

Trabajo Fin de Grado



# **El análisis de Carleson de una función (musical)**

Ana Nehrhoff Melero





## **El análisis de Carleson de una función (musical)**

Ana Nehrhoff Melero

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutor:

Prof. Guillermo Curbera Costello



# Índice general

<b>1. Abstract</b>	<b>1</b>
<b>2. Resumen</b>	<b>3</b>
Resumen	4
<b>3. Conceptos básicos</b>	<b>5</b>
3.1. Operador maximal de Hardy-Littlewood y teorema de diferenciabilidad	5
3.2. Interpolación . . . . .	9
3.3. Series de Fourier y Lema de Riemann-Lebesgue . . . . .	12
<b>4. Transformadas de Fourier y Hilbert y algunos teoremas de convergencia</b>	<b>15</b>
4.1. Definiciones y primeros resultados . . . . .	15
<b>5. Conjuntos de Carleson</b>	<b>19</b>
5.1. Integral de Carleson y normas locales . . . . .	19
5.2. Particiones diádicas . . . . .	24
<b>6. Acotaciones</b>	<b>29</b>
6.1. Definiciones . . . . .	29

## II EL ANÁLISIS DE CARLESON DE UNA FUNCIÓN (MUSICAL)

6.2. Breve introducción a la descomposición de la integral de Carleson . . .	30
6.3. El primer término . . . . .	31
6.4. Método de obtención de los conjuntos $\beta$ . . . . .	32
6.5. El segundo término . . . . .	34
6.6. El tercer término . . . . .	34
<b>7. La descomposición básica</b>	<b>39</b>
7.1. Primera versión de la descomposición básica . . . . .	39
7.2. Elección de la partición $\Pi_\alpha$ . Norma $\ f\ _\alpha$ . . . . .	41
7.3. Segunda versión de la descomposición básica . . . . .	43
<b>8. Desigualdades maximales</b>	<b>47</b>
8.1. Desigualdad maximal para $\Delta_\xi(x)$ . . . . .	47
8.2. Desigualdad maximal para $\mathcal{H}_I^* f$ . . . . .	50
<b>9. Crecimiento de las sumas parciales</b>	<b>53</b>
9.1. Introducción . . . . .	53
9.2. Truco del 7 . . . . .	54
9.3. El conjunto excepcional . . . . .	55
9.4. Acotación de las sumas parciales . . . . .	58
<b>10. Análisis de Carleson de una función</b>	<b>63</b>
10.1. Introducción . . . . .	63
10.2. Interludio musical . . . . .	64
10.3. Las notas de $f$ . . . . .	67
10.4. El conjunto $X$ . . . . .	69

10.5. El conjunto S . . . . . 71



# 1 | Abstract

This work is based in Juan Arias de Reyna's work entitled *Pointwise convergence of Fourier Series*, where he analyses Carleson's proof of the Luzin's Conjecture, which asserts that every function  $f$  in  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$  has an almost everywhere convergent Fourier series.

During the first part of the 20th century, some tools were created to try to proof Luzin's conjecture. Another tools that were developed at the same time partially owe their success to this conjecture, like Lebesgue's measure theory. Despite all the attempts for proving the conjecture, the general feeling was that it wasn't true. For example, Kolmogorov gave, in 1923, a function in  $\mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$  whose Fourier series diverges almost everywhere. Later in time, he was able to prove that this Fourier series diverged everywhere. A. P. Calderon was the one who proved, in 1959, that if the Fourier series of every function in  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$  converges almost everywhere, then

$$\mu \left\{ \sup_n |S_n f(x)| > y \right\} \leq C \frac{\|f\|_2}{y^2}.$$

It was at this point where the belief in Luzin's conjecture was lost. Then Carleson, in 1966, surprisingly managed to prove the conjecture, even though his first attempt aimed at finding a counterexample. Some years later, Hunt generalized Carleson's proof to functions in  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ , for  $1 < p \leq \infty$ . Nowadays, we know this result as the Carleson-Hunt theorem.

In this work we will analyse chapters 1 to 7 from Arias de Reyna's work. In these chapters we'll study some of the tools used in Carleson's proof. Our work will conclude once we see the similitude, pointed out by Arias de Reyna, between the analysis of a function in Carleson's style and the structure of a musical composition.



## 2 | Resumen

Este trabajo se basa en su totalidad en el trabajo escrito por el profesor Juan Arias de Reyna titulado *Pointwise Convergence of Fourier Series*. A lo largo de este trabajo, Arias de Reyna realiza una explicación detallada y muy precisa de la demostración que realizó Carleson para probar la conjetura de Luzin formulada en 1913: toda función  $f$  de  $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$  posee un desarrollo de Fourier que es convergente en casi todo punto.

A lo largo del siglo XX, gran parte de la comunidad matemática trabajaba para poder dar un resultado sobre la convergencia de las series de Fourier. Por ejemplo, la teoría de la medida de Lebesgue tuvo un gran éxito gracias a su utilidad en el campo de las series de Fourier. Además, la teoría de los conjuntos encajados de Cantor debe su origen al estudio de esta convergencia.

Sin embargo fue Luzin quien en 1913, gracias a las propiedades de las transformadas de Hilbert, formuló dicha conjetura. Fueron muchos los intentos por probar errónea esta conjetura, como el de Kolmogorov quien, en 1923, dio un ejemplo de una función en  $\mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$  cuya serie de Fourier divergía en casi todo punto. Por otro lado, A.P. Calderon, en 1959, probó que si las series de Fourier de las funciones de  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$  convergen en casi todo punto, entonces

$$\mu\left\{x : \sup_n \left|S_n f(x)\right| > y\right\} \leq C \frac{\|f\|_2}{y^2}.$$

Llegados a este punto, muchos habían perdido la esperanza de que la conjetura de Luzin pudiera ser probada cierta. Fue entonces Carleson en 1966 quien la logró probar, aunque la primera intención de esta prueba fuese demostrar la falsedad de la conjetura. El siguiente año, Hunt probó la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier de toda función  $f \in \mathcal{L}^p([-\pi, \pi])$  para  $1 < p \leq \infty$ . A este resultado se le conoce como el teorema de Carleson-Hunt.

Nuestro estudio se limitará a la primera parte del trabajo, comprendido entre los capítulos 1 y 7, donde veremos y analizaremos algunas de las herramientas y procedimientos básicos para poder realizar el desarrollo la prueba del teorema de Carleson. El objetivo de este trabajo es llegar a estudiar la relación que Arias de Reyna señala entre el análisis de una función y la estructura de una composición musical. Mi interés en esta relación se debe a que a los 7 años de edad comencé mis estudios musicales de violín, llegando a cursar hasta 5º grado de enseñanzas profesionales del citado instrumento. A medida que fui ampliando mis conocimientos musicales así como matemáticos fui percatándome de que existe una relación intrínseca entre ambos campos por muy distantes que parezcan el uno del otro. Fue gracias a la música por lo que mi “intuición” matemática se fue desarrollando, incluso sin yo ser consciente de ello. Este es el motivo por el que mis estudios musicales fueron una de las razones que me motivaron a estudiar matemáticas. Varios años después y con más conocimientos de los que empecé, quería que el trabajo con el que culminan mis estudios tratase de ambas disciplinas y de alguna de las relaciones que podemos establecer entre ellas. Elegí el campo del análisis matemático ya que es el que más me atrae pero se pueden observar relaciones también en el campo del álgebra y de la física.

En lo que se refiere a notación, usaremos indistintamente las dos siguientes formas de expresar conjuntos:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > \alpha\right\} = \left\{f > \alpha\right\}.$$

[A] J. Arias de Reyna, *Pointwise Convergence of Fourier Series*, Lecture Notes in Math., **1785**, Springer, Berlin (2002).

[C] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier Series*, Acta Math, **116**, 135-137 (1966).

[L] N. Luzin, *Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, **156** 1655-1658 (1913).

## 3 | Conceptos básicos

En esta primera sección definiremos, enunciaremos y probaremos algunos conceptos y teoremas claves para el desarrollo de nuestro trabajo. En primer lugar definiremos una función muy usada en el ámbito del análisis armónico.

### 3.1 Operador maximal de Hardy-Littlewood y teorema de diferenciabilidad

**Definición 3.1.1** (Función y operador maximal de Hardy-Littlewood). *Dada una función integrable  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , se define la **función maximal de Hardy-Littlewood**  $\mathcal{M}f$  asociada a  $f$  como:*

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| dt, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1.1)$$

donde el supremo se toma sobre todas los cubos  $Q \subset \mathbb{R}^d$  de centro  $x$  y  $|Q|$  representa la medida de Lebesgue del cubo  $Q$ . El **operador maximal de Hardy-Littlewood** es aquel operador que envía la función  $f$  a  $\mathcal{M}f$ .

Vamos a probar una desigualdad llamada desigualdad débil para la función de Hardy-Littlewood, que nos será útil más adelante. Para ello debemos probar antes el siguiente lema.

**Lema 3.1.2** (Lema de recubrimiento). *Sean  $\mathbb{R}^d$  con una norma y  $c_d = 2 \cdot 3^d$ . Si  $A \subset \mathbb{R}^d$  es un conjunto no vacío de medida exterior finita y  $U$  un recubrimiento por bolas abiertas de  $A$ , entonces podemos encontrar una subfamilia finita de bolas disjuntas  $B_1, \dots, B_n$  de  $U$  tales que*

$$c_d \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \geq \mu^*(A).$$

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es medible, entonces existe  $K$  compacto en  $A$  tal que  $\mu(K) \geq \mu(A)/2$ . Como  $K$  es compacto, podemos escoger un subrecubrimiento finito de bolas abiertas  $U_1, \dots, U_m$  las cuales hemos ordenado de mayor a menor radio.

Si  $B$  es una bola, denotaremos por  $3B$  la bola con el mismo centro que  $B$  y triple radio. Elegimos los  $U_j$  disjuntos entre sí y los denotamos por  $B_j$ . Si  $x \in K$ , entonces existe un primer subíndice  $l$  tal que  $x \in U_l$ . Si este abierto es igual a algún  $B_k$ , es evidente que se tiene  $x \in 3B_k$ . Por otro lado, podría ser que  $U_l$  intersecara con algún  $B_k = U_s$ . Tomando la menor  $k$ , se tiene que  $l < s$ , pues si no habríamos tomado  $U_l$  en vez de  $B_k$  en el paso anterior. De manera que el radio de la bola  $B_k$  es siempre mayor o igual al de  $U_l$ . De aquí se sigue que  $U_l \subset 3B_k$ . Por tanto,  $K \subset \bigcup_{j=1}^n 3B_j$ .

De manera que, tomando medida

$$\frac{\mu(A)}{2} \leq \mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^n 3B_j\right) = \sum_{j=1}^n 3^d \mu(B_j).$$

En el caso en el que  $A$  no es medible, existe  $G$  abierto tal que  $A \subset G$  con  $\mu(G) < +\infty$  al que podemos aplicar el razonamiento anterior. |

**Lema 3.1.3** (Desigualdad débil de Hardy-Littlewood). *Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable, entonces  $\mathcal{M}f$  satisface, para cada  $\alpha > 0$ , la siguiente desigualdad débil*

$$\mu\left\{\mathcal{M}f(x) > \alpha\right\} \leq c_d \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

*Demostración.* Sea  $A = \{\mathcal{M}f(x) > \alpha\}$ , es abierto. Pues si  $x \in A$ , tenemos por hipótesis que todos los cubos centrados en  $x$  satisfacen  $\mathcal{M}f(x) > \alpha$ .

Vamos a realizar la prueba en el caso en el que  $A$  tiene medida finita, por lo podemos afirmar que existe un cubo abierto  $Q$  con centro en  $x$  tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| dt > \alpha. \quad (3.1.2)$$

Los cubos son bolas sobre la norma infinito en  $\mathbf{R}^d$ , de manera que podemos aplicar el Lema 3.1.2 para obtener un conjunto de cubos disjuntos  $(Q_j)_{j=1}^m$ , donde obtenemos

$$\mu(A) \leq c_d \sum_{j=1}^m \mu(Q_j).$$

Además todos y cada uno de ellos satisfacen (2.1.2) por lo que además tenemos

$$\mu(A) \leq c_d \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha} \int_{Q_j} |f(t)| dt.$$

Como son disjuntos, podemos permutar la integral con la suma para obtener

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq c_d \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \int_{Q_j} |f(t)| dt = c_d \frac{1}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^n Q_j} |f(t)| dt \\ &\leq c_d \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| dt \leq c_d \frac{1}{\alpha} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Vamos a comentar el caso en el que  $A$  no tenga medida finita. Consideraremos los conjuntos  $A_n = A \cap B_n$ , donde  $B_n$  es la bola abierta de radio  $n$  y centro 0. Entonces para cada  $x \in A_n$ , podemos afirmar que  $\mathcal{M}f(x) > \alpha$ ; de manera que podemos aplicarle exactamente el mismo razonamiento que hicimos con  $A$  a estos  $A_n$ .  $\blacksquare$

**Teorema 3.1.4** (Teorema de diferenciabilidad). *Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  una función localmente integrable. Existe un subconjunto  $Z \subset \mathbb{R}^d$  de medida nula, tal que para todo  $x \notin Z$  tenemos*

$$f(x) = \lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t) dt.$$

*Demostración.* Probar esta igualdad es equivalente a probar la siguiente:

$$\limsup_{Q \searrow x} \int_Q (f(t) - f(x)) dt = 0.$$

Como queremos probar que es nula, al tomar valor absoluto seguiremos teniendo el mismo resultado. Además, usaremos la desigualdad del módulo de la integral respecto a la integral del módulo:

$$\left| \limsup_{Q \searrow x} \int_Q (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \limsup_{Q \searrow x} \int_Q |f(t) - f(x)| dt.$$

Sea  $f$  continua, tenemos que para todo  $x$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que en un entorno de  $x$  se cumple:

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

De manera que si  $Q$  denota un cubo con lado suficientemente pequeño tendríamos:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f(x)| dt < \varepsilon.$$

De modo que todos los puntos de una función continua son de Lebesgue.

Definimos el operador

$$\Omega f(x) := \limsup_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f(x)| dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Es claro que

$$\Omega f(x) \leq \mathcal{M}f(x) + |f(x)|. \quad (3.1.3)$$

Queremos probar que  $\Omega f(x) = 0$  en casi todo. Es conocido que las funciones continuas son densas en  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ , de manera que dado  $\varepsilon_1 > 0$ , podemos encontrar  $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$  continua tal que  $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon_1$ . Aplicando la desigualdad triangular llegamos a:

$$\begin{aligned} \Omega f(x) &\leq \Omega \varphi(x) + \Omega(f - \varphi)(x) = \Omega(f - \varphi)(x) \\ &\leq \mathcal{M}(f - \varphi)(x) + |f(x) - \varphi(x)|, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado la relación (2.1.3). De manera que para cada  $\alpha > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , se tiene:

$$\left\{ \Omega f(x) > \alpha \right\} \subseteq \left\{ \mathcal{M}(f - \varphi)(x) < \frac{\alpha}{2} \right\} \cup \left\{ |f(x) - \varphi(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\}$$

Haciendo uso de la desigualdad débil de Hardy-Littlewood y de la desigualdad de Chebyshev podemos escribir:

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \Omega f(x) > \alpha\right\}\right) \leq 2c_d \frac{\|f - \varphi\|}{\alpha} + 2 \frac{\|f - \varphi\|}{\alpha} \leq c_d \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad \text{dado } \varepsilon > 0.$$

De manera que si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para todo  $\alpha > 0$ , se tiene:

$$\mu\left(\left\{\Omega f(x) > \alpha\right\}\right) \rightarrow 0.$$

De donde podemos concluir  $\Omega f(x) = 0$  e.c.t. |

## 3.2 Interpolación

Para las funciones integrables, acabamos de probar que la función maximal  $\mathcal{M}f$  satisface una desigualdad débil, si nos vamos al otro extremo, vemos que en el caso de las funciones de  $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$  es claro que se cumple:

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Siguiendo una idea de Marcinkiewicz, podemos interpolar entre estos dos casos extremos.

**Teorema 3.2.1.** *Para toda función  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ , con  $1 < p < +\infty$ , tenemos:*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq C_d \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

*Demostración.* Para todo  $\alpha > 0$ , definimos  $A = \{|f| > \alpha\}$ . Podemos descomponer  $f$  como  $f = f\chi_A + f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus A}$ . Entonces  $\mathcal{M}f \leq \alpha + \mathcal{M}(f\chi_A)$ . De manera que por el Lema 3.1.3 se tiene:

$$\mu\{\mathcal{M}f > 2\alpha\} \leq \mu\{\mathcal{M}(f\chi_A) > \alpha\} \leq \frac{c_d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f|_{\chi_{\{|f|>\alpha\}}} d\mu.$$

La prueba se va a basar en un uso juicioso de la desigualdad anterior. Notemos en primer lugar que para cada  $\alpha$ , la descomposición de  $f$  será distinta.

Tenemos la siguiente cadena de desigualdades donde podremos aplicar el teorema de Fubini ya que todos y cada uno de los elementos de la integral son positivos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}f\|_p^p &= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu\{\mathcal{M}f > t\} dt \\ &\leq p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \frac{2c_d}{t} \int_{\mathbb{R}^d} |f|_{\chi_{\{|f|>t/2\}}} d\mu dt \\ &\leq 2c_d p \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \int_0^{+\infty} t^{p-2} \chi_{\{|f(x)|>t/2\}} dt dx \\ &= 2c_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(2|f(x)|)^{p-1}}{p-1} |f(x)| dx \\ &= \frac{2^p c_d p}{p-1} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

De manera que tomando  $C_d = 2^p c_d$ , obtenemos el resultado buscado. |

En el caso de las funciones definidas en  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ , solo podemos dar una desigualdad débil para  $\mathcal{M}f$ , pues esta función maximal no es integrable siempre y cuando  $\|f\|_1 > 0$ . En capítulos posteriores, necesitaremos una cota para la integral de esta función maximal sobre conjuntos de medida finita. Esta cota es una consecuencia de la desigualdad débil.

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  integrable y  $B \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible, tenemos*

$$\int_B \mathcal{M}f(x) dx \leq \mu(B) + 2c_d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx.$$

*Demostración.* Sea  $\mu_B$  la medida  $\mu_B(M) := \mu(B \cap M)$ . Por el teorema de Fubini tenemos

$$\int_B \mathcal{M}f(x) dx = \int_0^{+\infty} \mu_B\{\mathcal{M}f > t\} dt.$$

Es claro que  $\mu_B\{\mathcal{M}f > t\} \leq \mu(B)$ . Usaremos esta y la desigualdad del Lema 3.1.2.

