UNIVERSIDAD DE SEVILLA -- FACULTAD DE CIENCIAS

DIFERENCIACION EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

Visado en
Sevilla Junio de 1973
EL CATEDRATICO DIRECTOR

A. Castro

Fdo. Antonio de Castro
Brzezicki

Tesis que presenta Juan
Arias de Reyna Martínez
para optar al grado de
Doctor en Ciencias, Sección
de Matemáticas
Sevilla Junio de 1973

Juan Arias de Reyna M.

Fdo. Juan Arias de Reyna
Martínez

Quiero expresar mi agradecimiento
a D. Antonio de Castro Brzezicki
director del presente trabajo por
su constante ayuda y estímulo.

I N D I C E

	Introducción	iv
I.	Preliminares topológicos	1
II.	Aplicaciones diferenciables	17
III.	Regla de la cadena	30
IV.	Teorema fundamental del cálculo	34
V.	Comparación con la diferenciación de Fréchet	41
VI.	Primitivas e integrales	48
VII.	Derivadas parciales	60
VIII.	Diferenciales sucesivas	70
IX.	Espacios de aplicaciones diferenciables	84
	Bibliografía	110
	Indice de notaciones	112
	Indice de términos	113

I N T R O D U C C I O N

Como señala Dieudonné (4) (*) la idea fundamental del Cálculo diferencial es aproximar localmente las funciones por aplicaciones lineales. Parece pues natural desarrollar la teoría de la diferenciación en los espacios vectoriales topológicos. Sin embargo a pesar del éxito de esta teoría en espacios de Banach desarrollada por Fréchet y Nevanlinna no ha podido ampliarse a los espacios localmente convexos.

Hasta 1964 se dieron muchas definiciones, analizadas por Keller en (7) (1964); pero ninguna resultaba satisfactoria pues no se extendían mas que unas pocas propiedades de la diferencial clásica.

Fué el mismo Keller (6) (1965) el primero que se ocupó de la dificultad que entrañaba la generalización de la definición de diferenciabilidad, en particular si se

(*) Los números entre paréntesis remiten a la Bibliografía situada al final.

exige el mantenimiento de la regla de la cadena de segundo orden y el que la diferenciabilidad implicase la continuidad. Se han dado muchas vueltas a esta cuestion, creemos que debido a la resistencia a abandonar la segunda condición. Podemos enunciar el resultado de Keller claramente así: No existe una teoría de la diferenciación en espacios localmente convexos que verifique la regla de la cadena de segundo orden y al mismo tiempo tal que la diferenciabilidad implique la continuidad.

Han aparecido desde entonces varias teorías que son esencialmente de dos tipos.

El primero puede representarse por la teoría de A. Frölicher y W. Bucher (5) (1966), aunque esencialmente la idea se deba independientemente a Keller y Bastiani (1) (1964). Tratan de mejorar la definición ampliando los espacios considerados, para lo cual usan los espacios vectoriales seudotopológicos. Existen dos limitaciones de esta teoría: Una introducir los espacios seudotopológicos que no tienen la sencillez de los topológicos. La otra que inducen a llamar continuas a aplicaciones entre espacios seudotopológicos, cuando en nuestra opinión esta designación de continuas no está justificada ya que en estos espacios seudotopológicos la continuidad no tiene el significado usual que tiene en los topológicos. De aquí que en esta teoría la diferenciabilidad no implica la continuidad sino una especie de "seudocontinuidad".

El segundo tipo está representado por la teoría de U. Seip (11) (1972). Esencialmente consiste en restringir el tipo de espacios que se consideran a los que llama "propios" (geeignete) que son algo mas generales que los de Fréchet. La dificultad de esta solución está en que no se consigue la teoría de la diferenciación en espacios localmente convexos. Es la misma dificultad que tenía la teoría de Fréchet-Nevanlinna.

Nosotros nos mantendremos en los espacios vectoriales topológicos separados y a veces nos limitaremos a los localmente convexos. Nos ha parecido mas natural abandonar decididamente la condición restrictiva de que la diferenciabilidad deba implicar la continuidad. Podemos en cambio probar la regla de la cadena de segundo orden, manteniendonos en los espacios vectoriales topológicos separados. Así no perdemos nada con respecto a la teoría de Frölicher-Bucher pues ya hemos dicho que también en esta teoría se pierde la continuidad.

Pero es importante insistir que esto no implica que tengamos que renunciar completamente al concepto de continuidad ya que exigiremos que las aplicaciones diferenciables sean continuas en compactos y tendremos así que si $f:E \rightarrow F$ es diferenciable y E de Fréchet, f será continua. La teoría de U. Seip queda así practicamente como un caso particular.

El teorema fundamental del Cálculo adquiere su verdadera potencia en los espacios localmente convexos, por esta razón podríamos decir que esta es una teoría de la diferenciación en espacios localmente convexos. Si se observa el desarrollo de la memoria se verá que todas las operaciones que usamos para formar nuevos espacios a partir de otros nos dan espacios localmente convexos si se parte de ellos. Pero no hemos querido restringirnos a este caso innecesariamente.

El desarrollo de los ocho primeros capítulos sigue el orden ya clásico de la teoría de la diferenciación, contenida por ejemplo en el libro de Dieudonné (4). En el último en cambio se estudian los espacios de aplicaciones diferenciables apareciendo resultados que no pueden tener análogos en la teoría de la diferenciación en espacios de Banach. Sí aparecen en los libros de Frölicher-Bucher y Seip citados, pero nuestro tratamiento difiere del suyo.

CAPITULO I

PRELIMINARES TOPOLOGICOS

Todos los espacios vectoriales que manejaremos se supondrán sobre el cuerpo de los reales. Las consideraciones podrán extenderse a espacios vectoriales complejos considerando la estructura real subyacente.

Antes de definir el concepto de aplicación diferenciable necesitamos considerar algunos resultados topológicos.

DEFINICION 1. Sean X e Y dos espacios topológicos, decimos que $f: X \to Y$ es continua en compactos en $a \in X$ (respectivamente: continua en compactos) si para cada compacto $K \subset X$ que contenga a a (respectivamente: para cada compacto $K \subset X$) la restricción $f|K$ es continua en a (respectivamente: es continua en K).

Respecto de este concepto que sustituirá en nuestra teoría a la continuidad se tienen los siguientes resultados.

PROPOSICION 1. Sean X e Y dos espacios topológicos, $f: X \rightarrow Y$ una aplicación de X en Y. Condición necesaria y suficiente para que f sea continua en compactos es que para todo $a \in X$, f sea continua en compactos en a.

Demostración:

Sea f continua en compactos, la definición implica que es continua en compactos en a.

Reciprocamente, sea f continua en compactos en a para todo $a \in X$. Si $K \subset X$ es un compacto, la restriccirn $f|K$ es continua en cada punto $a \in K$, luego es continua en K. Asi pues f es continua en compactos.

PROPOSICION 2. Sean X, Y y Z espacios topológicos.
$f: X \rightarrow Y$ continua en compactos.
$g: Y \rightarrow Z$ continua en compactos.
Entonces $g \circ f$ es continua en compactos.

Demostración:

Sea K compacto de X, $f|K$ es continua en K, asi pues $f(K)$ es compacto, de aqui que $g|f(K)$ es continua en $f(K)$ luego $g \circ f$ es continua en K.

Nota: La proposición 2 no tiene análogo para el caso de ser f y g solo continuas en compactos en un punto, mas adelante añadiremos algo sobre esta cuestión.

DEFINICION 2. Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos Representaremos por $L_o(E;F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en F continuas en compactos.

Es necesario probar que es espacio vectorial, pero esto se deduce trivialmente de las definiciones y de la continuidad de la suma y del producto por escalares en F.

Es conveniente observar que si una aplicación lineal $u: E \to F$ es continua en compactos en un punto a de E lo es en cualquier punto, por tanto $u \in L_o(E;F)$; basta observar si $b \in K$, siendo K compacto de E, que la traslación $\tau : x \mapsto x + a - b$ es un homeomorfismo de E; $u \mid \tau(K)$ es continua en a, luego $u \circ \tau \mid K$ es continua en b, pero

$$u \circ \tau\,(x) = u(x) + u(a) - u(b)$$

y como en F la suma y el producto por escalares es continuo $[u \circ \tau - u(a) + u(b)] \mid K = u \mid K$ es continua en b.

Vamos a dotar a $L_o(E;F)$ de una topología. Para ello consideraremos la estructura uniforme de la convergencia uniforme en compactos.

Utilizaremos la palabra vecindad para traducir el concepto de "entourage" de Bourbaki.

Para cada vecindad U de F y cada compacto K de E

$$U_K = \{ (u,v) \mid u \in L_o(E;F),\ \ v \in L_o(E;F) \ \text{ y } \ (\forall_{x \in K} x)((u(x), v(x)) \in U) \}$$

forma una vecindad de $L_o(E;F)$ y los U_K para todo U y todo K una base para el filtro de las vecindades de $L_o(E;F)$.

Si F es separado la topología de $L_o(E;F)$ es separada ya que los compactos recubren E.

La topología de $L_o(E;F)$ es compatible con su estructura de espacio vectorial.

En efecto, recordemos que un sistema fundamental de vecindades de F se obtiene considerando los conjuntos V_d asociados a cada entormo V del origen en F poniendo

$$V_d = \{ (x,y) \mid (x,y) \in F^2 \ ; \ y - x \in V \}$$

Sean entonces u_o y v_o dos elementos de $L_o(E;F)$, vamos a probar la continuidad de la suma en (u_o, v_o).

Dar un entorno de $u_o + v_o$ es dar una vecindad de $L_o(E;F)$ es decir un compacto K de E y un entorno del origen V en F; w pertenece a ese entorno si para todo $x \in K$ se tiene

$$w(x) - [u_o(x) + v_o(x)] \in V$$

Existe un entorno del origen en F W, tal que $W + W \subset V$ y la pareja W, K define una vecindad de $L_o(E;F)$ y por lo tanto entornos de u_o y v_o; sean u y v puntos de esos entornos, esto es

$$\left.\begin{aligned} u(x) - u_o(x) &\in W \\ v(x) - v_o(x) &\in W \end{aligned}\right. \qquad \text{si} \quad x \in K$$

sumando

$$(u+v)(x) - (u_o + v_o)(x) \in W + W \subset V$$

asi pues la suma es continua.

Para el producto escalar el razonamiento es análogo: Sea $\lambda_o \in \mathbb{R}$, $u_o \in L_o(E;F)$; demos un entorno de $\lambda_o u_o$, lo que equivale a dar un compacto K de E y un entorno V del origen en F, $w \in L_o(E;F)$ pertenece al entorno si

$$w(x)-\lambda_o u_o(x) \in V \qquad \text{para todo} \quad x \in K.$$

Existe un entorno equilibrado del origen W tal que $W+W+W \subset V$. Por ser en F el producto por escalares continuo existe un entorno del origen en F W_1 y un entorno del origen en $\mathbb{R}$ $\Delta = \{\lambda \mid |\lambda| \leq r\}$ tales que:

$$\Delta W_1 \subset W \quad ; \quad \lambda_o W_1 \subset W.$$

Ademas u_o es continua en el compacto K, $u_o(K)$ es por tanto compacto, luego existe un número real α tal que:

$$u_o(x) \in \alpha W \qquad \text{para} \quad x \in K,$$

podemos tomar $r < \alpha^{-1}$ y como W es equilibrado

$$\Delta u_o(x) \subset W.$$

Tomemos ahora el entorno $\lambda_o + \Delta$ de λ_o y el entorno H de u_o en $L_o(E;F)$ definido por el compacto K y el entorno W_1 del origen en F.

Si $\lambda \in \lambda_o + \Delta$, $u \in H$, se tiene para todo $x \in K$

$$\begin{aligned} \lambda u(x) - \lambda_o u_o(x) &= (\lambda - \lambda_o)(u(x) - u_o(x)) + \lambda_o(u(x) - u_o(x)) + \\ &+ (\lambda - \lambda_o)\, u_o(x) \in \Delta W_1 + \lambda_o W_1 + \Delta\, u_o(x) \subset \\ &\subset W + W + W \subset V \end{aligned}$$

luego es continuo el producto por escalares. Tenemos asi demostrada la siguiente proposición:

PROPOSICION 3. Sean E y F espacios vectoriales topológicos separados $L_o(E;F)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme en compactos es un espacio vectorial topológico separado.

Veamos ahora cuando es $L_o(E;F)$ localmente convexo

PROPOSICION 4. Sean E y F espacios vectoriales topológicos separados, si F es localmente convexo lo es $L_o(E;F)$. Si ademas Γ es un sistema fundemental de seminormas que defina la topología de F, el conjunto de seminormas p_K definido por

$$p_K(u) = \max_{x \in K} p(u(x))$$

donde p recorre Γ y K el conjunto de los compactos de E forman un sistema fundamental de seminormas de $L_o(E;F)$.

Demostración:

No cabe duda de que las p_K son seminormas en $L_o(E;F)$ pues u es continua en compactos y p es continua, asi pues $p_K(u) < +\infty$.

Sea H el entorno del origen en $L_o(E;F)$ definido por el compacto K y el entorno del origen en F $V = \{x \mid x \in F,\ p(x) < 1\}$, es evidente que $u \in H \Rightarrow p_K(u) \leq 1$. Asi pues la seminorma p_K está acotada en un entorno de $L_o(E;F)$, luego es continua.

Reciprocamente, sea H un entorno del origen en $L_o(E;F)$; vamos a encontrar una seminorma p_K y un $\varepsilon > o$, tal que:

$$p_K(u) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad u \in H.$$

Por definición de la topología de $L_o(E;F)$ existe un compacto K de E y un entorno V del origen en F tal que:

$$u \in L_o(E;F) \quad y \quad u(x) \in V \quad para \quad x \in K$$

implique $u \in H$.

Como Γ define la topología de F existe $p \in \Gamma$ y un $\varepsilon > o$, tal que:

$$p(y) < \varepsilon \Rightarrow y \in V$$

Sea ahora $p_K(u) < \varepsilon$; si $x \in K$ es $p(u(x)) < \varepsilon$, luego $u(x) \in V$ asi pues $u \in H$.

PROPOSICION 5. Sean E y F espacios vectoriales topológicos separados, si F es completo también lo es $L_o(E;F)$.

Demostración:

Es consecuencia directa de Bourbaki, Topologie Générale. Chap. lo §1, nº 6, Corol. 2 del Teorema 2. y del principio de prolongación de identidades para comprobar que el límite de un filtro de Cauchy ha de ser aplicación lineal.

PROPOSICION 6. Sea E un espacio vectorial topológico separado. La aplicación que a $a \in E$ le hace corresponder la aplicación $\theta_a : \lambda \mapsto \lambda a$. es un homeomorfismo lineal entre E y $L_o(\mathbb{R};E)$.

Demostración:

Para todo $a \in E$, $\theta_a \in L_o(\mathbb{R};E)$ y reciprocamente una aplicación continua en compactos $u: \mathbb{R} \to E$ no es mas que una aplicación lineal continua, pues $\mathbb{R}$ es localmente compacto y esta aplicación será de la forma θ_a con $a = u(1)$.

Queda solo ver que $a \mapsto \theta_a$ es homeomorfismo.

Es continua pues sea K un compacto de $\mathbb{R}$ y V entorno del origen en E. Esto es tenemos un entorno del origen H definido por

$$u \in H \Leftrightarrow u(x) \in V \quad \text{para} \quad x \in K.$$

Sea K contenido en $|\lambda| < \alpha$, existe un entorno del origen W en

E tal que:

$$K\cdot W \subset \{\lambda \mid |\lambda|<\alpha\} W \subset V$$

entonces $a \in W \Rightarrow \theta_a \in H$.

Reciprocamente sea V entorno de o en E, el conjunto de los θ_a para $a \in V$ forman un entorno de o en $L_o(\mathbb{R};E)$, basta tomar el compacto $\{1\}$ y el entorno del origen V de E para definir el entorno H de $L_o(\mathbb{R};E)$ correspondiente.

DEFINICION 3. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n, F$, $n+1$ espacios vectoriales topológicos separados; designamos por $L_o(E_1,\ldots,E_n;F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones multinineales

$$u : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$$

continuas en compactos.

PROPOSICION 7. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos. $L_o(E; L_o(F;G))$ es isomorfo a $L_o(E,F;G)$, la topología de $L_o(E; L_o(F;G))$ trasladada a $L_o(E,F;G)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme en compactos de $E\times F$.

Demostración:

Sea $u \in L_o(E,F;G)$. Si $x \in E$ y L es un compacto de F, es $\{x\}\times L$ compacto de $E\times F$. Asi pues $u(x,.)$ es continua en L. Esto es $u(x,.) \in L_o(F;G)$.

De esta manera tenemos definida para cada $u \in L_o(E,F;G)$ una aplicación lineal de E en $L_o(F;G)$; veamos que esta aplicación es continua en compactos. Basta ver que es continua en compactos en el origen. Sea K un compacto de E que contenga al origen. Demos un entorno H del origen en $L_o(F;G)$; estará fijado por un compacto L de F y un entorno del origen V en G.

$$v \in H \iff v(y) \in V \quad \text{para todo} \quad y \in L$$

Queremos probar que existe un entorno del origen W en E tal que:

$$x \in K \cap W \implies u(x,.) \in H$$

Esto es

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \cap W \\ y \in L \end{array}\right\} \implies u(x,y) \in V$$

Puesto que $o \in K$ y $u(o,y) = o$; la continuidad en compactos de u implica, para cada $y \in L$, la existencia de un entorno $W_y \times W'_y$ de (o,y) tal que:

$$(x,y) \in (K \times L) \cap (W_y \times W'_y) \implies u(x,y) \in V$$

Un número finito de los W'_y recubren L, sean W'_{y_1}, W'_{y_2}, ..., W'_{y_n} . Entonces

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \cap (W_{y_1} \cap \ldots \cap W_{y_n}) \\ y \in L \end{array}\right\} \implies u(x,y) \in V$$

Basta pues tomar $W = W_{y_1} \cap \ldots . \cap W_{y_n}$.

Queda definida asi la aplicación de $L_o(E,F;G)$ en $L_o(E; L_o(F;G))$.

Veamos que la aplicación es sobre (es trivial el hecho de ser inyectiva).

Sea $u \in L_o(E; L_o(F;G))$, designaremos también por u la aplicación bilineal asociada, de forma que debemos probar $u \in L_o(E,F;G)$.

Es suficiente probar que u es continua en compactos en (x_o,y_o). Sea H un compacto de $E\times F$ que contenga a (x_o,y_o), Hemos de ver que $u|H$ es continua en (x_o,y_o). Como $H\subset K_o\times L_o$ siendo K_o y L_o compactos de E y F que contienen a x_o e y_o respectivamente, podemos suponer que $H = K_o\times L_o$.

Demos un entorno W del origen en G, como

$$u(x,y) - u(x_o,y_o) = u(x-x_o,\ y-y_o) + u(x-x_o,\ y_o) + u(x_o,\ y-y_o)$$

tomamos W'entorno del origen en G tal que $W'+W'+W'\subset W$.

Decir que $u\in L_o(E;\ L_o(F;G))$ implica que u es continua en compactos en x_o. Luego es continua en K_o. Demos un entorno de $u(x_o,.)$ en $L_o(F;G)$; esto es un compacto L de F y un entorno del origen en G, tomemos precisamente W'. Existirá un entorno U_1 de x_o tal que:

$$\left.\begin{array}{l} x\in K_o \\ y\in L \\ x\in U_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad u(x,y) - u(x_o,y) = u(x-x_o,\ y)\in W'$$

Fijemos sucesivamente en lugar de L, $L_o - y_o$ ó $\{y_o\}$ se tiene entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} x\in K_o\ , & x\in U_1 \\ y\in L_o & \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad u(x-x_o,\ y-y_o)\in W'$$

$$\left.x\in K_o\ ,\quad x\in U_2\ \right\} \Longrightarrow \quad u(x-x_o,\ y_o)\in W'$$

Para x_o es $u(x_o,.)\in L_o(F;G)$. Dado pues el compacto L_o, que contiene a y_o y el entorno W' de o en G, existe un entorno V_1 de y_o tal que:

$$\left.y\in L_o\ ,\quad y\in V_1\ \right\} \Longrightarrow \quad u(x_o,\ y-y_o)\in W'$$

Resumiendo $x\in K_o$, $y\in L_o$, $x\in U_1\cap U_2$, é $y\in V_1$ implica $u(x,y) - u(x_o,\ y_o)\in W'+W'+W'\subset W$, luego u es continua en compactos.

Solo queda por probar el enunciado sobre la topología, un entorno del origen en $L_o(E; L_o(F;G))$ queda fijado dando un compacto K de E y un entorno de $L_o(F;G)$, éste a su vez se conoce dando un compacto L de F y un entorno del origen V en G. $u \in L_o(E; L_o(F;G))$ pertenece a este entorno si y solo si:

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \\ y \in L \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x,y) \in V$$

y estos forman evidentemente una base de la topología de la convergencia uniforme en compactos de $L_o(E,F;G)$.

PROPOSICION 8. Sean E y F espacios vectoriales topológicos separados. La aplicación $(u,x) \longmapsto u(x)$ de $L_o(E;F) \times E \longrightarrow F$ es continua en compactos.

Demostración:

Sea $(u_o,x_o) \in L_o(E;F) \times E$ tomemos compactos H y K que contengan a u_o y x_o respectivamente en $L_o(E;F)$ y E.

Debemos probar que la aplicación es continua en $H \times K$ en el punto (u_o, x_o). Fijemos con este fin un entorno del origen V en F. Vamos a encontrar entornos U de x_o, y W de u_o tales que:

$$\left.\begin{array}{ll} u \in W, & u \in H \\ x \in U, & x \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x) - u_o(x_o) \in V + V$$

Como $u_o \in L_o(E;F)$ es continua en compactos, existe entonces un entorno de x_o U tal que:

$$\left.\begin{array}{l} x \in U \\ x \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow u_o(x) - u_o(x_o) \in V$$

El conjunto W de las aplicaciones continuas en compactos que verifican

$$x \in K \Longrightarrow u(x) - u_o(x) \in V$$

forman un entorno de u_o en $L_o(E;F)$; es claro ahora que:

$$\left.\begin{array}{ll} u\in W\,, & u\in H \\ x\in U\,, & x\in K \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad u(x)-u_o(x_o)\in V+V$$

como quería probarse.

