

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN



**CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO POR
FUTUROS PROFESORES DE INFANTIL EN UNA TAREA
FORMATIVA SOBRE LA DEFINICIÓN DEL RECTÁNGULO**

Investigación en el ámbito de la educación

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Educación Infantil

Alumna: Elena Escalona Hoya

Tutora: María de la Cinta Muñoz Catalán

Curso 2022-2023

Resumen

Este trabajo consiste en un estudio exploratorio de naturaleza cualitativa que trata de identificar el conocimiento movilizado por futuros profesores de Educación Infantil a través de una tarea formativa grupal sobre la definición del rectángulo en la asignatura obligatoria "Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil". Se utiliza como base el MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) y su concreción a la etapa de infantil, además del papel de la definición matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los resultados muestran la importancia de que el profesor de Educación Infantil posea un conocimiento matemático sólido, pues se ha evidenciado carencias en este subdominio (MK), explicadas por la escasa formación matemática en el Grado de Educación Infantil.

Palabras clave: MTSK; construcción de una definición; Educación Infantil; futuros profesores; tarea formativa.

Abstract

This work consists of an exploratory study of qualitative nature that tries to identify the knowledge mobilized by future teachers of Early Childhood Education through a formative group task on the definition of the rectangle in the compulsory subject "Development of Early Childhood Mathematical Thinking". The MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) and its application to the early childhood stage, as well as the role of mathematical definition in the teaching-learning process, are used as a basis. The results show the importance of the Early Childhood Education teacher having a solid mathematical knowledge, since it has been evidenced that there are deficiencies in this subdomain (MK), explained by the scarce mathematical training in the Early Childhood Education Degree.

Keywords: MTSK; construction of a definition; Early Childhood Education; future teachers; formative task.

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| 1.Introducción | 1 |
| 2.Marco teórico | 2 |
| 2.1 El modelo MTSK desde el enfoque de la educación infantil | 2 |
| 2.2 La importancia de la definición en la adquisición de un concepto geométrico..... | 6 |
| 3.Objetivos | 7 |
| 4.Metodología de la investigación | 8 |
| 5.Resultados y discusión | 12 |
| 6.Conclusiones | 24 |
| 7.Referencias bibliográficas | 27 |
| ANEXO 1: Guion del taller..... | 31 |
| ANEXO 2: Informes de los talleres grupales..... | 42 |
| ANEXO 3: Análisis individual de los informes..... | 88 |

1.Introducción

El trabajo de investigación que se presenta está enmarcado en la línea de investigación “Conocimiento y desarrollo profesional del (Futuro) profesor de matemáticas” que se desarrolla actualmente en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Sevilla. Este proyecto está vinculado a la asignatura obligatoria Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil, ubicado en el segundo curso del Grado en Educación infantil. El objetivo de este proyecto de investigación es identificar el conocimiento especializado que estudiantes para maestro de dicho grado movilizan cuando resuelven una tarea profesional sobre la definición del rectángulo.

La investigación sobre el conocimiento del profesor de Educación Infantil es relativamente escasa y está ganando un interés creciente en la comunidad de investigadores del área de Didáctica de la Matemática. En España, la red MTSK (<https://redmtsk.net/>), reconocida por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado (AUIP) desde 2020, tiene entre sus objetivos comprender el conocimiento especializado del profesor de todas las etapas. Desde la Universidad de Sevilla, se está liderando la preocupación por particularizar este objetivo al caso del profesor de la etapa de educación infantil, existiendo algunos avances al respecto: (Muñoz-Catalán et al., 2017; Muñoz-Catalán, Joglar, Ramírez y Liñán, 2019; Muñoz-Catalán, Joglar et al., 2019; Muñoz-Catalán et al., 2021).

Una de las preocupaciones de dicha red MTSK es responder a preguntas relevantes de la Didáctica de la Matemática respecto del profesor, utilizando para tal fin el modelo teórico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK, Carrillo et al., 2018), un modelo analítico que avanza respecto de las contribuciones de Shulman y Ball et al. (2008), cuyo propósito fundamental es comprender qué conocimiento tiene/necesita el profesor de matemáticas para el desempeño de su labor docente.

Tomando como referencia lo anterior mencionado, se desarrolla este estudio de gran importancia, pues permite conocer las limitaciones y potencialidades sobre el conocimiento matemático y pedagógico del futuro profesor de infantil, teniendo en cuenta la escasa formación matemática que reciben en la etapa universitaria.

Para llevar a cabo esta investigación se les facilitó a futuros profesores de Infantil una tarea sobre la definición del rectángulo (véase en el Anexo 1) que debían completar por grupos, se seleccionaron cinco de estos informes (véase en el Anexo 2) y se analizaron individualmente (véase en el Anexo 3). Posteriormente se hizo un análisis global con los resultados obtenidos de

cada informe individual y se plasmó en el apartado 5 “Resultados y discusión”. En el apartado 4 “Metodología” se encuentra la explicación del proceso detallado.

2.Marco teórico

2.1 El modelo MTSK desde el enfoque de la educación infantil

“*The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge*” (MTSK), traducido al español como “*Conocimiento Específico del Profesor de Matemáticas*” (Carrillo *et al.* 2018), cumple una doble función: es tanto una propuesta teórica que modela las bases del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, como una herramienta metodológica que analiza a través de sus categorías la práctica de este profesional (Flores *et al.* 2013).

Este modelo surge tras décadas de investigación sobre qué conocimiento debe poseer un profesor de matemáticas, tomando sus principios en Shulman (1986), el cual plantea la necesidad de considerar la especificidad del contenido que está enseñando (Muñoz-Catalán *et al.*, 2015), por lo que distinguió tres dominios principales, el *Conocimiento de la materia (SMK)*, el *Conocimiento pedagógico del contenido (PCK)* y el *Conocimiento curricular (CK)*, siendo la aportación más relevante la inclusión de los dos primeros mencionados como rasgo definidor del conocimiento de los profesores (Carrillo *et al.* 2018).

Otro modelo destacado posterior al de Shulman, es el creado por Ball *et al.* (2008) denominado *MKT (Mathematical Knowledge for Teaching)*, el cual centra su atención en la práctica realizada en el aula, ignorando el conocimiento que los profesores pueden poner en juego al realizar cualquier otro tipo de actividad como docente (Carrillo *et al.* 2018). Una de las mayores contribuciones de este modelo fue el reconocimiento de un tipo de conocimiento exclusivo de los profesores (SCK), basado en la idea de que la enseñanza requiere un conocimiento especializado que otras profesiones no tienen (Carrillo *et al.* 2018). Sin embargo, la especificidad se refiere solo a un subdominio y ese modelo presentaba problemas de delimitación entre subdominios, entre otros problemas (ver Carrillo op. Cit).

Regresando al modelo MTSK (*figura 1*), este conserva la dicotomía establecida por Shulman (1986) entre “Conocimiento del contenido” (renombrado como “Conocimiento matemático” (MK)) y “Conocimiento didáctico del contenido” e incluye, además, “el dominio de las creencias y concepciones, como elementos que permean y definen la organización y el uso del conocimiento” (Muñoz-Catalán *et al.*, 2015, p.1807).

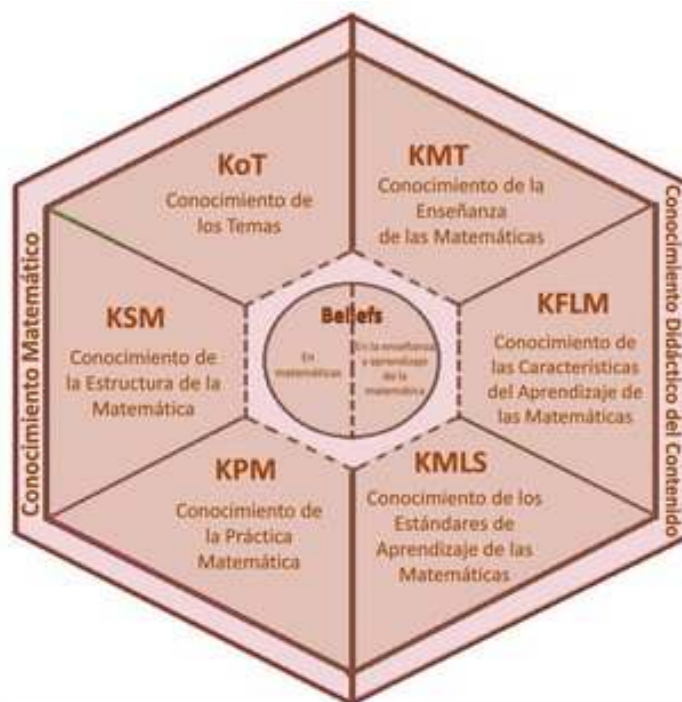


Figura 1: Representación gráfica del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El dominio MK resulta útil para comprender qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de infantil (Carrillo *et al.*, 2014), pues en esta etapa, pese a su aparente sencillez, se requiere un firme conocimiento de este dominio (Muñoz-Catalán *et al.*, 2022). Incluye los siguientes subdominios:

KoT (Conocimiento de los temas) “describe el qué y el cómo conoce el profesor de matemáticas los temas que enseña; implica un conocimiento profundo del contenido matemático” (Carrillo *et al.*, 2018, p. 11). En la Educación Infantil cobra mayor importancia que el docente describa cómo conoce los temas que enseña, dejando en un segundo plano el qué conoce, es decir, se deberá centrar en “cómo caracteriza la esencia matemática de los contenidos que trabaja, qué rasgos valora como definitorios y cuáles como accesorios, y qué sabe sobre el papel que juegan en la construcción del propio concepto matemático” (Muñoz-Catalán *et al.*, 2022, p. 246). Esta adaptación se debe a que en la etapa de Infantil el conocimiento se explica utilizando el contexto del niño y se omite la terminología precisa y formal propia de las matemáticas en etapas más avanzadas.

De las cuatro categorías contempladas en este subdominio (procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación; fenomenología y aplicaciones), destaca en la etapa de Educación Infantil *definiciones, propiedades y sus*

fundamentos, ya que el docente solicita un conocimiento formal de los temas, debido a una carencia de estos, buscando mejorar su enseñanza. También destaca *registros de representación*, incluyendo los siguientes tipos: modelos manipulativos, gráficos, situaciones reales, lenguaje verbal y símbolo matemático.

Un ejemplo de KoT es que el docente conozca que el término “paralelogramo” ya implica los conceptos de “cuadrilátero”, “polígono” y “figura plana cerrada”.

KSM (Conocimiento de la estructura matemática) abarca los saberes sobre las conexiones y relaciones que existen entre diferentes objetos o elementos matemáticos, por lo que incluye cuatro tipos de conexiones; *conexiones de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares*. Aunque, en la etapa de Infantil, solo se han evidenciado las dos primeras, posiblemente por encontrarse al comienzo del proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo que se propone identificarlas como una única categoría.

La implementación de estas conexiones “permiten, respectivamente, comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales desde una perspectiva avanzada” (Muñoz-Catalán *et al.*, 2022, p.240)

Un ejemplo de KSM es que la identificación de propiedades del rectángulo está conectada con la clasificación de poliedros, puesto que para clasificar figuras se requiere identificar atributos o propiedades.

KPM (Conocimiento de la práctica matemática) contempla el conocimiento sobre las características de la actividad matemática, “la caracterización de este subdominio para esta etapa debe considerar, por un lado, que el conocimiento del profesor está ligado a las matemáticas que desarrolla en su clase y, por otro lado, que es una etapa generadora de los cimientos del conocimiento y razonamiento matemático” (Muñoz-Catalán *et al.*, 2022, p.241). Sobre este subdominio aún se está estudiando la organización de los descriptores en categorías, sin embargo, se han propuesto algunos indicadores: *Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; Formas de validación y demostración; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; Prácticas particulares del quehacer matemático; condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*. De estos, los únicos evidenciados en la etapa de infantil son, *Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas* y *Papel de los símbolos y uso del lenguaje*, mayoritariamente este último, pues esta es una etapa donde surge el lenguaje.

Además, se introduce un nuevo indicador en Educación Infantil, *formas de génesis epistemológica* (Muñoz-Catalán *et al.*, 2017), ya que, en la etapa infantil es necesario concebir las prácticas matemáticas como formas de promover el conocimiento matemático.

Un ejemplo de KPM es que el profesor de Infantil conozca que la identificación de propiedades de una figura geométrica es una práctica precursora de la construcción de una definición, o que la comparación entre el cuadrado y otras figuras próximas (triángulo o prisma de base cuadrada) es importante para poder identificar las propiedades del rectángulo a partir de las similitudes y diferencias con ella

El dominio PCK incluye la caracterización propia de la labor de la enseñanza de las matemáticas, más que tratarse de la intersección entre el conocimiento matemático y el pedagógico general, se trata de un tipo específico de conocimiento pedagógico que se deriva principalmente de las matemáticas (Carrillo J *et al.*, 2018). En Muñoz-Catalán *et al* (2022) se especifica la caracterización de la etapa de Infantil sobre los subdominios y categorías exclusivamente del dominio MK, pues es en este dominio donde existe mayor limitación para identificar y expresar los aspectos característicos del conocimiento del profesor de Infantil. Por lo que a continuación se contemplan los subdominios del PCK de forma general:

KFLM (Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas) comprende el conocimiento referido al pensamiento, comprensión y formas de actuar del alumnado ante contenido matemático. La experiencia personal es la que brinda mayor conocimiento dentro de este subdominio, ya que, incluye entre sus *indicadores teorías sobre aprendizaje* (que pueden ser formales como personales), *fortalezas y dificultades* que pueda presentar el alumnado, *las formas de interacción con un contenido matemático* y los *intereses y expectativas*.

Un ejemplo de KFLM es que el docente conozca los niveles de razonamiento geométrico expuestos en la teoría de Van Hiele, la cual le permite conocer cómo percibe su alumnado los aspectos implicados en la geometría.

KMT (Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas) abarca los saberes sobre teorías específicas (formales o informales), el potencial presente en actividades, las estrategias, técnicas, recursos y materiales didácticos enfocados en la enseñanza de las matemáticas.

Un ejemplo de KMT es que el profesor conozca que la comparación entre figuras geométricas distintas ayuda al alumnado a identificar los atributos presentes.

KMLS (Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas) engloba los saberes referidos a aspectos curriculares de la enseñanza de las matemáticas, tanto relacionados

con el nivel de construcción, comprensión y uso de las matemáticas del alumnado, como de la enseñanza de los contenidos matemáticos teniendo en cuenta los niveles escolares.

Un ejemplo de KMLS es que el profesor conozca que la definición de una figura geométrica en la etapa de infantil se debe entender como un listado de propiedades, para aclarar así la comprensión de las características relacionadas.

2.2 La importancia de la definición en la adquisición de un concepto geométrico

Compartimos con Sánchez et al (2008) el modo en el que interpretan definir como el proceso para llegar a establecer una definición, considerando que esta última prescribe el significado de una palabra o frase en términos de una lista específica de características que deben ser verdaderas.

El proceso de definir se considera una actividad matemática que logra crear una experiencia de aprendizaje significativa (Zandieh y Rasmussen, 2010). Es altamente educativo e interesante que sea el alumno/a quien elabore una definición por su propia actividad, estimulada por preguntas apropiadas (Griffiths y Howson, 1974). Asimismo, puede proporcionar oportunidades para que los estudiantes aprecien la arbitrariedad de las definiciones y expliciten las características de las definiciones “buenas” y/o útiles (Zaslavsky y Shir, 2005).

Según Vinner (1991) existen dos factores que representan un papel fundamental en la adquisición de un concepto geométrico; la *definición del concepto* y la *imagen del concepto*, principalmente la última mencionada.

La *imagen del concepto* se entiende como el conjunto de figuras, dibujos o representaciones mentales que se recuerdan como ejemplos del propio concepto, unido a las propiedades que se asocian a este. Por otro lado, la *definición de un concepto* se refiere a la repetición verbal memorizada de un concepto, aunque, no se obtiene una interiorización ni comprensión de las características de dicha definición (Gutiérrez y Jaime, 1996). No obstante, el profesorado suele centrarse más en las definiciones que en los ejemplos, sin conocer que, ofrecer un amplio abanico de ejemplos de un concepto produce un efecto mental más profundo y duradero. “La definición de un concepto expresada por un estudiante no tiene por qué estar ligada operativamente a su imagen de ese concepto en el momento de la realización de tareas” (Gutiérrez y Jaime, 1996, p.5).

Existen varias investigaciones que detallan los atributos que debe cumplir una definición matemática para que se considere válida, no obstante, se tomará como referencia los destacados en Escudero *et al* (2014).

Concretamente resaltan siete atributos: jerarquía (precisión en cuanto a los términos usados); no circularidad (no existe referencia del propio concepto en la definición); minimalidad (ninguna característica mencionada genera redundancia); no ambigüedad (los objetos que pertenecen a una clase se entienden de forma clara); no contradictoria (características consistentes, no contrarias); invariante bajo el cambio de representación (al variar la forma de representación o registro no se alteran las características del objeto) y equivalencia (se dan distintas formulaciones de un mismo concepto).

Aunque la construcción de definiciones (definir) es una actividad matemática no menos importante que otros procesos como resolver problemas, hacer conjeturas, generalizar, especializar o demostrar, se ha descuidado en la mayor parte de la enseñanza de las matemáticas (De Villiers, M, 1998).

3.Objetivos

Este estudio tiene como objetivo principal identificar el conocimiento especializado que movilizan los futuros profesores de Educación Infantil en una tarea sobre la definición del rectángulo.

Entre los objetivos específicos se encuentran:

- Conocer las características que señalan los futuros profesores de infantil sobre una definición (*KoT: definiciones y propiedades*) y el papel que juegan los distintos tipos de atributos de un concepto (relevante, irrelevante e incorrectos) en esta (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).
- Comprender cómo desarrollan los futuros docentes la práctica de definir (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*) y su adaptación a la etapa de Infantil, teniendo en cuenta la teoría sobre el aprendizaje de conceptos geométricos de Van Hiele (*KFLM: teorías sobre aprendizaje*) y las definiciones esperadas según el nivel (*KMLS: expectativas*).
- Identificar qué conjuntos de imágenes destacan los futuros docentes como potentes para ayudar al alumnado de Infantil en la construcción de una definición (*KMT: ejemplos y estrategias*).
- Identificar cómo diferencian los futuros profesores la “imagen del concepto” y la “definición del concepto” (*KoT: propiedades*) y cómo destacan su influencia en el aprendizaje de conceptos geométricos (*KFLM: teorías sobre aprendizaje*).

4. Metodología de la investigación

Con el fin de responder al objetivo de investigación expresado en el apartado anterior, diseñamos esta investigación bajo un paradigma interpretativo (Bassey, 1999) porque pretendemos comprender un objeto de naturaleza social, como es el conocimiento especializado, construido por cada aprendiz como consecuencia de la interacción con su contexto personal y social (postura ontológica). Asimismo, entendemos que la comprensión resultante es una construcción que realizamos como investigadores como consecuencia de nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) (Postura epistemológica).

Esta investigación consiste en un estudio exploratorio (Bryman, 2012), que nos permite aproximarnos al conocimiento especializado de futuros profesores de Educación Infantil en una tarea con una finalidad concreta sobre la definición del rectángulo. Esta preocupación es relativamente reciente en nuestra área de investigación y esta investigación nos permitirá definir con mayor concreción los siguientes pasos a seguir.

La recogida de información se ha realizado a través de las respuestas de alumnos/as ante una tarea formativa en la asignatura obligatoria “Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil”, ubicada en el segundo curso del Grado en Educación Infantil de la Universidad de Sevilla.

Esta tarea (véase en el Anexo 1) ha sido elaborada para que los futuros maestros conozcan las características de una definición de un objeto en Matemáticas y su adaptación a la etapa de infantil, utilizando en este caso la definición del rectángulo. Además, se muestra cómo repercute el papel de la “definición del concepto” y la “imagen del concepto” al abordar la definición, así como la importancia de construir un imaginario rico y potente para ayudar al alumnado de Infantil en el proceso de generar una definición correcta en un futuro. Para conseguir todo esto, en la propia tarea se va facilitando información teórica sobre los aspectos mencionados, de esta forma, los informantes pueden comprender y contestar con mayor facilidad y precisión las preguntas.

La formadora de dicha asignatura ha diseñado esta tarea teniendo en cuenta el modelo MTSK y tratando de impulsar el subdominio KPM, que habitualmente no está presente en los programas generales de la formación del profesor de infantil. Los aspectos mencionados anteriormente se encuentran en la tarea repartidos en nueve preguntas, siendo las primeras centradas en el subdominio MK y las últimas en el PCK.

Los futuros maestros crearon grupos de cuatro a seis integrantes para la realización de esta tarea de forma conjunta, repartida en cuatro sesiones de 80 minutos y plasmando sus

respuestas en un documento de trabajo vía online (informe), que era objeto de evaluación de la asignatura.

Siguiendo el enfoque interpretativo de Kvale (1996), el análisis de los datos se ha realizado en dos fases: en la primera se han seleccionado cinco de los quince informes aportados por los grupos de futuros maestros (véase en el Anexo 2), tomando como criterio aquellos cuyo discurso fueran muy diversos entre sí, es decir, se ha intentado optar por los informes cuyo conocimiento matemático fueran alto, medio y bajo, para así poder representar a la media. No obstante, no se encontró tanta disparidad entre estos, ya que el conocimiento matemático general del alumnado es medio-bajo, por lo que, dentro de este rango, se seleccionaron los que fueran más distintos entre sí. Una vez realizado esto, se analizaron estos cinco informes de forma individual (véase en el Anexo 3), para ello se especificó el título de la pregunta, se adjuntó una imagen con las respuestas del grupo, se comparó con las herramientas de análisis (modelo MTSK y tabla de conocimiento pretendido) y se expuso el conocimiento que los futuros docentes movilizaron.

En la segunda fase se ha realizado un análisis general de los cinco grupos, resaltando los elementos más sobresalientes de cada uno (véase en el apartado 5: *Resultado y discusión*).

Como herramientas de análisis se han utilizado, por un lado, los subdominios y categorías del modelo MTSK, ya mencionado anteriormente y, además, una tabla de conocimiento pretendido (véase la *Tabla 1*) la cual contiene los subdominios y categorías del MTSK que se pretende movilizar en cada pregunta, no obstante, puede ocurrir que los futuros maestros no hayan conseguido movilizar este conocimiento o incluso hayan movilizado otro distinto.

| TABLA DE CONOCIMIENTO PRETENDIDO | |
|--|--|
| Descripción de la actividad y finalidad | Elementos de conocimiento especializado pretendido |
| 1. Definición personal de rectángulo y consensuada en grupo, considerando las características de una definición en matemáticas. Se pretende que tomen conciencia de: la imagen del concepto con que cada uno asocia el rectángulo; de cómo definen el rectángulo y de que la definición de sus compañeros no coincide con la suya. | -Definiciones del rectángulo y sus propiedades (KoT). -Representación del rectángulo (KoT, registros de representación). |
| 2. Identificación de rectángulos entre distintas figuras. Se trata de que enriquezcan su repertorio de imágenes respecto del rectángulo y sepan justificar por qué no son rectángulos las figuras que han sido excluidas. | -Identificar distintos registros de representación gráficos para el concepto de rectángulo (KoT). -Identificar ejemplos y contraejemplos del rectángulo (KoT). |
| 3. Identificación de atributos y propiedades de los rectángulos y de las figuras que no son rectángulo. | -Conocer atributos del rectángulo (KoT). |
| 4. Identificación de atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos del concepto de rectángulo. | -Conocer los atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos del concepto de rectángulo (KoT). |
| 5. Construcción de una definición considerando el papel de los distintos atributos y las características de la definición de la actividad. | -Conocer el papel que los distintos tipos de atributos juegan en el proceso de construcción de una definición (KPM). -Características de una definición matemática (KPM). -Conocer la importancia del ejemplo y contraejemplo en la construcción de un concepto (KPM). -Conocer atributos presentes en los ejemplos que son distractores para la construcción del concepto de rectángulo (KFLM, formas de interacción). -Conocer el papel limitante que el abuso de atributos irrelevantes tiene en los ejemplos utilizados para la construcción del concepto (KMT, Ejemplos). |
| 6. Valoración de distintas definiciones del concepto de rectángulo y selección de la óptima desde un punto de vista riguroso matemático (formal) y que representen la figura. | -Características de una definición matemática (KPM). -Identificar definiciones equivalentes del rectángulo (KoT). - Representación de definiciones del rectángulo (KoT) - Definiciones equivalentes y formales (KoT) -Valorar la equivalencia de definiciones de rectángulo (KPM) |
| 7. Se trabaja la idea de definición e imagen del concepto y análisis de fichas de libros de texto utilizando las nociones de definición de concepto e imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981). | a) -Conocer que proporcionar un conjunto de imágenes deliberadas del concepto de rectángulo ayuda a su construcción (KMT). a) -Saber elaborar un banco de imágenes asociadas al rectángulo rico en ejemplos y contraejemplos (KMT). b) -Conocer el papel de la imagen del concepto y la definición del concepto en el aprendizaje de los conceptos geométricos (KFLM/KMT). b) -Conocer los atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos de los rectángulos (KoT). |

| | |
|---|---|
| | <p>b)-Conocer el papel de los atributos irrelevantes en la construcción del concepto de rectángulo (KMP).</p> <p>b) -Conocer el papel limitante que el abuso de ejemplos con atributos irrelevantes tiene para la construcción del concepto (KFLM/KMT).</p> <p>b) -Saber elaborar un banco de imágenes asociadas al rectángulo rico en ejemplos y contraejemplos (KMT).</p> |
| <p>8. Lectura y comprensión de los niveles de razonamiento geométrico Van Hiele (Gutierrez & Jaime, 1998). Reflexión sobre la apariencia de la definición en Educación Infantil y diseño de actividades para ayudar a los alumnos a avanzar del nivel de visualización al de análisis</p> | <ul style="list-style-type: none"> - Conocer los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, con foco en los dos primeros niveles (KFLM). - Conocer que la identificación de propiedades es una práctica precursora de la construcción de una definición (KPM). - Conocer que la comparación entre figuras de distinta es una práctica precursora de la construcción de una definición (KPM). - Conocer que las actividades de comparar figuras ayudan a los alumnos a identificar propiedades (KMT). - Construir definiciones del concepto de rectángulo válidas para Educación Infantil (KoT). - Saber qué tipo de definición de rectángulo deben aprender los alumnos en infantil (KMLS). |

Tabla 1: Conocimiento profesional pretendido

5.Resultados y discusión

En este trabajo se presenta el análisis del conocimiento especializado movilizado por futuros profesores de Educación Infantil en una tarea formativa sobre la definición del rectángulo

Como se ha mencionado en el apartado de metodología, el guion del taller en el que se basa esta investigación se encuentra en el Anexo 1, los cinco informes con las respuestas de los aprendices a este taller en el Anexo 2 y sus respectivos análisis de forma individual en el Anexo 3.

A continuación, se detalla un análisis global de los resultados obtenidos en estos cinco informes. Se seguirá la misma estructura que en los análisis individuales, es decir, se especificará el título de la pregunta, se expondrá el conocimiento que han movilizado los aprendices y se mostrarán ejemplos de las respuestas para avalar su análisis. Para facilitar la lectura, se utilizará una abreviatura que ayude a identificar de qué grupo y pregunta se trata. Por ejemplo, la respuesta dada del grupo 1 sobre la pregunta 2 se abreviará como G.1.P.2.

Pregunta 1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

Las respuestas obtenidas en esta pregunta muestran que los futuros maestros poseen mayoritariamente una imagen del concepto muy similar (*KoT: registros de representación*), pues coinciden en una representación estándar del rectángulo: en forma horizontal, siendo la longitud del lado largo aproximadamente el doble del corto. Además, colorean la figura en tonos llamativos, principalmente azul. No obstante se dan algunas excepciones: tan solo uno de los aprendices a maestro (G.3) ha dibujado el rectángulo de forma “vertical”, aunque su lado más corto sigue siendo aproximadamente la mitad que el largo. Además, otro futuro profesor (G.4), añade volumen a su figura, representando un prisma rectangular y no un rectángulo.



Figura 2: Representación estándar del rectángulo (G.1)



Figura 3: Representación del rectángulo del futuro docente del G.3

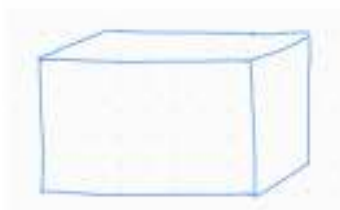


Figura 4: Representación del rectángulo del futuro docente del G.4

En cuanto a las definiciones aportadas por los grupos, principalmente coinciden en un listado de propiedades, las cuales no cumplen los atributos necesarios para verificar una definición matemática (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*), pues se observa redundancia, es decir, no cumplen con el criterio de minimalidad ni el de jerarquía. Además, en sus definiciones suelen excluir al cuadrado, pues señalan que dos de los lados paralelos de un rectángulo tienen mayor tamaño en comparación a los otros dos. Un ejemplo de esto es la definición aportada por el G.5: “*Figura geométrica cerrada o polígono de cuatro lados, paralelo e iguales dos a dos (es decir dos de sus lados paralelos son de mayor longitud, que los otros dos lados que lo componen)*”. En este caso, esta definición no cumple el criterio de minimalidad pues varias características ya incluyen a otras (“polígono” incluye “figura geométrica”, “paralelo” e “iguales dos a dos”), además excluye al cuadrado al especificar que “*dos de sus lados paralelos son de mayor longitud, que los otros dos lados que lo componen*” (*KoT: definiciones y propiedades*).

Otro ejemplo de este tipo de definición es la proporcionada por el G.4: “*Figura geométrica compuesta por cuatro lados. Sus lados son iguales dos a dos: Los lados verticales paralelos poseen un tamaño menor a los lados horizontales. Finalmente, sus lados forman cuatro ángulos rectos*” pues nuevamente se da redundancia en cuanto a los términos utilizados (“cuatro ángulos rectos” incluye “cuatro lados”). Además, en este caso, no solo excluyen al

cuadrado al mencionar que “*Los lados verticales paralelos poseen un tamaño menor a los lados horizontales.*”, sino que conciben la figura del rectángulo con una posición invariable, puesto que señalan que los lados de menor tamaño son los verticales y los de mayor tamaño los horizontales (*KoT: definiciones y propiedades*).

Sin embargo, solo un grupo ha aportado una definición matemáticamente correcta (G.3), la cual cumple todos los atributos para su verificación: “*Es un paralelogramo con las dos diagonales iguales*”. En ella, se puede comprobar la jerarquía, pues incluyen términos precisos como “paralelogramo”, se da la minimalidad y no es contradictoria (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

Pregunta 2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndonos a ellas según el número asignado:

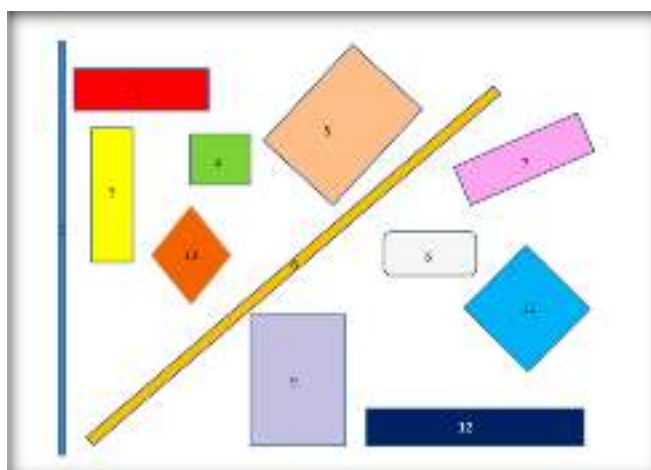


Figura 5: Ejemplos de la pregunta 2

En general, se aprecia que los futuros maestros desconocen el significado de los atributos del rectángulo que emplean, pues se dan contradicciones entre las definiciones y las clasificaciones aportadas (*KoT: propiedades*). Por ejemplo, el G.1 no excluye al cuadrado en su definición, sin embargo en la clasificación señala la figura 11 como ejemplo de no rectángulo.

