JUEGOS COOPERATIVOS ESTOCÁSTICOS

Memoria presentada por

María José Zafra Garrido

para acceder al grado de doctor

Directores: **Rafael Infante Macías**
Francisco Ramón Fernández García

JULIO 2000

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

JUEGOS COOPERATIVOS

ESTOCÁSTICOS

Memoria presentada por
María José Zafra Garrido
para optar al grado de doctor

Doctoranda

Dª Maria José Zafra Garrido

Vº Bº los directores:

Rafael Infante Macías **Francisco R. Fernández García**

Sevilla, Julio , 2000

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

INTRODUCCIÓN A LA MEMORIA

La presente memoria es fruto de la convergencia de dos líneas de investigación desarrolladas por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla, y que ha dado lugar al estudio y desarrollo de la teoría de los juegos cooperativos estocásticos.

La primera línea de investigación fue la pionera en el comienzo de la investigación en el departamento en la década de los años setenta. La idea original propuesta por el profesor Infante era el desarrollo de investigación en torno a los fundamentos axiomáticos de la teoría de la decisión. Esta línea de trabajo tenía por objetivo inmediato el profundizar en varias áreas relacionadas entre sí desde la teoría de la decisión a la programación matemática y a la teoría de juegos, partiendo de los resultados que él había obtenido en sus estudios en la Universidad Complutense de Madrid. Uno de los aspectos más destacados se relacionaba con las posibilidades que presentaba el estudio de los problemas de programación estocástica, tanto como reto teórico como desde el punto de vista de sus aplicaciones. Así uno de los primeros frutos en esta línea fue la lectura de la primera tesina de licenciatura realizada en la sección de matemáticas de la Universidad de Granada, titulada "Programación estocástica: resultados y estado actual". Posteriormente fueron apareciendo publicaciones relacionadas con la teoría de juegos, la teoría de la información, etc., continuando así hasta nuestros días.

La segunda línea de investigación, aunque fuertemente relacionada con la anterior, se ha desarrollado en los últimos años al conectar la teoría de juegos con las situaciones multiobjetivo. La metodología multiobjetivo ha sido ampliamente desarrollada a lo largo de los años en nuestro departamento, sin embargo no ha sido hasta los años noventa cuando esta ha irrumpido en la teoría de juegos. El considerar que las situaciones propias de la teoría de juegos se originan en varios escenarios nos lleva de forma natural a modelos de juegos con objetivos múltiples. En esta línea de trabajo se han desarrollado numerosos trabajos de investigación, y en especial dos tesis doctorales, continuando abiertas las posibilidades de estudio en esta área.

No obstante, ninguna de las dos líneas marcadas anteriormente había considerado las situaciones de competencia bajo un ambiente de riesgo, y es por ello que esta memoria viene a poner de manifiesto como la aparente separación entre líneas de investigación es a veces superficial.

La memoria que presentamos estudia las situaciones de confrontación que se producen en teoría de juegos, conocidas como juegos cooperativos, en los cuales, aunque haya diferentes sensibilidades por parte de los jugadores, estos acuerdan cooperar para obtener un mayor beneficio que si actuasen de modo individual. Pero la teoría clásica suponía que los pagos que se producían en el desarrollo de la cooperación eran pagos escalares determinados de antemano. En esta memoria, y esta es en parte su aportación, presentamos y estudiamos aquellas situaciones en que los pagos sean no determinísticos, matemáticamente hablando los pagos sean variables aleatorias.

El capítulo primero de la memoria se dedica a explicar los orígenes e importancia de estos juegos cooperativos en ambiente de riesgo, así como de exponer las líneas fundamentales que desarrollamos a lo largo del trabajo.

Nosotros deseamos aquí explicar sólo la línea de investigación de donde se ha partido,y aunque según hemos comentado anteriormente la memoria parece estar conectada sólo con la primera línea de trabajo, donde se ubican los estudios sobre los ambientes de riesgo, sin embargo, la metodología desarrollada pone de manifiesto la gran relación que esta memoria tiene con la segunda línea de trabajo, como podrá verse a lo largo de la misma, dado que sin los estudios efectuados con anteriodad en esta línea de los juegos con objetivos múltiples, la presente memoria no podría haberse llevado a cabo.

De todo lo anterior se deduce, y así deseo expresarlo, que mi trabajo de investigación no se debe sólo a mi labor individual, sino que se debe en gran parte a todos los investigadores que me han precedido en el departamento, cuya labor a lo largo de los años ha fructificado en unos resultados, que junto con los desarrollados a lo largo de la presente memoria, nos han permitido llevar a buen puerto la presente investigación.

CAPÍTULO 1

JUEGOS COOPERATIVOS EN AMBIENTE DE RIESGO

1. INTRODUCCION

Al modelar matemáticamente situaciones reales con el fin de tomar decisiones, aparecen en el modelo un gran número de constantes que debemos determinar para poder comparar las diferentes alternativas que el decisor puede escoger. No obstante es frecuente que algunas de estas constantes no puedan ser determinadas a pesar de la experiencia acumulada que sobre la situación real se posea. En estos casos decimos que tenemos incertidumbre en nuestro modelo, aunque si disponemos de un conocimiento aproximado en forma de series de datos, solemos decir que estamos en ambiente de riesgo, lo que nos indica que sobre dichas constantes se tiene información que puede ser plasmada a través de una variable aleatoria.

Esta situación es muy frecuente en la ciencia moderna y, especialmente, la Investigación Operativa ha estudiado a lo largo de su historia muchos modelos, denominados estocásticos, en los que se toman decisiones en presencia de incertidumbre. Así son clásicos el estudio del reparto óptimo del gasoil para calefacción entre los distribuidores de un cierto país en función del clima (temperatura) invernal que se producirá a posteriori de dicha distribución, de modo que podamos asegurar la demanda aceptando un cierto riesgo, o la determinación del almacenamiento de un cierto bien perecedero que va a tener una sola oportunidad de venta en un pequeño periodo de tiempo y del que no hay posibilidad de reposición (conocido como el problema del inventario del árbol de Navidad). Muchos de estos problemas han sido formulados y estudiados a través de una rama de la Investigación Operativa conocida como Programación Estocástica, y para podernos hacer una idea de la importancia que sus orígenes tuvo, puede consultarse el trabajo de Infante R. (1976)[**1**]. El estudio del tema es de gran dificultad, aunque como siempre la investigación va haciendo aportaciones teóricas que con ayuda de los computadores permiten abordar problemas reales, ver Tijms H. (1994) [**3**].

La Teoría de Juegos no ha sido ajena al estudio de situaciones en las que los datos eran determinados a través de variables aleatorias, así pueden estudiarse capítulos de libros sobre esta teoría con el nombre de juegos estocásticos, véase Owen G. (1982) [4].

Sin embargo estos modelos estocásticos suelen representar a juegos dados en forma estratégica y sirven para modelar situaciones competitivas. Mucha menor atención se le ha prestado, aunque como veremos posteriormente algún modelo ha sido desarrollado, a los juegos en forma cooperativa.

Un modelo de juego cooperativo suele asociarse a aquellas situaciones reales en las que varios decisores compiten para obtener unos beneficios, que controlan parcialmente, y que una vez que han decidido aunar sus esfuerzos para obtener conjuntamente un mayor beneficio, deben decidir cómo repartir el mismo, en función de su aportación al logro total. Estos modelos se les conoce en Teoría de Juegos como juegos cooperativos en forma de función característica.

Aunque el desarrollo del estudio de los juegos cooperativos comienza en los inicios de la Teoría de Juegos, actualmente ha tenido un vertiginoso empuje en sus aplicaciones debido al estudio de la globalización económica en muchos campos de la Investigación Operativa. Estudiada la mejor decisión a llevar en un contexto en el que aparecen diversos agentes con diferentes intereses, se debe determinar cómo realizar el reparto del beneficio-costo que la implementación de la decisión óptima lleva consigo. Así son clásicos los modelos del juego de la producción, el juego del aeropuerto,etc.,véase Tijs S. y Otten G. (1993) [**5**].

En estos modelos cooperativos se supone que se conoce perfectamente el beneficio-costo que cada conjunto de decisores ocasionará al implementar su mejor decisión. Pero esta hipótesis dista mucho de ser siempre cierta, ya que es frecuente que el resultado de nuestras decisiones no se conozca a priori, por lo que las consecuencias de las mismas sólo se pueden medir de una forma imprecisa a través de una cierta variable aleatoria.

El objetivo de la presente memoria es estudiar estas situaciones, que denominaremos juegos cooperativos en ambientes de riesgo o simplemente juegos cooperativos estocásticos. En ellas, debido que las valoraciones vienen dadas a través de variables aleatorias que representan generalmente las posibilidades de obtener dichos valores, estamos interesados en repartir estos valores (riesgos) entre los diferentes agentes, de modo que su cooperación no sólo supone obtener unos beneficios-costos conjuntos, sino además repartir el riesgo que su cooperación conjunta conlleva.

Fundamentalmente estamos interesados en la visión de las situaciones estocásticas conocidas como "aquí y ahora" (here and now), en las que hacemos el análisis de la situación y el reparto del riesgo antes de conocer las consecuencias que nuestra decisión de cooperar acarree en el futuro. Lógicamente estudiaremos también las consecuencias que producen las valoraciones finales futuras, en la dirección introducida en la literatura por Suijs J. et al. (1999) [**6**], lo que conduce a un reajuste de las decisiones tomadas a priori, y que pueden considerarse como análisis en dos fases, como se les conoce en la literatura de programación estocástica.

Analizamos estas situaciones estocásticas también a través de los llamados modelos de valores determinísticos asociados, en los que las variables aleatorias son sustituidas por valores determinísticos tales que son equivalentes para el decisor a la variable aleatoria, pero aunque estudiaremos modelos similares al desarrollado por Granot D. (1977) [**8**], desarrollaremos otros modelos más generales en los que las valoraciones estocásticas son sustituidas por un vector de valores, lo que permite recoger con mayor precisión las preferencias que los decisores tienen por estas situaciones de riesgo. Esta aproximación es la más usual que aparece en la literatura en los problemas de I.O., aunque como sabemos la optimalidad del modelo determinístico asociado sólo pueda trasladarse al modelo estocástico bajo ciertas condiciones; recordemos el modelo cuadrático - lineal de la teoría del control.

2. JUEGOS COOPERATIVOS ESTOCÁSTICOS

Un juego cooperativo determinístico es un par (N, v), donde N es un conjunto finito y v es una función $v : 2^N \to \mathcal{R}$, que verifica $v(\emptyset) = 0$.

Los elementos de $N = \{1, 2, ..., n\}$ se denominan jugadores , los subconjuntos de N , S , coaliciones y $v(S)$ es el valor de la coalición S, conociéndose a la función $v(\cdot)$ con el nombre de función característica.

Un juego cooperativo se dice que es estocástico si las valoraciones de las coaliciones por la función característica es una variable aleatoria:

$$\boxed{v(S) = \xi_S}$$

donde ξ_S es una variable aleatoria con soporte en $\mathcal{R}$.

Como indicábamos cualquier situación real que pueda modelarse como un juego cooperativo determinístico, puede ser también modelado como un juego cooperativo estocástico al desconocer parcialmente algunas valoraciones de las coaliciones.

Citamos a continuación algunos casos en los que es más frecuente que el modelo conlleve elementos no determinísticos:

2.1. Modelo de la producción con recompensa aleatoria.

El modelo de la producción se formula como un juego cooperativo con N jugadores, en el que cada jugador proporciona al proceso de producción una determinada cantidad de recursos con el fin de obtener unos productos que serán posteriormente vendidos a un precio de mercado determinado a posteriori, pero que al plantear la cooperación es $(c_1, c_2, ..., c_p) = c$ aleatorio.

Cada jugador i dispone de unas cantidades de recursos dadas por el vector:

$$b^i = (b^i_1, b^i_2, ..., b^i_q) \quad i = 1, 2, ..., n$$

Supuesto que el modelo de producción es lineal, y que la obtención de cada unidad del k-ésimo producto, $(k = 1, 2, ..., p)$ requiere a_{hk} unidades del $h-$ésimo recurso $(h = 1, 2, ..., q)$, es decir la matriz tecnológica viene dada por

$$A = (a_{hk}).$$

Como cada coalición S puede disponer de una cantidad de recurso que llamamos b^S_h, donde

$$b^S_h = \sum_{i \in S} b^i_h \ ; \ h = 1, 2, ..., q$$

El valor de la coalición S vendrá dado por el máximo beneficio que S puede conseguir con los recursos de que dispone:

$$
\begin{aligned}
&v(S) = MAX\ c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_px_p\\
&\text{s.a.}\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p \leq b_1^S\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p \leq b_2^S\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + ... + a_{qp}x_p \leq b_q^S\\
&x_1, x_2, ..., x_p \geq 0
\end{aligned}
$$

que en el caso de ser $(c_1, c_2, ..., c_p)$ un conjunto de precios determinado $v(S)$ será un número real, pero al ser un vector aleatorio es una variable aleatoria.

Nótese que en el modelo determinístico $v\ (S)$ es un número debido a que sobre $\mathcal{R}$ hay definido un orden total entre las valoraciones asociadas a cada vector factible ($x_1, x_2, ..., x_p$).

En el caso estocástico $v(S)$ será una variable aleatoria o un conjunto de variables aleatorias, según sea el orden que definamos sobre el conjunto de variables aleatorias con soporte en $\mathcal{R}$.

Si este orden es el dado por la dominancia estocástica entre variables aleatorias tendremos un orden parcial, mientras que si las ordenamos por sus equivalentes de certeza nos produce un orden total. Ello hace que al considerar los juegos cooperativos estocásticos sea fundamental destacar el tipo de orden que deseamos emplear para la solución del problema, cosa que no es necesario en el caso determinístico ya que en esta ocasión sólo se emplea el orden natural de la recta real. Este es el motivo de que dediquemos el capítulo segundo de esta memoria al estudio de los órdenes estocásticos y sus propiedades, antes de abordar el estudio propiamente dicho de los juegos cooperativos estocásticos.

2.2. Cartera de valores de una corporación.

Es sabido como, la reunión de agentes en una corporación, puede conseguir mejores inversiones en una cartera de valores al permitir una mayor inversión, lo que ocasiona mayores beneficios con cierto control del riesgo de dicha cartera. En este caso, el valor de una corporación, o una coalición S, vendrá dado por el valor de su cartera de valores, la cual aunque pueda ser valorada por algún indicador presente, debe ser considerada globalmente en su valoración beneficio-riesgo. El objetivo de dicha corporación será conseguir un beneficio para los individuos que la componen mayor que el que ellos podrían tener de forma individual o realizando asociaciones parciales. Dichos beneficios tendrán unos riesgos que acepten repartirse, dado que ellos asumirían de forma individual un mayor riesgo.

2.3. Seguros y reaseguros.

Las compañías de seguros se agrupan para compartir riesgos lo que les permite obtener mayores beneficios. Cualquier rama del seguro tiene determinada la ley de ocurrencia de sus accidentes, la cual está determinada por las características del sector y por las condiciones que las compañías impongan.

La valoración de la cooperación $v(S)$ vendrá dada por la diferencia entre las primas obtenidas por la cooperación y los pagos que realiza en función de la ocurrencia de incidentes que se ocasionen, obteniendo mejores condiciones de mercado a través de esta cooperación que de forma individual.

Nuevamente el objetivo es el de compartir las consecuencias de las primas soportadas, lo que les da un beneficio individual mayor que el que tienen actuando separadamente.

Otras muchas situaciones, como flujo máximo aleatorio, caminos de máxima fiabilidad, rutas menos peligrosas,..., pueden modelarse en este contexto de juegos cooperativos estocásticos simplemente cuando alguno de los elementos que en ellos aparece sea de valoración aleatoria, aunque como veremos en esta memoria no todas ellas pueden son analizables analíticamente.

3. MODOS DE REPARTO

Si suponemos que las situaciones que reflejan los juegos invitan a los jugadores a cooperar, en el sentido de que se obtiene mayor beneficio asociados que permaneciendo separados, (lo que está íntimamente unido al tipo de orden que se define en el contexto), el objetivo fundamental es el repartir entre los jugadores el valor de la gran coalición $v(N) = \xi_N$.

Independientemente del tipo de comparación que efectuemos entre las variables aleatorias, en este ambiente de riesgo podemos contestar de dos formas al tipo de reparto:

a) Aquí y ahora (Here and Now) .-

Debemos repartir la variable aleatoria ξ_N , en el sentido de que los jugadores comparten el riesgo de obtener beneficios en la cooperación.

b) Espere y vea (Wait and See).-

Debemos repartir la realización de la variable aleatoria $\xi_N(w)$, en el sentido de que los jugadores sólo están interesados en los valores finales de la realización de sus beneficios.

Nosotros estudiaremos la resolución de los juegos cooperativos estocásticos en dos etapas, en una primera etapa se hace un reparto del futuro beneficio, y en una segunda etapa se ajusta este reparto hacia el beneficio final. De este modo podemos dar contestación a las diferentes situaciones que se puedan presentar en la realidad, pues en ciertos contextos los jugadores no harán uso de los valores finales ya que sólo están interesados en repartir sus riesgos y/o tener beneficios parciales a cuenta de ello, y en otros contextos la cooperación solo tendrá sentido respecto del beneficio final. No obstante, estudiaremos los procedimientos como independientes para que puedan aplicarse de forma separada o secuencial. Por ello podemos considerar tres aproximaciones diferentes en el estudio:

3.1. Soluciones en variables aleatorias.

Cuando aceptamos por solución el conjunto de variables aleatorias con soporte en $\mathcal{R}$, el conjunto de soluciones del juego cooperativo estocástico vendrá dado por aquellas asignaciones aleatorias

$$(X_1, X_2, ..., X_n)$$

tal que X_i representa el beneficio que el jugador i-ésimo recibirá, cumpliéndose

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \xi_N$$

Este concepto de solución, que consideramos matemáticamente más coherente con la teoría clásica de los juegos cooperativos determinísticos, presenta la dificultad de trabajar directamente con variables aleatorias. La aritmética de las variables aleatorias tiene un gran parecido con la de los números primos. No toda variable aleatoria puede descomponerse en suma de un número arbitrario de variables aleatorias independientes. Aunque este problema queda resuelto trabajando, como supondremos en gran parte de la memoria, con determinadas familias de leyes aleatorias conocidas como infinitamente divisibles, que tienen la propiedad que deseamos. Además como a estas familias pertenecen la ley normal y la ley de Poisson, podemos abordar muchos problemas con esta metodología. Así todos los ejemplos anteriormente planteados presentan este tipo de leyes.

3.2. Soluciones en valores ciertos.

Usualmente en los ambientes de incertidumbre se sustituyen los valores desconocidos por un valor determinístico equivalente en el sentido amplio de que el decisor es indiferente ante dicho valor y el que pueda ocasionar la situación de incertidumbre en que se vea implicado. Esta representación tiene una amplia justificación desde el punto de vista de la teoría de utilidad hasta la de objetivos fijados o preferidos como veremos posteriormente en el capítulo correspondiente.

En este caso se sustituye el valor $v(S) = \xi_S$ por $V[\xi_S]$ que es un vector de $\mathcal{R}^k$como estudiaremos, aunque los trabajos clásicos han empleado frecuentemente el caso $k = 1$.

Con ello al trabajar con valores asociados a $v(N)$, la situación en un principio conduce a estudiar el problema como juegos cooperativos vectoriales o escalares, según sea la dimensión de k, conduciendo a soluciones numéricas ya desarrolladas (véase Hinojosa M. A. (2000)[**9**]).

Las dos aproximaciones anteriores al problema son especialmente interesantes en aquellas situaciones en las que los jugadores participan de la cooperación y desean conocer su VALOR en la cooperación, en el sentido de que si desean VENDER sus DERECHOS a seguir cooperando en el juego a otro jugador cuál sería el pago justo. Estamos en situaciones similares a las que dieron lugar a la Teoría de las Probabilidades con el pago que debía hacerse si un juego de apuestas se suprimiese sin finalizar el mismo.

No obstante, puede presentarse una nueva forma de abordar el problema:

3.3. Soluciones en valores finales.

La solución que demos debe ser función del beneficio final que de $v(N) = \xi_N$ se obtenga, para que cuando $\xi_N\ (w)$ ocurra, se produzca el reparto real de los beneficios entre los jugadores. Es decir

$$X_i = f_i(\xi_N, v(\cdot))$$

con la condición

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \xi_N$$

siendo el beneficio que el jugador recibirá $f_i(\xi_N(w))$. Ello es conocido en programación estocástica como regla de orden cero.

Esta función $f_i(\cdot)$ puede considerarse como un valor de ajuste final que se produce en los dos casos anteriores entre las valoraciones a priori que se dan la participación de los jugadores y la valoración real final.

Así la forma lineal.

$$X_i = k_i + r_i[\xi_N - k(N)]$$

puede darse como una primera aproximación en donde k_i puede ser interpretado como un valor determinístico asociado al jugador i-ésimo , $k(N)$ un componente aleatorio o determinístico sobre el riesgo total asumido, y r_i la proporción que debe de ajustar dicho jugador respecto del valor final que ξ_N proyecte.

Estas tres formulaciones son estudiadas de un modo independiente a lo largo de la memoria, aunque entre sí pueden interaccionar en la búsqueda de una solución del problema, como veremos sobre los casos reales.

De todo ello se desprende la estructura que tiene la presente memoria:

En el siguiente capítulo estudiamos los diversos órdenes que podemos establecer entre los pagos aleatorios y que son de utilidad a lo largo del trabajo en los diferentes capítulos, pues el tipo de comparación entre variables aleatorias es crucial en la solución de las distintas aproximaciones.

Basándonos en estos órdenes estudiamos los tres capítulos siguientes en los que se desarrollan las tres aproximaciones al problema anteriormente mencionadas. El tercer capítulo está dedicado al estudio de las soluciones en variables aleatorias, centrando nuestra atención en el concepto clásico de core, estableciendo la caracterización de las diferentes aproximaciones al mismo a través de la dominancia de asignaciones. Estudiamos también la caracterización de la existencia de solución en los casos particulares de que las variables aleatorias que representan las valoraciones y los repartos sean variables aleatorias normales y de Poisson, con lo que la caracterización de la solución para una amplia clase de situaciones reales queda establecida, disponiéndose de procedimientos para su cálculo.

En el cuarto capítulo estudiamos las soluciones en valores ciertos, donde se analiza la solución de los juegos estocásticos a través de juegos determinísticos, presentando la novedad de que estos pueden ser tanto de naturaleza escalar como vectorial, lo que nos permite hacer análisis con equivalentes de certeza más ricos que los efectuados clásicamente.

El útimo capítulo lo dedicamos a las soluciones en valores finales, donde estudiamos el problema del ajuste del resultado final desde una óptica general, al poder considerar la misma como un juego cooperativo estocástico vectorial. Desde esta visión general pueden considerarse como casos particulares algunas aproximaciones que existen en la literatura de juegos cooperativos estocásticos.

CAPÍTULO 2

ÓRDENES ESTOCÁSTICOS

1. INTRODUCCIÓN

La posibilidad de comparación de resultados aleatorios es fundamental en la búsqueda de soluciones óptimas en los modelos que conllevan incertidumbre, aunque la noción de "mejor" no es tan intuitiva como lo es en el caso de comparación de resultados determinísticos, ya que en los órdenes que se definen aparecen elementos subjetivos de actitud que el decisor tiene ante el riesgo.

Existen, por tanto, diferentes modos de realizar estas comparaciones y como consecuencia varios tipos de órdenes, los cuales suelen ser órdenes parciales, en el sentido que entendemos que verifican las propiedades reflexiva, transitiva y antisimétrica, estableciéndose órdenes totales, como en el contexto escalar determinista, cuando se supone que exista una función de utilidad que valore la situación de riesgo o cualquier equivalente de certeza que asociemos a valores estocásticos.

Desarrollamos en este capítulo aquellos órdenes que emplearemos en el estudio de los juegos cooperativos estocásticos, lo que nos permitirá hacer comparaciones entre las valoraciones de las coaliciones y las asignaciones que a las mismas repartamos. El tipo de orden es importante en este contexto ya que a diferencia del caso escalar donde el orden era único, dependiendo del orden empleado aparecen las diferentes propiedades que los modelos presentan como pueden ser los juegos monótonos, superaditivos,.., e incluso al tipo de solución que ofrezcamos para los mismos.

Supondremos en este capítulo que las variables aleatorias X están definidas en $\mathcal{R}$ con función de densidad $f_X(\cdot)$ continua, y representemos por $F_X(\cdot)$ su función de distribución, por facilitar la redacción del capítulo, aunque la mayoría de los resultados son ciertos para cualquier tipo de variable aleatoria que se emplee. Por tanto, haremos uso de dichos resultados de una forma más genérica sin tener que redefinirlos, cuando éstos sean ciertos.

2. DOMINANCIA ESTOCÁSTICA

El orden más general que se define entre variables aleatorias, que recuerda el orden escalar, es denominado orden estocástico, siendo aquél en el que una variable aleatoria es preferida a otra variable aleatoria si tiene la primera más probabilidad de obtener valores superiores a un cierto umbral, cualquiera que sea este, que la segunda.

DEFINICIÓN 2.1. *La variable aleatoria X domina estocásticamente a la variable aleatoria Y , y lo representamos mediante $Y \prec_e X$, si para cualquier $k \in \mathcal{R}$:*

(1) $$P[X \geq k] \geq P[Y \geq k]$$

Ello refleja una preferencia fuerte por parte del decisor, ya que si las variables aleatorias representan beneficios, una variable da mayor beneficio con mayor probabilidad que la otra, cualquiera que sea el umbral de comparación que establezcamos.

Lógicamente, no podemos decir que en una realización independiente de ambas variables una sea mayor que otra, lo único que afirmamos es que siempre es más probable superar el umbral usando una variable que la otra.

La definición anterior puede escribirse utilizando la función de distribución de probabilidad ya que (1) representa que la función complementaria $\overline{F}_X(t)$ (es decir $1 - F_X(t)$) es mayor que $\overline{F}_Y(t)$, para cada valor de t ,

$$\overline{F}_Y(t) \leq \overline{F}_X(t) \text{ , } \forall\, t \in \mathcal{R} \text{ ,}$$

o bien para las funciones de distribución:

LEMA 2.1. $Y \prec_e X$ *sii* $F_X(t) \leq F_Y(t)$, $\forall t \in \mathcal{R}$

Esta relación de orden establece en el conjunto de las variables aleatorias con soporte en $\mathcal{R}$ un orden parcial.

