

Tesis Doctoral

Universidad de Sevilla

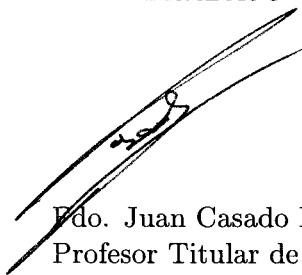
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

# HOMOGENEIZACIÓN DE ESTRUCTURAS RETICULADAS: UN MÉTODO MULTIESCALA

Manuel Luna Laynez

043  
379

VºBº DIRECTORES DEL  
TRABAJO



Fdo. Juan Casado Díaz.  
Profesor Titular de  
la Universidad de Sevilla.



Fdo. José D. Martín Gómez.  
Profesor Titular de  
la Universidad de Sevilla.

Memoria presentada por  
Manuel Luna Laynez,  
para optar al grado de Doctor  
en Matemáticas.

Sevilla, Marzo de 2003.



Fdo. Manuel Luna Laynez.


UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en el Dpto. de  
Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico  
de la Facultad de Matemáticas  
de esta Universidad desde el día 25/03/03  
hasta el día 10/04/03

Sevilla, 27 de marzo de 2003

EL DIRECTOR DEL Dpto.

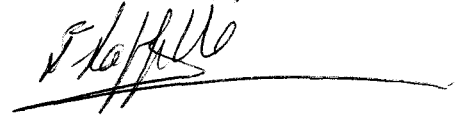


UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARÍA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 096 número 249 del libro  
Correspondiente.

Sevilla, 20 de marzo, 2003

El Jefe del Repostado de Teles.



A mis padres, Manuel y Aurora,  
y a mi esposa, Beatriz.

# Índice

<b>Índice de Figuras</b>	<b>3</b>
<b>Notación</b>	<b>4</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1 Planteamiento general y definiciones</b>	<b>21</b>
1.1 Estructuras reticuladas . . . . .	21
1.2 Descomposición en escalas . . . . .	24
1.3 Planteamiento de los problemas . . . . .	27
<b>2 Una estructura modelo</b>	<b>33</b>
2.1 Resultado de compacidad . . . . .	33
2.2 Resultado de homogeneización. Caso lineal con coeficientes constantes . . .	40
2.3 Resultado de homogeneización. Caso general . . . . .	46
<b>3 Aplicación a otras situaciones</b>	<b>51</b>
3.1 Estructuras compuestas por placas . . . . .	52
3.2 Estructuras que disminuyen su dimensión en el límite . . . . .	57
3.3 Un problema de evolución . . . . .	65
3.4 Extensión a estructuras generales . . . . .	75
<b>4 Homogeneización de estructuras reticuladas elásticas</b>	<b>87</b>
4.1 Planteamiento del problema y definiciones . . . . .	88

4.2	Desigualdades de tipo Korn . . . . .	90
4.3	Resultado de compacidad . . . . .	93
4.4	Resultado de homogeneización . . . . .	111
4.5	Estructuras reforzadas . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Una estructura elástica que degenera en una de dimensión menor</b>	<b>124</b>
5.1	Planteamiento del problema. Estimaciones a priori . . . . .	125
5.2	Resultado de compacidad . . . . .	128
5.3	Resultado de homogeneización . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Resultados auxiliares</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>158</b>

# Índice de Figuras

<b>Figura 1.1:</b> Definición de $\Omega_\epsilon$ .....	23
<b>Figura 1.2:</b> Estructura modelo bidimensional .....	31
<b>Figura 1.3:</b> Detalle ampliado de la estructura modelo .....	31
<b>Figura 1.4:</b> Estructura modelo tridimensional .....	32
<b>Figura 1.5:</b> Estructura compuesta por placas .....	32
<b>Figura 1.6:</b> Estructura que degenera en una de dimensión menor .....	32
<b>Figura 3.1:</b> Condición de tangencia .....	76
<b>Figura 4.1:</b> Estructura reforzada .....	117

# Notación

$e_j$ :  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ .

$Y$ : intervalo  $(-1/2, 1/2) \subset \mathbb{R}$ .

$x'_i$ : punto genérico de  $\mathbb{R}^N$  tal que su  $i$ -ésima componente es cero. Para  $x = (x_1, \dots, x_N)$  en  $\mathbb{R}^N$ , se denota también  $x'_i = \sum_{l \neq i} x_l e_l$ . Así  $x = x_i e_i + x'_i$ . Las confusiones se evitarán por el contexto.

$|x|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$ , para  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ .

$\mathcal{P}_n x$ : proyección ortogonal de  $x \in \mathbb{R}^N$  sobre el subespacio  $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{N-n}$ ,  $n \in \{1, \dots, N\}$ .

$J^i := \{y_i e_i : y_i \in Y\} \subset Y^N$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

$S^i := \{y \in Y^N : y_i = 0\} = \{y'_i \in Y^N\}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

$|A|$ : medida de Lebesgue del conjunto  $A$ .

$\chi_A$ : función característica del conjunto  $A$ .

$p'$ : exponente conjugado de  $p \in (1, +\infty)$ , caracterizado por  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

$\mathfrak{P}_N$ : conjunto de las permutaciones de  $\{1, \dots, N\}$ .

$\text{card}(I)$ : cardinal del conjunto  $I$ .

$\mathcal{M}_N$ : espacio de las matrices cuadradas de dimensión  $N$ .

$\mathcal{S}_N$ : subespacio de  $\mathcal{M}_N$  formado por las matrices simétricas.

$\mathcal{I}_N$ : matriz identidad de orden  $N$ . Cuando se sobreentienda el valor de  $N$  se escribirá  $\mathcal{I}$ .

$M^T$ : traspuesta de la matriz  $M$ .

$\text{tr}(L)$ : traza de la matriz  $L = (L_{ij}) \in \mathcal{M}_N$ , es decir  $\sum_{i=1}^N L_{ii}$ .

$L : M$ : producto escalar de las matrices  $L = (L_{ij})$ ,  $M = (M_{ij}) \in \mathcal{M}_N$ , esto es  $\text{tr}(LM^T) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} L_{ij}M_{ij}$ .

$\mathcal{L}(E, F)$ : espacio de las aplicaciones lineales y continuas de  $E$  en  $F$ .

$E'$ : dual topológico del espacio  $E$ , es decir,  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$ : producto de dualidad entre  $E'$  y  $E$ . Cuando se sobreentiendan  $E'$  y  $E$  se escribirá simplemente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$L^p(A, d\mu)$ : espacio de las clases de funciones sobre  $A$ , subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  medible respecto de  $\mu$ , con valores en  $\mathbb{R}$  y de potencia  $p$  integrable respecto de  $\mu$ .

$L^p(A) := L^p(A; m)$  con  $m$  la medida de Lebesgue.

$L^p_{loc}(A)$ : espacio de las clases de funciones medibles  $u$  definidas en  $A$  con valores en  $\mathbb{R}$  tales que  $u \in L^p(K)$  para todo  $K$  subconjunto compacto de  $A$ .

$L^p(A; E)$ : espacio de las clases de funciones medibles  $u$  definidas en  $A$ , medible de  $\mathbb{R}^N$ , con valores en el espacio de Banach  $E$ , tales que la aplicación  $\|u(\cdot)\|_E$  pertenece a  $L^p(A)$ .

$C_0^\infty(G; E)$ : espacio de las funciones de clase infinito con soporte compacto contenido en  $G$ , abierto de  $\mathbb{R}^N$ , y con valores en el espacio de Banach  $E$ .

$C_0^\infty(G) := C_0^\infty(G; \mathbb{R})$ .

$\mathcal{D}'(G)$ : espacio de las distribuciones en  $G$ .

$W^{1,p}(G)$ : espacio de Sobolev formado por las funciones de  $L^p(G)$  con derivadas distribucionales de primer orden en  $L^p(G)$ .

$W^{1,p}_{loc}(G)$ : espacio de Sobolev formado por las funciones de  $L^p_{loc}(G)$  con derivadas distribucionales de primer orden en  $L^p_{loc}(G)$ .

$W^{1,p}_0(G)$ : cierre de  $C_0^\infty(G)$  en  $W^{1,p}(G)$ .

$W^{1,p}_\gamma(G) := \{u \in W^{1,p}(G) : u = 0 \text{ sobre } \gamma\}$  ( $\gamma$  es un subconjunto de  $\partial G$  con media  $(N-1)$ -dimensional positiva).

$W^{-1,p'}(G)$ : Espacio dual de  $W^{1,p}_0(G)$ , es decir  $(W^{1,p}_0(G))'$ .

$H^1(G) = W^{1,2}(G)$ ,  $H^1_{loc}(G) = W^{1,2}_{loc}(G)$ ,  $H^1_0(G) = W^{1,2}_0(G)$ ,  $H^1_\gamma(G) = W^{1,2}_\gamma(G)$ ,

$$H^{-1}(G) = W^{-1,2}(G).$$

$\sharp$ : subíndice que significa periodicidad. Por ejemplo, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $H_{\sharp}^1(J^i)$  es el espacio de funciones  $u \in H_{loc}^1(\{y_i' = 0\})$  tales que  $u(y_i e_i) = u((y_i + 1)e_i)$ , p.c.t.  $y_i \in \mathbb{R}$ .

$D\phi$ : gradiente de la función  $\phi : G \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ , es decir la matriz  $(\partial_{x_i} \phi_j)_{1 \leq i, j \leq N}$ .

$J\phi$ : jacobiano de la función  $\phi : G \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ , definido por el valor absoluto del determinante de  $D\phi$ .

$e(\phi)$ : gradiente simetrizado de la función  $\phi : G \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ , definido por

$$e(\phi) : G \longrightarrow \mathcal{S}_N, \quad \text{con} \quad e(\phi)_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_{x_i} \phi_j + \partial_{x_j} \phi_i), \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

$e_y(\phi)$ : gradiente simetrizado respecto de la variable  $y$  de la función  $\phi = \phi(x, y) : G \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ , definido por

$$e_y(\phi) : G \times Y^N \longrightarrow \mathcal{S}_N, \quad \text{con} \quad e_y(\phi)_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_{y_i} \phi_j + \partial_{y_j} \phi_i), \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

$\varepsilon$ : parámetro real positivo que toma sus valores en un conjunto numerable constituido por los términos de una sucesión que tiende a cero. De esta manera, toda familia de conjuntos o de funciones parametrizadas con el índice  $\varepsilon$  puede ser considerada como una sucesión.

$d_\varepsilon, p_\varepsilon$ : parámetros positivos que convergen a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

$\theta_\varepsilon$ : función en  $C^1(\mathbb{R})$  tal que (se supone  $d_\varepsilon < 1$ )

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_\varepsilon(t) \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}; & \theta_\varepsilon(t) = 0, \quad \text{si } |t| < \frac{d_\varepsilon}{2}; \\ \theta_\varepsilon(t) = 1, \quad \text{si } |t| > \frac{\sqrt{d_\varepsilon}}{2}; & \left| \frac{d\theta_\varepsilon}{dt} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{d_\varepsilon}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (N.1)$$

$C$ : constante positiva genérica que puede variar de una expresión a otra y que no depende de  $\varepsilon$ .

$O_\varepsilon$ : sucesión genérica de números reales que puede cambiar de una expresión a otra y que converge a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.



# Introducción

En la presente Memoria introducimos un nuevo método para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de problemas en ecuaciones en derivadas parciales planteados sobre estructuras reticuladas dependientes de varios parámetros. Con ayuda de dicho método mejoramos resultados ya existentes, que permiten por ejemplo considerar no homogeneidades más generales y abordar el estudio completo (según las distintas relaciones entre los parámetros) del problema de la elasticidad.

Las estructuras que aparecen en esta Memoria están constituidas por una serie de elementos (vigas o placas) distribuidos periódicamente con un periodo pequeño  $\varepsilon > 0$ , tales que al menos una de sus dimensiones es mucho menor que el periodo. Normalmente consideramos estructuras formadas por vigas dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$  y con sección un infinitésimo de orden menor que  $\varepsilon$ . Véase al final del Capítulo 1 las Figuras 1.2 (la Figura 1.3 muestra algunos detalles de ésta), 1.4 y 1.6 como ejemplos de tales estructuras tanto en dos como en tres dimensiones. Obsérvese que en la Figura 1.6, a diferencia con la 1.4, las vigas sólo están distribuidas a lo largo de dos direcciones espaciales, lo que provoca que en el límite la estructura tridimensional degenerare en una de dimensión menor. En el estudio de esta estructura aparecen combinados fenómenos y técnicas de tratamiento tanto de vigas, que son las componentes de la estructura, como de placas, que es hacia lo que está degenerando. El método se aplica también sin dificultad a estructuras formadas por elementos que no tienen por qué ser necesariamente vigas. Para ilustrar este punto consideramos también la homogeneización de un problema de difusión no lineal planteado sobre la estructura que aparece en la Figura 1.5, la cual está formada por placas.

El uso de este tipo de estructuras está notablemente extendido en muchos campos de la ingeniería, siendo quizás en construcción donde son más ampliamente utilizadas (armazones de puentes, mallados metálicos, torres de tendido eléctrico, estructuras de naves industriales y viviendas, ...). Hoy en día también resultan de gran importancia en electrónica, ellas aparecen por ejemplo en la fabricación de cierto tipo de superconductores. Son empleadas además para modelizar ciertos medios porosos, correspondiéndose la estructura reticulada con la parte del fluido. En esta misma línea, mencionar las estructuras que se usan en algunos sistemas de refrigeración los cuales están basados en la recirculación de un fluido por numerosos y pequeños conductos.

Son varias las situaciones que motivan la homogeneización de problemas en derivadas parciales planteados sobre este tipo de estructuras. Así por ejemplo, un intento directo de aproximar la solución mediante elementos finitos supone, debido al pequeño grosor de las barras y al carácter muy oscilante de la estructura, utilizar mallados excesivamente finos. Esto se traduce en un coste computacional tan elevado, que en muchas situaciones el método numérico se convierte en una opción inadecuada (ver [46], [47]). La teoría de la homogeneización proporciona una forma de soslayar estas dificultades inherentes a los dominios reticulados. Dicha alternativa consiste en aproximar  $u_\varepsilon$  mediante un desarrollo cuyos términos son caracterizados como la solución de un problema en derivadas parciales (problema límite u homogeneizado) planteado sobre un dominio de forma simple carente de las dificultades numéricas señaladas anteriormente.

En todos los problemas de homogeneización que abordamos en esta Memoria, partimos de una sucesión  $V_\varepsilon$  de estructuras reticuladas en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , dependientes de varios parámetros como las que se muestran al final del Capítulo 1 y que ya hemos referenciado anteriormente. Las estructuras que en realidad consideramos son de la forma  $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap V_\varepsilon$ , donde  $\Omega$  es un abierto, acotado y regular de  $\mathbb{R}^N$ . Definimos también  $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega_\varepsilon$ . Para cada  $\varepsilon > 0$ , planteamos sobre  $\Omega_\varepsilon$  un problema de ecuaciones en derivadas parciales, con condición de tipo Neumann sobre  $\partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon$  y condición de tipo Dirichlet homogénea sobre  $\Gamma_\varepsilon$ . Para todos los problemas considerados se tienen condiciones que aseguran la existencia, para todo  $\varepsilon > 0$ , de al menos una solución  $u_\varepsilon$ . El problema que pretendemos

estudiar es el comportamiento asintótico de tales soluciones cuando los parámetros tienden a cero. De entre las dificultades del objetivo propuesto, destacamos aquí dos de ellas. No existe ninguna relación de inclusión entre los dominios  $\Omega_\varepsilon$ , luego cada  $u_\varepsilon$  se encuentra en un espacio funcional distinto. Además, estamos considerando funciones definidas sobre dominios cuya medida converge a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

La homogeneización de problemas en derivadas parciales planteados en dominios reticulados ha sido objeto de estudio en numerosos trabajos (e.j. [53], [54], [55], [5], [25], [26], [27], [31]). En nuestro conocimiento, la manera más clásica de proceder consiste en prolongar adecuadamente las soluciones a un dominio fijo (lo cual lleva a usar complejos resultados de extensión) y a continuación pasar al límite uno a uno en los distintos parámetros. Obsérvese que este paso sucesivo conlleva ciertas hipótesis sobre el tamaño relativo de los parámetros que intervienen, el primer parámetro considerado debe ser mucho más pequeño que el segundo y así sucesivamente. Esto junto con el uso de los operadores de prolongación hace que no sea claro el hecho de que la función obtenida en el límite reiterado proporcione una buena aproximación de las soluciones cuando los parámetros son pequeños. Señalar también que en alguno de los sucesivos pasos el límite sólo existe en un sentido débil. Por ejemplo, en el caso de las estructuras  $V_\varepsilon$  en  $\mathbb{R}^N$  constituidas por vigas rectas dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$  y sección  $\varepsilon d_\varepsilon$  (Figura 1.2 para  $N = 2$  y 1.4 para  $N = 3$ ) la homogeneización se suele realizar (consultar [5] o [31]) tomando primero  $d_\varepsilon = d$ , y considerando una sucesión de operadores de prolongación  $P_{\varepsilon,d}$  que transforman funciones definidas en  $\Omega_\varepsilon$  en funciones definidas en todo  $\Omega$ , continuas sobre los espacios correspondientes. Entonces se prueba la existencia de un límite débil  $u(d)$  (en un cierto espacio de Sobolev) de  $P_{\varepsilon,d}u_\varepsilon$ , cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. Posteriormente se demuestra que existe  $u^*$  límite fuerte cuando  $d$  tiende a cero de  $u(d)$ . En este punto surgen de manera natural varias cuestiones. Por una parte la dependencia de  $u^*$  del orden escogido en los parámetros para pasar al límite, es decir, la igualdad de los límites reiterados. Obsérvese que el paso al límite primero en  $\varepsilon$  conlleva suponer que éste parámetro es mucho menor que  $d$ . Por otra, la cuestión ya mencionada sobre si  $u^*$  proporciona una aproximación de  $u_\varepsilon$  en una topología habitual de tipo  $L^p$  o  $W^{1,p}$ , o sea, si de alguna mane-

ra el límite reiterado es realmente un límite doble. La respuesta no es trivial, téngase en cuenta que  $P_{\varepsilon,d}u_\varepsilon$  y  $u_\varepsilon$  sólo coinciden sobre el conjunto  $\Omega_\varepsilon$  cuya medida es un infinitésimo. Estas dificultades fueron superadas en el caso particular de una ecuación lineal con coeficientes constantes gracias a un resultado de N.S. Bakhvalov y G.P. Panasenko [5] (véase también [31]) donde se prueba que existe  $z : \Omega \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y = (-1/2, 1/2)$ , periódica en su segunda componente, tal que si tanto ella como  $u^*$  son suficientemente regulares entonces la sucesión  $z_\varepsilon$  definida por

$$z_\varepsilon(x) = z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

satisface

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \|u_\varepsilon - u^* - \varepsilon z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C(\varepsilon + d_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (0.1)$$

La función  $z$  es en realidad definida a partir de los términos de ciertos desarrollos asintóticos que aparecen al estudiar el comportamiento límite de  $P_{\varepsilon,d}u_\varepsilon$  y  $u(d)$ . En particular, de la desigualdad anterior se deduce

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - u^*|^2 dx \leq C(\varepsilon + d_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

lo que prueba que  $u_\varepsilon$  está próximo a  $u^*$ . Señalar de todos modos que es más interesante (0.1) porque proporciona una aproximación de  $u_\varepsilon$  no sólo en  $L^2$  sino en  $H^1$ . La situación es sin embargo muy distinta para el sistema de la elasticidad lineal, y el método descrito anteriormente no ha dado en nuestro conocimiento una respuesta completamente satisfactoria. Así para el caso de materiales isótropos y homogéneos G. Griso ha probado (ver [38]) que en esta ocasión los límites reiterados dependen del orden. Sin embargo no existen hasta donde nosotros sabemos estimaciones de error.

En un intento de abordar las dificultades mencionadas que plantea el método clásico, recientemente se han desarrollado también nuevas técnicas basadas en la convergencia en dos escalas respecto a medidas. El concepto de convergencia en dos escalas fue introducido por G. Nguetseng [51] y más tarde desarrollado por G. Allaire [2] para obtener y mostrar la convergencia de los desarrollos asintóticos que aparecen al resolver diversos problemas de homogeneización periódica. En dichos desarrollos suelen aparecer funciones

de la forma  $u(x, \frac{x}{\varepsilon})$  con  $u$  periódica en su segunda variable, y es natural para demostrar su validez considerar funciones test precisamente con la misma estructura. Esto conduce a la necesidad de pasar al límite en expresiones del tipo

$$\int_{\Omega} w_{\varepsilon}(x) \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx$$

donde  $\Psi$  es regular y periódica en su segunda variable. El resultado principal en este sentido y probado por G. Nguetseng establece que si  $w_{\varepsilon}$  está acotada en  $L^p(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto, entonces existe  $w \in L^p(\Omega; L^p(Y^N))$  tal que (para una subsucesión)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_{\varepsilon}(x) \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_{Y^N} w(x, y) \Psi(x, y) dy dx,$$

para toda  $\Psi \in C^0(\overline{\Omega}; C_{\#}^0(Y^N))$ . Se dice entonces que  $w_{\varepsilon}$  converge en dos escalas a  $w$ . Con hipótesis adicionales se prueba además que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| w_{\varepsilon}(x) - w(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right|^p dx = 0,$$

lo cual muestra cual es la idea de la convergencia en dos escalas. No se trata de aproximar  $w_{\varepsilon}$  por una función fija como suele ser usual sino por otra sucesión de la forma  $w(x, \frac{x}{\varepsilon})$ .

La convergencia en dos escalas se ha mostrado de gran utilidad en muchos problemas de homogeneización periódica (e.j. [51], [52], [1], [2], [36], [43], [32], [3]; ver también [12], [13] para aplicaciones a problemas casi periódicos). Así respecto a los problemas que nos interesan, y relacionado con el método descrito, permite realizar la homogeneización de problemas en ecuaciones en derivadas parciales planteados en estructuras como las que aparecen en las Figuras 1.2 y 1.4 cuando  $d_{\varepsilon} = d$  fijo. Sin embargo no permite considerar el caso  $d_{\varepsilon}$  variable. Una extensión adecuada para afrontar este tipo de problemas de debe a V.V. Zhikov ([59], [61]; ver también el trabajo de G. Bouchitté e I. Fragalà [6]). La idea es la siguiente, a partir de las estructuras  $V_{\varepsilon}$  se definen las medidas de Borel  $\mu_{\varepsilon}$  en  $\mathbb{R}^N$  por

$$\mu_{\varepsilon}(B) = \varepsilon^N \frac{|B \cap V_{\varepsilon}|}{|\varepsilon Y^N \cap V_{\varepsilon}|}, \quad \forall B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borel.}$$

Por otra parte, sea  $\hat{\mu}$  la medida de Radon acotada sobre  $Y^N$  resultante al considerar el límite \*-débil de las medidas  $\hat{\mu}_{\varepsilon}$  definidas por

$$\hat{\mu}_{\varepsilon}(B) = \frac{1}{\varepsilon^N} \mu_{\varepsilon}(\varepsilon B), \quad \forall B \subset Y^N \text{ Borel.}$$

Con estas definiciones de  $\mu_\varepsilon$  y  $\hat{\mu}$  se introduce la siguiente definición: Una sucesión  $w_\varepsilon$  en  $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  se dice que converge en dos escalas hacia  $w \in L^p(\Omega; L^p(Y^N, d\hat{\mu}))$  si

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_\varepsilon(x) \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) d\mu_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \int_{Y^N} w(x, y) \Psi(x, y) d\hat{\mu}(y) dx,$$

para toda  $\Psi \in C^0(\overline{\Omega}; C_{\sharp}^0(Y^N))$ . Como ocurre con la convergencia en dos escalas clásica, se verifica que si  $w_\varepsilon \in L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$  tiene norma acotada entonces existe una subsucesión que converge en el sentido anterior.

Usando esta noción de convergencia y trabajando con espacios de funciones de tipo Sobolev relativos a estas medidas (ver [60]), se puede abordar el estudio de estructuras reticuladas muy generales. Este método ha dado buenos resultados para problemas de difusión ([6], [20]). Sin embargo, no ha funcionado de modo totalmente satisfactorio cuando se han tratado problemas de elasticidad, para los cuales sólo ha proporcionado resultados parciales. Así, en [62] y [7] se ha empleado este método para estudiar estructuras compuestas de un material elástico e isótropo,  $V_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$ , formadas por vigas con sección del orden de  $\varepsilon d_\varepsilon$ . Como ya se comentó anteriormente, a diferencia con el problema de difusión, el comportamiento límite depende del tamaño relativo de los parámetros. En [7] se ha tratado el caso en el que  $\varepsilon/d_\varepsilon$  tiende a cero, mientras que en [59] se han estudiado los casos en los que este límite es cero o infinito. En este último trabajo se añade al sistema de la elasticidad lineal un término adicional de orden cero que simplifica el problema porque evita tener que estimar la constante de Korn en  $\Omega_\varepsilon$  y que hace que no sea exactamente el sistema de la elasticidad lineal lo que se está considerando. Destacar que en estos trabajos no se demuestran resultados de corrector. En ellos se obtiene el límite en dos escalas de las soluciones  $u_\varepsilon$  (y no del tensor de deformaciones  $e(u_\varepsilon)$ ). Además no se proporcionan estimaciones en una topología usual, como por ejemplo en  $L^2$ . En ambos trabajos se establece como una cuestión abierta el estudio del sistema de la elasticidad lineal cuando el límite de  $\varepsilon/d_\varepsilon$  es arbitrario. Comentar que análogamente a la convergencia en dos escalas clásica, el método busca aproximar la solución  $u_\varepsilon$  del problema correspondiente por una sucesión del tipo  $u(x, \frac{x}{\varepsilon})$ . Pero como veremos en la presente memoria esta aproximación no es buena en el caso de la elasticidad cuando el límite de  $\frac{\varepsilon}{d_\varepsilon}$  pertenece a  $(0, +\infty]$ , sino

que es necesario introducir términos que también dependen de  $d_\varepsilon$ . Por esta misma razón el método no permite considerar no homogeneidades en los materiales que dependan de  $d_\varepsilon$  ni siquiera en el caso de la difusión. Así no se puede modelizar situaciones habituales en la práctica como es el caso en que las barras están formadas por un núcleo de un material recubierto de otro diferente.

T. Arbogast, J. Douglas y U. Hornung introdujeron en [4] un nuevo método para el estudio de problemas de homogeneización periódica. Esencialmente consiste en introducir un cambio de variables que transforman una sucesión de funciones  $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x)$  en una nueva sucesión de funciones en la que aparece una variable adicional  $\hat{u}_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon(x, y)$ . La nueva variable  $y$  se obtiene escalando la celda de periodicidad y contiene información sobre la microestructura del problema. Más concretamente lo que se hace es lo siguiente. Consideramos la función  $\kappa : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{Z}^N$  definida por

$$|x - \kappa(x)|_\infty < \frac{1}{2}, \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N,$$

es decir, para casi todo  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\kappa(x) + Y^N$  es el cubo de centro con coordenadas enteras, lados paralelos a los ejes coordenados y longitud uno que contiene a  $x$ . Entonces, para  $u_\varepsilon$  en  $L^p(\Omega)$ , se define  $\hat{u}_\varepsilon$  por

$$\hat{u}_\varepsilon(x, y) = u_\varepsilon\left(\varepsilon\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y\right).$$

Obsérvese que esta definición está asociada al cambio de variables

$$y_\varepsilon(x) = \frac{x - \varepsilon\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon},$$

que transforma cada cubo  $C_\varepsilon^k = \varepsilon k + \varepsilon Y^N$ , con  $k \in \mathbb{Z}^N$ , en el cubo unidad. Se trata de hacer por tanto un zoom en cada uno de estos cubos. Mientras que la variable  $y$  recorre el cubo, la variable  $x$  sólo nos dice el cubo  $C_\varepsilon^k$  que se está considerando en cada caso. Téngase en cuenta que si  $x$  pertenece a  $C_\varepsilon^k$ , entonces  $\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = k$  no depende de  $x$ . Como ha sido probado en [43], la idea está estrechamente relacionada con la convergencia en dos escalas de G. Nguetseng y G. Allaire. De hecho, se tiene que  $\hat{u}_\varepsilon$  converge a  $\hat{u}$  en la topología débil de  $L^p$  si y sólo si  $u_\varepsilon$  converge en dos escalas a  $\hat{u}$ . Destacar sin embargo que, escogiendo

adecuadamente el cambio de variables, este método se puede adaptar a situaciones en las que la convergencia en dos escalas clásica no se aplica (ver por ejemplo [10], [11]).

En esta memoria presentamos una adaptación original del método de Arbogast, Douglas, Hornung para la homogeneización de problemas en derivadas parciales planteados sobre estructuras reticuladas dependientes de varios parámetros. La idea también es introducir adecuados cambios de variables  $y = y_\varepsilon^i(x)$ , asociados según el valor de  $i$  a los distintos elementos que forman la estructura reticulada, como en el caso del método original actúan a modo de zoom y su objetivo es que dichos elementos no degeneren en conjuntos de dimensión menor (vigas en segmentos, finas placas en planos) ni desaparezcan en el límite cuando el periodo y los demás parámetros tienden a cero. De esta forma no se pierde la información sobre lo que está ocurriendo en cada pequeña pieza. Esto guarda relación con la técnica de escalado empleada usualmente para tratar con estructuras delgadas (e.j. [23], [42], [57], [24], [49]). Con ayuda de estos cambios transformamos la sucesión de soluciones  $u_\varepsilon$  en nuevas sucesiones de funciones dependientes de dos variables  $\hat{u}_\varepsilon^i = \hat{u}_\varepsilon^i(x, y)$ , las cuales están definidas sobre un dominio fijo. Así por ejemplo, en el caso de la estructura que se muestra en la Figura 1.2 (aquí  $N = 2$ , y asociamos  $i = 1$  con las barras horizontales e  $i = 2$  con las verticales), estas funciones vienen dadas por

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_\varepsilon^1(x, y) &= u_\varepsilon\left(\varepsilon\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y_1 e_1 + \varepsilon d_\varepsilon y_2 e_2\right) \\ \hat{u}_\varepsilon^2(x, y) &= u_\varepsilon\left(\varepsilon\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon d_\varepsilon y_1 e_1 + \varepsilon y_2 e_2\right) \end{aligned} \right\} \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^2,$$

las cuales están asociadas respectivamente a los cambios de variables

$$\begin{aligned} y_\varepsilon^1(x) &= \frac{x_1 - \varepsilon\kappa_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} e_1 + \frac{x_2 - \varepsilon\kappa_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon d_\varepsilon} e_2, \\ y_\varepsilon^2(x) &= \frac{x_1 - \varepsilon\kappa_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon d_\varepsilon} e_1 + \frac{x_2 - \varepsilon\kappa_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} e_2. \end{aligned}$$

El estudio del comportamiento asintótico de  $u_\varepsilon$  se lleva a cabo a partir del límite de las  $\hat{u}_\varepsilon^i$  que nos describe el comportamiento de  $u_\varepsilon$  en el elemento  $i$ -ésimo de la estructura. De esta manera no necesitamos sofisticados resultados de prolongación. Es importante tener presente que las  $\hat{u}_\varepsilon^i$  están relacionadas entre sí por los valores de  $u_\varepsilon$  en las intersecciones entre los distintos elementos que conforman la estructura. Dichas relaciones se reflejan en el



paso al límite y son importantes para el análisis de  $u_\varepsilon$ . Ellas nos proporcionan condiciones de contorno para el problema homogeneizado. El paso al límite se realiza simultáneamente en todos los parámetros, abordando de una manera unificada los diversos casos que se presentan. Como primer paso en la resolución del problema de homogeneización lo que hacemos es considerar una sucesión  $u_\varepsilon$  en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  (en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$  para la elasticidad) tal que

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (0.2)$$

en el caso del problema de difusión, o

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^2 dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (0.3)$$

en el caso de la elasticidad, pero que no satisface necesariamente un problema de ecuaciones en derivadas parciales. A continuación estudiamos el comportamiento asintótico de las correspondientes sucesiones  $\hat{u}_\varepsilon^i$ . Como veremos esto permite aproximar estas funciones, y por tanto  $u_\varepsilon$ , por determinados desarrollos asintóticos. El teorema correspondiente es el equivalente en nuestro caso al teorema de compacidad de G. Nguetseng y G. Allaire para la convergencia en dos escalas. Después se aplica este resultado al caso de las soluciones del problema de ecuaciones en derivadas parciales considerado. Para ello usamos funciones test definidas mediante desarrollos análogos a los que se encontraron en el paso anterior. De la aplicación de estas ideas se deduce un sistema límite u homogeneizado donde aparecen conjuntamente las variables macroscópica y microscópica y cuyas soluciones van a proporcionar no sólo el límite de las  $u_\varepsilon$  sino un desarrollo asintótico de éstas que las aproxima en topologías de tipo Sobolev. A diferencia de otros métodos, no necesitamos exigir propiedades adicionales de regularidad a la solución del problema límite para demostrar el resultado de convergencia.

Entre las ventajas de nuestro método destacar que permite trabajar con heterogeneidades tanto en macroestructura como en microestructura, o dicho de otro modo, permite que los operadores diferenciales dependan de los diversos parámetros que intervienen. Esto permite modelizar situaciones habituales como la comentada anteriormente de vigas compuestas de dos materiales, uno constituyendo un núcleo central y el otro una carcasa

que lo envuelve, o placas formadas por varios materiales estratificados. En general, en estos casos los correctores también dependen de esos parámetros y no se pueden definir a partir de funciones de la forma  $\Psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$  en las que sólo intervienen  $\varepsilon$ . Como principal logro del método destacar que el método que presentamos ha dado una respuesta satisfactoria en el caso de problemas de elasticidad lineal para las estructuras ya mencionadas compuestas por vigas de sección  $\varepsilon d_\varepsilon$ . Incluso en el caso de un material heterogéneo y arbitrariamente anisótropo, resolvemos todos los casos posibles según el valor  $\lambda$  del límite de  $\varepsilon/d_\varepsilon$ . En particular probamos que cuando  $\lambda = +\infty$  tanto las deformaciones  $u_\varepsilon$  como el tensor de deformaciones  $e(u_\varepsilon)$  pueden hacerse arbitrariamente grandes. Esto muestra que el modelo de la elasticidad lineal, que presupone pequeñas deformaciones, puede ser inadecuado cuando  $d_\varepsilon$  es mucho menor que  $\varepsilon$ . Para cada valor de  $\lambda$  demostramos un resultado de corrector que proporciona una aproximación fuerte de  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$  en  $L^2$ . Destacar que para la resolución de estos problemas ha sido necesario demostrar estimaciones finas relacionadas con la desigualdad de Korn que mejoran las dadas en [30].

Describimos a continuación el contenido de los diferentes capítulos que constituyen la presente Memoria.

El Capítulo 1 está dedicado a plantear los problemas de homogeneización que consideramos y a introducir los elementos básicos sobre los que descansa el método que proponemos. En las primeras secciones se establece un marco muy general que sirve de referencia a los demás capítulos. Esbozamos algunos detalles que serán útiles en la descripción que sigue. Se introducen las estructuras reticuladas  $V_\varepsilon$  en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , a partir de la repetición periódica, con periodo  $\varepsilon$ , de un número fijo  $m \in \mathbb{N}$  de componentes (vigas o placas). La repetición de manera individual de cada una de estas componentes define la estructura simple  $V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Entonces dado  $\Omega$  abierto regular denotamos

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \cap V_\varepsilon, \quad \Omega_\varepsilon^i = \Omega \cap V_\varepsilon^i, \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega_\varepsilon.$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , introducimos un cambio de variable  $y_\varepsilon^i : V_\varepsilon^i \longrightarrow Y^N$ , con ayuda del cual, a partir de una sucesión de funciones  $u_\varepsilon$  definidas sobre  $\Omega_\varepsilon$ , construimos una nueva sucesión  $\hat{u}_\varepsilon^i$  definida sobre el dominio fijo  $\Omega \times Y^N$ , y que nos permitirá describir el

comportamiento asintótico de  $u_\varepsilon$  en  $\Omega_\varepsilon^i$ . Los dos problemas fundamentales sobre los que trabajaremos en los siguientes capítulos se encuentran planteados en la última sección. El primero consiste en la homogeneización de un problema de difusión del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - H_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \quad a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\nu_\varepsilon = H_\varepsilon\nu_\varepsilon & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (0.4)$$

donde, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $F_\varepsilon$  pertenece a  $L^{p'}(\Omega_\varepsilon)$ ,  $H_\varepsilon$  pertenece a  $L^{p'}(\Omega_\varepsilon)^N$  y  $a_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función de Carathéodory que define un operador pseudo-monótono con crecimiento de orden  $p - 1$ , con  $p > 1$ . El segundo problema es la homogeneización del sistema de la elasticidad lineal

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon e(u_\varepsilon) - H_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \quad (A_\varepsilon e(u_\varepsilon))\nu_\varepsilon = H_\varepsilon\nu_\varepsilon & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (0.5)$$

donde  $H_\varepsilon$  pertenece a  $L^2(\Omega_\varepsilon; \mathcal{S}_N)$ ,  $F_\varepsilon$  pertenece a  $L^2(\Omega_\varepsilon)^N$ ,  $A_\varepsilon$  pertenece a  $L^\infty(\Omega_\varepsilon; \mathcal{L}(\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_N))$  y satisface las hipótesis de coercividad y acotación habituales. Las condiciones que imponemos sobre  $a_\varepsilon$  y  $A_\varepsilon$  (ver la Sección 1.3 para los detalles) nos permiten considerar materiales arbitrariamente anisótropos, heterogéneos tanto en macroestructura como en microestructura, y tales que pueden ser diferentes sobre cada  $\Omega_\varepsilon^i$ . Obsérvese en particular que en (0.5) el tensor  $A_\varepsilon$  sólo debe transformar matrices simétricas en simétricas, ninguna otra hipótesis de simetría es necesaria.

En el Capítulo 2 para una mejor descripción de método de homogeneización consideramos un caso modelo simple. Se trata de la estructura  $V_\varepsilon$  compuesta por vigas ortogonales de sección  $\varepsilon d_\varepsilon$  distribuidas periódicamente a lo largo de todas las direcciones del espacio (ver las Figuras 1.1, 1.2, 1.4) y nos interesamos por la homogeneización de (0.4). Como ya señalamos se obtiene un resultado de compacidad (Teorema 2.1.2) para una sucesión  $u_\varepsilon$  que satisface (0.2). Como no se supone que  $u_\varepsilon$  sea solución de una ecuación en derivadas parciales particular el resultado obtenido es en principio aplicable a ecuaciones muy generales. Con ayuda de este teorema se obtiene el sistema homogeneizado correspondiente que nos proporciona un desarrollo asintótico  $z_\varepsilon$  de  $u_\varepsilon$  que satisface esencialmente (ver

Observación 2.1.6)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_\varepsilon - z_\varepsilon)|^p dx = 0.$$

Para comenzar abordamos el caso de un operador lineal con coeficientes constantes (Teorema 2.2.1). Para esta situación resolvemos el sistema homogeneizado resultante (Proposición 2.2.5). Posteriormente se considera el caso de operadores pseudomonótonos (Teoremas 2.3.1 y 2.3.5).

En el Capítulo 3 también para ecuaciones de difusión utilizamos el método en nuevas situaciones. Comenzamos mostrando como se adapta al caso de las estructuras representadas por la Figura 1.5 que están compuestas por placas. A continuación, en la Sección 3.2 estudiamos estructuras tridimensionales en rejilla, formadas por vigas de sección  $\varepsilon d_\varepsilon \times p_\varepsilon$  (Figura 1.6). Éstas tienen la particularidad de que en el límite degeneran en un conjunto de dimensión dos. Como consecuencia se está combinando un problema de reducción de dimensión en una placa, y un problema de homogeneización en estructuras reticuladas compuestas por vigas. El resultado de homogeneización correspondiente depende de la talla relativa de los parámetros. En la Sección 3.3 vemos como se aplica el método a problemas parabólicos. Más concretamente a

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \operatorname{div}(a_\varepsilon(t, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - H_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{en } (0, T) \times \Omega_\varepsilon, \\ a_\varepsilon(t, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nu_\varepsilon = H_\varepsilon \nu_\varepsilon & \text{sobre } (0, T) \times (\partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_\varepsilon, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 & \text{en } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

donde para simplificar se vuelve a considerar las estructuras del Capítulo 2. Por último, y para mostrar como el método también permite obtener resultados de cierta generalidad, se obtiene un teorema de homogeneización para estructuras reticuladas en dimensión dos que están formadas por barras de anchura  $\varepsilon d_\varepsilon$  dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$ , las cuales pueden ser curvas y cuyo número y disposición es arbitrario.

Los Capítulos 4 y 5 están dedicados al estudio de la homogeneización del sistema de la elasticidad lineal (0.5). En el Capítulo 4 se considera la estructura modelo del Capítulo 2 (Figuras 1.2 y 1.4) y como ya mencionamos, a diferencia de lo que ocurría con el problema de difusión, vemos que el comportamiento asintótico depende del límite de  $\frac{\varepsilon}{d_\varepsilon}$ . El

capítulo comienza obteniendo desigualdades de tipo Korn para esta estructura. A continuación se obtiene el correspondiente resultado de compacidad (Teorema 4.3.1) para  $u_\varepsilon$  satisfaciendo (0.3). Su aplicación a la sucesión de soluciones del sistema de la elasticidad conduce a un sistema límite (Teorema 4.4.1) cuyas soluciones proporcionan aproximaciones de  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$  en  $L^2$  (ver Observación 4.3.5). En el caso particular de un material homogéneo e isótropo resolvemos el problema límite (Proposición 4.4.5) eliminando la variable microscópica. Como cabía esperar por resultados conocidos relativos al caso en el que  $\frac{\varepsilon}{d_\varepsilon}$  tiende a cero, se deduce que el límite en macroestructura satisface un problema degenerado. Es decir, no es fuertemente elíptico en  $H^1$ . Es también conocido ([5], [21]) que esto se puede evitar reforzando la estructura con vigas adicionales. Mostramos sin embargo para un ejemplo particular que el comportamiento de este tipo de estructuras también depende del límite de  $\frac{\varepsilon}{d_\varepsilon}$ , y de hecho cuando este valor es estrictamente positivo el problema en macroestructura sigue siendo degenerado (ver la Sección 4.5).

En el Capítulo 5 estudiamos la homogeneización del sistema de la elasticidad lineal planteado sobre la sucesión de estructuras reticuladas tridimensionales consideradas en la Sección 3.2, en el caso particular  $p_\varepsilon = \varepsilon d_\varepsilon$  (otras elecciones de  $p_\varepsilon$  pueden ser consideradas pero ello alargaría en exceso la Memoria). Al tratarse de la combinación del problema de una placa elástica y del problema de la homogeneización de la estructura modelo con  $N = 2$ , todas las circunstancias observadas en el Capítulo 4 son trasladables, con ligeras modificaciones, a esta situación. Así por ejemplo, comentar que cuando se resuelve el problema para el sistema límite se obtiene un problema degenerado para los desplazamientos en las direcciones del plano de la estructura, y uno elíptico para los desplazamientos perpendiculares.

El sexto y último capítulo está dedicado a demostrar varios resultados técnicos que son empleados con frecuencia a lo largo de los capítulos precedentes. Entre ellos destacar fundamentalmente una desigualdad de tipo Poincaré discreta y algunas desigualdades de tipo Korn.

Terminamos esta introducción comentando algunos problemas relacionados que pre-

tendemos abordar en un futuro:

1. Obtención de estimaciones de error para los desarrollos en dos escalas obtenidos. Ésta es una cuestión abierta muy interesante pero a su vez bastante difícil en general. Los únicos resultados en esta línea que conocemos se pueden encontrar en [5]. Ahí se prueba por ejemplo una estimación que ya ha sido mencionada para una ecuación elíptica lineal de coeficientes constantes y con un término fuente  $F_\varepsilon$  muy regular (ver también [31] para este resultado).
2. Homogeneización de problemas en ecuaciones en derivadas parciales planteados sobre estructuras reticuladas y cuyos coeficientes varíen con  $\varepsilon$  de forma general. Para estructuras delgadas este estudio ha sido desarrollado por ejemplo en [33], [34], [48], [19]. En esta Memoria, los operadores diferenciales dependen de  $\varepsilon$ , pero lo hacen de manera que al aplicarles ciertos cambios de variables se transforman esencialmente en uno fijo. Un análisis con operadores más generales sería interesante por ejemplo para el estudio de problemas de control en los coeficientes. En ese marco podemos suponer que la sucesión de soluciones  $u_\varepsilon$  representan los estados asociados a una sucesión minimizante de controles, entonces su comportamiento límite nos muestra si el estado óptimo se alcanza, o en caso de no alcanzarse, nos da información sobre la relajación del problema de control.
3. Estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de problemas de control y controlabilidad planteados sobre estructuras reticuladas. Una cuestión interesante es como controlar un sistema en el que interviene una estructura reticulada mediante controles definidos a partir del problema homogeneizado. Es lógico pensar que cuanto más pequeño sean los parámetros que definen la estructura, con mayor precisión se podrá lograr este objetivo. Con ayuda de estimaciones de error para el problema de homogeneización, se podría determinar con que grado tenemos que actuar sobre el sistema límite para obtener buenos controles para el problema de partida. Un estudio en esta dirección para otros problemas ha sido realizado en [28], [29], [39], [40], [41].

# Capítulo 1

## Planteamiento general y definiciones

Como ya hemos destacado en la introducción a esta Memoria, estamos interesados en el comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales planteadas sobre estructuras reticuladas dependientes de varios parámetros. En este capítulo desarrollamos dos objetivos. Por una parte, planteamos los problemas de homogeneización que serán objeto de estudio en este trabajo. Por otra, definimos los elementos básicos para aplicar nuestro método de resolución de tales problemas.

El capítulo está organizado en tres secciones. En la primera introducimos una sucesión general de estructuras reticuladas y notación útil para trabajar con ella. En la segunda definimos los cambios de variables sobre los que descansa el método y mostramos el resultado de su aplicación sobre operadores diferenciales usuales. Concluimos con una sección dedicada a plantear los problemas de ecuaciones en derivadas parciales sobre los que trabajaremos en los capítulos siguientes.

### 1.1 Estructuras reticuladas

Una característica común a las estructuras reticuladas es su periodicidad en al menos una dirección espacial. Las Figuras 1.4, 1.5 y 1.6 (al final del capítulo) muestran ejemplos de estructuras reticuladas tridimensionales, las dos primeras periódicas en todas las di-

recciones espaciales, y la última periódica sólo en dos de ellas. Como se observa en estas figuras, las estructuras reticuladas que estudiaremos están constituidas por un número fijo,  $m \in \mathbb{N}$ , de componentes (que pueden ser vigas, placas,...), las cuales se repiten periódicamente con periodo  $\varepsilon$ . Denotaremos por  $V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , las estructuras simples formadas por la repetición periódica de cada una dichas componentes, y entonces definiremos la estructura reticulada  $V_\varepsilon$  por

$$V_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^m V_\varepsilon^i, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.1)$$

Así, la estructura reticulada  $V_\varepsilon$  con la que trabajaremos más frecuentemente en esta memoria, y a la que nos referiremos en lo que sigue como estructura modelo, está formada por barras de grosor  $\varepsilon d_\varepsilon$  paralelas a los ejes coordenados, dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$  a lo largo de todas las direcciones espaciales. La Figura 1.2 representa la estructura bidimensional (la Figura 1.3 muestra un detalle ampliado de ésta) y la Figura 1.4 la tridimensional. En esta situación  $m = N$ , y para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $V_\varepsilon^i$  representa el conjunto de barras paralelas a la dirección  $e_i$ . Más concretamente, los conjuntos  $V_\varepsilon^i$  vienen dados en este caso por

$$V_\varepsilon^i = \bigcup_{k'_i \in \mathbb{Z}^N} \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x'_i - \varepsilon k'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2} \right\}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Las definiciones de las estructuras de las Figuras 1.5 y 1.6 se dan respectivamente en las Secciones 3.1 y 3.2.

Por  $\omega_\varepsilon$  denotaremos el conjunto de puntos comunes al menos a dos componentes, es decir,

$$\omega_\varepsilon = \bigcup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} (V_\varepsilon^i \cap V_\varepsilon^j), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Así en la estructura modelo  $\omega_\varepsilon$  es la unión en  $k \in \mathbb{Z}^N$  de los cubos de centro  $\varepsilon k$  y lados paralelos a los ejes y longitud  $\varepsilon d_\varepsilon$ .

Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto acotado de frontera regular, se definen  $\Omega_\varepsilon$  (ver Figura 1.1),  $\Omega_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , y  $\Gamma_\varepsilon$  por

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \cap V_\varepsilon, \quad \Omega_\varepsilon^i = \Omega \cap V_\varepsilon^i, \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$



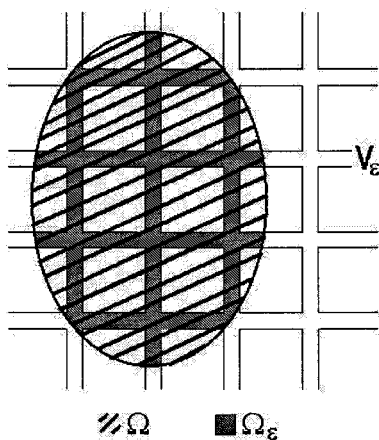


Figura 1.1

Por  $\nu$  se denota la normal exterior a  $\Omega$  en  $\partial\Omega$  y por  $\nu_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , la normal exterior a  $\Omega_\varepsilon$  en  $\partial\Omega_\varepsilon$ .

Se admite que los elementos de  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  están definidos en todo  $V_\varepsilon$  prolongándolos por cero a  $V_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon$ .

Sobre  $\Omega_\varepsilon$  plantearemos ecuaciones en derivadas parciales y estudiaremos el comportamiento límite de sus soluciones cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. La idea que vamos a usar para resolver dichos problemas de homogeneización, consiste en definir unos cambios de variables que tienen en cuenta la microestructura de los conjuntos, los cuales transforman cada  $V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , en un dominio fijo, de esta manera la nueva sucesión obtenida a partir de  $u_\varepsilon$  estará definida en un dominio que no varía con  $\varepsilon$ . El nuevo dominio será de la forma  $\mathfrak{R}_n^N \times Y^N$ , con  $n \in \{1, \dots, N\}$ , donde  $\mathfrak{R}_n^N$  es el conjunto al que “convergen” las estructuras  $V_\varepsilon$  en el sentido de que para cada punto  $x \in \mathfrak{R}_n^N$  existen  $x_\varepsilon \in V_\varepsilon$  tales que  $x_\varepsilon$  converge a  $x$ . En los casos considerados en la presente memoria  $\mathfrak{R}_n^N$  viene dado por  $\mathfrak{R}_n^N = \mathbb{R}^n \times \{0\}^{N-n}$ . Por ejemplo, para las estructuras de las Figuras 1.4 y 1.5 este conjunto es  $\mathfrak{R}_3^3 = \mathbb{R}^3$ , mientras que para la estructura de la Figura 1.6 es  $\mathfrak{R}_2^3 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .

Para describir más concretamente el método necesitamos algunas definiciones.

**Definición 1.1.1** Para  $\varepsilon > 0$  y  $k \in \mathbb{Z}^N$ , se define  $C_\varepsilon^k$  como el cubo  $N$ -dimensional de centro  $\varepsilon k$  y lados de longitud  $\varepsilon$  paralelos a los ejes de coordenadas, es decir,  $C_\varepsilon^k = \varepsilon(k + Y^N)$ . Se definen  $P_\varepsilon^k$ ,  $\omega_\varepsilon^k$  y  $V_\varepsilon^{i,k}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , por  $P_\varepsilon^k = C_\varepsilon^k \cap V_\varepsilon$ ,  $\omega_\varepsilon^k = C_\varepsilon^k \cap \omega_\varepsilon$  y  $V_\varepsilon^{i,k} = C_\varepsilon^k \cap V_\varepsilon^i$ .