Por otro lado, la clasificación de las otras figuras ejemplos de no rectángulos (figura 13 y 8) suele ser correcta y su justificación acertada, haciendo uso de un lenguaje formal: por ejemplo, el G.3 señala que la figura 8 no es un ejemplo de rectángulo “porque sus ángulos no son rectos”, aunque el G.4 utiliza el término “esquinas” en lugar de “vértices”, no haciendo uso de la terminología precisa (*KPM: uso del lenguaje formal*).

Pregunta 3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

Existe redundancia en la mayoría de los atributos que destacan los grupos como ejemplo de rectángulo, por ejemplo, el G.2 incluye “4 vértices” y “4 lados”, el G.4 “4 lados”, “4 vértices”, “lados paralelos” y “líneas rectas”, además es poco común el uso de terminología precisa como “paralelogramo” o “cuadrilátero” (*KoT: propiedades*).

Por otro lado, algunos futuros profesores han incluido en su discurso al cuadrado como tipo de rectángulo, por ejemplo, el G.2 especifica como característica del rectángulo: “*Generalmente, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos*”, en este caso, al añadir “generalmente” el grupo entiende que la afirmación “*dos lados paralelos más largos que los otros dos*” no se da en todos los tipos de rectángulo (*KoT: propiedades*). Aun así, en la mayoría de los grupos siguen excluyendo al cuadrado, por ejemplo, el G3 especifica como ejemplo de rectángulo: “*lados contiguos de distinta medida*”, el G.4: “*El lado más largo es aproximadamente el doble del otro*”, el G.5: “*Dos de los lados son más largos que los otros dos*” (*KoT: propiedades*).

Además de esto, el G.4 también incluye como ejemplo de no rectángulo “*los ángulos no miden 90 grados (algunos son redondeados)*”, sin embargo, no existen los “ángulos redondeados” (*KoT: propiedades*). Este grupo aporta dicha afirmación al observar las características de la figura 8 de la actividad anterior, la cual clasifican como ejemplo de no rectángulo, justificándolo nuevamente sin hacer uso del lenguaje formal, pues señalan que “sus esquinas son curvas y no forman cuatro ángulo rectos” (*KPM: uso del lenguaje formal*).

Pregunta 4. Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación: (Atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos).

Se observa cierto desconocimiento global en cuanto a los términos referentes al rectángulo que dificultan la clasificación de atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos (*KoT: propiedades*), por ejemplo, el G.1 especifica “*misma longitud de los lados opuestos*” como atributo relevante y “*distinta longitud de los lados opuestos*” como atributo incorrecto, sin embargo, el primer atributo se da en todos los rectángulos, incluyendo al cuadrado y el segundo, es una propiedad no necesaria del concepto, es decir, puede aparecer o no en los ejemplos del rectángulo, por lo que este último sería un atributo irrelevante y no, incorrecto (*KoT: propiedades*). En este caso el G.2 sí señala estas mismas características de forma correcta, pues indica como atributo relevante “*Lados opuestos de la misma longitud*” y como irrelevante “*Dos*

lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos". En el G.4 se observa una contradicción pues mencionan "*longitud de los lados*" como atributo irrelevante y "*los lados opuestos tienen igual medida*" como relevante, pues si el segundo es relevante, el primero no puede ser irrelevante.

Por otro lado, contemplamos que, a niveles generales, salvo las características que excluyen al cuadrado, los atributos que señalan como relevantes sí se dan en la figura del rectángulo; no obstante, se da una gran redundancia en la mayoría de ellos. Por ejemplo, el G.1 incluye el atributo "*los 4 vértices forman ángulos rectos*", por lo que no haría falta volver a especificar que tiene "*4 vértices*", asimismo "*tiene 4 lados*" ya contiene que esté "*formado por líneas rectas*".

Pregunta 5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como "relevantes". ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

La identificación de los atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos del rectángulo en la actividad anterior le ha servido a la gran mayoría de los grupos para reorganizar sus ideas y mejorar la identificación de elementos significativos del rectángulo, generando así que no incluyan atributos incorrectos en las nuevas definiciones (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*). Por ejemplo, el G.1 indica que un rectángulo "*es una figura geométrica y cerrada, la cual consta de cuatro lados y cuatro vértices, los lados son de igual tamaño que su opuesto, es decir sus lados opuestos son paralelos y los ángulos y líneas son rectos*" y el G.4 que "*es una figura geométrica de 4 lados. Estos lados son paralelos dos a dos y son iguales en cuanto a su medida. Sus lados forman cuatro ángulos de 90 grados, tiene cuatro vértices y está compuesto por líneas rectas*", se puede observar que, estos grupos no han añadido ningún atributo incorrecto. No obstante, al haber incluido todos los atributos relevantes en la nueva definición, se ha generado mayor redundancia, por lo que, ninguna de las definiciones aportadas cumple el criterio de minimalidad (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*). Incluso el G.3, cuya primera definición era matemáticamente correcta "*es un paralelogramo con las dos diagonales iguales*", ha añadido más atributos en la nueva definición "*es una figura geométrica, un paralelogramo, con los cuatro ángulos rectos*", generando así que esta no cumpla la minimalidad. Aunque posiblemente este grupo aportara la primera definición tras observarla en alguna fuente de internet.

Por otro lado, los futuros profesores señalan que sus definiciones cumplen todos los atributos para que sean válida matemáticamente. Sin embargo, constatamos que no conocen el

significado de estos atributos en profundidad, pues ninguna de las definiciones los cumple (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*). Por ejemplo, el G.5 indica que “*hemos comparado con los atributos de la tabla 1 y estos coinciden siendo una definición que sigue una jerarquía, no tiene circularidad, no queda ni redundante ni ambigua, no es contradictoria, no es invariante a pesar de que la figura cambie de forma y puede ser equivalente a otras definiciones que se puedan dar*”, sin embargo, al revisar la definición que han aportado “*Figura geométrica cerrada o polígono de cuatro lados (delimitado por cuatro líneas rectas), paralelos e iguales dos a dos. Sus lados se juntan en vértices formando ángulos rectos*” observamos que no existe jerarquía, pues los términos que han usado no son del todo precisos, además no cumple la minimalidad pues destacan varias características que pueden deducirse de otras como “paralelos” e “iguales dos a dos” o “cuatro lados” y “cuatro líneas rectas”.

Pregunta 6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.

DEFINICIÓN 1: Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.

DEFINICIÓN 2: Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

DEFINICIÓN 3: Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.

DEFINICIÓN 4: Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.

A partir de esta actividad se observa una mejora significativa en el discurso de todos los futuros maestros de Infantil. Esto se puede deber a que la formadora de la asignatura fue realizando una corrección de estas actividades en el aula. Entre estos cambios destaca que los aprendices reconocen en su totalidad las definiciones que incluyen atributos redundantes y saben justificar el por qué (*KPM: Condiciones necesarias para generar definiciones*). Por ejemplo, el G.2 señala lo siguiente de la definición 2: “*debemos destacar también que se trata de una definición redundante, porque ser un cuadrilátero con ángulos rectos ya implica que los lados*

sean paralelos y que estos tengan la misma longitud” y el G.3 lo siguiente de la definición 3: “Esta definición de rectángulo es redundante, incluye todo tipo de rectángulos, pero la idea de cuatro lados ya está incluida en el término de paralelogramos, por lo que se podría omitir”. Además de esto, ya reconocen al cuadrado como un tipo de rectángulo e incluso clasifican las definiciones en base a si son excluyentes o no del cuadrado (KoT: propiedades), (G.2: “hay dos tipos de definiciones: inclusivas (en el caso de la definición de “rectángulo”, incluye también al cuadrado) o exclusivas (no incluye al cuadrado)”).

A pesar de este avance siguen existiendo algunas particularidades, como el caso del G.1 y G.4, en el que representan la tercera definición usando la figura de un romboide, sin embargo, en esta se deja muy claro que sus ángulos son rectos, por lo que suponemos que atribuyen la misma propiedad de “línea recta” a “ángulo recto” (KoT: propiedades).



Figura 6: Representación de la 3° definición por el G.1 y G.4

Pregunta 7. Según Tall y Vinner (1981), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

Definición de un concepto: Se refiere a la definición formal matemática del concepto

Imagen del concepto: Se refiere a cómo se refleja dicho concepto en la mente de la persona; es el producto de los procesos mentales de formación del concepto e incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumno se encuentra con nuevos estímulos.

a) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Los futuros profesores coinciden en que los ejemplos de la pregunta 2 son adecuados para que el alumnado tenga una imagen rica del rectángulo, aunque especifican la mayoría de ellos que se debería de añadir más contraejemplos (*KMT: ejemplos*): G.1 indica que “*Pensamos que la imagen de la pregunta 2, si es adecuada para representar un imagen rica del rectángulo, pero no está del todo completa, ya que, faltarían algunos ejemplos para que el niño/a pueda compararlos entre ellos y pueda formar una imagen aún más rica*”, G.4 “*También sería adecuado trabajar con contraejemplos, que son figuras que tienen atributos incorrectos y que, por tanto, ayudarán al alumno a clarificar la idea y concepto de lo que es un rectángulo*”. Esto demuestra que los aprendices conocen que proporcionar un conjunto de imágenes variadas y ricas del concepto de rectángulo ayuda a su construcción, así como el uso de contraejemplos para clarificar este concepto (*KMT: ejemplos*). Además, el G.4 especifica la importancia de ofrecer al alumnado ejemplos manipulativos para que la comprensión del concepto sea mucho más significativa: “*Como docentes, debemos incluir ejemplos muy ricos y manipulativos, ya que los niños construyen la imagen del concepto antes que su definición*” (*KMT: recursos materiales y estrategias*).

Por otro lado, indican que no existen figuras redundantes, pues las figuras similares también son importantes para la enseñanza del alumno, por ejemplo el G.2 señala: “*Podríamos considerar que, por ejemplo, los rectángulos 1, 3 y 7 son redundantes por tener la misma longitud en sus lados. Sin embargo, nosotras pensamos que al estar en posiciones distintas ayudan a entender que el rectángulo no debe estar siempre posicionado de la misma forma, por lo que no serían redundantes*”. Esto refuerza de nuevo la idea que tienen de ofrecerles al alumnado un imaginario rico del rectángulo (*KMT: ejemplos*).

Aunque todos los grupos coinciden en añadir ejemplos para completar los mostrados en la pregunta 2, la mayoría añaden figuras con atributos redundantes (*KMT: ejemplos*). Por ejemplo, el G.3 (figura 7) y el G.5 (figura 8). Además, varios grupos indican la importancia de añadir contraejemplos para completar el conjunto de figuras de dicha pregunta. No obstante, solo un grupo (G.2) incluye contraejemplos con atributos importantes para la etapa de Infantil, es decir, figuras abiertas, tridimensionales o sin superficie: “*podríamos incluir: romboides, más rombos, óvalos, figuras de cuatro lados abiertas, figuras que se parezcan a un rectángulo pero que estén abiertas, figuras que tengan la forma de rectángulo pero sin superficie, una figura que no tenga cuatro lados, etc*”. Sin embargo los demás grupos no aclaran los ejemplos o no resultan del todo claros. Por ejemplo el G.1 “*por ejemplo, añadir a la imagen algunos elementos que tengan características diferentes como figuras con diferentes superficies..etc*”.



Figura 7: Ejemplos de rectángulos
aportado por el G.3

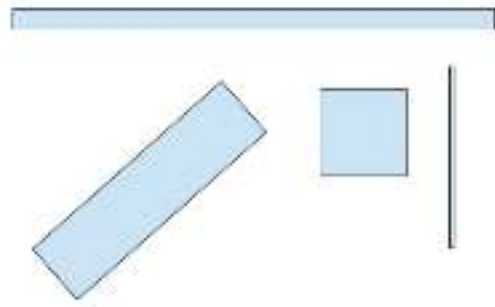


Figura 8: : Ejemplos de rectángulos
aportado por el G.5

b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.

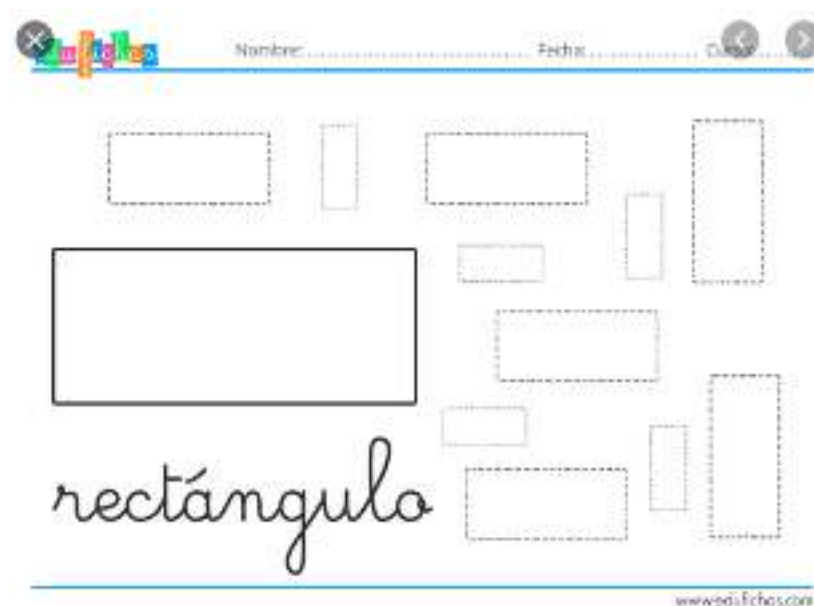


Figura 9: Ficha sobre el rectángulo

Los futuros maestros opinan que esta ficha no es adecuada para trabajar el concepto de rectángulo, la mayoría de ellos especifica que refuerza la imagen típica de rectángulo, pues solo se representa gráficamente la misma figura variando su posición y tamaño (KoT: propiedades). Por ejemplo, el G.2 indica que “En esta ficha se transmite una sola idea de rectángulo, ya que se plantean figuras con la misma forma en las que solo se cambia la posición (horizontal/vertical) y el tamaño”.

Indican los atributos relevantes e irrelevantes, coincidiendo que, entre los relevantes se encuentran “4 lados”, “4 vértices”, “ángulos rectos”, “líneas rectas”, “lados iguales 2 a 2”, “lados paralelos”, siendo algunos de estos redundantes como los dos primeros y los dos últimos (*KoT: propiedades*). En cuanto a los irrelevantes no todos los grupos lo especifican, no obstante, el G.1 menciona que refuerza “posición y tamaño” y el G.4 “el lado más largo es aproximadamente el doble que el otro, así como si está horizontal o vertical” (*KoT: propiedades*).

Tan solo el G.2 destaca que esta ficha “Refuerza atributos relevantes del rectángulo, pero al presentar la ficha una sola visión del rectángulo también hace que asumamos los atributos irrelevantes como relevantes (por ejemplo, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos, normalmente posicionado de forma horizontal y que los dos lados más largos sean el doble que los otros dos más cortos)”, significando esto que conocen el papel limitante que el abuso de atributos irrelevantes tiene en los ejemplos utilizados para la construcción del concepto por parte del alumnado (*KFLM: dificultades*).

Por otro lado, algunos grupos incluyen una propuesta de imágenes para completar la ficha, en la que se encuentran una gran diversidad de rectángulos, aunque no han incluido ningún contraejemplo (*KMT: ejemplos*).

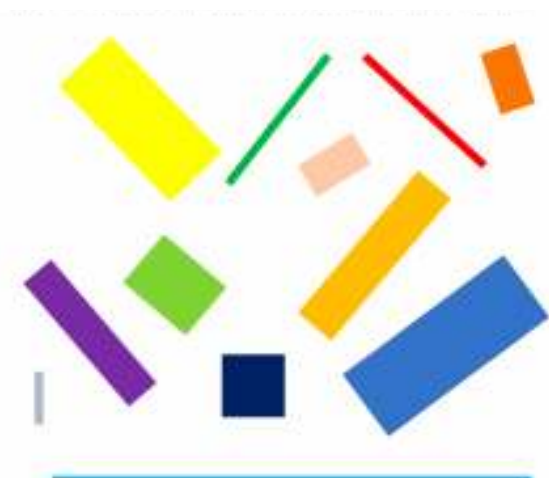


Figura 10: Propuesta de rectángulos del G.3

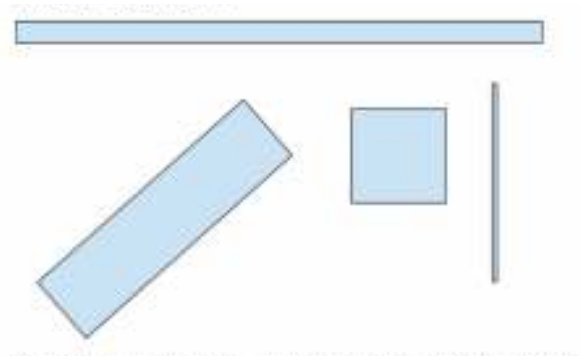


Figura 11: Propuesta de rectángulos del G.5

No obstante, el G.1, añade entre sus propuestas de rectángulo, una figura (romboide) que no cumple las características de este. Además también añadió esta misma imagen en la actividad 6, por lo que se deduce que no conocen en su totalidad los atributos del rectángulo (*KoT: propiedades*)



Figura 12: Propuesta del G.1 como ejemplo de rectángulo

Pregunta 8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018). Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

Teniendo esto en cuenta:

- a) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?

Los futuros docentes expresan la apariencia que tiene una definición en Infantil, algunos de ellos aplicando la teoría de Van Hiele (G.3 “*Los alumnos en educación infantil pueden encontrarse en el nivel 0 (visualización o reconocimiento) o en el nivel 1 (análisis), por tanto las definiciones se encontrarán acordes a los niveles de Van Hiele en los que se encuentren. Los que se encuentran en nivel 0 tendrán definiciones en las que describirán la figura geométrica a partir de su apariencia física...*”). Sin embargo, otros no han utilizado esta teoría, que fue facilitada en el propio informe, o incluso han elaborado un pequeño resumen de esta sin aplicarla a la definición. Por ejemplo el G.1 indica “*Un concepto matemático en Educación Infantil, (aunque estos autores defienden que no está relacionado con la edad, si no, con el conocimiento que tenga cada uno, por los niveles que el niño/a ha pasado, estando en el nivel 0 y teniendo que impulsarlos hasta el 1). Lo normal es estar en el nivel 0, ya que, es en este ciclo cuando empiezan a tomar contacto con las figuras geométricas, por lo que, perciben los objetos como una unidad, sin diferenciar sus atributos ni componentes y lo describen por su apariencia física y lo relacionan con elementos familiares*” (KFLM: teorías sobre la enseñanza).

La mayoría de los futuros profesores coinciden en que la apariencia de la definición en la etapa de Infantil se limita a un listado de atributos, sin importar la redundancia, por lo que destacan qué definiciones deben utilizar los maestros de infantil para su alumnado (G.3: “*definición que tienen que usar los docentes en educación infantil, son aquellas en las que deben de aparecer el máximo número de atributos posibles, principalmente deben ser atributos relevantes*”)

b) Particularizando al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

En las respuestas a esta pregunta existe mayor diversidad de opiniones. Generalmente los futuros maestros han mencionado la definición que sería aceptable en Infantil (KMLS: *expectativas de aprendizaje*) según el Nivel 0 o 1 de la teoría de Van Hiele en el que se encuentre el alumnado (KFLM: *teorías sobre aprendizaje*). Por ejemplo, el G.1 indica que la definición aceptable para los alumnos que se encuentran en el nivel 0 es “un rectángulo es la mesa de la profesora” y el G.3 “Un rectángulo es como la puerta de la clase”, ambas definiciones parecidas y teniendo en cuenta las características perceptivas y físicas presentes en este nivel, por lo que han sabido elaborar definiciones válidas para Infantil (KoT: *definiciones*). Por otro lado, hay grupos que no atienden a la teoría proporcionada y expresan una definición no acorde a lo mencionado en la pregunta anterior, como es el caso del G.5, en el que indicaba la importancia

de la no minimalidad en las definiciones de esta etapa, sin embargo, en la suya aportada no se muestra lo dicho: “Figura cerrada que tiene líneas rectas que se cortan formando cruces dando lugar a las cuatro esquinas” (KoT: propiedades).

c) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

Los aprendices han elaborado una gran cantidad de actividades muy diversas y creativas. Algunos grupos proponen actividades manipulativas para comprender el concepto de rectángulo (KMT: recursos materiales), por ejemplo el G.1 propone una actividad de construcción, en la que el alumno tiene que elaborar un rectángulo con plastilina y palillos, no obstante, destaca algunas desventajas del material: “Aunque esta actividad puede tener algunos inconvenientes como no trabajar la superficie...” (KFLM: dificultades).

Algunos grupos describen las actividades sin mencionar el objetivo que persigue, no obstante otros grupos lo especifican en profundidad, por ejemplo, el G.2 plantea una actividad de comparación entre objetos, destacando: “para que los alumnos clasifiquen/agrupen las figuras y establezcan relaciones entre ellas, obligándoles así a centrarse en sus propiedades físicas (de esta manera, se trabajaría el nivel 1 de Van Hiele, ya que los niños pasarían de identificar las figuras como un todo a verlas como algo compuesto por diferentes atributos)”, por lo que este grupo conoce que las actividades de comparar figuras ayudan a los alumnos a identificar propiedades (KMT: estrategias). También plantea otra actividad que consiste en describir figuras geométricas y que un compañero lo dibuje, de este modo, la identificación y verbalización de las propiedades de esas figuras servirán como práctica precursora para la construcción de una definición (KPM: formas de génesis).

Además de estas, los grupos elaboran diversas actividades de comparación, descomposición de las figuras, estampación, identificación de propiedades... todas ellas destinadas a la adquisición significativa del concepto de rectángulo (KMT: estrategias).

6. Conclusiones

Con esta investigación se ha puesto en evidencia la importancia y necesidad de que los profesores de Educación Infantil posean un conocimiento especializado en matemáticas sólido, concretamente en el dominio matemático (MK), pues se ha podido observar en este trabajo la carencia significativa que poseen los futuros docentes al relacionar propiedades del rectángulo (nivel 3 de Van Hiele) que, unido a errores conceptuales, les genera una gran dificultad para construir definiciones matemáticamente correctas.

Los subdominios y categorías presentes en el modelo MTSK, además de la tabla de conocimiento pretendido (Anexo I), han sido herramientas de análisis cruciales para la identificación del conocimiento movilizado por los futuros docentes. Se ha podido encontrar evidencias de la gran mayoría de subdominios, entre ellas: la elaboración de este taller les ha servido para comprender que el cuadrado es un tipo particular de rectángulo (KoT: propiedades), así como conocer los atributos necesarios para que una definición sea matemáticamente correcta (KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Además, han elaborado definiciones de rectángulo que serían esperables según el nivel de desarrollo del alumnado (KMLS: expectativas de aprendizaje) y creado actividades para mejorar la comprensión del concepto y la evolución del alumnado del nivel 0 de Van Hiele al 1 (KFLM: teorías sobre enseñanza), en el que dan gran importancia al uso de ejemplos y contraejemplos (KMT: ejemplos). Sin embargo, no se han encontrado evidencias del KSM, pues el taller tampoco estaba diseñado para tal fin..

En Escudero et al (2021) se obtienen resultados similares a este trabajo, pues se lleva a cabo una investigación sobre el conocimiento movilizado por un profesor de Educación Infantil al enseñar cuerpos geométricos, en el que se reflejan evidencias de todos los subdominios salvo del KSM, pues indican que es difícil de encontrar en una observación de aula. El trabajo mencionado parte de la práctica del maestro aprendida en cursos de mejora realizados por cuenta propia, presenciando de nuevo que son los docentes quienes deciden seguir formándose para ser competentes en la materia, ya que, la formación recibida para la preparación a profesor de Infantil no es suficiente. Un ejemplo claro de esto son los resultados obtenidos en esta investigación, detallados anteriormente, en el que se muestran los errores cometidos por alumnos del Grado de Infantil del segundo año, curso aún inicial, no obstante, no reciben más formación matemática, debido a que la asignatura donde se desarrolla este taller es la única obligatoria.

Respecto a esto, surge mi inquietud por continuar esta investigación con base al conocimiento que moviliza el profesorado de infantil en activo y, de esta forma, poder contrastarlo, para observar el contenido que han ido adquiriendo tanto por su experiencia laboral como por cuenta propia. Durante la elaboración de este trabajo pude observar el gran contraste formativo que poseen los docentes de un C.E.I.P, concretamente, las maestras de infantil que han decidido seguir formándose, tienen un buen conocimiento del contenido matemático. En cambio, las que no han ampliado su conocimiento, siguen ofreciendo una enseñanza con las mismas carencias mostradas en esta investigación.

En el desarrollo de este trabajo se han dado una serie de limitaciones que han dificultado su desarrollo, comenzando con la modalidad investigatoria del trabajo, ya que, el Grado de

Educación Infantil dedica gran parte de su formación a la programación de actividades en distintos ámbitos, por lo que prepara más a sus estudiantes para realizar un diseño de propuestas formativas. Además, como se ha indicado, la formación matemática inicial del futuro profesor es escasa, por tanto, he tenido que dedicar tiempo a cuestionar mi conocimiento sobre las propiedades del rectángulo, sobre la definición matemática y familiarizarme con el modelo MTSK (Carrillo et al, 2018).

La estructura del taller perseguía una finalidad formativa, objetivo que se ha alcanzado, pues se ha observado una mejora en el discurso de los futuros profesores. No obstante, este objetivo formativo ha resultado ser también una limitación en cuanto a esta investigación, pues las respuestas aportadas se han visto alteradas por las correcciones en el aula, dificultando así el verdadero conocimiento movilizado por los futuros docentes.

Pese a lo anterior, el primer acercamiento a la investigación ha sido muy satisfactorio, tanto por el resultado como por el aprendizaje obtenido. A nivel personal, esta investigación me ha enseñado la importancia de poseer un buen conocimiento teórico y pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, me ha dotado de herramientas para abordar la enseñanza de la Geometría como futura docente, desde tener en cuenta la importancia de la construcción de definiciones para la adquisición de conceptos, proporcionar un imaginario rico de ejemplos para potenciar la imagen mental de los alumnos, utilizar actividades que faciliten la comprensión de las figuras, hasta conocer cómo es el aprendizaje de la Geometría a través de los niveles de Van Hiele, entre otras cuestiones. Además, durante la realización de esta investigación he podido contar con reuniones mensuales con un grupo de discusión en el que participaban alumnas internas del Grado de Educación Infantil y Primaria, docentes del departamento de Didáctica de las Matemáticas, profesoras que realizaban su doctorado y estudiantes de máster. En estas reuniones se trataban aspectos relacionados con el MTSK, por lo que pude contar con el apoyo de este grupo de profesionales para contrastar opiniones y enriquecer esta investigación.

7.Referencias bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for Teaching: What makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

Barrantes, M., López, M. y Fernández, M.A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6105>

Bassey, M. (1999). Case Study research in educational setting. Open University Press.

Brymann, A. (2012). *Social Research Methods (4th edition)*. Oxford University Press.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20 (3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *PME Conference*, 2, 248–255.

Escudero, A.M., Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil al enseñar cuerpos geométricos. *Zetetiké*, 21(1), 1-17. <https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661819>

Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 7-32. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1711>

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En Carillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M.A., Escudero-Ávila, D (Eds.). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*, (pp.57-72). Ediciones Bonanza.

Flores, E., Escudero, D.I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). SEIEM.

Griffiths, H.B. y Howson, A.G. (1974). *Mathematics: Society and Curricula*. Cambridge University Press.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S., Sánchez, M.V. (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, (pp. 143-170). Comares. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.001>

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 1801-1817. <http://hdl.handle.net/11441/51501>

Muñoz-Catalán, M. C., Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., Escudero, A.M., Aguilar, Á., Ribeiro, C.M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En Badillo, E., Climent, N., Fernández, C., González, M. T. (Eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (p. 63-84). Ediciones Universidad Salamanca. <https://eusal.es/index.php/eusal/catalog/book/978-84-1311-073-8>

Muñoz-Catalán, M.C; Joglar-Prieto, N.; Ramírez, M. y Codes, M. (2022). El modelo MTSK desde la perspectiva del profesor de Educación Infantil: foco en el dominio matemático. En Carrillo, J.; Montes, M.A y Climent, N. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)*, (p. 235-250). Dykinson, S.L.

Muñoz-Catalán, M.C., Liñán-García, M.M. y Ribeiro, M. (2017). El conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, 24, 4-19. Número especial. <http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19>.

Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N. y Carrillo-Yáñez, J. (2021), Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition (*El conocimiento especializado del profesor de educación infantil para fomentar el pensamiento algebraico a partir de una tarea de descomposición aditiva*), *Journal for the Study of Education and Development*, 45(1), 37-80. <https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640>

Sánchez-Matamoros G., García M. y Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004>

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N.K. Denzin, y Y. Lincoln, (Eds) *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Sage.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Watson, A., y Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: *Learners generating examples*. Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410613714>

Zandieh, M., y Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 57-75.

Zaslavsky, O., Harel, G., y Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*. (pp. 457-464). Charles University in Prague.

Zaslavsky, O., y Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical Definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317–346.
<http://www.jstor.org/stable/30035043>

ANEXO 1: Guion del taller

TALLER 4:

Construcción de una definición en Matemáticas: el caso del rectángulo. Enfoque desde la etapa de Educación Infantil

RESUMEN DE LA ACTIVIDAD

En esta actividad se pretende que los futuros maestros (EPM) conozcan las características de una definición de un objeto en Matemáticas. Se va a particularizar este objetivo en la construcción de la definición del rectángulo. Además, se planteará desde qué enfoque se puede trabajar la definición en la etapa de Infantil y el papel de las nociones “definición del concepto” e “imagen del concepto” (Tall y Vinner, 1981) en este proceso. Los EPM deberán pensar qué ejemplos de figuras tendrán que presentar a los alumnos de Infantil para ayudarles a construir un imaginario potente que les ayude a construir una definición de figura correcto en un futuro.

OBJETIVOS

- Comprender las características de una definición¹ y el papel que juegan los distintos tipos de atributos de un determinado concepto en ella (relevante, irrelevante e incorrectos).
- Desarrollar la práctica matemática de definir
- Conocer cómo se construye la definición en Educación Infantil.
- Comprender la diferencia entre “imagen del concepto” y “definición de concepto” y su papel en la construcción de la definición desde la perspectiva del aprendizaje.
- Identificar qué conjuntos de imágenes serían potentes para que los alumnos construyan la definición de rectángulo.
- Comprender el papel de la práctica matemática de definir en Educación Infantil como modo de promover el avance en la comprensión de los conceptos geométricos según Van Hiele de la identificación al análisis.

CONTENIDOS

- Características de una definición y el papel de los tipos de atributos (relevante, irrelevante e incorrecto) en dicha definición.
- Definición de rectángulo.
- La práctica matemática de definir La definición en Educación Infantil.

¹ Cuando mencionamos el constructo *definición* nos referimos a definición matemáticas.

- Diferencia entre “imagen del concepto” y “definición del concepto” (Tall y Vinner, 1981) y su papel en la construcción de la definición desde la perspectiva del aprendizaje.

- Selección de las imágenes más adecuadas para que los alumnos de Educación Infantil construyan la definición de rectángulo.

- El papel de la construcción de la definición en el avance de la comprensión geométrica: Los niveles de Van Hiele.

