Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Memoria para la optar al grado de Doctor en Matemáticas

EXISTENCIA, UNICIDAD Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN ALGUNOS SISTEMAS DINÁMICOS DETERMINISTAS Y ESTOCÁSTICOS

Autor: PEDRO MARÍN RUBIO
Directores: TOMÁS CARABALLO GARRIDO Y JOSÉ REAL ANGUAS.

Memoria presentada por
D. Pedro Marín Rubio
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

V° B° de los Directores del Trabajo

T. Caraball

Fdo.: TOMÁS CARABALLO GARRIDO
Catedrático de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla

Fdo.: JOSÉ REAL ANGUAS
Catedrático de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla

Fdo.: PEDRO MARÍN RUBIO
Sevilla, 18 de marzo de 2003

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Depositado en el Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Facultad de Matemáticas de esta Universidad desde el día 25/03/03 hasta el día 10/04/03

Sevilla 24 de marzo de 2003.

EL DIRECTOR DEL Dpto.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral al folio 108 número 314 del libro correspondiente.

Sevilla, 20 Marzo 2003

El Jefe del Negociado de Tesis,

Agradecimientos

Quienes han pasado por el trance de *buscar* y *construir* una memoria doctoral, y quienes les han acompañado a lo largo de dicho camino, saben de las muchas sensaciones que esto puede provocar. Lo que parece en principio una tarea titánica, se transforma en un andar titubeante en la carrera de investigador; poco a poco, con el paso del tiempo, se disipan dudas, confusión y prisas, quedando finalmente atraídos hacia un horizonte relativamente claro y ordenado. El modo en que se desarrolla dicho proceso, el aprendizaje, no es en absoluto predeterminado, sino azaroso en gran medida.

Desearía iniciar esta memoria expresando mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han ayudado a que hoy se presente. Nombrarlas a todas resulta difícil, pido disculpas por las ausencias.

En un ámbito particular, primero agradezco a mi familia, los más cercanos, y amigos, especialmente a Antonio, Carlos, José Manuel y Paco, por su apoyo y ánimos constantes.

De forma capital y con profundo afecto, a mis tutores, los Profesores Tomás Caraballo y José Real, por la paciencia y diligencia con que me han guiado, la confianza transmitida y la excelente relación que han hecho que tengamos tras este tiempo juntos. Les debo mi reconocimiento por la formación recibida y el interés que despertaron en mí desde un principio tanto por el análisis estocástico como por el comportamiento asintótico en sistemas dinámicos. Los contactos que me ofrecieron y su aliento para ir a congresos y realizar estancias en otras universidades han ampliado y enriquecido sustancialmente mi visión de los problemas que tratamos. Sin duda, lo bueno que pueda haber de investigador en mí, así como la presente memoria, es en gran parte mérito de ellos.

Asimismo, quiero expresar mi gratitud a los profesores con los que he tenido la oportunidad de trabajar durante estos años en visitas a sus respectivas universidades, por el trato que me dispensaron y su indudable aportación a mi formación actual: al Profesor Etienne Pardoux, de la Universidad de Provenza, en Marsella, que aumentó nuestro interés por las ecuaciones estocásticas retrógradas y los procesos con reflexión, presente en nuestro proyecto desde el principio; a James Robinson, de la Universidad de Warwick, Coventry, a quien me faltan palabras para describir por cuánto debo, ha sido como un tercer tutor, su hospitalidad (junto con Tania y Maggie, por supuesto) fue siempre ilimitada y la relación de amistad que mantenemos me honra enormemente, capaz de transmitir su curiosidad infatigable e insaciable por las matemáticas, fue (y continua siendo) una luz en todo lo que respecta al comportamiento asintótico de sistemas dinámicos; al Profesor Peter Kloeden, de la Universidad Johann Wolfgang Goethe, en Frankfurt am Main, que nos adentró en el estudio de los atractores en sentido débil para sistemas dinámicos, la colaboración con él en los últimos meses ha sido un placer; y finalmente a José Valero (y en él a Natalia), de la Universidad *Cardenal Herrera* CEU, Elche, del que recibí la misma cálida hospitalidad y que motivó nuestro interés por las inclusiones diferenciales entre otros temas. A todos ellos mi más sentido reconocimiento.

(...) descubrí una reproducción a color recortada de un libro de arte. (...)
Al principio me parecieron sólo manchas anárquicas, pero pronto descubrí en el pequeño recorte de papel un asombroso universo de novias azules volando patas arriba, un pálido músico flotando entre un candelabro de siete brazos, una cabra roja y otros veleidosos personajes. Había tantos colores y objetos diferentes que necesité un buen rato para moverme en el maravilloso desorden de la composición.

PAULA
Isabel Allende

Todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten; ¿cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca? (...) vi en un gabinete de Alkmaar un globo terráqueo entre dos espejos que lo multiplican sin fin, vi caballos de crin arremolinada, en una playa del Mar Caspio en el alba, vi la delicada osatura de una mano, vi a los sobrevivientes de una batalla, enviando tarjetas postales, vi en un escaparate de Mirzapur una baraja española, vi las sombras oblicuas de unos helechos en el suelo de un invernáculo, vi tigres, émbolos, bisontes, marejadas y ejércitos, vi todas las hormigas que hay en la tierra, vi un astrolabio persa (...) vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo.

EL ALEPH
Jorge Luis Borges

Índice General

Lista de símbolos y abreviaturas

$\lvert\cdot\rvert$, $\lVert\cdot\rVert$	normas (en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{k\times m}$ denotará la euclídea).
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	producto escalar en un Hilbert dado (en $\mathbb{R}^n$ será el euclídeo usual).
2^X	el conjunto de las partes de X.
$a\wedge b$	mínimo entre a y b.
$a\vee b$	máximo entre a y b.
$\mathcal{B}o(X)$	σ-álgebra de los Borelianos de X.
$BV(0,T)$	espacio vectorial de las funciones de variación acotada en $[0,T]$.
$\mathcal{B}(X)$	subconjuntos acotados no vacíos de X.
$B_X(A,\epsilon)$	conjunto $\{x\in X \mid \mathrm{dist}(x,A)<\epsilon\}$.
$\mathcal{C}$	espacio de Banach $C([-h,0];\mathbb{R}^d)$ dotado de la norma del supremo.
$\mathcal{C}(X)$	subconjuntos cerrados no vacíos de X.
c. s.	casi seguro respecto de la medida P (también notado P-c. s.).
$\mathcal{C}_v(X)$	subconjuntos cerrados convexos no vacíos de X.
$\mathrm{d}_H(A,B)$	distancia de Hausdorff sobre un espacio métrico dado (X,ρ) (métrica sobre $\mathcal{C}(X)$): $\max(\mathrm{dist}(A,B),\mathrm{dist}(B,A))$.
$\mathrm{dist}(A,B)$	semidistancia de Hausdorff en un métrico (X,ρ): $\sup\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B}\rho(a,b)$.
e.c.t.	en casi todo punto.
$\mathcal{E}(0,T)$	e. v. de las combinaciones lineales de procesos elementales.
EX	esperanza de la variable aleatoria (v.a.) X respecto de P: $\int_\Omega X\,dP$.
$E(X\vert\mathcal{G})$	esperanza condicionada de la v. a. X a la σ-álgebra $\mathcal{G}$.
FMC	Flujo Multivaluado Cruzado.
$\{\mathcal{F}_t\}$	filtración (familia creciente de σ-álgebras) definida sobre $(\Omega,\mathcal{F},P)$.
D^2u	matriz Hessiana de u.
$\gamma^+(B)$	órbitas generadas por un semiflujo con dato inicial en B.
$\gamma_t^+(B)$	órbitas generadas por un semiflujo con dato inicial en B desde t.
$\lvert k\rvert_t$	variación total de k en el intervalo $[0,t]$.
$\mathcal{K}(X)$	subconjuntos compactos no vacíos de X.
$\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)$	espacio de las clases de procesos $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles con valores en $\mathbb{R}^n$ y $\int_0^T \lvert f(s)\rvert^2\,ds<\infty$ c. s.
$L^p(X;V)$	clases de funciones medibles $f:X\to V$ con $\int_X \lVert f\rVert_V^p dx<\infty$.
$L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([0,T];\bar{\mathcal{O}}))$	espacio de las clases de procesos $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles de $L^p(\Omega;C([0,T];\bar{\mathcal{O}}))$.
$M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)$	espacio de las clases de procesos $\{\mathcal{F}_t\}$-progr. medibles con valores en $\mathbb{R}^n$ y de cuadrado integrable respecto de $dP\otimes dt$.
PDM	Proceso Dinámico Multivaluado.
$\mathcal{N}$	la familia de los conjuntos P-nulos de $\mathcal{F}$.
$n(x)$	normal exterior unitaria a un dominio en x.
$\omega(B)$	conjunto omega-límite del conjunto B para cierto semiflujo.

$\omega(t, B)$	conjunto omega-límite del conjunto B en tiempo t para cierto proceso.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	espacio de probabilidad (en general *completo*).
$\mathcal{P}(X)$	colección de los subconjuntos no vacíos de X.
$\mathbb{R}_d$	el conjunto de pares reales $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2,\, t \geq s\}$.
σ^*	matriz traspuesta: $\sigma^* = (\sigma^*_{ij}) = (\sigma_{ji})$.
$SCS(X; \mathcal{P}(Y))$	conjunto de m-aplicaciones de X en Y semicontinuas superiormente.
SSDMA	Sistema Semi-Dinámico Multivaluado Autónomo.
θ_t	*cociclo*, conjunto de homeomorfismos sobre un espacio dado.
$\mathrm{Tr}(A)$	traza de la matriz cuadrada A, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$.
u_t	en el contexto de funciones con retardo: $u_t : s \in [-h, 0] \mapsto u(t+s)$.
$W = \{W_s\}_{s \geq 0}$	un proceso de Wiener, también llamado movimiento Browniano.
y^*	vector y traspuesto.
$\mathbb{Z}_d$	el conjunto de pares de enteros $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \,\vert\, i \geq j\}$.

Introducción

Dentro del amplio campo que cubre la matemática aplicada, es bien sabido que dos ramas de indudable utilidad y continua expansión desde las últimas décadas del siglo pasado son el análisis estocástico y la teoría de atractores. Su motivación proviene de las condiciones contrapuestas que rigen el avance en la comprensión de cualquier fenómeno físico, químico, económico, biológico, etc, a partir de ciertos modelos, los cuales, a veces, son simplificaciones excesivas, de resolución asequible pero mala adaptación al fenómeno en cuestión, y otras, extremadamente complicados y difíciles de tratar matemáticamente.

A grosso modo, de un lado el análisis estocástico permite el estudio de sistemas más complejos en los que términos aleatorios o propiamente procesos estocásticos están incorporados en el modelo, mientras que, por otro lado, la teoría de atractores pretende ofrecer una simplificación en sistemas altamente complicados, caóticos a veces, y que escapan a otros análisis*.

Motivación y síntesis de resultados de la Parte I

Es bien conocido que existen fuertes relaciones entre las ecuaciones diferenciales estocásticas y las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, tanto parabólicas como elípticas, conocidas como fórmulas de tipo Feynman-Kac.

En la Parte I de la memoria tenemos como objetivo fundamental establecer una interpretación probabilística de las soluciones del problema de Neumann homogéneo para un sistema de EDP parabólico quasi-lineal de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_l}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \langle b(t,x,u(t,x)), \nabla u_l(t,x)\rangle \\
&\quad + f_l(t,x,u(t,x),(\nabla u_l(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x))) = 0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{O}, \\
&\frac{\partial u_l}{\partial n}(t,x) = 0, \qquad x\in(0,T)\times\partial\mathcal{O}, \quad l=1,\dots,n, \\
&u(T,x) = h(x), \qquad x\in\mathcal{O},
\end{aligned} \tag{1}$$

bajo hipótesis más generales que las conocidas hasta hoy, a saber, las consideradas en Pardoux & Zhang [134] y en Ma & Cvitanić [105].

A continuación consideramos algunos ejemplos ilustrativos sobre las relaciones de Feynman-Kac, que nos introducen de forma natural en la metodología a seguir para tratar el problema anunciado.

---

*J. L. Lions muestra claramente y con motivaciones medioambientales "globales" en la Introducción de su obra divulgativa *El Planeta Tierra* [102] la necesidad de (entre otras) ambas ramas para una mejor comprensión de la turbulencia climática y de los fenómenos perturbados aleatoriamente.

Suponemos dado un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un proceso de Wiener d-dimensional W respecto de la filtración generada por él mismo ampliada con los conjuntos P-nulos de $\mathcal{F}$.

Un problema de Cauchy:

Consideramos ahora el espacio entero, $\mathbb{R}^d$, y el problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Lu(t,x) &= f(t,x) \quad \text{en} \quad [0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u(T,x) &= h(x) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{2}$$

con

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,x)$$

y las siguientes condiciones:

(1) Las funciones a_{ij} y b_i son acotadas en $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ y globalmente lipschitzianas en cualquier compacto de $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. Además, cada a_{ij} y b_i es Hölder continua en su variable x (uniformemente en $[0,T] \times \mathbb{R}^d$), y a es simétrica y definida positiva uniformemente en $[0,T) \times \mathbb{R}^d$ (por tanto existe otra matriz simétrica y definida positiva σ con coeficientes lipschitzianos y tal que $a = \sigma\sigma^*$).

(2) La función c está uniformemente acotada en $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ y es Hölder continua en (t,x) en cualquier compacto de $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.

(3) La función h se supone continua en todo $\mathbb{R}^d$ y satisface la siguiente condición de crecimiento:

$$\exists\ \alpha, \beta > 0 \quad | \quad |b(t,x)| \vee |h(x)| \leq \beta(1 + |x|^\alpha) \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d.$$

Con estas condiciones, se tiene el siguiente

Teorema 0.1. *(cf. Mao* [111, p. 82]*) Existe una única solución u para* (2) *y una única solución, $X^{t,x}(s)$, para*

$$dX_s = b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, \qquad X_t = x, \qquad s \in [t,T]. \tag{3}$$

Además, se satisface la siguiente relación:

$$u(t,x) = E\left[h(X_T^{t,x})\exp\left(\int_t^T c(s, X_s^{t,x})ds\right)\right] - E\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x})\exp\left(\int_t^s c(r, X_r^{t,x})dr\right)ds\right].$$

Un ejemplo importante históricamente al que se aplica el resultado anterior son los procesos de difusión de Kolmogorov (1931) y Feller (1936) (cf. Karatzas & Shreve [87, p. 282]).

Otro caso interesante se consigue con $L = \Delta$ y $f \equiv 0$.

Ejemplo 0.2. *Consideremos la ecuación del calor retrógrada:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \Delta u(t,x) &= 0 \quad \text{en} \quad [0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u(T,x) &= h(x) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

La ecuación estocástica a considerar es: $dX_s = dW_s$, planteada en $[t,T]$. Obviamente se tiene que $X^{t,x}(s) = x + W_s - W_t$, con lo que

$$u(t,x) = Eh(x + W_T - W_t).$$

Para tratar un problema en un dominio distinto del espacio total es necesario introducir los tiempos de parada:

Problema de Cauchy-Dirichlet para una EDP lineal parabólica:

Considérese el problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Lu(t,x) &= f(x) \quad \text{en} \quad [0,T) \times D, \\ u(T,x) &= h(x) \quad \text{en} \quad D, \\ u(t,x) &= g(t,x) \quad \text{sobre} \quad \partial[0,T] \times D, \end{aligned} \tag{4}$$

con L como antes, siendo sus componentes funciones con valores reales, definidas en $[0,T] \times D$, siendo D abierto, conexo y acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera de clase C^2, $a = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ es una matriz simétrica y definida positiva (uniformemente en $[0,T) \times D$). Se supone también que a_{ij}, b_i son globalmente lipschitzianas y que c es no positiva y uniformemente Hölder continua en $[0,T] \times \bar{D}$, f uniformemente Hölder continua en $\bar{D}$ y g continua en $[0,T] \times \partial D$, y la condición de compatibilidad $h(x) = g(x,T)$.

Bajo estas condiciones, existe una única solución u para (4), que también admite una representación probabilística: sean como antes b y σ (la raíz cuadrada de a) extendidas a todo $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ tal que sigan siendo globalmente lipschitzianas, entonces, fijado el par $(t,x) \in [0,T) \times D$, el problema estocástico (3) tiene una única solución, que notamos de nuevo $\{X_s^{t,x}\}_{s\in[t,T]}$. Bajo las condiciones anteriores, se tiene el siguiente

Teorema 0.3. *(cf. Mao* [111, p. 81]*) La única solución $u(t,x)$ de (4) viene dada por*

$$\begin{aligned} u(t,x) \;=\; & E\left[I_{\{\tau<T\}}g(\tau, X_\tau^{t,x}) \exp\left(\int_t^\tau c(s, X_s^{t,x})ds\right) + I_{\{\tau=T\}}h(X_T^{t,x}) \exp\left(\int_t^T c(s, X_s^{t,x})ds\right)\right] \\ & -E\left[\int_t^\tau f(s, X_s^{t,x}) \exp\left(\int_t^s c(r, X_r^{t,x})dr\right) ds\right], \end{aligned}$$

donde $\tau = T \wedge \inf\{s \in [t,T] : X_s^{t,x} \notin D\}$.

Antes de hablar de los sistemas no lineales, notemos que existen generalizaciones al caso en que la matriz a no tiene tan buenas propiedades. Supongamos que a es degenerada, y que por tanto puede no haber solución clásica. Aunque la Fórmula de Feynman-Kac establece relaciones con soluciones clásicas de EDP lineales, gracias a la introducción de la noción de solución de viscosidad (cf. Crandall *et al.* [43]), se pueden extender las fórmulas probabilísticas anteriores y relacionarlas con soluciones de viscosidad, coincidiendo con la clásica si ésta existe.

Más exactamente, si consideramos la EDP lineal parabólica (2) y aún es cierta la descomposición $a = \sigma\sigma^*$, las funciones $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, c, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ son uniformemente continuas, c es uniformemente acotada, y b, σ, f y h son globalmente lipschitzianas en x, uniformemente en $[0,T]$, y, fijado $x = 0$, como funciones definidas en $[0,T]$ están acotadas uniformemente, entonces (cf. Yong & Yu Zhou [169, p. 374]) existe una única solución de viscosidad para (2) y viene dada por la fórmula del Teorema 0.1.

Análogo resultado se tiene para el problema (4) extendiendo el Teorema 0.3, si además de las condiciones anteriores, se verifica $h(x) = g(x,T)$ en D.

Se pueden obtener también resultados de representación (de soluciones clásicas o de viscosidad) para EDP no lineales. Más exactamente, usando no sólo una ecuación diferencial estocástica progresiva, sino dos ecuaciones, una progresiva y otra retrógrada, es posible tratar EDP de tipo quasi lineal. En Pardoux & Peng [130] se tratan por primera vez en un sentido riguroso las ecuaciones diferenciales estocásticas retrógradas no lineales, y a partir de este trabajo surge la mejora antes comentada para problemas quasi lineales[†] (cf. Peng [135]).