La clave de la prueba es el uso adecuado de la desigualdad débil. Para todo  $\alpha$  tenemos  $f = f\chi_A + f\chi_{\mathbb{R}^d \setminus A}$ , siendo  $A = \{f > \alpha\}$ . De manera que  $\mathcal{M}f \leq \alpha + \mathcal{M}(f\chi_A)$ , y

$$\{\mathcal{M}f > 2\alpha\} \subset \{\mathcal{M}(f\chi_A) > \alpha\}.$$

De esto se sigue

$$\mu\{\mathcal{M}f > 2\alpha\} \leq \frac{c_d}{\alpha} \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)| dx.$$

Tomando  $t = 2\alpha$ , e integrando en ambos lados de la desigualdad respecto  $t$  llegamos a:

$$\begin{aligned} \int_B \mathcal{M}f(x) dx &= \int_0^{1/2} \mu_B\{\mathcal{M}f > t\} dt + \int_{1/2}^{\infty} \mu_B\{\mathcal{M}f > t\} dt \\ &\leq \mu(B) + 2 \int_1^{\infty} \mu_B\{\mathcal{M}f > 2t\} dt \\ &\leq \mu(B) + 2 \int_1^{\infty} \frac{c_d}{t} \left( \int_{\{|f|>t\}} |f(x)| dx \right) dt. \end{aligned}$$

Donde también hemos tenido en cuenta el hecho de que  $\mu_B\{\mathcal{M}f(x) > t\} \leq \mu(B)$ .

Y finalmente, aplicando el teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_B \mathcal{M}f(x) dx &\leq \mu(B) + 2c_d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \int_{\{|f|>t\}} \frac{1}{t} dt \\ &\leq \mu(B) + 2c_d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx. \end{aligned}$$

I

La función maximal de Hardy-Littlewood puede ser muy útil para probar varios teoremas de convergencia puntual. Su utilidad reside en la siguiente desigualdad.

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , una función positiva, radial, decreciente e integrable. Entonces para toda  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$  y  $x \in \mathbb{R}^d$  se tiene*

$$|\varphi * f(x)| \leq C_d \|\varphi\|_1 \mathcal{M}f(x),$$

donde  $\varphi * f$  es la convolución de  $\varphi$  y  $f$  y  $C_d$  es una constante que depende únicamente de la dimensión, e igual a 1 en el caso  $d = 1$ .

*Demostración.* Recordemos en primer lugar que las funciones radiales son aquellas en las que el valor de esta depende única y exclusivamente de la distancia entre el punto en el que la estemos evaluando y el origen.

Al ser  $\varphi$  una función radial, existe una función  $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(x) = u(|x|)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Además decimos que  $\varphi$  es decreciente siempre y cuando  $u(|x|)$  lo sea.

La función  $u$  es medible, por lo que existe una sucesión creciente de funciones simples  $(u_n)$  tal que  $u_n(t)$  converge a  $u(t)$  para cada  $t \geq 0$ . Como en este caso  $u$  es decreciente, podemos elegir cada  $u_n$  como

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^N h_j \chi_{[0, t_j]}(t),$$

donde  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ ,  $h_j > 0$  y donde el natural  $N$  depende exclusivamente de  $n$ .

Una vez hechas estas elecciones la prueba es directa. Sea  $\varphi_n(x) = u_n(|x|)$ . Gracias al teorema de la convergencia monótona tenemos

$$|\varphi * f(x)| \leq \varphi * |f|(x) = \lim_n \varphi_n * |f|(x).$$

De manera que se puede comprobar que se cumple

$$\varphi_n * |f|(x) = \sum_{j=1}^N h_j \int_{B(x,t_j)} |f(x)| dy.$$

Podemos reemplazar las bolas  $B(x, t_j)$  por los cubos  $Q$  con centro en  $x$  y de lado  $2t_j$ . La diferencia en el volumen del cubo y de las bolas está acotada por una constante. Por lo que finalmente

$$\varphi_n * |f|(x) \leq \sum_{j=1}^N h_j \mu(Q(x_j, t_j)) \cdot \mathcal{M}f(x) \leq C_d \|\varphi\|_1 \mathcal{M}f(x).$$

|

### 3.3 Series de Fourier y Lema de Riemann-Lebesgue

Nuestro trabajo se va a basar en una herramienta utilizada en la demostración de Carleson para la conjetura de Luzin sobre la convergencia de la series de Fourier por lo que vamos a recordar algunas definiciones.

**Definición 3.3.1** (Serie y coeficientes de Fourier). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función  $2\pi$ -periódica integrable en  $[-\pi, \pi]$ . La serie de Fourier de  $f$  es:*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-ijt},$$

donde los  $a_j$  son los coeficientes de Fourier de la función dados por:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt} dt, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Un resultado de interés sobre las series de Fourier es el lema de Riemann-Lebesgue cuyo enunciado podemos interpretar como que los coeficientes de Fourier de una función continua tienden a 0 en el infinito.

**Teorema 3.3.2** (Lema de Riemann-Lebesgue). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periódica e integrable en  $[-\pi, \pi]$  entonces:*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

*Demostración.* Como las funciones continuas en  $[-\pi, \pi]$  son densas en  $\mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ , para toda  $f$  en  $\mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ , y todo  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $g$  continua tal que:

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Entonces, para dicha  $g$ , existe  $p$  polinomio trigonométrico tal que:

$$\|g - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Veamos que de igual manera podemos encontrar un polinomio trigonométrico cerca de  $f$ :

$$\|f - p\|_1 = \|f - g + g - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 < \varepsilon + \|g - p\|_\infty < 2\varepsilon,$$

donde en la penúltima desigualdad simplemente hemos mayorado  $\|\cdot\|_1$  por la  $\|\cdot\|_\infty$ .

Una vez visto el punto anterior, podemos escribir:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - p(t)) e^{int} dt,$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado que  $|n| > n_0$ . Por otro lado, pues  $|n| > \text{gr}(p(t))$ , tenemos  $p(t) e^{int} = 0$  por ortogonalidad de los polinomios trigonométricos.

Finalmente, tomando módulo:

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)| dt = \|f - p\|_1 < 2\varepsilon.$$

De donde  $|\hat{f}(n)| < 2\varepsilon$  y, por tanto:  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$ . |

Para estudiar la convergencia puntual de las series de Fourier trabajaremos con las sumas paricales

$$S_n(f, x) := \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ijx},$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , donde cada uno de los coeficientes tiene una expresión integral de la que podemos acabar desarrollando:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt, \quad (3.3.1)$$

siendo

$$D_n(t) := \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \quad (3.3.2)$$

el llamado **núcleo de Dirichlet**.

Otro resultado que merece la pena mencionar es el Principio de localización de Riemann que afirma que la convergencia puntual de las series de Fourier hacia una función depende únicamente de los valores de la función en un entorno del punto. De esta manera podemos sugerir que el comportamiento de las series de Fourier es una propiedad local de las funciones al igual que lo son la continuidad o diferenciabilidad.

**Teorema 3.3.3** (Principio de localización de Riemann). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , integrable y periódica de periodo  $2\pi$  tal que  $f(x) = 0$  para  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  y algún  $\delta > 0$ , entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x_0) = 0.$$

*Demostración.* A partir de la expresión (2.3.2) podemos escribir:

$$S_n(f, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| < \pi} \frac{f(x_0 - t)}{2 \sin t/2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt.$$

La función  $\sin(t/2)$  es continua y no nula en  $\delta \leq |t| < \pi$ . Además,  $f(x_0 - t)$ , es integrable por lo que podemos definir:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 - t)}{\sin t/2}, & \text{si } \delta \leq |t| < \pi, \\ 0, & \text{si } |t| < \delta \end{cases}$$

la cual es claramente integrable y, gracias al Lema de Riemann-Lebesgue, Teorema 3.3.2 tenemos que  $S_n f(x_0) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . |

# 4 | Transformadas de Fourier y Hilbert y algunos teoremas de convergencia

## 4.1 Definiciones y primeros resultados

En este capítulo vamos a empezar a trabajar con las conocidas transformadas de Fourier y de Hilbert junto con algunas de sus propiedades. En particular, la segunda de estas tiene vital importancia para el desarrollo de la prueba de Carleson.

**Definición 4.1.1** (Transformada de Fourier). *Para toda  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  integrable, definimos su transformada de Fourier como:*

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.1.1)$$

**Definición 4.1.2** (Transformada de Hilbert). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  integrable, definimos su transformada de Hilbert como:*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1.2)$$

*siendo v.p. el Valor Principal de Cauchy.*

Como  $f$  es integrable y  $|e^{-2\pi itx}| = 1$ , la transformada de Fourier está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, en el caso de la transformada de Hilbert, su existencia requiere una prueba.

Sea  $K_\varepsilon$  la función que vale  $1/t$  para todo  $|t| > \varepsilon$  y 0 en el caso contrario. Esta función está en  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  para todo  $1 < p \leq +\infty$ , además la convolución está definida

para toda función  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  con  $1 < p < +\infty$ . De esta manera  $K_\varepsilon * f$  es una función continua y acotada con la que vamos a definir

$$\mathcal{H}_\varepsilon f(x) = K_\varepsilon * f(x) = \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $\varphi$  una función infinitas veces derivable con soporte compacto. Para todo  $1 < p < +\infty$ , el límite*

$$\mathcal{H}\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon \varphi$$

*existe en  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ . Además para todo  $x$ , existe el límite*

$$\mathcal{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon \varphi(x).$$

*Demostración.* Sea que  $0 < \delta < \varepsilon$

$$\mathcal{H}_\varepsilon \varphi(x) - \mathcal{H}_\delta \varphi(x) = \int_{\delta < |t| < \varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(x-t) dt = \int_{\delta < |t| < \varepsilon} \frac{1}{t} (\varphi(x-t) - \varphi(x)) dt,$$

de manera que

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon \varphi - \mathcal{H}_\delta \varphi\|_p \leq \int_{\delta < |t| < \varepsilon} \frac{1}{t} \|\varphi(\cdot - t) - \varphi(\cdot)\|_p dt.$$

Las hipótesis sobre  $\varphi$  implican que  $\|\varphi(\cdot - t) - \varphi(\cdot)\|_p \leq C|t|$ . De donde se sigue que:

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon \varphi - \mathcal{H}_\delta \varphi\|_p \leq C(\varepsilon - \delta)$$

Podemos ver  $\mathcal{H}_\varepsilon \varphi$  como una convolución de un función de  $\mathcal{L}^1$  con otra de  $\mathcal{L}^p$  con  $p \geq 1$  de manera que es una función de  $\mathcal{L}^p$ .

Aplicando la completitud del espacio tenemos asegurada la existencia del límite.

La consecuencia de la convergencia puntual la podemos deducir de la misma manera pues  $\|\varphi(\cdot - t) - \varphi(t)\|_\infty \leq C|t|$ . |

Nos será de utilidad la siguiente desigualdad conocida como la desigualdad de Cotlar:

$$\|\mathcal{H}^* f(x)\|_p \leq Bp \|f\|_p.$$

Válida para  $p \geq 2$  y  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ , donde:

$$\mathcal{H}^* f(x) := \sup_{\varepsilon > 0} |\mathcal{H}_\varepsilon^* f(x)|$$

es la **transformada maximal de Hilbert**. Véase la prueba en Teorema 3.7 (Cotlar's Inequality), páginas 40, 41, [A].

Vamos a enunciar un teorema que aunque no probaremos nos será útil para demostrar el que viene a continuación de este.

**Teorema 4.1.4.** *Para toda  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  y  $\alpha > 0$*

$$\mu\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{H}^* f(x) > \alpha\} \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha},$$

donde  $C$  es una constante positiva. Por lo que para toda  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$

$$\|\mathcal{H}^* f\|_p \leq B \frac{p^2}{p-1} \|f\|_p, \quad 1 < p < +\infty.$$

La demostración de este teorema se encuentra realizada en el trabajo de [A] en la página 43 de la Sección 3.6 *Maximal Hilbert transform*.

**Teorema 4.1.5** (Convergencia puntual de la transformada de Hilbert). *Para toda  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  con  $1 \leq p \leq +\infty$ ,*

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f(x), \quad e.c.t \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Esta prueba es muy parecida a la prueba del teorema de diferenciabilidad vista en la Sección 3.1.

Sea

$$\Omega f(x) = \left| \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f(x) - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f(x) \right|.$$

Tenemos que probar que  $\Omega f(x) = 0$  e.c.t.

Para toda función infinitamente derivable de soporte compacto  $\varphi$ , es claro que  $\Omega f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Además, tenemos que

$$\Omega f(x) \leq 2\mathcal{H}_\varepsilon f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De lo que seguimos:

$$\mu\{\Omega f > \alpha\} = \mu\{\Omega(f - \varphi) > \alpha\} \leq \mu\{\mathcal{H}^*(f - \varphi)\} > \frac{\alpha}{2}.$$

**18** EL ANÁLISIS DE CARLESON DE UNA FUNCIÓN (MUSICAL)

De manera que aplicando el Teorema 4.1.4 podemos concluir:

$$\mu\{\Omega f > \alpha\} \leq \left( \frac{C\|f - \varphi\|_p}{\alpha} \right)^p.$$

Gracias a densidad de las funciones suaves en  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ , se tiene que  $\forall \alpha > 0$ :

$$\mu\{\Omega f > \alpha\} = 0.$$

De modo que  $\Omega f(x) = 0$  e.c.t. Tal y como queríamos probar. |

# 5 | Conjuntos de Carleson

A continuación vamos a definir algunos conceptos sobre los cuales trabajaremos en profundidad en los siguientes capítulos. Estos conceptos son de vital importancia ya que el centro de nuestro trabajo consiste en encontrar el mejor método para acotar y trabajar con las conocidas como integrales de Carleson.

## 5.1 Integral de Carleson y normas locales

**Definición 5.1.1** (Operador maximal de Carleson). *Dada  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  integrable, definimos la función maximal de Carleson como:*

$$C^* f(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt \right|. \quad (5.1.1)$$

*El operador maximal de Carleson es aquel que a cada  $f$  le asocia  $C^* f$ . Además, a la integral de la definición:*

$$v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt, \quad (5.1.2)$$

*se la conoce como **integral de Carleson**.*

Tanto el operador como la integral que acabamos de definir tienen vital importancia en la prueba de la conjetura de Luzin. Como consecuencia de esto, una parte de gran interés en el desarrollo del trabajo es conseguir acotar las integrales de Carleson.

La idea principal para acotar las integrales de Carleson es descomponer el intervalo  $I = [-\pi, \pi]$  en subintervalos. El principal de ellos será  $I(x)$ , donde  $x$  pertenece a

$I(x)/2$ , siendo este el intervalo con centro igual al de  $I(x)$  y de mitad amplitud. Al dividir nuestra integral en varias gracias a esta descomposición, conseguiremos llegar a que el valor de la expresión dependa fundamentalmente de la integral realizada sobre  $I(x)$ . Mientras que las demás, las cuales realizaremos en conjuntos que denominaremos  $J$ , seremos capaces de acotarlas.

De esta manera podemos escribir:

$$v.p. \int_I \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt = v.p. \int_{I(x)} \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt + \sum_J \int_J \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt.$$

La primera integral tiene una expresión similar a la integral de Carleson. Por otro lado, el segundo sumando de nuestra expresión puede ser fácilmente acotado, pues como  $x \notin J$ , las integrales no requieren el valor principal. Veamos:

$$\int_J \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt = \int_J \frac{e^{in(x-t)} f(t) - M}{x-t} dt + \int_J \frac{M}{x-t} dt,$$

donde  $M$  es el valor medio de  $e^{in(x-t)} f(t)$  en  $J$ . Teniendo en cuenta el hecho de que la integral de  $e^{in(x-t)} f(t) - M$  en  $J$  es nula, podemos escribir:

$$\int_J \frac{e^{in(x-t)} f(t) - M}{x-t} dt = \int_J \left\{ e^{in(x-t)} f(t) - M \right\} \left( \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-t_j} \right) dt,$$

siendo  $t_j$  el centro del intervalo  $J$ . Estos últimos términos pueden ser fácilmente acotados por las normas locales de  $f$  en  $J$ , que veremos más adelante.

Repitiendo este proceso, podemos ir descomponiendo cada vez más el intervalo  $I(x)$  hasta encontrarnos con una transformada de Hilbert, la cual es mucho más fácil de estimar.

Veamos cómo vamos a elegir las particiones de dicho intervalo  $I$ .

La clave de la demostración de Carleson está basada en una nueva forma de estimar las sumas parciales de las series de Fourier. En capítulos anteriores las definimos con el conocido como núcleo de Dirichlet. A partir de este momento, vamos a sustituir la integral del núcleo por la siguiente integral de Carleson:

$$C_{(n,I)} f(x) = v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt,$$

con  $I = [-\pi, \pi]$ .

Tomemos  $\Pi$  una partición del intervalo  $I = [-\pi, \pi]$ , podemos escribir la integral anterior como:

$$\begin{aligned} C_{(n,I)}f(x) = & v.p. \int_{I(x)} \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} f(t) dt + \sum_{J \in \Pi, J \ni I(x)} \int_J \frac{E_{\Pi}f(t)}{x-t} dt \\ & + \sum_{J \in \Pi, J \ni I(x)} \int_J \frac{e^{in(x-t)} f(t) - E_{\Pi}f(t)}{x-t} dt, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

donde  $I(x)$  conteniendo a  $x$ , es una unión de varios elementos de nuestra partición  $\Pi$  y  $E_{\Pi}f$  es la valor esperado de  $e^{in(x-t)} f(t)$  respecto de  $\Pi$ .

La importancia de esta descomposición reside en elegir adecuadamente el intervalo  $I(x)$  y la partición  $\Pi$  para poder tener las dos últimas sumas acotadas. Es necesario la utilización de normas locales, que definiremos más adelante, para poder acotar eficientemente los últimos términos.

**Definición 5.1.2.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado y  $n \in \mathbb{Z}$ . Para toda  $f$  integrable en  $I$ , definimos:

$$v.p. \int_I \frac{e^{2\pi in(x-t)/|I|}}{x-t} f(t) dt. \quad (5.1.4)$$

Si  $x$  pertenece al intervalo  $I/2$  con el mismo centro que  $I$  y de mitad amplitud, decimos que la expresión (5.1.4) corresponde a una **integral de Carleson**.

El conjunto de los pares:  $\mathcal{P} = \{(n, I) : n \in \mathbb{Z}, I \text{ un intervalo acotado de } \mathbb{R}\}$ , va a ser de suma importancia a partir de este momento pues nos ayudará a dar una notación conveniente. Llamaremos a los elementos de  $\mathcal{P}$  por letras griegas, i.e.,  $\alpha = (n, I)$ , donde denotaremos  $I$  como  $I(\alpha)$  y  $n$  por  $n(\alpha)$  y, además llamaremos longitud de  $\alpha$  a  $|I| = |I(\alpha)|$  que denotaremos como  $|\alpha|$ .

Esto nos permitirá escribir:

$$C_{\alpha}f(x) = v.p.. \int_{I(\alpha)} \frac{e^{2\pi in(\alpha)(x-t)/|\alpha|}}{x-t} f(t) dt.$$

Una vez definido esto podemos acotar nuestra integral. Expondremos la demostración para ir cogiendo soltura con las integrales de Carleson.