TALLER: ACTIVIDADES Y SECUENCIA DE TRABAJO

Este taller se desarrolla en torno a la construcción de una definición en Matemática y lo particularizamos en el caso de conceptos geométricos. Comenzamos leyendo y comprendiendo lo que caracteriza una definición:

Tabla 1 Atributos de una definición matemática

| Atributos que debe verificar una definición matemática (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014) ² | |
|---|--|
| <i>Jerarquía</i> (precisión) | Los términos usados deben ser básicos o estar definidos previamente. Uso de palabras muy precisas. |
| <i>No circularidad</i> | En la definición de un concepto no se puede hacer uso del propio concepto. Asimismo, si para definir un concepto hago uso de otro, la definición del segundo no puede basarse en la del primero. Para definir un rectángulo no puedes decir, un rectángulo es un rectángulo. |
| <i>Minimalidad</i> | No redundante, ninguna característica podrá deducirse del resto. |
| <i>No ambigüedad</i> | Debe quedar claro qué objetos pertenecen a una clase. |
| <i>No contradictoria</i> | Características consistentes, no puede estar una y su opuesta. |
| <i>Invariante</i> | Bajo cualquier cambio de representación. |
| <i>Equivalencia</i> | Si se pueden enunciar distintas definiciones de un mismo concepto, han de ser equivalentes. |

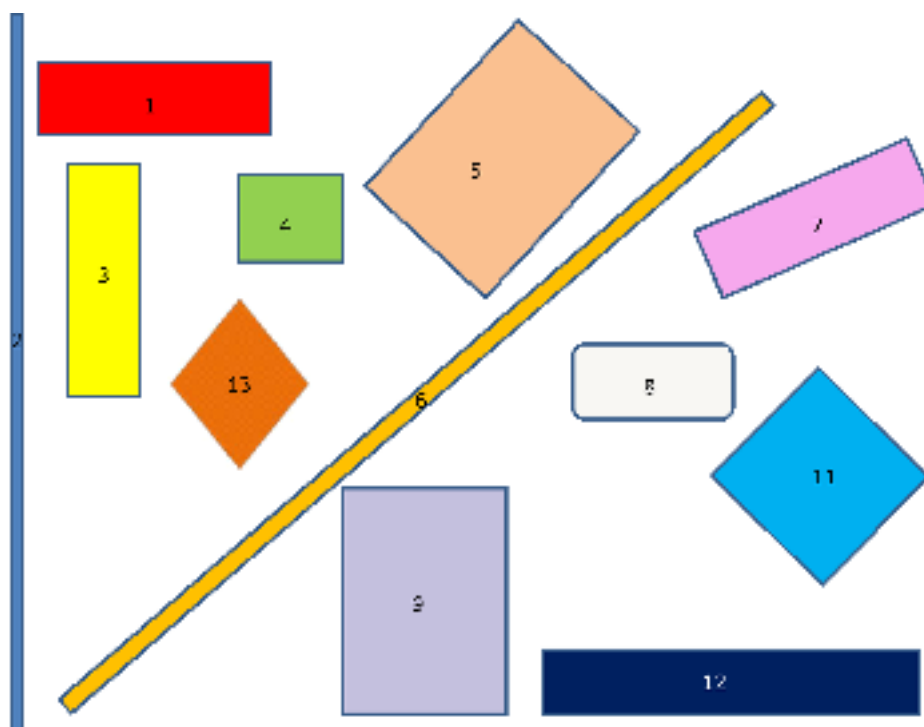
² Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (1): 7 - 32.

<https://doi.org/10.12802/relime.13.1711>

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

| | |
|---------------------------|-----------------------|
| Alumno | Dibujo del rectángulo |
| Definición de rectángulo: | |

2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndoos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo... | ¿Por qué no lo son? |
|----------------------------|----------------------------------|---------------------|
| | | |

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|---|--|
| | |

4. Podemos identificar tres tipos de atributos en un concepto:

Atributos relevantes: Se trata de aquellas propiedades que definen al concepto. Siempre están presentes en los ejemplos del concepto utilizados. Son los atributos que permiten construir una definición (Ej. En el caso del triángulo, un atributo relevante es tener 3 lados).

Atributos irrelevantes: Son propiedades no necesarias del concepto, que pueden aparecer o no en los ejemplos utilizados para un determinado concepto. Conviene evitar que los ejemplos seleccionados conviertan a estos atributos en relevantes. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo irrelevante sería que siempre un lado descansa sobre la horizontal).

Atributos incorrectos: son propiedades que no las posee el concepto considerado. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo incorrecto sería tener un ángulo cóncavo).

Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|----------------------|------------------------|-----------------------|
| | | |

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.

A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.

B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

C) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.

D) Es un paralelogramo con un ángulo recto

7. Según Tall y Vinner (1981³), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes

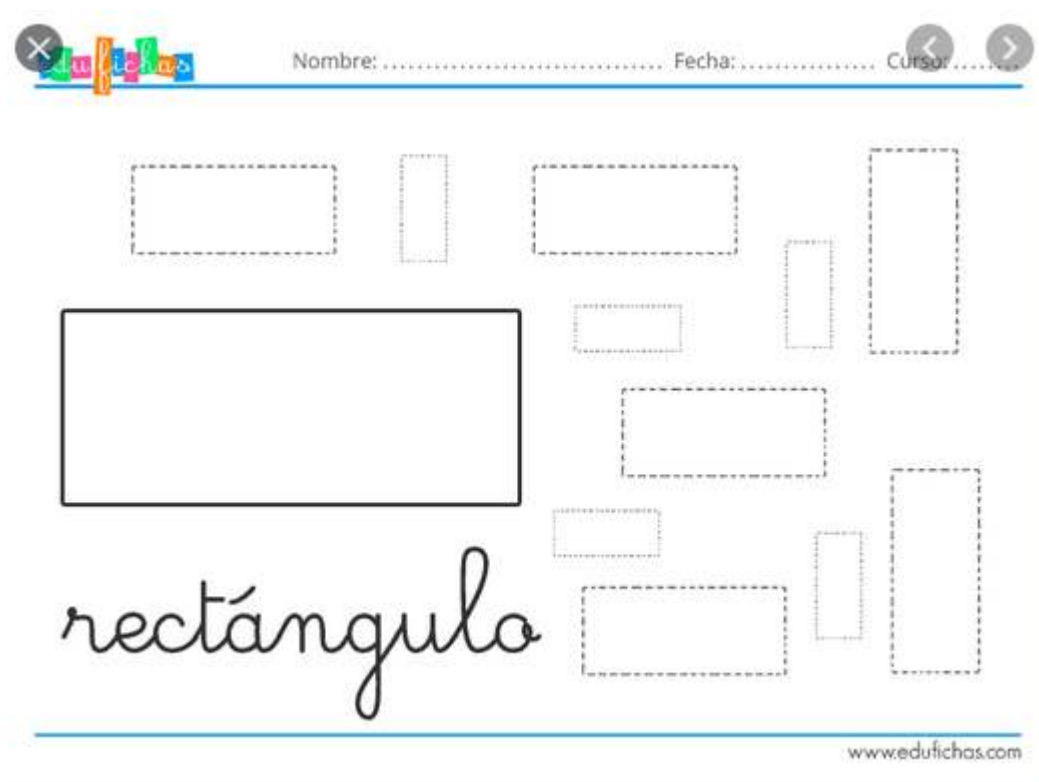
tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

Definición de un concepto: Se refiere a la definición formal matemática del concepto

Imagen del concepto: Se refiere a cómo se refleja dicho concepto en la mente de la persona; es el producto de los procesos mentales de formación del concepto e incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumno se encuentra con nuevos estímulos.

a) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.



³ Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018) ⁴. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado *Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico*) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), solo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

Teniendo esto en cuenta:

- a) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?
- b) Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?
- c) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

Pregunta de ampliación

9. Define los tres tipos de triángulo según los lados, considerando las relaciones entre ellos (¿Se trataría de tres tipos de triángulo diferentes o alguno de ellos puede ser un tipo de otro?) Comprueba si tus definiciones cumplen las características de la tabla 1. ¿Todos los atributos que has tenido en cuenta son relevantes? ¿Alguno de ellos sería redundante?

⁴ Liñán-García, M.M. y Carrillo, J. (2018). Razonamiento matemático. En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.) *Didáctica de matemáticas para maestros de Educación Infantil* Paraninfo (pp. 287-297). Madrid: Editorial.

ANEXO I

Extraído de:

Muñoz-Catalán, M.C; Montes, M.A.; Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C.; Aguilar, Á. (2013). *La clasificación de figuras planas en primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Huelva: Universidad de Huelva.

Teoría de Van Hiele para el aprendizaje y enseñanza de la geometría

El modelo desarrollado por Dina y Pierre Van Hiele (publicado originariamente en la obra “Structure and Insight”) no es reciente, pues data de final de los pasados cincuenta, pero no ha perdido ninguna vigencia y su idea principal, los niveles de aprendizaje de los conceptos geométricos, tiene gran interés para la elaboración de material de trabajo de la Geometría escolar, en la medida que pueden ayudar en la toma de decisiones a la hora de secuenciar y organizarlos contenidos y las actividades en el diseño de unidades didácticas.

La idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente. Es más, ante un nuevo contenido geométrico a aprender, el paso por todos los niveles es obligado, aunque dependiendo de la madurez y la experiencia geométrica que se posea, ese paso puede ser más o menos rápido. De alguna manera eso significa que, alcanzar un nivel superior conlleva la capacidad de aplicar un conocimiento a nuevos objetos o situaciones.

Cada uno de los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, actúa como decodificador cuando un nuevo concepto es presentado.

El nombre de los niveles y su numeración ha ido cambiando respecto de la formulación inicial, en la que se establecían cinco y se nombraban con los números del 0 al 4. Estos niveles eran los siguientes:

NIVEL 0: Visualización o reconocimiento

NIVEL 1: Análisis

NIVEL 2: Ordenación o clasificación

NIVEL 3: Deducción formal

NIVEL 4: Rigor

El último nivel es difícil de alcanzar en la etapa de la educación obligatoria y, por eso, a veces se prescinde de él, además, algunos estudios parecen mostrar que está reservado para niveles universitarios.

Describiremos a continuación cada uno de los niveles, ejemplificando su papel en la construcción de los conceptos y relaciones de triángulos y cuadriláteros⁵.

⁵ Algunos de estos ejemplos han sido extraídos de Jaime y Gutiérrez (1990) y Foluz (2005).

Nivel 0: visualización o reconocimiento

Sus tres características fundamentales son:

- 1) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
- 2) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una puerta, etc). No se utiliza lenguaje geométrico básico para denominar a las figuras por su nombre correcto.
- 3) No se reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos geométricos.

Podemos señalar que, en este nivel, un estudiante:

- Identifica “cuadrados” en un conjunto de recortables u objetos manipulativos.
- Señala ángulos, rectángulos y triángulos en diferentes posiciones en fotos, láminas, etc.
- Marca figuras en una trama o malla (ángulos, paralelas, sierras, escaleras, etc.).
- Dibuja o construye figuras con instrumentos: rectángulos, paralelas, etc.
- Señala los ángulos como “esquinas” o los marca en figuras.
- Afirma que un rectángulo “es un cuadrado más estrecho”, “un paralelogramo es un rectángulo inclinado”, “un ángulo es lo formado por las agujas de un reloj”.
- Usa el método de ensayo-error con mosaicos.
- Coloca teselas cuadradas en un rectángulo y las cuenta para aproximar su área.
- Identifica cuadrados espontáneamente, pero no utiliza la igualdad de lados o sus ángulos rectos.
- Señala y mide los lados de un cuadrado pero sin generalizar para otros cuadrados.
- No usa espontáneamente cuantificadores como: todos, alguno, cada, ninguno referidos a sí tienen determinada propiedad geométrica.
- Las etiquetas están muy ligadas a las imágenes de las figuras con las que el niño ha tenido contacto. Así, es probable que no consiga identificar como rectángulo la siguiente imagen:

Nivel 1: Análisis

Al estar en este nivel,

- 1) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras, tanto desde la observación como de la experimentación.
- 2) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Dado que gran parte de las definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades, en este nivel los estudiantes tienen dificultades para elaborarlas.
- 3) Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades, sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

En este nivel, un estudiante:

- Afirma de un cuadrado que es una figura tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.
- Comprueba que “en un paralelogramo los lados opuestos son paralelos”.
- Señala las semejanzas y diferencias entre cuadrado y rectángulo.
- Inventa un criterio para clasificar cuadriláteros (dos ángulos rectos, pares de lados paralelos, etc.).
- A partir de una malla triangular puede descubrir la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Puede calcular el área de un triángulo rectángulo a partir de la del rectángulo.
- A partir de medidas de ángulos obtiene que el ángulo exterior a un triángulo es la suma de los no-adyacentes.
- Proporciona información basada en propiedades para dibujar la figura.
- Después de clasificar cuadriláteros en deltoides y no-deltoides, describe propiedades de los deltoides.
- Resuelve problemas sencillos identificando figuras en combinación con otras.
- Identifica propiedades en paralelogramos pero no identifica el conjunto de propiedades necesarias para definirlo.
- Después de ver propiedades de una familia de cuadriláteros no es capaz de justificar que todos los cuadrados son deltoides particulares.
- Después de descubrir en una malla triangular que los ángulos de un triángulo suman 180° , no generaliza el resultado para todo triángulo rectángulo.

Nivel 2: Ordenación o clasificación

En el nivel anterior, los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática, pero esas propiedades son todavía independientes, no estableciéndose relaciones entre propiedades equivalentes. Alcanzar este nivel significa que:

- 1) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren.
- 2) Se realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
- 3) Se siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no se entienden sus estructuras. Esto se debe a que el nivel de razonamiento lógico permite seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

En este nivel, un estudiante dispone de la capacidad de:

- Seleccionar propiedades que caracterizan una serie de formas y prueba, mediante dibujos o construcciones, que son suficientes.
- Formular una definición para un deltoide y usarla para explicar qué es y qué no es un deltoide.

- Contestar razonadamente a preguntas como: ¿un rectángulo es un paralelogramo? , y así con otros cuadriláteros.
- Deducir que los ángulos internos de un cuadrilátero suman 360° a partir de su división en dos triángulos.
- Justificar la igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.
- Reconocer el papel de las explicaciones lógicas o argumentos deductivos en la justificación de hechos.

Sin embargo:

- No comprende el significado de la deducción en un sentido axiomático (no ve la necesidad de las definiciones y supuestos básicos).
- No distingue formalmente entre una afirmación y su contraria.
- No establece relaciones entre redes de teoremas.

Nivel 3: Deducción formal

- 1) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
- 2) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.
- 3) Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Llegados a este nivel, los estudiantes:

- Identifican las propiedades suficientes para definir un paralelogramo.
- Prueban, de forma rigurosa, que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° .
- Demuestran que si un triángulo es isósceles los ángulos adyacentes al lado diferente son iguales y viceversa.
- Demuestran de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio y comparan los dos métodos.
- Comparan demostraciones alternativas del teorema de Pitágoras.
- Demuestra teoremas relativos a rectas paralelas cortadas por una secante.
- No examinan la independencia, consecuencias o validez de un conjunto de axiomas.

Es claro que, adquirido este nivel, se tiene una visión global e integradora de las Matemáticas.

Nivel 4: Rigor

En este nivel, el más elevado del modelo:

- 1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- 2) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

En este nivel un estudiante:

- Establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos.
- Compara sistemas axiomáticos (Geometría euclidiana / Geometría no-euclidiana).
- Establece la consistencia de un sistema de axiomas, la independencia de un axioma o la equivalencia de distintos conjuntos de axiomas.
- Inventa métodos generalizables para resolver diferentes clases de problemas.

Conviene explicar que el proceso de construcción es progresivo, pero también recursivo, de forma que muchas veces hay aspectos implícitos en un nivel que se convierte en explícitos en el siguiente. Ello puede esquematizarse como sigue:

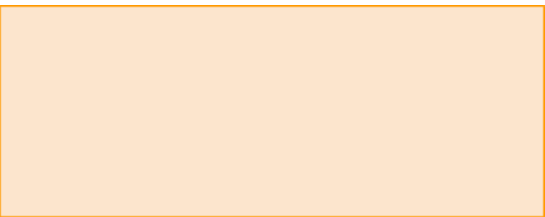



| | ELEMENTOS EXPLÍCITOS | ELEMENTOS IMPLÍCITOS |
|----------------|--|--|
| NIVEL 0 | Figuras y objetos | Partes y propiedades de las figuras y objetos |
| NIVEL 1 | Partes y propiedades de las figuras y objetos | Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos |
| NIVEL 2 | Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos | Deducción formal de teoremas |
| NIVEL 3 | Deducción formal de teoremas | Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos) |

Tabla 1: Elementos explícitos e implícitos en cada nivel (Fouz, 2005)

ANEXO 2: Informes de los talleres grupales

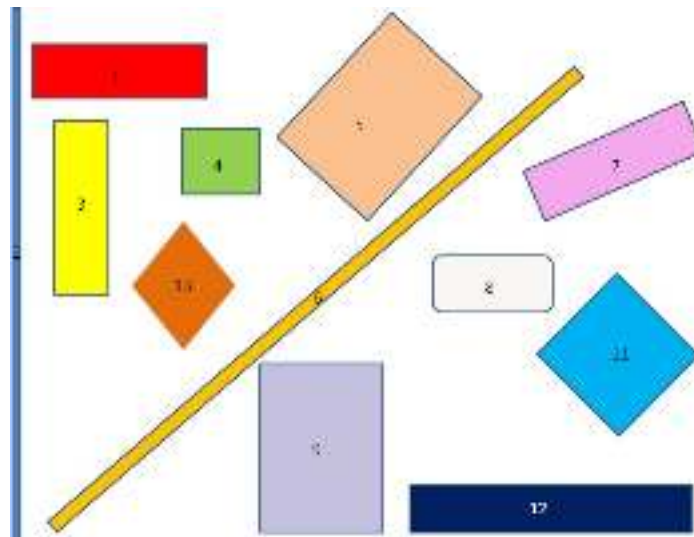
INFORME APORTADO POR EL GRUPO 1:

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

| Alumno | Dibujo del rectángulo |
|----------|--|
| Alumno 1 |  |
| Alumno 2 |  |
| Alumno 3 |  |
| Alumno 4 |  |

| | |
|---|--|
| Alumno 5 |  |
| Definición de rectángulo: un rectángulo es un cuadrilátero formado por 4 ángulos rectos, cuyos lados opuestos comparten la misma longitud. | |

2.Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndonos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo.... | ¿Por qué no lo son? |
|-----------------------------|-----------------------------------|--|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12. | 8 | Sus ángulos no son rectos y no está formado por segmentos. |
| | 11 | No es un rectángulo porque aunque forman 4 ángulos rectos, sus lados tienen la misma longitud. |
| | 13 | No es un rectángulo porque sus lados tienen la misma longitud y porque no forman 4 ángulos rectos. |

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - Misma longitud de los lados opuestos. - Líneas rectas. - Los 4 vértices forman ángulos rectos. - Formado por segmentos. - Sus lados opuestos son paralelos. - Tienen 4 lados. - Tienen 4 vértices. - Figura cerrada. | <ul style="list-style-type: none"> - Distinta longitud de lados opuestos. - No forman ángulos. - No tienen vértices. |
| Añadimos los siguientes aspectos no observables en este ejemplo: | |
| <ul style="list-style-type: none"> - Sus lados opuestos son perpendiculares. - No son líneas rectas. - Son figuras discontinuas. - Son figuras abiertas. - Son figuras que presentan volumen. | |

Podemos identificar tres tipos de atributos en un concepto:

Atributos relevantes: Se trata de aquellas propiedades que definen al concepto. Siempre están presentes en los ejemplos del concepto utilizados. Son los atributos que permiten construir una definición (Ej. En el caso del triángulo, un atributo relevante es tener 3 lados).

Atributos irrelevantes: Son propiedades no necesarias del concepto, que pueden aparecer o no en los ejemplos utilizados para un determinado concepto. Conviene evitar que los ejemplos seleccionados conviertan a estos atributos en relevantes. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo irrelevante sería que siempre un lado descansa sobre la horizontal).

Atributos incorrectos: son propiedades que no las posee el concepto considerado. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo incorrecto sería tener un ángulo cóncavo).

4. Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|---|--|--|
| Misma longitud de los lados opuestos. | Estrecho | Distinta longitud de los lados opuestos. |
| Formados por líneas rectas | Posición (horizontal/vertical) | No forman ángulos. |
| Los 4 vértices forman ángulos rectos | Largo | Ángulos distintos a 90° |
| Sus lados opuestos son paralelos | Diferentes medidas como la superficie. | Diagonal distinta |
| Tienen 4 lados. | Lados contiguos de distinta medida | Sus lados opuestos son perpendiculares. |
| Tienen 4 vértices. | Lado largo casi doble lado corto. | Lados curvos |
| Figura cerrada. | El color | Figura abierta |
| Diagonales iguales. | | |
| Superficie. | | |
| Figura plana. | | Que sea un polígono. |
| AÑADIMOS LOS SIGUIENTES ASPECTOS COMPLEMENTARIOS | | |
| | Medida de la figura | Sus lados opuestos son perpendiculares. |
| | Posición (horizontal/vertical) | No está formado por líneas rectas. |
| | | Son figuras discontinuas. |
| | | Son figuras abiertas. |
| | | Son figuras que presentan volumen. |
| | | Medida diferente de sus lados opuestos. |
| | | No son segmentos. |
| | | Los 4 vértices no forman ángulos rectos. |

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

Un rectángulo es una figura geométrica y cerrada, la cual consta de cuatro lados y cuatro vértices, los lados son de igual tamaño que su opuesto, es decir sus lados opuestos son paralelos y los ángulos y líneas son rectos.

Sí, cumple con todos los atributos de la tabla 1.

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.

A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.

Esta definición nos parece incorrecta, ya que, excluye al cuadrado (y este es un tipo de rectángulo), por lo que, si excluye al cuadrado también excluye al rectángulo.



B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

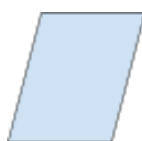
Creemos que esta definición es correcta, ya que, incluye a todos los tipos de rectángulo. Sin embargo, no cumple el criterio de minimalidad ya que es redundante, pues el hecho de que sea un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, lleva implícito que dichos ángulos sean rectos.



C) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.

Esta definición nos parece correcta, son aquellos cuyos lados son paralelos dos a dos y dice que sus ángulos son rectos, por lo tanto, incluye al rectángulo.

Sin embargo, pensamos que esta afirmación es redundante porque para que sea un paralelogramo, siempre va a tener que formar ángulos rectos.



D) Es un paralelogramo con un ángulo recto.

Pensamos que es una definición correcta porque al tener un ángulo recto, implica que los otros tienen que ser ángulos rectos también.



Consideramos que la definición más correcta es la D: “ Es un paralelogramo con un ángulo recto”. Ya que, es la única definición que cumple todos los criterios necesarios (términos básicos, minimalidad, sin circularidad, sin ser ambigua ni contradictoria, invariante y equivalente) para crear una definición matemática correcta.

7. Según Tall y Vinner (1981³), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

Definición de un concepto: Se refiere a la definición formal matemática del concepto

Imagen del concepto: Se refiere a cómo se refleja dicho concepto en la mente de la persona; es el producto de los procesos mentales de formación del concepto e incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumno se encuentra con nuevos estímulos.

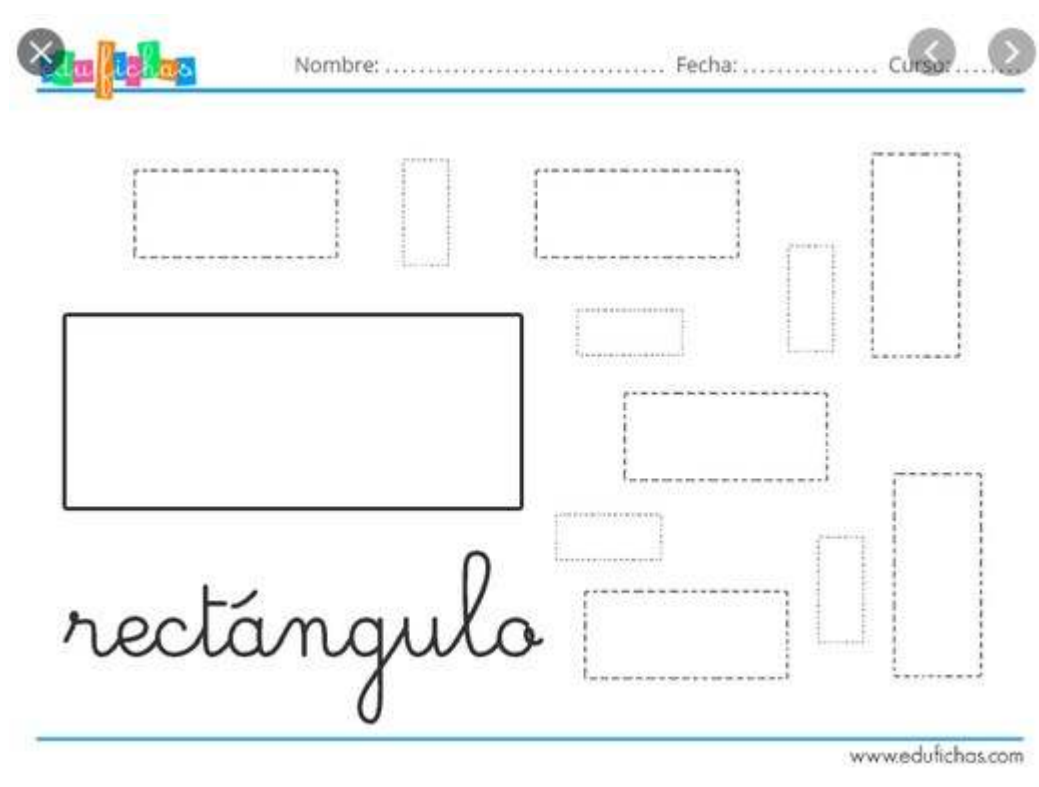
A) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Pensamos que la imagen de la pregunta 2, si es adecuada para representar un imagen rica del rectángulo, pero no está del todo completa, ya que, faltarían algunos ejemplos para que el niño/a pueda compararlos entre ellos y pueda formar una imagen aún más rica, fijándose en las verdaderas características que componen el rectángulo, como puede ser: un paralelogramo.

³ Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Lo que verdaderamente le falta, son contraejemplos, es decir, figuras que tengan atributos incorrectos, para que así el niño/a se centre en los verdaderos atributos del rectángulo, por ejemplo, añadir a la imagen algunos elementos que tengan características diferentes como figuras con diferentes superficies..etc.

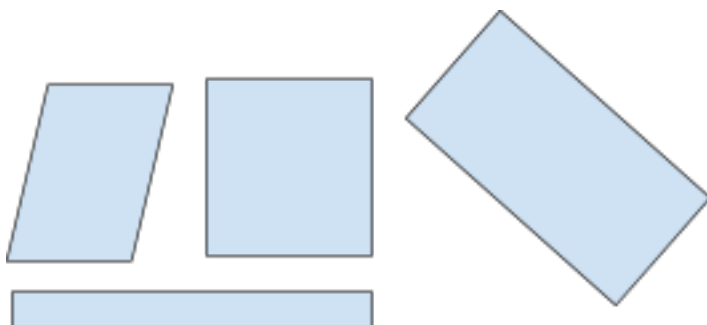
B)¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.



| Atributos relevantes del rectángulo que refuerza la ficha: | Atributos irrelevantes del rectángulo que refuerza la ficha: |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Cuatro lados. - Cuatro Vértices. - Ángulos rectos. - Líneas rectas. - Lados opuestos paralelos. | <ul style="list-style-type: none"> - Posición - Tamaño |

Consideramos que la ficha no es correcta del todo para trabajar el rectángulo, ya que sólo ofrece una única imagen del rectángulo, es decir, le falta variabilidad de ejemplos,

como una longitud de larga exagerada, un cuadrado porque es un tipo de rectángulo, variabilidad en la posición diagonal, etc. Podríamos añadir por ejemplo:



8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)⁴. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado *Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico*) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

⁴ Liñán-García, M.M. y Carrillo, J. (2018). Razonamiento matemático. En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.) *Didáctica de matemáticas para maestros de Educación Infantil* Paraninfo (pp. 287-297). Madrid: Editorial.

Teniendo esto en cuenta:

A) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?

Un concepto matemático en Educación Infantil, (aunque estos autores defienden que no está relacionado con la edad, si no, con el conocimiento que tenga cada uno, por los niveles que el niño/a ha pasado, estando en el nivel 0 y teniendo que impulsarlos hasta el 1). Lo normal es estar en el nivel 0, ya que, es en este ciclo cuando empiezan a tomar contacto con las figuras geométricas, por lo que, perciben los objetos como una unidad, sin diferenciar sus atributos ni componentes y lo describen por su apariencia física y lo relacionan con elementos familiares.

La minimalidad no es una característica en la que nos fijemos en educación infantil. No es tan importante la redundancia, sino dejar claro el concepto de lo que queremos que aprendan. En educación infantil hay que descomprimir los conceptos, para que el niño/a pueda ver sus características.

Hablar de todo esto, es un listado de propiedades, no una definición del concepto. La apariencia de una definición en infantil es haber hecho un listado descomprimiendo los atributos y características del elemento en cuestión.

B) Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

Una enumeración de las características que contiene el elemento sería la mejor definición a tratar en la etapa de educación infantil. Descomprimir las características que tiene el objeto para que el niño/a pueda observar así todas sus características. Es decir, poner los atributos con los que cuenta el objeto, por ejemplo:

Un rectángulo está formado por:

- 4 lados
- 4 vértices
- Líneas rectas
- Figura cerrada
- 2 dimensiones
- Líneas paralelas

C)¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?





Las actividades más adecuadas, serían actividades de construcción, como por ejemplo unir diferentes figuras para formar un rectángulo.

También, actividades de construcción en cuanto a elementos con los que construir un rectángulo, como con plastilina, palillos.. A través de esto podemos observar las características del elemento como los lados, los vértices..etc. Aunque esta actividad puede tener algunos inconvenientes como no trabajar la superficie o la limitación del material.

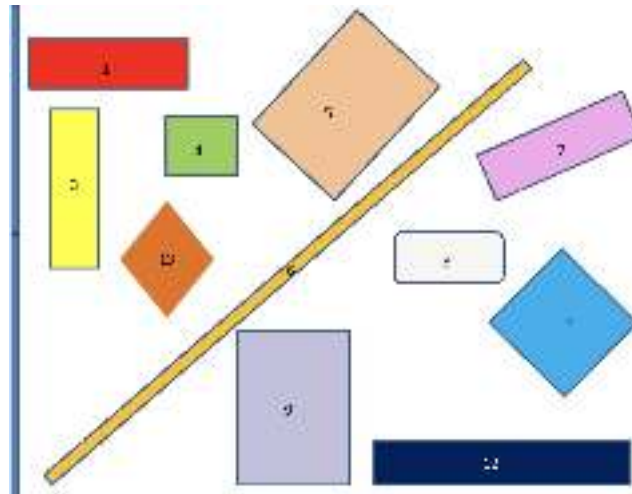
Actividades de estampación o juegos de describir y adivinar las figuras entre los compañeros también serían apropiadas para trabajar las figuras geométricas, e incluso juegos de proyecciones, trabajando el enfoque proyectivo para conocer figuras.

INFORME APORTADO POR EL GRUPO 2:

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

| Alumno | Dibujo del rectángulo |
|---|--|
| Claudia García-Baquero |  |
| Beatriz González |  |
| Nuria Miranda |  |
| Inmaculada Vargas |  |
| Definición de rectángulo: <ul style="list-style-type: none">- Cuadrilátero con sus ángulos rectos.- Cuadrilátero con un ángulo recto.- Cuadrilátero con sus dos diagonales de igual longitud. | |

2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndoos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo.... | ¿Por qué no lo son? |
|---------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12. | 8 | Porque no es un polígono: no tiene rectas que se cortan formando ángulos ni vértices. |
| | 13 | Porque sus ángulos no son rectos. |

A pesar de que la figura 11 pueda identificarse como un cuadrado, la hemos incluido en la categoría de rectángulo porque, si damos una definición inclusiva de rectángulo (por ejemplo, cuadrilátero con sus ángulos rectos), la figura entraría dentro de ambas categorías (es un cuadrado y un rectángulo). Así, podríamos decir que el cuadrado es un tipo particular de rectángulo.

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| | |
|---|--|
| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|---|--|

| | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - 4 lados (cuadrilátero). - 4 vértices. - Ángulos rectos. - Lados paralelos dos a dos (paralelogramo). - Diagonales de la misma longitud. - Generalmente, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos. | <ul style="list-style-type: none"> - No tienen ángulos rectos. - No es un polígono (no tiene rectas). |
|--|---|

4. Podemos identificar tres tipos de atributos en un concepto:

Atributos relevantes: Se trata de aquellas propiedades que definen al concepto. Siempre están presentes en los ejemplos del concepto utilizados. Son los atributos que permiten construir una definición (Ej. En el caso del triángulo, un atributo relevante es tener 3 lados).

Atributos irrelevantes: Son propiedades no necesarias del concepto, que pueden aparecer o no en los ejemplos utilizados para un determinado concepto. Conviene evitar que los ejemplos seleccionados conviertan a estos atributos en relevantes. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo irrelevante sería que siempre un lado descansa sobre la horizontal).

