

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas



Grado en Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Visión Histórica de las Superficies Mínimas

Realizado por **Victoriano León Márquez**

Sevilla, Octubre de 2023

Índice general

Resumen	1
Abstract	2
Introducción	3
Preliminares	6
0.1. Geometría Diferencial	6
0.2. Variable Compleja	19
0.3. Operadores de Beltrami	22
1. Caracterizaciones de Superficies Minimales	32
1.1. Primera derivada del funcional área	33
1.2. Superficies minimales no paramétricas	38
1.3. Definición general de superficie minimal	47
2. Fórmulas de Representación de Superficies Minimales	55
2.1. Curvas isotrópicas y superficies adjuntas	55
2.2. Fórmulas de representación	62
3. Ejemplos	67
Catenoide y helicoide	67
Superficie de Enneper	70

Primera superficie de Scherk	71
Superficie de Henneberg	73
Superficie de Catalan	74
Bibliografía	78

Resumen

Uno de los más interesantes tipos de superficies estudiados en Geometría son las superficies mínimas o minimales, que son aquellas con curvatura media nula en todos sus puntos. En este trabajo trataremos de formalizar algunas de las herramientas empleadas en el estudio de estas superficies y daremos una visión global de como esta teoría matemática se ha ido desarrollando en su etapa "clásica" a lo largo de los siglos XVIII y XIX.

Abstract

One of the most interesting kinds of surfaces studied in Geometry are the minimal surfaces, which are those with zero mean curvature at all points. In this study we will try to formalise some of the tools used in the research of these surfaces and we will give a global view of the development of this mathematical theory in its "classic" stage throughout the eighteenth and nineteenth centuries.

Introducción

Dada una curva cerrada en el espacio euclídeo de tres dimensiones, ¿cuál es la superficie de menor área que tiene como frontera dicha curva? Esta es la pregunta que, en 1762, Joseph Louis Lagrange quiso responder a modo de ejemplo para ilustrar su recién creado método de cálculo simbólico para el Cálculo de Variaciones. Como analista acérrimo de la época, Lagrange no estaba interesando en ejemplos concretos ni mucho menos en la geometría como disciplina, por ello su respuesta a dicha cuestión fue, simplemente, que tal superficie debía satisfacer la hoy conocida como *ecuación de Euler-Lagrange*. Sin embargo, con esta conclusión dio origen a una de las cuestiones que más interés ha suscitado en los geómetras desde entonces y, que en gran medida, se basa en la búsqueda de ejemplos de este tipo de superficies. Años después, en 1776, Meusnier dedujo que el hecho de que una superficie cumpliera tal condición era equivalente a que la superficie tuviera curvatura media idénticamente nula, condición que desde hace años es fundamental para la definición de las *superficies minimales* o *mínimas*. Meusnier también halló los primeros ejemplos (propios) de superficies minimales: el helicoides y el catenoide. En la segunda mitad del siglo XIX, tras años sin la aparición de nuevos ejemplos, algunos de los grandes matemáticos de la época centraron sus esfuerzos en el desarrollo de fórmulas que permitieran descubrir nuevas superficies minimales mediante la integración de funciones de variable compleja. Estas son las conocidas como *fórmulas de representación* y las más relevantes de este periodo se las debemos a Enneper y Weierstrass. Tras la aparición de estas fórmulas y la popularización del uso de la variable compleja, fueron encontradas muchas otras superficies minimales y, al mismo tiempo, se hicieron nuevos avances en el estudio de sus propiedades, como las caracterizaciones halladas por Beltrami o las superficies asociadas definidas por Bonnet.

Nuestro objetivo es dar una visión general de cómo se desarrolló la teoría de superficies mínimas a lo largo de los siglos XVIII y XIX, resaltando los avances más significativos y empleando las mismas ideas y métodos seguidos por sus auto-

res originales. Para la elaboración de este texto nos hemos basado principalmente en la primera parte del libro [3]. Las fuentes empleadas en cada capítulo y sección son mencionadas al comienzo de éstos.

Para comenzar, el Capítulo de Preliminares consta de dos partes: En la primera parte, compuesta por las Secciones 0.1 y 0.2, se recuerdan las nociones y resultados de las asignaturas del grado que son empleadas posteriormente. Por ello, los teoremas y proposiciones son expuestos sin demostraciones pero con referencias de los libros en las que pueden encontrarse. La Sección 0.1 versa sobre el contenido de las asignaturas de Geometría Local de Curvas y Superficies, Geometría Aplicada y Variedades Diferenciables. En la Sección 0.2 se trata el contenido de las asignaturas de Funciones de Variable Compleja y Variable Compleja. La segunda parte está constituida por la Sección 0.3. En ella damos una definición alternativa de la *derivada covariante* estudiada en la asignatura de Geometría y Topología de Superficies. En base a ello, introducimos los *Operadores de Beltrami* junto con resultados que no forman parte del itinerario del grado. Por ello, los teoremas y proposiciones son presentados con sus correspondientes pruebas a pesar de estar incluidos en el capítulo preliminar.

En el Capítulo 1 exponemos distintas definiciones y caracterizaciones de las superficies minimales resaltando algunas de sus propiedades más notables. Adaptamos las pruebas originales de los resultados sin perder la esencia e ideas seguidas por sus autores, acompañando este contenido con notas históricas sobre los inicios de esta teoría. Para empezar, damos una primera definición de las superficies minimales como superficies regulares con curvatura media nula en todos sus puntos, que corresponden a los máximos o mínimos del funcional área de una superficie. A continuación, centramos nuestro interés en las superficies no paramétricas, con las que comenzó el estudio de las superficies minimales y vemos como los resultados obtenidos para este tipo de superficies nos permiten extraer conclusiones válidas para superficies regulares cualesquiera. Finalmente, obtenemos otras caracterizaciones de las superficies minimales en términos de los Operadores de Beltrami. Esto nos permite dar una definición más general de las superficies minimales admitiendo superficies que no son regulares en todos sus puntos.

En el Capítulo 2 mostramos algunos de los avances que surgieron del uso de la variable compleja en el estudio de las superficies minimales. En primer lugar, definimos la superficie adjunta a una superficie minimal, probamos su minimalidad y mostramos su relación con las *curvas isotrópicas*. Seguidamente, definimos las superficies asociadas a una superficie minimal y exponemos las nociones de equivalencia entre todas ellas. Por último, probamos algunas de las más impor-

tantes fórmulas de representación de superficies minimales, fundamentales para la búsqueda de nuevas superficies.

En el Capítulo 3 se exponen distintos ejemplos clásicos de superficies minimales. En las explicaciones de los ejemplos se emplean las técnicas desarrolladas a lo largo del trabajo y se complementan con gráficas de elaboración propia realizadas en Python a través del entorno Spyder.



Garden of minimal surfaces

Fotografía de Johannes C. C. Nitsche y C. D. Nitsche

Preliminares

0.1 Geometría Diferencial

En esta sección recordaremos los conceptos sobre curvas y superficies regulares en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 que nos harán falta en adelante. Los resultados presentes en el itinerario de las asignaturas de Geometría Local de Curvas y Superficies y Geometría Aplicada serán presentados sin demostraciones, éstas se pueden consultar en [4] y [6].

En primer lugar veamos el tipo de curvas con las que vamos a trabajar.

Definición 1. Una *curva parametrizada* es una aplicación $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable de clase C^2 :

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in (a, b).$$

Se dice que α es *regular* si verifica

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) \neq 0, \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Informalmente emplearemos *curva regular* para referirnos a las curvas parametrizadas regulares.

También nos interesará describir la imagen (o grafo) de una curva mediante otras parametrizaciones, para ello se definen las reparametrizaciones de una curva:

Definición 2. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Un *cambio de parámetro* de α es una aplicación $h : (c, d) \subset \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ biyectiva y de clase C^2 que verifica $h'(r) \neq 0$ para todo $r \in (c, d)$. Se denomina *reparametrización regular* de α a la curva regular $\beta = \alpha \circ h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

A menudo trabajaremos con curvas regulares parametrizadas naturalmente:

Definición 3. Sean $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular y $t_0 \in (a, b)$. Se define *longitud de arco de α desde el punto t_0* como la función $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr, \quad \text{con } |\alpha'(r)| = \sqrt{\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle}.$$

Además, si α está parametrizada por su longitud de arco se dice que es una *curva regular parametrizada naturalmente*, y a su parámetro s se denomina *parámetro natural* (o *parámetro arco*).

Usualmente los cálculos se simplifican cuando una curva está parametrizada por su parámetro arco, por lo que resultan de especial utilidad los siguientes resultados.

Teorema 1. *Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización regular mediante su longitud de arco.*

Teorema 2. *Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. α está parametrizada naturalmente si y sólo si $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in (a, b)$.*

Denotaremos por $\dot{\alpha}$ a la derivada de la curva α respecto de su parámetro natural s . En adelante, solo consideraremos curvas regulares parametrizadas naturalmente.

Definición 4. Sean $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada naturalmente y $s_0 \in (a, b)$.

- Se define el *vector tangente a α en $\alpha(s_0)$* como el vector unitario

$$\mathbf{t}(s_0) = \dot{\alpha}(s_0).$$

- Si $|\ddot{\alpha}(s_0)| > 0$, se define el *vector normal principal de α en $\alpha(s_0)$* como el vector unitario

$$\mathbf{n}(s_0) = \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{|\ddot{\alpha}(s_0)|}.$$

- Si $|\ddot{\alpha}(s_0)| > 0$, se define el *vector binormal de α en $\alpha(s_0)$* como el vector unitario

$$\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \wedge \mathbf{n}(s_0).$$

De esta forma, hemos construido en cada punto $s \in (a, b)$ con $|\ddot{\alpha}(s)| > 0$ una terna $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, conocida como *Triedro de Frenet*, que es base ortonormal directa de \mathbb{R}^3 .

En ocasiones trabajaremos con curvas regulares más generales, que no son derivables en todos sus puntos:

Definición 5. Una *curva regular a trozos* es una aplicación $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua y tal que existe una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b \quad \text{con } k \in \mathbb{N},$$

de forma que, para todo $i = 0, \dots, k$, la restricción $\alpha_i := \alpha|_{(t_i, t_{i+1})}$ es una curva parametrizada regular cuyas derivadas (hasta orden 2) se extienden por continuidad a los extremos t_i y t_{i+1} . Cada α_i se denomina un *arco regular* de α .

A continuación, vamos a definir las superficies con las que trabajaremos y vamos a recordar elementos del estudio local de superficies.

Definición 6. Una *superficie regular* es un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada punto $p \in S$ existen un dominio (abierto y conexo) $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno U' de p en \mathbb{R}^3 y una aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ verificando:

- (i) $X(U) = U' \cap S$ y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable de clase C^2 , es decir, sus funciones componentes poseen derivadas parciales de orden 2 continuas en U .
- (ii) $X : U \rightarrow X(U)$ es un homeomorfismo, es decir, admite una inversa $X^{-1} : X(U) \rightarrow U$ continua.
- (iii) Condición de regularidad: Si $w = (u, v) = (u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, entonces

$$X_1(w) \wedge X_2(w) \neq 0, \tag{1}$$

donde $X_1(w) = \frac{\partial X}{\partial u^1}(w)$ y $X_2(w) = \frac{\partial X}{\partial u^2}(w)$.

Se denomina *parametrización local* de S en un entorno de p a la aplicación X .

Observación. La condición de regularidad (1) es equivalente a que la matriz jacobiana

$$\nabla X(w) = (X_1(w), X_2(w))$$

tenga rango máximo (con valor 2), ya que los vectores $X_1(w)$ y $X_2(w)$ son linealmente independientes en cada punto $w \in U$.

Definimos entonces el *plano tangente* a X en w como el subespacio vectorial generado por los vectores independientes $X_1(w)$ y $X_2(w)$, y lo denotaremos por $T_w X$. Por otro lado, se define el *vector normal* a X en w como

$$N(w) = \frac{X_1(w) \wedge X_2(w)}{|X_1(w) \wedge X_2(w)|}.$$

Así mismo, se denomina *campo normal*, *campo de Gauss* o *imagen esférica* de X a la aplicación $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ que a cada punto $w \in U$ le hace corresponder el vector $N(w)$. De esta forma el conjunto $\{X_1(w), X_2(w), N(w)\}$ constituye una base del espacio vectorial \mathbb{R}^3 para cada $w \in U$. Por otro lado, se define el *área de X* como la integral

$$A_U(X) = \int_U |X_1 \wedge X_2| du dv = \int_X dA,$$

donde $dA = |X_1 \wedge X_2| du dv = \langle (X_1 \wedge X_2), N \rangle du dv$ es el elemento de área de X .

Observación. Más adelante extenderemos algunos conceptos de geometría diferencial a superficies con un número finito (e incluso numerable) de singularidades aisladas (que no son puntos de acumulación). Es decir, conjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ tales que para cada punto $p \in S$ existen un dominio $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno U' de p en \mathbb{R}^3 y una aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ verificando las propiedades (i) y (ii) de la definición anterior pero no cumpliendo, en general, $X_1(w) \wedge X_2(w) \neq 0$ con $w \in U$ tal que $X(w) = p$. En ocasiones nos referiremos a estas superficies como *superficies no regulares*. Los puntos $p \in S$ para los cuales se tiene $X_1(w) \wedge X_2(w) = 0$ con $X(w) = p$ y $w \in U$ (para toda parametrización local $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$) se conocen como *puntos singulares* de S .

Definición 7. Un *atlas* de una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es una familia $\mathcal{A} = \{X_i\}_{i \in I}$ de parametrizaciones locales $X_i : U_i \rightarrow S$ de S tales que

$$S = \bigcup_{i \in I} X_i(U_i).$$

Si es posible encontrar un atlas de S formado por una sola parametrización local $X : U \rightarrow S$, se dice que X es una *parametrización global* de S .

Es necesario en este momento establecer, a fin de evitar posibles confusiones, algunos convenios de notación que emplearemos a lo largo de este texto. En primer lugar, para indicar las derivadas parciales de una función de la forma $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ respecto de las variables $u = u^1$ y $v = u^2$, emplearemos indistintamente las siguientes notaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}(w) = \partial_{u^\alpha} f(w) = \partial_\alpha f(w) = f_{u^\alpha}(w) = f_\alpha(w) \quad \text{para } \alpha = 1, 2,$$

en $w = (u, v) = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Por otro lado, tendremos a menudo que escribir sumatorios respecto a múltiples subíndices y superíndices que toman los valores

naturales 1 y 2. Para simplificar estas expresiones prescindiremos del signo de sumatorio \sum y de los límites de sumación. Los índices en estas expresiones se escribirán con letras minúsculas griegas que, siempre que no se diga lo contrario (especificando los valores de dichos índices) indicarán que cada índice toma los valores 1 y 2 en los términos de la suma. Veamos un ejemplo de esta notación introducida por Einstein: Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de una superficie regular y sea $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, se dice que U es un campo vectorial *tangente* si $U(w) \in T_w X$ para todo $w \in \Omega$. En tal caso, podemos expresar el campo U en coordenadas respecto de la base $\{X_1(w), X_2(w)\}$ de $T_w X$:

$$U(w) = U^1(w)X_u(w) + U^2(w)X_v(w) = \sum_{\alpha=1}^2 U^\alpha(w)X_{u^\alpha}(w) = U^\alpha(w)X_{u^\alpha}(w),$$

donde $U^1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $U^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de U .

En el estudio de superficies es de especial utilidad establecer equivalencias entre superficies aparentemente distintas. En nuestro caso, será de interés relacionar superficies con el mismo campo normal, para ello veremos la siguiente definición:

Definición 8. Sean S y M superficies regulares y sean $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de S e $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de M . Se dice que X e Y son *equivalentes* si existe un difeomorfismo $h : V \rightarrow U$ de clase C^2 , esto es, un homeomorfismo diferenciable de clase C^2 con inversa diferenciable de clase C^2 , tal que

$$Y(w) = X \circ h(w) = X(h(w)), \quad \text{para } w \in V. \quad (2)$$

Si la aplicación $h(w)$ viene dada por $h(w) = (a(w), b(w))$, denotamos por J_h el jacobiano de h :

$$J_h = \det Dh = \det \begin{pmatrix} \nabla a \\ \nabla b \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_u a & \partial_v a \\ \partial_u b & \partial_v b \end{vmatrix}$$

Entonces, si además se verifica la condición

$$J_h > 0,$$

se dice que X e Y son *estrictamente equivalentes*.

El difeomorfismo h se conoce como la aplicación de *cambio de coordenadas*. Por (2) podemos escribir

$$Y(u, v) = X \circ h(u, v) = X(a(u, v), b(u, v)),$$

y mediante la regla de la cadena, obtenemos:

$$\begin{aligned} Y_u(u, v) &= (X_a \circ h)(u, v) \cdot a_u(u, v) + (X_b \circ h)(u, v) \cdot b_u(u, v) \\ Y_v(u, v) &= (X_a \circ h)(u, v) \cdot a_v(u, v) + (X_b \circ h)(u, v) \cdot b_v(u, v). \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} (Y_u \wedge Y_v) &= [(X_a \circ h) \cdot a_u] \wedge [(X_b \circ h) \cdot b_v] + [(X_b \circ h) \cdot b_u] \wedge [(X_a \circ h) \cdot a_v] \\ &= a_u b_v \cdot (X_a \wedge X_b) \circ h + b_u a_v \cdot (X_b \wedge X_a) \circ h \\ &= (a_u b_v - b_u a_v) \cdot (X_a \wedge X_b) \circ h = J_h \cdot (X_a \wedge X_b) \circ h. \end{aligned}$$

Entonces por el *Teorema de Cambio de Variables* para integrales se tiene $A_V(Y) = A_U(X)$, es decir, las parametrizaciones equivalentes tienen la misma área. Por otro lado, si se cumple que $J_h > 0$, se deduce de la expresión anterior que

$$\frac{(Y_u \wedge Y_v)}{|Y_u \wedge Y_v|} = \frac{(X_a \wedge X_b)}{|X_a \wedge X_b|} \circ h.$$

Denotando por N^X y N^Y los campos normales de X e Y respectivamente obtenemos

$$N^Y = N^X \circ h,$$

esto es, las parametrizaciones estrictamente equivalentes tienen campos normales equivalentes. Veamos ahora la noción de equivalencia entre superficies regulares.

Definición 9. Sean S y M superficies regulares. Se dice que S es *localmente equivalente* a M si para todo $p \in S$ existen una parametrización local X de S y una parametrización local Y de M tales que X e Y son equivalentes. Se dice que S y M son *localmente equivalentes* si S es localmente equivalente a M y M es localmente equivalente a S . Análogamente, se dice que S es *localmente estrictamente equivalente* a M si para todo $p \in S$ existen parametrizaciones locales X de S e Y de M tales que X e Y son estrictamente equivalentes. Se dice que S y M son *localmente estrictamente equivalentes* si S es localmente estrictamente equivalente a M y M es localmente estrictamente equivalente a S .

Observación. Si S es localmente equivalente a M , sabemos que, para todo $p \in S$ existen parametrizaciones $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S y M respectivamente y un difeomorfismo $h : V \rightarrow U$ de clase C^2 tal que $Y = X \circ h$ en V . Por otro lado, la aplicación inversa $h^{-1} : U \rightarrow V$ es también un difeomorfismo de clase C^2 y verifica $X = Y \circ h^{-1}$ en U , para todo $q = Y \circ h^{-1} \circ X^{-1}(p) \in M$. Es decir, M es localmente equivalente a S . Por tanto, si S es localmente equivalente a M o M lo

es a S , entonces S y M son localmente equivalentes. Además, si S es localmente estrictamente equivalente a M , el difeomorfismo h verifica $J_h > 0$ y entonces se tiene

$$J_{h^{-1}} = \frac{1}{J_h} > 0,$$

es decir, M es localmente estrictamente equivalente a S . Por tanto, si S es localmente estrictamente equivalente a M o M lo es a S , entonces S y M son localmente estrictamente equivalentes.

Recordaremos ahora algunos conceptos empleados en el estudio de la geometría intrínseca de una superficie, comenzando por la primera forma fundamental, que nos permite hacer mediciones sobre la superficie sin referencia a su espacio ambiente \mathbb{R}^3 . Dada $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ y dados dos vectores $x, y \in T_w X$, denotaremos por $\langle x, y \rangle$ su producto escalar como vectores de $T_w X$, que no es más que su producto escalar usual como vectores de \mathbb{R}^3 .

Definición 10. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de S . Se define la *primera forma fundamental* de S en $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ como la forma cuadrática $I_w : T_w X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_w(x) = \langle x, x \rangle = |x|^2, \quad \text{con } x \in T_w X.$$

Como sabemos, podemos expresar cualquier vector tangente $U \in T_w X$ en coordenadas respecto de $X_1 = X_1(w)$ y $X_2 = X_2(w)$ como $U = U^1 X_1 + U^2 X_2$. Si evaluamos la primera forma fundamental en U obtenemos:

$$\begin{aligned} I_w(U) &= \langle U^1 X_1 + U^2 X_2, U^1 X_1 + U^2 X_2 \rangle \\ &= (U^1)^2 \langle X_1, X_1 \rangle + 2U^1 U^2 \langle X_1, X_2 \rangle + (U^2)^2 \langle X_2, X_2 \rangle \\ &= (U^1)^2 g_{11} + 2U^1 U^2 g_{12} + (U^2)^2 g_{22}, \end{aligned}$$

donde

$$g_{11} = \langle X_1, X_1 \rangle, \quad g_{12} = \langle X_1, X_2 \rangle = \langle X_2, X_1 \rangle = g_{21}, \quad g_{22} = \langle X_2, X_2 \rangle,$$

son los conocidos como *coeficientes métricos* o *coeficientes de la primera forma fundamental*. Mediante ellos se define la siguiente *matriz de coeficientes métricos*:

$$G := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir el determinante de esta matriz como

$$g := \det G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |X_1|^2|X_2|^2 - \langle X_1, X_2 \rangle^2 = |X_1 \wedge X_2|^2 > 0,$$

se tiene, por tanto, la igualdad siguiente

$$|X_1 \wedge X_2| = \sqrt{g}.$$

Como la matriz de coeficientes métricos es regular, se puede calcular su matriz inversa que denotaremos por G^{-1} con coeficientes $g^{\alpha\beta}$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Es sencillo comprobar que

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Por lo tanto se tiene que

$$g^{12} = g^{21} \quad \text{y} \quad g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}, \quad (4)$$

donde δ_{α}^{γ} es la función delta de Kronecker:

$$\delta_{\alpha}^{\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \gamma \end{cases}.$$

Pasamos ahora a definir la segunda forma fundamental. Primeramente observamos que la aplicación de Gauss $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es diferenciable y su diferencial $dN_w : T_w X \rightarrow T_p \mathbb{S}^2$ es de hecho un endomorfismo del plano tangente, ya que los planos $T_w X$ y $T_p \mathbb{S}^2$ son paralelos.