Enunciamos brevemente resultados con ecuaciones no lineales referentes a dos de los problemas antes planteados, el problema de Cauchy, cuando tratamos con el espacio completo, y el problema de Cauchy-Dirichlet cuando estamos en un abierto acotado.

Se considera ahora un proceso de Wiener estándar m-dimensional, que seguimos notando W; D un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera de clase C^1; y problemas análogos a (2) y (4) con $c \equiv 0$ y miembro de la derecha $-f(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)\sigma(t,x))$, siendo ahora $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$, $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funciones continuas y además σ y b globalmente lipschitzianas en $x \in \mathbb{R}^d$ y f globalmente lipschitziana en $(y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ (uniformemente respecto $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$).

Entonces la única solución de viscosidad para ambos sistemas viene dada por $u(t,x) = EY_t^{t,x}$ para todo $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, donde $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$ es la única solución de la ecuación retrógrada

$$dY_s = -f(s,X_s,Y_s,Z_s)ds + Z_s dW_s, \quad s \in [t,T],$$

con condiciones finales $Y_T = h(X_T)$ e $Y_\tau = h(X_\tau)$ respectivamente, la primera en tiempo fijo y la segunda en tiempo final aleatorio

$$\tau^{t,x}(\omega) = \inf\{s \in [t,T] \quad | \quad X_s^{t,x}(\omega) \notin D\},$$

donde $X^{t,x}$ viene dada por el problema (3). Además, si existe solución clásica para dichos problemas, coincide con la expresión dada anteriormente (cf. Yong & Yu Zhou [169, pp. 377 y 380], o de forma más extensa los trabajos Pardoux [128] y Pardoux & Peng [131] para el primer problema y Darling & Pardoux [51] para el segundo en el caso elíptico).

A continuación describimos brevemente nuestra aportación respecto a estas cuestiones, recogidas en la primera parte de la memoria:

El Capítulo 1 es propiamente un parágrafo resumen autocontenido, y está dedicado a describir someramente los conceptos fundamentales del Análisis Estocástico necesarios para el desarrollo del siguiente. En él se definen los procesos estocásticos, las martingalas, los procesos de Wiener y se señalan las dificultades que motivan la introducción de la integral estocástica, así como un breve esquema de su construcción usando propiedades anteriormente dadas como la Desigualdad de Doob. Resultados técnicos y esenciales como la Fórmula de Itô, el Teorema de Representación de Martingalas y el Lema de Girsanov son también enunciados aquí.

El Capítulo 2 está compuesto por varias secciones. Se empieza tratando los procesos de difusión con reflexión en la frontera. Concretamente, nos planteamos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s - k_t, \\ k_t &= -\int_0^t \nabla\phi(X_s)\,d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{X_s \in \partial\mathcal{O}\}}\,d|k|_s, \quad t \in [0,T], \end{aligned}$$

donde T es una constante dada, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ describe un cierto dominio acotado $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$, b y σ están definidas de $\Omega \times [0,T] \times \bar{\mathcal{O}}$ en $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{R}^{d\times m}$ respectivamente y satisfacen condiciones de

[†]No obstante hay otras aplicaciones para las ecuaciones estocásticas retrógradas y los sistemas progresivo-retrógrados, véase por ejemplo [54, 55, 49] para su uso financiero.

medibilidad adecuadas, y b y σ son respectivamente monótona y globalmente Lipschitziana en la variable espacial, fijados (t, ω).

Las novedades de esta ecuación progresiva con reflexión son, de un lado, la eliminación de la convexidad como restricción en la geometría del dominio, y de otro, la condición de monotonía en el coeficiente de deriva:

$$\langle x - x', b(\omega, t, x) - b(\omega, t, x') \rangle \leq L_{b_x} |x - x'|^2, \quad c.\ s.,$$

hasta ahora sólo tratada bajo condiciones de lipschitzianidad, salvo el caso unidimensional tanto progresivo como retrógrado (cf. Zhang [171] y Matoussi [117]). Al contrario que en Hu [79], donde se trata el caso en que la constante $L_{b_x} < 0$, en nuestro caso $L_{b_x} \in \mathbb{R}$ no tiene restricción, gracias a la condición de reflexión. Los procesos con reflexión pueden enfocarse desde distintos puntos de vista, por ejemplo con operadores maximales monótonos. Nosotros seguimos la formulación dada en Lions & Sznitman [103] a través del Problema de Skorokhod, tratando de forma más simple un caso más general que Słomiński [154] en lo que a las hipótesis de los términos y del dominio se refiere. Para tratar el problema estocástico analizamos previamente la versión determinista, generalizando el resultado homólogo de [103].

La segunda etapa del capítulo consistirá en establecer relaciones de tipo Feynman-Kac como las descritas anteriormente. Lo primero que debe notarse es que cuando el sistema progresivo-retrógrado planteado es acoplado (hasta ahora no lo ha sido) en sus procesos incógnitas X, Y y Z, se consigue establecer relaciones más complejas: Pardoux & Tang [133] tratan un problema estocástico acoplado progresivo-retrógrado, i. e. con b, σ y f dependientes de x, y y z, y se consigue relacionar, cuando σ no depende de la variable z y los coeficientes son deterministas, con el sistema de EDP quasi lineal

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^*)_{ij}(t, x, u) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad + \langle b(t, x, u, (\nabla u)^* \sigma(t, x, u)), \nabla u_k \rangle + f_k(t, x, u, (\nabla u)^* \sigma(t, x, u)) = 0, \\
&u_k(T, x) = h_k(x), \qquad\qquad k = 1, \ldots, m, \quad x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Un trabajo similar es debido a Delarue [52], extendiendo el método de cuatro pasos introducido por Ma *et al.* [106], y tratado también por Yong [167, 168] y Hu & Yong [80].

Nuestra intención, como indicábamos al principio, es conseguir relaciones con EDP con condición de Neumann en la frontera. Los inicios de las aplicaciones de los procesos con reflexión y tiempos locales en la frontera para la resolución de ecuaciones con condiciones de tipo Neumann se remontan a los trabajos de Ikeda *et al.* [82] y Sato & Ueno [147] principalmente (problemas elípticos). Continuados más recientemente por Hsu [76, 77] y Hu [78], sirven como fórmula de representación para problemas deterministas (todavía elípticos y lineales) con condiciones de Neumann en la frontera del dominio y para ecuaciones quasi-lineales en los casos elíptico y parabólico (mediante el empleo de sistemas estocásticos progresivo-retrógrados) por Pardoux & Zhang [134], completando la serie de fórmulas probabilistas expuestas con anterioridad[‡].

[‡]Por supuesto, cabe también reseñar que los procesos con reflexión tienen otras aplicaciones: por ejemplo en economía (cf. Chung & Williams [42] o Ma & Cvitanić [105]) o en el estudio de terremotos: Pettersson [136, Sec. 3] muestra su aplicabilidad al fenómeno de la histéresis.

Por tanto, de lo anterior, resulta natural estudiar un sistema acoplado con reflexión (cf. Marín-Rubio & Real [113]). Más exactamente, consideramos una ecuación progresiva similar a la anterior y otra retrógrada; mientras que en [134] la relación que se establece es débil entre ambas ecuaciones, nuestra versión comprende una relación fuerte entre ambas:

$$
\begin{aligned}
X_t &= x_0 + \int_0^t b(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s)\, dW_s - k_t, \\
Y_t &= h(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \\
k_t &= -\int_0^t \nabla\phi(X_s)\, d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{X_s \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|k|_s, \quad t \in [0,T],
\end{aligned}
$$

donde $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ está dado. Un primer resultado, en la línea del dado por Pardoux & Tang [133] es de existencia y unicidad para tiempos pequeños, cuando σ es independiente de z. Resultados más generales, extendiendo los dados en [133, 107, 105], permitirán obtener solución sin las dos restricciones anteriores, aunque a costa de imponer una disipatividad fuerte en la función f.

Utilizando los procesos $\{Y_s^{t,x}\}_{s \geq t}$ obtenidos de la modificación natural del problema anterior a la pertinente familia con tiempo y dato iniciales (t, x), establecemos relaciones en sentidos clásico y de viscosidad con el sistema de EDP quasi lineal (1).

Sin embargo, nuestra aproximación al problema será puramente probabilista, extendiendo los resultados de Pardoux & Tang [133] y Ma & Yong [107], sin necesidad de hacer estimaciones en el sistema (1) para extender la solución conseguida en intervalos pequeños, como hacen Ma *et al.* [106], Yong [167, 168] y Delarue [52] entre otros.

En la última sección del capítulo, analizamos una extensión de la ecuación progresiva con reflexión al caso en que los términos b y f actúan no sobre el estado presente del proceso sino sobre todo un intervalo anterior $[-h, 0]$, con $h > 0$ un valor fijado. El motivo de estudiar ecuaciones con condiciones no locales, y más concretamente, de ecuaciones con retardo, es bastante natural en cuestiones biológicas así como en fenómenos físicos con memoria, y por supuesto también cuando el modelo es estocástico (cf. Mohammed [120]). Volveremos sobre el particular en el último capítulo de la segunda parte, donde detallamos algunos ejemplos.

Motivación y síntesis de resultados de la Parte II

La segunda parte de la memoria se dedica al estudio de atractores en diversos sistemas dinámicos, en su mayoría multivaluados y no autónomos. Es bien conocido (cf. Temam [160]) que en los problemas de evolución la dinámica del fenómeno puede resultar bastante complicada de estudiar, pensemos por ejemplo en un caso físico, que puede ser la circulación de un fluido en un dominio bajo la acción de una fuente de calor actuando sobre la base de éste. Dependiendo del calor suministrado al sistema, si bien a baja temperatura cabe esperar un estado de equilibrio estable globalmente, o quizás varios puntos de equilibrio, ahora estables localmente, nuevos fenómenos se producen cuando aumenta la energía. A medida que aumenta la temperatura pueden aparecer órbitas cíclicas (bifurcación de Hopf), y desde ahí cascadas de Feigenbaum, y finalmente un régimen "en apariencia" desordenado por completo (por supuesto, éste no es más que un esquema simplificado, muchas otras opciones son posibles). Los fenómenos de turbulencia en mecánica de fluidos, tanto atmosférica como oceanográfica, son de indiscutible interés (cf. Lions [102]; véanse también las referencias en Temam [160] sobre los trabajos de Arnold, Kolmogorov, Moser, Ruelle & Takens, y Smale entre otros); pero el caos está presente también en procesos económicos, químicos, biológicos... poblaciones que crecen de forma explosiva en una temporada y pueden desaparecer a la siguiente.

La teoría de atractores, entre otros fines, pretende poner de manifiesto la existencia de un cierto "orden" dentro del aparente caos. Si bien, por ejemplo, la propiedad de reversibilidad es falsa en el campo de las EDP, sí se cumple en el interior del atractor para un sistema autónomo y univaluado, ya que será un compacto $\mathcal{A}$ invariante para el flujo, que atrae a todos los acotados cuando el tiempo es suficientemente grande. Es más, a veces se pueden probar resultados finito dimensionales para la dinámica interna del atractor (e.g. [110, 58]), lo que simplifica la primera visión que se tenía sobre el sistema caótico.

Un caso natural en el campo de los sistemas dinámicos es el tratado por el análisis multivaluado, en el que se enmarca esencialmente esta segunda parte de la memoria. Cuando para (sistemas de) ecuaciones diferenciales no hay (o se desconoce) unicidad de solución [12], o se tratan problemas de control [23], controlabilidad o de viabilidad [6], por citar algunos ejemplos, el marco natural a adoptar es la teoría multivaluada [7, 8].

En el Capítulo 3 reflejamos el estudio de atractores para sistemas multivaluados procedentes de problemas autónomos (cf. Caraballo *et al.* [30]) a partir de dos trabajos que reflejan las principales tendencias respecto a la materia, a saber, los trabajos de Ball [12] y Melnik & Valero [118]. El primero hace referencia a aquellos autores que prefieren trabajar directamente con las soluciones individuales del problema, mientras el segundo utiliza directamente la aplicación multivaluada de estados alcanzables formada por todas las soluciones anteriores. La discusión sobre una elección u otra (cf. [21]) parece zanjada en las décadas de los 60 y 70, cuando varios autores (e. g. [145, 144, 23, 88, 89]) retoman[§] el tema para aplicarlo a problemas de control y de estabilidad bajo la axiomatización de los sistemas de control generales. Particularmente célebre es la construcción de Barbashin (cf. [13], véase también Roxin [145]) estableciendo la equivalencia de paso entre ambas visiones (trayectorias frente a m-aplicaciones de estados alcanzables). Sin embargo, ésta se basa en axiomas (fuertes) que no cabe esperar que se satisfagan siempre en dimensión infinita (de hecho, la teoría de sistemas de control generalizados se desarrolló para espacios localmente compactos).

En la Sección 3.2 comenzamos recordando los conceptos de semiflujos que se usan respectivamente en ambas teorías: semiflujos generalizados (axiomas (H1–4)) y sus propiedades, nociones de continuidad para funciones multivaluadas, y semiflujos multivaluados.

Tras una primera discusión sobre las características de ambos semiflujos, recordamos, usando la propiedad (H4) de semicontinuidad superior respecto a los datos iniciales para las soluciones del semiflujo generalizado, el resultado básico que nos permitirá ver que toda trayectoria es solución del problema (este resultado está en la línea de los anteriores de Roxin [145] y de Szegö & Treccani [158]). Sin embargo, obtener dicha propiedad no será baladí, como veremos a través de simples contraejemplos. De hecho, las dos secciones siguientes se dedican a obtener resultados teóricos y prácticos respectivamente de situaciones en las que (H4) se satisface; haciendo uso del Teorema de la Convergencia y con aplicaciones multivaluadas de Peano, daremos respuesta afirmativa a la cuestión para inclusiones ordinarias y en derivadas parciales con un operador lineal univaluado monótono y generador de un semigrupo analítico, gracias a resultados de equicontinuidad de Henry [73]. La Sección 3.4 termina con una discusión sobre los

[§]En realidad Barbashin [13] y Zaremba [170], entre otros, ya habían empezado a estudiar este tipo de problemas antes.

teoremas de existencia de atractor en ambos casos, que señalará como principal (y no necesaria) diferencia precisamente el último axioma (H4) al que se dedicaron los parágrafos precedentes. Es importante notar que, incluso en el caso autónomo tratado en este capítulo, la noción de atractor no será exactamente igual a la del caso univaluado (habrá problemas con la invarianza, no obstante fácilmente subsanables en este caso). Algunas de las diferencias sobre el particular se incluyen en el Apéndice A, ya que incluirán comentarios análogos en otros casos tratados en los capítulos posteriores.

En el caso en que las ecuaciones son no autónomas, lo que resulta bastante natural en muchos modelos, las teorías de semiflujos y atractores son relativamente recientes (e. g. Arnold [4], Crauel & Flandoli [46], Crauel *et al.* [45] en el caso estocástico y Chepyzhov & Vishik [37], Kloeden & Schmalfuß [93], Kloeden & Stonier [95] para el caso determinista). En ellas se intenta recoger la misma idea de atracción por parte de "algún objeto", sin embargo, un simple ejemplo nos muestra que en este caso, ya sea univaluado o no el sistema dinámico asociado, los conceptos requieren cierta variación. Para el problema $x'(t) = -\alpha x(t) + t$, con dato inicial $x(s) = x_0$ y con $\alpha > 0$, la solución viene dada por

$$x(t; s, x_0) = (x_0 + 1/\alpha^2 - s/\alpha)e^{-\alpha(t-s)} + t/\alpha - 1/\alpha^2.$$

Por tanto no tiene sentido buscar un atractor en el sentido tradicional, i. e. un compacto, invariante, atrayente cuando $t \to \infty$. Sin embargo, sí ocurre que las trayectorias siguen cierto conjunto, que evoluciona con el tiempo, $\mathcal{A} = \{A(t) = t/\alpha - 1/\alpha^2\}$. Para cada tiempo t fijado, la sección correspondiente de esta familia es un compacto que atrae a las soluciones si éstas comenzaran desde tiempos más remotos ($s \to -\infty$), lo que llamamos "atracción en tiempo t" o el término anglosajón "atracción *pullback* en tiempo t". Es además inmediato que el atractor para el caso autónomo puede considerarse también en este sentido. No se trataría entonces de un fenómeno que en el futuro acaba en el atractor habiendo comenzado en el presente, sino un fenómeno que "ocurre desde siempre" y que en tiempo presente ha llegado al nuevo atractor.

El objetivo de los capítulos restantes será dar condiciones que aseguren la existencia de atractores en este sentido para diversas ecuaciones, más exactamente analizaremos atractores en un caso estocástico (llamado atractor cociclo, y evaluado en tiempo cero), atractores para sistemas dinámicos discretos y continuos en sentido débil, asociados a un sistema conductor, y finalmente en sentido pullback fuerte. Todos los casos tendrán definiciones similares ya que coincidirán en espíritu con el ejemplo introducido.

El primer caso que consideraremos, no totalmente alejado de nuestra motivación en la primera parte de la memoria, será una versión estocástica de un caso particularmente importante en mecánica de fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes 3D. Éste será el objetivo del Capítulo 4 (cf. Marín-Rubio & Robinson [115]). En él se extienden las ideas de Ball al caso en que hay una perturbación estocástica¶ aditiva en el sistema:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p - f = \dot{W}_t \quad & \text{en} \quad [0,\infty)\times D,\\
\text{div } u = 0 \quad & \text{en} \quad [0,\infty)\times D,\\
u = 0 \quad & \text{en} \quad [0,\infty)\times \partial D,\\
u(0,x) = u_0(x) \quad & x \in D.
\end{aligned}$$

¶Para concordar con la idea de atracción pullback, el proceso de Wiener que se utilizará será de dos caras, contrariamente al utilizado en la primera parte de la memoria.

El hecho de elegir esta formulación se debe a que trataremos esencialmente propiedades de las trayectorias en sí mismas. Conviene reseñar que ha habido una gran variedad de intentos para aplicar la teoría de atractores globales a las ecuaciones de Navier-Stokes 3D, a pesar del desconocimiento de la propiedad de unicidad de solución para tal sistema. En concreto, hay dos resultados que no requieren hipótesis adicionales: Foias & Temam [60] construyeron un conjunto, formado por soluciones fuertes, que atrae a todas las soluciones débiles en la topología débil del espacio de fases natural; y Sell [153] analizó el flujo inducido en el espacio de todas las soluciones, mostrando que éste tiene un atractor global. Sin embargo, ambos resultados no son del todo satisfactorios en tanto que tratan soluciones fuertes que existen globalmente y, por otro lado, un espacio de fases que no es el natural. Los dos resultados que se hallan más cerca a la teoría estándar requieren partir de hipótesis extras no probadas: Foias & Temam [59] demostraron que la existencia de soluciones fuertes definidas globalmente (en esencia, tanto como probar unicidad) implica automáticamente la existencia de un atractor global, mientras que Ball [12] deduce el mismo resultado si asume que las soluciones débiles al problema son trayectorias continuas en el espacio de fases.