**Proposición 5.1.3.** Existe una constante  $A > 0$ , tal que si  $x \in I(\gamma)/2$ , para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$|C_{\gamma}(e^{i\lambda t})(x)| \leq A.$$

*Demostración.* Fijando  $\lambda(\gamma) := 2\pi n(\gamma)/|\gamma|$

$$C_\gamma(e^{i\lambda t})(x) = v.p. \int_I \frac{e^{i\lambda(\gamma)(x-t)}}{x-t} e^{i\lambda t} dt.$$

De manera que, si definimos  $w = \lambda(\gamma) - \lambda$  :

$$|C_\gamma(e^{i\lambda t})(x)| = \left| v.p. \int_I \frac{e^{iw(x-t)}}{x-t} dt \right|.$$

A continuación, haremos un cambio de variables  $u = x - t$ , podemos notar:

$$|C_\lambda(e^{i\lambda t})(x)| = \left| v.p. \int_{-a}^b \frac{e^{iwu}}{u} du \right|.$$

Como  $x \in I(\gamma)/2$ , denotando  $J = [-a, b]$ , tenemos que  $0 \in J/2$ . O, equivalentemente,  $1/3 < b/a < 3$ . Por lo que:

$$|C_\gamma(e^{i\lambda t})(x)| = \left| v.p. \int_{-a}^a \frac{e^{iwt}}{u} du + \int_a^b \frac{e^{iwu}}{u} du \right| \leq \left| \int_{-a}^a \frac{\sin(wu)}{u} du \right| + \log 3.$$

Donde, además

$$\left| \int_{-x}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right|$$

está acotada, de modo que ya lo tenemos probado. |

El prodecimiento que buscamos comprender en este capítulo es cómo ir reduciendo las integrales de Carleson en otras de la misma especie solo que más simples. Para ello necesitaremos asociar normas locales a los elementos  $\alpha$  definidos en  $\mathcal{P}$ .

En primer lugar, nos interesa definir una clase de funciones que denotaremos como  $e_\alpha$ . Dichas funciones están definidas para cada  $\alpha \in \mathcal{P}$ , son además funciones de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  cuyo soporte es  $I(\alpha)$ . Su expresión es la que sigue:

$$e_\alpha = \exp\left(2\pi i \frac{n(\alpha)}{|\alpha|} x\right) \chi_{I(\alpha)}(x) = e^{i\lambda(\alpha)x} \chi_{I(\alpha)}(x),$$

donde hemos denotado  $\lambda(\alpha) = 2\pi n(\alpha)/|I(\alpha)|$ .

Estas funciones forman una base ortonormal en nuestro intervalo  $I$ . De manera que es bastante natural buscar una expresión para cualquier función  $f$ , definida en  $I$ ,

en base a estas  $e(\alpha)$ . Dicha serie será además convergente en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Así podemos escribir:

$$f = \sum_{I(\alpha)=I} \frac{\langle f, e_\alpha \rangle}{|\alpha|} e_\alpha.$$

Donde desarrollando la expresión del primer término del sumatorio, podemos definir una norma local para  $f$ .

**Definición 5.1.4.** Sea  $f$  una función con soporte en el intervalo  $I$ , definimos la norma local de  $f$  en función de  $\alpha$  como:

$$\|f\|_\alpha = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{c}{1+j^2} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) \exp \left( -2\pi i \left( n(\alpha) + \frac{j}{3} \right) \frac{t}{|I|} \right) dt \right|,$$

siendo  $c$  una constante tal que  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{c}{1+j^2} = 1$ .

A continuación daremos algunos resultados sobre acotaciones que nos ayudarán a comprender mejor cuáles son los valores estimados para esta nueva norma local que acabamos de definir.

**Proposición 5.1.5.** Sea  $\varphi$  una función con segunda derivada continua en  $[a, b]$  y  $\delta = b - a$ . Para todo  $x$  en el intervalo, podemos expresar:

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp \left( 2\pi i \frac{n x}{3 \delta} \right),$$

donde los coeficientes  $c_n$  satisfacen  $(1 + n^2)|c_n| \leq A(\|\varphi\|_\infty + \delta^2 \|\varphi''\|_\infty)$ .

Esta proposición nos será útil para la prueba del siguiente resultado de acotación (véase, Proposición 4.2, página 54, [A]).

**Teorema 5.1.6.** Sea  $f$  una función integrable en  $I$ ,  $\varphi$  una función con segunda derivada continua en el mismo intervalo y  $\alpha = (n, I) \in \mathcal{P}$ . Para alguna constante  $B$ , se tiene:

$$\left| \frac{1}{|\alpha|} \int_I e^{2\pi i n(x-t)/|\alpha|} f(t) \varphi(t) dt \right| \leq B(\|\varphi\|_\infty + |\alpha|^2 \|\varphi''\|_\infty) \|f\|_\alpha.$$

*Demostración.* Aplicando la Proposición 5.1.5 a  $\varphi$ , tenemos:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\alpha} \int_I e^{2\pi i n(x-t)/|\alpha|} f(t) \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j| \left| \frac{1}{|\alpha|} \int_I f(t) \exp \left( -2\pi i \left( n - \frac{j}{3} \right) \frac{t}{|\alpha|} \right) dt \right| \\ & \leq B(\|\varphi\|_\infty + |\alpha|^2 \|\varphi''\|_\infty) \|f\|_\alpha. \end{aligned}$$

Es conveniente dar algunas cotas de  $\|f\|_\alpha$  para cuando  $f$  sea una función exponencial.

**Proposición 5.1.7.** *Existe una constante  $C$  tal que para toda  $w \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathcal{P}$ , se tiene:*

$$\|e^{2\pi i w x}\|_\alpha \leq 1, \text{ y } \|e^{2\pi i w x}\|_\alpha \leq \frac{C}{|[w/\alpha] - n(\alpha)|}.$$

La prueba de esta proposición para la primera desigualdad es clara como consecuencia de que  $|e^{2\pi i w x}| = 1$  y considerando  $\|f\|_\alpha$  como el valor medio de las integrales que lo definen. Para la segunda igualdad basta con calcular dichas integrales y acotarlas (véase, Proposición 4.4, página 55, de [A]).

Podemos, además, estimar una cota inferior para el caso de las exponenciales (véase Proposición 4.5, página 56, de [A]).

**Proposición 5.1.8.** *Existe una constante  $B > 0$  tal que, para todo intervalo  $K$  y para toda  $w \in \mathbb{R}$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que para  $\kappa = (k, K)$ , se tiene:*

$$\|e^{2\pi i w x}\|_\kappa \leq B.$$

Podemos tomar  $\kappa = [|w|K]$ .

Una vez que conocemos mejor el funcionamiento de nuestra norma local, siendo  $\alpha = (n, I)$  y  $f \in \mathcal{L}^p(I)$ , podemos deducir que se cumple:

$$\|f\|_\alpha \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(I)},$$

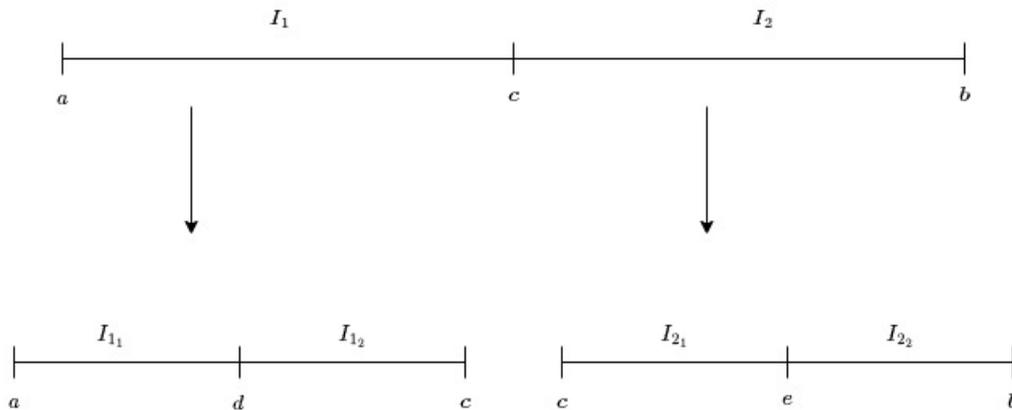
donde  $\|f\|_{\mathcal{L}^p(I)}$  denota la norma en  $\mathcal{L}^p(I)$  normalizada según la medida de Lebesgue:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(I)} = \left( \frac{1}{|I|} \int_I |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

## 5.2 Particiones diádicas

Vamos a introducir un nuevo término conocido como las **particiones diádicas**. Este método puede resultar sencillo de comprender si se está familiarizado con los conjuntos encajados de Cantor ya que guarda cierta similitud en la definición.

Dado un intervalo  $I = [a, b]$ , denominaremos  $c$  al punto medio. Es claro que  $c$  divide a  $I$  en dos subintervalos de longitud exacta  $|I|/2$ . Denotaremos dichos intervalos como  $I_0 = [a, c]$  e  $I_1 = [c, b]$ . Siguiendo esta construcción, resulta casi necesario definir  $d$  y  $e$  como los puntos medios de  $I_0$  e  $I_1$  respectivamente para poder seguir desarrollando nuestra partición.



Expresemos cómo quedaría el segundo paso de esta partición para comenzar a familiarizarnos con la notación. Tomemos el ya definido  $I_1 = [c, b]$  y su punto medio  $e$ . Análogamente, definiremos  $(I_1)_0 = I_{10} = [c, e]$  y, de manera similar,  $I_{11} = [e, b]$ .

Una vez introducidos en la materia, resultan naturales las siguientes definiciones.

**Definición 5.2.1.** Sea  $I = [a, b]$ , aplicando el procedimiento anterior, podemos definir  $I_u$ , para toda  $u$  en  $\{0, 1\}^*$  palabra (secuencia de ceros y unos). A estos intervalos  $I_u$ , los denominaremos intervalos diádicos.

Cada intervalo  $I_u$ , se dice que tiene **dos hijos**:  $I_{u0}$  e  $I_{u1}$ . De igual manera, se dice que cada uno de ellos tiene un hermano. Por ejemplo,  $I_{001}$  e  $I_{000}$ , se dice que son una pareja de hermanos. En general, podemos decir que cada intervalo diádico posee otros dos intervalos contiguos, donde cada uno de ellos es de la misma longitud y tienen en común un único punto con el intervalo tomado como el central. Uno de estos dos intervalos contiguos resulta ser siempre hermano. Por ejemplo, tomemos como intervalo de referencia el  $I_{01001}$ , los dos intervalos contiguos a él son:  $I_{01000}$  e  $I_{01010}$ , donde, en este caso, el hermano es el primero de los dos citados.

Obsérvese que tanto el procedimiento como las definiciones anteriormente expuestas, pueden ser aplicados sin ningún tipo de inconveniente a cualquier intervalo cerrado y acotado  $I$ .

Todo intervalo diádico es posible expresarlo como la unión de otros dos: sus dos hijos. De esta manera cabría preguntarse si toda unión de intervalos diádicos es un intervalo diádico.

Tomemos como contraejemplo los intervalos definidos al principio de la sección. Recordemos que  $d$  era el punto medio de  $I_0$  y  $e$  el de  $I_1$ . Así podríamos representar el intervalo  $[d, e] = [d, c] \cup [c, e] = I_{01} \cup I_{10}$ . De esta manera, hemos comprobado que para que dicha unión sea un intervalo diádico, esta debe ocurrir entre dos hermanos.

**Definición 5.2.2** (Intervalos suaves). *Llamamos intervalo suave a la unión de dos intervalos contiguos, cuya unión no resulte en un intervalo diádico.*

Gracias a esto, podemos refinar la partición con la trabajamos en la Sección 5.1 como  $\mathcal{P}_I = \{(n, J) : n \in \mathbb{Z}, J \text{ un intervalo suave con respecto a } I\}$ .

**Definición 5.2.3** (Puntos diádicos). *Los extremos de todos los intervalos de  $I$  son llamados puntos diádicos y el conjunto formado por todos ellos lo denotaremos  $D$ .*

Cabe mencionar que  $D$  es un conjunto numerable y, por tanto, de medida de Lebesgue nula.

**Proposición 5.2.4.** *Sea  $I$  dado y  $x$  en  $I/2$  tal que no es un punto diádico. Para todo  $n = 0, 1, \dots$ , existe un único intervalo suave  $I_n$  de longitud  $|I|/2^n$  tal que  $x$  pertenece a  $I_n/2$ . Además se tiene que  $I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$*

*Demostración.* Es claro que para  $n = 0$  existe un único intervalo diádico en  $I$ . Asumamos que ese intervalo diádico es  $J = I_n = [a, b]$  con  $x \in I_n/2$ . Entonces, sea  $x \in (d, e)$  tal y como en la figura 5.2. Como  $x \notin D$ , se tiene entonces que existe un único  $J_{010}, J_{011}, J_{100}, J_{101}$  conteniéndolo. En cada caso hay un único intervalo  $I_{n+1}$  que lo contenga, el cual puede ser  $[a, c], [d, e]$  o  $[c, b]$ , donde el único que no es suave de todos ellos es  $[d, e]$ . De esta manera, podemos concluir que para todo caso se tiene  $I_{n+1} \subset I_n$ . |

Esta proposición nos hace entender que para todo  $x$  en un intervalo suave,  $x$  pertenece únicamente a uno de los intervalos diádicos que forman la unión. En otras palabras, los interiores de los intervalos diádicos contiguos difieren en todos sus puntos.

Recordando el intervalo sobre el que realizamos la integral de Carleson, vamos a tomar las particiones  $\Pi$  como particiones de algún intervalo suave  $J$  donde todos los elementos de  $\Pi$  sean intervalos diádicos de  $I$  con longitud menor ó igual a  $|J|/4$ .

Debido a que todos los intervalos con los que estamos trabajando son cerrados, al referirnos a particiones, sólo tendremos en consideración el interior de ellos, obviando así los extremos. De igual manera, diremos que dos elementos son disjuntos si lo son sus interiores.

Consideremos  $C_\alpha f(x)$  una integral de Carleson y  $\Pi$  una partición diádica de nuestro intervalo  $I = I(\alpha)$ , donde todo  $J$  en  $\Pi$  tiene longitud  $|J| \leq |I|/4$ , aún sin determinar. El intervalo  $I(x)$  sobre el que realizamos la primera integral en la expresión (5.1.3) será la unión de algunos elementos de  $\Pi$ , tal que  $x$  pertenezca a  $I(x)/2$ , de manera que dicha integral es similar a una de Carleson. Además debemos elegir  $I(x)$  de manera que podamos encontrar una buena cota para el resto de elementos de la descomposición. Ningún  $J$  sobre los que están definidos los sumatorios de los dos términos restantes de la descomposición contiene a  $x$ . De manera que será conveniente elegir  $I(x)$  tal que  $|x - t|$  sea del mismo orden que  $|J|$  para todo  $t$  en dichos intervalos, para así evitar la divergencia.

A lo largo de esta sección hemos ido dando pinceladas a cómo vamos a definir los elementos necesarios para calcular el valor de la integral. Todas estas restricciones podrían estar lejos de cumplirse simultáneamente, de manera que vamos a comprobar que no sea así.

**Proposición 5.2.5.** *Sea  $x$  en  $I/2$  y  $\Pi$  una partición diádica del intervalo  $I$  cuyos elementos son de longitud menor ó igual a  $|I|/4$ . Existe un intervalo suave  $I(x)$  tal que:*

- i)  $x$  pertenece a  $I(x)/2$ .*
- ii)  $|I(x)| \leq |I|/2$ .*
- iii)  $I(x)$  es la unión de algunos elementos de  $\Pi$ .*
- iv) Alguno de los dos hijos de  $I(x)$  es un elemento de  $\Pi$ .*
- v) Para todo  $J$  en  $\Pi$  tal que  $J \not\subset I(x)$ , se tiene  $d(x, J) \geq |J|/2$ .*
- vi) Todo intervalo suave  $J$  con  $I(x) \subset J \subset I$  y  $x \in J/2$ , es una unión de elementos de la partición  $\Pi$ .*

*Demostración.* Sea el intervalo suave  $J \cup J'$ , la unión de un intervalo  $J \in \Pi$  y otro contiguo a él  $J'$ , tal que  $x \in (J \cup J')/2$ . Podemos tomar por ejemplo  $x \in J = J_0 \in \Pi$  y  $J'_0$  tal que  $J \cup J'$  satisfaga estas condiciones. Sea a continuación  $I(x)$  un intervalo verificando que  $J \cup J'$  es de máxima longitud.

Los apartados *i)* y *iv)* se tienen por construcción y el apartado *ii)* por el hecho de que todo  $J \in \Pi$  tiene longitud  $|J|/4$ . Los apartados restantes los probaremos usando reducción al absurdo. Veamos el apartado *iii)*:

Sea pues  $I(x) = J \cup J'$  con  $J \in \Pi$  y siendo ambos intervalos diádicos. La intersección de dos intervalos diádicos es ó bien un conjunto de medida nula ó el menor de ellos en caso de que se tenga la contención. Como  $J'$  no es unión de intervalos de  $\Pi$ , podemos encontrar un elemento  $H$  en  $\Pi$  tal que  $J' \subset H$ . A su vez, como  $H$  y  $J$  sí están en la partición, deben ser disjuntos. Sea entonces  $H'$  un intervalo diádico de la misma longitud que  $H$  y que contiene a  $J$ . Como  $J$  y  $J'$  son contiguos,  $H$  y  $H'$  también deben serlo.

A continuación podemos tomar  $K = H \cup H'$  satisfaciendo  $x \in K/2$  y, además  $|K| > |I(x)|$ , lo que contradice que  $I(x)$  sea la unión de mayor longitud.

*v)* Sea  $J \in \Pi$  tal que  $J \cap I(x)$  es de medida nula. Si  $d(x, J) < |J|/2$ , existe un intervalo  $J'$  contiguo a  $J$  conteniendo a  $x$ , por lo que  $x \in (J \cup J')/2$ . Implicando así que  $I(x) \supset J \cup J'$ , siendo de esta manera imposible que  $J \not\subset I(x)$ .

*vi)* Sea  $J$  un intervalo suave y llamemos  $K$  a uno de los hijos de  $J$ . Como ya hemos visto en un apartado anterior: dos intervalos diádicos son disjuntos ó bien uno de ellos está contenido en el otro. Al ser  $K$  diádico, lo podemos escribir como la unión de unos ciertos intervalos  $L$  en nuestra partición  $\Pi$  tal que  $L \subset K$ , ó bien existe  $L \in \Pi$  tal que  $L \supseteq K$ . Esta segunda consideración es imposible, ya que como  $x \in J/2$ , tendríamos:

$$d(x, L) \leq d(x, K) \leq |K|/2 \leq \frac{1}{4}|L|.$$

De esta manera podemos deducir que existe  $L'$  contiguo a  $L$  tal que  $x \in (L \cup L')/2$ . Además,  $|L \cup L'| > 2|K| \geq |I(x)|$ , donde de nuevo contradiría con que  $I(x)$  es el intervalo de máxima longitud obtenido a través de esa construcción.  $\blacksquare$

La condición *iv)* implica que todo intervalo  $J \in \Pi$  tal que  $x \in J \not\subset I(x)$  está contenido en un intervalo al que llamaremos de *seguridad*  $J'$  de longitud  $2|J|$  tal que  $x \notin J$ . Esto nos será útil para la cota del tercer término de la definición (5.1.3).

A continuación debemos estudiar cómo acotar los términos restantes de la descomposición de la integral antes de terminar de perfilar el procedimiento que vamos a seguir en dicha descomposición.

# 6 | Acotaciones

## 6.1 Definiciones

Una vez seleccionado el intervalo  $I(x)$  de manera adecuada, los dos últimos términos de la descomposición (5.1.3) podrán ser acotados usando dos nuevas funciones de las cuales una de ellas es una modificación de otra ya definida en un capítulo previo.

