1 \\
\hat{G}_{3\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3.
\end{aligned} \tag{I.112}$$

$O(5)$  contiene como subálgebra a  $O(3)$ , cuyos generadores son,

$$\hat{G}_{1\mu}(2, 2) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1. \tag{I.113}$$

Por tanto la cadena de subálgebras I con las respectivas etiquetas de las representaciones irreducibles correspondientes es,

$$\begin{array}{ccccccc}
U(6) & \supset & U(5) & \supset & O(5) & \supset & O(3) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
[N] & & n_d & & \tau & \nu_\Delta & L
\end{array} \tag{I.114}$$

Los estados quedarán completamente caracterizados por<sup>8</sup>,

$$|[N] n_d \tau \nu_\Delta L\rangle. \tag{I.115}$$

En un caso más general se precisan un mayor número de etiquetas, pero al tratarse en IBM con estados totalmente simétricos, las etiquetas indicadas son suficientes. Hallar los posibles valores de las anteriores etiquetas es un problema estándar de

---

<sup>8</sup>Hay que notar que siempre se puede añadir una etiqueta  $M$  asociada al subgrupo  $O(2)$ . Por simplicidad en la notación, en esta memoria de tesis nunca se escribirá la etiqueta  $M$ .

teoría de grupos [Wyb74] y en este caso se obtiene,

$$\begin{aligned}
 n_d &= N, N-1, \dots, 1, 0 \\
 \tau &= n_d, n_d-2, \dots, 1 \text{ ó } 0 \\
 \nu_\Delta &= 1, 2, \dots, \text{ verificándose } \Lambda = \tau - 3\nu_\Delta \geq 0 \\
 L &= 2\Lambda, 2\Lambda-2, 2\Lambda-3, \dots, \Lambda+1, \Lambda
 \end{aligned} \tag{I.116}$$

$n_d$  es el número de bosones  $d$  presentes en el estado,  $\tau$  es el número de bosones  $d$  no acoplados por pares a 0 (equivalente a la *seniority* para fermiones) y finalmente  $\nu_\Delta$  es el número de trios de bosones  $d$  acoplados a 0. Esta última etiqueta es una “etiqueta perdida” ya que no está asociada al autovalor de ningún operador de Casimir. Es necesario emplearla para especificar completamente el estado (ver sección I.3.1). Como ejemplo de los anteriores números cuánticos se muestran sus valores para  $N = 3$  en la tabla I.4.

Tabla I.4: Valores de los números cuánticos para la cadena de subálgebras de tipo I con  $N = 3$

$n_d$	$\tau$	$\nu_\Delta$	$L$
0	0	0	0
1	1	0	2
2	2	0	4,2
		0	0
3	3	0	6,4,3
		1	0
	1	0	2

- II. En este caso la obtención de las subálgebras de  $U(6)$  resulta más complicada que en el caso anterior. Considérense el conjunto de generadores (véase (I.81)),

$$\begin{aligned}
 \hat{G}_{00}(0,0) + \sqrt{5}\hat{G}_{00}(2,2) &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^0 + \sqrt{5}[d^\dagger \times \tilde{d}]_0^0 \\
 \hat{G}_{1\mu}(2,2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1 \\
 \hat{G}_{2\mu}(0,2) + \hat{G}_{2\mu}(2,0) \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\hat{G}_{2\mu}(2,2) &= \\
 &= [s^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2 + [d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^2 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}[d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2
 \end{aligned} \tag{I.117}$$

Dichos generadores cerraran bajo el álgebra  $U(3)$  o el álgebra  $SU(3)$  si se elimina el primero de los generadores, que simplemente da el número total de bosones (ver (I.81)). La única subálgebra contenida en  $SU(3)$  es  $O(3)$  cuyos generadores son (I.113).

La cadena de subgrupos con las respectivas etiquetas de las representaciones irreducibles de cada uno es,

$$\begin{array}{ccccccc} U(6) & \supset & SU(3) & \supset & O(3) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ [N] & & (\lambda, \mu) & \kappa & L & & \end{array} \quad (I.118)$$

Los estados quedan completamente caracterizados por las etiquetas,

$$|[N] (\lambda, \mu) \kappa L\rangle. \quad (I.119)$$

Los posibles valores de las distintas etiquetas vienen se pueden tomar directamente del modelo  $SU(3)$  de Elliott [Ell58] y pueden resumirse en,

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) &= (2N - 4n_x - 6n_y, 2n_x), \\ &\text{con } n_x, n_y = 0, 1, \dots, \text{ verificándose } 2N - 4n_x - 6n_y \geq 0 \\ \kappa &= \min\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\} - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0 \\ L &= \kappa, \kappa + 1, \dots, \kappa + \max\{\lambda, \mu\}, \quad \text{para } \kappa \neq 0 \\ L &= 0, 2, 4, \dots, \max\{\lambda, \mu\}, \quad \text{para } \kappa = 0. \end{aligned} \quad (I.120)$$

En este caso  $\kappa$  es la “etiqueta perdida”. La base que se obtiene con las anteriores etiquetas es la denominada base de Elliott [Ell58], que presenta el defecto de ser no ortogonal. Realizando una conveniente ortogonalización de la base de Elliott se obtiene la base de Vergados [Ver68], para la que se define la etiqueta  $K$  que es una combinación de diferentes valores de  $\kappa$ . Los valores de las anteriores etiquetas en la base de Elliott, para  $N = 3$ , se dan en la tabla I.5.

- III. Finalmente se considera el subconjunto de generadores de  $U(6)$ ,

$$\begin{aligned} \hat{G}_{1\mu}(2, 2) &= [d^\times \tilde{d}]_\mu^1 \\ \hat{G}_{3\mu}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3 \\ \hat{G}_{2\mu}(0, 2) + \hat{G}_{2\mu}(2, 2) &= [s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^2 \end{aligned} \quad (I.121)$$

Tabla I.5: Valores de los números cuánticos para la cadena de subálgebras de tipo II (base de Elliott) con  $N = 3$

$(\lambda, \mu)$	$\kappa$	$L$
(6, 0)	0	0,2,3,4
(2, 2)	2	2,3,4
	0	0,2
(0, 0)	0	0

Éstos cierran bajo el álgebra  $O(6)$  del IBM. De estos 15 generadores, los 10 primeros cierran bajo el álgebra  $O(5)$  (I.112) y de ellos se pueden separar 3 (I.113) que forman el álgebra  $O(3)$ . La cadena de subálgebras con las respectivas etiquetas de las distintas representaciones irreducibles es,

$$\begin{array}{ccccccc}
 U(6) & \supset & O(6) & \supset & O(5) & \supset & O(3) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 [N] & & \sigma & & \tau & \nu_{\Delta} & L
 \end{array} \quad (I.122)$$

Los estados quedan completamente caracterizados por las etiquetas,

$$|[N] \sigma \tau \nu_{\Delta} L]. \quad (I.123)$$

Los valores posibles de las distintas etiquetas son,

$$\begin{aligned}
 \sigma &= N, N-1, \dots, 1, 0 \\
 \tau &= \sigma, \sigma-1, \dots, 0, 1
 \end{aligned} \quad (I.124)$$

Fijado  $\tau$ , los valores posibles de  $\nu_{\Delta}$  y  $L$  coinciden con los dados para la cadena de subálgebras del tipo I. En la tabla I.6 se muestran los valores de las distintas etiquetas para la cadena de subálgebras III con  $N = 3$ .

Resulta de gran utilidad conocer la expresión de los operadores de Casimir de los grupos antes nombrados, así como de otros operadores que se utilizarán posteriormente,

$$\hat{C}_1[U(6)] = \sum_{i=1}^6 \hat{G}_{ii} = \hat{n}_s + \hat{n}_d = \hat{N}, \quad (I.125)$$

Tabla I.6: Valores de los números cuánticos para la cadena de subálgebras de tipo III con  $N = 3$

$\sigma$	$\tau$	$\nu_\Delta$	$L$
3	3	0	6,4,3
		1	0
	2	0	4,2
	1	0	2
	0	0	0
1	1	0	2
	0	0	0

$$\hat{C}_2[U(6)] = \sum_{i,j=1}^6 \hat{G}_{ij} \hat{G}_{ji} = \hat{N}(\hat{N} + 5), \quad (\text{I.126})$$

$$\hat{C}_1[U(5)] = \sum_m d_m^\dagger d_m = \hat{n}_d, \quad (\text{I.127})$$

$$\hat{C}_2[U(5)] = \hat{n}_d(\hat{n}_d + 4), \quad (\text{I.128})$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_2[O(6)] &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 (\hat{G}_{ij} \hat{G}_{ji})(\hat{G}_{ji} \hat{G}_{ij}) \\ &= \hat{N}(\hat{N} + 4) - 4\hat{P}^\dagger \hat{P}, \end{aligned} \quad (\text{I.129})$$

$$\hat{C}_2[O(5)] = \hat{n}_d(\hat{n}_d + 3) - (d^\dagger \cdot d^\dagger)(\tilde{d} \cdot \tilde{d}), \quad (\text{I.130})$$

$$\hat{C}_2[O(3)] = \hat{L}^2 = 10\hat{G}_1(2, 2) \cdot \hat{G}_1(2, 2), \quad (\text{I.131})$$

$$\hat{C}_2[SU(3)] = 2\hat{Q}^2 + \frac{3}{4}\hat{L}^2, \quad (\text{I.132})$$

donde  $\cdot$  es el producto escalar. Las expresiones de  $\hat{P}^\dagger$ ,  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  son,

$$\hat{P}^\dagger = \frac{1}{2}(d^\dagger \cdot d^\dagger \pm s^\dagger s^\dagger) \quad (\text{I.133})$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\tilde{d} \cdot \tilde{d} \pm \tilde{s} \tilde{s}) \quad (\text{I.134})$$

$$\hat{Q}_m = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger \tilde{s})_m^2 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}(d^\dagger \tilde{d})_m^2. \quad (\text{I.135})$$

Nótese la diferencia entre las expresiones (I.132) y (I.89); este hecho se debe a la diferente definición del  $\hat{Q}$  bosónico (I.135) y del fermiónico (I.81).

Resulta útil conocer las expresiones de los valores esperados de los anteriores opera-

dores de Casimir en la base (I, II ó III) donde sean diagonales,

$$\langle \hat{C}_1[U(6)] \rangle = N, \quad (\text{I.136})$$

$$\langle \hat{C}_2[U(6)] \rangle = N(N + 5), \quad (\text{I.137})$$

$$\langle \hat{C}_1[U(5)] \rangle = n_d, \quad (\text{I.138})$$

$$\langle \hat{C}_2[U(5)] \rangle = n_d(n_d + 4), \quad (\text{I.139})$$

$$\langle \hat{C}_2[O(6)] \rangle = \sigma(\sigma + 4), \quad (\text{I.140})$$

$$\langle \hat{C}_2[O(5)] \rangle = \tau(\tau + 3), \quad (\text{I.141})$$

$$\langle \hat{C}_2[O(3)] \rangle = L(L + 1), \quad (\text{I.142})$$

$$\langle \hat{C}_2[SU(3)] \rangle = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu. \quad (\text{I.143})$$

Cualquiera de las cadenas de subgrupos (I, II ó III) proporciona una base en la que diagonalizar el hamiltoniano IBM. Consecuentemente, los estados del IBM se pueden escribir como combinación lineal de estados de cualquiera de las tres bases. No sólo los estados pueden caracterizarse con las etiquetas de una cadena de subgrupos, sino que lo mismo puede hacerse con los operadores. Los operadores caracterizados de esta forma se denominan operadores tensoriales,

$$\hat{T}^{[N] n_d \tau \nu_\Delta L}, \quad (\text{I.144})$$

$$\hat{T}^{[N] (\lambda, \mu) \kappa L}, \quad (\text{I.145})$$

$$\hat{T}^{[N] \sigma \tau \nu_\Delta L}. \quad (\text{I.146})$$

Dichos operadores se comportan bajo las operaciones de simetría de los distintos grupos como los estados con las mismas etiquetas. A la hora de calcular elementos de matriz de operadores tensoriales se puede usar el teorema de Wigner-Eckart generalizado [Ham62, Wyb74]. Como ejemplo, el momento angular  $\hat{L}$  es un operador tensorial caracterizado por  $L = 1$ .

### I.4.3 Las simetrías dinámicas

El hamiltoniano IBM (con interacciones hasta dos cuerpos y que conserva el número total de bosones) puede expresarse como una combinación lineal de los operadores de Casimir

de todos los subgrupos de  $U(6)$  hallados en la sección precedente I.4.2 [IA87, FVI94]. Dicho hamiltoniano depende de 6 parámetros,

$$\hat{H} = \epsilon\hat{C}_1[U(5)] + \alpha\hat{C}_2[U(5)] + \beta\hat{C}_2[O(5)] + \gamma\hat{C}_2[O(3)] + \delta\hat{C}_2[SU(3)] + \eta\hat{C}_2[O(6)], \quad (\text{I.147})$$

donde no aparecen los operadores de Casimires de  $U(6)$  debido a que sólo suponen un cambio en el origen de energía. Aparte de esta expresión del hamiltoniano existen otras alternativas que serán presentadas a lo largo de esta memoria. La utilidad de (I.147) radica en que permite presentar las distintas simetrías dinámicas del IBM, también conocidas como límites de simetría. A continuación se estudian los tres límites de simetría del IBM, para los cuales se puede resolver de forma analítica el complejo problema de la estructura nuclear.

- *Simetría dinámica  $U(5)$ . Límite vibracional.* Corresponde a la cadena de subgrupos (I.114) y por tanto al hamiltoniano,

$$\hat{H}_{U(5)} = \epsilon\hat{C}_1[U(5)] + \alpha\hat{C}_2[U(5)] + \beta\hat{C}_2[O(5)] + \gamma\hat{C}_2[O(3)], \quad (\text{I.148})$$

siendo sus autoestados (I.115) y sus autoenergías,

$$E_{U(5)} = \epsilon n_d + \alpha n_d(n_d + 4) + \beta\tau(\tau + 3) + \gamma L(L + 1). \quad (\text{I.149})$$

Un espectro típico puede observarse en la figura I.9, donde destaca el carácter vibracional del espectro, es decir se tiene una distribución de energías análoga a la de un oscilador armónico perturbado con un cierto grado de anarmonicidad, donde cada fonón vibracional porta un momento angular  $L = 2$ .

- *Simetría dinámica  $SU(3)$ . Límite rotacional.* Corresponde a la cadena de subgrupos (I.118) y por tanto al hamiltoniano,

$$\hat{H}_{SU(3)} = \delta\hat{C}_2[SU(3)] + \gamma\hat{C}_2[O(3)], \quad (\text{I.150})$$

siendo (I.119) sus autoestados y sus autoenergías,

$$E_{SU(3)} = \delta(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + \gamma L(L + 1). \quad (\text{I.151})$$

Un espectro típico puede observarse en la figura I.10, donde destaca el carácter rotacional del espectro, es decir existen un conjunto de bandas donde las energías son proporcionales a  $L(L + 1)$ .

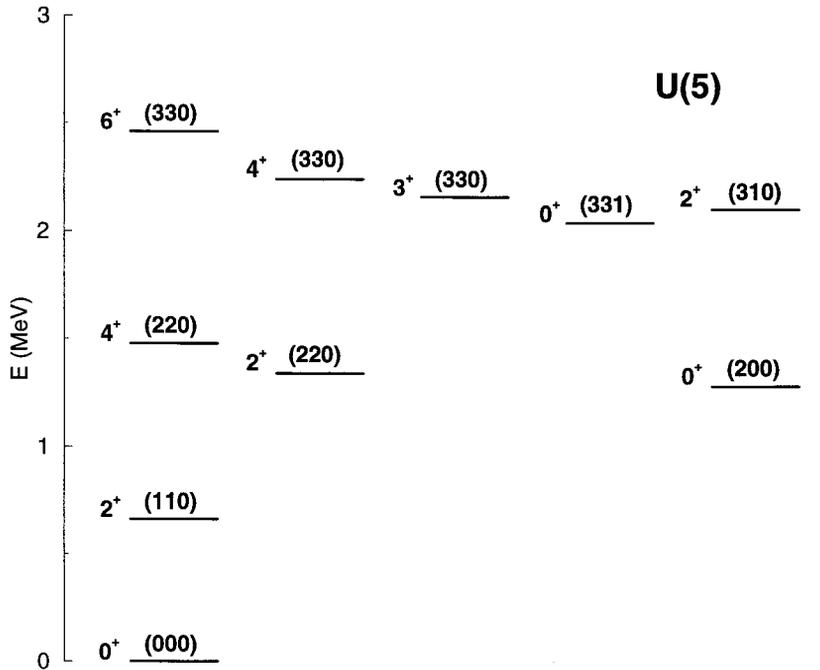


Figura I.9: Espectro típico  $U(5)$ . Se ha empleado el hamiltoniano  $\hat{H}_{U(5)} = 0.4\hat{C}_1[U(5)] + 0.04\hat{C}_2[U(5)] + 0.01\hat{C}_2[O(3)]$  con todos los coeficientes en MeV y  $N = 3$ . Los números entre paréntesis corresponden a  $(n_d\tau\nu_\Delta)$ .

- *Simetría dinámica  $O(6)$ . Límite  $\gamma$ -inestable.* Corresponde a la cadena de subgrupos (I.122) y por tanto al hamiltoniano,

$$\hat{H}_{O(6)} = \eta\hat{C}_2[O(6)] + \beta\hat{C}_2[O(5)] + \gamma\hat{C}_2[O(3)], \quad (\text{I.152})$$

siendo sus autoestados (I.123) y sus autoenergías,

$$E_{O(6)} = \eta\sigma(\sigma + 4) + \beta\tau(\tau + 3) + \gamma L(L + 1). \quad (\text{I.153})$$

Un espectro típico puede observarse en la figura I.11, éste es equivalente al de un rotor que tiene un potencial plano en  $\gamma$  (I.38).

Cabe destacar que aunque las situaciones anteriores son casos límite, se resuelven de una forma analítica, sin necesidad de diagonalizar ninguna matriz ni resolver ninguna ecuación diferencial. Esto pone de manifiesto la potencia de la teoría de grupos. La importancia de este hecho es muy grande ya que existen núcleos cuyo espectro se ajusta

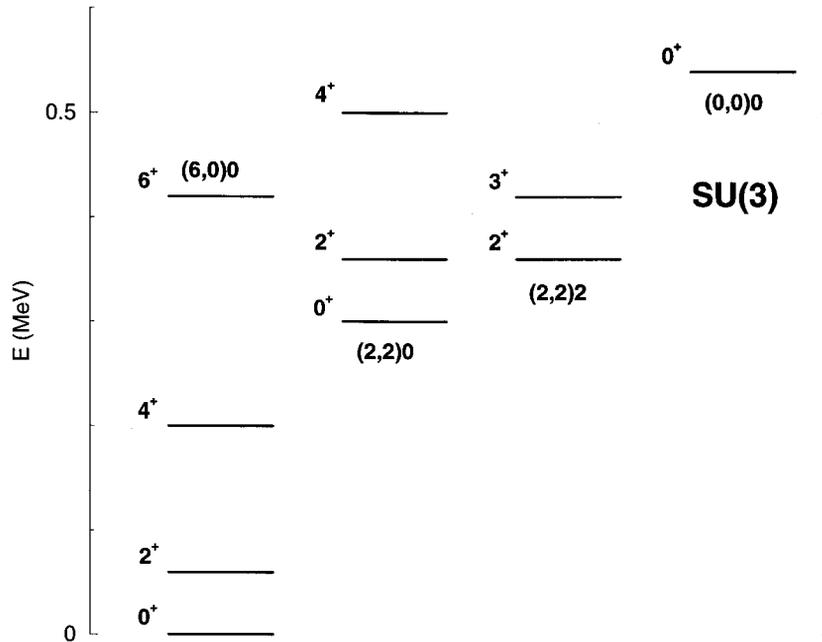


Figura I.10: Espectro típico  $SU(3)$ . Se ha empleado el hamiltoniano  $\hat{H}_{SU(3)} = -0.006\hat{C}_2[SU(3)] + 0.01\hat{C}_2[O(3)]$ . con todos los coeficientes en MeV y  $N = 3$ . Las etiquetas adicionales corresponden  $(\lambda, \mu)\kappa$ .

bastante bien a alguno de los anteriores límites. Así por ejemplo, los núcleos próximos a capas cerradas suelen ser vibracionales, los situados en mitad de una capa suelen ser rotacionales, mientras que aquellos donde los protones se consideran partículas y los neutrones huecos, o viceversa, suelen corresponder a núcleos  $\gamma$ -inestable [IA87]. En situaciones intermedias debe diagonalizarse la matriz hamiltoniana en cualquiera de las tres bases (I.115,I.119,I.123) y para ello existen diferentes códigos [Sch76, VIb]. Las dimensiones involucradas en estos casos son relativamente pequeñas y no suelen ser superiores a 500. En general, la base que se utiliza para diagonalizar es (I.115), ya que es la más fácil de contruir e implementar en un programa numérico.

#### I.4.4 Operadores de transición electromagnética

Hasta este momento el único operador con el que se ha tratado ha sido el hamiltoniano. No obstante, ya que el álgebra dinámica del IBM es  $U(6)$ , es posible contruir cualquier otro operador, en particular los operadores de transición electromagnética.

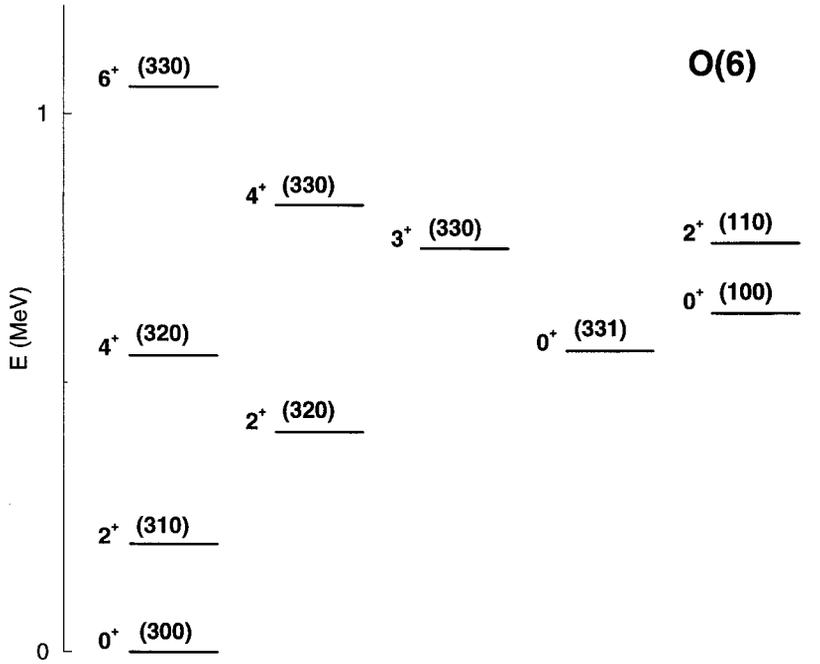


Figura I.11: Espectro típico  $O(6)$ . Se ha empleado el hamiltoniano  $H = -0.035\hat{C}_2[O(6)] + 0.035\hat{C}_2[O(5)] + 0.01\hat{C}_2[O(3)]$  con todos los coeficientes en MeV y  $N = 3$ . Los números entre paréntesis corresponden a  $(\sigma\tau\nu_\Delta)$ .

En general, a la hora de construir estos operadores sólo se consideran términos lineales, y por tanto los operadores de transición serán combinaciones lineales de los generadores del grupo  $U(6)$  (I.103). En consecuencia, esos operadores no cambian el número de bosones del estado. Los operadores de transición electromagnética poseen una multipolaridad bien definida, resultando más conveniente a la hora de definirlos emplear los generadores en forma acoplada (I.108). El operador de transición más relevante en Física Nuclear es el operador  $E2$ , el cual es un tensor de rango 2, cuya definición es,

$$\hat{T}(E2) = e\left((s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s})^{(2)} + \chi(d^\dagger \times \tilde{d})^{(2)}\right), \quad (\text{I.154})$$

donde  $e$  es la carga efectiva y  $\chi$  es el parámetro de estructura del operador. El observable físico asociado a la transición  $E2$  es la magnitud  $B(E2)$  o el momento cuadrupolar. Las probabilidades reducidas de transición  $B(E2)$  se definen como,

$$B(E2; L \rightarrow L') = \frac{1}{2L+1} |\langle L || \hat{T}(E2) || L' \rangle|^2, \quad (\text{I.155})$$

donde  $||$  representa el elemento de matriz reducido en momento angular.

A la vista de la definición (I.154) pueden obtenerse algunas reglas de selección generales y otras particulares de los límites de simetría. El primer término de (I.154) cambia el número de bosones  $d$  y  $s$  en una unidad, mientras que el segundo los deja invariantes, de forma que para que una transición no esté prohibida se debe verificar,

$$\Delta n_s = -\Delta n_d = \pm 1, \quad \text{ó} \quad \Delta n_s = \Delta n_d = 0. \quad (\text{I.156})$$

En lo referente a los límites de simetría, para el límite  $U(5)$  sería lógico tomar como operador  $\hat{T}(E2)$  su generador,  $\hat{T}(E2) = (d^\dagger \times \tilde{d})^{(2)}$ , pero esto está en total desacuerdo con las transiciones observadas en los núcleos vibratoriales. Habitualmente se toma el operador

$$\hat{T}(E2)_{U(5)} = e(s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s})^{(2)}, \quad (\text{I.157})$$

que corresponde a  $\chi = 0$ . Este operador cambia el número de bosones  $d$  ( $s$ ) en una unidad y el número cuántico  $\tau$  también en una unidad, dando lugar a las siguientes reglas de selección,

$$\Delta n_s = -\Delta n_d = \pm 1, \quad \Delta \tau = \pm 1 \quad (\text{I.158})$$

Para el límite  $SU(3)$  se toma como operador de transición su generador,

$$\hat{T}(E2)_{SU(3)} = e\left((s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}(d^\dagger \times \tilde{d})^{(2)}\right). \quad (\text{I.159})$$

Ya que un generador no puede mezclar diferentes representaciones irreducibles, la regla de selección para este límite es

$$\Delta \lambda = \Delta \mu = 0 \quad (\text{I.160})$$

Finalmente para el límite  $O(6)$  también se toma como operador de transición uno de sus generadores,

$$\hat{T}(E2)_{O(6)} = e(s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s})^{(2)}. \quad (\text{I.161})$$

Este operador no mezcla, por tanto, representaciones irreducibles y da lugar a las siguientes reglas de selección,

$$\Delta \sigma = 0, \quad \Delta \tau = \pm 1. \quad (\text{I.162})$$

### I.4.5 Los estados coherentes y el IBM

Una importante característica del IBM es que permite establecer una conexión simple entre el SM y el MC [Boh52, BM53, BM75] (ver sección I.2). En la sección I.4.1 ya se estudió la relación entre el SM y el IBM a través de la interpretación microscópica de este último. En esta sección se definirán, en el contexto del IBM, unas variables “macroscópicas” conectadas con las que se emplean en el MC, usando para ello los denominados estados coherentes (EC) [Gil74]. Ello proporciona una imagen geométrica del IBM.

El empleo de EC para definir variables de forma en el IBM se realizó por vez primera en los trabajos [GK80a, GK80b] y [DS80, DSI80], donde se usaron los llamados estados coherentes proyectivos o estados intrínsecos. Mediante ellos se define el estado fundamental parametrizado en función de variables geométricas que se determinan minimizando la energía de dicho estado. La forma propuesta para el estado intrínseco en IBM es,

$$|N; \alpha_\mu\rangle = \left( s^\dagger + \sum_\mu \alpha_\mu d_\mu^\dagger \right)^N |0\rangle, \quad (\text{I.163})$$

donde  $\alpha_\mu$  son 5 variables, que son complejas cuando se estudian problemas dinámicos y reales cuando sólo se estudian propiedades estáticas. Las anteriores variables están relacionadas con las variables intrínsecas  $a_\mu$  (referidas a los ejes principales) a través de las matrices de rotación y de la ecuación (I.34). Estas variables presentan las mismas propiedades de simetría que las variables  $a_\mu$  definidas en el MC. Aquí también se pueden definir variables de forma  $\beta$  y  $\gamma$  (I.38),

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma, \quad a_{\pm 1} = 0. \quad (\text{I.164})$$

El estado intrínseco referido a los ejes principales y expresado en términos de  $\beta - \gamma$  será,

$$|N; \beta, \gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \left( s^\dagger + \beta \cos \gamma d^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma (d_2^\dagger + d_{-2}^\dagger) \right)^N |0\rangle. \quad (\text{I.165})$$

Este estado posee dos importantes propiedades, la primera de ellas es que todos los estados del IBM (en el sistema laboratorio) están contenidos en él. De forma que cualquiera de ellos puede obtenerse mediante proyección del estado intrínseco. En particular, para la base del límite  $U(5)$  se verifica [GK80a]

$$\begin{aligned} |N n_d \tau \nu_\Delta L M\rangle &= \int d\Omega \int_0^\infty \beta^4 d\beta \int_0^{\pi/3} \sin 3\gamma d\gamma \\ &\times f_{N n_d \tau \nu_\Delta L M}(\beta, \gamma, \Omega) |N; \beta, \gamma, \Omega\rangle, \end{aligned} \quad (\text{I.166})$$

donde  $\Omega$  son los ángulos de Euler,  $f_{Nn_d\tau\nu\Delta LM}$  se encuentra definida en [GK80a] y

$$|N; \beta, \gamma, \Omega\rangle = R(\Omega)|N; \beta, \gamma, \rangle. \quad (\text{I.167})$$

La segunda propiedad importante del estado intrínseco (I.165) es que permite la existencia de grandes deformaciones cuadrupolares con fluctuaciones pequeñas de su valor promedio. Ello justifica la visión geométrica de (I.165) como un estado con forma bien definida que rota, estando los grados de libertad intrínsecos aproximadamente desacoplados de los rotacionales

La forma funcional de la energía correspondiente al estado (I.165) se calcula como,

$$E(N; \beta, \gamma) = \frac{\langle N; \beta, \gamma | H | N; \beta, \gamma \rangle}{\langle N; \beta, \gamma | N; \beta, \gamma \rangle}. \quad (\text{I.168})$$

Los valores de equilibrio de  $\beta$  y  $\gamma$  ( $\beta_0 - \gamma_0$ ) se obtienen minimizando la energía respecto a  $\beta$  y  $\gamma$  ( $\delta E = 0$ ),

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \gamma} = 0. \quad (\text{I.169})$$

Este procedimiento se denomina de Hartree-Bose, en analogía al de Hartree-Fock para fermiones.

Cabe resaltar que los parámetros de deformación no son exactamente iguales a los del MC, pero están relacionados con ellos, verificándose [GK80a],

$$\beta_{MC} \approx 1.18 \frac{2N}{A} \beta_{IBM}, \quad \gamma_{MC} = \gamma_{IBM}, \quad (\text{I.170})$$

donde  $A$  es el número másico. Esta relación supone que a una deformación  $\beta_{MC}$  grande como por ejemplo 0.3, pueda corresponderle (en función de los valores de  $A$  y  $N$ ) una deformación en el IBM  $\beta_{IBM} = 1.3$ . Para valores de  $\gamma$  que sean múltiplo de  $60^\circ$ , el núcleo tendrá simetría axial, mientras que para cualquier otro valor el núcleo será triaxial.

La expresión general de la energía en función de  $\beta$  y  $\gamma$  es [GK80a, VIC81],

$$E(N; \beta, \gamma) = E_0 + \frac{N}{1 + \beta^2} (\epsilon_s + \epsilon_d \beta^2) + \frac{N(N-1)}{(1 + \beta^2)^2} (f_1 \beta^4 + f_2 \beta^3 \cos 3\gamma + f_3 \beta^2 + f_4), \quad (\text{I.171})$$

donde los parámetros  $\epsilon_s$ ,  $\epsilon_d$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  y  $f_4$  están relacionados con los parámetros de un hamiltoniano general IBM, como por ejemplo (I.147) (En próximas secciones se dará una expresión más explícita de la anterior energía).

En este punto cabe preguntarse acerca de cuál es la exactitud de la aproximación de estado intrínseco a la hora de calcular la energía de los estados. Para ver más claramente la solución, es apropiado señalar que el estado coherente (I.163, I.165) se puede considerar como un producto de  $N$  funciones de onda monoparticulares correspondientes a  $N$  bosones que se mueven independientemente en un campo medio de Hartree-Bose. En este contexto, la energía (I.171) correspondiente a las  $\beta_0$ - $\gamma_0$ , que satisfacen la ecuación (I.169), es un límite superior de la energía exacta del sistema y tiende a ella cuando  $N \rightarrow \infty$ , siendo la diferencia con la energía exacta del orden de  $1/N$  [Gil74, GF78].

### Interpretación geométrica de las simetrías dinámicas

Las simetrías dinámicas descritas en la sección (I.4.3) poseen una clara interpretación geométrica que justifica el empleo de las expresiones “límite vibracional”, “límite rotacional” y “límite  $\gamma$ -inestable”. A continuación se analizan los valores de  $\beta$  y  $\gamma$  para cada uno de los límites.

- *Límite vibracional.* El hamiltoniano correspondiente a este límite es el de la ecuación (I.148) y la funcional de energía correspondiente es,

$$E(N; \beta, \gamma)_{U(5)} = \epsilon_d N \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} + f_1 N(N - 1) \frac{\beta^4}{(1 + \beta^2)^2}. \quad (\text{I.172})$$

Los valores de  $\beta$  y  $\gamma$  que minimizan la anterior energía son  $\beta_0 = 0$ , siendo el potencial independiente de  $\gamma$ . Por tanto, en este límite el núcleo es esférico y sus únicas excitaciones colectivas posibles son vibraciones.

- *Límite rotacional.* El hamiltoniano correspondiente a este límite es el de la ecuación (I.150). Si este hamiltoniano se escribe en la forma equivalente

$$H = -\kappa' \hat{C}_2[O(3)] - \kappa \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \quad (\text{I.173})$$

la forma funcional de la energía es,

$$E(N; \beta, \gamma)_{SU(3)} = -2\kappa \left[ \frac{N}{1 + \beta^2} \left( 5 + \frac{11}{4} \beta^2 \right) + \frac{N(N - 1)}{(1 + \beta^2)^2} \right. \\ \left. \times \left( \frac{\beta^4}{2} + 2\sqrt{2} \beta^3 \cos 3\gamma + 4\beta^2 \right) \right] - \kappa' \frac{6N\beta^2}{1 + \beta^2}. \quad (\text{I.174})$$

En este caso el valor del parámetro  $\beta$  que minimiza la superficie de energía es  $\beta_0 \neq 0$ . En el caso de  $N \rightarrow \infty$  se obtiene  $\beta_0 = \sqrt{2}$ . El valor de  $\gamma$  depende de la estructura del operador cuadrupolar ( $\hat{Q}$ ). Se obtiene  $\gamma_0 = 0$  si se emplea el valor  $-\sqrt{7}/2$  como parámetro de estructura en  $\hat{Q}$  y  $\gamma_0 = 60^\circ$  si se usa  $+\sqrt{7}/2$ . Por tanto, en este límite el núcleo es deformado teniendo como excitaciones colectivas posibles, tanto vibraciones sobre la forma de equilibrio (vibraciones  $\beta$  y  $\gamma$ ) como rotaciones colectivas.

- *Límite  $\gamma$ -inestable.* El hamiltoniano correspondiente a este límite es el de la ecuación (I.152). Si este hamiltoniano se escribe en la forma equivalente

$$H = A\hat{P}^\dagger\hat{P} + C\hat{C}_2[O(3)] + \frac{B}{72}\hat{C}_2[O(5)], \quad (\text{I.175})$$

se obtiene para la energía la forma funcional,

$$E(N; \beta, \gamma)_{O(6)} = (2B + 6C) \frac{N\beta^2}{1 + \beta^2} + \frac{A}{4}N(N - 1) \left( \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \right)^2. \quad (\text{I.176})$$

El valor de  $\beta$  que minimiza la anterior expresión es distinto de 0 y la superficie de energía es independiente de  $\gamma$ . Para el límite  $N \rightarrow \infty$  se obtiene el valor  $\beta_0 = 1$ . Las únicas excitaciones colectivas posibles son vibraciones  $\beta$  y rotaciones.

## I.5 Algunas extensiones del IBM

De forma esquemática el IBM ha quedado descrito en su forma más simple en la sección anterior. También se ha visto su conexión con el SM, el MC o el modelo de Elliott, no obstante se ha pasado por alto la descripción de núcleos separando explícitamente los grados de libertad protónicos de los neutrónicos (IBM-2), la descripción de núcleos par-impar (IBFM), la descripción de núcleos ligeros donde se conserva el isospín (IBM-3, IBM-4), o el empleo del IBM a la hora de tratar problemas nucleares realistas. Todo ello se ha desarrollado a lo largo de los últimos años y su tratamiento se puede encontrar en la literatura reciente. En esta sección no se pretende dar una descripción exhaustiva de los anteriores temas sino sólo presentar los dos principales temas que abarca esta memoria de tesis. Ellos son: (I) la descripción de la anarmonicidad de la excitación  $\gamma$  en núcleos

deformados y (II) el estudio del isospín en IBM. Ambos temas son de interés actual debido a que, por una parte, la mejora en técnicas experimentales está permitiendo observar en núcleos deformados excitaciones colectivas  $\gamma$  múltiples. Por otra parte, el desarrollo reciente de instalaciones de haces radiactivos permite desarrollar una espectroscopía para núcleos ligeros y medios con  $N \approx Z$ , inexistente hasta ahora. Esto hace necesario el desarrollo de modelos que incluyan explícitamente el grado de libertad de isospín. En las siguientes subsecciones se elaboran más estas ideas, que son las que constituyen el objeto fundamental de esta memoria de tesis.

### I.5.1 El problema de la anarmonicidad

Durante los últimos años ha existido un interés creciente por el estudio de estados colectivos de bajo espín y alta energía [F<sup>+</sup>88, BJ93, BMY96]. Estos estados son las cabezas de banda de excitaciones  $\beta$ ,  $\gamma$  o combinaciones de las anteriores. La observación e interpretación de la banda  $\beta$ ,  $K^\pi = 0^+$ , es un tema que aún genera bastante polémica ya que existen diversas hipótesis acerca de su estructura [CvB94, CvB95, Kum84]. En cambio, la banda  $\gamma$ ,  $K^\pi = 2^+$ , se ha observado sistemáticamente en núcleos deformados y sus propiedades se conocen bien.

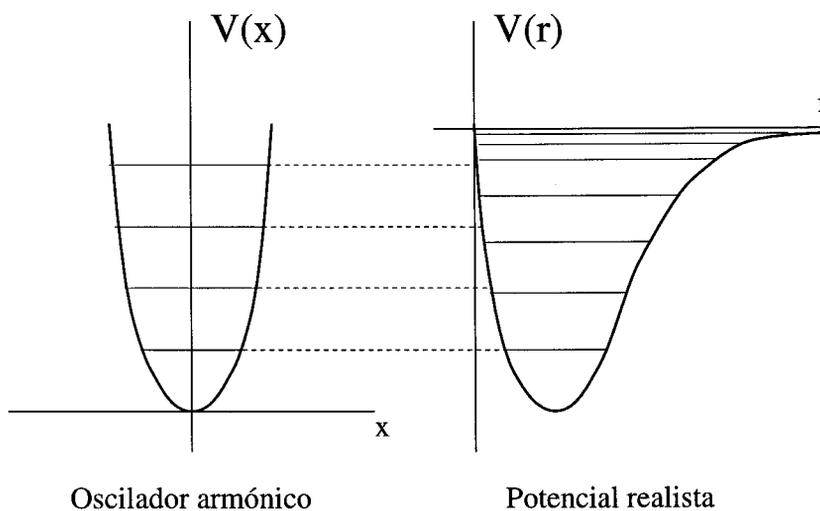


Figura I.12: Comparación de los niveles energéticos de un oscilador armónico y otro anarmónico para el que  $V(r)$  vale 0 a largas distancias

Ya que las excitaciones  $\gamma$  son bien conocidas, parece natural buscar excitaciones doble- $\gamma$  y observar si su energía de excitación aparece al doble de la energía de la excitación  $\gamma$  simple, es decir estudiar su carácter armónico. Las excitaciones  $\gamma$  de dos fonones dan lugar a cabezas de banda con  $K^\pi = 0^+$  (combinación antiparalela) y con  $K^\pi = 4^+$  (combinación paralela). Estas excitaciones son difíciles de identificar experimentalmente, ya que deben estar localizadas en una zona de energía próxima al “gap de pairing” y, por tanto, presumiblemente mezcladas con excitaciones de dos cuasipartículas. Este hecho daría lugar a la fragmentación del estado y, por tanto, a la correspondiente reducción de su colectividad. Por ello, la identificación de estados de dos fonones  $\gamma$  sólo ha sido posible recientemente, ligada a las mejoras en la resolución de las técnicas de detección experimental. En los últimos años se han identificado diversos casos de excitaciones  $\gamma$  de dos fonones. El primero de ellos fue el nivel  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  de  $E = 2055$  keV en el  $^{168}\text{Er}$  [B<sup>+</sup>91]. Otros ejemplos son los niveles del  $^{166}\text{Er}$  con energías 1943 keV y 2028 keV, que son interpretados como las cabezas de banda de los estados doble- $\gamma$  con  $K^\pi = 0^+$  y  $K^\pi = 4^+$  respectivamente [G<sup>+</sup>97a, FAH<sup>+</sup>96]. Otros casos de excitaciones doble- $\gamma$  son el estado  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  a 1435 keV en el  $^{106}\text{Mo}$  [G<sup>+</sup>95], estados  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  en el  $^{154-156}\text{Gd}$  [AWF<sup>+</sup>94] o el estado  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  a 2173 keV en el  $^{164}\text{Dy}$  [C<sup>+</sup>97]. En todos estos casos se ha encontrado un importante grado de anarmonicidad en la excitación  $\gamma$ , es decir la energía de la excitación  $\gamma^2$  no aparece al doble de la energía de la excitación  $\gamma$ , siendo un valor típico  $E_x(\gamma^2)/E_x(\gamma) \approx 2.5$ .

La aparición de un grado tan alto de anarmonicidad positiva ( $E_x(p^2)/E_x(p) > 2$ ) es difícil de explicar con un modelo simple. Considérese por ejemplo el caso de un oscilador armónico que se anarmoniza haciendo el potencial 0 a largas distancias. Mediante este proceso se consigue anarmonicidad pero de sentido opuesto al que se observa experimentalmente ( $E_x(p^2)/E_x(p) < 2$ ) (ver figura I.12), ya que los niveles que se obtienen están más próximos entre sí que en el oscilador armónico.

Un modelo posible para estudiar este intrigante problema es el IBM. Hasta ahora no se habían tratado excitaciones multifonónicas dentro del modelo. En el capítulo II se presenta de forma general la extensión del IBM para tratar excitaciones de dos fonones, tanto en el sistema laboratorio como en el sistema intrínseco. Para llevar a cabo esta tarea se presenta un nuevo formalismo de estado intrínseco [GRAA<sup>+</sup>98] y se analizan todos los

posibles hamiltonianos IBM, incluyendo incluso términos a tres cuerpos.

### I.5.2 El isospín en el IBM

El concepto de isospín fue introducido originalmente por Heisenberg en 1932 [Hei32] para tratar al protón y al neutrón como dos estados de una única partícula: el nucleón. El isospín es un nuevo número cuántico, de la misma forma que también lo es el espín. El isospín tiene asociada la misma estructura algebraica que el momento angular. Se pueden definir los operadores de isospín,

$$\hat{T}_x, \quad \hat{T}_y, \quad \hat{T}_z, \quad (\text{I.177})$$

que verifican las reglas de conmutación,

$$[\hat{T}_x, \hat{T}_y] = i\hat{T}_z, \quad [\hat{T}_y, \hat{T}_z] = i\hat{T}_x, \quad [\hat{T}_z, \hat{T}_x] = i\hat{T}_y. \quad (\text{I.178})$$

El estado correspondiente al nucleón posee un isospín igual a  $\frac{1}{2}$ ,

$$\hat{T}^2|\phi\rangle = \frac{3}{4}|\phi\rangle \quad (\text{I.179})$$

siendo sus proyecciones,

$$\hat{T}_z|\phi_p\rangle = \frac{1}{2}|\phi_p\rangle, \quad \hat{T}_z|\phi_n\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_n\rangle. \quad (\text{I.180})$$

Es decir, protón y neutrón forman un doblete de isospín, transformándose ambos estados entre sí mediante los operadores  $\hat{T}_+$  y  $\hat{T}_-$ ,

$$\hat{T}_+|\phi_p\rangle = 0, \quad \hat{T}_-|\phi_p\rangle = |\phi_n\rangle, \quad (\text{I.181})$$

$$\hat{T}_+|\phi_n\rangle = |\phi_p\rangle, \quad \hat{T}_-|\phi_n\rangle = 0. \quad (\text{I.182})$$

Se sabe que la interacción fuerte, a diferencia de la coulombiana, es invariante frente a transformaciones de isospín, es decir frente a transformaciones en que se intercambian protones por neutrones. Como la interacción coulombiana siempre está presente en el núcleo, la simetría de isospín sólo será una buena simetría (aproximadamente) para núcleos ligeros, en los que la importancia de la interacción coulombiana es menor.

¿Cómo puede construirse una versión del IBM que sea invariante frente al isospín? En primer lugar hay que realizar la distinción explícita entre protones y neutrones. Esta

distinción ya se hizo con el IBM-2 [OAI78], que es aplicable a núcleos pesados y medios, donde las capas de valencia de protones y neutrones son diferentes. En ese caso existen sólo bosones formados por dos protones (bosones  $\pi$ ) o por dos neutrones (bosones  $\nu$ ),

$$\{s_{\pi}^{\dagger}, d_{\pi}^{\dagger}, s_{\nu}^{\dagger}, d_{\nu}^{\dagger}\}. \quad (\text{I.183})$$

En total, en IBM-2 existen 12 tipos de bosones y su álgebra de simetría será  $U(12)$ . En IBM-2 se introdujo una nueva simetría denominada  $F$ -espín con la consiguiente introducción de un número cuántico también denominado  $F$ -espín [AOIT77, OAI78], con propiedades de momento angular. Este  $F$ -espín no debe confundirse con el isospín. El  $F$ -espín distingue entre un bosón  $\pi$  y un bosón  $\nu$ , toma el valor  $F = \frac{1}{2}$ , siendo sus proyecciones,

$$\hat{F}_z|\pi\rangle = \frac{1}{2}|\pi\rangle, \quad \hat{F}_z|\nu\rangle = -\frac{1}{2}|\nu\rangle, \quad (\text{I.184})$$

tanto para bosones  $s$  como  $d$ . El operador  $\hat{F}_z$  cuenta la diferencia entre el número de bosones de protones y de neutrones dividido por 2 y conmuta siempre con el hamiltoniano. La simetría de  $F$ -espín no es una simetría exacta ni tan siquiera en núcleos ligeros. Se conserva sólo de forma aproximada bajo determinadas condiciones [SHVI<sup>+</sup>85, VIHJA86].

Para construir una versión de IBM que sea invariante en isospín es preciso considerar, junto con los bosones  $\pi$  y  $\nu$ , bosones protón-neutrón ( $\delta$ ). Estos tres tipos de bosones forman un triplete de isospín, transformándose entre sí a través de los operadores  $\hat{T}_+$  y  $\hat{T}_-$ . Sus proyecciones son,

$$\hat{T}_z|\pi\rangle = |\pi\rangle, \quad \hat{T}_z|\delta\rangle = 0|\delta\rangle, \quad \hat{T}_z|\nu\rangle = -|\nu\rangle. \quad (\text{I.185})$$

Hay que destacar que formulado de esta forma (IBM-3), sólo se está considerando la combinación simétrica ( $T = 1$ ) del par protón-neutrón. Además de ella, existe una combinación antisimétrica con  $T = 0$  (la inclusión de este nuevo bosón,  $\sigma$ , da lugar al IBM-4 [EE81]).

La importancia del bosón  $\delta$  a la hora de obtener estados con buen isospín se observa claramente si se construye un estado con dos bosones  $s$  acoplados a momento angular  $L = 0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[s^{\dagger} \times s^{\dagger}]_{L=0, T=0}|0\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{M_T} \langle 1M_T 1 - M_T | 00 \rangle [s_{M_T}^\dagger \times s_{-M_T}^\dagger]_{L=0, T=0} | 0 \rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi\nu L = 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\delta^2 L = 0\rangle,
\end{aligned} \tag{I.186}$$

donde los estados  $|\pi\nu L = 0\rangle$  y  $|\delta^2 L = 0\rangle$  son estados normalizados. Este estado tiene un 33% de bosones  $\delta$ . Este resultado tan simple sigue teniendo validez para estados de muchas partículas siempre que se verifique  $N \approx Z$ , ya que conforme aumenta el número de neutrones, disminuye progresivamente el número de bosones  $\delta$  [VI95].

Los núcleos ligeros y medios con  $N \approx Z$  comprendidos entre el  $^{40}\text{Ca}$  y el  $^{100}\text{Sn}$ , comienzan a ser accesibles con el uso de las nuevas instalaciones de haces radiactivos y son de gran interés ya que en esta zona la colectividad se construye en presencia, no sólo de pares  $\pi$  y  $\nu$ , sino también de pares  $\delta$ . Para estos núcleos es posible realizar cálculos de SM, pero resultan de gran complejidad. El IBM proporciona un excelente marco para estudiar esta zona, ya que no requieren un gran esfuerzo computacional y ofrece una interpretación simple de los resultados. El modelo IBM apropiado a este problema es el IBM-3, cuyos elementos constituyentes son,

$$\{s_\pi^\dagger, d_\pi^\dagger, s_\delta^\dagger, d_\delta^\dagger, s_\nu^\dagger, d_\nu^\dagger\}, \tag{I.187}$$

que junto con los correspondientes operadores de destrucción dan lugar al álgebra  $U(18)$ . La estructura algebraica del modelo es extremadamente rica, siendo de gran relevancia el conocimiento de al menos una parte de sus simetrías dinámicas. El estudio de los límites provenientes de la subálgebra,

$$U(18) \supset U_{sd}(6) \otimes SU_T(3), \tag{I.188}$$

es decir, provenientes de un desacoplamiento entre el sector de isospín ( $T$ ) y el sector orbital ( $sd$ ), es muy útil porque permite recuperar los límites  $U(5)$ ,  $SU(3)$  y  $O(6)$  del IBM-1. En el capítulo (III) se presenta un estudio detallado de este conjunto de límites, haciendo especial énfasis tanto en la estructura algebraica del problema, como en la relevancia física de este tipo particular de límite [GRVI]. Además de este estudio algebraico, en la sección (III.7) se presentan cálculos realistas IBM-3 para el  $^{44-48}\text{Ti}$  y el  $^{48}\text{Cr}$ .

Otro enfoque al estudio del isospín en el IBM es su análisis en el sistema intrínseco. Este tipo de estudio proporciona una visión geométrica del IBM-3 mediante la introducción de parámetros de deformación para los bosones  $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$ . Recientemente Ginocchio y Leviatan han propuesto un formalismo de estado intrínseco para IBM-3 [GL94]. En esta memoria de tesis se propone un formalismo más general, que contiene al anterior [GRAD<sup>+</sup>98a, GRAD<sup>+</sup>98b] como un caso particular, que se presenta en el capítulo (IV). Este nuevo formalismo permite el uso de parámetros de deformación diferentes para cada tipo de bosón y la existencia de un estado intrínseco sin buen isospín, es decir deformado en isospín.