Atributos incorrectos: son propiedades que no las posee el concepto considerado. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo incorrecto sería tener un ángulo cóncavo).

Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|---|--|-------------------------|
| Ángulos rectos | Dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos | No tiene ángulos rectos |
| 4 lados (cuadrilátero) | | No es un polígono |
| Lados paralelos dos a dos (paralelogramo) | | |
| 4 vértices | | |
| Diagonales de la misma longitud | | |
| Añadimos los siguientes atributos | | |

| | | |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Diagonales se cortan en el punto medio. - Figura formada por una línea poligonal cerrada. - Lados opuestos de la misma longitud. - Figura plana (2D). - Cuadrilátero. | <ul style="list-style-type: none"> - La longitud de los lados más largos es el doble de la longitud de los lados más cortos. - Posición de la figura (apoyada sobre el lado largo, sobre el lado corto...). - Medida de la superficie/del área. - Color. | <ul style="list-style-type: none"> - Tiene tres lados. - No tiene cuatro ángulos. - No tiene 4 vértices. - Tiene ángulos obtusos. - Tiene ángulos agudos. - Es una figura abierta. - Tiene volumen. - Tiene lados curvos. - Tiene diagonales distintas en longitud. |
|---|--|--|

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto.

Esta definición sería suficiente para definir un rectángulo, ya que al decir paralelogramo, está implícito que es un cuadrilátero (es decir, que tiene 4 lados) con lados paralelos. Además, al tener un ángulo recto, los otros tres también deben ser rectos. Esto también implica que los lados sean paralelos dos a dos y que las diagonales tengan la misma longitud, independientemente de la longitud de los lados.

Otra definición de rectángulo sería que este es un paralelogramo cuyas diagonales tienen la misma longitud. Esto implica que sus lados sean paralelos dos a dos y que tenga los ángulos rectos.

Tras la puesta en común, pensamos que las definiciones que hemos propuesto son correctas matemáticamente y no habría que añadir o eliminar ningún dato.

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.

A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.



B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.



C) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.



D) Es un paralelogramo con un ángulo recto.



Tras haber realizado el dibujo de los rectángulos que indican cada una de las definiciones anteriores, podemos pasar a contestar la pregunta “¿Cuál o cuáles son correctas?”.

Partimos de la base de que hay dos tipos de definiciones: inclusivas (en el caso de la definición de “rectángulo”, incluye también al cuadrado) o exclusivas (no incluye al cuadrado). Así, algunas definiciones aportan características que podrían considerarse “sobrantes” para definir un rectángulo, ya que todas nos aportan información suficiente para dibujar un rectángulo.

Ahora bien, si analizamos cada definición por separado, vemos que la primera menciona que las longitudes de los lados deben ser distintas, por lo que estaríamos hablando de una definición exclusiva. No tiene en cuenta a los rectángulos que tienen la misma longitud en sus cuatro lados (cuadrados). Desde el punto de vista matemático, se trataría de una definición incorrecta, ya que excluye al cuadrado.

La segunda es una definición inclusiva, ya que no menciona que los lados deban tener longitudes distintas. No obstante, debemos destacar también que se trata de una definición redundante, porque ser un cuadrilátero con ángulos rectos ya implica que los lados sean paralelos y que estos tengan la misma longitud. Aunque esta definición incluya datos redundantes. Sería totalmente correcta si quitamos la idea de que los lados opuestos tienen la misma longitud.

La tercera definición es inclusiva y da datos suficientes para formar un rectángulo, aunque decir que tiene cuatro lados quedaría implícito en ser un paralelogramo. Del mismo modo que la definición anterior, esta también sería correcta a pesar de incluir datos redundantes.

Por último, en la cuarta también se incluye al cuadrado en la definición, puesto que se trata de un paralelogramo con un ángulo recto. Así, esta definición no es redundante, ya que posee las propiedades suficientes y necesarias para ser una definición matemáticamente correcta. Por esto, podemos afirmar que esta definición es totalmente correcta desde un punto de vista matemático.

En este sentido, tras comentar las características de cada una de las definiciones, podemos afirmar que la única definición incorrecta sería la A), y que en la B) y la C) aparecen datos redundantes (o que se deducen de otros). Las definiciones que dan datos necesarios y suficientes y que no son redundantes se consideran de un nivel

matemático más avanzado (más correctas desde un punto de vista matemático), ya que requieren una comprensión más completa y compleja de la geometría. Este sería el caso de la definición D).

7. Según Tall y Vinner (1981³), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

Definición de un concepto: Se refiere a la definición formal matemática del concepto

Imagen del concepto: Se refiere a cómo se refleja dicho concepto en la mente de la persona; es el producto de los procesos mentales de formación del concepto e incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumno se encuentra con nuevos estímulos.

a) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Consideramos que los ejemplos de la pregunta 2 sí son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo, porque no limita a los alumnos a tener una única imagen del mismo, sino a centrarse en sus propiedades independientemente de la posición y de la forma que tenga. Además, se presentan otras figuras que no son rectángulos como el 8 y el 13 que permiten reforzar no solo las propiedades que son características del rectángulo, sino también las que no lo son.

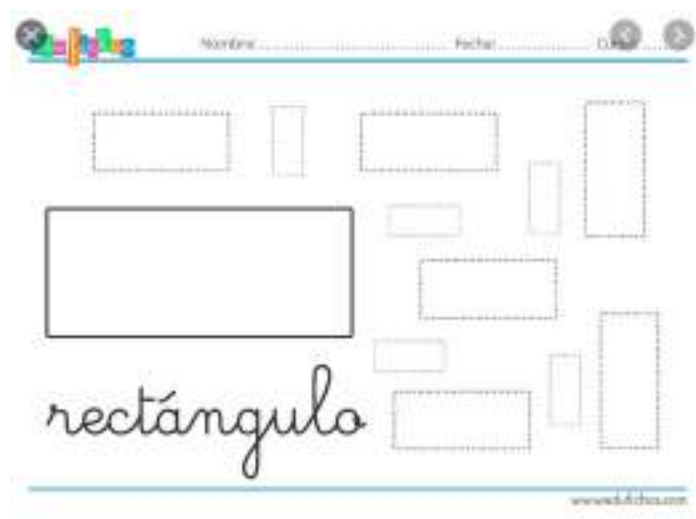
Podríamos considerar que, por ejemplo, los rectángulos 1, 3 y 7 son redundantes por tener la misma longitud en sus lados. Sin embargo, nosotras pensamos que al estar en posiciones distintas ayudan a entender que el rectángulo no debe estar siempre posicionado de la misma forma, por lo que no serían redundantes.

Finalmente, destacamos que también incluiríamos una mayor cantidad y variedad de figuras que no sean rectángulos para poder establecer comparaciones y reforzar mejor aquellas características que un rectángulo debe tener, presentando a los niños contraejemplos con atributos incorrectos y que no se corresponden con el rectángulo.

³ Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Por ejemplo, podríamos incluir: romboides, más rombos, óvalos, figuras de cuatro lados abiertas, figuras que se parezcan a un rectángulo pero que estén abiertas, figuras que tengan la forma de rectángulo pero sin superficie, una figura que no tenga cuatro lados, etc.

b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.



En esta ficha se transmite una sola idea de rectángulo, ya que se plantean figuras con la misma forma en las que solo se cambia la posición (horizontal/vertical) y el tamaño. Además, no incluye el cuadrado como un tipo de rectángulo.

Refuerza atributos relevantes del rectángulo, pero al presentar la ficha una sola visión del rectángulo, también hace que asumamos los atributos irrelevantes como relevantes (por ejemplo, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos, normalmente posicionado de forma horizontal y que los dos lados más largos sean el doble que los otros dos más cortos).

Por todo esto, no nos parece una ficha adecuada para trabajar con los alumnos la idea de rectángulo.

Para complementar la propuesta, pensamos que sería adecuado añadir más rectángulos en distintas posiciones, con los 4 lados de la misma longitud, con dos lados mucho más largos/cortos que los otros dos, rectángulos que se encuentren en diagonal no solo en posición vertical u horizontal, dibujar un cuadrado para que los niños relacionen propiedades ayudándoles o asimilar que un cuadrado es un tipo de rectángulo... igual que en la ficha que aparece en el ejercicio 2. Además, consideramos que trabajar los rectángulos con material manipulativo como las geotiras de manera que se permita a los alumnos comprender de una forma más significativa cómo se construye un rectángulo, trabajando la geometría dinámica y no solo estática.

8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)⁴. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado *Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico*) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), solo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

Teniendo esto en cuenta:

a) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?

Los alumnos en la etapa de Educación Infantil pueden construir definiciones a partir de los aspectos perceptivos y externos de los objetos (por ejemplo, un rombo es como una cometa). Sin embargo, a medida van creciendo, evoluciona al mismo tiempo el conocimiento matemático y, por consiguiente, de las definiciones matemáticas. De esta manera, sería idóneo que al finalizar el segundo ciclo de Infantil, sepan utilizar propiedades matemáticas para denominar a las figuras. Así pues, nos encontramos con que en Educación Infantil las definiciones tienen apariencia tanto perceptiva como matemática.

Por tanto, en las definiciones deben aparecer el mayor número de atributos posibles en una figura. Además se deben incluir atributos relevantes y el mayor número posible; y en primer lugar debemos descomprimir los conceptos y propiedades al máximo que

⁴ Liñán-García, M.M. y Carrillo, J. (2018). Razonamiento matemático. En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.) *Didáctica de matemáticas para maestros de Educación Infantil* Paraninfo (pp. 287-297). Madrid: Editorial.

posteriormente tendremos que enseñar a jerarquizar. De esta forma, las definiciones no son definiciones matemáticas propiamente dichas, sino que son un listado de propiedades y atributos resultantes de haber descomprimido esos conceptos ligados a la definición matemática.

b) Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

Al principio, la definición del rectángulo que sería más aceptable o esperable sería la de que “un rectángulo es la mesa de la profesora” o “un rectángulo es como la ventana” (ya que estos objetos tienen forma rectangular). Esto se debe a que los alumnos se encuentran en este momento en el nivel 0 de Van Hiele (reconocimiento), siendo capaces de reconocer las figuras en los diferentes contextos y no reconociendo explícitamente las componentes y propiedades de los objetos (lados, ángulos, longitudes, área, etc.).

Después, a medida que se vaya avanzando en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y si se les proporciona a los alumnos oportunidades de aprendizaje potentes para ello, estos conseguirán iniciarse en el nivel 1 (análisis). En este, los alumnos son capaces de percibir los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifican las relaciones entre ellas. En este sentido, la definición aceptable o esperable en este nivel sería “un rectángulo es un polígono que tiene 4 lados, con 4 ángulos como esquinas (rectos), 4 vértices, es una figura cerrada...”. Como se puede ver, en este nivel, los alumnos no son capaces de dar una definición correcta de rectángulo, es decir, de dar un conjunto de propiedades correctas y suficientes (que no se deduzcan unas propiedades de otras) que lo caracterice.

c) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

Para que nuestros alumnos pasen del nivel 0 (reconocimiento) al 1 (análisis), podríamos proponer actividades en las que tuvieran que asociar distintos objetos reales con sus respectivas formas geométricas (esto se correspondería con el nivel 0 de Van Hiele). Después, se realizarán una serie de preguntas para que los alumnos clasifiquen/agrupen las figuras y establezcan relaciones entre ellas, obligándoles así a centrarse en sus propiedades físicas (de esta manera, se trabajaría el nivel 1 de Van Hiele, ya que los niños pasarían de identificar las figuras como un todo a verlas como algo compuesto por diferentes atributos).

Otra posible actividad sería pedirles que realicen dibujos de figuras geométricas que conozcan. Seguramente dibujarán un círculo, un cuadrado o un triángulo. A partir de ahí, se les podrá pedir que se fijen en una de ellas y que, por parejas, uno de los

miembros intente describir a la otra persona cómo es la figura (para ello tendrá que usar propiedades matemáticas o, al menos, palabras que permitan una iniciación en el nivel 1 de Van Hiele, como “tiene cuatro esquinas” o “vértices”, o “tiene cuatro lados”...). El otro niño debería intentar dibujarlo sin haber visto anteriormente dicha figura.

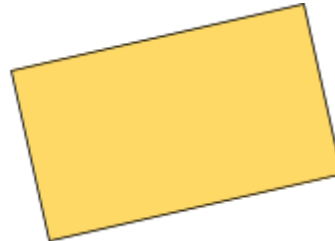
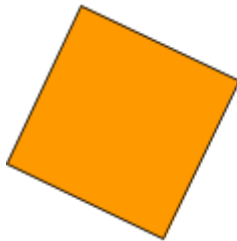
De forma más concreta, un ejemplo de actividad que se podría realizar es:

- Identifica en la siguiente ficha:

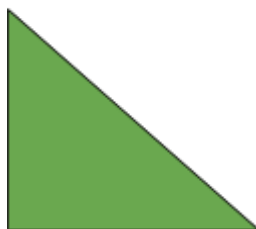
a) Un rectángulo.



b) Un cuadrado.



c) Un rectángulo.



La finalidad de esta actividad es que los alumnos se centren en las propiedades características de las distintas figuras (concretamente, cuadriláteros como los rectángulos o los cuadrados) y que se familiaricen con el vocabulario matemático. Así, esta actividad permitirá que los alumnos pasen del nivel 0 (reconocimiento) al nivel 1 (análisis).

En el primer apartado, el objetivo es que los alumnos se centren en los ángulos de las figuras, para que vean que en el rectángulo los cuatro vértices forman ángulos de 90° .

En el segundo apartado, el objetivo es que se centren en que el cuadrado, al igual que el rectángulo, tiene 4 lados (se pone un círculo para que contraste el número de lados y la rectitud de los mismos), pero deben darse cuenta de que la longitud de los lados del cuadrado es la misma en todos ellos.

Finalmente, en el apartado c) el objetivo es que se fijen en que el rectángulo tiene 4 lados. Además, hemos cambiado la posición del rectángulo para evitar que asocien una única posición a la idea de rectángulo.

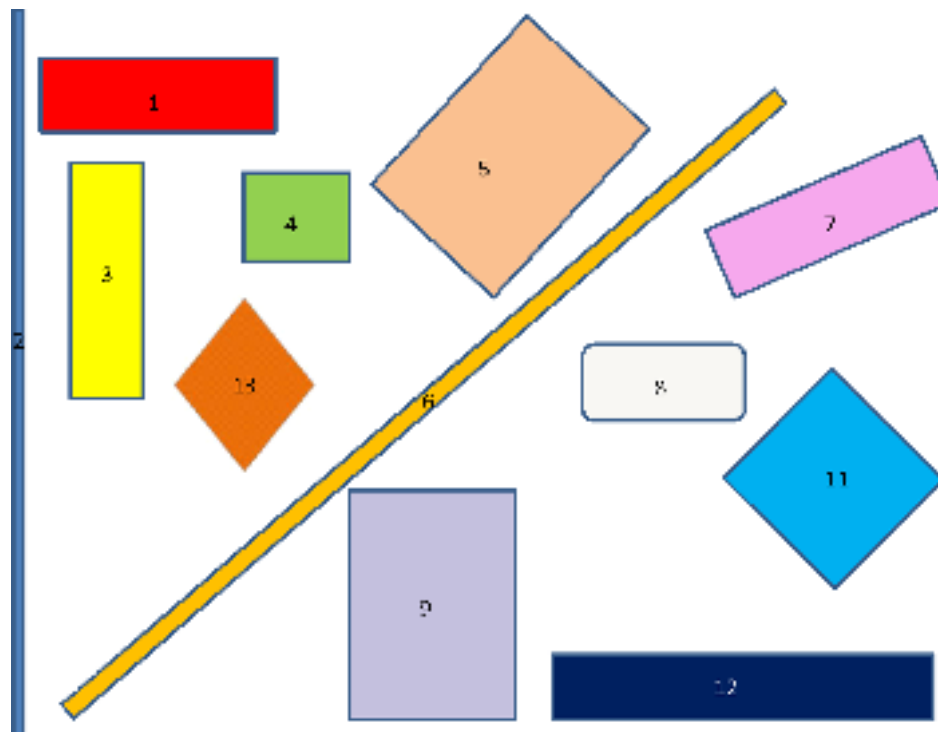
INFORME APORTADO POR EL GRUPO 3:

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.



Definición de rectángulo: es un paralelogramo con las dos diagonales iguales.

2.Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo?¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndoos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo.... | ¿Por qué no lo son? |
|----------------------------|-----------------------------------|--|
| 1 | 13 | Porque existe una diagonal mayor y otra menor. |
| 2 | | |
| 3 | 8 | Porque sus ángulos no son rectos. |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 9 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |

La figura 11 la hemos incluido como rectángulo porque un cuadrado es un rectángulo, ya que si vemos nuestra definición, un rectángulo es un paralelogramo con las dos diagonales iguales, este cuadrado la cumple, tiene lados paralelos dos a dos y sus diagonales son iguales, estamos hablando de una definición inclusiva.

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|---|--|
| 4 Ángulos rectos Diagonales iguales Lados paralelos dos a dos Lados contiguos de distinta medida Figura plana | Diagonales distintas Lados curvos Ángulos diferentes de 90° Medida superficie: área |

4. Podemos identificar tres tipos de atributos en un concepto:

Atributos relevantes: Se trata de aquellas propiedades que definen al concepto. Siempre están presentes en los ejemplos del concepto utilizados. Son los atributos que permiten construir una definición (Ej. En el caso del triángulo, un atributo relevante es tener 3 lados).

Atributos irrelevantes: Son propiedades no necesarias del concepto, que pueden aparecer o no en los ejemplos utilizados para un determinado concepto. Conviene evitar que los ejemplos seleccionados conviertan a estos atributos en relevantes. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo irrelevante sería que siempre un lado descansa sobre la horizontal).

Atributos incorrectos: son propiedades que no las posee el concepto considerado. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo incorrecto sería tener un ángulo cóncavo).

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|-------------------------------|---|------------------------------|
| Tener cuatro ángulos rectos | Posición | Lados curvos |
| Lados paralelos dos a dos | Medida superficie: área | Diagonales distintos |
| Diagonales iguales | Lados contiguos de distinta medida. | Ángulos diferentes a 90° |
| Figura plana | | |
| AÑADIR COMPLEMENTARIOS | | |
| Tener cuatro lados | Tener cuatro vértices | Tener ángulos obtusos |
| Figura cerrada | La longitud de un lado del rectángulo es el doble de la longitud de un lado de un cuadrado. | Tener volumen |
| | Los lados contiguos tienen distinta medida | Número de lados distinto a 4 |

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

Un rectángulo es una figura geométrica, un paralelogramo, con los cuatro ángulos rectos.

Hemos diseñado esta definición porque:

- Un paralelogramo es una figura geométrica de cuatro lados, con dos lados paralelos dos a dos.
- Al tener los ángulos rectos, ya se pueden deducir las demás propiedades.
- Las demás propiedades son: diagonales iguales, se cortan en un punto medio...

En cuanto a los atributos que debe verificar una definición matemática:

- *Jerarquía*. Los términos usados son básicos (paralelogramos, ángulos rectos...).
- *No circularidad*. No hemos hecho uso del propio concepto en su definición.
- *Minimalidad*. Ninguna característica puede deducirse de otra. No es una definición redundante.
- *No ambigüedad*. Con la definición que hemos dado, no definimos otras figuras.
- *No contradictoria*. Las características nombradas no son opuestas.
- *Invariante*. Es irrelevante la forma en la que representemos el rectángulo. Sea cual sea la representación, este conservará sus propiedades.
- *Equivalencia*. Podemos definir de otra forma el mismo concepto. Esta segunda forma sería equivalente a la primera.

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.

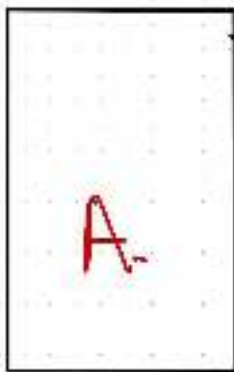


Figura geométrica de cuatro lados de dos intas (de la misma longitud los lados opuestos) que ángulos rectos.

Si es una definición de rectángulo, pero es redundante, porque al establecer las características de los cuatro lados de dos longitudes distintas que forman ángulo rectos se

deduce que la longitud de los lados opuestos es la misma, no hace falta explicitarlo. Además, esta definición es excluyente, ya que no considera al cuadrado. En cuanto a los criterios, esta definición no cumple el criterio de minimalidad. Por tanto, se trata de una definición incorrecta.

B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

Es una definición de rectángulo pero es incorrecta, ya que incluye aspectos que se pueden obviar, por ejemplo el dato de dos pares de lados paralelos con la idea de que forman ángulos rectos entre sí. Además, para ser paralelos y formar ángulos rectos han de ser estos de la misma longitud (los paralelos). Por tanto, esta definición no cumple el criterio de minimalidad. Por ello, la definición es incorrecta.

La corrección sería;

- Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos.
- Es un cuadrilátero con todos los ángulos rectos.



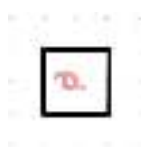
c) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.

Esta definición de rectángulo es redundante, incluye todo tipo de rectángulos, pero la idea de cuatro lados ya está incluida en el término de paralelogramos, por lo que se podría omitir.

Podemos afirmar que esta definición es correcta basándonos en los atributos de una definición matemática (jerarquía, no circularidad, no ambigüedad, no contradictoria, invariante y equivalencia), pero no cumple el criterio de minimalidad. Por ella esta definición no es del todo correcta porque es redundante.



D) Es un paralelogramo con un ángulo recto



Se trata de una definición correcta, ya que al ser un paralelogramo nos deja claro que sus lados son paralelos dos a dos. Además, al imponernos la condición de un ángulo recto, podemos deducir que todos los ángulos deben ser rectos, para que así se cumpla la condición de los lados paralelos.

Por tanto, esta definición matemática cumple con todos los criterios (jerarquía, no circularidad, minimalidad, no ambigüedad, no contradictoria, invariante y equivalencia).

7. Según Tall y Vinner (1981³), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

Definición de un concepto: Se refiere a la definición formal matemática del concepto.

Imagen del concepto: Se refiere a cómo se refleja dicho concepto en la mente de la persona; es el producto de los procesos mentales de formación del concepto e incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumno se encuentra con nuevos estímulos.

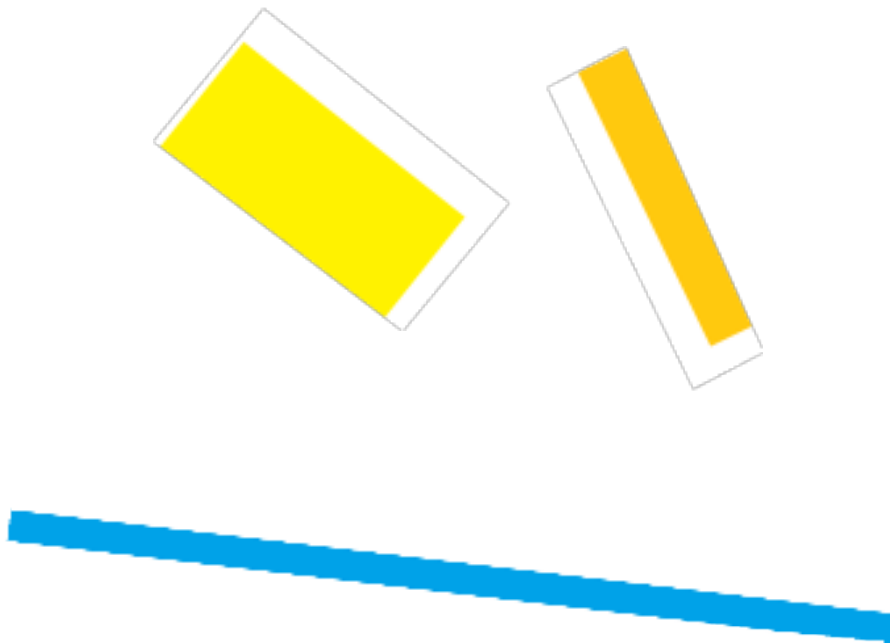
¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Los ejemplos de la pregunta 2 son muchos y variados. Como se ha comentado anteriormente, el alumnado normalmente tiene la idea asociada al nº1, mientras que en los ejemplos podemos encontrar una gran variedad de rectángulos, todos ellos correctos. Por tanto, estos ejemplos son potentes y enriquecedores, ya que consiguen ampliar la visión de la figura que estamos trabajando.

³ Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

En cuanto a la redundancia, podríamos decir que los rectángulos 1 y 12 son parecidos, al igual que lo son los rectángulos 3 y 9. Sin embargo, a pesar de la similitud no son iguales, por lo que suponen mayor riqueza y su presencia en el conjunto de ejemplos es adecuada y necesaria.

A pesar de la gran variedad de rectángulos ya comentada, pensamos que podríamos incluir otros, como los siguientes:



Hacemos esta propuesta tras analizar los rectángulos que se proponen en los ejemplos y darnos cuenta de que todos ellos están en posición vertical, horizontal o inclinados hacia la derecha. Por eso, nosotras pensamos que faltan otros rectángulos inclinados, pero en este caso hacia la izquierda.

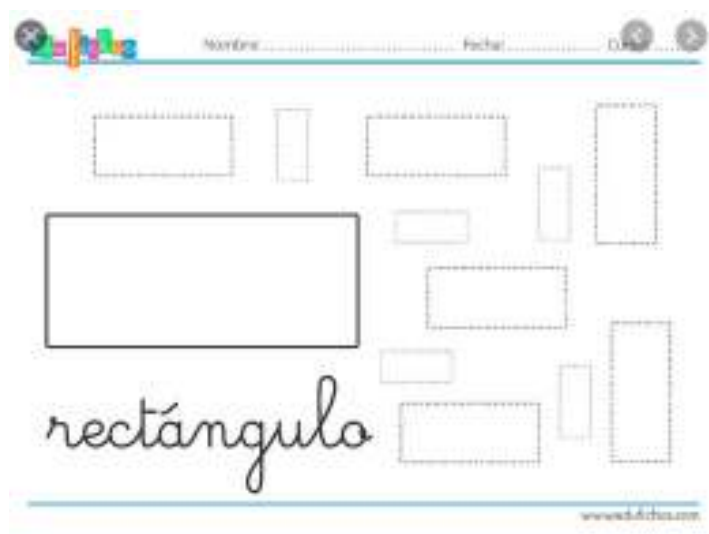
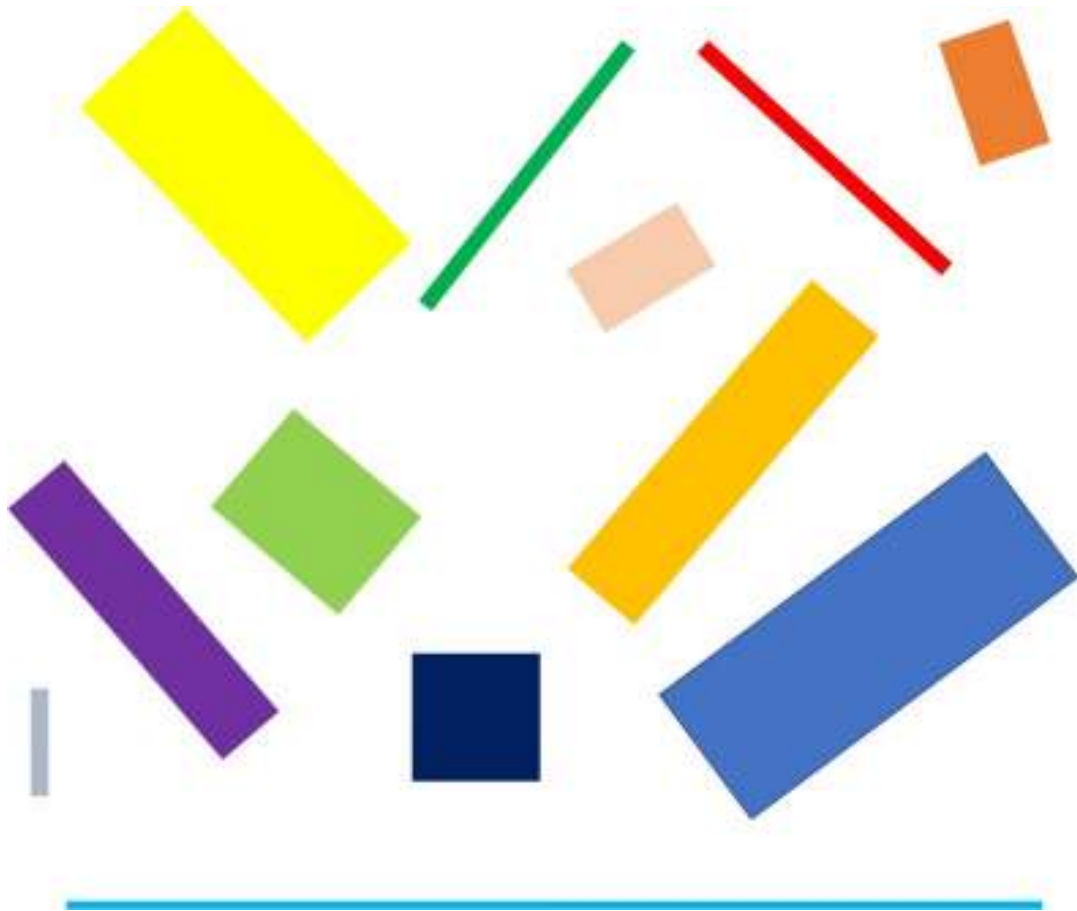
a) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.

Tras un primer golpe de vista podemos pensar que la ficha no fomenta el pensamiento ni la formación de imágenes mentales de variedad y diversidad de rectángulos, al trabajar prácticamente sobre un único rectángulo, aunque dispuesto una y otra vez en diferentes tamaños y posiciones (vertical y horizontal). Como hemos dicho, este hecho no fomenta la flexibilidad mental en relación a esta figura, por lo que pensamos que esta ficha no es adecuada, ya que continúa transmitiendo la imagen típica del

rectángulo, de la que nos tenemos que ir deshaciendo porque favorece la rigidez mental, al mismo ritmo que fomentamos en el alumnado la formación de otras imágenes.

Los atributos que refuerza son tener cuatro lados, tener los lados iguales dos a dos, tener los lados paralelos dos a dos y tener los cuatro ángulos rectos, entre otros.

Para completar esta propuesta, dibujaría en clase rectángulos como los siguientes:



8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)⁴. Un profesional de la enseñanza de matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado *Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico*) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

Teniendo esto en cuenta:

a) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?

Los alumnos en educación infantil pueden encontrarse en el nivel 0 (visualización o reconocimiento) o en el nivel 1 (análisis), por tanto las definiciones se encontrarán acordes a los niveles de Van Hiele en los que se encuentren. Los que se encuentran en nivel 0 tendrán definiciones en las que describirán la figura geométrica a partir de su apariencia física, es decir, se fijarán solo en las propiedades físicas y para describirla harán referencias a figuras que ven en su vida cotidiana, por ejemplo dirían “parece una mesa”, “parece un diamante”, etc. Son definiciones perceptivas, no son capaces de utilizar un lenguaje geométrico básico.

Por otro lado, los alumnos que se encuentren en el nivel 1, harán definiciones utilizando propiedades matemáticas, la estructura de las definiciones serán simples.

Serán definiciones redundantes y sin mucho sentido porque los alumnos no son capaces de establecer relaciones entre las propiedades de las figuras geométricas.

En ambos niveles las definiciones son excluyentes, porque los alumnos no son capaces de incluir otras figuras.

Por todo ello, la definición que tienen que usar los docentes en educación infantil, son aquellas en las que deben de aparecer el máximo número de atributos posibles, principalmente deben ser atributos relevantes. Tenemos que descomprimir, es decir, hacer definiciones redundantes para que los alumnos identifiquen las propiedades matemáticas de las figuras, para que sean capaces de pasar del nivel 0 (visualización o reconocimiento) al 1 (análisis). Son definiciones no jerarquizadas, más tarde ya se les enseñara a jerarquizar.