La definición del orden a través de la función de distribución permite establecer comparaciones entre familias de variables aleatorias cuando éstas presentan una forma analítica manejable.

EJEMPLO 2.1. *Si X e Y están distribuidas exponencialmente ($Z \backsim Exp(\lambda_Z)$ si $F_Z(t)$ =1-exp$(-\lambda_Z t)$) con parámetros λ_X y λ_Y respectivamente,*

$$Y \prec_e X \ sii \ \lambda_X \ \leq \ \lambda_Y$$

lo que equivale a que $E[Y] \leq E[X]$.

Si denotamos por $I_t\ (x)$ la función de distribución de la variable aleatoria que concentra su masa en t, la condición (1) nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_t\ (x)\ dF_Y(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} I_t\ (x)\ dF_X(x)$$

y teniendo presente que el conjunto de las funciones escalonadas es denso en el conjunto de todas las funciones crecientes para las que existe la integral en $\mathcal{R}$, el teorema de la convergencia monótona de la integración nos dice que:

TEOREMA 2.2.

$$X \ {}_e\!\succ Y \ sii \ E\left[\phi(Y)\right] \ \leq E \ \left[\phi(X)\right]$$

para toda función creciente $\phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, *para la que la integral exista*

El teorema nos permite demostrar que:

•Si $E\left[X\right] < E\left[Y\right]$ no puede X dominar estocásticamente a Y

•Si $Y \prec_e X$ y $E\left[X\right] = E\left[Y\right]$ entonces $Y =_e X$

•El orden estocástico se conserva entre los estadísticos de orden, y entre los momentos si las variables aleatorias son positivas.

Este teorema es importante ya que nos dice que el orden estocástico es compatible con cualquier función de utilidad que sea creciente en los argumentos de la variable y que represente el valor que el individuo proporciona a las situaciones de riesgo, como veremos posteriormente. Desempeña el papel que los criterios de utilidad determinística tienen como condición para proporcionar elementos eficientes en los problemas con criterios múltiples.

No obstante, la comparación de las variables aleatorias a través de las funciones de distribución es difícil cuando no existe una expresión analítica, dado que deben de ser comparadas a través de todos los umbrales posibles. Estudiamos a continuación procedimientos finitos de comparación, en el sentido de que para ver la dominancia entre variables sólo es necesario testar las funciones de distribución asociadas en un número finito de puntos.

Dado que $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du$, es condición suficiente que $f_Y(u) \geq f_X(u)$ para todo u, para que sea $F_Y(t) \geq F_X(t)$ en $\mathcal{R}$, y por tanto para que $X \,_e\!\succ Y$

Ello puede ser útil en casos discretos:

LEMA 2.3. *Si las variables aleatorias X e Y están distribuidas según Poisson ($Z \sim \mathcal{P}(\lambda_z)$ si $P[Z=k] = \frac{\lambda_z^k}{k!} e^{-\lambda_z}$) con parámetros λ_X y λ_Y respectivamente:*

$$X \,_e\!\succ Y \text{ si } \lambda_Y \leq \lambda_X \text{ (es decir } E[X] \geq E[Y] \text{).}$$

Sin embargo esta condición es muy fuerte y a casi ninguna familia de distribuciones continuas se puede aplicar. No obstante partiendo de que ello es equivalente a:

$$\int_0^t (f_Y(u) - f_X(u))\, du \geq 0 \ , \forall t$$

podemos buscar un conjunto finito de puntos en el que comparar las funciones de distribución.

Siguiendo a Fernández F. R. (1976)[**11**] podemos establecer un teorema que nos permite comparar las funciones de distribución en un número finito de puntos para establecer la dominancia estocástica.

Sea

$$A[f,g] = \{x \in \mathcal{R} / f(x) = g(x)\}$$

cuando las funciones sean función de densidad de variables aleatorias, este conjunto generalmente es finito, e incluso para las familias de densidad usuales el cardinal del conjunto es menor o igual que dos, no considerando en este caso los puntos extremos de la recta real ∞ y -∞.

TEOREMA 2.4. *$X \ {}_e\!\succ Y$ sii $F_X\ (t) \leq F_Y\ (t)$ para $t \in A[f_X, f_Y]$.*

-Demostración-

$\triangle F(x) = F_Y\ (x) - F_X\ (x) = \int_{-\infty}^{x} (f_Y(t) - f_X\ (t))\ dt$, por lo que

$\lim_{x\to\infty} \triangle F(x) = \lim_{x\to-\infty} \triangle F(x) = 0.$

En cada intervalo que los puntos del conjunto $A[f_X, f_Y]$ definen, la función $\triangle F(\cdot)$ se comporta alternativamente creciente y decreciente, siendo los puntos de $A[f_X, f_Y]$ los que indican lo máximo que ha podido crecer $\triangle F(\cdot)$ en un intervalo de crecimiento o el mínimo que se ha podido alcanzar en un intervalo de decrecimiento. Son estos puntos los que nos pueden indicar, junto a las condiciones límite, si existe algún valor x en el que $\triangle F(x) < 0$, es decir $\triangle F(x) < 0$ para algún valor de la recta real sii $\triangle F(x) < 0$ para algún $x \in A[f_X, f_Y]$ y en este caso no existiría dominancia estocástica, pues debe ocurrir que $\triangle F(x) \geq 0\ \forall x$▲

Basándonos en el teorema 2.3 podemos dar condiciones muy sencillas para comprobar si se verifica la dominancia estocástica.

Dado $A[f_X, f_Y]$, podemos ordenar en $\mathcal{R}$ los elementos de dicho conjunto y le llamaremos a sus elementos $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$.

COROLARIO 2.5. *Es condición necesaria para que $X \ {}_e\!\succ Y$ que $f_X\ (t) \leq f_Y(t)$ en algún $t \in \left(-\infty,\ x_{(1)}\ \right)$ y $f_X\ (t) \geq f_Y(t)$ en algún $t \in \left(\ x_{(n)}\ , +\infty\right)$.*

-Demostración-

Dado que en el primer intervalo $f_X\ (t) \leq f_Y(t)$, la función $\triangle F(x)$ es creciente en este intervalo, luego solo puede ser que $X \ {}_e\!\succ Y$.

Pero si en el último intervalo $\triangle F(x)$ fuera creciente, siendo $lim_{x\to\infty}\ \triangle F(x) = 0$, tendría que tener un valor anterior a $x_{(n)}$ en el que $\triangle F(x) < 0$.▲

Como consecuencia del corolario tenemos:

. Si $\# \mid A[f_X, f_Y]| = 1$ existe dominancia estocástica entre ambas variables en algún sentido

. Si $\# \mid A[f_X, f_Y]| = 2$ no puede existir dominancia entre dichas variables

COROLARIO 2.6. *Sean X e Y v.a. distribuidas normalmente*

$$\left(Z \backsim N\left(\mu_Z, \sigma_Z^2\right) \ \textit{si}\ f_Z(x) = \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} \exp - \left(\frac{x-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)^2 \right)$$

con parámetros (μ_X, σ^2) , (μ_Y, σ^2) respectivamente

$$\textit{Si } E[X] \geq E[Y] \ \textit{ implica que } X \ {}_e\!\succ Y$$

Si no tienen la misma varianza no existe dominancia estocástica entre ellas.

La demostración se basa en el hecho de que en el caso de igual varianza las funciones de densidad tienen un solo punto de intersección en

$$x = \frac{\mu_Y^2 - \mu_X^2}{2(\mu_Y - \mu_X)}$$

En el caso de no tener la misma varianza, las funciones de densidad intersecan en dos puntos, por lo que no existe dominancia estocástica entre ellas.▲

También permite comparar familias diferentes

COROLARIO 2.7. *Si X se distribuye según una normal $N(\mu, \sigma^2)$ e Y según una exponencial $Exp(\lambda)$*

- *Si $\mu = 0$, $Y \ {}_e\!\succ X$ si hay un punto de corte.*

- *Si existen dos cortes no hay dominancia.*

Análoga situación tenemos si X se distribuye según una normal $N(\mu, \sigma^2)$ e Y según una uniforme $U(a, b)$.

Otro camino para comprobar que una variable aleatoria X domina estocásticamente a otra, aunque puede ser de difícil aplicación en la mayoría de las situaciones, es a través de la función inversa relativa

$$\Psi_{X,Y}(t) = F_X^{-1} F_Y(t) \quad \forall t \in \mathcal{R}$$

TEOREMA 2.8. $Y \prec_e X$ *sii* $\Psi_{X,Y}(t) \geq t$

-Demostración-

Si $Y \prec_e X$ es $F_X(t) \leq F_Y(t)$, $\forall t \in \mathcal{R}$, entonces
$F_X^{-1} F_Y(t) = inf\{z / F_X(z) \geq F_Y(t)\} =$
$= \inf\{z \geq t / F_X(z) \geq F_Y(t)\} \geq t.$

Inversamente si $\inf\{\{z / F_X(z) \geq F_Y(t)\} \geq t$ será $F_X(t) \leq F_Y(t)$, lo que equivale a $Y \prec_e X$.

3. ORDENES CONVEXOS

Para relajar el orden estocástico anteriormente definido, podemos buscar un orden en el que la clase de las funciones ϕ que interviene en la caracterización en el teorema 2.1, sea más pequeña. Teniendo presente que estamos en situaciones en las que los decisores manifiestan su agrado o aversión por el riesgo empleando funciones de utilidad convexas o cóncavas, vamos a considerar las clases de estas funciones para definir un nuevo orden.

En este caso podemos partir del teorema como caracterización del orden y dar la propiedad como teorema, puesto que el camino a seguir es similar al dado en el caso anterior.

DEFINICIÓN 3.1. *Decimos que X domina a Y según el orden convexo creciente, y lo denotaremos por $X_{cc} \succ Y$, si se verifica*

$$E[\phi(Y)] \leq E[\phi(X)]$$

cualquiera que sea la función $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ convexa creciente.

Dado que toda función convexa creciente puede ser aproximada por funciones que sean combinaciones positivas de funciones del tipo

$$\phi_a(x) = (x-a)^+ = max[0,(x-a)]$$

que son funciones convexas y crecientes, y puesto que si X $_{cc} \succ$ Y se cumplirá

$$E\left[(X-a)^+\right] \geq E\left[(Y-a)^+\right], \forall a$$

deberá ocurrir que $\int_x^{\infty} \overline{F}_X(u)\,du \geq \int_x^{\infty} \overline{F}_Y(u)\,du$, $\forall x$, supuesto que la integral existe, es por lo que podemos enunciar:

TEOREMA 3.1. *$X_{cc} \succ Y$ sii $\int_x^{\infty} \overline{F}_X(u)\,du \geq \int_x^{\infty} \overline{F}_Y(u)\,du$, $\forall x$.*

De forma similar podemos definir el orden cóncavo:

DEFINICIÓN 3.2. *Decimos que X domina a Y según el orden cóncavo creciente, y lo denotaremos por $X_{co} \succ Y$, si se verifica*

$$E[\phi(Y)] \leq E[\phi(X)]$$

cualquiera que sea la función $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ cóncava creciente.

Al razonar ahora de un modo similar podemos establecer la siguiente caracterización

TEOREMA 3.2. *$X_{co} \succ Y$ sii $\int_{-\infty}^{x} F_X(u)\,du \leq \int_{-\infty}^{x} F_Y(u)du$, $\forall x$.*

Este orden pone de manifiesto su diferencia con el anterior orden estocástico en el comportamiento de las medias, pues la igualdad de las medias junto a la dominancia entre variables no hace que estas sean equivalentes en el orden, sino que conduce a otro orden, como veremos posteriormente, conocido como orden convexo, en el que las funciones de utilidad que lo originan son sólo funciones convexas, sin verificar la condición de ser no decrecientes.

Para comprobar si se da el orden entre dos variables, es aún más complejo que en el caso anterior realizarlo directamente, pues en esta ocasión debemos calcular previamente alguna de las funciones

$$\int_x^{\infty} \overline{F}(u)\,du \ ,\text{o} \quad \int_{-\infty}^{x} F(u)\,du$$

según el orden a emplear . No obstante, podemos volver a aplicar el teorema 2.3 sobre las funciones $\overline{F}_X$ y $\overline{F}_Y$, o incluso establecer condiciones sobre f_X y f_Y.

Vamos a considerar el orden cóncavo en el estudio de las caracterizaciones de los órdenes, pero teniendo en cuenta que análogas consideraciones pueden establecerse sobre el orden convexo, pues podemos fácilmente obtener que $X \ _{cc}\succ Y$ si y sólo si $-X \prec_{co} -Y$.

TEOREMA 3.3. *$X \ _{co}\succ Y$ sii $\int_{-\infty}^{t} F_X(u)\,du \leq \int_{-\infty}^{t} F_Y(u)\,du$ para $t\in A[F_X,F_Y]$.*

La demostración es similar a la dada anteriormente.

Para el orden convexo-creciente sería

TEOREMA 3.4. *$X \ _{cc}\succ Y$ sii $\int_t^{\infty} \overline{F}_X(u)\,du \geq \int_t^{\infty} \overline{F}_Y(u)\,du$ para $t\in A[F_X,F_Y]$.*

Análogamente podemos enunciar el corolario, y por ello las consecuencias de las mismas.

Así la condición $\#\left|A[F_X,F_Y]\right| = 1$ proporciona dominancia según orden convexo creciente, lo que es conocido como "criterio de corte de Karlin, S. , Novikoff , A. (1.963)" [**12**]:

TEOREMA 3.5. *Si las v.a. X e Y con esperanzas finitas verifican*

$$E[Y] \leq E[X]$$

y existe un valor k, tal que

$$\begin{array}{rr} F_X(x) \leq F_Y(x) & x \leq k \\ F_Y(x) \leq F_X(x) & x \geq k \end{array}$$

entonces $Y \prec_{co} X$.

Análoga condición ocurre para el orden convexo. De este modo:

COROLARIO 3.6. *Si dos funciones de distribución se cortan en un solo punto, la de mayor media domina a la otra en alguno de los dos órdenes.*

Resultado semejante al que existía en la dominancia estocástica para leyes cuyas funciones de densidad se cortasen en un solo punto.

Nótese que esta condición puede darse sobre las funciones de densidad, por lo que para el criterio de corte de Karlin y Novikoff es suficiente que $\# |A[f_X, f_Y]| = 2$ debido a las condiciones límite.

El orden convexo creciente suele considerarse como un orden que tiene presente la variabilidad, dado que al ser compatible con las funciones convexas crecientes, las cuales crecen en los extremos, indica que los valores más extremos son considerados como más importantes, mientras que el orden cóncavo creciente le da más importancia a los valores centrales que a los extremos.

Veamos como las indicaciones anteriores nos permiten encontrar comparaciones entre variables aleatorias que serán de nuestro interés a lo largo de la memoria.

COROLARIO 3.7. *Para cualquier variable aleatoria X con media finita $E[X]$ se verifica que $E[X] \prec_{cc} X$*
y que $E[X] \succ_{co} X$.

COROLARIO 3.8. *Sean X e Y dos variables normales con diferente varianza, por lo que se cortan en dos puntos*
si $E[Y] < E[X]$ y $V[Y] < V[X]$ se tiene que $Y \prec_{cc} X$

si $E[Y] < E[X]$ y $V[Y] > V[X]$ se tiene que $Y \prec_{co} X$

Si las variables tienen igual varianza, por lo que se cortan en un solo punto
si $E[X] > E[Y]$ se tiene que $X \ {}_{e}\!\succ Y$.

Cuando las variables aleatorias tienen igual media, $E[X] = E[Y]$, la comparación a través del orden convexo-creciente, da lugar a otro orden denominado orden convexo, ya que es fácil demostrar que si se verifica que

$$\int_x^\infty \overline{F}_X(u)\,du \geq \int_x^\infty \overline{F}_Y(u)\,du \forall x$$

lo que nos permitía definir el orden convexo-creciente, ahora, debido a la igualdad de medias, es equivalente a que

$$E[\phi(Y)] \leq E[\phi(X)]$$

cualquiera que sea la función $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ convexa
donde las funciones no tienen que ser no decrecientes. Denotaremos este orden mediante $Y \prec_{cx} X$.

En este nuevo orden al ser $\phi(x) = x$, y $\phi(x) = -x$, funciones convexas, siempre se da la igualdad de medias , y dado que también conserva los momentos pares, se verifica que

COROLARIO 3.9. *Si $Y \prec_{cx} X$ debe de ocurrir $V[Y] < V[X]$*

Esto no se puede afirmar en general en el orden convexo creciente, ni en el orden estocástico.

De forma similar se define el orden cóncavo, y se denota $Y \prec_{cv} X$, pero en este caso es más sencilla la relación entre ambos órdenes pues

$$X \prec_{cv} Y \text{ si y sólo si } Y \prec_{cx} X$$

Para verificar este orden podemos usar los teoremas anteriores para variables con igual media.

COROLARIO 3.10. *Sea X una variable aleatoria no negativa con media finita μ, y sea Y una variable que sigue una ley uniforme en el intervalo $[0,2\mu]$, entonces*

$$Y \prec_{cx} X$$

dado que tienen la misma media, y tienen dos puntos de corte las densidades (nótese que existe una discontinuidad en el punto $x = 2\mu$, esto debe ser considerado de forma especial, véase Fernández, F. R: (1.976) [**11**]).

Al definir los órdenes a través de las funciones $\phi(\cdot)$, es fácil establecer que el orden estocástico es más fuerte que los órdenes convexos, pero dados los órdenes convexos se pueden hacer hipótesis sobre el orden estocástico del tipo:

LEMA 3.11. *$Y \prec_{cc} X$ sii existe una variable aleatoria Z tal que $Y \prec_{e} Z \prec_{cc} X$.*

Véase Shaked, M. y Shanthikumar, J. G. (1994) [**14**], que son útiles en la búsqueda de asignaciones en los juegos con pagos aleatorios.

Estos órdenes también pueden caracterizarse por la función inversa relativa.

TEOREMA 3.12. *$Y \prec_{cc} X$ si Ψ_{XY} es convexa.*

EJEMPLO 3.1. *Van Zwet R. (1.964)* [**15**] *demostró que para la familia gamma $Ga(\alpha, \lambda)$*

$$Z \backsim Ga(\alpha, \lambda), \; f_z(x) = \frac{\lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

"la función $F_X^{-1}(F_Y(x))$ es convexa si y sólo si $\alpha_Y \geq \alpha_X$", siendo $X \backsim Ga(\alpha_X, \lambda_X)$ e $Y \backsim Ga(\alpha_Y, \lambda_Y)$

Dado que $E[Z] = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ *, se deduce que*

$$si\ \alpha_Y > \alpha_X \quad y \quad \frac{\alpha_Y}{\lambda_Y} \leq \frac{\alpha_X}{\lambda_X} \quad entonces \quad Y \prec_{cc} X$$

$$si\ \lambda_Y < \lambda_X \quad y \quad \frac{\alpha_Y}{\lambda_Y} \leq \frac{\alpha_X}{\lambda_X} \quad entonces \quad Y \prec_{co} X$$

4. ÓRDENES EN VARIABLES POSITIVAS

En muchas aplicaciones las variables aleatorias involucradas son de valores no negativos puesto que representan funciones de la duración efectiva de un ítem, estando en muchas ocasiones determinadas las funciones de supervivencia $\overline{F}(x)$ a través de las conocidas como funciones de tasa de fallo r(t) , las cuales se relacionan

$$r(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \quad t \geq 0$$

Dado que

$$\overline{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(u)\, du\right\} \ , t \geq 0$$

podemos dar las propiedades de las variables aleatorias a través de esta función $r(t)$ que puede considerarse como la intensidad de fallo en t de un ítem que tiene por duración de vida una v.a. X , con función de distribución $F(\cdot)$.

Es interesante en teoría de fiabilidad estudiar las leyes de vida en función de las propiedades que tenga la función $r(t)$. Así se dice que X tiene tasa de fallo creciente si $r(t)$ es creciente en t, en cuyo caso $-log\overline{F}$ es convexa. Cuando $-log\overline{F}$ es superaditiva decimos que X es nueva mejor que usada, etc. .

Los órdenes estocásticos y convexos pueden definirse a través de estas funciones.

DEFINICIÓN 4.1. *Sean X e Y dos variables aleatorias no negativas con función de distribución absolutamente continua, y con tasas de fallo $r_X\ (t)$ y $r_Y\ (t)$ respectivamente, diremos que X domina en orden de tasa de fallo a Y, y escribimos $X\ _r\succ Y$, si* $r_X\ (t) \leq r_Y\ (t)$, $\forall t \geq 0$

Se deduce inmediatamente por la representación de $\overline{F}(t)$ dada anteriormente que

TEOREMA 4.1. $X\ _r\succ Y$ *implica* $X\ _e\succ Y$

Nótese que se define el orden nuevamente a través de una integral, por lo que pueden extenderse gran parte de los resultados vistos en los apartados anteriores, pudiendo establecerse el siguiente teorema, donde $R(t) = \int_0^t r(u)\, du$ es la tasa total (acumulada) de fallo.

TEOREMA 4.2. $Y \prec_e X$ *sii* $R_Y(t) \geq R_X(t)$, *t>0*

por lo que pueden darse condiciones más débiles sobre las tasas de fallo para que una variable aleatoria pueda dominar a otra.

Para estas variables no negativas tanto el orden estocástico, como el orden convexo-creciente implican la dominancia de momentos:

LEMA 4.3. $Y \prec_e (\prec_{cc}) X \Rightarrow E[Y^r] \leq E[X^r]$

En función de los órdenes pueden darse propiedades de las variables aleatorias

• X es de tasa de fallo creciente

sii $X\ _r\succ [X - t\ \ / X > t]\quad \forall t > 0$

sii $X + t\ _r\succ X + t'$ cualquier $t \leq t'$

lo que permite demostrar que si X e Y son variables aleatorias. independientes con tasa de fallo creciente también lo es su suma.

• Si X tiene la propiedad de ser nueva mejor que usada y $E[X] = \mu$

$$X \preceq_{cx} Exp(1/\mu)$$

Otros tipos de órdenes pueden definirse sobre variables positivas a través de transformadas que son consecuencia de órdenes anteriormente estudiados.

5. ORDEN DE DOMINANCIA E-V

La variabilidad de una recompensa aleatoria puede asociarse a la varianza que la variable aleatoria que la define posea, y por ello suele asociarse con el concepto de riesgo que la misma tiene, asociando el valor de la media a la intensidad de dicha recompensa.

Es lógico considerar el par ($E[X], V[X]$) como un indicador del beneficio que la variable aleatoria X produce al decisor, dado la frecuencia con que estos dos valores caracterizan las dominancias según los órdenes estocásticos. Esto lleva a dar un orden parcial entre variables aleatorias:

DEFINICIÓN 5.1. *Diremos que X domina a la variable Y según el orden E-V (media-varianza), y lo representaremos como $Y \prec_{EV} X$, si se verifica que*

$$E[Y] \leq E[X] \ \ y \ V[X] \leq V[Y]$$

puesto que para el decisor prima que la variable X tenga un mayor beneficio medio, el cual conseguirá con un menor riesgo, puesto que, como decíamos anteriormente, el riesgo viene asociado al valor de la varianza.

La aplicación de este orden al análisis de la cartera fue introducido por Markowitz, H. M. (1.952)[**16**], al suponer que en la elección de la inversión en una cartera de valores, la rentabilidad estaba valorada por la media y el riesgo por la varianza. Con este orden vectorial buscó y determinó el conjunto de carteras no dominadas en dicho orden (o carteras eficientes), como solución del problema de búsqueda de la cartera óptima.

Este orden puede coincidir en alguna ocasión con un orden estocástico anteriormente definido para alguna familia de variables aleatorias, aunque en principio fue creado de forma independiente. Recordemos el caso de la familia de variables aleatorias normalmente distribuidas, que aparece de forma natural en el problema de la inversión de la cartera.

En todos los órdenes estocásticos parciales que establezcamos, siempre se pueden poner contraejemplos para ver las dificultades que presentan en ciertas ocasiones, pues son simplificaciones del contexto estocástico:

Sea X la lotería que tiene por premio

$$P[X = 1\ u.m.] = \frac{1}{2} = P[X = 3\ u.m.]$$

mientras que Y es tal que

$$P[Y = 1\ u.m.] = 1$$

La variable X no domina según el orden E-V a Y, puesto que X tiene asociado el par $[2,1]_X$, mientras que Y tiene asociado el par $[1,0]_Y$. No obstante, la lotería X da siempre premios mayores o iguales que la lotería Y, por lo que debe ser preferida.

Lógicamente, estos contraejemplos pueden ser superados si se imponen otros criterios para medir el riesgo, como puede ser la probabilidad de obtener un valor mayor o igual que un cierto umbral k, el cual es muy deseado por el decisor. Así podemos hacer un orden entre variables aleatorias diciendo

DEFINICIÓN 5.2. *X domina a Y según el orden-media umbral k si se verifica $E[Y] \leq E[X]$ y $P[Y \geq k] \leq P[X \geq k]$*

Este es un orden parcial similar al anterior, pero en el que la cantidad de riesgo es controlada por el decisor, y no como ocurre con la varianza que es independiente del comportamiento del decisor.

Así en el ejemplo anterior, si el decisor está muy interesado en obtener 2 u.m. o más X domina a Y según el orden media-umbral 2, ya que X tiene asociado el par $\left[2, \frac{1}{2}\right]$, mientras que Y tiene asociado un par $[1,0]$.

Veremos en los equivalentes de certeza que los órdenes antes definidos se relacionan con ellos, a través de los valores de certidumbre vectoriales.

6. VALORES DETERMINÍSTICOS EQUIVALENTES

La búsqueda de representaciones del riesgo basándose en principios de racionalidad aceptados por el decisor han sido ampliamente desarrollados especialmente por sus implicaciones en teoría económica. Esta línea de abordar el problema se conoce por el de maximalidad de la función de utilidad esperada, y consiste en determinar una función sobre el conjunto de variables aleatorias que representan las situaciones de incertidumbre, con valores en $\mathcal{R}$, de tal modo que la esperanza de $u(X)$ nos determina un valor que resume, como en el caso del orden E-V, tanto el beneficio de X como el riesgo que conlleva.