De la demostración se deduce que la aplicación es algo mas que continua en compactos, pues no hemos necesitado el hecho de ser H compacto.

PROPOSICION 9. Sean E, F y G tres espacios vectoriales topológicos separados y $v_o \in L_o(F;G)$. La aplicación $u \mapsto v_o \circ u$ de $L_o(E;F) \rightarrow L_o(E;G)$ es continua en compactos.

Demostración:

Puesto que la aplicación es lineal solo tenemos que probar que es continua en compactos en el origen.

Sea pues H un compacto de $L_o(E;F)$ que contenga al origen. Y demos un entorno del origen en $L_o(E;G)$; esto es, un compacto K de E y un entorno del origen V en G.

Debemos encontrar un entorno del origen T en $L_o(E;F)$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} u\in H \\ u\in T \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad v_o\circ u(x)\in V \quad \text{si} \quad x\in K$$

El entorno T se fijará dando un compacto en E, tomaremos K, y un entorno del origen W en F; $u\in T$ equivale a

$$x\in K \Rightarrow u(x)\in W$$

Como $H\times K$ es compacto de $L_o(E;F)\times E$ y la aplicación $(u,x)\mapsto u(x)$ es continua (prop. 8) en compactos, es

$$\bigcup_{x\in K,\ u\in H} \{u(x)\} = L$$

compacto en F.

Sabemos que $v_o \in L_o(F;G)$, asi pues dado el compacto L que contiene a o pues $o\in H$ y K no es vacio (de lo contrario sería trivial lo que pretendemos probar) y el entorno V del origen en G, existe un entorno W en F tal que:

$$y \in W \ , \ y \in L \quad \Rightarrow \quad v_o(y) \in V$$

Tenemos asi fijado T que verifica lo que se pedía.

PROPOSICION 1o. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos separados; la aplicación bilineal $(u,v) \mapsto v \circ u$ de $L_o(E;F) \times L_o(F;G) \to L_o(E;G)$ es continua en compactos.

Demostración:

Sea $u_o \in L_o(E;F)$, $v_o \in L_o(F;G)$, H y J compactos que contengan a u_o y v_o respectivamente. Vamos a probar la continuidad de la aplicación en $H \times J$ en (u_o, v_o).

Damos un entorno de $v_o \circ u_o$ en $L_o(E;G)$, lo que equivale a dar un compacto K en E y un entorno del origen V en G. Debemos encontrar entornos T y T' de u_o y v_o respectivamente tales que:

$$\left.\begin{array}{l} u \in T \ , \quad u \in H \\ v \in T', \quad v \in J \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad v \circ u(x) - v_o \circ u_o(x) \in V \quad \text{si} \quad x \in K$$

Descomponemos $v \circ u - v_o \circ u_o$ en tres partes

$$v \circ u - v_o \circ u_o = (v - v_o) \circ (u - u_o) + (v - v_o) \circ u_o + v_o \circ (u - u_o)$$

y tomamos un entorno del origen V' en G tal que $V' + V' + V' \subset$ $\subset V$.

Los entornos T y T' estan definidos por un compacto y un entorno del origen.

Por la proposición 8 y teniendo en cuenta que $(H - u_o) \times K$ es compacto de $L_o(E;F) \times E$, será

$$\bigcup_{x \in K, \ u \in H} \{u(x) - u_o(x)\} = L$$

compacto en F.

El conjunto de las v tales que:

$$y \in L \quad \Longrightarrow \quad v(y) - v_o(y) \in V'$$

es entorno de v_o, llamemoslo T_1', se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \\ u \in H \\ v \in T_1' \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (v - v_o)\circ(u - u_o)(x) \in V'$$

Como u_o es continua en compactos es $u_o(K)$ compacto de F. Por tanto el conjunto de las v tales que:

$$y \in u_o(K) \quad \Longrightarrow \quad v(y) - v_o(y) \in V'$$

es un entorno de v_o, al que representaremos por T_2', se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \\ v \in T_2' \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (v - v_o)\circ u_o(x) \in V'$$

Por último, según la proposición 9 la aplicación $u \longmapsto v_o \circ u$ es continua en compactos, como $H - u_o$ es compacto que contiene al origen, existe un entorno T_o del origen en $L_o(E;F)$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} u \in T_o \\ u \in H - u_o \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad v_o \circ u(x) \in V' \text{ si } x \in K$$

Pongamos $T = T_o + u_o$ es un entorno de u_o y

$$\left.\begin{array}{l} u \in T \\ u \in H \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad v_o \circ (u - u_o)(x) \in V' \text{ si } x \in K$$

Resumiendo todo lo anterior, ponemos $T' = T_1' \cap T_2'$ con lo que:

$$\left.\begin{array}{l} u \in T \ , \quad u \in H \\ v \in T' \ , \quad v \in J \\ \qquad x \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (v \circ u - v_o \circ u_o)(x) \in V' + V' + V' \subset V$$

También en este caso se he probado algo mas que la continuidad en compactos, pues no se ha usado la compacidad de J.

PROPOSICION 11. Sean E un espacio vectorial topológico. $(F_i)_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos. Pongamos $F = \prod_{i\in I} F_i$. La aplicación $f \mapsto (pr_i \circ f)_{i\in I}$ es un homeomorfismo lineal de $L_o(E;F)$ en $\prod_{i\in I} L_o(E;F_i)$.

Demostración:

Sea $f\in L_o(E;F)$, la aplicación $pr_i: F \to F_i$ es continua, por tanto continua en compactos, asi pues lo es $pr_i \circ f$. De aqui que:

$$(pr_i \circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} L_o(E;F_i).$$

La aplicación es lineal e inyectiva, evidentemente. También es sobre; pues sea $(f_i)_{i\in I} \in \prod L_o(E;F_i)$ y sea f la aplicación lineal de E en F que aplica x en $(f_i(x))_{i\in I}$.

f es continua en compactos. Como es aplicación lineal basta probar que es continua en compactos en o.

Sea K un compacto que contenga al origen en E y sea V un entorno de o en F. V contiene un conjunto de la forma $\prod_{i\in I} V_i$ donde los V_i son entornos de o en F_i y salvo para un subconjunto finito $J\subset I$ es $V_i = F_i$.

Para $i\in I-J$ es $f_i(K)\subset V_i = F_i$ y para cada $i\in J$ existe un W_i entorno del origen en E tal que

$$f_i(W_i \cap K)\subset V_i$$

asi pues poniendo $W = \bigcap_{i\in J} W_i$ que es entorno de o se tiene

$$f(W\cap K) \subset V$$

Ademas es claro que f se transforma en $(f_i)_{i\in I}$.

Tenemos asi una aplicación lineal biyectiva, debemos ver que es homeomorfismo.

Sea V un entorno de o en $\prod_{i\in I} L_o(E;F_i)$, contiene a un conjunto de la forma $\prod_{i\in I} V_i$ donde cada V_i es un entorno de o en $L_o(E;F_i)$ y salvo para un número finito de subíndices es $V_i = L_o(E;F_i)$. Para los demás subíndices, los del conjunto finito J, es V_i el conjunto de aplicaciones lineales continuas en compactos $u: E \rightarrow F_i$ que verifican:

$$u(K_i) \subset W_i$$

donde K_i es un compacto que contiene al origen en E y W_i un entorno de o en F_i.

Sea $K = \bigcup_{i\in J} K_i$; es compacto en E y pongamos $W = \prod_{i\in I} W_i$ admitiendo $W_i = F_i$ si $i \notin J$.

El conjunto de aplicaciones lineales continuas en compactos f tales que: ($f \in L_o(E;F)$)

$$f(K) \subset W$$

es un entorno de $L_o(E;F)$ y si f verifica estas condiciones es

$$(pr_i \circ f)_{i\in I} \in V.$$

Esto es la aplicación $f \mapsto (pr_i \circ f)_{i\in I}$ es continua.

Además es abierta, pues la imagen del entorno en $L_o(E;F)$ es justamente $\prod_{i\in I} V_i$ y este es un entorno genérico de $L_o(E;F)$.

CAPITULO II

A P L I C A C I O N E S   D I F E R E N C I A B L E S

Antes de definir la diferencial debemos definir los restos. Según nuestra idea deben ser continuos en compactos en cero.

Todos los espacios vectoriales topológicos que consideremos se supondrán implicitamente separados.

DEFINICION 4. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. Diremos que $r: E \to F$ es resto si:

1) Para cada compacto K en E que contenga al origen existe un entorno V de cero en E tal que $r(V \cap K)$ sea relativamente compacto.

2) r es continua en compactos en cero.

3) Para cada compacto K en E que contenga al origen se tiene

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} r(tx) = 0$$

uniformemente para $x \in K$.

En los espacios localmente compactos 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1). No parece posible sin embargo en el caso general prescindir de ninguna de las tres.

PROPOSICION 12. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, designamos por R(E;F) el conjunto de los restos de E en F. R(E;F) es subespacio vectorial del espacio de las aplicaciones de E en F.

Demostración:

Sean r_1 y r_2 restos.

$r_1 + r_2$ verifica 1). Pues sea K un compacto de E que contenga al origen, existen dos entornos V_1 y V_2 tales que $r_1(V_1 \cap K)$ y $r_2(V_2 \cap K)$ son relativamente compactos. Sea $V = V_1 \cap V_2$, es un entorno del origen y

$$(r_1 + r_2)\ (V \cap K) \subset r_1(V_1 \cap K) + r_2(V_2 \cap K)$$

luego es relativamente compacto.

Puesto que r_1 y r_2 son continuas en compactos en cero, también lo es $r_1 + r_2$ por la continuidad de la suma.

Finalmente, si K es un compacto de E que contenga el origen

$$\lim\ 1/t \cdot (r_1 + r_2)\ (tx) = \lim 1/t \cdot r_1(tx) + \lim 1/t \cdot r_2(tx) = o$$

uniformemente para $x \in K$.

Analogamente si r es resto y $\lambda \in \mathbb{R}$, λr es resto.

En efecto λr verifica 1) pues

$$\lambda\, r(V \cap K)$$

es la imagen de $r(V \cap K)$ por el homeomorfismo $x \mapsto \lambda x$.

Por ser el producto por escalares aplicación continua es λr continua en compactos en cero.

Por último, para cada compacto que contenga al origen K. Se tiene:

$$\lim_{t\to o} (1/t).\ (\lambda r)(tx) = \lambda \lim_{t\to o} (1/t).\ r(tx) = \lambda o = o$$

uniformemente para $x \in K$.

PROPOSICION 13. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. La única aplicación lineal que es a la vez resto de E en F es la identicamente nula.

Demostración:

Supongamos que $u: E \to F$ sea resto y aplicación lineal. Veremos que para cada $x \in E$ es $u(x) = o$.

La imagen de $[o,1]$ por la aplicación continua $t \mapsto tx$, es el compacto $K = [o,1]\cdot\{x\}$, que contiene al origen.

Se tiene entonces

$$\lim_{t\to o} (1/t).\ u(tx) = \lim_{t\to o} u(x) = o.$$

Asi pues $u(x) = o$. Esto es $u = o$.

DEFINICION 5. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. Diremos que la aplicación $f: E \to F$ es diferenciable en $a \in E$ si existe una aplicación lineal continua en compactos $u: E \to F$ y un resto r tal que:

$$f(x) = f(a) + u(x-a) + r(x-a).$$

De existir u y r son únicos pues si existiesen otros.

$$f(x) = f(a) + u_1(x-a) + r_1(x-a)$$

se tendría:

$$u_1(y) - u(y) = r(y) - r_1(y)$$

asi pues $u_1 - u$ es un resto y por la proposición 13 $u_1 = u$ de donde $r_1 = r$.

Esto permite establecer las notaciones

$$u = Df(a) = f'(a) ,$$

a la aplicación lineal $Df(a)$ o $f'(a)$ se le suele llamar entonces diferencial de f en a.

El concepto de aplicación diferenciable en a es local. Esto es si $g = f$ en un entorno de a las dos son al mismo tiempo diferenciables o no.

Una aplicación definida en un entorno de a se dirá diferenciable si lo es cualquiera de sus prolongaciones y se seguirán usando en este caso las notaciones $Df(a)$, $f'(a)$.

PROPOSICION 14. Si $f: E \to F$ es diferenciable en a es continua en compactos en a.

Demostración:

Existen $Df(a) \in L_o(E;F)$ y $r \in R(E;F)$ tales que:

$$f(x) = f(a) + u(x-a) + r(x-a)$$

y por hipótesis los tres sumandos de la derecha son continuos en compactos en a.

Para espacios localmente compactos se obtiene como consecuencia que una aplicación diferenciable es continua.

PROPOSICION 15. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. $f : E \to F$ una aplicación constante, $f(x) = a$.

f es diferenciable en todo punto y su diferencial es cero.

Demostración:

Podemos poner

$$f(x) = f(b) + o(x-b) + o(x-b) = a$$

y sabemos que $o \in L_o(E;F)$, y $o \in R(E;F)$.

PROPOSICION 16. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. $u \in L_o(E;F)$ es diferenciable en todo punto $a \in E$, además $Du(a) = u$.

Demostración:

Basta tener en cuenta que:

$$u(x) = u(a) + u(x-a) + o(x-a)$$

y que $u \in L_o(E;F)$ y $o \in R(E;F)$.

PROPOSICION 17. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos, $u : E \times F \to G$ una aplicación bilineal continua en compactos. u es diferenciable en todo punto $(a,b) \in E \times F$ y

$$Du(a,b)\ (x,y) = u(a,y) + u(x,b)$$

Demostración:

Puesto que:

$$u(a+x, b+y) = u(a,b) + u(a,y) + u(x,b) + u(x,y)$$

es suficiente probar que la aplicación $(x,y) \mapsto u(a,y) + u(x,b)$

es continua en compactos y que u es resto, esto es $u \in R(E \times F;G)$

La aplicación lineal es continua en compactos. En efecto sea $K \times L$ un compacto de $E \times F$ que contenga a (o,o) y V un entorno del origen en G. Tomemos un entorno del origen V' en G tal que $V' + V' \subset V$. Por ser u continua en compactos existe un entorno U_1 de o en E tal que $u(x,b) \in \in V'$ si $x \in U_1 \cap K$. Analogamente existe U_2 tal que $u(a,y) \in \in V'$ si $y \in U_2 \cap L$. Por tanto $(x,y) \in (U_1 \times U_2) \cap (K \times L)$ implica $u(a,y) + u(x,b) \in V$. Es decir la aplicación lineal es continua en compactos.

También es $u \in R(E \times F;G)$ pues u es continua en compactos, luego transforma compactos en compactos y es continua en compactos en (o,o).

Solo queda tor tanto ver que si $K \times L$ es compacto (podemos sin perder generalidad restringirnos a este tipo de compactos) se tiene:

$$\lim_{\substack{t \to o \\ t \neq o}} (1/t).\ u(tx,ty) = \lim_{\substack{t \to o \\ t \neq o}} t\ u(x,y) = o$$

Esto es cierto, pues $u(K \times L)$ es compacto, por tanto acotado de G. Si V es entorno de o en G existe $\alpha > o$ tal que:

$$|t| < \alpha \implies tu(K \times L) \subset V$$

es decir:

$$\left.\begin{array}{l} |t| < \alpha \\ (x,y) \in K \times L \end{array}\right\} \implies t\ u(x,y) \in V$$

PROPOSICION 18. Sean E un espacio vectorial topológico, $(F_i)_{i \in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos. Pongamos $F =$

$= \prod_{i\in I} F_i$. Identifiquemos además $L_o(E;F)$ con $\prod_{i\in I} L_o(E;F_i)$ por el isomorfismo canónico.

Si la aplicación $f\colon E \to F$ es diferenciable en $a \in E$ lo son para cada $i \in I$ $pr_i \circ f$ y se tiene:

$$Df(a) = (\ D(pr_i \circ f)(a)\ )_{i\in I}$$

El recíproco es cierto en cualquiera de estos dos casos:

a) Si f es continua en compactos en un entorno de a.

b) Si I es finito.

Demostración:

Supongamos f diferenciable en a, existen una aplicación lineal continua en compactos $Df(a)$ y un resto $r \in R(E;F)$ tales que:

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + r(x-a)$$

Aplicando pr_i se obtiene:

$$pr_i \circ f(x) = pr_i \circ f(a) + pr_i \circ Df(a)(x-a) + pr_i \circ r(x-a)$$

Como pr_i es continua en compactos lo es $pr_i \circ Df(a)$, entonces $pr_i \circ f$ será diferenciable en a si $pr_i \circ r \in R(E;F_i)$ y además se tendrá

$$D(pr_i \circ f)(a) = pr_i \circ Df(a)$$

y por tanto

$$Df(a) = (\ D(pr_i \circ f)\ (a)\ )_{i\in I}$$

De aqui que la primera parte del teorema sea consecuencia inmediata de la proposición 19 que probaremos a continuación.

Recíprocamente, si suponemos que cada $f_i = pr_i \circ f$ es diferenciable en a, existirán aplicaciones lineales continuas en compactos $D(pr_i \circ f)(a)$ y restos r_i tales que:

$$pr_i \circ f(x) = pr_i \circ f(a) + D(pr_i \circ f)(a)(x-a) + r_i(x-a).$$

Por tanto

$$f(x) = f(a) + (\ D(pr_i \circ f)(a)\ )_{i \in I}(x-a) + (r_i)_{i \in I}(x-a)$$

Sabemos (proposición 11) que $(\ D(pr_i \circ f)(a)\ )_{i \in I}$ es continua en compactos. f será diferenciable si $r = (r_i)_{i \in I}$ es resto.

r es continua en compactos. En efecto demos un entorno del origen en F, podemos suponerlo de la forma $\prod_{i \in I} V_i$, donde cada V_i es un entorno del origen en F_i y salvo para los índices de un conjunto finito J es $V_i = F_i$. Demos además un compacto K en E que contenga al origen.

Para cada $i \in J$ existe un entorno del origen W_i en F_i tal que:

$$r_i(W_i \cap K) \subset V_i$$

$W = \prod_{i \in J} W_i$ es un entorno del origen en E. Esto prueba la continuidad en compactos de r pues se verifica

$$r(\ W \cap K\ ) \subset \prod_{i \in I} V_i$$

Para cada compacto K que contenga al origen en E se tiene:

$$\lim_{\substack{t \to o \\ t \neq o}} (1/t).r(tx) = o$$

uniformemente en K.

En efecto demos como antes un entorno $\prod_{i \in I} V_i$ de o

en F.

Como cada r_i es resto existe un α_i para cada $i \in J$, tal que:

$$\left.\begin{array}{l} o < |t| < \alpha_i \\ x \in K \end{array}\right\} \Rightarrow (1/t).\ r_i(tx) \in V_i$$

y por tanto si $\alpha = \min_{i \in J} \alpha_i$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} o < |t| < \alpha \\ x \in K \end{array}\right\} \Rightarrow (1/t).\ r(tx) \in \prod_{i \in I} V_i$$

Para ver que r es resto solo queda probar que para cada compacto K en E que contenga al origen existe un entorno del origen en E, V, tal que $r(V \cap K)$ sea relativamente compacto. Esto no es cierto en general pero si cuando se verifique una de las condiciones a) ó b) del enunciado.

En efecto si es cierto a) de la igualdad

$$f(x) = f(a) + (\ D(pr_i \circ f)\ (a)\ )_{i \in I}(x - a) + r(x - a)$$

se deduce que r es continua en compactos en un entorno del origen, sea W. Tomemos un entorno del origen V cerrado y tal que $V \subset W$ entonces $V \cap K$ es compacto y r es continua en él, luego $r(V \cap K)$ es compacto.

Si es cierto b) como para todo $i \in I$ es r_i resto, existe un entorno del origen W_i tal que:

$$r_i(W_i \cap K)$$

sea relativamente compacto en F_i.

Sea $W = \bigcap_{i \in I} W_i$, como I es finito es un entorno del origen en E y se tiene

$$r(W \cap K) \subset \prod_{i \in I} r_i(W_i \cap K)$$

y éste es relativamente compacto en F.

PROPOSICION 19. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos. Si $u \in L_o(F;G)$ y $r \in R(E;F)$ se tiene $u \circ r \in R(E;G)$.

Demostración:

En primer lugar sea K un compacto que contiene al origen en E. Por ser r resto existe un entorno del origen V en E tal que $\overline{r(V \cap K)}$ es compacto. Como u es continua en compactos, es $u(\ \overline{r(V \cap K)}\ )$ compacto, luego

$$u(\ r(V \cap K)\ ) \subset u(\ \overline{r(V \cap K)}\ )$$

es relativamente compacto.

En segundo lugar $u \circ r|K$ es continua en o. En efecto, demos un entorno de o W en G. Como u es continua en compactos existe un entorno U de cero en F tal que

$$u\{(\ \overline{r(V \cap K)}\ ) \cap U\} \subset W.$$

Como r es continua en compactos existe un entorno V' de o en E tal que:

$$r(V' \cap K) \subset U$$

entonces

$$u \circ r\ (V \cap V' \cap K) \subset W$$

es decir $u \circ r$ es continua en compactos en cero.

Por último sabemos que:

$$\lim_{\substack{t \to o \\ t \neq o}} (1/t).\ r(tx) = o$$

uniformemente para $x \in K$ y debemos probar el resultado análogo para $u \circ r$.

Supongamos que hemos encontrado un $\alpha > o$ de modo que el conjunto

$$\{o\} \cup \{y \mid y = (1/t) \,.\, r(tx), \quad o < |t| < \alpha \,,\ x \in K\}$$

sea relativamente compacto. Esto se probará aparte en el Lema 1 pues posteriormente lo necesitaremos.

