

1.50 T.2
17

TESIS DOCTORAL

SINTESIS DINAMICA DE PERFILES
DE LEVA MEDIANTE SERIES
TRIGONOMETRICAS FINITAS

AUTOR

JOSE MARTINEZ GARCIA

JUNIO 1986

PRESENTADA EN LA E.T.S.I.I. DE LA UNIVERSIDAD
DE SEVILLA PARA LA OBTENCION DEL TITULO DE
DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

AGRADECIMIENTOS

En la elaboración de esta tesis he estado rodeado de muy buenos amigos, que me han ayudado de diversas formas. En particular quiero expresar mi agradecimiento al profesor Javier García-Lomas Jung, director de la tesis, por su generosa colaboración. Las numerosas discusiones con Jaime Domínguez Abascal han sido fundamentales. También quiero agradecer la ayuda, de muy diversa índole, prestada por mis amigos y compañeros, Marcelo Rodríguez Danta y Juan José Gil Martínez. Por último, pero no menos importante, la colaboración de Lola ha rebasado los ámbitos de la esfera puramente profesional.

No quiero desaprovechar esta ocasión para dejar por escrito constancia de una inmensa deuda de gratitud para con mi mujer y mi padre.

INDICE

1. INTRODUCCION	
1.1 Introducci3n.....	2
1.2 Algunas definiciones y nomenclatura.....	3
1.3 Revisi3n bibliografica.....	5
1.3.1 Estudios experimentales.....	5
1.3.2 Analisis.....	7
1.3.3 Sintesis.....	10
1.4 Motivaci3n y objetivos.....	14
1.4.1 Analisis cr3tico.....	15
1.4.2 Objetivos.....	22
2. EL MODELO DINAMICO	
2.1 Introducci3n.....	25
2.2 Modelos simples.....	26
2.2.1 Barra continua con una masa concentrada en su extremo.....	26
2.2.2 Sistema mixto.....	48
2.3 Modelo complejo.....	71
3. SINTESIS MEDIANTE SERIES TRIGONOMETRICAS FINITAS	
3.1 Introducci3n.....	84
3.2 Obtenci3n de la respuesta para un perfil de leva formado por una serie trigonometrica finita.....	86
3.3 El problema de la optimizaci3n.....	89
3.4 Optimizaci3n lineal.....	90
3.4.1 Error cuadr3tico discreto.....	90
3.4.2 Error cuadr3tico integral.....	94
3.5 Optimizaci3n no lineal.....	99
3.5.1 Angulo de presi3n.....	100
3.5.2 Tensiones de contacto.....	102
3.6 Precarga optima.....	105
3.7 Radio del rodillo optimo.....	107
3.7.1 Variaci3n de σ^2 con la frecuencia.....	110
3.7.2 Algoritmo utilizado.....	112

4. RESULTADOS	
4.1. Introducción	117
4.2. Minimización del error	117
4.3. Angulo de presión	138
4.4. Optimización de la tensión de contacto	145
4.5. Radio del rodillo óptimo	153
5. CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO	
5.1. Conclusiones	158
5.2. Desarrollo futuro	160
BIBLIOGRAFIA	164
APENDICE A	179
APENDICE B	199
APENDICE C	211

CAPITULO 1: INTRODUCCION

1.1. INTRODUCCION

Uno de los objetivos comunes a una gran variedad de mecanismos consiste en el requerimiento de que algún elemento describa un movimiento predeterminado.

Para pequeñas velocidades de funcionamiento, normalmente es válido basar el diseño de las hipótesis de sólido rígido y fuerzas estáticamente aplicadas. Sin embargo, a medida que las velocidades aumentan las fuerzas elásticas y de inercia llegan a ser de ordenes de magnitud similares, lo cual significa que en tales mecanismos los fenómenos vibratorios no serán despreciables. Dichas vibraciones no sólo distorsionarán el movimiento deseado, sino que inducirán un desgaste y ruidos excesivos y, posiblemente, un fallo prematuro del mecanismo. Estas son las razones por las que en la actualidad se está dedicando un gran esfuerzo al desarrollo de métodos de diseño de máquinas que contemplan simultáneamente las características cinemáticas, elásticas y dinámicas de la máquina.

El trabajo aquí realizado pretende ser una aportación a este esfuerzo conjunto. Ahora bien, este cometido es de tal magnitud que, necesariamente, el campo de aplicación ha tenido que ser reducido a una clase particular de mecanismos: los mecanismos de leva. La definición más general de leva es la de un elemento mecánico transmisor de un movimiento deseado a otro elemento mecánico por contacto directo. La propiedad más importante -y una de las razones por las que este trabajo se ha restringido a tal clase de mecanismos- de los mecanismos de leva es la gran libertad de elección de movimiento transmisor que confiere al diseñador.

No obstante la restricción anterior, debida, en parte a la necesidad de cuantificar los resultados, la filosofía de diseño de los métodos que se van a desarrollar posee un

espectro de aplicación bastante más amplio.

1.2. ALGUNAS DEFINICIONES Y NOMENCLATURA

Dentro del campo de los mecanismos de leva todavía existe una amplísima variedad de configuraciones posibles [102 49, 21, 6]. Las diferencias entre unas configuraciones y otras no afecta a la metodología que se va a desarrollar, por lo que, en lo que sigue, el estudio se va a restringir a los mecanismos de leva de disco con movimiento traslacional del seguidor. Aunque tales mecanismos pueden estar constituidos por bastantes elementos, todos los constituyentes básicos se encuentran presentes en la representación esquemática de la figura 1.1. El muelle de precarga se introduce para asegurar el contacto

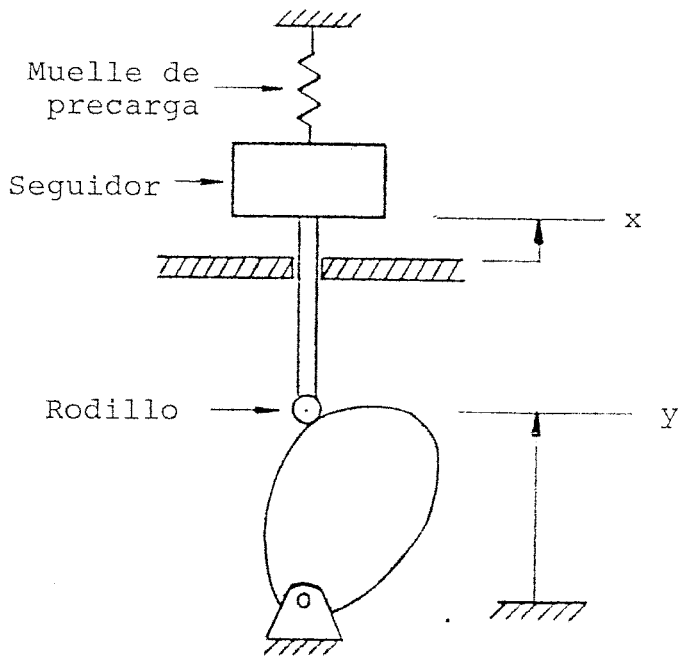
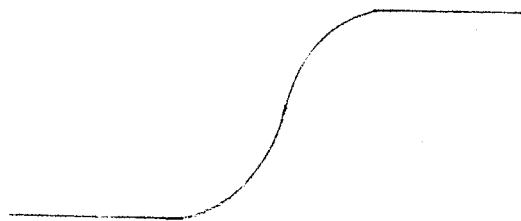


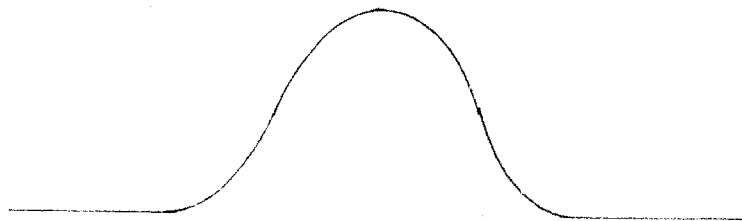
Figura 1.1. Esquema de mecanismo de leva de disco.

entre la leva y el rodillo del seguidor. Y es el movimiento impuesto por la leva al seguidor, que en adelante denominaremos movimiento de entrada o movimiento excitador. X es el movimiento de salida o respuesta.

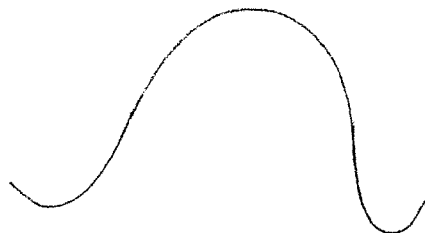
En muchas aplicaciones el seguidor debe permanecer en reposo en ciertas posiciones durante ciertos intervalos de tiempo, de modo que el movimiento completo se puede describir como la sucesión de "segmentos" de descanso (D) intercalados con segmentos o periodos de movimiento de subida (S) o



Descanso-Subida-Descanso (D-S-D)



Descanso-Subida-Bajada-Descanso (D-S-B-D)



Subida-Bajada (S-B)

Figura 1.2.

bajada (B). Aunque el movimiento puede ser mucho más general, es una costumbre ancestral en el campo de la dinámica de levas el describirlo a través de tales "segmentos". En la figura 1.2 se representan las 3 combinaciones básicas. Existe una gran cantidad de segmentos $|101, 110, 31|$ que han sido frecuentemente utilizados en mecanismos de velocidades bajas y medias.

En la literatura aparecen frecuentemente las expresiones "vibraciones residuales" y "vibraciones relativas". Es importante distinguir claramente estos dos conceptos. El primero se refiere a la diferencia entre la respuesta real y la respuesta deseada, mientras que el segundo se refiere a la diferencia entre la respuesta real y la que se obtendría si la leva girase con velocidad nula (respuesta estática).

1.3. REVISION BIBLIOGRAFICA

1.3.1. Estudios experimentales

Los primeros estudios datan de comienzos de los años 30. A medida que los regímenes de los motores de combustión interna aumentaron se produjeron algunos fallos en los árboles de levas que no se podían explicar por los procedimientos convencionales. El énfasis se puso en el muelle de precarga $|72, 35, 40, 56|$ por ejercer una fuerza insuficiente para mantener en contacto los distintos elementos del mecanismo durante el periodo de desaceleración del ciclo de la leva.

Mitchell $|86|$, mediante un sencillo dispositivo comparó las vibraciones inducidas en la respuesta de tres perfiles de leva (parabólico, cicloidal y armónico simple), verificando las conclusiones que Hrones $|55|$ había obtenido sobre un modelo de un grado de libertad. Dichas conclusiones que los perfiles parabólicos y armónico simple, que tienen grandes

discontinuidades en sus aceleraciones, son más propensos a excitar vibraciones que el cicloidal, que tiene una aceleración continua- han conducido a la siguiente regla: Los perfiles con valores altos de la sobreaceleración tienen un mal comportamiento vibracional. Sin embargo, es obvio que tales observaciones, basadas en un número finito de casos, no prueban que todo perfil con una sobreaceleración elevada posea un comportamiento vibracional pobre.

La mayor parte de los estudios posteriores se han encaminado a comprobar la validez de los modelos matemáticos o la de las síntesis basadas en ellos. Así Thoren, Engeman y Stoddart [111] comprobaron la mejora cualitativa en el comportamiento dinámico del tren de levas de dos motores de combustión interna al sustituir la leva de "stock" por una leva "polydyne". Turkish [114] estudió el mal funcionamiento de los ajustadores hidráulicos de huelgo en un motor de automóvil. Utilizando un modelo de un grado de libertad (g.d.l.) sin amortiguamiento concluyó que el problema se debía a una fuerza insuficiente en el muelle de precarga. Utilizando un muelle con una frecuencia natural mayor, el problema desapareció. Barkan [10] resaltó la importancia del amortiguamiento para correlacionar la altura del rebote de válvula, medida en un motor de combustión, con la predicha por un modelo de un g.d.l.

Aunque, fundamentalmente, las observaciones se han confrontado con modelos de 1 g.d.l., también existen algunos estudios con modelos de mayor número de g.d.l. Jonhson [60] investigó el tren de válvulas de un motor diesel mediante un modelo de 2 g.d.l., y Subramanian [107] utilizó un modelo de 3 g.d.l. Recientemente Pisano [90-94] ha publicado gran cantidad de información experimental referente al árbol de levas de un motor de automóvil, concluyendo que los modelos de 1 g.d.l., normalmente empleados en dichos mecanismos sólo son

válidos para velocidades pequeñas, siendo necesario un modelo de parámetros distribuidos (representación del muelle de pre-carga por una barra continua) para predecir correctamente el comportamiento patológico real a altas velocidades. En este caso el amortiguamiento sigue siendo un parámetro crítico.

1.3.2. Análisis

El análisis teórico de un mecanismo de leva se realiza mediante un modelo matemático. El modelo más simple utilizado en este campo es el de sólido rígido, tal como el de las figuras 1.3 y 1.4. Este modelo ha sido empleado para predecir el fenómeno de separación o pérdida de contacto entre leva y seguidor [9, 11, 50]. Basados en dicho modelo Kloomok y Muffley [64-66] analizaron varios parámetros (ángulos de presión, radios de curvatura y cargas dinámicas), desarrollando una serie de consideraciones respecto al diseño. El análisis de la curvatura también ha sido considerado por Baxter [12], Holowenko y Hall [54], Hirschhorn [53], Sermon y Liniecki

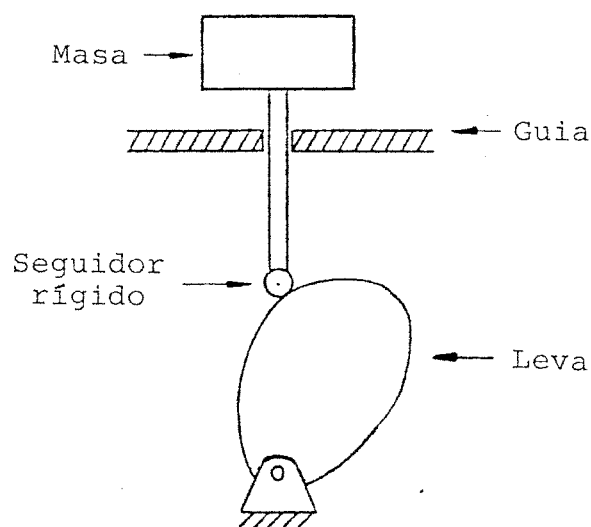


Figura 1.3.

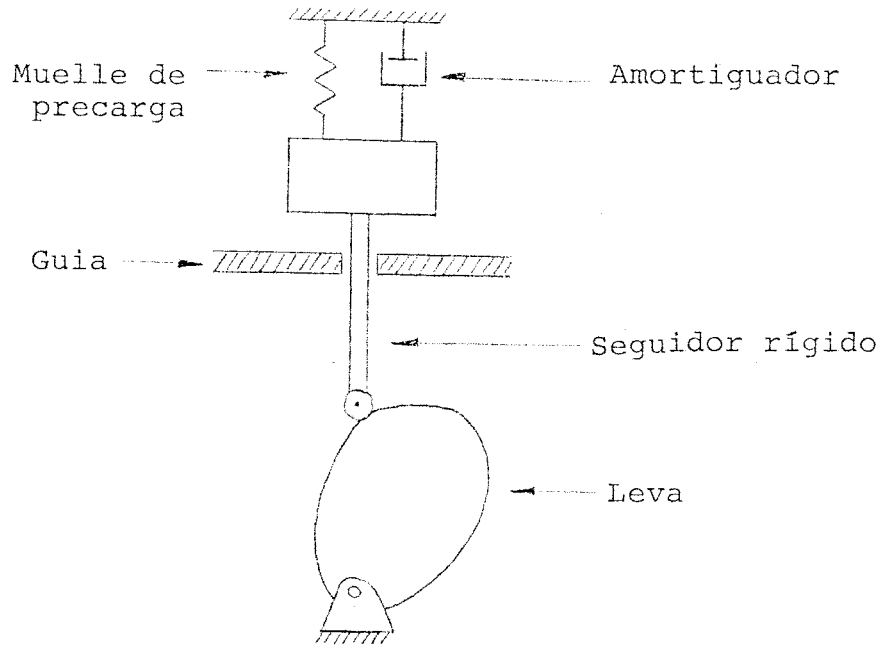


Figura 1.4.

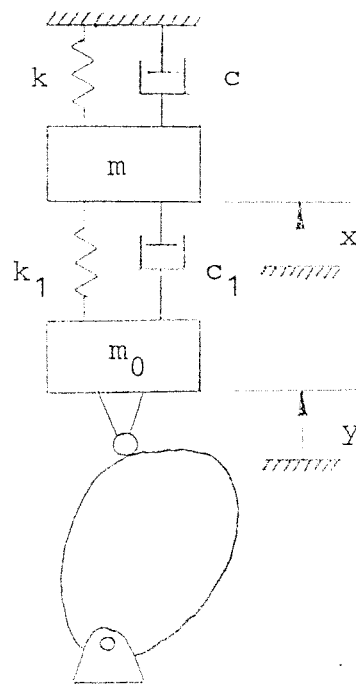


Figura 1.5.

[103] Speckhart [105] y Koumans [69]. Aunque para el estudio de mecanismos de alta velocidad se emplean modelos más sofisticados, el del sólido rígido se ha seguido utilizando hasta la actualidad [*30].

El modelo más sencillo capaz de reproducir un verdadero comportamiento dinámico es el de 1 g.d.l., utilizado por primera vez en este campo por Hrones [104]. En la figura 1.5 se representa este modelo que, junto con ligeras variantes (exclusión del amortiguamiento, o del muelle de precarga, o de la masa en contacto con la leva), es, con diferencia, el más ampliamente utilizado en la síntesis dinámica de levas. Hart [51], Young [124] y Méndez-Adriani [82] lo han utilizado para predecir la separación leva-seguidor. Neklutin [37], Mercer y Hollowenko [83] y Chen y Polvanich [27] calcularon los espectros primarios y de vibración residual para una gran variedad de excitaciones, basándose en dicho modelo.

Tesar y Matthew [110] y Young [124] realizaron un análisis de sensibilidad de los parámetros que caracterizan al modelo. Chen [26] y Chen y Polvanich [28] estudiaron el mismo modelo, pero con un muelle y amortiguador no lineales. Wiederrich [120] ha realizado el estudio más completo respecto al campo de validez del modelo de 1 g.d.l. en la dinámica de levas. Las conclusiones que deduce han sido usadas por otros investigadores [32, 123] para justificar la adopción de un modelo de 1 g.d.l. No obstante, en el capítulo 2 de este trabajo se muestra que las conclusiones de Wiederrich se basan en ciertas hipótesis simplificativas que no encuentran justificación en muchos mecanismos de levas.

Estudios cinemáticos sobre la influencia de los errores de mecanizado y dimensionales y de la variación de la velocidad de giro de la leva han sido realizados por Rothbart [101], Giordana [46, 47], Dhande [37] y Tesar [110].

La influencia sobre las tensiones de contacto de la falta de paralelismo entre los ejes de la leva y del rodillo se estudia en [13].

Eiss [43] ha estudiado los espectros de vibración residual para varios impulsos aceleracionales en un modelo de 2 g.d.l.

Utilizando procedimientos de simulación análoga o digital se han estudiado efectos tales como las características del par motor de entrada, elasticidad del eje de la leva, errores de mecanizado y huelgos, conduciendo a modelos dinámicos no lineales de complejidad variable (desde 1 hasta 11 g.d.l.). Bloom y Radcliffe [17] estudiaron el efecto de la rigidez torsional del eje de la leva utilizando un modelo de 1 g.d.l. Freudenstein [45] simuló este mismo efecto junto con las características del par motor de entrada utilizando también un modelo de 1 g.d.l. Koster [67] estudia extensamente todos los efectos mencionados anteriormente, trabajando con modelos de complejidad creciente (1 a 4 g.d.l.). En este trabajo se enfatizan los efectos nocivos de la elasticidad del eje de la leva y de los huelgos, aportando unas gráficas sumamente útiles. Ardayfio [2] ha continuado este trabajo, incluyendo el efecto del amortiguamiento. Kim [62] ha realizado una simulación con un modelo de 11 g.d.l. Chang [22] ha utilizado un modelo de 6 g.d.l. basado en el de Kim para estudiar el efecto de la excentricidad del centro de masas de la leva y el efecto de las vibraciones laterales del seguidor.

1.3.3. Síntesis

Para mecanismos de baja velocidad los perfiles de leva se conformaban por la unión de varios segmentos, cada uno de los cuales se seleccionaba de entre varios perfiles básicos y geoméricamente sencillos, como el parabólico o el

armónico simple. Cuando los efectos dinámicos se hicieron importantes surgieron nuevos perfiles para satisfacer diversos aspectos más o menos relacionados con la dinámica, tales como el pico de aceleración [87, 83, 52, 1], el pico de velocidad [88], o el par máximo [88, 63]. Una recopilación de dichos perfiles se puede encontrar en los textos de Rothbart [101], Tesar [110] o Chen [31].

Puesto que las consideraciones dinámicas enfatizaban el perfil de aceleración (control de la aceleración máxima y de la sobreaceleración) Johnson [58] propuso un método de síntesis del perfil de leva a partir de un perfil de aceleración deseado, mediante un método de diferencias finitas. Posteriormente el método se ha desarrollado hacia una mayor sistematización [23, 24, 25, 38].

Los métodos de síntesis anteriores son cinemáticos. Las características dinámicas son introducidas ad hoc o por procedimientos indirectos. En realidad el primer método que, con pleno derecho, puede ser denominado de síntesis dinámica fue el de Polydyne, propuesto por Dudley [42] y desarrollado por Sttodart [111, 106]. En la actualidad, la mayoría de los métodos de síntesis dinámica se pueden considerar como versiones más o menos sofisticadas de el Polydyne. En este método, la síntesis se consigue por "segmentos". Para un determinado segmento se elige la respuesta en forma de polinomio, cuyos coeficientes se determinan imponiendo los valores de la respuesta y sus derivadas en los extremos del segmento. Una vez obtenido el polinomio de salida se sustituye en las ecuaciones del movimiento del modelo (casi siempre un modelo de 1 g.d.l.) obteniéndose directamente el movimiento de entrada y, por tanto, para una determinada velocidad de funcionamiento, el perfil de la leva. De aquí se deduce la ventaja principal del método Polydyne: A la velocidad de diseño la leva reproduce el movimiento deseado sin ninguna distorsión. En adelante,

las levas que cumplan este requisito las denominaremos "sintonizadas".

Aunque el método Polydyne representa un avance fundamental respecto a los métodos anteriores, adolece de una serie de defectos. En primer lugar, las condiciones de contorno impuestas a la respuesta no tienen una justificación teórica, y en algunas situaciones reales no se pueden verificar. La leva sólo está sintonizada a la velocidad de diseño, ocurriendo que el gradiente de la amplitud de vibración residual respecto a la velocidad de funcionamiento suele ser muy elevado. Además no se ejerce ningún control sobre parámetros tales como la fuerza de precarga, ángulo de presión o tensiones de contacto, siendo estos parámetros tan importantes como la precisión del movimiento.

Muchos de los esfuerzos dedicados posteriormente al método Polydyne tenían como finalidad el saneamiento de alguno de los errores apuntados. Johnson [57] ha extendido el método a modelos de N g.d.l. Utilizando un modelo de 3 g.d.l. tuvo que imponer condiciones hasta las derivadas de orden 9 de la respuesta. En general, para un modelo de N g.d.l. se deben especificar las derivadas de la respuesta hasta el orden $2N + K$, para controlar el movimiento de la leva y sus derivadas hasta el orden K (lo cual es necesario para enlazar con continuidad los diversos segmentos de la leva) [110]. Matthew [79] dedujo los coeficientes del polinomio de salida no sólo imponiendo condiciones en los extremos del segmento, sino también en algunos puntos internos. Kanzaki e Itao [61] sustituyeron algunas de las condiciones de extremo por la imposición de que la leva estuviera sintonizada a varias velocidades de funcionamiento. De esta forma, si las velocidades están lo suficientemente próximas se consiguen controlar las vibraciones residuales. Kwakernaak y Smit [71] plantearon el problema de la síntesis como un problema de optimización matemática,

minimizando las vibraciones residuales sobre una gama de velocidades de funcionamiento. Las condiciones en los extremos se limitaron al desplazamiento, velocidad y aceleración, aunque se introdujo un control global sobre la velocidad, la aceleración y la sobreaceleración. La respuesta no se representó por un polinomio, sino por una función con sobreaceleración constante a trozos sobre N segmentos. Berzak [14, 15, 16] caracterizó la familia de polinomios que satisfacen ciertas condiciones de contorno en función de una serie de parámetros independientes. Encontró ciertas características cinemáticas inherentes a la estructura de la "familia" y expresó la síntesis como la optimización, en función de los parámetros anteriores, de varios coeficientes de "performance" que caracterizan determinadas propiedades cinemáticas o dinámicas (pico de velocidad, aceleración, etc.).

El trabajo de Chew [32, 33] representa un avance significativo. Chew argumenta que un buen diseño no sólo debe producir una buena respuesta, sino también un buen estado tensional interno. Además, investigaciones anteriores [71, 83, 120, 14] sugerían que la optimización exclusiva de una de estas características sería en detrimento de la otra. Por tanto, plantea el problema de la síntesis como uno de optimización conjunta de la energía vibracional relativa -arguye que controlando esta magnitud, asociada a la vibración relativa, se controlarán las vibraciones residuales para velocidades distintas de la de diseño- y de las tensiones de contacto leva-seguidor. La introducción de estas últimas hace el problema no lineal, utilizando la teoría del control óptimo para su resolución. Recientemente la teoría del control óptimo se ha extendido a la minimización de vibraciones residuales en mecanismos actuados por un servomotor [123, 80].

Wiederrich [120] ha modificado el método Polydyne, sustituyendo el polinomio algebraico por uno trigonométrico,

minimizando el pico de aceleración. También ha empleado una respuesta trigonométrica en otro método, en el que no impone restricciones de igualdad en los extremos del segmento, sino que minimiza el error o vibración residual.

Polinomios trigonométricos finitos han sido utilizados en la síntesis dinámica de levas [119, 48, 44, 120] con una filosofía de diseño distinta de la del Polydyne. Estos métodos son comentados en el apartado siguiente.

1.4. MOTIVACION Y OBJETIVOS

Decir que la motivación última de esta tesis (o de cualquier otra) es la consecución de "un trabajo original de investigación" (en el campo de la síntesis dinámica de levas en este caso) es una tautología porque la expresión entre comillas es la definición oficial de tesis doctoral. Pero la información que aporta no es redundante, porque la condición de originalidad encauza (o motiva) la dirección del trabajo. De aquí se sigue que la labor previa del doctorando debe ser el estudio crítico de la literatura pertinente al tema de la tesis (síntesis dinámica de levas) y la búsqueda de métodos o hipótesis, defectuosos o incompletos a su juicio, de los que se sienta capaz de modificar o sustituir por otros nuevos y mejores, dando lugar así a un trabajo de investigación original (la tesis).

Por tanto, en el punto siguiente se van a exponer aquellos aspectos de la literatura consultada (apartado anterior) en el campo de la síntesis dinámica que, en opinión del doctorando, son defectuosos, exponiendo, a la vez, las razones por las que se mantiene esta opinión.

1.4.1. Análisis crítico

Dos son, principalmente, los aspectos que se van a examinar: El modelo matemático y los métodos de síntesis.

Modelos matemáticos

Las confrontaciones experimentales se han referido a diversos aspectos más o menos específicos, no dando, por tanto, un pronunciamiento definitivo. El estudio más reciente (y completo) [90] apunta el carácter no predictivo del modelo clásico de 1 g.d.l., y la necesidad de aproximar el muelle de precarga como un modelo con grados de libertad internos (en dicho estudio se utiliza un modelo de parámetros distribuidos).

Por otra parte, prácticamente no existen estudios teóricos sobre la validez de los modelos. El más completo [120] acota el campo de validez del modelo de 1 g.d.l. Pero respecto a este trabajo se pueden plantear dos cuestiones:

- 1 - El único parámetro que se contrasta es la respuesta. Pero parámetros tan importantes como éste son las fuerzas, que sirven para calcular el estado tensional.
- 2 - Las conclusiones se basan en unas hipótesis simplificadoras que no se cumplen en muchos sistemas de leva.

Métodos de síntesis

- La hipótesis h_1 .

Con independencia del modelo, el método Polydyne

y sus distintas variantes necesita de la hipótesis de una vibración residual nula al comienzo de cada segmento, ya sea de subida o de bajada. Partiendo de esta hipótesis (en adelante denominada h_1), las levas sintonizadas se diseñan para que la vibración residual al final del segmento sea nula. Por supuesto, si la leva no se sintoniza existirá vibración residual al final del segmento. En cualquier caso, en el mecanismo real existirá vibración residual al final del segmento, ya sea porque la velocidad real no coincide exactamente con la de diseño o/y porque el comportamiento del sistema real tampoco coincide exactamente con el modelo matemático que se utilice.

Por tanto, para que el método de diseño sea consistente con h_1 , después de cada periodo de subida o bajada debe existir un segmento de descanso, dentro del cual se amortigue la vibración residual antes del comienzo del siguiente periodo de movimiento. La utilización de h_1 no será razonable si se produce alguna de las siguientes circunstancias (que no son incompatibles):

- 1.- El amortiguamiento es suficientemente pequeño.
- 2.- El periodo de descanso es suficientemente corto.
- 3.- La velocidad de giro de la leva es suficientemente alta.

Estos problemas ya fueron señalados por Bagci [7] en 1971. Por otra parte, Rothbart, en su tratado clásico [101] propuso la sustitución de las consideraciones de síntesis basadas en términos de vibraciones transitorias por otras basadas en las vibraciones en régimen permanente cuando los periodos de descanso fuesen cortos. Koster [67] hace el siguiente comentario sobre esta opinión de Rothbart:

"This suggestion, however, should be rejected as incorrect. As stated before, steady-state vibration

will not occur, since in practice the angular velocity (w_s) of the shaft is low in relation to the natural frequency of the follower (w_e). If dwell periods are short, the phenomenon of interference from transient vibrations of preceding cam motions will occur. The initial conditions of every new cam motion are then determined by the vibrations of the preceding motions" (*).

Esta opinión de Koster se mantiene en textos modernos de dinámica de levas. Así, Chen [31] hace el siguiente comentario respecto a la sugerencia de Rothbart: "This is a misconception", (**), y a continuación hace el mismo razonamiento de Koster.

Wiederich [120] ha tratado de refutar la crítica de Bagci. Aunque concede que los métodos que sólo utilizan el concepto de vibración transitoria basados en h no sirven para predecir la respuesta, sugiere que si sirven como medio para medir la tendencia relativa a excitar vibraciones residuales de diferentes segmentos aislados de movimiento. Ahora bien, Wiederich lo que hace es dar una cota superior de la amplitud de la vibración residual en régimen permanente, en función de la misma en régimen transitorio. Es evidente que esta información es insuficiente para establecer la comparación que él propone, y aún menos para evaluar un perfil completo. Wiederich continua diciendo que, en todo caso, el concepto

(*) "No obstante, esta sugerencia debería ser eliminada por incorrecta. Como se dijo antes, las vibraciones permanentes no se producirán, porque en la práctica la velocidad angular (w_s) de la leva es baja en relación a la frecuencia natural del seguidor (w_e). Si los periodos de descanso son cortos, se producirá el fenómeno de interferencia de los transitorios de los movimientos precedentes. Entonces, las condiciones iniciales de cada nuevo movimiento están determinadas por las vibraciones de los movimientos precedentes".

(**) "Esto es un error de concepto".

de vibración residual transitoria (basado en h_1) parece ser el único criterio disponible para valorar un segmento aislado en los métodos de diseño a trozos -es decir, en los métodos que, como el Polydyne, descomponen el movimiento de la leva en varios movimientos "básicos", sintetizando aisladamente los distintos segmentos.

Parece necesario estudiar con mayor detalle esta aparente rivalidad entre vibraciones transitorias y permanentes: En un sistema mecánico lineal sometido a un movimiento excitador (definido por el perfil de la leva) periódico, el movimiento excitador se puede considerar compuesto de una serie de segmentos sucesivos. Entonces la respuesta en un instante de tiempo dado estará compuesta de la solución particular del correspondiente segmento más una vibración transitoria, correspondiente a las condiciones iniciales del segmento, que a su vez, será la respuesta al final del segmento anterior (basados en este modo de proceder existen métodos clásicos de análisis de vibraciones, como el método de la integral de Duhamel [81], donde la función excitadora se compone de una sucesión de escalones infinitesimales). Pero también se puede ver la excitación como una función periódica, por lo que la respuesta, pasado un determinado periodo desde el inicio del movimiento (que depende del amortiguamiento), será la vibración estacionaria (periódica) que dicha función provoca. En este sentido, los conceptos de vibración transitoria y permanente no son antagónicos, sino distintas interpretaciones (igualmente válidas) de un mismo fenómeno.

Aunque ambas interpretaciones son igualmente válidas su facilidad de aplicación no es la misma. En los casos en que h_1 es válida, existen métodos de diseño de implementación sencilla, como el Polydyne y sus variantes, basados en la interpretación en términos de transitorios. Ahora bien, se ha visto antes que uno de los motivos que invalida a h_1 es la

velocidad de la leva. Por tanto, aunque el método Polydyne surgió como un medio de diseñar mecanismos de leva de alta velocidad, resulta que dicha velocidad no puede ser tan alta (tan alta como para invalidar a h_1). Para mecanismos cuya velocidad invalide a h_1 , parece plausible hacer una tentativa de ensayo de un método de diseño basado en la interpretación de vibraciones permanentes.

Según Midha [84], la razón por la cual la mayoría de los métodos de diseño se basan en h_1 , es la simplicidad, afirmando a la vez, que las soluciones obtenidas por estos métodos pueden ser bastante diferentes de las obtenidas basándose en el régimen permanente.

Polinomios trigonométricos y series de Fourier

Como se señaló al final del apartado anterior los polinomios trigonométricos se han empleado en la síntesis dinámica de levas desde una perspectiva distinta de la que aporta el método Polydyne. Weber [119] ha argüido que puesto que el movimiento transmitido por la leva es periódico, puede ser desarrollado en serie de Fourier. Entonces, la respuesta en régimen permanente puede ser construida fácilmente por superposición de las respuestas de los distintos armónicos que componen el movimiento de entrada. Esta idea parece encajar perfectamente como la base del método alternativo que se ha propuesto arriba para los diseños en los que la hipótesis h_1 no es válida. Y como tal base ha sido adoptada por Wiederich [120] y, también, en el presente trabajo. Pero Weber no sigue adelante con la idea, porque dice que la mayoría de las levas están formadas por una serie de segmentos, tales como reposos y curvas de transición interconectados, y que el manejo del perfil como un todo conllevaría demasiadas constantes arbitrarias, de manera que su utilización se hace inmanejable. En la fecha en que se escribió el artículo (1960) el argumento te-

nía validez, porque el boom de los ordenadores digitales se encontraba en sus comienzos, pero hoy ya no vale.

Entonces, Weber propone una síntesis por segmentos, cada uno de los cuales se obtiene por superposición de una clase especial de polinomios trigonométricos, que él denomina semicicloïdales y que tienen la virtud de transmitir un enlace suave entre segmentos. Pero con esta transformación la metodología se ha identificado, esencialmente, con la del método Polydyne, con las mismas ventajas e inconvenientes de tal método. No obstante, en la última parte del artículo aparecen nuevas ideas. Weber observa que los armónicos más altos producen una mayor vibración transitoria, así como una mayor modificación de la respuesta permanente respecto a la excitación. Por tanto, dice, si la minimización de las componentes de alta frecuencia fuera el único criterio de diseño, no habría razón para conectar dos periodos de descanso con otro perfil que no fuera el cicloïdal, ya que sólo tiene un armónico. Pero, continúa, otro factor importante es el pico de aceleración, y el del cicloïdal excede en un 57% al del parabólico, que posee el mínimo absoluto. Entonces, propone el siguiente método de diseño: Desarrollar en serie de Fourier el movimiento parabólico y truncar la serie en determinado armónico, que dependerá del peso relativo que se le quiera dar a los dos criterios anteriores (número de armónicos \leftrightarrow pico de aceleración). Ahora bien, como las series de Fourier convergen en el sentido del error cuadrático (convergencia no uniforme), en el desarrollo del movimiento parabólico se produce el fenómeno de Gibbs [20], y deben tomarse pocos términos. Weber propone tomar sólo dos armónicos. Gutman [48] ha propuesto también este perfil. Freudenstein [44] y Wiederich [120] han utilizado polinomios trigonométricos de "bajo contenido en armónicos" de pico de aceleración mínimo. Baranyi [8] ha usado desarrollos en serie de Fourier truncados de la mayoría de los perfiles clásicos.

Chen define la filosofía de diseño anterior en su texto [31] de la siguiente forma:

"Básicamente, existen dos objetivos principales en la selección y diseño de un perfil de leva. Estos son:

- 1.- Producir una aceleración mínima del seguidor (y, por tanto, una carga dinámica mínima).
- 2.- Evitar vibraciones excesivas en la respuesta, causadas por un alto contenido en armónicos del perfil."

En cuanto al punto 1, es evidente que la implicación lógica que representa debe interpretarse al revés. Es decir, el objetivo real es asegurar un estado tensional mínimo, que asegure larga vida y funcionamiento correcto al mecanismo. Puede parecer más o menos intuitivo que esto se puede conseguir minimizando la aceleración del perfil. Sin embargo, esta intuición puede fallar, pues se pueden ofrecer ejemplos (ver capítulo 4, más abajo) de perfiles con menores tensiones de contacto, teniendo aceleraciones mayores. Evidentemente, este razonamiento también es aplicable a otros procedimientos de diseño que utilizan el mismo criterio de minimización de la aceleración.

En cuanto al punto 2, como el movimiento transmitido por la leva se repite a cada vuelta completa de la misma, la excitación será periódica, de periodo $T = 2\pi/\omega$, siendo ω la velocidad angular de la leva, y pudiéndose desarrollar en serie de Fourier, con lo que el sentido del punto 2 se hace claro bajo la interpretación de vibraciones permanentes comentada más arriba.

Sin embargo, lo que se hace frecuentemente no es desarrollar en serie de Fourier el perfil completo, sino los segmentos de movimiento, tomando como periodo el intervalo de tiempo asociado a dichos segmentos. Así, se dice que el perfil cicloidal tiene un sólo "armónico". En realidad, lo que tiene es un único coeficiente de Fourier distinto de cero cuando se desarrolla en el intervalo $|0, \beta|$, siendo β el ángulo de subida (del segmento). Es evidente que dicho "armónico" tiene que ver muy poco con los armónicos que resultan del desarrollo del perfil completo de la leva.

Kwakernaak [71] señala que las síntesis propuestas por Weber [119] y Gutman [48] sólo tienen sentido para un movimiento de subida-bajada sin descanso (¿un ciclo completo?).

1.4.2. Objetivos

A la luz de la discusión anterior se perfila el doble objetivo de esta tesis. De una parte, el análisis teórico de los modelos matemáticos empleados en la síntesis dinámica. De la otra, el desarrollo de un método de síntesis que, basado en la interpretación de vibraciones en régimen permanente, evita el uso de la hipótesis h_1 , a la vez que sustituye los criterios de aceleración mínima por los más realistas de fuerzas y/o tensiones de contacto mínimas.

En cuanto al primer objetivo, en el capítulo 2 se comparan tanto la respuesta como la fuerza excitadora (fuerza de contacto) para diversos modelos. De tal comparación se deduce que el modelo de 1 g.d.l. propuesto por Wiederich [120] produce resultados insatisfactorios, incluso para velocidades de funcionamiento moderadas. No obstante, otros modelos de 1 g.d.l., si se limita superiormente la frecuencia de funcionamiento, producen resultados satisfactorios. Por último, se proponen y contrastan modelos de elementos finitos, estudián-

dose su comportamiento conforme aumenta el número de grados de libertad.

Para la consecución del segundo objetivo, se ha desarrollado una metodología (capítulo 3) que sustituye el concepto tradicional de diseño por segmentos, por el de diseño del perfil completo, caracterizando a este último por un polinomio trigonométrico. Entre otras ventajas (que se desarrollan más extensamente en el capítulo 3), la caracterización del perfil por un polinomio trigonométrico permite conocer a priori los armónicos del movimiento excitador, lo que es necesario para poder asegurar la validez del modelo empleado.

Por otra parte, esta metodología permite utilizar como modelo matemático cualquier sistema lineal con un número arbitrario (finito) de grados de libertad, siendo especialmente apta para el empleo de los modelos propuestos en el capítulo 2.

CAPITULO 2: EL MODELO DINAMICO

2.1. INTRODUCCION

Cualquier mecanismo real constituye un sistema mecánico continuo, cuyo comportamiento, en mayor o menor cuantía, es no lineal. El análisis de los modelos dinámicos que contemplan dichas características representa un problema matemático no resuelto analíticamente en la generalidad de los casos. La síntesis de mecanismos basándose en dichos modelos se puede considerar impracticable, haciéndose necesaria la adopción de modelos matemáticamente más simples y, a la vez, capaces de reproducir con suficiente aproximación el comportamiento real del mecanismo. En este sentido el modelo más simple es el lineal, discreto, con un solo grado de libertad, siendo con mucho el más ampliamente utilizado en el campo de la síntesis dinámica de levas [44, 55, 83, 114, 42, 71, 106, 111, 14, 32, 119, 120]. Se ha comprobado experimentalmente que la respuesta de un mecanismo real puede ser aproximada por un modelo tan simple en algunos casos [10, 101]. Mas recientemente Pisano [90] ha comprobado que el modelo de 1 grado de libertad solo reproduce adecuadamente el comportamiento real a pequeñas velocidades de funcionamiento.

Es obvio que se debe tratar de adoptar el modelo más simple posible que reproduzca adecuadamente el comportamiento real de un sistema. Ahora bien, lo que resulta imprescindible es dejar claramente sentadas las bases bajo las cuales una tal modelización conserva su validez. Sorprendentemente, dichas bases no habían sido establecidas para un modelo tan simple como el lineal, discreto, de un grado de libertad en 1973 [120]. Pero sentar tales bases conduce a un problema recurrente. Se debe comparar el modelo para toda la gama de variación de los parámetros que lo definen, así como para todas las posibles formas de funcionamiento. Evidentemente, esta comparación no se puede realizar con un mecanismo real sino, que, a su vez, se realiza con otro modelo más complicado,

del que se supone reproduce más fielmente el comportamiento real. Además, este nuevo modelo debe ser lo suficientemente simple para conocer su comportamiento exacto, es decir, conocer sus soluciones analíticas.

Hay muy pocos estudios sobre validez de los modelos. En este capítulo se analizan algunos, comparando con modelos continuos concretos.

La única comparación con un modelo lineal general de N g.d.l. (Wiedervich [120]) se basa en una serie de simplificaciones injustificadas, y sus conclusiones no son válidas, como se demostrará con un contraejemplo.

Por otra parte, todos los estudios sobre la validez de los modelos, se basan exclusivamente en la respuesta. Sin embargo, en el diseño, tan importante como el funcionamiento correcto es la vida del sistema. Esta depende del estado tensional (en las levas un parámetro cúbico es la tensión de contacto entre leva y seguidor), debiendo ser éste, por tanto, otro parámetro a incluir en la contrastación de los modelos.

2.2. MODELOS SIMPLES

En este apartado se va a analizar la validez de la aproximación de dos sistemas continuos relativamente simples por modelos con un número finito de grados de libertad, dejando para el apartado siguiente el modelado de un mecanismo genérico.

2.2.1. Barra continua con masa concentrada en su extremo

El primero de los sistemas, representado en la figura 2.1, consiste en una barra elástica lineal, uniforme de densidad lineal ρ , longitud L , sección transversal A y módulo

de elasticidad E , con una masa puntual M en un extremo, estando sometido su otro extremo a un movimiento armónico, Y . La respuesta estacionaria u , de este sistema ha sido comparada [120, 124] con la de un modelo equivalente de 1 grado de libertad. Es interesante, según lo dicho en la introducción a este capítulo, extender la comparación a las fuerzas que se producen en ambos sistemas.

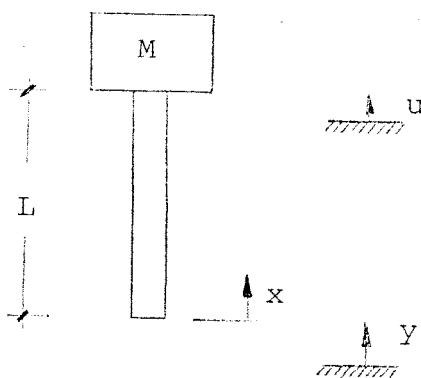


Figura 2.1.

La ecuación del movimiento es:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

con las condiciones de contorno:

$$u(0, t) = Y(t) = \text{sen } \omega t \quad (2.2)$$

$$\left. -EA \frac{\partial u}{\partial x} = M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{x=L}$$

cuya solución se obtiene fácilmente por separación de variables [112]:

$$u(x,t) = \frac{\beta \cos \frac{\omega}{\gamma} (L-x) - B \omega \operatorname{sen} \frac{\omega}{\gamma} (L-x)}{\beta \cos \frac{\omega}{\beta} - B \operatorname{sen} \frac{\omega}{\beta}} \operatorname{sen} \omega t \quad (2.3)$$

siendo:

$$\gamma^2 = \frac{EA}{\rho} ; \beta^2 = \frac{EA}{\rho L^2} = \frac{\gamma^2}{L^2} = \frac{k}{m} ; B = \frac{M}{m} \quad (2.4)$$

Donde $m = \rho L$ es la masa de la barra y $k = EA/L$ su rigidez.

El movimiento de la masa M vendrá dado por (2.3) para $x = L$. La amplitud \underline{u} de dicho movimiento se puede escribir en función de la frecuencia adimensional $\omega/\beta = \gamma$:

$$\underline{u} = \frac{1}{\cos \gamma - B \gamma \operatorname{sen} \gamma} \quad (2.5)$$

Por otra parte, la fuerza transmitida al extremo inferior ($x=0$) por la excitación es:

$$F = - EA \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (2.6)$$

y sustituyendo u por la expresión (2.3), se tiene:

$$F = - k \frac{\omega \operatorname{sen} \frac{\omega}{\beta} + \frac{B}{\beta} \omega^2 \cos \frac{\omega}{\beta}}{\beta \cos \frac{\omega}{\beta} - B \omega \operatorname{sen} \frac{\omega}{\beta}} \quad (2.7)$$

y para la amplitud \underline{F} de la misma:

$$\frac{\underline{F}}{k} = \frac{\underline{F}}{\beta^2 m} = - \frac{y \operatorname{sen} y + B y^2 \cos y}{\cos y - B y \operatorname{sen} y} \quad (2.8)$$

El modelo más simple para representar el comportamiento dinámico del sistema continuo de la figura 2.1 es uno lineal, de un grado de libertad, constituido por un resorte ideal, de rigidez \bar{K} y una masa concentrada \bar{M} , representado en la figura 2.2.

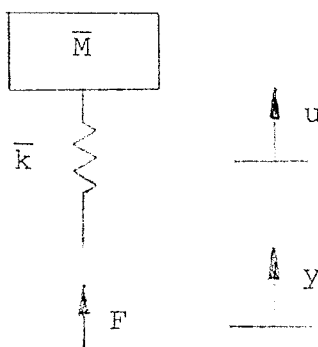


Figura 2.2.

Es obvia una primera limitación al campo de validez de este modelo: Sólo tiene una frecuencia natural, mientras que el modelo continuo tiene infinitas. No obstante, en la práctica, el rango de velocidades de funcionamiento de cualquier mecanismo debe estar por debajo de la velocidad que excita la frecuencia fundamental, para evitar un comportamiento vibratorio excesivo.

Para poder comparar el modelo hay que determinar los parámetros \bar{K} y \bar{M} que lo definen. El procedimiento clásico consiste en imponer que el desplazamiento estático, es decir el desplazamiento u frente a una excitación Y , estática, y

la frecuencia natural de este modelo coincidan con el desplazamiento estático y la frecuencia fundamental del modelo continuo.

La igualdad de desplazamientos estáticos conduce, evidentemente a la ecuación:

$$\bar{k} = k \quad (2.9)$$

Las frecuencias naturales (adimensionadas) del sistema continuo vienen dadas por los ceros del denominador de (2.5), es decir por las raíces de la ecuación:

$$B y = c \operatorname{tg} y \quad (2.10)$$

La frecuencia fundamental y_1 será la menor raíz positiva de esta ecuación. Igualandola a la frecuencia natural del sistema discreto se determina el valor de \bar{M} :

$$y_1^2 = \frac{w_1^2}{\beta^2} = \frac{k}{\beta^2 \bar{M}} = \frac{m}{\bar{M}} \Rightarrow \bar{M} = \frac{m}{y_1^2} \quad (2.11)$$

La ecuación del movimiento para el modelo de un grado de libertad es:

$$\bar{M} \ddot{u} + \bar{k} u = \bar{k} Y \quad (2.12)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros \bar{k} y \bar{M} para las expresiones (2.9) y (2.11), y para una excitación armónica $Y = \sin \omega t$, se obtiene fácilmente la amplitud de la respuesta en régimen permanente:

$$\underline{u} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{y_1}\right)^2} \quad (2.13)$$

y la amplitud de la fuerza excitadora:

$$\frac{F}{K} = 1 - \underline{u} = - \frac{\left(\gamma/\gamma_1\right)^2}{1 - \left(\gamma/\gamma_1\right)^2} \quad (2.14)$$

En la figura 2.3 se representan las curvas de amplitud de la respuesta para el modelo continuo (ecuación (2.5)) y para el modelo de un grado de libertad (ecuación (2.13)) en función de la frecuencia adimensional γ , para varios valores de la relación de masas B . Se observa un aumento del error de modelado al aumentar la masa distribuida respecto a la concentrada. Para un valor fijo de B , el error crece monótonamente con la frecuencia, partiendo de cero. En cualquier caso, el error de modelado, definido como:

$$\eta = \frac{\underline{u}_{\text{discreto}} - \underline{u}_{\text{continuo}}}{\underline{u}_{\text{continuo}}} \quad (2.15)$$

no supera el 15%, como se observa en la figura 2.4, donde se representa η frente a la relación de frecuencias γ/γ_1 .

En la figura 2.5 se representan las curvas de amplitud de la fuerza excitadora (ecuaciones (2.8) y (2.14)) para los mismos valores de B . Se observa la misma influencia de la relación de masas sobre el error de modelado. Sin embargo, el comportamiento del error con la frecuencia es bastante distinto, como se puede observar en la figura 2.6, siendo prácticamente independiente de ésta, y considerablemente mayor.

Obviamente, si se desean representar adecuadamente las fuerzas, el presente modelo de un grado de libertad no es adecuado. Se puede elegir un nuevo modelo manteniendo un solo grado de libertad, o ampliándolo. En cualquier caso hay

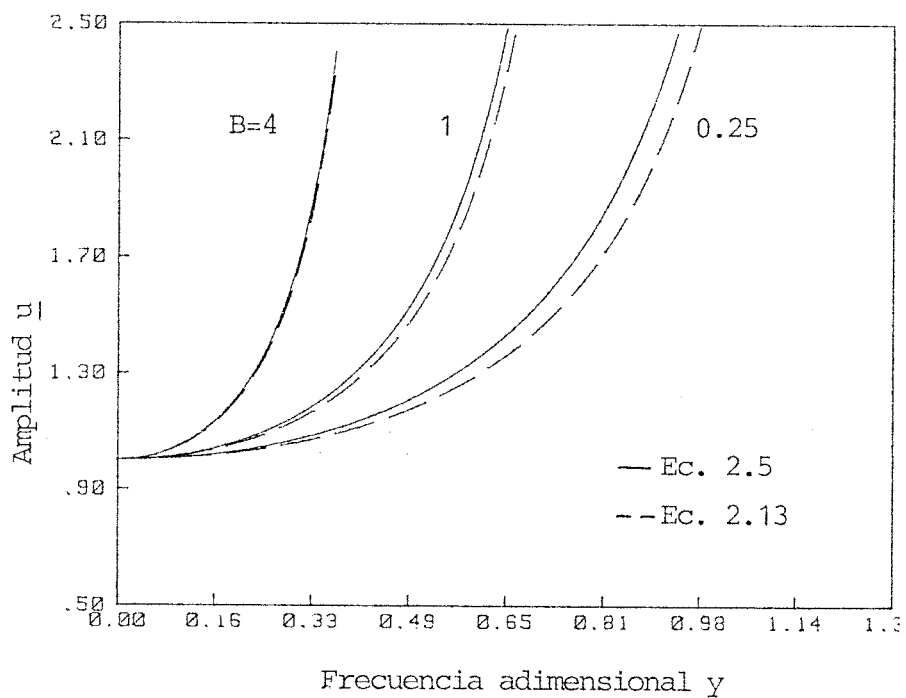


Figura 2.3.

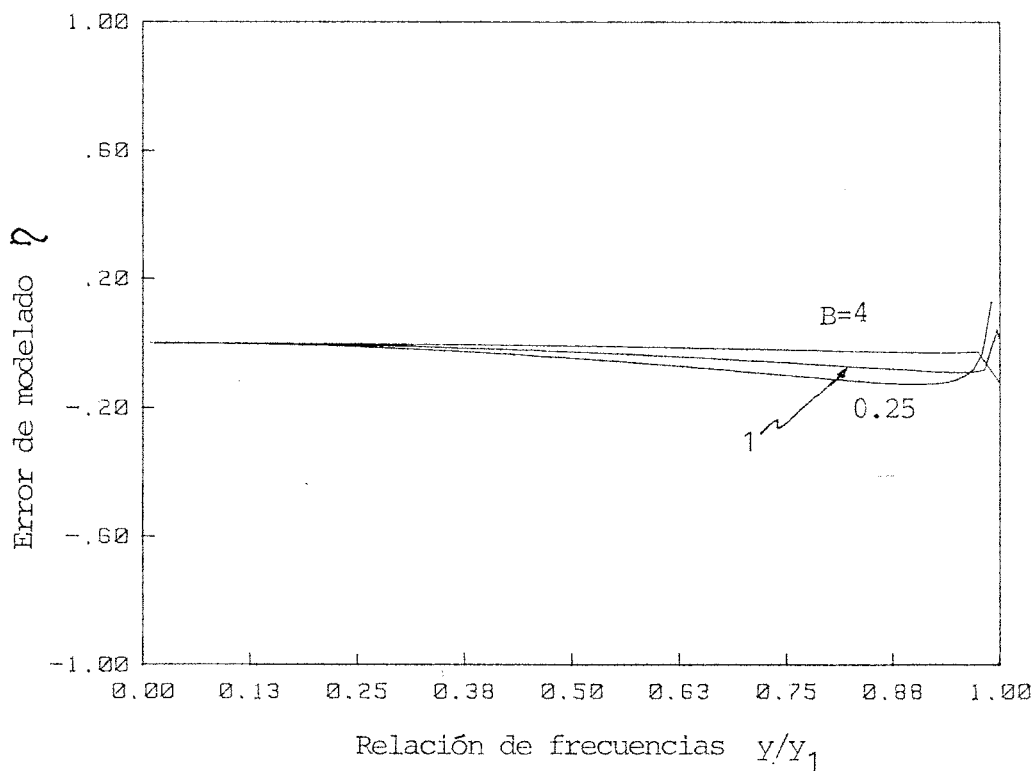


Figura 2.4.

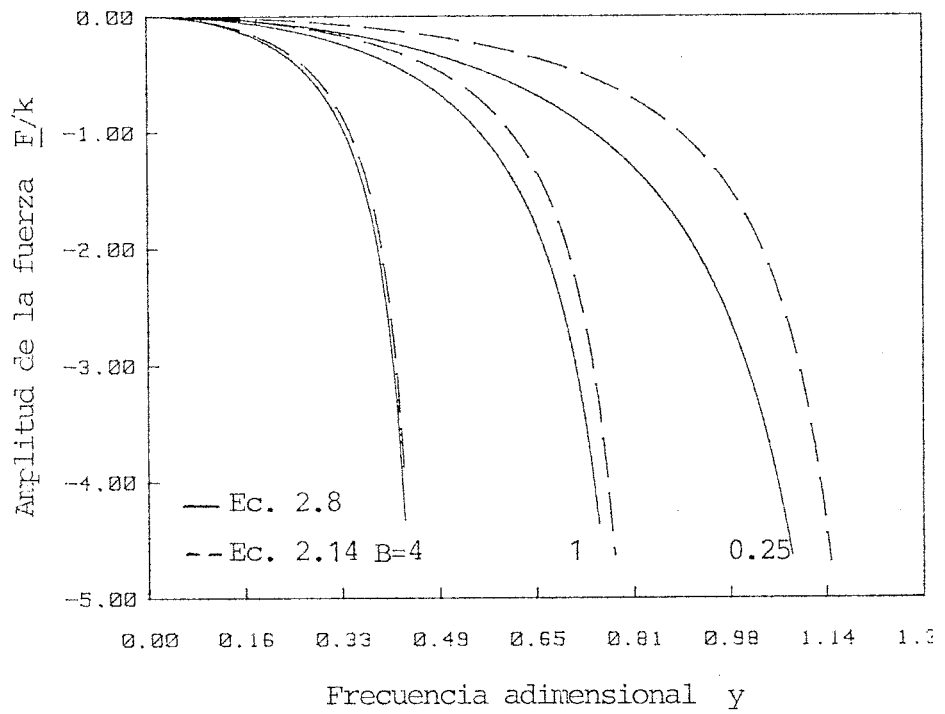


Figura 2.5.

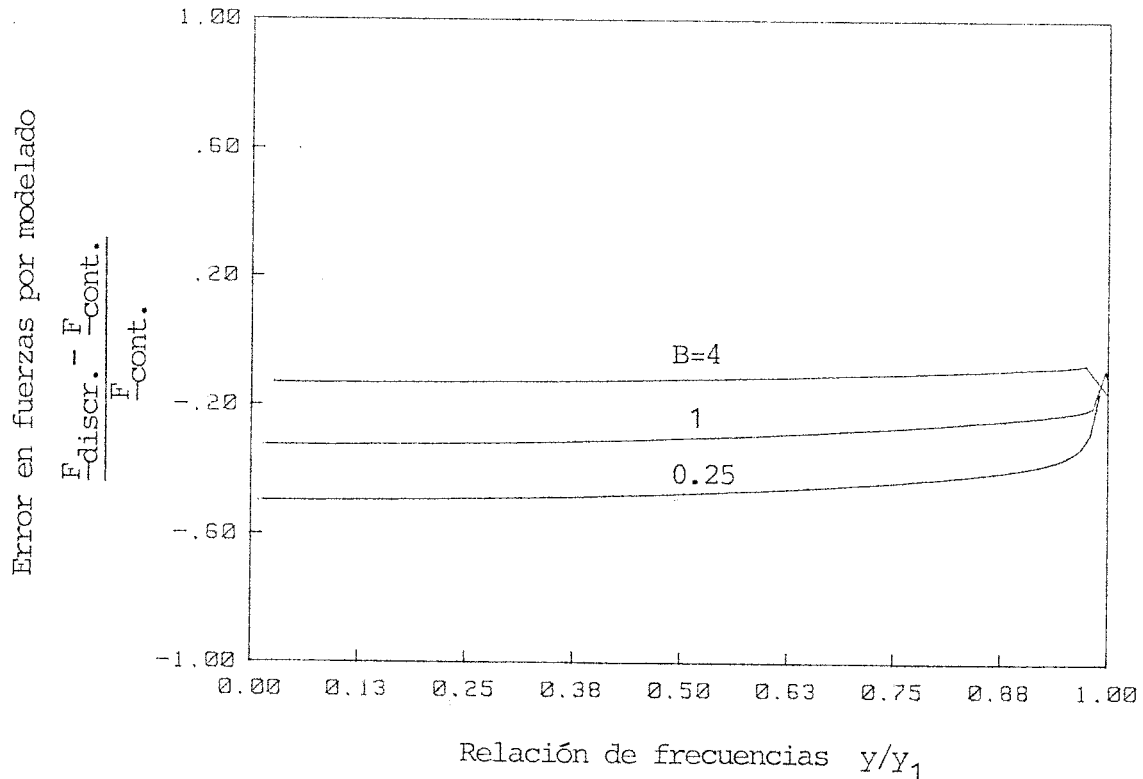


Figura 2.6.

que definir los parámetros que caracterizan al modelo. Esto, generalmente, no es fácil de hacer basándose en argumentos físicos, siendo necesario recurrir a algunos de los muchos métodos de discretización matemática de sistemas continuos. Aquí se utilizará el método de los elementos finitos, que permite una discretización y resolución automática del sistema, con independencia de la complejidad de éste. Posteriormente se verá que los modelos obtenidos por este método resultan particularmente interesantes para la síntesis de levas con un contenido en armónicos acotado.