Para núcleos impar-impar con  $N \approx Z$  los pares protón-neutrón con  $T = 0$  cobran importancia, existiendo simultáneamente bosones con  $T = 1$  y  $T = 0$ . Es un tema de interés actual la competencia entre el *pairing* isoscalar e isovectorial. Uno de los esquemas en los que se puede estudiar este problema es el IBM-4. En el capítulo V se presenta un formalismo de estado intrínseco para el IBM-4.



## Capítulo II

# Vibraciones en núcleos deformados: estudio de su anarmonicidad en el IBM

En todo sistema cuántico que realice oscilaciones en torno a una forma de equilibrio dada, el potencial de referencia es el del oscilador armónico. Cualquier desviación con respecto a los resultados de este potencial, tanto en el espectro energético como en las transiciones electromagnéticas entre los estados, se denomina anarmonicidad. En el caso nuclear y para sistemas con forma de equilibrio deformada la imagen geométrica del modelo de Bohr-Mottelson [Boh52, BM75], indica que el núcleo posee como modos de excitación tanto rotaciones como vibraciones (ver sección I.2). Si los grados de libertad rotacionales e intrínsecos están aproximadamente desacoplados, se obtiene un espectro rotacional superpuesto con otro vibracional (ver figura I.5). Las excitaciones vibracionales, que serán las “cabezas” de las bandas rotacionales, y en concreto el estudio de su anarmonicidad son el objeto de estudio de este capítulo.

En el caso de núcleos deformados, las vibraciones nucleares son del tipo  $\beta$  ( $K^\pi = 0^+$ ) y  $\gamma$  ( $K^\pi = 2^+$ ), dependiendo de si conservan o no la simetría axial. La identificación y propiedades de las vibraciones  $\beta$  en núcleos deformados es bastante controvertida [CvB94, CvB95, Kum84] y, por tanto, no se está en condiciones de analizar su anarmonicidad. De todas formas, el tratamiento que se presenta en este capítulo es de aplicación

inmediata a estas excitaciones también. La situación experimental sobre las excitaciones  $\gamma$  es totalmente diferente. Su identificación es precisa en núcleos bien deformados y sus propiedades son bien comprendidas. La existencia o no existencia de excitaciones doble- $\gamma$  ha sido objeto de discusión durante los últimos 30 años y aún hoy continúa generando polémica. Por ejemplo, recientemente se ha puesto en duda la validez de la imagen geométrica a la hora de interpretar estados  $\gamma$  de dos fonones [HHSF98]. Las excitaciones doble- $\gamma$  corresponden a estados con  $K^\pi = 0^+$  y  $K^\pi = 4^+$ , que son las cabezas de dos bandas rotacionales superpuestas sobre esos estados vibracionales. En general, la identificación experimental de las excitaciones  $\gamma^2$  resulta bastante compleja. En primer lugar, la zona energética en la que se encuentran localizadas, alrededor de 2 MeV, presenta una densidad de estados alta. En segundo lugar, dicha energía suele estar por encima, en los núcleos de interés, de la del “gap de pairing”. Por ello, las excitaciones de dos fonones  $\gamma$  están fuertemente fragmentadas y mezcladas con las de dos cuasipartículas. A pesar de esas dificultades, recientemente se han observado algunos de estos estados gracias a las recientes mejoras en espectroscopía nuclear que incluyen técnicas de excitación coulombiana [F<sup>+</sup>88], dispersión inelástica de neutrones [BMY96] y captura de neutrones térmicos [BJ93]. En núcleos transicionales par-par como son  $^{186-192}\text{Os}$  y  $^{194}\text{Pt}$  se han identificado estados con una gran componente  $\gamma^2$  [Wu83, Cli93]. Otros ejemplos ya citados de excitaciones doble- $\gamma$  en núcleos deformados son,

- $^{168}\text{Er}$ : estado  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  a  $E = 2055$  keV [B<sup>+</sup>91].
- $^{166}\text{Er}$ : estado  $\gamma_{K^\pi=0^+}^2$  a  $E = 1943$  keV [G<sup>+</sup>97a, FAH<sup>+</sup>96].
- $^{166}\text{Er}$ : estado  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  a  $E = 2028$  keV [G<sup>+</sup>97a, FAH<sup>+</sup>96].
- $^{106}\text{Mo}$ : estado  $\gamma_{K^\pi=4^+}$  a  $1435$  keV [G<sup>+</sup>95].
- $^{154-156}\text{Gd}$ : estados  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  [AWF<sup>+</sup>94].
- $^{164}\text{Dy}$ : estado  $\gamma_{K^\pi=4^+}^2$  a  $2173$  keV [C<sup>+</sup>97].

Todos estos resultados experimentales muestran un alto grado de anarmonicidad para las excitaciones  $\gamma$ . Esto se observa tanto en el espectro energético como en las transiciones electromagnéticas.

En conexión con esos nuevos resultados experimentales, se han realizado diversos cálculos, especialmente para el  $^{166}\text{Er}$  y el  $^{168}\text{Er}$ , empleando tanto modelos microscópicos como fenomenológicos [SSS94, SSS95, BM82, DH82, JP88, YAA86, YAA88]. En todos ellos se obtiene sólo un acuerdo parcial con los resultados experimentales. De especial relevancia para esta memoria de tesis es el trabajo de Bohr y Mottelson [BM82] donde se critica al IBM-1 por su incapacidad para describir el alto grado de anarmonicidad observado para la excitación  $\gamma$  en el  $^{168}\text{Er}$ . Esta deficiencia del IBM fue considerada como fundamental por Bohr y Mottelson, a pesar de que otros aspectos del espectro, tales como su estructura rotacional sí quedan perfectamente descritos por el modelo [WCD80]. A partir del trabajo antes citado de Bohr y Mottelson se realizaron múltiples intentos para incluir la anarmonicidad en IBM. Como trabajo más relevante, destaca la inclusión en el IBM de bosones  $g$ , con momento angular  $\ell = 4$ , (*sdg*-IBM) [YAA86, YAA88]. Con ello se logra una descripción satisfactoria de la anarmonicidad en el  $^{168}\text{Er}$ . Hasta ahora no se ha presentado un tratamiento sistemático de la anarmonicidad de la vibración  $\gamma$ .

Una alternativa para llevar a cabo un estudio sistemático de las excitaciones  $\gamma$  multifonónicas es el formalismo de estado intrínseco de IBM-1. Esta aproximación ofrece como ventaja respecto al cálculo IBM estándar (en el sistema laboratorio), el conocimiento explícito de la estructura vibracional de los estados, aunque en ningún momento hay que perder como referencia el cálculo exacto en el sistema laboratorio. A continuación se presenta este formalismo y algunas de sus aplicaciones prácticas.

## II.1 El IBM y el sistema intrínseco

Considérese el hamiltoniano IBM-1 más general posible (con interacciones hasta dos cuerpos que conserven el número total de bosones), expresado en forma multipolar,

$$H = \varepsilon_s \hat{n}_s + \varepsilon_d \hat{n}_d + \kappa_0 \hat{P}^\dagger \hat{P} + \sum_{L=1}^4 \kappa_L \hat{T}^L \cdot \hat{T}^L, \quad (\text{II.1})$$

donde

$$P^\dagger = \frac{1}{2} d^\dagger \cdot d^\dagger - \frac{1}{2} s^\dagger \cdot s^\dagger \quad (\text{II.2})$$

y

$$\hat{T}_M^L = \sum_{\ell_1 \ell_2} \chi_{\ell_1 \ell_2}^L (\gamma_{\ell_1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{\ell_2})_{LM}, \quad (\text{II.3})$$

con

$$\begin{aligned} \chi_{00}^1 &= 0, & \chi_{02}^1 &= 0, & \chi_{20}^1 &= 0, & \chi_{22}^1 &= 1, \\ \chi_{00}^2 &= 0, & \chi_{02}^2 &= 1, & \chi_{20}^2 &= 1, & \chi_{22}^2 &= \chi, \\ \chi_{00}^3 &= 0, & \chi_{02}^3 &= 0, & \chi_{20}^3 &= 0, & \chi_{22}^3 &= 1, \\ \chi_{00}^4 &= 0, & \chi_{02}^4 &= 0, & \chi_{20}^4 &= 0, & \chi_{22}^4 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

El símbolo  $\cdot$  representa el producto escalar y se emplea la definición  $\hat{T}^L \cdot \hat{T}^L = \sum_M (-1)^{L-M} \hat{T}_M^L \hat{T}_{-M}^L$ . Esta forma de expresar el hamiltoniano (II.1) es especialmente útil a la hora de elegir hamiltonianos que sean esquemáticos pero a la vez, describan situaciones realistas. En general los términos más relevantes son aquellos de multipolaridad baja. El hamiltoniano escrito en la forma (II.1) no está expresado en orden normal, por lo que hay que tener en cuenta la contribución a las energías monoparticulares que proviene de los términos a dos cuerpos.

El formalismo de estado intrínseco [GK80a, DS80] proporciona la conexión entre el modelo colectivo de Bohr-Mottelson [BM75] y el IBM. Para introducirlo, considérese un sistema con un número grande,  $N$ , de bosones interaccionantes. En primer orden, el comportamiento dinámico del sistema puede describirse a través de un conjunto de bosones que no interaccionan entre sí y que se mueven en un campo medio (aproximación de Hartree-Bose) [DDP<sup>+</sup>84]. En esta aproximación, el estado fundamental será un condensado  $|c\rangle$  de bosones, donde todos ellos ocupan el estado monoparticular de mínima energía  $\Gamma_c^\dagger$  (ver sección I.4.5),

$$|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\Gamma_c^\dagger)^N |0\rangle, \quad (\text{II.5})$$

siendo

$$\Gamma_c^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \left( s^\dagger + \beta \cos \gamma d_0^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (d_2^\dagger + d_{-2}^\dagger) \right). \quad (\text{II.6})$$

En la anterior ecuación, los parámetros de forma  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros variacionales. Nótese que los anteriores parámetros no coinciden con los del MC (I.170).

El valor promedio de (II.1) para el estado fundamental (II.5) es,

$$\langle c|H|c\rangle = \frac{N}{5(1+\beta^2)} \left( 5\varepsilon_s + 25\kappa_2 + \beta^2 (5\varepsilon_d - 3\kappa_1 + 5\kappa_2 + 5\chi^2\kappa_2 - 7\kappa_3 + 9\kappa_4) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{N(N-1)}{140(1+\beta^2)^2} \left( 35 \kappa_0 + \beta^2(-70 \kappa_0 + 560 \kappa_2) - 80 \sqrt{14} \beta^3 \chi \cos(3\gamma) \kappa_2 \right. \\
 & \left. + \beta^4(35 \kappa_0 + 40 \chi^2 \kappa_2 + 72 \kappa_4) \right). \tag{II.7}
 \end{aligned}$$

Otras expresiones alternativas para hamiltonianos en orden normal se pueden encontrar en [GK80a, VIC81, Lev87]. Debido a consideraciones físicas un mínimo para  $\beta \rightarrow \infty$  queda excluido [Lev87]. Del análisis de la expresión (II.7) se infiere que no existen mínimos triaxiales, pudiendo obtenerse sólo núcleos prolatos ( $\gamma = 0^\circ$ ) u oblatos ( $\gamma = 60^\circ$ ) cuando la fuerza cuadrupolar es atractiva ( $\kappa_2 < 0$ ) y  $\chi < 0$  ó  $\chi > 0$  respectivamente. La situación especial de la  $\gamma$ -inestabilidad aparece cuando  $\chi = 0$ .

El bosón condensado  $\Gamma_c^\dagger$  definido en (II.6) se puede interpretar como la primera componente de una nueva base (bosones deformados o intrínsecos). Los bosones deformados están relacionados con los esféricos (sistema laboratorio) mediante una transformación unitaria  $\eta$ ,

$$\Gamma_p^\dagger = \sum_{\ell m} \eta_{\ell m}^p \gamma_{\ell m}^\dagger, \quad \gamma_{\ell m}^\dagger = \sum_p \eta_{\ell m}^{p*} \Gamma_p^\dagger. \tag{II.8}$$

Los parámetros de deformación  $\eta_{\ell m}^p$  cumplen las siguientes condiciones de ortonormalización,

$$\sum_{\ell m} \eta_{\ell m}^{p'*} \eta_{\ell m}^p = \delta_{pp'}, \quad \sum_p \eta_{\ell m}^{p*} \eta_{\ell' m'}^p = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \tag{II.9}$$

El índice  $p$  etiqueta, por tanto, los diferentes bosones deformados.  $p$  podrá tomar valores que van de 0 a  $\sum_\ell (2\ell + 1) - 1$ , donde 0 corresponde al estado fundamental y  $\ell$  corre sobre los distintos valores del momento angular de los bosones. En el IBM-1 estándar  $\ell$  vale 0 y 2 y, por tanto, habrá 6 bosones deformados. A partir de la minimización de la energía del estado fundamental se obtienen los parámetros  $\eta$  para  $p = c = 0$ . El resto se halla empleando la condición de ortonormalización (II.9), existiendo múltiples posibilidades.

Una elección razonable puede encontrarse en la referencia [Lev87],

$$\begin{aligned}
 \eta_{00}^c &= \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} , & \eta_{20}^c &= \frac{\beta \cos \gamma}{\sqrt{1+\beta^2}} , & \eta_{22}^c &= \eta_{2-2}^c = \frac{\beta \sin \gamma}{\sqrt{2}\sqrt{1+\beta^2}} \\
 \eta_{00}^\beta &= \frac{-\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} , & \eta_{20}^\beta &= \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1+\beta^2}} , & \eta_{22}^\beta &= \eta_{2-2}^\beta = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}\sqrt{1+\beta^2}} \\
 \eta_{20}^{\gamma+} &= -\sin \gamma , & \eta_{22}^{\gamma+} &= \eta_{2-2}^{\gamma+} = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{2}} \\
 \eta_{21}^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} , & \eta_{2-1}^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \eta_{21}^y &= \frac{1}{\sqrt{2}} , & \eta_{2-1}^y &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \\
 \eta_{22}^{\gamma-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} , & \eta_{2-2}^{\gamma-} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

siendo el resto de coeficientes nulos. La ventaja de este conjunto de parámetros radica en que existe una clara correspondencia con las excitaciones  $\beta$  y  $\gamma$ , de ahí los nombres empleados para las etiquetas. Además, como se verá en próximas secciones, en numerosas ocasiones el hamiltoniano es aproximadamente diagonal para el anterior juego de parámetros. Lo cual simplifica en gran medida los cálculos.

### II.1.1 Estados de uno y dos fonones: la extensión de la TDA

Las bandas excitadas se pueden considerar excitaciones intrínsecas construidas sobre el estado fundamental (II.5), reemplazando un bosón  $c$  por otro excitado, dos bosones  $c$  por dos excitados y así sucesivamente. Hay que resaltar que entre este conjunto de excitaciones existen algunas que no son físicas, es decir son espúreas, ya que corresponden a rotaciones del estado fundamental (entendidas como una operación de simetría genérica, no necesariamente del grupo  $O(3)$ ). Estas excitaciones espúreas deben ser eliminadas de la base de bosones antes de comenzar cualquier cálculo, ya que se encuentran acopladas a las físicas [Lev87]. El problema de los bosones espúreas (bosones Golstone) es una consecuencia de la aproximación usada TDA y no existiría si se emplease la RPA [Row70, RS80]. En esta última todos los estados espúreas se encuentran situados a la misma energía que el estado fundamental y, por tanto, desacoplados del resto de estados [DDP<sup>+</sup>84]. La RPA no se emplea en esta discusión ya que es más difícil de usar que la TDA, siendo su interpretación física más compleja y no ofreciendo ninguna ventaja sustancial respecto al cálculo exacto en el sistema laboratorio.

Los estados excitados incluidos en el presente análisis son,

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(N-1)!}} \Gamma_p^\dagger (\Gamma_c^\dagger)^{N-1} |0\rangle, \\ |pp'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{p,p'}}} \frac{1}{\sqrt{(N-2)!}} \Gamma_p^\dagger \Gamma_{p'}^\dagger (\Gamma_c^\dagger)^{N-2} |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

donde  $p, p' \neq c$ . Las autofunciones serán combinaciones lineales de los estados excitados más el estado fundamental,

$$|\phi^\xi\rangle = N^\xi \left( W^\xi |c\rangle + \sum_p X_p^\xi |p\rangle + \sum_{pp'} Y_{pp'}^\xi |pp'\rangle \right), \quad (\text{II.12})$$

donde  $N^\xi$  es una constante de normalización. La existencia de una posible contribución del estado fundamental a los estados excitados merece cierta discusión. Hay que destacar que si se aplica la TDA estrictamente, es decir si sólo se consideran excitaciones de una partícula un hueco, dicha contribución será nula. Para demostrar esto se emplea el teorema de Thouless particularizado para bosones [Row70, RS80]. Según éste, cualquier estado ortogonal a  $|c\rangle$  se puede expresar como,

$$|c'\rangle = e^\theta |c\rangle, \quad (\text{II.13})$$

donde

$$\theta = \sum_{p \neq c} c_p \Gamma_p^\dagger \Gamma_c = \sum_{p \neq c} c_p \theta_p. \quad (\text{II.14})$$

Si se calcula el valor promedio del hamiltoniano para este nuevo estado se obtiene,

$$\langle c' | H | c' \rangle = \langle c | H | c \rangle + \langle c | \theta^\dagger H + H \theta | c \rangle + \dots \quad (\text{II.15})$$

Teniendo en cuenta que la energía tiene que ser un extremal,

$$\langle c' | H | c' \rangle - \langle c | H | c \rangle = 0, \quad (\text{II.16})$$

y por tanto,

$$\langle c | \theta^\dagger H + H \theta | c \rangle = \sum_{p \neq c} c_p \langle c | \theta_p^\dagger H + H \theta_p | c \rangle = 0. \quad (\text{II.17})$$

Ya que los distintos  $c_p$  son independientes, cada uno de los sumandos debe ser nulo. Empleando la expresión anterior y las ecuaciones (II.11) y (II.14) se llega a que cada uno de los sumandos de (II.17) es proporcional a  $\langle c | H | p \rangle$ . Por tanto, no existe mezcla entre

el estado fundamental y los estados correspondientes a excitaciones de un único fonón. La contribución del estado fundamental a los estados excitados provendrá de la mezcla con estados de dos fonones. Esta demostración se realiza de forma analoga en el caso de fermiones.

Para obtener los estados (II.12) hay que diagonalizar  $H$  en la base de estados (II.11) más el estado fundamental. Para llevar a cabo este cálculo es conveniente escribir el hamiltoniano en orden normal en forma totalmente desacoplada,

$$H = \sum_{\ell m} \tilde{\varepsilon}_\ell \gamma_{\ell m}^\dagger \gamma_{\ell m} + \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3 \ell_4 m_4} V_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} \gamma_{\ell_1 m_1}^\dagger \gamma_{\ell_2 m_2}^\dagger \gamma_{\ell_3 m_3} \gamma_{\ell_4 m_4}. \quad (\text{II.18})$$

Los coeficientes que aparecen en (II.18) se relacionan con los parámetros del hamiltoniano escrito en forma multipolar (II.1) a través las siguientes expresiones,

$$\tilde{\varepsilon}_\ell = \varepsilon_\ell + \sum_{L'} \kappa_L (-1)^{\ell+L'+L} \frac{\hat{L}^2}{\hat{\ell}^2} \chi_{\ell \ell'}^L \chi_{\ell' \ell}^L \quad (\text{II.19})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} &= \frac{\kappa_0}{4} \chi'_{\ell_1 \ell_2} \chi'_{\ell_1 \ell_2} \langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | 00 \rangle \langle \ell_3 - m_3 \ell_4 - m_4 | 00 \rangle \\ &+ \left[ \sum_{L=1,2,3,4} \kappa_L (-1)^{L+\ell_3+\ell_4+m_1+m_4} \chi_{\ell_1 \ell_3}^L \chi_{\ell_2 \ell_4}^L \right. \\ &\times \left. \langle \ell_1 m_1 \ell_3 - m_3 | L m_1 - m_3 \rangle \langle \ell_2 m_2 \ell_4 - m_4 | L m_3 - m_4 \rangle \right] \quad (\text{II.20}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} &= \frac{1}{4} (\tilde{V}_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} + \tilde{V}_{\ell_2 m_2, \ell_1 m_1, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} \\ &+ \tilde{V}_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_4 m_4, \ell_3 m_3} + \tilde{V}_{\ell_2 m_2, \ell_1 m_1, \ell_4 m_4, \ell_3 m_3}), \quad (\text{II.21}) \end{aligned}$$

donde  $\chi'_{00} = 1, \chi'_{02} = \chi'_{20} = 0, \chi'_{22} = \sqrt{5}$ . En la energía monoparticular existe una contribución de los términos a dos cuerpos.

Los coeficientes de los términos a dos cuerpos también pueden expresarse como elementos de matriz de  $V$  entre estados de dos bosones,

$$V_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} \equiv \frac{1}{4} \langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | V | \ell_3 m_3, \ell_4 m_4 \rangle \sqrt{1 + \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2}} \sqrt{1 + \delta_{\ell_3 \ell_4} \delta_{m_3 m_4}}. \quad (\text{II.22})$$

El hamiltoniano (II.18) se puede escribir en función de los bosones intrínsecos (II.8),

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\ell m} \tilde{\varepsilon}_\ell \sum_{p_1 p_2} \eta_{\ell m}^{p_1*} \eta_{\ell m}^{p_2} \Gamma_{p_1}^\dagger \Gamma_{p_2} + \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3 \ell_4 m_4} V_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} \\ &\times \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} \eta_{\ell_1 m_1}^{p_1*} \eta_{\ell_2 m_2}^{p_2*} \eta_{\ell_3 m_3}^{p_3} \eta_{\ell_4 m_4}^{p_4} \Gamma_{p_1}^\dagger \Gamma_{p_2}^\dagger \Gamma_{p_3} \Gamma_{p_4}. \quad (\text{II.23}) \end{aligned}$$

Los distintos tipos de elementos de matriz que intervienen al construir la matriz hamiltoniana son,

$$\langle c|H|p\rangle = \sqrt{N}F_{cp}^{(1)} + 2\sqrt{N}(N-1)F_{cccp}^{(2)} = 0, \quad (\text{II.24})$$

$$\langle c|H|pp'\rangle = \frac{2\sqrt{N}\sqrt{N-1}}{\sqrt{1+\delta_{pp'}}}F_{ccpp'}^{(2)}, \quad (\text{II.25})$$

$$\langle p|H|p'\rangle = F_{pp'}^{(1)} + 4(N-1)F_{cpp'c}^{(2)} + \delta_{pp'}(N-1)\left(F_{cc}^{(1)} + (N-2)F_{cccc}^{(2)}\right), \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{aligned} \langle p|H|p'p''\rangle = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{1+\delta_{p'p''}}} & \left(4F_{cpp'p''}^{(2)} + \delta_{pp'}F_{cp''}^{(1)} + \delta_{pp''}F_{cp'}^{(1)} \right. \\ & \left. + 2(N-2)(\delta_{pp'}F_{cccp''}^{(2)} + \delta_{pp''}F_{cccp'}^{(2)})\right), \quad (\text{II.27}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle pp'|H|p''p'''\rangle = & \frac{\delta_{pp''}\delta_{p'p'''} + \delta_{pp'''}\delta_{p'p''}}{1 + \delta_{pp'}\delta_{pp''}\delta_{p''p'''}} \left( (N-2)F_{cc}^{(1)} + (N-2)(N-3)F_{cccc}^{(2)} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_{pp'})(1+\delta_{p''p'''})}} \left\{ 4F_{pp'p''p'''}^{(2)} + \delta_{pp''} \left( F_{p'p'''}^{(1)} + 4(N-2)F_{cp'p'''}^{(2)} \right) \right. \\ & + \delta_{pp'''} \left( F_{p'p''}^{(1)} + 4(N-2)F_{cp'p''c}^{(2)} \right) + \delta_{p'p''} \left( F_{pp'''}^{(1)} + 4(N-2)F_{cpp'''}^{(2)} \right) \\ & \left. + \delta_{p'p'''} \left( F_{pp''}^{(1)} + 4(N-2)F_{cpp''c}^{(2)} \right) \right\}, \quad (\text{II.28}) \end{aligned}$$

donde

$$F_{pp'}^{(1)} = \sum_{\ell_1 m_1} \tilde{\varepsilon}_{\ell_1} \eta_{\ell_1 m_1}^{p*} \eta_{\ell_1 m_1}^{p'} \quad (\text{II.29})$$

y

$$F_{p_1 p_2 p_3 p_4}^{(2)} = \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3 \ell_4 m_4} \tilde{V}_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} \eta_{\ell_1 m_1}^{p_1*} \eta_{\ell_2 m_2}^{p_2*} \eta_{\ell_3 m_3}^{p_3} \eta_{\ell_4 m_4}^{p_4}. \quad (\text{II.30})$$

Por construcción  $F_{pp'}^{(1)}$  es simétrico bajo intercambio de  $p$  y  $p'$  mientras que  $F_{p_1 p_2 p_3 p_4}^{(2)}$  tiene las mismas propiedades de simetría que  $\tilde{V}_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4}$

### II.1.2 Eliminación de bosones espúreos

Antes de realizar la diagonalización del hamiltoniano descrita en el apartado anterior hay que eliminar determinados estados de la base en los que intervienen bosones espúreos,

denominados genéricamente bosones de Goldstone. En las teorías de campo medio la función de onda variacional que se emplea cubre un espacio más restringido que el espacio físico donde se resuelve exactamente el problema y su simetría (grupo de simetría) es más baja (más pequeño) que la del hamiltoniano. A esta situación se la conoce genéricamente como **ruptura espontánea de la simetría**, y es la causante de la aparición de estados espúreos.

Considérese un hamiltoniano  $\hat{H}$  cuyo grupo de simetría es  $G$ . Esto significa que  $\hat{H}$  conmuta con todos los generadores de  $G$  ( $\hat{L}_k$ ),

$$[\hat{H}, \hat{L}_k] = 0. \quad (\text{II.31})$$

Sea además  $|c\rangle$  el estado fundamental de  $\hat{H}$  que arbitrariamente se sitúa a energía cero,

$$\hat{H}|c\rangle = 0. \quad (\text{II.32})$$

Ya que  $|c\rangle$  posee una simetría más baja que  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}_k|c\rangle$  no tiene que ser igual a  $|c\rangle$ , aunque seguirá siendo autoestado del hamiltoniano. Dicho estado está a la misma energía que  $|c\rangle$  debido a la conmutación de  $\hat{H}$  con todos los generadores del grupo,

$$H\hat{L}_k|c\rangle = \hat{L}_kH|c\rangle = 0. \quad (\text{II.33})$$

Si  $|c\rangle$  tuviese la misma simetría que  $\hat{H}$  se verificaría  $\hat{L}_k|c\rangle = |c\rangle$  para todos los generadores del grupo. Por tanto, existen estados que corresponden a rotaciones del estado fundamental, entendidas como operaciones de simetría genéricas, que son estados distintos del propio estado fundamental. Dichos estados deben eliminarse del espacio de trabajo.

Asociados a la ruptura espontánea de la simetría aparecen los bosones de Goldstone. Estos bosones se deben eliminar de la base de bosones deformados (II.11) antes de usar la TDA para calcular los estados excitados. En el caso de que se emplease RPA, el problema de los bosones de Goldstone quedaría resuelto de manera automática por la teoría [DDP<sup>+</sup>84]. Un procedimiento general para la determinación y posterior eliminación de los bosones de Goldstone fue propuesto por Leviatan [Lev87]. El procedimiento consiste en la identificación de modos de excitación intrínseca en las rotaciones (generadores) del grupo de simetría del hamiltoniano. Para ello, primero se identifican los generadores asociados a rotaciones que no dejan a  $|c\rangle$  invariante. A continuación se expresan estos

generadores en términos de los bosones deformados, siendo los bosones presentes en dichos generadores los bosones de Goldstone. Para simplificar el proceso se emplea la imagen de Bogoliubov ( $B$ ) de los generadores, es decir se realiza la sustitución,

$$\Gamma_c^\dagger \rightarrow \sqrt{N}, \quad \Gamma_c \rightarrow \sqrt{N}. \quad (\text{II.34})$$

La imagen de Bogoliubov de los generadores de las distintas simetrías que pueden estar presentes de  $\hat{H}$  son,

- $O(3)$

$$\begin{aligned} {}^B\hat{L}_x &= -\frac{2\sqrt{N}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sin(\gamma - \frac{2\pi}{3})(\Gamma_x^\dagger + \Gamma_x), \\ {}^B\hat{L}_y &= -\frac{2i\sqrt{N}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sin(\gamma - \frac{4\pi}{3})(\Gamma_y^\dagger - \Gamma_y), \\ {}^B\hat{L}_z &= \frac{2\sqrt{N}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sin \gamma (\Gamma_{\gamma-}^\dagger + \Gamma_{\gamma-}), \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

- $O(5)$

$$\begin{aligned} {}^B\hat{\tilde{L}}_{23} &= \frac{\sqrt{N}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_x^\dagger + \Gamma_x), & {}^B\hat{\tilde{L}}_{31} &= \frac{i\sqrt{N}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_y^\dagger - \Gamma_y), \\ {}^B\hat{\tilde{L}}_{53} &= \frac{\sqrt{N}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_{\gamma-}^\dagger + \Gamma_{\gamma-}), & {}^B\hat{\tilde{L}}_{34} &= \frac{i\sqrt{N}\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_{\gamma+}^\dagger - \Gamma_{\gamma+}), \\ {}^B\hat{\tilde{L}}_{jk} &= 0 \quad \text{otro } j > k \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

- $\overline{O(6)}$

$$\begin{aligned} {}^B\hat{\tilde{L}}_{16} &= i\sqrt{N}(\Gamma_y^\dagger - \Gamma_y), & {}^B\hat{\tilde{L}}_{26} &= -\sqrt{N}(\Gamma_x^\dagger + \Gamma_x), & {}^B\hat{\tilde{L}}_{36} &= i\sqrt{N}(\Gamma_\beta^\dagger - \Gamma_\beta), \\ {}^B\hat{\tilde{L}}_{46} &= i\sqrt{N}(\Gamma_{\gamma+}^\dagger - \Gamma_{\gamma+}), & {}^B\hat{\tilde{L}}_{56} &= -\sqrt{N}(\Gamma_{\gamma-}^\dagger + \Gamma_{\gamma-}), & {}^B\hat{\tilde{L}}_{jk} &= 0 \quad \text{otro } j > k, \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

donde  $\overline{O(6)}$  se diferencia de  $O(6)$  en una transformación de fase del bosón  $s$ .  $\hat{\tilde{L}}_{jk}$  y  $\hat{\tilde{L}}_{jk}$  corresponden a transformaciones unitarias de los generadores  $\hat{L}_{jk}$  que dan lugar a rotaciones (en  $O(6)$  u  $O(5)$ , según corresponda) perpendiculares al plano  $(jk)$ , verificando  $\hat{L}_{jk} = -\hat{L}_{kj}$  y las siguientes relaciones de conmutación,

$$[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}] = i(\delta_{ij}\hat{L}_{li} - \delta_{jl}\hat{L}_{ki} + \delta_{il}\hat{L}_{kj} - \delta_{ik}\hat{L}_{lj}). \quad (\text{II.38})$$

Los índices  $i, j, k, l$  toman valores  $1, \dots, 5$  para  $O(5)$  y  $1, \dots, 6$  para  $O(6)$ . Los bosones deformados presentes en alguno de los generadores anteriores que sean no nulos son los

bosones de Goldstone. Se pueden distinguir diferentes situaciones dependiendo del valor de los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ ,

- $\beta = 0$ , núcleo esférico.
  - Hamiltoniano escalar en  $O(3)$  u  $O(5)$ . En este caso no existen bosones Goldstone.
  - Hamiltoniano escalar en  $O(6)$ . Ya que un núcleo esférico se corresponde forzosa-mente con la simetría dinámica  $U(5)$  y esto es incompatible con un álgebra de simetría  $O(6)$ , esta posibilidad se debe excluir.
- $\beta > 0$ , núcleo deformado.
  - Hamiltoniano escalar en  $O(3)$ . Para  $\gamma = 0$ ,  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_y$  son bosones espúreos. Para  $\gamma = \pi/3$  los bosones espúreos se corresponden con  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_{\gamma-}$ . En el caso de triaxialidad  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  y  $\Gamma_{\gamma-}$  son bosones Goldstone.
  - Hamiltoniano escalar en  $O(5)$ . Todos los bosones excitados son espúreos, con excepción del bosón  $\Gamma_\beta$ .
  - Hamiltoniano escalar en  $O(6)$ . Todos los bosones excitados son bosones Goldstone.

### II.1.3 ¿Es el IBM un modelo armónico?

No está claro a priori en qué grado son armónicas las vibraciones  $\beta$  y  $\gamma$  en el IBM. El análisis de este problema en el sistema laboratorio resulta bastante complicado, pudiendo estudiarse de una forma simple sólo en el caso de los límites de simetría. En el sistema intrínseco, en cambio, se pueden obtener algunas conclusiones generales para hamiltonia-nos arbitrarios de un modo simple.

Considérese un sistema con un número grande de bosones  $N$ . En este límite el hamil-toniano IBM es aproximadamente diagonal en la base (II.11), ya que es precisamente en la diagonal principal donde están los términos que presentan un orden más alto en  $N$ . El grado de anarmonicidad  $\zeta$  se puede definir como (con esta definición el límite armónico

corresponde a  $\varsigma = 0$ ),

$$\varsigma = \frac{E_p^{ex}}{E_p} - 2, \quad (\text{II.39})$$

con

$$E_p^{ex} = \langle p|H|p\rangle - \langle c|H|c\rangle, \quad (\text{II.40})$$

$$E_{p^2}^{ex} = \langle pp|H|pp\rangle - \langle c|H|c\rangle. \quad (\text{II.41})$$

Esto se puede evaluar empleando las siguientes expresiones, en las que se ha considerado un hamiltoniano con interacciones hasta 3 cuerpos para dar más generalidad al cálculo,

$$\langle c|H|c\rangle = N(N-1)(N-2)F_{ccccc}^{(3)} + N(N-1)F_{cccc}^{(2)} + NF_{cc}^{(1)}, \quad (\text{II.42})$$

$$\begin{aligned} \langle p|H|p\rangle &= (N-1)(N-2)(N-3)F_{ccccc}^{(3)} + (N-1)(N-2)F_{cccc}^{(2)} \\ &+ 9(N-2)(N-3)F_{ccppc}^{(3)} + (N-1)\left(F_{cc}^{(1)} + 4F_{ppcp}^{(2)}\right) + F_{pp}^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{aligned} \langle pp|H|pp\rangle &= (N-2)(N-3)(N-4)F_{ccccc}^{(3)} + (N-2)(N-3)\left(F_{cccc}^{(2)} + 18F_{ccppc}^{(3)}\right) \\ &+ (N-2)\left(F_{cc}^{(1)} + 8F_{ppcp}^{(2)} + 18F_{ppppc}^{(3)}\right) + 2F_{pp}^{(1)} + 2F_{pppp}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

donde  $F^{(1)}$  y  $F^{(2)}$  están definidas en las ecuaciones (II.29) y (II.30), y  $F^{(3)}$  vale

$$F_{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6}^{(3)} = \sum_{\ell' s, m' s} U_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4, \ell_5 m_5, \ell_6 m_6} \eta_{\ell_1 m_1}^{p_1*} \eta_{\ell_2 m_2}^{p_2*} \eta_{\ell_3 m_3}^{p_3*} \eta_{\ell_4 m_4}^{p_4} \eta_{\ell_5 m_5}^{p_5} \eta_{\ell_6 m_6}^{p_6}, \quad (\text{II.45})$$

donde  $U_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4, \ell_5 m_5, \ell_6 m_6}$  son los elementos de matriz entre estados de tres bosones convenientemente simetrizados y normalizados.

Empleando las expresiones (II.39–II.44) se encuentra que el término de mayor grado en  $N$  para  $\varsigma$  es  $1/N$ ,

$$\varsigma = \frac{(6N-12)F_{ccccc}^{(3)} + 9(-4N+8)F_{cc\gamma\gamma cc}^{(3)} + 18(N-2)F_{c\gamma\gamma\gamma c}^{(3)}}{(-3N^2 + 9N - 6)F_{ccccc}^{(3)} + (9(N-1)(N-2)F_{cc\gamma\gamma cc}^{(3)})} \sim \frac{1}{N}. \quad (\text{II.46})$$

Este resultado es válido incluso si se incluyen en el hamiltoniano términos con interacciones hasta  $n$  cuerpos. La conclusión es, por tanto, que en IBM sólo pueden existir anarmonicidades para un número finito de bosones. Sólo en el límite  $U(5)$  [AI76], cuando

alguno de los coeficientes (II.42–II.44) se anula exactamente, el espectro puede ser anarmónico incluso para  $N$  infinita. La armonicidad de los espectros de IBM en el límite  $N \rightarrow \infty$  se usará más adelante como guía para identificar el número de fonones excitados presentes en un estado dado.

## II.2 Cálculos esquemáticos en el sistema intrínseco

### II.2.1 Simetrías dinámicas

El análisis de los tres límites de simetría del IBM proporciona una buena prueba para el formalismo presentado en este capítulo.

En los cálculos realizados en el sistema laboratorio resulta complicado identificar el carácter de las bandas ( $\beta, \gamma, \dots$ ). Esto es aún más difícil cuando aumenta el número de fonones excitados. Un cálculo en el sistema intrínseco presenta como principal ventaja la fácil identificación del carácter de las bandas. Además, supone una buena aproximación al cálculo exacto en el caso de  $N$  grande. En el caso de  $N$  finita, el cálculo en el sistema intrínseco es una aproximación de orden  $1/N$  como ya se ha explicado. A continuación se analizan las tres simetrías dinámicas del IBM.

- Límite  $U(5)$ . El hamiltoniano más general expresado en forma multipolar es,

$$\hat{H} = \varepsilon_d \hat{n}_d + \sum_{L=1,3,4} \kappa_L \hat{T}^L \cdot \hat{T}^L. \quad (\text{II.47})$$

Este límite corresponde a núcleos esféricos ( $\beta = 0$ ), no existiendo ningún bosón de Goldstone dentro de los bosones deformados. Por otra parte el estado (intrínseco) fundamental es un condensado de bosones  $s$ ,  $(s^\dagger)^N |0\rangle$  y coincide con el estado fundamental en el sistema laboratorio. Además, los bosones excitados son  $d^\dagger$ , con lo que los estados excitados en el sistema intrínseco y en el laboratorio también coinciden. En resumen, el tratamiento en el sistema intrínseco para el límite  $U(5)$  es idéntico al realizado en el sistema laboratorio.

- Límite  $SU(3)$ . Esta simetría dinámica se corresponde con el hamiltoniano,

$$\hat{H} = \sum_{L=1,2} \kappa_L \hat{T}^L \cdot \hat{T}^L. \quad (\text{II.48})$$

con  $\chi = \pm\sqrt{7}/2$ . Para núcleos prolatos  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_y$  son bosones espúreos, mientras que para los oblatos los bosones de Goldstone son  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_{\gamma-}$ . El análisis del carácter de las bandas es especialmente relevante en este límite, ya que el concepto de vibración  $\beta$  y  $\gamma$  es estrictamente aplicable sólo en este caso o en situaciones próximas a él, por ejemplo en núcleos bien deformados.

En general, la determinación del carácter de las bandas de uno o dos bosones excitados se lleva a cabo en términos del valor del número cuántico  $K$ , restringiéndose a las representaciones más simétricas de  $SU(3)$  [AI78]. De esta forma, la bandas  $\beta$  y  $\gamma$  se corresponden con la representación de  $SU(3)$   $(2N - 4, 2)$  con  $K = 0$  y  $K = 2$  respectivamente. En el caso de dos fonones la situación se vuelve más complicada ya que existen 4 bandas posibles: dos con  $K = 0$  ( $\beta^2$  y  $\gamma^2$ ), una con  $K = 2$  ( $\beta\gamma$ ) y otra con  $K = 4$  ( $\gamma^2$ ), que se corresponden, en principio, con las representaciones de  $SU(3)$   $(2N - 8, 4)$  y  $(2N - 6, 0)$ . A priori no está claro como asignar las anteriores bandas a las representaciones irreducibles de  $SU(3)$ . En particular existe cierta ambigüedad con las bandas de dos bosones excitados y  $K = 0$ . A continuación se muestra cómo obtener la anterior correspondencia empleando el formalismo desarrollado en este capítulo.

Los estados  $|\gamma_+^2\rangle$  y  $|\gamma_-^2\rangle$ , referidos anteriormente, son una combinación de estados con  $K = 0$  y  $K = 4$ . Es preciso definir estados de dos fonones  $\gamma$  que tengan buen  $K$ , por ello se introducen los estados,

$$|\gamma_{K=0}^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\gamma_+^2\rangle + |\gamma_-^2\rangle] , \quad (\text{II.49})$$

$$|\gamma_{K=4}^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\gamma_+^2\rangle - |\gamma_-^2\rangle] . \quad (\text{II.50})$$

Éstos son de especial interés en el caso de simetría axial, aunque se continuarán empleando en el caso triaxial.

En la figura II.1 se presenta un cálculo para un hamiltoniano que posee simetría dinámica  $SU(3)$  y se comparan los resultados exactos con los del sistema intrínseco, para un amplio rango de valores de  $N$ . En primer lugar se puede observar que el acuerdo entre el resultado exacto y el aproximado mejora conforme aumenta el

número de bosones. Esto es debido a que el cálculo aproximado coincide con el exacto en orden  $1/N$ . También se ve el carácter armónico del modelo en el límite de  $N$  grande.

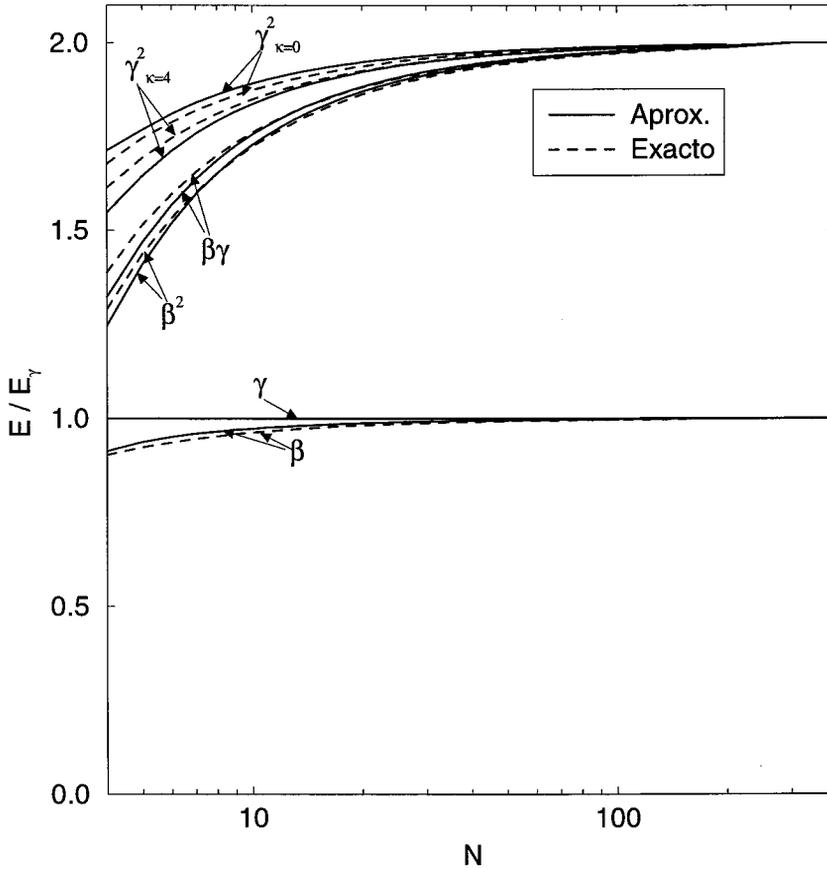


Figura II.1: Niveles energéticos para el límite  $SU(3)$  en función del número de bosones  $N$ . Se ha empleado el hamiltoniano  $\hat{H} = k_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2$  con  $\chi = \pm\sqrt{7}/2$ . Las líneas continuas corresponden al cálculo en el sistema intrínseco, mientras que las discontinuas se refieren al cálculo en el sistema laboratorio.

Respecto a la identificación del carácter de una excitación, hay que comparar el resultado exacto con el aproximado. Para valores bajos de  $N$ , esta comparación presenta cierta ambigüedad. Para solventar este problema se usa el hecho de que los espectros de IBM son armónicos para valores grandes de  $N$  (ver sección II.1.3). Para  $\kappa_1 = 0$  las autoenergías del hamiltoniano (II.48) son,

$$E(L, \lambda, \mu) = -\frac{3\kappa_2}{8}L(L+1) + \frac{\kappa_2}{2}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu). \quad (\text{II.51})$$

Los valores de  $(\lambda, \mu)$  contenidos en la representación totalmente simétrica  $[N]$  de  $U(6)$  son

$$(\lambda, \mu) = (2N - 4n_x - 6n_y, 2n_x), \quad n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.52})$$

con  $2N - 4n_x - 6n_y \geq 0$ . Si se desprecia el término  $L(L+1)$  de (II.51), las energías de excitación de las diferentes representaciones son

$$E(\lambda, \mu) - E(2N, 0) = -\kappa_2(6n_x + 12n_y)N + \kappa_2(6n_x^2 + 18n_y^2 + 18n_x n_y - 3n_x - 9n_y). \quad (\text{II.53})$$

A partir de esta expresión se observa claramente que  $\Delta n_x = +1$  supone la aparición de una excitación de un único fonón, mientras que  $\Delta n_y = +1$  corresponde a dos bosones excitados. En base a este análisis queda claro que  $(2N - 4, 2)$  corresponde a excitaciones de un fonón, mientras que  $(2N - 8, 4)$  y  $(2N - 6, 0)$  corresponden a excitaciones de dos fonones.

Finalmente, para determinar completamente el carácter de los estados, deben compararse las energías exactas y con las aproximadas. Después de realizar el cálculo en el sistema intrínseco se encuentra que las excitaciones  $\beta^2$  y  $\gamma_{K=0}^2$  están mezcladas, de forma que  $(2N - 8, 4)K = 0$  corresponde a la combinación  $\sqrt{\frac{2}{3}}\beta^2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\gamma_{K=0}^2$ , mientras que  $(2N - 6, 0)K = 0$  corresponde a  $\sqrt{\frac{1}{3}}\beta^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_{K=0}^2$ . Estas combinaciones son tales que no existe transición entre ambas bandas si se emplea el operador cuadrupolar correspondiente al generador de  $SU(3)$  como operador de transición  $E2$  (ver expresiones para las transiciones  $E2$  en la sección II.2.4). La anterior condición debe verificarse en el sistema intrínseco ya que lo hace trivialmente en el sistema laboratorio.

- Límite  $O(6)$ . El hamiltoniano para este límite puede expresarse como,

$$\hat{H} = \kappa_0 \hat{P}^\dagger \hat{P} + \sum_{L=1,3} \kappa_L \hat{T}^L \cdot \hat{T}^L. \quad (\text{II.54})$$

Un caso particular de este hamiltoniano es

$$\hat{H} = \kappa'_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2, \quad (\text{II.55})$$

con  $\chi = 0$ . Esta última forma es especialmente útil si se estudia la transición entre los límites  $SU(3)$  y  $O(6)$  variando el valor del parámetro  $\chi$ .

En este límite el concepto de excitación  $\beta$  o  $\gamma$  resulta bastante vago y es difícil localizar las cabezas de banda correspondientes a estas excitaciones. Para determinar el número de fonones de un estado en este límite, se emplea de nuevo el hecho de que el espectro debe ser armónico cuando  $N$  es grande (ver sección II.1.3). Los estados en el límite  $O(6)$  se etiquetan con  $(\sigma, \tau, \nu_\Delta, L)$  [AI79], siendo los valores de  $\sigma$  y  $\tau$  los siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma &= N - 2n > 0, & n &= 0, 1, \dots, \\ \tau &= \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0.\end{aligned}\tag{II.56}$$

Las autoenergías en función de estas etiquetas son

$$E(\sigma, \tau, L) = A\sigma(\sigma + 4) + B\tau(\tau + 3) + CL(L + 1),\tag{II.57}$$

siendo  $A < 0$ ,  $B > 0$  y  $C > 0$  en cálculos realistas. Para estos parámetros, las cabezas de banda corresponden a  $\tau = 0$  y  $L = 0$ , siendo sus energías,

$$E(\sigma) = A\sigma(\sigma + 4),\tag{II.58}$$

y las energías de excitación,

$$E(\sigma = N - 2n) - E(\sigma = N) = 4A(-nN) + 4A(n^2 - 2n).\tag{II.59}$$

De esta última expresión se deduce que  $n$  representa el número de fonones excitados. En este caso los fonones excitados sólo pueden ser de tipo  $\beta$ .

En la figura II.2 se presenta un cálculo para un hamiltoniano  $O(6)$  y se comparan los resultados exactos con los aproximados para un amplio rango de valores de  $N$ .

## II.2.2 Situaciones intermedias

En esta sección se analizan distintos hamiltonianos esquemáticos que no corresponden a ninguna de las anteriores simetrías dinámicas. Se usa para ello un número fijo de bosones ( $N = 16$ ) y hamiltonianos con algún parámetro variable, de forma, que puedan estudiarse mediante un único cálculo múltiples situaciones. Alguna de éstas es poco realista. En todos los cálculos que se presentan se obtiene simetría axial prolata y los bosones de

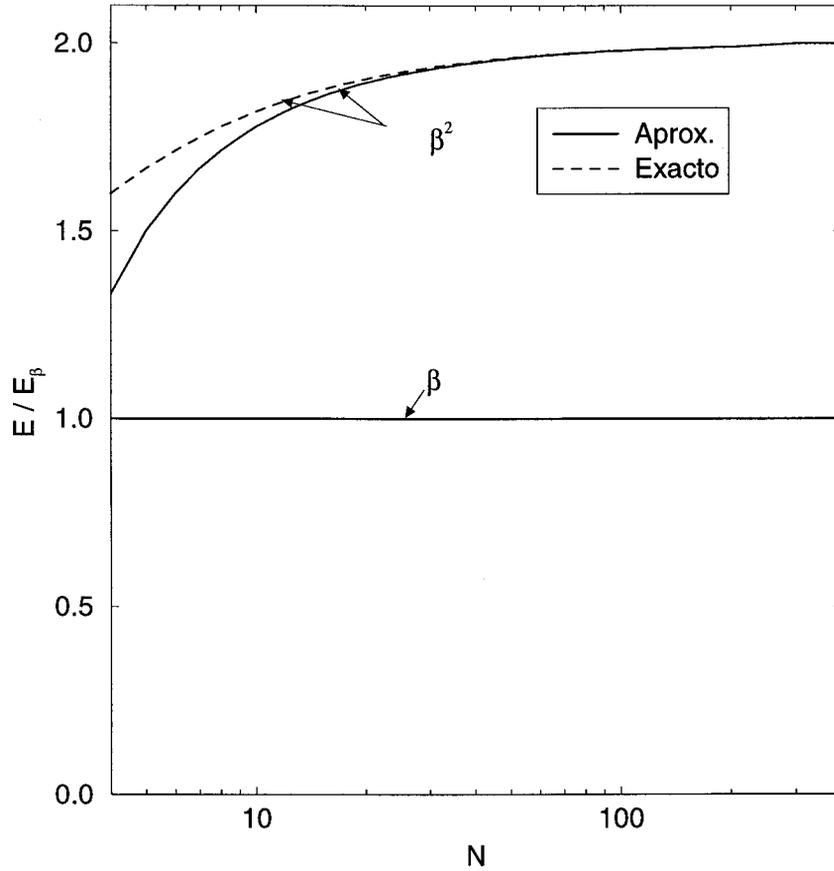


Figura II.2: Niveles energéticos para el límite  $O(6)$  como una función de  $N$ . Se ha empleado el hamiltoniano  $\hat{H} = \kappa_0 \hat{P}^\dagger \hat{P}$ . Las líneas continuas corresponden al cálculo en el sistema intrínseco, mientras que las discontinuas corresponden al realizado en el sistema laboratorio.