Sea H un compacto en F que contenga a dicho relativamente compacto. $o \in H$ y como u es continua en compactos, para cada entorno W de cero en G existe un entorno de o en F, U, tal que:

$$u(H \cap U) \subset W$$

Pero según la hipótesis existe $\beta > o$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} o < |t| < \beta \\ x \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow (1/t) \,.\, r(tx) \in U$$

Asi pues si $o < |t| < \beta$ y $|t| < \alpha$ se tiene, si $x \in K$,

$$(1/t) \,.\, r(tx) \in U \cap H$$

y por tanto

$$(1/t) \,.\, u \circ r(tx) \in W$$

que es lo mismo que decir

$$\lim_{\substack{t \to o \\ t \neq o}} (1/t) \,.\, u \circ r(tx) = o$$

uniformemente en K.

LEMA 1. Sea $r \in R(E;F)$ un resto y K un compacto en E que contenga al origen, existe un $\alpha > o$ tal que:

$$\{o\} \cup \{y \mid y = (1/t) \,.\, r(tx), \quad o < |t| < \alpha \,,\ x \in K\}$$

sea relativamente compacto en F.

Demostración:

Sea $K' = [-1,1]\cdot K$ el compacto imagen de $[-1,1]\times K$ por la aplicación continua $(t,x)\mapsto tx$.

Por ser r resto existe un entorno V del origen en E tal que $r(V\cap K')$ sea relativamente compacto en F.

Por ser K acotado existe un $\alpha > o$, $\alpha < 1$ tal que:

$$[-\alpha,\alpha]\cdot K \subset V$$

De los dos resultados anteriores se deduce que

$$r([-\alpha,\alpha]K)$$

es relativamente compacto en F.

Para cada β, $o < \beta < \alpha$, se tiene que

$$\{u \mid u\in\mathbb{R},\ \beta \leqslant |u^{-1}| \leqslant \alpha\}\cdot r([-\alpha,\alpha]\cdot K)$$

es relativamente compacto en F. Por ser imagen por la aplicación continua $(t,x)\mapsto tx$ de un relativamente compacto.

Sea entonces H el cierre del conjunto

$$\{o\}\cup\{y \mid y = (1/t)\,.\,r(tx),\ \ o<|t|<\alpha\ ,\ x\in K\}$$

veamos que H es compacto.

Sea $(U_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de H.

Como $o\in H$ existe algún $j\in I$ tal que $o\in U_j$.
Asi pues para un cierto β, $o<\beta<\alpha$, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} o<|t|<\beta \\ x\in K \end{array}\right\} \Rightarrow (1/t)\,.\,r(tx)\in V\subset U_j$$

siendo V un entorno de o en F contenido en U_j y cerrado.

Por otra parte el conjunto

$$\{y \mid y=(1/t)\,.\,r(tx),\ \ \beta\leqslant|t|\leqslant\alpha\ ,\ x\in K\}$$

está contenido en

$$\{u \mid u \in \mathbb{R},\ \beta \leq |u^{-1}| \leq \alpha\}\, r([-\alpha,\alpha]\ K)$$

asi pues su cierre es compacto. Existe, entonces, una parte $J \subset I$ finita tal que:

$$\overline{\{y \mid y = (1/t)\ .\ r(tx)\ ,\ \beta \leq |t| \leq \alpha\ ,\ x \in K\}} \subset \bigcup_{i \in J} U_i$$

Por tanto $U_j \cup \bigcup_{i \in J} U_i$ recubre H, luego H es compacto.

CAPITULO III

R E G L A D E L A C A D E N A

Necesitamos un resultado previo que es consecuencia del Lema 1 del capítulo II.

PROPOSICION 2o. Sean E, F y G tres espacios vectoriales topológicos, $r \in R(E;F)$, $s \in R(F;G)$ y $u \in L_o(E;F)$.

Entonces $s \circ (r+u) \in R(E;G)$.

Demostración:

Sea K un compacto de E que contenga al origen, $u(K)$ es compacto y existe un entorno del origen en E, V_1, de manera que $r(V_1 \cap K)$ es relativamente compacto.

Sea $K' = u(K) + \overline{r(V_1 \cap K)}$, es un compacto en F que contiene al origen. Existe pues un entorno del origen W en F tal que $s(W \cap K')$ es relativamente compacto.

Tomemos un entorno del origen en F, W', tal que $W' + W' \subset W$.

Como r es continua en compactos en cero existe un entorno del origen V_2, en E, tal que $r(V_2 \cap K) \subset W'$.

Por ser u continua en compactos existe un entorno del origen V_3, en E, tal que $u(V_3 \cap K) \subset W'$.

Sea $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$; se tiene entonces que:

$$s\circ(r+u)\ (V \cap K) \subset s(\ r(V \cap K) + u(V \cap K)\ ) \subset s(W \cap K')$$

es relativamente compacto, por serlo $s(W \cap K')$.

En segundo lugar $s\circ(r+u)$ es continua en compactos en el origen.

En efecto; sea K un compacto en E que contenga al origen y sea U un entorno de cero en G.

Tomemos V_1 entorno del origen en E tal que $r(V_1 \cap K)$ sea relativamente compacto y pongamos

$$K' = u(K) + \overline{r(V_1 \cap K)}.$$

Existe un entorno W del origen en F tal que $s(W \cap K') \subset U$ y existe un entorno V_2 del origen en E tal que:

$$r(V_2 \cap K) \subset W'$$
$$u(V_2 \cap K) \subset W'$$

siendo W' un entorno tal que $W' + W' \subset W$.

Si ponemos ahora $V = V_1 \cap V_2$ se tendrá

$$s\circ(r+u)\ (V \cap K) \subset s(K' \cap W) \subset U$$

con lo que queda probada la continuidad en compactos.

Por último sea K un compacto en E que contenga al origen.

Según el Lema 1 (Cap. II, pag. 27) existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\{0\} \cup \{y \mid y = (1/t) \cdot r(tx), \quad 0 < |t| < \alpha, \quad x \in K\}$$

sea relativamente compacto. Sea H su cierre en F.

$K' = u(K) + H$ es un compacto en F. Como s es resto, para cada entorno U en G, existe un β tal que:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |t| < \beta \\ y \in K' \end{array}\right\} \Rightarrow (1/t) \cdot s(ty) \in U$$

Sea entonces $r = \min\{\beta, \alpha\}$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |t| < r \\ x \in K \end{array}\right\} \Rightarrow (1/t).s\circ(r+u)(tx) = (1/t).s(\ r(tx) + u(tx)\ ) =$$

$$= (1/t).s\Big\{t(u(x) + (1/t).r(tx))\Big\} = (1/t).s(ty) \in U$$

Esto es

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} (1/t) \cdot s\circ(r+u)(tx) = 0$$

uniformemente en K.

PROPOSICION 21. (Regla de la cadena) Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos, $f: E \to F$ y $g: F \to G$ dos aplicaciones tales que:

f es diferenciable en $a \in E$.

g es diferenciable en $f(a) \in F$.

Entonces $g\circ f$ es diferenciable en a y se tiene:

$$D(g\circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Demostración:

Según las hipótesis existen $r \in R(E;F)$ y $s \in R(F;G)$ tales que:

(1) $\quad f(x) = f(a) + u(x-a) + r(x-a)$

(2) $\quad g(y) = g\circ f(a) + v(y - f(a)) + s(y - f(a))$

donde $u = Df(a) \in L_0(E;F)$ y $v = Dg(f(a)) \in L_0(F;G)$.

Sustituyendo en (2) y por f(x) deducido de (1) se obtiene:

$$g \circ f(x) = g \circ f(a) + v \circ u(x-a) + v \circ r(x-a) + s \circ (u+r)(x-a)$$

Solo queda por tanto ver que

$$v \circ r + s \circ (u+r)$$

es resto. Pero esto se deduce aplicando repetidamente las proposiciones 19 y 2o.

PROPOSICION 22. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. $f : E \to F$ y $g : E \to F$ dos aplicaciones diferenciables en un mismo punto $a \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. $f+g$ y λf son diferenciables en a y

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$$
$$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a).$$

Demostración:

Es consecuencia directa de las proposiciones 21, 18 y 16.

CAPITULO IV

T E O R E M A   F U N D A M E N T A L
D E L   C A L C U L O

Vamos a dar el teorema en la forma obtenida por A. FRÖLICHER y W. BUCHER, usando los conjuntos cerrados y convexos para estimar la separación de puntos.

Sin embargo la mayoría de las consecuencias del teorema solo serán válidas para espacios localmente convexos.

PROPOSICION 23. Sean:

E un espacio vectorial topológico.

$I = [\alpha, \beta]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$

B un subconjunto de E cerrado, convexo y con interior no vacio.

$f: I \to E$ y $g: I \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones.

Supongamos que se verifiquen además las condiciones

1) f y g son continuas en I.

2) Existe un conjunto numerable D tal que si $\xi \in I - D$

f y g son diferenciables en ξ y

$$Df(\xi)(1) \in Dg(\xi)(1) \, . \, B.$$

3) Si $\xi < \eta$ pertenecen a I se tiene $g(\xi) \leq g(\eta)$.

Entonces se verifica:

$$f(\beta) - f(\alpha) \in (\, g(\beta) - g(\alpha) \,) \, . \, B$$

Demostración:

Podemos suponer $\alpha = o$, $g(\alpha) = o$, $f(\alpha) = o$, y $o \in B$. Pues si no es este el caso sustituiríamos

I por $J = [\alpha_1, \beta_1]$ siendo $\alpha_1 = o$, $\beta_1 = \beta - \alpha$

g por g_1 definida por ser $g_1(t) = g(t+\alpha) - g(\alpha)$

f por f_1 definida por ser $f_1(t)=f(t+\alpha) - f(\alpha) - g_1(t).P$

siendo $P \in B$ un punto interior a B

B por $B_1 = B - \{P\}$.

Entonces J, g_1, f_1, y B_1, verifican las hipótesis del teorema y las condiciones adicionales: $\alpha_1 = o$, $g_1(\alpha_1)=o$, $f_1(\alpha_1) = o$, $o \in B_1$. Además si el teorema se verifica para f_1, g_1 y B_1 se verifica para f, g y B.

Suponemos por tanto que se verifican dichas condiciones.

Como paso intermedio probaremos en primer lugar que para cada $\varepsilon > o$ se tiene:

$$f(\beta) \in (\, g(\beta) + \varepsilon\beta + \varepsilon \,) \, . \, B$$

Sea $h\colon \mathbb{N} \to \bar{D}$ una biyección de $\mathbb{N}$ en $\bar{D}=D \cap I - \{\beta\}$ y pongamos $\rho_n = h(n)$

Definimos

$$k(s) = g(s) + \varepsilon s + \varepsilon \sum_{\rho_n < s} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

para $s \in I$.

Considerémos el conjunto

$$H = \{ t \mid t \in I = [o,\beta] ,\quad f(s) \in k(s)\cdot B \quad \text{para } o \leq s < t \}$$

Evidentemente $o \in H$. Sea $\gamma = \sup (H \cap I)$. Probaremos que $I \cap H = [o,\gamma]$.

En primer lugar si $t_1 < \gamma$ es $t_1 \in H$, pues existe un $t > t_1$ tal que $t \in H$ y por tanto $f(s) \in k(s)\cdot B$ para $o \leq s < t$ por tanto también para $o \leq s < t_1$.

De aqui que $H \cap I = [o,\gamma)$ ó $[o,\gamma]$. Pero si fuese $H \cap I = [o,\gamma)$ se tendría para todo s, con $o \leq s < \gamma$ que $f(s) \in k(s)\cdot B$ luego $\gamma \in H$.

Asi pues $H \cap I = [o,\gamma]$.

Veamos que $f(\gamma) \in k(\gamma)\cdot B$. Si $\gamma = o$ esto es cierto trivialmente. En caso contrario

$$(f(t)/k(t)) \in B \quad \text{para} \quad o < t < \gamma$$

Puesto que f es continua y k continua por la izquierda se tiene, ya que B es cerrado

$$(f(\gamma)/k(\gamma)) = \lim_{\substack{t \to \gamma \\ t < \gamma}} (f(t)/k(t)) \in B$$

Luego $f(\gamma) \in k(\gamma)\cdot B$. Solo queda por ver que $\gamma = \beta$ pues entonces

$$k(\gamma) = k(\beta) = g(\beta) + \varepsilon\beta + \varepsilon \sum_{\rho_n < \beta} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = g(\beta) + \varepsilon\beta + \varepsilon$$

Supongamos que no fuese $\gamma = \beta$ sería $\gamma < \beta$. O bien $\gamma \neq \rho_n$ para todo n , o bien $\gamma = \rho_m$ para algún m. Vamos a ver que ninguna de las dos posibllidades puede darse.

Sea $\gamma \neq \rho_m$ para todo n y $o \leq \gamma < \beta$. Entonces f y g son diferenciables en γ y se verifica (hipótesis 2)):

$$Df(\gamma)(1) \in Dg(\gamma)(1)\cdot B$$

Se tiene entonces para $\gamma + x \in I$

$$f(\gamma + x) = f(\gamma) + Df(\gamma)(x) + r_1(x)$$
$$g(\gamma + x) = g(\gamma) + Dg(\gamma)(x) + r_2(x)$$

donde $r_1 \in R(\mathbb{R};E)$ y $r_2 \in R(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Suponemos B entorno del origen en E. Para todo $\varepsilon > o$ es $(\varepsilon/2)\cdot B$ entorno del origen en E, $[o,1]$ es compacto en $\mathbb{R}$, existe pues $\delta_1 > o$ tal que:

$$o \leqslant x < \delta_1 \} \Longrightarrow \quad r_1(x) \in (\varepsilon/2)\cdot x \cdot B$$

Analogamente $[\varepsilon/2\ , -\varepsilon/2]$ es entorno del origen en $\mathbb{R}$ y $[0,1]$ compacto de $\mathbb{R}$, existe pues $\delta_2 > o$ tal que:

$$0 \leqslant x < \delta_2 \qquad |r_2(x)| \leqslant (\varepsilon/2)\cdot x$$

Sea ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \beta - \gamma\}$. Se tiene entonces para $0 \leqslant x < \delta$

$$\begin{aligned} f(\gamma + x) &= f(\gamma) + Df(\gamma)(x) + r_1(x) = f(\gamma) + x\,Df(\gamma)(1) + r_1(x) \in \\ &\in k(\gamma)\cdot B + x Dg(\gamma)(1)\cdot B + (\varepsilon/2)\cdot x \cdot B = \\ &= k(\gamma)\cdot B + [g(\gamma + x) - g(\gamma) - r_2(x)]\cdot B + (\varepsilon/2)\cdot x\cdot B \end{aligned}$$

los tres coeficientes que aparecen aqui son positivos, ya que k es no decreciente y $k(0) = 0$ y $Dg(\gamma)(1) \geqslant 0$ pues en caso contrario $Dg(\gamma)(1) < 0$ se tendría $|r_2(x)| < \varepsilon|x|$, lo que para ε suficientemente pequeño daría $g(\gamma + x) < g(\gamma)$.

Por ser B convexo si μ, ν y ρ son positivos se tiene $\mu B + \nu B + \rho B \subset (\mu + \nu + \rho)\cdot B$.

Además, como $0 \in B$, se tiene que si $0 \leqslant \lambda < \mu$ y $x \in \lambda B$ entonces $x \in \mu B$ pues

$$x = \lambda y = \mu\left[\frac{\lambda}{\mu}\, y\right] = \mu\left[\frac{\lambda}{\mu}\, y + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) 0\right] \in \mu B$$

de aqui que si $0 \leqslant x < \delta$

$$f(\gamma+x)\in(\ k(\gamma)+g(\gamma+x)-g(\gamma)-r_2(x)+(\varepsilon/2)\ x\ )\cdot B=$$

$$=(\ g(\gamma+x)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\varepsilon\gamma-r_2(x)+(\varepsilon/2)\ x\ )\cdot B\subset$$

$$\subset(\ g(\gamma+x)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma+x}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\varepsilon(\gamma+x)\ )\cdot B=\ k(\gamma+x)\cdot B$$

Por tanto se tiene $f(s)\in k(s)\cdot B$ para $0\leqslant s\leqslant\gamma$ y $\gamma\leqslant s<\gamma+\delta$ en contradicción con la definición de $\gamma=\sup(H\cap I)$.

Supongamos en cambio $\gamma=\rho_m$ y $0\leqslant\gamma<\beta$ y veamos que tampoco en posible.

Como f es continua en ρ_m, existe δ_1 tal que

$$|t-\gamma|<\delta_1\quad\Longrightarrow\quad f(t)-f(\gamma)\in\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2^{m+1}}B.$$

g es continua y monótona luego existe δ_2 tal que

$$\gamma\leqslant t\leqslant\gamma+\delta_2\Rightarrow g(t)-g(\gamma)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2^{m+1}}$$

Pongamos de nuevo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\beta-\gamma\}$, y tendremos entonces si $\gamma\leqslant t\leqslant\gamma+\delta$

$$f(t)=f(t)-f(\gamma)+f(\gamma)\in\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2^{m+1}}B+k(\gamma)\cdot B\subset$$

$$\subset\left(\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2^{m+1}}+g(\gamma)+\varepsilon\gamma+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\cdot B\subset$$

$$\subset\left(\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2^{m+1}}+g(t)+\varepsilon t+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\cdot B\subset$$

$$\left(g(t)+\varepsilon t+\varepsilon\sum_{\rho_n\leqslant t}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)B=k(t)\ B$$

con lo que de nuevo no sería γ el $\sup(H\cap I)$.

Por tanto $\gamma=\beta$ y de aqui que

$$f(\beta)\in\left[g(\beta)+\varepsilon\beta+\varepsilon\right]B$$

para todo $\varepsilon>0$.

Veamos ahora que esto implica $f(\beta)\in g(\beta)\cdot B$.

Si $g(\beta)\neq 0$ esto es immediato pues como B es cerrado y

$$f(\beta)/g(\beta) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\beta)/(\, g(\beta)+\varepsilon\beta+\varepsilon\,)$$

será $f(\beta)/g(\beta) \in B$.

Si $g(\beta) = 0$ como g es no decreciente y $g(0) = 0$ será g identicamente nula en $[\alpha, \beta] = [0,\beta]$.

Como salvo en un conjunto numerable de puntos se verifica en $I = [0,\beta]$

$$Df(\xi)(1) \in Dg(\xi)(1)\cdot B$$

será $Df(\xi)(1) = 0$ y por tanto la hipótesis se verifica no solo para B sino para todo cerrado, convexo, entorno del origen en E, sea C uno de estos conjuntos

$$f(\beta) \in (\, \varepsilon\beta + \varepsilon\,)\, C$$

en particular

$$\frac{f(\beta)}{\beta + 1} \in C$$

para todo C. Pero E es separado luego $f(\beta) = 0$.

Por tanto $f(\beta) \in g(\beta)\cdot B$ tanbién es cierto en este caso.

El interés del teorema fundamental del cálculo aparece sobre todo en los espacios localmente convexos. Para este caso particular el teorema tiene el siguiente corolario.

PROPOSICION 24. Sea E un espacio localmente convexo. $p: E \to \mathbb{R}$ una seminorma continua. I un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. $f: I \to E$ y $g: I \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones tales que

1) f y g son continuas en I.

2) Existe un conjunto numerable D tal que si $\xi \in I - D$, f y g sean diferenciables en ξ y

$$p(\ Df(\xi)(1)\ ) \leqslant Dg(\xi)(1)$$

Entonces

$$p(\ f(\beta) - f(\alpha)\ ) \leqslant g(\beta) - g(\alpha)$$

Demostración:

Basta aplicar el teorema fundamental del cálculo siendo $B = \{x \mid x \in E,\ \ p(x) \leqslant 1\}$.

El hecho de ser g monótona es entonces consecuencia de ser g continua en I y de ser $Dg(\xi)(1) \geqslant 0$ en $I - D$.

Tambien destacaremos la consecuencia siguiente del teorema fundamental del cálculo.

PROPOSICION 25. Sea E un espacio vectorial topológico. F un espacio localmente convexo. p una seminorma continua de F. $f\colon E \to F$ una aplicación diferenciable en un entorno S del segmento x_o , $x_o + t$. Entonces

$$p\left[f(x_o + t) - f(x_o)\right] \leqslant \sup_{\xi \in [0,1]} p\left[Df(x_o + \xi t)(t)\right]$$

Demostración:

Se aplica la proposición 24 a la aplicación $\xi \longmapsto f(x_o + \xi t)$ tomando $g(x) = M\cdot x$, donde

$$M = \sup_{\xi \in [0,1]} p\left[Df(x_o + \xi t)(t)\right]$$

CAPITULO V

C O M P A R A C I O N   C O N   L A
D I F E R E N C I A C I O N   D E   F R E C H E T

Hemos visto que si f es diferenciable en a es continua en compactos en a. Para ciertos espacios topológicos esto equivale a la continuidad en a. Solo señalarémos dos casos impartantes.

PROPOSICION 26. Sean X e Y espacios topológicos. $f:X \to Y$ una aplicación continua en compactos en $a \in X$. Si X es localmente compacto o metrizable f es continua en a.

Demostración:

Supongamos X localmente compacto. Sea K un entorno compacto de a. $f|K$ es continua en a por hipótesis; luego f es continua en a.

Supongamos X metrizable. Tomemos un entorno de $f(a)$ en Y, sea W. Debemos probar que $f^{-1}(W)$ es entorno de a. Si no lo fuese existiría una sucesión a_n convergente hacia a y tal que $f(a_n) \notin W$. Pero el conjunto $\{a, a_1, a_2, \ldots\}$ es compacto y f es continua en compactos en a. Asi pues $f(a_n)$ converge hacia $f(a)$ y esto contradice que $f(a_n) \notin W$.

Si E es un espacio de Banach y F espacio vectorial topológico, una aplicación $f: E \to F$ diferenciable en a es continua en a.

Si E y F son a la vez espacios de Banach no existe una relación simple entre nuestra definicifn de aplicación diferenciable y la de Fréchet.