Para poder evaluar la bondad de los modelos en función del número de grados de libertad se ha discretizado el modelo de la figura 2.1, sustituyendo la barra continua por N elementos iguales con funciones de forma lineales, y matrices de masa consistentes.

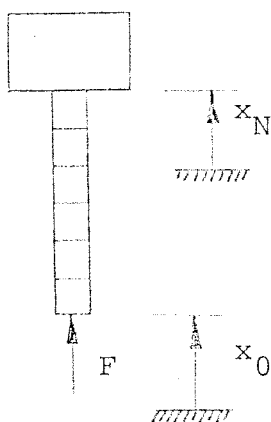


Figura 2.7.

Utilizando la siguiente nomenclatura:

$$\underset{\sim}{K} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{A} \quad (2.19)$$

Para una excitación $x_0 = \text{sen } \omega t$, en régimen permanente, haciendo $x_i = \underline{i} \text{ sen } \omega t$ se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\underset{\sim}{A} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \dots \\ \dots \\ \underline{N} \end{bmatrix} - x^2 \underset{\sim}{B} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \dots \\ \dots \\ \underline{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E} \\ \frac{\alpha^2 m}{\dots} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

que interesa escribir en forma particionada:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \underset{\sim}{A}_{22} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{N} \end{array} \right] - x^2 \left[\begin{array}{c|ccc} 2+b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \underset{\sim}{B}_{22} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{N} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{F}/\alpha^2 \underline{m} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right\} (2.21)$$

para dividirlo en los dos subsistemas $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ señalados:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\underline{F}}{\alpha^2 \underline{m}} = 1 - \underline{1} - x^2 (2 + b + \underline{1}) \quad (2.22)$$

$$\textcircled{2} \quad \underset{\sim}{A}_{22} \left[\begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{N} \end{array} \right] - x^2 \underset{\sim}{B}_{22} \left[\begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{N} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1+x^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.23)$$

El sistema de ecuaciones (2.23) ha sido resuelto analíticamente en el apéndice A, para poder examinar la dependencia funcional con N y con los parámetros que definen el modelo de forma explícita. Una vez resuelto éste, se puede sustituir el valor encontrado para $\underline{1}$ en (2.22) para obtener una expresión de la amplitud de la fuerza excitadora. Las amplitudes de dicha fuerza y del movimiento de la masa M resul-

tan ser:

$$\frac{F}{\alpha^2 m} = 1 - (2+b)x^2 - \frac{(1+x^2)^2 \left(\cos(N-1)\theta - \frac{bx}{\sqrt{3(2-x^2)}} \operatorname{sen}(N-1)\theta \right)}{\sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \left(\cos N\theta - \frac{bx}{\sqrt{3(2-x^2)}} \operatorname{sen} N\theta \right)} \quad (2.24)$$

$$\underline{N} = \frac{(1+x^2)^N}{\left(\sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \right)^N \left(\cos N\theta - \frac{bx}{\sqrt{3(2-x^2)}} \operatorname{sen} N\theta \right)} \quad (2.25)$$

siendo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3x^2(2-x^2)}}{1-2x^2} \quad (2.26)$$

En la figura 2.8 se representan las curvas de amplitud del movimiento de la masa M para el modelo continuo (ecuación (2.5)) y para el modelo de elementos finitos con un solo elemento (ecuación (2.25) con N=1). Las curvas son muy parecidas a las de la figura 2.3 del modelo clásico de un grado de libertad. En la figura 2.9 se representan los correspondientes errores de modelado. Comparando esta figura con la 2.4, puede observarse que el error del modelo de elementos finitos es ligeramente menor que el del modelo clásico en la mayor parte del rango de frecuencias, excepto para frecuencias muy próximas a la fundamental (superiores al 80% de la frecuencia fundamental).

En la figura 2.10 se representan las curvas de amplitud de la fuerza excitadora (ecuaciones 2.8 y 2.24), y en la 2.11 las correspondientes curvas de error de modelado. Comparando esta última figura con la 2.6 se observa un comportamiento

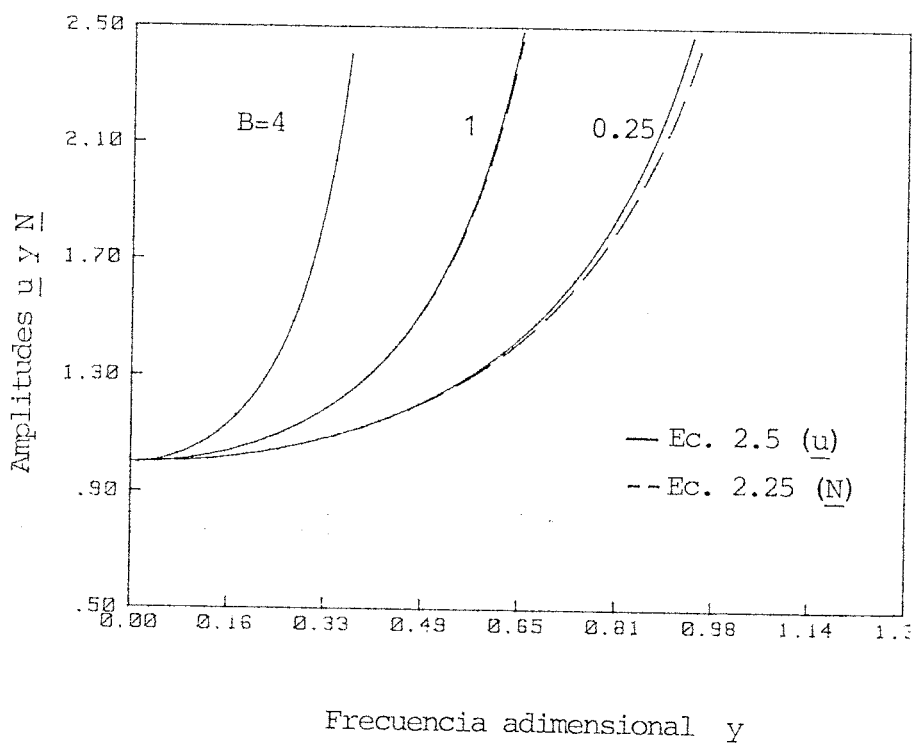


Figura 2.8.

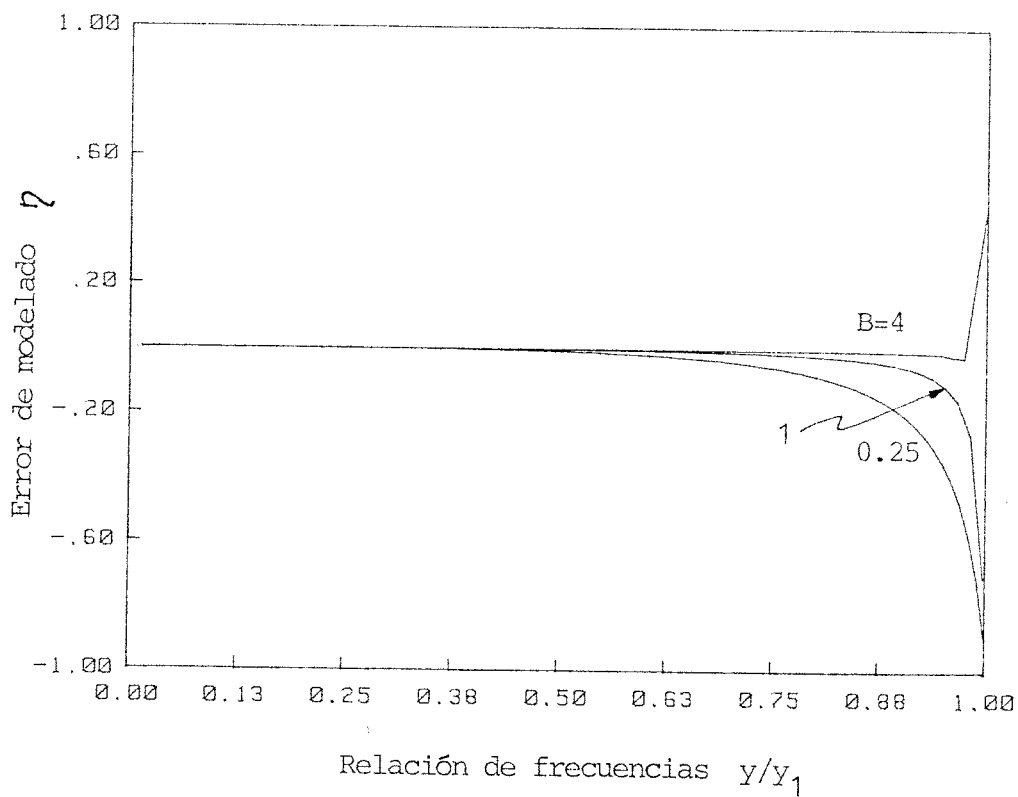


Figura 2.9.

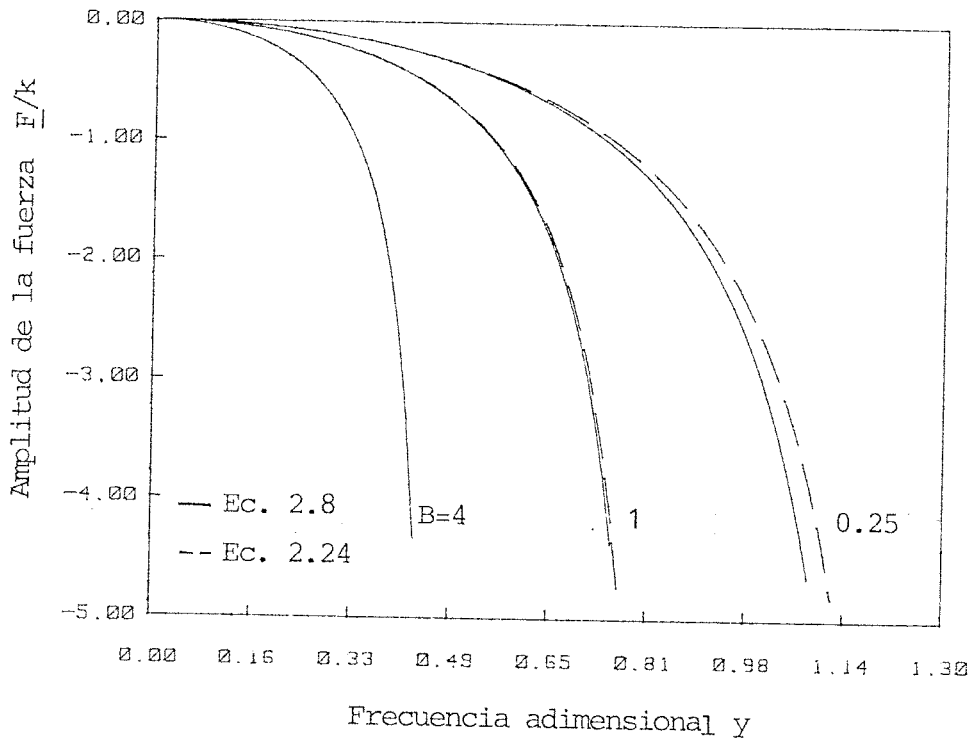


Figura 2.10.

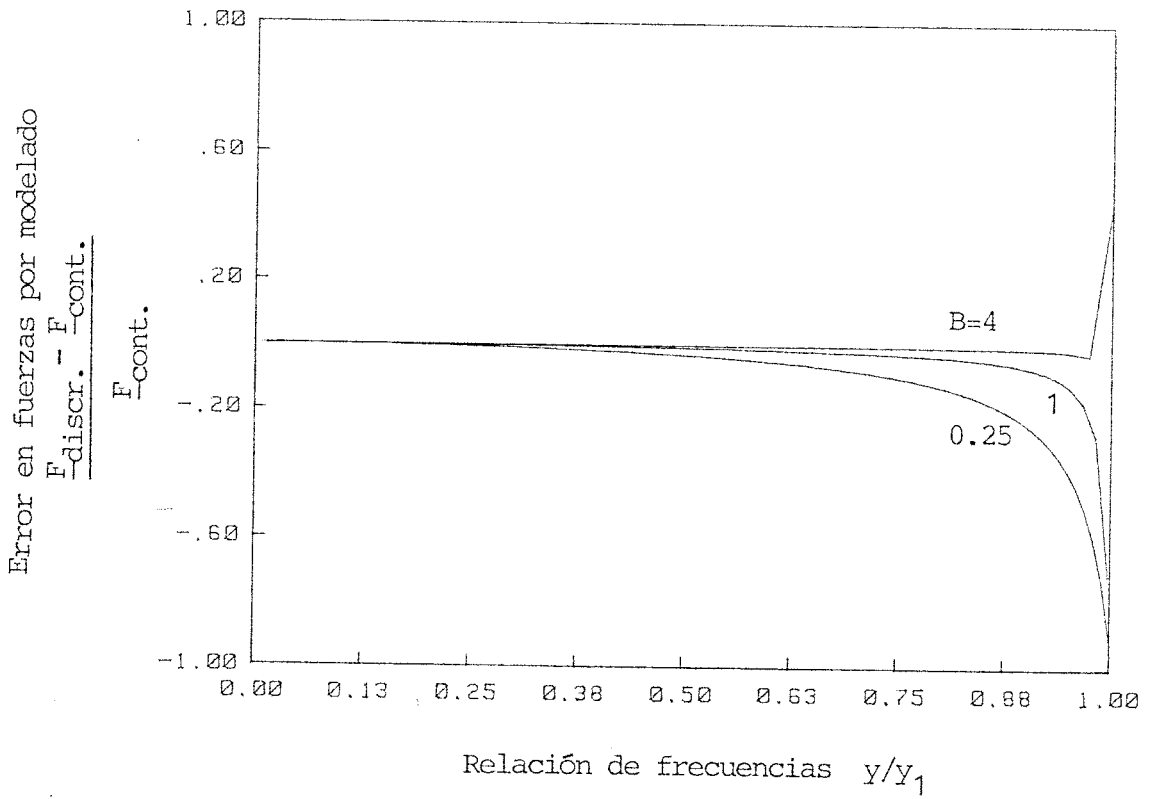


Figura 2.11.

completamente distinto en la representación de las fuerzas entre el modelo clásico y el de elementos finitos. Mientras que el del primero se puede considerar inadmisibile, el del segundo es idéntico al observado en la representación de los movimientos, tanto cualitativa como cuantitativamente.

En las figuras 2.12 a 2.15 se representan las mismas curvas de amplitud y de error que en las figuras 2.8 a 2.11, salvo que se han utilizado dos elementos ($N=2$). Puede observarse que el error se ha reducido aproximadamente a la mitad al duplicar el número de elementos.

Una tercera forma de modelar el sistema de la figura 2.1 consiste en concentrar la masa distribuida de la barra en sus extremos. La determinación de estas masas concentradas se hace identificando la respuesta del modelo continuo con la del modelo de masas concentradas para una excitación armónica de uno de los extremos de la barra [120, 124]. El resultado depende de la frecuencia de excitación, de modo que a muy bajas frecuencias la masa se distribuye entre ambos extremos a partes iguales, mientras que para frecuencias próximas a la de resonancia un tercio de la masa de la barra se concentra en el extremo libre, y los dos tercios restantes en el otro extremo.

En las figuras 2.16 a 2.19 se representan las curvas de amplitud de la respuesta y de la fuerza excitadora, con las correspondientes curvas de error de modelado para el modelo obtenido al concentrar un tercio de la masa de la barra en el extremo libre y los otros dos tercios en el otro extremo.

Las mismas curvas se representan en las figuras 2.20 a 2.23 para el caso en que la mitad de la masa de la barra se concentra en cada uno de sus extremos.

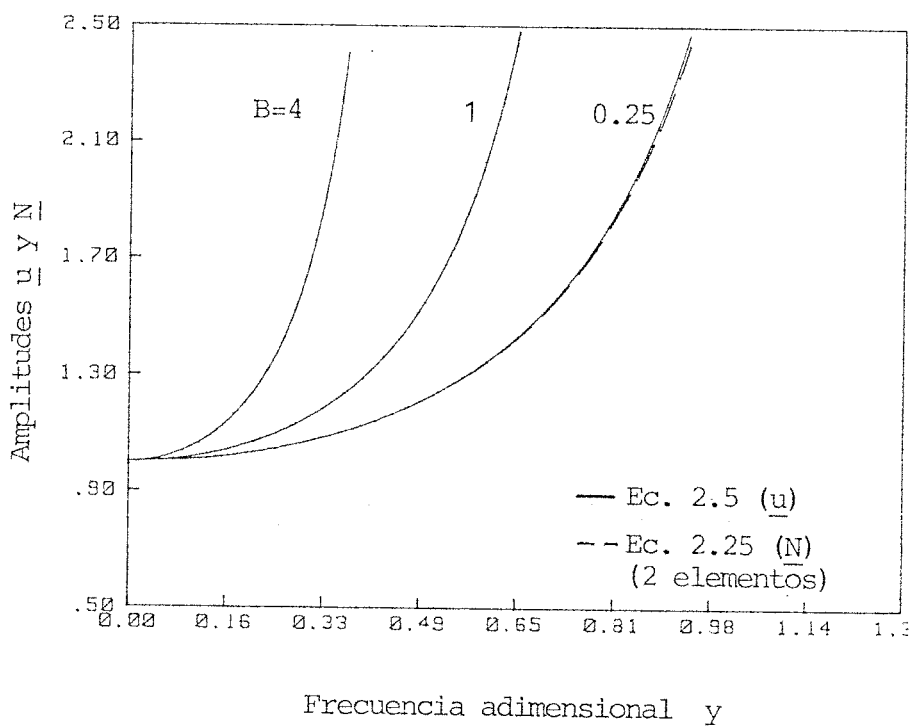


Figura 2.12.

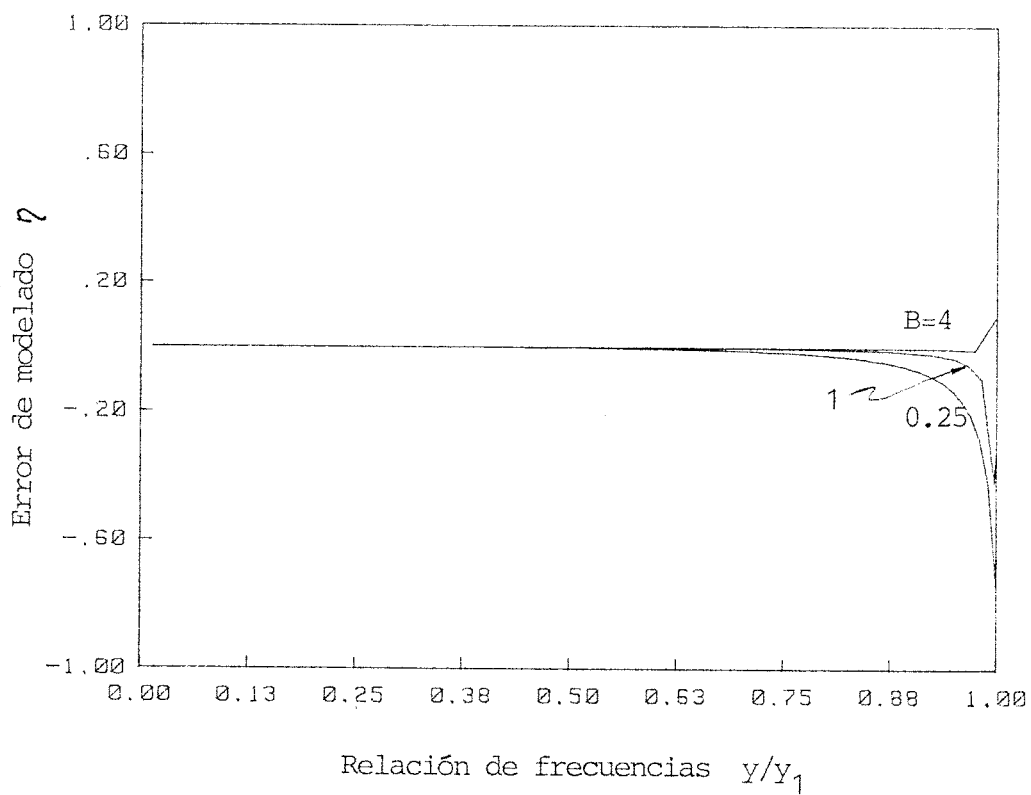


Figura 2.13.

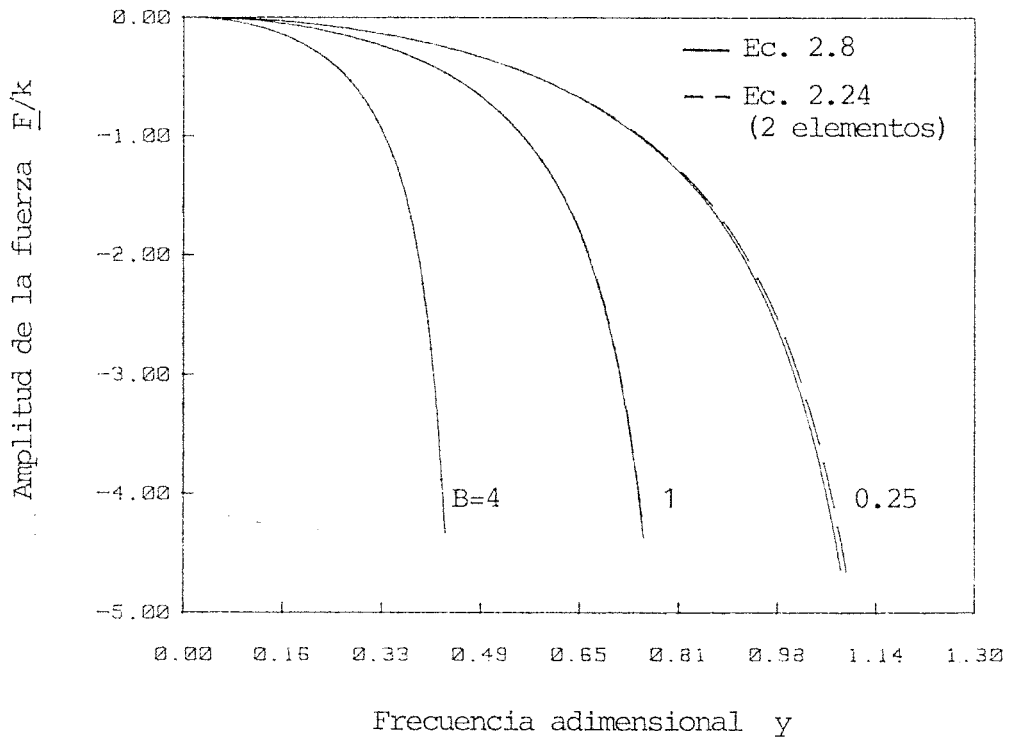


Figura 2.14.

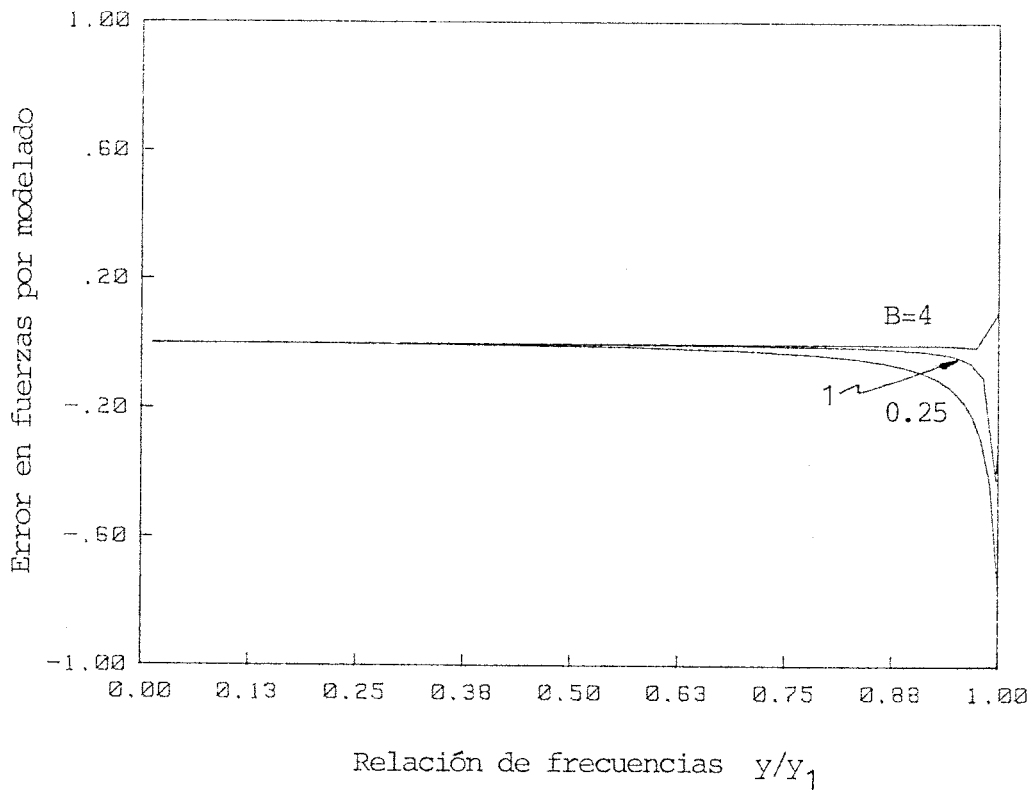


Figura 2.15.

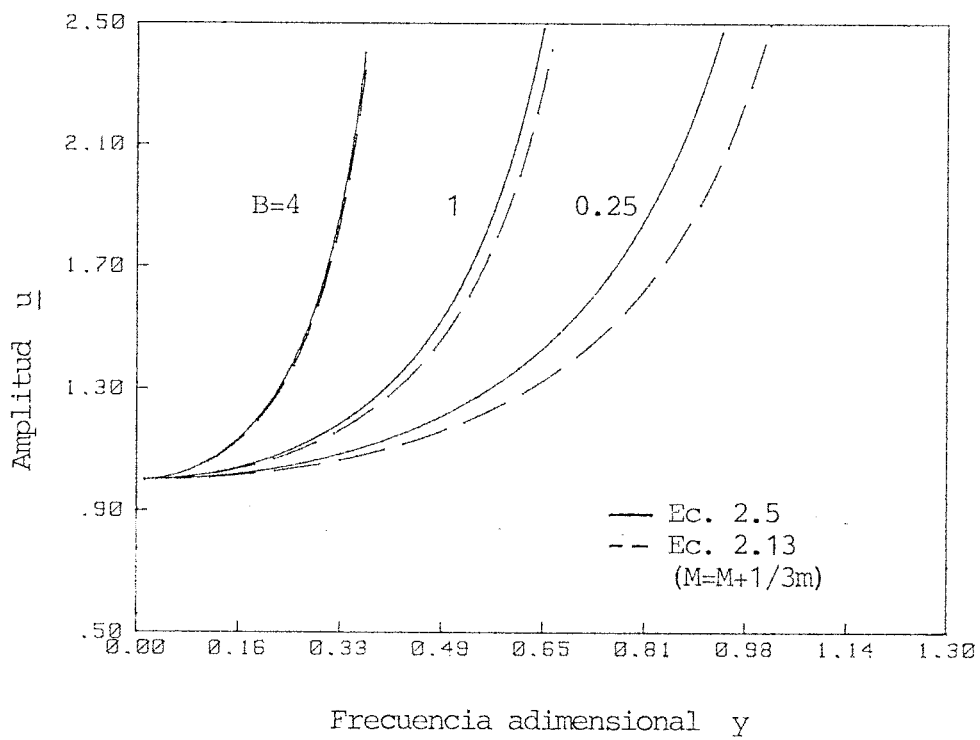


Figura 2.16.

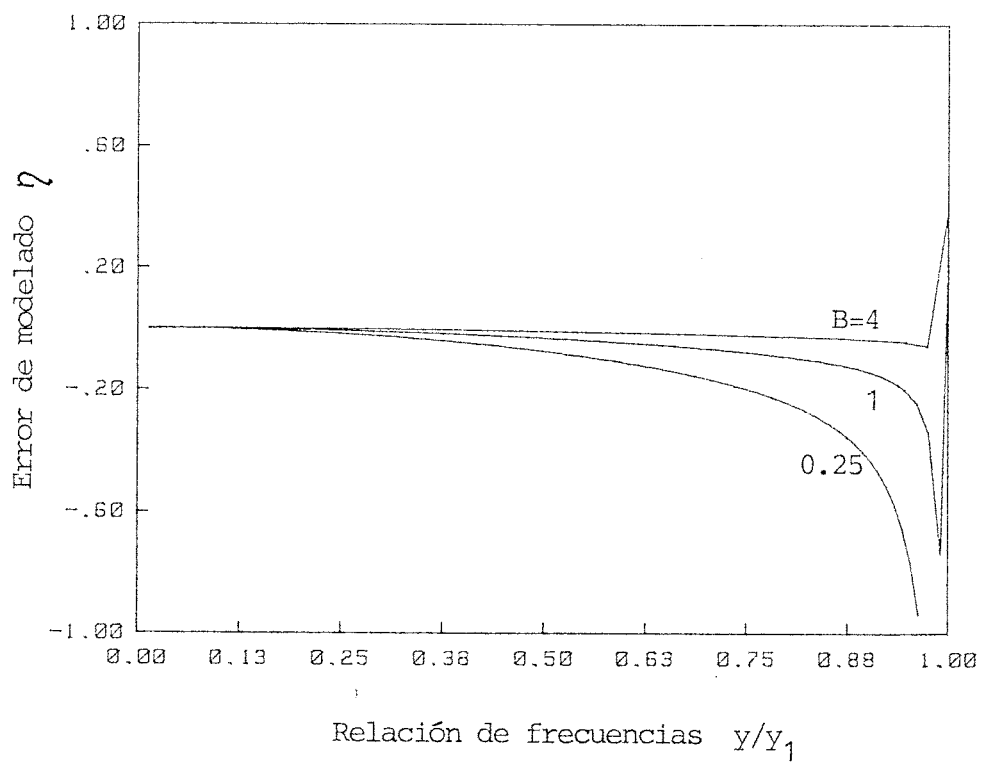


Figura 2.17.

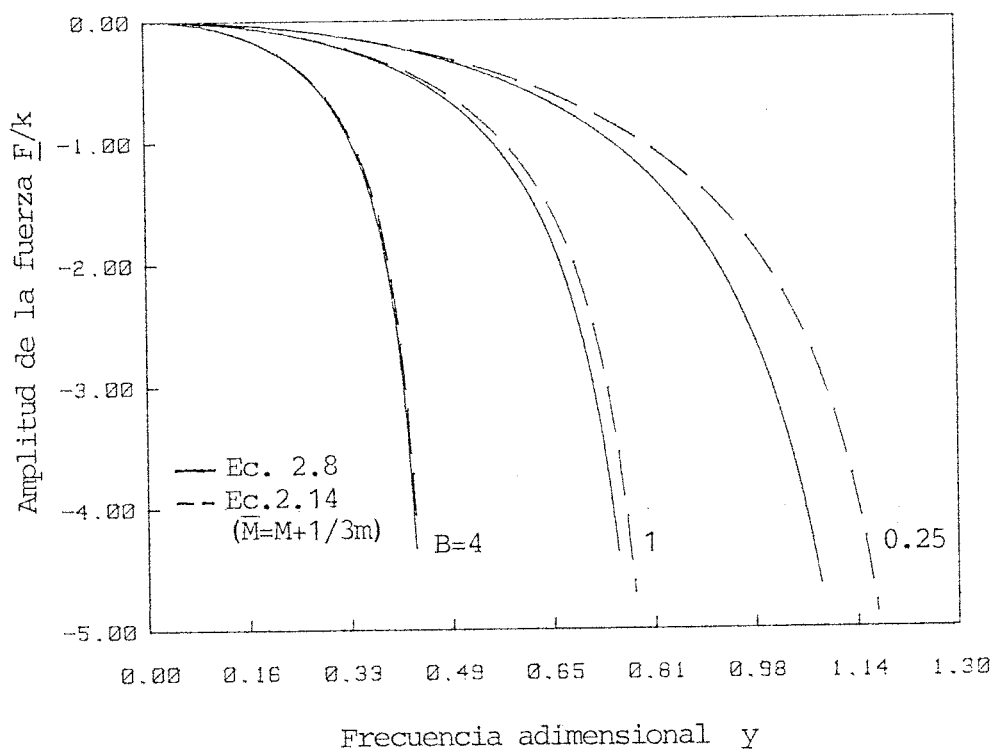


Figura 2.18.

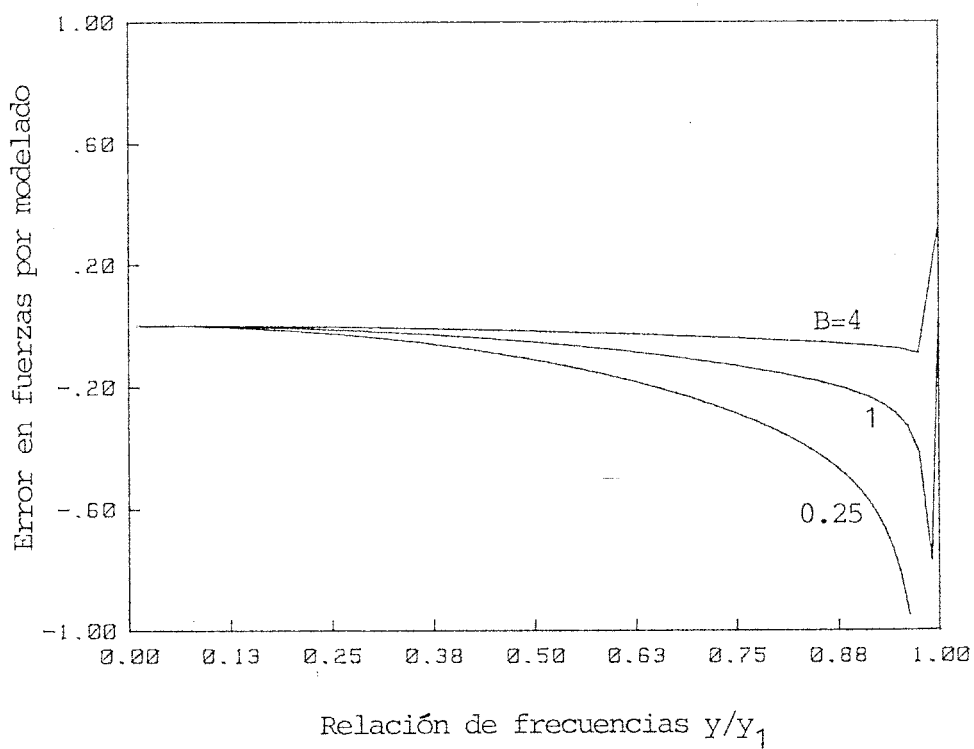


Figura 2.19.

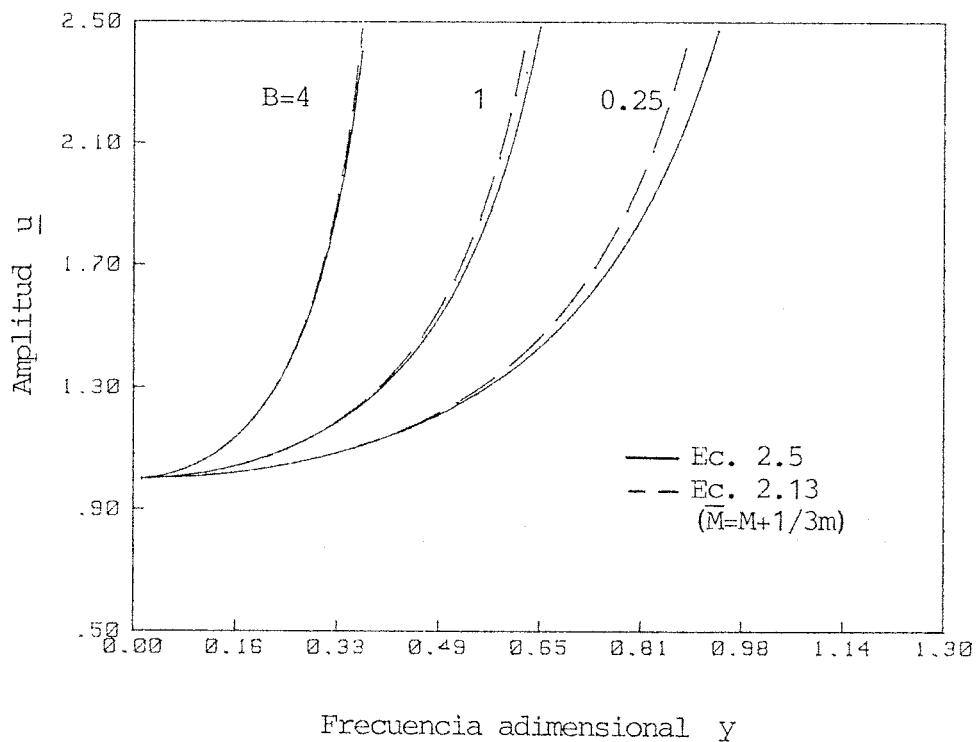


Figura 2.20.

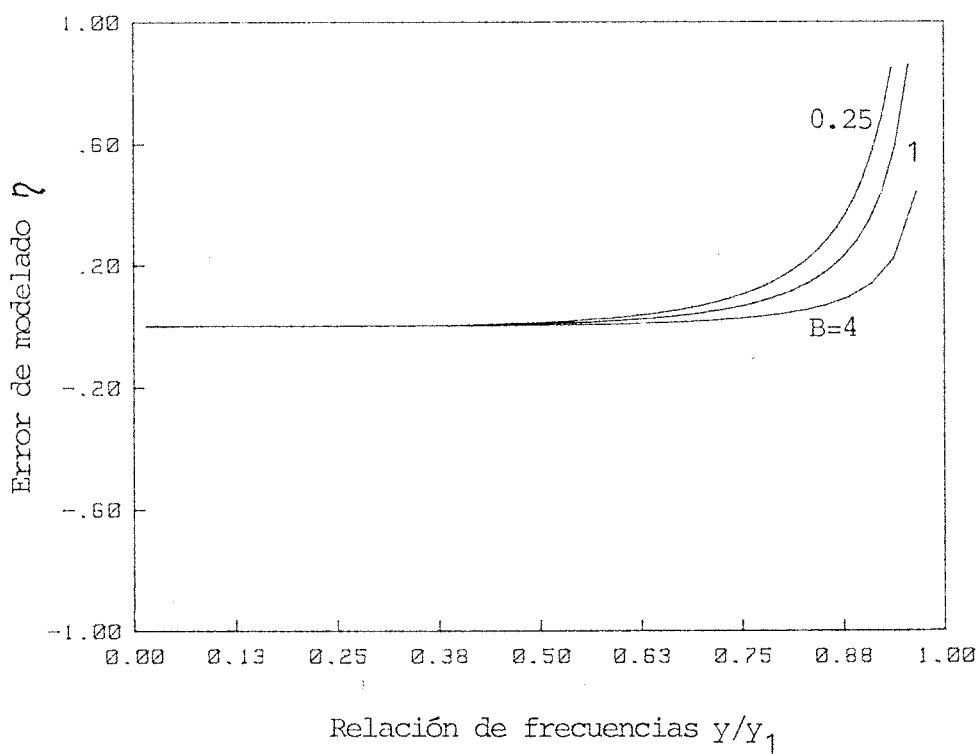


Figura 2.21.

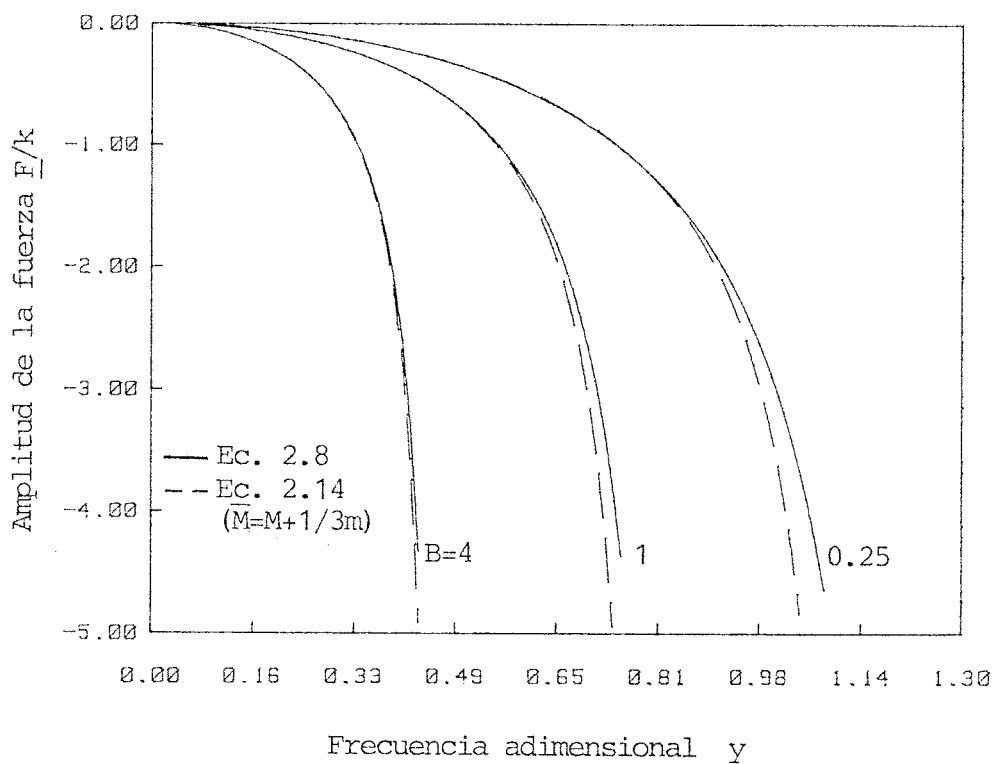


Figura 2.22.

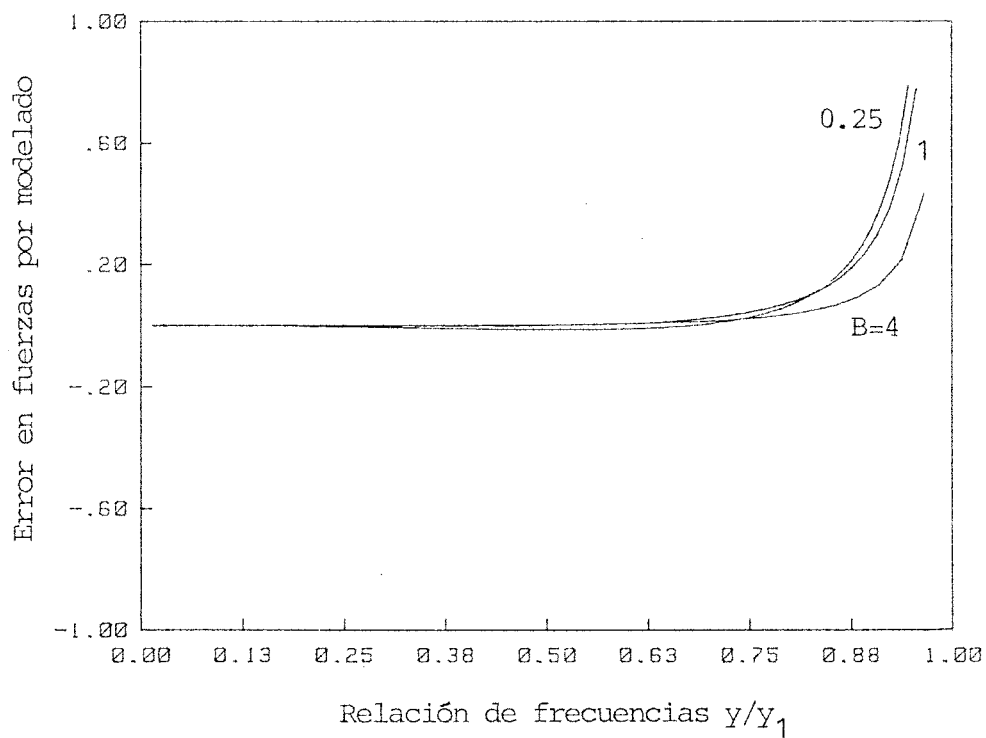


Figura 2.23.

En ambos casos el comportamiento cualitativo es similar al del modelo de elementos finitos, aunque los errores en este último son menores.

2.2.2. Sistema mixto

Un mecanismo de leva como el representado esquemáticamente en la figura 1.1 posee algunas características que un modelo dinámico eficaz debe de contemplar. En primer lugar se observan dos tipos de elementos con propiedades elásticas muy distintas. El muelle de precarga y el seguidor. La relación de rigideces de estos dos elementos en un mecanismo real no es extraño que sea superior a 300. En segundo lugar existe una masa (la del rodillo y parte de la del seguidor) que se encuentra directamente en contacto con la leva. Parece razonable suponer que el efecto de esta masa en las tensiones de contacto entre leva y rodillo sea considerable.

El sistema de la figura 2.24 intenta compatibilizar estas características con la mayor sencillez posible.

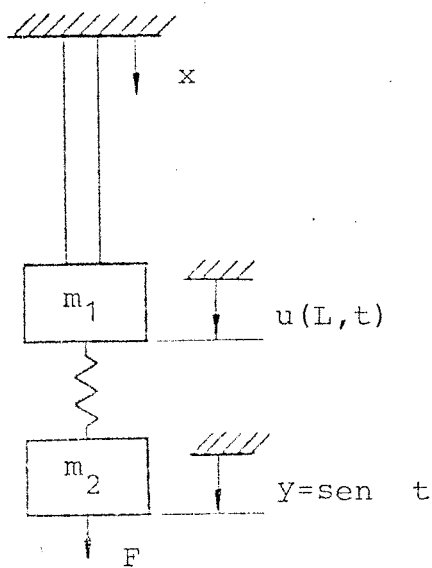


Figura 2.24.

Existe una masa concentrada m_2 directamente en contacto con la fuerza excitadora F . Las propiedades inerciales del seguidor se han concentrado en parte de m_2 y parte de m_1 , mientras que sus propiedades elásticas están reflejadas por un resorte ideal de rigidez k_1 . El muelle de precarga se representa por una barra elástica lineal, uniforme de densidad ρ , longitud L , sección transversal S y módulo de elasticidad E .

La ecuación del movimiento de la barra es:

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

con las condiciones de contorno:

$$u(0,t) = 0$$

$$-ES \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} + k_1(Y - u(L,t)) = m_1 \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

Además, se tiene la ecuación de equilibrio dinámico de la masa m_2 :

$$m_2 \ddot{y} = F - k_1(Y - u(L,t)) \quad (2.29)$$

Para $Y = \text{sen } \omega t$ la solución estacionaria se obtiene fácilmente. Utilizando la nomenclatura:

$$k = \frac{E \cdot S}{L} ; m = \rho L ; A = \frac{k_1}{k} ; B = \frac{m_1}{m} \quad (2.30)$$

$$C = \frac{m_2}{m} ; \beta^2 = \frac{k}{m} ; \gamma = \frac{\omega}{\beta}$$

la solución toma la forma:

$$u(x,t) = \frac{A \operatorname{sen} \frac{\omega x}{\beta L}}{y \cos y + (A - B y^2) \operatorname{sen} y} \operatorname{sen} \omega t \quad (2.31)$$

De donde se deducen las expresiones de las amplitudes del movimiento de la masa m_1 y de la fuerza excitadora:

$$\frac{u}{A} = \frac{\operatorname{sen} y}{y \cos y + (A - B y^2) \operatorname{sen} y} \quad (2.32)$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{\beta^2 m} = A \frac{y \cos y - B y^2 \operatorname{sen} y}{y \cos y + (A - B y^2) \operatorname{sen} y} - C y^2 \quad (2.33)$$

En la figura 2.25 se representa el modelo de un grado de libertad y parámetros concentrados que se va a utilizar para aproximar el sistema de la figura 2.24. Las ecuaciones

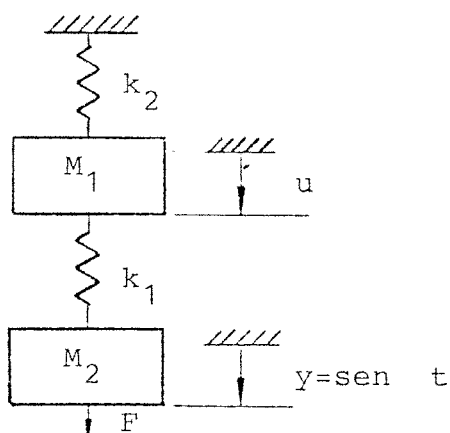


Figura 2.25.

del movimiento para este modelo son:

$$M_1 \ddot{u} + (K_1 + K_2)u = K_1 Y \quad (2.34)$$

$$M_2 \ddot{Y} = K_1(u - Y) + F \quad (2.35)$$

Para determinar los parámetros M_1 , M_2 , K_1 y K_2 , que definen el modelo de un grado de libertad, se identificarán ciertas características del sistema continuo con las de este modelo: 1) Igualdad de la fuerza F estática necesaria para conseguir un desplazamiento Y unitario; 2) Igualdad del desplazamiento u al aplicar un desplazamiento Y estático y unitario; 3) Igualdad de la frecuencia fundamental, manteniendo impedido el movimiento Y .

Las condiciones 1 y 2, equivalen, sencillamente, a la identificación de las rigideces:

$$K_1 = k_1 \quad (2.36)$$

$$K_2 = k \quad (2.37)$$

La expresión de la frecuencia fundamental del sistema continuo en función de los parámetros que caracterizan dicho sistema viene dada por la solución de una ecuación trascendente. Denotando por:

$$\omega_1 = y_1 \cdot \beta \quad (2.38)$$

dicha solución, la condición 3 se escribe como:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{M_1}} \quad (2.39)$$

que, utilizando (2.30), (2.36-38), se puede reescribir así:

$$b = \frac{M_1}{m} = \frac{A+1}{y_1^2} \quad (2.40)$$

Las 3 condiciones anteriores han determinado K_1 , K_2 y M_1 , quedando M_2 libre. Desde un punto de vista geométrico estas condiciones se pueden interpretar de la siguiente forma: Las curvas de amplitud de la fuerza y la respuesta en frecuencia, para el sistema continuo y el modelo de un grado de libertad coinciden en el origen, y tienen la misma asíntota vertical. Para determinar M_2 se puede imponer que las curvas coincidan en algún otro punto. Aquí se va a imponer que la amplitud de la fuerza F se anule para el mismo valor de la frecuencia excitadora. Es evidente que dicha frecuencia es la frecuencia fundamental de los dos modelos cuando el movimiento Y se considera como un grado de libertad más. Denotando dicha frecuencia por:

$$\omega_0 = y_0 \beta \quad (2.41)$$

no es difícil comprobar que la igualdad de la misma para los dos modelos conduce a:

$$c = \frac{M_2}{m} = \frac{A}{y_0^2} \left(\frac{A}{b y_0^2 - (A+1)} + 1 \right) \quad (2.42)$$

Una vez definidos los parámetros del modelo de un grado de libertad, sustituyéndolos en las ecuaciones del movi-

miento (2.34-35) y haciendo $y = \sin t$, se obtienen las expresiones de la amplitud de la respuesta y de la fuerza excitadora:

$$\underline{u} = \frac{A}{1+A - by^2} \quad (2.43)$$

$$\frac{F}{K} = \frac{F}{m\beta^2} = A \frac{1 - by^2}{1+A - by^2} - cy^2 \quad (2.44)$$

En la figura 2.26 se representa la amplitud \underline{u} de la respuesta para el sistema continuo (ecuación (2.32)) y para el modelo de un grado de libertad (ecuación (2.43)) en función de la frecuencia adimensional y , para varios valores de la relación de rigideces, A .

Para $A=20$ se observa que el comportamiento de ambos modelos es muy parecido. Sin embargo, a medida que A aumenta, la evolución de cada modelo es muy distinta. Mientras que las curvas correspondientes al sistema continuo se hacen cada vez más horizontales, las del modelo discreto parecen tender a una disposición bastante distinta.

La figura 2.27 consiste en una representación análoga para la amplitud de la fuerza excitadora (ecuaciones (2.33) y (2.44)). De nuevo se vuelve a observar una discrepancia creciente con A .

A la vista de estos resultados parece interesante estudiar el caso límite para A tendiendo a infinito. para el sistema continuo, tomando límite en la ecuación (2.32), para cualquier valor de w que no sea una frecuencia natural, se tiene:

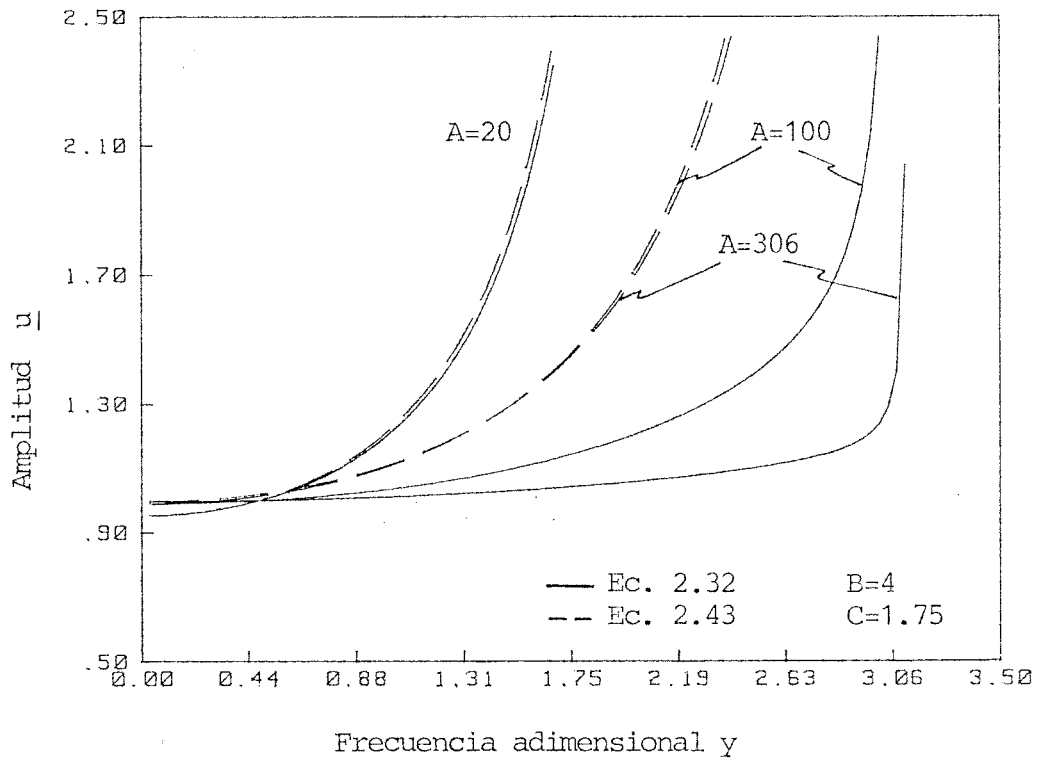


Figura 2.26.

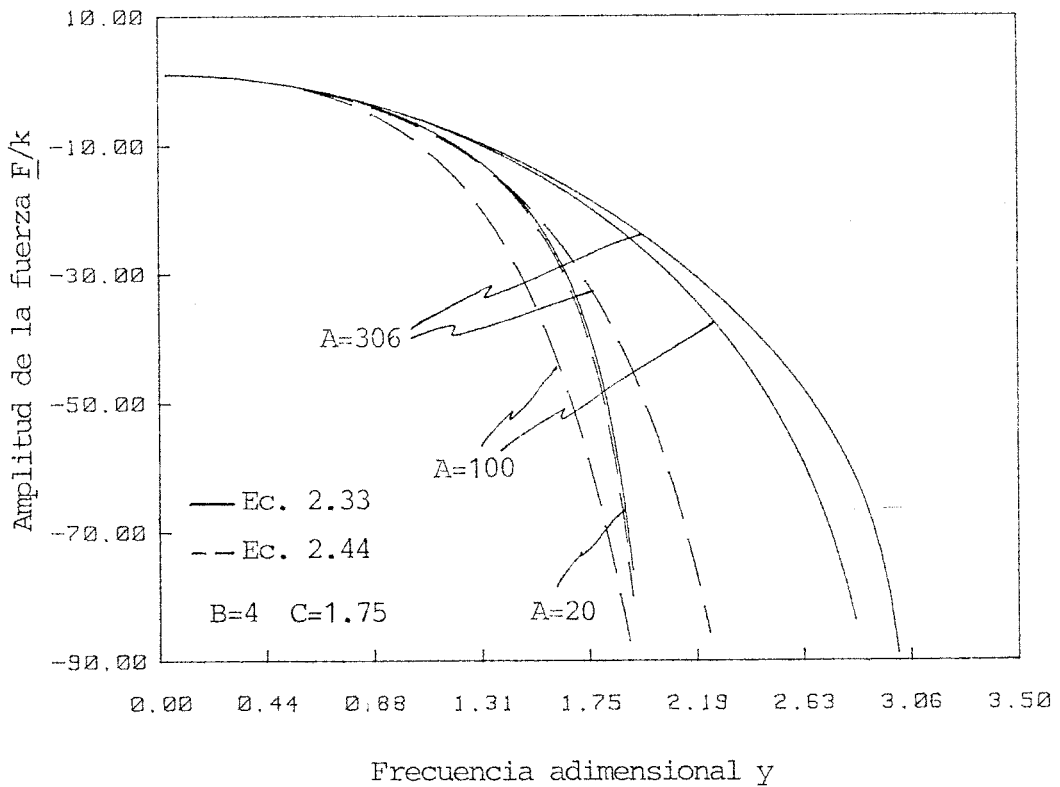


Figura 2.27.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \underline{u} = 1 \quad (2.45)$$

Desde un punto de vista físico esto significa que, al ser el seguidor absolutamente rígido, la respuesta reproduce el movimiento de la leva sin distorsión. Sin embargo, para el modelo discreto, tomando límite en la expresión (2.43), teniendo en cuenta (2.40) se llega a:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \underline{u} = \frac{1}{1 - (\gamma/\gamma_1)^2} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_1)^2} \quad (2.46)$$

que crece indefinidamente cuando se aproxima a ω_1 . Este sorprendente resultado se debe al hecho de que la condición 3 impone al modelo discreto una frecuencia natural acotada, incluso cuando K_1 tiende a infinito. Esto implica la aparición de una masa M_1 infinita (ecuación (2.39)).

En este caso límite el error de modelado, definido por (2.15), toma la forma:

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (2.47)$$

siendo, claramente, no acotado.

Este resultado contradice el estudio realizado por Wiedervich [120] sobre el error de la respuesta del modelo de un grado de libertad, comparado con un modelo lineal genérico de N grados de libertad. En dicho estudio, después de ciertas simplificaciones, se consigue la siguiente acotación finita del error de modelado:

$$\frac{1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 - 1} \leq \delta \leq \frac{2}{\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 - 1} = C_s \quad (2.48)$$

donde ω_2 es la segunda frecuencia natural del sistema, manteniendo impedido el movimiento Y. El error de modelado δ , se define de forma ligeramente distinta a la (2.15):

$$\delta = \frac{\underline{u}_{\text{discreto}} - \underline{u}_{\text{continuo}}}{\underline{u}_{\text{discreto}}} \quad (2.49)$$

En la tabla 2.1 se compara el error de modelado δ , frente a la cota superior C_s , para distintas frecuencias de excitación y relación de rigideces. La acotación superior en (2.48) no se satisface para $A=306$ y $A \rightarrow \infty$. Se observa que para una frecuencia de excitación fijada, la cota C_s disminuye cuando se aumenta la relación de rigideces A. Mientras que para esa misma frecuencia el error δ aumenta con A. Por tanto, parece que siempre se podrá encontrar un valor de A, por encima del cual la acotación (2.48) no sea válida.