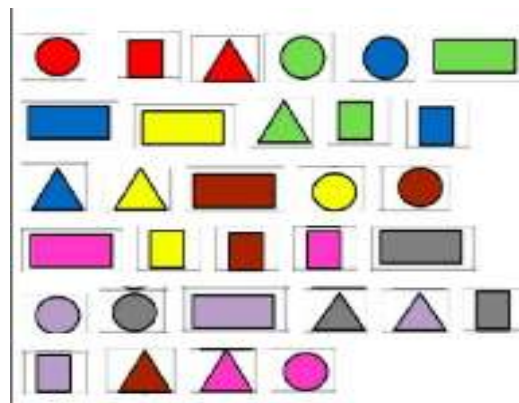
b)Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

De acuerdo con el nivel 0 de Van Hiele, los niños serán capaces de dar definiciones en relación a las características perceptivas y físicas, relacionadas con sus experiencias y cotidianidad, además las figuras son percibidas como un todo. Por tanto, una definición esperable es: Un rectángulo es como la puerta de la clase. Sin embargo, cuando el niño evolucione y alcance el nivel 1 en las definiciones podremos observar el uso de propiedades geométricas de las figuras, pero sin relacionar una propiedad con otra, por lo tanto, estas definiciones son redundantes y carentes de sentido completo. Por otro lado, los niños pueden inventar propiedades pero no son capaces de establecer clasificaciones. Por ello, una definición esperable en este nivel sería: “Un rectángulo tiene cuatro lados iguales dos a dos, cuatro ángulos rectos, lados paralelos dos a dos, etc.”. Todas estas propiedades son ciertas, pero no son precisas, faltaría la concreción propia del nivel 3, ya que existe redundancia en la definición anterior.

c)¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

Las actividades que se pueden utilizar con el fin de conseguir que los alumnos evolucionen desde el nivel 0 al nivel 1 de Van Hiele, son aquellas en las que los alumnos deben **asociar las propiedades físicas (posición, forma, tamaño) de los objetos cotidianos con las propiedades matemáticas de las figuras geométricas.**

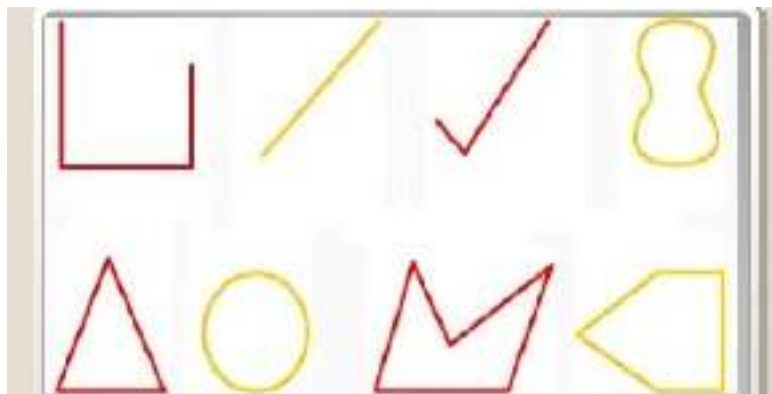
La primera actividad que podríamos plantear es que los alumnos agrupen las figuras geométricas que presenten las mismas forma geométrica, diferenciando una figura geométrica de otra.



R:1 grupo serían los rectángulos, otro los triángulos,etc

Realizamos esta actividad para que los alumnos reconozcan las distintas figuras geométricas y las distinguan unas de otras, basándose en sus propiedades matemáticas.

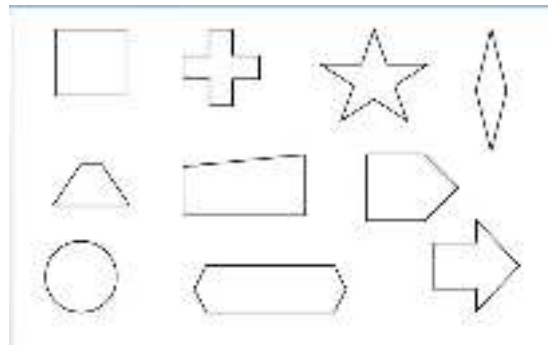
Podríamos plantear otra actividad en la que los alumnos comiencen a identificar las propiedades geométricas a través de figuras familiares para el alumno. Por ejemplo, pedirles que identifiquen los lados, los ángulos, figuras abiertas, cerradas,etc.



R: El triángulo, está cerrado, tiene 3 lados y 3 ángulos.

Realizamos esta actividad para obligar al alumnado a fijarse en propiedades matemáticas de las figuras. Además, introducimos vocabulario como “figuras abiertas o cerradas”, “ángulos” o “lados”.

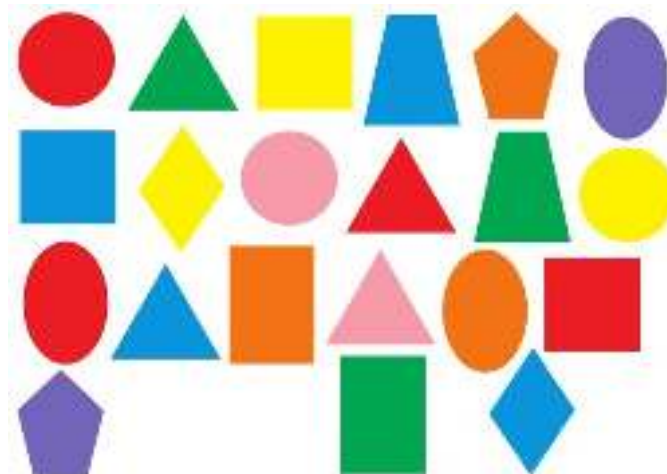
La tercera actividad consiste en que los alumnos identifiquen cuáles de las siguientes figuras de la imagen están formadas por ángulos rectos.



R: el cuadrado, la cruz, la flecha,

Con esta actividad pretendemos que los alumnos sean capaces de pasar de ver una esquina recta a ver un ángulo recto, que es una propiedad matemática que poseen algunas figuras geométricas.

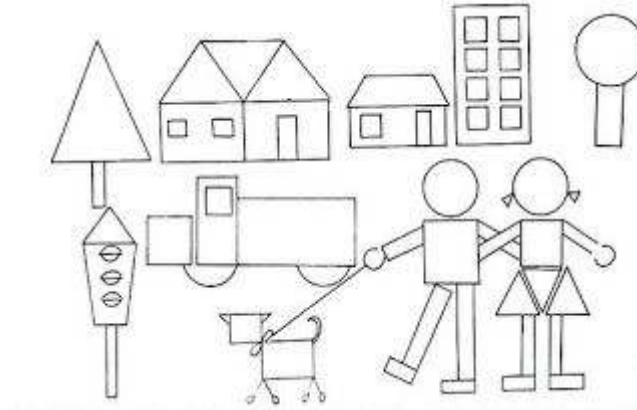
En esta actividad pedimos a los alumnos que contesten a la siguiente pregunta: ¿cuáles de las siguientes figuras tienen los lados paralelos dos a dos? Rodea con un círculo.



R: Cuadrados, rectángulos.

Realizamos esta actividad para que los alumnos reconozcan una propiedad matemática como es tener los lados paralelos dos a dos, es decir van a identificar paralelogramos.

En esta actividad los alumnos deberán de localizar las figuras geométricas que aparecen en la siguiente imagen e indicar las características matemáticas de las figuras que identifiquen.



R: Triángulos: el árbol, los tejados, la falda de la niña, la parte de arriba del semáforo. Las características de todos ellos son que tienen tres lados (y, por tanto, tres ángulos), los ángulos son menores a 90° (en estos casos)...

Con esta actividad, queremos que los alumnos reconozcan las figuras geométricas en objetos de su vida diaria (tal y como se hace en el nivel 0), identificando al mismo tiempo sus características matemáticas (avanzando así al nivel 1).

En la última actividad que planteamos utilizaremos un recurso matemático, el geomag. Los alumnos tendrán que representar en el mismo un cuadrado, un rectángulo u otra figura geométrica. A continuación, por parejas, uno de los alumnos tiene que describirle al otro la figura que ha hecho con el geomag, con la finalidad de que su pareja la realice en su geomag. De esta forma se trabajan las propiedades de las figuras ya que uno de los alumnos tendrá que describirla para que el otro la haga.


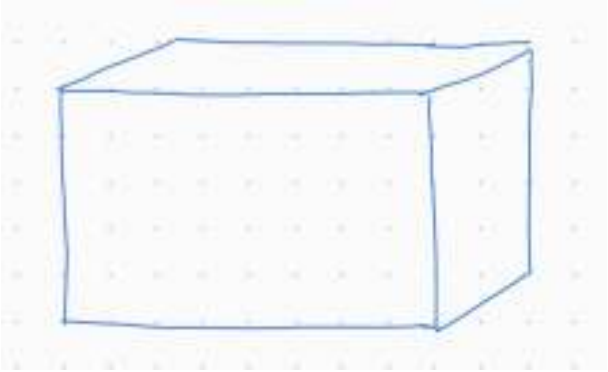



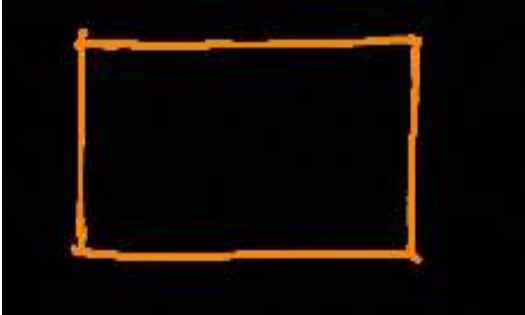
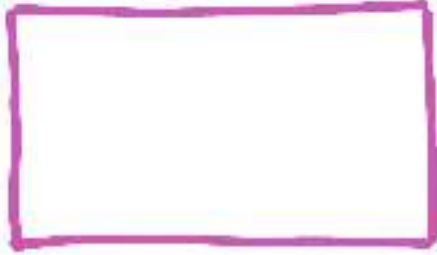

R: Uno de los alumnos de la pareja diría, la figura geométrica que he representado en el geomag tiene dos lados paralelos dos a dos, cuatro ángulos rectos, etc.

Esta actividad la hemos diseñado para que los alumnos aprendan tanto a describir las figuras geométricas a partir de sus propiedades matemáticas como a reconocer una figura a partir de sus propiedades.

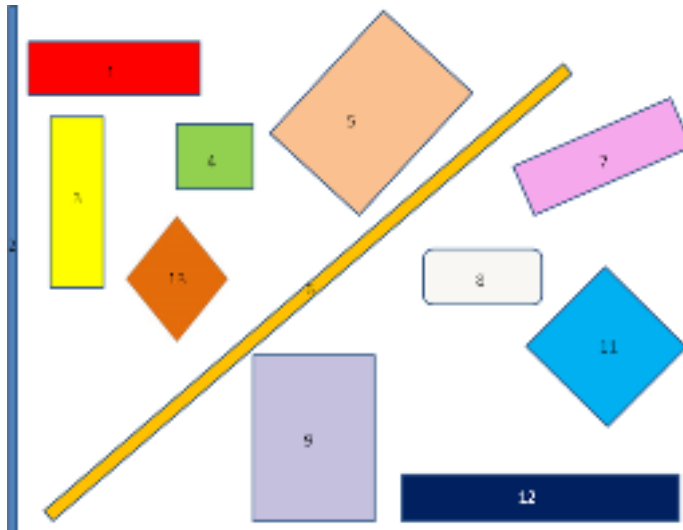
INFORME APORTADO POR EL GRUPO 4:

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

| Alumno | Dibujo del rectángulo |
|-----------------|---|
| Alumno 1 |  A hand-drawn pink rectangle with diagonal hatching lines inside, set against a grey background. |
| Alumno 2 |  A hand-drawn blue 3D rectangular prism (cuboid) drawn on a light blue grid background. |
| Alumno 3 |  A simple hand-drawn black rectangle on a white background. |

| | |
|--|--|
| <p>Alumno 4</p> |  |
| <p>Alumno 5</p> |  |
| <p>Alumno 6</p> |  |
| <p>Definición de rectángulo: Figura geométrica compuesta por cuatro lados. Sus lados son iguales dos a dos: Los lados verticales paralelos poseen un tamaño menor a los lados horizontales. Finalmente, sus lados forman cuatro ángulos rectos.</p> | |

1. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndose a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo.... | ¿Por qué no lo son? |
|----------------------------|-----------------------------------|---|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12 | 8 | Sus esquinas son curvas y no forman cuatro ángulos rectos. |
| | 11 | Es un cuadrado, por lo que todos sus lados son iguales. |
| | 13 | Se trata de un rombo porque todos sus lados son iguales y sus ángulos no miden 90 grados. |

2. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| | |
|--|---|
| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|--|---|

| | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Figura geométrica. - Paralelogramo. Los ángulos son rectos. - Tienen 4 lados. - Presentan 4 vértices. - Los lados son paralelos entre sí. - El lado más largo es aproximadamente el doble del otro - Tienen superficie. - Los lados opuestos tienen igual medida. | <ul style="list-style-type: none"> - Los ángulos no miden 90 grados (algunos son redondeados). - Lados paralelos tanto vertical como horizontalmente. - Tienen más de 4 lados. - No tienen vértices. - No tienen lados paralelos. - No tienen líneas rectas. - Todos sus lados son iguales. - Figuras abiertas. - Cuatro lados iguales - Color |
|---|--|

3. Podemos identificar tres tipos de atributos en un concepto:

Atributos relevantes: Se trata de aquellas propiedades que definen al concepto. Siempre están presentes en los ejemplos del concepto utilizados. Son los atributos que permiten construir una definición (Ej. En el caso del triángulo, un atributo relevante es tener 3 lados).

Atributos irrelevantes: Son propiedades no necesarias del concepto, que pueden aparecer o no en los ejemplos utilizados para un determinado concepto. Conviene evitar que los ejemplos seleccionados conviertan a estos atributos en relevantes. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo irrelevante sería que siempre un lado descansa sobre la horizontal).

Atributos incorrectos: son propiedades que no las posee el concepto considerado. (Ej. En el caso del triángulo, un atributo incorrecto sería tener un ángulo cóncavo).

Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|----------------------|------------------------|---------------------------|
| Tiene 4 lados. | El color. | Los ángulos no miden 90°. |
| Ángulos rectos. | Longitud de los lados. | No tiene vértices. |

| | | |
|---|--|---|
| Tiene 4 vértices. | El lado más largo es aproximadamente el doble que el otro. | No tiene líneas rectas. |
| Figura cerrada. | Dos lados más largos que los otros dos. | No tiene lados paralelos |
| Lados paralelos 2 a 2. | Longitud base > longitud altura. | Figura abierta. |
| Los lados opuestos tienen igual medida. | Base doble de la altura. | Sus cuatro lados son iguales. |
| Tienen superficie. | Posición | Tener más o menos de cuatro lados (nº de lados diferente de 4). |
| Figura geométrica. | | Lados paralelos tanto vertical como horizontalmente. |
| Paralelogramo. | | Volumen. |
| Cuadrilátero. | | |
| Polígono. | | |

4. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

El rectángulo es una figura geométrica de 4 lados. Estos lados son paralelos 2 a 2 y son iguales en cuanto a su medida. Sus lados forman 4 ángulos de 90 grados, tiene 4 vértices y está compuesto por líneas rectas.

Tras debatir el concepto de rectángulo en el aula podemos definirlo como: “Una figura geométrica plana, cerrada con 4 segmentos llamados lados. Es un cuadrilátero porque está formado por cuatro lados que forman ángulos rectos y además es un paralelogramo al estar compuesto por lados paralelos 2 a 2.”

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.

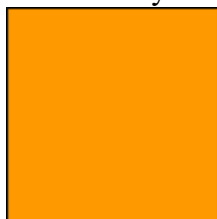
A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.



Incorrecta, excluye a los cuadrados de los rectángulos. El concepto de figura geométrica es incorrecto, ya que incluye figuras de tres dimensiones. No es muy preciso porque no acota todas las características correspondientes al rectángulo.

B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

Correcta, cumple los atributos relevantes. Incluye a los rectángulos y al cuadrado, (con la



palabra cuadrilátero acotamos a los polígonos que son figuras en dos dimensiones y cuatro lados, lo que hace que sea más precisa que el concepto figura geométrica).

Desde el punto de vista de los atributos de una definición matemática, la definición se repite porque un ángulo recto siempre conlleva lados paralelos. Además, las longitudes de los lados tampoco son relevantes, por lo que la parte final de la definición podría ser omitida.

Sin embargo, es una definición que no cumple con la idea de minimalidad, ya que es abundante.(ninguna característica podrá deducirse del resto).

C)Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí



Correcta, ya que los paralelogramos son aquellos cuyos lados son paralelos dos a dos y con el dato de ángulos rectos entre sí incluye al rectángulo y excluye a los rombos y romboides, por tanto es correcta.

Paralelogramo: Polígono, 4 lados, paralelos 2 a 2 (ángulos iguales 2 a 2). Los paralelogramos incluyen cuadriláteros cuyos ángulos no son los 4 iguales.

De nuevo, en esta definición tampoco se cumple la idea de minimalidad porque ninguna característica puede deducirse del resto, de modo que “paralelogramo” y “cuatro” es redundante.

D)Es un paralelogramo con un ángulo recto



Correcto, por la noción de paralelogramo, si tiene un ángulo recto, los demás serán también rectos.

Consideramos que la opción que seleccionaría un matemático es la definición “*Es un paralelogramo con un ángulo recto*” ya que se trata de la definición más completa cumpliendo todos los atributos de clasificación: una mayor jerarquía con términos básicos, sin circularidad, con minimalidad, no siendo ambigua, contradictoria ni invariante y, siendo equivalente.

7. Según Tall y Vinner (1981[3]), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

- **Definición de un concepto:** Se refiere a la definición formal matemática del concepto
- **Imagen del concepto:** Se refiere a cómo se refleja dicho concepto en la mente de la persona; es el producto de los procesos mentales de formación del concepto e incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumno se encuentra con nuevos estímulos.

a) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Sí, si tomamos como referencia la definición de “es un paralelogramo con un ángulo recto”, los ejemplos de la pregunta 2 son útiles para que el alumno forme una imagen correcta del rectángulo. También sería adecuado trabajar con contraejemplos, que son figuras que tienen atributos incorrectos y que, por tanto, ayudarán al alumno a clarificar la idea y concepto de lo que es un rectángulo.

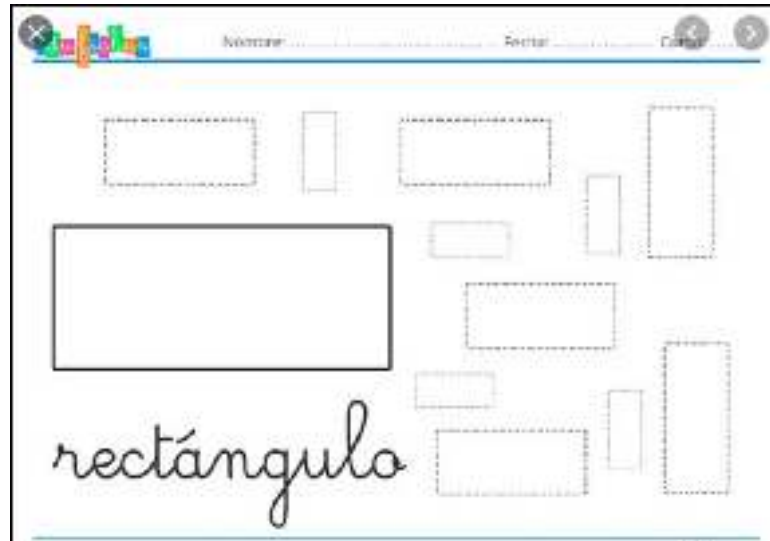
Como docentes, debemos incluir ejemplos muy ricos y manipulativos, ya que los niños construyen la imagen del concepto antes que su definición. Nuestra labor será llenar la mente del niño de imágenes y figuras diferentes y dinámicas.

b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.

Los atributos que refuerza esta ficha son:

- **Atributos relevantes:** podemos decir que: tienen 4 lados y 4 vértices, tienen ángulos y líneas rectas, tienen los lados iguales en longitud dos a dos y por tanto, son paralelos dos a dos. Todos lo cumplen, ya que son paralelogramos con un ángulo recto.
- **Atributos irrelevantes:** refuerza que el lado más largo es aproximadamente el doble que el otro, así como si está en horizontal o vertical.

Por tanto, consideramos que, aunque es una ficha adecuada, está incompleta y se centra en una única imagen del rectángulo. Debería proporcionar imágenes variadas de distintos tipos de rectángulos y posiciones (diagonales), no únicamente verticales y horizontales. Asimismo, podríamos trabajar con longitudes muy diferentes entre los lados no consecutivos. Para completar dicha ficha, por tanto, se podrían añadir contraejemplos con atributos incorrectos: cuadrados, triángulos, rombos, círculos, etc.



8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)[4]. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado *Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico*) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

Teniendo esto en cuenta:

a) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?

La definición no podrá ser mínima, pues deberá incluir el máximo de elementos relevantes posibles, tratando de que se fijen en atributos que caracterizan a las figuras geométricas. Por consiguiente, como docentes debemos centrarnos en las propiedades más básicas de las figuras, descomprimiendo al máximo los conceptos matemáticos: 4 lados, 4 vértices, superficie plana, figura plana, etc. Por consiguiente, lo que se hace en Infantil no es una definición propiamente dicha, pues se trata mayormente de una enumeración de atributos.

b) Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

Teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos, podría ser: Un rectángulo es una figura cerrada y plana con superficie cuyas líneas son rectas y se compone por cuatro lados y cuatro vértices. Además, es fundamental que contenga una idea intuitiva de ángulo recto, (pudiendo identificar los ángulos rectos en una posible cruz que formen sus esquinas) Por otro lado, podemos hacer un camino hasta entender que el paralelismo.

c) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

- Descomposición de objetos: Recortar una imagen con alguna figura geométrica de manera que ellos puedan deshacer y componer de nuevo la figura, pudiendo encajarlas en su sitio. Tipo recortables.
- Juego de Geomag: Palitos con imanes
- Identificación de propiedades para su clasificación y comparación: Una imagen con un paisaje donde se resaltan las figuras cuadradas y rectangulares y deben especificar qué figura es cuál (identificar figuras en combinación con otras).
- Identificar ángulos. Colocar pegatinas en los ángulos de cada figura que lo contengan.
- Formación de figuras geométricas con el recurso material denominado limpia-pipas de diferentes tamaños para concienciar de las diferencias en tamaño de lados de algunas figuras geométricas.
- Actividad de estampación. Cogen las figuras geométricas y pueden mojarse en pintura de manos y plasmarla en un folio. Se podrían trabajar las diferentes partes de una figura.

ANEXO 3: Análisis individual de los informes

ANÁLISIS GRUPO 1

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

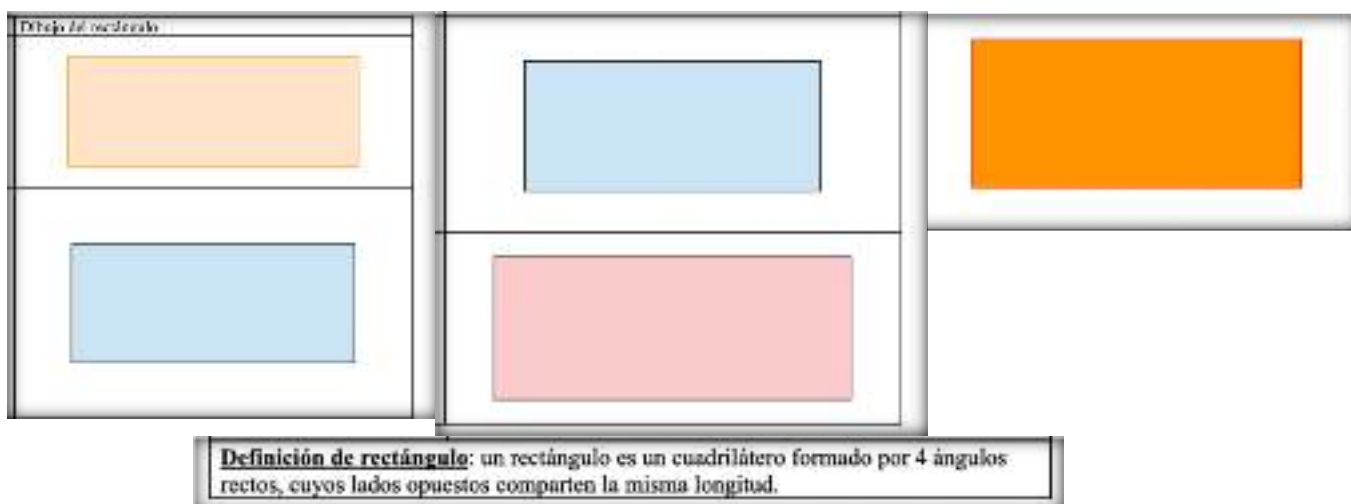


Figura 1: Respuesta G.1.P.1

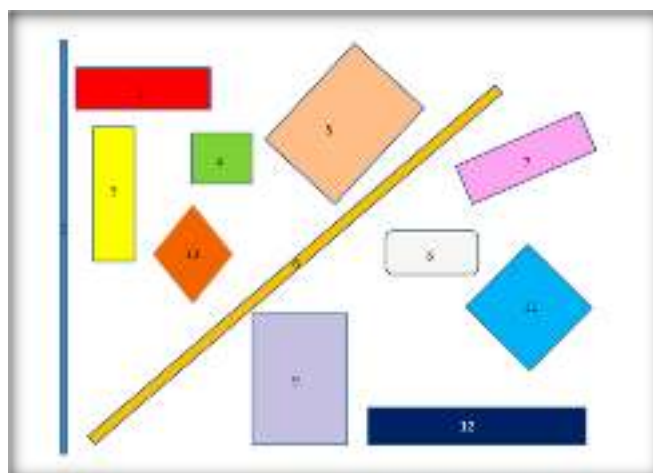
Se observa, que el grupo, al dibujar el rectángulo, coincide en una imagen estándar; dos lados de distinta longitud, siendo el de mayor tamaño el horizontal y el de menor, vertical, además, todas las figuras se encuentran coloreadas con tonos llamativos, por lo que, todas poseen una imagen del concepto muy similar (KoT “registros de representación”)

La definición ofrecida por el grupo (KoT; *definiciones, propiedades y sus fundamentos*) “un rectángulo es un cuadrilátero formado por 4 ángulos rectos, cuyos lados opuestos comparten la misma longitud” cumple cierta jerarquía, ya que utiliza el término “cuadrilátero”, por tanto, incluye a las figuras planas y polígonos, aunque podrían haber utilizado un término más preciso como “paralelogramo”. No obstante, esta

definición no cumple la minimalidad, debido a que el término “cuadrilátero” ya incluye que tiene “4 ángulos”, por lo que sería redundante.

Es importante recalcar que con esta definición no se excluye al cuadrado, ya que menciona que “los lados opuestos comparten la misma longitud”.

2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndonos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo... | ¿Por qué no lo son? |
|-----------------------------|----------------------------------|--|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12. | 8 | Sus ángulos no son rectos y no está formado por segmentos. |
| | 11 | No es un rectángulo porque aunque forman 4 ángulos rectos, sus lados tienen la misma longitud. |
| | 13 | No es un rectángulo porque sus lados tienen la misma longitud y porque no forman 4 ángulos rectos. |

Figura 2: Respuesta G.1.P.2

Se encuentran algunas contradicciones entre la definición aportada y la clasificación de las figuras (KoT: *propiedades*): con respecto a la clasificación de los ejemplos de rectángulo, esta sí atiende a la definición dada, mientras que, señalan que la figura 11, no es un ejemplo de rectángulo porque “*aunque forman 4 ángulos rectos, sus lados tienen la misma longitud*”, por tanto, en este caso, esta figura sí cumple lo dicho en su definición, ya que, sí son iguales sus lados opuestos. Por tanto, se deduce que los futuros docentes no han sabido aplicar su propia definición, dando a entender que existe un cierto desconocimiento sobre las propiedades que mencionan sobre el rectángulo (KoT

definiciones, propiedades y sus fundamentos), que han llevado a excluir al cuadrado en esta actividad.

Lo mencionado anteriormente también se aprecia en la justificación proporcionada en la figura 13 “No es un rectángulo porque sus lados tienen la misma longitud y porque no forman 4 ángulos rectos”.

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - Misma longitud de los lados opuestos. - Líneas rectas. - Los 4 vértices forman ángulos rectos. - Formado por segmentos. - Sus lados opuestos son paralelos. - Tienen 4 lados. - Tienen 4 vértices. - Figura cerrada. | <ul style="list-style-type: none"> - Distinta longitud de lados opuestos. - No forman ángulos. - No tienen vértices. |
| Añadimos los siguientes aspectos no observables en este ejemplo: | |
| <ul style="list-style-type: none"> - Sus lados opuestos son perpendiculares. - No son líneas rectas. - Son figuras discontinuas. - Son figuras abiertas. - Son figuras que presentan volumen. | |

Figura 3: Respuesta G.1.P.3

Se observa un lenguaje matemático preciso (vértices, lados, segmentos, ángulos...) (KPM: uso del lenguaje formal).

En cuanto a los atributos que aparecen en las figuras que han considerado ejemplos de rectángulo, han incluido uno: “Misma longitud de los lados opuestos” en el que se puede observar contrariedad (KoT: propiedades), ya que la figura 11 y 13 también cumple este atributo (figuras que han considerado como no rectángulos) .

Respecto a los atributos que aparecen en las figuras que han considerado como ejemplo de no rectángulo, se observa que uno de ellos “distinta longitud de lados opuestos” no aparece en ninguna de las figuras de las actividad 2. Por lo que parece que existe un cierto desconocimiento acerca del concepto de “longitud de lados opuestos” (KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos).

4. Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|---|--|--|
| Misma longitud de los lados opuestos. | Estrecho | Distinta longitud de los lados opuestos. |
| Formado por líneas rectas | Posición (horizontal/vertical) | No forman ángulos. |
| Los 4 vértices forman ángulos rectos | Largo | Ángulos distintos a 90° |
| Sus lados opuestos son paralelos | Diferentes medidas como la superficie. | Diagonal distinta |
| Tienen 4 lados. | Lados contiguos de distinta medida | Sus lados opuestos son perpendiculares. |
| Tienen 4 vértices. | Lado largo casi doble lado corto | Lados curvos |
| Figura cerrada | El color | Figura abierta |
| Diagonales iguales | | |
| Superficie | | |
| Figura plana | | Que sea un polígono. |
| AÑADIMOS LOS SIGUIENTES ASPECTOS COMPLEMENTARIOS | | |
| | Medida de la figura | Sus lados opuestos son perpendiculares. |
| | Posición (horizontal/vertical) | No está formado por líneas rectas. |
| | | Son figuras discontinuas. |
| | | Son figuras abiertas. |
| | | Son figuras que presentan volutas. |
| | | Medida diferente de sus lados opuestos. |
| | | No son segmentos. |
| | | Los 4 vértices no forman ángulos rectos. |

Figura 4: Respuesta de G.I.P.4

Existe cierto desconocimiento en relación a los atributos en sí (*KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos*), debido a que algunos incluyen con su definición a otros (el atributo “los 4 vértices forman ángulos rectos” incluye “tiene 4 vértices”, “tiene 4 lados” incluye “formado por líneas rectas”).

De nuevo, existe una confusión entre el significado de los términos “misma longitud de los lados opuestos” y “distinta longitud de los lados opuestos”, ya que el primer atributo se da en todos los rectángulos, incluyendo al cuadrado y el segundo, es una propiedad no necesaria del concepto, es decir, puede aparecer o no en los ejemplos del rectángulo, por lo que este último sería un atributo irrelevante y no, incorrecto (*KoT: propiedades*).

La identificación de atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos del rectángulo por parte del grupo, les ha servido de ayuda, en cierta medida, para reorganizar sus ideas, identificar los elementos más significativos del rectángulo y generar una nueva definición en la siguiente actividad (*KPM: Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

Un rectángulo es una figura geométrica y cerrada, la cual consta de cuatro lados y cuatro vértices, los lados son de igual tamaño que su opuesto, es decir sus lados opuestos son paralelos y los ángulos y líneas son rectos.

Si, cumple con todos los atributos de la tabla 1.