Siguiendo a Ball, nosotros impondremos una hipótesis adicional totalmente análoga a la dada en [12] para obtener un semiflujo estocástico generalizado sobre el que probar la existencia del atractor en este caso. Para ello, introduciremos un proceso auxiliar, z_α, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, solución estacionaria de la versión estocástica del problema de Stokes

$$\frac{dz}{dt} + [(A+\alpha)z] = \dot{W}_t,$$

y usaremos estimaciones auxiliares del trabajo de Flandoli & Schmalfuß [57] sobre ciertas soluciones del problema[||], para obtener la disipación a través de argumentos estándar de ergodicidad sobre z_α. El resultado de atracción probado será fuerte en el sentido de que existe un compacto aleatorio absorbente.

Sin embargo, la respuesta no será del todo satisfactoria ya que sólo seremos capaces de probar invarianza negativa de la familia $A(\omega)$, como ocurrirá mayormente en el resto de la memoria, cuestión que abordamos en el Apéndice A.

Deseamos notar aquí que otros autores, como Bondarevsky [19], tratan las mismas ecuaciones pero para una familia de términos fuente más especiales que dan como resultado de la regularidad de la solución del problema, la unicidad y la correcta definición del semiflujo (en el sentido univaluado) con el que trabajar.

En realidad, observamos que la técnica utilizada en el trabajo de Ball [12] y extendida aquí, parte también de una limitación, la de restringirse a aquellas soluciones que satisfacen cierta(s) desigualdad(es). Volviendo propiamente a las inclusiones diferenciales que ya introdujimos en el Capítulo 3, surge de forma natural el objetivo de analizar sistemas dinámicos multivaluados en los que de entre todas las soluciones[**] existentes, sólo algunas satisfagan ciertas propiedades de atracción respecto a conjuntos dados. Bautizamos la atracción en este sentido como *débil.*

En el Capítulo 5 estudiamos la existencia, propiedades cualitativas y relaciones de los atractores débiles para sistemas multivaluados bajo las hipótesis de los sistemas de control generales

[||] Las estimaciones serán obtenidas a partir de las aproximaciones generadas por el método de Galerkin, aunque sólo usamos las desigualdades obtenidas y no propiamente el hecho de que tengan que ser soluciones obtenidas por dicho método.

[**] O trayectorias si se quiere, pues partiremos directamente de las hipótesis fuertes de [88, 89]. De hecho, mantenemos como espacio de fases un espacio finito dimensional, aunque los resultados son válidos para espacios de Banach generales. Sin embargo, recuérdese que no siempre los axiomas que supondremos son ciertos en dimensión infinita, de ahí nuestra autorrestricción.

en el sentido en que fueron introducidos por Kloeden [88,89] (cf. [92,25,24]).

Comenzamos analizando el caso discreto en la Sección 5.1, aunque en realidad es un caso particular de la versión continua (Sección 5.2). Esto no es siempre así en cuestiones relacionadas con atractores (cf. Grüne [65], Stuart & Humphries [157]). El hecho de incluirla, aparte de por completitud de los casos analizados y por las diferencias entre ambas (un resultado tipo Barbashin sobre obtención de trayectorias para los procesos Φ y Φ^{ϵ} empleados), se debe al desarrollo cronológico en que han sido obtenidos (cf. Kloeden & Marín-Rubio [92] y Caraballo *et al.* [25]). Concretamente, en este parágrafo analizamos la existencia de atractores débiles suponiendo la existencia de una familia de compactos débilmente absorbentes, y se estudia la convergencia en sentido de semicontinuidad superior entre los atractores ante determinadas perturbaciones.

En la Sección 5.3 se considera un caso aún más estricto, y por tanto más rico, que el anterior, y es en el que la formulación autónoma introducida por Sell [152] es válida para dar un trato autónomo al problema en un espacio de fases diferente, lo que denominaremos flujo multivaluado cruzado, y que ha sido usado por otros autores como Cheban, Kloeden y Schmalfuß [33–36].

Se comienza definiendo lo que entenderemos por un cociclo multivaluado Φ (realmente se trata de un abuso de lenguaje, ya que estará conducido por un sistema θ que no será como el del Capítulo 4). Construcciones auxiliares, tipo Barbashin, necesarias para este cociclo se prueban en el Apéndice B. Después se considera el sistema semidinámico multivaluado autónomo Π, que contendrá como caso particular al par (θ, Φ). Alternaremos entonces propiedades de los atractores en sentidos fuerte y débil para dicho sistema, siendo algunas bien conocidas mas no otras, como la conexión en el caso multivaluado, extendiendo los resultados de Gobbino & Sardella [63].

En este caso la construcción del atractor para Π en sentido débil es un resultado de Szegö & Treccani [158]. La particularización al flujo multivaluado cruzado se obtendrá como consecuencia de la existencia de atractor (tanto en sentido fuerte como débil) para el sistema conductor θ, lo que nos permitirá concluir algunas propiedades de continuidad o semicontinuidad superior respecto al tiempo y/o respecto a θ. En la Sección 5.3.4 obtenemos, a partir de los atractores anteriores, relaciones con atractores en sentido pullback similares a los de los dos parágrafos anteriores para el sistema original, y la propiedad de invarianza estricta en éstos. Conseguir aquí la invarianza estricta no debe parecer totalmente extraño, ya que las condiciones son mucho más fuertes. Finalizamos la sección con algunos ejemplos de inclusiones diferenciales con términos periódicos y quasi periódicos.

En el Capítulo 6 volvemos a la teoría de atractores en sentido fuerte con el objetivo de probar la existencia de atractores para algunas ecuaciones (integro-)diferenciales con retardo o funcionales donde no se supone necesariamente unicidad de solución y en general podrá haber o no dependencia explícita del tiempo (cf. Caraballo *et al.* [31]).

Recordamos brevemente la motivación del estudio de tales ecuaciones (cf. [122,116]), lo que ya avanzábamos al final del Capítulo 2.

Desde que Volterra tratase por primera vez dichos sistemas en sus trabajos entre 1928 y 1931, han sido muchos los modelos que han usado dichas fórmulas, por ejemplo en biología y medicina. La ecuación logística con retardo

$$\frac{dx}{dt}(t) = px(t)\left(1 - \frac{x(t-r)}{K}\right), \qquad p,\, r,\, K > 0,$$

propuesta por Hutchinson en 1948 para describir el crecimiento de una población, generaliza el caso $r = 0$ sugerido por Verhulst en 1836, que a su vez ya negaba el crecimiento indefinido propuesto por el modelo malthusiano. Sin embargo el modelo de Verhulst no explicaba ciertos comportamientos observados en laboratorio, como los de A. J. Nicholson en 1957 sobre la mosca de la oveja (*Lucila cuprina*), para los que May sí encontró en 1975 gran afinidad con respecto al modelo de Nicholson. No obstante, existen otros modelos que se adaptan con mayor precisión a los datos observados (cf. Gurney *et al.* [67]):

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\delta x(t) + px(t-r)e^{-\alpha x(t-r)}.$$

Es obvio que en este caso el comportamiento asintótico describe importantes efectos en el futuro de la(s) población(es), como su permanencia, extinción, coexistencia, etc. A veces, un análisis de estabilidad es suficiente mas no siempre, por lo que nuevamente la teoría de atractores ha de ser tenida en cuenta. Algunas ecuaciones con retardo autónomas y univaluadas son analizadas en [116].

Como anunciábamos, los casos integro-diferencial con o sin unicidad, y tanto autónomo como no autónomo, son analizados aquí.

Para empezar, en la Sección 6.2 se recuerdan algunas nociones básicas para este tipo de ecuaciones (cf. Hale & Verduyn Lunel [71]). En la Sección 6.3, introducimos los semiflujos y procesos que usaremos (recobrando los dados en el caso autónomo en el Capítulo 3). Daremos una nueva definición de atracción pullback para estos sistemas dinámicos, en principio multivaluados, que a diferencia de los capítulos 4 y 5 no dependerá de cociclo o sistema conductor alguno. Una simple aplicación del Teorema de Ascoli-Arzelà nos permitirá ver que recuperamos en el caso autónomo la estructura de semiflujo generalizado en el sentido de Ball introducida con anterioridad. Los resultados teóricos para la existencia de atractor utilizados serán los de Caraballo *et al.* [27], cuyas pruebas son recogidas esquemáticamente en el Apéndice A por completitud. Las aplicaciones requerirán, por motivos prácticos, tratar con regiones invariantes, y exigirán un lema auxiliar de tipo Gronwall.

Los primeros ejemplos que trataremos serán autónomos, a saber, un modelo logístico con retardo y sin unicidad, otro de concentración de CO_2 en sangre, y dos sistemas, uno del tipo presa-depredador y otro de la respiración humana.

Para el caso en que hay dependencia explícita del tiempo, extendemos los resultados univaluados dados en [28] al caso integro-diferencial y eventualmente multivaluado, para una ecuación disipativa con crecimiento sublineal de sus componentes:

$$\frac{dx}{dt}(t) = F_0(t, x(t)) + F_1(t, x(t-\rho(t))) + \int_{-h}^{0} b(t, s, x(t+s))ds = f(t, x_t).$$

Daremos condiciones suficientes sobre la disipatividad a exigir o una influencia menor del retardo tal que se asegure la existencia de atractor pullback.

Al final completamos el resultado con notas sobre condiciones más débiles y ejemplos concretos más simples.

Finalmente adjuntamos ejemplos de la teoría desarrollada en el caso no autónomo con versiones de los modelos de Mackey & Glass [109] y de Ważewska-Czyżewska & Lasota [165], ambos para la producción de glóbulos rojos, entre otros casos.

Problemas abiertos

Son varios los problemas que quedan abiertos a partir de la presente memoria, y en los que trabajamos en la actualidad. Exponemos por completitud aquí algunos de ellos:

• La primera cuestión que surge de manera natural preguntarse respecto a la Parte I de la memoria es sobre la relación con problemas con condición no homogénea. En Pardoux & Zhang [134], se consigue estudiar cuando el acoplamiento es débil, en realidad se trata de un sistema en cascada, la ecuación con reflexión no depende en absoluto de la retrógrada. Esto, unido a un término adicional en la retrógrada, les permite dar relaciones no homogéneas. En el caso en que el sistema sí está fuertemente acoplado, si bien es posible iniciar un esquema de dos pasos (Γ_1 ó Γ_2), es un problema aún abierto conseguir estimaciones para lograr ver contractividad de las aplicaciones, o intentar aplicar algún otro argumento de punto fijo. Más concretamente, se requiere poder estimar integrales respecto $d|k^1 - k^2|$.

Con ello se podría obtener existencia y unicidad de solución para el problema

$$\begin{aligned}
X_t &= x + \int_0^t b(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s)\, dW_s - k_t, \\
Y_t &= h(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s + \int_t^T g(s, X_s, Y_s)\, d|k|_s, \\
k_t &= -\int_0^t \nabla\phi(X_s)\, d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{X_s \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|k|_s, \quad t \in [0,T],
\end{aligned}$$

lo que permitiría tratar un sistema análogo a (1) con la siguiente condición de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(r, x) = g(r, x, u(r, x)).$$

• Otro problema relacionado con el anterior es el correspondiente al caso elíptico, tratado en el caso no acoplado y utilizando horizontes infinitos también por Pardoux & Zhang [134].

• En general, la mezcla de ecuaciones progresivo-retrógradas en las que hay no sólo procesos de difusión ordinarios, sino términos con reflexión, está siendo recientemente utilizada también en el campo de la homogeneización, aunque aún queda mucho por desarrollar en esa línea (cf. Pardoux [129]).

Además, la incorporación de procesos con salto, por ejemplo, de tipo Poisson, permite obtener fórmulas probabilísticas para sistemas más complejos en los que no todas las ecuaciones tengan la misma forma (cf. Pardoux *et al.* [132]). El empleo de procesos con reflexión en éste área queda también pendiente.

• Un tema de interés actualmente en la matemática financiera y que conecta las materias tratadas en ambas partes de la memoria (cf. Schmalfuß [149]) es el empleo de los sistemas progresivo-retrógrados para la obtención de variedades inerciales de tipo grafo en sistemas dinámicos aleatorios. Las variedades inerciales representan un conjunto mayor que el atractor pero con la ventaja de atraer con velocidad exponencial al resto de las trayectorias. ¿Qué se puede decir cuando el sistema tiene reflexión? ¿Generan condiciones igualmente útiles en economía a la aplicación ya comentada de Ma & Cvitanić del estudio en tiempo finito?

• Respecto a la segunda parte de la memoria, la principal cuestión a estudiar es la estructura interna del atractor cuando es no trivial. Hasta ahora, como se indica en el Capítulo 6 los casos más estudiados son correspondientes a atractores triviales formados por un punto crítico, i.e.

estudios de estabilidad. Cuando no es el caso, se sabe por ejemplo para los sistemas gradientes que el atractor está compuesto por las variedades inestables relativas a los puntos críticos, pero el caso general es una incógnita. Por tanto, un análisis de las variedades estables e inestables que existan, relaciones de orden internas en el atractor, e incluso carácter finito-dimensional (cf. [110, 101]).

• Otra cuestión que queda pendiente tras el análisis que realizamos es la invarianza estricta del atractor (o más generalmente, la semicontinuidad inferior de las m-aplicaciones utilizadas). Este problema parece por el momento bastante complejo, y difícil de tratar salvo para algunos casos particulares (cf. Melnik & Valero [118]).

• Con respecto al comportamiento asintótico en sistemas con perturbaciones estocásticas, el utilizar un ruido aditivo es sólo una primera aproximación. Transformaciones válidas aún en dimensión infinita que siguen permitiendo construir semiflujos son por ejemplo con ruidos multiplicativos, línea a considerar también para el sistema de Navier-Stokes y otros casos como la ecuación de ondas amortiguada.

Parte I

Procesos Estocásticos con Reflexión

Capítulo 1

Nociones Previas del Análisis Estocástico

En este capítulo pretendemos dar unas nociones, no exhaustivas, del cálculo estocástico, que pueden resultar de utilidad al lector que no esté familiarizado con dicha materia y que nos serán de utilidad en parte de la memoria. Para más detalles véase por ejemplo [87,104,124,138–140,169] entre otros.

1.1 Procesos estocásticos. Procesos de Wiener

Comenzamos recordando algunos conceptos básicos de la Teoría de Probabilidades, más exactamente, dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, damos algunos resultados de la Teoría de la Medida necesarios para introducir más adelante el concepto de martingala.

Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$, por el Teorema de Radon-Nikodym, se tiene existencia y unicidad de una nueva variable aleatoria $\tilde{X} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P; \mathbb{R})$ tal que

$$\int_G \tilde{X}\, dP = \int_G X\, dP \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

A $\tilde{X}$ se le llama esperanza condicionada de X con respecto a $\mathcal{G}$, y se denota $E(X|\mathcal{G})$.

El concepto de esperanza condicionada puede ser generalizado a variables aleatorias con valores en V, espacio de Banach separable (notación que mantendremos durante todo este capítulo).

Proposición 1.1. *Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; V)$, entonces existe una única variable aleatoria $\tilde{X} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P; V)$ tal que*

$$\int_G \tilde{X}\, dP = \int_G X\, dP \quad \forall G \in \mathcal{G}. \tag{1.1}$$

A dicho elemento $\tilde{X}$ se le llama también esperanza condicionada de X con respecto a $\mathcal{G}$, y se nota $E(X|\mathcal{G})$.

Damos a continuación algunas propiedades para la esperanza condicionada. Notaremos por $\mathcal{G}$ a una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$ y X, $\tilde{X}$ elementos de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; V)$. Entonces se tiene:

(a) $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$, sin más que tomar $G = \Omega$ en (1.1).

(b) Si $X = x \in V$, entonces $E(X|\mathcal{G}) = x$. Más generalmente se tiene que si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $E(X|\mathcal{G}) = X$.

(c) Si $V = \mathbb{R}^d$, y $X \leq \tilde{X}$, entonces $E(X|\mathcal{G}) \leq E(\tilde{X}|\mathcal{G})$ (desigualdades entendidas componente a componente).

(d) (*Desigualdad de Jensen:*) Si $\varphi : V \to \mathbb{R}$ es una función convexa, semicontinua inferiormente, y se cumple que X y $\varphi(X)$ son elementos de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$, entonces

$$\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G}). \tag{1.2}$$

En particular, si notamos* $\|\cdot\|$ a la norma en V,

$$\|E(X|\mathcal{G})\| \leq E(\|X\||\mathcal{G}).$$

De hecho, si $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; V)$, con $p \in [1, \infty)$, lo mismo se tiene para la aplicación $\varphi(x) = \|x\|^p$. Así, tomando esperanza, de lo anterior, de la Proposición 1.1, de (a) y de (b), se tiene

(e) Dada la σ-álgebra $\mathcal{G}$, el operador $E(\cdot|\mathcal{G})$, esperanza condicionada a $\mathcal{G}$, es un operador lineal y continuo de norma 1 de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; V)$ en $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P; V)$.

(f) Si $\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes, entonces $E(X|\mathcal{G}) = EX$.

(g) Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ es otra σ-álgebra, entonces

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{H}).$$

Estamos en disposición de introducir la noción de proceso estocástico. Como ya se ha indicado, partimos de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se supone dada también una filtración sobre dicho espacio, esto es una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$, de sub-$\sigma$-álgebras de $\mathcal{F}$ que cumplen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo par $s \leq t$, s, $t \in I$.

Por razones técnicas que se comentarán más adelante es bastante usual suponer que el espacio de probabilidad que usamos es completo, i. e. los P-nulos de $\mathcal{F}$ pertenecen a la σ-álgebra $\mathcal{F}$, y de hecho, se supone que todos los P-nulos están incluidos en $\mathcal{F}_0$. Además se supone también que la filtración dada es continua por la derecha, esto es $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$ para todo $t \geq 0$.

Definición 1.2. *Un* proceso estocástico *definido en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *con valores en otro espacio medible* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *es una familia* $\{X_t\}_{t \in I}$ *de variables aleatorias de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *en* $(\Omega', \mathcal{F}')$.

El conjunto de índices I puede ser en lo que sigue $\mathbb{R}_+$, $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_+, \ldots$ tal que las definiciones, propiedades, conjuntos, etc. que aparezcan tengan sentido (normalmente trataremos los casos $I = \mathbb{R}_+$ ó $I = \mathbb{R}$). Si como espacio de llegada se tiene $\Omega' = V$, se considera $\mathcal{F}' = \mathcal{B}o(V)$, los borelianos de V, como la σ-álgebra asociada. Un proceso estocástico es por tanto una aplicación definida sobre $I \times \Omega$, que se suele notar indistintamente X_t, $X_t(\omega)$, $X(t, \omega)$ ó $X(t)$ (nosotros emplearemos la que resulte más cómoda en cada momento dependiendo de los superíndices y subíndices que aparezcan en la notación en cada caso). Cuando se fija ω y se considera la función de t resultante, a ésta se le llama trayectoria (se trata de la realización de un experimento).

Definiciones importantes sobre procesos estocásticos son las siguientes:

Definición 1.3. *Sea* $\{X_t\}_{t \in I}$ *un proceso estocástico con valores en* V *e* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo*†.