También interesa observar lo siguiente. Normalmente se supone |123| (esta suposición se podría justificar con la acotación (2.48) si ésta fuera válida) que cuanto más retiradas se encuentren las sucesivas frecuencias naturales del sistema real (en particular, la segunda frecuencia respecto a la fundamental), mejor debería funcionar el modelo de un grado de libertad. En el ejemplo presente pasa justamente lo contrario. A medida que aumenta A, también aumenta la relación ω_2/ω (ver tabla 2.2), sin embargo el error empeora.

TABLA 2.1.

Comparación del error de modelado (δ) con la cota superior (C_s). B=4, C=1.75.

$\frac{\omega}{\omega_1}$	δ				C_s			
	A=20	A=100	A=306	A $\rightarrow\infty$	A=20	A=100	A=306	A $\rightarrow\infty$
0.2	0.00169	0.0239	0.0346	0.040	0.035	0.031	0.0203	0.0202
0.5	0.0116	0.1628	0.2227	0.250	0.241	0.214	0.134	0.133
0.8	0.0363	0.4978	0.6017	0.640	0.760	0.659	0.383	0.381
0.9	0.0509	0.6887	0.7806	0.810	1.07	0.915	0.511	0.508

TABLA 2.2.

Relación de frecuencias naturales para distintos valores de A. B=4, C=1.75.

A	y_1	y_2	$y_2/y_1 = \omega_2/\omega_1$
20	2.155	3.285	1.5244
100	3.091	4.965	1.6063
306	3.130	6.245	1.9952
∞	3.141	6.283	2.

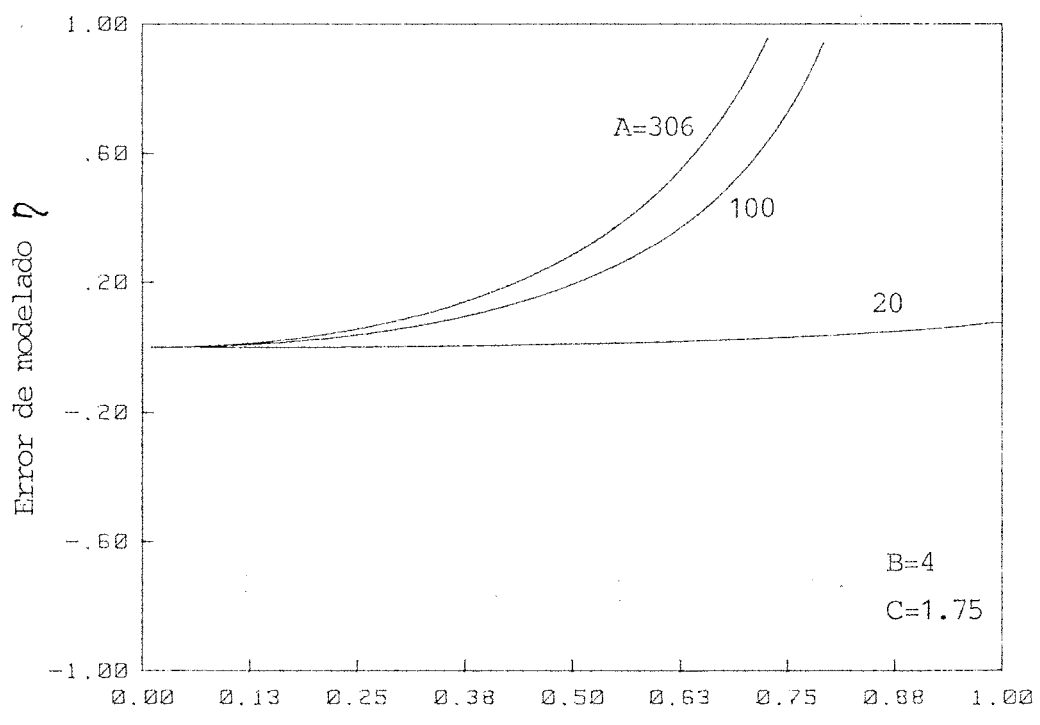
En cuanto al comportamiento límite de la amplitud de la fuerza, es parecido al del movimiento. Para el sistema continuo la expresión (2.33) toma el valor límite:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{F}{k} = y \operatorname{ctg} y - (B + C) y^2 \quad (2.50)$$

En cambio, el valor límite de la amplitud de la fuerza del modelo discreto es infinito para cualquier ω no nula.

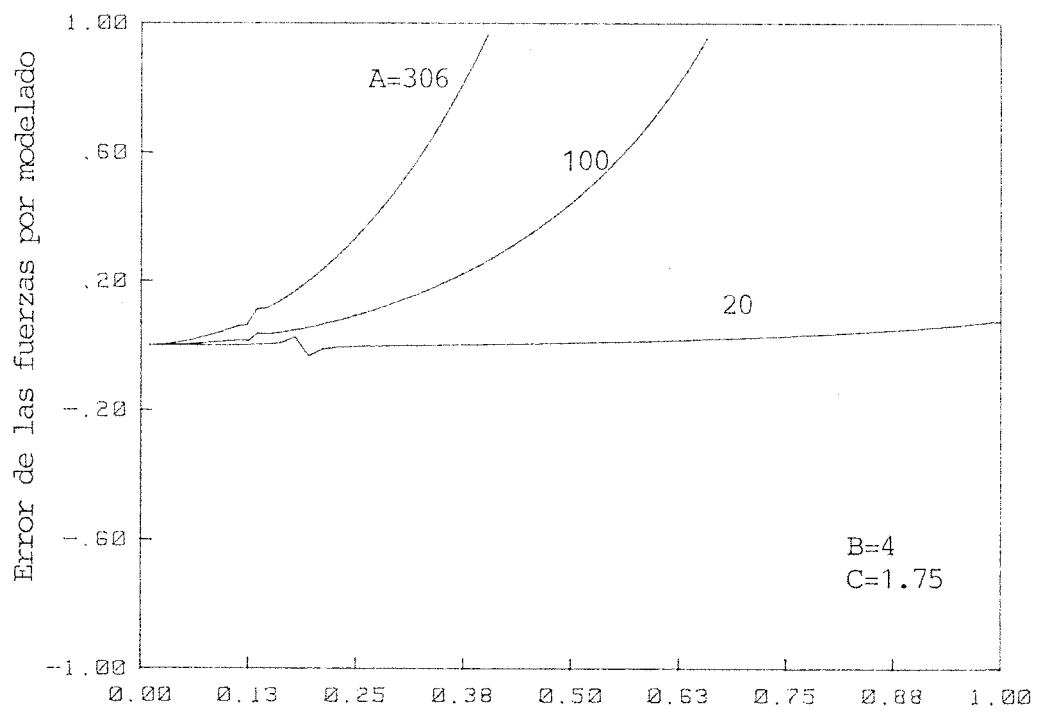
En la figura 2.28 se representan las curvas del error de modelado (η) para la amplitud de la respuesta, y en la 2.29 las correspondientes para la amplitud de la fuerza. En las curvas de esta última figura se observan unas pequeñas distorsiones para frecuencias próximas a cero. Estas frecuencias corresponden a los puntos en que la amplitud de la fuerza se anula, con lo que el denominador en la expresión (2.15) es cero, haciéndose el error infinito. Desde un punto de vista computacional las curvas se obtienen interpolando un número finito de puntos (que no contienen al punto singular), por lo que sólo aparecen esas pequeñas distorsiones. Como, por otro lado, desde un punto de vista físico la singularidad en el error carece de significado, no se ha hecho nada por modificar la situación.

Igual que en el apartado anterior, a continuación, se va a analizar la aproximación de un modelo de elementos finitos. Este modelo (figura 2.30) se obtiene discretizando la barra continua por N elementos iguales con funciones de forma lineales, y matrices de masa consistentes.



Relación de frecuencias y/y_1

Figura 2.28.



Relación de frecuencias y/y_1

Figura 2.29.

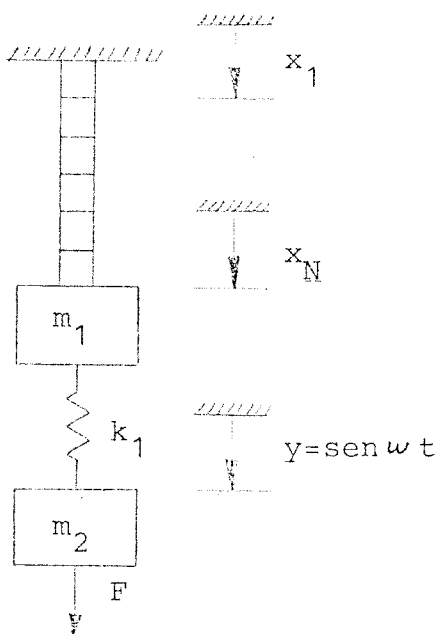


Figura 2.30.

Utilizando la siguiente nomenclatura:

$$\underline{k} = Nk \quad ; \quad a = \frac{k_1}{\underline{k}} \quad ; \quad b = \frac{m_1}{\underline{m}} \quad ;$$

$$\underline{m} = \frac{m}{6N} \quad ; \quad c = \frac{m_2}{\underline{m}} \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{k}{\underline{m}} \quad ; \quad x^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} \quad (2.51)$$

las matrices de masa y rigidez del modelo son:

$$\underline{m} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2+b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \underline{m} \underline{B} \quad (2.52)$$

$$\underline{k} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1+a & -a \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -a & a & \dots \end{bmatrix} = \underline{k} \underline{\tilde{A}} \quad (2.53)$$

En régimen permanente, haciendo $x = \underline{i} \text{ sen } t$:

$$\underline{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \underline{N} \\ \underline{1} \end{bmatrix} - x^2 \underline{\tilde{B}} \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \underline{N} \\ \underline{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \underline{F}/\alpha^2 \underline{m} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Igual que en el apartado anterior, interesa escribir este sistema en forma particionada:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & -a \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{1} \\ \vdots \\ \frac{N-1}{N} \\ \frac{N}{1} \end{bmatrix} - x^2 \left[\begin{array}{c|c} \tilde{B}_{11} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & c \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{1} \\ \vdots \\ \frac{N}{1} \end{bmatrix} = \left. \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \frac{F}{\alpha^2 m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \quad (2.55)$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente al siguiente sistema:

$$\textcircled{1} \quad [A_{11} - x^2 B_{11}] \begin{bmatrix} \frac{1}{1} \\ \frac{2}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{N}{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

junto con la ecuación:

$$\textcircled{2} \quad \frac{F}{\alpha^2 m} = a(1 - N) - cx^2 \quad (2.57)$$

En el apéndice A se ha resuelto analíticamente el sistema (2.56), junto con (2.57), obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\underline{u} \equiv \underline{N} = \frac{A}{N} \cdot \frac{\text{sen } N \theta}{H \text{sen } (1-N)\theta + \left(1 + \frac{A}{N} - 6NBx^2\right) \text{sen } N\theta} \quad (2.58)$$

siendo:

$$H = \sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \quad (2.59)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{x \sqrt{3(2-x^2)}}{1-2x^2} \quad (2.60)$$

$$x^2 = \frac{y^2}{6N^2} \quad (2.61)$$

$$\frac{\underline{F}}{k} = \frac{\underline{F}}{m\beta^2} = A(1-u) - 6y^2 \quad (2.62)$$

donde el valor de \underline{u} en (2.62) viene dado por (2.58).

En las figuras 2.31 a 2.34 se representan las amplitudes del movimiento y de la fuerza, con las correspondientes curvas de error de modelado, discretizando la barra continua mediante un solo elemento. Para $A=20$ las curvas son muy parecidas a las obtenidas con el modelo discreto analizado anteriormente, con una aproximación muy buena. Sin embargo, mientras que en el modelo discreto se observaba un desorbitado aumento del error de modelado al aumentar A , en el modelo de elementos finitos dicho parámetro no tiene influencia en el error de modelado para la mayor parte del rango de frecuencias. Sólo para frecuencias próximas a la fundamental se aprecia la influencia de A sobre el error. En la figura 2.33 se observa una disminución del error al incrementarse la relación de rigideces, anulándose para A tendiendo a infinito, como

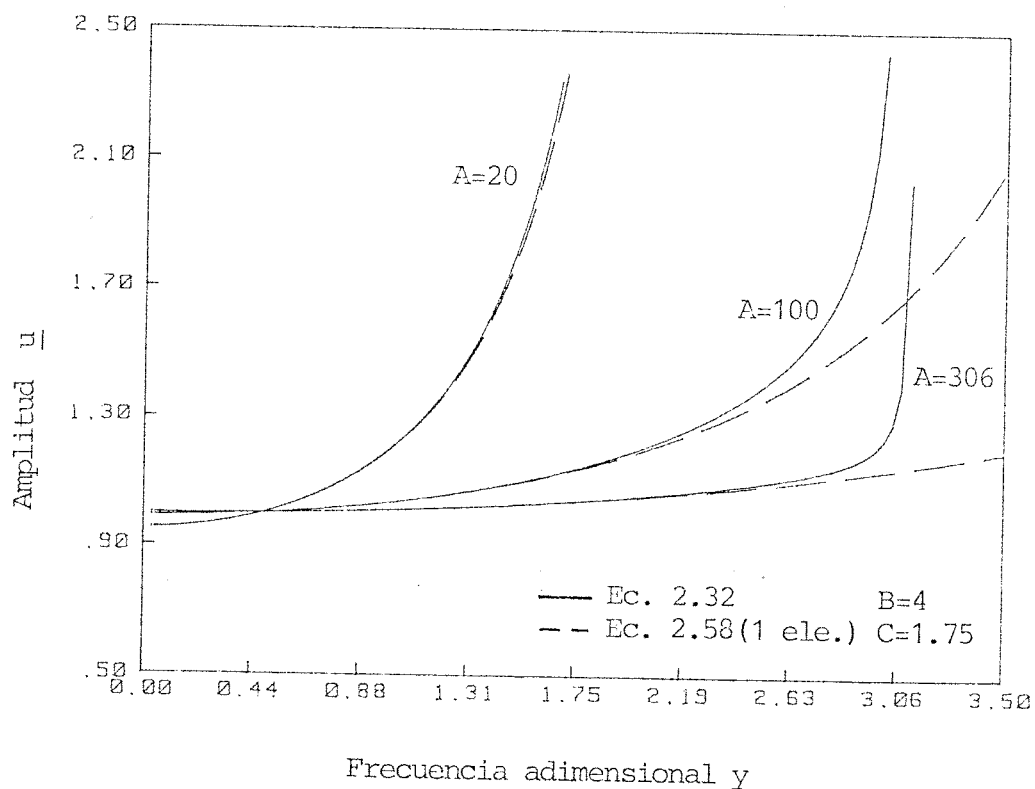


Figura 2.31.

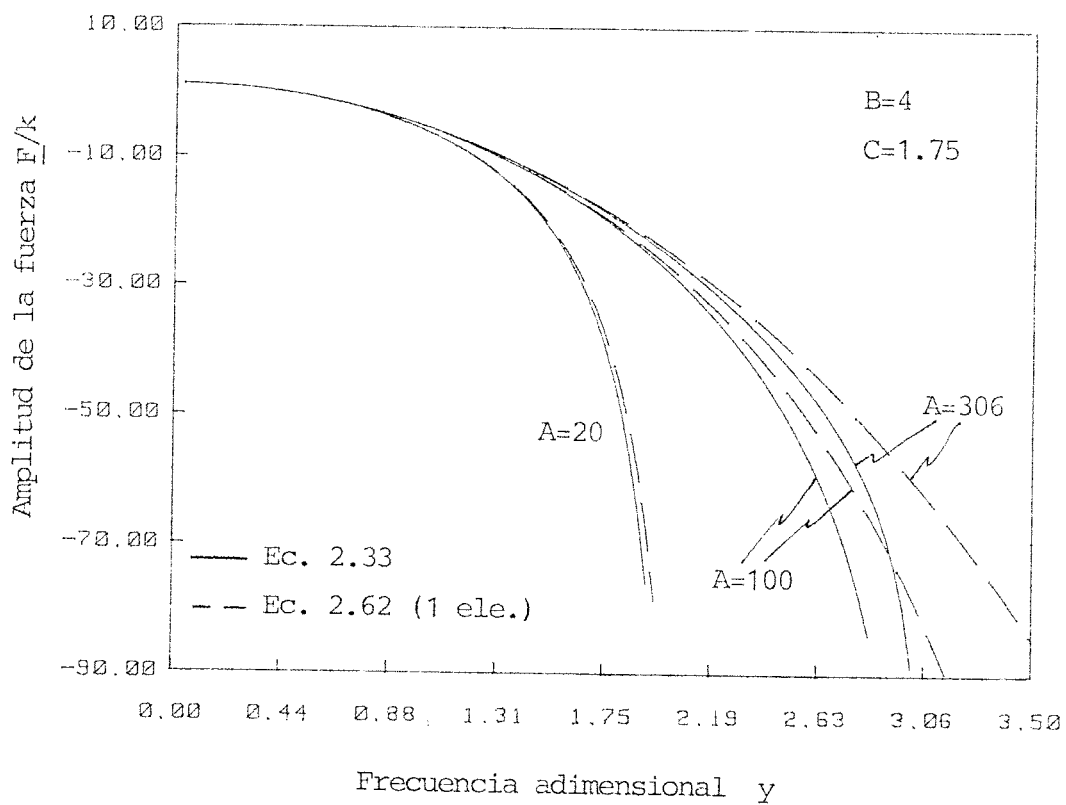


Figura 2.32.

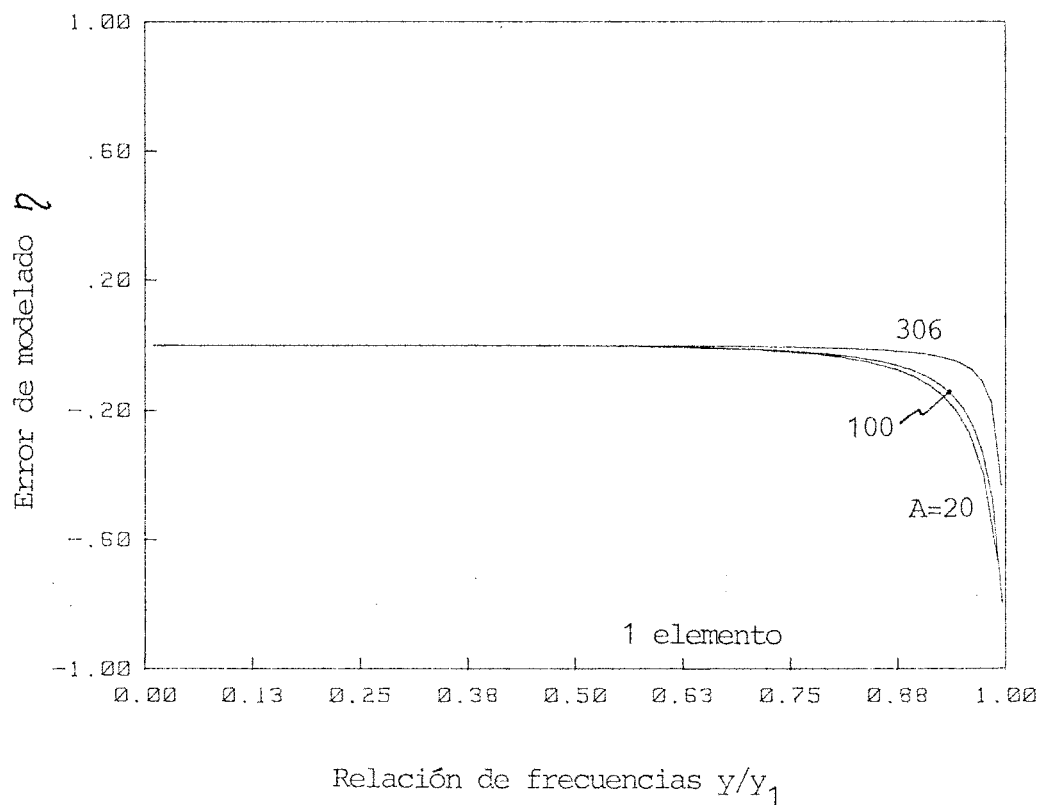


Figura 2.33.

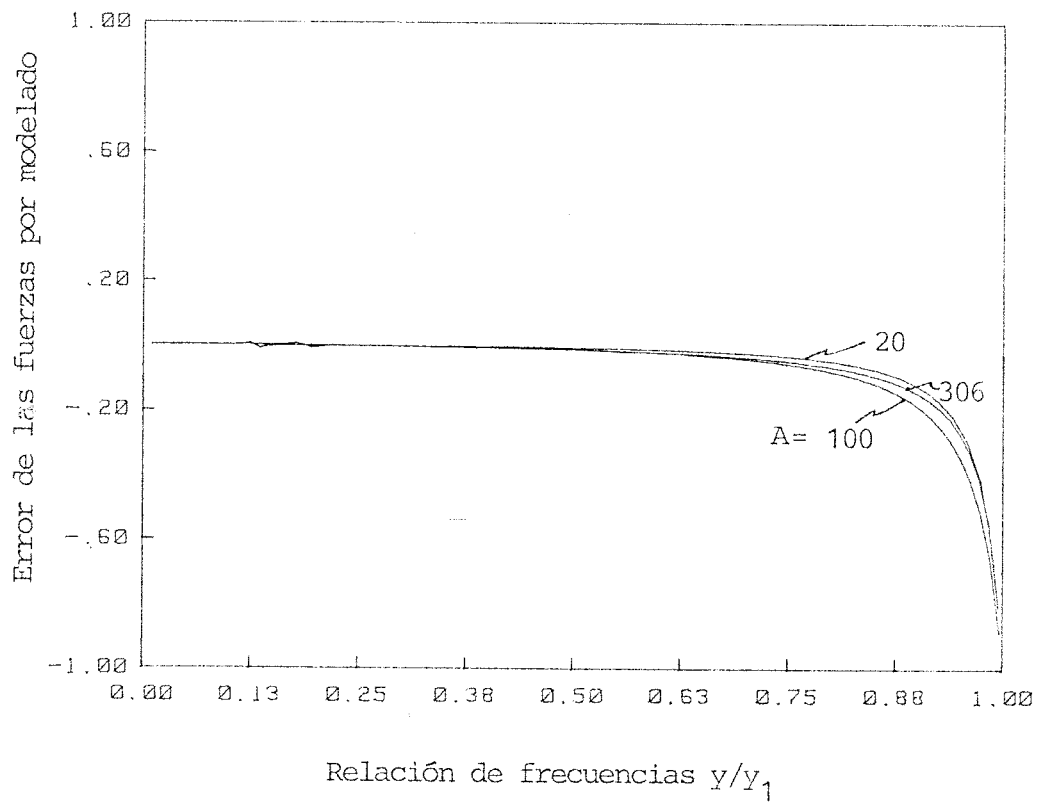


Figura 2.34.

es fácil de constatar tomando límites en (2.58).

La capacidad de predicción de la frecuencia natural para el modelo de un solo elemento es bastante precaria, como se deduce de la figura 2.31. Sin embargo, aumentando el número de elementos se mejora rápidamente, tanto esta predicción como el error de modelado. En las figuras 2.35 a 2.38 se repiten las gráficas de amplitud y de error anteriores, pero utilizando dos elementos. El error se ha reducido aproximadamente en un 50%, en un rango de frecuencias desde cero hasta el 90% de la frecuencia natural del sistema continuo. La mejora en la aproximación a la frecuencia natural es notable, sin dejar de ser pobre la aproximación en sí. Para $N=10$ las curvas del modelo discreto y del continuo prácticamente coinciden hasta la primera frecuencia natural (figuras 2.39 a 2.41).

La influencia de los parámetros B y C en el error de modelado, dentro del campo de variación que se presenta en los mecanismos usuales, es mucho menor que la de A. En el apéndice A se han dispuesto las curvas de comportamiento dinámico para distintos valores de estos parámetros.

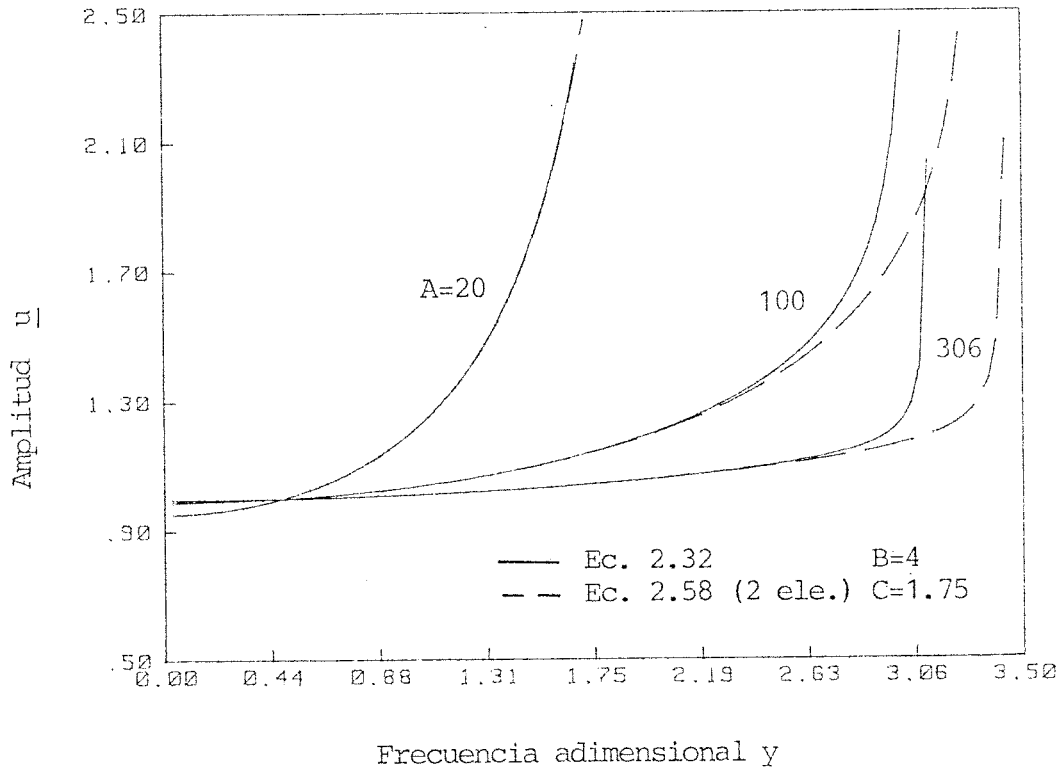


Figura 2.35.

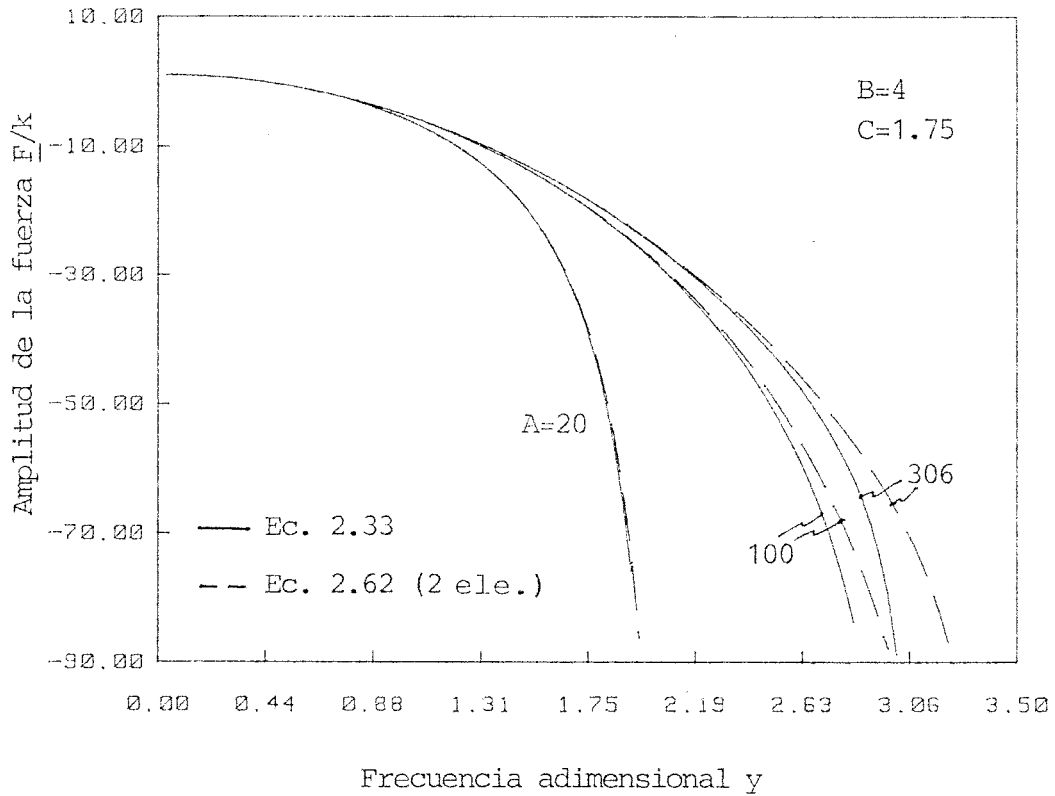


Figura 2.36.

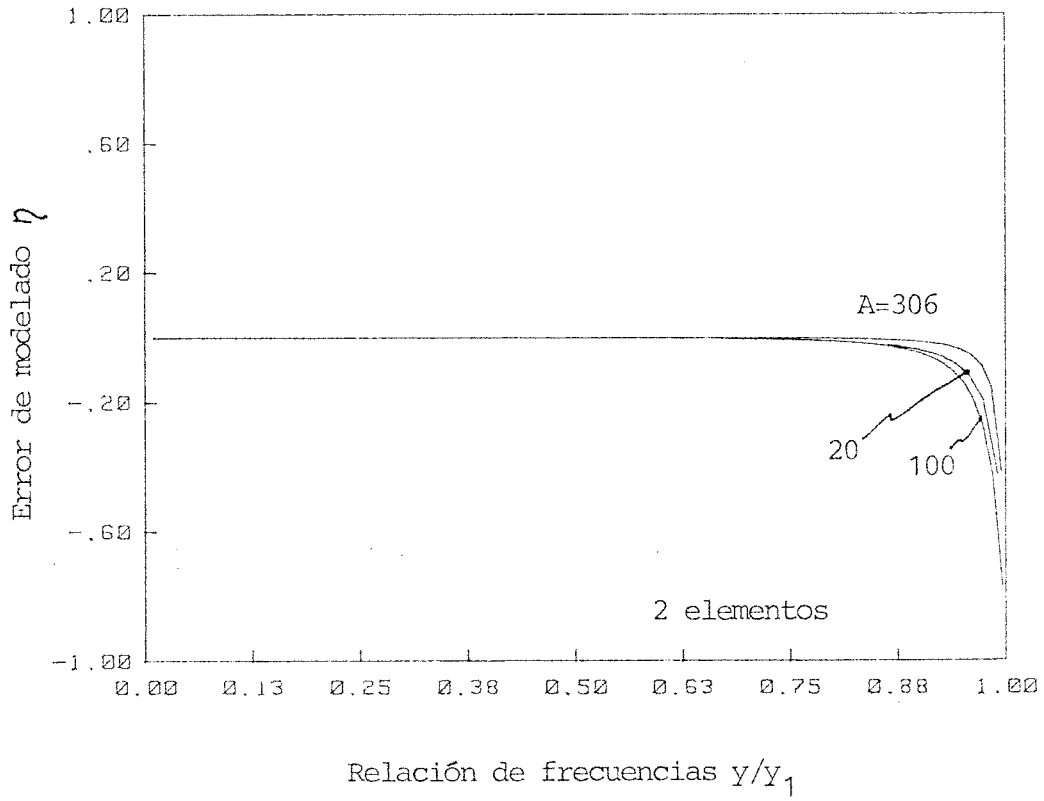


Figura 2.37.

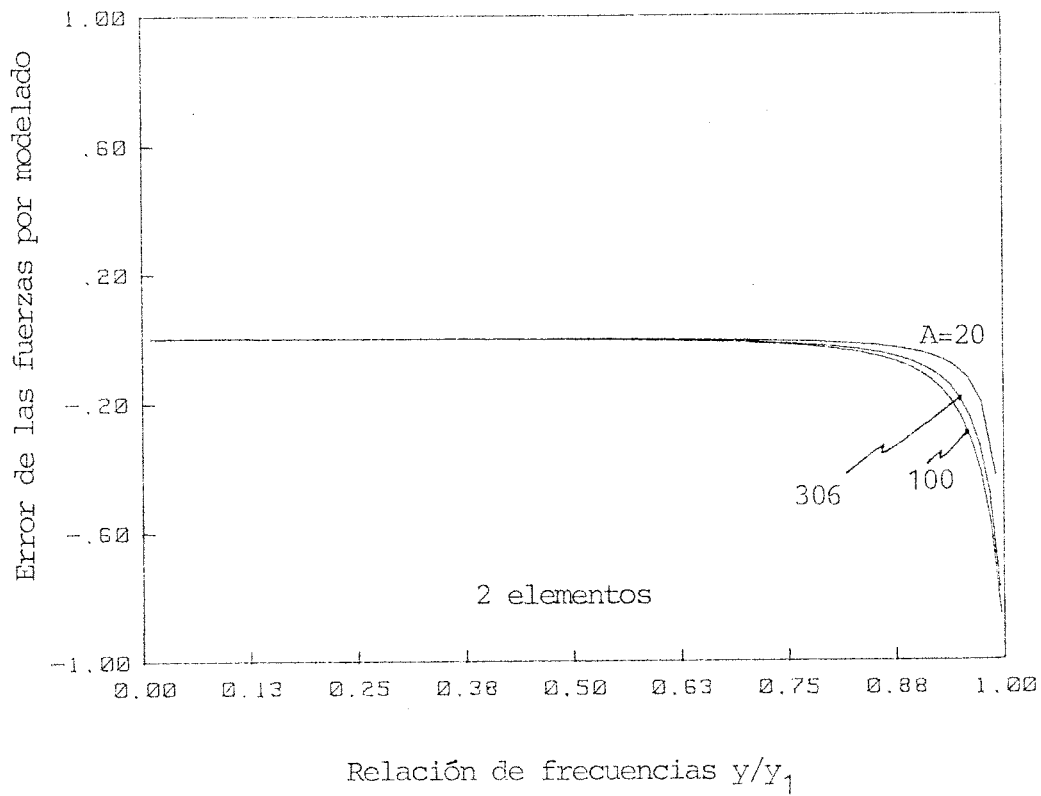


Figura 2.38.

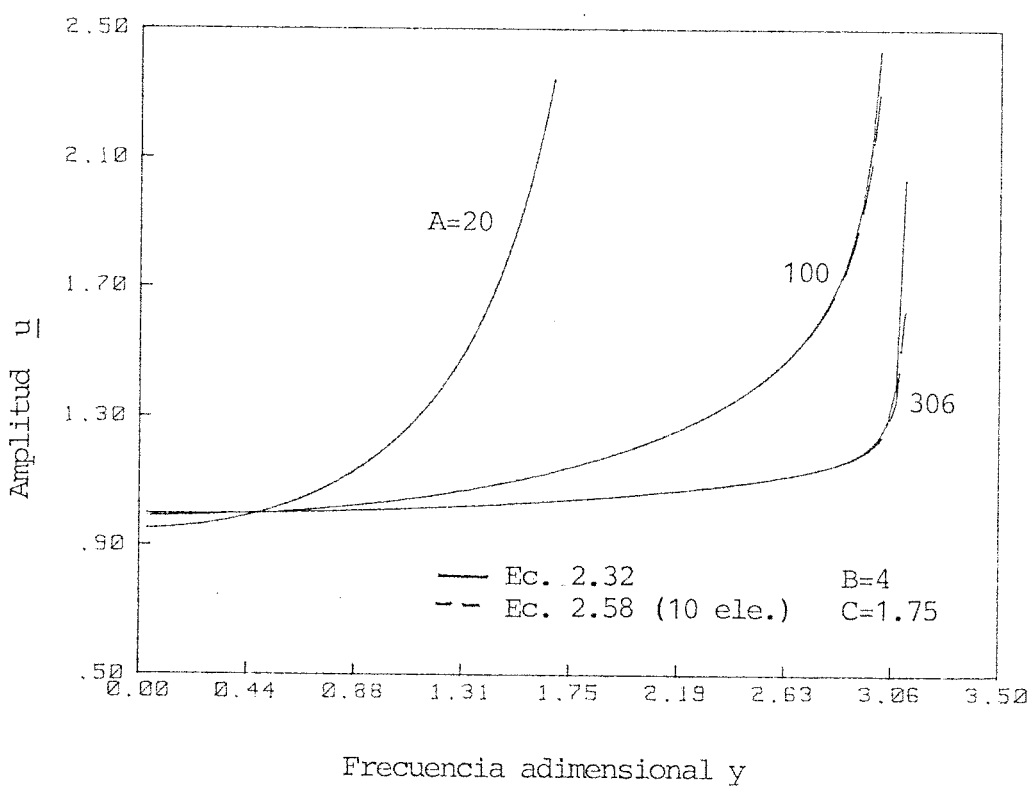


Figura 2.39.

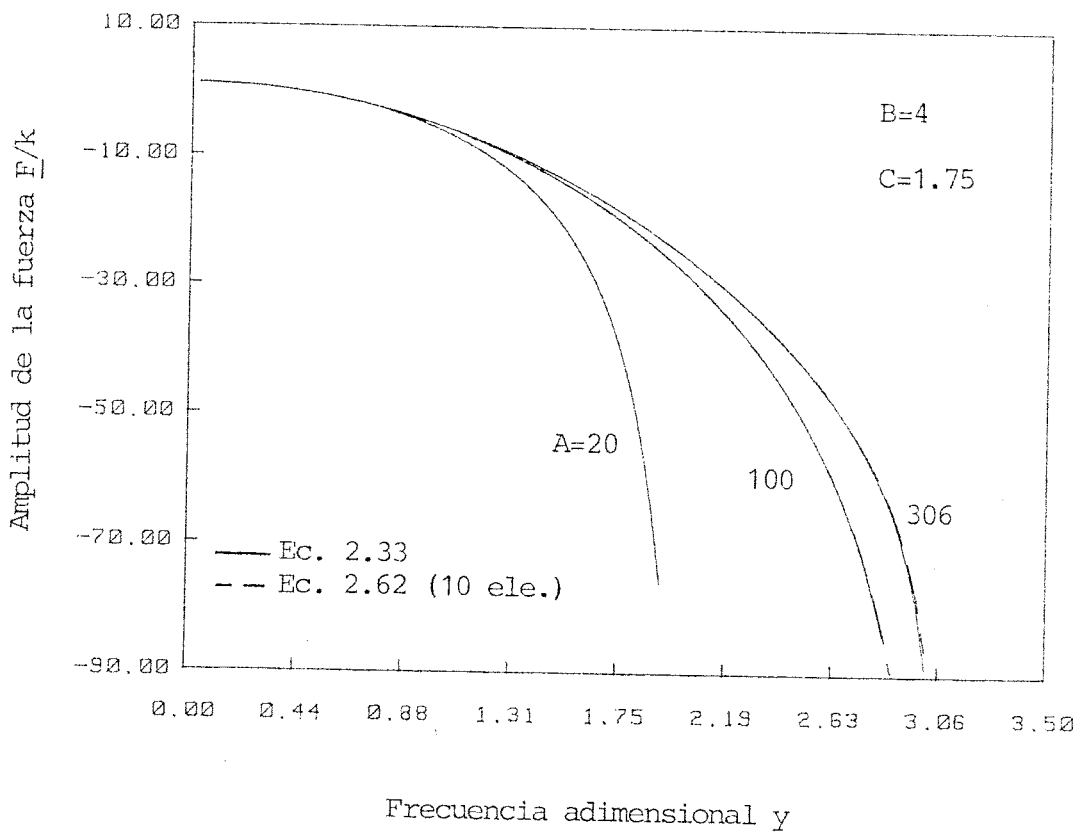


Figura 2.40.

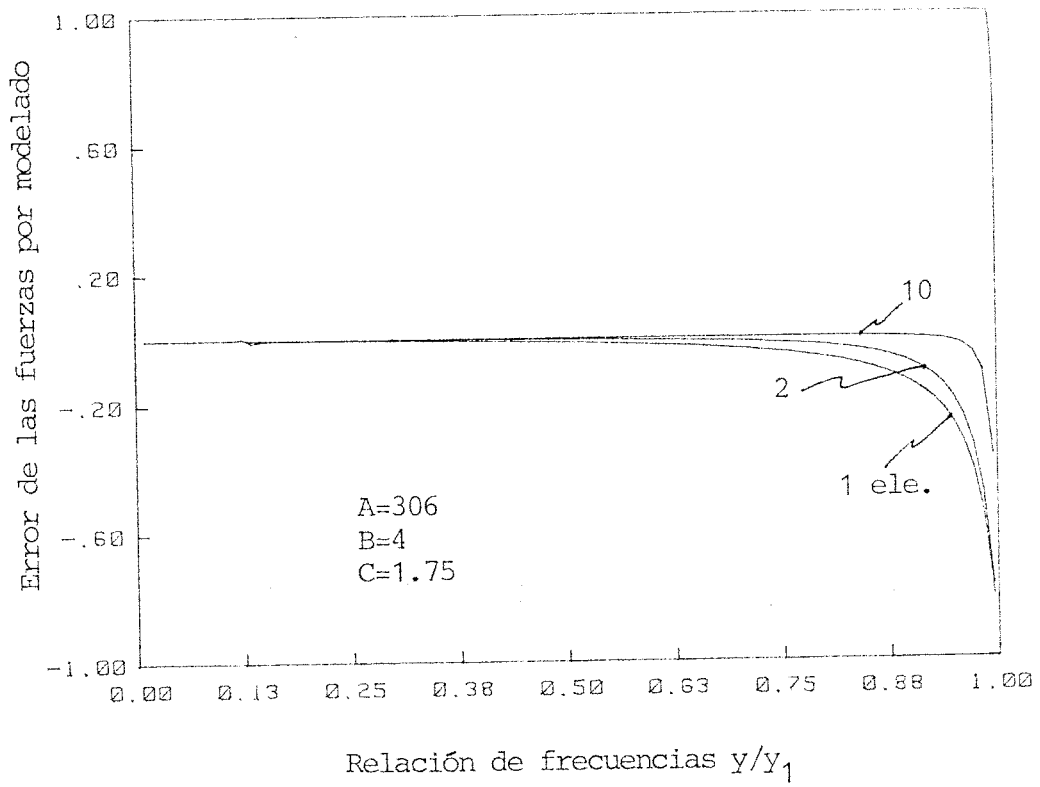


Figura 2.41

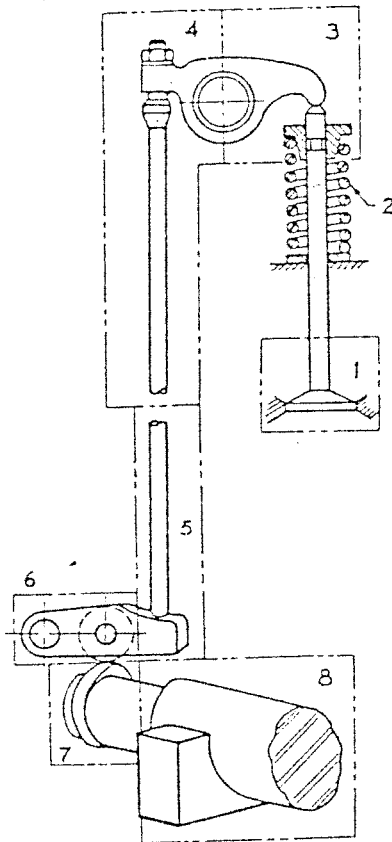


Figura 2.42

2.3. MODELO COMPLEJO

En los apartados anteriores se han utilizado sistemas lo suficientemente simples como para conocer su solución analítica y, poder compararla con la de distintos modelos aproximados. En este apartado se van a analizar distintos modelos de un mecanismo de leva real. Aunque la solución exacta de tal mecanismo no se conozca, se podrán comparar los distintos modelos entre sí, y por otra parte, es razonable suponer que a medida que se aumenta el número de grados de libertad de un modelo su comportamiento sea más próximo al del mecanismo real.

Cualquiera que sea el modelo discreto utilizado, si no se considera el amortiguamiento, la ecuación del movimiento vendrá dada por:

$$\underline{\underline{k}} \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{m}} \ddot{\underline{\underline{x}}} = \underline{\underline{f}} \quad (2.63)$$

donde $\underline{\underline{m}}$ y $\underline{\underline{k}}$ son las matrices de masa y rigidez, y $\underline{\underline{x}}$ y $\underline{\underline{f}}$ los vectores de movimientos y cargas nodales respectivamente. Si se toma como primer elemento de $\underline{\underline{x}}$ el movimiento excitador Y, la primera componente de $\underline{\underline{f}}$ será la fuerza excitadora F, siendo nulas todas las demás. En régimen permanente, para un movimiento excitador Y armónico de amplitud unidad, agrupando las incógnitas en un mismo miembro la ecuación (2.63) adopta la forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & \underline{\underline{k}}_{12} - \omega^2 \underline{\underline{m}}_{12} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{k}}_{22} - \omega^2 \underline{\underline{m}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{k}}_{11} + \omega^2 \underline{\underline{m}}_{11} \\ -\underline{\underline{k}}_{21} + \omega^2 \underline{\underline{m}}_{21} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

donde \underline{F} es la amplitud de la fuerza excitadora, \underline{x} el vector de amplitudes de movimiento de los distintos grados de libertad, y \tilde{K}_{ij} y \tilde{m}_{ij} los elementos de las matrices de rigidez y masa respectivamente, particionadas por los elementos de la primera fila y columna.

Resolviendo el sistema (2.64) en función de ω se obtienen las curvas de respuesta en frecuencia del modelo.

En la figura 2.42 se representa un mecanismo de leva de un motor de automóvil tomado de la Ref. [31]. Se han construido seis modelos distintos de dicho mecanismo. Las características mecánicas de los componentes del mecanismo, así como los detalles de construcción de los modelos se han recogido en el apéndice B, dándose aquí sólo una definición somera de dichos modelos:

modelo 1.- Modelo de elementos finitos. Cada balancín se modela por dos elementos a flexión, el empujador por uno que sólo trabaja a esfuerzos axiales, e igualmente el muelle de precarga se discretiza por seis de dichos elementos. Este modelo se considera como referencia de comparación.

modelo 2.- Igual que el anterior, salvo que el muelle se aproxima por un sólo elemento.

modelo 3.- Modelo de masas concentradas y resortes ideales. La masa del muelle de precarga se concentra en siete puntos.

modelo 4.- Igual que el anterior, pero la masa del muelle se concentra sólo en sus extremos.

modelo 5.- Modelo de elementos finitos con un grado de libertad. Se toma como función de forma la deformada estática del modelo 1.

modelo 6.- Modelo W, tomando como frecuencia natural la del modelo 1.

En todos los casos se considerará rígido el árbol de leva, así como sus apoyos. Igualmente se considerarán rígidos los ejes y apoyos de los balancines.

En la tabla 2.3 se recogen las frecuencias naturales predichas por los seis modelos al modificar los valores de la rigidez del muelle de precarga. Las frecuencias están adimensionadas por $\sqrt{k/m}$, siendo k y m la rigidez y masa del muelle de precarga sin modificar.

TABLA 2.3.

Frecuencias naturales para distintos valores de la rigidez del muelle de precarga.

Rigidez = k, k	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 4	Mod. 5	Mod. 6
1	3.2	6.9	3.1	6.8	6.9	3.2
10	6.9	6.9	6.8	6.9	7.0	6.9
100	7.5	7.5	7.5	7.5	7.6	7.5
1000	12.0	12.0	11.8	11.8	12.2	12.0

Como no se conoce el comportamiento dinámico del mecanismo real, se ha considerado que el modelo 1 es el que mejor lo aproxima. Tomando dicho modelo como referencia, se han comparado todos los demás con él, definiéndose el error de modelado de la respuesta por:

$$\eta = \frac{|u|_{\text{modelo}} - |u|_{\text{referencia}}}{|u|_{\text{referencia}}} \quad (2.65)$$

En las figuras 2.43 a 2.46 se han representado las curvas de error de modelado en frecuencia de la respuesta para distintos valores de la rigidez del muelle de precarga. Igualmente, en las figuras 2.47 a 2.50 se representan las correspondientes curvas de error para la fuerza excitadora.

Del examen de dichas figuras se constata una clara diferencia entre el comportamiento del modelo 6 y el resto de los modelos. Para el modelo 6 el error crece monótonamente con la frecuencia a un ritmo tal, que se hace inadmisibile para frecuencias bastante retiradas de la frecuencia natural. Para el resto de los modelos, aunque existen diferencias relativas entre ellos que pueden ser significativas, se puede considerar que producen un error de modelado insignificante hasta frecuencias muy próximas a la fundamental. Esta diferencia se hace menos acusada a medida que aumenta la rigidez del muelle de precarga, lo cual está de acuerdo con los resultados del apartado anterior.

En cuanto a la capacidad de predicción de la frecuencia natural de los distintos modelos, la tabla 2.3 es muy significativa. Para valores adimensionales de la rigidez del muelle de precarga superiores a 10, todos los modelos predicen aproximadamente la misma frecuencia natural. Sin embargo, para la rigidez igual a 1, los modelos se pueden clasificar en dos

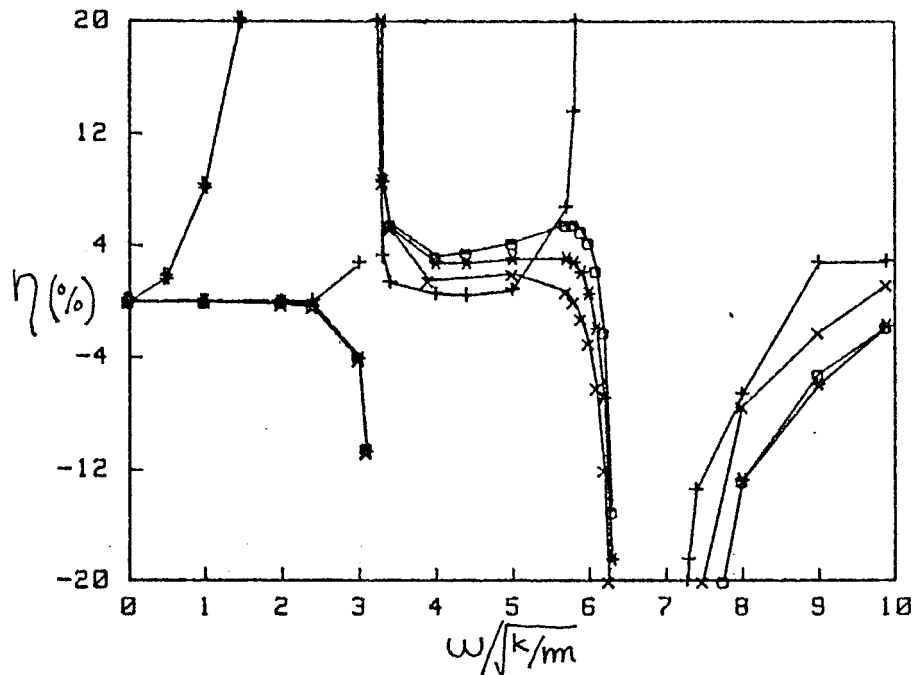


Figura 2.43. Error de modelado de la respuesta. $K' = 1$.
 Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: o; Mod. 5: x;
 Mod. 6: #.

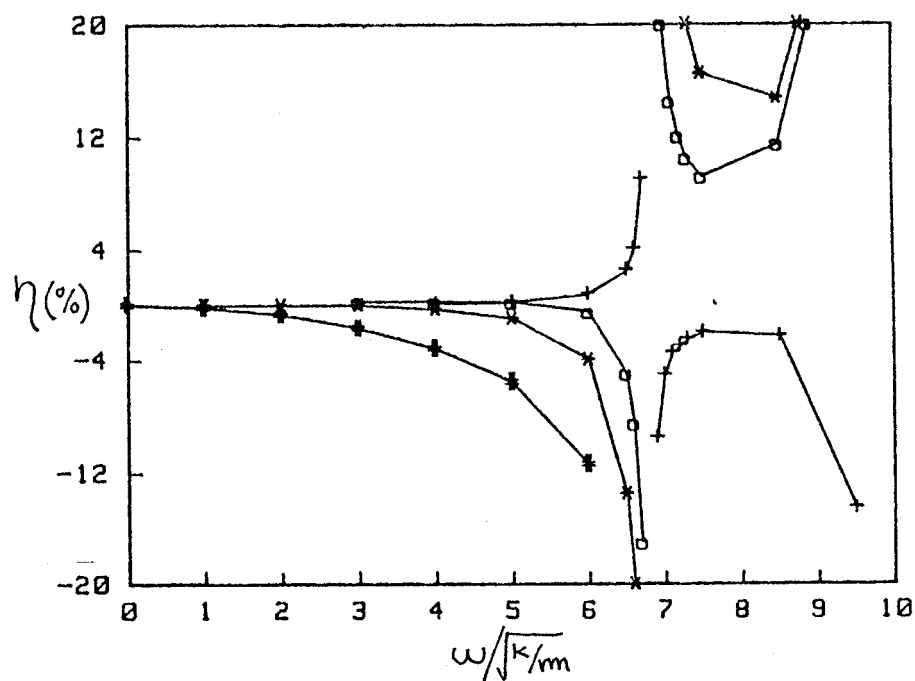


Figura 2.44. Error de modelado de la respuesta. $K' = 10$.
 Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: o; Mod. 5: x;
 Mod. 6: #.

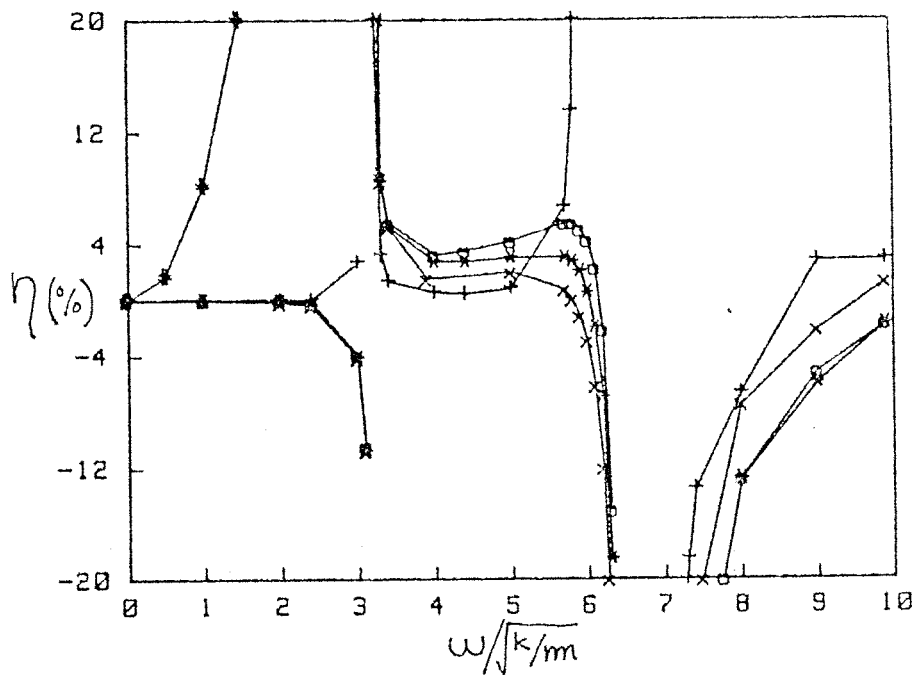


Figura 2.43. Error de modelado de la respuesta. $K' = 1$.
 Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: o; Mod. 5: x;
 Mod. 6: #.

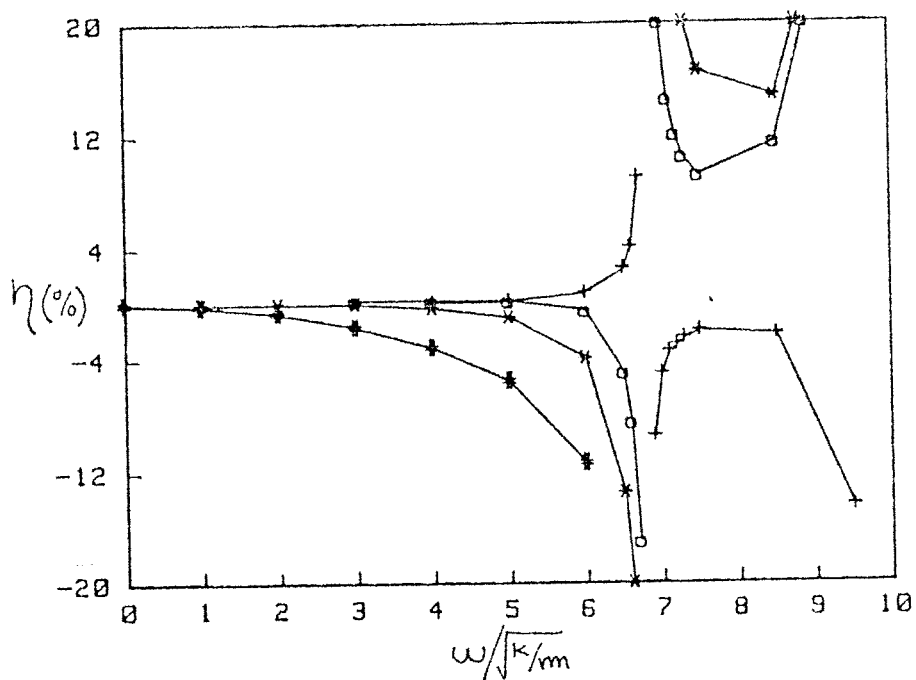


Figura 2.44. Error de modelado de la respuesta. $K' = 10$.
 Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: o; Mod. 5: x;
 Mod. 6: #.

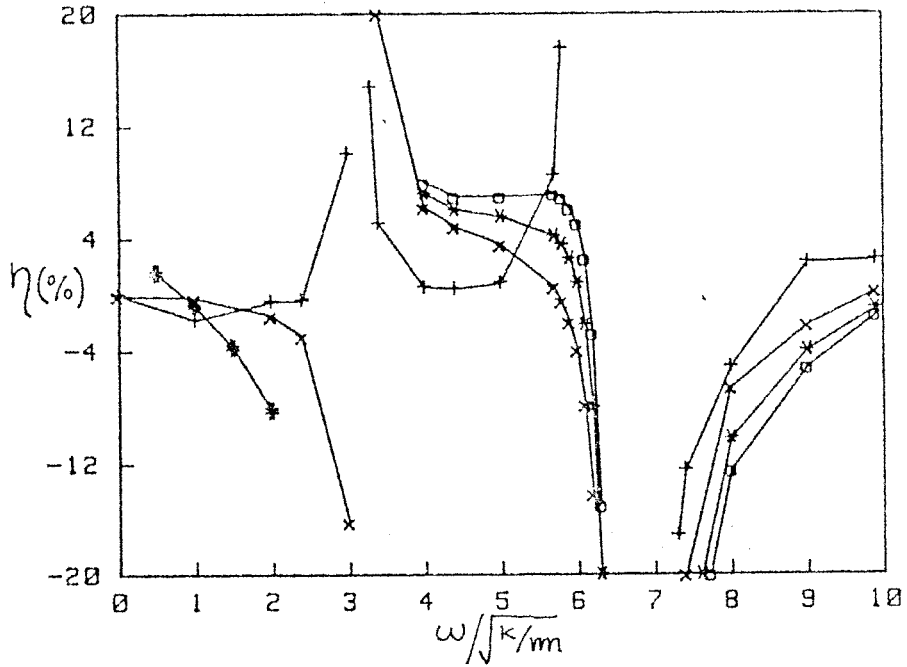


Figura 2.47. Error de modelado de la fuerza excitadora.
 $K' = 1$. Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: 0;
 Mod. 5: x; Mod. 6: #.