**Definición 6.1.1** (Transformada maximal diádica de Hilbert). *Dada  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  integrable. Definimos la transformada maximal diádica de Hilbert en  $I$  como:*

$$H_I^* f(x) := \sup_K \left| v.p. \int_K \frac{f(t)}{x-t} dt \right| \quad x \in I,$$

donde el supremo se toma sobre los intervalos  $K = J \cup J'$ , que son la unión de dos intervalos diádicos contiguos tal que  $x \in K/2$ .

Queda por definir la segunda función a la que necesitaremos recurrir.

**Definición 6.1.2.** *Sea  $\Pi$  una partición finita del intervalo  $I$  formada por intervalos  $J_k$  de longitud  $\delta_k$  y centro  $t_k$ , definimos:*

$$\Delta(\Pi, x) := \sum_k \frac{\delta_k^2}{(x - t_k)^2 + \delta_k^2}.$$

Una vez definidas ambas funciones cabe notar que en próximos razonamientos un par  $\alpha = (n, I)$  determinará de forma uniequívoca una partición  $\Pi_\alpha$  del intervalo  $I(\alpha)$ . De esta manera denotaremos  $\Delta_\alpha(x)$  a la función  $\Delta(\Pi_\alpha, x)$ . De igual manera ocurrirá con la transformada diádica de Hilbert a la que denotaremos  $H_{I(\alpha)}^* f(x)$  con lo que nos

referiremos a  $H_{I(\alpha)}^* E_\alpha f(x)$ , donde la función  $E_\alpha f(x)$  se refiere a la esperanza de la función  $e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t)$  con respecto a la partición  $\Pi_\alpha$

$$E_\alpha f(x) = \frac{1}{|J|} \int_J e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) dt, \quad x \in J \in \Pi.$$

## 6.2 Breve introducción a la descomposición de la integral de Carleson

A continuación analizaremos todos los términos de la descomposición (5.1.3) para así poder elegir la partición  $\Pi_\alpha$  de la manera más adecuada.

En la descomposición de la integral de Carleson, quedan otras tres integrales resultantes donde cada una de ellas está asociada a una partición diádica  $\Pi$  del intervalo  $I = I(\alpha)$ . Asumamos que la medida de todo intervalo  $J$  perteneciente a la partición es menor ó igual a  $\frac{|I|}{4}$ . Gracias a dicha elección, la Proposición 5.1.8, nos proporciona un intervalo  $I(x)$  tal que  $x \in I(x)$ , donde la descomposición viene dada por:

$$\begin{aligned} C_\alpha f(x) &= v.p. \int_I \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)}}{x-t} f(t) dt \\ &= v.p. \int_{I(x)} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)}}{x-t} f(t) dt \\ &\quad + \int_{I \setminus I(x)} \frac{E_\alpha f(t)}{x-t} dt + \int_{I \setminus I(x)} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) - E_\alpha f(t)}{x-t} dt \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

El siguiente paso será transformar el primer término en otra integral de Carleson más sencilla que la inicial y acotar los últimos dos términos mediante las funciones  $H_\alpha f(x)$  y  $\Delta_\alpha(x) = \Delta(\Pi_\alpha, x)$ .

Nuestro siguiente objetivo es intentar acotar las integrales de Carleson, donde tomaremos  $|C_\alpha f(x)| = +\infty$  en caso de que el valor principal de la integral no esté definido.

### 6.3 El primer término

La primera integral de la expresión (6.2.1) es bastante parecida a una integral de Carleson. Necesitamos tomar  $\beta = (m, I(x)) \in \mathcal{P}$  tal que la diferencia entre este término y la integral  $C_\beta f(x)$  sea pequeña. Escribamos ambos términos para apreciar las diferencias:

$$v.p. \int_{I(x)} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)}}{x-t} f(t) dt, \quad v.p. \int_{I(x)} \frac{e^{i\lambda(\beta)(x-t)}}{x-t} f(t) dt.$$

Es evidente que ambos términos serían iguales si  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$ , lo que quiere decir:

$$2\pi \frac{n}{|I|} = 2\pi \frac{m}{|I(x)|}. \quad (6.3.1)$$

Pero generalmente no es posible escoger  $m \in \mathbb{Z}$  cumpliendo (6.3.1), así pues tomamos  $m$  de la forma:

$$m = \left[ n \frac{|I(x)|}{|I|} \right].$$

Una vez que se ha elegido  $\beta = (m, I(x))$  de manera conveniente, nos ocupa acotar la diferencia entre el primer término de la expresión (6.2.1) y la integral de Carleson  $C_\beta f(x)$ . Para hacer esta cota necesitamos cambiar la frecuencia de una integral de Carleson para lo que nos hará falta usar la siguiente proposición.

**Proposición 6.3.1** (Cambio de frecuencia). *Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos pares tal que  $I(\alpha) = I(\beta) = J$  y  $x \in J/2$ . Si  $|n(\alpha) - n(\beta)| \leq M$ , para  $M > 1$ , entonces:*

$$|C_\beta f(x) - C_\alpha f(x)| \leq BM^3 \|f\|_\alpha, \quad (6.3.2)$$

donde  $B$  es una consante absoluta.

*Demostración.* Es claro que:

$$|C_\beta - C_\alpha| = \left| \int_J \frac{e^{i(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))(x-t)} - 1}{x-t} e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) dt \right|.$$

Sea  $\lambda(\beta) - \lambda(\alpha) = L$ ; entonces:

$$|C_\beta f(x) - C_\alpha f(x)| = |L| |\alpha| \left| \frac{1}{|J|} \int_J \frac{e^{iL(x-t)} - 1}{|L|(x-t)} e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) dt \right|.$$

La función  $(e^{it} - 1)/t$  está definida en  $\mathbb{R}$  donde, además, es infinitas veces derivable, por lo que es fácil comprobar que si  $\varphi(t) = (e^{iL(x-t)} - 1)/L(x-t)$ , se tiene:

$$\|\varphi\|_\infty + |\alpha|^2 \|\varphi''\|_\infty \leq C(1 + L^2|\alpha|^2).$$

Como  $|L||\alpha| = 2\pi|n(\beta) - n(\alpha)|$ , gracias a la Proposición 5.1.5 que trata de normas locales, podemos concluir:

$$\begin{aligned} |C_\beta f(x) - C_\alpha f(x)| & \leq C|L||\alpha|(1 + |L|^2|\alpha|^2)\|f\|_\alpha \\ & \leq BM^3\|f\|_\alpha. \end{aligned}$$

□

Aplicando este resultado a nuestro caso, se sigue:

$$\left| v.p. \int_{I(x)} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)}}{x-t} f(t) dt - C_\beta f(x) \right| \leq C\|f\|_\beta. \quad (6.3.3)$$

## 6.4 Método de obtención de los conjuntos $\beta$

Una vez llegados a este punto, hemos conseguido relacionar el primer término de la descomposición con una nueva integral de Carleson. Debemos ahora encontrar un  $\beta$  adecuado partiendo de  $\alpha$  e  $I(x)$ . Para ello introduciremos un nuevo concepto al que denotaremos por  $\alpha/J$ .

Dado  $\alpha \in \mathcal{P}$  y un intervalo  $J \subset I(\alpha)$ , definimos  $\alpha/J \in \mathcal{P}$  como:

$$\alpha/J = (m, J), \quad \text{donde} \quad m = \left\lceil n(\alpha) \frac{|J|}{|\alpha|} \right\rceil.$$

**Elegimos  $\alpha/J$  de tal manera que  $e_{\alpha/J}$  represente la misma nota musical que  $e_\alpha$  solo que de duración  $J$ , con la exactitud con la que esto sea posible. Recordemos cómo eran las funciones  $e_\alpha$  y por qué esta elección tiene sentido:**

$$e_\alpha = e^{i\lambda(\alpha)x} \chi_{I(\alpha)}(x).$$

Esta función tiene la estructura de una onda, por lo que necesitamos un intervalo temporal, en este caso  $I(\alpha)$ . Su frecuencia angular viene dada por  $\lambda(\alpha) = 2\pi n(\alpha)/|I(\alpha)|$ ,

el número  $|\alpha| = |I(\alpha)|$  es la duración de la misma y por último el coeficiente  $n(\alpha)$  es el número total de ciclos, donde con ciclos nos referimos al tiempo transcurrido para que el estado de la onda, o algunas de sus magnitudes vuelvan a la situación inicial. De esta manera resulta un poco más claro el símil previamente realizado con una nota musical, pues todas y cada una de ellas vienen determinadas por una onda de determinadas características concretas.

Una vez tenidas en cuenta estas aclaraciones, es fácil observar que por definición:

$$0 \leq (\lambda(\alpha) - \lambda(\alpha/J))|J| < 2\pi.$$

Asumiendo todo lo anterior, sean  $\alpha$  y  $\beta \in \mathcal{P}$  tales que  $I(\beta) \subset I(\alpha)$ , definimos:

$$\alpha/\beta = \alpha/I(\beta).$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\lambda(\alpha)}{2\pi}|\beta| = n(\alpha)\frac{|\beta|}{|\alpha|},$$

se tiene la siguiente relación:

$$\frac{\lambda(\alpha)}{2\pi}|\beta| = n(\alpha/\beta) + h,$$

con  $h$  cumpliendo  $0 \leq h < 1$ .

Dado  $I(\alpha) \supset J \supset K$ , todos intervalos suaves, se puede verificar que se tiene:

$$\alpha/K = (\alpha/J)/K,$$

pues es claro que al ser intervalos suaves, todos ellos contienen particiones diádicas que, además, pertenecen todas al menor de ellos. Esto permite que sea equivalente restringir el primer intervalo con el último a relizar un paso intermedio y realizar primero una restricción de  $I(\alpha)$  sobre  $J$ .

De hecho, haciendo uso de las relaciones anteriores podemos ver fácilmente que:

$$n(\alpha/K) = \left[ n \frac{|K|}{|\alpha|} \right],$$

$$n((\alpha/J)/K) = \left[ n(\alpha/J) \frac{|K|}{|J|} \right] = \left[ n \frac{|J|}{|\alpha|} \frac{|K|}{|J|} \right].$$

De manera que, gracias a estas observaciones, podemos aplicar la Proposición 5.1.7, situada en el Capítulo 5, la cual nos asegura la existencia de una constante absoluta  $B > 0$  tal que para todo  $K \subset I(\delta)$

$$\|e^{i\lambda(\delta)t}\|_{\delta/K} \geq B, \quad \text{para todo } K \subset I(\delta).$$

## 6.5 El segundo término

Es fácil reducir este término a otros dos con la forma de la transformada maximal diádica de Hilbert

$$\int_{I \setminus I(x)} \frac{E_\alpha f(t)}{x-t} dt = v.p. \int_I \frac{E_\alpha f(t)}{x-t} dt - v.p. \int_{I(x)} \frac{E_\alpha f(t)}{x-t} dt.$$

De esta manera llegamos a

$$\left| \int_{I \setminus I(x)} \frac{E_\alpha f(t)}{x-t} dt \right| \leq 2\mathcal{H}_\alpha^* f(x). \quad (6.5.1)$$

## 6.6 El tercer término

Para esta última cota, vamos a aprovechar el hecho de que todas las integrales tienen un numerador que tiende a cero en cada  $J \in \Pi$  para así poder tratar la singularidad de primer orden encontrada en el denominador por otra de segundo orden con la cual es más sencillo trabajar.

Recordemos que la Proposición 5.2.5, nos aseguraba que  $I \setminus I(x)$  es la unión de algunos conjuntos de nuestra partición. De esta manera podemos reescribir la tercera integral como:

$$\int_{I \setminus I(x)} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) - E_\alpha f(t)}{x-t} dt = \sum_{J_k} \int_{J_k} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) - E_\alpha f(t)}{x-t} dt,$$

donde hemos tomado todos los  $J_k \in \Pi$  disjuntos. Llamemos  $t_k$  al centro de cada uno de los  $J_k$ . Así tenemos:

$$\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-t_k} = \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)}.$$

Una vez encontrada esta relación vamos a sustituir el término  $\frac{1}{x-t}$  de la integral por  $\frac{1}{x-t}(x-t)(x-t_k) - \frac{1}{x-t_k}$ . Como la integral del numerador es nula en todos los  $J_k$ , vamos a expresarla como:

$$\begin{aligned} \int_{I \setminus I(x)} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) - E_\alpha f(t)}{x-t} dt &= \sum_{J_k} \int_{J_k} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)} e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) dt \\ &\quad - \sum_{J_k} \int_{J_k} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)} E_\alpha f(t) dt. \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Podemos observar que el término  $\frac{-1}{x-t_k}$  no se encuentra en la integral anterior. Esto se debe a que, al ser  $t_k$  el centro de todos los intervalos  $J_k$ , la integral sobre ese término se anula en todos y cada uno de esos intervalos.

Nuestra intención es reescribir este último término de la integral de Carleson original como una función  $\Delta_\alpha(x)$ . Para ello empezamos trabajando con el último elemento de la expresión anterior.

Recordemos que gracias a la Proposición 5.2.5 tenemos que  $d(x, J_k) \geq |J|/2$ . Por simplicidad de notación, llamemos  $\delta_k = |J_k|$ . De manera que, dado  $t \in J_k$  y reescribiendo la condición anterior  $\delta_k \leq |x - t_k|$ , llegamos a:

$$\begin{aligned} |(x-t)(x-t_k)| &\geq |x-t_k|^2 - \frac{\delta_k}{2}|x-t_k| \\ &\geq \frac{1}{2}|x-t_k|^2 \geq \frac{1}{4}|x-t_k|^2 + \frac{1}{4}\delta_k^2. \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

Al tomar inverso en la cadena de desigualdades, podemos escribir:

$$\frac{1}{|(x-t)(x-t_k)|} \leq \frac{4}{|x-t_k|^2\delta_k^2} \leq \frac{2}{|x-t_k|^2\delta_k^2}.$$

Tenemos por definición que  $E_\alpha f$  es constante en todo  $J_k$ . De manera que:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{J_k} \int_{J_k} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)} E_\alpha f(t) dt \right| &\leq 2 \sum_{J_k} \text{abs} E_\alpha f(t_k) \int_{J_k} \frac{\delta_k}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2} dt \\ &= 2 \sum_{J_k} \frac{\delta_k^2}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2} |E_\alpha f(t_k)|. \end{aligned}$$

En esta sucesión de desigualdades hemos usado el hecho de que la distancia de cualquier punto del intervalo al centro de este, es siempre menor o igual que la longitud total del intervalo en sí.

Es claro que todos los términos de la función  $\Delta(\Pi, x)$  son positivos por lo que podemos concluir:

$$\left| \sum_{J_k} \int_{J_k} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)} E_\alpha f(t_k) \right| \leq 2 \sum_{J_k \in \Pi} \frac{\delta_k^2}{(x-t_k)^2 + \delta_k^2} |E_\alpha f(t_k)|. \quad (6.6.3)$$

Donde ahora hemos pasado a sumar sobre todos los  $J_k$  de la partición.

Como es natural, el siguiente paso a enfrentar es la cota del primer elemento del segundo término de la igualdad (6.6.1): este procedimiento necesitará del uso del Teorema 5.1.6, al igual que hicimos en la Sección 6.4.

Llamemos  $\beta_k = \alpha/J_k$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{J_k} \int_{J_k} \frac{t - t_k}{(x - t)(x - t_k)} e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) dt \\ = \sum_{J_k} \frac{1}{|J_k|} \int_{J_k} \left\{ \frac{|J_k|(x - t_k)}{(x - t)(x - t_k)} e^{i(\lambda(\alpha) - \lambda(\beta_k))(x-t)} \right\} e^{i\lambda(\beta_k)(x-t)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Hemos reescrito la integral de esta forma para que sea más sencillo acotar la exponencial, ya que uno de los términos exponenciales tenderá a 1 y solo será necesario acotar en el que se encuentra  $\lambda(\beta_k)$  que, por definición ya tenemos que es menor que  $\lambda(\alpha)$ .

Haciendo uso de la cadena de desigualdades de la expresión (6.6.2) junto con el ya citado Teorema 5.1.6 aplicado a cada una de las integrales, podemos afirmar:

$$\left\| \frac{|J_k|(x - t_k)}{(x - t)(x - t_k)} e^{i(\lambda(\alpha) - \lambda(\beta_k))(x-t)} \right\|_{\infty} \leq \frac{\delta_k^2}{(x - t_k)^2 + \delta_k^2}.$$

Al igual que con el primer término acotado en la Sección, hemos tenido en cuenta el hecho de que la distancia entre cualquier punto de un intervalo y su centro es siempre menor ó igual a la longitud del intervalo. Se puede observar que desaparece el término exponencial. Esto se debe a que el exponente es un número exclusivamente imaginario de manera que al tomar módulo es 1.

Cabe mencionar que al hacer esta acotación, hemos tenido en cuenta únicamente el término entre corchetes de las integrales.

En la búsqueda por aplicar el Teorema 5.1.6, debemos realizar unas acotaciones. Estas cotas están expresadas de manera más extensa en el Capítulo 4, páginas 64 y 65, de [A]. Aunque no las desarrollemos, necesitamos plasmar las conclusiones finales ya que nos harán falta más adelante.

$$|E_{\alpha} f(t_k)| \leq C \|f\|_{\beta}. \tag{6.6.4}$$

$$\left| \int_{I \setminus I(x)} \frac{e^{i\lambda(\alpha)(x-t)} f(t) - E_\alpha f(t)}{x-t} dt \right| \leq D \sup_{J_k} \|f\|_{\beta_k} \Delta_\alpha(x). \quad (6.6.5)$$

Donde finalmente hemos conseguido acotar todos los términos de nuestra descomposición.



# 7 | La descomposición básica

## 7.1 Primera versión de la descomposición básica

Gracias a todo lo visto en los capítulos anteriores podemos formular de manera precisa el algoritmo que hemos de seguir para resolver la descomposición que realizamos de la integral de Carleson. Comencemos con una primera versión.

**Teorema 7.1.1.** *Sea  $C_\alpha f(x)$  una integral de Carleson y  $\Pi = \Pi_\alpha$  una partición diádica de  $I = I(\alpha)$ . Supongamos que todo  $J \in \Pi$  tiene medida menor ó igual  $|I|/4$ . Sea  $I(x)$  un intervalo satisfaciendo las propiedades de la Proposición 5.2.5 y  $\beta = \alpha/I(x)$ . Entonces:*

$$|C_\alpha f(x) - C_\beta f(x)| \leq C \|f\|_\beta + 2\mathcal{H}_\alpha^* f(x) + D \sup_{J_k} \|f\|_{\alpha/J_k} \Delta_\alpha(x), \quad (7.1.1)$$

siendo  $C$  y  $D$  dos constantes absolutas.

La prueba de este Teorema se trata en el Capítulo 10, Sección 10, páginas 113-114 de [A].

Una vez llegados a este punto, cabe hacerse las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué podemos decir que  $C_\beta$  es una integral de Carleson más simple?