*Dado que no hay confusión posible, también usaremos $\|\cdot\|$ para denotar la norma traza en el espacio de las matrices: $\|A\| = (\mathrm{Tr}(AA^*))^{1/2}$, mientras la norma euclídea para vectores de $\mathbb{R}^n$ se denotará por $|\cdot|$.

†Algunas de las siguientes definiciones también tiene sentido considerarlas con I subconjunto de $\mathbb{Z}$.

(a) *X es* continuo *(resp.* por la derecha *o* por la izquierda*) si P-c. s. la trayectoria $X.(\omega)$ es continua (resp. por la derecha o por la izquierda).*

(b) *X se dice* integrable *si para cada $t \in I$ la variable aleatoria X_t es integrable.*

(c) *X es* $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado *si para cada $t \in I$ la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

(d) *Se dice que X es* medible *si $X : I \times \Omega \to V$ es $\mathcal{B}o(I) \otimes \mathcal{F}$-medible.*

(e) *Diremos que es* $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medible *si para cada $[a, b] \subset I$, el proceso restringido $X : [a, b] \times \Omega \to V$ es $\mathcal{B}o([a, b]) \otimes \mathcal{F}_b$-medible.*

Notación 1.4. En lo que sigue se usarán también los términos adaptado y progresivo en vez de $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado y $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivo si es clara la filtración a que nos referimos.

Obsérvense algunos de los nexos entre las definiciones anteriores, fáciles de deducir:

- Progresivamente medible implica medible y adaptado.
- Un proceso continuo y adaptado es progresivo.

De hecho, podemos afinar un poco más sobre relaciones como las anteriores a través de la siguiente

Definición 1.5. *Sean X y $\tilde{X}$ dos procesos definidos de I con valores en V.*

(a) *Se dice que $\tilde{X}$ es* versión *o* modificación *de X si para cada $t \in I$, se tiene*

$$P(\{\omega \in \Omega; X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}) = 1.$$

Es decir, fijado t, son iguales como variables aleatorias salvo en un conjunto dependiente de t, N_t, de medida nula.

(b) *Cambiando el orden, se tiene una noción más fuerte: X y $\tilde{X}$ se dicen* indistinguibles *si P-c. s. se tiene que $X.(\omega) \equiv \tilde{X}.(\omega)$, i. e.*

$$P(\{\omega \in \Omega; X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega) \quad \forall t \in I\}) = 1.$$

Nota 1.6. Si X y $\tilde{X}$ son procesos continuos y uno es modificación del otro, entonces son indistinguibles.

Si un proceso es medible y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado con valores en $\mathbb{R}^n$, entonces posee una modificación que es $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medible (véase Meyer [119]).

Para la construcción de la integral estocástica se introduce el siguiente concepto:

Definición 1.7. *Sea $\{X_t\}_{t \in I}$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo real o un subconjunto de $\mathbb{Z}$, un proceso estocástico con valores en V. X_t es* $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala *si es $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado, integrable y para todo par $s < t$ de valores en I, se tiene P-c. s. que $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.*

A continuación enunciamos un resultado debido a Doob para estimar la norma de martingalas continuas.

Proposición 1.8. *Si $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ una martingala continua con valores en V, para cada $T > 0$ se satisface:*

$$P(\max_{0\leq t\leq T} \|M_t\| \geq c) \leq \frac{1}{c^p} E(\|M_T\|^p), \quad \forall p \in [1, +\infty), \quad \forall c > 0, \tag{1.3}$$

y

$$E\left(\max_{0\leq t\leq T} \|M_t\|^p\right) \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p E(\|M_T\|^p), \quad \forall p \in (1, +\infty). \tag{1.4}$$

A continuación presentamos un tipo particular de procesos estocásticos, con una gran riqueza de propiedades que los convierten en casos particulares de la gran mayoría de las ramas del análisis estocástico, los procesos de Wiener. En general, se usa indistintamente la notación W_t ó B_t así como las expresiones Wiener o Browniano para tales procesos, aunque el movimiento Browniano hace referencia al fenómeno físico del movimiento de partículas de polen en un medio acuoso que a principios del siglo XIX estudió el botánico Robert Brown y más tarde para el modelado de colisiones de moléculas de un gas por Einstein (1905) y Langevin (1908) (e. g. véase [3]), mientras que el proceso de Wiener designa el modelo matemático que responde a tales fenómenos. En lo que sigue, usaremos siempre una única notación matemática, W_t, para designar a dichos procesos, en cambio, de palabra notaremos indistintamente procesos de Wiener o movimientos Brownianos.

Definición 1.9. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ un espacio de probabilidad y una filtración en él definida. Se llama $\{\mathcal{F}_t\}$-*proceso de Wiener unidimensional estándar *sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a cualquier proceso estocástico $\{W_t\}_{t\geq 0}$ definido sobre dicho espacio, con valores en $\mathbb{R}$ y tal que:*

(a) *W_t es continuo y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado,*

(b) *$W_0 = 0$ c. s.,*

(c) *para cada par $0 \leq s < t < \infty$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, esto es que la σ-álgebra generada por $W_t - W_s$ y la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$ son independientes.*

(d) *para cada par $0 \leq s < t < \infty$, el incremento $W_t - W_s$ sigue una ley de distribución normal de media cero y varianza $t - s$, i. e.*

$$P(W_t - W_s \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_B \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}o(\mathbb{R}).$$

Esta propiedad, la dependencia de $W_t - W_s$ únicamente de $t - s$, se conoce como "incrementos estacionarios".

Se puede omitir de la definición anterior la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ (y por tanto cualquier adaptabilidad previa) y considerar a la familia $\{W_t\}_{t\geq 0}$ como un proceso respecto de su filtración natural, $\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s; 0 \leq s \leq t)$ verificando entonces ser un $\{\mathcal{F}_t^W\}$-Wiener en el sentido dado en la definición.

En tal caso, una definición equivalente resulta de sustituir (c) por la imposición de que el proceso W tenga incrementos independientes, esto es, dada cualquier sucesión $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$, que los incrementos $\{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\}_{i\geq 1}$ sean variables independientes (i. e. las σ-álgebras que generan son independientes).

Obsérvese también que en general, en este último caso, dada otra filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ que contenga a $\{\mathcal{F}_t^W\}$, no se tiene que W sea también $\{\mathcal{F}_t\}$-Wiener. Sin embargo, si el espacio de probabilidad es completo y se considera la filtración $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$, donde $\mathcal{N}$ denota a la familia formada por conjuntos los P-nulos de $\mathcal{F}$, sí se cumple que W es un $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$-proceso de Wiener. En efecto, la comprobación es inmediata: sean $G \in \sigma(W_t - W_s)$, $F \in \mathcal{F}_s$ y $N \in \mathcal{N}$, entonces

$$\begin{aligned} P(G \cap (F \cup N)) &= P(G \cap (F \cup (N - F))) \\ &= P(G \cap (N - F)) + P(G \cap F) \\ &= 0 + P(G)P(F) \\ &= P(G)P(F \cup N). \end{aligned}$$

Así, se puede suponer que el Wiener con el que se trabaje, está definido sobre un espacio completo con filtración continua por la derecha, de hecho, dicha filtración es también continua por la izquierda.

La definición de proceso de Wiener también admite extensión al caso en que tome valores sobre $\mathbb{R}^m$:

Definición 1.10. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración. Llamamos* $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener m-dimensional estándar *sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a todo proceso estocástico definido sobre dicho espacio, con valores en $\mathbb{R}^m$ que sea de la forma $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^m)$, con cada elemento $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$ un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional estándar sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y dichos procesos independientes entre sí.*

La existencia de procesos de Wiener está garantizada por el Teorema de Extensión de Kolmogorov (cf. Øksendal [124]); para una construcción analítica, véase Karatzas & Shreve [87].

También es fácil extenderlo al caso en que los valores sean tomados en un espacio de Hilbert separable aunque dejaremos los comentarios para más adelante (cf. Capítulo 4).

Enumeramos a continuación algunas propiedades interesantes de los procesos de Wiener:

Proposición 1.11. *Todo $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua con valores reales, de cuadrado integrable, con $W_0 = 0$, y tal que $\{W_t^2 - t\}$ es también una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua.*

Esta propiedad es fácil de probar, de hecho, se tiene también el recíproco, resultado que caracteriza a los procesos de Wiener, y que se debe a Paul Lévy. Dicho resultado se puede probar usando el Teorema de Fourier y la función característica, gracias a la Fórmula de Itô, que se enunciará posteriormente.

Además se tiene el resultado análogo para un Wiener m-dimensional. Otro resultado interesante es el siguiente:

Proposición 1.12. *Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ un intervalo fijado, y sean $\Delta_n = \{a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = b\}$ una sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ con diámetros δ_n tendiendo a cero. Entonces se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (W_{t_k^n} - W_{t_{k-1}^n})^2 = b - a \qquad en \quad L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}).$$

Además, si $\sum_{n\geq 1} \delta_n < \infty$ entonces la convergencia anterior es también P-c. s.

Este resultado nos permite deducir fácilmente la "poca regularidad" de los procesos de Wiener:

Corolario 1.13. *(cf. [140]) Dado un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional $\{W_t\}_{t\geq 0}$ y un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, las trayectorias $W_\cdot(\omega)$ son P-c. s. de variación no acotada. Sí satisface casi seguro que sus trayectorias son localmente Hölder continuas con orden α para todo $\alpha < 1/2$ y no lo son de orden α para cualquier $\alpha > 1/2$.*

Demostración. La prueba es inmediata a partir del resultado anterior, vemos sólo la última afirmación: si lo fueran, digamos en un intervalo (p,q), $|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq k|t-s|^\alpha$ para todo $p \leq s \leq t \leq q$ y $\alpha > 1/2$, entonces

$$\sum_i (W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega))^2 \leq k^2(q-p)\sup_i |t_{i+1} - t_i|^{2\alpha-1}$$

y por tanto el término de la derecha, que tiende a cero, diría que el de la izquierda también lo hace, lo que es contradictorio. □

1.2 La integral estocástica en el sentido de Itô

El hecho de que las trayectorias de los procesos de Wiener sean de variación no acotada impide integrar respecto a un Wiener procesos que sean solamente continuos, al menos en el modo usual, es decir, en el sentido de Riemann-Stieltjes trayectorialmente. Surge por tanto la necesidad de crear una nueva integral, que en casos de regularidad del integrando sí coincidirá con la integral de Riemann-Stieltjes.

Repasamos brevemente la construcción de la integral en el sentido de Itô respecto a un Wiener unidimensional y señalando la extensión al caso de dimensión superior a uno. Usaremos la construcción isométrica de Kunita y Watanabe.

En una primera etapa, se definen los procesos elementales, que son de la forma $\varphi 1_{(\theta,T]}$, donde $\theta \in [0,T)$ y φ es una variable aleatoria real $\mathcal{F}_\theta$-medible y acotada. Se define entonces la integral estocástica $\int_0^t \varphi 1_{(\theta,T]} dW_s$ como $\varphi(W_{t\vee\theta} - W_\theta)$ y si el intervalo de integración es otro (e. g. $0 < t_1 \leq t_2$), se extiende del modo natural (i. e. $\int_0^{t_2} - \int_0^{t_1}$). Se comprueba que la integral estocástica para combinaciones lineales de procesos elementales, conjunto que se denota por $\mathcal{E}(0,T)$, está bien definida. Además se ve que satisface, primero para procesos elementales, y después para combinaciones lineales de estos, el siguiente resultado:

Lema 1.14. *Sean φ y $\tilde{\varphi}$ dos procesos de $\mathcal{E}(0,T)$. Entonces para todo par $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$*

$$E\left(\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)\, dW_s | \mathcal{F}_{t_1}\right) = 0,$$

$$E\left((\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)\, dW_s)(\int_{t_1}^{t_2} \tilde{\varphi}(s)\, dW_s) | \mathcal{F}_{t_1}\right) = E\left(\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)\tilde{\varphi}(s)\, ds | \mathcal{F}_{t_1}\right).$$

En particular, el proceso estocástico $\left\{\int_0^t \varphi(s)\, dW_s\right\}_{t\in[0,T]}$, definido para $t \in [0,T]$, es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua de cuadrado integrable con valores en $\mathbb{R}$ y se satisface por tanto

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t \varphi(s)\, dW_s|^2\right) \leq 4E\int_0^T |\varphi(s)|^2\, ds.$$

Notamos μ a la medida de Lebesgue en $[0,T]$ y $\mathcal{B}o([0,T])$ a la σ-álgebra de los borelianos de $[0,T]$. Damos ahora la siguiente definición (extensible análogamente para todo $p \geq 1$):

Definición 1.15. *Llamamos $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)$ al subespacio de*

$$L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}o([0,T]), P \otimes \mu; \mathbb{R}^n)$$

formado por las clases que poseen un representante $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medible.

Nota 1.16. Por la Nota 1.6, $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)$ coincide con el subespacio de $L^2(\Omega \times [0,T];\mathbb{R}^n)$ de las clases que poseen un representante $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado.

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Lema 1.17. *El espacio $\mathcal{E}(0,T)$ es denso en $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$.*

Así, la etapa segunda es clara. Se extiende por densidad la integral estocástica a un operador único

$$L : M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}) \to L^2(\Omega,\mathcal{F},P;C([0,T];\mathbb{R}))$$

que es lineal y continuo, que llamamos integral estocástica de nuevo, y cumple las propiedades del Lema 1.14.

Una tercera etapa es posible gracias a la anterior. Se pueden integrar los siguientes tipos de procesos:

Definición 1.18. *Llamamos $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial de las clases de procesos estocásticos $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles tales que $\int_0^T |\varphi(s)|^2\,ds < \infty$ c. s.*

Por supuesto, la Nota 1.16 también es aplicable a la definición anterior.

Para poder extender la integral estocástica a este espacio de procesos necesitamos una herramienta adicional: los tiempos de parada.

Definición 1.19. *Un $\{\mathcal{F}_t\}$-*tiempo de parada *es cualquier variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ tal que para todo $t \in [0,\infty)$ cumple que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\}$ pertenece a $\mathcal{F}_t$.*

El resultado técnico que permite probar esta etapa de la construcción de la integral estocástica en el sentido de Itô es el siguiente:

Lema 1.20. *Sean $\varphi \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$, $t_1 \in [0,t)$ y $F \in \mathcal{F}_{t_1}$. Entonces*

$$\varphi 1_{(t_1,T]\times F} \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$$

y

$$\int_0^t \varphi(s) 1_{(t_1,T]\times F}(s)\,dW_s = 1_F \int_{t_1\wedge t}^t \varphi(s)\,dW_s \quad c.\ s. \quad \forall t \in [0,T].$$

Utilizando particiones convenientemente y el lema anterior, se tiene:

Proposición 1.21. *Sean $\varphi \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$ y τ un $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada. Entonces, el proceso $\varphi 1_{[0,\tau]}$ pertenece a $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$ y los procesos*

$$\int_0^t \varphi(s) 1_{[0,\tau]}(s)\,dW_s \quad y \quad \int_0^{t\wedge\tau} \varphi(s)\,dW_s$$

son indistinguibles.

Dado $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$, la idea ahora consiste en tomar

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega; \int_0^T |\varphi(s)|^2\,ds < n\},$$

y definir

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T];\ \int_0^t |\varphi(s)|^2\,ds \geq n\} & \text{si} \quad \omega \in \Omega\backslash\Omega_n \\ T & \text{si} \quad \omega \in \Omega_n \end{cases}$$

Se tiene que τ_n son $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempos de parada, que $\varphi_n = \varphi 1_{[0,\tau_n]}$ son elementos de $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$ y que P-c. s. existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \varphi_n(s)\, dW_s.$$

Este valor límite es por definición la integral estocástica del proceso $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$ (y se comprueba fácilmente que es consistente con las etapas anteriores, aunque ahora $\{\int_0^t \varphi dW_s\}_t$ no es necesariamente una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala).

A continuación enunciamos algunas propiedades de la integral estocástica de un proceso de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$, concatenadas en sus pruebas y que nos llevará a confirmar (cf. Proposición 1.24) el "buen comportamiento" de la integral estocástica cuando el integrando es suficientemente regular[‡]. No obstante recuérdese que el objetivo al definir esta integral es tener un conjunto de integrandos mayor que el de los procesos con trayectorias de clase C^1, de hecho se ha probado que al menos es $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$.

Proposición 1.22. *Si $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$, para todo entero $n \geq 1$ y todo $c > 0$ se cumple*

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t \varphi(s)\, dW_s\right| > c\right) \leq \frac{n}{c^2} + P\left(\int_0^T |\varphi(s)|^2\, ds \leq n\right).$$

A partir de este resultado, fácil de probar, se tiene el siguiente:

Corolario 1.23. *Sean $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$ y $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T)$ una sucesión tal que $\int_0^T |\varphi_k(s) - \varphi(s)|^2\, ds$ converge a cero en probabilidad. Entonces la variable aleatoria*

$$\max_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t (\varphi_k(s) - \varphi(s))\, dW_s\right|$$

también converge a cero en probabilidad.

Dados entonces un proceso $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$ y una sucesión de particiones de $[0,T]$ de diámetros tendiendo a cero, denotando $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \varphi(t^n_{k-1}) 1_{(t^n_{k-1},t^n_k]}$ y

$$S_n(t) = \int_0^t \varphi_n(s)\, dW_s = \sum_{k=1}^n \varphi(t^n_{k-1}) \left(W_{t^n_k\wedge t} - W_{t^n_{k-1}\wedge t}\right),$$

se tiene por el resultado anterior que la variable aleatoria

$$\max_{0\leq t\leq T} \left|S_n(t) - \int_0^t \varphi(s)\, dW_s\right|$$

converge a cero en probabilidad. De aquí y la Fórmula de integración partes para la integral de Riemann-Stieltjes, se deduce el siguiente resultado:

Proposición 1.24. *Sea $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$ un proceso estocástico continuo cuyas trayectorias son c. s. de variación acotada en $[0,T]$. Entonces la integral estocástica de φ respecto de W coincide*

[‡]Esto es, se comporta como una integral de Riemann-Stieltjes. Más adelante, cuando se enuncie la Fórmula de Itô, la Proposición 1.24 es una consecuencia trivial de ésta.

con la integral de Riemann-Stieltjes de φ respecto de W hecha trayectoria a trayectoria, y para todo $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ se cumple la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)\, dW_s = \varphi(t_2)W_{t_2} - \varphi(t_1)W_{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} W_s\, d\varphi(s),$$

donde la última integral también está hecha trayectorialmente en el sentido Riemann-Stieltjes.

Definición 1.25. (Extensión de la integral estocástica) *Sea W un Wiener m-dimensional y $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$. Se define el proceso* integral estocástica *de φ con respecto a W como el proceso $\Phi(t)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ cuya componente i-ésima viene dada por*

$$\Phi_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \varphi_{ij}(s)\, dW_s^j, \quad \forall t \in [0,T].$$

Terminamos esta sección con un resultado útil para tener un tiempo de parada a partir de un proceso continuo:

Proposición 1.26. *Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}$ una filtración, sean $\mathcal{O}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y X un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado y continuo con valores en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\tau_{\mathcal{O}}(\omega) = \text{ínf}\{t \geq 0 \,|\, X_t(\omega) \notin \mathcal{O}\}$$

es un $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada.

