



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

**Título**

Torneos sin ciclos disjuntos por vértices de diferentes  
longitudes

Realizado por:  
Pablo Segura Bolaños

Supervisado por:  
Desamparados Fernández Ternero

17 de Octubre de 2023



*A mi familia, en especial a mis padres, a mi hermana y a mi madrina, por su eterna paciencia conmigo y, sobre todo, por haber sido mi mayor apoyo en cada una de las decisiones que me han traído hasta aquí. Todo lo que he conseguido es gracias a vosotros.*

*A cada uno de mis amigos, con los que he tenido la oportunidad de compartir la vida estos años, por haber estado hasta en los momentos más duros de esta carrera. Me habéis enseñado lo bonito de compartir tanto los logros como los fracasos.*

*A mi tutora, Desamparados Fernández, por su absoluto compromiso y dedicación con este trabajo. Gracias por ser un ejemplo de lo que un buen docente puede llegar a enseñarnos y mostrarme cuánto me queda por aprender. Ha sido todo un lujo ser tu alumno.*

*"Resistirse al cambio se parece demasiado a estallar por los aires sin moverse del sitio"*

Marián Echamboura



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Preliminares</b>   | <b>10</b> |
| 1.1. Digrafos . . . . .  | 10        |
| 1.2. Torneos y torneos bipartitos . . . . .                                | 17        |
| <b>2. Refutación de la conjetura de Henning y Yeo</b>                      | <b>22</b> |
| 2.1. Resultados previos . . . . .  | 22        |
| 2.2. Conjetura . . . . .   | 41        |
| <b>3. Torneos bipartitos sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes</b> | <b>44</b> |
| <b>4. Torneos sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes</b>            | <b>54</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>64</b> |

# Resumen

En este trabajo, partiremos de la conjetura de M. A. Henning y A. Yeo, que afirma que todo digrafo bipartito con mínimo grado de salida al menos 3 contiene dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Apoyándonos en el trabajo de N. D. Tan, conseguiremos refutar dicha conjetura, lo que nos permitirá no solo demostrar la existencia de digrafos bipartitos con mínimo grado de salida al menos 3 sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes, sino que nos posibilitará establecer un método para clasificar dichos digrafos, tanto en el caso en el que se traten de torneos fuertemente conexos como en el caso de los torneos bipartitos fuertemente conexos.

# Abstract

In this memory, we will start from the conjecture by M. A. Henning and A. Yeo, which states that a bipartite digraph of minimum out-degree at least 3 contains two vertex disjoint directed cycles of different lengths. By relying on N. D. Tan's work, we will manage to disprove this conjecture. This will not only allow us to prove the existence of bipartite digraphs of minimum out-degree at least 3 without two vertex disjoint directed cycles of different lengths but also enable us to establish a method for classifying such digraphs, both in the case of strong tournaments and in the case of strong bipartite tournaments.





# Introducción

Desde que en 1736 Leonhard Euler plantease el problema de los puentes de Königsberg, numerosos matemáticos, como Arthur Cayley y Reinhard Diestel, han dedicado sus trabajos a la Teoría de Grafos. Esta rama de las Matemáticas, por su capacidad para representar y analizar situaciones de manera visual y estructurada, es esencial en la resolución de problemas complejos en diversos campos, proporcionando herramientas que nos permiten entender y optimizar sistemas interconectados en nuestro mundo. Podemos, así, aplicar algoritmos y técnicas específicas para resolver problemas prácticos. Precisamente por sus numerosas aplicaciones, los esfuerzos de muchos matemáticos se han centrado en estudiar dichas estructuras. Es ahí donde aparecen los torneos.

El concepto de torneo puede atribuirse al matemático húngaro Dénes Kőnig, quien realizó importantes contribuciones a esta área en la primera mitad del siglo XX. En 1936, publicó el libro titulado "Theory of Finite and Infinite Graphs", donde introdujo y estudió los torneos como una clase específica de grafos dirigidos. Su trabajo sentó las bases para el estudio sistemático de los torneos y sus propiedades matemáticas.

Inspirado por la dinámica de los enfrentamientos en competiciones deportivas y juegos estratégicos, los torneos permiten representar a cada participante como un nodo y las victorias y derrotas son traducidas como aristas unidireccionales entre dichos nodos, que permiten indicar claramente quién ha vencido a quién.

Este concepto matemático permite analizar no solo este tipo de competiciones, sino que nos permite estudiar procesos de toma de decisiones y conflictos en ciencias sociales, como podría ser la teoría de votación o la teoría de la elección social. Los torneos están, incluso, relacionados con algunos métodos estadísticos, como el modelo de Bradley-Terry, centrado en las comparaciones entre pares, que estima las tendencias de una población a la dominación y cuyas aplicaciones llegan hasta la clasificación de documentos por relevancia en motores de búsqueda con aprendizaje automático.

El concepto de torneo pudo extenderse a una nueva estructura con la que

compartía cierto paralelismo: los torneos bipartitos. A diferencia del caso anterior, en los torneos bipartitos, los nodos están divididos en dos conjuntos disjuntos, de forma que no hay aristas entre nodos del mismo conjunto, pero cada nodo es adyacente a todo nodo del otro conjunto. Esto permite extrapolar la representación previa de las competiciones al caso en el que los participantes pertenecen a un equipo, compitiendo de forma individual con cada participante del equipo contrario. De nuevo, esta estructura puede aplicarse en otros campos más allá de las competiciones, como, por ejemplo, modelar la asignación de trabajadores a tareas específicas.

En este interés por la Teoría de Grafos, llegamos a M. A. Henning y A. Yeo, quienes, centrados en estudiar las propiedades de cierto tipo de grafos, conjeturaron que todo dígrafo bipartito con grado de salida mínimo al menos 3 contenía dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Fueron precisamente los torneos bipartitos lo que permitieron a N. D. Tan refutar dicha conjetura. Al refutarla, no solo nos encontramos ante la prueba de la existencia de digrafos que, bajo esas condiciones, contenían dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes, sino que supuso un paso previo a un nuevo interés: clasificar dichos digrafos.

Este trabajo, dividido en cuatro capítulos, está basado en la refutación de la conjetura y la posterior clasificación por parte de N. D. Tan, desarrolladas en [6]. En el Capítulo 1, nos centraremos en definir tanto conceptos como resultados de la Teoría de Grafos como paso previo a los siguientes capítulos. Desarrollaremos, así, aquellos conceptos en relación a los digrafos, los torneos y, por último, los torneos bipartitos que sentarán la base para nuestro trabajo. En segundo lugar, en el Capítulo 2, desarrollaremos una serie de resultados que conformaron el contexto matemático en el que se desarrolló la conjetura de M. A. Henning y A. Yeo, además de demostrar el teorema con el que N. D. Tan refutó la conjetura, pasando, en el Capítulo 3, a probar el resultado recíproco de este teorema. Esto nos permitirá establecer una clasificación de los torneos bipartitos fuertes con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Por último, en el Capítulo 4, buscaremos una clasificación similar a la del capítulo anterior, en este caso no para torneos bipartitos, sino para el caso de los torneos.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo vamos a definir aquellos conceptos y resultados de la Teoría de Grafos que usaremos a lo largo de los siguientes capítulos. En concreto, nos centraremos, en primer lugar, en los relativos a los digrafos y, posteriormente, en los correspondientes a los torneos, tanto en el caso general como en el caso de torneos bipartitos. Nos apoyaremos principalmente en el libro sobre digrafos de J. Bang-Jensen y G. Gutin [1] y en la monografía clásica sobre torneos de J. W. Moon [5].

### 1.1. Digrafos

En esta sección seguiremos la notación de [1]. Para ampliar conocimientos sobre digrafos, se puede consultar también dicha referencia.

**Definición 1.1** *Un grafo dirigido o digrafo  $D$  consiste en un conjunto finito no vacío  $V(D)$  de elementos, llamados **vértices**, y un conjunto finito  $A(D)$  de pares ordenados de vértices distintos, llamados **aristas**. Cuando no lleve a confusión, para abreviar, denotaremos dichos conjuntos como  $V$  y  $A$ .*

**Definición 1.2** *El número de vértices de un digrafo es el **orden** del digrafo y el **tamaño** del mismo es el número de aristas.*

**Definición 1.3** *Dada una arista  $(u, v)$ , abreviadamente  $uv$  ó  $u \rightarrow v$ , llamaremos **extremo inicial** a  $u$  y **extremo final** a  $v$  y diremos, además, que los vértices  $u$  y  $v$  son **adyacentes**.*

**Observación 1.4** *Por su propia definición, un digrafo no puede contener aristas paralelas (el mismo par ordenado más de una vez) ni bucles (aristas donde ambos extremos coincidan). Aunque sería posible considerar digrafos*

con un conjunto de vértices infinito, en este trabajo solo consideramos digrafos finitos.

**Ejemplo 1.5** En la Figura 1.1 mostramos un ejemplo de digrafo de orden 6 y tamaño igual a 11.

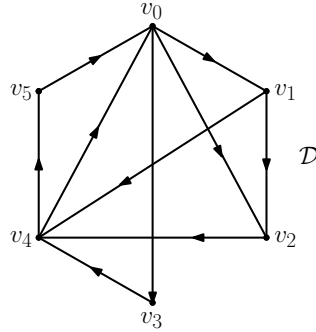


Figura 1.1: Ejemplo de digrafo  $\mathcal{D}$

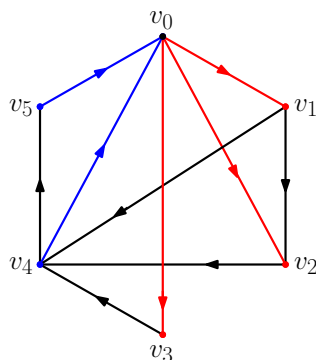
**Definición 1.6** Dados dos digrafos  $D$  y  $D'$ , se dice que  $\phi : V(D) \rightarrow V(D')$  es un **morfismo** si para cada  $uv \in A(D)$ , se tiene que  $(\phi(u), \phi(v)) \in A(D')$ . La aplicación  $\phi$  es un **isomorfismo** si es un morfismo biyectivo y su inversa también es morfismo. Dados dos digrafos  $D$  y  $D'$ , si existe un isomorfismo  $\phi : V(D) \rightarrow V(D')$ , diremos que  $D$  y  $D'$  son **isomorfos** y lo denotamos por  $D \cong D'$ . Un isomorfismo que va de un digrafo en sí mismo recibe el nombre de **automorfismo**.

**Definición 1.7** Dado un digrafo  $D$  y un vértice  $u \in V$ , se dice que  $v \in V$  es un **vecino de salida** de  $u$  si  $uv \in A$ . Definimos el **entorno de salida** de  $u$ , denotado por  $N_D^+(u)$ , como el conjunto de todos sus vecinos de salida. Al número de elementos de dicho conjunto lo llamamos **valencia** o **grado de salida** del vértice  $u$ , denotado por  $d_D^+(u)$ , es decir,  $d_D^+(u) = |N_D^+(u)|$ . El grado de salida mínimo del digrafo  $D$  es  $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(u) / u \in V\}$ . Análogamente, podemos decir que  $v \in V$  es un **vecino de entrada** de  $u$  si  $vu \in A$  y definimos el **entorno de entrada** de  $u$ , denotado por  $N_D^-(u)$ , como el conjunto de todos los vecinos de entrada de dicho vértice. En este caso, llamamos **grado de entrada** de  $u$  a  $d_D^-(u) = |N_D^-(u)|$ , siendo el grado de entrada mínimo del digrafo  $\delta^-(D) = \min\{d_D^-(u) / u \in V\}$ . Un digrafo se dice  **$k$ -regular** si  $d_D^+(u) = d_D^-(u) = k$ , para todo vértice  $u \in V$ .

**Ejemplo 1.8** Siguiendo con el ejemplo de la Figura 1.1, si nos fijamos en el vértice  $v_0$ , tenemos que su entorno de salida es  $N_D^+(v_0) = \{v_1, v_2, v_3\}$

y, por tanto, su grado de salida es  $d_{\mathcal{D}}^+(v_0) = 3$ . También observando la representación gráfica del digrafo deducimos que su entorno de entrada es  $N_{\mathcal{D}}^-(v_0) = \{v_4, v_5\}$  y su grado de entrada  $d_{\mathcal{D}}^-(v_0) = 2$ .

En la siguiente representación del digrafo de la Figura 1.1, hemos marcado en rojo las aristas con vértice inicial igual a  $v_0$  y en azul las que tienen a  $v_0$  como vértice final.

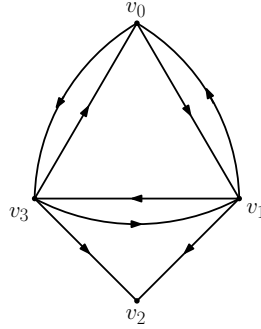


Con respecto al digrafo, podemos decir que su grado de salida mínimo es  $\delta^+(\mathcal{D}) = d_{\mathcal{D}}^+(v_2) = d_{\mathcal{D}}^+(v_3) = d_{\mathcal{D}}^+(v_5) = 1$  y su grado de entrada mínimo es  $\delta^-(\mathcal{D}) = 1$ , coincidiendo con el grado de entrada de los vértices  $v_1$ ,  $v_3$  y  $v_5$ .

**Definición 1.9** Sean  $X$  y  $X'$  dos subconjuntos disjuntos de vértices del digrafo  $D$ . Decimos que  $X$  **domina a**  $X'$  o  $X'$  es **dominado por**  $X$ , denotado por  $X \rightarrow X'$ , si  $X' \subseteq N_{\mathcal{D}}^+(x)$  para todo  $x \in X$ . Si además se tiene que  $X = \{v\}$ , entonces decimos que  $v$  **domina a**  $X'$ , denotado por  $v \rightarrow X'$ . Análogamente, si  $X \rightarrow X'$  y  $X' = \{v'\}$ , decimos que  $X$  **domina a**  $v'$ , denotado por  $X \rightarrow v'$ . Decimos que el conjunto  $X$  **domina a un subdigrafo**  $D'$  si  $X$  domina a  $V(D')$ . Recíprocamente, decimos que un **subdigrafo**  $D'$  **domina a un subconjunto**  $X'$  si  $V(D')$  domina a  $X'$ .

**Definición 1.10** Un digrafo  $D$  se dice **arco-dominado** si para cada arista  $xy$  de  $D$ , existe un vértice  $z$  tal que  $zx$  y  $zy$  son aristas de  $D$ , a lo que nos referimos como que  $xy$  es dominada por  $z$ . Análogamente,  $D$  se dice **arco-dominante** si para cada arista  $xy$  de  $D$ , existe un vértice  $z$  tal que  $xz$  y  $yz$  son aristas de  $D$ , y en este caso diremos que  $xy$  domina a  $z$ .

**Ejemplo 1.11** En el digrafo de la Figura 1.1, podemos ver que, si consideramos el conjunto de vértices  $X = \{v_1, v_2\}$ , este conjunto es dominado por el vértice  $v_0$  y, a su vez, domina al vértice  $v_4$ , es decir, se tiene  $v_0 \rightarrow X$  y  $X \rightarrow v_4$ . Sin embargo, dicho digrafo no es arco-dominado, ni arco-dominante. Un ejemplo de digrafo arco-dominado se muestra a continuación.



**Definición 1.12** Un digrafo  $d$ -arco-dominado es un digrafo  $D$  con grado de salida mínimo igual a  $d$  tal que para toda arista  $xy$  existe un vértice  $u$  en  $D$  con grado de salida exactamente  $d$  tal que  $ux$  y  $uy$  son aristas de  $D$ .

**Definición 1.13** Un digrafo  $H$  es un **subdigrafo** de  $D$  si  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $A(H) \subseteq A(D)$ . Dado  $W \subseteq V$ , el **subdigrafo de  $D$  inducido por  $W$** , denotado por  $D[W]$ , es aquel cuyo conjunto de vértices coincide con  $W$  y cuyas aristas son todas las aristas de  $D$  que tienen ambos extremos en  $W$ . Análogamente, dado un subconjunto  $A'$  de  $A(D)$ , podemos definir el **subdigrafo arco-inducido** por dicho conjunto como aquel cuyas aristas son los pares pertenecientes a  $A'$  y cuyos vértices son los extremos de dichas aristas. En caso de tener la igualdad  $V(H) = V(D)$ , decimos que el subdigrafo  $H$  es un **subdigrafo spanning** de  $D$ .

**Ejemplo 1.14** En la Figura 1.2, podemos ver dos ejemplos de subdigrafos del digrafo  $\mathcal{D}$  (Figura 1.1). Tenemos un subdigrafo inducido por un conjunto de vértices, en este caso  $\mathcal{D}' = D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ , y  $\mathcal{D}''$  es el subdigrafo arco-inducido por el conjunto  $A' = \{v_0v_3, v_1v_2, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_0\}$ . Este digrafo  $\mathcal{D}''$  es, además, un subdigrafo spanning de  $\mathcal{D}$ .

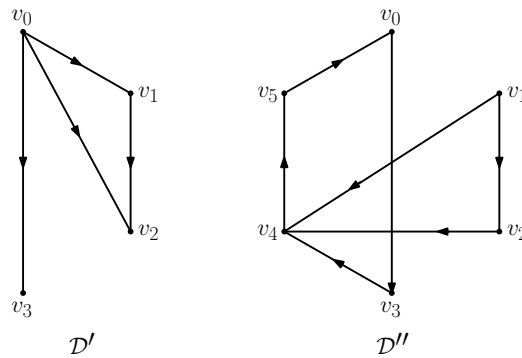


Figura 1.2: Ejemplos de subdigrafos de  $\mathcal{D}$

**Lema 1.15** *Dado un digrafo arco-dominado  $D$ , para cada vértice  $x \in V$ , el subdigrafo inducido por  $N_D^-(x)$  tiene grado de entrada mínimo mayor o igual que 1 y, por tanto,  $D[N_D^-(x)]$  contiene al menos un ciclo.*

*Demostración.* Sean  $D$  un digrafo arco-dominado y  $x \in V(D)$ , consideramos el subdigrafo  $D' = D[N_D^-(x)]$ . Hay que probar que para todo  $v_0 \in V(D')$ , se tiene que  $d_{D'}^-(v_0) \geq 1$ . Sea  $v_0 \in V(D') = N_D^-(x)$ , se tiene que  $v_0 \rightarrow x$  en  $D$ . Como  $D$  es arco-dominado, ha de existir un vértice  $v_1 \in D$  tal que  $v_0x$  es dominada por  $v_1$ , es decir,  $v_1 \rightarrow v_0$  y  $v_1 \rightarrow x$ . Como  $v_1x \in A(D)$ ,  $v_1 \in N_D^-(x) = V(D')$ . Por tanto, existe un vértice  $v_1$  en  $D'$  tal que  $v_1 \rightarrow v_0$ , lo que implica que  $d_{D'}^-(v_0) \geq 1$ .

Para demostrar que  $D[N_D^-(x)]$  contiene al menos un ciclo, vamos a continuar el razonamiento anterior. Tenemos dos vértices  $v_0, v_1 \in V(D')$  tales que  $v_1 \rightarrow v_0$ . Como  $v_1x \in A(D)$  y  $D$  es arco-dominado, ha de existir un vértice  $v_2$  en  $D$  tal que  $v_2 \rightarrow v_1$  y  $v_2 \rightarrow x$ , implicando esto segundo que  $v_2$  está en  $D'$ . Si continuamos este razonamiento, obtenemos una sucesión  $v_0, v_1, v_2, \dots$  de vértices de  $D'$  de forma que cada vértice domina al siguiente. Como el digrafo es finito, en algún momento encontramos un vértice en dicha sucesión que domina a alguno de los anteriores. Por tanto, existe al menos un ciclo en  $D' = D[N_D^-(x)]$ .

□

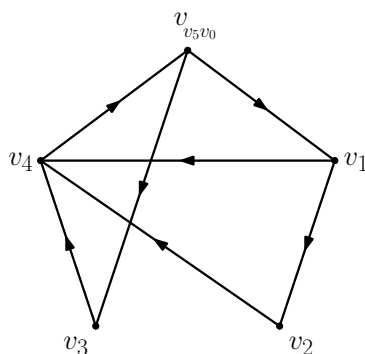
**Definición 1.16** *Dado un subconjunto  $V' \subseteq V(D)$ , definimos el subdigrafo  $D - V'$  como aquel que tiene conjunto de vértices  $V(D) \setminus V'$  y conjunto de aristas  $\{xy \in A(D) \mid x, y \in V(D) \setminus V'\}$ , es decir, es el subdigrafo inducido por  $V(D) \setminus V'$ . Análogamente, dada una arista  $xy \in A(D)$ , podemos definir el subdigrafo  $D - xy$  como aquel digrafo  $D'$  con  $V(D') = V(D)$  y  $A(D') = A(D) \setminus \{xy\}$ .*

**Definición 1.17** *Dados un digrafo  $D$  y una arista  $xy$  de  $D$  tal que  $yx$  no es arista de  $D$ , la **contracción** de la arista  $xy$  se define como la operación que tiene como resultado el digrafo  $D_{xy}$  con conjunto de vértices  $V(D_{xy}) = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_{xy}\}$  y conjunto de aristas  $A(D_{xy}) = A(D[V \setminus \{x, y\}]) \cup \{zv_{xy} \mid zx \in A \text{ ó } zy \in A\} \cup \{v_{xy}z \mid xz \in A \text{ ó } yz \in A\}$ .*

Al contraer una arista  $xy$ , obtenemos un nuevo digrafo identificando los vértices  $x$  e  $y$  y la propia arista  $xy$  con un nuevo vértice  $v_{xy}$ .

