El valor de la función ζ de Riemann en los números pares positivos.

Arturo Moral Fernández

El valor de la función ζ de Riemann

en los números pares positivos.

Arturo Moral Fernández

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Antonio José Durán Guardeño

Índice general

English Abstract

This work focuses on the explicit calculation of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \geq 1$, within a historical framework. It begins with a historical and biographical context, highlighting the Basel Problem's emergence and Euler's early solutions. The study considers Euler's techniques, including methods involving infinitesimal and infinite quantities. It also explores modern approaches using residue theorems and telescoping series, aiming to provide rigor to Euler's historical work.

Introducción

El propósito de este trabajo es calcular la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \geq 1, \tag{1}$$

manteniendo un cierto esquema histórico, que incluirá varios de los procedimientos empleados por Leonhard Euler, (que fue el primero en resolver dicho problema).

Comenzaremos con el marco histórico y biográfico que permita comprender el contexto en el que se desarrolló el trabajo de Euler. Haremos especial hincapié en cómo surgió el Problema de Basilea, es decir, la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Explicaremos cómo sumó Euler la serie, para ciertos valores de k, usando como herramientas las cantidades infinitamente pequeñas y grandes. Con ellas Euler logró encontrar los primeros desarrollos en producto infinito para algunas funciones, entre ellas el seno. Fue usando la doble representación del seno, en producto y en serie de potencias, como Euler logró el cálculo de la suma de las series (1). Para esta parte del trabajo, usaremos como fuente principal la *Introductio in analysin infinitorum* de Euler, publicado en 1748 (en concreto, la edición castellana [5], que incluye un facsímil de la primera edición).

En el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, también consideraremos otro cálculo de Euler mediante la expresión integral para el arcoseno, con el que resuelve el Problema de Basilea. Esta vez, seguiremos el libro de William Dunham *Euler: El maestro de todos los matemáticos* [2].

Para dotar a este trabajo del rigor habitual hoy en día, incluiremos también un cálculo de las sumas (1) usando técnicas estándar actuales. Por un lado, mostraremos cómo sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ usando residuos y cómo a partir de esta suma obtuvo Euler la suma de las series (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k},$$

donde $(B_k)_k$ son los números de Bernoulli definidos mediante la función generatriz

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}.$$

Por otro lado, calcularemos dichas sumas utilizando cálculo elemental de una variable y los polinomios de Bernoulli, definidos mediante la función generatriz

$$\frac{z e^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}.$$

1 Contexto histórico y biografía de Euler

En este capítulo trataremos el contexto histórico en el que se desarrolló el trabajo de Euler. Desde la época que le tocó vivir hasta una breve recopilación de su obra, no sin antes indagar en su trayectoria vital y científica. Además, veremos como surge el llamado Problema de Basilea, esto es, encontrar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Para este capítulo utilizaremos los preámbulos de la edición facsímil de la *Introductio*, escritos por J. Ordoñez, M. Martínez Pérez y A.J. Durán [7], [8], [3].

1.1 El siglo de las luces

El siglo XVIII, conocido como el "Siglo de las Luces", marcó una era crucial en la historia de la ciencia y la filosofía. Este período, que formó parte de la Ilustración, sirvió de puente entre la primera revolución científica de los siglos XVI y XVII y la segunda revolución científica, que comenzaría con la Revolución Francesa y perduraría hasta nuestros días.

La Ilustración, con sus ideales de razón, progreso y libertad, transformó la mentalidad europea y sentó las bases para el desarrollo de la ciencia moderna. Aunque algunos ven este período como una "época dorada" de la ciencia debido a sus notables descubrimientos, otros lo asocian con los horrores acontecidos en la Edad Contemporánea. Sin ser objetivo de este trabajo reflexionar sobre estas afirmaciones, es de necesaria consideración para clarificar el contexto histórico en el que se desarrolló la vida y obra de Euler.

En el ámbito científico, el siglo XVIII fue testigo del surgimiento de nuevas instituciones dedicadas a la investigación y la difusión del conocimiento científico. A diferencia de la Edad Media, donde las universidades monopolizaban la educación y la investigación, el Renacimiento y el Barroco dieron lugar a la creación de instituciones científicas, destacando la *Royal Society of London* y la *Académie Royale des Sciences de París*. Estas instituciones tenían un carácter cortesano y dependían en gran medida del patrocinio político de la época.

La influencia de estas instituciones inspiró la creación de numerosas sociedades científicas y academias en toda Europa. Cada una de estas organizaciones tenía sus propias áreas de enfoque, bibliotecas e instalaciones. Buscaban consolidar su prestigio mediante la publicación de revistas científicas y la oferta de premios a los que acudía la comunidad de sabios de toda Europa, y en ocasiones, de América. Entre estas instituciones, nos resulta de especial importancia la *Academia de San Petersburgo*, donde Euler pasó dos etapas de su vida, y la *Academia de Berlín*, donde estuvo 25 años.

Este cambio en la estructura de la investigación científica reorganizó el conocimiento. Las universidades solían actuar como "conservadoras" del conocimiento —con la excepción posiblemente de Inglaterra, donde las universidades lograron un cierto grado de excelencia académica [4]—, negando frecuentemente la posibilidad de "innovación" que se desarrollaba en sociedades y academias.

En el contexto europeo, la Academia de París desempeñó un papel central. Estaba dividida en secciones de matemáticas y física. Las matemáticas abarcaban campos como geometría, astronomía, mecánica y, a partir de 1785, física general. Por su parte, la división de física estaba compuesta por anatomía, química, botánica y, nuevamente desde 1785, mineralogía e historia natural. Las matemáticas, en concreto, ocuparon un lugar destacado en esta jerarquía del conocimiento debido a su influencia en diversas disciplinas científicas.

Aunque las sociedades científicas en otros países europeos, como Inglaterra y los países nórdicos, no aceptaron por completo el liderazgo de la Academia de París, reconocieron su excelencia y relevancia. Euler, a pesar de no haber visitado París, estaba en sintonía con los estudios realizados allí y consideraba esta ciudad como un centro de referencia.

Además de las instituciones, las personalidades destacadas de la época influyeron en el desarrollo científico y filosófico del siglo XVIII. Gottfried Leibniz e Isaac Newton, cuyos trabajos trascendieron el siglo anterior, dejaron una marca indeleble en la Ilustración. Otros científicos notables incluyen a John Flamsteed y Pierre Domenico Cassini en astronomía, la familia Bernoulli en matemáticas y los cartesianos en filosofía. Estas personalidades, junto con muchas otras, incluso aquellas cuyos trabajos no tenían conexión directa con Euler, son imprescindibles para contextualizar lo acontecido en la Ilustración.

Euler, quien gozó de gran prestigio desde época muy temprana, mantuvo correspondencia con colegas como Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, Alexis-Claude Clairaut y Jean le Ronde D'Alembert. D'Alembert, considerado uno de los mejores matemáticos junto con Euler, tuvo especial interés en el análisis infinitesimal y participó en una amplia gama de disciplinas, incluyendo política científica y filosofía. En contraste, Euler priorizó las matemáticas.

El siglo XVIII no solo presenció avances en matemáticas, sino también en otras disciplinas científicas. Benjamin Franklin contribuyó significativamente a los avances en electricidad y fue reconocido como uno de los científicos más influyentes. Otros científicos, como Charles Augustin Coulomb y Henry Cavendish, avanzaron en la investigación eléctrica y otros campos como la calorimetría, la pneumática, la química y la historia natural experimentaron desarrollos importantes.

Finalmente, no podemos finalizar el contexto en el que vivió Euler sin tener en cuenta a Isaac Newton, quien, con su teoría de la gravedad y la mecánica celestial, ejerció una influencia trascendental. Su enfoque en la astronomía y la mecánica celestial estimuló la necesidad de un lenguaje matemático más preciso, una perspectiva que Euler abrazó.

En resumen, el siglo XVIII fue una época de cambio profundo en la ciencia y la filosofía europeas, con nuevas instituciones, avances científicos y una lucha intelectual entre diversas corrientes de pensamiento. Euler, con su defensa del newtonianismo y sus contribuciones a las matemáticas, se destacó como una figura principal en este período de transformación intelectual y científica.

1.2 Vida de Euler

Leonhard Euler nació en Basilea en abril de 1707. Fue hijo de Marguerite Brucker y Paul Euler. Euler pasó su infancia en un ambiente rural porque a su padre lo trasladaron en 1708 a Riehen, pueblo cercano a Basilea.