Demostración. El caso $t=0$ es trivial y para un valor $t>0$ basta utilizar la sucesión numerable de conjuntos crecientes a $\mathcal{O}$:

$$\bar{\mathcal{O}}_m = \{x \in \mathcal{O} \,|\, |x| \leq m,\ d(x, \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{O}) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Entonces, y gracias a la igualdad

$$\{\omega \,|\, \tau_{\mathcal{O}}(\omega) \leq t\} = \cap_{m\geq 1} \left(\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,t)} \{\omega \,|\, X_r(\omega) \notin \bar{\mathcal{O}}_m\}\right),$$

por el carácter $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado del proceso X y propiedades de las σ-álgebras para uniones e intersecciones numerables se obtiene el resultado. □

1.3 Algunas herramientas del cálculo estocástico

En esta sección recordamos algunos resultados básicos del cálculo estocástico que nos serán de utilidad: la Fórmula de Itô, la Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, el Teorema de Representación de Martingalas y el Lema de Girsanov. La necesidad de dichas herramientas radica en que las reglas usuales del cálculo (como ya se ha visto en el parágrafo anterior y como se verá en la Fórmula de Itô) no se adaptan correctamente al caso estocástico, requiriendo "términos adicionales".

Teorema 1.27. *(Fórmula de Itô, cf. Karatzas & Shreve* [87, p. 153]*) Dado un proceso*

$$X_t = X_{t_0} + B_t + \int_{t_0}^t \sigma(s)\, dW_s, \quad \forall t \in [t_0, T],$$

donde X_{t_0} es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_0}$-medible, con valores en $\mathbb{R}^n$, $\{B_t\}_{t\in[t_0,T]}$ un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado, continuo, con valores en $\mathbb{R}^n$ y con las trayectorias de variación acotada en $[t_0,T]$ tal que $B_{t_0}\equiv 0$, $\sigma\in\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(t_0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$ y W un $\{\mathcal{F}_t\}$-Wiener m-dimensional y dada una función $f\in C^{1,2}([t_0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, entonces se cumple para todo $t\in[t_0,T]$:

$$\begin{aligned}
f(t,X_t) &= f(t_0,X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_{t_0}^t \nabla f(s,X_s)dB_s \\
&\quad + \int_{t_0}^t (\nabla f(s,X_s))^*\sigma(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_{t_0}^t tr(D^2 f(s,X_s)(\sigma\sigma^*)(s))ds \\
&= f(t_0,X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)dB_s^i \\
&\quad + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)\sigma_{ij}(s)dW_s^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(s,X_s)\sigma_{ik}(s)\sigma_{jk}(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Teorema 1.28. *(Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, cf. Yong & Yu Zhou* [169, p. 36]*) Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad completo, y $\{\mathcal{F}_t\}$ una filtración continua por la derecha y tal que $\mathcal{F}_0$ contiene a los P-nulos de $\mathcal{F}$, sea W_t un $\{\mathcal{F}_t\}$-movimiento Browniano estándar m-dimensional. Entonces, para cualquier $r>0$, existe una constante $C_r>1$ tal que para cualquier $\sigma\in L^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$ y cualquier $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada τ*

$$\frac{1}{C_r}E\left(\int_0^\tau \|\sigma(s)\|^2\,ds\right)^r \le E\left(\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t \sigma(s)\,dW_s\right|^{2r}\right) \le C_r E\left(\int_0^\tau \|\sigma(s)\|^2\,ds\right)^r \tag{1.5}$$

Para una demostración véase por ejemplo Karatzas & Shreve [87, p. 166]. En este trabajo realmente sólo usaremos la segunda de las desigualdades anteriores, y con $\tau=T$ un valor constante. El caso $r=1$ es la Desigualdad de Doob. A continuación damos una prueba del caso $r=1/2$ aunque para ello necesitamos un lema previo.

Lema 1.29. *Sea ρ una variable aleatoria real, integrable y no negativa. Entonces*

$$\int_0^\infty \frac{1}{c^2}E(\min(c^2,\rho^2))dc = 2E(\rho), \tag{1.6}$$

$$\int_0^\infty P(\rho>c)dc = E(\rho). \tag{1.7}$$

Demostración. Aplicando el Teorema de Fubini y separando el dominio de integración en dos partes,

$$\int_0^\infty \frac{1}{c^2}E(\min(c^2,\rho^2))dc = E\int_0^\infty \frac{1}{c^2}(\min(c^2,\rho^2))dc = E\left(\int_0^\rho dc + \rho^2\int_\rho^\infty \frac{1}{c^2}dc\right).$$

Basta operar para obtener (1.6).

Usamos la función de distribución asociada a ρ, $F(c)=P(\rho\le c)$, y por la fórmula de integración por partes para la integral de Stieltjes,

$$\int_0^a c\,dF(c) = aF(a) - \int_0^a F(c)dc = a(F(a)-1) + \int_0^a P(\rho>c)dc. \tag{1.8}$$

Observemos lo que ocurre con uno de los sumandos anteriores:

$$|a(F(a)-1)| = a(1-F(a)) = aP((a,\infty)) = a\int_a^\infty dF(c) \le \int_a^\infty c\,dF(c),$$

pero

$$E\rho = \int_0^\infty x dF(x) < \infty,$$

con lo que

$$\lim_{a \to \infty} |a(F(a) - 1)| = 0.$$

Así, de (1.8), tomando límite cuando a tiende a infinito:

$$E(\rho) = \int_0^\infty c dF(c) = \int_0^\infty P(\rho > c) dc.$$

□

Ahora podemos probar la siguiente

Proposición 1.30. *Para todo proceso* $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$ *se satisface*

$$E \sup_{0\leq t\leq T} \Big| \int_0^t \varphi(s)\, dW_s \Big| \leq 3E \left(\int_0^T |\varphi(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Demostración. Suponemos que

$$E \left(\int_0^T |\varphi(s)|^2 ds \right)^{1/2} < \infty,$$

de lo contrario, no hay nada que probar. Sean

$$M_t = \int_0^t \varphi(s)\, dW_s \quad \text{y} \quad A_t = \int_0^t |\varphi(s)|^2 ds.$$

Dado un valor $c > 0$ definimos

$$\tau_c = \min(T, \inf\{t \in [0,T]; A_t > c^2\}).$$

Veamos que τ_c es $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada, i. e. hay que comprobar que para todo t, el conjunto $\{\omega : \tau_c(\omega) \leq t\}$ pertenece a $\mathcal{F}_t$:

Si $t \geq T$, trivialmente $\{\omega : \tau_c(\omega) \leq t\} = \Omega$, luego no hay nada que probar. Consideremos entonces $t < T$, veamos que $\{\omega : \tau_c(\omega) \leq t\}$ pertenece a $\mathcal{F}_t$. Usando la definición de ínfimo,

$$\tau(\omega) \leq t \iff \forall \bar{t} > t \ A_{\bar{t}} > c^2.$$

Usando la densidad de los racionales y el carácter creciente de A_t:

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} = \bigcap_{\substack{t < t_n \\ t_n \in \mathbb{Q}}} \{\omega : A_{t_n} > c^2\}.$$

El Teorema de Fubini y las propiedades de las σ-álgebras prueban que efectivamente τ_c es $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada. Por una propiedad anterior de la integral estocástica

$$M_{t\wedge\tau_c} = \int_0^{t\wedge\tau_c} \varphi(s)\, dW_s = \int_0^t 1_{[0,\tau_c]}\varphi(s)\, dW_s,$$

de donde resulta claramente que $(M_{\cdot\wedge\tau_c})$ es $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala. Aplicando la Desigualdad de Doob:

$$P\left(\{\sup_{0\le t\le T}|M_{t\wedge\tau_c}|>c\}\right)\le\frac{1}{c^2}E(|M_{T\wedge\tau_c}|^2)=\frac{1}{c^2}E\int_0^T|1_{[0,\tau_c]}\varphi(s)|^2ds,$$

pero claramente por la definición de τ_c, se tiene que

$$\int_0^T|1_{[0,\tau_c]}\varphi(s)|^2ds\le\text{mín}\left(c^2,\int_0^T|\varphi(s)|^2ds\right).$$

De las dos desigualdades anteriores se obtiene

$$P\left(\{\sup_{0\le t\le T}|M_{t\wedge\tau_c}|>c\}\right)\le\frac{1}{c^2}E\left(\text{mín}\,(c^2,A_T)\right). \tag{1.10}$$

Por propiedades básicas de la medida y la definición de τ_c:

$$\begin{aligned}P\left(\sup_{0\le t\le T}|M_t|>c\right) &= P\left(\{\sup_{0\le t\le T}|M_t|>c\}\cap\{\tau_c<T\}\right)+P\left(\{\sup_{0\le t\le T}|M_t|>c\}\cap\{\tau_c=T\}\right)\\ &\le P(\{\tau_c<T\})+P\left(\{\sup_{0\le t\le T}|M_{t\wedge\tau_c}|>c\}\right)\\ &\le P(A_T>c^2)+P\left(\{\sup_{0\le t\le T}|M_{t\wedge\tau_c}|>c\}\right),\end{aligned}$$

y de (1.10) resulta

$$P\left(\{\sup_{0\le t\le T}|M_t|>c\}\right)\le P\left(\sqrt{A_T}>c\right)+\frac{1}{c^2}E(\text{mín}\,(c^2,A_T)).$$

Integrando respecto a c entre cero e infinito, el lema anterior concluye la prueba. □

Una consecuencia importante a partir de la Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, y que usaremos con frecuencia en lo que sigue, es la anulación en media de una integral estocástica con integrando adecuado, más exactamente se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.31. *Dado $Y\in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)$ tal que $E\sup_{[0,T]}|Y(t)|^2<\infty$, $Z\in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)$, y W un proceso de Wiener unidimensional, entonces la integral estocástica del proceso producto escalar $\langle Y,Z\rangle$ está bien definida y es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala. En particular se cumple que*

$$E\int_0^T\langle Y(s),Z(s)\rangle\,dW_s=0. \tag{1.11}$$

Demostración. Es bien sabida la propiedad del enunciado si el integrando fuera un elemento de $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R})$, ya que sería una martingala (en este caso de cuadrado integrable), que tienen esperanza constante a lo largo del tiempo, y es trivialmente nula. Pero el integrando no tiene tal regularidad.

Lo que se cumple es que

$$E\sqrt{\int_0^T|\langle Y,Z\rangle|^2ds}<\infty$$

pues

$$\int_0^T |\langle Y, Z\rangle|^2 ds \leq \sup_{0\leq s\leq T} |Y(s)|^2 \int_0^T \|Z(s)\|^2 ds$$

con lo que

$$\left(\int_0^T |\langle Y, Z\rangle|^2 ds\right)^{1/2} \leq \sup_{0\leq s\leq T} |Y(s)| \left(\int_0^T \|Z(s)\|^2 ds\right)^{1/2}$$

y tomando esperanza y aplicando la Desigualdad de Hölder y la regularidad de Y y Z

$$E\left(\int_0^T |\langle Y, Z\rangle|^2 ds\right)^{1/2} \leq \left(E \sup_{0\leq s\leq T} |Y(s)|^2\right)^{1/2} \left(E\int_0^T \|Z(s)\|^2 ds\right)^{1/2} < \infty.$$

Por tanto $\displaystyle\int_0^T |\langle Y, Z\rangle|^2 ds$ es finito P-c. s., es decir, $\varphi = \langle Y, Z\rangle \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R})$, con lo que la integral estocástica está bien definida. De hecho, se cumple que $M_t = \int_0^t \varphi\, dW_s$ es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala (no será de cuadrado integrable). La integral estocástica extendida a elementos de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R})$ estaba definida como

$$\int_0^t \varphi\, dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t\wedge\tau_n} \varphi\, dW_s,$$

donde τ_n era un $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada definido por

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T];\ \int_0^t |\varphi(s)|^2 ds > n & \text{si} \quad \omega \in \Omega\backslash\Omega_n, \\ T & \text{si} \quad \omega \in \Omega_n, \end{cases}$$

con $\Omega_n = \{\omega \in \Omega;\ \int_0^T |\varphi(s)|^2 ds < n\}$. Ahora sí se cumple que la sucesión $\{M_t^n\}_n$ dada por $\int_0^{t\wedge\tau_n} \varphi\, dW_s = \int_0^t \varphi 1_{[0,\tau_n]}\, dW_s$ es una sucesión de martingalas pues $\varphi 1_{[0,\tau_n]} \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T)$ y tienen esperanza nula. Es bien sabido que $M_t = \lim M_t^n$ P-c. s. y que

$$|M_t^n| = \left|\int_0^{t\wedge\tau_n} \varphi\, dW_s\right| \leq \sup_{0\leq\theta\leq T} \left|\int_0^\theta \varphi\, dW_s\right| \in L^1(\Omega)$$

por la Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, pues en nuestro caso $E\left(\int_0^T \varphi^2 ds\right)^{1/2} < \infty$. El Teorema de Lebesgue concluye $M_t^n \to M_t$ en $L^1(\Omega)$ para todo t y en particular la convergencia de las esperanzas. □

Un resultado del análisis estocástico muy útil y que necesario para las ecuaciones retrógradas que usaremos en el siguiente capítulo, es el Teorema de Representación de Martingalas. De sus muchas versiones, damos aquí una que nos bastará:

Teorema 1.32. *(cf. Liptser & Shiryayev* [104, Teor. 3.1 y 5.5]*) Sea $\{W_t\}$ un proceso de Wiener m-dimensional respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\} = \{\sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N})\}$. Para cada $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala M_t de cuadrado integrable, existe un único proceso $\varphi \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_s\, dW_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

A partir de este teorema es inmediato el siguiente e interesante resultado:

Nota 1.33. Toda $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala de cuadrado integrable (con $\{\mathcal{F}_t\} = \{\sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N})\}$) tiene una modificación continua.

El resultado que enunciamos a continuación se conoce como Lema de Girsanov y sirve para deducir regularidad de un proceso exponencial obtenido a partir de la Fórmula de Itô.

Teorema 1.34. *(Novikov, 1972, cf. Karatzas & Shreve* [87, p. 199]*) Sea $\{W_t\}$ un $\{\mathcal{F}_t\}$-Wiener con valores en $\mathbb{R}^m$ y $\varphi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\varphi(t)|^2 dt\right)\right) < \infty.$$

Entonces el proceso

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \varphi(s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi(s)|^2 ds\right)$$

es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala, y en particular $EZ_t = 1$, $\forall t \in [0,T]$.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas con Reflexión en la Frontera

En este capítulo se estudian algunas extensiones de los resultados conocidos sobre ecuaciones diferenciales estocásticas con condiciones de reflexión en la frontera. Más exactamente, obtenemos resultados de existencia y unicidad de solución fuerte bajo condiciones más débiles que las usuales en el término de deriva: por un lado, sustituimos la clásica condición de Lipschitz por una condición de disipatividad, y por otro lado conseguimos relajar también la geometría del dominio en el que se trata el problema, omitiendo la condición de convexidad, usual en estudios anteriores por otros autores (cf. Tanaka [159]).

Como aplicación de estos resultados, consideramos un sistema fuertemente acoplado de ecuaciones progresivo-retrógradas con término de reflexión en la ecuación progresiva. Obtenemos, bajo estas condiciones más generales en dominio y coeficientes, resultados de existencia y unicidad de solución, así como relaciones en sentido clásico, y de forma menos restrictiva como solución de viscosidad, para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales quasi lineal con condición de Neumann homogénea en la frontera.

Terminamos el capítulo con una generalización para ecuaciones progresivas con reflexión al caso en que los coeficientes contienen términos de retardo.

2.1 Introducción

Es bien conocido el hecho de que las trayectorias de un proceso de difusión abandonan todo acotado en algún momento, lo que permite definir los tiempos de salida o golpeo en una frontera dada. Cuando se desea tratar ecuaciones estocásticas en un dominio acotado, es necesario por tanto tener algo más que una difusión en el sentido de Itô. Los procesos con reflexión resuelven este problema. Estos pueden verse bien a partir de aproximaciones Yosida de un cierto operador maximal monótono (subdiferencial, véase e. g. Ma & Yong [107, Cap. 7]) o bien a través del problema determinista de Skorokhod, vía que ha sido abordada por muchos autores: Skorokhod, McKean, Ikeda y Watanabe, El Karoui, Stroock y Varadhan, Bensoussan y J.L. Lions, etc. (véase referencias en [103]).

Estos procesos aparecen en modelos de mercado (movimiento Browniano reflejado, Chung & Williams [42]), en interacciones moleculares (cf. Graham [64]), o relacionados con diversos problemas con condiciones de tipo Neumann, presentes en un contexto físico representando un fluido en cierta cavidad o canal, un flujo térmico, en la teoría de homogeneización (Allaire [2]), en problemas de membranas (El Karoui *et al.* [56]), en teoría cuántica (Holden & Øksendal [75] y en fenómenos de histéresis (Pettersson [136]), por citar algunos ejemplos.

Nos marcamos tres objetivos en este capítulo:

Primeramente, extendemos algunos resultados de Tanaka [159] y Lions & Sznitman [103] sobre existencia y unicidad de solución fuerte para ecuaciones diferenciales estocásticas con reflexión en la frontera (SDER por abreviar) al caso en que el coeficiente de deriva b satisface la siguiente condición de disipatividad (también llamada *de monotonía* por concordancia con la literatura existente y el caso unidimensional)

$$\langle x - x', b(t,x) - b(t,x')\rangle \leq L_{b_x}|x - x'|^2,$$

en lugar de la usual condición de Lipschitz (secciones 2.2.1–2.2.3).

Para las ecuaciones progresivas, no hemos encontrado en la literatura resultados de existencia de solución fuerte (sí de solución débil, e. g. cf. [159, 103]) con tales condiciones en el coeficiente de deriva. Una excepción, con más particularidades, la suponen Zhang [171] para la ecuación progresiva y Matoussi [117] para la ecuación retrógrada (con obstáculo), ambas en el caso unidimensional.

En segundo lugar (Sección 2.3.1), aplicamos los resultados anteriores para extender algunos de los dados en Pardoux & Tang [133] y en Ma & Cvitanić [105] para un sistema progresivo-retrógrado fuertemente acoplado, con un término de reflexión en la ecuación progresiva. Tras probar existencia y unicidad de solución para dicho problema, se establecen relaciones con un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo quasi lineal con condición de Neumann en la frontera. Trabajos anteriores en esta línea fueron debidos a Hsu [76, 77], Hu [78] y a Pardoux & Zhang [134]. La generalización anterior se traducirá en condiciones de monotonía en algunos de los términos del sistema de EDP, y en la forma del dominio $\mathcal{O}$ considerado (no necesariamente convexo).

Finalmente presentamos un resultado de existencia y unicidad de solución de procesos con reflexión en la frontera de un dominio acotado siendo las componentes de la ecuación funciones que implican retardos del proceso.