**Ejemplo 1.18** *Consideremos el digrafo  $\mathcal{D}$  de la Figura 1.1 y la arista  $v_5v_0$ . Podemos ver el digrafo obtenido por la contracción de esta arista a continuación. Vemos que al identificar tanto los vértices  $v_0$  y  $v_5$  como la propia*

arista  $v_5v_0$  con el nuevo vértice  $v_{v_5v_0}$ , las aristas que partían de dichos vértices, ahora parten del nuevo vértice y aquellas que llegaban a ellos, ahora lo hacen a  $v_{v_5v_0}$ .



**Observación 1.19** Si el orden de  $D$  es  $n$ , el orden de  $D_{xy}$  es  $n-1$ . Además, por la propia definición de  $D_{xy}$ , tenemos que si  $D$  tiene grado de salida mínimo al menos  $k$  y los vértices  $x$  e  $y$  no tienen en común un vecino de entrada, entonces  $D_{xy}$  también tiene grado de salida mínimo al menos  $k$ .

**Definición 1.20** Dado un digrafo  $D$ , un **camino dirigido** de longitud  $m$  es una secuencia  $v_0v_1 \cdots v_m$  de vértices distintos tales que cada vértice domina al siguiente. Un **ciclo dirigido** de longitud  $m \geq 2$  o  $m$ -ciclo es un camino dirigido  $v_0v_1 \cdots v_{m-1}v_0$  donde el último vértice coincide con el primero. Un digrafo se dirá **acíclico** si no contiene ciclos.

En adelante, omitiremos el adjetivo dirigido por simplicidad.

**Definición 1.21** Un **camino** o **ciclo** en un digrafo  $D$  se dice **spanning** si su conjunto de vértices coincide con  $V(D)$ , es decir, si el subdigrafo inducido por dicho camino o ciclo es spanning.

**Ejemplo 1.22** En el digrafo  $\mathcal{D}$  de la Figura 1.1 podemos ver el camino spanning  $P = v_3v_4v_5v_0v_1v_2$ . En el subdigrafo arco-inducido  $\mathcal{D}''$  de la Figura 1.2 podemos ver claramente un ejemplo de 4-ciclo, que sería  $C = v_0v_3v_4v_5v_0$ .

**Definición 1.23** La **cintura** de  $D$ , denotado por  $g(D)$ , es la longitud del ciclo de menor longitud de  $D$ .

**Observación 1.24** Dado un digrafo  $D$  de orden  $n$ , se satisface  $g(D) \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ .



**Observación 1.25** Cuando mencionemos que dos ciclos son disjuntos por vértices nos referiremos a que sus respectivos conjuntos de vértices son disjuntos entre sí. Para abreviar, indicaremos simplemente que son ciclos disjuntos.

Existe también la noción de ciclos disjuntos por aristas, pero no habrá lugar a confusión al no utilizar esta otra noción en este trabajo.

**Definición 1.26** El digrafo  $D$  se dice **fuertemente conexo** o **fuerte** si para cada par de vértices distintos  $u, v$  de  $D$ , existen un camino de  $u$  a  $v$  y un camino de  $v$  a  $u$  en  $D$ . Un digrafo con un único vértice se considerará fuertemente conexo.

**Ejemplo 1.27** El propio digrafo  $\mathcal{D}$  de la Figura 1.1 es un ejemplo de digrafo fuertemente conexo.

**Definición 1.28** Un digrafo  $D$  es  **$k$ -conexo** si la eliminación de menos de  $k$  vértices siempre da como resultado un digrafo fuertemente conexo.

**Definición 1.29** Se dice que un subdigrafo  $D'$  de un digrafo  $D$  es **maximal verificando una propiedad  $\mathcal{P}$**  si  $D'$  verifica  $\mathcal{P}$  y cualquier subdigrafo  $D''$  que contenga a  $D'$  no verifica  $\mathcal{P}$ .

**Definición 1.30** Se dice que un subdigrafo  $D'$  de un digrafo  $D$  es una **componente fuerte** si  $D'$  es maximal verificando la propiedad "ser fuertemente conexo".

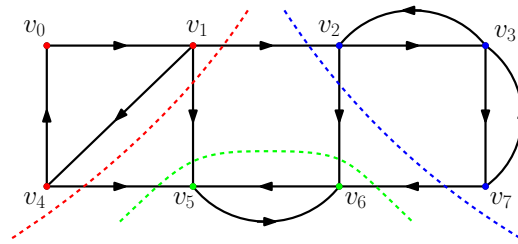
**Lema 1.31** El conjunto de componentes fuertes de un digrafo constituye una partición del digrafo.

*Demostración.* En primer lugar, dado un digrafo  $D$ , tenemos que todo vértice del mismo pertenece a una componente fuerte del digrafo, pudiendo ser dicha componente un subdigrafo unitario. Por tanto, para ver que el conjunto de componentes fuertes de  $D$  constituyen una partición del digrafo, basta con demostrar que las componentes fuertes de  $D$  son disjuntas. Esto es consecuencia directa de la transitividad de la relación de existencia de caminos entre dos vértices en los dos sentidos.

Procedemos por reducción al absurdo. Sean  $D'$  y  $D''$  dos componentes fuertes de  $D$ , tales que  $D' \neq D''$ , y supongamos que  $V(D') \cap V(D'') \neq \emptyset$ . Sean  $v_0 \in V(D') \cap V(D'')$ ,  $v_1 \in V(D')$  y  $v_2 \in V(D'')$ . Como  $v_0$  y  $v_1$  son vértices de  $D'$ , existen un camino  $P^1$  de  $v_0$  a  $v_1$  y un camino  $P^2$  de  $v_1$  a  $v_0$ . A su vez, como  $v_0$  y  $v_2$  están en la componente fuerte  $D''$ , existen otros dos caminos  $P^3$  de  $v_0$  a  $v_2$  y  $P^4$  de  $v_2$  a  $v_0$ . Entonces, a partir de los caminos  $P^2$  y  $P^3$  podemos obtener un camino  $P'$  de  $v_1$  a  $v_2$  y, análogamente, un camino

$P''$  de  $v_2$  a  $v_1$  con los caminos  $P^1$  y  $P^4$ . Por tanto, ambos vértices pertenecen a  $V(D') \cap V(D'')$ . Como para cualesquiera dos vértices de  $D'$  y  $D''$  se tiene que ambos pertenecen a su intersección, se deduce que  $D' = D''$ , llegando a contradicción. Queda probado así que las componentes fuertes de un digrafo son disjuntas y que constituyen una partición del digrafo.  $\square$

**Ejemplo 1.32** En la siguiente gráfica, vemos un ejemplo concreto de la partición de un digrafo constituida por sus tres componentes fuertes.



**Definición 1.33** Diremos que un digrafo  $D = (V, A)$  es un **digrafo bipartito** si existe una partición de  $V = V_1 \sqcup V_2$  tal que cada arista del digrafo tiene exactamente un extremo en cada uno de los conjuntos  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ .

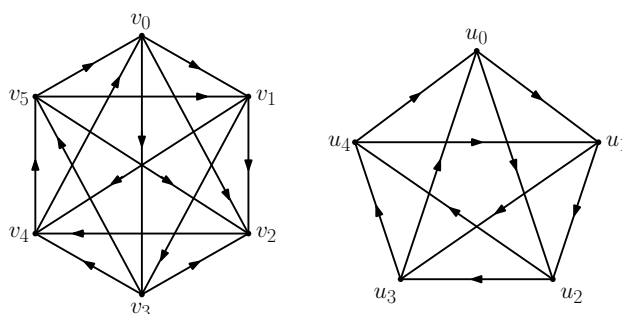
## 1.2. Torneos y torneos bipartitos

Dentro de los propios digrafos, tratados en la sección anterior, encontramos un tipo de digrafos con mucha importancia: los torneos. Un torneo es un digrafo en el que entre cualquier par de vértices existe una única arista. Un caso particularmente interesante de digrafo es el caso de los torneos bipartitos, en los que existe una única arista entre dos vértices siempre que no estén en la misma parte de la partición. Comenzamos esta subsección con la definición formal de torneo. Continuaremos con otras nociones y resultados sobre torneos que nos serán útiles en los siguientes capítulos y terminaremos con la noción de torneo bipartito. Para ampliar conocimientos sobre esta sección puede consultarse [1].

**Definición 1.34** Un **grafo orientado** es un digrafo sin ciclos de longitud 2.

**Definición 1.35** Un **torneo** es un grafo orientado  $D = (V, A)$  en el que cada par de vértices distintos son adyacentes. Es decir, un digrafo  $D = (V, A)$  con  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un torneo si exactamente una de las aristas  $v_i v_j$  ó  $v_j v_i$  pertenece a  $A$ , para cada  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ .

**Ejemplo 1.36** En la siguiente gráfica mostramos dos ejemplos de torneos. En primer lugar, tenemos un torneo de orden 6 y, a su derecha, un torneo 2-regular, en este caso de orden 5.



**Lema 1.37** Todo torneo  $k$ -regular es de orden  $2k + 1$ .

*Demostración.* Sea  $T = (V, A)$  un torneo  $k$ -regular y de orden  $n$ , sabemos por la propia definición de torneo, que  $|A| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Por otro lado, al ser  $T$   $k$ -regular, tenemos que

$$|A| = \sum_{v \in V} |N_T^+(v)| = \sum_{v \in V} d_T^+(v) = kn. \quad (1.1)$$

Igualando ambas expresiones obtenemos  $n(n-1) = 2kn$  y despejando  $n$ , llegamos a que  $n = 2k + 1$ . □

**Observación 1.38** Si en vez de exigir  $k$ -regularidad a un torneo  $T = (V, A)$ , le pedimos que su grado de salida mínimo sea  $k$ , tenemos la desigualdad  $|V| \geq 2k + 1$ . Esto se debe a que si un vértice  $v$  tiene una valencia de salida mayor que  $k$ , necesitamos vértices adicionales de forma que  $v$  los domine, por lo que el orden de  $T$  ha de ser mayor que  $2k + 1$ . Basta con tener en cuenta que en la ecuación (1.1),  $d_T^+(v) \geq k$ , para cada vértice  $v$  del torneo  $T$ . Puede extenderse este resultado para el caso en el que, en vez de un torneo, tenemos un grafo orientado.

**Teorema 1.39** Todo torneo tiene un camino spanning.

*Demostración.* Sea  $T$  un torneo con conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Supongamos que los vértices de  $T$  están etiquetados de forma que el número de aristas  $v_j v_i$ , con  $j > i$ , es mínimo. Entonces,  $v_1 \cdots v_n$  es un camino spanning en  $T$ . De hecho, si este no fuese el caso, existiría un subíndice  $i < n$  tal que

$v_i v_{i+1} \notin A(T)$ . Entonces,  $v_{i+1} v_i \in A(T)$ . Sin embargo, en este caso podemos intercambiar los vértices  $v_i$  y  $v_{i+1}$  en el etiquetado y disminuiría el número de las aristas  $v_j v_i$ , con  $j > i$ , lo que supone una contradicción.  $\square$

Terminamos el capítulo de preliminares con la noción de torneo bipartito. Aunque el nombre puede inducir a pensar que los torneos bipartitos son una clase de torneos, lo cierto es que no son torneos, ya que no existirán aristas uniendo pares de vértices de la misma parte de la partición del digrafo. El nombre se debe a las similitudes en la construcción de los torneos y los torneos bipartitos, los primeros son grafos orientados completos y los segundos, grafos orientados bipartitos completos.

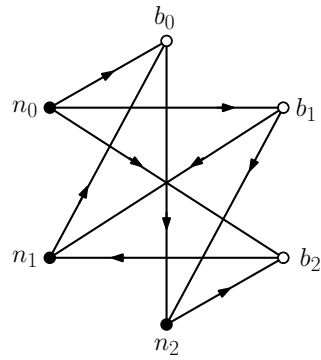
**Definición 1.40** *Un torneo bipartito es un grafo orientado  $D = (V, A)$  con una partición  $V = B \sqcup N$  tal que no hay aristas en los subdigrafos inducidos por  $B$  y  $N$  y para cada par de vértices  $b \in B$ ,  $n \in N$ , exactamente una de las aristas  $bn$  y  $nb$  pertenece a  $A$ . En este caso, nos referimos a los conjuntos  $B$  y  $N$  como partes de la partición  $V = B \sqcup N$  del torneo bipartito  $D$ .*

**Lema 1.41** *Todo torneo bipartito no contiene ciclos de longitud impar.*

*Demostración.* Sea  $T = (V, A)$  un torneo bipartito y consideremos un ciclo en  $T$  de longitud  $k$ :  $C = v_0 v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_0$  para cierto  $k \geq 2$ , pues  $T$  es grafo orientado. Sea  $V = B \sqcup N$  la partición de  $T$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $v_0 \in B$ . Entonces, como  $v_0 v_1 \in A$ ,  $v_1 \in N$  y, como  $v_1 v_2 \in A$ ,  $v_2 \in B$  y así, sucesivamente, obtendríamos que los vértices de  $C$  están en  $B$  y  $N$  alternadamente. Por tanto,  $v_0, v_2, \dots, v_{2l}, \dots \in B$  y  $v_1, v_3, \dots, v_{2l+1}, \dots \in N$ . Como  $v_{k-1} \rightarrow v_0$  y  $v_0 \in B$ , necesariamente  $v_{k-1} \in N$ , por lo que  $k-1$  es impar, esto es,  $k$  es par. Por tanto,  $C$  tiene longitud par. Así que todo ciclo en  $T$  tiene longitud par. Luego,  $T$  no contiene ciclos de longitud impar.  $\square$

**Observación 1.42** *Dado un grafo orientado  $D$ , podemos considerar el grafo  $G$  obtenido al considerar las aristas de  $D$  como pares no ordenados. Si  $D$  no contiene ciclos de longitud impar, también se tiene que  $G$  no contiene ciclos de longitud impar, por lo que es un grafo bipartito y la partición del conjunto de vértices nos permite probar que  $D$  es un torneo bipartito, aunque no es inmediato demostrar que  $D$  es bipartito “completo”, es decir, probar que entre cualesquiera dos vértices en partes diferentes de la partición existe una arista.*

**Ejemplo 1.43** En la siguiente gráfica podemos ver un ejemplo de torneo bipartito de orden 6. En este caso, las partes de la partición son  $B = \{b_0, b_1, b_2\}$  y  $N = \{n_0, n_1, n_2\}$ .





## Capítulo 2

# Refutación de la conjetura de Henning y Yeo

En este Capítulo daremos, en primer lugar, una serie de resultados que conformaron el contexto matemático en el que M. A. Henning y A. Yeo conjeturaron que todo digrafo bipartito, bajo ciertas condiciones, contenía ciclos disjuntos de diferentes longitudes, mientras que en la segunda sección nos centraremos en refutar dicha conjetura.

### 2.1. Resultados previos

**Teorema 2.1** ([9]) *Todo digrafo con grado de salida mínimo al menos 3 contiene dos ciclos disjuntos.*

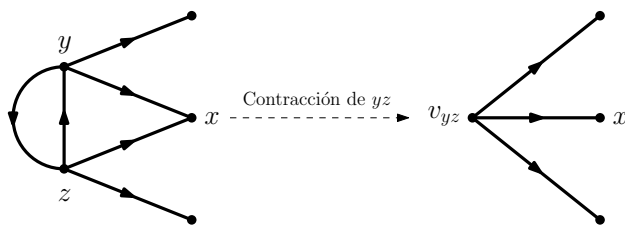
*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $D = (V, A)$  es un digrafo con grado de salida mínimo al menos 3 y que no contiene dos ciclos disjuntos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $D$  tiene el menor orden posible y que  $d_D^+(v) = 3, \forall v \in V$ .

Sea  $x$  un vértice de  $D$ . Por la condición de minimalidad,  $d_D^-(x) \neq 0$ , así que existe  $y \in V$  con  $yx \in A$ . Denotemos por  $D'$  el digrafo obtenido al eliminar en  $D$  todas las aristas con vértice final  $y$  e identificar después  $x$  e  $y$ . Al no contener  $D$  dos ciclos disjuntos, se sigue que  $D'$  tampoco contiene dos ciclos disjuntos. Por la condición de minimalidad de  $D$ , debe existir un vértice  $z$  en  $D'$  con grado de salida menor que 3, esto es, debe existir un vértice  $z$  que domine a  $x$  y a  $y$  en  $D$ . Como consecuencia, repitiendo el argumento para todo vértice  $y$  con  $yx \in A$ , se tiene que el subdigrafo  $D''$  de  $D$  inducido por los vértices que dominan a  $x$ ,  $D'' = D[N_D^-(x)]$ , tiene grado de entrada mínimo al menos 1.

Así, para cada vértice  $x$  de  $D$ ,  $D[N_D^-(x)]$  contiene un ciclo, es decir,  $D$  contiene un ciclo tal que todos sus vértices dominan a  $x$ .

Sea  $C$  uno de estos ciclos y, además, de longitud mínima. Veamos en primer lugar el caso en el que dicho ciclo  $C$  tiene longitud 2. Entonces  $C = yzy$ , con  $yx, zx \in A$  para ciertos  $x, y, z \in V$ . Sea  $D'$  el digrafo obtenido al contraer la arista  $yz$ .

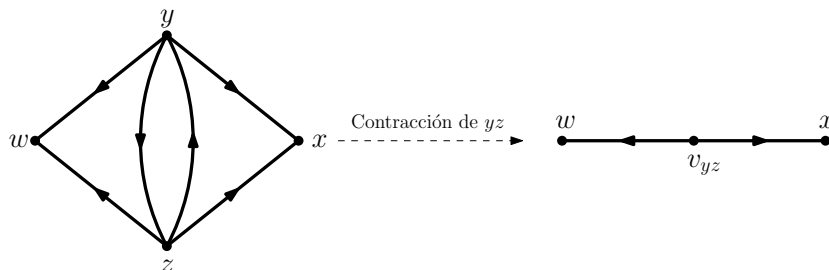
Si  $y$  y  $z$  no tienen en común ningún vecino de salida (salvo  $x$ ), entonces  $D'$  es un grafo con grado de salida mínimo al menos 3 (en realidad, tiene grado de salida mínimo igual a 3) y sin ciclos disjuntos, por lo que  $\forall v \in V(D')$ ,  $D'$  contiene un ciclo tal que todos sus vértices dominan a  $v$ . Si tomamos  $v = v_{yz}$ , existe un ciclo  $C'$  en  $D'$  cuyos vértices dominan a  $v_{yz}$ . Así  $C$  y  $C'$  serían dos ciclos disjuntos en  $D$ , lo que es una contradicción.



Si los vértices  $y$  y  $z$  tienen un vecino de salida  $w$  en común, además de  $x$ , entonces  $d_{D'}^+(v_{yz}) = 2$ . Consideremos el digrafo  $D'$  obtenido al eliminar el vértice  $v_{yz}$  y cambiar de sentido todas las aristas. Este digrafo tiene grado de entrada mínimo al menos 1 y cumple además  $\forall v \in V(D') = V \setminus \{y, z\}$ :

1.  $d_{D'}^-(v) = d_D^+(v) = 3$ , si  $v$  no es vecino de entrada de  $y$  ni de  $z$  en  $D$ .
2.  $d_{D'}^-(v) = 2$ , si  $v$  es vecino de entrada de  $y$  ó  $z$ , pero no de los dos.
3.  $d_{D'}^-(v) = 4$ , si  $v$  es vecino de entrada de  $y$  y  $z$  en  $D$ .

Por tanto,  $D'$  contiene un ciclo  $C'$ . Así,  $C$  y  $C'$  serían dos ciclos disjuntos en  $D$ , lo que es una contradicción.