Definición 11. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de S . Se define la *segunda forma fundamental* de S en $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ como la forma cuadrática $II_w : T_w X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$II_w(x) = \langle Q_w(x), x \rangle, \quad \text{con } x \in T_w X,$$

donde $Q_w = -dN_w : T_w X \rightarrow T_w X$.

La aplicación Q_w se denomina *endomorfismo de Weingarten*. Dado un vector tangente $U = U^{\alpha} X_{\alpha}$, si evaluamos la segunda forma fundamental en U obtenemos:

$$\begin{aligned} II_w(U) &= -\langle dN_w(U), U \rangle = -\langle U^1 N_1 + U^2 N_2, U^1 X_1 + U^2 X_2 \rangle \\ &= -(U^1)^2 \langle N_1, X_1 \rangle - U^1 U^2 [\langle N_1, X_2 \rangle + \langle N_2, X_1 \rangle] - (U^2)^2 \langle N_2, X_2 \rangle \\ &= (U^1)^2 b_{11} + 2U^1 U^2 b_{12} + (U^2)^2 b_{22}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\langle N_1, X_1 \rangle = \langle N, X_{11} \rangle, \\ b_{12} &= -\langle N_1, X_2 \rangle = -\langle N_2, X_1 \rangle = \langle N, X_{12} \rangle = \langle N, X_{21} \rangle = b_{21}, \\ b_{22} &= -\langle N_2, X_2 \rangle = \langle N, X_{22} \rangle, \end{aligned}$$

son los conocidos como *coeficientes de la segunda forma fundamental*. Con ellos podemos definir la *matriz de la segunda forma fundamental*:

$$B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Serán de especial utilidad las fórmulas siguientes.

Proposición 1. *Se verifican las ecuaciones de Weingarten*

$$N_\alpha = \frac{\partial N}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta X_\beta, \quad \text{con } -b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}. \quad (5)$$

Proposición 2. *Se verifican las ecuaciones de Gauss*

$$X_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma + b_{\alpha\beta} N, \quad (6)$$

donde las componentes $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, con $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$, son funciones continuas determinadas de forma única.

Las funciones $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ se denominan *símbolos de Christoffel*. Como $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de una superficie regular es, en particular, una aplicación diferenciable de clase C^2 , por lo tanto se tiene que $X_{12} = X_{21}$ y en consecuencia se tienen las relaciones de simetría:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \quad \text{y} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2.$$

Vamos ahora a deducir una expresión para las derivadas parciales de los coeficientes métricos, que denotaremos por $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ con $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ (con valores arbitrarios pero fijos).

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (g_{\alpha\beta}) = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\langle X_\alpha, X_\beta \rangle) = \langle X_{\alpha\gamma}, X_\beta \rangle + \langle X_\alpha, X_{\beta\gamma} \rangle \\ &= \langle X_\beta, X_{\alpha\gamma} \rangle + \langle X_\alpha, X_{\beta\gamma} \rangle, \end{aligned}$$

aplicando las ecuaciones (6) y teniendo en cuenta que $\langle X_1, N \rangle = \langle X_2, N \rangle = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \langle X_\beta, \Gamma_{\alpha\gamma}^\tau X_\tau + b_{\alpha\gamma} N \rangle + \langle X_\alpha, \Gamma_{\beta\gamma}^\tau X_\tau + b_{\beta\gamma} N \rangle \\ &= g_{\beta\tau} \Gamma_{\alpha\gamma}^\tau + g_{\alpha\tau} \Gamma_{\beta\gamma}^\tau.\end{aligned}\quad (7)$$

También podemos obtener una expresión para las derivadas parciales de los coeficientes de la matriz inversa de G , a los que denotaremos por $\partial_\gamma g^{\sigma\beta}$ con $\sigma, \beta, \gamma = 1, 2$. Comenzamos derivando parcialmente respecto de u^γ la siguiente igualdad

$$g_{\alpha\tau} g^{\tau\beta} = \delta_\alpha^\beta = \delta_1^\beta + \delta_2^\beta,$$

y obtenemos

$$g^{\tau\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\tau} + g_{\alpha\tau} \partial_\gamma g^{\tau\beta} = 0.$$

Multiplicando la expresión anterior por $g^{\alpha\sigma} = g^{1\sigma} + g^{2\sigma}$ escribimos

$$g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\tau} + g_{\tau\alpha} g^{\alpha\sigma} \partial_\gamma g^{\tau\beta} = 0,$$

y teniendo en cuenta (4) se obtiene

$$\delta_\tau^\sigma \partial_\gamma g^{\tau\beta} = -g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\tau}.$$

Como σ es fijo, los δ_τ^σ se anulan excepto cuando $\tau = \sigma$, quedando entonces la igualdad:

$$\partial_\gamma g^{\sigma\beta} = -g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\tau}.$$

Finalmente aplicando la fórmula (7) se tiene

$$\begin{aligned}\partial_\gamma g^{\sigma\beta} &= -g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} \{g_{\tau\varepsilon} \Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon + g_{\alpha\varepsilon} \Gamma_{\tau\gamma}^\varepsilon\} \\ &= -g^{\alpha\sigma} \delta_\varepsilon^\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon - g^{\tau\beta} \delta_\varepsilon^\sigma \Gamma_{\tau\gamma}^\varepsilon\end{aligned}$$

y, como antes, $\delta_\varepsilon^\beta = 0$ salvo si $\varepsilon = \beta$ y $\delta_\varepsilon^\sigma = 0$ salvo si $\varepsilon = \sigma$, entonces escribimos:

$$\partial_\gamma g^{\sigma\beta} = -g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta - g^{\tau\beta} \Gamma_{\tau\gamma}^\sigma.\quad (8)$$

Por otro lado, si derivamos parcialmente $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ respecto de u^γ (con $\gamma = 1, 2$) y tenemos en cuenta (3), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u^\gamma} &= g_{22} \partial_\gamma g_{11} + g_{11} \partial_\gamma g_{22} - 2g_{12} \partial_\gamma g_{12} \\ &= g \{g^{11} \partial_\gamma g_{11} + g^{22} \partial_\gamma g_{22} + 2g^{12} \partial_\gamma g_{12}\} = gg^{\alpha\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores dados por (7) y teniendo en cuenta los valores de la función delta de Kronecker se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial u^\gamma} = gg^{\alpha\beta}\{g_{\beta\tau}\Gamma_{\alpha\gamma}^\tau + g_{\alpha\tau}\Gamma_{\beta\gamma}^\tau\} = g\{\delta_\tau^\alpha\Gamma_{\alpha\gamma}^\tau + \delta_\tau^\beta\Gamma_{\beta\gamma}^\tau\} = g\{\Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\beta\}$$

y, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial u^\gamma} = 2g\Gamma_{\alpha\tau}^\alpha.$$

Obtenemos finalmente la siguiente fórmula

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\log g) = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\log \sqrt{g}). \quad (9)$$

Queremos ahora definir las curvaturas principales, para ello necesitamos emplear el siguiente resultado:

Proposición 3. *El operador Q_w es lineal y autoadjunto, es decir, para cualesquiera $x, y \in T_w X$ se tiene $\langle Q_w x, y \rangle = \langle x, Q_w y \rangle$.*

En consecuencia, los autovalores de Q_w son reales y se conocen como las *curvaturas principales* en w , las denotaremos por $\kappa_1 = \kappa_1(w)$ y $\kappa_2 = \kappa_2(w)$. Mediante las curvaturas principales podemos definir dos funciones de especial importancia:

Definición 12. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de S . Sean $\kappa_1 = \kappa_1(w)$ y $\kappa_2 = \kappa_2(w)$ las curvaturas principales de $w \in \Omega$. Se definen la *curvatura media* de S en w como

$$H = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{2}, \quad (10)$$

y la *curvatura de Gauss* de S en w como

$$K = \kappa_1 \kappa_2. \quad (11)$$

Los autovalores del endomorfismo de Weingarten son aquellos valores $\kappa \in \mathbb{R}$ tales verifican la ecuación:

$$Q_w V = \kappa V,$$

para algún vector (autovector) $V \in T_w X$. Equivalentemente se pueden obtener como soluciones a la ecuación

$$\langle Q_w V, U \rangle = \kappa \langle V, U \rangle, \quad \text{para todo } U \in T_w X,$$

y, tomando coordenadas $U = U^\alpha X_\alpha$ y $V = V^\alpha X_\alpha$, se puede reescribir la igualdad como

$$b_{\alpha\beta}V^\alpha U^\beta = \kappa g_{\alpha\beta}V^\alpha U^\beta, \quad \text{para todo } U^1, U^2 \in \mathbb{R}.$$

En particular se tiene

$$b_{\alpha\beta}V^\alpha = \kappa g_{\alpha\beta}V^\alpha, \quad \text{para } \beta = 1, 2,$$

y, entonces tenemos que los autovalores $\kappa \in \mathbb{R}$ son las soluciones de

$$(V^1, V^2) \cdot B = \kappa (V^1, V^2) \cdot G,$$

o

$$(V^1, V^2) \cdot BG^{-1} = \kappa (V^1, V^2),$$

con $V^1, V^2 \in \mathbb{R}$. Acabamos de ver que los autovalores de Q_w coinciden con los autovalores de la matriz BG^{-1} , es decir, las curvaturas principales son las raíces del polinomio (en κ):

$$\begin{aligned} \det(BG^{-1} - \kappa Id) &= \det(B - \kappa G) = \begin{vmatrix} b_{11} - \kappa g_{11} & b_{12} - \kappa g_{12} \\ b_{21} - \kappa g_{21} & b_{22} - \kappa g_{22} \end{vmatrix} \\ &= \kappa^2 \det G - \kappa(b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}) + \det B \\ &= \det G (\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2) = \det G (\kappa^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\kappa + \kappa_1\kappa_2). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de b_α^β que dimos en (5) se deducen las igualdades

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 &= \text{traza}(BG^{-1}) = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = b_1^1 + b_2^2, \\ \kappa_1\kappa_2 &= \frac{\det B}{\det G} = \det(BG^{-1}) = b_1^1b_2^2 - b_1^2b_2^1. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos las siguientes fórmulas para curvatura media y la curvatura de Gauss:

$$H = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2), \quad (12)$$

$$K = \frac{\det B}{\det G} = b_1^1b_2^2 - b_1^2b_2^1. \quad (13)$$

Veamos ahora un resultado que relaciona equivalencia local de superficies con los conceptos geométricos que acabamos de recordar. En la proposición siguiente los superíndices X e Y indican que las funciones están definidas en las parametrizaciones X e Y respectivamente.

Proposición 4. Sean S y M superficies regulares. Entonces S es localmente equivalente (localmente isométrica) a M si y solo si para todo punto $p \in S$ existen parametrizaciones locales $X : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ e $Y : V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ con $p \in X(U)$ y un difeomorfismo $h : V \rightarrow U$ de clase C^2 tal que

$$k_{\alpha\beta}(w) = g_{\alpha\beta} \circ h(w), \quad \text{para } w \in V \text{ y } \alpha, \beta = 1, 2,$$

donde $g_{\alpha\beta}$ y $k_{\alpha\beta}$ son los coeficientes métricos de X e Y respectivamente¹. Además, S es localmente estrictamente equivalente a M si y solo si la aplicación h verifica $J_h > 0$ y, en tal caso, se tienen las equivalencias

$$T_w Y = T_{h(w)} X, \quad N^Y = N^X \circ h, \quad Q_w^Y = Q_{h(w)}^X \circ h \quad \text{para } w \in V.$$

En consecuencia, también se cumple

$$\kappa_1^Y = \kappa_1^X \circ h, \quad \kappa_2^Y = \kappa_2^X \circ h, \quad H^Y = H^X \circ h, \quad K^Y = K^X \circ h.$$

En ocasiones tendremos que emplear el conocido como *Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones*. Se puede encontrar una prueba de este resultado en el Capítulo 1 del libro [7]. En primer lugar, sean $n \in \mathbb{N}$ y el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, en adelante emplearemos la siguiente notación:

$C^0(\Omega)$ denota el conjunto de funciones continuas en Ω .

$C^n(\Omega)$ denota el conjunto de funciones de clase C^n (derivables con continuidad al menos n veces) en Ω .

$C^n(\Omega, \mathbb{R}^3)$ es el conjunto de campos vectoriales de clase C^n de Ω en \mathbb{R}^3 .

$C_c^1(\Omega)$ es el conjunto de funciones de clase C^1 con soporte compacto en Ω , es decir, funciones que son nulas en todo Ω excepto en algún subconjunto compacto de Ω .

Lema 1 (Lema fundamental del cálculo de variaciones). Si $f \in C^0(\Omega)$ cumple

$$\int_{\Omega} f(u, v) \lambda(u, v) \, du \, dv = 0 \quad \text{para toda } \lambda \in C_c^1(\Omega),$$

entonces $f \equiv 0$ en Ω .

Para terminar esta sección recordaremos algunos conceptos y resultados de la asignatura de Variedades Diferenciables, las pruebas de los resultados se pueden consultar en [8].

¹la aplicación h se denomina *isometría*.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, en particular es una *variedad diferenciable* de dimensión 2. Todo atlas de S como superficie regular es un *atlas* de S como variedad diferenciable, y sus *aplicaciones coordenadas* son las inversas de las parametrizaciones locales (cartas locales) de S como superficie regular. Trabajaremos entonces con *1-formas diferenciables* de clase C^2 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Emplearemos los términos 1-forma diferenciable y *1-forma* indiferentemente. Recordemos las definiciones de forma cerrada y exacta, además de propiedades útiles de la diferencial exterior:

Definición 13. Se dice que una 1-forma ω es *cerrada* si $d\omega = 0$. Se dice que ω es *exacta* si existe una 1-forma η tal que $\omega = d\eta$.

Proposición 5. El operador diferencial exterior, d , verifica las siguientes propiedades para 1-formas ω y η cualesquiera en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

1. d es lineal
2. $d \circ d = 0$
3. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^2 \omega \wedge d\eta = d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta$

Es claro que, dada una 1-forma exacta $\omega = d\eta$ se tiene $d\omega = d(d\eta) = 0$, por tanto ω es cerrada. El resultado recíproco también es cierto en nuestro contexto y es conocido como *Lema de Poincaré*; nosotros emplearemos la siguiente versión:

Lema 2 (Lema de Poincaré). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo. Entonces toda 1-forma cerrada sobre Ω es exacta.

Los resultados anteriores suelen enunciarse de forma general para *p-formas diferenciables* en abiertos de \mathbb{R}^n (con $n, p \in \mathbb{N}$), pero en nuestro caso no será necesaria tanta generalidad.

0.2 Variable Compleja

Más adelante emplearemos técnicas y razonamientos propios del ámbito del Análisis de Variable Compleja. Por ello, en esta sección se expondrán algunas definiciones y resultados de las asignaturas de Funciones de Variable Compleja y Variable Compleja. Los resultados serán presentados sin demostraciones, éstas pueden encontrarse en el libro [2].

Hablaremos en todo momento de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definidas en un abierto conexo (dominio) $\Omega \subset \mathbb{C}$ del plano complejo. En ocasiones identificaremos \mathbb{C} con

el plano real \mathbb{R}^2 , $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, de forma que cada punto $w = u + iv \in \mathbb{C}$ se corresponde con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Definición 14. Sea $w_0 \in \Omega$. Se dice $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es *derivable en w_0* si existe

$$f'(w_0) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}.$$

Se dice que f es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω .

Toda función de variable compleja es de la forma

$$f = a + ib \quad \text{ó} \quad f(w) = a(u, v) + ib(u, v) \quad \text{en } w = u + iv = (u, v) \in \Omega,$$

donde $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de variable real (considerando Ω como un dominio de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$). Las funciones a y b son conocidas como las *partes real e imaginaria* de f respectivamente y son denotadas por $a = \operatorname{Re} f$ y $b = \operatorname{Im} f$. Veamos ahora una de las más importantes consecuencias de la definición anterior.

Teorema 3. Sean $w_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de la forma $f = a + ib$, entonces f es derivable en w_0 si y solo si verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial_u a(w_0) = \partial_v b(w_0), \quad \text{y} \quad \partial_v a(w_0) = -\partial_u b(w_0).$$

En ese caso se tiene que

$$f'(w_0) = \partial_u a(w_0) + i\partial_u b(w_0).$$

Observación. Si una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, en particular es diferenciable (de hecho es *analítica*) vista como un campo vectorial $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. El recíproco no es cierto en general.

Proposición 6. Toda función holomorfa es *analítica* como campo vectorial en \mathbb{R}^2 , es decir, tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden.

En ocasiones trabajaremos con funciones que no son holomorfas en todo \mathbb{C} , sino que tienen distintos tipos de *singularidades aisladas* en $w_0 \in \Omega$, esto es, que existe un entorno $\Omega' \subset \Omega$ de w_0 de forma que la función es holomorfa en $\Omega' \setminus \{w_0\}$ pero no es derivable en w_0 . Estas singularidades pueden ser de tres tipos:

Definición 15. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función con una singularidad aislada en un punto $w_0 \in \Omega$. Se dice que f tiene una *singularidad evitable* en w_0 si existe

$$\lim_{w \rightarrow w_0} (w - w_0)f(w) = 0.$$

Se dice que f tiene un *polo* en w_0 si

$$\lim_{w \rightarrow w_0} |f(w)| = \lim_{w \rightarrow w_0} \sqrt{\operatorname{Re}^2(w) + \operatorname{Im}^2(w)} = \infty.$$

Se dice que f tiene una *singularidad esencial* en w_0 si no tiene una singularidad evitable ni un polo en w_0 .

Definición 16. Se dice que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función *meromorfa* si existe un subconjunto $P \subset \Omega$ sin puntos de acumulación en Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus P$ y f tiene un polo en cada punto de P .

A pesar de tener polos, podremos trabajar con funciones meromorfas "compensando" sus polos, por ello es necesario recordar los conceptos de orden ceros y polos.

Definición 17. Sean $w_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $\Omega \setminus \{w_0\}$. Si f tiene un cero en w_0 , se define el *orden del cero* w_0 como el menor número natural m tal que la función holomorfa

$$h(w) = (w - w_0)^m f(w)$$

verifica $h(w_0) \neq 0$. Si f tiene un polo en w_0 , se define el *orden del polo* w_0 como el menor número natural m tal que existe

$$\lim_{w \rightarrow w_0} (w - w_0)^m f(w) \neq 0.$$

Llegamos finalmente a uno de los resultados más importantes del análisis complejo, el *Teorema del Isomorfismo de Riemann*.

Teorema 4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, con $\Omega \neq \mathbb{C}$ y sea $w_0 \in \Omega$. Entonces existe una única función holomorfa $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ verificando

- (i) $\varphi(w_0) = 0$ y $\varphi'(w_0) > 0$,
- (ii) φ es biyectiva,
- (iii) $\varphi(\Omega) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$.

En otras palabras, siempre podemos encontrar un isomorfismo entre un abierto simplemente conexo (que no sea todo \mathbb{C}) y el disco unidad. El disco unidad, denotado \mathbb{D} , es la bola con centro el 0 y radio 1, $\mathbb{D} = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ y su frontera $\partial\mathbb{D}$ es la circunferencia unidad.

Observación. La importancia de este teorema para nosotros reside en la siguiente idea: se puede parametrizar la circunferencia unidad mediante una curva regular cerrada² $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$. Dado un abierto Ω simplemente conexo y un punto $w \in \Omega$, el teorema anterior nos asegura que podemos encontrar un difeomorfismo de clase arbitraria $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Su inversa, φ^{-1} , es continua y por tanto $\varphi^{-1}(\partial\mathbb{D}) = \partial\Omega$. Además, como $\varphi'(w_0) > 0$ existe un entorno $\hat{\Omega} \subset \Omega$ tal que φ^{-1} es un difeomorfismo de clase C^2 en $\hat{\Omega}$ (por el *Teorema de la Función Inversa*). Por tanto la aplicación $\beta : [a, b] \rightarrow \partial\Omega$ con $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$ es una curva regular a trozos que parametriza la frontera de Ω . Acabamos de deducir que se puede parametrizar la frontera de cualquier abierto simplemente conexo de \mathbb{R}^2 mediante una curva regular a trozos.

0.3 Operadores de Beltrami

En esta sección veremos una generalización del concepto de derivada covariante de un campo vectorial tangente prescindiendo de la "curva soporte". Esto nos permitirá definir los conocidos como primer y segundo operador de Beltrami, que emplearemos posteriormente para caracterizar las superficies minimales. Hablaremos en todo momento de campos vectoriales tangentes al menos de clase C^2 , definidos sobre una parametrización local de una superficie regular $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea $\mathfrak{V}(X)$ el conjunto de campos vectoriales tangentes $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 . Cada $U \in \mathfrak{V}(X)$ se puede escribir como

$$U(w) = U^\alpha(w)X_\alpha(w), \quad w \in \Omega$$

con $U^1, U^2 \in C^2(\Omega)$. Consideramos también $\mathfrak{F}(X) := C^2(\Omega)$, es decir, el conjunto de funciones de Ω en \mathbb{R} de clase C^2 . Por las propiedades básicas de las funciones continuas y derivables, es sencillo comprobar que $\mathfrak{F}(X)$ es un anillo con la suma y el producto de funciones. De hecho, podemos comprobar que:

Proposición 7. $\mathfrak{V}(X)$ es un $\mathfrak{F}(X)$ -módulo de base $\{X_1, X_2\}$.