(Ver la Figura 1.3 para la estructura modelo con  $N = 2$ .)

**Definición 1.1.2** Se define  $\kappa : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{Z}^N$  por  $\kappa(x) \in \mathbb{Z}^N$  y  $x \in C_1^{\kappa(x)}$ , p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ . Para cada  $\varepsilon > 0$ , se definen  $C_\varepsilon(x) = C_\varepsilon^{\kappa(\frac{x}{\varepsilon})}$ ,  $P_\varepsilon(x) = C_\varepsilon(x) \cap V_\varepsilon$  y  $\omega_\varepsilon(x) = C_\varepsilon(x) \cap \omega_\varepsilon$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ .

**Observación 1.1.3** P.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\kappa(x)$  es el centro del cubo de centro en  $\mathbb{Z}^N$ , de lados paralelos a los ejes de coordenadas y longitud uno que contiene a  $x$ . Se tiene  $x \in C_\varepsilon(x)$ , p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ .

## 1.2 Descomposición en escalas

A continuación vamos a introducir los cambios de variables con los que transformamos funciones definidas sobre  $\Omega_\varepsilon$  en funciones definidas sobre  $\Omega \times Y^N$ . La idea de estos cambios es expandir los diversos elementos que componen la celda de periodicidad para no perder información cuando los parámetros tienden a cero. De esta forma funciones que sólo dependen de la variable en macroestructura pasan a depender de las distintas escalas que aparecen en el problema.

Según la definición de  $V_\varepsilon^i$ , se introducen unos difeomorfismos

$$\hat{y}_\varepsilon^i : V_\varepsilon^{i,0} \rightarrow Y^N, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1.2)$$

(en general,  $\hat{y}_\varepsilon^i$  tomaría sus valores en un conjunto fijo  $\mathfrak{D}^i$ , que podría ser diferente para cada  $i$ ; en los casos considerados en esta memoria  $\mathfrak{D}^i = Y^N$ , para todo  $i$ ).

Así por ejemplo, para la estructura modelo estos difeomorfismos se definen por

$$\hat{y}_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i}{\varepsilon} e_i + \frac{x'_i}{\varepsilon d_\varepsilon}, \quad \forall x \in V_\varepsilon^{i,0}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.3)$$

Con ayuda de los difeomorfismos (1.2), se introducen a continuación los cambios de variables mencionados anteriormente.

**Definición 1.2.1** Para cada  $\varepsilon > 0$  e  $i \in \{1, \dots, m\}$ , se define  $y_\varepsilon^i : V_\varepsilon^i \longrightarrow Y^N$  por

$$y_\varepsilon^i(x) = \hat{y}_\varepsilon^i(x - \varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon})), \quad \text{p.c.t. } x \in V_\varepsilon^i. \quad (1.4)$$

**Observación 1.2.2** Fijado  $k$ ,  $y_{\varepsilon|V_\varepsilon^{i,k}}^i$  es un difeomorfismo entre  $V_\varepsilon^{i,k}$  e  $Y^N$ , cuyo inverso viene dado por

$$(y_{\varepsilon|V_\varepsilon^{i,k}}^i)^{-1}(y) = \varepsilon k + (\hat{y}_\varepsilon^i)^{-1}(y), \quad \forall y \in Y^N, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Usando las funciones  $y_\varepsilon^i$ , introducimos unos operadores que transforman funciones definidas en  $V_\varepsilon^i$  en funciones definidas en  $\mathfrak{R}_n^N \times Y^N$  de la siguiente manera

**Definición 1.2.3** Dada una sucesión de funciones medibles  $u_\varepsilon : V_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^q$  se define  $\hat{u}_\varepsilon^i : \mathfrak{R}_n^N \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , por

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + (\hat{y}_\varepsilon^i)^{-1}(y)), \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathfrak{R}_n^N \times Y^N. \quad (1.5)$$

Cuando se considera la estructura modelo, las definiciones (1.3) y (1.5) dan

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i), \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

**Observación 1.2.4** Las funciones  $\hat{u}_\varepsilon^i$  serán usadas para estudiar el comportamiento de  $u_\varepsilon$  en  $V_\varepsilon^i$ . Es importante observar que en  $(C_\varepsilon^k \cap \mathfrak{R}_n^N) \times Y^N$ ,  $k \in \mathbb{Z}^N$ ,  $\varepsilon > 0$ , la función  $\hat{u}_\varepsilon^i$  no depende de la variable  $x$ , mientras que como función de la variable  $y$  es obtenida a partir de  $u_\varepsilon$  mediante el cambio de variables (1.4). El papel de la variable  $x$  es fijar  $k \in \mathbb{Z}^N$  satisfaciendo la condición  $x \in C_\varepsilon^k$  (es decir,  $k = \kappa(\frac{x}{\varepsilon})$ ); este valor de  $k$  nos establece el conjunto  $V_\varepsilon^{i,k}$  que se está considerando. La variable  $y$  actúa como un microscopio, ampliando el pequeño conjunto  $V_\varepsilon^{i,k}$  para transformarlo en el conjunto fijo  $Y^N$ . El comportamiento de  $u_\varepsilon$  sobre  $V_\varepsilon^{i,k}$  puede ser por tanto deducido a partir del comportamiento de  $\hat{u}_\varepsilon^i(\varepsilon k, \cdot)$  respecto a la variable  $y \in Y^N$ . En lo que sigue nos referiremos a  $x$  como la variable macroscópica, y a  $y$  como la variable microscópica.

Las siguientes definiciones son útiles para trabajar con el cambio de variables (1.4).

**Definición 1.2.5** Para  $\varepsilon > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $\hat{v} \in L^p(\mathfrak{R}_n^N; W^{1,p}(Y^N))$ , se define  $D_\varepsilon^i \hat{v} \in L^p(\mathfrak{R}_n^N \times Y^N)^N$  por

$$D_\varepsilon^i \hat{v}(x, y) = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{r=1}^N \partial_{y_r} \hat{v}_\varepsilon^i(x, y) \partial_{x_j} \hat{y}_{\varepsilon, r}^i(x - \varepsilon \kappa(\frac{x}{\varepsilon})) \right) e_j, \quad p.c.t. (x, y) \in \mathfrak{R}_n^N \times Y^N. \quad (1.6)$$

**Definición 1.2.6** Para  $\varepsilon > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $\hat{v} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_N) \in L^p(\mathfrak{R}_n^N; W^{1,p}(Y^N))^N$ , se define  $e_\varepsilon^i(\hat{v}) \in L^p(\mathfrak{R}_n^N \times Y^N; \mathcal{S}_N)$  por

$$e_\varepsilon^i(\hat{v})_{rs} = \frac{1}{2} [(D_\varepsilon^i \hat{v}_r)_s + (D_\varepsilon^i \hat{v}_s)_r], \quad \forall r, s \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.7)$$

**Observación 1.2.7** Los operadores  $D_\varepsilon^i$ ,  $e_\varepsilon^i$  no son más que los resultados de aplicar el cambio de variables definido por (1.4) a los operadores  $\nabla$ ,  $e$ . Más concretamente, si para  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  definimos  $\hat{u}_\varepsilon^i$  por (1.5), se tiene

$$\nabla u_\varepsilon(x) = D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i(x, \hat{y}_\varepsilon^i(x - \varepsilon \kappa(\frac{x}{\varepsilon}))), \quad p.c.t. x \in V_\varepsilon^i.$$

Análogamente, si  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)^N$  se tiene

$$e(u_\varepsilon)(x) = e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)(x, \hat{y}_\varepsilon^i(x - \varepsilon \kappa(\frac{x}{\varepsilon}))), \quad p.c.t. x \in V_\varepsilon^i.$$

En el caso particular de la estructura modelo, (1.3) y las Definiciones 1.2.5 y 1.2.6 dan respectivamente

$$D_\varepsilon^i \hat{v} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v} e_i + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \partial_{y_j} \hat{v} e_j,$$

y

$$e_\varepsilon^i(\hat{v})_{ii} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_i, \quad 2e_\varepsilon^i(\hat{v})_{im} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_m + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_m} \hat{v}_i, \quad \forall m \neq i,$$

$$2e_\varepsilon^i(\hat{v})_{mn} = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} (\partial_{y_n} \hat{v}_m + \partial_{y_m} \hat{v}_n), \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\},$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

En el presente trabajo se consideran distintas elecciones de  $V_\varepsilon$ , y suponiendo ciertas acotaciones para las derivadas de  $u_\varepsilon$ , se prueba un resultado de compacidad óptimo para  $\hat{u}_\varepsilon^i$ . La aplicación de este resultado a la sucesión de soluciones de los problemas de ecuaciones en derivadas parciales considerados es la llave para la resolución de los problemas de homogeneización.

### 1.3 Planteamiento de los problemas

En esta sección vamos a introducir los problemas en derivadas parciales que son objeto de estudio en este trabajo. Su elección divide a la Memoria en dos partes. En los Capítulos 2 y 3 se considera el problema de homogeneización

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - H_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \quad a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\nu_\varepsilon = H_\varepsilon\nu_\varepsilon & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.8)$$

donde, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $F_\varepsilon$  pertenece a  $L^{p'}(\Omega_\varepsilon)$ ,  $H_\varepsilon$  pertenece a  $L^{p'}(\Omega_\varepsilon)^N$  y  $a_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función de Carathéodory que define un operador pseudo-monótono con crecimiento de orden  $p$ , con  $p > 1$ . Más concretamente, se supone que existen  $\alpha, \beta > 0$  y  $t_\varepsilon \in L^{p'}(\Omega_\varepsilon)$  tales que, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$  y p.c.t.  $x \in \Omega_\varepsilon$ ,  $a_\varepsilon$  satisface

$$a_\varepsilon(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^p, \quad (1.9)$$

$$|a_\varepsilon(x, s, \xi)| \leq t_\varepsilon(x) + \beta(|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1}), \quad (1.10)$$

$$(a_\varepsilon(x, s, \xi) - a_\varepsilon(x, s, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0. \quad (1.11)$$

Bajo estas condiciones el problema (1.8) tiene al menos una solución  $u_\varepsilon$  en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  (ver por ejemplo [44], [45]).

Sobre  $\omega_\varepsilon$  se admite que se satisfacen las condiciones

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |H_\varepsilon(x)|^{p'} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |F_\varepsilon(x)|^{p'} dx = 0, \quad (1.12)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |t_\varepsilon(x)|^{p'} dx = 0. \quad (1.13)$$

**Observación 1.3.1** *Las condiciones (1.12) y (1.13) permiten que  $a_\varepsilon$ ,  $H_\varepsilon$  y  $F_\varepsilon$  sean muy grandes en  $\omega_\varepsilon$ . Esto se debe a que la medida de  $\omega_\varepsilon$  es muy pequeña en comparación con la de  $\Omega_\varepsilon$  y por tanto el comportamiento de las soluciones de (1.8) es independiente de como sean  $a_\varepsilon$ ,  $H_\varepsilon$  y  $F_\varepsilon$  en este conjunto.*

Con respecto a las hipótesis sobre  $a_\varepsilon$ ,  $F_\varepsilon$ ,  $H_\varepsilon$  en  $\Omega_\varepsilon \setminus \omega_\varepsilon$ , se supone que existen  $F^i : \mathfrak{R}_n^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H^i : \mathfrak{R}_n^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $a^i : \mathfrak{R}_n^N \times Y^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $r^i$ ,  $t^i$ ,

$g^i \in L^{p'}(Y^N)$  y  $l^i \in C^0([0, +\infty))$  con  $l^i(0) = 0$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , tales que para todo  $x$ ,  $z \in \mathfrak{X}_n^N$ , todo  $s \in \mathbb{R}$ , todo  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq \eta$ , y p.c.t.  $y \in Y^N$  se tienen

$$H^i(\cdot, y), F^i(\cdot, y) \text{ son continuas en } \mathfrak{X}_n^N, \quad (1.14)$$

$$H^i(x, \cdot), F^i(x, \cdot) \text{ son medibles en } Y^N, \quad (1.15)$$

$$|H^i(x, y)| + |F^i(x, y)| \leq g^i(y), \quad (1.16)$$

$$a^i(\cdot, y, \cdot, \cdot) \text{ es continua en } \mathfrak{X}_n^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

$$a^i(x, \cdot, s, \xi) \text{ es medible en } Y^N,$$

$$a^i(x, y, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p,$$

$$(a^i(x, y, s, \xi) - a^i(x, y, s, \eta)) (\xi - \eta) > 0, \quad (1.17)$$

$$|a^i(x, y, s, \xi)| \leq t^i(y) + \beta(|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1}), \quad (1.18)$$

$$|a^i(x, y, s, \xi) - a^i(z, y, s, \xi)| \leq l^i(|x - z|) (r^i(y) + |\xi|^{p-1} + |s|^{p-1}), \quad (1.19)$$

y se satisfacen las igualdades

$$a_\varepsilon(x, s, \xi) = a^i(\mathcal{P}_n x, y_\varepsilon^i(x), s, \xi), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.c.t. } x \in \Omega_\varepsilon^i \setminus \omega_\varepsilon, \quad (1.20)$$

$$H_\varepsilon(x) = H^i(\mathcal{P}_n x, y_\varepsilon^i(x)), F_\varepsilon(x) = F^i(\mathcal{P}_n x, y_\varepsilon^i(x)), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega_\varepsilon^i \setminus \omega_\varepsilon. \quad (1.21)$$

**Observación 1.3.2** *La condición (1.20) permite considerar materiales arbitrariamente anisótrpos, no homogéneos tanto en macroestructura como en microestructura (i.e., los operadores dependen de las variables  $x$  e  $y$ ) y que pueden ser diferentes sobre cada  $\Omega_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  (ver Observación 2.2.6 para el caso de la estructura modelo). A diferencia de otros métodos, esto permite en particular trabajar con operadores que dependen de los diversos parámetros que intervienen. Otras aproximaciones a estos problemas sólo permiten considerar dependencia respecto de  $(x - \kappa(\frac{x}{\varepsilon}))/\varepsilon$ , y por tanto no pueden “ver” aquellas variables de orden menor que el periodo  $\varepsilon$  de la estructura.*

Nuestras hipótesis sobre  $F_\varepsilon$  y  $H_\varepsilon$  también permiten considerar fuerzas que dependen de la microestructura.

**Observación 1.3.3** *En algunos resultados se supondrá que los operadores  $a^i$  son uniformemente monótonos, es decir*

$$(a^i(x, y, s, \xi_1) - a^i(x, y, s, \xi_2)) (\xi_1 - \xi_2) \geq \begin{cases} \alpha \frac{|\xi_1 - \xi_2|^2}{(|\xi_1| + |\xi_2|)^{2-p}} & \text{si } 1 < p < 2, \\ \alpha |\xi_1 - \xi_2|^p & \text{si } p \geq 2, \end{cases} \quad (1.22)$$

para todo  $(x, s, \xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{R}_n^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , p.c.t.  $y \in Y^N$ . Cuando esta condición sea necesaria se indicará explícitamente.

Los Capítulos 4 y 5 están dedicados al estudio del sistema de la elasticidad lineal

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon e(u_\varepsilon) - H_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \quad (A_\varepsilon e(u_\varepsilon))\nu_\varepsilon = H_\varepsilon \nu_\varepsilon & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.23)$$

donde  $H_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon; \mathcal{S}_N)$ ,  $F_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)^N$  y  $A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon; \mathcal{L}(\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_N))$ . Se supone que existen  $\alpha$  y  $\beta > 0$  tales que

$$A_\varepsilon(x)M : M \geq \alpha |M|^2, \quad |A_\varepsilon(x)M| \leq \beta |M|, \quad \forall M \in \mathcal{S}_N, \text{ p.c.t. } x \in \Omega_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0. \quad (1.24)$$

**Observación 1.3.4** *No supone ninguna dificultad extender el estudio de (1.23) al marco de operadores no lineales monótonos. En esta memoria no se lleva a cabo por simplificar la exposición y por carecer este caso caso de interés desde el punto de vista físico.*

Análogamente al caso del problema de difusión, se supone que sobre  $\omega_\varepsilon$  se satisface (1.12), y que sobre  $\Omega_\varepsilon^i \setminus \omega_\varepsilon$  existen  $F^i : \mathfrak{R}_n^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $H^i : \mathfrak{R}_n^N \times Y^N \rightarrow \mathcal{S}_N$ ,  $A^i \in C^0(\mathfrak{R}_n^N; L^\infty(Y^N; \mathcal{L}(\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_N)))$ ,  $g^i \in L^2(Y^N)$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , tales que se tiene (1.14), (1.15), (1.16), y

$$A^i(x, y)M : M \geq \alpha |M|^2, \quad \forall M \in \mathcal{S}_N, \forall x \in \mathfrak{R}_n^N, \text{ p.c.t. } y \in Y^N, \quad (1.25)$$

y además se satisfacen las igualdades (1.21) y

$$A_\varepsilon(x) = A^i(\mathcal{P}_n x, y_\varepsilon^i(x)), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega_\varepsilon^i \setminus \omega_\varepsilon. \quad (1.26)$$

Estas condiciones hacen posible considerar materiales cuyas propiedades elásticas dependan de todas las variables microscópicas y, como en el caso de los operadores de difusión, de los diversos parámetros que intervienen, lo cual en nuestro conocimiento no es posible con otros métodos.



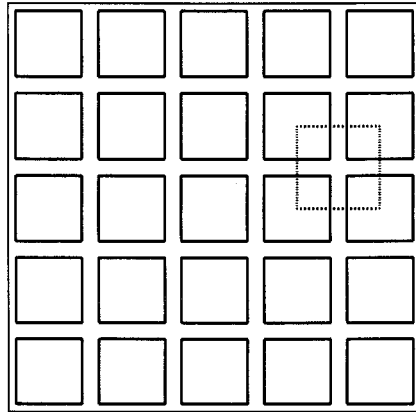


Figura 1.2

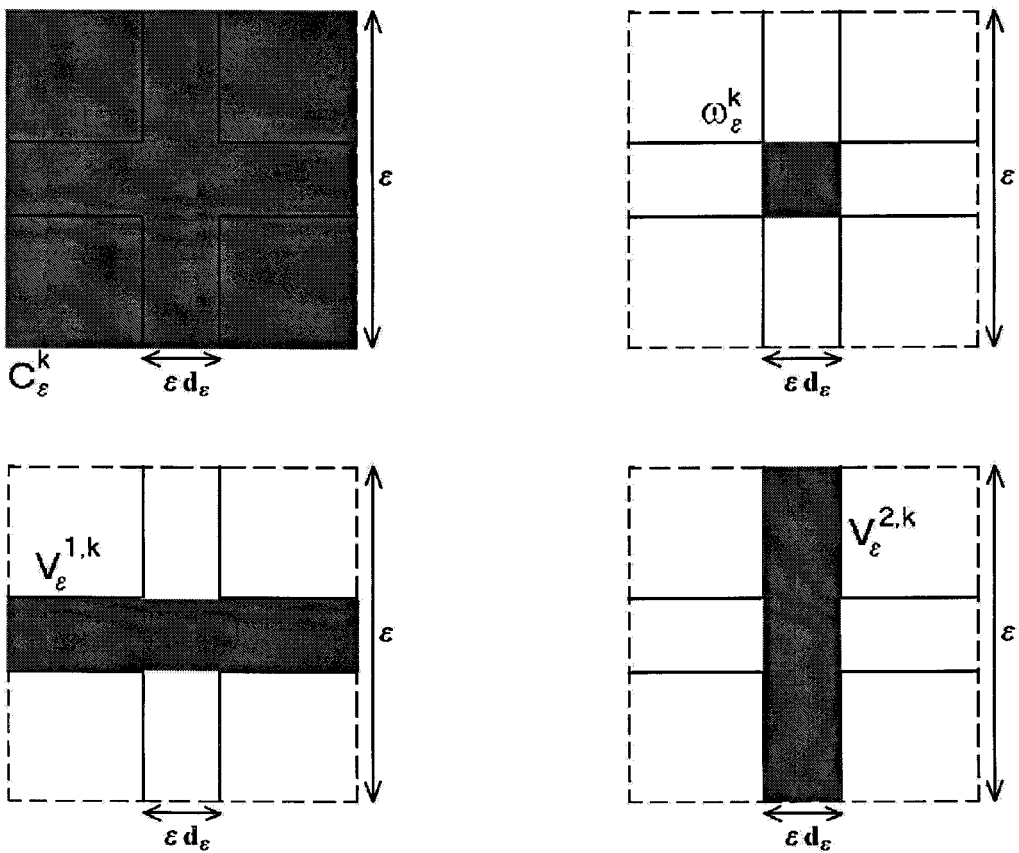


Figura 1.3

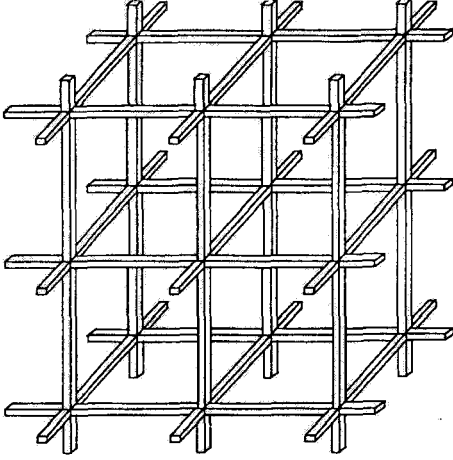


Figura 1.4

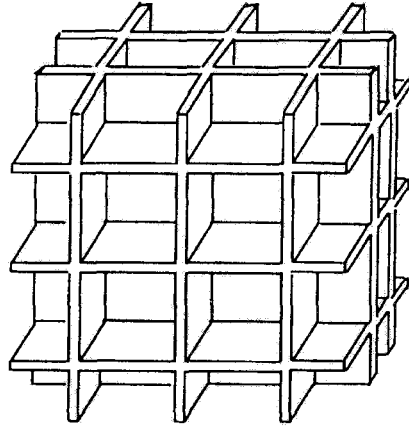


Figura 1.5

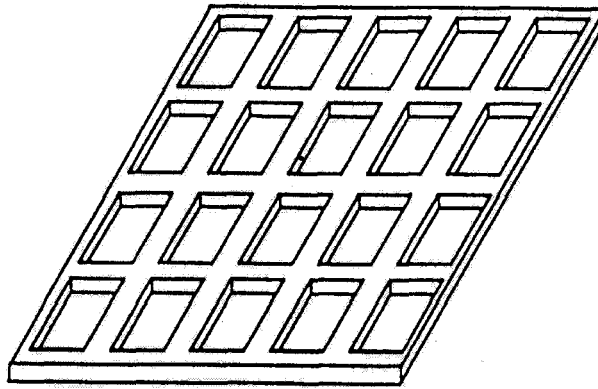


Figura 1.6

# Capítulo 2

## Una estructura modelo

En este capítulo presentamos el método de homogeneización para el tratamiento de estructuras reticuladas que constituye la parte fundamental de la presente memoria. Estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones del problema de difusión (1.8) planteado sobre una sucesión de estructuras reticuladas formadas por barras de espesor  $\varepsilon d_\varepsilon$ , paralelas a los ejes de coordenadas y dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$ , caso modelo del capítulo anterior (ver las Figuras 1.2 y 1.3 para el caso bidimensional, y la Figura 1.4 para el tridimensional).

El capítulo está organizado como sigue. En la Sección 2.1 se define la estructura reticulada y se prueba un resultado de compacidad que constituye la herramienta básica del método. Las Secciones 2.2 y 2.3 están dedicadas a resolver nuestro problema de homogeneización, primero en el caso lineal y después en el caso de operadores pseudomonótonos.

### 2.1 Resultado de compacidad

Nos situamos en el marco establecido en el Capítulo 1, con  $m = N$ , y donde para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $V_\varepsilon^i$  viene dado por

$$V_\varepsilon^i = \bigcup_{k'_i \in \mathbb{Z}^N} \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x'_i - \varepsilon k'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2} \right\}, \quad (2.1)$$

e  $\hat{y}_\varepsilon^i : V_\varepsilon^{i,0} \longrightarrow Y^N$  por

$$\hat{y}_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i}{\varepsilon} e_i + \frac{x'_i}{\varepsilon d_\varepsilon}, \quad \forall x \in V_\varepsilon^{i,0}. \quad (2.2)$$

En este caso el dominio de la variable macroscópica es  $\mathfrak{R}_N^N = \mathbb{R}^N$ . De (2.2) y la Definición 1.2.5 se deriva

$$D_\varepsilon^i \hat{v} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v} e_i + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \partial_{y_j} \hat{v} e_j.$$

Es fácil comprobar que en esta situación  $|\Omega_\varepsilon|$  es del orden de  $d_\varepsilon^{N-1}$ .

La siguiente definición simplificará la notación en todo lo que sigue.

**Definición 2.1.1** Sea  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Para  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ , se define  $D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \in L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N$  por

$$D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) = (\partial_{x_i} \hat{u}_0 + \partial_{y_i} \hat{u}_1^i) e_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \partial_{y_j} \hat{u}_2^i e_j. \quad (2.3)$$

Para aplicar nuestro método comenzamos probando un resultado de compacidad para las sucesiones  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , definidas por (1.5), suponiendo que  $u_\varepsilon$  es una sucesión en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  que satisface la estimación

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.4)$$

Este resultado es el equivalente en nuestro contexto del conocido teorema de compacidad para la convergencia en dos escalas (ver [51], [2]). Con su ayuda se pasará al límite en (1.8) y se obtendrá el problema límite u homogeneizado.

**Teorema 2.1.2** Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  que verifica (2.4), y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (1.5). Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , aún denotada por  $\varepsilon$ ,  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_1^l(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $i, l \in \{1, \dots, N\}$ , verificando

$$\hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (2.5)$$

$$D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N. \quad (2.6)$$

**Demostración.** Comenzamos expresando la condición (2.4) en términos de las nuevas variables. Teniendo en cuenta que para cada  $k \in \mathbb{Z}^N$ ,  $\hat{u}_\varepsilon^i(x, y)$  no depende de  $x$  en  $C_\varepsilon^k \times Y^N$  y usando el cambio de variables (1.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx = d_\varepsilon^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \varepsilon^N \int_{Y^N} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i(\varepsilon k, y)|^p dy = \\ &= d_\varepsilon^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} \int_{Y^N} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i(x, y)|^p dy dx = d_\varepsilon^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i(x, y)|^p dy dx, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Entonces, de (2.4) se deduce

$$\int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i(x, y)|^p dy dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.7)$$

luego, al menos para una subsucesión,  $D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i$  converge débilmente en  $L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N$ .

Mediante sucesiones auxiliares vamos a caracterizar las componentes de este límite.

Para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se define  $\hat{w}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\hat{w}_\varepsilon^i(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) - \frac{1}{|P_\varepsilon^k(x)|} \int_{P_\varepsilon^k(x)} u_\varepsilon(z) dz \right], \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.8)$$

Para cada  $k \in \mathbb{Z}^N$ , usando el cambio de variables (1.4), se obtiene

$$\int_{Y^N} |\hat{w}_\varepsilon^i(x, y)|^p dy = \frac{1}{\varepsilon^{N+p} d_\varepsilon^{N-1}} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} \left| u_\varepsilon(\rho) - \frac{1}{|P_\varepsilon^k|} \int_{P_\varepsilon^k} u_\varepsilon(z) dz \right|^p d\rho, \quad \text{p.c.t. } x \in C_\varepsilon^k. \quad (2.9)$$

Usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Poincaré-Wirtinger (ver Lema 6.0.1)

se sigue

$$\begin{aligned} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} \left| u_\varepsilon(\rho) - \frac{1}{|P_\varepsilon^k|} \int_{P_\varepsilon^k} u_\varepsilon(z) dz \right|^p d\rho &\leq C \varepsilon^p \int_{V_\varepsilon^{i,k}} |\nabla u_\varepsilon(\rho)|^p d\rho + \\ &+ C \int_{V_\varepsilon^{i,k}} \left| \frac{1}{|\omega_\varepsilon^k|} \int_{\omega_\varepsilon^k} u_\varepsilon(\tau) d\tau - \frac{1}{|P_\varepsilon^k|} \int_{P_\varepsilon^k} u_\varepsilon(z) dz \right|^p d\rho. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para estimar el segundo miembro de (2.10) se usa la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\omega_\varepsilon^k|} \int_{\omega_\varepsilon^k} u_\varepsilon(\tau) d\tau - \frac{1}{|P_\varepsilon^k|} \int_{P_\varepsilon^k} u_\varepsilon(z) dz &= \frac{|V_\varepsilon^{1,k}|}{|P_\varepsilon^k|} \left[ \frac{1}{|\omega_\varepsilon^k|} \int_{\omega_\varepsilon^k} u_\varepsilon(\tau) d\tau - \frac{1}{|V_\varepsilon^{1,k}|} \int_{V_\varepsilon^{1,k}} u_\varepsilon(z) dz \right] + \\ &+ \sum_{j=2}^N \frac{|V_\varepsilon^{j,k} \setminus \omega_\varepsilon^k|}{|P_\varepsilon^k|} \left[ \frac{1}{|\omega_\varepsilon^k|} \int_{\omega_\varepsilon^k} u_\varepsilon(\tau) d\tau - \frac{1}{|V_\varepsilon^{j,k} \setminus \omega_\varepsilon^k|} \int_{V_\varepsilon^{j,k} \setminus \omega_\varepsilon^k} u_\varepsilon(z) dz \right], \end{aligned}$$

que gracias al Lema 6.0.1 conduce a la acotación

$$\int_{V_\varepsilon^{i,k}} \left| \frac{1}{|\omega_\varepsilon^k|} \int_{\omega_\varepsilon^k} u_\varepsilon(\tau) d\tau - \frac{1}{|P_\varepsilon^k|} \int_{P_\varepsilon^k} u_\varepsilon(z) dz \right|^p d\rho \leq C \varepsilon^p \int_{P_\varepsilon^k} |\nabla u_\varepsilon(\rho)|^p d\rho. \quad (2.11)$$

Por (2.9), (2.10), (2.11), y el cambio de variables (1.4), se llega a

$$\int_{Y^N} |\hat{w}_\varepsilon^i(x, y)|^p dy \leq \frac{C}{\varepsilon^N d_\varepsilon^{N-1}} \int_{P_\varepsilon^k} |\nabla u_\varepsilon(s)|^p ds \leq C \sum_{j=1}^N \int_{Y^N} |D_\varepsilon^j \hat{u}_\varepsilon^j(x, y)|^p dy, \text{ p.c.t. } x \in C_\varepsilon^k.$$

Integrando estas desigualdades en  $x \in C_\varepsilon^k$  y sumando en  $k \in \mathbb{Z}^N$  se obtiene, gracias a (2.7), que  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ . Gracias a (2.7) también se tiene que  $\partial_{y_i} \hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)$  mientras que  $\partial_{y_j} \hat{w}_\varepsilon^i$ ,  $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , converge fuertemente a cero en  $L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ . De todo ello se deduce la existencia de  $\hat{w}^i \in L^p(\mathbb{R}^N; W^{1,p}(J^i))$  tal que, salvo una subsucesión,  $\hat{w}_\varepsilon^i$  converge débilmente a  $\hat{w}^i$  en  $L^p(\mathbb{R}^N; W^{1,p}(Y^N))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Además, la igualdad

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{w}_\varepsilon^i(x, y) dy = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_j| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{w}_\varepsilon^j(x, y) dy, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall i, j \in \{1, \dots, N\},$$

prueba que  $\hat{w}^i(x, 0) = \hat{w}^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ .

A continuación estudiamos propiedades de periodicidad de  $\hat{w}^i$ . Para ello se utiliza que, por definición,  $\hat{u}_\varepsilon^i$  satisface

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, \frac{1}{2}e_i + \cdot) = \hat{u}_\varepsilon^i(x + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + \cdot) \quad \text{en } L^p(S^i), \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

De aquí se deduce que, p.c.t.  $y'_i \in S^i$  y p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ , se tiene

$$\hat{w}_\varepsilon^i(x, \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_\varepsilon^i(x + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y'_i) = \frac{\bar{u}_\varepsilon(x + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon(x)}{\varepsilon}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.12)$$

donde se está denotando

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{|P_\varepsilon(x)|} \int_{P_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(z) dz, \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Como  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^N; W^{1,p}(Y^N))$ , el segundo miembro de (2.12) está acotado en  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , con lo cual  $\bar{u}_\varepsilon$  está bajo las condiciones del Lema 6.0.3, y por tanto existen una subsucesión de  $\varepsilon$  y  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tales que se tienen (6.7) y (6.8). Pasando al límite en (2.12), se obtiene gracias a (6.7)

$$\hat{w}^i(\cdot, \frac{1}{2}) - \hat{w}^i(\cdot, -\frac{1}{2}) = \partial_{x_i} \hat{u}_0, \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Si se define  $\hat{u}_1^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por

$$\hat{u}_1^i(x, y) = \hat{w}^i(x, y) - \partial_{x_i} \hat{u}_0(x) y_i, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

se tiene entonces que  $\hat{u}_1^i$  pertenece a  $L^p(\mathbb{R}^N; W_{\#}^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , y, al menos para una subsucesión, se satisface

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{x_i} \hat{u}_0 + \partial_{y_i} \hat{u}_1^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.13)$$

Puesto que  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ , se sigue de (6.8) la afirmación (2.5), para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Se define ahora la sucesión  $\hat{z}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por

$$\hat{z}_\varepsilon^i(x, y) = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \left[ \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) - \int_{S^i} \hat{u}_\varepsilon^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i \right], \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Utilizando nuevamente (2.7) y la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, se deduce que  $\hat{z}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^N \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ , luego existe  $\hat{u}_2^i \in L^p(\mathbb{R}^N \times J^i; W^{1,p}(S^i))$  tal que, al menos para una subsucesión,  $\hat{z}_\varepsilon^i$  converge débilmente a  $\hat{u}_2^i$  en  $L^p(\mathbb{R}^N \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ . En particular se tiene

$$\frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_j} \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{y_j} \hat{u}_2^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad i \neq j, \quad (2.14)$$

que junto a (2.13) prueba (2.6). □

El siguiente resultado da el recíproco del Teorema 2.1.2, y por tanto prueba que dicho teorema es óptimo.

**Teorema 2.1.3** Sean  $\hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{v}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que  $\hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Entonces, existe  $v_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  tal que, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , la sucesión  $\hat{v}_\varepsilon^i$  definida por (1.5) satisface

$$\hat{v}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{v}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (2.15)$$

$$D_\varepsilon^i \hat{v}_\varepsilon^i \longrightarrow D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N. \quad (2.16)$$

**Demostración.** Claramente podemos suponer que  $\hat{v}_1^i(x, 0) = 0$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Sean  $\hat{\psi}_{0,\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\hat{\psi}_{1,\varepsilon}^i \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(J^i))$ ,  $\hat{\psi}_{2,\varepsilon}^i \in C_0^\infty(\Omega \times J^i; C^\infty(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , verificando

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{0,\varepsilon} \longrightarrow \hat{v}_0 & \text{en } W_0^{1,p}(\Omega), \\ \partial_{y_i} \hat{\psi}_{1,\varepsilon}^i \longrightarrow \partial_{y_i} \hat{v}_1^i & \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \\ \partial_{y_j} \hat{\psi}_{2,\varepsilon}^i \longrightarrow \partial_{y_j} \hat{v}_2^i & \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon \left[ \|\nabla_x \hat{\psi}_{1,\varepsilon}^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N} + \|\nabla_x \hat{\psi}_{2,\varepsilon}^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N} + \|\partial_{y_i} \hat{\psi}_{2,\varepsilon}^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times Y^N)} \right] \longrightarrow 0. \quad (2.18)$$

$$\hat{\psi}_{1,\varepsilon}^i = \hat{\psi}_{2,\varepsilon}^i = 0 \quad \text{si } |y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}, \quad (2.19)$$

Sea también  $\theta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  verificando (N.1) (ver Notación). Usando entonces las funciones  $y_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , dadas por (1.4), se define  $v_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$  por

$$v_\varepsilon = \hat{\psi}_{0,\varepsilon} + \varepsilon \sum_{i=1}^N \left[ \hat{\psi}_{1,\varepsilon}^i(\cdot, y_{\varepsilon,i}^i) + d_\varepsilon \hat{\psi}_{2,\varepsilon}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - d_\varepsilon \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \nabla \hat{\psi}_{0,\varepsilon}(y_\varepsilon^i)' \right] \chi_{\Omega_\varepsilon^i}.$$

Es fácil comprobar que, gracias a (2.19)  $v_\varepsilon$  pertenece a  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ , y por (2.17) y (2.18) se tiene

$$\hat{v}_\varepsilon^i = \hat{v}_0 + \eta_\varepsilon^0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

$$D_\varepsilon^i \hat{v}_\varepsilon^i = D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) + \eta_\varepsilon^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N, \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

donde  $\eta_\varepsilon^0, \eta_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , convergen fuertemente a cero en  $L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)$  y  $L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N$  respectivamente. Esto prueba (2.15) y (2.16).  $\square$

A una sucesión  $u_\varepsilon$ , mediante los cambios de variables (1.4), le hemos asociado nuevas sucesiones  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , dadas por (1.5). Para las nuevas sucesiones hemos demostrado un resultado de compacidad. La cuestión ahora es, que relación existe entre los resultados de convergencia para  $\hat{u}_\varepsilon^i$  dados por (2.5) y (2.6) y el comportamiento asintótico de  $u_\varepsilon$ . Una respuesta a esta pregunta la proporciona el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.4** *Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (1.5).*

a) *Supongamos que existe  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que*

$$\hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.20)$$



Entonces, la sucesión  $g_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g_\varepsilon(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} \hat{u}_0(\rho) d\rho, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.21)$$

proporciona la siguiente aproximación a  $u_\varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p dx = 0. \quad (2.22)$$

b) Supongamos que existen  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que

$$D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i \rightarrow D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.23)$$

Entonces, las sucesiones  $G_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , definidas por

$$G_\varepsilon^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)(\rho, y_\varepsilon^i(\cdot)) d\rho, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.24)$$

proporcionan la siguiente aproximación de  $\nabla u_\varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon(x) - G_\varepsilon^i(x)|^p dx = 0. \quad (2.25)$$

**Demostración.** Usando el cambio de variables (1.4),  $\hat{u}_\varepsilon^i$  independiente de  $x$  en  $C_\varepsilon^k \times Y^N$ ,  $k \in \mathbb{Z}^N$ , y la desigualdad de Hölder, se deduce que para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{V_\varepsilon^i} |u_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p dx &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} \left| u_\varepsilon(x) - \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon^k} \hat{u}_0(\rho) d\rho \right|^p dx = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \varepsilon^{N(1-p)} \int_{Y^N} \left| \int_{C_\varepsilon^k} (\hat{u}_\varepsilon^i(\rho, y) - \hat{u}_0(\rho)) d\rho \right|^p dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} |\hat{u}_\varepsilon^i(\rho, y) - \hat{u}_0(\rho)|^p dy d\rho \end{aligned}$$

y análogamente

$$\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{V_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon(x) - G_\varepsilon^i(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i(\rho, y) - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)(\rho, y)|^p dy d\rho.$$

Entonces (2.22) y (2.25) siguen inmediatamente de (2.20) y (2.23) respectivamente.  $\square$

**Observación 2.1.5** Se demuestra fácilmente que (2.23) implica (2.20).

**Observación 2.1.6** Si las funciones  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , son uniformemente continuas en  $x \in \mathbb{R}^N$ , entonces (2.22) y (2.25) son equivalentes respectivamente a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - \hat{u}_0(x)|^p dx = 0,$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \left| \nabla u_\varepsilon(x) - \left( \partial_{x_i} \hat{u}_0(x) + \partial_{y_i} \hat{u}_1^i(x, y_{\varepsilon,i}^i(x)) \right) e_i - \sum_{\substack{1 \leq l \leq N \\ l \neq i}} \partial_{y_l} \hat{u}_2^i(x, y_\varepsilon^i(x)) e_l \right|^p dx = 0.$$

## 2.2 Resultado de homogeneización. Caso lineal con coeficientes constantes

En éste y en el próximo apartado vamos a utilizar los resultados de la sección anterior para realizar la homogeneización de (1.8). Obtendremos un problema límite donde intervienen simultáneamente las dos escalas, el cual proporciona aproximaciones de  $u_\varepsilon$  y  $\nabla u_\varepsilon$  en la topología fuerte de  $L^p(\Omega_\varepsilon)$  y  $L^p(\Omega_\varepsilon)^N$  respectivamente. Este resultado de corrector se prueba sin exigir hipótesis de regularidad a las soluciones del problema límite.

Para mayor claridad, comenzamos considerando aquí el problema (1.8) en el caso de una ecuación lineal con coeficientes constantes que no varían con  $\varepsilon$  dejando para la próxima sección el caso general. Es decir, a continuación admitimos que  $a_\varepsilon$  está definido por

$$a_\varepsilon(x, s, \xi) = A\xi, \quad \forall (x, s, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

con  $A \in \mathcal{M}_N$  definida positiva. Suponemos también  $H_\varepsilon = H \in C^0(\bar{\Omega})^N, F_\varepsilon = F \in C^0(\bar{\Omega})$ .

Se tiene el siguiente resultado de homogeneización.

**Teorema 2.2.1** Para  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_\varepsilon$  la solución del problema (1.8), y sean  $\hat{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^2(\Omega; H_\#^1(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_1^j(x, 0)$

p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , una solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} (AD_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) - H) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dydx = N \int_{\Omega} F\hat{v}_0 dx, \\ \forall \hat{v}_0 \in H_0^1(\Omega), \hat{v}_1^i \in L^2(\Omega; H_{\sharp}^1(J^i)), \hat{v}_2^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i)), i \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{con } \hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_1^j(x, 0) \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N, \text{ para } i, j \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Entonces, las correspondientes sucesiones  $g_{\varepsilon}$  y  $G_{\varepsilon}^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , definidas por (2.21) y (2.24), satisfacen (2.22) y (2.25) con  $p = 2$ .

**Observación 2.2.2** Una simple aplicación del Teorema de Lax-Milgram (en espacios cocientes adecuados) prueba que el problema (2.26) admite solución. Aunque dicha solución no es única, si que lo son las funciones  $\hat{u}_0$ ,  $\partial_{y_i} \hat{u}_1^i$  y  $\partial_{y_j} \hat{u}_2^i$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $j \neq i$ , que son precisamente los términos que aparecen en la definición de  $g_{\varepsilon}$  y  $G_{\varepsilon}^i$  (corrector).

**Demostración.** Tomando  $u_{\varepsilon}$  como función test en (1.8) y utilizando la desigualdad de Poincaré (6.2) se tiene la estimación (2.4) para  $u_{\varepsilon}$ , con  $p = 2$ . El Teorema 2.1.2 asegura entonces la existencia de  $\hat{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^2(\Omega; H_{\sharp}^1(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , con  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , tales que, al menos para una subsucesión, se satisfacen (2.5) y (2.6).

Vamos a probar que  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{u}_1^i$  y  $\hat{u}_2^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , es solución de (2.26). Para ello, sean  $\hat{v}_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\hat{v}_1^i \in L^2(\Omega; H_{\sharp}^1(J^i))$ ,  $\hat{v}_2^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , con  $\hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , y sea  $v_{\varepsilon} \in H_{\Gamma_{\varepsilon}}^1(\Omega_{\varepsilon})$  la sucesión dada por el Teorema 2.1.3 correspondiente a estas funciones. Tomando  $v_{\varepsilon}$  como función test en (1.8) y usando el cambio de variables (1.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} (AD_{\varepsilon}^i \hat{u}_{\varepsilon}^i - H) D_{\varepsilon}^i \hat{v}_{\varepsilon}^i dydx + O_{\varepsilon} &= \frac{1}{d_{\varepsilon}^{N-1}} \int_{\Omega_{\varepsilon}} (A \nabla u_{\varepsilon} - H) \nabla v_{\varepsilon} dx = \\ &= \frac{1}{d_{\varepsilon}^{N-1}} \int_{\Omega_{\varepsilon}} F v_{\varepsilon} dx = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} F \hat{v}_{\varepsilon}^i dydx + O_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Por (2.5), (2.6), (2.15) y (2.16), se puede pasar al límite en la igualdad anterior, obteniendo

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} (AD_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) - H) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dydx = N \int_{\Omega} F\hat{v}_0 dx, \quad (2.27)$$

lo que prueba que  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , son solución de (2.26). Entonces, de la Observación 2.2.2 se desprende que las convergencias (2.5) y (2.6) se satisfacen para toda la sucesión y no tan sólo para una subsucesión de  $\varepsilon$  como teníamos en principio.

Gracias al Teorema 2.1.4, basta probar la condición (2.23) para finalizar la demostración del Teorema 2.2.1. Sea  $i \in \{1, \dots, N\}$ , puesto que  $A$  es definida positiva, existe  $\alpha > 0$  tal que se tiene

$$\begin{aligned}
& \alpha \|D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N}^2 + \\
& + \alpha \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \| (D_\varepsilon^j \hat{u}_\varepsilon^j - D_0^j(\hat{u}_0, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j)) \chi_{\{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}\}} \|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N}^2 \leq \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} A (D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) (D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) dydx + \\
& + \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A (D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l - D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l)) (D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l - D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l)) dydx, \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Tomando  $u_\varepsilon$  como función test en (1.8) y  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , como funciones test en (2.26), se deduce, gracias a (2.5) y (2.6),

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l dydx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i dydx + O_\varepsilon = \\
& = \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} A \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx = \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} F u_\varepsilon dx + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} H \nabla u_\varepsilon dx = \\
& = \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} F \hat{u}_\varepsilon^l dydx + \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} H D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l dydx + O_\varepsilon = \\
& = N \int_{\mathbb{R}^N} F \hat{u}_0 dx + \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} H D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) dydx + O_\varepsilon = \\
& = \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} AD_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) dydx + O_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

También se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l (D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l - D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l)) dydx \geq \\
& \geq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) (D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l - D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l)) dydx, \quad \forall l \in \{1, \dots, N\}.
\end{aligned}$$

Pasando al límite en esta desigualdad usando (2.6) se demuestra

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l dy dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} AD_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) dy dx,$$

para todo  $l \in \{1, \dots, N\}$ . Entonces, de (2.29) y  $A$  definida positiva se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i|^2 dy dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i dy dx = 0, \quad (2.30)$$

y

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l dy dx = \\ & = \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} AD_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) dy dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por (2.30), el primer término del miembro derecho de (2.28) tiende a cero, mientras que usando (2.31) y (2.6) se deduce

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A (D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l - D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l)) (D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l - D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l)) dy dx = \\ & = \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l D_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l dy dx - 2 \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_\varepsilon^l \hat{u}_\varepsilon^l D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) dy dx + \\ & \quad + \sum_{l=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_l| > \frac{d_\varepsilon}{2}} AD_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) D_0^l(\hat{u}_0, \hat{u}_1^l, \hat{u}_2^l) dy dx = O_\varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, pasando al límite en (2.28), se llega a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

lo que prueba (2.23). □

**Observación 2.2.3** *En la demostración del resultado anterior, el Teorema 2.1.3 ha sido fundamental para caracterizar  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , como solución del problema (2.26). Se observa que para ese fin hubiese sido suficiente con demostrar dicho teorema para  $\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , en un denso, y en particular se pueden tomar regulares.*

**Observación 2.2.4** *Destacar que el problema (2.26) es independiente de la elección de  $d_\varepsilon$ , lo cual da sentido en cierto modo al método consistente en pasar al límite primero*

en un parámetro y después en otro (ver por ejemplo [25], [26], [31], [6]). La situación es sin embargo totalmente distinta cuando consideramos la homogeneización del sistema de la elasticidad planteado sobre  $\Omega_\varepsilon$  (ver Capítulos 4 y 5) donde la talla relativa de los parámetros determina el comportamiento asintótico.

Vamos a ver como se resuelve el problema homogeneizado (2.26).

**Proposición 2.2.5** *Supongamos  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ . Para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se denota por  $A_{ii}$  la submatriz complementaria del elemento  $a_{ii}$ , por  $\mathbf{b}^i$  y  $\mathbf{c}^i$  los vectores de  $\mathbb{R}^{N-1}$  dados por  $\mathbf{b}^i = (a_{1i}, \dots, a_{i-1i}, a_{i+1i}, \dots, a_{Ni})$  y  $\mathbf{c}^i = (a_{i1}, \dots, a_{ii-1}, a_{ii+1}, \dots, a_{iN})$  respectivamente. Si  $\hat{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , son una solución del problema variacional (2.26), entonces se satisfacen las relaciones*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^{\operatorname{hom}} \nabla \hat{u}_0 - \mathcal{G}) = NF & \text{en } \Omega, \\ \hat{u}_0 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\partial_{y_i} \hat{u}_1^i = 0, \quad \nabla_{y_i'} \hat{u}_2^i = A_{ii}^{-1} (-\partial_{x_i} \hat{u}_0 \mathbf{b}^i + H_i'), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.33)$$

donde  $A^{\operatorname{hom}}$  es la matriz diagonal definida por  $A_{ii}^{\operatorname{hom}} = \frac{\det(A)}{\det(A_{ii})}$ ,  $H_i' = \sum_{j \neq i} H_j e_j$  y  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^N$  viene dado por  $\mathcal{G}_i = H_i - A_{ii}^{-1} H_i' \mathbf{b}^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

**Demostración.** Tomando en (2.26) funciones test de la forma  $\hat{v}_0 = 0$ ,  $\hat{v}_1^l = \hat{v}_2^r = 0$ ,  $l, r \in \{1, \dots, N\}$ ,  $r \neq i$ , y  $\hat{v}_2^i = \varphi \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$ , se obtiene que  $\hat{u}_2^i$  es solución de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y_i'} (A_{ii} \nabla_{y_i'} \hat{u}_2^i) = 0 & \text{en } S^i, \\ A_{ii} \nabla_{y_i'} \hat{u}_2^i \nu^i = \left[ -(\partial_{x_i} \hat{u}_0 + \partial_{y_i} \hat{u}_1^i) \mathbf{b}^i + H_i' \right] \nu^i & \text{sobre } \partial S^i, \end{cases} \quad \text{p.c.t. } (x, y_i) \in \Omega \times J^i,$$

donde  $\nu^i$  es la normal exterior a  $S^i \subset \mathbb{R}^{N-1}$ . De aquí se sigue

$$\nabla_{y_i'} \hat{u}_2^i = A_{ii}^{-1} \left[ -(\partial_{x_i} \hat{u}_0 + \partial_{y_i} \hat{u}_1^i) \mathbf{b}^i + H_i' \right]. \quad (2.34)$$

Considerando funciones tests de la forma  $\hat{v}_0 = 0$ ,  $\hat{v}_1^l = \hat{v}_2^r = 0$ ,  $l, r \in \{1, \dots, N\}$ ,  $l \neq i$ , y  $\hat{v}_1^i = \psi \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(J^i))$ , se obtiene entonces que  $\hat{u}_1^i$  es solución de

$$\begin{cases} -(a_{ii} - A_{ii}^{-1} \mathbf{b}^i \mathbf{c}^i) \partial_{y_i y_i}^2 \hat{u}_1^i = 0 & \text{en } \mathbb{R}, \\ \hat{u}_1^i \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(J^i)), \end{cases} \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Teniendo en cuenta

$$a_{ii} - A_{ii}^{-1} \mathbf{b}^i \mathbf{c}^i = \frac{\det(A)}{\det(A_{ii})} > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

resulta entonces  $\partial_{y_i} \hat{u}_1^i = 0$ , lo que junto a (2.34) da (2.33).