Goldstone son  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_y$ . Éstos son eliminados de la base de estados excitados antes de realizar la diagonalización. Situaciones diferentes a las anteriores se pueden tratar de un modo análogo. Hay que destacar que para valores extremos de los parámetros, el estado fundamental puede presentar una componente no despreciable de las excitaciones de uno y dos fonones.

En la figura II.3a se presentan los resultados de un cálculo con una interacción cuadrupolar más un término de *pairing* ( $\hat{H} = \kappa_0 \hat{P}^\dagger \hat{P} + \kappa_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2$ , con  $\chi = -\sqrt{7}/2$ ). Como características más relevantes se observa cómo va cambiando el carácter de las diferentes bandas al ir variando el cociente  $-\kappa_0/\kappa_2$ . Además, se ve cómo la energía de la banda  $\beta$  aumenta monótonamente mientras que la de la banda  $\gamma$  se queda aproximadamente constante.

Finalmente, destaca que para todo el rango de valores de  $-\kappa_0/\kappa_2$  se mantiene un comportamiento aproximadamente armónico de la vibración  $\gamma$ . Esta figura muestra las mismas tendencias que la figura 14a de la referencia [CW88], aunque en ese caso el cálculo ha sido realizado en el sistema laboratorio. Las únicas discrepancias que surgen provienen de la influencia de estados con más de 2 bosones excitados. Para este hamiltoniano un valor típico de  $-\kappa_0/\kappa_2$  es 4.

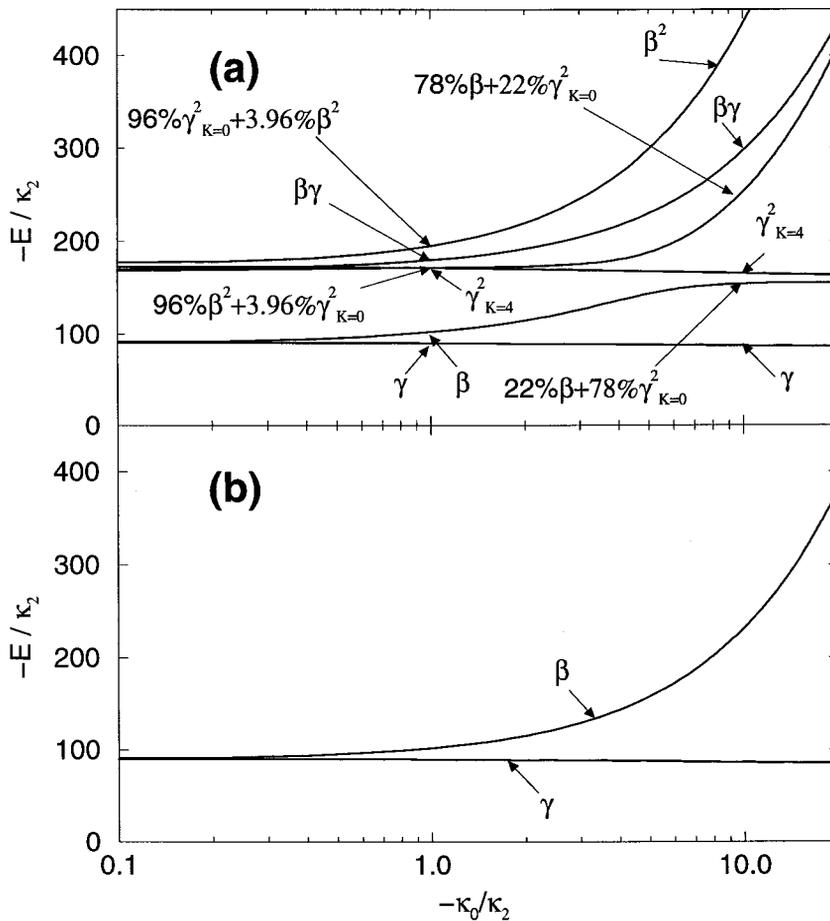


Figura II.3: *Niveles energéticos y composición de los estados en función del cociente  $-\kappa_0/\kappa_2$  para el hamiltoniano  $\hat{H} = \kappa_0 \hat{P}^\dagger \hat{P} + \kappa_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2$ , con  $\chi = -\sqrt{7}/2$  y  $N = 16$ . En la parte superior (a) de la gráfica se consideran excitaciones de uno y dos fonones, mientras que en la inferior (b) sólo se consideran excitaciones de uno.*

La figura II.4a muestra la influencia de un término hexadecapolar sobre uno cuadrupolar ( $\hat{H} = \kappa_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2 + \kappa_4 \hat{T}^4 \cdot \hat{T}^4$ , con  $\chi = -\sqrt{7}/2$ ). Destaca la existencia de una clara

separación entre los estados de dos bosones excitados y los de uno a lo largo de todo el rango de variación de  $\kappa_4/\kappa_2$ . Hay que hacer notar que para  $\kappa_4 = 0$  se recupera el límite  $SU(3)$ .

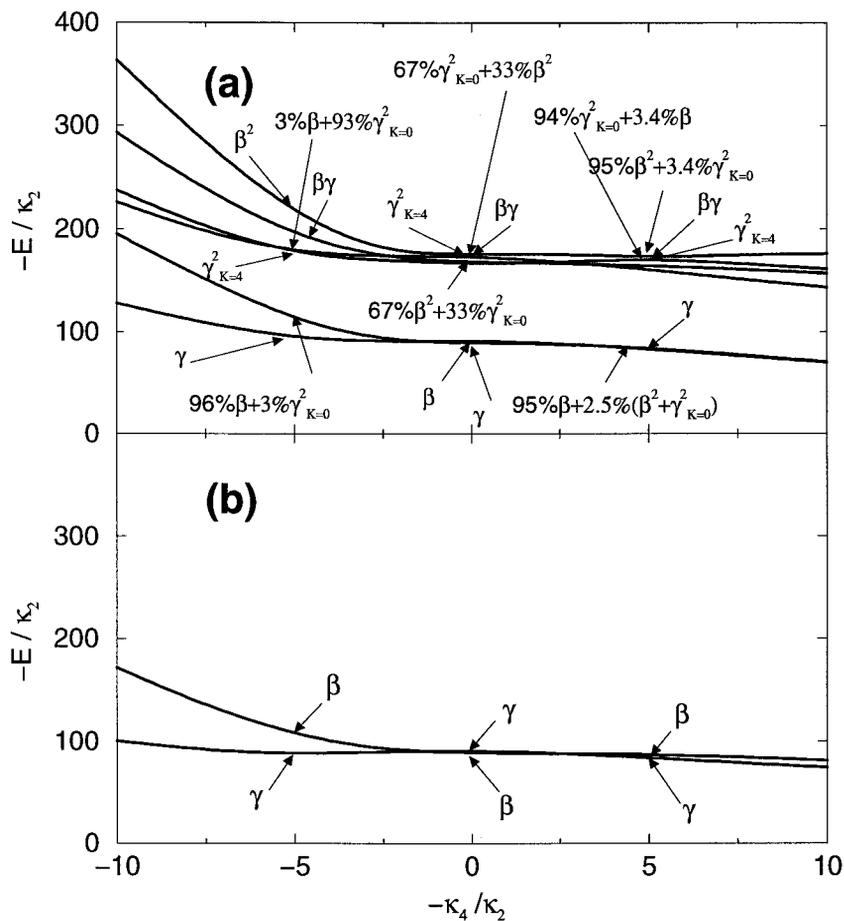


Figura II.4: Niveles energéticos y composición de los estados en función del cociente  $-\kappa_4/\kappa_2$  para el hamiltoniano  $\hat{H} = \kappa_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2 + \kappa_4 \hat{T}^4 \cdot \hat{T}^4$ , con  $\chi = -\sqrt{7}/2$  y  $N = 16$ . En la parte superior (a) de la gráfica se consideran excitaciones de uno y dos fonones, mientras que en la inferior (b) sólo se consideran excitaciones de uno.

En la figura II.5a se analiza la transición de un núcleo deformado a otro esférico. Se emplea para ello el hamiltoniano  $\hat{H} = \varepsilon_d \hat{n}_d + \kappa_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2$ , con  $\chi = -\sqrt{7}/2$ . Se observa una transición abrupta para un valor particular de  $-\varepsilon_d/\kappa_2$ . El núcleo pasa en ese punto de deformado a esférico y, por tanto, el valor de equilibrio del parámetro de deformación,  $\beta$ , pasa de un valor finito a cero.

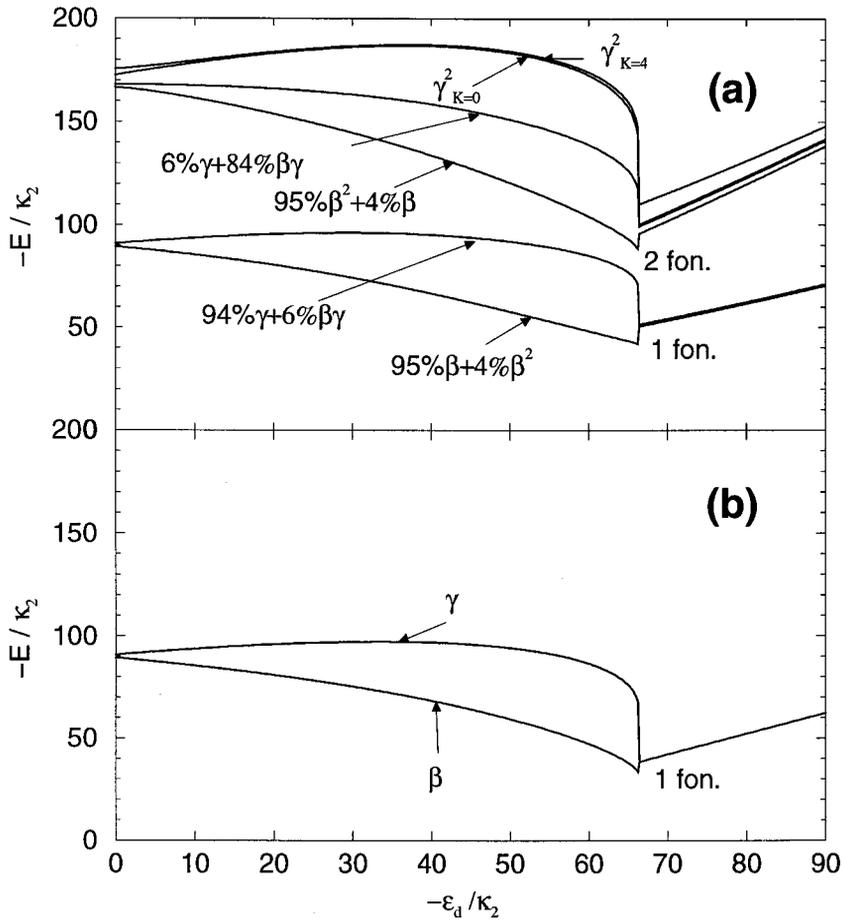


Figura II.5: Niveles energéticos y composición de los estados en función del cociente  $-\varepsilon_d/\kappa_2$  para el hamiltoniano  $\hat{H} = \varepsilon_d \hat{n}_d + \kappa_2 \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2$ , con  $\chi = -\sqrt{7}/2$  y  $N = 16$ . En la parte superior (a) de la gráfica se consideran excitaciones de uno y dos fonones, mientras que en la inferior (b) sólo se consideran excitaciones de uno.

### II.2.3 Influencia de las excitaciones multifonónicas

En este capítulo, además de la aproximación de campo medio se está realizando una truncación en el número de fonones que se consideran, de forma que el número máximo de fonones que se tienen en cuenta es 2. En los resultados que se muestran en la sección anterior se ve que en la mayoría de los casos los estados que contienen un número diferente de fonones excitados se encuentran aproximadamente desacoplados.

Sería de gran interés conocer la influencia de estados de  $n$ -fonones sobre los cálculos realizados. Hacer esto de un modo general complicaría sobremanera el cálculo. Sin

embargo, se puede obtener alguna información de ese efecto viendo la influencia de los estados de dos fonones sobre los de uno. Así en las figuras II.3, II.4 y II.5 se comparan los cálculos realizados considerando hasta excitaciones de dos fonones con aquellos en los que sólo se consideran hasta excitaciones de un fónon. La conclusión que se obtiene es que la influencia de los estados de dos fonones sobre los de uno es pequeña, excepto para los valores extremos de los parámetros y en regiones donde los estados de uno y dos fonones se cruzan (como por ejemplo en la figura II.3 para  $-\kappa_0/\kappa_2 = 4$ ).

Esto demuestra que la influencia de las excitaciones multifonónicas sobre los estados de dos fonones no debe ser muy importante, excepto para valores muy concretos de los parámetros.

## II.2.4 Transiciones electromagnéticas

Para calcular transiciones electromagnéticas en el sistema intrínseco se debe suponer que la función de onda es factorizable en una parte rotacional y otra intrínseca. Esta hipótesis es estrictamente válida sólo en el caso del límite  $SU(3)$ , pero se puede considerar como una buena aproximación en el caso de núcleos bien deformados. La mayoría de los núcleos deformados presentan simetría axial y poseen además un plano de simetría perpendicular al eje de simetría nuclear. En esta sección se trabajará bajo las anteriores hipótesis.

Un operador multipolar de orden  $L$  referido al sistema laboratorio, se relaciona con su equivalente en el sistema intrínseco mediante la siguiente expresión,

$$\hat{T}_M^L(lab) = \sum_{M'} \mathcal{D}_{MM'}^L \hat{T}_{M'}^L(int), \quad (II.60)$$

donde  $\mathcal{D}$  son las matrices de rotación. Por otro lado, los estados del sistema intrínseco se relacionan con los del sistema laboratorio también mediante las matrices  $\mathcal{D}$ ,

$$|JMK, \xi\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left( \mathcal{D}_{MK}^J + (-1)^{J+K} \mathcal{D}_{M-K}^J \mathcal{R}_2(\pi) \right) |K\xi\rangle. \quad (II.61)$$

$\xi$  [ver (II.12)] representa la parte intrínseca de la función de onda y  $K$  corresponde a la proyección del momento angular sobre el eje de simetría.

Los estados  $|K\xi\rangle$  son los estados intrínsecos (II.10-II.11, II.49-II.50). Los elementos de matriz reducidos en el sistema laboratorio se relacionan fácilmente con los calculados

en el sistema intrínseco a través de la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \langle J \ K, \xi | \hat{T}_L(lab) | J' K', \xi' \rangle &= \sqrt{2J'+1} \left( \langle J' K' \ LK - K' | JK \rangle \langle K \xi | \hat{T}_{LK-K'}(int) | K' \xi' \rangle \right. \\ &+ \left. (-1)^{J'+K'} \langle J' - K' \ LK + K' | JK \rangle \langle K \xi | \hat{T}_{LK+K'} | \overline{K' \xi'} \rangle \right) \frac{2}{1 + \delta_{K0} + \delta_{K'0} + \delta_{KK'}}. \end{aligned} \quad (II.62)$$

El último factor que aparece en el lado derecho de la anterior igualdad proviene de que en los estados intrínsecos que se consideran se incluyen las dos proyecciones  $\pm K$ .

Las probabilidades de transición reducida para dos estados pertenecientes a dos bandas rotacionales están dadas por,

$$B(EL, J' K', \xi' \rightarrow JK, \xi) = \frac{1}{2J'+1} |\langle JK, \xi | T_L(lab) | J' K', \xi' \rangle|^2. \quad (II.63)$$

Los elementos de matriz para las transiciones, calculados en el sistema intrínseco, se hallan de forma análoga a como se hace en el caso del hamiltoniano. Los elementos de matriz no nulos entre el estado fundamental, estados de uno y estados de dos fonones son los siguientes,

$$\langle c | \hat{T}_M^L | c \rangle = N G_{cc}^{(1)}, \quad (II.64)$$

$$\langle c | \hat{T}_M^L | p \rangle = \sqrt{N} G_{cp}^{(1)}, \quad (II.65)$$

$$\langle p | \hat{T}_M^L | p' \rangle = G_{pp'}^{(1)} + \delta_{pp'} (N-1) G_{cc}^{(1)}, \quad (II.66)$$

$$\langle p | \hat{T}_M^L | pp' \rangle = \sqrt{N-1} G_{cp'}^{(1)}, \quad (II.67)$$

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 | \hat{T}_M^L | p_3 p_4 \rangle &= \delta_{p_1 p_3} G_{p_2 p_4}^{(1)} + \delta_{p_1 p_4} G_{p_2 p_3}^{(1)} + \delta_{p_2 p_3} G_{p_1 p_4}^{(1)} + \delta_{p_2 p_4} G_{p_1 p_3}^{(1)} \\ &+ (N-2) G_{cc}^{(1)} \frac{\delta_{p_1 p_3} \delta_{p_2 p_4} + \delta_{p_1 p_4} \delta_{p_2 p_3}}{1 + \delta_{p_1 p_2} \delta_{p_3 p_4} \delta_{p_2 p_3}}, \end{aligned} \quad (II.68)$$

donde

$$G_{pp'}^{(1)} = \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} t_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} \eta_{\ell_1 m_1}^{p*} \eta_{\ell_2 m_2}^{p'}, \quad (II.69)$$

y

$$t_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} = \langle \ell_1 m_1 | \hat{T}_M^L | \ell_2 m_2 \rangle. \quad (II.70)$$

De especial relevancia en Física Nuclear son las transiciones  $E2$  y en esta sección los resultados se refieren exclusivamente a ellas. El operador  $E2$  más general que posee

sólo términos a un cuerpo, está definido en la ecuación (II.3) (para una carga efectiva unitaria). Los elementos de matriz entre el estado fundamental y estados de un fonón pueden encontrarse en la referencia [AAVI92], aunque, para que la descripción resulte completa, también se muestran a continuación (se mantiene la dependencia en  $\gamma$  por generalidad),

$$\langle c|\hat{T}_0^2|c\rangle = N \frac{\beta(2 \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}}\beta\chi \cos 2\gamma)}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.71})$$

$$\langle c|\hat{T}_{\pm 2}^2|c\rangle = N \frac{\beta(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{7}}\beta\chi \cos \gamma) \sin \gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.72})$$

$$\langle \beta|\hat{T}_0^2|\beta\rangle = (N - 1) \frac{\beta(2 \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}}\beta\chi \cos 2\gamma)}{1 + \beta^2} - \frac{(2\beta \cos \gamma + \sqrt{\frac{2}{7}}\chi \cos 2\gamma)}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.73})$$

$$\langle \beta|\hat{T}_{\pm 2}^2|\beta\rangle = (N - 1) \frac{\beta(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{7}}\beta\chi \cos \gamma) \sin \gamma}{1 + \beta^2} + \frac{(-\sqrt{2}\beta + \frac{2}{\sqrt{7}}\chi \cos \gamma) \sin \gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.74})$$

$$\langle \gamma_+|\hat{T}_0^2|\gamma_+\rangle = (N - 1) \frac{\beta(2 \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}}\beta\chi \cos 2\gamma)}{1 + \beta^2} + \sqrt{\frac{2}{7}}\chi \cos 2\gamma, \quad (\text{II.75})$$

$$\langle \gamma_+|\hat{T}_{\pm 2}^2|\gamma_+\rangle = (N - 1) \frac{\beta(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{7}}\beta\chi \cos \gamma) \sin \gamma}{1 + \beta^2} - \frac{\chi \sin 2\gamma}{\sqrt{7}}, \quad (\text{II.76})$$

$$\langle c|\hat{T}_0^2|\beta\rangle = -\sqrt{N} \frac{(\beta^2 - 1) \cos \gamma + \sqrt{\frac{2}{7}}\beta\chi \cos 2\gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.77})$$

$$\langle c|\hat{T}_{\pm 2}^2|\beta\rangle = \sqrt{N} \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \beta^2) + \frac{2}{\sqrt{7}}\beta\chi \cos \gamma) \sin \gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.78})$$

$$\langle c|\hat{T}_0^2|\gamma_+\rangle = \sqrt{N} \frac{(-1 + 2\sqrt{\frac{2}{7}}\beta\chi \cos \gamma) \sin \gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (\text{II.79})$$

$$\langle c|\hat{T}_{\pm 2}^2|\gamma_+\rangle = \sqrt{N} \frac{7\sqrt{2} \cos \gamma + 2\sqrt{7}\beta\chi \cos 2\gamma}{14\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (\text{II.80})$$

$$\langle \beta|\hat{T}_0^2|\gamma_+\rangle = \frac{(\beta + 2\sqrt{\frac{2}{7}}\chi \cos \gamma) \sin \gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (\text{II.81})$$

$$\langle \beta | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \gamma_+ \rangle = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\beta \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{7}}\chi \cos 2\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}}. \quad (\text{II.82})$$

Los elementos de matriz no nulos entre estados de uno y dos fonones son los siguientes,

$$\langle \beta | \hat{T}_0^2 | \beta^2 \rangle = \sqrt{2(N-1)} \frac{(1 - \beta^2) \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}}\beta\chi \cos 2\gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.83})$$

$$\langle \beta | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta^2 \rangle = \sqrt{2(N-1)} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \beta^2) \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{7}}\beta\chi \sin 2\gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.84})$$

$$\langle \beta | \hat{T}_0^2 | \beta\gamma_+ \rangle = \sqrt{N-1} \frac{-\sin \gamma + \sqrt{\frac{2}{7}}\beta\chi \sin 2\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (\text{II.85})$$

$$\langle \beta | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta\gamma_+ \rangle = \sqrt{N-1} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{7}}\beta\chi \cos 2\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (\text{II.86})$$

$$\langle \gamma_+ | \hat{T}_0^2 | \beta\gamma_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta | \hat{T}_0^2 | \beta^2 \rangle, \quad (\text{II.87})$$

$$\langle \gamma_+ | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta\gamma_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta^2 \rangle, \quad (\text{II.88})$$

$$\langle \gamma_+ | \hat{T}_0^2 | \gamma_{K=0}^2 \rangle = \langle \gamma_+ | \hat{T}_0^2 | \gamma_{K=4}^2 \rangle = \langle \beta | \hat{T}_0^2 | \beta\gamma_+ \rangle, \quad (\text{II.89})$$

$$\langle \gamma_+ | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \gamma_{K=0}^2 \rangle = \langle \gamma_+ | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \gamma_{K=4}^2 \rangle = \langle \beta | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta\gamma_+ \rangle, \quad (\text{II.90})$$

$$\langle \beta^2 | \hat{T}_0^2 | \beta^2 \rangle = (N-2) \frac{2\beta \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}}\beta^2\chi \cos 2\gamma}{1 + \beta^2} + 2 \frac{-2\beta \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}}\chi \cos 2\gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.91})$$

$$\langle \beta^2 | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta^2 \rangle = (N-2) \frac{\sqrt{2}\beta \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{7}}\beta^2\chi \sin 2\gamma}{1 + \beta^2} + 2 \frac{-\sqrt{2}\beta \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{7}}\chi \sin 2\gamma}{1 + \beta^2}, \quad (\text{II.92})$$

$$\langle \beta^2 | \hat{T}_0^2 | \beta\gamma_+ \rangle = \frac{\sqrt{2}\beta \sin \gamma + \frac{2}{\sqrt{7}}\chi \sin 2\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (\text{II.93})$$

$$\langle \beta^2 | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta \gamma_+ \rangle = \frac{-\beta \cos \gamma + \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \cos 2\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (\text{II.94})$$

$$\begin{aligned} \langle \beta \gamma_+ | \hat{T}_0^2 | \beta \gamma_+ \rangle &= (N - 2) \frac{2\beta \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}} \beta^2 \chi \cos 2\gamma}{1 + \beta^2} + \frac{-2\beta \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \cos 2\gamma}{1 + \beta^2} \\ &+ \sqrt{\frac{2}{7}} \chi \cos 2\gamma, \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

$$\begin{aligned} \langle \beta \gamma_+ | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta \gamma_+ \rangle &= (N - 2) \frac{\sqrt{2} \beta \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{7}} \beta^2 \chi \sin 2\gamma}{1 + \beta^2} + \frac{-\sqrt{2} \beta \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{7}} \chi \sin 2\gamma}{1 + \beta^2} \\ &- \frac{\chi \sin 2\gamma}{\sqrt{7}}, \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

$$\langle \beta \gamma_+ | \hat{T}_0^2 | \gamma_{K=0}^2 \rangle = \langle \beta \gamma_+ | \hat{T}_0^2 | \gamma_{K=4}^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta^2 | \hat{T}_0^2 | \beta \gamma_+ \rangle, \quad (\text{II.97})$$

$$\langle \beta \gamma_+ | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \gamma_{K=0}^2 \rangle = \langle \beta \gamma_+ | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \gamma_{K=4}^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta^2 | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \beta \gamma_+ \rangle, \quad (\text{II.98})$$

$$\langle \gamma_{K=0}^2 | \hat{T}_0^2 | \gamma_{K=0}^2 \rangle = \langle \gamma_{K=4}^2 | \hat{T}_0^2 | \gamma_{K=4}^2 \rangle = (N - 2) \frac{2\beta \cos \gamma - \sqrt{\frac{2}{7}} \beta^2 \chi \cos 2\gamma}{1 + \beta^2} + \sqrt{\frac{2}{7}} \chi (\cos 2\gamma + 1), \quad (\text{II.99})$$

$$\langle \gamma_{K=0}^2 | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \gamma_{K=0}^2 \rangle = \langle \gamma_{K=4}^2 | \hat{T}_{\pm 2}^2 | \gamma_{K=4}^2 \rangle = (N - 2) \frac{\sqrt{2} \beta \sin \gamma + \sqrt{\frac{1}{7}} \beta^2 \chi \sin 2\gamma}{1 + \beta^2} - \sqrt{\frac{1}{7}} \chi \sin 2\gamma. \quad (\text{II.100})$$

No se calcula ningún elemento de matriz con el bosón  $\gamma_-$ , con excepción de aquellos donde aparecen los estados  $|\gamma_{K=0}^2\rangle$  y  $|\gamma_{K=4}^2\rangle$ . Aunque los resultados que se encuentran son distintos a los obtenidos con el bosón  $\gamma_+$ , éstos se vuelven idénticos en el caso de simetría axial. Además, el bosón  $\gamma_-$  se convierte en espúreo en el caso triaxial.

Con objeto de estudiar el comportamiento general de las transiciones, en la Fig. II.6 se presenta el cálculo de los valores de  $B(E2)$  como una función del parámetro  $\chi$  que aparece en el operador de transición. El hamiltoniano empleado es  $\hat{H} = \kappa_2 (\hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2 - \hat{P}^\dagger \hat{P})$ . En

(a) se realiza el cálculo directamente en el sistema laboratorio, mientras que en (b) se usan las funciones de onda intrínsecas y las ecuaciones (II.62-II.63). La tendencia general de las  $B(E2)$  calculadas es idéntica a la que aparece en la Ref. [CW88], aunque en ese caso sólo se incluyen el estado fundamental y los estados que contiene un único bosón excitado. Se observa en la figura II.6 el buen acuerdo entre los resultados exactos y los aproximados.

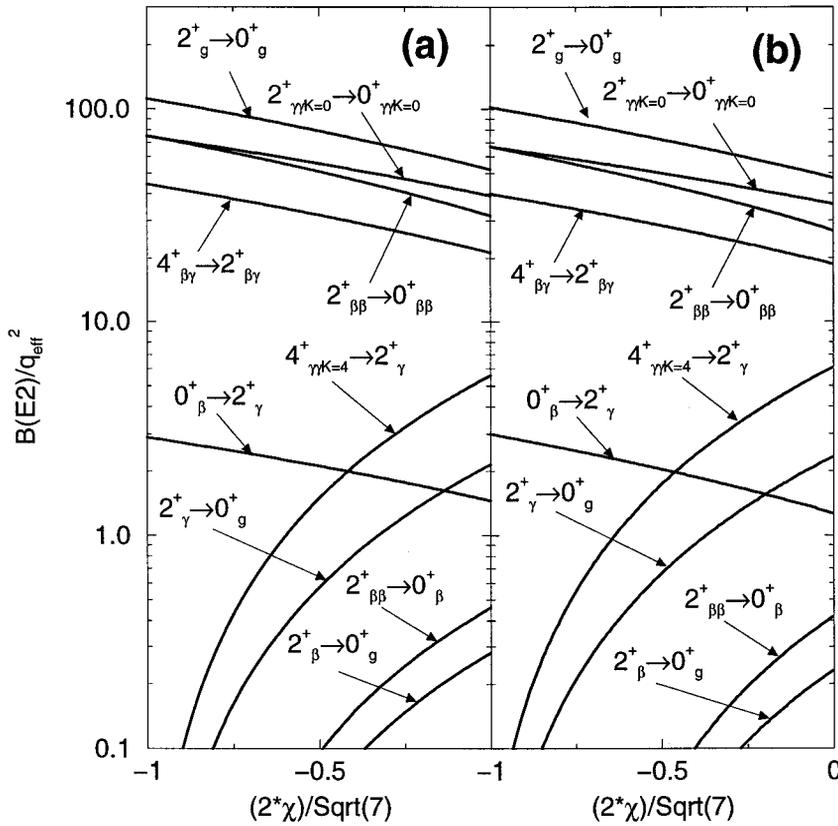


Figura II.6: Valores de  $B(E2)$  para transiciones entre el estado fundamental, estados de un fonón y estados de dos fonones, en función del parámetro  $\chi$ . Se ha empleado el hamiltoniano  $\hat{H} = \kappa_2 (\hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2 - \hat{P}^\dagger \hat{P})$  y un número de bosones igual a 16. En (a) el cálculo es realiza directamente en el sistema laboratorio, mientras que en (b) se emplean las funciones de onda intrínsecas y las ecuaciones (II.62-II.63).

### II.2.5 Simulación de triaxialidad en las teorías de campo medio

En función de lo expuesto hasta ahora en este capítulo, puede concluirse que el IBM-1 en su versión estándar es un modelo armónico para  $N \rightarrow \infty$ , siendo imposible introducir anarmonicidad positiva ( $\varsigma > 0$ ) para  $N$  finito. Con objeto de estudiar el problema de la anarmonicidad, se puede extender el IBM-1 en varias direcciones. Una de ellas consiste en la introducción de términos a tres cuerpos. La principal novedad de estos nuevos términos es que son capaces de producir triaxialidad [VIC81], cosa que es imposible de conseguir considerando sólo hasta términos de dos cuerpos en el hamiltoniano [GK80a, DS80, VIC81].

A pesar de que la triaxialidad proviene de la existencia de un término cúbico en el hamiltoniano, a continuación se mostrará una forma simple de simularla en una teoría de campo medio del IBM estándar. El formalismo de estado intrínseco supone la existencia de un campo promedio cuyas características dependen de forma autoconsistente del hamiltoniano empleado. Una forma simple de investigar las consecuencias de la triaxialidad (de los términos a tres cuerpos) es relajar la condición de autoconsistencia e imponer “a mano” triaxialidad en el campo medio. Para ello se toma  $\gamma \neq 0^\circ$ . Hay que destacar que en las teorías de campo medio es práctica habitual perturbar el campo que se obtiene a partir de la minimización de la energía. En la figura II.7 se muestra un cálculo de este tipo. Se considera un hamiltoniano simple y se calculan las energías de excitación de las diferentes bandas, fijando previamente el valor de  $\gamma$ . Este proceso se realiza para  $\gamma$  entre  $0^\circ$  y  $15^\circ$  y se indica la composición de las bandas para distintos valores de  $\gamma$ . Para obtener el valor de  $\beta$ , primero se impone el valor de  $\gamma$  y luego se minimiza la energía. Para  $\gamma > 15^\circ$  la banda más baja pierde el carácter de estado fundamental, dejando de ser un condensado de bosones  $\Gamma_c$ . En este caso, la interpretación de los resultados se vuelve más complicada. Un hecho relevante de esta figura es que aunque la energía de los estados de dos fonones se mantiene aproximadamente constante, la energía de los estados de un fonón disminuye lentamente al aumentar  $\gamma$ . En otras palabras, aparece un importante grado de anarmonicidad positiva para  $\gamma \neq 0^\circ$ . Por ejemplo, para  $\gamma \sim 6^\circ$  la anarmonicidad  $\varsigma$  (II.39) vale aproximadamente 0.5. Este grado de anarmonicidad es precisamente el observado en el  $^{166}\text{Er}$  [G<sup>+</sup>97a, FAH<sup>+</sup>96] y en el  $^{168}\text{Er}$  [C<sup>+</sup>80, B<sup>+</sup>91].

La conclusión que se obtiene es que parece existir una relación entre triaxialidad y anarmonicidad. No obstante, esta conclusión merece ciertos comentarios. En primer lugar, el resultado debe ser verificado introduciendo realmente términos a tres cuerpos en el hamiltoniano y realizando el cálculo completo bien en el sistema laboratorio o bien en el intrínseco. En segundo lugar, hay que destacar que el análisis no da ninguna información respecto a si cualquier término de tres cuerpos da lugar a la aparición de anarmonicidad y, en concreto, acerca de cuál de ellos es más afectivo a la hora de generarla. En resumen, puede decirse que este tipo de estudio proporciona información del efecto promedio de los términos a tres cuerpos, sin ser capaz de distinguir el efecto de cada uno de los posibles términos por separado.

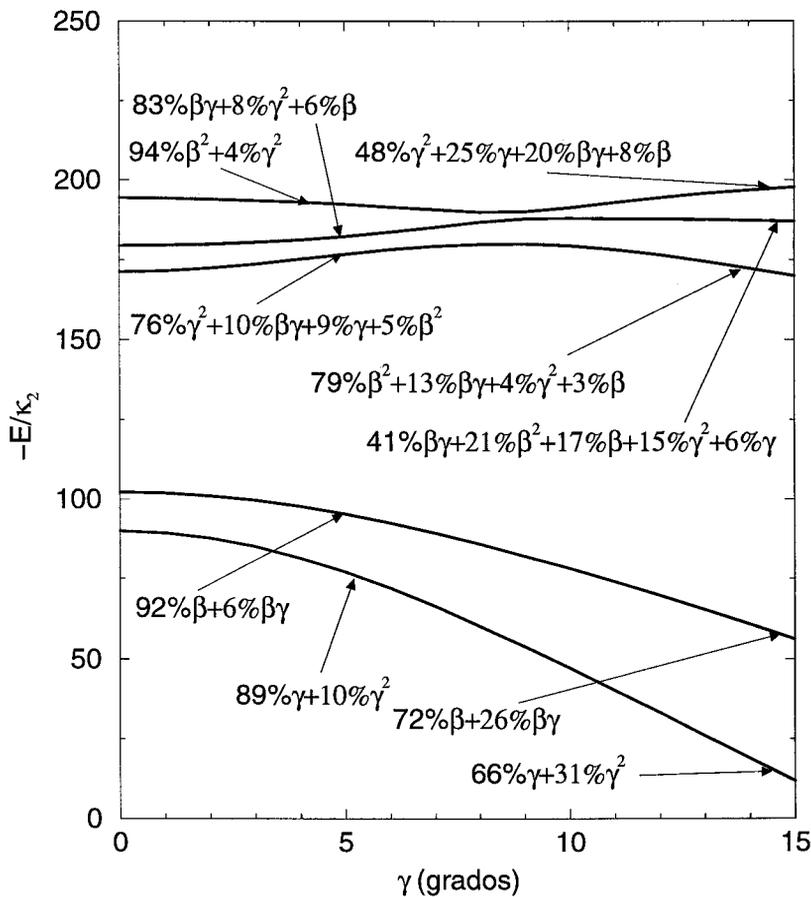


Figura II.7: Energías de excitación y composición de los estados en función de  $\gamma$ . Se emplea el hamiltoniano  $\hat{H} = \kappa_2(\hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2 - \hat{P}^\dagger P)$ , con  $\chi = -\sqrt{7}/2$  y  $N = 16$ , perturbándose el campo medio con  $\gamma \neq 0$ .

## II.3 Los términos a tres cuerpos

En la sección anterior se ha visto que el IBM-1 debe extenderse para poder describir el fenómeno de la anarmonicidad de la vibración  $\gamma$  en núcleos bien deformados. La figura II.7 sugiere una conexión entre anarmonicidad y triaxialidad, por lo que parece lógico realizar un cálculo incluyendo términos a tres cuerpos en el hamiltoniano<sup>1</sup>. Considérese el hamiltoniano más general con sólo términos a tres cuerpos. Dicho hamiltoniano posee 17 términos independientes. La forma más conveniente de definirlo es dando sus elementos de matriz entre estados de tres bosones normalizados,

$$\begin{aligned}
h_{(1)} &= \langle ddd; L = 0 | \hat{H}_3 | ddd; L = 0 \rangle, & h_{(2)} &= \langle ddd; L = 2 | \hat{H}_3 | ddd; L = 2 \rangle, \\
h_{(3)} &= \langle ddd; L = 3 | \hat{H}_3 | ddd; L = 3 \rangle, & h_{(4)} &= \langle ddd; L = 4 | \hat{H}_3 | ddd; L = 4 \rangle, \\
h_{(5)} &= \langle ddd; L = 6 | \hat{H}_3 | ddd; L = 6 \rangle, & h_{(6)} &= \langle ddd; L = 0 | \hat{H}_3 | dds; L = 0 \rangle, \\
h_{(7)} &= \langle ddd; L = 2 | \hat{H}_3 | dds; L = 2 \rangle, & h_{(8)} &= \langle ddd; L = 4 | \hat{H}_3 | dds; L = 4 \rangle, \\
h_{(9)} &= \langle ddd; L = 2 | \hat{H}_3 | dss; L = 2 \rangle, & h_{(10)} &= \langle ddd; L = 0 | \hat{H}_3 | sss; L = 0 \rangle, \\
h_{(11)} &= \langle dds; L = 0 | \hat{H}_3 | dds; L = 0 \rangle, & h_{(12)} &= \langle dds; L = 2 | \hat{H}_3 | dds; L = 2 \rangle, \\
h_{(13)} &= \langle dds; L = 4 | \hat{H}_3 | dds; L = 4 \rangle, & h_{(14)} &= \langle dds; L = 2 | \hat{H}_3 | dss; L = 2 \rangle, \\
h_{(15)} &= \langle dds; L = 0 | \hat{H}_3 | sss; L = 0 \rangle, & h_{(16)} &= \langle dss; L = 2 | \hat{H}_3 | dss; L = 2 \rangle, \\
h_{(17)} &= \langle sss; L = 0 | \hat{H}_3 | sss; L = 0 \rangle,
\end{aligned} \tag{II.101}$$

Los estados que aparecen en las anteriores ecuaciones quedan totalmente caracterizados dando el número de bosones  $s$  y  $d$  que contienen y el momento angular al que se encuentran acoplados. Los estados que contienen sólo bosones  $d$  son una excepción, para ellos es preciso especificar el acoplamiento intermedio. La convención que se emplea en dichos estados es,

$$\begin{aligned}
|ddd; L = 0\rangle &\equiv |(dd)^2d; L = 0\rangle, \\
|ddd; L = 2\rangle &\equiv |(dd)^2d; L = 2\rangle, \\
|ddd; L = 3\rangle &\equiv |(dd)^2d; L = 3\rangle, \\
|ddd; L = 4\rangle &\equiv |(dd)^2d; L = 4\rangle, \\
|ddd; L = 6\rangle &\equiv |(dd)^4d; L = 6\rangle.
\end{aligned} \tag{II.102}$$

<sup>1</sup>Otros términos de orden superior (de cuatro cuerpos) podrían también dar lugar a la anarmonicidad deseada.

Nótese que realmente el último estado está unívocamente determinado sin necesidad de especificar el acoplamiento intermedio.

A continuación se procede a realizar el análisis de este hamiltoniano para determinar qué términos contribuirán de forma relevante a la anarmonicidad de la excitación  $\gamma$ , tomando siempre como base la relación entre triaxialidad y anarmonicidad.

### II.3.1 Análisis en el sistema intrínseco

El valor promedio de  $\hat{H}_3$  con el estado fundamental (II.5) se calcula de forma sencilla y vale,

$$\begin{aligned}
 \langle c | \hat{H}_3 | c \rangle = & \frac{N(N-1)(N-2)}{(1+\beta^2)^3} \left[ \frac{1}{6} h_{(17)} + \beta^2 \left( \frac{1}{2\sqrt{15}} h_{(15)} + 2h_{(16)} \right) \right. \\
 & - \beta^3 \left( \frac{1}{14\sqrt{70}} h_{(10)} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} h_{(14)} \right) \cos(3\gamma) \\
 & + \beta^4 \left( \frac{1}{7} h_{(11)} + \frac{9}{7} h_{(12)} + \frac{9}{35} h_{(13)} + \frac{1}{\sqrt{7}} h_{(9)} \right) \\
 & - \beta^5 \left( \frac{\sqrt{42}}{210} h_{(6)} + \frac{3\sqrt{2}}{14} h_{(7)} + \frac{9\sqrt{22}}{385} h_{(8)} \right) \cos(3\gamma) \\
 & + \beta^6 \left( \frac{1}{210} h_{(1)} + \frac{1}{14} h_{(2)} + \frac{1}{60} h_{(3)} + \frac{51}{1540} h_{(4)} + \frac{47}{1155} h_{(5)} \right) \\
 & \left. + \beta^6 \left( \frac{1}{210} h_{(1)} - \frac{1}{60} h_{(3)} + \frac{3}{220} h_{(4)} - \frac{2}{1155} h_{(5)} \right) \cos(6\gamma) \right] \quad (\text{II.103})
 \end{aligned}$$

Se observa que los únicos términos capaces de producir triaxialidad son  $h_{(1)}$ ,  $h_{(3)}$ ,  $h_{(4)}$  y  $h_{(5)}$ , es decir sólo aquellos términos del hamiltoniano formados exclusivamente por bosones  $d$ . Una expresión equivalente a ésta puede encontrarse en [LS90].

### II.3.2 Análisis en el sistema laboratorio

Tomando como punto de partida los resultados obtenidos en el sistema intrínseco se considerarán en esta sección solamente términos a tres cuerpos formados exclusivamente por bosones  $d$ . Considérese un hamiltoniano esquemático que contenga interacción cuadrupolo-cuadrupolo, un término  $\hat{L}^2$  y una parte con términos a 3 cuerpos correspondiente a la interacción entre bosones  $d$ ,

$$\hat{H} = -\kappa \hat{T}^2 \cdot \hat{T}^2 + \kappa' \hat{L} \cdot \hat{L} + \sum_l \theta_l \left( (d^\dagger \times d^\dagger)^{(k)} \times d^\dagger \right)^{(l)} \cdot \left( (\tilde{d} \times \tilde{d})^{(k)} \times \tilde{d} \right)^{(l)}, \quad (\text{II.104})$$

donde  $\cdot$  representa el producto escalar,  $\hat{L}$  es el momento angular y  $\hat{T}^2$  es el operador cuadrupolar definido en (II.3). La convención sobre el acoplamiento intermedio en los términos a tres cuerpos es la misma que la empleada en (II.102). Los coeficientes  $\theta$  se

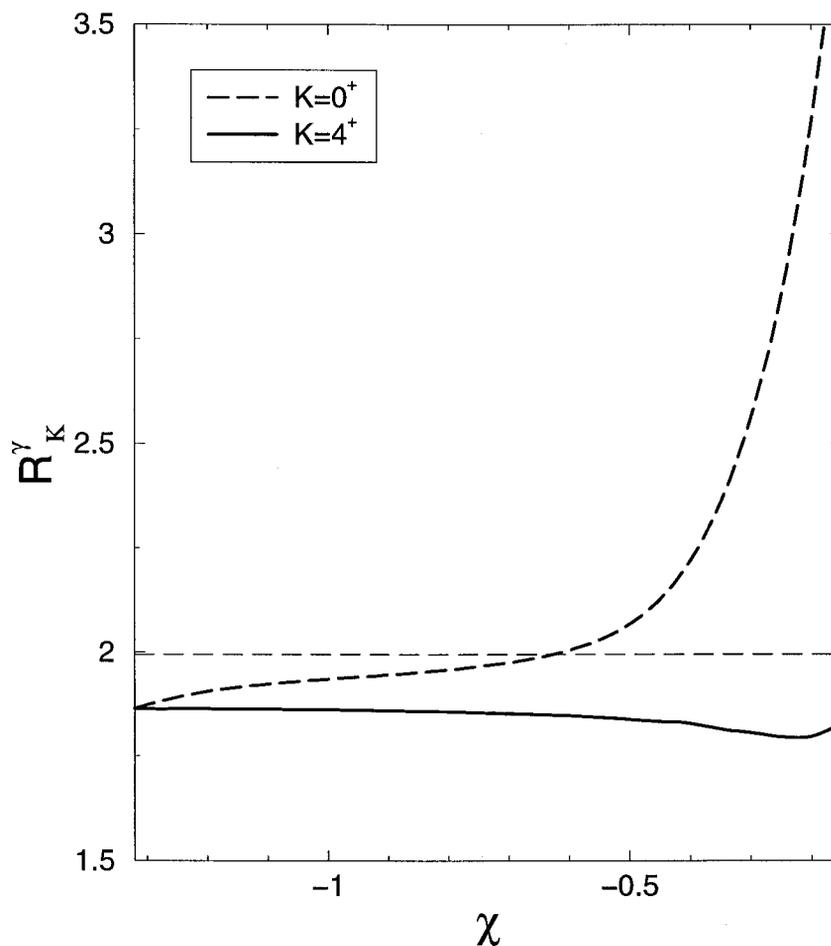


Figura II.8: Razones  $R_K^\gamma$  (definidas en el texto) como una función de  $\chi$ . Se emplea el hamiltoniano (II.104) con  $\theta_l = 0$ ; el cálculo se realiza con un número de bosones  $N = 15$ .

relacionan con los  $h$  a través de las constantes de normalización de los estados (II.102),

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= 6h_{(1)} \\
 \theta_2 &= \frac{14}{5}h_{(2)} \\
 \theta_3 &= \frac{30}{7}h_{(3)} \\
 \theta_4 &= \frac{22}{7}h_{(4)} \\
 \theta_6 &= 6h_{(5)}.
 \end{aligned}
 \tag{II.105}$$

El hamiltoniano (II.104) no es el más general posible. En particular, no se ha introducido el término vibracional  $\epsilon_d \hat{n}_d$ , ya que es de esperar que tenga poca importancia en núcleos deformados como los que se estudiarán en esta sección. La inclusión de otros términos de dos cuerpos podrá mejorar la calidad de los ajustes, pero la posición de las cabezas de banda debe poder reproducirse mediante un hamiltoniano simplificado, aunque la estructura de las bandas y, en particular, su momento de inercia puede diferir del experimental.

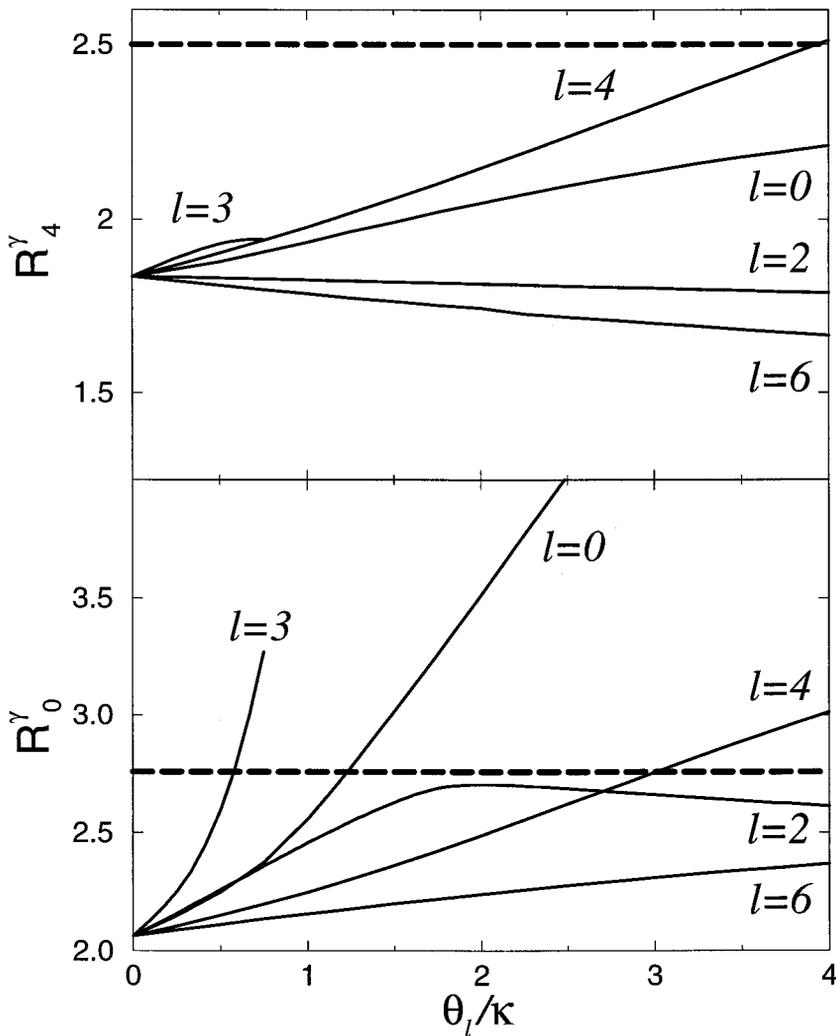


Figura II.9: Razones  $R_K^\gamma$  (definidas en el texto) en función de  $\theta_l/\kappa$  para diferentes  $l$ . Se emplea el hamiltoniano (II.104) con  $\chi = -0.5$ ; el cálculo se realiza para un número de bosones  $N = 15$ . Las líneas discontinuas dan los valores experimentales de las razones  $R_K^\gamma$  para el  $^{166}\text{Er}$ .