En primer lugar, al pasar de  $C_\alpha$  a  $C_\beta$ , estamos reduciendo el número de ciclos  $n(\beta) \leq n(\alpha)$ . Así, podemos esperar eventualmente tener  $n(\beta) = 0$ . También podemos restringir el estudio a funciones reales ya que en ese caso se tiene:

$$C_{-\alpha} f(x) = \overline{C_\alpha f(x)}, \quad (7.1.2)$$

siendo  $\alpha = (n, I)$  y  $-\alpha = (-n, I)$  con  $n \in \mathbb{N}$ . De esta manera, podemos asumir que  $n(\alpha)$  es positivo.

Otro caso en el que solo consideramos valores positivos de  $n(\alpha)$  es el de las funciones tales que  $|f| = \chi_A$ , siendo  $A$  algún conjunto medible. En ese caso,  $\overline{f}$  es de la misma forma que  $f$  y se tiene:

$$C_{-\alpha}f(x) = \overline{C_{\alpha}f(x)}. \quad (7.1.3)$$

De momento es todo lo que podemos decir acerca de esta primera cuestión que nos hemos planteado.

2. Queremos probar que el operador maximal de Carleson de  $\mathcal{L}^p(I)$  a  $\mathcal{L}^p(I/2)$  está acotado para  $1 < p < \infty$ . Para ello se usarán teoremas de interpolación gracias a los cuales la cuestión quedará reducida a probar la siguiente desigualdad:

$$\mu\{C_I^*f(x) > y\} \leq \frac{A_p\|f\|_p^p}{y^p}.$$

Esta desigualdad se tiene gracias al teorema de Marcinkiewicz, véase Teorema 11.9, página 135, [A].

Así, dada una función  $f \in \mathcal{L}^p(I)$  e  $y > 0$ , queremos construir un conjunto  $E$  tal que  $\mu(E) < A_p\|f\|_p^p/y^p$  tal que para todo  $x \in I/2 \setminus E$  y  $\alpha \in \mathcal{P}$  con  $I(\alpha) = I$ , se tenga  $|C_{\alpha}f(x)| < y$ .

De hecho, en primer lugar, dada  $f \in \mathcal{L}^p(I)$ ,  $y > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$ , construiremos un subconjunto  $E_N$  con  $\mu(E_N) < A_p\|f\|_p^p/y^p$ ; tal que para todo  $x \in I/2 \setminus E_N$  y  $\alpha \in \mathcal{P}$  tal que  $I = I(\alpha)$  y  $0 \leq n(\alpha) \leq 2^N$ , tengamos  $|C_{\alpha}f(x)| < y$ . Entonces:

$$\{C_I^*f > y\} \subset \bigcup_N \{x \in I/2 : |C_{\alpha}f(x)| > y, 0 \leq n(\alpha) < 2^N, I(\alpha) = I\},$$

y dado que  $A_N = \{x \in I/2 : |C_{\alpha}f(x)| > y, 0 \leq n(\alpha) < 2^N, I(\alpha) = I\}$  es una secuencia de intervalos crecientes, tenemos:

$$\mu(\{C_I^*f > y\}) = \lim_N \mu(A_N) \leq A_p\|f\|_p^p/y^p.$$

3. Otra consideración importante es que debemos aplicar el proceso de descomposición básica varias veces. Por lo que, dada una integral de Carleson  $C_{\alpha}f(x)$  con  $I(\alpha) = I$ ,  $0 \leq n(\alpha) < 2^N$  y  $x \notin E_N$ , obtendremos la sucesión  $(\alpha_j)_{j=1}^s$  en  $\mathcal{P}$  con  $\alpha_1 = \alpha$ . De manera que tenemos:

$$|C_{\alpha}f(x)| \leq \sum_{j=1}^{s-1} |C_{\alpha_j}f(x) - C_{\alpha_{j+1}}f(x)| + |C_{\alpha_s}f(x)|. \quad (7.1.4)$$

Iremos aplicando la descomposición básica a cada una de las diferencias e iremos organizando para que  $n(\alpha_s) = 0$ .

## 7.2 Elección de la partición $\Pi_\alpha$ . Norma $\|f\|_\alpha$ .

A partir de este momento, vamos a considerar las integrales de Carleson  $C_\alpha$  donde  $0 \leq n(\alpha) < 2^N$  y  $J = I(\alpha)$  sin asumir que  $J = I$ . Debemos asegurarnos de tomar una buena elección de la partición para que al aplicar la que hemos llamado descomposición básica, el resultado sea similar al que hemos estudiado y no más complejo a la hora de trabajar con él.

Los intervalos de la partición serán todos diádicos respecto a  $J = I(\alpha)$ , con longitud menor a  $|J|/4$ . Nuestro objetivo es tener controlado el término  $\|f\|_{\alpha/J_k}$  de la expresión (7.1.1) para todo  $J_k \in \Pi$ . Tomemos pues  $b_j = 2 \cdot 2^{-2^j}$  y vamos a asumir que para los intervalos  $J_{00}, J_{01}, J_{10}$  y  $J_{11}$ , se tiene:

$$\|f\|_{\alpha/J_{00}}, \|f\|_{\alpha/J_{01}}, \|f\|_{\alpha/J_{10}}, \|f\|_{\alpha/J_{11}} \leq y b_{j-1}. \quad (7.2.1)$$

Vamos a obtener nuestra partición  $\Pi_\alpha$  mediante un proceso de subdivisión. Este proceso lo empezaremos partiendo de los nietos de  $J = I(\alpha)$ , cumpliendo la condición expresada en (7.2.1). En cada etapa del proceso, tomaremos un intervalo  $K$  y lo dividiremos en sus dos hijos  $K_0$  y  $K_1$ , siempre y cuando estos cumplan  $\|f\|_{\alpha/K_0}, \|f\|_{\alpha/K_1} \leq y b_{j-1}$ . Si no la cumplen, tomaremos  $K$  como uno de los intervalos de la partición. Este proceso puede llegar a resultar infinito, por lo que pararemos cuando  $|K| \leq |I|/2^N$ , y lo consideraremos un elemento de nuestra partición.

Como debemos tener en cuenta la condición (7.2.1), para cada  $\alpha = (n, \mathcal{P})$  y  $f \in \mathcal{L}^1(I)$ , definimos:

$$\|f\|_\alpha = \sup \left\{ \|f\|_{\alpha/J_{00}}, \|f\|_{\alpha/J_{01}}, \|f\|_{\alpha/J_{10}}, \|f\|_{\alpha/J_{11}} \right\}. \quad (7.2.2)$$

Conviene notar que la definición de  $I(x)$  en la Proposición 5.2.5 y esta construcción implican que o bien  $|I(x)| = 2|I|/2^N$ , o  $\|f\|_\beta \leq y b_{j-1}$ .

Gracias a esto, podemos darle otra respuesta a la primera cuestión planteada sobre la descomposición básica. Si empezamos con  $y_{b_j} \leq \|f\|_\alpha < y_{b_{j-1}}$ , llegamos a  $\|f\|_\beta < y_{b_{j-1}}$ . De manera que partiendo de un nivel  $j$ , descendemos a uno inferior. Es cierto que en el nivel inferior obtenemos mayores valores de  $\|f\|_\beta$ , pero también un menor

número de ciclos ya que recordemos que  $n(\beta) \leq n(\alpha)$ . Además modificaremos el procedimiento de manera que lleguemos a una integral de Carleson  $C_{\alpha_s} f$  con  $n(\alpha_s) = 0$ . También hemos conseguido una buena cota para las restas de las integrales de Carleson en distintos niveles en (7.1.4).

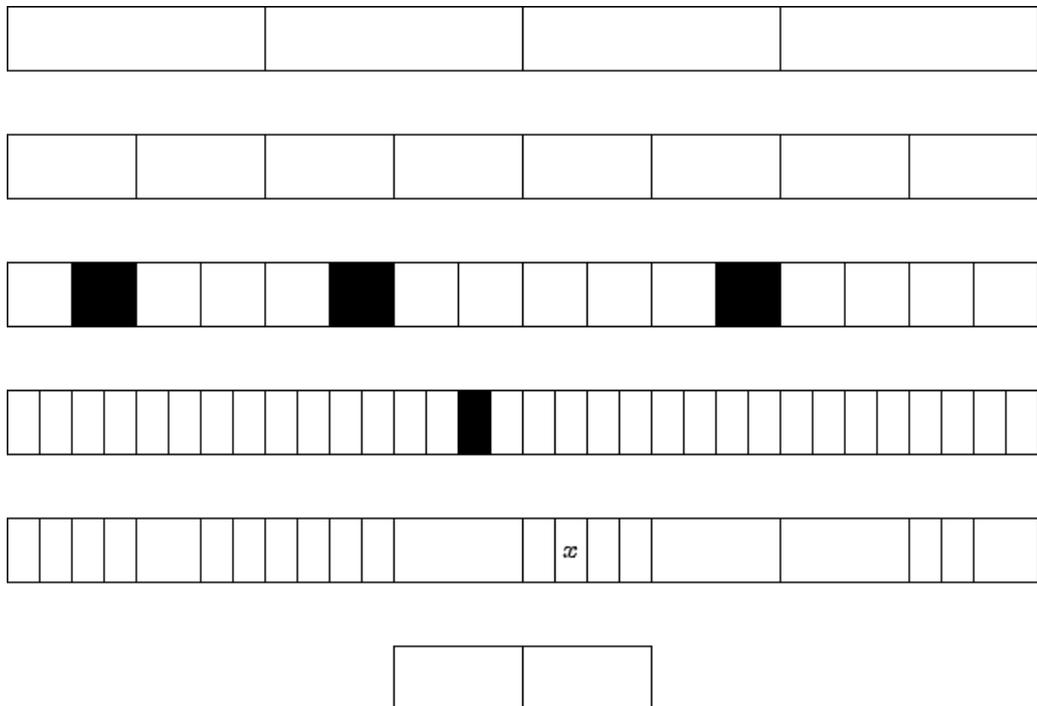
Una vez llegados a este punto y con todas las consideraciones previas, diremos que una integral de Carleson  $C_{\alpha} f(x)$  es **de nivel  $j \in \mathbb{N}$** , si:

$$yb_j \leq \|f\|_{\alpha} < yb_{j-1}.$$

Para las siguientes construcciones, supondremos dados  $f \in \mathcal{L}^1(I)$ , una integral integral de Carleson  $C_{\alpha} f(x)$ , un natural  $N$  y un número real  $y > 0$ , además de  $\alpha = (n, J)$  con  $0 \leq n < 2^N$  y  $J$  siendo la unión de dos intervalos diádicos respecto a  $I$ , teniendo longitud  $|J| > 4|I|/2^N$ . Además también asumiremos  $\|f\|_{\alpha} \leq yb_{j-1}$  para algún natural  $j$ , no necesariamente el nivel de nuestra integral de Carleson.

Nuestro objetivo es encontrar una partición  $\Pi$  de  $J$  de manera conveniente a la que podamos aplicarle el Teorema 7.1.1.

Consideremos a continuación el conjunto de los intervalos diádicos  $J_u$  con respecto a  $J$ , tales que  $|J|/4 \geq |J_u| \geq |I|/2^n$ .



Para cada uno de ellos, comprobamos si satisfacen la siguiente condición:

$$\|f\|_{\alpha/J_u} < yb_{j-1}. \quad (7.2.3)$$

Una vez comprobado lo anterior, el elemento  $J_u$  pasaría a ser un elemento de nuestra partición  $\Pi$  si es de longitud  $|J_u| = |I|/2^N$  y si todos sus antecesores y hermanos satisfacen la condición (7.2.2) pero uno de sus hijos no la satisface.

En la figura hemos representado en negro los supuestos intervalos que no satisfacen la condición (7.2.3) así como nuestra partición final  $\Pi$ , encontrada en la penúltima fila del dibujo.

Recordemos que, por la Proposición 5.2.5, el intervalo  $I(x)$  debía ser la unión de un intervalo de  $\Pi$  y otro contiguo con la misma longitud. Por lo que o bien  $|I(x)| = 2|I|/2^N$ , o bien alguno de los nietos de  $I(x)$  no satisface la condición (7.2.2).

Supongamos que  $x$  se encuentra en el intervalo  $J_{10001}$ , tal y como hemos representando en el dibujo. De esta manera, el intervalo  $I(x)$  correspondería a la última fila del esquema.

En este caso, el intervalo  $J_{10001}$  es un elemento de la partición  $\Pi$ , ya que su longitud es  $|I|/2^N$  y sus antecesores,  $J_{1000}$ ,  $J_{100}$ ,  $J_{10}$  y los hermanos de estos  $J_{1001}$ ,  $J_{101}$  y  $J_{11}$ , todos satisfacen la condición (7.2.3). También se tiene que  $J_{011}$ , pertenece a la partición pues sus hermanos satisfacen la condición (7.2.3), pero su hijo  $J_{0111}$ , no.

### 7.3 Segunda versión de la descomposición básica

Una vez seleccionada una partición adecuada para nuestro proceso, vamos a dar una versión más precisa para el primer paso de la descomposición. Para ello necesitaremos una relación entre la normas  $\|\cdot\|_{\alpha}$  y  $\|\|\cdot\|\|_{\alpha}$ .

**Proposición 7.3.1.** *Existe una constante  $C > 0$  tal que para cada función  $f \in \mathcal{L}^2(J)$  y  $\alpha = (n, J)$ :*

$$\|f\|_{\alpha} \leq C \|\|\cdot\|\|_{\alpha}.$$

*Demostración.* Sea  $|J| = \delta$ , y llamemos  $K$  a los nietos del intervalo  $J$ . Entonces:

$$\|f\|_{\alpha} = \sum_j \frac{c}{1+j^2} \left| \frac{1}{\delta} \int_J f(t) e^{-2\pi i(n+\frac{j}{3})\frac{t}{\delta}} dt \right|.$$

Sea  $\delta' = \delta/4$ . Podemos escribir:

$$\|f\|_\alpha \leq \sum_K \sum_j \frac{c}{1+j^2} \frac{1}{4\delta'} \left| \int_K f(t) e^{2\pi i \left(\frac{n}{4} + \frac{j}{12}\right) \frac{t}{\delta'}} dt \right|.$$

Escribamos  $n$  como  $n = 4m + r$ , donde  $r = 0, 1, 2, 3$ , vamos también a cambiar  $j$  por  $4j + s$ , con  $s = 0, 1, 2, 3$ . Entonces  $\|f\|_\alpha$  es igual a:

$$\sum_K \sum_s \sum_r \frac{c}{1+(4j+s)^2} \frac{1}{4\delta'} \left| \int_K f(t) e^{-2\pi i \left(m + \frac{j}{3} + \frac{r}{4} + \frac{s}{12}\right) \frac{t}{\delta'}} dt \right|.$$

Gracias a la Proposición 5.1.5, para cada  $t \in K$ , tenemos:

$$\exp \left\{ 2\pi i \left( \frac{r}{4} + \frac{s}{12} \right) \frac{t}{\delta'} \right\} = \sum_l c_l \exp \left\{ 2\pi i \frac{l}{3} \frac{t}{\delta'} \right\},$$

donde  $(1+l^2)|c_l| \leq B$ , con  $c_l$  dependiendo de  $K, r$  y  $s$ . Ahora hemos conseguido acotar  $\|f\|_\alpha$  por:

$$\begin{aligned} & \sum_K \sum_s \sum_j \frac{c}{1+(4j+s)^2} \sum_l \frac{|c_l|}{4\delta'} \left| \int_K f(t) e^{-2\pi i \left(m + \frac{j}{3} + \frac{l}{3}\right) \frac{t}{\delta'}} dt \right| \\ & \leq \sum_K \sum_s \sum_j j \sum_l \frac{C}{1+j^2} |c_l| |F(m, j+l, K)| \\ & \leq C \sum_K \sum_{j,k} \frac{1+k^2}{(1+j^2)(1+(k-j)^2)} \frac{|F(m, k, K)|}{1+k^2}. \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1+k^2}{(1+j^2)(1+(k-j)^2)} &= \left( \frac{1}{1+j^2} + \frac{1}{1+(k-j)^2} \right) \frac{1+k^2}{2+j^2+(j-k)^2} \\ &\leq 2 \left( \frac{1}{1+j^2} + \frac{1}{1+(k-j)^2} \right). \end{aligned}$$

De manera que tenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_\alpha &\leq 2C \sum_K \sum_k \left( \sum_j \frac{1}{1+j^2} + \frac{1}{1+(k-j)^2} \right) \frac{|F(m, k, K)|}{1+k^2} \\ &\leq D \sum_K \sum_k \frac{|F(m, k, K)|}{1+k^2} \\ &\leq D \sum_K \|f\|_{\alpha/K} \leq 4D \|f\|_\alpha, \end{aligned}$$

donde hemos denotado por  $F(m, k, K)$  la integral

$$F(m, k, K) = \int_K f(t) e^{-2\pi i(m+k/3)\frac{t}{\delta}} dt.$$

De la misma manera podemos probar:

$$\|f\|_\alpha \leq C \sup \left\{ \|f\|_{\alpha/J_0}, \|f\|_{\alpha/J_1} \right\} \quad (7.3.1)$$

■

Ahora tenemos todo lo necesario para poder formular la descomposición básica de una forma mucho más precisa.

**Teorema 7.3.2** (Descomposición básica). *Sea  $\xi \in \mathcal{P}_1$  y  $x \in I(\xi)/2$ , asumamos que  $\|f\|_\alpha < yb_{j-1}$ . Dado  $N \in \mathbb{N}$ , sean  $\Pi_\xi$  e  $I(x)$  las correspondientes particiones de  $I(\xi)$  el intervalo definido en la Proposición 5.2.5. Sea  $J$  un intervalo suave tal que  $I(x) \subset J \subset I(\xi)$ , y  $x \in J/2$ .*

*Supongamos que  $|\xi| \geq 4|I|/2^N$ . Entonces se tiene:*

$$\left| C_{\xi/J} f(x) - C_{\xi/I(x)} f(x) \right| \leq C y b_{j-1} + 2H_\xi^* + D y b_{j-1} \Delta_\xi(x), \quad (7.3.2)$$

donde  $C$  y  $D$  son constantes absolutas.

*Demostración.* La condición  $\xi \geq |I|/2^N$  nos asegura poder aplicar el procedimiento estudiado para obtener una partición  $\Pi_\xi$  adecuada.

Anteriormente hemos visto que la elección de  $I(x)$ , implica que  $J$  sea una unión de elementos de  $\Pi_\xi$ , y por (7.3.1),  $\|f\|_{\xi/J} \leq C y b_{j-1}$ . El mismo razonamiento implica que  $\|f\|_{\xi/I(x)} \leq C y b_{j-1}$ .