Supongamos en efecto que $f: E \to F$ sea diferenciable en el sentido de Fréchet. Pongamos entonces

$$f(x) = f(a) + u(x-a) + r(x-a)$$

siendo u la diferencial de f en a en el sentido de Fréchet.

No necesariamente es r resto en nuestro sentido,

r verifica nuestra condición 2) pues los restos de Fréchet son continuos.

r verifica también la condición 3) de nuestra definición de restos. En efecto por ser resto de Fréchet existe para cada $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x\| < \delta \implies \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon$$

Si K es un compacto de E, existe $\alpha > 0$ tal que $|t| < \alpha$ y $x \in K$ implica $\|tx\| < \delta$, y entonces

$$\left.\begin{array}{l} |t|<\alpha \\ x \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \|(1/t)\ r(tx)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

Pero no necesariamente se verifica la condición 1) de nuestra definición de restos.

Para ciertos casos si se verifica esta condición, por ejemplo cuando f es continua en un entorno de a. Por tanto podemos enunciar la siguiente proposición.

PROPOSICION 27. Sean E y F espacios de Banach. $f: E \to F$ una aplicación continua en un entorno de $a \in E$ y diferenciable en el sentido de Fréchet en a. Entonces f es diferenciable en nuestro sentido y las dos diferenciales coinciden.

Para obtener una implicación en el sentido opuesto es necesario añadir hipótesis mas fuertes, la dificultad no solo está en los restos, una aplicación lineal continua en compactos es diferenciable en nuestro sentido pero no en el de Fréchet.

Llamaremos $\mathcal{L}(E;F)$ el espacio de las aplicaciones lineales continuas entre dos espacios de Banach con la topología de la norma

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\|$$

PROPOSICION 28. Sean E y F espacios de Banach. $f: E \to F$ una aplicación diferenciable en un entorno V de a en E. Supongamos que para cada $x \in V$ es $Df(x) \in \mathcal{L}(E;F)$, y que la aplicación de V en $\mathcal{L}(E;F)$ que transforma x en $Df(x)$ sea continua.

Entonces f es diferenciable en a en el sentido de Fréchet y las dos diferenciales coinciden.

Demostración:

Sea α tal que $\|x-a\|<\alpha$ implique $x\in V$.

Consideremos la aplicación de $\|x-a\|<\alpha$ en F que transforma x en $f(x)-f(a)-u(x-a)$; siendo $u=Df(a)$.

Esta aplicación es diferenciable en todo x de $\|x-a\|<\alpha$ y su diferencial es

$$Df(x)-u = Df(x)-Df(a)$$

Aplicando la proposición 25 se tiene si $\|x-a\|<\delta<\alpha$

$$\|f(x)-f(a)-u(x-a)\| \leqslant \sup_{\xi\in[0,1]} \|\{Df(a+(x-a)\xi)-Df(a)\}(x-a)\|$$

$$\leqslant \|x-a\| \sup_{\xi\in[0,1]} \|Df(a+(x-a)\xi)-Df(a)\|$$

Pero por ser Df aplicación continua en $\mathcal{L}(E;F)$ puede encontrarse un δ para cada ε tal que

$$\|x-a\|<\delta \Rightarrow \sup_{\xi\in[0,1]} \|Df(a+(x-a)\xi)-Df(a)\| < \varepsilon$$

y se tendrá para $\|x-a\|<\delta$

$$\|f(x)-f(a)-u(x-a)\| \leqslant \varepsilon\|x-a\|$$

es decir f es diferenciable en el sentido de Frechet en a y su diferencial en a es u.

Sea por último E un espacio localmente convexo y $f: I\to E$ una aplicación continua de un intervalo de $\mathbb{R}$ en E. vamos a dar una condición necesaria y suficiente para que f sea diferenciable en un punto interior de I.

Como vimos en la proposición 6, $L_0(\mathbb{R};E)$ es isomorfo en este caso a E y la diferencial puede identificarse a un elemento de E.

PROPOSICION 29. Sea E un espacio vectorial topológico.

I un intervalo de R. a un punto interior de I. $f: I \to E$ una aplicación continua.

Condición necesaria y suficiente para que f sea diferenciable en a es que exista el límite

$$\lim_{t \to o} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a)$$

En este caso la diferencial esta caracterizada por ser $Df(a)(h) = h\, f'(a)$.

Demostración.

Supongamos que exista el límite. La aplicación

$$t \longmapsto f(a+t) - f(a) - t\, f'(a) = r(t)$$

es entonces un resto.

Es continua en compactos en 0 por ser f continua en a.

Si K es un compacto en $\mathbb{R}$ que contiene al origen, puesto que la aplicación es continua en un entorno V de 0, transforma $W \cap K$ en un compacto, siendo W un entorno compacto de 0 contenido en V.

Por último si K es un compacto de R que contenga al origen, se tiene:

$$\frac{1}{t}\, r(tx) = \frac{f(a+tx) - f(a)}{t} - x\, f'(a)\,.$$

Como K es compacto existe R tal que $|x| < R$ para $x \in K$.

Si W es entorno del origen en E, existe α tal que

$$0 < |t| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(a+t) - f(a)}{t} - f'(a) \in \frac{1}{R} W$$

y poniendo entonces $\alpha' = \alpha / R$ se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 0<|t|<\alpha' \\ x \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow x\left(\frac{f(a+tx)-f(a)}{tx} - f'(a)\right) \in W$$

si $x \neq 0$

Y en general

$$\left.\begin{array}{l} 0<|t|<\alpha' \\ x \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{f(a+tx)-f(a)}{t} - x\, f'(a) \in W$$

pues en $x = 0$ el enunciado es trivial.

Recíprocamente, sea f diferenciable en a. Puesto que $L_o(\mathbb{R};E)$ es isomorfo a E existe un elemento $f'(a) \in E$ tal que $Df(a)(h) = h\, f'(a)$. Además la aplicación r definida por

$$r(t) = f(a+t) - f(a) - t\, f'(a)$$

es un resto.

Como $[0,1]$ es un compacto en $\mathbb{R}$ para cada entorno W del origen en E existe un $\alpha>0$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} 0<|t|<\alpha \\ x \in [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{t}\left\{f(a+tx) - f(a) - tx\, f'(a)\right\} \in W$$

y en particular para $x = 1$

$$0<|t|<\alpha \Longrightarrow \frac{f(a+t)-f(a)}{t} \in f'(a) + W$$

Esto es

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} = f'(a)$$

que era lo que se pretendía probar.

Cuando E es localmente convexo la existencia del límite puede expresarse afirmando que para cada seminorma continua $p: E \to \mathbb{R}$ y cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} |x-a|<\delta \\ x\in I \end{array}\right\} \Rightarrow p(\ f(x)-f(a)-(x-a)\ f'(a)\ ) \leq \varepsilon|x-a|$$

En lo sucesivo haremos uso de la proposición 29 sin mencionarla explicitamente.

CAPITULO VI

P R I M I T I V A S   E   I N T E G R A L E S

Si se quiere asegurar la existencia de primitivas es claro que se necesita exigir en cierto sentido la completitud. Parece sin embargo demasiado restrictivo exigir que el espacio sea completo. Hemos preferido tomar un concepto mas débil aunque el enunciado de algunos teoremas se complica.

Exigiremos que el espacio E sea localmente convexo y completo por sucesiones. Es decir que toda sucesión de Cauchy en E sea convergente. Como veremos estas hipótesis son suficientes para extender la mayoría de los teoremas clásicos.

Supondremos pues, implicitamente, a lo largo de este capítulo que E es un espacio localmente convexo y completo por sucesiones.

DEFINICION 6. Diremos que la aplicación $f: I \rightarrow E$ donde I es un intervalo de la recta real, es escalonada, si existe una partición de I en un número finito de intervalos J_k tal que f sea constante en cada uno de los intervalos J_k.

DEFINICION 7. Diremos que una aplicación $f: I \to E$, donde I es un intervalo de la recta real, es una función reglada, si es límite uniforme de una sucesión de funciones escalonadas en cada parte compacta de I.

Cuando E es completo y se definen las funciones regladas como límites, no de sucesiones, sino de filtros de funciones escalonadas, existe una caracterización simple de las funciones regladas; la teoría desarrollada por N. Bourbaki en el libro dedicado a las funciones de una variable real, es en efecto válida sustituyendo el Banach por un espacio localmente convexo completo. Pero según hemos indicado nosotros solo suponemos E completo por sucesiones y eso nos obliga solo a considerar límites de susesiones.

Debemos sin embargo asegurarnos de que nuestras funciones regladas son bastante amplias.

PROPOSICION 30. Sea $I = [a,b]$ un intervalo compacto; sea $f: I \to E$ tal que para todo $x \in (a,b)$ existan $f(x+)$ y $f(x-)$ y además $f(a+)$ y $f(b-)$.

Supongamos también que salvo para un número finito de puntos es $f(x) = f(x+) = f(x-)$, entonces f es reglada.

Demostración:

En efecto sean $a = t_o < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$ los puntos donde no es cierta la igualdad $f(x) = f(x+) = f(x-)$, evidentemente existe g_i definida en $[t_i, t_{i+1}]$ continua y que coincide con f en (t_i, t_{i+1}).

El conjunto $K = \bigcup_{i=1}^{n} g_i([t_i, t_{i+1}])$ es entonces compacto. Tratamos de ver que K es metrisable.

Sea S es espacio suma de los $[t_i, t_{i+1}]$ y g la aplicación que coincide en cada $[t_i, t_{i+1}]$ con g_i.

S es compacto y g continua. Por tanto g es cerrada y K es isomorfo (Cfr. Bourbaki Top. Gen. Chap 1, § 3, prop. 8) a S/R, donde R es la relación de equivalencia $g(x) = g(y)$.

Entonces (Cfr. Bourbaki Top. Gen. Chap. 9, § 2. prop. 17) K es metrisable pues es subespacio de un separado.

También $K_1 = K \cup \{f(t_o), f(t_1), \ldots, f(t_n)\}$ es compacto y metrisable.

Sea d una distancia que defina la topología de K_1 Vamos a construir una sucesión de funciones escalonadas que converja hacia f uniformemente en I.

Tomemos un $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in I$ existe un intervalo $(a(x), b(x))$ que contiene a x y tal que:

$$z \text{ y } z' \text{ en } (a(x), x) \cap I \implies d(f(z), f(z')) < (1/n)$$

$$z \text{ y } z' \text{ en } (x, b(x)) \cap I \implies d(f(z), f(z')) < (1/n)$$

Un número finito de esos intervalos recubren I sean $(a(x_1), b(x_1)), (a(x_2), b(x_2)), \ldots, (a(x_n), b(x_n))$

Sea c_k la sucesión que se obtiene ordenando los puntos $a(x_i)$, $b(x_i)$, x_i, a, y b.

Cada (c_k, c_{k+1}) está contenido en un $(x_k, b(x_k))$ ó $(a(x_k), x_k)$, por tanto

$$z \text{ y } z' \text{ en } (c_k, c_{k+1}) \cap I \implies d(f(z), f(z')) < (1/n)$$

Pongamos $g_n(c_k) = f(c_k)$ y $g_n(x) = f(\xi_k)$ si $x \in (c_k, c_{k+1})$ siendo ξ_k un punto elegido en (c_k, c_{k+1}).

Entonces

$$d(\ f(z),\ g_n(z)\ ) < \frac{1}{n} \qquad \text{para} \quad z \in I$$

que era lo que se pretendía.

Nota: Obsérvese que puede tomarse la sucesión de escalonadas de manera que $g_n(I) \subset f(I)$.

COROLARIO. Las funciones continuas son regladas.

La utilidad de las funciones regladas consiste en que para ellas se conoce fácilmente la existencia de primitiva.

DEFINICION 8. Dada una aplicación $f: I \to E$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, decimos que una función g definida en I es una primitiva de f si g es continua en I y admite una derivada igual a $f(x)$ en todo punto x de I, salvo en los de una parte numerable.

PROPOSICION 31. Sea $f: I \to E$ una aplicación que admite en I una primitiva g. El conjunto de las primitivas de f en I es idéntico al conjunto de funciones $g + a$ donde a es una función constante cualquiera con valores en E.

Demostración:

En efecto es claro que $g + a$ es primitiva de f.

Si fuese g_1 otra primitiva de f, la función $g_1 - g$ sería derivable salvo en un conjunto numerable y $Dg_1 - Dg = f - f = 0$.

Por el teorema de la media para toda seminorma continua $p: E \to \mathbb{R}$ se verificaría

$$p(g_1(x) - g(x) - g_1(a) + g(a)) = 0$$

asi pues

$$g_1(x) - g_1(a) = g(x) - g(a)$$

y la diferencia entre g_1 y g es constante.

Si $f: I \to E$, para que g sea primitiva de f basta que lo sea en cada subintervalo compacto de I.

PROPOSICION 32. Sea $f_n: I \to E$ una sucesión de aplicaciones de un intervalo de $\mathbb{R}$, I, en E. Para cada n sea g_n una primitiva de f_n en I y supongamos además:

1) En todo compacto contenido en I, f_n converge uniformemente hacia una función f.

2) Existe $a \in I$ tal que $g_n(a)$ converge.

En estas condiciones la sucesión de funciones g_n converge uniformemente en compactos de I hacia una función g primitiva de f.

Demostración:

Evidentemente podemos limitarnos al caso de ser I compacto.

Probaremos primero la convergencia uniforme de g_n en I.

Sea p una seminorma continua de E y demos $\varepsilon>0$, existe N tal que:

$$(1) \quad \left.\begin{matrix} n > N \\ m > N \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \qquad p(f_n(x) - f_m(x)) < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in I$$

Como la derivada de $g_n(x) - g_m(x)$ es salvo en una parte numerable de I, $f_n(x) - f_m(x)$, se tiene:

(2) $$p(\ g_n(x) - g_m(x) - g_n(a) + g_m(a)\ ) \leq \varepsilon |x-a| \leq \varepsilon l$$

siendo l la longitud del intervalo I.

Como por hipótesis $g_n(a)$ es convergente, la sucesión $g_n(x)$ es convergente para cada x, por ser E completo por sucesiones. La desigualdad (2) prueba entonces la convergencia uniforme de g_n hacia g en I.

Las g_n son continuas, por lo tanto lo será g, límite uniforme de las g_n.

Veamos ahora la derivada de g.

Sea H_n la parte numerable de I donde g'_n no existe o es diferente de f, sea H la unión de los H_n que será numerable.

Tomemos $x \in I - H$ y veamos que $g'(x) = f(x)$.

En efecto sea p una seminorma continua de E y $\varepsilon > 0$, existe N tal que:

$$\left.\begin{array}{l} n > N \\ m > N \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad p(\ g_m(y) - g_m(x) - g_n(y) + g_n(x)\ ) \leq$$
$$\leq \varepsilon |x-y|$$

asi pues haciendo tender m hacia infinito

$$n > N \} \Longrightarrow \quad p(\ g(y) - g(x) - g_n(y) + g_n(x)\ ) \leq$$
$$\leq \varepsilon |x-y|$$

Pero existe h tal que $|y-x| < h$ e $y \in I$ implican

$$p(\ g_n(y) - g_n(x) - f_n(x)(y-x)\ ) \leq \varepsilon |y-x|$$

y por (1)

$$p(\ f_n(x) - f(x)\ ) \leq \varepsilon$$

Tomando, por tanto, $|y-x| < h$, $y \in I$ y $n > N$ se tiene

$$p(\ g(y) - g(x) - f(x)(y - x)\ ) \leq p(\ g(y) - g(x) - g_n(y) + g_n(x)\ ) +$$

$$+\ p(\ g_n(y) - g_n(x) - f_n(x)(y - x)\ ) + p(\ f_n(x) - f(x)\ )|y - x|$$

$$\leq 3\varepsilon\,|y - x|$$

es decir $g'(x) = f(x)$ (proposición 29).

COROLARIO. Toda función reglada admite primitiva.

PROPOSICION 33. Sea g primitiva de una aplicación continua $f: I \rightarrow E$, entonces g tiene una derivada con respecto a I en todo punto ξ interior a I igual a $f(\xi)$

Demostración:

Sea por ejemplo $[\xi - \lambda, \xi + \lambda] \subset I$ y vamos a probar que g es derivable en ξ y que su derivada es $f(\xi)$.

Apliquemos para esto el teorema de la media a la función $g(\xi + x) - g(\xi) - x\,f(\xi)$ en el intervalo $[\xi - \lambda, \xi + \lambda]$.

Por la hipótesis la función es derivable en este intervalo salvo a lo mas en una parte numerable, su derivada es

$$g'(\xi + x) - f(\xi) = f(\xi + x) - f(\xi)$$

continua en todo el intervalo. Asi pues para toda seminorma p continua en E

$$p(\ g(\xi + x) - g(\xi) - x\,f(\xi)\ ) \leq |x| \sup_{t \in [-x, +x]} p(\ f(\xi + t) - f(\xi));$$

este supremo existe por ser f continua, es mas por la continuidad existe $\eta > 0$ tal que:

$$|x| < \eta \quad \Longrightarrow \quad p(\ f(\xi + x) - f(\xi)\ ) < \varepsilon$$

con lo que queda probada la existencia de la derivada y que su valor es $f(\xi)$.

DEFINICION 9. Sea g una primitiva de $f: I \to E$ y sea $[\alpha, \beta] \subset I$ un subintervalo compacto de I.

Pondremos si f es reglada.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = g(\beta) - g(\alpha)$$

Esta diferencia no depende de la primitiva escogida gracias a la proposición 31.

A partir de ahora si g es primitiva de f en I escribiremos g' en lugar de f.

PROPOSICION 34. (Cambio de variables). Sea $g: I \to \mathbb{R}$ primitiva de una función reglada $g': I \to \mathbb{R}$ y sea f una función continua $f: J \to E$ donde $g(I) \subset J$.

Cualesquiera que sean los puntos α y β de I se tiene:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(\xi))\, g'(\xi)d\xi = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(\zeta)\, d\zeta$$

Demostración:

Como g es continua y el intervalo S de extremos α y β es compacto $g(S) \subset J$ es compacto.

Existe una sucesión de funciones escalonadas $g_n: S \to g(S)$ que convergen en S uniformemente hacia g, para asegurarse de que $g_n(S) \subset g(S)$ basta en efecto tomar los valores de g_n en $g(S)$.

Como además f es uniformemente continua en $g(S)$ la sucesión de funciones escalonadas $f \circ g_n$ converge uniformemente en S hacia $f \circ g$.

De este modo es $f \circ g$ reglada en S, por hipótesis $g'(\xi)$ es reglada luego lo es $f(g(\xi))\, g'(\xi)$. Asi pues las dos integrales tienen sentido.

Sea ahora F primitiva de f en J.

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(\zeta)d\zeta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

Pero $F\circ g$ es derivable en todo I salvo a lo mas en un conjunto numerable, es continua y su derivada en los puntos donde existe vale

$$F'(g(\xi))\, g'(\xi) = f(g(\xi))\, g'(\xi)$$

luego

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\, g(\xi)\,)\, g'(\xi)\, d\xi = F(\, g(\beta)\,) - F(\, g(\alpha)\,)$$

PROPOSICION 35. (Integración por partes). Sean E_1, E_2 y F espacios localmente convexos completos por sucesiones. $b: E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal continua en compactos. $f: I \to E_1$, $g: I \to E_2$ primitivas de funciones regladas.

Cualesquiera que sean α y β en I se tiene:

$$\int_{\alpha}^{\beta} b(f(\xi),\, g'(\xi))d\xi = b(f(\beta),\, g(\beta)) - b(\, f(\alpha),\, g(\alpha)) - \int_{\alpha}^{\beta} b(f'(\xi),\, g(\xi))d\xi$$

Demostración:

Si $u: I \to E_1$ y $v: I \to E_2$ son regladas, también lo es $b(u,v)$.

En efecto, existen dos sucesiones de funciones escalonadas $u_n: I \to E_1$, $v_n: I \to E_2$ que convergen uniformemente en un compacto K hacia u y v respectivamente. Podemos tomar, además u_n y v_n de manera que transformen K en el compacto $u(K)$ o $v(K)$ respectivamente. (Cfr. nota al final de la proposición 30).

$b(u_n, v_n)$ es entonces escalonada y converge, por la continuidad en compactos de b, uniformemente en ese compacto K, hacia $b(u,v)$.

Las dos integrales del enunciado tienen por tanto sentido.

La igualdad se demuestra como en el caso clásico, $b(f,g)$ es reglada en I, continua y derivable salvo a lo mas en un subconjunto numerable; esta derivada vale según las reglas probadas al estudiar la diferenciación

$$D(b(f,g))(\xi) = b(f'(\xi),g(\xi)) + b(f(\xi),g'(\xi)).$$

PROPOSICION 36. Sean E y F dos espacios localmente convexos, completos por sucesiones, $u: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua en compactos. $f: I \longrightarrow E$ reglada.

Si α y β estan en I

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(f(\xi))d\xi = u\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)d\xi\right)$$

Demostración:

Como en la proposición 35 $u\circ f$ es reglada en I

Si g es primitiva de f en I

$$u\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)d\xi\right) = u(g(\beta)-g(\alpha)) = u\circ g(\beta) - u\circ g(\alpha)$$

Pero $u\circ g$ es derivable y su derivada salvo en un conjunto numerable es

$$D\,(u\circ g)\,(1) = \Big[(Du)(g(\xi))\circ Dg(\xi)\Big]\,(1) =$$

$$= \Big[u\circ(Dg)(\xi)\Big]\,(1) = u\Big[Dg(\xi)\,(1)\Big] = u(f(\xi))$$

luego como $u\circ g$ es continua

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(f(\xi))d\xi = u(g(\beta)) - u(g(\alpha)).$$

PROPOSICION 37. (Teorema de la media). Sea $f: I \to E$ una función reglada y $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma continua.

Si $[\alpha, \beta] \subset I$ se tiene:

$$p\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi\right) \leq \int_\alpha^\beta p(f(\xi))d\xi \leq (\beta-\alpha) \sup_{\xi\in I} p(f(\xi)).$$

Demostración:

Basta aplicar el teorema fundamental del cálculo a la primitiva F de f y a la de $p(f(\xi))$.