Su padre, Paul, pastor calvinista al igual que el abuelo materno de Euler, estudió teología en la Universidad de Basilea. Además, también estudió matemáticas con Jacobo Bernoulli, lo que propició que, al ocuparse personalmente de la educación de su hijo, le enseñara matemáticas, viendo su padre en el joven Leonhard una especial aptitud para ellas.

Tras varios años de asistir a las escuelas primarias de Basilea, Euler ingresa, en 1720 y con 13 años, en la Universidad de Basilea. A pesar de estudiar teología, humanidades clásicas y lenguas orientales, su excelente memoria le permitía dedicar una buena parte de su tiempo a los estudios matemáticos. Esta vez fue Juan Bernoulli, hermano del difunto Jacobo, fallecido en 1705, quien ayudó en la formación matemática de Euler. Juan le aconsejaba estudiar libros de matemáticas más difíciles y, los sabádos por la tarde, él le explicaba todo lo que Euler no hubiera conseguido entender, tal y como cuenta en la escueta autobiografía que dictó Euler a su hijo mayor.

En 1722, y tras una disertación comparativa de las filosofías de Descartes y Newton, Euler obtuvo su "Master" en Filosofía.

En 1726, a los 19 años y habiendo finalizado sus estudios universitarios, Euler concurre por primera vez a un concurso convocado por la Academia de París acerca de la mejor distribución de los mástiles de un buque. A pesar de no haber visto nunca un barco de gran tamaño, obtuvo la segunda posición.

Simultáneamente a estos sucesos, en 1725, se erigía en San Petersburgo la Academia de las Ciencias, fundada por el zar Pedro el Grande. Sin embargo, tras su muerte ese mismo año, fue su viuda la zarina Catalina quien se encargó de su puesta en marcha. Debido al pobre escenario científico existente en la Rusia de la época, se aconsejó poblar la Academia de científicos de otros países europeos.

Así, llegaron a San Petersburgo Nicolás I y Daniel Bernoulli, hijos de Juan. Estos, amigos de Euler en Basilea, propiciaron que Euler también fuera llamado a San Petersburgo. Tras no ser aceptada su candidatura a la cátedra de Física, que se había quedado vacante en Basilea, Euler abandonó la ciudad rumbo a la incipiente Academia de San Petersburgo. Esta sería la última vez que viviría en Suiza.

La llegada de Euler a San Petersburgo no fue la esperada. Allí solo se reencontró con su amigo Daniel Bernoulli, pues su hermano, Nicolás I, había muerto de unas fiebres. Además, el mismo día de su llegada, el 24 de mayo de 1727, murió la zarina Catalina. Esto conllevó que la Academia estuviera a punto de desaparecer. En esta situación de incertidumbre, Euler aceptó una plaza de oficial en la marina rusa. Tres años más tarde, en 1730, y gracias a la llegada al trono de Ana I Ivanovna, se restableció la normalidad y estabilidad política en el territorio. Ante esto, Euler abandona la marina y se reintegra en la Academia.

Poco después, en 1734, Euler se casó con Katharina Gsell, hija de un pintor suizo de la Academia, con quien tuvo 13 hijos.

En 1736 la Academia de San Petersburgo publicó *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, de Euler, en la que la mécanica se representa de una manera analítica por primera vez. Posteriormente, en 1765, corregirá el tratamiento en su "segunda mecánica". Ese mismo año, en 1736, publicó también su artículo sobre los puentes de Königsberg, el *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, que inaugura la teoría de grafos.

No todo eran matemáticas para Euler. Gran aficionado a la música, publicó, en 1739, *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis*, aunque no tuvo un gran éxito en vida de Euler.

Tras todas estas contribuciones y las no redactadas, en 1740 su primera estancia en San Petersburgo llegó a su fin. En ese año muere Ana I, provocando una gran inestabilidad política en Rusia con el ascenso al trono de Isabel Petrovna. Euler, ya ciego de un ojo por unas fiebres acontecidas años atrás, decidió abandonar el país ante la inseguridad que sentía al ser extranjero.

Su nuevo destino fue la Academia de Ciencias de Berlín. El trono de Prusia lo ocupaba entonces Federico II, quien había tenido una educación de élite y se relacionaba con numerosos intelectuales europeos, entre ellos Voltaire. Así, tras repetidas ofertas por parte del rey, Euler aceptó su plaza en la Academia, llegando a Berlín con su familia en julio de 1741.

De sus primeros años en Berlín, con la Academia de Ciencias en situación precaria por las guerras de Silesia, cabe destacar la publicación de su obra *Methodus invenire lineas curvas* en 1744, así como el envío de trabajos para los *Comentarii* de la Academia de San Petersburgo.

Por su relación con este trabajo daremos especial atención a su obra *Introductio in analysin infinitorum*, publicada en 1748, a pesar de haberla terminado en 1744. Esta obra es la primera de la serie que continúan *Institutiones calculi differentialis* (1755) y los tres volúmenes de *Institutiones calculi integralis* (1768-70). La importancia de esta serie queda reflejada en las siguientes citas de dos de los más grandes matemáticos que le siguieron; una es de Laplace: «¡leed a Euler, leed a Euler, él es el maestro de todos nosotros!». La otra, de Gauss: «el estudio de todos los trabajos de Euler es la mejor e insustituible escuela para los distintos campos matemáticos» (citado en [3, p. xliii]).

En cuanto al *Introductio*, en palabras del historiador de la matemática Carl Boyer: «[...] Pero sobre todos estos bien conocidos libros de texto se alza otro, un libro que aparece justo en la mitad de esta época pródiga en grandes textos y con el que prácticamente todos los autores posteriores admiten tener una deuda. Se trata de la *Introductio in analysin infinitorum de Euler*. [...] Con él, Euler llevó a cabo lo que Euclides y Al-Khowarizmi habían hecho con la geometría sintética de los griegos y el álgebra elemental, respectivamente. El concepto de función y los procesos infinitos habían surgido durante el siglo XVII, pero fue la *Introductio* de Euler la que los elevó al grado de tercer miembro del triunvirato matemático compuesto por geometría, álgebra y análisis» (citado en [3, p. xlvii]).

Posteriormente, en 1751, Euler se vio comprometido en un altercado entre Maupertuis, presidente de la Academia, y el académico Samuel König. Este último ponía en duda la paternidad del "principio de mínima acción", enunciado por Maupertuis, quien aseguraba que esta era una ley fundamental para muchos ámbitos de la ciencia. Tras el ataque de König, quien se refería a una carta de Leibniz en la que este ya enunciaba el principio de mínima acción, Maupertuis solicitó un informe sobre el asunto a la Academia que se encargó de redactar Euler. La *Exposé concernant l'examen de la lettre de M. Leibniz* acabó siendo desfavorable para König por falsificación de documento. La dureza y evidente parcialidad de Euler en esta redacción han sido objeto de crítica de pensadores posteriores.

En 1755, un joven matemático escribió a Euler proponiendo un nuevo enfoque, más "analítico" que el fuertemente "geométrico" que usó Euler en su primera versión del 1744 del cálculo de variaciones. Euler, impresionado por sus ideas, interrumpió sus publicaciones sobre ello con el fin de que no hubiera duda acerca de la autoría de las nuevas ideas. Este joven resultó ser Joseph Louis Lagrange.

A la muerte de Maupertuis, y tras la negativa de D'Alembert a presidir la Academia, Euler fue nombrado presidente, primero provisionalmente y más tarde definitivamente. A pesar de que las relaciones de Euler y D'Alembert no habían sido fructíferas durante años, un viaje realizado por D'Alembert a Berlín mejoró la situación. Allí, Federico II volvió a intentar retener a este con ventajosas ofertas. A pesar de los reiterados rechazos, la relación entre ambos siguió siendo buena, llegando incluso a ser considerado D'Alembert "presidente en la sombra" de la Academia de Berlín hasta 1766. Sin embargo, las relaciones entre Federico II y Euler no sufrieron el mismo destino. Euler, un hombre sencillo criado en un ambiente rural, carecía del estilo necesario para la vida aristocrática, siendo objeto de burla por parte de Federico II en varias cartas. En 1765, las relaciones empeoraron exponencialmente tras la disolución, por parte del rey, del comité que gestionaba económicamente la Academia, sustituyéndolo por una "Comisión Económica" cuyas decisiones discrepaban con las de Euler.

Esta situación propició que Euler volviera a intentar el regreso a San Petersburgo.