2.2 Condiciones de monotonía para ecuaciones estocásticas con reflexión

Las condiciones más usuales para la resolución de ecuaciones progresivas estocásticas consisten, al igual que en el caso determinista, en exigir términos lipschitzianos. Estas condiciones pueden relajarse en el coeficiente de deriva a una condición de monotonía (cf. Pardoux [127]). En esta sección vemos como también puede hacerse para ecuaciones estocásticas con reflexión.

2.2.1 Planteamiento del problema y resultado principal

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una familia creciente y continua de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos P-despreciables de $\mathcal{F}$, y finalmente sea $\{W_t;\ t \geq 0\}$ un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener estándar m-dimensional.

Sea $\mathcal{O}$ un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^d$ dado por $\mathcal{O} = \{\phi > 0\}$, con $\phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$, y tal que $\partial\mathcal{O} = \{\phi = 0\}$, con $|\nabla\phi(x)| = 1$ para todo $x \in \partial\mathcal{O}$. Obsérvese que en particular ϕ, $\nabla\phi$ y $D^2\phi$ son acotados en $\bar{\mathcal{O}}$, y que la normal exterior unitaria a $\partial\mathcal{O}$ en el punto x, $n(x)$, viene dada por $-\nabla\phi(x)$. Podemos entonces afirmar que existe una constante $C_0 > 0$ tal que

$$2\langle x' - x, \nabla\phi(x)\rangle + C_0|x - x'|^2 \geq 0, \qquad \forall\, x \in \partial\mathcal{O},\ \forall\, x' \in \bar{\mathcal{O}}. \tag{2.1}$$

También consideramos dado un tiempo final $T > 0$ así como dos funciones aleatorias:

$$b : \Omega \times [0,T] \times \bar{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma : \Omega \times [0,T] \times \bar{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^{d\times m},$$

tales que

(i) b y σ son uniformemente acotadas;

(ii) para todo $x \in \bar{\mathcal{O}}$ los procesos $b(\cdot,\cdot,x)$ y $\sigma(\cdot,\cdot,x)$ son $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles;

(iii) para todo $t \in [0,T]$ y P-c. s. ω, la función $b(\omega,t,\cdot)$ es continua en $\bar{\mathcal{O}}$;

(iv) existen dos constantes $L_{b_x} \in \mathbb{R}$ y $L_{\sigma_x} \geq 0$ tales que para todo $t \in [0,T]$ y todo $x, x' \in \bar{\mathcal{O}}$,

$$\langle x - x', b(\omega,t,x) - b(\omega,t,x')\rangle \leq L_{b_x}|x-x'|^2, \quad c.\ s.,$$

$$\|\sigma(\omega,t,x) - \sigma(\omega,t,x')\| \leq L_{\sigma_x}|x-x'|, \quad c.\ s.$$

En general, omitiremos la dependencia de los procesos de la variable ω.

Nota 2.1. Obsérvese que si b satisface las condiciones (i)-(iii) puestas antes, entonces, razonando como en la prueba del teorema de extensión de Tietze, y usando los teoremas 8.1.4 y 8.2.9 de Aubin & Frankowska [8], se ve que existe una extensión de b,

$$\tilde{b} : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$$

tal que $\tilde{b}$ es también uniformemente acotada y satisface (ii) y (iii) en todo $\mathbb{R}^d$ en vez de en $\bar{\mathcal{O}}$

Buscamos soluciones fuertes para el problema:

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s - k_t, \tag{2.2}$$

$$k_t = -\int_0^t \nabla\phi(X_s)\,d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{X_s\in\partial\mathcal{O}\}}\,d|k|_s, \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

donde $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ es un punto dado, y $|k|_t$ denota la variación total de k en $[0,t]$.

Definición 2.2. *Una solución fuerte para el problema* (2.2)-(2.3) *es un par de procesos* $\{\mathcal{F}_t\}$*-adaptados y continuos* (X,k) *definidos en* $\Omega \times [0,T]$*, el primero de ellos tomando valores en* $\bar{\mathcal{O}}$*, el segundo con valores en* $\mathbb{R}^d$ *y con trayectorias de variación acotada en* $[0,T]$*, satisfaciendo las ecuaciones* (2.2)-(2.3) *c. s. para todo* $t \in [0,T]$.

Enunciamos a continuación el resultado principal de este capítulo, el cual generaliza al que aparece en Lions & Sznitman [103], donde b se supone Lipschitz en su variable espacial.

Teorema 2.3. *Bajo las hipótesis* (i)-(iv)*, para cada* $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ *dado, existe un único par* (X,k) *solución fuerte de* (2.2)-(2.3).

Para demostrar este resultado, analizaremos previamente un problema determinista que generaliza el llamado Problema de Skorokhod tratado en Lions & Sznitman [103].

2.2.2 Una generalización del Problema de Skorokhod

En este parágrafo, consideramos el conjunto abierto conexo $\mathcal{O}$ dado en la Sección 2.2.1, pero la función b que usaremos ahora será supuesta independiente de ω, i. e. determinista.

Suponemos dados un punto $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ y una función $g \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ tal que $g_0 = 0$. Queremos resolver el problema determinista

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(s, x_s)\, ds + g_t - k_t, \tag{2.4}$$

$$k_t = -\int_0^t \nabla\phi(x_s)\, d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{x_s \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|k|_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

Definición 2.4. *Una solución del problema* (2.4)-(2.5) *es un par* (x,k) *de funciones continuas definidas en* $[0,T]$ *con valores en* $\mathbb{R}^d$*, tales que* $x_t \in \bar{\mathcal{O}}$ *para todo* $t \in [0,T]$*,* k *es de variación acotada en* $[0,T]$*, y las ecuaciones* (2.4)-(2.5) *se satisfacen para todo* $t \in [0,T]$.

Del Teorema 2.1 y la Nota 2.1 en Lions y Sznitman [103] se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.5. *Si* $b \equiv 0$ *y* $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ *es un punto dado, entonces, para cualquier función* $g \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ *tal que* $g_0 = 0$*, existe un único par* (x,k) *solución del problema* (2.4)-(2.5). *Además, la aplicación* $g \to x$ *es Hölder continua de orden* $1/2$ *sobre compactos de* $C([0,T];\mathbb{R}^d)$.

Nota 2.6. Obsérvese que, como una consecuencia directa del carácter Hölder continuo de orden $1/2$ en compactos de $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ de la aplicación $g \to x$, podemos afirmar que bajo las condiciones del Teorema 2.5, si $\{g^n\} \subset C([0,T];\mathbb{R}^d)$ es una sucesión de funciones tales que $g_0^n = 0$ y $g^n \to g$ en $C([0,T];\mathbb{R}^d)$, entonces, si denotamos por (x^n, k^n) al par solución de (2.4)-(2.5) correspondiente a $b \equiv 0$ y g^n, tenemos que $x^n \to x$ en $C([0,T];\bar{\mathcal{O}})$.

Veremos que podemos extender el Teorema 2.5 al caso en que $b \not\equiv 0$. Primero, mostramos el siguiente resultado:

Teorema 2.7. *Sean* $\mathcal{O}$ *satisfaciendo las condiciones de la Sección* 2.2.1 *y* $b : [0,T] \times \bar{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^d$*, una función medible y acotada, tal que para todo* $t \in [0,T]$*,* $b(t,\cdot)$ *es continua en* $\bar{\mathcal{O}}$*. Entonces, para cada punto* $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ *y función* $g \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ *dada, tal que* $g_0 = 0$*, existe al menos una solución* (x,k) *del problema* (2.4)-(2.5).

Demostración. Procederemos en dos etapas.

Etapa 1 Supongamos también que la función dada g es un elemento de $C^1([0,T];\mathbb{R}^d)$, y que b es Lipschitz en x sobre $\bar{\mathcal{O}}$, i. e. existe una constante $L > 0$ tal que

$$|b(t,x) - b(t,x')| \leq L|x - x'|$$

para todo $t \in [0,T]$ y todo $x, x' \in \bar{\mathcal{O}}$.

En este caso, la existencia y unicidad de solución para (2.4)-(2.5) se puede deducir del resultado estocástico dado en Lions & Sznitman [103] (casi toda trayectoria del proceso estocástico solución dado en [103] es solución). Sin embargo, por más claridad, damos una prueba totalmente determinista.

Denotamos por f la derivada de g. Para cada función $y \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ dada, consideramos el problema

$$x_t = x_0 + \int_0^t (b(s, y_s) + f_s)\, ds - k_t, \tag{2.6}$$

$$k_t = -\int_0^t \nabla\phi(x_s)\, d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{x_s \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|k|_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

Obviamente, la función

$$\tilde{g}_t = \int_0^t (b(s, y_s) + f_s)\, ds$$

es continua en $[0, T]$, y satisface $\tilde{g}(0) = 0$, de modo que por el Teorema 2.5, existe una única solución (x, k) de (2.6)-(2.7). Para terminar la prueba de esta etapa, basta demostrar que existe un único punto fijo para la aplicación

$$F : y \in C([0,T]; \bar{O}) \mapsto x \in C([0,T]; \bar{O})$$

definida por (2.6)-(2.7).

Sean $x = Fy$ y $x' = Fy'$. Es fácil ver usando (2.1) que

$$\begin{aligned}
&\exp\{-C_0(\phi(x_t) + \phi(x'_t))\}|x_t - x'_t|^2 \\
\leq\ & -C_0 \int_0^t \exp\{-C_0(\phi(x_s) + \phi(x'_s))\}\langle \nabla\phi(x_s), b(s, y_s) + f_s\rangle |x_s - x'_s|^2\, ds \\
& -C_0 \int_0^t \exp\{-C_0(\phi(x_s) + \phi(x'_s))\}\langle \nabla\phi(x'_s), b(s, y'_s) + f_s\rangle |x_s - x'_s|^2\, ds \\
& +2 \int_0^t \exp\{-C_0(\phi(x_s) + \phi(x'_s))\}\langle x_s - x'_s, b(s, y_s) - b(s, y'_s)\rangle\, ds. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Como x y x' toman valores en $\bar{O}$,

$$\exp\{-2C_0 \max_{\bar{O}} \phi\} \leq \exp\{-C_0(\phi(x_t) + \phi(x'_t))\} \leq 1$$

para todo $t \in [0, T]$.

Además, $\nabla\phi$, b y f están uniformemente acotadas, y por tanto, usando que b es Lipschitz es fácil deducir de (2.8) la existencia de una constante $C > 0$, independiente de y, y' y t, tal que

$$|x_t - x'_t|^2 \leq C \int_0^t \left(|x_s - x'_s|^2 + |y_s - y'_s|^2\right)\, ds,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Por tanto,

$$\sup_{r \in [0,t]} |x_r - x'_r|^2 \leq C \int_0^t \left(\sup_{r \in [0,s]} |x_r - x'_r|^2 + \sup_{r \in [0,s]} |y_r - y'_r|^2 \right) ds,$$

para todo $t \in [0, T]$, y del lema de Gronwall deducimos

$$\sup_{r \in [0,t]} |x_r - x'_r|^2 \leq C \exp(CT) \int_0^t \sup_{r \in [0,s]} |y_r - y'_r|^2\, ds, \qquad (2.9)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Es bien sabido que (2.9) implica que una potencia de F es una contracción en $C([0,T]; \mathbb{R}^d)$, y así existe un único punto fijo para F.

Etapa 2 Supongamos ahora que estamos en las condiciones dadas en el teorema.

En este caso, podemos aproximar g por una sucesión de funciones $g^n \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^d)$ tales que $g^n_0 = 0$, convergiendo a g en $C([0,T]; \mathbb{R}^d)$.

Es más, si consideramos fijada una sucesión regularizante $\{\rho_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y definimos

$$b_n(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\tilde{b}(t,x-y)\,dy, \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \tag{2.10}$$

con $\tilde{b}$ una extensión medible y uniformemente acotada de b a $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, tal que $\tilde{b}(t,\cdot)$ es continua en $\mathbb{R}^d$, obtenemos una sucesión de funciones medibles $b_n : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tales que, en particular, para todo $t \in [0,T]$, $b_n(t,\cdot)$ es continua en $\mathbb{R}^d$,

$$|b_n(t,x)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\tilde{b}(t,y)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.11}$$

$$|b_n(t,x) - b_n(t,x')| \leq L_n|x-x'|, \quad \forall x,x' \in \mathbb{R}^d, \tag{2.12}$$

$$b_n(t,\cdot) \to b(t,\cdot) \quad \text{uniformemente en } \bar{\mathcal{O}}. \tag{2.13}$$

Por la etapa 1, para cada n se tiene una única solución (x^n, k^n) del problema:

$$x_t^n = x_0 + \int_0^t b_n(s,x_s^n)\,ds + g_t^n - k_t^n,$$
$$k_t^n = -\int_0^t \nabla\phi(x_s^n)\,d|k^n|_s, \quad |k^n|_t = \int_0^t 1_{\{x_s^n \in \partial\mathcal{O}\}}\,d|k^n|_s, \quad t \in [0,T].$$

Es obvio que $\{b_n(\cdot,x_\cdot^n)\}_n$ está acotada en $L^2(0,T;\mathbb{R}^d)$, y así la sucesión

$$\{\int_0^\cdot b_n(s,x_s^n)\,ds\}_n$$

está acotada en $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ y es equicontinua. Por consiguiente, es fácil ver que existe una subsucesión $\{x^\mu\} \subset \{x^n\}$ y un elemento $\mathcal{B} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^d)$, tal que

$$b_\mu(\cdot,x_\cdot^\mu) \rightharpoonup \mathcal{B} \quad \text{en } L^2(0,T;\mathbb{R}^d) \quad \text{y}$$
$$\int_0^\cdot b_\mu(s,x_s^\mu)\,ds \to \int_0^\cdot \mathcal{B}_s\,ds \quad \text{en } C([0,T];\mathbb{R}^d).$$

Entonces, de acuerdo con el Teorema 2.5, $x^\mu \to x$ en $C([0,T];\mathbb{R}^d)$, con (x,k) la solución de

$$x_t = x_0 + \int_0^t \mathcal{B}_s\,ds + g_t - k_t,$$
$$k_t = -\int_0^t \nabla\phi(x_s)\,d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{x_s \in \partial\mathcal{O}\}}\,d|k|_s, \quad t \in [0,T].$$

Pero, como x^μ converge a x en $C([0,T];\mathbb{R}^d)$, es fácil deducir de (2.11), (2.13) y de la continuidad de $b(t,\cdot)$ que $b_\mu(\cdot,x_\cdot^\mu) \to b(\cdot,x_\cdot)$ en $L^2(0,T;\mathbb{R}^d)$. Así, $\mathcal{B} = b(\cdot,x_\cdot)$, y (x,k) es una solución de (2.4)-(2.5). □

En la demostración del Teorema 2.7 hemos visto que, bajo las condiciones del teorema, si además b es Lipschitz en x entonces la solución de (2.4)-(2.5) es única. De hecho, tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.8. *Bajo las condiciones del Teorema 2.7, supongamos que existe $L_{b_x} \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in [0,T]$ y todo $x,x' \in \bar{\mathcal{O}}$,*

$$\langle x-x', b(t,x) - b(t,x')\rangle \leq L_{b_x}|x-x'|^2.$$

Entonces, para cada $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ y $g \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ tal que $g_0 = 0$ dados, existe una única solución (x,k) del problema (2.4)-(2.5).

Demostración. Tenemos simplemente que comprobar que se tiene la unicidad. Sean (x, k) y (x', k') dos soluciones de (2.4)-(2.5) correspondientes a los mismos datos x_0 y g. Entonces, para todo $t \in [0, T]$

$$x_t - x'_t = \int_0^t (b(s, x_s) - b(s, x'_s))\, ds - k_t + k'_t,$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned}
&\exp\{-C_0(|k|_t + |k'|_t)\}|x_t - x'_t|^2 \\
= \; & -C_0 \int_0^t \exp\{-C_0(|k|_s + |k'|_s)\}|x_s - x'_s|^2\, (d|k|_s + d|k'|_s) \\
&+2 \int_0^t \exp\{-C_0(|k|_s + |k'|_s)\}\langle x_s - x'_s, b(s, x_s) - b(s, x'_s)\rangle\, ds \\
&+2 \int_0^t \exp\{-C_0(|k|_s + |k'|_s)\}\langle x_s - x'_s, \nabla\phi(x_s)\rangle\, d|k|_s \\
&-2 \int_0^t \exp\{-C_0(|k|_s + |k'|_s)\}\langle x_s - x'_s, \nabla\phi(x'_s)\rangle\, d|k'|_s.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Es fácil ver que, por (2.1), (2.5), y la hipótesis sobre b, de (2.14) obtenemos

$$\exp\{-C_0(|k|_t + |k'|_t)\}|x_t - x'_t|^2 \leq 2|L_{b_x}| \int_0^t \exp\{-C_0(|k|_s + |k'|_s)\}|x_s - x'_s|^2$$

para todo $t \in [0, T]$, y así, por el Lema de Gronwall, obtenemos el resultado deseado. □

Nota 2.9. Considérense las hipótesis del Teorema 2.8, y una sucesión b_n dada por (2.10). Denotemos por (x^n, k^n) la única solución del problema

$$\begin{aligned}
x_t^n &= x_0 + \int_0^t b_n(s, x_s^n)\, ds + g_t - k_t^n, \\
k_t^n &= -\int_0^t \nabla\phi(x_s^n)\, d|k^n|_s, \quad |k^n|_t = \int_0^t 1_{\{x_s^n \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|k^n|_s, \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Entonces, razonando como en el Paso 2 de la prueba del Teorema 2.7, y por la unicidad de la solución (x, k) para (2.4)-(2.5), podemos afirmar que toda la sucesión x^n converge a x en $C([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

2.2.3 Demostración del Teorema 2.3

Para la prueba, procederemos en dos etapas.

Etapa 1 Sea σ independiente de x, i. e. $\sigma(\omega, t, x) = \sigma(\omega, t)$, c. s. para todo $(t, x) \in [0, T] \times \bar{\mathcal{O}}$. En este caso, denotamos

$$M_t = \int_0^t \sigma(s)\, dW_s.$$

Obsérvese que el un par (X, k) de procesos $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles con valores en $\mathbb{R}^d$ es una solución de (2.2)-(2.3) si y sólo si, c. s. $\omega \in \Omega$, $(X(\omega), k(\omega))$ es una solución del problema

$$X_t(\omega) = x_0 + \int_0^t b(\omega, s, X_s(\omega))\, ds + M_t(\omega) - k_t(\omega), \tag{2.15}$$

$$k_t(\omega) = -\int_0^t \nabla\phi(X_s(\omega))\, d|k(\omega)|_s, \quad |k(\omega)|_t = \int_0^t 1_{\{X_s(\omega) \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|k(\omega)|_s, \tag{2.16}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Pero, de acuerdo con el Teorema 2.8, para cada $\omega \in \Omega$ existe una única solución $(X(\omega), k(\omega))$ de (2.15)-(2.16). Así, para probar que la pareja de procesos (X,k) definida por (2.15)-(2.16) es la única solución fuerte de (2.2)-(2.3), sólo debemos ver que X es $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medible. Para ello, obsérvese que, por el Teorema 3.1 y la Nota 3.3 en Lions & Sznitman [103], la existencia de solución fuerte para (2.2)-(2.3) está garantizada si b es también Lipschitz en x. Consecuentemente, si fijamos una sucesión regularizante $\{\rho_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y definimos para $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

$$b_n(\omega,t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\tilde{b}(\omega,t,x-y)\,dy, \qquad c.\ s.,$$

con $\tilde{b}$ la extensión de b cuya existencia se observó en la Nota 2.1, obtenemos una sucesión (X^n, k^n) de procesos $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles tales que c. s. son soluciones de

$$X_t^n(\omega) = x_0 + \int_0^t b_n(\omega,s,X_s^n(\omega))\,ds + M_t(\omega) - k_t^n(\omega),$$
$$k_t^n(\omega) = -\int_0^t \nabla\phi(X_s^n(\omega))\,d|k^n(\omega)|_s, \quad |k^n(\omega)|_t = \int_0^t 1_{\{X_s^n(\omega)\in\partial\mathcal{O}\}}\,d|k^n(\omega)|_s,$$

para todo $t \in [0,T]$.