Esta aproximación tiene su origen en el concepto de esperanza moral que J. Bernoulli estableció al estudiar la famosa paradoja de San Petersburgo. Bernouilli presenta un ejemplo en el que muestra cómo los hombres prudentes no obedecen invariablemente al principio de la esperanza matemática. Supongamos que una persona pudiera escoger entre una alternativa que dejase su recompensa fijada en una determinada magnitud y otra que cambiase de forma aleatoria su riqueza, incrementándola en $2^n - x$ ducados con probabilidad 2^{-n} para cada entero positivo n, siendo x la cantidad a pagar por participar en el juego. El beneficio que se espera es infinito

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - x) 2^{-n} = \infty$$

Por ello, el jugador, de acuerdo con el principio de la esperanza matemática, debería preferir la opción aleatoria a la del premio seguro. En la realidad, si a una persona le dieran a escoger entre las dos opciones anteriores y siendo la cantidad segura muy grande, escogería esta alternativa.

Bernouilli afirma que el valor efectivo de la riqueza de una persona no es su valor verdadero ni moral, que por ejemplo un ducado es de gran valor para un pobre y sin embargo, sería casi insignificante para un millonario. Bernouilli postula entonces que la gente trata de maximizar como valor esperado lo que se ha llamado esperanza moral. Savage afirma que operacionalmente, el valor moral de la riqueza de una persona, en lo que concierne al comportamiento ante la incertidumbre, es a lo que él llamaría utilidad de la riqueza y esperanza moral sería entonces la esperanza de la utilidad.

Posteriormente Von Neumam J. y Morgenstern O. (1.944)[**17**] en su libro “Teoría de Juegos y Comportamiento Económico” propusieron un conjunto de axiomas que el decisor aceptaría como comportamiento bajo situaciones de riesgo, lo que les permitió caracterizar el principio de utilidad esperada. Con él, para escoger entre varias variables aleatorias, basta escoger aquella que nos proporciona el mayor valor de utilidad esperada. Más tarde se ha desarrollado la idea buscando otros principios de racionalidad, véase Fishburn P. (1.982)[**18**].

El principio más elemental que puede pedírsele desde un punto de vista de racionalidad económica es que la función $u(x)$ sea no decreciente en x para todo x de su campo de aplicación $I \subset \mathcal{R}$.

Generalmente, pensando en la paradoja anteriormente mencionada, se pide que $u(\cdot)$ sea estrictamente creciente y acotada, i.e. $u(x) < u(y)$ si $x, y \in I$ con $x < y$, y existe un N tal que $u(x) \leq N$ para todo $x \in I$. Diremos que $u \in U_1$.

Lógicamente, si nuestra función verifica estas propiedades, en virtud de como definimos el orden estocástico, al escoger una variable dentro del conjunto de variables aleatorias posibles, usando el principio de máxima utilidad, esta siempre pertenecerá al conjunto de los maximales del orden estocástico que se define en dicho espacio de variables, lo que se expresa diciendo que el principio de máxima utilidad esperada es compatible con el orden estocástico.

TEOREMA 6.1. *Si* $u \in U_1$ *, la v.a.* X *que proporciona*

$$max_{X \in \chi} \ E\left[u\left(X\right)\right]$$

es una variable aleatoria no dominada estocásticamente.

El valor $E\left[u\left(X\right)\right] \triangleq \int_I u(t) f_X(t) dt$, permite asignar a la variable aleatoria X , un equivalente de certeza, el cual se define como aquella variable aleatoria degenerada en un punto $e_X \in \mathcal{R}$, que verifica:

$$u(e_X) = E\left[u\left(X\right)\right]$$

ya que representa el valor seguro, sin riesgo al no existir variabilidad, que desde los principios de racionalidad el decisor ve como equivalente al resultado que X proporciona.

La función $e_X : \chi \to \mathcal{R}$ verifica por tanto ciertas propiedades si suponemos que $u \in U_1$, al considerar el orden estocástico:

1. e_X es equivalente estocásticamente a X, es decir $e_X =_e X$

2. Es compatible con el orden estocástico, es decir,

$$Y \prec_e X \Longrightarrow e_Y < e_X$$

3. Si X es degenerada en k , $P[X = k] = 1$, entonces $e_X = k$.

Notemos que el decisor puede cambiar e_X por X e inversamente, pero no cambiará X por una cantidad inferior a e_X.

Si suponemos que el decisor dispone de una cantidad inicial z, lo cual es importante ya que la función de utilidad puede depender de ello, podemos estar interesados en pagar una

$$PRIMA \quad DE \quad RIESGO \; \pi = \pi(z, X)$$

por reemplazar una variable aleatoria X por su valor esperado $E[X]$, por lo que π representa la diferencia entre el valor esperado y el equivalente de certeza $(\pi_X = E[X] - e_X)$.
Ello se escribiría por la ecuación

$$u(z + E[X] - \pi(z, X)) = E[u(z + X)]$$

Según sea el valor de la prima de riesgo así será el comportamiento del decisor ante el riesgo.

Si $\pi > 0$ el decisor acepta un pago que es menor que el valor "justo" representado por $E[X]$ para cambiar por X ; si $\pi = 0$ el pago es el valor justo; y si $\pi < 0$ no cambiaría X por sus valores justos.

Ello se expresa diciendo que hay tres maneras de comportamiento frente al riesgo: aversión al riesgo, neutralidad frente al riesgo y afinidad al riesgo.

La clase U_1 de las funciones estrictamente crecientes permite las tres, veamos que si tomamos una postura ante el riesgo tendremos nuestra función de utilidad en una subclase de ellas que también anteriormente fue considerada.

Si suponemos que $E[X] = 0$ y que $V[X] = \sigma_X^2$, desarrollando ambos miembros de la anterior igualdad en series de Taylor, tendremos:

$$u(z + E[X] - \pi(z, X)) = u(z) - \pi u'(z) + o(z^2)$$

$$E[u(z+X)] = E\left[u(z) + Xu'(z) + \tfrac{1}{2}X^2 u''(z) + o(z^3)\right] = \\ = u(z) + \tfrac{1}{2}\, \sigma_X^2 u''(z) + o(\sigma_X^2)$$

por lo que dada la igualdad de ambas expresiones se tiene

$$\pi(z, X) = -\frac{1}{2}\sigma_X^2 \frac{u''(z)}{u'(z)} + o\left(\sigma_X^2\right)$$

Si llamamos

$$A(z) = -\frac{u''(z)}{u'(z)} = -\frac{d}{dz}\, \ln u'(z)$$

representa, al ser $\sigma_X^2 > 0$, una medida de aversión al riesgo, puesto que nos permite identificar el comportamiento frente al riesgo.

En caso de ser $E[X] = 0$ tendríamos que

$$\pi(z, X) \approx \frac{1}{2}\sigma_z^2 A(z + E[X])$$

Si escogemos $u \in U_2 = \{u \in U_1; \textit{estrictamente cóncavas}\}$, dado que suponemos las funciones derivables, por ser $u \in U_1$ es $u'(z) > 0$ en I ,y por ser estrictamente cóncavas será $u''(z) < 0$ en I , por lo que si las funciones de utilidad pertenecen a esta clase, será $A(z)$ siempre positiva, por tanto suponer que la utilidad pertenezca a dicha clase es equivalente a suponer que el decisor tendrá aversión al riesgo, como indicaron Pratt J. W. (1.964)[**19**] y Arrow K. J. (1.974)[**20**].

La anterior aproximación es intuible ya que si tenemos una variable X tal que

$$P[X = x] = \alpha \ , \ P[X = y] = 1 - \alpha \ , \ 0 \leq \alpha \leq 1$$

la aversión al riesgo consigue que

$$\alpha u(x) + (1 - \alpha) u(y) \leq u(E[X]) = u(\alpha x + (1 - \alpha) y)$$

lo que nos indica que la función de utilidad debe ser cóncava.

Esta idea intuitiva permite proporcionar métodos que por dicotomías preguntan al decisor sobre comparaciones. Conocidos los valores de las utilidades en dos puntos x_1 y x_2 , determinan la utilidad en el punto intermedio

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

al compararlo con el valor medio

$$\frac{u(x_1) + u(x_2)}{2}$$

Recordemos que en base a la desigualdad de Jensen

$$E[u[X]] \leq u[E[X]]$$

para esta clase de funciones, como indica la aversión al riesgo.

Igual que ocurría en el caso anterior, esta clase U_2 de funciones de utilidad es compatible con el orden dado por el orden cóncavo-creciente.

Esto nos permite establecer

TEOREMA 6.2. *Si $u \in U_2$, la v.a. X que proporciona*

$$max_{X \in \mathcal{X}} E[u(X)]$$

es una variable no dominada según el orden cóncavo-creciente.

Funciones de utilidad de este tipo son:

$u(x) = x^a$,$0 < a < 1$

$u(x) = \lg x$, si $I \subset (0, \infty)$

$u(x) = -e^{-ax}$, si $a > 0$, e $I \subset (b, \infty)$.

Lo que puede comprobarse a través de las propiedades de las derivadas de las funciones.

Lógicamente, el equivalente de certeza en este caso es también compatible en el sentido de las anteriores propiedades con el orden cóncavo-creciente.

Cuando lo que se acepta es que la función $A(\cdot)$ sea decreciente o lo que es equivalente, que el premio $\pi(z, X)$ sea decreciente en z, cualquiera que sea X , lo que se conoce como función de utilidad con aversión absoluta al riesgo decreciente: DARA (decreasing absolute risk aversion); define Fishburn en este caso un nuevo orden estocástico. Él llama al orden estocástico orden estocástico de primer grado y al orden cóncavo creciente orden estocástico de segundo grado, por lo que llama a este nuevo orden, orden estocástico de tercer grado.

Para ello considera la clase de funciones

$$U_3 = \{u \in U_2/\ u''' \text{ es continua, acotada y positiva}\}$$

y define el orden estocástico usando funciones ϕ de esta clase. Le denomina orden estocástico de tercer orden

DEFINICIÓN 6.1. *$Y \prec_3 X$ sii $E[\phi(Y)] \leq E[\phi(X)]$, $\phi \in U_3$.*

Lógicamente, hay una relación de inclusión entre los órdenes, estando este tercer orden caracterizado por:

$$E[Y] \leq E[X] \text{ y } \int_0^x \int_0^x \int_0^x f_Y(t)\,dt \geq \int_0^x \int_0^x \int_0^x f_X(t)\,dt\ , \forall x.$$

Pero mientras que $u \in U_3$ es una condición necesaria para tener una utilidad con aversión absoluta al riesgo decreciente, no es condición suficiente, lo que limita la aplicación del orden.

Sólo en el caso de tener igual media, las utilidades DARA manifiestan la dominancia a través de este tercer criterio. Véase Fishburn P.[**18**].

Resumiendo lo anteriormente expuesto podemos decir que dependiendo del tipo de función de utilidad que el decisor escoja frente al riesgo esta será compatible con un cierto orden estocástico, aunque lo que suele hacerse es definir la utilidad a través de las propiedades que deseamos que verifique como reflejo del comportamiento frente al riesgo.

7. CRITERIOS DE DECISIÓN EN AMBIENTE DE RIESGO

Frecuentemente se define una función R: $\chi \to \mathcal{R}$, que refleje ciertas ideas que sobre el riesgo tenga el decisor, supuesto que existe una cierta utilidad subyacente aunque desconocida.

Estos criterios pueden ser vectoriales R: $\chi \to \mathcal{R}^k$, como era el criterio E-V , u otros que posteriormente consideraremos, lo que ocurre al considerar varias funciones de utilidad conjuntamente o una función de utilidad vectorial.

Estas funciones se conocen como criterios de decisión en ambiente de riesgo y son usados con frecuencia en la resolución de problemas en los que intervienen datos estocásticos, siendo aceptados en aras de su funcionalidad y/o de los principios que verifiquen.

Los criterios que suelen emplearse son:

7.1. Criterio del valor esperado.

Este criterio viene dado por la esperanza matemática o media de los valores $J(d)$ asociados a la decisión d:

$$R(d) = \int_{\mathcal{R}} J(d)\, dP(d) = E[J(d)]$$

Generalmente se suele utilizar la notación simbólica

$$R(d) = \langle J(d), P(d) \rangle$$

Este criterio es el más operativo debido a la propiedad lineal que tiene el operador esperanza matemática que lo define, ello origina que sea el más utilizado en toda la estadística matemática.

• Verifica el principio de las preferencias absolutas, es decir, es compatible con el orden de la dominancia estocástica.

• Está plenamente justificado, si el individuo acepta la hipótesis de la utilidad de Von Neumann, pues coincide con el criterio de la utilidad esperada.

• Tiene el incoveniente de que podemos decidirnos por una distribución de media muy elevada pero con gran dispersión, con lo que tomada esta decisión como óptima, el resultado puede estar muy alejado del esperado.

Para evitar esta dificultad se utilizan otros criterios alternativos:

7.2. Criterio de mínima varianza a media acotada.

Está determinado por la variante de los resultados asociados a la decisión d, cuando la media está acotada inferiormente:

$$E[J(d)] = \int J(d) \ dP(d) \ \geq K$$

$$R(d) = \sigma^2 [J(d)] = \int J^2(d) \ dP(d) - \left\{ \int J(d) \ dP(d) \right\}^2$$

simbólicamente lo expresaríamos

$$R(d) = \left\langle J^2(d), P(d) \right\rangle - (\langle J(d), P(d) \rangle)^2 = \text{ varianza de } J(d)$$

para aquellas decisiones tales que $\langle J(d), P(d) \rangle \geq K$

Este criterio es de uso limitado, pues aunque operativamente no es complejo, presenta serias limitaciones al no verificar el axioma de preferencias absolutas.

7.3. Criterio de la media a varianza acotada.

Es una variante del primer criterio, aquí se impone una acotación para la varianza:

$$R(d) = \langle J(d), P(d) \rangle$$

para aquellas decisiones tales que, varianza de $J(d)$ sea menor que K. Este criterio elude las dificultades presentadas por los anteriores criterios, sin embargo introduce una mayor complejidad operativa debido a las restricciones.

Para eludir esta dificultad y la del anterior criterio, es de frecuente uso el siguiente criterio.

7.4. Criterio de dispersión.

Nos mide la dispersión respecto de la media

$$R(d) = E[J(d)] - K\sigma [J(d)]$$

Simbólicamente, con la notación indicada se escribe:

$$R(d) = \langle J(d), P(d) \rangle - K\sqrt{\langle J^2(d), P(d) \rangle - (\langle J(d), P(d) \rangle)^2}$$

aunque su operatividad es similar a la del criterio de mínima varianza a media acotada.

Presenta la ventaja de que el factor K es fijado por el decisor y en él puede verse una "seguridad" por parte del individuo en conseguir los valores.

Así en el caso de que cada decisión d llevase asociada una variable aleatoria $N(\mu_d, \sigma_d^2)$, el valor K del criterio de dispersión

$$R(d) = \mu_d - K\sigma_d$$

puede determinarse en razón del riesgo que el individuo desee aceptar, α , en obtener valores menores que $R(d)$:

$$\alpha = P(\xi_d \leq R(d)) = P\left(\frac{\xi_d - \mu_d}{\sigma_d} \leq -K\right) = \phi(-K)$$

de donde $K = -\phi^{-1}(\alpha)$ siendo $\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2}dy$

Además, este criterio se relaciona con un criterio de utilidad esperada frente a la función de deformación de los valores $U(z) = 1 - e^{-az}$, si las distribuciones de probabilidad son leyes normales, como se puede comprobar.

Los restantes criterios nacen como consecuencia de que la media no es buen indicador del valor que el individuo va a recibir al tomar una decisión específica en un problema de decisión bajo riesgo. Ahora se intenta eludir la dificultad del criterio del valor esperado, no rectificando el criterio, sino tomando otro estadístico, de manera que el decisor tenga una "cierta seguridad" sobre los valores a recibir, por ello los criterios restantes son subjetivos, pues depende del grado de seguridad que el individuo desee tener sobre los resultados esperados, seguridad que puede variar según sea la circunstancia en la que el decisor se encuentre.

7.5. Criterio del percentil.

Sea K_α el percentil de orden α, es decir K_α es el número tal que $P\{\xi \leq \mathrm{K}_\alpha\}=\alpha$, con α prefijado. Dadas dos alternativas d_1 , d_2 se elegiría aquella cuyo percentil correspondiente fuese mayor.

Se indica:

$$R(d) = \mathrm{K}_\alpha(d)$$

En caso de ser

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

tenemos el criterio de la mediana, el cual está siendo actualmente muy empleado en ciertos contextos.

La importancia del criterio radica en que representa muy bien la deformación subjetiva de los valores numéricos, verificando el principio de las preferencias absolutas.

Coincide con el concepto de utilidad $R - \varepsilon$, por lo que el criterio es aún más atractivo; basta suponer ciertas las hipótesis con las que el criterio es compatible para aceptarlo plenamente.

Tiene la desventaja de que no es muy operativo, ya que en ocasiones es difícil calcular K_α.

En aquellos casos en los que K_α no sea fácil de calcular podemos recurrir a ciertas modificaciones del criterio para hacerlo más operativo, aunque de forma aproximada:

La idea básica es acotar superiormente $P(\xi \leq K)$ mediante una función de K, $\Lambda(K)$,

$$P\{\xi \leq K\} \leq \Lambda(K)$$

Una vez conseguida esta acotación, determinamos K resolviendo la ecuación $\Lambda(K) = \alpha$, donde α es el riesgo que el decisor desea correr , y finalmente, tomamos $R(d) = K$ que nos sirve para comparar decisiones.

Estrechamente relacionado con el anterior criterio tenemos:

7.6. Criterio de probabilidad máxima.

$$R(d) = \alpha(d)$$

siendo α tal que $P(\xi \geq K^*) = \alpha$, con K^* dado. Este criterio es más operativo que el anterior y es empleado a veces para dar una escala de utilidad para el conjunto de decisiones.

En caso de dificultad operativa puede modificarse de forma semejante a la efectuada en el criterio anterior.

8. CRITERIOS DE DECISIÓN EN AMBIENTE DE INCERTIDUMBRE

El modelo de decisión en ambiente de incertidumbre se da cuando el decisor no conoce con seguridad el resultado asociado a cada una de las elecciones posibles que se le plantean; cada alternativa o decisión lleva asociado un conjunto de resultados de los que sucederá uno de ellos cuando el decisor escoja su decisión, pero no teniendo ninguna información sobre cuál de ellos ocurrirá.

El problema será elegir una decisión de un conjunto de decisiones $D = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$. Al elegir una decisión podemos obtener una serie de resultados dependiendo del estado en que se presente la naturaleza . Los estados son conocidos "a priori" y son disjuntos, $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, pero no conocemos las probabilidades de cada uno de ellos.

Cada par (d_i, e_j) conduce a un resultado al que le asignamos un valor numérico a_{ij}. El problema es elegir una fila o decisión de una matriz numérica que sea óptima en algún sentido prefijado, u ordenar las alternativas según algún criterio de optimización.

A continuación enunciamos los criterios o reglas de decisión, indicando los principios de racionalidad que verifican los mismos, siguiendo a Milnor J. (1954)[**21**].

8.1. Criterio de Wald.

El criterio de Wald, también es conocido por el nombre de criterio maximin. Según este criterio el decisor busca en cada fila el min a_{ij} y elige aquella decisión que maximiza el min a_{ij}. Es decir, se elige aquella decisión d tal que

$$T(d) = \max_i \; T(d_i) = \max_i \; \min_j \; a_{ij}$$

Este criterio es propio de individuos pesimistas, pues razona sobre lo peor que le puede pasar al decisor cuando toma una decisión.

El criterio de Wald es compatible con todos los principios de racionalidad excepto con el de linealidad de columnas.

Variantes de este criterio son los dos siguientes.

8.2. Criterio maximax.

Consiste en elegir aquella decisión que nos proporciona el máximo de los $\max_j \; a_{ij}$. Es decir, se elige aquella decisión d tal que

$$T(d) = \max_i \ T(d_i) = \max_i \ \max_j \ a_{ij}$$

Es propio de individuos optimistas.

8.3. Criterio minimax.

Se elige aquella decisión que nos minimiza el $\max_j \ a_{ij}$. Es decir, se elige aquella decisión d tal que:

$$T(d) = \min_i \ T(d_i) = \min_i \ \max_j \ a_{ij}$$

8.4. Criterio de Hurwicz.

Es un criterio intermedio entre los anteriores.

Se fija un índice α, $1 \geq \alpha \geq 0$, conocido con el nombre de coeficiente de optimismo-pesimismo. Una vez fijado α se elige para cada fila de la matriz el máximo M_i y el mínimo m_i y se hace una combinación convexa con ellos tomando como coeficiente de ponderación este α, eligiéndose aquella decisión que nos proporcione el mayor valor.

Es decir, según este criterio el decisor elegirá aquella decisión d tal que:

$$T(d) = \max_i \ T(d_i) = \max_i \ \alpha \ m_i + (1-\alpha) \ M_i$$

El número α dependerá de cada persona.

Si $\alpha = 1$, el criterio se reduce a elegir la decisión que proporcione el máximo de los $\min a_{ij}$, es decir, coincide con el criterio maximin.

Si $\alpha = 0$, el criterio se reduce a elegir el máximo de los $\max \ a_{ij}$, es decir coincide con el criterio maximax.

Según el criterio de Hurwicz la aleatorización de las acciones conduce a resultados absurdos, y, sin embargo, en la práctica, decisiones indiferentes se pueden aleatorizar.

Este criterio satisface todos los principios de racionalidad, excepto el de convexidad y el de linealidad de columnas.

8.5. Criterio de Savage.

Savage en lugar de razonar sobre la matriz de resultados (ganancias), lo hace sobre otra matriz que nos da lo que el decisor deja de ganar que es, a la que él llama "regret matrix" (matriz de pérdidas relativas), y a esta matriz es a la que se le aplica el criterio minimax. Razona de la siguiente forma: Si el verdadero estado en que se presenta la naturaleza es e_j y el decisor elige la decisión d_i que nos proporciona el máximo valor a_{ij} entonces no ha dejado de ganar nada pero si elige otra decisión cualquiera d_k entonces obtendría como ganancia a_{kj} y dejaría de ganar $a_{ij} - a_{kj}$. El decisor elegirá la decisión d_i que le proporcione el menor de las mayores pérdidas relativas.

El criterio de Savage es compatible con todos los axiomas excepto con el de adición de filas.

8.6. Criterio de Laplace.

Está basado en el principio de razón insuficiente. Como a priori no tenemos ninguna razón para suponer que un estado se puede presentar antes que los demás, entonces todos los estados serían equiprobables.

El criterio consiste en calcular la media de cada una de las filas de la matriz de valores numéricos y elegir la decisión que nos produzca mayor media.

Es decir,

$$T(d) = \max_i \ T(d_i) = \max_i \ \frac{a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}}{n}$$

El criterio de Laplace es compatible con todos los axiomas excepto con el de duplicación de columnas.

Con ello vemos que la elección de un criterio de decisión en ambiente de incertidumbre se relaciona fuertemente con los principios de racionalidad que el decisor desee aceptar.

CAPÍTULO 3

SOLUCIONES EN VARIABLES ALEATORIAS

1. FORMULACIÓN DEL MODELO

Un juego cooperativo estocástico (N, v) está definido por un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ y una aplicación v

$$v : 2^N \longrightarrow \chi,$$

donde χ es el conjunto de las variables aleatorias con soporte en $\mathcal{R}$, y tal que $v(\emptyset) = 0$.

La aplicación $v(S) = \xi_S$ nos indica la valoración de la potencia que la coalición tiene, en el sentido clásico que se le da en los juegos cooperativos con pagos escalares. El conjunto de todos los juegos cooperativos estocásticos será denotado por JE^n.

El concepto de solución de estos juegos cooperativos se entiende como un proceso que permita repartir entre los jugadores lo que la gran coalición puede obtener con su cooperación y que dicho reparto sea aceptable, en el sentido de que los jugadores deseen participar en la gran coalición. Existen varios tipos de solución, unos proporcionan conjuntos de repartos posibles y otros determinan un único punto solución. A lo largo de esta memoria vamos a basar nuestra solución en las proporcionadas por el core (nos referiremos a él a veces usando el término núcleo, su traducción al castellano, aunque preferimos el término inglés por no ser idéntico su significado matemático). Este fue uno de los conceptos iniciales y cuando existe, proporciona soluciones bastante robustas aceptables por los jugadores. No obstante, podríamos desarrollar la memoria, de forma análoga con otros tipos de soluciones, como fácilmente se intuye a lo largo de la misma, pero nuestro interés fundamental se centra en el desarrollo de una metodología general de los JE^n mas que en un estudio particular de cada uno de sus aspectos por lo que quedan estos abiertos, y serán objeto de estudios posteriores.

La extensión natural de la idea de asignación que se emplea en los juegos escalares para estos juegos cooperativos estocásticos es la de asignación aleatoria

$$X \triangleq (X_1, X_2, ...X_n)$$

tal que X_i representa el beneficio aleatorio que el jugador i percibirá si se forma la gran coalición, verificando el principio de eficiencia

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = v(N) = \xi_N$$

y siendo las X_i independientes entre sí.

El conjunto de todos los vectores de asignación eficientes (o preimputaciones) del juego lo representamos por $I^*(N, v)$.

Recordemos que este reparto de una variable aleatoria sólo es posible en determinadas familias de variables aleatorias, las que pertenecen a leyes infinitamente divisibles, por lo que supondremos a lo largo de la memoria que al realizar repartos aleatorios estamos sobre dichas familias de distribuciones. Esta hipótesis es bastante restrictiva, pero debido a que a esta familia pertenece la ley normal, mediante la que se expresan muchas situaciones económicas, la teoría debe ser desarrollada no sólo por su formalismo matemático sino también en aras de su aplicabilidad.

Entre todas las asignaciones del juego $(N, v) \in JE^n$, nos interesan aquellas a las que ninguna coalición pueda poner objeciones, en base a la fuerza que dicha coalición tiene. En el caso escalar ello significa que una coalición puede obtener mayores beneficios para los miembros de la coalición en la cooperación, sin embargo en el caso estocástico el concepto de mejora no puede darse por un orden total similar al considerado en el problema escalar.

En los juegos estocásticos primero hemos de considerar un orden entre las variables aleatorias que intervienen en el modelo, que será, generalmente un orden parcial, que representaremos genéricamente por $\prec_o$, y que puede ser cualquiera de los que en el capítulo anterior hemos analizado, en función del tipo de utilidad que los jugadores deseen emplear.

Partiendo del mismo, tenemos dos modos de analizar la situación, lo que nos lleva a dos tipos de conceptos de solución para estos juegos:

En el primero, no admitimos menos asignaciones que las que da la fuerza de la coalición, es decir debemos "obtener más".