Nos centramos ahora en el caso en el que la longitud mínima de tales ciclos no es 2. Si por ejemplo fuese 3, consideraríamos uno de estos ciclos  $C = x_1x_2x_3x_4$  y contrayendo una de las aristas, obtendríamos un digrafo  $\tilde{D}$  con un ciclo de longitud 2 cuyos vértices dominan a un vértice concreto  $x$  de  $\tilde{D}$ . Aplicando el razonamiento anterior a  $\tilde{D}$ , llegamos de nuevo a una contradicción. Queda así probado el Teorema. □

El siguiente teorema fue conjeturado por Hennig y Yeo en [3], donde demostraron dicha conjetura para el caso de los digrafos 4-regulares. Por su parte, Y. Gao demostró el resultado para los digrafos 4-arco-dominados en [2] y, apoyándose en el trabajo de Gao, Tan lo demostraría en [7] para un caso más general: digrafos  $d$ -arco-dominados, con  $d \geq 4$ . Finalmente, sería N. Lichiardopol quien demostraría la conjetura en su versión general.

**Teorema 2.2 (Teor. 1.1, [4])** *Todo digrafo con grado de salida mínimo al menos 4 contiene dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes.*

Antes de abordar la demostración de este teorema, vamos a considerar una propiedad, que definiremos a continuación, y probaremos que todo digrafo con grado de salida mínimo al menos 4 verifica dicha propiedad.

**Definición 2.3** *Dado un digrafo  $D$ , diremos que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$  si existen dos ciclos disjuntos  $C_1$  y  $C_2$ , un camino  $P_1$  desde un vértice  $x$  de  $C_1$  a un vértice  $z$  que no pertenece a  $V(C_1) \cup V(C_2)$  y un camino  $P_2$  desde  $y$  en  $C_2$  a  $z$ , tales que  $V(P_1) \cap (V(C_1) \cup V(C_2)) = \{x\}$ ,  $V(P_2) \cap (V(C_1) \cup V(C_2)) = \{y\}$  y  $V(P_1) \cap V(P_2) = \{z\}$ .*

**Teorema 2.4 (Teor. 1.2, [4])** *Todo digrafo con grado de salida mínimo al menos 4 verifica la propiedad  $\mathcal{P}$ .*

Para la demostración nos apoyaremos en el siguiente lema, que nos da el resultado parcial para el caso de digrafos no orientados.

**Lema 2.5 (Lema 2.1, [4])** *Todo digrafo no orientado  $D$  con grado de salida mínimo al menos 4 cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ .*

*Demostración.* Dado que  $D$  es no orientado, existe un 2-ciclo  $C = x_0y_0x_0$ . Sea  $P = x_0 \cdots x_{r-1}$  un camino maximal. Por dicha condición de maximalidad,  $x_{r-1}$  no tiene vecinos de salida en  $V(D) \setminus (V(C) \cup V(P))$ . Como  $x_{r-1}$  tiene grado de salida al menos 4 y tiene a lo sumo dos vecinos de salida en  $C$ , se sigue que hay dos vértices  $x_i, x_j$ , con  $1 \leq i < j \leq r - 2$ , en el entorno de

salida de  $x_{r-1}$ . Por tanto, el ciclo  $C$ , el ciclo  $x_j \cdots x_{r-1} x_j$ , el camino  $x_0 \cdots x_i$  y el camino  $x_{r-1} x_i$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ . □

Una vez demostrado este lema auxiliar, podemos proceder a demostrar el teorema previo que nos ocupa.

*Demostración del Teorema 2.4.* Por el Lema 2.5, queda probado el teorema para digrafos no orientados con grado de salida mínimo al menos 4. Vamos a probar ahora el teorema para el caso en el que el digrafo es un grafo orientado con grado de salida mínimo al menos 4.

Lo haremos por inducción sobre el orden  $n \geq 9$  de dicho grafo orientado. Denotaremos por  $\mathcal{P}_n$  a la afirmación “un grafo orientado con grado de salida mínimo al menos 4 y de orden  $n$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ ”. Se tiene que  $\mathcal{P}_9$  es verdadera. En efecto, sea  $D$  un grafo orientado con grado de salida mínimo al menos 4 y de orden 9. Por la Observación 1.38 tenemos que, para que  $D$  tuviese grado de salida mínimo al menos 4, necesitaría ser de orden al menos 9. Al imponer que tenga exactamente 9 vértices, se comprueba que  $D$  es un torneo 4-regular.

Para llegar a contradicción, supongamos que  $D$  no cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ . Por el Teorema 2.1 existen dos ciclos disjuntos  $C_1 = x_1 x_2 x_3 x_1$  y  $C_2 = y_1 y_2 y_3 y_1$ . Sea  $E_1$  el conjunto de los vértices que no pertenecen a  $V(C_1) \cup V(C_2)$  y con un vecino de entrada en  $C_1$  y sea  $E_2$  el conjunto de aquellos vértices que no pertenecen a  $V(C_1) \cup V(C_2)$  y con un vecino de entrada en  $C_2$ . Veamos tres situaciones: cuando  $E_1$  y  $E_2$  no son disjuntos, cuando son ambos no vacíos y cuando uno de ellos es vacío. No puede darse el caso  $E_1 = E_2 = \emptyset$ , ya que cada vértice de  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$  ha de tener al menos 2 vecinos de entrada en el conjunto  $V(C_1) \cup V(C_2)$ , al ser  $D$  4-regular, y  $|V(C_1) \cup V(C_2)| = 6$ .

Supongamos, en primer lugar, que  $E_1$  y  $E_2$  tienen un vértice común  $z$ . Entonces  $z$  tiene un vecino de entrada  $x_i$  en  $C_1$  y otro  $y_i$  en  $C_2$ . Los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y los caminos  $x_i z$  e  $y_i z$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a una contradicción, así pues,  $E_1$  y  $E_2$  son disjuntos.

Supongamos ahora la segunda situación:  $E_1$  y  $E_2$  son ambos no vacíos. Sea entonces  $x$  un vértice de  $E_1$  y sea  $y$  uno de  $E_2$ . Entonces  $x$  tiene un vecino de entrada  $x_i$  en  $C_1$  e  $y$  tiene un vecino de entrada  $y_j$  en  $C_2$ . Dado que  $D$  es un torneo,  $x$  e  $y$  son adyacentes y, por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos considerar que  $xy$  es una arista de  $D$ . Entonces  $C_1$ ,  $C_2$  y los caminos  $x_i x y$  e  $y_j y$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a una contradicción.

Por último, supongamos el caso en el que uno de los  $E_i$  es vacío. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $E_1 = \emptyset$ . Sea  $F = \{z_1, z_2, z_3\}$  el conjunto de los elementos de  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$ . Como  $E_1 = \emptyset$ , todos los vértices de  $C_1$  pertenecen al entorno de salida de  $z_i$ , para  $1 \leq i \leq 3$ , es

decir,  $F$  domina a  $C_1$ . Veamos que los vértices de  $F$  forman un 3-ciclo. Por reducción al absurdo, supongamos que los vértices de  $F$  no forman un 3-ciclo. Entonces, uno de los vértices de  $F$ , al que identificamos, por ejemplo, como  $z_1$ , tiene dos vecinos de salida en  $F$ . Tenemos entonces que  $d_D^+(z_1) \geq 5$ , que no es posible. Así pues, los vértices de  $F$  forman un 3-ciclo,  $C_3$ , y podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $C_3 = z_1z_2z_3z_1$ . Dado que cada vértice  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , tiene exactamente un vecino de entrada en  $V(C_1) \cup V(C_3)$ , cada vértice de  $C_2$  pertenece al entorno de entrada de  $z_i$ , es decir,  $C_2$  domina a  $C_3$ . Como cada vértice  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , tiene exactamente un vecino de entrada en  $V(C_3) \cup V(C_2)$ , cada vértice de  $C_1$  pertenece al entorno de entrada de  $y_i$ , lo que supone que  $C_1$  domina a  $C_2$ . Pero ahora los ciclos  $C' = x_1y_1z_1x_1$  y  $C'' = x_2y_2z_2x_2$  y los caminos  $x_1y_3$  e  $y_2y_3$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , por lo que volvemos a llegar a una contradicción.

Por tanto, al llegar a contradicción en todos los casos posibles, tenemos que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$  y la afirmación queda probada para el caso  $n = 9$ .

Demostrado el caso base de nuestra inducción, consideremos ahora el caso  $n \geq 10$ . Supongamos que la afirmación  $\mathcal{P}_{n'}$  es cierta para todo  $n'$ , donde  $9 \leq n' < n$ , y estudiemos la afirmación para  $n$ . Procederemos de nuevo por inducción, en este caso sobre el tamaño  $k$  del digrado orientado, con  $4n \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$ .

Probamos primero que la afirmación  $\mathcal{P}_n$  es verdadera cuando  $k = 4n$ . En efecto, sea  $D$  un grafo orientado con grado de salida mínimo igual a 4, de orden  $n \geq 10$  y de tamaño  $4n$ . Dadas estas condiciones, es trivial que  $d_D^+(x) = 4$  para cada  $x \in V(D)$ . Supongamos, para llegar a contradicción, que  $D$  no cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ .

Demostremos por reducción al absurdo que  $D$  es fuertemente conexo. Supongamos que  $D$  no es fuerte. Entonces existe una partición de  $V(D)$  en dos subconjuntos  $V_1, V_2$  tales que no hay aristas de  $V_2$  a  $V_1$ , lo que implica que  $D[V_2]$  es un grafo orientado de grado de salida mínimo al menos 4. Por la hipótesis de inducción,  $D[V_2]$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$  y, por tanto, también la cumple  $D$ , llegando a contradicción, por lo que  $D$  es fuertemente conexo.

Veamos ahora que  $D$  es arco-dominado. Por reducción al absurdo, supongamos que  $D$  no es arco-dominado. Entonces, existe una arista  $xy$  de  $D$  que no está dominada por un vértice de  $D$ . Entonces,  $D_{xy}$  es un digrafo de grado de salida mínimo igual a 4 y de orden  $n-1$ . Si el digrafo  $D_{xy}$  no es un grafo orientado, por el Lema 2.5,  $D_{xy}$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , y en el caso en el que  $D_{xy}$  es un grafo orientado, por nuestra hipótesis de inducción,  $D_{xy}$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ . Por tanto, existen dos ciclos  $C_1 = x_1x_2 \cdots x_px_1$  y  $C_2 = y_1y_2 \cdots y_qy_1$ , un camino  $P_1 = z_1z_2 \cdots z_r$ , con  $z_1 = x_1$ , y un camino  $P_2 = u_1u_2 \cdots u_s$ , con  $u_1 = y_1$  y  $u_s = z_r$ . Entonces  $C_1, C_2, P_1$  y  $P_2$  están en  $V(C_1) \cup V(C_2)$  con  $P_1$

comenzando en un vértice de  $C_1$ , diremos  $x_1$ ,  $P_2$  comenzando en uno de  $C_2$ , diremos  $y_1$ , y cumpliendo que  $V(P_1) \cap V(P_2) = \{z_r\} = \{u_s\}$ .

Si el vértice  $v_{xy}$  de  $D_{xy}$  no está en  $V(C_1) \cup V(C_2)$ , ni en  $V(P_1) \cup V(P_2)$ , los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y los caminos  $P_1$  y  $P_2$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , por lo que  $v_{xy} \in V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(P_1) \cup V(P_2)$ .

Centrémonos, en primer lugar, en el caso en el que  $v_{xy}$  está en uno de los ciclos  $C_1$  ó  $C_2$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $v_{xy}$  está en  $C_1$ .

Supongamos primero que el vértice  $v_{xy}$  coincide con  $x_1$ . Entonces  $x_p$  tiene exactamente un vecino de salida en  $\{x, y\}$ . Si dicho vecino es  $x$ , los ciclos  $C'_1 = yx_2 \cdots x_p xy$  y  $C_2$ , el camino  $P'_1 = yz_2 \cdots z_r$  y el camino  $P_2$  demuestran de nuevo que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , lo que supone una contradicción. Si el vecino de salida de  $x_p$  es  $y$ , los ciclos  $C'_1 = yx_2 \cdots x_p y$  y  $C_2$ , el camino  $P'_1 = yz_2 \cdots z_r$  y el camino  $P_2$  prueban que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando de nuevo a contradicción, por lo que  $v_{xy} \neq x_1$ .

Supongamos ahora que  $v_{xy}$  coincide con  $x_i$ ,  $i \neq 1$ . El vértice  $x_{i-1}$  tiene un vecino de salida en  $\{x, y\}$ . Si dicho elemento es  $x$ , los ciclos  $C'_1 = x_1 \cdots x_{i-1} xy x_{i+1} \cdots x_p x_1$  y  $C_2$  y los caminos  $P_1$  y  $P_2$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción. Si el vecino de salida de  $x_{i-1}$  fuese  $y$ ,  $C'_1 = x_1 \cdots x_{i-1} y x_{i+1} \cdots x_p x_1$ ,  $C_2$  y los caminos  $P_1$  y  $P_2$  demuestran que  $D$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ . De nuevo tenemos una contradicción, por lo que  $v_{xy}$  no puede coincidir con ningún vértice  $x_i$ ,  $i \neq 1$ . Queda probado así que  $v_{xy}$  no pertenece a ninguno de los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ .

Veamos ahora el caso en el que  $v_{xy}$  está en uno de los caminos  $z_2 \cdots z_r$  o  $u_2 \cdots u_s$ , con  $u_s = z_r$  (excluimos de dichos caminos los vértices  $z_1$  y  $u_1$ , ya que estos pertenecen respectivamente a los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , caso considerado anteriormente). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que pertenece al primero.

Supongamos primero que  $v_{xy}$  coincide con  $z_r = u_s$ . Si  $z_{r-1}$  y  $u_{s-1}$  tienen un elemento común  $w \in \{x, y\}$  en sus respectivos entornos de salida, entonces los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , el camino  $z_1 \cdots z_{r-1} w$  y el camino  $u_1 \cdots u_{s-1} w$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a una contradicción. Si  $z_{r-1}$  y  $u_{s-1}$  no tienen dicho elemento común en sus respectivos entornos de salida, podemos suponer que  $x$  es un vecino de salida de  $z_{r-1}$  y, análogamente,  $y$  lo es de  $u_{s-1}$ . Los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y los caminos  $z_1 \cdots z_{r-1} xy$  y  $u_1 \cdots u_{s-1} y$  demuestran que  $D$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ , lo que supone una contradicción. Por tanto,  $v_{xy}$  no puede coincidir con el vértice  $z_r = u_s$ .

Supongamos ahora que  $v_{xy}$  coincide con  $z_i$ ,  $2 \leq i \leq r-1$ . Si  $x$  pertenece al entorno de salida de  $z_{i-1}$ , los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y los caminos  $z_1 \cdots z_{i-1} xy z_{i+1} \cdots z_r$  y  $P_2$  nos llevan a que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , una contradicción. Si  $y$  es vecino de salida de  $z_{i-1}$ , los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y los caminos  $z_1 \cdots z_{i-1} y z_{i+1} \cdots z_r$

y  $P_2$  nos llevan a que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a una contradicción, por lo que  $v_{xy}$  no coincide con  $z_i$ ,  $2 \leq i \leq r - 1$ . Al no coincidir tampoco, como hemos probado anteriormente, con el vértice  $z_r = u_s$ ,  $v_{xy}$  no pertenece a ninguno de los caminos  $P_1$  y  $P_2$ .

Al haber probado que  $v_{xy} \in V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(P_1) \cup V(P_2)$ , pero que no pertenece ni a dichos ciclos ni a dichos caminos, llegamos a contradicción y queda probado que  $D$  es arco-dominado. Por tanto, tenemos que  $D$  es un grafo orientado fuertemente conexo de orden  $n$ , arco-dominado y cuyos vértices tienen todos grado de salida 4.

Como argumentamos en la demostración del Teorema 2.1, para cada vértice  $x$  de  $D$ ,  $D[N_D^-(x)]$  contiene un ciclo. En adelante, nos referiremos como *ciclo inducido por  $x$*  a un ciclo  $C = C(x)$  contenido en  $N_D^-(x)$  de mínimo orden.

Sea  $t$  el número máximo de ciclos disjuntos de  $D$ . Por el Teorema 2.1, tenemos que  $t \geq 2$ . Dado que el subdigrafo inducido por los vértices de cualquier ciclo contiene un ciclo inducido, podemos considerar un conjunto  $\mathcal{C}$  de  $t$  ciclos inducidos disjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_t$ . Sea  $D'$  el digrafo definido como aquel cuyo conjunto de vértices coincide con  $\mathcal{C}$  y cuyas aristas son los pares  $CC'$  de ciclos distintos en  $\mathcal{C}$  tales que existe al menos un camino desde un vértice de  $C$  hasta un vértice de  $C'$  y este camino es internamente disjunto con cada ciclo de  $\mathcal{C}$ , es decir, ninguno de los vértices que no son extremos del camino pertenece a un ciclo de  $\mathcal{C}$ .

Afirmamos que todo  $C$  de  $D'$  tiene grado de entrada 1. En efecto, sea  $x$  un vértice del ciclo  $C'$  de  $\mathcal{C}$  distinto de  $C$  y sea  $y$  un vértice de  $C$ . Dado que  $D$  es fuertemente conexo, existe un camino  $P = z_1 \cdots z_p$  de  $z_1 = x$  a  $z_p = y$ . Sea  $r$  el mínimo  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , tal que  $z_i \in C$ . Sea  $q$  el máximo  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , tal que  $z_i$  está en un ciclo de  $\mathcal{C}$  distinto de  $C$ . Entonces,  $z_q$  está en un ciclo  $C''$  de  $\mathcal{C}$ , distinto de  $C$ , y  $P = z_q \cdots z_r$  es un camino de  $C''$  a  $C$ , internamente disjunto con todo ciclo de  $\mathcal{C}$ . Tenemos que  $C''$  es un vecino de entrada de  $C$  en  $D'$ , luego  $C$  tiene grado de entrada al menos 1. Para probar que tiene grado de entrada exactamente 1, supongamos que  $C$  tiene dos vecinos de entrada  $C_i$  y  $C_j$  en  $D'$ . Entonces existe un camino  $P_1 = x_1 \cdots x_p$  internamente disjunto con todo ciclo de  $\mathcal{C}$ , con  $x_1 \in C_i$  y  $x_p \in C$  y, a su vez, existe un camino  $P_2 = y_1 \cdots y_q$  internamente disjunto con cada ciclo de  $\mathcal{C}$ , con  $y_1 \in C_j$  e  $y_q \in C$ . Vamos a ver dos casos: si ambos caminos tienen un vértice común y si no tienen vértices comunes. Supongamos primero que  $P_1$  y  $P_2$  tienen un vértice común y sea  $r$  el más pequeño de los  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , tales que  $x_r$  está en  $P_1$  y  $P_2$ . Entonces, a partir de  $P_1$ , tenemos un camino  $P'_1$  de  $x_1$  a  $x_r$ , al igual que  $P_2$  nos permite obtener un camino  $P'_2$  de  $y_1$  a  $x_r$ . En esta situación, los ciclos  $C_i$  y  $C_j$  y los caminos  $P'_1$  y  $P'_2$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , lo que lleva a una contradicción. Supongamos ahora que  $P_1$  y  $P_2$  no tienen

vértices comunes. Dado que  $C$  es un ciclo, existe un camino en  $C$  de  $y_q$  a  $x_p$ . Luego, los ciclos  $C_i$  y  $C_j$ , el camino  $P_1$  y el camino  $y_1 \cdots y_q \cdots x_p$  demuestran que  $D$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando de nuevo a contradicción, por lo que todo ciclo  $C$  de  $D'$  tiene grado de entrada igual a 1.

Al tener todo ciclo de  $D'$  grado de entrada 1,  $D'$  contiene un ciclo  $U$ , sea  $p$  la longitud de  $U$ . Nótese que  $U$  es un ciclo cuyos vértices son a su vez ciclos de  $D$ . Veamos que  $p = t$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $p < t$ . Entonces existe un vértice  $x$  en un ciclo  $C$  de  $\mathcal{C}$  que no pertenece a  $U$ . Dado que  $D$  es fuertemente conexo, existe un camino  $P = z_1 \cdots z_r$  con  $z_1 = x$ ,  $z_r$  en un ciclo  $C'$  de  $U$  y con  $z_i$  no perteneciendo a  $U$  para  $1 \leq i \leq r - 1$ . Sea  $q$  el mayor de los  $i$ ,  $1 \leq i \leq r - 1$ , tales que  $z_i$  está en un ciclo de  $\mathcal{C}$ , pero no en  $U$ . Sea  $C''$  el ciclo que contiene a  $z_q$ . Está claro que  $P' = z_q \cdots z_r$  es un camino de  $C''$  a  $C'$ , internamente disjunto con todo ciclo de  $\mathcal{C}$ . Esto implica que  $C''$ , que no está en  $U$ , es un vecino de entrada de  $C'$ , pero, dado que  $C'$  tiene un vecino de entrada en  $U$ , el grado de entrada de  $C'$  es al menos 2, llegando a contradicción, pues el grado de entrada de cualquier ciclo en  $D'$  es 1. De esto se sigue que  $p = t$  y, por tanto,  $D'$  es un ciclo de longitud  $t$ . Señalamos que para todo ciclo  $C_i$ ,  $d_{D'}^+(C_i) = d_{D'}^-(C_i) = 1$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que este ciclo es  $D' = C_1 \cdots C_t C_1$ . Cabe señalar que todo vértice de  $C_i$  no tiene vecinos de salida en el conjunto  $V(C_j)$ , con  $j \neq i + 1$ ,  $j \neq i$ .