Demostración. Para probar que $\mathfrak{V}(X)$ es un $\mathfrak{F}(X)$ -módulo veamos en primer lugar que, como X_1 y X_2 están en $\mathfrak{V}(X)$, éste es un conjunto no vacío. Entonces por la caracterización de módulo (cuya prueba se puede encontrar en el Capítulo 3

²Esto es, una curva parametrizada regular $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyas derivadas (hasta orden 2) se extienden por continuidad a los extremos del intervalo y que verifica $\alpha(a) = \alpha(b)$.

del libro [1]) solo tenemos que comprobar que dados $f, g \in \mathfrak{F}(X)$ y $V, W \in \mathfrak{V}(X)$ se tiene que $fV + gW \in \mathfrak{V}(X)$ con

$$(fV + gW)(w) = f(w)V(w) + g(w)W(w), \quad w \in \Omega.$$

Como,

$$fV = f(V^\alpha X_\alpha) = (fV^\alpha)X_\alpha \in \mathfrak{V}(X),$$

y

$$gW = g(W^\alpha X_\alpha) = (gW^\alpha)X_\alpha \in \mathfrak{V}(X),$$

se tiene que

$$fV + gW = (fV^\alpha)X_\alpha + (gW^\alpha)X_\alpha = (fV^\alpha + gW^\alpha)X_\alpha \in \mathfrak{V}(X). \quad (14)$$

Por otro lado, por la definición de $\mathfrak{V}(X)$, el conjunto $\{X_1, X_2\}$ es sistema generador de $\mathfrak{V}(X)$ y es linealmente independiente por la condición de regularidad (1) de X . Por tanto, $\{X_1, X_2\}$ es base de $\mathfrak{V}(X)$ como $\mathfrak{F}(X)$ -módulo. \square

Para cada $V = V^\alpha X_\alpha \in \mathfrak{V}(X)$ podemos definir de forma única un operador diferencial $L_V := V^\alpha \partial_\alpha$ como

$$(L_V f)(w) = V^\alpha(w) \partial_\alpha(f(w)), \quad \text{para } f \in \mathfrak{F}(X)$$

y como,

$$\begin{aligned} (L_V U)(w) &= (V^\alpha \partial_\alpha(U^\beta X_\beta))(w) \\ &= V^\alpha(w) U_\alpha^\beta(w) X_\beta(w) + V^\alpha(w) U^\beta(w) X_{\alpha\beta}(w), \end{aligned}$$

para $U = U^\beta X_\beta \in \mathfrak{V}(X)$, usando las fórmulas de Gauss (6) de la Sección 0.1, podemos escribir

$$\begin{aligned} L_V U &= V^\alpha U_\alpha^\beta X_\beta + V^\alpha U^\beta (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma + b_{\alpha\beta} N) \\ &= [V^\alpha U_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha U^\beta] X_\gamma + b_{\alpha\beta} V^\alpha U^\beta N. \end{aligned} \quad (15)$$

Observamos que, en general, $L_V U$ no es un campo tangente. Pero si denotamos por $P = P(w)$, $P(w) : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_w X$ la función que para cada $w \in \Omega$ le asocia a cada punto su proyección ortogonal sobre el plano tangente $T_w X$ a X en w , podemos definir una aplicación $D : \mathfrak{V}(X) \times \mathfrak{V}(X) \rightarrow \mathfrak{V}(X)$ como $D_V U := PL_V U$, es decir,

$$(D_V U)(w) = P(w)\{L_V U(w)\} \quad \text{para } w \in \Omega. \quad (16)$$

Gracias a la expresión (15) esto se reduce prescindir, en cada $w \in \Omega$, de la componente normal de $L_V U$, es decir,

$$D_V U = [V^\alpha U_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha U^\beta] X_\gamma \quad (17)$$

para $V = V^\alpha X_\alpha$, $U = U^\beta X_\beta \in \mathfrak{V}(X)$. La aplicación D que a cada par de campos vectoriales tangentes (V, U) le asocia otro campo vectorial tangente $D_V U$ se denomina *derivada covariante* sobre X . Es fácil comprobar que esta aplicación verifica la siguiente propiedad para $U, V, W \in \mathfrak{V}(X)$:

$$D_{[fV+gW]} U = f D_V U + g D_W U \quad \text{para } f, g \in \mathfrak{F}(X). \quad (18)$$

Para cada función $f \in \mathfrak{F}(X)$ podemos definir la 1-forma (diferenciable) $\omega_f : \mathfrak{V}(X) \rightarrow \mathfrak{F}(X)$ como

$$\omega_f(V) := L_V f = V^\alpha \partial_\alpha f,$$

para $V = V^\alpha X_\alpha \in \mathfrak{V}(X)$. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 8. *Para cada $f \in \mathfrak{F}(X)$ existe un único campo vectorial tangente $U \in \mathfrak{V}(X)$ verificando:*

$$\omega_f(V) = \langle V, U \rangle \quad \text{para todo } V \in \mathfrak{V}(X).$$

Demostración. Sean f^1 y f^2 las funciones dadas por la siguiente expresión:

$$f^\beta = g^{\beta\gamma} f_\gamma, \quad \text{con } f_\alpha = \partial_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}. \quad (19)$$

Sean $U, V \in \mathfrak{V}(X)$ con $U = f^\beta X_\beta$ y $V = V^\alpha X_\alpha$ cualesquiera, entonces

$$\langle V, U \rangle = \langle V^\alpha X_\alpha, f^\beta X_\beta \rangle = V^\alpha f^\beta \langle X_\alpha, X_\beta \rangle = g_{\alpha\beta} V^\alpha f^\beta.$$

Teniendo en cuenta la expresión (19) de las funciones coordenadas f^1 y f^2 de U respecto a X_1 y X_2 , se tiene

$$\langle V, U \rangle = g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} V^\alpha f_\gamma = \delta_\alpha^\gamma V^\alpha f_\gamma = V^\alpha f_\alpha = L_V f.$$

Por tanto acabamos de ver que existe un único U verificando la propiedad de la proposición³. □

³La unicidad de la expresión de U viene dada por las propiedades del producto escalar; si existiera otro campo $W \in \mathfrak{V}(X)$ tal que $\langle V, U \rangle = \langle V, W \rangle$ con $V \neq 0$, entonces $\langle V, U - W \rangle = 0 \iff U - W = 0 \iff U = W$.

Denotaremos el campo U obtenido en la demostración anterior por $\nabla_X f$ y lo llamaremos *X-gradiente de la función* $f \in \mathfrak{F}(X)$. Es decir, $\nabla_X f \in \mathfrak{V}(X)$ es el campo dado por la expresión

$$\nabla_X f = f^\beta X_\beta,$$

y cumple

$$L_V f = \langle V, \nabla_X f \rangle, \quad \text{para todo } V \in \mathfrak{V}(X).$$

Consideramos ahora el producto

$$\langle \nabla_X f, \nabla_X f \rangle = g_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta = g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} f^\alpha f_\gamma = \delta_\alpha^\gamma f^\alpha f_\gamma = f^\alpha f_\alpha. \quad (20)$$

De (19) se tiene

$$|\nabla_X f|^2 = f^\alpha f_\alpha = g^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta. \quad (21)$$

Esta última expresión es conocida como *el primer operador de Beltrami*. Éste puede ser expresado en función de los coeficientes métricos de X :

$$|\nabla_X f|^2 = \frac{g_{11}(f_2)^2 - 2g_{12}f_1f_2 + g_{22}(f_1)^2}{g}.$$

Fijamos ahora un campo $U \in \mathfrak{V}(X)$ y consideramos la aplicación $A : \mathfrak{V}(X) \rightarrow \mathfrak{V}(X)$ definida como

$$AV := D_V U, \quad \text{para todo } V \in \mathfrak{V}(X).$$

Por (18) se tiene

$$A(fV + gW) = fA(V) + gA(W),$$

para $f, g \in \mathfrak{F}(X)$ y $V, W \in \mathfrak{V}(X)$, es decir, A es un homomorfismo de $\mathfrak{F}(X)$ -módulos. Una base de $\mathfrak{V}(X)$ como $\mathfrak{F}(X)$ -módulo es $\{X_1, X_2\}$, luego $\mathfrak{V}(X)$ tiene dimensión 2 como $\mathfrak{F}(X)$ -módulo y por tanto podemos asociar al homomorfismo A la matriz 2x2

$$\mathcal{A} = (a_\alpha^\gamma), \quad \text{donde } a_\alpha^\gamma = U_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma U^\beta,$$

para $U = U^\beta X_\beta \in \mathfrak{V}(X)$ respecto de la base $\{X_1, X_2\}$. Para comprobarlo observamos que se cumple, para cada índice α con valores 1 y 2,

$$(\delta_\alpha^1, \delta_\alpha^2) \cdot \mathcal{A} = (a_\alpha^1, a_\alpha^2) \equiv a_\alpha^\gamma X_\gamma = [U_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma U^\beta] X_\gamma.$$

Por tanto, usando (17) se verifica en general

$$\begin{aligned} (V^1, V^2) \cdot \mathcal{A} &= V^1(1, 0) \cdot \mathcal{A} + V^2(0, 1) \cdot \mathcal{A} = V^1(a_1^1, a_1^2) + V^2(a_2^1, a_2^2) \\ &\equiv V^\alpha a_\alpha^\gamma X_\gamma = [V^\alpha U_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha U^\beta] X_\gamma = D_V U, \quad \text{para } V = V^\alpha X_\alpha. \end{aligned}$$

La traza $a_1^1 + a_2^2$ de \mathcal{A} se denomina *X-divergencia del campo vectorial tangente* $U = U^\beta X_\beta$:

$$\operatorname{div}_X U := \operatorname{traza} \mathcal{A} = a_1^1 + a_2^2 = U_\alpha^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha U^\beta. \quad (22)$$

Usando la fórmula (9) de la Sección 0.1 se tiene

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta}(\sqrt{g}), \quad (23)$$

luego

$$\operatorname{div}_X U = U_\alpha^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha U^\beta = U_\alpha^\alpha + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta}(\sqrt{g}) U^\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta}(\sqrt{g} U^\beta). \quad (24)$$

Definimos ahora un homomorfismo $\Delta_X : \mathfrak{F}(X) \rightarrow \mathfrak{F}(X)$ como

$$\Delta_X f := \operatorname{div}_X(\nabla_X f) \quad \text{para todo } f \in \mathfrak{F}(X). \quad (25)$$

Como sabemos por (19),

$$\nabla_X f = (g^{\beta\gamma} f_\gamma) X_\beta, \quad (26)$$

por (24) tenemos

$$\Delta_X f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta}(\sqrt{g} g^{\beta\gamma} f_\gamma). \quad (27)$$

Llamaremos a Δ_X *el operador de Laplace-Beltrami* en X . Por otra parte, $\Delta_X f$ también es conocido como *el segundo operador de Beltrami*. De nuevo podemos expresarlo en función de los coeficientes métricos de X . Teniendo en cuenta (3)

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \quad (28)$$

escribimos:

$$\begin{aligned} \Delta_X f &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1}(\sqrt{g} g^{11} f_1 + \sqrt{g} g^{12} f_2) + \frac{\partial}{\partial u^2}(\sqrt{g} g^{21} f_1 + \sqrt{g} g^{22} f_2) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{g_{22} f_1 - g_{12} f_2}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{g_{11} f_2 - g_{12} f_1}{\sqrt{g}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Empleando las expresiones de las derivadas (8) de la Sección 0.1 y de (22) obtenemos otra fórmula para $\Delta_X f$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_X \nabla_X f &= \operatorname{div}_X \{f^\beta X_\beta\} = f_\alpha^\alpha + \Gamma_{\alpha\tau}^\alpha f^\tau \\ &= \partial_\alpha (g^{\alpha\gamma} f_\gamma) + \Gamma_{\alpha\tau}^\alpha g^{\tau\gamma} f_\gamma \\ &= g^{\alpha\gamma} f_{\alpha\gamma} + [g_\alpha^{\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\tau}^\alpha g^{\tau\gamma}] f_\gamma \\ &= g^{\alpha\gamma} f_{\alpha\gamma} + [(-g^{\beta\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma - g^{\tau\gamma} \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha) + \Gamma_{\alpha\tau}^\alpha g^{\tau\gamma}] f_\gamma \\ &= g^{\alpha\gamma} f_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g^{\alpha\beta} f_\gamma. \end{aligned}$$

Entonces si desarrollamos los valores de los pares de índices $\alpha\gamma$ y $\alpha\beta$ vemos que se pueden agrupar de la siguiente forma:

$$\Delta_X f = g^{\alpha\beta} \{f_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma f_\gamma\}. \quad (29)$$

El X -gradiente empleado en la definición del primer operador de Beltrami es una generalización del gradiente ∇f de una función $f \in \mathfrak{F}(X)$ que nos asegura que el campo vectorial resultante $\nabla_X f$ es tangente a X , algo que no cumple, en general, el campo ∇f . El segundo operador de Beltrami generaliza a su vez el laplaciano u operador de Laplace $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$ mediante una definición análoga empleando el X -gradiente y la X -divergencia. En ocasiones tendremos que integrar expresiones que involucran estos operadores generalizados, por ello necesitamos una expresión análoga a la conocida como *fórmula de integración por partes en varias variables* (también llamada *Primera Identidad de Green*), que veremos a continuación.

En primer lugar, vamos a aplicar integración por partes a una integral de la forma:

$$J := \int_{X|B} \langle \nabla_X \varphi, \nabla_X f \rangle dA,$$

donde $B \subset \Omega$ es un dominio relativamente compacto en Ω (es decir, con clausura $\bar{B} \subset \Omega$ compacta) y cuya frontera ∂B se puede parametrizar mediante una curva regular a trozos de clase C^1 en cada arco regular, para $\varphi \in C^1(\Omega)$ y $f \in \mathfrak{F}(X)$. Repitiendo el cálculo de (20) y (21) obtenemos

$$\langle \nabla_X \varphi, \nabla_X f \rangle = g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha f_\beta, \quad \text{donde } \varphi_\alpha = \partial_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}.$$

Por otro lado

$$\partial_\alpha (\varphi \sqrt{g} g^{\alpha\beta} f_\beta) = g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha f_\beta \sqrt{g} + \varphi \partial_\alpha (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} f_\beta),$$

y usando (27) tenemos

$$g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha f_\beta \sqrt{g} = \partial_\alpha (\varphi \sqrt{g} g^{\alpha\beta} f_\beta) - \varphi \Delta_X f \sqrt{g}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} J &= \int_B g^{\alpha\beta} \varphi_\alpha f_\beta \sqrt{g} du dv \\ &= \int_B \partial_\alpha (\varphi \sqrt{g} g^{\alpha\beta} f_\beta) du dv - \int_B \varphi \Delta_X f \sqrt{g} du dv. \end{aligned}$$

Desarrollamos el índice α de la primera expresión integral, notando que al cambiar el orden de integración cambia también el sentido (y por tanto el signo) del vector normal exterior

$$\begin{aligned}
 \int_B \partial_\alpha(\varphi\sqrt{g}g^{\alpha\beta}f_\beta) du dv &= \int_B \partial_1(\varphi\sqrt{g}g^{1\beta}f_\beta) du dv + \int_B \partial_2(\varphi\sqrt{g}g^{2\beta}f_\beta) du dv \\
 &= \int_B \frac{\partial}{\partial u}(\varphi\sqrt{g}g^{1\beta}f_\beta) du dv - \int_B \frac{\partial}{\partial v}(\varphi\sqrt{g}g^{2\beta}f_\beta) dv du \\
 &= \int_{\partial B} \varphi\sqrt{g}g^{1\beta}f_\beta dv - \int_{\partial B} \varphi\sqrt{g}g^{2\beta}f_\beta du \\
 &= \int_{\partial B} \varphi\sqrt{g}g^{\alpha\beta}f_\beta\varepsilon_\alpha^\gamma du^\gamma,
 \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_\alpha^\gamma$ corresponde a la función

$$\varepsilon_\alpha^\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \gamma, \\ -1 & \text{si } \alpha > \gamma, \\ 0 & \text{si } \alpha = \gamma. \end{cases} \quad (30)$$

Obtenemos finalmente la expresión

$$J = \int_{\partial B} \varphi\sqrt{g}g^{\alpha\beta}f_\beta\varepsilon_\alpha^\gamma du^\gamma - \int_B \varphi\Delta_X f \sqrt{g} du dv. \quad (31)$$

Vamos ahora a parametrizar la curva frontera $X|_{\partial B}$ por su parámetro natural s , con orientación positiva respecto a $X|_B$ y la denotamos por $m(s) = X|_{\partial B}(s) = X(u^1(s), u^2(s))$; entonces $\dot{m} = \mathbf{t} = t^\alpha X_\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} X_\alpha$ es el vector tangente (unitario) sobre la curva $X|_{\partial B}$. Definimos $\nu := \nu^\beta X_\beta$, $\nu^\beta := g^{\alpha\beta}\nu_\alpha$ y $\nu_\alpha := \sqrt{g}\varepsilon_\alpha^\gamma t^\gamma$. Así, ν es un campo vectorial tangente a lo largo de la curva $X|_{\partial B}$ que verifica:

$$\langle \mathbf{t}, \nu \rangle = g_{\alpha\beta} t^\alpha \nu^\beta = g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \varepsilon_\alpha^\gamma t^\alpha t^\gamma = \delta_\alpha^\alpha \sqrt{g} \varepsilon_\alpha^\gamma t^\alpha t^\gamma = \sqrt{g} \varepsilon_\alpha^\gamma t^\alpha t^\gamma,$$

por la propiedad (4) de la Sección 0.1. Desarrollando los índices y teniendo en cuenta (30) queda $\langle \mathbf{t}, \nu \rangle = 0$. Por otro lado escribimos

$$|\nu| = \sqrt{g_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta} = \sqrt{g_{\alpha\beta} (g^{\alpha\delta} \sqrt{g} \varepsilon_\delta^\gamma t^\gamma) (g^{\beta\eta} \sqrt{g} \varepsilon_\eta^\gamma t^\gamma)},$$

de nuevo desarrollando los índices y teniendo en cuenta (30) deducimos

$$\begin{aligned}
 |\nu|^2 &= g_{11}g(g^{11}t^2 - g^{12}t^1)^2 + 2g_{12}g(g^{11}t^2 - g^{12}t^1)(g^{21}t^2 - g^{22}t^1) \\
 &\quad + g_{22}g(g^{21}t^2 - g^{22}t^1)^2.
 \end{aligned}$$

Desarrollando los productos y agrupando obtenemos

$$\begin{aligned}
 |\nu|^2 &= g(g_{11}g^{12}g^{12} + 2g_{12}g^{22}g^{12} + g_{22}g^{22}g^{22})t^1t^1 \\
 &\quad + g(g_{11}g^{11}g^{11} + 2g_{12}g^{21}g^{11} + g_{22}g^{21}g^{21})t^2t^2 \\
 &\quad - 2g(g_{11}g^{11}g^{12} + g_{12}g^{11}g^{22} + g_{12}g^{12}g^{21} + g_{22}g^{21}g^{22})t^1t^2 \\
 &= g[(g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22})g^{12} + (g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22})g^{22}]t^1t^1 \\
 &\quad + g[(g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21})g^{11} + (g_{21}g^{11} + g_{22}g^{21})g^{21}]t^2t^2 \\
 &\quad - 2g[(g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22})g^{11} + (g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22})g^{21}]t^1t^2.
 \end{aligned}$$

Empleamos ahora la igualdad (4) de la Sección 0.1

$$|\nu|^2 = g(\delta_1^2g^{12} + \delta_2^2g^{22})t^1t^1 + g(\delta_1^1g^{11} + \delta_2^1g^{21})t^2t^2 - 2g(\delta_1^2g^{11} + \delta_2^2g^{21})t^1t^2,$$

aplicando (28) y teniendo en cuenta que $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1$ y $\delta_1^2 = \delta_2^1 = 0$, se tiene

$$|\nu| = \sqrt{g_{11}(t^1)^2 + g_{22}(t^2)^2 + 2g_{12}t^1t^2} = |t| = 1.$$

Por tanto ν es el normal principal de la curva $m = X|_{\partial B}$ y es tangente a X , es decir, es colineal al *normal intrínseco* S en $X|_{\partial B}$ y tenemos

$$\langle \nabla_X f, \nu \rangle = g_{\alpha\beta} f^\alpha \nu^\beta = \nu^\beta f_\beta = \sqrt{g} g^{\alpha\beta} f_\beta \varepsilon_\alpha^\gamma t^\gamma.$$

Por ello, definimos la derivada direccional de f en la dirección del vector normal principal ν como

$$\frac{\partial}{\partial \nu} f := \langle \nabla_X f, \nu \rangle.$$

Teniendo esto en cuenta obtenemos de (31) la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_{X|_B} \langle \nabla_X \varphi, \nabla_X f \rangle dA = \int_{X|_{\partial B}} \varphi \frac{\partial}{\partial \nu} f ds - \int_{X|_B} \varphi \Delta_X f dA. \quad (32)$$

Consideramos ahora la siguiente generalización de la *integral de energía de Dirichlet*

$$E_B(f) := \frac{1}{2} \int_B |\nabla_X f|^2 \sqrt{g} du dv. \quad (33)$$

Definimos su primera derivada en f en la dirección de φ como

$$\delta E_B(f, \varphi) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} E_B(f + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon=0} = \int_B \langle \nabla_X \varphi, \nabla_X f \rangle \sqrt{g} du dv.$$

Consideramos ahora el conjunto $C_c^1(B)$, es claro que toda función $\varphi \in C_c^1(B)$ verifica en particular $\varphi|_{\partial B} = 0$. Veamos entonces el siguiente resultado:

Proposición 9. *La ecuación*

$$\delta E_B(f, \varphi) = 0$$

se cumple para toda $\varphi \in C_c^1(B)$ si y solo si

$$\Delta_X f = 0 \text{ en } B. \tag{34}$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^1(B)$, como $\varphi|_{\partial B} = 0$ se tiene

$$\int_{X|_{\partial B}} \varphi \frac{\partial}{\partial \nu} f \, ds = 0.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (32) escribimos:

$$\delta E_B(f, \varphi) = \int_B \langle \nabla_X \varphi, \nabla_X f \rangle \sqrt{g} \, du \, dv = - \int_{X|_B} \varphi \Delta_X f \, dA.$$

Como existe un compacto $K \subset B$ tal que $\varphi = 0$ en los puntos de $B \setminus K$, se tiene que $\delta E_B(f, \varphi) = 0$ si y solo si

$$\Delta_X f = 0 \text{ en } K.$$

Entonces, $\delta E_B(f, \varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C_c^1(B)$ si y solo si

$$\Delta_X f = 0 \text{ en } \bigcup_{\substack{K \subset B \\ K \text{ compacto}}} K = B$$

□

La ecuación (34) es conocida como *la ecuación de Laplace-Beltrami*.