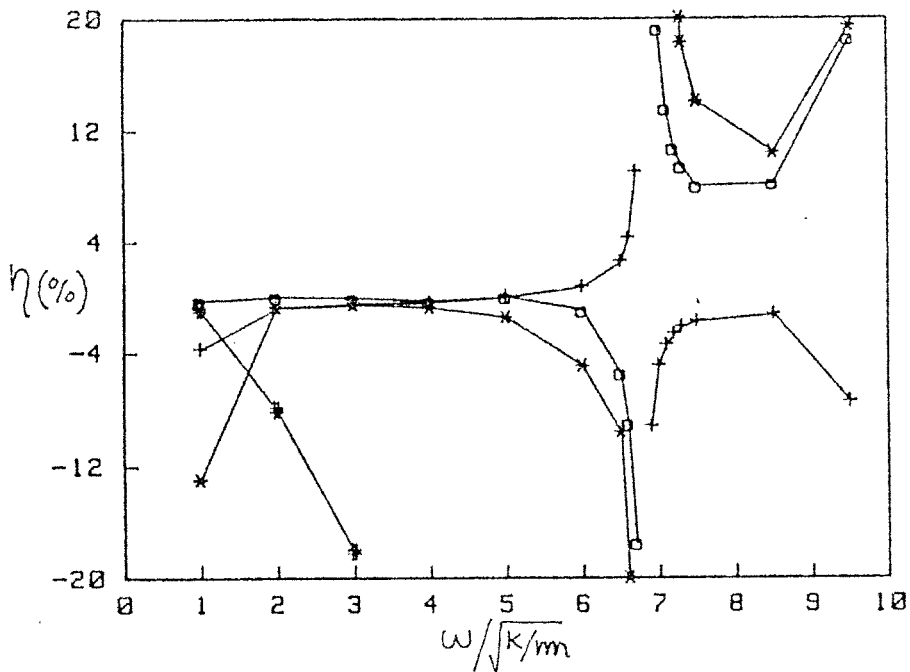


Figura 2.48. Error de modelado de la fuerza excitadora.
 $K' = 10$. Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: 0;
 Mod. 5: x; Mod. 6: #.

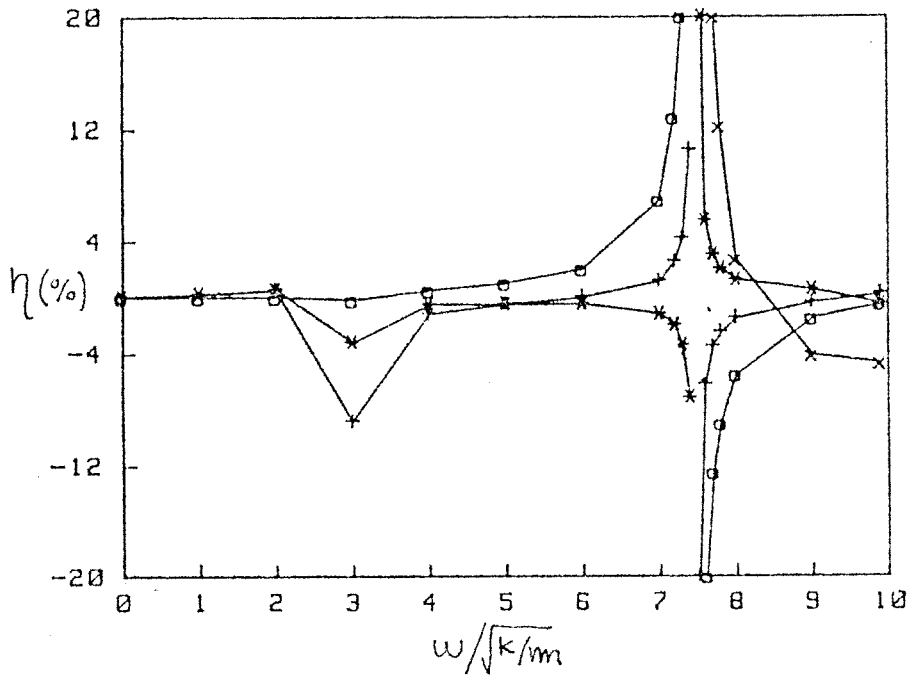


Figura 2.49. Error de modelado de la fuerza excitadora.
 $K' = 100$. Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: 0;
 Mod. 5: x; Mod. 6: #.

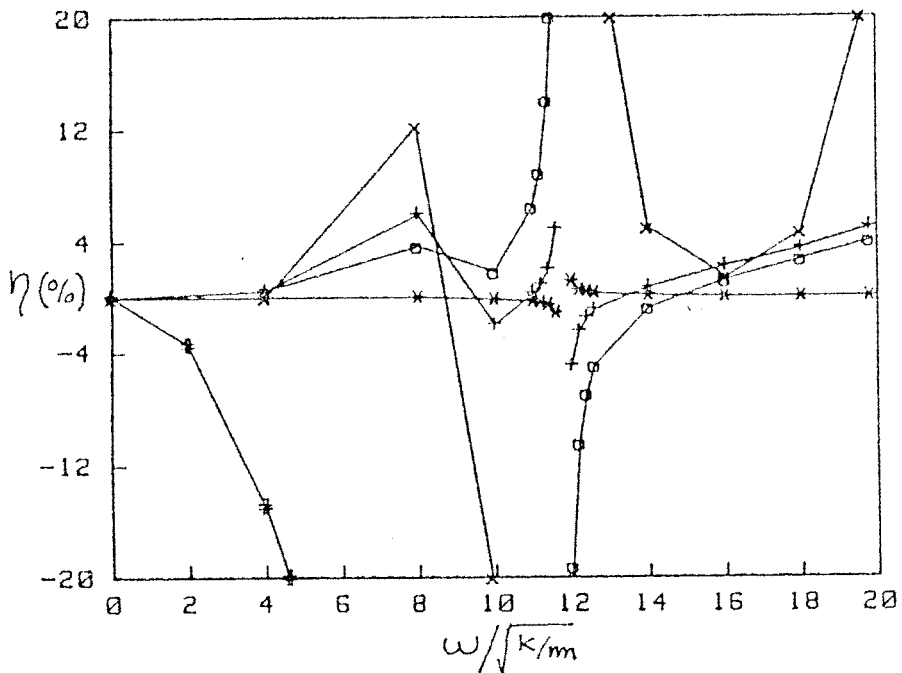


Figura 2.50. Error de modelado de la fuerza excitadora.
 $K' = 1000$. Mod. 2: *; Mod. 3: +; Mod. 4: 0;
 Mod. 5: x; Mod. 6: #.

grupos, en función de la frecuencia natural que predicen. El primer grupo, formado por los modelos 2, 4 y 5 predice una frecuencia natural que prácticamente no varía al pasar la rigidez del muelle de precarga de 10 a 1, mientras que en el segundo grupo se produce una disminución importante de la frecuencia natural en la susodicha disminución de la rigidez.

Salvo para el modelo 6, que por definición tiene la misma frecuencia natural que el 1, la clasificación anterior coincide con la que se obtiene con el criterio de dividir los modelos entre aquellos cuyo muelle de precarga tiene grados de libertad internos, y aquellos cuyo muelle sólo posee los dos grados de libertad de sus extremos.

El argumento que sigue podría establecer una relación causal en la coincidencia anterior. El comportamiento vibratorio de un sistema está caracterizado por la coexistencia de fuerzas elásticas y de inercia de órdenes de magnitud similares. Como las fuerzas de inercia son proporcionales al cuadrado de la frecuencia, de lo anterior se deduce que la frecuencia natural de un sistema en que la distribución de masas entre sus partes es del mismo orden de magnitud (pero no la de rigideces) vendría controlada por la de la parte más flexible. En el mecanismo que nos ocupa, dicha parte es el muelle de precarga. Ahora bien, en los modelos 2, 4 y 5 dicho muelle no tiene posibilidad de vibrar con independencia del resto del modelo, es decir como biempotrado, y no podrán reproducir correctamente la frecuencia natural real. Los modelos del segundo grupo si poseen dicha posibilidad de vibración, lo cual justifica la diferencia de valores observada en la tabla 2.3.

En el caso de que la frecuencia natural del muelle de precarga controle el comportamiento del mecanismo, la frecuencia natural del modelo no debe modificarse apreciablemente

si se modifican simultáneamente la rigidez y la masa del muelle, de manera que su frecuencia natural permanezca invariada. Esto se observa en la tabla 2.4, donde sólo se ha tabulado un modelo de cada uno de los dos grupos antes señalados.

TABLA 2.4.

Frecuencias naturales para distintos valores de la rigidez y masa del muelle de precarga.

$\frac{\text{Rigidez}}{k} = k'$	$\frac{\text{Masa}}{m} = m'$	Modelo 1	Modelo 2	Muelle biempotrado $\pi \sqrt{k'/m'}$
1	1	3.2	6.9	π
2	1	4.5	6.9	4.44
2	2	3.2	6.8	π
10	5	4.5	6.3	4.44

También se observa en esta tabla que las frecuencias naturales del modelo 1 están muy próximas a las del muelle biempotrado. Evidentemente, cuando la frecuencia natural del muelle tiende a cero la frecuencia natural del mecanismo tiende a la del muelle, ya que el resto del mecanismo se hace rígido. Como se trata de un comportamiento asintótico, explica la proximidad de frecuencias antes mencionadas. Si la frecuencia del muelle aumenta, la del modelo se separa de ella, como se deduce de la tabla 2.3 para $k' \gg 10$.

Del análisis anterior se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- El modelo 6 se debe rechazar.

- Cualquiera de los otros modelos es aceptable siempre que la frecuencia excitadora sea inferior a la frecuencia fundamental del mecanismo real. No obstante, si la frecuencia del muelle de precarga biempotrado es suficientemente pequeña, algunos de estos modelos (los del primer grupo en la clasificación de arriba) no predicen correctamente la frecuencia fundamental real. Por tanto, dado un determinado modelo, se plantea el problema de elucidar la validez de la frecuencia natural que predice. Para modelos de elementos finitos, la solución clásica a tal problema consiste en aumentar el número de elementos hasta que se estabilice el valor de la frecuencia natural. En general, se aumentaría el número de grados de libertad del modelo, particularmente en el muelle de precarga.

Algunas veces es posible asegurar la invalidez de un modelo sin tener que recurrir a la construcción de otro más complejo. Esto se hace utilizando el teorema de Rayleigh-Courant-Fischer [5, 34], que establece que al introducir una ligadura lineal homogénea en un sistema vibrante, las frecuencias naturales del nuevo sistema separan (por exceso) a las del sistema primitivo. En el presente caso la ligadura va a consistir en impedir el movimiento del extremo del muelle de precarga. De esta forma el nuevo sistema consta, en realidad, de dos subsistemas independientes: el muelle de precarga biempotrado y el resto del mecanismo. La frecuencia fundamental del nuevo sistema será la fundamental del muelle de precarga biempotrado, que es fácilmente calculable. Según el teorema anterior esta frecuencia debe ser una cota superior de la frecuencia fundamental del mecanismo.

Utilizando este resultado en la tabla 2.4 se deduce que el modelo 2 debe ser rechazado. Pero por el mismo motivo el modelo 1 de dicha tabla debería ser rechazado porque, aun-

que por muy poco, la frecuencia natural que predice excede a la del muelle biempotrado. Sin embargo, y debido a que esta diferencia de frecuencias es pequeña, el modelo puede ser válido, como muestra el siguiente razonamiento: Como es sabido, el método de los elementos finitos siempre predice valores por exceso de la frecuencia natural. Sea ϵ el error de un modelo "válido" de elementos finitos, es decir tal que ϵ se considera "pequeño". Por otra parte, sea δ la diferencia entre la frecuencia fundamental del mecanismo y la del muelle biempotrado. Entonces si $\delta < \epsilon$ nos encontramos ante un modelo "válido" que infringe el teorema de Rayleigh-Courant-Fischer.

Finalmente, añadir que el proceso de cálculo de los coeficientes de las matrices de masa y rigidez del modelo 5 es muy prolijo, a la vez que dichas matrices están muy mal condicionadas. Como consecuencia, pequeños errores en el cálculo de los coeficientes de las matrices (por ejemplo, de redondeo) influyen considerablemente en los resultados.

CAPITULO 3: SINTESIS MEDIANTE SERIES TRIGONOMETRICAS FINITAS

3.1. INTRODUCCION

Este capítulo está dedicado al segundo objetivo de esta tesis: el desarrollo de un procedimiento de síntesis dinámica de levas en mecanismos de alta velocidad, eludiendo el uso de la hipótesis h_1 .

En el capítulo 1 se desarrollaron una serie de argumentos que aportaban unas líneas directrices sobre el modo de abordar el problema: La interpretación de la respuesta en términos de vibraciones en régimen permanente, concibiendo la síntesis como la determinación del perfil completo, frente a los métodos de diseño por segmentos.

De aquí se deduce una importante limitación al campo de aplicación del método: La velocidad de giro de la leva debe ser constante, de modo que el movimiento excitador sea periódico, repitiéndose cada revolución completa de la leva. Esta limitación prohíbe el empleo de los procedimientos de síntesis que se desarrollan aquí a ciertos mecanismos de movimiento intermitente tales como, por ejemplo, los empleados en ciertos interruptores de alta tensión para ejecutar las maniobras de apertura y cierre del circuito eléctrico.

No obstante, la limitación anterior no impide el diseño de mecanismos que funcionan en toda una gama de velocidades, siempre que, una vez establecida una velocidad, ésta permanezca constante.

La mayoría de los métodos actuales de síntesis de perfiles de leva se basan en plantear el problema desde el punto de vista matemático, como uno de optimización o minimización. Puesto que el espacio al que pertenece la solución es de dimensión infinita, el problema pertenece al dominio del cálculo de variaciones, y su solución analítica es extre-

madamente difícil.

Por tanto, se impone una limitación al espacio de diseño o de funciones admisibles. En el presente caso, en que las funciones admisibles son funciones periódicas del mismo periodo, aparece una solución bastante obvia: Tomar como espacio de diseño el conjunto de los polinomios trigonométricos. La dimensión del espacio viene dada por el número de armónicos de los polinomios, y al crecer éstos indefinidamente se reproduce el espacio original.

De esta manera, el problema del cálculo de variaciones se transforma en uno de optimización paramétrica sin restricciones.

Pero la utilización de polinomios trigonométricos tiene otra ventaja muy importante. Permite expresar explícitamente la respuesta, en función de los coeficientes del polinomio trigonométrico excitador, cuando se utiliza un modelo genérico lineal con un número arbitrario de grados de libertad. Esto se hace en el apartado 3.2, facilitando notablemente la formulación de los problemas de optimización que se plantean en los apartados siguientes.

Utilizando una función objetivo adecuada y aprovechando el utillaje matemático disponible en el campo de los desarrollos de Fourier, se pueden obtener expresiones analíticas explícitas del perfil de la leva (Cf. 3.4.2).

Por último, la utilización de polinomios trigonométricos permite conocer a priori el contenido en frecuencia de la excitación, lo cual es necesario para asegurar la validez del modelo utilizado (capítulo 2), así como para prever posibles resonancias si se conocen las frecuencias naturales del mecanismo real. Esta última ventaja ha sido utilizada pro-

vechosamente por De Fraire y Noortgate [115] en el diseño de un perfil de leva sin tener que recurrir a ningún modelo dinámico.

3.2. OBTENCION DE LA RESPUESTA PARA UN PERFIL DE LEVA FORMADO POR UNA SERIE TRIGONOMETRICA FINITA

Utilizando la modelización descrita en el capítulo 2, las ecuaciones del movimiento son:

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\ddot{x}} + \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\dot{x}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} c_1 \ddot{y} + k_1 y \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{F}(t) \quad (3.1)$$

Si la velocidad ω de giro de la leva es constante, las derivadas temporales se pueden transformar fácilmente en derivadas respecto al ángulo θ girado por la leva:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \omega y'(\theta) \\ \dot{x}(t) &= \omega x'(\theta) \\ \ddot{x}(t) &= \omega^2 x''(\theta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

De modo que (3.1) toma la forma:

$$\omega^2 \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{x}'' + \omega \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{x}' + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F}(\theta) \quad (3.3)$$

El sistema (3.3) puede ser resuelto utilizando el método de superposición modal. Así, aplicando la transformación:

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\Phi} \underset{\sim}{u} \quad (3.4)$$

donde $\underset{\sim}{\Phi}$ es la matriz modal, se obtiene el sistema desacoplado:

$$u_j'' + 2\zeta_j \frac{\omega_j}{\omega} u_j' + \frac{\omega_j^2}{\omega^2} u_j = \phi_{1j} \left(\frac{c_1}{\omega} y' + \frac{k_1}{\omega^2} y \right); j=1,2,\dots,N \quad (3.5)$$

siendo N el número de grados de libertad y ξ_j y ω_j la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural del j -ésimo modo.

Si el desplazamiento $y(\theta)$ de la leva viene dado por un desarrollo trigonométrico finito entonces, debido a la linealidad del sistema, la respuesta de cualquier modo u_j ó grado de libertad x_p consistirá también en un desarrollo trigonométrico con el mismo contenido en frecuencia.

$$y(\theta) = \sum_{n=0}^m (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \quad (3.6)$$

Cada una de las ecuaciones (3.5) puede ser resuelta tomando su transformada de Fourier. La transformada del movimiento de la leva es:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=0}^m (a_n - i b_n) \delta(\Omega - n) = \sum_{n=0}^m Y_n \delta(\Omega - n) \quad (3.7)$$

Las transformadas de $u_j(\theta)$ y $x_p(\theta)$ son, respectivamente:

$$\begin{aligned} U_j(\Omega) &= \sum_{n=0}^m U_{jn} \delta(\Omega - n) \\ X_p(\Omega) &= \sum_{n=0}^m X_{pn} \delta(\Omega - n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando la transformada de Fourier en la ecuación (3.5), se obtiene un sumatorio correspondiente a los distintos armónicos. Para cada uno de ellos se puede escribir:

$$-n^2 U_{jn} + i 2n \xi_j \frac{\omega_j}{\omega} U_{jn} + \frac{\omega_j^2}{\omega^2} U_{jn} = \phi_{ij} \left(i n \frac{c_1}{\omega} + \frac{k_1}{\omega^2} \right) Y_n \quad (3.9)$$

de donde:

$$U_{jn} = \frac{\frac{k_1}{\omega^2} + in \frac{c_1}{\omega}}{\frac{\omega_j^2}{\omega^2} - n^2 + i 2 n \xi_j \frac{\omega_j}{\omega}} \Phi_{1j} Y_n = (A_{jn} + i B_{jn}) \quad (3.10)$$

siendo:

$$A_{jn} = \frac{k_1 \omega_j^2 - k_1 n^2 \omega^2 + 2 \xi_j n^2 \omega^2 \omega_j c_1}{(\omega_j^2 - n^2 \omega^2)^2 + (2 \xi_j n \omega \omega_j)^2} \quad (3.11)$$

$$B_{jn} = \frac{n \omega \omega_j^2 c_1 - n^3 \omega^3 c_1 - 2 \xi_j k_1 n \omega \omega_j}{(\omega_j^2 - n^2 \omega^2)^2 + 2 \xi_j n \omega \omega_j^2}$$

X_p se obtiene de (3.10) tenido en cuenta (3.4):

$$X_{pn} = \sum_{j=1}^N \Phi_{pj} U_{jn} = \sum_{j=1}^N \Phi_{pj} \Phi_{1j} (A_{jn} + i B_{jn}) Y_n \quad (3.4)$$

Sumando para todos los armónicos, y aplicando la antitransformada de Fourier se obtiene finalmente la respuesta al grado de libertad p-ésimo:

$$X_p = \sum_{j=1}^N \Phi_{pj} \Phi_{1j} \sum_{n=0}^m \left[(A_{jn} a_n + B_{jn} b_n) \cos n\theta + (A_{jn} b_n - B_{jn} a_n) \sin n\theta \right] \quad (3.13)$$

Haciendo:

$$\bar{A}_n^p = \sum_{j=1}^N \Phi_{pj} \Phi_{1j} (A_{jn} a_n + B_{jn} b_n) = A_n^p a_n + B_n^p b_n \quad (3.14)$$

$$\bar{B}_n^p = \sum_{j=1}^N \Phi_{pj} \Phi_{1j} (A_{jn} b_n - B_{jn} a_n) = A_n^p b_n - B_n^p a_n$$

la expresión de la respuesta toma la forma:

$$x_p = \sum_{n=0}^m \left(\bar{A}_n^p \cos n \theta + \bar{B}_n^p \operatorname{sen} n \theta \right) \quad (3.15)$$

Se ha conseguido expresar x_p en función exclusivamente de los coeficientes a_n y b_n . De la misma forma se pueden expresar x_p' , x_p'' , \dot{x}_p y \ddot{x}_p en función de dichos coeficientes.

3.3. EL PROBLEMA DE LA OPTIMIZACION

En el apartado anterior se ha caracterizado el comportamiento dinámico del modelo mediante los coeficientes a_n y b_n . La síntesis óptima del perfil de la leva consiste en determinar dichos parámetros, de forma que el comportamiento dinámico del sistema sea lo más correcto posible. Cuando dicho comportamiento se cuantifica mediante alguna función, el problema de la síntesis se reduce al de optimización o minimización de dicha función objetivo.

Normalmente, los datos de partida para el diseño de un perfil de leva consisten en la caracterización del estado cinemático deseado del seguidor (posición, velocidad..) en un número finito de puntos. En la mayoría de los métodos actuales de diseño, dichos datos se consideran como restricciones de igualdad en el problema de optimización. A esta forma de actuar se le puede plantear una objeción. Desde un punto de vista matemático dichas restricciones limitan sustancialmente el campo de "soluciones admisibles". Sin embargo, desde un punto de vista físico dicha limitación no está justificada, ya que el modelo matemático reproduce la realidad sólo aproximadamente. Además, en la práctica, una solución que satisfaga las restricciones parcialmente es perfectamente válida si las tolerancias son lo suficientemente pequeñas.

Debido a lo anterior, el problema de la optimización se va a plantear sin restricciones, adoptando como función objetivo el error cuadrático, entendiéndose por tal el cuadrado de la diferencia entre el estado real y el deseado. La caracterización de este estado es intencionadamente imprecisa. El planteamiento del problema como minimización del error cuadrático permite introducir en el concepto de estado, tanto factores cinemáticos como dinámicos. Cuantos más factores contemple dicho estado menos probable será la necesidad de un rediseño, ya que los factores que no se incluyan deben ser chequeados por un procedimiento de análisis a posteriori, que puede inducir a la realización de un nuevo diseño:

Sin embargo, la complejidad del problema matemático de la optimización está fuertemente ligado a la naturaleza de la función objetivo. En los apartados que siguen se van a considerar distintas funciones objetivo, incrementando sucesivamente los diversos factores que definen el funcionamiento del sistema, lo cual a su vez conducirá a problemas de optimización de complejidad creciente. En cualquier caso, siempre se tratará de un problema de optimización paramétrica sin restricciones, siendo la base del espacio de diseño el conjunto de los coeficientes a_n y b_n , que definen el perfil de la leva.

3.4. OPTIMIZACION LINEAL

3.4.1. Error cuadrático discreto

Si el estado del sistema viene caracterizado por la posición deseada del seguidor \bar{x}_j en los puntos θ_j , $j=1,2,\dots,t$, entonces la síntesis se puede plantear como el problema de minimizar:

$$P = \sum_{j=1}^t (x_p(\theta_j) - \bar{x}_j)^2 \quad (3.16)$$

donde x_p viene dado por (3.15).

En el apartado 3.2 se ha calculado x_p en función de los coeficientes a_n y b_n y de la frecuencia de funcionamiento, ω . Por tanto, el perfil que minimice \underline{P} será función de ω . Si la leva va a tener una única velocidad de funcionamiento, el perfil quedará definido al particularizar ω para dicho valor.

En el caso de que la leva vaya a funcionar en una gama de velocidades comprendidas entre ω_a y ω_b , se puede tomar como perfil el promedio de los distintos perfiles óptimos correspondientes a las distintas velocidades de funcionamiento. Esto equivale a tomar como solución el perfil que minimiza la siguiente función:

$$Q = \int_{\omega_a}^{\omega_b} P d\omega \quad (3.17)$$

Si la definición del estado no sólo afecta a las posiciones, sino que también incluye velocidades y aceleraciones, sencillamente se modifica \underline{P} de la siguiente forma:

$$\underline{P} = C_1 \sum_{j=1}^t (x_p(\theta_j) - \bar{x}_j)^2 + C_2 \sum_{j=1}^s (x'_p(\theta_j) - \bar{x}'_j)^2 + C_3 \sum_{j=1}^r (x''_p(\theta_j) - \bar{x}''_j)^2 \quad (3.18)$$

donde C_i son coeficientes de ponderación constantes y $\omega \bar{x}'_j$, $\omega^2 \bar{x}''_j$ son las velocidades y aceleraciones deseadas en los puntos θ_j . Esta misma función objetivo ha sido utilizada por Wiedervich y Roth [121] para modelos de un grado de libertad sin amortiguamiento.

Aunque la definición del estado es cinemática, se puede ejercer un control indirecto sobre magnitudes dinámicas tales como fuerzas, a través de las aceleraciones o el ángulo de presión, mediante las velocidades.

La minimización de Q en (3.17) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineal en las incógnitas a_k y b_k . En efecto, las condiciones de mínimo son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_i} &= \int_{w_a}^{w_b} \frac{\partial P}{\partial a_i} dw = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b_i} &= \int_{w_a}^{w_b} \frac{\partial P}{\partial b_i} dw = 0 \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.19)$$

Si P viene dado por (3.16), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial a_i} &= 2 \sum_{j=1}^t (x_p(\theta_j) - \bar{x}_j) \frac{\partial x_p(\theta_j)}{\partial a_i} \\ \frac{\partial P}{\partial b_i} &= 2 \sum_{j=1}^t (x_p(\theta_j) - \bar{x}_j) \frac{\partial x_p(\theta_j)}{\partial b_i} \end{aligned} \quad (3.20)$$

y teniendo en cuenta (3.13) y (3.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_p(\theta_j)}{\partial a_i} &= \frac{\partial \bar{A}_i^P}{\partial a_i} \cos i \theta_j + \frac{\partial \bar{B}_i^P}{\partial a_i} \sin i \theta_j = A_i^P \cos i \theta_j - B_i^P \sin i \theta_j \\ \frac{\partial x_p(\theta_j)}{\partial b_i} &= \frac{\partial \bar{A}_i^P}{\partial b_i} \cos i \theta_j + \frac{\partial \bar{B}_i^P}{\partial b_i} \sin i \theta_j = B_i^P \cos i \theta_j + A_i^P \sin i \theta_j \end{aligned} \quad (3.21)$$

que sustituido en (3.20) da:

$$\frac{\partial P}{\partial a_i} = \sum_{n=0}^m (f_{in} a_n + g_{in} b_n) + h_i$$

$$\frac{\partial P}{\partial b_i} = \sum_{n=0}^m (f_{in}^* a_n + g_{in}^* b_n) + h_i^* \quad (3.22)$$

siendo:

$$f_{in} = 2 \sum_{j=1}^t (A_i^P \cos i \theta_j - B_i^P \sin i \theta_j) (A_n^P \cos n \theta_j - B_n^P \sin n \theta_j)$$

$$g_{in} = 2 \sum_{j=1}^t (A_i^P \cos i \theta_j - B_i^P \sin i \theta_j) (B_n^P \cos n \theta_j + A_n^P \sin n \theta_j)$$

$$h_i = -2 \sum_{j=1}^t (A_i^P \cos i \theta_j - B_i^P \sin i \theta_j) \bar{x}_j$$

$$f_{in}^* = 2 \sum_{j=1}^t (B_i^P \cos i \theta_j + A_i^P \sin i \theta_j) (A_n^P \cos n \theta_j - B_n^P \sin n \theta_j) \quad (3.23)$$

$$g_{in}^* = 2 \sum_{j=1}^t (B_i^P \cos i \theta_j + A_i^P \sin i \theta_j) (B_n^P \cos n \theta_j + A_n^P \sin n \theta_j)$$

$$h_i^* = -2 \sum_{j=1}^t (B_i^P \cos i \theta_j + A_i^P \sin i \theta_j) \bar{x}_j$$

Finalmente, sustituyendo en (3.19) se obtiene el siguiente sistema algebraico de ecuaciones lineales en las a_i , b_i :

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = \sum_{n=0}^m (\underline{f}_{in} a_n + \underline{g}_{in} b_n) + \underline{h}_i = 0 \quad i=0,1,2,\dots,m \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i} = \sum_{n=0}^m (\underline{f}_{in}^* a_n + \underline{g}_{in}^* b_n) + \underline{h}_i^* = 0$$

donde los coeficientes y términos independientes son los promedios frecuenciales de los (3.23):

$$\begin{aligned} \underline{f}_{in} &= \int_{\omega_a}^{\omega_b} f_{in} d\omega \quad ; \quad \underline{g}_{in} = \int_{\omega_a}^{\omega_b} g_{in} d\omega \quad ; \quad \underline{h}_i = \int_{\omega_a}^{\omega_b} h_i d\omega \\ \underline{f}_{in}^* &= \int_{\omega_a}^{\omega_b} f_{in}^* d\omega \quad ; \quad \underline{g}_{in}^* = \int_{\omega_a}^{\omega_b} g_{in}^* d\omega \quad ; \quad \underline{h}_i^* = \int_{\omega_a}^{\omega_b} h_i^* d\omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

El caso en que \underline{P} viene dado por (3.18) admite un desarrollo análogo, que se ha realizado en el apéndice B.

En general, siempre que P sea una función cuadrática en los a_i , b_i , la minimización de Q conducirá a un sistema lineal análogo al (3.24). Como la respuesta (y sus derivadas temporales) es lineal en los coeficientes a_i , b_i , cualquier función lineal de la misma que se minimice por una funcional cuadrática del tipo (3.17) conducirá a un sistema algebraico de ecuaciones, lineal en las a_i , b_i . En particular, este es el caso de la fuerza transmitida por la leva en la dirección del seguidor. En el apéndice B se han calculado los coeficientes del sistema de ecuaciones que se obtienen en este caso.

3.4.2. Error cuadrático integral

En el apartado anterior el problema de la síntesis se ha reducido a la resolución del sistema lineal (3.24). No obstante, el mayor volumen de cálculo no se invierte en la resolución en sí, sino en la determinación de los coeficientes (3.25). Por tanto, parece interesante buscar funciones objetivo que, manteniendo la linealidad del sistema final de ecuaciones, produzcan coeficientes más sencillos de calcular. Una forma de conseguir esto consiste en considerar como función

P el error cuadrático integral, en vez del error cuadrático medio de una nube discreta de puntos, y a la vez, definir la posición deseada por su desarrollo en serie de Fourier. Según esto, (3.16) se sustituiría por:

$$\underline{P} = \int_0^{2\pi} (x_p(\theta) - \bar{x}(\theta))^2 d\theta \quad (3.26)$$

donde $x_p(\theta)$ es un polinomio trigonométrico definido por (3.15). El plantear el problema así tiene la ventaja fundamental de permitir aplicar inmediatamente todo el poderoso aparato matemático desarrollado para los sistemas ortogonales de funciones. En efecto, la formulación del problema se puede expresar así: Encontrar el polinomio $x_p(\theta)$ que aproxima mejor (en el sentido del error cuadrático) a una función periódica $\bar{x}(\theta)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. La solución viene dada por la identidad de Bessel [19, 100] que establece que los coeficientes del polinomio trigonométrico son los coeficientes de Fourier de la función dada. Es decir, si el desarrollo de Fourier de \bar{x} es:

$$\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \operatorname{sen} n\theta) \quad (3.27)$$

entonces los coeficientes de x_p quedan fijados por:

$$\begin{aligned} \bar{A}_k^P &= \bar{a}_k \\ k &= 0, 1, 2, \dots, m \\ \bar{B}_k^P &= \bar{b}_k \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ahora, las ecuaciones (3.14) constituyen un sistema lineal cuasidiagonal, del que se obtienen los coeficientes del perfil de la leva en forma explícita:

$$a_n = \frac{A_n^P \bar{a}_n - B_n^P \bar{b}_n}{(A_n^P)^2 + (B_n^P)^2}$$

$$b_n = \frac{A_n^P \bar{b}_n + B_n^P \bar{a}_n}{(A_n^P)^2 + (B_n^P)^2}$$

$n=0, 1, 2, \dots, m$ (3.29)

Las ventajas de este criterio integral frente al del apartado anterior se hacen patentes: Una notable reducción en el número de coeficientes que es preciso calcular, y la obtención de la solución en forma explícita.

Pero no acaban aquí las ventajas. El criterio actual permite responder a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?. Aproximación en el sentido de que se quiere representar una función periódica (\bar{x}), que en general tendrá un número ilimitado de armónicos (coeficientes de Fourier), por otra función (x_P) con un número finito ($m+1$) de ellos. La respuesta, de nuevo, la da la identidad de Bessel que no sólo establece las condiciones para que se alcance el mínimo absoluto del error, sino también su valor. Con nuestra nomenclatura, viene dado por:

$$P_{\min} = \pi \sum_{k=m+1}^{\infty} (\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k^2) = \int_0^{2\pi} \bar{x}^2 d\theta - \pi \sum_{k=0}^m (\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k^2) \quad (3.30)$$

Observese que las igualdades (3.28) implican la constancia de los coeficientes \bar{A}_k^P y \bar{B}_k^P , y como éstos dependen de (Cf. ecs. (3.11) y (3.14)), se está suponiendo implícitamente que la velocidad de giro de la leva es constante.

Por constituir las funciones trigonométricas un sistema ortogonal completo, la relación de Parseval [19, 100] asegura la convergencia cuadrática para $m \rightarrow \infty$. Además, como en las aplicaciones en el campo de las levas \bar{x} será una función continua, con derivada primera continua, tomando los mismos valores en los extremos del intervalo $[0, 2\pi]$, entonces la convergencia también será uniforme, y las ecuaciones (3.29) definen el perfil de la leva que reproduce exactamente (para $m \rightarrow \infty$) un movimiento prefijado de la respuesta.

Debido a lo anterior, también denominaremos levas sintonizadas a las diseñadas con este criterio (aun cuando m sea infinito). No obstante, el concepto actual de sintonización abarca el periodo completo de movimiento, mientras que el empleado en el método Polydyne sólo se refiere al final de un segmento de subida o bajada. Además, existe otra diferencia importante: Mientras que en el método Polydyne una pequeña variación en la velocidad de la leva puede producir una vibración residual considerable, en el método actual el error es estacionario respecto a cualquier pequeña perturbación de los coeficientes en la respuesta, y en particular, respecto a los producidos por una pequeña perturbación de la velocidad de la leva.

Si la hipótesis de velocidad de la leva constante no es válida, se puede tomar Q (ec. (3.17)) como función objetivo, pero ahora, evidentemente, definiendo \underline{p} mediante (3.26). De esta manera se obtiene el siguiente perfil:

$$a_n = \frac{\int_{\omega_a}^{\omega_b} (A_n^P \bar{a}_n - B_n^P \bar{b}_n) d\omega}{\int_{\omega_a}^{\omega_b} ((A_n^P)^2 + (B_n^P)^2) d\omega}$$

$n = 0, 1, 2, \dots, m$

(3.31)

$$b_n = \frac{\int_{\omega_a}^{\omega_b} (A_n^P \bar{b}_n + B_n^P \bar{a}_n) d\omega}{\int_{\omega_a}^{\omega_b} ((A_n^P)^2 + (B_n^P)^2) d\omega}$$

Esta metodología se extiende sin dificultad al caso en el que la función objetivo viene dada por una combinación de errores cuadráticos de funciones lineales en la respuesta y sus derivadas respecto al tiempo. Por ejemplo, se puede utilizar la siguiente función objetivo, que controla a la vez el error de salida y la fuerza transmitida por la leva en la dirección del movimiento:

$$\underline{P} = \int_0^{2\pi} (x_p - \bar{x})^2 d\theta + C_\Delta \int_0^{2\pi} F^2 d\theta$$

(3.32)

donde C_Δ es una constante de ponderación, y la fuerza excitadora viene dada por:

$$F = m_o \ddot{Y} + k_1(Y - x_1) + c_1(\dot{Y} - \dot{x}_1)$$

(3.33)

siendo m_o la masa directamente en contacto con la leva. Es fácil ver que el perfil que minimiza a \underline{P} es:

$$a_n = \frac{A_n^P \bar{a}_n - B_n^P \bar{b}_n}{(A_n^P)^2 + (B_n^P)^2 + C_4 F_n}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$b_n = \frac{A_n^P \bar{b}_n + B_n^P \bar{a}_n}{(A_n^P)^2 + (B_n^P)^2 + C_4 F_n} \quad (3.34)$$

donde:

$$F_n = (k_1^2 + c_1^2 \omega^2 n^2) ((1 - A_n^1)^2 + (B_n^1)^2) - 2m_0 \omega^2 n^2 (k_1(1 - A_n^1) + c_1 \omega n B_n^1) + m_0^2 \omega^4 n^4 \quad (3.35)$$

Si la leva no girase a velocidad constante, se utilizaría el criterio (3.17), y los coeficientes del perfil serían cocientes de integrales en frecuencia, cuyos integrandos son los numeradores y denominadores de (3.34).

3.5. OPTIMIZACION NO LINEAL

Desde un punto de vista matemático, los criterios desarrollados en el apartado anterior tienen la ventaja principal de conducir a un problema lineal. Sin embargo, desde un punto de vista físico sólo controlan la respuesta, o/y aquellas funcioness que dependan linealmente de la respuesta.

Pero como ya se argumentó en el capítulo 1, tan importante como la respuesta es el estado tensional interno, y, en el caso de mecanismos de leva, particularmente, la tensión de contacto entre ésta y el seguidor. Además, estos dos criterios son antagónicos, en el sentido de que el control exclusivo de uno de ellos va en detrimento del otro.

Por tanto, parece necesaria la inclusión de la tensión de contacto en la función objetivo. Sin embargo, la introducción de la tensión de contacto en el criterio de optimización imposibilita obtener soluciones cerradas como en el apartado anterior, ya que dicha tensión no se puede expresar como un polinomio trigonométrico finito, lineal en los coeficientes a_n y b_n . En este caso, la minimización de la función objetivo conduce a un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas.

3.5.1. Angulo de Presión

Antes de plantear directamente la optimización de la tensión de contacto, se va a plantear el problema más simple de minimizar la fuerza de contacto, mediante la minimización conjunta de la fuerza en la dirección del movimiento y del ángulo de presión. Como función objetivo se toma:

$$P = \sum_{j=1}^t (x_p(\theta_j) - \bar{x}_j)^2 + C_5 \sum_{j=1}^s F^2(\theta_j) + C_6 \sum_{j=1}^r t_g^2 \psi(\theta_j) \quad (3.36)$$

donde F es la fuerza en la dirección del movimiento, definida en (3.33), y ψ es el ángulo de presión, que para un seguidor de rodillo con movimiento de traslación vale [31]:

$$t_g \psi = \frac{y' - e}{y + d} \quad (3.37)$$

y

$$d = \sqrt{r_0^2 - e^2} \quad (3.38)$$

siendo r_0 el radio de la circunferencia primitiva, y e la excentricidad.

A pesar de haber independizado en (3.36) los dos factores que influyen en la fuerza de contacto (fuerza en la dirección del movimiento y ángulo de presión), la minimización de \underline{P} conduce a un problema no lineal, debido al denominador de (3.37).

Aunque existen muchos métodos numéricos standard para la resolución aproximada de sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, también se pueden construir métodos especialmente adaptados para la resolución de un problema específico. Es, precisamente, este segundo camino el que se va a seguir aquí, desarrollando dos métodos aproximados para minimizar (3.36).

El primer método consiste en una linealización en un sólo paso. La linealización consiste en considerar constante el denominador de (3.37), con lo que la función objetivo pasa a formar parte de las que admiten el procedimiento de minimización desarrollado en el apartado 3.4.1.

La justificación física de este proceder debe buscarse en el hecho de que los diagramas de desplazamiento de los distintos perfiles que satisfacen un movimiento determinado difieren muy poco, manifestandose las diferencias, fundamentalmente, en las derivadas superiores. La justificación última, no obstante, debe buscarse en la capacidad de producir resultados válidos, y este aspecto se comenta en el capítulo siguiente.

La segunda alternativa consiste en un método iterativo, que comienza por suponer el denominador de $\text{tg} \psi(\theta_j)$ independiente de los coeficientes a_k y b_k , tomando $y(\theta_j)$ como la solución del problema de minimizar (3.36) con el coeficiente C_6 nulo (lo que conduce a un problema lineal fácilmente soluble).

Las condiciones de mínimo de (3.36) son:

$$\frac{\partial P}{\partial a_k} = 0$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial P}{\partial b_k} = 0$$

si ahora es $C_6 \neq 0$, y bajo la aproximación mencionada, la derivada del término correspondiente al ángulo de presión se computa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{y'(\theta_j) - e}{y(\theta_j) + d} \right]^2 = 2 \frac{y'(\theta_j) - e}{[y(\theta_j) + d]^2} \frac{\partial y'(\theta_j)}{\partial a_k} \quad (3.40)$$

Y la aplicación de las (3.39) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineal en las a_k y b_k .

El proceso iterativo continuo, considerando en cada nueva etapa $y(\theta_j)$ en (3.40) igual a la solución obtenida en la etapa anterior. El proceso se detendrá cuando la diferencia entre los valores de $y(\theta_j)$ obtenidos en dos etapas sucesivas sea inferior a alguna cota preestablecida.

No se ha intentado un análisis teórico de la convergencia del método. Sin embargo, los resultados muestran que ésta se produce en muy pocas iteraciones.

3.5.2. Tensiones de contacto

Como se ha comentado en el apartado 3.5, un diseño racional debe contemplar conjuntamente las características vibracionales de la respuesta y las tensiones de contacto entre leva y seguidor. Matemáticamente, este criterio se expresa

como el problema de minimizar la siguiente función objetivo:

$$P = \int_0^{2\pi} (x_p - \bar{x})^2 d\theta + C_7 \int_0^{2\pi} \sigma^2 d\theta \quad (3.41)$$

respecto a los coeficientes a_k y b_k que definen el perfil de la leva, siendo C_7 una constante de ponderación, y σ la tensión de contacto.

El problema de la evaluación real de las tensiones de contacto es uno de los más complejos en el campo de la mecánica de sólidos y, aunque existe un gran volumen de literatura dedicada al tema, la mayoría se encuentra en forma de artículos dispersos en diferentes revistas técnicas, existiendo muy pocas monografías [125]. Esto da idea de lo inacabado que está este tema, por lo que aquí sólo se hará uso de la teoría clásica de Hertz. En esta teoría, el valor de la tensión máxima en la generatriz común a dos superficies cilíndricas en contacto viene dado por [113, 125]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{M E_c \rho}{r(\rho - r)}} \quad (3.42)$$

siendo:

$$M = \frac{1}{\pi^2 d_c (\gamma_1 + \gamma_2)} \quad (4.43)$$

$$\gamma_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i} \quad i = 1, 2 \quad (3.44)$$

$$F_c = \sqrt{(m_o \ddot{y} + F_f)^2 + (F_f \cdot \operatorname{tg} \psi)^2} \quad (3.45)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y' - e}{y + d} \quad (3.46)$$

$$F_f = k_1 (y - x_1) + c_1 (\dot{y} - \dot{x}_1) + F_o \quad (3.47)$$

$$\rho = \frac{[(y+d)^2 + (y'-e)^2]^{3/2}}{(y+d)(y+d-y'') + (y'+e)(zy'-e)} \quad (3.48)$$

$d_c \equiv$ Espesor de la leva

$r \equiv$ Radio del rodillo

E_i, γ_i Módulos de elasticidad y de Poisson de los materiales de leva y el rodillo

$F_a \equiv$ Fuerza de contacto

$m_o \equiv$ Masa del rodillo

$F_f \equiv$ Fuerza en la dirección del movimiento transmitida por el rodillo al seguidor

ρ Radio de curvatura de la curva primitiva

F_o Precarga

Considerando constantes el espesor de la leva, el radio de la circunferencia primitiva, la excentricidad de la leva y el radio del rodillo, entonces la tensión de contacto sólo depende del movimiento excitador (y) y de la respuesta (x_1). Si la rigidez e inercia del mecanismo están fijados, entonces la tensión de contacto sólo será función de los coeficientes a_k y b_k .

Dada la dependencia funcional de σ respecto a los coeficientes a_k y b_k , la minimización de (3.41) respecto a dichos coeficientes conduce a un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas tan complicado que hace prácticamente imposible la metodología de solución empleada en el apartado anterior para el ángulo de presión.

El método utilizado para resolver el problema ha sido del tipo Newton-Raphson [126], que es un método iterativo clásico de segundo orden. Este tipo de métodos tiene la ventaja, frente a los métodos de primer orden, de tener una convergencia más rápida si se parte de una solución inicial lo "suficientemente próxima" a la solución óptima.

¿De qué solución inicial se parte?. Para contestar esta pregunta observese que (3.41) consta de dos términos, que controlan el error posicional y la tensión de contacto, respectivamente. Si el segundo término se elimina ($C_7 = 0$) el problema es lineal, y fue resuelto exactamente en el apartado 3.4.2. Si el error admisible es pequeño, entonces la inclusión del 2º término en (3.41) no puede perturbar mucho la solución del problema lineal. Por tanto, como solución inicial se toma la del problema lineal ($C_7 = 0$).

Las condiciones de extremo, es decir las (3.39) con la \underline{P} actual, han sido derivadas analíticamente, pero las expresiones obtenidas son tan complejas que aconsejan emplear diferencias finitas para aproximar las derivadas segundas (requeridas en el método de Newton-Raphson).

3.6. PRECARGA OPTIMA

En un mecanismo de leva de disco normal el seguidor es conducido positivamente por la leva. Esto significa que la leva, por si sola, es incapaz de comunicar una aceleración

negativa al seguidor, ya que en tal caso se produciría la separación entre la leva y el seguidor.

El objetivo del muelle de precarga es, precisamente, la introducción de una fuerza de compresión inicial (precarga) que asegure una conducción positiva en los periodos de aceleración negativa.

Aunque la precarga es necesaria para evitar la separación, debe poseer el menor valor compatible con la abolición de dicho fenómeno, ya que en los periodos de aceleración positiva su efecto es negativo, pues aumenta la tensión de contacto.

Este valor óptimo de la precarga debe fijarse antes de proceder al diseño del apartado anterior, ya que las variaciones inducidas en la tensión de contacto por la precarga son importantes, mientras que, al revés, las pequeñas modificaciones del perfil, debidas a la consideración de las tensiones de contacto en la función objetivo, apenas afectan a la precarga óptima.

Por otra parte, como el valor de esta precarga queda configurado, fundamentalmente, por el pico de aceleración, su cálculo debe efectuarse en el extremo superior del intervalo de frecuencias de funcionamiento (en el caso de que el mecanismo debe funcionar a distintas velocidades).

¿Cual es el procedimiento de cálculo de la precarga óptima que sugieren estas consideraciones?. El siguiente: Calculese el perfil que minimiza el error posicional, es decir, que minimiza (3.41) con C nulo (ó (3.17) si se trata de una gama de velocidades). La solución de este problema, evidentemente, no depende de la precarga utilizada, F_0 .

Lo que sí depende de dicha precarga es la fuerza en la dirección del movimiento transmitida por la leva, ya que viene dada por:

$$F = m_o \ddot{y} + k_1 (y - x_1) + c_1 (\dot{y} - \dot{x}_1) + F_o \quad (3.49)$$

Sea F_{min} el valor mínimo de esta fuerza en el extremo superior del intervalo de frecuencias de funcionamiento.

La precarga óptima teórica es el valor mínimo de F_o que no produce separación, es decir, aquel que hace F_{min} nula. Ahora bien, sin que se produzca separación se puede producir un indeseado deslizamiento entre la leva y el rodillo, y por otra parte, el trabajar con modelos matemáticos aproximados, las soluciones que se obtienen poseen cierto margen de incertidumbre. Por todo ello, se puede definir la precarga óptima efectiva como aquella que produce una F_{min} igual a cierto valor admisible F_{adm} predeterminado.

De la independencia del perfil respecto a la precarga y de (3.49) se obtiene, pues, fácilmente la precarga óptima efectiva, $F_{o_{opt}}$:

$$F_{o_{opt}} = F_o + F_{adm} - F_{min} \quad (3.50)$$

3.7. RADIO DEL RODILLO OPTIMO

Ya ha sido argumentado en los dos apartados precedentes -y los resultados del capítulo 4 lo confirman- que la mejora de las tensiones de contacto como consecuencia de su optimización (conjuntamente con el error posicional) respecto

a la forma del perfil de la leva es pequeña.

No obstante, el valor de σ queda fijado no sólo por la forma del perfil, sino también por otras características geométricas, tales como la excentricidad, radio del rodillo, etc., cuya influencia puede ser bastante más drástica.

Aunque el estudio de estos factores escapan al ámbito de este trabajo (síntesis del perfil), en este apartado se va a analizar, a modo de ejemplo, la influencia del radio del rodillo, para corroborar la afirmación realizada en el último párrafo, y enfatizar la importancia de estos factores en la síntesis global de un mecanismo de leva.

Una primera posibilidad de considerar la influencia de r , consiste en incluirla como una variable más en (3.41), y resolver el nuevo problema por el mismo procedimiento numérico que se usó en 3.5.2. Pero esto, aparte de constituir un engorro bajo el aspecto de la programación del método, puede plantear dos dudas respecto a la eficacia computacional de la resolución del problema.

En primer lugar, la elección de un valor inicial de r es arbitraria, no estando asegurada su proximidad a la solución óptima, lo cual es un requisito importante para asegurar la convergencia del método numérico utilizado (Newton-Raphson). En segundo lugar, la gran diferencia (conjetural) de las variaciones de σ con los a_k , b_k frente a las variaciones con r , también puede ser la fuente de un problema de convergencia.

La segunda posibilidad se basa en el hecho de que siempre que se varíe exclusivamente r , no se modificará la respuesta. Esto induce a establecer el siguiente procedimiento: Primero se resuelve el problema de minimizar (3.41) con

r constante, tal como se hace en 3.5.2., con lo cual la respuesta y el perfil de la leva quedan fijados. Y a continuación se modifica solamente r , para minimizar las tensiones de contacto.

La segunda alternativa es la que se va a desarrollar aquí, construyendo un procedimiento aproximado específico, que contemple, a la vez, la dependencia funcional de σ con r y la forma habitual de la curva de tensiones de contacto en un movimiento básico DSD.

Para cualquier Θ , la condición de óptimo para r viene dada por la anulación de la derivada primera de σ :

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial r} = -M F_c \rho \frac{\rho - 2r}{r^2(\rho - r)^2} \quad (3.51)$$

lo cual implica que:

$$r = \rho / 2 \quad (3.52)$$

Interesará, por tanto, imponer esta condición en el punto en que la tensión sea máxima. Denominando ρ_p al valor del radio de curvatura en dicho punto, la condición (3.52) se convierte en:

$$r = \rho_p / 2 \quad (3.53)$$

Deberá comprobarse, por supuesto, que el radio del rodillo así definido no sea inferior al radio de curvatura mínimo (ρ_{min}); pues de otra forma se produciría el fenómeno de rebaje del perfil real de la leva.

Ahora bien, si el mecanismo va a funcionar en una gama de velocidades surge la pregunta: ¿A qué frecuencia interesa imponer la condición (3.53)? En principio, parece lógico pensar en aquella en la que el pico de tensión (σ_p) tome el valor máximo.

3.7.1. Variación de σ^2 con la frecuencia

Para contestar la última pregunta se debe analizar la derivada de σ^2 respecto a la frecuencia:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \omega} = \frac{M'}{F_c} \left[\overline{(m_o \ddot{y} + F_f)} \left(m_o \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_f}{\partial \omega} \right) + \left(F_f \frac{y' - e}{y + d} \right) \frac{y' - e}{y + d} \overline{\frac{\partial F_f}{\partial \omega}} \right] \quad (3.54)$$

con:

$$M' = \frac{M \rho}{r(\rho - r)} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \ddot{y}}{\partial \omega} = 2 \omega y'' \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \omega} = -k_1 \frac{\partial x_1}{\partial \omega} + c_1 y' - c_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \omega} \quad (3.57)$$

En la expresión (3.54) se puede asegurar a priori que, salvo los factores suprarayados, el resto son positivos. Interesa estudiar esta derivada en los puntos en que la tensión es máxima, pero a la vista de su expresión no parece que se pueda hacer mucho analíticamente. Para poder continuar con este análisis es necesario recurrir a la experiencia. Esta nos dice que para una frecuencia dada el pico de la tensión de contacto se presenta en una de las tres posiciones siguientes (figura 3.1):

- ① En la zona próxima a \dot{y} máxima
- ② En la zona entre \dot{y} mínima y β mínima
- ③ En el descanso superior

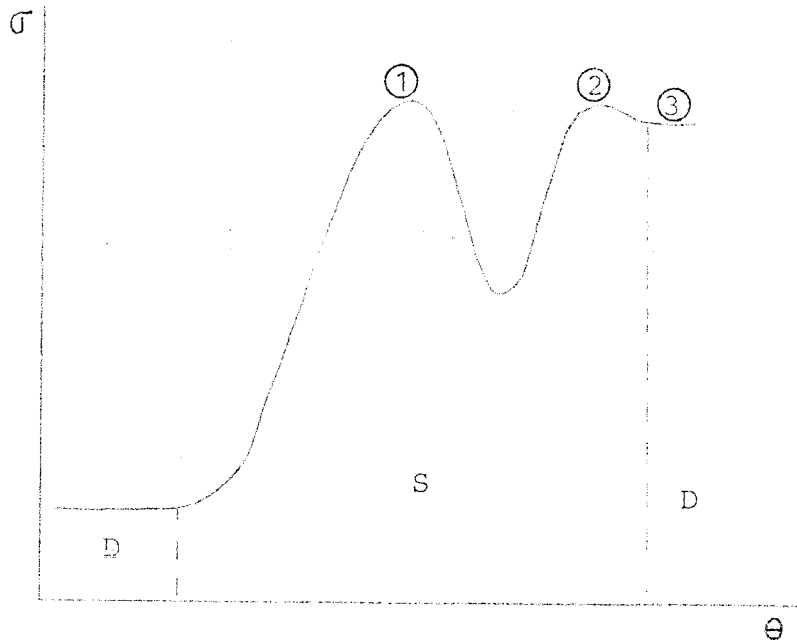


Figura 3.1.

Ahora se puede intentar evaluar la derivada anterior para cada uno de estos casos. Empezaremos por el caso ③, que es el más simple:

③ En este caso el problema es sencillamente estático. F_c es constante (no dependiente de ω), la derivada es nula y las variaciones de ω no afectan a σ_p . Esto es estrictamente cierto para un descanso ideal. Como en realidad el reposo se consigue aproximadamente, esta conclusión será sólo aproximada

① En este caso (3.56) es positiva. Si (3.57) también lo fuera, implicaría también un valor positivo para

(3.54).

Para $c_1 = 0$, (3.57) es positiva si $\frac{\partial x_1}{\partial \omega} < 0$. Como el módulo de la aceleración crece con la frecuencia, en el periodo de aceleración positiva x se debe atrasar con la frecuencia, y en el periodo negativo debe adelantarse. Como ① corresponde al periodo positivo, x_1 se retrasará con la frecuencia, es decir $\frac{\partial x_1}{\partial \omega} < 0$. En conclusión, (3.54) es positiva, y el radio óptimo del rodillo debe calcularse (expresión (3.53) en el extremo superior (ω_b) del rango de frecuencias.

② Aquí se pueden utilizar los mismos argumentos que en ②, sólo que ahora $\frac{\partial x_1}{\partial \omega} > 0$. Además, (3.56) es negativa, lo que implica que (3.54) también lo sea. Por tanto, el radio del rodillo se calculará en el extremo inferior (ω_a) del rango de frecuencias de funcionamiento.

3.7.2. Algoritmo utilizado

Después del análisis anterior, la dependencia funcional de σ (que inicialmente abarcaba a los parámetros r , Θ y ω) ha quedado reducida a las variables r y Θ y a un parámetro discreto (ω), que sólo puede tomar dos valores: ω_a y ω_b .

El problema actual pertenece a la categoría de los denominados minimax, ya que se trata de obtener el radio del rodillo que da el menor valor de la tensión máxima (σ_p). Ahora bien, al limitar el estudio a σ_p se produce una nueva reducción de la dependencia funcional de dicha tensión, ya que para un rodillo determinado existe una única tensión de pico. En este sentido, nuestro problema es el de la minimización de una función de una sola variable.

Aunque el cálculo del valor mínimo de una función de una sola variable puede parecer relativamente sencillo,

la dificultad, aquí, no estriba en dicho cálculo, sino en la propia evaluación de la función $\sigma_p(r)$. Es extremadamente complicado intentar obtener una expresión analítica de dicha función.

Lo que sí se puede hacer con la ayuda de un ordenador es evaluar σ en un conjunto finito de valores de Θ , para un radio del rodillo fijado, y a las frecuencias ω_a y ω_b . Ahora se puede seleccionar el mayor valor de σ dentro de dicho conjunto finito, y aproximar σ_p por dicho valor.

A partir de (3.53) el problema de la minimización de $\sigma_p(r)$ se transforma en el de obtener los ceros de la función $g(r)$:

$$g(r) \equiv \frac{f_p(r)}{2} - r \quad (3.58)$$

Dado que el método mencionado de evaluación de σ_p (y de f_p) es relativamente costoso, el siguiente paso en la resolución de nuestro problema consiste en elegir un método aproximado de obtener la raíz de una función exigiendo el menor número posible de evaluaciones de la función. Dicho método no se conoce [127], pero lo que sí se conoce es el método que, para un número de evaluaciones y un intervalo de variación de la variable independiente fijados, produce la mejor aproximación: El método de la bisección [127].

Básicamente, este método consiste en bisectar un intervalo del que se sabe que contiene el punto óptimo, y seleccionar aquel subintervalo que sigue conteniendo a dicho punto. La alternativa en la selección se decide por medio del signo de g , y a partir del nuevo subintervalo se repite el proceso.

Hay que observar que la función $\sigma_p(r)$, aunque continua, puede tener derivada primera discontinua justamente en el punto óptimo, siendo, en este caso, la función f_p discontinua. Esto se explica por el hecho de que la condición (3.53) es una condición de óptimo local, es decir para f fijo, mientras que σ_p es una función global.

En las figuras 3.2 y 3.3 se ilustra una posible situación de este tipo. Las curvas señaladas con (3) ((2)) corresponden a la tensión (y radio de curvatura) del correspondiente punto (3) ((2)) de la figura 3.1. Las curvas de trazo continuo corresponden a los valores de pico: Incrementando el radio del rodillo, la tensión de pico, que se produce en (3) va disminuyendo, a la vez que la tensión en (2) va aumentando. Para $r = r_{op}$, ambas tensiones son iguales y al seguir aumentando r la tensión de pico pasa al punto (2), con lo que se produce una discontinuidad en la curva $f_p(r)$. Los radios r_2 y r_3 corresponden a los valores mínimos de tensión en los puntos (2) y (3) respectivamente (de acuerdo con (3.53)), mientras que el radio óptimo de la tensión de pico es, evidentemente r_{op} .

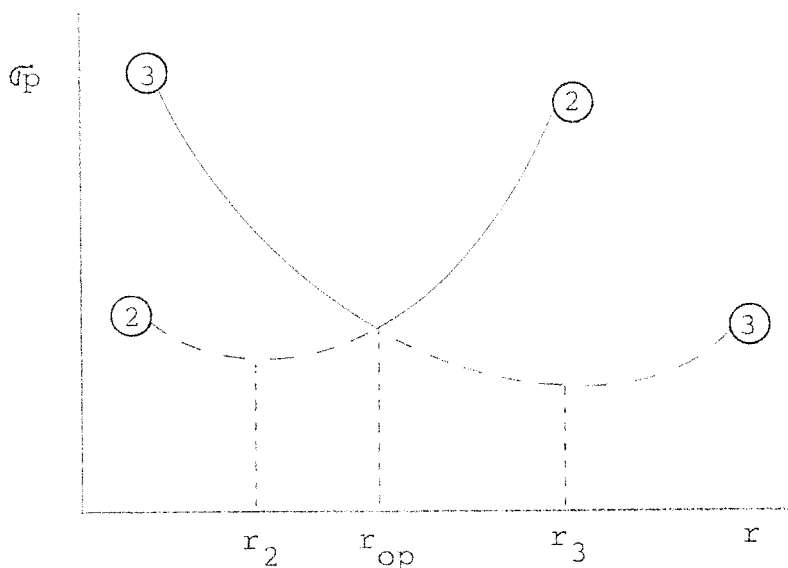


Figura 3.2.