Veamos que

$$C_{\xi/J}f(x) = v.p. \int_J \frac{e^{2\pi i n(\xi/J)(x-t)/|J|}}{x-t} f(t) dt,$$

donde  $n(\xi/J) = [n(\xi)|J|/|I(\xi)|]$ . Aplicando un cambio de frecuencia, llegamos a

$$\left| C_{\xi/J}f(x) - v.p. \int_J \frac{e^{2\pi i n(\xi/J)(x-t)/|J|}}{x-t} f(t) dt, \right| \leq B \|f\|_{\xi/J} \leq C y b_{j-1}.$$

Cabe la posibilidad de que  $J \neq I(\xi)$ . En ese caso, podremos usar la partición  $\Pi_\xi$  al igual que hicimos en la descomposición básica de la integral de Carleson (5.1.3)

$$v.p. \int_J \frac{e^{2\pi i n(\xi)(x-t)/|J|}}{x-t} f(t) dt. \tag{7.3.3}$$

En ese caso la integral (7.3.3) quedaría expresada como

$$v.p. \int_{I(x)} \frac{e^{i\lambda(\xi)(x-t)}}{x-t} f(t) dt + \int_{J \setminus I(x)} \frac{E_\xi f(t)}{x-t} dt + \int_{J \setminus I(x)} \frac{e^{i\lambda(\xi)(x-t)} f(t) - E_\xi f(t)}{x-t} dt.$$

Para el primer término aplicaremos un cambio de frecuencia y, como en (6.3.3), obtenemos

$$|\text{Primer término} - C_\xi f(t)| \leq C \|f\|_{\xi/I(x)} \leq C y b_{j-1}.$$

El segundo término puede ser acotado como en (6.5.1) por

$$|\text{Segundo término}| \leq 2H_\xi^* f(x).$$

Para el tercer y último término, debemos tener en cuenta el hecho de que  $J \setminus I(x)$  puede ser escrito como la unión de varios elementos de  $\Pi_\xi$ . Una vez realizado el cambio en la escritura, procederemos de manera similar al Teorema 7.1.1 donde encontramos la primera versión de la descomposición básica. En este caso, la cota superior vendrá dada por la suma de algunos de los términos  $\Delta_\xi(x)$  en lugar de todos ellos. Dado que todos y cada uno de los elementos son positivos, la suma es menor que  $\Delta_\xi(x)$ . Finalmente obtendremos al igual que en (6.6.5) la siguiente cota

$$|\text{Tercer término}| \leq D \sup_{J_k} \|f\|_{\beta_k} \Delta_\xi(x) \leq D y b_{j-1} \Delta_\xi(x).$$

Donde finalmente hemos visto que todos y cada uno de los términos de nuestra descomposición están acotados, con lo que damos por finalizada la prueba. |

# 8 | Desigualdades maximales

En este capítulo vamos a dar dos desigualdades para acotar los términos  $\Delta_\xi(x)$  y  $\mathcal{H}_\xi^* f(x)$  usados en la descomposición básica.

## 8.1 Desigualdad maximal para $\Delta_\xi(x)$ .

**Teorema 8.1.1.** *Existen dos constantes absolutas  $A$  y  $B > 0$  tales que para toda partición finita  $\Pi$  por intervalos del intervalo  $J \subset \mathbb{R}$ , se tiene*

$$\frac{\mu\{x \in J : \Delta(\Pi, x) > y\}}{|J|} \leq A e^{-By}. \quad (8.1.1)$$

*Demostración.* Recordemos que los intervalos  $J_k$  de nuestra partición tienen centro  $t_k$  y longitud  $\delta_k$ . La función  $\Delta(\Pi, x)$  la habíamos definido en el Capítulo 6, Sección 1 como:

$$\Delta(\Pi, x) = \sum_k \frac{\delta_k^2}{(x - t_k)^2 + \delta^2}.$$

Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  una función acotada y medible. Podemos definir una función armónica sobre el semiplano superior haciendo la convolución de  $g$  con el núcleo de Poisson

$$u(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{yg(t)}{(x - t)^2 + y^2} dt = P_y * g(x).$$

De manera que tenemos

$$\int \Delta(\Pi, x)g(t) dt = \sum_k \pi \delta_k u(t_k, \delta_k) = \sum_k \pi P_{\delta_k} * g(t_k).$$

Suponiendo que  $g$  es positiva, el Lema 8.1.2, que probaremos una vez finalizada esta proposición, asegura

$$P_{\delta_k} * g(t_k) \leq \frac{2}{\delta_k} \int_{J_k} P_{\delta_k} * g(t) dt.$$

De donde podemos escribir

$$\int \Delta(\Pi, t)g(t) dt \leq 2\pi \sum_k \int_{J_k} P_{\delta_k} * g(t) dt.$$

Gracias a la desigualdad general de la función maximal de Hardy-Littlewood estudiada en el Teorema 3.2.3, tenemos  $P_{\delta_i} * g(t) \leq \mathcal{M}g(t)$ . Por lo que

$$\int \Delta(\Pi, t)g(t) dt \leq 2\pi \int_J \mathcal{M}g(t) dt.$$

A continuación, tal y como vimos en la Proposición 3.2.2, tenemos  $\int_B \mathcal{M}f(x) dx \leq \mu(B) + 2c_1 \int |f(x)| \log^+ |f(x)| dx$ ; y por consiguiente

$$\int \Delta(\Pi, t)g(t) dt \leq c|J| + c \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \log^+ |g(t)| dt.$$

Tomemos ahora  $g(t) = e^{y/2c} \chi_{\{\Delta(\Pi, t) > y\}}$  de donde obtenemos

$$\begin{aligned} ye^{y/2c} \mu\{t : \Delta(\Pi, t) > y\} &\leq \int \Delta(\Pi, t)g(t) dt \\ &\leq c|J| + ce^{y/2c} \frac{y}{2c} \mu\{t : \Delta(\Pi, t) > y\}. \end{aligned}$$

Donde finalmente podemos escribir

$$\frac{\mu\{t : \Delta(\Pi, t) > y\}}{|J|} \leq \frac{2c}{y} e^{-y/2c}.$$

Debido a que estamos tomando la partición sobre  $J$ , la medida de todos los intervalos que cumplan esa condición será siempre menor o igual a la longitud de  $J$ , con lo que el primer término se tiene que es menor o igual a 1 tal y como queríamos probar.  $\blacksquare$

**Lema 8.1.2.** Sean  $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$  una función positiva y  $u(x, y) = P_y * g(x)$ . Entonces para todo intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  con centro en  $a$  y medida  $y$ , se tiene

$$u(a, y) \leq \frac{2}{|J|} \int_J u(x, y) dx.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $a = 0$ . De manera que queremos probar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{t^2 + y^2} g(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{t^2 + y^2} g(-t) dt \\ &\leq \frac{2}{|J|} \int_J \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{t^2 + y^2} g(x - t) dt dx \\ &= \frac{2}{|J|} \int_J \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} g(-t) dt dx. \end{aligned}$$

Pero esto sigue de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} &\leq \frac{2}{|J|} \int_J \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} dx \\ &= \frac{2}{y} \int_{-y/2}^{y/2} \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} dx. \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

Recordemos que los intervalos  $J$  tenían centro 0 y radio  $y$ , y que integrar sobre el intervalo es lo mismo que hacerlo sobre los extremos que son claramente  $y/2$  y  $-y/2$ . Haciendo un cambio de variable conveniente, vemos que (8.1.2) se puede escribir como:

$$\frac{1}{u^2 + 1} \leq 2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(x + u)^2 + 1}.$$

De manera que para cada  $\xi$  tal que  $|\xi| < 1/2$ , tenemos

$$\frac{1}{u^2 + 1} \leq \frac{2}{(\xi + u)^2 + 1}.$$

I

## 8.2 Desigualdad maximal para $\mathcal{H}_I^* f$

Para probar una desigualdad para  $\mathcal{H}_I^* f$  del estilo de (8.1.1), debemos relacionarla con la transformada maximal de Hilbert habitual  $\mathcal{H}f$  y con la función maximal de Hardy-Littlewood.

**Proposición 8.2.1.** Sean  $1 \leq p < +\infty$ ,  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  e  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado. Entonces para todo  $x \in I$ , tenemos

$$\mathcal{H}_I^* f(x) \leq 2\mathcal{H}f(x) + 6\mathcal{M}f(x). \quad (8.2.1)$$

*Demostración.* Notemos que en la definición de  $\mathcal{H}_I^* f$  estamos considerando únicamente la restricción de  $f$  sobre el intervalo  $I$ .

Sean  $K \subset I$  tal que  $x \in K/2$ , y sea  $J \subset K$  un intervalo con centro  $x$  y longitud máxima, y sea  $L \supset K$  un intervalo de centro  $x$  pero de longitud mínima. Podemos escribir

$$\left| \int_K \frac{f(t)}{x-t} dt \right| \leq \left| \int_J \frac{f(t)}{x-t} dt \right| + \left| \int_{K \setminus J} \frac{f(t)}{x-t} dt \right|.$$

El primer término de la desigualdad obtenida corresponde a  $\mathcal{H}f(x) - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-t}$  de manera que es claro que está acotado por  $2\mathcal{H}f(x)$ .

Por otro lado, para acotar el segundo término veamos que si  $t \in K \setminus J$ , entonces

$$|x-t| \geq d(x, \mathbb{R} \setminus K) \geq |K|/4.$$

Teniendo en cuenta la cadena de desigualdades podemos escribir

$$\left| \int_{K \setminus J} \frac{f(t)}{x-t} dt \right| \leq \frac{4}{|K|} \int_{K \setminus J} |f(t)| dt \leq \frac{4|L|}{|K|} \frac{1}{|L|} \int_L |f(t)| dt.$$

Debido a que  $x \in K/2$  y a la definición de  $L$ , se sigue que  $|L| \leq 6|K|/4$ . De manera que hemos obtenido (8.2.1). |

**Teorema 8.2.2.** Existen constantes absolutas  $A$  y  $B$  positivas tales que para toda función  $f \in \mathcal{L}^\infty(I)$  y para todo  $y > 0$ , se tiene

$$\frac{\mu\{\mathcal{H}_I^* f > y\}}{|I|} \leq A e^{-By/\|f\|_\infty}. \quad (8.2.2)$$

*Demostración.* Por homogeneidad podemos suponer que  $\|f\|_\infty = 1$ . Consideraremos también a  $f$  como la restricción a  $I$  de una función que es cero en  $\mathbb{R} \setminus I$ .

Por la Proposición 8.2.1, como  $\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq 1$ , tenemos

$$\{\mathcal{H}_I^* f > y\} \subset \{2\mathcal{H}f(x) > y/2\},$$

si  $y > 12$ .

A continuación queremos acotar

$$\int_I e^{A\mathcal{H}f(t)} dt.$$

Ya comentamos en la Sección 3.1 que la transformada maximal de Hilbert satisface la desigualdad de Cotlar

$$\|\mathcal{H}^* f\|_p \leq Bp\|f\|_p, \quad 2 < p < +\infty.$$

De manera que

$$\int_I (e^{A\mathcal{H}f(t)} - A\mathcal{H}f(t)) dt \leq |I| + \sum_2^{+\infty} \frac{A^n}{n!} B^n n^n |I|.$$

Si tomamos  $A$  lo suficientemente pequeño, llegamos a

$$\int_I (e^{A\mathcal{H}f(t)} - A\mathcal{H}f(t)) dt \leq C|I|.$$

De donde si  $y > y_0$ , podemos afirmar

$$\frac{1}{2} e^{Ay/4} \mu\{\mathcal{H}f(x) > y\} \leq C|I|.$$

Por lo que hemos probado (8.2.2) para  $y > y_0$ . Cambiando, si es necesario, la constante  $A$ , podemos obviar la restricción sobre  $y$ . |



# 9 | Crecimiento de las sumas parciales

## 9.1 Introducción

Como un primer adelanto de que la descomposición básica es una herramienta poderosa, vamos a dar un resultado sobre las sumas parciales de la serie de Fourier de una función  $f$  en  $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ .

El primer resultado de este capítulo consistirá en demostrar que para dicha función, entonces  $S_n(f, x) = o(\log \log n)$  en casi todo. Como ya hemos podido intuir, para poder acotar las sumas parciales, necesitamos acotar la correspondiente integral de Carleson. De manera que nuestro primer objetivo es acotar  $\sup_{\alpha} \{C_{\alpha} f(x)\}$ , donde el supremo se toma sobre todos los pares  $\alpha$  con  $I(\alpha) = I$ , y  $|n(\alpha)| < \theta 2^N$ . Como hemos visto en capítulos previos, cada vez que apliquemos el proceso de descomposición básica iremos disminuyendo los valores de  $n$  y  $|\alpha|$ ; el papel que desarrolla  $\theta$  es asegurarnos que llegaremos a  $n = 0$  antes de tener  $|\alpha| < 4|I|/2^n$ . En principio tomaremos  $\theta = 1/4$ .

Vamos a considerar  $f$  una función real para poder asumir, gracias a la expresión (7.1.2),  $0 \leq n(\alpha) < 2^N$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , construiremos un conjunto  $E = \bigcup_{N=2}^{\infty} E_N \subset I$  con  $\mu(E) < A\varepsilon$ , y tal que

$$\sup_{\substack{0 \leq n(\alpha) < \theta 2^N \\ I(\alpha) = I}} |C_{\alpha} f(x)| \leq B \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\varepsilon}} \log N, \quad \text{para } x \in (I/2) \setminus E.$$

A los elementos de este conjunto los denominaremos **conjuntos excepcionales**.

Para lograrlo seguiremos el procedimiento indicado en (7.1.4). Cada elemento  $E_N$  conjunto excepcional será la unión de cuatro subconjuntos  $E_N = S \cup T_N \cup U_N \cup V$ . Los subconjuntos  $T_N$  y  $U_N$  nos permitirán acotar los términos  $H_\xi^* f$  y  $\Delta_\xi(x)$  que aparecen al aplicar la decomposición básica. La definición del conjunto  $V$  nos permitirá acotar el término final  $|C_\alpha f(x)|$  que aparece en (7.1.4) cuando  $n(\alpha_s) = 0$ . La definición de  $S$  se dará en función de que para todo  $x \in (I/2) \setminus S$ , las integrales  $C_{\alpha_j} f(x)$  que aparecen en (7.1.4) tengan nivel  $j \geq 1$ .

Vamos a definir un último subconjunto que estará formado por los pares  $(n, J)$ , donde  $0 \leq n < \theta 2^N$ , donde  $J$  es un intervalo suave respecto a  $I$  tal que  $|J| \geq 4|I|/2^N$ . Gracias a todo el estudio previo que hemos elaborado, podemos entender los elementos de este conjunto como los intervalos para los que no tenemos asegurada una buena cota de la integral de Carleson.

## 9.2 Truco del 7

En primer lugar, vamos a construir los elementos que forman el conjunto excepcional. Para ello definamos  $C$  como el conjunto de los pares  $(n, J)$  donde  $0 \leq n < \theta 2^N$  y  $J$  es un intervalo suave respecto a  $I$  verificando  $|J| \geq 4|I|/2^N$ .

Dado  $\alpha \in C$ , del hecho de que  $I(\alpha) \not\subset E_N$  nuestra intención es derivar algunas propiedades  $p$  de cada nieto  $J$  de  $I(\alpha)$ . Por lo que, para cada propiedad  $p$ , vamos a definir el conjunto

$$A = \bigcup \left\{ J : J \text{ es diádico y se cumple } p(J) \right\},$$

donde  $p(J)$  simplemente denota que el intervalo  $J$  satisface la condición  $p$ .

A continuación, dado un conjunto medible  $A$ , podemos definir otro nuevo conjunto

$$A^* = \bigcup \left\{ 7J : J \subset A \text{ es diádico} \right\},$$

donde  $7J$  denota el intervalo de longitud  $7|J|$  con el mismo centro que  $J$ . De manera que para todo  $J \subset A$ , añadimos a  $A^*$  el intervalo  $J$  y tres intervalos contiguos de la misma longitud a cada lado de este. De esta manera el subconjunto  $A^*$  satisface nuestras condiciones. De hecho, si  $I(\alpha) \not\subset A^*$  donde  $J$  sigue siendo un nieto de  $I(\alpha)$ , tendríamos que  $J \not\subset A$ . Supongamos que  $J \subset A$ . Al ser  $J$  un intervalo diádico, tendríamos pues que  $I(\alpha) \subset 7J \subset A^*$ , donde llegaríamos a una contradicción.

Es más, o todo par de intervalos diádicos es disjunto, o bien alguno de ellos está contenido en otro, y todos los intervalos diádicos recordemos que eran subintervalos de  $I$ . De esta manera podemos obtener un conjunto  $\mathcal{V}$  formados por intervalos diádicos disjuntos  $J \subset A$  tal que

$$A^* = \bigcup_{J \in \mathcal{V}} 7J.$$

De modo que

$$\mu(A^*) \leq \sum_{J \in \mathcal{V}} 7|J| \leq 7\mu(A).$$

En general podemos afirmar que si  $J$  es un intervalo suave tal que  $J \not\subset A^*$ , entonces cada nieto  $K$  de  $J$  satisface  $K \not\subset A$ .

### 9.3 El conjunto excepcional

Sea  $y > 0$ . Posteriormente, determinaremos  $y$  lo suficientemente grande para que se cumpla  $\mu(E) < A\epsilon$ .

El primer componente que vamos a estudiar del conjunto excepcional es  $S^* = \bigcup_J 7J$ , donde la unión se toma sobre todos los intervalos diádicos  $J$ , tales que

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f|^2 d\mu \geq y^2. \tag{9.3.1}$$

Hemos definido  $S^*$  de esta manera para que para cada  $\alpha \in \mathcal{P}_I$  tal que  $x \in I(\alpha)/2$ , pero  $x \notin S^*$ , tengamos  $\|f\|_\alpha \leq y$ .

De hecho, para todo nieto  $J$  de  $I(\alpha)$  se cumple la desigualdad opuesta a (9.3.1). Entonces para todo nieto tenemos  $\|f\|_{\alpha/J} < y$ , por tanto  $\|f\|_\alpha < y$ .

Como concretamos en la Sección 8.3, o bien dos intervalos diádicos son disjuntos, o bien uno está contenido en el otro. De aquí se sigue que existe una sucesión  $(J_n)$  de intervalos diádicos disjuntos, tal que todo  $J_n$  satisface (9.3.1) y todo  $J$  que satisface (9.3.1) está contenido en alguno de los  $J_n$ . De manera que

$$\mu(S^*) = \mu\left(\bigcup_n 7J_n\right) \leq 7 \sum_n \mu(J_n) \leq \frac{7}{y^2} \int_I |f|^2 d\mu \leq \frac{7}{y^2} \|f\|_2^2.$$

Tomemos ahora  $\alpha \in \mathcal{C}$  tal que  $I(\alpha) \not\subset \mathcal{S}^*$ , entonces  $\|f\|_\alpha > y$  de manera que o  $\|f\|_\alpha = 0$ , o existe  $j \in \mathcal{N}$  tal que  $yb_j \leq \|f\|_\alpha < yb_{j-1}$ . Con  $\alpha, j$  y  $N$  obtenemos una partición  $\Pi_\alpha$  de  $I(\alpha)$  tal y como vimos en la Sección 6.2. A continuación para cada  $\alpha$  definimos  $T_N(\alpha) = \emptyset$  si  $\|f\|_\alpha = 0$  o, por el contrario

$$T_N(\alpha) = \{x \in I(\alpha) : \mathcal{H}_\alpha^* f(x) > Myb_{j-1} \log(\sqrt{N}/b_j)\}, \quad (9.3.2)$$

donde  $M > 0$  e  $y > 0$  falta por determinar posteriormente. Observemos que para que la definición sea consistente se debe tener  $\sqrt{N} > b_j$ .