En esos años Catalina la Grande era la zarina de Rusia. Sucedió a la zarina Isabel tras su muerte en 1762 y era ampliamente reconocida por su política de preservación cultural. Ante la iniciativa de Euler de volver a San Petersburgo, Catalina ordenó que se negociasen y aceptasen las condiciones de Euler para su regreso. Así, tras dos solicitudes sin respuesta de Euler a Federico II para trasladarse a San Petersburgo y una tercera donde el rey le pedía desistir, a la cuarta le concedió el permiso solicitado, no sin antes demostrar una gran frialdad. El hijo menor de Euler, Christophe, era oficial del ejército prusiano y no se le permitió abandonar el ejército. Presumiblemente, Euler tampoco hubiera podido abandonar Berlín de no ser por la buena relación existente entre Catalina II y Federico II.

Así, en junio de 1766 emprendió Euler el viaje a San Petersburgo, donde vivió durante los últimos 17 años de su vida.

A los pocos meses de su llegada, Euler sufrió una grave enfermedad en la que perdió la visión de su ojo izquierdo, con lo cual quedó prácticamente ciego. Por un breve lapso de tiempo pudo recuperarla gracias a una operación de cataratas en 1771. Sin embargo, al poco tiempo se vio sumido en una ceguera casi total. Un gran problema para sus contribuciones, por lo que optó por dictar sus trabajos a sus hijos o criados. Asombrosamente, su productividad científica no solo no disminuyó, sino que aumentó.

Poco antes de la operación, en la primavera de 1771, un incendio en San Petersburgo destruyó su casa. No acabó con su vida gracias a la proeza de un vecino suyo que se jugó la vida por sacar a Euler, quien recordemos era anciano y casi ciego, de la casa. También pudo salvar parte de sus manuscritos, aunque no tuvo la misma suerte con su memoria sobre la teoría de la Luna que tenía preparada para concursar al premio de la Academia de París del año 1772. Por ello, se vio obligado a reconstruirla con ayuda de su hijo Jean Albrecht. Por suerte, la colosal memoria de Euler le permitía hacer cálculos difíciles sin apenas esfuerzo.

Sin embargo, en 1772, con el objetivo de tener un secretario permanente que fuera habilidoso en matemáticas, Euler escribió a su buen amigo Daniel Bernoulli, profesor por aquel entonces de la Universidad de Basilea, para que le enviase a uno de sus alumnos aventajados. El elegido fue Nicolás Fuss, quien ayudó a Euler a redactar casi todos sus trabajos desde 1773 a 1783. Años más tarde, Fuss sería elegido secretario de la Academia, sucediendo a Jean-Albrecht, hijo mayor de Euler.

En sus dos últimos años de vida, Euler sufrió la pérdida de dos de sus mejores amigos: Daniel Bernoulli en 1782 y D'Alembert en 1783.

Finalmente, Euler pudo trabajar normalmente hasta el día de su muerte el 18 de septiembre de 1783. Su ayudante, el mencionado Nicolás Fuss, narra como fue el último día de Euler en su *Éloge de Monsieur Léonard Euler*, leído ante la Academia de San Petersburgo el 23 de octubre: «Algunos accesos de vértigo que sufrió los primeros días de septiembre no le impidieron calcular el movimiento de los globos aerostáticos, básandose en los escasos datos hechos públicos, logrando resolver una difícil integración que exigían estos cálculos. Estos vértigos fueron el anuncio de su muerte, ocurrida el 7 de septiembre [vieja cronología, 18 de septiembre de la cronología gregoriana]. Ese mismo día, conversó en la sobremesa sobre el nuevo planeta con M. Lexell, que había venido a verle, y más tarde nos habló de otros temas con su agudeza usual. Acababa de ponerse a jugar con uno de sus nietos cuando sufrió un ataque de apoplejía. Antes de perder el conocimiento sólo pudo decir "Me muero"; y así terminó la gloriosa vida pocas horas más tarde» (citado en [8, p. xxxvii]).

1.3 El problema de Basilea

El problema de Basilea es el nombre con el que comúnmente se conoce al problema de sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Fue planteada por primera vez por Pietro Mengoli en 1650 en la *Novae quadrature arithmeticae*, viéndose incapaz de resolverla. En 1655, J. Wallis da la aproximación 1,645 en el *Arithmetica infinitorum*. En 1673, Henry Oldenburg, secretario de la *Royal Society* de Londres, propuso el problema a Leibniz. Este, entusiasmado tras sus buenos resultados en la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, fue sin embargo incapaz de sumar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Los hermanos Bernoulli también fracasaron en conseguir el valor exacto de la suma y, atendiendo a quien propuso el problema a Leibniz, puede ser que Newton también la intentara.

De los hermanos Bernoulli, quien lo intentó con más ahínco fue sin duda Jacobo Bernoulli, un amante de las series infinitas. Estudió las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Si $p = 1$ tenemos la serie armónica, y para $p = 2$ el Problema de Basilea cuya solución era desconocida para Jacobo. A pesar de no resolverla obtuvo progresos. En su *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis*, utilizando la desigualdad $2n^2 \leq n(n+1)$, Jacobo encontró que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ y, por tanto,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \dots .$$

Esta última serie converge hacia 2. Al tener la mayor de ambas series una suma finita, Bernoulli dedujo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$. Por otro lado, como $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, para todo $p \geq 2$, el mismo argumento servía para afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p = 3, 4, 5, \dots$.

A pesar de su esfuerzo y estos avances, Jacobo Bernoulli tuvo que admitir la derrota, al no encontrar la suma exacta de esta serie. Desde Basilea escribió su petición de ayuda: «si alguien encontrara esta suma, cosa que ha escapado a nuestros esfuerzos, y nos lo comunicara, le estaríamos muy agradecidos» (citado en [5, p. 168]).

Posteriormente, en 1730, Stirling dio una aproximación en su *Methodus differentialis*: 1,644934066, exacto hasta la novena cifra decimal. Otra estimación, aunque peor, la dio Goldbach en 1729: entre 1,644 y 1,645. Goldbach le comentó sus resultados a Daniel Bernoulli, quien le comentó a Euler el problema. En primera instancia, Euler encontró la aproximación 1,644934 mediante el desarrollo en serie para la integral $-\displaystyle\int \frac{\log(1-y)}{y}\,\mathrm{d}y$. Para más detalle de esos cálculos véase [2, p. 100-103].

Sin embargo, todavía no tenía el valor exacto de la suma. No fue hasta 1735 que escribió, en una carta a Daniel Bernoulli: «Sin embargo, he encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$, que depende de la cuadratura del círculo… . He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 1.» Traducido, Euler acababa de afirmar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Para calcular esta suma, Euler tuvo la gran idea de comparar los coeficientes de la serie del seno y su desarrollo en producto infinito (qué incluyo en [5]). Esto le permitió sumar también las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k \geq 1$.

2 La suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ "a la Euler".

2.1 Desarrollo del seno en productos infinitos

Como se comentó en el capítulo anterior, Euler sumó la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ usando el desarrollo del seno en producto infinito. Empezaremos demostrando como hizo este desarrollo en el capítulo IX de la *Introductio*.

Como se verá más adelante, Euler usó para esto el análisis con cantidades infinitamente pequeñas y grandes. Este tipo de análisis es muy diferente del actual basado en los límites. Procede por tanto hacer una advertencia sobre esto, que tomamos de la anotación de Antonio J. Durán a la versión castellana de la *Introductio*: "Sin embargo, sus peculiares propiedades hacen que las reglas de uso de las cantidades infinitamente pequeñas y grandes, y por tanto su comportamiento, entren dentro de la intuición matemática de cada cual: la matemática que Euler desarrolla cuando *analiza con los infinitos* es más parecida a una ciencia de la naturaleza —a la física y sus razonamientos inductivos, por ejemplo— o, si se quiere forzar la comparación, a una exploración geográfica, que a la matemática lógica deductiva habitual hoy en día. Lo primero que se aprecia cuando uno se adentra en las páginas de la *Introductio* es una aparente quiebra del nivel de rigor hoy exigido en un texto matemático —pero no se dejen engañar por esa apariencia, sus deducciones son más rigurosas de lo que parece—" [5, nota 65].

En lo que sigue, tomamos los razonamientos matemáticos directamente del libro de Euler, porque parte del propósito de este trabajo es mostrar la magia explícita en la forma de hacer matemáticas de Euler con los infinitésimos. En palabras de Antonio J. Durán: "Las cantidades infinitamente grandes y pequeñas aparecerán y luego desaparecerán, como en un juego de magia, pero su estancia no habrá sido vana: habrán servido para transformar la función dejando al descubierto importantes propiedades ocultas".

Para dotar a este trabajo del rigor habitual hoy en día, mostraremos posteriormente usando técnicas estándar todo lo necesario para que el cálculo de la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \geq 1,$$

quede justificado con los niveles de rigor actuales.