En el segundo, aceptamos soluciones de compromiso que nos den pagos no peores que los que nos proporciona la fuerza de la coalición , es decir debemos "obtener no peor que".

Lógicamente ambos conceptos serán equivalentes en el caso escalar, pero en el orden $\prec_o$ nos producen diferentes aproximaciones al problema:

El primero es un orden parcial entre variables aleatorias:

"una asignación X_a es preferida a otra X_b si X_a domina a X_b según el orden dado, es decir $X_a \ {}_o\!\succ X_b$".

El segundo es una relación binaria completa (aunque no es transitiva) que nos dice que:

"una asignación X_a no es peor que otra X_b si la primera es mejor o incomparable que la segunda con el orden dado, y lo representaremos por $X_a \ {}_o\!\not\prec \ X_b$".

EJEMPLO 1.1. *Una economía de producción con propietarios y arrendatarios.*

En una economía de producción suponemos que los propietarios poseen la tierra y los labradores aportan su trabajo a la tierra que les arriendan los terratenientes.

Si un terrateniente alquila la tierra a t agricultores, el beneficio que la tierra produce es denotado por $\xi(t) \in \chi$. La función aleatoria $\xi(\cdot)$ se conoce como función de producción. Dicha función debe verificar algunas propiedades como:

1) Un propietario no puede obtener beneficio aisladamente, lo que significa que $\xi(0) = 0$.

2) $\xi(\cdot)$ es una función no decreciente, que puede ser interpretada,

2.1) $\xi(t+1) \ {}_o\!\succ \xi(t)$

2.2) $\xi(t+1) \ {}_o\!\not\prec \xi(t)$

lo que nos conduce a situaciones diferentes, que como indicabamos anteriormente, son consecuencia de la doble interpretación que el orden puede tener.

Notemos como esta función de recompensa aleatoria, que está más proxima al problema real que la función de producción determinística, nos lleva de un modo natural a un juego cooperativo estocástico al seguir los mismos pasos que el caso determinístico dado por Driessen [**10**].

Si $N=\{1,2,...,m+1\}$ *con 1 como el terrateniente y 2,...,m+1, los m campesinos, la situación puede ser formulada como un juego cooperativo estocástico* $(N,v) \in JE^{m+1}$ *siendo*

$$v\,(S) = 0 \;\; si \quad 1 \notin S$$

$$v\,(S) = \xi\,(|S|-1) \;\; si \quad 1 \in S$$

que analizaremos posteriormente.

A este tipo de modelo pertenece el problema de la cartera de valores , en el caso de que suprimamos el jugador 1, al considerar que no existe un jugador veto. También está este modelo fuertemente relacionado con el juego de la producción.

La consideración del tipo de orden es muy importante ya que influye en conceptos básicos de la teoría de juegos. dándonos dos versiones de las mismas.

Empleamos $\boxed{\succ} \in \{_o\succ,\ _o\not\succ\}$ para indicar cualquiera de las relaciones antes definidas, $_o\succ$ ó $_o\not\succ$, para referirnos a situaciones aplicables a cualquiera de las dos aproximaciones.

El juego $(N,v) \in JE^n$ cooperativo estocástico puede tener propiedades especiales en relación con el comportamiento de la función carasterística que lo define y del tipo de orden empleado, así se dice:

- Monótono si $\quad v\,(S) \;\; \boxed{\prec} \;\; v\,(T)\ ,\ S \subset T \subset N.$

- Cero- monótono si
  $v(S)+\sum_{i\in T-S} v(\{j\}) \quad \boxtimes \quad v(T) \ \ , \ \ S\subset T\subset N.$

- Superaditivo si
  $v(S)+\ v(T) \boxtimes \ v(S\cup T) \ \ , \ S,T\subset N \ ,S\cap T\neq\emptyset.$

Análogamente al caso escalar, si v y $w\in JE^n$, y $\alpha\in\mathcal{R}$. Los juegos n-personales $v+w$ y αv se define

-$(v+w)(S)\triangleq v(S)+w(S) \quad S\subset N.$

-$(\alpha v)(S)\triangleq \alpha v(S) \quad S\subset N.$

Lo que nos indica que el conjunto de juegos JE^n, respecto de las operaciones definidas, es un espacio vectorial.

Los órdenes empleados deben ser compatibles con la estructura de espacio vectorial. Recordemos que la dominancia estocástica, en base a su teorema de caracterización, es compatible con cualquier función creciente, en el sentido de que si g es una función creciente

$$X \ {}_e\!\succ Y \ \Rightarrow \ g(X) \ {}_e\!\succ g(Y)$$

En especial será compatible con las operaciones definidas en el espacio vectorial.

Análogamente, y por la misma razón , el orden convexo creciente será compatible con las funciones convexas crecientes, mientras que el orden cóncavo creciente lo será con las funciones cóncavas crecientes.

Todos ellos son compatibles con la suma, es decir, son cerrados bajo convoluciones.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

Las preimputacions sólamente verifican la propiedad de la eficiencia, sin embargo podemos imponerles, siguiendo las líneas de la teoría de juegos escalares, los principios de racionalidad individual y colectiva.

Un punto crucial en el estudio de los juegos cooperativos estocásticos es extender la racionalidad del orden total escalar a los órdenes analizados en el capítulo anterior. Para ello, debemos cambiar el orden completo $\leq$ de $\mathcal{R}$, donde obtener más era equivalente a no obtener menos , para la comparación entre pagos laterales y los valores de la función característica, por los órdenes parciales dados a través de los órdenes estocásticos anteriormente propuestos en el conjunto de todas las variables aleatorias χ. Esta idea sencilla nos conduce a la siguiente reformulación de los principios de racionalidad y de dominancia a través de coaliciones, dependiendo del orden $\boxed{\trianglerighteq} \in \{_o \not\succ, _o \succ\}$, que empleemos.

2.1. Racionalidad individual.

X verifica el principio de racionalidad individual si

$$X_i \ \boxed{\trianglerighteq}\ \xi_i \quad, \forall i \in N.$$

Aquellas asignaciones que verifican la racionalidad individual se denominan imputaciones, y su conjunto se denota por $I\left(N, v, \boxed{\trianglerighteq}\right)$.

Las imputaciones $I\left(N, v, \boxed{\trianglerighteq}\right)$ cuando se emplea el orden fuerte $_o\succ$ se les llama imputaciones de preferencia, y son representadas por

$$I\left(N, v, \ _o\succ\right).$$

A esta clase pertenece una asignación o preimputación , si todo jugador i, $i \in N$, recibe un pago mejor que el que él puede asegurarse actuando aisladamente.

En el caso en que usemos el orden débil $_o \not\succ$ a las imputaciones se les llama imputaciones de no dominancia, y son representadas por $I\left(N, v, \ _o\not\succ\right)$. En ellas un jugador no puede recibir un pago peor de lo que él puede asegurarse.

Se verifica

$$I^*\left(N, v\right) \supseteq I\left(N, v, \ _o\not\succ\right) \supseteq I\left(N, v, \ _o\succ\right)$$

Ejemplo 2.1. *Sea una economía de producción en la que no hay propietarios, dada a través de los socios de una cooperativa, y en la que*

$$v(S) = \xi_S$$

es una variable aleatoria normalmente distribuida $N(\mu_S, |S|\,\sigma^2)$, *por lo que tenemos un* JE^n. $v(N)$ *es una* $N(\mu_N, |N|\,\sigma^2)$, *y cada individuo tiene por valor* $v(i)$, *una ley* $N(\mu_i, \sigma^2)$.

Se deduce que cualquier reparto de la forma X_i = *variable aleatoria* $N(x_i, \sigma^2)$, *es una preimputación del juego si* $\sum_{i\in N} x_i = \mu_N$, *aunque pueden existir otro tipo de asignaciones.*

Si empleamos el orden dado por la dominancia estocástica, las asignaciones anteriores son imputaciones de preferencia si:

$$x_i \quad > \quad \mu_i \ , \ i \in N$$

dada la dominancia para este tipo de leyes.

Las restantes preimputaciones no pueden ser imputaciones de preferencia aunque verifiquen la anterior condición, pues X_i *no dominaría estocásticamente a* ξ_i. *No obstante, estas preimputaciones que reparten la varianza de otro modo, son imputaciones de no dominancia pues siempre será*

$$X_{i\ e} \not\succ \xi_i \ i \in N$$

En este caso al tomar los repartos dentro de las leyes normales, el conjunto de preimputaciones está dado por las imputaciones de no dominancia. Como fácilmente puede imaginarse, este no es un caso frecuente en los juegos estocásticos▲

Las asignaciones e imputaciones poseen propiedades aceptadas por los jugadores, pero éstas no son igualmente deseables desde el punto de vista coalicional.

Diremos que una asignación Y domina individualmente a X a través de la coalición S, y representaremos por $Y \overset{S}{dom}\, i_{\square}\, X$, dependiente del orden $\square$, si

$$Y_i \quad {}_o \succ X_i, \quad i \in S$$

$$Y(S) \ \square\ v(S)$$

Esta definición indica que la coalición puede recibir más , y cada individuo mejora. Así los individuos de dicha coalición desean la asignación Y a la X.

También podemos definir la dominancia diciendo que dado un reparto eficiente X en la gran coalición existe un reparto eficiente Y^Sdel valor que puede llegar a tener la coalición S, de modo que en este reparto todos los miembros de la coalición reciben mejor pago que en el reparto de la gran coalición. Lo que pone de manifiesto de una forma más directa que en dicho caso los miembros de la coalición no tienen incentivos para unirse a este pago de la gran coalición.

Análoga definición se puede dar en el conjunto de las imputaciones.

Ello nos hace pensar en que se puede mejorar según coaliciones dentro de la clase de las asignaciones y/o imputaciones, y esto nos lleva a definir:

2.2. Racionalidad colectiva.

X verifica el principio de racionalidad colectiva si

$$X(S) \boxed{\succeq} \quad \xi_S \quad , \forall S \subseteq N$$

donde

$$X(S) = \sum_{i \in S} X_i$$

Este segundo principio engloba al primero, pero como veremos los juegos estocásticos pueden verificar el principio de racionalidad individual, en el sentido de que existan asignaciones eficientes que verifiquen dicho principio, pero es frecuente encontrar situaciones donde este segundo principio no se verifique, al afectar a un mayor número de desigualdades o condiciones.

NOTA 2.1. *A lo largo de la memoria* $X(S)$ *será escrita en ocasiones como* X_S *o* X^S *cuando la notación no dé lugar a error en el contexto, pero entendiendo que ambas notaciones son equivalentes.*

EJEMPLO 2.2. *En el caso anterior de la cooperativa valorada por variables aleatorias normales, teníamos* N *condiciones que debían verificarse para que se diese la racionalidad individual. Para la racionalidad colectiva tenemos* $2^N - 1$ *condiciones*

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \mu_S \ , \ \forall S, \ S \subset N$$

Si μ_S se expresara de una forma similar a la varianza, $\mu_S = |S|\,\mu$, se tendría que las X_i, variables aleatorias normales, $N(\mu, \sigma^2)$ serían, trivialmente, las únicas que verificarían las condiciones bajo el orden ${}_e\succ$ dado que las desigualdades serían

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in S} \mu_i \ , \ \forall S, \ S \subset N$$

En cambio no sería la única solución bajo la relación ${}_e\not\succ$.▲

Para buscar las asignaciones más estables en el sentido de que ninguna coalición pueda ofrecer una asignación alternativa a la que se propone, es deseable que no se verifique la existencia de asignaciones "mejores" que la propuesta.

2.3. Dominancia coalicional entre asignaciones e imputaciones.

Sean dos asignaciones eficientes X e Y, y S una coalición del juego.

Decimos que Y domina a X según la coalición S empleando el orden $\boxed{\succ}$, si

$$Y(S)_o \succ X(S) \quad y \quad v(S) \quad \boxed{\succ} Y(S)\,,$$

lo que será denotado por $Y \ dom^{S}_{\boxed{\succ}}\, X$.

Según el orden $\boxed{\succ}$ que empleemos llegaremos a los diferentes conjuntos de soluciones estables: soluciones estables estocásticas, soluciones estables cóncavo-crecientes, etc.

Puesto que habíamos definido la dominancia a través de los individuos de la coalición, debemos buscar la relación entre la dominancia definida de forma individual y la dada de forma coalicional.

TEOREMA 2.1. *Dada una asignación X del juego $(N,v) \in JE^n$. Son equivalentes*

1) $\exists\, Y \in \ I^*(N,v) \ / \ Y \ dom^{S}_{i\boxed{\succ}}\, X$

2) $\exists\, Y \in \ I^*(N,v) \ / \ Y \ dom^{S}_{\boxed{\succ}}\, X$

3) $X(S) \boxed{\prec} v(S)$

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$

Si $\exists\, Y \in I^*(N,v)$ tal que $Y \; dom^{S}_{\succeq} \; X$ es porque

1.- $Y_i \;\; {}_o\!\succ X_i, \quad \forall i \in S$

2.- $Y(S) \preceq v(S)$

Por tanto,

$$Y(S) = \sum_{i \in S} Y_i \;\; {}_o\!\succ \;\; \sum_{i \in S} X_i = X(S)$$

dado que el orden es compatible con la suma y al ser $Y(S) \preceq v(S)$ resulta que $Y \; dom^{S}_{\succeq} \; X$

$2 \Rightarrow 3$

Como $X(S) \prec_o Y(S) \preceq v(S)$ resulta que $X(S) \preceq v(S)$

$3 \Rightarrow 1$

Sea $D = v(S) - X(S) \succeq 0$, existe , por ser los órdenes densos , un vector $\widetilde{D}$ tal que

$$D \succeq \widetilde{D} \;\; {}_o\!\succ 0$$

Si definimos $Y = (Y_i)_{i \in N}$ tal que

$$Y_i = X_i + \frac{\widetilde{D}}{|S|} \;, \; \forall i \in S$$

$$Y_i = X_i - \frac{\widetilde{D}}{|-S|} \;, \; \forall i \notin S$$

Y es una asignación al serlo X, $Y(N) = X(N) = v(N)$

Además $Y_i \;\; {}_o\!\succ \; X_i, \forall i \in S$ e $Y(S) = X(S) + \widetilde{D} \preceq X(S) + D = v(S)$

resultando que $Y \; dom^{S}_{\succeq} \; X$.▲

El conjunto de todas las imputaciones no dominadas por asignaciones, que lo denotaremos por INDA$(N, v, \succeq)$, va a desempeñar un papel muy importante en la caracterización de soluciones de los juegos cooperativos valorados por elementos pertenecientes a espacios vectoriales con un orden parcial entre sus elementos.

De modo similar se puede establecer dentro de las clases de imputaciones tanto de preferencia como de no dominancia una equivalencia entre la dominancia por individuos y por coaliciones.

TEOREMA 2.2. *Dada una imputación* $X \in I(N, v, \boxed{\succ})$ *del juego* JE^n, *son equivalentes*

1.- $\exists\, Y \in I(N, v, \boxed{\succ}) \,/\, Y \ \overset{S}{dom}\, i_{\boxed{\succ}} \ X$

2.- $\exists\, Y \in I(N, v, \boxed{\succ}) \,/\, Y \ \overset{S}{dom}_{\boxed{\succ}} \ X$

La demostracíon es similar a la dada para el teorema anterior, aunque ahora debemos construir una imputación en lugar de una asignación.▲

El conjunto de imputaciones no dominadas, que será denotado por IND$(N, v, \boxed{\succ})$,tiene un papel importante en Teoría de Juegos escalares determinísticos, y como veremos desempeñan un papel destacado en el concepto de soluciones de los juegos estocásticos en algunas clases de juegos.

2.4. El core como concepto de solución.

Consideremos estos conjuntos de asignaciones y/o imputaciones no dominadas y vamos a ver como se relacionan con un concepto que desempeña un papel angular en la Teoría de Juegos, como es el de core.

Este conjunto está definido a través de las imputaciones eficientes que verifican los principios de racionalidad, i.e.,

$$C(N, v; \boxed{\succ}) = \{X \in I(N, v) \,/\, \ X_S \boxed{\succ} \xi_S \ , \forall S \subset N\}$$

Este conjunto puede ser vacío, pero cuando no lo es, sus imputaciones son aceptadas por los jugadores como soluciones del juego, debido al principio de racionalidad que verifica para toda las coaliciones. Por ello uno de los objetivos de la Teoría de Juegos es caracterizar este conjunto, como haremos posteriormente. Dependiendo de la interpretación que demos al orden tendremos dos conceptos de core :

- El core cuando se emplea el orden ${}_o\succ$, que lo representamos por $C(N, v; \ {}_o\succ)$, y lo denominaremos core de preferencia

• El core cuando se emplea el orden ${}_{o}\not\succ$, sobre el conjunto de todas las imputaciones, que lo denotaremos por $C\left(N,v;\ {}_{o}\not\succ\right)$, lo denominaremos core de no dominancia.

Lógicamente ocurre que $C\left(N,v;\ {}_{o}\succ\right) \subseteq C\left(N,v;\ {}_{o}\not\succ\right)$, debido a las propiedades de las relaciones binarias que los sustentan.

Pueden estudiarse otros conceptos de solución para estos juegos JE^{n}, tales como

• $\varepsilon-$ core.
• Nucleolo.
• Valores

En esta memoria nos centraremos en el core, pues éste estará caracterizado en base a los conceptos de no dominancia como estudiamos a continuación. En el caso de ser vacío o desear escoger entre varias soluciones podemos estudiar el $\varepsilon-$ core del juego

$$C\varepsilon\left(N,v,\boxed{\succ}\right) = \left\{X \in I\left(N,v\right)\ /\ X_{S} \boxed{\succ} \xi_{S} - \varepsilon\ ,\ \forall S \subset N\right\}$$

aunque el estudio de estos y otros conceptos seran objeto de posteriores estudios.

Debemos analizar separadamente la dominancia según el orden ${}_{o}\succ$ y el ${}_{o}\not\succ$, sobre el conjunto de todas las asignaciones del juego, $\mathrm{I}^{*}\left(N,v\right)$, lo que nos permitirá demostrar:

1.- El conjunto de imputaciones no dominadas por asignaciones según ${}_{o}\not\succ$, INDA$(N,v;_{o}\not\succ)$ coincide con el conjunto clásico de core cuando se emplea el orden ${}_{o}\succ$,$C\left(N,v;\ {}_{o}\succ\right)$, core de preferencia.

2.- El conjunto de imputaciones no dominadas por asignaciones según ${}_{o}\succ$, INDA$(N,v;_{o}\succ)$ coincide con el concepto de core cuando se emplea el orden ${}_{o}\not\succ$, sobre el conjunto de todas las imputaciones, $C\left(N,v;\ {}_{o}\not\succ\right)$, core de no dominancia.

Vamos a realizar estas caracterizaciones para cualquiera que sea la valoración del juego siempre que estos pertenezcan a un conjunto parcialmente ordenado y denso, en el que hay definida una estructura de espacio vectorial compatible con dicho orden, por lo que los resultados que obtengamos serán no sólo aplicables a los juegos con pagos aleatorios sino a una clase más amplia de situaciones.

3. JUEGOS VALORADOS EN CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS.

Supongamos que $v(S) \in A$, siendo A un conjunto de elementos en los que podemos hacer comparaciones entre cualquier par de elementos que escojamos y que tiene definidas dos operaciones ($+$ y $\cdot$) que le confieren la estructura de espacio vectorial.

Siguiendo a Roubens, M. y Vincke, P. (1985)[**22**]:

• El subconjunto de los pares ordenados $(a,b) \in A \times A$ en los que podemos decir que "a es preferido a b", se denomina RELACIÓN DE PREFERENCIA y la representaremos por P , es decir, $a\ P\ b$.

• El subconjunto de pares (a,b) en los que consideramos que "a es equivalente a b", en el sentido de que nos son indiferentes, o nos da igual escoger uno que otro, se denomina RELACIÓN DE EQUIVALENCIA o de indiferencia, y la representaremos por E, es decir, $a\ E\ b$.

• Por último, el subconjunto de pares (a,b) en los que no podemos establecer la comparación entre sus elementos para elegir uno como más preferido, es decir "a es incomparable con b", se denomina RELACIÓN DE INCOMPARABILIDAD, y la representaremos por I, es decir, $a\ I\ b$.

Por ello una estructura de preferencia en A es una tripleta (P,E,I) de relaciones sobre A tal que:

- P es asimétrica

- E es reflexiva y simétrica

- I es irreflexiva y simétrica

- $P \cup E \cup I$ es fuertemente completa.

Dicha estructura de preferencia puede caracterizarse mediante la relación binaria R

$$a\ R\ b \ \textit{sii} \ a\ (P \cup E)\ b$$

Recibiendo R la interpretación de relación de preferencia en sentido amplio, y verifica:

- R es reflexiva
- R es antisimétrica sii
E se reduce a los pares idénticos $\{(a,a)\ ,\ \forall a \in A\}$
- R es transitiva sii
P es transitiva, E es transitiva y $PI \cup IP \subset P$
- $E = R \cap \overline{R}$
- $I = R^c \cap R^d$
siendo
$a\ R^c b$ sii no $a\ R\ b$, $a\ \overline{R}\ b$ sii $bR\ a$ y , $a\ R^d b$ sii no $b\ R\ a$.

Debido a que en nuestras estructuras de preferencia $I \neq \emptyset$, si el conjunto que E define está formado por los pares $\{(a,a)\ ,\ \forall a \in A\}$ sólamente, y $P^2 \subset P$ decimos que nuestra estructura de preferencia es un orden parcial, en cuyo caso R es reflexiva, antisimétrica y transitiva (orden parcial estricto).

Pero si sólo podemos afirmar que $P^2 \subset P$, $E^2 \subset E$ y $(PE \cup EP) \subset P$ decimos que nuestra estructura de preferencia es un cuasi orden parcial, en cuyo caso R es reflexiva y transitiva. Estas serán las hipótesis más generales con lasque trabajaremos para poder incluir en dicha estructura de preferencia a los órdenes estocásticos con los que desarrollamos esta memoria.

Suponemos pues en lo que sigue, que en A tenemos una estructura de preferencia (P,E,I) que es un cuasi orden parcial, y además verifica la siguiente propiedad:

Propiedad del orden denso.

$$a\ R^d\ b\ \Rightarrow \exists c \in A\ ,\ a\ R^d\ c\ P\ b$$

Dado un juego (N,v) tal que $v(\cdot)$ toma valores en A con la estructura de preferencia anteriormente definida, establecemos:

$$I^*(N,v) = \left\{ (a_1, a_2, ..., a_n) \in A^n \ /\ \sum_{i=1}^{n} a_i = v(N) \right\}$$

el conjunto de asignaciones eficientes del juego.

Vamos a buscar en este conjunto asignaciones con propiedades especiales, siguiendo la línea clásica de la teoría de juegos cooperativos anteriormente señalada. Así definimos el conjunto de imputaciones como aquel subconjunto de $I^*(N,v)$, en el que cada individuo i recibe un pago a_i que no es "peor" que $v(i)$, es decir

$$a_i \ \left(R^d \cup E\right) \ v(i) \ , \forall i \in N$$

con lo que escribimos

$$I(N,v) = \left\{a \in I^*(N,v) \ / \ a_i \ (R^d \cup E) \ v(i) \ , \forall i \ \right\}$$

los cuales verifican un cierto principio de racionalidad individual, al aceptar sólo pagos que no le perjudiquen. Podemos hacer notar que $R^d = P \cup I$.

En este conjunto de imputaciones establecemos una relación de dominancia según las coaliciones $S \subset N$ del juego, en el sentido de que sean consideradas sólo aquellas imputaciones que las coaliciones no pueden mejorar. Dado que una coalición tiene una fuerza medida por $v(S)$, la aportación a dicha coalición

$$a(S) = \sum_{i \in S} a_i$$

debe ser la que nos indique si dicha coalición tiene fuerza para conseguir mejores asignaciones.

Este concepto puede ser valorado por dos vías:

1) $v(S) \ R \ a(S)$

2) $v(S) \ R^d \ a(S)$

que podemos indicar como valoración estricta para la primera, pues nos dice que la coalición tiene fuerza para mejorar cuando su valoración sea "superior" a lo que le ofrecen, mientras que la segunda será una valoración en sentido amplio, pues la coalición puede mejorar si lo que le ofrecen "no es mejor" que la fuerza que posee.

Emplearemos la notación $\boxed{R}$ cuando sea cualquiera de ellas, R o R^d, como hacíamos cuando trabajábamos con los órdenes estocásticos.

Definimos la dominancia según una coalición S:

DEFINICIÓN 3.1. $a \; dom^{S}_{\boxed{R}} \; b$ *sii* $a(S) \;\; P \; b(S) \;\; y \;\; v(S) \; \boxed{R} \; a(S)$

3.1. Relación entre dominancia individual y coalicional.

Una vez definida la dominancia coalicional, nos interesa conocer su relación con la dominancia dada por los individuos de la coalición

DEFINICIÓN 3.2. $a \; dom \; i^{S}_{\boxed{R}} \; b$ *sii* $a_i \; P \; b_i \; , \forall \; i \in S, \; y \;\; v(S) \; \boxed{R} \; a(S)$

esto nos indica que los individuos de la coalición mejoran individualmente al mejorar la coalición.

Este principio es equivalente al dado anteriormente como se establece en el siguiente teorema

TEOREMA 3.1. *Sea* $b \in I^*(N,v)$, *son equivalentes*

1) $\exists \; a \in I^*(N,v) \; / \; a \; dom \; i^{S}_{\boxed{R}} \; b$

2) $\exists \; a \; / \; a \; dom^{S}_{\boxed{R}} \; b$

3) $v(S) \; \boxed{R} \; b(S)$

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$

Si $\exists \;\; a \; / \;\; a_i \; P \; b_i \; \forall \; i \in S$ y $\; v(S) \; \boxed{R} \; a(S)$

resulta que $a(S) \;\; P \; b(S)$ al ser el orden compatible con la estructura de espacio vectorial y por ello $a \; dom^{S}_{\boxed{R}} \; b$.