Para finalizar, basta tomar funciones test de la forma  $\hat{v}_0 = \eta \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\hat{v}_1^l = \hat{v}_2^r = 0$ ,  $l, r \in \{1, \dots, N\}$ , para concluir que  $\hat{u}_0$  es la única solución de (2.32).  $\square$

**Observación 2.2.6** Si la solución  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{u}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , de (2.26) es suficientemente regular, gracias al Teorema 2.2.1 y a la Observación 2.1.6, se tienen las siguientes aproximaciones para  $u_\varepsilon$  y  $\nabla u_\varepsilon$  sobre  $\Omega_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\sim \hat{u}_0(x), \\ \partial_{x_i} u_\varepsilon(x) &\sim \partial_{x_i} \hat{u}_0(x) + \partial_{y_i} \hat{u}_1^i(x, y_{\varepsilon,i}^i(x)), \\ \partial_{x_j} u_\varepsilon(x) &\sim \partial_{y_j} \hat{u}_2^i(x, y_\varepsilon^i(x)), \quad \text{para } j \neq i. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Claramente los dos primeros miembros de la derecha no dependen de  $y_i'$ , y por (2.33), el tercero tampoco. O sea, el comportamiento asintótico de  $u_\varepsilon$  y  $\nabla u_\varepsilon$  sobre las barras no depende de  $d_\varepsilon$ . Esto justifica los métodos que resuelven el problema de homogeneización (1.8) considerando generalizaciones de la convergencia en dos escalas en las cuales aparecen exclusivamente funciones test que dependen sólo de  $x$ ,  $x/\varepsilon$ . De hecho en este caso el problema se puede resolver a partir del “esqueleto” del dominio (ver [59], [61], [6]).

La situación es sin embargo distinta cuando trabajamos con no homogeneidades en microestructura que dependen de las variables transversales a las barras, y por tanto de  $d_\varepsilon$ . Este caso se presenta por ejemplo, si se supone que a lo largo de cada dirección, cada barra está formada por dos materiales, uno de ellos constituyendo un núcleo central y el otro una carcasa que lo envuelve. La condición (1.20) sobre los coeficientes de la ecuación permite modelizar esta configuración de las estructuras. Para ello, basta tomar por ejemplo

$$a^i(x, y, s, \xi) = \theta_1^i(s, \xi) \chi_{\{|y_i^i| < r^i\}} + \theta_2^i(s, \xi) \chi_{\{|y_i^i| > r^i\}}, \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

con  $r^i < 1/2$ , y  $\theta_1^i$ ,  $\theta_2^i$  funciones pseudo-monótonas en  $\mathbb{R}^N$ , para cada  $i \in \{1 \dots N\}$ .

## 2.3 Resultado de homogeneización. Caso general

Ya hemos estudiado el problema de homogeneización (1.8) en el caso de una ecuación lineal. Pasamos a continuación a considerarlo en su forma general y comprobamos como el Teorema 2.1.2 se aplica también en esta situación.

**Teorema 2.3.1** *Para  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  una solución de (1.8) y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (1.5). Entonces, existe una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se continua denotando por  $\varepsilon$ , y existen  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , con  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \Omega$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , solución del problema variacional*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} (a^i(x, y, \hat{u}_0^i, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) - H^i) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dy dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} F^i \hat{v}_0 dy dx, \\ \forall \hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i)), \hat{v}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i)), i \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{con } \hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_1^j(x, 0) \text{ p.c.t. } x \in \Omega, \text{ para } i, j \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

tales que se tienen (2.5) y (2.6). Además, si se define  $g_\varepsilon$  por (2.21), la correspondiente subsucesión satisface (2.22).

**Observación 2.3.2** *Los mismos argumentos que muestran la existencia de solución de (1.8), prueban también que (2.36) admite solución (ver [44], [45]).*

**Demostración.** Tomando  $u_\varepsilon$  como función test en (1.8) y usando la desigualdad de Poincaré (6.2), se obtiene la estimación del gradiente (2.4) para  $u_\varepsilon$ . Entonces, por el Teorema 2.1.2, existen  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , con  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \Omega$ , para  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , tales que, al menos para una subsucesión, se verifican (2.5) y (2.6). Gracias al Teorema 2.1.4, sólo resta probar que  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , son solución de (2.36).

Por la hipótesis de crecimiento sobre  $a^i$  (1.18) se deduce que  $a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i)$  está acotada en  $L^{p'}(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N$ , y por tanto existen  $\sigma_0^i \in L^{p'}(\Omega \times Y^N)^N$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , y una subsucesión de  $\varepsilon$ , también denotada por  $\varepsilon$ , tales que

$$a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) \rightharpoonup \sigma_0^i \quad \text{en } L^{p'}(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N. \quad (2.37)$$



Dados  $\hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{v}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , con  $\hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_1^j(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \Omega$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , se considera la sucesión  $v_\varepsilon$  en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  dada por el Teorema 2.1.3. Tomando  $\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}}v_\varepsilon$  como función test en (1.8), usando la continuidad de  $F^i$ ,  $H^i$  y  $a^i$  (hipótesis (1.14), (1.19)) en  $x$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) D_\varepsilon^i \hat{v}_\varepsilon^i dy dx + O_\varepsilon &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon(x)) \nabla v_\varepsilon(x) dx = \\ &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} H_\varepsilon(x) \nabla v_\varepsilon(x) dx + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} H^i(x, y) D_\varepsilon^i \hat{v}_\varepsilon^i(x, y) dy dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} F^i(x, y) \hat{v}_\varepsilon^i(x, y) dy dx + O_\varepsilon. \end{aligned}$$

Pasando al límite, gracias a la convergencia fuerte de  $D_\varepsilon^i \hat{v}_\varepsilon^i$ , se deduce entonces que  $\sigma_0^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , satisfacen

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} (\sigma_0^i(x, y) - H^i(x, y)) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dy dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} F^i(x, y) \hat{v}_0(x) dx, \\ \forall \hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i)), \hat{v}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i)), i \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{con } \hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_1^j(x, 0) \text{ p.c.t. } x \in \Omega, \text{ para } i, j \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Para identificar  $\sigma_0^i$  en términos de  $a^i$ ,  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{u}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , usaremos el truco de Minty. Fijados  $\tau > 0$  y  $\zeta^i \in L^p(\Omega \times Y^N)^N$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se denota  $g^i = D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) + \tau \zeta^i$ . Por las propiedades de monotonía (1.11) y (1.17) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} (a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) - a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, g^i)) (D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - g^i) dy dx + \\ + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por otra parte, tomando  $\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}}u_\varepsilon$  como función test en (1.8) y  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , como funciones test en (2.36), se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx = \\
& = \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx = \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon u_\varepsilon dx + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} H_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx = \\
& = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} F^i(x, y) \hat{u}_0 dy dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} H^i(x, y) D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) dy dx + O_\varepsilon = \\
& = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} \sigma_0^i(x, y) D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) dy dx + O_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Esta igualdad, junto con (2.5) y (2.6), permite pasar al límite en (2.39) y deducir

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} (a^i(x, y, \hat{u}_0, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) + \tau \zeta^i) - \sigma_0^i) \tau \zeta^i dy dx \geq 0, \\
& \forall \zeta^i \in L^p(\Omega \times Y^N)^N, \quad i \in \{1, \dots, N\}.
\end{aligned}$$

Dividiendo por  $\tau$  y pasando a continuación al límite cuando  $\tau$  tiende a cero, se llega a

$$\sigma_0^i(x, y) = a^i(x, y, \hat{u}_0, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)), \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2.41}$$

y entonces, gracias a (2.38), se concluye que  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , son solución de (2.36).  $\square$

**Observación 2.3.3** En las condiciones del Capítulo 1, si los operadores  $a_\varepsilon(x, s, \xi)$ , y por consiguiente los  $a^i$ , no dependen de la variable  $s$ , es decir, son monótonos, entonces (1.8) admite una única solución (ver [44], [45]). En ese caso, (2.36) determina unívocamente  $\hat{u}_0, \partial_{y_i} \hat{u}_1^i, \partial_{y_j} \hat{u}_2^i, i, j \in \{1, \dots, N\}, j \neq i$ , y gracias a ello se deduce que (2.5) y (2.6) se tienen en realidad para toda la sucesión  $\varepsilon$ .

**Observación 2.3.4** Gracias a la monotonía de  $a^i$  (1.17) se tiene

$$\int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} (a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) - a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i))) (D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) dy dx \geq 0,$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Pasando al límite en esta desigualdad con ayuda de (2.6), (2.37) y (2.41), se deduce

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_{Y^N} a^i(x, y, \hat{u}_0, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) dy dx, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Entonces, gracias a (1.9), (2.40) y (2.41), se obtiene

$$\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} a_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx = O_\varepsilon, \quad (2.42)$$

y

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i dy dx = \\ & = \int_{\Omega} \int_{Y^N} a^i(x, y, \hat{u}_0, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) dy dx, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A partir de (2.42), usando nuevamente (1.9) junto con el cambio de variables  $y_\varepsilon^i$  dado por (1.4), se prueba

$$\int_{\Omega} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i|^p dy dx = O_\varepsilon, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.44)$$

El resultado anterior proporciona aproximaciones de  $u_\varepsilon$  solución de (1.8). Si deseamos un corrector para  $\nabla u_\varepsilon$ , tenemos que asumir que las funciones  $a^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , son uniformemente monótonas, es decir, verifican (1.22).

**Teorema 2.3.5** Para  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_\varepsilon$  una solución de (1.8), y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (1.5). Si  $a^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , satisfacen la condición adicional (1.22), entonces existe una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , tal que se tienen (2.20) y (2.23), donde  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , satisfacen  $\hat{u}_1^i(x, 0) = \hat{u}_2^i(x, 0)$  p.c.t.  $x \in \Omega$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , y son solución de (2.36). En particular, para esa subsucesión se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon(x) - G_\varepsilon^i(x)|^p dx \right] = 0, \quad (2.45)$$

donde  $g_\varepsilon$  y  $G_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , están definidas respectivamente por (2.21) y (2.24).

**Demostración.** Por (2.44) y (2.43) se deduce

$$\int_{\Omega} \int_{Y^N} (a^i(x, y, \hat{u}_{\varepsilon}^i, D_{\varepsilon}^i \hat{u}_{\varepsilon}^i) - a^i(x, y, \hat{u}_0, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i))) (D_{\varepsilon}^i \hat{u}_{\varepsilon}^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) dy dx = O_{\varepsilon},$$

$i \in \{1, \dots, N\}$ , lo que junto con (1.22) prueba (2.23).

La relación (2.45) sigue del Teorema 2.1.4. □

**Observación 2.3.6** *Eliminando de (2.36)  $\hat{u}_1^i$  y  $\hat{u}_2^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , análogamente a como hicimos en el caso lineal, podemos deducir la ecuación homogeneizada para  $\hat{u}_0$ . A diferencia de lo que ocurría entonces, al resolver (2.36) se comprueba que la presencia de no homogeneidades en microestructura provocan que en general  $\hat{u}_2^i$  no sea lineal en la variable  $y'_i$ , y por tanto que el corrector dependa de  $d_{\varepsilon}$ .*

**Observación 2.3.7** *Como en el caso lineal el problema (2.36) es independiente de la elección de  $d_{\varepsilon}$ .*

# Capítulo 3

## Aplicación a otras situaciones

En este capítulo vamos a aplicar nuestro método de homogeneización en diversas situaciones. Así, en las Secciones 3.1 y 3.2 vamos a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones del problema de difusión (1.8), para dos nuevas estructuras reticuladas tridimensionales. Una de ellas está compuesta por placas dispuestas periódicamente en todas las direcciones (Figura 1.5). La otra está compuesta por barras y, a diferencia con la anterior y la estructura modelo, degenera en el límite en una estructura bidimensional (ver Figura 1.6). Del Capítulo 2 se sigue que el resultado principal para la homogeneización de (1.8) es el teorema de compacidad, el cual debe ser, en cierto sentido, óptimo. Por esta razón, para cada una de estas estructuras nos centramos en la demostración del correspondiente resultado de compacidad, así como en la justificación de su optimalidad. En la Sección 3.3 mostramos como el método se adapta fácilmente a los problemas de evolución, y para ello consideraremos un problema de tipo parabólico. Terminamos el capítulo probando en la Sección 3.4 varios resultados de carácter general en dimensión dos, aplicables a un número elevado de estructuras.

### 3.1 Estructuras compuestas por placas

A continuación, consideramos el problema (1.8) planteado sobre una sucesión de estructuras reticuladas en  $\mathbb{R}^3$  compuestas por placas ortogonales de espesor  $\varepsilon d_\varepsilon$ , dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$  (ver Figura 1.5). Más concretamente, bajo las condiciones introducidas en el Capítulo 1, tomamos  $m = 3$  y definimos  $V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , por

$$V_\varepsilon^i = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \varepsilon p| < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2} \right\}.$$

En esta situación, los difeomorfismos  $\hat{y}_\varepsilon^i : V_\varepsilon^{i,0} \rightarrow Y^3$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , que vamos a usar vienen dados por

$$\hat{y}_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i}{\varepsilon d_\varepsilon} e_i + \frac{x'_i}{\varepsilon}, \quad \forall x \in V_\varepsilon^{i,0}.$$

Los operadores diferenciales (1.6) asociados al cambio de variables (1.4) son ahora

$$D_\varepsilon^i \hat{v} = \sum_{\substack{1 \leq l \leq 3 \\ l \neq i}} \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_l} \hat{v} e_l + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_2^i e_i.$$

Para estas estructuras, el dominio de la variable macroscópica lo constituye  $\mathfrak{R}_3^3 = \mathbb{R}^3$ .

Se tiene que  $|\Omega_\varepsilon|$  es del orden de  $d_\varepsilon$ .

Con objeto de simplificar la notación, introducimos también los siguientes operadores diferenciales

**Definición 3.1.1** *Sea  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Para  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(S^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times S^i; W^{1,p}(J^i))$ , se define  $D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \in L^2(\mathbb{R}^3 \times Y^3)^3$  por*

$$D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) = \sum_{\substack{1 \leq l \leq 3 \\ l \neq i}} (\partial_{x_l} \hat{u}_0 + \partial_{y_l} \hat{u}_1^l) e_l + \partial_{y_i} \hat{u}_2^i e_i.$$

El resultado de compacidad para  $\hat{u}_\varepsilon^i$ , clave para la homogeneización de (1.8), viene dado por

**Teorema 3.1.2** *Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  que satisface*

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3.1)$$

y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , por (1.5). Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , aún denotada por  $\varepsilon$ ,  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\sharp}^{1,p}(S^i))$  y  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times S^i; W^{1,p}(J^i))$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , satisfaciendo  $\hat{u}_1^i = \hat{u}_1^j$  en  $L^p(\Omega \times (S^i \cap S^j))$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , y tales que

$$\hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3), \quad (3.2)$$

$$D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3)^3. \quad (3.3)$$

**Demostración.** Mediante el cambio de variables (1.4), la condición (3.1) se escribe

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times Y^3} |D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i(x, y)|^p dy dx = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.4)$$

luego, al menos una subsucesión,  $D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i$  es débilmente convergente en  $L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3)^3$ . Procedemos a continuación a caracterizar las componentes de su límite.

Para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , se define  $\hat{w}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^3 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  por

$$\hat{w}_\varepsilon^i(x, y) = \frac{\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) - \bar{u}_\varepsilon(x)}{\varepsilon}, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times Y^3, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3.5)$$

donde se está denotando

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{|P_\varepsilon(x)|} \int_{P_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(z) dz, \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Razonando análogamente a como se hizo en la demostración del Teorema 2.1.2, con ayuda del Lema 6.0.1 y (3.4), se obtiene que  $\hat{w}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^3; W^{1,p}(Y^3))$ , además  $\partial_{y_j} \hat{w}_\varepsilon^i$  converge fuertemente a cero en  $L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3)$ . Se deduce pues la existencia de una subsucesión, que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{w}^i \in L^p(\mathbb{R}^3; W^{1,p}(S^i))$  tal que  $\hat{w}_\varepsilon^i$  converge débilmente a  $\hat{w}^i$  en  $L^p(\mathbb{R}^3; W^{1,p}(Y^3))$ .

Probamos a continuación que las sucesiones  $\hat{w}^i$  satisfacen la propiedad

$$\hat{w}^i = \hat{w}^j \quad \text{en } L^p(\Omega \times (S^i \cap S^j)), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.6)$$

Para ello, se fija  $(i, j, r) \in \mathfrak{P}_3$ , y se parte de la igualdad de inmediata comprobación

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, z_r e_r + z_i e_i + d_\varepsilon z_j e_j) = \hat{u}_\varepsilon^j(x, z_r e_r + d_\varepsilon z_i e_i + z_j e_j), \quad \text{p.c.t. } (x, z) \in \mathbb{R}^3 \times Y^3.$$

De ella se sigue

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_j| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_\varepsilon^i(x, y_r e_r + y'_r) dy'_r = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_\varepsilon^j(x, y_r e_r + y'_r) dy'_r, \text{ p.c.t. } (x, y_r) \in \mathbb{R}^3 \times Y,$$

lo cual implica

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_j| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{w}_\varepsilon^i(x, y_r e_r + y'_r) dy'_r = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{w}_\varepsilon^j(x, y_r e_r + y'_r) dy'_r, \text{ p.c.t. } (x, y_r) \in \mathbb{R}^3 \times Y.$$

Pasando al límite en la última igualdad se concluye entonces (3.6).

Ahora vamos a estudiar propiedades de periodicidad para  $\hat{w}^i$ . Sean  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j \neq i$ . Por definición de  $\hat{u}_\varepsilon^i$  se satisface

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, \frac{1}{2}e_j + y'_j) = \hat{u}_\varepsilon^i(x + \varepsilon e_j, -\frac{1}{2}e_j + y'_j) \quad \text{p.c.t. } (x, y'_j) \in \mathbb{R}^3 \times S^j,$$

de donde se obtiene

$$\hat{w}_\varepsilon^i(x, \frac{1}{2}e_j + y'_j) - \hat{w}_\varepsilon^i(x + \varepsilon e_j, -\frac{1}{2}e_j + y'_j) = \frac{\bar{u}_\varepsilon(x + \varepsilon e_j) - \bar{u}_\varepsilon(x)}{\varepsilon}, \text{ p.c.t. } (x, y'_j) \in \mathbb{R}^3 \times S^j. \quad (3.7)$$

Puesto que  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^3; W^{1,p}(Y^3))$ , el segundo miembro de la igualdad (3.7) está acotado en  $L^p(\mathbb{R}^3)$ , para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Por tanto, la sucesión  $\bar{u}_\varepsilon$  se encuentra bajo las condiciones del Lema 6.0.3, con lo que existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tales que se satisfacen (6.7) y (6.8). Gracias a (6.7) se puede pasar al límite en (3.7) obteniendo

$$\hat{w}^i(x, \frac{1}{2}e_j + \cdot) - \hat{w}^i(x, -\frac{1}{2}e_j + \cdot) = \partial_{x_j} \hat{u}_0(x) \quad \text{en } L^p(S^i \cap S^j), \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^3.$$

Definiendo  $\hat{u}_1^i : \mathbb{R}^3 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  por

$$\hat{u}_1^i(x, y) = \hat{w}^i(x, y) - \nabla_{x_i} \hat{u}_0(x) y'_i, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times Y^3,$$

se tiene  $\hat{u}_1^i \in L^p(\mathbb{R}^3; W_\#^{1,p}(S^i))$ , y gracias a (3.6) satisface  $\hat{u}_1^i = \hat{u}_1^j$  en  $L^p(\Omega \times (S^i \cap S^j))$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Además se tiene

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_s} \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{x_s} \hat{u}_0 + \partial_{y_s} \hat{u}_1^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3), \quad \forall s \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}. \quad (3.8)$$



Como  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^3; W^{1,p}(Y^3))$  se deduce de (3.5)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{u}_\varepsilon^i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{u}_\varepsilon = \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

por tanto se tiene (3.2).

Para terminar, se define  $\hat{z}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^3 \times Y^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\hat{z}_\varepsilon^i(x, y) = \frac{\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) - \int_Y \hat{u}_\varepsilon^i(x, \tau_i e_i + y'_i) d\tau_i}{\varepsilon d_\varepsilon}, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times Y^3, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

que, gracias a (3.4) y a la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^3 \times S^i; W^{1,p}(J^i))$ , por lo que existe  $\hat{u}_2^i \in L^p(\mathbb{R}^3 \times S^i; W^{1,p}(J^i))$  tal que, al menos para una subsucesión,  $\hat{z}_\varepsilon^i$  converge débilmente a  $\hat{u}_2^i$  en  $L^p(\mathbb{R}^3 \times S^i; W^{1,p}(J^i))$ . En particular

$$\frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{y_i} \hat{u}_2^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

lo que junto a (3.8) demuestra (3.3). □

Un recíproco parcial del Teorema 3.1.2 viene dado por el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.3** Sean  $\hat{v}_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\hat{v}_1^i \in C_0^\infty(\Omega; C_0^\infty(S^i))$ ,  $\hat{v}_2^i \in C_0^\infty(\Omega \times S^i; C^\infty(J^i))$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , tales que  $\hat{v}_1^i = \hat{v}_1^j$  en  $L^p(\Omega \times (S^i \cap S^j))$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , y existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \hat{v}_1^i(x, y'_i) &= \hat{v}_1^i(x, y_j e_j) \quad \text{p.c.t. } (x, y'_i) \in \Omega \times (S^i \cap \{|y_l| < \frac{\delta}{2}\}), \quad \forall (i, j, l) \in \mathfrak{P}_3, \\ \hat{v}_2^i(x, y) &= 0 \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \Omega \times \{\text{mín}(|y_j|, |y_l|) < \frac{\delta}{2}\}, \quad \forall (i, j, l) \in \mathfrak{P}_3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Entonces, existe  $v_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  tal que, para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , la sucesión  $\hat{v}_\varepsilon^i$  definida por (1.5) satisface

$$\hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow \hat{v}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3), \quad (3.10)$$

$$D_\varepsilon^i \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^3 \times Y^3)^3. \quad (3.11)$$

**Demostración.** Para cada  $\varepsilon > 0$ , se toma  $\theta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  satisfaciendo (N.1) (ver Notación), y mediante los cambios de variables  $y_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , dados por (1.4), se define  $v_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^i} = \hat{v}_0 + \varepsilon \hat{v}_1^i(\cdot, (y_\varepsilon^i)') + \varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_2^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \varepsilon d_\varepsilon \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,j}^i) \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,l}^i) \partial_{x_i} \hat{v}_0 y_{\varepsilon,i}^i, \quad \forall (i, j, l) \in \mathfrak{P}_3.$$

Gracias a la regularidad de  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{v}_1^i$ ,  $\hat{v}_2^i$  y (3.9), es fácil comprobar que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño,  $v_\varepsilon$  pertenece a  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  y satisface (3.10) y (3.11).  $\square$

El Teorema 3.1.3 sigue siendo cierto si  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(S^i))$  y  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times S^i; W^{1,p}(J^i))$ , es decir, el Teorema 3.1.2 es óptimo. Su demostración es fácil usando la versión probada y siguiendo la demostración del Teorema 2.1.3. De todas formas, como indicamos en la Observación 2.2.3, nos basta con el Teorema 3.1.3 para realizar la homogeneización de (1.8).

Con ayuda de los Teoremas 3.1.2 y 3.1.3, ya es fácil demostrar el siguiente resultado de homogeneización.

**Teorema 3.1.4** *Para  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  una solución de (1.8) y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , por (1.5). Entonces, existe una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , tal que se tienen (3.2) y (3.3), donde  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(S^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times S^i; W^{1,p}(J^i))$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , satisfacen  $\hat{u}_1^i = \hat{u}_1^j$  en  $L^p(\Omega \times (S^i \cap S^j))$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , y son solución del problema variacional*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_{Y^3} (a^i(x, y, \hat{u}_0^i, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) - H^i) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dy dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \int_{Y^3} F^i \hat{v}_0 dy dx, \\ \forall \hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(S^i)), \hat{v}_2^i \in L^p(\Omega \times S^i; W^{1,p}(J^i)), i \in \{1, 2, 3\}, \\ \text{con } \hat{v}_1^i = \hat{v}_1^j \text{ en } L^p(\Omega \times (S^i \cap S^j)), i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{array} \right.$$

Además, si se define  $g_\varepsilon$  por (2.21), entonces la correspondiente subsucesión satisface (2.22).

Si  $a^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , satisfacen la condición adicional (1.22), se puede extraer la subsucesión anterior de forma que también se tiene (2.23) y  $G_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , definidas por (2.24) satisfacen (2.25).

## 3.2 Estructuras que disminuyen su dimensión en el límite

En esta sección vamos a resolver el problema de homogeneización (1.8) planteado sobre una sucesión de estructuras reticuladas en rejilla (ver Figura 1.6), formadas por barras de sección  $\varepsilon d_\varepsilon \times p_\varepsilon$ , dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$ . Se trata de un caso modelo correspondiente a estructuras que en el límite degeneran en dominios de dimensión menor que la del espacio. A diferencia de los casos hasta ahora tratados, el comportamiento asintótico de las soluciones es distinto según la magnitud relativa de los parámetros.

Nos situamos bajo las condiciones del Capítulo 1, con  $m = 2$ , y para cada  $i \in \{1, 2\}$ , definiendo  $l$  por  $l \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ ,  $V_\varepsilon^i$  dado por

$$V_\varepsilon^i = \left( \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_l - \varepsilon m| < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2} \right\} \right) \times p_\varepsilon Y, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.12)$$

El dominio de la variable macroscópica es en este caso  $\mathfrak{R}_2^3 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , conjunto que identificamos con  $\mathbb{R}^2$ . A lo largo de esta sección denotaremos por  $\zeta'$  un punto genérico de  $\mathfrak{R}_2^3$  (esta notación sustituye a  $\zeta'_3$ ).

Suponemos que  $\Omega$  está definido por  $\Omega = G \times Y$ , donde  $G$  es un abierto acotado y regular de  $\mathbb{R}^2$ . En esta situación  $|\Omega_\varepsilon|$  es del orden de  $d_\varepsilon p_\varepsilon$ .

Los cambios de variables (1.4) que usamos para esta estructura vienen definidos a partir de los difeomorfismos  $\hat{y}_\varepsilon^i : V_\varepsilon^{i,0} \rightarrow Y^3$  dados por

$$\hat{y}_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i}{\varepsilon} e_i + \frac{x_l}{\varepsilon d_\varepsilon} e_l + \frac{x_3}{p_\varepsilon} e_3, \quad \forall x \in V_\varepsilon^{i,0}, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2, \quad (3.13)$$

y por tanto, los operadores diferenciales (1.6), son ahora

$$D_\varepsilon^i v = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} v e_i + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_l} v e_l + \frac{1}{p_\varepsilon} \partial_{y_3} v e_3, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2.$$

Como ya hemos señalado, el comportamiento asintótico de las soluciones de (1.8) depende en esta situación del tamaño relativo de los parámetros. Se presentan cinco situaciones diferentes según la magnitud de  $p_\varepsilon$  respecto de  $\varepsilon$  y  $\varepsilon d_\varepsilon$ .

**Definición 3.2.1** Se definen  $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, +\infty]$  por (estos límites existen al menos para una subsucesión)

$$\sigma_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \sigma_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p_\varepsilon}{\varepsilon d_\varepsilon}.$$

Las definiciones que siguen simplifican los enunciados de esta sección.

**Definición 3.2.2** Según los posibles valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , se define el espacio funcional  $E$  por

- *Caso 1:* Si  $\sigma_2 = 0$  ( $\Rightarrow \varepsilon \gg \varepsilon d_\varepsilon \gg p_\varepsilon$ ),

$$E = \left\{ (\hat{u}^1, \hat{u}^2) : \hat{u}^i \in L^p(G; W_{\#}^{1,p}(J^i)) \times L^p(G \times J^i; W^{1,p}(J^l)) \times L^p(G \times S^3; W^{1,p}(J^3)), \right. \\ \left. \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2, \quad \hat{u}_1^1(x', 0) = \hat{u}_1^2(x', 0) \text{ p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- *Caso 2:* Si  $\sigma_2 \in (0, +\infty)$  ( $\Rightarrow \varepsilon \gg \varepsilon d_\varepsilon \approx \frac{1}{\sigma_2} p_\varepsilon$ ),

$$E = \left\{ (\hat{u}^1, \hat{u}^2) : \hat{u}^i \in L^p(G; W_{\#}^{1,p}(J^i)) \times L^p(G \times J^i; W^{1,p}(S^i)), \forall i \in \{1, 2\}, \right. \\ \left. \hat{u}_1^1(x', 0) = \hat{u}_1^2(x', 0) \text{ p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- *Caso 3:* Si  $\sigma_2 = +\infty$  y  $\sigma_1 = 0$  ( $\Rightarrow \varepsilon \gg p_\varepsilon \gg \varepsilon d_\varepsilon$ ),

$$E = \left\{ (\hat{u}^1, \hat{u}^2) : \hat{u}^i \in L^p(G; W_{\#}^{1,p}(J^i)) \times L^p(G \times S^l; W^{1,p}(J^l)) \times L^p(G \times J^i; W^{1,p}(J^3)), \right. \\ \left. \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2, \quad \hat{u}_1^1(x', 0) = \hat{u}_1^2(x', 0) \text{ p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- *Caso 4:* Si  $\sigma_1 \in (0, +\infty)$  ( $\Rightarrow \varepsilon \approx \frac{1}{\sigma_1} p_\varepsilon \gg \varepsilon d_\varepsilon$ ),

$$E = \left\{ (\hat{u}^1, \hat{u}^2) : \hat{u}^i \in L^p(G; W^{1,p}(S^l)) \times L^p(G \times S^l; W^{1,p}(J^l)), \hat{u}_1^i \text{ } y_i\text{-periódica}, \right. \\ \left. \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2, \quad \hat{u}_1^1(x', y_3 e_3) = \hat{u}_1^2(x', y_3 e_3) \text{ p.c.t. } (x', y_3) \in \mathbb{R}^2 \times Y \right\}$$

- *Caso 5:* Si  $\sigma_1 = +\infty$  ( $\Rightarrow p_\varepsilon \gg \varepsilon \gg \varepsilon d_\varepsilon$ ),

$$E = \left\{ (\hat{u}^1, \hat{u}^2) : \hat{u}^i \in L^p(G \times J^3; W_{\#}^{1,p}(J^i)) \times L^p(G \times S^l; W^{1,p}(J^l)) \times L^p(\mathbb{R}^2; W^{1,p}(J^3)), \right. \\ \left. \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2, \quad \hat{u}_1^1(x', y_3 e_3) = \hat{u}_1^2(x', y_3 e_3) \text{ p.c.t. } (x', y_3) \in \mathbb{R}^2 \times Y, \quad \hat{u}_3^1 = \hat{u}_3^2 \text{ en } L^p(G; W^{1,p}(J^3)) \right\}$$

**Definición 3.2.3** Sean  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ . Para  $\hat{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$  y  $(\hat{u}^1, \hat{u}^2) \in E$ , se define  $D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}^i) \in L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3)^3$  por

$$D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}^i) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_2} \partial_{y_3} \hat{u}_2^i & \text{si } \sigma_2 \in (0, +\infty), \\ \frac{1}{\sigma_1} \partial_{y_3} \hat{u}_1^i & \text{si } \sigma_1 \in (0, +\infty), \\ \partial_{y_3} \hat{u}_3^i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El correspondiente resultado de compacidad viene dado por

**Teorema 3.2.4** Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  satisfaciendo (3.1), y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , por (1.5). Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , aún denotada por  $\varepsilon$ ,  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(G)$  y  $(\hat{u}^1, \hat{u}^2) \in E$ , tales que

$$\hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad (3.14)$$

$$D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3)^3. \quad (3.15)$$

**Demostración.** Consideramos la sucesión  $m_\varepsilon \in W_{\mathcal{P}_2(\Gamma_\varepsilon)}^{1,p}(\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon))$  obtenida al tomar la media de  $u_\varepsilon$  respecto de la variable  $x_3$ , es decir

$$m_\varepsilon(x') = \frac{1}{p_\varepsilon} \int_{p_\varepsilon Y} u_\varepsilon(x' + \tau_3 e_3) d\tau_3, \quad \text{p.c.t. } x' \in \mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.16)$$

Obsérvese que  $\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon)$  y  $\mathcal{P}_2(\Gamma_\varepsilon)$  coinciden respectivamente con los conjuntos  $\Omega_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon$  estudiados en el Capítulo 2 con  $N = 2$ , además gracias a (3.1) se obtiene

$$\frac{1}{|\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon)|} \int_{\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon)} |\nabla_{x'} m_\varepsilon(x')|^p dx' \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Por tanto, se puede aplicar el Teorema 2.1.2, que nos asegura que para la sucesión  $\hat{m}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , asociada a  $m_\varepsilon$  por la definición (1.5) (ya sea mediante los difeomorfismos (2.2) ó (3.13), que en este caso coinciden) existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ ,  $\hat{m}_0 \in W_0^{1,p}(G)$ ,  $\hat{m}_1^i \in L^p(G; W_{\#}^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{m}_2^i \in L^p(G \times J^i; W^{1,p}(J^i))$ ,  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ , tales que  $\hat{m}_1^1(x', 0) = \hat{m}_1^2(x', 0)$  p.c.t.  $x' \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ , y se verifican

$$\begin{aligned} \hat{m}_\varepsilon^i &\longrightarrow \hat{m}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2), \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_{x_i} \hat{m}_0 + \partial_{y_i} \hat{m}_\varepsilon^i &\rightharpoonup \partial_{y_i} \hat{m}_1^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2), \\ \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_l} \hat{m}_\varepsilon^i &\rightharpoonup \partial_{y_l} \hat{m}_2^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

A partir de aquí, para probar el teorema basta estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión  $v_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  definida por

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - m_\varepsilon}{p_\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3.18)$$

que gracias a (3.1) satisface

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon(x)|^p dx \leq \frac{C}{p_\varepsilon^p}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.19)$$

Además, por (3.18) y (3.16) se tiene

$$\int_{p_\varepsilon Y} v_\varepsilon(x' + \tau_3 e_3) d\tau_3 = 0, \quad \text{p.c.t. } x' \in \Omega, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

lo que permite aplicar la desigualdad de Poincaré-Wirtinger para obtener

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |v_\varepsilon(x)|^p dx \leq C p_\varepsilon^p \int_{\Omega_\varepsilon} |\partial_{x_3} v_\varepsilon(x)|^p dx \leq C |\Omega_\varepsilon|, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.20)$$

Introduciendo las sucesiones  $\hat{v}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , asociadas a  $v_\varepsilon$  por (1.5), las desigualdades (3.20) y (3.19) proporcionan

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\hat{v}_\varepsilon^i|^p dy dx' \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (3.21)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \left( \frac{p_\varepsilon^p}{\varepsilon^p} |\partial_{y_i} \hat{v}_\varepsilon^i|^p + \frac{p_\varepsilon^p}{\varepsilon^p d_\varepsilon^p} |\partial_{y_l} \hat{v}_\varepsilon^i|^p + |\partial_{y_3} \hat{v}_\varepsilon^i|^p \right) dy dx' \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2. \quad (3.22)$$

Como primera consecuencia se deduce entonces la existencia de  $\hat{v}_3^i \in L^p(G \times Y^3)$  con  $\partial_{y_3} \hat{v}_3^i \in L^p(G \times Y^3)$  y tal que

$$\hat{v}_\varepsilon^i \rightharpoonup \hat{v}_3^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (3.23)$$

$$\partial_{y_3} \hat{v}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{y_3} \hat{v}_3^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (3.24)$$

Definiendo  $\hat{u}_0 = \hat{m}_0$  y teniendo en cuenta (3.17), (3.18) y (3.23) se deduce

$$\hat{u}_\varepsilon^i = \hat{m}_\varepsilon^i + p_\varepsilon \hat{v}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

lo cual prueba (3.14).

Para demostrar (3.15) distinguimos casos según los posibles valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

- Caso 1:  $\sigma_2 = 0$  ( $\Rightarrow \sigma_1 = 0$ )

De (3.22) y (3.23), se sigue

$$\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow 0, \quad \frac{p_\varepsilon}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_l} \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow 0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2.$$

Basta entonces definir  $\hat{u}_1^i = \hat{m}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i = \hat{m}_2^i$ ,  $\hat{u}_3^i = \hat{v}_3^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , para tener que  $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$  pertenece a  $E$  y, gracias a (3.17) y (3.24), deducir (3.15).

- Caso 2:  $\sigma_2 \in (0, +\infty)$  ( $\Rightarrow \sigma_1 = 0$ )

De (3.22) y (3.23) se deduce que  $\partial_{y_l} \hat{v}_3^i$ ,  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ , también pertenece a  $L^p(G \times Y^3)$  y se tiene

$$\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow 0, \quad \frac{p_\varepsilon}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_l} \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow \sigma_2 \partial_{y_l} \hat{v}_3^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2.$$

Entonces  $\hat{u}_1^i = \hat{m}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i = \hat{m}_2^i + \sigma_2 \hat{v}_3^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , satisfacen el teorema.

- Caso 3:  $\sigma_2 = +\infty$ ,  $\sigma_1 = 0$ .

Esta vez (3.22) y (3.23) dan

$$\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow 0, \quad \partial_{y_l} \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow \partial_{y_l} \hat{v}_3^i = 0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2.$$

En particular  $\hat{v}_3^i$  no depende de  $y_l$  y se encuentra en  $L^2(G \times J^i; H^1(J^3))$ ,  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ .

Sea  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ . Se define  $\hat{z}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\hat{z}_\varepsilon^i(x', y) = \frac{p_\varepsilon}{\varepsilon d_\varepsilon} \left[ \hat{v}_\varepsilon^i(x', y) - \int_Y \hat{v}_\varepsilon^i(x', \tau e_l + y_l') d\tau_l \right], \quad \text{p.c.t. } (x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.25)$$

Gracias a (3.22), la desigualdad de Poincaré-Wirtinger muestra que  $\hat{z}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(G \times S^l; W^{1,p}(J^l))$ , y por consiguiente existe  $\hat{z}_2^i \in L^p(\mathbb{R}^2 \times S^l; W^{1,p}(J^l))$  tal que, al menos para una subsucesión,  $\hat{z}_\varepsilon^i$  converge débilmente a  $\hat{z}_2^i$  en  $L^p(\mathbb{R}^2 \times S^l; W^{1,p}(J^l))$ . En particular

$$\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_l} \hat{v}_\varepsilon^i \rightarrow \partial_{y_l} \hat{z}_2^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3). \quad (3.26)$$

La elección  $\hat{u}_1^i = \hat{m}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i = \hat{m}_2^i + \hat{z}_2^i$ ,  $\hat{u}_3^i = \hat{v}_3^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , concluye la demostración del teorema en este caso.

- Caso 4:  $\sigma_2 = +\infty$ ,  $\sigma_1 \in (0, +\infty)$ .

Por (3.22) y (3.23) se deduce ahora que  $\nabla_{y'} \hat{v}_3^i$  pertenece a  $L^p(G \times Y^3)^2$  y se verifica

$$\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_\varepsilon^i \rightharpoonup \sigma_1 \partial_{y_i} \hat{v}_3^i, \quad \partial_{y_l} \hat{v}_\varepsilon^i \longrightarrow \partial_{y_l} \hat{v}_3^i = 0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2,$$

por tanto,  $\hat{v}_3^i$  pertenece a  $L^p(G; W^{1,p}(S^l))$ ,  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ . Además, de las igualdades

$$\begin{aligned} \hat{v}_\varepsilon^i(x', \frac{1}{2}e_i + \cdot) &= \hat{v}_\varepsilon^i(x' + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + \cdot), \quad \text{en } L^p(S^i), \\ \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|\tau_1| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_\varepsilon^1(x', \tau' + \cdot) d\tau' &= \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|\tau_2| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_\varepsilon^2(x', \tau' + \cdot) d\tau', \quad \text{en } L^p(Y^3), \end{aligned} \quad (3.27)$$

p.c.t.  $x' \in \mathbb{R}^2$ , y todo  $\varepsilon > 0$ , se obtiene, respectivamente, que  $\hat{v}_3^i$  es  $y_i$ -periódica,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $\hat{v}_3^1(x', y_3 e_3) = \hat{v}_3^2(x', y_3 e_3)$  en  $L^p(Y)$ , p.c.t.  $(x', y_3) \in \mathbb{R}^2 \times Y$ .

Definiendo  $\hat{z}_\varepsilon^i$  por (3.25) y razonando como en el caso anterior se deduce la existencia de un subsucesión, que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{z}_2^i \in L^p(G \times S^l; W^{1,p}(J^l))$ ,  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ , tales que se tiene (3.26).

Es fácil comprobar que  $\hat{u}_1^i = \hat{m}_1^i + \sigma_1 \hat{v}_3^i$ ,  $\hat{u}_2^i = \hat{m}_2^i + \hat{z}_2^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , están en las condiciones del teorema.

- Caso 5:  $\sigma_2 = +\infty$ ,  $\sigma_1 = +\infty$ .

Por (3.22) y (3.23),  $\nabla_{y'} \hat{v}_3^i = 0$ , luego  $\hat{v}_3^i$  pertenece a  $L^p(G; W^{1,p}(J^3))$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces, pasando al límite en la igualdad

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_1| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_\varepsilon^1(x', y) dy' = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_2| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_\varepsilon^2(x', y) dy', \quad \text{p.c.t. } (x', y_3) \in G \times Y,$$

se obtiene  $\hat{v}_3^1 = \hat{v}_3^2$ .

Introducimos las sucesiones  $\hat{w}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definidas por

$$\hat{w}_\varepsilon^i(x', y) = \frac{p_\varepsilon}{\varepsilon} \left[ \hat{v}_\varepsilon^i(x', y) - \int_{S^3} \hat{v}_\varepsilon^i(x', \tau' + y_3 e_3) d\tau' \right].$$

De la desigualdad de Poincaré-Wirtinger y (3.22) se sigue que  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(G \times J^3; W^{1,p}(S^3))$ , entonces existe  $\hat{w}^i \in L^p(G \times J^3; W^{1,p}(S^3))$  tal que, para una subsucesión,  $\hat{w}_\varepsilon^i$  converge débilmente a  $\hat{w}_1^i$  en  $L^p(G \times J^3; W^{1,p}(S^3))$ , de donde

$$\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{y_i} \hat{w}_1^i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3).$$



Además, para  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times J^3)$ , gracias a (3.23) y (3.27), se deduce

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \int_Y \int_{S^3} \left( \hat{w}_\varepsilon^i(x', \frac{1}{2}e_i + y') - \hat{w}_\varepsilon^i(x' + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y') \right) dy' \varphi(x', y_3) dy_3 dx' = \\ = -p_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \int_Y \hat{v}_3^i(x', y_3) \partial_{x_i} \varphi(x', y_3) dy_3 dx' + O_\varepsilon = O_\varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba que  $\hat{w}_1^i$  es  $y_i$ -periódica.

Finalmente, se introduce  $\hat{z}_\varepsilon^i$  por (3.25) y razonando como en los casos anteriores se deriva la existencia de  $\hat{z}_2^i \in L^p(G \times S^l; W^{1,p}(J^l))$ ,  $(i, l) \in \mathfrak{P}_2$ , tal que, al menos para una subsucesión, se tiene (3.26).

En este caso  $(\hat{u}^1, \hat{u}^2) \in E$  definido por  $\hat{u}_1^i = \hat{m}_1^i + \hat{w}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i = \hat{m}_2^i + \hat{z}_2^i$ ,  $\hat{u}_3^i = \hat{v}_3^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , satisface el teorema.  $\square$

El siguiente resultado prueba que el Teorema 3.2.4 es óptimo.

**Teorema 3.2.5** Sean  $\hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(G)$ ,  $(\hat{v}^1, \hat{v}^2) \in E$ . Entonces, existe  $v_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  tal que, para  $i \in \{1, 2\}$ , la sucesión  $\hat{v}_\varepsilon^i$  definida por (1.5) satisface

$$\begin{aligned} \hat{v}_\varepsilon^i &\longrightarrow \hat{v}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \\ D_\varepsilon^i \hat{v}_\varepsilon^i &\longrightarrow D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3)^3. \end{aligned}$$

**Demostración.** La demostración de este resultado es similar a la de los Teoremas 2.1.3 y 3.1.3, por lo que nos limitamos aquí a indicar como se define  $v_\varepsilon$  cuando  $\hat{v}_0$  y  $(\hat{v}^1, \hat{v}^2)$  son suficientemente regulares. Para cada  $\varepsilon > 0$ , se toma  $\theta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  satisfaciendo (N.1) (ver Notación), y con ayuda de los cambios de variables  $y_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , dados por (1.4), se define  $v_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$  según el tamaño de los parámetros por

- Caso 1:  $\sigma_2 = 0$

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon|\Omega_\varepsilon^i}(x) &= \hat{v}_0(x') + \varepsilon \hat{v}_1^i(x', y_{\varepsilon,i}^i) + \varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_2^i(x', (y_\varepsilon^i)_3) + p_\varepsilon \hat{v}_3^i(x', y_\varepsilon^i) - \\ &\quad - \varepsilon d_\varepsilon \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \partial_{x_l} \hat{v}_0(x') y_{\varepsilon,l}^i, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2. \end{aligned}$$

- Caso 2:  $\sigma_2 \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon|\Omega_\varepsilon^i}(x) &= \hat{v}_0(x') + \varepsilon \hat{v}_1^i(x', y_{\varepsilon,i}^i) + \varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_2^i(x', y_\varepsilon^i) - \\ &\quad - \varepsilon d_\varepsilon \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \partial_{x_l} \hat{v}_0(x') y_{\varepsilon,l}^i, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2. \end{aligned}$$

- Caso 3:  $\sigma_2 = +\infty$ ,  $\sigma_1 = 0$

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon|\Omega_\varepsilon^i}(x) &= \hat{v}_0(x') + \varepsilon \hat{v}_1^i(x', y_{\varepsilon,i}^i) + \varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_2^i(x', y_\varepsilon^i) + p_\varepsilon \hat{v}_3^i(x', (y_\varepsilon^i)_l) - \\ &\quad - \varepsilon d_\varepsilon \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \partial_{x_l} \hat{v}_0(x') y_{\varepsilon,l}^i, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2. \end{aligned}$$

- Caso 4:  $\sigma_1 \in (0, +\infty)$

$$v_{\varepsilon|\Omega_\varepsilon^i}(x) = \hat{v}_0(x') + \varepsilon \hat{v}_1^i(x', (y_\varepsilon^i)_l) + \varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_2^i(x', y_\varepsilon^i) - \\ - \varepsilon d_\varepsilon \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \partial_{x_l} \hat{v}_0(x') y_{\varepsilon,l}^i, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2.$$

- Caso 5:  $\sigma_1 = +\infty$

$$v_{\varepsilon|\Omega_\varepsilon^i}(x) = \hat{v}_0(x') + \varepsilon \hat{v}_1^i(x', (y_\varepsilon^i)_l) + \varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_2^i(x', y_\varepsilon^i) + p_\varepsilon \hat{v}_3^i(x', y_{\varepsilon,3}^i) - \\ - \varepsilon d_\varepsilon \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \partial_{x_l} \hat{v}_0(x') y_{\varepsilon,l}^i, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2.$$

□

Ya es fácil probar el siguiente resultado de homogeneización.

**Teorema 3.2.6** Para  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  una solución de (1.8) y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , por (1.5). Entonces, existe una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , tal que se tienen (3.14) y (3.15), donde  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(G)$ ,  $(\hat{u}^1, \hat{u}^2) \in E$ , son solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \int_G \int_{Y^3} (a^i(x, y, \hat{u}_0^i, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}^i)) - H^i) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}^i) dy dx = \sum_{i=1}^2 \int_G \int_{Y^3} F^i \hat{v}_0 dy dx, \\ \forall \hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(G), \forall (\hat{v}^1, \hat{v}^2) \in E. \end{array} \right.$$

Además, si se define  $g_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \times p_\varepsilon Y \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g_\varepsilon(\cdot) = \frac{1}{|\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))|} \int_{\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))} \hat{u}_0(\rho') d\rho',$$

entonces la correspondiente subsucesión satisface (2.22).

Si  $a^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , satisfacen la condición adicional de monotonía (1.22) también se tiene

$$D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i \rightarrow D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}^i) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^3)^3, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

y  $G_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times p_\varepsilon Y \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definidas por

$$G_\varepsilon^i(\cdot) = \frac{1}{|\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))|} \int_{\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))} D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}^i)(\rho', y_\varepsilon^i(\cdot)) d\rho',$$

satisfacen (2.25).

### 3.3 Un problema de evolución

En esta sección vamos a mostrar como el método propuesto en la presente memoria permite tratar problemas parabólicos. Para simplificar la exposición, consideramos nuevamente la estructura reticulada modelo, esto es, en el marco del Capítulo 1, tomamos  $V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , dados por (2.1). Entonces nos planteamos la homogeneización del problema parabólico

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \operatorname{div}(a_\varepsilon(t, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - H_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{en } (0, T) \times \Omega_\varepsilon, \\ a_\varepsilon(t, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\nu_\varepsilon = H_\varepsilon\nu_\varepsilon & \text{sobre } (0, T) \times (\partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma_\varepsilon, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 & \text{en } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.28)$$

donde  $u_\varepsilon^0$ ,  $F_\varepsilon$ ,  $H_\varepsilon$  pertenecen respectivamente a  $L^2(\Omega_\varepsilon)$ ,  $L^{p'}((0, T) \times \Omega_\varepsilon)$ ,  $L^{p'}((0, T) \times \Omega_\varepsilon)^N$ , y  $a_\varepsilon : (0, T) \times \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función de Carathéodory que define un operador pseudo-monótono con crecimiento de orden  $p$  en el gradiente, con  $p > 1$ . Más concretamente, se supone que existen  $\alpha, \beta > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  con  $\sigma p' < \max\{2, p\}$ , y  $q_\varepsilon \in L^{p'}((0, T) \times \Omega_\varepsilon)$  tales que, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$  y p.c.t.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega_\varepsilon$ ,  $a_\varepsilon$  satisface

$$a_\varepsilon(t, x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^p,$$

$$|a_\varepsilon(t, x, s, \xi)| \leq q_\varepsilon(t, x) + \beta(|\xi|^{p-1} + |s|^\sigma),$$

$$(a_\varepsilon(t, x, s, \xi) - a_\varepsilon(t, x, s, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0.$$

Bajo las condiciones precedentes se sabe que el problema (3.28) admite solución  $u_\varepsilon$  en  $L^p(0, T; W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon) \cap L^2(\Omega_\varepsilon))$  (ver por ejemplo [45]). Además, ésta satisface

$$\partial_t u_\varepsilon = \operatorname{div}(a_\varepsilon(t, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - H_\varepsilon) + F_\varepsilon \in L^{p'}(0, T; (W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))'),$$

y por tanto  $u_\varepsilon$  pertenece a  $C^0([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$ .

De manera análoga a como se hizo para el problema estacionario (1.8), se admite que se satisfacen las condiciones

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |H_\varepsilon(t, x)|^{p'} dx dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |F_\varepsilon(t, x)|^{p'} dx dt = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |q_\varepsilon(t, x)|^{p'} dx dt = 0.$$

Sobre  $(0, T) \times (\Omega_\varepsilon \setminus \omega_\varepsilon)$ , se supone que existen  $F^i : (0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H^i : (0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $a^i : (0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $r^i, g^i$  en  $L^{p'}((0, T) \times Y^N)$  y  $l^i$  en  $C^0([0, +\infty))$  con  $l^i(0) = 0$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que para todo  $x, z \in \mathbb{R}^N$ , todo  $s \in \mathbb{R}$ , todo  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq \eta$ , y p.c.t.  $(t, y) \in (0, T) \times Y^N$  se tienen

$$H^i(t, \cdot, y), F^i(t, \cdot, y) \text{ son continuas en } \mathbb{R}^N,$$

$$H^i(\cdot, x, \cdot), F^i(\cdot, x, \cdot) \text{ son medibles en } (0, T) \times Y^N,$$

$$|H^i(t, x, y)| + |F^i(t, x, y)| \leq g^i(t, y),$$

$$a^i(t, \cdot, y, \cdot, \cdot) \text{ es continua en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

$$a^i(\cdot, x, \cdot, s, \xi) \text{ es medible en } (0, T) \times Y^N,$$

$$a^i(t, x, y, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p,$$

$$(a^i(t, x, y, s, \xi) - a^i(t, x, y, s, \eta)) (\xi - \eta) \geq 0, \quad (3.29)$$

$$|a^i(t, x, y, s, \xi)| \leq g^i(t, y) + \beta (|\xi|^{p-1} + |s|^\sigma),$$

$$|a^i(t, x, y, s, \xi) - a^i(t, z, y, s, \xi)| \leq l^i(|x - z|) (r^i(t, y) + |\xi|^{p-1} + |s|^\sigma),$$

y se satisfacen las igualdades

$$a_\varepsilon(t, x, s, \xi) = a^i(t, x, y_\varepsilon^i(x), s, \xi), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

$$H_\varepsilon(t, x) = H^i(t, x, y_\varepsilon^i(x)), \quad F_\varepsilon(t, x) = F^i(t, x, y_\varepsilon^i(x)),$$

p.c.t.  $(t, x) \in (0, T) \times (\Omega_\varepsilon^i \setminus \omega_\varepsilon)$ .