El punto de partida es la descomposición de $a^n - z^n$ en fáctores cuadráticos. Más precisamente, estos son de la forma $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2$, $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$; a lo que hay que añadir siempre el factor $a - z$, y cuando n es par el factor $a + z$.

Euler entonces traslada esa factorización a una combinación de exponenciales. Comenzaremos por un intento fallido de Euler, un hipotético desarrollo de $e^x - 1$ en producto infinito. Previo a ello, hemos de señalar la expresión de Euler para la exponencial e^x. Actualmente, con las herramientas que disponemos con la teoría de límites, sabemos que $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. Sin embargo, Euler utilizaba la expresión $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, donde i denota un número infinitamente grande.

Tendríamos entonces

$$e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1.$$

Comparado con los factores cuadráticos para $a^n - z^n$, y haciendo allí $a = 1 + \frac{x}{i}$, $n = i$ y $z = 1$, encontramos los factores

$$\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k}{i}\pi + 1.$$

Al que hay que añadir $a - z = 1 + \frac{x}{i} - 1 = \frac{x}{i}$. Por este motivo x será factor de $e^x - 1$. Para averiguar los factores restantes es necesario incidir en que, por ser el arco

$\frac{2k}{i}\pi$ infinitamente pequeño, $\cos\dfrac{2k}{i}\pi = 1 - \dfrac{2k^2}{\pi^2}$. Esto se debe al desarrollo en serie de potencias para el coseno (que obtuvo Euler previamente), del que Euler toma los dos primeros términos, al ser i infinitamente grande. Es por ello que un factor cualquiera será

$$\frac{x^2}{i^2} + \frac{4k^2}{i^2}\pi^2 + \frac{4k^2\pi^2}{i^3}x,$$

y así $e^x - 1$ será divisible por $1 + \dfrac{x}{i} + \dfrac{x^2}{4k^2\pi^2}$. Esto implica que $e^x - 1$ tendrá, además del factor x, otra infinidad, a saber,

$$1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4\pi^2}, \quad 1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{16\pi^2}, \quad 1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{36\pi^2}, \quad 1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{64\pi^2}, \quad \ldots.$$

El problema es que Euler encuentra que $\frac{x}{i}$ no puede ser omitido, a pesar de ser i un número infinitamente grande. En efecto, por un lado

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots.$$

Por otro, al multiplicar los factores

$$\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{36\pi^2}\right)\cdots$$

obtendríamos el término $\frac{x}{2}$ de la serie anterior, al multiplicar el $\frac{x}{i}$ de cada factor por el 1 de los restantes. En palabras de Euler: "Comoquiera que estos factores contengan una parte infinitamente pequeña, $\frac{x}{i}$, que produce el término $\frac{x}{2}$ por estar presente en cada término singular y, multiplicación mediante, en todos aquéllos en que esté el número $\frac{i}{2}$, no puede esa parte ser omitida".

Al no poder eliminar en los factores cuadráticos el término infinetesimal, Euler concluye que no puede factorizar $e^x - 1$.

Entonces muestra que ese problema desaparece si considera la función

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i.$$

Al aplicar a la expresión $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i$ la factorización en factores cuadráticos previamente explicada para $a^n - z^n$, con $n = i$, $a = 1 + \frac{x}{i}$ y $z = 1 - \frac{x}{i}$, da lo siguiente:

$$\begin{aligned} a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2 = 2 + \frac{2x^2}{i^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k}{i^2}\pi \\ = \frac{4x^2}{i^2} + \frac{4k^2}{i^2}\pi^2 - \frac{4k^2\pi^2x^2}{i^4}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado de nuevo que $\cos\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2k^2\pi^2}{i^2}$.

Luego la función $e^x - e^{-x}$ será divisible por $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}$, donde $\frac{x^2}{i^2}$ se omite pues aún al multiplicarlo por i permanece infinitamente pequeño. Además, habrá que considerar el factor $a - z = \frac{2x}{i}$. Por tanto, una vez ordenados estos factores y dividiendo por 2, tendremos

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

Este es el primer desarrollo en producto infinito que presenta Euler en la obra *Introductio in analysin infinitorum*, siendo además el primero que aparece en la historia de las matemáticas. De aquí pasa a desarrollar el seno en producto infinito. Haciendo x una cantidad imaginaria, los exponentes de la fórmula van a dar en seno y coseno de un arco real cualquiera. Sea así $x = z\sqrt{-1}$,

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \operatorname{sen} z,$$

expresión que tiene como factores:

$$z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{25\pi^2}\right)\cdots;$$

o, equivalentemente,

$$\operatorname{sen} z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{25\pi^2}\right)\cdots. \quad (2.1)$$

2.2 Aplicación al cálculo de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, \ldots, 13.$

Gracias al desarrollo en producto anterior (2.1), Euler fue capaz de dar con las sumas de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ para unos cuantos valores de k. Lo que sigue está tomado del capítulo X de la *Introductio* [5, p. 165-173]. El uso que le dio Euler a este desarrollo es el siguiente:

Si

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots = \left(1 + \alpha z\right)\left(1 + \beta z\right)\left(1 + \gamma z\right)\left(1 + \delta z\right) \ldots,$$

el coeficiente A será igual a la suma de todas las cantidades $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \ldots$. El coeficiente B, entonces, será igual a la suma de los productos tomados por pares, siendo entonces $B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \ldots$. C, entonces, será igual a la suma de productos por ternas, es decir, será $C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \ldots$. Y así, sucesivamente se calcularían el resto de coeficientes.

Como la suma de las cantidades $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$ viene dada a una con la suma de productos por pares, podremos dar con la suma de cuadrados $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \ldots$, siendo igual al cuadrado de la suma menos el doble de la suma de los productos por pares. De manera análoga podremos calcular la suma de cubos, bicuadrados y demás potencias superiores. Veámoslo. Sea

$$\begin{aligned}
P &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \ldots \\
Q &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \ldots \\
R &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \epsilon^3 + \ldots \\
S &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \epsilon^4 + \ldots \\
T &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \epsilon^5 + \ldots \\
V &= \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \epsilon^6 + \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Estos valores $P, Q, R, S, T, V, \ldots$ quedarán determinados a partir de los valores $A, B, C, D, \ldots$

de manera que

$$\begin{aligned}
P &= A \\
Q &= AP - 2B \\
R &= AQ - BP + 3C \\
S &= AR - BQ + CP - 4D \\
T &= AS - BR + CQ - DP + 5E \\
V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Así, como bien vimos antes que

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{2} =& x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\dots \\
&= x\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\dots\right),
\end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\dots \\
&= \left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\dots\right).
\end{aligned}$$

Tomando $x^2 = \pi^2 z$, será

$$\begin{aligned}
&\left(1+z\right)\left(1+\frac{1}{4}z\right)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{16}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)\dots \\
&= \left(1+\frac{\pi^2}{3!}z+\frac{\pi^4}{5!}z^2+\frac{\pi^6}{7!}z^3+\dots\right).
\end{aligned}$$

Entendiendo el término a la izquierda de la igualdad como $\left(1+\alpha z\right)\left(1+\beta z\right)\left(1+\gamma z\right)\left(1+\delta z\right)\dots$ y el término de la derecha como $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots$, tenemos que

$$A = \frac{\pi^2}{6}, \quad B = \frac{\pi^4}{120}, \quad C = \frac{\pi^6}{5040}, \quad D = \frac{\pi^8}{362880}, \quad \dots .$$

Por tanto, si tomamos

$$
\begin{aligned}
P &= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\dots,\\
Q &= 1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{36^2}+\dots,\\
R &= 1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{36^3}+\dots,\\
S &= 1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{36^4}+\dots,\\
T &= 1+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{9^5}+\frac{1}{16^5}+\frac{1}{25^5}+\frac{1}{36^5}+\dots,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

y calculamos los valores de estas letras en función de $A, B, C, D, \dots$. Según la fórmula (2.2), Euler llega a que

$$P=\frac{\pi^2}{6},\quad Q=\frac{\pi^4}{90},\quad R=\frac{\pi^6}{945},\quad S=\frac{\pi^8}{9450},\quad T=\frac{\pi^{10}}{93555},\dots.$$

Euler siguió en la *Introductio* hasta la serie

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\cdots=\frac{2^{24}}{27!}76977927\pi^{26}.$$

2.3 La suma de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$, $\quad k \geq 1$.

En la *Introductio*, Euler no dio con la fórmula general para las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}, \tag{2.3}$$

aunque estuvo muy cerca como ahora se comentará.