Dado  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , sea  $E_i$  el conjunto de vértices de  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup \cdots \cup V(C_t))$  con un vecino de entrada en  $C_i$ . Podemos afirmar que los conjuntos  $E_i$  son disjuntos dos a dos. Por reducción al absurdo, supongamos que existen  $E_i$  y  $E_j$  dos conjuntos con un vértice común  $x$ . El vértice  $x$  tiene un vecino de entrada  $y$  en  $C_i$  y otro vecino de entrada  $z$  en  $C_j$ . Entonces los ciclos  $C_i$  y  $C_j$ , el camino  $P_1 = yx$  y el camino  $P_2 = zx$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ . Llegamos a contradicción, por lo que los conjuntos  $E_i$  son disjuntos dos a dos. Razonando de la misma forma, podemos afirmar que no hay arista de  $E_i$  a  $E_j$  con  $1 \leq i, j \leq t$ ,  $i \neq j$ . Veamos ahora que la unión de los conjuntos disjuntos dos a dos  $V(C_i) \cup E_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , es exactamente  $V(D)$ . Por reducción al absurdo, supongamos que existe un vértice  $x$  que no pertenece al conjunto  $V(C_1) \cup E_1 \cup \cdots \cup V(C_t) \cup E_t$ . Está claro que el ciclo inducido  $C(x)$  es un ciclo de  $D$  disjunto con cada uno de los ciclos de  $D'$ , pero por la condición maximal de  $t$  esto no es posible, por lo que la unión de los conjuntos  $V(C_i) \cup E_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , es exactamente  $V(D)$ .

Observamos que todo vértice de un conjunto  $E_i$  no tiene vecino de salida en  $V(C_j)$ , con  $j \neq i$  y  $j \neq i + 1$ , pues de ser así, tendríamos la arista  $C_i C_j$ , con  $j \neq i$  y  $j \neq i + 1$ , y esto no es posible, pues  $D' = C_1 \cdots C_t C_1$ , con  $d_{D'}^+(C) = d_{D'}^-(C) = 1$  para todo  $C$  de  $D'$ . De esto, junto con el hecho de haber probado que no hay aristas de  $E_i$  a  $E_j$ ,  $i \neq j$ , se sigue que los vecinos de

salida de los vértices de  $V(C_i) \cup E_i$  están en  $V(C_i) \cup E_i$  o en  $V(C_{i+1})$ . Veamos que todos los vecinos de entrada de un vértice de  $E_i$  están en  $V(C_i) \cup E_i$ . Si un vértice de  $E_i$  tiene un vecino de entrada en  $E_j$ ,  $j \neq i$ , hay una arista de  $E_j$  a  $E_i$ , llegando a contradicción. Si un vértice de  $E_i$  tiene un vecino de entrada en  $C_j$ ,  $j \neq i$ , entonces dicho vértice pertenece también a  $E_j$ , pero  $E_i$  y  $E_j$  son disjuntos, luego llegamos a contradicción. Por tanto, como los vecinos de entrada de un vértice de  $E_i$  han de estar en  $V(D)$ , pero no pueden estar en  $V(C_j) \cup E_j$ , con  $j \neq i$ , se tiene que han de estar en  $V(C_i) \cup E_i$ . Sean  $|V(C_i)| = v_i$  y  $C_i = x_{i,1} \cdots x_{i,v_i} x_{i,1}$  para  $1 \leq i \leq t$ .

Vamos a probar que todo vértice de  $C_2$  tiene un vecino de entrada en  $V(C_1) \cup E_1$ . Por reducción al absurdo, supongamos que existe un vértice de  $C_2$  sin vecinos de entrada en  $V(C_1) \cup E_1$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que este vértice es  $x_{2,1}$ . Entonces  $C(x_{2,1})$  es un ciclo con vértice en  $V(C_2) \cup E_2$ , que no contiene a los vértices  $x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,v_2-1}$  (porque  $C_2$  es un ciclo inducido), pero contiene a  $x_{2,v_2}$  (de otra forma,  $C(x_{2,1})$  sería un ciclo disjunto con cada uno de los ciclos de  $D'$ , lo que no es posible). Veamos que no existe un vértice  $x_{2,i}$  con  $2 \leq i \leq v_2 - 1$  con un vecino de entrada  $z$  en  $V(C_1) \cup E_1$ . Por reducción al absurdo, supongamos que existe. Si  $z \in V(C_1)$ , los ciclos  $C_1$  y  $C(x_{2,1})$ , el camino  $zx_{2,i}$  y el camino  $x_{2,v_2}x_{2,1} \cdots x_{2,i}$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción. Si  $z$  está en  $E_1$ , el vértice  $z$  tiene un vecino de entrada  $y$  en  $C_1$  y, en este caso, los ciclos  $C_1$  y  $C(x_{2,1})$ , el camino  $yzx_{2,1}$  y el camino  $x_{2,v_2}x_{2,1} \cdots x_{2,i}$  demuestran de nuevo que  $D$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción. Por tanto, cada uno de los vértices  $x_{2,2}, \dots, x_{2,v_2-1}$  no tiene vecinos de entrada en  $V(C_1) \cup E_1$ . Esto implica que todos los vecinos de salida de los vértices de  $V(C_1) \cup E_1$  están en  $V(C_1) \cup E_1$ , lo que es imposible por la conectividad fuerte, llegando a contradicción. Queda probado así que cada vértice de  $C_2$  tiene al menos un vecino de entrada en  $V(C_1) \cup E_1$ .

Podemos afirmar que todo ciclo contenido en  $V(C_2) \cup E_2$  contiene a  $V(C_2)$ . Para demostrarlo por reducción al absurdo, supongamos que existe un ciclo  $C'$  cuyos vértices están en  $V(C_2) \cup E_2$  y no conteniendo a  $V(C_2)$ . El ciclo  $C'$  contiene al menos un vértice de  $C_2$  (si no, tendríamos  $t + 1$  ciclos disjuntos). Entonces, existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq v_2$ , tal que  $x_{2,i}$  está en  $C'$  y  $x_{2,i+1}$  no está en  $C'$ . Además, como probamos anteriormente,  $x_{2,i+1}$  ha de tener un vecino de entrada  $z \in V(C_1) \cup E_1$ . Si  $z \in V(C_1)$ , los ciclos  $C_1$  y  $C'$ , el camino  $zx_{2,i+1}$  y el camino  $x_{2,i}x_{2,i+1}$  demuestran que  $D$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción. Supongamos ahora que  $z \in E_1$ . El vértice  $z$  tiene un vecino de entrada  $y$  en  $C_1$  y entonces los ciclos  $C_1$  y  $C'$ , el camino  $yzx_{2,i+1}$  y el camino  $x_{2,i}x_{2,i+1}$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , lo que supone una contradicción. Así pues, cualquier ciclo contenido en  $V(C_2) \cup E_2$  contiene a  $V(C_2)$ .

Tenemos por tanto que para todo vértice  $x$  de  $E_2$ , dado que  $C(x)$  está en  $V(C_2) \cup E_2$ ,  $C(x)$  contiene a  $V(C_2)$ . En consecuencia, para todo vértice  $x$  en  $E_2$ , todos los vértices de  $C_2$  son vecinos de entrada de  $x$ , por lo que  $V(C_2)$  domina a  $E_2$ .

Los resultados obtenidos para  $V(C_2) \cup E_2$  pueden ser generalizados, así pues, para  $1 \leq i \leq t$ , todo vértice de  $C_i$  tiene al menos un vecino de entrada en  $V(C_{i-1}) \cup E_{i-1}$ , todo ciclo contenido en  $V(C_i) \cup E_i$  contiene a  $V(C_i)$  y  $V(C_i)$  domina a  $E_i$ . Ahora consideremos dos casos:

**Caso 1:**  $t \geq 3$ .

Para  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , un vértice  $x$  de  $C_{i+1}$  no tiene vecinos de entrada en  $E_{i+1}$ , ya que  $V(C_{i+1})$  domina a  $E_{i+1}$ . Entonces el único vecino de entrada de  $x$  en  $V(C_{i+1}) \cup E_{i+1}$  es el vecino de entrada  $y$  de  $x$  en  $C_{i+1}$ , y los otros vecinos de entrada de  $x$  están en  $V(C_i) \cup E_i$ . Dado que  $t \geq 3$ ,  $y$  no tiene vecinos de salida en  $V(C_i) \cup E_i$  y, por tanto,  $y$  no puede estar en  $C(x)$ . Se sigue de ello que el ciclo  $C(x)$  está contenido en  $V(C_i) \cup E_i$ , luego  $C(x)$  contiene a  $V(C_i)$ , lo que implica que todos los vértices de  $C_i$  son vecinos de entrada de  $x$ . Como  $x$  es un vértice arbitrario de  $C_{i+1}$ ,  $V(C_i)$  domina a  $V(C_{i+1})$  para  $1 \leq i \leq t$ . Sea  $x$  un vértice de  $C_i$ . Entonces  $x$  tiene exactamente un vecino de salida en  $C_i$  y  $v_{i+1} \geq 3$  vecinos de salida en  $V(C_{i+1})$ . Así,  $|E_i| = 0$  y  $v_i = 3$  para  $1 \leq i \leq t$ . En este caso, los ciclos  $C' = x_{1,1} \cdots x_{t,1}x_{1,1}$  y  $C'' = x_{1,2} \cdots x_{t,2}x_{1,2}$ , el camino  $x_{1,1}x_{2,3}$  y el camino  $x_{1,2}x_{2,3}$  demuestran que  $D$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción. Luego la afirmación  $\mathcal{P}_n$ , con  $n \geq 10$  y  $k = 4n$ , queda probada cuando  $t \geq 3$ .

**Caso 2:**  $t = 2$ .

Consideramos dos subcasos:

**Subcaso 2.1:**  $D$  no contiene triángulos, es decir, 3-ciclos.

Como  $D$  no contiene triángulos, para todo vértice  $x$  de  $D$ , tenemos que  $|V(C(x))| \geq 4$ , lo que implica que  $d_D^-(x) \geq 4$ . Como la suma de los grados de entrada de los  $n$  vértices de  $D$  es  $4n$ , tenemos que  $d_D^-(x) = 4$  para todo vértice  $x$  de  $D$ . Entonces  $d_D^-(x) = d_D^+(x) = 4$  para todo  $x$ , por lo que  $D$  es 4-regular. Además, está claro que  $V(C(x)) = N_D^-(x)$  para todo vértice  $x$  de  $D$  y la longitud mínima de los ciclos de  $D$  es 4.

Probemos ahora que  $D$  es un digrafo arco-dominante. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una arista  $xy$  de  $D$  que no domina a ninguno de los vértices de  $D$ . Sean  $x_1, x_2, x_3$  los tres



vecinos de salida de  $x$  distintos de  $y$ . Para un vértice  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , como  $V(C(x)) = N_D^-(x)$ , tenemos que  $x \in C(x_i)$ . Sea  $z$  el vecino de salida de  $x$  en  $C(x_i)$ . Tenemos que  $z \neq y$ , pues de otra forma,  $xy$  dominaría a  $x_i$ . Se sigue que  $z$  es un vértice  $x_j$  con  $1 \leq j \leq 3$ ,  $j \neq i$ , y entonces  $x_j$  es un vecino de entrada de  $x_i$ . Por tanto, todo vértice de  $\{x_1, x_2, x_3\}$  tiene un vecino de entrada en  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Luego,  $x_1, x_2$  y  $x_3$  forman un triángulo, llegando a contradicción. Queda probado, por tanto, que  $D$  es arco-dominante.

Tenemos los ciclos disjuntos  $C_1$  y  $C_2$ . Recordemos que tenemos el conjunto  $E_1$  de vértices de  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$  con al menos un vecino de entrada en  $C_1$  y  $E_2$  el conjunto de vértices de  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$  con al menos un vecino de entrada en  $C_2$ . Los conjuntos  $E_1$  y  $E_2$  son disjuntos, no hay aristas entre ellos y su unión es  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$ . Recordemos también que para  $1 \leq i \leq 2$ , todo vértice de  $C_i$  tiene al menos un vecino de entrada en  $V(C_{i-1}) \cup E_{i-1}$ , que  $V(C_i)$  domina a  $E_i$  y que ningún vértice de  $C_i$  tiene un vecino de salida en  $E_{i+1}$ .

Afirmamos que para  $1 \leq i \leq 2$ , un vértice  $x$  de  $C_i$  tiene al menos un vecino de entrada en  $C_{i+1}$ . En efecto, supongamos primero que  $C(x)$  contiene el vecino de entrada  $y$  de  $x$  en  $C_i$ . Luego  $y$  tiene un vecino de salida  $z$  en  $C(x)$  que necesariamente está en  $C_{i+1}$ . Entonces  $z \in V(C_{i+1})$  es un vecino de entrada de  $x$ . Si  $C(x)$  no contiene a  $y$ ,  $C(x)$  está contenido en  $V(C_{i+1}) \cup E_{i+1}$ . Así  $C(x)$  contiene a  $C_{i+1}$  y, en este caso, todo vértice de  $C_{i+1}$  es vecino de entrada de  $x$ . Luego, para  $1 \leq i \leq 2$ , todo vértice de  $C_i$  tiene al menos un vecino de entrada en  $C_{i+1}$ .

Este resultado implica que existe un vértice  $x$  de  $C_1$  con un vecino de salida  $y$  en  $C_2$ , por lo que  $x$  tiene al menos 2 vecinos de salida en  $V(C_1) \cup V(C_2)$  y a lo sumo 2 vecinos de salida en  $E_1$ . Como todos los vértices de  $E_1$  son vecinos de salida de  $x$ , se sigue que  $|E_1| \leq 2$ . De igual forma tenemos que  $|E_2| \leq 2$ . Podemos afirmar que para  $1 \leq i \leq 2$ , todo vértice  $x$  de  $C_i$  tiene al menos un vecino de salida en  $C_{i+1}$ , pues  $x$  tiene exactamente un vecino de salida en  $C_i$  y como mucho 2 vecinos de salida en  $E_i$  y  $d_D^+(x) = 4$ .

Veamos ahora que  $E_1 = E_2 = \emptyset$ . Por reducción al absurdo, supongamos que al menos uno de los conjuntos  $E_1$  ó  $E_2$  es no vacío. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $E_1 \neq \emptyset$ . Como  $D[E_1]$  no contiene ciclos por la condición de maximalidad de  $t$ , existe un vértice  $u$  de  $E_1$  sin vecinos de salida en  $E_1$ . Dado que  $u$  no tiene vecinos de salida ni en  $C_1$ , ni en  $E_2$ , tiene 4 vecinos

de salida en  $C_2$ . Sea entonces  $x$  un vecino de salida de  $u$  en  $C_2$ . El vértice  $x$  tiene un vecino de salida  $y$  en  $C_1$ . Entonces  $uxyu$  es un triángulo, llegando a contradicción. Por tanto, tenemos que  $E_1 = E_2 = \emptyset$ .

Como la cintura de  $D$  es  $g(D) = 4$ , ha de ser  $4 \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$ , luego  $n \geq 13$ , esto es  $v_1 + v_2 \geq 13$ . Podemos suponer que  $v_1 \leq v_2$  y, por tanto,  $v_2 \geq 7$ . Como tenemos que  $V(C_1) \cup V(C_2) = V(D)$ , y  $D$  es 4-regular, todo vértice de  $C_1$  tiene exactamente 3 vecinos de entrada en  $C_2$  y todo vértice de  $C_2$  tiene exactamente 3 vecinos de salida en  $C_1$ . El ciclo  $C(x_{1,2}) = N_D^-(x_{1,2})$  contiene a  $x_{1,1}$  y a 3 vecinos de entrada de  $x_{1,2}$  en  $C_2$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el vecino de salida de  $x_{1,1}$  en  $C(x_{1,2})$  es  $x_{2,1}$ , por lo que  $C(x_{1,2}) = x_{1,1}x_{2,1}x_{2,2}x_{2,3}x_{1,1}$ . Entonces existe un vértice en  $D$  dominado por el arco  $x_{2,5}x_{2,6}$  y este vértice es necesariamente un  $x_{1,i}$  con  $i \neq 2$ , ya que hemos supuesto que  $x_{2,5}$  y  $x_{2,6}$  no son vecinos de entrada de  $x_{1,2}$ . El ciclo  $C(x_{i,1})$  es el ciclo  $x_{1,i-1}x_{2,5}x_{2,6}, x_{2,7}x_{1,i-1}$  o bien es el ciclo  $x_{1,i-1}x_{2,4}x_{2,5}, x_{2,6}x_{1,i-1}$ . Los ciclos inducidos  $C' = C(x_{1,2})$  y  $C'' = C(x_{i,1})$  son disjuntos y, razonando como anteriormente con  $C_1$  y  $C_2$ , llegamos a que  $|V(C')| + |V(C'')| \geq 13$ , lo que es falso. Así la afirmación  $\mathcal{P}_n$ , con  $n \geq 10$  y  $k = 4n$ , queda probada cuando  $t = 2$  y  $D$  no contiene triángulos.

**Subcaso 2.2:**  $D$  contiene triángulos y  $t = 2$ .

Sean  $C$  un triángulo arbitrario de  $D$  y  $P = x_0x_1 \cdots x_{r-1}$  un camino maximal, con  $x_0 \in V(C)$ , que consideramos de orden  $r$ . Entonces  $x_0$  está en  $C$  y  $C = x_0y_0z_0x_0$ . Por la condición de maximalidad de  $r$ ,  $x_{r-1}$  no tiene vecinos de salida en  $V(D) \setminus (V(C) \cup V(P))$ . Veamos que dicho vértice  $x_{r-1}$  tiene a lo sumo un único vecino de salida en  $\{x_1, \dots, x_{r-3}\}$ . Supongamos que, por el contrario,  $x_{r-1}$  tiene dos vecinos de salida  $x_i$  y  $x_j$ , con  $1 \leq i < j \leq r-3$ . Entonces los ciclos  $C$  y  $x_j \cdots x_{r-1}x_j$ , el camino  $x_0 \cdots x_i$  y el camino  $x_{r-1}x_i$  demuestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción. Luego  $x_{r-1}$  tiene como mucho un vecino de salida en  $\{x_1, \dots, x_{r-3}\}$  y, dado que  $d^+(x_{r-1}) = 4$  y  $C$  es un triángulo,  $x_{r-1}$  tiene exactamente un vecino de salida  $x_j \in \{x_1, \dots, x_{r-3}\}$  y tres vecinos de salida en  $C$ , luego  $x_{r-1}$  no tiene vecinos de entrada en  $C$ .

Denotamos por  $C'$  al ciclo  $x_j \cdots x_{r-1}x_j$ . Supongamos que todos los vecinos de entrada de  $x_{r-1}$  están en  $V(C') \cup (V(D) \setminus (V(C) \cup V(P)))$ . Tenemos  $V(C(x_{r-1})) \subset N_D^-(x_{r-1}) \subset V(C') \cup (V(D) \setminus (V(C) \cup V(P)))$ . Sea  $y$  un vértice de  $C(x_{r-1})$ . Los ciclos  $C$  y

$C(x_{r-1})$ , el camino  $x_0 \cdots x_j$  y el camino  $yx_{r-1}x_j$  muestran que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , lo que supone una contradicción. Deducimos que  $x_{r-1}$  tiene un vecino de entrada  $x_i$  en  $\{x_0, \dots, x_{j-1}\}$  y, dado que  $x_0$  es un vecino de salida de  $x_{r-1}$ , tenemos que  $i \geq 1$ , luego,  $j \geq 2$ .