Se tiene salvo en un conjunto numerable

$$p(F'(\xi)) = p(f(\xi))$$

luego

$$p(F(\beta) - F(\alpha)) \leq \int_\alpha^\beta p(f(\xi))d\xi$$

la única dificultad sería probar que $p(f(\xi))$ es reglada pero si f_n es una sucesión de escalonadas que converge uniformemente en un subintervalo compacto hacia f se tiene que $p(f_n(\xi))$ es escalonada y

$$|p(f_n(\xi)) - p(f(\xi))| \leq p(f_n(\xi) - f(\xi)).$$

PROPOSICION 38. Sea $g_n: I \to E$ una sucesión de funciones continuas definidas en un intervalo compacto $I = [\alpha, \beta]$, convergente uniformemente en I hacia $g: I \to E$. Entonces

$$\lim \int_\alpha^\beta g_n(\xi)d\xi = \int_\alpha^\beta g(\xi)d\xi$$

Demostración:

Basta ver que, puesto que g es continua, es reglada y su integral tiene sentido. Usando entonces el teorema de la media.

No puede sustituirse aqui g_n continua por reglada ya que no podría asegurarse que g fuese reglada.

CAPITULO VII

DERIVADAS PARCIALES

El papel que juegan las aplicaciones continuamente diferenciables en la teoría clásica de la diferenciación lo juegan en nuestra teoría las aplicaciones diferenciables con continuidad en compactos.

Sean E y F espacios vectoriales topológicos, A un abierto de E, $f: A \to F$. Si f es diferenciable en todos los puntos de A designaremos por Df la aplicación de a en $L_o(E;F)$ que aplica a en $Df(a)$.

Diremos que f es continuamente diferenciable en compactos de A si la aplicación Df es continua en compactos en A.

Sean E_1, E_2 y F tres espacios vectoriales topológicos, A un abierto de $E_1 \times E_2$ y $f: A \to F$.

Si $(a_1, a_2) \in A$, podemos considerar las aplicaciones parciales $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ y $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$ definidas en abiertos de E_1 y E_2 respectivamente.

Se dice que f es diferenciable en (a_1, a_2) respecto de la primera variable si la aplicación parcial $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ es diferenciable en a_1; a esta diferencial se la representa entonces por $D_1 f(a_1, a_2)$. Analogas notaciones se usan para la segunda variable.

$D_1 f$ es entonces una aplicación de A en $L_o(E_1;F)$.

Podemos entonces enunciar la proposición.

PROPOSICION 39. Sean E_1, E_2 espacios vectoriales topológicos, F un espacio localmente convexo, A un abierto de $E_1 \times E_2$ y $f: A \to F$.

f es continuamente diferenciable en compactos de A si y solo si f es diferenciable respecto de las dos variables en cada punto de A y las aplicaciones $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en compactos en A.

Además se tiene en este caso

$$Df(a_1, a_2)(t_1, t_2) = D_1 f(a_1, a_2)\, t_1 + D_2 f(a_1, a_2)\, t_2$$

Demostración:

Supongamos que f sea continuamente diferenciable en compactos de A.

La aplicación parcial $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ es compuesta de $x_1 \mapsto (x_1, a_2)$ y f. La primera es lineal y continua, por tanto diferenciable; sea i_1 su diferencial $i_1(t_1) = (t_1, 0)$. Por la regla de la cadena la aplicación parcial es diferenciable y $D_1 f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2) \circ i_1$.

Queda por ver que $D_1 f$ es continua en compactos en a, pues para la segunda variable el razonamiento es el mismo.

Sea K un compacto de $E_1 \times E_2$ que contenga a (a_1, a_2) y V un entorno del origen en $L_o(E_1;F)$. V estará formado por las aplicaciones lineales que transforman un compacto L de E_1 en un entorno W del origen en F.

$$u \in V \iff u(L) \subset W$$

Debemos encontrar un entorno U de (a_1, a_2) en A tal que:

$$D_1 f(U \cap K) \subset V + D_1 f(a_1, a_2),$$

esto es un entorno de (a_1, a_2), U, tal que $(x_1, x_2) \in U \cap K$ implique

$$D_1 f(x_1, x_2) \in D_1 f(a_1, a_2) + V,$$

pero puesto que $D_1 f(x_1, x_2) = Df(x_1, x_2) \circ i_1$, esto equivale a decir

$$(Df(x_1, x_2) - Df(a_1, a_2)) \circ i_1 \subset V$$

y esto es

$$(Df(x_1, x_2) - Df(a_1, a_2)) \circ i_1(L) \subset W$$

Pero $i_1(L)$ es compacto de $E_1 \times E_2$ pues i_1 es continua y L compacto. Esto es decir, por tanto, que debe existir un entorno de (a_1, a_2), U, tal que si $(x_1, x_2) \in U \cap K$

$$Df(x_1, x_2) - Df(a_1, a_2) \in T(W; i_1(L))$$

siendo $T(W; i_1(L))$ el entorno del origen en $L_o(E_1 \times E_2;F)$ definido por

$$u \in T(W; i_1(L)) \iff u \circ i_1(L) \subset W$$

Sabemos que decir que existe U equivale a decir que Df es continua en compactos en A y ésta es la hipótesis.

Supongamos ahora que existen $D_1 f$ y $D_2 f$ en cada punto de A y que estas aplicaciones son continuas en compactos en A; vamos a ver que f es continuamente diferenciable en compactos en A.

Sea $(a_1, a_2) \in A$, decir que f es diferenciable en (a_1, a_2) y que su diferencial es

$$D_1 f(a_1, a_2)\, t_1 + D_2 f(a_1, a_2)\, t_2$$

equivale a decir que la función

$$r(t_1, t_2) =$$
$$= f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)\, t_1 - D_2 f(a_1, a_2)\, t_2$$

es un resto de $E_1 \times E_2$ en F.

Debemos probar tres condiciones para ver que r es resto. Comencemos por demostrar que para cada compacto K de $E_1 \times E_2$ que contenga al origen se tiene

$$\lim_{\substack{t \to o \\ t \neq o}} \frac{1}{t}\, r(tx_1, tx_2) = 0$$

uniformemente en K.

Se tiene

$$\frac{1}{t}\, r(tx_1, tx_2) =$$
$$= \frac{1}{t}\Big[f(a_1 + tx_1, a_2 + tx_2) - f(a_1 + tx_1, a_2) - D_2 f(a_1 + tx_1, a_2)(tx_2)\Big] +$$
$$+ \Big[D_2 f(a_1 + tx_1, a_2)(x_2) - D_2 f(a_1, a_2)\,(x_2)\Big] +$$
$$+ \frac{1}{t}\Big[f(a_1 + tx_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)(tx_1)\Big]$$

Como F es localmente convexo, dar un entorno del origen es dar una seminorma continua p y un $\varepsilon > 0$.

Sabemos que $K_1 = pr_1(K)$ es compacto en E_1 que contiene al origen, por la definición de $D_1f(a_1,a_2)$ existe $\alpha_1 > 0$ tal que:

$$0 < |t| < \alpha_1 \Rightarrow p\left(\frac{1}{t}\left[f(a_1+tx_1,a_2) - f(a_1,a_2) - D_1f(a_1,a_2)(tx_1)\right]\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Consideremos los compactos $K_1 = pr_1(K)$ y $K_2 = pr_2(K)$, sean $\hat{K}_1 = [-1,1]\cdot K_1$ y $\hat{K}_2 = [-1,1]K_2$; $\hat{K}_1$ y $\hat{K}_2$ son compactos en E_1 y E_2 respectivamente y contienen al origen, por tanto $\hat{K} = \hat{K}_1 \times \hat{K}_2$ es un compacto de $E_1 \times E_2$ que contiene al origen.

La aplicación $(t_1, t_2) \longmapsto D_2f(a_1+t_1,a_2+t_2) - D_2f(a_1,a_2)$ es continua en compactos y $(o,o) \longmapsto o$, existe pues un entorno del origen, U, en $E_1 \times E_2$ tal que:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l}(t_1,t_2) \in U \cap \hat{K} \\ x_2 \in K_2\end{array}\right\} \Rightarrow p\left[D_2f(a_1+t_1,a_2+t_2)(x_2) - D_2f(a_1,a_2)(x_2)\right] < \frac{\varepsilon}{6}$$

Existen entornos del origen U_1 en E_1, U_2 en E_2 tales que $U_1 \times U_2 \subset U$.

Como U_1 absorbe a los compactos existe $0 < \alpha_2 < 1$ tal que

$$\alpha_2 \hat{K}_1 \subset U_1$$

Sea entonces $(x_1,x_2) \in K$ y $0 < |t| < \alpha_2$. Se tiene $x_1 \in K_1$,

$$tx_1 = \alpha_2 \frac{t}{\alpha_2} x_1 \in \alpha_2 \hat{K}_1 \subset U_1 ,$$

$0 \in U_2$, así pues $(tx_1,0) \in U$. Además $(tx_1, 0) \in \hat{K}_1 \times \hat{K}_2 = \hat{K}$, $x_2 \in K_2$ y en definitiva:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,x_2) \in K \\ 0 < |t| < \alpha_2\end{array}\right\} \Rightarrow p\left[D_2f(a_1+tx_1,a_2)(x_2) - D_2f(a_1,a_2)(x_2)\right] < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sea $0 < \alpha_3$ y α_3 suficientemente pequeño para que $(a_1,a_2)+\alpha_3\hat{K} \subset A$, lo que es posible pues A es abierto y contiene a (a_1,a_2).

Vamos a aplicar la proposición 25 a la aplicación

$$u \longmapsto f(a_1+tx_1,a_2+u) - D_2f(a_1+tx_1,a_2)(u)$$

donde $(x_1,x_2)\in K$, $0<|t|<\alpha_3$ y u varía en un entorno del segmento 0, tx_2. Se obtiene:

$$p(\ f(a_1+tx_1,a_2+tx_2)-f(a_1+tx_1,a_2)-D_2f(a_1+tx_1,a_2)(tx_2)\ )\leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\xi\in[0,1]} p\left[D_2f(a_1+tx_1,a_2+\xi tx_2)(tx_2)-D_2f(a_1+tx_1,a_2)(tx_2)\right]$$

Esto es

$$p\left[\frac{1}{t}\left\{f(a_1+tx_1,a_2+tx_2)-f(a_1+tx_1,a_2)-D_2f(a_1+tx_1,a_2)(tx_2)\right\}\right]\leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\xi\in[0,1]} p\left[D_2f(a_1+tx_1,a_2+\xi tx_2)(x_2)-D_2f(a_1+tx_1,a_2)(x_2)\right]$$

Podemos tomar α_3 suficientemente pequeño para que

$$\alpha_3<\alpha_2<1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3\hat{K}_2\subset U_2$$

donde U_2 es el entorno de 0 en E_2 usado anteriormente.

Entonces si $(x_1,x_2)\in K$ y $0<|t|<\alpha_3$ se tiene:

$$x_1\in K_1 \quad \text{y} \quad x_2\in K_2 \qquad \text{luego} \qquad tx_1=\alpha_2\frac{t}{\alpha_2}x_1\in\alpha_2\hat{K}_1\subset U_1$$

y

$$\xi tx_2=\alpha_3\frac{\xi t}{\alpha_3}x_2\in\alpha_3\hat{K}_2\subset U_2$$

de aqui que

$$(tx_1,\xi tx_2)\in U\cap\hat{K}$$
$$(tx_1,0)\in U\cap\hat{K}$$

luego aplicando (1)

$$p(\ D_2f(a_1+tx_1,a_2+\xi tx_2)(x_2)-D_2f(a_1,a_2)(x_2)\ )<\frac{\varepsilon}{6}$$
$$p(\ D_2f(a_1+tx_1,a_2)(x_2)-D_2f(a_1,a_2)(x_2)\ )<\frac{\varepsilon}{6}$$

asi pues por la desigualdad triangular, $(x_1,x_2) \in K$ y $0 < |t| < \alpha_3$ implican

$$p\left[\frac{1}{t}\{f(a_1+tx_1,a_2+tx_2) - f(a_1+tx_1,a_2) - D_2f(a_1+tx_1,a_2)(tx_2)\}\right] < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

Con esto hemos probado que dado un compacto K en $E_1 \times E_2$ que contenga al origen y un entorno $W = \{x \mid x \in F,\ p(x) < \mathcal{E}\}$ del origen en F existe un $\alpha > 0$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |t| < \alpha \\ (x_1,x_2) \in K \end{array}\right\} \implies p\left(\frac{1}{t}\, r(tx_1,tx_2)\right) < \mathcal{E}$$

Queda por ver que $r(x_1,x_2)$ es continua en compactos en el origen y que para cada compacto K en $E_1 \times E_2$ que contenga al origen existe un entorno del origen V tal que $r(V \cap K)$ sea relativamente compacto.

Sea K un compacto de $E_1 \times E_2$ que contenga al origen, la demostración de que $r|K$ es continua en 0 es análoga a la que hemos visto.

En efecto tenemos la descomposición

$$\begin{aligned} r(x_1,x_2) = {} & \left[f(a_1+x_1,a_2+x_2) - f(a_1+x_1,a_2) - D_2f(a_1+x_1,a_2)(x_2)\right] + \\ & + \left[f(a_1+x_1,a_2) - f(a_1,a_2) - D_1f(a_1,a_2)(x_1)\right] + \\ & + \left[D_2f(a_1+x_1,a_2)(x_2) - D_2f(a_1,a_2)(x_2)\right] \end{aligned}$$

Llamamos como antes $K_1 = pr_1(K)$, $K_2 = pr_2(K)$, $\hat{K}_1 = [-1,1]\cdot K_2$, $\hat{K}_2 = [-1,1]\cdot K_2$ y $\hat{K} = \hat{K}_1 \times \hat{K}_2$.

Los entornos del origen $U = U_1 \times U_2$ en $E_1 \times E_2$ tales que $(a_1,a_2) + U \subset A$ y tanto U_1 como U_2 sean abiertos y equilibrados forman una base de entornos del origen en $E_1 \times E_2$ ya que $(a_1,a_2) \in A$, A es abierto y E_1 y E_2 son espacios vectoriales topológicos.

Demos un entorno del origen en F que vendrá definido como $\{x \mid x \in F,\ p(x) < \varepsilon\}$ siendo p una seminorma continua de F y $\varepsilon > 0$.

Por hipótesis la aplicación

$$x_1 \longmapsto f(a_1 + x_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)(x_1)$$

es resto. Como K_1 es un compacto que contiene al origen en E_1 existe un entorno del origen V_1 en E_1 tal que: $(x_1, x_2) \in K \cap (V_1 \times E_2)$ implica

$$p(f(a_1 + x_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2)(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como $D_2 f(a_1 + t_1, a_2 + t_2)$ es por hipótesis continua en compactos en $(0,0)$; dado el entorno del origen en $L_o(E_2;F)$, $T(K_2, \varepsilon)$ definido por

$$u \in T(K_2, \varepsilon) \iff \sup_{x \in K_2} p(u(x)) < \frac{\varepsilon}{6}$$

existe un entorno W del origen en $E_1 \times E_2$ tal que $(t_1, t_2) \in W \cap \hat{K}$ y $x_2 \in K_2$ implica

$$(2) \qquad p(D_2 f(a_1 + t_1, a_2 + t_2)(x_2) - D_2 f(a_1, a_2)(x_2)) < \frac{\varepsilon}{6}$$

Por tanto $(x_1, x_2) \in W \cap K$ implica

$$p(D_2 f(a_1 + x_1, a_2)(x_2) - D_2 f(a_1, a_2)(x_2)) < \frac{\varepsilon}{6}$$

ya que $(x_1, x_2) \in W \cap K$ implica $x_2 \in K_2$ y $(x_1, 0) \in W \cap \hat{K}$ suponiendo que $W = W_1 \times W_2$ donde W_1 y W_2 son entornos abiertos y equilibrados de cero en E_1 y E_2 lo que siempre puede admitirse, podemos suponer además $(a_1, a_2) + W \subset A$.

Por último apliquemos la proposición 25, a la aplicación

$$u \longrightarrow f(a_1 + x_1, a_2 + u) - D_2 f(a_1 + x_1, a_2)(u)$$

donde $u \in W_2$, $(x_1, x_2) \in K \cap W$, en el segmento 0, x_2.

Obtenemos

$$p(f(a_1+x_1,a_2+x_2)-f(a_1+x_1,a_2)-D_2f(a_1+x_1,a_2)(x_2)) \leq$$

$$\leq \sup_{\xi\in[0,1]} p(D_2f(a_1+x_1,a_2+\xi x_2)(x_2)-D_2f(a_1+x_1,a_2)(x_2))$$

Pero $(x_1,\xi x_2)$ y $(x_1,0)$ pertenecen a $W\cap\hat{K}$ luego por (2)

$$p(D_2f(a_1+x_1,a_2+\xi x_2)(x_2)-D_2f(a_1+x_1,a_2)(x_2)) \leq$$

$$\leq p(D_2f(a_1+x_1,a_2+\xi x_2)(x_2)-D_2f(a_1,a_2)(x_2))+$$

$$+p(D_2f(a_1+x_1,a_2)(x_2)-D_2f(a_1,a_2)(x_2)) \leq \frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{3}$$

Asi pues $(x_1,x_2)\in K\cap W$ implica

$$p(f(a_1+x_1,a_2+x_2)-f(a_1+x_1,a_2)-D_2f(a_1+x_1,a_2)(x_2)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En definitiva resumiendo los resultados anteriores

$$(x_1,x_2)\in K\cap W\cap(V_1\times E_2) \quad\Longrightarrow\quad p(r(x_1,x_2))<\varepsilon$$

Esto es r es continua en compactos en 0.

Sabemos que si r es resto f será diferenciable en (a_1,a_2) y

(3) $$Df(a_1,a_2)=D_1f(a_1,a_2)\circ pr_1+D_2f(a_1,a_2)\circ pr_2$$

siempre que esta aplicación sea continua en compactos, pero esto es trivial por la forma que tiene y serlo por hipótesis $D_1f(a_1,a_2)$ y $D_2f(a_1,a_2)$.

Asi pues $f(t_1,t_2)$ es continua en compactos en A ya que en el entorno de (a_1,a_2) es

$$f(a_1+t_1,a_2+t_2)=f(a_1,a_2)+Df(a_1,a_2)(t_1,t_2)+r(t_1,t_2)$$

y $Df(a_1,a_2)$ asi como r hemos probado ya que son continuas en compactos en $(0,0)$.

Pero entonces r es continua en compactos en todo $A - \{(a_1,a_2)\}$ pues es diferencia de dos funciones continuas en compactos en todo $A-\{(a_1,a_2)\}$.

De aqui que r es resto pues compactos contenidos en $A-\{(a_1,a_2)\}$ los transforma en compactos; es decir cumple también la primera condición de los restos.

Entonces f es diferenciable en todo A y su diferencial viene dada por (3). Solo queda para probar el teorema ver que Df es continua en compactos en A.

Sea K un compacto en $E_1 \times E_2$ que contenga a $(a_1,a_2) \in A$, demos un entorno en $L_\upsilon(E_1 \times E_2;F)$ del origen, T

$$u \in T \iff u(L) \subset V$$

donde L es un compacto de $E_1 \times E_2$ y V un entorno del origen en F, tomemos un entorno del origen en F, W, tal que $W + W \subset V$.

Por ser $D_i f$ continua en compactos existe un entorno U_i de (a_1,a_2) en $E_1 \times E_2$ tal que:

$$(t_1,t_2) \in U_i \cap K \implies D_i f(t_1,t_2)(pr(L)) \subset W$$

Entonces

$$(t_1,t_2) \in U_1 \cap U_2 \cap K \implies Df(t_1,t_2) \in T$$

esto es Df es continua en compactos en A.

CAPITULO VIII

D I F E R E N C I A L E S   S U C E S I V A S

Sean E y F espacios vectoriales topológicos y $f: A \to F$ una aplicación definida en un abierto A de E. Si f es diferenciable en cada punto de A tenemos definida una aplicación $Df: A \longrightarrow L_o(E;F)$. Si esta aplicación es diferenciable en $x_o \in A$ diremos que f es diferenciable dos veces en x_o y llamaremos $D^2f(x_o)$ a la diferencial de Df en x_o, asi pues

$$D^2f(x_o) \in L_o(E;L_o(E;F)).$$

La existencia de $D^2f(x_o)$ implica la continuidad en compactos en x_o de Df pero no la continuidad.

Según vimos en la proposición 7 existe un homeomorfismo lineal entre los espacios $L_o(E;L_o(E;F))$ y $L_o(E,E;F)$, asi pues $D^2f(x_o)$ puede identificarse a un elemento de $L_o(E,E;F)$, no lo haremos asi, sino que reservaremos la notación $f''(x_o)$ o $f^{(2}(x_o)$ para el elemento de $L_o(E,E;F)$; de manera que:

$$f''(x_o)(x,y) = (D^2 f(x_o)(x))(y)$$

Como en la teoría clásica es $f''(x_o)$ simétrica pero solo en el caso de ser F localmente convexo, ya en el capítulo anterior ha surgido una limitación de este tipo, son debidas a que el teorema fundamental del cálculo solo es aplicable esencialmente a estos espacios.

PROPOSICION 40. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, F localmente convexo. Sea A un abierto de E y f una aplicación $f: A \to F$ diferenciable en A y diferenciable dos veces en $a \in A$. Entonces $f''(a)$ es una forma bilineal simétrica, esto es

$$f''(a)(X,Y) = f''(a)(Y,X)$$

para cualesquiera X e Y en E.

Demostración:

Demos $(X,Y) \in E^2$ que van a permanecer fijos en todo el razonamiento.

Como $a \in A$ y A es abierto, existe un entorno V de a, contenido en A. Podemos encontrar un entorno abierto y equilibrado de 0 en E, W, tal que $a + W + W \subset V$. Existe además un α, $0 < \alpha < 1$ tal que si $|t| \leqslant \alpha$ se tenga

$$t\,X \in W \quad y \quad t\,Y \in W$$

Entonces todo el rectángulo $a + [0,\alpha]X + [0,\alpha]\,Y \subset V \subset A$.