Con objeto de estudiar de una forma sistemática la posición de la banda doble- $\gamma$  en

relación a la posición de la banda  $\gamma$ , es conveniente definir las siguientes razones entre sus energías de excitación:

$$R_0^\gamma \equiv \frac{E_x(0_{\gamma\gamma}^+)}{E_x(2_\gamma^+) - E_x(2_1^+)}, \quad R_4^\gamma \equiv \frac{E_x(4_{\gamma\gamma}^+) - E_x(4_1^+)}{E_x(2_\gamma^+) - E_x(2_1^+)}, \quad (\text{II.106})$$

donde  $0_{\gamma\gamma}^+$  y  $4_{\gamma\gamma}^+$  son las cabezas de las bandas doble- $\gamma$  con  $K^\pi = 0^+$  y  $K^\pi = 4^+$  respectivamente. Es de destacar que  $R_K^\gamma$  no depende del término  $\hat{L}^2$  del hamiltoniano; si se introduce un único término de tres cuerpos  $\theta_l$ , las razones (II.106) sólo dependerán de  $\chi$  y de  $\theta_l/\kappa$ . En la figura II.8 se representan, para un hamiltoniano sin términos a tres cuerpos y  $N = 15$ , las razones  $R_K^\gamma$  en función del parámetro de estructura del operador cuadrupolar  $\chi$ , variando éste desde su valor para el límite  $SU(3)$  ( $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ ) hasta valores cercanos al correspondiente al límite  $O(6)$  ( $\chi = 0$ ). En las cercanías del límite  $O(6)$  el concepto de excitación  $\gamma$  pierde su sentido, ya que dicha excitación se convierte en espúrea, de ahí que no se represente la zona con  $|\chi| \approx 0$  y sólo se llegue hasta  $\chi = -0.15$ . Es destacable que  $R_4^\gamma$  permanece aproximadamente constante con un valor de 1.8, mientras que  $R_0^\gamma$  sólo supera el valor 2 en las proximidades de 0, hecho que está asociado a la cercanía del límite  $O(6)$ . Los valores realistas de  $\chi$  vienen determinados por el valor de las probabilidades de transición  $E2$ . En las tierras raras, entre las que se encuentran los núcleos que se estudian a continuación, un valor típico de  $\chi$  oscila entre  $-0.4$  y  $-0.7$ . Para este rango de valores, como se observa en la figura, no existe anarmonicidad reseñable en la vibración  $\gamma$ .

Ya que como se acaba de ver los hamiltonianos que sólo incluyen hasta términos a dos cuerpos no dan lugar a anarmonicidad, el paso inmediato es analizar la influencia de los distintos términos a tres cuerpos presentes en el hamiltoniano (II.104). En la figura II.9, para  $N = 15$  y un valor típico de la constante de estructura del operador cuadrupolar  $\chi = -0.5$ , se representan las razones  $R_K^\gamma$  en función del valor del respectivo  $\theta_l$ . El rango de cada  $\theta_l$  se elige de forma que el espectro que se obtenga para cada uno de sus valores mantenga un carácter rotacional realista; dicha restricción equivale a que la interacción de tres cuerpos no se haga dominante frente al resto del hamiltoniano. Se obtiene un comportamiento anarmónico en la vibración  $\gamma$  para un amplio rango de valores de  $\theta_l$ . En la figura II.9 también se muestran los valores experimentales de  $R_K^\gamma$  para el  $^{166}\text{Er}$  [FAH<sup>+</sup>96, G<sup>+</sup>97a],  $R_0^\gamma = 2.76$  y  $R_4^\gamma = 2.50$ . Analizando la gráfica se ve que el único término capaz de producir la anarmonicidad deseada, simultáneamente para las bandas

con  $K = 0$  y  $K = 4$ , en un núcleo como el  $^{166}\text{Er}$  es el correspondiente a  $l = 4$ .

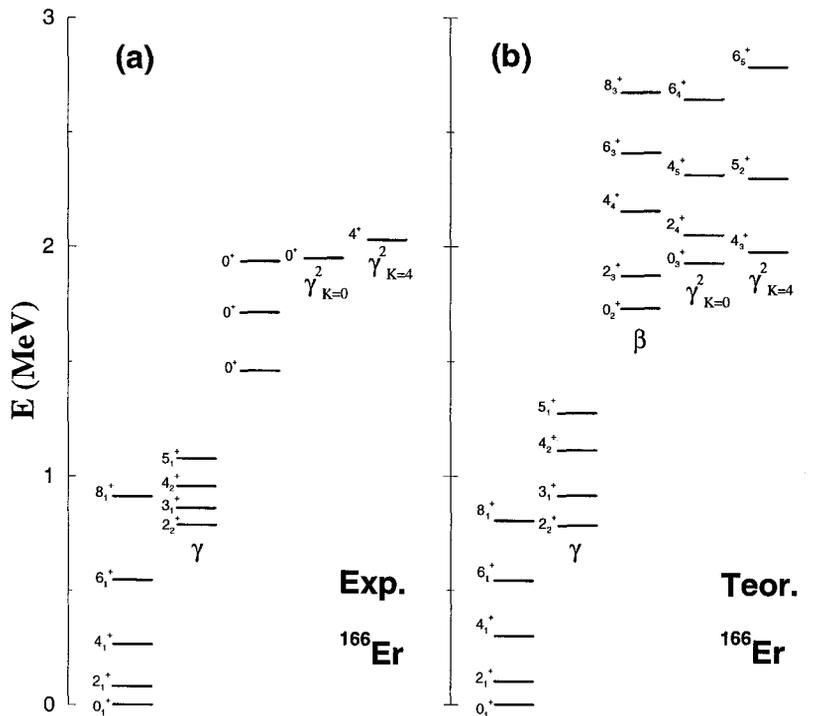


Figura II.10: *Espectro experimental (a) y teórico (b) para el  $^{166}\text{Er}$ . Los resultados teóricos se han obtenido usando en hamiltoniano (II.104) con los parámetros  $\kappa = 23.8 \text{ keV}$ ,  $\chi = -0.55$ ,  $\kappa' = -1.9 \text{ keV}$  y  $\theta_4 = 93.9 \text{ keV}$ . El número de bosones es  $N = 15$ .*

### II.3.3 Cálculos realistas

A continuación se muestra un cálculo con el hamiltoniano (II.104) empleando, a la vista de la sección anterior, únicamente el término a tres cuerpos con  $l = 4$ . En la figura II.10 se comparan los espectros teórico y experimental del  $^{166}\text{Er}$ . Los parámetros empleados en el hamiltoniano han sido:  $\kappa = 23.8 \text{ keV}$ ,  $\chi = -0.55$ ,  $\kappa' = -1.9 \text{ keV}$  y  $\theta_4 = 93.9 \text{ keV}$ , con  $N = 15$ . Con estos valores, la superficie de energía en  $\beta - \gamma$  posee un mínimo correspondiente a un condensado de bosones triaxial, con parámetros  $\beta = 0.71$  y  $\gamma = 18.5^\circ$ . Estos parámetros de deformación, en particular, el valor de  $\gamma$ , están en excelente acuerdo con los obtenidos en trabajos experimentales recientes [F<sup>+</sup>92]. Las energías de excitación calculadas para las cabezas de las bandas doble- $\gamma$  son 1926 KeV ( $K^\pi = 0^+$ ) y

Tabla II.1: Valores experimentales y calculados de  $B(E2)$  o de sus razones para  $^{166}\text{Er}$ . Se emplea el operador de transición (II.107) con una carga efectiva  $e_{\text{eff}}^2 = (1.83)^2$  W.u y  $\chi = -0.55$ .

	Valor de $B(E2)$ o cociente	
	Observado	Calculado
$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ (W.u.)	$214 \pm 10^a$	214
$B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ (W.u.)	$311 \pm 10^a$	304
$B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 0_1^+)$ (W.u.)	$5.5 \pm 0.4^a$	5.3
$B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	$0.49 \pm 0.19^b$	0.21
$B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 0_1^+)$		
$B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_\gamma^+)$	$0.44 \pm 0.13^b$	6.2
$B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 0_1^+)$		
$B(E2; 0_{\gamma\gamma}^+ \rightarrow 2_\gamma^+)$	$3.8 \pm 1.3^c$ ( $2.2_{-0.7}^{+1.1}$ $^d$ )	3.2
$B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 0_1^+)$		
$B(E2; 4_{\gamma\gamma}^+ \rightarrow 2_\gamma^+)$	$1.3 \pm 0.4^c$ ( $0.9 \pm 0.3$ $^d$ )	2.5
$B(E2; 2_\gamma^+ \rightarrow 0_1^+)$		

<sup>a</sup> Ref. [S<sup>+</sup>92].

<sup>b</sup> Ref. [G<sup>+</sup>97b].

<sup>c</sup> Ref. [G<sup>+</sup>97a].

<sup>d</sup> Ref. [FAH<sup>+</sup>96].

1972 KeV ( $K^\pi = 4^+$ ), llevando a unos valores de las razones  $R_0^\gamma = 2.82$  y  $R_4^\gamma = 2.45$ , que están en buen acuerdo con los resultados experimentales.

Para el cálculo de las probabilidades de transición  $E2$  se usará el formalismo CQF [WC82], que supone el uso del mismo  $\chi$  del operador cuadrupolar, tanto en el hamiltoniano como en el operador de transición. El operador de transición  $E2$  se define como,

$$\hat{T}(E2) = e_{\text{eff}} \hat{T}^2, \quad (\text{II.107})$$

donde  $\hat{T}^2$  es el mismo operador cuadrupolar que aparece en el hamiltoniano. La carga efectiva  $e_{\text{eff}}$  bosónica se determina ajustando el valor calculado de  $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$  al valor experimental. El valor para el  $^{166}\text{Er}$  es  $e_{\text{eff}}^2 = (1.83)^2$  unidades Weisskopf (W.u.). En la tabla II.1 se muestran los valores experimentales y calculados de  $B(E2)$  o de sus razones, para transiciones donde intervengan las bandas  $\gamma$  o doble- $\gamma$ . Se obtiene un buen ajuste

global con la excepción del decaimiento del estado  $0_2^+$ : el valor de  $B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_\gamma^+)$  está sobreestimado en más de un orden de magnitud, mientras que el valor de  $B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)$  es demasiado pequeño. El motivo de este desacuerdo radica en que el estado  $0_2^+$  situado a 1460 keV no es la cabeza de la banda  $\beta$ . Sobre la naturaleza del estado  $0_2^+$  existe discrepancia entre distintos autores. Algunos la consideran como banda  $\beta$  [BM75] y otros como un estado de dos cuasipartículas [G<sup>+</sup>97b]. Además en [CvB94] se la identifica con una excitación de un fonón colectivo sobre la banda  $\gamma$ . Una posible explicación de esta controversia es que la excitación  $\beta$  está fuertemente fragmentada y mezclada con excitaciones de dos cuasipartículas. Estados de estas características quedan fuera del espacio de trabajo del IBM. Se ha analizado la influencia que tendría la posición de la banda  $\beta$  en los resultados presentados en la figura II.10 con respecto a la anarmonicidad de las excitaciones  $\gamma$ . Para ello, se han variado los parámetros del hamiltoniano dentro de un rango que mantengan la energía de la banda  $\beta$  calculada en una posición razonable, entre 1.5 MeV y 2 MeV. En todos los casos se ha obtenido el grado de anarmonicidad deseado.

## Capítulo III

# El isospín en el IBM: IBM-3 en el sistema laboratorio

El IBM-1 es un modelo fenomenológico en el que se considera un único tipo de bosón. El modelo es aplicable a núcleos donde existan protones y neutrones por encima de capas cerradas, siempre que dichas capas de valencia se encuentren suficientemente separadas. Este hecho se verifica en la mayoría de los núcleos pesados y medios próximos al valle de estabilidad. Cuando se busca una imagen microscópica del IBM, hay que introducir en el modelo la diferencia entre protones y neutrones. La extensión del IBM que da cuenta de esta diferencia es el IBM-2 y en ella se consideran dos tipos de bosones (en lo referente a la carga): protón-protón y neutrón-neutrón. Para núcleos medios y pesados en torno a la línea de estabilidad esa imagen es razonable. Sin embargo, en núcleos ligeros y medios que posean un número de protones y neutrones aproximadamente igual ( $N \approx Z$ ) En general, estas condiciones llevan a que sólo se reproduzcan parcialmente los espectros, existiendo múltiples estados no descritos por el modelo. no es suficiente considerar solamente los pares protón-protón (bosones  $\pi$ ) y los neutrón-neutrón (bosones  $\nu$ ). Ya que en ese caso protones y neutrones llenan las mismas capas de valencia, es necesario considerar los pares protón-neutrón (bosones  $\delta$ ). De esta manera estos tres tipos de bosones forman un triplete de isospín, dando lugar a otra extensión del IBM denominada IBM-3. El IBM-3 fue propuesto formalmente por Elliott y White a principios de los 80 [EW80], aunque no se ha estudiado detalladamente hasta la fecha. Este capítulo y el siguiente se dedican a

estudiar en profundidad la estructura algebraica del IBM-3 y algunas de sus aplicaciones.

La existencia de un triplete de isospín es la base del modelo IBM-3. Éste permite la construcción de hamiltonianos escalares en isospín, imprescindibles para estudiar una zona donde el isospín se conserva aproximadamente. El IBM-3 no es la única versión del IBM invariante en isospín, sino que es la más simple. Existe una extensión del IBM-3 denominada IBM-4 [EE81], propuesta por Elliott y Evans, en la cual no sólo se considera la combinación simétrica del par protón-neutrón (bosón  $\delta$ ), sino también la antisimétrica (bosón  $\sigma$ ), existiendo por tanto bosones con  $T = 1$  y  $T = 0$ . Hay que destacar que debido a sus propiedades de simetría, los bosones con  $T = 1$  poseen un espín  $S = 0$  y por tanto  $L = J$ , mientras que los bosones  $\sigma$  tienen  $S = 1$ . Los bosones  $\delta$  y  $\sigma$  juegan un papel fundamental en núcleos con  $N \approx Z$ , decreciendo su importancia cuando se incrementa la diferencia entre el número de protones y el número de neutrones,  $|N - Z|$ . En núcleos par-par se considera una buena aproximación tratar exclusivamente con bosones con  $T = 1$ , mientras que para núcleos impar-impar sí es necesario la inclusión de bosones con  $T = 0$ . En este capítulo sólo se considerarán núcleos par-par y por tanto el IBM-3 será una buena aproximación, dejando el tratamiento del IBM-4 para el capítulo V.

Los núcleos ligeros y medios con  $N \approx Z$  y situados en la región másica comprendida entre el  $^{40}\text{Ca}$  y el  $^{100}\text{Sn}$  son actualmente de gran interés, debido a que con el desarrollo de las nuevas instalaciones de haces radiactivos, su estudio experimental comienza a ser posible. Esta región es especialmente relevante debido a que aquí la colectividad en el núcleo aparece en presencia de correlaciones de *pairing* no sólo entre nucleones iguales (protón-protón y neutrón-neutrón) sino también entre protones y neutrones [War94].

La existencia de la simetría de isospín en el espacio bosónico hace que el hamiltoniano tenga una forma simple y un número de parámetros pequeño. Cuando se pasa del IBM-1 al IBM-2 el número de parámetros aumenta notablemente (aunque se pueden reducir por consideraciones físicas). Por tanto, podría pensarse que al introducir el bosón  $\delta$  el número de parámetros se incrementaría aún más. En realidad, debido a la conservación del isospín, el número de parámetros en IBM-2 e IBM-3 es comparable y su complejidad es parecida.

El IBM-3 posee una estructura algebraica muy rica que comienza en el álgebra dinámica

$U(18)$ . Existen múltiples cadenas de subgrupos que finalizan en las álgebras  $O_L(3)$  y  $O_T(3)$ . Éstas deben estar necesariamente incluidas en cualquier cadena de subálgebras si se requiere que los estados tengan buen isospín y buen momento angular. En este capítulo sólo se analizan aquellas cadenas de subgrupos que contengan al grupo  $U_L(6) \otimes SU_T(3)$ . Ello supone que los espacios asociados al isospín y al momento angular estén separados y, en consecuencia, las funciones de onda sean producto de una parte orbital y otra asociada al isospín. La anterior aproximación juega en IBM-3 el mismo papel que la simetría de  $F$ -espín en IBM-2 [AOIT77]. Es importante en este punto analizar si el estudio de las simetrías dinámicas que contienen a  $U_L(6) \otimes SU_T(3)$  está justificado. En cálculos IBM-2 realistas, los estados de más baja energía son aproximadamente simétricos bajo intercambio de los índices protón-neutrón, perteneciendo en consecuencia a la representación  $[N]$  de  $U_L(6)$  (o equivalentemente a los estados con  $F$ -espín máximo,  $F_{\text{máx}} = N/2$ ). Por otro lado, los estados no simétricos  $[N - 1, 1]$  se encuentran a una energía más alta [BKRS84, BRS<sup>+</sup>84], estando separados (al menos a baja energía) los estados pertenecientes a diferentes representaciones irreducibles de  $U_L(6)$ . La importancia de este resultado es que se obtiene, incluso aunque el hamiltoniano que se emplee no posea simetría de  $F$ -espín, siempre que exista un término apreciable de Majorana. El operador de Majorana es un operador diagonal en  $U_L(6)$  y separa los estados pertenecientes a distintas representaciones de  $U_L(6)$ :  $[N], [N - 1, 1], \dots$  (o equivalentemente con diferentes valores de  $F$ -espín,  $F = F_{\text{máx}}, F_{\text{máx}} - 1, \dots$ ). Puede decirse que en IBM-2 los espacios orbitales y de carga están aproximadamente separados, al menos para los estados más bajos en energía. La situación es muy similar en IBM-3, de forma que  $U_L(6) \otimes SU_T(3)$  será una simetría que se conservará aproximadamente en los estados de más baja energía. En cálculos IBM-3 realistas para la capa  $pf$  [EES85, ATEE88, AETE89, EELL96], se ha confirmado el desacoplamiento aproximado entre los sectores orbital y de isospín (ver tabla III.1). Esto justifica que se empleen las etiquetas de  $U_L(6)$  para clasificar los estados de más baja energía. En este capítulo sólo se tratarán las representaciones más simétricas,  $[N]$  y  $[N - 1, 1]$ , para las cuales está justificada la aproximación usada.

Tabla III.1: *Composición en términos de las representaciones de  $U_L(6)$  de los estados menos energéticos de los núcleos  $^{44,46,48}\text{Ti}$ . Resultados tomados de [ATEE88]*

Núcleos	Estados	Composición (%)	
		[N]	[N-1,1]
$^{44}\text{Ti}$	$2_M^+$	0	81
	$2_1^+$	97	0
$^{46}\text{Ti}$	$3_M^+$	5	93
	$2_M^+$	18	80
	$2_1^+$	93	1
$^{48}\text{Ti}$	$3_M^+$	0	91
	$2_M^+$	16	78
	$2_1^+$	94	0

### III.1 Estructura algebraica

Los elementos básicos del IBM-3 son el momento angular  $l = 0$  y  $l = 2$ , que corresponden a los bosones  $s$  y  $d$ , y el isospín  $T = 1$  con proyecciones  $\mu = +1, 0, -1$  para  $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$  (pares protón-protón, protón-neutrón y neutrón-neutrón), respectivamente. Los correspondientes operadores de creación y destrucción se pueden escribir como,

$$\gamma_{lm,1\mu}^\dagger \quad \gamma_{lm,1\mu} \quad (III.1)$$

verificando las relaciones usuales de conmutación

$$[\gamma_{lm,1\mu}, \gamma_{l'm',1\mu'}^\dagger] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\mu\mu'}, \quad [\gamma_{lm,1\mu}^\dagger, \gamma_{l'm',1\mu'}^\dagger] = [\gamma_{lm,1\mu}, \gamma_{l'm',1\mu'}] = 0. \quad (III.2)$$

Con los operadores (III.1) se pueden construir 324 combinaciones lineales

$$\gamma_{lm,1\mu}^\dagger \gamma_{l'm',1\mu'}, \quad (III.3)$$

las cuales generan el álgebra  $U(18)$ . Esto puede verse fácilmente ya que verifican las relaciones de conmutación de dicha álgebra,

$$[\gamma_{lm,1\mu}^\dagger \gamma_{l'm',1\mu'}, \gamma_{l''m'',1\mu''}^\dagger \gamma_{l'''m''',1\mu'''}]$$

$$= \gamma_{lm,1\mu}^\dagger \gamma_{l''m'',1\mu''} \delta_{l'l''} \delta_{m'm''} \delta_{\mu'\mu''} - \gamma_{l''m'',1\mu''}^\dagger \gamma_{l'm',1\mu'} \delta_{l'l''} \delta_{m'm''} \delta_{\mu'\mu''}. \quad (\text{III.4})$$

$U(18)$  será por tanto el álgebra dinámica de IBM-3, pudiendo expresarse cualquier observable físico en función de los generadores del álgebra.

El IBM-3 es por definición invariante bajo rotaciones en el espacio orbital y en el espacio de isospín. La primera de estas simetrías es una simetría exacta y lleva asociada la conservación del momento angular,  $L$ . La segunda de ellas da lugar a la conservación del isospín,  $T$ . El isospín es sólo una simetría aproximada en el núcleo atómico (rota por la interacción coulombiana). En el IBM-3 en general y, en este capítulo en particular, se la considera una simetría exacta. A la vista de estas dos invariancias, es conveniente tomar combinaciones de (III.3) que tengan propiedades bien definidas respecto a rotaciones en el espacio orbital y en el espacio de isospín. Los generadores de  $U(18)$  se escriben en este caso como,

$$(\gamma_{l,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l',1})_{M_L, M_T}^{(L, T)} = \sum_{mm' \mu\mu'} \langle lm \ l' m' | LM_L \rangle \langle 1\mu \ 1\mu' | TM_T \rangle \gamma_{lm,1\mu}^\dagger \tilde{\gamma}_{l'm',1\mu'}, \quad (\text{III.5})$$

donde los coeficientes  $\langle \dots | \dots \rangle$  son coeficientes de Clebsch–Gordan y  $\tilde{\gamma}_{lm,1\mu} \equiv (-1)^{l-m+1-\mu} \gamma_{l-m,1-\mu}$  es un operador de destrucción, definido de forma que sea un tensor esférico en el espacio orbital y de isospín. Para que la descripción sea completa, se dan a continuación las relaciones de conmutación de los generadores de  $U(18)$  en forma acoplada,

$$\begin{aligned} & [(\gamma_{l,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l',1})_{M_L, M_T}^{(L, T)}, (\gamma_{l'',1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l'',1})_{M_L', M_T'}^{(L', T')}] \\ &= \sum_{L'' M_L'' T'' M_T''} \hat{L} \hat{L}' \hat{T} \hat{T}' \langle LM_L \ L' M_L' | L'' M_L'' \rangle \langle TM_T \ T' M_T' | T'' M_T'' \rangle \\ & \times \left[ (-)^{L''+T''} \begin{Bmatrix} L & L' & L'' \\ l''' & l & l' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T & T' & T'' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} (\gamma_{l,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l'',1})_{M_L'', M_T''}^{(L'', T'')} \right. \\ & \left. - (-)^{L+L'+T+T'} \begin{Bmatrix} L & L' & L'' \\ l'' & l' & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T & T' & T'' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \delta_{l'l''} (\gamma_{l'',1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l,1})_{M_L'', M_T''}^{(L'', T'')} \right] \quad (\text{III.6}) \end{aligned}$$

donde  $\hat{L} \equiv \sqrt{2L+1}$  y los símbolos  $\{:::\}$  son coeficientes 6j.

El álgebra dinámica  $U(18)$  tiene multitud de cadenas de subálgebras. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, sólo se está interesado en aquellas posibles descomposiciones de  $U(18)$  que conserven el momento angular y el isospín y, por tanto, contengan

las álgebras  $O_L(3)$  y  $O_T(3)$ . Un camino posible para analizar estas simetrías es considerar la siguiente reducción

$$\begin{array}{ccc}
 U(18) & \supset & U_L(6) \otimes SU_T(3) \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 [N] & & [N_1, N_2, N_3] \quad (\lambda_T, \mu_T)
 \end{array}, \tag{III.7}$$

la cual corresponde a una descomposición de los estados en una parte orbital (o  $sd$ ) y otra de isospín. Debido a que la representación irreducible de  $U(18)$ , a la cual pertenece el estado, debe ser totalmente simétrica, las representaciones de  $U_L(6)$  y  $SU_T(3)$  deben ser idénticas, es decir sus diagramas de Young deben ser iguales. Por tanto las representaciones de  $U_L(6)$  sólo podrán tener 3 filas como máximo  $[N_1, N_2, N_3]$ , verificándose  $N_1 + N_2 + N_3 = N$ . Esta situación es comparable al IBM-2, donde las representaciones de  $U(6)$  sólo pueden tener 2 filas como máximo o al IBM-1 donde sólo pueden tener una. En (III.7) se emplean las etiquetas de Elliott para  $SU(3)$  [Ell58], definidas del modo habitual,  $\lambda_T = N_1 - N_2$  y  $\mu_T = N_2 - N_3$ .

Los generadores de  $U_L(6)$  y  $SU_T(3)$  se obtienen contrayendo los índices asociados al isospín y al momento angular respectivamente. Los generadores de ambos grupos en forma acoplada pueden escribirse como,

$$\begin{aligned}
 U_L(6) & : (\gamma_{l,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l',1})_{M_L,0}^{(L,0)}, \\
 U_T(3) & : \sum_l \sqrt{2l+1} (\gamma_{l,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l,1})_{0,M_T}^{(0,T)},
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

donde  $l, l' = 0, 2$ , y  $L$  y  $T$  corren sobre todos los valores compatibles con el acoplamiento en momento angular e isospín respectivamente. El álgebra  $SU_T(3)$  está formada por los generadores de  $U_T(3)$  con  $T = 1$  y  $T = 2$ .

La clasificación (III.7) es *suficiente* para asegurar invariancia bajo rotaciones en el espacio físico y en el de isospín. Sin embargo no supone una condición *necesaria*, existiendo hamiltonianos [Gin96] que conservan el momento angular y el isospín, pero no provienen de la reducción (III.7). En este capítulo sólo se considerarán aquellas descomposiciones que conserven el álgebra  $SU_T(3)$ . Hay que destacar que esta simetría no es una simetría exacta (ni tan siquiera en IBM-3) como el momento angular o el isospín, sino que puede se puede romper por distintos términos en el hamiltoniano. Los resultados obtenidos en

este capítulo serán por tanto de aplicabilidad restringida, no obstante hay que destacar que el álgebra  $SU_T(3)$  es equivalente a la  $U_L(6)$ , la cual es de gran importancia en el IBM.

## III.2 El hamiltoniano IBM-3

Cualquier hamiltoniano que sea invariante bajo rotaciones en el espacio orbital y de isospín puede escribirse en función de combinaciones escalares en  $L$  y  $T$  de los generadores (III.5). El hamiltoniano más general que contiene hasta términos a dos cuerpos puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_l \epsilon_l \sqrt{3(2l+1)} (\gamma_{l,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l,1})_{0,0}^{(0,0)} \\ & + \sum_{\substack{l_1 l_2 l'_1 l'_2 \\ LT}} v_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^{LT} \sqrt{\frac{(2L+1)(2T+1)}{(1+\delta_{l_1 l_2})(1+\delta_{l'_1 l'_2})}} \left( (\gamma_{l_1,1}^\dagger \times \gamma_{l_2,1}^\dagger)^{(L,T)} \times (\tilde{\gamma}_{l'_1,1} \times \tilde{\gamma}_{l'_2,1})^{(L,T)} \right)_{0,0}^{(0,0)}. \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Los coeficientes  $\epsilon_0$  and  $\epsilon_2$  son las energías monoparticulares de los bosones  $s$  y  $d$  respectivamente, las cuales en virtud de la invariancia en isospín son independientes de la naturaleza de los bosones ( $\pi$ ,  $\delta$  o  $\nu$ ). Los coeficientes  $v_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^{LT}$  son elementos de matriz entre dos estados normalizados,

$$v_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^{LT} \equiv \langle l_1 l_2; LT | \hat{H} | l'_1 l'_2; LT \rangle. \quad (\text{III.10})$$

Esta forma de expresar el hamiltoniano IBM-3 (III.9) se denomina forma estándar del hamiltoniano.

Una forma alternativa de dar el hamiltoniano, que será muy útil a la hora de realizar cálculos realistas, es la llamada forma multipolar,

$$\hat{H}_{\text{mul}} = \sum_l \eta_l \sqrt{3l} (\gamma_{l,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l,1})_{0,0}^{(0,0)} + \sum_{LT} \kappa_{LT} \hat{L} \hat{T} (\hat{T}^{(L,T)} \times \hat{T}^{(L,T)})_{0,0}^{(0,0)}, \quad (\text{III.11})$$

donde  $\hat{T}^{(L,T)}$  son los operadores isoscalar ( $T = 0$ ), isovectorial ( $T = 1$ ) e isotensorial ( $T = 2$ ). Los operadores  $\hat{T}^{(L,T)}$  tienen la forma,

$$\hat{T}_{M_L, M_T}^{(L,T)} = \sum_{l_1 l_2} \chi_{l_1 l_2}^{LT} (\gamma_{l_1,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,1})_{M_L, M_T}^{(L,T)}, \quad (\text{III.12})$$

y los coeficientes  $\chi_{l_1 l_2}^{LT}$  tienen la misma definición que en (II.4), aunque en este caso puede existir dependencia en  $T$ . Hay que destacar que el segundo sumando de (III.11) no es un

término a dos cuerpos puro, y por tanto los parámetros  $\eta_l$  de (III.11) y  $\epsilon_l$  de (III.9) no coinciden.

Las formas estándar y multipolar (III.9), (III.11) son dos modos equivalentes de escribir el hamiltoniano IBM-3, estando relacionadas a través de las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= \eta_l + \sum_{l'LT} (-1)^{L+T} \frac{(2L+1)(2T+1)}{3(2l+1)} \kappa_{LT} \chi_{l'l}^{LT} \chi_{l'l}^{LT}, \\ v_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^{LT} &= \sum_{L'T'} (-1)^{L+T+L'+T'} \frac{2(2L'+1)(2T'+1)}{(1+\delta_{l_1 l_2})(1+\delta_{l'_1 l'_2})} \kappa_{L'T'} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & T \\ 1 & 1 & T' \end{Bmatrix} \\ &\times \left[ \chi_{l_1 l'_1}^{L'T'} \chi_{l_2 l'_2}^{L'T'} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & L \\ l'_2 & l'_1 & L' \end{Bmatrix} + (-1)^{L+T} \chi_{l_1 l'_2}^{L'T'} \chi_{l_2 l'_1}^{L'T'} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & L \\ l'_1 & l'_2 & L' \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Existe otra forma de parametrizar el hamiltoniano IBM-3 que está relacionada con la subestructura algebraica de  $U_L(6) \otimes SU_T(3)$  y asociada, en consecuencia, con los operadores de Casimir. Se comienza con la clasificación (III.7) y se construyen todas las posibles subálgebras,

$$U(18) \supset \left( U_L(6) \supset \begin{Bmatrix} U_L(5) \supset O_L(5) \\ SU_L(3) \\ O_L(6) \supset O_L(5) \end{Bmatrix} \supset O_L(3) \right) \otimes (SU_T(3) \supset O_T(3)). \quad (\text{III.14})$$

Se observa que las cadenas asociadas a la parte orbital son las mismas que en IBM-1. El hamiltoniano IBM-3 más general *que conserve la simetría  $U_L(6)$  o  $SU_T(3)$*  se construye mediante combinaciones de operadores de Casimir de los subgrupos que aparecen en (III.14). Si sólo se consideran hasta términos de dos cuerpos en el hamiltoniano, éste puede expresarse como,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{cas}} &= A_1 \hat{C}_1[U_L(6)] + A_2 \hat{C}_2[U_L(6)] + B_1 \hat{C}_1[U_L(5)] + B_2 \hat{C}_2[U_L(5)] \\ &+ C_2 \hat{C}_2[SU_L(3)] + D_2 \hat{C}_2[O_L(6)] + E_2 \hat{C}_2[O_L(5)] + F_2 \hat{C}_2[O_L(3)] \\ &+ \alpha_2 \hat{C}_2[SU_T(3)] + \beta_2 \hat{C}_2[O_T(3)], \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

donde  $\hat{C}_n[G]$  es el operador de Casimir de orden  $n$  del grupo  $G$ . No aparecen los términos  $\hat{C}_1[O_L(2)]$  o  $\hat{C}_1[O_T(2)]$  ya que ambos romperían la simetría  $O_L(3)$  o la  $O_T(3)$ . Cabe destacar que  $\hat{H}_{\text{cas}}$  corresponde a un caso particular de los hamiltonianos (III.9) o (III.11)

debido a que los operadores de Casimir empleados pertenecen a un subconjunto (III.14) de las posibles descomposiciones de  $U(18)$ . Como ya se ha comentado, existen otras descomposiciones de  $U(18)$  y para contruir un hamiltoniano totalmente general habría que incluir todos los operadores de Casimir presentes en todas las posibles subcadenas.

La relación entre los hamiltonianos escritos en forma estándar y en términos de los operadores de Casimir no se puede expresar de forma compacta, resulta más conveniente escribir las ecuaciones que deben verificar los parámetros del hamiltoniano estándar para que el hamiltoniano (III.9) se reduzca al (III.15). Dichas relaciones son,

$$\begin{aligned}
 v_{0022}^{02} &= v_{0022}^{00}, \quad v_{0222}^{22} = v_{0222}^{20}, \\
 v_{0000}^{02} - v_{0000}^{00} &= v_{0202}^{22} - v_{0202}^{20} = v_{2222}^{02} - v_{2222}^{00} = v_{2222}^{22} - v_{2222}^{20} = v_{2222}^{42} - v_{2222}^{40}, \\
 v_{0000}^{00} &= v_{0202}^{20} - \frac{1}{\sqrt{5}}v_{0022}^{00}, \quad v_{0000}^{02} = v_{0202}^{22} - \frac{1}{\sqrt{5}}v_{0022}^{02}, \\
 v_{2222}^{11} &= -\frac{8}{7}v_{2222}^{40} + \frac{1}{7}v_{2222}^{20} - \frac{3}{\sqrt{14}}v_{0222}^{20} + v_{0202}^{20} + v_{0202}^{21}, \\
 v_{2222}^{31} &= -\frac{3}{7}v_{2222}^{40} - \frac{4}{7}v_{2222}^{20} + \sqrt{\frac{2}{7}}v_{0222}^{20} + v_{0202}^{20} + v_{0202}^{21}.
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

Un término usualmente incluido en el hamiltoniano es el llamado término de Majorana, el cual corresponde a una interacción a dos cuerpos pura, que da cero sobre estados pertenecientes a representaciones totalmente simétricas de  $U_L(6)$ ,  $[N]$ . Suele definirse de la siguiente forma,

$$\hat{M}|[1]\xi\rangle = 0, \tag{III.17}$$

$$\hat{M}|[2]\xi\rangle = 0, \tag{III.18}$$

$$\hat{M}|[1, 1]\xi\rangle = |[1, 1]\xi\rangle, \tag{III.19}$$

donde  $[.,.]$  es la etiqueta de  $U_L(6)$  y  $\xi$  representa el resto de etiquetas necesarias para especificar completamente el estado. De acuerdo a la anterior definición, el operador de Majorana puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
 \hat{M} &= -\sqrt{15} \left( (s^\dagger \times d^\dagger)^{(2,1)} \times (\tilde{s} \times \tilde{d})^{(2,1)} \right)_{0,0}^{(0,0)} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{L=1,3} \sqrt{3(2L+1)} \left( (d^\dagger \times d^\dagger)^{(L,1)} \times (\tilde{d} \times \tilde{d})^{(L,1)} \right)_{0,0}^{(0,0)},
 \end{aligned} \tag{III.20}$$

y también se puede expresar en función de operadores lineales y cuadráticos de  $U_L(6)$ ,

$$\hat{M} = \frac{1}{4} \left( N(N+5) - \hat{C}_2[U_L(6)] \right). \tag{III.21}$$

Como ya se ha mencionado, la existencia de un término de Majorana en el hamiltoniano es esencial para lograr el desacoplamiento aproximado entre los espacios orbital y de isospín en el caso de que  $U_L(6)$  no se conserve de forma exacta.

El problema de autovalores asociado a los hamiltonianos (III.9), (III.11) o (III.15), se debe resolver en general de forma numérica. Existen varios programas que permiten diagonalizar el hamiltoniano IBM-3 y calcular probabilidades de transición [VIa, ELE97]. Los resultados mostrados en este capítulo se han obtenido usando el programa desarrollado por P. Van Isacker. Existen, no obstante, hamiltonianos especiales que pueden diagonalizarse de forma analítica y corresponden a las simetrías dinámicas del IBM-3. Estas situaciones se estudiarán en este capítulo.

### III.3 Simetrías dinámicas

Un autoestado genérico del hamiltoniano (III.15) (independientemente del valor de los parámetros) se puede escribir como,

$$|[N_1, N_2, N_3]\phi LM_L; TM_T\rangle. \quad (\text{III.22})$$

Las etiquetas  $[N_1, N_2, N_3]$ ,  $L$ ,  $M_L$ ,  $T$  y  $M_T$  son siempre buenos números cuánticos debido a que las álgebras  $U_L(6)$ ,  $O_L(3)$ ,  $O_L(2)$ ,  $O_T(3)$  y  $O_T(2)$  aparecen en todas las clasificaciones de (III.14). Las etiquetas de  $SU_T(3)$ ,  $(\lambda_T, \mu_T)$ , no se muestran en (III.22) ya que son equivalentes a  $[N_1, N_2, N_3]$ . El resto de etiquetas necesarias para caracterizar completamente el estado se encuentran agrupadas en  $\phi$ .

Una consecuencia de la conservación de los anteriores números cuánticos es que los operadores de Casimir asociados son diagonales en la base (III.22) y sus autovalores son,

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_1[U_L(6)] \rangle &= N_1 + N_2 + N_3, \\ \langle \hat{C}_2[U_L(6)] \rangle &= N_1(N_1 + 5) + N_2(N_2 + 3) + N_3(N_3 + 1), \\ \langle \hat{C}_2[O_L(3)] \rangle &= L(L + 1), \\ \langle \hat{C}_2[SU_T(3)] \rangle &= \lambda_T^2 + \mu_T^2 + 3(\lambda_T + \mu_T) + \lambda_T\mu_T, \\ \langle \hat{C}_2[O_T(3)] \rangle &= T(T + 1), \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

donde  $\langle \hat{C}_n[G] \rangle$  representa  $\langle [N_1, N_2, N_3] \phi LM_L; TM_T | \hat{C}_n[G] | [N_1, N_2, N_3] \phi LM_L; TM_T \rangle$ . En la representación totalmente simétrica de  $U(18)$ ,  $[N]$ , los operadores de Casimir  $\hat{C}_2[U_L(6)]$  y  $\hat{C}_2[SU_T(3)]$  no son linealmente independientes, sino que se encuentran relacionados a través de la siguiente ecuación,

$$\hat{C}_2[SU_T(3)] = \frac{3}{2} \hat{C}_2[U_L(6)] - \frac{9}{2} N - \frac{1}{2} N^2. \quad (\text{III.24})$$

Los valores de isospín contenidos en una representación dada de  $U_L(6)$  se obtienen de la reducción del grupo  $SU_T(3)$  al grupo  $O_T(3)$ . Las reglas de reducción  $SU(3) \supset O(3)$  se conocen en general [Ell58] y para las representaciones de  $U_L(6)$  más bajas en energía se obtiene,

$$\begin{aligned} [N] &: T = N, N - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0, \\ [N - 1, 1] &: T = N - 1, N - 2, \dots, 1. \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

### III.3.1 El límite $U(5)$

La reducción de la parte orbital de la estructura algebraica en este límite es,

$$\begin{array}{ccccccccc} U_L(6) & \supset & U_L(5) & \supset & O_L(5) & \supset & O_L(3) & \supset & O_L(2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N_1, N_2, N_3] & & (n_1, n_2, n_3) & & (v_1, v_2) & \alpha & L & & M_L \end{array}, \quad (\text{III.26})$$

donde  $\alpha$  es una etiqueta perdida, necesaria para especificar sin ambigüedad la reducción  $O(5) \supset O(3)$ . Los estados quedan etiquetados con

$$|[N_1, N_2, N_3](n_1, n_2, n_3)(v_1, v_2)\alpha LM_L; TM_T\rangle. \quad (\text{III.27})$$

Los autoestados de  $U(5)$  más bajos en energía se muestran en la tabla III.2, junto con la notación abreviada para dichos estados. Las reglas de reducción para los estados simétricos  $[N]$  y no simétricos  $[N - 1, 1]$  se pueden encontrar en [AI76] y [VIFS84] respectivamente.

El hamiltoniano en este límite está formado por una combinación lineal de los operadores de Casimir presentes en la reducción (III.26) y (III.7), con la excepción de aquellos términos que sólo dan una contribución constante a la energía,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{cas}} &= A_1 \hat{C}_1[U_L(6)] + A_2 \hat{C}_2[U_L(6)] + B_1 \hat{C}_1[U_L(5)] + B_2 \hat{C}_2[U_L(5)] \\ &+ E_2 \hat{C}_2[O_L(5)] + F_2 \hat{C}_2[O_L(3)] + \alpha_2 \hat{C}_2[SU_T(3)] + \beta_2 \hat{C}_2[O_T(3)]. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Tabla III.2: *Estados más bajos en energía para un hamiltoniano  $U(5)$* 


---



---

$ 0_1^+; T\rangle$	=	$ [N](0, 0, 0)(0, 0)0; T\rangle$
$ 0_2^+(d^2); T\rangle$	=	$ [N](2, 0, 0)(0, 0)0; T\rangle$
$ 0_3^+(d^3); T\rangle$	=	$ [N](3, 0, 0)(3, 0)0; T\rangle$
$ 1_M^+(d^2); T\rangle$	=	$ [N - 1, 1](1, 1, 0)(1, 1)1; T\rangle$
$ 2_1^+(d); T\rangle$	=	$ [N](1, 0, 0)(1, 0)2; T\rangle$
$ 2_2^+(d^2); T\rangle$	=	$ [N](2, 0, 0)(2, 0)2; T\rangle$
$ 2_3^+(d^3); T\rangle$	=	$ [N](3, 0, 0)(1, 0)2; T\rangle$
$ 2_M^+(d); T\rangle$	=	$ [N - 1, 1](1, 0, 0)(1, 0)2; T\rangle$
$ 3_1^+(d^3); T\rangle$	=	$ [N](3, 0, 0)(3, 0)3; T\rangle$
$ 3_M^+(d^2); T\rangle$	=	$ [N - 1, 1](1, 1, 0)(1, 1)3; T\rangle$
$ 4_1^+(d^2); T\rangle$	=	$ [N](2, 0, 0)(2, 0)4; T\rangle$
$ 4_2^+(d^3); T\rangle$	=	$ [N](3, 0, 0)(3, 0)4; T\rangle$

---



---

Sus autovalores viene dados por,

$$\begin{aligned}
 E = & A_1(N_1 + N_2 + N_3) + A_2[N_1(N_1 + 5) + N_2(N_2 + 3) + N_3(N_3 + 1)] \\
 & + B_1(n_1 + n_2 + n_3) + B_2[n_1(n_1 + 4) + n_2(n_2 + 2) + n_3^2] \\
 & + E_2[v_1(v_1 + 3) + v_2(v_2 + 1)] + F_2L(L + 1) \\
 & + \alpha_2[\lambda_T^2 + \mu_T^2 + 3(\lambda_T + \mu_T) + \lambda_T\mu_T] + \beta_2T(T + 1).
 \end{aligned}
 \tag{III.29}$$

Un espectro típico con simetría dinámica  $U(5)$  puede verse en la figura III.1.

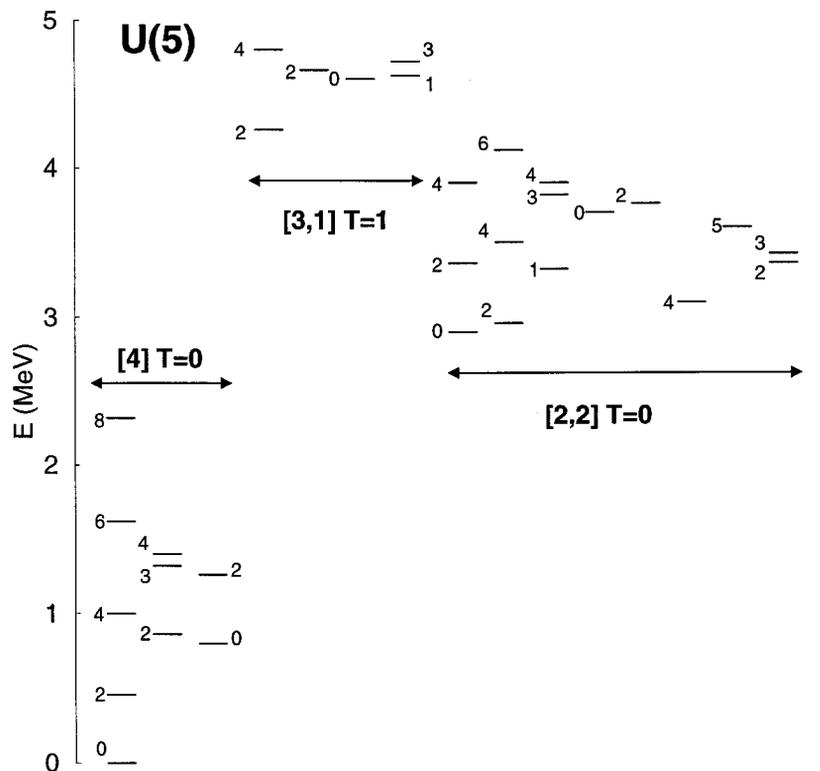


Figura III.1: Espectro energético de los estados con  $T = 0$  y  $T = 1$  de un hamiltoniano (III.28) con parámetros (en MeV)  $A_2 = -0.175$ ,  $B_1 = 0.400$ ,  $F_2 = 0.010$  y  $\beta_2 = 1.2$ . El número de bosones empleado es  $N_p = 2$  y  $N_n = 2$ .

### III.3.2 El límite $SU(3)$

La reducción de la parte orbital de la estructura algebraica en este límite es

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_L(6) & \supset & SU_L(3) & \supset & O_L(3) & \supset & O_L(2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 [N_1, N_2, N_3] & \beta & (\lambda, \mu) & \kappa & L & & M_L
 \end{array}, \quad (III.30)$$

donde  $\beta$  y  $\kappa$  son etiquetas perdidas, necesarias para caracterizar unívocamente la reducción  $U(6) \supset SU(3)$  y  $SU(3) \supset O(3)$  respectivamente. Las funciones de onda en este límite quedan caracterizadas por,

$$|[N_1, N_2, N_3]\beta(\lambda, \mu)\kappa LM_L; TM_T\rangle. \quad (III.31)$$

Los autoestados de  $SU(3)$  más bajos se muestran en la tabla III.3 junto con la notación abreviada para ellos. Las reglas de reducción para los estados simétricos  $[N]$  y no simétricos  $[N-1, 1]$  se encuentran en [AI78] y [VIFS84] respectivamente.

El hamiltoniano asociado a esta cadena de subgrupos está formado por una combinación lineal de los operadores de Casimir presentes en la reducción (III.26) y (III.7), con la excepción de aquellos términos que sólo dan una contribución constante a la energía,

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{\text{cas}} &= A_1 \hat{C}_1[U_L(6)] + A_2 \hat{C}_2[U_L(6)] + C_2 \hat{C}_2[SU_L(3)] + F_2 \hat{C}_2[O_L(3)] \\
 &+ \alpha_2 \hat{C}_2[SU_T(3)] + \beta_2 \hat{C}_2[O_T(3)].
 \end{aligned} \quad (III.32)$$

Sus autovalores son,

$$\begin{aligned}
 E &= A_1(N_1 + N_2 + N_3) + A_2[N_1(N_1 + 5) + N_2(N_2 + 3) + N_3(N_3 + 1)] \\
 &+ C_2[\lambda^2 + \mu^2 + 3(\lambda + \mu) + \lambda\mu] + F_2L(L + 1) \\
 &+ \alpha_2[\lambda_T^2 + \mu_T^2 + 3(\lambda_T + \mu_T) + \lambda_T\mu_T] + \beta_2T(T + 1).
 \end{aligned} \quad (III.33)$$

En la figura III.2 puede verse el espectro típico correspondiente a un hamiltoniano con simetría dinámica  $SU(3)$ .

Tabla III.3: *Estados más bajos en energía para un hamiltoniano  $SU(3)$* 


---



---

$ 0_1^+; T\rangle$	=	$ [N](2N, 0)0; T\rangle$
$ 0_\beta^+; T\rangle$	=	$ [N](2N - 4, 2)2; T\rangle$
$ 1_M^+; T\rangle$	=	$ [N - 1, 1](2N - 2, 1)1; T\rangle$
$ 2_1^+; T\rangle$	=	$ [N](2N, 0)2; T\rangle$
$ 2_\beta^+; T\rangle$	=	$ [N](2N - 4, 2)02; T\rangle$
$ 2_\gamma^+; T\rangle$	=	$ [N](2N - 4, 2)22; T\rangle$
$ 2_M^+; T\rangle$	=	$ [N - 1, 1](2N - 2, 1)2; T\rangle$
$ 3_\gamma^+; T\rangle$	=	$ [N](2N - 4, 2)3; T\rangle$
$ 3_M^+; T\rangle$	=	$ [N - 1, 1](2N - 2, 1)3; T\rangle$
$ 3_{M'}^+; T\rangle$	=	$ [N - 1, 1](2N - 4, 2)3; T\rangle$
$ 4_1^+; T\rangle$	=	$ [N](2N, 0)4; T\rangle$
$ 4_\beta^+; T\rangle$	=	$ [N](2N - 4, 2)04; T\rangle$
$ 4_\gamma^+; T\rangle$	=	$ [N](2N - 4, 2)24; T\rangle$

---



---

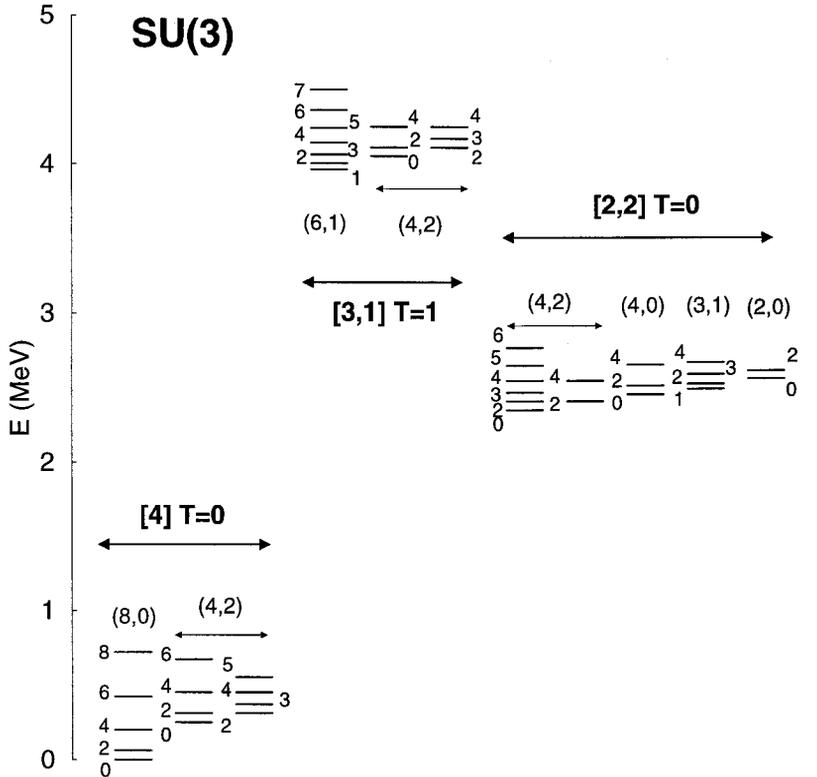


Figura III.2: Espectro energético para los estados con  $T = 0$  y  $T = 1$  de un hamiltoniano  $SU(3)$  (III.32) con parámetros (en MeV)  $A_2 = -0.175$ ,  $C_2 = -0.006$ ,  $F_2 = 0.010$  y  $\beta_2 = 1.2$ . El número de bosones es  $N_p = 2$  y  $N_n = 2$ .