Vamos a definir el homomorfismo de $\mathfrak{F}(X)$ -módulos $H_f : \mathfrak{V}(X) \rightarrow \mathfrak{V}(X)$ asociado a $f \in \mathfrak{F}(X)$ como

$$H_f(V) := D_V(\nabla_X f), \quad \text{para } V \in \mathfrak{V}(X),$$

y lo llamaremos *tensor hessiano de f* ⁴. Definimos también la forma bilineal

$$h_f(V, U) := \langle H_f(V), U \rangle = \langle D_V \nabla_X f, U \rangle, \quad \text{para } U, V \in \mathfrak{V}(X), \tag{35}$$

⁴Por la linealidad de la derivada covariante (18) se tiene que H_f es homomorfismo

conocida como *forma hessiana de f*. La bilinealidad de la forma $h_f(V, U)$ es inmediata a partir de la linealidad de la derivada covariante (18) y de la bilinealidad del producto escalar. Para $V = V^\alpha X_\alpha \in \mathfrak{V}(X)$, se tiene por (17) y (19)

$$\begin{aligned} H_f(V) &= D_V(\nabla_X f) = D_V[f^\sigma X_\sigma] = [f^\beta_\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta f^\sigma] V^\alpha X_\beta \\ &= [\partial_\alpha(g^{\beta\gamma} f_\gamma) + \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta(g^{\sigma\gamma} f_\gamma)] V^\alpha X_\beta \\ &= [g^{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma} + g_\alpha^{\beta\gamma} f_\gamma + g^{\sigma\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta f_\gamma] V^\alpha X_\beta. \end{aligned}$$

Aplicando, otra vez, la fórmula (8) de la Sección 0.1 y teniendo en cuenta la simetría de los símbolos de Christoffel obtenemos:

$$\begin{aligned} H_f(V) &= [g^{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma} + (-g^{\tau\beta} \Gamma_{\tau\alpha}^\gamma - g^{\sigma\gamma} \Gamma_{\sigma\alpha}^\beta) f_\gamma + g^{\sigma\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta f_\gamma] V^\alpha X_\beta \\ &= [g^{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma} - g^{\beta\tau} \Gamma_{\alpha\tau}^\gamma f_\gamma] V^\alpha X_\beta. \end{aligned}$$

Finalmente desarrollando la expresión en los índices γ y τ podemos escribir:

$$\begin{aligned} H_f(V) &= [g^{\beta 1} f_{\alpha 1} - g^{\beta 1} \Gamma_{\alpha 1}^1 f_1 - g^{\beta 2} \Gamma_{\alpha 2}^1 f_1 \\ &\quad + g^{\beta 2} f_{\alpha 2} - g^{\beta 1} \Gamma_{\alpha 1}^2 f_2 - g^{\beta 2} \Gamma_{\alpha 2}^2 f_2] V^\alpha X_\beta \\ &= [g^{\beta 1} f_{\alpha 1} - g^{\beta 1} \Gamma_{\alpha 1}^1 f_1 - g^{\beta 1} \Gamma_{\alpha 1}^2 f_2 \\ &\quad + g^{\beta 2} f_{\alpha 2} - g^{\beta 2} \Gamma_{\alpha 2}^1 f_1 - g^{\beta 2} \Gamma_{\alpha 2}^2 f_2] V^\alpha X_\beta \\ &= [g^{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma} - g^{\beta\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta] V^\alpha X_\beta \\ &= h_\alpha^\beta V^\alpha X_\beta, \end{aligned} \tag{36}$$

con

$$h_\alpha^\beta = g^{\beta\gamma} \{f_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta\}. \tag{37}$$

Gracias a estas fórmulas podemos comprobar fácilmente que $h_f(V, U)$ es una forma simétrica, es decir, que cumple $h_f(V, U) = h_f(U, V)$:

$$\begin{aligned} h_f(V, U) &= \langle H_f(V), U \rangle = \langle h_\alpha^\beta V^\alpha X_\beta, U^\sigma X_\sigma \rangle = g_{\beta\sigma} h_\alpha^\beta V^\alpha U^\sigma \\ &= g_{\beta\sigma} g^{\beta\gamma} \{f_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta\} V^\alpha U^\sigma. \end{aligned}$$

Empleamos la igualdad (4) de la Sección 0.1

$$\begin{aligned} h_f(V, U) &= \delta_\sigma^\gamma \{f_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta\} V^\alpha U^\sigma = \{f_{\alpha\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta f_\delta\} V^\alpha U^\sigma \\ &= \{f_{\sigma\alpha} - \Gamma_{\sigma\alpha}^\delta f_\delta\} U^\sigma V^\alpha = h_f(U, V). \end{aligned}$$

Por tanto, $h_f(V, U)$ es una forma bilineal y simétrica.

La traza del homomorfismo H_f viene dada por $h_\alpha^\alpha = g^{\beta\gamma} \{f_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta\}$, entonces por (29) se tiene

$$\Delta_X f = \text{traza } H_f.$$

Capítulo 1

Caracterizaciones de Superficies Minimales

Desde el siglo pasado, el término *superficie minimal* se usa para referirse a superficies con curvatura media nula,

$$H = 0,$$

ya que las superficies que minimizan el área dentro de un recinto dado deben cumplir necesariamente dicha condición. Esto fue probado de forma implícita por Lagrange para superficies no paramétricas en 1762 y posteriormente, en 1776, por Meusnier, el cuál usó la expresión analítica de la curvatura media (llamada así por sugerencia de Sophie Germain) y determinó dos superficies minimales, el catenoide y el helicoide.

En este capítulo veremos caracterizaciones de las superficies minimales tanto paramétricas como no paramétricas. Además, usando estas caracterizaciones redefiniremos el concepto de superficie minimal para incluir a superficies con singularidades aisladas.

Las fuentes utilizadas para esta sección son principalmente los libros [3] y [4]; los resultados específicos extraídos de otras fuentes serán nombrados junto con su correspondiente referencia.

Las notas históricas sobre superficies minimales no paramétricas son tomadas de [3] y [10].

1.1 Primera derivada del funcional área

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio (abierto conexo), denotaremos por $\bar{\Omega}$ su clausura sobre \mathbb{R}^2 . Sea $X : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de una superficie regular¹ de clase C^2 y sea su imagen esférica $N : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$N = \frac{1}{\sqrt{g}} X_1 \wedge X_2, \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Denotamos por $g_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$ los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental respectivamente y por $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ los símbolos de Christoffel de X . Denotamos además por H la curvatura media de X . Escribiremos $w = (u, v)$, $u^1 = u$, $u^2 = v$, y $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} X$. En general, usaremos indistintamente las notaciones $f_\alpha = f_{u^\alpha} = \partial_\alpha f = \partial_{u^\alpha} f = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} f$ para referirnos a la derivada con respecto a la variable u^α (α -ésima) de una función f .

Denotaremos por $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ al conjunto de campos vectoriales de Ω en \mathbb{R}^3 de clase C^1 con soporte compacto en el dominio Ω .

Consideramos ahora una *variación de X* , es decir, una aplicación

$$Z : \bar{\Omega} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{con } \varepsilon_0 > 0,$$

de clase C^2 , cumpliendo que

$$Z(w, 0) = X(w), \quad \text{para todo } w \in \bar{\Omega}.$$

Podemos interpretar esta aplicación como una familia de superficies $Z(w, \varepsilon)$, $w \in \bar{\Omega}$, que son deformaciones de X (la propia X está en la familia).

Desarrollando la serie de Taylor centrada en el punto cero en la variable ε escribimos:

$$Z(w, \varepsilon) = X(w) + \varepsilon Y(w) + \varepsilon^2 R(w, \varepsilon) \tag{1.1}$$

donde la función continua $\varepsilon^2 R(w, \varepsilon)$ tiende a 0 con orden cuadrático cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

El campo vectorial

$$Y(w) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z(w, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$$

¹El hecho de que la parametrización esté definida sobre un conjunto compacto no supondrá ningún conflicto con nuestro desarrollo anterior: basta con tomar una parametrización local cualquiera definida en un dominio Ω' y restringirnos a un subconjunto $\Omega \subset \Omega'$ que también sea dominio y tal que $\bar{\Omega} \subset \Omega'$.

es conocido como la primera derivada de la familia de superficies $Z(\cdot, \varepsilon)$.

Con ello, definimos la primera derivada del funcional área $A_\Omega(X)$ de X sobre Ω en la dirección de un campo Y como

$$\delta A_\Omega(X, Y) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} A_\Omega(Z(\cdot, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (1.2)$$

Estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

Teorema 5. *La primera derivada, $\delta A_\Omega(X, Y)$, del funcional área A_Ω en X se anula para todo campo vectorial $Y \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ si y solo si la curvatura media H de X es idénticamente nula.*

Demostración. Sea $Z(w, \varepsilon)$ una variación de X y sea $Y(w)$ la primera derivada de la familia $Z(\cdot, \varepsilon)$. Podemos expresar el campo Y de la siguiente forma:

$$Y(w) = \eta^\beta(w) X_\beta(w) + \lambda(w) N(w),$$

con $\eta^1, \eta^2, \lambda \in C^1(\bar{\Omega})$. Por (1.1) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} Z = Z_\alpha = X_\alpha + \varepsilon[\eta_\alpha^\beta X_\beta + \eta^\beta X_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha N + \lambda N_\alpha] + \varepsilon^2 R_\alpha.$$

Mediante las ecuaciones de Weingarten (5) y de Gauss (6) de la Sección 0.1 obtenemos

$$Z_\alpha = X_\alpha + \varepsilon[\eta_\alpha^\beta X_\beta + \eta^\beta (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma + b_{\alpha\beta} N) + \lambda_\alpha N + \lambda(-b_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} X_\beta)] + \varepsilon^2 R_\alpha.$$

Agrupando los coeficientes de X_1, X_2 y N , y teniendo en cuenta que $g^{\beta\gamma} = g^{\gamma\beta}$ y que los índices β y γ recorren los mismos valores de 1 a 2, escribimos

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= X_\alpha + \varepsilon[(\eta_\alpha^1 + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \eta^\beta - b_{\alpha\gamma} g^{1\gamma} \lambda) X_1 + (\eta_\alpha^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \eta^\beta - b_{\alpha\gamma} g^{2\gamma} \lambda) X_2 \\ &\quad + (b_{\alpha\beta} \eta^\beta + \lambda_\alpha) N] + \varepsilon^2 R_\alpha \\ &= X_\alpha + \varepsilon[\xi_\alpha^\gamma X_\gamma + \nu_\alpha N] + \varepsilon^2 R_\alpha, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^\gamma &= \eta_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \eta^\beta - b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \lambda, \\ \nu_\alpha &= b_{\alpha\beta} \eta^\beta + \lambda_\alpha. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta $\langle X_1, N \rangle = \langle X_2, N \rangle = 0$ expresamos

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 &= \langle Z_1, Z_1 \rangle = g_{11} + 2\varepsilon(\xi_1^1 g_{11} + \xi_1^2 g_{12}) + \dots, \\ |Z_2|^2 &= \langle Z_2, Z_2 \rangle = g_{22} + 2\varepsilon(\xi_2^1 g_{12} + \xi_2^2 g_{22}) + \dots, \\ \langle Z_1, Z_2 \rangle &= g_{12} + \varepsilon[\xi_2^1 g_{11} + (\xi_1^1 + \xi_2^2)g_{12} + \xi_1^2 g_{22}] + \dots, \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 |Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2 &= g_{11} g_{22} + 2\varepsilon[\xi_2^1 g_{11} g_{12} + (\xi_1^1 + \xi_2^2)g_{11} g_{22} + \xi_1^2 g_{12} g_{22}] \\ &\quad - g_{12}^2 - 2\varepsilon[\xi_2^1 g_{11} g_{12} + (\xi_1^1 + \xi_2^2)g_{12}^2 + \xi_1^2 g_{12} g_{22}] + \dots \\ &= g_{11} g_{22} - g_{12}^2 + 2\varepsilon(\xi_1^1 + \xi_2^2)\{g_{11} g_{22} - g_{12}^2\} + \dots \\ &= g[1 + 2\varepsilon(\xi_1^1 + \xi_2^2) + \dots]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Además, tenemos:

$$\xi_1^1 + \xi_2^2 = \eta_1^1 + \eta_2^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \eta^\beta - b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \lambda.$$

Usando la fórmula de la curvatura media (12) de la Sección 0.1 y (23) de la Sección 0.3 obtenemos:

$$\begin{aligned} \xi_1^1 + \xi_2^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \eta^1}{\partial u} \right] \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{g}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \eta^2}{\partial v} \right] \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{g}) \\ &\quad - 2H\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\eta^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial v} (\eta^2 \sqrt{g}) \right\} - 2H\lambda. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por el desarrollo de Taylor centrado en el punto cero de la función $\sqrt{1+x}$ se tiene, para un x "suficientemente pequeño":

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2), \quad (1.5)$$

donde $O(x^2)$ es un término cuyo módulo está acotado por $|x^2|$ multiplicado por una constante positiva. Esto es, para todo $r > 0$ y para todo $|x| \leq r$, existe una constante $M > 0$ tal que $|O(x^2)| \leq M|x^2|$.

Por (1.3) y (1.4) se tiene

$$\frac{|Z_1|^2 |Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2}{g} = 1 + 2\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\eta^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial v} (\eta^2 \sqrt{g}) \right\} - 2H\lambda \right] + \dots,$$

entonces aplicando (1.5) sobre el segundo miembro de la igualdad obtenemos

$$\frac{\sqrt{|Z_1|^2 |Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2}}{\sqrt{g}} = 1 + \varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\eta^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial v} (\eta^2 \sqrt{g}) \right\} - 2H\lambda \right] + \dots,$$

y, por tanto:

$$\sqrt{|Z_1|^2|Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2} = \sqrt{g} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(\eta^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial v}(\eta^2 \sqrt{g}) - 2H\sqrt{g}\lambda \right\} + \dots \quad (1.6)$$

Hemos calculado así el funcional área $A_\Omega(Z(\cdot, \varepsilon))$. Derivando bajo el signo integral en la expresión (1.2) obtenemos que la primera derivada del funcional $A_\Omega(X)$ de X sobre Ω en la dirección de $Y = \eta^\beta X_\beta + \lambda N$ es:

$$\begin{aligned} \delta A_\Omega(X, Y) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int_\Omega \sqrt{|Z_1|^2|Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2} du dv \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon} \left(\sqrt{|Z_1|^2|Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} du dv, \end{aligned}$$

luego por (1.6) se tiene

$$\begin{aligned} \delta A_\Omega(X, Y) &= \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial u}(\eta^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial v}(\eta^2 \sqrt{g}) - 2H\sqrt{g}\lambda \right] du dv \\ &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial u}(\eta^1 \sqrt{g}) du dv + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial v}(\eta^2 \sqrt{g}) du dv - 2 \int_\Omega \lambda H\sqrt{g} du dv \\ &= \int_{\partial\Omega} \eta^1 \sqrt{g} dv - \int_{\partial\Omega} \eta^2 \sqrt{g} du - 2 \int_\Omega \lambda H\sqrt{g} du dv. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como sabemos, para $Y \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ se tiene que $Y|_{\partial\Omega} = 0$, es decir, $\eta^1 = \eta^2 = \lambda = 0$ sobre $\partial\Omega$ y, en particular,

$$\begin{aligned} \delta A_\Omega(X, Y) &= -2 \int_\Omega \lambda H\sqrt{g} du dv = -2 \int_\Omega \langle Y, N \rangle H\sqrt{g} du dv \quad (1.8) \\ &= -2 \int_X \langle Y, N \rangle H dA. \end{aligned}$$

Como podemos tomar $\langle Y, N \rangle = \lambda \in C_c^1(\Omega)$ arbitrario en la expresión anterior, se tiene el resultado por el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones. \square

Acabamos de probar que los puntos estacionarios regulares del funcional área (sus mínimos y máximos) corresponden a las superficies con curvatura media nula, por ello se tiene la siguiente definición:

Definición 18. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Se dice que S es *minimal* (o *mínima*) si cada una de sus parametrizaciones locales es *minimal*, esto es, si cada parametrización local $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S verifica que su curvatura media H es nula en todos los puntos de Ω .

Denominar estas superficies como "mínimas" puede resultar confuso, sabemos que corresponden a puntos críticos del funcional área, así que una interpretación geométrica de ellas sería la siguiente:

Dada una curva cerrada en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , las superficies minimales son aquellas superficies de mayor o menor área cuya frontera coincide con dicha curva.

Se trata de una interpretación puramente intuitiva, no se está especificando si la curva cerrada es una curva de Jordan, si el problema tiene solución o si dicha solución es una superficie regular o con área finita, si el máximo o mínimo es relativo o absoluto..., pero da una idea de a qué corresponden estas superficies. Para evitar la idea de que estas superficies sean aquellas de área mínima, emplearemos para referirnos a ellas el anglicismo "minimal". Vamos ahora a dar un sentido geométrico a la curvatura media. Como sabemos,

$$\lambda\sqrt{g} = \langle Y, N \rangle \sqrt{g} = \langle Y, X_1 \wedge X_2 \rangle = [Y, X_1, X_2],$$

donde $[Y, X_1, X_2]$ denota al producto mixto de vectores, es decir, $[Y, X_1, X_2] := \det(Y, X_1, X_2)$. Para $Y = \eta^1 X_1 + \eta^2 X_2 + \lambda N$ se tiene

$$\begin{aligned} [Y, N, dX] &= [\eta^1 X_1 + \eta^2 X_2 + \lambda N, N, X_1 du + X_2 dv] \\ &= \eta^1 [X_1, N, X_2 dv] + \eta^2 [X_2, N, X_1 du], \end{aligned}$$

y como $\sqrt{g} = [N, X_1, X_2] = [X_2, N, X_1] = -[X_1, N, X_2]$ obtenemos

$$[Y, N, dX] = \eta^2 \sqrt{g} du - \eta^1 \sqrt{g} dv.$$

Por (1.7) escribimos:

$$-\delta A_\Omega(X, Y) = \int_{\partial\Omega} [Y, N, dX] + 2 \int_\Omega H[Y, X_1, X_2] du dv. \quad (1.9)$$

Sea $\omega(s)$ una curva regular a trozos que parametriza $\partial\Omega$ respecto al parámetro natural s de $X|_{\partial\Omega}$. Así, $c(s) := X(\omega(s))$ es una curva regular a trozos parametrizada naturalmente (en cada arco regular) que recorre $\partial X := X|_{\partial\Omega}$. Sean también $Y(s) := Y(\omega(s))$ y $N(s) := N(\omega(s))$. Notamos que

$$dX \circ \omega(s) = dX(\omega(s)) = d(c(s)) = \dot{c}(s) ds = \mathbf{t}(s) ds,$$

y, entonces se tiene

$$[Y, N, dX] \circ \omega(s) = \langle Y(s), N(s) \wedge \mathbf{t}(s) \rangle ds = \langle Y(s), S(s) \rangle ds,$$

donde S es el normal intrínseco de la curva frontera c de X . Aplicando sobre (1.9) el Teorema de Cambio de Variables se obtiene:

$$-\delta A_{\Omega}(X, Y) = \int_{\partial X} \langle Y, S \rangle ds + 2 \int_X \langle Y, N \rangle H dA. \quad (1.10)$$

En particular para $Y = \lambda N$ tenemos

$$\delta A_{\Omega}(X, \lambda N) = -2 \int_X \lambda H dA,$$

y, si H es constante,

$$-2H = \frac{\delta A_{\Omega}(X, N)}{A_{\Omega}(X)}.$$

Es decir, para superficies con curvatura media constante, la expresión $-2H$ corresponde a la razón de cambio del área de la superficie en la dirección normal a ésta.

Gracias a este desarrollo es sencillo probar el siguiente resultado:

Proposición 10. *Si $X : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de una superficie minimal, entonces se cumple*

$$\delta A_{\Omega}(X, Y) = 0,$$

para todo campo $Y \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ortogonal al normal intrínseco S de la frontera ∂X , es decir, $\langle Y, S \rangle = 0$ en ∂X .

Demostración. Como $H = 0$ en $\bar{\Omega}$, particularizamos la expresión (1.10) como sigue:

$$\delta A_{\Omega}(X, Y) = - \int_{\partial X} \langle Y, S \rangle ds.$$

Entonces como $\langle Y, S \rangle = 0$ en ∂X se tiene el resultado. \square

1.2 Superficies minimales no paramétricas

Vamos a limitarnos ahora a estudiar superficies regulares *no paramétricas*, es decir, aquellas dadas por una parametrización global obtenida como el *grafo* de una función diferenciable $z = z(x, y)$ (o *carta de Monge*) en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dicha parametrización global vendrá dada como

$$X(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad \text{con } (x, y) \in \Omega,$$

y supondremos que la función $z(x, y)$ es de clase C^2 al menos. Emplearemos para estas superficies x e y como parámetros en lugar de u y v . Denotaremos las derivadas de primer orden y segundo orden de z como: $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy} = z_{yx}, z_{yy}$; donde los subíndices indican las variables con respecto a las que se ha derivado.