Consideraremos la diferencia, para $|t| < \alpha$

$$H = f(a + tX + tY) - f(a + tX) - f(a + tY) + f(a) =$$

$$= g(X) - g(0)$$

donde g es la aplicación

$$g(u) = f(a+tu+tY) - f(a+tu)$$

definida para $u\in \alpha^{-1}W$.

La aplicación g es diferenciable en $\alpha^{-1}W$; basta tener en cuenta que f es diferenciable en A y que $a+t\,\alpha^{-1}W+tY\subset A$. Su diferencial es

$$Dg(u) = t\,f'(a+tu+tY) - t\,f'(a+tu)$$

Vamos a aplicar la proposición 25 a la aplicación $g-L$, siendo L la aplicación lineal $t^2(D^2f(a)(Y))$; en el segmento $0, X$. Si p es una seminorma continua en F se tiene

$$p(H-L(X)) = p(g(X)-g(0)-L(X)) \leqslant \sup_{\xi\in[0,1]} p(Dg'(\xi X)(X)-L(X))$$

$$= \sup_{\xi\in[0,1]} p\left\{t\,f'(a+\xi tX+tY)(X) - tf'(a+\xi tX)(X) - t^2(D^2f(a)Y)(X)\right\}$$

Como suponemos que existe $D^2f(a)$ se tiene

$$f'(a+h) = f'(a) + D^2f(a)(h) + r(h)$$

donde r es un resto $r\in R(E;L_o(E;F))$.

La expresión que aparece en el supremo es

$$t\,f'(a+\xi tX+tY)(X) - t\,f'(a+\xi tX)(X) - t^2(D^2f(a)(Y))(X) =$$

$$= tf'(a)(X) + t(D^2f(a)(\xi tX+tY))(X) + t\,r(\xi tX+tY)(X) -$$

$$- tf'(a)(X) - t(D^2f(a)(\xi tX))(X) - t\,r(\xi tX)(X) - t^2(D^2f(a)(Y))(X) =$$

$$= t(D^2f(a)(tY))(X) + t\,r(\xi tX+tY)(X) - t\,r(\xi tX)(X) -$$

$$- t^2(D^2f(a)(Y))(X) =$$

$$= t\,r(\xi tX+tY)(X) - t\,r(\xi tX)(X)$$

Sea q la seminorma continua en $L_o(E;F)$ definida por

$$q(v) = p(v(X))$$

se tiene entonces

$$p(H - L(X)) = \sup_{\xi\in[0,1]} q(t\ r(\xi tX + tY) - t\ r(\xi tX)),$$

dividiendo por t^2

$$p(\frac{H}{t^2} - f''(a)(Y,X)\ ) = \sup_{\xi\in[0,1]} q\left\{\frac{1}{t} r(\xi tX + tY) - \frac{1}{t} r(\xi tX)\right\}$$

Como $\xi X + Y$ y ξX describen compactos cuando $\xi\in[0,1]$, decir que r es resto implica que:

$$\lim_{t\to 0} p(\frac{H}{t^2} - f''(a)(Y,X)\ ) = 0$$

Esto se verifica para toda seminorma p y por tanto se tiene:

$$f''(a)(Y,X) = \lim_{t\to 0} \frac{H}{t^2}$$

y como H es simétrica en X e Y lo es también $f''(a)$.

Por recurrencia pueden definirse las diferenciales sucesivas.

Si $f: A \to F$ está definida en un abierto A de un espacio vectorial topológico E y toma sus valores en otro, F; diremos que es derivable p veces en $a\in A$ si existen todas las diferenciales hasta la de orden $p-1$ en todo un entorno de a y además existe la diferencial en a $D(D^{p-1}f)(a) = D^p f(a)$. De esta manera puede definirse por inducción $D^p f(a)$.

Como antes $D^p f(a)$ puede identificarse con un elemento de $L_o(E,E,\overset{p}{\ldots},E;F) = L_o^p(E^p;F)$ que se escribirá $f^{(p}(a)$.

También es $f^{(p}(a)$ simétrica pero antes de probarlo necesitamos probar la siguiente proposición.

PROPOSICION 41. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, $f: A \to F$ una aplicación definida en un abierto A de E. Supongamos que f sea p veces derivable en $a \in A$. Si $t_2,\ldots,t_p$ son elementos de E la aplicación

$$t_1 \longmapsto f^{(p}(a)(t_1,t_2,\ldots,t_p)$$

es la derivada en a de la aplicación

$$x \longmapsto f^{(p-1}(x)(t_2,\ldots,t_p)$$

Demostración:

Descompongamos la aplicacion

$$g: x \longmapsto f^{(p-1}(x)(t_2,\ldots,t_p)$$

en producto de dos

$$x \longmapsto D^{p-1}f(x) \longmapsto (\ldots ((D^{p-1}f(x)(t_2))(t_3))\ldots(t_p))$$

La segunda aplicación está definida en

$$G = L_\circ(E;L_\circ(E;L_\circ(E;\ldots;L_\circ(E;F)\ldots)))$$

donde hay $p-1$ paréntesis y $p-1$ E, con valores en F. Es evidentemente lineal y continua en compactos, esto último como consecuencia de la proposición 8 y de que si $h: E' \times F' \to G'$ es continua en compactos, lo son las aplicaciones parciales.

Asi pues aplicando la regla de la cadena

$$Dg(a)(t_1) = (\ldots(D(D^{p-1}f(a))(t_1))(t_2))\ldots(t_p)) =$$

$$= f^{(p}(a)(t_1,t_2,\ldots,t_p)$$

como se queria probar.

PROPOSICION 42. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, F localmente convexo, $f: A \rightarrow F$ definida en un abierto A de E. Sea f p veces derivable en $a \in A$, entonces $f^{(p}(a)$ es simétrica.

De otro modo si σ es una permutación arbitraria de los índices $\{1,2,\ldots,p\}$ y $t_1,\ldots,t_p$ cualesquiera p vectores en E se tiene

$$f^{(p}(a)\,(t_{\sigma(1)},t_{\sigma(2)},\ldots,t_{\sigma(p)}) = f^{(p}(a)(t_1,t_2,\ldots,t_p)$$

Demostración:

Probaremos el resultado por inducción sobre p.

El teorema es cierto para $p = 1$ y $p = 2$.

Supongamoslo demostrado para $p - 1 \geqslant 2$ y vamos a probarlo para p.

Consideremos la aplicación

$$x \longmapsto f^{(p-2}(x)(t_3,\ldots,t_p)$$

su diferencial segunda en a es la aplicación

$$(t_1,t_2) \longmapsto f^{(p}(a)(t_1,t_2,\ldots,t_p)$$

Asi pues la proposición 40 asegura

$$f^{(p}(a)\,(t_2,t_1,t_3,\ldots,t_p) = f^{(p}(a)\,(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_p)$$

Por otra parte si σ es una permutación de los índices $\{2,3,\ldots,p\}$ la hipótesis de recurrencia asegura

$$f^{(p-1}(x)(t_{\sigma(2)},t_{\sigma(3)},\ldots,t_{\sigma(p)}) = f^{(p-1}(x)(t_2,t_3,\ldots,t_p)$$

y diferenciando, después de aplicar la proposición 41 se tiene

$$f^{(p}(a)\,(t_1,t_{\sigma(2)},t_{\sigma(3)},\ldots,t_{\sigma(p)}) = f^{(p}(a)\,(t_1,t_2,\ldots,t_p)$$

Pero estas dos permutaciones generan todo el grupo simétrico.

Vamos a continuación a dar algunos teoremas sobre la existencia de derivadas sucesivas.

PROPOSICION 43. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. A un abierto de E y f una aplicación de A en F. Si f es m veces derivable en a y si $D^m f$ es n veces derivable en A, entonces f es $m+n$ veces derivable en A y $D^{m+n} f = D^n(D^m f)$.

Demostración:

Para $n = 1$ es la definición y para $n > 1$ es trivial usando las definiciones.

PROPOSICION 44. Sean $E, F_1, F_2, \dots, F_m$, $m+1$ espacios vectoriales topológicos y sea $f: A \to F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ definida en un abierto A de E.

Para que f sea p veces derivable en A es necesario y suficiente que cada f_i sea p veces derivable en A y se tiene entonces $D^p f = (D^p f_1, D^p f_2, \dots, D^p f_m)$ haciendo las convenientes identificaciones de espacios.

Demostración:

Es una consecuencia de la proposición 18 aplicada p veces.

PROPOSICION 45. Sean E_1, E_2, y F tres espacios vectoriales topológicos. $u: E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal continua en compactos.

Entonces u es indefinidamente diferenciable y todas sus diferenciales de orden mayor o igual a tres son nulas.

Demostración.

Por la proposición 17 u es diferenciable y se tiene

$$Du(t_1,t_2)(x,y) = u(t_1,y) + u(x,t_2)$$

Asi pues Du es la aplicación que transforma $(t_1,t_2) \in E_1 \times E_2$ en la aplicación lineal de $L_o(E_1 \times E_2;F)$

$$(x,y) \longmapsto u(t_1,y) + u(x,t_2)$$

a la que llamaremos $\varphi(t_1,t_2)$

La aplicación $\varphi : E_1 \times E_2 \longrightarrow L_o(E_1 \times E_2;F)$ es claramente lineal. Para probar que es diferenciable debemos probar que es continua en compactos. Como es lineal basta probar la continuidad en compactos en el origen.

Demos pues un compacto K en $E_1 \times E_2$ que contenga al origen $(0,0)$. Podemos suponer que es de la forma $K = K_1 \times K_2$ siendo K_1 y K_2 compactos en E_1 y E_2, sustituyendo si fuese necesario K por otro compacto mayor.

Demos también un entorno del origen T en $L_o(E_1 \times E_2;F)$, debemos encontrar un entorno del origen U en $E_1 \times E_2$ tal que

$$\varphi(K \cap U) \subset T$$

El entorno del origen T' contiene al conjunto de aplicaciones h que transforman un cierto compacto L de $E_1 \times E_2$ en un cierto entorno del origen V en F

$$\left\{h \in L_o(E_1 \times E_2;F) \mid h(L) \subset V\right\} \subset T$$

y podemos suponer que L es de la forma $L_1 \times L_2$ donde L_1 y L_2 son compactos de E_1 y E_2 respectivamente.

Para encontrar U vamos a usar la hipótesis de ser u continua en compactos.

Tomemos en primer lugar un entorno del origen W en F tal que $W+W \subset V$.

Sabemos que $K_1 \times L_2$ es un compacto de $E_1 \times E_2$, si $x \in L_2$ es $(0,x) \in K_1 \times L_2$ y $u(0,x) = 0$. Por la continuidad en compactos de u existen entornos de 0 y x en E_1 y E_2 respectivamente P_x y Q_x tales que

$$u\left\{(K_1 \times L_2) \cap (P_x \times Q_x)\right\} \subset W$$

Los entornos Q_x recubren L_2 y un número finito de ellos $Q_{x_1}, Q_{x_2}, \dots . Q_{x_n}$ recubren L_2, por ser L_2 compacto; consideremos entonces el entorno del origen en E_1

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}$$

evidentemente

$$u\left\{(K_1 \times L_2) \cap (P \times E_2)\right\} \subset W$$

pues si $(t_1,t_2) \in K_1 \times L_2$ y $(t_1,t_2) \in P \times E_2$ se tiene para algún i: $0 \leqslant i \leqslant n$, $t_2 \in Q_{x_i}$, y $t_1 \in P_{x_i}$.

Analogamente puede encontrarse un entorno S del origen en E_2 tal que

$$u\left\{(L_1 \times K_2) \cap (E_1 \times S)\right\} \subset W$$

Entonces $U = P \times S = (P \times E_2) \cap (E_1 \times S)$ es un entorno del origen en $E_1 \times E_2$ y si

$$(t_1,t_2) \in K \cap U$$

se tiene para $(x_1,x_2) \in L_1 \times L_2$

$$\begin{aligned}\varphi(t_1,t_2)(x_1,x_2) &= u(t_1,x_2) + u(x_1,t_2) \in \\ &\in u\{(K_1 \times L_2) \cap (P \times E_2)\} + u\{(L_1 \times K_2) \cap (E_1 \times S)\} \subset \\ &\subset W + W \subset V\end{aligned}$$

es decir

$$\varphi(K \cap U) \subset T.$$

Asi pues $D\varphi = \varphi$ en todo punto. Por tanto $D^2 u = \varphi$.
Como φ es constante se tiene entonces $D^3 u = D^4 u = \ldots = 0$.

Por fin estamos en condiciones de probar la regla de la cadena de orden p.

PROPOSICION 46. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos, A un abierto de E, B un abierto de F, $f: A \to F$ una aplicación p veces continuamente diferenciable en compactos de A y tal que $f(A) \subset B$. Sea $g: B \to G$ p veces continuamente diferenciable en compactos de B. Entonces $g \circ f$ es p veces continuamente diferenciable en compactos de A.

Demostración:

Al decir que f es p veces continuamente diferenciable en compactos de A entendemos que $D^p f$ existe en todo A y como aplicación es continua en compactos en A.

Para $p = 1$ sabemos que $g \circ f$ es diferenciable y

$$Dg \circ f(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

entonces $D(g\circ f)$ es compuesta de dos aplicaciones

$$x \longmapsto (\, Df(x),\, Dg(f(x))\,) \longmapsto Dg(f(x))\circ Df(x)$$

De la proposición 2 y usando la hipótesis sigue que la primera es continua en compactos. La segunda aplicación gracias a la proposición lo es continua en compactos. Por tanto usando de nuevo la proposición 2 $D(g\circ f)$ es continua en compactos en a.

Supongamos el resultado cierto hasta $p-1$ y probemoslo para p.

Como g es p veces derivable con continuidad en compactos, Dg es $p-1$ veces diferenciable continuamente en compactos en B. f lo es p veces, luego por la hipótesis de recurrencia $(Dg)\circ f$ es $p-1$ veces diferenciable con continuidad en compactos de A.

Df es tambien $p-1$ veces diferenciable con continuidad en compactos . Luego usando la proposición 44 la aplicación

$$x \longrightarrow (\, Df(x)\,,\, Dg(f(x))\,)$$

es $p-1$ veces continuamente diferenciable en compactos de A.

Usando ahora las proposiciones 45 y lo la aplicación

$$(u,v) \longmapsto v\circ u$$

es indefinidamente diferenciable.

Teniendo en cuenta de nuevo la hipótesis de recurrencia $Dg\circ f(x)$ resulta ser $p-1$ veces continuamente diferenciable en compactos de A y esto es $(g\circ f)$ es p veces continuamente diferenciable en compactos de A.

Por último antes de terminar el capítulo veremos la fórmula de Taylor.

Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos, $u: E\times F \longrightarrow G$ una aplicación bilineal continua en compactos, I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $f: I \rightarrow E$ y $g: I \rightarrow F$ aplicaciones n veces derivables con continuidad en compactos de I.

Las derivadas sucesivas de f y g pueden identificarse con elementos de E y F respectivamente y se tiene

$$u(f^n,g) + (-1)^{n-1}\, u(f, g^n) =$$
$$= D\{u(f^{n-1},g) - u(f^{n-2},g') + \dots + (-1)^{n-1}\, u(f,g^{n-1})\}$$

La demostración es trivial.

Supongamos ademas G completo por sucesiones. $u(f^n,g)$ es aplicación continua de I en G (obsérvese que I es localmente compacto), por tanto es integrable. Integrando se obtiene entonces la regla de integración por partes de orden n.

PROPOSICION 47. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos, G completo por sucesiones, $u: E\times F \rightarrow G$ una aplicación bilineal continua en compactos, I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow E$ y $g: I \rightarrow F$ aplicaciones n veces derivables con continuidad en compactos de I, a y b puntos de I.

Entonces

$$\int_a^b u(f^n(t),g(t))\, dt =$$

$$= \sum_{p=o}^{n-1} (-1)^p \, u(f^{n-p-1}(t), g^p(t)) \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b u(f(t), g^n(t))dt$$

Demostración:

Es trivial después de lo ya expuesto.

De esta expresión se obtiene fácilmente la primera forma de la fórmula de Taylor.

PROPOSICION 48. Sea E un espacio vectorial topológico, completo por sucesiones. I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $f: I \to E$ $n+1$ veces derivable con continuidad en compactos de I.

Si x y a pertenecen a I se tiene

$$f(x) =$$

$$= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n}(a) + \int_a^x f^{(n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Demostración:

Aplicamos la regla de integración por partes siendo $u: \mathbb{R} \times E \to E$ definida como $u(\lambda, x) = \lambda x$, en lugar de f usamos f', en lugar de g usamos

$$\frac{(t-x)^n}{n!}$$

y x en lugar de b. Se obtiene entonces directamente la expresión buscada.

PROPOSICION 49. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, F localmente convexo y completo por sucesiones, A un abierto de E, $f: A \to F$ $n+1$ veces derivable con continuidad en compactos de A.

Entonces si el segmento $a, \; a+t$ está en A se tiene

$$f(a+t) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(t) + \frac{1}{2!} f''(a)(t^{(2)}) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n}(a)(t^{(n)}) + \left[\int_0^1 \frac{(1-\xi)^n}{n!} f^{(n+1}(a+\xi t)d\xi \right] (t^{(n+1)})$$

donde hemos escrito $t^{(n)} = (t, \dots, t) \in E^n$

Demostración:

Aplicamos la proposición 48 a la función $g(\xi) = f(a+\xi t)$ observando que $g^{(k}(o) = f^{(k}(a)(t^{(k)})$ y usamos la proposición 36 para sacar $t^{(n+1)}$ fuera de la integral.

Por último obsérvese que si p es una seminorma continua en F y

$$\sup_{\xi \in [0,1]} p(f^{(n+1}(a+\xi t)(t^{(n+1)})) = M$$

se tiene por la proposición 37

$$p\left[\left(\int_0^1 \frac{(1-\xi)^n}{n!} f^{(n+1}(a+\xi t)d\xi \right) (t^{(n\ 1)}) \right] =$$

$$= p\left(\int_0^1 \frac{(1-\xi)^n}{n!} f^{(n+1}(a+\xi t)(t^{(n+1)})\, d\xi \right) \leqslant \frac{M}{n!}$$

Lo que puede servir para acotar el resto de la fórmula de Taylor.

CAPITULO IX

E S P A C I O S   D E   A P L I C A C I O N E S D I F E R E N C I A B L E S

Para aligerar las notaciones durante este capítulo usaremos los siguientes convenios:

Identificaremos $D^p f(a)$ y $f^{(p}(a)$.

A veces tendremos una aplicación r definida en un abierto A de un espacio vectorial topológico, de la que pretendemos probar que es resto. Supondremos entonces la función r definida en todo E lo que sabemos que no afecta la cuestión, por ejemplo suponiendo $r = 0$ donde no este definida.

También hablaremos de $g \circ f$ aunque el conjunto de llegada de f no coincida con el de partida de g, siempre naturalmente suponiendo que g este definida en cada punto imagen de f.

Por último supondremos a partir de la proposición 54 que los espacios vectoriales son localmente convexos, la razón es que a veces necesitamos que las derivadas sean aplicaciones multilineales simétricas (Cfr. proposición 42).

Sean E y F espacios vectoriales topológicos y A un abierto de E.

El conjunto de las aplicaciones $f: A \rightarrow F$ k veces derivables con continuidad en compactos de A es un espacio vectorial y en primer lugar vamos a dotarlo de una topología.

La topología será la de la convergencia uniforme en compactos de A de $f^{(p}(x)$ para $0 \leqslant p \leqslant k$.

Observamos que $f^{(k}(x)$ es una aplicación de A en $L_o^k(E^k;F)$. Un entorno del origen en este espacio se obtiene dando un entorno del origen V en F y un compacto K de E. El entorno lo representaremos por $T_k(K;V)$ y viene definido por

$$u \in T_k(K;V) \iff \{ \; x_i \in K \Rightarrow u(x_1, \ldots , x_k) \in V$$

Los $T_k(K;V)$ forman una base de entornos del origen en $L_o^k(E^k;F)$.

Una base de entornos del origen en $C_k(A;F)$ estará formada por los conjuntos $T_k(L;K;V)$, donde L es un compacto en A, K un compacto en E y V un entorno del origen en F; definidos por

$$f \in T_k(L;K;V) \iff (\forall_{0 \leqslant i \leqslant k}\, i) \; (f^{(i}(L) \subset T_i(K;V))$$

Naturalmente debemos entender que para $k = 0$ es

$$u \in T_k(K;V) \iff u \in V$$

y que $f^{(o} = f$; pues $L_o^o(E^o;F)$ no es mas que F.

Veamos que realmente los $T_k(L;K;V)$ forman una base del filtro de los entornos del origen para una topología en $C_k(A;F)$ (espacio de las aplicaciones de A en F k veces continuamente diferenciables en compactos de A) compatible con la estructura de espacio vectorial.

Desde luego para todo L, K y V se tiene

$$0 \in T_k(L;K;V)$$

y además

$$T_k(L_1;K_1;V_1) \cap T_k(L_2;K_2;V_2) \supset T_k(L_1 \cup L_2;K_1 \cup K_2;V_1 \cap V_2)$$

luego los $T_k(L;K;V)$ forman una base de filtro en $C_k(A;F)$.