Las series (2.3) fueron un tema recurrente al que Euler volvió una y otra vez; aparte de lo hecho en la *Introductio*, trató el problema en la *Institutiones calculi differentialis* y en varias ocasiones más. Concretamente en la *Institutiones calculi differentialis*, Euler encontró, tras calcular el valor de las sumas para los primeros valores, la fórmula general para las series (2.3) en términos de los números de Bernoulli. De hecho, en la *Introductio* tuvo todo el material necesario para hacer este cálculo, pero no llego a hacerlo. En efecto, usando un método parecido a lo explicado antes para encontrar la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ usando la factorización del seno en producto infinito, Euler encontró la suma de la siguiente serie [5, p. 186]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{1}{2a^2}. \tag{2.4}$$

La función anterior conviene escribirla de una forma mas conveniente como

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \frac{e^{-\pi a} + e^{-\pi a} - e^{-\pi a} + e^{\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} &= \frac{-1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \frac{2e^{-\pi a} + e^{\pi a} - e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \\
&= \frac{-1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \left(\frac{2e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} + 1 \right) \\
&= -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2a} \frac{\pi 2 e^{-\pi a} e^{\pi a}}{(e^{\pi a} - e^{-\pi a}) e^{\pi a}} \\
&= -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2a^2} \frac{2\pi a}{e^{2\pi a} - 1}.
\end{aligned}$$

De forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2a^2} \frac{2\pi a}{e^{2\pi a} - 1}. \tag{2.5}$$

Necesitaremos ahora considerar los números de Bernoulli. Se definen como los coeficientes del desarrollo en series de potencias de la función $\frac{z}{e^z - 1}$.

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}, \qquad B_k \overset{\text{def}}{=} \text{k-ésimo nº de Bernoulli.} \tag{2.6}$$

Los números de Bernoulli verifican la siguiente recurrencia: Para $n = 0$,

$$B_0 = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{e^z} = 1. \tag{2.7}$$

Para $n \geq 1$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

Luego

$$B_n = \frac{-1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k. \tag{2.8}$$

La demostración sigue fácilmente del desarrollo en serie de $e^z - 1$:

$$\begin{aligned} z = (e^z - 1) \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!}. \end{aligned}$$

Usando la recurrencia se pueden calcular los primeros números de Bernoulli:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0.$$

Demostraremos ahora que $B_{2k+1} = 0, k \geq 1$. Considerando la función $\dfrac{z}{e^z - 1} + \dfrac{z}{2} - 1$, que es una función par, podemos observar que -1 y $\frac{z}{2}$ son, cambiados de signo, los dos primeros términos del desarrollo (2.6). Luego tenemos:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}.$$

El término izquierdo de la ecuación es una función par, luego la serie de potencias solo puede tener potencias pares de la variable. Por tanto, $B_{2k+1} = 0, k \geq 1$.

Aplicando ahora la definición dada en (2.6) en la serie (2.5), tomando $z = 2\pi a$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2a^2} \frac{2\pi a}{e^{2\pi a} - 1} \\ &= -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2a^2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2\pi a)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $B_0 = 1$ y $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{(2\pi a)^k}{k!}.$$

Como $B_{2k+1} = 0, k \geq 1$, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{(2\pi)^{2k} a^{2k-2}}{(2k)!}. \tag{2.9}$$

Por otro lado, tomando $|a| < 1$ y usando la serie geométrica, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{n^2(1 + \frac{a^2}{n^2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{n^{2k}}.$$

Podemos intercambiar el orden de suma en la ecuación anterior debido al Teorema de Fubini, ya que todas las series involucradas convergen absolutamente. Esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) (-1)^k a^{2k}. \tag{2.10}$$

De esta forma hemos conseguido sumar las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}}$. Igualando (2.9) y (2.10):

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{(2\pi)^{2k} a^{2k-2}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) (-1)^k a^{2k}.$$

De manera que, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} = \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k+2}}{2(2k+2)!} B_{2k+2}. \tag{2.11}$$

2.4 Cálculo de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ usando residuos

Los argumentos utilizados por Euler en la *Introductio*, sobre todo los usados en la sección 2.1 para el desarrollo del seno en producto infinito, están basadas en el uso de las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Su justificación lógica requiere del análisis no estándar desarrollado por Abraham Robinson en la década de los 60 del siglo XX [9], lo que queda muy lejos del propósito de este trabajo. Por tanto, vamos a presentar una justificación estándar de la suma (2.4) usando cálculo de residuos. De esta forma, la fórmula (2.11), quedaría así justificada en los términos rigurosos exigidos hoy en día.

Vamos a considerar la serie (2.4) en todos los números enteros:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}, \qquad a > 0. \tag{2.12}$$

Buscamos ahora una funcíon con polos en los números enteros y cuyos residuos sean los sumandos de la serie (2.12).

Sea entonces

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

f es una función holomorfa en todo el plano complejo menos en los puntos donde se anula el seno (todos los enteros) y en las raíces de $\frac{1}{z^2+a^2}$, que son $\pm ai$. Todos estos son polos simples de f, luego calculando el residuo en $z = n \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Resid}(f; n) &= \lim_{z \to n} \frac{(z-n)\cos(\pi z)}{(z^2 + a^2)\operatorname{sen}(\pi z)} = \lim_{z \to n} \frac{(z-n)}{sen(\pi z)} \lim_{z \to n} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2 + a^2)} \\
&= \lim_{z \to n} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} \frac{\cos(\pi n)}{n^2 + a^2} = \frac{1}{\pi \cos(\pi n)} \frac{\cos(\pi n)}{n^2 + a^2} \\
&= \frac{1}{\pi(n^2 + a^2)},
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la regla de L'Hôpital al primer límite que produce la indeterminación. Procedemos de la misma manera en los otros dos polos:

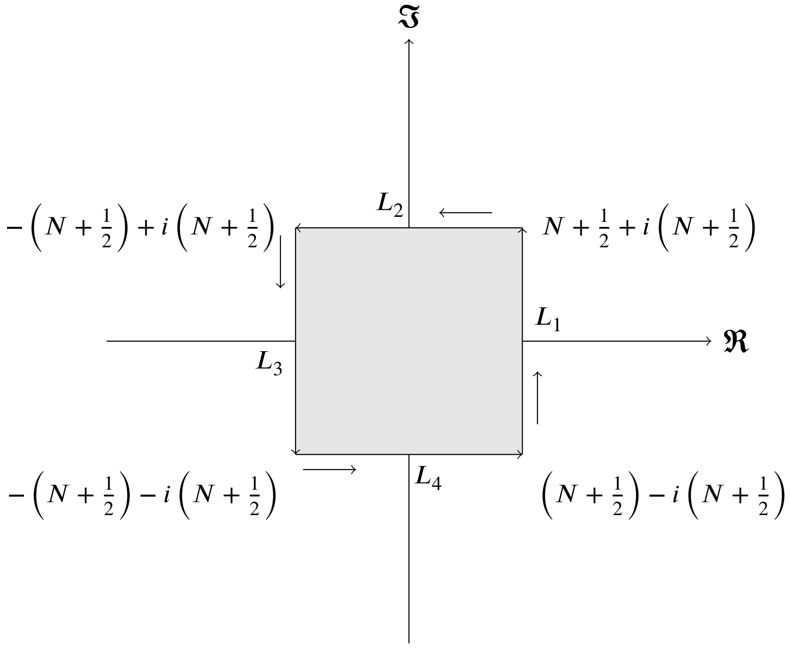
$$\begin{aligned}
\operatorname{Resid}(f; ai) &= \lim_{z \to ai} \frac{(z-ai)\cos(\pi z)}{(z^2 + a^2)\operatorname{sen}(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to ai} \frac{(z-ai)\cos(\pi z)}{(z-ai)(z+ai)\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{1}{2ai} \frac{\cos(\pi ai)}{\operatorname{sen}(\pi ai)} \\
&= \frac{1}{2ai} \frac{2i(e^{i\pi ai} + e^{-i\pi ai})}{2(e^{i\pi ai} - e^{-i\pi ai})} = \frac{1}{2a} \frac{e^{-\pi a} + e^{\pi a}}{e^{-\pi a} - e^{\pi a}}.
\end{aligned}$$

La expresión final resulta de la expresion exponencial para el seno y el coseno.