Figura 5: Respuesta G.I.P.5

Los futuros profesores han elaborado una nueva definición, esta vez, todos los atributos mencionados son correctos, (KoT: Definiciones, propiedades y sus fundamentos) no obstante, se traduce a un listado de propiedades y no a una definición atendiendo a todos los atributos de la tabla 1, por lo que no se ha tenido en cuenta el papel que juegan los distintos tipos de atributos al reelaborar la definición (*KPM: Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*). Por ejemplo, esta definición no cumple la *minimalidad*, pues resulta redundante el uso de un listado largo de propiedades, además de sobreexplicarse utilizando “*es decir*”, tampoco cumple la *jerarquía*, ya que no utilizan términos precisos como “paralelogramo” o “cuadrilátero”. Asimismo, el uso del listado de propiedades, ha dado lugar a que no conozcan el papel limitante que conlleva el abuso de atributos irrelevantes para la construcción del concepto de rectángulo (*KMT: ejemplos*)

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.


A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.

Esta definición nos parece incorrecta, ya que, excluye al cuadrado (y este es un tipo de rectángulo), por lo que, si excluye al cuadrado también excluye al rectángulo.



B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.


Creemos que esta definición es correcta, ya que, incluye a todos los tipos de rectángulo. Sin embargo, no cumple el criterio de minimalidad ya que es redundante, pues el hecho de que sea un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, lleva implícito que dichos ángulos sean rectos.



C) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.


Esta definición nos parece correcta, son aquellos cuyos lados son paralelos dos a dos y sólo que sus ángulos son rectos, por lo tanto, incluye al rectángulo.

Sin embargo, pensamos que esta afirmación es redundante porque para que sea un paralelogramo, siempre va a tener que formar ángulos rectos.



D) Es un paralelogramo con un ángulo recto.

Pensamos que es una definición correcta porque al tener un ángulo recto, implica que los otros tienen que ser ángulos rectos también.



Consideramos que la definición más correcta es la D: "Es un paralelogramo con un ángulo recto". Ya que, es la única definición que cumple todos los criterios necesarios (términos básicos, minimalidad, sin circularidad, sin ser ambiguas ni contradictorias, invariante y equivalente) para crear una definición matemática correcta.

Figura 6: Respuesta G.I.P.6

Se aprecia una mejora significativa en el discurso de estos futuros docentes que no se encuentran acordes al proporcionado hasta esta pregunta, por lo que se supone que han podido copiar la corrección del ejercicio en el aula. Incluyen al cuadrado como tipo de rectángulo (*KoT: propiedades*), identifican las definiciones que no cumplen los atributos para verificar una definición matemática (*KPM: condiciones suficientes y necesarias para generar definiciones*). Aunque, existe un desconocimiento en el término “forman ángulos rectos entre sí”, pues, en la definición C, representan una figura cuyos ángulos no son rectos (*KoT: propiedades*).

7. Según Tall y Vinner (19813), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

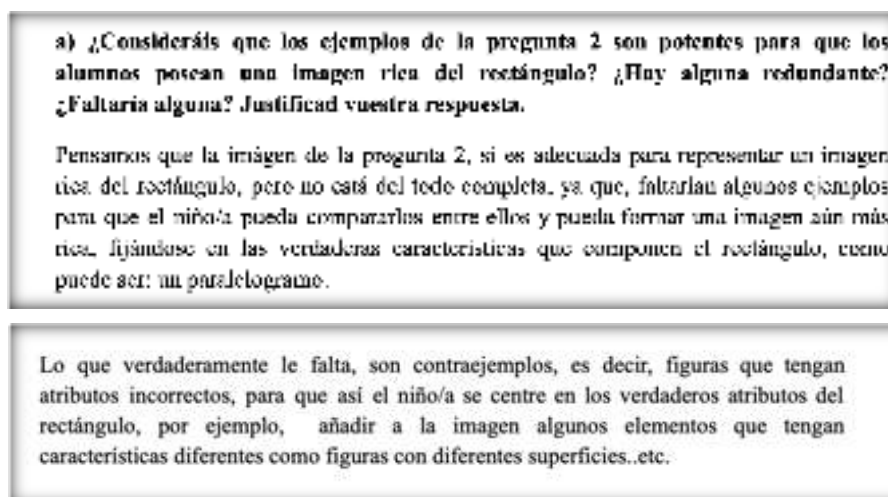
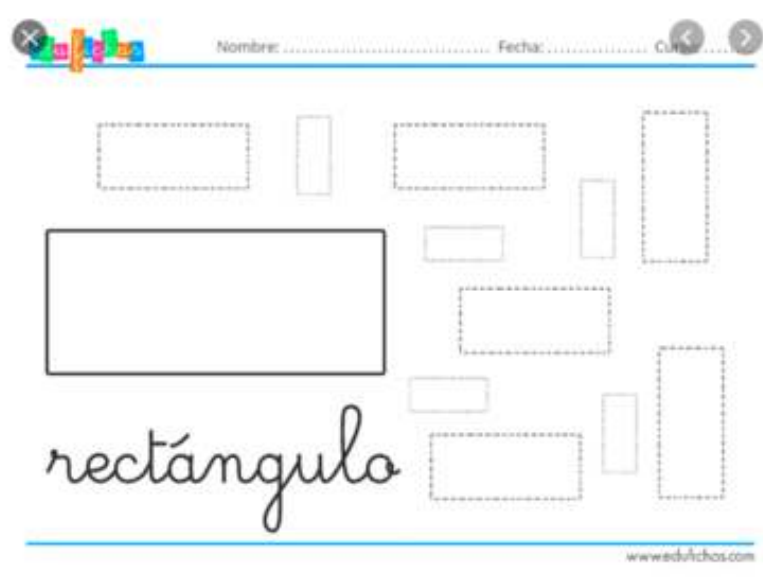


Figura 7: Respuesta G.I.P.7.A

Pese a que todos los integrantes del grupo coincidieron en la actividad 1 en una imagen estándar del rectángulo, conocen la importancia de proporcionar un conjunto de imágenes ricas utilizando ejemplos y contraejemplos para ayudar a la construcción de la definición (*KMT: estrategias*), aunque no especifican cuáles serían estas figuras y el ejemplo aportado no es claro (*KMT: ejemplos*).

Existe aún desconocimiento ante el término “paralelogramo”(*KoT: propiedades*), ya que señalan que faltarían ejemplos para que el alumnado se fijase en las verdaderas características del rectángulo, como puede ser “un paralelogramo”, no obstante, todas las figuras que corresponden a rectángulos en la figura 1 son paralelogramos y lo interesante en la enseñanza sería observar y comprobar cada uno de los atributos en los que está compuesto el concepto “paralelogramo”.

b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.



| Atributos relevantes del rectángulo que refuerza la ficha: | Atributos irrelevantes del rectángulo que refuerza la ficha: |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Cuatro lados. - Cuatro Vértices. - Ángulos rectos. - Líneas rectas. - Lados opuestos paralelos. | <ul style="list-style-type: none"> - Posición - Tamaño |

Consideramos que la ficha no es correcta del todo para trabajar el rectángulo, ya que sólo ofrece una única imagen del rectángulo, es decir, le falta variabilidad de ejemplos, como una longitud de *larga* exagerada, un cuadrado porque es un tipo de rectángulo, variabilidad en la posición diagonal, etc. Podríamos añadir por ejemplo:

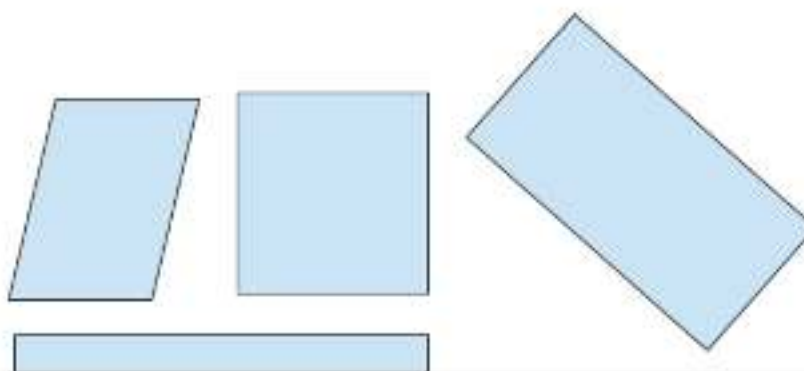


Figura 8: Respuesta G.I.P.7.B

Los futuros docentes indican el término “*longitud de larga exagerada...*” de este modo se puede observar una falta de uso del lenguaje formal matemático (*KPM: uso del lenguaje formal*).

Además, añaden ejemplos de rectángulos para complementar dicha ficha, donde se puede observar que uno de ellos no corresponde con esta figura (*KoT: propiedades*):

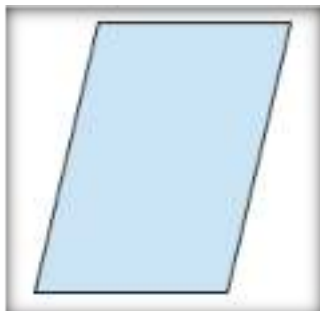


Figura 9: Propuesta de ejemplo de rectángulo por el G.1

Asimismo, solo indican que es necesario añadir más ejemplos de rectángulo, pero obvian la importancia de los contraejemplos, por lo que, en este caso no han elaborado un banco de imágenes rico asociadas al rectángulo (*KMT: ejemplos*).

8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)⁴. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el

alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

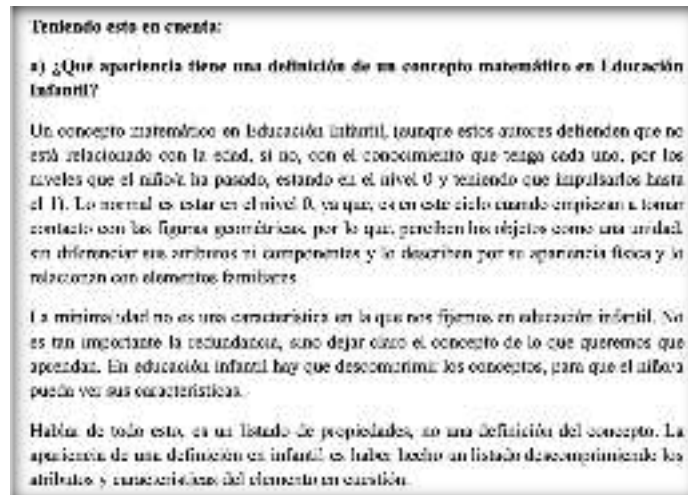


Figura 10: Respuesta G.I.P.8.A

Los futuros profesores han explicado como sería una definición en Infantil sin tomar como base la teoría de Van Hiele (*KFLM: teorías sobre el aprendizaje*), simplemente se limitan a hacer un resumen de la información que se ofrece sobre esta teoría.

Conocen que la identificación de propiedades es una práctica precursora de la construcción de una definición: *“Hablar de todo esto, es un listado de propiedades, no una definición del concepto. La apariencia de una definición en infantil es haber hecho un listado descomprimiendo los atributos y características del elemento en cuestión.”* (*KPM: formas de génesis*).

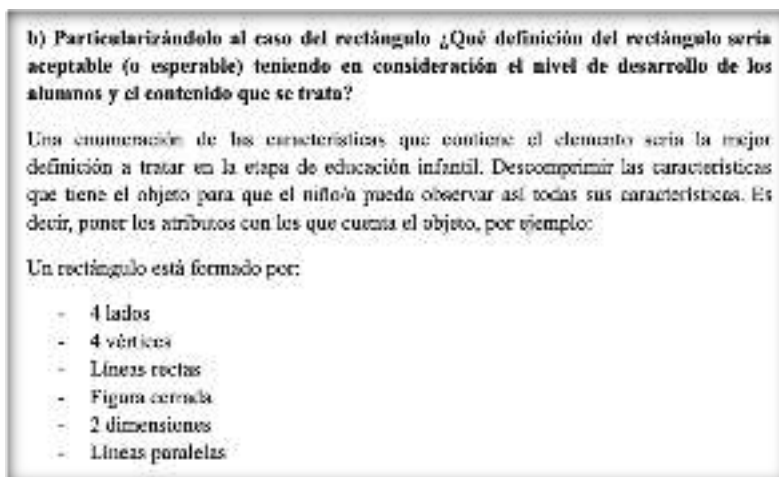


Figura 11: Respuesta G.I.P.8.B

Los futuros docentes describen qué tipo de definición del rectángulo deben aprender los alumnos/as en esta etapa (*KMLS: expectativas de aprendizaje*).

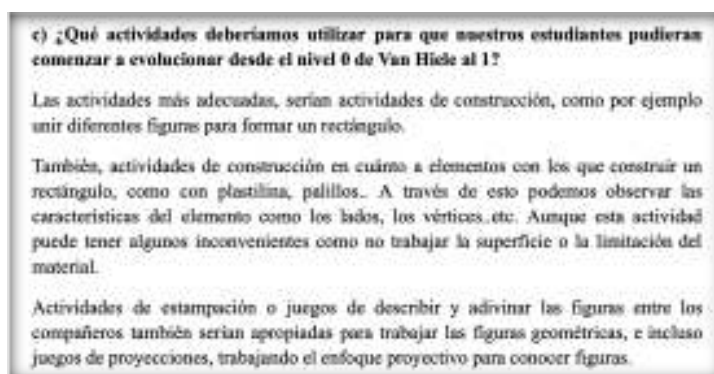
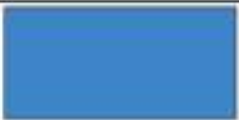





Figura 12: Respuesta G.I.P.8.C

Describen varias actividades para trabajar el rectángulo atendiendo a sus atributos (*KMT: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*), además, identifican dificultades que puede ocasionar una actividad en concreto “... Aunque esta actividad puede tener algunos inconvenientes como no trabajar la superficie o la limitación del material.” (*KFLM: fortalezas y dificultades*).

ANÁLISIS GRUPO 2

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

| Alumno | Dibujo del rectángulo |
|--------|--|
| |  |
| |  |
| |  |
| |  |

Definición de rectángulo:

- Cuadrilátero con sus ángulos rectos.
- Cuadrilátero con un ángulo recto.
- Cuadrilátero con sus dos diagonales de igual longitud.

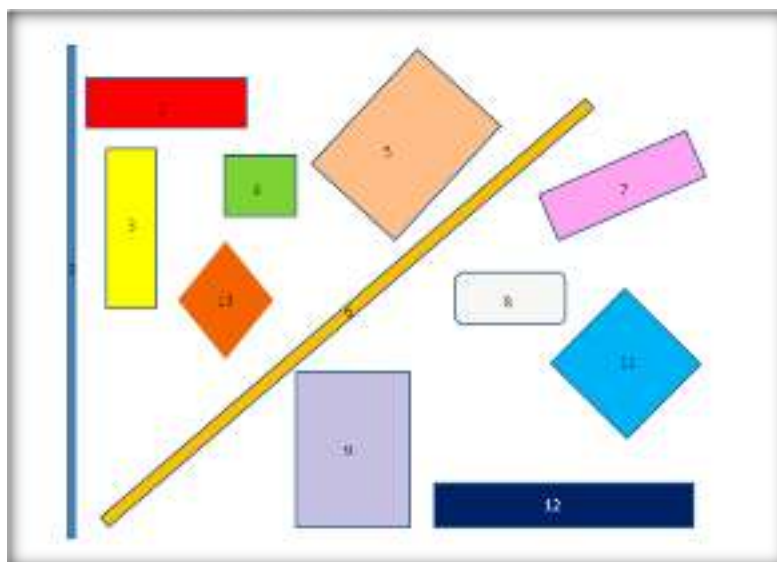
Figura 1: Respuesta G.2.P.1

Los futuros profesores poseen una imagen del rectángulo muy similar, dado que coinciden en la representación del rectángulo (posición horizontal, dos lados de distinta longitud, siendo el lado vertical aproximadamente el doble que el lado horizontal) (*KoT: registros de representación gráfico*).

La definición que ha aportado el grupo se limita a un listado de atributos organizado por guiones, por lo que esta respuesta no se podría considerar una definición como tal, además, las características ofrecidas carecen de sentido, pues señalan, repitiendo, que un rectángulo es un “cuadrilátero con sus ángulos rectos” y “cuadrilátero con un ángulo recto”, también indican que es “un cuadrilátero con sus dos diagonales de

igual longitud” (KoT: *definiciones, propiedades y sus fundamentos*). Por lo que, esta “definición”, no cumple el criterio de jerarquía ni minimalidad.

2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndonos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo... | ¿Por qué no lo son? |
|---------------------------------|----------------------------------|---|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12. | 8 | Porque no es un polígono: no tiene rectas que se cortan formando ángulos ni vértices. |
| | 13 | Porque sus ángulos no son rectos. |

A pesar de que la figura 11 pueda identificarse como un cuadrado, la hemos incluido en la categoría de rectángulo porque, si damos una definición inclusiva de rectángulo (por ejemplo, cuadrilátero con sus ángulos rectos), la figura entraría dentro de ambas categorías (es un cuadrado y un rectángulo). Así, podríamos decir que el cuadrado es un tipo particular de rectángulo.

Figura 2: Respuesta G.2.P.2

Las futuras docentes han clasificado las figuras correctamente, además, añaden una justificación del por qué algunas figuras no son ejemplos de rectángulo haciendo uso de un vocabulario matemático preciso “*polígono*”, “*ángulos*”, “*vértices*” (KPM: *uso del lenguaje formal*).

Identifica la figura 11 como ejemplo de rectángulo, expresando que “*el cuadrado es un tipo particular de rectángulo*” (KoT: *propiedades del rectángulo*).

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - 4 lados (cuadrilátero). - 4 vértices. - Ángulos rectos. - Lados paralelos dos a dos (paralelogramo). - Diagonales de la misma longitud. - Generalmente, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos. | <ul style="list-style-type: none"> - No tienen ángulos rectos. - No es un polígono (no tiene rectas). |

Figura 3: Respuesta G.2.P.3

Los futuros profesores han señalado algunos atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo donde se encuentra redundancia, “4 vértices” incluye que un rectángulo tenga “4 lados”. (KoT: *propiedades del rectángulo*). Por otro lado, añaden “Generalmente, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos”, en este caso, al conocer que el cuadrado es un tipo particular del rectángulo, han usado el término “generalmente”, de este modo, aunque el cuadrado no cumple esto, no se da una exclusión total de esta figura (KoT: *propiedades del rectángulo*).

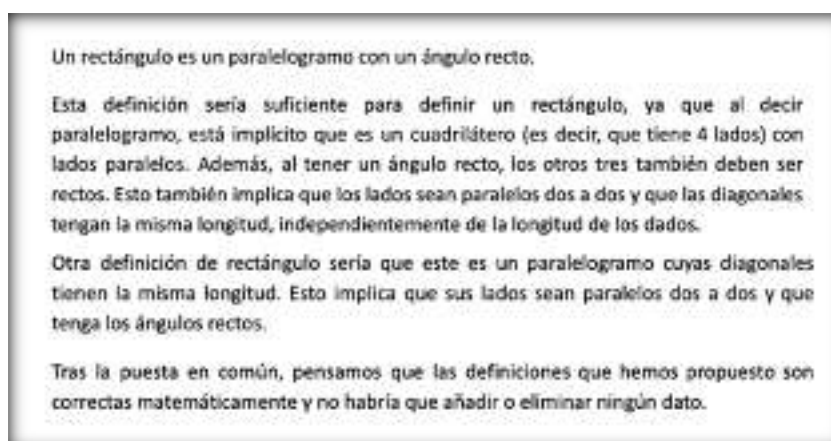
4. Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|---|---|--|
| Ángulos rectos. | Dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos | No tiene ángulos rectos |
| 4 lados (cuadrilátero) | | No es un polígono |
| Lados paralelos dos a dos (paralelogramo) | | |
| 4 vértices | | |
| Diagonales de la misma longitud | | |
| Añadimos los siguientes atributos | | |
| <ul style="list-style-type: none"> - Diagonales se cortan en el punto medio. - Figura formada por una línea poligonal cerrada. - Lados opuestos de la misma longitud. - Figura plana (2D). - Cuadrilátero. | <ul style="list-style-type: none"> - La longitud de los lados más largos es el doble de la longitud de los lados más cortos. - Posición de la figura (apoyada sobre el lado largo, sobre el lado corto...). - Medida de la superficie/ del área. - Color. | <ul style="list-style-type: none"> - Tiene tres lados. - No tiene cuatro ángulos. - No tiene 4 vértices. - Tiene ángulos obtusos. - Tiene ángulos agudos. - Es una figura abierta. - Tiene volumen. - Tiene lados curvos. - Tiene diagonales distintas en longitud. |

Figura 4: Respuesta G.2.P.4

Se deduce que las integrantes del grupo desconocen el significado de los términos “cuadrilátero” y “paralelogramo”, pues señalan “4 lados (cuadrilátero)” y “lados paralelos dos a dos (paralelogramo)”, dando a entender que el significado de cuadrilátero es simplemente que tiene 4 lados y el del paralelogramo que sus lados son paralelos dos a dos, no obstante, esta terminología incluye muchas más características, por lo que su desconocimiento ha generado que incluyeran otras características redundantes (*KoT: propiedades*).

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?



Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto.

Esta definición sería suficiente para definir un rectángulo, ya que al decir paralelogramo, está implícito que es un cuadrilátero (es decir, que tiene 4 lados) con lados paralelos. Además, al tener un ángulo recto, los otros tres también deben ser rectos. Esto también implica que los lados sean paralelos dos a dos y que las diagonales tengan la misma longitud, independientemente de la longitud de los lados.

Otra definición de rectángulo sería que este es un paralelogramo cuyas diagonales tienen la misma longitud. Esto implica que sus lados sean paralelos dos a dos y que tenga los ángulos rectos.

Tras la puesta en común, pensamos que las definiciones que hemos propuesto son correctas matemáticamente y no habría que añadir o eliminar ningún dato.

Figura 5: Respuesta G.2.P.5

La definición aportada cumple con todos los atributos que debe verificar una definición matemática, es jerárquica, cumple la minimalidad, no es ambigua ni contradictoria, por lo que se ve una mejora significativa en comparación con la primera definición (*KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.



Figura 6: Respuesta G.2.P.6

Las futuras docentes han representado la figura del rectángulo atendiendo a las características presentes en la definición (*KoT: registros de representación gráfica*).

Tras haber realizado el dibujo de los rectángulos que indican cada una de las definiciones anteriores, podemos pasar a contestar la pregunta "¿Cuál o cuáles son correctas?".

Partimos de la base de que hay dos tipos de definiciones: inclusivas (en el caso de la definición de "rectángulo", incluye también al cuadrado) o exclusivas (no incluye al cuadrado). Así, algunas definiciones aportan características que podrían considerarse "sobrantes" para definir un rectángulo, ya que todas nos aportan información suficiente para dibujar un rectángulo.

Ahora bien, si analizamos cada definición por separado, vemos que la primera menciona que las longitudes de los lados deben ser distintas, por lo que estaríamos hablando de una definición exclusiva. No tiene en cuenta a los rectángulos que tienen la misma longitud en sus cuatro lados (cuadrados). Desde el punto de vista matemático, se trataría de una definición incorrecta, ya que excluye al cuadrado.

La segunda es una definición inclusiva, ya que no menciona que los lados deban tener longitudes distintas. No obstante, debemos destacar también que se trata de una definición redundante, porque ser un cuadrilátero con ángulos rectos ya implica que los lados sean paralelos y que estos tengan la misma longitud. Aunque esta definición incluya datos redundantes. Sería totalmente correcta si quitamos la idea de que los lados opuestos tienen la misma longitud.

La tercera definición es inclusiva y da datos suficientes para formar un rectángulo, aunque decir que tiene cuatro lados quedaría implícito en ser un paralelogramo. Del mismo modo que la definición anterior, esta también sería correcta a pesar de incluir datos redundantes.

Por último, en la cuarta también se incluye al cuadrado en la definición, puesto que se trata de un paralelogramo con un ángulo recto. Así, esta definición no es redundante, ya que posee las propiedades suficientes y necesarias para ser una definición matemáticamente correcta. Por esto, podemos afirmar que esta definición es totalmente correcta desde un punto de vista matemático.

En este sentido, tras comentar las características de cada una de las definiciones, podemos afirmar que la única definición incorrecta sería la A), y que en la B) y la C) aparecen datos redundantes (o que se deducen de otros). Las definiciones que dan datos necesarios y suficientes y que no son redundantes se consideran de un nivel matemático más avanzado (más correctas desde un punto de vista matemático), ya que requieren una comprensión más completa y compleja de la geometría. Este sería el caso de la definición D).

Figura 7: Respuesta G.2.P.6

Los futuros docentes han diferenciado de forma general dos tipos de definiciones entre las existentes, mencionan que algunas incluyen al cuadrado y otras lo excluyen en base a las propiedades que mencionan (*KoT: propiedades del rectángulo*).

Además, señalan qué definiciones son incorrectas, en cuáles existe redundancia y cuáles son correctas, teniendo en cuenta si poseen los atributos que debe verificar una definición matemática, aunque hacen hincapié en la redundancia (minimalidad) y no menciona otros atributos necesarios: "*esta definición no es redundante, ya que posee las propiedades suficientes y necesarias para ser una definición matemáticamente correcta. Por esto, podemos afirmar que esta definición es totalmente correcta desde un punto de vista matemático*" (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

7. Según Tall y Vinner (19813), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

A) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Consideramos que los ejemplos de la pregunta 2 si son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo, porque no limita a los alumnos a tener una única imagen del mismo, sino a centrarse en sus propiedades independientemente de la posición y de la forma que tenga. Además, se presentan otras figuras que no son rectángulos como el 8 y el 13 que permiten reforzar no solo las propiedades que son características del rectángulo, sino también las que no lo son.

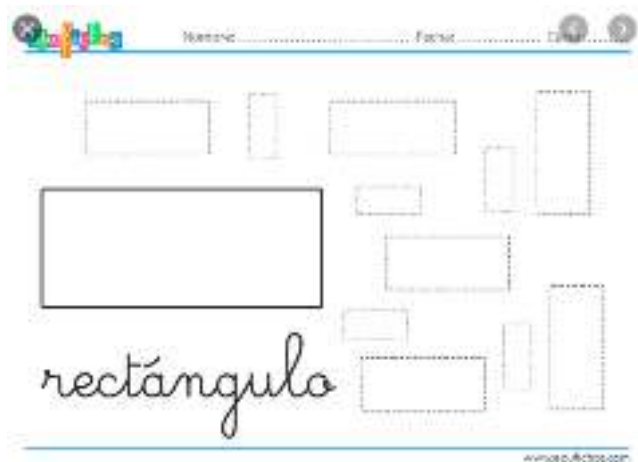
Podríamos considerar que, por ejemplo, los rectángulos 1, 3 y 7 son redundantes por tener la misma longitud en sus lados. Sin embargo, nosotras pensamos que al estar en posiciones distintas ayudan a entender que el rectángulo no debe estar siempre posicionado de la misma forma, por lo que no serían redundantes.

Finalmente, destacamos que también incluiríamos una mayor cantidad y variedad de figuras que no sean rectángulos para poder establecer comparaciones y reforzar mejor aquellas características que un rectángulo debe tener, presentando a los niños contraejemplos con atributos incorrectos y que no se corresponden con el rectángulo. Por ejemplo, podríamos incluir: romboides, más rombos, óvalos, figuras de cuatro lados abiertas, figuras que se parezcan a un rectángulo pero que estén abiertas, figuras que tengan la forma de rectángulo pero sin superficie, una figura que no tenga cuatro lados, etc.

Figura 8: Respuesta G.2.P.7.A

Conocen la importancia de ofrecer un amplio abanico de ejemplos y contraejemplos para ayudar a la elaboración del concepto de rectángulo “... *destacamos que también incluiríamos una mayor cantidad y variedad de figuras que no sean rectángulos para poder establecer comparaciones y reforzar mejor aquellas características que un rectángulo debe tener, presentando a los niños contraejemplos con atributos incorrectos y que no se corresponden con el rectángulo*” y describen algunos ejemplos con multitud de propiedades diferentes, que se podrían añadir para completar los ejemplos que aparecen en la actividad 2 (KMT: *ejemplos y contraejemplos del rectángulo*).

B) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.



En esta ficha se transmite una sola idea de rectángulo, ya que se plantean figuras con la misma forma en las que solo se cambia la posición (horizontal/vertical) y el tamaño. Además, no incluye el cuadrado como un tipo de rectángulo.

Refuerza atributos relevantes del rectángulo, pero al presentar la ficha una sola visión del rectángulo, también hace que asumamos los atributos irrelevantes como relevantes (por ejemplo, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos, normalmente posicionado de forma horizontal y que los dos lados más largos sean el doble que los otros dos más cortos).

Por todo esto, no nos parece una ficha adecuada para trabajar con los alumnos la idea de rectángulo.

Para complementar la propuesta, pensamos que sería adecuado añadir más rectángulos en distintas posiciones, con los 4 lados de la misma longitud, con dos lados mucho más largos/cortos que los otros dos, rectángulos que se encuentren en diagonal y no solo en posición vertical u horizontal, dibujar un cuadrado para que los niños relacionen propiedades ayudándoles o asimilar que un cuadrado es un tipo de rectángulo... Igual que en la ficha que aparece en el ejercicio 2. Además, consideramos que trabajar los rectángulos con material manipulativo como las geotiras de manera que se permita a los alumnos comprender de una forma más significativa cómo se construye un rectángulo, trabajando la geometría dinámica y no solo estática.

Figura 9: Respuesta G.2.P.7.B

Los futuros maestros conocen los atributos relevantes e irrelevantes que presenta la ficha (*KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos*) y además, conocen el papel limitante que el abuso de ejemplos con atributos irrelevantes tiene para la construcción del concepto “... también hace que asumamos los atributos irrelevantes como relevantes (por ejemplo, dos lados paralelos más largos que los otros dos lados paralelos, normalmente posicionado de forma horizontal y que los dos lados más largos sean el

doble que los otros dos más cortos). Por todo esto, no nos parece una ficha adecuada para trabajar con los alumnos la idea de rectángulo.” (KFLM: dificultades).

Añaden ejemplos del rectángulo con propiedades redundantes para completar los presentados en la ficha y no mencionan ningún contraejemplo, *“Para complementar la propuesta, pensamos que sería adecuado añadir más rectángulos en distintas posiciones, con los 4 lados de la misma longitud, con dos lados mucho más largos/cortos que los otros dos ...” (KMT: ejemplos del rectángulo).*

Por otro lado, destacan el beneficio de trabajar el rectángulo utilizando materiales manipulativos *“Además, consideramos que trabajar los rectángulos con material manipulativo como las geotiras de manera que se permita a los alumnos comprender de una forma más significativa cómo se construye un rectángulo, trabajando la geometría dinámica y no solo estática.” (KMT: recursos materiales).*

8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)4. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos

redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

Teniendo esto en cuenta:

a) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?

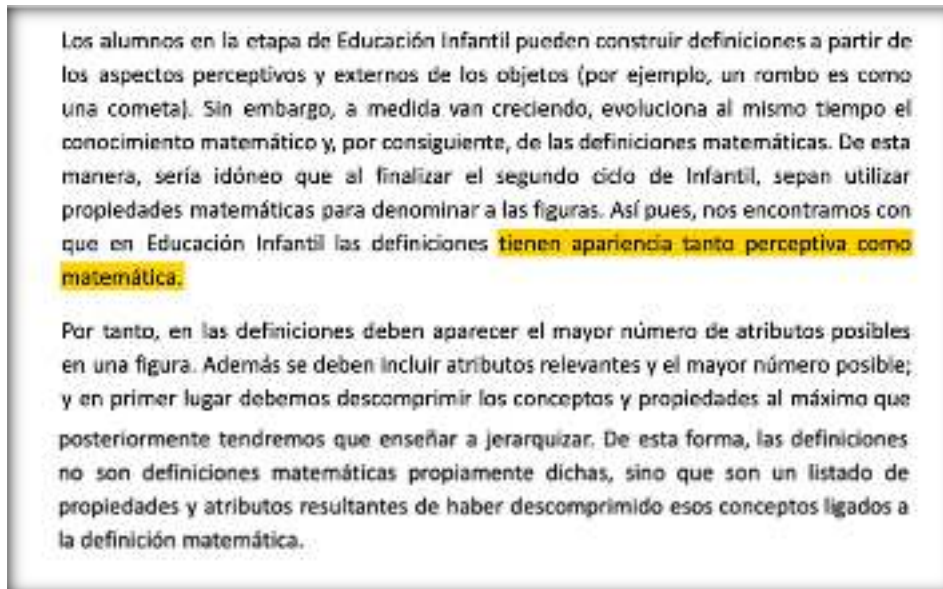


Figura 10: Respuesta G.2.P.8.A

Explican como construye el alumnado de Educación Infantil las definiciones basándose de forma muy escasa y sin mencionar la teoría de Van Hiele “*Los alumnos en la etapa de Educación Infantil pueden construir definiciones a partir de los aspectos perceptivos y externos de los objetos (por ejemplo, un rombo es como una cometa). Sin embargo, a medida van creciendo, evoluciona al mismo tiempo el conocimiento matemático y, por consiguiente, de las definiciones matemáticas*” (KMLS: teorías sobre aprendizaje).