Más aún, por la Nota 2.9, c. s. $X^n(\omega)$ converge a $X(\omega)$ en $C([0,T];\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto, en particular, X es $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medible.

Etapa 2 Consideramos ahora las condiciones dadas en el Teorema 2.3.

Procedemos de un modo similar a la prueba del Lema 3.1 de Lions & Sznitman [103]. Denotamos por $L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$ el espacio de los elementos de $L^4(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$ que son $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles. Entonces, $L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$ es un subespacio de Banach de $L^4(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$.

Considérese la aplicación

$$\hat{F} : L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d)) \to L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$$

que a cada $Y \in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$ le asocia $\hat{F}(Y) = X$, con (X,k) la solución fuerte de

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s)\,dW_s - k_t, \tag{2.17}$$

$$k_t = -\int_0^t \nabla\phi(X_s)\,d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{X_s\in\partial\mathcal{O}\}}\,d|k|_s, \quad t \in [0,T], \tag{2.18}$$

cuya existencia y unicidad ha sido probada en la Etapa 1. Obsérvese que, como $X_t \in \bar{\mathcal{O}}$, y $\mathcal{O}$ es acotado, se tiene que $X \in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$.

Es fácil ver que (X,k) es una solución fuerte de (2.2)-(2.3) si y sólo si $\hat{F}(X) = X$. Consecuentemente, para acabar la demostración, basta probar que $\hat{F}$ tiene un único punto fijo.

Sean Y e Y' dos procesos dados en $L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\mathbb{R}^d))$, y denotemos $\hat{F}(Y) = X$, $\hat{F}(Y') = X'$. Entonces, aplicando la fórmula de Itô a

$$\exp\{-C_0(\phi(X_t) + \phi(X_t'))\}|X_t - X_t'|^2,$$

obtenemos que c. s. para todo $t \in [0,T]$:

$$
\begin{aligned}
& \exp\{-C_0(\phi(X_t)+\phi(X'_t))\}|X_t - X'_t|^2 \\
= \;& 2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}\left[(X_s - X'_s)^*(\sigma(s,Y_s)-\sigma(s,Y'_s))\,dW_s\right. \\
& \quad +\langle X_s - X'_s, b(s,X_s)-b(s,X'_s)\rangle\,ds \\
& \quad \left.+\langle X_s - X'_s, \nabla\phi(X_s)\rangle\,d|k|_s - \langle X_s - X'_s, \nabla\phi(X'_s)\rangle\,d|k'|_s\right] \\
& + \int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}\|\sigma(s,Y_s)-\sigma(s,Y'_s)\|^2\,ds \\
& - C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}|X_s - X'_s|^2 \\
& \quad \times\{((\nabla\phi(X_s))^*\sigma(s,Y_s)+(\nabla\phi(X'_s))^*\sigma(s,Y'_s))\,dW_s \\
& \quad +\frac{1}{2}\mathrm{tr}(D^2\phi(X_s)(\sigma\sigma^*)(s,Y_s)+D^2\phi(X'_s)(\sigma\sigma^*)(s,Y'_s))\,ds \\
& \quad +[\langle\nabla\phi(X_s),b(s,X_s)\rangle+\langle\nabla\phi(X'_s),b(s,X'_s)\rangle]\,ds \\
& \quad +|\nabla\phi(X_s)|^2\,d|k|_s + |\nabla\phi(X'_s)|^2\,d|k'|_s\} \\
& + \frac{C_0^2}{2}\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}|X_s - X'_s|^2 \\
& \quad \times|\sigma^*(s,Y_s)\nabla\phi(X_s)+\sigma^*(s,Y'_s)\nabla\phi(X'_s)|^2\,ds \\
& - 2C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}(X_s - X'_s)^*(\sigma(s,Y_s)-\sigma(s,Y'_s)) \\
& \quad \times(\sigma^*(s,Y_s)\nabla\phi(X_s)+\sigma^*(s,Y'_s)\nabla\phi(X'_s))\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Ya que $|\nabla\phi(x)| = 1$ para $x \in \partial\mathcal{O}$, debido a (2.1) y (2.18) tenemos, c. s. para todo $t \in [0,T]$ que

$$
\begin{aligned}
& 2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}\langle X_s - X'_s, \nabla\phi(X_s)\rangle\,d|k|_s \\
& - C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}|X_s - X'_s|^2|\nabla\phi(X_s)|^2\,d|k|_s \le 0,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

y análogamente

$$
\begin{aligned}
& -2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}\langle X_s - X'_s, \nabla\phi(X'_s)\rangle\,d|k'|_s \\
& - C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}|X_s - X'_s|^2|\nabla\phi(X'_s)|^2\,d|k'|_s \le 0.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Usando las desigualdades (2.20) y (2.21) en (2.19), razonando como en la prueba del Lema 3.1 en Lions & Sznitman [103], y usando la desigualdad de Doob, la acotación del término exponencial (por arriba y por abajo), así como la de los datos b, σ, ϕ, $\nabla\phi$ y $D^2\phi$, y la condición (iv) sobre b y σ, no es difícil ver que existe una constante $C > 0$, dependiente sólo de C_0, $\mathcal{O}$, b, σ y ϕ, tal que para todo $t \in [0,T]$,

$$
\begin{aligned}
& E(\sup_{0\le s\le t}|X_s - X'_s|^4) \\
& \le C\left(\int_0^t E(|X_s - X'_s|^4)\,ds + \int_0^t E(|Y_s - Y'_s|^4)\,ds + \int_0^t E(|X_s - X'_s|^2|Y_s - Y'_s|^2)\,ds\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, por la desigualdad de Young, introduciendo supremos en las integrales y usando el Lema de Gronwall, es fácil ver que

$$E(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s - X'_s|^4) \leq 3/2C \exp(3/2CT) \int_0^t E(\sup_{0\leq r\leq s} |Y_r - Y'_r|^4)\, ds, \tag{2.22}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Es estándar ver, a partir de (2.22), que una potencia (respecto de la composición) de $\hat{F}$ es una aplicación contractiva en $L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T]; \mathbb{R}^d))$, y, por tanto, existe un único punto fijo para $\hat{F}$.

2.3 Aplicaciones y generalizaciones

2.3.1 Existencia y unicidad de solución para un sistema diferencial estocástico progresivo-retrógrado con reflexión

Desde que Pardoux & Peng [130] desarrollaran la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas retrógradas, nuevas y más profundas relaciones entre ecuaciones estocásticas y sistemas de EDP deterministas han podido ser establecidas. En pocas palabras, la combinación de las hasta entonces habituales ecuaciones estocásticas progresivas con una ecuación retrógrada permitió extender las relaciones que se conocían a partir de la fórmula de Feynman-Kac para aplicarlas a EDP no lineales (cf. Pardoux & Peng [131], Pardoux [128], Peng [135], Barles *et al.* [15] y Darling & Pardoux [51] entre otros). Más aún, aparte de las relaciones en sentido clásico, otras más complejas y generales pudieron ser formuladas via ciertos problemas estocásticos. Nos referimos a las soluciones de viscosidad del problema (determinista), un concepto introducido por Crandall y Lions (e. g. véase Crandall *et al.* [43]) generalizando la definición clásica.

Normalmente, los problemas deterministas tratados en este sentido están planteados o bien en el espacio total $\mathbb{R}^d$, o en un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ con una condición de Dirichlet en la frontera. Para una condición de tipo Neumann, el problema fue tratado primeramente por Ikeda *et al.* [82] y Sato & Ueno [147], y más tarde por Hsu [76, 77] y Hu [78] entre otros, usando el concepto de tiempo local alrededor de la frontera del dominio, que esencialmente consistente en la segunda ecuación del Problema de Skorokhod (véase e. g. Pardoux & Zhang [134] para una aplicación directa en este sentido, con una relación débil entre las dos ecuaciones estocásticas, progresiva y retrógrada). Nosotros extenderemos estos estudios y relaciones al caso en que ambas ecuaciones del sistema están fuertemente relacionadas, y eliminamos las condiciones de convexidad en el dominio de aplicación, así como generalizamos la condición de Lipschitzianidad del coeficiente de deriva de la ecuación progresiva, al caso estudiado antes, de disipatividad en x (por extensión de lo que pasa en el caso unidimensional también la llamamos condición de monotonía). En este sentido, extendemos y generalizamos los resultados de Pardoux & Tang [133] y de Ma & Cvitanić [105].

Consideramos dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener estándar m-dimensional $\{W_t;\ t \geq 0\}$ como el señalado en la Sección 2.2.1, pero ahora suponemos que para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ coincide con la σ-álgebra $\sigma(W_s;\ 0 \leq s \leq t)$ aumentada con todos los conjuntos P-nulos de $\mathcal{F}$.

Sea $T > 0$ un valor fijado, y consideramos un conjunto abierto $\mathcal{O}$ como el introducido en la Sección 2.2.1.

Suponemos dadas cuatro funciones aleatorias:

$$b : \Omega \times [0,T] \times \bar{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^d,$$

$$f : \Omega \times [0,T] \times \bar{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : \Omega \times [0,T] \times \bar{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{d\times m},$$
$$h : \Omega \times \bar{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^n,$$

tales que

(i') b y σ están uniformemente acotadas;

(ii') para todo $(x,y,z) \in \bar{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m}$ los procesos $b(\cdot,x,y,z)$, $f(\cdot,x,y,z)$ y $\sigma(\cdot,x,y,z)$ son $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles, y la variable aleatoria $h(\cdot,x)$ es $\mathcal{F}_T$-medible;

(iii') para todo $(t,x,y,z) \in [0,T] \times \bar{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m}$ las funciones $b(t,\cdot,y,z)$ y $f(t,x,\cdot,z)$ son c. s. continuas en $\bar{\mathcal{O}}$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente;

(iv') existen constantes reales L_{b_x} y L_{f_y}, y constantes no negativas L_{b_y}, L_{b_z}, L_{f_x}, L_{f_z}, L_{σ_x}, L_{σ_y}, L_{σ_z}, L_h y l_0 tales que para todo $t \in [0,T]$, todo x, $x' \in \bar{\mathcal{O}}$, todo y, $y' \in \mathbb{R}^n$, todo z, $z' \in \mathbb{R}^{n\times m}$, y c. s.,

$$\langle x - x', b(t,x,y,z) - b(t,x',y,z)\rangle \leq L_{b_x}|x-x'|^2,$$
$$|b(t,x,y,z) - b(t,x,y',z')| \leq L_{b_y}|y-y'| + L_{b_z}\|z-z'\|,$$
$$\|\sigma(t,x,y,z) - \sigma(t,x',y',z')\|^2 \leq L_{\sigma_x}^2|x-x'|^2 + L_{\sigma_y}^2|y-y'|^2 + L_{\sigma_z}^2\|z-z'\|^2,$$
$$\langle y - y', f(t,x,y,z) - f(t,x,y',z)\rangle \leq L_{f_y}|y-y'|^2,$$
$$|f(t,x,y,z) - f(t,x',y,z')| \leq L_{f_x}|x-x'| + L_{f_z}\|z-z'\|,$$
$$|f(t,x,y,z)| \leq |f(t,x,0,z)| + l_0(1+|y|),$$
$$|h(x) - h(x')| \leq L_h|x-x'|;$$

(v') $E\int_0^T |f(t,0,0,0)|^2\,dt + E|h(0)|^2 < \infty.$

Queremos estudiar el siguiente problema:

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s,Y_s,Z_s)\,dW_s - k_t, \tag{2.23}$$
$$Y_t = h(X_T) + \int_t^T f(s,X_s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s, \tag{2.24}$$
$$k_t = -\int_0^t \nabla\phi(X_s)\,d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{X_s\in\partial\mathcal{O}\}}\,d|k|_s, \quad t\in[0,T], \tag{2.25}$$

donde $x_0 \in \bar{\mathcal{O}}$ está dado.

Definición 2.10. *Una solución del problema* (2.23)-(2.25) *es una cuaterna* (X,Y,Z,k) *de procesos* $\{\mathcal{F}_t\}$*-progresivamente medibles definidos en* $\Omega\times[0,T]$*, tales que* X *es continuo con valores en* $\bar{\mathcal{O}}$*,* k *es continuo con valores en* $\mathbb{R}^d$ *y trayectorias de variación acotada en* $[0,T]$*,* $(Y,Z) \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n)\times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$*, y las ecuaciones* (2.23)-(2.25) *son satisfechas c. s. para todo* $t\in[0,T]$.

Para la resolución del sistema anterior, usaremos el siguiente resultado, que es una consecuencia directa del Teorema 2.3:

Corolario 2.11. *Bajo las hipótesis* (i')-(iv'), *si* $(Y,Z) \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$ *son fijos, existe un único par* (X,k) *de procesos* $\{\mathcal{F}_t\}$*-progresivamente definidos en* $\Omega \times [0,T]$*, tales que* X *es continuo con valores en* $\bar{\mathcal{O}}$*,* k *es continuo con valores en* $\mathbb{R}^d$ *y trayectorias de variación acotada en* $[0,T]$*, y satisfacen*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s,Y_s,Z_s)\,dW_s - k_t, \tag{2.26}$$

$$k_t = -\int_0^t \nabla\phi(X_s)\,d|k|_s, \quad |k|_t = \int_0^t 1_{\{X_s\in\partial\mathcal{O}\}}\,d|k|_s, \tag{2.27}$$

c. s. para todo $t \in [0,T]$.

Necesitaremos también por supuesto un resultado para aplicar a la ecuación retrógrada, pero esto es consecuencia de resultados ya bien conocidos, ver, por ejemplo, Pardoux [128]:

Teorema 2.12. *Bajo las hipótesis* (ii')-(v'), *sean* $X \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\bar{\mathcal{O}})$ *y* $\xi \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T;\bar{\mathcal{O}})$ *elementos dados. Entonces, existe un único par* $(Y,Z) \in M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$ *tal que*

$$Y_t = h(\xi) + \int_t^T f(s,X_s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s, \tag{2.28}$$

c. s. para todo $t \in [0,T]$*. Más aún, tenemos que* $Y \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([0,T];\mathbb{R}^n))$.

Usando los dos resultados anteriores, no es difícil probar existencia y unicidad de solución del problema (2.23)-(2.25) si T es suficientemente pequeño. Más exactamente, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.13. *Supongamos las hipótesis* (i')-(v'), *y además que* σ *no depende de* z*. Entonces, existe un* $T_* > 0$ *tal que si* $T \le T_*$*, la aplicación* Φ *definida de*

$$L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([0,T];\bar{\mathcal{O}})) \times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([0,T];\mathbb{R}^n)) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$$

en sí mismo por $\Phi(X,Y,Z) = (\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$*, con* $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$ *la única solución de*

$$\begin{aligned}
\bar{X}_t &= x_0 + \int_0^t b(s,\bar{X}_s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,\bar{X}_s,Y_s)\,dW_s - \bar{k}_t,\\
\bar{k}_t &= -\int_0^t \nabla\phi(\bar{X}_s)\,d|\bar{k}|_s, \quad |\bar{k}|_t = \int_0^t 1_{\{\bar{X}_s\in\partial\mathcal{O}\}}\,d|\bar{k}|_s,\\
\bar{Y}_t &= h(\bar{X}_T) + \int_t^T f(s,\bar{X}_s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)\,ds - \int_t^T \bar{Z}_s\,dW_s,
\end{aligned}$$

c. s. para todo $t \in [0,T]$*, es una contracción. Así, si* $T \le T_*$*, el problema* (2.23)-(2.25) *tiene una única solución.*

Demostración. Dividimos la prueba en dos partes. Sean $(\bar{X}_1,\bar{Y}_1,\bar{Z}_1)$ y $(\bar{X}_2,\bar{Y}_2,\bar{Z}_2)$ las imágenes de (X_1,Y_1,Z_1) y (X_2,Y_2,Z_2) por Φ_T respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
\bar{X}_1(t) &= x + \int_0^t b(s,\bar{X}_1,Y_1,Z_1)ds + \int_0^t \sigma(s,\bar{X}_1,Y_1)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(\bar{X}_1)d|\bar{k}_1|_s,\\
\bar{X}_2(t) &= x + \int_0^t b(s,\bar{X}_2,Y_2,Z_2)ds + \int_0^t \sigma(s,\bar{X}_2,Y_2)dW_s + \int_0^t \nabla\phi(\bar{X}_2)d|\bar{k}_2|_s.
\end{aligned}$$

Aplicando la Fórmula de Itô al proceso

$$\exp\{-C_0(\phi(\bar{X}_1) + (\phi(\bar{X}_2)))\}|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|^2,$$

de las hipótesis supuestas y las desigualdades de Young y Burkholder-Davis-Gundy y considerando valores positivos auxiliares δ y ε, es tedioso pero no difícil deducir que existen constantes

$$\begin{aligned} C_1 =& 2TC_0\|b\|_\infty\|\nabla\phi\|_\infty + 6\sqrt{T}C_0\|\nabla\phi\|_\infty\|\sigma\|_\infty + TC_0\|H\phi\|_\infty\|\sigma\|_\infty^2 \\ &+ 2TC_0^2\|\nabla\phi\|_\infty^2\|\sigma\|_\infty^2 + T\left(3L_b + \frac{L_b^2}{\delta}\right) + \left(3\varepsilon + 6T\frac{L_\sigma^2}{\varepsilon}\right) + 2TL_\sigma^2 \\ &+ 6TC_0\|\nabla\phi\|_\infty\|\sigma\|_\infty L_\sigma, \\ C_2 =& TL_b + 6T\frac{1}{\varepsilon} + 2TL_\sigma^2 + 2TC_0\|\nabla\phi\|_\infty\|\sigma\|_\infty L_\sigma, \\ C_3 =& \delta, \end{aligned}$$

tales que

$$\begin{aligned} E\sup_{0\le s\le T} e^{-C_0(\phi(\bar{X}_1)+\phi(\bar{X}_2))}|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|^2 \;\le\;& C_1 E\int_0^T |\bar{X}_1 - \bar{X}_2|^2 dt + C_2\, E\int_0^T |Y_1 - Y_2|^2 dt \\ &+ C_3 E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s)\, ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que ϕ está uniformemente acotada en $\bar{\mathcal{O}}$, rebautizando las constantes

$$C_2 = \frac{e^{2C_0\|\phi\|_\infty}C_2T}{1 - e^{2C_0\|\phi\|_\infty}C_1T}, \qquad C_3 = \frac{e^{2C_0\|\phi\|_\infty}C_3T}{1 - e^{2C_0\|\phi\|_\infty}C_1T},$$

se obtiene el siguiente

Lema 2.14. *Existen constantes positivas C_2 y C_3 dependientes de ϕ, b, σ, C_0, δ, ε y T (tan pequeñas como se quiera tomando convenientes δ, ε y T suficientemente pequeños) tales que*

$$E\sup_{0\le s\le T}|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|^2 \le C_2\, E\sup_{0\le s\le T}|Y_1 - Y_2|^2 + C_3 E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s)\, ds. \tag{2.29}$$

