

R- 20.116

T.S-153

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

**ESTUDIO DE LOS
EXPERIMENTOS DE
CONVERSIÓN
PARAMÉTRICA A LA BAJA
CON EL FORMALISMO DE
LA FUNCIÓN DE WIGNER**

LBS
2047694

TESIS DOCTORAL REALIZADA POR:
ALBERTO CASADO RODRÍGUEZ
SEVILLA, 1998

T.S-153

A mi familia

42

304

09 MAR. 1998

Alva Koffel

Prólogo

Hace cerca de siete años que me licencié en ciencias físicas, y cerca de cinco que comencé a trabajar con mi director de tesis, Emilio Santos Corchero, de quien he tenido el placer de aprender muchísimas cosas. Su disposición en cada momento a responder cualquier pregunta que tuviese, su humildad, su paciencia para conmigo durante mucho tiempo, la ayuda que me ha prestado en todos los sentidos, son cosas que desde aquí le agradezco de corazón. Escribir esta tesis bajo su dirección ha sido una suerte para mí. También quiero agradecer a la Universidad de Cantabria su acogimiento durante estos años.

También agradezco a Trevor W. Marshall todo lo que me ha enseñado. Con él, al igual que con Emilio, he tenido el placer de compartir muy buenos momentos durante mis estancias en Santander, y asistir a interesantísimas discusiones sobre física.

Antes de contactar con Emilio Santos estuve durante casi dos años, junto con otros compañeros de la Escuela de Ingenieros de Sevilla, estudiando diferentes asuntos relacionados con los problemas fundamentales de la mecánica cuántica. Actualmente, y después de varios años de duro trabajo, nuestros esfuerzos han comenzado a dar su fruto.

Me gustaría dar aquí mi agradecimiento a dos compañeros y amigos que han jugado y juegan un papel muy importante en mi carrera docente e investigadora. A Ramón Risco Delgado, quien desde un principio buscó la forma de contactar con buenos investigadores dentro de este campo, y sin cuyo esfuerzo estos logros no habrían sido posibles. También me gustaría expresar mi agradecimiento a José Martínez García, quien me ha apoyado y ayudado también durante estos años, sobre todo en cuestiones docentes. De él he aprendido una infinidad de cosas que me han ayudado muchísimo en las clases. Con ellos tengo la suerte de compartir actualmente la enseñanza de la asignatura de Física de primero de Telecomunicaciones, una enseñanza basada en la libertad de cátedra, como debe ser.

También quiero mandar desde aquí un abrazo a Agustín Fernández Rueda. Espero que pronto pueda ponerse a trabajar con nosotros.

A Enrique Drake Moyano, con el que compartí mis primeros dos años de docencia, quiero mandarle desde aquí un abrazo.

A mi familia, que siempre me ha apoyado en todo, le dedico esta tesis porque ha vivido más de cerca los acontecimientos de mi carrera, y nunca me faltó su apoyo. A mis hermanos, Alejandro, Isabel y Guillermo, y a mis padres, que han tenido siempre la fuerza para sacarnos adelante. A todos les mando un beso desde aquí. Ojalá siempre estemos unidos. También a mi cuñada Ana Mari, y a mi preciosa sobrina, Ana María del Patrocinio, lo más bonito de este

mundo. A mis tíos y primos de Madrid les envió un fuerte abrazo. Aunque la distancia nos ha separado durante muchos años, siempre han ocupado un lugar en mi corazón.

A Raquel, con la que compartí de cerca de dos años de mi vida, y que conoció, tal vez más que nadie, los momentos más duros de mi carrera profesional, cuando comencé a dar clases y a hacer la tesis. Le agradezco su comprensión y apoyo durante esos momentos, así como la bonita amistad que ahora tenemos.

A dos amigos que, desde que estudiábamos en el instituto, siempre han estado cerca, y con los que tengo una amistad que ójala dure siempre. Ellos son David Picón Cansino y Domiciano Rodríguez Junco.

A Marisa, Andrea, Gelo, y "Garfio", esa familia que me acogió como uno más desde la primera vez que fui a Santander, y con la que espero seguir compartiendo buenos momentos cuando viaje al norte. Me gustaría dedicarles desde aquí un fuerte abrazo.

A los alumnos de la Escuela de Ingenieros, que siempre han reconocido y apreciado mi labor como profesor, me gustaría expresarles mi agradecimiento. Enseñar es una labor gratificante, sobre todo cuando tus alumnos quieren aprender.

Finalmente, la práctica del Shorinji Kempo durante cerca de diecisiete años de mi vida me ha dado siempre energía y paciencia para conseguir mis objetivos. La disciplina interior que aporta la práctica de este arte marcial, basada en la búsqueda continua de un equilibrio con uno mismo y con nuestro entorno, me ha ayudado mucho durante toda mi vida, y en particular para escribir esta tesis. Quisiera mandar un abrazo desde aquí a mi maestro, John M. King, y a los muchos amigos que he hecho durante muchos años, y con los que he compartido y comparto muy buenos momentos, dentro y fuera del Dojo: a Martín, Christian, Luis, Brown, Eduardo,....

Finalmente, me gustaría agradecer a mi queridísima hermana Isabel la ayuda que me ha prestado en cuestiones ortográficas. Tengan por seguro que si existe alguna falta no es culpa suya, sino mía.

Sevilla, 1 de Marzo de 1998



Alberto Casado Rodríguez



EMILIO SANTOS CORCHERO, CATEDRÁTICO DE
FÍSICA TEÓRICA
DE LA UNIVERSIDAD DE SANTANDER

CERTIFICO:

Que la presente memoria:

ESTUDIO DE LOS EXPERIMENTOS DE CONVERSIÓN
PARAMÉTRICA A LA BAJA CON EL FORMALISMO DE LA
FUNCIÓN DE WIGNER

ha sido realizada bajo mi dirección por D. Alberto Casado Rodríguez y autorizo su presentación para que sea calificada como tesis doctoral.

Para que conste a los efectos oportunos, firmo el presente certificado en Santander, a tres de Diciembre de mil novecientos noventa y siete.

Fdo. José Martínez García

Fdo. Emilio Santos Corchero.

Fdo. Alberto Casado Rodríguez

Índice

1	INTRODUCCIÓN	1
2	LA CONVERSIÓN PARAMÉTRICA A LA BAJA	3
2.1	INTRODUCCIÓN	3
2.2	ÓPTICA NO LINEAL EN ELECTROMAGNETISMO CLÁSICO	4
2.2.1	La ecuación de onda no lineal	4
2.2.2	La aproximación de ondas acopladas	6
2.2.3	Amplificación paramétrica	7
2.3	TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS PROCESOS NO LINEALES	8
2.3.1	La conversión paramétrica a la baja	9
2.4	LA CONVERSIÓN A LA BAJA EN EL PROBLEMA EPR	10
2.4.1	El problema EPR	10
2.4.2	El conversor paramétrico como fuente de estados EPR	12
2.4.3	Resumen de los experimentos	13
3	LA FUNCIÓN DE WIGNER EN ÓPTICA CUÁNTICA	19
3.1	INTRODUCCIÓN	19
3.2	LA FUNCIÓN DE WIGNER EN MECÁNICA CUÁNTICA	20
3.2.1	Ecuación de Wigner-Moyal	21
3.3	ÓPTICA CUÁNTICA EN EL ESPACIO DE LAS FASES	22
3.3.1	Descripción estocástica del campo electromagnético clásico	23
3.3.2	Funciones de correlación en óptica cuántica	24
3.3.3	La representación P	24
3.3.4	La distribución Q	25
3.3.5	Funciones características	26
3.4	LA FUNCIÓN DE WIGNER	26
3.4.1	Ejemplos de función de Wigner	29

4	ESTUDIO DE LA CONVERSIÓN A LA BAJA EN LA REPRESENTACIÓN DE WIGNER	31
4.1	INTRODUCCIÓN	31
4.2	DESCRIPCIÓN DE UN HAZ DE LUZ	32
4.3	HAMILTONIANO DE INTERACCIÓN	33
4.4	EVOLUCIÓN DE LAS AMPLITUDES	36
4.5	DESCRIPCIÓN DE HACES CONJUGADOS	39
4.6	PROPIEDADES ESTOCÁSTICAS DE LA RADIACIÓN	43
	4.6.1 La radiación de punto cero	43
	4.6.2 Autocorrelaciones	45
	4.6.3 Correlaciones cruzadas	49
4.7	GENERALIZACIÓN A LA CONVERSIÓN TIPO II	51
4.8	APÉNDICE: CALCULO DE LA FUNCIÓN DE WIGNER EN FUNCIÓN DEL TIEMPO	54
	4.8.1 Función característica	56
	4.8.2 Cálculo de la función de Wigner	59
5	LA TEORIA DE LA DETECCIÓN EN LA REPRESENTACIÓN DE WIGNER	61
5.1	INTRODUCCIÓN	61
5.2	PROBABILIDAD DE DETECCIÓN SIMPLE	62
5.3	PROBABILIDAD DE DETECCIÓN CONJUNTA	64
	5.3.1 Expresión de la probabilidad conjunta en la función de Wigner	65
	5.3.2 Aplicación a los experimentos de conversión a la baja	67
5.4	APÉNDICE: SIMETRIZACIÓN DE $\hat{a}'\hat{b}'\hat{b}\hat{a}$	70
6	ANÁLISIS DE LOS EXPERIMENTOS	73
6.1	INTRODUCCIÓN	73
6.2	ASPECTOS NO CLÁSICOS DE LA LUZ CONVERTIDA A LA BAJA	74
	6.2.1 Experimento de interferencia sobre una pantalla	74
	6.2.2 Medida del tiempo de correlación entre haces conjugados por interferencia	77
	6.2.3 Creación frustrada de fotones mediante interferencia	80
	6.2.4 Experimento de coherencia inducida	84
	6.2.5 Cancelación de la dispersión	88

ÍNDICE

6.2.6	El borrador cuántico	91
6.3	EXPERIMENTOS PARA EL CONTRASTE DE LAS DESIGUALDADES DE BELL	94
6.3.1	El experimento de Rarity y Tapster	94
6.3.2	Los experimentos de Franson	96
6.3.3	Experimento de recombinación	98
6.3.4	Probabilidad de detección conjunta	99
6.3.5	Pruebas de las desigualdades de Bell usando correlación de polarización	100
7	INTERPRETACIÓN ONDULATORIA DE LA LUZ BASADA EN FUNCIONES DE WIGNER POSITIVAS	103
7.1	INTRODUCCIÓN	103
7.2	INTERPRETACIÓN ONDULATORIA DE LA PROPAGACIÓN	104
7.3	LA DETECCIÓN COMO UN FENÓMENO ONDULATORIO	105
7.3.1	La negatividad de $I - I_0$	108
7.3.2	Modificación de la teoría de la detección	109
7.4	RELACIÓN CON EL PROBLEMA EPR	110
8	CONCLUSIONES	111
9	BIBLIOGRAFÍA	113

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación que recoge esta memoria trata sobre el análisis de los experimentos de conversión paramétrica a la baja, utilizando el formalismo de la función de Wigner de la mecánica cuántica. Para ello, comenzaremos en el capítulo segundo por mostrar algunos aspectos básicos de la óptica clásica no lineal, y haremos una introducción al fenómeno de la conversión a la baja en el espacio de Hilbert, con el objeto de exponer las diferencias principales existentes entre los tratamientos clásico y cuántico de los procesos no lineales. También haremos una breve puesta a punto sobre la problemática en torno al problema EPR¹, y resumiremos aquellos experimentos que se han realizado hasta el momento con el objeto de mostrar aspectos no clásicos de la luz y contrastar experimentalmente desigualdades de Bell.

En el capítulo tercero haremos una revisión del formalismo de la función de Wigner en óptica cuántica, haciendo previamente una exposición de sus propiedades fundamentales en mecánica cuántica, así como una introducción a los diferentes tratamientos de la óptica cuántica en el espacio de las fases, a partir de las distribuciones P , Q y la función de Wigner. Terminaremos por adentrarnos un poco más en esta distribución dentro del campo de la óptica cuántica.

Los capítulos cuarto al séptimo son el núcleo fundamental de la tesis. En el capítulo cuarto se hará un detallado análisis del proceso de la conversión a la baja con la función de Wigner; se describirá la luz radiada por el cristal hasta segundo orden en teoría de perturbaciones, mostrando cómo se transforma la radiación de punto cero que incide sobre el medio no lineal, y se calcularán las correlaciones de la luz para caracterizar completamente el proceso. En el capítulo quinto estudiaremos la teoría de la detección en este formalismo en los casos de la detección simple y conjunta, mostrando el papel que tiene la radiación de punto cero en el fenómeno de la detección. Estos dos capítulos

¹Einstein, Podolsky y Rosen.

serán la base para el tratamiento de los experimentos en el capítulo sexto. Dada la gran cantidad de experimentos realizados hasta la fecha, hemos hecho una selección de los que pensamos son más representativos dentro del campo de los problemas fundamentales de la mecánica cuántica. El capítulo séptimo tratará sobre la posibilidad de interpretar la propagación y detección de la luz en óptica cuántica desde un punto de vista puramente ondulatorio a partir de la radiación de punto cero, usando el formalismo de la función de Wigner.

El capítulo octavo tratará las conclusiones que se inferen de este trabajo, y por último se expondrán las fuentes bibliográficas utilizadas en su elaboración.

Esta memoria está basada en un trabajo de investigación que comenzó en 1995, y que ha dado lugar a los trabajos Casado et al. (1997a, b, c, d). Aunque los capítulos cuarto al séptimo son básicamente el desarrollo de las ideas de estos trabajos, hemos añadido los mismos al final de la tesis.

Capítulo 2

LA CONVERSIÓN PARAMÉTRICA A LA BAJA

2.1 INTRODUCCIÓN

El proceso de la conversión paramétrica a la baja ha tenido un papel relevante en los últimos años en el contraste experimental de desigualdades de Bell, y en experimentos donde se trata de mostrar el carácter no clásico de la luz radiada por un medio no lineal. Si bien dicho proceso se conocía desde principios de los años 60, década en que la óptica no lineal nació tras el descubrimiento del láser, hasta mediados de los 80 no se comenzaron a hacer experimentos utilizando los cristales no lineales como fuente de estados EPR.

En este capítulo presentaremos en primer lugar un resumen de la óptica no lineal de segundo orden en electromagnetismo clásico, y mostraremos esquemáticamente los procesos más comunes dentro de este campo, tales como la amplificación paramétrica, la generación del segundo armónico, y la conversión a la alta. En segundo lugar haremos una introducción a la conversión a la baja en óptica cuántica, comparándola con la amplificación paramétrica clásica, con el objeto de resaltar posteriormente uno de los resultados más importantes de esta tesis: la descripción de la transformación de la radiación de punto cero a su paso por el cristal utilizando el formalismo de la función de Wigner. Finalmente, y tras hacer una breve descripción histórica del problema EPR, mostraremos la importancia del conversor paramétrico a la baja como fuente de estados enredados¹ y haremos un resumen de los experimentos más importantes realizados hasta el momento.

¹En inglés se utiliza el término “entangled”.

2.2 ÓPTICA NO LINEAL EN ELECTROMAGNETISMO CLÁSICO

Esta primera parte está dedicada a resumir los procesos más importantes que tienen lugar en la óptica no lineal de segundo orden, dentro del esquema del electromagnetismo clásico².

2.2.1 La ecuación de onda no lineal

La invención del láser en 1960 permitió observar fenómenos no lineales en el comportamiento de la luz en medios materiales, debido a la posibilidad de utilizar intensidades mucho mayores de lo que se había conseguido hasta el momento³. Un medio anisótropo no lineal, homogéneo, y no dispersivo, se caracteriza por una relación entre el campo eléctrico y la polarización de la forma

$$P_i = \epsilon_o \sum_j \kappa_{ij} E_j + 2 \sum_{jk} d_{ijk} E_j E_k + 4 \sum_{jkl} \kappa_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ es el campo eléctrico, y $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ es la polarización. κ_{ij} , d_{ijk} y κ_{ijkl} son los elementos de los tensores que representan la susceptibilidad del medio a los distintos órdenes del desarrollo. Dichas cantidades son independientes de la frecuencia en medios no dispersivos.

Cuando los campos que intervienen son poco intensos la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} es lineal. Sin embargo, cuando las intensidades son comparables a la de un láser, los siguientes términos del desarrollo influyen en el comportamiento del medio, dando lugar a una serie de fenómenos que dependen del tipo de no linealidad. En cualquier caso, el campo aplicado siempre es pequeño en comparación con los campos interatómicos, de manera que la no linealidad es pequeña y tan sólo se consideran importantes hasta los términos de tercer orden.

Supongamos un medio dieléctrico homogéneo en el que ignoraremos por simplicidad el carácter tensorial de la susceptibilidad lineal κ_{ij} , de manera que haremos el cambio $\kappa_{ij} \rightarrow \kappa_L$. La ecuación de onda que se obtiene a partir de

²Para elaborar este resumen nos hemos basado fundamentalmente en los libros de Saleh y Teich (1991, capítulo 19), y Yariv (1989, capítulos 16 y 17). Otros tratamientos donde se recoge la óptica no lineal son, por ejemplo, Butcher y Cotter (1990), Schubert y Wilhelmi (1986), Shen (1984), Bloembergen (1965), Boyd (1992).

³El primer experimento se llevó a cabo en 1961, y consistió en la generación del segundo armónico al hacer incidir un láser de rubí de 6943 Å sobre un cristal de cuarzo (Franken et al., 1961).

las ecuaciones de Maxwell cuando se tiene en cuenta la relación entre $\vec{\mathbf{n}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$ dada por (2.1) es (Yariv, 1989):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_o \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

donde μ_o y ϵ_o son la permeabilidad magnética y dieléctrica del vacío, y $\epsilon = \epsilon_o(1 + \kappa_L)$. Por otra parte, \mathbf{P}_{NL} es el término no lineal de la polarización, el cual viene dado, en el caso cuadrático, por ⁴

$$(P_{NL})_i = 2d_{ijk}E_jE_k. \quad (2.3)$$

El término correspondiente al lado derecho de la ecuación (2.2) es la fuente de radiación en el medio. Para resolver dicha ecuación se utilizan generalmente dos métodos:

- El primero es un proceso iterativo conocido como *la aproximación de Born*. Suponiendo que sobre el medio incide un campo \mathbf{E}_o , se calcula la polarización asociada a este campo mediante (2.1) y el campo radiado a primer orden \mathbf{E}_1 resolviendo (2.2). Este campo actúa como fuente de radiación a segundo orden, dando como resultado otro campo \mathbf{E}_2 , y así se pueden ir calculando sucesivamente los distintos términos del campo radiado. Cuando la intensidad de la luz incidente es lo suficientemente débil como para considerar pequeña la no linealidad, el proceso iterativo puede detenerse en el primer orden. En esta aproximación, conocida como *la primera aproximación de Born*, la propagación de la luz se ve como un proceso de dispersión ⁵ en el que el campo incidente se transforma al interactuar con el medio y es reemitido por éste. El uso de la primera aproximación de Born en la óptica no lineal de segundo y tercer orden puede verse en Saleh y Teich (1991).
- El segundo método se conoce como *la aproximación de ondas acopladas*. La ecuación de onda no lineal se utiliza para deducir ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales acopladas, las cuales gobiernan la evolución de las ondas que interactúan en el medio. Este método es más fiable porque el campo se expresa a todos los órdenes, y es el que mostraremos en lo que viene a continuación.

⁴En este resumen sólo trataremos el caso en que los términos de orden superior al segundo son despreciables. Los efectos a tercer orden, los cuales son más visibles en cristales centrosimétricos, en los que $d_{ijk} = 0$, se pueden estudiar por ejemplo en (Saleh y Teich, 1991).

⁵En inglés se utiliza el término "scattering".

2.2.2 La aproximación de ondas acopladas

Se supone que el campo eléctrico es la superposición de tres ondas de frecuencias ω_1 , ω_2 , y ω_3 , y amplitudes $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, y $\mathbf{E}_3(\mathbf{r})$, de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) e^{i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + c.c., \quad (2.4)$$

donde \mathbf{k}_i es el vector de onda asociado a la onda "i". Sustituyendo (2.4) en (2.3) y (2.2) se obtiene una ecuación diferencial que consiste en la suma de varios términos, siendo cada uno de ellos una función armónica a alguna de las tres frecuencias, igualada a la fuente de radiación, que contiene fundamentalmente términos oscilantes a frecuencias $2\omega_n$ y $\omega_n + \omega_m$, siendo $n, m = 1, 2, 3$. Si ω_1 , ω_2 , y ω_3 son distintas, se pueden obtener de esta ecuación tres ecuaciones diferenciales acopladas igualando los términos de la misma frecuencia. Para que esto ocurra una de las frecuencias tiene que ser suma de las otras dos, pues de lo contrario la fuente de radiación no contendría términos a estas frecuencias y no habría interacción entre las diferentes ondas (Saleh y Teich, 1991; página 763). Por tanto, debe verificarse por ejemplo la relación

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (2.5)$$

la cual recibe el nombre de *condición de emparejamiento en frecuencias*⁶.

Se suele considerar que $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ sólo varía en una dirección, por ejemplo la dirección z , de forma que $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, y que la interacción es lo suficientemente débil como para suponer que la variación de las amplitudes del campo con z sean pequeñas, lo cual implica a su vez que $|k_i d\mathbf{E}_i/dz| \gg |d^2\mathbf{E}_i/dz^2|$, es decir, $|\mathbf{E}_i|$ es aproximadamente constante dentro de una longitud de onda.

Sustituyendo (2.3) y (2.4) en (2.2) y teniendo en cuenta estas aproximaciones, se obtienen las siguientes ecuaciones acopladas (Yariv, 1989):

$$\begin{aligned} \frac{dE_{1i}}{dz} &= -i\omega_1 \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_1}} d'_{ijk} E_{3j} E_{2k}^* e^{-i(k_3 - k_2 - k_1)z}, \\ \frac{dE_{2k}^*}{dz} &= i\omega_2 \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_2}} d'_{kij} E_{1i} E_{3j}^* e^{-i(k_1 - k_3 + k_2)z}, \\ \frac{dE_{3j}}{dz} &= -i\omega_3 \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_3}} d'_{jik} E_{1i} E_{2k} e^{-i(k_1 + k_2 - k_3)z}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde d'_{ijk} es el tensor resultante de transformar d_{ijk} de los ejes del cristal al sistema de referencia cartesiano que describe la propagación de las ondas, y $k_i^2 = \omega_i^2 \mu_o \epsilon_i$.

⁶En inglés "frequency matching condition".

Aparte de la condición de emparejamiento en frecuencias, la cual es básica para que exista interacción entre las ondas, se puede demostrar también que los vectores de onda deben verificar la condición

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (2.7)$$

para que el acoplamiento de las ondas sea efectivo. En el caso no dispersivo ambas condiciones son equivalentes, dado que las tres ondas se propagan a la misma velocidad por el medio. Sin embargo, cuando hay dispersión la verificación conjunta de (2.7) y (2.5) implica que las ondas se propagan en direcciones distintas. Ambas condiciones reciben conjuntamente la denominación de *condiciones de emparejamiento*⁷.

Las ecuaciones (2.6) son el punto de partida para el estudio de los fenómenos de segundo orden en los cristales no lineales. Los procesos de mayor importancia son:

1. **Generación del segundo armónico.** Una onda intensa de frecuencia ω incide sobre el cristal dando lugar a una onda de frecuencia 2ω y a una disminución de la intensidad de la onda incidente. Se trata de un caso degenerado en el cual $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, y $\omega_3 = 2\omega$.
2. **Amplificación paramétrica.** Se caracteriza porque un haz intenso de frecuencia ω_3 y dos ondas de menor intensidad de frecuencias ω_1 y ω_2 , verificando $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, inciden sobre el medio resultando tras la interacción que las dos ondas de menor frecuencia son amplificadas a costa de la pérdida de energía del haz incidente. Si $\omega_2 = \omega_1$, el proceso se denomina amplificación paramétrica degenerada, y es inverso al de la generación del segundo armónico. El proceso de amplificación paramétrica más simple es aquel en que la amplitud inicial de una de las ondas es nula, generándose la misma en el proceso de interacción.
3. **Conversión a la alta.** Se produce cuando una señal de baja frecuencia ω_1 incide junto con un haz intenso de frecuencia ω_2 , dando lugar a una onda de frecuencia mayor, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, y a una disminución de la intensidad del haz incidente.

2.2.3 Amplificación paramétrica

Para mostrar uno de los aspectos más importantes en lo que al desarrollo de esta tesis se refiere, vamos a exponer el resultado de la resolución de las ecuaciones (2.6) concerniente a la amplificación paramétrica. Suponiendo por simplicidad que la pérdida de intensidad del haz incidente es despreciable, es

⁷En inglés "*matching conditions*".

decir, que $dE_{3j}/dz \approx 0$, y considerando que la intensidad inicial de una de las ondas es nula (por ejemplo, $\mathbf{E}_{2,z=0} = 0$), se obtiene el resultado siguiente para las amplitudes de las ondas "1" y "2" ⁸ en el caso $\Delta\mathbf{k} = 0$:

$$A_1(z) = A_1(0)\cosh\frac{az}{2} \quad ; \quad A_2(z) = A_1(0)\sinh\frac{az}{2}, \quad a \equiv cte, \quad (2.8)$$

donde la cantidad A_i ($i = 1, 2$) está relacionada con el campo eléctrico a partir de $A_i = E_i\sqrt{n_i/\omega_i}$ (n_i es el índice de refracción correspondiente a la frecuencia ω_i), y hemos supuesto por simplicidad el caso escalar.

Nótese que cuando $A_1(0)$ es nulo no existe amplificación. Es decir, en óptica clásica no lineal se necesitan dos ondas incidentes para que se produzca una tercera onda en el proceso de interacción de la radiación con el cristal. Este es uno de los resultados más importantes en lo que a la comparación entre los tratamientos clásico y cuántico se refiere, tal y como veremos en el apartado siguiente.

2.3 TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS PROCESOS NO LINEALES

En este apartado haremos una breve introducción a la conversión a la baja en óptica cuántica ⁹ basándonos en el resumen que aparece en Yariv (1989; capítulo 17), el cual recoge el problema de las fluctuaciones del vacío en procesos paramétricos (Louisell et al., 1961; Gordon et al. 1963).

En la aproximación escalar del campo electromagnético clásico la densidad hamiltoniana de interacción puede expresarse de la forma simplificada siguiente:

$$U = -\frac{2d}{3}E_1E_2E_3, \quad (2.9)$$

siendo d un coeficiente constante que representa la susceptibilidad bilineal. Dado que en la mayoría de los experimentos se utiliza un haz intenso, se suele tratar por ejemplo E_3 (frecuencia ω_3) como clásico, y se cuantizan la señal (ω_1) y el gemelo (ω_2), reemplazando E_2 y E_3 por los correspondientes operadores campo. El Hamiltoniano total que se obtiene es:

$$\hat{H} = \hat{H}_l + 2s\hbar(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2)\cos\omega_3t, \quad (2.10)$$

⁸A las ondas "1" y "2" se las suele denominar en inglés "signal" e "idler". En lo sucesivo las llamaremos "señal" y "gemelo".

⁹Otro tratamiento más riguroso, considerando la interacción de muchos modos, se puede ver por ejemplo en Mandel y Wolf (1995; capítulo 22). No obstante, la descripción simplificada que se hace en Yariv (1989) nos servirá para poner de manifiesto la diferencia básica con la amplificación paramétrica clásica. Ver también Pěrina (1984; capítulo 9).

donde s es una constante y \hat{H}_i es el Hamiltoniano libre. Suponiendo que el estado de la radiación en el instante inicial viene dado por $|\psi(0)\rangle = |n_{10}\rangle |n_{20}\rangle$, siendo n_{10} (n_{20}) el número inicial de fotones asociado a la radiación ω_1 (ω_2), se obtiene a partir de (2.10) el resultado siguiente para el número medio de fotones de la señal y el gemelo en función del tiempo (Louisell et al., 1961):

$$\begin{aligned}\langle n_1(t) \rangle &= n_{10} \cosh^2 st + (1 + n_{20}) \sinh^2 st, \\ \langle n_2(t) \rangle &= n_{20} \cosh^2 st + (1 + n_{10}) \sinh^2 st.\end{aligned}\tag{2.11}$$

El término que contiene a la unidad en los factores $(1 + n_{10})$ y $(1 + n_{20})$ se debe a que los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} no conmutan y muestra que, incluso en el caso de que no haya ninguna entrada de radiación correspondiente a la señal o al gemelo ($n_{10} = n_{20} = 0$), existe radiación saliente a estas frecuencias (comparar este resultado con (2.8)).

2.3.1 La conversión paramétrica a la baja

Al proceso por el cual un láser de frecuencia ω_3 y vector de onda \mathbf{k}_3 incide sobre un medio no lineal dando lugar a radiaciones de frecuencias ω_1 y ω_2 , y vectores de onda \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , verificando las condiciones de emparejamiento¹⁰ (2.5) y (2.7), se le denominó en un principio *fluorescencia (o emisión) paramétrica espontánea*¹¹ (Giallorenzi y Tang, 1968), aunque la denominación más conocida es *conversión paramétrica a la baja*¹² (Hong y Mandel, 1985).

Cuando se trabaja en la representación de los estados número del espacio de Hilbert, el fenómeno tiene una interpretación corpuscular basada en la aniquilación de un fotón del láser para dar lugar a dos fotones de menor frecuencia verificando las condiciones de emparejamiento, las cuales tienen en este marco una interpretación basada en la conservación de la energía y el momento en la división del fotón. Nótese la diferencia con el caso clásico, donde dichas condiciones representan el acoplamiento efectivo de tres ondas.

Si bien la conversión a la baja no tiene análogo en óptica clásica, donde vimos que hacía falta una entrada de radiación a la frecuencia de la señal o el gemelo para que se produjera amplificación paramétrica, los primeros tratados sobre el tema explicaban el fenómeno como una amplificación de las fluctuaciones de la radiación de punto cero, e incluso se llegó a afirmar que era posible una descripción clásica del fenómeno considerando la entrada de

¹⁰Respecto al papel que juega la polarización, se dice que la conversión es de tipo I cuando la señal y el gemelo tienen la misma polarización, y de tipo II cuando los haces conjugados salen con polarizaciones perpendiculares. En esta situación los haces se suelen denominar *ordinario* y *extraordinario*.

¹¹En inglés "spontaneous parametric fluorescence".

¹²En inglés "parametric down conversion".

dicha radiación (Gordon et al., 1963). En el desarrollo de esta tesis veremos que dicha imagen ondulatoria es la que se tiene cuando se estudia el proceso con la representación de Wigner de la óptica cuántica.

Para una revisión de los primeros trabajos teóricos y experimentales sobre amplificación paramétrica y conversión paramétrica a la baja ver, por ejemplo, Louisell (1960), Louisell et al. (1961), Gordon et al. (1963), Mollow y Glauber (1967a, b), Harris et al. (1967), Giallorenzi y Tang (1968), Byer y Harris (1968), Klyshko (1969), Kleinman (1968), Tucker y Walls (1969), Burnham y Weinberg (1970), Mollow (1973), Graham (1984).

2.4 LA CONVERSIÓN A LA BAJA EN EL PROBLEMA EPR

En este apartado vamos a introducir el conversor paramétrico a la baja en relación con el problema EPR, para lo cual haremos primeramente una breve puesta a punto sobre este tema. En segundo lugar justificaremos el proceso de conversión a la baja como fuente de estados tipo EPR, y finalmente haremos un resumen de los experimentos más importantes realizados en este contexto.

2.4.1 El problema EPR

Aunque la mecánica cuántica es una teoría con un gran poder predictivo, desde sus orígenes mostró problemas conceptuales que desembocaron en paradojas tales como la planteada en 1935 por Einstein, Podolsky y Rosen (Einstein et al., 1935), los cuales llegaron a la conclusión de que esta teoría era incompleta. Según estos autores, cuando se puede predecir con certeza el resultado de la medida de una variable física asociada a un sistema, sin perturbarlo, entonces existe un elemento de realidad correspondiente a esta magnitud. Esta definición de realidad, junto con el convencimiento de que la localidad de Einstein era un principio universal, se aplicó en el estudio teórico de un sistema de dos partículas en un estado enredado, autoestado del momento total y la posición relativa, y llegaron a la conclusión de que los momentos y posiciones individuales de las partículas eran elementos de realidad asociados al sistema. Como la posición y el momento están representados en la mecánica cuántica por operadores que no conmutan entre sí, lo que da lugar a un desconocimiento simultáneo del valor de dichas cantidades, se concluyó que la mecánica cuántica era una teoría incompleta. En este momento surgió la cuestión de si existían teorías de variables ocultas locales que diesen lugar a los mismos resultados que la mecánica cuántica.

Bohr respondió a la afirmación de Einstein, Podolsky y Rosen, cuestionando

la existencia de la localidad en favor de la completitud de la mecánica cuántica (Bohr, 1935a, b). Varios años más tarde se volvió a plantear la paradoja EPR utilizando un sistema de dos partículas en un estado enredado de espín total nulo (Bohm, 1952a, b). Bohm intentó establecer un modelo de variables ocultas locales que reprodujera las correlaciones cuánticas en dicho estado. La ventaja de este estado frente al que se usó en el artículo EPR es el carácter discreto de las variables que lo describen. En concreto, Bohm consideró el estado singlete, consistente en dos partículas de espín individual $1/2$ acopladas a un espín total nulo:

$$|\psi\rangle_{Bohm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle), \quad (2.12)$$

donde $|+\rangle$ y $|-\rangle$ representan las proyecciones del espín en una dirección cualquiera del espacio.

A pesar del avance teórico de Bohm, el problema EPR fue durante muchos años un tema de discusión sin un apoyo experimental que permitiera determinar cómo se comporta realmente la naturaleza. Se tuvo que esperar hasta 1964, fecha en que Bell estableció unas desigualdades que debían verificar las correlaciones en una teoría de variables ocultas locales, y mostró que existía una incompatibilidad entre algunos resultados teóricos predichos por la mecánica cuántica y los correspondientes a las teorías de variables ocultas (Bell, 1964). Las desigualdades de Bell fueron el primer paso decisivo hacia una posibilidad de llevar al terreno experimental el problema EPR: si existiese algún experimento en el que se violasen dichas desigualdades, esto implicaría que la naturaleza no se puede representar por teorías de variables ocultas realistas locales.

Dentro de los trabajos iniciales que se llevaron a cabo con el objetivo de superar las dificultades que suponía llevar al laboratorio la problemática EPR, merece la pena destacar el de Clauser, Horne, Shimony y Holt (1969), y el de Clauser y Horne (1974). En estos trabajos se obtuvo una nueva desigualdad basada en la hipótesis de no-intensificación¹³, además de las hipótesis de realismo y localidad. Esta desigualdad es la que se ha podido contrastar de forma efectiva en el laboratorio, incluso se ha conseguido violar experimentalmente. No obstante, al no basarse exclusivamente en el realismo local, se ha cuestionado su validez como prueba experimental determinante (Marshall et al., 1983).

Se han realizado experimentos dentro del campo de las partículas elementales (usando como fuente EPR la que resulta de la aniquilación del positronio o la dispersión protón-protón), aunque mucho más importantes son los que se han efectuado en el ámbito de la óptica cuántica, que se dividen en los ex-

¹³En inglés no-enhancement.

perimentos de cascada atómica (Aspect et al., 1981, 1982a, 1982b), y los de conversión a la baja, los cuales se considerarán en el apartado siguiente ¹⁴.

2.4.2 El conversor paramétrico como fuente de estados EPR

La importancia de la conversión a la baja en el problema EPR está relacionada directamente con el tipo de estado que describe la radiación a la salida del cristal, el cual es un estado enredado de la forma ¹⁵

$$|\psi\rangle \approx |\text{vac}\rangle_s |\text{vac}\rangle_i + \sum_{i,s} \delta(\omega_o - \omega_s - \omega_i) \delta(\mathbf{k}_o - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) |\omega_s(\mathbf{k}_s)\rangle |\omega_i(\mathbf{k}_i)\rangle, \quad (2.13)$$

donde $|\text{vac}\rangle_s |\text{vac}\rangle_i$ es el estado de vacío, el cual está acompañado de otro término no factorizable en estados pertenecientes a la señal y al gemelo, el cual representa un estado enredado en frecuencias. Si bien (2.13) no tiene una forma idéntica a la de (2.12), la parte enredada de este estado ¹⁶ puede convertirse en (2.12) considerando la selección de dos frecuencias conjugadas mediante filtros colocados a la salida del cristal (Horne et al., 1990).

¹⁴Para una revisión de la problemática EPR ver por ejemplo Clauser y Shimony (1978), Selleri (1988), Mermin (1993), Risco (1997).

¹⁵En los tratamientos teóricos se suele expresar el estado en la representación de interacción a primer orden en teoría de perturbaciones (Ou et al., 1989; Rubin et al., 1994), siendo las probabilidades de detección proporcionales al cuadrado de la constante de acoplamiento (ver capítulo 4).

¹⁶Esta parte es la que interviene en el cálculo de probabilidades de detección conjunta, las cuales se expresan como promedios de operadores en orden normal cuando se trabaja en el espacio de Hilbert (ver capítulo 5).

2.4.3 Resumen de los experimentos

Si bien la conversión paramétrica a la baja es un fenómeno que se conoce desde los años 60, fue la pasada década cuando comenzó a tener importancia dentro del campo de los problemas fundamentales de la mecánica cuántica. Desde 1985 se han realizado una gran cantidad de experimentos dentro de este ámbito, los cuales se pueden clasificar básicamente entre aquellos que estudian el contraste experimental de las desigualdades de Bell, y los que tratan de mostrar aspectos no clásicos de la luz convertida a la baja ¹⁷. El denominador común en todos los experimentos es la selección de haces conjugados señal y gemelo, los cuales se hacen pasar por elementos ópticos tales como divisores de haz¹⁸, polarizadores, láminas de media onda, etc, cuyo efecto la transformación lineal de dichos haces antes de llegar a los detectores ¹⁹. En la mayor parte de los experimentos se miden detecciones simples (interferencia de segundo orden) y/o detecciones conjuntas (interferencia de cuarto orden) ²⁰, aunque se están realizando recientemente experimentos que involucran más de dos detecciones.

Los grupos experimentales de mayor relevancia en este tema son: en Estados Unidos, el dirigido por Leonard Mandel en Rochester (Nueva York), el de Berkeley (California), dirigido por Raymond Chiao, y el de la Universidad de Baltimore cuyos representantes más importantes son Carroll Alley, Morton Rubin y Yanhua Shih. En Europa destacaremos el centro de investigación de Malvern (Inglaterra), cuyos científicos más representativos son John Rarity y Paul Tapster, y el grupo de la Universidad de Innsbruck, dirigido por Anton Zeilinger.

A continuación vamos a hacer un resumen de los experimentos más importantes realizados hasta el momento y de la bibliografía existente sobre el tema. Algunos de ellos se estudiarán en el capítulo 6 con el formalismo de la función de Wigner.

1. Contraste experimental de las desigualdades de Bell

Dentro de los experimentos encaminados al estudio experimental del problema EPR podemos hacer la clasificación siguiente:

¹⁷Para una revisión de las diferencias entre coherencia clásica y cuántica, así como estudios del carácter no clásico de la luz convertida a la baja en experimentos de interferencia, ver por ejemplo, Mandel (1983), Ou et al. (1990c), Belinsky y Klyshko (1992), Rarity y Tapster (1988), Ou (1988), Horne et al. (1989), Ou y Mandel (1989), Su y Wódkiewicz (1991).

¹⁸En inglés "*beam-splitter*".

¹⁹El estudio del efecto de un divisor de haz sobre el campo cuantizado se puede ver, por ejemplo, en Mandel y Wolf (1995; sección 12.12). En la sección 12.13 de la misma referencia se trata el efecto de un polarizador. Por otro lado, un tratamiento sistemático del divisor de haz, el polarizador y las láminas de onda puede verse en Rubin et al. (1994).

²⁰En esta tesis sólo trataremos las interferencias de segundo y cuarto orden, aunque la aplicación de los resultados que obtendremos a otro tipo de interferencia es sencilla.

(a) Experimentos de polarización

Se pueden clasificar en dos grandes grupos:

i. Experimentos con conversión tipo I

Los primeros experimentos encaminados al contraste de desigualdades de Bell fueron similares a los de cascada atómica y medían correlaciones de polarización. Dado que estos experimentos utilizaban conversión de tipo I, en la que los fotones salen con la misma polarización, se giraba el plano de polarización de uno de ellos consiguiendo así que ambos tuviesen polarizaciones perpendiculares (Ou y Mandel, 1988; Shih y Alley, 1988).

ii. Experimentos con conversión tipo II

La conversión tipo I en experimentos de correlación de polarización tenía el problema de que la mitad de las detecciones correspondían a procesos en los cuales los dos fotones iban al mismo detector, lo cual hacía imposible una violación de una desigualdad genuina ²¹ tipo Bell (Santos, 1996a). Esto no ocurre en la conversión tipo II, en la que los haces correlacionados salen con polarizaciones perpendiculares. Los experimentos de tipo II se han realizado en la década de los 90, y podemos diferenciar entre los que utilizan conversión colineal, en la que los conos ordinario y extraordinario se intersecan en una recta en la dirección del haz incidente, (Rubin et al., 1994; Shih y Sergienko, 1994a, 1994b, 1994c; Shih et al., 1994), y los de conversión no colineal en los que los conos se intersecan en dos rectas (Kwiat et al., 1995).

La conversión no colineal es actualmente la fuente más importante de estados tipo EPR. Ello es debido a que el estado correspondiente a los haces en los que se intersecan los conos ordinario y extraordinario tiene la misma forma que el estado singlete utilizado por Bohm en su análisis de la paradoja EPR (ver (2.12)).

(b) Los experimentos de Franson

Aunque los experimentos iniciales medían correlaciones de polarización, Franson propuso en 1989 una desigualdad tipo Bell basada en variables continuas como la energía y el tiempo (Franson, 1989). Este experimento ha tenido mucha aceptación durante los últimos años, no sólo por su aplicación en el contraste de desigualdades de Bell (Kwiat et al., 1990; Ou et al., 1990b; Rarity et al., 1990; Brendel et al., 1991, 1992; Rubin y Shih, 1992; Kwiat et al., 1993; Shih

²¹Se denomina *desigualdad genuina* a aquella que sólo contiene las hipótesis de realismo y localidad, y *desigualdad no genuina*, a aquella que contiene además otras hipótesis adicionales.

et al., 1993; Franson, 1991; Tapster et al., 1994), sino también por su posible aplicación a la criptografía cuántica (Ekert, 1991; Rarity y Tapster, 1992; Bennett, 1992; Ekert et al., 1992). En Ou y Mandel (1990) se estudia el experimento de Franson utilizando luz clásica, y se analizan las diferencias con el caso cuántico.

De todos los experimentos tipo Bell, el más importante fue el de Tapster et al. (1994), donde se consiguió una visibilidad del 86% en interferencia de cuarto orden usando interferómetros separados por 4.3 km de fibra óptica.

(c) **El experimento de Rarity y Tapster**

En 1990 Rarity y Tapster realizaron un experimento con el objeto de contrastar desigualdades de Bell utilizando la fase y el momento de las parejas de fotones conjugados. El experimento consistió en seleccionar dos señales del mismo color y sus dos gemelos, y hacerlos pasar por divisores de haz tras los cuales estaban los detectores (Rarity y Tapster, 1990). Experimentalmente se obtuvo una visibilidad del 84%. Dada la posibilidad de mandar los dos pares de rayos a zonas del espacio bien distanciadas, se ha considerado que este experimento es un ejemplo claro de violación de una desigualdad de Bell no genuina. Por otro lado, el experimento se consideró como un fenómeno puramente cuántico dado que la interferencia se dio entre dos pares de rayos de luz y no entre dos rayos, que es lo que ocurre normalmente en óptica clásica.

2. Aspectos no clásicos de la luz convertida a la baja

(a) **Propiedades de coherencia de la luz**

i. **Coherencia espacial**

Las propiedades de coherencia espacial de haces conjugados fueron investigadas teóricamente²² por Ghosh et al. (1986), y llevadas posteriormente al terreno experimental (Ghosh y Mandel, 1987). Los resultados más importantes son la inexistencia de coherencia a segundo orden cuando se miden cuentas simples en la zona donde interfieren los haces, y la existencia de coherencia cuando se miden coincidencias.

ii. **Coherencia temporal**

Una de las propiedades más importantes de la luz convertida a la baja es que el tiempo de correlación entre haces conjugados es muy pequeño. Desde un punto de vista corpuscular, esto último da lugar a una imagen en la cual los fotones del láser

²² Análisis más detallados de las propiedades de coherencia espacial y temporal de la luz convertida a la baja pueden verse, por ejemplo, en Joobeur et al. (1994) y Risco (1997; capítulo 12).

se aniquilan en el interior del cristal dando lugar a pares de fotones que se crean casi simultáneamente. La primera medida del tiempo de correlación fue realizada por Burnham y Weinberg (1970), obteniéndose que la separación temporal entre los fotones no era mayor que el nanosegundo. No obstante, dicha medición estaba limitada por el tiempo de resolución de los detectores, el cual era mucho mayor que el tiempo de coherencia de la luz. Aunque las medidas realizadas varios años más tarde con detectores más rápidos dieron lugar a un valor más pequeño del tiempo de correlación (Friberg et al., 1985), se tuvo que esperar hasta 1987, año en que el uso de una técnica interferométrica, en lugar de la detección directa, permitió obtener experimentalmente un tiempo del orden del picosegundo (Hong et al., 1987). Medidas más recientes (Steinberg et al., 1993) mostraron que esta cantidad es inferior a la décima del picosegundo. Ello ha permitido hacer mediciones de la velocidad de la luz cuando atraviesa láminas delgadas de medios dispersivos, con el resultado de que tanto la velocidad de fase como la de grupo superan la velocidad de la luz en el vacío. No obstante, esto no trae consigo una violación de la relatividad especial (Chiao et al., 1994).

(b) Otros experimentos

i. Creación frustrada de fotones por interferencia

Este experimento (Herzog et al., 1994) se considera un ejemplo del carácter no clásico de la luz puesto que muestra la interferencia de dos pares de rayos, al igual que ocurría en el experimento de Rarity y Tapster.

ii. Experimento de coherencia inducida

En 1991 Mandel y colaboradores realizaron un experimento en el que se observó interferencia de segundo orden en la superposición de dos señales de la misma frecuencia y vector de onda provenientes de dos cristales ²³, cuando las trayectorias de los haces gemelos estaban completamente alineadas (Zou et al., 1991; Wang et al., 1991). También se observa interferencia en la detección conjunta de señal y gemelo. De este experimento se dijo que producía confusión mental ²⁴ (Greenberger et al., 1993), aunque como veremos más adelante, el análisis que realizaremos del mismo con la función de Wigner proporcionará una interpretación sencilla de los resultados ²⁵.

iii. La cancelación de la dispersión

²³Otro experimento en el que se utilizan dos cristales es Ou et al. (1989, 1990a), aunque tuvo menor relevancia que el de coherencia inducida

²⁴El término utilizado en inglés fue "*mind boogling*".

²⁵Otra interpretación de este experimento basada en la radiación de punto cero, aunque no

Se considera que este tipo de proceso es un ejemplo de no localidad en mecánica cuántica dado que no existe cancelación de la dispersión en óptica clásica (Franson, 1992). En el capítulo 6 analizaremos la cancelación de la dispersión en un experimento de conversión a la baja (Steinberg et al., 1992) con el formalismo de la función de Wigner.

iv. **El borrador cuántico**

La idea básica del borrador cuántico²⁶ es pasar de una situación en la que hay distinguibilidad de caminos, y por tanto no existe interferencia, a otra en la que se vuelve a alcanzar la interferencia borrando la información del vector de estado (Hillery y Scully, 1983). Este efecto es una muestra de la relación existente entre indistinguibilidad y coherencia cuántica (Feynman, 1965). Se han realizado varios experimentos utilizando el conversor paramétrico a la baja con el objeto de mostrar este efecto. Uno de ellos (Kwiat et al., 1992), se analizará en el capítulo 6 con la función de Wigner²⁷.

Antes de finalizar este capítulo, hemos de señalar que el conversor paramétrico a la baja se está utilizando ultimamente en diferentes proyectos tecnológicos tales como la computación cuántica (Barenco et al., 1995), la criptografía cuántica (Ekert, 1991), el teletransporte (Bennett et al., 1993; Bouwmeester et al., 1997), y la codificación densa cuántica (Mattle et al., 1996). Se utilizan los cristales no lineales por su capacidad para generar estados tipo EPR, la existencia de los cuales son el punto de partida de dichas ideas. En esta tesis no trataremos estos temas con la función de Wigner, sino que nos centraremos en aquellos experimentos más relevantes dentro del campo de los fundamentos de la mecánica cuántica.

dentro de la función de Wigner, se encuentra en Scully y Rathe (1994), y más recientemente en Scully y Zubairy (1997; capítulo 21). Ver también Marshall (1997a).

²⁶En inglés "*quantum eraser*".

²⁷Ver también Kwiat et al. (1994), Herzog et al. (1995).

Capítulo 3

LA FUNCIÓN DE WIGNER EN ÓPTICA CUÁNTICA

3.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo está enfocado hacia un estudio de la función de distribución de Wigner en el campo de la óptica cuántica. En base a los resultados más importantes encontrados en diferentes fuentes bibliográficas, se expondrán de forma resumida aquellas propiedades más relevantes de la función de Wigner con el objeto de hacer una puesta a punto sobre el tema.

Si bien se ha escrito mucho sobre esta distribución y su aplicación a muchos campos de la física hace que la bibliografía existente sea extensísima, su aplicabilidad en el campo de la óptica cuántica fue superada en un principio por otra función de distribución, conocida como la función P o representación- P de Glauber-Sudarshan. La relación generalmente aceptada entre el comportamiento y positividad de P y el carácter clásico del estado de la radiación hizo que P tuviese un papel relevante como nexo entre la óptica clásica y la óptica cuántica. Esto último ha hecho que la función de Wigner haya tenido en general un papel secundario en los tratados de óptica cuántica. No obstante, en los últimos años ha aumentado su importancia considerablemente, lo cual ha estado motivado por el comportamiento altamente singular de P para ciertos estados relevantes del campo electromagnético.

Vamos a dividir este capítulo en las partes siguientes: en primer lugar exponaremos algunas de las propiedades más importantes de la función de Wigner en mecánica cuántica con el objeto de resaltar su relevancia, previa a la de cualquier otra distribución, como nexo entre la mecánica cuántica y la mecánica estadística clásica. En segundo lugar, para introducir las funciones de distribución en óptica cuántica hablaremos de la conexión entre la descripción

estocástica de la radiación electromagnética clásica y las funciones de correlación en óptica cuántica, las cuales se expresan mediante el promedio de funciones de operadores de creación y destrucción en orden normal. Hablaremos de la función P y de su papel como nexo formal entre las ópticas cuántica y clásica, y de la distribución Q , la cual se utiliza para calcular promedios de operadores en orden antinormal. En tercer lugar introduciremos las funciones características para el cálculo de funciones de distribución y definiremos la función de Wigner en óptica cuántica a partir de la función característica asociada al orden simétrico de operadores de creación y destrucción. Después se expondrán sus propiedades y se darán ejemplos de esta función para el caso de algunos estados de la radiación.

Para elaborar este capítulo hemos utilizado principalmente las fuentes bibliográficas Scully y Zubairy (1997; capítulo 3), Walls y Milburn (1994; capítulo 4), Kim y Noz (1991; capítulo 3), Mandel y Wolf (1995, capítulo 11), Cahill y Glauber (1969b), Knight y Allen (1983), y Pěrina (1984; capítulo 4), a las cuales se hará referencia en el desarrollo del mismo ¹.

3.2 LA FUNCIÓN DE WIGNER EN MECÁNICA CUÁNTICA

El uso de funciones de distribución en mecánica cuántica, cuyo objeto es obtener información estadística del operador densidad mediante funciones definidas en el espacio de las fases, fue iniciado ² por Wigner en 1932. Wigner asoció al estado de un sistema cuántico una función, conocida actualmente como la *distribución de Wigner*, y mostró que cualquier promedio de operadores en el espacio de Hilbert podía expresarse como un promedio con la función de Wigner completamente análogo a los que se calculan en mecánica estadística clásica (Wigner, 1932).

Vamos a mostrar a continuación las propiedades básicas de la función de Wigner en el espacio de las fases (Kim y Noz, 1991), para lo cual trataremos el caso unidimensional, aunque la generalización a n dimensiones es sencilla. Supondremos también que el sistema está en un estado puro con una función de onda ψ . La función de Wigner se define como:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int e^{2ipy} \psi^*(x + y) \psi(x - y) dy, \quad (3.1)$$

¹Otras fuentes importantes donde se trata la función de Wigner son, por ejemplo, Hillery et al. (1984), Louisell (1974), Reichl (1980, capítulo 7). Por otro lado, una aplicación de la función de Wigner al estudio de señales puede verse en Cohen (1984).

²Dentro de los primeros intentos de conectar la mecánica cuántica y la mecánica clásica hemos de destacar el trabajo de Weyl (Weyl, 1931).

donde p y x representan respectivamente el momento y la posición, y se ha tomado $\hbar = 1$. En el caso de que la función de onda dependa del tiempo sólo tenemos que añadir un argumento temporal en ψ y en W .

Las propiedades siguientes hacen que la función de Wigner tenga una gran similitud a una distribución de probabilidad:

1. $W(x, p)$ es real y está normalizada a la unidad.
2. Las distribuciones de probabilidad marginales para x y p se obtienen siguiendo los métodos de la mecánica estadística clásica como si W fuese una distribución de probabilidad conjunta, es decir

$$P_1(p, t) = \int dx W(x, p, t) \quad ; \quad P_2(x, t) = \int dp W(x, p, t). \quad (3.2)$$

3. El promedio de cualquier función simétrica en los operadores \hat{x} y \hat{p} se obtiene sustituyendo estos operadores por variables aleatorias x y p y pesando con la función de Wigner, es decir (Mandel y Wolf, 1995):

$$\langle F^{(s)}(\hat{x}, \hat{p}) \rangle = \int F^{(s)}(x, p) W(x, p) dx dp. \quad (3.3)$$

No obstante, W no es en general definida positiva, lo cual puede deducirse a partir de la propiedad siguiente:

4. La probabilidad de transición entre dos estados $\psi(x)$ y $\phi(x)$ viene dada por

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = 2\pi \int W_\psi(x, p, t) W_\phi(x, p, t) dx dp. \quad (3.4)$$

A partir de (3.4) vemos que la función de Wigner no puede ser positiva en todos los puntos del espacio de las fases dado que la probabilidad de transición debe tender a cero para dos estados ortogonales. Por tanto, W no es en general una distribución de probabilidad; por ello se la denomina, al igual que a otras funciones de distribución, *densidad de cuasiprobabilidad*.