Dado $T_k(L;K;V)$ existe un entorno del origen W en F tal que $W + W \subset V$ y se tiene entonces

$$T_k(L;K;W) + T_k(L;K;W) \subset T_k(L;K;V)$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cada $T_k(L;K;V)$ se tiene

$$\lambda\, T_k(L;K;V) = T_k(L;K;\lambda V)$$

Cada $T_k(L;K;V)$ es absorvente. Pues si $f \in C_k(A;F)$ para cualquier i, $0 \leq i \leq k$, se tiene que $f^{(i}: A \rightarrow L_o^i(E^i;F)$ es continua en compactos, luego $f^{(i}(L)$ es compacto en $L_o^i(E^i;F)$, existe pues un λ_i tal que $\mu_i \geq \lambda_i$ implica

$$f^{(i}(L) \subset \mu_i\, T_i(K;V)$$

tomando $\lambda = \sup\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ se tiene para todo i y $\mu > \lambda$

$$f^{(i}(L) \subset \mu\, T_i(K;V)$$

esto es

$$f^{(i}(L) \subset T_i(K;\mu V)$$

pues $T_i(K;\lambda V) = \lambda\, T_i(K;V)$. Según la definición de $T_k(L;K;V)$ se tiene entonces

$$f \in T_k(L;K;\mu V) = \mu T_k(L;K;V)$$

para todo $\mu > \lambda$.

Por último cada $T_k(L;K;V)$ contiene un $T_k(L;K;W)$ equilibrado pues basta tomar W un entorno equilibrado del origen en F contenido en V.

Es conocido que estas condiciones son suficientes para probar que los $T_k(L;K;V)$ forman una base para el filtro de los entornos del origen de una topología $\mathcal{T}$ en $C_k(A;F)$ compatible con la estructura de espacio vectorial.

Ademas $\mathcal{T}$ es separada pues si $f \in T_k(L;K;V)$ para todos los L, K y V se tiene

$$f^{(o}(x) \in T_o(K;V)$$

esto es

$$f(x) \in V$$

para todo x y V, esto es $f(x) = 0$ para todo $x \in A$.

DEFINICION 10. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, A un abierto de E, designaremos por $C_k(A;F)$ el espacio vectorial topológico de la aplicaciones $f: A \rightarrow F$ k veces derivable en A con continuidad en compactos de A, dotado de la topología $\mathcal{T}$ para la que los conjuntos $T_k(L;K;V)$ forman una base de entornos del origen.

PROPOSICION 50. Si F es localmente convexo también lo es $C_k(A;F)$.

Demostración:

Los conjuntos $T_k(L;K;V)$ forman una base de entornos para la topología de $C_k(A;F)$. Sea Γ el conjunto de seminormas continuas definidas en F.

Si $p \in \Gamma$ la función

$$q_p(f) = \sup_{\substack{0 \leq i \leq k \\ y \in L \quad x_j \in K}} p\left\{ f^{(i}(y)(x_1,\dots,x_i) \right\}$$

es una seminorma en $C_k(A;F)$, basta probar que el supremo es finito y lo es, pues por ser $f^{(i}$ continua en compactos $f^{(i}(L)$ es compacto en $L_o^i(E^i;F)$ luego la seminorma

$$p_K(u) = \sup_{x_j \in K} p(\, u(x_1,\dots,x_i)\,)$$

esta acotada en $f^{(i}(L)$; que p_K es seminorma en $L_o^i(E^i;F)$ se obtiene por aplicación repetida de la proposición 4.

El conjunto $q_p(f) \leq 1$ es $T_k(L;K;V)$ siendo $V = \{ x \mid x \in F,\ p(x) \leq 1 \}$, asi pues q_p es continua.

Todas las q_p forman un sistema de seminormas que generan la topología $\mathcal{T}$ de $C_k(A;F)$.

Como veremos a continuación también se hereda la completitud.

PROPOSICION 51. Si F es localmente convexo y completo también lo es $C_k(A;F)$.

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $C_k(A;F)$ y sea d^i la aplicación d^i: $C_k(A;F) \longrightarrow C_o(A;L_o^i(E^i;F))$ definida por

$$d^i(f) = f^{(i}$$

para $o \leq i \leq k$.

Entonces $d^i(\mathcal{F})$ es base de un filtro de Cauchy, como $L_o^i(E^i;F)$ es completo (prop. 5, aplicada repetidamente) $d^i(\mathcal{F})$ converge uniformemente en compactos de A hacia un elemento $f^{(i}$ de $C_o(A;L_o^i(E^i;F))$.

Se tiene para cada i, $0 \leqslant i \leqslant k$ definida asi una aplicación continua en compactos $f^{(i}: A \longrightarrow L_o^i(E^i;F)$.

Basta probar que $Df^{(i} = f^{(i+1}$ pues entonces f será k veces derivable con continuidad en compactos de A y $\mathcal{F}$ será convergente hacia $f^{(o}$ por la forma en que se ha definido.

Para $0 \leqslant i \leqslant k-1$ y $a \in A$ se tiene

$$g^{(i}(x+a) = g^{(i}(a) + g^{(i+1}(a)(x) + r_g^{(i}(x)$$

para todos los x de un entorno U del origen en E y toda $g \in C_k(A;F)$ siendo $r_g^{(i}$ un resto.

$$r_g^{(i} \in R(E;L_o^i(E^i;F))$$

Cada $r_g^{(i}$ es diferenciable continuamente en compactos en U y $Dr_g^{(i}(0) = 0$.

Pongamos

$$f^{(i}(x+a) = f^{(i}(a) + f^{(i+1}(a)(x) + r^{(i}(x)$$

debemos probar que $r^{(i}$ es resto. Sabemos que $r^{(i}$ es continua en compactos en U. Por tanto las dos primeras condiciones para que $r^{(i}$ sea resto se verifican.

Solo queda ver que si K es un compacto en E que contenga al origen

$$\lim_{\substack{t \to o \\ t \neq o}} \frac{1}{t} r^{(i}(tx) = 0$$

uniformemente en K.

Tomemos para ello una seminorma continua p en en $L_o^i(E^i;F)$ y un $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un $\delta > 0$, tal que

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |t| < \delta \\ x \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow p\left(\frac{1}{t} r^{(i}(tx) \right) < \varepsilon$$

Sea $\overline{K} = [-1,1]\,K$, es un compacto en E que contiene al origen. Tomemos un entorno abierto del origen U en E tal que $a + U \subset A$.

Sean g y h dos funciones de $C_k(A;F)$ y formemos la función definida en U

$$G(y) = g^{(i}(a+y) - h^{(i}(a+y) + h^{(i+1}(a)(y) - g^{(i+1}(a)(y)$$

es diferenciable y su diferencial es

$$g^{(i+1}(a+y) - h^{(i+1}(a+y) + h^{(i+1}(a) - g^{(i+1}(a)$$

Por ser $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $C_k(A;F)$, existe un $\varphi \in \mathcal{F}$, tal que si $g \in \varphi$ y $h \in \varphi$ la diferencia $g - h$ esté en un entorno prefijado de 0 en $C_k(A;F)$.

Para cierto $\delta_1 > 0$ es $\delta_1 \overline{K} \subset U$ y puesto que $p_{\overline{K}}$ es una seminorma en $L_o^{i+1}(E^{i+1};F)$

$$p_{\overline{K}}(u) = \sup_{x \in \overline{K}} p(u(x))$$

podemos encontrar φ tal que $g \in \varphi$ y $h \in \varphi$ implique

$$\left.\begin{array}{l} y \in \delta_1 \cdot \overline{K} \\ x \in \overline{K} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$p(g^{(i+1}(a+y)(x) - h^{(i+1}(a+y)(x) + h^{(i+1}(a)(x) - g^{(i+1}(a)(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea ahora $|t| < \delta_1$, $x \in K$ y apliquemos la proposición 25 a G

$$p(\, G(tx) - G(0)\,) \leq \sup_{\xi \in [0,1]} p(\, DG(0 + \xi tx)(tx)\,)$$

como $\xi tx \in \delta_1 \overline{K}$ y $x \in K$ esto es

$$\leqslant |t| \sup_{\xi \in [0,1]} p(DG(0+\xi tx)(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t|$$

Esto es si $g \in \varphi$, $h \in \varphi$, $|t| < \delta_1$ y $x \in K$ se tiene

$$p\left\{ g^{(i}(a+tx) - h^{(i}(a+tx) - g^{(i}(a) + h^{(i}(a) + \right.$$
$$\left. + h^{(i+1}(a)(tx) - g^{(i+1}(a)(tx) \right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t|$$

Tomando límites según el filtro $\mathcal{F}$ se obtiene:

Si $g \in \varphi$, $|t| < \delta_1$ y $x \in K$ se tiene

$$p\left\{ g^{(i}(a+tx) - f^{(i}(a+tx) - g^{(i}(a) + f^{(i}(a) + \right.$$
$$\left. + f^{(i+1}(a)(tx) - g^{(i+1}(a)(tx) \right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t|$$

Mas brevemente

$$\left.\begin{matrix} g \in \varphi,\ x \in K \\ |t| < \delta_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad p(\ r_g^{(i}(tx) - r^{(i}(tx)\ ) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t|$$

Fijemos una de las $g \in \varphi$. Por ser $r_g^{(i}$ resto, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\left.\begin{matrix} |t| < \delta_2 \\ x \in K \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad p(\ r_g^{(i}(tx)\ ) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t|$$

y por tanto si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\left.\begin{matrix} |t| < \delta \\ x \in K \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad p\ (r^{(i}(tx)\ ) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t|$$

esto es $r^{(i}$ es resto. Con lo que queda probado el teorema.

Podemos definir ahora los espacios $C_\infty(A;F)$.
Sean E y F espacios vectoriales topológicos, A un abierto de E. Si f es diferenciable indefinidamente con continuidad en compactos de A se tiene

$$Df \in C_o(A;L_o(E;F)) \qquad D^2 f \in C_o(A;L_o^2(E^2;F)) \quad y \quad D^h f \in C_o(A;L_o^h(E^h;F))$$

Asi pues $(f, Df, D^2 f, \ldots\ )$ es un elemento de

$$P = \prod_{h=0}^{\infty} C_0(A;L_0^h(E^h;F))$$

donde $L_0^0(E^0;F)$ no es mas que F.

El subespacio de P formado por los elementos de la forma $(f, Df, D^2f, \dots)$ lo llamaremos $C_\infty(A;F)$, está dotado de una topología natural. Los elementos de $C_\infty(A;F)$ estan determinados por su primera componente y escribiremos $f \in C_\infty(A;F)$ identificando f con $(f, Df, D^2f, \dots)$.

DEFINICION 11. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, A un abierto de E. Representaremos por $C_\infty(A;F)$ el subespacio vectorial de

$$P = \prod_{h=0}^{\infty} C_0(A;L_0^h(E^h;F))$$

definido por los elementos de la forma $(f, Df, D^2f, \dots)$ con la topología inducida.

La topología de $C_\infty(A;F)$ es evidentemente separada.

Si F es localmente convexo también lo es $C_\infty(A;F)$ pues es subespacio de un localmente convexo (prop. 50 y 4).

Si F es localmente convexo y completo lo es también $C_\infty(A;F)$ pero no es posible eliminar aqui la hipótesis de convexidad.

PROPOSICION 52. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, F localmente convexo y completo, A un abierto de E. Entonces $C_\infty(A;F)$ es completo.

Demostración:

Es la misma practicamente que la de la proposición anterior.

Vamos a estudiar a continuación algunas aplicaciones diferenciables que aparecen de manera natural al considerar los espacios $C_\infty(A;F)$. También probaremos como consecuencia importante el homeomorfismo lineal entre

$$C_\infty(A\times B;G) \quad y \quad C_\infty(A;C_\infty(B;G))$$

PROPOSICION 53. Sean X, Y y Z espacios topológicos regulares, llamemos por un momento $C(X;Y)$ el espacio de aplicaciones continuas en compactos con la topología de la convergencia uniforme en compactos. Entonces la aplicación

$$\Phi : C(X\times Y;Z) \longrightarrow C(X;C(Y;Z))$$

que aplica f en $\Phi(f)$ definida por

$$\Phi(f)(x)(y) = f(x,y)$$

es un homeomorfismo lineal.

Demostración:

En primer lugar debemos ver que si $f\in C(X\times Y;Z)$ $\Phi(f)(a)$ es realmente perteneciente a $C(Y;Z)$ para cada $a\in X$.

Para verlo tomemos $b\in Y$ y vamos a probar que $\Phi(f)(a)$ es continua en compactos en b.

Demos un compacto L en Y que contenga a b y un entorno V de $\Phi(f)(a)(b) = f(a,b)$ en Z.

Como $\{a\}\times L$ es compacto de $X\times Y$ y contiene a (a,b), la continuidad en compactos de f implica la existencia de un entorno V_1 de a y otro V_2 de b tales que

$$(x,y) \in (\{a\} \times L) \cap (V_1 \times V_2) \implies f(x,y) \in V$$

asi pues

$$y \in L \cap V_2 \implies f(a,y) \in V$$

de otro modo

$$y \in L \cap V_2 \implies \Phi(f)(a)(y) \in V$$

esto es $\Phi(f)(a)$ es continua en compactos.

Asi queda definida $\Phi(f): X \longrightarrow C(Y;Z)$, debemos ver que esta aplicación es continua en compactos.

Sea $a \in X$ y K un compacto en X que contenga a a.

Dar un entorno de $\Phi(f)(a)$, T, en $C(Y;Z)$ es dar un compacto L en Y y un abierto V en Z tal que

$$\Phi(f)(a)(L) \subset V$$

entonces

$$g \in T \iff g(L) \subset V$$

Sea $b \in L$ (Si L es vacio $\Phi(f)(x) \in T$ para todo x) entonces $K \times L$ es compacto en $X \times Y$ que contiene a (a,b) luego existen entornos V_b y W_b de a y b respectivamente tales que

$$(x,y) \in (K \times L) \cap (V_b \times W_b) \implies f(x,y) \in V$$

puesto que $f(a,b) = \Phi(f)(a)(b) \in V$.

Un número finito de los W_b recubre L y la intersección de los correspondientes V_b, llamemosla V, es un entorno de a tal que

$$\left. \begin{array}{l} x \in K \cap V \\ y \in L \end{array} \right\} \implies f(x,y) \in V$$

esto es

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \cap V \\ y \in L \end{array}\right\} \implies \Phi(f)(x)(y) \in V$$

o lo que es lo mismo $\Phi(f)(x) \in T$ para $x \in K \cap V$; esto es $\Phi(f)$ es continua en compactos.

Asi queda definida

$$\Phi : C(X{\times}Y;Z) \longrightarrow C(X;C(Y;Z))$$

Φ es sobre pues sea $\varphi \in C(X;C(Y;Z))$ y pongamos $f: X \times Y \to Z$ definida por

$$f(x,y) = \varphi(x)(y)$$

bastará probar que $f \in C(X \times Y;Z)$. Pero sea $(a,b) \in K \times L$ un punto de $X \times Y$ contenido en el compacto $K \times L$. Sea U un entorno de $f(a,b) = \varphi(a)(b)$ en Z, que suponemos abierto.

Como φ es continua en compactos existe un entorno V de a tal que

$$x \in V \cap K \implies \varphi(x) \in T$$

siendo T un abierto prefijado de $C(Y;Z)$, que contenga a $\varphi(a)$

Como $\varphi(a)$ es continua en compactos y $b \in L$ siendo $\varphi(a)(b) \in U$ existe un entorno de b W que podemos suponer cerrado (por ser Y regular) tal que

$$y \in W \cap L \implies \varphi(a)(y) \in U$$

entonces el conjunto T de los elementos g en $C(Y;Z)$ tales que

$$g(W \cap L) \subset U$$

es entorno de $\varphi(a)$ en $C(Y;Z)$ y con el fijamos el V tal que:

$$\left.\begin{array}{l} x\in V\cap K \\ y\in W\cap L \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi(x)(y)\in U$$

esto es f es continua en compactos.

Para ver que Φ es homeomorfismo basta observar que en $C(X;Y)$ los conjuntos $T(K;V)$ siendo K compacto en X y V abierto en Y forman una base de la topología.

Tendremos que definir frecuentemente aplicaciones, para abreviar los enunciados pondremos

$$\begin{array}{l} f\colon A \longrightarrow B \\ \quad x \longmapsto y \end{array}$$

para representar la aplicación de A en B definida porque en $x\in A$ toma el valor $y\in B$.

PROPOSICION 54. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos localmente convexos. A y B abiertos de E y F respectivamente. $f\in C_\infty(A\times B;G)$.

Existe una aplicación φ asociada a f definida por

$$\varphi(x)(y) = f(x,y)$$

perteneciente a $C_\infty(A;C_\infty(B;G))$.

Demostración:

Consideraremos los $C_\infty(A;F)$ como subespacios de productos.

La aplicación de $A\times B\times E^k\times F^h$ en G definida por

$$(x,y,t_1,\dots,t_k,s_1,s_2,\dots,s_h) \longmapsto$$

$$\longmapsto D^{k+h}f(x,y)\{(t_1,o),\dots,(t_k,o),(o,s_1),\dots,(o,s_h)\}$$

es continua en compactos respecto de todas sus variables. (Basta aplicar repetidamente la proposición 53). Se obtiene entonces un elemento

$$\varphi \in \prod_{k=1}^{\infty} C_o(A;L_o^k(E^k;\prod_{h=1}^{\infty} C_o(B;L_o^h(F^h;G))))$$

poniendo

$$((pr_h((pr_k \varphi(x))(\vec{t})))(y))(\vec{s}) =$$
$$= D^{k+h}f(x,y)(\ (t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h)\ )$$

En primer lugar queremos probar que

$$\prod_{k=1}^{\infty} C_o(A;L_o^k(E^k;C_\infty(B;G)))$$

para lo que basta probar que para cada $h \geqslant 0$ es $pr_h((pr_k \varphi(x))(\vec{t}))$ continua en compactos, lo que ya sabemos; y que es derivable en todo $y \in B$ y su diferencial es justamente $pr_{h+1}((pr_k \varphi(x))(\vec{t}))$.

Pero se tiene

$$((pr_h((pr_k \varphi(x))(\vec{t})))(y+s_{h+1}))(\vec{s}) =$$
$$= D^{k+h}f(x,y+s_{h+1})(\ (t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h)\ ) =$$
$$= D^{k+h}f(x,y)(\ (t_1,o),\ldots,(t_k,o)(o,s_1),\ldots,(o,s_h)\ )+$$
$$+ D^{k+h+1}f(x,y)(\ (t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h),(o,s_{h+1})\ )+$$
$$+ r(o,s_{h+1})(\ (t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h)\ )$$

siendo r el resto de $D^{k+h}f$ en (x,y).

$$r \in R(E \times F;L_o^{k+h}((E \times F)^{k+h};G))$$

Solo queda por tanto ver que la aplicación R de F en $L_o^h(F^h;G)$ definida por

$(R(s_{h+1}))(s_1,\ldots,s_h) =$

$$= r(o,s_{h+1})((t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h))$$

es resto $R \in R(F;L_o^h(F^h;G))$.

La igualdad anterior prueba que es continua en compactos en un entorno de O y solo queda ver la tercera condición de resto.

Demos un compacto en F que contenga al origen L. Sea además T el entorno del origen en $L_o^h(F^h;G)$ dado por

$$\omega \in T \Leftrightarrow \omega((L')^h) \subset U$$

siendo U un entorno del origen en G y L' compacto en F.

Entonces

$$\{(t_1,o)\}\times\ldots\times\{(t_k,o)\}\times(\{O\}\times L')\times\ldots\times(\{O\}\times L')$$

es compacto de $(E\times F)^{k+h}$ y existe $\alpha > 0$ tal que: $0 < |t| < \alpha$, y $s_i \in L'$ implica

$$\frac{1}{t}\, r(o,ts_{h+1})((t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h)) \in U$$

esto es R es resto.

Debemos probar ahora

$$\varphi \in C_\infty(A;C_\infty(B;G))$$

y para ello ver que $D pr_k \varphi = pr_{k+1} \varphi$.

Tenemos

$((pr_h((pr_k \varphi(x+t_{k+1}))(\vec{t})))(y))(\vec{s}) =$

$= D^{k+h} f(x+t_{k+1},y)((t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h))$

usando que $D^{k+h}f(x,y)$ es forma simétrica

$= D^{k+h}f(x,y)((t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h)) +$

$$+D^{k+h+1}f(x,y)(\ (t_1,o),\dots,(t_k,o),(t_{k+1},o),(o,s_1),\dots,(o,s_h)\ )+$$

$$+r_h(t_{k+1},o)(\ (t_1,o),\dots,(t_k,o),(o,s_1),\dots,(o,s_h)\ )$$

y esto es equivalente a

$$pr_k(\varphi)(x+t_{k+1}) = pr_k(\varphi)(x) + pr_{k+1}(\varphi)(x)\ (t_{k+1}) + R(t_{k+1})$$

y solo queda ver $R \in R(E;L_o^k(E^k;C_\infty(B;G)))$ siendo R la aplicación

$$(\ (pr_h(R(t_{k+1})(\vec{t})))(y)\ )(\vec{s}) =$$

$$= r_h(t_{k+1},o)(\ (t_1,o),\dots,(t_k,o),(o,s_1),\dots,(o,s_h)\ )$$

Demos un compacto en E, K, que contenga al origen y un entorno del origen en $L_o^k(E^k;C_\infty(B;G))$, $\mathcal{C}$ definido por

$$\omega \in \mathcal{C} \iff \omega(\ (K')^k\ ) \subset T$$

siendo K' un compacto en E y T un entorno del origen en $C_\infty(B;G)$ definido por

$$\omega \in T \iff pr_h\omega(L) \subset V$$

siendo V un entorno del origen en $L_o^h(F^h;G)$ y L un compacto en B.

Por último V está definido por

$$\omega \in V \iff \omega(\ (L')^h\ ) \subset W$$

siendo L' compacto de F y W entorno del origen en G, que podemos suponer abierto.

Debemos encontrar α tal que

$$\left.\begin{array}{l} 0<|\xi|<\alpha \\ t_{k+1} \in K \end{array}\right\} \implies \frac{1}{\xi}R(\xi\, t_{k+1}) \in \mathcal{C}$$

esto es

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |\xi| < \alpha \\ t_{k+1} \in K \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \in K' \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{\xi} R(\xi\, t_{k+1})(\vec{t}) \in T$$

esto es

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |\xi| < \alpha \\ t_{k+1} \in K \\ \vec{t} \in (K')^k;\ y \in L \end{array}\right\} \Longrightarrow pr_h\left\{\frac{1}{\xi} R(\xi\, t_{k+1})(\vec{t})(y)\right\} \in V$$

finalmente $0 < |\xi| < \alpha$, $t_{k+1} \in K$, $\vec{t} \in (K')^k$, $y \in L$, y $s \in (L')^h$

implica

$$(1)\quad \frac{1}{\xi} r_h(\xi\, t_{k+1}, o)(\,(t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(o,s_h)\,) \in W$$

y como r_h es el resto de $D^{k+h}f(x,y)$ para cada y existe un α que verifica esto para ese y.