Veamos ahora que todos los vértices de  $C$  son vecinos de entrada de  $x_1$ . Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario. En primer lugar, observamos que  $x_1$  no tiene vecinos de entrada en  $C'$ , pues, de existir un vértice  $x_k$  que fuese vecino de entrada de  $x_1$  en  $C'$ , los ciclos  $C$  y  $C'$ , el camino  $x_0x_1$  y el camino  $x_kx_1$  probarían que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ . Existe un ciclo  $C_3$  contenido en  $N^-(x_1)$ . Veamos que  $C_3$  contiene un vértice  $u$  de  $C$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $C_3$  no contiene vértices de  $C$ . Sea  $z$  un vértice de  $C_3$ . Los ciclos  $C$  y  $C_3$ , el camino  $x_0x_1$  y el camino  $zx_1$  demuestran que  $D$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción. Como consecuencia,  $C_3$  contiene un vértice  $u$  de  $C$ . Probemos ahora que todo vértice de  $C$  está en  $C_3$ . Supongamos que existe un vértice  $v$  en  $C$ , que no está en  $C_3$ . Si  $v$  es un vecino de salida de  $u$ , entonces los ciclos  $C_3$  y  $C'$ , el camino  $uv$  y el camino  $x_{r-1}v$  prueban que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , contradicción. Supongamos ahora que  $v$  no es un vecino de salida de  $u$ . Sea entonces  $w$  el vecino de salida de  $u$  en  $C$ . Si  $w$  está en  $C_3$ , los ciclos  $C_3$  y  $C'$ , el camino  $wv$  y el camino  $x_{r-1}v$  demuestran que  $D$  satisface  $\mathcal{P}$ , lo que supone una contradicción, y si  $w$  no está en  $C_3$ , los ciclos  $C_3$  y  $C'$ , el camino  $uvw$  y el camino  $x_{r-1}v$  a su vez prueban que  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ , de nuevo una contradicción. Por tanto, tenemos que todo vértice de  $C$  está en  $C_3$ , a su vez contenido en  $N^-(x_1)$ , llegando a contradicción, pues hemos supuesto que existía un vértice de  $C$  que no era vecino de entrada de  $x_1$ . Luego todos los vértices de  $C$  son vecinos de entrada de  $x_1$ . El vértice  $x_{j-1}$  no tiene vecinos de salida en  $\{x_1, \dots, x_{j-2}\}$ , pues de ser así, tendríamos 3 ciclos disjuntos. Supongamos que  $x_{j-1}$  tiene un vecino de salida  $u$  en  $C$ . Sea  $v$  el vecino de salida de  $u$  en  $C$ . Los ciclos  $ux_1 \cdots x_{j-1}u$  y  $C'$ , el camino  $uv$  y el camino  $x_{r-1}v$  prueban que  $D$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , llegando a contradicción, luego  $x_{j-1}$  no tiene vecinos de salida en  $C$ . Supongamos que  $x_{j-1}$  tiene al menos un vecino de salida que no está en  $V(C) \cup V(P)$ . Sea entonces  $P' = y_1 \cdots y_p$  un camino en  $V(C) \cup V(P)$ , comenzando en  $y_1 = x_{j-1}$  y de orden máximo  $p \geq 2$ . Por la maximalidad de  $p$ ,  $y_p$  no tiene vecinos de salida que no estén en

$V(C) \cup V(P) \cup V(P')$ . Es fácil ver que  $y_p$  no tiene vecino de salida en  $V(C)$  ni en  $\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ . El vértice  $y_p$  no tiene vecinos de salida en  $\{y_2, \dots, y_p\}$ , pues en otro caso tendríamos 3 ciclos disjuntos. Se sigue de ello que los cuatro vecinos de salida de  $y_p$  están en  $C'$ . Sea  $x_k$ , con  $j < k < r - 1$ , el vecino de salida de  $y_p$ . Entonces  $x_0 \cdots x_{j-1} y_2 \cdots y_p x_k \cdots x_{r-1} x_j \cdots x_{k-1}$ , con  $x_{j-1} = y_1$ , es el camino de  $C$  de orden  $r + p - 1 > r$ , el cual, por la condición de maximalidad de  $r$ , no puede existir, llegando a contradicción. Por tanto,  $x_{j-1}$  no tiene vecinos de salida en  $V(D) \setminus (V(C) \cup V(P))$ . Deducimos que los 4 vecinos de salida de  $x_{j-1}$  están en  $C'$ . Luego  $x_{j-1}$  tiene 3 vecinos de salida en  $\{x_{j+1}, \dots, x_{r-1}\}$ . Sea  $x_k$  uno de esos vecinos. En este caso,  $x_0 \cdots x_{j-1} x_k \cdots x_{r-1} x_j \cdots x_{k-1}$  es un camino en  $C$  de orden máximo  $m \geq 2$ . Esto implica que los 3 vértices de  $C$  pertenecen al entorno de salida de  $x_{k-1}$  y, dado que los 3 vértices de  $C$  son a su vez vecinos de salida de  $x_{r-1}$ , deducimos que todo vértice de  $C$  tiene al menos 4 vecinos de entrada en  $C'$ . Como todo vértice de  $C$  tiene un vecino de entrada en  $C$ , se tiene que todo vértice de  $C$  tiene grado de entrada a menos 5, luego los vértices de cualquier triángulo de  $D$  son de grado de entrada al menos 5. Por tanto, si todo vértice de  $D$  tiene grado de entrada al menos 4, tenemos una contradicción, ya que en este caso  $d_D^-(x) = 4$  para todo vértice  $x$  de  $D$ .

Supongamos ahora que existen vértices de  $D$  con grado de entrada 3 y sea  $A$  el conjunto de dichos vértices. Para todo vértice  $x$  de  $A$ ,  $C(x) = N_D^-(x)$  es un triángulo con todos sus vértices de grado de entrada al menos 5. Esto implica que cualesquiera dos vértices de  $A$ , no son adyacentes. Sea  $B$  el conjunto de los vértices de  $D$  que tienen al menos un vecino de salida en  $A$ . Todo vértice de  $B$  tiene grado de entrada al menos 5 y, consecuentemente,  $B$  y  $A$  son disjuntos. Sea  $F$  el conjunto de los otros vértices de  $D$ . Todo vértice de  $F$  es de grado de entrada al menos 4. Sean  $a$ ,  $b$  y  $f$  los respectivos cardinales de los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $F$ . Cualquier vértice de  $A$  tiene exactamente 3 vecinos de entrada en  $B$  y, en consecuencia, tenemos  $3a$  aristas de  $B$  a  $A$ . Un vértice  $y$  de  $B$  está contenido en un triángulo  $C(x)$ , con  $x$  en  $A$ , y, al estar  $C(x)$  contenido en  $B$ , el vértice  $y$  tiene al menos un vecino de salida en  $B$  y al menos un vecino de entrada en  $B$ . Así, todo vértice de  $B$  tiene como mucho 3 vecinos de salida en  $A$ . De ello se sigue que el número de aristas de  $B$  a  $A$  ha de ser menor o igual que  $3b$ , luego  $3a \leq 3b$ , es decir,  $a \leq b$ . Supongamos que  $a < b$ . Con respecto

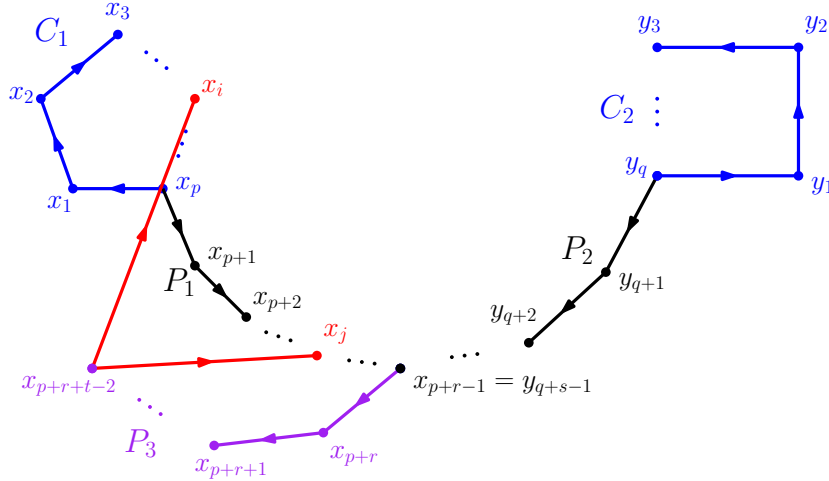
al tamaño de  $D$ , tenemos que  $|A(D)| \geq 3a + 5b + 4f$ , por lo que  $|A(D)| \geq 4a + 4b + 4f + b - a$ , y dado que  $b - a > 0$  y  $a + b + f = n$ , tenemos que  $|A(D)| > 4n$ , lo que no es cierto, por lo que llegamos a que  $a = b$ . Supongamos que  $f \neq 0$ . Afirmamos que existe un vértice de  $F$  con un vecino de entrada en  $B$ . En efecto, al ser  $D$  fuerte, existe un vértice  $x$  de  $F$  con un vecino de entrada  $y$  que no está en  $F$ . Si  $y$  está en  $B$ , hemos terminado. Supongamos que  $y$  no está en  $B$ , entonces  $y$  está en  $A$ . Al ser  $D$  arco-dominado, existe un vértice  $z$  que tiene a  $y$  y  $x$  en su entorno de salida. Como dados dos vértices de  $A$ , estos no son adyacentes, tenemos que  $z$  no está en  $A$ , y, como los conjuntos  $B$  y  $F$  son disjuntos,  $z$  no está en  $F$ . Por tanto,  $z \in B$ , luego existe un vértice de  $F$  con un vecino de entrada en  $B$ . Esto significa que existe un vértice de  $B$  con un vecino de salida en  $F$ , por lo que tiene como mucho 2 vecinos de salida en  $A$ . Se sigue que el número de aristas de  $B$  a  $A$  es menor o igual que  $3(b - 1) + 2$ , luego  $3a \leq 3b - 1$ , y como  $a < b$ , llegamos a contradicción, luego  $f = 0$ , lo que implica que  $F = \emptyset$ . Supongamos que existe un vértice de  $B$  con 2 vecinos de salida en  $B$ . Entonces, por el mismo razonamiento previo, llegamos a que  $a < b$ , una contradicción, por lo que todo vértice de  $B$  tiene como mucho un vecino de salida en  $B$ . De ello se sigue que todo vértice de  $B$  es de grado de salida 1 y de grado de entrada 1 en  $D[B]$ . Tenemos entonces que  $B$  es una unión disjunta de triángulos y, como  $t = 2$ ,  $B$  es la unión disjunta de dos triángulos a lo sumo. Si  $B$  se reduce a un triángulo, tenemos  $b = 3$ ,  $a = 3$  y  $n = 6$ , lo que no es posible, pues  $n \geq 10$ . Por tanto,  $B$  es la unión disjunta de dos triángulos  $T_1$  y  $T_2$ . En este caso tenemos  $b = 6$ ,  $a = 6$ ,  $n = 12$ . Un vértice  $x$  de  $A$  tiene 3 vecinos de entrada en  $B$ . Como  $x$  no tiene vecinos de salida en  $A$ ,  $x$  tiene a lo sumo 3 vecinos de salida en  $D$ , lo que es imposible. Luego la afirmación queda probada cuando  $t = 2$  y  $D$  tiene vértices con grado de entrada igual a 3.

Por tanto, la afirmación  $\mathcal{P}_n$  se verifica cuando  $|A(D)| = 4n$ . Procedemos ahora por inducción sobre el tamaño  $k$  de  $D$ . Supongamos que la afirmación  $\mathcal{P}_n$  es verdad cuando  $|A(D)| \leq k - 1$ ,  $4n + 1 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2} - 1$  y estudiemos el caso para  $k$ . Sea entonces  $D$  un grafo orientado de grado de salida mínimo al menos 4 y de tamaño  $k$ . Como  $k \geq 4n + 1$ , existe un vértice  $x$  de  $D$  de grado de salida al menos 5. Entonces, si  $xy$  es una arista de  $D$ , está claro que  $D_1 = D - xy$  es un grafo orientado con grado de salida míni-

mo al menos 4 y de tamaño  $k - 1$ . Por la hipótesis de inducción,  $D_1$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ , luego claramente  $D$  también cumple la propiedad  $\mathcal{P}$ . Por tanto, la afirmación  $\mathcal{P}_n$  es cierta cuando  $|A(D)| = k$ . Termina así la demostración del Teorema 2.4

□

*Demostración del Teorema 2.2.* Sea  $D$  un digrafo con grado de salida mínimo al menos 4, por el Teorema 2.4,  $D$  cumple la propiedad  $\mathcal{P}$  y, entonces, contiene dos ciclos disjuntos  $C_1 = x_1 \cdots x_p x_1$  y  $C_2 = y_1 \cdots y_q y_1$  y dos caminos  $P_1 = x_p \cdots x_{p+r-1}$  y  $P_2 = y_q \cdots y_{q+s-1}$ , con  $y_{q+s-1} = x_{p+r-1}$ , tales que  $V(P_1) \cap (V(C_1) \cup V(C_2)) = \{x_p\}$ ,  $V(P_2) \cap (V(C_1) \cup V(C_2)) = \{y_p\}$  y  $V(P_1) \cap V(P_2) = \{x_{p+r-1}\} = \{y_{q+s-1}\}$ . Si  $C_1$  y  $C_2$  tienen diferentes longitudes, hemos acabado. Supongamos que tienen la misma longitud. Sea  $P_3 = x_{p+r-1} \cdots x_{p+r+t-2}$  un camino comenzando en  $x_{p+r-1} = y_{q+s-1}$  de longitud máxima  $t - 1$ . Por la condición de maximalidad,  $x_{p+r+t-2}$  no tiene ningún vecino de salida en  $V(D) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3))$ . De ello se sigue que  $x_{p+r+t-2}$  tiene al menos 4 vecinos de salida en  $V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3)$  y, por tanto,  $x_{p+r+t-2}$  tiene al menos 2 vecinos de salida en  $V(C_1) \cup V(P_1) \cup V(P_3)$  o en  $V(C_2) \cup V(P_2) \cup V(P_3)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $x_{p+r+t-2}$  tiene al menos 2 vecinos de salida en  $V(C_1) \cup V(P_1) \cup V(P_3)$ , sean  $x_i$  y  $x_j$ ,  $i \neq j$ , dichos vecinos. Entonces  $C' = x_i \cdots x_{p+r+t-2} x_i$  y  $C'' = x_j \cdots x_{p+r+t-2} x_j$  son dos ciclos de diferentes longitudes y ambos son disjuntos con  $C_2$ , por lo que uno de estos dos ciclos,  $C'$  ó  $C''$ , asumamos que  $C'$ , tiene longitud distinta a la de  $C_2$ .



Así pues,  $C'$  y  $C_2$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes y queda probado el teorema.

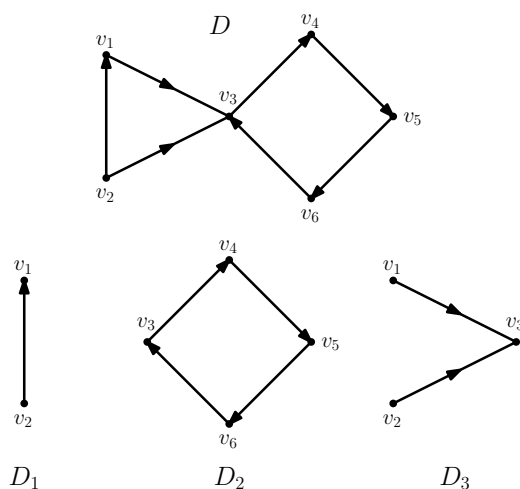
□

A continuación, vamos a introducir una nueva definición, la de *buena descomposición* de un digrafo, que nos llevará a obtener una caracterización de los digrafos con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Previamente definiremos también el *digrafo de componentes fuertes* de un digrafo dado y destacaremos algunas de sus propiedades.

**Definición 2.6** Diremos que un digrafo  $D = (V, A)$  admite **una buena descomposición**  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  si  $D_1 = (V_1, A_1)$ ,  $D_2 = (V_2, A_2)$  y  $D_3 = (V_3, A_3)$  son subdigrafos de  $D$  tales que  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ , pudiendo ser  $V_1$  vacío,  $D_1 = D[V_1]$  es acíclico,  $D_2 = D[V_2]$  es fuertemente conexo y  $D_3$  es un subdigrafo de  $D$  tal que cada una de sus aristas tiene su extremo inicial en  $V_1$  y su extremo final en  $V_2$ .

Además, diremos que una buena descomposición  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  es *única* si, para cualquier otra buena descomposición  $D = D'_1 \cup D'_2 \cup D'_3$ , se tiene que  $D_1 \cong D'_1$ ,  $D_2 \cong D'_2$  y  $D_3 \cong D'_3$ .

**Ejemplo 2.7** A continuación, vemos un ejemplo gráfico de una buena descomposición de un digrafo  $D$  que, además, cumple que es *única*.



**Definición 2.8** Dado un digrafo  $D$ , el **digrafo de componentes fuertes**  $SC(D)$  de  $D$  es el digrafo obtenido por contracción de cada componente fuerte de  $D$  en un único vértice y eliminación de aquellas aristas paralelas obtenidas en el proceso. Es decir, si  $K_1, K_2, \dots, K_t$  son las componentes fuertes de  $D$ , entonces  $V(SC(D)) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$  y  $A(SC(D)) = \{v_i v_j \mid \exists u_i u_j \in A, u_i \in V(K_i), u_j \in V(K_j)\}$ .

**Observación 2.9** Por la noción de componente fuerte y la construcción del digrafo de componentes fuertes, se tiene que  $SC(D)$  es acíclico y, por tanto, existe un vértice con grado de salida 0.

**Definición 2.10** Diremos que una componente fuerte de un digrafo  $D$  es **terminal** si su correspondiente vértice en  $SC(D)$  tiene grado de salida 0.

**Observación 2.11** Por la observación 2.9, todo digrafo tiene al menos una componente fuerte terminal.

Procedemos, ahora sí, a enunciar el último resultado de esta sección.

**Teorema 2.12 (Teor. 4, [8])** Un digrafo  $D = (V, A)$  con grado de salida mínimo igual a 3 no tiene ciclos disjuntos de diferentes longitudes si y solo si  $D$  admite una buena descomposición  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ , donde  $D_1 = (V_1, A_1)$ ,  $D_2 = (V_2, A_2)$  y  $D_3 = (V_3, A_3)$  satisfacen que  $D_2$  tiene grado de salida mínimo igual a 3 y no tiene ciclos disjuntos de diferentes longitudes y  $d_{D_1 \cup D_3}^+(v) \geq 3$ ,  $\forall v \in V_1$ . Además, cuando exista dicha buena descomposición, será única.

*Demostración.* En primer lugar, probemos la condición necesaria. Sea  $D = (V, A)$  un digrafo con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Veamos que toda componente fuerte terminal de  $D$  es no trivial.

*Afirmación.* Sea  $D$  un digrafo con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Se verifica que toda componente fuerte terminal de  $D$  es no trivial.

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $D' \subset D$  es una componente fuerte terminal de  $D$  que es trivial, es decir,  $V(D') = \{v\}$ . Como el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3,  $d_D^+(v) \geq 3$  y existen al menos tres vértices  $x_1, x_2$  y  $x_3$  en el entorno de salida de  $v$ , esto es,  $vx_i \in A(D)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pero entonces al menos hay una arista que sale del vértice al que corresponde  $D'$  en  $SC(D)$  (en el caso de que  $x_1, x_2$  y  $x_3$  estuvieran en la misma componente conexa  $D''$  de  $D$ , si no, serían más de una) lo que está en contradicción con que  $D'$  es terminal. □

Podemos probar también que  $D$  tiene una única componente fuerte no trivial. Supongamos por el contrario que  $D$  tiene al menos dos componentes fuertes no triviales, y sean  $K_1$  y  $K_2$  dos de ellas. Por la Observación 2.11 y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $K_1$  es terminal. Sea  $P = v_1 v_2 \cdots v_k$  un camino maximal en  $K_1$ . Entonces, dado que  $K_1$  es una componente fuerte terminal, todo vecino de salida de  $v_k$  debe estar en  $V(K_1)$  y, por la condición de maximalidad, tiene que estar en  $V(P)$ . Por tanto, dado



que el grado de salida mínimo de  $D$  es 3, existen  $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , con  $i \neq j$ , tales que  $v_k v_i, v_k v_j \in A$ . De lo que se sigue que  $C_1 = v_i v_{i+1} \cdots v_k v_i$  y  $C_2 = v_j v_{j+1} \cdots v_k v_j$  son dos ciclos de diferentes longitudes en  $K_1$ . Además, dado que  $K_2$  es no trivial y fuerte, tiene un ciclo  $C_3$ . Por tanto, o bien  $C_1$  y  $C_3$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , o bien lo son  $C_2$  y  $C_3$ , por lo que tendríamos una contradicción. Luego, podemos afirmar que  $D$  tiene una única componente fuerte no trivial.

Sean  $K_1, K_2, \dots, K_t$  componentes fuertes de  $D$ . Dado que todo digrafo tiene al menos una componente fuerte terminal, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $K_t$  es la única componente fuerte no trivial, que, además, debe ser terminal. Así las otras componentes  $K_1, K_2, \dots, K_{t-1}$  son no terminales y triviales. Sean  $V_1 = V(K_1) \cup V(K_2) \cup \cdots \cup V(K_{t-1})$ ,  $V_2 = V(K_t) = V \setminus V_1$ ,  $D_1 = (V_1, A_1) = D[V_1]$  y  $D_2 = (V_2, A_2) = K_t = D[V_2]$ . Sea  $A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_2)$ , y definamos a  $D_3 = (V_3, A_3)$  como el subdigrafo de  $D$  arco-inducido por  $A_3$ . Entonces, dado que el digrafo de componentes fuertes  $SC(D)$  es acíclico,  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  es una buena descomposición de  $D$ . Además, como  $D$  tiene grado de salida mínimo igual a 3 y no tiene ciclos disjuntos de diferentes longitudes, el subdigrafo  $D_2$  debe tener grado de salida mínimo igual a 3 y no puede tener ciclos disjuntos de diferentes longitudes y se tiene  $d_{D_1 \cup D_3}^+(v) \geq 3$ ,  $\forall v \in V_1$ . Queda probada así la condición necesaria del teorema.