3.2.1 Ecuación de Wigner-Moyal

Analícemos a continuación la dependencia temporal de la función de Wigner, para lo cual partiremos de la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m sometida a un potencial $V(x)$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \left(\frac{1}{2m} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x). \quad (3.5)$$

A partir de la definición de W dada por (3.1) se llega al resultado siguiente (Kim y Noz, 1991):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(x, p, t) = & - \left(\frac{p}{m} \right) \frac{\partial}{\partial x} W(x, p, t) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{2} \right)^{2n} \frac{1}{(2n+1)!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{2n+1} V(x) \right] \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{2n+1} W(x, p, t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

expresión que recibe el nombre de *ecuación de Wigner-Moyal* (Moyal, 1949). El orden de esta ecuación es infinito cuando $V(x)$ no es polinomio finito. Por otro lado, en el caso de que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 V(x) = 0, \quad (3.7)$$

(3.6) se reduce a la ecuación de Liouville clásica

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, p, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial p} W(x, p, t) - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial x} W(x, p, t), \quad (3.8)$$

donde H es el Hamiltoniano clásico de la partícula

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Es decir, si el potencial es constante, lineal, o cuadrático, la función de Wigner satisface la ecuación de Liouville. Por ello, en el caso de evoluciones marcadas por expresiones cuadráticas del operador Hamiltoniano, la mecánica cuántica con la función de Wigner es formalmente equivalente a la mecánica estadística clásica en el espacio de las fases (Marshall y Santos, 1990). Este importante resultado se utilizará en el capítulo siguiente al obtener las ecuaciones de evolución de las amplitudes del campo eléctrico en el proceso de la conversión paramétrica a la baja.

Otras propiedades básicas de la distribución de Wigner junto con una revisión de sus aplicaciones más importantes en diversos campos de la física pueden encontrarse en Kim y Noz (1991).

3.3 ÓPTICA CUÁNTICA EN EL ESPACIO DE LAS FASES

Esta sección tratará sobre las funciones de distribución en el campo de la óptica cuántica. Para iniciar el tema comenzaremos haciendo una descripción breve

de las funciones de correlación en electromagnetismo clásico, y más adelante introduciremos las correlaciones en óptica cuántica. El ordenamiento normal de operadores en dichas correlaciones está ligado a la teoría cuántica de la detección de la luz. Introduciremos la función P como punto de encuentro formal entre las teorías clásica y cuántica, y posteriormente hablaremos algo sobre la función Q . Dejaremos la función de Wigner para un estudio más detallado en la última sección.

3.3.1 Descripción estocástica del campo electromagnético clásico

En electromagnetismo clásico el campo eléctrico de la radiación se describe normalmente mediante la suma de dos funciones complejas mutuamente conjugadas

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t),$$

donde $\mathbf{E}^{(+)}$ se expresa mediante el desarrollo en ondas planas (Knight y Allen, 1983):

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (3.9)$$

donde $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = L^{-3/2} \epsilon_{\lambda, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ son las funciones de los modos normales. $\epsilon_{\lambda, \mathbf{k}}$ es un vector de polarización correspondiente al vector de onda \mathbf{k} y polarización λ , y se supone que el campo está confinado en un cubo de lado L con condiciones de contorno periódicas.

Cuando el campo se describe mediante un proceso estocástico, los coeficientes complejos $C_{\mathbf{k}}$ son variables aleatorias con una distribución de probabilidad $P(\{C_{\mathbf{k}}\})$, tal que

$$\int P(\{C_{\mathbf{k}}\}) \prod_{\mathbf{k}} d^2 C_{\mathbf{k}} = 1.$$

De ahora en adelante eliminaremos por simplicidad el carácter vectorial del campo, el cual es irrelevante para los propósitos que perseguimos.

Dada una función $F(E^{(+)})$ su promedio se calcula siguiendo los métodos de la estadística clásica:

$$\langle F[E^{(+)}(\mathbf{r}, t)] \rangle = \int P(\{C_{\mathbf{k}}\}) F[E^{(+)}(\mathbf{r}, t; \{C_{\mathbf{k}}\})] \prod_{\mathbf{k}} d^2 C_{\mathbf{k}}. \quad (3.10)$$

Por ejemplo, la función de correlación de primer orden, cuyo uso es básico en estudios sobre coherencia clásica (Born y Wolf, 1993; Mandel y Wolf, 1965; Hecht y Zajac, 1990), se obtiene a partir de (3.10) sin más que hacer $F \equiv E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}', t')$. Para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ y $t = t'$ esta función representa la intensidad media del campo en la posición \mathbf{r} y en el instante t :

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (3.11)$$

3.3.2 Funciones de correlación en óptica cuántica

El uso de las funciones de correlación en óptica cuántica está íntimamente relacionado con la teoría de la detección del campo electromagnético. El campo se expresa como una suma de dos operadores mutuamente conjugados

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (3.12)$$

siendo

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (3.13)$$

donde los coeficientes $C_{\mathbf{k}}$ de (3.9) se han sustituido por $i(\hbar \omega_{\mathbf{k}}/2)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}}$, siendo $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ el operador de destrucción correspondiente al modo \mathbf{k} de la radiación. Uno de los resultados fundamentales de la teoría de la detección es la expresión para la probabilidad de detección por unidad de tiempo ³, en un instante t , para un detector por absorción ideal (Loudon, 1981; Glauber, 1963a):

$$P(t) \propto \langle \phi | \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) | \phi \rangle, \quad (3.14)$$

donde $|\phi\rangle$ es el estado de la radiación. Una de las características más importantes de (3.14) es el ordenamiento de los operadores en orden normal, es decir, los operadores de creación a la izquierda y los de destrucción a la derecha. Ello es consecuencia de la naturaleza de la detección, la cual no registra fluctuaciones del punto cero.

3.3.3 La representación P

En la teoría cuántica del campo electromagnético ocupan un lugar relevante los *estados coherentes* dada su similitud con la radiación clásica, y fueron estudiados fundamentalmente por Glauber (1963a, b, c; 1965). Si bien no son ortogonales, lo cual permite una representación no diagonal del operador densidad en estos estados conocida como la "representación R " (Glauber, 1963c), sí verifican la relación de completitud

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1, \quad (3.15)$$

lo que hace posible también una representación diagonal del operador densidad en términos de estos estados, de la forma

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (3.16)$$

³Dado que la detección requiere de la incidencia de luz durante un cierto tiempo, lo que tiene realmente sentido físico es la probabilidad de detección entre un instante t y otro $t+w$, donde w recibe el nombre de *ventana de detección*.

$P(\alpha, \alpha^*)$ se denomina *representación P* del operador densidad, y fue introducida simultáneamente por Sudarshan (1963) y Glauber (1963d). P toma valores reales y en general no es definida positiva, aunque tiene varias de las propiedades de una distribución de probabilidad: i) está normalizada a la unidad y ii) los promedios de funciones de operadores de creación y destrucción en orden normal se expresan como promedios clásicos, sustituyendo los operadores de destrucción por los autovalores α de los estados coherentes y los de creación por sus complejos conjugados, y donde la función P hace formalmente el papel de una distribución de probabilidad. Es decir:

$$\langle \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) (\alpha^*)^n \alpha^m d^2\alpha. \quad (3.17)$$

La gran similitud entre P y la distribución de probabilidad $P(\{C_k\})$ (ver (3.10)) le dio a P un papel relevante en el análisis del carácter clásico de los estados del campo electromagnético, dada la equivalencia formal entre las descripciones clásica y cuántica de la coherencia óptica mediante el uso de esta distribución. Esto ha dado lugar al convenio de definir un estado clásico como aquel que tiene una función P positiva (Mandel y Wolf, 1995).

No obstante, esta distribución tiene el problema, añadido al de su no positividad, de que posee singularidades mucho más fuertes que una función delta de Dirac para ciertos estados. Esto último es consecuencia de que las cantidades $\text{Re } \alpha$ y $\text{Im } \alpha$, las cuales son promedios de los operadores $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/2$ y $(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/2i$ en un estado coherente $|\alpha\rangle$, no tienen una distribución de probabilidad conjunta dado que dichos operadores no conmutan, y por tanto no se puede medir directamente $P(\alpha, \alpha^*)$ (Perina, 1984). Por otro lado, como los estados coherentes no son ortogonales, $P(\alpha, \alpha^*)$ no representa una probabilidad para estados mutuamente excluyentes aunque sea positiva (Mandel y Wolf, 1995).

3.3.4 La distribución Q

Se obtiene a partir de los elementos de matriz del operador densidad en los estados coherentes (Walls y Milburn, 1994):

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle. \quad (3.18)$$

Esta distribución está normalizada a la unidad, es positiva, y está acotada por $1/\pi$. Por tanto, tiene más propiedades en común con una distribución de probabilidad que la distribución P . La función Q se usa para calcular promedios de operadores en orden antinormal, pues verifica la propiedad siguiente

$$\langle \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger m} \rangle = \int Q(\alpha, \alpha^*) \alpha^n (\alpha^*)^m d^2\alpha. \quad (3.19)$$

3.3.5 Funciones características

Las funciones de distribución se pueden introducir por medio de las denominadas *funciones características*, las cuales están asociadas a un determinado ordenamiento de los operadores de creación y destrucción (Mandel y Wolf, 1995; Walls y Milburn, 1994; Scully y Zubairy, 1997). En este apartado trataremos las funciones características asociadas al orden normal (función P), al orden antinormal (función Q), y en el apartado siguiente introduciremos la distribución de Wigner en óptica cuántica a partir de la función característica asociada al orden simétrico. Por otro lado, existe una representación generalizada del operador densidad, resultado de un tratamiento unificado del problema de obtener funciones de distribución en el espacio de las fases a partir de otros tipos de ordenamientos de operadores (Agarwal y Wolf, 1970a, b, y c; Cahill y Glauber, 1969a, b).

Por ejemplo, la función característica asociada a la distribución P es

$$X^{(N)}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr} \left(e^{\lambda \hat{a}^\dagger} e^{\lambda^* \hat{a}} \hat{\rho} \right), \quad (3.20)$$

de forma que

$$P(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{1}{\pi^2} d^2 \lambda e^{-\lambda \alpha^* + \lambda^* \alpha} X^{(N)}(\lambda, \lambda^*). \quad (3.21)$$

En el caso de la distribución Q , tenemos

$$X^{(A)}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr} \left(e^{\lambda^* \hat{a}} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} \hat{\rho} \right), \quad (3.22)$$

siendo

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{1}{\pi^2} d^2 \lambda e^{-\lambda \alpha^* + \lambda^* \alpha} X^{(A)}(\lambda, \lambda^*). \quad (3.23)$$

3.4 LA FUNCIÓN DE WIGNER

A continuación vamos a presentar un resumen sobre la función de Wigner en óptica cuántica. Trabajaremos por simplicidad para un modo del campo electromagnético, aunque los resultados se pueden generalizar fácilmente al caso multimodo.

La función de Wigner en óptica cuántica puede definirse a partir de la función característica asociada al orden simétrico. Dado el operador densidad $\hat{\rho}$, tenemos (Scully y Zubairy, 1997; Walls y Milburn, 1994):

$$W(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{1}{\pi^2} d^2 \lambda e^{-\lambda \alpha^* + \lambda^* \alpha} X^{(S)}(\lambda, \lambda^*), \quad (3.24)$$

donde $X(\lambda, \lambda^*)$ se denomina *función característica en orden simétrico* y viene dada por

$$X^{(S)}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr} \left(e^{\lambda \hat{a}^\dagger + \lambda^* \hat{a}} \hat{\rho} \right). \quad (3.25)$$

W es real y verifica la condición de normalización

$$\int W(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = 1, \quad (3.26)$$

aunque ya vimos que puede tomar valores negativos, y por tanto no es en general una distribución de probabilidad. Por otro lado, su valor para cualquiera que sea el operador densidad está acotado de acuerdo con la desigualdad (Cahill y Glauber, 1969b):

$$-2 < W(\alpha, \alpha^*) < 2. \quad (3.27)$$

Además, W tiene la propiedad de que las distribuciones de probabilidad marginales para α y α^* se obtienen como si $W(\alpha, \alpha^*)$ fuese una distribución de probabilidad conjunta (ver (3.2)), lo que no ocurre con distribuciones P y Q .

A partir de (3.24) y (3.25) se puede obtener la siguiente expresión explícita para W usando los estados coherentes (Scully y Zubairy, 1997):

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi^2} e^{2|\alpha|^2} \int d^2\beta \langle -\beta | \hat{\rho} | \beta \rangle e^{-2(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)}, \quad (3.28)$$

Por otro lado, $X^{(S)}$ verifica las propiedades (Cahill y Glauber, 1969a, b):

$$\int |X^{(S)}(\lambda, \lambda^*)|^2 \pi^{-1} d^2\lambda = \text{Tr} \hat{\rho}^2 \leq 1, \quad (3.29)$$

$$|X^{(S)}(\lambda, \lambda^*)| \leq 1 ; \quad X^{(S)}(0) = 1, \quad (3.30)$$

las cuales son consecuencia de que el operador $\exp(\lambda \hat{a}^\dagger - \lambda^* \hat{a})$ es unitario para cualquier valor de λ , y es igual a la unidad para $\lambda = 0$. Utilizando el teorema de Campbell-Baker-Hausdorff ⁴(Mandel y Wolf, 1995; página 519) se pueden relacionar las funciones características asociadas a los tres ordenamientos de operadores. Tenemos:

$$e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2} X^{(A)}(\lambda, \lambda^*) = X^{(S)}(\lambda, \lambda^*) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} X^{(N)}(\lambda, \lambda^*). \quad (3.32)$$

⁴Según dicho teorema, dados dos operadores \hat{A} y \hat{B} , tal que

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]],$$

se verifica la relación siguiente

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}. \quad (3.31)$$

A partir de (3.30) y (3.32) vemos que

$$|X^{(A)}(\lambda, \lambda^*)| \leq e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} ; |X^{(N)}(\lambda, \lambda^*)| \leq e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2}. \quad (3.33)$$

Nótese que el límite superior al valor de $|X^{(N)}|$ puede hacerse muy grande, lo que hace que la integral (3.21) no exista como función ordinaria en algunos casos. Por otro lado, las relaciones entre Q , P y W son (Walls y Milburn, 1994):

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \int d^2\beta P(\beta, \beta^*) e^{-2|\beta-\alpha|^2}, \quad (3.34)$$

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta P(\beta, \beta^*) e^{-|\beta-\alpha|^2}, \quad (3.35)$$

de donde vemos que tanto W como Q son convoluciones gaussianas de P , aunque Q está convolucionada con una gaussiana cuya anchura es $\sqrt{2}$ veces mayor que la correspondiente a la función de Wigner, lo que explica su mayor positividad.

Una de las propiedades más importantes de la distribución de Wigner (ver (3.3)) es que el promedio de cualquier expresión simétrica en los operadores de creación y destrucción es igual al promedio con la función de Wigner, siguiendo los procedimientos de la mecánica estadística clásica, de la expresión que resulta al sustituir los operadores de creación por un número complejo α , y los de destrucción por α^* , es decir (Cahill y Glauber, 1969b; Mandel y Wolf, 1995):

$$\langle F^S(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*) F^S(\alpha, \alpha^*). \quad (3.36)$$

Esta propiedad se usará en el capítulo 5 para pasar del orden normal al orden simétrico, con el objeto de expresar las probabilidades de detección simple y conjunta a partir de promedios tomados con la función de Wigner. El método a seguir se basará en que el conmutador entre operadores de creación y destrucción es un número complejo, lo que llevará a expresiones en las que aparecen las contribuciones de la radiación de punto cero en las probabilidades.

Por otro lado, dado un operador en orden normal

$$O(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{n,m} c_{n,m} \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m, \quad (3.37)$$

existe otro procedimiento, diferente al que usaremos en el capítulo 5, para obtener una función $O_S(\alpha, \alpha^*)$, tal que

$$\langle O(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*) O_S(\alpha, \alpha^*), \quad (3.38)$$

y del que sólo mostraremos el resultado (Scully, 1997):

$$O_S(\alpha, \alpha^*) = \sum_{n,m} c_{n,m} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^*}{2} \right]^n \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \frac{\lambda}{2} \right]^m e^{-\lambda^* \alpha + \lambda \alpha^*} \Big|_{\lambda=\lambda^*=0}. \quad (3.39)$$

3.4.1 Ejemplos de función de Wigner

Vamos a presentar a continuación varios ejemplos de función de Wigner para algunos estados de la radiación:

1. Estados coherentes

Dado el estado coherente $|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_r + i\beta_i)$, la función de Wigner viene dada por (Walls y Milburn, 1994):

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(2\text{Re}\alpha - \beta_r)^2 + (2\text{Im}\alpha - \beta_i)^2]\right\}. \quad (3.40)$$

Nótese que el estado de vacío correspondiente al estado coherente $|\beta = 0\rangle$ tiene como función de Wigner la gaussiana

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}, \quad (3.41)$$

lo que le da el aspecto de un campo estocástico con una distribución de probabilidad dada por (3.41). Esto contrasta con la distribución P correspondiente a este estado, la cual es

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha). \quad (3.42)$$

2. Estado número de fotones

La función de Wigner para el estado $|n\rangle$ viene dada por (Walls y Milburn, 1994):

$$W_n(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4|\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}, \quad (3.43)$$

donde $L_n(x)$ son los polinomios de Laguerre. Para $n > 0$ esta distribución toma valores negativos. Por ejemplo, para $n = 1$ (estado de un fotón), se tiene (Kim y Noz, 1991):

$$W_1(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \left(|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-|\alpha|^2}. \quad (3.44)$$

Para el estado de vacío ($n = 0$) la función de Wigner coincide con (3.41).

El buen comportamiento de la función de Wigner para los estados número contrasta con la función P asociada a dichos estados, la cual es (Scully y Zubairy, 1997):

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^{(2)}(\alpha). \quad (3.45)$$

3. Estado de luz caótica

Si $\langle n \rangle$ es el número medio de fotones en un estado de luz térmica, la función de Wigner para este estado es (Marshall y Santos, 1991):

$$W(\alpha, \alpha^*) = \left[\pi \left(\langle n \rangle + \frac{1}{2} \right) \right]^{-1} e^{-|\alpha|^2 (\langle n \rangle + \frac{1}{2})^{-1}}. \quad (3.46)$$

Nótese que, para $\langle n \rangle = 0$, (3.46) coincide con la función de Wigner del vacío.

4. Estados comprimidos⁵

Para un estado comprimido de la radiación, de amplitud a y compresión s , la función de Wigner es (Marshall y Santos, 1992):

$$W_{s,a}(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} e^{-2e^{2s} \left(\frac{\alpha + \alpha^*}{2} - a \right)^2 - 2e^{-2s} \left(\frac{\alpha - \alpha^*}{2i} \right)^2}. \quad (3.47)$$

En Marshall y Santos (1990) se muestra cómo se generan estos estados en óptica no lineal utilizando para ello una descripción clásica.

⁵En inglés se utiliza el término *squeezed*.

Capítulo 4

ESTUDIO DE LA CONVERSIÓN A LA BAJA EN LA REPRESENTACIÓN DE WIGNER

4.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado al análisis de la conversión paramétrica a la baja utilizando el formalismo de la función de Wigner de la mecánica cuántica ¹. Dado que el formalismo cuántico en el espacio de Hilbert es muy útil desde un punto de vista operacional, puede parecer a priori algo extraño abordar el mismo problema desde otro formalismo, con el que no se obtendrá ningún resultado nuevo. No obstante, el objeto de este capítulo, de acuerdo con el espíritu de esta tesis, es dar una visión diferente del fenómeno físico que se estudia, además de proporcionar un método de cálculo alternativo al existente. Por un lado, el espacio de Hilbert hace énfasis en el carácter corpuscular de la radiación; los fotones del láser se aniquilan en el interior del cristal dando lugar a fotones de menor frecuencia que aparecen en forma de parejas con una alta correlación temporal. Dichos fotones se propagan hasta que finalmente son aniquilados en el proceso de detección por absorción. El objetivo abordando el problema con la función de Wigner es la comprensión de dicho fenómeno desde un punto de vista ondulatorio, estudiando cómo se transforma la radiación de punto cero que incide sobre el cristal a partir de la interacción con el medio no

¹Este estudio se encuentra recogido fundamentalmente en los artículos de Casado et al. (1997a, b), donde se trata la conversión tipo I. En Casado et al. (1994d) se generalizan los resultados a la conversión tipo II. En este capítulo nos referiremos al tipo I, aunque en la última sección trataremos la generalización al tipo II de los resultados obtenidos.

lineal de dicha radiación y el láser.

Hemos dividido el capítulo en las partes siguientes: en primer lugar veremos cómo se describe un haz de luz en la representación de Wigner. A continuación, partiendo de la expresión del Hamiltoniano de interacción, el cual es cuadrático en los operadores de creación y destrucción, veremos que el campo electromagnético radiado por el cristal está descrito por un proceso estocástico gobernado por una función de Wigner positiva y gaussiana. En tercer lugar se obtendrán las ecuaciones de evolución de las amplitudes del campo eléctrico en la imagen de Heisenberg; la integración de dichas ecuaciones, utilizando teoría de perturbaciones hasta segundo orden en la constante de acoplamiento, llevará a una expresión para haces conjugados señal y gemelo donde se muestra cómo se transforma linealmente la radiación de punto cero a su paso por el cristal. Veremos que los distintos términos que aparecen en el desarrollo perturbativo tienen una interpretación física sencilla, existiendo una equivalencia clara con la amplificación paramétrica en óptica clásica. Finalmente se calcularán las correlaciones del campo, las cuales serán necesarias para el cálculo de las probabilidades de detección en los experimentos. Para relacionar las contribuciones a las correlaciones de los distintos términos que aparecen en el desarrollo perturbativo, será necesario acudir a la conservación de las relaciones de conmutación de los operadores campo. Esto no tiene precedente en los estudios realizados en el espacio de Hilbert, en los que el desarrollo perturbativo es a primer orden (Hong y Mandel, 1985). Como veremos, el resultado más importante es que la contribución a la autocorrelación del término que incluye los órdenes cero y dos en el campo es igual a la contribución del que contiene los términos de primer orden. Esto hace que el tratamiento matemático de los experimentos con la función de Wigner sea tan sencillo como el realizado en el espacio de Hilbert.

En la última sección del capítulo hablaremos de la conversión tipo II, y en un apéndice mostraremos el cálculo de la distribución de Wigner en función del tiempo, a todos los órdenes en la constante de acoplamiento.

4.2 DESCRIPCIÓN DE UN HAZ DE LUZ

En el espacio de Hilbert el campo eléctrico se representa mediante la suma de dos operadores mutuamente conjugados (ver (3.12) y (3.13))

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.1)$$

siendo

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.2)$$

donde L^3 es el volumen de cuantización, y $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(t)$ es el operador de destrucción correspondiente al modo \mathbf{k} , cuya polarización está representada por el vector $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ ($\lambda = 1, 2$). Por otro lado, $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$, siendo c la velocidad de la luz, la cual es independiente de la frecuencia en un medio no dispersivo.

Las expresiones (4.1) y (4.2) corresponden a la imagen de Heisenberg, donde toda la dependencia temporal está en los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger(t)$ y $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(t)$. Por ejemplo, para un campo que evoluciona libremente esta dependencia es

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad (4.3)$$

aunque para campos en interacción la dependencia es más compleja y contiene toda la dinámica del proceso. Por otro lado, el estado de la radiación se representa en la imagen de Heisenberg mediante un operador densidad independiente del tiempo.

Consideremos a continuación el campo correspondiente a un haz de luz, caracterizado por una frecuencia media ω_a , y una dirección media \mathbf{k}_a . El haz contiene frecuencias dentro de un intervalo centrado en ω_a y comprendido entre ω_{\min} y ω_{\max} , y vectores de onda cuyas componentes transversales a \mathbf{k}_a son pequeñas ($|\mathbf{k}^{\text{tr}}| \ll \omega_{\min}/c$). Ignorando la polarización, lo cual es equivalente a multiplicar (4.2) por $\sqrt{2}$, se obtiene la expresión siguiente para la parte relevante del campo eléctrico en la aproximación escalar:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_a} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.4)$$

donde el sumatorio está restringido al conjunto de vectores de onda que pertenecen al haz.

Cuando se pasa a la representación de Wigner los operadores $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ y $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ se representan mediante funciones complejas, sustituyendo los operadores de destrucción por variables $\alpha_{\mathbf{k}}(t)$, y los de creación por sus complejas conjugadas $\alpha_{\mathbf{k}}^*(t)$. De esta forma,

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.5)$$

donde el cambio de notación $\hat{E}^{(+)} \rightarrow E^{(+)}$ indica el paso de un operador a una función compleja.

4.3 HAMILTONIANO DE INTERACCIÓN

En la figura 4.1 se muestra esquemáticamente el montaje básico para los experimentos de conversión a la baja. Un láser de luz monocromática incide sobre

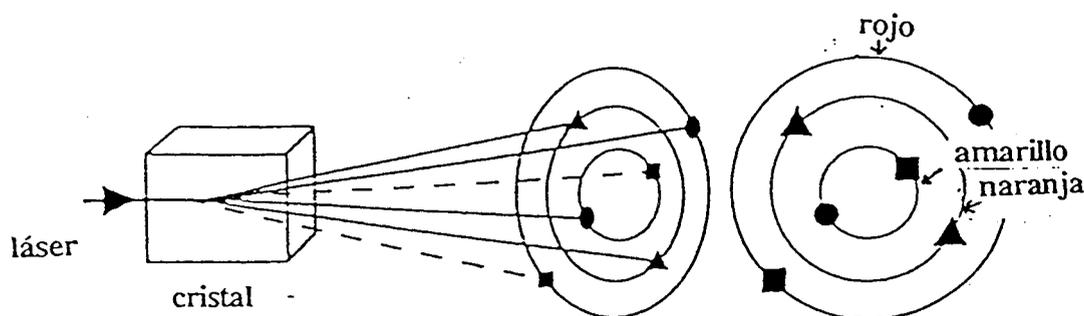


Figura 4.1: Montaje básico para el proceso de la conversión a la baja. Cada par de figuras del mismo tipo representa una pareja de haces conjugados, y cada anillo un color diferente. Por simplicidad no hemos dibujado el láser a la salida del cristal.

un cristal con una susceptibilidad eléctrica no lineal, dando lugar a radiación visible por la cara opuesta del cristal, la cual aparece en forma de anillos de diferentes colores alrededor del eje definido por el haz incidente. Dicha radiación está compuesta por distintos pares de haces conjugados verificando las condiciones de emparejamiento, y con una alta correlación temporal (Burnham y Weinberg, 1970).

El proceso de la conversión a la baja se puede caracterizar en la imagen de Heisenberg² mediante el Hamiltoniano siguiente³ (Hong y Mandel, 1985):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (4.6)$$

donde

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega(\mathbf{k}) \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k},s}(t) + \frac{1}{2} \right), \quad (4.7)$$

es el Hamiltoniano del campo electromagnético libre, y

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}',s'} \sum_{\mathbf{k}'',s''} \kappa_{ijl}(\omega(\mathbf{k}_0), \omega(\mathbf{k}'), \omega(\mathbf{k}'')) \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}'',s''}^\dagger(t) \\ & \times (\epsilon_{\mathbf{k}',s'}^*)_i (\epsilon_{\mathbf{k}'',s''}^*)_j V_l e^{-i\omega(\mathbf{k}_0)t} \prod_{m=1}^3 \frac{\sin[\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')_m l_m]}{\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')_m} + h.c., \end{aligned} \quad (4.8)$$

²El estado de la radiación, el cual está representado por un vector fijo en el espacio de Hilbert correspondiente al estado inicial, es el vacío.

³Este Hamiltoniano es mucho más general que el mostrado en el capítulo 2 (expresión (2.10)), pues parte de una situación en la que intervienen muchos modos, lo cual es necesario para una descripción correcta de las señales emitidas por el cristal.

es el Hamiltoniano de interacción de la radiación con el cristal. Se ha tomado el origen del sistema de coordenadas en el centro del cristal, el cual se supone espacialmente uniforme con forma de paralelepípedo rectangular de lados l_1 , l_2 , y l_3 . κ_{ijl} es la susceptibilidad bilineal del medio, la cual es simétrica respecto al intercambio entre \mathbf{k}' y \mathbf{k}'' . V_l es la componente l del campo incidente, el cual se representa por

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(t)e^{i[\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_0)t]} + c.c., \quad (4.9)$$

y no está cuantizado porque su intensidad es muy alta. Por otro lado, en lo sucesivo $\mathbf{V}(t)$ se considerará independiente del tiempo dado que el tiempo de coherencia del láser es mucho mayor que el tiempo de coherencia de la luz convertida a la baja. De esta forma, el láser se representará a partir de ahora por una onda plana de frecuencia $\omega(\mathbf{k}_0)$ y vector de onda \mathbf{k}_0 .

Por otro lado, en la aproximación escalar del campo electromagnético, en la que no se considera la polarización, se suele realizar la simplificación siguiente (Ou et al., 1989; Casado et al., 1997a, b):

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^3} \kappa_{ijl}(\omega_0, \omega', \omega'') (\epsilon_{\mathbf{k}', s'}^*)_i (\epsilon_{\mathbf{k}'', s''}^*)_j V_l \prod_{m=1}^3 \frac{\sin[\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')_m l_m]}{\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')_m} \\ \equiv i\hbar g' V f(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.8), el Hamiltoniano de interacción queda

$$\hat{H}_{\text{int}} = i\hbar g' V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{-i\omega_0 t} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger + \text{h.c.}, \quad (4.11)$$

donde hemos simplificado un poco más la notación haciendo $\omega(\mathbf{k}_0) \equiv \omega_0$ y no escribiendo explícitamente la dependencia temporal de los operadores. La constante de acoplamiento g' se define de forma que el producto $g'V$ tiene dimensiones de frecuencia, y $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ es una función adimensional simétrica en los vectores de onda dentro del cristal. Dado que las longitudes de onda típicas del proceso son mucho menores que las dimensiones del cristal, esta función es distinta de cero sólo cuando se verifica la condición de emparejamiento en vectores de onda (Hong y Mandel, 1985):

$$\mathbf{k}_0 \approx \mathbf{k} + \mathbf{k}'. \quad (4.12)$$

Por otro lado, ya vimos en el segundo capítulo que existe una condición mucho más rigurosa para las frecuencias

$$\omega_0 = \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}. \quad (4.13)$$

La expresión (4.11) es cuadrática en operadores de creación y destrucción, propiedad que da lugar a implicaciones de gran importancia en el desarrollo de esta tesis:

1. Cualquier evolución determinada por este tipo de Hamiltoniano mantiene la positividad de la función de Wigner. Esto es debido a que las ecuaciones de evolución son lineales, y ello mantiene el carácter gaussiano de variables aleatorias (Mandel y Wolf, 1995; sección 1.6). Como el estado inicial es el vacío, al que le corresponde la siguiente función de Wigner positiva y gaussiana (ver (3.41)):

$$W_{\text{vac}}(\alpha, \alpha^*) = \prod_{\mathbf{k}} \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha_{\mathbf{k}}|^2}, \quad (4.14)$$

concluimos que $W_{\text{vac}}(\alpha, \alpha^*; t)$ es positiva para todo instante. Por tanto, el campo electromagnético radiado puede representarse por un proceso estocástico gaussiano gobernado por una distribución de probabilidad que coincide con la función de Wigner. En la imagen de Heisenberg el campo eléctrico depende del tiempo a partir de la dependencia temporal de las amplitudes que lo definen, siendo la función de Wigner la correspondiente al estado de vacío.

2. Las ecuaciones de evolución de las amplitudes coinciden con las ecuaciones de Heisenberg para los operadores de creación y aniquilación (ver sección 3.2.1).

4.4 EVOLUCIÓN DE LAS AMPLITUDES

A continuación obtendremos la dependencia temporal de las amplitudes del campo eléctrico utilizando teoría de perturbaciones. Para ello, calcularemos previamente los operadores de creación y destrucción $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$ en función del tiempo utilizando la ecuación de Heisenberg, y sustituiremos posteriormente dichos operadores por variables complejas $\alpha_{\mathbf{k}}(t)$ y $\alpha_{\mathbf{k}}^*(t)$ ⁴. La evolución de los operadores por la interacción se produce en un intervalo de tiempo $(-\Delta t, 0)$, siendo Δt el tiempo que tarda la luz en atravesar el cristal. Para $t \leq -\Delta t$ y $t \geq 0$ la evolución es libre a partir del Hamiltoniano (4.7). Partiendo de la ecuación de Heisenberg para $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ tenemos, para $-\Delta t < t < 0$,

$$\dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{H}]$$

⁴Otro procedimiento equivalente (Casado et al., 1997a), es hacer la sustitución directamente en el Hamiltoniano, y tener en cuenta que la evolución de las amplitudes viene dada por las ecuaciones de Hamilton tomando $\alpha_{\mathbf{k}}\sqrt{\hbar}$ como coordenadas y $\alpha_{\mathbf{k}}^*\sqrt{\hbar}$ como momentos canónicos (véase la sección 4.7).

$$\rightarrow \dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + g'V \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')e^{-i\omega_0 t}\hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger, \quad (4.15)$$

siendo la condición inicial $\hat{a}_{\mathbf{k}}(-\Delta t) = \hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t)$, donde $\hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t)$ es el operador de destrucción del modo \mathbf{k} del vacío incidente.

Como las probabilidades de detección son proporcionales a g'^2 hemos de calcular $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ hasta segundo orden en la constante de acoplamiento. En la representación de Wigner este detalle es esencial pues los términos de segundo orden en el campo tienen aportaciones no nulas en las autocorrelaciones. Por el contrario, en el espacio de Hilbert el segundo orden no interviene en las probabilidades, de modo que los desarrollos perturbativos se hacen a primer orden.

Integrando (4.15) hasta segundo orden en g' , es decir, tomando el segundo término del lado derecho de dicha ecuación como una perturbación y reteniendo términos hasta g'^2 , se obtiene el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}(0) = & \hat{a}_{0\mathbf{k}}(0) + gV \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})\right]\hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger(0) \\ & + g^2|V|^2 \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ & \times u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_0)\right]u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}})\right]\hat{a}_{0\mathbf{k}''}(0), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde se ha definido a partir de g' y Δt la constante adimensional $g \equiv g'\Delta t$, la cual representará a partir de ahora la constante de acoplamiento efectiva. La aproximación a segundo orden es válida sólo cuando

$$g|V| = g'\Delta t|V| \ll 1. \quad (4.17)$$

También hemos introducido la función,

$$u(x) = \frac{\sin x}{x} e^{ix}. \quad (4.18)$$

Como el tiempo de interacción es mucho mayor que los periodos típicos de la luz en el proceso, $u(x)$ es distinta de cero sólo cuando x es prácticamente nulo, siendo su valor despreciable en cualquier otro caso. Teniendo en cuenta esto último junto con (4.12), se deduce que el término de primer orden en (4.16) sólo es distinto de cero cuando los modos \mathbf{k}' que intervienen en el sumatorio verifican simultáneamente las condiciones de emparejamiento

$$\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_0 \quad ; \quad \mathbf{k} + \mathbf{k}' \approx \mathbf{k}_0. \quad (4.19)$$

De la misma forma, y utilizando de nuevo las propiedades de f y u , se puede ver que las contribuciones no nulas al término de segundo orden en (4.16) son aquellas en las que se verifica $\mathbf{k}'' \approx \mathbf{k}$ además de (4.19).

En la obtención de (4.16) hemos considerado la evolución libre de los operadores $\hat{a}_{0\mathbf{k}}$ (solución de orden cero)

$$\hat{a}_{0\mathbf{k}}(0) = \hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}\Delta t}. \quad (4.20)$$

Por otro lado, para $t > 0$ la evolución de los operadores es libre

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}. \quad (4.21)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que los conmutadores a tiempos iguales permanecen invariables en cualquier evolución unitaria, se tiene, para $t_1, t_2 > 0$,

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}(t_1), \hat{a}_{\mathbf{k}'}(t_2)] = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t_1+t_2)} [\hat{a}_{\mathbf{k}}(0), \hat{a}_{\mathbf{k}'}(0)] = 0$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}(t_1), \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger(t_2)] = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t_1-t_2)} [\hat{a}_{\mathbf{k}}(0), \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger(0)] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t_1-t_2)}, \quad (4.22)$$

donde hemos hecho uso de las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción de modos del vacío

$$[\hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t), \hat{a}_{0\mathbf{k}'}(-\Delta t)] = 0 \quad ; \quad [\hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t), \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger(-\Delta t)] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \quad (4.23)$$

Para pasar a la representación de Wigner sustituiremos los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ($\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$) por variables complejas $\alpha_{\mathbf{k}}$ ($\alpha_{\mathbf{k}}^*$) en las expresiones (4.15), (4.16), (4.20) y (4.21). El resultado final para $\alpha_{\mathbf{k}}(t)$, siendo $t > 0$, es

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}}(t) &= \alpha_{0\mathbf{k}}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \\ &+ gVe^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})\right] \alpha_{0\mathbf{k}'}^*(0) \\ &+ g^2|V|^2 e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_0)\right] \\ &\quad \times u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}})\right] \alpha_{0\mathbf{k}''}(0). \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.5 DESCRIPCIÓN DE HACES CONJUGADOS

Consideremos dos haces conjugados señal y gemelo, de frecuencias medias ω_s y ω_i , y cuyas direcciones vienen dadas por \mathbf{k}_s y \mathbf{k}_i respectivamente. Dichas frecuencias y vectores de onda verifican exactamente las condiciones de emparejamiento

$$\omega_s + \omega_i = \omega_0, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0. \quad (4.26)$$

Por otro lado, si $[\mathbf{k}]_s$ ($[\mathbf{k}]_i$) representa al conjunto de modos pertenecientes a la señal (gemelo), entre cualesquiera dos modos $\mathbf{k} \in [\mathbf{k}]_s$ y $\mathbf{k}' \in [\mathbf{k}]_i$, se verifica:

$$\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_0, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}' \approx \mathbf{k}_0. \quad (4.28)$$

Teniendo en cuenta (4.5), (4.24), y las consideraciones realizadas en el apartado anterior sobre los términos de primer y segundo orden en (4.16), podemos expresar los haces señal y gemelo de la forma siguiente:

$$E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{-i\omega_0 t} g V G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + g^2 |V|^2 J E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.29)$$

$$E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{-i\omega_0 t} g V G E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + g^2 |V|^2 J E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.30)$$

donde E_{0s} (E_{0i}) representa la radiación de punto cero que incide en el cristal en la dirección de la señal (gemelo) (ver figura 4.2).

Por ejemplo, en el caso de la señal,

$$E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \alpha_{0\mathbf{k}}(0), \quad (4.31)$$

con una expresión similar para $E_{0i}^{(+)}$ cambiando el subíndice "s" por "i". Para simplificar la notación hemos introducido los operadores lineales G y J , los cuales se definen de la forma siguiente:

$$G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}}) t} \beta_{\mathbf{k}}, \quad (4.32)$$

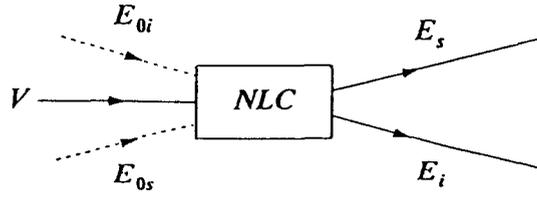


Figura 4.2: Representación de los haces incidentes (punto cero y láser) y de la radiación saliente (haces conjugados señal y gemelo), la cual es resultado de la interacción dentro del cristal del láser y el vacío incidente.

con

$$\beta_{\mathbf{k}} = \sum_{[\mathbf{k}']_i} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})\right] \alpha_{0\mathbf{k}'}^*(0), \quad (4.33)$$

y

$$JE_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \gamma_{\mathbf{k}}, \quad (4.34)$$

con

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \sum_{[\mathbf{k}']_i} \sum_{[\mathbf{k}'']_s} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_0)\right] u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}})\right] \alpha_{0\mathbf{k}''}(0). \quad (4.35)$$

A partir de (4.29) vemos que la señal, a orden g^2 , se expresa mediante la suma de tres términos:

1. El término de orden cero, dado por (4.31), es la radiación de punto cero que pasa a través del cristal sin ninguna modificación. En realidad, para obtener el campo total a orden cero tendríamos que sumarle al término anterior el correspondiente al láser. No obstante, éste no se considera pues sólo nos interesa su efecto en los términos de primer y segundo orden.
2. El término de primer orden es el campo radiado como consecuencia de la interacción dentro del cristal del láser, de frecuencia ω_o , y el punto cero correspondiente al gemelo, cuyas componentes oscilan a frecuencias próximas a ω_i . El resultado es un campo oscilante donde intervienen frecuencias próximas a $\omega_s = \omega_o - \omega_i$, situación que tiene una correspondencia perfecta con la amplificación paramétrica clásica.

3. Finalmente, el término de segundo orden modifica hasta orden g^2 la radiación de punto cero incidente en la dirección de la señal. Esta cantidad representa la radiación producida por la interacción con el cristal del campo radiado a primer orden.

Llegados a este punto vamos a resaltar dos diferencias básicas entre las descripciones de este fenómeno hechas en el espacio de Hilbert y en la representación de Wigner:

a) En primer lugar, en el espacio de Hilbert el desarrollo perturbativo es a primer orden. La razón de ello, como hemos comentado anteriormente, es que el término de segundo orden no interviene en el cálculo de las probabilidades. Sin embargo, en la formulación de Wigner este término es esencial pues, como veremos más adelante, aporta contribuciones no nulas a las autocorrelaciones del campo.

b) En el espacio de Hilbert el fenómeno se interpreta como la división de un fotón del láser en dos fotones de menor frecuencia, verificándose la conservación del momento y la energía. Dicha conservación se representa por las condiciones de emparejamiento (4.25) y (4.26). Sin embargo, en la representación de Wigner las condiciones de emparejamiento tienen una interpretación ondulatoria que coincide con la que se da en electromagnetismo clásico, aunque considerando la radiación de punto cero, en lugar de una radiación clásica, a la entrada del cristal.

Desde un punto de vista operacional conviene definir a partir de $E_s^{(+)}$, la cual oscila rápidamente debido al factor $e^{-i\omega_k t}$ que interviene en cada sumando, una amplitud lentamente variable $F_s^{(+)}$ que se obtiene de la anterior multiplicando por $e^{i\omega_s t}$, es decir:

$$F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega_s t} E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar\omega_k}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}}(0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i(\omega_s - \omega_k)t}. \quad (4.36)$$

De la misma forma se procede para el haz gemelo cambiando en (4.36) los subíndices "s" e "i". En términos de estas nuevas amplitudes (4.29) y (4.30) se transforman en

$$F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = (1 + g^2|V|^2 J) F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + gVG F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.37)$$

$$F_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) = (1 + g^2|V|^2 J) F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + gVG F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.38)$$

donde

$$F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar\omega_k}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i(\omega_s - \omega_k)t} \alpha_{0\mathbf{k}}(0), \quad (4.39)$$

con otra expresión similar para $F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, cambiando "s" por "i".

Los valores de $F_s^{(+)}$ en distintos puntos del haz guardan una relación sencilla, la cual nos permitirá obtener el valor del campo en cualquier punto a partir del que tiene en el centro del cristal. Por ejemplo, en el caso de la señal se tiene

$$\begin{aligned}
 F_s^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) &= e^{i\omega_s t} E_s^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) \\
 &= i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}}(0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_B} e^{i(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})t} \\
 &= i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}}(0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_A} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{AB}} e^{i(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})t} \\
 &= i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}}(0) e^{[i(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})(t - \frac{r_{AB}}{c})]} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_A} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{AB}} \\
 &= F_s^{(+)}(\mathbf{r}_A, t - \frac{r_{AB}}{c}) e^{i\omega_s \frac{r_{AB}}{c}}, \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ y $r_{AB} = |\mathbf{r}_{AB}|$. Otra forma equivalente de ver esto último es tener en cuenta que el campo a la salida del cristal está descrito por una superposición de ondas planas propagándose a la misma velocidad c , de manera que debe verificarse $E^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) = E^{(+)}(\mathbf{r}_A, t - r_{AB}/c)$. Teniendo en cuenta (4.36) se llega fácilmente a (4.40).

4.6 PROPIEDADES ESTOCÁSTICAS DE LA RADIACIÓN

En los procesos estocásticos gaussianos las correlaciones de orden impar son nulas, mientras que las de orden par se obtienen a partir de las de segundo orden (Mandel y Wolf, 1995; sección 1.6.1). Por tanto, el cálculo de las correlaciones de segundo orden es suficiente para caracterizar el proceso estocástico que estudiamos.

4.6.1 La radiación de punto cero

Antes de calcular las correlaciones vamos a hacer un estudio de la radiación de punto cero correspondiente a la señal ⁵

$$E_{0s}(\mathbf{r}, t) = E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.41)$$

donde $E_{0s}^{(+)}$ viene dado por (4.31). Las amplitudes $\alpha_{0\mathbf{k}}$ ($\mathbf{k} \in [\mathbf{k}]_s$), son variables estocásticas gaussianas independientes, de media nula, caracterizadas por una distribución de probabilidad conjunta que se obtiene a partir del producto de las distribuciones correspondientes a la amplitud de cada modo (ver (4.14)):

$$W_{\text{vac}}(\alpha, \alpha^*) = \prod_{[\mathbf{k}]_s} \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha_{0\mathbf{k}}|^2}. \quad (4.42)$$

La diferencia entre (4.14) y (4.42) estriba en que en esta última hemos restringido el productorio a los modos que definen la señal.

A continuación vamos a calcular las correlaciones para las amplitudes $\alpha_{0\mathbf{k}}$. Si bien estas cantidades pueden obtenerse a partir de (4.42), usaremos otro método basado en la propiedad (3.36) de la función de Wigner. Por ejemplo, dado que cualesquiera operadores $\hat{a}_{0\mathbf{k}}$ y $\hat{a}_{0\mathbf{k}'}$ conmutan,

$$[\hat{a}_{0\mathbf{k}}, \hat{a}_{0\mathbf{k}'}] = \hat{a}_{0\mathbf{k}}\hat{a}_{0\mathbf{k}'} - \hat{a}_{0\mathbf{k}'}\hat{a}_{0\mathbf{k}} = 0,$$

promediando en el estado de vacío y cambiando el signo – por +, lo cual puede hacerse dado que cualquier operador de destrucción actuando sobre el vacío es igual a cero, se obtiene:

$$2\langle \text{vac} | S[\hat{a}_{0\mathbf{k}}\hat{a}_{0\mathbf{k}'}] | \text{vac} \rangle = 0$$

⁵Los resultados que se van a obtener en este apartado son aplicables también al haz gemelo.

$$\rightarrow \langle \alpha_{0\mathbf{k}} \alpha_{0\mathbf{k}'} \rangle = 0, \quad (4.43)$$

donde $\langle \rangle$ en la segunda línea de (4.43) representa el promedio con la distribución de Wigner del vacío (4.42). Tomando el complejo conjugado de (4.43), tenemos

$$\langle \alpha_{0\mathbf{k}}^* \alpha_{0\mathbf{k}'}^* \rangle = 0. \quad (4.44)$$

Siguiendo el mismo procedimiento vamos a obtener la correlación entre $\alpha_{0\mathbf{k}}$ y $\alpha_{0\mathbf{k}'}^*$, utilizando en este caso las relaciones de conmutación entre $\hat{a}_{0\mathbf{k}}$ y $\hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger$:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{0\mathbf{k}}, \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger] &= \hat{a}_{0\mathbf{k}} \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger - \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{0\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ \rightarrow 2 \langle \text{vac} | S[\hat{a}_{0\mathbf{k}} \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger] | \text{vac} \rangle &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ \rightarrow \langle \alpha_{0\mathbf{k}} \alpha_{0\mathbf{k}'}^* \rangle &= \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (4.45)$$

A partir de (4.31), (4.43), (4.44) y (4.45), podemos obtener la correlación entre $E_{0s}(\mathbf{r}, t)$ y $E_{0s}(\mathbf{r}, t + \tau)$:

$$\begin{aligned} \langle E_{0s}(\mathbf{r}, t) E_{0s}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle &= \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle + c.c. \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{[\mathbf{k}]_s} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2} e^{i\omega_{\mathbf{k}} \tau} + c.c. \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \langle E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = 0,$$

lo cual puede deducirse fácilmente utilizando (4.43) y (4.44).

Como puede observarse a partir de (4.46), la radiación de punto cero está representada por un proceso estocástico estacionario, dado que la autocorrelación sólo depende de la diferencia de tiempos. Esto a su vez es consecuencia de que las amplitudes $\alpha_{\mathbf{k}}$ correspondientes a modos distintos están descorrelacionadas (Mandel y Wolf, 1995; sección 2.2.3). Por otro lado, para $\tau = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \langle E_{0s}(\mathbf{r}, t)^2 \rangle &= 2 \langle |E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{[\mathbf{k}]_s} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$\langle |E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle$ es la intensidad del punto cero correspondiente a la señal, cantidad que es independiente de t y \mathbf{r} , y se representará a partir de ahora por I_{0s} , es decir

$$I_{0s} \equiv \langle |E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{[\mathbf{k}]_s} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}. \quad (4.48)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el promedio del campo es nulo

$$\langle E_{0s}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad (4.49)$$

vemos que las fluctuaciones del campo coinciden con (4.47):

$$\langle (\Delta E_{0s})^2 \rangle \equiv \langle (E_{0s} - \langle E_{0s} \rangle)^2 \rangle = \langle E_{0s}^2 \rangle. \quad (4.50)$$

Hemos hecho esta pequeña incursión en la radiación de punto cero con el objeto de obtener sus propiedades mediante el uso de la función de Wigner. Los resultados más importantes, dados en (4.46), (4.48) y (4.50), muestran que dicha radiación es un estado estacionario del campo electromagnético con fluctuaciones estadísticas del campo eléctrico (Milonni, 1994; sección 2.4).

4.6.2 Autocorrelaciones

Consideremos la señal en un punto \mathbf{r} y en los instantes t y t' . Teniendo en cuenta (4.29) y reteniendo términos hasta orden g^2 , tenemos

$$\begin{aligned} \langle E_s(\mathbf{r}, t) E_s(\mathbf{r}, t') \rangle &= \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + c.c \\ &= \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + g^2 |V|^2 \{ e^{i\omega_0(t'-t)} \langle G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ &\quad + \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) J^* E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + \langle E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') J E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \} + c.c, \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde hemos tenido en cuenta que E_{0s} y E_{0i} no están correlacionados, dado que contienen modos distintos del campo de vacío (ver (4.45)). Por otro lado, en la primera igualdad hemos tenido en cuenta que

$$\langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle = \langle E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle = 0, \quad (4.52)$$

lo cual se deduce de (4.43), (4.44) y (4.45).

La autocorrelación (4.51) contiene un término de orden cero, cuyo valor viene dado por (4.46), y que representa la contribución del vacío a la autocorrelación de la señal; en el caso $t = t'$ esta contribución es igual al doble de la intensidad del punto cero en la posición \mathbf{r} (ver (4.48)). En el término de segundo orden hay contribuciones que provienen, por un lado, de los términos de segundo orden y orden cero en la expresión del campo eléctrico (los que contienen el operador J), y por otro, de los términos de primer orden (el que

contiene el operador G dos veces). A continuación vamos a relacionar dichas contribuciones utilizando la conservación de las relaciones de conmutación de los operadores campo.

Sea el operador campo correspondiente a la señal en los instantes t y t' (sólo hay que sustituir amplitudes por operadores de creación y destrucción en (4.29)). A partir de (4.22) se puede comprobar que

$$[\hat{E}_s^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{E}_s^{(-)}(\mathbf{r}, t')] = [\hat{E}_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{E}_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t')]. \quad (4.53)$$

Sustituyendo (4.29) en (4.53) se obtiene:

$$e^{i\omega_o(t'-t)} [G\hat{E}_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t), G^*\hat{E}_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t')] + [\hat{E}_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), J^*\hat{E}_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t')] + [J\hat{E}_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t'), \hat{E}_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (4.54)$$

Tomando el valor medio en el estado de vacío y pasando a la representación de Wigner tal y como hicimos en el apartado anterior, llegamos a la siguiente relación entre correlaciones

$$\langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) J^* E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + \langle E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') J E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{i\omega_o(t'-t)} \langle G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle. \quad (4.55)$$

Por tanto, la diferencia entre la intensidad de la señal radiada por el cristal y la correspondiente a la radiación de punto cero es ⁶

$$\begin{aligned} & \langle E_s(\mathbf{r}, t) E_s(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle E_{0s}(\mathbf{r}, t) E_{0s}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ &= \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + c.c \\ &= 2g^2 |V|^2 e^{i\omega_o(t'-t)} \langle G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle + c.c. \end{aligned} \quad (4.56)$$

En este sentido, el proceso de la conversión a la baja, analizado con la función de Wigner, puede interpretarse como una amplificación de las fluctuaciones del punto cero cuando este campo y el láser interaccionan con el medio no lineal. El conjunto constituido por el láser y el cristal actúa como un amplificador de las fluctuaciones del vacío (Louisell et al., 1961; Gordon et al., 1963). Por otro lado, a partir de (4.55) vemos que la contribución a dicha amplificación del término de primer orden es igual a la que contiene el orden cero (radiación de punto cero incidente) y el segundo orden.

⁶En el capítulo siguiente veremos que esta cantidad es la que se mide en el proceso de fotodetección analizado con la representación de Wigner. De hecho, la autocorrelación de la señal a tiempos iguales ($t' = t$) es proporcional a la probabilidad de detección por unidad de tiempo (véase la ecuación (5.10)).

Para calcular explícitamente el valor de la correlación sustituiremos (4.32) en (4.56). El resultado es:

$$\begin{aligned} & \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ &= 2g^2 |V|^2 \sum_{[\mathbf{k}]_s} \sum_{[\mathbf{k}']_s} \frac{\hbar}{L^3} (\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{\frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} e^{i\omega_{\mathbf{k}'} t'} \langle \beta_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}'}^* \rangle. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Nótese que la condición de estacionaridad, o sea, que la autocorrelación dependa de la diferencia de tiempos, implica a su vez que $\beta_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}'}$ deben estar descorrelacionadas para $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$; si esto no es así, (4.57) no dependería de la diferencia entre t y t' . Para ver que el proceso es estacionario tendremos en cuenta las propiedades de las funciones f y u definidas en (4.10) y (4.18) respectivamente. A partir de (4.33) y (4.45) se tiene

$$\langle \beta_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \frac{1}{2} \sum_{[\mathbf{k}'']_i} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}''})\right] u^*\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''})\right]. \quad (4.58)$$

Como f y u son distintas de cero sólo cuando se verifican las condiciones de emparejamiento, la correlación entre $\beta_{\mathbf{k}}$ y $\beta_{\mathbf{k}'}$ es no nula sólo cuando $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}'$. Por tanto, podemos expresar (4.58) como

$$\langle \beta_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} h(\mathbf{k}), \quad (4.59)$$

siendo

$$h(\mathbf{k}) = \sum_{[\mathbf{k}'']_i} |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') u\left[\frac{\Delta t}{2}(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}''})\right]|^2. \quad (4.60)$$

Finalmente, sustituyendo (4.59) en (4.57) se tiene

$$\begin{aligned} & \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ &= g^2 |V|^2 \sum_{[\mathbf{k}]_s} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} h(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Vemos por tanto que la autocorrelación depende sólo de la diferencia de tiempos, y además es independiente de la posición, lo cual es también consecuencia de (4.59).

Si se conoce $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ se puede calcular la autocorrelación utilizando (4.60) y (4.61). Dicha cantidad define un tiempo de coherencia τ_s para la señal, el

cual es del mismo orden que el inverso del ancho de banda $1/\Delta\omega_s$, siendo $\Delta\omega_s = \omega_{s,max} - \omega_{s,min}$.