Análogamente:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Resid}(f; -ai) &= \lim_{z \to -ai} \frac{(z+ai)\cos(\pi z)}{(z^2+a^2)\operatorname{sen}(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to -ai} \frac{(z+ai)\cos(\pi z)}{(z-ai)(z+ai)\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{1}{-2ai}\frac{\cos(-\pi ai)}{\operatorname{sen}(-\pi ai)} \\
&= \frac{1}{-2ai}\frac{2i(e^{-i\pi ai}+e^{i\pi ai})}{2(e^{-i\pi ai}-e^{i\pi ai}} = \frac{1}{2a}\frac{e^{-\pi a}+e^{\pi a}}{e^{-\pi a}-e^{\pi a}}.
\end{aligned}
$$

El camino de integración que tomaremos será un cuadrado, simétrico respecto al origen y con lados paralelos a los ejes, cuyos cortes con el eje real sean $N+\frac{1}{2}$ y $N-\frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{N}$, evitando así los polos de la función f, tal y como muestra la figura a continuación:



Trabajaremos en todo el plano complejo. f es una función meromorfa, i.e, es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ menos en los polos de la función. Además, Γ_N es un camino cerrado, con orientación positiva, que no pasa por ningún polo de f, luego se cumplen las hipótesis del teorema de los residuos [6, páginas 129-134]. Aplicando el teorema:

$$\oint_{\Gamma_N} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\le N}} \mathrm{Res}(f;n) + \mathrm{Res}(f;\pm ai)\right). \tag{2.13}$$

Consideremos que $N \to +\infty$. En ese caso, tendríamos, usando los residuos calculados anteriormente, que el lado derecho de la ecuación (2.13) tiende a:

$$2\pi i\left(\frac{1}{a}\frac{e^{-\pi a}+e^{\pi a}}{e^{-\pi a}-e^{\pi a}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}\right). \tag{2.14}$$

Demostremos ahora que el lado izquierdo de la ecuación (2.13) converge a 0 cuando $N \to +\infty$. Recordemos que:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}\frac{\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)}.$$

Tomando $z = x+iy$, acotaremos tanto $\mathrm{sen}(z)$ como $\cos(z)$ haciendo uso de la fórmula de Euler:

$$|\,\mathrm{sen}(z)| = \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| \ge \frac{|e^{iz}|-|e^{-iz}|}{2} = \frac{|e^{y}-e^{-y}|}{2} = |\,\mathrm{senh}(y)|.$$

$$\begin{aligned}|\cos z| &= \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right| = \left|\frac{e^{-y}(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x) + e^{y}(\cos x - i\,\mathrm{sen}\,x)}{2}\right| \\ &= \left|\frac{\cos x(e^{-y}+e^{y})}{2} + i\,\mathrm{sen}\,x\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right| \le |\cos x\cosh y| + |\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{senh}\,y|.\end{aligned}$$

Vamos a acotar ahora la función f en el cuadrado que tomamos como camino de integración previamente. Empezaremos por los lados verticales:

Sea $z = \pm\left(N+\frac{1}{2}\right) + iy$, $|y| \le N+\frac{1}{2}$. Observemos que en este caso, el valor de x permanece constante en $x = N+\frac{1}{2}$ y por tanto, $\cos(\pi x) = 0$:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+a^2|}\frac{|\cos(\pi z)|}{|\mathrm{sen}(\pi z)|},$$

donde $z \in \Gamma_N$ y $|z| \geq N + \frac{1}{2}$, pues, tomando la circunferencia de centro el origen y radio $N + \frac{1}{2}$, ésta siempre estará dentro del cuadrado, siendo tangente a los puntos medios de sus lados. Luego en el cuadrado, el módulo de z será mayor que el radio de dicha circunferencia. Podemos acotar de la siguiente manera:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + a^2|} \frac{|\cos(\pi z)|}{|\mathrm{sen}(\pi z)|} \leq \frac{c}{|z^2|} \frac{|\cos(\pi x)\cosh(\pi y)| + |\mathrm{sen}(\pi x)\,\mathrm{senh}(\pi y)|}{|\mathrm{senh}(\pi y)|},$$

siendo c una constante. Simplificando, teniendo en cuenta que $\cos(\pi x) = 0$:

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^2} |\mathrm{sen}(\pi x)| \leq \frac{c}{|z|^2} \leq \frac{c}{\left(N + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Acotando la integral en los lados verticales, $i = 1, 3$, tenemos

$$\left| \int_{L_i} f(z) dz \right| \leq \frac{c}{\left(N + \frac{1}{2}\right)^2} \mathrm{long}(L_i) = \frac{2c\left(N + \frac{1}{2}\right)}{\left(N + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2c}{N + \frac{1}{2}}.$$

Tomando límite:

$$\lim_{N \to +\infty} \left| \int_{L_i} f(z) dz \right| = 0, \quad i = 1, 3. \tag{2.15}$$

Procedamos ahora con los lados horizontales del cuadrado. En este caso, $z = x \pm i\left(N + \frac{1}{2}\right)$ y $|x| \leq N + \frac{1}{2}$. Entonces

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + a^2|} \frac{|\cos(\pi z)|}{|\mathrm{sen}(\pi z)|} \leq \frac{c}{|z|^2} \frac{|\cos(\pi x)\cosh(\pi y)| + |\mathrm{sen}(\pi x)\,\mathrm{senh}(\pi y)|}{|\mathrm{senh}\, \pi y|}.$$

Al ser $x = \mathrm{Re}(z)$, podemos acotar $\mathrm{sen}(\pi x)$ y $\cos(\pi x)$ por 1.

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{c}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\frac{|\cosh(\pi y)|+|\operatorname{senh}(\pi y)|}{|\operatorname{senh}\pi y|} = \frac{c}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\left(1+\frac{|\cosh(\pi y)|}{|\operatorname{senh}\pi y|}\right) \\
&= \frac{c}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\left(1+\frac{|e^{\pi y}+e^{-\pi y}|}{|e^{\pi y}-e^{-\pi y}|}\right) = \frac{c}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\left(1+\frac{e^{\pi y}|1+e^{-2\pi y}|}{e^{\pi y}|1-e^{-2\pi y}|}\right) \\
&= \frac{c}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\left(1+\frac{|1+e^{-2\pi y}|}{|1-e^{-2\pi y}|}\right) \leq \frac{3c}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Donde en la desigualdad hemos acotado para un N lo suficientemente grande. Acotando la integral en los lados verticales, $i = 2, 4$, se tiene

$$
\left|\int_{L_i} f(z)dz\right| \leq \frac{3c}{(N+\frac{1}{2})^2}\operatorname{long}(L_i) = \frac{6c(N+\frac{1}{2})}{(N+\frac{1}{2})^2} = \frac{6c}{N+\frac{1}{2}}.
$$

Aplicando límite

$$
\lim_{N\to+\infty}\left|\int_{L_i} f(z)dz\right| = 0, \quad i = 2, 4. \tag{2.16}
$$

De (2.14) y (2.15) tenemos:

$$
\lim_{N\to+\infty}\oint_{\Gamma_N} f(z)\,dz = 0. \tag{2.17}
$$

Volviendo ahora a la ecuación (2.13), habiendo considerado ya que $N \to +\infty$ y atendiendo a (2.17) y (2.14), deducimos

$$
2\pi i\left(\frac{1}{a}\frac{e^{-\pi a}+e^{\pi a}}{e^{-\pi a}-e^{\pi a}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}\right) = 0.
$$

De donde se deduce

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)} = \frac{1}{a}\frac{e^{-\pi a}+e^{\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}},
$$

y entonces

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{e^{-\pi a}+e^{\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}.
$$

Recordemos que el objetivo principal de esta sección era sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$. Agrupando entonces los sumandos correspondientes a n y $-n$, tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}.$$

De donde deducimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{-1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\frac{e^{-\pi a}+e^{\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}. \tag{2.18}$$

3 El problema de Basilea mediante la expresión integral para el arcoseno

Como se comentó anteriormente, Euler trató recurrentemente el tema de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Aquí demostraremos el cálculo que hizo usando la expresión integral para el arcoseno. Seguiremos como referencia [2, páginas 114-117].

Como curiosidad histórica, este resultado fue encontrado en el siglo XIX, ya habiendo fallecido Euler, en un artículo sin autoría publicado por una revista holandesa. Quien lo redescubrió fue ni más ni menos que Gauss, quien buscando otro artículo diferente, dio con este, titulado *Demonstration de la somme de cette suite* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$ [5, páginas 169-170]. Es en relación con este artículo que Gauss escribió la siguiente cita, tras copiar el artículo de su puño y letra: «el estudio de todos los trabajos de Euler es la mejor e insustituible escuela para los distintos campos matemáticos».

Necesitaremos de tres resultados previos que demostraremos a continuación.