Conocen la importancia de identificar atributos como práctica precursora para la construcción de una definición, “*en primer lugar debemos descomprimir los conceptos y propiedades al máximo que posteriormente tendremos que enseñar a jerarquizar*” (KPM: formas de génesis).

b) Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

Al principio, la definición del rectángulo que sería más aceptable o esperable sería la de que "un rectángulo es la mesa de la profesora" o "un rectángulo es como la ventana" (ya que estos objetos tienen forma rectangular). Esto se debe a que los alumnos se encuentran en este momento en el nivel 0 de Van Hiele (reconocimiento), siendo capaces de reconocer las figuras en los diferentes contextos y no reconociendo explícitamente los componentes y propiedades de los objetos (lados, ángulos, longitudes, área, etc.).

Después, a medida que se vaya avanzando en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y si se les proporciona a los alumnos oportunidades de aprendizaje pertinentes para ello, estos conseguirán iniciarse en el nivel 1 (análisis). En este, los alumnos son capaces de percibir los objetos como formados por partes y distintos de propiedades, aunque no identifican las relaciones entre ellas. En este sentido, la definición aceptable o esperable en este nivel sería "un rectángulo es un polígono que tiene 4 lados, con 4 ángulos (como esquinas (puntos), 4 vértices, es una figura cerrada...". Como se puede ver, en este nivel, los alumnos no son capaces de dar una definición correcta de rectángulo, es decir, de dar un conjunto de propiedades correctas y suficientes (que no se deducan unas propiedades de otras) que lo caracterice.

Figura 11: Respuesta G.2.P.8.B

Las futuras profesoras describen detalladamente las definiciones que serían esperables según el nivel de desarrollo del alumnado tomando como referencia la teoría de Van Hiele (*KMLS: teorías sobre aprendizaje*).

d) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

Para que nuestros alumnos pasen del nivel 0 (reconocimiento) al 1 (análisis), podríamos proponer actividades en las que tuvieran que asociar distintos objetos reales con sus respectivas formas geométricas (esto se correspondería con el nivel 0 de Van Hiele). Después, se realizarán una serie de preguntas para que los alumnos clasifiquen/agrupen las figuras y establezcan relaciones entre ellas, obligándoles así a centrarse en sus propiedades físicas (de esta manera, se trabajaría el nivel 1 de Van Hiele, ya que los niños pasarían de identificar las figuras como un todo a verlas como algo compuesto por diferentes atributos).

Otra posible actividad sería pedirles que realicen dibujos de figuras geométricas que conozcan. Seguramente dibujarán un círculo, un cuadrado o un triángulo. A partir de ahí, se les podrá pedir que se fijen en una de ellas y que, por parejas, uno de los miembros intente describir a la otra persona cómo es la figura (para ello tendrá que usar propiedades matemáticas o, al menos, palabras que permitan una iniciación en el nivel 1 de Van Hiele, como "tiene cuatro esquinas" o "vértices", o "tiene cuatro lados"...). El otro niño debería intentar dibujarlo sin haber visto anteriormente dicha figura.

Figura 8: Respuesta G.2.P.8.C

Los futuros docentes proponen una serie de actividades dónde la comparación de figuras es el factor principal, siendo esta una práctica precursora para la creación de definiciones (*KMT: tareas*).

ANÁLISIS GRUPO 3

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

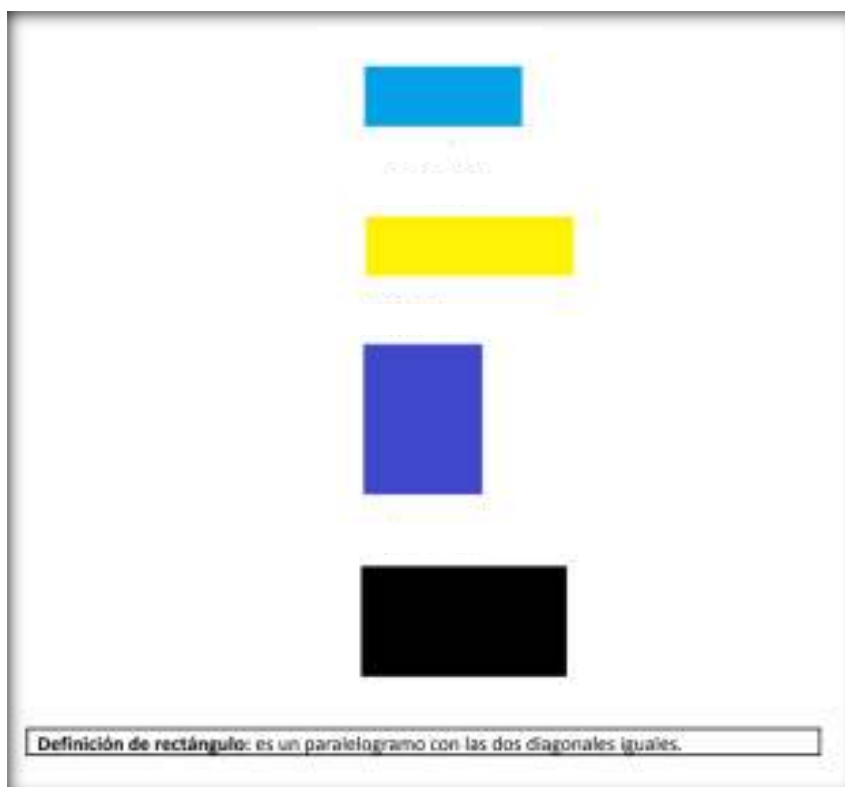


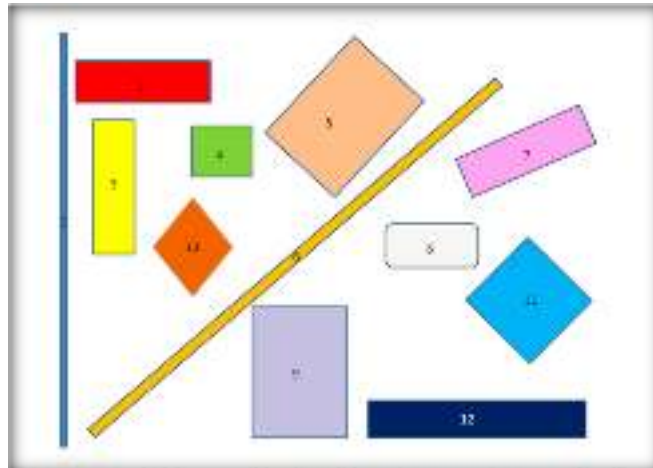
Figura 1: Respuesta G.3.P.1

Se encuentra mayor diversidad en las imágenes del rectángulo representadas por este grupo (*KoT: registros de representación gráfica*), pues, aunque la mayoría ha registrado la figura “de forma horizontal”, el tamaño varía, además una integrante ha representado la figura de “forma vertical”.

La definición aportada por el grupo “*es un paralelogramo con las dos diagonales iguales*” cumple todos los atributos que debe verificar una definición matemática; se da la minimalidad, pues no existen características redundantes, también la jerarquía, ya que

usa términos precisos como “paralelogramo” y no se da contradicción ni ambigüedad (KoT: *Definiciones y propiedades*).

2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndonos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo... | ¿Por qué no lo son? |
|----------------------------|----------------------------------|--|
| 1 | 13 | Porque existe una diagonal mayor y otra menor. |
| 2 | 8 | Porque sus ángulos no son rectos. |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 9 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |

La figura 11 la hemos incluido como rectángulo porque un cuadrado es un rectángulo, ya que si vemos nuestra definición, un rectángulo es un paralelogramo con las dos diagonales iguales, este cuadrado la cumple, tiene lados paralelos dos a dos y sus diagonales son iguales, estamos hablando de una definición inclusiva.

Figura 2: Respuesta G.3.P.2

Los futuros maestros han clasificado los atributos correctamente y atendiendo a la definición aportada, además, han incluido al cuadrado como ejemplo de rectángulo, justificando que “*un cuadrado es un rectángulo, ya que, si vemos nuestra definición, un rectángulo es un paralelogramo con las dos diagonales iguales, este cuadrado la cumple tiene lados paralelos dos a dos y sus diagonales son iguales, estamos hablando de una definición inclusiva*” (KoT: *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

Por otro lado, utilizan un lenguaje matemático preciso en la explicación del por qué hay figuras que no son rectángulo “*diagonal*”, “*ángulos no rectos*”, “*paralelogramo*” (KPM: uso del lenguaje formal).

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|---|--|
| 4 Ángulos rectos Diagonales iguales Lados paralelos dos a dos Lados contiguos de distinta medida Figura plana | Diagonales distintas Lados curvos Ángulos diferentes de 90º Medida superficie: área |

Figura 3: Respuesta G.3.P.3

Se observa que este grupo conoce en su mayoría tanto los atributos considerados como ejemplo de rectángulo como los de no rectángulo, sin embargo al especificar la característica “*lados contiguos de distinta medida*” estaría excluyendo al cuadrado, además, incluyen como atributo de no rectángulo “*medida superficie: área*”, no dejando claro este concepto (KoT: propiedades).

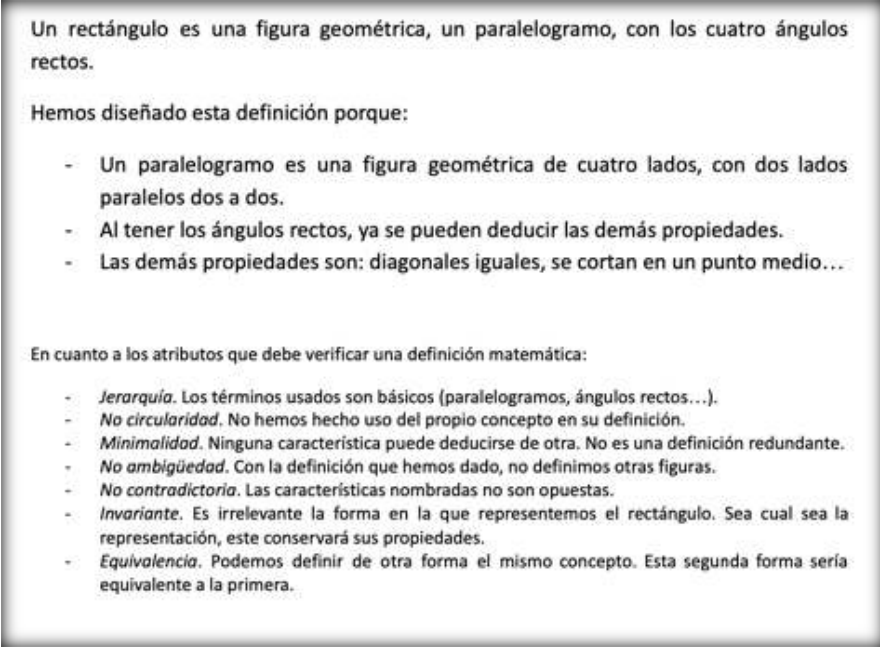
4. Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|-----------------------------|---|------------------------------|
| Tener cuatro ángulos rectos | Posición | Lados curvos |
| Lados paralelos dos a dos | Medida superficie: área | Diagonales distintos |
| Diagonales iguales | Lados contiguos de distinta medida. | Ángulos diferentes a 90º |
| Figura plana | | |
| AÑADIR COMPLEMENTARIOS | | |
| Tener cuatro lados | Tener cuatro vértices | Tener ángulos obtusos |
| Figura cerrada | La longitud de un lado del rectángulo es el doble de la longitud de un lado de un cuadrado. | Tener volumen |
| | Los lados contiguos tienen distinta medida | Número de lados distinto a 4 |

Figura 4: Respuesta G.3.P.4

Los futuros docentes conocen los atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos del concepto de rectángulo, no obstante, incluyen un atributo irrelevante “*medida superficie: área*” el cuál especificaron como ejemplo de no rectángulo en la actividad anterior, por lo que se da una contradicción, pues si señalan un atributo como ejemplo de no rectángulo, en esta actividad, se clasificaría en “atributos incorrectos” y no en “atributos irrelevantes” (*KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?



Un rectángulo es una figura geométrica, un paralelogramo, con los cuatro ángulos rectos.

Hemos diseñado esta definición porque:

- Un paralelogramo es una figura geométrica de cuatro lados, con dos lados paralelos dos a dos.
- Al tener los ángulos rectos, ya se pueden deducir las demás propiedades.
- Las demás propiedades son: diagonales iguales, se cortan en un punto medio...

En cuanto a los atributos que debe verificar una definición matemática:

- *Jerarquía*. Los términos usados son básicos (paralelogramos, ángulos rectos...).
- *No circularidad*. No hemos hecho uso del propio concepto en su definición.
- *Minimalidad*. Ninguna característica puede deducirse de otra. No es una definición redundante.
- *No ambigüedad*. Con la definición que hemos dado, no definimos otras figuras.
- *No contradictoria*. Las características nombradas no son opuestas.
- *Invariante*. Es irrelevante la forma en la que representemos el rectángulo. Sea cual sea la representación, este conservará sus propiedades.
- *Equivalencia*. Podemos definir de otra forma el mismo concepto. Esta segunda forma sería equivalente a la primera.


Figura 5: Respuesta G.3.P.5

La nueva definición que han aportado contiene algunos atributos redundantes, ya que, como ellas mismas han señalado posteriormente, el término “paralelogramo” ya incluye que sea una figura geométrica, por lo que se podría haber omitido esta característica, (además, no es necesario incluir que tiene 4 ángulos, bastaría con destacar 1 ángulo recto) (*KoT: definiciones, propiedades*).

Por otro lado, conocen los atributos necesarios para verificar una definición matemática, pues han explicado correctamente la mayoría de estos (aunque no cumpliría

la minimalidad, ya que han incluido algunas características que sí pueden deducirse de otras) (*KPM: Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.



A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.

Si es una definición de rectángulo, pero es redundante, porque al establecer las características de los cuatro lados de dos longitudes distintas que forman ángulo rectos se deduce que la longitud de los lados opuestos es la misma, no hace falta explicitarlo. Además, esta definición es excluyente, ya que no considera al cuadrado. En cuanto a los criterios, esta definición no cumple el criterio de minimalidad. Por tanto, se trata de una definición incorrecta.

Figura 6: Respuesta G.3.P.6.A

Los futuros profesores han sabido dibujar el rectángulo cómo se indicaba en la definición (*KoT: registros de representación gráfico*).

Además, han identificado los errores de esta definición para que no sea correcta “esta definición es excluyente, ya que no considera al cuadrado” (*KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos*) y han señalado los atributos que no cumple “... pero es redundante, porque al establecer las características de los cuatro lados de dos longitudes distintas que forman ángulos rectos se deduce que la longitud de los lados opuestos es la misma, no hace falta explicitarlo... esta definición no cumple el criterio de minimalidad”, por lo que conocen las condiciones necesarias para verificar una definición matemática (*KPM: Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

Es una definición de rectángulo pero es incorrecta, ya que incluye aspectos que se pueden obviar, por ejemplo el dato de dos pares de lados paralelos con la idea de que forman ángulos rectos entre sí. Además, para ser paralelos y formar ángulos rectos han de ser estos de la misma longitud (los paralelos). Por tanto, esta definición no cumple el criterio de minimalidad. Por ello, la definición es incorrecta.

La corrección sería;

- Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos.
- Es un cuadrilátero con todos los ángulos rectos.

B.

Figura 7: Respuesta G.3.P.6.B

El grupo ha sabido identificar la redundancia de esta definición, por lo que indica que no cumple el criterio de minimalidad (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

C) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.

Esta definición de rectángulo es redundante, incluye todo tipo de rectángulos, pero la idea de cuatro lados ya está incluida en el término de paralelogramos, por lo que se podría omitir.


Podemos afirmar que esta definición es correcta basándonos en los atributos de una definición matemática (jerarquía, no circularidad, no ambigüedad, no contradictoria, invariante y equivalencia), pero no cumple el criterio de minimalidad. Por ella esta definición no es del todo correcta porque es redundante.

C.

Figura 8: Respuesta G.3.P.6.C

Existe contradicción, pues señalan esta definición como “no es del todo correcta porque es redundante” (atributo de minimalidad), sin embargo, en la definición anterior, han señalado que es incorrecta por esto mismo “Por tanto, esta definición no cumple el criterio de minimalidad. Por ello, la definición es incorrecta”.

D) Es un paralelogramo con un ángulo recto



Se trata de una definición correcta, ya que al ser un paralelogramo nos deja claro que sus lados son paralelos dos a dos. Además, al imponernos la condición de un ángulo recto, podemos deducir que todos los ángulos deben ser rectos, para que así se cumpla la condición de los lados paralelos.

Por tanto, esta definición matemática cumple con todos los criterios (jerarquía, no circularidad, minimalidad, no ambigüedad, no contradictoria, invariante y equivalencia).

Figura 9: Respuesta G.3.P.6.D

Las futuras profesoras han identificado correctamente los atributos que debe tener una definición para su verificación matemática (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

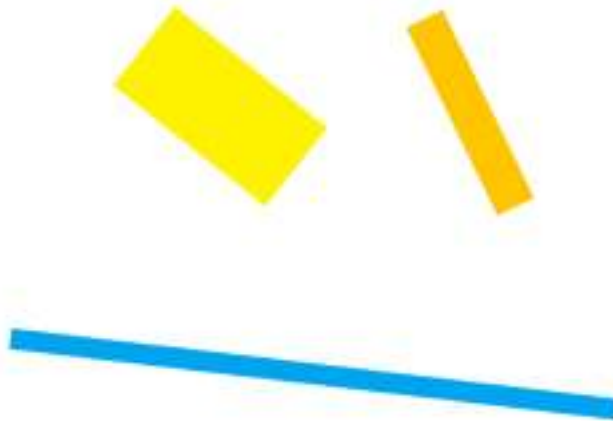
7. Según Tall y Vinner (19813), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

a) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Los ejemplos de la pregunta 2 son muchos y variados. Como se ha comentado anteriormente, el alumnado normalmente tiene la idea asociada al nº1, mientras que en los ejemplos podemos encontrar una gran variedad de rectángulos, todos ellos correctos. Por tanto, estos ejemplos son potentes y enriquecedores, ya que consiguen ampliar la visión de la figura que estamos trabajando.

En cuanto a la redundancia, podríamos decir que los rectángulos 1 y 12 son parecidos, al igual que lo son los rectángulos 3 y 9. Sin embargo, a pesar de la similitud no son iguales, por lo que suponen mayor riqueza y su presencia en el conjunto de ejemplos es adecuada y necesaria.

A pesar de la gran variedad de rectángulos ya comentada, pensamos que podríamos incluir otros, como los siguientes:



Hacemos esta propuesta tras analizar los rectángulos que se proponen en los ejemplos y tras darnos cuenta de que todos ellos están en posición vertical, horizontal o inclinados hacia la derecha. Por eso, nosotras pensamos que faltan otros rectángulos inclinados, pero en este caso hacia la izquierda.

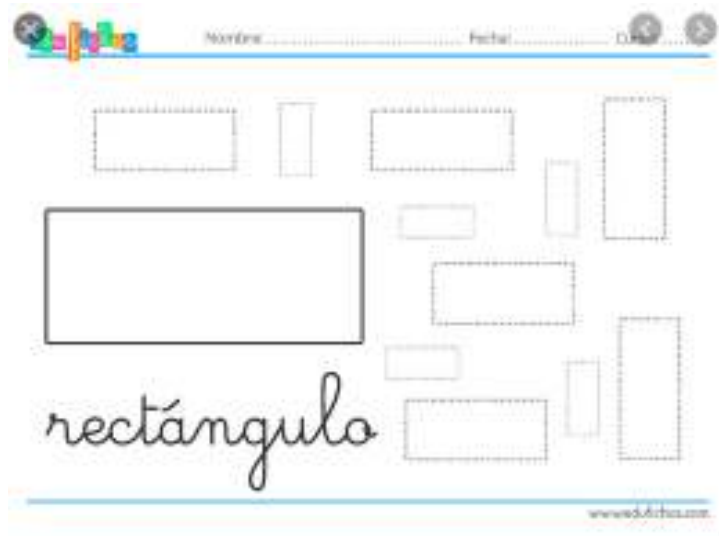
Figura 10: Respuesta G.3.P.7.A

Los futuros maestros conocen la importancia de que proporcionar un conjunto de imágenes deliberadas del concepto del rectángulo ayuda a su construcción, pues señalan que “*estos ejemplos son potentes y enriquecedores, ya que consiguen ampliar la visión de la figura que estamos trabajando*” (KMT: ejemplos).

Por otro lado, no han sabido explicar con precisión si hay figuras que resultan redundantes (KoT: propiedades).

Han añadido tres rectángulos con distinta posición, para completar los ejemplos que aparecen en pregunta 2, siendo estos ejemplos redundantes, además no han incluido ningún contraejemplo (KMT: ejemplos).

b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.



Tras un primer golpe de vista podemos pensar que la ficha no fomenta el pensamiento ni la formación de imágenes mentales de variedad y diversidad de rectángulos, al trabajar prácticamente sobre un único rectángulo, aunque dispuesto una y otra vez en diferentes tamaños y posiciones (vertical y horizontal). Como hemos dicho, este hecho no fomenta la flexibilidad mental en relación a esta figura, por lo que pensamos que esta ficha no es adecuada, ya que continúa transmitiendo la imagen típica del rectángulo, de la que nos tenemos que ir deshaciendo porque favorece la rigidez mental, al mismo ritmo que fomentamos en el alumnado la formación de otras imágenes.

Los atributos que refuerza son tener cuatro lados, tener los lados iguales dos a dos, tener los lados paralelos dos a dos y tener los cuatro ángulos rectos, entre otros.

Para completar esta propuesta, dibujaría en clase rectángulos como los siguientes:

Figura 11: Respuesta G.3.P.7.B

Los futuros docentes indican que esta ficha “no fomenta el pensamiento ni la formación de imágenes”, pues reconocen un único tipo de rectángulo (*KoT: propiedades*)

Las futuras docentes han elaborado un banco de imágenes con ejemplos de rectángulos con atributos redundantes en comparación a los ejemplos de la ficha, sin embargo no aparecen contraejemplos como pueden ser otras figuras o figuras abiertas, tridimensionales, etc. (*KMT: ejemplos*)

8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)4. Un profesional de la enseñanza de matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

Teniendo esto en cuenta:

a) ¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?

Los alumnos en educación infantil pueden encontrarse en el nivel 0 (visualización o reconocimiento) o en el nivel 1 (análisis), por tanto las definiciones se encontrarán acordes a los niveles de Van Hiele en los que se encuentren. Los que se encuentran en nivel 0 tendrán definiciones en las que describirán la figura geométrica a partir de su apariencia física, es decir, se fijarán solo en las propiedades físicas y para describirla harán referencias a figuras que ven en su vida cotidiana, por ejemplo dirían "parece una mesa", "parece un diamante", etc. Son definiciones perceptivas, no son capaces de utilizar un lenguaje geométrico básico.

Por otro lado, los alumnos que se encuentren en el nivel 1, harán definiciones utilizando propiedades matemáticas, la estructura de las definiciones serán simples.

Serán definiciones redundantes y sin mucho sentido porque los alumnos no son capaces de establecer relaciones entre las propiedades de las figuras geométricas.

En ambos niveles las definiciones son excluyentes, porque los alumnos no son capaces de incluir otras figuras.

Por todo ello, la definición que tienen que usar los docentes en educación infantil, son aquellas en las que deben de aparecer el máximo número de atributos posibles, principalmente deben ser atributos relevantes. Tenemos que descomprimir, es decir, hacer definiciones redundantes para que los alumnos identifiquen las propiedades matemáticas de las figuras, para que sean capaces de pasar del nivel 0 (visualización o reconocimiento) al 1 (análisis). Son definiciones no jerarquizadas, más tarde ya se les enseñara a jerarquizar.

Figura 12: Respuesta G.3.P.8.A

Las futuras maestras conocen los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, concretamente los dos primeros niveles (*KFLM: Teorías sobre aprendizaje*), por lo que proponen que tipo de definición de rectángulo esperan de los alumnos en infantil, dependiendo del nivel en el que se encuentren (*KMLS: Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado*).

Por otro lado, comentan las definiciones que deben usar los docentes en educación infantil dirigido a su alumnado (*KMT: teoría sobre enseñanza*).

b) Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?


De acuerdo con el nivel 0 de Van Hiele, los niños serán capaces de dar definiciones en relación a las características perceptivas y físicas, relacionadas con sus experiencias y cotidianidad, además las figuras son percibidas como un todo. Por tanto, una definición esperable es: Un rectángulo es como la puerta de la clase. Sin embargo, cuando el niño evolucione y alcance el nivel 1 en las definiciones podremos observar el uso de propiedades geométricas de las figuras, pero sin relacionar una propiedad con otra, por lo tanto, estas definiciones **son redundantes y carentes de sentido completo**. Por otro lado, los niños pueden inventar propiedades pero no son capaces de establecer clasificaciones. Por ello, una definición esperable en este nivel sería: "Un rectángulo tiene cuatro lados iguales dos a dos, cuatro ángulos rectos, lados paralelos dos a dos, etc.". Todas estas propiedades son ciertas, pero no son precisas, faltaría la concreción propia del nivel 3, ya que existe redundancia en la definición anterior. 

Figura 13: Respuesta G.3.P.8.B

Los futuros profesores aportan la definición que sería esperable teniendo en cuenta el nivel de desarrollo del alumnado (*KMLS: Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado*) conociendo previamente la teoría en la que se basan "Niveles de Van Hiele" (*KFLM: Teorías sobre aprendizaje*).

c) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

Los futuros maestros proponen una serie de actividades (*KMT: tareas*) para pasar del nivel 0 de Van Hiele al 1, por lo que conocen esta teoría (*KFLM: Teorías sobre aprendizaje*).

Plantean actividades de agrupación y comparación de figuras geométricas para ayudar a los alumnos/as a la identificación de propiedades, dificultando progresivamente la tarea: agrupar figuras similares, identificar propiedades utilizando figuras familiares, identificar ángulos rectos en figuras, reconocer lados paralelos... (*KMT: estrategias*).



Figura 14: Actividad planteada para P.8.C

También proponen una actividad basada en un recurso matemático “Geomag”, el cual se utilizará para ayudar al alumnado a describir figuras a partir de las propiedades presentes (*KMT: recursos materiales*)









Figura 15: Actividad manipulativa planteada para P.8.C

Además, conocen la importancia de usar un lenguaje formal matemático (*KPM: uso del lenguaje formal*), por lo que proponen una actividad en la que el alumnado distinga ángulos rectos con la finalidad de cambiar su discurso habitual utilizando el concepto “esquinas”.

ANÁLISIS GRUPO 4

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.

| Dibujo del rectángulo | |
|---|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Definición de rectángulo: Figura geométrica compuesta por cuatro lados. Sus lados son iguales dos a dos: Los lados verticales paralelos poseen un tamaño menor a los lados horizontales. Finalmente, sus lados forman cuatro ángulos rectos.

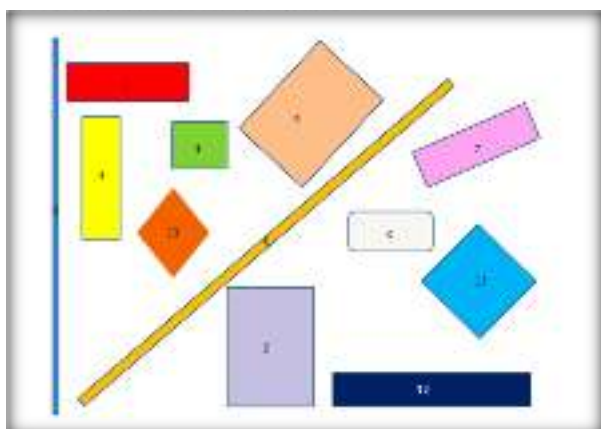
Figura 1: Respuesta G.4.P.1

Mayoritariamente se observa que los futuros docentes poseen una imagen del concepto muy similar (rectángulo horizontal dónde la longitud del largo es el doble del lado corto aproximadamente) no obstante, existen algunas excepciones; la primera dibuja el rectángulo con líneas en su interior, de esta forma deja claro que un rectángulo tiene superficie. Por otro lado, otra, añade volumen a la figura, creando un prisma rectangular y no un rectángulo como tal (*KoT: registros de representación (imagen del concepto)*).

La definición aportada por el grupo se limita a un listado de propiedades, además no utilizan conceptos precisos que agrupen varias características, por lo que no cumple el atributo de jerarquía ni minimalidad. (el concepto “cuatro ángulos rectos” incluye “cuatro lados”). (KoT: *Definiciones y propiedades*)

Por otro lado, han definido el concepto del rectángulo tomando como referencia la imagen del concepto que poseían, pues no solo excluye al cuadrado, si no que conciben la figura del rectángulo con una posición invariable “*los lados verticales paralelos poseen un tamaño menor a los lados horizontales*” (KoT: *imagen del concepto y definición del concepto*).

2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndonos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo... | ¿Por qué no lo son? |
|----------------------------|----------------------------------|---|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12 | 8 | Son esquinas con curvas y no forman cuatro ángulos rectos. |
| | 11 | Es un cuadrado, por lo que todos sus lados son iguales. |
| | 13 | Se trata de un rombo porque todos sus lados son iguales y sus ángulos no miden 90 grados. |

Figura 2: Respuesta G.4.P.2

La clasificación de los ejemplos y contraejemplos del rectángulo realizada por el grupo coincide con su definición aportada, aunque, como esta no fue del todo acertada, se encuentran algunos desaciertos, concretamente, consideran al cuadrado como ejemplo de no rectángulo (KoT: *propiedades del rectángulo*).

Utilizan un lenguaje matemático no preciso; “*esquinas*” en lugar de “*vértices*” (KPM: *uso del lenguaje formal*), además, excluyen la figura del cuadrado, exponiendo que “*todos sus lados son iguales*” (KoT: *propiedades del rectángulo*).

Aunque en la definición que aportaron en la *actividad 1* concibieron al rectángulo como una figura “*inmóvil*”, estando situado su lado de mayor tamaño horizontal y su lado de menor tamaño vertical, han clasificado como ejemplo de rectángulos aquellos donde su posición no era la definida por el grupo. (*KoT: propiedades del rectángulo*)

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Figura geométrica. - Paralelogramo. - Los ángulos son rectos. - Tienen 4 lados. - Presentan 4 vértices. - Los lados son paralelos entre sí. - Líneas rectas. - Figuras cerradas. - El lado más largo es aproximadamente el doble del otro - Tienen superficie. - Los lados opuestos tienen igual medida. | <ul style="list-style-type: none"> - Los ángulos no miden 90 grados (algunos son redondeados). - Lados paralelos tanto vertical como horizontalmente. - Tienen más de 4 lados. - No tienen vértices. - No tienen lados paralelos. - No tienen líneas rectas. - Todos sus lados son iguales. - Figuras abiertas. - Cuatro lados iguales - Color |

Figura 3: Respuesta G.4.P.3

En esta actividad si se da un lenguaje matemático preciso “*paralelogramo*”, “*vértices*” ... (*KPM: “uso del lenguaje formal”*).

En los atributos que consideran como rectángulo se dan algunos redundantes (“*4 lados*” y “*4 vértices*”, “*lados paralelos*” y “*líneas rectas*”) y de nuevo se excluye al cuadrado “*el lado más largo es aproximadamente el doble del otro*” (*KoT: propiedades*).