A continuación, probemos la condición suficiente. Sea  $D$  un digrafo que admite una buena descomposición  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ , donde  $D_1 = (V_1, A_1)$ ,  $D_2 = (V_2, A_2)$  y  $D_3 = (V_3, A_3)$  son subdigrafos tales que  $D_2$  tiene grado de salida mínimo igual a 3 y no tiene ciclos disjuntos de diferentes longitudes y  $d_{D_1 \cup D_3}^+(v) \geq 3$ ,  $\forall v \in V_1$ . Entonces, el grado de salida mínimo de  $D$  es 3. Si  $C$  es un ciclo en  $D$ , dado que  $D_1$  es acíclico y  $D_3$  es un digrafo cuyas aristas tienen su extremo inicial en  $V_1$  y su extremo final en  $V_2$ ,  $C$  ha de ser un ciclo en  $D_2$ . De este modo, si  $C_1$  y  $C_2$  son dos ciclos disjuntos de  $D$ , entonces son dos ciclos disjuntos de  $D_2$ , que es un digrafo sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Por tanto,  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma longitud. Luego,  $D$  es un digrafo sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Queda probada así la suficiencia del teorema.

Demostremos por último la unicidad de la buena descomposición. Sea  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  una buena descomposición de  $D$ . Entonces, está claro que  $D_2$  es la única componente fuerte no trivial de  $D$ . Por lo que, si  $D = D'_1 \cup D'_2 \cup D'_3$  es otra buena descomposición de  $D$ , tenemos que  $D_2 \cong D'_2$ , ya que  $D'_2$  también ha de ser una componente fuerte no trivial de  $D$ . Se sigue entonces que  $D_1 \cong D'_1$  y  $D_3 \cong D'_3$  y, por tanto, la buena descomposición de  $D$  es única, quedando demostrado el teorema. □

## 2.2. Conjetura

Los Teoremas 2.1 y 2.2 nos dan condiciones bajo las cuales todo digrafo contiene ciclos disjuntos, siendo estos ciclos de diferentes longitudes en el segundo teorema. Por otra parte, el Teorema 2.12 permite reducir la investigación sobre digrafos con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes al caso en el que dichos digrafos son fuertemente conexos. En este contexto, Henning y Yeo propusieron la siguiente conjetura, centrados en el caso de los torneos bipartitos.

**Conjetura 2.13 (Conj. 1 (c), [3])** *Todo digrafo bipartito con grado de salida mínimo al menos 3 contiene dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes.*

Para refutar dicha conjetura, definiremos una familia de torneos bipartitos, que nos permitirá enunciar y demostrar el teorema que nos interesa.

**Definición 2.14** *Dados  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  enteros tales que  $k_i \geq 3$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , definimos  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$  como el digrafo con conjunto de vértices  $V = B \sqcup N$ , donde  $N = N^1 \sqcup N^2 \sqcup N^3 \sqcup N^4$  y*

$$B = \{b^1, b^2, b^3, b^4\},$$

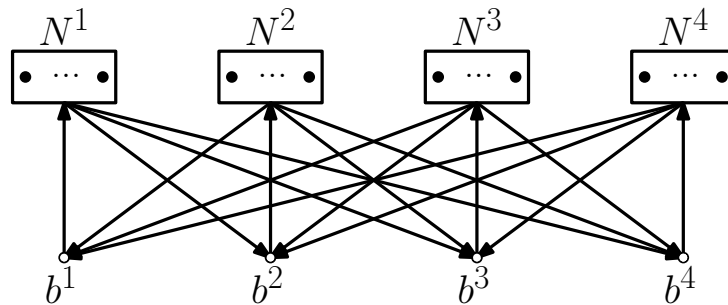
$$N^i = \{n_{t_i}^i \mid t_i \in \{1, \dots, k_i\}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

*y con conjunto de aristas  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ , donde*

$$A_i = \{b^i n_{t_i}^i, n_{t_i}^i b^j \mid t_i \in \{1, \dots, k_i\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

*A los vértices del conjunto  $B$  los llamamos **vértices blancos**, mientras que los de  $N$  los llamamos **vértices negros**.*

*A continuación se muestra gráficamente la construcción del digrafo bipartito  $BT$ .*



**Teorema 2.15 (Teor. 6, [6])** *Para cualesquiera enteros  $k_i \geq 3$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , el digrafo  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$  es un torneo bipartito fuertemente conexo con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes.*

*Demostración.* Por la propia definición de  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , se trata de un torneo bipartito para la partición  $V = B \sqcup N$ , donde  $N = N^1 \sqcup N^2 \sqcup N^3 \sqcup N^4$ .

Veamos que es fuertemente conexo. Tomemos en primer lugar dos vértices negros cualesquiera que pertenezcan a distintos subconjuntos de la partición de  $N$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dichos vértices son  $n_1^1$  y  $n_1^2$ . Entonces, los caminos  $n_1^1 b^2 n_1^2$  y  $n_1^2 b^1 n_1^1$  unen, en diferentes sentidos, ambos vértices. Tomemos ahora dos vértices negros del mismo subconjunto de la partición de  $N$ , por ejemplo,  $n_1^1$  y  $n_2^1$ . En este caso, tomando, para  $j \neq i$ , un vértice blanco  $b^j$  y un vértice negro de  $N^j$  cualquiera (en nuestro caso tomamos  $j = 2$  y el vértice negro  $n_2^1$ ), los caminos  $n_1^1 b^2 n_2^1 b^1 n_1^1$  y  $n_2^1 b^2 n_1^1 b^1 n_1^1$  unen ambos vértices. Cojamos ahora un vértice blanco  $b^i$  y un vértice de  $N^i$ . Tomamos, sin pérdida de generalidad,  $b^1$  y  $n_1^1$ . Entonces, tomando un vértice blanco distinto y un vértice negro que no pertenezca al mismo  $N^i$  (en nuestro caso consideramos  $b^2$  y  $n_1^2$ ), tenemos los caminos  $b^1 n_1^1 b^2$  y  $n_1^1 b^2 n_1^2 b^1$ . Cojamos ahora un vértice blanco  $b^i$  y un vértice de  $N^j$ , con  $i \neq j$ . Tomamos, sin pérdida de generalidad,  $b^1$  y  $n_2^1$ . Entonces, tenemos los caminos  $b^1 n_1^1 b^2 n_2^1$  y  $n_2^1 b^1$ . Por último, consideremos el caso en el que tenemos dos vértices blancos que, sin pérdida de generalidad, suponemos que son  $b^1$  y  $b^2$ . Tenemos entonces los caminos  $b^1 n_1^1 b^2$  y  $b^2 n_1^2 b^1$ . Por tanto, como, para cualesquiera dos vértices  $u, v$  del digrafo, puedo encontrar un camino de  $u$  a  $v$  y otro de  $v$  a  $u$ , podemos afirmar que es fuertemente conexo.

Además, cada vértice  $n_{t_i}^i$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  y  $t_i \in \{1, \dots, k_i\}$ , tiene grado de salida 3 y el grado de salida de  $b^i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ , es  $k_i \geq 3$ . Por tanto, el grado de salida mínimo de  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$  es 3.

Sean  $C^1$  y  $C^2$  dos ciclos disjuntos en  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$ . Dado que el digrafo es bipartito, para cada  $i = 1, 2$ , la longitud del ciclo  $C^i$  es igual a  $2s_i$ , donde  $s_i$  es el número de vértices blancos en  $C^i$ . Como dichos ciclos son disjuntos y  $|B| = 4$ , tenemos que  $s_1 + s_2 \leq 4$ . Por definición,  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$  es un digrafo orientado, esto es, no tiene ciclos de longitud 2. Por tanto,  $s_1$  y  $s_2$  valen ambos al menos 2, por lo que debe ser  $s_1 = s_2 = 2$ . Entonces,  $C^1$  y  $C^2$  tienen ambos longitud igual a 4. Así pues,  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$  es un torneo bipartito fuertemente conexo con grado de salida mínimo al menos 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. □

Al haber refutado la Conjetura 2.13, nos encontramos ante un nuevo escenario: la existencia de digrafos bipartitos con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Nuestro interés ahora se centrará en buscar una clasificación para dichos digrafos.



## Capítulo 3

# Torneos bipartitos sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes

En este capítulo vamos a demostrar que el recíproco del Teorema 2.15, en el que probábamos que el digrafo  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$  era un torneo bipartito fuertemente conexo de grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes, también es cierto, siguiendo el trabajo de Tan [6]. A partir de estos dos resultados, podremos obtener una clasificación de los torneos bipartitos fuertes con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes.

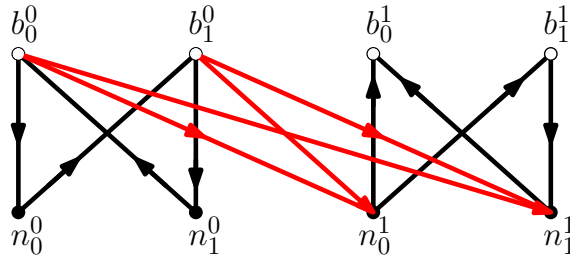
**Teorema 3.1** *Sea  $D = (V, A)$  un torneo bipartito fuerte con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Entonces  $D$  es isomorfo a un digrafo  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , para ciertos  $k_i \geq 3$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ .*

*Demostración.* Sea  $D = (V, A)$  un torneo bipartito fuerte con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Sea además  $V = B \sqcup N$  la partición de  $V$ . Por simplicidad para distinguir entre los vértices de cada parte de la partición, llamaremos vértices blancos a aquellos que pertenecen a  $B$  y vértices negros a los del conjunto  $N$ .

Como el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3, por el Teorema 2.1,  $D$  contiene dos ciclos disjuntos  $C^0$  y  $C^1$ , que han de tener la misma longitud, y esta debe ser al menos 4, ya que  $D$  es un torneo bipartito (por lo que no contiene ciclos de longitud impar como indicaba el Lema 1.41) y no tiene ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Supongamos que los dos ciclos tienen longitud al menos 6, entonces podemos representarlos como

$C^i = b_0^i n_0^i b_1^i n_1^i \dots b_t^i n_t^i b_0^i$ , donde  $b_j^i \in B$ ,  $n_j^i \in N$  para  $i = 0, 1$  y  $j = 0, \dots, t$ , donde debe ser  $t \geq 2$ . Si  $b_0^0 n_1^0 \in A$ , entonces  $(C^0)' = b_0^0 n_1^0 b_2^0 n_2^0 \dots b_t^0 n_t^0 b_0^0$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ . Si  $n_1^0 b_0^0 \in A$ , entonces  $(C^0)'' = b_0^0 n_0^0 b_1^0 n_1^0 b_0^0$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ . En ambos casos llegamos a contradicción. Por tanto, la longitud de  $C^0$  y  $C^1$  ha de ser 4, es decir,  $C^0 = b_0^0 n_0^0 b_1^0 n_1^0 b_0^0$  y  $C^1 = b_0^1 n_0^1 b_1^1 n_1^1 b_0^1$ .

Sea  $V' = V \setminus (V(C^0) \cup V(C^1))$ . Supongamos que  $V' = \emptyset$ . Entonces  $n_0^1$  y  $n_1^1$  tienen que ser vecinos de salida tanto de  $b_0^0$  como de  $b_1^0$ , ya que el grado de salida mínimo de  $D$  es 3. De ello se sigue que  $N_D^+(n_1^0) = \{b_1^1\}$ .



Esto contradice el hecho de que el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3, luego podemos afirmar que  $V' \neq \emptyset$ . Consideremos el subdigrafo inducido por  $V'$ ,  $D' = D[V']$ .

Continuaremos la demostración con una sucesión de resultados que enunciaremos como afirmaciones, para demostrarlas inmediatamente, hasta concluir la demostración del Teorema 3.1. En concreto, aplicaremos la primera de las afirmaciones en los razonamientos que la siguen.

Afirmación 1. Sea  $P = z_1 \dots z_t$  un camino en  $D'$ . Se verifica que:

- Si  $N_D^+(z_t) \cap V(P) \neq \emptyset$ , entonces  $t \geq 4$  y  $N_D^+(z_t) \cap V(P) = \{z_{t-3}\}$ .
- Si  $N_D^-(z_1) \cap V(P) \neq \emptyset$ , entonces  $t \geq 4$  y  $N_D^-(z_1) \cap V(P) = \{z_4\}$ .

*Demostración de la Afirmación 1.*

- Por reducción al absurdo, supongamos que  $z_t$  tiene un vecino de salida  $z_i \in V(P)$  con  $i \neq t-3$ , es decir, existe  $i \neq t-3$  tal que  $z_t z_i \in A$ , entonces  $C' = z_i z_{i+1} \dots z_t z_i$  es un ciclo en  $D'$  que no tiene longitud 4. Por lo que  $C'$  y  $C^0$  serían dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que supone una contradicción. Así pues  $t \geq 4$  y  $z_{t-3}$  es el único vecino de salida de  $z_t$  en  $V(P)$ , esto es,  $N_D^+(z_t) \cap V(P) = \{z_{t-3}\}$ .

b) Por reducción al absurdo, supongamos que  $z_1$  tiene un vecino de entrada  $z_i \in V(P)$  con  $i \neq 4$ , es decir, existe  $i \neq 4$  tal que  $z_i z_1 \in A$ , entonces  $C'' = z_1 \cdots z_i z_1$  es un ciclo en  $D'$  que no tiene longitud 4. Por lo que  $C''$  y  $C^0$  serían dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que es una contradicción. Así que  $t \geq 4$  y  $z_4$  es el único vecino de entrada de  $z_1$  en  $V(P)$ , esto es,  $N_D^-(z_1) \cap V(P) = \{z_4\}$ . □

Afirmación 2. Todo vértice de  $V'$  tiene a lo sumo un vecino de entrada en cada uno de los conjuntos  $V(C^0)$  y  $V(C^1)$ .

*Demostración de la Afirmación 2.* Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un vértice  $x_0 \in V'$  con dos vecinos de entrada en  $V(C^i)$ , para  $i \in \{0, 1\}$ . Sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que  $x_0$  es un vértice negro y que  $i = 0$  (de no ser así, renombraríamos las partes de la partición de  $D$  y los ciclos  $C^0$  y  $C^1$ ). Entonces  $b_0^0$  y  $b_1^0$  pertenecen al entorno de entrada de  $x_0$ , es decir,  $b_0^0 x_0, b_1^0 x_0 \in A$ . Así que  $x_0$  tiene como máximo dos vecinos de salida en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ , ya que hay exactamente cuatro vértices blancos en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ . Como el grado de salida mínimo de  $D$  es 3,  $x_0$  ha de tener un vecino de salida  $x_1$  en  $V'$ . Consideremos la siguiente partición de  $V'$ :

$$X = \{x \in V' \mid \text{existe un camino de } x_0 \text{ a } x \text{ en } D'\}, Y = V' \setminus X.$$

En algunos casos necesitaremos recurrir a un camino que es parte de un ciclo o camino ya considerado y que constituye un camino entre dos vértices dados, por lo que introducimos la siguiente notación: si  $C$  es un ciclo o camino y  $v$  y  $w$  son dos vértices de  $C$ , el camino de  $v$  a  $w$  contenido en  $C$  lo denotaremos por  $vCw$ .

A continuación, vamos a enumerar y probar algunas propiedades del digrafo  $D'$ .

**Propiedad 1.** Para todo  $x \in X$ , se tiene que  $N_D^+(x) \cap V(C^0) = \emptyset$ , es decir, ningún vértice de  $X$  tiene un vecino de salida en  $V(C^0)$ .

De hecho, si  $x \in X$  tuviese un vecino de salida  $v \in V(C^0)$  y  $P = x_0 \cdots x$  fuese un camino en  $D'$ , entonces  $C' = xvC^0w_0^0x_0 \cdots x$  y  $C'' = xvC^0w_1^0x_0 \cdots x$  serían dos ciclos de diferentes longitudes en  $V(C^0) \cup V'$ . Por tanto, o bien  $C'$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , o lo son  $C''$  y  $C^1$ , y ambos casos suponen una contradicción.

**Propiedad 2.** Para todo  $x \in X$ , se tiene que  $N_D^+(x) \cap Y = \emptyset$ , es decir, ningún vértice de  $X$  tiene un vecino de salida en  $Y$ .

Por la propia definición de  $X$  se llegaría a una contradicción en el supuesto de que existieran  $x \in X$  y  $v \in Y$  con  $xv \in A$ , ya que el camino de  $x_0$  a  $x$  en  $D'$  daría lugar a un camino de  $x_0$  a  $v$  añadiendo esta arista, pero  $v \notin X$ .

**Propiedad 3.**  $|X| \geq 4$  y  $X$  contiene vértices blancos y negros.

Sea  $P = z_1 \cdots z_t$  un camino maximal en  $D[X]$ . Entonces todos los vecinos de salida de  $z_t$  en  $D[X]$  deben estar en  $P$ . Dado que  $d_D^+(z_t) \geq 3$ , que  $z_t$  no puede tener vecinos de salida en  $V(C^0) \cup Y$ , por las Propiedades 1 y 2, y que  $z_t$  tiene como mucho dos vecinos de salida en  $V(C^1)$ , dicho vértice tiene que tener un vecino de salida en  $V(P)$ . Por la Afirmación 1,  $t \geq 4$  y, por tanto,  $|X| \geq 4$  y  $X$  contiene vértices blancos y negros, al contenerlos el camino  $P$ .

**Propiedad 4.** Para todo  $u \in V'$ , se tiene que  $N_D^-(u) \cap V(C^1) = \emptyset$ , es decir, ningún vértice de  $V'$  tiene vecinos de entrada en  $V(C^1)$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que existen  $u \in V'$  y  $v \in V(C^1)$  con  $vu \in A$ . Distinguimos dos casos:

**Caso 1:** Supongamos que  $u \in X$  y sea  $P = z_1 \cdots z_t$  un camino maximal en  $D[X]$  con  $z_1 = u$ , entonces todos los vecinos de salida de  $z_t$  en  $D[X]$  deben estar en  $V(P)$ . Por el apartado (a) de la Afirmación 1,  $z_t$  tiene a lo sumo un único vecino de salida en  $X$ . Es más,  $z_t$  no tiene vecinos de salida en  $V(C^0) \cup Y$ , por las Propiedades 1 y 2. Luego,  $z_t$  ha de tener dos vecinos de salida  $v_1$  y  $v_2$  en  $V(C^1)$ , pues  $d_D^+(z_t) \geq 3$ . Sean  $C' = vz_2 \cdots z_tv_1C^1v$  y  $C'' = vz_2 \cdots z_tv_2C^1v$ . Entonces  $C'$  y  $C''$  son dos ciclos de diferentes longitudes en  $D[X \cup V(C^1)]$ . Por tanto, o bien  $C'$  y  $C''$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , o bien lo son  $C''$  y  $C''$ , lo que supone una contradicción.

**Caso 2:** Supongamos que  $u \in X'$ , entonces  $u \in Y$ . Dado que  $D$  es un torneo bipartito y que las Propiedades 2 y 3 son ciertas, podemos considerar un vértice en  $X$  con color diferente al de  $u$ . De nuevo, sea  $P = z_1 \cdots z_t$  un camino maximal en  $D[X]$ . Entonces, siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, podemos afirmar



que  $z_t$  tiene dos vecinos de salida en  $V(C^1)$ . Así,  $C' = vuz_1 \cdots z_tv_1C^1v$  y  $C'' = vuz_1 \cdots z_tv_2C^1v$  son dos ciclos de diferentes longitudes en  $D[V' \cup V(C^1)]$ . En este caso, o bien  $C'$  y  $C^0$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , o bien lo son  $C''$  y  $C^0$ , llegando de nuevo a contradicción.

Por tanto, ningún vértice de  $V'$  tiene vecinos de entrada en  $V(C^1)$ .

Por la Propiedad 4 y teniendo en cuenta que el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3, obtenemos que  $N_D^+(b_0^1) = \{n_0^1, n_0^0, n_1^0\}$  y  $N_D^+(b_1^1) = \{n_1^1, n_0^0, n_1^0\}$ . Además, al ser  $D$  bipartito y por las Propiedades 1 y 4, todo vértice de  $X$  tiene dos vecinos de entrada en  $V(C^0)$  y dos vecinos de salida en  $V(C^1)$ , que serán los dos vértices de  $V(C^0)$  y  $V(C^1)$ , resp., del color diferente al del vértice de  $X$  considerado.