A. Demostrar la igualdad

$$\frac{1}{2}\big(\operatorname{arc\,sen} x\big)^2 = \int_0^x \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{\sqrt{1-t^2}}dt;$$

Efectuando el cambio de variable $u = \operatorname{arc\,sen} t$ y por tanto, $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, tenemos que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x u\, du = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^x.$$

Deshaciendo el cambio de variable, nos queda:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2}\big(\operatorname{arc\,sen} t\big)^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}\big(\operatorname{arc\,sen} x\big)^2.$$

B. Realizar el desarrollo en serie de arc sen x;

Hemos de recordar dos nociones elementales. En primer lugar, que

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \big(1-t^2\big)^{\frac{-1}{2}} dt$$

y finalmente la serie binomial:

La serie binomial es la serie de Taylor para una función f dada por $f(x) = \big(1+x\big)^\alpha$, con α un número complejo arbitrario. Escrito de manera explícita, esto es

$$\big(1+x\big)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

con $|x| < 1$.

Tomando así, $\alpha = \frac{-1}{2}$, $x = -t^2$ e integrando término a término, obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sen} x &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}t^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}t^8 + \dots\right) dt \\ &= t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t^9}{9} + \dots\Big|_0^x \\ &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9} + \dots. \end{aligned}$$

C. Demostrar la igualdad

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Llamemos
$$J = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$
Aplicando integración por partes, con $u = t^{n+1}$ y $dv = \dfrac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} J &= \left(-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}\right)\Big|_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt \\ &= 0 + (n+1)\int_0^1 \frac{t^n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt = (n+1)\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt - (n+1)J. \end{aligned}$$

Por tanto,
$$(n+2)J = (n+1)\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$$
y finalmente llegamos a la relación deseada:
$$J = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Una vez demostrados dichos resultados, estamos en disposición de reproducir el razonamiento de Euler para demostrar
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}.$$
En **A**, tomemos x de manera que $\operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2}$. Es decir, tomemos $x = 1$, donde obtendremos:
$$\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen} 1)^2 = \frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
Posteriormente, sustituimos $\operatorname{arc\,sen} t$ por el desarollo en serie obtenido en **B** e integramos término a término:
$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} = &\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}dt + \\ &+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\int_0^1 \frac{t^7}{\sqrt{1-t^2}}dt + \dots \end{aligned}$$

Resolvamos ahora cada una de esas integrales. Empecemos por $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ utilizando el cambio de variable $u = 1 - t^2$, de manera que $tdt = -\frac{1}{2}du$. Así:

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^1 \frac{-du}{2\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int_0^1 u^{-1/2}du = -\frac{1}{2}2\sqrt{u}\Big|_0^1 = -\sqrt{u}\Big|_0^1.$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\sqrt{1-t^2}\Big|_0^1 = -(0-1) = 1.$$

Para el resto de integrales podemos aplicar la fórmula de **C** para los n impares. Así, para $n = 1$ tenemos

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{2}{3}.$$

Para $n = 3$ obtenemos

$$\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{4}{5}\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

Para $n = 5$:

$$\int_0^1 \frac{t^7}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{6}{7}\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

Y así sucesivamente. Por tanto, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{2\cdot 3}\left[\frac{2}{3}\right] + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right] + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\right] + \ldots\\ &= 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots.\end{aligned}$$

Salta a primera vista que en esta expresión aparecen sólo los inversos de los cuadrados de los números impares.

Para calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, el razonamiento de Euler es el siguiente: separando $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ en dos, para los n pares e impares, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots\right] \\
&= \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\right] + \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots\right] \\
&= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

y finalmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4 Otro cálculo de $\zeta(2k)$.

Euler fue el primero que estableció la relación de la función

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re s > 1, \tag{4.1}$$

con los números primos, mediante la expresión en producto infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p,\ p \text{ primo}} \frac{1}{1 - 1/p^s}, \quad \Re s > 1,$$

[5, p. 273-274]. Euler, además, encontró (heurísticamente) su ecuación funcional.

Sin embargo, esa función lleva el nombre de Riemann; la función zeta de Riemann más concretamente. Siguiendo a Riemann, la denotamos por $\zeta(s)$, es holomorfa en todo el plano complejo salvo un polo simple en $s = 1$, y coincide en el semiplano $\Re s > 1$ con la serie (4.1).

Y esa función lleva el nombre de Riemann con todo merecimiento, ya que fue Riemann quien hizo la prolongación analítica de $\zeta(s)$ al plano complejo, además de mostrar la fuerte implicación que tienen los ceros no triviales de dicha función en la distribución de los números primos. Riemann, además, formuló el problema posiblemente más interesante que hoy enfrentan las matemáticas: la llamada *hipótesis de Riemann*, que establece que los ceros no triviales de la función zeta están todos en las recta $\Re s = 1/2$.

Dado que la notación $\zeta(s)$ y la nomenclatura son posteriores a Euler, hemos evitado usar ambas en los capítulos anteriores de este trabajo, donde de una u otra forma, reproducimos la argumentación original de Euler. Sin embargo, en este capítulo final sí que usaremos el nombre de función zeta de Riemann y su notación, dado que el propósito es mostrar otra forma de calcular $\zeta(2k)$, $k \geq 1$, usando argumentos hechos en la presente década, concretamente seguiremos [10].

Estos argumentos solo involucran cálculo básico de una variable, polinomios de Bernoulli y el uso de una serie telescópica.

Empezaremos definiendo los polinomios de Bernoulli $B_k(t)$, $k \geq 1$.

4.1 Polinomios de Bernoulli

De manera similiar al procedimiento hecho en el capítulo 3 para introducir los números de Bernoulli, usamos la función generatriz

$$\frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\frac{x^k}{k!}. \tag{4.2}$$

Usando (4.2), los polinomios $B_k(t)$ se pueden definir de manera recursiva; como el cálculo es parecido a lo hecho en el capítulo anterior para los números de Bernoulli, no lo detallamos: basta tener en cuenta que (4.2) da

$$xe^{xt} = \left(e^x - 1\right)\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\frac{x^k}{k!},$$

de donde usando la serie para la exponencial se obtiene $B_0(t) = 1$ y para $m \geq 1$

$$B_m(t) = t^m - \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k(t).$$

Podemos destacar que

$$B_0(t) = 1, \quad B_k'(t) = kB_{k-1}(t) \quad \text{para} \quad k \geq 1. \tag{4.3}$$

Los primeros polinomios de Bernoulli son

$$B_0(t) = 1, \quad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \quad B_2(t) = t^2 - t - \frac{1}{6}.$$

Además, haciendo $t = 0$ en (4.2), tenemos

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k\geq 2}^{\infty} B_k(0)\frac{x^k}{k!}.$$

Por otro lado, si hacemos $t = 1$ en (4.3), sigue que

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k\geq 2}^{\infty} B_k(1)\frac{x^k}{k!}.$$

Restando, se obtiene

$$\sum_{k\geq 2}^{\infty} \left(B_k(0) - B_k(1)\right)\frac{x^k}{k!} = \frac{x}{e^x - 1}\left[1 - e^x\right] + x = 0.$$

Por tanto,

$$B_k(0) = B_k(1) \quad k \geq 2. \tag{4.4}$$

Además,

$$\int_0^1 B_k(t)dt = 0, \quad \text{para} \quad k \geq 1, \tag{4.5}$$

pues efectivamente, usando (4.4) tenemos

$$\int_0^1 B_k(t)dt = \frac{1}{k+1}\left[B_{k+1}(1) - B_{k+1}(0)\right] = 0.$$

Los números de Bernoulli son los valores $B_k = B_k(0)$, y debido a la relación de simetría (que se deduce fácilmente de (4.2)),

$$B_k(1 - t) = (-1)^k B_k(t), \quad \text{para} \quad k \geq 0,$$

obtenemos que

$$B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = B_{2k}, \quad \text{para } k \geq 0,$$

$$B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0, \quad \text{para } k \geq 1, \tag{4.6}$$

(tal y como vimos en el capítulo 3).