En cuanto a los atributos que han considerado como ejemplos de no rectángulos, han añadido algunos que no aparecen en las figuras de la actividad anterior, además, destacan que “*los ángulos no miden 90 grados (algunos son redondeados)*”, sin embargo, no existen ángulos redondos (*KoT: propiedades*).

4. Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes | Atributos incorrectos |
|------------------------|---|---------------------------|
| Tiene 4 lados. | El color. | Los ángulos no miden 90°. |
| Ángulos rectos | Longitud de los lados. | No tiene vértices. |
| Tiene 4 vértices. | El lado más largo se aporreadamente al doble que el otro. | No tiene líneas rectas. |
| Figura cerrada. | Dos lados más largos que los otros dos. | No tiene lados paralelos. |
| Lados paralelos 2 a 2. | Longitud base + longitud altura. | Figura abierta. |

| | | |
|---|--------------------------|---|
| Los lados opuestos tienen igual medida. | Base doble de la altura. | Sus cuatro lados son iguales. |
| Tienen superficie. | Prisma | Tener más o menos de cuatro lados (nº de lados diferente de 4). |
| Figura geométrica. | | Lados paralelos tanto vertical como horizontalmente. |
| Paralelogramo. | | Volumen. |
| Cuadrilátero. | | |
| Polígono. | | |

Figura 4: Respuesta G.4.P.4

Existe redundancia en los atributos relevantes aportados por el grupo (“tiene 4 lados” incluye “tiene 4 vértices” y “los lados opuestos tienen igual medida” ya implica que tiene “lados paralelos 2 a 2”) (KoT: propiedades).

En atributos irrelevantes se encuentra contradicción, pues señalan como irrelevante “longitud de los lados”, pero, señalan “los lados opuestos tienen igual medida” como relevante (KoT: propiedades).

Se encuentra redundancia en los atributos que señalan como relevantes, ya que el término “paralelogramo” ya incluye que el rectángulo sea un polígono y un cuadrilátero (KoT: propiedades).

Por otro lado, indican como atributo incorrecto “sus cuatro lados son iguales”, sin embargo, esto sería irrelevante, pues es una propiedad que aparece en el cuadrado (KoT: propiedades del rectángulo), además, también incluyen “lados paralelos tanto vertical como horizontal”, que realmente sería un atributo relevante, dado que lo cumplen todos los rectángulos, incluyendo al cuadrado (KoT: propiedades del rectángulo).

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

El rectángulo es una figura geométrica de 4 lados. Estos lados son paralelos 2 a 2 y son iguales en cuanto a su medida. Sus lados forman 4 ángulos de 90 grados, tiene 4 vértices y está compuesto por líneas rectas.

Tras debatir el concepto de rectángulo en el aula podemos definirlo como: “Una figura geométrica plana, cerrada con 4 segmentos llamados lados. Es un cuadrilátero porque está formado por cuatro lados que forman ángulos rectos y además es un paralelogramo al estar compuesto por lados paralelos 2 a 2.”

Figura 5: Respuesta G.4.P.5

No existe un cambio significativo en el discurso de los futuros maestros sobre la nueva definición aportada, sigue siendo un listado de propiedades, por lo que no cumple el atributo de minimalidad, además algunas de ellas redundantes (“*estos lados son paralelos 2 a 2*”, “*son iguales en cuanto a su medida*”), (“*4 ángulos*”, “*4 lados*”, “*compuesto por líneas rectas*”) (KoT: *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.


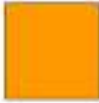


| | |
|---|--|
| <p>A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.</p>  <p>Incorrecta, incluye a los cuadrados de los rectángulos. El concepto de figura geométrica es incorrecta, ya que incluye figuras de tres dimensiones. No es muy precisa porque no cita todas las características correspondientes al rectángulo.</p> <p>B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.</p>  <p>Correcta, cumple los atributos relevantes. Incluye a los rectángulos y al cuadrado, (con la palabra cuadrilátero asociado a los polígonos que son figuras de dos dimensiones y cuatro lados, lo que hace que sea más precisa que el concepto figura geométrica).</p> <p>Desde el punto de vista de los atributos de una definición matemática, la definición es repetitiva porque un ángulo recto siempre conlleva lados paralelos. Además, las longitudes de los lados tampoco son relevantes, por lo que la parte final de la definición podría ser omitida.</p> | <p>C) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.</p>  <p>Correcta, ya que los paralelogramos son aquellos cuyos lados son paralelos dos a dos y esto el dato de ángulos rectos entre sí incluye al rectángulo y excluye a los romboides, por tanto es correcta.</p> <p>Paralelogramo: Polígono, 4 lados, paralelos 2 a 2 (ángulos iguales 1 a 2). Los paralelogramos incluyen cuadriláteros cuyos ángulos no son los 4 iguales.</p> <p>De nuevo, en esta definición tampoco se cumple la idea de minimalidad porque alguna característica puede deducirse del resto, de modo que “paralelogramo” y “cuatro” es redundante.</p> <p>D) Es un paralelogramo con un ángulo recto.</p>  <p>Correcta, por la noción de paralelogramo, si tiene un ángulo recto, los demás serán también rectos.</p> <p>Consideramos que la opción que seleccionaría un matemático es la definición “D) un paralelogramo con un ángulo recto” ya que se basa de la definición más completa cumpliendo todos los atributos de clasificación: una mayor jerarquía con términos básicos, sin circularidad, con minimalidad, no siendo ambigua, contradictoria ni innecesaria y siendo representativa.</p> |
|---|--|

Figura 6: Respuesta G.4.P.6

El grupo solo menciona una definición como incorrecta, pues indican que excluye al cuadrado (*KoT: propiedades*). Además, en las definiciones que señala como correctas puntualizan aspectos que invalidan la definición desde un aspecto matemático, no obstante, siguen afirmando que es correcta. Por ejemplo, la definición B la perciben como correcta, pero señalan que se da redundancia, en la C pasa algo similar pues, aunque dicen ser correcta, también mencionan que no cumple la minimalidad (*KoT: propiedades*).

7. Según Tall y Vinner (19813), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

a) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Sí, si tomamos como referencia la definición de "es un paralelogramo con un ángulo recto", los ejemplos de la pregunta 2 son útiles para que el alumno forme una imagen correcta del rectángulo. También sería adecuado trabajar con contraejemplos, que son figuras que tienen atributos incorrectos y que, por tanto, ayudarán al alumno a clarificar la idea y concepto de lo que es un rectángulo.

Como docentes, debemos incluir ejemplos muy ricos y manipulativos, ya que los niños construyen la imagen del concepto antes que su definición. Nuestra labor será llenar la mente del niño de imágenes y figuras diferentes y dinámicas.

Figura 7: Respuesta G.4.P.7.A

Los futuros docentes conocen la importancia de ofrecer al alumnado ejemplos y contraejemplos para formar una imagen y definición clara del concepto, así como elaborar un banco de imágenes ricas del rectángulo (*KMT: ejemplos*).

También señalan el valor de conocer los atributos irrelevantes del rectángulo para ayudar al alumnado a generar su imagen del concepto (*KMT: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*) y la relevancia de presentarle al alumnado ejemplos manipulativos (*KMT:*

recursos materiales) así como realizar dinámicas con el alumnado (KMT: *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*).

b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.

Los atributos que refuerza esta ficha son:

- **Atributos relevantes:** podemos decir que: tienen 4 lados y 4 vértices, tienen ángulos y líneas rectas, tienen los lados iguales en longitud dos a dos y por tanto, son paralelos dos a dos. Todos lo cumplen, ya que son paralelogramos con un ángulo recto.
- **Atributos irrelevantes:** refuerza que el lado más largo es aproximadamente el doble que el otro, así como si está en horizontal o vertical.

Por tanto, consideramos que, aunque es una ficha adecuada, está incompleta y se centra en una única imagen del rectángulo. Debería proporcionar imágenes variadas de distintos tipos de rectángulos y posiciones (diagonales), no únicamente verticales y horizontales. Asimismo, podríamos trabajar con longitudes muy diferentes entre los lados no consecutivos. Para completar dicha ficha, por tanto, se podrían añadir contraejemplos con atributos incorrectos: cuadrados, triángulos, rombos, círculos, etc.

Figura 8: Respuesta G.4.P.7.B

Los futuros maestros de Infantil mencionan los atributos relevantes e irrelevantes que refuerza la ficha (KoT: *propiedades*).

Señalan las carencias que presenta dicha ficha “*aunque es una ficha adecuada, está incompleta y se centra en una única imagen del rectángulo*” y sus posibles correcciones “*Debería proporcionar imágenes variadas de distintos tipos de rectángulos y posiciones (diagonales), no únicamente verticales y horizontales. Asimismo, podríamos trabajar con longitudes muy diferentes entre los lados no consecutivos*”. Además, señalan otra posible corrección “*Para completar dicha ficha, por tanto, se podrían añadir contraejemplos con atributos incorrectos: cuadrados, triángulos, rombos, círculos, etc*” (KoT: *propiedades del rectángulo*)

8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)[4]. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Según estos autores (ver anexo 1), sólo las personas que logran alcanzar el nivel 3 son capaces de construir una definición apropiada, pero el razonamiento implicado en el proceso de construcción de la definición se inicia en el nivel 0 (Visualización o reconocimiento) y avanza hacia el nivel 1 (Análisis) en el que el alumno ya es capaz de romper esa imagen global y comenzar a identificar atributos, algunos de ellos precursores de propiedades matemáticas formales (por ejemplo, rodar o no rodar no es una propiedad matemática, pero ocurre en los cuerpos que tienen superficies curvas y da origen a la distinción entre poliedros y cuerpos redondos). Los alumnos de Educación Infantil se inician en el nivel 1 si se les proporciona oportunidades de aprendizaje potentes para ello.

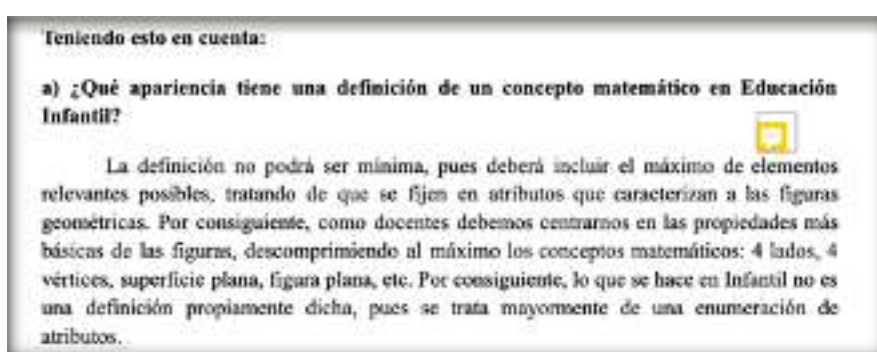


Figura 9: Respuesta G.4.P.9.A

Las futuras profesoras han destacado la importancia de la identificación de propiedades de una figura como práctica precursora de la construcción de una definición (KPM: Condiciones necesarias y suficientes de generar definiciones)

b) Particularizándolo al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

Teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos, podría ser: Un rectángulo es una figura cerrada y plana con superficie cuyas líneas son rectas y se compone por cuatro lados y cuatro vértices. Además, es fundamental que contenga una idea intuitiva de ángulo recto, (pudiendo identificar los ángulos rectos en una posible cruz que formen sus esquinas) Por otro lado, podemos hacer un camino hasta entender que el paralelismo.

Figura 10: Respuesta G.4.P.9.B

Los futuros docentes redactan el tipo de definición que sería esperable teniendo en cuenta el nivel del alumnado (KMLS: Nivel de desarrollo conceptual esperado).

Además, explican un método para que el alumnado aprenda el concepto de paralelismo “podemos hacer un camino para entender que es el paralelismo” (KMT: técnicas).

c) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

- ✓ **Descomposición de objetos:** Recortar una imagen con alguna figura geométrica de manera que ellos puedan deshacer y componer de nuevo la figura, pudiendo encajarlas en su sitio. Tipo recortables.
- ✓ **Juego de Geomag:** Palitos con imanes
- ✓ **Identificación de propiedades para su clasificación y comparación:** Una imagen con un paisaje donde se resalten las figuras cuadradas y rectangulares y deben especificar qué figura es cuál (identificar figuras en combinación con otras).
- ✓ **Identificar ángulos.** Colocar pegatinas en los ángulos de cada figura que lo contengan.
- ✓ **Formación de figuras geométricas** con el recurso material denominado limpia-pipas de diferentes tamaños para concienciar de las diferencias en tamaño de lados de algunas figuras geométricas.
- ✓ **Actividad de estampación.** Cogen las figuras geométricas y pueden mojarlas en pintura de manos y plasmarla en un folio. Se podrían trabajar las diferentes partes de una figura.

Figura 11: Respuesta G.4.P.9.C

El grupo ofrece gran variedad de actividades creativas para la comprensión del rectángulo y sus atributos; “Recortar una imagen con alguna figura geométrica de manera que ellos puedan deshacer y componer de nuevo la figura, pudiendo encajarlas en su sitio” (KMT: estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), “Formación de figuras geométricas usando limpiapipas” (KMT: recursos materiales y virtuales), etc.

ANÁLISIS GRUPO 5

1. Vamos a comenzar particularizando en la definición de rectángulo, figura que todos conocemos. Todos los alumnos del grupo, a la vez, vais a pensar en el rectángulo y vais a dibujar en la siguiente tabla la o las imágenes que os han aparecido en vuestra mente (podéis dibujarlo en un papel y digitalizarlo para incluirlo aquí). A continuación, proporcionad una definición consensuada de “rectángulo” que tenga en cuenta las figuras propuestas por cada uno de vosotros.




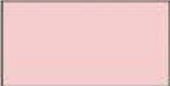


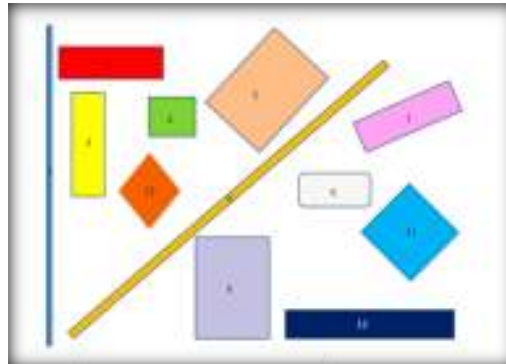
| Alumno | Dibujo del rectángulo |
|---|---|
| |  |
| |  |
| |  |
| |  |
| |  |
| |  |
| Definición de rectángulo: Figura geométrica cerrada o polígono de cuatro lados, paralelo e iguales dos a dos (es decir dos de sus lados paralelos son de mayor longitud, que los otros dos lados que lo componen). | |

Figura 1: Respuesta G.5.P.1

Los futuros docentes coinciden en una imagen del rectángulo similar, pues todos lo representan en forma horizontal, además, la mayoría dibuja el lado horizontal aproximadamente el doble de largo que el vertical, salvo una de ellas, que dibuja el lado vertical más alargado (*KoT: registros de representación gráfica*).

En cuanto a la definición aportada, esta se compone de un listado de propiedades, donde se aprecia gran redundancia, pues varias características ya incluyen a otras (“polígono” incluye “figura geométrica”, “paralelo” e “iguales dos a dos”), además supone mayor redundancia al añadir “es decir”. Por otro lado, esta “definición” no incluye al cuadrado “*dos de sus lados paralelos son de mayor longitud, que los otros dos lados que lo componen*” (KoT: propiedades del rectángulo).

2. Observad las siguientes figuras. ¿Todas ellas podrían considerarse ejemplo de rectángulo? ¿Por qué? Responded en la tabla que aparece a continuación, refiriéndonos a ellas según el número asignado:



| Son ejemplos de rectángulo | No son ejemplos de rectángulo.... | ¿Por qué no lo son? |
|--------------------------------------|-----------------------------------|--|
| 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 9 - 12 - | 15 | Porque no tiene ángulos rectos. |
| | 11 | Porque es un cuadrado ya que tiene los 4 lados del mismo tamaño. En matemáticas al cuadrado se le considera un tipo particular de rectángulo ya que cumple casi todas las características del rectángulo. |
| | 8 | Porque los ángulos no son de 90°, es decir no son ángulos rectos. |

Figura 2 : Respuesta G.5.P.1

La clasificación de los ejemplos y no ejemplos del rectángulo coincide con la definición aportada por el grupo en la actividad 1, es decir, tanto en la definición como en la clasificación de ejemplos, han excluido al cuadrado, no obstante, detallan que “*En matemáticas al cuadrado se le considera un tipo particular de rectángulo ya que cumple casi todas las características del rectángulo.*”, por lo que se da una contradicción (KoT: definiciones y propiedades del rectángulo).

3. Haced un listado de las propiedades, características o atributos que observáis en el conjunto de figuras que habéis considerado como rectángulo y otro listado con las que observáis en el conjunto de las figuras no lo son.

| Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de rectángulo | Atributos que aparecen en las figuras consideradas como ejemplo de NO rectángulo |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Lados paralelos dos a dos. | <ul style="list-style-type: none"> • No ángulos rectos. |
| <ul style="list-style-type: none"> • Dos de los lados son más largos que los otros dos. • Sus ángulos son rectos. • Figura cerrada. • Tiene que tener superficie. | <ul style="list-style-type: none"> • No lados paralelos 2 a 2. • Volumen |

Figura 3: Respuesta G.5.P.3

Nuevamente se aprecia una exclusión del cuadrado al incluir como atributo del rectángulo “dos de los lados son más largos que los otros dos”, en los demás atributos no se encuentra redundancia, aunque no incluyen términos concretos como “paralelogramo”, “cuadrilátero” ... Por otro lado, en los atributos señalados como no rectángulo especifican “volumen”, no obstante, ninguna de las figuras de la actividad anterior presenta volumen (KoT: propiedades del rectángulo).

4. Ordenad los atributos señalados en la actividad 3 según esta clasificación:

| Atributos relevantes | Atributos irrelevantes Tenemos que evitar que algo irrelevante los niños lo transformen en relevante. | Atributos incorrectos |
|--|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Tiene 4 lados • Figura cerrada • Lados paralelos dos a dos • Sus ángulos son rectos • Tiene que tener superficie | <ul style="list-style-type: none"> • Es de color amarillo, verde, azul... • Dos lados más largos que los otros dos • Longitud de la base mayor que la altura, aunque la base sea el doble a la altura • La posición de la figura (lado paralelo a una línea horizontal, tumbado, ...) | <ul style="list-style-type: none"> • Volumen • No posee ángulos rectos • No posee lados paralelos • Que no tenga vértice. • No tiene líneas rectas. • Figura abierta • Tener más o menos de 4 lados. |
| AÑADIMOS LOS SIGUIENTES (corrección) | | |
| <ul style="list-style-type: none"> • 4 vértices. • Figura geométrica. (más importante, primer nivel). | | <ul style="list-style-type: none"> • Sus lados son desiguales |
| <ul style="list-style-type: none"> • Paralelogramo. • Cuadrilátero. • Polígono. • La medida de su superficie (su área) es $b \times a$. | | |

Figura 4: Respuesta G.5.P.4

La clasificación de atributos atiende a las características del rectángulo, aunque algunas de ellas son redundantes. Por ejemplo “4 lados” y “4 vértices”, el término “paralelogramo” ya incluyen los términos “figura cerrada”, “cuadrilátero” “polígono”. (KoT: propiedades)

5. ¿Qué es, entonces, un rectángulo? Proporcionad una definición de rectángulo, consensuada en grupo, justificando vuestra respuesta y basándoos en los atributos que habéis considerado como “relevantes”. ¿Cumple los atributos de la tabla 1?

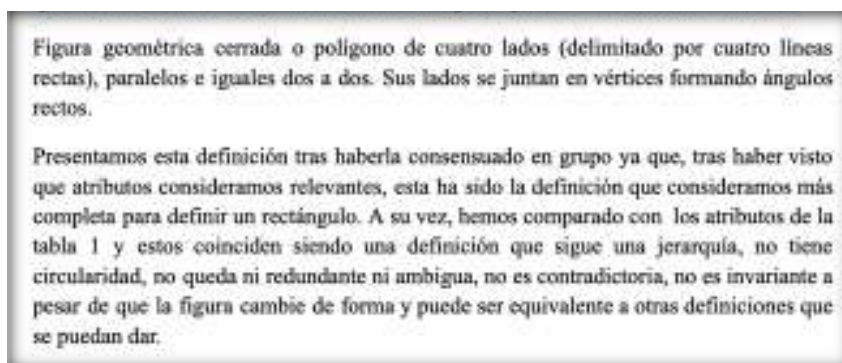


Figura geométrica cerrada o polígono de cuatro lados (delimitado por cuatro líneas rectas), paralelos e iguales dos a dos. Sus lados se juntan en vértices formando ángulos rectos.

Presentamos esta definición tras haberla consensuado en grupo ya que, tras haber visto que atributos consideramos relevantes, esta ha sido la definición que consideramos más completa para definir un rectángulo. A su vez, hemos comparado con los atributos de la tabla 1 y estos coinciden siendo una definición que sigue una jerarquía, no tiene circularidad, no queda ni redundante ni ambigua, no es contradictoria, no es invariante a pesar de que la figura cambie de forma y puede ser equivalente a otras definiciones que se puedan dar.

Figura 5: Respuesta G.5.P.5

La definición aportada es muy similar a la que señalaron en la actividad 1, siendo la diferencia la no exclusión del cuadrado y la especificación de los vértices. (KoT: propiedades).

Además, utilizan un lenguaje verbal no preciso, pues señalan que “sus lados se juntan en vértices” (KPM: uso del lenguaje formal)

6. En distintos libros de texto aparecen las siguientes definiciones del rectángulo. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica ¿Cuál o cuáles son correctas? Justificad vuestra respuesta. Dibujad un ejemplo de cada una de ellas que cumpla estrictamente lo que indica; este dibujo os puede ayudar a identificar si la definición es correcta, incorrecta o incompleta.

A) Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.

No es correcto ya que, al poner que dos de los lados paralelos deben tener una longitud mayor o menor que los otros dos, se estarían excluyendo al cuadrado que es un tipo particular de rectángulo pero todos sus lados son iguales.

Además el concepto de figura geométrica no nota todas las características, excluye a los cuadrados de los rectángulos. Este concepto puede incluir figuras de tres dimensiones o círculos.

Figura 6: Respuesta G.5.P.6.A

Los futuros docentes indican que esta definición es incorrecta pues excluye al cuadrado (*KoT: propiedades*).

B) Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.

Creemos que sí es correcta ya que cumple con los atributos relevantes que conforman la definición de rectángulo aunque, la longitud de los lados, es irrelevante.

Corrección: La definición es correcta pero desde el punto de vista matemático es redundante ya que no cumple el atributo de la minimalidad.

Figura 7: Respuesta G.5.P.6.B

A partir de esta actividad, se da una corrección de cada respuesta aportada, en este caso, indican que los atributos son correctos (*KoT: propiedades*) pero no cumple la minimalidad para ser matemáticamente válida (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*)

C) Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.

Es correcto ya que al decir que sus ángulos tienen que ser rectos entre sí, como los paralelogramos tienen los lados paralelos conforman un rectángulo con lados paralelos. Por lo que cumplen las características.

Corrección: No pasaría nada si quitamos el dato de cuatro ya que en la definición de paralelogramo está incluido el cuatro.

Desde el punto de vista matemático no cumple el principio de minimalidad.

Figura 8: Respuesta G.5.P.6.C

De nuevo, el grupo da una explicación de por qué esta definición es correcta (*KoT: propiedades*) y en la corrección resaltan que no cumple el criterio de minimalidad (*KPM: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*).

D) Es un paralelogramo con un ángulo recto.

No es correcto, porque todos los ángulos deben ser rectos y no solo uno. Además, la definición es escasa puesto que le falta conceptos relevantes para la formación del rectángulo; entre ellos nos encontramos con que tiene que ser una figura cerrada, de 4 lados paralelos e iguales dos a dos y formando ángulos rectos.

Corrección: Es correcta ya que, al imponer que uno de los ángulos sea recto y ser un paralelogramo, necesariamente tengo que poner el resto de los ángulos rectos.

Figura 9: Respuesta G.5.P.6.D

El grupo desconoce el significado del término “paralelogramo”, pues señalan que esta definición es escasa y le faltarían atributos relevantes para completarla (*KoT: propiedades*).

7. Según Tall y Vinner (19812), la mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario. Para romper con esta idea, definen estas dos ideas, indicando el papel que juega la imagen del concepto en su definición:

a) ¿Consideráis que los ejemplos de la pregunta 2 son potentes para que los alumnos posean una imagen rica del rectángulo? ¿Hay alguna redundante? ¿Faltaría alguna? Justificad vuestra respuesta.

Sí, consideramos que en esta pregunta si se trabaja de manera adecuada la figura del rectángulo ya que se sale del concepto que se suele tener de la figura del rectángulo y, además, trabaja el cuadrado como una figura también perteneciente al rectángulo,

No vemos que haya alguna figura redundante ya que hay mucha diversidad de rectángulos de distintos tamaños y posiciones y no hay ninguno que se repita.

Respondiendo a la segunda pregunta, podría faltar una figura abierta ya que todas las que aparecen son figuras cerradas. De este modo, al poner una figura abierta sería un buen contraejemplo. También poner ejemplos de figuras que no tengan cuatro lados, o que no sean paralelas dos a dos, o sin ángulo recto para que así el niño tenga ejemplos de figuras próximas que no son rectángulos (todos ellos serían contraejemplos).

Figura 10: Respuesta G.5.P.7.A

El grupo considera los ejemplos de la ficha de la pregunta 2 adecuados para que el alumnado aprenda un buen concepto de rectángulo (*KFLM: formas de interacción*).

Indican que debería haber figuras abiertas para completar la ficha y ofrecerle al alumnado contraejemplos (*KMT: ejemplos*), no obstante, olvidan otros atributos importantes como las figuras tridimensionales, que no tengan superficie y solo contorno.

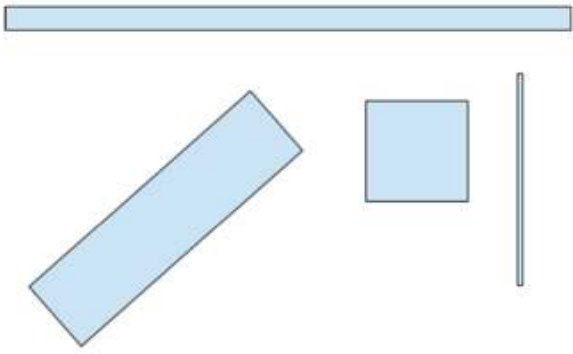
b) ¿Qué valoración hacéis de la ficha siguiente? ¿Qué atributos del rectángulo, ya sea relevante o irrelevante refuerza? Indica qué rectángulos dibujarías en clase para complementar esta propuesta.

La valoración que hacemos es que esta ficha trabaja sólo una única representación del rectángulo en el que lo único que cambia es la posición del mismo.

Atributos que refuerza:

- Los lados tienen que ser iguales 2 a 2.
- Ángulos rectos.
- Lados paralelos.
- Solo puede posicionarse de forma vertical y horizontal.
- Que el lado más largo es aproximadamente el doble del otro.

Rectángulos que dibujaría:



Aunque estas son las variedades que hemos propuesto, también se pueden trabajar estas mismas opciones cambiando el ancho, largo... de cada uno de ellos.

Figura 11: Respuesta G.5.P.7.B

Los futuros docentes señalan los atributos que refuerza, sin señalar si son relevantes o irrelevantes (*KoT: propiedades*).

Además añaden ejemplos de rectángulos para completar la ficha, aunque no incluyen ningún contraejemplo de otras figuras, de figuras abiertas o tridimensionales (*KMT: ejemplos*).

8. Las nuevas tendencias en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apuestan por no solo que los alumnos identifiquen y nombren las figuras (tarea típica en los libros de Infantil) sino que se inicien en prácticas propias del quehacer matemático como la construcción de la definición (Carrillo y Liñán, 2018)3. Un profesional de la enseñanza de las matemáticas ha de conocer cómo evoluciona el

razonamiento geométrico para saber qué es posible esperar de un niño en un determinado momento y cómo secuenciar su enseñanza. El matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele desarrollaron un modelo (denominado Niveles de Van Hiele para el aprendizaje geométrico) cuya idea básica es que el aprendizaje de la Geometría se hace a través de niveles de pensamiento, no asociados a una edad concreta, cada uno de los cuales ha de ser superado antes de pasar al siguiente.

Teniendo esto en cuenta:

a) *¿Qué apariencia tiene una definición de un concepto matemático en Educación Infantil?*

La Educación Infantil se encuentra según Dina y Pierre Van Hiele, en el nivel 0 (Visualización y reconocimiento) por lo que, según este nivel de aprendizaje geométrico, las definiciones que los niños forman de un concepto matemático en Educación Infantil es aquella desde la percepción de la realidad como un todo, sin diferenciar atributos ni componentes. Además, se trataría de una definición aparentemente física, y relacionándola seguramente con objetos de su día a día, cosas que ve en su vida cotidiana.

En función a esto, las definiciones de un concepto en Educación Infantil tendría una apariencia partiendo de lo básico, por lo que podríamos partir de aceptar definiciones como las siguientes:

- "Tiene X lados"
- Construye figuras o dibuja para poder expresarte que es lo que quiere decir.
- "Se parece a una caja de zapatos", por ejemplo.

Por tanto, la definición que aceptaremos en Educación Infantil, tendrá que partir de unos atributos como: no minimalidad (cuantos mayores atributos mejor para poder ellos definir el concepto, para que se fijen en el mayor número de atributos posibles), no jerárquica (tendremos que descomprimir al máximo los componentes matemáticos de una definición).

En conclusión, lo que se permitirá será una enumeración del mayor número de atributos, esa será la apariencia que tendrá la definición de un concepto matemático en Educación Infantil.

Figura 11: Respuesta G.5.P.8.A

Los futuros docentes comienzan detallando la teoría de Van Hiele a modo de resumen (*KMLS: teorías sobre aprendizaje*) y posteriormente indican como sería la definición esperada de un concepto en la etapa de Infantil (*KMLS: nivel de desarrollo esperado*), destacando la importancia de la no minimalidad en esta etapa.

b) Particularizando al caso del rectángulo ¿Qué definición del rectángulo sería aceptable (o esperable) teniendo en consideración el nivel de desarrollo de los alumnos y el contenido que se trata?

La definición aceptable en el caso del rectángulo sería: Figura cerrada que tiene líneas rectas que se cortan formando cruces dando lugar a las cuatro esquinas. □

Figura 11: Respuesta G.5.P.8.B

Los futuros profesores indican la definición que sería esperable para la etapa de Infantil (*KMLS: nivel de desarrollo esperado*), no obstante, esta va en contra con la minimalidad que indicaban en la pregunta anterior (*KoT: propiedades*).

c) ¿Qué actividades deberíamos utilizar para que nuestros estudiantes pudieran comenzar a evolucionar desde el nivel 0 de Van Hiele al 1?

- Descomponer los objetos, para percibir sus atributos y componentes. Un ejemplo de tarea sería, ofrecerle figuras geométricas recortables y encajables o plastilina que permita componerla y descomponerla para poder percibir el objeto en su conjunto y por parte.
- Enriquecer la descripción física de los elementos que se muestran con su lenguaje geométrico específico. Un ejemplo de tarea sería mostrarle un objeto cotidiano como por ejemplo una rueda de coche y mostrarle tres figuras geométricas con sus respectivos nombres. Le diremos al niño que nos diga de forma verbal y señalando con qué figura geométrica se relacionaría el objeto propuesto.
- Identificar el cuadrado dentro de un conjunto y explicar cuales son las propiedades que lo caracterizan mediante dibujos, palabras o construcciones. Ofrecerles un grupo de figuras geométricas y el docente le dirá una serie de propiedades de una de estas figuras. El niño debe saber identificar de qué figura se trata.

Figura 12: Respuesta G.5.P.8.C

Los futuros profesores proponen una serie de actividades para que el alumnado pase del nivel 0 a de Van Hiele al 1 (*KMT: tareas*). Entre ellas, conocen que la descomposición de objetos ayuda a la identificación de los atributos del rectángulo (*KMT: estrategias*), para ello propone como material figuras geométricas recortables y plastilina (*KMT: recursos materiales*).