De cara a los cálculos que realizaremos para obtener las probabilidades de detección en los experimentos, donde utilizaremos las funciones F definidas en (4.36), conviene expresar la autocorrelación de dichas funciones. Tenemos,

$$\begin{aligned} & \langle F_s(\mathbf{r}, t) F_s(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_{0s}(\mathbf{r}, t) F_{0s}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ &= \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + c.c \\ &\equiv g^2 |V|^2 \mu_s(t - t') + c.c, \end{aligned} \quad (4.62)$$

siendo

$$\mu_s(t - t') = \sum_{[\mathbf{k}]_s} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{L^3} h(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})(t - t')}, \quad (4.63)$$

una función compleja que tiende a cero cuando la diferencia $|t - t'|$ es mayor que τ_s , alcanza su máximo valor cuando $t = t'$, y verifica las propiedades siguientes:

$$\mu_s(t - t') = \mu_s^*(t' - t) \quad \rightarrow \quad |\mu_s(t - t')| = |\mu_s(t' - t)|. \quad (4.64)$$

De la misma forma, para el haz gemelo se tiene

$$\langle F_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_i^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle = g^2 |V|^2 \mu_i(t' - t), \quad (4.65)$$

donde μ_i se obtiene de (4.63) cambiando "s" por "i". Dicha función define un tiempo de coherencia τ_i para el gemelo, el cual es del mismo orden de magnitud que el correspondiente a la señal. Esto es debido a que para cada modo perteneciente a la señal existe otro en el haz gemelo verificando las condiciones de emparejamiento (4.27) y (4.28).

Finalmente, teniendo en cuenta (4.55) y (4.36), tenemos

$$\begin{aligned} & \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) J^* F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + \langle F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') J F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \langle G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle = \frac{1}{2} \mu_s(t - t'), \end{aligned} \quad (4.66)$$

con unas relaciones análogas cambiando "s" por "i".

4.6.3 Correlaciones cruzadas

Consideremos la señal y el gemelo en las posiciones e instantes (\mathbf{r}, t) y (\mathbf{r}', t') respectivamente. La correlación cruzada se define como ⁷:

$$\begin{aligned} & \langle E_s(\mathbf{r}, t) E_i(\mathbf{r}', t') \rangle \\ &= \langle (E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t)) (E_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') + E_i^{(-)}(\mathbf{r}', t')) \rangle \\ &= \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle + c.c, \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle = 0, \quad (4.68)$$

en virtud de (4.43), (4.44) y (4.45). Sustituyendo (4.29) y (4.30) en (4.67) y teniendo en cuenta que E_{0s} y E_{0i} están descorrelacionados, tenemos

$$\begin{aligned} & \langle E_s(\mathbf{r}, t) E_i(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle + c.c \\ &= gV [e^{-i\omega_0 t'} \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) G E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle + e^{-i\omega_0 t} \langle E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t') G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \rangle] + c.c. \end{aligned} \quad (4.69)$$

La correlación cruzada está expresada a partir de la suma de dos términos proporcionales a la constante de acoplamiento, de forma que los términos de segundo orden y orden cero en el campo no intervienen en dicha correlación ⁸. Con el objeto de relacionar los dos términos que aparecen en la expresión anterior aplicaremos de nuevo la conservación de las relaciones de conmutación, considerando esta vez los operadores campo correspondientes a la señal y al gemelo. Realizando las mismas operaciones que en el apartado anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} & [\hat{E}_s^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{E}_i^{(+)}(\mathbf{r}', t')] = [\hat{E}_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{E}_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t')] = 0 \\ & \rightarrow e^{-i\omega_0 t'} \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) G E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle = e^{-i\omega_0 t} \langle E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t') G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.70)$$

El segundo conmutador es cero porque contiene sólo operadores de destrucción. Nótese además que está expresado a partir de conmutadores entre modos de vacío de la señal y el gemelo, los cuales son siempre nulos. Sustituyendo (4.70) en (4.69) se tiene

⁷El módulo al cuadrado de $\langle E_s^{(+)} E_i^{(+)} \rangle$ es proporcional a la probabilidad por unidad de tiempo en un experimento de detección conjunta de haces señal y gemelo (véase la ecuación (5.29)).

⁸Esto trae como consecuencia que los términos de segundo orden no influyen en los experimentos de interferencia de cuarto orden (capítulo 6).

$$\begin{aligned}\langle E_s(\mathbf{r}, t)E_i(\mathbf{r}', t') \rangle &= \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)E_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle + c.c. = \\ &= 2gV e^{-i\omega_0 t'} \langle E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t)G E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle + c.c.\end{aligned}\quad (4.71)$$

Teniendo en cuenta (4.31) y (4.32) ($G E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t')$ se obtiene sin más que sustituir el subíndice s por i en (4.32)), tenemos

$$\begin{aligned}\langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)E_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle \\ = 2gV i^2 \sum_{[\mathbf{k}]_s} \sum_{[\mathbf{k}']_i} \frac{\hbar}{L^3} (\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'}t'} \langle \alpha_{0\mathbf{k}}(0)\beta_{\mathbf{k}'} \rangle.\end{aligned}\quad (4.72)$$

Para calcular la correlación entre las α y las β usaremos (4.33) y (4.45). El resultado es:

$$\langle \alpha_{0\mathbf{k}}(0)\beta_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{1}{2} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \right]. \quad (4.73)$$

Finalmente, sustituyendo el resultado anterior en (4.72), se tiene

$$\begin{aligned}\langle E_s(\mathbf{r}, t)E_i(\mathbf{r}', t') \rangle &= \langle E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)E_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle + c.c. = \\ &= gV i^2 \sum_{[\mathbf{k}]_s} \sum_{[\mathbf{k}']_i} \frac{\hbar}{L^3} (\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} e^{-i\omega_{\mathbf{k}'}t'} \\ &\quad \times f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \right] + c.c.\end{aligned}\quad (4.74)$$

Vamos a analizar la dependencia temporal de (4.74). Utilizando la condición de emparejamiento en frecuencias dada por (4.27), vemos que

$$\omega_{\mathbf{k}}t + \omega_{\mathbf{k}'}t' \approx \omega_{\mathbf{k}}(t - t') + \omega_0 t'. \quad (4.75)$$

Por tanto, la dependencia temporal de (4.74) tiene dos contribuciones: el factor $e^{-i\omega_0 t'}$ es rápidamente oscilante y sale fuera del sumatorio; el otro, $e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')}$, depende de la diferencia de tiempos y da lugar a una función compleja que define un tiempo de correlación τ_{si} entre la señal y el gemelo. De cara a los cálculos en los experimentos nos interesa calcular la correlación cruzada en el centro del cristal entre las funciones lentamente variables F relativas a la señal y al gemelo. Sustituyendo (4.36) en (4.74), y haciendo $\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{0}$, obtenemos

$$\langle F_s(\mathbf{0}, t)F_i(\mathbf{0}, t') \rangle = \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t)F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle + c.c. =$$

$$\begin{aligned}
 &= gV i^2 \sum_{[\mathbf{k}]_s} \sum_{[\mathbf{k}']_i} \frac{\hbar}{L^3} (\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{\frac{1}{2}} e^{i(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})t} e^{i(\omega_i - \omega_{\mathbf{k}'})t'} \\
 &\quad \times f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u\left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})\right] + c.c.
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Utilizando las relaciones (4.25) y (4.27) podemos ver que la dependencia rápida de (4.75) desaparece:

$$(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})t + (\omega_i - \omega_{\mathbf{k}'})t' \approx (\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})(t - t'). \tag{4.77}$$

Finalmente, expresaremos (4.76) como

$$\begin{aligned}
 \langle F_s(\mathbf{0}, t) F_i(\mathbf{0}, t') \rangle &= \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle + c.c. = \\
 &\equiv gV \nu(t - t') + c.c.,
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \nu(t - t') &= i^2 \sum_{[\mathbf{k}]_s} \sum_{[\mathbf{k}']_i} \frac{\hbar}{L^3} (\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{\frac{1}{2}} e^{i(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})t} e^{i(\omega_i - \omega_{\mathbf{k}'})t'} \\
 &\quad \times f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u\left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})\right],
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

una función que tiende a cero cuando $|t - t'|$ es mayor que τ_{si} . A partir de (4.77) puede verse fácilmente que ν verifica las propiedades siguientes:

$$\nu(\tau) = \nu^*(-\tau) \quad \rightarrow \quad |\nu(\tau)| = |\nu(-\tau)|. \tag{4.80}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (4.69) y (4.70), tenemos

$$\langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) G F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t') G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \nu(t - t'), \tag{4.81}$$

relación que será de utilidad en los cálculos que realizaremos en el capítulo 6.

La correlación cruzada para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ se obtiene a partir de (4.78) sin más que aplicar (4.40).

4.7 GENERALIZACIÓN A LA CONVERSIÓN TIPO II

Vamos a aplicar los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo al caso de la conversión tipo II. Mostraremos los aspectos más importantes sin entrar en

detalles dada la gran la similitud con el tipo I. El Hamiltoniano que caracteriza la conversión tipo II se puede expresar como ⁹

$$H = \sum_{j=o,e} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{j\mathbf{k}} \alpha_{j\mathbf{k}}^* \alpha_{j\mathbf{k}} + (i\hbar g'V \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} f(\mathbf{k},\mathbf{k}') e^{-i\omega_p t} \alpha_{o\mathbf{k}}^* \alpha_{e\mathbf{k}'}^* + \text{c.c.}), \quad (4.82)$$

donde $o(e)$ se refiere al rayo ordinario (extraordinario). Este Hamiltoniano es similar al dado por (4.11), aunque hemos sustituido directamente los operadores por amplitudes complejas $\alpha_{o\mathbf{k}}$ y $\alpha_{e\mathbf{k}'}$, las cuales corresponden a los modos \mathbf{k} y \mathbf{k}' de los campos ordinario y extraordinario respectivamente,

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (4.83)$$

$$\mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar\omega_{j\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{j\mathbf{k}} \alpha_{j\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad j = o, e, \quad (4.84)$$

donde $\epsilon_{j\mathbf{k}}$ es un vector de polarización.

La evolución de las amplitudes viene dada a partir de las ecuaciones canónicas de Hamilton tomando $\sqrt{\hbar}\alpha_{j\mathbf{k}}(t)$ como coordenadas y $\sqrt{\hbar}\alpha_{j\mathbf{k}}^*(t)$ como momentos canónicos. Por ejemplo, para $\alpha_{e\mathbf{k}}$ tenemos:

$$\dot{\alpha}_{e\mathbf{k}} = -i\omega_{e\mathbf{k}}\alpha_{e\mathbf{k}} + g'V \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k},\mathbf{k}') \exp(-i\omega_p t) \alpha_{o\mathbf{k}'}^*, \quad (4.85)$$

con una expresión similar para el rayo ordinario intercambiando los subíndices “e” y “o”. Esta ecuación es idéntica a (4.15) y su solución a segundo orden en teoría de perturbaciones es (ver (4.16)):

$$\begin{aligned} \alpha_{e\mathbf{k}}(0) = & \alpha_{e\mathbf{k}}^{(\text{vac})}(0) + gV \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k},\mathbf{k}') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_p - \omega_{e\mathbf{k}} - \omega_{o\mathbf{k}'}) \right] \alpha_{o\mathbf{k}'}^{*(\text{vac})}(0) \\ & + g^2 |V|^2 \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} f(\mathbf{k},\mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}',\mathbf{k}'') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{o\mathbf{k}'} + \omega_{e\mathbf{k}''} - \omega_p) \right] \\ & \times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{e\mathbf{k}''} - \omega_{e\mathbf{k}}) \right] \alpha_{e\mathbf{k}''}^{(\text{vac})}(0) ; \quad g|V| \ll 1. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Las expresiones para dos haces correlacionados “ordinario” y “extraordinario” con vectores de polarización que son independientes de los vectores de onda, y cuyas frecuencias medias y vectores de onda verifican las condiciones

$$\omega_o + \omega_e = \omega_p ; \quad \mathbf{k}_o + \mathbf{k}_e = \mathbf{k}_p, \quad (4.87)$$

⁹En este apartado hemos representado la frecuencia del láser por ω_p , y su vector de onda por \mathbf{k}_p .

son

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t)\epsilon_e \\ &= \left([1 + g^2|V|^2 J] F_e^{(+)\text{vac}}(\mathbf{r}, t) + gVGF_o^{(-)\text{vac}}(\mathbf{r}, t) \right) \epsilon_e, \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= F_o^{(+)}(\mathbf{r}, t)\epsilon_o \\ &= \left([1 + g^2|V|^2 J] F_o^{(+)\text{vac}}(\mathbf{r}, t) + gVGF_e^{(-)\text{vac}}(\mathbf{r}, t) \right) \epsilon_o, \end{aligned} \quad (4.89)$$

donde hemos tenido en cuenta en (4.84) que

$$\epsilon_{ek} \equiv \epsilon_e \quad ; \quad \epsilon_{ok} \equiv \epsilon_o \quad , \quad (4.90)$$

con $\epsilon_e \cdot \epsilon_o = 0$. $\mathbf{F}_e^{(\text{vac})}$ y $\mathbf{F}_o^{(\text{vac})}$ son las amplitudes lentamente variables correspondientes a las entradas del punto cero en las direcciones de los haces extraordinario y ordinario respectivamente.

Finalmente, las propiedades de correlación son completamente análogas a las del tipo I:

- Autocorrelaciones

Tomando el campo extraordinario $\mathbf{F}_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t)\epsilon_e$ en un punto \mathbf{r} , e instantes t y t' , tenemos:

$$\begin{aligned} &\langle F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_e^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_e^{(+)\text{vac}}(\mathbf{r}, t) F_e^{(-)\text{vac}}(\mathbf{r}, t') \rangle = \\ &2g^2|V|^2 \langle GF_o^{(-)\text{vac}}(\mathbf{r}, t) G^* F_o^{(+)\text{vac}}(\mathbf{r}, t') \rangle \equiv g^2|V|^2 \mu_e(t' - t), \\ &\langle F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.91)$$

siendo $\mu_e(t' - t)$ una función que tiende a cero cuando $|t' - t|$ es mayor que el tiempo de correlación del haz extraordinario. Otras expresiones similares se obtienen para el campo ordinario cambiando los índices "e" y "o".

- Correlaciones cruzadas

Tomando el rayo extraordinario ($\mathbf{F}_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t)\epsilon_e$) y el ordinario ($\mathbf{F}_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_o^{(+)}(\mathbf{r}, t)\epsilon_o$) en el centro del cristal ($\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{0}$), y en los instantes instantes t y t' , se tiene

$$\begin{aligned} &\langle F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle = gV\nu(t' - t). \\ &\langle F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_o^{(-)}(\mathbf{0}, t') \rangle = \langle F_e^{(-)}(\mathbf{0}, t) F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.92)$$

siendo $\nu(t' - t)$ una función que tiende a cero cuando $|t' - t|$ es mayor que el tiempo de correlación entre ambos haces.

4.8 APÉNDICE: CALCULO DE LA FUNCIÓN DE WIGNER EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

En este apéndice vamos a exponer el cálculo a todos los órdenes de la distribución de Wigner en función del tiempo para los procesos de conversión a la baja ¹⁰. Dado que este cálculo no es relevante en la consecución de los resultados más importantes de esta tesis, hemos preferido añadirlo como un apéndice a este capítulo.

Para trabajar a todos los órdenes definiremos los operadores (Hong y Mandel, 1985):

$$\hat{A}_{\mathbf{k}}(t) \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (4.93)$$

los cuales varían lentamente con el tiempo, a diferencia de $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$. Sustituyendo (4.93) en (4.15) se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\hat{A}}_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{\mathbf{k}'} p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) \hat{A}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t), \quad (4.94)$$

donde hemos definido la matriz $p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t)$ cuyos elementos son:

$$p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) = g' V f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{-i(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t}. \quad (4.95)$$

Como se puede observar p es simétrica, es decir $p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) = p(\mathbf{k}', \mathbf{k}; t)$. Por otro lado, tomando adjuntos en (4.94) obtenemos una ecuación análoga para la evolución temporal de $\hat{A}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t)$:

$$\dot{\hat{A}}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t) = \sum_{\mathbf{k}''} p^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; t) \hat{A}_{\mathbf{k}''}(t). \quad (4.96)$$

Integrando (4.94) entre $t_1 = -\Delta t$ y $t_2 = 0$, tenemos:

$$\hat{A}_{\mathbf{k}}(0) = \hat{A}_{\mathbf{k}}(-\Delta t) + \sum_{\mathbf{k}'} \int_{-\Delta t}^0 p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t') \hat{A}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t') dt', \quad (4.97)$$

siendo

$$\hat{A}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t') = \hat{A}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(-\Delta t) + \sum_{\mathbf{k}''} \int_{-\Delta t}^{t'} p^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; t'') \hat{A}_{\mathbf{k}''}(t'') dt''. \quad (4.98)$$

¹⁰Un cálculo similar, aplicado a la amplificación paramétrica, aparece en Walls y Milburn (1994; capítulo 5) considerando tan sólo dos modos de la radiación.

Sustituyendo (4.98) en (4.97) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\mathbf{k}}(0) &= \hat{a}_{0\mathbf{k}}(0) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger \int_{-\Delta t}^0 p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t') dt' \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'} \int_{-\Delta t}^0 p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t') \left[\sum_{\mathbf{k}''} \int_{-\Delta t}^{t'} p^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; t'') \hat{A}_{\mathbf{k}''}(t'') dt'' \right] dt'. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Para obtener $\hat{A}_{\mathbf{k}}(t)$ a todos los órdenes se puede seguir un procedimiento iterativo, sustituyendo en el último término de cada aproximación las expresiones (4.97) o (4.98). Realizando esta operación sucesivamente y teniendo en cuenta (4.93) se llega a la siguiente expresión general para $\hat{a}_{\mathbf{k}}(0)$ ¹¹:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(0) = \sum_{\mathbf{k}'} M(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) \hat{a}_{0\mathbf{k}'}(0) + \sum_{\mathbf{k}'} N(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^\dagger(0), \quad (4.100)$$

donde las matrices M y N vienen dadas por:

$$M(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \sum_{\mu=1}^{\infty} M^{(\mu)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0), \quad (4.101)$$

$$N(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} N^{(\nu)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0), \quad (4.102)$$

siendo

$$\begin{aligned} N^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) &= \int_{-\Delta t}^0 p(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t') dt' = \\ &= gV f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \right], \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$M^{(\mu)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) = \sum_{\mathbf{k}''} \int_{-\Delta t}^0 p(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; t') N^{*(\mu)}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}'; t') dt', \quad (4.104)$$

$$N^{(\nu)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) = \sum_{\mathbf{k}''} \int_{-\Delta t}^0 p(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; t') M^{*(\mu-1)}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}'; t') dt'. \quad ; \quad \nu \geq 2 \quad (4.105)$$

A partir de (4.95), (4.104), y (4.105), se pueden calcular las matrices M y N a diferentes órdenes en la constante de acoplamiento. Cada sumando $M^{(\mu)}$ ($N^{(\nu)}$) es de orden 2μ ($2\nu - 1$).

¹¹ Comparar con (4.16).

Vamos a obtener a continuación dos relaciones entre M y N a partir de las reglas de conmutación que deben verificar los operadores $\hat{A}_{\mathbf{k}}(t)$ y $\hat{A}_{\mathbf{k}'}^\dagger(t)$. Dichas relaciones se usarán en el apartado siguiente. Teniendo en cuenta (4.93) y (4.100) tenemos:

$$\begin{aligned} & [\hat{A}_{\mathbf{k}}(0), \hat{A}_{\mathbf{k}'}(0)] = 0 \\ \rightarrow \sum_{\mathbf{k}''} \{M(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; 0)N(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; 0) - N(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; 0)M(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; 0)\} &= 0, \quad (4.106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\hat{A}_{\mathbf{k}}(0), \hat{A}_{\mathbf{k}'}^\dagger(0)] = \delta_{\mathbf{k}; \mathbf{k}'} \\ \rightarrow \sum_{\mathbf{k}''} \{M(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; 0)M^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; 0) - N(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; 0)N^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}''; 0)\} &= 0. \quad (4.107) \end{aligned}$$

Antes de abordar el cálculo de la función de Wigner vamos a cambiar la notación de la forma siguiente, con el objeto de simplificar las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &\equiv \mathbf{i}, \\ \sum_{\mathbf{k}} &\equiv \sum_{\mathbf{i}}, \\ \omega(\mathbf{k}) &\equiv \omega_{\mathbf{i}}, \\ M(\mathbf{k}; \mathbf{k}'; 0) &\equiv M_{\mathbf{ij}}(0), \\ N(\mathbf{k}; \mathbf{k}'; 0) &\equiv N_{\mathbf{ij}}(0). \end{aligned}$$

4.8.1 Función característica

La función característica se definió en el capítulo 3 para el caso de un sólo modo (ver (3.25)). En el caso multimodo se tiene

$$X(\{\lambda\}) = \langle \psi(t) | e^{\sum_{\mathbf{i}} (\lambda_{\mathbf{i}} \hat{a}_{0\mathbf{i}}^\dagger - \lambda_{\mathbf{i}}^* \hat{a}_{0\mathbf{i}})} | \psi(t) \rangle, \quad (4.108)$$

donde hemos representado el estado de la radiación para $t > 0$ por $|\psi(t)\rangle$. Sea $\hat{U}(-\Delta t, t)$ el operador de evolución del campo entre $-\Delta t$ y $t > 0$. Teniendo en cuenta que el estado inicial es el vacío, entonces

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(-\Delta t, t) |vac\rangle. \quad (4.109)$$

Sustituyendo (4.109) en (4.108) tenemos:

$$X(\{\lambda\}) = \langle vac | e^{\sum_i (\lambda_i \hat{a}_i^\dagger(t) - \lambda_i^* \hat{a}_i(t))} | vac \rangle, \quad (4.110)$$

donde $\hat{a}_i(t)$ y $\hat{a}_i^\dagger(t)$ son los operadores de creación y destrucción en la representación de Heisenberg. Estos operadores ya se obtuvieron anteriormente a partir de $\hat{A}_i(t)$ y $\hat{A}_i^\dagger(t)$ y su expresión es:

$$\hat{a}_i(t) = e^{-i\omega_i t} \left[\sum_j M_{ij}(0) \hat{a}_{0j}(0) + \sum_j N_{ij}(0) \hat{a}_{0j}^\dagger(0) \right], \quad (4.111)$$

$$\hat{a}_i^\dagger(t) = e^{i\omega_i t} \left[\sum_j M_{ij}^*(0) \hat{a}_{0j}^\dagger(0) + \sum_j N_{ij}^*(0) \hat{a}_{0j}(0) \right]. \quad (4.112)$$

Sustituyendo (4.112) y (4.111) en (4.110), se tiene:

$$X(\{\lambda\}) = \langle vac | e^{\hat{O} + \hat{Q}} | vac \rangle, \quad (4.113)$$

siendo

$$\begin{aligned} \hat{O} &= \sum_i \sum_j \hat{a}_{0j}^\dagger(0) \left(\lambda_i e^{i\omega_i t} M_{ij}^*(0) - \lambda_i^* e^{-i\omega_i t} N_{ij}(0) \right). \\ \hat{Q} &= \sum_i \sum_j \hat{a}_{0j}(0) \left(\lambda_i e^{i\omega_i t} N_{ij}^*(0) - \lambda_i^* e^{-i\omega_i t} M_{ij}(0) \right). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Aplicaremos a continuación la relación (3.31), la cual se verifica dado que \hat{O} y \hat{Q} conmutan con $[\hat{O}, \hat{Q}]$, que viene dado por

$$\begin{aligned} [\hat{O}, \hat{Q}] &= - \sum_i \sum_j \sum_k (\lambda_i e^{i\omega_i t} M_{ij}^*(0) - \lambda_i^* e^{-i\omega_i t} N_{ij}(0)) \\ &\quad \times (\lambda_k e^{i\omega_k t} N_{kj}^*(0) - \lambda_k^* e^{-i\omega_k t} M_{kj}(0)). \end{aligned} \quad (4.115)$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{\hat{Q}} | vac \rangle = \langle vac | e^{\hat{O}} = | vac \rangle \quad ; \quad \langle vac | e^{-\frac{1}{2}[\hat{O}, \hat{Q}]} | vac \rangle = e^{-\frac{1}{2}[\hat{O}, \hat{Q}]},$$

el resultado de (4.113) es

$$X(\{\lambda_i\}) = \langle vac | e^{\hat{O}} e^{\hat{Q}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{O}, \hat{Q}]} | vac \rangle = e^{-\frac{1}{2}[\hat{O}, \hat{Q}]}. \quad (4.116)$$

Desarrollando (4.116) a partir de (4.115), se tiene:

$$X(\{\lambda\}) = e^{-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k (\lambda_i e^{i\omega_i t} M_{ij}^*(0) - \lambda_i^* e^{-i\omega_i t} N_{ij}(0)) (\lambda_k^* e^{-i\omega_k t} M_{kj}(0) - \lambda_k e^{i\omega_k t} N_{kj}^*(0))}. \quad (4.117)$$

Efectuando el producto dentro del argumento de la exponencial y realizando algún cambio de índices dentro de los sumatorios con el objeto de simplificar la expresión, se llega finalmente a:

$$X(\{\lambda\}) = e^{-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j [\lambda_i \lambda_j^* H_{ij}(t) - \lambda_i \lambda_j L_{ij}^*(t) - \lambda_i^* \lambda_j^* L_{ij}(t)]}, \quad (4.118)$$

donde hemos definido las matrices H y L cuyos elementos son

$$H_{ij}(t) = e^{i(\omega_i - \omega_j)t} \sum_k [M_{ik}^*(0) N_{jk}(0) + N_{ik}^*(0) N_{jk}(0)], \quad (4.119)$$

$$L_{ij}(t) = e^{-i(\omega_i + \omega_j)t} \sum_k M_{ik}(0) N_{jk}(0). \quad (4.120)$$

Se puede comprobar sin dificultad que H es hermítica. Por otro lado, utilizando (4.106) puede verse que L es simétrica. También, aplicando en (4.119) la expresión (4.107), vamos a expresar H de otra forma:

$$H_{ij} = \delta_{ij} + 2e^{i(\omega_i - \omega_j)t} \sum_k N_{ik}^*(0) N_{jk}^*(0). \quad (4.121)$$

Descompondremos a continuación los números complejos λ_i y las matrices H y G en sus partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i^R + i\lambda_i^I, \\ H_{ij} &= H_{ij}^R + iH_{ij}^I, \\ L_{ij} &= L_{ij}^R + iL_{ij}^I. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Sustituyendo (4.121) y (4.120) en (4.118), y teniendo en cuenta las siguientes propiedades de hermiticidad y simetría de H y L :

$$\begin{aligned} H_{ij} = H_{ij}^* &\rightarrow H_{ij}^R = H_{ji}^R ; H_{ij}^I = -H_{ji}^I \\ L_{ij} = L_{ij} &\rightarrow L_{ij}^R = L_{ji}^R ; L_{ij}^I = L_{ji}^I, \end{aligned} \quad (4.123)$$

se obtiene la siguiente expresión para la función característica:

$$X(\{\lambda\}) = e^{-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j [\lambda_i^R (H^R - 2L^R)_{ij} \lambda_j^R + \lambda_i^I (H^R + 2L^R)_{ij} \lambda_j^I + 2\lambda_i^R (H^I - 2L^I)_{ij} \lambda_j^I]}. \quad (4.124)$$

Finalmente, definiendo las matrices

$$\lambda_R = \begin{pmatrix} \lambda_1^R \\ \lambda_2^R \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} ; \quad \lambda_I = \begin{pmatrix} \lambda_1^I \\ \lambda_2^I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

la función característica queda

$$X(\{\lambda\}) = e^{-\frac{1}{2}[\lambda_R^T A \lambda_R + \lambda_I^T A' \lambda_I + 2\lambda_R^T B \lambda_I]}, \quad (4.125)$$

siendo

$$A = H^R - 2L^R ; \quad A' = H^R + 2L^R$$

$$B = H^I - 2L^I ; \quad B' = H^I + 2L^I.$$

4.8.2 Cálculo de la función de Wigner

La distribución de Wigner se define a partir de la función característica (ver (3.24)), en el caso multimodo, de la forma siguiente:

$$W(\{\alpha\}) = \int \prod_m \frac{1}{\pi^2} d\lambda_m^R d\lambda_m^I X(\{\lambda\}) e^{-2i\alpha_m^R \lambda_m^I + 2i\alpha_m^I \lambda_m^R}. \quad (4.126)$$

Sustituyendo (4.125) en (4.126), y definiendo las matrices

$$\gamma_R = \begin{pmatrix} \gamma_1^R \\ \gamma_2^R \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} ; \quad \gamma_I = \begin{pmatrix} \gamma_1^I \\ \gamma_2^I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

se tiene:

$$W(\{\alpha\}) = \int \left(\prod_m \frac{1}{\pi^2} d\lambda_m^R d\lambda_m^I \right) e^{-\frac{1}{2}[\lambda_R^T A \lambda_R + \lambda_I^T A' \lambda_I + 2\lambda_R^T B \lambda_I]} \\ \times e^{-2i\gamma_R^T \lambda_I} e^{2i\gamma_I^T \lambda_I}. \quad (4.127)$$

El cálculo de la integral anterior es inmediato utilizando la expresión siguiente (Ryder, 1985; página 183):

$$\begin{aligned}
& \int \left(\prod_{n=1}^r dx_n \right) e^{-\frac{1}{2} X^T C X - X^T b} e^{i k^T X} = \\
& = \frac{(2\pi)^{\frac{r}{2}}}{(\det C)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2} b^T C^{-1} b - \frac{1}{2} k^T C^{-1} k - i k^T C^{-1} b}. \quad (4.128)
\end{aligned}$$

Tras integrar en $\prod_m d\lambda_m^R$ y $\prod_m d\lambda_m^I$, queda finalmente:

$$\begin{aligned}
W(\{\alpha\}) &= \left(\prod_m \frac{2}{\pi} \right) \{ \det[A(A' + B'A^{-1}B)] \}^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \exp\left\{ -2 \left[\alpha_I^T A^{-1} \alpha_I + (\alpha_R^T + \alpha_I^T A^{-1} B)(A + B'A^{-1}B)^{-1} (\alpha_R - B'A^{-1} \alpha_I) \right] \right\}. \quad (4.129)
\end{aligned}$$

Capítulo 5

LA TEORIA DE LA DETECCIÓN EN LA REPRESENTACIÓN DE WIGNER

5.1 INTRODUCCIÓN

Para estudiar los experimentos de óptica cuántica utilizando la representación de Wigner debemos obtener las expresiones correspondientes a las probabilidades de detección en dicho formalismo. Para ello, expresaremos el ordenamiento normal de operadores, el cual es básico en el proceso de detección por absorción, en términos de productos simétricamente ordenados. Esto último lo haremos utilizando la propiedad (3.36) de la función de Wigner, la cual puede generalizarse al caso multimodo: el promedio en el espacio de Hilbert de cualquier polinomio simétrico en operadores de creación y destrucción es igual al valor medio, con la función de Wigner, del polinomio complejo resultante de sustituir los operadores de destrucción $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ por variables complejas $\alpha_{\mathbf{k}}$, y los de creación $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ por su compleja conjugada $\alpha_{\mathbf{k}}^*$, es decir ¹

$$\langle P(\alpha, \alpha^*) \rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) W(\alpha, \alpha^*) d^{2M} \alpha = \text{Tr} \{ \rho S[P(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] \}, \quad (5.1)$$

donde M es el número de variables $\alpha_{\mathbf{k}}$ definidas y $S[\]$ significa simetrización, que consiste en promediar sobre todos los posibles ordenamientos de los operadores. Por ejemplo,

¹Con el objeto de simplificar la notación, el conjunto de amplitudes asociadas a todos los modos del campo se representará por α .

$$S[\hat{E}^{(+)}\hat{E}^{(-)}] = \frac{1}{2}(\hat{E}^{(+)}\hat{E}^{(-)} + \hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}). \quad (5.2)$$

5.2 PROBABILIDAD DE DETECCIÓN SIMPLE

En la formulación del espacio de Hilbert se define la probabilidad de detección por unidad de tiempo en un instante t , en el caso de detectores puntuales, a una cantidad proporcional al promedio (Glauber, 1963b; 1965):

$$\langle \phi_o | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | \phi_o \rangle, \quad (5.3)$$

donde \mathbf{r}_a es la posición del detector y el tiempo t está incluido en el operador campo en el marco de Heisenberg, siendo $|\phi_o\rangle$ el estado inicial de la radiación. Dado que el fenómeno de la detección requiere de un intervalo de tiempo durante el cual la luz incida sobre el detector, la cantidad que tiene sentido físico es la integración de (5.3) en dicho intervalo. La probabilidad total de detección entre t y $t+w$, donde w recibe el nombre de *ventana de detección*, es proporcional a la cantidad

$$\int_t^{t+w} \langle \phi_o | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t') | \phi_o \rangle dt'. \quad (5.4)$$

Dado que (5.3) está en orden normal, no es obvia a priori la aplicación de (5.1). No obstante, el detalle esencial por el que podemos expresar (5.3) en términos de productos simétricamente ordenados, se basa en que el conmutador de los operadores campo es un número complejo. Veamos qué efecto tiene esto último sobre (5.3). Para ello, lo expresaremos de la forma

$$\begin{aligned} & \langle \phi_o | \frac{1}{2} [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) + \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] | \phi_o \rangle \\ & - \langle \phi_o | \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) - \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)] | \phi_o \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

El primer término de (5.5) es el simetrizado de $\hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}$ (ver (5.2)). Teniendo en cuenta (5.1), tenemos

$$\langle \phi_o | S[\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)] | \phi_o \rangle = \langle I(\mathbf{r}_a, t) \rangle, \quad (5.6)$$

donde $I(\mathbf{r}_a, t) = |E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)|^2$ es la intensidad asociada al campo $E(\mathbf{r}_a, t)$ y $\langle \rangle$ representa el promedio con la función de Wigner W_{ϕ_o} correspondiente al estado inicial. De esta forma, tenemos

$$\langle I(\mathbf{r}_a, t) \rangle = \int d^{2M} \alpha W_{\phi_o}(\alpha, \alpha^*) |E^{(+)}(\alpha, \alpha^*; \mathbf{r}_a, t)|^2. \quad (5.7)$$

En el segundo sumando de (5.5) aparece el conmutador de $\hat{E}^{(+)}$ y $\hat{E}^{(-)}$. Para analizar dicha cantidad seguiremos los pasos siguientes:

1. Como el conmutador no es un operador, su promedio es independiente del estado, es decir

$$\langle \phi_o | \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] | \phi_o \rangle = \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)], \quad (5.8)$$

dado que $\langle \phi_o | \phi_o \rangle = 1$.

2. Por otro lado, como las relaciones de conmutación a tiempos iguales se conservan en cualquier evolución unitaria, dicho conmutador es igual a su valor en $t = 0$, de manera que ²

$$[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] = [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, 0), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, 0)].$$

3. Promediando en el estado de vacío, y dado que la actuación de $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, 0)$ sobre dicho estado es igual a cero porque sólo contiene operadores de destrucción, podemos sustituir el conmutador por el anticonmutador, obteniendo finalmente

$$\langle vac | S[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, 0)\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, 0)] | vac \rangle = \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_a, 0)|^2 \rangle_o = I_{oa} \quad (5.9)$$

donde $\langle \rangle_o$ significa que estamos promediando con la función de Wigner del vacío (4.14). La cantidad que aparece dentro del promedio es la intensidad de la radiación de punto cero para una realización dada de dicho proceso, es decir, $I_o(\alpha, \alpha^*; \mathbf{r}_a) \equiv |E^{(+)}(\alpha, \alpha^*; \mathbf{r}_a, t = 0)|^2$, de forma que $I_{oa} = \langle I_o(\alpha, \alpha^*; \mathbf{r}_a) \rangle_o$ es el promedio de la intensidad del vacío en el detector.

Teniendo en cuenta (5.6) y (5.9), tenemos (Casado et al., 1997a):

$$P_a(\mathbf{r}_a, t) \propto \langle I(\mathbf{r}_a, t) \rangle - I_{oa} = \langle I(\mathbf{r}_a, t) - I_{oa} \rangle, \quad (5.10)$$

²Como en este apartado no estamos haciendo referencia a la conversión a la baja, tomaremos por simplicidad el instante inicial como $t = 0$, en lugar de $t = -\Delta t$.

donde hemos representado la probabilidad por unidad de tiempo en \mathbf{r}_a por $P_a(\mathbf{r}_a, t)$, y la igualdad en (5.10) se tiene porque I_{oa} es una constante.

Por otro lado, como en los experimentos de conversión a la baja el estado inicial es el vacío, entonces $\langle \rangle \equiv \langle \rangle_o$, es decir, el promedio en (5.10) se toma con la función de Wigner de dicho estado.

La expresión (5.10) nos muestra la importancia que tiene la radiación de punto cero en el fenómeno de la detección. La probabilidad de detección por unidad de tiempo es proporcional al promedio con la función de Wigner del estado inicial, W_{ϕ_o} , de la intensidad instantánea en la posición del detector menos la correspondiente a la radiación de punto cero en dicha posición. I_{oa} no depende explícitamente de la posición (véase la expresión (4.48)), pero su valor sí depende del conjunto de modos que el detector recibe:

$$I_{oa} = \frac{1}{L^3} \sum_{[\mathbf{k}]_a} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}, \quad (5.11)$$

donde hemos sustituido "s" por "a" en (4.48).

Teniendo en cuenta la ventana de detección, tenemos

$$P_a(\mathbf{r}_a, t) \propto \int_0^w \langle I(\mathbf{r}_a, t + \tau) - I_{oa} \rangle d\tau. \quad (5.12)$$

Nótese que la expresión anterior tiene dimensiones de energía y por tanto no es una probabilidad. Para obtener una expresión adimensional tendremos en consideración que en los experimentos, los modos a los que el detector responde y en los que la amplitud difiere de forma significativa de la correspondiente al punto cero, están concentrados en un intervalo estrecho alrededor de una frecuencia media ω_a . Multiplicando por $\eta/\hbar\omega_a$, donde η es la eficiencia del detector, la expresión final para la probabilidad dentro de la ventana es

$$P_a(\mathbf{r}_a, t) = \frac{\eta}{\hbar\omega_a} \int_0^w d\tau \langle I(\mathbf{r}_a, t + \tau) - I_{oa} \rangle. \quad (5.13)$$

En el caso de la conversión a la baja, la cual está representada por un proceso estacionario, (5.13) es independiente de t .

5.3 PROBABILIDAD DE DETECCIÓN CONJUNTA

Dividiremos esta sección en dos partes: en la primera se obtendrá la expresión de la probabilidad conjunta para cualquier experimento de óptica cuántica

en el que haya detección por absorción; analizaremos los casos de detectores espacialmente separados, en el sentido de la relatividad espacial, y aquel en el que los detectores reciben modos distintos de la radiación de punto cero. En la segunda parte particularizaremos al caso de los experimentos de conversión a la baja, obteniendo de la expresión general otra más sencilla que se deducirá de la consideración de que el campo radiado por el cristal es gaussiano.

5.3.1 Expresión de la probabilidad conjunta en la función de Wigner

La expresión para la densidad de probabilidad de detección conjunta por unidad de tiempo es (Glauber, 1963):

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') \propto \langle \phi_o | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | \phi_o \rangle, \quad (5.14)$$

donde (\mathbf{r}_a, t) y (\mathbf{r}_b, t') señalan la localización e instante de las detecciones.

Si bien estamos trabajando en la imagen de Heisenberg, vamos a pensar por un momento en términos de las imágenes de Schrödinger o interacción, en las que el operador $E^{(+)}$ contiene sólo operadores de destrucción de modos del vacío, y el estado depende del tiempo. La razón es la siguiente: en la expresión (5.46) del apéndice se muestra la relación entre el orden normal y el orden simétrico, la cual es similar al teorema de Wick (Ballentine, 1990; página 460). Aplicando dicha expresión para $\hat{a} \equiv \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)$ y $\hat{b} \equiv \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t')$, y teniendo en cuenta que el conmutador entre \hat{a} y \hat{b} es nulo porque dichos operadores sólo contienen operadores de destrucción de modos del vacío, tenemos

$$\begin{aligned} & \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \\ &= S \left\{ \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) - \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] \right) \right. \\ & \times \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') - \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] \right) \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} S \left(\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \right) \left[\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \right] \\ & + \frac{1}{2} S \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \right) \left[\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \right] \left[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \right]. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Utilizando el argumento que permitió expresar el segundo sumando de (5.5) a partir de la intensidad de la radiación de punto cero en la posición del detector, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] &= I_0(\mathbf{r}_a), \\ \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] &= I_0(\mathbf{r}_b). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Nótese que (5.15) es una relación entre operadores que no depende del estado de la radiación ni de la imagen que se está utilizando. Los conmutadores que aparecen en esta expresión tampoco dependen del estado, y por tanto se trata de contribuciones del vacío a la detección. Si promediamos en el estado inicial de la radiación (imagen de Heisenberg), los operadores contienen entonces toda la información del proceso, aunque el valor de los conmutadores no se altera. Teniendo en cuenta (5.1) en (5.15) se tiene

$$\begin{aligned} P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') &\propto \langle \{I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a)\} \{I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b)\} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)] \\ &+ \frac{1}{2} \langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t')] \\ &+ \frac{1}{4} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)], \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde hemos sustituido en algunos términos los operadores $\hat{E}^{(\pm)}$ por funciones complejas $E^{(\pm)}$, y los promedios se toman con la función de Wigner del estado inicial.

La expresión (5.17) contiene tres tipos de contribuciones: (i) la primera de ellas es el promedio, con la función de Wigner del estado inicial, del producto de las diferencias, evaluadas en ambos detectores, entre la intensidad instantánea y la correspondiente a la radiación de punto cero. Nótese que el promedio de cada diferencia es proporcional a la tasa de detección simple en cada detector; (ii) la segunda contribución contiene promedios de productos del tipo $E_a^{(+)} E_b^{(-)}$, multiplicados por contribuciones del vacío a través de conmutadores del tipo $[\hat{E}_a^{(+)}, \hat{E}_b^{(-)}]$; (iii) finalmente, una contribución del punto cero consistente en el producto de dos conmutadores.

Para evaluar el conmutador que aparece en los tres últimos sumandos de (5.17) expresaremos los operadores campo en los detectores:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_a} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a - \omega_{\mathbf{k}} t)} \hat{a}_{0\mathbf{k}}, \quad (5.18)$$

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') = -i \sum_{[\mathbf{k}']_b} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}'}}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_b + \omega_{\mathbf{k}'} t')} \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^{\dagger}, \quad (5.19)$$

donde $\hat{a}_{0\mathbf{k}'}^{\dagger}$ es el operador de creación del modo \mathbf{k}' del vacío, y $[\mathbf{k}']_a$ y $[\mathbf{k}]_b$ son los conjuntos de modos de la radiación a los que responden los detectores. Consideremos las dos situaciones siguientes:

1. Los conjuntos $[\mathbf{k}']_b$ y $[\mathbf{k}]_a$ no se solapan, de forma que el conmutador entre los operadores (5.18) y (5.19) es nulo. En este caso, la tasa de detección conjunta es

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') \propto \langle \{I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a)\} \{I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b)\} \rangle. \quad (5.20)$$

Como veremos más adelante, esta es la situación en la mayoría de los experimentos de conversión a la baja.

2. Los conjuntos $[\mathbf{k}']_b$ y $[\mathbf{k}]_a$ tienen modos comunes, de forma que el conmutador en un principio no se anula. El valor de dicho conmutador es

$$[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] = \sum_{[\mathbf{k}]_{ab}} \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) - \omega_{\mathbf{k}}(t - t')]}, \quad (5.21)$$

donde hemos llamado $[\mathbf{k}]_{ab}$ al conjunto de modos correspondiente a la intersección de $[\mathbf{k}']_a$ y $[\mathbf{k}]_b$. Ahora bien, el conmutador de los operadores campo $\hat{E}(\mathbf{r}_a, t)$ y $\hat{E}(\mathbf{r}_b, t')$ es (Glauber, 1963a):

$$\begin{aligned} & [\hat{E}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}(\mathbf{r}_b, t')] \\ &= [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] - c.c = D(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, t - t'), \end{aligned} \quad (5.22)$$

siendo D una función que tiende a cero cuando $(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)^2 > c^2(t - t')^2$, caso en el que no puede haber influencia local entre ambos procesos de detección. Es decir, cuando se verifica la condición de microcausalidad la tasa de detección conjunta es el promedio del producto de las diferencias, evaluadas en ambos detectores, de la diferencia entre la intensidad instantánea y la correspondiente a la radiación de punto cero (ecuación (5.20)).

5.3.2 Aplicación a los experimentos de conversión a la baja

Volvamos de nuevo a la expresión (5.17). En el caso particular de los experimentos de conversión a la baja, los campos en los detectores son el resultado

de la transformación lineal de los haces que salen del cristal tras su paso por distintos elementos ópticos. Como el carácter gaussiano de los campos no se modifica por las transformaciones lineales, deducimos que los campos en los detectores vienen representados por procesos estocásticos gaussianos. Vamos a utilizar esta propiedad para expresar de otra forma el primer término de (5.17). Para ello, tendremos en cuenta que las correlaciones de orden par se obtienen a partir de las de segundo orden en el caso de procesos gaussianos. En concreto, dadas cuatro variables gaussianas A, B, C y D , se verifica (Mandel y Wolf, 1995; sección 1.6.1):

$$\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle. \quad (5.23)$$

Teniendo en cuenta (5.23) en el primer término de (5.17), tenemos

$$\begin{aligned} & \langle \{I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a)\} \{I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b)\} \rangle \\ &= \langle I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a) \rangle \langle I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b) \rangle \\ & \quad + |\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle|^2 \\ & \quad + |\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle|^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sustituyendo (5.24) en (5.17) y realizando operaciones sencillas se llega a la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} P_{ab}(t, t') & \propto |\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle|^2 \\ & \quad + \langle I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a) \rangle \langle I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b) \rangle \\ & \quad + \left| \langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle + \frac{1}{2} [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)] \right|^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dado que los dos últimos términos de (5.25) son de cuarto orden en la constante de acoplamiento, pueden despreciarse frente al primero, el cual es de orden g^2 (Mollow, 1973). Por tanto:

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') \propto |\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle|^2. \quad (5.26)$$

Para calcular la probabilidad total dentro de los intervalos $(t_a, t_a + w)$ y $(t_b, t_b + w)$, donde consideraremos por simplicidad la misma ventana para sendas detecciones, hemos de integrar (5.26). Teniendo en cuenta las eficiencias de los detectores, y que los modos de la radiación cuya amplitud difiere significativamente de la del vacío están concentrados en bandas estrechas alrededor de ω_a y ω_b respectivamente, tenemos:

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t_a; \mathbf{r}_b, t_b) = \frac{\eta^2}{\hbar^2 \omega_a \omega_b} \int_{t_a}^{t_a+w} dt \int_{t_b}^{t_b+w} dt' |\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle|^2. \quad (5.27)$$

Por simplicidad hemos asumido también que ambos detectores tienen la misma eficiencia η . Finalmente, teniendo en cuenta que el proceso es estacionario, la integral doble se puede transformar en una simple, de la forma

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \frac{w\eta^2}{\hbar^2 \omega_a \omega_b} \int_0^w d\tau |\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) \rangle|^2, \quad (5.28)$$

expresión que es independiente de t .

La cuestión que debemos plantearnos a continuación, y que constituye una de las partes más importantes de esta tesis, es si (5.26) es igual (5.20), es decir, si el conmutador $[\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)]$ es nulo en los experimentos de conversión a la baja que analizaremos en el capítulo 6. La respuesta es afirmativa salvo en uno de ellos, el experimento de interferencia de haces señal y gemelo (Ghosh et al., 1986; Ghosh y Mandel, 1987) donde veremos que el conmutador anterior no es nulo porque existe un solapamiento de los modos de vacío que intervienen en ambos campos. En los demás experimentos demostraremos que dicha cantidad es nula porque los modos del punto cero que intervienen en sendas detecciones están descorrelacionados. En estas situaciones, tendremos:

$$\begin{aligned} P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') &\propto \langle \{I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a)\} \{I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b)\} \rangle \\ &= |\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \rangle|^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.4 APENDICE: SIMETRIZACIÓN DE $\hat{a}'\hat{b}'\hat{b}\hat{a}$

Hemos de expresar $\hat{a}'\hat{b}'\hat{b}\hat{a}$ en términos de productos simétricamente ordenados. Ello puede hacerse dado que el conmutador entre dos operadores campo cualesquiera es un número complejo. Sean los operadores

$$\hat{A} = \hat{a} + \hat{a}' \quad ; \quad \hat{B} = \hat{b} + \hat{b}'. \quad (5.30)$$

Vamos a partir de la relación (3.31):

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}. \quad (5.31)$$

Por un lado,

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = 1 + \hat{A} + \hat{B} + \frac{(\hat{A} + \hat{B})^2}{2} + \frac{(\hat{A} + \hat{B})^3}{6} + \frac{(\hat{A} + \hat{B})^4}{256} + \dots \quad (5.32)$$

El término de cuarto orden, el cual contiene 256 sumandos, recoge los 24 que constituyen el simetrizado de $\hat{a}\hat{a}'\hat{b}\hat{b}'$. Por tanto,

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = S(\hat{a}\hat{a}'\hat{b}\hat{b}') + \dots \quad (5.33)$$

Analicemos a continuación la parte derecha de (5.31). Necesitamos sólo aquellos términos que den lugar a la parte derecha de (5.33). Para ello, desarrollaremos las tres exponenciales de la forma siguiente:

$$e^{\hat{a}+\hat{a}'} = 1 + \hat{a} + \hat{a}' + \frac{(\hat{a} + \hat{a}')^2}{2} + \dots = 1 + \hat{a} + \hat{a}' + S(\hat{a}\hat{a}') + \dots \quad (5.34)$$

$$e^{\hat{b}+\hat{b}'} = 1 + \hat{b} + \hat{b}' + S(\hat{b}\hat{b}') + \dots \quad (5.35)$$

$$e^{\frac{1}{2}[\hat{b}+\hat{b}',\hat{a}+\hat{a}']} = 1 + \frac{1}{2}[\hat{b} + \hat{b}', \hat{a} + \hat{a}'] + \frac{1}{8}[\hat{b} + \hat{b}', \hat{a} + \hat{a}']^2 + \dots \quad (5.36)$$

En (5.34), (5.35), y (5.36) hemos retenido hasta los términos de orden dos, puesto que el resto daría lugar a sumandos con más de cuatro operadores, o a sumandos de cuatro operadores que no contienen alguno de los operadores \hat{b} , \hat{b}' , \hat{a} y \hat{a}' . Del producto de los tres desarrollos anteriores nos quedaremos por tanto con aquellos términos que contengan los cuatro operadores anteriores. Por un lado, tenemos

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} = \frac{1}{8} [\hat{b} + \hat{b}', \hat{a} + \hat{a}']^2 + \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}')(\hat{b} + \hat{b}') [\hat{b} + \hat{b}', \hat{a} + \hat{a}'] \\ + S(\hat{a}\hat{a}')S(\hat{b}\hat{b}') + \dots, \quad (5.37)$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{8} [\hat{b} + \hat{b}', \hat{a} + \hat{a}']^2 = \frac{1}{8} ([\hat{b}, \hat{a}] + [\hat{b}, \hat{a}'] + [\hat{b}', \hat{a}] + [\hat{b}', \hat{a}'])^2 \\ = \frac{1}{4} [\hat{b}, \hat{a}] [\hat{b}', \hat{a}'] + \frac{1}{4} [\hat{b}, \hat{a}'] [\hat{b}', \hat{a}] + \dots, \quad (5.38)$$

y

$$\frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}')(\hat{b} + \hat{b}') [\hat{b} + \hat{b}', \hat{a} + \hat{a}'] \\ = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}')(\hat{b} + \hat{b}') ([\hat{b}, \hat{a}] + [\hat{b}, \hat{a}'] + [\hat{b}', \hat{a}] + [\hat{b}', \hat{a}']) \\ = \frac{1}{2}\hat{a}\hat{b} [\hat{b}', \hat{a}'] + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{b}' [\hat{b}, \hat{a}'] + \frac{1}{2}\hat{a}'\hat{b} [\hat{b}', \hat{a}] + \frac{1}{2}\hat{a}'\hat{b}' [\hat{b}, \hat{a}] + \dots \quad (5.39)$$

Sustituyendo (5.38) y (5.39) en (5.37) y teniendo en cuenta (5.33) y (5.31), tenemos

$$S(\hat{a}\hat{a}'\hat{b}\hat{b}') = S(\hat{a}\hat{a}')S(\hat{b}\hat{b}') + \frac{1}{4} [\hat{b}, \hat{a}] [\hat{b}', \hat{a}'] + \frac{1}{4} [\hat{b}, \hat{a}'] [\hat{b}', \hat{a}] \\ + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{b} [\hat{b}', \hat{a}'] + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{b}' [\hat{b}, \hat{a}'] + \frac{1}{2}\hat{a}'\hat{b} [\hat{b}', \hat{a}] + \frac{1}{2}\hat{a}'\hat{b}' [\hat{b}, \hat{a}]. \quad (5.40)$$

Por otro lado, el producto de cualesquiera dos operadores puede expresarse fácilmente en orden simétrico, teniendo en cuenta que su conmutador es un número. Por ejemplo,

$$\hat{a}\hat{b} = S(\hat{a}\hat{b}) + \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{b}]. \quad (5.41)$$

Teniendo en cuenta esto último puede verse fácilmente que (5.40) puede expresarse como

$$S(\hat{a}\hat{a}'\hat{b}\hat{b}') = S(\hat{a}\hat{a}')S(\hat{b}\hat{b}') + \frac{1}{4} [\hat{b}, \hat{a}] [\hat{a}', \hat{b}'] + \frac{1}{4} [\hat{b}, \hat{a}'] [\hat{a}, \hat{b}'] \\ + \frac{1}{2}S(\hat{a}\hat{b}) [\hat{b}', \hat{a}'] + \frac{1}{2}S(\hat{a}\hat{b}') [\hat{b}, \hat{a}'] + \frac{1}{2}S(\hat{a}'\hat{b}) [\hat{b}', \hat{a}] + \frac{1}{2}S(\hat{a}'\hat{b}') [\hat{b}, \hat{a}]. \quad (5.42)$$

Por otro lado, a partir de (5.41), el producto $\hat{a}\hat{a}'\hat{b}\hat{b}'$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 \hat{a}\hat{a}'\hat{b}\hat{b}' &= \left(S(\hat{a}\hat{a}') - \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{a}'] \right) \left(S(\hat{b}\hat{b}') - \frac{1}{2} [\hat{b}, \hat{b}'] \right) \\
 &\longrightarrow S(\hat{a}\hat{a}')S(\hat{b}\hat{b}') = \hat{a}'\hat{a}\hat{b}'\hat{b} + \frac{1}{2}S(\hat{a}\hat{a}') [\hat{b}, \hat{b}'] \\
 &\quad + \frac{1}{2}S(\hat{b}\hat{b}') [\hat{a}, \hat{a}'] - \frac{1}{4} [\hat{a}, \hat{a}'] [\hat{b}, \hat{b}'] . \tag{5.43}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (5.43) en (5.42), y despejando $\hat{a}'\hat{a}\hat{b}'\hat{b}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}'\hat{a}\hat{b}'\hat{b} &= S \left((\hat{a}\hat{a}' - \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{a}']) (\hat{b}\hat{b}' - \frac{1}{2} [\hat{b}, \hat{b}']) \right) - \frac{1}{2}S(\hat{a}\hat{b}) [\hat{b}', \hat{a}'] \\
 &\quad - \frac{1}{2}S(\hat{a}\hat{b}') [\hat{b}, \hat{a}'] - \frac{1}{2}S(\hat{a}'\hat{b}) [\hat{b}', \hat{a}] - \frac{1}{2}S(\hat{a}'\hat{b}') [\hat{b}, \hat{a}] \\
 &\quad - \frac{1}{4} [\hat{a}, \hat{b}'] [\hat{b}, \hat{a}'] - \frac{1}{4} [\hat{a}', \hat{b}'] [\hat{b}, \hat{a}]. \tag{5.44}
 \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 \hat{a}'\hat{a}\hat{b}'\hat{b} &= \hat{a}'\hat{b}'\hat{a}\hat{b} + \hat{a}'\hat{b} [\hat{a}, \hat{b}'] = \hat{a}'\hat{b}'\hat{b}\hat{a} + \hat{a}'\hat{b}' [\hat{a}, \hat{b}] + \hat{a}'\hat{b} [\hat{a}, \hat{b}'] \\
 &= \hat{a}'\hat{b}'\hat{b}\hat{a} + S(\hat{a}'\hat{b}') [\hat{a}, \hat{b}] + S(\hat{a}'\hat{b}) [\hat{a}, \hat{b}'] + \frac{1}{2} [\hat{a}', \hat{b}'] [\hat{a}, \hat{b}] + \frac{1}{2} [\hat{a}', \hat{b}] [\hat{a}, \hat{b}'] , \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

donde hemos vuelto aplicar (5.41), tenemos, sustituyendo en (5.44) y despejando $\hat{a}'\hat{b}'\hat{b}\hat{a}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}'\hat{b}'\hat{b}\hat{a} &= S \left((\hat{a}\hat{a}' - \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{a}']) (\hat{b}\hat{b}' - \frac{1}{2} [\hat{b}, \hat{b}']) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}S(\hat{a}\hat{b}) [\hat{a}', \hat{b}'] + \frac{1}{2}S(\hat{a}'\hat{b}') [\hat{b}, \hat{a}] + \frac{1}{4} [\hat{a}', \hat{b}'] [\hat{b}, \hat{a}] \\
 &\quad + \frac{1}{2}S(\hat{a}'\hat{b}) [\hat{b}', \hat{a}] + \frac{1}{2}S(\hat{a}\hat{b}') [\hat{a}', \hat{b}] + \frac{1}{4} [\hat{a}, \hat{b}'] [\hat{b}, \hat{a}'] . \tag{5.46}
 \end{aligned}$$

Capítulo 6

ANÁLISIS DE LOS EXPERIMENTOS

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a analizar algunos de los experimentos realizados hasta el momento con el conversor paramétrico a la baja, dentro del ámbito de los problemas fundamentales de la mecánica cuántica. Para ello, utilizaremos el formalismo de la función de Wigner desarrollado en los dos capítulos anteriores, con el que hemos caracterizado la propagación de la luz convertida a la baja, así como el fenómeno de la detección. Por un lado, las ideas desarrolladas en el capítulo 4 nos permitirán describir en cada uno de los experimentos cómo se propaga la luz desde el cristal hasta los detectores. Los elementos ópticos colocados a la salida del medio no lineal (divisores de haz, láminas de media onda, polarizadores, medios dispersivos, etc..) tienen el efecto de transformar linealmente los haces antes de llegar a los detectores. Por otro lado, la teoría de la detección analizada en el capítulo 5 nos servirá para analizar las interferencias de segundo y/o cuarto orden en cada uno de los experimentos.