Si una función f es diferenciable con continuidad en compactos de un abierto $Rf(x)$ es función continua en compactos de x pues

$$f(x+y) = f(x) + Df(x)(y) + Rf(x)(y)$$

y basta usar la proposición 53.

Asi pues por ser r_h el resto de $D^{k+h}f(x,y)$ existe para cada $y \in L$ un entorno W_y de y tal que para cada $y \in L \cap W_y$ vale la implicación (1). (Pues W es abierto).

Un número finito de estos W_y recubren L y el menor de los α verifica (1) para todo $y \in L$.

LEMA 2. Sean E y F espacios vectoriales topológicos, A un abierto de E. La aplicación ε_k

$$\begin{aligned} \varepsilon_k : A \times C_\infty(A;F) &\longrightarrow L_c^k(E^k;F) \\ (x,f) &\longmapsto D^k f(x) \end{aligned}$$

es continua respecto de f y continua en compactos respecto de x.

Demostración:

Sea $(x_o, f_o) \in A \times C_\infty(A;F)$, K un compacto de A que contenga a x_o y T un entorno de o en $L_o^k(E^k;F)$.

Como $D^k f_o$ es continua en compactos en A existe un entorno V de x_o tal que

$$x \in V \cap K \implies D^k f_o(x) - D^k f_o(x_o) \in V$$

Por la definición de la topología de $C_\infty(A;F)$ el conjunto W de las f tales que

$$x \in K \implies D^k f(x) - D^k f_o(x) \in V$$

es un entorno de f_o y entonces

$$\left.\begin{array}{l} x \in K \cap V \\ f \in W \end{array}\right\} \implies D^k f(x) - D^k f_o(x_o) \in V + V$$

lo que prueba nuestra proposición.

PROPOSICION 55. Sean E y F espacios vectoriales topológicos localmente convexos, A un abierto de E. La aplicación $\mathcal{E} : A \times C_\infty(A;F) \longrightarrow F$ definida por

$$\mathcal{E}(x,f) = f(x)$$

pertenece a $C_\infty(A \times C_\infty(A;F);F)$.

Demostración:

Por el lema 2 es posible definir un elemento

$$\prod_{k=1}^{\infty} C_o(A \times C_\infty(A;F); L_o^k((E \times C_\infty(A;F))^k; F))$$

poniendo

$$(pr_k \mathcal{E})(x,f)(\ (t_1,f_1),(t_2,f_2),\dots,(t_k,f_k)\ ) =$$

$$= D^k f(x)(t_1,\dots,t_k) + \sum_{i=1}^{k} D^{k-1} f_i(x)(\ (t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_k)\ )$$

que $\mathcal{E}$ está en dicho espacio es consecuencia de lo anterior y de la proposición 53.

Queremos ver que

$$\mathcal{E} \in C_\infty(A \times C_\infty(A;F);F)$$

para lo que basta comprobar que $Dpr_k \mathcal{E} = pr_{k+1} \mathcal{E}$.

Observamos que

$$(pr_k \mathcal{E})(x+t_{k+1}, f+f_{k+1})(\vec{t},\vec{f}) =$$

$$= D^k(f+f_{k+1})(x+t_{k+1})(\vec{t}) + \sum_{i=1}^{k} D^{k-1} f_i(x+t_{k+1})(\vec{t}_i)$$

donde hemos puesto $\vec{t}_i = (t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_k)$ y $\vec{t} = (t_1,\dots,t_k)$. Desarrollando la expresión anterior queda

$$= D^k f(x+t_{k+1})(\vec{t}) + D^k f_{k+1}(x+t_{k+1})(\vec{t}) + \sum_{i=1}^{k} D^{k-1} f_i(x+t_{k+1})(\vec{t}_i) =$$

$$= D^k f(x)(\vec{t}) + D^{k+1} f(x)(\vec{t},t_{k+1}) + r(t_{k+1})(\vec{t}) + D^k f_{k+1}(x)(\vec{t}) +$$

$$+ D^{k+1} f_{k+1}(x)(\vec{t},t_{k+1}) + \rho(t_{k+1})(\vec{t}) + \sum_{i=1}^{k} D^{k-1} f_i(x)(\vec{t}_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} D^k f_i(x)(\vec{t}_i,t_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} r_i(t_{k+1})(\vec{t}_i)$$

donde r es el resto de $D^k f$ en x, ρ el resto de $D^k f_{k+1}$ en x y r_i es el resto de $D^{k-1} f_i$ en x.

Basta pues probar que la aplicación R de $E \times C_\infty(A;F)$ en $L_o^k(\ (E \times C_\infty(A;F))^k;F)$ definida por

$$R(t_{k+1},f_{k+1})(\ (t_1,f_1),\dots,(t_k,f_k)\ ) = r(t_{k+1})(\vec{t}) +$$

$$+ D^{k+1}f_{k+1}(x)(\vec{t},t_{k+1}) + \rho(t_{k+1})(\vec{t}) + \sum_{i=1}^{k} r_i(t_{k+1})(\vec{t_i})$$

es un resto.

Como es continua en compactos en un entorno de (o,o) basta comprobar que cumple la tercera condición de los restos.

El término en $D^{k+1}f_{k+1}(\vec{t},t_{k+1})$ es resto pues es aplicación bilineal continua en compactos.

Demos un compacto $K \times H$ que contenga al origen en $E \times C_\infty(A;F)$ y sea $\mathcal{C}$ un entorno del origen en $L_o^k(\ (E \times C_\infty(A;F))^k;F)$, debemos encontrar $\alpha > 0$ tal que

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} 0 < |\xi| < \alpha \\ (t_{k+1}, f_{k+1}) \in K\times H \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{\xi}R(\xi t_{k+1},\xi f_{k+1}) \in \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ estará definido por

$$\omega \in \mathcal{C} \iff \omega(\ (K' \times H')^k) \subset V$$

siendo V un entorno del origen en F y K' y H' compactos de E y $C_\infty(A;F)$ respectivamente.

(1) equivale entonces a $0 < |\xi| < \alpha$, $t_{k+1} \in K$, $f_{k+1} \in H$, $\vec{t} \in (K')^k$ y $\vec{f} \in (H')^k$ implica

$$\frac{1}{\xi}\, r(\xi\, t_{k+1})(\vec{t}) + \frac{\xi}{\xi}\,\rho(\xi\, t_{k+1})(\vec{t}) + \frac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{k} r_i(\xi t_{k+1})(\vec{t_i}) \in V$$

hay que tener en cuenta que al ser ρ el resto de $D^k f_{k+1}$ desaparece un ξ .

Bastará ver que cada sumando pertenece a W siendo W un entorno del origen en F suficientemente pequeño.

El primer sumando es trivial que pertenece a W siendo α suficientemente pequeño.

Para cada sumando de la forma

$$\frac{1}{\xi} r_i(\xi t_{k+1})(\vec{t}_i)$$

y para cada $f_i \in H'$ existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |\xi| < \alpha \\ t_{k+1} \in K, \vec{t} \in (K')^k \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{\xi} r_i(\xi t_{k+1})(\vec{t}_i) \in W$$

y esto se verifica para todo un entorno de f_i en H' con el mismo α , pues el resto de f_i depende continuamente en compactos de f_i. Basta pues como H' es compacto tomar un número finito de esos entornos que cubran H' y elegir el α mas pequeño de los correspondientes a ese número finito de f_i.

Para el término $\rho(\xi t_{k+1})(\vec{t})$ el razonamiento es análogo pero mas simple, pues no aparece el factor $1/\xi$.

PROPOSICION 56. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos localmente convexos, A y B abiertos de E y F respectivamente. La aplicación lineal definida mediante la proposición 54 es un homeomorfismo lineal entre los espacios

$$C_\infty(A \times B;G) \quad \text{y} \quad C_\infty(A;C_\infty(B;G))$$

Demostración:

Gracias a la proposición 54 es posible considerar la aplicación Φ definida en $C_\infty(A \times B;G)$ con valores en $C_\infty(A;C_\infty(B;G))$ definida por

$$((\Phi(f))(x))(y) = f(x,y)$$

que evidentemente es lineal.

Veamos que es continua. Basta ver que lo es para cada k $pr_k(\Phi)$ en el origen

$$pr_k(\Phi): C_\infty(A\times B;G) \longrightarrow C_o(A;L_o^k(E^k;C_\infty(B;G)))$$

Sea $\mathcal{C}$ un entorno del origen en $C_o(A;L_o^k(E^k;C_\infty(B;G)))$ definido por

$$f\in\mathcal{C} \iff f(K)\subset T$$

donde K es un compacto de A y T un entorno del origen en $L_o^k(E^k;C_\infty(B;G))$.

T estará definido por

$$\omega\in T \iff \omega(L^k)\subset S$$

siendo L un compacto de E y S un entorno del origen en $C_\infty(B;G)$.

S será pues un entorno por ejemplo en $C_o(B;L_o^h(F^h;G))$, estará pues definido por (obsérvese que incluso cuando $h=0$)

$$g\in S \iff D^h g(M)\subset U$$

donde M es un compacto en B y U un entorno del origen en $L_o^h(F^h;G)$.

Por último U estará definido por

$$\omega\in U \iff \omega(N^h)\subset V$$

donde N es compacto en F y V entorno del origen en G.

Debemos encontrar entonces un entorno W del origen en $C_\infty(A\times B;G)$ tal que

$$f\in W \implies pr_k\,\Phi(f)\in\mathcal{C}$$

esto es

$$\left.\begin{matrix} f\in W \\ x\in K\end{matrix}\right\} \implies (pr_k\,\Phi(f))(x)\in T$$

lo que equivale a

$$\left.\begin{array}{l} f\in W \\ x\in K,\ \vec{t}\in L^k \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (pr_k \Phi(f)(x))(\vec{t}) \in S$$

esto es

$$\left.\begin{array}{l} f\in W,\ x\in K \\ \vec{t}\in L^k,\ y\in M \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (pr_h((pr_k \Phi(f)(x))(\vec{t}))(y)) \in U$$

por fin

$$\left.\begin{array}{l} f\in W,\ x\in K \\ \vec{t}\in L^k,\ y\in M \\ \vec{s}\in N^h \end{array}\right\} \Rightarrow (pr_h(pr_k \Phi(f)(x))(\vec{t}))(y))(\vec{s}) \in V$$

Teniendo en cuenta la expresión hallada en la demostración de la proposición 54 esto equivale a

$$\left.\begin{array}{l} f\in W,\ x\in K \\ \vec{t}\in L^k,\ \vec{s}\in N^h \\ y\in M \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^{k+h}f(x,y)(\ (t_1,o),\ldots,(t_k,o),(o,s_1),\ldots,(O,s_h)\ ) \in V$$

la existencia de W es entonces consecuencia del lema 2.

La aplicación es biyectiva, pues si $\varphi\in C_\infty(A;C_\infty(B;G))$ podemos definir f tal que $\Phi(f) = \varphi$ como compuesta de

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & A\times B & \longrightarrow & B\times C_\infty(B;G) \\ & (x,y) & \longmapsto & (y,\ \varphi(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{E} : & B\times C_\infty(B;G) & \longrightarrow & G \\ & (y,h) & \longmapsto & h(y) \end{array}$$

y entonces $f = \mathcal{E}\circ\varphi_1$. Como $\mathcal{E}$ es C_∞ y φ_1 también lo es, lo será f (proposiciones 46 y 55).

Basta ver que la aplicación Ψ de $C_\infty(A;C_\infty(B;G))$ en $C_\infty(A\times B;G)$ definida por

$$\Psi(\varphi)(x,y) = (\varphi(x))(y)$$

es continua.

Basta ver que lo es $pr_n \Psi$ para cada n.

Sea $\mathcal{T}$ un entorno del origen en $C_o(A \times B; L_o^n((E \times F)^n; G))$ podemos suponerlo de la forma

$$g \in \mathcal{T} \iff g((K \times L)) \subset T$$

siendo K y L compactos en A y B respectivamente y T un entorno del origen en $L_o^k((E \times F)^n; G)$, que podemos suponer de la forma

$$\omega \in T \iff \omega((K' \times L')^n) \subset V$$

siendo V un entorno del origen en G y K' y L' compactos en E y F respectivamente.

Debemos encontrar un entorno del origen en $C_\infty(A; C_\infty(B;G))$, llamemoslo S, tal que

$$\varphi \in S \implies pr_n \Psi(\varphi) \in \mathcal{T}$$

esto es tal que

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in S,\ x \in K,\ \ y \in L \\ \vec{t} \in (K')^n,\ \vec{s} \in (L')^n \end{array}\right\} \Rightarrow ((pr_k \Psi(\varphi))(x,y))(\vec{t},\vec{s}) \in V$$

$(pr_n \Psi(\varphi))(x,y) = \mu$ es una forma k-lineal simétrica: $\mu: (E \times F)^n \longrightarrow G$, y

$$(\vec{t},\vec{s}) = ((t_1,s_1),(t_2,s_2),\ldots,(t_n,s_n)) =$$

$$= ((t_1,o) + (o,s_1),(t_2,o) + (o,s_2),\ldots,(t_n,o) + (o,s_n))$$

asi pues

$$\mu(t,s) = \sum_{h+k=n} \mu((t_1',o),\ldots,(t_k',o),(o,s_1'),\ldots,(o,s_h'))$$

donde los t_i' son algunos de los t_j. La suma tiene solo un número finito de sumandos. Basta pues encontrar un S tal que:

$\varphi \in S$, $x \in K$, $y \in L$, $\vec{t'} \in (K')^k$, $\vec{s'} \in (L')^h$ implique

$$((pr_k \Psi(\varphi))(x,y))(\,(t'_1,o),\dots,(t'_k,o),(o,s'_1),\dots,(o,s'_h)\,) \in V$$

Teniendo en cuenta la expresión obtenida en la demostración de la proposición 54 esto es:

Debemos encontrar S tal que $\varphi \in S$, $x \in K$, $y \in L$, $\vec{t'} \in (K')^k$, $\vec{s'} \in (L')^h$ implique

$$((pr_h((pr_k \varphi(x))(\vec{t'})))(y))(\vec{s'}) \in V$$

es decir basta ver que las φ que verifican

$$\left.\begin{matrix} x \in K, & y \in L \\ \vec{t'} \in (K')^k, & \vec{s'} \in (L')^h \end{matrix}\right\} \Rightarrow ((pr_h((pr_k \varphi(x))(\vec{t'})))(y))(\vec{s'}) \in V$$

forman un entorno de 0 en $C_\infty(A;C_\infty(B;G))$. Facilmente se ve que esta es precisamente la definición de entorno en este espacio.

PROPOSICION 57. Sean E, F y G espacios vectoriales topológicos localmente convexos, A un abierto de E.

La aplicación γ

$$\begin{aligned} \gamma : C_\infty(A;F) \times C_\infty(F;G) &\longrightarrow C_\infty(A;G) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

pertenece a $C_\infty(C_\infty(A;F) \times C_\infty(F;G);C_\infty(A;G))$.

Demostración

Sean ε_1 y ε_2 las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : C_\infty(A;F) \times A &\longrightarrow F \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_2 : C_\infty(F;G) \times F &\longrightarrow G \\ (g,y) &\longmapsto g(y) \end{aligned}$$

por la proposición 55 las dos son de clase C_∞.

Consideremos entonces la aplicación

$$c:\ C_\infty(F;G)\times C_\infty(A;F)\times A \longrightarrow G$$
$$(g,f,x) \longmapsto g(f(x))$$

entonces

$$c = \varepsilon_2 \circ (1,\ \varepsilon_1)$$

asi pues por la proposición 46 es c aplicación indefinidamente diferenciable con continuidad en compactos.

La proposición 54 prueba entonces que la aplicación γ pertenece a $C_\infty(C_\infty(A;F)\times C_\infty(F;G);C_\infty(A;G))$.

B I B L I O G R A F I A

(1) BASTIANI, A., "Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie", Journal d'analyse Mathematique XIII (1964) p. 1-114.

(2)BOURBAKI, N., "Eléments de mathématique, Topologie générale", Paris: Hermann.

(3)BOURBAKI, N., "Eléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle", Paris: Hermann.

(4)DIEUDONNE, J., "Fondements de l'analyse moderne", Paris: Gauthier-Villars (1969)

(5)FRÖLICHER, A. y BUCHER, W., "Calculus in Vector Spaces without Norm", Lecture Notes 30, Berlin/Heidelberg/New York: Springer (1966)

(6)KELLER, H. H., "Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume", Math. Annalen 159 (1965) p. 259-270.

(7)KELLER, H. H., "Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen", Comm. Math. Helv. 38 (1964) p. 308-320.

(8)KELLER, H. H., "Über Probleme die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten", Nevanlinna Festband, Springer: Berlin (1966) p.49-57.

(9)KELLEY, J. L., "General Topology", Van Nostrand, New York (1955)

(10)LANG, S., "Introduction to differentiable manifolds"
Wiley: New York. (1962)

(11)SEIP, U., "Kompakt erzeugte Vektorräume und Analysis"
Lecture Notes 273. Berlin/Heidelberg/New York:
Springer (1972)

I N D I C E   D E   N O T A C I O N E S

$\mathbb{N}$: conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$: cuerpo de los números reales.

$f|K$: restricción de f a K.

$L_o(E;F)$: pag. 2. Def. 2.

$L_o(E_1,E_2,\ldots,E_n;F)$: pag. 8. Def. 3.

$u(x,.)$: aplicación parcial deducida de u. pag. 8.

$R(E;F)$: pag.18. prop. 12.

$Df(a)$: pag. 20.

$f'(a)$: pag 20.

$\mathcal{L}(E;F)$: pag. 43.

$\int_\alpha^\beta f(t)dt$: pag. 55. def. 9.

$D_1 f(x,y)$: pag. 61.

$D^2 f(x_o)$: pag. 70.

$f''(x)$: pag. 70.

$D^p f(x)$: pag.73.

$f^{(p}(x)$: pag. 73.

$L_o^p(E^p;F)$: pag.73.

$T_k(K;V)$: pag. 85.

$T_k(L;K;V)$: pag 85.

$C_k(A;F)$: pag. 87. Def. 10.

$C_\infty(A;F)$: pag. 92. Def. 11.

INDICE DE TERMINOS

aplicación continua en compactos: pag. 1, def. 1.

vecindad: pag 3.

resto: pag. 17. def. 4.

aplicación diferenciable: pag 19. def 5.

aplicación escalonada: pag. 48. def. 6.

aplicación reglada: pag. 47. def 7.

primitiva de una aplicación. pag 51. def 8.

aplicación continuamente diferenciable en compactos de un abierto: pag. 60.

aplicación dos veces diferenciable. pag 70.

aplicación p veces diferenciable. pag 73.

aplicación p veces continuamente diferenciable en compactos de un abierto: pag 79

CORRECCION

En la página 100 no es correcta la demostración de la existencia de α para la que se verifique (1). En la página 1o4 aparece un error análogo.

Es fácil corregir la dificultad si se supone probado el lema.

LEMA 3. Sean E y F espacios vectoriales topológicos localmente convexos, A un abierto de E, $K \times H$ un compacto de $A \times C_\infty(A;F)$. Sea L un compacto en E que contenga el origen y V un entorno del origen en F. Existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |\xi| < \alpha \\ x \in K, \quad f \in H \\ \quad y \in L \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{1}{\xi}(\,Rf(x)\,)(\xi y) \in V$$

Demostración:

Sabemos que

$$Rf(x)(\xi y) = f(x+\xi y) - f(x) - Df(x)(\xi y)$$

para cada (x,f) en $K \times H$.

Como K es compacto contenido en A existe un entorno W del origen en E, equilibrado y tal que $K+W \subset$ $\subset A$. Podemos encontrar entonces $\beta > 0$ tal que $|t| < \beta$ implique $tL \subset W$.

Podemos definir asi para cada $(x,f) \in K \times H$ la función

$$G(u) = f(x+u) - f(x) - Df(x)(u)$$

definida para $u \in W$.

Es diferenciable en todo W y su diferencial es

$$Df(x+u) - Df(x)$$

Aplicamos para $|\xi| < \beta$ la proposición 25 a la función G en el segmento $0, \xi y$ para $y \in L$ siendo p una seminorma continua en F tal que

$$\{ x \mid p(x) < 1 \} \subset V$$

Se obtiene

$$p(f(x+\xi y) - f(x) - Df(x)(\xi y)) \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} p(Df(x+t\xi y)(\xi y) - Df(x)(\xi y)) \leq$$

$$\leq |\xi| \cdot \sup_{t\in[0,1]} p(Df(x+t\xi y)(y) - Df(x)(y))$$

y bastará probar que existe $\alpha > 0$ tal que es supremo es menor que 1 para $|\xi| < \alpha$.

Basta ver que el supremo es menor que 1 para un mismo α en todo un entorno de $(x_o, f_o) \in K \times H$ pues K y H son compactos.

Poniendo

$$\sup p(Df(x+t\xi y)(y) - Df(x)(y)) \leq$$

$$\leq \sup p(Df(x+t\xi y)(y) - Df_o(x+t\xi y)(y)) +$$

$$+ \sup p(Df_o(x+t\xi y)(y) - Df_o(x)(y)) +$$

$$+ \sup p(Df_o(x)(y) - Df(x)(y))$$

queda el resultado como consecuencia de variar x, y y ξt en compactos y ser f y f_o elementos de $C_\infty(A;F)$.

FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. JUAN MARIA ARIAS DE REYNA MARTINEZ titulada "DIFERENCIACION EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS"

acordó otorgarle la calificación de

Sevilla, de

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,

J. Arias de Reyna M.