Teniendo en cuenta que

$$X_1 = (1, 0, z_x), \quad X_2 = (0, 1, z_y),$$

podemos escribir:

$$g_{11} = 1 + z_x^2, \quad g_{12} = g_{21} = z_x z_y, \quad g_{22} = 1 + z_y^2, \quad g = 1 + z_x^2 + z_y^2,$$

y

$$N = \frac{1}{\sqrt{g}} X_1 \wedge X_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1).$$

Por otro lado,

$$b_{11} = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad b_{22} = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Entonces mediante las fórmulas (12) para la curvatura media y (13) para la curvatura de Gauss de la Sección 0.1 obtenemos:

$$H = \frac{1}{2g} (b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - 2b_{12}g_{12}) = \frac{(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy}}{2(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}}, \quad (1.11)$$

$$K = \frac{1}{g} (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}. \quad (1.12)$$

Observación. De la expresión (1.11) se deduce que $H = 0$ si y solo si

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0. \quad (1.13)$$

Esta ecuación diferencial no lineal de segundo orden es conocida como la *Ecuación de Superficie Minimal* y tiene su origen en la memoria «Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies» publicada en 1762 por Joseph Louis Lagrange. Esta memoria marcó el inicio del estudio de las superficies minimales. En ella, Lagrange no llegó a escribir explícitamente la ecuación anterior, pero se podía deducir fácilmente del siguiente resultado, que probaremos siguiendo la idea que presentó Lagrange y con la que dedujo la conocida como *Ecuación de Euler-Lagrange*.

Proposición 11. Si $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$ es una superficie minimal no paramétrica definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la función $z \in C^2(\Omega)$ debe verificar la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0 \quad (1.14)$$

Demostración. Por el Teorema 5 de la Sección 1.1 se cumple que $\delta A_\Omega(X, Y) = 0$, para todo campo $Y \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (pues X es minimal). En particular, tomando Y de la forma $Y = (0, 0, \lambda)$ con $\lambda = \lambda(x, y) \in C_c^1(\Omega)$, y tomando la variación de X correspondiente

$$Z((x, y), \varepsilon) = X(x, y) + \varepsilon Y(x, y) + \cdots = (x, y, z(x, y) + \varepsilon \lambda(x, y)) + \cdots ,$$

se cumple

$$\delta A_\Omega(X, Y) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} A_\Omega(Z(\cdot, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (1.15)$$

Por otro lado, se tiene

$$Z_1 = (1, 0, z_x + \varepsilon \lambda_x) + \cdots , \quad Z_2 = (0, 1, z_y + \varepsilon \lambda_y) + \cdots ,$$

luego

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 &= 1 + z_x^2 + 2\varepsilon z_x \lambda_x + \cdots , \\ |Z_2|^2 &= 1 + z_y^2 + 2\varepsilon z_y \lambda_y + \cdots , \\ \langle Z_1, Z_2 \rangle &= z_x z_y + \varepsilon (z_x \lambda_y + z_y \lambda_x) + \cdots . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 |Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2 &= (1 + z_x^2)(1 + z_y^2) + 2\varepsilon [(1 + z_x^2) z_y \lambda_y + (1 + z_y^2) z_x \lambda_x] \\ &\quad - z_x^2 z_y^2 - 2\varepsilon (z_x^2 z_y \lambda_y + z_y^2 z_x \lambda_x) + \cdots \\ &= 1 + z_x^2 + z_y^2 + 2\varepsilon (z_x \lambda_x + z_y \lambda_y) + \cdots , \end{aligned}$$

y

$$\frac{|Z_1|^2 |Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2}{g} = 1 + 2\varepsilon \frac{(z_x \lambda_x + z_y \lambda_y)}{g} + \cdots .$$

Aplicando (1.5) sobre el segundo miembro de la igualdad anterior obtenemos

$$\frac{\sqrt{|Z_1|^2 |Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2}}{\sqrt{g}} = 1 + \varepsilon \frac{(z_x \lambda_x + z_y \lambda_y)}{g} + \cdots ,$$

y, por tanto:

$$\sqrt{|Z_1|^2|Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2} = \sqrt{g} + \varepsilon \frac{(z_x \lambda_x + z_y \lambda_y)}{\sqrt{g}} + \dots \quad (1.16)$$

Acabamos de calcular el funcional área $A_\Omega(Z(\cdot, \varepsilon))$; derivando bajo el signo integral en (1.15) tenemos

$$\delta A_\Omega(X, Y) = \int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon} \left(\sqrt{|Z_1|^2|Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} du dv = 0.$$

Finalmente, derivando con respecto a ε en (1.16) y evaluando en $\varepsilon = 0$ obtenemos la siguiente expresión para la primera derivada del área:

$$\delta A_\Omega(X, Y) = \int_\Omega \left[\frac{z_x}{\sqrt{g}} \lambda_x + \frac{z_y}{\sqrt{g}} \lambda_y \right] dx dy.$$

Integrando por partes mediante la fórmula (32) de la Sección 0.3 se tiene

$$\delta A_\Omega(X, Y) = \int_{\partial X} \bar{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \langle (\bar{z}_x, \bar{z}_y), \nu \rangle ds - \int_\Omega \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{g}} \right) \right\} dx dy,$$

donde $\bar{\lambda}$, \bar{g} , \bar{z}_x , \bar{z}_y indican respectivamente la composición de las funciones λ , g , z_x , z_y con la curva regular a trozos $\omega(s)$ que parametriza $\partial\Omega$ respecto al parámetro natural s de $\partial X = X|_{\partial\Omega}$. La función $\lambda \in C_c^1(\Omega)$ verifica $\lambda = 0$ sobre $\partial\Omega$, luego se tiene que $\bar{\lambda} = 0$ sobre ∂X y por lo tanto

$$\delta A_\Omega(X, Y) = - \int_\Omega \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{g}} \right) \right\} dx dy = 0.$$

Como hemos tomado la función λ arbitrariamente en $C_c^1(\Omega)$ podemos aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones y, entonces debe cumplirse

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{g}} \right) = 0.$$

□

Observación. Para deducir la ecuación de superficie minimal de (1.14) basta con realizar las derivadas indicadas y comprobar que ésta última coincide con el doble de la curvatura media. De hecho, gracias a esto se puede probar la proposición anterior de forma inmediata: Como X es una superficie (no paramétrica) minimal se tiene que $H = 0$ en Ω y esto ocurre si y solo si se verifica (1.13) y esto a su vez ocurre si y solo si se cumple (1.14).

Podemos escribir la ecuación (1.14) de la siguiente forma:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla z}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}} = 0. \quad (1.17)$$

Ésta se conoce como la *Ecuación de Superficie Minimal en Forma de Divergencia*. Realizando las derivadas en (1.14) y teniendo en cuenta que $g = 1 + z_x^2 + z_y^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\nabla z}{\sqrt{g}} &= \frac{1}{g} \left(z_{xx} \sqrt{g} - z_x \frac{z_x z_{xx} + z_y z_{xy}}{\sqrt{g}} \right) + \frac{1}{g} \left(z_{yy} \sqrt{g} - z_y \frac{z_x z_{xy} + z_y z_{yy}}{\sqrt{g}} \right) \\ &= \frac{(g - z_x^2) z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (g - z_y^2) z_{yy}}{g \sqrt{g}} \\ &= \frac{(1 + z_y^2) z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2) z_{yy}}{g^{3/2}}, \end{aligned}$$

luego por (1.11) deducimos la expresión que anunciamos anteriormente:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla z}{\sqrt{g}} = 2H. \quad (1.18)$$

Lagrange dedujo la ecuación de Euler-Lagrange tratando de resolver el problema siguiente:

Dada una curva cerrada en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , encontrar la superficie con menor área cuya frontera coincide con dicha curva.

El interés de Lagrange por esta cuestión parecía residir en su utilidad como ejemplo para su mostrar su método de cálculo de variaciones, pues no profundizó más en el problema y tan sólo obtuvo la solución trivial a su ecuación (el plano, que verifica la ecuación con $z(x, y) = \text{cte.}$). Hubo que esperar unos años hasta que, en 1776, Jean Baptiste Meusnier proporcionó las dos primeras soluciones no triviales a la ecuación: el catenoide y el helicoide.

Saldremos ahora de nuestro recorrido histórico para dar caracterizaciones más modernas de superficie minimal, empezando por siguiente resultado, consecuencia de la ecuación (1.14):

Corolario 1. *Sea $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$ una superficie no paramétrica definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo. Entonces X es una superficie minimal si y solo si la 1-forma diferencial*

$$\gamma = - \left(\frac{z_x}{\sqrt{g}} \right) dy + \left(\frac{z_y}{\sqrt{g}} \right) dx$$

es exacta en Ω , es decir, si y solo si

$$\gamma = -dc,$$

para alguna función $c \in C^2(\Omega)$.

Demostración. Por la Proposición 11 sabemos que, como X es minimal, se verifica:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{g}} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{g}} \right). \quad (1.19)$$

Vamos a comprobar que efectivamente la 1-forma γ es exacta; gracias al Lema de Poincaré (que podemos aplicar porque Ω es simplemente conexo) y su recíproco sabemos que γ es exacta si y solo si es cerrada, es decir, que $d\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} d\gamma &= - \left[\frac{\partial(z_x/\sqrt{g})}{\partial x} dx + \frac{\partial(z_x/\sqrt{g})}{\partial y} dy \right] \wedge dy \\ &\quad + \left[\frac{\partial(z_y/\sqrt{g})}{\partial x} dx + \frac{\partial(z_y/\sqrt{g})}{\partial y} dy \right] \wedge dx \\ &= - \left[\frac{\partial(z_x/\sqrt{g})}{\partial x} + \frac{\partial(z_y/\sqrt{g})}{\partial y} \right] (dx \wedge dy), \end{aligned}$$

y por (1.19) se tiene

$$d\gamma = - \left[-\frac{\partial(z_y/\sqrt{g})}{\partial y} + \frac{\partial(z_y/\sqrt{g})}{\partial y} \right] (dx \wedge dy) = 0.$$

□

Podemos probar una versión más general que emplearemos posteriormente:

Teorema 6. Sea $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$ una superficie no paramétrica definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo. Sea $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ su campo de Gauss. Entonces X es una superficie minimal si y solo si la aplicación lineal $N \wedge dX$ es una diferencial total, es decir, si y solo si existe un campo vectorial $X^* \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$-dX^* = N \wedge dX, \quad (1.20)$$

con $dX = X_1 dx + X_2 dy$. Si escribimos

$$X^* = (a, b, c), \quad N \wedge dX = (\alpha, \beta, \gamma),$$

la ecuación (1.20) es equivalente a

$$-da = \alpha, \quad -db = \beta, \quad -dc = \gamma. \quad (1.21)$$

Demostración. Denotamos

$$N = \left(\frac{-z_x}{\sqrt{g}}, \frac{-z_y}{\sqrt{g}}, \frac{1}{\sqrt{g}} \right) = (\xi, \eta, \zeta),$$

entonces el producto $N \wedge dX$ se escribe:

$$N \wedge dX = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \xi & \eta & \zeta \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (\eta dz - \zeta dy, \zeta dx - \xi dz, \xi dy - \eta dx),$$

y, por tanto:

$$\alpha = \eta dz - \zeta dy, \quad \beta = \zeta dx - \xi dz, \quad \gamma = \xi dy - \eta dx.$$

Sustituyendo ξ, η, ζ y $dz = z_x dx + z_y dy$ obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{z_y}{\sqrt{g}}(z_x dx + z_y dy) - \frac{1}{\sqrt{g}} dy = -\frac{z_x z_y}{\sqrt{g}} dx - \frac{1 + z_y^2}{\sqrt{g}} dy, \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{g}} dx + \frac{z_x}{\sqrt{g}}(z_x dx + z_y dy) = \frac{1 + z_x^2}{\sqrt{g}} dx + \frac{z_x z_y}{\sqrt{g}} dy, \\ \gamma &= \frac{z_y}{\sqrt{g}} dx - \frac{z_x}{\sqrt{g}} dy. \end{aligned}$$

Notamos que probar que la aplicación $N \wedge dX$ es una diferencial total es equivalente a probar que es un campo conservativo, y la condición necesaria para ello es que su rotacional sea nulo (puede encontrarse en el Capítulo 5 del libro [5]). Esto, a su vez, equivale a aplicar el Lema de Poincaré a cada componente y comprobar que $d\alpha = d\beta = d\gamma = 0$. Vamos entonces a calcular $d\alpha, d\beta$ y $d\gamma$:

1.

$$d\alpha = \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{z_x z_y}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1 + z_y^2}{\sqrt{g}} \right) \right] dx dy = A dx dy,$$

con

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{g} \left\{ (z_{xy} z_y + z_x z_{yy}) \sqrt{g} - z_x z_y \frac{z_x z_{xy} + z_y z_{yy}}{\sqrt{g}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{g} \left\{ -2z_y z_{xy} \sqrt{g} + (1 + z_y^2) \frac{z_x z_{xx} + z_y z_{xy}}{\sqrt{g}} \right\} \\ &= \frac{1}{g^{3/2}} \{ (-z_y z_{xy} + z_x z_{yy})(1 + z_x^2 + z_y^2) - z_x^2 z_y z_{xy} - z_x z_y^2 z_{yy} \} \\ &\quad + \frac{1}{g^{3/2}} \{ (1 + z_y^2) z_y z_{xy} + (1 + z_y^2) z_x z_{xx} \} \\ &= \frac{1}{g^{3/2}} \{ (1 + z_x^2) z_x z_{yy} - 2z_x^2 z_y z_{xy} + (1 + z_y^2) z_x z_{xx} \} = 2H z_x. \end{aligned}$$

2.

$$d\beta = \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+z_x^2}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x z_y}{\sqrt{g}} \right) \right] dx dy = B dx dy,$$

con

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{g} \left\{ -2z_x z_{xy} \sqrt{g} + (1+z_x^2) \frac{z_x z_{xy} + z_y z_{yy}}{\sqrt{g}} \right\} \\ &+ \frac{1}{g} \left\{ (z_{xx} z_y + z_x z_{xy}) \sqrt{g} - z_x z_y \frac{z_x z_{xx} + z_y z_{xy}}{\sqrt{g}} \right\} \\ &= \frac{1}{g^{3/2}} \{ (1+z_x^2) z_y z_{yy} + (1+z_x^2) z_x z_{xy} \} \\ &+ \frac{1}{g^{3/2}} \{ (z_{xx} z_y - z_x z_{xy}) (1+z_x^2 + z_y^2) - z_x^2 z_y z_{xx} - z_x z_y^2 z_{xy} \} \\ &= \frac{1}{g^{3/2}} \{ (1+z_x^2) z_y z_{yy} - 2z_x z_y^2 z_{xy} + (1+z_y^2) z_y z_{xx} \} = 2H z_y. \end{aligned}$$

3.

$$d\gamma = \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{z_x}{\sqrt{g}} \right) \right] dx dy = C dx dy,$$

con

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{g} \left\{ -z_{yy} \sqrt{g} + z_y \frac{z_x z_{xy} + z_y z_{yy}}{\sqrt{g}} \right\} + \frac{1}{g} \left\{ -z_{xx} \sqrt{g} + z_x \frac{z_x z_{xx} + z_y z_{xy}}{\sqrt{g}} \right\} \\ &= \frac{1}{g^{3/2}} \{ -z_{yy} (1+z_x^2) + 2z_x z_y z_{xy} - z_{xx} (1+z_y^2) \} = -2H. \end{aligned}$$

Por tanto

$$d(N \wedge dX) = 2H(z_x, z_y, -1) dx dy = -2HN \sqrt{g} dx dy = -2HN dA,$$

entonces como X es minimal, tiene curvatura media H idénticamente nula y se tiene finalmente

$$d(N \wedge dX) = 0.$$

□

Lejos de limitarnos, establecer resultados para superficies no paramétricas es de utilidad en el estudio de superficies regulares cualesquiera, pues toda parametrización local de una superficie regular es localmente estrictamente equivalente a una superficie no paramétrica. Es decir:

Lema 3. Dado un punto p de una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ y una parametrización local $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ con $p \in X(U)$, existe una parametrización local $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow Y(V) \subset S$ y un abierto $W \subset S$ tales que $p \in W \subset X(U) \cap Y(V)$, Y es carta de Monge y la aplicación de cambio de coordenadas

$$h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \subset V \rightarrow X^{-1}(W) \subset U,$$

es un difeomorfismo con $J_h > 0$ en $Y^{-1}(W)$.

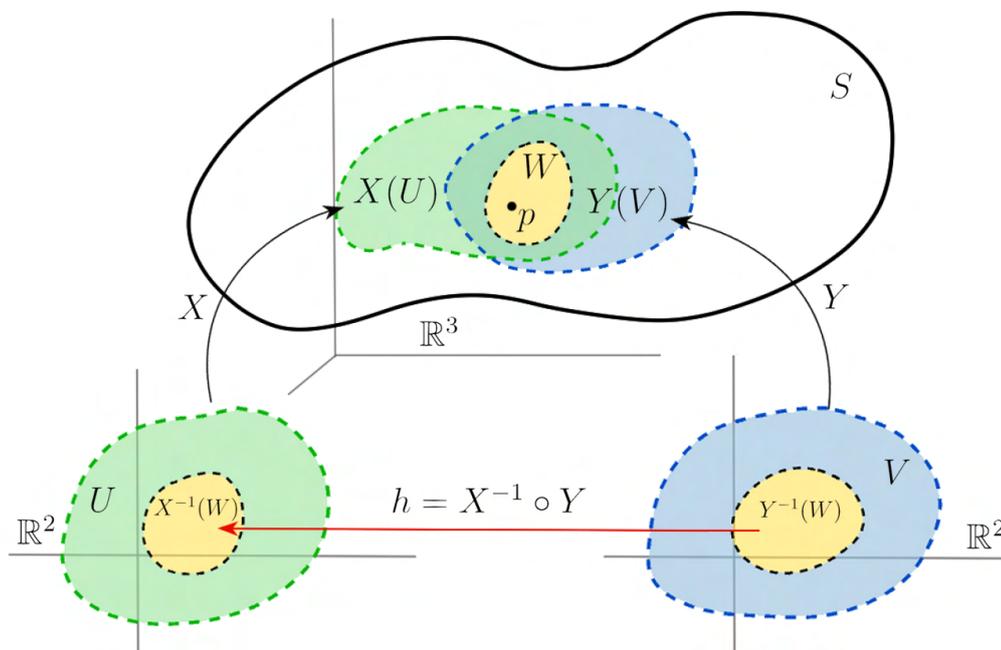


Figura 1.1: Representación de la situación descrita en el Lema 3.

Este resultado se abordó en la asignatura de Geometría Local de Curvas y Superficies y puede encontrarse una prueba del mismo en el Capítulo 2 de [6].

En consecuencia, todas aquellas expresiones y propiedades invariantes por cambios de parámetros que sean probadas para parametrizaciones locales de una superficie regular en forma de cartas de Monge son ciertas (al menos localmente) para cualquier parametrización local de la superficie.

1.3 Definición general de superficie minimal

En primer lugar vamos a formalizar algunos resultados inspirados en las expresiones (1.17) y (1.18) de la sección anterior comenzando por el siguiente teorema, probado por Eugenio Beltrami en 1867.

Teorema 7. *Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de una superficie regular, entonces*

$$\Delta_X X = 2HN, \quad (1.22)$$

donde Δ_X es el operador de Laplace-Beltrami en X .

Demostración. Basta probar (1.22) en un entorno Ω' de cada punto de Ω y, como ambos miembros de la igualdad son invariantes por cambios de parámetros estrictamente equivalentes, basta a su vez probarlo para una parametrización local cualquiera expresada como carta de Monge. Este razonamiento es posible ya que, como vimos en la Sección 0.1, los cambios de parámetros estrictamente equivalentes son isometrías que conservan la orientación (la aplicación de Gauss N) y, por la Proposición 4 sabemos que se conserva H ; además, la expresión (29) de la Sección 0.3 aplicada a $\Delta_X X$ solo depende de los coeficientes métricos y los símbolos de Christoffel, por tanto se conserva por isometrías.