Hemos dividido el capítulo en dos partes. En la primera analizaremos experimentos que muestran el carácter no clásico de la luz; comenzaremos por los experimentos de coherencia espacial y temporal, y más adelante analizaremos los experimentos de creación frustrada de fotones por interferencia, el experimento de coherencia inducida, la cancelación de la dispersión, y el borrador cuántico. En la segunda parte trataremos los experimentos en los que se contrastan experimentalmente las desigualdades de Bell: el experimento de Franson, el de Rarity y Tapster, y terminaremos por el análisis del experimento de Kwiat et al. (1995), donde se utiliza conversión tipo II no colineal, a diferencia del resto de los experimentos, los cuales parten de la conversión

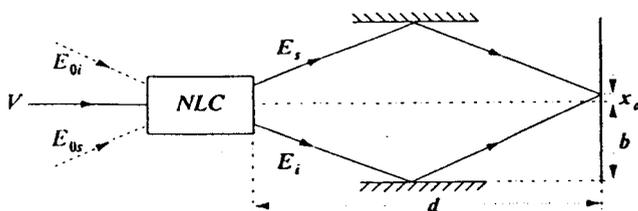


Figura 6.1: Experimento de interferencia en una pantalla: dos haces conjugados de la misma frecuencia inciden sobre una pantalla situada a una distancia d del cristal. Se estudian las interferencias de segundo y cuarto orden en la zona de intersección de ambos haces.

tipo I.

Además de reproducir los mismos resultados que se obtienen en el espacio de Hilbert, lo cual es obvio dado que se trata de formalismos equivalentes dentro de la mecánica cuántica, la función de Wigner proporciona una interpretación alternativa a los resultados, basada en la consideración de la radiación de punto cero en la propagación de la luz radiada por el cristal. Esta interpretación se comparará en algunos de los experimentos con la que se utiliza generalmente, basada en las reglas de Feynman (Feynman et al., 1965).

6.2 ASPECTOS NO CLÁSICOS DE LA LUZ CONVERTIDA A LA BAJA

6.2.1 Experimento de interferencia sobre una pantalla

Se seleccionan a la salida del cristal dos haces conjugados de la misma frecuencia, $\omega_0/2$ (caso degenerado), los cuales inciden sobre una pantalla tras ser reflejados por dos espejos situados a ambos lados de la dirección del haz incidente, y a una misma distancia b de la misma (ver Fig. 6.1). Si se miden cuentas simples en la zona de intersección de ambos haces sobre la pantalla no se observa ninguna variación en la tasa de detección cuando se varía la posición del detector; por tanto, no existe interferencia de segundo orden. Por el contrario, cuando se colocan dos detectores se observa que la tasa de coincidencias depende de la posición relativa entre ambos, lo cual refleja la existencia de interferencia de cuarto orden.

Analicemos en primer lugar la interferencia de segundo orden ¹. Sean r_s

¹Este experimento se ha estudiado con la función de Wigner en Casado et al. (1997b).

y r_i los caminos ópticos asociados a la señal y al gemelo entre el centro ² del cristal ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$) y el detector ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$). El valor del campo eléctrico ³ en la posición \mathbf{r}_a en el instante t es

$$\begin{aligned} F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \\ &= F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_s/c) e^{i\omega_0 r_s/2c} + F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_i/c) e^{i\omega_0 r_i/2c}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde hemos tenido en cuenta la propagación de $F_s^{(+)}$ desde el centro del cristal hasta los detectores dada por (4.40). Para el cálculo de la probabilidad de detección simple a partir de (5.10) hemos de obtener el promedio

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}_a, t) - I_{0a} \rangle &= \langle |F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)|^2 \rangle - \langle |F^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)|^2 \rangle \\ &= \langle |F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)|^2 \rangle - \langle |F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)|^2 \rangle + \langle |F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)|^2 \rangle - \langle |F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)|^2 \rangle \\ &\quad + 2\text{Re}[\langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_s/c) F_i^{(-)}(\mathbf{0}, t - r_i/c) \rangle e^{i\omega_0(r_s - r_i)/2c}]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ahora bien, dado que $F_s^{(+)}$ y $F_i^{(-)}$ están descorrelacionados (ver (4.68)), el último sumando es nulo. Como los restantes términos no dependen de \mathbf{r}_a , como puede apreciarse a partir de (4.62), no existe interferencia de segundo orden. Esta ausencia de interferencia en la tasa de detección simple se interpreta en Ghosh y Mandel (1987) como un fenómeno debido a la existencia de una fase aleatoria entre los fotones señal y gemelo.

Analicemos a continuación la interferencia de cuarto orden. Consideraremos un segundo detector situado en \mathbf{r}_b , también en la zona de intersección de ambos haces sobre la pantalla ⁴. Para calcular la probabilidad de coincidencia por unidad de tiempo en los instantes t y $t + \tau$ necesitamos la correlación $\langle F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) F^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) \rangle$, donde $F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)$ viene dado por (6.1), y

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) = F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - r'_s/c) e^{i\omega_0 r'_s/2c} + F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - r'_i/c) e^{i\omega_0 r'_i/2c}, \quad (6.3)$$

²Aunque el cristal tiene un tamaño finito, lo cual es necesario para que se verifiquen las condiciones de emparejamiento, consideraremos por simplicidad que el campo se propaga desde su centro a los detectores. Es una buena aproximación dado que las distancias entre el cristal y los detectores son mucho mayores que las dimensiones del medio no lineal. En lo sucesivo, relacionaremos el campo en los detectores con su valor en el centro del cristal.

³De ahora en adelante nos referiremos a $E^{(+)}$ cuando hablemos de "campo eléctrico". Por otro lado, cuando sobre el detector incide un haz de luz, o varios haces que tengan la misma frecuencia media, da lo mismo trabajar con $F^{(+)}$ que con $E^{(+)}$ en lo que se refiere al cálculo de las probabilidades (Casado et al., 1997b).

⁴La existencia de interferencia se explica generalmente mediante las reglas de Feynman. Para ello, hay que tener en cuenta cuáles son los posibles caminos que siguen los fotones antes de ser detectados en coincidencia. En este caso hay dos posibilidades: que la señal sea detectada en D_a y el gemelo en D_b , o que la señal se detecte en D_b y el gemelo en D_a . Como ambas situaciones son indistinguibles, sus "amplitudes de probabilidad" se suman, dando lugar a interferencia al tomar el módulo de dicha suma.

siendo r'_s y r'_i los caminos ópticos asociados a la señal y gemelo respectivamente entre el cristal y el segundo detector. Aplicando (5.26) se tiene

$$\begin{aligned}
P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t + \tau) &\propto \\
&|\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)F_s^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) \\
&+ F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau)F_s^{(+)}(\mathbf{r}_b, t) \rangle|^2 \\
&= |\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau)F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau)F_s^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') \rangle|^2 \\
&= |\langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_s/c)F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - r'_i/c) \rangle e^{i\omega_0(r_s+r'_i)/2c} \\
&+ \langle F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_i/c)F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - r'_s/c) \rangle e^{i\omega_0(r'_s+r_i)/2c} |^2, \quad (6.4)
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que las correlaciones $\langle F_s^{(+)}F_s^{(+)} \rangle$ y $\langle F_i^{(+)}F_i^{(+)} \rangle$ son nulas. A continuación, utilizando (4.78), obtenemos

$$\begin{aligned}
P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t + \tau) &\propto g^2|V|^2 \left\{ \left| \nu\left(\tau + \frac{r_s - r'_i}{c}\right) \right|^2 + \left| \nu\left(-\tau + \frac{r'_s - r_i}{c}\right) \right|^2 \right. \\
&\left. + 2\text{Re}\left[\nu\left(\tau + \frac{r_s - r'_i}{c}\right) \nu^*\left(-\tau + \frac{r'_s - r_i}{c}\right) e^{i\frac{\omega_0}{2c}(r_s+r'_i-r'_s-r_i)} \right] \right\}. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Sean x_a y x_b las abscisas de los detectores, y d la distancia entre el cristal y la pantalla. Dado que el ángulo que forman ambos haces con la dirección del láser incidente es muy pequeño, entonces $b \ll d$. Teniendo en cuenta esto último expresaremos r_s y r_i (r'_s y r'_i) a primer orden en x_a (x_b):

$$r_s - r'_i = r'_s - r_i = -\frac{2b}{d}(x_a + x_b) \quad ; \quad r_s + r'_i - r'_s - r_i = \frac{4b}{d}(x_b - x_a).$$

Sustituyendo en (6.5) y aplicando (5.28), se tiene finalmente:

$$\begin{aligned}
P_{ab}(x_a; x_b) &\approx \left(\frac{2\eta}{\hbar\omega_0} \right)^2 g^2|V|^2 w \int_0^w d\tau \left\{ \left| \nu\left(\tau - \frac{2b(x_a + x_b)}{dc}\right) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| \nu\left(-\tau - \frac{2b(x_a + x_b)}{dc}\right) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\text{Re}\left[\nu\left(\tau - \frac{2b(x_a + x_b)}{dc}\right) \nu^*\left(-\tau - \frac{2b(x_a + x_b)}{dc}\right) e^{i\frac{2\omega_0 b}{dc}(x_b - x_a)} \right] \right\}, \quad (6.6)
\end{aligned}$$

lo que muestra una dependencia de tipo coseno con $4\pi b(x_b - x_a)/\lambda_0 d$, siendo λ_0 la longitud de onda del láser. Por otro lado, la ventana de detección es mucho mayor que el tiempo de correlación de $\nu(\tau)$, el cual a su vez es mayor que $2b(x_a + x_b)/dc$, por lo que esta cantidad puede despreciarse dentro del argumento de la función ν y extender la integral entre 0 e ∞ . En estas condiciones, dado que $|\nu(\tau)|$ es par, tenemos finalmente

$$P_{ab}(x_a; x_b) \approx \left(\frac{2\eta}{\hbar\omega_0}\right)^2 g^2 |V|^2 2wC \left\{1 + \operatorname{Re}\left[e^{i\frac{2\omega_0 b}{dc}(x_b-x_a)} \frac{\int_0^\infty \nu(\tau)\nu^*(-\tau) d\tau}{C}\right]\right\}, \quad (6.7)$$

siendo

$$C = \int_0^\infty d\tau |\nu(\tau)|^2. \quad (6.8)$$

Analicemos finalmente el conmutador que aparece en la expresión de la probabilidad conjunta (5.17). Teniendo en cuenta (6.1) y (6.3), sustituyendo los campos complejos por operadores, y aplicando la conservación de las relaciones de conmutación entre los operadores campo a la entrada y salida del cristal, se tiene

$$\begin{aligned} & [\hat{F}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{F}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t + \tau)] \\ &= e^{i\omega_0(\tau_s - r'_s)/2c} [\hat{F}_{0s}^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_s/c), \hat{F}_{0s}^{(-)}(\mathbf{0}, t + \tau - r'_s/c)] \\ &+ e^{i\omega_0(\tau_i - r'_i)/2c} [\hat{F}_{0i}^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_i/c), \hat{F}_{0i}^{(-)}(\mathbf{0}, t + \tau - r'_i/c)] \neq 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

El conmutador no es nulo porque los modos de vacío que intervienen en ambos detectores están correlacionados. Ello es debido a la cercanía de los detectores, situados en la zona de intersección de los haces, lo que hace posible una influencia local entre ambas detecciones. Por tanto, la tasa de detección conjunta en este caso no es igual a (5.20).

Nótese finalmente que la existencia o no de interferencia de segundo y cuarto orden se interpreta a partir de la correlación existente entre las diferentes ondas que interfieren, la cual tiene su origen en la radiación de punto cero que entra en cristal y que se transforma al interaccionar con el medio junto con el láser incidente. En concreto, la interferencia de cuarto orden se produce porque la luz que llega a los dos detectores es la superposición de dos haces conjugados, los cuales tienen una correlación cruzada no nula.

6.2.2 Medida del tiempo de correlación entre haces conjugados por interferencia

El montaje experimental se muestra en la figura 6.2. Dos haces conjugados de frecuencias centrales ω_s y ω_i se seleccionan mediante filtros colocados a la salida del cristal. Dos espejos situados a ambos lados de la dirección del haz incidente reflejan ambos haces, los cuales se recombinan en un divisor de haz BS con coeficientes de transmisión y reflexión T y R respectivamente,

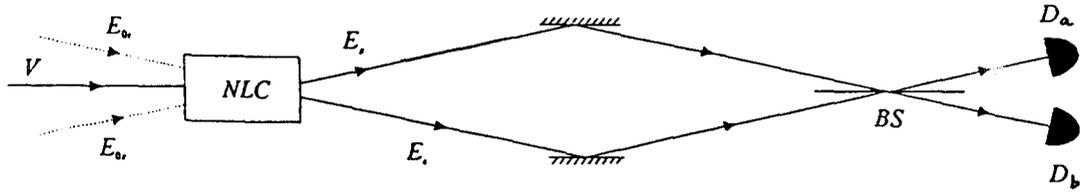


Figura 6.2: Montaje experimental para la medida del tiempo de correlación entre haces conjugados.

verificándose $R^2 + T^2 = 1$. En las direcciones de los canales de salida del divisor se colocan dos detectores D_a y D_b con el objeto de medir coincidencias para diferentes desplazamientos del divisor de haz respecto a la dirección del haz incidente. En primer lugar expresaremos el valor de los campos en D_a y D_b , situados en \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b respectivamente, en los instantes t y $t + \tau$. Si τ_a (τ_b) es el tiempo que tarda la señal (gemelo) en recorrer la distancia existente entre el centro del cristal y el divisor de haz, entonces⁵

$$\begin{aligned}
 E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= TE_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) + iRE_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \\
 &= Te^{-i\omega_i t} F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_b) e^{i\omega_i \tau_b} + iRe^{-i\omega_s t} F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_a) e^{i\omega_s \tau_a}, \\
 E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) &= TE_s^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) + iRE_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) \\
 &= Te^{-i\omega_s(t+\tau)} F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_a) e^{i\omega_s \tau_a} + iRe^{-i\omega_i(t+\tau)} F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_b) e^{i\omega_i \tau_b}, \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la relación entre $E^{(+)}$ y $F^{(+)}$ dada por (4.36), así como la propagación de $F^{(+)}$ desde el cristal a los detectores a partir de (4.40). Por simplicidad hemos ignorado el tiempo de propagación desde el divisor de haz a los detectores porque es el mismo para ambos haces; ello da lugar a un cambio de fase idéntico en ambos campos que no interviene en la probabilidad de detección.

Para ver que no existe interferencia de segundo orden nótese que el único término en (6.10) que podría dar lugar a dicha interferencia proviene de la correlación cruzada $\langle F_s^{(+)} F_i^{(-)} \rangle$, la cual es nula (ver (4.68)). Por otro lado, para calcular la probabilidad de detección conjunta necesitamos la correlación

$$\begin{aligned}
 &\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) \rangle \\
 &= e^{-i\omega_o t} e^{i\omega_s \tau_a + i\omega_i \tau_b} [T^2 e^{-i\omega_s \tau} \langle F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_b) F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_a) \rangle]
 \end{aligned}$$

⁵Nótese que en este caso no es equivalente usar $F^{(+)}$ o $E^{(+)}$ dado que el campo en cada detector es la superposición de haces de frecuencias medias distintas.

$$-R^2 e^{-i\omega_i \tau} \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_a) F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_b) \rangle] \\ = gV e^{-i\omega_o t} e^{i\omega_s \tau_a + i\omega_i \tau_b} [T^2 e^{-i\omega_s \tau} \nu(-\tau + \delta\tau) - R^2 e^{-i\omega_i \tau} \nu(\tau + \delta\tau)], \quad (6.11)$$

siendo $\delta\tau = \tau_a - \tau_b$. En la primera igualdad hemos tenido en cuenta que las autocorrelaciones $\langle F_i^{(+)} F_i^{(+)} \rangle$ y $\langle F_s^{(+)} F_s^{(+)} \rangle$ son nulas; la segunda igualdad se obtiene a partir de (4.78). A continuación, tomando el módulo al cuadrado de (6.11), se tiene:

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t + \tau) \propto g^2 |V|^2 \{T^4 |\nu(-\tau + \delta\tau)|^2 \\ + R^4 |\nu(\tau + \delta\tau)|^2 - 2T^2 R^2 \text{Re}[\nu(-\tau + \delta\tau) \nu^*(\tau + \delta\tau) e^{-i(\omega_s - \omega_i)\tau}]\}, \quad (6.12)$$

resultado similar al obtenido en la ecuación (7) de Hong et al. (1987).

Para ver que la tasa de detección conjunta coincide en este caso con (5.20) hemos de demostrar que el conmutador $[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t + \tau)]$ es nulo. Lo haremos teniendo en cuenta que las relaciones de conmutación se mantienen a la entrada y salida de un divisor de haz; precisamente, esto es lo que hace necesaria la consideración de la entrada de radiación del punto cero por uno de los canales del divisor, cuando sólo se ilumina el otro canal (véase por ejemplo Mandel y Wolf (1995; sección 12.12.1) y referencias allí contenidas) ⁶.

Consideremos los operadores campo en los canales de entrada y salida del divisor. Teniendo en cuenta (6.10), sustituyendo los campos complejos por operadores, y eliminando por simplicidad la dependencia en posición y tiempo, tenemos:

$$[\hat{E}_a^{(+)}, \hat{E}_b^{(-)}] = [\hat{E}_s^{(+)}, \hat{E}_i^{(-)}] = [\hat{E}_{0s}^{(+)}, \hat{E}_{0i}^{(-)}] = 0. \quad (6.13)$$

En la segunda igualdad hemos tenido en cuenta que las relaciones de conmutación se mantienen a la entrada y salida del cristal. Por otro lado, el último conmutador es cero porque los modos de vacío que inciden en el cristal en la dirección de la señal y el gemelo son distintos.

Antes de terminar consideraremos el caso en que $R = T = 1/\sqrt{2}$, siendo las frecuencias centrales iguales ($\omega_s = \omega_i = \omega_o/2$). Integrando en la ventana de coincidencia, y teniendo en cuenta que ésta es mucho mayor que el tiempo de correlación de $\nu(\tau)$, de forma que se puede extender el rango de integración entre 0 e $+\infty$, se llega a:

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a; \mathbf{r}_b) \propto \frac{g^2 |V|^2}{2} C \left\{ 1 - \frac{1}{C} \int_0^{+\infty} \text{Re}[\nu(-\tau + \delta\tau) \nu^*(\tau + \delta\tau)] d\tau \right\}, \quad (6.14)$$

⁶Este argumento se aplica a todos los experimentos en los que los detectores están situados en los canales de salida de un divisor de haz, y los campos en los dos canales de entrada son los correspondientes a dos haces conjugados. Por ejemplo, los experimentos de correlación de polarización con conversión tipo I, la cancelación de la dispersión y el borrador cuántico, son casos en los que la probabilidad de detección conjunta coincide con (5.20), en base a este razonamiento.

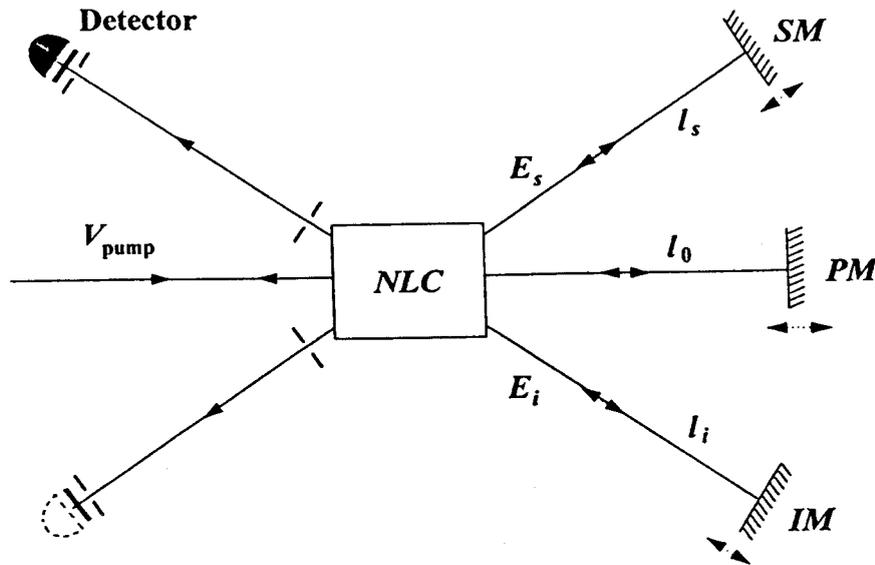


Figura 6.3: Experimento de creación frustrada de fotones por interferencia.

donde C viene dada por (6.8). Si $\delta\tau = 0$ la probabilidad de detección conjunta tiende a cero, y cuando $\delta\tau$ es grande en comparación con τ_{si} la probabilidad se hace constante, dado que la integral en (6.14) se anula⁷.

6.2.3 Creación frustrada de fotones mediante interferencia

En este experimento se colocan tres espejos a la salida del cristal, SM , PM , e IM , de manera que los haces correspondientes al láser, la señal y el gemelo se reflejan e inciden sobre el medio no lineal. De esta forma, también hay radiación en la parte izquierda del cristal (ver figura 6.3). Colocando un detector en la dirección del haz gemelo y otro en la de la señal se pueden medir cuentas simples o coincidencias. Experimentalmente se observó en ambos casos la

⁷La interpretación usual de este resultado se basa en la relación entre indistinguibilidad y coherencia. Los procesos que dan lugar a la detección conjunta son dos: o bien los dos fotones se transmiten en el divisor, o bien se reflejan. Dado que para $\delta\tau = 0$ es imposible distinguir si un fotón detectado fue transmitido o reflejado, las amplitudes de probabilidad se suman dando lugar a una interferencia destructiva que da como resultado una probabilidad de detección conjunta nula. La conclusión en este caso es que uno de los fotones es transmitido y el otro es reflejado. Cuando $\delta\tau$ es grande comparado con el tiempo de coherencia de la luz, los procesos posibles de detección conjunta se hacen distinguibles, lo cual da lugar a una probabilidad de detección constante.

existencia de interferencia para ciertos valores de los caminos ⁸ l_s y l_i (Herzog et al., 1994).

Antes de realizar los cálculos explicaremos intuitivamente el origen de la interferencia de segundo orden (el mismo tipo de razonamiento se aplica a la detección conjunta) mediante la intervención de la radiación de punto cero ⁹. Para ello, eliminaremos por simplicidad los argumentos de espacio y tiempo y simplificaremos la notación en la expresión de los campos. Consideremos las entradas de radiación por las partes izquierda y derecha del cristal. Por la parte izquierda, el punto cero $i_o^{(+)}$ y $s_o^{(+)}$, y por la parte derecha

$$s^{(+)} = (1 + g^2|V|^2J)s_o^{(+)} + gVGi_o^{(-)} ; \quad i^{(+)} = (1 + g^2|V|^2J)i_o^{(+)} + gVGs_o^{(-)}. \quad (6.15)$$

Para calcular el campo en la posición del detector hemos de considerar que la radiación incidente por la parte derecha del cristal viene dada por el láser y por (6.15), aunque hay que tener en cuenta que los tres campos tienen una fase determinada por los caminos l_s , l_i y l_o . De este modo, teniendo en cuenta (4.29), (4.30), y reteniendo hasta los términos de segundo orden en la constante de acoplamiento, tenemos (escribiendo entre paréntesis las longitudes que aparecen en la fase de cada término del campo):

$$E_{D_i}^{(+)} = (1 + g^2|V|^2J)i_o^{(+)}(l_i) + gVGs_o^{(-)}(l_i) + g^2|V|^2Ji_o^{(+)}(l_i) \\ + gVGs_o^{(-)}(l_o, l_s) + g^2|V|^2GG^*i_o^{(+)}(l_o, l_s). \quad (6.16)$$

Nótese que al calcular la intensidad en la posición del detector habrá interferencias debido a la correlación entre $gVGs_o^{(-)}(l_i)$ y $gV^*G^*s_o^{(+)}(l_o, l_s)$ (términos de primer orden en el campo), y también debido a la existente entre $i_o^{(+)}(l_i)$ y $g^2|V|^2G^*Gi_o^{(-)}(l_o, l_s)$ (combinación de un término de orden cero y otro de orden dos). Por tanto, la tasa de detección depende sinusoidalmente de cierta combinación de las longitudes que intervienen en el problema, y tiende a ser constante cuando la diferencia $|2(l_i - l_s)/c|$ es mayor que el tiempo de coherencia del haz gemelo (nótese que l_o sólo interviene en el láser y no en la radiación de

⁸Las distancias entre el cristal y los detectores son iguales, y dan lugar a un cambio de fase idéntico que no influye en las probabilidades.

⁹La interpretación usual se basa en las reglas de Feynman. Una detección en D_i puede deberse a dos procesos que son indistinguibles: o bien el fotón se creó cuando el láser incidió por la parte izquierda del cristal, o bien cuando después de ser reflejado en PM incidió en el cristal por su parte derecha. El mismo razonamiento puede aplicarse para la detección conjunta, de forma que es imposible saber si la pareja detectada en D_i y D_s proviene de una conversión a la baja o de la otra. Esta indistinguibilidad hace que "las amplitudes de probabilidad" correspondientes a cada tipo de proceso se sumen, dando lugar a interferencias de segundo y cuarto orden cuando se toma el módulo al cuadrado de dicha cantidad.

punto cero). Esto último es lógico pues desde un punto de vista ondulatorio ¹⁰, las diferentes partes del campo que intervienen en la tasa de detección pierden correlación si la diferencia entre l_i y l_s se hace muy grande, de forma que l_o no interviene en dicha correlación.

A continuación realizaremos los cálculos con más detalle (Casado et al., 1997a). Para aplicar la expresión (5.10) hemos de calcular el campo en la posición del detector. Como la distancia entre el cristal y el detector produce tan sólo un cambio de fase en el campo, dicha cantidad no influirá en la tasa de detección. Por tanto, basta con calcular el valor del campo en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} F_{D_i}^{(+)}(\mathbf{0}, t) &= F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t) + g^2|V|^2 JF_i^{(+)}(\mathbf{0}, t) + gV'GF_s^{(-)}(\mathbf{0}, t) \\ &= F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c})e^{2i\omega_i l_i/c} \\ &+ g^2|V|^2 JF_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c})e^{2i\omega_i l_i/c} + gVe^{2i\omega_o l_o/c}GF_s^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_s}{c})e^{-2i\omega_s l_s/c}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde hemos aplicado (4.40), y hemos llamado $V' = Ve^{2i\omega_o l_o/c}$. Teniendo en cuenta (4.65) y despreciando términos de orden mayor que g^2 , el resultado que se obtiene es:

$$\begin{aligned} P_{D_i} &\propto 2g^2|V|^2 \mu_i(0) \\ &+ \left(gV^* e^{\frac{2i}{c}(-\omega_o l_o + \omega_s l_s + \omega_i l_i)} \langle F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c}) G^* F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_s}{c}) \rangle + c.c \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Sustituyendo (4.37) y (4.38) en la correlación que aparece en la expresión anterior, y reteniendo de los términos no nulos aquellos hasta orden g^2 , dicha correlación queda expresada a partir de la suma de dos términos:

$$\begin{aligned} &\langle F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c}) G^* F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_s}{c}) \rangle \\ &= \langle F_{0i}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c}) G^* GF_{0i}^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_s}{c}) \rangle + \langle GF_{0s}^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c}) G^* F_{0s}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_s}{c}) \rangle. \end{aligned} \quad (6.19)$$

¹⁰Desde un punto de vista corpuscular la pérdida de la coherencia se fundamenta en la capacidad de distinguir a qué conversión a la baja pertenece un fotón detectado en D_i . Por ejemplo, si $|2(l_i - l_s)/c \gg \tau_i|$, se podría saber si una detección en D_i proviene de la primera conversión (láser hacia la derecha), o de la segunda (láser hacia la izquierda). Tan sólo hay que colocar un segundo detector en la dirección de la señal y a la misma distancia del cristal. Si una detección en D_i viene acompañada por otra en D_s , entonces ambos fotones fueron creados en la segunda conversión. Si esto no ocurre, entonces el fotón detectado en D_i fue creado en la primera conversión (todo ello considerando que los detectores tienen eficiencia 100%).

Uno de ellos es resultado de la contribución de los términos de segundo orden y orden cero, y el otro de la contribución del término de primer orden. Ambas son iguales a $\mu_i/2$ (ver (4.66), es decir ¹¹):

$$\begin{aligned} & \langle F_{0i}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c}) G^* G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_s}{c}) \rangle \\ &= \langle G F_{0s}^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_i}{c}) G^* F_{0s}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{2l_s}{c}) \rangle = \frac{1}{2} \mu_i \left(\frac{2l_s - 2l_i}{c} \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Teniendo en cuenta esto último en la expresión de la probabilidad se llega al resultado siguiente:

$$P_{D_i} \propto 2g^2 |V|^2 \mu_i(0) \left[1 + \frac{|\mu_i(\frac{2l_s - 2l_i}{c})|}{\mu_i(0)} \cos(-\omega_o l_o + \omega_s l_s + \omega_i l_i + \phi) \right], \quad (6.21)$$

siendo ϕ una fase asociada a μ_i . Como se puede observar, la visibilidad de la interferencia de segundo orden viene dada por $|\mu_i(\frac{2l_s - 2l_i}{c})|/\mu_i(0)$, siendo esta cantidad próxima a la unidad cuando la diferencia entre los caminos ópticos de la señal y el gemelo tiende a cero.

¹¹Esto se puede demostrar aplicando la conservación de las relaciones de conmutación. Considerando el operador campo a la entrada y salida del cristal en la dirección del haz gemelo, debe verificarse que

$$\left[\hat{F}_{D_i}^{(+)}(\mathbf{0}, t), \hat{F}_{D_i}^{(-)}(\mathbf{0}, t') \right] = \left[\hat{F}_i^{(+)}(\mathbf{0}, t), \hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{0}, t') \right].$$

Pasando al formalismo de la función de Wigner, tal y como se hizo en el capítulo 4, se llega a (6.20).

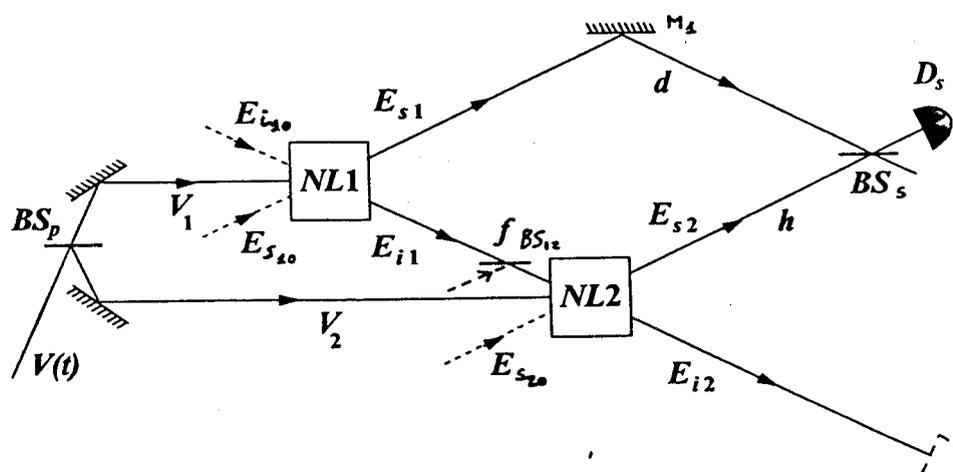


Figura 6.4: Experimento de coherencia inducida.

6.2.4 Experimento de coherencia inducida

El montaje experimental se muestra en la figura 6.4. Dos cristales no lineales $NL1$ y $NL2$ de características similares, sobre los cuales inciden dos haces coherentes que provienen de una misma fuente, emiten luz convertida a la baja produciéndose una superposición de los conos de radiación generados en ambos cristales. Los cristales están colocados de forma que se pueden seleccionar a la salida del primero dos haces correlacionados, señal s_1 y gemelo i_1 , y a la salida del segundo dos haces s_2 e i_2 , siendo la frecuencia media y la dirección del vector de onda idénticos para s_1 y s_2 , y por tanto para i_1 e i_2 , estando estos últimos perfectamente alineados. s_1 y s_2 inciden sobre un divisor de haz BS_s , de la misma transmisividad y reflectividad, y en uno de los canales de salida del mismo se coloca un detector que mide cuentas simples para diferentes posiciones del espejo M_1 , lo cual permite variar la fase relativa entre ambas señales. Otro divisor de haz BS_{12} de transmisividad variable T , colocado entre ambos cristales, permite variar la intensidad de la luz que entra en el segundo cristal procedente del primero.

Experimentalmente se observa en la tasa de detección simple P_D , una variación sinusoidal con una visibilidad proporcional a T , cuando la diferencia de caminos ópticos entre s_1 y s_2 está dentro de la longitud de coherencia de la señal, lo que muestra la existencia de coherencia entre ambas señales. Si $T = 0$ la coherencia se pierde, obteniéndose un valor constante de la tasa de detección simple.

Como veremos a continuación, el formalismo de la función de Wigner permite una explicación para este fenómeno basada en la intervención de la radiación del punto cero, existiendo una analogía clara con la interferencia que

se produce en óptica clásica ¹². En Casado et al. (1997a) y Casado et al. (1997b) se encuentra el análisis de las interferencias de segundo y cuarto orden respectivamente para el caso $T = 0$. En este apartado analizaremos el caso general $T \neq 0$ para la interferencia de segundo orden.

Antes de exponer los cálculos vamos a justificar la existencia de interferencia en P_{D_s} , sin tener en cuenta por simplicidad argumentos espacio-temporales en los campos, y simplificando la notación en los mismos (Santos, 1996b; Casado et al., 1997e). Sea s_{10} (i_{10}) la radiación de punto cero que entra en el primer cristal en la dirección de la señal (gemelo), y s_{20} la que entra en el segundo cristal en la dirección de la señal. La señal $s_1^{(+)}$ correspondiente a la salida del primer cristal es

$$s_1^{(+)} = (1 + g^2|V_1|^2J)s_{10}^{(+)} + gV_1Gi_{10}^{(-)}, \quad (6.22)$$

mientras que en el cálculo de $s_2^{(+)}$ hemos de tener en cuenta que la entrada en el segundo cristal viene dada por $Ti_1^{(+)} + iRvac^{(+)}$, siendo $vac^{(+)}$ la radiación de punto cero que entra por el segundo canal de BS_{12} . Reteniendo términos hasta segundo orden en la constante de acoplamiento, se tiene

$$s_2^{(+)} = (1 + g^2|V_2|^2J)s_{20}^{(+)} - iRgV_2Gvac^{(-)} \\ + T(gV_2Gi_{10}^{(-)} + g^2V_2V_1^*GG^*s_{10}^{(+)}). \quad (6.23)$$

Si $T \neq 0$, $s_1^{(+)}$ y $s_2^{(+)}$ contienen las entradas del punto cero en el primer cristal, con fases distintas, dado que los caminos recorridos por ambas señales son distintos. Cuando se calcula la probabilidad de detección a partir del promedio de la diferencia entre la intensidad total en el detector y la del vacío, hay términos de la expresión del campo que el detector no “ve”, y el término de interferencia proviene de la correlación a tiempos distintos de las entradas del vacío en el primer cristal, siendo dicho término proporcional a T . Esto justifica

¹²La explicación del fenómeno con las reglas de Feynman es la siguiente: si $T = 0$, o ambos haces no se encuentran alineados, colocando un detector ideal D_i en el camino de i_2 podría averiguarse a qué cristal pertenece una señal detectada en D_s . Ello es debido a que las parejas de fotones se producen prácticamente a la vez, de forma que si se detecta una señal en D_s y no se detecta en D_i , entonces dicha señal pertenece a $NL1$; por el contrario, si se detectan señal y gemelo simultáneamente en ambos detectores, esto implica que ambos fotones vienen de $NL2$. Por tanto, la mera posibilidad de poder distinguir por qué camino ha ido un fotón detectado, destruye la interferencia. Por el contrario, si ambos haces están perfectamente alineados y la transmisividad es diferente de cero, entonces no se puede distinguir si un fotón detectado en D_i proviene de la conversión en $NL1$ o en $NL2$ y, por tanto, tampoco se pueden distinguir los dos caminos, s_1 o s_2 para la detección en D_s . Según las reglas de Feynman, las amplitudes de probabilidad asociadas a cada una de las dos posibilidades se suman, dando lugar, al tomar el módulo, a una interferencia que depende de la fase relativa entre ambos caminos. El mismo razonamiento puede aplicarse para explicar la interferencia en la detección conjunta.

que la visibilidad sea proporcional a la transmisividad de BS_{12} . Si $T = 0$ no hay interferencia porque las correlaciones entre las diferentes entradas del vacío en los dos cristales y BS_{12} son nulas.

A continuación mostraremos detalladamente el cálculo de P_{D_s} , para lo cual vamos a expresar en primer lugar el campo en el detector a partir de los campos incidentes en el divisor de haz BS_s . Teniendo en cuenta que los coeficientes de transmisión y reflexión son idénticos, tenemos

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[iF_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) + F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t)], \quad (6.24)$$

siendo

$$F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) = e^{i\omega_s d/c} F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{d}{c}), \quad (6.25)$$

la amplitud correspondiente a la señal proveniente del primer cristal, y

$$\begin{aligned} F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) &= e^{i\omega_s h/c} F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) \\ &= e^{i\omega_s h/c} \{(1 + g^2 |V_2|^2 J) F_{s_{20}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) \\ &\quad + gV_2(t - \frac{h}{c}) G [TF_{i_1}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) - iRF_v^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c})]\}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde hemos tenido en cuenta que $G_1 = G_2 \equiv G$, $J_1 = J_2 \equiv J$ y $g_1 = g_2 \equiv g$, puesto que se consideran cristales de características similares. Hemos llamado $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ a la posición del primer cristal, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ a la del segundo, y d , f y h son las distancias entre el primer cristal y el divisor BS_s , entre los dos cristales, y entre el segundo cristal y BS_s respectivamente. $F_v^{(-)}$ es la radiación de punto cero que entra en el segundo canal de BS_{12} , y por simplicidad hemos ignorado la distancia entre este divisor y el segundo cristal. Por otro lado, V_1 y V_2 son las amplitudes correspondientes a los haces incidentes en ambos cristales. Teniendo en cuenta (6.24), el promedio de la intensidad total en D_s es

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}_s, t) \rangle &= \langle E^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) E^{(-)}(\mathbf{r}_s, t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle |F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t)|^2 \rangle + \langle |F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t)|^2 \rangle + (i \langle F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) F_{s_2}^{(-)}(\mathbf{r}_s, t) \rangle + c.c) \}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

siendo

$$\langle |F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t)|^2 \rangle = I_s + g^2 \langle |V_1|^2 \rangle \mu_s(0). \quad (6.28)$$

Por otro lado, reteniendo términos hasta orden dos en la constante de acoplamiento y teniendo en cuenta que las entradas de punto cero correspondientes a ambos cristales y BS_{12} están descorrelacionadas, tenemos

$$\begin{aligned} \langle |F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t)|^2 \rangle &= \langle |F_{s_{20}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c})|^2 \rangle + g^2 \langle |V_2|^2 \rangle \\ &\times \left[T^2 \langle GF_{i_{10}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) G^* F_{i_{10}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) \rangle \right. \\ &\quad + R^2 \langle GF_v^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) G^* F_v^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) \rangle \\ &\quad \left. + (\langle F_{s_{20}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) J^* F_{s_{20}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) \rangle + c.c) \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Ahora bien, dado que $R^2 + T^2 = 1$ y que las correlaciones que aparecen en las líneas segunda a cuarta son iguales a $(1/2)\mu_s(0)$, se tiene

$$\langle |F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t)|^2 \rangle = I_s + g^2 \langle |V_2|^2 \rangle \mu_s(0). \quad (6.30)$$

Finalmente, para calcular $\langle F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) F_{s_2}^{(-)}(\mathbf{r}_s, t) \rangle$ partiremos de (6.25) y (6.26). Tenemos:

$$\begin{aligned} &\langle F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) F_{s_2}^{(-)}(\mathbf{r}_s, t) \rangle \\ &= e^{i\omega_s \frac{d-h}{c}} g T \langle F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{d}{c}) V_2^*(t - \frac{h}{c}) G^* F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \frac{h}{c}) \rangle \\ &= e^{i\omega_s \frac{d-h}{c}} e^{i\omega_i \frac{f}{c}} g^2 T \left[\langle F_{s_{10}}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{d}{c}) G^* G F_{s_{10}}^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{h+f}{c}) \rangle \right. \\ &\quad \times \langle V_2^*(t - \frac{h}{c}) V_1(t - \frac{h+f}{c}) \rangle \\ &\quad \left. + \langle G F_{i_{10}}^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{d}{c}) G^* F_{i_{10}}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{h+f}{c}) \rangle \langle V_2^*(t - \frac{h}{c}) V_1(t - \frac{d}{c}) \rangle \right], \end{aligned} \quad (6.31)$$

donde hemos tenido en cuenta (4.37), (4.38), y hemos retenido términos hasta orden g^2 . También hemos considerado que el láser y el punto cero son procesos independientes. Por otro lado, en las correlaciones correspondientes al láser podemos considerar $h + f \approx d$ dado que la longitud de coherencia del mismo es mucho mayor que las longitudes que intervienen en el experimento. Finalmente, aplicando (6.20), y definiendo la función de coherencia del láser como

$$\gamma_{12}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{\langle V_2^*(t - \tau_1) V_1(t - \tau_2) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} ; \quad I_i = \langle |V_i|^2 \rangle, \quad (6.32)$$

se tiene

$$\langle F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_s, t) F_{s_2}^{(-)}(\mathbf{r}_s, t) \rangle = e^{i\omega_s \frac{d-h}{c}} e^{i\omega_i \frac{f}{c}} g^2 T \sqrt{I_1 I_2} \mu_s \left(\frac{d-h-f}{c} \right) \gamma_{12} \left(\frac{d-h}{c} \right). \quad (6.33)$$

Sustituyendo (6.33), (6.30) y (6.28) en (6.27), y restando la contribución del punto cero, obtenemos

$$P(\mathbf{r}_s, t) \propto \frac{g^2}{2} \{ \mu_s(0)(I_1 + I_2) + 2T \sqrt{I_1 I_2} \left| \mu_s \left(\frac{d-h-f}{c} \right) \right| \left| \gamma_{12} \left(\frac{d-h}{c} \right) \right| \cos \left(\frac{\omega_s(d-h)}{c} + \frac{\omega_i}{c} + \frac{\pi}{2} + \phi \right) \}, \quad (6.34)$$

siendo ϕ una fase asociada al producto $\mu_s \left(\frac{d-h-f}{c} \right) \gamma_{12} \left(\frac{d-h}{c} \right)$.

6.2.5 Cancelación de la dispersión

El montaje experimental se muestra en la figura 6.5. Este montaje es similar al interferómetro Hong-Ou-Mandel (Hong et al., 1987), con la particularidad de que hay un medio dispersivo en uno de sus brazos. Para calcular la probabilidad de detección conjunta ¹³ vamos a expresar primeramente los campos en los detectores D_1 y D_2 propagando las funciones $F^{(+)}$ desde el cristal hasta el divisor de haz BS (el cambio de fase desde BS hasta los detectores no influye en la probabilidad, y por tanto no lo tendremos en cuenta). La principal diferencia con otros experimentos que hemos explicado anteriormente es que tenemos que propagar el campo $F_s^{(+)}$ a través del medio dispersivo. Comenzemos expresando los campos en los detectores en los instantes t y $t + \tau$. Suponiendo por simplicidad que los coeficientes de reflexión y transmisión del divisor son iguales, tenemos:

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [F_i^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) + iF_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)]$$

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) + iF_i^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau)], \quad (6.35)$$

donde

$$F_i^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{\delta l}{c}) e^{i\omega_i \frac{\delta l}{c}} \quad ; \quad F_i^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) = F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{\delta l}{c}) e^{i\omega_i \frac{\delta l}{c}}, \quad (6.36)$$

¹³El tratamiento de este experimento con la función de Wigner se encuentra en Casado et al. (1997c).

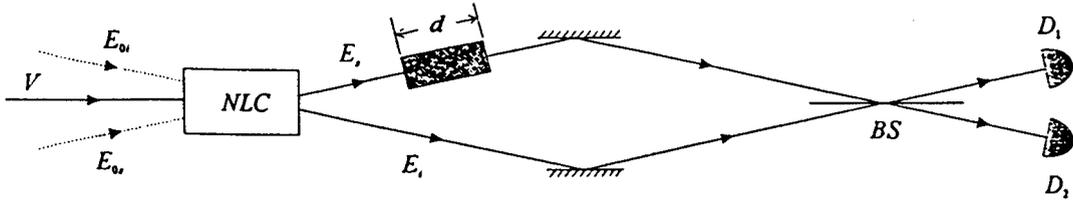


Figura 6.5: Cancelación de la dispersión.

siendo δl el camino en el brazo inferior del interferómetro. Para obtener $F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)$ usaremos las expresiones (4.36) y (4.40), aunque consideraremos el paso al continuo. Tenemos:

$$F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = E_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)e^{i\omega_s t} = K \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} \alpha(\omega_{\mathbf{k}_s}) e^{i\mathbf{k}(\omega_{\mathbf{k}_s}) \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)t}, \quad (6.37)$$

donde hemos reemplazado la suma por una integral y extendido el intervalo de integración entre $-\infty$ y $+\infty$ porque la función $\alpha(\omega_{\mathbf{k}_s})$ es picuda en $\omega_{\mathbf{k}_s} \approx \omega_s$, y hemos introducido una constante K que incluye algunas otras constantes que son irrelevantes para nuestros propósitos. Cuando el campo se propaga por un medio no dispersivo la relación entre ω y \mathbf{k} es $\omega = |\mathbf{k}|c$, donde c es independiente de la frecuencia. En el caso de medios dispersivos la relación entre la frecuencia y el número de onda es más complicada, aunque se puede partir del desarrollo en serie de Taylor alrededor de ω_s

$$k(\omega_{\mathbf{k}_s}) = k_o + \alpha(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) + \beta(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)^2, \quad (6.38)$$

siendo α y β constantes propias del medio. Los términos de orden superior pueden despreciarse dado que $\omega_{\mathbf{k}_s} \approx \omega_s$.

Para expresar $F_s^{(+)}$ en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ en términos de $F_s^{(+)}$ en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ tendremos en cuenta que $\alpha(\omega_{\mathbf{k}_s})$ es la transformada inversa de Fourier de $E_s^{(+)}$, es decir

$$\alpha(\omega_{\mathbf{k}_s}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' E_s^{(+)}(\mathbf{0}, t') e^{i\omega_{\mathbf{k}_s} t'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)t'}. \quad (6.39)$$

Sustituyendo (6.39) y (6.38) en (6.37), y llevándolo junto con (6.36) a (6.35), tenemos finalmente:

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{\delta l}{c}) e^{i\omega_i \frac{\delta l}{c}} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)(t' - t)} e^{ik(\omega_{\mathbf{k}_s})d} \right], \quad (6.40)$$

con una expresión similar para $F^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau)$.

Para calcular la probabilidad de detección conjunta necesitamos la correlación $\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle$. Realizando algunas operaciones se llega al siguiente resultado

$$\langle F^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) F^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle = \frac{gV k e^{i\omega_i \frac{\delta l}{c}}}{2\pi i} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} e^{ik(\omega_{\mathbf{k}_s})d} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) \frac{\delta l}{c}} \bar{\nu}(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) \sin[(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)\tau], \quad (6.41)$$

donde hemos tenido en cuenta (4.52), (4.68), (4.78), y hemos definido la transformada de Fourier de ν :

$$\bar{\nu}(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \nu(u) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)u}. \quad (6.42)$$

Multiplicando (6.41) por su complejo conjugado y realizando algunas operaciones en las que se hace uso de la relación

$$\int_0^{\infty} dx \sin ax \sin bx = \frac{\pi}{2} [\delta(a - b) - \delta(a + b)],$$

y asumiendo que $\bar{\nu}(\omega)$ es simétrica en ω , tenemos

$$P_{12} = C \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} |\bar{\nu}(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)|^2 \left[1 - e^{-2i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) \frac{\delta l}{c}} e^{i[k(\omega_{\mathbf{k}_s}) - k(2\omega_s - \omega_{\mathbf{k}_s})]d} \right], \quad (6.43)$$

siendo C una constante. Finalmente, sustituyendo (6.38) en (6.43) y definiendo $\omega = \omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s$, obtenemos el resultado siguiente para P_{12} :

$$P_{12} = C \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\bar{\nu}(\omega)|^2 \left[1 - \cos \left[2\omega \left(\alpha - \frac{\delta l}{c} \right) \right] \right]. \quad (6.44)$$

Este resultado es similar al obtenido en la eq.(12) de Steinberg et al. (1992).

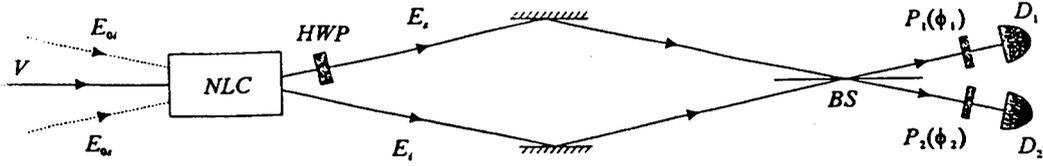


Figura 6.6: El borrador cuántico.

6.2.6 El borrador cuántico

El montaje experimental se muestra en la figura 6.6. Una lámina de media onda *HWP*, orientada un ángulo $(\phi/2)$ respecto a la horizontal, se coloca en uno de los brazos de un interferómetro tipo Hong-Ou-Mandel dando lugar a un cambio en el estado de polarización de la luz en esa parte del interferómetro. Tras recombinarse en un divisor de haz de coeficientes de reflexión y transmisión idénticos, los haces de salida inciden sobre dos polarizadores P_1 y P_2 , de orientaciones ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente, en frente de los cuales se colocan dos detectores D_1 y D_2 .

Para analizar este experimento con el formalismo de la función de Wigner tenemos que tener en cuenta la polarización del haz de luz y de la radiación de punto cero (Casado et al., 1997c). El campo se representa mediante el vector¹⁴

$$\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}], \lambda} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{\mathbf{k}, \lambda}(t) \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \quad ; \quad \lambda = 1, 2, \quad (6.45)$$

donde $\epsilon_{\mathbf{k}, 1}$ y $\epsilon_{\mathbf{k}, 2}$ son vectores de polarización perpendiculares entre sí, e independientes de \mathbf{k} cuando se considera un haz de luz. La expresión que representa a la probabilidad de detección conjunta en experimentos que involucran polarización es (Casado et al., 1997c):

$$P_{ab}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) \propto \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |\langle F_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) F_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle|^2, \quad (6.46)$$

donde la suma en λ y λ' se realiza sobre todas las posibles combinaciones ($\lambda, \lambda' = 1, 2$).

¹⁴Este experimento se diferencia de los tratados anteriormente con conversión tipo I en que el campo se trata como un vector, dado que interviene la polarización. No obstante, la generalización de los resultados obtenidos en los capítulos 4 y 5 al caso vectorial es inmediata.