$2 \Rightarrow 3$

Como

$$a(S) \;\; P \; b(S) \;\; y \; v(S) \; \boxed{R} \; a(S)$$

se sigue que $\; v(S) \; \boxed{R} \; b(S)$

$3 \Rightarrow 1$

Sea $d = \; v(S) \;\; - \;\; b(S)$ por lo que $d \; \boxed{R} \; 0$

al ser un orden denso $\exists \; c$ tal que $\; d \; R^d \; c \; P \; 0$

definimos a tal que

$$a_i = b_i + \frac{c}{|S|} \;\; \forall i \in S$$

$$a_i = b_i - \frac{c}{|-S|} \; \forall i \notin S$$

por lo que a es una asignación, verificando que $a_i \quad P \quad b_i \; \forall i \in S$ y que $v(S) \; \boxed{R} \; a(S)$.▲

Basándonos en esta relación de preferencia, podemos definir el conjunto de las imputaciones no dominadas por asignaciones:

$$INDA\left(N, v, \boxed{R}\right) = \left\{ a \in I(N,v) \;\; / \; \nexists S \; , \, b \in I^*(N,v) \, , \; b \;\; \overset{S}{dom_{\boxed{R}}} \; a \right\}$$

que nos proporciona el conjunto de imputaciones frente a las cuales ninguna coalición puede verse con “fuerza” para no aceptar una de tales como solución del juego.

3.2. El core y su caracterización.

El concepto de solución en Teoría de Juegos, no obstante, viene dado generalmente a través del core, el cual se define buscando las asignaciones que proporcionen “más” valor a toda coalición que lo que ellas puedan garantizarse por sí mismas.

Como en el caso estocástico esto se puede considerar a través de R o R^d con lo que definimos el core

$$C\left(N, v, \boxed{R}\right) = \{a \in I(N,v) \; / \; a(S) \boxed{R} \, v(S) \; , \forall S \subset N\}$$

Este concepto está relacionado con el dado anteriormente por INDA, pero lo más importante es que se da la equivalencia entre ellos, aunque según el concepto de mejora que tomemos

$$\boxed{R} = \left\{R, R^d\right\}$$

cada orden caracteriza la propiedad para el orden contrario

TEOREMA 3.2.

$$INDA(N, v, R) = C(N, v, R^d)$$

Demostración.

Supongamos que $a \notin C\left(N, v, R^d\right)$ por lo que $\exists\ S$ para la que no se verifica que

$$a\left(S\right)\ R^d\ v(S).$$

Pero ello equivale a que $v\left(S\right)\ R\ a\left(S\right)$. Al ser el orden denso, existe b verificando

$$v\left(S\right)\ R\ b\left(S\right)\ P\ a(S)$$

lo que nos indica que $a \notin INDA\ (N, v, R)$.

Recíprocamente si $a \notin INDA\ (N, v, R)$ debe existir S y $b \in I^*\left(N, v\right)$ verificándose

$$v\left(S\right)\ R\ b\left(S\right)\ P\ a(S)$$

Se sigue que $v\left(S\right)\ P\ a\left(S\right)$ y por tanto no se da que $a\left(S\right)\ R^d\ v\left(S\right)$ lo que nos dice que

$$a \notin C\left(N, v, R^d\right)$$

▲.

El teorema nos indica que las imputaciones del núcleo de dominancia $C\left(N, v, R^d\right)$ se obtienen al imponer la dominancia según R, el cuasi orden parcial, en el conjunto de todas las asignaciones posibles del juego. En este núcleo, si no es vacío, podemos considerar dos tipos de imputaciones al descomponer $I\left(N, v\right)$ según verifiquen P ó I , es decir

$$I\left(N, v\right) = I\left(N, v, P\right)\ \cup\ I\left(N, v, I\right)$$

donde

• $I(N, v, P) =$ imputaciones de preferencia $= \{a \in I^*\left(N, v\right) / \ a_i\ P\ v\left(i\right)$, $\forall i\}$

• $I(N, v, I)$ = imputaciones de no dominancia $=\{a \in I^* \,(N, v) \;/\; \exists i \;\, a_i \;\, I \;\, v\,(i) \;\}$

Análogamente podemos caracterizar el llamado core de preferencia:

TEOREMA 3.3. $INDA(N, v, R^d) = C(N, v, R)$

Demostración.

Supongamos que $a \notin INDA(N, v, R^d)$ por lo que existirá una S y un $b \in I^* \,(N, v)$ de modo que

$$v(S) \;\, R^d \;\, b(S) \;\, P \;\, a(S)$$

lo que nos indica que no $a\,(S) \;\, R \;\, v(S)$ y $a \notin C(N, v, R)$.

Recíprocamente, si $a \notin C(N, v, R)$ es porque existe $S \subset N$ tal que no $a(S) \;\, R \;\, v(S)$

por lo que $v(S) \;\, R^d \;\, a(S)$.

Por la propiedad del orden denso existirá un $b(S)$ tal que

$$v(S) \;\, R^d \;\, b(S) \;\, P \;\, a(S)$$

lo que nos indica que $a \notin INDA(N, v, R^d)$▲

Notemos que en este caso la dominancia fuerte dada por R^d obliga a que, aunque se haya definido el núcleo sobre las imputaciones más generales $I(N, v)$, las que definen el núcleo $C(N, v, R)$ estén dentro de la clase de las imputaciones de preferencia $I(N, v, R)$.

4. APLICACIÓN A LOS JUEGOS COOPERATIVOS ESTOCÁSTICOS

4.1. Teoremas de caracterización.

De todo lo anterior deducimos que para los juegos estocásticos, al ser ${}_o\succ$ un cuasi orden parcial denso en el espacio vectorial de las variables aleatorias que definen los JE^n, tendremos que

TEOREMA 4.1.

$$INDA\left(N,v,\ {}_o\!\not\succ\right)=C\left(N,v,\ {}_o\!\succ\right)$$

TEOREMA 4.2.

$$INDA\left(N,v,\ {}_o\!\succ\right)=C\left(N,v,\ {}_o\!\not\succ\right)$$

lo que nos sugiere que para buscar el núcleo de un juego podemos buscar las imputaciones no dominadas por asignaciones pero usando el orden contrario.

Las imputaciones no dominadas por asignaciones están próximas a las imputaciones no dominadas, que eran la base de la caracterización de los juegos escalares determinísticos, por lo que es muy importante la relación existente entre ambos conceptos en una amplia clase de juegos:

TEOREMA 4.3. *Si el juego cooperativo estocástico cumple la condición de monotonía:*

$$v\left(S\right)+\sum_{i\notin S}v\left(\{i\}\right)\ \boxed{\prec}\ v\left(N\right)\ \ ,\ \forall S\subset N$$

entonces

$$IND\left(N,v,\boxed{\succ}\right)\ =\ INDA\left(N,v,\boxed{\succ}\right)$$

Demostración.

La inclusión $INDA\left(N,v,\boxed{\succ}\right)\ \subset\ IND\left(N,v,\boxed{\succ}\right)$ es independiente de las propiedades del juego, pues escogemos en una clase más amplia para la dominancia.

Vamos a establecer la implicación recíproca

Si $X\notin INDA\left(N,v,\boxed{\succ}\right)$ es porque existe una coalición $S\subset N$ y una asignación Y, tal que $X\left(S\right)\ \prec_o\ Y\left(S\right)\boxed{\prec}\,v\left(S\right)$.

Dadas las propiedades del juego

$$Y\left(S\right)+\sum_{i\notin S}v\left(\{i\}\right)\ \boxed{\prec}\ v\left(N\right)\ \ ,\ \forall S\subset N$$

Si definimos

$$Z_i = X_i + \frac{1}{|S|}\left(Y\left(S\right) - X\left(S\right)\right) \ \forall i \in S$$

$$Z_i = v\left(\{i\}\right) + \frac{1}{|-S|}\left(v\left(N\right) - Y\left(S\right) - \sum_{i \notin S} v\left(\{i\}\right)\right) \ \forall i \notin S$$

Z es una imputación, pues $Z\left(N\right) = v\left(N\right)$ y verifica que $Z_i \succeq v\left(\{i\}\right)$.

Con ello $Z \ dom_{\succeq}^{S} \ X$ y X no es imputación no dominada ▲.

Con esto hemos caracterizado los núcleos de preferencia y de no dominancia a través de conjuntos de imputaciones no dominadas . No obstante, deseamos conocer cuándo estos conjuntos son no vacíos. Veamos esta caracterización en los casos más frecuentes de aplicación de la teoría, lo que nos permite dar condiciones más precisas sobre la existencia del núcleo en estos casos.

5. JUEGOS ESTOCÁSTICOS EN VARIABLES ALEATORIAS NORMALES

En estos juegos estocásticos JE^n la función característica $v(S)$ viene definida a través de una variable aleatoria distribuida según una normal $N(\mu_S, \sigma_S^2)$, que como indicábamos anteriormente es una situación muy frecuente en las aplicaciones reales. A este tipo de juegos lo representaremos por JEN^n.

Una preimputación será un conjunto de variables aleatorias $(X_1, X_2, ..., X_n)$, donde cada X_i está asociada a un jugador, tal que

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = v(N) = \xi_N \in N(\mu_N, \sigma_N^2).$$

por lo que cada una de ellas será también una variable aleatoria normalmente distribuida.

Para realizar las comparaciones entre variables aleatorias debemos de escoger un orden aleatorio concreto:

Recordemos que $X \prec_{cc} Y$ $[X \prec_{co} Y]$ representa que X es "menor" y a la vez "menos variable " que Y (respectivamente que X es "menor" y a la vez "más variable" que Y) en algún sentido estocástico; dado que las funciones convexas concentran la masa en los extremos y las cóncavas en la parte central.

Si suponemos un orden convexo creciente, afinidad al riesgo, sabemos que si

$$\mu_X \leq \mu_Y \;\; y \;\; \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2 \;\; entonces \;\; N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \prec_{cc} N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$$

con lo que podemos caracterizar el núcleo de los JEN^n anteriores.

Determinaremos los elementos del núcleo de preferencia, si existe, de este juego en variables aleatorias normales usando la caracterización paramétrica del orden.

En virtud de ser la ley normal infinitamente divisible, siempre es posible buscar variables

$X_i \sim N\left(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i}^2\right)$, verificando $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = v(N)$,

para ello debe ser, debido a la caracterización anterior,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{X_i} = \mu_N \;\; , \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2 = \sigma_N^2$$

Las condiciones de dominancia que definen el núcleo de preferencia se escriben en este caso

$$\sum_{i \in S} \mu_{X_i} \geq \mu_S$$

$$\sum_{i \in S} \sigma_{X_i}^2 \geq \sigma_S^2$$

lo que nos dice que si:

$G\mu\left(N, v\right)$ es el juego escalar determinístico definido por $v\left(S\right) = \mu_S$ y

$G\sigma\left(N, v\right)$ es el juego escalar determinístico definido por $v\left(S\right) = \sigma_S^2$

TEOREMA 5.1. *El núcleo de preferencia de un juego JEN^n, usando el orden convexo-creciente, es no vacío si y sólo si son equilibrados los juegos escalares $G\mu\left(N, v\right)$ y $G\sigma\left(N, v\right)$.*

No obstante, si este núcleo fuese vacío, puede buscarse el núcleo de no dominancia, al analizar el correspondiente juego vectorial:

$$G_{(\mu,\sigma)}\left(N, v\right) \quad \text{siendo} \quad v(S) = \left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$$

al modo usual vectorial, véase Fernández, Puerto, Hinojosa (2000)[**30**]. Estos juegos vectoriales también están caracterizados a través de la dominancia como vimos anteriormente, ya que verifican las condiciones exigidas.

EJEMPLO 5.1. *Sean tres jugadores que desean cooperar para producir un cierto bien, pero que el jugador 1 y el 2 sólo disponen de tecnología para la producción , aunque no equivalentes , y el jugador 3 dispone de recursos.*

En caso de asociación del jugador uno y el tres obtendrían unos beneficios que se estiman según N(1,2), mientras que la asociación de los jugadores dos y tres les proporcionan un beneficio N(2,2). La asociación conjunta les produce unos beneficios N(4,4).

Por lo que el juego cooperativo estocástico JE^3 *viene definido por la siguiente función característica:*

$$\begin{array}{l} v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0 \\ v(1,3) = \xi_{1,3} \in N(1,2) \\ v(2,3) = \xi_{2,3} \in N(2,2) \\ v(1,2,3) = \xi_{1,2,3} \in N(4,4) \end{array}$$

Deseamos saber cuáles serían las imputaciones del núcleo de dicho juego, por lo que si X_1, X_2 *y* X_3 *son los repartos de beneficios entre los jugadores, deberá ser* $X_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2)$ *, y esto nos conduce a un juego vectorial en los parámetros de las leyes normales,* $\overline{X}_i \equiv (\mu_i, \sigma_i^2)$ *, lo que nos lleva al sistema siguiente para caracterizar el núcleo de preferencia:*

$$\begin{array}{l} \overline{X}_i \equiv (\mu_i, \sigma_i^2) \in \mathcal{R}^2 \\ \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3 = \binom{4}{4} \\ \overline{X}_1 + \overline{X}_3 \geq \binom{1}{2} \\ \overline{X}_2 + \overline{X}_3 \geq \binom{2}{2} \\ \overline{X}_i \geq \binom{0}{0} \end{array}$$

que por componentes puede ser representado con medias y varianzas, dado que es un juego de tres jugadores.

Esto nos permite dar soluciones del juego estocástico que pertenecen al núcleo de preferencia, al escoger en elementos de ambos núcleos.

Nótese como la solución $(0,0,1)$ *pertenece a ambos núcleos.*

EJEMPLO 5.2. *Cartera de inversiones.-*

Un juego estocástico se presenta cuando un conjunto de inversores (jugadores) se unen para formar una corporación de inversión. Cada uno posee una cartera de inversión que puede suponerse sigue una ley normal. Análogamente cada conjunto de jugadores, coalición, puede tener una cartera de inversión conjunta, que puede suponerse dada por una ley nomal.

El reparto de la cartera final entre los inversores supone definir el riesgo que cada uno comparte en la sociedad en función de su aportación a la misma, y puede ser valorada en cualquier momento para sustituir un inversor por otro que desee asumir dicho riesgo al precio que se estipule.

Supongamos tres inversores que van a cooperar en un nuevo mercado. Analizadas las consecuencias de su cooperación valoran la misma del siguiente modo

$v(\{1,2,3\}) \in N(4,4)$

$v(\{1,2\}) \in N(\alpha,2)$

$v(\{1,3\}) \in N(\alpha,2)$, *con* $2 \leq \alpha \leq 4$

siendo $v(S) = 0$ *para las restantes coaliciones.*

En este caso el juego en medias $G\mu(N,v)$, *tiene un core que depende del valor de* α. *mientras que el juego en varianzas es similar al dado en el caso anterior. Por esta razón el reparto del riesgo puede realizarse de diferentes maneras, así podría usarse el* $\varepsilon-$*core, para escoger en ellos.*

Análoga situación tendríamos si tuviéramos valoraciones del riesgo a través, no de la ley, sino de la valoración media-varianza:

$v(\{1,2,3\}) = (4,4)$

$v(\{1,2\}) = (\alpha,2)$

$v(\{1,3\}) = (\alpha,2)$

$v(S) = 0$ *para el resto de coaliciones*

y usar el orden E-V, en lugar del orden convexo

EJEMPLO 5.3. *El juego de la producción con beneficio aleatorio*

Como indicábamos en el primer capítulo, este juego aleatorio corresponde al juego clásico de la producción en el que v(S) es una variable aleatoria.

Si se supone que el vector $c=(c_1, c_2, ..., c_p)$ *sigue una normal multivariante podemos tener un juego en variables aleatorias normales.*

En este caso v(S) está determinado por el conjunto de variables aleatorias no dominadas $\{cx^i(S)\}$ *, asociadas a los vértices de la región de posibles soluciones que S controla.*

Si valoramos v(S) por $c\overline{x}\,(S)$*, dado por la solución óptima* $\overline{x}\,(S)$ *del problema*

$$MAX\left(\bar{c}x \quad / \; Ax \leq \sum_{i\in S} b^i\right)$$

tenemos un juego cooperativo estocástico con valores en la familia de distribuciones normales. La solución de este juego podría asegurarse si existe un reparto $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *verificando*

$$X_S \quad \boxed{\succeq} \quad c\overline{x}\,(S) \qquad ,\forall S \subseteq N$$

que conduce de forma natural a problemas del tipo anteriormente representados.

6. SOLUCIONES EN VARIABLES ALEATORIAS POISSON

En este caso los juegos estocásticos JE^n tienen su función característica $v\,(S)$ definida a través de una variable aleatoria que se distribuye según una ley de Poisson $\mathcal{P}\,(\lambda_S)$.

Representaremos a estos juegos por $JE\mathcal{P}^n$.

Las preimputaciones del juego serán vectores de variables aleatorias $(X_1, X_2, ..., X_n)$, cada una asociada a un jugador, tal que:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = v\,(N) = \xi_N \in \mathcal{P}\,(\lambda_N)$$

por lo que cada una de dichas variables aleatorias se distribuyen según una ley de Poisson ,

$$X_i \backsim \mathcal{P}\,(\lambda_{X_i})$$

.

Si usamos el orden dado por la dominancia estocástica, sabemos que si

$$\lambda_X \leq \lambda_Y \text{ entonces } \mathcal{P}(\lambda_X) \prec_e \mathcal{P}(\lambda_Y).$$

lo que nos permite resolver los juegos $JE\mathcal{P}^n$, a través de un juego escalar determinístico dado por los parámetros de la ley.

Para buscar las imputaciones $(X_1, X_2, ..., X_n)$ del núcleo de preferencia, debemos buscar preimputaciones $(X_1, X_2, ..., X_n)$ con $X_i \backsim \mathcal{P}(\lambda_{X_i})$ que verifiquen:

$$\sum_{i \in S} \lambda_{X_i} \geq \lambda_S \; \forall S, \; S \subset N$$

Si llamamos $G_\lambda(N, v)$ al juego escalar determinístico definido por:

$$v(S) = \lambda_S$$

tendremos la caracterización del núcleo de preferencia de estos juegos, bajo el orden dado por la dominancia estocástica:

TEOREMA 6.1. *El núcleo de preferencia del $JE\mathcal{P}^n$, bajo el orden dado por la dominancia estocástica, es no vacío si y sólo si el juego escalar $G_\lambda(N, v)$ es equilibrado.*

Nótese que en este caso las imputaciones de no dominancia coinciden con las de preferencia, con lo que el núcleo de no dominancia coincide con el de preferencia, como en el caso escalar.

EJEMPLO 6.1. *Supongamos N agentes de seguros, cada uno con un número de primas de seguros b_i, $i \in N$. Si forman coalición S, (cualquier $S \subset N$, incluidas las individualidades) el número de accidentes que puede tener una póliza es dado por λ_S, que no debe crecer de forma lineal con los agentes participantes, ya que la coalición les permite poner claúsulas en las primas que hace que los clientes asuman ciertos compromisos, lo que implica que la tasa de accidentes de cada una de las primas de la coalición no sea la suma de las tasas. En este caso, cada coalición tiene un número total de accidentes dado por:*

$$v(S) = \xi_S \in \mathcal{P}\left(\lambda_S \sum_{i \in S} b^i\right)$$

la tasa del grupo está dada por el número de pólizas que sustenta. Si se forma la gran coalición

$$v(N) = \xi_N \in \mathcal{P}\left(\lambda_N \sum_{i \in N} b^i\right)$$

que como indicábamos ofrecerá menor número de accidentes que la suma de los agentes de modo individual. Deseamos conocer ahora el reparto del riesgo entre los agentes.

Una preimputación será un vector $(X_1, X_2, ..., X_n)$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \xi_N$$

siendo X_i *una ley de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda_{X_i})$.

Para que pertenezca al núcleo de preferencia debe ser

$$\sum_{i \in S} X_i \prec_e \xi_S \;\forall S,\; S \subset N$$

si empleamos la dominancia estocástica, pues la coalición se formará si va a sustentar "menor" riesgo que el que ella sustenta de por sí, lo que nos lleva a buscar los parámetros λ_{X_i} *asociados a cada* X_i *a través de los elementos del núcleo* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *del juego escalar* (N, v) *definido por:*

$$v(S) = \lambda_S \sum_{i \in S} b^i$$

es decir, las imputaciones del núcleo se caracterizan por:

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \lambda_S \sum_{i \in S} b^i \;\forall S,\; S \subset N$$

con

$$\sum_{i \in S} x_i = \lambda_N \sum_{i \in N} b^i$$

Notemos que si $\lambda_S = \sum_{i \in S} \lambda_i$ *estaríamos ante un juego trivial en el que cada jugador i tendría asociado su propio riesgo* $\mathcal{P}(\lambda_i b^i)$. *Dado que* $\lambda_N > \sum_{i \in N} \lambda_i$ *hace que el juego no sea trivial.*

Una solución del núcleo viene dada al tomar $x_i = \lambda_N \; b^i$, *lo que supone que todos y cada uno de los agentes va a recibir un número de accidentes dependiendo de su cartera, con la ley de accidentes que la cooperación global ha dado.*

Esta solución puede no ser justa pues sólo depende del número de primas que tiene el agente, y no de su tasa de accidentes, pues puede pensarse que si para un jugador i su λ_i es mayor que para otro jugador j su λ_j, el soportar más riesgo debe verse reflejado en el reparto de las x_i.

Así podríamos pensar en una solución del tipo

$$x_i = \lambda_N b_N \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in N} \lambda_i}$$

donde $b_N = \sum_{i \in N} b^i$

que es una preimputación, que está en el núcleo si:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i \in N} \lambda_i} \frac{b_N}{\sum_{i \in S} b^i} \leq \frac{\lambda_S}{\sum_{i \in S} \lambda_i} \text{ , } \forall S, \ S \subset N$$

o bien, buscar otro tipo de reglas.

Si suponemos en el modelo anterior que cada prima tiene una recompensa $K_1(S)$ *y cada accidente un coste* $K_2(S)$, *cada coalición* S , *según el modelo anterior tendrá un beneficio/costo, dado por:*

$$B(S) = K_1(S) \sum_{i \in S} b^i - \xi_S K_2(S)$$

donde ξ_S *es el número de accidentes que soporta una coalición y viene dado por una distribución*

$$\mathcal{P}\left(\lambda_S \sum_{i \in S} b^i\right)$$

que puede ser estudiado como un juego vectorial [beneficio, costo], en el que una componente sería un juego escalar, y la otra un juego vectorial.

7. SOLUCIONES EN CONJUNTOS DE VALORES

En algunas situaciones la valoración de la fuerza de una coalición $v(S)$ no viene dada por un solo valor, sino que la coalición tiene varios cursos de acción y puede escoger entre ellos. Así $v(S)$ viene expresado por un conjunto de variables aleatorias

$$\{\xi_d(S)\}_{d \in D}$$

donde D es el conjunto de todas las posibles decisiones que la coalición puede tomar.

7.1. El juego de la producción con beneficios aleatorios.

Como indicábamos anteriormente, este juego aleatorio corresponde al juego clásico de la producción en el que $v(S)$ es una variable debido a que el vector de beneficios es una variable aleatoria multidimensional. La función característica está definida por:

$$v(S) = \max \left\{ cx \ / \ Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, \ c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \chi^n \right\}$$

Dicha variable aleatoria es difícil de calcular pues es la variable aleatoria máxima de todas las posibles valoraciones cx del vector x al recorrer el conjunto factible. La determinación de esta variable aleatoria puede realizarse siguiendo a Bereanu B. (1967)[**23**]. También pueden emplearse métodos de simulación.

Como el conjunto de soluciones óptimas de un problema de programación lineal está en los vértices de la región, podríamos aproximar dicha variable por

$$v(S) \approx \max \ \left\{ cx^j(S) \right\}_{j=1,2,...,p}$$

donde $x^j(S)$ son los puntos extremos del poliedro factible de la coalición S

$$\left\{ Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, x \geq 0 \right\}$$

que también es difícil de manejar e incluso determinar para una ley de c cualquiera.

Pero si opinamos que el decisor debe escoger un vector x factible como curso de acción, es más interesante pensar en dichas acciones que en la valoración global que el máximo produce. De este modo, puede valorarse $v(S)$ a través del conjunto de las variables aleatorias $cx^j(S)$ que no están dominadas, según el orden que empleemos:

$$v(S) = \left\{ cx^{j_1}(S), cx^{j_2}(S), ..., cx^{j_k}(S) \right\}$$

donde han sido eliminados los vértices que dan variables aleatorias dominadas por las proporcionadas por otros vértices.

Tampoco este problema es fácil de resolver, aunque existen resultados en teoría de juegos cooperativos que permiten, no sin gran dificultad, abordar el problema, vease Hinojosa, M. A.(2.000)[**9**].

Como indicábamos anteriormente, un modo sencillo y coherente de abordar el problema es escoger un vértice $\hat{x}{}^{j}(S)$ del poliedro, mediante la elección entre las variables aleatorias que valoran $v(S)$ por algún criterio de decisión bajo riesgo, así podemos tomar el valor esperado con lo que:

$\hat{x}{}^{j}(S) \triangleq \overline{x}(S)$ el vértice que da la solución al problema

$MAX\ \overline{c}x$
Sujeto por $Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, \ \ x \geq 0$

Por ello, la valoración de la coalición será una sola variable aleatoria $v(S) = c\ \hat{x}{}^{j}(S)$ que permite definir un juego estocástico cooperativo como teníamos anteriormente, cuya solución dependerá del tipo de variable aleatoria que sea c y del orden que empleemos.

EJEMPLO 7.1. <u>*Juego con variables aleatorias normales*</u> .-

Si cada coalición escoge un cierto vértice, o decisión de producción, $\hat{x}(S)$, *la valoración de la coalición será* $v(S) = c\ \hat{x}(S)$ *que seguirá , al suponer que* c *es una ley normal multivariante* $(\mu, \sum)$, *una distribución normal de media* $\mu\ \hat{x}(S)$, *y varianza* $\hat{x}(S)' \sum \hat{x}(S)$.

Cualquier reparto con variables aleatorias $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *independientes, debe verificar para ser eficiente que:*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \xi_N \in N\left(\mu\ \hat{x}(N),\ \ \hat{x}(N)' \sum \hat{x}(N)\right)$$

por lo que cada variable aleatoria X_i *deberá ser normal,* $N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

Así, si buscamos soluciones del core deberá verificarse, en razón a lo anteriormente expuesto, que:

$$\sum_{i \in S} \mu_i \geq \mu\ \hat{x}(S)$$

$$\sum_{i \in S} \sigma_i^2 \geq \hat{x}(S)' \sum \hat{x}(S)\ \ , \forall S,\ S \subset N$$

si suponemos el orden convexo-creciente entre las variables aleatorias, en virtud de las propiedades del mismo.