Respecto de los datos iniciales, suponemos que se satisface

$$\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^0(x)|^2 dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.30)$$

Vamos a ver que la generalización de nuestro método para la resolución de (3.28) es inmediata. Para ello consideramos los difeomorfismos  $\hat{y}_\varepsilon^i : V_\varepsilon^{i,0} \rightarrow Y^N$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , dados por (2.2), y entonces se definen los correspondientes cambios de variables y los operadores asociados mediante

**Definición 3.3.1** Sea  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

(a) Dada una sucesión de funciones medibles  $u_\varepsilon : (0, T) \times V_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  se define  $\hat{u}_\varepsilon^i : (0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\hat{u}_\varepsilon^i(t, x, y) = u_\varepsilon(t, \varepsilon \kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.31)$$

(b) Dada  $\hat{v} \in L^p((0, T) \times \mathbb{R}^N; W^{1,p}(Y^N))$ , se define  $D_\varepsilon^i \hat{v} \in L^p((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N)^N$  por

$$D_\varepsilon^i \hat{v} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{u}_\varepsilon^i e_i + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \partial_{y_j} \hat{u}_\varepsilon^i e_j, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(c) Dadas  $\hat{u}_0 \in L^p((0, T); W_0^{1,p}(\Omega))$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p((0, T) \times \Omega; W_\#^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p((0, T) \times \Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ , se define  $D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \in L^p((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N)^N$  por

$$D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) = (\partial_{x_i} \hat{u}_0^i + \partial_{y_i} \hat{u}_1^i) e_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \partial_{y_j} \hat{u}_2^i e_j.$$

La sucesión de medias definida a continuación será utilizada para caracterizar el término asociado a la macroestructura.

**Definición 3.3.2** Dada una sucesión  $u_\varepsilon$  en  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$ , se define  $\bar{u}_\varepsilon : (0, T) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\bar{u}_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{|P_\varepsilon(x)|} \int_{P_\varepsilon(x)} u_\varepsilon(t, z) dz, \quad p.c.t (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N. \quad (3.32)$$

El siguiente resultado de compacidad sustituye al Teorema 2.1.2 en el estudio del problema parabólico (3.28).

**Teorema 3.3.3**

a) Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $L^p(0, T; W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))$  que satisface

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \|u_\varepsilon\|_{L^p(0, T; W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))}^p \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3.33)$$

y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (3.31). Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , aún denotada por  $\varepsilon$ ,  $\hat{u}_0 \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p((0, T) \times \Omega; W_\#^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p((0, T) \times$

$\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que  $\hat{u}_1^i(t, x, 0) = \hat{u}_1^j(t, x, 0)$  p.c.t.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , y verifican

$$\hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (3.34)$$

$$D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \quad \text{en } L^p((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N)^N. \quad (3.35)$$

b) Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $L^p(0, T; W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon) \cap L^2(\Omega_\varepsilon))$  que satisface (3.33) y tal que  $\partial_t u_\varepsilon$  pertenece a  $L^{p'}(0, T; (W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))')$  y verifica

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^{p'}(0, T; (W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))')}^{p'} \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.36)$$

Definamos  $\bar{u}_\varepsilon$  por (3.32). Entonces en la subsucesión del apartado a) la función  $\hat{u}_0$  pertenece a  $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega))$ ,  $\partial_t \hat{u}_0$  pertenece a  $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$  y se tiene

$$\hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^q((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall q \in [1, \max\{2, p\}], \quad (3.37)$$

$$\bar{u}_\varepsilon(t, \cdot) \rightharpoonup \hat{u}_0(t, \cdot) \quad \text{en } L^2(\Omega), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.38)$$

**Demostración.** La demostración de a) es simplemente repetir la del Teorema 2.1.2, considerando la variable  $t$  como un parámetro.

Comenzamos la demostración de b) justificando (3.37). Se denota  $\hat{p} = \max\{2, p\}$ . Por las hipótesis sobre  $u_\varepsilon$  se sabe que  $u_\varepsilon \in C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$  y satisface

$$\frac{1}{2d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx = \frac{1}{2d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(0, x)|^2 dx + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^t \langle \partial_t u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle dt \leq C,$$

para todo  $t \in [0, T]$  y todo  $\varepsilon > 0$ , lo que gracias a (3.30), (3.33) y (3.36) fácilmente conduce a las acotaciones

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} |\hat{u}_\varepsilon^i(t, x, y)|^2 dy dx \leq C, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_\varepsilon(t, x)|^2 dx \leq C, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3.39)$$

y todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Por otra parte, los mismos argumentos empleados en la demostración del Teorema 2.1.2 para estudiar la sucesión  $\hat{w}_\varepsilon^i$  definida por (2.8) y en el Lema 6.0.3 para  $\bar{u}_\varepsilon$ , llevan a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} |\hat{u}_\varepsilon^i(t, x, y) - \bar{u}_\varepsilon(t, x)|^p dy dx dt \leq C\varepsilon^p, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.40)$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} |\bar{u}_\varepsilon(t, x + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon(t, x)|^p dy dx dt \leq C\varepsilon^p, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.41)$$

Por (3.33) y (3.39),  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , y  $\bar{u}_\varepsilon$  están acotadas en  $L^{\hat{p}}((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N)$  y  $L^{\hat{p}}((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ , respectivamente. Entonces, para obtener (3.37), basta probar que  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , convergen fuertemente a  $\hat{u}_0$  en  $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N)$ , y para ello, gracias a (3.40), es suficiente demostrar que  $\bar{u}_\varepsilon$  es una sucesión relativamente compacta en  $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  (téngase en cuenta que al ser  $\Omega$  acotado existe  $R > 0$  tal que  $\bar{u}_\varepsilon(t, x) = \hat{u}_\varepsilon^i(t, x, y) = 0$  p.c.t.  $(t, x, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N$ , con  $|x| > R$ ). Por (3.39) y (3.41), para conseguir esto último basta probar que para todo  $\delta > 0$  se satisface

$$\int_0^{T-\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_\varepsilon(t+h, x) - \bar{u}_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt \leq \vartheta(h), \quad \forall h \in (0, \delta), \quad (3.42)$$

con  $\vartheta$  una función de  $h$  que converge a cero cuando  $h$  tiende a cero.

Teniendo en cuenta que  $\bar{u}_\varepsilon(t, x)$  es independiente de  $x$  en  $(0, T) \times C_\varepsilon^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^N$ , se obtiene

$$\int_0^{T-\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_\varepsilon(t+h, x) - \bar{u}_\varepsilon(t, x)|^2 dx dt \leq \frac{C}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^{T-\delta} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(t+h, z) - u_\varepsilon(t, z)|^2 dz dt. \quad (3.43)$$

Ahora bien, integrando entre 0 y  $T - \delta$  la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(t+h, x) - u_\varepsilon(t, x)|^2 dx &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^h \langle \partial_t u_\varepsilon(t+s), u_\varepsilon(t+s) - u_\varepsilon(t) \rangle ds \leq \\ &\leq \frac{C}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^h \|\partial_t u_\varepsilon(t+s)\|_{(W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))'}^{p'} ds + \frac{C}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^h \|u_\varepsilon(t+s)\|_{W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)}^p ds, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (3.33) y (3.36), se llega a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^{T-\delta} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(t+h, z) - u_\varepsilon(t, z)|^2 dz dt \leq \\ &\leq C \int_0^h \left( \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^T \|\partial_t u_\varepsilon\|_{(W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))'}^{p'} dt \right) ds + C \int_0^h \left( \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^T \|u_\varepsilon\|_{W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)}^p ds \right) ds \leq Ch, \end{aligned}$$

lo que, por (3.43), demuestra (3.42).

Vamos a probar a continuación que  $\partial_t \hat{u}_0$  pertenece a  $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ , para ello sea  $w \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)$ . De (3.36) se obtiene la estimación

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \left| \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, w \rangle dt \right| &\leq \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^{p'}(0,T;(W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))')} \|w\|_{L^p(0,T;W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon))} \leq \\ &\leq C \|w\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por otra parte, gracias a la regularidad de  $w$ , también se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, w \rangle dt &= -\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(t, x) \partial_t w(t, x) dx dt = \\ &= -N \int_0^T \int_\Omega \bar{u}_\varepsilon(t, x) \partial_t w(t, x) dx dt + O_\varepsilon = -N \int_0^T \int_\Omega \hat{u}_0(t, x) \partial_t w(t, x) dx dt + O_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Se ha probado por tanto

$$\left| \int_0^T \int_\Omega \hat{u}_0(t, x) \partial_t w(t, x) dx dt \right| \leq C \|w\|_{L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))}, \quad \forall w \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

lo que prueba que  $\partial_t \hat{u}_0$  pertenece a  $L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega))$ . Además, de (3.45) se obtiene

$$\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon(t), w \rangle dt = N \int_0^T \langle \partial_t \hat{u}_0(t), w \rangle dt + O_\varepsilon, \quad \forall w \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega). \quad (3.46)$$

Para probar (3.38), sean ahora  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi \in C^\infty([0, T])$ , y para  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , consideramos una sucesión  $\varphi_n \in C_0^\infty([t_1, t_2])$  que converja a  $\varphi$  en  $L^p(t_1, t_2)$ . Usando (3.46) con  $w = v\varphi_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle \varphi(t) dt &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle (\varphi(t) - \varphi_n(t)) dt + \\ + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle \varphi_n(t) dt &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle (\varphi(t) - \varphi_n(t)) dt + \\ &+ N \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t \hat{u}_0, v \rangle \varphi_n(t) dt + O_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Teniendo entonces en cuenta que, gracias a (3.36), se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle (\varphi(t) - \varphi_n(t)) dt \right| = 0,$$

se deduce entonces de (3.47)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle \varphi(t) dt &= N \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t \hat{u}_0, v \rangle \varphi(t) dt = \\ &= -N \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \hat{u}_0(t, x) v(x) \varphi'(t) dt + N \int_\Omega [\hat{u}_0(t_2, x) \varphi(t_2) - \hat{u}_0(t_1, x) \varphi(t_1)] v(x) dx. \end{aligned} \quad (3.48)$$

También se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle \varphi(t) dt &= -\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(t, x) v(x) \varphi'(t) dx dt + \\ + \int_{\Omega_\varepsilon} [u_\varepsilon(t_2, x) \varphi(t_2) - u_\varepsilon(t_1, x) \varphi(t_1)] v(x) dx &= -N \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \hat{u}_0(t, x) v(x) \varphi'(t) dx dt + \\ &+ N \int_\Omega [\bar{u}_\varepsilon(t_2, x) \varphi(t_2) - \bar{u}_\varepsilon(t_1, x) \varphi(t_1)] v(x) dx + O_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.49)$$



De (3.48), (3.49) y la arbitrariedad de  $\varphi$ ,  $t_1$  y  $t_2$ , se sigue entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \bar{u}_{\varepsilon}(t, x)v(x)dx = \int_{\Omega} \hat{u}_0(t, x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad \forall t \in [0, T],$$

lo que junto con (3.39) prueba (3.38).  $\square$

Tenemos el siguiente resultado de homogeneización.

**Teorema 3.3.4** *Para  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_{\varepsilon} \in L^p(0, T; W_{\Gamma_{\varepsilon}}^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega_{\varepsilon}))$  una solución de (3.28) y definamos  $\hat{u}_{\varepsilon}^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (3.31) y  $\bar{u}_{\varepsilon}$  por (3.32). Supongamos que existe  $u^0 \in L^2(\Omega)$  tal que*

$$\bar{u}_{\varepsilon}(0, \cdot) \rightharpoonup u^0 \quad \text{en } L^2(\Omega), \quad (3.50)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_{\varepsilon}|} \|u_{\varepsilon}(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon})}^2 = \|u^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.51)$$

Entonces, existe una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se continua denotando por  $\varepsilon$ , y existen  $\hat{u}_0 \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega))$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p((0, T) \times \Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p((0, T) \times \Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , con  $\hat{u}_1^i(t, x, 0) = \hat{u}_2^j(t, x, 0)$  p.c.t.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} N \langle \partial_t \hat{u}_0(t), \hat{v}_0 \rangle + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} a^i(t, x, y, \hat{u}_0^i, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dy dx = \\ = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} F^i \hat{v}_0 dy dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_{Y^N} H^i D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dy dx, \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T), \\ \forall \hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(J^i)), \hat{v}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i)), i \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{con } \hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_2^j(x, 0) \text{ p.c.t. } x \in \Omega, \text{ para } i, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \hat{u}_0(0) = u^0 \quad \text{en } L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (3.52)$$

tales que se tienen (3.34), (3.35), (3.37), (3.38) y

$$\bar{u}_{\varepsilon}(t, \cdot) \longrightarrow \hat{u}_0(t, \cdot) \quad \text{en } L^2(\Omega), \quad \forall t \in (0, T]. \quad (3.53)$$

Además, definiendo  $g_{\varepsilon} \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)$  por

$$g_{\varepsilon}(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_{\varepsilon}(x)} \hat{u}_0(t, \rho) d\rho, \quad \text{p.c.t. } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N, \quad (3.54)$$

la correspondiente subsucesión satisface

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(t, x) - g_\varepsilon(t, x)|^q dx dt \longrightarrow 0, \quad \forall q \in [1, \max\{2, p\}]. \quad (3.55)$$

**Observación 3.3.5** En la homogeneización de ecuaciones de evolución, los resultados de corrector requieren en general la convergencia fuerte de los datos iniciales (ver por ejemplo [8]). Las relaciones (3.50) y (3.51) son en nuestra situación el equivalente a dicha condición.

**Demostración del Teorema 3.3.4.** La sucesión  $u_\varepsilon$  se encuentra bajo las hipótesis del apartado b) del Teorema 3.3.3, por tanto, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , aún denotada por  $\varepsilon$ ,  $\hat{u}_0 \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega))$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p((0, T) \times \Omega; W_\#^{1,p}(J^i))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p((0, T) \times \Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i))$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que  $\partial_t \hat{u}_0 \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ ,  $\hat{u}_1^i(t, x, 0) = \hat{u}_1^j(t, x, 0)$  p.c.t.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , y se verifican (3.34), (3.35), (3.37) y (3.38). En particular, (3.38) para  $t = 0$  muestra que  $\hat{u}_0(0) = u^0$ .

Usando el Teorema 2.1.3, un razonamiento similar al de la demostración del Teorema 2.3.1 conduce a la existencia de  $\sigma_0^i \in L^{p'}((0, T) \times \Omega \times Y^N)^N$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que para una subsucesión

$$a^i(t, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) \rightharpoonup \sigma_0^i \quad \text{en } L^{p'}((0, T) \times \Omega \times Y^N)^N, \quad (3.56)$$

y se satisface la relación

$$\left\{ \begin{array}{l} N \langle \partial_t \hat{u}_0(t), \hat{v}_0 \rangle + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_{Y^N} \sigma_0^i D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dy dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_{Y^N} F^i \hat{v}_0 dx + \\ \quad + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \int_{Y^N} H^i D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) dy dx \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T), \\ \forall \hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(J^i)), \hat{v}_2^i \in L^p(\Omega \times J^i; W^{1,p}(S^i)), i \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{con } \hat{v}_1^i(x, 0) = \hat{v}_1^j(x, 0) \text{ p.c.t. } x \in \Omega, \text{ para } i, j \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (3.29) se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(s, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) (D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) dy dx ds \geq \\ & \geq \int_0^t \int_\Omega \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(s, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) (D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) dy dx ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Pasando al límite en esta expresión usando (3.35) y (3.56), se obtiene

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(s, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i dy dx ds \geq \int_0^t \int_{\Omega} \int_{Y^N} \sigma_0^i D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) dy dx ds, \quad (3.58)$$

para todo  $t \in [0, T]$  y todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Por otra parte, (3.38) proporciona

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|\hat{u}_0(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.59)$$

Para cada  $t \in (0, T]$ , tomando  $\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} u_\varepsilon$  como función test en (3.28), y  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , como funciones test en (3.57), se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{N}{2} \left( \|\bar{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\bar{u}_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} a_\varepsilon(s, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx ds + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(s, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i dy dx ds + O_\varepsilon \leq \\ & \leq \frac{1}{2d_\varepsilon^{N-1}} \left( \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 - \|u_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} a_\varepsilon(s, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx ds = \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} [F_\varepsilon u_\varepsilon + H_\varepsilon \nabla u_\varepsilon] dx ds = \\ & = \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Omega} \int_{Y^N} [F^i \hat{u}_0 + H^i D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)] dy dx ds + O_\varepsilon = \\ & = \frac{N}{2} \left( \|\hat{u}_0(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\hat{u}_0(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Omega} \int_{Y^N} \sigma_0^i D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) dy dx ds + O_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.60)$$

De aquí, por (3.51), (3.58) y (3.59), se deduce

$$\|\bar{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\hat{u}_0(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + O_\varepsilon, \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} a_\varepsilon(s, x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx ds = O_\varepsilon,$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} a^i(s, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i dy dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} \int_{Y^N} \sigma_0^i D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) dy dx ds + O_\varepsilon,$$

para todo  $t \in (0, T]$ .

Con ayuda de la última igualdad es fácil aplicar el truco de Minty para identificar  $\sigma_0^i$ . Sean  $\tau > 0$  y  $\zeta^i \in L^p(\Omega \times Y^N)^N, i \in \{1, \dots, N\}$ . Denotando  $g^i = D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) + \tau \zeta^i$ ,

gracias a la propiedad de monotonía (3.29) se tiene

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \int_{|y_i| > \frac{d_\varepsilon}{2}} (a^i(t, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i) - a^i(t, x, y, \hat{u}_\varepsilon^i, g^i)) (D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i - g^i) dy dx \geq 0.$$

Pasando al límite en  $\varepsilon$  en esta relación se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \int_{Y^N} (a^i(t, x, y, \hat{u}_0, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) + \tau \zeta^i) - \sigma_0^i) \tau \zeta^i dy dx \geq 0,$$

$$\forall \zeta^i \in L^p(\Omega \times Y^N)^N, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Dividiendo por  $\tau$  y pasando a continuación al límite cuando  $\tau$  tiende a cero, se llega a

$$\sigma_0^i(t, x, y) = a^i(t, x, y, \hat{u}_0, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

lo que equivale, por (3.57), a probar que  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , es solución de (3.52).

De (3.38) y (3.61) se obtiene (3.53). Finalmente, una simple aplicación de la desigualdad de Hölder permite demostrar (3.55) a partir de (3.37).  $\square$

Como en las secciones precedentes, para obtener un corrector para  $\nabla u_\varepsilon$  tenemos que suponer que los operadores  $a^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , satisfacen la condición adicional de monotonía

$$(a^i(t, x, y, s, \xi_1) - a^i(t, x, y, s, \xi_2)) (\xi_1 - \xi_2) \geq \begin{cases} \alpha \frac{|\xi_1 - \xi_2|^2}{(|\xi_1| + |\xi_2|)^{2-p}} & \text{si } 1 < p < 2, \\ \alpha |\xi_1 - \xi_2|^p & \text{si } p \geq 2, \end{cases} \quad (3.62)$$

para todo  $(x, s, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , p.c.t.  $(t, y) \in (0, T) \times Y^N$ . Nos limitamos a enunciar (la demostración es inmediata) tal resultado de homogeneización.

**Teorema 3.3.6** *Bajo las condiciones del Teorema 3.3.4, si además los operadores  $a^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , satisfacen (3.62), entonces la subsucesión y la solución  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , de (3.52) dadas por el Teorema 3.3.4 también satisfacen*

$$\hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (3.63)$$

$$D_\varepsilon^i \hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i) \quad \text{en } L^p((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y^N)^N. \quad (3.64)$$

Además para dicha subsucesión se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \left[ \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - g_\varepsilon|^p dxdt + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon - G_\varepsilon^i|^p dxdt \right] = 0, \quad (3.65)$$

donde  $g_\varepsilon$  está definido por (3.54) y  $G_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , vienen dadas por

$$G_\varepsilon^i(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(x)} D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2)(t, \rho, y_\varepsilon^i(x)) d\rho \quad \text{p.c.t. } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N.$$

### 3.4 Extensión a estructuras generales

Aunque pensamos que el interés del método propuesto en la presente memoria consiste principalmente en que permite un fácil análisis de estructuras reticuladas particulares, mostramos en esta sección como se pueden obtener resultados de cierta generalidad aplicables a un número suficientemente elevado de estructuras. De esta forma vamos a considerar la homogeneización de estructuras reticuladas en dimensión dos que análogamente a la considerada en el Capítulo 2 están formadas por barras de anchura  $\varepsilon d_\varepsilon$  dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$ , pero las cuales pueden ser curvas y cuyo número y disposición es arbitrario. Comenzamos con algunas notaciones.

Sea  $\Theta \subset \mathbb{R}^2$  abierto tal que  $\bar{Y}^2 \subset \Theta$  y  $\Phi^1, \dots, \Phi^m : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^2$   $C^1$ -difeomorfismos (sobre sus imágenes) de inversas respectivas  $\Psi^1, \dots, \Psi^m$ , tales que para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$  se tiene

$$C^i = \{\Phi^i(y_1, 0) : y_1 \in \bar{Y}\} \subset \bar{Y}^2.$$

Definimos entonces las estructuras reticuladas  $V_\varepsilon$  mediante

$$V_\varepsilon^{i,k} = \varepsilon k + \varepsilon \{\Phi^i(y_1, d_\varepsilon y_2) : y \in \bar{Y}^2\}, \quad V_\varepsilon^i = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} V_\varepsilon^{i,k}, \quad V_\varepsilon = \text{int} \left( \bigcup_{i=1}^m V_\varepsilon^i \right).$$

Imponemos las siguientes hipótesis:

i)

$$\text{card}(C^i \cap C^j), \quad \text{card}(C^i \cap \partial Y^2) < +\infty, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad i \neq j.$$

ii) El conjunto  $\bigcup_{i=1}^m C^i \subset \bar{Y}^2$  es conexo.

- iii) Sean  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \in \{-1, 0, 1\}^2$ ,  $t, s \in \partial Y$  tales que  $(i - j, k) \neq (0, 0)$ ,  $\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + k$ . Entonces, o bien los vectores  $\partial_2 \Phi^i(t, 0), \partial_2 \Phi^j(s, 0)$  no son paralelos, o si lo son existen  $r \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\sigma \in \{-1, 1\}$  tales que  $\Psi_1^j(\Phi^i(t, y_2) - k) \in \bar{Y}$  si  $0 \leq \sigma y_2 < r$ .
- iv) Existen  $t, s, \tilde{t}, \tilde{s} \in \bar{Y}^2$ ,  $i, j, \tilde{i}, \tilde{j} \in \{1, \dots, m\}$ , tales que

$$\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + e_1, \quad \Phi^{\tilde{i}}(\tilde{t}, 0) = \Phi^{\tilde{j}}(\tilde{s}, 0) + e_2.$$

**Observación 3.4.1** La condición iii) descarta que los contactos entre las barras sean como en la Figura 3.1. En esa situación no hay una desigualdad de tipo Poincaré que nos permita relacionar los valores de una función en una barra con los valores en la otra.

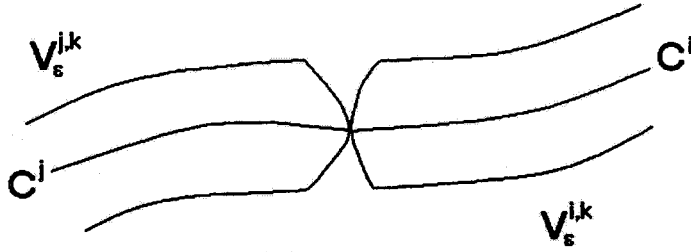


Figura 3.1

En el marco que estamos estableciendo en esta sección no se verifica que, para  $\epsilon > 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $V_\epsilon^{i,k}$  esté contenido en  $C_\epsilon^k$ , pero se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|V_\epsilon^{i,k} \setminus C_\epsilon^k|}{|V_\epsilon^{i,k}|} = 0.$$

El caso considerado en el Capítulo 2 cuando  $N = 2$  corresponde a tomar  $m = 2$ ,

$$\Phi^1(y) = y, \quad \Phi^2(y) = (y_2, y_1), \quad \forall y \in \bar{Y}^2.$$

Como consecuencia de la hipótesis iii) se tiene

**Lema 3.4.2** Sean  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ ,  $t, s \in \bar{Y}$  tales que  $(i - j, k) \neq (0, 0)$ ,  $\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + k$ . Entonces existen  $r \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\sigma \in \{-1, 1\}$  tales que, o bien  $\Psi_1^j(\Phi^i(t, y_2) - k) \in \bar{Y}$  para todo  $y_2$  tal que  $0 \leq \sigma y_2 < r$ , o bien  $\Psi_1^i(\Phi^j(s, y_2) + k) \in \bar{Y}$  para todo  $y_2$  tal que  $0 \leq \sigma y_2 < r$ .

**Demostración.** El resultado es trivial si  $t$  o  $s$  no pertenece a  $\partial Y$ . Cuando  $t, s$  pertenecen a  $\partial Y$ , gracias a la hipótesis iii), el resultado es también evidente si los vectores  $\partial_2 \Phi^i(t, 0)$ ,  $\partial_2 \Phi^j(s, 0)$  son paralelos. Supongamos por tanto que  $t, s \in \partial Y$  y  $\partial_2 \Phi^i(t, 0)$ ,  $\partial_2 \Phi^j(s, 0)$  no son paralelos. Como el jacobiano de  $\Phi^j$  es no nulo, existen  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ , tales que

$$\partial_2 \Phi^i(t, 0) = \lambda_1 \partial_1 \Phi^j(s, 0) + \lambda_2 \partial_2 \Phi^j(s, 0). \quad (3.66)$$

Por otra parte, usando que  $\Phi^i, \Phi^j$  son difeomorfismos, sabemos que si  $|y_2|$  es suficientemente pequeño existen  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \Theta$  tales que

$$\Phi^i(t, y_2) = \Phi^j(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + k. \quad (3.67)$$

Teniendo en cuenta  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \Psi^j(\Phi^i(t, y_2) - k)$ ,  $(s, 0) = \Psi^j(\Phi^i(t, 0) - k)$ , y  $\Psi^j, \Phi^i$  Lipschitz, se deduce que existe  $L > 0$  tal que

$$|\tilde{y}_1 - s| + |\tilde{y}_2| \leq L|y_2|. \quad (3.68)$$

Sea ahora  $\delta > 0$  a escoger, y consideremos  $\tau \in (0, \frac{1}{L})$  tal que si  $|y_2| \leq \tau$ ,  $|\tilde{y}_1 - s| + |\tilde{y}_2| \leq L\tau$ , entonces

$$\begin{aligned} |\Phi^i(t, y_2) - \Phi^i(t, 0) - \partial_2 \Phi^i(t, 0)y_2| &\leq \delta|y_2| \\ |\Phi^j(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) - \Phi^j(s, 0) - \partial_1 \Phi^j(s, 0)(\tilde{y}_1 - s) - \partial_2 \Phi^j(s, 0)\tilde{y}_2| &\leq \delta(|\tilde{y}_1 - s| + |\tilde{y}_2|). \end{aligned}$$

Gracias a (3.66), (3.67), (3.68) y  $\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + k$ , se deduce de estas dos desigualdades que si  $|y_2| < \tau$  entonces

$$\begin{aligned} &|\partial_1 \Phi^j(s, 0)(\lambda_1 y_2 - \tilde{y}_1 + s) + \partial_2 \Phi^j(s, 0)(\lambda_2 y_2 - \tilde{y}_2)| = \\ &= |\partial_2 \Phi^i(t, 0)y_2 - \partial_1 \Phi^j(s, 0)(\tilde{y}_1 - s) - \partial_2 \Phi^j(s, 0)\tilde{y}_2| \leq \\ &\leq \delta(|y_2| + |\tilde{y}_1 - s| + |\tilde{y}_2|) \leq (L + 1)\delta|y_2|. \end{aligned}$$

Como los vectores  $\partial_1 \Phi^j(s, 0)$ ,  $\partial_2 \Phi^j(s, 0)$  son independientes, existe  $C > 0$  (que no depende de  $\delta$ ) tal que

$$|\lambda_1 y_2 - \tilde{y}_1 + s| \leq C\delta|y_2|$$

y por tanto

$$s + \lambda_1 y_2 - C\delta|y_2| \leq \tilde{y}_1 \leq s + \lambda_1 y_2 + C\delta|y_2|.$$

Definiendo entonces  $\sigma = -\text{signo}(\lambda_1)\text{signo}(s)$ , tomando  $\delta$  tal que  $C\delta < |\lambda_1|$  y teniendo en cuenta  $L\tau < 1$ , deducimos que  $\tilde{y}_1$  pertenece a  $\bar{Y}$ , lo que prueba el resultado.  $\square$

Las funciones  $y_\varepsilon^i : V_\varepsilon^i \rightarrow Y^2$  vienen dadas en este caso por

$$y_\varepsilon^i(x) = \Psi_1^i \left( \frac{x - \varepsilon k}{\varepsilon} \right) e_1 + \frac{1}{d_\varepsilon} \Psi_2^i \left( \frac{x - \varepsilon k}{\varepsilon} \right) e_2, \text{ p.c.t. } x \in V_\varepsilon^{i,k}, \forall k \in \mathbb{Z}^2$$

Dadas  $u_\varepsilon \in W^{1,p}(V_\varepsilon^i)$  las funciones  $\hat{u}_\varepsilon^i, i \in \{1, \dots, m\}$ , correspondientes vienen definidas por

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\Phi^i(y_1, d_\varepsilon y_2)), \text{ p.c.t. } (x, y) \in V_\varepsilon^i \times Y^2. \quad (3.69)$$

Con estas definiciones, se tiene el siguiente teorema de compacidad que como los establecidos en las secciones anteriores nos permite resolver el problema de homogeneización (1.8) en la situación actual.

**Teorema 3.4.3** *Existe una constante  $K > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^p dx \leq K \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p dx, \quad (3.70)$$

para toda  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  y todo  $\varepsilon > 0$ .

Si  $u_\varepsilon$  es una sucesión en  $W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  tal que

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p dx \leq C, \quad (3.71)$$

entonces existen  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W^{1,p}(J^1))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega \times J^1; W^{1,p}(S^1))$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , verificando

$$\hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{u}_0 \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2), \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \nabla \hat{u}_0 \partial_{y_1} \Phi^i(y_1, 0) + \partial_{y_1} \hat{u}_1^i \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2), \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_2} \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{y_2} \hat{u}_2^i \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2). \quad (3.74)$$

Además, si  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $t, s \in \bar{Y}$  son tales que

$$\Phi^i(t, 0) - \Phi^j(s, 0) \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.75)$$

entonces

$$\hat{u}_1^i(x, t) = \hat{u}_1^j(x, s) \text{ p.c.t. } x \in \Omega. \quad (3.76)$$



**Demostración.** Sea  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$  por (3.69). En lo que sigue, denotamos por  $C$  una constante genérica que no depende ni de  $\varepsilon$  ni de  $u_\varepsilon$  que puede variar de una línea a otra.

**Paso 1.** Comenzamos observando que definiendo (nótese que esta definición de  $D_\varepsilon$  no coincide exactamente con la dada en los preliminares)

$$D_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^i = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^i e_1 + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_2} \hat{u}_\varepsilon^i e_2,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon|^p dx &= \frac{1}{d_\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} |\nabla u_\varepsilon|^p dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times Y^2} (|D_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^i \partial_1 \Psi^i|^2 + |D_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^i \partial_2 \Psi^i|^2)^{\frac{p}{2}} J\Phi^i(y_1, d_\varepsilon y_2) dy dx \geq C \int_{\mathbb{R}^2 \times Y^2} |D_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^i|^p dy dx. \end{aligned} \quad (3.77)$$

**Paso 2.** Sean  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ ,  $t, s \in \bar{Y}$  tales que  $(i - j, k) \neq (0, 0)$ ,  $\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + k$ . Por el Lema 3.4.2, podemos suponer que existen  $r \in (0, \frac{1}{2})$  y  $\sigma \in \{-1, 1\}$  tales que si  $0 \leq \sigma z_2 < r$  entonces  $\Psi_1^j(\Phi^i(t, z_2) - k) \in \bar{Y}$ . Vamos a probar que existen  $h_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $C > 0$  tales que se tiene

$$\frac{1}{r} \int_0^r \hat{u}_\varepsilon^i(x, t e_1 + y_2 e_2) dy_2 = \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, s e_1 + y_2 e_2) dy_2 + h_\varepsilon(x), \quad (3.78)$$

p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^2$ , con

$$\|h_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \varepsilon d_\varepsilon^{\frac{p-2}{p}} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.79)$$

Suponemos  $\sigma = 1$ , el caso  $\sigma = -1$  es análogo. Definiendo  $\Upsilon_\varepsilon \in C^1([0, r])^2$  por

$$\Upsilon_\varepsilon(\lambda) = \Psi_1^j(\Phi^i(t, d_\varepsilon \lambda) - k) e_1 + \frac{1}{d_\varepsilon} \Psi_2^j(\Phi^i(t, d_\varepsilon \lambda) - k) e_2, \quad \forall \lambda \in [0, r],$$

y teniendo en cuenta  $\Psi^j$ ,  $\Phi^i$  Lipschitz, junto con  $\Upsilon_\varepsilon(0) = s e_1$ , se tiene

$$|\Upsilon_{\varepsilon,2}(\lambda)| \leq C|\lambda|, \quad \forall \lambda \in [0, r].$$

Podemos por tanto suponer (tomando  $r$  suficientemente pequeño) que  $\Upsilon_\varepsilon$  aplica  $[0, r]$  en  $\bar{Y}^2$ . Además se verifica

$$\Phi^i(t, d_\varepsilon \lambda) = \Phi^j(\Upsilon_{\varepsilon,1}(\lambda), d_\varepsilon \Upsilon_{\varepsilon,2}(\lambda)) + k, \quad \forall \lambda \in [0, r],$$

con lo que la definición de las funciones  $\hat{u}_\varepsilon^i, \hat{u}_\varepsilon^j$  da

$$\int_0^r \hat{u}_\varepsilon^i(x, te_1 + \lambda e_2) d\lambda = \int_0^r \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_\varepsilon(\lambda)) d\lambda. \quad (3.80)$$

Vamos a estimar el segundo miembro de (3.80). Como las funciones  $\Phi^i, \Phi^j$  son isomorfismos, alguno de los vectores  $\nabla \Psi_l^j(\Phi^i(t, 0) - k) \partial_2 \Phi^i(t, 0)$ ,  $l = 1, 2$  es no nulo. Supongamos primero  $\nabla \Psi_2^j(\Phi^i(t, 0) - k) \partial_2 \Phi^i(t, 0) \neq 0$ . En este caso,  $\Upsilon_{\varepsilon, 2}$  es un isomorfismos para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Definiendo

$$I_\varepsilon = \{\tau \in \mathbb{R} : |\tau| < d_\varepsilon, s + \tau \in Y\},$$

se tiene para todo  $\tau \in I_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \int_0^r \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_\varepsilon(\lambda)) d\lambda &= \int_0^r \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, (s + \tau)e_1 + \Upsilon_{\varepsilon, 2}(\lambda)e_2) d\lambda + \\ &+ \int_0^r \int_{s+\tau}^{\Upsilon_{\varepsilon, 1}(\lambda)} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \mu e_1 + \Upsilon_{\varepsilon, 2}(\lambda)e_2) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (3.81)$$

donde gracias a que  $\Upsilon_{\varepsilon, 2}$  es un isomorfismo,  $\Upsilon_{\varepsilon, 2}(0) = 0$ , se puede escribir

$$\begin{aligned} &\int_0^r \int_{s+\tau}^{\Upsilon_{\varepsilon, 1}(\lambda)} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \mu e_1 + \Upsilon_{\varepsilon, 2}(\lambda)e_2) d\mu d\lambda = \\ &= \int_0^{\Upsilon_{\varepsilon, 2}(r)} \int_{s+\tau}^{\Upsilon_{\varepsilon, 1}(\Upsilon_{\varepsilon, 2}^{-1}(\nu))} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \mu e_1 + \nu e_2) J_\varepsilon(\nu) d\mu d\nu, \end{aligned}$$

con

$$J_\varepsilon(\nu) = \frac{1}{\frac{d\Upsilon_{\varepsilon, 2}}{d\lambda}(\Upsilon_{\varepsilon, 2}^{-1}(\nu))} \rightarrow \frac{1}{\nabla \Psi_2^j(\Phi^i(t, 0) - k) \partial_2 \Phi^i(t, 0)} \neq 0 \text{ uniformemente.}$$

Por otra parte,  $\Psi^j, \Phi^i$  Lipschitz,  $|\tau| < d_\varepsilon$ , implica

$$|\Upsilon_{\varepsilon, 1}(\Upsilon_{\varepsilon, 2}^{-1}(\nu)) - s - \tau| = |\Upsilon_{\varepsilon, 1}(\Upsilon_{\varepsilon, 2}^{-1}(\nu)) - \Upsilon_{\varepsilon, 1}(0) - \tau| \leq d_\varepsilon(C|\Upsilon_{\varepsilon, 2}^{-1}(\nu)| + 1) \leq Cd_\varepsilon,$$

con lo que gracias a (3.77) el segundo miembro de (3.81) satisface

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_0^{\Upsilon_{\varepsilon, 2}(r)} \int_{s+\tau}^{\Upsilon_{\varepsilon, 1}(\Upsilon_{\varepsilon, 2}^{-1}(\nu))} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \mu e_1 + \nu e_2) J_\varepsilon(\nu) d\mu d\nu \right|^p dx \leq \\ &\leq Cd_\varepsilon^{p-1} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^2} |\partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \mu e_1 + \nu e_2)|^p d\mu d\nu dx \leq C\varepsilon^p d_\varepsilon^{p-2} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p, \end{aligned}$$

donde la constante  $C$  no depende de  $\tau$ . Integrando entonces en  $\tau \in I_\varepsilon$  la igualdad (3.81) y dividiendo por  $|I_\varepsilon|$ , se tiene

$$\int_0^r \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_\varepsilon(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{|I_\varepsilon|} \int_{I_\varepsilon} \int_0^r \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, (s + \tau)e_1 + \Upsilon_{\varepsilon,2}(\lambda)e_2) d\lambda d\tau + r_\varepsilon^*, \quad (3.82)$$

donde  $\|r_\varepsilon^*\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C\varepsilon d_\varepsilon^{\frac{p-2}{p}} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}$ . Por otra parte, sabemos que para casi todo  $(\tau, \lambda) \in I_\varepsilon \times (0, r)$  se tiene

$$\begin{aligned} & \left| \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, (s + \tau)e_1 + \Upsilon_{\varepsilon,2}(\lambda)e_2) - \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, (s + \tau)e_1 + \nu e_2) d\nu \right|^p \leq \\ & \leq C \int_Y |\partial_{y_2} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, (s + \tau)e_1 + \nu e_2)|^p d\nu. \end{aligned}$$

Usando entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|I_\varepsilon|} \int_{I_\varepsilon} \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, (s + \tau)e_1 + \nu e_2) d\nu d\tau - \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, se_1 + \nu e_2) d\nu \right|^p \leq \\ & \leq C d_\varepsilon^{p-1} \int_{Y^2} |\partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, y)|^p dy, \end{aligned}$$

p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^2$ , se deducen (3.78) y (3.79) a partir de (3.82).

Supongamos ahora que se verifica  $\nabla \Psi_1^j(\Phi(t, 0) - k) \partial_2 \Phi^i(t, 0) \neq 0$  y que por tanto, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño,  $\Upsilon_{\varepsilon,1}$  es un isomorfismo de  $[0, r]$  en su imagen. En este caso, la desigualdad

$$\begin{aligned} & \left| \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_\varepsilon(\lambda)) - \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_{\varepsilon,1}(\lambda)e_1 + \mu e_2) d\mu \right|^p \leq \\ & \leq C \int_Y |\partial_{y_2} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_{\varepsilon,1}(\lambda)e_1 + \mu e_2)|^p d\mu, \end{aligned}$$

p.c.t.  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times (0, r)$  junto con (3.77), prueba la igualdad

$$\int_0^r \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_\varepsilon(\lambda)) d\lambda = \int_0^r \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_{\varepsilon,1}(\lambda)e_1 + \mu e_2) d\mu d\lambda + r_\varepsilon(x),$$

donde  $\|r_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C\varepsilon d_\varepsilon^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}$ .

Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^r \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \Upsilon_{\varepsilon,1}(\lambda)e_1 + \mu e_2) d\mu d\lambda = \\ & = \int_0^r \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, se_1 + \mu e_2) d\mu d\lambda + \int_0^r \int_Y \int_s^{\Upsilon_{\varepsilon,1}(\lambda)} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \nu e_1 + \mu e_2) d\nu d\mu d\lambda, \end{aligned}$$

donde la desigualdad  $|\Upsilon_{\varepsilon,1}(\lambda) - s| \leq Cd_\varepsilon|\lambda|$ , junto con (3.77), implica que la norma en  $L^p(\mathbb{R}^2)$  del segundo término del miembro derecho es menor o igual que  $C\varepsilon d_\varepsilon^{\frac{p-2}{p}} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}$ , y por tanto prueba (3.78) y (3.79).

**Paso 3.** Como en el paso anterior, consideremos  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ ,  $t, s \in \bar{Y}$  tales que  $(i - j, k) \neq (0, 0)$ ,  $\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + k$ . Teniendo en cuenta (3.78), (3.79), las desigualdades

$$\begin{aligned} \left| \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) dy - \frac{1}{r} \int_0^r \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^i(x, te_1 + y_2 e_2) dy_2 \right|^p &\leq C \int_{Y^2} |\nabla_y \hat{u}_\varepsilon^i(x, y)|^p dy, \\ \left| \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, y) dy - \int_Y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, se_1 + y_2 e_2) dy_2 \right|^p &\leq C \int_{Y^2} |\nabla_y \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, y)|^p dy, \end{aligned}$$

p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^2$  y (3.77), se deduce

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) dy - \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, y) dy \right|^p dx \leq C \frac{\varepsilon^p}{d_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p. \quad (3.83)$$

**Paso 4.** Se define  $\bar{u}_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^2)$  por

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) dy. \quad (3.84)$$

Teniendo en cuenta que el conjunto  $\cup_{i=1}^m \mathcal{C}_i$  es conexo (hipótesis ii), se deduce que (3.83) es en realidad cierto para  $k = 0$  e  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  arbitrarios, lo que fácilmente implica la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) dy - \bar{u}_\varepsilon(x) \right|^p dx \leq C \frac{\varepsilon^p}{d_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (3.85)$$

que gracias a la hipótesis iv) y (3.83) implica

$$\|\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \varepsilon e_l) - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}, \quad l = 1, 2. \quad (3.86)$$

Gracias a esta desigualdad se puede aplicar el Lema 6.0.3, y obtener

$$\|\bar{u}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{C}{d_\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)},$$

que junto a (3.85) y la desigualdad de Poincaré Wirtinger

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^2} \left| \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) - \int_{Y^2} \hat{u}_\varepsilon^i(x, \lambda) d\lambda \right|^p dy dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^2 \times Y^2} |\nabla_y u_\varepsilon|^p dx dy \leq \\ &\leq C \frac{\varepsilon^p}{d_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p, \end{aligned} \quad (3.87)$$

implica fácilmente

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^2} |\hat{u}_\varepsilon^i|^p dy dx \leq \frac{C}{d_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p.$$

Usando entonces la desigualdad

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \times Y^2} |\hat{u}_\varepsilon^i|^p dy dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon^2 \int_{Y^2} |u_\varepsilon(\varepsilon k + \varepsilon \Phi^i(y_1, d_\varepsilon y_2))|^p dy = \\ &= \frac{1}{d_\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} |u_\varepsilon|^p J \Psi^i \left( \frac{x - \varepsilon k}{\varepsilon} \right) dx \geq \frac{C}{d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_\varepsilon|^p dx, \end{aligned}$$

se deduce (3.70).

**Paso 5.** Consideramos ahora una sucesión  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$  que verifica (3.71) y definamos  $\bar{u}_\varepsilon$  por (3.84), la cual verifica (3.86). Por el Lema 6.0.3, existen una subsucesión de  $\varepsilon$  que seguimos denotando por  $\varepsilon$  y una función  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tales que

$$\bar{u}_\varepsilon \rightarrow \hat{u}_0 \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \varepsilon e_l) - \bar{u}_\varepsilon}{\varepsilon} \rightharpoonup \partial_{x_l} \hat{u}_0 \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2), \quad l = 1, 2.$$

De (3.85) y (3.87) se obtiene entonces (3.72).

**Paso 6.** Para  $i \in \{1, \dots, m\}$ , se define  $\hat{w}_\varepsilon^i \in L^p(\mathbb{R}^2, W^{1,p}(Y^2))$  por

$$\hat{w}_\varepsilon^i = \frac{\hat{u}_\varepsilon^i - \bar{u}_\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Gracias a (3.87), (3.85) y (3.77),  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^2, W^{1,p}(Y^2))$  y  $\partial_{y_2} \hat{w}_\varepsilon^i$  converge a cero en  $L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2)$ . Por tanto, extrayendo una subsucesión si es necesario, podemos suponer que existe  $\hat{w}^i \in L^p(\mathbb{R}^2, W^{1,p}(J^1))$  tal que

$$w_\varepsilon^i \rightharpoonup \hat{w}^i \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2, W^{1,p}(Y^2)), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Supongamos ahora  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $t, s \in \bar{Y}$  tales que  $\Phi^i(t, 0) - \Phi^j(s, 0) = k \in \mathbb{Z}^2$ . Por el Paso 2, podemos suponer que existe  $r \in (0, \frac{1}{2})$  tal que p.c.t.  $x \in \mathbb{R}^2$ , se tiene

$$\frac{1}{r} \int_0^r \hat{w}_\varepsilon^i(x, te_1 + y_2 e_2) dy_2 - \int_Y \hat{w}_\varepsilon^j(x + \varepsilon k, \tilde{s} e_1 + y_2 e_2) dy_2 = \frac{\bar{u}_\varepsilon(x + \varepsilon k) - \bar{u}_\varepsilon(x)}{\varepsilon} + q_\varepsilon(x),$$

con  $\|q_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = O_\varepsilon$ . Pasando al límite en  $L^p(\mathbb{R}^2)$  débil, de esta igualdad se deduce  $\hat{w}^i(x, t) - \hat{w}^j(x, s) = \nabla \hat{u}_0(x) k$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Tomando entonces

$$\hat{u}_1^i(x, y_1) = \hat{w}^i(x, y_1) - \nabla \hat{u}_0(x) \Phi^i(y_1, 0), \quad \text{p.c.t. } (x, y_1) \in \Omega \times J^1,$$

se obtiene (3.73) y (3.76).

**Paso 7.** Para finalizar basta ahora definir

$$\hat{v}_\varepsilon^i(x, y) = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \left( \hat{u}_\varepsilon^i(x, y) - \int_Y \hat{u}_\varepsilon^i(x, y_1 e_1 + z_2 e_2) dz_2 \right), \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

que por la desigualdad de Poincaré-Wirtinger está acotada el  $L^p(\mathbb{R}^2 \times J^1, W^{1,p}(S^1))$ , y por tanto, extrayendo una subsucesión, admite un límite  $\hat{u}_2^i$  que verifica

$$\frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_2} \hat{u}_\varepsilon^i \rightharpoonup \partial_{y_2} \hat{u}_2^i \text{ en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^2), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

□

Como en los casos anteriores, el resultado que acabamos de probar es óptimo. Esto es justificado por el siguiente teorema, el cual aunque es cierto en general sólo damos para funciones regulares, que es lo que hace falta para la homogeneización de (1.8). Su demostración es muy similar a la del Teorema 2.1.3.

**Teorema 3.4.4** Sean  $\hat{v}_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\hat{v}_1^i \in C_0^\infty(\Omega, C^\infty(\bar{Y}))$ ,  $\hat{v}_2^i \in C_0^\infty(\Omega, C^\infty(\bar{Y}^2))$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Supongamos existe  $\delta > 0$  verificando que para todo  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $t, s \in \bar{Y}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ , tales que  $(i - j, k) \neq (0, 0)$ ,  $\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + k$ , se tiene

$$\hat{v}_1^i(x, y_1) = \hat{v}^j(x, \tilde{y}_1) \quad \hat{v}_2^i(x, y) = \hat{v}_2^j(x, \tilde{y}) = 0,$$

para todo  $(x, y, \tilde{y}) \in \Omega \times Y^2 \times Y^2$ ,  $|y_1 - t| \leq \delta$ ,  $|\tilde{y}_1 - s| \leq \delta$ . En estas condiciones, existe una sucesión  $v_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ , tal que la sucesión  $\hat{v}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  definida por (3.69), verifica

$$\hat{v}_\varepsilon^i \longrightarrow \hat{v}_0 \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2),$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_1} \hat{v}_\varepsilon^i \longrightarrow \nabla \hat{v}_0 \partial_{y_1} \Phi(y_1, 0) + \partial_{y_1} \hat{v}_1^i \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2), \quad (3.88)$$

$$\frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_2} \hat{v}_\varepsilon^i \longrightarrow \partial_{y_2} \hat{v}_2^i \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2). \quad (3.89)$$

**Demostración.** Sean  $\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , como en el enunciado del Teorema 3.4.4.

Para  $i \in \{1, \dots, m\}$ , sea

$$I^i = \{t \in \bar{Y} : \exists j \in \{1, \dots, m\}, s \in \bar{Y}, k \in \mathbb{Z}^2, \text{ con } (i - j, k) \neq (0, 0),$$

$$\Phi^i(t, 0) = \Phi^j(s, 0) + k\}.$$

Para  $\varepsilon > 0$ , consideramos entonces  $\theta_\varepsilon^i \in C^\infty(\bar{Y})$  tal que

$$\theta_\varepsilon^i = 0 \text{ en } \bigcup_{t \in I^i} ((t - d_\varepsilon^{\frac{3}{4}}, t + d_\varepsilon^{\frac{3}{4}}) \cap \bar{Y}), \quad \theta_\varepsilon^i = 1 \text{ en } \bar{Y} \setminus \bigcup_{t \in I^i} (t - d_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, t + d_\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

$$|\theta'| \leq C d_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \text{ en } \bar{Y}.$$

La sucesión  $v_\varepsilon$  definida por

$$v_\varepsilon = \hat{v}_0 + \varepsilon \sum_{i=1}^N [\hat{v}_1^i(\cdot, y_{\varepsilon,1}^i) + d_\varepsilon \hat{v}_2^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \theta_\varepsilon^i(y_{\varepsilon,1}^i) \nabla \hat{v}_0(\Phi^i(y_{\varepsilon,1}^i, d_\varepsilon y_{\varepsilon,2}^i) - \Phi^i(y_{\varepsilon,1}^i, 0))] \chi_{\Omega_\varepsilon^i},$$

verifica la tesis del Teorema 3.4.4. □

Usando los resultados anteriores se prueba como en otros casos el siguiente teorema referente a la homogeneización del problema (1.8).