Vamos a obtener a continuación los campos en los detectores. Por simplicidad consideraremos que la lámina de media onda está colocada en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. De esta forma, la señal a la salida de la lámina y el gemelo a la salida del cristal están representados respectivamente por los vectores

$$\mathbf{F}_s^{(+)}(\mathbf{0}, t) = F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t)(\cos \phi, \sin \phi) \quad ; \quad \mathbf{F}_i^{(+)}(\mathbf{0}, t) = F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t)(1, 0). \quad (6.47)$$

Por otro lado, si consideramos que el divisor de haz está localizado en $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, el campo en el canal de salida dirigido hacia D_1 está representado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{F}_i^{(+)}(\mathbf{R}, t) + i\mathbf{F}_s(\mathbf{R}, t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_2)e^{i\omega_i\tau_2} \right. \\ &\quad \left. + iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1} \cos \phi, iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1} \sin \phi \right), \end{aligned} \quad (6.48)$$

donde τ_1 y τ_2 son los tiempos de propagación desde el cristal hasta el divisor de haz. Finalmente, teniendo en cuenta la acción del polarizador (orientado un ángulo ϕ_1), el cual está colocado antes de D_1 (colocado en \mathbf{r}_1), el valor del campo en el detector en el instante t es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) &= [\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{R}, t) \cdot (\cos \phi_1, \sin \phi_1)](\cos \phi_1, \sin \phi_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_2)e^{i\omega_i\tau_2} \cos \phi_1 + iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1} \cos(\phi - \phi_1) \right] \\ &\quad (\cos \phi_1, \sin \phi_1), \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde hemos eliminado un factor de fase irrelevante procedente de la propagación entre BS y D_1 . De la misma forma, el campo en D_2 (colocado en \mathbf{r}_2), en el instante $t + \tau$, es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[iF_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_2)e^{i\omega_i\tau_2} \cos \phi_2 \right. \\ &\quad \left. + F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1} \cos(\phi - \phi_2) \right] (\cos \phi_2, \sin \phi_2). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Para calcular la probabilidad de detección conjunta tendremos en cuenta las expresiones (6.46), (6.49), y (6.50), así como las propiedades de correlación de los campos. Después de algunas operaciones, dentro de las cuales está la integración en la ventana, obtenemos la expresión siguiente para P_{12} :

$$\begin{aligned} P_{12} &= C \left[\left(\cos^2 \phi_1 \cos^2(\phi - \phi_2) + \cos^2 \phi_2 \cos^2(\phi - \phi_1) \right) \int_0^\infty |\nu(\tau)|^2 d\tau \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \phi_1 \cos(\phi - \phi_2) \cos \phi_2 \cos(\phi - \phi_1) \operatorname{Re} \int_0^\infty \nu(\delta\tau - \tau) \nu^*(\delta\tau + \tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (6.51)$$

siendo $\delta\tau = \tau_1 - \tau_2$, y C una constante. Cuando $\delta\tau = 0$ tenemos:

$$P_{12} = C' \sin^2 \phi \sin^2 (\phi_2 - \phi_1), \quad (6.52)$$

siendo C' otra constante.

En el experimento de Hong et al. (1987) vimos que, en el caso en que los haces conjugados recorrieran el mismo camino antes de recombinarse en un divisor de haz, la probabilidad de detección conjunta era nula, lo que se interpretaba como un fenómeno de interferencia destructiva de amplitudes de probabilidad. Dicha interferencia se basaba en la indistinguibilidad de las dos posibilidades que llevaban a una detección conjunta. La colocación de una lámina de media onda en uno de los haces destruiría la interferencia dado que ambas posibilidades se harían distinguibles. Por otro lado, el borrador cuántico se basa en la colocación adicional de dos polarizadores antes de los detectores, lo cual elimina la información dando lugar a interferencia. Todo ello se encuentra reflejado en la ecuación (6.52), la cual coincide con la expresión A5 de Kwiat et al. (1992).

Nótese que la radiación de punto cero permite interpretar los resultados sin utilizar las reglas de Feynman, porque la propagación se describe en términos de ondas, y son las propiedades de correlación de estas ondas las que dan lugar a los fenómenos de interferencia. De este modo, y tal como venimos haciendo en este capítulo, el punto cero abre la posibilidad para una interpretación diferente basada en un carácter ondulatorio de la luz, y no en la relación entre indistinguibilidad y coherencia, que parte del principio de complementariedad.

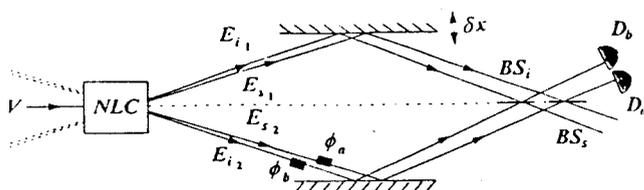


Figura 6.7: Experimento de Rarity y Tapster.

6.3 EXPERIMENTOS PARA EL CONTRASTE DE LAS DESIGUALDADES DE BELL

6.3.1 El experimento de Rarity y Tapster

En este experimento se seleccionan dos señales E_{s_1} y E_{s_2} del mismo color (frecuencia ω_s) y sus dos gemelos E_{i_1} , E_{i_2} (frecuencia ω_i), de forma que E_{s_1} (E_{s_2}) está correlacionado con E_{i_2} (E_{i_1}) (ver figura 6.7). Estos haces se reflejan en espejos situados a ambos lados de la dirección del haz incidente, y se recombinan en los divisores de haz BS_s y BS_i . En BS_s , caracterizado por coeficientes de transmisión y reflexión T_s y R_s , se recombinan las señales, y en BS_i , con coeficientes T_i y R_i , se recombinan los gemelos (en el experimento real los autores usaron diferentes puntos del mismo divisor para recombinar señales y gemelos). Para medir coincidencias se colocan cuatro detectores (D_a , D_b , $D_{a'}$, $D_{b'}$) en las salidas de los divisores de haz, lo cual permite medir las cuatro correlaciones que aparecen en las desigualdades de Bell (P_{ab} , $P_{ab'}$, $P_{a'b}$, $P_{a'b'}$). Dos modificadores de fase ¹⁵ colocados en las trayectorias de los haces inferiores tienen como objetivo variar la fase de la señal en ϕ_a y la del gemelo en ϕ_b .

A continuación analizaremos con la función de Wigner ¹⁶ una de las cuatro posibilidades de detección conjunta, por ejemplo P_{ab} . El valor del campo eléctrico en los detectores, colocados en \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b es,

$$F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) = iR_s F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) + T_s F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t),$$

¹⁵En inglés "phase shifter".

¹⁶El estudio de este experimento con la función de Wigner se encuentra en Casado et al. (1997b).

6.3 EXPERIMENTOS PARA EL CONTRASTE DE LAS DESIGUALDADES DE BELL

95

$$\frac{F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) = T_i F_{i1}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) + iR_i F_{i2}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau)}{(6.53)}$$

Los operadores campo correspondientes a ambos detectores conmutan, dado que un detector recibe los modos correspondientes a la señal, y en el otro los modos corresponden al gemelo. La conservación de las relaciones de conmutación a la entrada y salida del cristal implica que los modos del vacío que intervienen en estos campos son distintos, y por tanto

$$[\hat{F}_s, \hat{F}_i] = [\hat{F}_{so}, \hat{F}_{io}] = 0,$$

por lo que la tasa de detección conjunta vendrá dada por (5.20) ¹⁷.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= e^{i\omega_s \frac{r_a}{c}} F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{r_a}{c}), \\ F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= e^{i\omega_s \frac{r_a}{c} + i\phi_a} F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{r_a}{c} + \frac{\phi_a}{\omega_s}), \\ F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) &= e^{i\omega_i \frac{r_b}{c}} F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{r_b}{c}), \\ F_{i_2}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) &= e^{i\omega_i \frac{r_b}{c} + i\phi_b} F_{i_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{r_b}{c} + \frac{\phi_b}{\omega_i}), \end{aligned} \quad (6.54)$$

donde r_a (r_b) es la distancia, correspondiente a la señal (gemelo), existente entre el centro del cristal y los detectores. En lo que viene a continuación consideraremos sin pérdida de generalidad que $r_a = r_b \equiv r$, con el objeto de simplificar los cálculos. Para calcular la probabilidad de detección conjunta necesitamos la correlación

$$\begin{aligned} &\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) \rangle \\ &= R_s T_i e^{i\phi_b} \langle F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{r}{c}) F_{i_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{r}{c} - \frac{\phi_b}{\omega_i}) \rangle \\ &\quad + R_i T_s e^{i\phi_a} \langle F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{r}{c} - \frac{\phi_a}{\omega_s}) F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{r}{c}) \rangle \\ &= gV [R_s T_i e^{i\phi_b} \nu(\tau - \frac{\phi_b}{\omega_i}) + R_i T_s e^{i\phi_a} \nu(\tau + \frac{\phi_a}{\omega_s})], \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde en la primera igualdad hemos considerado que $F_{s_1}^{(+)}$ está correlacionada con $F_{i_2}^{(+)}$ y que $F_{s_2}^{(+)}$ lo está con $F_{i_1}^{(+)}$, pero $F_{s_j}^{(+)}$ y $F_{i_j}^{(+)}$ ($j = 1$ ó 2) están

¹⁷El mismo razonamiento es aplicable a los experimentos de Franson (1989) y a los experimentos que utilizan conversión tipo II no colineal (Kwiat et al., 1995), los cuales se analizarán en los dos apartados siguientes.

descorrelacionados, dado que estos pares no verifican las condiciones de emparejamiento. Por otro lado, en la segunda igualdad hemos utilizado (4.78).

Si tenemos en cuenta que los intervalos de tiempo ϕ_a/ω_s y ϕ_b/ω_i son pequeños en comparación con el tiempo de coherencia de la señal y el gemelo, dado por $\nu(\tau)$, se llega al resultado siguiente aplicando (5.28):

$$P_{ab}(\phi_a, \phi_b) = \frac{\eta^2}{\hbar^2 \omega_s \omega_i} g^2 |V|^2 C \times [(R_i T_s)^2 + (R_s T_i)^2 + 2R_s T_s R_i T_i \cos(\phi_a - \phi_b)], \quad (6.56)$$

donde C viene dada por (6.8). Se obtiene una interferencia de cuarto orden con una visibilidad cercana al 100% cuando los coeficientes de transmisión y reflexión de ambos divisores verifican la relación $R_i/T_i = R_s/T_s$. Si ambos detectores se encuentran por debajo de la dirección del haz se obtiene una expresión similar.

Finalmente, si uno de los detectores está colocado por encima y el otro por debajo de la dirección del láser incidente, entonces la expresión que se obtiene es

$$P_{ab'}(\phi_a, \phi_b) \approx \frac{\eta^2}{\hbar^2 \omega_s \omega_i} g^2 |V|^2 C \times [(T_s T_i)^2 + (R_s R_i)^2 + 2R_s T_s R_i T_i \cos(\phi_a - \phi_b)]. \quad (6.57)$$

En este caso, una visibilidad 100% requiere que $T_s T_i = R_s R_i$. Para conseguir una alta visibilidad en ambos casos debe verificarse que $T_s = T_i = R_s = R_i = 1/\sqrt{2}$.

6.3.2 Los experimentos de Franson

En la figura 6.8 se muestra esquemáticamente el montaje experimental. Se seleccionan a la salida del cristal dos haces conjugados E_s y E_i de frecuencias centrales ω_s y ω_i respectivamente, cada uno de los cuales se envía a un interferómetro de tipo Mach-Zehnder, consistente en dos divisores de haz y dos espejos¹⁸. La señal se divide en el primer divisor BS_1 , de forma que los dos haces resultantes recorren caminos de longitudes diferentes L_s y C_s [L (C) se refiere al camino largo (corto)] antes de ser recombinados en un segundo divisor BS_2 . Se coloca un detector D_a en uno de los canales de salida de BS_2 . Lo mismo le ocurre al haz gemelo, donde hemos llamado BS'_1 y BS'_2 a los divisores de haz del segundo interferómetro, L_i y C_i a los caminos largo y corto del mismo, y D_b al segundo detector.

¹⁸Dichos interferómetros juegan el papel de analizadores, en lugar de los polarizadores o el Stern-Gerlach de otros experimentos EPR.

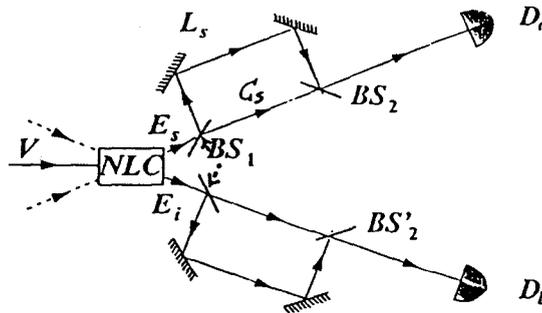


Figura 6.8: Montaje para el experimento de Franson.

Sean ΔL_s y ΔL_i las diferencias entre los recorridos largo y corto de ambos interferómetros. Si se miden cuentas simples para distintos valores de esta cantidad en D_a o D_b (experimento de recombinación), la interferencia de segundo orden desaparece cuando estas cantidades son mayores que los tiempos de coherencia de la señal y el gemelo respectivamente. Por otro lado, la tasa de coincidencias tiene una dependencia de tipo coseno con $(\omega_s \Delta L_s + \omega_i \Delta L_i)/c$, lo cual muestra la existencia de interferencia de cuarto orden en la probabilidad de detección conjunta.

A continuación vamos a presentar un análisis de ambos experimentos utilizando el formalismo de la función de Wigner. Como veremos, los fenómenos de interferencia de segundo y cuarto orden tienen una explicación clara en términos de la influencia que la radiación de punto cero tiene en el proceso ¹⁹.

¹⁹La explicación en base a las reglas de Feynman es como sigue: en el caso de las cuentas simples, si la diferencia entre los caminos largo y corto del interferómetro es del orden del tiempo de coherencia de los fotones que salen del cristal, no se puede saber por qué camino pasó un fotón detectado. Si es mucho mayor, entonces no hay interferencia porque los caminos se vuelven distinguibles. En la medida de las coincidencias, los procesos en los que uno de los fotones del par pasa por el camino corto de un interferómetro y el otro por el camino largo no son registrados, pues sólo llegan simultáneamente a los detectores (dentro de la ventana de coincidencia) los fotones que siguieron, ambos en sus respectivos interferómetros, el mismo camino largo o corto. Sólo son posibles dos procesos de detección conjunta, "corto-corto" y "largo-largo", los cuales son indistinguibles debido a la incertidumbre en la emisión de los fotones correlacionados. La amplitud de probabilidad de detección conjunta es la suma de la amplitud correspondiente a cada proceso, apareciendo así un término responsable de las franjas de interferencia cuando se varía la diferencia entre los caminos de uno de los interferómetros.

6.3.3 Experimento de recombinación

Por simplicidad ignoraremos la distancia entre el cristal y BS_1 , así como la existente entre BS_2 y D_a , pues dan lugar a un cambio de fase que no influye en la probabilidad. De esta forma, llamaremos $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ a la posición del primer divisor y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$ a la posición del detector.

En primer lugar obtendremos el campo en los canales de salida de BS_1 . Es necesario tener en cuenta, además de la señal, la radiación de punto cero $E_v^{(+)}$ que entra por el otro canal del BS_1 ²⁰. Dicha radiación está descorrelacionada con $E_s^{(+)}$, aunque contiene la misma distribución de frecuencias. Supondremos que los coeficientes de transmisión y reflexión de los divisores son idénticos ($R = T = 1/\sqrt{2}$). Tenemos,

$$F_1^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[F_v^{(+)} + iF_s^{(+)}]; \quad F_2^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[iF_v^{(+)} + F_s^{(+)}]. \quad (6.58)$$

Teniendo en cuenta el paso por BS_2 , el valor del campo en la posición \mathbf{r}_a en el instante t es:

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) = \frac{1}{2} \left\{ e^{i\omega_s L_s/c} \left[-F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) + iF_v^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) \right] \right. \\ \left. + e^{i\omega_s C_s/c} \left[F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) + iF_v^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) \right] \right\}, \quad (6.59)$$

donde hemos hecho uso de (4.40). Para calcular la probabilidad de detección necesitamos el promedio de la intensidad en la posición del detector, a la cual tendremos que restar posteriormente la contribución de la radiación del punto cero. Tenemos:

$$\langle I(\mathbf{r}_a, t) \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) F_s^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) \rangle \right. \\ - e^{i\omega_s \Delta L_s/c} \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) F_s^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) \rangle + \langle F_v^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) F_v^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) \rangle \\ + e^{i\omega_s \Delta L_s/c} \langle F_v^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) F_v^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) \rangle + \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) F_s^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) \rangle \\ - e^{-i\omega_s \Delta L_s/c} \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) F_s^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) \rangle + \langle F_v^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) F_v^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) \rangle \\ \left. + e^{-i\omega_s \Delta L_s/c} \langle F_v^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{C_s}{c}) F_v^{(-)}(\mathbf{0}, t - \frac{L_s}{c}) \rangle \right\}. \quad (6.60)$$

²⁰Se puede ver fácilmente que si se tiene en cuenta dicha radiación en el primer divisor, no es necesario tenerla en cuenta en el segundo porque las relaciones de conmutación se satisfarán automáticamente.

6.3 EXPERIMENTOS PARA EL CONTRASTE DE LAS DESIGUALDADES DE BELL

A continuación, teniendo en cuenta (4.48) y (4.62), la intensidad en la posición del detector es 99

$$\langle I(\mathbf{r}_a, t) \rangle = \frac{1}{4} \{ 4I_{0s} + g^2 |V|^2 [2\mu_s(0) - (e^{i\omega_s \Delta L_s / c} \mu_s(\frac{\Delta L_s}{c}) + c.c.)] \}. \quad (6.61)$$

Finalmente, restando la contribución del punto cero, tenemos

$$P_a(\mathbf{r}_a, t) \propto \frac{g^2 |V|^2}{2} \mu_s(0) \left[1 - \frac{Re(e^{i\omega_s \Delta L_s / c} \mu_s(\frac{\Delta L_s}{c}))}{\mu_s(0)} \right]. \quad (6.62)$$

Cuando $\Delta L_s \gg c\tau_s$ la probabilidad de detección simple es constante porque el segundo sumando tiende a cero. Por el contrario, cuando ΔL_s es del orden del tiempo de coherencia de la señal, vemos que P_a tiene una dependencia coseno con $\Delta L_s/c$.

6.3.4 Probabilidad de detección conjunta

Para calcular la tasa de detección conjunta en D_a y D_b necesitamos conocer, además del campo en \mathbf{r}_a en el instante t , el cual viene dado por (6.59), el valor del campo en el segundo detector localizado en \mathbf{r}_b , en el instante $t + \tau$. Dicho campo puede obtenerse fácilmente a partir de (6.59) cambiando el subíndice "s" por "i", y t por $t + \tau$. Tenemos

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) = \frac{1}{2} \{ e^{i\omega_i L_i / c} [-F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{L_i}{c}) + iF_{v'}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{L_i}{c})] + e^{i\omega_i C_i / c} [F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{C_i}{c}) + iF_{v'}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{C_i}{c})] \}, \quad (6.63)$$

donde $F_{v'}$ representa la radiación de punto cero que entra por el segundo canal de BS'_1 . Dicha radiación está descorrelacionada con F_v , y ambos con F_i y F_s . De esta forma, aquellos términos que son no nulos en la correlación (5.26) son aquellos en los que aparecen $F_i^{(+)}$ y $F_s^{(+)}$. Teniendo en cuenta esto último y (4.78), se tiene

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t + \tau) \propto \left| E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau) \right|^2 = \frac{g^2 |V|^2}{16} \left| e^{i\omega_i \frac{L_i}{c} + i\omega_s \frac{L_s}{c}} \nu(-\tau + \frac{L_i - L_s}{c}) + e^{i\omega_i \frac{C_i}{c} + i\omega_s \frac{C_s}{c}} \nu(-\tau + \frac{C_i - C_s}{c}) - e^{i\omega_s \frac{L_s}{c} + i\omega_i \frac{C_i}{c}} \nu(-\tau + \frac{C_i - L_s}{c}) - e^{i\omega_s \frac{C_s}{c} + i\omega_i \frac{L_i}{c}} \nu(-\tau + \frac{L_i - C_s}{c}) \right|^2. \quad (6.64)$$

En el caso de que las diferencias $(L_s - C_i)/c$ y $(L_i - C_s)/c$ sean mayores que el tiempo de correlación de ν , y de que $L_s \approx L_i$ y $C_s \approx C_i$, el resultado que se obtiene para P_{ab} tras realizar la integración en la ventana es:

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a; \mathbf{r}_b) = \frac{g^2 |V|^2 \eta^2 C}{8\hbar^2 \omega_s \omega_i} \left[1 + \cos\left(\frac{\omega_s \Delta L_s}{c} + \frac{\omega_i \Delta L_i}{c}\right) \right] \quad (6.65)$$

donde C viene dada por (6.8).

6.3.5 Pruebas de las desigualdades de Bell usando correlación de polarización

La mayor parte de los experimentos realizados con cristales no lineales para el contraste experimental de las desigualdades de Bell han utilizado conversión paramétrica de tipo I en la que los haces correlacionados salen con la misma polarización. No obstante, la conversión de tipo II, en la que los haces salen con polarizaciones perpendiculares, genera estados enredados con mayor similitud al estado EPR. Dentro de la conversión de tipo II existen dos clases de experimentos: i) aquellos en los que se utiliza conversión colineal, consistente en que el cristal se orienta de forma que los conos ordinario y extraordinario son tangentes en la dirección del haz incidente. La mayor parte de los experimentos realizados hasta la fecha con tipo II han utilizado conversión colineal. ii) En la conversión no colineal los dos conos se intersecan en dos direcciones, dando lugar a un estado enredado en polarización de la forma (Kwiat et al., 1995):

$$|\phi\rangle = |o\rangle_1 |e\rangle_2 + |e\rangle_1 |o\rangle_2, \quad (6.66)$$

donde “o” (“e”) se refiere a ordinario (extraordinario). Este tipo de fuente proporciona directamente un estado semejante al de la versión de Bohm de la paradoja EPR (ver capítulo 2), sin tener que hacer uso de ningún elemento óptico adicional a la salida del cristal. Por ello, se ha afirmado que la conversión tipo II no colineal es la mejor candidata para generar estados que den lugar a una violación de las desigualdades de Bell.

El montaje experimental se muestra en la figura 6.9. Los haces “1” y “2”, en los cuales se produce la intersección de los conos ordinario y extraordinario, se seleccionan por medio de filtros y se envían a dos polarizadores P_1 y P_2 , siendo ϕ_1 y ϕ_2 sus orientaciones respecto a la polarización del rayo extraordinario. Tras los polarizadores, dos detectores D_1 y D_2 miden coincidencias para diferentes valores de dichas orientaciones. En Kwiat et al. (1995) se utilizaron elementos ópticos adicionales, tales como láminas de un cuarto de onda y láminas de media onda, con el objeto de medir las cuatro correlaciones que aparecen en las desigualdades de Bell. Nosotros nos centraremos tan sólo

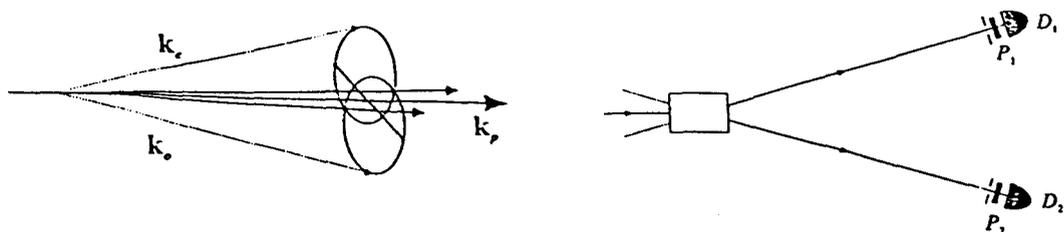


Figura 6.9: Montaje para el contraste de desigualdades de Bell mediante el uso de conversión tipo II no colineal.

en uno de ellos, en concreto aquel en que no se utiliza ningún elemento óptico aparte de los polarizadores.

En primer lugar vamos a analizar la relación existente entre la descripción del estado en el espacio de Hilbert, dada en (6.66), y la correspondiente a la función de Wigner (Casado et al., 1994d). Los haces correspondientes a la intersección de los conos ordinario y extraordinario vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{0}, t) &= F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{i} + F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{j}, \\ \mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{0}, t) &= F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{i}' + F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{j}', \end{aligned} \quad (6.67)$$

donde \mathbf{i} , \mathbf{i}' representan las polarizaciones de los dos haces extraordinarios y \mathbf{j} , \mathbf{j}' las correspondientes a los haces ordinarios. El detalle importante es que la componente extraordinaria del primer rayo, $F_e^{(+)}$, y la ordinaria del segundo, $F_o^{(+)}$, son conjugadas y están por tanto correlacionadas. De la misma forma, $F_o^{(+)}$ y $F_e^{(+)}$ están correlacionados, pero $F_e^{(+)}$ ($F_o^{(+)}$) está descorrelacionado con $F_e^{(+)}$ ($F_o^{(+)}$). Esta es la interpretación de los estados enredados tipo EPR en óptica cuántica, cuando se trabaja dentro del formalismo de la función de Wigner.

Cuando un polarizador orientado un ángulo ϕ_1 respecto a la horizontal se coloca en frente del detector D_1 , el campo en D_1 (situado en \mathbf{r}_1), en el instante t es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) &= [\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) \cdot (\cos \phi_1 \mathbf{i} + \sin \phi_1 \mathbf{j})](\cos \phi_1 \mathbf{i} + \sin \phi_1 \mathbf{j}) \\ &= e^{i\omega \frac{d}{c}} [F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{d}{c}) \cos \phi_1 + F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t - \frac{d}{c}) \sin \phi_1] \\ &\quad (\cos \phi_1 \mathbf{i} + \sin \phi_1 \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (6.68)$$

De la misma forma, la expresión del campo en el detector D_2 , colocado en \mathbf{r}_2 , en el instante $t + \tau$, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) &= [\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \cdot (\cos \phi_2 \mathbf{i}' + \sin \phi_2 \mathbf{j}')] (\cos \phi_2 \mathbf{i}' + \sin \phi_2 \mathbf{j}') \\
&= e^{i\omega \frac{d}{c}} [F_{e'}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{d}{c}) \cos \phi_2 + F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{d}{c}) \sin \phi_2] \\
&\quad (\cos \phi_2 \mathbf{i}' + \sin \phi_2 \mathbf{j}'). \tag{6.69}
\end{aligned}$$

Realizando algunas operaciones sencillas obtenemos la probabilidad de detección en la ventana:

$$\begin{aligned}
P_{12}(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) &\propto \int_0^\infty d\tau \sum_\lambda \sum_{\lambda'} | \langle F_\lambda^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) F_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle |^2 \\
&= K \text{sen}^2(\phi_2 + \phi_1), \tag{6.70}
\end{aligned}$$

siendo K una constante. Esta expresión es similar a la obtenida en Kwiat et al. (1995).

Capítulo 7

INTERPRETACIÓN ONDULATORIA DE LA LUZ BASADA EN FUNCIONES DE WIGNER POSITIVAS

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizaremos la posibilidad de una interpretación ondulatoria de la propagación y detección de la luz en el formalismo de la función de Wigner. Esta discusión está motivada por una doble razón: en primer lugar, la propagación de la luz en el caso de la conversión paramétrica a la baja quedó perfectamente descrita en el capítulo cuarto a partir de la transformación de la radiación de punto cero a su paso por el cristal ¹. La positividad de la función de Wigner en este proceso abre la posibilidad de una interpretación estocástica del campo electromagnético radiado por el medio no lineal, en la que la función de Wigner haría el papel de una distribución de probabilidad para las amplitudes del campo. En segundo lugar, la teoría de la detección, analizada en el capítulo quinto, muestra la importancia que tiene la radiación de punto cero en la detección. Por tanto, la radiación de punto cero juega un papel relevante en la propagación y detección de la luz, cuando se trabaja con la función de Wigner.

Hemos dividido este capítulo en tres partes: en la primera trataremos la posibilidad de interpretar la función de Wigner como una distribución de probabilidad para las amplitudes del campo eléctrico en el caso de que sea positiva,

¹En Marshall (1997c, d) se estudia el fenómeno a partir de la resolución de las ecuaciones de Maxwell, considerando que la radiación incidente es el láser y el punto cero gaussiano.

así como la relación entre el carácter clásico de la radiación y la positividad de la función de Wigner. En la segunda parte analizaremos la posibilidad de una interpretación ondulatoria de la detección, dada la similitud existente entre los resultados del capítulo quinto y los de la teoría semiclásica de la detección. Trataremos con detalle la relación entre ergodicidad y la positividad de $I - I_o$, para el caso de procesos estacionarios ergódicos caracterizados por una $W \geq 0$, como es el caso de la conversión a la baja. Finalmente, en el tercer apartado estudiaremos la relación entre el teorema de Bell y una posible teoría realista local para los experimentos de conversión a la baja en la que las variables ocultas coincidiesen con las amplitudes del campo, y la distribución de probabilidad fuese la función de Wigner; la teoría de la detección consistiría en una modificación a la teoría cuántica estándar.

7.2 INTERPRETACIÓN ONDULATORIA DE LA PROPAGACIÓN

En el capítulo tercero comentamos el criterio generalmente aceptado de que toda radiación clásica es aquella en la que la función P es positiva. Esto es debido a la analogía formal existente entre esta función y la distribución de probabilidad clásica $P(\{C_k\})$ (ver (3.10)). Por otro lado, también vimos que P no existe para ciertos estados de la radiación, contrariamente a lo que ocurre con la función de Wigner o la función Q , las cuales están bien definidas para cualquier estado.

Si bien la distribución de Wigner tiene el problema de la no positividad, se ha argumentado de una forma consistente la posibilidad de que fuese positiva para los estados que se pueden fabricar realmente en el laboratorio, y negativa para aquellos que no se pueden generar experimentalmente, siendo meros intermediarios matemáticos del cálculo (Ferrero y Santos, 1997). De esta forma, se ha hecho la conjetura de que W marcaría, a través de su positividad, la posibilidad o no de fabricar un determinado estado de la radiación. Por ejemplo, en Marshall et al. (1994) se demuestra que tratando de una forma más realista el estado de la radiación emitida por una fuente atómica, como el que se produce por ejemplo en el experimento de Aspect (Grangier et al., 1986), el estado emitido corresponde a luz caótica, el cual tiene una función de Wigner positiva. También, en Marshall y Santos (1992) se mostró que describiendo de una forma realista las señales mediante agujas de radiación (Einstein, 1917), en lugar de la descripción excesivamente simplificada a partir del estado de un fotón, la zona de negatividad de la función de Wigner que se obtiene puede hacerse arbitrariamente pequeña variando ciertos parámetros que caracterizan dicho estado.

Dejando a un lado la discusión sobre la positividad de W , trataremos a

continuación la cuestión de qué representa, desde un punto de vista estocástico, la existencia de una distribución de Wigner positiva cuando P también es positiva (Marshall et al., 1994). Para ello, partiremos de la expresión de W a partir de P (ver (3.34)):

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \int d^2\beta P(\beta, \beta^*) e^{-2|\beta-\alpha|^2}.$$

Teniendo en cuenta que la distribución de Wigner del vacío viene dada por la gaussiana

$$W_{vac}(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2},$$

tenemos

$$W(\alpha, \alpha^*) = \int d^2\beta P(\beta, \beta^*) W_{vac}(\alpha - \beta), \quad (7.1)$$

lo que nos muestra que la función de Wigner de la radiación total es la convolución de la distribución P con la función de Wigner del vacío. Ahora bien, teniendo en cuenta que cuando P es positiva esta función puede interpretarse como una distribución de probabilidad para las amplitudes β de la radiación, y que W_{vac} puede interpretarse como la distribución de probabilidad para las amplitudes del vacío γ , la convolución de P con W_{vac} representa la distribución de probabilidades de la suma $\gamma + \beta$ cuando dichas cantidades son independientes. Por tanto, una P positiva da la distribución de probabilidad de la radiación que está por encima del mar del punto cero, y ello implica a su vez una W positiva interpretable como la distribución de probabilidades de la suma del punto cero y la radiación clásica.

De esta forma, un estado clásico puede definirse como aquel en el que la radiación de punto cero no se modifica por la presencia de otro tipo de radiación. Por el contrario, un estado no clásico, caracterizado por una P negativa o altamente singular, es aquel en el que el vacío se altera. Nótese que incluso en estos casos una función de Wigner positiva puede interpretarse como la distribución de probabilidades para la amplitud total de la radiación, la cual ya no sería la suma del punto cero y otro campo con distribuciones independientes. Un ejemplo está en el proceso de conversión a la baja en el que P no está definida pero W es una gaussiana.

7.3 LA DETECCIÓN COMO UN FENÓMENO ONDULATORIO

En óptica cuántica, la probabilidad de detección entre t y $t + \Delta t$ para el caso de un detector puntual ² se expresa a partir del promedio de operadores en

²Por simplicidad obviaremos por ahora la notación relativa a la posición del detector.

orden normal (ver (5.4)):

$$P \propto \int_t^{t+\Delta t} \langle \phi_o | \hat{E}^{(-)}(t') \hat{E}^{(+)}(t') | \phi_o \rangle dt', \quad (7.2)$$

donde vimos en el capítulo 5 que $\hat{E}^{(+)}(t')$ representa al operador campo eléctrico en la representación de Heisenberg, y $|\phi_o\rangle$ es el estado inicial de la radiación. También vimos que el ordenamiento normal $\hat{E}^{(-)}(t') \hat{E}^{(+)}(t')$ se expresa a partir de su correspondiente simetrizado menos un conmutador que representa la intensidad de la radiación de punto cero en la posición del detector. De esta forma, la probabilidad de detección por unidad de tiempo en la representación de Wigner viene dada por

$$P(t') \propto \langle I(\{\alpha\}, t') - I_o \rangle, \quad (7.3)$$

donde $I(\{\alpha\}, t') = |E^{(+)}(\{\alpha\}, t')|^2$ es la intensidad total en el detector en el instante t' para una realización dada, que representaremos por $\{\alpha\}$, e I_o es una constante que representa la intensidad media del punto cero en dicha posición, es decir, la intensidad en el detector si todas las fuentes de radiación estuviesen apagadas. El promedio $\langle \rangle$ se toma con la función de Wigner del estado inicial, es decir

$$\langle I(\{\alpha\}, t') - I_o \rangle = \int d^2\{\alpha\} W_{|\phi_o\rangle}(\{\alpha\}) [I(\{\alpha\}, t') - I_o]. \quad (7.4)$$

Si la detección se produce dentro de una ventana Δt , la probabilidad de detección entre t y $t + \Delta t$ viene dada por:

$$P \propto \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle I(\{\alpha\}, t') - I_o \rangle = \langle \int_t^{t+\Delta t} dt' [I(\{\alpha\}, t') - I_o] \rangle. \quad (7.5)$$

Por otro lado, la probabilidad de detección conjunta por unidad de tiempo en los instantes t y t' , correspondiente a dos detectores a y b que están espacialmente separados en el sentido de la relatividad especial, es

$$P_{ab}(t, t') \propto \langle [I_a(\{\alpha\}, t) - I_{oa}] [I_b(\{\alpha\}, t') - I_{ob}] \rangle, \quad (7.6)$$

de forma que la probabilidad total de coincidencia entre $t_a + \Delta t_a$ y $t_b + \Delta t_b$, siendo Δt_a y Δt_b las ventanas asociadas a sendos detectores, sería:

$$\begin{aligned} P_{ab} &\propto \int_{t_a}^{t_a+\Delta t_a} dt \int_{t_b}^{t_b+\Delta t_b} dt' \langle [I_a(\{\alpha\}, t) - I_{oa}] [I_b(\{\alpha\}, t') - I_{ob}] \rangle \\ &= \left\langle \left(\int_{t_a}^{t_a+\Delta t_a} dt [I_a(\{\alpha\}, t) - I_{oa}] \right) \left(\int_{t_b}^{t_b+\Delta t_b} dt' [I_b(\{\alpha\}, t') - I_{ob}] \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Las expresiones (7.3) y (7.6) abren la posibilidad de una interpretación ondulatoria de la teoría cuántica de la detección, en la que la diferencia entre la intensidad instantánea de la luz y la correspondiente a la del punto cero haría el papel de una probabilidad por unidad de tiempo, y la función de Wigner representaría formalmente la distribución de probabilidad de las amplitudes del campo. De hecho, dichas expresiones son similares a las correspondientes a la teoría semiclásica de la detección de un campo fluctuante (ver por ejemplo Mandel y Wolf (1995; capítulo 9) y referencias básicas allí citadas) con las diferencias de que en dicha teoría aparece la intensidad total de la radiación clásica en lugar de la diferencia $I - I_0$, y el promedio se toma con una distribución de probabilidad para las distintas realizaciones del campo.

Los problemas que surgen cuando se trata de interpretar la detección desde un punto de vista ondulatorio con la función de Wigner son los siguientes:

1. La negatividad de la función de Wigner para ciertos estados hace que no se pueda caracterizar siempre el campo eléctrico ni la intensidad en el detector mediante un proceso estocástico. En el caso de la conversión a la baja este problema no existe porque $W \geq 0$.
2. $I(\{\alpha\}, t) - I_0$ puede ser negativa y por tanto no puede interpretarse como una probabilidad por unidad de tiempo asociada a cada realización. Este tema será discutido con cierto detalle en el apartado siguiente.
3. Por último, las fluctuaciones de la intensidad del punto cero son enormes, lo cual hace difícil explicar cómo el detector es capaz de seleccionar señales en presencia de dicha radiación de fondo (Santos, 1989). No obstante, el conjunto de modos que llegan a un detector no es infinito, sino que éste es sensible sólo a un conjunto acotado de modos. Ello hace que I_0 , así como sus fluctuaciones, sean finitas.

De estos tres puntos sólo trataremos con cierto detalle el segundo. Supondremos que la función de Wigner es definida positiva, de forma que la intensidad del campo se puede representar por un proceso estocástico dependiente del tiempo. Por ejemplo, en el caso de la conversión a la baja la función de Wigner es una gaussiana, correspondiente en el marco de Heisenberg a la función de Wigner del vacío, y el proceso estocástico $I(\{\alpha\}, t)$ lleva toda la dependencia temporal. Ya vimos que la existencia de una función de Wigner definida positiva permite analizar la propagación de la luz cuantizada desde un punto de vista puramente ondulatorio, en el que la radiación de punto cero forma parte inherente de dicha radiación.

7.3.1 La negatividad de $I - I_o$

Cuando se pasa de la propagación de la luz a su detección, la interpretación lógica basada en la expresión (7.4) es que la probabilidad de detección por unidad de tiempo para cada realización es la diferencia entre la intensidad total y la del punto cero. No obstante, la cantidad $I(\{\alpha\}, t) - I_o$ puede tomar valores negativos y por tanto no representa una probabilidad, aun cuando W sea positiva. De todas formas, lo que tiene significado físico es la integral temporal de dicha diferencia durante la ventana de detección, pues la detección es un fenómeno que requiere de la incidencia de luz sobre el detector durante un cierto tiempo.

Relación entre positividad y ergodicidad

Para analizar más a fondo este problema nos centraremos en el proceso de la conversión paramétrica a la baja el cual es estacionario y sus correlaciones tienden a cero de una forma suficientemente rápida en el tiempo. Para un proceso gaussiano estacionario esto último es una condición suficiente para una ergodicidad total (Mandel y Wolf, 1995; capítulo 2, sección 2.2.1), lo cual implica que el promedio de conjunto puede sustituirse por el promedio temporal para una realización dada (excepto para un subconjunto de media nula):

$$P \propto \langle I(\{\alpha\}, t) - I_o \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [I(\{\alpha\}_q, t') - I_o] dt', \quad (7.8)$$

donde $\{\alpha\}_q$ representa una realización cualquiera del proceso. Por tanto, aunque $I(\{\alpha\}_q, t) - I_o$ no represente una probabilidad por unidad de tiempo, su promedio temporal es positivo y coincide con la probabilidad total por unidad de tiempo en dicho instante.

En la práctica no se da una media temporal sino una integración en la ventana Δt , lo cual es casi equivalente (ver (7.5)). La razón de ello es que la ventana de detección suele ser del orden del nanosegundo de manera que $\omega \Delta t$, donde ω es la frecuencia de la luz visible, es del orden de 10^7 . Si bien no es lo mismo tomar el límite $T \rightarrow \infty$ que tomar $T \approx 10^7$ (sin dimensiones), se puede suponer que la integral

$$\int_t^{t+\Delta t} [I(\{\alpha\}, t') - I_o] dt', \quad (7.9)$$

la cual representaría la contribución a la detección de cada realización dentro de la ventana, sólo será negativa para un subconjunto pequeño de todas las realizaciones posibles.

7.3.2 Modificación de la teoría de la detección

Se podría plantear una modificación a la teoría cuántica de la detección postulando que aquellas realizaciones cuyas contribuciones dentro de la ventana son negativas, no intervienen realmente en el proceso de la detección. Esto es equivalente a expresar la probabilidad de detección entre t y $t + \Delta t$ para una realización, como:

$$P(\{\alpha\}, t) \propto \left\{ \int_t^{t+\Delta t} [I(\{\alpha\}, t) - I_0] dt \right\}_+, \quad (7.10)$$

donde la notación $\{\}_+$ indica que reemplazamos la cantidad contenida entre llaves por cero si su valor es negativo. Promediando sobre todas las realizaciones obtendríamos la probabilidad de detección total dentro de la ventana:

$$P \propto \left\langle \left\{ \int_t^{t+\Delta t} [I(\{\alpha\}, t') - I_0] dt' \right\}_+ \right\rangle. \quad (7.11)$$

Esta modificación fue formulada ya en el contexto de la óptica estocástica por Marshall y Santos (1988, 1989), donde se postulaba que el detector sólo “ve” aquella radiación cuya intensidad está por encima del umbral marcado por I_0 . Análogamente, en el caso de la detección conjunta tendríamos

$$P_{ab} = \left\langle \left\{ \int_{t_a}^{t_a+\Delta t_a} dt [I_a(\{\alpha\}, t) - I_{0a}] \right\}_+ \left\{ \int_{t_b}^{t_b+\Delta t_b} dt' [I_b(\{\alpha\}, t') - I_{0b}] \right\}_+ \right\rangle. \quad (7.12)$$

Es evidente que esta modificación de la teoría estandar a partir de (7.11) y (7.12) predice una probabilidad de detección mayor, dando lugar a más cuentas dentro de la ventana que las predichas por (7.5) y (7.7). De todos modos, los detectores tienen siempre cuentas oscuras³, correspondientes a detecciones que se producen sin que incida sobre ellos ninguna radiación (Marshall y Santos, 1997). La propia teoría cuántica, si no se formulara a primer orden en teoría de perturbaciones, daría lugar a más cuentas que las predichas por (7.2).

Se puede conjeturar, aunque habría que demostrarlo, que la diferencia entre las cuentas predichas por (7.11) y las correspondientes a la teoría cuántica a primer orden es parte de las cuentas oscuras del detector. Dicho de otro modo, que pasar de (7.5) a (7.11) es lo mismo que formular la teoría cuántica de una forma más detallada teniendo en cuenta, por un lado, procesos de orden más alto en teoría de perturbaciones y, por otro lado, la estructura electrónica de bandas del material fotodetector, en lugar de un tratamiento a primer orden basado en el efecto de un único átomo (Saleh y Teich, 1991, capítulo 17; Rieke, 1994).

³En inglés se utiliza el término “dark rate”.

7.4 RELACIÓN CON EL PROBLEMA EPR

La existencia de una función de Wigner positiva para el proceso de conversión a la baja, junto con la modificación llevada a cabo en el apartado anterior a la teoría de la detección, abre la posibilidad de establecer un modelo de variables ocultas locales que dé cuenta de todos los experimentos realizados en este campo. En dicho modelo, las variables ocultas serían las amplitudes correspondientes a los modos del campo y la distribución de probabilidad sería la función de Wigner, estando caracterizado el fenómeno de la detección por las expresiones (7.11) y (7.12). Este modelo es realista local en el sentido definido por Clauser y Shimony (1978).

La existencia de este modelo realista local parece contradecir el teorema de Bell, el cual prohíbe la existencia de teorías de variables ocultas locales compatibles con la mecánica cuántica. No hay contradicción por el hecho de que (7.12) predice una tasa de detección mayor que la dada por la teoría cuántica.

No obstante, existen experimentos en los que se afirma que se han violado las desigualdades de Bell, y por tanto, que se ha refutado el realismo local Kwiat (1995). Esto plantea una aparente contradicción entre la conjetura de que este modelo casa bien con un tratamiento más realista del fenómeno de la detección por parte de la mecánica cuántica, y la violación experimental de una desigualdad que verifica dicho modelo. La solución a esta contradicción se basa en que las desigualdades que se han violado no son las desigualdades inhomogéneas basadas únicamente en las hipótesis de realismo y localidad (por ejemplo, la desigualdad (4) de Clauser y Horne (1974)), sino las homogéneas que se deducen con la hipótesis de la no-intensificación (como la desigualdad (11) de la referencia anterior). Es esta hipótesis adicional, no el realismo local, lo que se ha violado en los experimentos. De hecho, se ha argumentado durante varios años que dicha hipótesis es incorrecta (Marshall y Santos, 1988, 1989; Ferrero, Marshall y Santos, 1990; Marshall, 1991; Santos, 1992; Risco, 1997).

Capítulo 8

CONCLUSIONES

Esta memoria ha recogido el análisis de la conversión a la baja con el formalismo de la función de Wigner de la óptica cuántica, así como varios de los experimentos realizados con el conversor paramétrico en relación con los problemas fundamentales de la mecánica cuántica. Hemos dividido en cuatro partes la exposición de las conclusiones. Estas son:

1. El formalismo de la función de Wigner de la óptica cuántica proporciona un método de cálculo, alternativo al que utiliza el espacio de Hilbert, para la obtención de probabilidades de detección en los experimentos de conversión a la baja. Aunque se parte de un desarrollo perturbativo a segundo orden en la constante de acoplamiento, se demostró en el capítulo 4 que la contribución de los términos de segundo orden en las autocorrelaciones es igual a la de los términos de primer orden. Esto implica que este procedimiento de cálculo es tan sencillo como el que usa el espacio de Hilbert.

Por otro lado, ha quedado patente la importancia de la función de Wigner dentro del estudio de la óptica cuántica en el espacio de las fases, frente al uso de la distribución P , que en el caso de la conversión a la baja no tiene un buen comportamiento.

2. En el capítulo 6 hemos hecho una revisión de los experimentos más importantes dentro del campo de los problemas fundamentales de la mecánica cuántica, dejando constancia de la validez de este formalismo desde un punto de vista matemático e interpretativo. Por ejemplo, los experimentos para el contraste de desigualdades de Bell tales como el experimento de Rarity y Tapster, el de Franson, y el de Kwiat et al. (1995), los cuales son los más representativos dentro de este ámbito, se han analizado dando lugar a los mismos resultados, aunque la función de Wigner proporciona una interpretación de los mismos en términos de ondas. La posibilidad de una descripción estocástica del campo electromagnético con una

función de Wigner positiva, proporciona otra visión de los experimentos mediante la radiación de punto cero. También hemos analizado experimentos que muestran el carácter no clásico de la luz (experimentos de coherencia espacial y temporal, experimento de coherencia inducida, experimento de creación frustrada de fotones por interferencia, cancelación de la dispersión y borrador cuántico), algunos de los cuales se caracterizaron en un principio por la dificultad que entrañaba la interpretación de los resultados. Hemos visto que la función de Wigner permite una explicación de los experimentos de interferencia en términos de ondas, siendo el punto cero la única parte no clásica de dicha interpretación. No obstante, en el capítulo 4 mostramos la conexión entre las teorías clásica y cuántica de la amplificación paramétrica, en base a la consideración de la entrada en el cristal de la radiación de punto cero.

La aplicación de este formalismo a la óptica cuántica abre la posibilidad de interpretar los resultados de una forma alternativa a la usual, la cual usa las reglas de Feynman. Esto puede servir de base para predecir la existencia o no de interferencia en otros experimentos, sin realizar explícitamente los cálculos.

3. Aunque sólo se han estudiado experimentos de detección simple y conjunta, la extensión de los resultados de la teoría de la detección a experimentos con más de dos detecciones es inmediata y puede servir de base, junto a los resultados del capítulo 4, para un estudio de otros experimentos. Por ejemplo, aquellos proyectos encaminados al desarrollo tecnológico, como la criptografía cuántica, la computación cuántica, y el teletransporte, los cuales utilizan el conversor paramétrico a la baja como fuente de estados EPR, podrían analizarse con este formalismo. Ello proporcionaría una interpretación diferente de los mismos.

Por otro lado, los resultados de la teoría de la detección del capítulo 5 pueden aplicarse en otros experimentos de interferencia en los que se utilice otras fuentes de radiación.

Además, en el capítulo 7 hemos visto que la representación de Wigner proporciona la base para una posible teoría de variables ocultas locales que describiese los resultados de los experimentos de conversión a la baja. La distribución de probabilidad que gobierna el proceso sería la función de Wigner, y la teoría de la detección sería una modificación a la teoría cuántica de la detección en la formulación de Wigner.

4. Este formalismo ha permitido una interpretación estocástica de los estados enredados en la conversión a la baja, los cuales se caracterizan por haces con ciertas propiedades de "super correlación".

Capítulo 9

BIBLIOGRAFÍA

1. Agarwal G.S. y Wolf E. (1970a), *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. I. Mapping theorems and ordering of functions of noncommuting operators*, Phys. Rev. D. **2**, 2161-2186.
2. Agarwal G.S. y Wolf E. (1970b), *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. II. Quantum mechanics in phase space*, Phys. Rev. D. **2**, 2187-2205.
3. Agarwal G.S. y Wolf E. (1970c), *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. III. A generalized Wick theorem and multitime mapping*, Phys. Rev. D **2**, 2206-2225.
4. Aspect A., Grangier P., y Roger G. (1981), *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. **47**, 460-463.
5. Aspect A., Grangier P., y Roger G. (1982a), *Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49**, 91-94.
6. Aspect A., Dalibard J., y Roger G. (1982b), *Experimental tests of Bell's inequalities using time varying analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804-1807.
7. Ballentine L. E. (1990), *Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New Jersey).
8. Barenco A., Deutch D., Ekert A., y Jozsa R. (1995), *Conditional quantum dynamics and logic gates*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4083-4086.
9. Belinsky A.V. y Klyshko D.N. (1992), *Interference of classical and non-classical light*, Phys.Lett.A **166**, 303-307.

10. Bell, J. S. (1964), *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Physics **1**, 195-200.
11. Bennett C. H. (1992), *Quantum cryptography using any two orthogonal states*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3121-3124.
12. Bennett C.H., Brassard G., Crépeau C., Jozsa R., Peres A., y Wootters W. K. (1993), *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895-1899.
13. Bloembergen N. (1965), *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York).
14. Bohr N. (1935a), *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **48**, 696-702.
15. Bohr N. (1935b), *Quantum mechanics and physical reality*, Nature **136**, 65.
16. Bohm D. (1952a), *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I*, Phys. Rev. **85**, 166-179.
17. Bohm D. (1952b), *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. II*, Phys. Rev. **85**, 180-193.
18. Born M. y Wolf E. (1993), *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford).
19. Bouwmeester D., Pan J-W, Mattle K., Eibl M., Weinfurter H., y Zeilinger A. (1997), *Experimental quantum teleportation*, Nature **390**, 675-680.
20. Boyd R. W. (1992), *Nonlinear Optics* (Academic Press, Boston).
21. Brendel J., Mohler E., y Martienssen W. (1991), *Time-resolved dual-beam two-photon interferences with high visibility*, Phys. Rev. Lett. **66**, 1142-1145.
22. Brendel J., Mohler E., y Martienssen W. (1992), *Experimental tests of Bell's inequality for energy and time*, Europhys. Lett. **20**, 575-580.
23. Burnham D.C. y Weinberg D.L. (1970), *Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs*, Phys.Rev.Lett **25**, 84-87.
24. Butcher P. N. y Cotter D. (1990), *The Elements of Nonlinear Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge).
25. Byer R. L. y Harris S. E. (1968), *Power and bandwidth of spontaneous parametric emission*, Phys. Rev. **168**, 1064-1068.
26. Cahill K.E. y Glauber R.J. (1969a), *Ordered expansions in boson amplitude operators*, Phys. Rev. **177**, 1857-1881.

-
27. Cahill K.E. y Glauber R.J. (1969b), *Density operators and quasiprobability distributions*, Phys. Rev. **177**, 1882-1902.
 28. Casado A., Marshall T.W., y Santos E. (1997a), *Parametric downconversion experiments in the Wigner representation*, J. Opt. Soc. Am. B, **14**, 494-502.
 29. Casado A., Fernández-Rueda A., Marshall T.W. (1997b), Risco-Delgado R., y Santos E., *Fourth-order interference in the Wigner representation for parametric down-conversion experiments*, Phys. Rev. A **55**, 3879-3890.
 30. Casado A., Fernández-Rueda A., Marshall T.W., Risco-Delgado R., y Santos E., (1997c) *Dispersion cancellation and quantum eraser experiments analyzed in the Wigner function formalism*, Phys. Rev. A **56**, 2477-2480.
 31. Casado A., Marshall T. W., y Santos E. (1997d), *Type-II parametric down conversion in the Wigner-function formalism. Entanglement and Bell's inequalities*, (Aceptado para publicación en J. Opt. Soc. Am. B).
 32. Casado A., Marshall T. W., y Santos E. (1997e), *Wigner representation for parametric down-conversion experiments*, (Proceedings of the 5th International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations, NASA Conference Publication), (pendiente de publicación).
 33. Chiao R.Y., Kwiat P.G., y Steinberg A.M. (1993), *¿Más veloz que la luz?*, Investigación y Ciencia, Octubre 1993, 14-23.
 34. Clauser J. F. y Horne M. A. (1974), *Experimental consequences of objective local theories*, Phys. Rev. D **10**, 526-535.
 35. Clauser J. F. y Shimony A. (1978), *Bell's theorem: experimental tests and implications*, Rep. Progr. Phys. (London) **41**, 1881-1927.
 36. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., y Holt R. A. (1969), *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. **23**, 880-884.
 37. Cohen L. (1995), *Time Frequency Analysis* (Prentice Hall, New York).
 38. de la Peña L. y Cetto A. M. (1996), *The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics* (Kluwer, Dordrecht).
 39. Einstein A., Phys. Z. **18**, 121 (1917).
 40. Einstein. A, Podolsky B., y Rosen N. (1935), *Can quantum mechanical description of reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777-780.

41. Ekert A. K. (1991), *Quantum Cryptography based on Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. **67**, 661-663.
42. Ekert A. K., Rarity J. G., Tapster P. R., Massimo Palma G. (1992), *Practical quantum cryptography based on two-photon interferometry*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1293-1295.
43. Ferrero M., Marshall T. W. y Santos E. (1990), *Bell's theorem: local realism versus quantum mechanics*, Am.J.Phys. **58**, 683-688.
44. Ferrero M. y Santos E. (1997), *Empirical consequences of the scientific construction: the program of local hidden-variables theories in quantum mechanics*, Found. Phys. Lett. **27**, 765-800.
45. Feynman R., Leighton R., y Sands M. (1965), *The Feynman Lectures on Physics* (Addison Wesley).
46. Franken P. A., Hill A. E., Peters C. W., y Weinreich G. (1961), *Generation of optical harmonics*, Phys. Rev. Lett. **7**, 118-119.
47. Franson J.D. (1989), *Bell inequality for position and time*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2205-2208.
48. Franson J. D. (1991), *Two-photon interferometry over large distances*, Phys. Rev. A **44**, 4552-4555.
49. Franson J.D. (1992), *Nonlocal cancellation of dispersion*, Phys.Rev.A **45**, 3126-3132.
50. Friberg S., Hong C.K., y Mandel L. (1985), *Measurements of time delays in the parametric production of photon pairs*, Phys.Rev.Lett. **54**, 2011-2013.
51. Giallorenzi T. G. y Tang C. L. (1968), *Quantum theory of spontaneous parametric scattering of intense light*, Phys. Rev. **166**, 225-233.
52. Glauber R.J. (1963a), *The quantum theory of optical coherence*, Phys. Rev. **130**, 2529-2788.
53. Glauber R.J. (1963b), *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. **131**, 2766-2788.
54. Glauber R.J. (1963c), *Photon correlations*, Phys. Rev. Lett. **10**, 84-86.
55. Glauber R.J. (1965), *Quantum optics and electronics*, editado por C. DeWitt, A. Blandin, y Cohen-Tannoudji (Gordon y Breach, New York).
56. Ghosh R., Hong C.K., Ou Z.Y. y Mandel L. (1986), *Interference of two photons in parametric down conversion*, Phys. Rev. A **34**, 3962-3968.