El núcleo será no vacío si los juegos escalares definidos por

$$v_1(S) = \mu\ \hat{x}(S)$$

$$v_2(S) = \hat{x}(S)' \sum \hat{x}(S)$$

son equilibrados.

En caso de que deseemos que los repartos sean de la forma $X_i = r_i \xi_N$ *, con* $\sum_{i \in N} r_i = 1$ *, tendríamos que ahora los repartos serían variables aleatorias normales de media* $r_i \mu \hat{x}(N)$ *y varianza* $r_i^2 \hat{x}(N)' \sum \hat{x}(N)$*, con lo que la solución pertenece al núcleo, al verificar:*

$$\sum_{i \in S} r_i \geq \frac{\mu \hat{x}(S)}{\mu \hat{x}(N)}$$

$$\left(\sum_{i \in S} r_i \right)^2 \geq \frac{\hat{x}(S)' \sum \hat{x}(S)}{\hat{x}(N)' \sum \hat{x}(N)} \quad \forall S, \ S \subset N$$

con lo que debemos determinar un solo vector $(r_i)_{i=1,2,\dots,n}$ *para dar la solución del core.* ▲

7.1.1. *Orden E-V.*

No obstante, podemos abordar directamente el problema cuando la valoración $v(S)$ está dada por un conjunto de vectores, y la ley de c sea la normal multivariante, si empleamos el orden E-V.

En este caso, la valoración de las coaliciones viene expresada como

$$v(S) = \max \left\{ \mu x, \ -x' \sum x \ / \ Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, \ x \geq 0 \right\}$$

que es un problema bi-objetivo, por lo que la valoración de la potencia de la coalición viene dada por un conjunto, de un espacio vectorial de dimensión dos, que puede ser analizado usando la teoría desarrollada en Hinojosa, M. A. (2.000)[**9**].

Vamos a analizar algunas peculiaridades de este problema, y de su relación con algunas elecciones particulares de los decisores.

El problema biobjetivo genérico:

MAX $\mu x, -x' \sum x$
sujeto por $Ax \leq b$, $x \geq 0$

es un problema con una función lineal y otra cóncava, al ser convexa $x' \sum x$, dadas las propiedades que presenta la matriz de varianzas-covarianzas.

La búsqueda de todas las soluciones eficientes del mismo, puede realizarse a través de la parametrización, dadas las propiedades de concavidad que tienen las funciones, lo que nos lleva a plantear el problema:

Maximizar $\lambda \mu x - (1-\lambda)\, x' \sum x$
sujeto por $Ax \leq b$, $x \geq 0$

Supuesto que la región de soluciones es no vacía, éste es un problema cuadrático paramétrico para el que existen numerosos algoritmos para su resolución, desde su estudio inicial por Wolfe, P. (1.959)[**24**]. Ello nos da una función solución óptima $x^*(\lambda)$ que es continua sobre $[0,1]$. De hecho puede darse como una parametrización lineal a trozos sobre el intervalo $[0,1]$ lo que permite expresar dicha función a través de los puntos en que cambia la pendiente.

Para este problema también pueden caracterizarse todos los puntos eficientes del problema a través de la teoría clásica de programación multiobjetivo, así:

- Si el conjunto de posibles acciones fuese $\mathcal{R}^n$, los puntos eficientes verifican

$$\mu = -\frac{1}{2} x' \sum$$

es decir, los puntos eficientes están sobre una recta, y son aquéllos del espacio donde se anulan los gradientes de ambas funciones.

- Si el conjunto de puntos factibles es dado por el poliedro

$$\{Ax \leq b,\, x \geq 0\} = X$$

el conjunto de puntos eficientes es la "proyección" de la recta anteriormente definida sobre el poliedro.

Por tanto, es una poligonal sobre el poliedro.

Sus puntos extremos están definidos por los dos problemas que establecen ambas funciones objetivos.

MAX $\mu' x$
$x \in X$

que es la solución del problema en valores medios, y.

MIN $x' \sum x$
$x \in X$
que es la solución del problema que minimiza el riesgo.

Un procedimiento para encontrar los restantes puntos eficientes puede hacerse, al ser un problema biobjetivo, usando el algoritmo NISE de Cohon, J. L. (1978)[**26**] , y al ser X un poliedro, es más sencillo encontrar todos los puntos eficientes.

Conocidos los puntos eficientes del problema que define la función característica $v(S)$ podemos resolver el juego aplicando los diferentes conceptos de solución introducidos por Hinojosa, M. A. (2.000)[**9**].

En el caso del problema que estamos estudiando, puede verse que cada uno de los puntos eficientes que definen el conjunto $v(S)$ representa unos comportamientos de la coalición ante el riesgo, por lo que vamos a realizar un estudio de esta situación para que las coaliciones sepan, si desean escoger un solo valor de este conjunto, el riesgo que tienen que estar dispuestos a asumir.

Recordemos que la dominancia estocástica entre dos variables aleatorias X e Y se definía a través de la relación:

$$X \ {}_{e}\!\succ Y \text{ sii } P[X \geq k] > P[Y \geq k] \ \ , \forall k \in \mathcal{R}$$

si establecemos esta condición en un sentido mucho más débil

$$X \ {}_{k}\!\succ Y \text{ sii } P[X \geq k] > P[Y \geq k] \ \text{ para un } k \text{ dado}$$

este orden es un orden total, pues dadas dos variables aleatorias cualesquieras siempre una es mejor que otra.

Este orden puede emplearse para escoger una variable aleatoria en un conjunto eficiente de ellas, así en nuestro problema de

$$\text{MAX } \{cx \ / \ Ax \leq b(S) \ \ , x \geq 0\}$$

podemos escoger el vector $\hat{x}$, que nos dé la variable aleatoria $c\,\hat{x}$, que alcance la máxima probabilidad de superar un cierto umbral k, por lo que representaremos por $\hat{x}\,(k)$, para ello debemos resolver el problema

Maximizar $P\,[cx \geq k]$
verificando x que $Ax \leq b(S)$, $x \geq 0$
conocido en la literatura como problema de aspiración de nivel.

Para el caso en que c sea una $N\,(\mu, \sum)$ como

$$P\,[cx \geq k] = P\left[\frac{cx - \mu x}{\sqrt{x' \sum x}} \geq \frac{k - \mu x}{\sqrt{x' \sum x}}\right]$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu x}{\sqrt{x' \sum x}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu x - k}{\sqrt{x' \sum x}}\right)$$

donde Φ es la función de distribución en la normal cero-uno.

Para poder buscar $\hat{x}\,(k)$ debemos resolver el problema

MAXIMIZAR $\frac{\mu x - k}{\sqrt{x' \sum x}}$
sujeto por $Ax \leq b\,(S)$, $x \geq 0$

Problema conocido como de Kataoka ,S. (1963)[**27**], quien planteó y dio solución al mismo. Con ello las coaliciones pueden escoger, en función del umbral que están dispuestas a aceptar, la solución $\hat{x}\,(k)$.

Al variar el umbral k, recorremos todas las soluciones del problema eficiente. Así Kataoka estableció que si consideramos una versión parametrizada del problema

MAXIMIZAR $\mu x - \beta x' \sum x$

sujeto por $Ax \leq b$, $x \geq 0$

con $\beta \in [0, \infty)$.

que es equivalente a usar $\lambda = \frac{1}{1+\beta}$

y si llamamos $\hat{x}(\beta)$ la solución óptima de este problema, también lo es del problema de Kataoka con

$$k = \mu \hat{x}(\beta) - 2\beta \hat{x}(\beta)' \sum \hat{x}(\beta)$$

Una situación en cierto aspecto dual puede obtenerse si nos fijamos en el conocido criterio del fractil, como veíamos en el capítulo en el que estudiamos los órdenes estocásticos. A una variable X, se le asocia un cierto valor de riesgo α que deseamos asumir, si se representa esta variable por el valor del máximo umbral que proporciona dicho valor

$$P[X \geq k] = \alpha$$

es decir, en este caso a cada variable se le asocia un umbral diferente, admitido que suponer ese umbral tiene un riesgo fijado, mientras que en el caso anterior fijábamos el umbral, y se le asociaba un cierto nivel de riesgo α.

Este criterio también permite ordenar las variables aleatorias que definen a $v(S)$, escogiendo el vector $\hat{x}(\alpha)$, que maximice el umbral k de la variable $c\hat{x}$ fijado un riesgo α.

MAXIMIZAR k

sujeto por $P[cx \geq k] = \alpha$

$Ax \leq b(S)$, $x \geq 0$

conocido en la literatura como problema del fractil o de mínimo riesgo.

En el caso de la ley normal, al usar el desarrollo anterior tenemos que

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\mu x - k}{\sqrt{x' \sum x}}$$

siendo

$$k = \mu x - \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x' \sum x}$$

lo que nos conduce al problema

MAXIMIZAR $\mu x - \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x'\sum x}$
sujeto por $Ax \leq b(S)$, $x \geq 0$

que también fue resuelto por Kataoka. Con lo que la coalición puede escoger $\hat{x}(\alpha)$ al determinar el riesgo que desea asumir.

Análogamente la solución se relaciona con todos los puntos eficientes, pues si $\hat{x}(\beta)$ es la solución del anterior problema paramétrico, también es del problema del fractil con

$$\alpha = \Phi\left(-2\beta\left(\hat{x}(\beta)'\sum \hat{x}(\beta)\right)^{1/2}\right)$$

con lo que el conjunto de valores que define a $v(S)$ puede quedar reducido a un punto.

8. JUEGOS VECTORIALES ALEATORIOS

Una extensión lógica de lo desarrollado en este capítulo, dada la importancia de los juegos vectoriales, es la consideración de los juegos estocásticos vectoriales como aquellos en los que $v(S)$ es un vector de variables aleatorias $\left(\xi_S^1, ..., \xi_S^k\right)$, y cuyo estudio puede realizarse del modo similar al caso escalar, usando los conceptos de juegos vectoriales que hemos empleado en este capítulo. Como ilustración de ello vamos a considerar el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 8.1. *Seguros y reaseguros (Suijs y Borm,* [**7**]*).-*

Las aseguradores (1,2,3) tienen seguros sobre dos tipos de coches, el normal que les proporciona unas pérdidas por primas de tipo Exp(5) y los deportivos que se catalogan como Exp(0.5). El asegurador uno tiene una cartera (1800,10) de tipo uno y dos respectivamente, el asegurador dos tiene una cartera (900,25) y la del tercero es (200,90).

Cuando se asocian dos aseguradores pueden lograr reducir las primas de pérdidas al imponer condiciones al mercado, lo que se manifiesta en Exp(10) y Exp(1) respectivamente. Cuando se hace monopolio, la reducción es máxima, y viene dada por Exp(20) y Exp(2), esto es debido a la obligación de poner franquicias en las primas. Se desea conocer el reparto del riesgo que los aseguradores tienen al cooperar.

Como la exponencial es controlada por un parámetro, pueden separarse los tipos de coches y considerar el juego como un juego vectorial *estocástico, que se resolvería como un juego vectorial determinístico en cuatro dimensiones.*

$v(1) \in (\Gamma(1800,5), \Gamma(10,0.5))$
$v(2) \in (\Gamma(900,5), \Gamma(25,0.5))$
$v(3) \in (\Gamma(200,5), \Gamma(90,0.5))$
$v(1,2) \in (\Gamma(2700,10), \Gamma(35,1))$
$v(1,3) \in (\Gamma(2000,10), \Gamma(100,1))$
$v(2,3) \in (\Gamma(1100,10), \Gamma(115,1))$
$v(1,2,3) \in (\Gamma(2900,20), \Gamma(125,2))$

En este caso $\xi_N = (\xi_N^1, \xi_N^2) = (\Gamma(2900,20), \Gamma(125,2))$ *debe repartirse entre los tres jugadores.*
En una primera aproximación podemos definir:
$x_1 = (\Gamma(1800,20), \Gamma(10,2))$
$x_2 = (\Gamma(900,20), \Gamma(25,2))$
$x_3 = (\Gamma(200,20), \Gamma(90,2))$
que es una solución del core pues vectorialmente
$x_1 \ {}_e\!\succ v(1)$
$x_2 \ {}_e\!\succ v(2)$
$x_3 \ {}_e\!\succ v(3)$
así como también hay dominancia coalicional. Es por tanto solución de core de eficiencia.

No obstante, dado el carácter vectorial del problema, aunque respecto del núcleo de coches el juego se presenta como un juego inesencial, al buscar soluciones del núcleo de no dominancia podrían realizarse otros repartos, ya que todos los coches no tienen la misma pérdida, por lo que soluciones del tipo
$x_1 = (\Gamma(2900,20), 0)$
$x_2 = (0,0)$
$x_3 = (0, \Gamma(125,2))$
son imputaciones de no dominancia que pueden pertenecer al núcleo.▲

8.1. Juego de la producción con objetivos múltiples.

El juego clásico de la producción también ha sido extendido al caso de que exista un número finito de objetivos, puesto que es frecuente encontrarse con situaciones en las que la producción debe valorarse por varios aspectos que no pueden combinarse entre sí, ya que responden a mediciones diferentes como puede ser beneficio, impacto sobre el medio ambiente, tasa de desempleo, etc.

El juego de la producción con varios objetivos se plantea de forma similar, aunque en este caso la valoración del juego se hace a través de un vector:

$$v(S) = \max \left\{ c_1 x, c_2 x, ..., c_p x \ / \ Ax \leq \sum_{i \in S} b^i \ , \ x \geq 0 \right\}$$

por lo que para cada $\hat{x}$ factible tenemos asociados p valores

$$\left(c_1 \hat{x}, c_2 \hat{x}, ..., c_p \hat{x} \right)$$

Al plantear un juego cooperativo para este problema, se entiende que los jugadores cooperan para obtener un beneficio global $v(N)$, aunque la valoración de su beneficio esté descompuesto en los diferentes aspectos del mismo. Puesto que la cooperación es aceptada, deben repartirse el beneficio en razón a las aportaciones individuales $(b^1, b^2, ..., b^n)$ de los jugadores, y teniendo presente lo que las agrupaciones de jugadores pueden conseguir entre sí.

Este juego cooperativo vectorial asocia a cada coalición S, no un solo vector sino el conjunto de vectores eficientes del problema que $v(S)$ define, pudiéndose ver su tratamiento en Hinojosa, M. A. (2.000)[**9**].

Nosotros estamos interesados en plantear este problema en el caso en que los objetivos que $(c_1, c_2, ..., c_p)$ definen no sean determinísticos, sino que algunos, o todos, sean aleatorios, dada la ignorancia del decisor ante el beneficio que tal objetivo le proporciona.

Un estudio de estos problemas de programación estocástica múltiple puede verse en el libro de Stancu-Minasian, I. M. (1984) [**25**].

En este caso tenemos un juego cooperativo vectorial aleatorio $v(S)$ puesto que

$$v(S) = \left(\xi_S^1, \xi_S^2, ..., \xi_S^p \right)$$

Puede hacerse un estudio del problema similar al efectuado en el caso de tener un solo objetivo, y trabajar con $v(S)$ como un conjunto de vectores aleatorios. Pero vamos a describir brevemente sólo el caso de trabajar con un vector escogido de dicho conjunto y que las variables c_i estén normalmente distribuidas $N\left(\mu_i, \sum_i\right)$, siendo además independientes.

En este caso si usamos la dominancia E-V, el conjunto de variables que definen a $v(S)$ vendría dado por las variables normales asociadas a los puntos maximales del problema con $2p$ objetivos

$$\text{MAX } \left(\mu_1 x, \mu_2 x, ..., \mu_p x, \ \ -x' \textstyle\sum_1 x, -x' \sum_2 x, ..., -x' \sum_p x\right)$$
$$\text{sujeto por } \ Ax \leq \textstyle\sum_{i \in S} b^i \ , \ x \geq 0$$

Cada solución $\hat{x}(S)$ nos permite valorar a $v(S)$ por el vector aleatorio $\left(c_1 \hat{x}(S), c_2 \hat{x}(S), ..., c_p \hat{x}(S)\right)$ con el que podemos plantear un juego cooperativo estocástico vectorial.

Como en el caso anterior podemos escoger puntos de este conjunto eficiente a través de los modelos de aspiración de nivel o del fractil, pero en este caso, multiobjetivos:

Así si escogemos un umbral $K = (K_1, K_2, ..., K_p)$ para cada objetivo, tenemos el problema

$$\text{MAXIMIZAR } P\left[c_1 x \geq K_1\right], P\left[c_2 x \geq K_2\right], ..., P\left[c_p x \geq K_p\right]$$
$$\text{verificando } Ax \leq b(S) \ , \ \ x \geq 0$$

Al venir dados los objetivos por variables aleatorias normales independientes, tendríamos que buscar $\hat{x}(K_1, K_2, ..., K_p)$ a partir de una solución que encontremos al problema

$$\text{MAXIMIZAR } \frac{\mu_1 x - K_1}{\sqrt{x' \sum_1 x}}, \frac{\mu_2 x - K_2}{\sqrt{x' \sum_2 x}}, ..., \frac{\mu_p x - K_p}{\sqrt{x' \sum_p x}}$$
$$\text{sujeto por } Ax \leq b(S) \ , \ x \geq 0$$

para cuya solución puede verse Stancu-Minasian I. M. (1984)[**25**]

Similar planteamiento puede realizarse al asumir un cierto vector de riesgo

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$$

pues el vector $\hat{x}\ \alpha(S)$ que nos valora la cooperación de la coalición S, se determina a través de las soluciones del problema

MAXIMIZAR $K_1, K_2, ..., K_p$
sujeto por $P\left[c_i x \geq K_i\right] = \alpha_i$
$Ax \leq b(S)$, $x \geq 0$
que es un problema de mínimo riesgo multivariante.

Y que al ser variables aleatorias normales independientes, nos conduce al problema no aleatorio de

MAXIMIZAR $\mu_1 x - \Phi^{-1}(\alpha_1)\sqrt{x' \sum_1 x}, ..., \mu_p x - \Phi^{-1}(\alpha_p)\sqrt{x' \sum_p x}$
sujeto por $Ax \leq b(S)$, $x \geq 0$
del que debemos obtener una solución para valorar

$v(S)$ por $c_1 \hat{x}\, \alpha(S)$, $c_2 \hat{x}\, \alpha(S)$, ..., $c_p \hat{x}\, \alpha(S)$,

Como en el caso anterior ambos problemas están relacionados en el sentido de que una solución de uno para un K es solución del otro para algún α , así como proporcionarnos soluciones eficientes del problema con $2p$ objetivos anteriormente considerado.

CAPÍTULO 4

SOLUCIONES EN VALORES CIERTOS

En este capítulo estudiamos el problema no sobre el sistema completo de riesgo, sino sobre algún resumen del mismo a través de equivalentes determinísticos del azar mostrado por los jugadores. Uno de los motivos suele ser el que los jugadores no tienen interés en el reparto del riesgo, sino que desean valorar su participación en la cooperación a través de la valoración del riesgo que comparten. Frecuentemente estos valores están relacionados con participaciones ciertas o adelantos monetarios que los jugadores acuerdan en su cooperación. Otra razón para seguir este camino es que la "aritmética" de las variables aleatorias no permite una división arbitraria de los elementos que intervienen en el problema, por lo que los valores ciertos asociados al juego no sólo representan participaciones de los costes y/o beneficios, sino que recogen aspectos del riesgo que se comparte, lo que se hace normalmente escogiendo valores ciertos vectoriales como analizaremos posteriormente.

La teoría clásica conduce al problema a través de las funciones de utilidad, lo que permite, partiendo de una situación estocástica, llevar el problema a un ambiente determinista equivalente desde el punto de vista de dicha función de utilidad.

Cuando el problema tiene un solo aspecto a considerar (por ejemplo, monetario), suele pedírsele al jugador que proporcione una función de utilidad u:$\chi \to \mathcal{R}$, que valore las variables aleatorias, y así se convierte el problema estocástico en un problema determinístico escalar. No obstante, cuando el decisor desea considerar varios aspectos que no puedan mezclarse (por ejemplo, beneficio y riesgo), podemos desear tener una función de utilidad diferente en cada aspecto, lo que nos proporciona una función de utilidad vectorial u:$\chi \to \mathcal{R}^k$, con lo que el problema original estocástico se convierte en un problema determinístico vectorial. Ambos aspectos son estudiados a lo largo del presente capítulo de la memoria, así como las relaciones existentes entre dichas aproximaciones.

1. FUNCIONES DE UTILIDAD ESCALAR

Dado un juego cooperativo estocástico (N, v), con

$$v(S) = \xi_S, \ \forall S \subset \ N$$

estamos interesados en repartos para los jugadores del tipo

$$(x_1, x_2, ..., x_n)\,, \text{ con } x_i \in \mathcal{R}$$

cuyos valores determinísticos x_i posean suficiente atractivo para que los acepten los jugadores, lo cual puede considerarse como valoración de su participación, o bien como anticipo del pago final a recibir. Por ello dichos valores deberán permitir el reparto de un valor asociado a la recompensa final ξ_N, como se estudia en el próximo capítulo. Nosotros lo interpretaremos a lo largo de este capítulo como valoración de la participación en la cooperación. Naturalmente estos valores vendrán dados en función de los equivalentes de certeza que los jugadores posean.

Nótese que al usar una función de utilidad, que nos proporcionará el equivalente de certeza, dicha función debe ser compatible con el orden estocástico que se admita:

$$X \ {}_o\!\succ Y \ \Rightarrow \ u(X) \ > u(Y)$$

Pero es necesario señalar que la afirmación contraria no es cierta, puesto que para invertir la afirmación debe de cumplirse con cualquier función de utilidad que defina al orden (funciones crecientes, convexas,..) y no puede hacerse con una sola de dichas funciones. Por lo que al emplear un equivalente de certeza no estamos usando en la definición de orden estocástico todos los umbrales, sino que usamos uno solo.

Al considerar el juego cooperativo equivalente en utilidad debemos distinguir en su tratamiento dos casos:

• El primero supone que la función de utilidad es común para todos los jugadores, $u(\cdot)$, con lo que todos ellos valoran las situaciones estocásticas del mismo modo.

• El segundo acepta que cada jugador posea una función de utilidad, $u_i(\cdot)$, $i \in N$, particular, por lo que las coaliciones valorarán las situaciones aleatorias con diferente prisma según sean los individuos que las componen, lo que nos originará el tener que aceptar determinadas hipótesis en el comportamiento de los jugadores.

1.1. Función de utilidad común.

Sea $u(\cdot)$ la función de utilidad que todos los jugadores aceptaron, el juego determinístico equivalente a un JE^n dado por (N, v) vendrá definido por el juego (N, v_u) siendo

$$v_u(S) = u(v(S)) = u(\xi_S)$$

que es un juego cooperativo escalar clásico.

Las asignaciones $(x_1, x_{2,\ldots}, x_n)$ que reparten entre los jugadores y verifican que

$$\sum_{i \in N} x_i = u(\xi_N), x_i \geq u(\xi_i), i \in N$$

se denominan imputaciones, y las representaremos por $I(N, v_u)$.

Usando la teoría clásica, las imputaciones no dominadas según alguna coalición S, caracterizan el núcleo del juego, y puede ser definido como

$$C(v_u) = \left\{ x \in I(N, v_u) / \sum_{i \in S} x_i \geq u(\xi_S), \ \forall S \subset N \right\}$$

lo que nos indica que estos repartos son favorables para todas las coaliciones, pues al cooperar reciben más que actuando aisladamente, valorando en este caso lo que ellos pueden recibir a través del equivalente cierto que les da la función de utilidad.

La existencia de repartos en el core viene dada a través de la condición de balanceo:

Para cada coalición $S \subset N$ definimos el vector $e_S \in \mathcal{R}^n$, tal que la componente i-ésima vale uno si el jugador i está en la coalición S

y cero en caso contrario. Usando la terminología dada en Suijs et al (1.999)[**6**], diremos que una aplicación

$$\mu : 2^N \backslash \{\emptyset\} \to [0, \infty)$$

es balanceada si

$$\sum_{S \subset N} \mu(S)\, e_S = e_N$$

Diremos que el juego (N, v_u) es balanceado si para cualquier aplicación balanceada μ se tiene que:

$$\sum_{S \subset N} \mu(S)\, u(\xi_S) \leq u(\xi_N)$$

TEOREMA 1.1. *El juego (N, v_u) tiene núcleo no vacío si y sólo si es balanceado.*

Notemos como esta condición necesaria y suficiente para que el juego posea núcleo no vacío depende fuertemente del tipo de función de utilidad que acuerden los jugadores.

1.1.1. *Juegos inesenciales estocásticos.*
Sea el juego estocástico (N, v) en el que

$$v(i) = \xi_i, \; i = 1, 2, ..., n$$

y para cada coalición se verifica que $v(S) = \sum_{i \in S} \xi_i$,

que corresponde a un juego que en el caso escalar se denomina inesencial.

La solución del core en variables aleatorias sería dada por $X_i = \xi_i$, que corresponde con la idea de reparto del caso escalar, por lo que su estudio tiene un interés relativo.

En el caso que deseemos repartir un vector $(x_{1,}x_2, ..., x_n)$ de escalares entre los jugadores, aún cuando haya que valorar la función característica de modo aleatorio, deberá verificar

$$\sum_{i \in S} x_i \quad \boxed{\succ} \quad \sum_{i \in S} \xi_i \, , \qquad \forall S \subset N$$

para que pertenezca al core.

Si x_i viene dada por una función de utilidad lineal $u(\cdot)$, será

$$\sum_{i \in S} u(X_i) \quad \boxed{\succ} \quad \sum_{i \in S} \xi_i$$

Si el orden empleado es el orden cóncavo-creciente, como se cumple:

$$E(\xi)_{co} \succ \xi$$

el vector $(E[\xi_1], E[\xi_2], ..., E[\xi_n])$ verifica las anteriores desigualdades debido a la forma de la utilidad, por lo que pertenece al core.

Si valoramos la pertenencia al núcleo por los equivalentes de certeza tendríamos que

$$\sum_{i \in S} x_i \geq u\left(\sum_{i \in S} \xi_i\right), S \subset N$$

para pertenecer $(x_1, x_2, ..., x_n)$ al core.

Lógicamente si $u(\cdot)$ es lineal, tenemos un juego inesencial con

$$v_u(S) = \sum_{i \in S} u(\xi_i)$$

por lo que la única solución del core, cualquiera que sea el orden estocástico usado, vendrá dada por

$$(u(\xi_1), u(\xi_2), ..., u(\xi_n))$$

pero si la función de utilidad no es lineal, el juego resultante no tiene por qué ser inesencial escalarmente , dependerá de las valoraciones que proporcione la función de utilidad, pudiendo ser desde vacío a un conjunto poliédrico con infinitas soluciones.