### III.3.3 El límite $O(6)$

La reducción de la parte orbital de la estructura algebraica en este límite es

$$\begin{array}{ccccccccc}
 U_L(6) & \supset & O_L(6) & \supset & O_L(5) & \supset & O_L(3) & \supset & O_L(2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 [N_1, N_2, N_3] & & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & & (v_1, v_2) & \alpha & L & & M_L
 \end{array} \quad , \quad (III.34)$$

donde  $\alpha$  es una etiqueta perdida, necesaria para especificar completamente la reducción  $O(5) \supset O(3)$ . Las funciones de onda quedan caracterizadas en este caso por

$$|[N_1, N_2, N_3](\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)(v_1, v_2)\alpha LM_L; TM_T\rangle. \quad (III.35)$$

Los autoestados de  $O(6)$  más bajos en energía se listan en la tabla III.4 junto con la notación abreviada para ellos. Las reglas de reducción para estados simétricos  $[N]$  y no simétricos  $[N - 1, 1]$  pueden encontrarse en [AI79] y [VIFS84] respectivamente.

Tabla III.4: Estados más bajos en energía para un hamiltoniano  $O(6)$ 


---



---

$ 0_1^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N, 0, 0)(0, 0)0; T\rangle$
$ 0_2^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N, 0, 0)(3, 0)0; T\rangle$
$ 0_3^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N - 2, 0, 0)(0, 0)0; T\rangle$
$ 1_M^+; T\rangle$	$=$	$ [N - 1, 1](N - 1, 1, 0)(1, 1)1; T\rangle$
$ 2_1^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N, 0, 0)(1, 0)2; T\rangle$
$ 2_2^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N, 0, 0)(2, 0)2; T\rangle$
$ 2_3^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N - 2, 0, 0)(1, 0)2; T\rangle$
$ 2_4^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N - 2, 0, 0)(2, 0)2; T\rangle$
$ 2_M^+; T\rangle$	$=$	$ [N - 1, 1](N - 1, 1, 0)(1, 0)2; T\rangle$
$ 3_1^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N, 0, 0)(3, 0)3; T\rangle$
$ 3_M^+; T\rangle$	$=$	$ [N - 1, 1](N - 1, 1, 0)(1, 1)3; T\rangle$
$ 4_1^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N, 0, 0)(2, 0)4; T\rangle$
$ 4_2^+; T\rangle$	$=$	$ [N](N - 2, 0, 0)(2, 0)4; T\rangle$

---



---

El hamiltoniano asociado a esta cadena de subgrupos está formado por una combinación lineal de los operadores de Casimir presentes en la reducción (III.26) y (III.7), con la excepción de aquellos términos que sólo dan una contribución constante a la energía,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{cas}} = & A_1 \hat{C}_1[U_L(6)] + A_2 \hat{C}_2[U_L(6)] + D_2 \hat{C}_2[O_L(6)] + E_2 \hat{C}_2[O_L(5)] \\ & + F_2 \hat{C}_2[O_L(3)] + \alpha_2 \hat{C}_2[SU_T(3)] + \beta_2 \hat{C}_2[O_T(3)]. \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Sus autovalores vienen dados por,

$$\begin{aligned} E = & A_1(N_1 + N_2 + N_3) + A_2[N_1(N_1 + 5) + N_2(N_2 + 3) + N_3(N_3 + 1)] \\ & + D_2[\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] \\ & + E_2[v_1(v_1 + 3) + v_2(v_2 + 1)] + F_2L(L + 1) \\ & + \alpha_2[\lambda_T^2 + \mu_T^2 + 3(\lambda_T + \mu_T) + \lambda_T\mu_T] + \beta_2T(T + 1). \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Un espectro típico de la simetría dinámica  $O_L(6)$  puede verse en la figura III.3.

### III.4 Transiciones electromagnéticas.

Un operador electromagnético general de IBM-3 con sólo términos a un cuerpo está formado por una parte isoscalar, otra isovectorial y otra isotensorial,

$$\hat{T}_{m_i}^{(l)}(l_1, l_2) = a_0 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) + a_1 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,1)}(l_1, l_2) + a_2 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,2)}(l_1, l_2). \quad (\text{III.38})$$

Los superíndices de la parte derecha de la igualdad, como en (III.12), se refieren al momento angular y al isospín respectivamente. En la parte izquierda de la igualdad sólo se indica el momento angular ya que el operador corresponde a una mezcla de diferentes isospines. En otros trabajos de IBM-3 sólo se estudian las componentes isoscalares e isovectoriales de los operadores electromagnéticos [EEV96], aquí en cambio, también se considerará, para que la descripción sea completa, la componente isotensorial. La relevancia de esta contribución se trata en la sección III.7 mediante la comparación con resultados experimentales. Los parámetros  $a_t$  (ecuación (III.38)) son factores giromagnéticos, cargas eléctricas, etc. para bosones y dependen de la multipolaridad y el carácter, eléctrico o

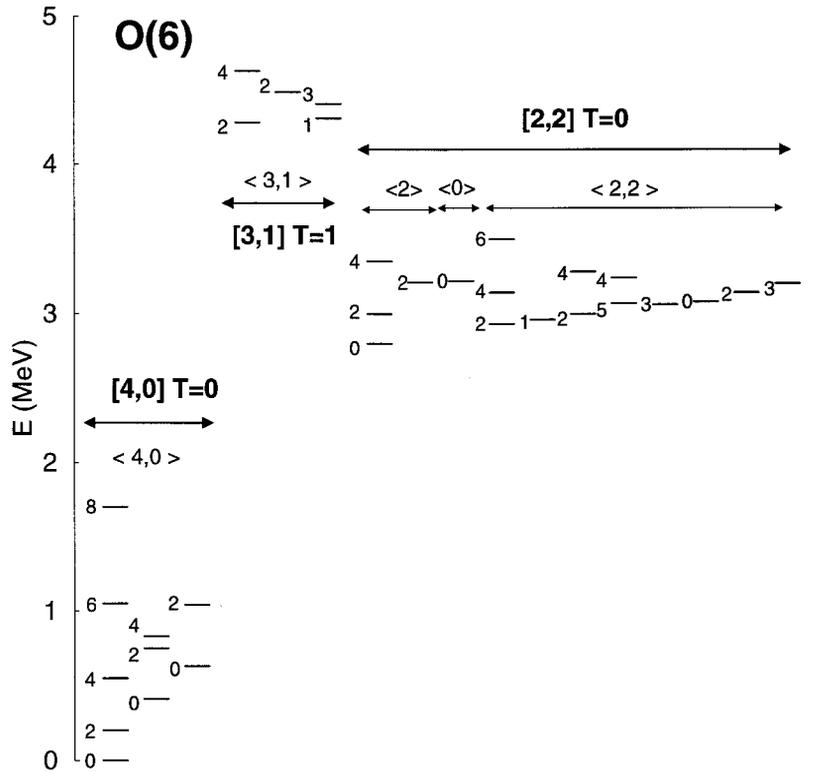


Figura III.3: Espectro energético de los estados con  $T = 0$  y  $T = 1$  para un hamiltoniano  $O(6)$  (III.36) con parámetros (en MeV)  $A_2 = -0.175$ ,  $D_2 = -0.035$ ,  $E_2 = 0.035$ ,  $F_2 = 0.010$  y  $\beta_2 = 1.2$ . El número de bosones es  $N_p = 2$  y  $N_n = 2$ .

magnético, del operador. Los operadores  $\hat{T}_{m_i,0}^{(l,t)}(l_1, l_2)$  se definen como

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) &= \sqrt{3}(\gamma_{l_1,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,1})_{m_i,0}^{(l,0)}, \\
 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,1)}(l_1, l_2) &= \sqrt{2}(\gamma_{l_1,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,1})_{m_i,0}^{(l,1)}, \\
 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,2)}(l_1, l_2) &= -\sqrt{6}(\gamma_{l_1,1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,1})_{m_i,0}^{(l,2)}.
 \end{aligned} \tag{III.39}$$

Los factores numéricos de las anteriores expresiones se introducen por conveniencia y conducen a las siguientes relaciones<sup>1</sup>,

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) &= (\gamma_{l_1,\pi}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\pi})_{m_i}^{(l)} + (\gamma_{l_1,\delta}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\delta})_{m_i}^{(l)} + (\gamma_{l_1,\nu}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\nu})_{m_i}^{(l)}, \\
 \hat{T}_{m_i,0}^{(l,1)}(l_1, l_2) &= (\gamma_{l_1,\pi}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\pi})_{m_i}^{(l)} - (\gamma_{l_1,\nu}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\nu})_{m_i}^{(l)},
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Nótese que en el resto de este capítulo, cuando aparezca el operador  $\tilde{\gamma}_{\ell m,1\rho}$ , con  $\rho = \nu, \delta, \pi$  se tomará la definición  $\tilde{\gamma}_{\ell\rho} = (-1)^{\ell-m}\tilde{\gamma}_{\ell-m,1\rho}$ .

$$\hat{T}_{m_i,0}^{(l,2)}(l_1, l_2) = -(\gamma_{l_1,\pi}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\pi})_{m_i}^{(l)} + 2(\gamma_{l_1,\delta}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\delta})_{m_i}^{(l)} - (\gamma_{l_1,\nu}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\nu})_{m_i}^{(l)}. \quad (\text{III.40})$$

Por tanto, los operadores (III.38) también pueden expresarse como

$$\hat{T}_{m_i}^{(l)}(l_1, l_2) = a_\pi(\gamma_{l_1,\pi}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\pi})_{m_i}^{(l)} + a_\delta(\gamma_{l_1,\delta}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\delta})_{m_i}^{(l)} + a_\nu(\gamma_{l_1,\nu}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{l_2,\nu})_{m_i}^{(l)}, \quad (\text{III.41})$$

donde los parámetros  $a_\rho$  con  $\rho = \pi, \delta, \nu$  están relacionados con los  $a_t$  (III.38) a través de,

$$a_0 = a_\pi + a_\delta + a_\nu, \quad a_1 = a_\pi - a_\nu, \quad a_2 = -a_\pi + 2a_\delta - a_\nu. \quad (\text{III.42})$$

A la hora de realizar cálculos de elementos de matriz, es necesario conocer el carácter tensorial de los operadores de transición bajo los grupos  $SU_T(3) \supset O_T(3) \supset O_T(2)$ . Ya que  $s^\dagger$  y  $d_\mu^\dagger$  se transforman como un tensor  $\hat{T}^{(1,0)1}$  bajo  $SU_T(3) \supset O_T(3)$  y que  $\tilde{s}$  y  $\tilde{d}_\mu$  lo hacen como  $\hat{T}^{(0,1)1}$ , se encuentra que un tensor que proviene de acoplar los anteriores operadores se transforma como,

$$\begin{aligned} \hat{T}_{m_i,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) &\rightarrow \hat{T}^{(0,0)00}, \\ \hat{T}_{m_i,m_t}^{(l,1)}(l_1, l_2) &\rightarrow \hat{T}^{(1,1)1m_t}, \\ \hat{T}_{m_i,m_t}^{(l,2)}(l_1, l_2) &\rightarrow \hat{T}^{(1,1)2m_t}. \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Se observa que el carácter tensorial viene determinado por el isospín del operador.

Ya que los operadores isovectoriales e isotensoriales pertenecen a la misma representación irreducible de  $SU(3)$ ,  $(1, 1)$ , sus elementos de matriz reducidos bajo  $SU_T(3) \supset O_T(3)$  son proporcionales entre sí,

$$\frac{\langle [N_1, N_2, N_3]\alpha | \hat{T}_{m_i,*}^{(l,2)}(l_1, l_2) | [N'_1, N'_2, N'_3]\alpha' \rangle}{\langle [N_1, N_2, N_3]\alpha | \hat{T}_{m_i,*}^{(l,1)}(l_1, l_2) | [N'_1, N'_2, N'_3]\alpha' \rangle} = -\sqrt{3}. \quad (\text{III.44})$$

Los índices asociados a  $O_L(2)$  no son necesarios, por ello, en lo que sigue se sustituyen por un asterisco tanto en los estados como en los operadores. El anterior cociente es distinto de 1 debido a las normalizaciones particulares tomadas para los operadores tensoriales (III.39).

Para la estructura orbital de los operadores electromagnéticos, se emplea la misma que en IBM-1 o IBM-2. En particular, para las transiciones M1, E2 y M3, se toman los

Tabla III.5: *Excitaciones E2 del estado fundamental para el límite U(5)*

$J_f^\pi$	$\mathcal{T}\lambda$	$t$	$B(\mathcal{T}\lambda, T; 0_1^+ \rightarrow J_f^\pi)$
$2_1^+$	E2	0	$(e_\pi + e_\delta + e_\nu)^2 5N$
$2_1^+$	E2	1	$(e_\pi - e_\nu)^2 \frac{5T^2}{N}$
$2_1^+$	E2	2	$(-e_\pi + 2e_\delta - e_\nu)^2 \frac{5T^2(2N+3)^2}{N(2T+3)^2}$
$2_M^+$	E2	1	$(e_\pi - e_\nu)^2 \frac{5T(N-T)(N+T+1)}{N(T+1)}$
$2_M^+$	E2	2	$(-e_\pi + 2e_\delta - e_\nu)^2 \frac{45T(N-T)(N+T+1)}{N(T+1)(2T+3)^2}$

siguientes operadores,

$$\begin{aligned}
 \hat{T}(\text{M1}) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g \sqrt{10} (d^\dagger \times \tilde{d})^{(1)}, \\
 \hat{T}(\text{E2}) &= e \left( (s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s})^{(2)} + \chi (d^\dagger \times \tilde{d})^{(2)} \right), \\
 \hat{T}(\text{M3}) &= \sqrt{\frac{35}{8\pi}} \Omega (d^\dagger \times \tilde{d})^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{III.45}$$

### III.4.1 Transiciones entre estados simétricos

Los estados simétricos en IBM-3 son aquellos que pertenecen a la representación irreducible de  $U_L(6)$  del tipo  $[N_1, N_2, N_3] = [N, 0, 0] \equiv [N]$ , o equivalentemente a la representación de  $SU_T(3)$  con números cuánticos  $(\lambda_T, \mu_T) = (N, 0)$ . A las anteriores representaciones pertenecen todos los estados de IBM-1, por lo que existe una correspondencia uno a uno entre los estados simétricos de IBM-3 y todos los de IBM-1. Teniendo en cuenta este hecho, se demuestra a continuación que existe una relación entre las transiciones en

IBM-1 y las de IBM-3 que impliquen sólo estados simétricos.

El punto clave de la demostración es considerar elementos de matriz de IBM-3 entre estados que sólo contengan neutrones (la demostración se hace de forma análoga si sólo se consideran protones), es decir con  $M_T = -N$ . En este caso y, teniendo en cuenta las expresiones (III.40), se satisface:

$$\begin{aligned}
 \langle [N]\phi'L'; N, -N \| \hat{T}_{*,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; N, -N \rangle_{\text{IBM3}} &= \langle [N]\phi'L' \| \hat{T}^{(l)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}, \\
 \langle [N]\phi'L'; N, -N \| \hat{T}_{*,0}^{(l,1)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; N, -N \rangle_{\text{IBM3}} &= -\langle [N]\phi'L' \| \hat{T}^{(l)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}, \\
 \langle [N]\phi'L'; N, -N \| \hat{T}_{*,0}^{(l,2)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; N, -N \rangle_{\text{IBM3}} &= -\langle [N]\phi'L' \| \hat{T}^{(l)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}},
 \end{aligned}
 \tag{III.46}$$

donde  $\phi$  representa todas las etiquetas asociadas a las subálgebras comprendidas entre  $U_L(6)$  y  $O_L(3)$ , poseyendo todos los estados  $T = -M_T = N$ . El símbolo  $\|$  indica el elemento de matrix reducido de  $O_L(2)$  a  $O_L(3)$ .

Para encontrar la relación general entre los elementos de matriz de IBM-3 y los correspondientes de IBM-1 se usa el teorema de Wigner-Eckart para  $O_T(3) \subset SU_T(3)$ . Las expresiones se pueden derivar para cualquier valor de  $T$  y  $M_T$ , pero sólo se muestran en el caso de  $T = -M_T$ , ya que estos estados son los situados a más baja energía<sup>2</sup>. Para un operador isoscalar se encuentra la relación

$$\begin{aligned}
 & \frac{\langle [N]\phi'L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}}}{\langle [N]\phi'L'; N, -N \| \hat{T}_{*,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; N, -N \rangle_{\text{IBM3}}} \\
 &= \frac{\left\langle \begin{array}{cc} (N, 0) & (0, 0) \\ T & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (N, 0) \\ T \end{array} \right\rangle \langle T - T \ 00 | T - T \rangle}{\left\langle \begin{array}{cc} (N, 0) & (0, 0) \\ N & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (N, 0) \\ N \end{array} \right\rangle \langle N - N \ 00 | N - N \rangle},
 \end{aligned}
 \tag{III.47}$$

donde los símbolos entre ángulos grandes son factores isoscalares de la reducción  $SU(3) \supset O(3)$  [Ver68] y los que están entre ángulos pequeños son coeficientes de Clebsch-Gordan. Empleando las ecuaciones (III.46), (III.47), los factores isoscalares tabulados en [Ver68]

<sup>2</sup>La única excepción a esta regla ocurre en núcleos autoconjugados,  $N = Z$ , e impar-impar, donde los estados con  $T = 0$  y  $T = 1$  están muy próximos en energía. Sin embargo, estos núcleos no son tratables con IBM-3.

y los valores apropiados de los coeficientes de Clebsch-Gordan, se obtiene,

$$\langle [N]\phi'L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{(l,0)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} = \langle [N]\phi'L' \| \hat{T}^{(l)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}. \quad (\text{III.48})$$

De forma análoga, las relaciones para los operadores isovectoriales ( $t = 1$ )<sup>3</sup> e isotensoriales ( $t = 2$ ) son

$$\begin{aligned} & \frac{\langle [N]\phi'L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{(l,t)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}}}{\langle [N]\phi'L'; N, -N \| \hat{T}_{*,0}^{(l,t)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; N, -N \rangle_{\text{IBM3}}} \\ &= \frac{\left\langle \begin{array}{cc|c} (N, 0) & (1, 1) & (N, 0) \\ T & t & T \end{array} \right\rangle \langle T - T \ t 0 | T - T \rangle}{\left\langle \begin{array}{cc|c} (N, 0) & (1, 1) & (N, 0) \\ N & t & N \end{array} \right\rangle \langle N - N \ t 0 | N - N \rangle}, \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} & \langle [N]\phi'L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{(l,1)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= -\frac{T}{N} \langle [N]\phi'L' \| \hat{T}^{(l)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle [N]\phi'L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{(l,2)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= -\frac{T(2N+3)}{(2T+3)N} \langle [N]\phi'L' \| \hat{T}^{(l)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle [N]\phi'L'; T+2, -T \| \hat{T}_{*,0}^{(l,2)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= 6\sqrt{\frac{(T+1)(N-T)(N+T+3)}{(2T+3)^2(2T+5)N^2}} \langle [N]\phi'L' \| \hat{T}^{(l)}(l_1, l_2) \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}. \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

Hay que destacar que todos los resultados son simétricos bajo intercambio de las partes orbitales  $\phi L$  y  $\phi' L'$ . Una derivación alternativa de los resultados anteriores puede encontrarse en [ATEE88].

A la vista de los anteriores resultados, se puede decir que el valor de toda probabilidad de transición de IBM-1, en particular para los tres límites de simetría [AI76, AI78, AI79],

<sup>3</sup>A partir de aquí se empleará  $t$  para referirse al isospín del operador en lugar de  $T$ , que se reserva para indicar el isospín de los estados.

Tabla III.6: Excitaciones M1 y E2 del estado fundamental en el límite SU(3)

$J_f^\pi$	$\mathcal{T}\lambda$	$t$	$B(\mathcal{T}\lambda, T; 0_1^+ \rightarrow J_f^\pi)$
$1_M^+$	M1	1	$\frac{3}{4\pi}(g_\pi - g_\nu)^2 \frac{8T(N-T)(N+T+1)}{(2N-1)(T+1)}$
$1_M^+$	M1	2	$\frac{3}{4\pi}(-g_\pi + 2g_\delta - g_\nu)^2 \frac{72T(N-T)(N+T+1)}{(T+1)(2T+3)^2(2N-1)}$
$2_1^+$	E2	0	$(e_\pi + e_\delta + e_\nu)^2 N(2N+3)$
$2_1^+$	E2	1	$(e_\pi - e_\nu)^2 \frac{T^2(2N+3)}{N}$
$2_1^+$	E2	2	$(-e_\pi + 2e_\delta - e_\nu)^2 \frac{T^2(2N+3)^3}{N(2T+3)^2}$
$2_M^+$	E2	1	$(e_\pi - e_\nu)^2 \frac{3T(N-1)(N-T)(N+T+1)}{N(2N-1)(T+1)}$
$2_M^+$	E2	2	$(-e_\pi + 2e_\delta - e_\nu)^2 \frac{27T(N-T)(N-1)(N+T+1)}{N(2N-1)(T+1)(2T+3)^2}$

servirá para calcular la probabilidad de transición entre los estados equivalentes (totalmente simétricos) de IBM-3. En las tablas III.5, III.6, III.7 y III.8 se muestran todas las transiciones M1, E2 y M3 no nulas, correspondientes a excitaciones del estado fundamental para los tres límites  $U(5)$ ,  $SU(3)$  y  $O(6)$  (nótese que junto con las transiciones simétricas, también aparecen en estas tablas, transiciones de tipo no simétrico que serán tratadas en la próxima sección). Se dan de forma separada las partes isoscalares, isovectoriales e isostensoriales. El operador E2 se define con  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$  para el límite  $SU(3)$  y con  $\chi = 0$  para el límite  $O(6)$

### III.4.2 Transiciones entre estados simétricos y no simétricos

En general, un estado no simétrico en IBM-3 se define como aquel que no pertenece a la representación  $[N]$  de  $U_L(6)$ . Sin embargo, en este análisis sólo se considerarán aquellos que pertenezcan a la representación  $[N - 1, 1]$ , que es la situada a más baja energía. De la misma forma que se ha visto que existe una correspondencia entre los estados simétricos de IBM-3 y los de IBM-1, también existe una correspondencia uno a uno entre los estados no simétricos de IBM-2 y los estados de IBM-3 pertenecientes a representaciones de  $U_L(6)$  de dos filas. Este hecho se emplea para derivar una relación entre los elementos de matriz de IBM-3 que impliquen un estado simétrico,  $[N]$ , y otro no simétrico  $[N - 1, 1]$ , y los correspondientes de IBM-2 [VIHJA86].

Los estados de IBM-2 que se pueden relacionar con los de IBM-3 (etiquetados según (III.14)), se clasifican mediante,

$$U(12) \supset \left( U_L(6) \supset \left\{ \begin{array}{c} U_L(5) \supset O_L(5) \\ SU_L(3) \\ O_L(6) \supset O_L(5) \end{array} \right\} \supset O_L(3) \right) \otimes SU_F(2). \quad (III.51)$$

Comparando (III.14) y (III.51) se observa que la correspondencia entre IBM-2 e IBM-3 se puede establecer mediante  $U_L(6)$ . Todos los estados de IBM-2 pertenecientes a la representación de  $U_L(6)$  del tipo  $[N - f, f]$ , donde  $f = 0, 1, \dots, \min(N_\pi, N_\nu)$ , forman un subconjunto de estados de IBM-3.

Para poder realizar la correspondencia entre elementos de matriz se necesita conocer también la correspondencia entre operadores. En IBM-2 el carácter tensorial de los

Tabla III.7: Excitaciones M3 del estado fundamental en el límite SU(3)

$J_f^\pi$	$T\lambda$	$t$	$B(T\lambda, T; 0_1^+ \rightarrow J_f^\pi)$
$3_\gamma^+$	M3	0	$\frac{35}{8\pi}(\Omega_\pi + \Omega_\delta + \Omega_\nu)^2 \frac{8N(N-2)(N-1)}{3(2N-3)(2N-1)}$
$3_\gamma^+$	M3	1	$\frac{35}{8\pi}(\Omega_\pi - \Omega_\nu)^2 \frac{8(N-2)(N-1)T^2}{3N(2N-1)(2N-3)}$
$3_\gamma^+$	M3	2	$\frac{35}{8\pi}(-\Omega_\pi + 2\Omega_\delta - \Omega_\nu)^2 \frac{8T^2(N-1)(N-2)(2N+3)^2}{3N(2N-1)(2N-3)(2T+3)^2}$
$3_M^+$	M3	1	$\frac{35}{8\pi}(\Omega_\pi - \Omega_\nu)^2 \frac{4T(N-T)(2N+3)(N+T+1)}{15(N-1)(2N-1)(T+1)}$
$3_M^+$	M3	2	$\frac{35}{8\pi}(-\Omega_\pi + 2\Omega_\delta - \Omega_\nu)^2 \frac{12T(N-T)(2N+3)(N+T+1)}{(T+1)(2T+3)^2(N-1)(2N-1)}$
$3_{M'}^+$	M3	1	$\frac{35}{8\pi}(\Omega_\pi - \Omega_\nu)^2 \frac{4T(N-T)(N-2)^2(N+T+1)}{3N(N-1)(2N-3)(T+1)}$
$3_{M'}^+$	M3	2	$\frac{35}{8\pi}(-\Omega_\pi + 2\Omega_\delta - \Omega_\nu)^2 \frac{12T(N-T)(N-2)^2(N+T+1)}{N(N-1)(2N-3)(T+1)(2T+3)^2}$

operadores viene dado por el  $F$ -espín, definido como  $F = N/2 - f$ . Los operadores de transición de IBM-2 sólo pueden ser  $F$ -escalares o  $F$ -vectoriales, pero en las transiciones entre estados simétricos y no simétricos sólo la parte  $F$ -vectorial puede contribuir. Hay que destacar que el operador  $F$ -vectorial de IBM-2 coincide con su análogo isovectorial en IBM-3 (ver (III.40)),

$$\hat{T}_{M_L, M_F}^{(L, F=1)}(l_1, l_2) = \hat{T}_{M_L, M_T}^{(L, t=1)}(l_1, l_2). \quad (\text{III.52})$$

Para poder obtener la relación entre los elementos de matriz de IBM-2 y de IBM-3, se debe conocer el carácter tensorial del operador de transición bajo  $U_L(6)$ . Los operadores  $\gamma_{lm, 1\mu}^\dagger$  se transforman como tensores  $\hat{T}^{[1]}$  mientras que  $\tilde{\gamma}_{lm, 1\mu}$  lo hace como los tensores  $\hat{T}^{[1^5]}$ . Por tanto, los operadores de un cuerpo  $F$ -vectoriales o isovectoriales se transforman como el tensor de  $U_L(6)$   $\hat{T}^{[2, 1^4]}$ . Debido a esta propiedad el cociente de elementos de matriz de IBM-3 e IBM-2, para un mismo operador, entre estados  $[N] \rightarrow [N - 1, 1]$  es una función de  $N_\pi$ ,  $N_\nu$ ,  $N$  y  $T$ , independientemente del operador o de los estados concretos. A continuación se obtiene esta importante relación en el límite  $SU_L(3)$ , aunque la demostración se puede extender a cualquier otro límite, con la única condición de que los estados posean simetría definida bajo  $U_L(6)$ . Se demuestra a continuación que el cociente de elementos de matriz arbitrarios está relacionado con el cociente de elementos de matriz particulares a través de,

$$\begin{aligned} & \frac{\langle [N - 1, 1] \beta'(\lambda', \mu') \kappa' L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{[2, 1^4](\bar{\lambda}, \bar{\mu})(l, 1)} \| [N] \beta(\lambda, \mu) \kappa L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}}}{\langle [N - 1, 1] \beta'(\lambda', \mu') \kappa' L' \| \hat{T}_{*,0}^{[2, 1^4](\bar{\lambda}, \bar{\mu})(l, 1)} \| [N] \beta(\lambda, \mu) \kappa L \rangle_{\text{IBM2}}} \\ &= \frac{\langle [N - 1, 1] 1_M^+; T, -T \| \hat{T}(M1) \| [N] 0_1^+; T, -T \rangle_{\text{IBM3}}}{\langle [N - 1, 1] 1_M^+ \| \hat{T}(M1) \| [N] 0_1^+ \rangle_{\text{IBM2}}}, \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

donde  $\|$  indica un elemento de matriz reducido bajo  $O_L(2) \subset O_L(3)$  y todas las etiquetas asociadas a la parte orbital de operadores y estados, están particularizadas para el límite  $SU_L(3)$ . A la identidad (III.53) se llega empleando el teorema de Wigner-Eckart en  $O_L(3) \subset SU_L(3) \subset U_L(6)$ , tanto para el numerador y como para el denominador. En ambos casos se obtienen idénticos coeficientes isoscalares,

$$\begin{aligned} & \langle [N - 1, 1] \beta'(\lambda', \mu') \kappa' L' \| \hat{T}_{*,0}^{[2, 1^4](\bar{\lambda}, \bar{\mu})(l, 1)} \| [N] \beta(\lambda, \mu) \kappa L \rangle \\ &= \langle [N - 1, 1] 1_M^+ \| \hat{T}(M1) \| [N] 0_1^+ \rangle \end{aligned}$$

Tabla III.8: Excitaciones  $M1$ ,  $E2$  y  $M3$  del estado fundamental en el límite  $O(6)$ 

$J_f^\pi$	$\mathcal{T}\lambda$	$t$	$B(\mathcal{T}\lambda, T; 0_1^+ \rightarrow J_f^\pi)$
$1_M^+$	$M1$	1	$\frac{3}{4\pi}(g_\pi - g_\nu)^2 \frac{3T(N-T)(N+T+1)}{(N+1)(T+1)}$
$1_M^+$	$M1$	2	$\frac{3}{4\pi}(-g_\pi + 2g_\delta - g_\nu)^2 \frac{27T(N-T)(N+T+1)}{(T+1)(2T+3)^2(N+1)}$
$2_1^+$	$E2$	0	$(e_\pi + e_\delta + e_\nu)^2 N(N+4)$
$2_1^+$	$E2$	1	$(e_\pi - e_\nu)^2 \frac{T^2(N+4)}{N}$
$2_1^+$	$E2$	2	$(-e_\pi + 2e_\delta - e_\nu)^2 \frac{T^2(N+4)(2N+3)^2}{N(2T+3)^2}$
$2_M^+$	$E2$	1	$(e_\pi - e_\nu)^2 \frac{2T(N+2)(N-T)(N+T+1)}{N(N+1)(T+1)}$
$2_M^+$	$E2$	2	$(-e_\pi + 2e_\delta - e_\nu)^2 \frac{18T(N-T)(N+2)(N+T+1)}{N(N+1)(T+1)(2T+3)^2}$
$3_M^+$	$M3$	1	$\frac{35}{8\pi}(\Omega_\pi - \Omega_\nu)^2 \frac{7T(N-T)(N+T+1)}{10(N+1)(T+1)}$
$3_M^+$	$M3$	2	$\frac{35}{8\pi}(-\Omega_\pi + 2\Omega_\delta - \Omega_\nu)^2 \frac{63T(N-T)(N+T+1)}{10(T+1)(2T+3)^2(N+1)}$

$$\times \frac{\left\langle \begin{array}{cc|c} [N] & [2, 1^4] & [N-1, 1] \\ \beta(\lambda, \mu) & (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) & \beta'(\lambda', \mu') \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, \mu) & (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) & (\lambda', \mu') \\ \kappa L & l & \kappa' L' \end{array} \right\rangle}{\left\langle \begin{array}{cc|c} [N] & [2, 1^4] & [N-1, 1] \\ (2N, 0) & (1, 1) & (2N-2, 1) \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} (2N, 0) & (1, 1) & (2N-2, 1) \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle}. \quad (\text{III.54})$$

Los símbolos de la anterior igualdad son factores isoscalares de  $U(6) \supset SU(3)$  o  $SU(3) \supset O(3)$ . Las etiquetas de  $F$ -espín e isospín se omiten ya que el resultado (III.54) es idéntico para IBM-2 e IBM-3. Al realizar el cociente del primer miembro de la ecuación (III.53), utilizando el resultado (III.54), sólo quedan los elementos de matriz reducidos del operador M1 y, por consiguiente, se obtiene el segundo miembro de la ecuación (III.53). Ya que los anteriores elementos de matriz del operador M1 se conocen para IBM-2 [VIHJA86] e IBM-3 [HVIB95], y ya que la derivación es válida para cualquier estado que posea buena simetría  $U_L(6)$ , se llega a,

$$\begin{aligned} & \langle [N-1, 1] \phi' L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,1)} \| [N] \phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4N_\pi N_\nu} \frac{T(N-T)(N+T+1)}{T+1}} \langle [N-1, 1] \phi' L' \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,1)} \| [N] \phi L \rangle_{\text{IBM2}} \quad (\text{III.55}) \end{aligned}$$

Está claro que este resultado es independiente de la estructura orbital de los estados o del operador electromagnético. Se pueden obtener relaciones análogas para operadores isotensoriales o estados  $T \neq |M_T|$ , empleando para ello la expresión (III.55) junto con el teorema de Wigner-Eckart. Los resultados que se obtienen son,

$$\begin{aligned} & \langle [N-1, 1] \phi' L'; T+1, -T \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,1)} \| [N] \phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4N_\pi N_\nu} \frac{(T+2)N(N-T)}{(T+1)(2T+3)}} \langle [N-1, 1] \phi' L' \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,1)} \| [N] \phi L \rangle_{\text{IBM2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle [N-1, 1] \phi' L'; T, -T \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,2)} \| [N] \phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= -\sqrt{\frac{3}{4N_\pi N_\nu} \frac{3T(N-T)(N+T+1)}{(T+1)(2T+3)^2}} \langle [N-1, 1] \phi' L' \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,1)} \| [N] \phi L \rangle_{\text{IBM2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle [N-1, 1] \phi' L'; T+1, -T \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,2)} \| [N] \phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4N_\pi N_\nu} \frac{3T^2 N(N-T)}{(T+1)(T+2)(2T+3)}} \langle [N-1, 1] \phi' L' \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,1)} \| [N] \phi L \rangle_{\text{IBM2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle [N-1, 1] \phi' L'; T+2, -T \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,2)} \| [N] \phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4N_\pi N_\nu} \frac{12(T+1)(T+3)(N-T)(N-T-2)}{(T+2)(2T+3)^2(2T+5)}} \\
&\times \langle [N-1, 1] \phi' L' \| \hat{T}_{*,0}^{[2,1^4](l,1)} \| [N] \phi L \rangle_{\text{IBM2}}. \tag{III.56}
\end{aligned}$$

Hay que resaltar la presencia de un factor  $-\sqrt{3}$  adicional en los elementos de matriz con operadores isotensoriales, debido a la normalización particular que se ha empleado para los operadores isovectoriales y isotensoriales (III.39, III.40). Una derivación alternativa para este resultado puede encontrarse en [ATEE88].

Las expresiones para transiciones entre estados  $[N]$  y  $[N-1, 1]$  de IBM-3 se pueden relacionar con las análogas para IBM-2 [VIHJA86]. En las tablas III.5, III.6, III.7 y III.8 aparecen todas las transiciones M1, E2 y M3 no nulas para excitaciones del estado fundamental a estados no simétricos, para los tres límites  $U(5)$ ,  $SU(3)$  y  $O(6)$ .

### III.5 Transferencia de dos nucleones

Las reacciones de transferencia de dos nucleones se han estudiado en detalle en IBM-1 [IA87] y, en general, se obtiene un buen acuerdo con las observaciones experimentales [Ciz81]. Para comprobar si las propiedades de estas reacciones cambian al introducir pares protón-neutrón, es interesante comparar los resultados de IBM-1 con los que se obtienen en IBM-3. En esta sección se calculan las probabilidades de transferencia de dos nucleones en función de los resultados ya conocidos para IBM-1.

Un operador genérico de transferencia de un bosón tiene la forma,

$$P_{+,\rho,m}^{(l)} = p_{\rho,l} \gamma_{lm,1\rho}^\dagger, \quad P_{-,\rho,m}^{(l)} = p_{\rho,l} \gamma_{lm,1\rho}, \tag{III.57}$$

para la absorción o emisión de dos nucleones respectivamente, siendo  $\rho = \pi, \delta, \nu$ . La magnitud que es observable es la intensidad de transferencia,  $I$ , definida como,

$$\begin{aligned}
I(N\phi L; \xi \rightarrow N+1 \phi' L'; \xi') &= \frac{p_{\rho,l}^2}{2L+1} |\langle N+1 \phi' L'; \xi' \| P_{+,\rho}^{(l)} \| N\phi L; \xi \rangle|^2, \\
I(N\phi L; \xi \rightarrow N-1 \phi' L'; \xi') &= \frac{p_{\rho,l}^2}{2L+1} |\langle N-1 \phi' L'; \xi' \| P_{-,\rho}^{(l)} \| N\phi L; \xi \rangle|^2, \tag{III.58}
\end{aligned}$$

donde  $\phi$  y  $\xi$  son todas las etiquetas orbitales y de isospín, respectivamente, necesarias para caracterizar completamente los estados. El símbolo  $\|$  indica que se trata de un elemento de matriz reducido de  $O_L(2)$  a  $O_L(3)$ .

En esta sección sólo se analizan transiciones entre estados simétricos con  $T = -M_T$ . Se pueden obtener expresiones analíticas para las intensidades de transferencia en IBM-3, empleando la misma técnica que en la sección III.4.1, obteniendo una conexión con los resultados de IBM-1. Se requiere el conocimiento del carácter tensorial de  $\gamma^\dagger$  y  $\tilde{\gamma}$ , que se transforman como  $\hat{T}^{(1,0)1}$  y  $\hat{T}^{(0,1)1}$ , respectivamente, bajo los grupos  $SU_T(3) \supset O_T(3)$ . Se comienza con el cálculo de elementos de matriz entre estados formados por sólo neutrones, es decir con  $M_T = -N$ ,

$$\langle [N+1]\phi'L'; N+1, -N-1 \| \gamma_\nu^\dagger \| [N]\phi L; N, -N \rangle_{\text{IBM3}} = \langle [N+1]\phi'L' \| \gamma^\dagger \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}, \quad (\text{III.59})$$

de donde se llega, empleando el teorema de Wigner-Eckart, a,

$$\begin{aligned} & \langle [N+1]\phi'L'; T-\mu, -T+\mu \| \gamma_{i,1\mu}^\dagger \| [N]\phi L; T, -T \rangle_{\text{IBM3}} \\ &= \frac{\left\langle \begin{array}{cc|c} (N,0) & (1,0) & (N+1,0) \\ T & 1 & T-\mu \end{array} \right\rangle \langle T-T \ 1\mu | T-\mu \ -T+\mu \rangle}{\left\langle \begin{array}{cc|c} (N,0) & (1,0) & (N+1,0) \\ N & 1 & N+1 \end{array} \right\rangle \langle N-N \ 1-1 | N+1 \ -N-1 \rangle} \\ & \times \langle [N+1]\phi'L' \| \gamma_i^\dagger \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}} \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

para bosones  $\pi$  ( $\mu = +1$ ),  $\delta$  ( $\mu = 0$ ) o  $\nu$  ( $\mu = -1$ ). Usando la expresión explícita de los coeficientes de Clebsch-Gordan y de los factores isoscalares se obtiene,

$$\begin{aligned} & I([N]\phi L; T, -T \rightarrow [N+1]\phi'L'; T-1, -T+1) \\ &= \frac{p_{\pi,l}^2}{2L+1} \frac{T(N-T+2)}{(2T+1)(N+1)} \left| \langle [N+1]\phi'L' \| \gamma_i^\dagger \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}} \right|^2, \end{aligned}$$

$$I([N]\phi L; T, -T \rightarrow [N+1]\phi'L'; T, -T) = 0,$$

$$\begin{aligned} & I([N]\phi L; T, -T \rightarrow [N+1]\phi'L'; T+1, -T-1) \\ &= \frac{p_{\nu,l}^2}{2L+1} \frac{(T+1)(N+T+3)}{(2T+3)(N+1)} \left| \langle [N+1]\phi'L' \| \gamma_i^\dagger \| [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

Si se tiene en cuenta que

$$|\langle [N-1]\phi'L' || \tilde{\gamma}_i || [N]\phi L \rangle_{\text{IBM1}}|^2 = |\langle [N]\phi L || \gamma_i^\dagger || [N-1]\phi'L' \rangle_{\text{IBM1}}|^2, \quad (\text{III.62})$$

se pueden obtener los resultados para la reacción inversa,

$$\begin{aligned} & I([N]\phi L; T, -T \rightarrow [N-1]\phi'L'; T+1, -T-1) \\ &= \frac{p_{\pi,l}^2}{2L+1} \frac{(T+1)(N-T)}{(2T+3)N} |\langle [N]\phi L || \gamma_i^\dagger || [N-1]\phi'L' \rangle_{\text{IBM1}}|^2, \end{aligned}$$

$$I([N]\phi L; T, -T \rightarrow [N-1]\phi'L'; T, -T) = 0,$$

$$\begin{aligned} & I([N]\phi L; T, -T \rightarrow [N-1]\phi'L'; T-1, -T+1) \\ &= \frac{p_{\nu,l}^2}{2L+1} \frac{T(N+T+1)}{(2T+1)N} |\langle [N]\phi L || \gamma_i^\dagger || [N-1]\phi'L' \rangle_{\text{IBM1}}|^2. \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

El hecho más destacado de estos resultados es que la probabilidad de transferencia de un bosón  $\delta$  es nula. Esto proviene de que hay un factor isoscalar que es idénticamente cero,

$$\left\langle \begin{array}{cc} (N, 0) & (1, 0) \\ T & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (N+1, 0) \\ T \end{array} \right\rangle = 0. \quad (\text{III.64})$$

Para ilustrar estas fórmulas, en la tabla III.9 se dan algunos valores de las probabilidades de transferencia en el límite  $SU(3)$ .

## III.6 Valor promedio de los números de bosones

El valor medio del número de bosones ( $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$ ), aunque no es un observable, resulta muy útil a la hora de comparar con otros modelos, como por ejemplo el “Shell Model Monte Carlo” (SMMC) [LJK<sup>+</sup>93] o el modelo  $SO(5)$  de *pairing* isovectorial [ELV96]. A continuación se deriva el valor de los números medios de bosones ( $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$ ), correspondientes a estados totalmente simétricos con  $T = |M_T|$ , aunque se pueden obtener los resultados correspondientes para otros valores del isospín sin más que emplear el teorema de Wigner-Eckart.

Tabla III.9: Intensidades de transferencia de dos nucleones en el límite  $SU(3)$ 


---



---

$I([N]0_1^+; T, -T \rightarrow [N+1]0_1^+; T-1, -T+1)$	$= p_{\pi,0}^2 \frac{T(N-T+2)(2N+3)}{3(2T+1)(2N+1)}$
$I([N](L-2)_1^+; T, -T \rightarrow [N+1]L_1^+; T-1, -T+1)$	$= p_{\pi,2}^2 \frac{L(L-1)(2N+L+1)}{(2L-3)(2L-1)(2T+1)}$ $\times \frac{(2N+L+3)T(N-T+2)}{(2N+1)(2N+2)}$
$I([N]0_1^+; T, -T \rightarrow [N+1]0_1^+; T, -T)$	$= 0$
$I([N](L-2)_1^+; T, -T \rightarrow [N+1]L_1^+; T, -T)$	$= 0$
$I([N]0_1^+; T, -T \rightarrow [N+1]0_1^+; T+1, -T-1)$	$= p_{\nu,0}^2 \frac{(T+1)(2N+3)(N+T+3)}{3(2T+3)(2N+1)}$
$I([N](L-2)_1^+; T, -T \rightarrow [N+1]L_1^+; T+1, -T-1)$	$= p_{\nu,2}^2 \frac{L(L-1)(2N+L+1)}{(2L-3)(2L-1)}$ $\times \frac{(2N+L+3)(T+1)(N+T+3)}{(2T+3)(2N+1)(2N+2)}$

---



---

Considérense los siguientes operadores con carácter  $SU_T(3)$  bien definido,

$$\begin{aligned}\hat{N}_0^s &\equiv (s^\dagger \times \tilde{s})_{M_L=0, M_T=0}^{(L=0, t=0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(s_\pi^\dagger s_\pi) + (s_\delta^\dagger s_\delta) + (s_\nu^\dagger s_\nu)], \\ \hat{N}_1^s &\equiv (s^\dagger \times \tilde{s})_{M_L=0, M_T=0}^{(L=0, t=1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(s_\pi^\dagger s_\pi) - (s_\nu^\dagger s_\nu)], \\ \hat{N}_2^s &\equiv (s^\dagger \times \tilde{s})_{M_L=0, M_T=0}^{(L=0, t=2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [(s_\pi^\dagger s_\pi) - 2(s_\delta^\dagger s_\delta) + (s_\nu^\dagger s_\nu)],\end{aligned}\quad (\text{III.65})$$

y también

$$\begin{aligned}\hat{N}_0^d &\equiv (d^\dagger \times \tilde{d})_{M_L=0, M_T=0}^{(L=0, t=0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(d_\pi^\dagger \times \tilde{d}_\pi)_{M_L=0}^{(L=0)} + (d_\delta^\dagger \times \tilde{d}_\delta)_{M_L=0}^{(L=0)} + (d_\nu^\dagger \times \tilde{d}_\nu)_{M_L=0}^{(L=0)}], \\ \hat{N}_1^d &\equiv (d^\dagger \times \tilde{d})_{M_L=0, M_T=0}^{(L=0, t=1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(d_\pi^\dagger \times \tilde{d}_\pi)_{M_L=0}^{(L=0)} - (d_\nu^\dagger \times \tilde{d}_\nu)_{M_L=0}^{(L=0)}], \\ \hat{N}_2^d &\equiv (d^\dagger \times \tilde{d})_{M_L=0, M_T=0}^{(L=0, t=2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [(d_\pi^\dagger \times \tilde{d}_\pi)_{M_L=0}^{(L=0)} - 2(d_\delta^\dagger \times \tilde{d}_\delta)_{M_L=0}^{(L=0)} + (d_\nu^\dagger \times \tilde{d}_\nu)_{M_L=0}^{(L=0)}].\end{aligned}\quad (\text{III.66})$$

Se pueden definir unos operadores de número en función de (III.65) y (III.66) mediante

$$\hat{N}_t = \hat{N}_t^s + \sqrt{5} \hat{N}_t^d, \quad (\text{III.67})$$

para  $t = 0, 1, 2$ . Los anteriores operadores son escalares en momento angular, siendo el operador con isospín  $t = 0$  proporcional al número total de bosones  $N$ . Los operadores de número para  $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$  se pueden definir en términos de  $\hat{N}_t$ ,

$$\begin{aligned}\hat{N}_\pi &= \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{N}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{N}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{N}_2, \\ \hat{N}_\delta &= \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{N}_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{N}_2, \\ \hat{N}_\nu &= \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{N}_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{N}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{N}_2.\end{aligned}\quad (\text{III.68})$$

Para estados con  $M_T = -N$ ,  $|[N]\phi L; N, -N\rangle$ , los elementos de matriz de  $\hat{N}_t$  son,

$$\begin{aligned}\langle [N]\phi L; N, -N | \hat{N}_0 | [N]\phi L; N, -N \rangle &= \frac{N}{\sqrt{3}}, \\ \langle [N]\phi L; N, -N | \hat{N}_1 | [N]\phi L; N, -N \rangle &= -\frac{N}{\sqrt{2}}, \\ \langle [N]\phi L; N, -N | \hat{N}_2 | [N]\phi L; N, -N \rangle &= \frac{N}{\sqrt{6}},\end{aligned}\quad (\text{III.69})$$

siendo trivial el cálculo con otros estados más generales  $|[N]\phi L; T, -T\rangle$ , mediante el empleo del teorema de Wigner-Eckart. Los resultados que se obtienen son los siguientes,

$$\begin{aligned} \langle [N]\phi L; T, -T | \hat{N}_0 | [N]\phi L; T, -T \rangle &= -\frac{N}{\sqrt{3}}, \\ \langle [N]\phi L; T, -T | \hat{N}_1 | [N]\phi L; T, -T \rangle &= \frac{T}{\sqrt{2}}, \\ \langle [N]\phi L; T, -T | \hat{N}_2 | [N]\phi L; T, -T \rangle &= -\frac{T(2N+3)}{\sqrt{6}(2T+3)}. \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

Los números medios de bosones se consiguen combinando las anteriores expresiones para dar lugar a,

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_\pi \rangle &\equiv \langle [N]\phi L; T, -T | \hat{N}_\pi | [N]\phi L; T, -T \rangle = \frac{(T+1)(N-T)}{2T+3}, \\ \langle \hat{N}_\delta \rangle &\equiv \langle [N]\phi L; T, -T | \hat{N}_\delta | [N]\phi L; T, -T \rangle = \frac{N-T}{2T+3}, \\ \langle \hat{N}_\nu \rangle &\equiv \langle [N]\phi L; T, -T | \hat{N}_\nu | [N]\phi L; T, -T \rangle = \frac{T(N+T) + (N+2T)}{2T+3}. \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

Estas expresiones verifican,

$$\langle \hat{N}_\pi \rangle + \langle \hat{N}_\delta \rangle + \langle \hat{N}_\nu \rangle = N, \quad \langle \hat{N}_\nu \rangle - \langle \hat{N}_\pi \rangle = T. \quad (\text{III.72})$$

y no dependen de la estructura orbital del estado, sino sólo de su carácter tensorial bajo  $SU_T(3)$ . Las expresiones (III.71) son válidas para todos los estados simétricos. Debido a este hecho los resultados son poco dependientes de los parámetros del hamiltoniano, siempre que éste sea tal que dé lugar a estados con simetría  $[N]$ , bajo  $U_L(6)$ , en la parte baja del espectro. A la vista del desarrollo realizado, resulta clara la utilidad de descomponer cualquier operador en suma de operadores que posean buena simetría bajo algún grupo concreto, en este caso  $U_L(6)$ .

## III.7 Predicciones y comparación con observaciones experimentales

Los modelos IBM-1 e IBM-2 han sido contrastados ampliamente para gran variedad de núcleos pesados y medios [IA87], comparando sus resultados con los datos experimentales, tanto para energías como de transiciones electromagnéticas y otros observables. La

situación en IBM-3 es diferente, pues aunque su formulación básica fue propuesta hace tiempo, no ha sido contrastado extensamente con los datos experimentales. Por tanto, su aplicabilidad y limitaciones son menos conocidas.

Puede decirse que las aplicaciones de IBM-3 son diferentes a las de IBM-1 e IBM-2 en dos aspectos fundamentales. En primer lugar, su región de aplicación está limitada a núcleos ligeros y medios con  $N \approx Z$  (éstos son los únicos núcleos donde los pares protón-neutrón juegan un papel relevante a baja energía). En esas regiones los núcleos presentan menor colectividad a baja energía que los núcleos más pesados. Como el IBM se ocupa sólo de los estados colectivos, el IBM-3 ofrece sólo una descripción parcial de los núcleos con  $N \approx Z$ , quedando fuera de su espacio numerosos estados no colectivos (excitaciones monoparticulares) de baja energía. En segundo lugar, debido a que en el IBM-3 se conserva el isospín, su conexión con el modelo de capas se realiza de forma más natural que en el IBM-1 o el IBM-2.