-
57. Ghosh R. y Mandel L. (1987), *Observation of nonclassical effects in the interference of two photons*, Phys.Rev.Lett **59**, 1903-1905.
 58. Gordon J.P., Louisell W.H., y Walker L.R. (1963), *Quantum fluctuations and noise in parametric processes. II*, Phys.Rev. **129**, 481-485.
 59. Graham R. (1984), *General correlation identity for parametric processes*, Phys. Rev. Lett. **52**, 117-120.
 60. Grangier P., Roger G., y Aspect A. (1986), *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: a new light on single-photon interferences*, Europhys. Lett. **1**, 173-179.
 61. Greenberger D.M., Horne M.A. y Zeilinger A. (1993), *Multiparticle interferometry and the superposition principle*, Physics Today, **46**, 8-22.
 62. Harris S. E., Oshman M. K., y Byer R. L. (1967), *Observation of tunable optical parametric fluorescence*, Phys. Rev. Lett. **18**, 732-734.
 63. Hecht E. y Zajac A. (1990), *Óptica* (Addison-Wesley Iberoamericana).
 64. Herzog T.J., Rarity J.G., Weinfurter H., y Zeilinger A. (1994), *Frustrated two-photon creation via interference*, Phys.Rev.Lett **72**, 629-632.
 65. Herzog T. J., Kwiat P. G., Weinfurter H., y Zeilinger A. (1995), *Complementarity and quantum eraser*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3034-3037.
 66. Hillery M. y Scully M.O. (1983) en *Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory*, editado por P. Meystre y M. O. Scully (Plenum, New York), páginas 65-85.
 67. Hillery M., O'Connell R.F., Scully M.O., y Wigner E.P. (1984), Physics Reports **106**, 123.
 68. Hong C.K. y Mandel L. (1985), *Theory of parametric down conversion of light*, Phys.Rev.A **31**, 2409-2418.
 69. Hong C.K., Ou Z.Y., y Mandel L. (1987), *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons via interference*, Phys.Rev.Lett. **59**, 2044-2046.
 70. Horne M. A., Shimony A., y Zeilinger A. (1989), *Two-particle interferometry*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2209-2212.
 71. Horne M., Shimony A., y Zeilinger A. (1990), *Down-conversion photon pairs: a new chapter in the history of quantum mechanical entanglement*, en *Quantum Coherence*, editado por J. S. Anandan, (World Scientific).

72. Robeur A., B.E.A. Saleh, y Teich M.C. (1994), *Spatiotemporal coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion*, Phys.Rev.A. **50**, 3349-3361.
73. Kim Y.S y Noz M.E. (1991), *Phase space picture of quantum mechanics* (World Scientific, Singapore).
74. Kleinman D. A. (1968), *Theory of optical parametric noise*, Phys. Rev. **174**, 1027-1041.
75. Klyshko D. N. (1969), Sov. Phys. JEPT **28**, 522.
76. Knight P.L. y Allen L. (1983), *Concepts of quantum optics* (Pergamon Press, Oxford).
77. Kwiat P.G., Mattle K., Weinfurter H., y Zeilinger A. (1995), *New high-intensity source of polarization-entangled photons pairs*, Phys.Rev.Lett. **75**, 4337-4341.
78. Kwiat P.G., Steinberg A.M., y Chiao R.Y. (1992), *Observation of a "quantum eraser": a revival of coherence in a two-photon interference experiment*, Phys.Rev.A **45**, 7729-7739.
79. Kwiat P. G., Steinberg A. M., y Chiao R. Y. (1993), *High-visibility in a Bell-inequality experiment for energy and time*, Phys. Rev. A **47**, R2472-2475.
80. Kwiat P.G., Steinberg A.M., y Chiao R.Y. (1994), *Three proposed "quantum erasers"*, Phys. Rev. A **49**, 61-68.
81. Kwiat P. G., Varella W. A., Hong C. K., Nathel H., Chiao R. Y. (1990), *Correlated two-photon interference in a dual-beam Michelson interferometer*, Phys. Rev. A **41**, 2910-2913.
82. Louisell W. H. (1960), *Coupled mode and parametric electronics*, (Wiley, New York).
83. Louisell W. H., Yariv A., y Siegman A. E. (1961), *Quantum fluctuations and noise in parametric processes. I*, Phys. Rev. **124**, 1646-1654.
84. Louisell W. (1974), *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (Wiley, New York).
85. Loudon R. (1981), *The quantum theory of light* (Clarendon Press, Oxford).
86. Mandel L. (1983), *Photon interference and correlation effects produced by independent quantum sources*, Phys.Rev.A **28**, 929-943.

-
87. Mandel L. y Wolf E. (1965), *Coherence properties of optical fields*, Rev. Mod. Phys. **37**, 231-287.
 88. Mandel L. y Wolf E. (1995), *Optical Coherence and Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge).
 89. Marshall T. W. (1991), *What does noise do to the Bell Inequalities?*, Found. Phys. **21**, 209-219.
 90. Marshall T. W. (1997a), *Magical photon or real zeropoint?*, en *New Developments on Fundamental Problems in Quantum Physics*, páginas 231-245, editado por M. Ferrero y A. van der Merve, (Kluwer, Dordrecht).
 91. Marshall T. W. (1997b), *The myth of the down converted photon*, (no publicado).
 92. Marshall T. W. (1997c), *Do we need photons in parametric down conversion?*, (no publicado).
 93. Marshall T. W. (1997d), *A local realist theory of parametric down conversion*, (no publicado).
 94. Marshall T. W. y Santos E. (1988), *Stochastic optics: A reaffirmation of the wave nature of light*, Found. Phys. **18**, 185-201.
 95. Marshall T. W. y Santos E. (1989), *Stochastic optics: A local realist analysis of optical tests of Bell inequalities*, Phys.Rev.A **39**, 6271-6283.
 96. Marshall T. W. y Santos E. (1990), *Langevin equation for the squeezing of light by means of parametric oscillator*, Phys. Rev. A. **41**, 1582-1586.
 97. Marshall T. W. y Santos E. (1991), *Photoelectron counting theory in terms of the Wigner and Q representations of the light field*, J. mod. Optics **38**, 1463-1470.
 98. Marshall T. W. y Santos E. (1992), *Interpretation of quantum optics based upon positive Wigner functions*, Found. Phys. Lett. **5**, 573.
 99. Marshall T. W. y Santos E. (1997), *The myth of the photon*, en *The Present Status of the Quantum Theory of Light*, páginas 67-77. Editado por Jeffers S. et al. (Kluwer, Dordrecht).
 100. Marshall T. W., Santos E., y Selleri F. (1983), *Local realism has not been refuted by atomic-cascade experiments*, Phys. Lett. A **98**, 5-9.
 101. Marshall T. W., Santos E., y Vidiella-Barranco A. (1994), *On the non-local predictions of quantum optics*, en *Proceedings of the Third International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations*, (NASA Conference Publication), pag. 581-589.

102. Mattle K., Weinfurter H., Kwiat P. G., y Zeilinger A. (1996), *Dense coding in experimental quantum computation* Phys. Rev. Lett. **76**, 4656-4659.
103. Mehta C.L. y Sudarshan E.C.G. (1965), *Relation between quantum and semiclassical description of optical coherence*, Phys. Rev. **138**, 274-280.
104. Mermin N. D. (1993), *Hidden variables and the two theorems of Jhon Bell*, Rev. Mod. Phys. **65**, 3, 803-815.
105. Milonni P.W. (1994), *The quantum vacuum. An introduction to quantum electrodynamics.*, (Academic Press, Inc., San Diego).
106. Mollow B. R. y Glauber R. J. (1967a), *Quantum theory of parametric amplification. I*, Phys. Rev. **160**, 1076-1096.
107. Mollow B. R. y Glauber R. J. (1967b), *Quantum theory of parametric amplification. II*, Phys. Rev. **160**, 1097-1108.
108. Mollow B.R., (1973) *Photon correlations in the parametric frequency splitting of light*, Phys.Rev.A **8**, 2684-2694.
109. Moyal J. (1949), *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45**, 99.
110. Ou Z. Y. (1988), *Quantum theory of fourth-order interference*, Phys. Rev. A. **37**, 1607-1619.
111. Ou Z.Y. y Mandel L. (1988), *Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment*, Phys.Rev.Lett. **61**, 50-53.
112. Ou Z. Y. y Mandel L. (1989), *Further evidence of nonclassical behavior in optical interference*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2941-2944.
113. Ou Z.Y. y Mandel L. (1990), *Classical treatment of the Franson two-photon correlation experiment*, J.Opt.Soc.Am.B **7**, 2127-2131.
114. Ou Z.Y., Wang L.J., y Mandel L. (1989), *Vacuum effects on interference in two-photon down conversion*, Phys.Rev.A **40**, 1428.
115. Ou Z.Y., Wang L.J., Zou X.Y., y Mandel L. (1990a), *Evidence for phase memory in two-photon down conversion through entanglement with the vacuum*, Phys.Rev.A **41**, 566-568.
116. Ou Z. Y., Zou X. Y., Wang L. J., y Mandel L. (1990b), *Observation of nonlocal interference in separated photon channels*, Phys. Rev. Lett. **65**, 321-324.

117. Ou Z. Y., Zou X. Y., Wang L. J., y Mandel L. (1990c), *Experiment of nonclassical fourth-order interference*, Phys. Rev. A. **42**, 2957-2965.
118. Pěrina J. (1984), *Quantum statistics of linear and nonlinear optical phenomena* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht).
119. Rarity J.G. y Tapster P.R. (1988), *Non classical effects in parametric down conversion*, en *Photons and quantum fluctuations*, editado por E.R. Pike y H. Walker, (Hilger, Londres), páginas 122-150.
120. Rarity J.G. y Tapster P.R. (1990), *Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum* Phys. Rev. Lett. **64**, 2495-2498.
121. Rarity J. G. y Tapster P. R. (1992), *Fourth-order interference effects at large distances*, Phys. Rev. A **45**, 2052-2056.
122. Rarity J. G., Tapster P. R., Jakeman E., Larchuk T., Campos R. A., Teich M. C., y Saleh B. E. A. (1990), *Two-photon interference in a Mach-Zehnder interferometer*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1348-1351.
123. Reichl L.E. (1980), *A Modern Course in Statistical Physics* (University of Texas Press).
124. Rieke G. H. (1994), *Detection of Light: from the Ultraviolet to the Submillimeter*, (Cambridge University Press, Cambridge).
125. Risco R. (1997), Tesis doctoral *Localidad y no localidad bajo recientes resultados teóricos y experimentales*, (Universidad de Sevilla).
126. Rubin M. H. y Shih Y. H. (1992), *Models of a two-photon Einstein-Podolsky-Rosen interference experiment*, Phys. Rev. A **45**, 8138-8147.
127. Rubin M.H., Klyshko D.N., Shih Y.H., y Sergienko A.V. (1994), *Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion*, Phys.Rev.A **50**, 5122-5133.
128. Ryder L.H. (1985), *Quantum field theory* (Cambridge University Press, Cambridge).
129. Saleh B.E.A. y Teich M.C. (1991), *Fundamentals of photonics*, (John Wiley and Sons, New York).
130. Santos E. (1989), *Zeropoint radiation, Real or Virtual?*, en *Problems in quantum physics II; Gdańsk' 89*, (World Scientific Publishers, Singapore).
131. Santos E. (1992), *Critical analysis of the empirical tests of local hidden-variable theories*, Phys.Rev.A **46**, 3646-3656.

132. Santos E. (1996a), *Unreliability of performed tests of Bell's inequality using parametric down-converted photons*, Phys. Lett. A **212**, 10-14.
133. Santos E. (1996b), *Experimentos con pares de fotones producidos en cristales no lineales*, en *Fundamentos de Física Cuántica* (editorial Complitense), páginas 63-81.
134. Schubert M. y Wilhelmi B. (1986), *Nonlinear Optics and Quantum Electronics* (Wiley, New York).
135. Scully M.O. y Rathe U.W (1994), *Vacuum-fluctuation induced photon-photon correlations*, Opt. Commun. **110**, 373.
136. Scully M.O. y Zubairy M.S. (1997), *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge).
137. Selleri F. ed. (1988), *Quantum mechanics versus local realism. The Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, (Plenum Press, New York).
138. Shen Y. R. (1984), *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York).
139. Shih Y.H. y Alley C.O. (1988), *New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion*, Phys.Rev.Lett. **61**, 2921-2924.
140. Shih Y. H., Sergienko A. V., y Rubin M. H. (1993), *Einstein-Podolsky-Rosen state for space-time variables in a two-photon interference experiment*, Phys. Rev. A **47**, 1288-1293.
141. Shih Y.H. y Sergienko A.V. (1994a), *Two-photon anti-correlation in a Hanbury Brown-Twiss type experiment*, Phys.Lett.A **186**, 29-34.
142. Shih Y.H. y Sergienko A.V. (1994b), *Observation of quantum beating in a simple beam-splitting experiment: Two particle entanglement in spin and space-time*, Phys.Rev.A **50**, 2564-2568.
143. Shih Y.H. y Sergienko A.V. (1994c), *A two-photon interference experiment using type II optical parametric down conversion*, Phys.Lett.A **191**, 201-207.
144. Shih Y.H., Sergienko A.V., Rubin M.H., Kiess T.E., y Alley C.O. (1994), *Two-photon entanglement in type-II parametric down-conversion*, Phys.-Rev.A **50**, 23-28.
145. Steinberg A.M., Kwiat P.G., y Chiao R.Y. (1993), *Measurement of the single-photon tunnelling time*, Phys. Rev. Lett. **71**, 708-711.

-
146. Steinberg A.M., Kwiat P.G., y Chiao R.Y. (1992), *Dispersion cancellation and high-resolution time measurements in a fourth-order optical interferometer*, Phys.Rev.A **45**, 6659-6665.
 147. Su. C y Wódkiewicz K. (1991), *Quantum versus stochastic or hidden-variable fluctuations in two-photon interference effects*, Phys. Rev. A. **44**, 6097-6108.
 148. Sudarshan E.C.G. (1963), *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*, Phys. Rev. Lett. **10**, 277-279.
 149. Tapster P.R., Rarity J.G. y Owens P.C.M. (1994), *Violation of Bell's inequality over 4 Km of optical fiber*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1923-1926.
 150. Tucker J. y Walls D. F. (1969), *Quantum theory of the travelling-wave frequency converter*, Phys. Rev. **178**, 2036-2043.
 151. Walls D.F. y Milburn G.J. (1994), *Quantum optics* (Springer-Verlag, Berlin).
 152. Wang L.J., Zou X.Y., y Mandel L. (1991), *Induced coherence without induced emission*, Phys. Rev. A **44**, 4614-4622.
 153. Weyl H. (1931), *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover, New York).
 154. Wigner E. (1932), *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749-759.
 155. Yariv A. (1989), *Quantum electronics*, (John Wiley and Sons, New York).
 156. Zou X.Y., Wang L.J. y Mandel L. (1991), *Induced coherence and indistinguishability in optical interference*, Phys. Rev. Lett. **67**, 318-321.

Parametric downconversion experiments in the Wigner representation

Alberto Casado*

Departamento de Física Moderna, Universidad de Cantabria, Santander, Spain

Trevor W. Marshall

Department of Mathematics, University of Manchester, Manchester, England

Emilio Santos

Departamento de Física Moderna, Universidad de Cantabria, Santander, Spain

Received June 3, 1996

The Wigner representation is developed in the Heisenberg picture for the study of experiments involving photon pairs created in the process of parametric down conversion. After the general description of a light beam and the theory of detection (restricted here to single count probabilities in the Wigner formalism) the theory of parametric downconversion is developed to the point of calculating the autocorrelations of the signal and idler beams. Two recent experiments are analyzed in detail: frustrated two-photon creation by interference, and induced coherence and indistinguishability. © 1997 Optical Society of America [S0740-3224(97)03302-X]

1. INTRODUCTION

Experiments using photon pairs created in the process of parametric downconversion (PDC) have become popular in the past decade for the study of nonclassical aspects of light.¹ Already in the pioneering experiments of Burnham and Weinberg² it was found that the measured value of the correlation time between the two downconverted photons was very small, and more-recent experiments have shown that it may be smaller than picoseconds.³ This feature makes experiments with photon pairs produced in PDC well suited for the study of typical quantum aspects of light, such as photon entanglement.

The theory of PDC has been developed by use of the standard Hilbert space formulation of quantum optics,⁴ but to our knowledge no study of PDC has been made that used phase-space distributions, which are so popular in other areas of quantum optics. For instance, phase-space distributions provide the standard method for the study of the process of parametric amplification,⁵ which is closely related to PDC. Obviously the reason is that use of the Hilbert-space formulation is more appropriate when the photon number is a relevant observable, as in PDC, whereas phase-space representations are better when the field amplitudes are the relevant quantities, as is the case in parametric amplification. In contrast with this general opinion, we show that the Wigner representation is quite efficient for the calculations involved in experiments using photon pairs created in the process of PDC.

A related matter is the interpretation of the formalism. As is well known, quantum theory does not allow for a picture with entities (either pure particles or pure waves) that propagate in space and time. Nevertheless, the

Hilbert-space formulation emphasizes the particle aspect. Photons are created at some point, propagate, and are eventually annihilated at the detectors. Of course the photons are not classic particles, and, for instance, their possible trajectories seem to interfere. In contrast, the phase-space representations suggest an interpretation in terms of waves. If the Wigner distribution is interpreted as a probability distribution of amplitudes of field modes, then the corpuscular aspect of light appears as just an interplay of (Maxwell) waves, including a zero-point vacuum field. As is well known, there are two difficulties in this interpretation: (1) The Wigner function associated with the quantum states of light is not always non-negative definite, and consequently it cannot be interpreted as a probability distribution. (2) The detection probability is proportional not to the intensity (square of the field amplitude) but to the difference between the actual intensity and the zero-point intensity (see Section 3). In PDC experiments the first difficulty does not appear, because the Wigner function is always positive in these experiments (see Section 4), but the second difficulty remains. In any case, in the present paper we want to avoid interpretational problems and to emphasize the calculational advantages of the Wigner distribution in PDC experiments.

2. DESCRIPTION OF A LIGHT BEAM IN THE WIGNER REPRESENTATION

In the Hilbert-space representation of the light field the electric vector is represented as a sum of two mutually conjugate operators:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} (\hbar \omega_{\mathbf{k}}/2L^3)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.2)$$

where L^3 is the normalization volume, $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ is the annihilation operator for a photon whose wave vector is \mathbf{k} and whose polarization is $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$, and $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$. Equations (2.1) and (2.2) correspond to the Heisenberg picture, in which all time dependence goes into creation and annihilation operators $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+$ and $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$. For a free field this dependence has the form

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(0) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t), \quad (2.3)$$

but in general it is complicated and contains all the dynamics of the process. In the Heisenberg picture the state of the field is represented by a time-independent density operator ρ .

In this paper we always consider electromagnetic fields corresponding to (narrow) light beams, and we do not study experiments involving polarizing devices. In these conditions it is convenient to use a scalar approximation well known in classical optics. We assume that the light beam contains frequencies within a range between ω_{\min} and ω_{\max} and wave vectors whose transverse components are limited by a small upper value, that is,

$$\omega_{\min} < \omega_{\mathbf{k}} < \omega_{\max}, \quad |\mathbf{k}^{\text{tr}}| \ll \omega_{\min}/c. \quad (2.4)$$

We assume that the polarizations are linear and well defined, and we write only the relevant component of the electric vector:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}}' (\hbar \omega_{\mathbf{k}}/L^3)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.5)$$

where the prime on the summation in Eq. (2.5) indicates that the sum is restricted to the set of \mathbf{k} that satisfies inequalities (2.4). With these conventions, we ignore the polarization degrees of freedom in the rest of this paper.

In the Wigner representation the operators $\hat{E}^{(+)}$ and $\hat{E}^{(-)}$ become c numbers. The annihilation operators $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ are replaced by random variables $\alpha_{\mathbf{k}}(t)$ and their Hermitian conjugates $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+(t)$ by complex conjugates $\alpha_{\mathbf{k}}^*(t)$. The field amplitudes are

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}}' (\hbar \omega_{\mathbf{k}}/L^3)^{1/2} \alpha_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.6)$$

The Wigner density associated with a state whose density matrix is ρ is⁶

$$W(\alpha) = \text{Tr}[\rho \Phi(\alpha)], \quad (2.7)$$

where

$$\Phi(\alpha) = \int \prod_{\mathbf{k}}' \frac{1}{\pi^2} \exp[\beta_{\mathbf{k}}(\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ - \alpha_{\mathbf{k}}^*) - \beta_{\mathbf{k}}^*(\hat{a}_{\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}})] d^2\beta_{\mathbf{k}}. \quad (2.8)$$

For instance, the Wigner function of the vacuum state is

$$W_{\text{vac}}(\alpha) = \prod_{\mathbf{k}}' (2/\pi) \exp(-2|\alpha_{\mathbf{k}}|^2). \quad (2.9)$$

The crucial property of the Wigner function is that the ensemble average of any polynomial of the random variables α and α^* weighted by the Wigner density exactly corresponds to the Hilbert-space expectation of the corresponding symmetrized product of the annihilation and creation operators \hat{a} and \hat{a}^+ , respectively. That is,

$$\begin{aligned} \langle P(\alpha, \alpha^*) \rangle &= \int P(\alpha, \alpha^*) W(\alpha) d^{2M} \alpha \\ &= \text{Tr}\{\rho S[P(\hat{a}, \hat{a}^+)]\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

where M is the number of $\alpha_{\mathbf{k}}$ variables defined in Eq. (2.10) and $S[]$ means symmetrization, which consists of taking the average of all possible orderings of the operators. For instance,

$$S[\hat{E}^{(+)}\hat{E}^{(-)}] = 1/2[\hat{E}^{(+)}\hat{E}^{(-)} + \hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}]. \quad (2.11)$$

Another useful piece of information is the transformation of the Wigner field amplitudes in a beam splitter. If a and b are the incoming channels and c and d the outgoing ones, and $T(R)$ is the transmission (reflection) coefficient, we have

$$\begin{aligned} E_c^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= TE_a^{(+)}(\mathbf{r}, t) + iRE_b^{(+)}(\mathbf{r}, t), \\ E_d^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= TE_b^{(+)}(\mathbf{r}, t) + iRE_a^{(+)}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

and similarly for the complex-conjugate amplitudes. We have assumed that R and T are real numbers and that \mathbf{r} is the point where the center of the beam splitter is placed. These relations are the same as those between the corresponding field operators in the Hilbert-space formalism and are also the same between field amplitudes in classical optics. This agreement is a straightforward consequence of the linearity of Eq. (2.12).

3. DETECTION PROBABILITIES

We now formulate the quantum theory of detection in the Wigner representation. In the Hilbert-space formalism the usual theory of detection (by photon absorption) is based on normal ordering. The counting probability per unit time, at time t , of a light beam is given by [for simplicity we write $\hat{I}(t)$ for $\hat{I}(\mathbf{r}, t)$, etc.]

$$\text{Probability/time} \propto \langle \hat{I}(t) : \rangle = \langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle, \quad (3.1)$$

where $:$ means normal ordering, that is, putting the annihilation operators to the right. We show that, with symmetrical ordering, we have

$$\langle \hat{I}(t) : \rangle = \langle S[\hat{I}(t)] \rangle - \langle S[\hat{I}(t)] \rangle_0, \quad (3.2)$$

where $\langle \rangle$ means taking the expectation of the operator \hat{I} in the actual state and $\langle \rangle_0$ means the expectation in the vacuum state. The proof is simple. It is enough to realize that

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle &= 1/2 \langle \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)} + \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle \\
 &\quad - 1/2 \langle \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)} - \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle \\
 &= 1/2 \langle \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)} + \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle \\
 &\quad - 1/2 \langle \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)} - \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle_0 \\
 &= 1/2 \langle \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)} + \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle \\
 &\quad - 1/2 \langle \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)} + \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle_0, \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

where the second equation follows because the commutator of $\hat{E}^{(+)}$ and $\hat{E}^{(-)}$ is a c number with the same average for all states and the third follows because the vacuum expectation of a normally ordered product vanishes. Hence, in the Wigner representation, we get

$$\text{Probability/time} \propto \langle I(t) \rangle - \langle I(t) \rangle_0, \quad (3.4)$$

where $\langle \rangle_0$ means taking the average over the (zero-point) field intensity of the vacuum, that is, using Eq. (2.9), and $\langle \rangle$ means the average obtained when we write $\alpha(t)$ and $\alpha^*(t)$ in terms of $\alpha(0)$ and $\alpha^*(0)$ [see, e.g., Eq. (4.6) below] and using Eq. (2.9) for the latter.

In actual experiments there is always a detection window w , and we should perform the time integral of relation (3.4) within the window. We get

$$P_b = \eta/\hbar\omega_b \int_0^w d\tau \langle [I_b(t + \tau) - I_{b0}] \rangle, \quad I_{b0} \equiv \langle I_b \rangle_0, \quad (3.5)$$

where η is the quantum efficiency of the detector and we have assumed that radiation modes where the amplitude differs significantly from the zero-point value are concentrated in a narrow band around ω_b .

Similarly, from the Hilbert-space expression for the coincidence probability of two counts it is possible to get the corresponding expressions in the Wigner representation. However, this problem will be studied elsewhere, and here we consider situations in which only single counts are relevant.

4. PROCESS OF PARAMETRIC DOWNCONVERSION

A sketch of the setup used for PDC is shown in Fig. 1. The essential element is a nonlinear crystal (NLC), that is, a crystal with a nonlinear electric susceptibility. A laser pumping beam impinges upon a side of the crystal and gives rise on the other side to a rainbow of colored cones around the axis defined by the pump. The crucial property of PDC is that photons appear in pairs; one of the members of the pair is the signal, and the other is the idler. In experimental practice two narrow beams, signal and idler, are selected by means of pinholes or just by the detectors.

In the standard treatment of PDC⁴ it is assumed that the pump beam is so intense that it can be treated classically as a monochromatic plane wave with wave vector \mathbf{k}_0 and frequency $\omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0)$. That is, we assume that the electric field associated with the pumping beam can be represented, in the scalar approximation, by

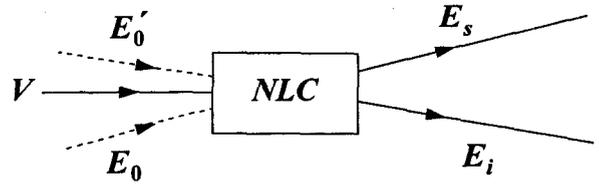


Fig. 1. PDC process.

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}, t) &= V(t) \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)] \\
 &\quad + V^*(t) \exp[-i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)], \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

where $V(t)$ is a (c number) slowly varying complex function of time, the typical time of change being the coherence time of the laser beam, which is large in comparison with most of the times involved in the process. For this reason we ignore the time dependence of $V(t)$, except in Section 7 where it will be essential. Taking the origin of the coordinate system, that is, $\mathbf{r} = 0$, at the center of the crystal, we can formalize the process of PDC by using a Hamiltonian of the form

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \sum \hbar\omega_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} + 1/2) + \hat{H}_{\text{int}}, \\
 \hat{H}_{\text{int}} &= i\hbar g' V \sum f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \exp(-i\omega_0 t) \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+ \\
 &\quad + \text{Hermitian conjugate}, \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

where $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ ($\hat{a}_{\mathbf{k}}$) are creation (annihilation) operators of photons of momentum \mathbf{k} , g' is a real coupling constant so defined that the product $g'V$ has dimensions of frequency, and f is a dimensionless known function of the wave vectors of the outgoing photons. The function $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, which is related to the function $f(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}, t)$ introduced in Eq. (15) of Ref. 4, is different from zero only when the following matching condition is fulfilled:

$$f(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{k}'_0 \approx \mathbf{k}'_s + \mathbf{k}'_i, \quad (4.3)$$

where \mathbf{k}'_0 , \mathbf{k}'_s , and \mathbf{k}'_i are the wave vectors of the laser, the signal, and the idler beams, respectively, inside the crystal.

To go to the Wigner representation we might use the well-known fact that the evolution equations of the Wigner field amplitudes are the same as the Heisenberg equations of motion of the quantum field amplitudes, whenever these are linear. Also, the linearity of the Heisenberg equations is a consequence of the fact that Hamiltonian equation (4.2) is quadratic in the creation or annihilation operator or both. Here we use an equivalent procedure to go to the Wigner representation. We simply remove the hats in the quantum Hamiltonian (see, e.g., Ref. 7); that is, we substitute the classic Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H &= \sum \hbar\omega_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{k}} + i\hbar g' V \sum f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\
 &\quad \times \exp(-i\omega_0 t) \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{k}'}^* - i\hbar g' V^* \\
 &\quad \times \sum f^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \exp(i\omega_0 t) \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}'}, \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

for the quantum one [Eq. (4.2)]. The evolution of the Wigner field amplitudes α and α^* is directly given by the

Hamilton (canonical) equations of motion taking $\alpha\sqrt{\hbar}$ as coordinates and $\alpha^*\sqrt{\hbar}$ as canonical momenta. We get

$$d\alpha_{\mathbf{k}}/dt = -i\omega_{\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}} + g'V \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \exp(-i\omega_0 t) \alpha_{\mathbf{k}'}^*, \quad (4.5)$$

and similar equations for $\alpha_{\mathbf{k}'}$ and their complex-conjugate amplitudes. As mentioned above, Eq. (4.5) is identical to the Heisenberg equations of motion, except that the Wigner amplitudes α^* and α are substituted for the creation and annihilation operators.

We can use Eq. (4.5) to calculate the amplitudes, E_s and E_i , of the signal and the idler beams outgoing from the crystal in terms of the incoming amplitudes V, E_0 and E'_0 (see Fig. 1). As the amplitudes $\alpha_{\mathbf{k}}$ of the (plane wave) components of the beams evolve according to Eq. (4.5) inside the crystal and as free fields outside, we integrate Eq. (4.5) from $t - \Delta t$ to t , where Δt is the time taken for the radiation to cross the crystal. To second order in the coupling constant g' , that is, taking the second term of the right-hand side of Eq. (4.5) as a perturbation and retaining terms up to order g'^2 , we get

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}}(t) &= \alpha_{\mathbf{k}}(t - \Delta t) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}\Delta t) + g'V \\ &\times \exp[-i\omega_0(t - \Delta t)] \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}\Delta t) \\ &\times \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u[(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_0)\Delta t/2] \\ &\times \alpha_{\mathbf{k}'}^*(t - \Delta t) \Delta t + g'^2 |V|^2 \\ &\times \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') u[(\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}}) \\ &\times \Delta t/2] u[(\omega_{\mathbf{k}''} + \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_0)\Delta t/2] \\ &\times \exp(-i\omega_{\mathbf{k}''}\Delta t) \alpha_{\mathbf{k}''}(t - \Delta t) \Delta t^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

where

$$u(x) \equiv x^{-1} \sin(x) \exp(ix). \quad (4.7)$$

In the integration of Eq. (4.5) we have taken V as time independent because we assume that the coherence time of the laser is much bigger than Δt . The perturbative approximation that we used to get Eq. (4.6) is valid, provided that

$$g'|V|\Delta t \equiv g|V| \ll 1, \quad (4.8)$$

where the left-hand side is the effective dimensionless parameter in the perturbation expansion. From now on we use the product $g'\Delta t \equiv g$, instead of g' , as the effective coupling constant. We need the amplitudes to second order in the coupling constant g because interpretation of the experiments of Sections 6 and 7 below will require us to calculate intensities, that is, squares of amplitudes, also to second order.

The function $u(x)$ defined in Eq. (4.7) is highly peaked at $x = 0$. This implies that, for large enough Δt , the first-order contribution of Eq. (4.6) is different from zero only if the following matching condition holds, in addition to relation (4.3):

$$\omega_0 = \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_s + \omega_i, \quad (4.9)$$

where $\mathbf{k}(\mathbf{k}')$ is the wave vector of one of the plane-wave components of the signal (idler) beam and $\omega_s(\omega_i)$ is an appropriately chosen average frequency of the signal (idler) beam. In the second-order contribution to Eq. (4.6) $\mathbf{k}'' \approx \mathbf{k}$ owing to the product $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ [see relation (4.3)].

As we have assumed that the signal and the idler beams are narrow, we can construct the outgoing (signal or idler) Wigner amplitudes by using Eqs. (2.6) and (4.6). We get

$$\begin{aligned} E_s^{(+)}(0, t) &= E_0^{(+)}(0, t) + gVGE'_0{}^{(-)}(0, t) \\ &\times \exp(-i\omega_0 t) + g^2 |V|^2 JE_0^{(+)}(0, t), \\ E_i^{(+)}(0, t) &= E'_0{}^{(+)}(0, t) + gVGE_0{}^{(-)}(0, t) \\ &\times \exp(-i\omega_0 t) + g^2 |V|^2 JE'_0{}^{(+)}(0, t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

and similarly for the complex conjugates. Here $E_0(E'_0)$ is the incoming vacuum field and $E_s(E_i)$ is the outgoing signal (idler). For short we have introduced the operator G , which should be understood in the following sense:

$$\begin{aligned} GE_0{}^{(-)}(0, t) &= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (\hbar\omega_{\mathbf{k}}/L^3)^{1/2} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ &\times u[(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_0)\Delta t/2] \alpha_{\mathbf{k}'}^*(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Comparison of Eq. (4.11) with Eq. (2.6) shows that the effect of the operator G is to select a narrow pencil of wave vectors through the function $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u[(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_0)\Delta t/2]$, which is different from zero only if the matching conditions [relation (4.3) and Eq. (4.9)] hold. The action of the operator J is more involved but can be obtained straightforwardly from Eq. (4.6), and we do not write it explicitly. In the derivation of Eq. (4.10) we used on the right-hand side the relations

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}}(t - \Delta t) &\approx \exp(i\omega_{\mathbf{k}}\Delta t) \alpha_{\mathbf{k}}(t), \\ \alpha_{\mathbf{k}'}^*(t - \Delta t) &\approx \exp(-i\omega_{\mathbf{k}'}\Delta t) \alpha_{\mathbf{k}'}^*(t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

which are valid to zeroth order in the coupling constant g . Also, we have taken Eq. (4.9) into account.

From Eqs. (4.10) we see that the outgoing signal, with amplitude E_s , consists of two parts: a zero-point radiation, with amplitude E_0 , which passes through the crystal without any change, plus a radiation produced by the nonlinear interaction (mediated by the crystal) between the laser beam (with amplitude V) and the zero-point radiation (with amplitude E'_0) entering the crystal in the direction of the idler beam. This radiation contains a part that modifies the amplitude E_0 just a little (to order

g^2) and another part that is proportional to V and to the complex conjugate of the amplitude E'_0 entering the crystal in the idler direction. Similar conditions hold for the idler beam.

5. SIGNAL AND IDLER FIELD AUTOCORRELATIONS

From Eqs. (4.10) we see that, in the Wigner representation, the signal and the idler beams are linearly related to the incoming vacuum (zero-point) amplitudes $E_0^{(+)}$, $E_0^{(-)}$, $E'_0^{(+)}$, and $E'_0^{(-)}$. Hence an important property of the signal and idler amplitudes follows, namely, that they are Gaussian stochastic processes of zero mean. The reason is that the vacuum amplitudes are Gaussian [see Eq. (2.9)], and this property is preserved by linear transformations. In the Heisenberg picture that we are using the Wigner distribution is time independent and is given by Eq. (2.9), which is positive. If we pass to the Schrödinger picture the linearity of the evolution equation (3.5) implies that the Wigner function remains positive at all times.

In what follows it proves convenient to substitute slowly varying amplitude $F^{(+)}(t)$ [$F^{(-)}(t)$] for the amplitude $E^{(+)}(t)$ [$E^{(-)}(t)$] defined in Eq. (2.6); the relation between them is

$$\begin{aligned} F^{(+)}(t) &= \exp(i\omega_a t)E^{(+)}(t) \\ &= i \sum_k' (\hbar\omega_k/2L^3)^{1/2}\alpha_k \exp[i(\omega_a - \omega_k)t], \end{aligned} \quad (5.1)$$

where ω_a is some appropriately chosen average frequency more or less midway between ω_{\min} and ω_{\max} [see inequalities (2.4)]. We point out that the expression for the detection probability [Eq. (3.5)] remains valid when the slowly varying amplitude $F^{(+)}$ or $F^{(-)}$ is substituted for the usual one, $E^{(+)}$ or $E^{(-)}$. Consequently we use only the slowly varying amplitudes in the rest of this paper.

In terms of the slowly varying amplitudes Eqs. (4.10) can be written as

$$\begin{aligned} F_s^{(+)}(0, t) &= (1 + g^2|V|^2J)F_0^{(+)}(0, t) \\ &\quad + gVGF'_0^{(-)}(0, t), \\ F_i^{(+)}(0, t) &= (1 + g^2|V|^2J)F'_0^{(+)}(0, t) \\ &\quad + gVGF_0^{(-)}(0, t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

It is interesting that the factor $\exp(-i\omega_0 t)$ of Eqs. (4.10) does not appear in Eqs. (5.2) if the second equality [Eq. (4.9)] is taken into account.

All statistical properties of the signal and idler beams can be obtained from Eqs. (5.2). For the field at a given point \mathbf{r} and two different times t and t' we have (for simplicity we shall not write explicitly the position \mathbf{r})

$$\begin{aligned} \langle F_s^{(+)}(t)F_s^{(-)}(t') \rangle &= \langle [(1 + g^2|V|^2J)F_0^{(+)}(t) + gVGF'_0^{(-)}(t)] \\ &\quad \times [(1 + g^2|V|^2J^*)F_0^{(-)}(t') \\ &\quad + gV^*G^*F'_0^{(+)}(t')] \rangle \\ &= \langle F_0^{(+)}(t)F_0^{(-)}(t') \rangle + g^2|V|^2\{ \langle GF'_0^{(-)}(t) \\ &\quad \times G^*F'_0^{(+)}(t') \rangle + \langle F_0^{(+)}(t)J^*F_0^{(-)}(t') \rangle \\ &\quad + \langle F_0^{(-)}(t')JF_0^{(+)}(t) \rangle \}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

where we have defined the operator G^* by an obvious transformation of Eq. (4.11). In the derivation of Eqs. (5.3) we have used the following facts: (1) all the processes involved are stationary, and therefore their autocorrelations depend only on the time difference, (2) $F_0^{(+)}$ and $F'_0^{(+)}$ have the same statistical properties but are uncorrelated, and (3) the averages $\langle F_0^{(+)}(t)F_0^{(+)}(t') \rangle$ and $\langle F_0^{(-)}(t)F_0^{(-)}(t') \rangle$ are zero [this condition can easily be derived from Eqs. (5.1), (2.10), and (2.9)]. An expression similar to Eqs. (5.3) is obtained for the autocorrelation of the idler $\langle F_i^{(+)}(t)F_i^{(-)}(t') \rangle$.

As Eq. (3.5) shows, what we need to get the detection probabilities is the difference between the actual intensity and that in vacuum. This suggests calculating

$$\begin{aligned} \langle F_s^{(+)}(t)F_s^{(-)}(t') \rangle - \langle F_s^{(+)}(t)F_s^{(-)}(t') \rangle_0 &= \langle F_s^{(+)}(t)F_s^{(-)}(t') \rangle - \langle F_0^{(+)}(t)F_0^{(-)}(t') \rangle \\ &= g^2|V|^2\{ \langle GF'_0^{(-)}(t)G^*F'_0^{(+)}(t') \rangle \\ &\quad + \langle F_0^{(+)}(t)J^*F_0^{(-)}(t') \rangle \\ &\quad + \langle F_0^{(-)}(t')JF_0^{(+)}(t) \rangle \} \\ &\equiv g^2|V|^2\mu_s(t' - t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

where $\mu_s(\tau)$ is a correlation function that we do not write explicitly but that can be calculated from Eq. (5.4) if the function $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, introduced in Hamiltonian equation (4.4), is known. It goes to zero when τ is greater than the correlation time of the signal, τ_s . Similarly,

$$\begin{aligned} \langle F_i^{(+)}(t)F_i^{(-)}(t') \rangle - \langle F_i^{(+)}(t)F_i^{(-)}(t') \rangle_0 &= g^2|V|^2\mu_i(t' - t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

The following autocorrelations, and their complex conjugates, are zero:

$$\langle F_s^{(+)}(t)F_s^{(+)}(t') \rangle = \langle F_i^{(+)}(t)F_i^{(+)}(t') \rangle = 0. \quad (5.6)$$

The cross correlations can be calculated easily also. However, they will not be used in Sections 6 and 7, and we do not write them explicitly.

In the study of the experiments of Sections 6 and 7 the dependence of the field amplitudes on position will be essential. As we shall deal with stationary processes, it is easy to obtain the amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}_B, t)$ in terms of the amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}_A, t)$ at another point of the light beam. Using the scalar approximation of the electric field [see inequality (2.4)], we have

$$\begin{aligned}
F^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) &= \exp(i\omega_a t) E^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) \\
&= i \sum'_k (\hbar\omega_k/L^3)^{1/2} \alpha_k \\
&\quad \times \exp[i(\omega_a - \omega_k)t] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_B) \\
&= i \sum'_k (\hbar\omega_k/L^3)^{1/2} \alpha_k \\
&\quad \times \exp[i(\omega_a - \omega_k)t] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_A) \\
&\quad \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{AB}) \\
&= i \sum'_k (\hbar\omega_k/L^3)^{1/2} \alpha_k \exp[i(\omega_a - \omega_k) \\
&\quad \times (t - r_{AB}/c)] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_A) \exp(i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_{AB}) \\
&= F^{(+)}(\mathbf{r}_A, t - r_{AB}/c) \exp(i\omega_a r_{AB}/c), \quad (5.7)
\end{aligned}$$

where $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, $r_{AB} = |\mathbf{r}_{AB}|$, and we have used Eq. (2.5) in the last two equalities.

6. FRUSTRATED TWO-PHOTON CREATION VIA INTERFERENCE

Herzog *et al.*⁸ have performed a simple experiment interpreted as showing two-photon interference (see Fig. 2). Three mirrors are placed in the three beams, laser, signal, and idler, that emerge from a nonlinear crystal (NLC; right-hand side of Fig. 2), and a detector is placed in the reflected idler beam (left in the figure). In the standard quantum interpretation a pair of correlated (signal and idler) photons can be created in either of two ways: Either the pair is created by the laser beam traveling from left to right or the pair is created when the reflected laser

beam travels from right to left. In both cases the idler photon may eventually arrive at the detector. As the two possibilities are indistinguishable they interfere, and this results in a sinusoidal variation of the counting rate when one of the three mirrors is displaced. In the actual experiment another detector was placed in the reflected signal beam so coincidence counting rates, in addition to single rates, could be measured. However, we do not study coincidences in this paper (see the end of Section 3).

For simplicity we assume a pointlike crystal placed at the origin of the coordinate system, $\mathbf{r} = 0$. Actually, a relatively big crystal is needed in PDC in order that matching conditions (4.3) and (4.9) be well fulfilled. However, as the (signal and idler) radiation is produced coherently in all points of the crystal, the pointlike approximation is good enough for our purposes.

In the Wigner representation the radiation arriving at the detector is the idler beam created at the crystal and propagating (at the left in Fig. 1) to the detector. The calculation of the amplitude at $\mathbf{r}=0$ is straightforward. We use the second of Eqs. (5.2), replacing

$$F_0^{(+)}(0, t) \rightarrow F_s^{(+)}(0, t - 2l_s/c) \exp(2i\omega_s l_s/c),$$

$$F'_0{}^{(+)}(0, t) \rightarrow F_i^{(+)}(0, t - 2l_i/c) \exp(2i\omega_i l_i/c). \quad (6.1)$$

In fact, the right-hand side of the first (second) of relations (6.1) is the radiation entering the crystal from the right in the direction of the final outgoing signal (idler). The signal beam, F_s , produced by the laser in the travel from left to right has been propagated [see Eq. (5.7)] from the crystal to mirror SM (distance l_s) and return. Similarly the idler beam, F_i , has been propagated from the crystal to mirror IM (distance l_i) and return. Putting relations (6.1) into Eqs. (5.2), we get

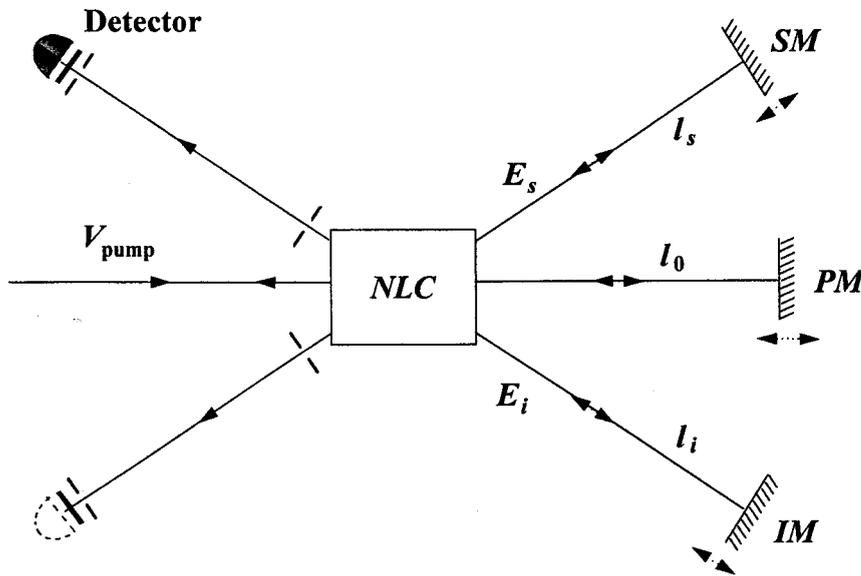


Fig. 2. Experiment showing frustrated two-photon creation by interference.

$$\begin{aligned}
F^{(+)}(0, t) &= (1 + g^2|V|^2J)F_i^{(+)}(0, t - 2l_i/c) \\
&\times \exp(2i\omega_i l_i/c) + gV \exp(2i\omega_0 l_0/c) \\
&\times GF_s^{(-)}(0, t - 2l_s/c)\exp(-2i\omega_s l_s/c) \\
&\approx [(1 + 2g^2|V|^2J)F'_0{}^{(+)}(0, t - 2l_i/c) \\
&+ gVGF_0^{(-)}(0, t - 2l_i/c)] \\
&\times \exp(2i\omega_i l_i/c) + gV \\
&\times GF_0^{(-)}(0, t - 2l_s/c) \\
&\times \exp[2i(\omega_0 l_0 - \omega_s l_s/c)] \\
&+ g^2|V|^2GG^*F'_0{}^{(+)}(0, t - 2l_s/c) \\
&\times \exp[2i(\omega_0 l_0 - \omega_s l_s/c)]. \quad (6.2)
\end{aligned}$$

In the first part of Eq. (6.2) we have taken into account the propagation [see Eq. (5.7)] of the laser beam from the crystal to mirror PM in Fig. 2 (distance l_0) and return. In the second part of the equation we used Eqs. (5.2) in the first term and neglected terms of order g^3 in the second.

According to Eq. (3.5), the counting rate at the detector is proportional to

$$\begin{aligned}
\text{rate} &\propto \langle |F^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle - \langle |F^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle_0 \\
&= \langle |F^{(+)}(0, t)|^2 \rangle - \langle |F^{(+)}(0, t)|^2 \rangle_0. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

We should obtain the amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ by propagating $F^{(+)}(0, t)$ from the crystal to the detector (distance d), but this will simply produce a similar change in all the terms of Eq. (6.2). In consequence, the counting rate at the detector will be independent of d , and we may take $d = 0$. This is the justification for the equality in Eq. (6.3). Hence we obtain, after some algebra (see Section 7 for the details of the algebra in a more complex problem),

$$\begin{aligned}
\text{counting rate} &\propto g^2|V|^2\{\mu'_s(0) + \mu''_s(2l_i/c - 2l_s/c) \\
&\times \cos[2(\omega_s l_s + \omega_i l_i - \omega_0 l_0)/c]\}, \quad (6.4)
\end{aligned}$$

where the functions μ'_s and μ''_s are related to, but not the same as, the function μ_s introduced in Eq. (5.4). The predictions [relation (6.4)] were confirmed by the experiment.⁸

7. INDUCED COHERENCE AND INDISTINGUISHABILITY IN TWO-PHOTON INTERFERENCE

In 1991 Zou *et al.*⁹ performed an experiment in which second-order interference was observed in the superposition of signal photons from two coherently pumped PDC crystals when the paths of the idler photons were aligned. The experimental situation is illustrated in Fig. 3, in which two similar nonlinear crystals, NL1 and NL2, are optically pumped by two mutually coherent, classic pump waves of complex amplitudes, V_1 and V_2 , and PDC occurs at both crystals, each with the emission of a signal photon and an idler photon. We look for interference between the signal photons s_1 and s_2 whose trajectories come together at beam splitter BS_0 , when the trajectories of the two idlers i_1 and i_2 are aligned and the path difference between s_1 and s_2 is varied slightly. Interference disappears when the idlers are misaligned or separated by a beam stop. This experiment has been qualified as "mind boggling,"¹⁰ but the analysis in terms of the Wigner function is straightforward.

In the Wigner representation we calculate amplitudes of the fields that arrive at beam splitter BS_0 , from which we can easily obtain the amplitude that arrives at signal detector D_s . For the signal and idler beams leaving crystal NL1 we get (we take $\mathbf{r} = 0$ at the center of this crystal)

$$\begin{aligned}
F_{s_1}{}^{(+)}(0, t) &= (1 + g^2|V_1|^2J)F_0{}^{(+)}(0, t) \\
&+ gV_1(t)GF'_0{}^{(-)}(0, t), \\
F_{i_1}{}^{(+)}(0, t) &= (1 + g^2|V_1|^2J)F'_0{}^{(+)}(0, t) \\
&+ gV_1(t)GF_0{}^{(-)}(0, t), \quad (7.1)
\end{aligned}$$

where we have included the time dependence of the pumping amplitude V_1 [see the comment after Eq. (4.1)]. If we propagate the signal field until BS_0 (placed at \mathbf{r}_0), using Eq. (5.7), we get

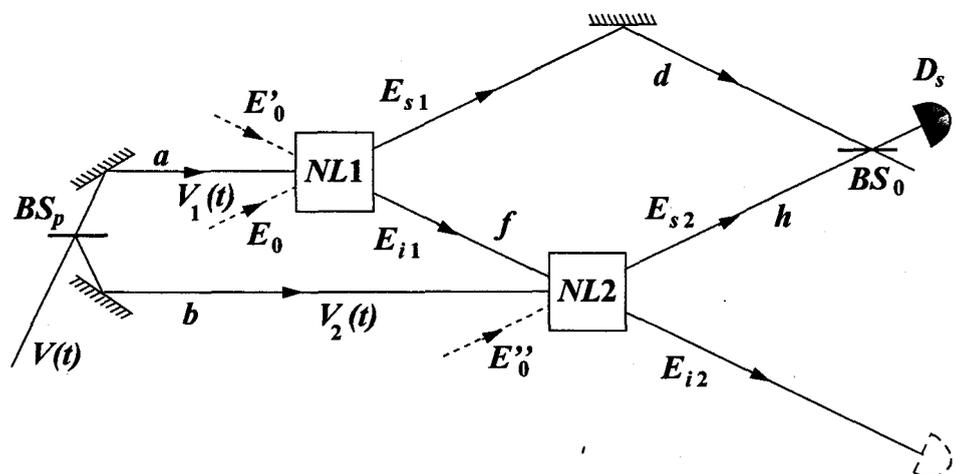


Fig. 3. Experiment of induced coherence.

$$\begin{aligned}
F_{s1}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) &= F_{s1}^{(+)}(0, t - d/c)\exp(i\omega_s d/c) \\
&= \{(1 + g^2|V_1|^2 J)F_0^{(+)}(0, t - d/c) \\
&\quad + gV_1(t - d/c) \\
&\quad \times GF_0^{(-)}(0, t - d/c)\}\exp(i\omega_s d/c),
\end{aligned} \tag{7.2}$$

where d is the path length from the center of crystal NL1 to BS₀ and c is the velocity of light. We have taken into account that the propagation of $V_1(t)$ gives a factor $\exp(i\omega_0 d/c)$ and the propagation of $F_0^{(-)}$ a factor $\exp(-i\omega_i d/c)$, the product of which gives $\exp(i\omega_s d/c)$ [see Eq. (4.9)].

Similarly, for the idler beam propagated to crystal NL2 we get

$$\begin{aligned}
F_{i1}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) &= F_{i1}^{(+)}(0, t - f/c)\exp(i\omega_i f/c) \\
&= \{(1 + g^2|V_1|^2 J)F_0^{(+)}(0, t - f/c) \\
&\quad + gV_1(t - f/c)GF_0^{(-)}(0, t - f/c)\} \\
&\quad \times \exp(i\omega_i f/c),
\end{aligned} \tag{7.3}$$

f being the path length from crystal NL1 to crystal NL2, whose center is placed at \mathbf{r}_2 .