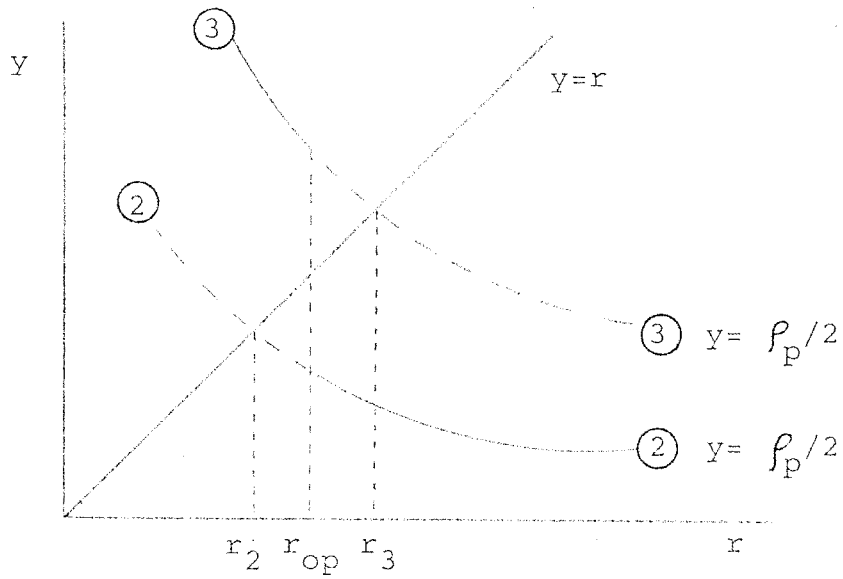


Figura 3.3.

Es evidente que la convergencia del método de la bisección no se ve afectada en absoluto en tales situaciones (los métodos de segundo orden, tales como el de Newton, sí son afectados), pero los criterios de parada se deben modificar: Al criterio "normal", definido por la condición de que el valor absoluto de $g(r)$ sea inferior a una cierta cota prefijada, se debe añadir el de que la diferencia de valores de la tensión de pico en dos iteraciones sucesivas sea inferior a cierto margen, ó que lo sea la longitud del intervalo de variación del radio del rodillo.

CAPITULO 4: RESULTADOS

4.1. INTRODUCCION

Habiendo analizado en el capítulo anterior, desde un punto de vista teórico, una metodología de diseño, el paso siguiente consiste en evaluar los resultados que se obtienen con dicha herramienta.

En todos los apartados siguientes siempre se trata de la síntesis de un movimiento DSDB, modificándose en cada caso la función objetivo, de acuerdo con las distintas opciones establecidas en el capítulo 3.

4.2. MINIMIZACION DEL ERROR

Con objeto de poder comparar los resultados, se sintetiza el mismo movimiento que Chew [33], utilizando también el modelo de un grado de libertad de esta referencia. Las características del modelo, valores de parámetros geométricos, del movimiento deseado, etc., se han recopilado en el apéndice C. Aunque existen otras referencias con datos sobre vibraciones residuales, la de Chew es la única (que conozca este autor) que aporta resultados sobre tensiones de contacto y su minimización conjunta con el error.

En este apartado la síntesis se consigue mediante la minimización del error cuadrático integral, definido por la ecuación (3.26) cuando se trata de levas sintonizadas o por la (3.17) cuando se trata de levas que funcionan a distintas velocidades.

En las figuras 4.1 a 4.7 se representan los resultados de la síntesis de una leva sintonizada a una velocidad de 105 rad/sq, utilizando 30 armónicos.

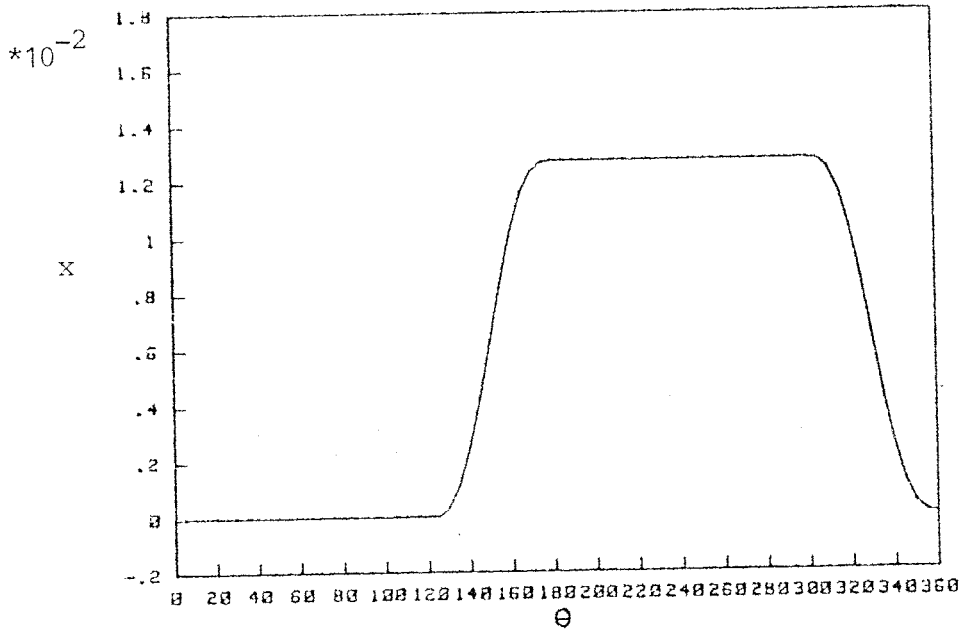


Figura 4.1. Respuesta (x).

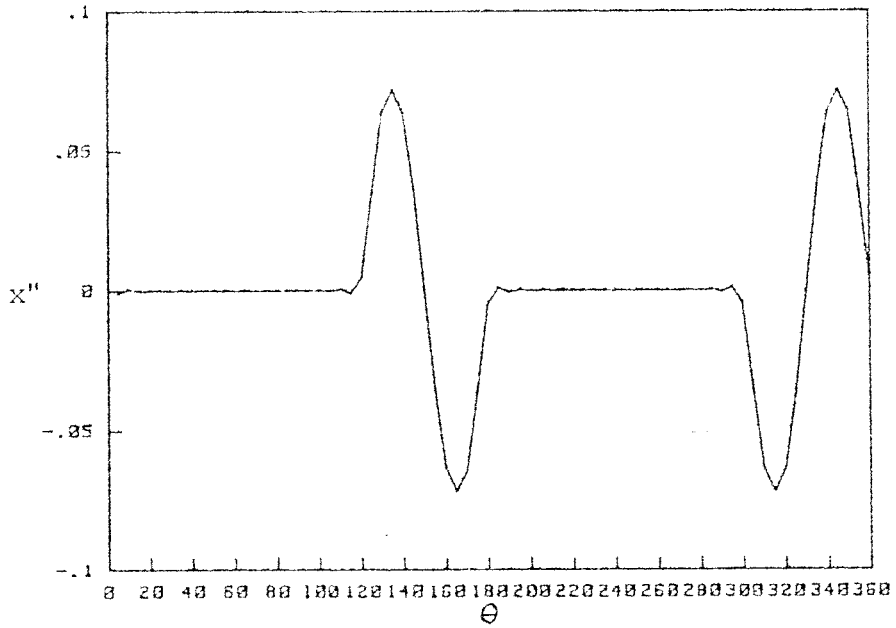


Figura 4.2. Aceleración del movimiento de salida (x'').

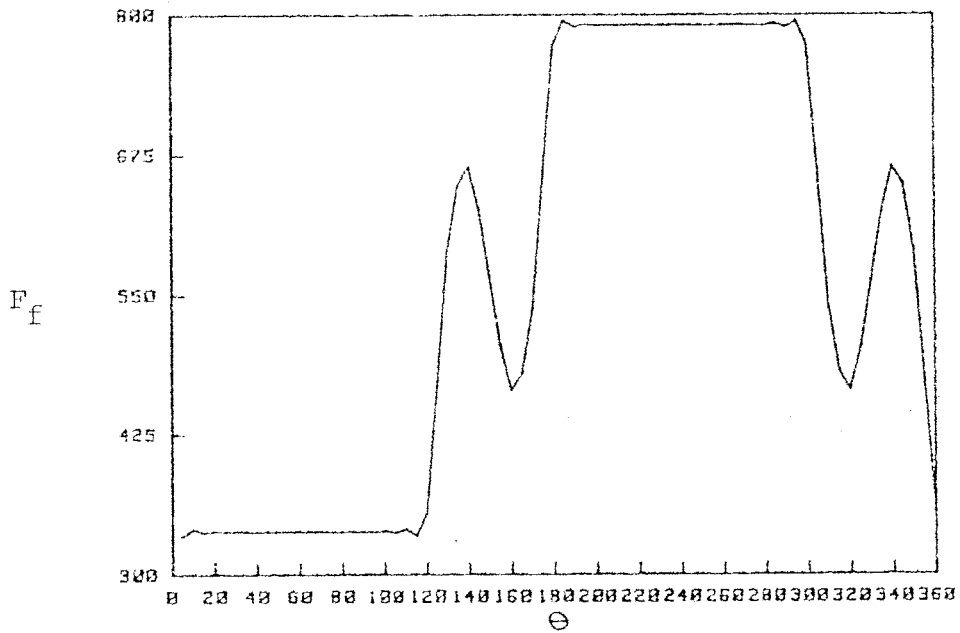


Figura 4.3. Fuerza en la dirección del movimiento transmitida por el rodillo al seguidor (F_f).

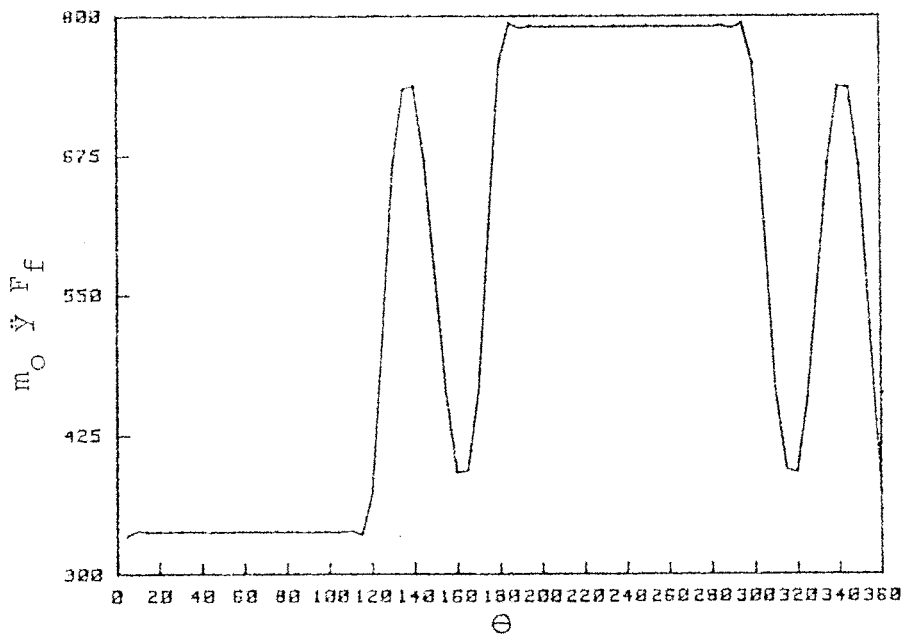


Figura 4.4. Fuerza en la dirección del movimiento transmitida por la leva al rodillo ($m_o \dot{y} + F_f$).

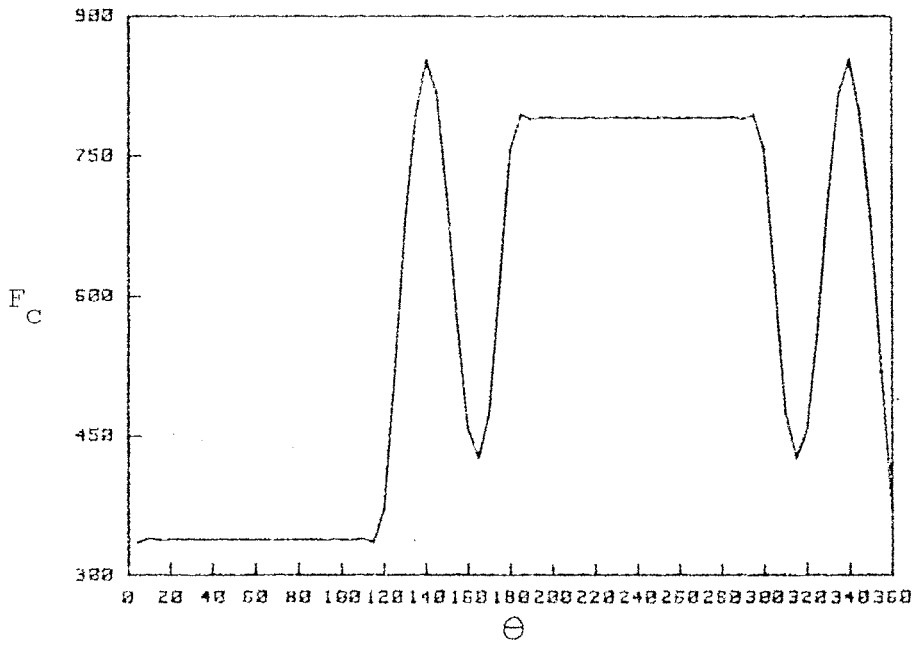


Figura 4.5. Fuerza normal de contacto (F_c).

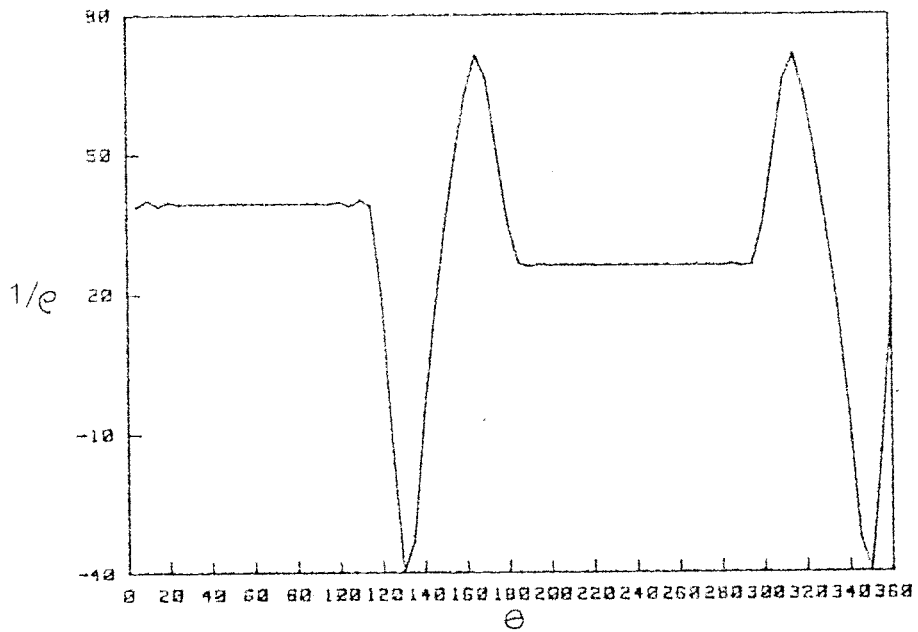


Figura 4.6. Curvatura de la curva primitiva ($1/\rho$).

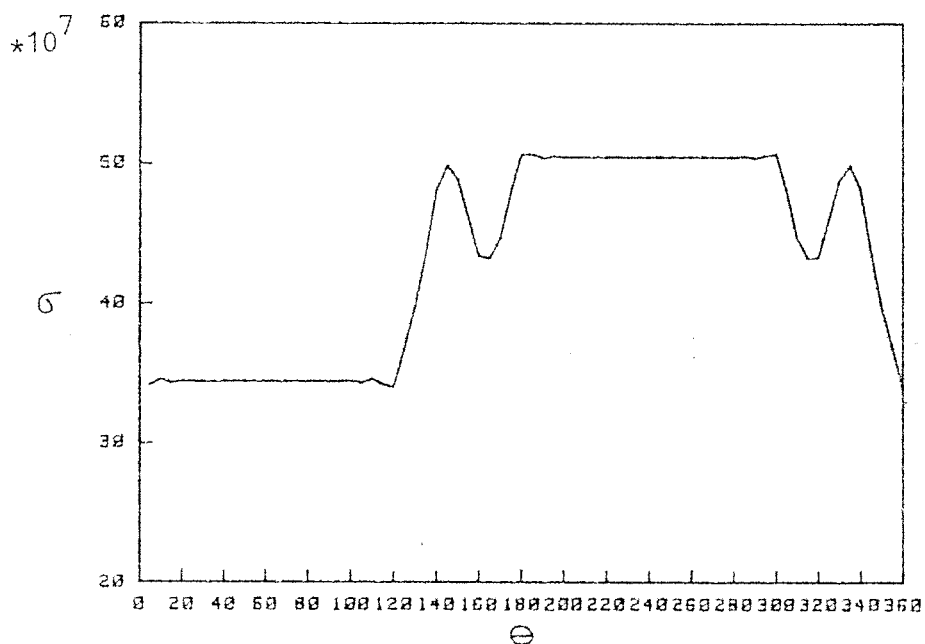


Figura 4.7. Tensión de contacto (σ).

Como en el presente método de síntesis el movimiento deseado se define por su desarrollo de Fourier, no basta con definir los periodos de descanso, sino que deben establecerse también los periodos de subida y bajada deseados. En este ejemplo se ha utilizado el movimiento cicloidal para representar tales periodos.

Antes de entrar en la comparación de resultados, es importante hacer un estudio previo de una serie de factores que influyen en los mismos. Estos factores son: el número de armónicos, el amortiguamiento, el intervalo de frecuencias de funcionamiento y la elección del movimiento deseado en los periodos de subida y de bajada.

El número de armónicos controla el error posicional. Así, para una leva sintonizada, la respuesta coincide con el

desarrollo de Fourier del movimiento deseado, truncado al número de armónicos utilizado. Por tanto, cuantos más armónicos se utilicen, mejor será la aproximación. En la figura 4.8 se observa la mejora en la aproximación del movimiento deseado (lo que equivale a decir en la respuesta, para una leva sintonizada), al duplicar el número de armónicos.

Ahora bien, conforme aumenta el número de armónicos las frecuencias excitadoras asociadas a los mismos se aproximan (o superan) a la frecuencia natural del mecanismo. Por tanto, para velocidades distintas de la de sintonización, aunque sólo sean ligeramente distintas, se producirán fuertes vibraciones de carácter resonante.

En aquellos casos en que existen armónicos resonantes el amortiguamiento puede jugar un papel fundamental en la respuesta.

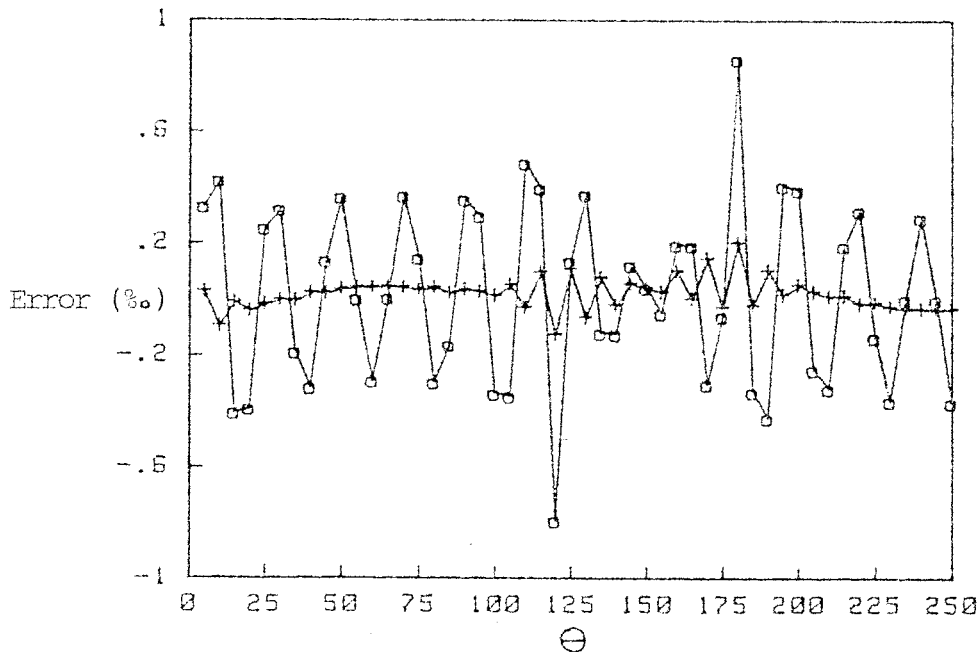


Figura 4.8. Error en la aproximación del movimiento deseado por un número finito de armónicos. 0: 15 armónicos ; + :30 armónicos.

En la figura 4.9 se representa el error máximo en los periodos de descanso frente a la frecuencia de excitación, para una leva sintonizada a $\omega = 105$, utilizando 15 y 30 armónicos, siendo nulo el amortiguamiento. La frecuencia natural del sistema es 2314, por lo que, en el intervalo de frecuencias representado, la leva sintetizada con 15 armónicos no excita a la frecuencia natural. Mientras que en ese mismo intervalo, todos los armónicos a partir del 17 resuenan, en la leva con 30 armónicos. Como resultado aparecen zonas donde esta última produce errores considerablemente mayores que la primera. Evidentemente, a la velocidad de sintonización esto no ocurre, siendo en tal caso menor el error de la leva con mayor número de armónicos.

Otro factor, anteriormente comentado es el amortiguamiento. Su influencia se aprecia claramente en la figura 4.10, que representa la misma situación que la que se acaba de comentar (4.9), salvo que ahora el sistema tiene una relación de amortiguamiento del 5%. Ha bastado este pequeño amortiguamiento para eliminar el efecto nocivo de los armónicos resonantes, de modo que ahora la leva de 30 armónicos es netamente superior a la de 15. Sin embargo, el comportamiento de la respuesta de la leva de 15 armónicos prácticamente no se ha visto afectado por la introducción del amortiguamiento.

La explicación de esta aparente disimetría en la influencia del amortiguamiento es sencilla: Los armónicos que resuenan son elevados (> 17) y, por tanto, tienen una amplitud muy pequeña. Sólo pueden tener una influencia considerable en la respuesta si se ven afectados por un factor de amplificación muy grande, lo que ocurre en resonancia si el amortiguamiento es nulo (el factor se hace infinito). Pero si existe amortiguamiento, el factor de amplificación es finito, su producto por la amplificación del armónico de entrada es pequeño y, por tanto, su influencia en la respuesta también es

pequeña.

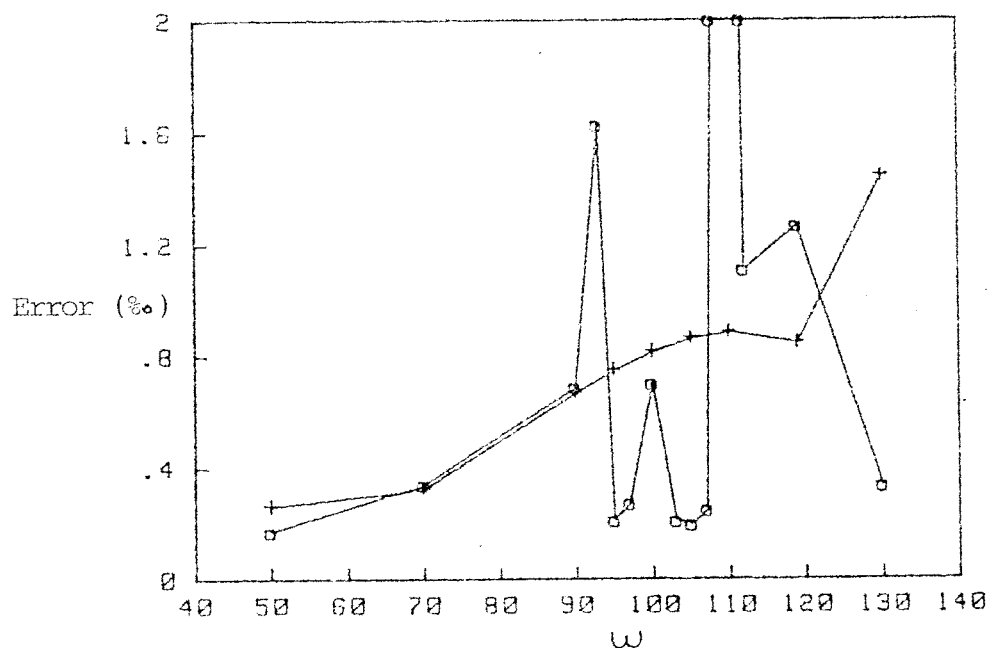


Figura 4.9. Error máximo en los periodos de descanso. Leva sin tonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0$). 0:30 armónicos; +:15 armónicos.

Por otra parte, la observación de las figuras 4.9 y 4.10 parece contradecir los resultados obtenidos en el capítulo anterior, referentes al valor mínimo del error en una leva sintonizada, cuando ésta funciona a la velocidad de diseño. Aquí la explicación se basa en el hecho de que el error minimizado en dicho capítulo es el cuadrático integral sobre el ciclo completo del movimiento, y no el valor de pico en los periodos de descanso.

Si se representa el error de pico sobre el ciclo completo frente a la frecuencia, para los mismos ejemplos de las figuras 4.9 y 4.10 (esto se hace en las figuras 4.11 y 4.12, respectivamente), entonces se observa que verdaderamente

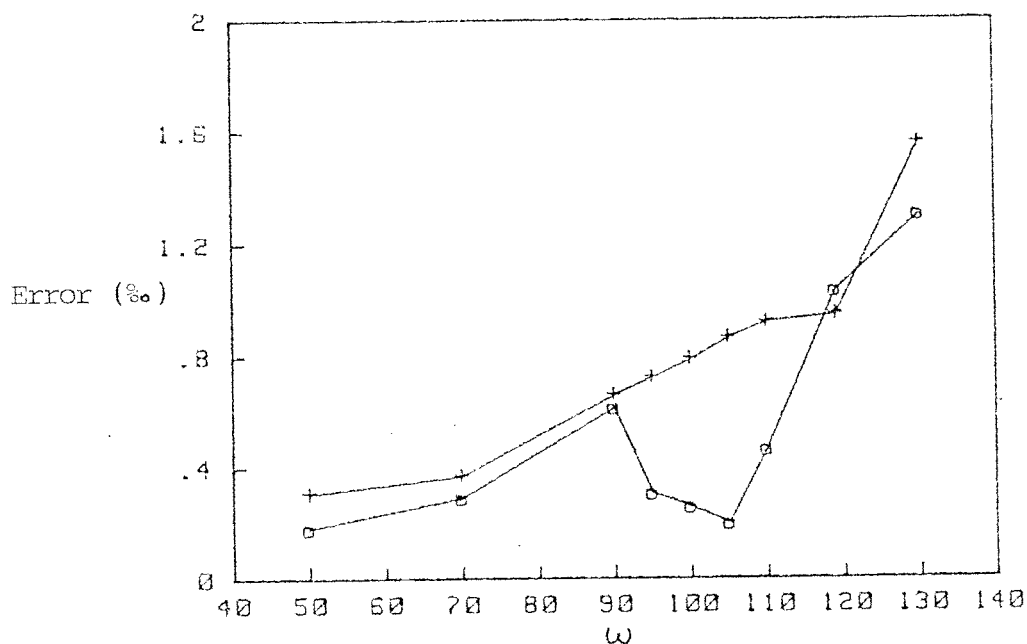


Figura 4.10. Error máximo en los periodos de descanso. Leva sintonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0.05$). 0:30 armónicos; + :15 armónicos.

se produce un mínimo a la velocidad de sintonización.

Observese también que, salvo en la zona próxima a la velocidad de diseño, los errores en estas últimas gráficas son bastante mayores que en las anteriores. Esto significa que la principal contribución al error cuadrático global se produce en los periodos de subida o bajada cuando las velocidades no están próximas a la de diseño.

En las figuras 4.13 a 4.16 se representa el error en el periodo de descanso a diferentes velocidades para los cuatro casos considerados anteriormente: Leva sintonizada con 30 y 15 armónicos, con y sin amortiguamiento.

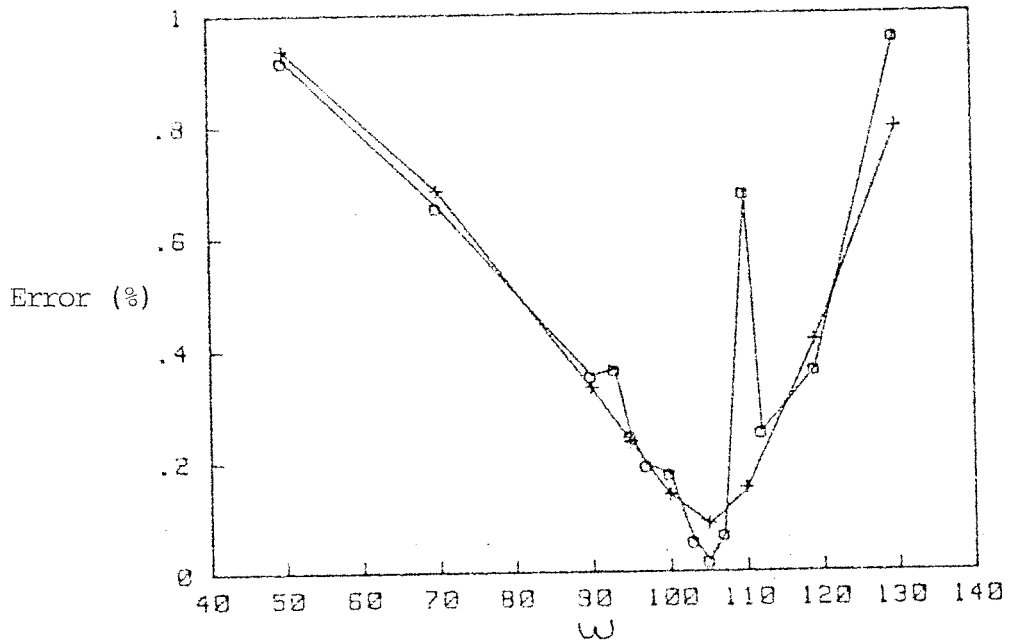


Figura 4.11. Error máximo en el periodo completo de movimiento. Leva sintonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0$). 0:30 armónicos; + :15 armónicos.

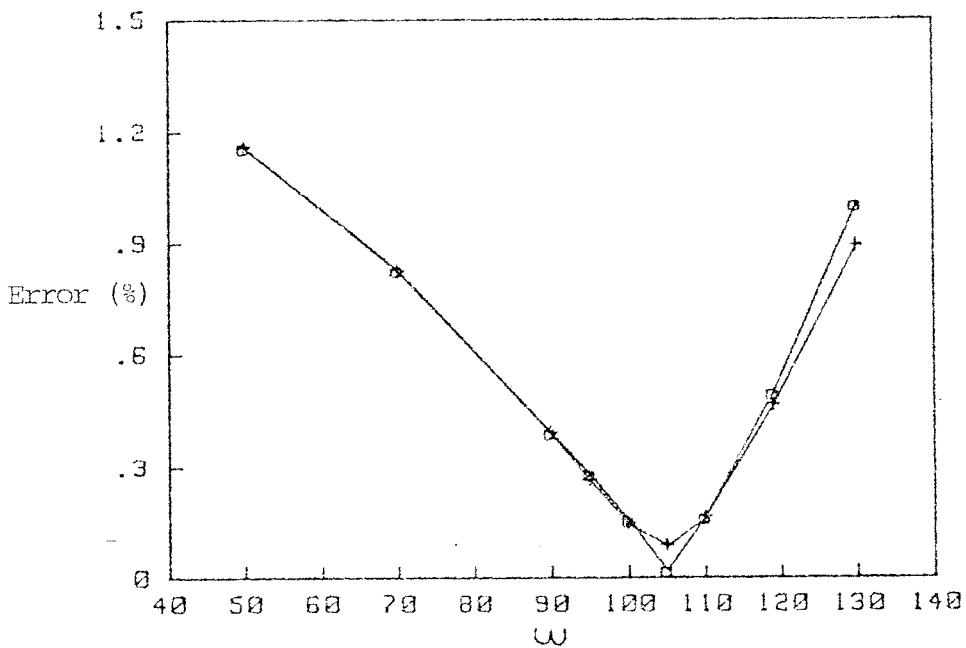


Figura 4.12. Error máximo en el periodo completo de movimiento. Leva sintonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0.05$). 0:30 armónicos; + :15 armónicos.

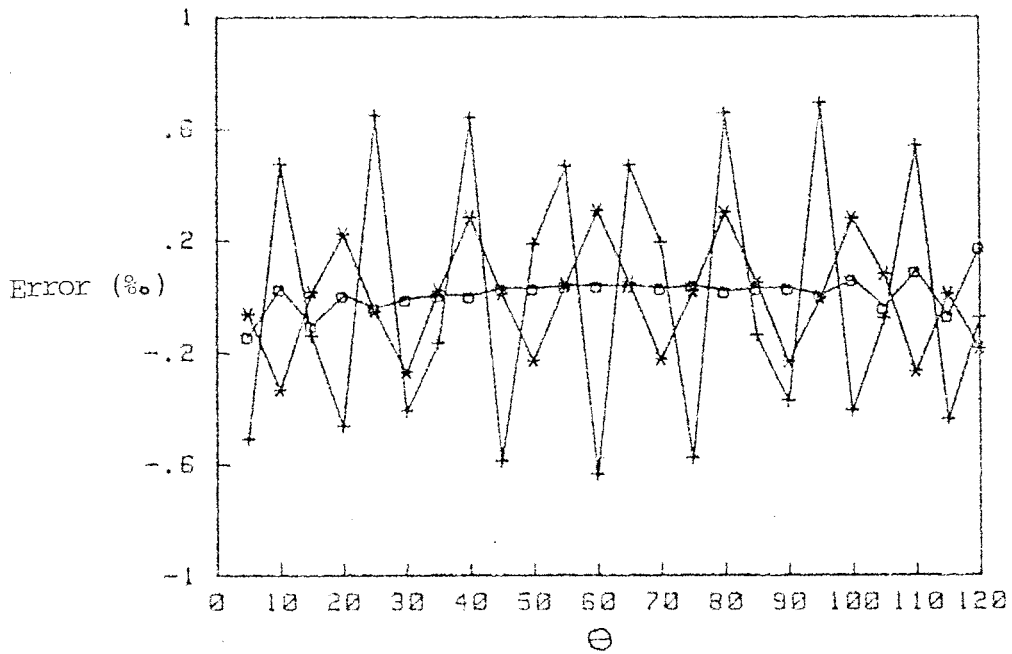


Figura 4.13. Error en el periodo de descanso. Leva sintonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0$). 30 armónicos. 0: $\omega = 90$; *: $\omega = 130$.

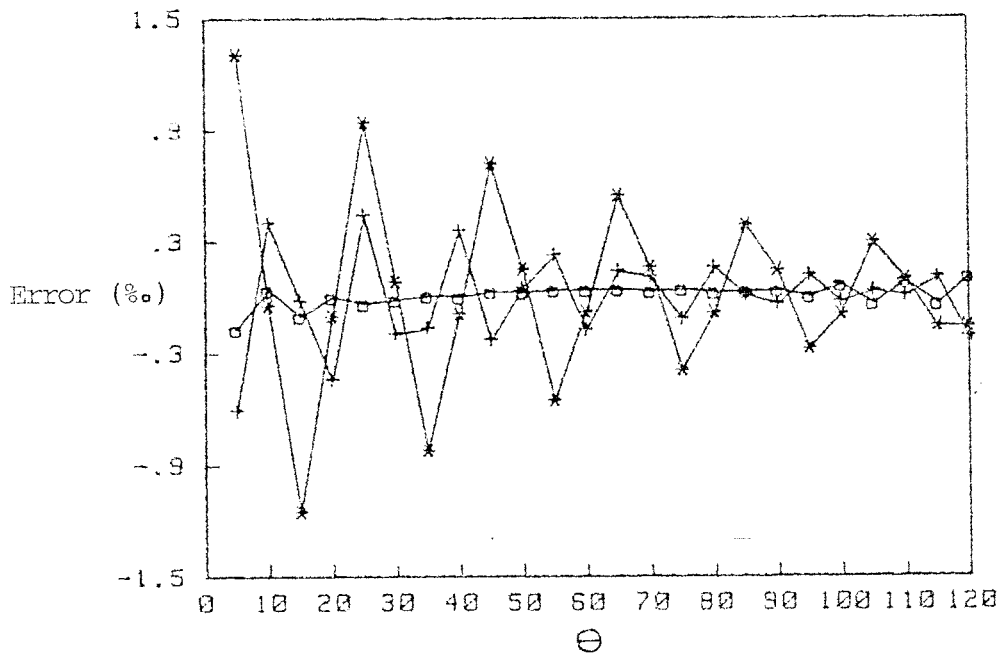


Figura 4.14. Error en el periodo de descanso. Leva sintonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0.05$). 30 armónicos. 0: $\omega = 50$; +: $\omega = 90$; *: $\omega = 130$.

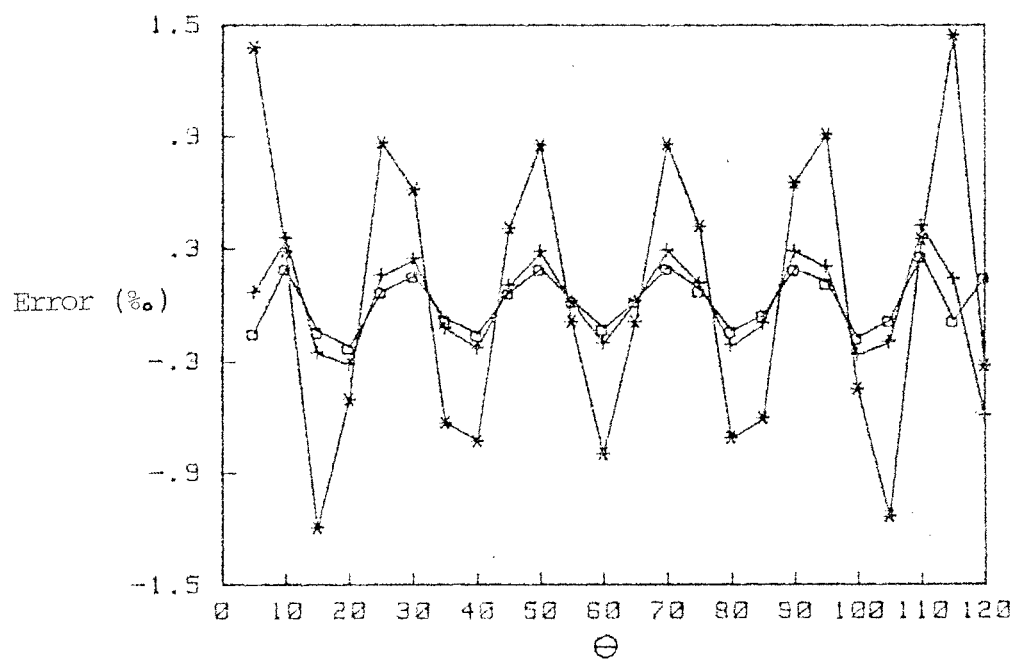


Figura 4.15. Error en el periodo de descanso. Leva sintonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0$). 15 armónicos. 0: $\omega = 50$; +: $\omega = 90$; *: $\omega = 130$.

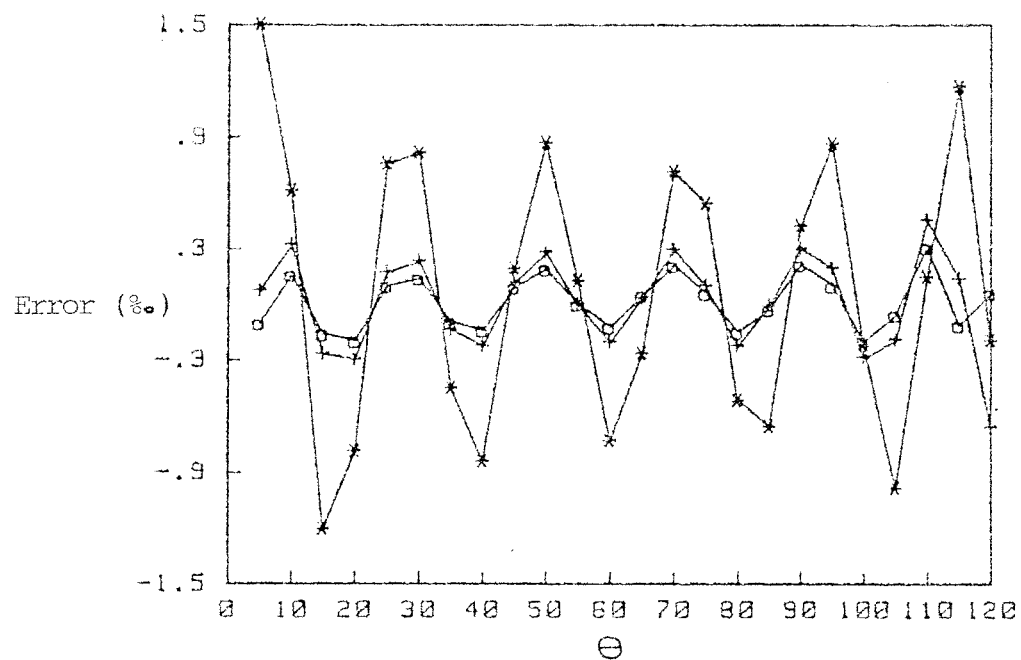


Figura 4.16. Error en el periodo de descanso. Leva sintonizada a $\omega = 105$. ($\xi = 0.05$). 15 armónicos. 0: $\omega = 50$; +: $\omega = 90$; *: $\omega = 130$.

Aunque se ha visto que el amortiguamiento puede ejercer un efecto muy beneficioso sobre el comportamiento de las levas sintonizadas, cuando éstas funcionan a velocidades distintas de la de diseño y existen armónicos resonantes, resulta evidente que el diseñador, normalmente, no puede controlar dicho parámetro. Ahora bien, lo que sí puede hacer es controlar los armónicos resonantes extendiendo la minimización al rango de frecuencias en el que se producen las resonancias, es decir sustituyendo la función objetivo P (ecuación (3.26)) por la Q (ecuación (3.17)).

En la figura 4.17 se ha representado de nuevo el pico de error en los periodos de reposo frente a la frecuencia, para dos levas con 15 y 30 armónicos y amortiguamiento nulo. Pero ahora, en vez de estar sintonizadas, se ha minimizado el error en el intervalo de frecuencias $[100, 110]$. La figura 4.18 representa la misma situación, pero con un amortiguamiento del 5%.

Con amortiguamiento nulo, la minimización en un rango de frecuencias representa una notable mejora para la leva de 30 armónicos, respecto a la leva sintonizada. En cambio, para el sistema amortiguado, la minimización en frecuencia apenas modifica los resultados respecto a los obtenidos para la leva sintonizada, puesto que ya el amortiguamiento, de por sí, había eliminado el efecto de los armónicos resonantes.

Por otra parte, al igual que en la leva sintonizada con 15 armónicos no tenía influencia la introducción del amortiguamiento, tampoco lo tiene ahora la minimización en frecuencia, por los mismos motivos que entonces.

Ampliando el intervalo de frecuencias sobre el que se realiza la minimización se consigue una reducción mayor del error en la leva de 30 armónicos, como se puede observar

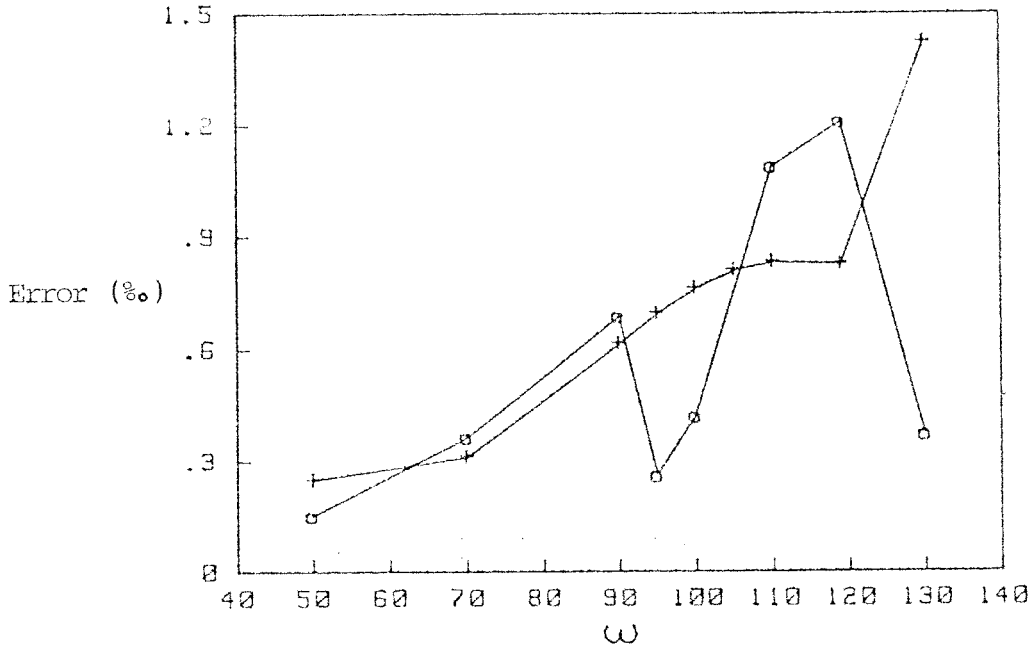


Figura 4.17. Error máximo en los periodos de descanso. Minimización en el rango de frecuencias |100, 110|. ($\xi = 0$). 0:30 armónicos; +:15 armónicos.

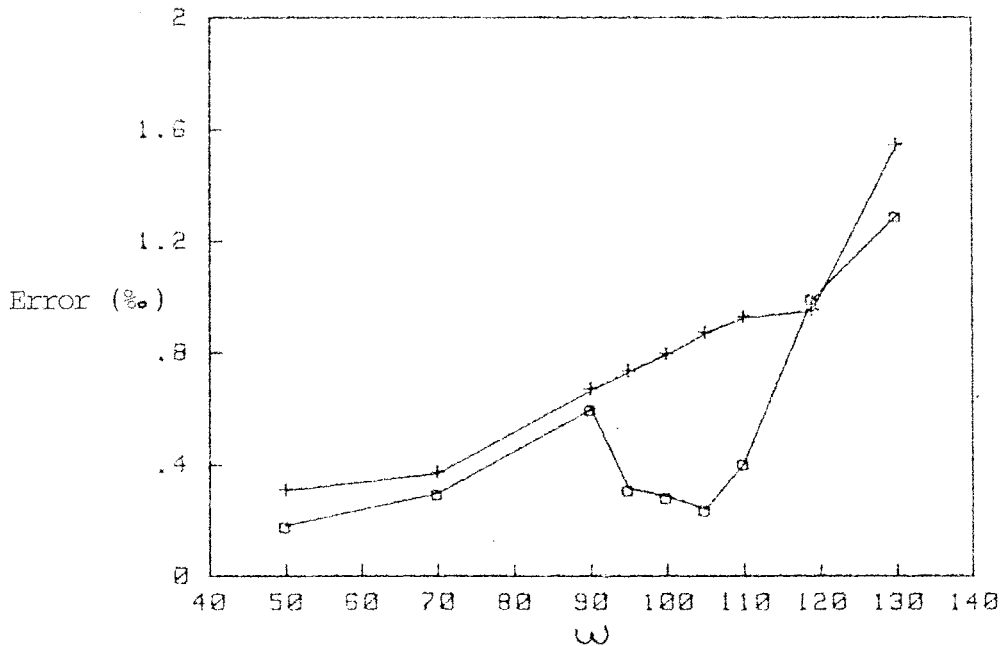


Figura 4.18. Error máximo en periodos de descanso. Minimización en el rango de frecuencias |100, 110|. 0:30 armónicos; +:15 armónicos. $\xi = 0.05$

en las figuras 4.19 y 4.20, en las que la minimización se realiza sobre el intervalo de frecuencias $[90, 130]$.

En la tabla 4.1 se representan las frecuencias de resonancia y las amplitudes (a_k) de los armónicos resonantes del perfil de la leva obtenido con las tres síntesis que se han examinado, siendo nulo el amortiguamiento del sistema. El caso de un amortiguamiento del 5% se contempla en la tabla 4.2.

Puede comprobarse que las frecuencias de resonancia coinciden realmente con los picos observados en la figura 4.9, así como el control ejercido sobre la amplitud de los armónicos al realizar la minimización en frecuencia cuando el sistema no está amortiguado. En cambio, en el sistema amortiguado no se observan modificaciones en los órdenes de magnitud de los armónicos al modificar los criterios de síntesis.

El último de los factores mencionados al comienzo de este apartado, y que puede tener una influencia apreciable en los resultados de la síntesis, consiste en la elección de los periodos de subida y bajada deseados.

En las síntesis analizadas hasta ahora se ha estado empleando el movimiento cicloidal, que es usualmente considerado como uno de los que produce mejores resultados en mecanismos de alta velocidad. Su principal defecto, se dice, consiste en que posee un pico de aceleración excesivamente alto, lo que debe repercutir en las cargas dinámicas a las que va a estar sometida la leva. El movimiento parabólico, como contrapartida, tiene la menor aceleración posible -uno de los dos objetivos principales en el diseño de un perfil, según Chen (Cf. 1.4.1)- pero también tiene fama de producir excesivas vibraciones.

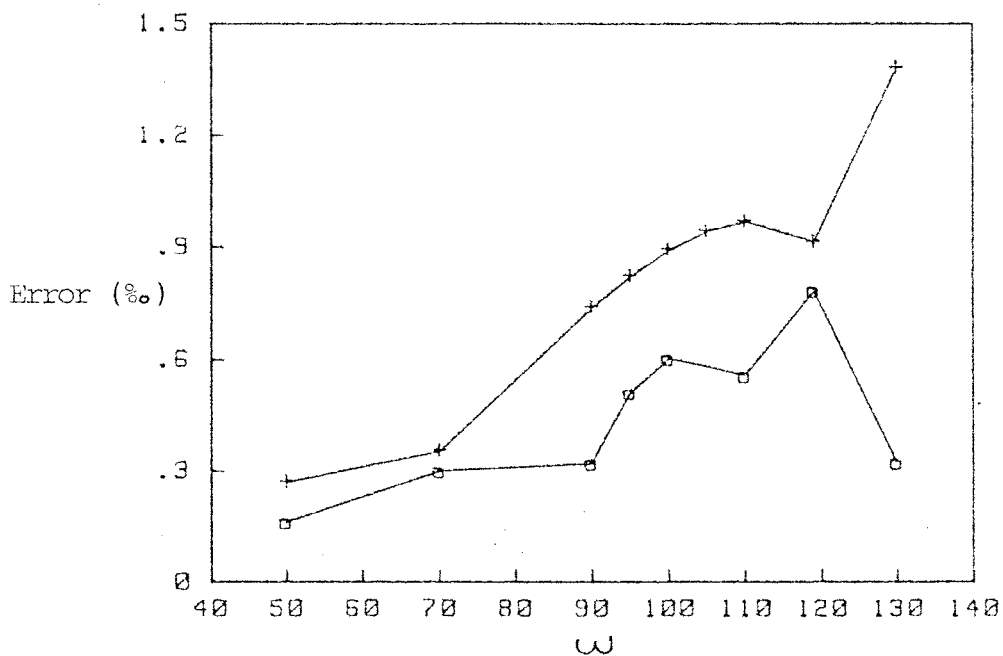


Figura 4.19. Error máximo en periodos de descanso. Minimización en el rango de frecuencias $|90,130|$. ($\varepsilon = 0$); 0: 30 armónicos; +: 15 armónicos.

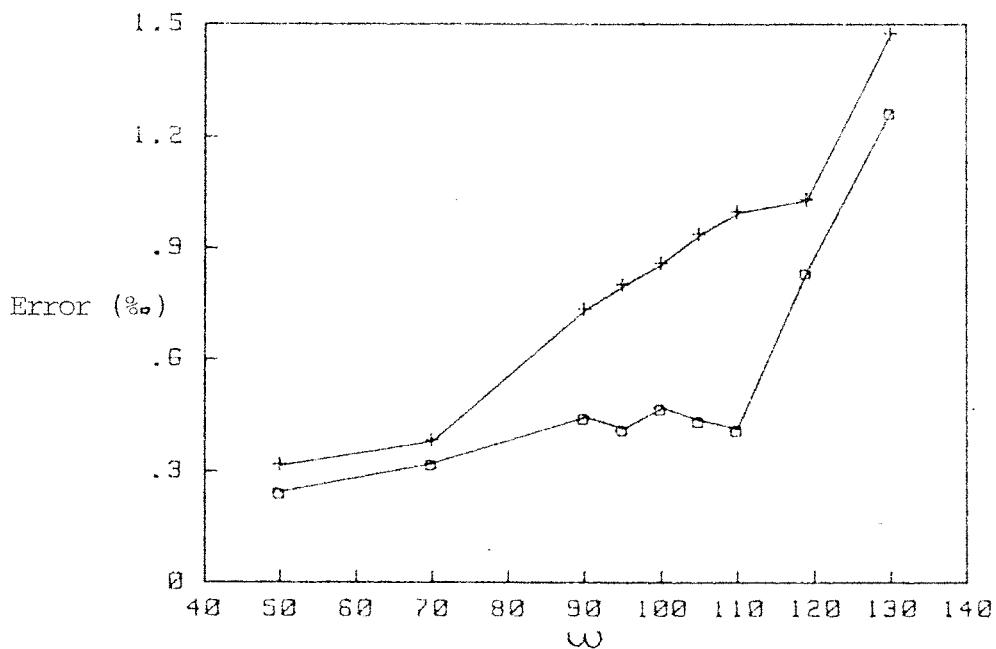


Figura 4.20. Error máximo en periodos de descanso. Minimización en el rango de frecuencias $|90,130|$. ($\varepsilon = 0.05$). 0: 30 armónicos; +: 15 armónicos.

TABLA 4.1.

Armónico resonante	Frecuencia de giro (ω)	Amplitud del armónico sintonizada a $\omega = 105$	Amplitud del armónico $\omega \in 100, 110 $	Amplitud del armónico $\omega \in 90, 130 $
25	92.56	$-0.1105 \cdot 10^{-6}$	$-0.9711 \cdot 10^{-7}$	$-0.5642 \cdot 10^{-9}$
23	100.6	$-0.4852 \cdot 10^{-7}$	$-0.9679 \cdot 10^{-10}$	$-0.1869 \cdot 10^{-9}$
21	110.19	$0.2919 \cdot 10^{-6}$	$0.5770 \cdot 10^{-7}$	$0.3945 \cdot 10^{-8}$
19	121.79	$0.3102 \cdot 10^{-6}$	$0.2934 \cdot 10^{-6}$	$0.1457 \cdot 10^{-6}$

TABLA 4.2.

Armónico resonante	Frecuencia de giro (ω)	Amplitud del armónico Sintonizada a $\omega = 105$	Amplitud del armónico $\omega \in 100,110 $	Amplitud del armónico $\omega \in 90,130 $
25	92.44	$-0.3482 \cdot 10^{-7}$	$-0.2428 \cdot 10^{-7}$	$0.3754 \cdot 10^{-7}$
23	100.48	$-0.1468 \cdot 10^{-6}$	$-0.1306 \cdot 10^{-6}$	$-0.1028 \cdot 10^{-6}$
21	110.05	$0.2919 \cdot 10^{-6}$	$0.2250 \cdot 10^{-6}$	$0.1098 \cdot 10^{-6}$
19	121.64	$0.4907 \cdot 10^{-6}$	$0.4774 \cdot 10^{-6}$	$0.3861 \cdot 10^{-6}$

En la figura 4.21 se representa el error posicional para dos levas sintonizadas con 30 armónicos. La única diferencia estriba en la elección del movimiento deseado en los periodos de subida y bajada: El cicloidal para una, y el parabólico para la otra.

Aunque el comportamiento en ambos casos es bastante bueno (en ningún punto el error supera el 0.03%), el de la leva "cicloidal" es, comparativamente, notablemente superior.

En las figuras 4.22 y 4.23 se representan la aceleración de entrada y la tensión de contacto en el periodo de subida ($\theta \in [120, 180]$).

Dada la naturaleza del campo admisible de movimientos excitadores que se emplean en la síntesis que se está analizando (polinomios trigonométricos), la aceleración del perfil "parabólico" no presenta discontinuidades, en contra de lo que sucede en el perfil parabólico real. Sin embargo, la aceleración máxima del perfil "parabólico" sigue siendo bastante inferior a la del perfil "cicloidal" (un 32%).

Según estos resultados, y los argumentos, normalmente empleados, respecto a las sobrecargas dinámicas producidas por grandes aceleraciones, cabría esperar que las tensiones de contacto en la leva "cicloidal" fueran bastante superiores a las de la "parabólica". Sin embargo, la figura 4.23 muestra que no sólo no ocurre esto, sino que, incluso, el pico de tensión de la leva "parabólica" supera el de la "cicloidal".

En las figuras 4.24 y 4.25 se comparan los resultados obtenidos con las síntesis comentadas en este apartado frente a los obtenidos por Chew [33]. Este utiliza un método de síntesis por segmentos, en el que la leva está sintonizada (vibración residual nula) a la velocidad de diseño ($\omega = 105$)

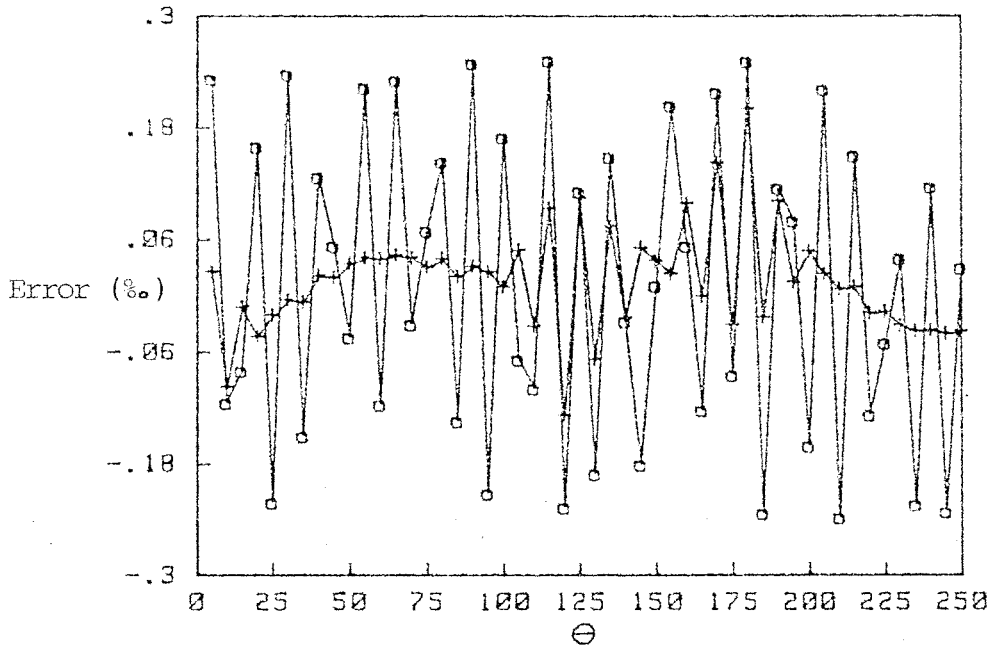


Figura 4.21. Error posicional. Leva sintonizada a $\omega = 105$ con 30 armónicos. ($\xi = 0.01$).
 0: Subidas y bajadas deseadas del movimiento parabólico.
 +: Subidas y bajadas deseadas del movimiento cicloidal.