En IBM-3 se han realizado varios cálculos en la capa  $f_{7/2}$  y en la capa  $fp$  [ATEE88, AETE89, EELL96, TEE87] con hamiltonianos y operadores electromagnéticos derivados a partir del SM. El acuerdo en las energías y probabilidades de transición es bueno para los estados simétricos de baja energía, pero comienzan a aparecer discrepancias cuando se estudian estados de más alta energía. Un problema adicional en todos los cálculos IBM-3 es que el número de datos relativo a estados no simétricos es bastante pequeño y fijar la forma de parte del hamiltoniano es complicado.

En lo referente a aplicaciones de tipo fenomenológico, se han realizado algunos cálculos para núcleos de la zona  $N \approx Z \approx 40$  [Sug97], partiendo de un hamiltoniano esquemático con unos pocos parámetros que se ajustan a los espectros de baja energía de distintos núcleos. En esa misma línea se presentan a continuación nuevos cálculos. Para ello se emplea un hamiltoniano esquemático con un término de *pairing* para los bosones  $d$  y una interacción cuadrupolo-cuadrupolo. Los cálculos se han realizado para varios núcleos de la capa  $f_{7/2}$ ,  $^{44}\text{Ti}$ ,  $^{46}\text{Ti}$ ,  $^{48}\text{Ti}$  y  $^{48}\text{Cr}$ . Por simplicidad se considera que no existe dependencia de  $N$  y  $T$  en los parámetros del hamiltoniano. Además, se supone que la fuerza cuadrupolar actúa sólo sobre protones y neutrones, pero no entre partículas idénticas

[Sug97]. El hamiltoniano que se usa es el siguiente,

$$\hat{H} = \epsilon_d \hat{n}_d + \kappa_0 \mathcal{N}[\hat{T}^{(2,0)} : \hat{T}^{(2,0)} + \frac{2}{3} \hat{T}^{(2,1)} : \hat{T}^{(2,1)}] + t \hat{T}^2, \quad (\text{III.73})$$

donde el símbolo  $:$  representa un producto escalar en momento angular e isospín y  $\mathcal{N}[\dots]$  es el operador escrito en orden normal. Los parámetros de estructura se toman independientes de  $T$ :  $\chi_{02}^{2T} = \chi_{20}^{2T} = 1$  y  $\chi_{22}^{2T} = \chi$ . Los parámetros del hamiltoniano se han obtenido empleando:

- Los niveles monoparticulares y las energías de ligadura del  $^{40-42}\text{Ca}$ ,  $^{41-42}\text{Sc}$  y  $^{42}\text{Ti}$ , para calcular el valor de  $\epsilon_d$ .
- Se han ajustado los niveles más bajos del  $^{44,46,48}\text{Ti}$  y  $^{48}\text{Cr}$  para calcular  $\kappa_0$  y  $\chi$ .
- El valor de  $t$  se ha obtenido mediante la comparación con cálculos de SM [TEE87], ya que la información experimental sobre estados no simétricos y  $T > |M_T|$  es bastante limitada.

Los parámetros que llevan al mejor ajuste global del espectro de los 4 núcleos son:  $\epsilon_d = 1.5$  MeV,  $\kappa_0 = -0.2$  MeV,  $\chi = -2.4$  y  $t = 1.2$  MeV. El valor de  $\epsilon_d$  debe ser idéntico para los tres tipos de bosones para no romper la simetría de isospín. Es importante destacar que la interacción cuadrupolar empleada da una importante contribución al operador de Majorana [Sug97], y por tanto garantiza que  $U_L(6)$  sea una simetría aproximada para los estados de más baja energía. La comparación entre resultados teóricos y experimentales se muestra en la figura III.4, observándose un buen acuerdo para los estados de más baja energía de todos los núcleos. El grado de acuerdo obtenido es similar al que se logra en otros ajustes [EELL96].

Respecto a los estados no simétricos, en la tabla III.10 se comparan los resultados IBM-3 con los experimentales, o en su defecto con los obtenidos mediante otros cálculos [ATEE88, AETE89]. La identificación de los estados se ha logrado mediante el análisis de las transiciones electromagnéticas.

Con respecto a las transiciones electromagnéticas, se pueden obtener algunas conclusiones generales independientes de la simetría  $U_L(6)$  de que se trate ( $U(5)$ ,  $SU(3)$  u  $O(6)$ ). El principal escollo para fijar las cargas efectivas de los operadores de electromagnéticos es

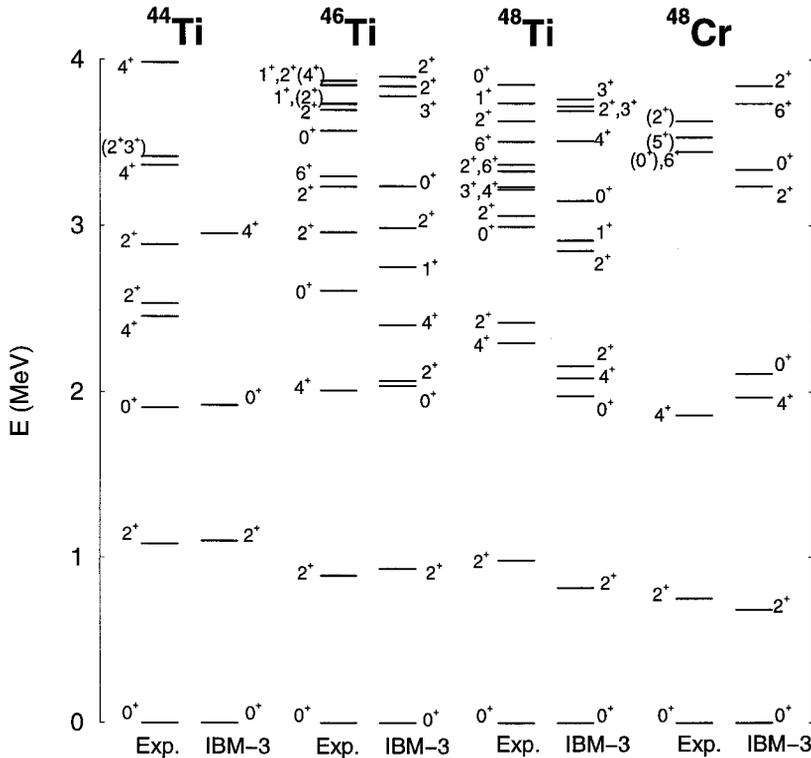


Figura III.4: Energías IBM-3 teóricas y experimentales para el  $^{44,46,48}\text{Ti}$  y el  $^{48}\text{Cr}$ . Los parámetros del hamiltoniano son constantes para todos los núcleos y pueden encontrarse en el texto.

la escasez de datos experimentales existentes. Para fijar las cargas efectivas del operador  $M1$ , se analizan las transiciones  $B(M1)$  entre estados simétricos y no simétricos, en este caso el operador de la transición no tiene componente isoscalar. La comparación entre los resultados IBM-3 y experimentales, o empleando SM, se muestra en la tabla III.11. En primer lugar, el factor  $g$  isovectorial se fija a  $g_1 = 1.20\mu_N$  con objeto de reproducir el valor experimental de  $B(M1; 2_M^+ \rightarrow 2_1^+)$  en el  $^{44}\text{Ti}$ . En segundo lugar, aunque microscópicamente no se sugiere la existencia de un término isotensorial, se puede estudiar su influencia introduciendo el valor ( $g_2 = 0.58\mu_N$ ), con objeto de reproducir el valor experimental de  $B(M1; 2_M^+ \rightarrow 2_1^+)$  en el  $^{46}\text{Ti}$ . Se observa que con este nuevo término el ajuste global que se obtiene es mucho mejor. Cabe destacar que la contribución del término isotensorial en el  $^{44}\text{Ti}$  y el  $^{48}\text{Cr}$  se anula debido a que en ambos núcleos  $T = 0$  para sus estados fundamentales y las transiciones calculadas corresponden al paso de isospín 1 a 0.

Tabla III.10: Energías de estados no simétricos en el  $^{44,46,48}\text{Ti}$  y  $^{48}\text{Cr}$

Núcleos	Estados	Energía (MeV)	
		Observado	IBM-3
$^{44}\text{Ti}$	$1_1^+$	$5.7^a$	5.2
	$2_M^+$	6.6	4.8
$^{46}\text{Ti}$	$1_1^+$	4.3	2.8
	$2_M^+$	$2.5^a$	2.1
	$3_M^+$	$3.6^a$	3.8
$^{48}\text{Ti}$	$1_1^+$	3.7	2.9
	$2_M^+$	2.4	2.2
	$3_M^+$	3.2	4.3
$^{48}\text{Cr}$	$1_1^+$	$5.5^a$	5.4

<sup>a</sup> Valores calculados [ATEE88, AETE89].

El valor esperado del número medio de bosones, aunque no es un observable medible directamente, sí puede compararse fácilmente con modelos nucleares más elaborados y dará valiosa información acerca de la bondad del IBM-3. Así en la figura III.5 se comparan los números promedio de bosones calculados con IBM-3 y los valores obtenidos empleando SMMC [ELV96]. Se observa que las fórmulas (III.71) reproducen la tendencia de los cálculos microscópicos, aunque no logran reproducir los detalles. Los resultados SMMC se encuentran escalados de forma que el valor promedio del número de pares se encuentre normalizado al número de bosones, lo cual es sólo aproximado en el caso de capas finitas.

Dos términos cruciales en todo este análisis son el término de Majorana y el término  $\hat{T}^2$ , ya que ambos determinan la posición relativa de los estados con diferente simetría  $U_L(6)$  y valor de isospín. A continuación se ilustra este hecho mediante un cálculo esquemático en núcleos con  $N = Z$ , tales como el  $^{48}\text{Cr}$  o el  $^{64}\text{Ge}$ . Se admite en general, que los estados con simetría  $U_L(6) [N - 2, 2]$  aparecen a energías superiores a la de los estados  $[N - 1, 1]$ . Sin embargo, esto no es necesariamente cierto en núcleos par-par con  $N = Z$ .

Tabla III.11: Valores de  $B(M1)$  para transiciones entre estados simétricos y no simétricos en el  $^{44,46,48}\text{Ti}$  y  $^{48}\text{Cr}$

Núcleo	Transición	$B(M1)$ ( $\mu_N^2$ )		
		Observado	Mod. de capas <sup>a</sup>	IBM-3 <sup>b</sup>
$^{44}\text{Ti}$	$2_M^+ \rightarrow 2_1^+$		1.14	1.14 (1.14)
	$0_1^+ \rightarrow 1_1^+$		2.40	1.75 (1.75)
$^{46}\text{Ti}$	$2_M^+ \rightarrow 2_1^+$		0.73	0.73 (1.13)
	$3_M^+ \rightarrow 2_1^+$		0.07	0.20 (0.25)
	$3_M^+ \rightarrow 4_1^+$		0.20	0.41 (0.69)
	$0_1^+ \rightarrow 1_1^+$	1.01		1.15 (1.34)
$^{48}\text{Ti}$	$2_M^+ \rightarrow 2_1^+$	0.50(10)	0.58	0.90 (1.24)
	$3_M^+ \rightarrow 2_1^+$	0.08(3)	0.003	0.30 (0.34)
	$3_M^+ \rightarrow 4_1^+$	0.42(16)	0.32	0.49 (0.64)
	$4_M^+ \rightarrow 4_1^+$	1.4(5)	1.50	
	$0_1^+ \rightarrow 1_1^+$	0.50(8)	0.54	1.82 (2.10)
$^{48}\text{Cr}$	$0_1^+ \rightarrow 1_1^+$		3.05	4.82 (4.82)

<sup>a</sup> Tomado de [ATEE88, AETE89, CZPMP94].

<sup>b</sup> Este trabajo los números entre paréntesis son los valores calculados sin la contribución isotensorial.

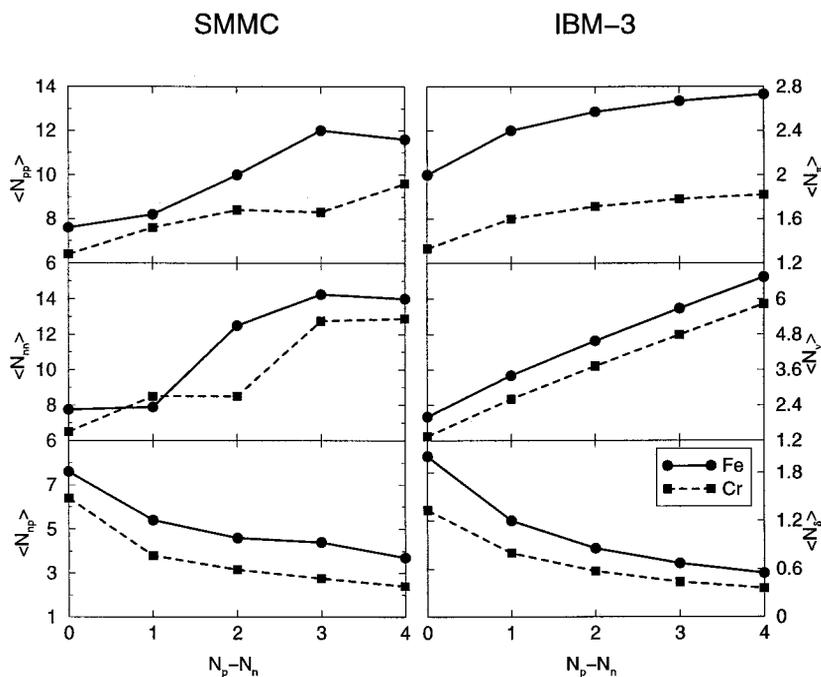


Figura III.5: Valor esperado del número de bosones en el estado fundamental para isotopos de Cr e Fe, como una función de  $|T_z| = (N - Z)/2$ . En la izquierda están los valores calculados con SMMC, mientras que en la derecha están los calculados con IBM-3.

Esta particularidad surge debido al hecho de que el valor más bajo del isospín en la representación  $[N - 1, 1]$  es  $T = 1$ , mientras que en  $[N - 2, 2]$  es  $T = 0$ . Así, aunque el término de Majorana favorece siempre la representación  $[N - 1, 1]$  sobre la  $[N - 2, 2]$ , en núcleos con  $N = Z$  el término  $\hat{T}^2$  crea un efecto contrario. Para hacer el razonamiento más cuantitativo, considérese un hamiltoniano general

$$\hat{H} = t\hat{T}^2 + m\hat{M} + \hat{H}_L, \quad (\text{III.74})$$

donde  $\hat{H}_L$  es la parte del hamiltoniano asociada al momento angular y es arbitraria. En la capa  $f_{7/2}$  el valor de  $t$  es  $t = 1.2$  MeV, y el de  $m$  depende del número de bosones,  $m = 3.3, 2.5$  y  $0.7$  MeV para  $N = 2, 3$  y  $4$  respectivamente (los valores de  $m$  se estiman a partir de la posición de los estados no simétricos en el  $^{44,46,48}\text{Ti}$  [ATEE88, AETE89]). En la figura III.6 se muestra el espectro correspondiente al hamiltoniano (III.74) para 4 bosones ( $N_p = N_n = 2$ ). El hecho más destacable es que los estados  $[N - 2, 2]T = 0$  están a una menor energía que los  $[N - 1, 1]T = 1$ .

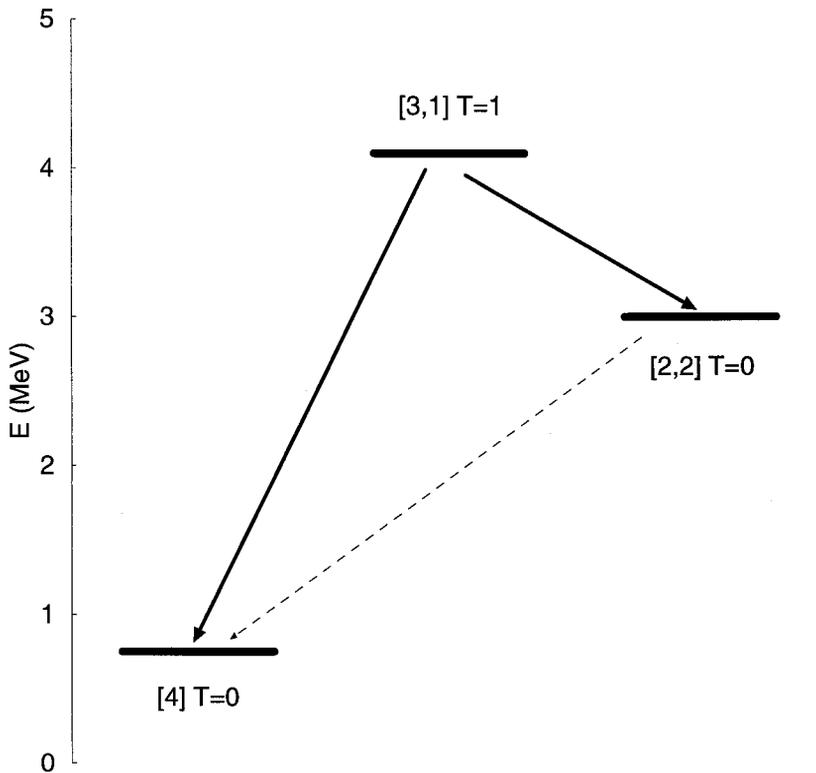


Figura III.6: Energías de los estados  $[4]$ ,  $[3,1]$  y  $[2,2]$  en un núcleo con  $N = Z$  y 4 bosones. Se emplea el hamiltoniano (III.74) con los parámetros  $t = 1.2$  y  $m = 0.7$ , en MeV. Las transiciones entre  $[4]$  y  $[2,2]$  están prohibidas (línea discontinua).

Un hecho sorprendente de este cálculo es que los estados  $[N - 2, 2]$  no pueden decaer a la banda del estado fundamental si sólo se consideran operadores electromagnéticos de un cuerpo. Sin embargo, este efecto es muy difícil de observar experimentalmente o con hamiltonianos realistas debido a la mezcla de las representaciones  $[N - 2, 2]$  y  $[N - 1, 1]$ .

# Capítulo IV

## El isospín en el IBM: IBM-3 en el sistema intrínseco

La descripción de núcleos ligeros y medios que se realiza mediante el IBM-3 en el sistema laboratorio (ver capítulo III) es bastante satisfactoria y proporciona una clara visión de las potencialidades y limitaciones del modelo para describir la colectividad de núcleos ligeros y medios con  $N \approx Z$ . No obstante, sería conveniente poseer una imagen geométrica del modelo. Como ya se discutió en el capítulo II, la imagen geométrica de todo modelo algebraico se obtiene mediante el uso de estados coherentes y técnicas de campo medio y, en consecuencia, a través del formalismo de estado intrínseco [GK80a, DDP<sup>+</sup>84]. El empleo del campo medio lleva a una reducción considerable de la complejidad del problema y permite introducir grados de libertad adicionales como por ejemplo bosones con momentos angulares más altos ( $\ell = 3^-, 4^+, \dots$ ), o excitaciones de dos cuasipartículas.

Recientemente Ginocchio y Leviatan (GL) han propuesto un formalismo de estado intrínseco para IBM-3 [GL94]. En ese trabajo, en la función de onda variacional se impone simetría axial, parámetros de deformación independientes de la carga y buen isospín. Adicionalmente, la función de onda posee simetría  $SU_T(3)$  definida. A continuación se presenta un nuevo formalismo de estado intrínseco que contiene al de GL como un caso particular. En este formalismo no se mantiene ninguna de las simetrías comentadas anteriormente.

## IV.1 El estado intrínseco en IBM-3

Considérese un hamiltoniano general con términos a uno y dos cuerpos que conserve el número total de bosones,  $N$ , y la carga. En forma multipolar un hamiltoniano de ese tipo puede escribirse como,

$$\hat{H} = \sum_{\ell\tau} \varepsilon_{\ell\tau} \gamma_{\ell,1\tau}^\dagger \cdot \tilde{\gamma}_{\ell,1\tau} + \sum_L \sum_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} \kappa_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^L \hat{T}_{\tau_1\tau_2}^L \cdot \hat{T}_{\tau_3\tau_4}^L, \quad (\text{IV.1})$$

donde el  $\cdot$  representa el producto escalar sólo en momento angular<sup>1</sup> y no en isospín, de ahí que se indiquen explícitamente las  $\tau$  en los distintos operadores. La única restricción en el espacio de isospín es que  $\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 + \tau_4$ , de forma que se conserve la carga total. El operador multipolar  $\hat{T}_{\tau_1\tau_2}^L$  con momento angular  $L$  se define de la forma usual,

$$\hat{T}_{M,\tau_1\tau_2}^L = \sum_{\ell_1\ell_2} \chi_{\ell_1\ell_2,\tau_1\tau_2}^L (\gamma_{\ell_1,1\tau_1}^\dagger \times \tilde{\gamma}_{\ell_2,1\tau_2})_M^L, \quad (\text{IV.2})$$

donde el acoplamiento sólo se realiza en momento angular. Los operadores bosónicos  $\tilde{\gamma}_{\ell m\tau}$  se definen en este capítulo como  $\tilde{\gamma}_{\ell m,1\tau} = (-1)^{\ell-m} \gamma_{\ell-m,1\tau}$  ya que los productos escalares se realizan sólo en momento angular (en la sección III.1 existe otra definición para el caso en que se requiera buen comportamiento de los operadores frente a rotaciones en el espacio de isospín y en el espacio orbital). El hamiltoniano (IV.1) puede ser usado para IBM-3 o IBM-2, e incluso para un sistema donde haya tres tipos de nucleones interactuantes y no se conserve el isospín.

A continuación se definen los bosones intrínsecos (deformados) en función de los del sistema laboratorio (esféricos) mediante una transformación unitaria,

$$\Gamma_{p\tau}^\dagger = \sum_{\ell m} \eta_{\ell m}^{p\tau} \gamma_{\ell m,1\tau}^\dagger, \quad \gamma_{\ell m,1\tau}^\dagger = \sum_p \eta_{\ell m}^{p\tau*} \Gamma_{p\tau}^\dagger. \quad (\text{IV.3})$$

Los parámetros de deformación,  $\eta$ , verifican las siguientes relaciones de ortonormalización,

$$\sum_{\ell m} \eta_{\ell m}^{p'\tau*} \eta_{\ell m}^{p\tau} = \delta_{pp'}, \quad \sum_p \eta_{\ell m}^{p\tau*} \eta_{\ell' m'}^{p\tau} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (\text{IV.4})$$

El índice  $p$  toma como valores  $0, 1, \dots, \sum_\ell (2\ell + 1)$ , correspondiendo  $0 \equiv c$  al bosón deformado fundamental (cuando se omite el índice  $p$  se entenderá que éste es 0 y, por tanto, se

<sup>1</sup>Se emplea la convención  $\hat{T}^L \cdot \hat{T}^L = \sum_M (-1)^{L-M} \hat{T}_M^L \hat{T}_{-M}^L$ .

hace referencia al bosón fundamental,  $c$ ). Hay que destacar la dependencia explícita en la carga de los parámetros de deformación. Ello permite diferentes estructuras para los condensados bosónicos de  $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$ . Esta posibilidad no está contemplada en el formalismo de GL. Los parámetros de deformación  $\eta$  también se pueden expresar en términos de las variables  $\beta$  y  $\gamma$  (ver sección I.2.1). En nuestro caso dichas variables son dependientes de  $\tau$ . El bosón intrínseco fundamental se define como una extensión del definido en la ecuación (II.6),

$$\Gamma_{c\tau}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_\tau^2}} \left( s_\tau^\dagger + \beta_\tau \cos \gamma_\tau d_{0\tau}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_\tau \sin \gamma_\tau (d_{2\tau}^\dagger + d_{-2\tau}^\dagger) \right). \quad (\text{IV.5})$$

La definición de los bosones deformados (IV.3) es tal que los bosones en sus tres estados de carga no forman un triplete de isospín, es decir no pueden transformarse unos en otros mediante la aplicación sucesiva de  $\hat{T}_\pm$ . Esto es debido al uso de parámetros de deformación dependientes de la carga. Por ejemplo si se actúa con  $\hat{T}_-$  sobre  $\Gamma_{p1}^\dagger$  ( $\pi$ ) se obtiene un bosón  $\delta$  con idénticos parámetros de deformación, pero que es diferente al bosón  $\Gamma_{p0}^\dagger$  definido en (IV.3). En consecuencia, existen en general tres tripletes desacoplados, uno para cada juego de parámetros de deformación ( $\eta^\tau$ ). Sólo en el caso de parámetros independientes de la carga se obtiene un único triplete de isospín.

El siguiente paso es proponer la función de onda variacional. La función de onda que se emplea es una extensión de la propuesta en [GL94]. Para núcleos par-par con exceso de protones (en el caso de exceso de neutrones simplemente hay que intercambiar el papel de protones y neutrones) la función de onda sin normalizar propuesta se escribe como,

$$|\phi(\alpha)\rangle = \Lambda^\dagger{}^{N_n}(\alpha) \Gamma_1^\dagger{}^{N_p - N_n} |0\rangle, \quad (\text{IV.6})$$

donde el operador  $\Lambda^\dagger$  crea un par correlacionado de bosones en el espacio de isospín,

$$\Lambda^\dagger(\alpha) = \Gamma_1^\dagger \Gamma_{-1}^\dagger + \alpha \Gamma_0^\dagger \Gamma_0^\dagger. \quad (\text{IV.7})$$

En la ecuación (IV.6)  $N_p$  ( $N_n$ ) es el número de pares de protones (neutrones) de valencia. La función de onda (IV.6) contiene como límites naturales el formalismo de GL y el IBM-2. Dos valores del parámetro  $\alpha$  están conectados con dichos límites, para  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\Lambda^\dagger(\alpha)$  corresponde, en el caso particular de que los parámetros de deformación sean independientes de la carga, a un par bosónico isoscalar. En este caso el isospín del estado

es  $T = N_p - N_n$  y se reproducen los resultados de GL. Cualquier otro valor de  $\alpha$  rompe la simetría de isospín y en particular  $\alpha = 0$  elimina la mezcla con los bosones  $\delta$  y se obtiene el estado intrínseco de IBM-2. Hay que notar que aunque  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , si los parámetros de deformación dependen de  $\tau$ , el operador  $\Lambda^\dagger$  de la ecuación (IV.7) contendrá una mezcla de isospines  $T = 0, 1, 2$ .

La función de onda dada en (IV.6) no es la más general para el grupo  $U(18)$ , que es álgebra dinámica del IBM-3. Sin embargo, la existencia de correlaciones de pares en el espacio de isospín en (IV.6) hace esperar una ganancia energética con respecto a la función de onda más general en  $U(18)$ . Este último estado se denominará función de onda  $U(18)$  y, se expresa como,

$$|\phi\rangle_{U(18)} = (\Gamma_c^\dagger)^{N_p+N_n} |0\rangle, \quad (\text{IV.8})$$

donde

$$\Gamma_c^\dagger = \sum_{\ell m \tau} \xi_{\ell m \tau} \gamma_{\ell m, 1\tau}^\dagger. \quad (\text{IV.9})$$

Para este estado no se conservan ni el momento angular, ni el isospín, ni la carga. Más adelante se discutirá desde un punto de vista numérico la diferencia energética entre los estados (IV.6) y (IV.8).

Los parámetros variacionales de la función de onda (IV.6),  $\eta_{\ell m}^\tau$ , se calculan mediante la minimización de la energía del estado fundamental. Una expresión cerrada y compacta de dicha energía es difícil de obtener y sólo se consigue para el caso particular del formalismo de GL. En ese caso la energía queda expresada en función de potencias de  $\beta$  y de  $\cos(3\gamma)$ . En el caso más general, en lugar de recurrir a una minimización directa, se procede a obtener las ecuaciones autoconsistentes de Hartree-Bose que conducen a los parámetros  $\eta$  que minimizan la energía. Antes de calcular el valor esperado del hamiltoniano (IV.1) con el estado (IV.6), es conveniente expresar dicho hamiltoniano en forma totalmente desacoplada,

$$\begin{aligned} \hat{H} = \sum_{\ell m \tau} \tilde{\varepsilon}_{\ell \tau} \gamma_{\ell m, 1\tau}^\dagger \gamma_{\ell m, 1\tau} &+ \sum_{\ell_1 m_1 \tau_1 \ell_2 m_2 \tau_2 \ell_3 m_3 \tau_3 \ell_4 m_4 \tau_4} V_{\ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4} \\ &\times \gamma_{\ell_1 m_1, 1\tau_1}^\dagger \gamma_{\ell_2 m_2, 1\tau_2}^\dagger \gamma_{\ell_3 m_3, 1\tau_3} \gamma_{\ell_4 m_4, 1\tau_4}. \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Los coeficientes  $\tilde{\varepsilon}_{\ell \tau}$  incluyen las energías monoparticulares  $\varepsilon_{\ell \tau}$  y las contribuciones de los términos a dos cuerpos. Los coeficientes  $V_{\ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4}$ , siguiendo la referencia

[DDP<sup>+</sup>84], se definen como,

$$V_{\ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4} \equiv \frac{1}{4} \langle \ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2 | V | \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4 \rangle \\ \times \sqrt{1 + \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{\tau_1 \tau_2}} \sqrt{1 + \delta_{\ell_3 \ell_4} \delta_{m_3 m_4} \delta_{\tau_3 \tau_4}}. \quad (\text{IV.11})$$

Para un hamiltoniano (IV.1) que sea IBM-3, es decir que contenga también productos escalares en isospín, la expresión explícita de los anteriores coeficientes es,

$$\tilde{\epsilon}_\ell = \epsilon_\ell + \sum_{LT\ell'} \kappa_L^T (-1)^{\ell+\ell'+L+T} \frac{\hat{L}^2 \hat{T}^2}{\hat{3}\hat{\ell}^2} \chi_{\ell\ell'}^{LT} \chi_{\ell'\ell}^{LT} \quad (\text{IV.12})$$

$$\tilde{V}_{\ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4} = \sum_{L=1,2,3,4} \sum_{T=0,1,2} \kappa_L^T (-1)^{L+T+\ell_3+\ell_4+m_1+m_4+\tau_1+\tau_4} \chi_{\ell_1 \ell_3}^{LT} \chi_{\ell_2 \ell_4}^{LT} \\ \times \langle \ell_1 m_1 \ell_3 - m_3 | L m_1 - m_3 \rangle \langle 1 \tau_1 1 - \tau_3 | T \tau_1 - \tau_3 \rangle \\ \times \langle \ell_2 m_2 \ell_4 - m_4 | L m_3 - m_1 \rangle \langle 1 \tau_2 1 - \tau_4 | T \tau_3 - \tau_1 \rangle \quad (\text{IV.13})$$

$$V_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2, \ell_3 m_3, \ell_4 m_4} = \frac{1}{4} (\tilde{V}_{\ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4} + \tilde{V}_{\ell_2 m_2 \tau_2, \ell_1 m_1 \tau_1, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4} \\ + \tilde{V}_{\ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2, \ell_4 m_4 \tau_4, \ell_3 m_3 \tau_3} + \tilde{V}_{\ell_2 m_2 \tau_2, \ell_1 m_1 \tau_1, \ell_4 m_4 \tau_4, \ell_3 m_3 \tau_3}), \quad (\text{IV.14})$$

donde  $\hat{L} = \sqrt{2L+1}$  y  $\hat{T} = \sqrt{2T+1}$ . La energía del estado fundamental puede expresarse como,

$$E(\eta, \alpha) = \sum_{\tau} \epsilon_{\tau} f_1(\alpha, \tau) + \sum_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4} V_{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4}^c f_2(\alpha, \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4), \quad (\text{IV.15})$$

donde

$$\epsilon_{\tau} = \sum_{\ell m} \tilde{\epsilon}_{\ell\tau} \eta_{\ell m}^{\tau*} \eta_{\ell m}^{\tau}, \quad (\text{IV.16})$$

$$V_{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4}^c = \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3 \ell_4 m_4} V_{\ell_1 m_1 \tau_1, \ell_2 m_2 \tau_2, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4} \eta_{\ell_1 m_1}^{\tau_1*} \eta_{\ell_2 m_2}^{\tau_2*} \eta_{\ell_3 m_3}^{\tau_3} \eta_{\ell_4 m_4}^{\tau_4}, \quad (\text{IV.17})$$

$$f_1(\alpha, \tau) = \frac{\langle \phi(\alpha) | \Gamma_{\tau}^{\dagger} \Gamma_{\tau} | \phi(\alpha) \rangle}{\langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha) \rangle}, \quad (\text{IV.18})$$

y

$$f_2(\alpha, \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4) = \frac{\langle \phi(\alpha) | \Gamma_{\tau_1}^{\dagger} \Gamma_{\tau_2}^{\dagger} \Gamma_{\tau_3} \Gamma_{\tau_4} | \phi(\alpha) \rangle}{\langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha) \rangle}. \quad (\text{IV.19})$$

La dependencia de la energía (IV.15) en los parámetros variacionales  $\eta$  está contenida en los términos a un cuerpo,  $\epsilon$  (IV.16) y en los términos a dos cuerpos (IV.17). Por

otro lado, la dependencia en  $\alpha$  está contenida en los elementos de matriz de isospín  $f_1$  (IV.18) y  $f_2$  (IV.19). Estos elementos de matriz se calculan fácilmente desarrollando binomialmente la expresión del estado fundamental (IV.6). Los elementos  $f_2$  presentan las mismas propiedades de simetría, bajo intercambio de subíndices, que los coeficientes  $V_{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4}^c$ .

Las ecuaciones de Hartree-Bose para los parámetros variacionales orbitales,  $\eta$ , se obtienen minimizando la energía (IV.15), para un valor dado de  $\alpha$ , a la vez que se mantiene la norma de la transformación (IV.4),

$$\delta[E(\eta, \alpha) - \sum_{\tau} E_{\tau} \eta_{lm}^{\tau*} \eta_{lm}^{\tau}] = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Derivando respecto a  $\eta_{lm}^{\tau}$  y agrupando convenientemente se obtiene,

$$\sum_{\ell_2 m_2} h_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}^{\tau} \eta_{\ell_2 m_2}^{\tau} = E_{\tau} \eta_{\ell_1 m_1}^{\tau}, \quad (\text{IV.21})$$

donde la matriz de Hartree-Bose,  $h^{\tau}$ , es

$$\begin{aligned} h_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}^{\tau} &= \tilde{\epsilon}_{\ell_1 \tau} f_1(\alpha, \tau) \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \\ &+ 2 \sum_{\ell_3 m_3 \ell_4 m_4 \tau_3 \tau_4} V_{\ell_1 m_1 \tau, \ell_3 m_3 \tau_3, \ell_4 m_4 \tau_4, \ell_2 m_2 \tau_2} \frac{\eta_{\ell_3 m_3}^{\tau_3*} \eta_{\ell_4 m_4}^{\tau_4} \eta_{\ell_2 m_2}^{\tau_2}}{\eta_{\ell_2 m_2}^{\tau}} f_2(\alpha, \tau \tau_3 \tau_4 \tau_2). \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

La presencia del término  $\eta_{\ell_2 m_2}^{\tau}$  en el denominador es una argucia matemática para poder expresar de forma matricial (IV.21). De ese modo se puede llevar a cabo un proceso autoconsistente mediante sucesivas diagonalizaciones de (IV.22):

- Se fija un valor de  $\alpha$  y se calculan  $f_1$  y  $f_2$ .
- Se construyen las tres matrices  $h_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}^{\tau}$  (con  $\tau = -1, 0, 1$ ) para unos valores iniciales de  $\eta$ .
- Se procede a la diagonalización de las tres matrices y se obtienen unos nuevos valores de  $\eta$  que sirven para contruir la siguiente matriz  $h_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}^{\tau}$ .
- Se continúa con este proceso hasta que las  $\eta$  de entrada y las de salida sean iguales o satisfagan algún criterio de convergencia.

Las  $\eta$  que se obtienen de este modo son las que dan el mínimo absoluto de energía. Las ecuaciones de Hartree-Bose para IBM-3 son muy diferentes a las de IBM-1 debido a la dependencia en  $\tau$  de los parámetros de deformación. Ello hace que las tres ecuaciones se encuentren acopladas entre sí. Durante todo este proceso hay que diagonalizar 3 matrices de dimensión 6, aunque bajo ciertas consideraciones dichas dimensiones pueden ser menores. Si se sabe que los elipsoides para  $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$  están alineados, las componentes  $m = \pm 1$  se anulan y las  $m = \pm 2$  deben ser iguales, por lo que la dimensión se reduce a 3. En el caso de que los elipsoides se encuentren desalineados, las componentes  $m = \pm 1$  no son nulas, pero sí iguales entre sí y cambiadas de signo, por lo que la dimensión de las matrices se reduce a 4.

Una vez que los parámetros de deformación para  $p = c$  están calculados, las  $\eta$  para los bosones excitados se obtienen empleando las relaciones de ortonormalización (IV.4). De nuevo, como en IBM-1, una elección conveniente de los parámetros de deformación de los bosones excitados es la que se hace en la referencia [Lev87]) o en la sección II.1. Esta elección proporciona una clara conexión con las habituales excitaciones  $\beta$  y  $\gamma$  del MC. La nueva componente que hay que incorporar al definir las  $\eta$ 's excitadas es la carga.

### IV.1.1 Estados excitados de un fonón

Las bandas excitadas que se consideran a continuación, son aquellas en las que se elimina un bosón condensado y se introduce uno excitado, llevándose a cabo, por tanto, los cálculos en el marco de la TDA. El empleo de la TDA lleva a la aparición de estados espúreos que se deben eliminar convenientemente. Este problema se analizará en la siguiente sección.

Los estados excitados que se consideran son<sup>2</sup>,

$$|p\tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{f_1(\alpha, \tau)\langle\phi(\alpha)|\phi(\alpha)\rangle}} \Gamma_{p\tau}^\dagger \Gamma_{c\tau} |\phi(\alpha)\rangle. \quad (\text{IV.23})$$

Las autofunciones serán combinaciones lineales de los estados (IV.23),

$$|\phi^i\rangle = N^i \left( \sum_{p\tau} X_{p\tau}^i |p\tau\rangle \right), \quad (\text{IV.24})$$

---

<sup>2</sup>Los estados  $|p\tau\rangle$  poseen la misma carga que el estado fundamental, aunque puede parecer lo contrario debido a la notación empleada para el estado.

no existiendo mezcla con el estado fundamental, ya que en general se verifica,

$$\langle \phi(\alpha) | H | p\tau \rangle = 0, \quad (\text{IV.25})$$

(ver sección II.1.1).

Para obtener los estados (IV.23), hay que diagonalizar el hamiltoniano (IV.1). Los elementos de matriz a calcular son,

$$\begin{aligned} \langle p\tau | H | p'\tau' \rangle &= \delta_{\tau\tau'} \epsilon_{\tau}^{pp'} \frac{f_1(\alpha, \tau)}{\sqrt{f_1(\alpha, \tau) f_1(\alpha, \tau')}} + \delta_{\tau\tau'} \sum_{\tau_1} \frac{f_2(\alpha, \tau\tau_1\tau_1\tau')}{\sqrt{f_1(\alpha, \tau) f_1(\alpha, \tau')}} \\ &+ \delta_{\tau\tau'} \sum_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} V_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^c \frac{f_3(\alpha, \tau\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau')}{\sqrt{f_1(\alpha, \tau) f_1(\alpha, \tau')}} \\ &+ 4 \sum_{\tau_2\tau_3} V_{\tau\tau_2\tau_3\tau'}^{pp'} \frac{f_2(\alpha, \tau\tau_2\tau_3\tau')}{\sqrt{f_1(\alpha, \tau) f_1(\alpha, \tau')}} \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

donde

$$\epsilon_{\tau}^{pp'} = \sum_{\ell m} \varepsilon_{\ell\tau} \eta_{\ell m}^{p\tau*} \eta_{\ell m}^{p'\tau*}, \quad (\text{IV.27})$$

$$V_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}^{pp'} = \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3 \ell_4 m_4} \eta_{\ell_1 m_1}^{p\tau_1*} \eta_{\ell_2 m_2}^{c\tau_2*} \eta_{\ell_3 m_3}^{c\tau_3} \eta_{\ell_4 m_4}^{p'\tau_4} \quad (\text{IV.28})$$

y

$$f_3(\alpha, \tau\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau') = \frac{\langle \phi(\alpha) | \Gamma_{\tau}^{\dagger} \Gamma_{\tau_1}^{\dagger} \Gamma_{\tau_2}^{\dagger} \Gamma_{\tau_3} \Gamma_{\tau_4} \Gamma_{\tau'} | \phi(\alpha) \rangle}{\langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha) \rangle}. \quad (\text{IV.29})$$

En este formalismo se permite la mezcla de los índices  $p, p'$ , es decir, se engloba el caso triaxial. En general, habrá que diagonalizar una matriz de dimensión  $3 \sum_{\ell} (2\ell + 1) - 3$ , que para el caso de bosones  $s$  y  $d$  se reduce a 15. No obstante, las componentes  $m$  y  $-m$  de los estados deben ser iguales, por lo que la dimensión se reduce a 9. Si adicionalmente se supone simetría axial no habrá mezcla entre los distintos  $p$  y, las matrices a diagonalizar serán de dimensión 3. En este caso habrá 3 bandas  $\beta$  ( $K = 0$ ), 3 bandas  $\gamma$  ( $K = 2$ ) y tres bandas scissors ( $K = 1$ ), aunque como se verá, algunos de estos modos son espúreos.

### IV.1.2 Modos espúreos, bosones de Goldstone

Al igual que en IBM-1, en IBM-3 también existen modos espúreos. En este caso los bosones de Goldstone son tales que no siempre dan lugar a componentes espúreas, sino que sólo ciertas combinaciones lineales de éstos producen estados espúreos.

Las condiciones para localizar un estado espúreo vienen dadas por las ecuaciones (II.31), (II.32) y (II.33) (ver sección II.1.2). De nuevo, se emplea el procedimiento presentado en la referencia [Lev87] y por simplicidad sólo se consideran como posibles simetrías del hamiltoniano las presentes en las cadenas de subálgebras (III.14), es decir las mismas simetrías que en IBM-1.

Las simetrías del hamiltoniano a tratar son  $O_L(3)$ ,  $O_L(5)$  y  $\overline{O_L(6)}$ . Los generadores de estos grupos expresados en función de los bosones deformados pueden escribirse como,

•  $O_L(3)$

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &\approx -\frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sin(\gamma - \frac{2\pi}{3})(\Gamma_x^\dagger \Gamma_c + \Gamma_c^\dagger \Gamma_x)^{(T=0)}, \\ \hat{L}_y &\approx -\frac{2i\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sin(\gamma - \frac{4\pi}{3})(\Gamma_y^\dagger \Gamma_c - \Gamma_c^\dagger \Gamma_y)^{(T=0)}, \\ \hat{L}_z &\approx \frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sin \gamma (\Gamma_{\gamma-}^\dagger \Gamma_c + \Gamma_c^\dagger \Gamma_{\gamma-})^{(T=0)},\end{aligned}\tag{IV.30}$$

•  $O_L(5)$

$$\begin{aligned}\hat{L}_{23} &\approx \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_x^\dagger \Gamma_c + \Gamma_c^\dagger \Gamma_x)^{(T=0)}, & \hat{L}_{31} &\approx \frac{i\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_y^\dagger \Gamma_c - \Gamma_c^\dagger \Gamma_y)^{(T=0)}, \\ \hat{L}_{53} &\approx \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_{\gamma-}^\dagger \Gamma_c + \Gamma_c^\dagger \Gamma_{\gamma-})^{(T=0)}, & \hat{L}_{34} &\approx \frac{i\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} (\Gamma_{\gamma+}^\dagger \Gamma_c - \Gamma_c^\dagger \Gamma_{\gamma+})^{(T=0)}, \\ \hat{L}_{ij} &\approx 0 \quad \text{otro } i > j\end{aligned}\tag{IV.31}$$

•  $\overline{O_L(6)}$

$$\begin{aligned}\hat{L}_{16} &\approx i(\Gamma_y^\dagger \Gamma_c - \Gamma_c^\dagger \Gamma_y)^{(T=0)}, & \hat{L}_{26} &\approx -(\Gamma_x^\dagger \Gamma_c + \Gamma_c^\dagger \Gamma_x)^{(T=0)}, \\ \hat{L}_{36} &\approx i(\Gamma_\beta^\dagger \Gamma_c - \Gamma_c^\dagger \Gamma_\beta)^{(T=0)}, & \hat{L}_{46} &\approx i(\Gamma_{\gamma+}^\dagger \Gamma_c - \Gamma_c^\dagger \Gamma_{\gamma+})^{(T=0)}, \\ \hat{L}_{56} &\approx -(\Gamma_{\gamma-}^\dagger \Gamma_c + \Gamma_c^\dagger \Gamma_{\gamma-})^{(T=0)}, & \hat{L}_{ij} &\approx 0 \quad \text{otro } i > j.\end{aligned}\tag{IV.32}$$

En las ecuaciones anteriores, en lugar de emplear la imagen de Bogoliubov, como en el caso de IBM-1, se mantiene explícitamente el bosón  $c$  y se muestran sólo aquellas componentes de mayor orden en él. Esta aproximación es equivalente a la de Bogoliubov y es necesaria para poder realizar el acoplamiento en isospín al construir los generadores. Por simplicidad al presentar los generadores, se ha supuesto independencia en  $\tau$  de los parámetros de deformación, aunque en caso contrario la extensión se hace de forma trivial. El grupo  $\overline{O_L(6)}$  se diferencia de  $O_L(6)$  en una transformación de fase del bosón  $s$ . Los

generadores  $\hat{L}_{ij}$  y  $\hat{L}_{ij}$  corresponden a transformaciones unitarias de  $\hat{L}_{ij}$  que dan lugar a rotaciones (en  $O(5)$  u  $O(6)$ , según corresponda). Se verifica adicionalmente  $\hat{L}_{ij} = -\hat{L}_{ij}$

Se pueden distinguir diferentes situaciones, dependiendo del valor de los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ ,

- $\beta = 0$ , núcleo esférico.
  - Hamiltoniano escalar en  $O_L(3)$  u  $O_L(5)$ . En este caso no existen bosones de Goldstone.
  - Hamiltoniano escalar en  $O_L(6)$ . Ya que un núcleo esférico se corresponde forzosamente con la simetría dinámica  $U_L(5)$  y esto es incompatible con un álgebra de simetría  $O_L(6)$ , esta posibilidad debe ser excluida.
- $\beta > 0$ , núcleo deformado.
  - Hamiltoniano escalar en  $O_L(3)$ . Para  $\gamma = 0$ , las combinaciones de  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_y$  con  $\Gamma_c$  acopladas a  $T = 0$  corresponden a componentes espúreas. Para  $\gamma = \pi/3$  los estados espúreas corresponden a combinaciones de  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_{\gamma-}$  con  $\Gamma_c$  y  $T = 0$ . En el caso de triaxialidad las combinaciones  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  y  $\Gamma_{\gamma-}$  con  $\Gamma_c$ , acopladas a  $T = 0$  son estados espúreas.
  - Hamiltoniano escalar en  $O_L(5)$ . Todos los bosones excitados acoplados con  $\Gamma_c$  a  $T = 0$  dan lugar a estados espúreas, con excepción del bosón  $\Gamma_\beta$ .
  - Hamiltoniano escalar en  $O_L(6)$ . Todos los bosones excitados acoplados con  $\Gamma_c$  a  $T = 0$  son estados espúreas.

## IV.2 ¿Está bien definido el isospín de los estados intrínsecos?

En toda teoría de campo medio cualquier simetría conservada por el hamiltoniano puede ser rota por la función de onda variacional, dando lugar a una ruptura espontánea de la simetría. En el caso del estado intrínseco de IBM-1, la función de onda rompe la simetría

rotacional, dejando de ser el momento angular,  $L$ , un buen número cuántico. La ruptura espontánea de la simetría conduce a una ganancia de energía para la función de onda variacional y, supone que para obtener el estado exacto haya que proyectar con el fin de restaurar apropiadamente las simetrías rotas.

El estado intrínseco de GL rompe sólo la simetría rotacional, pero conserva por construcción el valor del isospín y el de la carga. El estado intrínseco propuesto en este capítulo no tiene por qué conservar el isospín. Existen dos fuentes de esta ruptura de isospín, la primera de ellas es el parámetro  $\alpha$ . Si  $\alpha$  es distinto de  $-1/2$ , la función de onda variacional no posee buen isospín. La segunda es la posible dependencia en  $\tau$  de los parámetros de deformación. Hay que recordar que el valor de estos parámetros proviene del hamiltoniano empleado, el cual siempre conserva el isospín.

Para calcular el valor promedio de  $\hat{T}^2$  en el sistema intrínseco se emplea la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \phi(\alpha) | \hat{T}^2 | \phi(\alpha) \rangle}{\langle \phi(\alpha) | \phi(\alpha) \rangle} = 2N + 2 \sum_{\mu} \sum_{\ell m \tau_1 \tau_2} \sum_{\ell' m' \tau'_1 \tau'_2} (-1)^{\mu + \tau_2 + \tau'_2} \langle 1\tau_1 1 - \tau_2 | 1\mu \rangle \langle 1\tau'_1 1 - \tau'_2 | 1\mu \rangle \\ \times f_2(\alpha, \tau_1 \tau'_1 \tau_2 \tau'_2) \eta_{\ell m}^{*\tau_2} \eta_{\ell' m'}^{*\tau'_2} \eta_{\ell m}^{\tau_1} \eta_{\ell' m'}^{\tau'_1}, \end{aligned} \quad (IV.33)$$

siendo  $N$  el número total de bosones.

El valor promedio del isospín para los estados excitados se calcula de forma análoga a como se hace para el estado fundamental,

$$\begin{aligned} \langle \phi^i | \hat{T}^2 | \phi^i \rangle = 2N + \frac{2}{\sum_{p\tau} |X_{p\tau}^i|^2} f_1(\alpha, \tau) \\ \times \sum_p \sum_{\ell m \tau_1 \tau_2} \sum_{\ell' m' \tau'_1 \tau'_2} (-1)^{\tau_2 + \tau'_2 - \mu} \langle 1\tau_1 1\tau_2 | 1\tau_1 + \tau_2 \rangle \langle 1\tau'_1 1\tau'_2 | 1 - \tau_1 - \tau_2 \rangle \\ \times \left[ 2f_2(\alpha, \tau_1 \tau'_1 \tau_2 \tau'_2) \left( \eta_{\ell m}^{*\tau_2} \eta_{\ell' m'}^{*p\tau'_2} \eta_{\ell' m'}^{\tau'_1} \eta_{\ell m}^{p\tau_1} X_{p\tau_1}^{i*} X_{p\tau'_2}^i + \eta_{\ell' m'}^{*\tau'_2} \eta_{\ell m}^{*p\tau_2} \eta_{\ell' m'}^{\tau'_1} \eta_{\ell m}^{p\tau_1} X_{p\tau_1}^{i*} X_{p\tau_2}^i \right) \right. \\ \left. + \eta_{\ell m}^{*\tau_2} \eta_{\ell' m'}^{*\tau'_2} \eta_{\ell m}^{*\tau_1} \eta_{\ell' m'}^{*\tau'_1} \sum_{\tau} |X_{p\tau}^i|^2 f_3(\alpha, \tau \tau_1 \tau'_1 \tau_2 \tau'_2 \tau) \right], \end{aligned} \quad (IV.34)$$

estando definidos los coeficientes  $X_{p\tau}^i$  en la ecuación (IV.24).