Para el cálculo de $\zeta(2k)$, consideremos la integral auxiliar

$$I(k,m) = \int_0^1 B_{2k}(t)\cos(m\pi t)dt, \quad \text{para } k \geq 0 \text{ y } m \geq 1.$$

Podemos observar que, para $k = 0$

$$I(0,m) = \int_0^1 \cos(m\pi t)dt = \frac{\operatorname{sen}(\pi m)}{\pi m} = 0, \quad m \geq 1.$$

Para $k \geq 1$, integrando por partes dos veces y aplicando (4.3), obtenemos

$$\begin{aligned} I(k,m) &= \frac{1}{m\pi}[B_{2k}(t)\operatorname{sen}(m\pi t)]_{t=1}^{t=0} - \frac{2k}{m\pi}\int_0^1 B_{2k-1}(t)\operatorname{sen}(m\pi t)dt \\ &= \frac{2k}{m^2\pi^2}[B_{2k-1}(t)\cos(m\pi t)]_{t=1}^{t=0} - \frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2}I(k-1,m). \end{aligned}$$

Considerando el caso $k = 1$,

$$I(1,m) = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})\cos(m\pi t)dt = \begin{cases} 0, & m = 1,3,5,\dots, \\ \frac{2}{m^2\pi^2}, & m = 2,4,6,\dots, \end{cases}$$

y, de (4.6), obtenemos la relación de recurrencia

$$I(k,m) = -\frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2}I(k-1,m), \quad \text{para } k \geq 2.$$

De esta recurrencia se obtiene fácilmente la fórmula

$$I(k,m) = \begin{cases} 0, & m = 1,3,5,\dots \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{m^{2k}\pi^{2k}}, & m = 2,4,6,\dots \end{cases} \tag{4.7}$$

Consideremos ahora $B_k^*(t) = B_k(t) - B_k(0) = B_k(t) - B_k$, i.e., el polinomio de Bernoulli menos su término constante. La integral asociada

$$\begin{aligned} I^*(k,m) &= \int_0^1 B_{2k}^*(t) cos(m\pi t) dt \\ &= \int_0^1 (B_{2k}(t) - B_{2k}) cos(m\pi t) dt \end{aligned}$$

es igual a $I(k,m)$, pues $\int_0^1 cos(m\pi t)dt = 0$ para $m \geq 0$. Fijando $k \geq 1$ y sumando (4.7) sobre m, llegamos al resultado

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\zeta(2k) &= \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{\pi^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2k}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} I(k,m) = \sum_{m=1}^{\infty} I^*(k,m). \end{aligned}$$

A continuación, haremos uso de la identidad trigonométrica

$$\cos(mx) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2m+1}{2}x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2m-1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}. \tag{4.8}$$

Con la introducción de esta expresión, tenemos una serie telescópica que da lugar a

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\zeta(2k) &= \sum_{m=1}^{\infty} I^*(k,m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 B_{2k}^*(t) cos(m\pi t) dt \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \left(\int_0^1 B_{2k}^*(t) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2m+1}{2}\pi t\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)} dt - \int_0^1 B_{2k}^*(t) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2m-1}{2}\pi t\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)} dt \right) \\ &= \left(\lim_{N\to\infty} \int_0^1 B_{2k}^*(t) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2N+1}{2}\pi t\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)} dt \right) - \frac{1}{2}\int_0^1 B_{2k}^*(t) dt. \end{aligned}$$

Observamos, de (4.5), que el valor del segundo término es

$$\frac{1}{2}\int_0^1 B_{2k}^*(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (B_{2k}(t) - B_{2k})dt = -\frac{B_{2k}}{2}.$$

Veamos ahora que el límite del primer término es 0. Definamos la función

$$f(t) = \frac{B_{2k}^*(t)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}, \qquad \text{para } t \in (0,1].$$

$f(t)$ se extiende por continuidad hasta t=0, ya que $B_{2k}^*(0) = 0$. Este es el motivo por el que, previamente, restamos el término constante. Además, $f(t)$ es diferenciable en $[0,1]$ con derivada continua. Denotando $\dfrac{(2N+1)\pi}{2}$ por R e integrando por partes obtenemos

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sen}(Rt)dt = -\frac{\cos(R)}{R}f(1) + \frac{1}{R}f(0) + \int_0^1 f'(t)\frac{\cos(Rt)}{R}dt.$$

La acotación de $f'(t)$ indica que cada término en la suma anterior tiende a 0 cuando $R \longrightarrow \infty$, luego el límite tiende a 0. Consecuentemente,

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\zeta(2k) = \frac{B_{2k}}{2}.$$

Reagrupando términos,

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}.$$

4.2 Serie de Fourier para los polinomios de Bernoulli

Los cálculos anteriores están obviamente muy relacionados con el cálculo de las series de Fourier para los polinomios de Bernoulli en $[0,1]$ (un resultado obtenido por A. Hurwtiz en 1890). Para hacer más completo este trabajo, calcularemos los desarrollos en senos y cosenos para los polinomios de Bernoulli.

Como hemos visto anteriormente, $B_1(t) = t - \dfrac{1}{2}$ y $B_n(1) = B_n(0), \quad n \geq 2.$

Las series de Fourier de $B_n(x)$ son de la forma $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k} e^{2\pi ikt}$, con

$$a_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) e^{-2\pi ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Calculando directamente, para $n = 0$, tenemos

$$a_{0,k} = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad k \neq 0, \\ 1 & \text{cuando} \quad k = 0. \end{cases}$$

Mientras que cuando $n \neq 0$, $k = 0$, tenemos que $a_{n,0} = 0$.

Por otro lado, si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \int_0^1 B_n(t) e^{-2\pi ikt} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi ik} \Big[B_n(t) e^{-2\pi ikt} \Big]_0^1 + \frac{1}{2\pi ik} \int_0^1 n B_{n-1}(t) e^{-2\pi ikt} dt. \end{aligned}$$

Si $n = 1$ y $k \neq 0$, tenemos

$$a_{1,k} = -\frac{1}{2\pi ik}.$$

Para $n \geq 2$, $k \neq 0$, usando (4.4), se tiene

$$a_{n,k} = \frac{n}{2\pi ik} a_{n-1,k}.$$

Procediendo repetidamente y utilizando la expresion anterior, tenemos

$$a_{n,k} = -(-i)^n \frac{n!}{(2\pi k)^n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}+1} \dfrac{n!}{(2\pi k)^n} & n \geq 1 \quad \text{par}, \\ -(-1)^{\frac{n+1}{2}} \dfrac{n!}{(2\pi k)^n} i & n \geq 1 \quad \text{impar}, \\ 1 & n = 0, \quad k = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, si k es par, es mejor escribir el desarrollo de Fourier en $\cos 2\pi nt$, mientras que para k impar es preferible escribirlo en $\operatorname{sen} 2\pi nt$. Para ello, emparejamos los coeficientes de k y $-k$ obteniendo los términos del coseno con un factor de 2 para los pares y los términos del seno con un factor de -2 para los impares, llegando así a las series de Fourier

$$\frac{(-1)^{m+1}(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nt)}{n^{2m}}$$

para $B_{2m}(t)$, con $t \in [0,1]$, y

$$\frac{(-1)^{m+1}(2m-1)!}{2^{2m-2}\pi^{2m-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi nt)}{n^{2m-1}},$$

para B_{2m-1}, con $t \in [0,1]$.

La convergencia es uniforme en $[0,1]$ para $k \geq 2$, y uniforme en compactos de $(0,1)$ para $k \geq 1$. Aquí no demostraremos que los polinomios de Bernoulli B_k coinciden con la suma de su serie de Fourier, en $[0,1]$ para $k \geq 2$ y en $(0,1)$ para $k = 1$, o sea

$$B_{2m}(t) = \frac{(-1)^{m+1}(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nt)}{n^{2m}}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$B_{2m-1} = \frac{(-1)^{m+1}(2m-1)!}{2^{2m-2}\pi^{2m-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi nt)}{n^{2m-1}}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Evaluando en $t = 0$ la serie de $B_{2m}(t)$ se obtiene la expresión de $\zeta(2k)$ en términos de los números de Bernoulli. La ventaja de lo hecho en la sección anterior es que se obtiene esta expresión de forma más elemental.

Bibliografía

[1] E. de Amo , M. Díaz Carrillo y J. Fernández-Sánchez, *Another proof of euler's formula for* $\zeta(2k)$, Prooceedings of the American Mathematical Society **139** (2011), 1441–1444.

[2] W. Dunham, *Euler. el maestro de todos los matemáticos*, Nivola, Madrid, 2000.

[3] A. J. Durán, *Euler y los infinitos* , en [5], p. xli-liii, Sevilla.

[4] A.J. Durán, *Crónicas matemáticas.*, Crítica, Barcelona, 2017.

[5] L. Euler, *Introducción al análisis de los infinitos*, Edición de A. J. Durán y F.J. Pérez, SAEM 'Thales' y Real Sociedad Matemática Española, 2000.

[6] K. Knopp, *Theory of functions*, Dover publications, Nueva York, 1945.

[7] J. Ordóñez, *El siglo de Euler* , en [5], p. vii-xxiv.

[8] M. Martínez Pérez, *La vida y obra de euler* , en [5], p. xxv-xl, 2000.

[9] A. Robinson, *Non-standard analysis*, North Holland, Amsterdam, 1966.

[10] O. Ciaurri , L.M. Navas , F.J. Ruiz y J.L. Varona, *A simple computation of* $\zeta(2k)$, American Mathematical Monthly **122** (2015), 444–450.