**Definición 3.4.5** Para  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W^{1,p}(J^1))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega; L^p(J^1; W^{1,p}(S^1)))$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , verificando que si  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $t, s \in \bar{Y}$  son tales que  $\Phi^i(t, 0) - \Phi^j(s, 0) \in \mathbb{Z}^2$ , entonces  $\hat{u}_1^i(x, t) = \hat{u}_1^j(x, s)$ , p.c.t.  $x \in \Omega$ , se define

$$D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)(x, y) =$$

$$= \nabla \Psi_1^i(\Phi^i(y_1, 0)) [\nabla \hat{u}_0(x) \partial_{y_1} \Phi^i(y_1, 0) + \partial_{y_1} \hat{u}_1^i(x, y)] + \nabla \Psi_2^i(\Phi^i(y_1, 0)) \partial_{y_2} \hat{u}_2^i(x, y),$$

p.c.t.  $(x, y) \in \Omega \times Y^2$ , para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

**Teorema 3.4.6** Para  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ , una solución de (1.8) y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , por (3.69). Entonces existen una subsucesión de  $\varepsilon$  que seguimos denotando por  $\varepsilon$ , y existen  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\hat{u}_1^i \in L^p(\Omega; W^{1,p}(J^1))$ ,  $\hat{u}_2^i \in L^p(\Omega; L^p(J^1; W^{1,p}(S^1)))$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , verificando que si  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $t, s \in \bar{Y}$  son tales que  $\Phi^i(t, 0) - \Phi^j(s, 0) \in \mathbb{Z}^2$ , entonces  $\hat{u}_1^i(x, t) = \hat{u}_1^j(x, s)$ , p.c.t.  $x \in \Omega$ , para los cuales se tiene (3.72), (3.73), (3.74) y son solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \int_{Y^2} (a^i(x, y, \hat{u}_0^i, D_0^i(\hat{u}_0, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i)) - H^i) D_0^i(\hat{v}_0, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i) J\Phi^i(y_1, 0) dy dx = \\ \quad = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \int_{Y^2} F^i \hat{v}_0 J\Phi^i(y_1, 0) dy dx, \\ \forall \hat{v}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \hat{v}_1^i \in L^p(\Omega; W^{1,p}(J^1)), \hat{v}_2^i \in L^p(\Omega; L^p(J^1; W^{1,p}(S^1))), \text{ tales que} \\ \text{si } i, j \in \{1, \dots, m\}, t, s \in \bar{Y} \text{ verifican } \Phi^i(t, 0) - \Phi^j(s, 0) \in \mathbb{Z}^2, \\ \text{entonces } \hat{v}_1^i(x, t) = \hat{v}_1^j(x, s), \text{ p.c.t. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Además, si se define  $g_\varepsilon$  por (2.21), entonces la correspondiente subsucesión satisface (2.22).

Si  $a^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , satisface la condición adicional (1.22), también se tienen

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_1} \hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \nabla \hat{u}_0 \partial_{y_1} \Phi(y_1, 0) + \partial_{y_1} \hat{u}_1^i \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2),$$

$$\frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_2 \hat{u}_\varepsilon^i \longrightarrow \partial_{y_2} \hat{u}_2^i \text{ en } L^p(\mathbb{R}^2 \times Y^2),$$

y  $G_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , definidas por (2.24) satisfacen (2.25).



## Capítulo 4

# Homogeneización de estructuras reticuladas elásticas

Los Capítulos 4 y 5 están dedicados al estudio del comportamiento asintótico de las soluciones del sistema de la elasticidad lineal (1.23). El sistema será planteado sobre sucesiones de estructuras reticuladas que ya han sido consideradas en capítulos anteriores al estudiar el problema de difusión (1.8).

En este capítulo consideramos la homogeneización del sistema de la elasticidad sobre la estructura modelo (Figuras 1.2 y 1.4). A diferencia con el problema de difusión, veremos que el comportamiento asintótico de las soluciones depende del tamaño relativo de los parámetros que intervienen. Su estudio se organiza como sigue. En la Sección 4.1 planteamos el problema e introducimos algunas definiciones. Las estimaciones adecuadas para las soluciones de (1.23) son obtenidas en la Sección 4.2. En la Sección 4.3 se demuestra un resultado de compacidad, cuya aplicación en la Sección 4.4 permite la resolución del problema de homogeneización. Concluimos el capítulo analizando en la Sección 4.5 el efecto que tiene reforzar la estructura modelo bidimensional mediante un sistema de vigas oblicuas que la cruzan completamente.

## 4.1 Planteamiento del problema y definiciones

Nuestro objetivo es la homogeneización del problema de elasticidad (1.23), que recordamos viene dado por

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon e(u_\varepsilon) - H_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \quad (A_\varepsilon e(u_\varepsilon))\nu_\varepsilon = H_\varepsilon\nu_\varepsilon & \text{sobre } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon, \end{cases}$$

(ver la Sección 1.3 para las hipótesis sobre los datos), planteado sobre la sucesión de estructuras reticuladas  $N$ -dimensionales,  $N \geq 2$ , consideradas en el Capítulo 2 (estructura modelo). Estas estructuras están formadas por finas barras ortogonales de grosor  $\varepsilon d_\varepsilon$  dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$  a lo largo de todas las direcciones del espacio (ver la Figura 1.2 para el caso bidimensional, la Figura 1.3 destaca algunos detalles de ésta, y la Figura 1.4 para el tridimensional). Más exactamente, nos situamos en el marco del Capítulo 1, con  $m = N$ , y donde para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $V_\varepsilon^i$  viene dado por

$$V_\varepsilon^i = \bigcup_{k'_i \in \mathbb{Z}^N} \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x'_i - \varepsilon k'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2} \right\},$$

e  $\hat{y}_\varepsilon^i : V_\varepsilon^{i,0} \longrightarrow Y^N$  por

$$\hat{y}_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i}{\varepsilon} e_i + \frac{x'_i}{\varepsilon d_\varepsilon}, \quad \forall x \in V_\varepsilon^{i,0}.$$

En este caso, el dominio de la variable macroscópica es  $\mathfrak{R}_n^N = \mathbb{R}^N$  y, para  $u_\varepsilon$  en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$ , la definición (1.5) de  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  da

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = u_\varepsilon\left(\varepsilon\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i\right), \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N. \quad (4.1)$$

Si aplicamos al operador  $e$  el cambio de variables (1.4), definido en esta situación por

$$y_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i - \varepsilon\kappa_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} e_i + \frac{x'_i - \varepsilon\kappa'_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon d_\varepsilon}, \quad \text{p.c.t. } x \in V_\varepsilon^i, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.2)$$

el resultado es el operador  $e_\varepsilon^i$  dado por (1.7), que bajo las condiciones anteriores se escribe

$$\begin{aligned} e_\varepsilon^i(\hat{v})_{ii} &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_i, & 2e_\varepsilon^i(\hat{v})_{im} &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_m + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_m} \hat{v}_i, \quad \forall m \neq i, \\ 2e_\varepsilon^i(\hat{v})_{mn} &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} (\partial_{y_n} \hat{v}_m + \partial_{y_m} \hat{v}_n), & \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las definiciones que siguen serán útiles en próximas secciones.

**Definición 4.1.1** Para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se define el espacio funcional  $E^i$  por  $E^i = E_0^i \times E_1^i \times E_2^i \times E_3^i$ , donde

$$E_0^i = \{ \hat{u}_0^i \in L^2(\Omega) : \partial_{x_i} \hat{u}_0^i \in L^2(\Omega), \hat{u}_0^i \nu_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \},$$

$$E_1^i = \{ \hat{u}_1^i \in L^2(\Omega; H^1(Y^N))^N : \hat{u}_1^i \text{ } y_i\text{-periódica, } \hat{u}_{1,m}^i = 0 \text{ en } L^2(\Omega \times S^i),$$

$$e_y(\hat{u}_1^i)_{in} = e_y(\hat{u}_1^i)_{mn} = 0, \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\},$$

$$E_2^i = \{ \hat{u}_2^i \in L^2(\Omega \times Y^N)^N : \hat{u}_{2,i}^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i)), \hat{u}_{2,m}^i \in L^2(\Omega; H^1(Y^N)),$$

$$\hat{u}_{2,m}^i \text{ } y_i\text{-periódica, } \int_{S^i} \hat{u}_{2,m}^i dy_i' = 0 \text{ en } L^2(\Omega \times J^i),$$

$$e_y(\hat{u}_2^i)_{mn} = 0, \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\},$$

$$E_3^i = \{ \hat{u}_3^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))^N : \hat{u}_{3,i}^i = 0 \}.$$

**Observación 4.1.2** Las expresiones  $\hat{u}_{1,m}^i$ ,  $\hat{u}_{2,m}^i$  y  $\hat{u}_{3,m}^i$  denotan la  $m$ -ésima componente de  $\hat{u}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i$  y  $\hat{u}_3^i$ , respectivamente. Como en los capítulos anteriores, el superíndice  $i$  nos indica que estos espacios funcionales se utilizarán para describir el comportamiento asintótico de las soluciones de (1.23) en  $\Omega_\varepsilon^i$ . Estos convenios se mantendrán en todo lo que sigue.

**Observación 4.1.3** Una función  $\hat{u}_1^i$  pertenece a  $E_1^i$  si y sólo si existen  $a^i \in L^2(\Omega; H_\#^1(J^i))$ ,  $b_m^i \in L^2(\Omega; H_\#^2(J^i))$ ,  $m \neq i$ , con  $b_m^i(x, 0) = 0$  p.c.t.  $x \in \Omega$ , tales que

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{1,i}^i(x, y) &= a^i(x, y_i) - \sum_{n \neq i} \partial_{y_i} b_n^i(x, y_i) y_n, \\ \hat{u}_{1,m}^i(x, y) &= b_m^i(x, y_i), \quad \forall m \neq i, \end{aligned} \right\} \text{ p.c.t. } (x, y) \in \Omega \times Y^N.$$

**Observación 4.1.4** Una función  $\hat{u}_2^i$  pertenece a  $E_2^i$  si y sólo si  $\hat{u}_{2,i}^i$  pertenece a  $L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$  y existen  $g_{mn}^i \in L^2(\Omega; H_\#^1(J^i))$  con  $g_{mn}^i = -g_{nm}^i$ ,  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , tales que

$$\hat{u}_{2,m}^i(x, y) = \sum_{n \neq i} g_{mn}^i(x, y_i) y_n, \quad \forall m \neq i, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \Omega \times Y^N.$$

**Definición 4.1.5** Sea  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Para  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ , se define el tensor  $e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N)$  por

$$\begin{aligned} e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)_{ii} &= \partial_{x_i} \hat{u}_0^i + e_y(\hat{u}_1^i)_{ii}, & e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)_{in} &= e_y(\hat{u}_2^i)_{in}, \\ e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)_{mn} &= e_y(\hat{u}_3^i)_{mn}, & \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Los espacios que definimos ahora serán útiles cuando necesitemos funciones más regulares que los elementos de  $E^i$ . Los resultados que se obtengan para estas funciones serán generalmente ciertos para  $E^i$  razonando por densidad.

**Definición 4.1.6** Sea  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Se define  $\mathcal{E}^i$  como el subespacio de  $E^i$  dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^i &= \left\{ (\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i : \hat{u}_0^i \in C_0^\infty(\Omega), \quad \hat{u}_1^i \in C_0^\infty(\Omega; C^\infty(Y^N))^N, \right. \\ &\quad \hat{u}_{2,i}^i \in C_0^\infty(\Omega \times J^i; C^\infty(S^i)), \quad \hat{u}_{2,m}^i \in C_0^\infty(\Omega; C^\infty(Y^N)), \quad \forall m \neq i, \\ &\quad \left. \hat{u}_3^i \in C_0^\infty(\Omega \times J^i; C^\infty(S^i))^N \text{ y } \exists \delta > 0 \text{ tal que } \hat{u}_1^i = \hat{u}_2^i = \hat{u}_3^i = 0 \text{ si } |y_i| < \frac{\delta}{2} \right\}. \end{aligned}$$

## 4.2 Desigualdades de tipo Korn

Esta sección está dedicada a demostrar ciertas desigualdades de tipo Korn que mejoran las dadas en [30]. Éstas nos proporcionarán estimaciones finas para las soluciones del sistema de la elasticidad lineal (1.23), destacando la dependencia de éstas respecto de los parámetros  $\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$ . Para obtenerlas, usaremos el siguiente lema.

**Lema 4.2.1** Para  $a \in (0, 1/8)$  y  $\varepsilon > 0$ , denotamos

$$L_\varepsilon(a) = \left\{ z \in \varepsilon Y^N : |z'_1|_\infty < \frac{\varepsilon a}{2} \right\},$$

y

$$L_\varepsilon^\lambda(a) = \left\{ z \in L_\varepsilon(a) : |z_1 - \frac{(-1)^\lambda}{2} \varepsilon| < \frac{\varepsilon a}{2} \right\}, \quad \lambda \in \{1, 2\}.$$

Entonces, existe una constante  $C > 0$ , que no depende de  $a$ , tal que para toda  $u \in H^1(L_\varepsilon(a))^N$  y todo  $m \neq 1$ , se tiene

$$\int_{L_\varepsilon(a)} |\partial_{z_1} u_m|^2 dz \leq C \left( \frac{1}{a^2} \int_{L_\varepsilon(a)} |e(u)|^2 dz + \frac{1}{\varepsilon^2 a} \sum_{\lambda=1}^2 \int_{L_\varepsilon^\lambda(a)} |u_m|^2 dz \right). \quad (4.4)$$

**Demostración.** Basta probar el resultado para  $\varepsilon = 1$ , el caso general se obtiene entonces usando el cambio de variables  $y = \varepsilon z$ , el cual transforma  $L_\varepsilon(a)$  en  $L_1(a)$  y  $L_\varepsilon^\lambda(a)$  en  $L_1^\lambda(a)$ ,  $\lambda \in \{1, 2\}$ .

Se denota  $L(a) = L_1(a)$ ,  $L^\lambda(a) = L_1^\lambda(a)$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Dada  $u = (u_1, \dots, u_N) \in H^1(L(a))^N$ , se define  $w = (w_1, \dots, w_N) \in H^1(Y^N)^N$  por

$$w_1(y) = u_1(y_1 e_1 + a y'_1), \quad w_m(y) = a u_m(y_1 e_1 + a y'_1), \quad \forall m \in \{2, \dots, N\}.$$

Para  $m > 1$ , la desigualdad de tipo Korn dada en el Corolario 6.0.6 aplicado a  $w_m$  proporciona

$$\begin{aligned} \int_{L(a)} \left| \partial_{z_1} u_m - \frac{1}{|L(a)|} \int_{L(a)} \partial_{z_1} u_m dr \right|^2 dz &= a^{N-3} \int_{Y^N} \left| \partial_{y_1} w_m - \int_{Y^N} \partial_{y_1} w_m ds \right|^2 dy \leq \\ &\leq C a^{N-3} \int_{Y^N} |e(w)|^2 dy \leq \frac{C}{a^2} \int_{L(a)} |e(u)|^2 dz, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \int_{L(a)} |\partial_{z_1} u_m|^2 dz &\leq \frac{C}{a^2} \int_{L(a)} |e(u)|^2 dz + \\ &+ \frac{2}{a^{N-1}} \left| \int_{\{|z'_1| < \frac{a}{2}\}} u_m\left(\frac{1}{2}, z'_1\right) dz'_1 - \int_{\{|z'_1| < \frac{a}{2}\}} u_m\left(-\frac{1}{2}, z'_1\right) dz'_1 \right|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Teniendo en cuenta las estimaciones

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{|z'_1| < \frac{a}{2}\}} u_m\left(\frac{1}{2}, z'_1\right) dz'_1 - \int_{\{|z'_1| < \frac{a}{2}\}} u_m\left(-\frac{1}{2}, z'_1\right) dz'_1 \right|^2 &\leq \\ &\leq 2a^{N-1} \left( \int_{\{|z'_1| < \frac{a}{2}\}} |u_m\left(\frac{1}{2}, z'_1\right)|^2 dz'_1 + \int_{\{|z'_1| < \frac{a}{2}\}} |u_m\left(-\frac{1}{2}, z'_1\right)|^2 dz'_1 \right), \end{aligned}$$

y

$$\int_{\{|z'_1| < \frac{a}{2}\}} |u_m\left(\frac{(-1)^\lambda}{2}, z'_1\right)|^2 dz'_1 \leq \frac{4}{a} \int_{L^\lambda(a)} |u_m|^2 dz + a \int_{L^\lambda(a)} |\partial_{z_1} u_m|^2 dz, \quad \lambda = 1, 2,$$

se deduce de (4.5)

$$\int_{L(a)} |\partial_{z_1} u_m|^2 dz \leq \frac{C}{a^2} \int_{L(a)} |e(u)|^2 dz + \sum_{\lambda=1}^2 \left( \frac{C}{a} \int_{L^\lambda(a)} |u_m|^2 dz + 4a \int_{L^\lambda(a)} |\partial_{z_1} u_m|^2 dz \right),$$

para cada  $u \in H^1(L(a))^N$ . Puesto que  $a < \frac{1}{8}$ , se concluye (4.4) para  $\varepsilon = 1$ .  $\square$

**Teorema 4.2.2** Existe  $C > 0$  tal que para cada  $u \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$  y cada  $\varepsilon > 0$ , se tiene

$$\int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 dx \leq C d_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx, \quad (4.6)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_i|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.7)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2}\right) \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx, \quad (4.8)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |\partial_{x_i} u_j|^2 dx \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{d_\varepsilon^2}\right) \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.9)$$

**Demostración.** Las estimaciones (4.6) y (4.7) son consecuencias inmediatas de las siguientes desigualdades de tipo Poincaré

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\varepsilon^k} |u_i|^2 dx &\leq C \varepsilon d_\varepsilon \int_{\{|x'_i - k'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2}\}} |\partial_{x_i} u_i|^2 dx, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \\ \int_{\{|x'_i - k'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2}\}} |u_i|^2 dx &\leq C \int_{\{|x'_i - k'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2}\}} |\partial_{x_i} u_i|^2 dx, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}^N$ , todo  $\varepsilon > 0$  y toda  $u \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$ .

Puesto que la constante que aparece en el Lema 4.2.1 es invariante bajo traslaciones y rotaciones, se deduce que, para cada  $i, m \in \{1, \dots, N\}$ ,  $m \neq i$ , y  $\varepsilon > 0$  (suficientemente pequeño), se tiene

$$\int_{V_\varepsilon^{i,k} + \frac{\varepsilon}{2} e_i} |\partial_{x_i} u_m|^2 dx \leq C \left( \frac{1}{d_\varepsilon^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k} + \frac{\varepsilon}{2} e_i} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2 d_\varepsilon} \int_{\omega_\varepsilon^k \cup \omega_\varepsilon^{k+e_i}} |u_m|^2 dx \right),$$

para toda  $u \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$ . Sumando estas desigualdades en  $k \in \mathbb{Z}^N$  se obtiene

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |\partial_{x_i} u_m|^2 dx \leq C \left( \frac{1}{d_\varepsilon^2} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u)|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2 d_\varepsilon} \int_{\omega_\varepsilon} |u_m|^2 dx \right), \quad \forall u \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

de donde, por (4.6), se deduce (4.9).

Finalmente, para demostrar (4.8), se usa que para  $i, m$  como antes y  $\varepsilon > 0$ , se tiene

$$\int_{V_\varepsilon^{i,k}} |u_m|^2 dx \leq C \left( \varepsilon^2 \int_{V_\varepsilon^{i,k}} |\partial_{x_i} u_m|^2 dx + \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{\omega_\varepsilon^k} |u_m|^2 dx \right).$$

Nuevamente sumando en  $k \in \mathbb{Z}^N$ , y usando (4.6) y (4.9) se concluye

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_m|^2 dx \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2}\right) \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx,$$

lo cual implica (4.8). □

**Observación 4.2.3** En el Teorema 4.2.2 hemos considerado una condición de Dirichlet homogénea sobre toda la frontera exterior de  $\Omega_\varepsilon$ . Sin embargo, la misma demostración muestra que el resultado sigue siendo cierto si tan sólo suponemos que  $u_{\varepsilon,i} = 0$  sobre  $\partial\Omega_\varepsilon^i \cap V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

### 4.3 Resultado de compacidad

En esta sección demostraremos un resultado de compacidad para  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , asumiendo que  $u_\varepsilon$  es una sucesión que satisface

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^2 dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.10)$$

Posteriormente será aplicado a la sucesión de soluciones del sistema de la elasticidad (1.23) lo que nos permitirá llevar a cabo su homogeneización.

**Teorema 4.3.1** Supongamos que existe  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon/d_\varepsilon) = \lambda \in [0, +\infty]$  (esto siempre se tiene para una subsucesión). Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$  que satisface (4.10), y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (4.1). Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se continúa denotando por  $\varepsilon$ , y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que

$$\hat{u}_{\varepsilon,i}^i \rightharpoonup \hat{u}_0^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (4.11)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i \rightharpoonup \hat{u}_0^m & \text{si } \lambda = 0 \\ \hat{u}_{\varepsilon,m}^i \rightharpoonup \hat{u}_0^m + \lambda \hat{u}_{1,m}^i & \text{si } \lambda \in (0, +\infty) \\ \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i \rightharpoonup \hat{u}_{1,m}^i & \text{si } \lambda = +\infty \end{array} \right\} \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (4.12)$$

$$e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) \rightharpoonup e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N). \quad (4.13)$$

**Demostración.** Fijamos  $i \in \{1, \dots, N\}$  y procedemos en varios pasos.

**Paso 1.** Usando el cambio de variables  $y_\varepsilon^i$  dado por (4.2) y teniendo en cuenta que, para todo  $k \in \mathbb{Z}^N$ ,  $\hat{u}_\varepsilon^i(x, y)$  no depende de la variable  $x$  en  $C_\varepsilon^k \times Y^N$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon, m}(x)|^2 dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{V_\varepsilon^{i, k}} |u_{\varepsilon, m}(x)|^2 dx = d_\varepsilon^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \varepsilon^N \int_{Y^N} |\hat{u}_{\varepsilon, m}^i(\varepsilon k, y)|^2 dy = \\ &= d_\varepsilon^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} \int_{Y^N} |\hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, y)|^2 dy dx = d_\varepsilon^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |\hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, y)|^2 dy dx, \quad m \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Entonces, de (4.7), (4.8) y (4.10) se deduce

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |\hat{u}_{\varepsilon, i}^i(x, y)|^2 dy dx &\leq C, \\ \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |\hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, y)|^2 dy dx &\leq C \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2}\right), \quad \forall m \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Razonando análogamente con  $\partial_{x_i} u_{\varepsilon, m}$ ,  $m \neq i$ , y  $e(u_\varepsilon)$ , y teniendo en cuenta (4.9) y (4.10), se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |\partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, y)|^2 dy dx \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2}\right), \quad \forall m \neq i, \quad (4.14)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)|^2 dy dx \leq C. \quad (4.15)$$

De (4.14) y (4.15), sigue inmediatamente

$$\int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |\partial_{y_m} \hat{u}_{\varepsilon, i}^i(x, y)|^2 dy dx \leq C(\varepsilon^2 + d_\varepsilon^2), \quad \forall m \neq i. \quad (4.16)$$

Para probar (4.11) se define  $\bar{u}_\varepsilon = (\bar{u}_{\varepsilon, 1}, \dots, \bar{u}_{\varepsilon, N}) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  por

$$\bar{u}_\varepsilon(\cdot) = \frac{1}{|\omega_\varepsilon(\cdot)|} \int_{\omega_\varepsilon(\cdot)} u_\varepsilon(\eta) d\eta, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

y se emplea el Lema 6.0.3.

Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\bar{u}_{\varepsilon, i} \in A_\varepsilon$ , donde  $A_\varepsilon$  está definido por (6.3), y se comprueba fácilmente que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\bar{u}_{\varepsilon, i}(x + \varepsilon e_i) - \bar{u}_{\varepsilon, i}(x)}{\varepsilon} \right|^2 dx \leq \frac{C}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\partial_{x_i} u_{\varepsilon, i}(x)|^2 dx,$$

lo cual, gracias a (4.10), da (6.5) con  $p = 2$ . Entonces, el Lema 6.0.3 asegura la existencia de una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{u}_0^i \in E_0^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , tales que

$$\bar{u}_{\varepsilon, i} \rightharpoonup \hat{u}_0^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N), \quad (4.17)$$



$$\frac{\bar{u}_{\varepsilon,i}(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}_{\varepsilon,i}}{\varepsilon} \rightharpoonup \partial_{x_i} \hat{u}_0^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N). \quad (4.18)$$

Teniendo en cuenta la igualdad

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(\cdot, y) dy = \bar{u}_{\varepsilon,i}(\cdot), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.19)$$

y usando (4.15), (4.16), se obtiene

$$\|\hat{u}_{\varepsilon,i}^i - \bar{u}_{\varepsilon,i}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 \leq C \|\nabla_y \hat{u}_{\varepsilon,i}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 \leq C(\varepsilon^2 + d_\varepsilon^2), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

lo que junto a (4.17) prueba (4.11).

De (4.15) se deduce además la existencia de una subsucesión de  $\varepsilon$ , que continuamos denotando por  $\varepsilon$ , tal que  $e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)$  converge débilmente en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N)$ . Los siguientes pasos de la demostración están dedicados a caracterizar este límite.

**Paso 2.** Definimos  $\hat{w}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  por

$$\begin{aligned} \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x, y) &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, y) - \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|\eta_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta) d\eta - \sum_{n \neq i} \int_{Y^N} \partial_{y_n} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta) d\eta y_n \right), \\ \hat{w}_{\varepsilon,m}^i(x, y) &= \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \left( \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, y) - \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i) d\eta_i - \int_{Y^N} \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta) d\eta y_i \right), \end{aligned}$$

para todo  $m \neq i$ ,  $\varepsilon > 0$ , p.c.t.  $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N$ .

Por (4.15),  $e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)_{ii}$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$  y tanto  $e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)_{in}$  como  $e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)_{mn}$  convergen fuertemente a cero en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ , para todo  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ . Puesto que

$$\int_{Y^N} \partial_{y_m} \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta) d\eta = \int_{Y^N} \partial_{y_i} \hat{w}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta) d\eta = 0, \quad \forall m \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}, \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N,$$

el Corolario 6.0.6 implica que  $\partial_{y_m} \hat{w}_{\varepsilon,i}^i$  y  $\partial_{y_i} \hat{w}_{\varepsilon,m}^i$ ,  $m \neq i$ , están acotadas en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ .

Por otra parte, como

$$\int_{|\eta_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta) d\eta = 0, \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N,$$

y

$$\int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{w}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i) d\eta_i = 0, \quad \forall m \neq i, \text{ p.c.t. } (x, y'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i, \quad (4.20)$$

la desigualdad de Poincaré-Wirtinger da

$$\int_{Y^N} |\hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta)|^2 d\eta \leq C \int_{Y^N} |\nabla_y \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta)|^2 d\eta, \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N,$$

$$\int_Y |\hat{w}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i)|^2 d\eta_i \leq C \int_Y |\partial_{y_i} \hat{w}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i)|^2 d\eta_i, \quad \forall m \neq i, \text{ a.e. } (x, y'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i.$$

Integrando estas desigualdades en  $\mathbb{R}^N$  y teniendo en cuenta las estimaciones para las derivadas de  $\hat{w}_\varepsilon^i$ , se concluye entonces que  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)^N$ , y como  $e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)$  está también acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N)$ , la desigualdad de Korn implica que  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está de hecho acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N; H^1(Y^N))^N$ . Luego, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , que continuamos denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{w}^i \in L^2(\mathbb{R}^N; H^1(Y^N))^N$  tales que

$$\hat{w}_\varepsilon^i \rightharpoonup \hat{w}^i \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N; H^1(Y^N))^N.$$

Claramente  $e_y(\hat{w}^i)_{in} = e_y(\hat{w}^i)_{mn} = 0$  para todo  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ . Por (4.20), también se tiene  $\hat{w}_m^i(x, y'_i) = 0$  p.c.t.  $(x, y'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i$  y todo  $m \neq i$ .

A continuación estudiamos propiedades de periodicidad para  $\hat{w}^i$ . Partimos de la siguiente igualdad que  $\hat{u}_\varepsilon^i$  satisface por definición

$$\hat{u}_{\varepsilon,j}^i(x, \frac{1}{2}e_i + \cdot) = \hat{u}_{\varepsilon,j}^i(x + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + \cdot) \text{ en } L^2(S^i), \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.21)$$

De (4.21) con  $j = i$ , se sigue que, p.c.t.  $(x, y'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i$ , se tiene

$$\begin{aligned} & \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x, \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y'_i) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{|\eta_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} (\hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) - \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta)) d\eta + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n \neq i} \int_{Y^N} (\partial_{y_n} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) - \partial_{y_n} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta)) d\eta y_n, \end{aligned} \quad (4.22)$$

de donde, gracias a (4.18) y (4.19), se deduce

$$\frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{|\eta_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} (\hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) - \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta)) d\eta \rightharpoonup \partial_{x_i} \hat{u}_0^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N). \quad (4.23)$$

Consideramos ahora  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  y  $n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ . Por (4.16), se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} (\partial_{y_n} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) - \partial_{y_n} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta)) d\eta \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \partial_{y_n} \hat{u}_{\varepsilon,i}^i(x, \eta) d\eta \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} dx + O_\varepsilon = O_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Luego, el segundo término del miembro derecho de la igualdad (4.22) tiende a cero en el sentido de las distribuciones. Esto junto con (4.23) permite pasar al límite en (4.22) y obtener

$$\hat{w}_i^i(x, \frac{1}{2}e_i + \cdot) - \hat{w}_i^i(x, -\frac{1}{2}e_i + \cdot) = \partial_{x_i} \hat{u}_0^i(x) \quad \text{en } L^2(S^i), \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.25)$$

Usando esta vez (4.21) para  $j = m \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , deducimos, p.c.t.  $(x, y) \in \mathbb{R} \times S^i$ , que

$$\begin{aligned} & \hat{w}_{\varepsilon, m}^i(x, \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_{\varepsilon, m}^i(x + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y'_i) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} (\hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta_i e_i + y'_i) - \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i)) d\eta_i + \\ & \quad + \frac{d_\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{Y^N} (\partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) + \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta)) d\eta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Vamos a estudiar los dos términos del miembro derecho de esta igualdad. Para calcular el límite en el sentido de las distribuciones del primero de ellos, se considera  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times S^i)$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \int_{S^i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} (\hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta_i e_i + y'_i) - \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i)) d\eta_i \varphi(x, y'_i) dy'_i dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{S^i} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i) d\eta_i \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i, y'_i) - \varphi(x, y'_i)}{\varepsilon} dy'_i dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Un cálculo simple muestra

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i) d\eta_i = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{u}_{\varepsilon, m}^m(x, \tau_i e_i + d_\varepsilon y_m e_m + \sum_{n \neq i, m} y_n e_n) d\tau_i,$$

para todo  $m \neq i$  y p.c.t.  $(x, y'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i$ . Las estimaciones correspondientes a (4.15) y (4.16) para  $\hat{u}_\varepsilon^m$  dan

$$\int_{\Omega} \int_{S^i} |\bar{u}_{\varepsilon, m}(x) - \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i) d\eta_i|^2 dy'_i dx \leq C \|\nabla_y \hat{u}_{\varepsilon, m}^m\|_{L^2(\Omega \times Y^N)}^N \leq C(\varepsilon^2 + d_\varepsilon^2),$$

lo cual junto a (4.17) con  $i = m$ , prueba que

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(\cdot, \eta_i e_i + \cdot) d\eta_i \rightarrow \hat{u}_0^m \quad \text{en } L^2(\Omega \times S^i), \quad \forall m \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}. \quad (4.28)$$

Luego de (4.27) se deduce

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} (\hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i) - \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta_i e_i + y'_i)) d\eta_i \longrightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times S^i). \quad (4.29)$$

Para el segundo término del segundo miembro de (4.26), se toma  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , y usando el cambio de variables (4.2), y las estimaciones (4.9) y (4.10), se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{d_\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} (\partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) + \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta)) d\eta \varphi(x) dx = \\ &= \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\varepsilon^N d_\varepsilon^{N-1}} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} \varepsilon \partial_{x_i} u_{\varepsilon,m}(\rho) \int_{C_\varepsilon^k} \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) + \varphi(x)}{2} dx d\rho = \\ &= \frac{d_\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} \partial_{x_i} u_{\varepsilon,m}(\rho) \varphi(\rho) d\rho + O_\varepsilon = \frac{d_\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \partial_{x_i} u_{\varepsilon,m}(\rho) \varphi(\rho) d\rho + O_\varepsilon = \\ &= -\frac{d_\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} u_{\varepsilon,m}(\rho) \partial_{x_i} \varphi(\rho) d\rho + O_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Gracias a (4.8) y (4.10), se tiene

$$\left| \frac{d_\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} u_{\varepsilon,m}(\rho) \partial_{x_i} \varphi(\rho) d\rho \right|^2 \leq C \frac{d_\varepsilon^2}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,m}(\rho)|^2 d\rho \leq C(\varepsilon^2 + d_\varepsilon^2),$$

y por consiguiente (4.30) da

$$\frac{d_\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{Y^N} (\partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) + \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta)) d\eta \longrightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \quad (4.31)$$

Usando (4.29) y (4.31), se puede pasar al límite en (4.26) y concluir

$$\hat{w}_m^i(x, \frac{1}{2}e_i + \cdot) = \hat{w}_m^i(x, -\frac{1}{2}e_i + \cdot) \quad \text{en } L^2(S^i), \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Por la igualdad anterior y (4.25), la función

$$\hat{u}_1^i(x, y) = \hat{w}^i(x, y) - \partial_{x_i} \hat{u}_0^i(x) y_i e_i, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N,$$

pertenece a  $E_1^i$  y satisface

$$e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{ii} \rightharpoonup \partial_{x_i} \hat{u}_0^i + \partial_{y_i} \hat{u}_{1,i}^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N).$$

Con intención de probar (4.12), distinguiremos dos casos según la razón entre  $\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$ .

En primer lugar, supongamos que  $\lambda \in [0, +\infty)$ . De (4.28), la definición de  $\hat{w}_{\varepsilon, m}^i$  y su convergencia a  $\hat{u}_{1, m}^i$  en la topología débil de  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ ,  $m \neq i$ , se tiene

$$\hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, y) - \hat{u}_0^m(x) - \int_{Y^N} \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta) d\eta y_i - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1, m}^i(x, y) \rightharpoonup 0, \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N). \quad (4.32)$$

Por (4.14), se tiene además que  $\partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i$ ,  $m \neq i$ , están acotadas en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ . Si se considera  $\varphi$  en  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , usando el cambio de variables (4.2), y las estimaciones (4.8) y (4.10), se obtiene

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta) d\eta \varphi(x) dx \right| = \left| \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \partial_{x_i} u_{\varepsilon, m}(z) \varphi(z) dz \right| + O_\varepsilon = \\ & = \left| \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} u_{\varepsilon, m}(z) \partial_{x_i} \varphi(z) dz \right| + O_\varepsilon \leq C\varepsilon \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} + O_\varepsilon \leq C\varepsilon + O_\varepsilon = O_\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.33)$$

lo cual implica

$$\int_{Y^N} \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta) d\eta y_i \rightharpoonup 0 \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall m \neq i.$$

Luego, de (4.32), resulta

$$\hat{u}_{\varepsilon, m}^i \rightharpoonup \hat{u}_0^m + \lambda \hat{u}_{1, m}^i \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall m \neq i, \text{ si } \lambda \in [0, +\infty). \quad (4.34)$$

Supongamos ahora que  $\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon/d_\varepsilon) = +\infty$ . En este caso, de (4.28) y la definición de  $\hat{w}_{\varepsilon, m}^i$ ,  $m \neq i$ , se sigue

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, y) - \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{Y^N} \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta) d\eta y_i - \hat{u}_{1, m}^i(x, y) \rightharpoonup 0 \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall m \neq i. \quad (4.35)$$

En virtud de (4.14),  $(d_\varepsilon/\varepsilon) \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ , y un razonamiento análogo a (4.33) conduce a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \partial_{y_i} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i(x, \eta) d\eta \varphi(x) dx \right| = \left| \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon^i} u_{\varepsilon, m}(z) \partial_{x_i} \varphi(z) dz \right| + O_\varepsilon \leq \\ & \leq C d_\varepsilon \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} + O_\varepsilon = O_\varepsilon, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

lo cual, por (4.35), implica

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \hat{u}_{\varepsilon, m}^i \rightharpoonup \hat{u}_{1, m}^i \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall m \neq i, \text{ si } \lambda = +\infty.$$

Esto, junto a (4.34), prueba (4.12).

**Paso 3.** Pasemos ahora a caracterizar el límite débil de  $e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{im}$ ,  $m \neq i$ , en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ . Para comenzar, se extiende  $\hat{u}_\varepsilon^i$  a  $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}e_i + S^i)$ , definiendo

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

De esta manera  $\hat{u}_\varepsilon^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^N; H^1(\mathbb{R}e_i + S^i))^N$  y satisface

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = \hat{u}_\varepsilon^i(x + n\varepsilon e_i, (y_i - n)e_i + y'_i), \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Usando esta extensión, se construye una regularización  $\tilde{u}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  de  $\hat{u}_\varepsilon^i$  por

$$\tilde{u}_\varepsilon^i(x, y) = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_\varepsilon^i(x, (y_i + \eta_i)e_i + y'_i) d\eta_i, \quad \varepsilon > 0.$$

Así, se tiene que  $\partial_{y_i} \tilde{u}_\varepsilon^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^N; H^1(Y^N))^N$ , para todo  $\varepsilon > 0$ .

A continuación, con ayuda de esta regularización se define  $\tilde{s}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  por  $\tilde{s}_{\varepsilon,i}^i = \tilde{u}_{\varepsilon,i}^i / (\varepsilon d_\varepsilon)$ ,  $\tilde{s}_{\varepsilon,m}^i = \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i / \varepsilon$  si  $m \neq i$ . De la igualdad

$$\partial_{y_n y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i = \partial_{y_m} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{in} + \partial_{y_n} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{im} - \partial_{y_i} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{nm}, \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}, \varepsilon > 0,$$

y puesto que  $\partial_{y_m} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{in}$ ,  $\partial_{y_n} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{im}$  y  $\partial_{y_i} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{mn}$  pertenecen a  $L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^{-1}(S^i))$ , para todo  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , se deriva que  $\nabla_{y'_i}(\partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i)(x, y_i e_i + \cdot) \in H^{-1}(S^i)^{N-1}$ , p.c.t.  $(x, y_i) \in \mathbb{R}^N \times Y$ . Por el Teorema 6.0.4, esto prueba que  $\partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \cdot)$  pertenece a  $L^2(S^i)$  y satisface

$$\begin{aligned} & \|\partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \cdot) - \int_{S^i} \partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \eta'_i) d\eta'_i\|_{L^2(S^i)}^2 \leq \\ & \leq C \sum_{n \neq i} \left( \|\partial_{y_m} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{in}(x, y_i e_i + \cdot)\|_{H^{-1}(S^i)}^2 + \|\partial_{y_n} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{im}(x, y_i e_i + \cdot)\|_{H^{-1}(S^i)}^2 \right) + \\ & \quad + C \sum_{n \neq i} \|\partial_{y_i} e_y(\tilde{s}_\varepsilon^i)_{mn}(x, y_i e_i + \cdot)\|_{H^{-1}(S^i)}^2, \end{aligned}$$

para todo  $m \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , todo  $\varepsilon > 0$ , p.c.t.  $(x, y_i) \in \mathbb{R}^N \times Y$ . Integrando estas desigualdades en  $(x, y_i) \in \mathbb{R}^N \times Y$  se llega entonces a

$$\begin{aligned} & \|\partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i - \int_{S^i} \partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i d\eta'_i\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 \leq C \sum_{n \neq i} \left( \|\partial_{y_m} e_y(\tilde{s}_{\varepsilon}^i)_{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^{-1}(S^i))}^2 + \right. \\ & \left. + \|\partial_{y_n} e_y(\tilde{s}_{\varepsilon}^i)_{im}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^{-1}(S^i))}^2 \right) + C \sum_{n \neq i} \|\partial_{y_i} e_y(\tilde{s}_{\varepsilon}^i)_{mn}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^{-1}(S^i))}^2 \leq \quad (4.36) \\ & \leq C \sum_{n \neq i} \|e_y(\tilde{s}_{\varepsilon}^i)_{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 + C \sum_{n \neq i} \|\partial_{y_i} e_y(\tilde{s}_{\varepsilon}^i)_{mn}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2. \end{aligned}$$

Si ahora usamos ( $n \neq i$ )

$$\begin{aligned} & \|e_y(\tilde{s}_{\varepsilon}^i)_{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 = \\ & = \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} \left| \frac{1}{d_{\varepsilon}} \int_{-\frac{d_{\varepsilon}}{2}}^{\frac{d_{\varepsilon}}{2}} e_{\varepsilon}^i(\hat{u}_{\varepsilon}^i)_{in}(x, (y_i + \eta_i)e_i + y'_i) d\eta_i \right|^2 dy dx \leq C \|e_{\varepsilon}^i(\hat{u}_{\varepsilon}^i)_{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 \end{aligned}$$

y ( $m, n \neq i$ )

$$\begin{aligned} & \|\partial_{y_i} e_y(\tilde{s}_{\varepsilon}^i)_{mn}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 = \\ & = \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |e_{\varepsilon}^i(\hat{u}_{\varepsilon}^i)_{mn}(x, (y_i + \frac{d_{\varepsilon}}{2})e_i + y'_i) - e_{\varepsilon}^i(\hat{u}_{\varepsilon}^i)_{mn}(x, (y_i - \frac{d_{\varepsilon}}{2})e_i + y'_i)|^2 dy dx \leq \\ & \leq C \|e_{\varepsilon}^i(\hat{u}_{\varepsilon}^i)\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2, \end{aligned}$$

se deduce de (4.36) y (4.15)

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\varepsilon d_{\varepsilon}} (\partial_{y_m} \tilde{u}_{\varepsilon,i}^i - \int_{S^i} \partial_{y_m} \tilde{u}_{\varepsilon,i}^i d\tau'_i) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 = \\ & = \|\partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i - \int_{S^i} \partial_{y_m} \tilde{s}_{\varepsilon,i}^i d\eta'_i\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 \leq C, \quad \forall m \neq i. \end{aligned} \quad (4.37)$$

De (4.15) y (4.37) se sigue también

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\partial_{y_i} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i - \int_{S^i} \partial_{y_i} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i d\tau'_i) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 \leq C, \quad \forall m \neq i. \quad (4.38)$$

Con ayuda de las dos últimas estimaciones podemos caracterizar el comportamiento asintótico de  $e_{\varepsilon}^i(\hat{u}_{\varepsilon}^i)_{im}$ ,  $m \neq i$ . Para ello introducimos la sucesión  $\tilde{t}_{\varepsilon}^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}^N$

definida por

$$\tilde{t}_{\varepsilon,i}^i(x, y) = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \left( \tilde{u}_{\varepsilon,i}^i(x, y) - \int_{S^i} \tilde{u}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i - \sum_{n \neq i} \int_{S^i} \partial_{y_n} \tilde{u}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_n \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\varepsilon,m}^i(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, y) - \int_Y \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \tau_i e_i + y'_i) d\tau_i - \int_{S^i} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i + \right. \\ \left. + \int_{Y^N} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \tau) d\tau \right), \quad \text{si } m \neq i. \end{aligned}$$

Entonces (4.37) y (4.38) muestran

$$\|\partial_{y_m} \tilde{t}_{\varepsilon,i}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)} \leq C, \quad \|\partial_{y_i} \tilde{t}_{\varepsilon,m}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)} \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall m \neq i. \quad (4.39)$$

Por otra parte, usando

$$\int_{S^i} \tilde{t}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \eta'_i) d\eta'_i = 0, \quad \text{p.c.t. } (x, y_i) \in \mathbb{R}^N \times Y$$

y

$$\int_Y \tilde{t}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i) d\eta_i = 0 \quad \text{p.c.t. } (x, y'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i, \quad \forall m \neq i,$$

la desigualdad de Poincaré-Wirtinger da

$$\int_{S^i} |\tilde{t}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \eta'_i)|^2 d\eta'_i \leq C \sum_{m \neq i} \int_{S^i} |\partial_{y_m} \tilde{t}_{\varepsilon,i}^i(x, y_i e_i + \eta'_i)|^2 d\eta'_i, \quad \text{p.c.t. } (x, y_i) \in \mathbb{R}^N \times Y,$$

y

$$\int_Y |\tilde{t}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i)|^2 d\eta_i \leq C \int_Y |\partial_{y_i} \tilde{t}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + y'_i)|^2 d\eta_i, \quad \text{p.c.t. } (x, y'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i.$$

Integrando las dos últimas expresiones en  $\mathbb{R}^N \times Y^N$ , se prueba entonces que  $\tilde{t}_{\varepsilon,i}^i$  y  $\tilde{t}_{\varepsilon,m}^i$ ,  $m \neq i$ , están acotadas en  $L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^1(S^i))$  y  $L^2(\mathbb{R}^N \times S^i; H^1(J^i))$ , respectivamente.

Extrayendo una subsucesión de  $\varepsilon$  si fuera necesario, deducimos que existe  $\hat{t}^i = (\hat{t}_1^i, \dots, \hat{t}_N^i)$  tal que

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\varepsilon,i}^i &\rightharpoonup \hat{t}_i^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^1(S^i)), \\ \tilde{t}_{\varepsilon,m}^i &\rightharpoonup \hat{t}_m^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times S^i; H^1(J^i)), \quad \forall m \neq i. \end{aligned}$$



Asimismo, se observa que

$$e_y(\tilde{t}_\varepsilon)_{mn}(x, y) = \int_{-\frac{d\varepsilon}{2}}^{\frac{d\varepsilon}{2}} \left( e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{mn}(x, (y_i + \eta_i)e_i + y'_i) - \int_Y e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{mn}(x, (\tau_i + \eta_i)e_i + y'_i) d\tau_i \right) d\eta_i,$$

$$e_y(\tilde{t}_\varepsilon)_{im}(x, y) = \frac{1}{d\varepsilon} \int_{-\frac{d\varepsilon}{2}}^{\frac{d\varepsilon}{2}} \left( e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{im}(x, (y_i + \eta_i)e_i + y'_i) - \int_{S^i} e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{im}(x, (y_i + \eta_i)e_i + \tau'_i) d\tau'_i \right) d\eta_i,$$

para todo  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , p.c.t.  $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N$ . Entonces, gracias a (4.15) se puede pasar al límite en  $\varepsilon$  y deducir

$$e_y(\hat{t}^i)_{mn} = 0, \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}, \quad (4.40)$$

$$e_y(\hat{t}^i)_{im}(x, y) = \hat{\mu}_m^i(x, y) - \int_{S^i} \hat{\mu}_m^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N, \quad \forall m \neq i,$$

donde por  $\hat{\mu}_m^i$  se denota el límite débil en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$  de  $e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{im}$ ,  $m \neq i$ .

De lo anterior se sigue que si se define  $\hat{u}_2^i = (\hat{u}_{2,1}^i, \dots, \hat{u}_{2,N}^i)$  por

$$\hat{u}_{2,i}^i(x, y) = \hat{t}_i^i(x, y) + 2 \sum_{r \neq i} \int_{S^i} \hat{\mu}_r^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_r,$$

$$\hat{u}_{2,m}^i(x, y) = \hat{t}_m^i(x, y), \quad \forall m \neq i,$$

entonces,  $\hat{u}_{2,i}^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^1(S^i))$ ,  $\hat{u}_{2,m}^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^N \times S^i; H^1(J^i))$  para todo  $m \neq i$ , y

$$e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{im} \rightharpoonup \hat{\mu}_m^i = e_y(\hat{u}_2^i)_{im} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N).$$

Por la definición de  $\hat{u}_{2,m}^i$  y (4.40),  $\hat{u}_2^i$  satisface

$$\int_{S^i} \hat{u}_{2,m}^i(x, y_i e_i + \eta'_i) d\eta'_i = 0, \quad \text{p.c.t. } (x, y_i) \in \mathbb{R}^N \times Y, \quad (4.41)$$

y

$$e_y(\hat{u}_2^i)_{mn} = 0, \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}. \quad (4.42)$$

Se observa que (4.41), (4.42) y  $\hat{u}_{2,m}^i$  en  $L^2(\mathbb{R}^N \times S^i; H^1(J^i))$  implican que existen  $g_{mn}^i \in L^2(\mathbb{R}^N; H^1(J^i))$ ,  $m, n \neq i$ , tales que  $g_{mn}^i = -g_{nm}^i$  y  $\hat{u}_{2,m}^i$  se expresa

$$\hat{u}_{2,m}^i(x, y) = \sum_{n \neq i} g_{mn}^i(x, y_i) y_n, \quad \forall m \neq i, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times Y^N. \quad (4.43)$$

En particular esto prueba que  $\hat{u}_{2,m}^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^N; H^1(Y^N))$ , para todo  $m \neq i$ .

Seguidamente, vamos a probar que  $\hat{u}_{2,m}^i$  es periódica en la variable  $y_i$ , para toda  $m \neq i$ . Para ello, basta probar esta propiedad para las funciones  $g_{mn}^i$  que satisfacen (4.43). Se tiene

$$\begin{aligned} g_{mn}^i(x, y_i) &= 12 \int_{S^i} \hat{u}_{2,m}^i(x, y_i e_i + \eta'_i) \eta_n d\eta'_i = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 12 \int_{S^i} \tilde{t}_{\varepsilon,m}^i(x, y_i e_i + \eta'_i) \eta_n d\eta'_i \quad \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^N; H^1(J^i)). \end{aligned}$$

De la definición de  $\tilde{t}_{\varepsilon,m}^i$  y la igualdad

$$\tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \frac{1}{2}e_i + \cdot) = \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + \cdot) \quad \text{en } L^2(S^i), \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N,$$

resulta

$$\begin{aligned} &g_{mn}^i(x, \frac{1}{2}) - g_{mn}^i(x, -\frac{1}{2}) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{12}{\varepsilon} \int_{Y^N} (\tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) - \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta)) \eta_n d\eta \quad \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} (\tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x + \varepsilon e_i, \eta) - \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta)) \eta_n d\eta \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta) \eta_n d\eta \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} (\tilde{r}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta) + \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta'_i)) \eta_n d\eta \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} dx, \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde  $\tilde{r}_{\varepsilon,m}^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$\tilde{r}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta) = \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta) - \int_{S^i} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i - \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta'_i) + \int_{S^i} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \tau'_i) d\tau'_i.$$

Puesto que  $\tilde{r}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta'_i) = 0$ , p.c.t.  $(x, \eta'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i$ , y  $\partial_{\eta_i} \tilde{r}_{\varepsilon,m}^i = \varepsilon \partial_{\eta_i} \tilde{t}_{\varepsilon,m}^i$ , de (4.39) y la desigualdad

$$\int_Y |\tilde{r}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + \eta'_i) - \tilde{r}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta'_i)|^2 d\eta_i \leq C \int_Y |\partial_{\eta_i} \tilde{r}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + \eta'_i)|^2 d\eta_i, \quad \text{p.c.t. } (x, \eta'_i) \in \mathbb{R}^N \times S^i,$$

se deduce

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \tilde{r}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta) \eta_n d\eta \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} dx = O_\varepsilon, \quad \forall m \neq i. \quad (4.46)$$

Por otra parte, de la definición de  $\tilde{u}_{\varepsilon,m}^i$ , y el cambio de variables  $y_\varepsilon^i$  dado por (4.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{Y^N} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta'_i) \eta_n d\eta &= \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{S^i} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta_i e_i + \eta'_i) \eta_n d\eta_i d\eta'_i = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N d_\varepsilon^N} \int_{P_\varepsilon(x)} u_{\varepsilon,m}(z) \frac{z_n - \varepsilon \kappa_n(x/\varepsilon)}{\varepsilon d_\varepsilon} dz = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{S^m} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon,m}^m(x, \eta_m e_m + \eta'_m) \eta_n d\eta_m d\eta'_m, \end{aligned}$$

p.c.t.  $x \in \Omega$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta'_i) \eta_n d\eta \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} dx &= \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{S^m} \left( \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon,m}^m(x, \eta_m e_m + \eta'_m) d\eta_m \right) \eta_n \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} d\eta'_i dx. \end{aligned}$$

Debido a que  $\hat{u}_{\varepsilon,m}^m$  converge débilmente en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$  a  $\hat{u}_0^m$ , la estimación (4.15) con  $j$  en lugar de  $i$ , y la desigualdad

$$\int_{Y^N} \left| \hat{u}_{\varepsilon,m}^m(x, y) - \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{u}_{\varepsilon,m}^m(x, \eta_m e_m + y'_m) d\eta_m \right|^2 dy \leq C \int_{Y^N} |\partial_{y_m} \hat{u}_{\varepsilon,m}^m(x, y)|^2 dy,$$

se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \tilde{u}_{\varepsilon,m}^i(x, \eta'_i) \eta_n d\eta \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} \eta_n d\eta \hat{u}_0^m(x) \partial_{x_i} \varphi(x) dx + O_\varepsilon = O_\varepsilon,$$

lo cual, junto con (4.44), (4.45) y (4.46), prueba que  $g_{mn}^i$  es  $y_i$ -periódica, para todo  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ .

**Paso 4.** Definimos  $\hat{z}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  por  $\hat{z}_{\varepsilon,i}^i(x, y) = 0$  y

$$\hat{z}_{\varepsilon,m}^i(x, y) = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \left( \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, y) - \int_{S^i} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i - \sum_{n \neq i} \int_{S^i} \partial_{y_n} \hat{u}_{\varepsilon,m}^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_n \right),$$

para  $m \neq i, \varepsilon > 0$ , p.c.t.  $(x, y) \in \Omega \times Y^N$ .

Para todo  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , el Lema 6.0.5 y (4.15) implican que  $\partial_{y_n} \hat{z}_{\varepsilon,m}^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ . La desigualdad de Poincaré-Wirtinger proporciona que  $\hat{z}_{\varepsilon,m}^i$  también está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$ . Por tanto,  $\hat{z}_{\varepsilon,m}^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^N \times J^i; H^1(S^i))$ . En

estas condiciones, existe  $\hat{z}_m^i \in L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$  tal que, al menos para una subsucesión,  $\hat{z}_{\varepsilon, m}^i$  converge débilmente a  $\hat{z}_m^i$  en  $L^2(\Omega \times J^i; H^1(S^i))$ . Además, puesto que

$$e_y(\hat{z}_\varepsilon^i)_{mn} = e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{mn} - \int_{S^i} e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{mn} d\tau'_i, \quad \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}, \forall \varepsilon > 0,$$

se deduce

$$\hat{\sigma}_{mn}^i = e_y(\hat{z}_m^i)_{mn} + \int_{S^i} \hat{\sigma}_{mn}^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \Omega \times Y^N, \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\},$$

donde  $\hat{\sigma}_{mn}^i$  denota el límite débil en  $L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)$  de  $e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{mn}$ .

Definiendo  $\hat{u}_3^i = (\hat{u}_{3,1}^i, \dots, \hat{u}_{3,N}^i) \in E_3^i$  por  $\hat{u}_{3,i}^i = 0$  y

$$\hat{u}_{3,m}^i(x, y) = \hat{z}_m^i(x, y) + \sum_{n \neq i} \int_{S^i} \hat{\sigma}_{mn}^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_n, \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \Omega \times Y^N, \forall m \neq i,$$

tenemos que  $\hat{u}_3^i$  entonces satisface

$$e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)_{mn} \rightharpoonup e_y(\hat{u}_3^i)_{mn} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \forall m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}.$$

□

El siguiente resultado es un recíproco parcial del Teorema 4.3.1.

**Teorema 4.3.2** *Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ , sea  $(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i)$  un elemento de  $\mathcal{E}^i$ . Entonces, existe una sucesión  $v_\varepsilon \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$  tal que  $\hat{v}_\varepsilon^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , definidas por (4.1) satisfacen*

$$\hat{v}_{\varepsilon, i}^i \longrightarrow \hat{v}_0^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (4.47)$$

$$\hat{v}_{\varepsilon, m}^i - \hat{v}_0^m - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{v}_{1, m}^i \longrightarrow 0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \forall m \neq i, \quad (4.48)$$

$$e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i) \longrightarrow e_0^i(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N). \quad (4.49)$$

**Demostración.** Se considera  $\theta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  satisfaciendo (N.1) (ver Notación), y entonces, con ayuda de  $y_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , dadas por (4.2), se define  $v_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^N$  por

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,i} |_{\Omega_\varepsilon^i} &= \hat{v}_0^i + \varepsilon \hat{v}_{1,i}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon d_\varepsilon \left( \hat{v}_{2,i}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \sum_{n \neq i} (\partial_{x_n} \hat{v}_0^i + \partial_{x_i} \hat{v}_0^n) y_{\varepsilon,n}^i \right) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \sum_{n \neq i} \partial_{x_i} \hat{v}_{1,n}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,n}^i, \\ v_{\varepsilon,m} |_{\Omega_\varepsilon^i} &= \hat{v}_0^m + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{v}_{1,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon \hat{v}_{2,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon d_\varepsilon \left( \hat{v}_{3,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \sum_{n \neq i} \partial_{x_n} \hat{v}_0^m y_{\varepsilon,n}^i \right) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \sum_{n \neq i} \partial_{x_n} \hat{v}_{1,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,n}^i, \quad \forall m \neq i. \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que la sucesión  $v_\varepsilon$  pertenece a  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$  y que  $\hat{v}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , definidas por (4.1) satisfacen (4.47), (4.48) y (4.49).  $\square$

**Observación 4.3.3** Análogamente a como se hizo en la demostración del Teorema 2.1.3, se prueba que el teorema anterior sigue siendo cierto cuando  $(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i)$  pertenece a  $E^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Por tanto, el Teorema 4.3.1 es óptimo. Sin embargo, en lo que sigue no necesitaremos usar esta versión más general de Teorema 4.3.2.

Probamos a continuación un resultado de corrector para una sucesión  $u_\varepsilon$  en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$  para la cual la convergencia en (4.13) es fuerte.

**Teorema 4.3.4** Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$ , definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , por (4.1) y denotemos  $\gamma_\varepsilon = d_\varepsilon / (\varepsilon + d_\varepsilon)$ . Supongamos que, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , existe  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$  tal que se tiene

$$e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) \longrightarrow e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N). \quad (4.50)$$

Entonces, las sucesiones  $g_\varepsilon^i \in L^2(\mathbb{R}^N)^N$  y  $G_\varepsilon^i \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathcal{S}_N)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , definidas por

$$\begin{cases} g_{\varepsilon,i}^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} \hat{u}_0^i(\rho) d\rho, \\ g_{\varepsilon,m}^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} \left[ \hat{u}_0^m(\rho) + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,m}^i(\rho, y_\varepsilon^i(\cdot)) \right] d\rho, \quad \forall m \neq i, \end{cases} \quad (4.51)$$

$$G_\varepsilon^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)(\rho, y_\varepsilon^i(\cdot)) d\rho, \quad (4.52)$$

satisfacen

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,i}(x) - g_{\varepsilon,i}^i(x)|^2 dx + \gamma_\varepsilon^2 \sum_{m \neq i} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,m}(x) - g_{\varepsilon,m}^i(x)|^2 dx + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u_\varepsilon)(x) - G_\varepsilon^i(x)|^2 dx \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

**Demostración.** Para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , sea  $(\varphi_0^{i,n}, \varphi_1^{i,n}, \varphi_2^{i,n}, \varphi_3^{i,n})$  una sucesión en  $\mathcal{E}^i$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0^{i,n} = \hat{u}_0^i \quad \text{en } L^2(\Omega), \quad (4.54)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{1,m}^{i,n} = \hat{u}_{1,m}^i \quad \text{en } L^2(\Omega \times Y^N), \quad \forall m \neq i, \quad (4.55)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_0^i(\varphi_0^{i,n}, \varphi_1^{i,n}, \varphi_2^{i,n}, \varphi_3^{i,n}) = e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \quad \text{en } L^2(\Omega \times Y^N; \mathcal{S}_N). \quad (4.56)$$

Por el Teorema 4.3.2, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $w_\varepsilon^n \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$ ,  $\varepsilon > 0$ , que satisface

$$\hat{w}_{\varepsilon,i}^{i,n} \longrightarrow \varphi_0^{i,n} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad (4.57)$$

$$\hat{w}_{\varepsilon,m}^{i,n} - \varphi_0^{m,n} - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \varphi_{1,m}^{i,n} \longrightarrow 0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall m \neq i, \quad (4.58)$$

$$e_\varepsilon^i(\hat{w}_\varepsilon^{i,n}) \longrightarrow e_0^i(\varphi_0^{i,n}, \varphi_1^{i,n}, \varphi_2^{i,n}, \varphi_3^{i,n}) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N). \quad (4.59)$$

Usando el cambio de variables (4.2) y la estimación (4.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_{\varepsilon,i}^i - \hat{w}_{\varepsilon,i}^{i,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}^2 &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \|u_{\varepsilon,i} - w_{\varepsilon,i}^n\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^i)}^2 \leq \frac{C}{d_\varepsilon^{N-1}} \|e(u_\varepsilon - w_\varepsilon^n)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^i; \mathcal{S}_N)}^2 = \\ &= C \|e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i - \hat{w}_\varepsilon^{i,n})\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N)}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Pasando al límite, primero en  $\varepsilon$  y luego en  $n$ , por (4.59) y (4.56) se concluye

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{u}_{\varepsilon,i}^i - \hat{w}_{\varepsilon,i}^{i,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)} = 0, \quad (4.60)$$

lo cual, por (4.54) y (4.57) implica

$$\hat{u}_{\varepsilon,i}^i \longrightarrow \hat{u}_0^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N). \quad (4.61)$$

Por otra parte, puesto que  $\hat{u}_\varepsilon^i(x, y)$  no depende de  $x$  en  $C_\varepsilon^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^N$ ,  $\varepsilon > 0$ , el cambio de variables (4.2) proporciona

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{V_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,i}(x) - g_{\varepsilon,i}^i(x)|^2 dx &= \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{V_\varepsilon^{i,k}} |u_{\varepsilon,i}(x) - \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon^k} \hat{u}_0^i(\rho) d\rho|^2 dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{Y^N} \left| \int_{C_\varepsilon^k} (\hat{u}_{\varepsilon,i}^i(\rho, y) - \hat{u}_0^i(\rho)) d\rho \right|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} |\hat{u}_{\varepsilon,i}^i(\rho, y) - \hat{u}_0^i(\rho)|^2 dy d\rho, \end{aligned}$$

y entonces, de (4.61) se deduce que el primer término en (4.53) tiende a cero.

Usando (4.8), y razonando de manera similar a como hicimos para deducir (4.60), se llega a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon,m}^i - \hat{w}_{\varepsilon,m}^{i,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)} = 0, \quad \forall m \neq i.$$

La desigualdad

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon,m}^i - \hat{u}_0^m - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,m}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)} &\leq \gamma_\varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon,m}^i - \hat{w}_{\varepsilon,m}^{i,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)} + \\ + \gamma_\varepsilon \|\hat{w}_{\varepsilon,m}^{i,n} - \varphi_0^{m,n} - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \varphi_{1,m}^{i,n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)} &+ \gamma_\varepsilon \|\varphi_0^{m,n} + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \varphi_{1,m}^{i,n} - \hat{u}_0^m - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,m}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N)}, \end{aligned}$$

junto a (4.58), (4.54) y (4.55), implica entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon \left( \hat{u}_{\varepsilon,m}^i - \hat{u}_0^m - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,m}^i \right) = 0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N), \quad \forall m \neq i,$$

lo cual, como antes, muestra que el segundo término en (4.53) tiende a cero.

La convergencia a cero del tercer término en (4.53) se deduce fácilmente usando el cambio de variables (4.2) y la convergencia (4.50).  $\square$

**Observación 4.3.5** Si  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$  son uniformemente continuas en  $x \in \mathbb{R}^N$ , entonces (4.53) es equivalente a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \left( |u_{\varepsilon,i}(x) - \hat{u}_0^i(x)|^2 + \gamma_\varepsilon^2 \sum_{m \neq i} |u_{\varepsilon,m}(x) - \hat{u}_0^m(x) - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,m}^i(x, y_\varepsilon^i(x))|^2 \right) dx = 0,$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u_\varepsilon)(x) - e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)(x, y_\varepsilon^i(x))|^2 dx = 0.$$

De hecho, si  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , son suficientemente regulares, entonces definiendo  $z_\varepsilon^i : \Omega_\varepsilon^i \rightarrow \mathbb{R}^N$  como

$$z_{\varepsilon,i}^i = \hat{u}_0^i + \varepsilon \hat{u}_{1,i}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon d_\varepsilon \left( \hat{u}_{2,i}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \sum_{n \neq i} (\partial_{x_n} \hat{u}_0^i + \partial_{x_i} \hat{u}_0^n) y_{\varepsilon,n}^i \right) - \\ - \varepsilon^2 \sum_{n \neq i} \partial_{x_i} \hat{u}_{1,n}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,n}^i, \\ z_{\varepsilon,m}^i = \hat{u}_0^m + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon \hat{u}_{2,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon d_\varepsilon \left( \hat{u}_{3,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \sum_{n \neq i} \partial_{x_n} \hat{u}_0^m y_{\varepsilon,n}^i \right) - \\ - \varepsilon^2 \sum_{n \neq i} \partial_{x_n} \hat{u}_{1,m}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,n}^i, \quad \forall m \neq i,$$

se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \left( |u_{\varepsilon,i} - z_{\varepsilon,i}^i|^2 + \gamma_\varepsilon^2 \sum_{m \neq i} |u_{\varepsilon,m} - z_{\varepsilon,m}^i|^2 + |e(u_\varepsilon - z_\varepsilon^i)|^2 \right) dx = 0.$$

Usando la notación de las Observaciones 4.1.3 y 4.1.4, obtenemos que, sobre  $\Omega_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , el comportamiento de  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, puede ser aproximado por

$$u_{\varepsilon,i}(x) \sim \hat{u}_0^i(x), \\ u_{\varepsilon,m}(x) \sim \begin{cases} \hat{u}_0^m(x) & \text{si } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} = 0, \\ \hat{u}_0^m(x) + \lambda \hat{u}_{1,m}^i(x, y_\varepsilon^i(x)) & \text{si } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} = \lambda \in (0, +\infty), \\ \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,m}^i(x, y_\varepsilon^i(x)) & \text{si } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} = +\infty, \end{cases} \\ e(u_\varepsilon)_{ii}(x) \sim \partial_{x_i} \hat{u}_0^i(x) + \partial_{y_i} a^i(x, y_{\varepsilon,i}^i(x)) - \sum_{n \neq i} \partial_{y_i y_i}^2 b_n^i(x, y_{\varepsilon,i}^i(x)) y_{\varepsilon,n}^i(x), \\ 2e(u_\varepsilon)_{im}(x) \sim \partial_{y_m} \hat{u}_{2,i}^i(x, y_\varepsilon^i(x)) + \sum_{n \neq i} \partial_{y_i} g_{mn}^i(x, y_{\varepsilon,i}^i(x)) y_{\varepsilon,n}^i(x), \\ 2e(u_\varepsilon)_{mn}(x) \sim \partial_{y_n} \hat{u}_{3,m}^i(x, y_\varepsilon^i(x)) + \partial_{y_m} \hat{u}_{3,n}^i(x, y_\varepsilon^i(x)),$$

para todo  $m, n \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ . Obsérvese, que en particular, el comportamiento asintótico sobre  $\Omega_\varepsilon^i$  de  $u_{\varepsilon,m}$ ,  $m \neq i$ , depende de la razón entre  $\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$ .



## 4.4 Resultado de homogeneización

En esta sección resolvemos el problema de homogeneización (1.23), obteniendo un resultado de corrector que proporciona una aproximación de  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$  en la topología fuerte de  $L^2(\Omega_\varepsilon)^N$  y  $L^2(\Omega_\varepsilon; \mathcal{S}_N)$  respectivamente.

**Teorema 4.4.1** *Sea  $u_\varepsilon$  la sucesión de soluciones de (1.23) y denotemos  $\gamma_\varepsilon = d_\varepsilon/(\varepsilon + d_\varepsilon)$ . Suponemos que existe  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon = \gamma$  (esto siempre se tiene para una subsucesión). Entonces, las sucesiones  $\hat{u}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^N \times Y^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  definidas por*

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = \gamma_\varepsilon u_\varepsilon(\varepsilon \kappa(\frac{x}{\varepsilon})) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad \varepsilon > 0,$$

satisfacen (4.50), donde  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , son solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega \times Y^N} (A^i e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) - \gamma H^i) : e_0^i(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) dy dx = \\ = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega \times Y^N} \left( \gamma \sum_{j=1}^N F_j^i \hat{v}_0^j + (1 - \gamma) \sum_{m \neq i} F_m^i \hat{v}_{1,m}^i \right) dy dx, \\ \forall (\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \in E^i, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Además, las sucesiones  $g_\varepsilon^i$  y  $G_\varepsilon^i$ , definidas por (4.51) y (4.52) respectivamente, proporcionan las siguientes aproximaciones a  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma_\varepsilon^2}{|\Omega_\varepsilon^i|} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,i}(x) - \frac{1}{\gamma_\varepsilon} g_{\varepsilon,i}^i(x)|^2 dx + \gamma_\varepsilon^2 \sum_{m \neq i} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,m}(x) - \frac{1}{\gamma_\varepsilon} g_{\varepsilon,m}^i(x)|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u_\varepsilon)(x) - \frac{1}{\gamma_\varepsilon} G_\varepsilon^i(x)|^2 dx \right] = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

**Demostración.** Tomando  $\gamma_\varepsilon^2 u_\varepsilon$  como función test en (1.23) y usando (4.8), se deduce

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon)|^2 dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces, se puede aplicar el Teorema 4.3.1, y afirmar que para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ , existe  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$  tal que, al menos para una subsucesión, se tienen (4.11), (4.12) y (4.13).

Para  $(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i)$  en  $\mathcal{E}^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se considera la sucesión  $v_\varepsilon$  en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^N$  dada por el Teorema 4.3.2. Tomando entonces  $\gamma_\varepsilon v_\varepsilon$  como función test en (1.23) y usando la continuidad con respecto a  $x$  de  $F^i$ ,  $H^i$  y  $A^i$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} A^i e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) : e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i) dy dx + O_\varepsilon = \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon) : e(v_\varepsilon) dx = \\ & = \frac{\gamma_\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} (F_\varepsilon v_\varepsilon + H_\varepsilon : e(v_\varepsilon)) dx = \gamma_\varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} (F^i \hat{v}_\varepsilon^i + H^i : e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)) dy dx + O_\varepsilon. \end{aligned}$$

Pasando al límite se deduce que  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , satisfacen la identidad

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} (A^i e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) - \gamma H^i) : e_0^i(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) dy dx = \\ & = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} \left( \gamma \sum_{j=1}^N F_j^i \hat{v}_0^j + (1-\gamma) \sum_{m \neq i} F_m^i \hat{v}_{1,m}^i \right) dy dx, \\ & \forall (\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \in \mathcal{E}^i, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \right.$$

Por densidad, se concluye que  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , son solución de (4.62).

Para finalizar la demostración del Teorema 4.4.1, gracias al Teorema 4.3.4, basta probar (4.50). Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ , las propiedades de monotonía (1.24), (1.25) de  $A_\varepsilon$  y  $A^i$  implican

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{j \neq i} \| (e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) - e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j)) \chi_{\{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}\}} \|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; S_N)}^2 + \\ & + \alpha \| e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) - e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; S_N)}^2 \leq \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} A_\varepsilon e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon) : e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon) dx + \\ & + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} |e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) - e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)|^2 dy dx + \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j (e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) - e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j)) : (e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) - e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j)) dy dx. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Usando (4.11), (4.12), (4.13), y tomando  $\gamma_\varepsilon^2 u_\varepsilon$  como función test en (1.23) y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , como función test en (4.62), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) : e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) dy dx + \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} A_\varepsilon e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon) : e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon) dx + O_\varepsilon = \\
 & = \frac{1}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} A_\varepsilon e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon) : e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon) dx = \frac{\gamma_\varepsilon}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} (F_\varepsilon \gamma_\varepsilon u_\varepsilon + H_\varepsilon : e(\gamma_\varepsilon u_\varepsilon)) dy dx = \\
 & = \gamma_\varepsilon \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{Y^N} (F^j \hat{u}_\varepsilon^j + H^j : e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j)) dy dx + O_\varepsilon = \tag{4.64} \\
 & = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} \left( \gamma \sum_{l=1}^N F_l^j \hat{u}_0^l + (1-\gamma) \sum_{m \neq j} F_m^j \hat{u}_{1,m}^j + \gamma H^j : e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) \right) dy dx + O_\varepsilon = \\
 & = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} A^j e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) : e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) dy dx + O_\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Debido a (4.13), también se tiene

$$\begin{aligned}
 & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) : e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) dy dx \geq \\
 & \geq \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} A^j e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) : e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) dy dx, \quad j \in \{1, \dots, N\}.
 \end{aligned}$$

Entonces, de (4.64) se deducen

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) : e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) dy dx = \\
 & = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N \times Y^N} A^j e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) : e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) dy dx, \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma_\varepsilon^2}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} A_\varepsilon e(u_\varepsilon) : e(u_\varepsilon) dx = 0. \tag{4.66}$$

Esta última igualdad, el cambio de variables (4.2) y la monotonía de  $A_\varepsilon$  dan en particular

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} |e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)|^2 dy dx = \frac{\gamma_\varepsilon^2}{d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^2 dx \leq \frac{\gamma_\varepsilon^2}{\alpha d_\varepsilon^{N-1}} \int_{\omega_\varepsilon} A_\varepsilon e(u_\varepsilon) : e(u_\varepsilon) dx = O_\varepsilon. \tag{4.67}$$

De (4.66) y (4.67) se obtiene fácilmente que los dos primeros términos del miembro derecho de (4.63) tienden a cero, mientras que usando (4.65) y (4.13), se deduce

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j (e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) - e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j)) : (e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) - e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j)) dydx = \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) : e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) dydx - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) : e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) dydx - \\
& \quad - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) : e_\varepsilon^j(\hat{u}_\varepsilon^j) dydx + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y_j| > \frac{d_\varepsilon}{2}} A^j e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) : e_0^j(\hat{u}_0^j, \hat{u}_1^j, \hat{u}_2^j, \hat{u}_3^j) dydx = O_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego, pasando al límite en (4.63), se obtiene entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) - e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times Y^N; \mathcal{S}_N)} = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

lo cual prueba (4.50).  $\square$

**Observación 4.4.2** Remitimos a la Observación 4.3.5 en el caso de que  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , sean suficientemente regulares.

**Observación 4.4.3** Si  $\gamma = 0$  (es decir,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon/d_\varepsilon) = +\infty$ ), las deformaciones y el tensor de deformaciones tienden a infinito. Por tanto, en esa situación, el modelo de la elasticidad lineal, que asume pequeñas deformaciones, es discutible para valores pequeños de los parámetros.

Destacar también que cuando  $\gamma = 0$ , para  $m \neq i$ , es  $\hat{u}_{1,m}^i$ , y no  $\hat{u}_0^m$ , la que proporciona una aproximación de  $u_{\varepsilon,m}$  sobre  $\Omega_\varepsilon^i$ .

**Observación 4.4.4** El problema (4.62) está desacoplado en el sentido de que, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$  es solución del problema variacional

$$\begin{cases} \int_{\Omega \times Y^N} (A^i e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) - \gamma H^i) : e_0^i(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) dydx = \\ = \int_{\Omega \times Y^N} \left[ \gamma \left( \sum_{j=1}^N F_j^j \right) \hat{v}_0^i + (1 - \gamma) \sum_{m \neq i} F_m^i \hat{v}_{1,m}^i \right] dydx, \quad \forall (\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \in E^i. \end{cases} \quad (4.68)$$

Una simple aplicación del Teorema de Lax-Milgram (en unos espacios cocientes adecuados) muestra que, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , (4.68) admite una solución. Aunque esta solución no es única, las funciones  $\hat{u}_0^i, \hat{u}_{1,m}^i$ , con  $m \neq i$ , y  $e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$  están definidas unívocamente. Obsérvese que estas son las funciones que aparecen en la definición del corrector tanto para  $u_\varepsilon$  como para  $e(u_\varepsilon)$ .

El siguiente resultado proporciona la solución de (4.62) en el caso particular de un material homogéneo e isótropo. Su demostración, que no incluimos, es una simple (aunque tediosa) comprobación.

**Proposición 4.4.5** *Supongamos que existen  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $F \in C^0(\bar{\Omega})^N$  y  $H \in C^0(\bar{\Omega}; \mathcal{S}_N)$ , tales que  $F_\varepsilon = F$ ,  $H_\varepsilon = H$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , y*

$$A_\varepsilon M = \lambda \text{tr}(M) \mathcal{I} + 2\mu M, \quad \forall M \in \mathcal{S}_N, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Se denota

$$\Lambda = \frac{2\mu(\lambda N + 2\mu)}{\lambda(N-1) + 2\mu}.$$

Si  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , son solución de (4.62), entonces se satisfacen las relaciones

$$-\Lambda \partial_{x_i x_i}^2 \hat{u}_0^i = N\gamma F_i - \gamma \partial_{x_i} H_{ii} + \frac{\lambda\gamma}{\lambda(N-1) + 2\mu} \sum_{j \neq i} \partial_{x_i} H_{jj}, \quad \text{en } \Omega, \quad (4.69)$$

$$\begin{cases} \partial_{y_i} \hat{u}_{1,i}^i = -\frac{1-\gamma}{\Lambda} (6y_i^2 - 6|y_i| + 1) \sum_{j \neq i} F_j y_j, \\ \hat{u}_{1,m}^i = \frac{1-\gamma}{2\Lambda} F_m y_i^2 (1 - |y_i|)^2, \quad \forall m \neq i, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} (\partial_{y_i} \hat{u}_{2,m}^i + \partial_{y_m} \hat{u}_{2,i}^i) = \frac{\gamma}{2\mu} H_{im}, \quad \forall m \neq i,$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\partial_{y_j} \hat{u}_{3,m}^i + \partial_{y_m} \hat{u}_{3,j}^i) = \frac{\gamma}{2\mu} H_{jm}, \quad \forall j, m \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}, j \neq m, \\ \partial_{y_m} \hat{u}_{3,m}^i = \frac{-\lambda}{\lambda(N-1) + 2\mu} \left( \partial_{x_i} \hat{u}_0^i - \frac{1-\gamma}{\Lambda} (6y_i^2 - 6|y_i| + 1) \sum_{l=1}^N F_l y_l \right) + \\ + \frac{\gamma(\lambda(N-2) + 2\mu)}{2\mu(\lambda(N-1) + 2\mu)} H_{mm} - \frac{\lambda\gamma}{2\mu(\lambda(N-1) + 2\mu)} \sum_{r \neq i, m} H_{rr}, \quad \forall m \neq i. \end{cases}$$

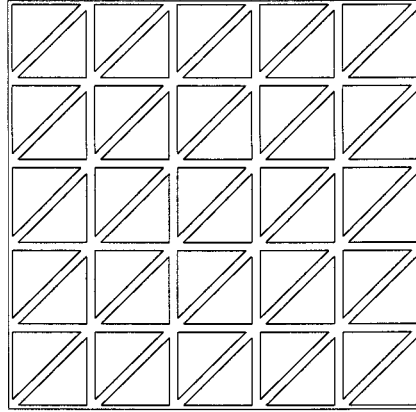
**Observación 4.4.6** *La matriz homogeneizada resultante asociada al problema (4.69) es degenerada, es decir, no satisface la condición de elipticidad. De hecho, para  $i \in \{1, \dots, N\}$ , lo único que tenemos es que  $\partial_{x_i} \hat{u}_0^i$  pertenece a  $L^2(\Omega)$ , y no  $\nabla \hat{u}_0^i \in L^2(\Omega)^N$ .*

**Observación 4.4.7** *Como era de esperar, para  $H = 0$ ,  $N = 3$  y  $\gamma = 1$  (es decir,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon/d_\varepsilon) = 0$ ), la ecuación (4.69) coincide con la obtenida en [31], donde se estudia un problema estrechamente relacionado con (1.23) (en el caso isotrópico) consistente en fijar  $d_\varepsilon = d$  y pasar al límite primero en  $\varepsilon$  y luego en  $d$ . Sin embargo, en nuestro conocimiento, los resultados de ese trabajo no proporcionan ningún resultado de convergencia para el problema (1.23) donde  $\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$  son dos sucesiones arbitrarias que tienden a cero simultáneamente.*

**Observación 4.4.8** *Cuando  $\gamma \neq 1$ , vemos que  $\partial_{y_i} \hat{u}_{1,i}^i$ ,  $m \neq i$ , depende de  $y'_i = \frac{x'_i - \varepsilon \kappa'_i(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon d_\varepsilon}$ . Ello provoca que, a diferencia de lo que ocurría en el problema de difusión, el corrector para  $e(u_\varepsilon)$  dependa explícitamente de  $d_\varepsilon$ , con lo cual no son aplicables en principio los métodos usados en [62], [7], que como en la convergencia en dos escalas usual, sólo usan funciones test del tipo  $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ .*

## 4.5 Estructuras reforzadas

Como se ha destacado en la Observación 4.4.6, el problema homogeneizado (4.69) no satisface la condición habitual de coercividad en  $H_0^1(\Omega)$ . Es conocido (ver [5], [21]) que en el caso en el que  $\varepsilon$  es mucho más pequeño que  $d_\varepsilon$  esta propiedad se puede recuperar añadiendo a la estructura vigas adicionales. Estas estructuras con más vigas se pueden tratar sin mayor dificultad siguiendo las mismas ideas que hemos usado para la estructura modelo. Destacar que el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema de la elasticidad lineal sobre estas estructuras también depende del valor del límite de  $\frac{\varepsilon}{d_\varepsilon}$ . Ello provoca que cuando  $\frac{\varepsilon}{d_\varepsilon}$  no tiende a cero el reforzamiento propuesto no sea completamente satisfactorio, el problema que satisface el "límite" de  $u_\varepsilon$  sigue siendo degenerado.


**Figura 4.1**

Para ser más concreto, vamos a considerar el ejemplo de la estructura bidimensional definida a partir de la estructura modelo (ver Sección 4.1) a la que se le añaden barras oblicuas de sección  $\varepsilon d_\varepsilon$  dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$  (ver la Figura 4.1). En el caso de un material homogéneo e isótropo, esta estructura ha sido estudiada en [21] pasando primero al límite en  $\varepsilon$  y después en  $d_\varepsilon$  (lo que supone  $\varepsilon$  mucho más pequeño que  $d_\varepsilon$ ). Para aplicar nuestro método a dicha estructura, nos situamos en el marco establecido en el Capítulo 1 con  $N = 2$  y  $m = 3$ . Asociamos el índice  $i = 1$  con las barras horizontales,  $i = 2$  con las verticales e  $i = 3$  con las oblicuas. Para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , denotamos por  $\mathfrak{D}^i$  los conjuntos  $\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{D}^2 = Y^2$ ,  $\mathfrak{D}^3 = (\sqrt{2}Y) \times Y$ , y por  $\{\tau^i, \zeta^i\}$  la base ortonormal de  $\mathfrak{D}^i$  dada por

$$\{\tau^1, \zeta^1\} = \{e_1, e_2\}; \quad \{\tau^2, \zeta^2\} = \{-e_2, e_1\}; \quad \{\tau^3, \zeta^3\} = \left\{ \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \frac{-e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Entonces introducimos las estructuras simples  $V_\varepsilon^i$  por

$$V_\varepsilon^i = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \varepsilon k + \lambda_1 \tau^i + \lambda_2 \zeta^i, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{D}^i \right\},$$

y definimos los cambios de variables asociados  $y_\varepsilon^i : V_\varepsilon^i \longrightarrow \mathfrak{D}^i$  como

$$y_\varepsilon^i(x) = \frac{(x - \varepsilon \kappa(\frac{x}{\varepsilon})) \tau^i}{\varepsilon} e_1 + \frac{(x - \varepsilon \kappa(\frac{x}{\varepsilon})) \zeta^i}{\varepsilon d_\varepsilon} e_2, \quad \text{p.c.t. } x \in V_\varepsilon^i. \quad (4.70)$$

Observar que con respecto a la Sección 4.1, en la definición de  $y_\varepsilon^2$  estamos ahora denotando por  $y_1$  lo que antes era  $y_2$ , y por  $y_2$  lo que antes era  $-y_1$ . Aquí, para unificar el estudio, estamos siempre ligando la variable  $y_1$  con la dirección del eje de la barra, e  $y_2$  con la dirección transversal a ésta. Destacar que  $\mathfrak{D}^i$  representa el dominio de la variable microscópica cuando se trabaja con  $V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . A partir de (4.70) se deduce que, para  $u_\varepsilon$  en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^2$ , las sucesiones  $\hat{u}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}^i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , vienen dadas por

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x, y) = u_\varepsilon\left(\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y_1 \tau^i + \varepsilon d_\varepsilon y_2 \zeta^i\right), \quad \text{p.c.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}^i.$$

Para presentar el resultado referente a la homogeneización del sistema de la elasticidad lineal (1.23) cuando se considera la estructura reticulada  $V_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^3 V_\varepsilon^i$  necesitamos las siguientes definiciones (obsérvese la analogía con las Definiciones 4.1.1 y 4.1.5).

**Definición 4.5.1** Para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , se define el espacio funcional  $E^i$  por  $E^i = E_0^i \times E_1^i \times E_2^i \times E_3^i$ , donde

$$E_0^i = \left\{ \hat{u}_0^i \in L^2(\Omega) : \nabla \hat{u}_0^i \tau^i \in L^2(\Omega), \hat{u}_0^i(\nu \tau^i) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$$

$$E_1^i = \left\{ \hat{u}_1^i \in L^2(\Omega; H^1(Y^2))^2 : \hat{u}_1^i \text{ } y_1\text{-periódica, } \hat{u}_1^i \zeta^i = 0 \text{ en } \{y_1 = 0\}, \right.$$

$$\left. \partial_{y_1}(\hat{u}_1^i \zeta^i) + \partial_{y_2}(\hat{u}_1^i \tau^i) = 0, \partial_{y_2}(\hat{u}_1^i \zeta^i) = 0 \text{ en } \Omega \times \mathfrak{D}^i \right\},$$

$$E_2^i = \left\{ \hat{u}_2^i \in L^2(\Omega \times Y^2)^2 : \partial_{y_2}(\hat{u}_2^i \tau^i) \in L^2(\Omega \times Y^2), \hat{u}_2^i \zeta^i \in L^2(\Omega; H^1(Y^2)), \right.$$

$$\left. \hat{u}_2^i \zeta^i \text{ } y_1\text{-periódica, } \int_Y \hat{u}_2^i \zeta^i dy_2 = 0, \partial_{y_2}(\hat{u}_2^i \zeta^i) = 0 \text{ en } \Omega \times \mathfrak{D}^i \right\},$$

$$E_3^i = \left\{ \hat{u}_3^i \in L^2(\Omega \times Y^2)^2 : \partial_{y_2}(\hat{u}_3^i \zeta^i) \in L^2(\Omega; H^1(Y^2)), \hat{u}_3^i \tau^i = 0 \text{ en } \Omega \times \mathfrak{D}^i \right\}.$$

**Observación 4.5.2** Destacar que las hipótesis sobre  $\hat{u}_2^i$  implican  $\hat{u}_2^i \zeta^i = 0$ . Esta condición hace que la demostración de nuestros resultados en el caso de la dimensión dos sea mucho más simple.

**Definición 4.5.3** Sea  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Para  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ , se define  $e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}^i; \mathcal{S}_2)$  por

$$e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) = \begin{pmatrix} \nabla \hat{u}_0^i \tau^i + \partial_{y_1}(\hat{u}_1^i \tau^i) & \frac{1}{2} \partial_{y_2}(\hat{u}_2^i \tau^i) \\ \frac{1}{2} \partial_{y_2}(\hat{u}_2^i \tau^i) & \partial_{y_2}(\hat{u}_3^i \zeta^i) \end{pmatrix}.$$



Denotamos por  $P^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , la matriz ortogonal asociada al cambio de base usado, cuya primera fila es  $\tau^i$  y su segunda fila es  $\zeta^i$ . Sean  $A^i$ ,  $H^i$  definidos respectivamente por las igualdades (1.26) y (1.21), y definamos  $\hat{A}^i$ ,  $\hat{H}^i$  por

$$\hat{A}^i(x, y)(M) = (P^i)^T [A^i(x, y)(P^i M (P^i)^T)] P^i, \quad \forall M \in \mathcal{S}_2, \forall x \in \mathbb{R}^2, \text{ p.c.t. } y \in \mathcal{D}^i,$$

$$\hat{H}^i(x, y) = (P^i)^T H^i(x, y) P^i, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \text{ p.c.t. } y \in \mathcal{D}^i.$$

Como en la sección precedente, denotamos  $\gamma_\varepsilon = \frac{d_\varepsilon}{(\varepsilon + d_\varepsilon)}$  y definimos  $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon$ .

El siguiente resultado resuelve la homogeneización de (1.23) para nuestra elección de  $\Omega_\varepsilon$ . Su demostración es completamente análoga a la del Teorema 4.4.1 y se basa en la obtención de un resultado de compacidad similar al Teorema 4.3.1. Obsérvese que los cambios de variables  $y_\varepsilon^i$  transforman  $e(u_\varepsilon)$  en

$$(P^i)^T \begin{pmatrix} \partial_{y_1}(\hat{u}_\varepsilon^i \tau^i) & \frac{1}{2}(\partial_{y_1}(\hat{u}_\varepsilon^i \zeta^i) + \partial_{y_2}(\hat{u}_\varepsilon^i \tau^i)) \\ \frac{1}{2}(\partial_{y_1}(\hat{u}_\varepsilon^i \zeta^i) + \partial_{y_2}(\hat{u}_\varepsilon^i \tau^i)) & \partial_{y_2}(\hat{u}_\varepsilon^i \zeta^i) \end{pmatrix} P^i.$$

**Teorema 4.5.4** *Sea  $u_\varepsilon$  la sucesión de soluciones de (1.23) y sean  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , solución del problema variacional*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i, \quad \hat{u}_0^3 = \frac{\hat{u}_0^1 + \hat{u}_0^2}{\sqrt{2}}, \\ \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega \times \mathcal{D}^i} (\hat{A}^i e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) - \gamma \hat{H}^i) : e_0^i(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) dy dx = \\ = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega \times \mathcal{D}^i} (\gamma F^i \hat{v}^0 + (1 - \gamma)(F^i \zeta^i)(\hat{v}_1^i \zeta^i)) dy dx, \\ \forall (\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \in E^i, \quad \hat{v}_0^3 = \frac{\hat{v}_0^1 + \hat{v}_0^2}{\sqrt{2}}, \text{ y donde se denota } \hat{v}_0 = (\hat{v}_0^1, \hat{v}_0^2). \end{array} \right. \quad (4.71)$$

Entonces, denotando  $\hat{u}_0 = (\hat{u}_0^1, \hat{u}_0^2)$ , las sucesiones  $g_\varepsilon^i : \Omega_\varepsilon^i \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $G_\varepsilon^i : \Omega_\varepsilon^i \rightarrow \mathcal{S}_2$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\varepsilon,1}^i(\cdot) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon \varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} \hat{u}_0^i(\rho) d\rho, \\ g_{\varepsilon,2}^i(\cdot) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon \varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} \left[ \hat{u}_0(\rho) \zeta^i + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_1^i(\rho, y_\varepsilon^i(\cdot)) \zeta^i \right] d\rho, \end{array} \right.$$

$$G_\varepsilon^i(\cdot) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon \varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} P^i e_0^i(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)(\rho, y_\varepsilon^i(\cdot))(P^i)^T d\rho,$$

proporcionan las siguientes aproximaciones de  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma_\varepsilon^2}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} [|u_\varepsilon(x)\tau^i - g_{\varepsilon,1}(x)|^2 + |u_\varepsilon(x)\zeta^i - g_{\varepsilon,2}(x)|^2 + |e(u_\varepsilon) - G_\varepsilon^i(x)|^2] dx = 0.$$

**Observación 4.5.5** La diferencia principal entre (4.71) y (4.62) es la condición  $\hat{u}_0^3 = \frac{\hat{u}_0^1 + \hat{u}_0^2}{\sqrt{2}}$  que hace que los problemas correspondientes a cada valor de  $i \in \{1, 2, 3\}$  no estén desacoplados. Esta relación y la definición de los espacios  $E_0^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , proporcionan que las funciones

$$\nabla \hat{u}_0^1 \tau^i = e_{11}(\hat{u}_0), \quad \nabla \hat{u}_0^2 \tau^2 = e_{22}(\hat{u}_0), \quad \nabla \hat{u}_0^3 \tau^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [e_{11}(\hat{u}_0) + 2e_{12}(\hat{u}_0) + e_{22}(\hat{u}_0)]$$

pertenezcan a  $L^2(\Omega)$ , de donde se deduce que  $e(\hat{u}_0)$  pertenece a  $L^2(\Omega; \mathcal{S}_N)$ . Puesto que  $\hat{u}_0$  está en  $L^2(\Omega)^2$ , se concluye que  $\hat{u}_0$  pertenece a  $H_0^1(\Omega)^2$ , de aquí que el problema que va a verificar la función  $\hat{u}_0$  sea elíptico.

**Observación 4.5.6** Si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} = 0$  y  $\hat{u}_0$  es suficientemente regular (de no ser así, hay que introducir las medias en los  $C_\varepsilon^k$  como se hace en el teorema), del Teorema 4.5.4 se deduce la convergencia

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - \hat{u}_0(x)|^2 dx = 0,$$

lo que muestra que  $\hat{u}_0$  es el "límite" de  $u_\varepsilon$  en  $L^2$ , el cual es solución de un problema elíptico, es decir, en este caso el problema límite (en macroestructura) no es degenerado.

La situación es diferente si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \in (0, +\infty)$  (o equivalentemente  $\gamma \in (0, 1)$ ). En este caso para las componentes de  $u_\varepsilon$  en la dirección del eje de las barras se sigue verificando (suponiendo  $\hat{u}_0$  suficientemente regular) la convergencia

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_\varepsilon(x)\tau^i - \hat{u}_0(x)\tau^i|^2 dx = 0.$$

Sin embargo, para las deformaciones transversales lo que tenemos es (suponiendo  $\hat{u}_0, \hat{u}_1^i$  suficientemente regulares)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_\varepsilon(x)\zeta^i - \frac{1}{\gamma} \hat{u}_0(x)\zeta^i - \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \hat{u}_1^i(x, y_\varepsilon^i)\zeta^i|^2 dx = 0,$$

con lo cual, si queremos un "límite fuerte" de  $u_\varepsilon$ , hace falta considerar funciones que dependen no sólo de  $x$  sino también de la variable microscópica (y que no tiene derivadas respecto a  $x$  en general). Para evitar esto y dar un límite que sólo dependa de la variable macroscópica nos tenemos que conformar con un límite débil. La definición que nos parece más apropiada (ver [61],[6] donde este tipo de límites también son considerados) es decir que  $u_\varepsilon$  converge débil a  $u_0$  si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Obsérvese que esta definición no necesita regularidad suplementaria para  $u_0$ . Con ayuda del Teorema 4.5.4 se obtiene fácilmente que  $u_0$  viene dado por

$$u_0(x) = \frac{1}{\gamma} \hat{u}_0(x) + \frac{1-\gamma}{(2+\sqrt{2})\gamma^2} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathfrak{D}^i} (\hat{u}_1^i(x,y) \zeta^i) \zeta^i dy, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

En general, la función definida por el sumatorio de la igualdad anterior no pertenece a  $H_0^1(\Omega)^2$  (ver por ejemplo la Proposición 4.5.7), ya que no es solución de un problema en derivadas parciales elíptico. Es decir, en este caso el problema límite sigue siendo degenerado aún habiendo introducido más barras.

Finalmente, si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} = +\infty$  (o sea  $\gamma = 0$ ) las deformaciones pueden ser muy grandes, y para estudiar el comportamiento asintótico tenemos que considerar la sucesión  $\gamma_\varepsilon^2 u_\varepsilon$ , cuyo límite débil viene dado por

$$w_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon^2 u_\varepsilon = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathfrak{D}^i} (\hat{u}_1^i(x,y) \zeta^i) \zeta^i dy, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Para clarificar los puntos expuestos anteriormente consideramos ahora el caso de un material elástico homogéneo e isótropo, para el que podemos resolver el problema (4.71). Su demostración es una simple comprobación que no incluimos.

**Proposición 4.5.7** *Supongamos que existen  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $F \in C^0(\bar{\Omega})^2$  y  $H \in C^0(\bar{\Omega}; \mathcal{S}_2)$ , tales que  $F_\varepsilon = F$ ,  $H_\varepsilon = H$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , y*

$$A_\varepsilon M = \lambda \text{tr}(M) \mathcal{I} + 2\mu M, \quad \forall M \in \mathcal{S}_N, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Denotemos

$$\Lambda = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}.$$

Si  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , satisfacen (4.71), entonces  $\hat{u}_0 = (\hat{u}_0^1, \hat{u}_0^2)$  es la solución del problema variacional

$$\int_{\Omega} [\tilde{A}e(\hat{u}_0) - \tilde{H}] : e(\hat{v}_0) = (2 + \sqrt{2})\gamma \int_{\Omega} F\hat{v}_0 dx, \quad \forall \hat{v}_0 \in H_0^1(\Omega), \quad (4.72)$$

donde  $\tilde{A}$  es el tensor de cuarto orden definido por

$$\tilde{A}_{1111} = \Lambda \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \quad \tilde{A}_{2222} = \Lambda \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \quad \tilde{A}_{ijkh} = \Lambda \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ en los demás casos,}$$

y  $\tilde{H} \in C^0(\Omega; \mathcal{S}_2)$  viene dado por,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,

$$\tilde{H}_{ii} = -\gamma \left( \hat{H}_{11}^i + \frac{\hat{H}_{11}^3}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\gamma\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \hat{H}_{22}^i + \frac{\hat{H}_{22}^3}{\sqrt{2}} \right), \quad \tilde{H}_{ij} = -\gamma \frac{\hat{H}_{11}^3}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\hat{H}_{22}^3}{\sqrt{2}}.$$

Para las funciones  $\hat{u}_1^i$ ,  $\hat{u}_2^i$ ,  $\hat{u}_3^i$  se tienen

$$\hat{u}_1^i \tau^i = \begin{cases} \frac{1-\gamma}{2\Lambda} (F\zeta^i) y_1^2 (1 - |y_1|)^2 & \text{si } i \in \{1, 2\}, \\ \frac{1-\gamma}{2\Lambda} (F\zeta^i) y_1^2 (\sqrt{2} - |y_1|)^2 & \text{si } i = 3, \end{cases}$$

$$\partial_{y_2}(\hat{u}_2^i \zeta^i) = \frac{\gamma}{\mu} \hat{H}_{12}^i,$$

$$\partial_{y_2}(\hat{u}_3^i \zeta^i) = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} (\nabla \hat{u}_0^i \tau^i + \partial_{y_1}(\hat{u}_1^i \tau^i)) + \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \hat{H}_{22}^i.$$

Como ya habíamos comentado, vemos que efectivamente  $\hat{u}_0$  satisface un problema no degenerado (éste es el dado por (4.72)). Obsérvese que coincide con el obtenido en [21] para  $H = 0$ ,  $\gamma = 1$ . Sin embargo (ver Observación 4.5.6) esta función  $u_0$  sólo da el “límite” de  $u_\varepsilon$  en el caso  $\gamma = 1$ .

En el caso  $\gamma \in (0, 1)$  se tiene

$$u_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = \frac{1}{\gamma} \hat{u}_0 + \frac{1}{\gamma^2} w_0,$$

con  $w_0 = BF$ , siendo  $B$  la matriz

$$B = \frac{(1-\gamma)^2}{(2+\sqrt{2})\Lambda} \begin{pmatrix} \frac{32\sqrt{2}+1}{15} & \frac{-\sqrt{2}}{15} \\ \frac{-\sqrt{2}}{15} & \frac{32\sqrt{2}+1}{15} \end{pmatrix}.$$

Vemos que  $w_0$  verifica el problema degenerado

$$B^{-1}w_0 = F,$$

y por tanto que  $u_0$  no satisface un problema elíptico. De hecho, (suponiendo  $H = 0$  para simplificar) observamos que la función que a  $F$  le asocia  $u_0$  se extiende a una función continua de  $L^2(\Omega)^2$  en  $L^2(\Omega)^2$ , pero no de  $H^{-1}(\Omega)^2$  en  $H_0^1(\Omega)^2$  como ocurriría si el problema no fuese degenerado.

En el caso  $\gamma = 1$ , lo que se tiene es

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon^2 u_\varepsilon = w_0,$$

con  $w_0$  la misma que anteriormente, la cual no verifica un problema elíptico.

# Capítulo 5

## Una estructura elástica que degenera en una de dimensión menor

En este capítulo realizamos la homogeneización del sistema de la elasticidad (1.23) planteado sobre una sucesión de estructuras reticuladas tridimensionales formadas por finas barras ortogonales de grosor  $\varepsilon d_\varepsilon$  dispuestas periódicamente con periodo  $\varepsilon$  sobre el plano  $x_3 = 0$  (ver la Figura 1.6). Dichas estructuras se corresponden con las consideradas en la Sección 3.2 en el caso particular  $p_\varepsilon = \varepsilon d_\varepsilon$ , para todo  $\varepsilon > 0$ . Otras elecciones de  $p_\varepsilon$  pueden ser consideradas, pero esto alargaría mucho la presente memoria ya que cada caso debe ser estudiado separadamente.

El capítulo se divide en tres secciones. En la primera de ellas se plantea el problema, se introducen algunas definiciones y se prueban las desigualdades que permiten estimar convenientemente las soluciones de (1.23). El teorema de compacidad correspondiente se demuestra en la Sección 5.2. Para finalizar el capítulo, en la Sección 5.3 se obtiene el problema homogeneizado, el cual es resuelto en el caso de que la estructura esté compuesta por un material elástico homogéneo e isotrópico.

## 5.1 Planteamiento del problema. Estimaciones a priori

Nos proponemos estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema de la elasticidad lineal (1.23) planteado sobre la sucesión de estructuras reticuladas tridimensionales de la Sección 3.2 cuando  $p_\varepsilon = \varepsilon d_\varepsilon$ , para todo  $\varepsilon > 0$ . Es decir, nos situamos en el marco del Capítulo 1 con  $N = 3$ ,  $m = 2$ , y  $V_\varepsilon^i, \hat{y}_\varepsilon^i$  dados por

$$V_\varepsilon^i = \left( \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_l - \varepsilon m| < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2} \right\} \right) \times \varepsilon d_\varepsilon Y, \quad \forall (i, l) \in \mathfrak{P}_2,$$

$$\hat{y}_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i}{\varepsilon} e_i + \frac{x'_i}{\varepsilon d_\varepsilon}, \quad \forall x \in V_\varepsilon^{i,0}, \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

Por la última igualdad, el cambio de variables (1.4) resulta

$$y_\varepsilon^i(x) = \frac{x_i - \varepsilon \kappa_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)}{\varepsilon} e_i + \frac{x'_i - \varepsilon \kappa'_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)}{\varepsilon d_\varepsilon}, \quad \text{p.c.t. } x \in V_\varepsilon^i, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (5.1)$$

El dominio de la variable macroscópica es  $\mathfrak{R}_2^3 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , conjunto que identificamos con  $\mathbb{R}^2$ . Tal y como hicimos en la Sección 3.2, a lo largo de este capítulo denotaremos por  $\zeta'$  un punto genérico de  $\mathfrak{R}_2^3$  (esta notación sustituye a  $\zeta_3$ ).