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de una superficie regular de la forma

$$X(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad \text{con } (x, y) \in \Omega.$$

Denotando

$$z_1 = z_x, \quad z_2 = z_y, \quad z_{11} = z_{xx}, \quad z_{12} = z_{21} = z_{xy}, \quad z_{22} = z_{yy},$$

podemos escribir las ecuaciones de Gauss (6) de la Sección 0.1 como sigue

$$X_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \Gamma_{\alpha\beta}^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_2 \end{pmatrix} + b_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} -z_1 \\ -z_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^1 &= b_{\alpha\beta} \frac{z_1}{\sqrt{g}}, & \Gamma_{\alpha\beta}^2 &= b_{\alpha\beta} \frac{z_2}{\sqrt{g}} \\ z_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^1 z_1 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 z_2 + b_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{g}}, \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$z_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \frac{z_1^2}{\sqrt{g}} + b_{\alpha\beta} \frac{z_2^2}{\sqrt{g}} + b_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{g}} = b_{\alpha\beta} \sqrt{g}.$$

Por la fórmula (12) de la Sección 0.1 para la curvatura media escribimos:

$$g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^1 = 2H \frac{z_1}{\sqrt{g}}, \quad g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^2 = 2H \frac{z_2}{\sqrt{g}}, \quad g^{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} = 2H \sqrt{g}. \quad (1.23)$$

Usando la fórmula (29) de la Sección 0.3, por (1.23) se tiene:

$$\Delta_X f = g^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - 2H \frac{z_\gamma}{\sqrt{g}} f_\gamma.$$

Finalmente, particularizando esta expresión para las funciones $x, y, z(x, y) \in C^2(\Omega)$ obtenemos

$$\Delta_X x = -2H \frac{z_1}{\sqrt{g}}, \quad \Delta_X y = -2H \frac{z_2}{\sqrt{g}}, \quad \Delta_X z = 2H \sqrt{g} - 2H \frac{z_1^2 + z_2^2}{\sqrt{g}} = 2H \frac{1}{\sqrt{g}},$$

y, por tanto:

$$\Delta_X X = 2HN.$$

□

Por la Definición 18 de superficie minimal se tiene inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 2. *Sea $S \in \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Entonces S es una superficie minimal si y solo si cada una de sus parametrizaciones locales X verifican*

$$\Delta_X X = 0. \quad (1.24)$$

Esta propiedad nos permitirá extender la definición de superficie minimal a superficies que no cumplen la condición de regularidad (1) en todos sus puntos. En primer lugar veamos:

Teorema 8. *Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X = X(u, v)$ una parametrización local de una superficie regular con parámetros conformes u y v , es decir, tales que*

$$|X_1|^2 = |X_2|^2 \quad y \quad \langle X_1, X_2 \rangle = 0. \quad (1.25)$$

Entonces la condición suficiente y necesaria para que una función $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(u, v)$ represente los valores de la curvatura media de X en el punto $(u, v) \in \Omega$ es que verifique

$$\Delta X = 2H X_1 \wedge X_2 \quad \text{en } \Omega. \quad (1.26)$$

En particular, X es minimal si y solo si

$$\Delta X = 0.$$

Demostración. Podemos expresar la hipótesis (1.25) como sigue

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g}, \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

y por (3) de la Sección 0.1 obtenemos

$$g^{11} = g^{22} = \frac{\sqrt{g}}{g} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad g^{12} = g^{21} = 0.$$

En virtud de la fórmula (12) de la Sección 0.1 escribimos:

$$H = \frac{b_{11} + b_{22}}{2\sqrt{g}}.$$

Entonces, teniendo en cuenta $b_{11} = \langle X_{11}, N \rangle$ y $b_{22} = \langle X_{22}, N \rangle$ obtenemos

$$\langle \Delta X, N \rangle = \langle X_{11} + X_{22}, N \rangle = 2\sqrt{g}H. \quad (1.27)$$

Por otro lado, derivando en (1.25) respecto de u se tiene,

$$\langle X_1, X_{11} \rangle = \langle X_2, X_{12} \rangle, \quad \langle X_{11}, X_2 \rangle + \langle X_1, X_{12} \rangle = 0,$$

y con respecto a v

$$\langle X_1, X_{12} \rangle = \langle X_2, X_{22} \rangle, \quad \langle X_{12}, X_2 \rangle + \langle X_1, X_{22} \rangle = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} \langle \Delta X, X_1 \rangle &= \langle X_{11}, X_1 \rangle + \langle X_{22}, X_1 \rangle = \langle X_{12}, X_2 \rangle - \langle X_{12}, X_2 \rangle = 0, \\ \langle \Delta X, X_2 \rangle &= \langle X_{11}, X_2 \rangle + \langle X_{22}, X_2 \rangle = -\langle X_{12}, X_1 \rangle + \langle X_{12}, X_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por tanto ΔX es proporcional (colineal) a N y, como N es unitario, deducimos de (1.27) que

$$\Delta X = 2\sqrt{g}HN.$$

Para concluir, como $\sqrt{g}N = X_1 \wedge X_2$ se tiene (1.26). \square

A continuación vamos a probar que toda superficie no paramétrica puede reparametrizarse a una superficie con parámetros conformes que cumplan (1.25).

Teorema 9. Sea $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$ una superficie minimal no paramétrica definida en un dominio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Entonces existe un difeomorfismo analítico $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega^*$ de Ω en un abierto Ω^* simplemente conexo, con inversa analítica $\psi : \Omega^* \rightarrow \Omega$ tal que $Z(u, v) = X(\psi(u, v))$ verifica

$$|Z_1|^2 = |Z_2|^2, \quad \langle Z_1, Z_2 \rangle = 0.$$

El difeomorfismo φ se puede tomar como

$$u = x, \quad v = a(x, y),$$

donde a es una función analítica en Ω que cumple

$$a_x = \frac{z_x z_y}{\sqrt{g}}, \quad a_y = \frac{1 + z_y^2}{\sqrt{g}}.$$

La inversa ψ viene dada por

$$x = u, \quad y = f(u, v),$$

siendo f una solución a la ecuación

$$v = a(u, f(u, v)).$$

Además, existe una superficie $X^* = (a, b, c)$ en Ω que verifica

$$dX^* = -N \wedge dX,$$

donde N denota la imagen esférica de X ; y la aplicación $\Phi : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$\begin{aligned} \Phi(u + iv) &= Z(u, v) + iZ^*(u, v) \\ &:= X(u, f(u, v)) + iX^*(u, f(u, v)) \end{aligned}$$

es una función holomorfa en la variable compleja $w = u + iv$, es decir, cada una de sus funciones componentes es una función holomorfa de $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ en \mathbb{C} .

Demostración. Vamos a probar que la función $z(x, y) \in C^2(\Omega)$ es de hecho analítica y que existe una aplicación conforme de X en un abierto simplemente conexo $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$. Por el Teorema 6 de la Sección 1.2 existe una función $a \in C^2(\Omega)$ tal que

$$da = \partial_x a dx + \partial_y a dy = \frac{z_x z_y}{\sqrt{g}} dx + \frac{1 + z_y^2}{\sqrt{g}} dy.$$

Consideramos ahora la aplicación $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (x, a(x, y))$ que podemos expresar como $(x, y) \mapsto (u, v) = \varphi(x, y)$ con

$$u = x, \quad v = a(x, y).$$

El Jacobiano de φ verifica

$$J_\varphi = \det \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{vmatrix} = \frac{1 + z_y^2}{\sqrt{g}} = \partial_y a > 0,$$

y, como Ω es convexo, φ es inyectiva sobre su imagen $\Omega^* = \varphi(\Omega)$ por el Teorema de la Función Inversa. Entonces φ es un difeomorfismo de clase C^2 de Ω en un dominio $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$. Su inversa $\psi : \Omega^* \rightarrow \Omega$, que es también de clase C^2 , viene dada por

$$x = u, \quad y = f(u, v), \quad \text{con } f \in C^2(\Omega^*), \quad (1.28)$$

y tiene como matriz jacobiana $D\psi(u, v) = [D\varphi(x, y)]^{-1}$. Por tanto

$$D\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_u f & \partial_v f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_x a & \partial_y a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\partial_x a / \partial_y a & 1 / \partial_y a \end{pmatrix},$$

y teniendo en cuenta (1.28) podemos escribir:

$$\partial_u f = \partial_u y = -\frac{z_x z_y}{1 + z_y^2}, \quad \partial_v f = \partial_v y = \frac{\sqrt{g}}{1 + z_y^2}. \quad (1.29)$$

Consideramos a continuación las funciones:

$$\begin{aligned} h(u, v) &:= z(u, f(u, v)), \\ Z(u, v) &:= X(\psi(u, v)) = (u, f(u, v), h(u, v)). \end{aligned}$$

Por (1.29) podemos escribir los diferenciales $dx, dy, dz = z_x dx + z_y dy$ de las funciones $x = u, y = f(u, v), z = h(u, v)$ como sigue:

$$\begin{aligned} dx &= du, \\ dy &= df = \partial_u f du + \partial_v f dv = -\frac{z_x z_y}{1 + z_y^2} du + \frac{\sqrt{g}}{1 + z_y^2} dv, \\ dz &= dh = \partial_u h du + \partial_v h dv \\ &= \{z_x \partial_u x + z_y \partial_u y\} du + \{z_x \partial_v x + z_y \partial_v y\} dv \\ &= \left\{ z_x - \frac{z_x z_y^2}{1 + z_y^2} \right\} du + \frac{z_y \sqrt{g}}{1 + z_y^2} dv \\ &= \frac{z_x}{1 + z_y^2} du + \frac{z_y \sqrt{g}}{1 + z_y^2} dv. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Entonces, tenemos

$$Z_1 = \left(1, -\frac{z_x z_y}{1+z_y^2}, \frac{z_x}{1+z_y^2} \right), \quad Z_2 = \left(0, \frac{\sqrt{g}}{1+z_y^2}, \frac{z_y \sqrt{g}}{1+z_y^2} \right),$$

y podemos calcular

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 &= 1 + \frac{z_x^2 z_y^2}{(1+z_y^2)^2} + \frac{z_x^2}{(1+z_y^2)^2} = \frac{(1+z_y^2)^2 + z_x^2(1+z_y^2)}{(1+z_y^2)^2} = \frac{1+z_x^2+z_y^2}{1+z_y^2}, \\ |Z_2|^2 &= \frac{g}{(1+z_y^2)^2} + \frac{z_y^2 g}{(1+z_y^2)^2} = \frac{(1+z_y^2)g}{(1+z_y^2)^2} = \frac{1+z_x^2+z_y^2}{1+z_y^2}, \\ \langle Z_1, Z_2 \rangle &= -\frac{z_x z_y \sqrt{g}}{(1+z_y^2)^2} + \frac{z_x z_y \sqrt{g}}{(1+z_y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la superficie $Z = X \circ \psi$ es estrictamente equivalente a X y verifica

$$|Z_1|^2 = |Z_2|^2 = \frac{1+z_x^2+z_y^2}{1+z_y^2}, \quad \langle Z_1, Z_2 \rangle = 0.$$

Para la segunda parte, vamos a emplear las otras dos ecuaciones de (1.21):

$$-db = \beta, \quad -dc = \gamma,$$

de las que, observando la expresión de β y γ en la demostración del Teorema 6, deducimos que

$$\begin{aligned} db &= -\frac{1+z_x^2}{\sqrt{g}} dx - \frac{z_x z_y}{\sqrt{g}} dy, \\ dc &= -\frac{z_y}{\sqrt{g}} dx + \frac{z_x}{\sqrt{g}} dy. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Definimos la superficie

$$Z^*(u, v) := (v, f^*(u, v), h^*(u, v)), \quad \text{con } (u, v) \in \Omega^*,$$

cuyas componentes son las funciones

$$\begin{aligned} f^*(u, v) &:= b(u, f(u, v)), \\ h^*(u, v) &:= c(u, f(u, v)). \end{aligned}$$

Por (1.29) y (1.31) se tiene

$$\begin{aligned}
 df^* &= db = \partial_u f^* du + \partial_v f^* dv \\
 &= \{\partial_x b \partial_u x + \partial_y b \partial_u y\} du + \{\partial_x b \partial_v x + \partial_y b \partial_v y\} dv \\
 &= \left\{ -\frac{1+z_x^2}{\sqrt{g}} + \frac{z_x^2 z_y^2}{\sqrt{g}(1+z_y^2)} \right\} du - \frac{z_x z_y}{1+z_y^2} dv \\
 &= -\frac{\sqrt{g}}{1+z_y^2} du - \frac{z_x z_y}{1+z_y^2} dv, \\
 dh^* &= dc = \partial_u h^* du + \partial_v h^* dv \\
 &= \{\partial_x c \partial_u x + \partial_y c \partial_u y\} du + \{\partial_x c \partial_v x + \partial_y c \partial_v y\} dv \\
 &= \left\{ -\frac{z_y}{\sqrt{g}} - \frac{z_x^2 z_y}{\sqrt{g}(1+z_y^2)} \right\} du + \frac{z_x}{1+z_y^2} dv \\
 &= -\frac{z_y \sqrt{g}}{1+z_y^2} du + \frac{z_x}{1+z_y^2} dv.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Comparando las expresiones (1.30) y (1.32) observamos que Z y Z^* satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \left(1, -\frac{z_x z_y}{1+z_y^2}, \frac{z_x}{1+z_y^2} \right) = Z_2^*, \\
 Z_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{g}}{1+z_y^2}, \frac{z_y \sqrt{g}}{1+z_y^2} \right) = -Z_1^*,
 \end{aligned}$$

en Ω^* o equivalentemente:

$$\begin{aligned}
 \partial_u f &= \partial_v f^*, & \partial_v f &= -\partial_u f^*; \\
 \partial_u h &= \partial_v h^*, & \partial_v h &= -\partial_u h^*.
 \end{aligned}$$

Luego $f + if^*$ y $h + ih^*$ son funciones holomorfas (y por tanto analíticas) en la variable $w = u + iv$, con partes real f y h e imaginaria f^* y h^* respectivamente. Entonces f, h, f^* y h^* son analíticas en Ω^* . También es analítico el difeomorfismo $\psi : \Omega^* \rightarrow \Omega$ y su inversa $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega^*$. Por otro lado, podemos expresar:

$$z(x, y) = h(\varphi(x, y)) = h(x, a(x, y)),$$

por lo que $z(x, y)$ es analítica en Ω . □

Observación. Notamos que en la demostración anterior, como Ω es un abierto convexo, en particular es simplemente conexo. Por tanto su imagen a través del

difeomorfismo φ es también un abierto simplemente conexo ($\varphi(\Omega) = \Omega^*$). Por otro lado, la hipótesis de que Ω sea convexo es necesaria para aplicar la versión global del Teorema de la Función Inversa pero nuestro teorema sigue siendo cierto si suponemos únicamente que Ω es un abierto simplemente conexo: podemos aplicar el razonamiento del teorema en bolas abiertas (convexas) $B_r(p)$ centradas en cada punto $p \in \Omega$ de radio $r > 0$ suficientemente pequeño de forma que $B_r(p) \subset \Omega$. Por ello, en el siguiente capítulo se empleará este teorema considerando que Ω es un abierto simplemente conexo.

Corolario 3. *Si $z \in C^2(\Omega)$ es solución de la ecuación de superficie minimal (1.13) o (1.14) en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces z es analítica en Ω .*

El Teorema 9 que acabamos de probar unido al Lema 3 de la Sección 1.2 nos permiten probar que toda parametrización local de una superficie regular es localmente estrictamente equivalente a una superficie parametrizada por parámetros conformes²:

Proposición 12. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Sea un punto $p \in S$ y una parametrización local $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ con $p \in X(U)$. Entonces existen una parametrización local $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow Y(V) \subset S$ y un abierto $W \subset S$ tales que $p \in W \subset X(U) \cap Y(V)$, Y está parametrizada por parámetros conformes y X es estrictamente equivalente a Y en $Y^{-1}(W)$.*

Finalmente podemos extender el concepto de superficie minimal a superficies con una cantidad finita de singularidades aisladas:

Definición 19. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie (regular o no). Se dice que S es minimal (o mínima) si para cada punto $p \in S$ existe una parametrización local $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S verificando las condiciones (conformes)*

$$|X_1|^2 = |X_2|^2, \quad \langle X_1, X_2 \rangle = 0 \quad (1.33)$$

y la ecuación

$$\Delta X = 0 \quad (1.34)$$

en todos los puntos de Ω .

²En realidad estos resultados solo nos permiten probar la proposición para superficies regulares minimales, para demostrar la versión general que enunciamos aquí habría que hacer uso del Teorema de Uniformización de Koebe-Poincaré que se escapa del contenido al que apuntamos en este texto.

Capítulo 2

Fórmulas de Representación de Superficies Minimales

En el siglo XIX se desarrolló la teoría clásica de superficies minimales, con aportaciones de grandes matemáticos de la época, algunas de las cuales exponemos en este capítulo.

Comenzaremos representando las superficies minimales como la parte real de curvas holomorfas e isotrópicas en \mathbb{C}^3 , lo cual nos proporcionará útiles fórmulas para el estudio de estas superficies. Mediante este tipo de curvas describiremos también las superficies minimales adjuntas y asociadas descubiertas por Bonnet. Finalmente, introduciremos y probaremos las conocidas fórmulas de representación de Enneper-Weierstrass para superficies minimales, que serán de especial importancia en el capítulo siguiente.

La principal fuente para este capítulo es el libro [3].

Las notas históricas sobre el desarrollo de las fórmulas de representación son tomadas de [3] y [10].

2.1 Curvas isotrópicas y superficies adjuntas

Emplearemos en esta sección la definición general de superficie minimal que vimos al final de la Sección 1.3. Es decir, asumiremos que las parametrizaciones locales $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie minimal S (regular o con un número finito de singularidades aisladas) están descritas por parámetros conformes u y v en todo punto de un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Sabemos que

podemos suponer dichas hipótesis gracias al Teorema 9 de la Sección 1.3. De nuevo, escribiremos $w = (u, v) = u + iv$, $u^1 = u$ y $u^2 = v$ para referirnos a los parámetros de X y denotaremos por $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} X$ sus derivadas parciales respecto a u^α con $\alpha = 1, 2$.

Para empezar, definimos la superficie adjunta a una superficie minimal como sigue.

Definición 20. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal y $S^* \subset \mathbb{R}^3$ una superficie (regular o no). Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de S . Se define una *parametrización adjunta a X en Ω* como una aplicación $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$X_1 = X_2^*, \quad X_2 = -X_1^*, \quad (2.1)$$

en Ω . Se dice que S^* es una *superficie adjunta de S* si el conjunto de parametrizaciones adjuntas a las parametrizaciones de un atlas de S constituye un atlas de S^* .

Es claro, por la condición (2.1), que todas las parametrizaciones adjuntas a X difieren en un vector de constantes. Hablaremos, entonces, de *la parametrización adjunta X^** como aquella para la que se toma el vector de constantes nulo y podremos, a su vez, definir *la superficie adjunta S^** aplicando este criterio a todas sus parametrizaciones locales. Notamos además que la existencia de la parametrización adjunta está asegurada por el Teorema 9 citado anteriormente.

Observación. Teniendo en cuenta (1.33) y (1.34) de la Sección 1.3, por (2.1) se verifican

$$|X_1^*|^2 = |X_2^*|^2, \quad \langle X_1^*, X_2^* \rangle = 0$$

y

$$\Delta X^* = 0,$$

para toda parametrización local X y su adjunta X^* . Luego la superficie adjunta S^* de una superficie minimal S es también una superficie minimal.

A continuación vamos a obtener una expresión de una parametrización local X y su adjunta X^* como las partes real e imaginaria, respectivamente, de una función de Ω en \mathbb{C}^3 con componentes holomorfas. Entonces, para evitar el caso trivial en el que esta función sea constante, supondremos en todo momento que $X \neq cte. \in \mathbb{R}^3$. Esta suposición únicamente excluye al plano (caso trivial) de la definición de superficie minimal. Además, por (2.1) se tiene también que $X^* \neq cte.$

Consideramos ahora una parametrización local $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie minimal y su adjunta $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas, como sabemos, en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ simplemente conexo. Escribimos las componentes de X y X^* como

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ X^*(u, v) &= (x^*(u, v), y^*(u, v), z^*(u, v)). \end{aligned}$$

Entonces la aplicación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$f(w) := X(u, v) + iX^*(u, v), \quad w = u + iv \in \Omega, \quad (2.2)$$

es un campo vectorial holomorfo (que podemos denominar curva). Es decir, denotando sus componentes por $f(w) = (\varphi(w), \psi(w), \rho(w))$, con:

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= x(u, v) + ix^*(u, v), \\ \psi(w) &= y(u, v) + iy^*(u, v), \\ \rho(w) &= z(u, v) + iz^*(u, v), \end{aligned}$$

éstas son funciones holomorfas de Ω en \mathbb{C} . La función derivada de f , $f' = \frac{d}{dw}f$, viene dada por

$$f' = X_1 + iX_1^* = X_1 - iX_2 \quad (2.3)$$

y, por tanto, deducimos que

$$\langle f', f' \rangle = |X_1|^2 - |X_2|^2 - 2i\langle X_1, X_2 \rangle.$$

En consecuencia, las condiciones conformes (1.33) equivalen a la condición de *isotropía*

$$\langle f', f' \rangle = 0. \quad (2.4)$$

Definición 21. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ un campo vectorial holomorfo. Se dice que f es una *curva isotrópica* si verifica la condición $\langle f', f' \rangle = 0$ en Ω .

Mediante el razonamiento anterior hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 13. *Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de una superficie minimal y sea $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización adjunta. Entonces la curva holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ dada por la expresión (2.2) es una curva isotrópica no constante. Recíprocamente, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ es una curva isotrópica no constante definida en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces*

$$X(u, v) := \operatorname{Re} f(w), \quad X^*(u, v) := \operatorname{Im} f(w), \quad (2.5)$$

son, respectivamente, una parametrización local (minimal) de una superficie minimal y su parametrización adjunta.

Esta propiedad nos permite caracterizar las superficies adjuntas. Veamos ahora la relación, desde el punto de vista geométrico, que hay entre una superficie y su adjunta.

Proposición 14. *Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de una superficie minimal y sea $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización adjunta. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- (i) *Los puntos singulares de X y de X^* coinciden.*
- (ii) *Sea Ω' el conjunto de puntos regulares de X . Sean $N(w)$ y $N^*(w)$ los campos de Gauss de $X(w)$ y $X^*(w)$ respectivamente, en un punto cualquiera $w \in \Omega'$. Entonces se tiene:*

$$N(w) = N^*(w) \quad \text{en } \Omega'. \quad (2.6)$$

Además, los planos tangentes de X y X^ coinciden:*

$$T_w X = T_w X^*, \quad \text{para todo } w \in \Omega'. \quad (2.7)$$

También coinciden la primera forma fundamental de X y X^ :*

$$I_X(V, W) = I_{X^*}(V, W), \quad \text{para todo } V, W \in T_w X, \text{ con } w \in \Omega',$$

es decir, las parametrizaciones X y X^ son isométricas.*

Demostración. Para empezar, recordamos que los puntos singulares (o no regulares) de X son aquellos puntos $w \in \Omega$ tales que

$$X_1(w) \wedge X_2(w) = 0.$$

Por (2.1) se tiene que

$$X_1(w) \wedge X_2(w) = X_2^*(w) \wedge (-X_1^*(w)) = X_1^*(w) \wedge X_2^*(w), \quad (2.8)$$

para todo $w \in \Omega$. Por tanto, $w \in \Omega$ es punto singular de X^* si y solo si es punto singular de X .

Para el segundo apartado, observamos que (2.6) es consecuencia directa de (2.8). Es claro también que (2.7) se obtiene como consecuencia de (2.6), pues ambos planos tangentes $T_w X$ y $T_w X^*$ tienen el mismo campo normal $N(w)$. Queda entonces por probar la igualdad de las primeras formas fundamentales de X y X^* . Recordamos que por la Definición 19 de la Sección 1.3 podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que X está parametrizada por parámetros conformes ya

que es una parametrización local de una superficie minimal. Denotamos por $g_{\alpha\beta}$ los coeficientes métricos de X , y por $g_{\alpha\beta}^*$ los de X^* . Teniendo en cuenta (1.33), por (2.1) tenemos:

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} &= |X_1|^2 = |X_2|^2 = |X_1^*|^2 = |X_2^*|^2 = g_{11}^* = g_{22}^*, \\ g_{12} = \langle X_1, X_2 \rangle &= 0 = \langle X_2^*, -X_1^* \rangle = -\langle X_1^*, X_2^* \rangle = -g_{12}^*, \end{aligned}$$

en todo Ω' . □

Corolario 4. *Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal y $S^* \subset \mathbb{R}^3$ es su superficie adjunta, entonces S y S^* son localmente isométricas.*

Estamos en condiciones de probar un resultado que será de especial utilidad en la siguiente sección.