EJEMPLO 1.1. *Consideremos la situación de tres aseguradoras de coches que desean compartir riesgos dado en Suijs y Borm*[**7**] *visto en el capitulo tercero, pero en el que no hay reducción de primas. Este puede ser considerado como un juego inesencial en variables aleatorias.*

Al considerar como función de utilidad el valor esperado, tendríamos que

$u(\xi_1) = -380$, $u(\xi_2) = -230$, $u(\xi_3) = -240$

y por tanto la solución del core de este juego inesencial sería

$(-380, \quad -230, \quad -240)$

Al usar un equivalente de certeza dado por

$$u(\xi_S) = \sum_{j\in S}\sum_{k_j}\left(\sum_{i\in S}\frac{1}{a_i}\right)\log\left(1 - \frac{1}{m_{k_j}\sum_{i\in S}\frac{1}{a_i}}\right)$$

donde k_j representan los tipos de coches presentes en la coalición, a_i es el índice de aversión al riesgo que presentan los jugadores ($a_1 = 0.33$, $a_2 = 0.10$, $a_3 = 0.25$), siendo m_{k_j} las tasas de las funciones exponenciales que están asociadas a los distintos tipos de coche.

Valoremos las coaliciones, y resulta el juego determinístico equivalente definido por la función característica:

$v_u(\{1\}) = -406, \quad v_u(\{2\}) = -238, \quad v_u(\{3\}) = -311$
$v_u(\{1,2\}) = -620, \quad v_u(\{1,3\}) = -662, \quad v_u(\{2,3\}) = -490,$
$v_u(\{1,2,3\}) = -870,$

Siendo el core del juego no vacío, aunque con otra función de utilidad el core podría serlo.

Como la condición necesaria y suficiente para que el core del juego sea no vacío se relaciona fuertemente con la teoría de la dualidad en problemas de programación lineal, podemos pensar que puede ser de interés en la búsqueda de soluciones del core en los juegos de la producción.

1.1.2. *Juego de la producción en valores medios.*

Una solución asociada al problema de máximo beneficio en un problema de programación lineal con vector de beneficio aleatorio, suele darse a través del problema equivalente determinístico asociado, en el que el vector de beneficios se sustituye por su valor medio.

Este modelo puede ser empleado en el juego de la producción con beneficio aleatorio en el caso de que la función de utilidad sea:

$$u\left(\xi_S\right) = E\left[\xi_S\right]$$

Por lo que el juego de la producción determinístico equivalente vendrá definido por $(N, \overline{v})$ donde

$$\overline{v}\left(S\right) = \max\left\{\overline{c}x \ \ / \ \ Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, \ x \geq 0\right\} \quad \forall S \subset N$$

que es un juego de la producción escalar clásico. Estos juegos fueron estudiados por Owen, G. (1982)[4] , demostrando que:

- Son juegos superaditivos

- Son juegos balanceados

Debido a que el core no es vacío, Owen proporcionó una solución del mismo a través de la teoría de dualidad de programación lineal:

Sea $y_N^* = \left\{y_{N,1}^*, y_{N,2}^*, ..., y_{N,m}^*\right\}$ una solución dual del problema Max $\overline{c}x$

sujeto por $Ax \leq \sum_{i \in N} b^i \quad , x \geq 0$

es decir de

Min $\quad b_{N,1}\, y_{N,1} + b_{N,2}\, y_{N,2} + \cdots + b_{N,m} y_{N,m}$
sujeto por $yA \leq \overline{c}, \;\; y \geq 0$
siendo $b_{N,j} = \sum_{i \in N} b^i_j \; , \; j = 1, 2, ...m$

COROLARIO 1.2. *La asignación* $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ *donde*

$$x_i^* = \sum_j y^*_{N,j} b^i_j \;, \quad i = 1, 2, ..., n; \qquad j = 1, 2, ..., m$$

COROLARIO 1.3. *es un elemento del core del juego determinístico* $(N, \overline{v})$.

La solución tiene una interesante interpretación en economía, pues indica que el premio que recibe el jugador i-ésimo por aportar a la cooperación el vector b^i de recursos es la valoración de los mismos por los “precios sombra” que determina el problema dual asociado a la gran coalición. Recordemos que estos precios sombra representan el precio al que deberíamos comprar una nueva unidad del recurso si deseamos aumentar el beneficio.

Esta solución pertenece al núcleo en sentido amplio del juego cooperativo aleatorio, si este tiene en alguna de sus componentes el juego en valores medios, como es el caso del orden E-V.

TEOREMA 1.4. *Sea* (N, v) *un juego de la producción con beneficio aleatorio, la solución de Owen pertenece al núcleo del juego, al emplear el orden E-V.*

Demostración.

Recordemos que el juego de la producción con beneficio aleatorio, era equivalente, en el sentido de la caracterización del núcleo con el orden E-V, a un juego biobjetivo en media y varianzas.

La solución de Owen, por tanto, pertenece al núcleo de la primera componente, y por ello al núcleo en sentido amplio del juego▲

Otros tipos de utilidad distinta del valor medio pueden ser consideradas, como las expresadas a través de umbrales, lo que nos llevaría a trabajar con problemas no lineales, como hacíamos en el capítulo tercero.

1.2. Funciones de utilidad individuales.

Es frecuente que cada jugador tenga un comportamiento diferente ante el riesgo, por lo que el jugador i-ésimo tendrá su propia función de utilidad $u_i(\cdot)$.

En este caso el juego equivalente determinístico al juego cooperativo estocástico no puede definirse de un modo tan directo como en el caso anterior pues ahora la valoración de cada coalición vendrá dada por un vector:

$$u(\xi_S) = (u_i(\xi_S))_{i \in S}$$

y aunque la valoración debe ser única, este vector representa las diferentes sensibilidades que existen en la coalición para valorar la misma, si estamos en el caso de utilidad transferible.

Basándonos en ello, el valor del juego determinístico asociado podrá definirse a través de cualquier tipo de valoración dada por los criterios de decisión en ambiente de incertidumbre:

$$T[\xi_S] = T(u_1(\xi_S), u_2(\xi_S), ..., u_k(\xi_S))_{1,2,...,|S| \in S}$$

que será un escalar que nos permita valorar las variables aleatorias a través de las utilidades de los jugadores.

Recordemos como criterios usuales:
· Media $\frac{1}{|S|}\sum_{i\in S} u_i(\xi_S)$
· Máximo $\max_{i\in S} u_i(\xi_S)$
· Mínimo $\min_{i\in S} u_i(\xi_S)$
y combinaciones de los mismos, según veíamos en el capitulo segundo.

Se escogerán estos criterios según los axiomas-principios que los jugadores deseen aceptar, por lo que generalmente son compatibles con los órdenes definidos sobre sus argumentos.

El juego equivalente determinista está dado por $\left(N, \widetilde{v}_T\right)$ siendo

$$\widetilde{v}(S) = T_u(\xi_S)$$

que es un clásico juego cooperativo con valoraciones escalares. Notemos que podría ser que el criterio empleado en cada coalición fuera diferente, lo que no haría más compleja la aproximación al problema, aunque no lo es desde el punto de vista formal.

Como vimos en el capítulo anterior tampoco es más general considerar el caso en el que una coalición tiene como valoraciones un conjunto de variables aleatorias $\{\xi_S(a)\}$ con $a \in A(S)$, puesto que en este caso también podríamos llegar a la valoración escalar a través de la valoración conjunta de todas las posibles alternativas. Así Suijs, et al (1.999)[**6**] proponen como valoración

$$T_u(\xi_S(a)) = \max_{a\in A(S)} \max_{i\in S} u_i(\xi_S(a))$$

pero como fácilmente se puede comprobar, podríamos emplear combinaciones alternativas de criterios.

TEOREMA 1.5. *El juego resultante* $\left(N, \widetilde{v}_T\right)$ *tiene núcleo no vacío si es balanceado, en el sentido de que para cualquier aplicación balanceada* μ *se tiene*

$$\sum_{S \subset N} \mu(S)\, T_u(\xi_S) \leq T_u(\xi_N)$$

que en este caso depende tanto de las utilidades de los jugadores y/o coaliciones, como de los criterios de decisión en la incertidumbre que empleen. Es por ello muy importante escoger criterios y utilidades compatibles con los órdenes parciales a los que se enfrentan los mismos, pues las soluciones que se aporten en los modelos determinísticos asociados deben pertenecer a los conjuntos solución en los modelos estocásticos de los que se parte.

EJEMPLO 1.2. *Sea el juego anteriormente analizado de tres jugadores que desean cooperar para producir un cierto bien, pero que el jugador 1 y el 2 sólo disponen de tecnología para la producción, aunque no equivalentes, y el jugador 3 dispone de recursos.*

En caso de asociación de jugadores en la que participe el jugador 3 tiene una recompensa valorada por una variable aleatoria uniforme en el intervalo (0,6).

Deseamos saber cuáles serían las imputaciones del núcleo de dicho juego.

En este juego al ser el jugador 3 veto, y repartir lo mismo para las coaliciones de dos jugadores que para la gran coalición, el único reparto estocástico del núcleo es el dado por:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 \backsim U(0,6).$$

Si escogen la utilidad que les proporciona el valor medio, ocurre un resultado análogo:

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3.$

siendo, también única esta solución para el juego en valores medios.

Si escogemos el criterio de riesgo fijado de nivel α*, nuevamente podemos ver que existe una única solución del núcleo dada por:*

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 6\alpha.$

Pero si cada uno de los jugadores emplea un nivel de riesgo diferente, el núcleo puede ser un conjunto de puntos o incluso ser vacío:

Sean los niveles de riesgo $\alpha_1 = \alpha_2 > \alpha_3$*, podemos ver que la solución al emplear el criterio de máximo puede ser:*
$x_1 = x_2 = 3(\alpha_1 - \alpha_3), \quad x_3 = 6\alpha_3$
pero si el signo entre los niveles de riesgo es el contrario, el núcleo sería vacío.

1.2.1. *Juegos de la producción y utilidades particulares.*

Suponemos que el jugador i-ésimo no emplea la utilidad esperada al valorar la acción x , sino que emplea un criterio particular. En el caso de que cada jugador i valore el vector aleatorio c mediante un cierto vector $c\,(i)$, asociado de algún modo a la variable aleatoria original, se tendría que no podemos asociar un problema determinístico equivalente único para todas las coaliciones.

Si los jugadores escogen como criterio que globaliza sus deseos el valor medio, el juego equivalente escalar sería:

$$(N, v_{media})$$

donde

$$v_{media}(S) = \max\left\{ \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} c(i)\, x \quad / \; Ax \leq \sum_{i \in S} b^i \;, \; x \geq 0 \right\}$$

que en este caso aunque es un juego cooperativo escalar, no es un juego clásico de la producción, puesto que cada coalición valora sus acciones a través de una función lineal diferente.

Más compleja aún es la situación a la que conducen otros criterios

$$(N, v_{\max})$$

donde

$$v_{\max}(S) = \max\left\{ \max_{i \in S} \; c(i)\, x \; / \; Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, \; x \geq 0 \right\}$$

También este lleva a un juego escalar, pero el cálculo de las valoraciones de las coaliciones no se hace a través de un problema de programación lineal sino a través de un problema de programación convexa.

Más dificil de abordar aún es el caso en el que se toma el criterio del mínimo, pues ahora nos conduce a un problema de optimización cóncava, por lo que debemos emplear técnicas de optimización global para buscar el vector del poliedro que da la valoración a la coalición.

1.2.2. *Utilidad no transferible.*

Más fácil de abordar sería el caso en el que la utilidad no sea transferible, en cuyo caso $u_i(\xi_S)$ debe representar lo que el individuo valora su participación en la coalición S para cooperar.

En esta ocasión las asignaciones $(x_1, x_2, ..., x_n)$ deben verificar

$$x_i \geq u_i(\xi_S) \quad ,\forall S \subset N$$

por lo que los repartos factibles serán aquellos que verifiquen

$$x_i \geq \max_{S \subset N} \; u_i(\xi_S)$$

y si el juego fuese monótono en el sentido de que si $S \subset T$ se verifique que $\xi_S \trianglelefteq \xi_T$, y la utilidad es compatible con dicho orden, será condición que

$$x_i \geq u_i\left(\xi_N\right)$$

por lo que la función de utilidad debe verificar que

$$\sum_{i \in N} u_i\left(\xi_N\right)$$

sea menor que la cantidad que deben repartirse.

2. FUNCIÓN DE UTILIDAD VECTORIAL

La valoración del juego determinístico equivalente al juego estocástico puede venir dada por un vector, al considerar que varios son los aspectos a tener en cuenta sobre la situación aleatoria y, por tanto, que no pueden ser recogidos por un solo número.

Podríamos seguir en este problema las dos posibilidades anteriores de función de utilidad única para todos los jugadores o una por cada jugador, puesto que el análisis se hace paralelo al caso escalar. En esta ocasión vamos a desarrollar sólo el caso de una función de utilidad única.

Sea $u(\cdot) : \chi \to \mathcal{R}^k$ la función de utilidad que los jugadores están dispuestos a aceptar. El juego determinístico equivalente al juego estocástico vendrá definido por:

$$(N, v_u) \quad \text{siendo} \quad v_u(S) = u\left(\xi_S\right)$$

que es un juego cooperativo vectorial, cuyo estudio puede verse en la tesis doctoral Hinojosa M. A. (2000)[**9**].

En este caso, el concepto de reparto no es un vector, sino una matriz

$$\left(X_{ij}\right) \quad , i = 1, 2, ..., n \quad , j = 1, 2, ..., k$$

que representa lo que a cada jugador le corresponderá en los diferentes criterios.

Teniendo en cuenta que sobre $v_u(\cdot)$ hay definido un orden parcial, podemos volver a caracterizar los conjuntos de soluciones a través de los teoremas estudiados en el capítulo anterior.

La situación más frecuente en la valoración vectorial del juego estocástico es a través de las valoraciones beneficio- riesgo, que suelen emplearse para los ambientes en que existe riesgo, y no sabemos qué valor ocurrirá con certeza.

Varias pueden ser las valoraciones:

• La valoración clásica, como hemos visto en capítulos anteriores, es la E-V, en la que:

$$u(\xi_S) = (E[\xi_S], V[\xi_S])$$

la cual incluso coincide con el orden parcial estocástico para algunas familias de variables aleatorias.

EJEMPLO 2.1. *Así en el caso de que las variables que intervienen en el problema sean variables aleatorias normales, si la utilidad fuese escalar podemos emplear el valor medio como equivalente de certeza, mientras que si es vectorial al tomar la media y varianza como valoración estaríamos resolviendo el problema de un modo equivalente a emplear el orden E-V entre las variables aleatorias.*

• Debido a la dificultad que presenta la varianza, puede ser más beneficioso sustituirla por la función fractil para un cierto valor de k.

$$u(\xi_S) = (E[\xi_S], P[\xi_S \geq k])$$

que permite controlar mejor el factor de riesgo, aunque a veces presenta la dificultad de su manejo.

• En general podemos emplear un conjunto de fractiles $(k_1, k_2, ..., k_p)$
$u(\xi_S) = [P[\xi_S \geq k_1], P[\xi_S \geq k_2], ..., P[\xi_S \geq k_p]]$

que recogería de forma discreta (sólo k puntos) el concepto continuo de dominancia estocástica.

Cualquiera de las anteriores aproximaciones nos llevarían a un juego vectorial determinístico cuyos conceptos de solución se deducen del estudio que hacíamos en el capítulo tercero para los juegos valorados en conjuntos parcialmente oredenados.

En general podemos llegar a esta situación vectorial en el caso de que la función de utilidad esté definida a partir de las funciones escalares.

$$(u_1(\cdot), u_2(\cdot), ..., u_n(\cdot))$$

y se establezca que la valoración se hace a través de una ponderación de las mismas

$$u(\cdot) = \lambda_1 u_1(\cdot) + \lambda_2 u_2(\cdot) + \cdots + \lambda_n u_n(\cdot)$$

si el peso es conocido tendríamos una función de utilidad escalar, pero si existiera cierta discrepancia sobre los pesos y estos no están perfectamente establecidos sino que se tiene una información sobre ellos en forma de relaciones lineales

$$M\lambda \geq 0$$

o bien, a través de intervalos entre las mismas

$$a \leq \lambda \leq b$$

o incluso, por combinación de dichas situaciones, llegaríamos a una función de utilidad vectorial.

La función de utilidad resultante en este caso, sería de la forma

$$u(\cdot) = \left(u^1(\cdot), u^2(\cdot), ..., u^p(\cdot)\right)$$

siendo

$$u^k(\cdot) = \lambda_1^k u_1(\cdot) + \lambda_2^k u_2(\cdot) + \cdots + \lambda_n^k u_n(\cdot)$$

y $\left\{\lambda^k\right\}_{k=1,2,\ldots,p}$ los puntos extremos del poliedro que definen las restricciones establecidas entre los pesos, véase Mármol, A. M. et al(1998)[**28**].

Aunque aparentemente el caso vectorial es equivalente a varios sistemas escalares, esto no es así, ya que el análisis que nos permite realizar es más rico y contiene como caso particular el efectuado componente a componente.

2.1. El juego estocástico de la producción.

En el problema analizado en 1.1.2. empleábamos como función de utilidad, la media de las variables de costes $c = (\overline{c}_1, \overline{c}_2, ..., \overline{c}_p)$, para buscar el modelo equivalente al juego de la producción estocástico.

Si este vector no está perfectamente determinado sino que se dispone de un conjunto de p posibles valores,

$$c(j) = (\overline{c}_1(j), \overline{c}_2(j), ..., \overline{c}_p(j)), \quad j = 1, ..., p$$

aunque se supone que es más probable que sea el dado por i que el dado por j, si $i < j$, se usará el modelo:

$$v(S) = \max \left\{ \sum \lambda_j c(j)\, x \;/\; Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, x \geq 0 \right\}$$

siendo $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p$

por lo que equivale a emplear

$$v(S) = \max \left\{ \sum \lambda_j^1 c(j)\, x, \sum \lambda_j^2 c(j)\, x, ..., \sum \lambda_j^p c(j)\, x \right\}$$

verificándose $Ax \leq \sum_{i \in S} b^i$, $x \geq 0$, y donde los λ_j son dados por $(1/j,\ 1/j, ..., 1/j,\ 0, 0, ..., 0)$.

Por lo que el modelo equivalente asociado, es un juego de la producción vectorial cuyas soluciones del núcleo pueden ser caracterizadas a través del estudio realizado en Hinojosa, M. A. [2000].[**9**]

3. SOLUCIONES EN JUEGOS ESTOCÁSTICOS VECTORIALES.

En el caso de que tengamos juegos estocásticos con pagos vectoriales, pueden asociárseles equivalentes determinísticos a través de las funciones de utilidad, de modo similar a lo efectuado a lo largo del capítulo para los juegos escalares, aunque el juego determinístico equivalente será, generalmente, un juego vectorial.

EXAMPLE 3.1. *Seguros y reaseguros* *(Suijs y Borm [7]).-*

En este juego estocástico la función caracteristica era vectorial:

$v(1) \in (\Gamma(1800, 5), \Gamma(10, 0.5))$
$v(2) \in (\Gamma(900, 5), \Gamma(25, 0.5))$
$v(3) \in (\Gamma(200, 5), \Gamma(90, 0.5))$
$v(1,2) \in (\Gamma(2700, 10), \Gamma(35, 1))$
$v(1,3) \in (\Gamma(2000, 10), \Gamma(100, 1))$
$v(2,3) \in (\Gamma(1100, 10), \Gamma(115, 1))$
$v(1,2,3) \in (\Gamma(2900, 20), \Gamma(125, 2))$

Para este problema, si definimos las utilidades por componentes a través del valor medio, tendríamos un juego determinístico vectorial dado por la siguiente función característica:

$v(1) = E((\Gamma(1800, 5), \Gamma(10, 0.5)))$
$v(2) = E((\Gamma(900, 5), \Gamma(25, 0.5)))$
$v(3) = E((\Gamma(200, 5), \Gamma(90, 0.5)))$
$v(1,2) = E((\Gamma(2700, 10), \Gamma(35, 1)))$
$v(1,3) = E((\Gamma(2000, 10), \Gamma(100, 1)))$
$v(2,3) = E((\Gamma(1100, 10), \Gamma(115, 1)))$
$v(1,2,3) = E((\Gamma(2900, 20), \Gamma(125, 2)))$

cuya resolución se hace por procedimientos ya conocidos. Recordemos que aunque el juego vectorial resultante fuese inesencial, los juegos vectoriales poseen soluciones diferentes de la trivial.

CAPÍTULO 5

SOLUCIONES EN VALORES FINALES

1. MODELO GENERAL.

Las soluciones propuestas en los dos capítulos anteriores nos valoran el riesgo de la cooperación así como el beneficio que obtenemos de ella, ya sea a través de variables aleatorias $(X_i)_{i\in N}$ fruto del reparto aleatorio, ya sea a través de valores $(x_i)_{i\in N}$ fruto del reparto de los equivalentes determinísticos. No obstante, la cooperación entre los jugadores puede obligar también a repartir la cantidad final que resulte cuando el proceso acabe, $\xi_N(w)$, con una realización del beneficio global aleatorio. El estudio de este reparto es el objetivo del presente capítulo.

1.1. El juego de la producción estocástico.

El juego de la producción con beneficio aleatorio (N, v) está definido por

$$v(S) = \max\left\{cx \;/\; Ax \leq \sum_{i\in S} b^i,\ x \geq 0\right\},\ \forall S \subset N$$

siendo c una variable aleatoria nos proporciona un juego cooperativo estocástico.

Veíamos que si llamamos $\overline{x}\ (S)$ a la solución óptima del problema lineal escalar:

Max $\overline{c}x$
Sujeto por $Ax \leq \sum_{i\in S} b^i$, $x \geq 0$

- El juego cooperativo estocástico $(N, \overline{v})$ donde

$$\overline{v}\,(S) = c\overline{x}\,(S) \quad , \quad \forall S \subset N$$

permite buscar un reparto $(X_1, X_2, ..., X_n)$ entre los jugadores, con X_i variable aleatoria del núcleo si verifican:

$$\sum_{i \in S} X_i \quad \boxed{\succeq} \quad c\overline{x}\,(S) \ , \ \forall S \subset N$$

que nos da una solución en variables aleatorias

- El juego cooperativo escalar (N, v_{media}) donde

$$v_{media}\,(S) = \overline{c}\;\overline{x}\,(S) \ , \ \forall S \subset N$$

permite un reparto escalar $(x_1, x_2, ..., x_n)$, el cual pertenece al núcleo si

$$\sum_{i \in S} x_i \quad \boxed{\succeq} \quad \overline{c}\;\overline{x}\,(S) \ , \quad \forall S \subset N$$

incluso veíamos anteriormente, como Owen había proporcionado soluciones del core usando el problema dual del problerma lineal de la producción.

- Si por el contrario esperamos a conocer el valor de los beneficios $c\,(w)$ al final del proceso, que llamaremos $c\,(w) = c_{final}$, este vector será el verdadero valor que proporciona el beneficio global que los jugadores deban repartirse. Este caso nos conduce al juego escalar (N, v_{final})donde

$$v_{final}\,(S) = \max\left\{ c_{final}x \ / \ Ax \leq \sum_{i \in S} b^i, \ x \geq 0 \right\} \quad , \ \forall S \subset N$$

que es un juego cooperativo escalar, un juego de la producción clásico similar al juego (N, v_{media}) , por lo que conocemos repartos del core.

Incluso si hubiésemos tomado una opción anterior, al repartir un vector aleatorio $(X_1, X_2, ..., X_n)$ entre los jugadores o un vector determinista $(x_1, x_2, ..., x_n)$, siguiendo los modelos anteriormente expuestos, sería fácil hacer un reajuste final. Esto nos podría llevar a un nuevo juego cooperativo.

(N, v_{total}) donde

$$v_{total}(S) = v_{final}(S) - c_{final}\overline{X}(S) \qquad , \forall S \subset N$$

en el caso del reparto aleatorio, o bien

$$v_{total}(S) = v_{final}(S) - \overline{c}\,\overline{x}(S) \ , \ \forall S \subset N$$

y esto nos conduciría nuevamente a juegos escalares, cuyas soluciones se buscan por los métodos clásicos de la Teoría de Juegos.

No obstante esta situación, que se da en el juego de la producción con beneficio aleatorio, de ser una única variable aleatoria c, la que determine todos los pagos aleatorios, tanto ξ_N como cualquiera de las variables aleatorias ξ_S, no es habitual. Lo más usual es que cada coalición reciba un pago ξ_S que no tiene la misma naturaleza, en general, que ξ_N , por lo que la realización de esta última no implica necesariamente la realización de las anteriores.

Debemos desarrollar una metodología, que permitiéndonos analizar el problema anterior de la producción, nos lleve a buscar reglas de ajuste del valor final. Dado que $\xi_N(w)$ es un valor escalar, que no está explícitamente relacionado en los repartos que hemos considerado en los capítulos anteriores, suelen buscarse unas REGLAS DE AJUSTE, que nos relacionen el beneficio real del juego $\xi_N(w)$, con la potencialidad que cada jugador tenga, bien directamente al considerar una nueva situación del juego, o bien teniendo presente las asignaciones que se han efectuado en una etapa anterior, como veíamos en el modelo de la producción anterior. En este caso las asignaciones que efectuaremos serán funciones de los valores finales. Las elecciones o decisiones basadas en futuras realizaciones de las variables aleatorias que intervienen en el problema son ampliamente usadas en Programación Estocástica donde se les conoce como REGLAS DE ORDEN CERO.

Para ello se escogen asignaciones para el jugador i,

$$X_i = f_i\left(\xi_N, v\left(\cdot\right), ...\right)$$

que sean eficientes en el sentido de que cuando se realiza la variable global en $\xi_N\left(w\right)$ se tenga que

$$\sum_{i \in N} X_i\left(w\right) = \xi_N\left(w\right)$$

y buscando que presenten otras propiedades, como las de ser asignaciones no dominadas de algún juego escalar que se defina en relación con las preferencias de los jugadores.