La norma  $\|E_\alpha f\|_\infty$  fue acotada en (6.6.4) usando las normas locales de  $f$  en cada uno de los intervalos de la partición, por lo que ya hemos conseguido  $\|E_\alpha f\|_\infty \leq C \sup_k \|f\|_{\beta_k} < Cyb_{j-1}$ . Gracias a la desigualdad maximal para la transformada diádica de Hilbert dada en el Teorema 8.2.2,

$$\mu(T_N(\alpha)) \leq A|\alpha| \exp\left(-\frac{BM}{C} \log(\sqrt{N}/b_j)\right) \leq A|\alpha| \frac{b_j^2}{N^3} \leq A|\alpha| \frac{\|f\|_\alpha^2}{y^2 N^3},$$

donde hemos tomado  $M$  de manera que  $BM/C = 6$ .

Podemos definir finalmente  $T_N$  como la unión de todos los  $T_N(\alpha)$ . Para poder acotar  $T_N$ , necesitaremos hacer uso del siguiente lema.

**Lema 9.3.1.** *Para toda función  $f \in \mathcal{L}^2(J)$*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f\|_{\alpha_n}^2 \leq 16 \left( \frac{1}{|J|} \int_J |f|^2 d\mu \right),$$

donde  $\alpha_n = (n, J)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Probemos primero la desigualdad

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f\|_{\alpha_n}^2 \leq \left( \frac{1}{|J|} \int_J |f|^2 d\mu \right).$$

Existe una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  con  $\sum_n |x_n|^2 = 1$  tal que

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f\|_{\alpha_n}^2 \right)^{1/2} = \sum_{j,n} \frac{x_n}{1+j^2} \left| \int_J f(t) \exp\left(-2\pi i \left(n + \frac{j}{3}\right) \frac{t}{|J|}\right) dt \right|.$$

Denotando como  $y_{3n+j}$  la integral de la expresión anterior, podemos escribir

$$\int_{n \in \mathbb{Z}} |y_{3n}|^2 = \int_{n \in \mathbb{Z}} |y_{3n+1}|^2 = \int_{n \in \mathbb{Z}} |y_{3n+2}|^2 = \frac{1}{|J|} \int_J |f(t)|^2 dt.$$

De donde

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f\|_{\alpha_n}^2 \right)^{1/2} &= c \sum_{j,n} \frac{x_n y_{3n+j}}{1+j^2} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(J)} \sum_j \frac{c}{1+j^2} = \|f\|_{\mathcal{L}^2(J)}. \end{aligned}$$

Por último denotemos por  $K$  a todos los niestos de  $J$  y llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f\|_{\alpha_n}^2 &\leq \sum_K \sum_n \|f\|_{([n/4], K)}^2 \\ &\leq 4 \sum_K \sum_m \|f\|_{(m, K)}^2 \leq 4 \sum_K \frac{1}{|K|} \int_K |f|^2 d\mu \\ &\leq \frac{16}{|J|} \sum_K \int_K |f|^2 d\mu \leq \frac{16}{|J|} \int_J |f|^2 d\mu. \end{aligned}$$

I

Gracias a este lema, tenemos

$$\begin{aligned} \mu(T_N) &= \sum_{\alpha=(n, J)} \mu(T_N(\alpha)) \\ &\leq \sum_J \sum_n A |J| y^{-2} N^{-3} \|f\|_{\alpha}^2 \\ &\leq 16A y^{-2} N^{-3} \sum_J \int_J \|f\|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Podemos tomar  $J$  como cualquier subintervalo suave de  $I$  cuya longitud sea  $\geq 4|I|/2^N$ . Sumamos en primer lugar los intervalos  $J$  con longitud  $|I|/2^r$  de manera que

$$\mu(T_N) \leq 16A y^{-2} N^{-3} \sum_{r=0}^{N-2} 2 \int_I |f|^2 d\mu \leq \frac{32A}{y^2 N^2} \|f\|_2^2. \quad (9.3.3)$$

De igual manera, el conjunto  $U_N$  será también la unión de los  $U_N(\alpha)$  siendo

$$U_N(\alpha) = \{x \in I(\alpha) : \Delta_\alpha(x) > (M/C) \log(\sqrt{N}/b_j)\},$$

donde  $M, C$  e  $y$  son las mismas constantes usadas en (9.3.2). En este caso gracias al Teorema 8.1.1 de la desigualdad maximal adecuado, obtenemos

$$\mu(U_N) = \sum_J \sum_n \mu(U_N(\alpha)) \leq \sum_J \sum_n A|J|y^{-2}N^{-3} \|f\|_\alpha^2.$$

Siguiendo el exacto mismo razonamiento usado para  $T_N$  tenemos la siguiente desigualdad

$$\mu(U_N) \leq \frac{32A}{y^2 N^3} \|f\|_2^2.$$

Por último, queda por definir la componente  $V$ , que será el conjunto

$$V = \{x \in I : \mathcal{H}_I^* f(x) > y\}.$$

Gracias a la relación probada en la Proposición 8.2.1 entre la transformada diádica maximal de Hilbert y la habitual transformada de Hilbert junto con la función maximal de Hardy-Littlewood, tenemos

$$\mu(V) \leq C \frac{\|f\|_2^2}{y^2}.$$

Notemos que dada  $f \in \mathcal{L}^2(I)$ ,  $N \in \mathbb{N}$  e  $y > 0$ , hemos construido un conjunto medible  $E_N = S^* \cup T_N \cup U_N \cup V \in I$  tal que para  $E = \cup_{N=2}^\infty E_N$  tenemos

$$\mu(E) = \mu(S^*) + \mu(V) + \mu(T_N \cup U_N) \leq A \frac{\|f\|_2^2}{y^2},$$

donde  $A$  denota una constante absoluta.

## 9.4 Acotación de las sumas parciales

Recordemos que al inicio del capítulo expusimos que nuestro propósito era ver que las sumas parciales de la serie de Fourier de una función son del orden del logaritmo en casi todo.

Ya hemos construido las herramientas necesaria para empezar a probar algunos resultados que nos llevarán a esa conclusión.

**Proposición 9.4.1.** Sean  $f \in \mathcal{L}^2(I)$  y  $\varepsilon > 0$  dado. Existe un conjunto  $E$  de medida  $\mu(E) \leq A\varepsilon$  tal que para todo  $N > 2$  y  $x \in (I/2) \setminus E$  se tiene

$$\sup_{0 \leq k < \theta 2^N} |C_{(k,I)} f(x)| \leq B \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\varepsilon}} (\log N). \quad (9.4.1)$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $f$  es una función real con  $\|f\|_2 > 0$ . Tomando  $y = \|f\|_2 / \sqrt{\varepsilon}$ , hemos construido en la Sección 9.3 un conjunto tal que  $\mu(E) < A\varepsilon$ .

Denominemos  $C'$  al conjunto formado por los pares  $\alpha$  tal que  $I(\alpha)$  sea un intervalo suave de longitud  $|\alpha| > 4|I|/2^N$  y además  $0 \leq n(\alpha)|I|/|\alpha| < \theta 2^N$ . Es claro que  $C'$  es un subconjunto del conjunto que definimos en la Sección 9.1, por lo que está creado de tal manera que para cada par  $\alpha = (k, I)$  con  $0 \leq k < \theta 2^N$ , y todo  $J \subset I$  intervalo suave, se tenga que  $\alpha/J \in C'$ .

Tomemos ahora  $x \in (I/2) \setminus E$ , para toda integral de Carleson  $C_\alpha f(x)$  aparecida en la expresión (9.4.1), tenemos que  $\alpha \in C'$ . Vamos a asumir así que trabajamos con una integral de Carleson tal y como acabamos de describir. Como  $x \notin S^*$ , y  $x \in (I(\alpha)/2)$ , tenemos que  $\|f\|_\alpha < y$ . Entonces existe un nivel bien definido  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $y b_j \leq \|f\|_\alpha < y b_{j-1}$ . Podría ocurrir también que  $f = 0$  en casi todo  $I/2$  por lo que no habría nada que probar.

Tenemos las hipótesis necesarias para poder aplicar el proceso estudiado en la Sección 7.2 donde obtuvimos una partición diádica  $\Pi_\alpha$  de  $I(\alpha)$  formada por intervalos  $J$  de longitud  $|I|/2^N \leq |J| \leq |I|/4$ . Gracias a esto, la Proposición 5.2.5 nos da un intervalo diádico suave  $I(x)$ . Este intervalo  $I(x)$  es la unión de un intervalo  $J_0 \in \Pi_\alpha$  junto a otro contiguo. Si  $|J_0| = |I|/2^N$ , entonces  $|I(x)| = 2|I|/2^N$ . Si no, siempre existirá un hijo  $K$  de  $J_0$ , nieto de  $I(x)$ , tal que  $|f|_{\alpha/K} \geq y b_{j-1}$ . Por lo que tenemos que o  $|I(x)| = |I|/2^N$  o  $\|f\|_{\alpha/I(x)} \geq y b_{j-1}$ .

Sea  $\beta = \alpha/I(x)$ . Vamos a probar que tenemos una buena cota para lo que denominamos el cambio de frecuencia  $|C_\alpha f(x) - C_\beta f(x)|$ . Además, o  $\beta \in C'$ , o tenemos una buena cota para  $C_\beta f(x)$ .

Veamos que cuando  $|I(x)| \leq 4|I|/2^N$ , se da que  $n(\beta) = 0$ . Recordemos que  $n(\beta)$  es un entero mayor o igual a 0, tenemos

$$n(\beta) = \left\lceil n(\alpha) \frac{|I(x)|}{\alpha} \right\rceil = \left\lceil n(\alpha) \frac{|I|}{|\alpha|} \frac{|I(x)|}{|I|} \right\rceil < \theta 2^N \frac{4}{2^N} = 1.$$

Como  $x \notin V$ , tenemos  $|C_\beta f(x)| \leq y$ , una cota lo suficientemente buena para lo que estamos buscando.

Por otro lado, cuando  $|I(x)| = |I(\beta)| > 4|I|/2^N$ , y

$$n(\beta) \frac{|I|}{|\beta|} = \left[ n(\alpha) \frac{|I(x)|}{\alpha} \right] \frac{|I|}{|\beta|} \leq n(\alpha) \frac{|I|}{|\alpha|} < \theta 2^N.$$

Por lo que  $\beta \in C'$ . Gracias a la Proposición 5.2.5,  $x \in I(\beta)/2$ , Si  $\|f\|_\beta = 0$ , tenemos que  $C_\beta f(x) = 0$ , por lo que también obtenemos una buena cota. Si no, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $yb_k \leq \|f\|_\beta < yb_{k-1}$ . La construcción de  $\Pi_\alpha$  y el hecho de que  $\|f\|_\beta \geq yb_{j-1}$ , implican que  $j > k$ .

Tomando  $J = I(\alpha)$ , la descomposición básica nos da una cota en todos y cada uno de estos casos, recordemos además que al inicio de la demostración impusimos que  $x \notin E_N$ , con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \left| C_{\xi/J} f(x) - C_{\xi/I(x)} f(x) \right| &\leq Cyb_{j-1} + 2H_\xi^* + Dyb_{j-1} \Delta_\xi(x) \\ &\leq Cyb_{j-1} + 2Myb_{j-1} \log(\sqrt{N}/b_j) \\ &\quad + Dyb_{j-1} (M/C) \log(\sqrt{N}/b_j) \\ &\leq Cyb_{j-1} \log(\sqrt{N}/b_j). \end{aligned}$$

De esta manera tenemos tres casos: o  $C_\beta f(x) = 0$ , o  $n(\beta) = 0$ , o nos encontramos en una situación en la que le podemos aplicar a  $\beta$  el mismo razonamiento que hemos seguido con  $\alpha$ . En este último caso, tenemos asegurada la existencia de un nivel  $1 \leq k < j$ , de manera que en un número finito de iteraciones, llegaríamos a que  $n(\beta) = 0$ , o bien  $C_\beta f(x) = 0$ .

Con lo que finalmente podemos concluir

$$|C_\alpha f(x)| \leq y + \sum_{j \in \mathbb{N}} Cyb_{j-1} \log(\sqrt{N}/b_j) \leq B \log(N)y.$$

□

**Proposición 9.4.2.** *Sea  $f \in \mathcal{L}^2(I)$ , entonces*

$$\sup_{0 \leq |k| < n} |C_{(k,I)} f(x)| = o(\log \log n), \quad e.c.t \quad I/2.$$

*Demostración.* Asumamos al igual que en la anterior prueba, que  $f$  es una función real. Como además tenemos por hipótesis que  $f \in \mathcal{L}^2(I)$ , sabemos que  $\|f\|_2$  está

acotada, por lo que el segundo miembro de la desigualdad (9.4.1) se puede acotar por  $C \log N$ , siendo  $C$  una constante positiva de manera que la Proposición 9.4.1 es equivalente a

$$\sup_{0 \leq k < \theta 2^N} |C_{(k,I)} f(x)| = o(\log N), \quad \text{e.c.t. } I/2. \quad (9.4.2)$$

Lo que probamos en la Proposición 9.4.1 puede ser escrito como

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{0 \leq k < \theta 2^N} |C_{(k,I)} f(x)|}{N} \leq B \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad x \notin E.$$

A continuación, necesitaremos usar el hecho de que para todo polinomio trigonométrico  $P$ , existe una constante  $C(P) < +\infty$  tal que

$$\sup_{0 \leq k < \theta 2^N} |C_{(k,I)} f(x)| \leq C(P).$$

De esta manera, existe un conjunto  $E'$ , con  $\mu(E') < A\varepsilon$ , tal que para  $x \notin E'$

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{0 \leq k < \theta 2^N} |C_{(k,I)} f(x)|}{\log N} &= \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{0 \leq k < \theta 2^N} |C_{(k,I)} (f - P)(x)|}{\log N} \\ &\leq B \frac{\|f - P\|_2}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Es conocido que los polinomios trigonométricos son densos en el espacio en el que trabajamos por lo que la podemos usar para probar que el conjunto de los puntos tales que

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{0 \leq k < \theta 2^N} |C_{(k,I)} f(x)|}{\log N} > 0$$

es de medida  $\leq A\varepsilon$ .

De donde podemos asumir que este límite tenderá a 0 e.c.t.  $I/2$ , por lo que concluimos que el supremo es del orden de  $\log(N)$ . |

**Proposición 9.4.3.** *Sea  $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ , entonces*

$$S_n(f, x) = o(\log \log n) \quad \text{e.c.t. } [-\pi, \pi].$$

*Demostración.* Las sumas parciales vienen dadas por la convolución de  $f$  con el núcleo de Dirichlet  $S_n(f, x) = D_n * f(x)$ . El núcleo de Dirichlet se puede escribir como

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin t/2} = 2 \frac{\sin nt}{t} + \cos nt + \left( \frac{1}{\tan t/2} - \frac{2}{t} \right) \sin nt.$$

Los dos últimos términos están acotados uniformemente en  $n$  y  $t$ , por lo que podemos reescribir

$$D_n(t) = 2 \frac{\sin nt}{t} + \varphi_n(t), \quad |t| < \pi. \quad (9.4.3)$$

Teniendo esto en cuenta llegamos a

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\circ(x-t) \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\circ(x-t) \varphi_n(t) dt,$$

para todo  $x$  con  $|x| < |\pi|$ , con  $\|\varphi\|_\infty < C$  uniformemente en  $n$  y donde  $f^\circ$  denota la extensión periódica de  $f$  si  $|t| < 2\pi$  y 0 en caso contrario. Además, sabemos que  $\sin t/t \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , por lo que tenemos

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n(f, x)| \leq \sup_{0 \leq |n| \leq N} |C_\alpha f^\circ(x)| + C \|f\|_2,$$

donde el supremo a la derecha de la desigualdad ha sido tomado sobre aquellos  $\alpha$  tales que  $I(\alpha) = [-\pi, \pi]$ .

Gracias a la Proposición 9.4.2, concluimos

$$\sup_{0 \leq n \leq N} S_n(f, x) = o(\log \log N).$$

|

# 10 | Análisis de Carleson de una función

## 10.1 Introducción

La prueba del teorema de Carleson vendrá dada por una prueba más refinada de las proposiciones vistas en el Capítulo 9. Si nos fijamos en las condiciones impuestas a lo largo del capítulo podemos notar que de todos los pares  $\alpha = (n, J)$  que hemos usado, tenemos al menos una parte del intervalo  $I(\alpha)$  que está contenida en el conjunto excepcional para la que no tenemos una buena cota de los segundo y tercer términos que aparecen en la descomposición básica. A raíz de esto, impusimos más condiciones sobre el intervalo  $J$  que nos forzaron a introducir un término logarítmico para compensar estas restricciones.

Es claro, gracias a las pruebas realizadas a lo largo del estudio, que no usamos todos los pares  $\alpha$ . Para ello deberemos definir un conjunto de pares permitidos, estos serán los únicos que usaremos para la prueba.

Podremos aumentar el número de pares permitidos haciendo un cambio de frecuencia para la integral de Carleson donde, en consecuencia, aparecerá un término de error que podremos controlar.

Es claro que los pares permitidos serán aquellos intervalos que aparecen como  $I(x)$  en el proceso en el que fuimos construyendo la partición ideal en la Proposición 9.4.1. En este proceso, verificamos que todos los intervalos diádicos de  $I(\alpha)$  satisfacían la condición  $\|f\|_{\alpha/J_u} < yb_{j-1}$ . Los intervalos  $I(x)$  fueron elegidos de entre todos los abuelos de estos intervalos que no satisfacían dicha condición. Recordemos que  $\|f\|_{\beta}$  lo definimos como los valores medios de los coeficientes de Fourier generalizados de  $f$  en el intervalo  $I(\beta)$ , podríamos de esta manera pensar en primer lugar que los pares

permitidos estarán relacionados con los coeficientes de Fourier.

Todo este razonamiento puede justificar el siguiente paso que realizamos en la construcción de Carleson, a este paso lo llamaremos **el análisis musical de Carleson para una función  $f$** . Este procedimiento se puede comparar con el proceso de escritura de una partitura musical.

## 10.2 Interludio musical

Cabe preguntarnos qué está ocurriendo en nuestro cerebro mientras estamos escuchando música. Podría interpretarse como que nuestra mente analiza las ondas sonoras de  $f$  para obtener las notas que la componen. En la antigüedad, la ausencia de métodos para la transcripción de partituras hacía que la conservación de las melodías a lo largo del tiempo fuera complicada. Con el paso de los años, la creación de escrituras musicales, cada vez más precisas, comenzó a ser más accesible para todos. Así se consiguió una práctica que sigue estando vigente a día de hoy, que todo músico que quiere perpetuar su obra escribe una partitura. Siendo esta partitura una cantidad substancial de todo lo que se escuchaba cuando se tocaba su pieza. A este proceso se le conoce como transcripción de oído, es un método mediante el cual la interpretación de una melodía ocurre antes que su composición, por lo que puede resultar que a la hora de transcribirla no tengamos la totalidad de notas y adornos, sino una versión, aunque algo incompleta, todavía bastante exacta de lo que acabamos de escuchar.