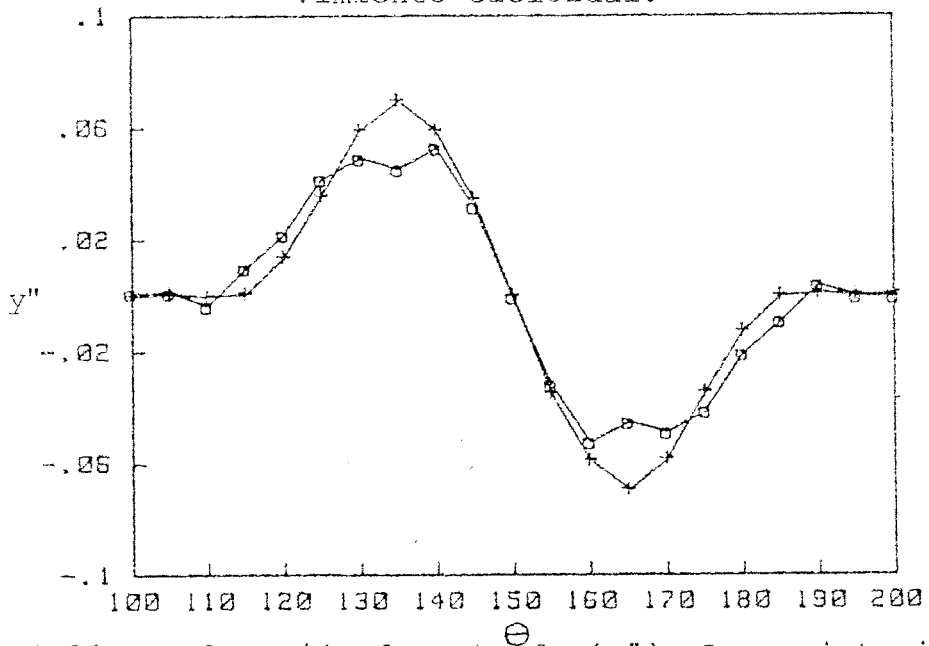


Figura 4.22. Aceleración de entrada (y''). Leva sintonizada a $\omega = 105$ con 30 armónicos. ($\xi = 0.01$).
 0: Subidas y bajadas deseadas del movimiento parabólico.
 +: Subidas y bajadas deseadas del movimiento cicloidal.

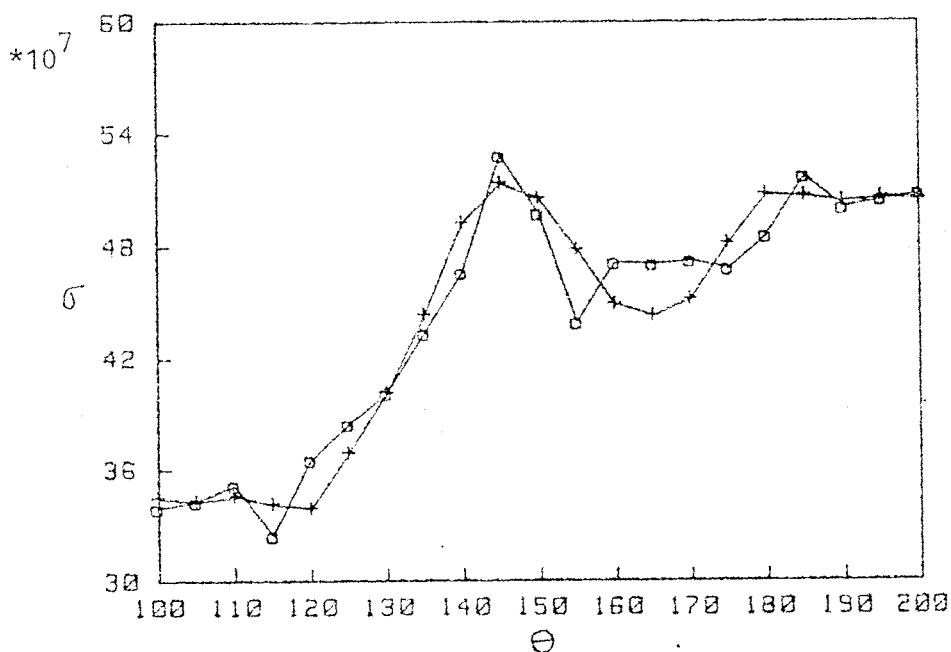


Figura 4.23. Tensión de contacto. Leva sintonizada a $\omega = 105$ con 30 armónicos. ($\xi = 0.01$).

o: Subidas y bajadas deseadas del movimiento parabólico.

+: Subidas y bajadas deseadas del movimiento cicloidal.

pero, a la vez, ejerce un control sobre el error posicional a velocidades distintas de la de diseño mediante la minimización de una "energía" asociada a las vibraciones relativas (Cf. 1.3.3.).

Puesto que se trata de minimizar el error en un rango de frecuencias, sus resultados se comparan con una síntesis en un rango de frecuencias, utilizando 30 armónicos y tomando como movimiento deseado en los periodos de subida y bajada el cicloidal (se trata de la misma síntesis comentada en la figura 4.19).

En la figura 4.24 se observa el típico comportamiento oscilante de las amplitudes de vibración residual para los resultados de Chew. El comportamiento del error posicional de la leva trigonométrica es bastante más regular.

Como en los diseños tipo Polydyne el error es muy sensible a pequeñas variaciones de la velocidad de funcionamiento, es usual [67] tomar como curva de error efectivo la envolvente de los picos de la curva real, en cuyo caso la leva trigonométrica resulta superior en todo el rango de frecuencias de funcionamiento, salvo en un pequeño entorno de la velocidad de diseño. En cualquier caso, por encima de la velocidad de sintonización el error de la leva diseñada por Chew crece desmesuradamente, mientras que el de la leva trigonométrica lo hace de forma bastante moderada.

En la figura 4.25 se comparan las tensiones de contacto. Aquí la comparación resulta claramente favorable para la leva trigonométrica, no ya sólo porque su pico de tensión sea menor, sino porque tiene un comportamiento mucho menos oscilante, lo que tiene una importancia primaria en lo que respecta al fenómeno de fatiga, que es uno de los principales causantes de la degradación de la superficie de la leva.

4.3. ANGULO DE PRESION

En este apartado se presentan los resultados de las síntesis que incluyen en el criterio de optimización el ángulo de presión, las aceleraciones y la fuerza en la dirección del movimiento transmitida por el rodillo al seguidor.

Los ejemplos que siguen pretenden mostrar, fundamentalmente, su influencia relativa en los resultados, más que la consecución de una síntesis en un mecanismo real. Por tanto, los valores de los parámetros que definen el modelo son

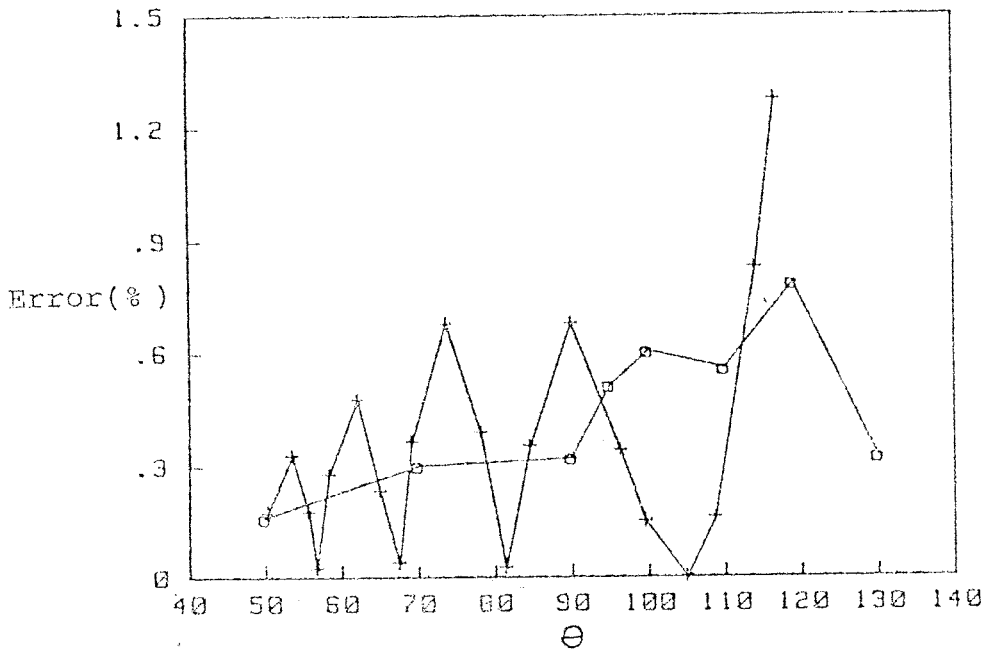


Figura 4.24. Error máximo en periodos de descanso.
 +: Resultados de Chew |33|; 0: Leva trigonométrica. (30 armónicos, $\omega \in |90, 130|$, subida deseada cicloidal).

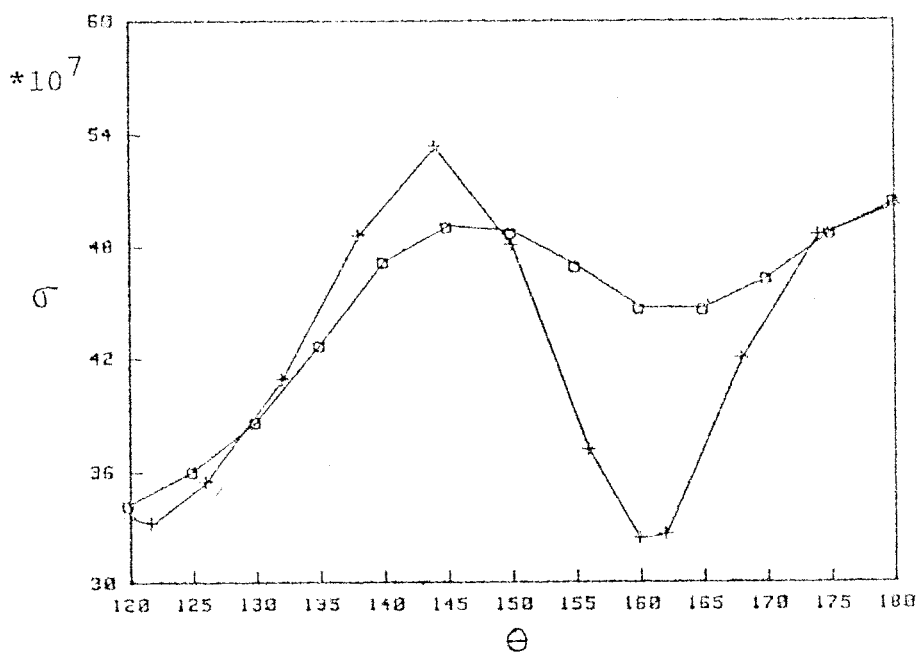


Figura 4.25. Tensión de contacto en el periodo de subida a la velocidad de diseño ($\omega = 105$).
 +: Resultados de Chew |33|. 0: Leva trigonométrica. (30 armónicos, $\omega \in |90, 130|$, subida deseada cicloidal).

arbitrarios, y la evaluación de los resultados debe ser de carácter comparativo.

Se ha sintetizado un movimiento DSDB utilizando un modelo de dos grados de libertad. Las características del movimiento, así como los parámetros que definen el modelo se encuentran recopilados en el apéndice C.

La función objetivo ha sido la (3.17), con $\omega_a = 0$ y $\omega_b = 22'36$, que corresponde al 10% de la frecuencia fundamental. La función P se ha definido de la siguiente manera:

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^{101} \left[(x_p(\theta_j) - \bar{x}_j)^2 + C_3 x_p''^2(\theta_j) + C_5 F^2(\theta_j) + C_6 t_g^2 \psi(\theta_j) \right] \quad (4.1)$$

utilizando 20 armónicos y el movimiento parabólico para representar los movimientos de subida y bajada deseados.

En la tabla 4.3 se representan los valores máximos del error en los periodos de reposo, de la aceleración, de la fuerza transmitida por el rodillo en la dirección del movimiento, y del ángulo de presión. Los valores corresponden al extremo superior del intervalo de frecuencias ($\omega = 22'36$). En el proceso de optimización las ecuaciones se han linealizado siguiendo el método simplificado que se discutió en el apartado 3.5.1., consistente en suponer constante el denominador de la ecuación (3.37), que define el ángulo de presión. La dependencia de la aceleración en la función objetivo se ha eliminado anulando el correspondiente coeficiente de ponderación ($C_3 = 0$).

El coeficiente de ponderación del ángulo de presión es preponderante, controlando perfectamente el valor máximo de dicho ángulo, a la vez que reduce el valor de pico de la

TABLA 4.3.

C_5	C_6	Error (%)	Aceleración (x'')	Fuerza	Ang. de Presión
10^{-14}	10^{-3}	0.65	21.03	$0.200 \cdot 10^6$	-33.9
10^{-14}	10^{-2}	7.13	21.63	$0.190 \cdot 10^6$	-24.5
10^{-15}	10^{-3}	0.43	20.99	$0.200 \cdot 10^6$	-33.0
10^{-15}	10^{-2}	7.03	21.64	$0.191 \cdot 10^6$	-24.5

TABLA 4.4.

C_5	C_6	Error (%)	Aceleración (x'')	Fuerza	Ang. de Presión
10^{-12}	10^{-3}	0.40	21.01	$0.199 \cdot 10^6$	-34.3
10^{-12}	10^{-2}	7.03	21.64	$0.190 \cdot 10^6$	-24.5
10^{-11}	10^{-3}	0.40	21.00	$0.199 \cdot 10^6$	-34.3
10^{-11}	10^{-2}	7.03	21.63	$0.190 \cdot 10^6$	-24.5

fuerza. Pero tales ventajas se consiguen a costa de una pérdida de precisión. Para C fijo, la variación de C apenas mejora la fuerza, a la vez que empeora ligeramente la precisión.

La tabla 4.4 representa la misma situación que la anterior, salvo que se han intercambiado los papeles de los coeficientes C_3 y C_5 . Comparando ambas tablas se observan unos resultados muy similares, pero en la segunda las variaciones de C_3 (con C_6 fija) sólo modifican muy ligeramente a la aceleración, permaneciendo invariables los demás parámetros.

Con objeto de comparar los dos procedimientos aproximados que se han propuesto en el capítulo 3 para optimizar el ángulo de presión se ha resuelto el mismo ejemplo de este apartado, pero utilizando un modelo de un sólo grado de libertad con la misma frecuencia natural (los parámetros que lo definen se detallan en el apéndice C). Salvo esta diferencia, el resto de los parámetros no se ha modificado.

Los valores de los coeficientes de ponderación de la función objetivo han sido $C_3 = 0$, $C_5 = 10^{-11}$ y C_6 variando desde 0 hasta 0.01.

La figura 4.26 muestra el ángulo de presión obtenido para diferentes valores de C_6 , utilizando el procedimiento de optimización iterativo. Las figuras 4.27 y 4.28 representan el error en el periodo de reposo para los dos extremos del intervalo de frecuencias de funcionamiento. De nuevo se observa que la optimización del ángulo de presión conlleva un incremento del error posicional.

En la figura 4.29 se comparan los ángulos de presión obtenidos por los dos procedimientos, y en la 4.30 el error posicional. Las curvas obtenidas en ambos casos son muy similares, con valores de pico prácticamente idénticos, no modifi-

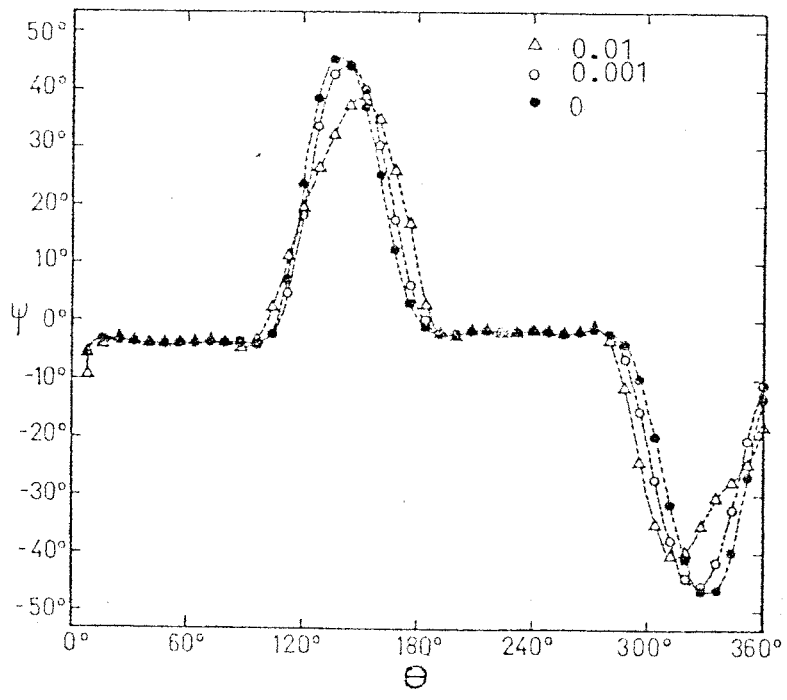


Figura 4.26. Angulo de presión. Método iterativo.

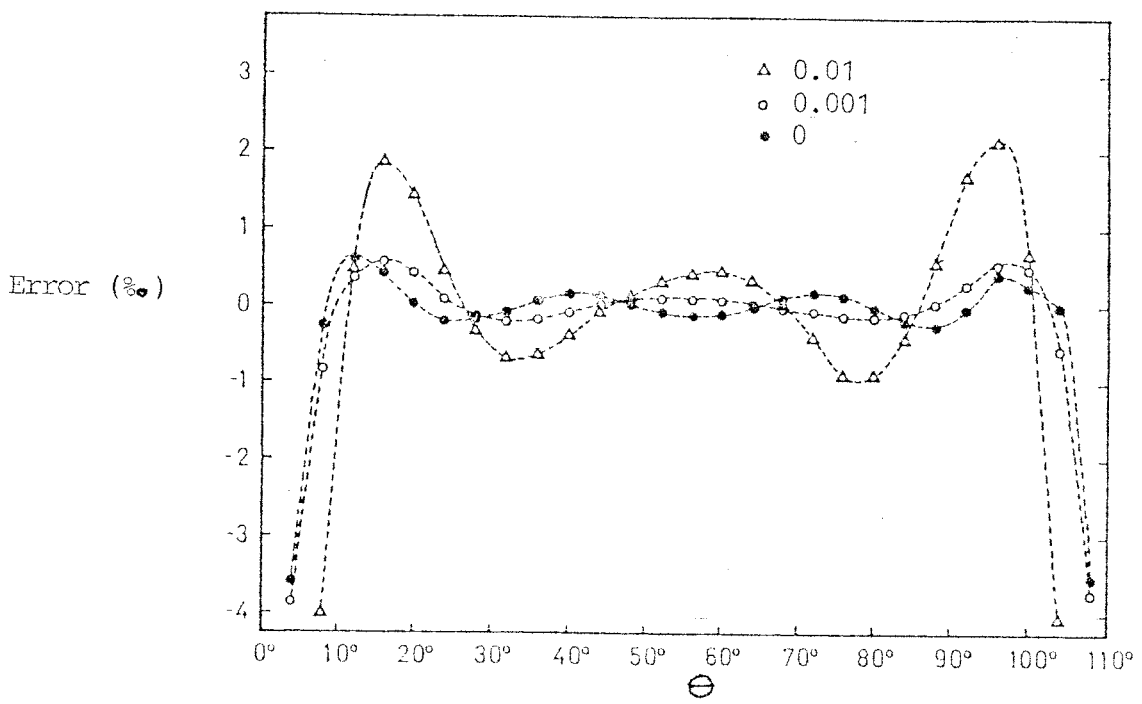


Figura 4.27. Error en periodos de reposo. Método iterativo ($\omega = 0$).

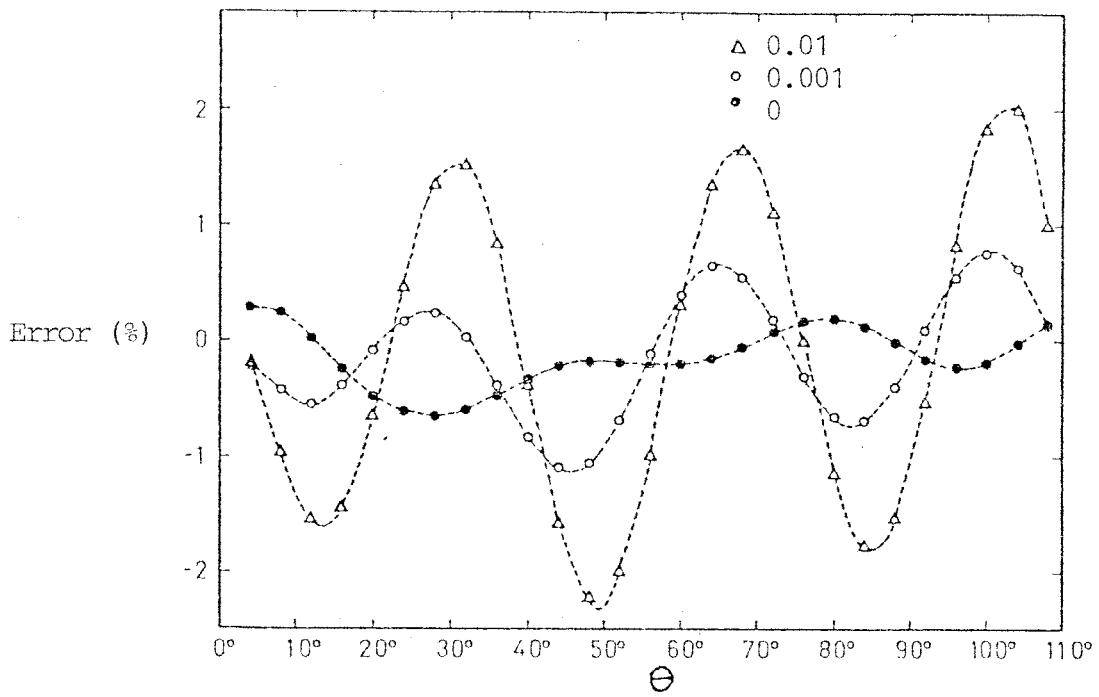


Figura 4.28. Error en periodos de resposo. Método iterativo ($\omega = 22.36$).

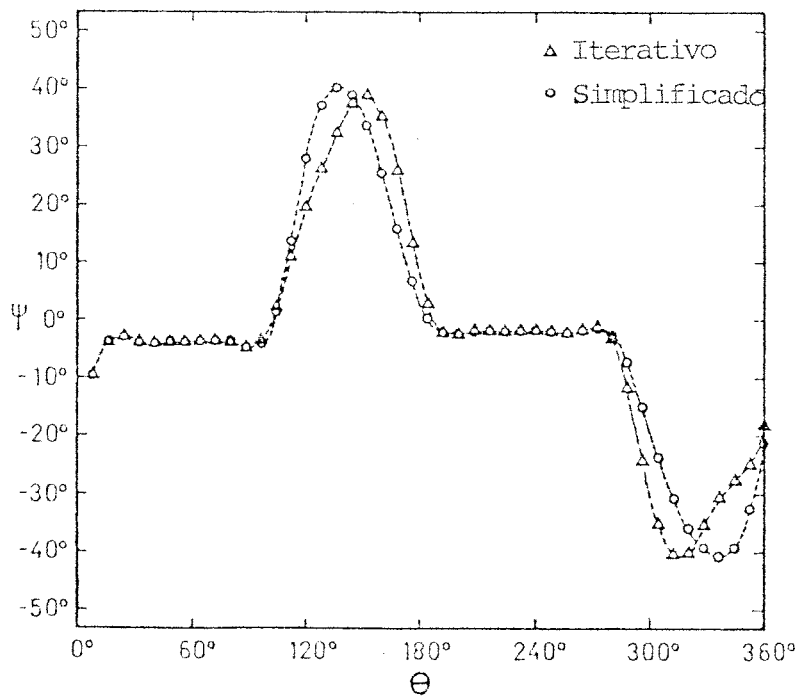


Figura 4.29. Comparación del ángulo de presión ($C_6 = 0.01$).

candose esta situación para otros valores del coeficiente C_6 .

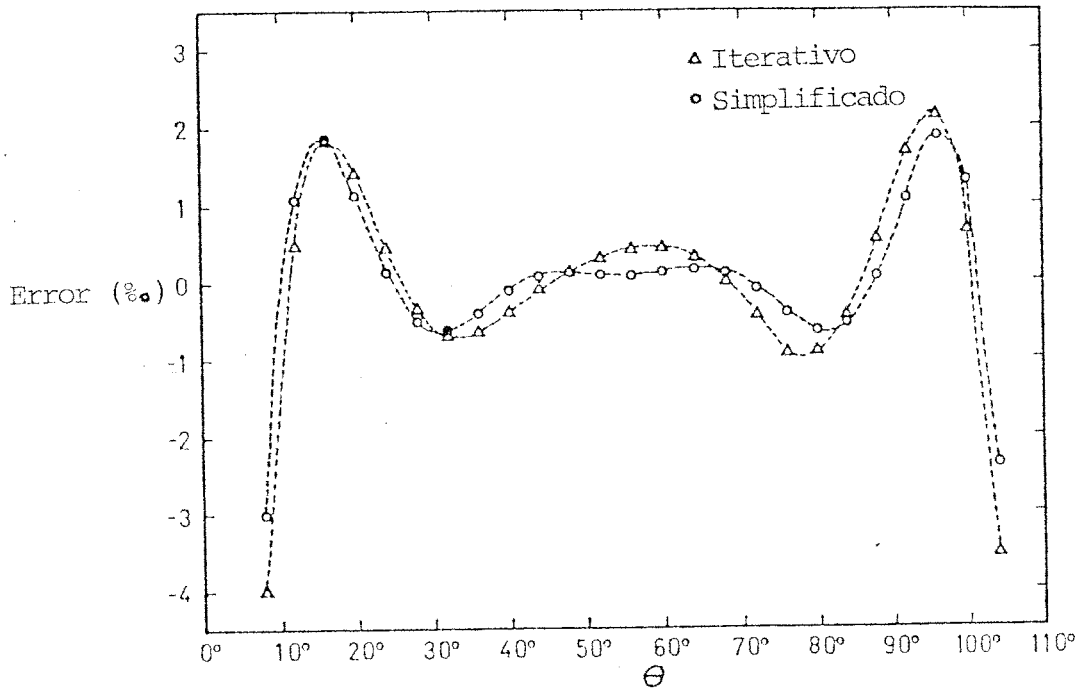


Figura 4.30. Comparación del error posicional ($C_6 = 0.01; \omega = 0$)

4.4. OPTIMIZACION DE LA TENSION DE CONTACTO

Incluso utilizando la teoría de Hertz, la tensión de contacto tiene una dependencia funcional bastante compleja respecto a una gran cantidad de parámetros: precarga, radio del rodillo, ángulo de presión, fuerza transmitida por el seguidor, radio de curvatura, excentricidad, radio de la circunferencia primitiva, etc. Como ya se hizo notar en el capítulo 3, mediante la selección del perfil de la leva sólo se puede realizar un control sobre una parte del conjunto de parámetros que se acaba de citar: La de aquellos que dependen del movimiento impuesto. Pero aun queda una clase de parámetros, fundamentalmente asociados a la geometría de la leva, que puede tener gran influencia en el valor de la tensión de contacto

sin depender de la naturaleza del movimiento impuesto. En el capítulo 3 se comentaron dos de ellos: la precarga y el radio del rodillo. La dependencia de algunos de los restantes puede ser sencilla, por ejemplo es fácil demostrar que, para una leva convexa, cuanto mayor sea el radio de la circunferencia primitiva menor será la tensión de contacto. Pero para otros, dicha relación no es nada obvia. Así, respecto a una leva radial, una leva excéntrica mejora el ángulo de presión en los periodos de subida, pero la situación se invierte en los de bajada.

El texto anterior sólo pretende crear el estado de ánimo adecuado para el examen de los resultados que siguen, referentes a la optimización de las tensiones de contacto descrita en el apartado 3.5.2. Además, permite justificar el estudio previo de la influencia de algunos parámetros no contemplados directamente en la optimización de la presión de contacto.

Todos los resultados de este apartado, así como los del siguiente, se refieren al ejemplo de síntesis de un movimiento DSDB utilizado por Chew en [33], adoptando aquí, también, el mismo modelo que él usa. Tanto las características del movimiento como las del modelo se encuentran en el apéndice C, y cuando se hace uso de valores distintos de los allí señalados, se indica explícitamente. La optimización se realiza sobre el intervalo de frecuencias [100, 115], utilizando como movimiento de comparación el parabólico y tomando 10 armónicos.

En primer lugar se recoge la influencia de la precarga que, como puede observarse en las figuras 4.31 y 4.32 es muy importante.

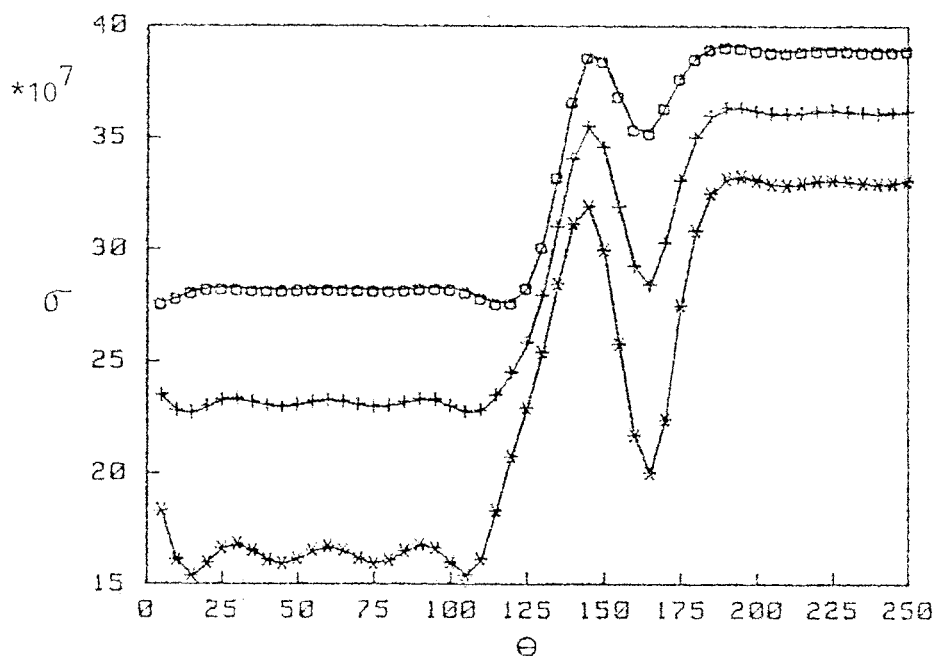


Figura 4.31. Influencia de la precarga en la tensión de contacto. $F_0 = 331(0)$; $222(+)$; $111(*)$.
 $r = 0.010$.

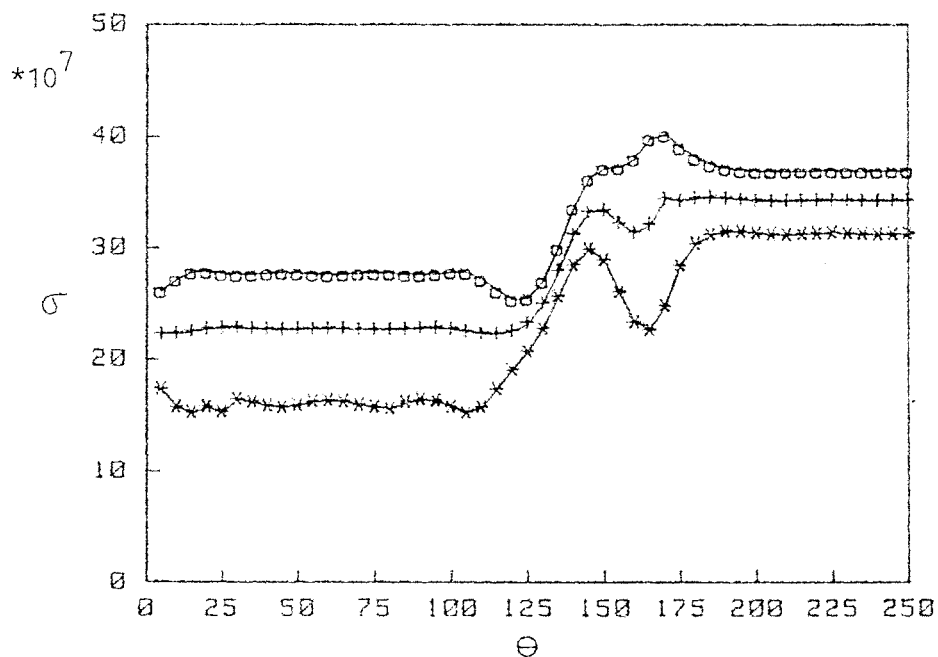


Figura 4.32. Influencia de la precarga en la tensión de contacto. $F_0 = 331(0)$; $222(+)$; $111(*)$.
 $r = 0.012$.

En la figura 4.33 se representan las variaciones de la tensión de contacto con el radio del rodillo. Puede observarse la aparición de un pico de tensión bastante acentuado al final del periodo de subida para los rodillos mayores. El punto en que se presenta el pico corresponde, aproximadamente, al radio de curvatura mínimo, y se debe a que el radio del rodillo se está acercando a dicho valor mínimo. Teóricamente, cuando ambos valores coinciden la tensión es infinita, y para radios mayores se produce el fenómeno de rebaje en el perfil real de la leva. Esto es lo que ocurriría para el mayor de los rodillos considerado en la figura 4.33.

En la figura 4.34 se representan los resultados de la optimización de las tensiones de contacto usando el criterio establecido en el apartado 3.5.2, para varios valores del coeficiente C_7 de ponderación de la tensión de contacto (para $C_7 = 0$ se trata de la minimización exclusiva del error posicional).

En este caso la optimización es muy efectiva, produciéndose una reducción notable del valor de la tensión.

En las figuras 4.35 a 4.39 se representan otras magnitudes, ligadas a la tensión de contacto, para esta misma síntesis.

Los resultados relativos a la aceleración son muy interesantes: En contra del criterio, muy extendido, referente a la posibilidad de limitar las tensiones de contacto mediante el control del pico de aceleración, las gráficas muestran que la reducción de la tensión de contacto no lleva asociada una reducción del pico de aceleración. Este último, más bien permanece inalterado o, en todo caso aumenta ligeramente con la reducción de la presión. Paradójicamente, el pico de aceleración negativa ha seguido una reducción paralela a la de la

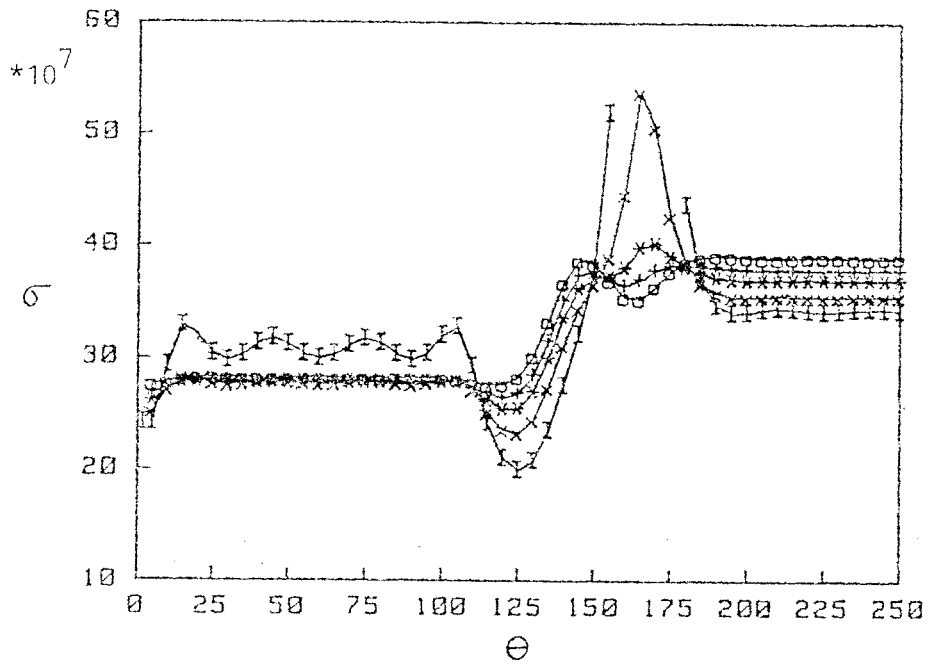


Figura 4.33. Influencia del radio del rodillo en la tensión de contacto. $r = 0.010(0)$; $0.011(+)$; $0.012(*)$; $0.014(x)$; $0.018(I)$.

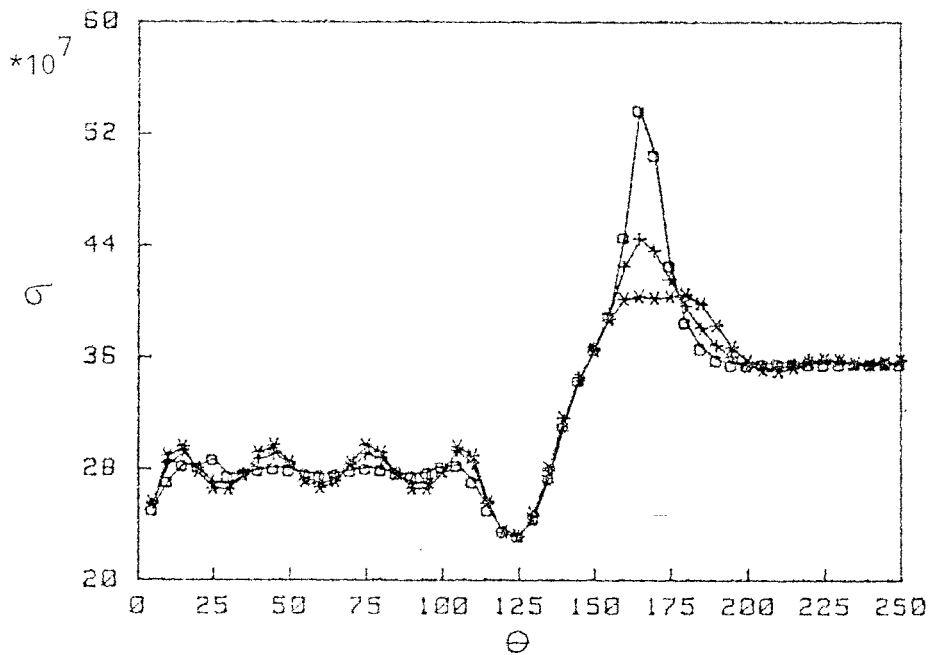


Figura 4.34. Optimización de la tensión de contacto.
 $C_7 = 0(0)$; $10^{-24}(+)$; $5 \cdot 10^{-24}(*)$.
 $r = 0.014$.

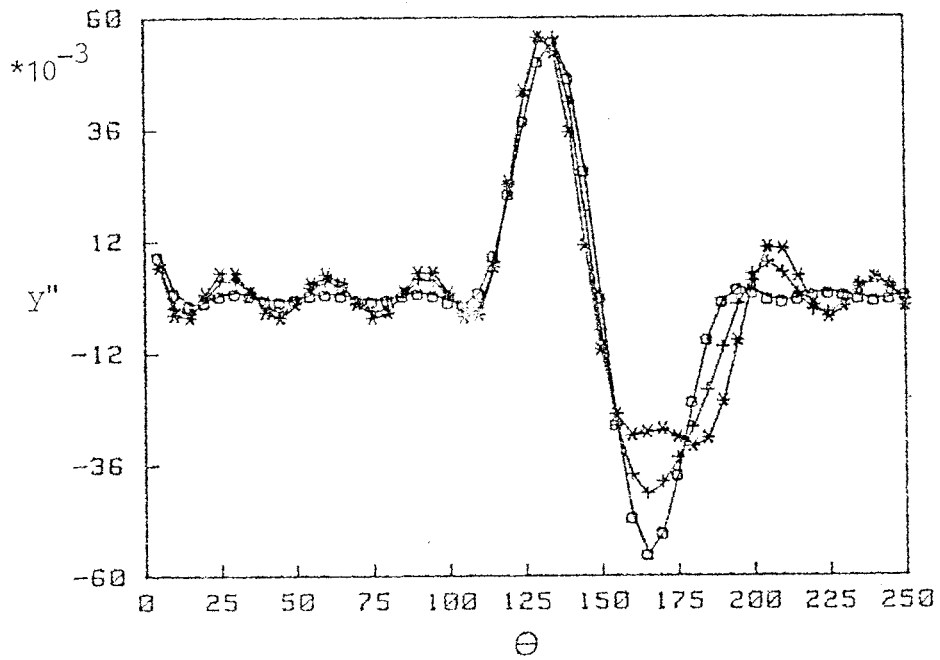


Figura 4.35. Aceleración de entrada (y''). $C_7 = 0(0)$;
 $10^{-24}(+)$; $5 \cdot 10^{-24}(*).$ $r = 0.014$.

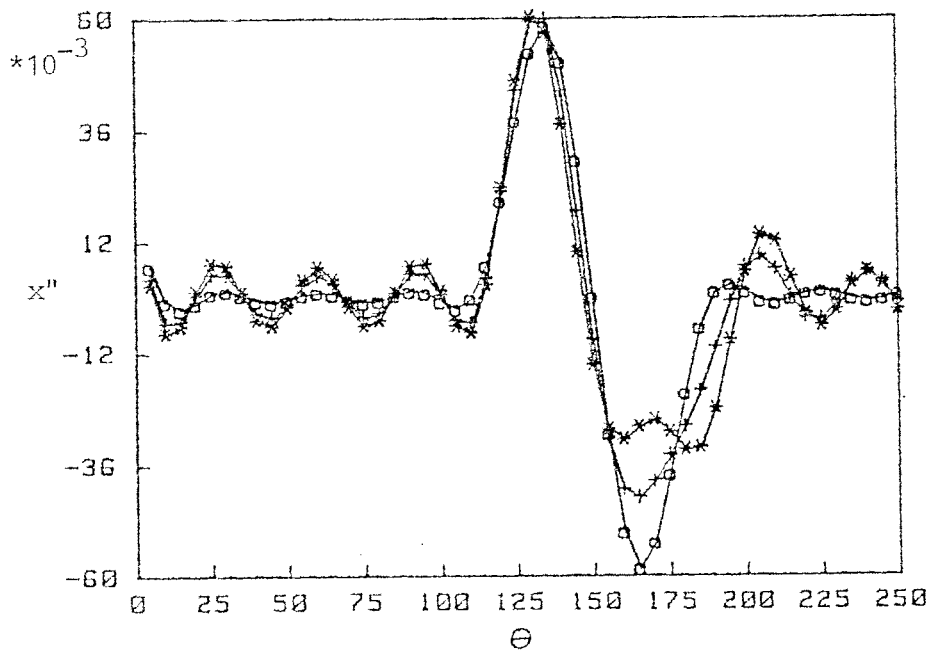


Figura 4.36. Aceleración de salida (x''). $C_7 = 0(0)$;
 $10^{-24}(+)$; $5 \cdot 10^{-24}(*).$ $r = 0.014$.

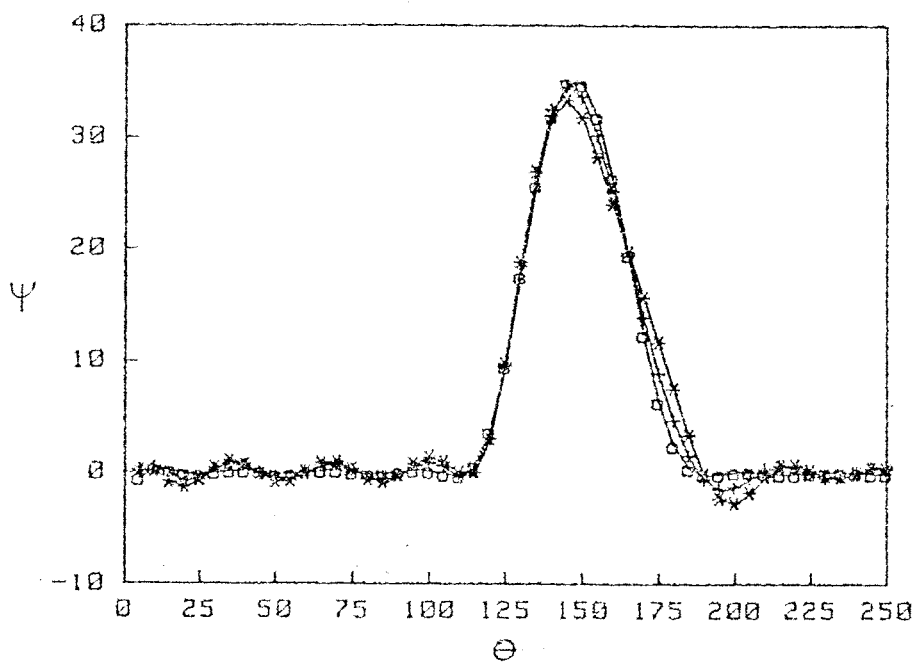


Figura 4.37. Angulo de presión (Ψ). $C_7 = 0(0)$;
 $10^{-24} (*)$. $r = 0.014$.

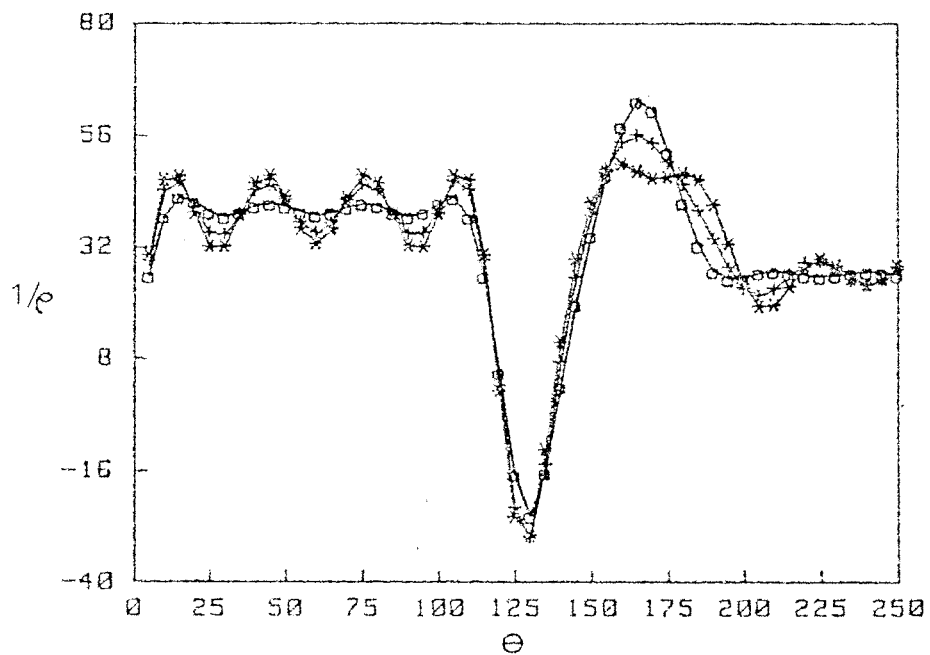


Figura 4.38. Curvatura ($1/\rho$). $C_7 = 0(0)$;
 $10^{-24} (+)$; $5 \cdot 10^{-24} (*)$.
 $r = 0.014$.

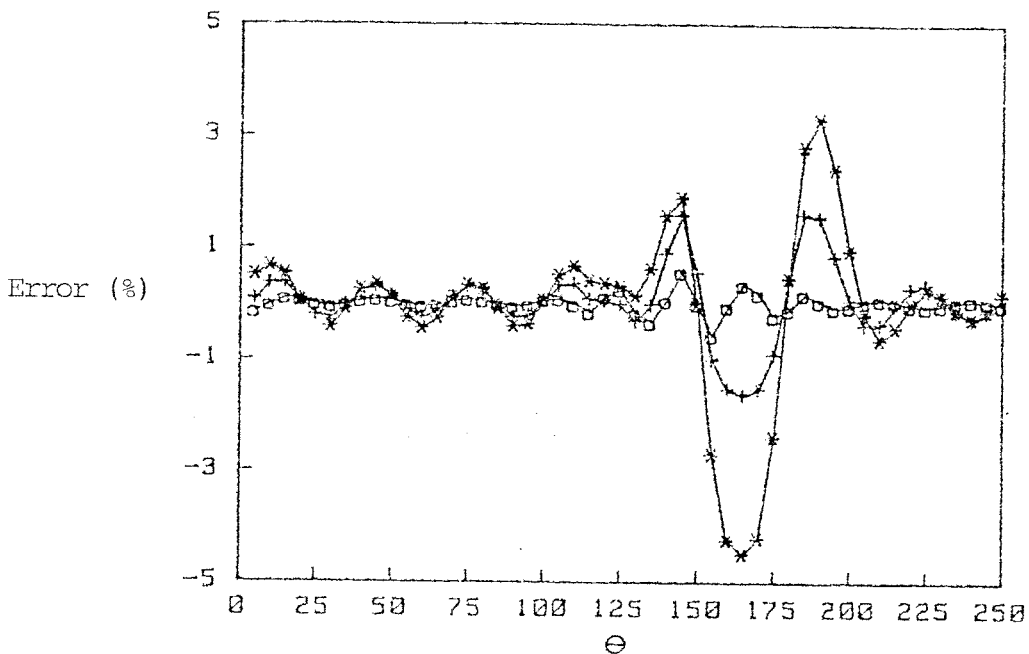


Figura 4.39. Error posicional. $C_z = 0(0)$; $10^{-24}(+)$;
 $5 \cdot 10^{-24} (*)$. $r = 0.014$.

tensión de contacto, cuando se sabe que el aumento de su valor absoluto mejora las condiciones del contacto en la zona de radio de curvatura mínimo.

La observación de la evolución de la curvatura (figura 4.38) puede explicar el comportamiento anterior. El radio de curvatura mínimo ha ido aumentando conforme lo ha hecho C_z . De esta forma, la pequeña diferencia entre los valores del radio del rodillo y el de curvatura mínima, que era la principal responsable del pico de tensión, ha aumentado a costa de disminuir la magnitud del pico de la aceleración negativa. De estos dos efectos antagónicos, el primero es el más importante, por lo que el resultado final es una mejora neta en las condiciones del contacto.

En lo que respecta al ángulo de presión (figura 4.37), apenas se ha visto modificado por el proceso de optimización. Sólo para el mayor valor de C_7 se observa una disminución muy somera de su valor máximo.

Por último, la figura 4.39 confirma una idea bastante lógica: si la función objetivo es suma ponderada de varios términos, entonces el aumento de la ponderación de uno de ellos debe ser en perjuicio de los otros. En el presente caso, la mejora de la tensión de contacto se consigue sacrificando la precisión.

Las figuras 4.40 y 4.41 muestran los resultados de la misma síntesis, pero utilizando un rodillo más pequeño ($r = 0.012$). Ahora, en ningún caso el radio de curvatura mínimo queda suficientemente próximo de r , por lo que los resultados de la optimización no son tan espectaculares como en el ejemplo anterior. Sólo para el mayor valor de C_7 se aprecia una mejora muy pequeña en el punto de tensión máxima, coincidiendo prácticamente todas las curvas en el resto de los puntos. En este ejemplo también se aprecia un incremento del error con el aumento de C_7 .

4.5. RADIO DEL RODILLO OPTIMO

En este último apartado se presentan los resultados del método de optimización del radio del rodillo que se propuso en el capítulo anterior (3.7).

En los ejemplos, las características del movimiento a sintetizar así como el modelo son los mismos que se usaron en el apartado 4.2, cambiandose sólo el intervalo de frecuencias sobre el que se realiza la minimización ($|105, 115|$), y el número de armónicos (20).

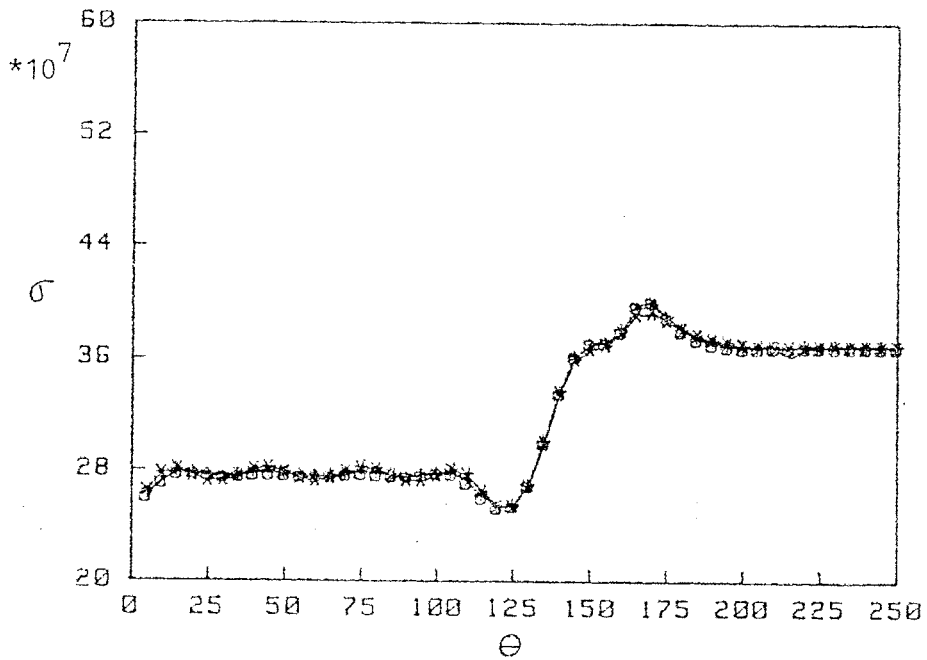


Figura 4.40. Optimización de la tensión de contacto.

$C_7 = 0(0); 10^{-24}(+); 5 \cdot 10^{-24}(*)$.
 $r = 0.012$.

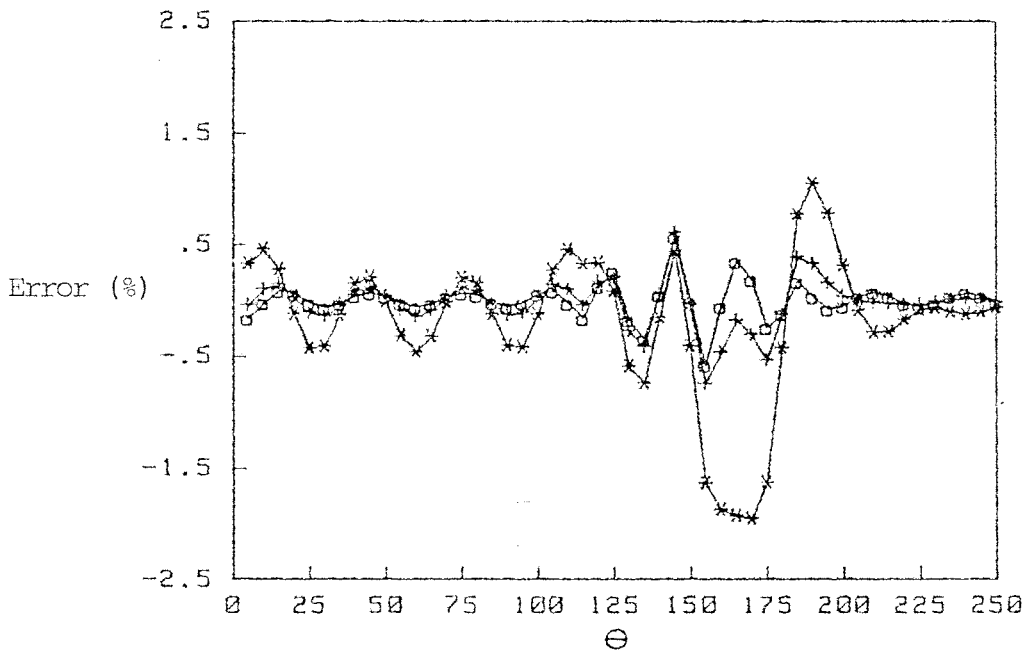


Figura 4.41. Error posicional. $C_7 = 0(0);$

$10^{-24}(+); 5 \cdot 10^{-24}(*)$.

$r = 0.012$.

En la figura 4.42 se representan las tensiones máximas para cada uno de los extremos del intervalo de frecuencias de funcionamiento, frente al radio del rodillo. A la izquierda del punto de corte de las dos curvas la tensión máxima se produce en el extremo superior del intervalo de frecuencias de funcionamiento, mientras que a la derecha de dicho punto el pico se produce en el extremo inferior. La situación es la misma que la que se analizó al final del capítulo anterior (Cf. figura 3.2), de manera que el radio del rodillo que minimiza el valor de la tensión de pico queda definido por la intersección de las dos curvas.

Las marcas sobre las curvas corresponden a las evaluaciones de la tensión de pico necesarias en el método de la bisección. Se observa que la convergencia es muy rápida, dependiendo el número de iteraciones de la precisión con que se desee la solución.

La figura 4.43 muestra el radio de curvatura en que se produce el pico de tensión, en función del radio del rodillo. En este caso los resultados se corresponden con la figura 3.3 del capítulo anterior. El segmento con círculos en sus extremos representa la ecuación $y = r$. La falta de intersección con la curva de radio de curvatura de pico muestra que en el punto óptimo no se satisface la condición (3.53).

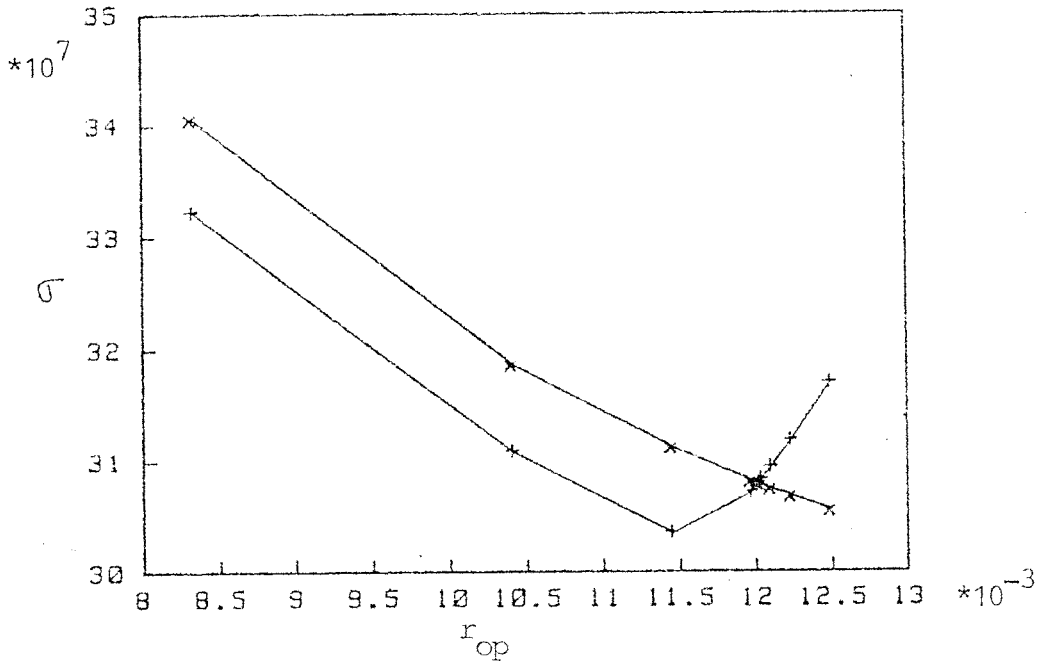


Figura 4.42. Tensión en contacto máxima.
 +: $\omega = 105$; x: $\omega = 115$.