Para  $u_\varepsilon \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^3$ , la definición (1.5) de  $\hat{u}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  junto con (5.1) proporciona en este caso

$$\hat{u}_\varepsilon^i(x', y) = u_\varepsilon \left( \varepsilon \kappa \left( \frac{x'}{\varepsilon} \right) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i \right), \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (5.2)$$

p.c.t.  $(x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3$ . Al aplicar al operador  $e$  el cambio de variables (5.1), obtenemos (ver Definición 1.2.6)

$$\begin{aligned} e_\varepsilon^i(\hat{v})_{ii} &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_i, & 2e_\varepsilon^i(\hat{v})_{im} &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \hat{v}_m + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \partial_{y_m} \hat{v}_i, \quad \forall m \neq i, \\ 2e_\varepsilon^i(\hat{v})_{mn} &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} (\partial_{y_n} \hat{v}_m + \partial_{y_m} \hat{v}_n), & \forall m, n &\in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Suponemos que  $\Omega = G \times Y$ , con  $G$  un abierto acotado regular de  $\mathbb{R}^2$ . En esta situación  $|\Omega_\varepsilon|$  es del orden de  $\varepsilon d_\varepsilon^2$ .

**Definición 5.1.1** Sea  $i \in \{1, 2\}$ . Se define el espacio funcional  $E^i = E_0^i \times E_1^i \times E_2^i \times E_3^i$ , donde

$$E_0^i = \{ \hat{u}_0^i \in L^2(G) : \partial_{x_i} \hat{u}_0^i \in L^2(G), \hat{u}_0^i \nu_i = 0 \text{ sobre } \partial G \},$$

$$E_1^i = \{ \hat{u}_1^i \in L^2(G; H^1(Y^3))^3 : \hat{u}_1^i \text{ } y_i\text{-periódica, } \hat{u}_{1,j}^i = 0 \text{ en } L^2(G \times S^i),$$

$$e_y(\hat{u}_1^i)_{il} = e_y(\hat{u}_1^i)_{jl} = 0, \quad \forall j, l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\} \},$$

$$E_2^i = \{ \hat{u}_2^i \in L^2(G \times Y^3)^3 : \hat{u}_{2,i}^i \in L^2(G \times J^i; H^1(S^i)), \hat{u}_{2,j}^i \in L^2(G; H^1(Y^3)),$$

$$\hat{u}_{2,j}^i \text{ } y_i\text{-periódica, } \int_{S^i} \hat{u}_{2,j}^i dy_i' = 0 \text{ en } L^2(G \times J^i), e_y(\hat{u}_2^i)_{jl} = 0, \quad \forall j, l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\} \},$$

$$E_3^i = \{ \hat{u}_3^i \in L^2(G \times J^i; H^1(S^i))^3 : \hat{u}_{3,i}^i = 0 \}.$$

**Definición 5.1.2** Sea  $i \in \{1, 2\}$ . Se define  $\mathcal{E}^i$  como el subespacio de  $E^i$  dado por

$$\mathcal{E}^i = \left\{ (\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i : \hat{u}_0^i \in C_0^\infty(G), \hat{u}_1^i \in C_0^\infty(G; C^\infty(Y^3))^3,$$

$$\hat{u}_{2,i}^i \in C_0^\infty(G \times J^i; C^\infty(S^i)), \hat{u}_{2,j}^i \in C_0^\infty(G; C^\infty(Y^3)), j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\},$$

$$\hat{u}_3^i \in C_0^\infty(G \times J^i; C^\infty(S^i))^3 \text{ y } \exists \delta > 0 \text{ tal que } \hat{u}_1^i = \hat{u}_2^i = \hat{u}_3^i = 0 \text{ si } |y_i| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

**Observación 5.1.3** Una función  $\hat{u}_1^i$  pertenece a  $E_1^i$  si y sólo si existen  $a^i \in L^2(G; H_{\#}^1(J^i))$ ,  $b_m^i \in L^2(G; H_{\#}^2(J^i))$ ,  $m \neq i$ , con  $b_m^i(x', 0) = 0$  p.c.t.  $x' \in G$ , tales que

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{1,i}^i(x', y) &= a^i(x', y_i) - \sum_{n \neq i} \partial_{y_i} b_n^i(x', y_i) y_n, \\ \hat{u}_{1,m}^i(x', y) &= b_m^i(x', y_i), \quad \forall m \neq i, \end{aligned} \right\} \text{ p.c.t. } (x', y) \in G \times Y^3.$$

**Observación 5.1.4** Una función  $\hat{u}_2^i$  pertenece a  $E_2^i$  si y sólo si  $\hat{u}_{2,i}^i$  pertenece a  $L^2(G \times J^i; H^1(S^i))$  y existe  $g^i \in L^2(G; H_{\#}^1(J^i))$  tal que

$$\begin{aligned} \hat{u}_{2,j}^i(x', y) &= g^i(x', y_i) y_3, \\ \hat{u}_{2,3}^i(x', y) &= -g^i(x', y_i) y_j, \end{aligned} \quad j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}, \quad \text{p.c.t. } (x', y) \in G \times Y^3.$$

La siguiente definición es útil para expresar el comportamiento límite de  $e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i)$  para  $\hat{u}_\varepsilon^i$  definida a partir de las soluciones de (1.23).



**Definición 5.1.5** Sean  $i, j \in \{1, 2\}$ , con  $i \neq j$ . Para  $\hat{u}_0^3 \in H_0^2(G)$  y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ , se define  $e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3; \mathcal{S}_3)$  por

$$\begin{aligned} e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)_{ii} &= \partial_{x_i} \hat{u}_0^i - \partial_{x_i x_i}^2 \hat{u}_0^3 y_3 + e_y(\hat{u}_1^i)_{ii}, \\ e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)_{ij} &= -\frac{1}{2} \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^3 y_3 + e_y(\hat{u}_2^i)_{ij}, \\ e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)_{i3} &= \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^3 y_j + e_y(\hat{u}_2^i)_{i3}, \\ e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)_{lr} &= e_y(\hat{u}_3^i)_{lr}, \quad \forall l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

A continuación vamos a establecer algunas desigualdades que nos permitirán obtener adecuadas estimaciones para las soluciones de (1.23). Estas estimaciones son fundamentales para pasar al límite en  $\varepsilon$ .

Tenemos la siguiente estimación de la constante de Korn en  $\Omega_\varepsilon$ .

**Proposición 5.1.6** Existe  $C > 0$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  y toda  $u \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^3$  se tiene

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |Du|^2 dx \leq \frac{C}{\varepsilon^2 d_\varepsilon^2} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx. \quad (5.3)$$

**Demostración.** Fijamos  $R > 0$  tal que  $\Omega \subset RY^3$ . Entonces, (5.3) es consecuencia inmediata de aplicar el Lema 6.0.8 a cada barra

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < R, |x_j - m\varepsilon e_j| < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2}, |x_3| < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2} \right\},$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $j \neq i$ . □

**Proposición 5.1.7** Existe  $C > 0$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$ , toda  $u \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^3$ , todo  $(i, j) \in \mathfrak{P}_2$ , se verifica

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_i|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u)|^2 dx, \quad (5.4)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_j|^2 dx \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2}\right) \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx, \quad (5.5)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_3|^2 dx \leq \frac{C}{\varepsilon^2 d_\varepsilon^2} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u)|^2 dx. \quad (5.6)$$

**Demostración.** Sea  $u \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ .

La demostración de (5.4) sigue de

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_i|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\partial_{x_i} u_\varepsilon|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u_\varepsilon)|^2 dx.$$

Para probar (5.5) basta observar que p.c.t.  $x_3 \in \varepsilon d_\varepsilon Y$  la función  $(u_1(\cdot, x_3), u_2(\cdot, x_3))$  pertenece a  $H_{\mathcal{P}_2(\Gamma_\varepsilon)}^1(\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon))^2$ . Aplicando entonces (4.8) con  $N = 2$  e integrando en  $x_3$  se deduce (5.5).

Por último, la demostración de (5.6) sigue de la desigualdad

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_3|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\partial_{x_i} u_3|^2 dx,$$

junto con (5.3). □

## 5.2 Resultado de compacidad

**Teorema 5.2.1** *Se supone que existe  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon/d_\varepsilon) = \lambda \in [0, +\infty]$  (esto siempre se tiene para una subsucesión). Sea  $u_\varepsilon$  una sucesión en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^3$  satisfaciendo*

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^2 dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (5.7)$$

y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , por (5.2). Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ ,  $\hat{u}_0^3 \in H_0^2(G)$  y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , tales que ( $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ )

$$\hat{u}_{\varepsilon,i}^i \rightharpoonup \hat{u}_0^i - \partial_{x_i} \hat{u}_0^3 y_3 \quad \text{en } L^2(G \times Y^3), \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{\varepsilon,j}^i &\rightharpoonup \hat{u}_0^j - \partial_{x_j} \hat{u}_0^3 y_3 + \lambda \hat{u}_{1,j}^i & \text{si } \lambda \in [0, +\infty) \\ \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \hat{u}_{\varepsilon,j}^i &\rightharpoonup \hat{u}_{1,j}^i & \text{si } \lambda = +\infty \end{aligned} \right\} \text{en } L^2(G \times Y^3), \quad (5.9)$$

$$\varepsilon d_\varepsilon \hat{u}_{\varepsilon,3}^i \rightarrow \hat{u}_0^3 \quad \text{en } L^2(G \times Y^3), \quad (5.10)$$

$$e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) \rightarrow e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \quad \text{en } L^2(G \times Y^3; \mathcal{S}_3). \quad (5.11)$$

**Demostración.** Procedemos en varios pasos.

**Paso 1.** Se considera la sucesión  $m'_\varepsilon = (m_{\varepsilon,1}, m_{\varepsilon,2}) \in H^1_{\mathcal{P}_2(\Gamma_\varepsilon)}(\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon))^2$  obtenida al tomar el valor medio de  $(u_{\varepsilon,1}, u_{\varepsilon,2})$  con respecto a  $x_3$ , es decir definida por

$$m_{\varepsilon,l}(x') = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{\varepsilon d_\varepsilon Y} u_{\varepsilon,l}(x' + \eta_3 e_3) d\eta_3, \quad \forall l \in \{1, 2\}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \text{p.c.t. } x' \in \mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon).$$

De la estimación (5.7) se obtiene

$$\frac{1}{|\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon)|} \int_{\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon)} |e(m'_\varepsilon)|^2 dx' \leq \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^2 \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces, definiendo  $\hat{m}_\varepsilon^i, i \in \{1, 2\}$ , por

$$\hat{m}_\varepsilon^i(x', y_1, y_2) = m'_\varepsilon(\varepsilon \kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y_j e_j), \quad (i, j) \in \mathfrak{P}_2,$$

y  $j$  por  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ , el Teorema 4.3.1 con  $N = 2$  implica que existen  $\hat{m}_0^i \in L^2(G)$ , con  $\partial_{x_i} \hat{m}_0^i \in L^2(G)$ ,  $\hat{m}_0^i \nu_i = 0$  sobre  $\partial G$ ,  $\hat{m}_1^i \in L^2(G; H^1(Y^2))^2$   $y_i$ -periódica, con  $\hat{m}_{1,j}^i = 0$  en  $L^2(G \times J^j)$ ,  $e_y(\hat{m}_1^i)_{ij} = e_y(\hat{m}_1^i)_{jj} = 0$ ,  $\hat{m}_{2,i}^i, \hat{m}_{3,j}^i \in L^2(G \times J^i; H^1(J^j))$ , tales que, al menos para una subsucesión, se tiene

$$\begin{aligned} & \hat{m}_{\varepsilon,i}^i \rightharpoonup \hat{m}_0^i \quad \text{en } L^2(G \times Y^2), \\ & \left. \begin{aligned} & \hat{m}_{\varepsilon,j}^i \rightharpoonup \hat{m}_0^j + \lambda \hat{m}_{1,j}^i \quad \text{si } \lambda \in [0, +\infty) \\ & \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \hat{m}_{\varepsilon,j}^i \rightharpoonup \hat{m}_{1,j}^i, \quad \text{si } \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \text{en } L^2(G \times Y^2), \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\left. \begin{aligned} & e_\varepsilon^i(\hat{m}_\varepsilon^i)_{ii} \rightharpoonup \partial_{x_i} \hat{m}_0^i + \partial_{y_i} \hat{m}_{1,i}^i \\ & e_\varepsilon^i(\hat{m}_\varepsilon^i)_{ij} \rightharpoonup \frac{1}{2} \partial_{y_j} \hat{m}_{2,i}^i \\ & e_\varepsilon^i(\hat{m}_\varepsilon^i)_{jj} \rightharpoonup \partial_{y_j} \hat{m}_{3,j}^i \end{aligned} \right\} \text{en } L^2(G \times Y^2).$$

**Paso 2.** Vamos ahora a estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión  $v_\varepsilon \in H^1_{\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)^3$  definida por

$$v_{\varepsilon,l} = u_{\varepsilon,l} - m_{\varepsilon,l}, \quad \text{si } l \in \{1, 2\}, \quad v_{\varepsilon,3} = u_{\varepsilon,3}. \tag{5.13}$$

Comenzamos obteniendo algunas estimaciones para esta sucesión. Por definición, se tiene

$$\int_{\varepsilon d_\varepsilon Y} v_{\varepsilon,l}(x) dx_3 = 0, \quad \forall l \in \{1, 2\}, \quad \text{p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2, \tag{5.14}$$

$$\int_{\varepsilon d_\varepsilon Y} \partial_{x_r} v_{\varepsilon,l}(x) dx_3 = 0, \quad \forall l, r \in \{1, 2\}, \text{ p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2, \quad (5.15)$$

mientras que (5.7) da

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(v_\varepsilon)|^2 dx \leq \frac{C}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(u_\varepsilon)|^2 dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.16)$$

Consideramos ahora  $V_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , descompuesto en una unión de cubos de lado  $\varepsilon d_\varepsilon$  tales que los interiores de los cubos sean disjuntos dos a dos. Si  $Q$  es uno de estos cubos, gracias a (5.15) se tiene

$$\int_Q \partial_{x_r} v_{\varepsilon,l} dx = 0, \quad \forall l, r \in \{1, 2\}.$$

Teniendo entonces en cuenta que la constante que aparece en la desigualdad (6.12) es invariante por semejanzas, se tiene

$$\int_Q |\partial_{x_r} v_{\varepsilon,l}|^2 dx \leq C \int_Q |e(v_\varepsilon)|^2 dx, \quad \forall l, r \in \{1, 2\}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

donde  $C$  no depende ni de  $Q$ , ni de  $\varepsilon$ , ni de  $V_\varepsilon$ . Sumando sobre todos los cubos se tiene entonces

$$\int_{\Omega_\varepsilon^i} |\partial_{x_r} v_{\varepsilon,l}|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(v_\varepsilon)|^2 dx, \quad \forall l, r \in \{1, 2\}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.17)$$

Las desigualdades (5.16), (5.17) implican que las sucesiones  $\hat{v}_\varepsilon^i$  satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)|^2 dy dx' = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon^2} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(v_\varepsilon)|^2 dx \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (5.18)$$

y

$$\frac{1}{\varepsilon^2 d_\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i|^2 dy dx' \leq C, \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i|^2 dy dx' \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (5.19)$$

para  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ . De (5.3)-(5.5) aplicadas a  $v_\varepsilon$ , se deduce también que para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i|^2 dy dx' \leq \frac{C}{d_\varepsilon^2}, \quad (5.20)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\partial_{y_l} \hat{v}_{\varepsilon,r}^i|^2 dy dx' \leq C, \quad \forall l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}, \quad l \neq r, \quad (5.21)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\hat{v}_{\varepsilon,i}^i|^2 dy dx' \leq C, \quad (5.22)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\hat{v}_{\varepsilon,j}^i|^2 dy dx' \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^2}\right), \quad j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}, \quad (5.23)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\hat{v}_{\varepsilon,3}^i|^2 dy dx' \leq \frac{C}{\varepsilon^2 d_\varepsilon^2}. \quad (5.24)$$

Las igualdades (5.14) y (5.15) implican además

$$\int_Y \hat{v}_{\varepsilon,l}^i(x', y) dy_3 = 0, \quad \forall l \in \{1, 2\}, \quad \text{p.c.t. } (x', y') \in G \times Y^2, \quad (5.25)$$

y

$$\int_Y \partial_{y_r} \hat{v}_{\varepsilon,l}^i(x', y) dy_3 = 0, \quad \forall l, r \in \{1, 2\}, \quad \text{p.c.t. } (x', y') \in G \times Y^2. \quad (5.26)$$

**Paso 3.** Consideramos ahora  $h_\varepsilon \in H_{\mathcal{P}_2(\Gamma_\varepsilon)}^1(\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon))$ ,  $\varepsilon > 0$ , definida por

$$h_\varepsilon(x') = \int_{\varepsilon d_\varepsilon Y} v_{\varepsilon,3}(x) dx_3, \quad \text{p.c.t. } x' \in \mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon).$$

Usando la desigualdad de Hölder, (5.3) y (5.7), se obtiene

$$\int_{\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon)} |\partial_{x_l} h_\varepsilon|^2 dx' \leq \varepsilon d_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |\partial_{x_l} v_{\varepsilon,3}|^2 dx \leq \frac{C}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} |e(v_\varepsilon)|^2 dx \leq C |\mathcal{P}_2(\Omega_\varepsilon)|,$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $l \in \{1, 2\}$ . Entonces, del Teorema 2.1.2 con  $N = 2$ , se deduce la existencia de una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{v}_0^3 \in H_0^1(G)$  tales que las sucesiones  $\hat{h}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definidas por

$$\hat{h}_\varepsilon^i(x', y') = h_\varepsilon(\varepsilon \kappa(\frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y_j e_j), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad j \in \{1, 2\} \setminus \{i\},$$

satisfacen

$$\hat{h}_\varepsilon^i \rightarrow \hat{v}_0^3 \quad \text{en } L^2(G \times Y^2). \quad (5.27)$$

Teniendo entonces en cuenta la igualdad

$$\hat{h}_\varepsilon^i(x', y') = \varepsilon d_\varepsilon \int_Y \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y) dy_3, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

junto con la desigualdad de Poincaré-Wirtinger

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y) - \int_Y \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y' + \tau e_3) d\tau_3|^2 dy dx' \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} |\partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y)|^2 dy dx' \leq C \varepsilon^2 d_\varepsilon^2,$$

se tiene entonces

$$\varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_{\varepsilon,3}^i \longrightarrow \hat{v}_0^3 \quad \text{en } L^2(G \times Y^3). \quad (5.28)$$

De (5.18), se sigue que, al menos para una subsucesión,  $e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)$  converge débilmente en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3; \mathcal{S}_3)$ . Los pasos que restan están dedicados a caracterizar su límite. Para ello fijamos  $i \in \{1, 2\}$  y definimos  $j$  por  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ .

**Paso 4.** Se define  $\hat{w}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x', y) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x', y) - \int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x', \eta) d\eta y_3 \right), \quad (5.29)$$

$$\hat{w}_{\varepsilon,j}^i(x', y) = \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \left( \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(x', y) - \int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta) d\eta y_3 \right), \quad (5.30)$$

$$\hat{w}_{\varepsilon,3}^i(x', y) = \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \left( \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y) - \int_{Y^3} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta - \sum_{l=1}^2 \int_{Y^3} \partial_{y_l} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta y_l \right), \quad (5.31)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ , p.c.t.  $(x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3$ . Por (5.18),  $e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)$  está acotado en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3; \mathcal{S}_3)$ . Además, teniendo en cuenta (5.25) y (5.26), la integral en  $Y^3$  de  $\hat{w}_\varepsilon^i(x', \cdot)$  y  $\partial_{y_r} \hat{w}_{\varepsilon,l}^i(x', \cdot)$ ,  $l, r \in \{1, 2, 3\}$ ,  $l \neq r$ , es cero p.c.t.  $x' \in \mathbb{R}^2$ . Por lo que, gracias a las desigualdades de Korn y Poincaré-Wirtinger,  $\hat{w}_\varepsilon^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^2; H^1(Y^3))^3$ . De (5.18) y (5.19), se deduce además que  $\partial_{y_j} \hat{w}_{\varepsilon,i}^i$ ,  $\partial_{y_i} \hat{w}_{\varepsilon,j}^i$ ,  $e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)_{i3}$ ,  $e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)_{lr}$ ,  $l, r \in \{j, 3\}$ , tienden a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. Por tanto, existe  $\hat{w}^i \in L^2(\mathbb{R}^2; H^1(Y^3))^3$  tal que,  $\hat{w}_j^i$ ,  $e_y(\hat{w}^i)_{ij}$ ,  $e_y(\hat{w}^i)_{i3}$ ,  $l \in \{1, 2, 3\}$ , son cero, y al menos para una subsucesión,  $\hat{w}_\varepsilon^i$  converge débilmente a  $\hat{w}^i$  en  $L^2(\mathbb{R}^2; H^1(Y^3))^3$ .

Veremos a continuación las propiedades de periodicidad de  $\hat{w}^i$ . Para ello usaremos la propiedad

$$\hat{v}_{\varepsilon,l}^i(x' + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + \cdot) = \hat{v}_{\varepsilon,l}^i(x', \frac{1}{2}e_i + \cdot) \quad \text{en } L^2(S^i), \quad \forall l \in \{1, 2, 3\}, \text{ p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2. \quad (5.32)$$

En particular, escogiendo  $l = i$ , se sigue que, p.c.t.  $y'_i \in S^i$  y p.c.t.  $x' \in \mathbb{R}^2$ , se tiene

$$\hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x', \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x' + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y'_i) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{Y^3} (\partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x', \eta)) d\eta y_3.$$

Para calcular el límite en  $\varepsilon$  de este término, se multiplica por  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  y se integra en

$\mathbb{R}^2$ , deduciéndose

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x', \eta)) d\eta \varphi(x') dx' = \\
 & = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x', \eta) d\eta \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx' = \\
 & = - \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x', \eta) d\eta \partial_{x_i} \varphi(x') dx' + O_\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Por otra parte, gracias a (5.18), para toda  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , se verifica

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(x', \eta) d\eta \psi(x') dx' = -d_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta \psi(x') dx' + O_\varepsilon = \\
 & = \frac{-1}{d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(x) \psi(x') dx' + O_\varepsilon = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} v_{\varepsilon,3}(x) \partial_{x_i} \psi(x') dx' + O_\varepsilon = \\
 & = \varepsilon d_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta \partial_{x_i} \psi(x') dx' + O_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{v}_0^3(x') \partial_{x_i} \psi(x') dx' + O_\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Como por (5.21)  $\partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , se deduce

$$\int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,i}^i(\cdot, y) dy \rightharpoonup -\partial_{x_i} \hat{v}_0^3 \quad \text{en } L^2(G). \tag{5.34}$$

Teniendo en cuenta (5.33), (5.34) y que  $\hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x', \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_{\varepsilon,i}^i(x' + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y'_i)$  converge débilmente en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times S^i)$  a  $\hat{w}_i^i(x', \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_i^i(x', -\frac{1}{2}e_i + y'_i)$ , se deduce entonces que  $\partial_{x_i x_i}^2 \hat{v}_0^3$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^2)$  y

$$\hat{w}_i^i(x', \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_i^i(x', -\frac{1}{2}e_i + y'_i) = -\partial_{x_i x_i}^2 \hat{v}_0^3(x') y_3, \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times S^i). \tag{5.35}$$

Análogamente, usando (5.32) con  $l = 3$  y la definición de  $\hat{w}_{\varepsilon,3}^i$ , se deduce que, p.c.t.  $(x', y'_i) \in \mathbb{R}^2 \times S^i$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 & \hat{w}_{\varepsilon,3}^i(x', \frac{1}{2}e_i + y'_i) - \hat{w}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y'_i) = \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{Y^3} (\hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta - \\
 & \quad - \frac{d_\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{Y^3} (\partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) + \partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta + \\
 & \quad + \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{Y^3} (\partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta y_j.
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Para estimar el primer sumando del miembro derecho de esta igualdad, se usa que para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , el cambio de variables  $z = \varepsilon k' + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon (y_j e_j + y_3 e_3)$  y un

desarrollo de  $\varphi$  en  $z'$  junto con las desigualdades (5.24), (5.6), dan

$$\begin{aligned}
& \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta \varphi(x') dx' = \\
& = d_\varepsilon \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{Y^3} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(\varepsilon k', y) dy \int_{C_\varepsilon^{k'}} \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx' = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^3 d_\varepsilon} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} v_{\varepsilon,3}(z) \left[ -\partial_{x_i} \varphi(z') \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \partial_{x_i x_i}^2 \varphi(z') \varepsilon^3 - \partial_{x_i x_i}^2 \varphi(z') \int_{C_\varepsilon^{k'}} (x_i - z_i) dx' - \right. \\
& \left. - \partial_{x_i x_j}^2 \varphi(z') \int_{C_\varepsilon^{k'}} (x_j - z_j) dx' \right] dz + O_\varepsilon = \frac{-1}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} v_{\varepsilon,3}(z) \left[ \partial_{x_i} \varphi(z') - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{x_i x_i}^2 \varphi(z') \right] dz - \\
& - \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} v_{\varepsilon,3}(z) \left[ \partial_{x_i x_i}^2 \varphi(z') (\varepsilon k_i - z_i) + \partial_{x_i x_j}^2 \varphi(z') (\varepsilon k_j - z_j) \right] dz + O_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Para estimar el último término de esta igualdad, usamos que gracias a que  $\hat{w}_{\varepsilon,3}^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \left| v_{\varepsilon,3}(z) - \frac{1}{\varepsilon^3 d_\varepsilon^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} v_{\varepsilon,3}(\rho) d\rho - \frac{1}{\varepsilon^2 d_\varepsilon^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(\rho) d\rho \frac{z_i - \varepsilon k_i}{\varepsilon} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\varepsilon^2 d_\varepsilon} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_j} v_{\varepsilon,3}(\rho) d\rho \frac{z_j - \varepsilon k_j}{\varepsilon d_\varepsilon} \right|^2 dz = \|\hat{w}_{\varepsilon,3}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)}^2 \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

y por tanto, usando (5.3) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} v_{\varepsilon,3}(z) \left[ \partial_{x_i x_i}^2 \varphi(z') (z_i - \varepsilon k_i) + \partial_{x_i x_j}^2 \varphi(z') (z_j - \varepsilon k_j) \right] dz = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^4 d_\varepsilon^3} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} v_{\varepsilon,3}(\rho) d\rho \partial_{x_i x_i}^2 \varphi(\varepsilon k) \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} (z_i - \varepsilon k_i) dz + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^4 d_\varepsilon^3} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} v_{\varepsilon,3}(\rho) d\rho \partial_{x_i x_j}^2 \varphi(\varepsilon k) \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} (z_j - \varepsilon k_j) dz + O_\varepsilon = O_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego se ha probado

$$\begin{aligned}
& \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta \varphi(x') dx' = \\
& = \frac{-1}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} v_{\varepsilon,3}(z) \partial_{x_i} \varphi(z') dz + \frac{1}{2d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} v_{\varepsilon,3}(z) \partial_{x_i x_i}^2 \varphi(z') dz + O_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

En cuanto al segundo término del miembro derecho de (5.36), un razonamiento similar



que usa (5.20) muestra

$$\begin{aligned}
 & \frac{d_\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) + \partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta \varphi(x') dx' + O_\varepsilon = \\
 & = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(z) \left[ \varphi(z') - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{x_i} \varphi(z') \right] dz + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(z) \partial_{x_i} \varphi(z') (\varepsilon k_i - z_i) dz.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Gracia a que las constantes que aparecen en el Lema 6.0.8 son invariantes por rotaciones y traslaciones, se tiene

$$\int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \left| \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(z) - \frac{1}{\varepsilon^3 d_\varepsilon^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(\eta) d\eta \right|^2 dz \leq C \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} |e(v_\varepsilon)|^2 dz, \quad \forall k' \in \mathbb{Z}^2,$$

y entonces, usando (5.16), se prueba que el último sumando de (5.38) satisface

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(z) \partial_{x_i} \varphi(z') (\varepsilon k_i - z_i) dz = \\
 & = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\varepsilon^3 d_\varepsilon^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(\eta) d\eta \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_i} \varphi(z') (\varepsilon k_i - z_i) dz + O_\varepsilon = \\
 & = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\varepsilon^3 d_\varepsilon^2} \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(\eta) d\eta \partial_{x_i} \varphi(\varepsilon k') \int_{V_\varepsilon^{i,k'}} (\varepsilon k_i - z_i) dz + O_\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{d_\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) + \partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta \varphi(x') dx' = \\
 & = \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(z) \varphi(z') dz - \frac{1}{2d_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \partial_{x_i} v_{\varepsilon,3}(z) \partial_{x_i} \varphi(z') dz + O_\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Una simple integración por partes junto con (5.37) y (5.39) prueba entonces

$$\begin{aligned}
 & \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{Y^3} (\hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta - \\
 & - \frac{d_\varepsilon}{2\varepsilon} \int_{Y^3} (\partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) + \partial_{y_i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta \longrightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).
 \end{aligned}$$

Finalmente, para estimar el último término en (5.36), se usa (5.21), que prueba para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  se tiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta)) d\eta \varphi(x') dx' = \\
 & = d_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx' = O_\varepsilon,
 \end{aligned}$$

y por tanto el correspondiente término tiende a cero en el sentido de las distribuciones.

Pasando pues al límite en (5.36) en el sentido de las distribuciones se concluye que  $\hat{w}_3^i$  satisface la condición de periodicidad

$$\hat{w}_3^i(x', \frac{1}{2}e_i + \cdot) = \hat{w}_3^i(x', -\frac{1}{2}e_i + \cdot) \quad \text{en } L^2(S^i), \quad \text{p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2.$$

De todo lo anterior se sigue que la función  $\hat{v}_1^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\hat{v}_1^i(x', y) = \hat{w}^i(x', y) + \partial_{x_i x_i}^2 \hat{v}_0^3(x') y_3 y_i e_i - \partial_{x_i x_i}^2 \hat{v}_0^3(x') \frac{y_i^2}{2} e_3, \quad (x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3,$$

pertenece a  $E_1^i$  y satisface

$$e_\varepsilon^i (\hat{v}_\varepsilon^i)_{ii} \rightharpoonup -\partial_{x_i x_i}^2 \hat{v}_0^3 y_3 + \partial_{y_i} \hat{v}_{1,i}^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3).$$

**Paso 5.** La sucesión  $\hat{w}_\varepsilon^i$  nos va también a ayudar a estudiar el comportamiento asintótico de  $\hat{v}_\varepsilon^i$  en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , para ello, puesto que  $\hat{w}_{\varepsilon,i}^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , se deduce de (5.29) y (5.34) que

$$\hat{v}_{\varepsilon,i}^i \rightharpoonup -\partial_{x_i} \hat{v}_0^3 y_3 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3). \quad (5.40)$$

Usando que  $\hat{w}_{\varepsilon,j}^i$  converge débilmente a cero en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , se deduce gracias a (5.21) que si  $\lambda = +\infty$ , entonces  $(d_\varepsilon/\varepsilon)\hat{v}_{\varepsilon,j}^i$  converge débilmente a cero en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , mientras que si  $\lambda$  pertenece a  $[0, +\infty)$ , se tiene

$$\hat{v}_{\varepsilon,j}^i - \int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(\cdot, \eta) d\eta y_3 \rightharpoonup 0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3). \quad (5.41)$$

Vamos a calcular el límite de  $\int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(\cdot, \eta) d\eta$  en  $L^2(\mathbb{R}^2)$  débil. Por (5.18), se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(\cdot, y) dy + \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(\cdot, y) dy \right] = 0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2), \quad (5.42)$$

y por tanto basta calcular el límite débil de  $\int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(\cdot, y) dy$  en  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Por otra parte, usando el Lema 6.0.5, (5.31), (5.18) y  $\lambda < +\infty$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y) dy - \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta \right|^2 dx' = \\
 & = \frac{1}{d_\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \left( \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y) - \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta \right) dy \right|^2 dx' \leq \\
 & \leq \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \left| \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y) - \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta \right|^2 dy dx' = \\
 & = \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \left| \partial_{y_j} \hat{w}_{\varepsilon,3}^i(x', y) - \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{w}_{\varepsilon,3}^i(x', \eta) d\eta \right|^2 dy dx' \leq \\
 & \leq C \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \sum_{\substack{1 \leq l, r \leq 3 \\ (l,r) \neq (i,i)}} |e_y(\hat{w}_\varepsilon^i)_{lr}|^2 dy dx' \leq C \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \sum_{\substack{1 \leq l, r \leq 3 \\ (l,r) \neq (i,i)}} |e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{lr}|^2 dy dx' \leq C\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

luego el problema se reduce a calcular el límite de

$$\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{|y_i| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(\cdot, y) dy = \frac{1}{\varepsilon^2 d_\varepsilon^2} \int_{P_\varepsilon(\cdot)} \partial_{x_j} v_{\varepsilon,3}(z) dz = \int_{|y_j| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^j(\cdot, y) dy. \tag{5.44}$$

Un razonamiento análogo a (5.43) con la sucesión  $\hat{w}_\varepsilon^j$ , la cual está acotada en el espacio  $L^2(\mathbb{R}^2; H^1(Y^3))^3$ , prueba

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{|y_j| < \frac{d_\varepsilon}{2}} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^j(x', y) dy - d_\varepsilon \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^j(x', \eta) d\eta \right|^2 dx' \leq \\
 & \leq \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \left| \partial_{y_j} \hat{w}_{\varepsilon,3}^j(x', y) \right|^2 dy dx' \leq C \frac{\varepsilon^2}{d_\varepsilon} \leq C\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

con lo que el límite en la topología débil de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  de  $\int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(\cdot, y) dy$  coincide con el de  $d_\varepsilon \int_{Y^3} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^j(\cdot, \eta) d\eta$ , y gracias a que  $e_\varepsilon^j(\hat{v}_\varepsilon^j)_{j3}$  está acotado en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , con el de  $\int_{Y^3} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,j}^j(\cdot, y) dy$ . Entonces, de (5.34) con  $i$  reemplazado por  $j$ , y de (5.41), se deduce fácilmente

$$\hat{v}_{\varepsilon,j}^i \rightharpoonup -\partial_{x_j} \hat{v}_0^3 y_3 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \text{si } \lambda \in [0, +\infty).$$

**Paso 6.** Vamos a estudiar ahora el límite débil en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$  de  $e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{il}$ ,  $l \neq i$ . El razonamiento es similar al Paso 3 del Teorema 4.3.1, comenzamos tomando la extensión de  $\hat{v}_\varepsilon^i$  a  $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}e_i + S^i)$ , aún denotada por  $\hat{v}_\varepsilon^i$ , definida por

$$\hat{v}_\varepsilon^i(x', y) = v_\varepsilon(\varepsilon \kappa(\frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i), \quad \text{p.c.t. } (x', y) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}e_i + S^i), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

la cual pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^2; H^1(\mathbb{R}e_i + S^i))^3$  y satisfice

$$\hat{v}_\varepsilon^i(x', y) = \hat{v}_\varepsilon^i(x' + n\varepsilon e_i, (y_i - n)e_i + y'_i), \text{ p.c.t. } (x', y) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}e_i + S^i), \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.46)$$

Con ayuda de esta extensión, se define entonces una regularización  $\tilde{v}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $\hat{v}_\varepsilon^i$  como

$$\tilde{v}_\varepsilon^i(x', y) = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_\varepsilon^i(x', (y_i + \eta_i)e_i + y'_i) d\eta_i, \text{ p.c.t. } (x', y) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}e_i + S^i), \forall \varepsilon > 0,$$

la cual es tal que  $\partial_{y_i} \tilde{v}_\varepsilon^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^2; H^1(Y^3))^3$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , y razonando como en el Paso 3 de la demostración del Teorema 4.3.1, verifica

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} (\partial_{y_3} \tilde{v}_{\varepsilon, i}^i - \int_{S^i} \partial_{y_3} \tilde{v}_{\varepsilon, i}^i d\tau'_i) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)}^2 \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (5.47)$$

y

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\partial_{y_i} \tilde{v}_{\varepsilon, 3}^i - \int_{S^i} \partial_{y_i} \tilde{v}_{\varepsilon, 3}^i d\tau'_i) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)}^2 \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.48)$$

Definimos ahora  $\tilde{t}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\varepsilon, i}^i(x', y) &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \left( \tilde{v}_{\varepsilon, i}^i(x', y) - \int_{S^i} \tilde{v}_{\varepsilon, i}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i - \sum_{r \neq i} \int_{S^i} \partial_{y_r} \tilde{v}_{\varepsilon, i}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_r \right), \\ \tilde{t}_{\varepsilon, l}^i(x', y) &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \tilde{v}_{\varepsilon, l}^i(x', y) - \int_Y \tilde{v}_{\varepsilon, l}^i(x', \tau_i e_i + y'_i) d\tau_i - \int_{S^i} \tilde{v}_{\varepsilon, l}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i + \int_{Y^3} \tilde{v}_{\varepsilon, l}^i(x', \tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

para todo  $l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$  y p.c.t.  $(x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3$ . Por (5.19), (5.47) y (5.48) se tiene

$$\|\partial_{y_i} \tilde{t}_{\varepsilon, i}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)} \leq C, \quad \|\partial_{y_i} \tilde{t}_{\varepsilon, l}^i\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)} \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}. \quad (5.50)$$

Además, se verifican las igualdades

$$\int_{S^i} \tilde{t}_{\varepsilon, i}^i(x', y_i e_i + \eta'_i) d\eta'_i = 0, \quad \text{p.c.t. } (x', y_i) \in \mathbb{R}^2 \times Y,$$

y

$$\int_Y \tilde{t}_{\varepsilon, l}^i(x', \eta_i e_i + y'_i) d\eta_i = 0 \quad \text{p.c.t. } (x', y'_i) \in \mathbb{R}^2 \times S^i, \forall l \neq i.$$

Gracias a la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, se deduce que  $\tilde{t}_{\varepsilon, i}^i$  y  $\tilde{t}_{\varepsilon, l}^i$ ,  $l \neq i$ , están respectivamente acotadas en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times J^i; H^1(S^i))$  y  $L^2(\mathbb{R}^2 \times S^i; H^1(J^i))$ . Entonces, existe  $\hat{t}^i = (\hat{t}_1^i, \hat{t}_2^i, \hat{t}_3^i)$  tal que, para una subsucesión, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\varepsilon, i}^i &\rightharpoonup \hat{t}_i^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times J^i; H^1(S^i)), \\ \tilde{t}_{\varepsilon, l}^i &\rightharpoonup \hat{t}_l^i \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times S^i; H^1(J^i)), \quad \forall l \neq i. \end{aligned}$$

Como  $e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ , de las igualdades

$$e_y(\tilde{t}_\varepsilon^i)_{ir}(x', y) = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \left( e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{ir}(x', (y_i + \eta_i)e_i + y'_i) - \int_{S^i} e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{ir}(x', (y_i + \eta_i)e_i + \tau'_i) d\tau'_i \right) d\eta_i,$$

$$e_y(\tilde{t}_\varepsilon^i)_{lr}(x', y) = \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \left( e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{lr}(x', (y_i + \eta_i)e_i + y'_i) - \int_Y e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{lr}(x', (\tau_i + \eta_i)e_i + y'_i) d\tau_i \right) d\eta_i,$$

para todo  $l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$  y p.c.t.  $(x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3$ , se deduce

$$e_y(\tilde{t}^i)_{ir}(x, y) = \hat{\mu}_r^i(x, y) - \int_{S^i} \hat{\mu}_r^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i, \quad e_y(\tilde{t}^i)_{lr} = 0, \quad \forall l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\},$$

donde, para cada  $r \neq i$ , se está denotando por  $\hat{\mu}_r^i$  el límite débil en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$  de  $e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{ir}$ .

Definiendo  $\hat{q}^i = (\hat{q}_1^i, \hat{q}_2^i, \hat{q}_3^i)$  por

$$\hat{q}_i^i(x', y) = \tilde{t}_i^i(x', y) + 2 \sum_{r \neq i} \int_{S^i} \hat{\mu}_r^i(x, y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_r,$$

$$\hat{q}_l^i(x', y) = \tilde{t}_l^i(x', y), \quad \forall l \neq i,$$

entonces  $\hat{q}_i^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^2 \times J^i; H^1(S^i))$ ,  $\hat{q}_l^i$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^2 \times S^i; H^1(J^i))$  para  $l \neq i$ , y se satisface

$$e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{il} \rightharpoonup \hat{\mu}_l^i = e_y(\hat{q}^i)_{il} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3). \quad (5.51)$$

Se tiene también

$$\int_{S^i} \hat{q}_l^i(x', y_i e_i + \eta'_i) d\eta'_i = 0, \quad \text{p.c.t. } (x', y_i) \in \mathbb{R}^2 \times Y, \quad e_y(\hat{q}_2^i)_{lr} = 0, \quad \forall l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\},$$

de donde se sigue fácilmente que existe  $g^i \in L^2(\mathbb{R}^2; H^1(J^i))$  tal que

$$\hat{q}_j^i(x', y) = g^i(x', y_i) y_3, \quad \hat{q}_3^i(x', y) = -g^i(x', y_i) y_j, \quad \text{p.c.t. } (x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3.$$

En particular, esto muestra que  $\hat{q}_l^i$  está en  $L^2(\mathbb{R}^2; H^1(Y^3))$ , para todo  $l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ .

Mostraremos ahora que  $\hat{q}_l^i$ ,  $l \neq i$ , es  $y_i$ -periódica. Para ello basta probar que  $g^i$  lo es.

Se sabe

$$g^i(x', y_i) = 12 \int_{S^i} \hat{q}_j^i(x', y_i e_i + \eta'_i) \eta_3 d\eta'_i =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 12 \int_{S^i} \tilde{t}_{\varepsilon, j}^i(x', y_i e_i + \eta'_i) \eta_3 d\eta'_i \quad \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^2; H^1(J^i)).$$

La propiedad (5.46) da

$$\tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x' + \varepsilon e_i, -\frac{1}{2}e_i + y'_i) = \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \frac{1}{2}e_i + y'_i) \quad \text{en } L^2(S^i), \text{ p.c.t. } x' \in \mathbb{R}^2.$$

De esta igualdad y la definición (5.49) de  $\tilde{t}_{\varepsilon,j}^i$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & g^i(x', \frac{1}{2}) - g^i(x', -\frac{1}{2}) = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{12}{\varepsilon} \int_{Y^3} (\tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta)) \eta_3 d\eta \quad \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ahora tomando  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  y operando se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x' + \varepsilon e_i, \eta) - \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta)) \eta_3 d\eta \varphi(x') dx' = \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta) \eta_3 d\eta \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx' = \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} (\tilde{r}_\varepsilon^i(x', \eta) + \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta'_i)) \eta_3 d\eta \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx', \end{aligned} \quad (5.53)$$

donde por  $\tilde{r}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se está denotando

$$\tilde{r}_\varepsilon^i(x', \eta) = \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta) - \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta'_i), \quad \text{p.c.t. } (x', \eta) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3.$$

Esta sucesión satisface  $\partial_{\eta_i} \tilde{r}_\varepsilon^i = \varepsilon \partial_{\eta_i} \tilde{t}_{\varepsilon,j}^i$  y  $\tilde{r}_\varepsilon^i(x', \eta'_i) = 0$ , p.c.t.  $(x', \eta'_i) \in \mathbb{R}^2 \times S^i$ . Entonces, de (5.50) y la desigualdad

$$\int_Y |\tilde{r}_\varepsilon^i(x', \eta) - \tilde{r}_\varepsilon^i(x', \eta'_i)|^2 d\eta_i \leq C \int_Y |\partial_{\eta_i} \tilde{r}_\varepsilon^i(x', \eta)|^2 d\eta_i, \quad \text{p.c.t. } (x', \eta'_i) \in \mathbb{R}^2 \times S^i,$$

se deduce

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \tilde{r}_\varepsilon^i(x', \eta) \eta_3 d\eta \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx' = 0. \quad (5.54)$$

Por otra parte, de la definición de  $\tilde{v}_{\varepsilon,j}^i$  y el cambio de variables  $y_\varepsilon^i$  dado por (5.1), se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{Y^3} \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta'_i) \eta_3 d\eta = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{S^i} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta) \eta_3 d\eta = \\ & = \frac{1}{\varepsilon^3 d_\varepsilon^3} \int_{P_\varepsilon(x')} v_{\varepsilon,j}(z) \frac{z_3}{\varepsilon d_\varepsilon} dz = \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{S^j} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_{\varepsilon,j}^j(x', \eta) \eta_3 d\eta, \quad \text{p.c.t. } x' \in G, \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta'_i) \eta_3 d\eta \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx' = \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{S^j} \left( \frac{1}{d_\varepsilon} \int_{-\frac{d_\varepsilon}{2}}^{\frac{d_\varepsilon}{2}} \hat{v}_{\varepsilon,j}^j(x', \eta) d\eta_j \right) \eta_3 \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} d\eta'_j dx'. \end{aligned}$$

Usando entonces (5.40) con  $i$  reemplazado por  $j$ , se deduce fácilmente

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{Y^3} \tilde{v}_{\varepsilon,j}^i(x', \eta'_i) \eta_3 d\eta \frac{\varphi(x' - \varepsilon e_i) - \varphi(x')}{\varepsilon} dx' = \frac{1}{12} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_j} \hat{v}_0^3(x') \partial_{x_i} \varphi(x') dx' + O_\varepsilon. \quad (5.55)$$

De (5.52)-(5.55) se obtiene que  $\partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3$  pertenece a  $L^2(G)$  y además satisface

$$g^i(\cdot, \frac{1}{2}) - g^i(\cdot, \frac{-1}{2}) = -\partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3 \quad \text{en } L^2(G).$$

Teniendo en cuenta que  $\hat{v}_0^3$  es cero fuera de  $G$  (esto sigue de que  $\hat{v}_\varepsilon^i$  es cero fuera de  $\{x' \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x', G) > \varepsilon\sqrt{2}\}$ ),  $\partial G$  es regular, y que  $\partial_{x_1 x_1}^2 \hat{v}_0^3$ ,  $\partial_{x_2 x_2}^2 \hat{v}_0^3$ ,  $\partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3$  están en  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , se deduce que  $\hat{v}_0^3 \in H_0^2(G)$ .

Definiendo  $\hat{v}_2^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\hat{v}_{2,i}^i = \hat{q}_i^i$ , y

$$\hat{v}_{2,j}^i = \hat{q}_j^i + \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3 y_3 y_i, \quad \hat{v}_{2,3}^i = \hat{q}_3^i - \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3 y_j y_i,$$

se obtiene que  $\hat{v}_2^i$  pertenece a  $E_2^i$  y por (5.51) satisface

$$\begin{cases} e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{ij} \rightarrow -\frac{1}{2} \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3 y_3 + e_y(\hat{v}_2^i)_{ij} \\ e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{i3} \rightarrow \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3 y_j + e_y(\hat{v}_2^i)_{i3} \end{cases} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3).$$

**Paso 7.** Se define  $\hat{z}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  como  $\hat{z}_{\varepsilon,i}^i(x', y) = 0$  y

$$\begin{aligned} \hat{z}_{\varepsilon,j}^i(x', y) &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \left( \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(x', y) - \int_{S^i} \partial_{y_3} \hat{v}_{\varepsilon,j}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_3 \right), \\ \hat{z}_{\varepsilon,3}^i(x', y) &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \left( \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y) - \int_{S^i} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i - \int_{S^i} \partial_{y_j} \hat{v}_{\varepsilon,3}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_j \right), \end{aligned}$$

p.c.t.  $(x', y) \in \mathbb{R}^2 \times Y^3$ .

Del Lema 6.0.5 y (5.18) se deduce que  $\partial_{y_r} \hat{z}_{\varepsilon,l}^i$ ,  $l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ , están acotadas en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$ . Usando entonces la desigualdad de Poincaré-Wirtinger se obtiene que  $\hat{z}_{\varepsilon,l}^i$  está acotada en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times J^i; H^1(S^i))$ , y por tanto, que para cada  $l \neq i$ , existe  $\hat{z}_l^i \in L^2(\mathbb{R}^2 \times J^i; H^1(S^i))$  tal que, para una subsucesión,  $\hat{z}_{\varepsilon,l}^i$  converge débilmente a  $\hat{z}_l^i$  en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times J^i; H^1(S^i))$ . Usando ahora la igualdad

$$e_y(\hat{z}_\varepsilon^i)_{j3} = e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{j3} - \int_{S^i} e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{j3} d\tau'_i, \quad e_y(\hat{z}_\varepsilon^i)_l = e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_l, \quad \forall l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

se deduce

$$e_y(\hat{z}^i)_{j3} = \hat{\sigma}_{j3}^i - \int_{S^i} \hat{\sigma}_{j3}^i d\tau'_i, \quad e_y(\hat{z}^i)_l = \hat{\sigma}_l^i, \quad \forall l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\},$$

donde  $\hat{\sigma}_{lr}^i$ ,  $l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ , denota el límite débil en  $L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3)$  de  $e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{lr}$ .

Basta definir  $\hat{v}_3^i = (\hat{v}_{3,1}^i, \hat{v}_{3,2}^i, \hat{v}_{3,3}^i) \in E_3^i$  como  $\hat{v}_{3,i}^i = 0$  y

$$\begin{aligned} \hat{v}_{3,j}^i(x', y) &= \hat{z}_j^i(x', y) + \int_{S^i} \hat{\sigma}_{j3}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_3, \\ \hat{v}_{3,3}^i(x', y) &= \hat{z}_3^i(x', y) + \int_{S^i} \hat{\sigma}_{3j}^i(x', y_i e_i + \tau'_i) d\tau'_i y_j, \end{aligned}$$

para tener

$$e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i)_{lr} \rightharpoonup e_y(\hat{v}_3^i)_{lr} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \forall l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}.$$

Esto concluye el estudio del comportamiento asintótico de  $\hat{v}_\varepsilon^i$  definida por (5.13) y (5.2).

Para finalizar la demostración del teorema, basta definir  $\hat{u}_0^3 = \hat{v}_0^3$ ,  $\hat{u}_0^i = \hat{m}_0^i$ , y  $\hat{u}_{l,r}^i = \hat{m}_{l,r}^i + \hat{v}_{l,r}^i$ , para todo  $l, r \in \{1, 2, 3\}$  y todo  $i \in \{1, 2\}$ , donde  $\hat{m}_0^i$  y  $\hat{m}_{l,r}^i$  están dados por (5.12) y  $\hat{m}_{2,j}^i = \hat{m}_{3,i}^i = \hat{m}_{s,3}^i = 0$ ,  $s \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $j \neq i$ .  $\square$

La siguiente proposición da un inverso parcial del Teorema 5.2.1.