Teorema 10. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, $X_0 \in \mathbb{R}^3$ y $w_0 \in \Omega$. Sea $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ un campo vectorial de componentes $\Phi(w) = (\Phi_1(w), \Phi_2(w), \Phi_3(w))$ holomorfas y no idénticamente nulas, verificando*

$$\langle \Phi, \Phi \rangle = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0, \quad (2.9)$$

en Ω . Entonces la expresión

$$X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \Phi(\omega) d\omega, \quad \text{con } w \in \Omega,$$

define una parametrización local $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie minimal y los puntos singulares de X coinciden con los ceros de Φ . Además, para cada $X_0^* \in \mathbb{R}^3$, la expresión

$$X^*(w) = X_0^* + \operatorname{Im} \int_{w_0}^w \Phi(\omega) d\omega, \quad \text{con } w \in \Omega,$$

define una parametrización adjunta a X en Ω . Recíprocamente, si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de una superficie minimal, entonces existe un campo holomorfo $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ que verifica (2.9) y tal que se cumple

$$X(w) = X(w_0) + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \Phi(\omega) d\omega,$$

para cualesquiera $w, w_0 \in \Omega$.

Demostración. Por la Proposición 13 sabemos que existe una curva isotrópica $f = (\varphi, \psi, \rho)$ de Ω en \mathbb{C}^3 , cuyas partes real e imaginaria coinciden con la superficie X y su adjunta X^* , respectivamente. Podemos escribir la condición de isotropía (2.4) como:

$$\langle f', f' \rangle = (\varphi')^2 + (\psi')^2 + (\rho')^2 = 0.$$

Como cada componente de f es holomorfa, éstas son a su vez analíticas, lo cual nos permite aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en cada componente. Podemos entonces escribir:

$$\begin{aligned} f(w) &= X(w) + iX^*(w) = f_0 + \int_{w_0}^w f'(\omega) d\omega \\ &= X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w f'(\omega) d\omega + i \left[X_0^* + \operatorname{Im} \int_{w_0}^w f'(\omega) d\omega \right], \end{aligned}$$

para cualesquiera $f_0 = X_0 + iX_0^* \in \mathbb{C}^3$, $w_0 \in \Omega$. Por tanto, tomando $\Phi := f'$ se verifican las igualdades del teorema.

Queda por comprobar que los puntos singulares de X coinciden con los ceros de f' en Ω . Aplicando las condiciones (1.33) de la Sección 1.3 escribimos:

$$|X_1 \wedge X_2| = \sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{g_{11}g_{22}} = g_{11} = g_{22} = |X_1|^2 = |X_2|^2. \quad (2.10)$$

Por otro lado, como $X \not\equiv cte.$, la derivadas X_1 y X_2 no pueden ser idénticamente nulas en Ω y, por (2.3), los ceros de f' son aislados, ya que éstos coinciden con los puntos en los que se cumple $X_1 = X_2 = 0$. Entonces, por (2.10) los puntos singulares de X , es decir, en los que se anula $|X_1 \wedge X_2|$, coinciden con puntos en los que se anulan ambas derivadas X_1 y X_2 , que coinciden con los ceros de f' . \square

Para acabar esta sección vamos a definir las superficies asociadas a una superficie minimal, que fueron descritas por primera vez por Ossian Bonnet en 1853.

Definición 22. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal. Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de S y $X^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización adjunta. Se define la familia de *parametrizaciones asociadas a X en Ω* como

$$Z(w, \theta) := X(w) \cos \theta + X^*(w) \operatorname{sen} \theta, \quad \text{con } w \in \Omega, \quad (2.11)$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$, se define la *superficie asociada a S con $\theta = \theta_0$* como aquella que tiene como atlas el conjunto de las parametrizaciones asociadas, con $\theta = \theta_0$, a las de un atlas de S y se denota por S_{θ_0} .

Observación. La definición de superficie asociada puede escribirse también de la siguiente forma: Sean $S_{\theta_0} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\theta_0 \in \mathbb{R}$, se dice que S_{θ_0} es la *superficie asociada a S con $\theta = \theta_0$* si existe un atlas $\mathcal{A} = \{X_\sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{\sigma \in I}$ de S tal que el conjunto

$$\mathcal{A}_{\theta_0} = \{Z_\sigma(\Omega_\sigma, \theta_0) = X_\sigma \cos \theta_0 + X_\sigma^* \sen \theta_0\}_{\sigma \in I}$$

de parametrizaciones asociadas a las del atlas \mathcal{A} con $\theta = \theta_0$ es un atlas de S_{θ_0} . Por otro lado, es claro que la familia (2.11) de parametrizaciones asociadas a X verifica:

$$Z(w, 0) = X(w), \quad Z\left(w, \frac{\pi}{2}\right) = X^*(w).$$

Podemos plantear una definición equivalente a la anterior. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ es una curva isotrópica con $\text{Re } f = X$ en Ω , para cada $\theta \in \mathbb{R}$, el campo

$$g(w, \theta) := e^{-i\theta} f(w), \quad \text{con } w \in \Omega,$$

es también una curva isotrópica, pues por (2.4)

$$\langle \partial_w g(w, \theta), \partial_w g(w, \theta) \rangle = \langle e^{-i\theta} f'(w), e^{-i\theta} f'(w) \rangle = e^{-2\theta} \langle f'(w), f'(w) \rangle = 0.$$

Podemos entonces describir las parametrizaciones asociadas a X como:

$$Z(w, \theta) = \text{Re} \{e^{-i\theta} f(w)\} = X(w) \cos \theta + X^*(w) \sen \theta.$$

Veamos ahora un resultado que nos ayudará a entender el papel que juegan estas superficies.

Proposición 15. *Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de una superficie minimal, entonces todas las parametrizaciones locales de la familia $Z(\Omega, \theta)$ de parametrizaciones asociadas a X son minimales y son isométricas entre sí.*

Demostración. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene por (2.1) que

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 \cos \theta + X_1^* \sen \theta = X_1 \cos \theta - X_2 \sen \theta, \\ Z_2 &= X_2 \cos \theta + X_2^* \sen \theta = X_2 \cos \theta + X_1 \sen \theta, \end{aligned}$$

y, entonces

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 &= \cos^2 \theta |X_1|^2 - 2 \sen \theta \cos \theta \langle X_1, X_2 \rangle + \sen^2 \theta |X_2|^2, \\ |Z_2|^2 &= \cos^2 \theta |X_2|^2 + 2 \sen \theta \cos \theta \langle X_1, X_2 \rangle + \sen^2 \theta |X_1|^2, \\ \langle Z_1, Z_2 \rangle &= \cos^2 \theta \langle X_1, X_2 \rangle + \sen \theta \cos \theta |X_1|^2 - \sen \theta \cos \theta |X_2|^2 - \sen^2 \theta \langle X_1, X_2 \rangle. \end{aligned}$$

Por las relaciones conformes (1.33) de X se tiene

$$|Z_1|^2 = |Z_2|^2 = |X_1|^2 = |X_2|^2, \quad \langle Z_1, Z_2 \rangle = 0 \quad (2.12)$$

y, por tanto, $Z(w, \theta)$ es minimal. Por otro lado, teniendo en cuenta que $X_1 \wedge X_1 = X_2 \wedge X_2 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} Z_1(w) \wedge Z_2(w) &= [\cos \theta X_1(w) - \operatorname{sen} \theta X_2(w)] \wedge [\cos \theta X_2(w) + \operatorname{sen} \theta X_1(w)] \\ &= |\cos \theta|^2 [X_1(w) \wedge X_2(w)] + |\operatorname{sen} \theta|^2 [X_1(w) \wedge X_2(w)] \\ &= X_1(w) \wedge X_2(w), \end{aligned} \quad (2.13)$$

para cualquier $w \in \Omega$. Por tanto, todas las parametrizaciones asociadas de la familia tienen los mismos puntos singulares. Se puede tomar el conjunto Ω' de puntos regulares de la familia $Z(w, \theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Por otro lado, análogamente a la demostración de la Proposición 14, vemos que por (2.13) los campos normales de X y Z coinciden, así como sus planos tangentes. Finalmente, teniendo en cuenta (2.12) se tiene la igualdad de los coeficientes métricos de X y Z , entonces sus primeras formas fundamentales coinciden y por la Proposición 4 son isométricas. \square

Corolario 5. *Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal, todas sus superficies asociadas (incluidas la propia S y su superficie adjunta S^*) son localmente isométricas entre sí.*

Observación. Al variar entre 0 y $\pi/2$ el parámetro θ de la familia $Z(\cdot, \theta)$ podemos apreciar cómo la parametrización local X es "deformada" mediante isometrías hasta llegar a su parametrización adjunta X^* . En cada fase del proceso, la parametrización pasa por las distintas parametrizaciones locales (todas ellas minimales) que conforman la familia. Veremos ejemplos de esto en el capítulo siguiente.

2.2 Fórmulas de representación

Las fórmulas de representación a las que nos referimos en este capítulo son expresiones creadas con la intención de describir las coordenadas de superficies minimales en términos de funciones analíticas. Los primeros intentos de crear fórmulas con estas propiedades fueron llevados a cabo por Gaspard Monge en 1784 y por Adrien-Marie Legendre en 1787. Ambos obtuvieron las hoy conocidas como fórmulas de representación de Monge-Legendre integrando la ecuación de

superficie minimal ((1.13) de la Sección 1.2). Sin embargo, durante muchos años estas fórmulas resultaron ser demasiado difíciles como para servir de herramienta para encontrar nuevas superficies minimales; recordamos que por aquel entonces, las únicas de superficies minimales (no triviales) conocidas eran el helicoides y el catenoides. No fue hasta el año 1831 cuando Heinrich Scherk aplicó las fórmulas de Monge-Legendre para obtener las expresiones de varias superficies minimales que hoy llevan su nombre. Posteriormente, se descubrieron las fórmulas de representación de Enneper-Weierstrass, que resultaron ser las más prolíficas para el descubrimiento de nuevas superficies minimales e impulsaron en gran medida los múltiples avances en la teoría de superficies minimales a lo largo del siglo XIX.

Para deducir las fórmulas de Enneper-Weierstrass emplearemos el Teorema 10 de la Sección 2.1. Vamos en primer lugar a caracterizar los campos holomorfos $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ que verifican la condición de isotropía (2.9) del teorema.

Lema 4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Sean $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula ($\mu \not\equiv 0$) y $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Si μ tiene un cero de orden al menos $2n$ en cada punto donde ν tiene un polo de orden n , entonces las funciones*

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2), \quad \Phi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2), \quad \Phi_3 = \nu\mu, \quad (2.14)$$

son holomorfas en Ω , y el campo $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ verifica (2.9) y $\Phi \not\equiv 0$. Recíprocamente, todo campo $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \not\equiv 0$ de componentes holomorfas en Ω que verifica (2.9) puede expresarse como (2.14) si y solo si $\Phi_1 - i\Phi_2 \not\equiv 0$.

Demostración. En primer lugar, comprobemos que $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ es un campo con componentes holomorfas. Denotamos por G el conjunto de puntos de Ω que son polos de orden n de ν y ceros de orden al menos $2n$ de μ (para todo $n \in \mathbb{N}$). Por (2.14) se tiene que existe un $R > 0$ tal que

$$|\Phi_1(w_0)|^2 < R,$$

para cualquier $w_0 \in G$. Es decir, Φ_1 no tiene polos en Ω y por tanto es holomorfa. Este razonamiento también es válido para las componentes Φ_2 y Φ_3 , luego Φ_2 y Φ_3 son holomorfas. Por otro lado, por (2.14) se tiene

$$\langle \Phi, \Phi \rangle = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = \frac{1}{4}\mu^2(1 - 2\nu^2 + \nu^4) - \frac{1}{4}\mu^2(1 + 2\nu^2 + \nu^4) + \nu^2\mu^2 = 0.$$

Queda probar que $\Phi \not\equiv 0$. Como $\mu \not\equiv 0$, los ceros de μ son aislados y entonces Φ solo puede ser idénticamente nulo para algunos valores de ν :

- Si $\nu \equiv 1$ ó -1 , entonces $\Phi_1 \equiv 0$ pero los ceros de Φ_2 y Φ_3 son aislados.
- Si $\nu \equiv i$ ó $-i$, entonces $\Phi_2 \equiv 0$ pero los ceros de Φ_1 y Φ_3 son aislados.
- Si $\nu \equiv 0$, entonces $\Phi_3 \equiv 0$ pero los ceros de Φ_1 y Φ_2 son aislados.

Por tanto, no pueden ser idénticamente nulas las tres componentes simultáneamente, es decir, $\Phi \neq 0$. Para la segunda parte, notamos que la hipótesis $\Phi_1 - i\Phi_2 \neq 0$ es necesaria para que se verifique (2.14). Podemos escribir (2.9) como

$$(\Phi_1 - i\Phi_2)(\Phi_1 + i\Phi_2) + \Phi_3^2 = 0. \quad (2.15)$$

Razonando entonces por reducción al absurdo: si fuera $\Phi_1 - i\Phi_2 \equiv 0$ se tendría $\Phi_3 \equiv 0$. Se dan ahora dos posibilidades, $\mu \equiv 0$ o $\nu \equiv 0$. Si fuera $\mu \equiv 0$ se tendría $\Phi \equiv 0$, lo cual sería una contradicción. Si $\nu \equiv 0$ tendríamos que $\Phi_1 = \mu/2$ y $\Phi_2 = i\mu/2$, por tanto $\Phi_1 + i\Phi_2 \equiv 0$. Sumando las ecuaciones $\Phi_1 - i\Phi_2 \equiv 0$ y $\Phi_1 + i\Phi_2 \equiv 0$ obtendríamos $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 \equiv 0$ que contradice $\Phi \neq 0$.

Tras suponer $\Phi_1 - i\Phi_2 \neq 0$ introducimos las funciones

$$\mu := \Phi_1 - i\Phi_2, \quad \nu := \frac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}.$$

Se tiene que $\mu \neq 0$ y es holomorfa en Ω , ν es meromorfa en Ω y $\mu\nu = \Phi_3$. Además, por (2.15) escribimos

$$\Phi_1 + i\Phi_2 = -\frac{\Phi_3^2}{\Phi_1 - i\Phi_2} = -\mu\nu^2$$

y, teniendo en cuenta que $\Phi_1 - i\Phi_2 = \mu$, obtenemos

$$\Phi_1 = \frac{\mu}{2}(1 - \nu^2), \quad \Phi_2 = i\frac{\mu}{2}(1 + \nu^2).$$

Finalmente, como tenemos la expresión $\mu\nu^2 = -(\Phi_1 + i\Phi_2)$ y Φ_1 y Φ_2 son holomorfas, se tiene que $\mu\nu^2$ es holomorfa en Ω . Entonces si $w_0 \in \Omega$ es un polo de orden n de ν , ha de ser un cero de orden al menos $2n$ de μ . \square

Empleando este resultado junto con el Teorema 10 deducimos inmediatamente las fórmulas de representación.

Teorema 11 (Fórmulas de representación de Enneper-Weierstrass). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización local de una superficie minimal dada por*

$$X(w) = (x(w), y(w), z(w)), \quad \text{con } w \in \Omega.$$

Entonces existen dos funciones $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $\mu \not\equiv 0$ y $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa con $\nu \not\equiv 0$ tales que $\mu\nu^2$ es holomorfa en Ω y se cumplen

$$\begin{aligned} x(w) &= x_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{1}{2} \mu(1 - \nu^2) d\omega, \\ y(w) &= y_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \frac{i}{2} \mu(1 + \nu^2) d\omega, \\ z(w) &= z_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \mu\nu d\omega, \end{aligned} \quad (2.16)$$

para cualesquiera $w, w_0 \in \Omega$ y para $X_0 = X(w_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Por otro lado, si existen dos funciones μ y ν verificando las condiciones anteriores, entonces las fórmulas (2.16) definen las respectivas componentes de una parametrización local de una superficie minimal.

También podemos probar de forma sencilla otras fórmulas de representación como la siguiente, descubierta por Enneper en 1864.

Corolario 6. Sea $R(w) \not\equiv 0$ una función holomorfa definida en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea el campo vectorial

$$\Phi(w) := ((1 - w^2)R(w), i(1 + w^2)R(w), 2wR(w)).$$

Entonces, la aplicación $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \Phi(\omega) d\omega, \quad \text{para todo } w, w_0 \in \Omega, \quad X_0 \in \mathbb{R}^3,$$

es una parametrización local de una superficie minimal. Además, las parametrizaciones locales asociadas a X vienen dadas por

$$Z(w, \theta) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w e^{-i\theta} \Phi(\omega) d\omega, \quad \text{para todo } w \in \Omega.$$

Demostración. Basta tomar $\mu(w) := 2R(w)$ y $\nu(w) := w$ en el teorema anterior para probar la primera fórmula. Por otro lado, el campo Φ verifica

$$\langle \Phi(w), \Phi(w) \rangle = R^2(w)((1 - w^2)^2 - (1 + w^2)^2 + 4w^2) = 0. \quad (2.17)$$

Como Φ es un campo con componentes holomorfas, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo cada componente para obtener un campo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$f(w) := X_0 + iX_0^* + \int_{w_0}^w \Phi(\omega) d\omega, \quad \text{con } X_0^* \in \mathbb{R}^3,$$

tal que $f'(w) = \Phi(w)$. Entonces, por (2.17) se tiene que f es una curva isotrópica, y

$$\operatorname{Re} f(w) = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \Phi(\omega) d\omega = X(w).$$

Por tanto, las superficies asociadas a X son de la forma:

$$Z(w, \theta) = \operatorname{Re} \{e^{-i\theta} f(w)\} = X_0 + \operatorname{Re} \int_{w_0}^w e^{-i\theta} \Phi(\omega) d\omega, \quad \text{en } \Omega,$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$. □

Observación. Esta última representación es de hecho equivalente a la expuesta en el Teorema 11 descubierta por Karl Weierstrass en 1866, por ello ambas son conocidas como las fórmulas de Enneper-Weierstrass.

Capítulo 3

Ejemplos

En este capítulo expondremos brevemente algunos ejemplos clásicos de superficies minimales, algunos de los cuales ya hemos mencionado anteriormente. El contenido de este capítulo está basado en los libros [3], [9] y [10].

Denotaremos las parametrizaciones locales de las superficies por $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y a sus funciones componentes por $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ para todo punto $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Catenoide y helicoides

El catenoide debe su nombre al hecho de que puede obtenerse mediante la rotación de una *catenaria* alrededor de un eje. Tomando como eje de rotación el eje z , los catenoides se obtienen rotando catenarias de la forma

$$\alpha(z) = r \cosh\left(\frac{z - z_0}{r}\right), \quad \text{para } z \in \mathbb{R},$$

con z_0 y r constantes reales arbitrarias y $r \neq 0$. Podemos dar una parametrización local del catenoide con $z_0 = 0$ como:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= r \cosh u \cos v, \\y(u, v) &= -r \cosh u \sin v, \\z(u, v) &= ru,\end{aligned}$$

con $-\infty < u < \infty$, $0 < v < 2\pi$.

La primera descripción del catenoide fue dada en el 1741 por Leonhard Euler, quien la denominó originalmente "alysseid" (desde Plateau se conoce como

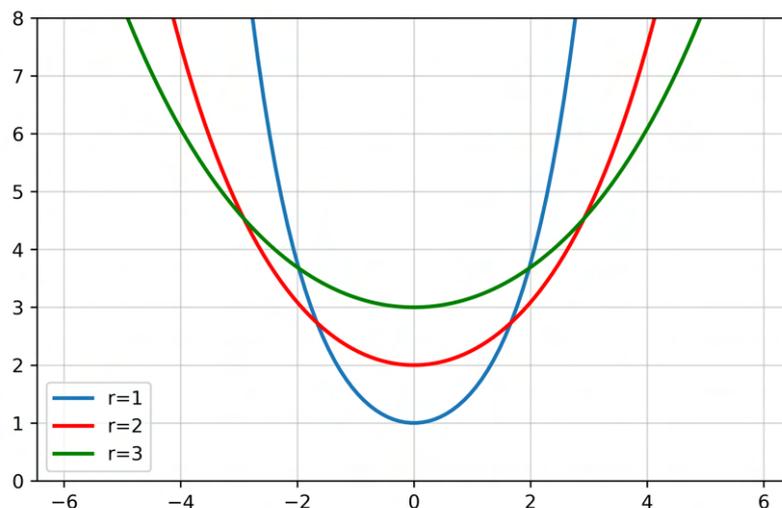


Figura 3.1: Gráficas de catenarias para distintos valores de r , con $z_0 = 0$.

catenoide). Euler descubrió además el carácter minimal de la superficie: entre las superficies de revolución generadas por curvas con valores prefijados en los extremos, el catenoide minimizaba el área. Desconocedor del trabajo de Euler, Meusnier comprobó, años más tarde, que el catenoide y el helicoides verificaban la ecuación de superficie minimal (1.13). El catenoide y el helicoides son las únicas superficies de revolución minimales. También se sabe que el helicoides es, junto con el plano, la única superficie minimal reglada (probado por Catalan en 1842).