Sea  $P = x_0x_1 \cdots x_t$  un camino maximal en  $D[X]$ . Tenemos entonces que  $t \geq 3$  y, dado que  $x_0$  es un vértice negro,  $x_1$  y  $x_3$  deben ser vértices blancos. Así  $C' = x_0b_0^1n_1^0b_0^0x_0$  y  $C'' = x_1x_2x_3n_0^1b_1^1n_0^0x_1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ .

Esta última contradicción demuestra que la Afirmación 2 es cierta, esto es, que no existe ningún vértice en  $V'$  con dos vecinos de entrada en el mismo ciclo, de los dos ciclos  $C^0$  y  $C^1$  fijados.  $\square$

Afirmación 3. Se verifica que  $|N_D^-(v) \cap (V(C^0) \cup V(C^1))| \leq 1 \forall v \in V'$ , es decir, todo vértice de  $V'$  tiene a lo sumo un vecino de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ .

*Demostración de la Afirmación 3.* Supongamos que, por el contrario, existe un vértice  $x_0 \in V'$  con dos vecinos de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ . Por la Afirmación 2, cada uno de ellos debe estar en uno de los ciclos. Sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que  $x_0$  es un vértice negro (en caso contrario, renombraríamos las partes de la partición de  $D$ ). También podemos asumir que los vecinos de entrada son  $b_0^0$  y  $b_0^1$ . Dado que el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3 y hay solo 4 vértices blancos en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ , de los que 2 son vecinos de entrada de  $x_0$ , se sigue que  $x_0$  ha de tener un vecino de salida  $x_1$  en  $V'$ . Sea  $P = x_0 \cdots x_t$  un camino maximal en  $D'$  comenzando en  $x_0$ . Si  $x_t$  tuviera dos vecinos de salida  $v_1$  y  $v_2$  en  $V(C^0)$ , entonces  $C' = b_0^0x_0 \cdots x_tv_1C^0b_0^0$  y  $C'' = b_0^0x_0 \cdots x_tv_2C^0b_0^0$  serían dos ciclos de diferentes longitudes

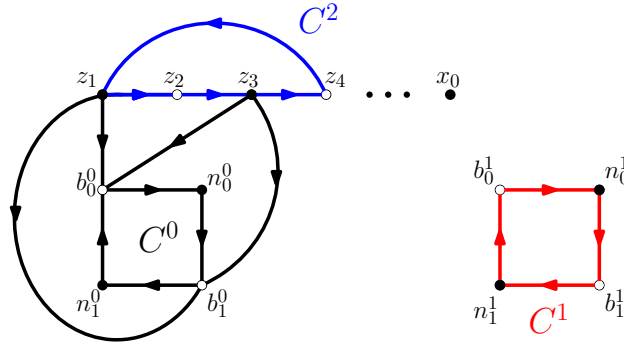
en  $D[V' \cup V(C^0)]$ , con lo que  $C'$  y  $C^1$  o  $C''$  y  $C^1$  serían dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que supone una contradicción. Así, por la Afirmación 2, podemos concluir que  $x_t$  tiene exactamente un vecino de salida  $v_1$  en  $V(C^0)$  y otro vecino de salida  $v_2$  en  $V(C^1)$ . Por tanto,  $x_t$  debe tener un vecino de salida  $v_3$  en  $V'$ , ya que el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3. Por la condición de maximalidad del camino  $P$ ,  $v_3$  ha de estar en el camino y, por el apartado (a) de la Afirmación 1, tenemos que  $t \geq 3$ . Entonces  $C = b_0^0 x_0 \cdots x_t v_1 C^0 b_0^0$  tiene longitud al menos 6, por lo que  $C$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que es una contradicción. Esto concluye la prueba de la Afirmación 3.  $\square$

Afirmación 4. Se verifica que  $|N_D^-(v) \cap (V(C^0) \cup V(C^1))| \geq 1 \forall v \in V'$ , es decir, todo vértice de  $V'$  tiene al menos un vecino de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ .

*Demostración de la Afirmación 4.* Por reducción al absurdo, supongamos que existe un elemento  $x_0 \in V'$  sin vecino de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ . Renombrando si fuera necesario las partes de la partición de  $D$ , asumimos que  $x_0$  es un vértice negro, entonces se tiene que  $b_0^0, b_1^0, b_0^1, b_1^1 \in N_D^+(x_0)$ . Como  $D$  es fuertemente conexo,  $x_0$  ha de tener un vecino de entrada  $x_1 \in V'$ . Sea  $P = z_1 \cdots z_t$  un camino maximal en  $D'$  con final en  $x_0$ , es decir,  $z_t = x_0$ . Si existiera  $i \in \{1, \dots, t-1\}$  tal que  $z_i$  tiene un vecino de entrada  $v \in V(C^0)$ , entonces los ciclos  $C' = z_i \cdots z_t b_0^0 C^0 v z_i$  y  $C'' = z_i \cdots z_t b_1^0 C^0 v z_i$  serían dos ciclos de diferentes longitudes en  $D[V' \cup V(C^0)]$ . En consecuencia,  $C'$  y  $C^1$  ó  $C''$  y  $C^1$  serían dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que llevaría a una contradicción. Luego, todo vértice del camino  $P$  tiene dos vecinos de salida en  $V(C^0)$ , aquellos dos vértices de  $C^0$  de diferente color del vértice considerado en  $P$ . Análogamente, considerando los vecinos de salida de  $x_0$  en  $V(C^1)$ , podemos probar que todo vértice del camino  $P$  tiene dos vecinos de salida en  $V(C^1)$ .

Así que todo vértice del camino  $P$  no tiene ningún vecino de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$  y, en particular, el vértice  $z_1$ . Como  $D$  es fuertemente conexo, se tiene que  $z_1$  debe tener un vecino de entrada  $w$  en  $V'$  y este vértice tiene que estar en el camino  $P$ , por la condición de maximalidad de este camino. Por el apartado (b) de la Afirmación 1, se tiene que  $w = z_4$  y el ciclo  $C^2 = z_1 z_2 z_3 z_4 z_1$  es un 4-ciclo en  $D'$ . Como todo vértice en  $V(P)$

tiene dos vecinos de salida en  $V(C^0)$ , los dos vértices de  $C^0$  de diferente color al del vértice de  $P$  considerado, supongamos que son  $b_0^0$  y  $b_1^0$  para  $z_1$  y  $z_3$  (si estos fueran vértices negros). Entonces llegaríamos a una contradicción con la Afirmación 2 en el supuesto de que la aplicáramos tomando como ciclos disjuntos de longitud 4 de partida  $C^2$  y  $C^1$ , en lugar de  $C^0$  y  $C^1$ , ya que  $V(C^0) \subseteq V \setminus (V(C^1) \cup V(C^2))$  y  $z_1, z_3 \in N_D^-(b_0^0) \cap V(C^2)$  ( $|N_D^-(b_0^0) \cap V(C^2)| > 1$ ).



Luego, queda probada esta afirmación. □

De las Afirmaciones 3 y 4, se sigue que todo vértice de  $V'$  tiene exactamente un único vecino de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ , es decir,  $\forall v \in V'$ , se tiene que  $|N_D^-(v) \cap (V(C^0) \cup V(C^1))| = 1$ .

Afirmación 5. Todos los vértices de  $V'$  pertenecen a la misma parte de la partición de  $D$ .

*Demostración de la Afirmación 5.* Por reducción al absurdo, supongamos que en  $V'$  hay vértices blancos y negros. Distinguiremos los siguientes casos:

**Caso 1:**  $V'$  tiene un vértice con un vecino de entrada en  $V(C^0)$  y un vértice con un vecino de entrada en  $V(C^1)$ .

En el caso de que los dos vértices fueran del mismo color, por ejemplo de color blanco, dado que  $V'$  tiene vértices blancos y negros y que todo vértice tiene exactamente un vértice de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ , basta con tomar un vértice negro  $x_0$  en  $V'$  y aquel de los vértices elegidos inicialmente  $x_1$ , que tenga un vecino de entrada en el ciclo diferente al ciclo donde  $x_0$  tenga el vértice de entrada. Así que podemos suponer que los vértices  $x_0$  y  $x_1$  de  $V'$  considerados son de diferente

color,  $x_0$  es un vértice negro y  $x_1$  es blanco, y que tienen un vecino de entrada en  $V(C^0)$  y  $V(C^1)$ , respectivamente (si no fuera así, podríamos renombrar los ciclos, por lo que podemos hacer esta suposición sin pérdida de generalidad). También podemos asumir que los vecinos de entrada de  $x_0$  y  $x_1$  son  $b_0^0$  y  $n_0^1$ , respectivamente, así que  $b_0^0x_0, n_0^1x_1 \in A$ . Como  $x_0$  y  $x_1$  ya no tienen más vecinos de entrada en  $V(C^0)$  y  $V(C^1)$ , los restantes deben ser vecinos de salida, por lo que  $b_1^0, b_0^1, b_1^1 \in N_D^+(x_0)$  y  $n_1^1, n_0^0, n_1^0 \in N_D^+(x_1)$ .

Si  $x_0x_1 \in A$ , entonces  $C' = x_0x_1n_0^0C^0b_0^0x_0$  y  $C'' = x_0x_1n_1^0C^0b_0^0x_0$  son dos ciclos de diferentes longitudes en  $D[V' \cup V(C^0)]$ . Por tanto, o bien  $C'$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , o bien lo son  $C''$  y  $C^1$ , lo que supone una contradicción.

Si  $x_1x_0 \in A$ , entonces  $C' = x_1x_0b_0^1C^1n_0^1x_1$  y  $C'' = x_1x_0b_1^1C^1n_0^1x_1$  son dos ciclos de diferentes longitudes en  $D[V' \cup V(C^1)]$ . Por tanto, o bien  $C'$  y  $C^0$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , o bien lo son  $C''$  y  $C^0$ , lo que lleva también a contradicción. Demostramos así que no es posible este primer caso.

**Caso 2:** Todos los vértices de  $V'$  tienen vecino de entrada en el mismo conjunto  $V(C^i)$ , para  $i = 0$  ó  $1$ .

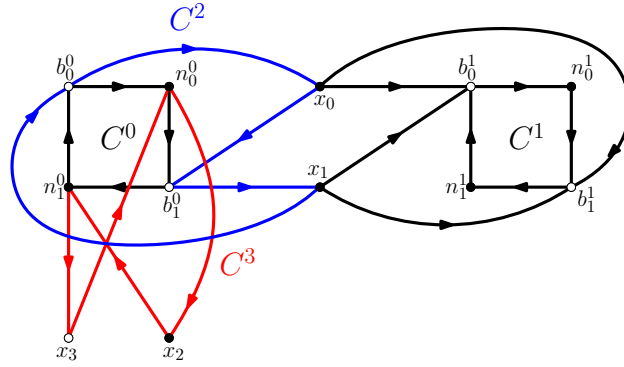
Renombrando los ciclos en caso de que fuera necesario, podemos asumir que todo vértice de  $V'$  tiene un vecino de entrada en  $V(C^0)$ . Por tanto, como todo vértice de  $V'$  tiene exactamente un vecino de entrada en  $V(C^0)$ , ningún vértice de  $V'$  tiene vecino de entrada en  $V(C^1)$ . En consecuencia, ningún vértice de  $V(C^1)$  tiene vecino de salida en  $V'$ . Dado que el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3, los entornos de salida de los vértices de  $V(C^1)$  son necesariamente

$$N_D^+(b_0^1) = \{n_0^1, n_0^0, n_1^0\}, \quad N_D^+(n_0^1) = \{b_1^1, b_0^0, b_1^0\}, \\ N_D^+(b_1^1) = \{n_1^1, n_0^0, n_1^0\} \text{ y } N_D^+(n_1^1) = \{b_0^1, b_0^0, b_1^0\}.$$

Luego, todo vértice de  $V(C^0)$  debe tener al menos dos vecinos de salida en  $V'$ . Sean  $x_0, x_1 \in V'$  tales que  $b_0^0x_0, b_1^0x_1 \in A$ . Por la Afirmación 2, todo vértice de  $V'$  tiene a lo sumo un vecino de entrada en  $V(C^0)$ , por lo que, en particular para  $x_0$  y  $x_1$ , implica que  $x_0b_1^0, x_1b_0^0 \in A$ . Así obtenemos un 4-ciclo  $C^2 = b_0^0x_0b_1^0x_1b_0^0$  en  $D$ . Procediendo de forma análoga para

dos vértices  $x_2$  y  $x_3$  de  $V'$  tales que  $n_0^0 x_2$ ,  $n_1^0 x_3 \in A$ , podemos obtener un 4-ciclo  $C^3 = n_0^0 x_2 n_1^0 x_3 n_0^0$ . Además, tal como hemos definido los ciclos  $C^2$  y  $C^3$ , estos serían disjuntos.

Por otra parte, como consecuencia de que ningún vértice de  $V'$  tiene vecino de entrada en  $V(C^1)$ , todos los vértices de  $V'$  tienen dos vecinos de salida en  $V(C^1)$ , en particular,  $x_0$  y  $x_1$  tienen como vecinos de salida a  $b_0^1$  y  $b_1^1$ . Así, fijándonos en  $b_0^1$ , por ejemplo, tenemos que  $x_0$  y  $x_1$  son vecinos de entrada de  $b_0^1$  y  $b_0^1 \in V \setminus (V(C^2) \cup V(C^3))$  tendría más de un vecino de entrada en  $V(C^2) \cup V(C^3)$ .



Esto contradice la Afirmación 2 en el supuesto de que la aplicáramos tomando como ciclos disjuntos de longitud 4 de partida  $C^2$  y  $C^3$ , en lugar de  $C^0$  y  $C^1$ . Esta última contradicción concluye la prueba de la Afirmación 5.

□

Por la Afirmación 5 y renombrando las partes de la partición de  $D$  en caso de ser necesario, podemos asumir que todos los vértices de  $V'$  son negros. En este caso,  $B = \{b_0^0, b_1^0, b_0^1, b_1^1\}$  y, además,  $N_D^+(n_0^0) = \{b_1^0, b_0^1, b_1^1\}$ ,  $N_D^+(n_1^0) = \{b_0^0, b_0^1, b_1^1\}$ ,  $N_D^+(n_0^1) = \{b_1^1, b_0^0, b_1^0\}$  y  $N_D^+(n_1^1) = \{b_0^1, b_0^0, b_1^0\}$ . Definamos los siguientes conjuntos:

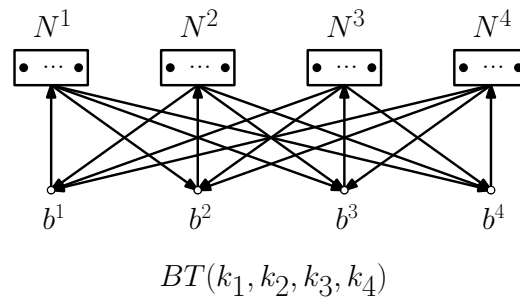
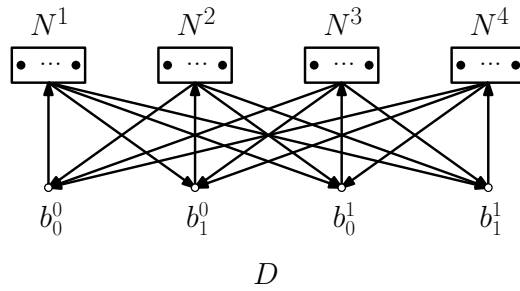
$$N^1 = \{v \in V / b_0^0 v \in A\},$$

$$N^2 = \{v \in V / b_1^0 v \in A\},$$

$$N^3 = \{v \in V / b_0^1 v \in A\},$$

$$N^4 = \{v \in V / b_1^1 v \in A\}.$$

Como comentamos anteriormente, por las Afirmaciones 3 y 4, todo vértice de  $V'$  tiene exactamente un vecino de entrada en  $V(C^0) \cup V(C^1)$  y, por la Afirmación 5, todos los vértices de  $V'$  son negros. Entonces, cada vértice negro del digrafo pertenece exactamente a uno de los conjuntos  $N^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , luego  $N = N^1 \sqcup N^2 \sqcup N^3 \sqcup N^4$  es una partición de  $N$ . Dado que el grado de salida mínimo de  $D$  es 3, tenemos  $|N^i| = k_i \geq 3$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Como vemos con claridad en la siguiente gráfica,  $D$  es isomorfo a  $BT(k_1, k_2, k_3, k_4)$ .



Terminamos así la demostración del Teorema 3.1.

□

# Capítulo 4

## Torneos sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes

En este capítulo buscamos una clasificación similar a la del Capítulo 3, pero en este caso para torneos fuertemente conexos con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Recordemos que en el capítulo anterior buscábamos dicha clasificación para torneos bipartitos.

En primer lugar, vamos a tomar el digrafo  $D_7^3$ , presentado y estudiado ampliamente por Tan en [6]. Este digrafo es un torneo en el que vamos a apoyarnos durante todo el capítulo.

**Ejemplo 4.1** Definimos  $D_7^3$  como aquel torneo con conjunto de vértices  $V(D_7^3) = \{v_0, v_1, \dots, v_6\}$  y conjunto de aristas  $A(D_7^3) = \{v_i v_j \mid (j - i) \pmod{7} \in \{1, 2, 4\}\}$ . En la Figura 4.1 mostramos una representación gráfica de dicho torneo.

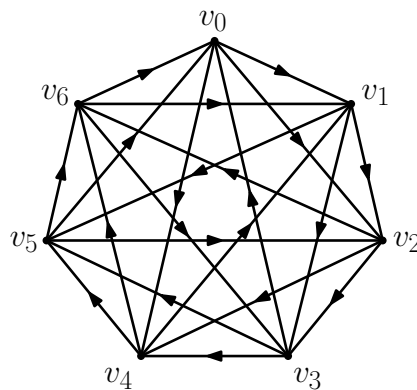


Figura 4.1: Digrafo  $D_7^3$

Como podemos ver en la Figura 4.1 y por la propia definición de  $D_7^3$ , se

trata de un torneo 3-regular. Además,  $D_7^3$  es fuertemente conexo, ya que, al tener el ciclo spanning  $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ , dados dos vértices cualesquiera  $v_i, v_j$ , estos vértices dividen dicho ciclo en dos caminos, uno de  $v_i$  a  $v_j$  y otro de  $v_j$  a  $v_i$ .

Dedicaremos este capítulo a demostrar el siguiente resultado que relaciona el propio  $D_7^3$  con ciertos torneos sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes.

**Teorema 4.2** *Sea  $D = (V, A)$  un torneo fuertemente conexo con grado de salida mínimo igual a 3. Se verifica que  $D$  es un digrafo sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes si y solo si  $D$  es isomorfo al digrafo  $D_7^3$ .*

*Demostración.* Como comentábamos en el Ejemplo 4.1,  $D_7^3$  es un torneo fuertemente conexo y 3-regular, por lo que su grado de salida mínimo es igual a 3. Por tanto, para probar la condición suficiente del Teorema 4.1, falta demostrar que es un digrafo sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes.

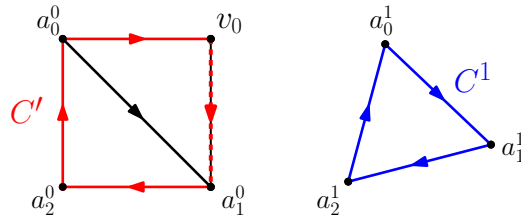
Al ser de orden 7, si  $D_7^3$  tuviese dos ciclos de diferentes longitudes, tendrían que ser un 3-ciclo y un 4-ciclo. El digrafo  $D_7^3$  satisface que dado dos 3-ciclos, existe un automorfismo del digrafo que lleva un 3-ciclo en el otro. Esto supone que basta tomar un 3-ciclo cualquiera del digrafo y comprobar que no existe un 4-ciclo de forma que sean disjuntos. Tomemos el 3-ciclo  $v_0v_1v_3$ . El 4-ciclo que buscamos debería tener como conjunto de vértices a  $\{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ . Sin embargo, podemos ver en la Figura 4.1 que no existe ningún 4-ciclo con ese conjunto de vértices. Queda así probado que el digrafo  $D_7^3$  no contiene ciclos disjuntos de diferentes longitudes y, por tanto, la condición suficiente está demostrada.