**Teorema 5.2.2** Sean  $\hat{v}_0^3 \in C_0^\infty(G)$  y  $(\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \in \mathcal{E}^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces, existe una subsucesión  $v_\varepsilon \in H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^3$  tal que las sucesiones  $\hat{v}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definidas por (5.2) satisfacen

$$\hat{v}_{\varepsilon,i}^i \longrightarrow \hat{v}_0^i - \partial_{x_i} \hat{v}_0^3 y_3 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad (5.56)$$

$$\hat{v}_{\varepsilon,j}^i - \hat{v}_0^j + \partial_{x_j} \hat{v}_0^3 y_3 - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{v}_{1,j}^i \longrightarrow 0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad \text{para } j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}, \quad (5.57)$$

$$\varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_{\varepsilon,3}^i \longrightarrow \hat{v}_0^3 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3), \quad (5.58)$$

$$e_\varepsilon^i(\hat{v}_\varepsilon^i) \longrightarrow e_0^i(\hat{v}_0^3, \hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3; \mathcal{S}_3). \quad (5.59)$$

**Demostración.** Se considera  $\theta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  satisfaciendo (N.1) (ver Notación) y con ayuda



de las funciones  $y_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , dadas por (5.1) se define  $v_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,i|\Omega_\varepsilon^i}(x) &= \hat{v}_0^i(x') - \partial_{x_i} \hat{v}_0^3(x') y_{\varepsilon,3}^i + \varepsilon \hat{v}_{1,i}^i(x', y_\varepsilon^i) - \varepsilon^2 \sum_{l \neq i} \partial_{x_i} \hat{v}_{1,l}^i(x', y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,l}^i + \\ &\quad + \varepsilon d_\varepsilon \left( \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{v}_0^3(x') y_{\varepsilon,j}^i y_{\varepsilon,3}^i + \hat{v}_{2,i}^i(x', y_\varepsilon^i) - \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) (\partial_{x_j} \hat{v}_0^i(x') + \partial_{x_i} \hat{v}_0^j(x')) y_{\varepsilon,j}^i \right), \\ v_{\varepsilon,j|\Omega_\varepsilon^j}(x) &= \hat{v}_0^j(x') - \partial_{x_j} \hat{v}_0^3(x') y_{\varepsilon,3}^j + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{v}_{1,j}^i(x', y_\varepsilon^i) + \varepsilon \hat{v}_{2,j}^i(x', y_\varepsilon^i) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \partial_{x_j} \hat{v}_{1,j}^i(x', y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,j}^i + \varepsilon d_\varepsilon \left( \hat{v}_{3,j}^i(x', y_\varepsilon^i) - \theta_\varepsilon(y_{\varepsilon,i}^i) \partial_{x_j} \hat{u}_0^j(x') y_{\varepsilon,j}^i \right), \text{ para } j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}, \\ v_{\varepsilon,3|\Omega_\varepsilon^3}(x) &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \hat{v}_0^3(x') + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{v}_{1,3}^i(x', y_\varepsilon^i) + \varepsilon \hat{v}_{2,3}^i(x', y_\varepsilon^i) - \varepsilon^2 \partial_{x_j} \hat{v}_{1,3}^i(x', y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,j}^i + \varepsilon d_\varepsilon \hat{v}_{3,3}^i(x', y_\varepsilon^i), \end{aligned}$$

p.c.t.  $x \in \Omega_\varepsilon^i$ , y todo  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño,  $v_\varepsilon$  pertenece a  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^3$ , y  $\hat{v}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definidas por (5.2) satisfacen (5.56), (5.57), (5.58) y (5.59).  $\square$

**Observación 5.2.3** *Es fácil comprobar que el Teorema 5.2.2 sigue siendo cierta si  $\hat{u}_0^3$  pertenece a  $H_0^2(G)$  y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , pertenecen a  $E^i$ , es decir el Teorema 5.2.1 es óptimo. Sin embargo, no probamos este resultado general porque no se requerirá en lo que sigue.*

Con ayuda del Teorema 5.2.2 y siguiendo la demostración del Teorema 4.3.4, es fácil probar el siguiente resultado de corrector.

**Teorema 5.2.4** *Sea  $u_\varepsilon$  en  $H_{\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)^3$  y definamos  $\hat{u}_\varepsilon^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , por (5.2) y  $\gamma_\varepsilon = d_\varepsilon/(\varepsilon + d_\varepsilon)$ . Se supone que existen  $\hat{u}_0^3 \in H_0^2(G)$  y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , tales que se satisface*

$$e_\varepsilon^i(\hat{u}_\varepsilon^i) \rightarrow e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \text{ en } L^2(\mathbb{R}^2 \times Y^3; \mathcal{S}_3), \quad \forall i \in \{1, 2\}. \quad (5.60)$$

Entonces, las sucesiones  $g_\varepsilon^i \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \varepsilon d_\varepsilon Y)^3$  y  $G_\varepsilon^i \in L^2(\mathbb{R}^2 \times \varepsilon d_\varepsilon Y; \mathcal{S}_3)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definidas por

$$\begin{cases} g_{\varepsilon,i}^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))} \left[ \hat{u}_0^i(\rho') - \partial_{x_i} \hat{u}_0^3(\rho') y_{\varepsilon,3}^i(\cdot) \right] d\rho', \\ g_{\varepsilon,j}^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))} \left[ \hat{u}_0^j(\rho') - \partial_{x_j} \hat{u}_0^3(\rho') y_{\varepsilon,3}^i(\cdot) + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,j}^i(\rho', y_{\varepsilon,i}^i(\cdot)) \right] d\rho', \quad j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}, \\ g_{\varepsilon,3}^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))} \hat{u}_0^3(\rho') d\rho', \end{cases} \quad (5.61)$$

y

$$G_\varepsilon^i(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{P}_2(C_\varepsilon(\cdot))} e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)(\rho', y_\varepsilon^i(\cdot)) d\rho', \quad (5.62)$$

verifican

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,i}(x) - g_{\varepsilon,i}^i(x)|^2 dx + \gamma_\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,j}(x) - g_{\varepsilon,j}^i(x)|^2 dx + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\varepsilon d_\varepsilon u_{\varepsilon,3}(x) - g_{\varepsilon,3}^i(x)|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u_\varepsilon)(x) - G_\varepsilon^i(x)|^2 dx \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ .

**Observación 5.2.5** Si  $\hat{u}_0^3$ ,  $\partial_{x_1} \hat{u}_0^3$ ,  $\partial_{x_2} \hat{u}_0^3$  y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$  son uniformemente continuas en  $x' \in \mathbb{R}^2$ , entonces (5.63) es equivalente a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \left( |u_{\varepsilon,i}(x) - \hat{u}_0^i(x') + \partial_{x_i} \hat{u}_0^3(x') \frac{x_3}{\varepsilon d_\varepsilon}|^2 + |\varepsilon d_\varepsilon u_{\varepsilon,3} - \hat{u}_0^3(x')|^2 + \right. \\ \left. + \gamma_\varepsilon^2 |u_{\varepsilon,j}(x) - \hat{u}_0^j(x') + \partial_{x_j} \hat{u}_0^3(x') \frac{x_3}{\varepsilon d_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,j}^i(x', y_\varepsilon^i(x))|^2 \right) dx = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u_\varepsilon)(x) - e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)(x', y_\varepsilon^i(x))|^2 dx = 0, \end{aligned}$$

donde  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ , para todo  $i \in \{1, 2\}$ . De hecho, si  $\hat{u}_0^3$  y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , son suficientemente regulares, definiendo entonces  $z_\varepsilon^i : \Omega_\varepsilon^i \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$\begin{aligned} z_{\varepsilon,i}^i|_{\Omega_\varepsilon^i} &= \hat{u}_0^i - \partial_{x_i} \hat{u}_0^3 y_{\varepsilon,3}^i + \varepsilon \hat{u}_{1,i}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \varepsilon^2 \sum_{l \neq i} \partial_{x_l} \hat{u}_{1,l}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,l}^i + \\ &\quad + \varepsilon d_\varepsilon \left( \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^3 y_{\varepsilon,3}^i y_{\varepsilon,3}^i + \hat{u}_{2,i}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - (\partial_{x_j} \hat{u}_0^i + \partial_{x_i} \hat{u}_0^j) y_{\varepsilon,j}^i \right), \\ z_{\varepsilon,j}^i|_{\Omega_\varepsilon^i} &= \hat{u}_0^j - \partial_{x_j} \hat{u}_0^3 y_{\varepsilon,3}^i + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,j}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon \hat{u}_{2,j}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \varepsilon^2 \partial_{x_j} \hat{u}_{1,j}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,j}^i + \\ &\quad + \varepsilon d_\varepsilon \left( \hat{u}_{3,j}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \partial_{x_j} \hat{u}_0^j y_{\varepsilon,j}^i \right), \\ z_{\varepsilon,3}^i|_{\Omega_\varepsilon^i} &= \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \hat{u}_0^3 + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} \hat{u}_{1,3}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) + \varepsilon \hat{u}_{2,3}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) - \varepsilon^2 \partial_{x_j} \hat{u}_{1,3}^i(\cdot, y_\varepsilon^i) y_{\varepsilon,j}^i + \varepsilon d_\varepsilon \hat{u}_{3,3}^i(\cdot, y_\varepsilon^i), \end{aligned}$$

se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon^i|} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \left( |u_{\varepsilon,i} - z_{\varepsilon,i}^i|^2 + \gamma_\varepsilon^2 |u_{\varepsilon,j} - z_{\varepsilon,j}^i|^2 + (\varepsilon d_\varepsilon)^2 |u_{\varepsilon,3} - z_{\varepsilon,3}^i|^2 + |e(u_\varepsilon - z_\varepsilon^i)|^2 \right) dx = 0.$$

Si para  $i \in \{1, 2\}$ ,  $a^i$ ,  $b_n^i$ ,  $n \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ ,  $g^i$  se definen por las Observaciones 5.1.3 y 5.1.4, entonces sobre  $\Omega_\varepsilon^i$  el comportamiento de  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  pequeño puede ser

aproximado por ( $j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ ,  $l, r \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ )

$$u_{\varepsilon,i}(x) \sim \hat{u}_0^i(x') - \partial_{x_i} \hat{u}_0^3(x') y_{\varepsilon,3}^i(x),$$

$$u_{\varepsilon,j}(x) \sim \hat{u}_0^j(x') - \partial_{x_j} \hat{u}_0^3(x') y_{\varepsilon,3}^j(x) + \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} b_j^i(x', y_{\varepsilon,i}^i(x)),$$

$$u_{\varepsilon,3}(x) \sim \frac{1}{\varepsilon d_\varepsilon} \hat{u}_0^3(x'),$$

$$e(u_\varepsilon)_{ii}(x) \sim \partial_{x_i} \hat{u}_0^i(x') - \partial_{x_i x_i}^2 \hat{u}_0^3(x') y_{\varepsilon,3}^i(x) + \partial_{y_i} a^i(x', y_{\varepsilon,i}^i(x)) - \sum_{n \neq i} \partial_{y_i y_i}^2 b_n^i(x', y_{\varepsilon,i}^i(x)) y_{\varepsilon,n}^i(x),$$

$$2e(u_\varepsilon)_{ij}(x) \sim -\partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^3(x') y_{\varepsilon,3}^i(x) + \partial_{y_j} \hat{u}_{2,i}^i(x', y_\varepsilon^i(x)) + \partial_{y_i} g^i(x', y_{\varepsilon,i}^i(x)) y_{\varepsilon,3}^j(x),$$

$$2e(u_\varepsilon)_{i3}(x) \sim \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^3(x') y_{\varepsilon,j}^i(x) + \partial_{y_3} \hat{u}_{2,i}^i(x', y_\varepsilon^i(x)) - \partial_{y_i} g^i(x', y_{\varepsilon,i}^i(x)) y_{\varepsilon,j}^i(x),$$

$$2e(u_\varepsilon)_{lr}(x) \sim \partial_{y_l} \hat{u}_{3,r}^i(x', y_\varepsilon^i(x)) + \partial_{y_r} \hat{u}_{3,l}^i(x', y_\varepsilon^i(x)).$$

Destacar que el comportamiento asintótico de  $u_{\varepsilon,j}$  en  $\Omega_\varepsilon^i$  depende de la razón entre  $\varepsilon$  y  $d_\varepsilon$ .

### 5.3 Resultado de homogeneización

A continuación, con ayuda de los resultados probados en la sección anterior, vamos a resolver el problema de homogeneización (1.23), para  $H_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon; \mathcal{S}_3)$ ,  $F_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)^3$  y  $A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon; \mathcal{L}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$  tal que existen  $\alpha$  y  $\beta > 0$  que verifican (1.24).

De manera análoga a como hicimos en el Capítulo 4, en  $\omega_\varepsilon$ , se admite que se verifican las condiciones

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |F_{\varepsilon,i}|^2 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |H_\varepsilon|^2 dx = 0, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

$$\frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\omega_\varepsilon} |F_{\varepsilon,3}|^2 dx \leq C \varepsilon^2 d_\varepsilon^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sobre  $\Omega_\varepsilon^i \setminus \omega_\varepsilon$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , se supone que existen  $F^i : G \times Y^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $H^i : G \times Y^3 \rightarrow \mathcal{S}_3$ ,  $A^i \in C^0(\bar{G}; L^\infty(Y^3; \mathcal{L}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)))$ ,  $g^i \in L^2(Y^3)$  tales que se tienen (1.14), (1.15) (1.16) y se satisfacen las igualdades

$$A_\varepsilon(x) = A^i(x', y_\varepsilon^i(x)), \quad H_\varepsilon(x) = H^i(x', y_\varepsilon^i(x)),$$

$$F_{\varepsilon,l}(x) = F_l^i(x', y_\varepsilon^i(x)), \quad l \in \{1, 2\}, \quad F_{\varepsilon,3}(x) = \varepsilon d_\varepsilon F_3^i(x', y_\varepsilon^i(x)), \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega_\varepsilon^i \setminus \omega_\varepsilon.$$

**Observación 5.3.1** *Estamos suponiendo que el orden de las fuerzas ortogonales al plano de la estructura,  $\{x_3 = 0\}$ ,  $F_{\varepsilon,3}$ , es  $\varepsilon d_\varepsilon$  el orden de las fuerzas transversales,  $F_{\varepsilon,1}$ ,  $F_{\varepsilon,2}$ . Gracias a la linealidad del problema (1.23), esto no conlleva ninguna restricción.*

El teorema de homogeneización correspondiente se enuncia como sigue. Su demostración sigue las mismas líneas que la del Teorema 4.4.1 y por ello la omitimos.

**Teorema 5.3.2** *Sea  $u_\varepsilon$  la sucesión de soluciones de (1.23) y denotemos  $\gamma_\varepsilon = d_\varepsilon/(\varepsilon + d_\varepsilon)$ . Se supone que existe  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon = \gamma$  (esto siempre se tiene para una subsucesión). Entonces las sucesiones  $\hat{u}_\varepsilon^i : \mathbb{R}^2 \times Y^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definidas por*

$$\hat{u}_{\varepsilon,l}^i = \gamma_\varepsilon u_{\varepsilon,l}(\varepsilon \kappa(\frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon y_i e_i + \varepsilon d_\varepsilon y'_i), \quad \forall l \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

satisfacen (5.60), donde  $\hat{u}_0^3 \in H_0^2(\Omega)$  y  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , son solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega \times Y^3} (A^i e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) - \gamma H^i) : e_0^i(\hat{v}_0^3, \hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) dy dx = \\ = \gamma \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega \times Y^3} \left( \sum_{l=1}^3 F_l^i \hat{v}_0^l - \sum_{r=1}^2 F_r^i \partial_{x_r} \hat{v}_0^3 y_3 \right) dy dx' + (1-\gamma) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 \int_{\Omega \times Y^3} F_j^i \hat{v}_{1,j}^i dy dx', \\ \forall \hat{v}_0^3 \in H_0^2(\Omega), \quad \forall (\hat{v}_0^i, \hat{v}_1^i, \hat{v}_2^i, \hat{v}_3^i) \in E^i, \quad i \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \quad (5.64)$$

Además, para cada  $i \in \{1, 2\}$ , las sucesiones  $g_\varepsilon^i$  y  $G_\varepsilon^i$ , definidas por (5.61) y (5.62) dan respectivamente las siguientes aproximaciones a  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma_\varepsilon^2}{|\Omega_\varepsilon^i|} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,i}(x) - \frac{1}{\gamma_\varepsilon} g_{\varepsilon,i}^i(x)|^2 dx + \gamma_\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_{\varepsilon,j}(x) - \frac{1}{\gamma_\varepsilon} g_{\varepsilon,j}^i(x)|^2 dx + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\varepsilon d_\varepsilon u_{\varepsilon,3}(x) - \frac{1}{\gamma_\varepsilon} g_{\varepsilon,3}^i(x)|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon^i} |e(u_\varepsilon)(x) - \frac{1}{\gamma_\varepsilon} G_\varepsilon^i(x)|^2 dx \right] = 0,$$

donde  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ .

**Observación 5.3.3** *Por el Teorema de Lax-Milgram (aplicándolo en adecuados espacios cocientes) el problema (5.64) admite una solución. Aunque dicha solución no es única, las funciones  $\hat{u}_0^3$ ,  $\partial_{x_1} \hat{u}_0^3$ ,  $\partial_{x_2} \hat{u}_0^3$ ,  $\hat{u}_0^i$ ,  $\hat{u}_{1,j}^i$  y  $e_0^i(\hat{u}_0^3, \hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i)$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ , si quedan*

definidas unívocamente y son éstas precisamente las que aparecen en la definición de los correctores para  $u_\varepsilon$  y  $e(u_\varepsilon)$ .

Resolvemos a continuación el sistema (5.64) en el caso de un material homogéneo e isótropo. Como con la Proposición 4.4.5, su demostración es una simple y tediosa comprobación que omitimos.

**Proposición 5.3.4** *Supongamos que existen  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $F \in C^0(\bar{G})^3$  y  $H \in C^0(\bar{G}; \mathcal{S}_3)$ , tales que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $F_\varepsilon = F$ ,  $H_\varepsilon = H$  y*

$$A_\varepsilon M = \lambda \text{tr}(M) \mathcal{I} + 2\mu M, \quad \forall M \in \mathcal{S}_3.$$

Se denota

$$\Lambda = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Si  $\hat{u}_0^3 \in H_0^2(G)$ ,  $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i, \hat{u}_3^i) \in E^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , son solución de (5.64), entonces se satisfacen las relaciones

$$-\Lambda \partial_{x_i x_i}^2 \hat{u}_0^i = 2\gamma F_i - \gamma \partial_{x_i} \left[ H_{ii} + \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu} \sum_{\substack{1 \leq r \leq 3 \\ r \neq i}} H_{rr} \right], \quad \text{en } \Omega, \quad (5.65)$$

$$\Lambda \left( \partial_{x_1 x_1 x_1 x_1}^4 \hat{u}_0^3 + \partial_{x_2 x_2 x_2 x_2}^4 \hat{u}_0^3 \right) = 24\gamma F_3, \quad \text{en } \Omega, \quad (5.66)$$

$$\begin{cases} \partial_{y_i} \hat{u}_{1,i}^i = -\frac{1-\gamma}{\Lambda} F_j (6y_i^2 - 6|y_i| + 1) y_j, \\ \hat{u}_{1,j}^i = \frac{1-\gamma}{2\Lambda} F_j y_i^2 (1 - |y_i|)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\partial_{y_1} \hat{u}_{2,2}^i + \partial_{y_2} \hat{u}_{2,1}^i) = \frac{\gamma}{2\mu} H_{12} + \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^3 y_3, \\ \frac{1}{2} (\partial_{y_i} \hat{u}_{2,3}^i + \partial_{y_3} \hat{u}_{2,i}^i) = \frac{\gamma}{2\mu} H_{i3} - \frac{1}{2} \partial_{x_1 x_2}^2 \hat{u}_0^3 y_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\partial_{y_j} \hat{u}_{3,3}^i + \partial_{y_3} \hat{u}_{3,j}^i) = \frac{\gamma}{2\mu} H_{j3}, \\ \partial_{y_m} \hat{u}_{3,m}^i = \frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( \partial_{x_i} \hat{u}_0^i - \frac{1-\gamma}{\Lambda} F_j (6y_i^2 - 6|y_i| + 1) y_j - \partial_{x_i x_i}^2 \hat{u}_0^3 y_3 \right) + \\ + \frac{\gamma(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)} H_{mm} - \frac{\lambda\gamma}{4\mu(\lambda + 2\mu)} H_{rr}, \end{cases}$$

donde  $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ ,  $m, r \in \{j, 3\}$  con  $m \neq r$ .

**Observación 5.3.5** *Mientras que el problema (5.66) para  $\hat{u}_0^3$  es elíptico, el problema (5.65) para  $\hat{u}_0^1$  ó  $\hat{u}_0^2$  es degenerado. Por ello,  $\nabla \hat{u}_0^3 \in L^2(\Omega)^2$ , y sin embargo sólo tenemos  $\partial_{x_i} \hat{u}_0^i \in L^2(\Omega)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .*

**Observación 5.3.6** *El corrector para  $e(u_\varepsilon)$  depende de la variable  $y'_i = \frac{x'_i - \varepsilon \kappa'_i(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon d_\varepsilon}$ , y por tanto, no son aplicables aquí los métodos empleados en [62], [7] (ver Observación 4.4.8).*

# Capítulo 6

## Resultados auxiliares

En esta sección presentamos varios resultados que son utilizados con frecuencia a lo largo de la presente memoria.

El primer resultado es una desigualdad de Poincaré-Wirtinger en rectángulos  $N$ -dimensionales.

**Lema 6.0.1** *Se denota  $I(a) = \prod_{l=1}^N a_l Y$ , para todo  $a \in (0, +\infty)^N$ . Entonces, existe  $C > 0$  tal que*

$$\int_{I(a)} \left| u(x) - \frac{1}{|I(\alpha e_i + a'_i)|} \int_{I(\alpha e_i + a'_i)} u(z) dz \right|^p dx \leq C |a|_\infty^p \int_{I(a)} |\nabla u(x)|^p dx, \quad (6.1)$$

para todo  $a \in (0, +\infty)^N$ ,  $\alpha \in (0, a_i)$ ,  $u \in W^{1,p}(I(a))$ .

**Demostración.** Sean  $x$  y  $z$  dos puntos genéricos de  $I(a)$  e  $I(\alpha e_i + a'_i)$  respectivamente.

Denotando  $r_l = \sum_{m=1}^l x_m e_m + \sum_{m=l+1}^N z_m e_m$ ,  $l \in \{1, \dots, N\}$ ,  $r_0 = z$ , se tiene

$$\begin{aligned} u(x) - u(z) &= \sum_{l=1}^N [u(r_l) - u(r_{l-1})] = \sum_{l=1}^N \int_{z_l}^{x_l} \partial_{x_l} u(r_l + (\tau_l - x_l) e_l) d\tau_l \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^N \int_{a_l Y} |\partial_{x_l} u(r_l + (\tau_l - x_l) e_l)| d\tau_l. \end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad, integrando respecto de  $z \in I(\alpha e_i + a'_i)$ , dividiendo por  $|I(\alpha e_i + a'_i)|$ , elevando a  $p$  ambos miembros aplicando la desigualdad de Hölder, y finalmente

integrando respecto de  $x \in I(a)$ , se obtiene

$$\int_{I(a)} \left| u(x) - \frac{1}{|I(\alpha e_i + a'_i)|} \int_{I(a)} u(z) dz \right|^p \leq C \sum_{l=1}^N a_l^p \int_{I(a)} |\partial_{x_l} u(x)|^p dx,$$

desigualdad que implica (6.1).  $\square$

Para todas las estructuras  $V_\varepsilon$  consideradas en esta memoria es fácil demostrar la siguiente desigualdad de Poincaré.

**Lema 6.0.2** *Existe  $C > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u(x)|^p dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u(x)|^p dx, \quad \forall u \in W_{\Gamma_\varepsilon}^{1,p}(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (6.2)$$

**Demostración.** Nos limitamos a demostrar el resultado para la estructura modelo  $V_\varepsilon$  definida por (1.1) y (2.1), siendo análoga la demostración en los restantes casos.

Puesto que  $\Omega$  es acotado, existe  $R > 0$  tal que  $\Omega \subset RY^N$ . Entonces, para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$  y p.c.t.  $x \in \Omega_\varepsilon^i$ , se tiene

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)|^p &= |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x - (x_i + R)e_i)|^p = \left| \int_{-\frac{R}{2}}^{x_i} \partial_{x_i} u_\varepsilon(x'_i + se_i) ds \right|^p \leq \\ &\leq R^{\frac{p}{p'}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} |\partial_{x_i} u_\varepsilon(x'_i + se_i)|^p ds. \end{aligned}$$

Integrando estas desigualdades respecto de  $x$  en el conjunto  $\{|\varepsilon k'_i - x'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2}, -R \leq x_i \leq R\}$ , y sumando en  $k'_i$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^i} |u_\varepsilon(x)|^p dx &= \sum_{k'_i \in \mathbb{Z}^N} \int_{|\varepsilon k'_i - x'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} |u_\varepsilon(x)|^p dx \leq \\ &\leq R^p \sum_{k'_i \in \mathbb{Z}^N} \int_{|\varepsilon k'_i - x'_i|_\infty < \frac{\varepsilon d_\varepsilon}{2}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} |\partial_{x_i} u_\varepsilon(x'_i + se_i)|^p ds dx'_i = R^p \int_{\Omega_\varepsilon^i} |\partial_{x_i} u_\varepsilon(x)|^p dx, \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ , lo cual inmediatamente da (6.2).  $\square$

A continuación probamos una desigualdad de tipo Poincaré discreta y una caracterización del espacio  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .



**Lema 6.0.3** Para cada  $\varepsilon > 0$ , sea

$$A_\varepsilon = \left\{ \bar{u} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } \bar{u} \text{ es constante en cada cubo } C_\varepsilon^k, \right. \\ \left. \bar{u} = 0 \text{ en } C_\varepsilon^k \text{ si } C_\varepsilon^k \cap \Omega = \emptyset, k \in \mathbb{Z}^N \right\}. \quad (6.3)$$

a) Existe  $C > 0$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$ , para todo  $\bar{u} \in A_\varepsilon$  y para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se tiene

$$\|\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \frac{\|\bar{u}(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{\varepsilon}. \quad (6.4)$$

b) Sean  $\bar{u}_\varepsilon \in A_\varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$  tales que existe  $i \in \{1, \dots, N\}$  verificando

$$\|\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (6.5)$$

Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$  satisfaciendo  $\partial_{x_i} \hat{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $\hat{u}_0 \nu_i = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , tales que

$$\bar{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N), \quad (6.6)$$

$$\frac{\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon}{\varepsilon} \rightharpoonup \partial_{x_i} \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N). \quad (6.7)$$

c) Supongamos que se satisface (6.5) para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Entonces, existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , aún denotada por  $\varepsilon$ , y  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tales que se tiene (6.7) para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ , y

$$\bar{u}_\varepsilon \longrightarrow \hat{u}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N). \quad (6.8)$$

d) Sea  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Entonces existe una sucesión  $u_\varepsilon$  tal que  $u_\varepsilon \in A_\varepsilon$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , y tal que se tienen (6.8) y (6.7) para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

**Demostración.**

a) Sea  $\bar{u} \in A_\varepsilon$ , como  $\bar{u} = 0$  en  $C_\varepsilon^k$  si  $C_\varepsilon^k \cap \Omega = \emptyset$ , entonces existen  $m_\varepsilon, n_\varepsilon \in \mathbb{Z}$ , con  $0 < \varepsilon(m_\varepsilon - n_\varepsilon) \leq C$  tales que para todo  $k \in \mathbb{Z}^N$  con  $k_i \notin [n_\varepsilon, m_\varepsilon]$ , se verifica  $\bar{u} = 0$  en

$C_\varepsilon^k$ . Se verifica por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x)|^p dx &= \sum_{k'_i \in \mathbb{Z}^{N-1}} \sum_{k_i = n_\varepsilon}^{m_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{k'_i}} |\bar{u}(x)|^p dx \leq \\ &\leq \sum_{k'_i \in \mathbb{Z}^{N-1}} \sum_{l = n_\varepsilon}^{m_\varepsilon} \left( \sum_{k_i = l}^{m_\varepsilon - 1} \|\bar{u}(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}\|_{L^p(C_\varepsilon^{k'_i})} \right)^p \leq \\ &\leq C(m_\varepsilon - n_\varepsilon)^{p-1} \sum_{l = n_\varepsilon}^{m_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x + \varepsilon e_i) - \bar{u}(x)|^p dx \leq \frac{C}{\varepsilon^p} \|\bar{u}(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p, \end{aligned}$$

lo que prueba (6.4).

b) Por el apartado a)  $\bar{u}_\varepsilon$  está acotada en  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , lo que junto a (6.5) implica que existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , aún denotada por  $\varepsilon$ , y  $\hat{u}_0, \hat{v}_i$  en  $L^p(\mathbb{R}^N)$  tales que se tiene (6.6) y

$$\frac{\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon}{\varepsilon} \rightharpoonup \hat{v}_i \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Por otra parte, para  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , se verifica

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v}_i(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\bar{u}_\varepsilon(x + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon(x)}{\varepsilon} \varphi(x) dx + O_\varepsilon = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_\varepsilon(x) \frac{\varphi(x - \varepsilon e_i) - \varphi(x)}{\varepsilon} dx + O_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_0(x) \partial_{x_i} \varphi(x) dx + O_\varepsilon, \end{aligned}$$

y por tanto que  $\partial_{x_i} \hat{u}_0 = \hat{v}_i$  en  $\mathbb{R}^N$ . Usando además que  $\Omega$  es regular y  $\bar{u}_\varepsilon = 0$  en  $\{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \Omega) > \varepsilon \sqrt{N}\}$ , se concluye que  $\hat{u}_0 \nu_i = 0$  en  $\partial\Omega$ .

c) Gracias al los apartados a) y b), basta probar que para todo  $\rho > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $|\tau| < \delta$ , entonces

$$\|\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \tau e_i) - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \rho, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (6.9)$$

lo que probará que  $\bar{u}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , es relativamente compacta en  $L^p(\mathbb{R}^N)$  (ver [9], [37], [58]).

De (6.5) se sigue fácilmente

$$\|\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \varepsilon m_i e_i) - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\varepsilon |m_i|, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall m_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (6.10)$$

Dado  $\tau \in \mathbb{R}$ , sea  $m_i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\varepsilon m_i \leq \tau < \varepsilon(m_i + 1)$ . Si  $x \in C_\varepsilon^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^N$ , entonces  $x + \tau e_i \in C_\varepsilon^{k+m_i e_i} \cup C_\varepsilon^{k+(m_i+1)e_i}$ . Teniendo en cuenta esta relación y que  $\bar{u}_\varepsilon$  es constante

sobre cada cubo, se obtiene con ayuda de (6.10)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_\varepsilon(x + \tau e_i) - \bar{u}_\varepsilon(x)|^p dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} |\bar{u}_\varepsilon(x + \tau e_i) - \bar{u}_\varepsilon(x)|^p dx \leq \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} |\bar{u}_\varepsilon(x + \varepsilon m_i e_i) - \bar{u}_\varepsilon(x)|^p dx + \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} |\bar{u}_\varepsilon(x + \varepsilon(m_i + 1)e_i) - \bar{u}_\varepsilon(x)|^p dx \leq \\ &\leq C\varepsilon^p (|m_i|^p + |m_i + 1|^p) \leq C(|\tau| + \varepsilon)^p, \end{aligned}$$

o bien

$$\|\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \tau e_i) - \bar{u}_\varepsilon(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C(|\tau| + \varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

A partir de esta desigualdad es inmediato (6.9).

d) Sea  $\hat{u}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Suponemos que  $\hat{u}_0$  está definida en todo  $\mathbb{R}^N$  prolongándola por cero fuera de  $\Omega$ . Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$ , definimos  $\bar{u}_\varepsilon \in A_\varepsilon$  por

$$\bar{u}_\varepsilon(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon(\cdot)} \hat{u}_0(\rho) d\rho.$$

Con ayuda del Lema 6.0.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_\varepsilon(x + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon(x)|^p dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} \left| \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon^{k+e_i}} \bar{u}_\varepsilon(\rho) d\rho - \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon^k} \bar{u}_\varepsilon(\rho) d\rho \right|^p dx \leq \\ &\leq C\varepsilon^p \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^{k+e_i} \cup C_\varepsilon^k} |\nabla \hat{u}_0(x)|^p dx \leq C\varepsilon^p \int_{\Omega^i} |\nabla \hat{u}_0(x)|^p dx \leq C\varepsilon^p, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

lo que prueba (6.5) para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Por tanto, el apartado c) asegura que existen una subsucesión de  $\varepsilon$ , que se sigue denotando por  $\varepsilon$ , y  $\hat{w}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , tales que se tiene

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varepsilon &\longrightarrow \hat{w}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N), \\ \frac{\bar{u}_\varepsilon(\cdot + \varepsilon e_i) - \bar{u}_\varepsilon}{\varepsilon} &\rightharpoonup \partial_{x_i} \hat{w}_0 \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Ahora bien, para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  se satisface

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{w}_0(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_\varepsilon(x) \varphi(x) dx + O_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{C_\varepsilon^k} \hat{u}_0(z) dz \int_{C_\varepsilon^k} \varphi(x) dx + O_\varepsilon = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} \hat{u}_0(z) dz \varphi(\varepsilon k) + O_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{C_\varepsilon^k} \hat{u}_0(z) \varphi(z) dz + O_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_0(z) \varphi(z) dz + O_\varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba que  $\hat{w}_0 = \hat{u}_0$ , y concluye la demostración del resultado.  $\square$

La versión de la desigualdad de Korn que damos en el Lema 6.0.7 se usa frecuentemente en la homogeneización del sistema de elasticidad lineal (1.23). Para su demostración emplearemos el siguiente teorema que se puede encontrar en [35] o [50].

**Teorema 6.0.4** Sean  $\Omega$  un abierto conexo, acotado, de frontera lipschitziana en  $\mathbb{R}^N$ , entonces existe  $C > 0$  tal que para toda  $u \in H^{-1}(\Omega)$  con  $\nabla u \in H^{-1}(\Omega)^N$ , se verifica que  $u \in L^2(\Omega)$  y

$$\|u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(z) dz\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{H^{-1}(\Omega)^N}. \quad (6.11)$$

**Lema 6.0.5** Sea  $G$  un abierto conexo de frontera lipschitziana en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ . Entonces, existe  $C > 0$  tal que

$$\int_G |\partial_{x_l} u_r(x) - \frac{1}{|G|} \int_G \partial_{x_l} u_r(z) dz|^2 dx \leq C \int_G \sum_{m=1}^N (|e(u)_{ml}|^2 + |e(u)_{mr}|^2) dx, \quad (6.12)$$

para todo  $l, r \in \{1, \dots, N\}$  y toda  $u \in H^1(G)^N$ .

**Demostración.** Sean  $u$  en  $H^1(G)^N$  y  $l, r \in \{1, \dots, N\}$ . Usando la igualdad

$$\partial_{x_m x_l}^2 u_r = \partial_{x_m} e(u)_{rl} + \partial_{x_l} e(u)_{rm} - \partial_{x_r} e(u)_{lm}, \quad \forall m \in \{1, \dots, N\},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \|\nabla(\partial_{x_l} u_r)\|_{H^{-1}(G)^N} &\leq \sum_{m=1}^N \|\partial_{x_m} e(u)_{rl} + \partial_{x_l} e(u)_{rm} - \partial_{x_r} e(u)_{lm}\|_{H^{-1}(G)} \leq \\ &\leq C \left[ \sum_{m=1}^N \|e(u)_{rm}\|_{L^2(G)} + \sum_{m=1}^N \|e(u)_{lm}\|_{L^2(G)} \right]. \end{aligned}$$

Una simple aplicación del Teorema 6.0.4 prueba entonces (6.12).  $\square$

Como consecuencia inmediata se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 6.0.6** Sea  $G$  un abierto conexo de frontera lipschitziana de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ . Entonces, existe  $C > 0$  tal que

$$\int_G |Du(x) - \frac{1}{|G|} \int_G Du(z) dz|^2 dx \leq C \int_G |e(u)|^2 dx, \quad \forall u \in H^1(G)^N. \quad (6.13)$$

**Lema 6.0.7** Existe  $C > 0$  tal que para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ , para toda  $u \in H_{\Gamma_i}^1(Y^N)^N$ ,  $\Gamma_i = \{y \in Y^N : y_i = \frac{1}{2}\}$ , para todos  $l, r \in \{1, \dots, N\}$ , se tiene

$$\int_{Y^N} |\partial_{y_r} u_l(y)|^2 dy \leq C \int_{Y^N} \sum_{m=1}^N [ |e(u)_{ml}|^2 + |e(u)_{mr}|^2 ] dy. \quad (6.14)$$

**Demostración.** Gracias al Lema 6.0.5, basta probar que existe  $C > 0$  tal que para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $u \in H_{\Gamma_i}^1(Y^N)^N$ ,  $l, r \in \{1, \dots, N\}$ , se tiene

$$\left| \int_{Y^N} \partial_{y_l} u_r(y) dy \right|^2 \leq C \int_{Y^N} \sum_{m=1}^N [ |e(u)_{ml}|^2 + |e(u)_{mr}|^2 ] dy. \quad (6.15)$$

Razonamos por reducción al absurdo, si (6.15) no es cierto, entonces existe  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $l, r \in \{1, \dots, N\}$ ,  $l \neq r$ , tales que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $u^n \in H_{\Gamma_i}^1(Y^N)^N$  verificando

$$\left| \int_{Y^N} \partial_{y_l} u_r^n(y) dy \right|^2 > n \int_{Y^N} \sum_{m=1}^N [ |e(u)_{ml}|^2 + |e(u)_{mr}|^2 ] dy. \quad (6.16)$$

Reemplazando  $u^n$  por  $u^n$  dividido entre  $\int_{Y^N} \partial_{y_l} u_r^n(y) dy$ , podemos suponer

$$\int_{Y^N} \partial_{y_l} u_r^n(y) dy = 1, \quad (6.17)$$

y

$$\int_{Y^N} \sum_{m=1}^N [ |e(u)_{ml}|^2 + |e(u)_{mr}|^2 ] dy < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.18)$$

Prolongando  $u^n$  por cero a

$$\mathcal{Z} = \{y \in \mathbb{R}^N : y'_i \in Y^{N-1}, \quad \frac{1}{2} \leq y_i < 1\},$$

podemos además suponer  $u^n \in H^1(Y^N \cup \mathcal{Z})^N$ ,  $u^n(y) = 0$  p.c.t.  $y \in \mathcal{Z}$ .

Definimos

$$\begin{aligned} v^n(y) &= u_r^n(y) && \text{si } r \text{ ó } l = i, \\ v^n(y) &= u_r^n(y) - \int_{\mathcal{R}(y)} u_r^n(\tau) d\tau && \text{si } r, l \neq i, \end{aligned}$$

p.c.t.  $y \in Y^N \cup \mathcal{Z}$ , siendo  $\mathcal{R}(y) = \{\tau \in Y^N \cup \mathcal{Z} : \tau_j = y_j, j \neq r, l\}$ . Gracias a (6.17), (6.18) y (6.12),  $\partial_{y_l} v^n$ ,  $\partial_{y_r} v^n$  convergen respectivamente a 1 y 0 en  $L^2(Y^N \cup \mathcal{Z})$ . Usando

además la desigualdad de Poincaré si  $r$  ó  $l = i$ , la desigualdad de Poincaré-Wirtinger si  $r, l \neq i$ , se deduce también que existe  $v \in L^2(Y^N \cup \mathcal{Z})$  tal que  $v^n$  converge fuertemente a  $v$  en  $L^2(Y^N \cup \mathcal{Z})$ , la cual debe satisfacer que existe  $\varphi \in L^2(\mathcal{R}(0))$  verificando

$$v(y) = y_l + \varphi(\mathcal{P}(y)), \quad \text{p.c.t. } y \in Y^N \cup \mathcal{Z}, \quad (6.19)$$

siendo  $\mathcal{P}$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^N$  sobre  $\{y \in \mathbb{R}^N : y_r = y_l = 0\}$ . Pero por otra parte,  $v^n$  es cero e.c.t.  $\mathcal{Z}$ , y por tanto  $v = 0$  e.c.t.  $\mathcal{Z}$ , lo que está en contradicción con (6.19).  $\square$

**Lema 6.0.8** Para  $L, \delta \in \mathbb{R}$  con  $0 < \delta \leq L$ , se denota

$$B(L, \delta) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{-L}{2} < x_1 < \frac{L}{2}, \frac{-\delta}{2} < |x'_1|_\infty < \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Se verifica:

a) Existe  $C > 0$  tal que para todo  $L, \delta \in \mathbb{R}$  con  $0 < \delta \leq L$ , y toda  $u \in H^1(B(L, \delta))^N$  se tiene

$$\int_{B(L, \delta)} \left| Du - \frac{1}{|B(L, \delta)|} \int_{B(L, \delta)} Du dz \right|^2 dx \leq C \left( \frac{L}{\delta} \right)^2 \int_{B(L, \delta)} |e(u)|^2 dx. \quad (6.20)$$

b) Existe  $C > 0$  tal que para todo  $L, \delta \in \mathbb{R}$  con  $0 < \delta \leq L$ , y toda  $u \in H^1_\Gamma(B(L, \delta))^N$ ,  $\Gamma = \{x \in B(L, \delta) : x_1 = \frac{L}{2}\}$ , se tiene

$$\int_{B(L, \delta)} |Du|^2 dx \leq C \left( \frac{L}{\delta} \right)^2 \int_{B(L, \delta)} |e(u)|^2 dx. \quad (6.21)$$

**Demostración.** Vamos a comenzar probando (6.20). Para  $u \in H^1(B(L, \delta))^N$ , definimos  $v \in H^1(Y^N)^N$  por

$$\begin{aligned} v_1(y) &= Lu_1(Ly_1e_1 + \delta y'_1) \\ &\qquad \qquad \qquad \text{p.c.t. } y \in Y^N. \\ v'_1(y) &= \delta u'_1(Ly_1e_1 + \delta y'_1) \end{aligned}$$

Entonces, para  $j \in \{2, \dots, N\}$ , el Corolario 6.0.6 aplicado a  $Y^N$  da

$$\begin{aligned} &\int_{B(L, \delta)} \left| \partial_{x_1} u_j - \frac{1}{|B(L, \delta)|} \int_{B(L, \delta)} \partial_{x_1} u_j(\tau) d\tau \right|^2 dx = \\ &= \frac{\delta^{N-1} L}{\delta^2 L^2} \int_{Y^N} \left| \partial_{y_1} v_j - \int_{Y^N} \partial_{y_1} v_j(\eta) d\eta \right|^2 dy \leq C \frac{\delta^{N-1} L}{\delta^2 L^2} \int_{Y^N} |e(v)|^2 dy \leq \\ &\leq C \frac{L^2}{\delta^2} \int_{B(L, \delta)} |e(u)|^2 dx. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Supongamos ahora  $j, m \in \{2, \dots, N\}$ , entonces gracias al Lema 6.0.5 aplicado a  $Y^N$  se tiene también

$$\begin{aligned}
 & \int_{B(L,\delta)} \left| \partial_{x_m} u_j - \frac{1}{|B(L,\delta)|} \int_{B(L,\delta)} \partial_{x_m} u_j(\tau) d\tau \right|^2 dx = \\
 & = \frac{\delta^{N-1} L}{\delta^4} \int_{Y^N} \left| \partial_{y_m} v_j - \int_{Y^N} \partial_{y_m} v_j(\eta) d\eta \right|^2 dy \leq \\
 & \leq C \frac{\delta^{N-1} L}{\delta^4} \sum_{(n,r) \neq (1,1)} \int_{Y^N} |e(v)_{nr}|^2 dy \leq C \frac{L^2}{\delta^2} \int_{B(L,\delta)} |e(u)|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Las desigualdades (6.22) y (6.23) claramente implican (6.20).

La demostración de (6.21) es completamente análoga gracias al Lema 6.0.7.  $\square$

# Bibliografía

- [1] Allaire G., Homogénéisation et convergence á deux échelles. Application á un problème de convection diffusion, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 312 (1991), 581-586.
- [2] Allaire G., Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), 1482-1518.
- [3] Allaire G., Bal G., Homogénéisation d'une équation spectrale du transport neutronique, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 325 (1997), 1043-1048.
- [4] Arbogast T., Douglas J., Hornung U., Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), 823-836.
- [5] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P., Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media, Math. Appl., 36, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989 (edición original rusa de 1984).
- [6] Bouchitté G., Fragalà I. , Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures, SIAM J. Math. Anal., 32, 6 (2001), 1198-1226.
- [7] Bouchitté G., Fragalà I., Homogenization of elastic thin structures: a measure-fattening approach, J. Convex Anal. (to appear).
- [8] Brahim-Otsmane S., Francfort G.A., Murat F., Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, J. Math. Pures et Appl., 71 (1992), 197-231.



- [9] Brézis H., *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.
- [10] Casado-Díaz J., Two-scale convergence for nonlinear Dirichlet problems in perforated domains, *Proc. Roy. Soc. Edimburgh*, 130 A (2000), 249-276.
- [11] Casado-Díaz J., Asymptotic behaviour of nonlinear problems in periodically perforated domains. The case  $p = N$ , *Asymp. Anal.*, 30, 1(2002), 1-26.
- [12] Casado-Díaz J., Gayte I., A general compactness result and its application to the two-scale convergence of almost periodic functions, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 323, 1 (1996), 329-334.
- [13] Casado-Díaz J., Gayte I., The two-scale convergence method applied to generalized Besicovitch spaces, *Proc. R. Soc. Lond.*, 458 (2003), 2925-2946.
- [14] Casado-Díaz J., Luna-Laynez M., Martín J.D., Homogeneización de estructuras reticuladas, *Encuentro de Matemáticos Andaluces (Sevilla, 2000)*, 253-260.
- [15] Casado-Díaz J., Luna-Laynez M., Martín J.D., An adaptation of the multi-scale methods for the analysis of very thin reticulated structures, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 332, 3 (2001), 223-228.
- [16] Casado-Díaz J., Luna-Laynez M., Martín J.D., Un método multiescalas para el análisis de estructuras reticuladas, *Actas (CD-ROM) XVII CEDYA-VII CMA (Salamanca, 2001)*.
- [17] Casado-Díaz J., Luna-Laynez M., Martín J.D., Homogenization of nonhomogeneous monotone operators in thin reticulated structures: A multiscale method, *por aparecer*.
- [18] Casado-Díaz J., Luna-Laynez M., Homogenization of the anisotropic heterogeneous linearized elasticity system in thin reticulated structures, *por aparecer*.
- [19] Casado-Díaz J., Murat F., A. Sili, Nonlocal limits in the asymptotic behavior of monotone problems in thin domains, *por aparecer*.

- [20] Chechkin G.A., Zhikov V.V., Lukkassen D., Piatnitski A.L., On homogenization of networks and junctions, *Asymp. Anal.*, 30, 1(2002), 1-26. 61-80.
- [21] Chineb R., Cioranescu D., El Jatani A., Panasenko G., Structures réticulées renforcées en élasticité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 326, 3 (1998), 897-902.
- [22] Ciarlet P.G., *Élasticité tridimensionnelle*, Masson, Paris, 1986.
- [23] Ciarlet P.G., *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: an Asymptotic Analysis*, Masson-Springer Verlag, Paris, 1990.
- [24] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, Volume II: Theory of Plates*, *Studies in Math. and its Appl.*, 27, North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [25] Cioranescu D., Saint Jean Paulin J., Reinforced and honeycomb structures, *J. Math. Pures et Appl.*, 65 (1986), 403-422.
- [26] Cioranescu D., Saint Jean Paulin J., Problèmes de Neumann et de Dirichlet dans des structures réticulées de faible épaisseur, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 303, 1 (1986), 7-12.
- [27] Cioranescu D., Saint Jean Paulin J., Structures très minces en élasticité, *C. R. Acad. Sci. Paris* 308, 1 (1989), 41-46.
- [28] Cioranescu D., Donato P., Murat F., Zuazua E., The wave equation in domains with small holes and applications to exact controllability, *Nonlinear PDE, Collège de France Seminar, Research Notes in Math.*, Pittman 10, 1989.
- [29] Cioranescu D., Donato P., Zuazua E., Exact boundary controllability for the wave equation in domains with small holes, *J. Math. Pures et Appl.*, 71 (1992), 343-377.
- [30] Cioranescu D., Oleinik O.A., Tronel G., Korn's inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants, *Asymp. Anal.*, 8 (1994), 1-14.
- [31] Cioranescu D., Saint Jean Paulin J., *Homogenization of Reticulated Structures*, *App. Math. Sci.*, 136, Springer-Verlag, New York, 1999.

- [32] Clark G.W., Packer L.A., Two-scale homogenization of implicit degenerate evolution equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, 214 (1997), 420-438.
- [33] Damlamian A., Vogelius M., Homogenization limits of the equations of elasticity in thin domains, *SIAM J. Math. Anal.* 18, 2 (1987), 435-451.
- [34] Damlamian A., Vogelius M., Homogenization limits of the diffusion equations in thin domains, *Math. Mod. and Numer. Anal.*, 22, 1 (1998), 53-74.
- [35] Duvaut G., Lions J.L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunon, Paris, 1972.
- [36] E W., Homogenization of linear and nonlinear transport equations, *Comm. Pure and App. Math.*, 45 (1992), 301-326.
- [37] Edwards R.E., *Functional Analysis: Theory and Applications*, Holt, Rinehart y Winston, New York, 1965.
- [38] Griso G., *Analyse asymptotique de structures réticulées*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1996.
- [39] Kesavan S., Vanninathan, L'homogénéisation d'un problème de contrôle optimal, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A-B*, 285 (1997), 441-444.
- [40] Kesavan S., Saint Jean Paulin, J., Homogenization of an optimal control problem, *SIAM J. Control Optim.*, 35, 5 (1997), 1557-1573.
- [41] Kesavan S., Saint Jean Paulin, J., Optimal Control on Perforated Domains, *J. Math. Anal. and Appl.*, 229 (1999), 563-586.
- [42] Le Dret H., *Problèmes variationnels dans les multi-domaines*, Masson, Paris, 1991.
- [43] Lenczner M., Homogénéisation d'un circuit électrique, *C. R. Acad. Sci. Paris* 324, II b (1997), 537-542.

- [44] Leray J., Lions J.L., Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 97-107.
- [45] Lions J.L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- [46] Matache A.M., Schwab C., High order generalized FEM for lattice materials, Proceedings of the 3rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced, Finland 1999.
- [47] Matache A.M., Babuška I., Schwab C., Generalized p-FEM in Homogenization, *Numerische Mathematik*, 86, 2 (2000), 319-375.
- [48] Mossino J., Courilleau P., Compensated compactness for nonlinear homogenization and reduction dimension, *por aparecer*.
- [49] Murat F., Sili A., Comportement asymptotique des solutions du système de l'élasticité linéarisée anisotrope hétérogène dans des cylindres minces, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 328 (1999), 179-184.
- [50] Nėcas J., *Equations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, 1965.
- [51] Nguetseng G., A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 20, 3 (1989), 608-623.
- [52] Nguetseng G., Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics, *SIAM J. Math. Anal.*, 21, 6 (1990), 1394-1414.
- [53] Panasenko G.P., The principle of splitting of an averaged operator for a nonlinear system of equations in periodic and random skeletal structures, *Soviet Math. Dokl.*, 25, 2 (1982), 290-295.
- [54] Panasenko G.P., Homogenization processes in lattice structures, *Math. Sbornik*, 122, 2 (1983), 220-231.

- [55] Panasenko G.P., Averaging processes in frame constructions with random properties, *Vych. Mat. Fiz.*, 23, 5 (1983), 1098-1109.
- [56] Panasenko G.P., Multicomponent averaging of processes in strongly inhomogeneous structures, *Mat. Sb.*, 181, 5 (1990), 134-142.
- [57] Trabucho L., Viaño J.M., Mathematical modelling of rods. Handbook of Numerical Analysis, Volume IV, North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [58] Yosida K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [59] Zhikov V.V., Connectedness and homogenization. Examples of fractal conductivity, *Mat. Sb.* 187,8 (1996), 3-40.
- [60] Zhikov V.V., Weighted Sobolev Spaces, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 189, 8 (1998), 1139-1170.
- [61] Zhikov V.V., On an extension of the method of two-scale convergence and its applications, *Mat. Sb.* 191, 7 (2000), 973-1014.
- [62] Zhikov V.V., Homogenization of Elasticity Problems on Singular Structures, *Dokl. Math.*, 64, 2 (2001), 258-262.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal de Grados por las causas siguientes:  
en el día de la fecha para juzgar el Tesis Doctoral

0. Manuel Luna Laynez

1. la Homogeneización de estructuras reticuladas:  
Un método multiescala

Se acordó otorgarle la distinción de sobresaliente cum laude por  
unanimidad

Sevilla, 29 de Mayo 2003

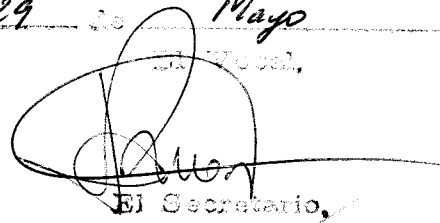
El Vocal,



El Presidente



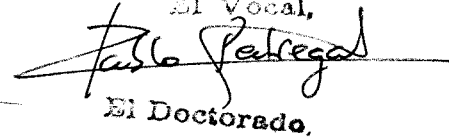
El Vocal,



El Secretario,



El Vocal,



El Doctorado,