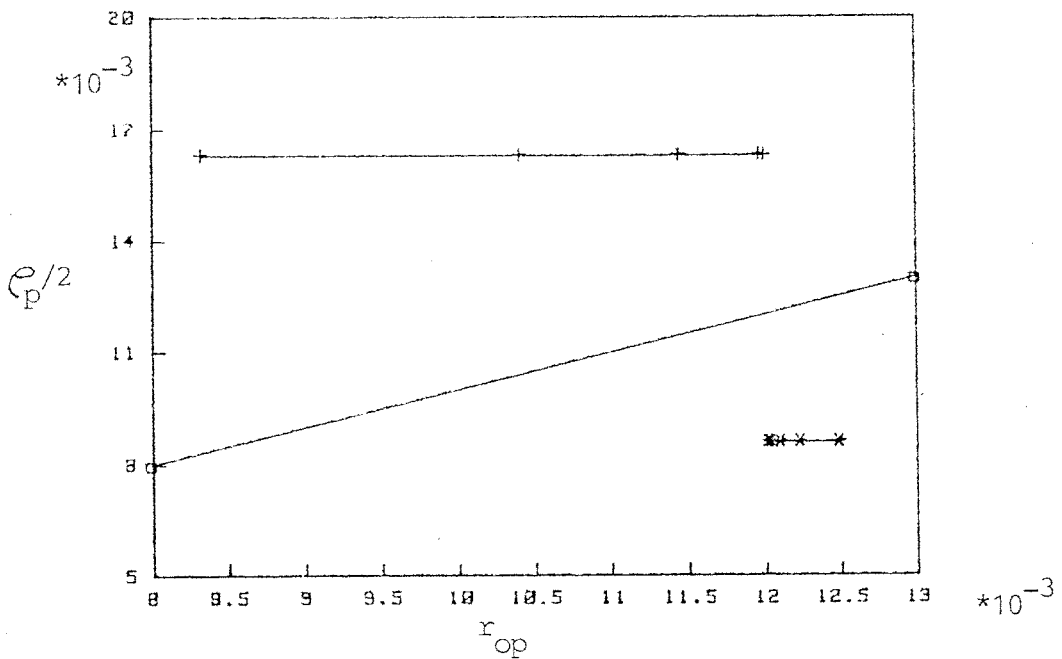


Figura 4.43. Radio de curvatura en el punto de tensión máxima (ρ_p). +: $\omega = 105$; x: $\omega = 115$.

CAPITULO 5: CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

5.1. CONCLUSIONES

Conforme a los objetivos planteados en el capítulo de introducción de esta tesis, se ha realizado un análisis teórico de los modelos matemáticos empleados en la síntesis dinámica de levas. Se ha revisado el estudio teórico más completo (Wiedervich [120]) en dicho campo, deduciéndose que las conclusiones allí obtenidas se basan en hipótesis simplificadoras que no son válidas en muchos mecanismos de leva. De manera que el modelo propuesto en dicha referencia -1 g.d.l. con una frecuencia natural coincidente con la fundamental del mecanismo real- debe rechazarse en la mayoría de las ocasiones. No obstante, se ha visto que todavía es posible obtener resultados válidos con modelos de 1 g.d.l. si se limita superiormente la frecuencia de funcionamiento; pero en este caso la frecuencia natural del modelo puede ser muy distinta de la del mecanismo real.

Por otra parte, el estudio del modelo no se ha limitado sólo a la respuesta, habiéndose abordado también el estudio de la fuerza excitadora.

Para ampliar la validez de los modelos en el rango de las frecuencias de excitación, se han propuesto y contrastado modelos con un número arbitrario de grados de libertad, obtenidos por una discretización mediante elementos finitos.

En lo que respecta al segundo de los objetivos de la tesis, se ha desarrollado un método de síntesis que, basándose en la interpretación de vibraciones en régimen permanente, evita el uso de la hipótesis h_1 , de dudosa validez en mecanismos de alta velocidad, especialmente si funcionan en una gama de velocidades. Para ello se ha sustituido el concepto tradicional de diseño por segmentos, por el de diseño del perfil completo, caracterizando a este último por un polinomio

trigonométrico. Esta caracterización tiene varias ventajas de diversa índole. Por una parte, asegura automáticamente el carácter periódico del movimiento, y a la vez, la validez del modelo, ya que se conoce a priori el contenido en frecuencia del movimiento excitador.

La síntesis, como es usual, se ha planteado como un problema de optimización. La elección de polinomios trigonométricos como funciones admisibles del espacio de diseño ofrece entera libertad en la selección de la dimensión de éste. Además, lo que no es tan usual, el planteamiento de la síntesis del perfil completo permite especializar la optimización al grupo de las paramétricas sin restricciones.

El estudio del movimiento en régimen permanente junto con la elección de la clase de movimientos excitadores admisibles (polinomios trigonométricos) permite obtener una respuesta explícita en función de los coeficientes que definen el perfil de la leva, para un modelo lineal genérico de N grados de libertad.

Todo lo anterior posibilita una gran libertad en la elección de los criterios de optimización. De esta manera se ha conseguido obtener soluciones analíticas cuando se usan funciones objetivo suficientemente sencillas, como el error cuadrático integral o, más genéricamente, la desviación cuadrática integral de cualquier función lineal en la respuesta y sus derivadas temporales.

Esta metodología ha permitido utilizar un criterio de optimización bastante más realista desde un punto de vista físico: La minimización conjunta del error posicional y las tensiones de contacto. Aunque en este caso no es posible una solución analítica, las soluciones numéricas obtenidas resultan mucho menos costosas (desde un punto de vista computacio-

nal) que las obtenidas en el único estudio [33] en que se aborda la minimización conjunta de vibraciones residuales y tensiones de contacto mediante un método de diseño por segmentos, utilizando la teoría del control óptimo. Además, como se ha mostrado en el capítulo 4, las soluciones obtenidas en esta referencia resultan menos satisfactorias que las desarrolladas en el presente trabajo.

Se ha reseñado el hecho de que la síntesis de un perfil no determina unívocamente las tensiones de contacto, dependiendo éstas de otros parámetros, tales como la precarga, radio del rodillo, espesor de la leva, etc. Aunque el estudio de estos parámetros cae fuera del ámbito de esta tesis, se han esbozado algunas ideas directrices acerca del modo en que pueden ser optimizados en la forma más simple posible.

Por último, deben ser rechazados los criterios, ampliamente extendidos, que pretenden controlar las tensiones de contacto mediante la minimización de las aceleraciones, por excesivamente simplistas o ingenuos. Como muestran los resultados del capítulo 4, existen ejemplos de síntesis que mejoran las tensiones de contacto incrementando las aceleraciones.

5.2. DESARROLLO FUTURO

Las posibles ampliaciones futuras de este trabajo pueden encuadrarse en tres categorías: confrontación experimental, ampliación del modelo y ampliación de los criterios de optimización.

Puesto que el presente trabajo tiene un carácter exclusivamente teórico, poco puede decirse respecto a la confrontación experimental, salvo que sería sumamente interesante, puesto que, aunque el doctorando está convencido del valor real de los procedimientos desarrollados, un "experimento" va-

le más que mil palabras.

En cuanto al segundo punto, la ampliación obvia consiste en introducir características no lineales en el modelo. En principio, esta ampliación no sería compatible con la metodología de diseño que se ha desarrollado, puesto que uno de sus pilares básicos es el principio de superposición. Sin embargo, en algunos casos concretos podría ser aplicable, si no para resolver el problema, al menos sí para simplificarlo. Así, en el caso de considerar la flexibilidad del eje de la leva, las ecuaciones del movimiento del sistema completo son no lineales, aún cuando el modelo del mecanismo seguidor por una parte, y el eje de la leva por otra, sean lineales. Entonces se podría sintetizar el movimiento de excitación del mecanismo seguidor con los métodos desarrollados en este trabajo, aunque ahora el conocimiento de tal movimiento no permitiría deducir directamente la forma del perfil de la leva. Para calcular el perfil se debe estudiar aisladamente la leva con su eje. En este sistema se conocen las acciones a las que se encuentra sometido, pero no la posición en la que actúan, relativa al eje de giro de la leva.

Es la tercera categoría de ampliaciones futuras la que admite más posibilidades. Sin necesidad de modificar el criterio de optimización se podría aumentar el número de variables de diseño en la función objetivo, introduciendo aquellos parámetros geométricos que influyen en la tensión de contacto sin afectar el perfil de la leva. Otro parámetro muy importante que se podría introducir como variable de diseño sería la rigidez del muelle de precarga. Continuando con este proceso de ampliación del número de variables de diseño, el problema de la síntesis del perfil se va transformando en el problema del diseño del mecanismo de leva completo.

Un último aspecto importante, que requiere un estudio posterior es el referente al movimiento deseado. En el ca-

pítulo 4 se ha visto la influencia que tiene sobre los resultados obtenidos la elección de dicho movimiento en los periodos de subida y bajada. Sin embargo, no se ha elaborado ningún criterio que permita una elección a priori. Pero lo que sí se podría hacer es definir no un movimiento determinado, sino una familia, dependiendo de uno o varios parámetros, y encargar la tarea de selección del mejor movimiento al propio algoritmo de optimización, mediante la introducción de dichos parámetros como variables de diseño.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

1. Allais, D.C. 1963. "Cycloidal vs. modified trapezoidal cams". Mach. Des. Jan. 31:92-96.
2. Ardayfio, D. 1976. "Dynamics of High-Speed Cam Mechanisms with Damped Flexible Followers Driven by Flexible Camshafts". ASME Pap. 76-DET-63.
3. Ardayfio, D.D. 1980. "Kinetoelasto dynamic (kited) synthesis of cam profiles". Mech. Mach. Theory. 15(1): 1-4.
4. Ardayfio, D.D., Trower, S.P. 1985. "Kinematic Analysis of Three Dimensional Cams". ASME Pap. 85-DET-103.
5. Arnold, V.I. 1983. "MECANICA CLASICA. METODOS MATEMATICOS". Paraninfo.
6. Artobolevski, I. 1977. "LES MECANISMES DANS LA TECHNIQUE MODERNE. Tomo 4". Mir.
7. Bagci, S. 1971. "Stop designing and testing cam-follower systems using the rise portion of the displacement program only". In The Third World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms. Yugoslavia, G. Paper 25, pp. 347-364.
8. Baranyi, S.J. 1970. "Multiple-harmonic cam profiles". ASME Pap. 70-MECH-59.
9. Baratta, F.J. and Bluhm, J.I. 1954. "When will a cam follower jump?". Prod. Eng. 25: July, 156-159.

10. Barkan, P. 1953. "Calculation of high-speed valve motion with a flexible overhead linkage". SAE Trans. 61: 687-700.
11. Baumgarten, J.R. 1962. "Preload force necessary to prevent separation of follower from cam". Paper read at Trans. 7th Conference on Mechanisms, October 1962, at Purdue University, Lafayette, Indiana.
12. Baxter, M.L. Jr. 1948. "Curvature-acceleration relations for plane cams". Trans. ASME 70: 483-489.
13. Beese, J.G.; Dasgupta, A.K.; Peters, R.M. 1978. "Imperfections in Cam Profiles and Cam-Follower Alignment, Influence on Wear Potential". In Cams and Cam Mechanisms, ed. J.R. Jones, London: Mechanical Engineering Publ.
14. Berzak, N. and Freudenstein, F. 1979. "Optimization criteria in polydyne cam design". In Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, pp. 1303-1306.
15. Berzak, N. 1979. "Optimization of cam follower systems in polydyne cam design". Doctoral thesis, Columbia University, 239 pp.
16. Berzak, N. 1980. "Optimization of cam follower systems with kinematic and dynamic constraints". ASME Pap. 80-DET-11.
17. Bloom, F. and Radcliffe, C.W. 1964. "The effect of cam shaft elasticity on the responses of cam drive systems". Douglas Missele and Space Systems Division, Pap. 3040.
18. Bryson, A.E.; Ho, Y.C. 1969. "APPLIED OPTIMAL CONTROL". Blaisdell.

19. Budak, B.M.; Formin, S.V. 1973. "MULTIPLE INTEGRALS, FIELD THEORY AND SERIES". Mir.
20. Carslaw, H.S. 1950. "AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF FOURIER'S SERIES AND INTEGRALS". Dover.
21. Chakraborty, J. and Dhande, S.G. 1977. "KINEMATICS AND GEOMETRY OF PLANAR AND SPATIAL CAM MECHANISMS". New York: J. Wiley.
22. Chang, L. Cusano, C. 1985. "Effects of Cam Mass Center Offset and Follower Lateral Motion on a Cam-Follower Mechanism Operating at High Speeds". ASME Pap. 85-DET-55.
23. Chen, F.Y. 1969. "An Algorithm for computing the contour of a slow-speed cam". J. Mech. 4 (2): 171-175.
24. Chen, F.Y. 1972. "A refined algorithm for finite-difference synthesis of cam profiles". J. Mech. 7 (4): 453-460.
25. Chen, F.Y. 1973. "Kinematic synthesis of cam profiles for prescribed acceleration by a finite integration method". Trans. ASME, J. Eng. In. 95B (2): 519-524.
26. Chen, F.Y. 1973. "Analysis and design of cam-driven mechanisms with nonlinearities". Trans. ASME, J. Eng. In. 95B (3): 685-694.
27. Chen, F.Y. and Polvanich, N. 1975. "Dynamics of high speed cam-driven mechanisms: part I - Linear system models". Trans. ASME, J. Eng. In. 97E (3): 769-776.
28. Chen, F.Y. and Polvanich, N. 1975. "Dynamics of high speed Cam-driven mechanisms: part II - Non-linear system models" Trans. ASME, J. Eng. In. 97B (3): 777-784.

29. Chen, F.Y. 1977. "A survey of the state of the art of cam system dynamics". Mech. Mach. Theory, 12(3): 201-224.
30. Chen, F.Y. 1980. "Numerical scheme for determining the pressure angle and radius of curvature of cams". ASME Pap. 80-DET-70. 8 pp.
31. Chen, F.Y. 1982. "MECHANICS AND DESIGN OF CAM MECHANISMS" Pergamon Press.
32. Chew, M. 1980. "Optimization of High-Speed Cam-Follower Systems Using Control Theory". Ph. D. Thesis, Columbia University.
33. Chew, M.; Freudenstein, F.; Longman, R.W. 1982. "Application of Optimal Control Theory to the Synthesis of High-Speed Cam-Follower Systems. Part 1: Optimality Criterion. Part 2: System Optimization". ASME Pap. 82-DET-101.
34. Courant, R.; Hilbert, D. 1953. "METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS. Vol. I". Interscience.
35. Cuccio, A.; Riva, R. 1982. "Sintesi Elasto-dinamica di Meccanismi per Moti Intermittenti", VI Congresso Nazionale AIMETA, Genova.
36. Dejuhasz, K.J. 1938. "Graphical analysis of surges in Mechanical springs". J. Franklin Inst. 226: Oct., 505-532.
37. Dhande, S.G.; and Chakraborty, J. 1975. "Mechanical error analysis of cam-follower systems - A stochastic approach" In 4th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp. 957-962. London: Mechanical Engineering Publ.

38. Di Benedetto, A. and Vinciguerra, A. 1969. "A new algorithm of kinematic synthesis of plate cam profiles for prescribed follower acceleration". In Proceedings of the 5th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp. 549-552.
39. Di Benedetto, A. and Vinciguerra, A. 1980. "Kinematic analysis of plate cam profiles not analytically defined". ASME, Pap. 80-DEP-12.
40. Donkin, W.T. and Clark, H.H. 1929. "Electric telemeter and valve-spring surge". SAE J. 24: 315-326.
41. Duca, C.D., Simionescu, I. 1980. "The Exact Synthesis of Single-Disk Cams with Two Oscillating Rigidly Connected Roller Followers", Mech. Mach. Theory, 15(3): 213-220.
42. Dudley, W.M. 1948. "New methods in valve cam-design". SAE Q. Trans. 2(7): 19-33.
43. Eiss, N.S. Jr. 1964. "Vibration of cams having two degrees of freedom". Trans. ASME, J. Eng. Ind. 86B (4): 343-350.
44. Freudenstein, F. 1960. "On the dynamics of high-speed cam profiles". Int. J. Mech. Sci. 1:342-349.
45. Freudenstein, F., Vitagliano, V.; Woo, L.S.; Hao, C. 1969. "Dynamic Response of Mechanical Systems". IBM Report 320-2967.
46. Giordana, F.; Rognoni, V.; Ruggieri, G. 1979. "On the Influence of Measurement Errors in the Kinematic Analysis on Cams". Mech. Mach. Theory, 14(5): 327-340.
47. Giordana, F.; Rognoni, V.; Ruggieri, G. 1980. "The influence of construction errors in the law of motion of cam mechanisms". Mech. Mach. Theory. 15(1): 29-45.

48. Gutman, A.S. 1961. "To avoid vibration - try this new cam profile". Prod. Eng. Dec. 25: 42-48.
49. Hain, K. 1967. "APPLIED KINEMATICS". 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
50. Hart, F.D. and Zorowski, C.F. 1964. "Coupled effects of preloads and damping on dynamic cam-follower separation". ASME, Pap. 64-MECH-18.
51. Hart, F.D.; Patel, B.M.; Bailey, J.R. 1976. "Mechanical Separation Phenomena in Picking Mechanisms of Fly-Shuttle Looms". Trans. ASME, J. Eng. Ind. August: 835-839.
52. Hebel, C.B. 1961. "Design equations and graphs for finding the dynamic response of cycloidal-motion cam systems" Mach. Des. Feb. 2: 102-107.
53. Hirschhorn, J. 1962. "Pressure angle and minimum base radius". Mach. Des. 34(21): 191-193.
54. Holowenko, A.R. and Hall, A.S. 1953. "Cam curvature". Mach. Des. Aug. 170-177, Sept., 162-169, Nov., 148-156.
55. Hrones, J.A. 1948. "Analysis of dynamic force in a cam-driven system". Trans. ASME, 70: 473-482.
56. Jehle, F. and Spiller, W.R. 1929. "Idiosyncrasies of valve mechanisms and their causes". SAE, J. 24: 133-143.
57. Johnson, A.R. 1965. "Motion control for a series system of n-degrees of freedom using numerically derived and evaluated equations". Trans. ASME, J. Eng. Ind. 87B(2): 191-204.

58. Johnson, R.C. 1955. "Method of finite differences provides simple but flexible arithmetical techniques for cam design". Mach. Des., Nov., 195-204.
59. Johnson, R.C. 1984. "Force Reduction by Motion Design in Spring-Loaded Cam Mechanisms". ASME Pap. 84-DET-6.
60. Johnson, G.I. 1963. "Studying valve dynamics with electronic computers". SAE Progress in Technology, vol. 5, Application of Computers in Valve Gear Design.
61. Kanzaki, K. and Itao, K. 1972. "Polydyne cam mechanisms for typehead positioning". Trans. ASME, J. Eng. Ind. 94B (1): 250-254.
62. Kim, H.R., and Newcombe, W.R. 1981. "The effect of cam profile errors and system flexibility on cam mechanism output". Mech. Mach. Theory, 16:4.
63. Kloomok, M.; Muffley, R.V. 1954. "Constant Torque Power Cams". Prod. Eng., Feb., 180-186.
64. Kloomok, M. and Muffley, R.V. 1955. "Plate cam design-pressure angle analysis". Prod. Eng. May. 155-171.
65. Kloomok, M. and Muffley, R.V. 1955. "Plate cam design-radius of curvature". Prod. Eng. Sept., 186-187.
66. Kloomok, M. and Muffley, R.V. 1956. "Plate cam design - evaluating dynamic loads". Prod. Eng. Jan., 178-182.
67. Koster, M.P. 1974. "VIBRATION OF CAM MECHANISMS". London: Macmillan.

68. Koster, M.P. 1978. "The Effects of Backlash and Shaft Flexibility on the Dynamic Behavior of a Cam Mechanism". In Cams and Cam Mechanisms, ed. J.R. Jones, London: Mechanical Engineering Publ.
69. Koumans, P.W. 1978. "The Calculation of the Maximum Pressure Angle and the Minimum Radius of Curvature of a Cam Using Special Graphs". In Cams and Cam Mechanisms, Ed. J.R. Jones, Mechanical Engineering Publ.
70. Kupka, M. 1983. "Anwendung der Systemtheorie in der Getriebelehre zur Analyse und Optimierung von Kurvengetrieben", Dr. Ing. Diss., Techn. Univ. München.
71. Kwakernaak, H.; and Smit, J. 1968. "Minimum vibration cam profile". J. Mech. Eng. Sci. 10(3): 219-227.
72. Marti, W. 1936. "Vibrations in valve springs for internal combustion engines". Sulzer Tech. Rev. 2.
73. Domínguez, J.; Martínez, J.; García-Lomas, J.; Arizón, L. 1981. "Diseño de Perfiles de Levas en Sistemas Modelados con más de un Grado de Libertad". IV Congreso Nacional sobre la Teoría de Mecanismos y Máquinas, Valencia.
74. Domínguez, J.; Martínez, J.; García-Lomas, J., Arizón, L. 1982. "Dynamic Synthesis of Cam Systems with N Degrees of Freedom". ASME Pap. 82-DET-106.
75. Domínguez, J.; García-Lomas, J.; Martínez, J. 1983. "Dynamic Synthesis of Cam Profiles Minimizing Vibrations and Pressure Angle". VI World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms, pp. 1225-1229.

76. Martínez, J.; García-Lomas, J.; Domínguez, J. 1983. "Síntesis Dinámica de Levas: Consideración de la Fuerza en la dirección del Movimiento y del Angulo de Presión". *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 1, Nº 1, 406-411.
77. Martínez, J.; García-Lomas, J.; Domínguez, J. 1985. "Influencia del Modelado en la Síntesis Dinámica de Levas". I Congreso Iberoamericano de Métodos Computacionales en Ingeniería.
78. Mataix, C. 1965. "SERIES Y PRODUCTOS INFINITOS". Dossat.
79. Matthew, G.K. 1979. "The modified polynomial specification for cams". In *Proceedings of the 5th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pp. 1299-1302.
80. Meckl, P.H.; Seering, W.P. 1985. "Minimizing Residual Vibration for Point-to-Point Motion". ASME Pap. 85-DET-17.
81. Meirovitch, L. 1967. "ANALYTICAL METHODS IN VIBRATIONS". McMillan.
82. Méndez-Adriani, J.A. 1985. "Design of General Cam-Follower Mechanical System Independent of the Effect of Jump Resonance". ASME Pap. 85-DET-56.
83. Mercer, S.; and Holowenko, A.R. 1958. "Dynamic characteristics of cam forms calculated by the digital computer". *Trans. ASME* 80(8): 1695-1705.
84. Midha, A.; Badlani, M.L., and Erdman, A.G. 1979. "Periodic response of high-speed cam mechanism with flexible follower and camshaft using a closed-form numerical algorithm". In *Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, pp. 1311-1314.

85. Mischke, C. 1970. "Optimal offset on translating follower plate cams". Trans. ASME, J. Eng. Ind. 92(B): 172-176.
86. Mitchell, D.B. 1950. "Tests on dynamic response of cam follower systems". Mech. Eng. 72: 467-471.
87. Neklutin, C.N. 1952. "Designing cams for controlled inertia and vibration". Mach. Des. June, 143-160.
88. Neklutin, C.N. 1959. "Trig-type cam profiles". Mach. Des. Oct., 15: 175-187.
89. Nó Sánchez, M.; García de Jalón, J. 1980. "Generación óptima de Diagramas de Desplazamiento para levas", II Congreso Nacional de la Teoría de Máquinas y Mecanismos, Sevilla.
90. Pisano, A. 1981. "The Analytic Developments and Experimental Verification of a Predictive Model of a High-Speed Cam-Follower System". Ph. D. Thesis, Columbia University.
91. Pisano, A.; Freudenstein, F. 1982. "An Experimental and Analytical Investigation of the Dynamic Response of High-Speed Cam-Follower Systems. Part I: Experimental Investigation". ASME Pap. 82-DET-135.
92. Pisano, A.; Freudenstein, F. 1982. "An Experimental and Analytical Investigation of the Dynamic Response of High-Speed Cam-Follower Systems. Part II: Analytical Investigation". ASME Pap. 82-DET-136.
93. Pisano, A, 1984. "Coulomb Friction in High-Speed Cam Systems". ASME Pap. 84-DET-19.
94. Pisano, A.; Hong Tao, C. 1985. "Coulomb Friction and Optimal Rocker Arm Ratio for High-Speed Cam Systems". ASME Pap. 85-DET-61.

95. Rahman, Z.V. and Bussell, W.H. 1971. "An iterative method analyzing oscillating cam follower motion". Trans. ASME, J. Eng. Ind. 93B(1): 149-156.
96. Rao, A.C. 1976. "Minimum flexibility error and optimum sensitivity synthesis of cam mechanisms". Mech. Mach. Theor. 14(3): 209-214.
97. Rao, A.C. 1980. "Optimum Elastodynamic Synthesis of a Cam-Follower Train Using Stochastic-Geometric Programming". Mech. Mach. Theory, 15: 127-135.
98. Rao, A.C. 1980. "Synthesis of Geared Planar 4-Bar Linkages and Cams to Generate Functions of Two Variables", Mech. Mach. Theory, 15(2): 137-143.
99. Rees Jones, J. (Ed.) 1978. "CAMS AND CAM MECHANISMS", Mechanical Engineering Publ.
100. Rektorys, K. 1980. "VARIATIONAL METHODS IN MATHEMATICS, SCIENCE AND ENGINEERING". Reidel.
101. Rothbart, H.A. 1956. "CAMS-DESIGN, DYNAMICS, AND ACCURACY". New York: Wiley.
102. Sandler, B.Z. 1984. "PROBABILISTIC APPROACH TO MECHANISMS". Elsevier.
103. Sermon, C.F. and Liniecki, A. 1972. "Search for optimum solution of a single disk cam mechanism with an oscillating roller follower". ASME Pap. 72-MECH-61.
104. Singh, Y.P.; Kohli, D. 1981. "Synthesis of Cam-Link Mechanisms for Exact Path Generation". Mech. Mach. Theory, 16(4): 447-457.

105. Speckhart, F.H.; Euler, J.A. 1984. "Design of Maximum Acceleration Plate Cam Profiles Subject to Stress and Curvature Constraints". ASME Pap. 84-DET-131.
106. Stoddart, D.A. 1953. "Polydyne cam design". Mach. Des. 25(1): 121-135; 25(2): 146-154; 25(3): 149-164.
107. Subramaniam, A.K. 1978. "Evaluation of Internal Combustion Engine Valve Trains by an Empirically Tuned Simulation Model". ASME Pap. 78-DGP-9.
108. Szakallas, L.E., and Savage, M. 1980. "The characterization of cam drive system windup". Trans. ASME, J. Mech. Des. 102(2): 278-285.
109. Tascan, S. 1985. "The Minimization of the Fluctuations of Input Shaft Speed in Cam Mechanisms". Mech. Mach. Theor., 20(2): 135-138.
110. Tesar, D., and Matthew, G.K. 1976. "THE DYNAMIC SYNTHESIS, ANALYSIS AND DESIGN OF MODELED CAM SYSTEMS". Lexington, Massachusetts: Lexington Books.
111. Thoren, T.R.; Engemann, H.H. and Stoddart, D.A. 1952. "Cam design as related to valve train dynamics". SAE Q. Trans. Jan., 6, 1: 1-14.
112. Tjonov, A., Samarsky, A. 1980. "ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA". Mir.
113. Timoshenko, S.; Goodier, J.N. 1972. "TEORIA DE LA ELASTICIDAD". Urmo.
114. Turkish, M.C. 1953. "Relationship of valve-spring design to valve gear dynamics and hydraulic lifter pump-up". SAE Trans. (61): 706-716.

115. Van Den Noorgate, L.; De Fraine, J. 1977. "A General Computer Aided Method for Designing High Speed Cams Avoiding the Dangerous Excitation of the Machine Structure", Mech. Mach. Theory, 12(3): 237-245.
116. Van Der Hoek, W. 1966. "Das voraussagfu des dynamischen verhaltens bei kurvenge trieben". Vdi Ausschub Getriebe-technik, Goslar, Febr. 1966.
117. Van Der Hoek, W. 1967. "Het voorspellen van dynamisch gedrac en positioneringsnauwkeurigheid van constructies en mechanismen". Der Ingenieur, 10 Febr. P.W. 19.
118. Wahl, A.M. 1963. "MECHANICAL SPRINGS". McGraw-Hill.
119. Weber, T. Jr. 1960. "Cam dynamics via filter theory". Mach. Des., Oct. 13: 160-165.
120. Wiederrich, J.L. 1973. "Design of cam profiles for systems with high inertial loadings". Ph. D. Thesis, Stanford University.
121. Wiederrich, J.L. and Roth, B. 1974. "Dynamic synthesis of cams using finite trigonometric series". Trans. ASME 96B(1): 287-293.
122. Wiederrich, J.L. and Roth, B. 1978. "Design of low vibration cam profiles". In Cams and cam mechanisms, ed. J.R. Jones, London: Mechanical Engineering Publ.
123. Yamada, I.; Nakagawa, M. 1985. "Reduction of Residual Vibrations in Positioning Control Mechanisms". Journal of Vibration, Acoustic, Stress and Reliability in Design, Vol. 107, N^o 1.

124. Young, S.D. 1979. "The Dynamic Analysis of High-Speed Flexible Cam Mechanisms". Ph. D. Thesis, University of Houston.
125. Johnson, K.L. 1985. "CONTACT MECHANICS". Cambridge University Press.
126. Paul, B. 1979. "KINEMATICS AND DYNAMICS OF PLANAR MACHINERY". Prentice-Hall.
127. Kronsjö, L.I. 1979. "ALGORITHMS: THEIR COMPLEXITY AND EFFICIENCY". John Wiley.

APENDICE A: CALCULO DE LA RESPUESTA DE LOS MODELOS DE
ELEMENTOS FINITOS EMPLEADOS EN 2.2 (MODE-
LOS SIMPLES)

A.1. INTRODUCCION

En este apéndice se obtienen expresiones para la respuesta de los modelos de elementos finitos de los sistemas simples utilizados en en el capítulo 2. Se demuestra que la solución de elementos finitos converge a la del modelo continuo cuando el número de elementos tiende a infinito. Por tanto el error de modelado se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando un número suficiente de elementos.

A.2. BARRA CONTINUA CON MASA CONCENTRADA EN SU EXTREMO

Se trata de resolver explícitamente el sistema de ecuaciones (2.22) y (2.23). Utilizando la regla de Cramer en (2.23):

$$\frac{1}{1} = \frac{\begin{bmatrix} 1+x^2 & -1-x^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2(1-2x^2) & -1-x^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1-x^2 & 2(1-2x^2) & -1-x^2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1-x^2 & 2(1-2x^2) & -1-x^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1-x^2 & 1-(2+b)x^2 & \dots \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2(1-2x^2) & -1-x^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1-x^2 & 2(1-2x^2) & -1-x^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1-x^2 & 2(1-2x^2) & -1-x^2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1-x^2 & 2(1-2x^2) & -1-x^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1-x^2 & 1-(2+b)x^2 & \dots \end{bmatrix}} \quad (\text{A.1})$$

Es facil observar que el determinante del sistema, para un número dado de elementos, se puede construir a partir de los determinantes del mismo sistema, pero discretizado con

menos elementos. De forma que si se denota por D_k el determinante para una discretización de k elementos, se tiene la siguiente ley de recurrencia:

$$D_N = 2(1-2x^2)D_{N-1} - (1+x^2)^2 D_{N-2} \quad (\text{A.2})$$

Además:

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 \\ D_1 &= 1 - (2+b)x^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La sucesión de determinantes D_0, D_1, D_2, \dots sigue una ley de recurrencia (A.2), que es lineal. Para este tipo de sucesiones, la expresión explícita del término general se obtiene de forma muy parecida a la solución de una ecuación diferencial ordinaria, lineal con coeficientes constantes. Dicha expresión viene dada por [2]:

$$D_N = \sum_i A_i \alpha_i^N \quad (\text{A.4})$$

donde los A_i son constantes, y los α_i son las raíces no nulas de la ecuación característica, que se obtiene sustituyendo en la ley de recurrencia las D_k por α^k . Para la ley (A.2) la ecuación característica es:

$$\alpha^2 - 2(1-2x^2)\alpha + (1+x^2)^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

cuyas raíces son:

$$\alpha = (1-2x^2) \pm \sqrt{(1-2x^2)^2 - (1+x^2)^2} = 1-2x^2 \pm \sqrt{3x^2(x^2-2)} \quad (\text{A.6})$$

Dichas raíces son complejas conjugadas para $|x| < 2$. Como x es proporcional a la frecuencia de excitación, esto significa que cuando la frecuencia de excitación alcanza un determinado valor las raíces de (A.5) pasan a ser reales. Por otra parte, el rango de valores de la frecuencia de excitación queda limitado por la frecuencia natural del sistema. Es fácil comprobar que para los valores de las frecuencias naturales de los --

ejemplos estudiados en el capítulo 2 se verifica que $x < \sqrt{2}$. Por tanto las raíces de la ecuación característica serán complejas conjugadas, y la expresión del determinante del sistema (2.23) se podrá escribir así:

$$D_N = \left(\sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \right)^N \left(A_1 \cos N\theta + A_2 \operatorname{sen} N\theta \right) \quad (\text{A.7})$$

siendo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3x^2(2-x^2)}}{1-2x^2} \quad (\text{A.8})$$

Las constantes A_i se determinan sustituyendo (A.3) - en (A.7), para $N=0$ y $N=1$, obteniéndose finalmente:

$$D_N = \left(\sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \right)^N \left(\cos N\theta - \frac{bx}{\sqrt{3(2-x^2)}} \operatorname{sen} N\theta \right) \quad (\text{A.9})$$

Una vez calculado D_N , sólo falta expresar las amplitudes de los movimientos y de la fuerza en función de D_N . En la expresión (A.1), desarrollando el determinante del numerador por los elementos de la primera columna, es fácil ver -- que:

$$\underline{1} = \frac{(1+x^2) D_{N-1}}{D_N} \quad (\text{A.10})$$

Para la amplitud del movimiento de la masa concentrada, aplicando la regla de Cramer al sistema (2.23), se tiene:

$$\underline{N} = \frac{B_N}{D_N} \quad (\text{A.11})$$

donde B_N viene dado por:

$$B_N = \begin{bmatrix} 2(1-2x^2) & -1-x^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1+x^2 \\ -1-x^2 & 2(1-2x^2) & -1-x^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & -1-x^2 & 2(1-2x^2) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1-x^2 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Desarrollando el determinante B_N por los elementos de la última columna, se obtiene un determinante triangular superior, que se calcula fácilmente, quedando:

$$\underline{N} = \frac{(1+x^2)^N}{D_N} \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo D_N por la expresión (A.9) se obtiene la ecuación (2.25). Análogamente, sustituyendo (A.7) en (A.10) y ésta última en (2.22) se obtiene la ecuación (2.24) para la amplitud de la fuerza excitadora.

A.3. SISTEMA MIXTO

En este caso las ecuaciones del movimiento son (2.56) y (2.57). Aplicando Cramer en (2.56):

$$\underline{N} = \frac{a C_{N-1}}{D_N} \quad (\text{A.14})$$

Al igual que en el párrafo anterior, la sucesión de determinantes C_k y D_k sigue una ley lineal de recurrencia:

$$\begin{aligned} C_k &= 2(1-2x^2)C_{k-1} - (1+x^2)^2 C_{k-2} \\ D_k &= 2(1-2x^2)D_{k-1} - (1+x^2)^2 D_{k-2} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

que es la misma que se encontró allí (A.2). La única diferencia estriba en las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= 2(1-2x^2) \\ D_0 &= 1 \\ D_1 &= 1+a-bx^2 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Por tanto, los determinantes serán de la misma forma (A.7), sólo que las constantes A_i tomarán valores distintos. Calculando dichas constantes mediante (A.16), se obtiene:

$$C_N = \left(\sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \right)^N \left(\cos N\theta + \frac{\operatorname{sen} N\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) \tag{A.17}$$

$$D_N = \left(\sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \right)^N \left(\cos N\theta - \frac{\operatorname{sen} N\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{1+a-bx^2}{\operatorname{sen} \theta \sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)}} \operatorname{sen} \theta \right)$$

siendo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x\sqrt{3(2-x^2)}}{1-2x^2} \tag{A.18}$$

Que llevadas a (A.14) y simplificando, queda:

$$\underline{N} = a \frac{\operatorname{sen} N\theta}{H \operatorname{sen} (1-N)\theta + (1+a-bx^2) \operatorname{sen} N\theta} \tag{A.19}$$

con:

$$H = \sqrt{(1-2x^2)^2 + 3x^2(2-x^2)} \tag{A.20}$$

que coincide con (2.58) y (2.59) cuando se expresan a y b en función de A y B .

A.4. CONVERGENCIA DE LOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Se va a estudiar el límite de la expresión (2.54), que corresponde a la respuesta del modelo de elementos finitos del sistema mixto, cuando el número de elementos (N) tiende a infinito. El correspondiente cálculo para el modelo de la barra continua, así como el estudio de la convergencia de la fuerza excitadora se puede llevar a cabo de un modo muy similar. Se trata de evaluar:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A}{N} \cdot \frac{\text{sen } N\theta}{H \text{sen } (1-N)\theta + \left(1 + \frac{A}{N} - 6NBx^2\right) \text{sen } N\theta} \quad (\text{A.21})$$

con $\text{tg } \theta$ y H definidos por (A.18) y (A.20) respectivamente. Además, x depende de N a través de la expresión (2.61), que repetimos aquí:

$$x^2 = \frac{y^2}{6N^2} \quad (\text{A.22})$$

Para $N \rightarrow \infty$, de (A.18) se deduce que $\text{tg } \theta \rightarrow 0$, por lo que será un infinitesimo equivalente a θ . Desarrollando (A.18) se tiene:

$$\theta \sim \text{tg } \theta = \frac{y}{N} + \text{terminos de orden superior (t.o.d)} \quad (\text{A.23})$$

que sustituido en (A.21) da:

$$\underline{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A}{N} \cdot \frac{\text{sen } y}{H \left(\text{sen } \frac{y}{N} \cos y - \cos \frac{y}{N} \text{sen } y \right) + \left(1 + \frac{A}{N} - \frac{By^2}{N} \right) \text{sen } y} \quad (\text{A.24})$$

Ahora, teniendo en cuenta que $H \rightarrow 1$ para $N \rightarrow \infty$ y que:

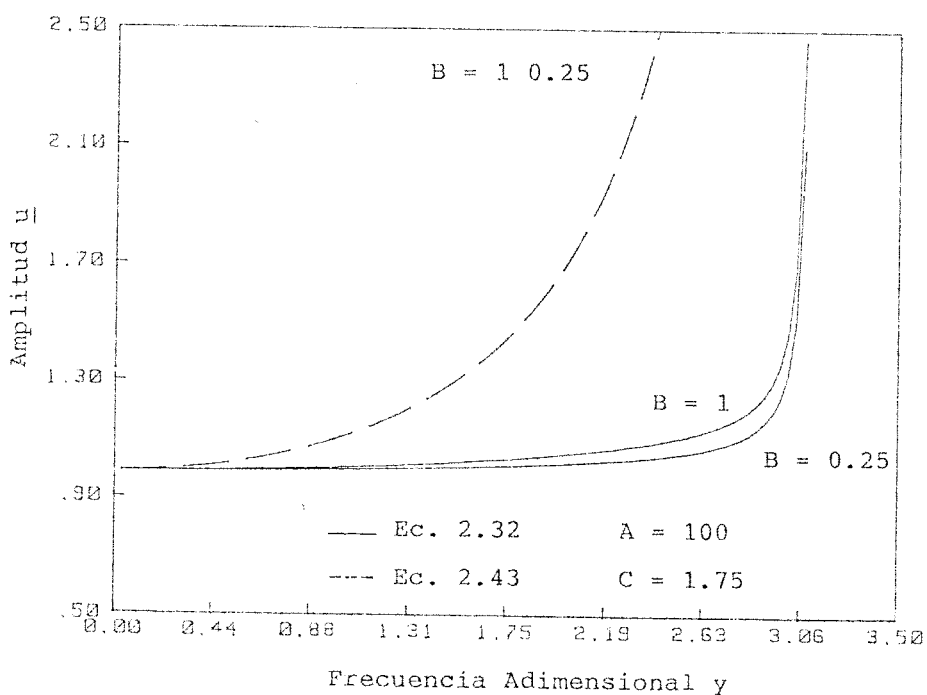
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{y}{N} &\sim \frac{y}{N} \\ \cos \frac{y}{N} &\sim 1 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

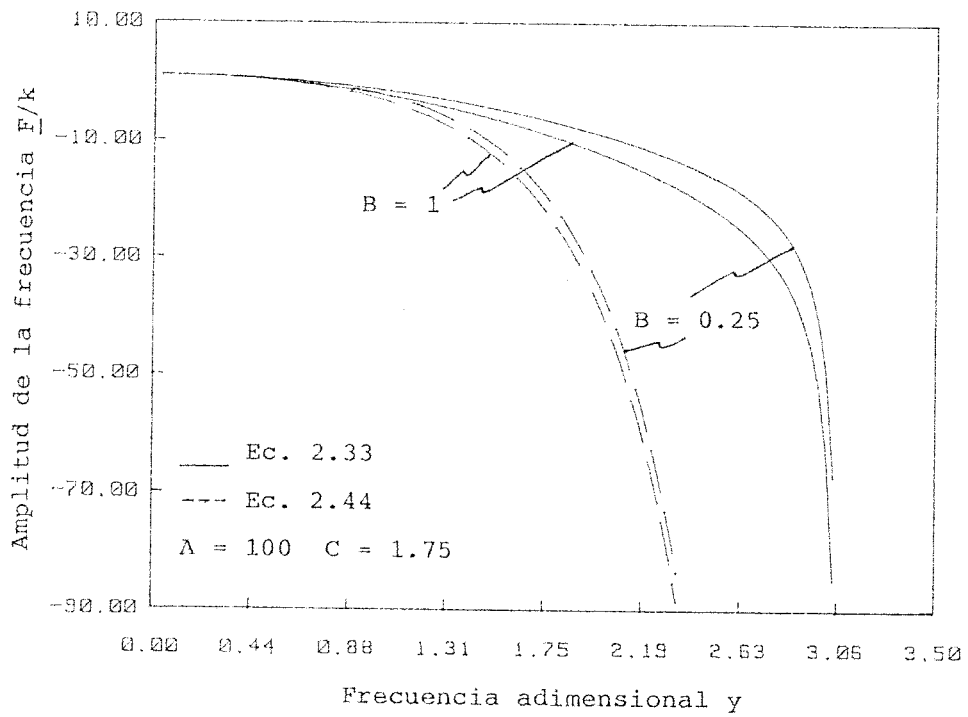
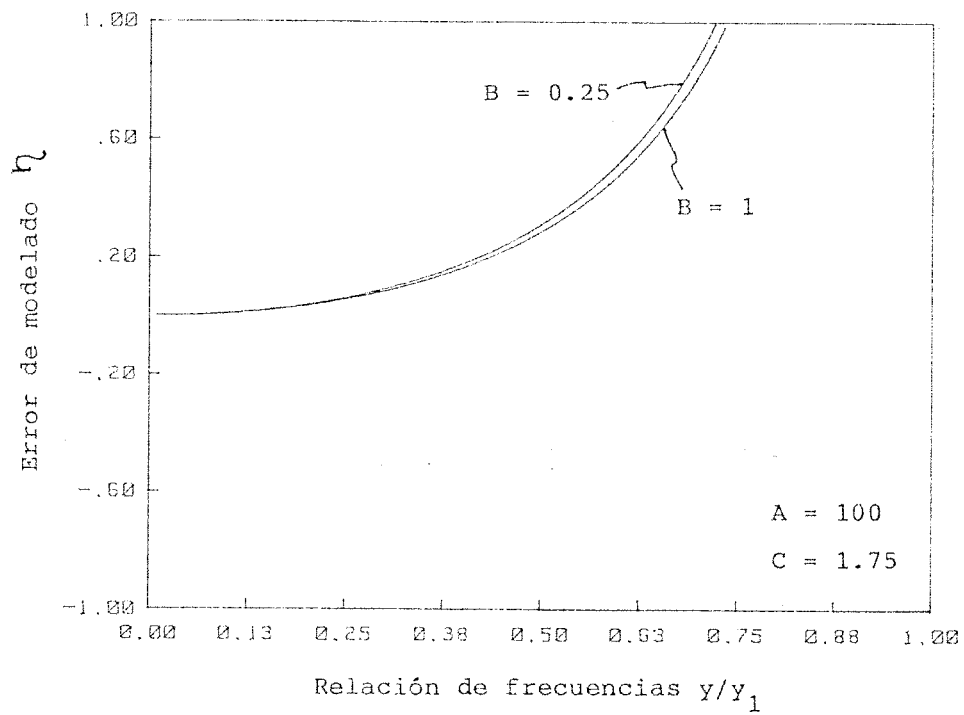
queda:

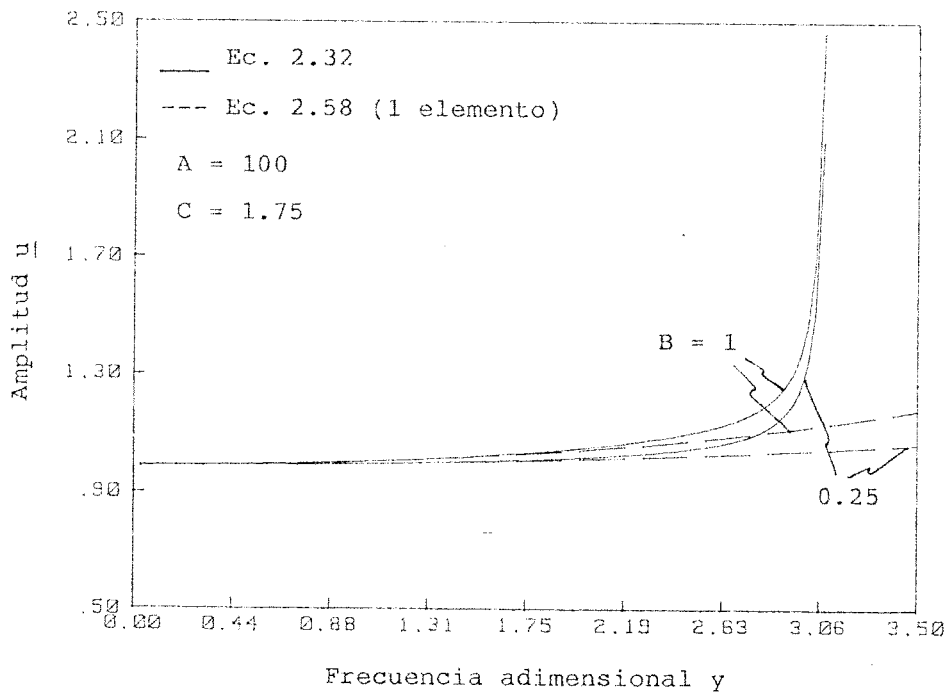
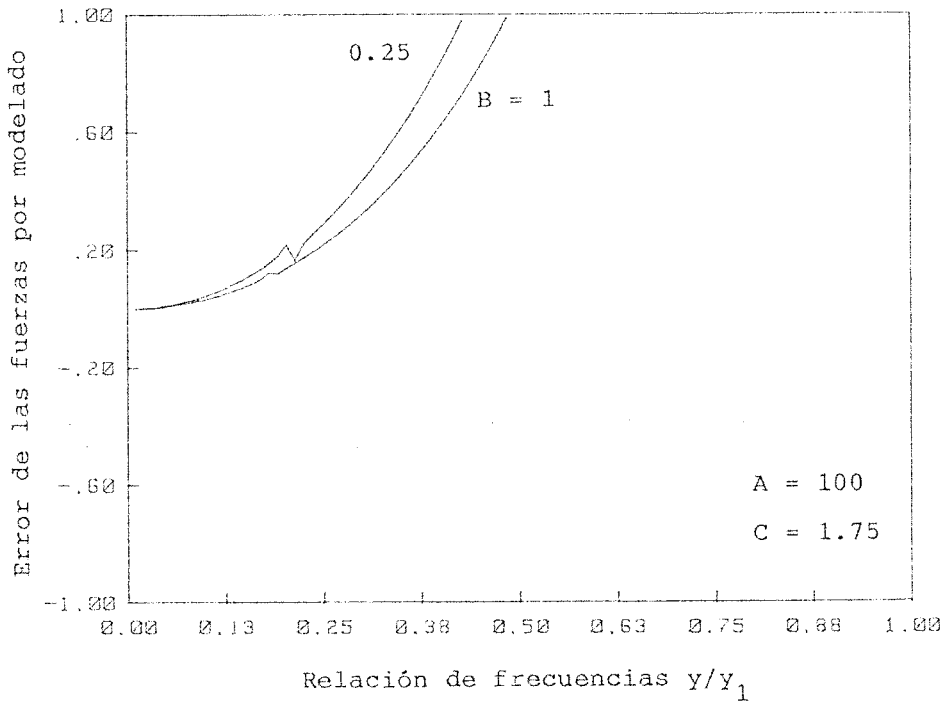
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N} = \frac{A \operatorname{sen} y}{y \cos y + (A - By^2) \operatorname{sen} y} \quad (\text{A.26})$$

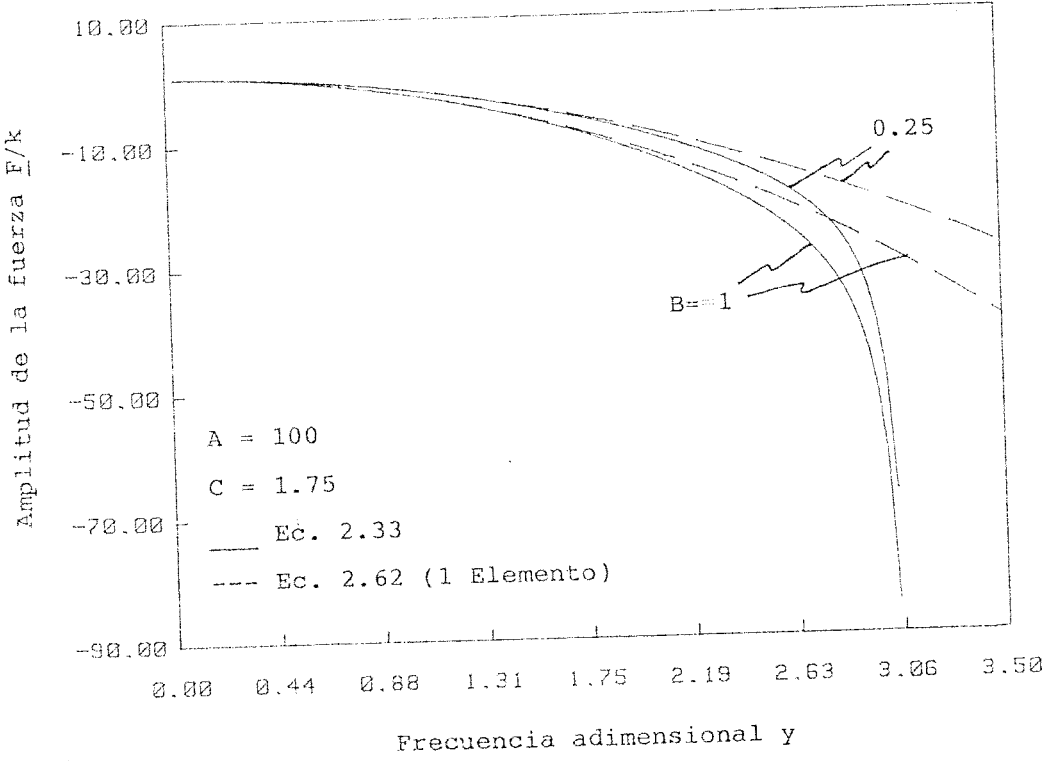
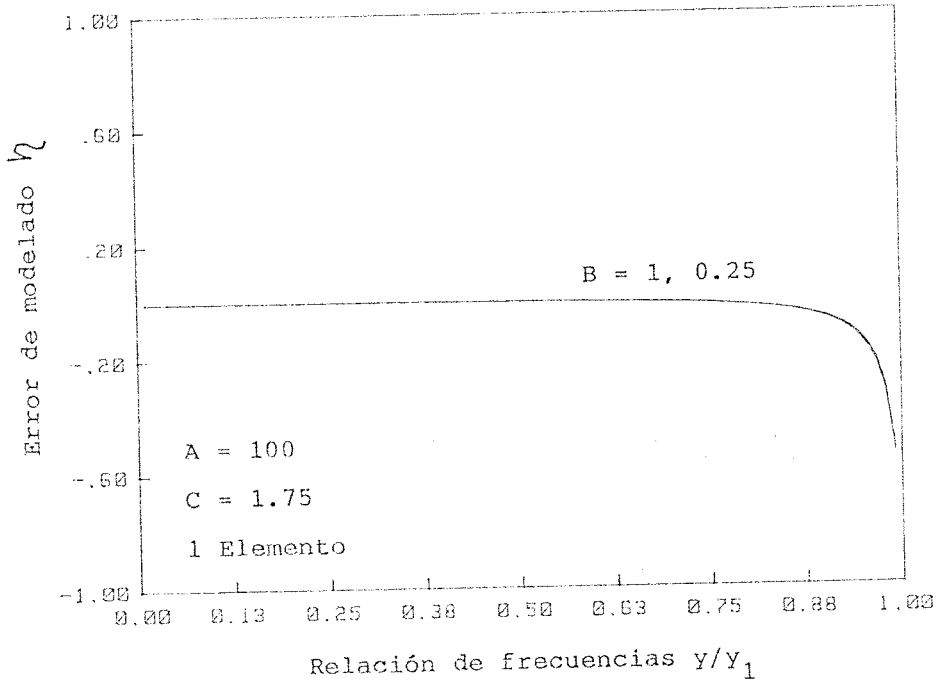
que coincide con la expresión (2.32), que representa la respuesta del sistema mixto.