El helicoides es la superficie adjunta al catenoide, de manera que podemos obtener una parametrización del helicoides mediante la ecuación (2.1) de la Sección 2.1 derivando parcialmente respecto de u las componentes del catenoide e integrándolas en la variable v : $X^* = (x^*, y^*, z^*)$ con

$$\begin{aligned} x^*(u, v) &= r \sinh u \sin v, \\ y^*(u, v) &= r \sinh u \cos v, \\ z^*(u, v) &= rv. \end{aligned}$$

Mediante (2.11) podemos obtener parametrizaciones para las superficies asociadas que, como sabemos, son todas minimales y localmente isométricas entre sí: $Z(w, \theta) = X(w) \cos \theta + X^*(w) \sin \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) con componentes

$$\begin{aligned} \bar{x}(u, v) &= r \cosh u \cos v \cos \theta + r \sinh u \sin v \sin \theta, \\ \bar{y}(u, v) &= -r \cosh u \sin v \cos \theta + r \sinh u \cos v \sin \theta, \\ \bar{z}(u, v) &= ru \cos \theta + ru \sin \theta. \end{aligned}$$

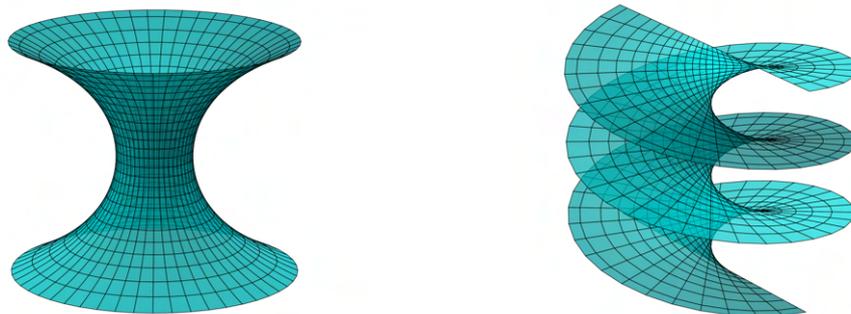


Figura 3.2: Izquierda: Catenoide. Derecha: Helicoide.

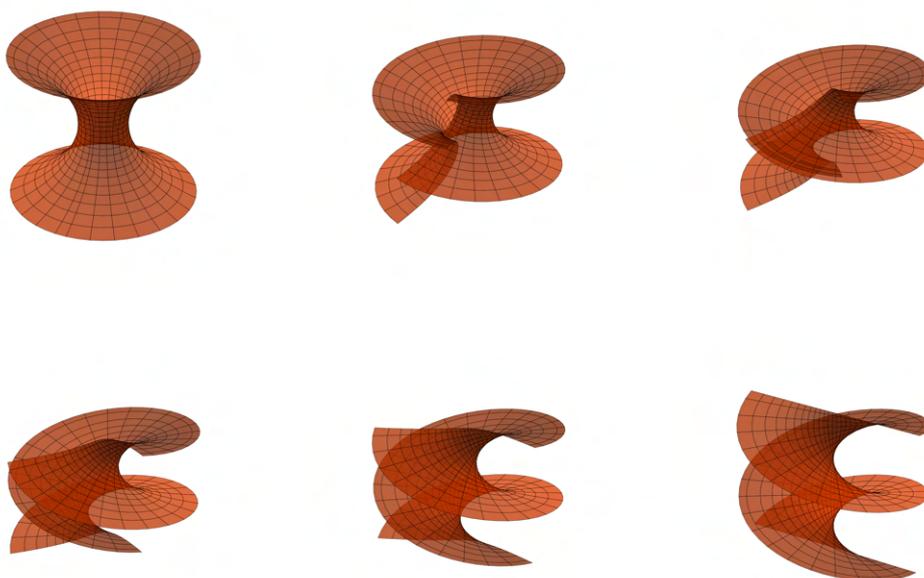


Figura 3.3: Catenoide y sus superficies asociadas hasta el helicoide, parametrizaciones locales definidas en el abierto $(-2, 2) \times (0, 2\pi)$.

Superficie de Enneper

Esta superficie fue descubierta en 1864 por Alfred Enneper, el cual empleó la fórmula del Corolario 6 de la Sección 2.2 con la función $R(w) \equiv 1$ ($w = u + iv \in \mathbb{C}$) obteniendo la parametrización:

$$X(w) = \operatorname{Re} \left(\int_0^w (1 - \omega^2) d\omega, \int_0^w i(1 + \omega^2) d\omega, \int_0^w 2\omega d\omega \right),$$

e integrando

$$X(w) = \operatorname{Re} \left(w - \frac{w^3}{3}, iw + \frac{iw^3}{3}, w^2 \right).$$

Es sencillo obtener las componentes de la superficie de Enneper:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \\ y(u, v) &= -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, \\ z(u, v) &= u^2 - v^2, \end{aligned}$$

con $-\infty < u, v < \infty$.

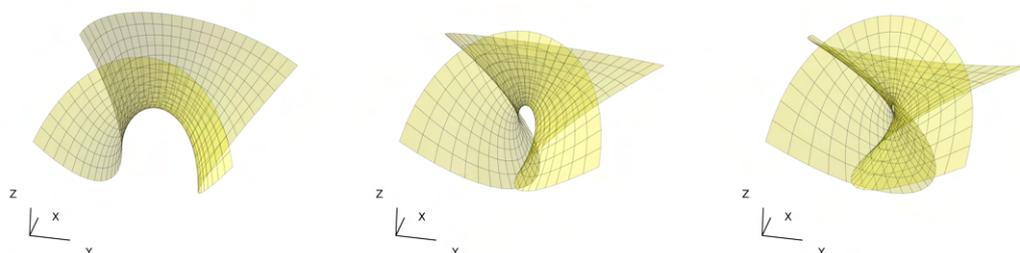


Figura 3.4: Parametrizaciones de la superficie de Enneper en los abiertos de la forma $(-K, K) \times (-K, K)$, con $K = 1, 2, 4$ respectivamente.

Por el Corolario 6 podemos también obtener parametrizaciones de las superficies asociadas:

$$Z(w, \theta) = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left(w - \frac{w^3}{3} \right), ie^{-i\theta} \left(w + \frac{w^3}{3} \right), e^{-i\theta} w^2 \right\},$$

y se obtienen las componentes en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}\bar{x}(u, v) &= \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2\right) \cos \theta + \left(v + \frac{v^3}{3} - u^2v\right) \sin \theta, \\ \bar{y}(u, v) &= \left(-v + \frac{v^3}{3} - u^2v\right) \cos \theta + \left(u + \frac{u^3}{3} - uv^2\right) \sin \theta, \\ \bar{z}(u, v) &= (u^2 - v^2) \cos \theta - 2uv \sin \theta,\end{aligned}$$

con $\theta \in \mathbb{R}$.

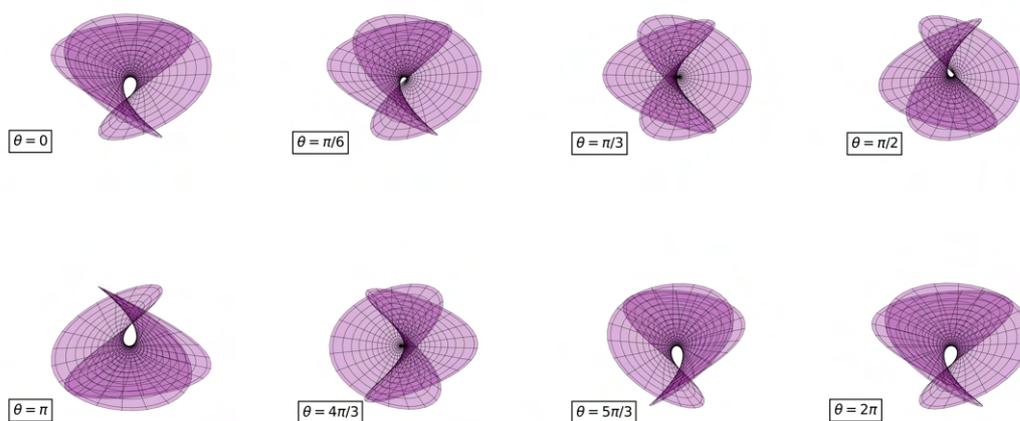


Figura 3.5: Superficie de Enneper y sus asociadas con parametrizaciones definidas en la bola $B_{2.5}(0)$. Como podemos apreciar la superficie va rotando con sentido positivo ("de izquierda a derecha") alrededor del eje z hasta llegar a $\theta = \pi$, cuando comienza a girar en sentido contrario hasta volver a la superficie inicial.

Primera superficie de Scherk

Entre los años 1831 y 1835, casi sesenta años después del trabajo de Meusnier, Heinrich Scherk descubrió cinco nuevas superficies minimales empleando las fórmulas de representación de Monge-Legendre junto con un método de separación de variables. Estas superficies son actualmente conocidas como las superficies de Scherk. Inicialmente dos de ellas fueron introducidas en su artículo ganador un concurso organizado en 1831 por el príncipe polaco József Aleksander Jablonowski en Leipzig. Posteriormente, en un artículo publicado en 1835, Scherk expuso

con detalle su método y encontró con él otras tres superficies minimales. Una de las superficies que descubrió es conocida como la *primera superficie de Scherk*, que es una superficie no paramétrica definida por la función

$$z(x, y) = \log \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right),$$

con $-\infty < x, y < \infty$.

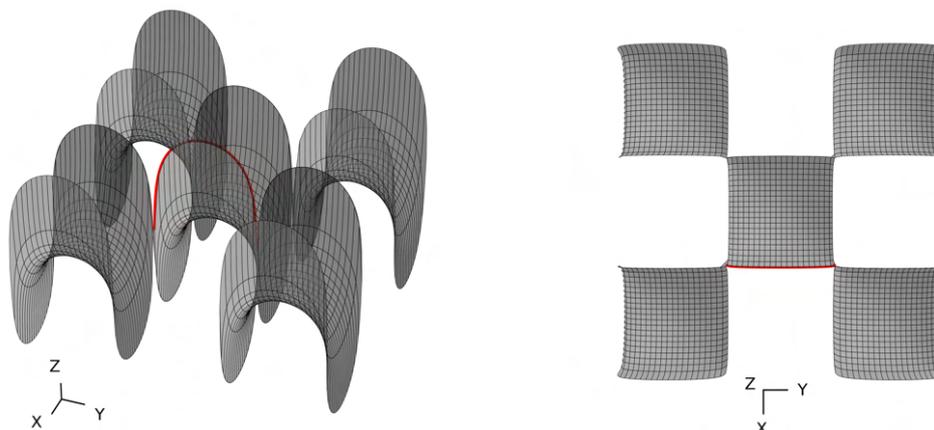


Figura 3.6: Primera superficie de Scherk desde distintos puntos de vista.

Como podemos observar en la figura anterior, la superficie es periódica en los ejes x e y , por ello también se conoce como la *superficie doblemente periódica de Scherk*. Esta superficie periódica no encaja con nuestra definición de superficie regular, ya que existen una cantidad no numerable de discontinuidades de la función $z(x, y)$, por ejemplo en los puntos:

$$(x, y) \in \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$

cuya imagen aproximada está marcada en rojo en la Figura 3.6. Pero si tomamos abiertos de la forma

$$\Omega_{k,l} := \left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2} \right) \times \left(\pi l - \frac{\pi}{2}, \pi l + \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{con } k + l \text{ par},$$

obtenemos parametrizaciones regulares de la superficie. Estos abiertos (conexos) de \mathbb{R}^2 se denominan *dominios fundamentales* de la primera superficie de Scherk. Este fenómeno ocurre con otras superficies periódicas en torno a alguno de los ejes, para algunas de las cuáles existen también dominios fundamentales.

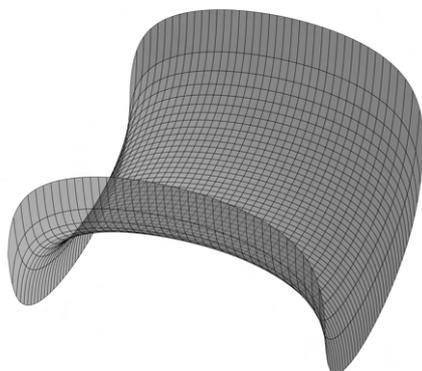


Figura 3.7: Parametrización local de la primera superficie de Scherk en el dominio fundamental $\Omega_{0,0}$.

Superficie de Henneberg

Muchos ejemplos interesantes de superficies minimales se obtienen como solución al *Problema de Björling*, que de forma intuitiva puede plantearse de la siguiente forma:

Dado un segmento de una curva en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , encontrar una superficie minimal que contenga dicha curva.

La superficie de Henneberg es la solución a un problema de este tipo (formalizado y con algunas hipótesis adicionales), donde el segmento en cuestión corresponde a la curva conocida como *parábola de Neil*, que verifica la ecuación:

$$2x^3 = 9z^2,$$

en el plano $\{y = 0\}$.

En 1875, Lebrecht Henneberg resolvió el problema de Björling de dicho segmento empleando un resultado de Schwarz que requiere de una parametrización adecuada de la curva y de su vector normal. Como resultado obtuvo la siguiente

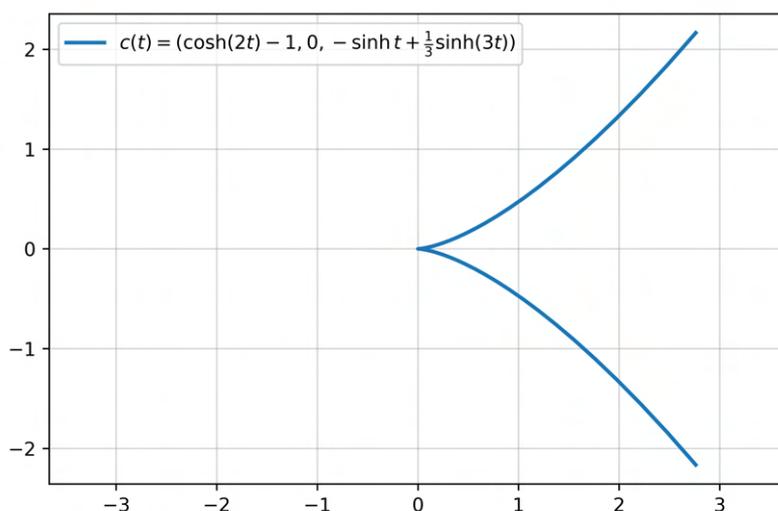


Figura 3.8: Segmento de la parábola de Neil sobre el plano $\{y = 0\}$ con $t \in (-1, 1)$.

parametrización de la superficie que hoy lleva su nombre:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= -1 + \cosh(2u) \cos(2v), \\ y(u, v) &= \sinh u \sin v + \frac{1}{3} \sinh(3u) \sin(3v), \\ z(u, v) &= -\sinh u \cos v + \frac{1}{3} \sinh(3u) \cos(3v), \end{aligned}$$

con $-\infty < u < \infty$, $k\pi < v < (k+1)\pi$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Superficie de Catalan

Esta superficie fue descubierta en 1855 por Eugène Catalan y se obtiene como solución al problema de Björling asociado a un segmento de la curva cicloide. Resolviendo el problema de Björling se puede calcular la siguiente parametrización de la *superficie de Catalan*:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= 1 - \cos u \cosh v, \\ y(u, v) &= 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}, \\ z(u, v) &= u - \sin u \cosh v, \end{aligned}$$

con $2k\pi < u < 2(k+1)\pi$, $-\infty < v < \infty$ y $k \in \mathbb{Z}$.

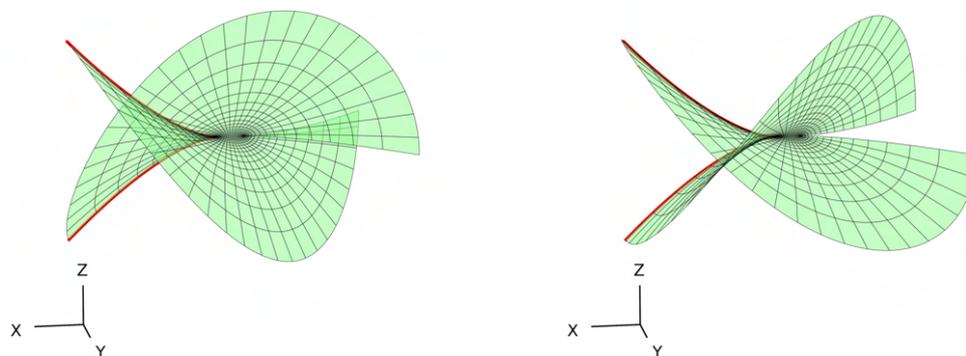


Figura 3.9: Izquierda: Parametrización de la superficie de Henneberg en $(-\pi/2, \pi/2) \times (0, \pi/2)$. Derecha: Parametrización de la superficie de Henneberg en $(-\pi/2, \pi/2) \times (\pi/2, 0)$.

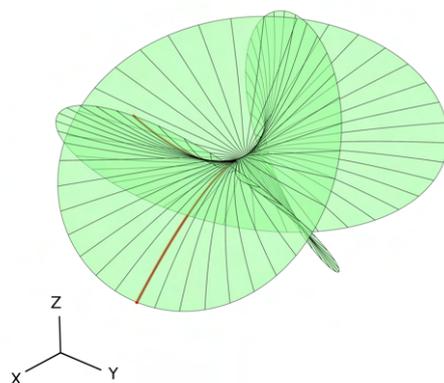


Figura 3.10: Parametrización de la superficie de Henneberg en $(-\pi/2, \pi/2) \times (0, \pi)$. Podemos ver como las dos parametrizaciones de la Figura 3.9 se "pegan" en la parábola de Neil (marcada en rojo).

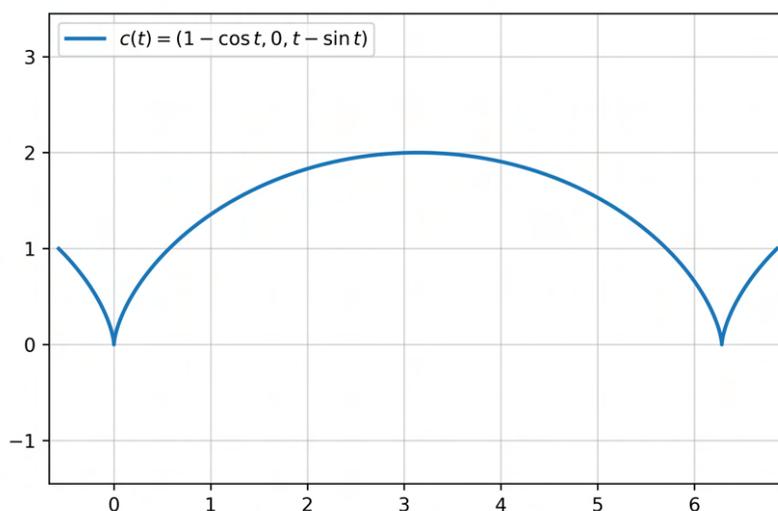


Figura 3.11: Segmento de cicloide con $t \in (-\pi/4, 5\pi/2)$.

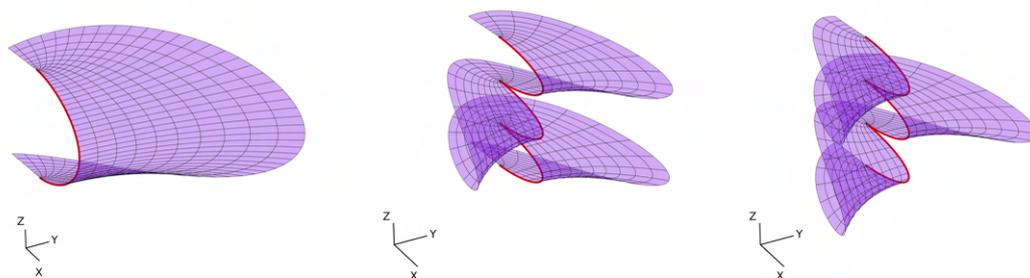


Figura 3.12: De izquierda a derecha: parametrizaciones de la superficie de Catalan en los abiertos $(0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$, $(0, 6\pi) \times (0, \pi/2)$ y $(0, 6\pi) \times (-\pi/2, 0)$ respectivamente. Podemos apreciar que al aumentar el rango de la componente u se repite la misma estructura básica de la primera gráfica. Además va generándose una cicloide a lo largo de la superficie.

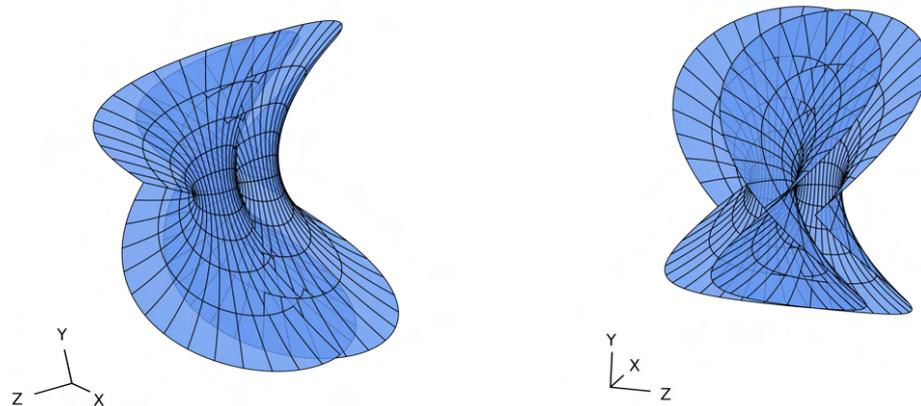


Figura 3.13: Superficie de Catalan desde distintos puntos de vista. Parametrización en el abierto $(0, 4\pi) \times (-\pi, \pi)$.

Bibliografía

- [1] ARTIN, M. *Algebra*, 2 ed. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2010.
- [2] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable I*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 1995.
- [3] DIERKES, U., HILDEBRANDT, S., AND SAUVIGNY, F. *Minimal Surfaces*, 2 ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, Germany, 2010.
- [4] DO CARMO, M. P. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial S.A., 1990.
- [5] FACENDA AGUIRRE, J. A., AND FRENICHE IBÁÑEZ, F. J. *Integración de funciones de varias variables*. Pirámide Ediciones S.A., 2002.
- [6] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A., AND PASTOR GONZÁLEZ, J. A. *Un curso de Geometría Diferencial*, 2 ed. Editorial CSIC, Madrid, Spain, 2019.
- [7] JOST, J., AND LI-JOST, X. *Cambridge studies in advanced mathematics: Calculus of variations series number 64*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999.
- [8] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 2002.
- [9] MEEKS, III, W. H., AND PÉREZ, J. The classical theory of minimal surfaces. *Bull. New Ser. Am. Math. Soc.* 48, 3 (2011), 325–407.
- [10] NITSCHKE, J. C. C. *Lectures on minimal surfaces: Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems volume 1*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989.