El isospín de los estados excitados no estará bien definido si no lo está el del estado fundamental. Incluso en el caso de que el estado fundamental tenga buen isospín, los estados excitados no tienen por qué tenerlo. Sólo lo tendrán en el caso de núcleos par-par autoconjugados con  $N = Z$ . En este caso los estados excitados poseen como isospín

$T = 0, 1, 2$ . La expresión de dichos estados en el caso de simetría axial es,

$$|\phi_{p,T=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|p1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|p0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|p-1\rangle, \quad (\text{IV.35})$$

$$|\phi_{p,T=1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|p1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|p-1\rangle, \quad (\text{IV.36})$$

$$|\phi_{p,T=2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|p1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|p0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|p-1\rangle. \quad (\text{IV.37})$$

Si no existiese simetría axial, aparecería una suma sobre el índice  $p$ . Si el estado fundamental tiene  $T \neq 0$ , las anteriores expresiones no son correctas ya que sólo con los estados (IV.23) es imposible obtener estados con un isospín bien definido. Esto se comprueba fácilmente con álgebra de momentos angulares. La forma de conseguir estados con buen isospín es ampliar la base introduciendo tres nuevos estados,

$$|p, a\rangle = N_a \Gamma_{p1}^\dagger \Gamma_0 \hat{T}_{-1} |\phi(\alpha)\rangle, \quad (\text{IV.38})$$

$$|p, b\rangle = N_b \Gamma_{p0}^\dagger \Gamma_{-1} \hat{T}_{-1} |\phi(\alpha)\rangle, \quad (\text{IV.39})$$

$$|p, c\rangle = N_c \Gamma_{p1}^\dagger \Gamma_{-1} \hat{T}_{-1}^2 |\phi(\alpha)\rangle, \quad (\text{IV.40})$$

donde  $N_a$ ,  $N_b$  y  $N_c$  son constantes de normalización y  $\hat{T}_{-1}$  es el operador de bajada de isospín. No obstante, el uso de estos estados supone la introducción de excitaciones de dos partículas–dos huecos y tres partículas–tres huecos, por tanto uno se sale del marco de la TDA, complicándose sobremanera el formalismo y los cálculos. La conclusión que se obtiene es que la **TDA es un formalismo que no conserva el isospín** y hay que ir a excitaciones de orden superior para restaurarlo.

### IV.2.1 Proyección en isospín

Los estados intrínsecos no poseen algunas de las simetrías presentes en el hamiltoniano. En IBM-3, el estado (IV.6) no conserva ni el momento angular, ni el isospín. El estado intrínseco es una superposición de distintos valores de  $L$  y de  $T$ . A la vista del estado (IV.6) y de la transformación entre bosones esféricos y deformados (IV.3), queda claro que la forma en que se mezclan los distintos valores de  $L$  y de  $T$  es muy diferente. Los bosones deformados no poseen momento angular bien definido<sup>3</sup>,  $L$ , mientras que sí presentan un

<sup>3</sup>Excepto en el caso de  $\beta = 0$ .

valor definido del isospín,  $T = 1$ , aunque dichos bosones, en general, no forman un triplete de isospín. La superposición de los distintos valores de  $L$  se produce, por tanto, en los propios bosones deformados, mientras que la mezcla en isospín se realiza en la función de onda  $((\Delta^\dagger)^{N_n})$ , bien para el estado fundamental, bien para los estados excitados. Existen casos particulares en los que todos los estados poseen isospín bien definido ( $N = Z$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}$  y parámetros de deformación independientes de la carga). En este caso los resultados coinciden con los de GL.

Con la mayoría de los hamiltonianos IBM no es preciso realizar una proyección en momento angular para obtener energías próximas (en orden  $1/N$ ) a las exactas (ver sección II.2), aunque sí para reproducir otras magnitudes como son las transiciones electromagnéticas (ver sección II.2.4). La proyección en isospín resulta de gran importancia a la hora de obtener las energías, especialmente las de los estados excitados. El término  $\hat{T}^2$  en los hamiltonianos IBM-3 es muy intenso, de forma que los estados con diferente valor de isospín están situados a energías muy diferentes. La energía del estado intrínseco deformado en isospín será muy distinta a la del estado con isospín más bajo. En el caso del momento angular la situación es mucho más favorable, ya que la energía de la cabeza de una banda (estado deformado en  $L$ ), sí está próxima a la del estado con menor momento angular y perteneciente a dicha banda.

Como método de proyección se empleará el de Peierls-Yoccoz [RS80]. En este método se realiza la proyección después de la minimización, suponiéndose adicionalmente que la deformación en isospín es grande. El valor de la energía proyectada es,

$$E_{proy}^T = \langle \hat{H} - \frac{\hat{T}^2}{2\mathcal{I}_T} \rangle + \frac{T(T+1)}{2\mathcal{I}_T}, \quad (IV.41)$$

donde

$$\mathcal{I}_T^{-1} = \frac{\langle (\hat{H} - \langle H \rangle) \Delta \hat{T}^2 \rangle}{\langle \Delta \hat{T}^2 \rangle^2}, \quad (IV.42)$$

$\langle \hat{O} \rangle$  representa el valor medio del operador  $\hat{O}$  para el correspondiente estado deformado y  $\Delta \hat{T}^2 = (\hat{T} - \langle \hat{T} \rangle)^2$ . Este método de proyección es el más simple que puede emplearse, pero no obstante da lugar a un buen acuerdo con los resultados exactos, como se mostrará más adelante.

## IV.3 Cálculos esquemáticos

### IV.3.1 Estado fundamental. Comparación con el formalismo de GL

El formalismo de estado intrínseco presentado en este capítulo es una generalización del formalismo de GL. A continuación se comparan los resultados que se obtienen en ambos formalismos para la energía del estado fundamental, con el objeto de mostrar la mejora que supone el formalismo aquí presentado.

Considérese el hamiltoniano propuesto recientemente por Ginocchio [Gin96],

$$H = -\kappa \sum_{T=0,1,2} \hat{P}^T : \hat{P}^T, \quad (\text{IV.43})$$

donde

$$\hat{P}^T = (s^\dagger \tilde{d} + (-1)^T d^\dagger \tilde{s})^{L=2,T}. \quad (\text{IV.44})$$

En estas ecuaciones, el símbolo  $:$  representa el producto escalar en los espacios orbitales y de isospín, mientras que  $\tilde{\gamma}_{\ell m \tau} = (-1)^{\ell-m+1-\tau} \gamma_{\ell-m-\tau}$ .

En la figura IV.1 se muestra, como una función del parámetro  $\alpha$ , la energía del estado fundamental de un sistema con 5 pares de protones y 3 pares de neutrones que interactúan a través del hamiltoniano (IV.43). En el caso del formalismo de GL se minimiza la energía con unos parámetros de deformación que son independientes de la carga, mientras que con el nuevo formalismo los valores de  $\eta$  pueden depender de  $\tau$ . La línea discontinua corresponde al cálculo con parámetros de deformación independientes de  $\tau$ , obteniéndose el mínimo de energía en  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , reproduciéndose el resultado de GL. La línea continua corresponde al presente formalismo, lográndose el mínimo de energía para  $\alpha \approx -0.32$ . En este caso los parámetros de deformación dependen fuertemente de  $\tau$ .

Hay que hacer notar que la ganancia de energía, debido a la ruptura de la invariancia en isospín en la función de prueba, es relativamente pequeña. Para hamiltonianos invariantes en isospín quizás sea más adecuado usar la función de onda del formalismo de GL, aunque en cualquier caso se obtendrá un mejor resultado proyectando sobre buen isospín la función de onda (IV.6) y realizando la minimización después.

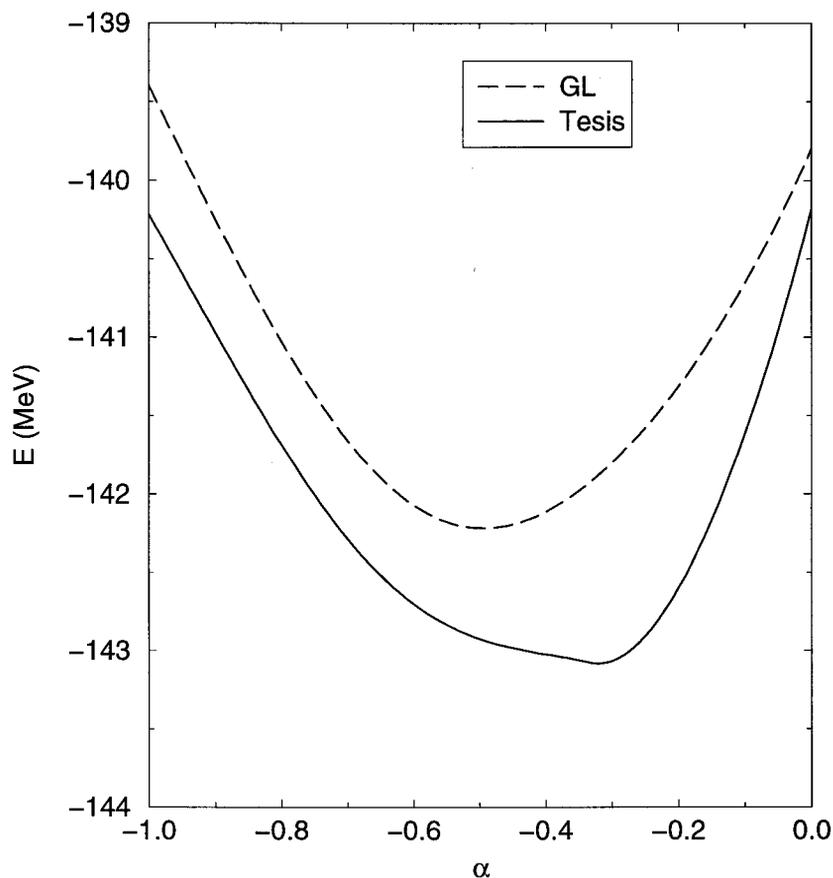


Figura IV.1: Cálculo de la energía del estado fundamental en función de  $\alpha$ , para un sistema con 5 pares de protones y 3 de neutrones que interaccionan a través del hamiltoniano de Ginocchio (IV.43) con  $\kappa = 1$  MeV.

Para sistemas con  $N_p = N_n$ , el presente formalismo se reduce al de GL, las diferencias sólo ocurren para  $N \neq Z$ . Para ver más claramente este hecho se calcularán los parámetros de deformación,  $\beta_\tau$ , como una función de  $N_p - N_n$ . En la figura IV.2 se muestra el resultado de ese cálculo. Se comienza con 4 pares de protones y 4 de neutrones y se emplea el hamiltoniano (IV.43). En la figura se ve cómo los parámetros de deformación no dependen de  $\tau$  para el caso de  $N_n = N_p$ , aunque se hacen diferentes en cuanto la diferencia  $N_p - N_n$  aumenta. Las deformaciones para protones y neutrones se mantienen aproximadamente iguales, aunque el parámetro de deformación de los bosones  $\delta$  aumenta muy rápidamente. Este aumento de  $\beta_\delta$  se compensa con la reducción del número de bosones  $\delta$ , de forma que el parámetro de deformación del MC (I.170) se mantiene en

valores razonables.

En todos los cálculos realizados con el hamiltoniano de Ginocchio se encuentra que la energía es independiente de los parámetros  $\gamma_\tau$  y los núcleos son, en consecuencia,  $\gamma$ -inestables para  $\pi$ ,  $\nu$  y  $\delta$ .

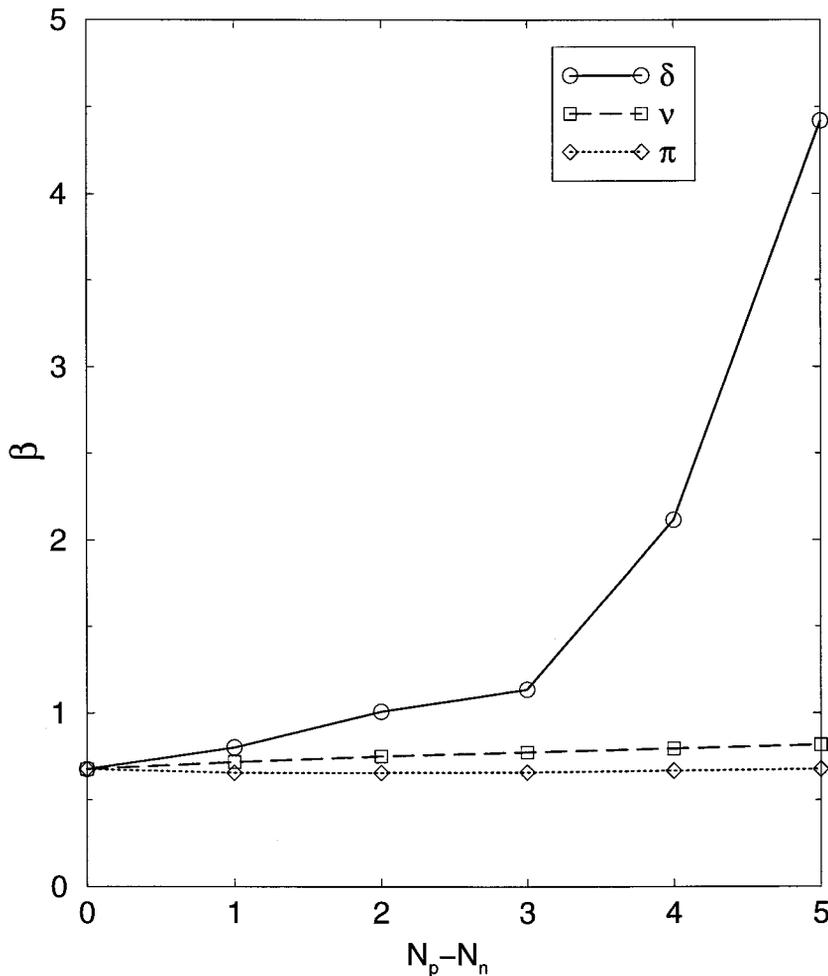


Figura IV.2: Parámetros de deformación  $\beta_\tau$  para un sistema con 4 pares de neutrones, como una función de la diferencia entre el número de pares de protones y el de neutrones,  $N_p - N_n$ . Se emplea el hamiltoniano de Ginocchio (IV.43) con  $\kappa = 1$  MeV.

### IV.3.2 Cálculo de los números promedio de bosones

Como ya se ha destacado en la sección III.6, el número promedio de bosones es una magnitud importante a la hora de comparar con otros modelos. En este caso, resulta

interesante comparar con los cálculos realizados en el sistema laboratorio, ya que se sabe que éstos están en buen acuerdo con los obtenidos a partir de otros modelos.

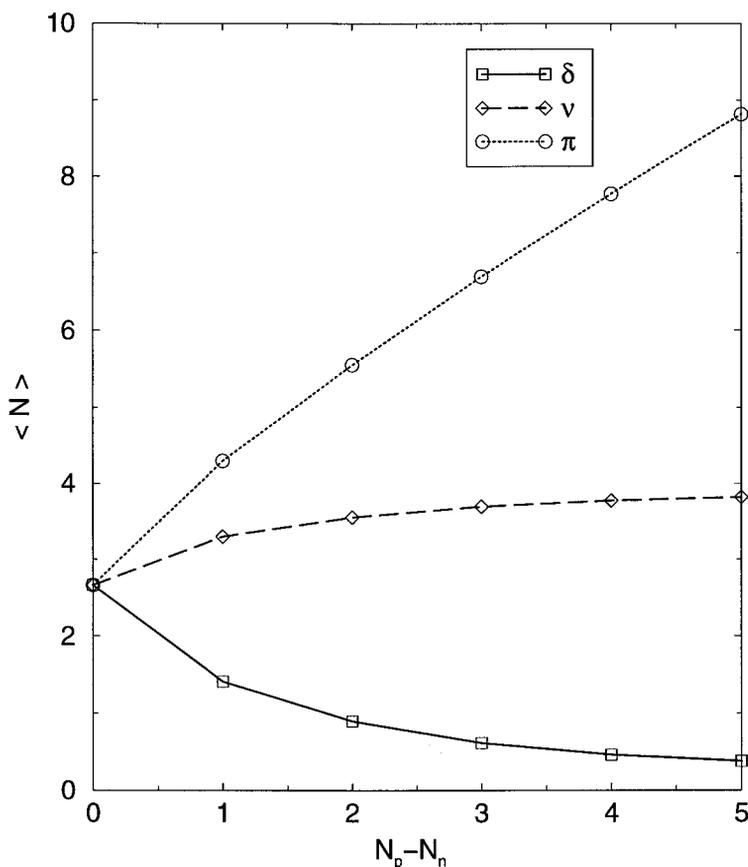


Figura IV.3: Valores medios de los números de bosones,  $N_\tau$ , para una sistema con 4 pares de neutrones, como función de la diferencia entre el número de pares de protones y el de neutrones,  $N_p - N_n$ . Se emplea el hamiltoniano de Ginocchio (IV.43) con  $\kappa = 1 \text{ MeV}$ .

Hay que destacar que los valores de los números promedio de bosones dependen fuertemente del valor que tiene el isospín para el estado. En el presente formalismo los estados no tienen por qué poseer isospín bien definido y, por tanto, los resultados obtenidos estarán algo perturbados mientras no se realice una proyección en isospín.

En la figura IV.3 se muestran los números promedio de bosones para un sistema con  $N_n = 4$ , como función de la diferencia  $N_p - N_n$ , empleando el hamiltoniano de Ginocchio (IV.43). En esta figura se observa la misma tendencia que en la figura III.5, siendo la única diferencia que el papel de protones y neutrones está intercambiado. Destaca la

fuerte bajada del número de bosones  $\delta$ , hecho que demuestra que su importancia decrece cuando aumenta la diferencia entre el número de protones y el de neutrones. Como se comentó en la sección anterior, esta bajada compensa la subida en el valor de  $\beta_\delta$ , de forma que el correspondiente parámetro de deformación del MC permanece con un valor razonable.

Si uno se restringe al caso de  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , aunque los parámetros  $\eta$  dependan de  $\tau$ , es posible obtener expresiones analíticas para los números promedio de bosones. En este caso se recuperan los resultados (III.71), siendo  $T = N_p - N_n$ . Este resultado es sorprendente ya que las fórmulas (III.71) se obtuvieron bajo la hipótesis de simetría  $[N]$  de  $SU_T(3)$  para la función de onda, mientras que la función de onda variacional (IV.6) sólo pertenece a la representación irreducible  $[N]$  cuando los parámetros de deformación no dependen de  $\tau$ .

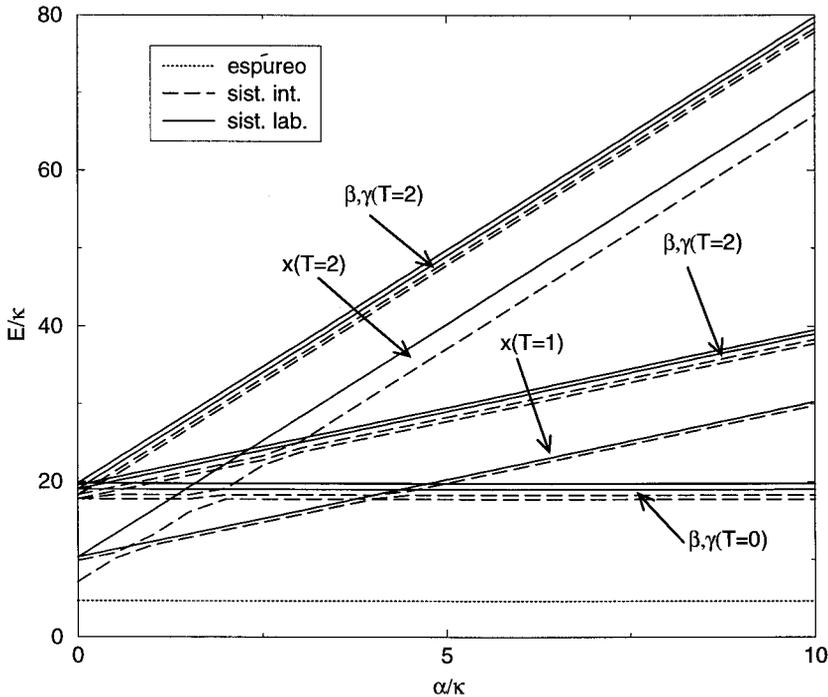


Figura IV.4: Niveles energéticos en función de  $\alpha/\kappa$  para el límite  $SU_L(3)$ . Se emplea el hamiltoniano  $\hat{H} = -\kappa\hat{Q}^0 : \hat{Q}^0 + \alpha\hat{T}^2$  con un número de bosones  $N_p = N_n = 5$

### IV.3.3 Límite $SU(3)$ orbital

En esta sección se comparan los resultados exactos con los obtenidos en el sistema intrínseco para un hamiltoniano que posee  $SU(3)$  como simetría dinámica orbital. Considérese el siguiente hamiltoniano

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\kappa\hat{Q}^0 : \hat{Q}^0 + \alpha\hat{T}^2 \\ &= \frac{\kappa}{3}\left(-\frac{1}{2}\hat{C}_2[SU_L(3)] + \frac{3}{8}\hat{L}^2\right) + \alpha\hat{T}^2,\end{aligned}\quad (\text{IV.45})$$

que posee como autovalores y autoestados (ver sección III.3.2),

$$\begin{aligned}\hat{H}|[N_1, N_2, N_3](\lambda_L\mu_L)\kappa LT\rangle &= \left(-\frac{\kappa}{6}(\lambda_L^2 + \mu_L^2 + \lambda_L\mu_L + 3\lambda_L + 3\mu_L)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{\kappa}{8}L(L+1) + \alpha T(T+1)\right)|[N_1, N_2, N_3](\lambda_L\mu_L)\kappa LT\rangle.\end{aligned}\quad (\text{IV.46})$$

Empleando este hamiltoniano tan simple (III.3.2), resulta sencillo comprobar la influencia del término  $\hat{T}^2$  a la hora de calcular las energías de los estados excitados. Para realizar la comparación entre resultados exactos y aproximados hay que saber a qué representaciones irreducibles de  $U_L(6)$  y  $SU_L(3)$  pertenecen los estados intrínsecos excitados. Para ello, en la tabla IV.1 se muestra el carácter de cada banda excitada. Para los núcleos autoconjugados ( $M_T = 0$ ), no hay estado con  $T = 0$  en la representación  $[N - 1, 1]$ . Se observa que existen bandas  $\beta$  y  $\gamma$  pertenecientes a representaciones simétricas y no simétricas. Los estados  $x$  son los estados *scissors* y corresponden a una proyección  $K = 1$ . De los tres estados scissors posibles uno de ellos es un estado espúreo, ya que corresponde a una rotación del estado fundamental y posee, en consecuencia, igual  $T$  que éste.

En la figura IV.4 se presenta un cálculo para el hamiltoniano (IV.45) con  $N_p = N_n = 5$ . Se muestran las energías de los estados excitados en función del cociente  $\alpha/\kappa$ . En este cálculo no se precisa realizar proyección en isospín ya que todos los estados excitados tienen bien definido  $T$ . Se observa un acuerdo satisfactorio entre los resultados exactos y los aproximados. El estado *scissors* más bajo en energía es un estado espúreo ya que el isospín  $T = 0$  no está contenido en la representación  $[N - 1, 1]$ .

En la figura IV.5 se muestra un cálculo análogo al anterior pero con  $N_p = 5$  y  $N_n = 4$ . En este caso es necesario realizar la proyección en isospín. De nuevo el estado *scissors*

Tabla IV.1: Representaciones irreducibles de los estados intrínsecos excitados en el límite  $SU_L(3)$

$U_L(6)$	$SU_L(3)$	$K$	$T$
$[N]$	$(2N - 4, 2)$	$0(\beta), 2(\gamma)$	$ M_T ,  M_T  + 2$
$[N - 1, 1]$	$(2N - 2, 1)$	$1(x)$	$ M_T ,  M_T  + 1,  M_T  + 2$
	$(2N - 4, 2)$	$0(\beta), 2(\gamma)$	$ M_T ,  M_T  + 1,  M_T  + 2$

situado más bajo en energía es un estado espúreo. Los isospines de los estados excitados antes de la proyección son  $T = 1.00$ ,  $T = 1, 34$  y  $T = 2, 5$ , proyectándose respectivamente sobre  $T = 1$ ,  $T = 2$  y  $T = 3$ . De nuevo se observa un buen acuerdo entre resultados exactos y aproximados.

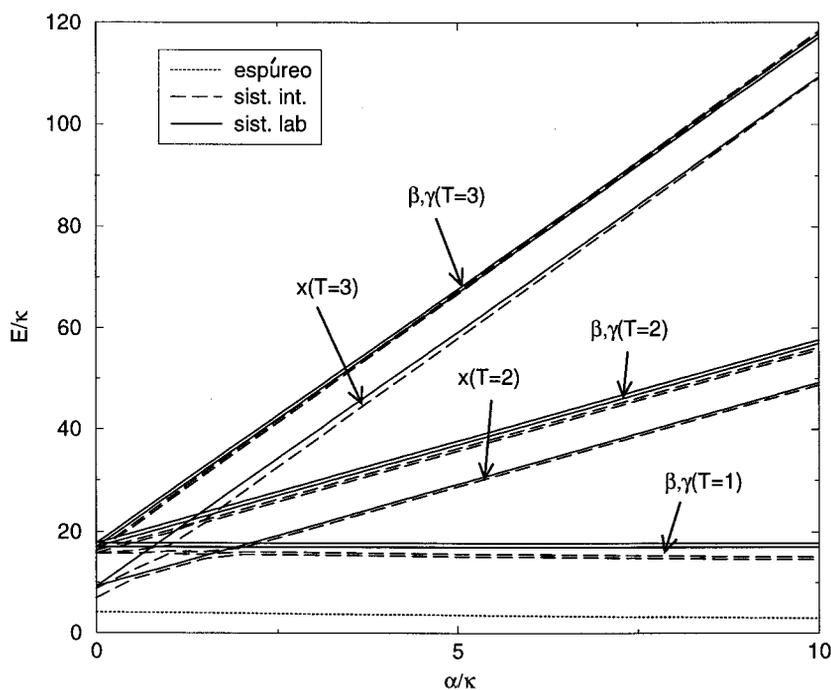


Figura IV.5: Igual que para la figura IV.4 pero con  $N_p = 5$  y  $N_n = 4$

### IV.3.4 Transición de IBM-3 a IBM-2

Considérese el hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{\ell\tau} \epsilon_{\ell\tau} \hat{n}_{\ell\tau} - \frac{1}{5} \mathcal{N}[\hat{Q}^0 : \hat{Q}^0 + \frac{2}{3} \hat{Q}^1 : \hat{Q}^1], \quad (\text{IV.47})$$

donde  $\hat{Q}^T = [s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger \tilde{s} - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^\dagger \times \tilde{d})]^{L=2,T}$  y el operador  $\mathcal{N}[\dots]$  pone en orden normal los términos a dos cuerpos del hamiltoniano. La principal característica de este hamiltoniano radica en que permite emplear energías monoparticulares diferentes para los bosones  $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$ , pudiendo romperse de una forma sencilla la simetría de isospín. En particular, resulta interesante aumentar el valor de  $\epsilon_\delta$ , ya que al ir creciendo será cada vez más difícil la creación de bosones  $\delta$  y, en consecuencia, uno se acercará al IBM-2, incluso aunque en la parte de dos cuerpos del hamiltoniano aparezcan explícitamente términos con bosones  $\delta$ . Con el hamiltoniano (IV.47) se estudia la transición de IBM-3 a IBM-2, empleando para ello la siguiente parametrización de las energías monoparticulares,

$$\begin{aligned} \epsilon_{s\pi} &= \epsilon_{s\nu} = 0, & \epsilon_{d\pi} &= \epsilon_{d\nu} = 1.5, \\ \epsilon_{s\delta} &= 2.3 |N_p - N_n|, & \epsilon_{d\delta} &= 1.5 + 2.3 |N_p - N_n|. \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

Todos los parámetros expresados en MeV. Los parámetros se han elegido para dar lugar a un hamiltoniano realista, mientras que la pendiente de  $\epsilon_\delta$  se ha tomado de forma que se alcance el límite IBM-2 ( $\alpha = 0$ ) para  $N_p - N_n = 3$ .

En las figuras IV.6 y IV.7 se muestran los resultados de un cálculo para un sistema sometido al hamiltoniano (IV.47), donde existen originalmente  $N_n = N_p = 4$  bosones y se aumenta la diferencia  $N_p - N_n$ . En la figura IV.6 se muestran los valores de  $\beta_\tau$  en función de  $N_p - N_n$ , observándose como  $\beta_\pi$  y  $\beta_\nu$  presentan un comportamiento suave, mientras que el valor  $\beta_\delta$  se anula cuando se alcanza el valor de  $\alpha = 0$ . En la figura IV.7 se comparan, para el hamiltoniano (IV.47), las energías del estado fundamental calculadas con el formalismo presentado en este capítulo, el de GL y el que emplea la función de onda  $U(18)$  (IV.9). Se observa que el presente formalismo y el de GL dan el mismo resultado para  $N_p = N_n$  y éstos son mejores que los obtenidos con el estado (IV.9). La conclusión más importante es que el estado (IV.6) da los mejores resultados para rupturas moderadas

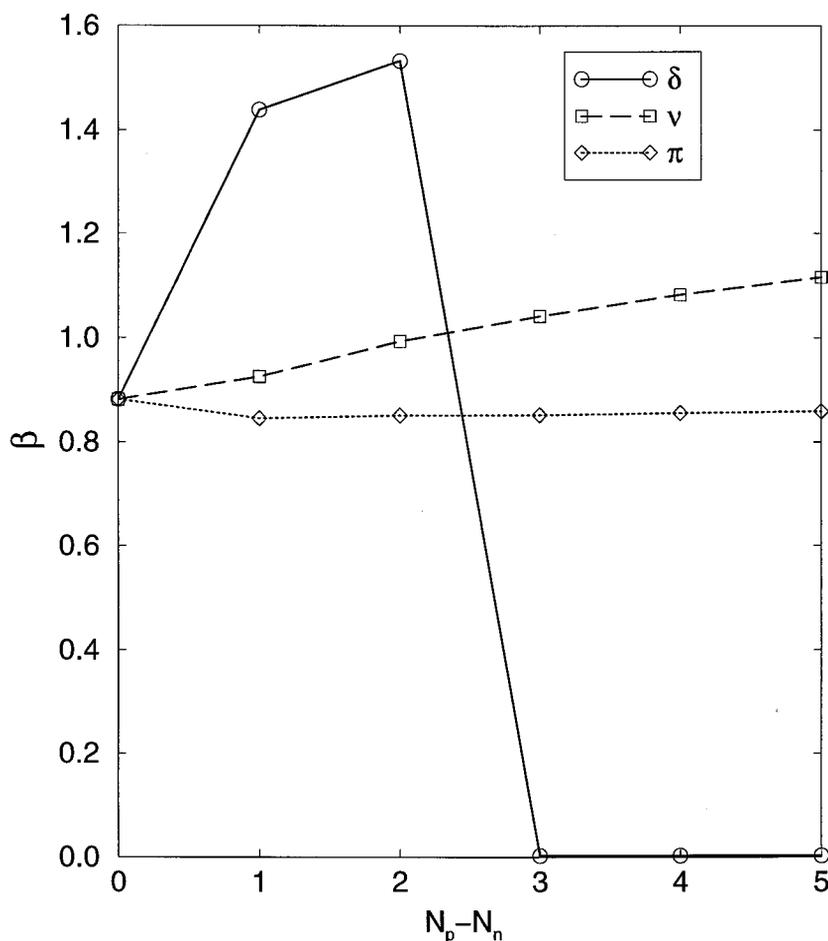


Figura IV.6: Igual que en la figura (IV.2) pero empleando el hamiltoniano (IV.47) con los hamiltoniano que aparecen en el texto.

del isospín, siendo sólo superado por los resultados de (IV.9) cuando se alcanza el límite IBM-2.

En todas las situaciones analizadas hasta este momento no se ha obtenido triaxialidad, aunque los parámetros de deformación  $\beta_\tau$  eran diferentes entre sí, ya que  $\gamma_\tau$  siempre era 0 o se obtenía  $\gamma$ -inestabilidad. Para IBM-1 se sabe que es posible obtener triaxialidad [VIC81] mediante la inclusión en el hamiltoniano de términos a tres cuerpos y uno espera conseguir resultados análogos si se procede de forma idéntica en IBM, aunque esta posibilidad no se explorará en este capítulo. Una forma más simple de obtener triaxialidad es considerar

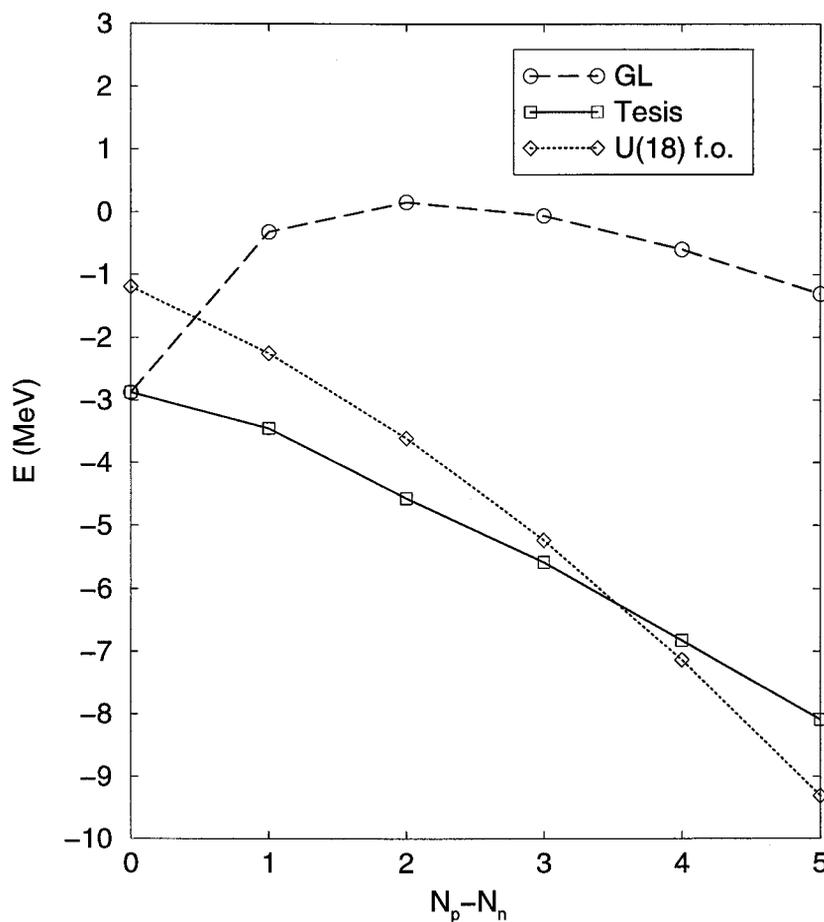


Figura IV.7: Energía del estado fundamental como una función de  $N_p - N_n$ , para el estado de GL, el estado (IV.6) y el estado (IV.47).

el siguiente hamiltoniano,

$$\hat{H} = -(\hat{Q}_\pi + \hat{Q}'_\nu) \cdot (\hat{Q}_\pi + \hat{Q}'_\nu) \quad , \quad (IV.49)$$

donde  $\cdot$  representa el producto escalar en momento angular,  $\hat{Q}_\pi$  es el generador de  $SU(3)$  [ $\hat{Q} = s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger \tilde{s} - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^\dagger \times \tilde{d})^{L=2}$ ] para bosones de protones, mientras que  $\hat{Q}'_\nu$  es el generador de  $\overline{SU}(3)$  [ $\hat{Q}' = s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger \tilde{s} + \frac{\sqrt{7}}{2} (d^\dagger \times \tilde{d})^{L=2}$ ] para bosones de neutrones. La minimización de la energía para este hamiltoniano conduce a  $\alpha = 0$ , a un elipsoide prolato de protones y a uno oblato de neutrones, siendo perpendiculares sus respectivos ejes de simetría. Se obtiene una forma global triaxial, de forma análoga a lo que sucede en IBM-2. Hay que hacer notar que aunque la forma del núcleo es triaxial, la forma de los elipsoides de protones y neutrones sigue poseyendo simetría axial.

## Capítulo V

# Sistema intrínseco en IBM-4: pairing isoscalar e isovectorial

Debido a la invariancia de carga de la interacción nuclear, se espera que la interacción de *pairing* entre nucleones de distinta especie sea parecida a la correspondiente entre nucleones idénticos. Sin embargo, mientras que en el caso de nucleones idénticos la sistemática de los efectos de dicha fuerza de *pairing* se pueden apreciar a lo largo y ancho de la carta de núclidos, los efectos de la interacción de *pairing* protón-neutrón son mucho más difíciles de observar. Esto es debido a que la mayor parte de los núcleos estables presentan un exceso de neutrones y, por tanto, los protones y neutrones de valencia acupan órbitas muy diferentes. En ese caso, es energéticamente muy desfavorable que un protón y un neutrón interaccionen entre sí manteniéndose acoplados a momento angular  $J = 0$ . Los únicos núcleos donde las correlaciones de *pairing*  $p - n$  son relevantes, son aquellos con  $N \approx Z$ , ya que la importancia de la interacción de *pairing*  $p - n$  decrece al aumentar la diferencia  $|N - Z|$  (ver sección III.7). En los últimos años se han podido obtener datos de núcleos lejos de la línea de estabilidad con  $N \approx Z$  comprendidos entre el  $^{40}\text{Ca}$  y el  $^{100}\text{Sn}$ .

Un aspecto de gran interés en la interacción de *pairing*  $p - n$  es el balance entre la componente isoscalar ( $T = 0$ ) e isovectorial ( $T = 1$ ). Este problema es difícil de tratar de forma microscópica y se obtienen resultados diferentes en función del modelo empleado. En núcleos ligeros, empleando el formalismo de Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) se concluye que la componente de *pairing* con  $T = 0$  es la dominante para núcleos con

$N = Z$ , pero se vuelve despreciable para núcleos con  $N - Z = 2$  [Goo79]. Por otro lado, los resultados experimentales apuntan a que los núcleos impar-impar con  $N = Z$  tienen isospín  $T = 1$  en su estado fundamental [R<sup>+</sup>96], dominando por tanto la componente isovectorial del *pairing*. Sin embargo, el tratamiento microscópico de la interacción de *pairing* entre protones y neutrones que ocupan una única capa [ELV96], apunta hacia problemas en el formalismo de HFB, debido a la no conservación del isospín en dicho formalismo. Recientemente se ha analizado este problema en el marco del IBM-4 [VIW97], empleando para ello un hamiltoniano extremadamente simple que, sin embargo, permite analizar gran variedad de situaciones. En particular, se ha encontrado que la estructura de pares en núcleos con  $N = Z$  depende fuertemente de las energías relativas que posean los pares con  $T = 0$  y  $T = 1$ . Si uno de los pares está fuertemente favorecido, el estado fundamental estará exclusivamente formado por dicho tipo de pares. En situaciones más realistas donde las energías de los pares con  $T = 1$  y  $T = 0$  sean comparables, el estado fundamental del núcleo será una mezcla de ambos tipos de pares. En el caso de simetría  $SU(4)$  para el hamiltoniano, el estado fundamental de núcleos con  $N = Z$  contendrá igual cantidad de pares isovectoriales que de pares isoscalares. Las conclusiones alcanzadas con este formalismo son apoyadas por los resultados de SMMC [ELV96].

En este capítulo se presenta solamente el formalismo de estado intrínseco para IBM-4, el cual supone una forma ideal de analizar la competencia entre el *pairing* isoscalar e isovectorial, sin necesidad de proceder a la diagonalización exacta del hamiltoniano IBM-4. La aplicación de este formalismo a situaciones realistas es una de las líneas que quedan abiertas en esta memoria de tesis y será el objeto de estudios posteriores.

## V.1 Estructura algebraica de IBM-4

El IBM-3 no es la única versión de IBM invariante frente al isospín, sino que es la más simple. Como ya se vio en capítulos anteriores, el IBM-3 incluye los bosones que constituyen el triplete de isospín ( $T = 1$ ):  $\pi$  (pares protón-protón),  $\nu$  (pares neutrón-neutrón) y  $\delta$  (combinación simétrica protón-neutrón). En IBM-4, además de esos bosones, también se consideran aquellos que forman el singlete de isospín ( $T = 0$ ): bosones  $\sigma$  (combinación

antisimétrica protón-neutrón). El IBM-4 fue propuesto por Elliott y Evans [EE81] como una ampliación del IBM necesaria para el tratamiento de núcleos ligeros y medios que fueran impar-impar. La introducción del isospín  $T = 0$  hace necesaria, por cuestiones de simetría, la aparición del espín ( $S$ ) de los bosones. Ello lleva a la aparición de grados de libertad adicionales, con lo que se pasa de 18 bosones para el IBM-3 a 36 para el IBM-4.

Los constituyentes básicos de IBM-4 son los siguientes 36 operadores de creación y destrucción,

$$\gamma_{\ell m, T\tau, S\sigma}^\dagger, \quad \gamma_{\ell m, T\tau, S\sigma}, \quad (\text{V.1})$$

donde los subíndices indican momento angular orbital y proyección, isospín y proyección y espín y proyección. Estos operadores satisfacen las habituales reglas de conmutación bosónicas,

$$\begin{aligned} [\gamma_{\ell m, T\tau, S\sigma}, \gamma_{\ell' m', T'\tau', S'\sigma'}^\dagger] &= \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \delta_{T, T'} \delta_{\tau, \tau'} \delta_{S, S'} \delta_{\sigma, \sigma'}, \\ [\gamma_{\ell m, T\tau, S\sigma}, \gamma_{\ell' m', T'\tau', S'\sigma'}] &= [\gamma_{\ell m, T\tau, S\sigma}^\dagger, \gamma_{\ell' m', T'\tau', S'\sigma'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

Las únicas combinaciones permitidas de espín-isospín son  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  dado que los bosones son antes totalmente simétricos y su simetría viene dada por  $(-1)^{1+T+S}$ . El espín de los bosones de IBM-3, IBM-2 o IBM-1 es  $S = 0$ , de forma que éste no juega ningún papel y el momento angular total de los bosones coincide con el orbital. En cambio, los bosones  $\sigma$  poseen espín  $S = 1$  y portan los usuales momentos angulares orbitales,  $\ell = 0$  y  $\ell = 2$ , pudiendo ser el momento angular total  $J = 1, 2, 3$ .

Los operadores de creación (o destrucción) de los bosones pueden etiquetarse de una forma alternativa a (V.1), en función de  $LS, TM_T, JM_J$ ,

$$\theta_{\ell S, T\tau, JM_J}^\dagger, \quad \theta_{\ell S, T\tau, JM_J}. \quad (\text{V.3})$$

Ambos tipos de bosones (V.1, V.3) se relacionan a través de los coeficientes de Clebsch-Gordan,

$$\theta_{\ell S, T\tau, JM_J}^\dagger = \sum_{JM_J} \langle \ell m S \sigma | JM_J \rangle \gamma_{\ell m, T\tau, S\sigma}^\dagger. \quad (\text{V.4})$$

Para obtener la relación análoga con los operadores de destrucción, se definen los operadores  $\tilde{\gamma}_{\ell m, T\tau, S\sigma} = (-1)^{\ell-m+T-\tau+S-\sigma} \gamma_{\ell-m, T-\tau, S-\sigma}$  y  $\tilde{\theta}_{\ell S, T\tau, JM_J} = (-1)^{T-\tau+J-M_J} \theta_{\ell S, T-\tau, J-M_J}$ , para que ambos tengan el comportamiento adecuado frente a rotaciones en el espacio

de isospín y en el espacio del momento angular total. Los bosones isoscalares también suelen etiquetarse empleando la notación espectroscópica  $^{2S+1}L_J$ :  $^3s_1, ^3d_1, ^3d_2$  y  $^3d_3$ . Esta notación fue la usada originalmente por Elliott y Evans al presentar el modelo.

Usando los operadores bosónicos (V.1) o (V.3) se pueden construir 1296 combinaciones bilineales,

$$\gamma_{\ell m, T \tau, S \sigma}^\dagger \gamma_{\ell' m', T' \tau', S' \sigma'}, \quad (\text{V.5})$$

que son los generadores del grupo  $U(36)$  y verifican las reglas de conmutación usuales de dicho grupo:

$$\begin{aligned} & [\gamma_{\ell_1 m_1, T_1 \tau_1, S_1 \sigma_1}^\dagger \gamma_{\ell_2 m_2, T_2 \tau_2, S_2 \sigma_2}, \gamma_{\ell_3 m_3, T_3 \tau_3, S_3 \sigma_3}^\dagger \gamma_{\ell_4 m_4, T_4 \tau_4, S_4 \sigma_4}] \\ &= \gamma_{\ell_1 m_1, T_1 \tau_1, S_1 \sigma_1}^\dagger \gamma_{\ell_4 m_4, T_4 \tau_4, S_4 \sigma_4} \delta_{\ell_2, \ell_3} \delta_{m_2, m_3} \delta_{T_2, T_3} \delta_{\tau_2, \tau_3} \delta_{S_2, S_3} \delta_{\sigma_2, \sigma_3} \\ &\quad - \gamma_{\ell_2 m_2, T_2 \tau_2, S_2 \sigma_2}^\dagger \gamma_{\ell_3 m_3, T_3 \tau_3, S_3 \sigma_3} \delta_{\ell_1, \ell_4} \delta_{m_1, m_4} \delta_{T_1, T_4} \delta_{\tau_1, \tau_4} \delta_{S_1, S_4} \delta_{\sigma_1, \sigma_4}. \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

La estructura algebraica de IBM-4 es extremadamente amplia y su estudio completo está fuera de los objetivos de este trabajo. Aquí analizaremos la estructura algebraica del modelo considerando sólo aquellas cadenas de subgrupos que provengan de un desacoplamiento entre el espacio orbital y el de espín-isospín

$$\begin{array}{ccccccccc} U(36) & \supset & U_L(6) & \otimes & U_{ST}(6) & \supset \dots \supset & O_T(3) & \otimes & O_J(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N] & & [N_1, \dots, N_6] & & [N_1, \dots, N_6] & & T & & J \end{array} \quad (\text{V.7})$$

Ya que el momento angular total  $J$  y el isospín  $T$  deben ser buenos números cuánticos, sus respectivos grupos están contenidos en (V.7). Esta reducción es análoga a la realizada en IBM-3 (III.14) y conduce a cadenas de subgrupos de especial interés. El álgebra  $U_L(6)$  posee como subgrupos los mismos que IBM-1, mientras que en el álgebra  $U_{ST}(6)$  hay dos descomposiciones que poseen un importante significado físico,

$$\begin{array}{ccccccccc} U_{ST}(6) & \supset & SU_T(3) & \otimes & SU_S(3) & \supset & O_T(3) & \otimes & O_S(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N_1, \dots, N_6] & & (\lambda_T, \mu_T) & & (\lambda_S, \mu_S) & & T & & S \end{array}, \quad (\text{V.8})$$

$$\begin{array}{ccccccccc} U_{ST}(6) & \supset & SU_{TS}(4) & \supset & O_T(3) & \otimes & O_S(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N_1, \dots, N_6] & & (\lambda, \mu, \nu) & & T & & S \end{array}, \quad (\text{V.9})$$

donde  $\lambda_T, \mu_T, \lambda_S$  y  $\mu_S$  son los números cuánticos de Elliott, mientras que  $\lambda = N'_1 - N'_2$ ,  $\mu = N'_2 - N'_3$  y  $\nu = N'_3 - N'_4$ , siendo  $[N'_1, N'_2, N'_3, N'_4]$  el diagrama de Young que caracteriza la representación irreducible de  $U(4)$ .

La primera de las descomposiciones conduce a IBM-3. Sólo los estados escalares en espín  $((\lambda_S \mu_S) = (00))$  tienen análogo en IBM-3, aunque existen estados con  $(\lambda_S \mu_S) = (00)$  que no poseen equivalente en IBM-3. La segunda de las cadenas contiene el supermultiplete de Wigner  $SU(4)$ . Es posible demostrar que si  $L$  y  $S$  son el momento angular y el espín bosónico respectivamente, el supermultiplete de Wigner fermiónico, compuesto por  $\sum_i \vec{\tau}_i, \sum_i \vec{\sigma}_i$  y  $\sum_i \vec{\tau}_i \vec{\sigma}_i$  es equivalente al álgebra  $SU_{TS}(4)$  bosónica. Como ya fue mostrado en el capítulo I, el supermultiplete de Wigner es una simetría que se conserva aproximadamente en núcleos ligeros y juega un papel fundamental en el modelo  $SU(3)$  de Elliott.

Los estados de IBM-4 se pueden clasificar atendiendo a la reducción (V.8) o a la (V.9) como,

$$[[N_1 \dots N_3](\lambda_T, \mu_T)(\lambda_S, \mu_S)TM_T; \phi LS; J] \quad (V.10)$$

$$[[N_1 \dots N_3](\lambda, \mu, \nu)TM_T; \phi LS; J], \quad (V.11)$$

donde  $\phi$  son todas las etiquetas relativas al espacio orbital necesarias para especificar completamente los estados.

### V.1.1 Hamiltoniano IBM-4 esquemático

Dado que el álgebra dinámica de IBM-4 es  $U(36)$ , el hamiltoniano más general estará formado por combinaciones de los generadores (V.5) que sean escalares en isospín  $T$  y en momento angular total  $J$ . Hasta el momento no se conoce ninguna versión reducida de este hamiltoniano capaz de reproducir los espectros de baja energía de núcleos ligeros y medios, como era el caso de IBM-3 (sección III.7), siendo necesario trabajar con el conjunto completo de términos.