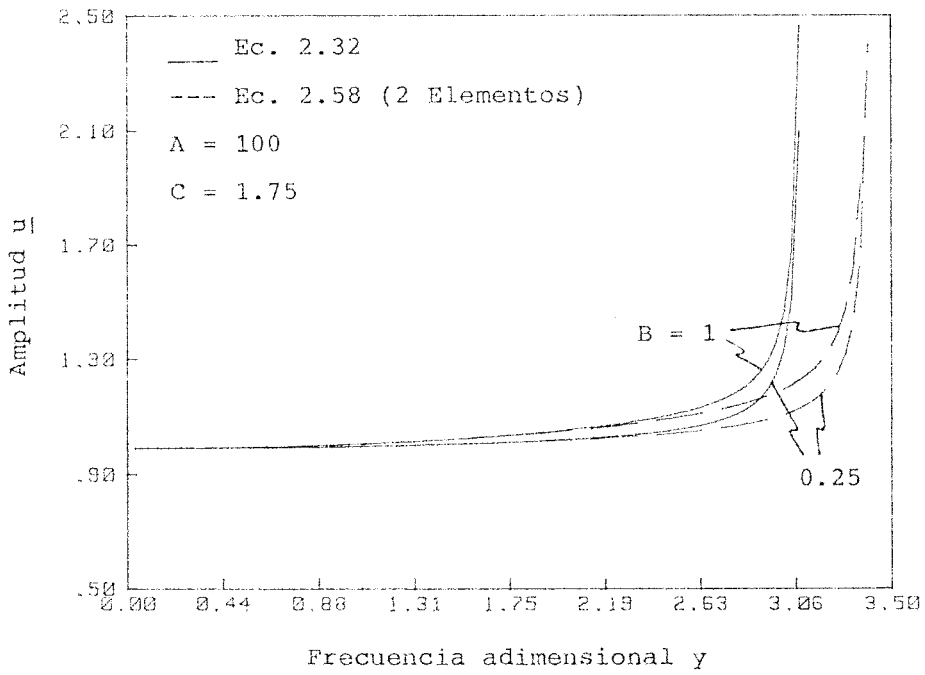
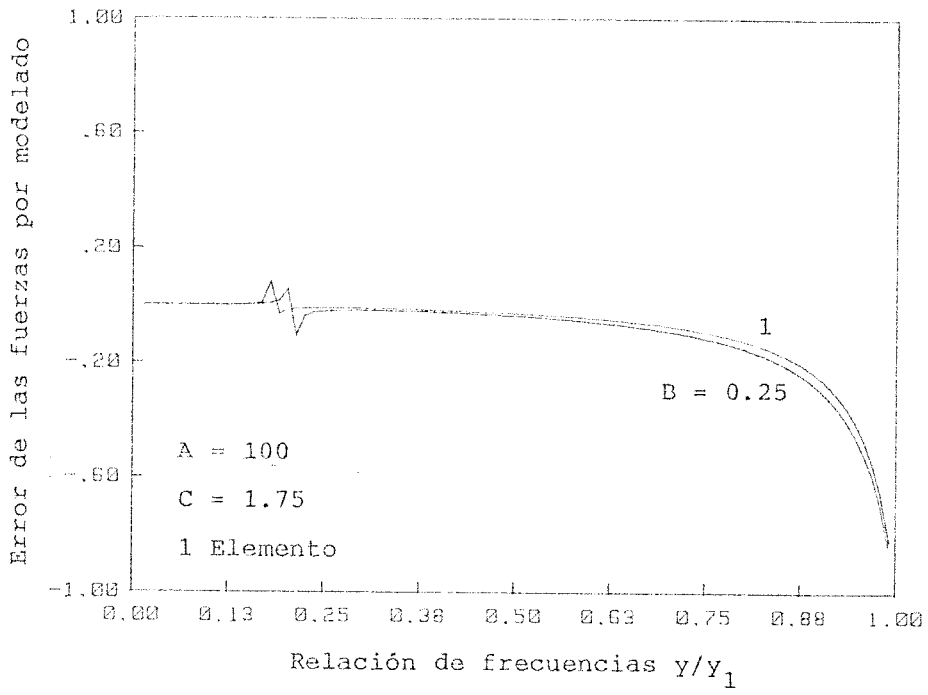
A.5. CURVAS DE ERROR DE MODELADO DEL SISTEMA MIXTO. INFLUENCIA DE LOS PARAMETROS B y C

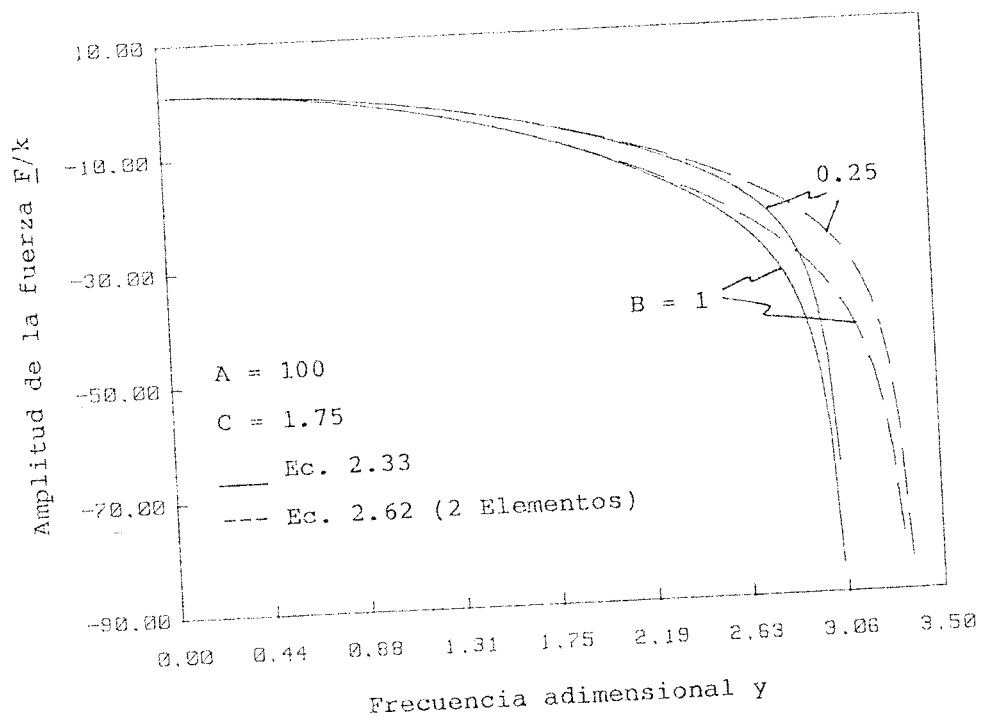
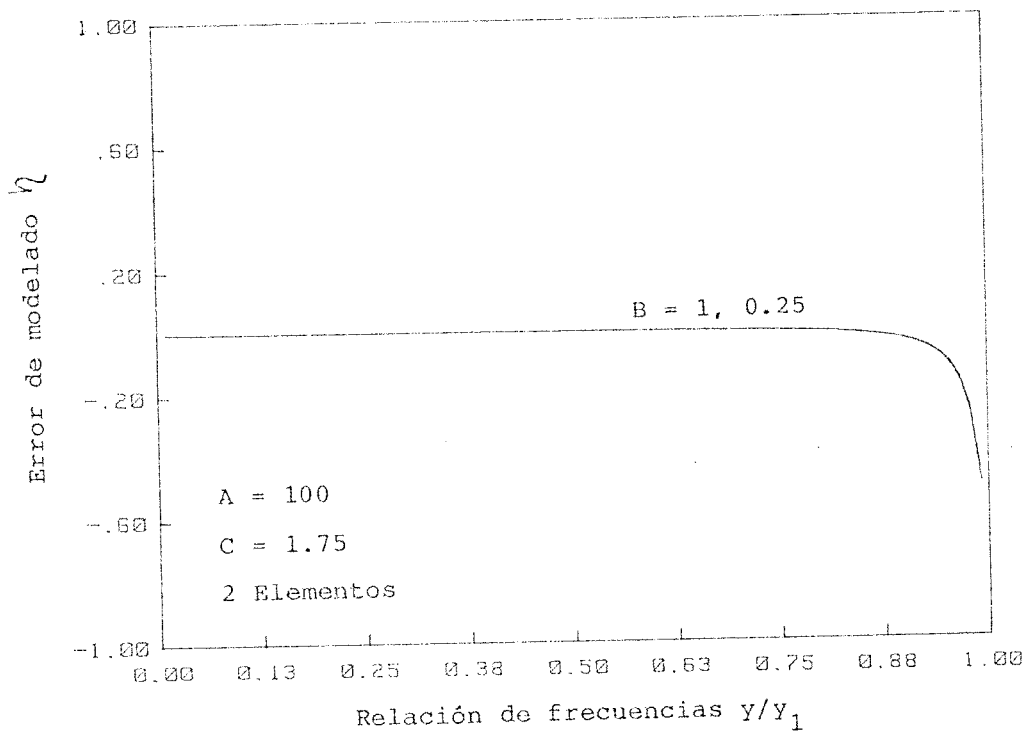


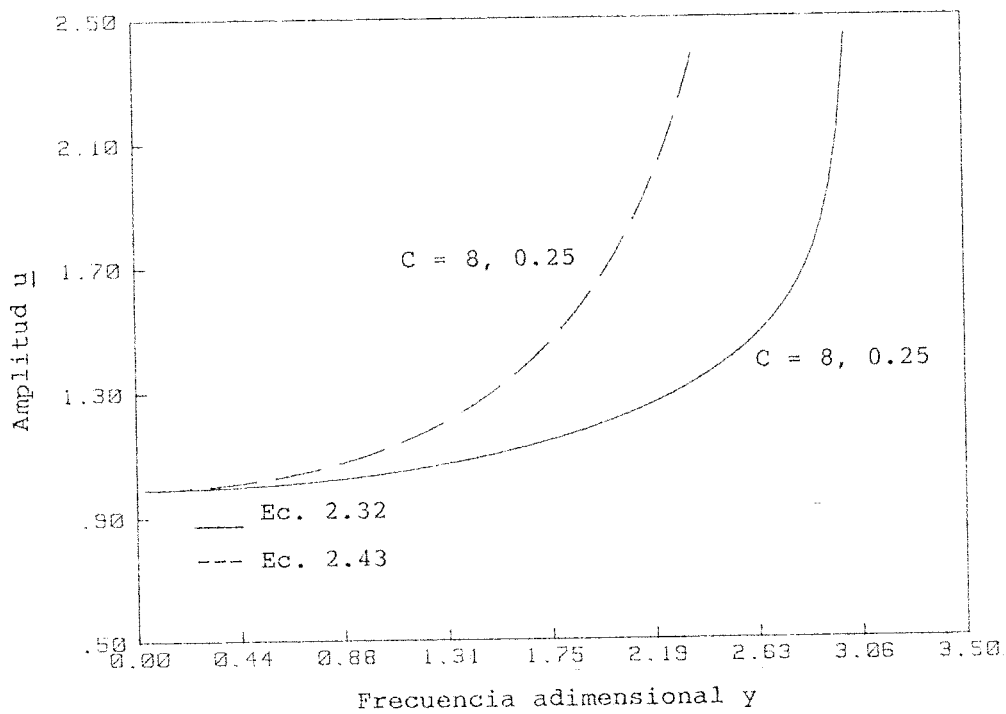
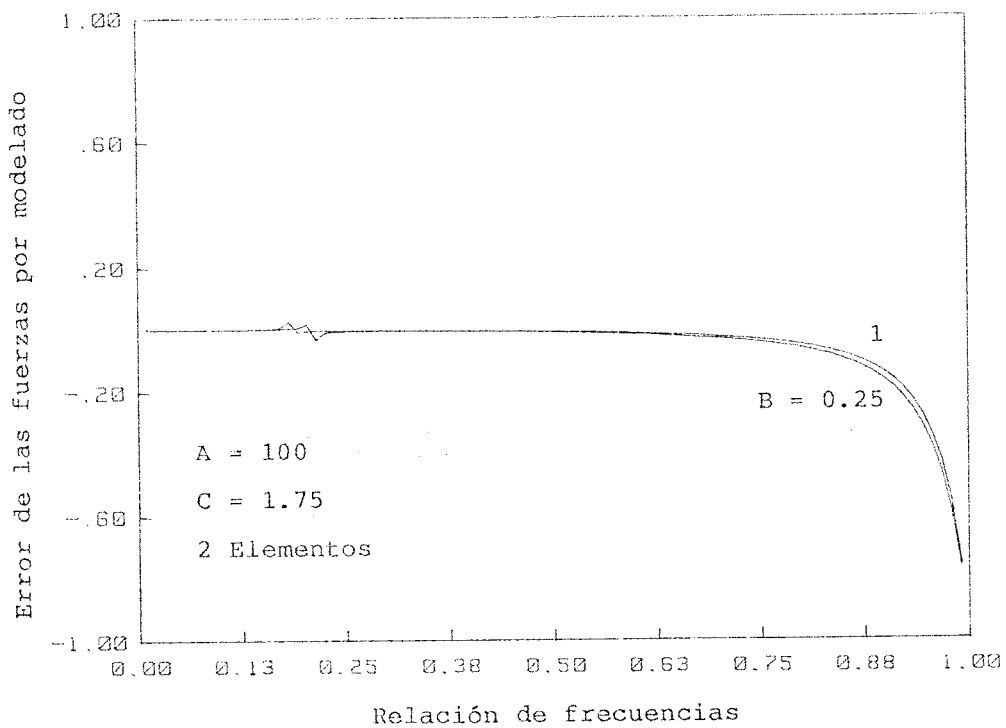


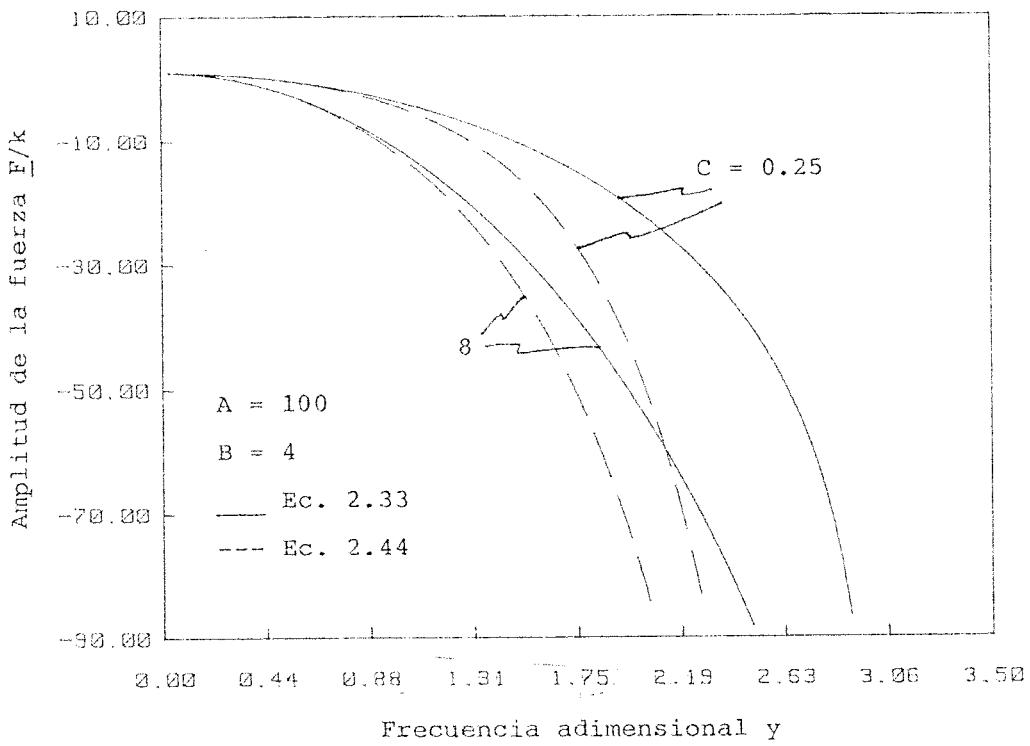
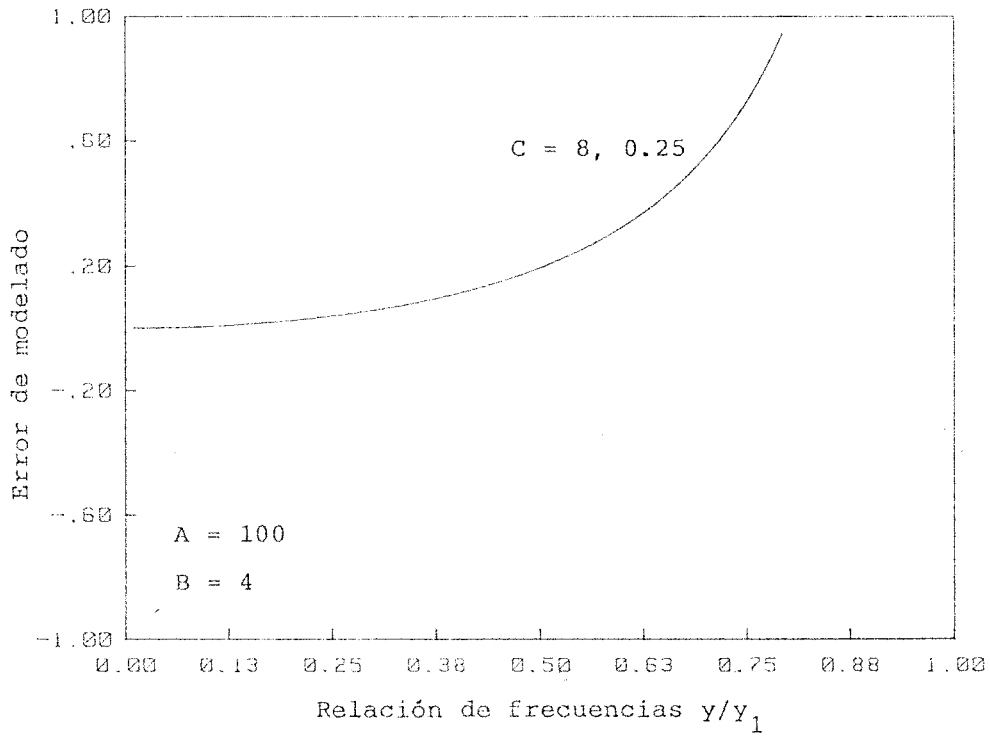


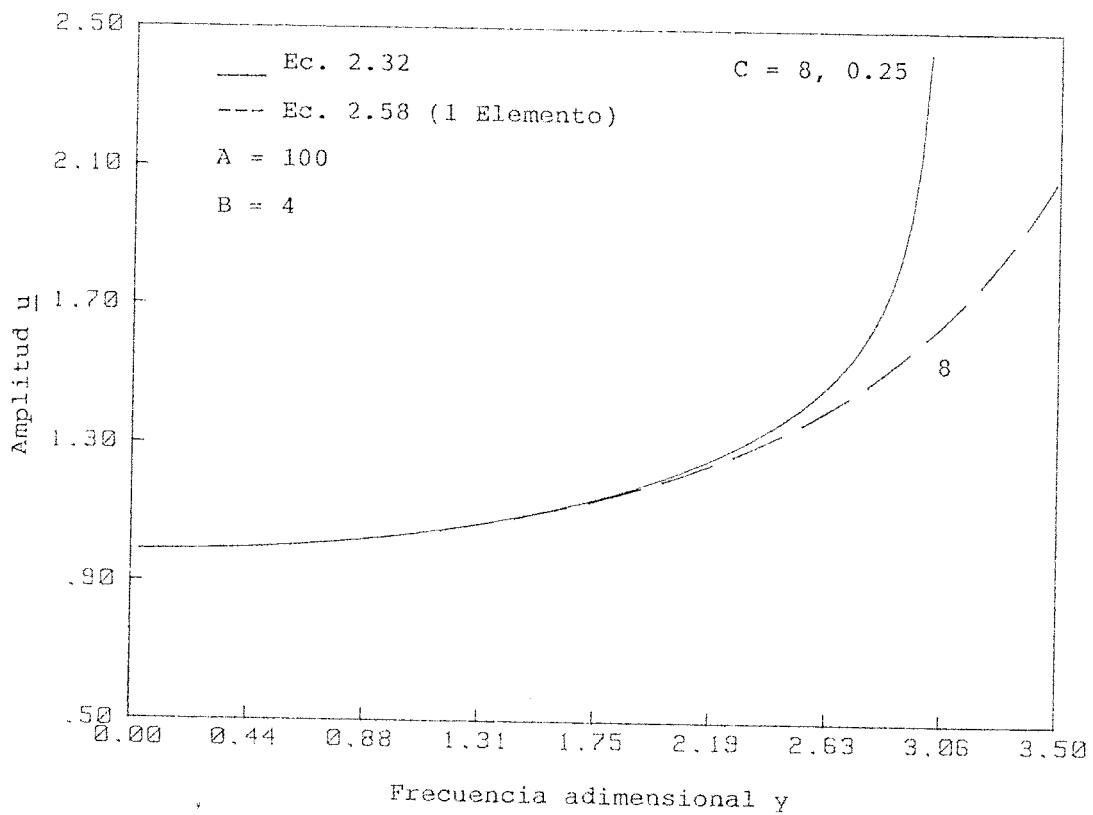
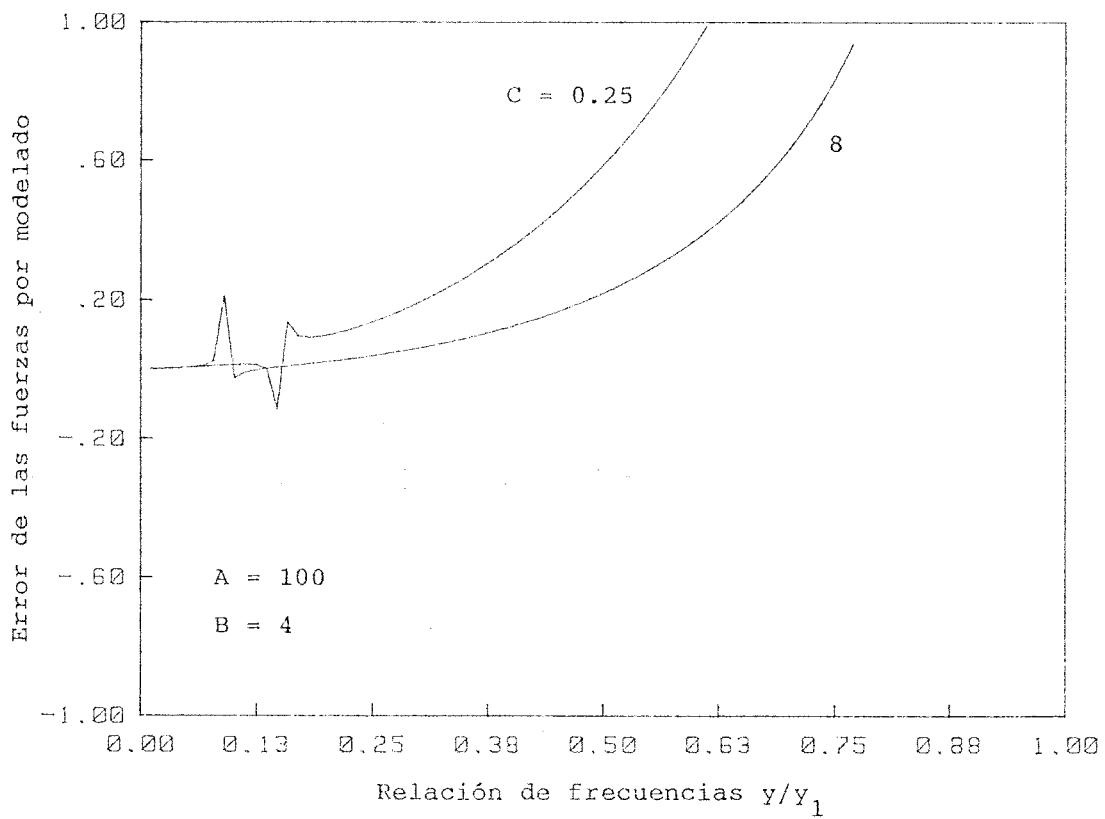


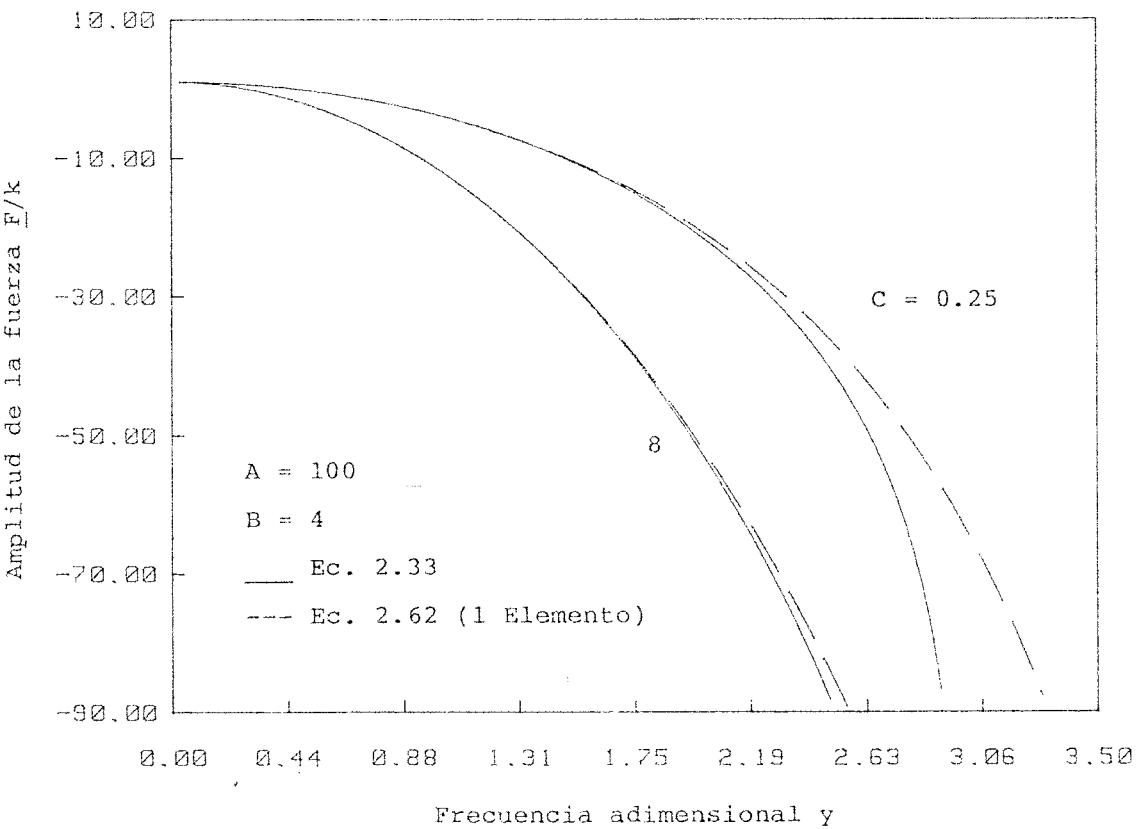
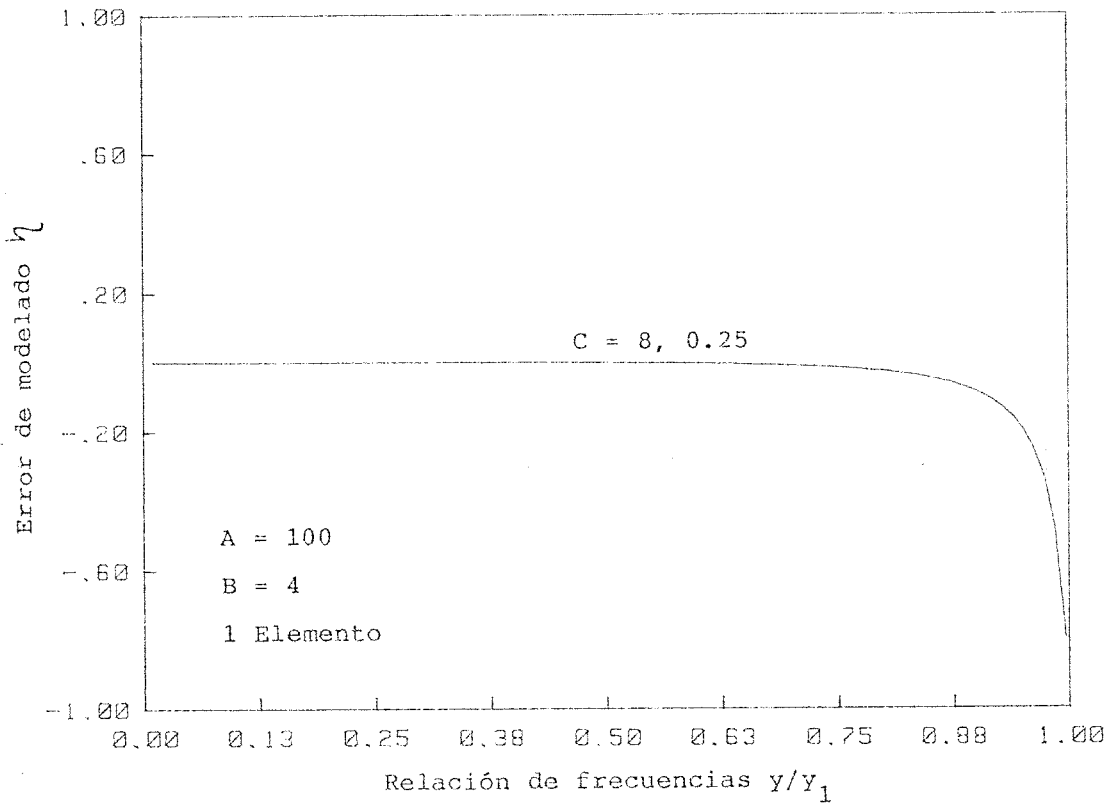


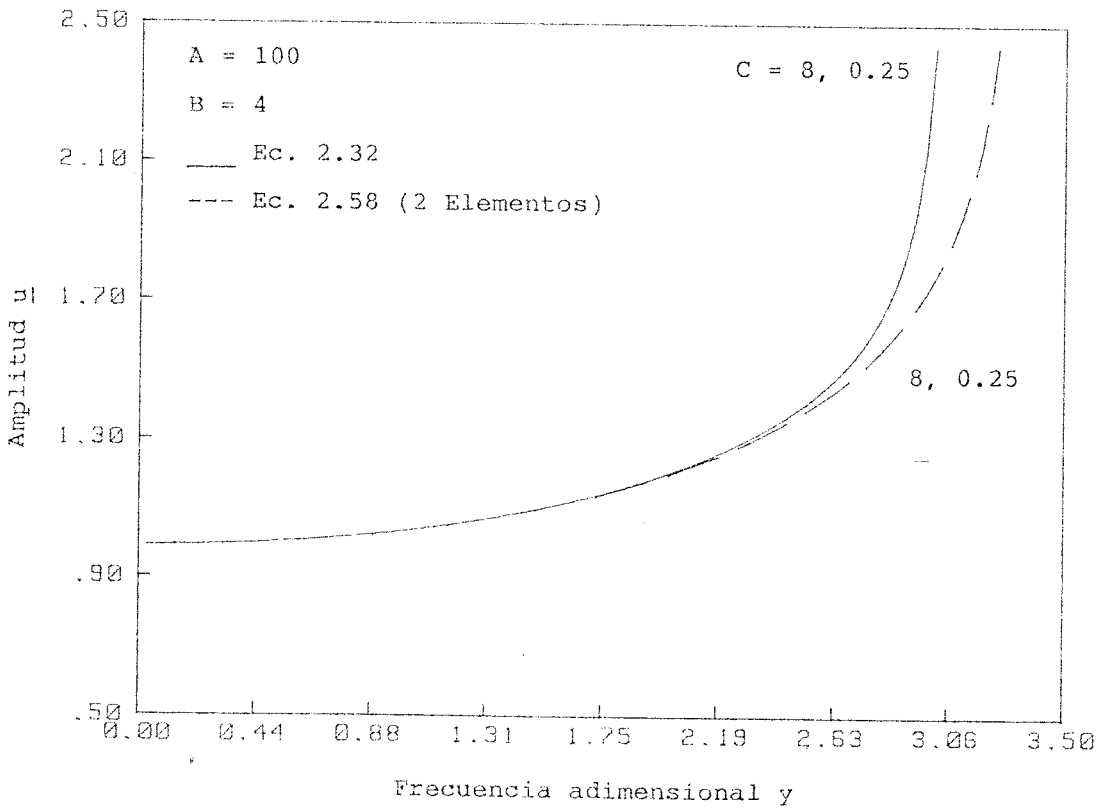
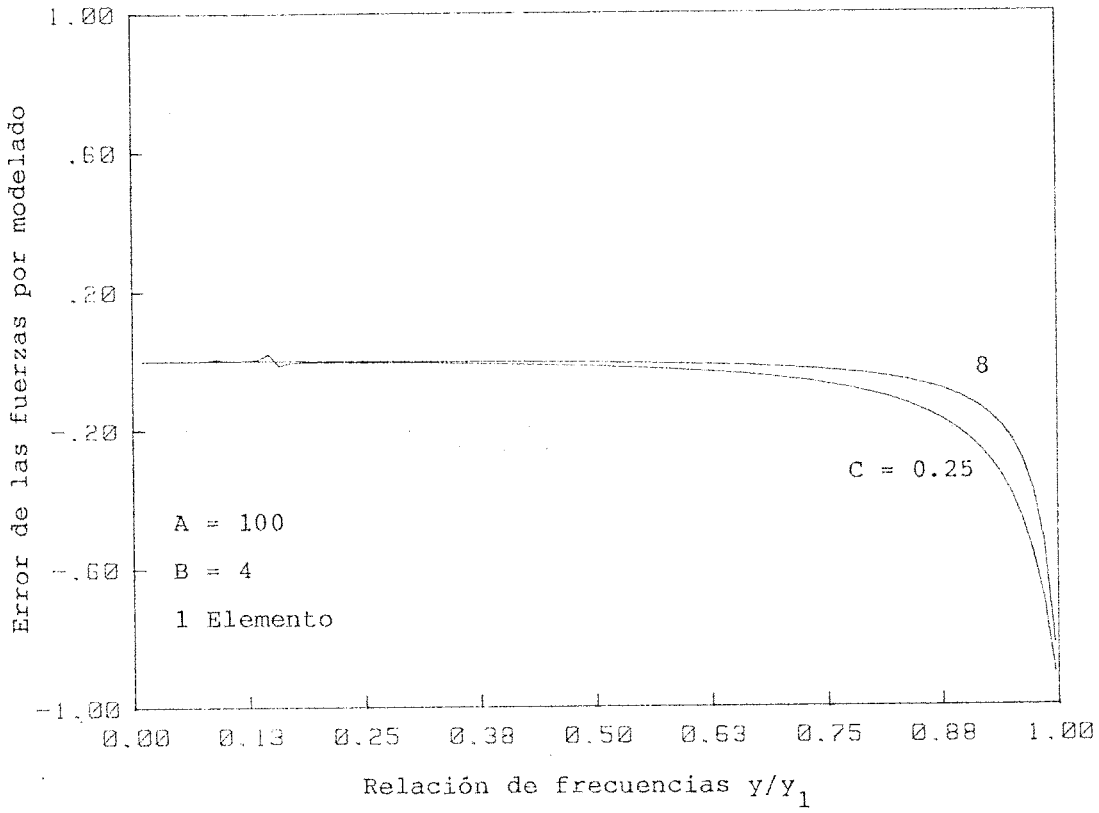


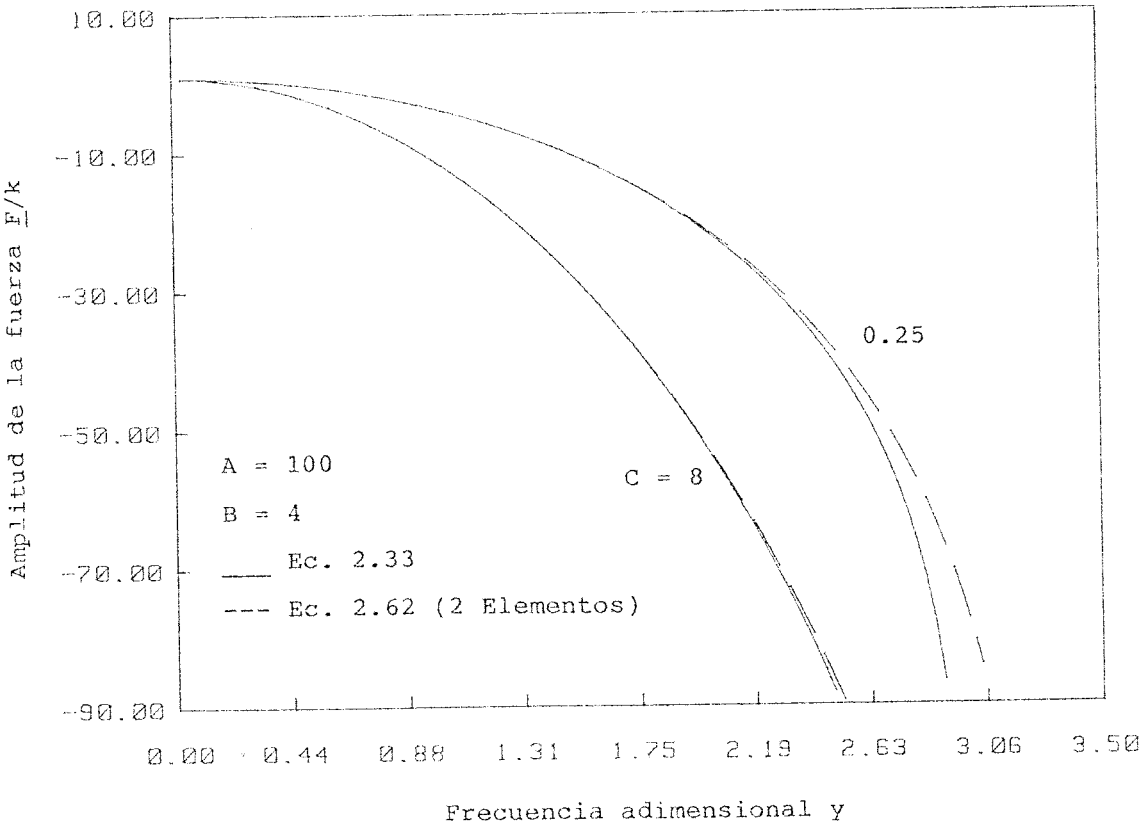
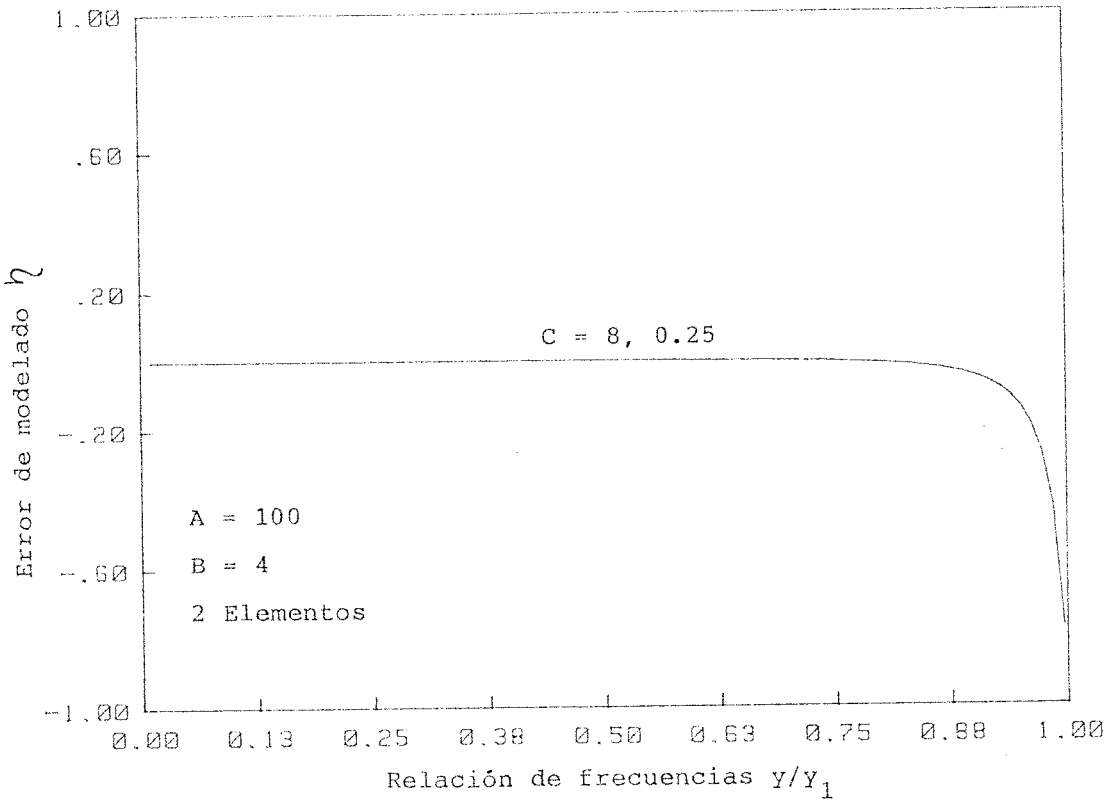


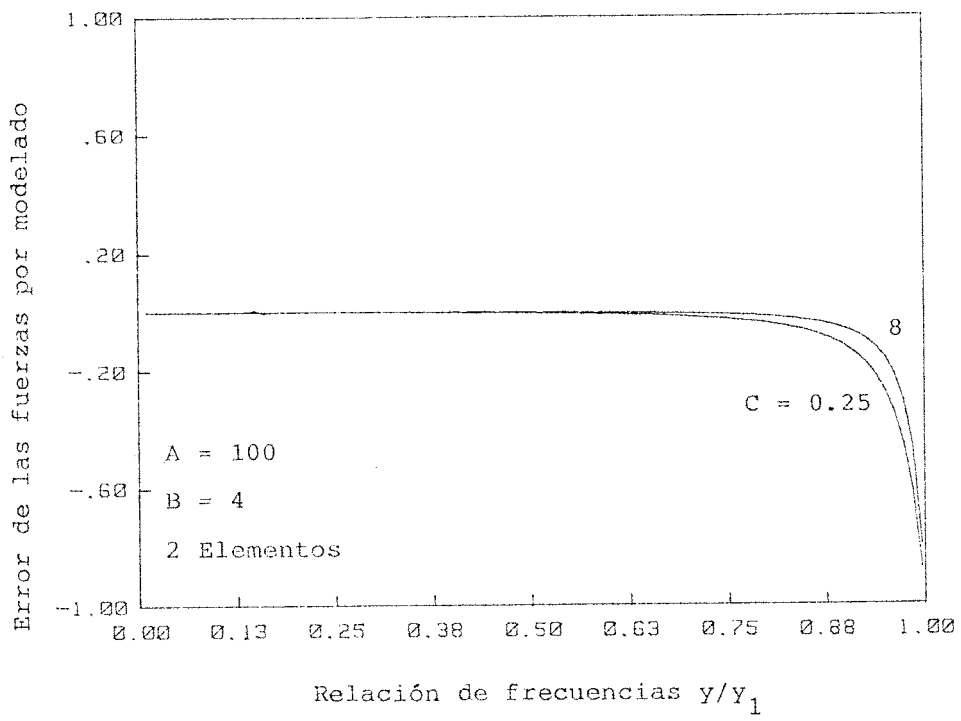












APENDICE B: MODELOS EMPLEADOS EN 2.3 (MODELO COMPLEJO)

B.1. MECANISMO REAL

Los datos del mecanismo real están tomados del texto de Chen [31]. La Figura 2.42 representa esquemáticamente dicho mecanismo, constituido por un balancín inferior, un empujador, un balancín superior, la válvula y el muelle de pre carga.

En la figura B.1 se representan las dimensiones (en metros) del balancín inferior.

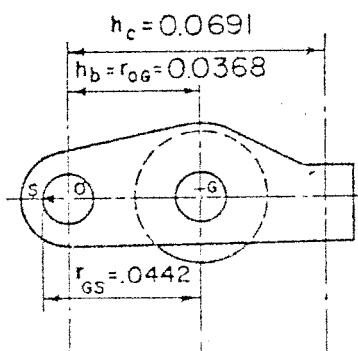


Figura B.1.

Dicho elemento tiene una masa de 0.3442 Kg y un momento de inercia respecto de O de 0.000145 Kg.m². Su densidad y módulo de elasticidad son 7833.8 Kg/m³ y 20.601.10¹⁰ Nw/m² respectivamente. Por último, su rigidez es 2.672.10⁸ Nw/m. Aquí se ha supuesto que por tal rigidez se entiende la fuerza que es necesario aplicar en el punto G (figura B.1) para conseguir un desplazamiento unitario de dicho punto, manteniendo fijos los extremos del balancín.

El empujador tiene una masa de 0.1378 Kg, y una rigidez de 1.553.10⁸ Nw/m.

La válvula se divide en un cuello elástico y una cabeza puntual. La masa del cuello y su rigidez son, respectivamente, 0.0934 Kg y $3.389 \cdot 10^8 \text{ Nw/m}$; siendo 0.187 Kg la masa de la cabeza.

En el libro de Chen no se especifican las características del muelle de precarga. Aquí se ha considerado una masa de 0.03875 Kg y una rigidez de 42923.2 Nw/m . Estos valores corresponden también a un motor de combustión interna de un automóvil americano.

En la Figura B.2 se representan las dimensiones del balancín superior.

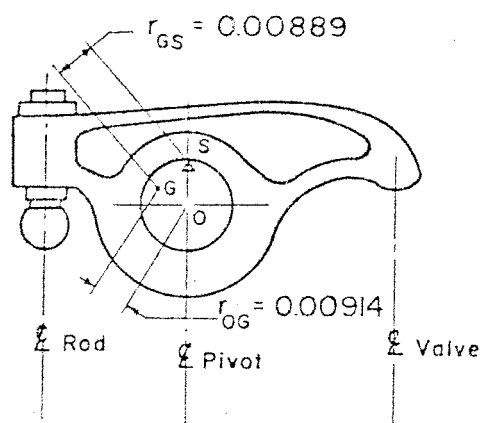


Figura B.2.

Su masa es de 0.253 Kg y su momento de inercia respecto al extremo izquierdo (contacto con el empujador) es de 0.0005 Kg.m^2 . En este caso la rigidez ($0.8078 \cdot 10^8 \text{ Nw/m}$) se supone que es la fuerza que es necesario aplicar en el extremo derecho del balancín (contacto con la válvula) para conseguir un desplazamiento unitario de dicho punto, manteniendo fijos el centro (eje de giro) y el otro extremo.

B.2. MODELOS

A continuación se construyen los seis modelos que se han utilizado para representar el mecanismo anterior, empleando la misma nomenclatura del capítulo 2 para denotarlos.

Modelo 1

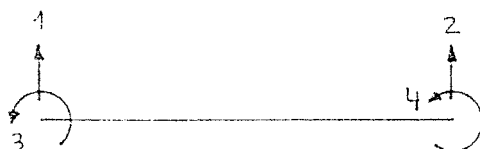
Se trata de un modelo de elementos finitos convencionales. Se han considerado dos clases de elementos: Los que se encuentran sometidos a esfuerzos axiales, con funciones de forma lineales, y los que trabajan a flexión, cuyas funciones de forma vienen dadas por los polinomios de Hermite de 3^{er} grado.

Los componentes que trabajan a flexión son los dos balancines, cada uno de ellos discretizado con dos elementos. En la figura B.3 se representa la discretización y el número de grados de libertad empleados. En la discretización del muelle de precarga se han usado 6 elementos.

Las matrices de masa y rigidez de los elementos axiales son:

$$m \sim = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{m}{6} \quad k \sim = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \longrightarrow \\ 2 \end{array}$$

Y para los elementos a flexión, utilizando los grados de libertad de la figura:



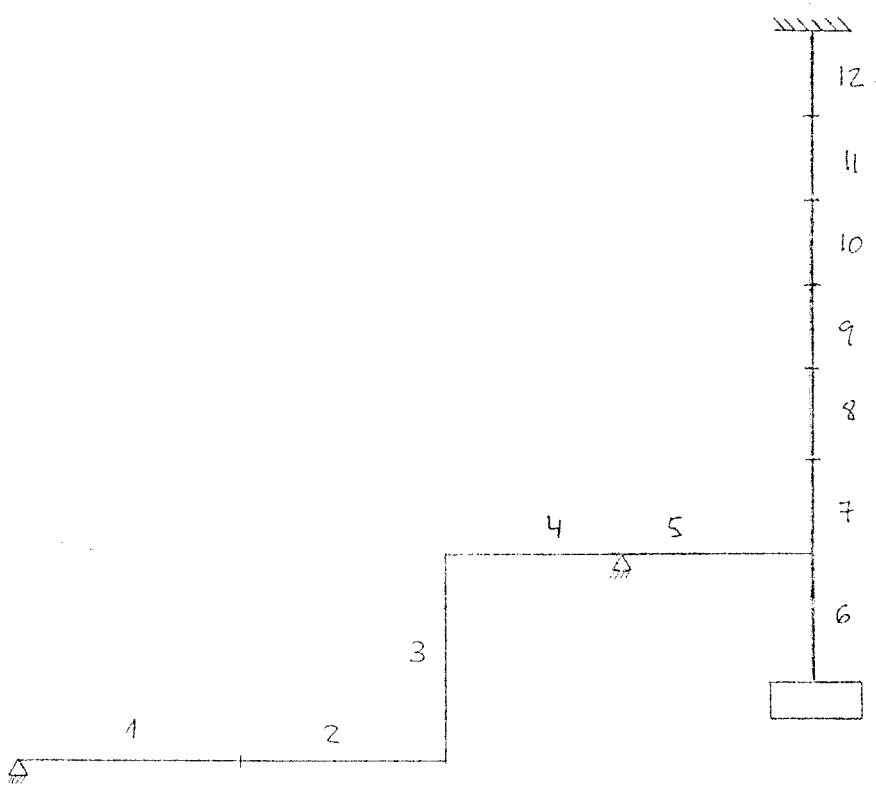


Figura B.3.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{m}{420}$$

$$K = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{2EI}{L^3}$$

A partir de los datos de la sección anterior, suponiendo los elementos de sección constante rectangular, se obtiene la información necesaria para determinar las matrices elementales y, por tanto, para dejar definido el modelo:

Elemento 1

$$L = 0.0368 \text{ m} \quad EI = 9310.64 \text{ Nw} \cdot \text{m}^2 \quad m = 0.244 \text{ kg}$$

Elemento 2

$$L = 0.0323 \text{ m} \quad EI = 950.73 \text{ Nw} \cdot \text{m}^2 \quad m = 0.100 \text{ kg}$$

Elemento 3

$$L = 0.02078 \text{ m} \quad \frac{EA}{L} = 1.553 \cdot 10^8 \text{ Nw/m} \quad m = 0.1378 \text{ kg}$$

Elemento 4

$$L = 0.0393 \text{ m} \quad EI = 93788.4 \text{ Nw} \cdot \text{m}^2 \quad m = 0.166 \text{ kg}$$

Elemento 5

$$L = 0.0556 \text{ m} \quad EI = 4793.25 \text{ Nw} \cdot \text{m}^2 \quad m = 0.087 \text{ kg}$$

Elemento 6

$$L = 0.01408 \text{ m} \quad \frac{EA}{L} = 3.389 \cdot 10^8 \text{ Nw/m} \quad m = 0.0934 \text{ kg}$$

Elemento 7 a 12

$$\frac{EA}{L} = 257539.2 \text{ N/m}$$

$$m = 0.006458 \text{ kg}$$

Modelo 2

La única diferencia respecto al modelo 1 es que ahora el muelle de precarga se ha discretizado mediante un único elemento, de manera que el modelo completo consta de 7 elementos. Las características de los elementos 1 a 6 coinciden con las del caso anterior, y las del 7 son:

Modelo 4

Se trata de un modelo de sólidos rígidos y masas concentradas interconectados por resortes ideales.

Cada uno de los balancines se supone compuesto de dos barras rígidas intercomunicadas por una articulación con

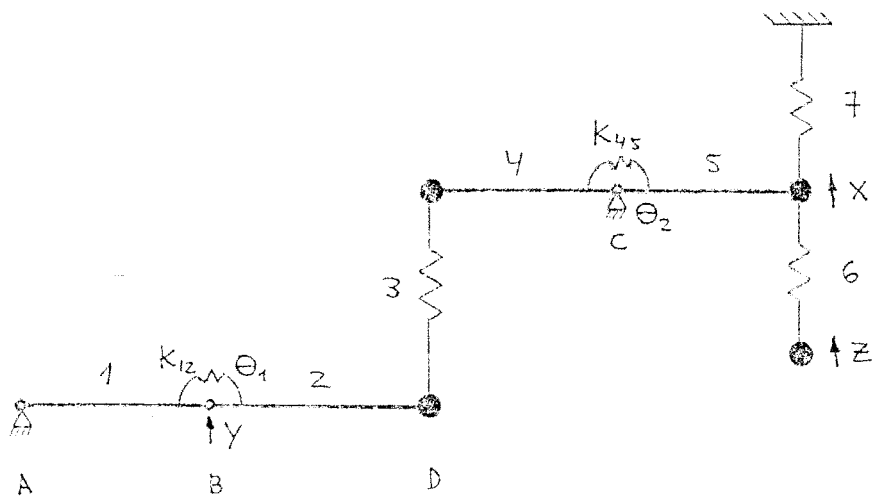


Figura B.4.

un resorte ideal a torsión. El empujador, el cuello de la válvula y el muelle de precarga se sustituyen por resortes ideales, concentrando sus masas simétricamente en cada uno de sus extremos. En la figura B.4 se representa el modelo.

Empleando las coordenadas x , y , z , θ_1 , θ_2 , mostradas en la figura se puede calcular la energía cinética y potencial, deduciéndose las ecuaciones de Lagrange del movimiento.

- Energía cinética:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} I_A \left(\frac{\dot{y}}{L_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_B \left(\frac{\dot{y}}{L_1} + \dot{\theta}_1 \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 L_2 \dot{y} \left(\frac{\dot{y}}{L_1} + \dot{\theta}_1 \right) + \frac{1}{2} \frac{m_3}{2} \left[\dot{y} + \left(\frac{\dot{y}}{L_1} + \dot{\theta}_1 \right) L_2 \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{m_3}{2} \left(\frac{\dot{x}}{L_5} - \dot{\theta}_2 \right)^2 L_4^2 + \frac{1}{2} I_c \left(\frac{\dot{x}}{L_5} - \dot{\theta}_2 \right)^2 + \frac{1}{2} I_c \left(\frac{\dot{x}}{L_5} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{m_7}{3} + \frac{m_6}{2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_6}{2} + m_z \right) \dot{z}^2
 \end{aligned}$$

- Energía potencial:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2} k_{12} \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_3 \left[(L_1 + L_2) \frac{y}{L_1} + L_2 \theta_1 + \left(\frac{x}{L_5} - \theta_2 \right) L_4 \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} k_{45} \theta_2^2 + \frac{1}{2} k_7 x^2 + \frac{1}{2} k_6 (x - z)^2
 \end{aligned}$$

Los valores de los distintos parámetros son:

$$\begin{aligned}
 L_1 = 0.0368 \text{ m} \quad m_1 = 0.244 \text{ Kg} \quad \frac{1}{I_A} = 0.0001101 \text{ Kg.m}^2 \\
 k_{12} = 79064.41 \text{ Nw.m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2 &= 0.0323 \text{ m} & m_2 &= 0.100 \text{ Kg} & I_B^2 &= 0.00003477 \text{ Kg.m}^2 \\
 L_3 &= 0.20078 \text{ m} & m_3 &= 0.1378 \text{ Kg} & K_3 &= 1.553 \cdot 10^8 \text{ Nw/m} \\
 L_4 &= 0.0393 \text{ m} & m_4 &= 0.166 \text{ Kg} & I_C^4 &= 0.00008546 \text{ Kg.m}^2 \\
 K_{45} &= 249720 \text{ Mw.m} \\
 L_5 &= 0.0556 \text{ m} & m_5 &= 0.087 \text{ Kg} & I_C^5 &= 0.00008965 \text{ Kg.m}^2 \\
 L_6 &= 0.014086 \text{ m} & m_6 &= 0.0934 & K_6 &= 3.389 \cdot 10^8 \text{ Nw/m} \\
 m_7 &= 0.03875 \text{ Kg} & K_7 &= 42923.2 \text{ Nw/m} \\
 m_z &= 0.187 \text{ Kg}
 \end{aligned}$$

Modelo 3

La única diferencia de este modelo respecto al 4 consiste en que el muelle de precarga se ha considerado compuesto por la unión en serie de 6 muelles idénticos, cada uno con una rigidez 6 veces mayor a la del muelle de precarga, y una masa igual a su sexta parte. Cada uno de estos muelles se ha sustituido por un resorte ideal de la misma rigidez, concentrando la masa (a partes iguales) en sus extremos. En la figura B.5 se representa la transformación efectuada.

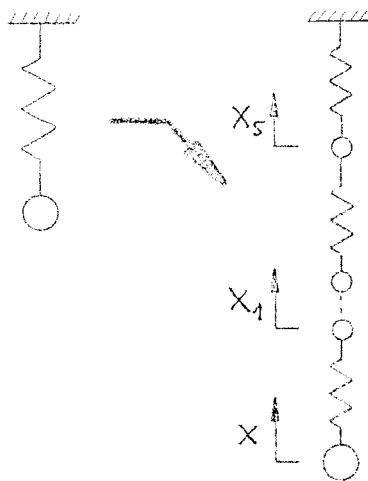


Figura B.5.

Las ecuaciones de Lagrange del movimiento se obtienen mediante la misma Lagrangiana que se utilizó en el modelo 4 si se realizan las siguientes sustituciones en la energía cinética y potencial, respectivamente:

$$\frac{1}{2} \frac{m_7}{3} \dot{x}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{m_7}{12} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_7}{6} \sum_{i=1}^5 \dot{x}_i^2$$

$$\frac{1}{2} k_7 x^2 \rightarrow \frac{1}{2} 6 k_7 (x - x_1)^2 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} 6 k_7 (x_i - x_{i+1})^2 + \frac{1}{2} 6 k_7 x_5^2$$

Modelo 5

Se trata de un modelo de elementos finitos, con los dos grados de libertad que se observan en la figura B.6. A posteriori, el grado de libertad 1 queda restringido, al imponérsele el movimiento transmitido por la leva.

La función de forma ϕ_1 es la deformada que se obtiene cuando se da un desplazamiento unidad al grado de libertad 1, dejando fijo el 2. ϕ_2 es la deformada que se obtiene cuando se invierten estos movimientos: movimiento unitario para la coordenada 2, permaneciendo nula la 1.

El cálculo de las deformadas, aunque tedioso, no ofrece dificultades. Para el mismo las propiedades elásticas e inerciales de los distintos componentes se han tomado coincidentes con las de los elementos del modelo 1.

Los elementos de la matriz de rigidez se obtienen calculando las fuerzas necesarias para conseguir como deformadas las funciones de forma. Los elementos de la matriz de masa vienen dados por:

$$m_{ij} = \int \rho(\xi) \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi$$

Donde ξ es parámetro longitudinal que define la posición en la estructura, y ρ es la densidad másica lineal.

Los valores numéricos de las matrices de masa y rigidez son:

$$M_{11} = 0.3008 \quad M_{12} = M_{21} = -0.175043 \quad M_{22} = 5.4066$$

$$K_{11} = 1.292 \cdot 10^8 \quad K_{12} = K_{21} = 4.863 \cdot 10^7 \quad K_{22} = 1.8345 \cdot 10^7$$

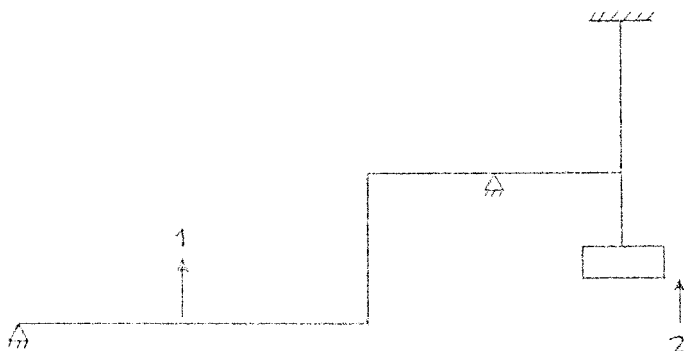


Figura B.6.

Modelo 6

La descripción de este modelo se ha realizado en el capítulo 2 (modelo w, figura 2.25). En el presente caso, en el que se desconoce la frecuencia fundamental del mecanismo real, la frecuencia del modelo se hace coincidir con la fundamental del modelo 1.

Los valores numéricos de los parámetros que definen el modelo son:

$$M_1 = -2.7709 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$$

$$M_2 = 3.30914 \text{ Kg}$$

$$K_1 = 82788.18 \text{ Nw/m}$$

$$K_2 = -114021.93 \text{ Nw/m}$$

APENDICE C: VALORES NUMERICOS DE LOS PARAMETROS QUE
DEFINEN LAS SINTESIS Y MODELOS EMPLEADOS
EN EL CAPITULO DE RESULTADOS

C.1. VALORES CORRESPONDIENTES A LOS EJEMPLOS DE LOS APARTADOS 4.2, 4.4 Y 4.5

Son los mismos que utiliza Chew en [33]. Se trata de la síntesis de un movimiento DSDB como el representado en la figura C.1.

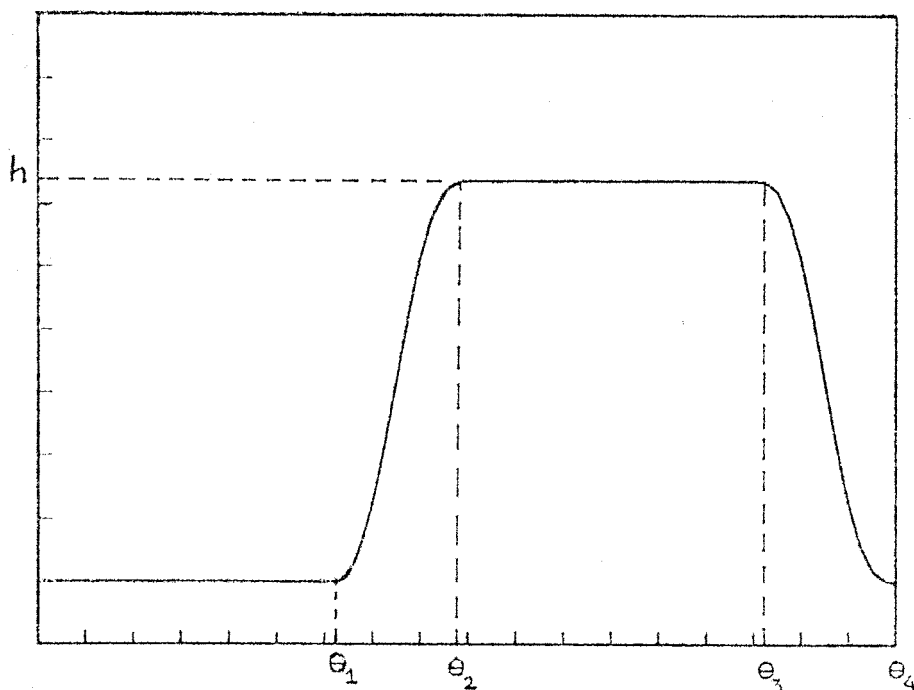


Figura C.1. Movimiento DSDB deseado.

Los valores numéricos son:

$$\theta_1 = 120^\circ \quad \theta_2 = 180^\circ \quad \theta_3 = 300^\circ \quad \theta_4 = 360^\circ \quad h = 0.0127 \text{ m}$$

Las características del modelo de 1 grado de libertad empleado (Figura 1.5) son:

$$m_0 = 0.3387 \text{ Kg}$$

$$m = 0.113 \text{ Kg}$$

$$K = 35560 \text{ Nw/m}$$

$$K_1 = 1777950 \text{ Nw/m}$$

$$C = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$F_0 = 338.7 \text{ Nw}$$

$$r_0 = 0.0254 \text{ m}$$

$$e = 0$$

$$r = 0.0051 \text{ m}$$

$$d_c = 0.0254 \text{ m}$$

$$E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Nw/m}^2$$

$$D = 0.3$$

C.2. VALORES CORRESPONDIENTES A LOS EJEMPLOS DEL APARTADO 4.3.

También se trata de un movimiento DSDB (Figura C.1) caracterizado por:

$$\theta_1 = 110^\circ \quad \theta_2 = 180^\circ \quad \theta_3 = 290^\circ \quad \theta_4 = 360^\circ \quad h = 4$$

El modelo de 2 g.d.l. empleado se representa en la figura C.2.

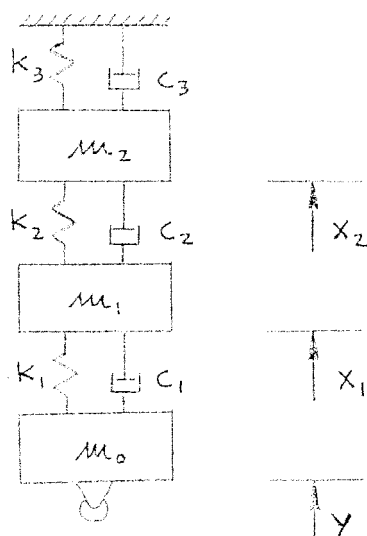


Figura C.2.

La respuesta corresponde al grado de libertad x_2 , y los valores de los parámetros que definen el modelo son:

- Matriz de masa:

$$m_{11} = 1 \quad m_{12} = m_{21} = 0 \quad m_{22} = 1$$

- Matriz de rigidez:

$$k_{11} = 74000 \quad k_{12} = k_{21} = -24000 \quad k_{22} = 74000$$

- Amortiguamientos modales:

$$\zeta_1 = 0.03 \quad \zeta_2 = 0.1118$$

De los que resultan las frecuencias naturales:

$$\omega_1 = 223.6 \text{ rad/seg} \quad \omega_2 = 313.05 \text{ rad/seg.}$$

Los valores del resto de los parámetros son:

$$K_1 = 50.000$$

$$C_1 = 13.416$$

$$M_0 = 1$$

$$e = 1$$

$$r_0 = 15$$