Probemos ahora la condición necesaria. Sea  $D = (V, A)$  un torneo fuerte con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de distintas longitudes. Dado que  $D$  es un torneo con grado de salida mínimo igual a 3, por la Observación 1.38, tenemos que  $|V| \geq 7$ . Por el Teorema 2.1,  $D$  tiene dos ciclos disjuntos  $C^0$  y  $C^1$  y, dado que  $D$  no tiene ciclos disjuntos de diferentes longitudes, ambos tienen longitud  $m$ . Supongamos que  $m \geq 4$ . Sea  $C^i = a_0^i a_1^i \cdots a_{m-1}^i a_0^i$  para  $i = 0, 1$ . Al ser  $D$  un torneo, exactamente una de las aristas  $a_0^0 a_2^0$  ó  $a_2^0 a_0^0$  está en  $A$ . Si  $a_0^0 a_2^0 \in A$ , entonces  $C^0 = a_0^0 a_2^0 a_3^0 \cdots a_{m-1}^0 a_0^0$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ . Si  $a_2^0 a_0^0 \in A$ , entonces  $C^0 = a_0^0 a_1^0 a_2^0 a_0^0$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ . En ambos casos llegamos a contradicción, luego podemos afirmar que la longitud de  $C^0$  y  $C^1$  ha de ser 3, i.e.,  $C^i = a_0^i a_1^i a_2^i a_0^i$  para  $i = 0, 1$ . Sea  $V' = V \setminus (V(C^0) \cup V(C^1))$ . Como  $|V| \geq 7$ , sabemos que  $V' \neq \emptyset$ . Vamos a probar ahora algunas afirmaciones.

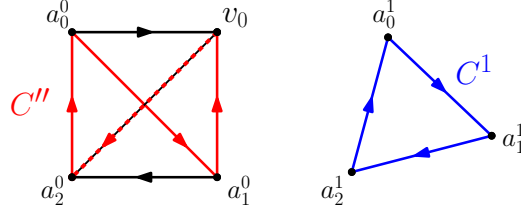


Afirmación 1 Para cada vértice  $v_0 \in V'$ , se tiene que  $C^i \rightarrow v_0$  ó  $v_0 \rightarrow C^i$ , donde  $i \in \{0, 1\}$ .

*Demostración de la Afirmación 1.* Supongamos que  $a_0^i v_0 \in A$ . Si  $v_0 a_1^i \in A$ , entonces  $C' = a_0^i v_0 a_1^i a_2^i a_0^i$  y  $C^{(i+1) \pmod 2}$ , donde  $i + 1$  se toma siempre módulo 2, son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que supone una contradicción. Luego,  $a_1^i v_0 \in A$ . Para ver gráficamente las distintas situaciones con las que nos encontramos a lo largo de toda esta demostración, vamos a ir representando los casos con  $i = 0$ .

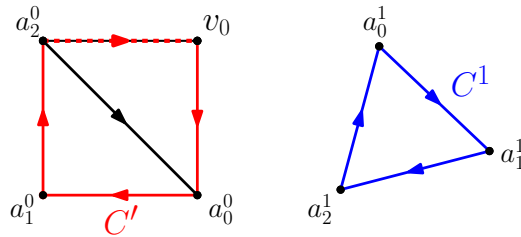


Si  $v_0 a_2^i \in A$ ,  $C'' = a_0^i a_1^i v_0 a_2^i a_0^i$  y  $C^{(i+1) \pmod 2}$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , llegando de nuevo a contradicción, luego,  $a_2^i v_0 \in A$ .

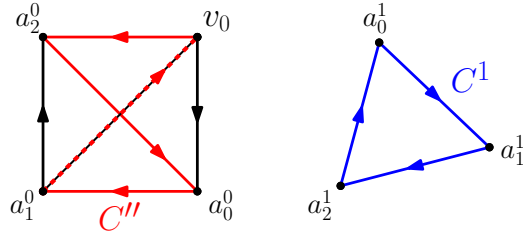


Por tanto,  $C^i \rightarrow v_0$ .

Supongamos ahora que  $v_0 a_0^i \in A$ . Si  $a_2^i v_0 \in A$ ,  $C' = a_0^i a_1^i a_2^i v_0 a_0^i$  y  $C^{(i+1) \pmod 2}$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que supone una contradicción, luego,  $v_0 a_1^i \in A$ .



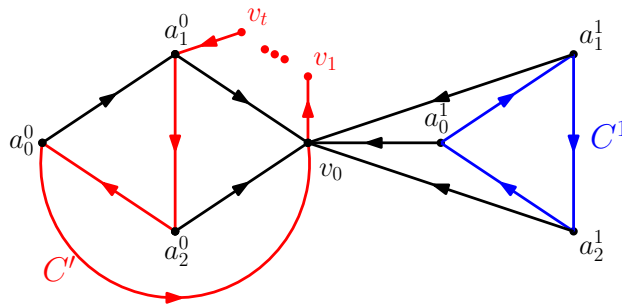
Supongamos ahora que  $a_1^i v_0 \in A$ . En este caso, tenemos que  $C'' = a_0^i a_1^i v_0 a_2^i a_0^i$  y  $C^{(i+1) \pmod 2}$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , luego, podemos afirmar que  $v_0 a_1^i \in A$ .



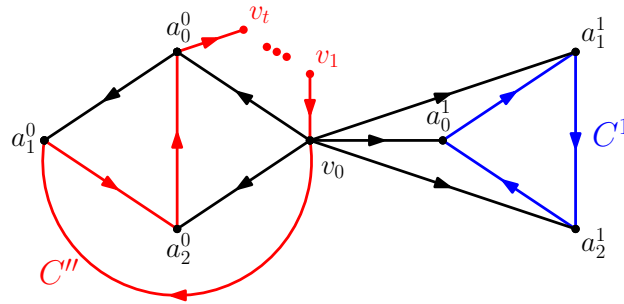
Por tanto,  $v_0 \rightarrow C^i$ . Así, la afirmación queda probada.  $\square$

*Afirmación 2* Si  $v_0 \in V'$  y  $C^i \rightarrow v_0$  (resp.,  $v_0 \rightarrow C^i$ ), entonces  $v_0 \rightarrow C^{(i+1) \pmod 2}$  (resp.,  $C^{(i+1) \pmod 2} \rightarrow v_0$ ), donde  $(i+1)$  se toma siempre módulo 2.

*Demostración de la Afirmación 2.* En primer lugar, probemos que si  $v_0 \in V'$  y  $C^i \rightarrow v_0$ , entonces  $v_0 \rightarrow C^{(i+1) \pmod 2}$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $C^i \rightarrow v_0$  y  $C^{i+1} \rightarrow v_0$ . Entonces ningún vecino de salida de  $v_0$  está en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ . Como el grado de salida mínimo de  $D$  es 3,  $v_0$  ha de tener un vecino de salida  $v_1 \in V'$ . Al ser  $D$  fuertemente conexo, podemos encontrar en  $D[V']$  un camino  $P = v_0 v_1 \cdots v_t$  con  $t \geq 1$  tal que cada uno de los vértices  $v_0, \dots, v_{t-1}$  no tiene un vecino de sus respectivos entornos de salida en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ , pero  $v_t$  sí tiene un vecino de salida en  $V(C^0) \cup V(C^1)$ . Esto implica que existe un  $j \in \{0, 1\}$  tal que  $v_t$  tiene un vecino de salida en  $V(C^j)$ . Entonces, por la Afirmación 1, tenemos que  $v_t \rightarrow C^j$ . Por lo tanto,  $C' = a_0^j v_0 v_1 \cdots v_t a_1^j a_2^j a_0^j$  es un ciclo de longitud al menos 5, que es disjunto con  $C^{j+1}$ , con  $j+1$  tomado módulo 2. De este modo,  $C'$  y  $C^{(j+1) \pmod 2}$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , llegando a una contradicción, luego, si  $v_0 \in V'$  y  $C^i \rightarrow v_0$ , se tiene que  $v_0 \rightarrow C^{(i+1) \pmod 2}$ . En la siguiente gráfica hemos representado el caso en el que  $j = 0$ .



Probemos ahora que si  $v_0 \in V'$  y  $v_0 \rightarrow C^i$ , entonces  $C^{(i+1) \pmod 2} \rightarrow v_0$ . Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, sea  $v_0 \in V'$  y supongamos  $v_0 \rightarrow C^i$  y  $v_0 \rightarrow C^{(i+1) \pmod 2}$ . De aquí se tiene que para cualesquiera  $i, j$ , el vértice  $a_i^j$  pertenece al entorno de salida de  $v_0$ . Como  $D$  es fuertemente conexo, podemos encontrar un camino  $P = v_t \cdots v_1 v_0$  en  $D[V']$ , con  $t \geq 1$ , de forma que ninguno de los vértices  $v_0, \dots, v_{t-1}$  es vecino de salida de un vértice  $a_i^j$ , y existe un  $j \in \{0, 1\}$  tal que  $v_t$  se encuentra en el entorno de salida de un vértice  $a_i^j$ . Por la Afirmación 1, tenemos que  $C^j \rightarrow v_t$ . En este caso,  $C'' = a_0^j v_t \cdots v_1 v_0 a_1^j a_2^j a_0^j$  es un ciclo de longitud al menos 5 que es disjunto con  $C^{(j+1) \pmod 2}$ . Así,  $C''$  y  $C^{(j+1) \pmod 2}$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , por lo que llegamos a una contradicción. En la siguiente gráfica representamos la situación en el supuesto de que  $j = 0$ .



Por tanto, hemos probado que si  $v_0 \in V'$  y  $v_0 \rightarrow C^i$ , entonces  $C^{(i+1) \pmod 2} \rightarrow v_0$ , y la afirmación queda probada.  $\square$

Consideramos los siguientes dos casos por separado:

**Caso 1:**  $|V| \geq 8$ .

En este caso,  $|V'| \geq 2$ . Sean

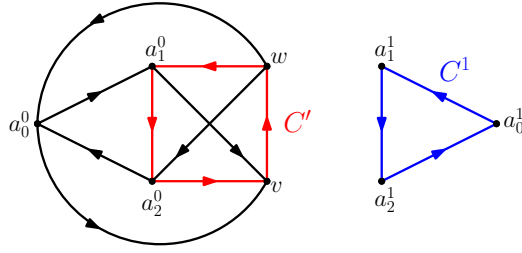
$$X = \{v \in V' / C^0 \rightarrow v\} \text{ e}$$

$$Y = \{w \in V' / w \rightarrow C^0\}.$$

Entonces  $V' = X \cup Y$  y  $X \cap Y = \emptyset$ . Por la Afirmación 1, tenemos además que  $X \rightarrow C^1$  y  $C^1 \rightarrow Y$ . Dividimos este primer caso en varios subcasos:

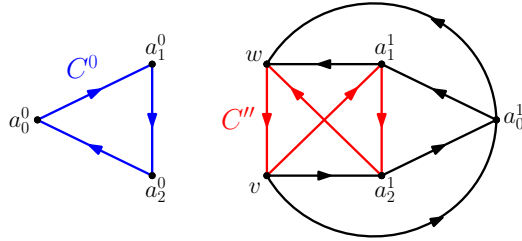
**Subcaso 1.1:**  $X \neq \emptyset$ ,  $Y \neq \emptyset$ , y existen  $v \in X$ ,  $w \in Y$  con  $v \rightarrow w$ .

En este subcaso,  $C' = v w a_1^0 a_2^0 v$  y  $C^1$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , lo que supone una contradicción.



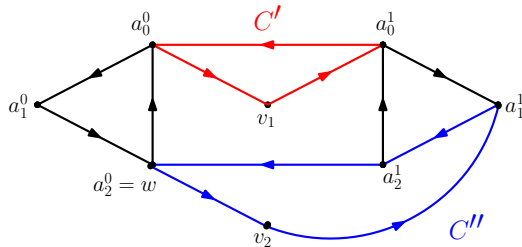
**Subcaso 1.2:** .  $X \neq \emptyset$ ,  $Y \neq \emptyset$ , e  $Y \rightarrow X$ .

Sean  $v \in X$ ,  $w \in Y$ . Como  $Y$  domina a  $X$ ,  $wv \in A$ . Sea  $C'' = va_1^1a_2^1ww$ . Entonces  $C''$  y  $C^0$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes en  $D$ , llegando a una contradicción.



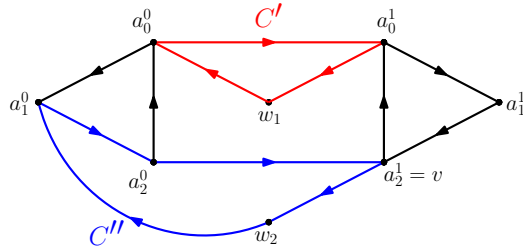
**Subcaso 1.3:** .  $X \neq \emptyset$  e  $Y = \emptyset$ .

Entonces,  $|X| \geq 2$  y todo vértice de  $C^1$  no tiene vértices de su respectivo entorno de salida en  $V'$ . De aquí se sigue que todo vértice de  $C^1$  tiene al menos dos vecinos de salida en  $V(C^0)$ , ya que solo tiene uno en  $V(C^1)$  y el grado de salida mínimo de  $D$  es igual a 3. Renombrando los vértices de  $V(C^0)$ , podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $a_0^1 \rightarrow a_0^0$ . Dado que  $a_2^1$  tiene al menos dos vecinos de salida en  $V(C^0)$ , al menos uno de los vértices  $a_1^0$  y  $a_2^0$ , digamos  $w$ , ha de pertenecer al entorno de salida de  $a_2^1$ . En la gráfica hemos tomado  $w = a_2^0$ . Sean  $v_1, v_2$  dos vértices distintos en  $X$ . Entonces  $C' = v_1a_0^1a_0^0v_1$  y  $C'' = v_2a_1^1a_2^1ww$  son dos ciclos disjuntos de diferentes longitudes y llegamos de nuevo a una contradicción.



**Subcaso 1.4:**  $X = \emptyset$  e  $Y \neq \emptyset$ .

De manera análoga al Subcaso 1.3, tenemos que todo vértice de  $C^0$  tiene un vecino de salida en el propio  $V(C^0)$  y dos en  $V(C^1)$ , ya que el grado de salida mínimo de  $D$  es 3 y no puede tener ningún vecino de salida en  $V'$ , por ser ahora  $X' = \emptyset$ . Renombrando en caso de ser necesario, podemos asumir que  $a_0^0 \rightarrow a_0^1$ . Al tener  $a_2^0$  como mínimo dos vecinos de salida en  $V(C^1)$ , al menos uno de los vértices  $a_1^1$  y  $a_2^1$ , al que llamamos  $v$ , tiene que estar en el entorno de salida de  $a_2^0$ . En la gráfica, hemos tomado  $v = a_2^1$ . Si  $w_1$  y  $w_2$  son dos vértices distintos de  $Y$ , consideramos  $C' = w_1 a_0^0 a_0^1 w_1$  y  $C'' = w_2 a_1^0 a_2^0 v w_2$ . Encontramos así dos ciclos disjuntos  $C'$  y  $C''$  de diferentes longitudes, lo que supone una contradicción.



Hemos llegado a contradicción en todos los subcasos posibles, así pues el Caso 1 no puede darse.

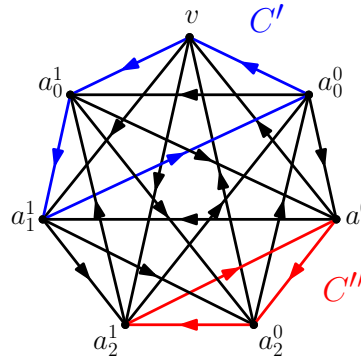
**Caso 2:**  $|V| = 7$ .

Entonces  $V' = \{v\}$ . Por las Afirmaciones 1 y 2, y renombrando los ciclos  $C^0$  y  $C^1$  si fuese necesario, podemos asumir que  $C^0 \rightarrow v$  y  $v \rightarrow C^1$ . Al ser el grado de salida mínimo de  $D$  igual a 3, todo vértice de  $C^0$  tiene al menos un vértice de su respectivo entorno de salida en  $V(C^1)$  y cada vértice de  $C^1$  tiene al menos dos elementos de su entorno de salida en  $V(C^0)$ . Se tiene entonces que cada vértice de  $C^0$  tiene exactamente un único vecino de salida en  $V(C^1)$  y que cada vértice de  $C^1$  tiene exactamente dos elementos de su entorno de salida en  $V(C^0)$ , ya que hay solo 9 aristas entre vértices de  $V(C^0)$  y  $V(C^1)$ . Así tenemos que  $D$  es 3-regular.

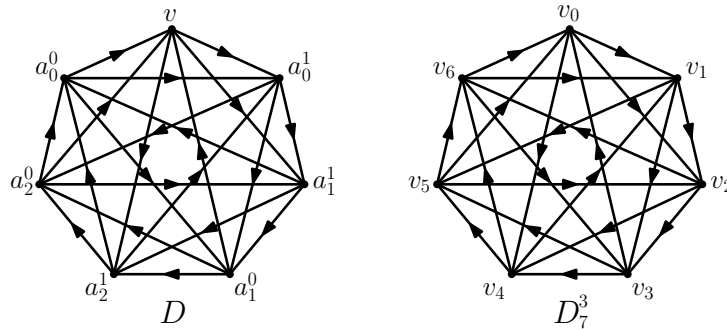
Renombrando los vértices de  $V(C^1)$ , si fuese necesario, podemos asumir que  $a_0^0 \rightarrow a_0^1$ . En este caso,  $a_1^0$  y  $a_2^0$  han de pertenecer al entorno de salida de  $a_0^1$ . Por tanto, tanto el vecino de salida de  $a_1^0$  en  $V(C^1)$  como el de  $a_2^0$  están en  $\{a_1^1, a_2^1\}$ .

Supongamos que  $a_1^0 \rightarrow a_1^1$ . Tenemos que  $a_0^0$  y  $a_2^0$  han de pertenecer al entorno de salida de  $a_1^1$ . Se sigue de ello que  $a_2^0 \rightarrow a_2^1$  y por tanto,  $a_0^0$

y  $a_1^0$  han de pertenecer al entorno de salida de  $a_2^1$ . Sean  $C' = va_0^1a_1^0a_0^0v$  y  $C'' = a_1^0a_2^0a_2^1a_1^0$ , son dos ciclos disjuntos y de diferentes longitudes en  $D$ , lo que supone una contradicción.



Así,  $a_1^1$  no puede ser vecino de salida de  $a_1^0$ , luego  $a_2^1$  ha de pertenecer al entorno de salida de  $a_1^0$  en  $V(C^1)$ . Por tanto,  $a_0^0$  y  $a_2^0$  están en el entorno de salida de  $a_2^1$  en  $V(C^0)$ . Esto implica que  $a_1^1$  ha de ser el vecino de salida de  $a_2^0$  en  $V(C^1)$  y, además,  $a_0^0$  y  $a_1^0$  son los vecinos de salida de  $a_1^1$  en  $V(C^0)$ . Sea ahora  $\varphi$  la aplicación de  $V(D)$  a  $V(D_7^3)$  definida por:  $\varphi(v) = v_0$ ,  $\varphi(a_0^0) = v_6$ ,  $\varphi(a_1^0) = v_3$ ,  $\varphi(a_2^0) = v_5$ ,  $\varphi(a_0^1) = v_1$ ,  $\varphi(a_1^1) = v_2$ ,  $\varphi(a_2^1) = v_4$ . Apoyándonos en la siguiente figura, está claro que  $\varphi$  es un isomorfismo entre  $D$  y  $D_7^3$ .



Luego el Teorema 4.2 queda demostrado. □

Al probar este teorema, hemos encontrado no solo la clasificación que buscábamos para los torneos fuertemente conexos con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos, sino que hemos llegado a un resultado aún más fuerte pues podemos identificar todo torneo fuerte con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos con el propio  $D_7^3$ .

Ya habríamos probado, en este trabajo, la existencia de digrafos bipartitos con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes, refutando, por tanto, la Conjetura de Henning y Yeo, obteniendo una clasificación para torneos bipartitos fuertes con grado de salida mínimo igual a 3 y sin ciclos disjuntos de diferentes longitudes. Este último resultado complementa esta clasificación con una caracterización en el caso de los torneos.





# Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer, New York, 2001.
- [2] Y. Gao and D. Ma, *Disjoint cycles with different length in 4-arc-dominated digraphs*, Oper. Res. Lett., **41**(6) (2013), 650–653.
- [3] M. A. Henning and A. Yeo, *Vertex disjoint cycles of different length in digraphs*, SIAM J. Discrete Math., **26**(1) (2012), 687–694.
- [4] N. Lichiardopol, *Proof of a conjecture of Henning and Yeo on vertex-disjoint directed cycles*, SIAM J. Discrete Math., **28**(3) (2014), 1618–1627.
- [5] J.W. Moon, *Topics on Tournaments*, University of Alberta, 1968.
- [6] N.D. Tan, *Tournaments and Bipartite Tournaments without Vertex Disjoint Cycles of Different Lengths*, SIAM J. Discrete Math. **35**(1) (2021), 485–494.
- [7] N. D. Tan, *Vertex disjoint cycles of different lengths in  $d$ -arc-dominated digraphs*, Oper. Res. Lett., **42**(5) (2014), 351–354.
- [8] N. D. Tan, *A decomposition for digraphs with minimum outdegree 3 having no vertex disjoint cycles of different lengths*, Discuss. Math. Graph Theory, **43**(2) (2023), 573–581.
- [9] C. Thomassen, *Disjoint cycles in digraphs*, Combinatorica, **3** (1983), 393–396.