A continuación se analizan los hamiltonianos provenientes de la descomposición (V.7), que están formados por los operadores de Casimir de las diferentes álgebras presentes en todas las cadenas de (V.7). No se considera la parte del hamiltoniano que contiene dependencia en el momento angular, ya que se está solamente interesado en estudiar el

balance entre los bosones isoscalares e isovectoriales. El hamiltoniano más general que se considera es,

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \alpha_1 \hat{C}_1[U_L(6)] + \alpha_2 \hat{C}_2[U_L(6)] + \beta_1^T \hat{C}_1[U_T(3)] + \beta_2^T \hat{C}_2[U_T(3)] \\ & + \beta_1^S \hat{C}_1[U_S(3)] + \beta_2^S \hat{C}_2[U_S(3)] + \gamma_2^T \hat{C}_2[SU_T(3)] + \gamma_2^S \hat{C}_2[SU_S(3)] \\ & + \delta \hat{C}_2[SU_{TS}(4)] + \kappa^T \hat{C}_2[O_T(3)] + \kappa^S \hat{C}_2[O_S(3)]\end{aligned}\quad (\text{V.12})$$

Donde los autovalores de los operadores de Casimir que aparecen son,

$$\langle C_1[U_L(6)] \rangle = N, \quad (\text{V.13})$$

$$\langle C_1[U_T(3)] \rangle = N_T, \quad (\text{V.14})$$

$$\langle C_1[U_S(3)] \rangle = N_S, \quad (\text{V.15})$$

$$\begin{aligned}\langle C_2[U_L(6)] \rangle = & N_1(N_1 + 5) + N_2(N_2 + 3) + N_3(N_3 + 1) \\ & + N_4(N_4 - 1) + N_5(N_5 - 3) + N_6(N_6 - 5),\end{aligned}\quad (\text{V.16})$$

$$\langle C_2[SU_T(3)] \rangle = \lambda_T^2 + \mu_T^2 + \lambda_T \mu_T + 3\lambda_T + 3\mu_T, \quad (\text{V.17})$$

$$\langle C_2[SU_S(3)] \rangle = \lambda_S^2 + \mu_S^2 + \lambda_S \mu_S + 3\lambda_S + 3\mu_S, \quad (\text{V.18})$$

$$\begin{aligned}\langle C_2[SU_{TS}(4)] \rangle = & \lambda(\lambda + 4) + \nu(\nu + 4) \\ & + \frac{4}{3}\mu(\mu + 4) + \frac{4}{3}\mu(\lambda + \nu) + \frac{2}{3}\lambda\nu,\end{aligned}\quad (\text{V.19})$$

$$\langle C_2[O_T(3)] \rangle = T(T + 1), \quad (\text{V.20})$$

$$\langle C_2[O_S(3)] \rangle = S(S + 1). \quad (\text{V.21})$$

$N_T$  y  $N_S$  son los números de bosones isovectoriales e isoscalares respectivamente. Haciendo cero determinados coeficientes en el hamiltoniano (V.12), éste se podrá llevar a una forma diagonal en una de las bases (V.10) o (V.11).

$$\begin{aligned}\hat{H}_{SU_T(3) \otimes SU_S(3)} = & \alpha_1 \hat{C}_1[U_L(6)] + \alpha_2 \hat{C}_2[U_L(6)] + \beta_1^T \hat{C}_1[U_T(3)] + \beta_2^T \hat{C}_2[U_T(3)] \\ & + \beta_1^S \hat{C}_1[U_S(3)] + \beta_2^S \hat{C}_2[U_S(3)] + \gamma_2^T \hat{C}_2[SU_T(3)] + \gamma_2^S \hat{C}_2[SU_S(3)] \\ & + \kappa^T \hat{C}_2[O_T(3)] + \kappa^S \hat{C}_2[O_S(3)]\end{aligned}\quad (\text{V.22})$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{SU_{TS}(4)} &= \alpha_1 \hat{C}_1[U_L(6)] + \alpha_2 \hat{C}_2[U_L(6)] \\ &+ \delta \hat{C}_2[SU_{TS}(4)] + \kappa^T \hat{C}_2[O_T(3)] + \kappa^S \hat{C}_2[O_S(3)]\end{aligned}\quad (\text{V.23})$$

## V.2 El formalismo de estado intrínseco para IBM-4

Para construir un estado intrínseco de IBM-4 hay que definir unos bosones deformados a partir de los esféricos, empleando para ello una transformación unitaria,

$$\Omega_{p,T\tau,S\sigma}^\dagger = \sum_{\ell m} \lambda_{\ell m}^{pT\tau S\sigma} \gamma_{\ell m,T\tau,S\sigma}^\dagger, \quad \gamma_{\ell m,T\tau,S\sigma}^\dagger = \sum_p \lambda_{\ell m}^{pT\tau S\sigma*} \Omega_{p,T\tau,S\sigma}^\dagger. \quad (\text{V.24})$$

Los parámetros de deformación verifican las siguientes relaciones de ortonormalización,

$$\sum_{\ell m} \lambda_{\ell m}^{p'T\tau S\sigma*} \lambda_{\ell m}^{pT\tau S\sigma} = \delta_{pp'}, \quad \sum_p \lambda_{\ell m}^{pT\tau S\sigma} \lambda_{\ell' m'}^{pT\tau S\sigma} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (\text{V.25})$$

Resulta conveniente agrupar los índices relativos al espín y al isospín en una única etiqueta  $\xi \equiv (T\tau S\sigma)$ , ya que este nuevo índice jugará en IBM-4 el mismo papel que  $\tau$  en IBM-3.

Puede observarse la dependencia en  $\xi$  de los parámetros de deformación, existiendo 6 valores diferentes de  $\beta$  y otros 6 de  $\gamma$  (ver sección (IV.1)). El índice  $p$  toma de nuevo como valores  $0, 1, \dots, \sum_{\ell}(2\ell + 1) - 1$ , correspondiendo el valor  $p = 0$  al bosón deformado fundamental (cuando no se emplee el índice  $p$  se considerará que uno se refiere a los bosones fundamentales, etiquetado por  $c$ ).

A la hora de construir la función de onda variacional hay que tener en cuenta que ésta será diferente dependiendo de si el núcleo es par-par o impar-impar. En núcleos impar-impar no es posible dar una función de onda variacional que sea general, ya que no existe una regla genérica para saber el espín de estos núcleos. Tan sólo en el caso de núcleos con  $N = Z$  se sabe que el estado fundamental tiene  $S = 1$  ó  $S = 0$ . La función de onda variacional que se propone para núcleos par-par es formalmente igual a la de IBM-3,

$$|\phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S)\rangle_{pp} = \Delta^{\dagger N_n}(\delta, \alpha_T, \alpha_S) \Omega_{T=1\tau=1}^{\dagger N_p - N_n} |0\rangle. \quad (\text{V.26})$$

Para núcleos impar-impar con  $N = Z$  hay dos posibles funciones de onda dentro de este esquema,

$$|\phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S)\rangle_{ii-1} = \Delta^{\dagger N_n - \frac{1}{2}}(\delta, \alpha_T, \alpha_S) \Omega_{T=1\tau=1}^{\dagger} |0\rangle \quad (\text{V.27})$$

y

$$|\phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S)\rangle_{ii-2} = \Delta^{\dagger N_n - \frac{1}{2}}(\delta, \alpha_T, \alpha_S) \Omega_{S=1\sigma}^{\dagger} |0\rangle. \quad (\text{V.28})$$

El hamiltoniano determinará si el estado fundamental corresponde a (V.27) o a (V.28), dependiendo de cuál de ellos esté más favorecido energéticamente. Los parámetros  $N_p$  y  $N_n$  son los números de pares de protones y de neutrones respectivamente. El operador  $\Delta^{\dagger}$  se define como,

$$\begin{aligned} \Delta^{\dagger}(\delta, \alpha_T, \alpha_S) &= (\Omega_{T=1\tau=1}^{\dagger} \Omega_{T=1\tau=-1}^{\dagger} + \alpha_T \Omega_{T=1\tau=0}^{\dagger} \Omega_{T=1\tau=0}^{\dagger}) \\ &+ \delta (\Omega_{S=1\sigma=1}^{\dagger} \Omega_{S=1\sigma=-1}^{\dagger} + \alpha_S \Omega_{S=1\sigma=0}^{\dagger} \Omega_{S=1\sigma=0}^{\dagger}). \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

Es preciso señalar que los estados intrínsecos así construidos no poseen, en general, ni buen isospín  $T$  ni buen espín  $S$ . Sólo en el caso de parámetros de deformación independientes de  $\xi$ , con  $\alpha_T = \alpha_S = -\frac{1}{2}$ , el espín y el isospín estarán bien definidos para el estado intrínseco.

El parámetro  $\delta$  juega en IBM-4 el mismo papel que jugaba  $\alpha$  en IBM-3 (ver sección IV.1). Existen dos valores de  $\delta$  con especial importancia:  $\delta = 0$  que conduce al estado intrínseco de IBM-3 y  $\delta = \pm 1$  que corresponde a la simetría  $SU_{TS}(4)$ , donde los bosones con  $T = 1$  y  $T = 0$  están en pie de igualdad, es decir ninguno de ellos se encuentra favorecido energéticamente. En cálculos realistas para núcleos par-par o impar-impar con  $|N - Z| > 2$  se espera un valor de  $\delta$  próximo a cero, ya que para estos núcleos la importancia de los bosones isoscalares se sabe que es pequeña.

La energía del estado fundamental se obtiene tomando el valor promedio del hamiltoniano IBM-4 (por ejemplo (V.12)) con el estado (V.26), (V.27) o (V.28). En todos los casos la forma genérica de la energía es,

$$\begin{aligned} E(\eta, \delta, \alpha_T, \alpha_S) &= \sum_{\xi_1 \xi_2} \epsilon_{\xi_1 \xi_2} \tilde{f}_1(\delta, \alpha_T, \alpha_S, \xi_1 \xi_2) \\ &+ \sum_{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4} V_{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4}^c \tilde{f}_2(\delta, \alpha_T, \alpha_S, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4), \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

donde,

$$\epsilon_{\xi_1, \xi_2} = \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} \tilde{\epsilon}_{\ell_1 m_1 \xi_1 \ell_2 m_2 \xi_2} \lambda_{\ell_1 m_1}^{\xi_2*} \lambda_{\ell_2 m_2}^{\xi_1}, \quad (\text{V.31})$$

$$V_{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4}^c = \sum_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \ell_3 m_3 \ell_4 m_4} V_{\ell_1 m_1 \xi_1, \ell_2 m_2 \xi_2, \ell_3 m_3 \xi_3, \ell_4 m_4 \xi_4} \lambda_{\ell_1 m_1}^{\tau_1*} \lambda_{\ell_2 m_2}^{\tau_2*} \lambda_{\ell_3 m_3}^{\tau_3} \lambda_{\ell_4 m_4}^{\tau_4}, \quad (\text{V.32})$$

$$\tilde{f}_1(\delta, \alpha_T, \alpha_S, \xi_1 \xi_2) = \delta_{\xi_1 \xi_2} \frac{\langle \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) | \Omega_{\xi_1}^\dagger \Omega_{\xi_2} | \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) \rangle}{\langle \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) | \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) \rangle}, \quad (\text{V.33})$$

y

$$\tilde{f}_2(\delta, \alpha_T, \alpha_S, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = \frac{\langle \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) | \Omega_{\xi_1}^\dagger \Omega_{\xi_2}^\dagger \Omega_{\xi_3} \Omega_{\xi_4} | \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) \rangle}{\langle \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) | \phi(\delta, \alpha_T, \alpha_S) \rangle}. \quad (\text{V.34})$$

Estos elementos de matriz se calculan de forma análoga a como se hacía en IBM-3. Por otro lado, los parámetros del hamiltoniano se definen como,

$$\tilde{\epsilon}_{\ell_1 m_1 \xi_1 \ell_2 m_2 \xi_2} = \langle \ell_1 m_1 \xi_1 | \hat{H} | \ell_2 m_2 \xi_2 \rangle \quad (\text{V.35})$$

$$V_{\ell_1 m_1 \xi_1, \ell_2 m_2 \xi_2, \ell_3 m_3 \xi_3, \ell_4 m_4 \xi_4} \equiv \frac{1}{4} \langle \ell_1 m_1 \xi_1, \ell_2 m_2 \xi_2 | \hat{V} | \ell_3 m_3 \xi_3, \ell_4 m_4 \xi_4 \rangle \\ \times \sqrt{1 + \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{\xi_1 \xi_2}} \sqrt{1 + \delta_{\ell_3 \ell_4} \delta_{m_3 m_4} \delta_{\xi_3 \xi_4}}. \quad (\text{V.36})$$

Hay que destacar que  $\tilde{\epsilon}$  no es diagonal en  $\ell$ , ya que en el hamiltoniano el momento angular que se conserva es el total,  $J$ .

Como se observa, la energía depende explícitamente de los parámetros de deformación  $\lambda$  e implícitamente de  $\alpha_T$ ,  $\alpha_S$  y  $\delta$  a través de  $\tilde{f}_1$  (V.33) y  $\tilde{f}_2$  (V.34). Los parámetros de deformación  $\lambda$  se obtienen minimizando la energía (V.30), conservando la norma de la transformación (V.25),

$$\delta[E(\lambda, \delta, \alpha_T, \alpha_S) - \sum_{\xi} E_{\xi} \lambda_{\ell m}^{\xi*} \lambda_{\ell m}^{\xi}] = 0. \quad (\text{V.37})$$

Derivando respecto a  $\lambda_{\ell m}^{\xi}$  y agrupando, se obtienen las ecuaciones de Hartree-Bose para IBM-4,

$$\sum_{\ell_2 m_2} h_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}^{\xi} \lambda_{\ell_2 m_2}^{\xi} = E_{\xi} \lambda_{\ell_1 m_1}^{\xi}, \quad (\text{V.38})$$

donde la matriz de Hartree-Bose  $h^{\xi}$  es

$$h_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}^{\xi} = \epsilon_{\ell_1 \xi} \tilde{f}_1(\delta, \alpha_T, \alpha_S, \xi \xi) \delta_{m_1 m_2} \\ + 2 \sum_{\ell_3 m_3 \ell_4 m_4 \xi_2 \xi_3 \xi_4} V_{\ell_1 m_1 \xi, \ell_3 m_3 \xi_3, \ell_4 m_4 \xi_4, \ell_2 m_2 \xi_2} \frac{\eta_{\ell_3 m_3}^{\xi_3*} \eta_{\ell_4 m_4}^{\xi_4} \eta_{\ell_2 m_2}^{\xi_2}}{\eta_{\ell_2 m_2}^{\xi}} \tilde{f}_2(\delta, \alpha_T, \alpha_S, \xi \xi_3 \xi_4 \xi_2). \quad (\text{V.39})$$

Estas 6 ecuaciones acopladas deben ser resueltas de forma autoconsistente para valores fijos de  $\delta$ ,  $\alpha_T$  y  $\alpha_S$ . Durante este proceso hay que diagonalizar en cada paso 6 matrices

de dimensión 6, aunque en la mayoría de los casos dicha dimensión se puede ver reducida (ver sección IV.1).

La obtención del valor de equilibrio de  $\delta$ ,  $\alpha_T$  y  $\alpha_S$  se realiza minimizando la energía por métodos no autoconsistentes, ya que la obtención de ecuaciones de Hartree-Bose para estas variables resulta bastante complicado. El parámetro más importante del análisis es  $\delta$ . Por ello, las variables  $\alpha_T$  y  $\alpha_S$  se pueden fijar a  $-\frac{1}{2}$ , que es un valor razonable. Con ello, se simplifica considerablemente el cálculo.

Aquí sólo se ha presentado la estructura formal del estado intrínseco para el estado fundamental del IBM-4. La aplicación del formalismo presentado en este capítulo para el estudio de la competencia entre el *pairing* isoscalar e isovectorial en núcleos ligeros con  $N \approx Z$  será objeto de estudios posteriores.

# Capítulo VI

## Síntesis y conclusiones

A lo largo de esta memoria de tesis doctoral se han estudiado en profundidad los siguientes aspectos del Modelo de Bosones en Interacción:

- Se ha extendido el formalismo de estado intrínseco de IBM-1 con objeto de estudiar estados que contengan dos fonones de excitación en núcleos deformados. Hasta este momento nadie había empleado el IBM para analizar este tipo de excitaciones.
- Se han comparado los resultados obtenidos con el formalismo propuesto con los resultados exactos (obtenidos en el sistema laboratorio) para algunos casos límite. En todos los casos el grado de acuerdo ha sido satisfactorio, tanto para energías como para transiciones electromagnéticas.
- Se ha realizado un estudio parcial acerca de la influencia de los términos a tres cuerpos del hamiltoniano sobre el grado de anarmonicidad del espectro.
- Se han realizado cálculos realistas con interacciones a tres cuerpos que reproducen correctamente los datos experimentales observados (tanto energías como probabilidades de transición) para excitaciones doble- $\gamma$  en la zona del  $^{166}\text{Er}$ .
- Se ha estudiado parte de la estructura algebraica del IBM-3, en particular aquella proveniente de la subálgebra  $U_L(6) \otimes SU_T(3)$ .
- Se han obtenido expresiones analíticas de las probabilidades de transición reducida en IBM-3, para transiciones entre dos estados simétricos ( $[N]$ ) y entre uno simétrico

( $[N]$ ) y otro no simétrico ( $[N - 1, 1]$ ). Para ello se han calculado expresiones que conectan con los resultados ya conocidos de IBM-1 e IBM-2.

- Se han obtenido expresiones analíticas en IBM-3 para las probabilidades de transferencia de dos nucleones.
- Se han hallado expresiones analíticas que dan el número promedio de bosones  $\pi$ ,  $\delta$  y  $\nu$ , contenidos en estados totalmente simétricos de IBM-3.
- Se ha propuesto un nuevo formalismo de estado intrínseco de IBM-3. Éste es una generalización del ya existente (GL) con objeto de incluir la posibilidad de parámetros de deformación dependientes de la carga, así como la deformación en el espacio de isospín.
- Se han realizado diferentes cálculos esquemáticos donde se prueba la validez y utilidad del nuevo formalismo de estado intrínseco de IBM-3.
- Se ha presentado un formalismo de estado intrínseco de IBM-4. Este formalismo permite el estudio de la competencia entre el *pairing* isovectorial e isoscalar.

Como conclusiones particulares se pueden citar:

- El formalismo de estado intrínseco de IBM-1 se muestra como una valiosa herramienta a la hora de estudiar el problema de la anarmonicidad de las vibraciones en núcleos deformados. Del estudio general que se ha presentado en esta memoria se concluye que el IBM-1 es un modelo armónico cuando se considera un número alto de bosones, con independencia del hamiltoniano empleado<sup>1</sup>. La anarmonicidad sólo puede aparecer para núcleos con un número finito de bosones.
- La identificación, dada hasta este momento, de los estados pertenecientes a representaciones irreducibles de  $SU(3)$ ,  $(2N - 8, 4)_0$  y  $(2N - 6, 0)_0$  como bandas  $\beta^2$  y  $\gamma^2$  respectivamente es errónea. Con el nuevo formalismo de estado intrínseco se ha visto que ambas representaciones irreducibles contienen una mezcla de bandas  $\beta^2$

---

<sup>1</sup>Con la excepción del límite  $U(5)$ .

y  $\gamma^2$ . Así, la banda  $(2N - 8, 4)0$  corresponde a la combinación  $\sqrt{\frac{2}{3}}\beta^2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\gamma_{K=0}^2$  mientras que  $(2N - 6, 0)0$  corresponde a  $\sqrt{\frac{1}{3}}\beta^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_{K=0}^2$

- Para obtener anarmonicidad positiva ( $E_2$  fonones/ $E_1$  fonón  $> 2$ ) es preciso extender el hamiltoniano IBM-1. La inclusión de términos a tres cuerpos se muestra eficaz a la hora de reproducir el grado de anarmonicidad observada en núcleos pesados y medios, estableciéndose una conexión entre triaxialidad y anarmonicidad.
- Las expresiones analíticas (transiciones electromagnéticas, probabilidades de transferencia de dos nucleones y número promedio de bosones) obtenidas para IBM-3 resultan de gran utilidad a la hora de comparar con datos experimentales. Se espera que los resultados obtenidos sean una referencia apropiada a la hora de analizar los datos obtenidos en los nuevos experimentos con haces radiactivos.
- A la vista de los resultados experimentales, queda justificado el desacoplamiento entre la parte orbital y la de isospín en la función de onda. Los límites de simetría que parten del álgebra  $U_L(6) \otimes SU_T(3)$  resultan ser de gran relevancia a la hora de tratar con núcleos par-par ligeros y medios con  $N \approx Z$ .
- El formalismo de estado intrínseco propuesto para IBM-3 proporciona mejores resultados que el formalismo de GL. Los resultados obtenidos también son mejores cuando se comparan con los obtenidos empleando una función de onda sin pares correlacionados (función de onda  $U(18)$ ).

El IBM es un modelo que destaca especialmente por su simplicidad de cálculo y por proporcionar un marco en el que los resultados pueden ser interpretados fácilmente. A partir de un cálculo IBM siempre es posible reproducir las tendencias de los resultados experimentales, aunque a veces resulta difícil lograr una descripción satisfactoria de todos los detalles. A la hora de analizar resultados de IBM siempre hay que tener presente lo simple que ha sido realizar el cálculo, ya que en general siempre se conoce algún hamiltoniano esquemático aproximado, que resulta adecuado para estudiar el núcleo problema. Por otro lado, la dimensión de las matrices a diagonalizar (del orden de 500x500) es insignificante si se compara con las dimensiones involucradas en otros cálculos más sofisticados.

En el caso de IBM-3, las ventajas de los cálculos en IBM se ven acentuadas, es decir, los cálculos se hacen aún más simples en comparación con los realizados con otros modelos en la misma región másica. Adicionalmente, la fácil interpretación de los resultados hace de los cálculos IBM-3 una valiosa herramienta a la hora de trabajar en regiones másicas poco estudiadas experimentalmente y, en las que cálculos más sofisticados implican un enorme esfuerzo computacional. En general, un cálculo IBM-3 resulta ideal como guía antes de realizar un cálculo más elaborado (por ejemplo de SM).

La importancia del estudio realizado en IBM-3 se debe a que proporciona un método sencillo de incorporar el isospín a un modelo de estructura nuclear, pudiendo estudiarse su influencia sobre energías, transiciones electromagnéticas, etc. Posiblemente un cálculo IBM-3 no sea comparable a uno realizado con SM, debido a que el segundo proporciona una descripción mucho más completa de las propiedades nucleares, mientras que el IBM-3 sólo es capaz de reproducir las tendencias generales de los espectros y de las transiciones electromagnéticas. La relevancia de los resultados de IBM-3 está en que dichos resultados se obtienen de una forma muy simple y con un esfuerzo computacional pequeño.

Finalmente, conviene citar alguna de las líneas de este trabajo no concluidas aún. En primer lugar, sería conveniente hacer un análisis más exhaustivo de los términos a tres cuerpos del hamiltoniano IBM-1, con el fin de justificar de forma microscópica el alto grado de anarmonicidad de la vibración  $\gamma$ , observado en el  $^{166}\text{Er}$  y  $^{168}\text{Er}$ . En segundo, habría que completar el estudio realizado en el sistema intrínseco de IBM-4, realizando cálculos esquemáticos donde se pueda observar la competencia entre el *pairing* isoscalar e isovectorial.

# Apéndice A: Convenciones de fase al definir el producto escalar y el operador $\tilde{\gamma}_\ell$

La convención de fase en la definición de producto escalar de dos operadores tensoriales y en la definición del operador  $\tilde{\gamma}_\ell$  no es única. Por ello, debido a la confusión que esto genera, se incluye este apéndice en el que se presentan las dos convenciones más usuales para ambas definiciones.

## A.1 Definición de producto escalar

Sean dos operadores de multipolaridad  $L$ ,  $\hat{S}^L$  y  $\hat{T}^L$ . El producto escalar de ambos operadores se define de forma general como:

$$\hat{S}^L \cdot \hat{T}^L = (-1)^L \sqrt{2L+1} (\hat{S}^L \times \hat{T}^L)_0^0. \quad (\text{A.1})$$

Dependiendo de que se use la convención de Condon-Shortley (CS) para los Clebsch-Gordan [CS35, Edm57] o no, la anterior definición puede conducir a dos expresiones diferentes

$$\hat{S}^L \cdot \hat{T}^L = \sum_M (-1)^{L\pm M} \hat{S}_M^L \hat{T}_{-M}^L \quad (\text{A.2})$$

y

$$\hat{S}^L \cdot \hat{T}^L = \sum_M (-1)^M \hat{S}_M^L \hat{T}_{-M}^L. \quad (\text{A.3})$$

Ambas formas de producto escalar pueden encontrarse en la bibliografía con casi idéntica frecuencia. La fórmula (A.3) proviene del uso de la convención de CS, la cual

supone

$$\langle 00JM|JM\rangle = e^{i\delta}, \quad (\text{A.4})$$

con  $e^{i\delta} = +1$ . La expresión (A.2) se obtiene usando  $e^{i\delta} = (-1)^L$  en (A.4)

Considérese el operador  $\hat{L}^2$  definido como  $\hat{L}^2 = \hat{L} \cdot \hat{L}$ , el cual debe poseer autovalores no negativos. Si se emplea la convención de CS (definición (A.3)) uno obtiene  $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$  y, por tanto, autovalores no negativos. En cambio, si se emplea la definición (A.2) se llega a  $\hat{L}^2 = -\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 - \hat{L}_z^2$  con autovalores no positivos. El empleo de esta última convención obligaría al uso de  $-\hat{L} \cdot \hat{L}$  para dar lugar a autovalores no negativos.

Cuando se comparan expresiones de autores diferentes donde aparecen productos escalares, es muy importante tener en cuenta la definición usada. Para aquellos términos donde la multipolaridad de los operadores no es par puede existir una diferencia de fase y, en consecuencia, se obtendrán resultados distintos al realizar cálculos aparentemente equivalentes.

## A.2 Definición de los operadores $\tilde{\gamma}_\ell$

Los operadores de creación  $\gamma_{\ell m}^\dagger$  son operadores tensoriales de rango  $\ell$  que poseen el comportamiento adecuado frente a rotaciones en el espacio orbital,

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) \gamma_{\ell m}^\dagger \hat{R}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) \gamma_{\ell m'}^\dagger. \quad (\text{A.5})$$

$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  es el operador de rotación y  $\mathcal{D}_{m'm}^\ell(\alpha, \beta, \gamma)$  la matriz de rotación con ángulos de Euler  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Los operadores  $\gamma_{\ell m}$  no poseen el comportamiento adecuado frente a rotaciones, transformándose como,

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) \gamma_{\ell m} \hat{R}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m'} (-1)^{m-m'} \mathcal{D}_{m'm}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) \gamma_{\ell m'}. \quad (\text{A.6})$$

A la vista de esta expresión se observa que puede definirse un nuevo operador de destrucción con las propiedades apropiadas bajo rotaciones. Existen para ello dos alternativas,

$$\tilde{\gamma}_{\ell m} = (-1)^{\ell \pm m} \gamma_{\ell - m} \quad (\text{A.7})$$

y

$$\tilde{\gamma}_{\ell m} = (-1)^{\pm m} \gamma_{\ell - m}. \quad (\text{A.8})$$

Ambas definiciones son independientes de la convención de CS. El empleo de (A.7) o (A.8) genera una fase arbitraria  $\pm 1$  en el caso de  $\ell$  impar.

A la hora de comparar expresiones donde se apliquen convenciones diferentes en la definición de  $\tilde{\gamma}_\ell$ , también es importante tenerlas en cuenta porque, de nuevo, se pueden obtener resultados distintos al realizar cálculos aparentemente equivalentes.

Es habitual ligar las definiciones de  $\tilde{\gamma}_\ell$  y del producto escalar para obtener un operador de número correctamente definido a través del producto escalar,

$$\hat{n}_\ell = \sum_m \gamma_{\ell m}^\dagger \gamma_{\ell m} = \gamma_\ell^\dagger \cdot \tilde{\gamma}_\ell. \quad (\text{A.9})$$

Es decir se suelen emplear de forma conjunta los pares de expresiones (A.3)-(A.8) o (A.2)-(A.7) a la hora de definir el producto escalar y el operador  $\tilde{\gamma}_\ell$ , respectivamente. No obstante, este criterio no se usa siempre, siendo necesario conocer ambas convenciones de fase.



# Bibliografía

- [AAVI92] C.E. Alonso, J.M. Arias, A. Vitturi y F. Iachello. “Intrinsic frame description of interacting boson-fermion systems”. *Nucl. Phys. A* **539**, 59, (1992).
- [AETE89] M. Abdelaziz, J.P. Elliott, M.J. Thompson y J.A. Evans. “On the role of isoscalar bosons in lighter nuclei”. *Nucl. Phys. A* **503**, 452, (1989).
- [AI75] A. Arima y F. Iachello. “Collective nuclear states as representations of a SU(6) group”. *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1069, (1975).
- [AI76] A. Arima y F. Iachello. “Interacting boson model of collective nuclear states. I. The vibrational limit”. *Ann. Phys. (NY)* **99**, 253, (1976).
- [AI78] A. Arima y F. Iachello. “Interacting boson model of collective nuclear states. III. The rotational limit”. *Ann. Phys. (NY)* **111**, 201, (1978).
- [AI79] A. Arima y F. Iachello. “Interacting boson model of collective nuclear states. IV. The O(6) limit”. *Ann. Phys. (NY)* **123**, 468, (1979).
- [AOIT77] A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello y I. Talmi. “Shell model description of interacting bosons”. *Phys. Lett. B* **66**, 205, (1977).
- [ATEE88] M. Abdelaziz, M.J. Thompson, J.P. Elliott y J.A. Evans. “Shell model and IBM descriptions of mixed symmetry or isovector M1 transitions in titanium isotopes”. *J. Phys. G* **14**, 219, (1988).
- [AWF<sup>+</sup>94] A. Aprahamian, X. Wu, S.M. Fischer, W. Reviol y J.X. Saladiné. *En Proceedings of the 8th International Symposium sobre “Capture Gamma-Ray*

- Spectroscopy*", editado por J. Kern (World Scientific, Singapore), pág. 57, (1994).
- [B<sup>+</sup>75] M. Beiner et al. "Nuclear ground-state properties y self-consistent calculations with the Skyrme Interaction (I). Spherical Description". *Nucl. Phys. A* **238**, 29, (1975).
- [B<sup>+</sup>91] H.G. Börner et al. "Evidence of the existence of two-phonon collective excitations in deformed nuclei". *Phys. Rev. Lett.* **66**, 691, (1991).
- [BG77] P.J. Brussard y P.W.M. Glaudemans. "*Shell-model applications in nuclear spectroscopy*". North-Holland, Amsterdam, (1977).
- [BJ93] H.G. Börner y J. Jolie. "Sub-picosecond lifetime measurements by gamma ray induced Doppler broadening". *J. Phys. G* **19**, 217, (1993).
- [BK37] N. Bohr y F. Kalckar. "On transmutation of atomic nuclei by impact on material particles. I. General theoretical principles". *Dan. Mat-Fys. Medd.* **14 No 10**, (1937).
- [BK67] G.E. Brown y T.T.S. Kuo. *Nucl. Phys. A* **92**, 481, (1967).
- [BKRS84] D. Bohle, G. Kuchler, A. Richter y W. Steffen. "Further evidence for the new collective magnetic dipole mode in heavy deformed nuclei". *Phys. Lett. B* **148**, 260, (1984).
- [BM53] A. Bohr y B.R. Mottelson. "Collective and individual-particle aspects of nuclear structure". *Dan. Vid. Selsk. Mat-Fys. Medd.* **27 No 16**, (1953).
- [BM75] A. Bohr y B. Mottelson. "*Nuclear structure. Vol. 2*". Benjamin, Reading, Massachusetts, (1975).
- [BM82] A. Bohr y B.R. Mottelson. "On the spectrum of <sup>168</sup>Er". *Phys. Scr.* **25**, 28, (1982).

- [BMY96] T. Belgya, G. Molnár y S.W. Yates. “Analysis of Doppler-shift attenuation measurements performed with accelerator-produced monoenergetic neutrons”. *Nucl. Phys. A* **607**, 43, (1996).
- [Boh36] N. Bohr. “Neutron capture and nuclear constitution”. *Nature (Lond.)* **137**, 344, (1936).
- [Boh52] A. Bohr. “The coupling of nuclear surface oscilation to the motion of individual nucleons”. *Dan. Vid. Selsk. Mat-Fys. Medd.* **26** No 14, (1952).
- [BRS+84] D. Bohle, A. Richter, W. Steffen, A.E.L. Dieperink, N. LoIudice, F. Palumbo y O. Scholten. “New magnetic dipole excitation mode studied in the heavy deformed nucleus  $^{156}\text{Gd}$  by inelastic electron scattering”. *Phys. Lett. B* **137**, 134, (1984).
- [C+80] R.F Casten et al. “Consequences of completeness in nuclear spectroscopy”. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1077, (1980).
- [C+97] F. Corminbeuf et al. “ $K^\pi = 4^+$  double- $\gamma$  vibration in  $^{164}\text{Dy}$ ”. *Phys. Rev. C* **56**, R1201, (1997).
- [Cau89] E. Caurier. “Computer code ANTOINE”. *Strasbourg*, (1989).
- [Ciz81] J.A. Cizewski. En “*Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei*” editado por F. Iachello, *Plenum*, pág. 137, (1981).
- [Cli93] D. Cline. “Quadrupole and octupole shapes in nuclei”. *Nucl. Phys. A* **557**, 615, (1993).
- [CS35] E.U. Condon y G.H. Shortley. “*The theory of atomic spectra*”. Cambridge Univ. Press, (1935).
- [CTDL77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë. “*Quantum mechanics*”. John Wiley and Sons, Hermann, (1977).

- [CvB94] R.F. Casten y P. von Brentano. “New interpretation of the lowest  $K=0$  collective excitation of deformed nuclei as a phonon excitation of the  $\gamma$  band”. *Phys. Rev. C* **50**, R1280, (1994).
- [CvB95] R.F. Casten y P. von Brentano. Reply to comments on “New interpretation of the lowest  $K = 0$  collective excitation of deformed nuclei as a phonon excitation of the  $g$  band”. *Phys. Rev. C* **51**, 3528, (1995).
- [CW88] R.F. Casten y D.D. Warner. “The interacting boson approximation”. *Rev. Mod. Phys.* **60**, 389, (1988).
- [CZPMP94] E Caurier, A.P. Zuker, A. Poves y G. Martínez-Pinedo. “Full  $pf$  shell model study of  $A = 48$  nuclei”. *Phys. Rev. C* **50**, 225, (1994).
- [DDP+84] J. Dukelsky, G.G. Dussel, R.P.J. Perazzo, S.L. Reich y H.M. Sofia. “A self-consistent description of systems with many interacting bosons”. *Nucl. Phys.* **425**, 93, (1984).
- [DH82] T.S. Dumitrescu y I. Hamamoto. “Macroscopic and microscopic analysis of gamma motion in  $^{168}\text{Er}$ ”. *Nucl. Phys. A* **383**, 205, (1982).
- [DS80] A.E.L. Dieperink y O. Scholten. “On the shapes and shape phase transitions in the interacting boson model”. *Nucl. Phys. A* **346**, 125, (1980).
- [DSI80] A.E.L. Dieperink, O. Scholten y F. Iachello. “Classical limit of the interacting-boson model”. *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1747, (1980).
- [dST63] A. de Shalit y I. Talmi. “*Nuclear shell theory*”. Academic, New York, (1963).
- [Edm57] A.R. Edmonds. “*Angular momentum in quantum mechanics*”. Princeton Univ. Press, (1957).
- [EE81] J.P. Elliott y J.A. Evans. “An intrinsic spin for interacting bosons”. *Phys. Lett. B* **101**, 216, (1981).

- [EELL96] J.P. Elliott, J.A. Evans, V.S. Lac y G.L. Long. “An IBM-3 analysis of the nuclei just beyond the magic numbers  $N=Z=28$ ”. *Nucl. Phys. A* **609**, 14, (1996).
- [EES85] J.A. Evans, J.P. Elliott y S. Szpikowski. “An IBM analysis of a single j-shell of neutrons and protons”. *Nucl. Phys. A* **435**, 317, (1985).
- [EEV96] J.P. Elliott, J.A. Evans y V.S. Lac. “Electromagnetic operators in IBM-3 and their dependence on the boson number and isospin”. *Nucl. Phys. A* **597**, 341, (1996).
- [EG70] J.M. Eisenberg y W. Greiner. “*Nuclear models*”. North-Holland, American Elsevier, (1970).
- [EL57] J.P. Elliott y A.M. Lane. “The nuclear shell-model”. *Enciclopedia of physics. Volume XXXIX. Structure of atomic nuclei. Springer-Verlag*, (1957).
- [ELE97] J.A. Evans, V.S. Lac y J.P. Elliott. “A new method for IBM-3 calculations”. *Nucl. Phys. A* **627**, 71, (1997).
- [Ell58] J.P. Elliott. “Collective motion in the nuclear shell model. I. Classification schemes for states of mixed configurations”. *Proc. Roy. Soc. A* **245**, 128, (1958).
- [Ell85] J.P. Elliott. “The interacting boson model of nuclear structure”. *Rep. Prog. Phys.* **48**, 171, (1985).
- [ELV96] J. Engel, K. Langanke y P. Vogel. “Pairing and isospin symmetry in proton-rich nuclei”. *Phys. Lett. B* **389**, 211, (1996).
- [Etc85] A. Etchegoyen. *MSU-NSCL report* **524**, (1985).
- [EW80] J.P. Elliott y A.P. White. “An isospin invariant form of the interacting boson model”. *Phys. Lett. B* **97**, 169, (1980).

- [F<sup>+</sup>69] J.B. French et al. "Complex spectroscopy". *Adv. Nucl. Phys.* **3**, 193, (1969).
- [F<sup>+</sup>88] C. Fahlander et al. "Quadrupole collective properties of <sup>114</sup>Cd". *Nucl. Phys. A* **485**, 327, (1988).
- [F<sup>+</sup>92] C. Fahlander et al. "Triaxiality in <sup>166</sup>Er". *Nucl. Phys.* **537**, 183, (1992).
- [FAH<sup>+</sup>96] C. Fahlander, A. Axelsson, M. Heinebrodt, T. Härtlein y D. Schwalm. "Two-phonon  $\gamma$ -vibrational states in <sup>166</sup>Er". *Phys. Lett. B* **388**, 475, (1996).
- [FVI94] A. Frank y P Van Isacker. "*Algebraic methods in molecular and nuclear structure physics*". Wiley-Interscience, (1994).
- [G<sup>+</sup>95] A. Guessous et al. "Harmonic two-phonon g-vibrational state in neutron-rich <sup>106</sup>Mo". *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2280, (1995).
- [G<sup>+</sup>97a] P.E. Garrett et al. " $K^\pi = 0^+$  and  $4^+$  two-phonon  $\gamma$ -vibrational states in <sup>166</sup>Er". *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4545, (1997).
- [G<sup>+</sup>97b] P.E. Garrett et al. "The nature of the  $0^+$  excitations in <sup>166</sup>Er". *Phys. Lett. B* **400**, 250, (1997).
- [GF78] R. Gilmore y D.H. Feng. "Phase transitions in nuclear matter described by pseudospin Hamiltonians". *Nucl. Phys. A* **301**, 189, (1978).
- [Gil74] R. Gilmore. "*Lie groups, Lie algebras and some applications*". Wiley, (1974).
- [Gin96] J.N. Ginocchio. "New type of collective motion for  $N \approx Z$  nuclei". *Phys. Rev. Lett* **77**, 28, (1996).
- [GK80a] J.N. Ginocchio y M.W. Kirson. "An intrinsic state for the interacting boson model and its relationship to the Bohr-Mottelson model". *Nucl. Phys. A* **350**, 31, (1980).

- [GK80b] J.N. Ginocchio y M.W. Kirson. "Relationship between the Bohr collective hamiltonian and the Interacting Boson Model". *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1744, (1980).
- [GL94] J.N. Ginocchio y A. Leviatan. "Quadrupole collectivity with isospin". *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1903, (1994).
- [GM62] M. Gell-Mann. "Symmetries of barions and mesons". *Phys. Rev.* **125**, 1067, (1962).
- [Goo79] A.L. Goodman. "Hartree-Fock-Bogoliubov theory with applications to nuclei". *Adv. Nucl. Phys.* **11**, 263, (1979).
- [GRAA+98] J.E García-Ramos, C.E. Alonso, J.M. Arias, P. Van Isacker y A. Vitturi. "Intrinsic structure of two-phonon states in the interacting boson model". *Nucl. Phys. A* **637**, 529, (1998).
- [GRAD+98a] J.E García-Ramos, J.M Arias, J. Dukelsky, E. Moya de Guerra y P. Van Isacker. "Hartree-Bose mean-field approximation for the interacting boson model (IBM-3)". *Phys. Rev. C* **57**, R479, (1998).
- [GRAD+98b] J.E García-Ramos, J.M Arias, J. Dukelsky, E. Moya de Guerra y P. Van Isacker. "A Hartree-Bose mean-field approximation for IBM-3". *Czech. J. Phys.* **48**, 704, (1998).
- [GRVI] J.E García-Ramos y P. Van Isacker. "The interacting boson model with  $SU(3)$  charge symmetry and its application to even-even  $N \approx Z$  nuclei". *Ann. Phys. (NY)*, en prensa.
- [Ham62] M. Hammermesh. "Group theory and its applications to physical problems". Addison-Wesley, Reading, MA, (1962).
- [Hau76] R.F Hausman. *Jr Lawrence Livermore National Laboratory Report No UCRL-52179. Tesis doctoral*, (1976).
- [Hei32] W. Heisenberg. *Z. Phys.* **77**, 1, (1932).

- [Hey90] K.L.G. Heyde. *“The nuclear shell-model”*. Springer-Verlag, (1990).
- [HHSF98] T. Härtlein, M. Heinebrodt, D. Schwalm y C. Fahlander. “Collective excitations built on the  $2^+_{\gamma}$  state in  $^{168}\text{Er}$ ”. *Eur. Phys. J. A* **2**, 253, (1998).
- [HJ62] T. Hamada y I.D. Johnston. *Nucl. Phys. A* **34**, 382, (1962).
- [HJS49] O. Haxel, J.H.D. Jensen y H.E. Suess. “On the “Magic Numbers” in nuclear structure”. *Phys. Rev.* **75**, 1766, (1949).
- [Hun37] F. Hund. *Z. Phys.* **105**, 202, (1937).
- [HVIB95] P. Halse, P Van Isacker y B.R. Barrett. “Sum rules for  $B(M1 : 0^+_1 \rightarrow 1^+)$  strength in IBM-3 and IBM-4”. *Phys. Lett. B* **363**, 145, (1995).
- [HW53] D.L. Hill y J.A. Wheeler. “Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena”. *Phys. Rev.* **89**, 1102, (1953).
- [IA87] F. Iachello y A. Arima. *“The interacting boson model”*. Cambridge University Press, Cambridge, (1987).
- [JH40] J.M. Jauch y E.L. Hill. *Phys. Rev.* **57**, 641, (1940).
- [JJD74] D. Janssen, R.V. Jolos y F Dönau. “An algebraic treatment of the nuclear quadrupole degree of freedom”. *Nucl. Phys. A* **224**, 93, (1974).
- [JP88] M.K. Jammari y R. Piepenbring. “Anharmonicities of g-vibrations in deformed nuclei”. *Nucl. Phys. A* **487**, 77, (1988).
- [JV87] X. Ji y M. Vallières. “Calculation of coefficients of fractional parentage for large spaces”. *Phys. Rev. C* **35**, 1583, (1987).
- [KB66] T.T.S. Kuo y G.E. Brown. “Structure of finite nuclei and the Free nucleon-nucleon interaction. An application to  $^{18}\text{O}$  and  $^{18}\text{F}$ ”. *Nucl. Phys. A* **85**, 40, (1966).
- [KBB66a] T.T.S. Kuo, E. Baranger y M. Baranger. *Nucl. Phys. A* **81**, 241, (1966).

- [KBB66b] T.T.S. Kuo, E. Baranger y M. Baranger. "A shell-model calculation of the odd-mass tin isotopes". *Nucl. Phys. A* **79**, 513, (1966).
- [Ker61] A.K. Kerman. *Ann. Phys. (NY)* **12**, 300, (1961).
- [Kum84] K. Kumar. *En "Nuclear models and the search for unity in nuclear physics", (Universitesforlaget Bergen)*, (1984).
- [L<sup>+</sup>62] K.E. Lassila et al. "Note on a nucleon-nucleon potential". *Phys. Rev.* **126**, 881, (1962).
- [Lev87] A. Leviatan. "Intrinsic and collective structure in the IBM". *Ann. Phys. (NY)* **179**, 201, (1987).
- [LJK<sup>+</sup>93] G.H. Lang, C.W. Johnson, S.E. Koonin, G. Lang y W.E. Ormand. "Monte Carlo evaluation of path integrals for the nuclear shell model". *Phys. Rev. C* **48**, 1518, (1993).
- [LS90] A. Leviatan y B. Shao. "General quadrupole nuclear shapes. An algebraic perspective". *Phys. Lett. B* **243**, 313, (1990).
- [Mah83] C. Mahaux. "From free to effective nucleon-nucleon interactions". *Nucl. Phys. A* **396**, 9c, (1983).
- [May49] M.G. Mayer. "On closed shells in nuclei. II". *Phys. Rev.* **75**, 1969, (1949).
- [May50] M.G. Mayer. "Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. I Theoretical considerations". *Phys. Rev.* **78**, 22, (1950).
- [MMNS56] M.A. Melkonoff, S.A. Moszkowski, J.S. Nodvik y D.S. Saxon. "Energy dependence of the optical model parameters". *Phys. Rev.* **101**, 507, (1956).
- [NC95] F. Nowacki y E. Caurier. "Coupled code NATHAN". *Strasbourg*, (1995).
- [OAI78] T. Otsuka, A. Arima y F. Iachello. "Nuclear shell model and interacting bosons". *Nucl. Phys. A* **309**, 1, (1978).

- [OAIT78] T. Otsuka, A. Arima, F. Iachello y I. Talmi. "Shell model description of interacting bosons". *Phys. Lett. B* **76**, 139, (1978).
- [Oku62] S. Okubo. "Note on unitary symmetry in strong interactions". *Prog. Theor. Phys.* **27**, 949, (1962).
- [OM98] T. Otsuka y T. Mizusuki. "Monte-Carlo shell-model calculations". *En proceedings of the VI Hispalensis International Summer School on "Many-body theory of correlated fermion systems"*, (1998).
- [PB75] M.A. Preston y R.K. Bhaduri. "*Structure of the nucleus*". Addison-Wesley, (1975).
- [R<sup>+</sup>96] D. Rudolph et al. "Identification of  $T = 0$  and  $T = 1$  bands in the  $N = Z = 37$  nucleus  $^{74}\text{Rb}$ ". *Phys. Rev. Lett.* **76**, 376, (1996).
- [Rac43] G. Racah. *Phys. Rev.* **63**, 367, (1943).
- [Rei68] P.V. Reid. *Ann. Phys. (NY)* **50**, 411, (1968).
- [RG88] D.A. Resler y S.M. Grimes. *Computers in Physics, May-June*, 65, (1988).
- [Row70] D.J. Rowe. "*Nuclear collective motion*". Methuen and Co. Ltd., London, (1970).
- [RS80] P. Ring y P. Schuck. "*The nuclear many-body problem*". Springer-Verlag, (1980).
- [S<sup>+</sup>92] E.N. Shurshikov et al. "Nuclear data sheets update for  $A = 166$ ". *Nucl. Data Sheets* **67**, 45, (1992).
- [Sch49] L.I. Schiff. "*Quantum mechanics*". McGraw-Hill, (1949).
- [Sch76] O. Scholten. "Computer program PHINT". *Universidad de Groningen, Holanda*, (1976).

- [SHVI<sup>+</sup>85] O. Scholten, K. Heyde, P. Van Isacker, J. Jolie, J. Moreau y M. Waroquier. "Mixed-symmetry states in the neutron-proton interacting boson model". *Nucl. Phys. A* **438**, 41, (1985).
- [Sky56] T.H.R. Skyrme. *Phil. Mag.* **1**, 1043, (1956).
- [Sky59] T.H.R. Skyrme. *Nucl. Phys. A* **9**, 615, (1959).
- [SSS94] V.G. Soloviev, A.V. Sushkov y N.Yu Shirikova. "Gamma-ray transitions between excited states in <sup>168</sup>Er". *J. Phys. G* **20**, 113, (1994).
- [SSS95] V.G. Soloviev, A.V. Sushkov y N.Yu Shirikova. "Description of low-lying vibrational and two-quasiparticle states in <sup>166</sup>Er". *Phys. Rev. C* **51**, 551, (1995).
- [ST76] J.P. Schiffer y W.W. True. *Rev. Mod. Phys.* **48**, 191, (1976).
- [Sug97] M. Sugita. "Applications of IBM-3 to the  $Z \approx N \approx 40$  nuclei". *Phys. Lett. B* **394**, 235, (1997).
- [Tab64] F. Tabakin. *Ann. Phys. (NY)* **30**, 51, (1964).
- [Tal93] I. Talmi. "*Simple models of complex nuclei*". Harwood Academic Publishers, (1993).
- [TEE87] M.J. Thompson, J.P. Elliott y J.A. Evans. "A microscopically determined IBM-3 hamiltonian". *Phys. Lett. B* **195**, 511, (1987).
- [Ver68] J.D. Vergados. " $SU(3) \supset R(3)$  Wigner coefficients in the 2s-1d shell". *Nucl. Phys. A* **111**, 681, (1968).
- [VIa] P Van Isacker. "The computer program IBM-3". *No publicado*.
- [VIb] P. Van Isacker. "The computer program IBM". *No publicado*.
- [VI95] P. Van Isacker. "Isospin invariant boson models for the fp-shell nuclei". *Phys. Scripta* **T 56**, 103, (1995).

- [VI98] P. Van Isacker. "Symmetries in nuclear physics". *En proceedings of the VI Hispalensis International Summer School on "Many-body theory of correlated fermion systems"*, (1998).
- [VIC81] P. Van Isacker y J.Q. Chen. "Classical limit of the interacting boson model". *Phys. Rev. C* **24** 684, (1981).
- [VIFS84] P. Van Isacker, A. Frank y H.-Z Sun. "The  $U(6/12)$  supersymmetric limit of the interacting boson-fermion model". *Ann. Phys. (NY)* **157**, 183, (1984).
- [VIHJA86] P. Van Isacker, K Heyde, J. Jolie y Sevrin A. "The F-spin symmetric limits of the neutron-proton interacting boson model". *Ann. Phys. (NY)* **171**, 253, (1986).
- [VIW97] P. Van Isacker y D.D. Warner. " $T = 0$  versus  $T = 1$  pairing in the interacting boson model". *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3266, (1997).
- [VNG89] M. Vallières, A. Novoselsky y R. Gilmore. "New shell-model algorithm". *En Proceedings of the International Conference on Computers in Physics, editado por L. Deguan y D.H. Feng, (World Scientific, Singapore)*, (1989).
- [War94] D.D. Warner. *En "Perspectives for the Interacting Boson Model", editado por R.F. Casten et al. (World Scientific, Singapore, p. 373)*, (1994).
- [WC82] D.D Warner y R.F. Casten. "Revised formulation of the phenomenological interacting boson approximation". *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1385, (1982).
- [WCD80] D.D. Warner, R.F. Casten y W.F. Davidson. "Detailed test of the interacting boson approximation in a well deformed nucleus: the positive-parity states of  $^{168}\text{Er}$ ". *Phys. Rev. C* **45**, 1761, (1980).
- [Wig37] E.P. Wigner. *Phys. Rev.* **51**, 106, (1937).
- [Wil76] B.H. Wildenthal. *Varenna Lectures* **69**, 383, (1976).
- [Wil85] B.H. Wildenthal. "International Symposium on Nuclear Shell Models". *M. Vallières and B.H. Wildenthal (World-Scientific, Singapore)*, (1985).

- [WS54] R.D. Woods y D.S. Saxon. "Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering". *Phys. Rev.* **95**, 577, (1954).
- [Wu83] C.Y. Wu. *Tesis doctoral, Universidad de Rochester*, (1983).
- [WV89] H. Wu y M. Vallières. "Numerical realization of the fermion dynamical symmetry model". *Phys. Rev. C* **39**, 1066, (1989).
- [WWCM77] R.R. Whitehead, A. Watt, B.J. Cole y I Morrison. "Computational methods for shell-model calculations". *Adv. Nucl. Phys.* **9**, 123, (1977).
- [Wyb74] B.G. Wybourne. "*Classical groups for physicist*". Wiley, New York, (1974).
- [YAA86] N. Yoshinaga, Y. Akinama y A. Arima. "*sdg* interacting-boson model applied to  $^{168}\text{Er}$ ". *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1116, (1986).
- [YAA88] N. Yoshinaga, Y. Akinama y A. Arima. "*sdg* interacting-boson model in the  $SU(3)$  scheme and its application to  $^{168}\text{Er}$ ". *Phys. Rev. C* **38**, 419, (1988).
- [Zwa85] D. Zwarts. *Comp. Phys. Comm.* **38**, 565, (1985).

José Enrique García Ramos  
"EXTENSIONES DEL MODELO DE BORONES EN INTERACCION  
PARO SU APLICACION A PROCESOS AGRICOLAS DE ESTRUCTURAS  
NUCLEARES".

Sobreseiente cum laude por

unanimidad

7

1940

99