Now we are in a position to calculate the signal field $F_{s2}^{(+)}$ outgoing from crystal NL2. We get

$$\begin{aligned}
F_{s2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) &= (1 + g^2|V_2|^2 J)F_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \\
&\quad + gV_2(t)GF_{i1}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \\
&\approx (1 + g^2|V_2|^2 J)F_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \\
&\quad + gV_2(t)GF_0^{(-)}(0, t - f/c) \\
&\quad \times \exp(-i\omega_i f/c) + g^2V_2(t) \\
&\quad \times V_1^*(t - f/c)GG^*F_0^{(+)}(0, t - f/c) \\
&\quad \times \exp(-i\omega_i f/c),
\end{aligned} \tag{7.4}$$

where we have taken into account that $F_0^{(-)}$ is the complex conjugate of $F_0^{(+)}$ and have neglected a term of order g^3 in the approximation. To get the amplitude of the signal s_2 arriving at beam splitter BS₀ we propagate amplitude (7.4) a length h , which is the distance from NL2 to BS₀. We obtain

$$\begin{aligned}
F_{s2}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) &= F_{s2}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - h/c)\exp(i\omega_s h/c) \\
&\approx (1 + g^2|V_2|^2 J)F_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - h/c) \\
&\quad \times \exp(i\omega_s h/c) + gV_2(t - h/c) \\
&\quad \times \exp(i\omega_0 h/c)GF_0^{(-)}[0, t - (f + h)/c] \\
&\quad \times \exp[-i\omega_i(f + h)/c] + g^2V_2(t - h/c) \\
&\quad \times V_1^*[t - (f + h)/c] \\
&\quad \times GG^*F_0^{(+)}\left(0, t - \frac{f + h}{c}\right) \\
&\quad \times \exp[i(\omega_s h - \omega_i f)/c].
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Once we have calculated the two fields incoming to beam splitter BS₀ it is a simple matter to obtain the outgoing field directed toward detector D_s, which we label

F_s . We assume that BS₀ is balanced, that is, that the transmission and reflection coefficients are both equal to $1/\sqrt{2}$. We get from relations (7.2) and (7.5), using Eqs. 2.12,

$$\begin{aligned}
F_s^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) &= 1/\sqrt{2}[iF_{s1}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) + F_{s2}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t)] \\
&= 1/\sqrt{2}\{i(1 + g^2|V_1|^2 J)F_0^{(+)}(0, t - d/c) \\
&\quad \times \exp(i\omega_s d/c) + igV_1(t - d/c) \\
&\quad \times GF_0^{(-)}(0, t - d/c)\exp(i\omega_s d/c) \\
&\quad + (1 + g^2|V_2|^2 J)F_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - h/c) \\
&\quad \times \exp(i\omega_s h/c) + gV_2(t - h/c) \\
&\quad \times GF_0^{(-)}[0, t - (f + h)/c] \\
&\quad \times \exp[i(\omega_s h - \omega_i f)/c] \\
&\quad + g^2V_2(t - h/c)V_1^*[t - (f + h)/c] \\
&\quad \times GG^*F_0^{(+)}[0, t - (f + h)/c] \\
&\quad \times \exp[i(\omega_s h - \omega_i f)/c]\}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

To obtain the detection probability at D_s we use Eq. (3.5), that is,

$$\text{counting rate} \propto \langle |F_s^{(+)}(\mathbf{r}_0, t)|^2 \rangle - \langle |F_s^{(+)}(\mathbf{r}_0, t)|^2 \rangle_0. \tag{7.7}$$

Relation (7.7) contains, in principle, five terms consisting of intensity averages of the form $\langle F_j^{(+)}F_j^{(-)} \rangle$ plus 10 cross correlations of the form $\langle F_j^{(+)}F_l^{(-)} + F_l^{(-)}F_j^{(+)} \rangle$ ($j, l = 1-4$). It is easy to see that, after the subtraction of vacuum [second term of relation (7.7)] only four autocorrelations remain up to order g^2 , namely, those involving the first four terms. Also, only two nonzero cross correlations exist, namely, the one between the second and the fourth terms and that between the first and the fifth. We get

$$\begin{aligned}
\text{counting rate} &\propto g^2\{|V_1|^2\}[2 \text{Re}(F_0^{(+)}J^*F_0^{(-)}) + \langle |GF_0^{(-)}|^2 \rangle] \\
&\quad + g^2\{|V_2|^2\}[2 \text{Re}(F_0^{(+)}J^*F_0^{(-)}) \\
&\quad + \langle |GF_0^{(-)}|^2 \rangle] + 2g^2 \text{Re}\langle GF_0^{(-)}(0, t - d/c) \\
&\quad \times G^*F_0^{(+)}[0, t - (f + h)/c]\rangle\langle V_1(t - d/c) \\
&\quad \times V_2^*(t - h/c)\rangle\exp[i(\omega_s(d - h)/c + \omega_i f/c)] \\
&\quad + 2g^2 \text{Re}\langle F_0^{(+)}(0, t - d/c) \\
&\quad \times G^*GF_0^{(-)} \times [0, t - (f + h)/c] \rangle \\
&\quad \times \langle V_1[t - (f + h)/c] \\
&\quad \times V_2^*(t - h/c)\rangle \\
&\quad \times \exp[i(\omega_s(d - h)/c + \omega_i f/c + i\pi/2)] \\
&= g^2\{[\langle |V_1|^2 \rangle + \langle |V_2|^2 \rangle]\mu_s(0) \\
&\quad + 2 \text{Re}\{\mu'_s[(d - f - h)/c]\} \\
&\quad \times \exp[i\omega_s(d - h)/c + i\omega_i f/c + i\pi/2] \\
&\quad \times [\langle V_1(t - d/c)V_2^*(t - h/c)\rangle \\
&\quad + \langle V_1(t - (f + h)/c)V_2^*(t - h/c)\rangle]\},
\end{aligned} \tag{7.8}$$

where we have used Eqs. (4.9) and (5.4) and the fact that $\langle |V_1|^2 \rangle$ and $\langle |V_2|^2 \rangle$ are time independent. It may be realized that the interference term derives from the vacuum fields F_0 and F'_0 incoming at NL1. After the nonlinear amplification a part of the field travels directly from NL1 to BS₀, and the other part travels via NL2.

In actual experiments $V_1(t)$ and $V_2(t)$ are related because both fields originate from $V(t)$ at beam splitter BS_P. If a (b) is the path length from BS_P to the center of crystal NL1 (NL2), we have

$$\begin{aligned} V_1(t) &= (1/\sqrt{2})V(t - a/c)\exp(i\omega_0 a/c), \\ V_2(t) &= (i/\sqrt{2})V(t - b/c)\exp(i\omega_0 b/c). \end{aligned} \quad (7.9)$$

The function $\mu'_s[(d - f - h)/c]$ is different from zero only if $f + h$ is close to d . In this case we identify $d = f + h$ in the autocorrelation of $V(t)$, the laser beam having a large correlation time, and we get

counting rate

$$\begin{aligned} &\propto g^2 \langle I \rangle \{ \mu_s(0) - 2|\gamma_{12}[(a - b - h + d)/c]| \\ &\quad \times |\mu'_s[(d - f - h)/c]| \sin[\omega_0(a - b)/c] \\ &\quad + \omega_s(d - h)/c + \omega_i f/c + \phi \}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

where $I = |V|^2$, ϕ is the phase of the product $\gamma_{12}\mu'_s$, and $\gamma_{12}(\tau)$ is the normalized autocorrelation $\langle V(t)V^*(t + \tau) \rangle / \langle I \rangle$. The function μ'_s is not the same as that defined in Eq. (5.4) because in the former no terms involving the operator J appear. Relation (7.9) shows an interference pattern with visibility

$$\begin{aligned} V &= 2|\gamma_{12}[(a - b - h + d)/c]| \\ &\quad \times |\mu'_s[(d - f - h)/c]| / \mu_s(0). \end{aligned} \quad (7.11)$$

It is interesting that the distance between two maxima is c/ω_0 if the length changed is a or b , c/ω_s if it is d or h , and c/ω_i if we change e or f . A look at Fig. 3 shows that this is rather natural.

We have discussed a simplified form of the experiment carried out by Zou *et al.*⁹; they put an extra beam splitter between nonlinear crystals NL1 and NL2 and found that the fringe visibility had an additional factor T , which is the transmissivity of this beam splitter. It is a straightforward matter to extend the above results to include such a device; we have done so and arrived at the same conclusion as in Ref. 9.

8. CONCLUSIONS

We have developed the Wigner representation formalism in a fashion suitable for the study of experiments involving photons created in the process of PDC. Obviously the results agree with those obtained by use of the more common Hilbert-space formulation, the two being just two equivalent forms of quantum optics.

The Wigner representation is especially suited for PDC because the Wigner function is Gaussian and positive definite in this case. The Gaussian character markedly simplifies the calculation of autocorrelations for the various fields involved. On the other hand, positivity makes possible a picture in terms of pure waves during the propagation, which may aid the intuition in the qualitative study of these experiments. However, the detection problem remains, so a straightforward interpretation is not possible only with waves. Also, the role played by the quantum vacuum field is stressed in this representation.¹¹

ACKNOWLEDGMENT

We acknowledge financial support of Dirección General de Investigación Científica y Técnica project PB-92-0507 (Spain).

*Permanent address, Escuela Técnica Superior de Ingenieros, Departamento de Física Aplicada, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain.

REFERENCES

1. M. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, in *Quantum Coherence*, J. S. Anandan, ed. (World Scientific, Singapore, 1990), pp. 356–372.
2. D. C. Burnham and D. L. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84–87 (1970).
3. C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044–2046 (1987).
4. C. K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **31**, 2409–2418 (1985).
5. See, e.g., D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994), Chap. 9.
6. M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121–168 (1984).
7. T. W. Marshall and E. Santos, *Phys. Rev. A* **41**, 1582–1586 (1990).
8. T. J. Herzog, J. G. Rarity, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 629–632 (1994).
9. X. Y. Zou, L. J. Wang, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 318–321 (1991).
10. D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger, *Phys. Today* **46**(8), 22–29 (1993).
11. M. O. Scully and U. W. Rathe, *Opt. Commun.* **110**, 373–380 (1994).

Fourth-order interference in the Wigner representation for parametric down-conversion experiments

Alberto Casado,^{1,*} Agustín Fernández-Rueda,^{1,*} Trevor Marshall,² Ramón Risco-Delgado,^{1,*} and Emilio Santos¹

¹*Departamento de Física Moderna, Universidad de Cantabria, 39005 Santander, Spain*

²*Department of Mathematics, University of Manchester, Manchester M13 9PL, United Kingdom*

(Received 17 July 1996)

In the Wigner formalism, after giving a general description of a light beam, the theory of parametric down-conversion is developed to second-order in the coupling constant. We then describe the detection process by calculating the auto-correlation and cross-correlations of the signal and idler beams. Four recent experiments are analyzed in detail: interference on a screen, Franson's experiments [Phys. Rev. Lett. **62**, 2205 (1989)], Rarity and Tapster's experiments [Phys. Rev. Lett. **64**, 2495 (1990)], and induced coherence without induced emission [X. Y. Zou, L. J. Wang, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **67**, 318 (1991)].

[S1050-2947(97)03005-9]

PACS number(s): 42.50.Ar, 03.65.Sq, 42.50.Lc

I. INTRODUCTION

Experiments using photon pairs from parametric down-conversion (PDC) have become very popular in the past decade for the study of nonclassical aspects of light [1]. In the pioneer experiment of Burnham and Weinberg [2], it was found that the measured value of the correlation time between the two down-converted photons was very small, and more recent experiments have shown that it may be smaller than picoseconds [3]. This means that experiments with PDC photons pairs are well suited for the study of the quantum aspects of light, such as photon entanglement.

The theory of PDC has been developed using the standard Hilbert-space formulation of quantum optics [4], but, to our knowledge, no study of PDC has been made using the phase-space distributions, which are so popular in other parts of quantum optics. For instance, phase-space distributions provide the standard method for the study of parametric amplification [5], closely related to PDC. Obviously, the reason is that the Hilbert-space formulation seems more suitable when the photon number is the relevant observable, as in PDC, while phase-space representations seem better when the field amplitudes are the relevant quantities, as in the case of parametric amplification. Here we shall show that the Wigner representation is also quite efficient for analyzing experiments involving PDC photon pairs.

Furthermore, this formulation stresses the role played by the vacuum fields incident on the crystal [6]. Quantum theory does not allow for a picture with entities (either pure particles or pure waves) propagating in space and time. Nevertheless, the Hilbert-space formulation emphasizes the particle aspect. Photons are created at some point, propagate, and are eventually annihilated by detectors. Of course the photons are not classical particles and, for instance, their

possible trajectories seem to interfere. In contrast, the phase-space representations suggest an interpretation in terms of waves. If the Wigner distribution is interpreted as a probability distribution of field-mode amplitudes, then the corpuscular aspect of light appears just as wave interference, including a zero-point vacuum field. There are two difficulties for this interpretation: (i) The Wigner function associated with the quantum states of light is not always non-negative definite and, consequently, it cannot always be interpreted as a probability distribution, and (ii) the detection probability is not proportional to the intensity, but to the difference between the actual intensity and the zero-point intensity (see Sec. V). In PDC experiments the first difficulty does not appear because the Wigner function is always positive in these experiments (see Sec. IV).

In the rest of the paper we shall study in the Wigner representation the essential ingredients in order to interpret the experiments. In Sec. II we describe the light beam. In Sec. III an explicit expression for the Wigner fields produced in the process of PDC is obtained. Section IV is devoted to the study of correlations among these beams as a consequence of the correlations present in the vacuum field. Expressions for the single and joint detection probabilities are computed in Sec. V. In Secs. VI–IX we study a representative set of the experiments.

In a previous paper [7] we have studied in the Wigner representation several experiments with parametric down-converted light involving single counts. These experiments showed second-order interference. In the present paper we study experiments that show fourth-order interference and therefore involve coincidence detections.

II. DESCRIPTION OF A LIGHT BEAM IN THE WIGNER REPRESENTATION

In the Hilbert-space representation of the light field, the electric vector is represented as a sum of two mutually conjugate operators

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

*Permanent address: Departamento de Física Aplicada, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain. Electronic address: acasado@cica.es

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2)$$

where L^3 is the normalization volume and $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$ is the annihilation operator for a photon whose wave vector is \mathbf{k} and whose polarization vector is $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}$, and $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$. Equations (1) and (2) correspond to the Heisenberg picture, where all time dependence goes in the creation and annihilation operators $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t)$ and $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t)$. For a free field this dependence has the form

$$\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (3)$$

but for interacting fields it is complicated and contains all the dynamics of the process. In this picture the state of the field is represented by a time-independent density operator ρ .

In this paper we shall always consider electromagnetic fields corresponding to narrow light beams and we shall not study experiments involving polarizing devices. In these conditions it is convenient to use a scalar approximation well known in classical optics. We assume that the light beam contains frequencies within a range between ω_{\min} and ω_{\max} and wave vectors whose transverse components are limited by a small upper value, that is,

$$\omega_{\min} < \omega_{\mathbf{k}} < \omega_{\max}, \quad |\mathbf{k}^{\perp}| \ll \frac{\omega_{\min}}{c}. \quad (4)$$

We shall ignore polarization and therefore multiply the amplitude (2) by $\sqrt{2}$. Hence the "relevant" component of the electric vector is

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (5)$$

where the square brackets in the summation symbol indicate that the sum is restricted to the set of \mathbf{k} satisfying Eq. (4).

In the Wigner representation the operators $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ and $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ become c numbers, the annihilation operators $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ being replaced by random variables $\alpha_{\mathbf{k}}(t)$ and their Hermitian conjugates $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$ by complex conjugates $\alpha_{\mathbf{k}}^*(t)$. The field amplitudes are

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} \alpha_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (6)$$

The Wigner density associated with a state whose density matrix is ρ is [8]

$$W(\alpha, \alpha^*) = \text{Tr}[\rho \Phi(\alpha, \alpha^*)] \quad (\alpha \equiv \{\alpha_{\mathbf{k}}\}), \quad (7)$$

where

$$\Phi(\alpha, \alpha^*) = \prod_{[\mathbf{k}]} \frac{1}{\pi^2} \int e^{\beta_{\mathbf{k}}(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \alpha_{\mathbf{k}}^*) - \beta_{\mathbf{k}}^*(\hat{a}_{\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}})} d^2 \beta_{\mathbf{k}}. \quad (8)$$

For instance, the Wigner function of the vacuum state is the Gaussian

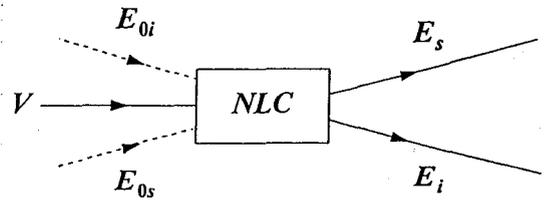


FIG. 1. The process of parametric down-conversion.

$$W_{\text{vac}}(\alpha, \alpha^*) = \prod_{[\mathbf{k}]} \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (9)$$

The crucial property of the Wigner function is that the ensemble average of any polynomial of the random variables α and α^* weighted by the Wigner density exactly corresponds to the Hilbert space expectation of the corresponding symmetrized product of the annihilation and creation operators \hat{a} and \hat{a}^\dagger . That is,

$$\begin{aligned} \langle P(\alpha, \alpha^*) \rangle &= \int P(\alpha, \alpha^*) W(\alpha, \alpha^*) d^{2M} \alpha \\ &= \text{Tr}[\rho S[P(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)]], \end{aligned} \quad (10)$$

where M is the number of $\alpha_{\mathbf{k}}$ variables defined and $S[\]$ means symmetrization, which consists of taking the average over all orderings of the operators, for example,

$$S[\hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)}] = \frac{1}{2} (\hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(-)} + \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)}). \quad (11)$$

Another useful piece of information is the transformation of the Wigner field amplitudes in a beam splitter (BS). If a, b are the incoming channels and c, d the outgoing ones, and $T(R)$ is the transmission (reflection) coefficient, we have

$$\begin{aligned} E_c^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= T E_a^{(+)}(\mathbf{r}, t) + i R E_b^{(+)}(\mathbf{r}, t), \\ E_d^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= T E_b^{(+)}(\mathbf{r}, t) + i R E_a^{(+)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (12)$$

We have assumed that R and T are real numbers and \mathbf{r} is the point where the center of the BS is placed. These relations are the same as between the corresponding field operators in the Hilbert-space formalism and also between field amplitudes in classical optics. This agreement is a straightforward consequence of the linearity of Eqs. (12).

III. THE PROCESS OF PARAMETRIC DOWN-CONVERSION

In this section we are going to study the process of parametric down-conversion of light in the Wigner representation. In Fig. 1 we show a sketch of the setup used for PDC. A nonlinear crystal is pumped by a laser beam V , giving rise to a rainbow of colored cones around the axis defined by the pump. In experimental practice two narrow correlated beams, called "signal" E_s and "idler" E_i , are selected by means of pinholes, filters, or just the detectors.

The process of PDC may be formalized using a Hamiltonian of the form

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (13)$$

where

$$\hat{H}_{\text{int}} = i \hbar g' V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{-i \omega_0 t} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} + \text{H.c.}, \quad (14)$$

and we have taken the origin of the coordinate system at the center of the crystal. In Eq. (14) we have treated the pump beam as an intense monochromatic plane wave represented, in the scalar approximation, by

$$V(\mathbf{r}, t) = V e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \quad (15)$$

It is not quantized because it is much more intense than the outgoing beams. The coupling constant g' is defined so that the product $g'V$ has dimensions of frequency, and $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ is a dimensionless symmetrical function of the wave vectors inside the crystal. This function, which is related to the function $f(\mathbf{k}, s; \mathbf{r}, t)$ introduced in Eq. (15) of Ref. [4], is different from zero only when the following matching condition is fulfilled:

$$\mathbf{k}_0 \approx \mathbf{k} + \mathbf{k}'. \quad (16)$$

As is well known [4], there is in addition a matching condition for frequency that is fulfilled much more rigorously, namely,

$$\omega_0 = \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}. \quad (17)$$

We now obtain the Heisenberg equations of motion for $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ during the interaction, using the Hamiltonian given by Eq. (13),

$$\dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{i \hbar} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{H}] \rightarrow$$

$$\dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}} = -i \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + g' V \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{-i \omega_0 t} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}. \quad (18)$$

In order to calculate $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ for all t we shall take into account that the operator $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ evolves as a free-field mode before entering the crystal and after coming out. We shall integrate Eq. (18) from $t = -\Delta t$ to $t = 0$, where Δt is the time taken for the radiation to cross the crystal. The initial condition is $\hat{a}_{\mathbf{k}}(-\Delta t) = \hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t)$, where $\hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t)$ is the destruction operator of the mode \mathbf{k} in the incoming vacuum field. We shall assume that the coherence time of the laser is large in comparison with most of the times involved in the process, so that we may ignore the time dependence of $V(t)$. Because the detection probabilities are of second-order in the coupling constant g' , we need, in general, to calculate $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ to second-order in g' . This fact plays an essential role in the calculation of probabilities in the Wigner representation. However, we shall show that where, as in this article, only joint probabilities are calculated, all second-order terms may be expressed in terms of first-order ones.

To second-order in the coupling constant g' ; that is, taking the second term of the right-hand side of Eq. (18) as a perturbation and retaining terms up to order g'^2 , we get (setting $g' \Delta t \equiv g$)

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}(0) = & \hat{a}_{0\mathbf{k}}(0) + g V \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \right] \\ & \times \hat{a}_{0\mathbf{k}'}^{\dagger}(0) + g^2 |V|^2 \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ & \times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_0) \right] \\ & \times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}}) \right] \hat{a}_{0\mathbf{k}''}(0), \end{aligned} \quad (19)$$

where

$$u(x) = \frac{\sin x}{x} e^{ix}. \quad (20)$$

After $t = 0$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ evolves as a free-field mode

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}}(0) e^{-i \omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (21)$$

In the derivation of Eq. (19) we have considered the free evolution of operators $\hat{a}_{0\mathbf{k}}$ (zeroth-order solution)

$$\hat{a}_{0\mathbf{k}}(0) = \hat{a}_{0\mathbf{k}}(-\Delta t) e^{-i \omega_{\mathbf{k}} \Delta t}, \quad \hat{a}_{0\mathbf{k}}^{\dagger}(0) = \hat{a}_{0\mathbf{k}}^{\dagger}(-\Delta t) e^{i \omega_{\mathbf{k}} \Delta t}. \quad (22)$$

The perturbative approximation used to get Eq. (19) is valid provided that

$$g |V| \ll 1. \quad (23)$$

From now on we shall use g , instead of g' , as an effective coupling constant. Equation (16) implies $\mathbf{k}'' \approx \mathbf{k}$ in the second-order contribution to Eq. (19). Finally, taking into account that commutation rules are preserved in a unitary evolution, it is not difficult to see that [from Eq. (21)]

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}(t_1), \hat{a}_{\mathbf{k}'}(t_2)] = 0,$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}(t_1), \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t_2)] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i \omega_{\mathbf{k}}(t_1 - t_2)}, \quad t_1, t_2 > 0. \quad (24)$$

Commutators (24) will be used in Sec. IV, in order to relate different correlations.

In order to go to the Wigner representation, we shall use the fact that the evolution equations of the Wigner field amplitudes are the same as Heisenberg equations of motion of the corresponding quantum field amplitudes, whenever the latter are linear. The linearity of the Heisenberg equations is a consequence of the fact that the Hamiltonian (14) is quadratic in the creation and/or annihilation operators. Hence we simply replace operators $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ($\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$) by complex variables $\alpha_{\mathbf{k}}$ ($\alpha_{\mathbf{k}}^*$) in expressions (19) and (21).

Now, let us consider two narrow correlated beams, called signal and idler, with average frequencies ω_s , ω_i and wave vectors $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i$, respectively, fulfilling the matching conditions

$$\omega_s + \omega_i = \omega_0, \quad \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0. \quad (25)$$

From expressions (19), (21) (as functions of α , α^*), and (6), we obtain

$$E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{-i\omega_0 t} g V G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + g^2 |V|^2 J E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (26)$$

$$E_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{-i\omega_0 t} g V G E_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + g^2 |V|^2 J E_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (27)$$

Here E_{0s} and E_{0i} are the incoming vacuum field and E_s (E_i) the outgoing signal (idler); see Fig. 1. We have

$$E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \alpha_{0\mathbf{k}}(0), \quad (28)$$

where the square brackets in the summation symbol indicate that the sum is restricted to the set of \mathbf{k} pertaining to the signal beam, and similarly for $E_{0i}^{(+)}$. For brevity we have introduced the linear operators G and J , which are defined as

$$G E_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i(-\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}})t} \beta_{\mathbf{k}}, \quad (29)$$

with

$$\beta_{\mathbf{k}} = \sum_{[\mathbf{k}']_i} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \right] \alpha_{0\mathbf{k}'}^*(0), \quad (30)$$

and

$$J E_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \gamma_{\mathbf{k}}, \quad (31)$$

with

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \sum_{[\mathbf{k}']_i} \sum_{[\mathbf{k}'']_s} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_0) \right] \times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}}) \right] \alpha_{0\mathbf{k}''}(0). \quad (32)$$

From Eq. (26) we see that the outgoing signal, to order g^2 , consists of three parts: (i) a zero-point radiation with amplitude $E_{0s}^{(+)}$, which passes through the crystal without any change; (ii) a radiation produced by the nonlinear interaction (mediated by the crystal) between the laser beam, with amplitude V , and the zero-point radiation, with amplitude $E_{0i}^{(-)}$, entering the crystal in the direction of the idler beam; and (iii) one part that modifies the amplitude $E_{0s}^{(+)}$ just a little (to order g^2). The idler beam is constituted in a similar manner.

IV. SIGNAL AND IDLER FIELD AUTOCORRELATIONS AND CROSS CORRELATIONS

In order to compute the detection probabilities in the Wigner representation, we now calculate the correlation properties of the fields. From Eqs. (26) and (27) we see that,

in the Wigner representation, the signal and idler beams are linearly related to the incoming vacuum. Therefore, they are Gaussian stochastic processes of zero mean. The reason is that the vacuum amplitudes are Gaussian [see Eq. (9)] and this property is preserved by linear transformations. In the Heisenberg picture that we are using, the Wigner distribution is time independent and given by Eq. (9), which is positive. If we pass to the Schrödinger picture the linearity of the evolution equations (18) implies that the Wigner function remains positive at all times.

In the work that follows it proves convenient to substitute slowly varying amplitudes $F^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ [$F^{(-)}(\mathbf{r}, t)$] for the amplitudes $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ [$E^{(-)}(\mathbf{r}, t)$] defined in Eq. (6), the relation between them being

$$F^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega_a t} E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} \alpha_{\mathbf{k}}(0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_a - \omega_{\mathbf{k}})t}, \quad (33)$$

where ω_a is some appropriately chosen average frequency midway between ω_{\min} and ω_{\max} [see Eq. (4)].

In the study of the experiments of the following sections the dependence of the field amplitudes on position will be essential. It is easy to obtain the amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}_B, t)$ in terms of the amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}_A, t)$ at another point of the light beam. Using the scalar approximation of the electric field, we readily have

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) = F^{(+)}\left(\mathbf{r}_A, t - \frac{r_{AB}}{c}\right) e^{i\omega_a(r_{AB}/c)}, \quad (34)$$

where $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ and $r_{AB} = |\mathbf{r}_{AB}|$.

We point out that the expressions for the detection probabilities (see Sec. V) remain valid when the slowly varying amplitudes $F^{(+)}$ or $F^{(-)}$ are substituted for the usual ones $E^{(+)}$ or $E^{(-)}$. Consequently, we shall use only the amplitudes $F^{(+)}$ and $F^{(-)}$ in the rest of this paper.

In terms of the slowly varying amplitudes, Eqs. (26) and (27) may be written

$$F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = (1 + g^2 |V|^2 J) F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + g V G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \\ F_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) = (1 + g^2 |V|^2 J) F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + g V G F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (35)$$

where

$$F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_s - \omega_{\mathbf{k}})t} \alpha_{0\mathbf{k}}(0) \quad (36)$$

and similarly for $F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$.

A. Autocorrelations

For the field at a given point \mathbf{r} and two different times t and t' we have to order g^2

$$\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ = g^2 |V|^2 \{ \langle G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle + \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) J^* \\ \times F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + \langle F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') J F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \}, \quad (37)$$

where $\langle \rangle$ denotes averaging by the Wigner density corresponding to the vacuum state. We have taken into account that $F_{0s}^{(+)}$ and $F_{0i}^{(+)}$ are uncorrelated. There are contributions of all terms of the expansion (35) of the field. Now, we are going to relate these contributions by using the preservation of commutation rules. If we consider the signal beam emerging from the crystal at different times t and t' , from Eqs. (24) and (5) we obtain

$$[\hat{F}_s^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{F}_s^{(-)}(\mathbf{r}, t')] = [\hat{F}_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{F}_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t')], \quad (38)$$

where $\hat{F}_s^{(+)}$ is the field operator in the Heisenberg picture. Taking the expectation value in the vacuum for the latter expression and working in the Wigner representation, we obtain

$$\begin{aligned} \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) J^* F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle + \langle F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') J F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ = \langle G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ = 2g^2 |V|^2 \langle G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle = g^2 |V|^2 \mu_s(t' - t), \end{aligned} \quad (40)$$

where we have used that the processes involved are stationary and so the field correlations depend only on the time difference. $\mu_s(\tau)$ is a correlation function that we will not write explicitly, but that may be calculated if the function $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, introduced in the Hamiltonian (14), is known. It goes to zero when τ is greater than the correlation time of the signal τ_s . Similarly,

$$\begin{aligned} \langle F_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_i^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ = g^2 |V|^2 \mu_i(t' - t). \end{aligned} \quad (41)$$

The following autocorrelations, and their complex conjugates, are zero:

$$\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle = \langle F_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_i^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle = 0. \quad (42)$$

B. Cross correlations

Also the cross correlation may be calculated. Taking the signal and idler fields at two points (\mathbf{r}, t) and (\mathbf{r}', t') , respectively, we have

$$\begin{aligned} \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle &= \langle \{ (1 + g^2 |V|^2 J) F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + g V G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \} \\ &\quad \times \{ (1 + g^2 |V|^2 J) F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t') \\ &\quad + g V G F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \} \rangle \\ &= g V [\langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) G F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle \\ &\quad + \langle F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t') G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \rangle]. \end{aligned} \quad (43)$$

Now we are going to apply again the conservation of commutation rules, but by considering the signal and idler field operators at different times. By taking into account the same considerations as above, we have

$$\begin{aligned} [\hat{F}_s^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{F}_i^{(+)}(\mathbf{r}', t')] = [\hat{F}_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \hat{F}_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t')] = 0 \rightarrow \\ \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) G F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}', t') G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

The second commutator is zero because it contains only destruction operators. From Eqs. (43) and (44), it follows that

$$\langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle = g V \nu(t' - t). \quad (45)$$

The cross-correlation for \mathbf{r} and \mathbf{r}' different from $\mathbf{0}$ may be obtained using Eq. (34). The function $\nu(\tau)$ defines a coherence time τ_{si} between signal and idler. By a similar argument, it can be proved that

$$\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_i^{(-)}(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle F_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) F_i^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle = 0. \quad (46)$$

V. DETECTION PROBABILITIES

In the Hilbert-space formalism, the usual theory of detection (by photon absorption) is based on normal ordering. Single and joint detection rates are given by

$$P_a(\mathbf{r}_a, t) = K \langle 0 | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | 0 \rangle, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') &= K' \langle 0 | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \\ &\quad \times \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (48)$$

in the Heisenberg picture, where K and K' are two constants related to the efficiency of the detectors.

We now formulate the quantum theory of detection in the Wigner representation. The corresponding probabilities are now

$$P_a(\mathbf{r}_a, t) = K \langle I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a) \rangle, \quad (49)$$

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') = K' \langle \{ I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a) \} \{ I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b) \} \rangle, \quad (50)$$

where $I(\mathbf{r}, t) = |E^{(+)}(\mathbf{r}, t)|^2$ and $I_0(\mathbf{r}) = \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}, -\Delta t)|^2 \rangle$, $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ being defined by Eq. (6).

We prove Eq. (49) as follows:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) + \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | 0 \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) - \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | S \{ \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \} | 0 \rangle - \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{U}^\dagger(t + \Delta t) \\
&\quad \times [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)] \hat{U}(t + \Delta t) | 0 \rangle \\
&= \langle E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \rangle - \frac{1}{2} \langle 0 | [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)] | 0 \rangle \\
&= \langle I(\mathbf{r}_a, t) \rangle - \langle 0 | S \{ \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t) \} | 0 \rangle \\
&= \langle I(\mathbf{r}_a, t) \rangle - \langle I(\mathbf{r}_a, 0) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a) \rangle, \tag{51}
\end{aligned}$$

where $\hat{U}(t + \Delta t)$ is the evolution operator. The third equality follows because the commutator of $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)$ and $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)$ is a c number (that does not change during the evolution). The fourth follows because the vacuum expectation of a normally ordered product vanishes, and this allows us to replace the commutator by the anticommutator and then write it in terms of symmetrical ordering.

Equation (50) is a little more involved. After some tedious algebra it can be proved that

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) | 0 \rangle &= \langle 0 | S \left\{ \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) - \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] \right) \right. \\
&\quad \times \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') - \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] \right) \left. \right\} | 0 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle 0 | [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t')] \left\{ S \left(\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \right) \right. \\
&\quad \left. - [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] \right\} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \langle 0 | [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)] \\
&\quad \times \left\{ S \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t) \right) - [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] \right\} | 0 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle 0 | [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t')] \left\{ S \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t') \right) \right. \\
&\quad \left. - [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] \right\} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \langle 0 | [\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] \\
&\quad \times \left\{ S \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) \right) - [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)] \right\} | 0 \rangle, \tag{52}
\end{aligned}$$

which is similar to Wick's theorem [[9], but in this case it establishes the relation between normal and symmetrical ordering instead of normal and time ordering.

By the same argument as that used in formula (51), for transforming the anticommutator into the intensity of the vacuum field, the two commutators can be written as

$$\frac{1}{2}[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_a, t)] = \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_a, -\Delta t)|^2 \rangle = I_0(\mathbf{r}_a),$$

$$\frac{1}{2}[\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')] = \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_b, -\Delta t)|^2 \rangle = I_0(\mathbf{r}_b). \quad (53)$$

On the other hand, the rest of commutators are zero in PDC experiments because they involve different modes of the radiation field. Then the result (50) follows by taking into account these two facts in Eq. (52) and writing the vacuum expectation values of the remaining symmetrical operators as the corresponding averages with the Wigner density.

For the purpose of applying Eq. (50) to the experiments, it is convenient to write it in a more compact form. We use the fact, proved in Sec. IV, that the Wigner field amplitudes are Gaussian processes. For four Gaussian random variables A , B , C , and D , the well-known property

$$\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle \quad (54)$$

allows us to write the coincidence probability as

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') = K' \{ \langle \{ I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a) \} \{ I(\mathbf{r}_b, t') - I_0(\mathbf{r}_b) \} \rangle \}$$

$$= P_a(\mathbf{r}_a, t) P_b(\mathbf{r}_b, t')$$

$$+ K' \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(-)}(\mathbf{r}_b, t')|^2 \rangle$$

$$+ K' \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t')|^2 \rangle. \quad (55)$$

On the other hand, from Sec. IV it can be easily seen that the first two terms are fourth-order in g , while the last term is second-order in g . This means that we may discard the first two terms and finally obtain

$$P_{ab}(\mathbf{r}_a, t; \mathbf{r}_b, t') = K' \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t')|^2 \rangle. \quad (56)$$

In actual experiments there is always a detection window w and we should perform the time integral of Eq. (56) within this window. We have

$$P_{ab} = \frac{\eta^2}{\hbar^2 \omega_a \omega_b} \int_0^w d\tau \int_0^w d\tau' \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) \times E^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau')|^2 \rangle. \quad (57)$$

We have assumed that radiation modes where the amplitude differs significantly from the zero-point value are concentrated in narrow bands around ω_a and ω_b , respectively. For simplicity we have assumed also that the two windows are identical and that both detectors have the same efficiency η .

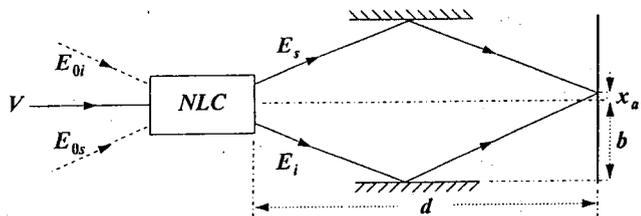


FIG. 2. Experiment of interference on a screen by Ghosh and Mandel.

VI. EXPERIMENT ON THE INTERFERENCE OF SIGNAL AND IDLER PHOTONS

The coherence properties of PDC photon pairs were investigated by Ghosh *et al.* [10]. They directed degenerate signal and idler beams towards a screen by means of two mirrors (see Fig. 2), where "degenerate" means that the directions of the signal and idler beams are so chosen that $\omega_s = \omega_i = \omega_0/2$. If one detector is put on the screen, no change is observed in the counting rate when the detector changes position. This shows that there is no second-order interference between the two beams. In contrast, when two detectors are put on the screen, the coincidence counting rate is observed to depend on the relative position of the detectors. This shows a fourth-order, or intensity-intensity, interference.

The explanation of these results, in the Wigner representation, is straightforward. In the scalar approximation (valid because the angle between signal and idler beams is small) the field at a point \mathbf{r}_a on the screen (see Fig. 2) is, using Eq. (34),

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) = F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)$$

$$= F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_s/c) e^{i\omega_0 r_s/2c}$$

$$+ F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_i/c) e^{i\omega_0 r_i/2c}. \quad (58)$$

The vector \mathbf{r}_a has components (x_a, y_a, d) , d being the distance from the center of the crystal to the screen. The optical path lengths of the signal r_s and idler r_i beams from the center of the crystal to the detectors are

$$r_s = \sqrt{(2b - x_a)^2 + y_a^2 + d^2}, \quad r_i = \sqrt{(2b + x_a)^2 + y_a^2 + d^2}, \quad (59)$$

where b is the distance from the axis of the pumping to the mirrors.

For the calculation of the single detection probability, using Eq. (49), we need the average

$$\langle I(\mathbf{r}_a, t) - I_0(\mathbf{r}_a) \rangle = \langle |F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)|^2 \rangle - \langle |F^{(+)}(\mathbf{r}_a, 0)|^2 \rangle$$

$$= \langle |F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)|^2 \rangle - \langle |F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, 0)|^2 \rangle$$

$$+ \langle |F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)|^2 \rangle - \langle |F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, 0)|^2 \rangle$$

$$+ 2 \text{Re} \{ \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_s/c) \times F_i^{(-)}(\mathbf{0}, t - r_i/c) \rangle e^{i\omega_0(r_s - r_i)/2c} \}. \quad (60)$$

The last term is zero because $F_s^{(+)}$ and $F_i^{(-)}$ are uncorrelated [see Eq. (46)]. The other four terms give no dependence on \mathbf{r}_a , that is, we get no interference between signal and idler.

The coincidence probability in two detectors placed at \mathbf{r}_a and \mathbf{r}_b is given by Eq. (56). The amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)$ was given in Eq. (58) and a similar expression is valid for $F^{(+)}(\mathbf{r}_b, t')$. Then, we have

$$\begin{aligned}
 P_{ab}(\mathbf{r}_a, t + \tau; \mathbf{r}_b, t + \tau') &= K' |\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) F_s^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') \\
 &\quad + F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) F_s^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') \rangle|^2 \\
 &= |\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') + F_i^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) F_s^{(+)}(\mathbf{r}_b, t + \tau') \rangle|^2 \\
 &= |\langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - r_s/c) F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau' - r'_i/c) \rangle e^{i\omega_0(r_s + r'_i)/2c} \\
 &\quad + \langle F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - r_i/c) F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau' - r'_s/c) \rangle e^{i\omega_0(r'_s + r_s)/2c}|^2, \quad (61)
 \end{aligned}$$

where we have used Eq. (46) in the first equation and Eq. (34) in the second.

Now, expanding r_s and r_i (r'_s and r'_i) to first order in x_a (x_b) and using Eq. (57) we get

$$\begin{aligned}
 P_{ab}(x_a; x_b) &\approx \left(\frac{2\eta}{\hbar\omega_0} \right)^2 g^2 |V|^2 \int_0^w d\tau \int_0^w d\tau' \\
 &\quad \times (|\nu[\tau' - \tau - b(x_a + x_b)/cd]|^2 \\
 &\quad + |\nu[\tau - \tau' - b(x_a + x_b)/cd]|^2 \\
 &\quad + 2 \operatorname{Re}\{\nu[\tau' - \tau - b(x_a + x_b)/cd] \\
 &\quad \times \nu^*[\tau - \tau' - b(x_a + x_b)/cd] \\
 &\quad \times e^{i\omega_0 b(x_b - x_a)/cd}\}), \quad (62)
 \end{aligned}$$

which shows a cosine dependence on $\omega_0 b(x_b - x_a)/cd = b(x_b - x_a)/\lambda_0 d$. It is easy to see that if the detection window w is much bigger than the correlation time of $\nu(\tau)$ and this is bigger than the quantity $b(x_a + x_b)/cd$, then this quantity may be neglected in the argument of the function ν . In these conditions, because $|\nu(\tau)|$ is an even function of τ (see [10]), the visibility of the interference pattern given by Eq. (62) becomes close to 100%.

VII. THE EXPERIMENT OF RARITY AND TAPSTER

In 1990 Rarity and Tapster [11] performed an experiment to test Bell's inequality using phase and momentum of photon pairs (instead of polarization as in previous experiments). The experiment consisted of selecting two signal beams of the same color (frequency ω_s) and two idler beams also of

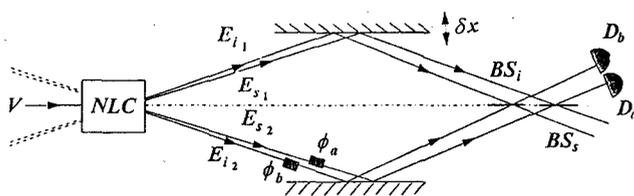


FIG. 3. Experiment of Rarity and Tapster.

the same color (frequency ω_i , different from ω_s). One of the signal beams and one of the idler beams go to a mirror put above the pumping beam axis and the other two at another mirror put below (see Fig. 3). The two signals are recombined at one beam splitter and the two idlers at another (in practice, the authors used two different points of the same beam splitter). Two detectors were put in appropriate places to detect the signal and the idler, respectively. Two controllable phase shifters were introduced in the lower beams, so that the phase of the signal was increased by ϕ_a and that of the idler by ϕ_b . The result of the experiment was that the coincidence detection probability had a cosine variation with $\phi_a - \phi_b$ with a visibility close to 100%. In the actual experiment the signal and idler detectors were placed near each other, but, in principle, it is possible to send the signal and idler beams to two distant regions of space by using appropriate mirrors placed near the crystal. For this reason the experiment has been interpreted as a violation of a Bell inequality [11].

In the Wigner representation the field amplitudes arriving at the signal and idler detectors (placed at \mathbf{r}_a and \mathbf{r}_b , respectively) will be, using Eq. (12),

$$\begin{aligned}
 F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= iR_s F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) + T_s F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t), \\
 F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') &= T_i F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') + iR_i F_{i_2}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t'), \quad (63)
 \end{aligned}$$

where we have labeled 1 (2) the upper (lower) beams. T_s and R_s (T_i and R_i) are the transmission and reflection coefficients of the signal (idler) in the beam splitter (see Fig. 3). Now we take Eq. (34) into account and write

$$\begin{aligned}
 F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= e^{i\omega_s(r_a + \delta x)/c} F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_a/c + \delta x/c), \\
 F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= e^{i\omega_s r_a/c + i\phi_a} F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t - r_a/c + \phi_a/\omega_s), \\
 F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') &= e^{i\omega_i(r_b + \delta x)/c} F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - r_b/c + \delta x/c), \\
 F_{i_2}^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') &= e^{i\omega_i r_b/c + i\phi_b} F_{i_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' - r_b/c + \phi_b/\omega_i). \quad (64)
 \end{aligned}$$

We have labeled r_a (r_b) the path length of the lower signal (idler) beam from the center of the crystal to the detectors. In the actual experiment both upper paths are modified by δx because the upper and lower mirrors are not at exactly the same distance from the pumping beam axis. However, in our calculation we shall set $\delta x = 0$ and $r_a = r_b = r$ for the sake of simplicity.

The coincidence detection probability is given by Eq. (57). We need the cross correlation

$$\begin{aligned}
 & |\langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t + \tau) F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t' + \tau') \rangle| \\
 &= |R_s T_i e^{i\phi_b} \langle F_{s_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - r/c) \\
 &\quad \times F_{i_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t' + \tau' - r/c - \phi_b/\omega_i) \rangle \\
 &\quad + R_i T_s e^{i\phi_a} \langle F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - r/c - \phi_a/\omega_s) \\
 &\quad \times F_{i_1}^{(+)}(\mathbf{0}, t' + \tau' - r/c) \rangle| \\
 &= |R_s T_i e^{i\phi_b} \nu(\tau' - \tau - \phi_b/\omega_i) \\
 &\quad + R_i T_s e^{i\phi_a} \nu(\tau' - \tau - \phi_a/\omega_s)|, \quad (65)
 \end{aligned}$$

where in the first equation we have taken into account that the signal field $F_{s_1}^{(+)}$ is correlated with the idler field $F_{i_2}^{(+)}$ and also $F_{s_2}^{(+)}$ is correlated with $F_{i_1}^{(+)}$, but $F_{s_j}^{(+)}$ is uncorrelated with $F_{i_j}^{(+)}$ ($j=1$ or 2), these pairs not fulfilling the matching conditions (25). The second equality of Eq. (65) follows from Eq. (45). If we take into account that the time intervals ϕ_a/ω_s and ϕ_b/ω_i are small in comparison to the coherence time of signal and idler, given by the function $\nu(\tau)$, we obtain

$$\begin{aligned}
 P_{ab}(\phi_a, \phi_b) &\approx \frac{\eta^2}{\hbar^2 \omega_s \omega_i} g^2 |V|^2 \int_0^w d\tau \int_0^w d\tau' |\nu(\tau' - \tau)|^2 \\
 &\quad \times \{(R_i T_s)^2 + (R_s T_i)^2 + 2R_s T_s R_i T_i \\
 &\quad \times \cos(\phi_a - \phi_b)\}. \quad (66)
 \end{aligned}$$

We get a fourth-order interference with a visibility close to 100% provided that the reflection and transmission in the beam splitter fulfill $R_i/T_i = R_s/T_s$. A similar expression is obtained if both detectors are placed below the pumping beam axis. If one of the detectors is placed above and the other below we obtain

$$\begin{aligned}
 P_{ab}(\phi_a, \phi_b) &\approx \frac{\eta^2}{\hbar^2 \omega_s \omega_i} g^2 |V|^2 \int_0^w d\tau \int_0^w d\tau' |\nu(\tau' - \tau)|^2 \\
 &\quad \times \{(T_s T_i)^2 + (R_s R_i)^2 \\
 &\quad + 2R_s T_s R_i T_i \cos(\phi_a - \phi_b)\}. \quad (67)
 \end{aligned}$$

In this case the 100% visibility requires $T_s T_i = R_s R_i$. If we want high visibility in both Eqs. (66) and (67), we need $T_s = T_i = R_s = R_i = 1/\sqrt{2}$.

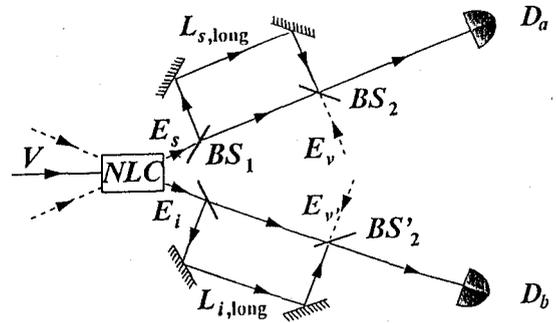


FIG. 4. Experiment of Franson.

VIII. THE EXPERIMENTS OF FRANSON

In 1989 Franson proposed an experiment in order to test “a Bell’s inequality for energy and time” [12]. The experiment consists of the following (see Fig. 4). A signal and an idler beam are passed each through a Mach-Zehnder interferometer, that is, an arrangement of two beam splitters (BS) and two mirrors. The signal beam is divided at the first BS₁ and two outgoing beams travel by different routes, one long and the other one short, until a second BS₂ where they are recombined. One of the outgoing beams at this BS₂ goes to a detector. A similar thing happens with the idler beam. We shall label ΔL_s (ΔL_i) the length difference between the long and the short route of the signal (idler) beam. In the experiment it is observed that the single detection rates do not depend on ΔL_s or ΔL_i , but the coincidence detection rate exhibits a cosine dependence on $(\omega_s \Delta L_s + \omega_i \Delta L_i)/c$, which shows a fourth-order interference. In the past few years several groups have performed experiments of that type, the most recent one by Tapster *et al.* [13] (references to previous experiments may be seen in that paper).

In order to compute the joint detection probability, we must write the fields at the detectors as functions of the outgoing fields from the crystal. Without a loss of generality we shall neglect the distances from the crystal to Mach-Zehnder interferometers in order to simplify notation (see Fig. 4).

If we call \mathbf{r}_a (\mathbf{r}_b) the position of detector D_a (D_b), \mathbf{r}_2 (\mathbf{r}'_2) the position of BS₂ (BS'₂), $L_{s, \text{long}}$ ($L_{i, \text{long}}$) the length of the long arm of the interferometer, and $L_{s, \text{short}}$ ($L_{i, \text{short}}$) the length of the short arm of the interferometer for the signal (idler) beam, then

$$\begin{aligned}
 F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[F_s^{(+)} \left(\mathbf{0}, t - \frac{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|}{c} - \frac{L_{s, \text{long}}}{c} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - i F_v^{(+)} \left(\mathbf{0}, t - \frac{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|}{c} - \frac{L_{s, \text{long}}}{c} \right) \right] e^{i\omega_s (L_{s, \text{long}}/c)} \right. \\
 &\quad \left. + \left[F_s^{(+)} \left(\mathbf{0}, t - \frac{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|}{c} - \frac{L_{s, \text{short}}}{c} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + i F_v^{(+)} \left(\mathbf{0}, t - \frac{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|}{c} - \frac{L_{s, \text{short}}}{c} \right) \right] \right\} \\
 &\quad \times e^{i\omega_s (L_{s, \text{short}}/c)} \left. \right\} e^{i\omega_s (|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|/c)}, \quad (68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') = & \frac{1}{2} \left\{ \left[F_i^{(+)}\left(\mathbf{0}, t' - \frac{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|}{c} - \frac{L_{i, \text{long}}}{c}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - i F_{v'}^{(+)}\left(\mathbf{0}, t' - \frac{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|}{c} - \frac{L_{i, \text{long}}}{c}\right) \right] \right. \\
 & \times e^{i\omega_i(L_{i, \text{long}}/c)} \\
 & + \left[F_i^{(+)}\left(\mathbf{0}, t' - \frac{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|}{c} - \frac{L_{i, \text{short}}}{c}\right) \right. \\
 & \left. + i F_{v'}^{(+)}\left(\mathbf{0}, t' - \frac{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|}{c} - \frac{L_{i, \text{short}}}{c}\right) \right] \\
 & \left. \times e^{i\omega_i(L_{i, \text{short}}/c)} \right\} e^{i\omega_i(|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|/c)}. \quad (69)
 \end{aligned}$$

$F_v^{(+)}$ and $F_{v'}^{(+)}$ are the positive parts of the vacuum incoming beams at BS_2 and BS'_2 , respectively.

Now, by taking into account the correlation relations (45) and supposing that $\Delta L_s \equiv L_{s, \text{long}} - L_{s, \text{short}}$ ($\Delta L_i \equiv L_{i, \text{long}} - L_{i, \text{short}}$) is much bigger than the coherence length of the signal (idler) in order to avoid second-order interference, we get

$$\begin{aligned}
 & \langle \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau) F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau') \rangle \rangle \\
 & = \frac{1}{4} \left\langle \left\langle F_s^{(+)}\left(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|}{c} - \frac{L_{s, \text{long}}}{c}\right) \right. \right. \\
 & \quad \times \left. \left. F_i^{(+)}\left(\mathbf{0}, t + \tau' - \frac{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|}{c} - \frac{L_{i, \text{long}}}{c}\right) \right\rangle \right\rangle \\
 & \quad \times e^{i(\omega_s/c)(L_{s, \text{long}} + |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|) + i\omega_i/c(L_{i, \text{long}} + |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|)} \\
 & + \left\langle \left\langle F_s^{(+)}\left(\mathbf{0}, t + \tau - \frac{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|}{c} - \frac{L_{s, \text{short}}}{c}\right) \right. \right. \\
 & \quad \times \left. \left. F_i^{(+)}\left(\mathbf{0}, t + \tau' - \frac{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|}{c} - \frac{L_{i, \text{short}}}{c}\right) \right\rangle \right\rangle \\
 & \quad \times e^{i(\omega_s/c)(L_{s, \text{short}} + |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_2|) + i\omega_i/c(L_{i, \text{short}} + |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'_2|)}. \quad (70)
 \end{aligned}$$

where we have taken into account that the fields $F_v^{(+)}$ and $F_{v'}^{(+)}$ are uncorrelated among themselves and with $F_s^{(+)}$ and $F_i^{(+)}$. We finally obtain

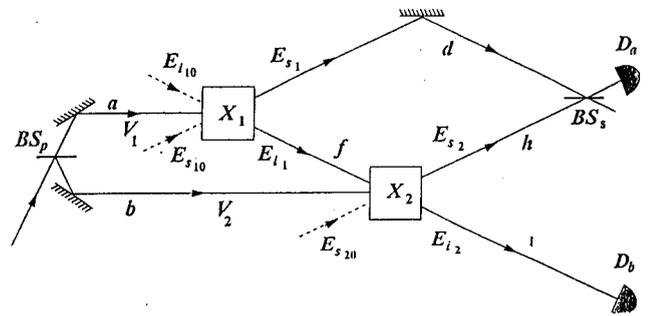


FIG. 5. Experiment of induced coherence without induced emission.

$$\begin{aligned}
 P_{ab}(\Delta L_s, \Delta L_i) = & \frac{\eta^2}{4\hbar^2 \omega_s \omega_i} g^2 |V|^2 \int_0^w d\tau \int_0^w d\tau' \left\{ |\nu(\tau - \tau')|^2 \right. \\
 & + \left| \nu\left(\tau' - \tau + \frac{\Delta L_i - \Delta L_s}{c}\right) \right|^2 \\
 & \left. - 2 \operatorname{Re} \left[\nu(\tau - \tau') \nu^*\left(\tau' - \tau + \frac{\Delta L_i - \Delta L_s}{c}\right) \right] \right\} \\
 & \times e^{i(c)(\omega_s \Delta L_s + \omega_i \Delta L_i)}, \quad (71)
 \end{aligned}$$

which shows a fourth-order interference. If $(\Delta L_i - \Delta L_s)/c$ is small in comparison to the coherence time between signal and idler, it is possible to neglect this term in the argument of $\nu(\tau' - \tau)$ and we get a visibility close to 100%.

IX. INDUCED COHERENCE AND INDISTINGUISHABILITY IN TWO-PHOTON INTERFERENCE

In 1991 Zhou *et al.* performed an experiment [14] in which fourth-order interference is observed in the superposition of signal photons from two coherently pumped PDC crystals, when the paths of the idler photons are aligned. The experimental situation is illustrated in Fig. 5, in which two similar nonlinear crystals X_1 and X_2 are optically pumped by two mutually coherent, classical pump waves of complex amplitudes $V_1 = V_2 = V$, and PDC occurs at both crystals, each with the emission of a signal photon and an idler photon. We look for the joint detection probability in the detectors D_a and D_b when the trajectories of the two idlers $i_{1,2}$ are aligned and the path difference between the two signals s_1 and s_2 is varied slightly. Fourth-order interference disappears when the idlers are misaligned or separated by a beam stop. This experiment has been qualified as ‘‘mind boggling’’ [15], but the analysis in terms of the Wigner function is straightforward.