2. TIPOS DE REPARTO

Teniendo presente lo anteriormente expuesto, los repartos X_i asignados a cada jugador i deben tener presente la situación estocástica que el juego cooperativo conlleva, así como los valores finales que la variable aleatoria ξ_N manifiesta, por lo que puede verse como un vector bidimensional.

$$X_i = (A_i, B_i)$$

donde A_i representa un reparto anticipado del beneficio/costo soportado en el juego por el jugador i–ésimo , y B_i el ajuste que debe de realizarse en su recompensa para que el rendimiento final $\xi_N\left(w\right)$ sea totalmente repartido.

• Los valores A_i pueden ser participaciones del riesgo y por tanto variables aleatorias ó bien valores determinísticos dados por los equivalentes de certeza asociados, como hemos manifestado en los capítulos anteriores. Sea cualquiera de los dos, el sentido que le demos a los mismos, al desear ajustar el valor escalar $\xi_N\left(w\right)$ que debe finalmente repartirse, estos valores A_i deben ser escalarizados para poder hacer el balance final que se pretende, por lo que serán valorados por el $u_i\left(A_i\right)$ que el individuo proponga.

• Los valores B_i permiten realizar el ajuste, y deberán estar fuertemente relacionados con la variable aleatoria ξ_N. Debido a que en el juego cooperativo estocástico la única variable aleatoria que podemos ver su realización es ξ_N , esta no suele ser comparada con la realización de las restantes variables aleatorias ξ_S asociadas a las coaliciones, y es ello lo que hace que la valoración numérica asociada a B_i se realice teniendo presente sólamente el equivalente de certeza asociado a dicha variable.

Con ello el juego resultante asociado puede verse como un juego vectorial biobjetivo, en el que la primera componente está relacionada con el reparto del riesgo que el juego estocástico conlleva, y la segunda componente es un "juego de bancarrota" en el que se desea repartir el resultado final en valores seguros, partiendo de lo que ya se ha recibido. Es decir, se trata en el segundo juego de buscar la proporción r_i en la que debe de colaborar el jugador $i-$ésimo al ajuste final de las pérdidas/beneficios que resulten al final, teniendo presente la participación previa en el proceso.

También podemos contemplar el juego resultante como un juego escalar si ambos juegos componentes considerados están valorados en las mismas unidades:

$$X_i = A_i + B_i$$

pero puede ser frecuente que ambos tipos de valores representen conceptos muy diferentes, ya que uno representa riesgo de participación en la cooperación y el otro el riesgo asociado a la liquidación final, el cual incluso en algunas ocasiones no tiene por qué realizarse. Así puede ocurrir en una compañía de seguros y reaseguros, en la que se obtienen beneficios a cuenta del proceso de riesgo que se tiene, pero nunca se ejecuta el proceso final de ajuste. En otras ocasiones, como hemos visto en el juego estocástico de la producción, ambos conceptos tienen la misma interpretación y son medidos en las mismas unidades.

2.1. Reparto vectorial aleatorio.

En este caso A_i es una variable aleatoria en el sentido del capítulo tercero, por lo que el reparto se hace sobre el valor aleatorio global ξ_N

$$(A_1, A_2, ..., A_n) \text{ tal que } \sum_{i \in N} A_i = \xi_N$$

siendo A_i variables aleatorias, las asignaciones posibles en cuanto al riesgo.

El ajuste final que nos determina B_i vamos a suponer a lo largo del resto del capítulo que tiene por regla cero una expresión sencilla, aunque la metodología que seguiremos es validada cualquiera que sea la regla seguida. No obstante, hemos de destacar que la condición de balanceo de un juego es condicion necesaria y suficiente para que el juego tenga solución sin condiciones sobre el tipo de solución. Cuando esta tenga una forma especial, y por tanto, sea una subclase del conjunto general, la solución del sistema de inecuaciones que se originen no está garantizada por la condición general. No obstante , en estos casos se buscan condiciones que deben verificarse para que este conjunto sea no vacío, especialmente buscando un juego cuyo núcleo sin condiciones, nos determine el conjunto de soluciones que deseamos.

Supondremos que cada jugador comparte el costo/beneficio total a través de una proporción r_i , $\sum_{i \in N} r_i = 1$, que debemos determinar en función de la "fuerza" del jugador en el proceso de cooperación. Por tanto

$$B_i = r_i \xi_N - A_i \ , \ i \in N$$

Debido a que $\sum_{i \in N} B_i$ es estrictamente cero, podemos ver esto como un equilibrio del sistema.

Puesto que el jugador tenía el valor A_i como asignación de riesgo, debe ahora recibir $r_i \xi_N (w)$ como recompensa final.

Para resolver el juego vectorial debemos determinar, pues, la asignación (A_i, r_i) , $i \in 1, 2, ..., N$, que verifique las propiedades deseadas, en un juego estocástico vectorial cuya función característica es

$$v(S) = \left(\xi_S \ , \ \xi_S - \sum_{i \in S} A_i \right)$$

en el que la valoración coalicional dependa de la asignación en la otra coordenada.

Si hacemos ambos procesos independientes, y definimos $B_i = r_i \xi_N, i \in N$, el juego vectorial estaría definido por $v(S) = (\xi_S, \xi_S)$, y la condición de núcleo por:

$$\sum_{i \in S} A_i \quad {}_o\succ \quad \xi_S$$

$$\xi_N \left(\sum_{i \in S} r_i \right) \quad {}_o\succ \xi_S \quad , \qquad S \subset N$$

$$\sum_{i \in N} r_i = 1$$

la segunda componente del juego puede convertirse en escalar al usar la función de utilidad del individuo

$$u_i \left(r_i \xi_N - A_i \right)$$

en relación con $u_i(\xi_i) - u_i(A_i)$.

2.1.1. *Juegos estocásticos normales.*

Sea un $JEN^n(N, v)$, donde vamos a usar el orden convexo-creciente. En este caso el juego vectorial que nos permite encontrar los valores (A_i, r_i) , $i \in 1, 2, ..., N$, tiene ambas componentes independientes, dada la caracterización de las soluciones del núcleo de preferencia de los JEN^n.

De este modo los valores de A_i son variables aleatorias

$$X_i \sim N\left(\mu_{X_i}, \sigma^2_{X_i}\right)$$

verificando $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = v(N)$, que para pertenecer al núcleo deben verificar:

$$\sum_{i\in S} \mu_{X_i} \geq \mu_S$$

$$\sum_{i\in S} \sigma^2_{X_i} \geq \sigma^2_S$$

Para determinar los valores (r_i) , que nos determinan la segunda componente del reparto deberemos escogerlos verificando

$$\mu_N \sum_{i\in S} r_i \geq \mu_S$$

$$\sigma^2_N (\sum_{i\in S} r_i)^2 \geq \sigma^2_S$$

lo que nos indica que debemos resolver el juego escalar (N, v) donde

$$v(S) = \max\left(\frac{\mu_S}{\mu_N}, \frac{\sigma_S}{\sigma_N}\right)$$

Las soluciones del core de este juego nos proporcionan los valores de los (r_i) que buscamos. Nótese como es la condición de que este juego sea balanceado la que nos indica la condición de existencia de core del juego original, y no las condiciones que podíamos establecer sobre el juego estocástico.

En este caso, debido a las propiedades que tienen las leyes normales, los valores (r_i) son independientes de la asignación anterior. Así si tomamos utilidades en esta segunda componente, los procesos no son independientes, salvo en el caso de que las funciones de utilidad sean lineales.

2.2. Reparto vectorial en valores seguros.

Ahora A_i es un valor escalar en el sentido del capítulo cuarto, por lo que este reparto se hace sobre un valor equivalente de ξ_N, que llamaremos genéricamente $u_N(\xi_N)$, así:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \text{ tal que } \sum_{i \in N} a_i = u_N(\xi_N) \quad , \quad a_i \in \mathcal{R}$$

son las asignaciones posibles en esta componente.

Análogamente el ajuste final B_i será de la forma

$$B_i = r_i \xi_N - a_i$$

donde al ser

$$\sum_{i \in N} B_i = \xi_N - \sum_{i \in N} a_i = \xi_N - u(\xi_N) \ ,$$

nos indica que ahora tenemos un equilibrio en valores equivalentes.

Por lo que tenemos un juego vectorial, en el que una componente es escalar y la otra aleatoria:

$$v(S) = \left(u_S(\xi_S) \ , \ \xi_S - \sum_{i \in S} a_i \right)$$

Análogamente al caso anterior, el jugador i-ésimo recibe una cantidad final de ajuste

$$r_i \xi_N(w) - a_i$$

si se recibió un pago a_i, y

$$r_i \xi_N(w)$$

en caso contrario.

Puesto que estamos en valores equivalentes, podemos valorar B_i

$$B_i^{'} = u_i\left(r_i \xi_N\right) - a_i \ , \ i \in N$$

que bajo hipótesis bastante generales será de la forma

$$B_i^{'} = r_i u_i(\xi_N) - a_i.$$

Con todo el ello el juego vectorial debe determinar la asignación (a_i, r_i) , $i = 1, 2, ..., N$ que verifique las propiedades deseadas, en un juego cuya función característica es:

$$v\left(S\right) = \left(u_S\left(\xi_S\right), u_S\left(\xi_S\right) - \sum_{i \in S} a_i\right)$$

situación similar al caso anterior, pero ahora sobre un juego vectorial escalar.

Siguiendo el paralelismo del caso anterior, suponemos ambas coordenadas independientes, y definimos $B_i = r_i \xi_N$. El juego vectorial estaría definido por

$$v\left(S\right) = \left(u_S\left(\xi_S\right), u_S\left(\xi_S\right)\right)$$

con la condición de núcleo

- $\sum_{i \in S} a_i \geq u_S\left(\xi_S\right)$
- $u_S\left(\xi_N\right) \sum_{i \in S} r_i \geq u_S\left(\xi_S\right)$, $S \subset N$
- $\sum_{i \in N} r_i = 1$

Ambos casos nos llevan a un juego vectorial biobjetivo, pudiendo ser las componentes del mismo variables aleatorias o escalares expresados por los equivalentes de certeza.

2.2.1. *Juegos estocásticos normales.*

En el caso de los JEN^n el juego vectorial equivalente, si empleamos el criterio del valor esperado conduce a un juego escalar ya que ambas componentes son juegos proporcionales .

La búsqueda de los (r_i) se hace a través del juego escalar que tiene por función característica a $v(S) = \mu_S/\mu_N$, que es equivalente al juego escalar que tiene por función caracteristica a $v(S) = \mu_S$, dadas las condiciones de los repartos eficientes.

La similitud de comportamiento de ambas componentes nos lleva a pensar que debemos hacer una valoración global de las dos, pero recordemos que ello sólo es posible si hay una medida común de ambas componentes.

2.3. Reparto escalar.

En el caso de presentar un juego escalar para el reparto final, tendremos que

$$X_i = A_i + B_i$$

Teniendo en cuenta lo anterior podremos escribir

$$X_i = A_i + r_i\,(\xi_N - K_N)$$

donde supondremos que

$\sum_{i\in N} A_i = K_N$ cantidad repartida a priori y
$\sum_{i\in N} r_i = 1$ proporción final a repartir.

Aceptaremos en lo que sigue que el reparto inicial a cada individuo se ha producido en valores seguros, por lo que tanto K_N como A_i , son valores escalares. K_N será algún valor asociado a ξ_N a través de la utilidad de los jugadores.

Notemos que X_i es una variable aleatoria, y debemos asegurar que la asignación $(X_1, X_2, ..., X_n)$ sea eficiente, en el sentido de que $\sum_{i \in N} X_i = \xi_N$, siendo función de los parámetros (a_i, r_i).

Esto nos conducirá a un juego escalar, pero este puede ser:

- Aleatorio
- Determinístico

2.3.1. *Caso aleatorio.*

El juego estocástico cooperativo está definido por el juego inicial.

$$v(S) = \xi_S$$

pero ahora las asignaciones $(X_1, X_2, ..., X_n)$ no son variables aleatorias cualesquiera, sino que tienen la forma anterior:

$$X_i = a_i + r_i (\xi_N - K_N)$$

es decir, cada X_i es una variable aleatoria debido a que en la expresión aparece ξ_N , que está dada, pero sólo depende de ella a través de los parámetros $(a_i, r_i)_{i \in N}$.

Es, trivialmente, una asignación pues

$$\sum_{i \in N} X_i = \sum_{i \in N} a_i + (\xi_N - K_N) \sum_{i \in N} r_i = \xi_N$$

Si deseamos una solución del core debe ser:

$$X_S = \sum_{i \in S} X_i \ \boxed{\succ} \quad \xi_S \ , \forall S \subset N$$

donde

$$\sum_{i\in S} X_i = \left(\sum_{i\in S} r_i\right)\xi_N + \sum_{i\in S} a_i - K_N\left(\sum_{i\in S} r_i\right)$$

es una variable aleatoria con la misma ley que ξ_N , pero con un factor de escala dado por

$$\sum_{i\in S} r_i$$

y un factor de localización

$$\sum_{i\in S} a_i - K_N\left(\sum_{i\in S} r_i\right)$$

Juegos estocásticos normales.
Sea el juego estocástico JE^n donde

$$v(S) = \xi_S \in N\left(\mu_S, \sigma_S^2\right) \quad , \forall S \subset N$$

Cada variable X_S es una ley normal con:

$$\mu_S = \mu_N\left(\sum_{i\in S} r_i\right) + \sum_{i\in S} a_i - K_N\left(\sum_{i\in S} r_i\right)$$

$$\sigma_S^2 = \sigma_N^2\left(\sum_{i\in S} r_i\right)^2$$

Por lo que se da la dominancia en orden convexo creciente

$$X_S \boxed{\succeq} \quad \xi_S \ , \forall S \subset N$$

si se verifica

$$\mu_N\left(\sum_{i\in S} r_i\right) + \sum_{i\in S} a_i - K_N\left(\sum_{i\in S} r_i\right) \geq \mu_S$$

$$\sigma_N^2\left(\sum_{i\in S} r_i\right)^2 \geq \sigma_S^2$$

donde debemos buscar los (a_i, r_i) verificando dichas ecuaciones.

Si tomamos $a_i = \frac{\mu_N}{N}$ con $K_N = E[\xi_N] = \mu_N$
la determinación de $(r_i)_{i \in N}$ se haría, si se verifica que

$$\frac{|S|\,\mu_N}{N} \geq \mu_S \quad , \qquad \forall S$$

buscando los elementos que cumplan

$$\sum_{i \in S} r_i \geq \frac{\sigma_S}{\sigma_N}$$

que son las soluciones núcleo del juego escalar (N, v) donde

$$v(S) = \frac{\sigma_S}{\sigma_N}$$

· Para el caso en que $K_N \neq \mu_N$, podemos tener una relación entre los elementos r_i y a_i para que el problema sea resoluble, pues debe ser

$$\sum_{i \in S} r_i \geq \frac{\mu_S - \sum_{i \in S} a_i}{\mu_N - K_N}$$

Todo reparto verificando esta condición es del núcleo si verifica la acotación de las varianzas.

2.3.2. *Caso determinístico.*

El juego escalar cooperativo está definido por

$$v(S) = u_S(\xi_S)$$

siendo ahora las asignaciones valoradas según el equivalente de certeza que usen los jugadores

$$x_i = a_i + r_i\,(u_N(\xi_N) - K_N)$$

Cualquier asignación $(x_1, x_2, ..., x_n)$ verificando que $\sum_{i \in N} a_i = K_N$ y $\sum_{i \in N} r_i = 1$, será eficiente, pues en este caso se reparte $u_N(\xi_N)$, y no la variable aleatoria ξ_N.

Debemos, como en el caso anterior, determinar a_i y r_i de modo que la asignación verifique las propiedades deseadas.

En el caso de ser

- $K_N = E[\xi_N]$
- $u_N(\xi_N) = \max_{i \in N} u_i(\xi_N)$

estaremos en el modelo propuesto por Suijs, J. et al (1999)[**6**]. En dicho trabajo demuestran que en este caso el juego estocástico tiene solución en el core si y sólo si es balanceado respecto del criterio de incertidumbre si es empleado el criterio del máximo.

La elección de un punto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de asignación para los jugadores se establece siguiendo las líneas generales de la teoría, como hemos visto con anterioridad. Notemos que la elección del tipo de asignación no tiene más interés, sobre la teoría general, de disponer de dos parámetros, en lugar de uno del caso clásico. No obstante, como hemos indicado anteriormente, al escoger las soluciones con estructura especial puede que el core sin ser vacío no contenga soluciones del tipo que deseamos.

Las condiciones de existencia de núcleo para estos juegos se sigue de la teoría general desarrollada para los juegos determinísticos, al buscar la condición de que el juego sea equilibrado, si este es escalar, o que sea equilibrado por componentes si este es vectorial.

Juegos estocásticos normales.

En el caso de los JEN^n, si empleamos el criterio del valor esperado, los repartos se hacen sobre los valores (a_i), puesto que la solución es independiente de los valores que se tome para el ajuste final.

La problemática se presenta en la composición de las utilidades individuales $u_i(\cdot)$, $i = 1, 2, ..., N$ y la utilidad coalicional $u_S(\cdot) = T_u(\cdot)$, $S \subset N$, que aunque el juego escalar está perfectamente definido por $v(S) = u_S(\xi_S)$, no le ocurre lo mismo a los conceptos de dominancia al considerar desde varias ópticas el pago recibido por una coalición.

3. DOMINANCIA INDIVIDUAL VERSUS DOMINANCIA COALICIONAL.

Cuando los elementos ξ_S están valorados sobre la recta real a través de una función de utilidad $u : \chi \to \mathcal{R}$, el juego escalar correspondiente

$$v(S) = u(\xi_S) \ , \ \forall S \subset N$$

no presenta conflicto entre la dominancia a través de los individuos o de las coaliciones si el juego es subaditivo, como vimos en el capitulo tercero.

Pero en el caso en que cada individuo tenga una función de utilidad $u_i : \chi \to \mathcal{R}$, dado que el juego escalar se define a través de un criterio de decisión $T_u(\cdot)$ en ambiente de incertidumbre:

$$v(S) = T_u\left(u_1(\xi_S), \ u_2(\xi_S), ..., u_{|S|}(\xi_S)\right)$$

y nuevamente puede existir conflicto entre la dominancia individual y la colectiva en función de las propiedades que $T_u(\cdot)$ verifique.

El juego escalar está perfectamente definido, y conocemos la condición para que una asignación escalar $(x_1, x_2, ..., x_n)$ esté en el núcleo, a través de la caracterización de que el juego escalar definido sea equilibrado, como decíamos anteriormente.

En este caso, la dominancia individual en una coalición S es

$$X \overset{S}{dom}\, \mathrm{i}_{\boxtimes} Y \text{ si } u_i(X_i) \geq u_i(Y_i) \ , \ \forall i \in S$$

y

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} u_i(X_i)$$

pero la dada globalmente sería

$$X \overset{S}{dom}_{\boxtimes} Y$$

si

$$T_u\left(u_1(X_1), u_2(X_2), ..., u_{|S|}(X_S)\right) \geq T_u\left(u_1(Y_1), u_2(Y_2), ..., u_{|S|}(Y_S)\right)$$

y

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} u_i(X_i)$$

Deseamos relacionar ambos conceptos en función del criterio $T_u(\cdot)$ empleado. Si el criterio $T_u(\cdot)$ de decisión bajo incertidumbre es compatible con el orden vectorial definido entre los vectores de valoración de las coaliciones, el segundo concepto es consecuencia del primero, pero la implicación contraria es mas difícil de establecer. Por ello en los estudios se toma la dominancia coalicional por individuos como herramienta de trabajo.

Otra cuestión relacionada con lo que hemos dicho anteriormente, es estudiar los repartos que las coaliciones pueden hacer.

Una coalición S estudia la dominancia sobre repartos totales de $v(N)$, pero aisladamente ella puede hacer repartos de $v(S)$ para los elementos de la coalición, pensando en que no se van a dividir ni a unir en el proceso de cooperación.

Por tanto define repartos eficientes X^S , $S \subset N$, según la coalición, al verificar $\left(X_1^S, X_2^S, ..., Xx_{|S|}^S\right)$

$$\sum_{i \in S} u_i\left(X_i^S\right) > v(S) \triangleq T_u\left(u_1(S), u_2(S), ..., u_{|S|}(S)\right)$$

Estos repartos pueden ser comparados con los repartos efectuados sobre $v(N)$.

Una coalición S desea cooperar, si como se expone en las condiciones para que una asignación pertenezca al core, recibe más que lo que consigue aisladamente:

$$\sum_{i \in S} u_i(X_i(N)) \geq T_u\left(u_1(S), u_2(S), ..., u_{|S|}(S)\right)$$

Pero ello debe estar relacionado, no sólo con la dominancia como antes veíamos, sino también con los pagos que la coalición puede recibir a través de sus repartos X^S, es decir:

no puede existir un reparto $X^S\left(X_1^S, X_2^S, ..., X_{|S|}^S\right)$ tal que

$$u_i\left(X_i^S\right) \geq u_i\left(x_i\left(N\right)\right) \quad , \forall i \in S$$

Esta condición implica la anterior, pero es interesante conocer la implicación contraria en función de T_u.

4. REPARTO ESPECIAL

Un caso particular de todo lo estudiado anteriormente sería el caso de que en un JE^n los repartos factibles sean de la forma $X_i = r_i\xi_N$, $i = 1, ..., n$, en cuyo el problema queda reducido a la búsqueda de los parámetros (r_i) que determinan la solución.

Puesto que los repartos son eficientes, ya se aborde el problema desde la óptica determinista o estocástica, las condiciones sobre los valores es sencilla, conduciendo generalmente a considerar juegos escalares, como anteriormente hemos visto.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Infante, R. (1972) "Nota sobre la programación lineal estocástica: Evolución y estado actual". Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa Vol XXIII, 1y 2. 9-49.

[2] Infante, R. (1976) "Teoría de la Decisión". UNED.

[3] Tijms, H. (1994) "Stochastic models". Wiley

[4] Owen, G. (1982) "Game Theory". Academic Press.

[5] Tijs, S. y Otten, G. (1993) "Compromise Values in Cooperative Game Theory" Top Vol 1, N^o 1, 1-51.

[6] Suijs, J., Borm, P., De Waegenaere, A., Tijs, S. (1999) "Cooperative Games with stochastic payoffs" E.J.O.R., 113 193-205.

[7] Suijs, J., Borm, P., De Waegenaere, A (1998) "Stochastic cooperative games in insurance" Insurance, 22, 209-228.

[8] Granot, D. (1977) "Cooperative games in stochastic characteristic function form" Mangement Science 23, n^o 6, 621-630

[9] Hinojosa, M. A. (2000) "Juegos cooperativos vectoriales con información adicional". Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

[10] Driessen, T. (1988) "Cooperative Games, solutions and applications". Kluwer A. P.

[11] Fernández F. R. (1976) "Nota sobre dominancia estocástica". Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Vol. XXVII, 263-267.

[12] Karlin, S., Novikoff, A. (1963) "Generalized convex inequalities". Pacific J. Math. 13, 1251-1279.

[13] Fishburn P. y Vickson R. (1978) "Theoretical Foundations of Stochastic Dominance". "Stochastic Dominance" G.A. Whitmon and M. C. Findlay (editores), Lexington.

[14] Shakad, M. y Shanthikum, J.G. (1994) "Stochastic Orders and Their Applications". Academic Press.

[15] Van Zwet, R. (1964) "Convex Transformations of Random Variables". Math. Centrum. Amsterdam.

[16] Markowitz, H. M. (1987) "Mean-Variance Analysis in Portfolio choice and Capital Markets". Basil Blackwell.

[17] Von Neumann , J. y Morgenstern, O. (1944) "Theory of games and economic behavior". Princenton University Press.

[18] Fishburn, P. (1982) "The foundation of Expected Utility".D. Reidel. Dordrecht.

[19] Pratt, J. W. (1964) "Risk aversion in the small and in the large". Econometrica 32, 122-136.

[20] Arrow, K. J. (1974) "Essays in the Theory of Risk-Bearing". North-Holland

[21] Milnor, J. (1954) "Games against nature".Decision Processes. Wiley.

[22] Roubens, M. y Vincke, P. (1985) "Preference modelling". Lectures Notes in Economic and Mathematical Systems. Springer

[23] Bereanu, B. (1967) ."On stocastic linear programming. Distributions problems, stochastic technology matrix". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete. 8,1967,148-152.

[24] Wolfe, P. (1959) "The simplex Method for Quadratic Programming". Econometrica, 27, n^o 3, 382-398.

[25] Stancu-Minasian, I. M. (1984) "Stochastic Programming". D. Reidel P. C.

[26] Cohon, J. L. (1978) "Multiobjetive Programming and Planning". Academic Press.

[27] Kataoka, S. (1963) "A stochastic programming model". Econometrica 31, 181-196.

[28] Mármol, A. M. ,Puerto, J. ,Fernández, F. R. (1998) "The use of partial information on weights in multicriteria decision problems". Journal of Multicriteria Decision Analysis, vol 7, 322-329.

[29] Geoffrion, A. M. (1987) "Stochastic programming with aspiration or fractile criteria". Management Science, 13, n^o 9, 672-679

[30] Fernández, F. R. ,Puerto, J., Hinojosa M. A. "Core solutions in vector-value games". sometido a J.O.T.A.

[31] Fernández, F. R. ,Puerto, J., Monroy L. (1998) "Multicriteria Goal Games". Journal of Optimization Theory and Applications Vol. 99 n^o 2, 403-421.

[32] Fernández, F. R. ,Puerto, J., Monroy L. (1999) "Two persons non-zero sum games as multicriteria goal games". Annals of Operations Research vol. 84, 195-208.

[33] Fernández, F. R. ,Mármol, A. , Puerto, J. (1999) "Improving weighted information in interactive decision prodedures. A visual guide" Research and Practice in Multicriteria decision making. Y. Y. Haimes and R. E. Steuer (eds). Lecture Notes en Economics and Mathematical Systems n^o 487 Springer-Verlag. por aparecer.

[34] Puerto, J. , Fernández, F. R. ,Hinojosa, M. , Mármol, A. Monroy L. (1999) "Solution concepts for multiple objective N-person games".Investigaçao Operational. 19 , 193-209.

[35] Puerto, J. , Mármol, A. Monroy L, Fernández, F. R.(2000)"Decision Criteria with Partial Information". International Transactions in Operations Research. vol 7. 51-65.

INDICE

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Mª José Zafra Garrido titulada JUEGOS COOPERATIVOS ESTOCASTICOS

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE POR UNANIMIDAD

Sevilla, 5 de diciembre 2000

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,