Cuando miramos una partitura musical podemos apreciar una serie de líneas y puntos interconectados. Las líneas sobre las que se escriben los puntos (notas) se denominan pentagrama. Este conjunto de cinco líneas y cuatro espacios nos indica el tono en el que debemos tocar la nota expresada. A medida que las vayamos colocando en lugares superiores, los sonidos irán siendo cada vez más agudos. Por otro lado, mientras más a la derecha vayamos colocando las notas, mayor tiempo es el que debe pasar hasta que las toquemos o las podamos oír. Como introducimos en el Capítulo 6, Sección 3, podemos pensar en cada nota como un paquete de ondas y lo denotamos por  $a \exp_a(x)$ . La manera en la percibimos los distintos tonos musicales, viene dada por la frecuencia de vibración del sonido. Esta frecuencia no es más que cómo de amplia es la onda. Si consideramos un sonido  $a \exp_a(x)$ , su amplitud es lo que nosotros hemos definido como  $\lambda(\alpha)$ . Otro elemento en el sonido es la intensidad de este, en nuestra nota correspondería con el coeficiente  $a$ , ya que a mayor intensidad, mayor debe ser el valor de dicho coeficiente. La duración del sonido vendría dada por  $|\alpha|$  y, por último,

el instante de tiempo en el que la vamos a tocar o escuchar viene dado por  $I(\alpha)$ . Es claro que el instante en el que se produce la nota, está directamente relacionado con la duración de esta, ya que este instante se producirá antes o después en función de la duración de todas las notas previas a esta. De esta manera, cada “punto” tiene asociado un par  $\alpha = (n, I)$ . Así hemos conseguido una nueva forma de interpretar una partitura musical, es el conjunto de pares  $\alpha$  el que nos proporciona todas las notas que componen nuestra melodía.

Un aspecto que debemos tener en cuenta es cómo se van a organizar los grupos de notas. Los organizaremos en estructuras que se denominan compases. La cantidad de notas, junto con la duración de estas, que caben en un compás viene dado por el también conocido como compás. Todas las duraciones de las notas están relacionadas entre sí por potencias de dos. A la nota de mayor duración se la conoce como redonda, y esta dura un total de cuatro tiempos. Si nos vamos a la siguiente nota de mayor duración, nos encontramos con la blanca, durando exactamente dos tiempos, la mitad que la redonda. Siguiendo este procedimiento varias veces, llegaríamos a conocer a las negras, corcheas, semicorcheas... Lo que llevó a la autora de este trabajo a la conclusión de que si quisiéramos expresar como una sucesión el tiempo que todas estas notas duran, nos encontraríamos ante la sucesión que tiene como término general  $4/2^N$  siendo  $N = 0$  en el caso de las redondas y sumando siempre 1 al exponente cuando queremos expresar la siguiente nota más corta. Así, por ejemplo, sabemos que las semicorcheas, las cuales tienen asociado el coeficiente  $N = 4$ , ocuparían una fracción de tiempo de  $4/2^4 = 1/4$ . Cabe observar que el término que relaciona la duración de las notas tiene bastante en común con las hipótesis que hemos ido definiendo sobre la longitud de los intervalos.

Una vez visto que la relación entre la duración de los sonidos es de potencias de 2, ha llegado el momento de hablar un poco más sobre los compases. Existen compases de subdivisión binaria, ternaria, cuaternaria... La subdivisión lo que nos indica es el número de veces que podemos introducir una nota en un compás. El número superior del compás indica la cantidad de notas que podemos introducir en este y el número inferior, la duración de estas. Por ejemplo, el compás de 2 por 4 nos indica que podemos introducir 2 negras en cada compás. La duración viene expresada por el número de notas necesarias para poder llegar a la más duradera, la redonda. Por ejemplo, en el caso del 2 por 4, como ya hemos indicado, cabrían 2 negras en cada compás. Sabemos que son negras ya que, gracias a la sucesión anterior, conocemos que su duración es de 1 tiempo por lo que necesitaríamos 4 de ellas para poder completar lo que dura una redonda. Así por ejemplo, el compás de 3 por 2 nos indica que tenemos que introducir exactamente la duración de 3 redondas en cada uno de los compases de nuestra pieza. Si observamos cada uno de los compases como intervalos, al tomar compases cuya

subdivisión sea una potencia de dos, suponiendo que todas las notas que estén en ese compás tengan la misma duración, podemos identificarlas como intervalos diádicos de ese compás. Comentemos la siguiente imagen para poder aclarar un poco todas las relaciones expuestas.



Hemos elegido el compás llamado “cuatro por cuatro” ya que, como buscamos, es un compás de subdivisión binaria. En el primer compás de nuestro pentagrama aparece la nota de mayor longitud, la redonda, la cual podemos identificar como nuestro intervalo  $I$  el cual comenzamos a dividir en intervalos diádicos. Las dos blancas del segundo compás representarían los dos hijos de nuestro intervalo  $I$ ,  $I_0$  e  $I_1$  respectivamente. De esta manera, en el último compás, podemos identificar cada una de las negras como los cuatro nietos de  $I$ ,  $I_{00}$ ,  $I_{01}$ ,  $I_{10}$  e  $I_{11}$ . El procedimiento para seguir obteniendo los intervalos diádicos de estos quedaría representado por compases donde las notas escritas fueran las contiguas a las anteriores, siempre en orden de longitud decreciente.

Gracias a todo esto, podemos expresar la “melodía” dada por nuestra función  $f$  como

$$f(x) = \sum_{j=1}^h a_j \exp_{\alpha_j}(x).$$

Ya tenemos una expresión para todos los sonidos. El problema viene a la hora de diferenciar qué podemos considerar un sonido y qué consideramos ruido. La calidad de la nota viene dada por un factor que no está considerado en los pares  $\alpha$ . Este factor es la periodicidad del sonido, o función en nuestro caso. Durante una fracción de segundo (mayor que 1/64 segundo), nuestra función debe tener un gráfico periódico que oscile entre 27 (correspondiente con la nota  $A_{-2}$ ) y 4176 (nota  $C_7$ ) ciclos u oscilaciones por segundo. Nos encontramos con el inconveniente de que nuestra función no tiene por qué ser sinusoidal, de manera que imponiendo únicamente esta condición sobre su periodo, tendría unos coeficientes de Fourier complicados.

A medida que profundizamos, podemos observar que en cualquier partitura musical encontramos detalles que hacen más completa nuestra melodía. Estos detalles pueden ser tanto acentos, apoyaturas, picados... (que es el intérprete quien debe ejecutarlos mientras toca el instrumento), o bien trinos, notas de paso... (siendo estos elementos

notas añadidas que complementan la melodía). Por otra parte, siempre que se toca un sonido perfectamente afinado, si tenemos el oído entrenado para ello, podemos oír sobre esta nota una serie de armónicos que no están expresados en la partitura ya que aparecen de manera natural. Todos estos detalles hacen que la expresión que hemos dado para  $f$  sea muy pobre, en el sentido en el que no se pueden estudiar los coeficientes a partir de esta expresión.

Para nuestro propósito lo que es importante es que los pares permitidos que hemos seleccionado para la prueba de Carleson, estén conectados con las notas que componen la función  $f$ .

Debemos obtener un método que dada la melodía  $f$ , nos dé todas las notas que la componen. Este método es al que llamamos análisis de Carleson de una función.

### 10.3 Las notas de $f$

Los pares permitidos los debemos elegir de forma que  $\|f\|_\alpha$  sea particularmente grande. Para ello vamos a aplicar lo que ya hemos denominado como *el análisis de Carleson de una función*  $f$ .

Fijamos en primer lugar un nivel  $j$  y los pares  $\alpha = (n, I)$  para los que el correspondiente coeficiente de Fourier de  $f$  sea mayor que  $y^{p/2}b_j$ . A continuación, desarrollaremos el resto de la función sobre dos hijos del intervalo  $I$ . Fijamos de nuevo también aquellos términos cuyos coeficientes sean mayores que  $y^{p/2}b_j$  y seguimos repitiendo este proceso. A estos pares son a los que llamaremos **las notas de  $f$**  en el nivel  $j$ . El conjunto de pares permitidos será una modificación de este conjunto.

De aquí en adelante, consideraremos solo los pares  $(n, J)$  donde  $J$  es un intervalo diádico. Definimos entonces  $\mathcal{D}_I$

$$\mathcal{D}_I := \left\{ \alpha \in \mathcal{P} : I(\alpha) \text{ es un intervalo diádico respecto a } I \right\}.$$

Si  $\alpha = (n, I)$  y  $J$  es un intervalo diádico respecto a  $I$ , entonces existe un único  $u \in \{0, 1\}^*$  tal que  $J = I_u$ . Sea  $u = u(\alpha)$ .

En general, si  $u \in \{0, 1\}^*$  llamaremos a su padre  $u'$ . Por ejemplo  $01001' = 0100$ . De manera que en las condiciones anteriores, si  $J$  es un intervalo diádico su padre será  $I_{u'(\alpha)}$ .

Será la estructura de  $f$  la que determinará el conjunto  $Q_u^j$  al que denominaremos las notas de  $f$  a nivel  $j$ . Estos pares contienen todos los datos de  $f$  que necesitaremos.

Primero vamos a definir, usando el proceso de inducción, para todo nivel  $j \in \mathbb{N}$  y toda  $u \in \{0, 1\}'$ , un conjunto  $Q_u^j$  y una función  $P_u^j(x)$ . Musicalmente esta función se interpretará como los sonidos de las notas que se encuentran a nivel  $j$  y duran todo el intervalo  $I_u$ .

Vamos a definir  $Q_\emptyset^j = Q_0^j = Q_1^j = \emptyset$  y las correspondientes funciones  $P_\emptyset^j = P_0^j = P_1^j = 0$ .

En el primer paso de la inducción, definiremos para toda  $u$  de longitud 2

$$Q_u^j : = \{\alpha \in \mathcal{D}_I : I(\alpha) = I_u, |\langle f, e_\alpha \rangle| \geq y^{p/2} b_j |I_u|\}. \quad (10.3.1)$$

Es decir, fijamos los pares  $\alpha$  cuyos coeficientes de Fourier son mayores o iguales que  $y^{p/2} b_j$ , donde  $b_j = 2 \cdot 2^{-2j}$ , y definimos

$$P_u^j = \sum_{\alpha \in Q_u^j} \frac{\langle f, e_\alpha \rangle}{|I_u|} e_\alpha(x); \quad (10.3.2)$$

y, notando  $v = u0$  o  $v = u1$ , definimos

$$Q_v^j : = \{\alpha \in \mathcal{D}_I : I(\alpha) = I_v, |\langle f - P_{u, e_\alpha}^j, e_\alpha \rangle| \geq y^{p/2} b_j |I_v|\} \quad (10.3.3)$$

$$P_v^j(x) = P_u^j(x) + \sum_{\alpha \in Q_v^j} \frac{\langle f - P_u^j, e_\alpha \rangle}{|I_v|} e_\alpha(x). \quad (10.3.4)$$

Ahora ya podemos definir el conjunto de las notas de nivel  $j$  como la unión  $Q_j = \bigcup_{u \in \{0,1\}^*} Q_u^j$ .

Con las definiciones anteriores podemos escribir

$$P_u^j = \sum_{\substack{\alpha \in Q_u^j \\ I(\alpha) \supset I_u}} \frac{\langle f - P_{u'(\alpha)}^j, e_\alpha \rangle}{|\alpha|} e_\alpha(x) = \sum_{\substack{\alpha \in Q_u^j \\ I(\alpha) \supset I_u}} a(\alpha) e_\alpha(x). \quad (10.3.5)$$

Notemos que los coeficientes  $a(\alpha)$  dependen también de  $j$ .

Por definición,  $P_v^j - P_u^j$  es ortogonal a  $f - P_v^j$  en  $I_v$  siempre y cuando  $v = u0$  o  $v = u1$ . Por lo que

$$\int_{I_v} |f(x) - P_v^j(x)|^2 dx + \sum_{\alpha \in Q_v^j} |a(\alpha)|^2 |\alpha| = \int_{I_v} |f(x) - P_u^j|^2 dx.$$

Sumando sobre todos los intervalos diádicos de longitud  $|v| \leq n$ ,

$$\sum_{|u|=n} \int_{I_u} |f(x) - P_u^j(x)|^2 dx + \sum_{\substack{\alpha \in Q^j \\ |u(\alpha)| \leq n}} |a(\alpha)|^2 |\alpha| = \int_I |f(x)|^2 dx.$$

De manera que

$$\sum_{\alpha \in Q^j} |a(\alpha)|^2 |\alpha| \leq \int_I |f(x)|^2 dx. \quad (10.3.6)$$

La definición de  $a(\alpha)$  implica que para cada  $\alpha \in Q^j$ ,  $|a(\alpha)| \geq y^{p/2} b_j$ . De manera que la longitud de todos los pares de  $Q^j$  está acotada por

$$\sum_{\alpha \in Q^j} |\alpha| \leq b_j^{-2} \frac{\|f\|_2^2}{y^p}.$$

Así hemos conseguido **la cota para la longitud de las notas de nivel  $j$** .

## 10.4 El conjunto $X$

Vamos a definir ahora un componente del conjunto exceptional. El objetivo es que cuando  $I_u \not\subset X$ , podamos tener una buena cota para  $P_u^j(x)$ , y además una cota para el número de elementos en la suma que define esta función.

La ecuación (10.3.6) nos sugiere que definamos la siguiente función

$$A_j(x) := \sum_{\alpha \in Q^j} |a(\alpha)|^2 \chi_{I(\alpha)}(x).$$

De cierta manera, esta función representa la intensidad de los sonidos  $x$ . De nuevo, gracias (10.3.6) tenemos

$$\int_I A_j(x) dx \leq \|f\|_2^2.$$

Para todo  $j$  vamos a definir el conjunto

$$X_j := \{x \in I : A_j(x) > y^p/b_j\}.$$

Por definición,  $A_j$  es la unión de un conjunto de intervalos diádicos. La desigualdad de Chebyshev da la siguiente cota

$$\mu(X_j) \leq b_j \frac{\|f\|_2^2}{y^p}.$$

Sea ahora

$$X = \bigcup_j X_j.$$

Por lo que

$$\mu(X) \leq C \frac{\|f\|_2^2}{y^p}.$$

**Proposición 10.4.1.** *Sea  $I_u$  un intervalo diádico tal que  $I_u \not\subset X$ . Entonces  $P_u^j$  tiene, al menos,  $b_j^{-3}$  elementos y*

$$|P_u^j(x)| \leq \sum_{I(\alpha) \supset I_u, \alpha \in Q^j} |a(\alpha)| \leq \frac{y^{p/2}}{b_j^2}. \quad (10.4.1)$$

*Demostración.* Notemos que la hipótesis  $I_u \not\subset X$ , implica  $I_u \not\subset X_j$ . De manera que existe al menos un punto  $x_0 \in I_u$  tal que  $x_0 \notin X_j$ . Entonces

$$A_j(x_0) = \sum_{\alpha \in Q^j} |a(\alpha)|^2 \chi_{I(\alpha)}(x_0) \leq y^p / b_j.$$

Para todo término  $a(\alpha)e_\alpha(x)$  de  $P_u^j$ , gracias a (10.3.6), implica  $x_0 \in I(\alpha)$ . Denotemos por  $N$  al número de términos en  $P_u^j$ , y observemos que  $|a(\alpha)| \geq y^{p/2} b_j$ . Por la desigualdad anterior, podemos deducir

$$N y^p b_j^2 \leq y^{p/2} b_j.$$

Esta es la cota para el número de términos de  $P_u^j$ .

Ahora

$$\begin{aligned} |P_u^j| &\leq \sum_{\substack{\alpha \in Q^j \\ I(\alpha) \supset I}} |a(\alpha)| |e_\alpha(x)| \\ &\leq \sqrt{N} \left( \sum |a(\alpha)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq b_j^{-3/2} A_j(x_0)^{1/2} \leq b_j^{-3/2} y^{p/2} b_j^{-1/2} \\ &= b_j^{-2} y^{p/2}. \end{aligned}$$

El conjunto  $X$  es la unión de intervalos diádicos. Podemos definir  $X^*$  siguiendo el truco del siete visto en el Capítulo 9 de forma que

$$\mu(X^*) \leq C \frac{\|f\|_2^2}{y^p}. \quad (10.4.2)$$

De maneja que si  $J \not\subset X^*$ , entonces  $K \subset X$  para todo nieto  $K$  de  $J$ . |

## 10.5 El conjunto $S$

El conjunto  $S^*$  será también parte del conjunto excepcional  $E_N$  al igual que  $X^*$ . La definición es casi idéntica a la que dimos en el Capítulo 9 sobre el crecimiento de las sumas parciales de la serie de Fourier, aunque añadiendo un nuevo elemento, el número  $p$ .

La definición de  $S$  es tal que para todo par  $\alpha$  con  $I(\alpha) \not\subset S^*$ , se satisface  $\|f\|_\alpha < y$ .

De manera que, en los puntos  $x$  que nos interesen,  $C_\alpha f(x)$  tendrá un nivel bien definido tal que  $\|f\|_\alpha = 0$ , en cuyo caso  $C_\alpha f(x) = 0$  donde finalmente habremos conseguido lo que buscábamos, acotar  $C_\alpha f(x)$ .

Definimos  $S$  como la unión de todos los intervalos  $J$ , donde  $J$ , es un intervalo diádico de  $I$  tal que

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f|^p d\mu \geq y^p. \quad (10.5.1)$$

A continuación, si  $\alpha = (n, J) \in \mathcal{P}_I$  y  $J \not\subset S^*$ , para todo nieto  $J_u$  de  $J$  tenemos

$$\frac{1}{|J_u|} \int_{J_u} |f| d\mu \leq \left( \frac{1}{|J_u|} \int_{J_u} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < y.$$

Por lo que  $\|f\|_{\alpha/J_u} < y$ , y se cumple

$$\|f\|_\alpha < y. \quad (10.5.2)$$

En el caso en el que  $x \notin S^*$ ,  $\alpha = (n, J) \in \mathcal{P}_I$  y  $x \in I(\alpha)/2$ , tendremos  $I(\alpha) \not\subset S^*$ , y  $\|f\|_\alpha < y$ .

Como consecuencia de (10.5.2), si  $I(\alpha) \not\subset S^*$ ,  $\alpha \in \mathcal{P}_I$ , la integral de Carleson  $C_\alpha f(x)$  tiene nivel  $j \in \mathbb{N}$ , es decir,

$$yb_j \leq \|f\|_\alpha < yb_{j-1},$$

o  $\|f\|_\alpha = 0$ , lo que implica que  $f = 0$  en  $I(\alpha)$ .

El conjunto  $S$  puede ser escrito como la unión  $\bigcup_k J_k$  donde todo  $J_k$  es un intervalo diádico maximal satisfaciendo (10.5.1). Los intervalos  $J_k$  son disjuntos, por lo que tenemos

$$\mu(S) \leq \sum_k \mu(J_k).$$

De manera que

$$\mu(S) \leq \sum |J_k| \leq \frac{1}{y^p} \sum_k \int_{J_k} |f|^p d\mu \leq \frac{1}{y^p} \|f\|_p^p.$$

Este término es parte de la cota del conjunto excepcional

$$\mu(S^*) \leq \frac{7}{y^p} \|f\|_p^p.$$

Con esta última cota ya hemos estudiado todos los elementos que están involucrados en el análisis de Carleson de la función  $f$ .

De esta manera podemos concluir el trabajo basado en el trabajo de Juan Arias de Reyna.