To start with, let us express the fields at the detectors D_a and D_b as a function of the incoming fields on the crystals. If f , d , h , and l are the distances of X_1 to X_2 , X_1 to D_a , X_2 to D_a , and X_2 to D_b , respectively, then

$$\begin{aligned}
F_s^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [iF_{s_1}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t) + F_{s_2}^{(+)}(\mathbf{r}_a, t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ iF_{s_{10}}^{(+)}(\mathbf{0}_1, t-d/c) e^{i\omega_s d/c} + i g^2 |V|^2 JF_{s_{10}}^{(+)}(\mathbf{0}_1, t-d/c) e^{i\omega_s d/c} \\
&\quad + i g V G F_{i_{10}}^{(-)}(\mathbf{0}_1, t-d/c) e^{i\omega_s d/c} + F_{s_{20}}^{(+)}(\mathbf{0}_2, t-h/c) e^{i\omega_s h/c} + g^2 |V|^2 \\
&\quad \times JF_{s_{20}}^{(+)}(\mathbf{0}_2, t-h/c) e^{i\omega_s h/c} + g V G F_{i_{10}}^{(-)}[\mathbf{0}_1, t-(f+h)/c] e^{i(\omega_s h - \omega_f)/c} \\
&\quad + g^2 |V|^2 G G^* F_{s_{10}}^{(+)}[\mathbf{0}_1, t-(f+h)/c] e^{i(\omega_s h - \omega_f)/c} \}, \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_i^{(+)}(\mathbf{r}_b, t') &= F_{i_{10}}^{(+)}[\mathbf{0}_1, t'-(l+f)/c] e^{i\omega_i(l+f)/c} + g V G F_{s_{10}}^{(-)}[\mathbf{0}_1, t'-(l+f)/c] e^{i\omega_i(l+f)/c} \\
&\quad + g^2 |V|^2 JF_{i_{10}}^{(+)}[\mathbf{0}_1, t'-(l+f)/c] e^{i\omega_i(l+f)/c} + g V G F_{s_{20}}^{(-)}(\mathbf{0}_2, t'-l/c) e^{i\omega_i l/c} \\
&\quad + g^2 |V|^2 JF_{i_{10}}^{(+)}[\mathbf{0}_1, t'-(l+f)/c] e^{i\omega_i(l+f)/c}. \quad (73)
\end{aligned}$$

By using Eq. (56) to compute the coincidence probability, we get

$$\begin{aligned}
P_{ab}(\mathbf{r}_a, t+\tau; \mathbf{r}_b, t+\tau') &= K' \frac{g^2 |V|^2}{2} |e^{i[\omega_s d/c + \omega_i(l+f)/c + \pi/2]} \{ \langle F_{s_{10}}^{(+)}(\mathbf{0}_1, t+\tau-d/c) G F_{s_{10}}^{(-)}(\mathbf{0}_1, t+\tau' \\
&\quad -(l+f)/c \rangle + \langle F_{i_{10}}^{(+)}(\mathbf{0}_1, t+\tau'-(l+f)/c) G F_{i_{10}}^{(-)}(\mathbf{0}_1, t+\tau-d/c) \rangle \} \\
&\quad + e^{i[\omega_s h/c + \omega_i l/c]} \{ \langle F_{s_{20}}^{(+)}(\mathbf{0}_2, t+\tau-h/c) G F_{s_{20}}^{(-)}(\mathbf{0}_2, t+\tau'-l/c) \rangle \\
&\quad + \langle F_{i_{10}}^{(+)}[\mathbf{0}_1, t+\tau'-(l+f)/c] G F_{i_{10}}^{(-)}[\mathbf{0}_1, t+\tau-(f+h)/c] \rangle \}^2. \quad (74)
\end{aligned}$$

Finally, by using Eqs. (44) and (57), the resulting coincidence probability is

$$\begin{aligned}
P_{ab} &= \frac{\eta^2 g^2 |V|^2}{8 \hbar^2 \omega_s \omega_i} \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau d\tau' \{ |\nu(\tau-\tau'+l/c+f/c-d/c)|^2 \\
&\quad + |\nu(\tau-\tau'+l/c-h/c)|^2 - \text{Im}[\nu(\tau-\tau'+l/c+f/c \\
&\quad -d/c) \nu^*(\tau-\tau'+l/c-h/c) e^{i(\omega_s(d-h) + \omega_f l/c)}] \}, \quad (75)
\end{aligned}$$

which, as expected, shows an intensity-intensity interference. As in the experiments of the previous sections, the visibility may be made close to 100% by making the signal and idler path lengths coincide to within their coherence lengths.

X. CONCLUSION

We have developed the Wigner representation formalism in a fashion suitable for the study of experiments involving

PDC photon pairs. The results agree with those obtained using the more common Hilbert-space formulation, both being just two equivalent forms of quantum optics.

The Wigner representation is specially suited for PDC because the Wigner function is Gaussian and positive definite in this case. The Gaussian character simplifies notably the calculation of autocorrelations and cross correlations for the various fields involved. On the other hand, positivity makes possible a picture in terms of pure waves during the propagation, which may aid the intuition in the study of these experiments. However, the detection problem remains and this prevents a straightforward interpretation only with waves. Also the role played by the vacuum field is stressed in this representation.

ACKNOWLEDGMENT

We acknowledge financial support of CAICYT Project No. PB-95-0594 (Spain).

- [1] M. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, in *Quantum Coherence*, edited by J. S. Anandan (World Scientific, Singapore, 1990), pp. 356-372.
 [2] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970).

- [3] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
 [4] C. K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **31**, 2409 (1985).
 [5] See, e.g., D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994), Chap. 9.

- [6] A vacuum fluctuation argument providing physical insight into photon-photon correlations in experiments with parametric down-converted light have been put forth by M. O. Scully and U. W. Rathe, *Opt. Commun.* **110**, 373 (1994).
- [7] A. Casado, T. W. Marshall, and E. Santos, *J. Opt. Soc. Am. B* **14**, 494 (1997).
- [8] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [9] See, e.g., L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990), Chap. 17.
- [10] R. Ghosh, C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **34**, 3962 (1986).
- [11] J. G. Rarity and P. R. Tapster, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495 (1990).
- [12] J. D. Franson, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2205 (1989).
- [13] P. R. Tapster, J. G. Rarity, and P. C. M. Owens, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1923 (1994).
- [14] X. Y. Zou, L. J. Wang, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 318 (1991).
- [15] D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger, *Phys. Today* **46** (8), 22 (1993).

consider that the half wave plate is placed at $\mathbf{r}=\mathbf{0}$. The signal beam coming out the half wave plate and the idler beam outgoing the crystal are

$$\mathbf{F}_s^{(+)}(\mathbf{0}, t) = F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t)(\cos\phi, \sin\phi),$$

$$\mathbf{F}_i^{(+)}(\mathbf{0}, t) = F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t)(1, 0). \quad (24)$$

The field corresponding to the output port of the 50:50 beam splitter (placed at $\mathbf{r}=\mathbf{R}$) in the direction of detector D_1 is

$$\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{F}_i^{(+)}(\mathbf{R}, t) + i\mathbf{F}_s^{(+)}(\mathbf{R}, t)] = \frac{1}{\sqrt{2}}F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_2)e^{i\omega_i\tau_2} + iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1}\cos\phi + iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1}\sin\phi. \quad (25)$$

Here τ_1 and τ_2 are the propagation times from the crystal to the beam splitter. When a polarizer oriented at angle ϕ_1 to the horizontal is placed in the output port of the interferometer, the field at the detector D_1 (placed at \mathbf{r}_1) at time t is

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) &= [\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{R}, t) \cdot (\cos\phi_1, \sin\phi_1)](\cos\phi_1, \sin\phi_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_2)e^{i\omega_i\tau_2}\cos\phi_1 + iF_s^{(+)}(\mathbf{0}, t - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1}\cos(\phi - \phi_1)](\cos\phi_1, \sin\phi_1), \end{aligned} \quad (26)$$

where we have dropped an irrelevant phase shift coming from the propagation between BS and D_1 . In the same way, we write for the field at the detector D_2 (placed at \mathbf{r}_2) at time $t + \tau$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[iF_i^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_2)e^{i\omega_i\tau_2}\cos\phi_2 + F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - \tau_1)e^{i\omega_s\tau_1}\cos(\phi - \phi_2)] \\ &\quad \times (\cos\phi_2, \sin\phi_2). \end{aligned} \quad (27)$$

In order to calculate the joint probability we combine Eqs. (23), (26), and (27), and take into account the correlation properties of the field given by Eqs. (7) and (8). After some easy algebra and an integration of $P_{12}(\tau)$ over the time interval τ , we obtain the coincidence probability

$$\begin{aligned} P_{12} &= C \left[\cos^2\phi_1 \cos^2(\phi - \phi_2) + \cos^2\phi_2 \cos^2(\phi - \phi_1) \right] \\ &\quad \times \int_0^\infty |\nu(\tau)|^2 d\tau - 2\cos\phi_1 \cos(\phi - \phi_2) \cos\phi_2 \cos(\phi - \phi_1) \operatorname{Re} \int_0^\infty \nu(\delta\tau - \tau) \nu^*(\delta\tau + \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

with $\delta\tau = \tau_1 - \tau_2$, and C being a constant. When $\delta\tau = 0$ we have

$$P_{12} = C' \sin^2\phi \sin^2(\phi_2 - \phi_1), \quad (29)$$

C' being another constant. This expression is similar to the one obtained in the Appendix of [6].

ACKNOWLEDGEMENT

We acknowledge financial support of CAICYT Project No. PB-95-0594 (Spain).

- [1] A. Casado, T. W. Marshall, and E. Santos, *J. Opt. Soc. Am. B* **14**, 494 (1997).
 [2] A. Casado, A. Fernandez, T. W. Marshall, R. Risco-Delgado, and E. Santos, *Phys. Rev. A* **55**, 3879 (1997).
 [3] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987). The analysis of this experiment with the Wigner

- function formalism is a trivial extension of the work in Ref. [2].
 [4] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **45**, 6659 (1992).
 [5] J. D. Franson, *Phys. Rev. A* **45**, 3126 (1992).
 [6] P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **45**, 7729 (1992).

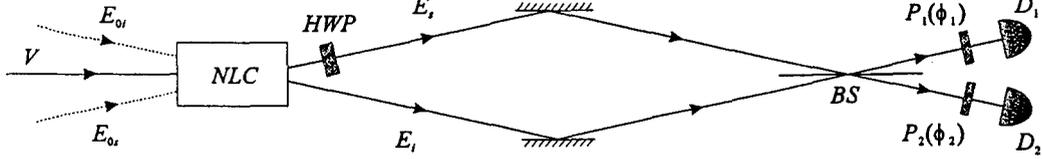


FIG. 2. Experiment of quantum eraser.

with α and β being constants appropriate for the dispersive medium.

In order to express $F_s^{(+)}$ at $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ in terms of $F_s^{(+)}$ at $\mathbf{r}=\mathbf{0}$, we take into account that $\alpha(\omega_{\mathbf{k}_s})$ is the inverse Fourier transform of $E_s^{(+)}(\mathbf{0}, t)$, that is,

$$\begin{aligned}\alpha(\omega_{\mathbf{k}_s}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' E_s^{(+)}(\mathbf{0}, t') e^{i\omega_{\mathbf{k}_s} t'} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) t'}.\end{aligned}\quad (16)$$

By taking into account Eqs. (16), (14), (12), and (13) we finally have

$$\begin{aligned}F^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F_i^{(+)}\left(\mathbf{0}, t - \frac{\delta l}{c}\right) e^{i\omega_i \delta l/c} + \frac{iK}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt' F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t') e^{i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)(t' - t)} e^{ik(\omega_{\mathbf{k}_s})d} \right],\end{aligned}\quad (17)$$

with a similar expression for $F^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau)$.

The coincidence detection probability is given by the correlation

$$\begin{aligned}\langle F^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) F^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle &= \frac{gVK e^{i\omega_i \delta l/c}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} e^{ik(\omega_{\mathbf{k}_s})d} \\ &\quad \times e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) \delta l/c} \bar{\nu}(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) \\ &\quad \times \sin[(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) \tau],\end{aligned}\quad (18)$$

where we have used Eqs. (7), (8), and defined the Fourier transform of ν

$$\bar{\nu}(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \nu(u) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)u}.\quad (19)$$

Multiplying Eq. (18) by its complex conjugate and using Eq. (11) we can calculate the joint detection probability. After some easy algebra, making use of the relation

$$\int_0^{\infty} dx \sin ax \sin bx = \frac{\pi}{2} [\delta(a-b) - \delta(a+b)],$$

and assuming that $\bar{\nu}(\omega)$ is symmetric in ω , we have

$$\begin{aligned}P_{12} &= C \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} |\bar{\nu}(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)|^2 \\ &\quad \times [1 - e^{-2i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) \delta l/c} e^{i[k(\omega_{\mathbf{k}_s}) - k(2\omega_s - \omega_{\mathbf{k}_s})]d}],\end{aligned}\quad (20)$$

C being a constant. Finally, by substituting Eq. (15) into Eq. (20) and defining $\omega = \omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s$, we obtain the final result for P_{12} :

$$P_{12} = C \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\bar{\nu}(\omega)|^2 [1 - \cos[2\omega(\alpha - \delta l/c)]].\quad (21)$$

This result is similar to the one obtained in Eq. (12) of [4].

III. THE QUANTUM ERASER

In 1992 Kwiat and co-workers [6] performed an experiment to show how the information may be erased from the state vector. This effect is known as the *quantum eraser* and shows the relation between quantum coherence and distinguishability. An outline of the experimental setup is shown in Fig. 2. A half wave plate at an angle $(\phi/2)$ to the horizontal is placed in one arm of a Hong-Ou-Mandel interferometer giving rise to a change in the polarization state of the light in this arm. Two polarizers P_1 and P_2 at angles ϕ_1 and ϕ_2 to the horizontal are inserted in front of detectors D_1 and D_2 , respectively.

We now present an analysis of this experiment in the Wigner formalism. This time we have to take into account the polarization of both the light beam and the vacuum field. The field is now represented by a vector

$$\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}], \lambda} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \alpha_{\mathbf{k}, \lambda}(t) \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t},\quad (22)$$

$\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}$ being orthonormal polarization vectors ($\lambda=1$ denotes horizontal polarization and $\lambda=2$ vertical polarization).

It can easily be proved that the expressions for the detection probabilities (9), (10) remain valid. Moreover, the final expression for the joint detection probability when we deal with parametric down-conversion experiments involving polarization is

$$P_{12}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) \propto \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} | \langle F_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) F_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle |^2.\quad (23)$$

In order to apply Eq. (23) we must calculate the fields at the detectors D_1 and D_2 . For the sake of simplicity we shall

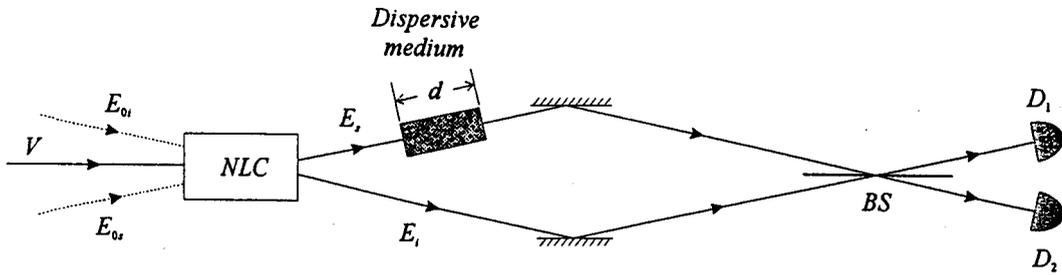


FIG. 1. Experiment of dispersion cancellation.

Here $\nu(t'-t)$ is a function that vanishes when $|t'-t|$ is greater than the coherence time between signal and idler. From Eq. (8) it is possible to derive all cross correlations at different points $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ by using Eq. (4).

Finally, the quantum theory of detection in the Wigner representation gives us the following results for single and joint detection probabilities:

(a) *Single probability.* The following result is a general expression for calculating single probabilities in the Wigner representation:

$$P_1(\mathbf{r}_1, t) \propto \langle \{I(\mathbf{r}_1, t) - I_0(\mathbf{r}_1)\} \rangle, \quad (9)$$

where $I(\mathbf{r}_1, t) = |E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)|^2$, and $I_0(\mathbf{r}_1)$ is the intensity of the vacuum field at the position of the detector.

(b) *Joint probability.* It can be proved that in parametric down-conversion experiments

$$P_{12}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) \propto \langle \{I(\mathbf{r}_1, t) - I_0(\mathbf{r}_1)\} \times \{I(\mathbf{r}_2, t + \tau) - I_0(\mathbf{r}_2)\} \rangle. \quad (10)$$

By taking into account that the Wigner field amplitudes are Gaussian, and neglecting fourth-order terms in g , we have

$$P_{12}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) \propto \langle \{E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau)\}^2 \rangle. \quad (11)$$

Finally we point out that these expressions for the detection probabilities remain valid when we use the amplitudes $F^{(+)}$ and $F^{(-)}$ in place of $E^{(+)}$ and $E^{(-)}$.

II. DISPERSION CANCELLATION

In this section we present a study of dispersion cancellation in a fourth-order interferometer [4], using the Wigner formalism. This kind of process has been considered as an example of nonlocality in quantum mechanics, due to the fact that there is no dispersion cancellation in "classical" optics [5]. However, the Wigner formalism suggests a fully local interpretation of this and many other phenomena, in the sense that a description in terms of fields propagating in space time is possible without ever surpassing the velocity of light. This possibility rests upon the fact that, in parametric down-conversion, the Wigner function is positive definite [1,2] and it may be interpreted as a probability distribution. Consequently, the Wigner representation of the experiments offers a counterexample to the claim that no local realist model may account for the said experiments.

The experimental setup is shown in Fig. 1. This is similar

to the Hong-Ou-Mandel interferometer [3], but with a dispersive medium inserted in one arm. In order to calculate the joint probability we are going to express the fields at the detectors D_1 and D_2 , by propagating the slowly varying functions $F^{(+)}$ from the crystal to the beam splitter BS (the phase factor from BS to the detectors is dropped because it is not important). The main difference with the other experiments that we have explained in the Wigner formalism lies in the fact that we have to propagate the field $F_s^{(+)}$ through the dispersive medium. Let us start by writing the fields at the detectors D_1 and D_2 at different times t and $t + \tau$. Assuming, for simplicity, that $T = R = 1/\sqrt{2}$ for the beam splitter, we have

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [F_i^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) + iF_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)],$$

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} [F_s^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) + iF_i^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau)], \quad (12)$$

where

$$F_i^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = F_i^{(+)}\left(\mathbf{0}, t - \frac{\delta l}{c}\right) e^{i\omega_i \delta l/c}, \quad (13)$$

and similarly for $F_i^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau)$. δl is the optical path length in the lower arm of the interferometer.

In order to obtain $F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)$ we shall use the expressions (1) and (2). We have

$$F_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = E_s^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) e^{i\omega_s t} \\ = K \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_{\mathbf{k}_s} \alpha(\omega_{\mathbf{k}_s}) e^{ik(\omega_{\mathbf{k}_s}) \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)t}, \quad (14)$$

where we have replaced the sum by an integral and extended the range of the integral to $\pm\infty$ because the function $\alpha(\omega_{\mathbf{k}_s})$ is peaked at $\omega_{\mathbf{k}_s} \approx \omega_s$, and we have introduced a constant K , which includes some other constants that are irrelevant for our purposes. We may expand the wave number $k(\omega_{\mathbf{k}_s})$ to second order in a Taylor series about ω_s as follows:

$$k(\omega_{\mathbf{k}_s}) = k_0 + \alpha(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s) + \beta(\omega_{\mathbf{k}_s} - \omega_s)^2, \quad (15)$$

Dispersion cancellation and quantum eraser experiments analyzed in the Wigner function formalism

Alberto Casado,^{1,*} Agustin Fernandez-Rueda,^{1,*} Trevor W. Marshall,² Ramon Risco-Delgado,^{1,*} and Emilio Santos¹

¹*Departamento de Fisica Moderna, Universidad de Cantabria, 39005 Santander, Spain*

²*Department of Mathematics, University of Manchester, Manchester M13 9PL, United Kingdom*

(Received 20 March 1997)

We extend the Wigner function formalism for parametric down-conversion experiments presented in a previous paper [Phys. Rev. A **55** 3879 (1997)] to experiments involving propagation through a dispersive medium [Steinberg *et al.*, Phys. Rev. A **45**, 6659 (1992)], and polarization [Kwiat *et al.*, Phys. Rev. A **45**, 7729 (1992)]. [S1050-2947(97)02009-X]

PACS number(s): 42.50.Ar, 03.65.Sq, 42.50.Lc

I. INTRODUCTION

Parametric down-conversion experiments in the Wigner representation have been recently studied [1,2]. In this section we present a brief summary of the most important results in order to apply them to new experiments. In the Wigner representation the electric field corresponding to a narrow light beam may be written (without taking the polarization into account)

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{L^3} \right)^{1/2} \alpha_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1)$$

where we assume that the light beam contains frequencies $\omega_{\mathbf{k}}$ in an interval $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$, and wave vectors with a limited transverse component $|\mathbf{k}^{\perp}| \ll \omega_{\min}/c$.

It is convenient to work with slowly varying amplitudes defined by

$$F^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega_a t} E^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

ω_a being an average frequency more or less midway between ω_{\min} and ω_{\max} . If the complex amplitude $\alpha_{\mathbf{k}}(t)$ has a free evolution of the form

$$\alpha_{\mathbf{k}}(t) = \alpha_{\mathbf{k}}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (3)$$

then the amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}_B, t)$ in terms of the amplitude $F^{(+)}(\mathbf{r}_A, t)$ at another point of the light beam is

$$F^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) = F^{(+)}\left(\mathbf{r}_A, t - \frac{r_{AB}}{c}\right) e^{i\omega_a r_{AB}/c}, \quad (4)$$

where $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, $r_{AB} = |\mathbf{r}_{AB}|$, and it is assumed that

$$r_{AB} \ll \frac{c}{\omega_{\max} - \omega_{\min}}. \quad (5)$$

*Permanent address: Escuela Superior de Ingenieros, Departamento de Fisica Aplicada, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain. Electronic address: acasado@cica.es

On the other hand, to second order in perturbation theory, the signal beam leaving the crystal can be expressed as

$$F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + g V G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + g^2 |V|^2 J F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

where we have represented the pumping laser beam by a plane wave of amplitude V and g is a dimensionless coupling constant. A similar expression holds for the idler beam by exchanging the indices “ s ” and “ i .” $F_{0s}^{(+)}$ is the vacuum field entering the crystal in the direction of the signal beam, and $F_{0i}^{(+)}$ is the vacuum field in the direction of the idler beam. ω_s and ω_i are the average frequencies of the beams with wave vectors \mathbf{k}_s , \mathbf{k}_i , respectively, fulfilling the matching conditions $\omega_s + \omega_i = \omega_0$, $\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i \approx \mathbf{k}_0$, with ω_0 and \mathbf{k}_0 being the frequency and wave vector of the pumping laser beam. G and J are linear operators expressing the interaction, within the crystal, of the laser with the zero-point field. The correlation properties of these fields are as follows:

(a) *Autocorrelations.* Taking the signal field at a point \mathbf{r} and times t and t' , we have

$$\begin{aligned} \langle F_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_s^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_{0s}^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_{0s}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ = 2g^2 |V|^2 \langle G F_{0i}^{(-)}(\mathbf{r}, t) G^* F_{0i}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ \equiv g^2 |V|^2 \mu_s(t-t'), \end{aligned} \quad (7)$$

Here $\langle \rangle$ means an average using the Wigner function in the vacuum state as probability density. $\mu_s(t-t')$ is a correlation function that goes to zero when $|t-t'|$ is greater than the correlation time of the signal τ_s . Similar expressions hold for the idler field by exchanging the indices “ s ” and “ i .”

(b) *Cross correlations.* Taking the signal and idler fields at the center of the crystal $\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{0}$ and times t and t' , we have

$$\begin{aligned} \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle = g V \nu(t-t'). \\ \langle F_s^{(+)}(\mathbf{0}, t) F_i^{(-)}(\mathbf{0}, t') \rangle = \langle F_s^{(-)}(\mathbf{0}, t) F_i^{(+)}(\mathbf{0}, t') \rangle = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Type II parametric downconversion in the Wigner-function formalism: entanglement and Bell's inequalities

Alberto Casado

Escuela Superior de Ingenieros, Departamento de Física Aplicada, Universidad de Sevilla, 41012 Sevilla, Spain

Trevor W. Marshall

Department of Mathematics, University of Manchester, Manchester M13 9PL, UK

Emilio Santos

Departamento de Física Moderna, Universidad de Cantabria, 39005 Santander, Spain

Received May 29, 1997; revised manuscript received September 18, 1997

We continue the analysis of our previous papers that were devoted to type I parametric downconversion, the extension to type II being straightforward. We show that entanglement, in the Wigner representation, is merely a correlation that involves both signals and vacuum fluctuations. An analysis of the detection process opens the way to a complete description of parametric downconversion in terms of pure Maxwell electromagnetic waves. © 1998 Optical Society of America [S0740-3224(98)01205-3]

OCIS codes: OCIS codes.

1. INTRODUCTION

The theory of parametric downconversion (PDC) was treated, in the Wigner formalism, in an earlier series of papers¹⁻³ in which we showed that, provided one considers the zero-point fluctuations of the vacuum to be real, the description of radiation is fully within Maxwell electromagnetic theory. Effectively, because the Wigner function maintains its positivity, we can say that quantization is merely the addition of a zero-point radiation, and there is no need for any further quantization of the light field. In the present paper we show that the same result extends, without any difficulty, from the type I PDC case to the type II situation.

There seems to be a widespread reluctance to accept the reality of the vacuum fluctuations, in spite of the fact that they appear, quite naturally, in the Wigner function of the vacuum state. Such fluctuations have been taken seriously, within a certain school of thought, throughout the entire history of the quantum theory, following Max Planck's formulation, which originated in 1911.⁴ Of course, it is true that, integrated over all frequencies, vacuum fluctuations give us a vacuum with infinite energy density; why then are all photographic plates not blackened instantaneously? But all photodetectors, including our own eyes, are selective, as regards not only the frequency, but also the wave vectors, of the light components they analyze. This is the case especially with the detectors commonly used in PDC experiments. So there is noise to subtract, but it is not infinite!

In our previous papers we indicated how the noise subtraction is made, according to the Wigner formalism, and showed how this subtraction is related to the standard

calculating device of normal ordering, used in the Hilbert-space formalism. Here we extend this analysis, in an informal manner, showing that, if we take into account that all detectors integrate the light intensity over a large time window, the process of light detection, like that of light propagation, may also be described entirely in terms of real waves and positive probabilities. We are then able to see that, in terms of a purely wave description, the highly problematic concept of entangled-photon states of the field loses all its mystery. Entangled photons are merely correlated waves! The only reason this description has taken so long to mature is that the word "classical," in reference to the light field, is restricted in its application to Glauber-classical states.⁵ A discussion of the difference between classical and nonclassical effects is given in Ref. 6. The states that are produced when a nonlinear crystal interacts with a coherent incoming beam (and, of course, simultaneously with the vacuum) may be described by use of classical Maxwell theory, but there is correlation of the outgoing light beams both above and below the zero-point level.

2. GENERAL DESCRIPTION OF PARAMETRIC DOWNCONVERSION IN THE WIGNER REPRESENTATION

Type I PDC, in which the correlated signal and idler beams have the same polarization, has recently been studied within the framework of the Wigner function.¹⁻³ The formalism is almost identical in the case of type II PDC, in which the correlated beams leaving the nonlinear

crystal are orthogonally polarized. The process of type II PDC can be formalized in analogy with the classical Hamiltonian of¹

$$H = \sum_{j=o,e} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{j\mathbf{k}} \alpha_{j\mathbf{k}}^* \alpha_{j\mathbf{k}} + \left(i\hbar g' V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \exp(-i\omega_p t) \alpha_{o\mathbf{k}}^* \alpha_{e\mathbf{k}'}^* + \text{c.c.} \right), \quad (1)$$

where o (e) refers to the ordinary (extraordinary) rays. We take the origin of the coordinate system at the center of the crystal and treat the pump beam as an intense monochromatic plane wave represented by

$$V(\mathbf{r}, t) = \{V(t) \exp[i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)] + \text{c.c.}\} \mathbf{u}, \quad (2)$$

where \mathbf{u} is a unit vector perpendicular to \mathbf{k}_p . As the coherence time of the laser is large in comparison with most of the times involved in the process, we consider $V(t)$ a constant. The real coupling constant g' is defined so that the product $g'V$ has dimensions of frequency, and $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ is a dimensionless symmetrical function of the wave vectors inside the crystal. This function, which is related to the function $h(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ introduced in Eq. (8) of Ref. 7, is different from zero only when the following matching condition is fulfilled:

$$\mathbf{k}_p \approx \mathbf{k} + \mathbf{k}'. \quad (3)$$

As is well known,⁷ there is in addition a matching condition for frequency that is fulfilled much more rigorously; namely,

$$\omega_p = \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}. \quad (4)$$

On the other hand, $\alpha_{o\mathbf{k}}$ ($\alpha_{e\mathbf{k}'}$) is the field amplitude for the mode with wave number \mathbf{k} (\mathbf{k}') corresponding to the ordinary (extraordinary) field, which is represented as a sum of two mutually conjugate complex c numbers

$$E_j(\mathbf{r}, t) = E_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E_j^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$$E_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{j\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \epsilon_{j\mathbf{k}} \alpha_{j\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

$$j = o, e, \quad (6)$$

where L^3 is the normalization volume and $\epsilon_{j\mathbf{k}}$ is a polarization vector. Equations (5) and (6) correspond to the Heisenberg picture, where all time dependence goes in the field amplitudes $\alpha_{j\mathbf{k}}^*(t)$ and $\alpha_{j\mathbf{k}}(t)$. For a free field this dependence has the form

$$\alpha_{j\mathbf{k}}(t) = \alpha_{j\mathbf{k}}(0) \exp(-i\omega_{j\mathbf{k}} t), \quad (7)$$

but for interacting fields it is complicated and contains all the dynamics of the process.

The evolution of the Wigner field amplitudes $\alpha_{j\mathbf{k}}(t)$ is given directly by the Hamilton (canonical) equations of motion that take $\hbar^{1/2} \alpha_{j\mathbf{k}}(t)$ as coordinates and $\hbar^{1/2} \alpha_{j\mathbf{k}}^*(t)$ as canonical momenta. For instance, we get for the extraordinary field amplitude $\alpha_{e\mathbf{k}}$

$$\dot{\alpha}_{e\mathbf{k}} = -i\omega_{e\mathbf{k}} \alpha_{e\mathbf{k}} + g' V \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \exp(-i\omega_p t) \alpha_{o\mathbf{k}'}^*, \quad (8)$$

and a similar expression holds for the ordinary field amplitude by an exchange of index e with index o .

To calculate $\alpha_{e\mathbf{k}}(t)$ for all t , we take into account that the amplitude $\alpha_{e\mathbf{k}}(t)$ evolves as a free-field mode before entering the crystal and after coming out. We integrate Eq. (8) from $t = -\Delta t$ to $t = 0$, where Δt is the time taken for the radiation to cross the crystal. The initial condition is $\alpha_{e\mathbf{k}}(-\Delta t) = \alpha_{e\mathbf{k}}^{(\text{vac})}(-\Delta t)$, where $\alpha_{e\mathbf{k}}^{(\text{vac})}(-\Delta t)$ is the field amplitude of the mode \mathbf{k} in the incoming vacuum field.

To second order in the coupling constant g' , that is, taking the second term of the right-hand side of Eq. (8) as a perturbation and retaining terms up to order g'^2 , we get (setting $g'\Delta t \equiv g$)

$$\begin{aligned} \alpha_{e\mathbf{k}}(0) &= \alpha_{e\mathbf{k}}^{(\text{vac})}(0) + g' V \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ &\times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_p - \omega_{e\mathbf{k}} - \omega_{o\mathbf{k}'}) \right] \alpha_{o\mathbf{k}'}^{*(\text{vac})}(0) \\ &+ g^2 |V|^2 \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ &\times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{o\mathbf{k}'} + \omega_{e\mathbf{k}''} - \omega_p) \right] \\ &\times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{e\mathbf{k}''} - \omega_{e\mathbf{k}}) \right] \alpha_{e\mathbf{k}''}^{(\text{vac})}(0), \quad |g| |V| \ll 1, \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$u(x) = (\sin x/x) \exp(ix). \quad (10)$$

Equation (3) implies $\mathbf{k}'' \approx \mathbf{k}$ in the second-order contribution to Eq. (9).

In the derivation of Eq. (9) we have taken into account that

$$\begin{aligned} \alpha_{e\mathbf{k}}^{(\text{vac})}(0) &= \alpha_{e\mathbf{k}}^{(\text{vac})}(-\Delta t) \exp(-i\omega_{e\mathbf{k}} \Delta t), \\ \alpha_{e\mathbf{k}}^{*(\text{vac})}(0) &= \alpha_{e\mathbf{k}}^{*(\text{vac})}(-\Delta t) \exp(i\omega_{e\mathbf{k}} \Delta t). \end{aligned} \quad (11)$$

After $t = 0$, $\alpha_{e\mathbf{k}}(t)$ evolves as a free-field mode:

$$\alpha_{e\mathbf{k}}(t) = \alpha_{e\mathbf{k}}(0) \exp(-i\omega_{e\mathbf{k}} t). \quad (12)$$

Now let us consider two narrow correlated beams called ordinary and extraordinary, with average frequencies ω_o , ω_e , and wave vectors \mathbf{k}_o , \mathbf{k}_e , respectively, fulfilling the matching conditions

$$\omega_o + \omega_e = \omega_p, \quad \mathbf{k}_o + \mathbf{k}_e = \mathbf{k}_p. \quad (13)$$

Both light beams contain frequencies within a range from $\omega_{j \min}$ to $\omega_{j \max}$ ($j = o, e$), wave vectors whose transverse components are limited by a small upper value, and orthogonal polarization vectors that are practically independent of the wave vectors; that is,

$$\begin{aligned} \omega_{j \min} < \omega_{j\mathbf{k}} < \omega_{j \max}, \quad |\mathbf{k}^{\perp}| \ll \omega_{j \min}/c, \\ \epsilon_{e\mathbf{k}} \equiv \epsilon_e, \quad \epsilon_{o\mathbf{k}} \equiv \epsilon_o; \quad \epsilon_e \cdot \epsilon_o = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

We also substitute slowly varying fields $F^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ [$F^{(-)}(\mathbf{r}, t)$] for the amplitudes $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ [$E^{(-)}(\mathbf{r}, t)$], the relation between them being

$$F_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) \equiv \exp(i\omega_j t) E_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ = \left[i \sum_{[\mathbf{k}]_j} (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2L^3)^{1/2} \alpha_{\mathbf{k}}(0) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right. \\ \left. \times \exp[i(\omega_j - \omega_{j\mathbf{k}})t] \right] \epsilon_j, \quad (j = o, e), \quad (15)$$

where ω_j is some appropriately chosen average frequency midway between ω_{\min} and ω_{\max} [see relation (14)]. The square brackets in the summation symbol indicate that the sum is restricted to the set of \mathbf{k} pertaining to the j beam.

It is easy to obtain the amplitude $F_j^{(+)}(\mathbf{r}_B, t)$ in terms of the amplitude $F_j^{(+)}(\mathbf{r}_A, t)$ at another point of the light beam.¹ We find

$$F_j^{(+)}(\mathbf{r}_B, t) = F_j^{(+)}(\mathbf{r}_A, t - r_{AB}/c) \exp[i\omega_j(r_{AB}/c)], \\ (j = e, o), \quad (16)$$

where $r_{AB} = r_B - r_A$ and $r_{AB} = |r_{AB}|$.

From expressions (9) and (15) we obtain

$$F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) \epsilon_e \\ = \{ [1 + g^2 |V|^2 J] F_e^{(+)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) \\ + g V G F_o^{(-)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) \} \epsilon_e, \quad (17)$$

$$F_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) \epsilon_o \\ = \{ [1 + g^2 |V|^2 J] F_o^{(+)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) \\ + g V G F_e^{(-)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) \} \epsilon_o. \quad (18)$$

Here $F_e^{(\text{vac})}$ and $F_o^{(\text{vac})}$ are the incoming vacuum fields, and $F_e(F_o)$ the outgoing extraordinary (ordinary) fields—see Fig. 1. We have

$$F_e^{(+)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_e} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \times \exp[(\omega_e - \omega_{\mathbf{k}})t] \alpha_{\mathbf{k}}^{(\text{vac})}(0) \quad (19)$$

and similarly for $F_o^{(-)(\text{vac})}$. G and J are linear operators that are defined as

$$G F_o^{(-)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{[\mathbf{k}]_e} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \times \exp[i(\omega_e - \omega_{\mathbf{k}})t] \beta_{\mathbf{k}}, \quad (20)$$

with

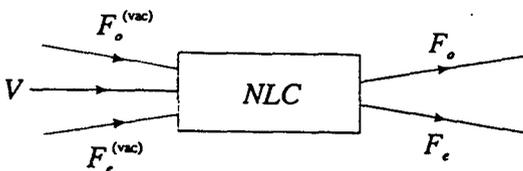


Fig. 1. Process of parametric downconversion.

$$\beta_{\mathbf{k}} = \sum_{[\mathbf{k}']_o} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_p - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \right] \alpha_{\mathbf{k}'}^{*(\text{vac})}(0), \quad (21)$$

$$J F_e^{(+)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) \\ = i \sum_{[\mathbf{k}]_e} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2L^3} \right)^{1/2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp[i(\omega_e - \omega_{\mathbf{k}})t] \gamma_{\mathbf{k}}, \quad (22)$$

with

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \sum_{[\mathbf{k}']_o} \sum_{[\mathbf{k}'']_e} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ \times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_p) \right] \\ \times u \left[\frac{\Delta t}{2} (\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}}) \right] \alpha_{\mathbf{k}''}^{(\text{vac})}(0). \quad (23)$$

From Eq. (17) we see that the outgoing extraordinary beam, to the order of g^2 , consists of three parts: (i) a zero-point radiation with amplitude $F_e^{(+)(\text{vac})}$ that passes through the crystal without any change; (ii) a radiation produced by the nonlinear interaction (mediated by the crystal) between the laser beam, with amplitude V , and the zero-point radiation, with amplitude $F_o^{(-)(\text{vac})}$, entering the crystal in the direction of the ordinary beam; and (iii) one part that is modified only a little (to the order of g^2) the amplitude $F_e^{(+)(\text{vac})}$. The ordinary beam is constituted in a similar manner.

Now let us consider the correlation properties of the fields, which are identical to the ones calculated in a previous study²:

A. Autocorrelations

Taking the extraordinary field $F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) \epsilon_e$ at a point \mathbf{r} and multiplying by t and t' , we have

$$\langle F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_e^{(-)}(\mathbf{r}, t') \rangle - \langle F_e^{(+)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) F_e^{(-)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ = 2g^2 |V|^2 \langle G F_o^{(-)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t) G^* F_o^{(+)(\text{vac})}(\mathbf{r}, t') \rangle \\ = g^2 |V|^2 \mu_e(t' - t), \quad \langle F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle = 0. \quad (24)$$

Here angle brackets indicate an average by use of the Wigner function in the vacuum state as probability density. $\mu_e(t' - t)$ is a correlation function that goes to zero when $|t' - t|$ is greater than the correlation time of the extraordinary beam, τ_e . Similar expressions hold for the ordinary field by an exchange of the indices e and o .

B. Cross Correlations

Taking the extraordinary [$F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_e^{(+)}(\mathbf{r}, t) \epsilon_e$] and the ordinary [$F_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) = F_o^{(+)}(\mathbf{r}, t) \epsilon_o$] fields at the center of the crystal $\mathbf{r} = \mathbf{r}' = 0$ and multiplying by t and t' , we have

$$\langle F_e^{(+)}(0, t) F_o^{(+)}(0, t') \rangle = g V \nu(t' - t), \\ \langle F_e^{(+)}(0, t) F_o^{(-)}(0, t') \rangle = \langle F_e^{(-)}(0, t) F_o^{(+)}(0, t') \rangle = 0. \quad (25)$$

Here $\nu(t' - t)$ is a function that vanishes when $|t' - t|$ is greater than the coherence time between the extraordinary and the ordinary beams. From Eq. (25) it is possible to derive all cross correlations at different points $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ by use of Eq. (16).

Finally, the quantum theory of detection in the Wigner representation gives us the following results for single- and joint-detection probabilities:

C. Single Probability

The following result is a general expression for calculating single probabilities per unit time in the Wigner representation:

$$P_1(\mathbf{r}_1, t) \propto \langle I(\mathbf{r}_1, t) - I_0(\mathbf{r}_1) \rangle, \quad (26)$$

where $I(\mathbf{r}_1, t) = |\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)|^2 = |\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)|^2$ and $I_0(\mathbf{r}_1)$ is the intensity of the vacuum field at the position of the detector.

D. Joint Probability

It can be proved that in PDC experiments

$$P_{12}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) \propto \langle [I(\mathbf{r}_1, t) - I_0(\mathbf{r}_1)] \times [I(\mathbf{r}_2, t + \tau) - I_0(\mathbf{r}_2)] \rangle. \quad (27)$$

By taking into account that the Wigner fields amplitudes are Gaussian processes, and neglecting fourth-order terms in g , we have³

$$P_{ab}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) \propto \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |\langle F_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) \times F_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle|^2, \quad (28)$$

where λ and λ' are polarization indices.

3. TESTS OF BELL'S INEQUALITIES BY USE OF POLARIZATION CORRELATION

Most experiments to test Bell's inequalities with nonlinear crystals performed thus far have used type I PDC in which the two correlated beams have the same polarization. In Refs. 1–3 experiments of this kind were analyzed in the Wigner function formalism. However, more recent experiments that use type II phase matching provide a more direct way to generate entangled-photon states. Type II experiments are themselves of two types. In the first, that is, collinear type II PDC, the crystal is oriented so that the ordinary and the extraordinary radiation cones are mutually tangent in the direction of the pumping beam. To date nearly all type II experiments have used collinear phase matching.⁸ On the other hand,⁹ in noncollinear type II phase matching the two cones intersect along two directions, and this gives rise to an entangled state in the polarization (see Fig. 2). It has been claimed that such a source produces true entangled states capable of violating Bell's inequalities.

The experimental arrangement is shown in Fig. 3. The two beams 1 and 2, in which the ordinary and the extraordinary cones intersect, are selected and sent to two polarizers, P_1 and P_2 , oriented at angles ϕ_1 and ϕ_2 with respect to the polarization of the extraordinary ray. Co-

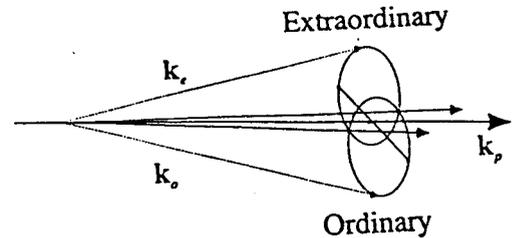


Fig. 2. Polarization entanglement in noncollinear type II downconversion.

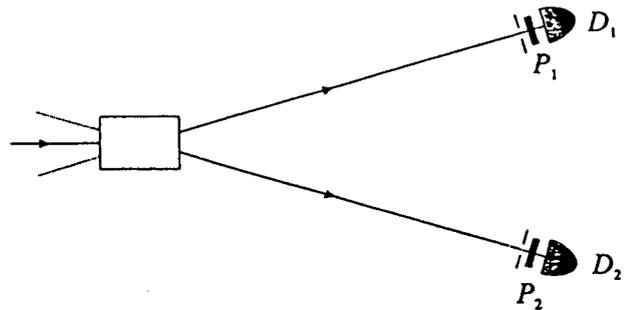


Fig. 3. Tests of Bell's inequalities by use of noncollinear type II downconversion.

incidence rates were measured as functions of angles ϕ_1 and ϕ_2 . In Ref. 9 additional optical devices, that is, half- and quarter-wave plates, were used to produce four different Bell states, but we confine our analysis to just one of these states, namely, the one that uses no additional devices.

Let us see how the entangled state is represented in the Wigner formalism. The two beams, coming out of the crystal along the directions at which the ordinary and the extraordinary cones intersect, are given by

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{0}, t) = F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{i} + F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{0}, t) = F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{i}' + F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t)\mathbf{j}', \quad (29)$$

where \mathbf{i} , \mathbf{i}' represent the polarizations of the extraordinary beams and \mathbf{j} , \mathbf{j}' the polarizations of the ordinary beams. The essential point is that the extraordinary component, $F_e^{(+)}$, of the first ray and the ordinary component, $F_o^{(+)}$, of the second ray are conjugated, and therefore correlated. Similarly, $F_o^{(+)}$ and $F_e^{(+)}$ are correlated, but $F_e^{(+)}(F_o^{(+)})$ is uncorrelated to $F_e^{(+)}(F_o^{(+)})$.

When a polarizer oriented at angle ϕ_1 to the horizontal is placed in front of detector D_1 , the field at D_1 (placed at \mathbf{r}_1) at time t is

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) &= [\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) \cdot (\cos \phi_1 \mathbf{i} + \sin \phi_1 \mathbf{j})] \\ &\quad \times (\cos \phi_1 \mathbf{i} + \sin \phi_1 \mathbf{j}) \\ &= \exp[i\omega(d/c)] [F_e^{(+)}(\mathbf{0}, t - d/c) \cos \phi_1 + F_o^{(+)} \\ &\quad \times (\mathbf{0}, t - d/c) \sin \phi_1] (\cos \phi_1 \mathbf{i} + \sin \phi_1 \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (30)$$

Here we recall that the action of a polarizer is to project the electric-field vector on the polarization direction.

In the same way, we write for the field at detector D_2 (placed at \mathbf{r}_2) at time $t + \tau$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) &= [\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r}_2, t + \tau) \\
&\quad \cdot (\cos \phi_2 \mathbf{i}' + \sin \phi_2 \mathbf{j}')] \\
&\quad \times (\cos \phi_2 \mathbf{i}' + \sin \phi_2 \mathbf{j}') \\
&= \exp[i\omega(d/c)] [F_e^{(+)} \\
&\quad \times (\mathbf{0}, t + \tau - d/c) \cos \phi_2 \\
&\quad + F_o^{(+)}(\mathbf{0}, t + \tau - d/c) \sin \phi_2] \\
&\quad \times (\cos \phi_2 \mathbf{i}' + \sin \phi_2 \mathbf{j}'). \quad (31)
\end{aligned}$$

To calculate the joint probability we combine relations (28), (30), and (31) and take into account the correlation properties of the fields given by Eqs. (24) and (25). With some easy algebra and an integration of $P_{12}(\tau)$ over the detection window, we obtain the coincidence probability

$$P_{12} = K \sin^2(\phi_2 + \phi_1), \quad (32)$$

with K being a constant. This expression is similar to the one obtained in Ref. 9 and corresponds to 100% contrast. This type of correlation is usually thought to violate a Bell inequality (but see Section 5). In the actual experiment a violation of the inequality by 100 standard deviations is reported.

4. DETECTION PROBLEM IN THE WIGNER REPRESENTATION

The detection probability in quantum optics is usually written in terms of the normally ordered expression

$$P \propto \int_0^{\Delta t} \langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle dt, \quad (33)$$

where $\hat{E}^{(+)}(t)$ is the Heisenberg operator of the electric field at the detector, $\hat{E}^{(-)}(t)$ is its Hermitian conjugate, and Δt is the detection time window. For simplicity we consider a point detector and therefore ignore the standard volume integral in relation (33).

When we pass to the Wigner representation, the normally ordered expression should be written in terms of a symmetrically ordered expression minus a commutator. Then we may replace [see relation (26)] the Heisenberg operators with random wave amplitudes and, after some rather trivial algebra, we get

$$P \propto \int_0^{\Delta t} \langle I(t) - I_0 \rangle dt, \quad (34)$$

where $I(t) = |E(t)|^2$ is the intensity of the field arriving at the detector and I_0 is a constant corresponding to the average intensity of the zero point, i.e., the intensity that would arrive at the detector if all light sources, such as lasers, were switched off.

If the Wigner function is positive definite, $I(t)$ may be interpreted as a stochastic process, which makes possible a wavelike interpretation of the propagation of light. This is the case in all experiments involving parametric downconversion. However, there remains a problem for a wavelike interpretation of the detection process, because $I(t) - I_0$ is not positive definite. This means we cannot assume that $I(t) - I_0$ is proportional to a detec-

tion probability. Nevertheless, it is easy to show that the average $\langle I(t) - I_0 \rangle$ is nonnegative definite. Now we consider the usual case in which $I(t)$ is a stationary stochastic process. It then follows (see Ref. 10, p. 49) that it is ergodic. We could consider substituting time averages for ensemble averages, thereby obtaining

$$P \propto \langle I(t) - I_0 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [I(t) - I_0] dt. \quad (35)$$

This shows that, for every member of the ensemble of stochastic wave amplitudes (except for a subensemble of zero measure), the time-averaged photodetection probability precisely equals the ensemble-averaged one $\langle I(t) - I_0 \rangle$.

In practice we do not have a time average but something that is almost equivalent, namely, an integration over the detection window Δt . A typical detection window lasts more than one nanosecond, so that the dimensionless quantity $\omega \Delta t$, where ω is the frequency of visible light, is of the order of 10^7 . It is true that taking the limit $T \rightarrow \infty$ is not the same as taking $T \approx 10^7$ (in dimensionless units), but the difference must be small. Because the right-hand side of Eq. (35) is nonnegative definite, the finite-time average

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [I(t) - I_0] dt \quad (36)$$

takes negative values only with a small probability. Now let us modify the standard detection probability of relation (34) so that

$$P \propto \left\{ \int_0^{\Delta t} [I(t) - I_0] dt \right\}_+, \quad (37)$$

where the notation $\{ \}_+$ indicates that we replace the contents of the brackets with zero if their value is negative. Then relation (37) will predict rather more photocounts than the standard quantum detection theory, but it does not seem unreasonable to assume that these additional counts correspond to a part of the dark rate at the detector. As a matter of fact, the quantum theory of detection, leading to relation (33), involves first-order perturbation theory. Therefore we may assume that quantum theory also predicts some dark background in photodetectors when higher-order processes are taken into account, because the detector may be activated by vacuum fluctuations. A detailed study of such a background would have to enter fully into the electronic band structure of the photodetector material¹¹; a treatment based on the photoelectric effect for single atoms is clearly inadequate.

5. DISCUSSION

In the preceding sections we have outlined a theory of both the propagation and the detection of light that is consistently local realist in the sense defined, for example, by Clauser and Shimony.¹² In fact, Eq. (27) has the standard form introduced by Bell in his definition of local hidden variables models, in particular,

$$\begin{aligned}
 P_{12} &= \langle P_1(\lambda, \phi_1)P_2(\lambda, \phi_2) \rangle \\
 &= \int \rho(\lambda)P_1(\lambda, \phi_1)P_2(\lambda, \phi_2)d\lambda, \quad (38)
 \end{aligned}$$

where the amplitudes $\alpha_{j,k}$ involved in $I(\mathbf{r}, t)$, by means of $E(\mathbf{r}, t)$ [see Eq. (6) and the line following relation (26)] play the role of the hidden variables λ . On the other hand, our theory is also in almost perfect one-to-one correspondence with the standard Hilbert-space theory, the only difference being the modification in the detection probability that we proposed in relation (37). Apart from a small dark rate, which is, in any case, a feature of all real experimental situations, this theory gives singles and coincidence rates that agree with the standard theory. Therefore we have here an apparent contradiction. On the one hand, a Bell inequality is violated according to Ref. 9, which implies that no local hidden-variables model exists for the experiment. On the other hand, we have an explicit local hidden-variables model, namely, the quantum model in the Wigner representation with the modification of relation (37). What is the resolution of this apparent contradiction? The explanation is that the Bell inequality, which is actually violated in the experiment, is not a genuine Bell inequality derived from the assumptions of realism and locality alone (such as inequality (4) of Clauser and Horne),¹³ but a homogeneous inequality involving additional assumptions (such as inequality (11) of Clauser and Horne). One of these assumptions, rather than local realism, is what is violated in our local-hidden-variable (LHV) model.

We have been insisting for many years now¹⁴ that these auxiliary assumptions are not only unreasonably restrictive but also incorrect. We believe that the results reported in the present paper vindicate our point of view.

As is well known, a genuine Bell inequality cannot be tested in experiments with visible light, because of the low efficiency of the detectors presently available. The conventional wisdom is that this is just a technical problem that will be solved in the near future. However, the existence of an LHV model for the quoted experiment,⁹ which does not rest upon the low efficiency of the detectors but on the existence of some unavoidable amount of dark rate [see relation (37)], shows that any future reliable test of LHV theories should involve detectors that have both a high efficiency and a low dark rate.

Now we turn to the interpretation of entanglement in the Wigner representation. We saw [see Eqs. (25) and (29)] that photon entanglement is merely correlation between two light beams. What, then, is the difference between classical correlation and entanglement? In quantum optics, that which is usually called classical is light that has a (Glauber) P representation that is positive definite, and classical correlation usually means a correlation between the P -distribution functions of the two light beams. Here we see that local realist theories is a class much bigger than standard classical theories. In

particular, the quantum model following from the Wigner representation interpreted as a (positive) probability distribution allows for correlations much stronger than classical correlations. As in our functions $F_e^{(-)}$ and $F_o^{(+)}$ of Eq. (25) local realist theories involve correlation of the zero-point part of the electromagnetic field, and this is entanglement.

Of course, the obvious objection to these arguments is that they cannot be extended to cases in which the Wigner function is negative. Elsewhere we have conjectured that this never happens in actual experiments. We refer the reader to our publication⁵ for details.

ACKNOWLEDGMENT

We acknowledge the financial support of CAICYT project PB-95-0594 (Spain).

REFERENCES

1. A. Casado, T. W. Marshall, and E. Santos, *J. Opt. Soc. Am. B* **14**, 494–502 (1997).
2. A. Casado, A. Fernández-Rueda, T. W. Marshall, R. Risco-Delgado, and E. Santos, *Phys. Rev. A* **55**, 3879 (1997).
3. A. Casado, A. Fernández-Rueda, T. W. Marshall, R. Risco-Delgado, and E. Santos, Dispersion Cancellation and Quantum Eraser Experiments Analyzed in the Wigner Function Formalism, *Phys. Rev. A* Vol., xxxx–xxxx (1998).
4. L. de la Peña and A. M. Cetto, *The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics* (Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1996).
5. T. W. Marshall and E. Santos, in *The Present Status of the Quantum Theory of Light: Proceedings of a Symposium in Honour of Jean-Pierre Vigié*, S. Jeffers, Names, eds. (Kluwer Academic, Dordrecht The Netherlands, 1997), pp. 67–77.
6. A. V. Belinsky and D. N. Klyshko, *Phys. Lett. A* **166**, 303 (1992).
7. M. H. Rubin, D. N. Klyshko, Y. H. Shih, and A. V. Sergienko, *Phys. Rev. A* **50**, 5122–5133 (1994).
8. Y. H. Shih and A. V. Sergienko, *Phys. Lett. A* **186**, 29–34 (1994); Y. H. Shih, A. V. Sergienko, M. H. Rubin, T. E. Kiess, and C. O. Alley, *Phys. Rev. A* **50**, 23–50 (1994); Y. H. Shih and A. V. Sergienko, *Phys. Rev. A* **50**, 2564–2568 (1994); *Phys. Lett. A* **191**, 201–207 (1994).
9. P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337–4341 (1995).
10. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge U. Press, Cambridge, UK, 1995).
11. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley, New York, 1991), Chapter 17; G. H. Rieke, *Detection of Light: from the Ultraviolet to the Submillimeter* (Cambridge U. Press, Cambridge, UK, 1994).
12. J. F. Clauser and A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1881–1927 (1978).
13. J. F. Clauser and M. A. Horne, *Phys. Rev. D* **10**, 526–535 (1974).
14. T. W. Marshall and E. Santos, *Found. Phys.* **18**, 185–201 (1988); *Phys. Rev. A* **39**, 6271–6283 (1989); M. Ferrero, T. W. Marshall, and E. Santos, *Am. J. Phys.* **58**, 683–688 (1990); T. W. Marshall, *Found. Phys.* **21**, 209–219 (1991); E. Santos, *Phys. Rev. A* **46**, 3646–3656 (1992).