A partir del resultado precedente y la Fórmula de Itô obtenemos para la ecuación retrógrada:

$$\begin{aligned} & E|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|^2(t) + \frac{1}{2}E\int_t^T \|\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2\|^2(s)\, ds \\ \le\;& L_h^2\left(C_2 E\sup_{0\le s\le T}|Y_1 - Y_2|^2 + C_3 E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s)\, ds\right) + E\int_t^T (L_{f_y} + L_f^2)|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|^2(s)\, ds \\ & + \frac{T}{2}\left(C_2 E\sup_{0\le s\le T}|Y_1 - Y_2|^2 + C_3 E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s)\, ds\right). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema de Gronwall,

$$E\int_t^T |\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|^2 ds \le \frac{e^{\left(L_{f_y}+L_f^2\right)(T-t)} - 1}{L_{f_y} + L_f^2}\left(C_2' E\sup_{0\le s\le T}|Y_1 - Y_2|^2(s) + C_3' E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s) ds\right),$$

donde $C_2' = (L_h^2 + \frac{T}{2})C_2$ y $C_3' = (L_h^2 + \frac{T}{2})C_3$. Así,

$$E\int_0^T \|\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2\|^2\, ds \le 2e^{\left(L_{f_y}+L_f^2\right)T}\left(C_2'E\sup_{0\le s\le T}|Y_1-Y_2|^2 + C_3'E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s)\, ds\right).$$

Por otro lado, aplicando la Fórmula de Itô y tomando supremo después se deduce

$$\begin{aligned}\left(1/2 - 2T\left(L_{f_y} + L_f^2\right)\right)E\sup_{t\in[0,T]}|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|^2(t) \;&\le\; E|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|^2(T) + E\int_0^T |\bar{X}_1 - \bar{X}_2|^2(s)\, ds\\ &\quad +72E\int_0^T \|\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2\|^2(s)\, ds,\end{aligned}$$

lo que nos da la siguiente estimación en Y:

Lema 2.15. *Existen constantes positivas C_i para $i = 4, 5, 6, 7$ (tan pequeñas como se quiera tomando δ, ε y T suficientemente pequeños) tales que*

$$E\int_0^T \|\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2\|^2(s)ds \le C_4E\sup_{0\le t\le T}|Y_1 - Y_2|^2(t) + C_5E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s)ds,$$

$$E\sup_{t\in[0,T]}|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2|^2(t) \le C_6E\sup_{0\le t\le T}|Y_1 - Y_2|^2(t) + C_7E\int_0^T \|Z_1 - Z_2\|^2(s)ds.$$

Más exactamente, las constantes (para $i = 0,\ 1$) vienen dadas por:

$$\begin{aligned}C_{4+i} &= e^{\left(L_{f_y}+L_f^2\right)T}\left(2L_h^2 + T\right)C_{2+i}\\ C_{6+i} &= \left(1/2 - 2T(L_{f_y} + L_f^2)\right)^{-1}\left(L_h^2 + T + 144\left(L_h^2 + T/2\right)e^{\left(L_{f_y}+L_f^2\right)T}\right)C_{2+i}\end{aligned}$$

con C_{2+i} las constantes dadas antes.

Uniendo ambos resultados se concluye la prueba del teorema. Obsérvese que en la prueba no hemos necesitado ninguna condición de compatibilidad adicional. □

Para la resolución del problema completamente acoplado y en cualquier intervalo de tiempo $T > 0$, seguimos las ideas de Ma & Cvitanić [105] y Pardoux & Tang [133].

Denotemos Γ_1 la aplicación

$$\Gamma_1 : M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m}) \to M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m}),$$

definida por $\Gamma_1(Y,Z) = (\bar{Y},\bar{Z})$, con $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z},\bar{k})$ la única solución de

$$\begin{aligned}\bar{X}_t &= x_0 + \int_0^t b(s,\bar{X}_s,Y_s,Z_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s,\bar{X}_s,Y_s,Z_s)\, dW_s - \bar{k}_t,\\ \bar{k}_t &= -\int_0^t \nabla\phi(\bar{X}_s)\, d|\bar{k}|_s, \quad |\bar{k}|_t = \int_0^t 1_{\{\bar{X}_s\in\partial\mathcal{O}\}}\, d|\bar{k}|_s,\\ \bar{Y}_t &= h(\bar{X}_T) + \int_t^T f(s,\bar{X}_s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)\, ds - \int_t^T \bar{Z}_s\, dW_s,\end{aligned}$$

c. s. para todo $t \in [0,T]$.

Análogamente, denotaremos por Γ_2 la aplicación

$$\Gamma_2 : M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\bar{\mathcal{O}}) \times L^2(\Omega,\mathcal{F}_T;\bar{\mathcal{O}}) \to M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\bar{\mathcal{O}}) \times L^2(\Omega,\mathcal{F}_T;\bar{\mathcal{O}}),$$

definida por $\Gamma_2(X,\xi) = (\bar{X}, \bar{X}_T)$, con $\bar{X}$ tal que $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{k})$ es la única solución de

$$\bar{Y}_t = h(\xi) + \int_t^T f(s, X_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)\, ds - \int_t^T \bar{Z}_s\, dW_s,$$
$$\bar{X}_t = x_0 + \int_0^t b(s, \bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)\, dW_s - \bar{k}_t,$$
$$\bar{k}_t = -\int_0^t \nabla\phi(\bar{X}_s)\, d|\bar{k}|_s, \quad |\bar{k}|_t = \int_0^t 1_{\{\bar{X}_s \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|\bar{k}|_s,$$

c. s. para todo $t \in [0,T]$.

Obsérvese que si $h = h(\omega)$ es independiente de x, entonces Γ_2 es independiente de ξ, y así, en este caso, Γ_2 puede ser vista como una aplicación de $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\bar{\mathcal{O}})$ en sí mismo.

Por el Corolario 2.11 y el Teorema 2.12, bajo las condiciones (i')-(v') las aplicaciones Γ_1 y Γ_2 están bien definidas. Además, es claro que resolver el problema (2.23)-(2.25) es equivalente a encontrar un punto fijo para Γ_1 o Γ_2. Por lo tanto, para probar existencia y unicidad de solución para el problema (2.23)-(2.25), es suficiente encontrar una norma hilbertiana en $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$, tal que Γ_1 sea una contracción para dicha norma. Análogamente, basta encontrar una métrica completa en $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\bar{\mathcal{O}}) \times L^2(\Omega,\mathcal{F}_T;\bar{\mathcal{O}})$, para la que la aplicación Γ_2 sea una contracción.

Comenzamos mostrando algunas estimaciones sobre las ecuaciones del problema. Sean λ y λ' números reales, y para $0 \leq s \leq t \leq T$, considérense los procesos

$$\exp\{-\lambda s - \lambda'(t-s)\}\exp\{-C_0(\phi(X_s) + \phi(X'_s))\}|X_s - X'_s|^2,$$

donde (X,k) y (X',k') son las soluciones a las ecuaciones (2.26)-(2.27), con datos (Y,Z) y (Y',Z') en $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$, respectivamente. Entonces, aplicando la fórmula de Itô, usando la desigualdad (2.1), y tomando esperanza, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& E\exp\{-\lambda t\}\exp\{-C_0(\phi(X_t)+\phi(X'_t))\}|X_t-X'_t|^2 \\
\leq\ & E\int_0^t(\lambda'-\lambda)\exp\{-\lambda s-\lambda'(t-s)\}\exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}|X_s-X'_s|^2ds \\
& +2E\int_0^t\exp\{-\lambda s-\lambda'(t-s)\}\exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\} \\
& \qquad\times\langle X_s-X'_s, b(s,X_s,Y_s,Z_s)-b(s,X'_s,Y'_s,Z'_s)\rangle\, ds \\
& +E\int_0^t\exp\{-\lambda s-\lambda'(t-s)\}\exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\} \\
& \qquad\times\|\sigma(s,X_s,Y_s,Z_s)-\sigma(s,X'_s,Y'_s,Z'_s)\|^2\, ds \\
& -C_0E\int_0^t\exp\{-\lambda s-\lambda'(t-s)\}\exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}|X_s-X'_s|^2 \\
& \qquad\times\Big[\frac{1}{2}\mathrm{tr}(D^2\phi(X_s)(\sigma\sigma^*)(s,X_s,Y_s,Z_s)+D^2\phi(X'_s)(\sigma\sigma^*)(s,X'_s,Y'_s,Z'_s)) \\
& \qquad+\langle\nabla\phi(X_s),b(s,X_s,Y_s,Z_s)\rangle+\langle\nabla\phi(X'_s),b(s,X'_s,Y'_s,Z'_s)\rangle\Big]\, ds \\
& +\frac{C_0^2}{2}E\int_0^t\exp\{-\lambda s-\lambda'(t-s)\}\exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}|X_s-X'_s|^2 \\
& \qquad\times|\sigma^*(s,X_s,Y_s,Z_s)\nabla\phi(X_s)+\sigma^*(s,X'_s,Y'_s,Z'_s)\nabla\phi(X'_s)|^2\, ds \\
& -2C_0E\int_0^t\exp\{-\lambda s-\lambda'(t-s)\}\exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\} \\
& \qquad\times(X_s-X'_s)^*(\sigma(s,X_s,Y_s,Z_s)-\sigma(s,X'_s,Y'_s,Z'_s)) \\
& \qquad\times(\sigma^*(s,X_s,Y_s,Z_s)\nabla\phi(X_s)+\sigma^*(s,X'_s,Y'_s,Z'_s)\nabla\phi(X'_s))\, ds.
\end{aligned}
$$

De (i') e (iv') podemos deducir

$$
\begin{aligned}
& E\exp\{-\lambda t\}|X_t-X'_t|^2 \\
\leq\ & E\int_0^t\exp\{-\lambda s-\lambda'(t-s)\}\big[(k_1(\lambda'-\lambda)\exp\{-C_0(\phi(X_s)+\phi(X'_s))\}+k_4)|X_s-X'_s|^2 \\
& +k_5|Y_s-Y'_s|^2+k_6\|Z_s-Z'_s\|^2\big]\, ds, \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \exp\big(2C_0\max_{\mathcal{O}}\phi\big)>1, \\
k_2 &= 2dC_0\|\nabla\phi\|_\infty\|b\|_\infty+d^3C_0\|D^2\phi\|_\infty\|\sigma\|_\infty^2+2d^3C_0^2\|\nabla\phi\|_\infty^2\|\sigma\|_\infty^2, \\
k_3 &= 2d^{3/2}C_0\|\nabla\phi\|_\infty\|\sigma\|_\infty, \\
k_4 &= k_1\left(k_2+2L_{b_x}+L_{b_y}C_1^{-1}+L_{b_z}C_2^{-1}+L_{\sigma_x}^2+2k_3L_{\sigma_x}+k_3L_{\sigma_y}C_1^{-1}+k_3L_{\sigma_z}C_2^{-1}\right), \\
k_5 &= k_1\left(L_{b_y}C_1+L_{\sigma_y}^2+k_3L_{\sigma_y}C_1\right), \\
k_6 &= k_1\left(L_{b_z}C_2+L_{\sigma_z}^2+k_3L_{\sigma_z}C_2\right),
\end{aligned}
$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias y estrictamente positivas.

De ahora en adelante, para cualquier entero $l\geq 1$, y $\lambda\in\mathbb{R}$, denotaremos por $\|\cdot\|_\lambda$ la norma sobre $M^2_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^l)$, equivalente a la habitual, dada por

$$\|\zeta\|_\lambda^2=E\int_0^T e^{-\lambda s}|\zeta|^2ds.$$

Para cualquier $\rho \in \mathbb{R}$, definimos

$$A(\rho, t) = \exp\{-(\rho \wedge 0)t\}, \quad \text{y} \quad B(\rho, t) = \rho^{-1}(1 - \exp(-\rho t)).$$

Además, usaremos la notación $\Delta X_t := X(t) - X'(t)$, y la análoga para ΔY_t y ΔZ_t.
Ahora, es fácil obtener el siguiente resultado:

Lema 2.16. *Bajo las hipótesis* (i')-(iv'), *para cualesquiera pares de procesos* (Y, Z) *y* (Y', Z') *en* $M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R}^{n\times m})$ *fijados, denotemos por* (X, k) *y* (X', k') *las soluciones a* (2.26) *y* (2.27) *con dichos datos respectivamente. Entonces,*

$$\exp(-\lambda T)E|\Delta X_T|^2 + \lambda_1\|\Delta X\|^2_\lambda \le k_5\|\Delta Y\|^2_\lambda + k_6\|\Delta Z\|^2_\lambda, \tag{2.31}$$

$$\|\Delta X\|^2_\lambda \le B(\lambda - k_4, T)\left(k_5\|\Delta Y\|^2_\lambda + k_6\|\Delta Z\|^2_\lambda\right), \tag{2.32}$$

donde $\lambda_1 = k_1\lambda - k_4$ *si* $\lambda < 0$ *y* $\lambda_1 = \lambda - k_4$ *si* $\lambda \ge 0$. *Más aún,*

$$e^{-\lambda T}E|\Delta X_T|^2 \le A(\lambda - k_4, T)\left(k_5\|\Delta Y\|^2_\lambda + k_6\|\Delta Z\|^2_\lambda\right). \tag{2.33}$$

Demostración. La desigualdad (2.31) sigue de (2.30) con $\lambda' = 0$ y $t = T$, teniendo en cuenta el posible signo de λ. Para conseguir (2.32), basta considerar $\lambda' = \lambda - k_4$ en (2.30), así un término puede ser eliminado de la integral, y ahora intégrese entre 0 y T, aplicando la monotonía de b con respecto a t. Finalmente, (2.33) se consigue fácilmente de (2.30) y las dos desigualdades previas, considerando diferentes casos para λ_1. $\square$

Ahora, bajo las condiciones del Teorema 2.12, podemos obtener el mismo tipo de estimaciones para la ecuación (2.28). Denotamos por (Y, Z) e (Y', Z') a las soluciones de (2.28) para los datos (X, ξ) y (X', ξ') respectivamente. Como antes, aplicando la fórmula de Itô a $\exp\{-\lambda s - \lambda'(s - t)\}|\Delta Y|^2$ con λ y λ' valores reales (cualesquiera en principio), de las hipótesis (iv') y (v'), de desigualdades estándar, y usando constantes positivas arbitrarias C_i, $i = 3$, 4, deducimos

$$\begin{aligned}
&\exp(-\lambda t)E|\Delta Y_t|^2 + (1 - L_{f_z}C_4)E\int_t^T \exp\{-\lambda s - \lambda'(s-t)\}\|\Delta Z\|^2 ds \\
&-(\lambda + \lambda' + L_{f_x}C_3^{-1} + L_{f_z}C_4^{-1} + 2L_{f_y})E\int_t^T \exp\{-\lambda s - \lambda'(s-t)\}|\Delta Y|^2 ds \\
\le\ & L_h^2 \exp\{-\lambda T - \lambda'(T-t)\}E|\xi - \xi'|^2 + L_{f_x}C_3 E\int_t^T \exp\{-\lambda s - \lambda'(s-t)\}|\Delta X|^2 ds.
\end{aligned}$$

De la última expresión, y de forma análoga a la prueba del Lema 2.16, podemos obtener el siguiente resultado:

Lema 2.17. *Supongamos las hipótesis* (ii')-(v'), *y sean* (X, ξ) *y* (X', ξ') *elementos dados en el espacio* $M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \bar{\mathcal{O}}) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \bar{\mathcal{O}})$. *Denotamos por* (Y, Z) *e* (Y', Z') *las soluciones a* (2.28) *asociadas a* (X, ξ) *y* (X', ξ') *respectivamente. Entonces, para todo para de constantes positivas* C_i, $i = 3, 4$, *con* $1 - L_{f_z}C_4 \in (0, 1)$, *se tienen las siguientes desigualdades:*

$$\|\Delta Y\|^2_\lambda \le B(\lambda_2, T)\left(L_h^2 \exp(-\lambda T)E|\xi - \xi'|^2 + L_{f_x}C_3\|\Delta X\|^2_\lambda\right), \tag{2.34}$$

$$\|\Delta Z\|^2_\lambda \le A(\lambda_2, T)(1 - L_{f_z}C_4)^{-1}\left(L_h^2 \exp(-\lambda T)E|\xi - \xi'|^2 + L_{f_x}C_3\|\Delta X\|^2_\lambda\right), \tag{2.35}$$

donde

$$\lambda_2 = -\lambda - 2L_{f_y} - L_{f_x}C_3^{-1} - L_{f_z}C_4^{-1}. \tag{2.36}$$

Si combinamos los dos lemas anteriores, en los dos posibles órdenes de actuación, obtenemos estimaciones para las aplicaciones Γ_1 y Γ_2 :

$$\begin{aligned}\|\Delta\bar{Y}\|_\lambda^2 + \|\Delta\bar{Z}\|_\lambda^2 &\leq \left(L_h^2 A(\lambda - k_4, T) + L_{f_x} C_3 B(\lambda - k_4, T)\right) \\ &\quad \times \left(B(\lambda_2, T) + A(\lambda_2, T)\alpha^{-1}\right)\left(k_5\|\Delta Y\|_\lambda^2 + k_6\|\Delta Z\|_\lambda^2\right) \qquad (2.37)\end{aligned}$$

para Γ_1, y

$$\exp(-\lambda T)E|\Delta\bar{X}_T|^2 + \lambda_1\|\Delta\bar{X}\|_\lambda^2 \leq \mu(\alpha, T)\left(L_h^2 e^{-\lambda T} E|\xi - \xi'|^2 + L_{f_x} C_3\|\Delta X\|_\lambda^2\right) \qquad (2.38)$$

para Γ_2, donde denotamos

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - L_{f_x} C_4, \\ \mu(\alpha, t) &= B(\lambda_2, t)k_5 + A(\lambda_2, t)\alpha^{-1}k_6.\end{aligned}$$

Consecuentemente, usando (2.37), uno puede buscar un valor para $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, con la norma en $M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R}^{n\times m})$ definida por

$$\|(Y, Z)\|_\lambda^2 = \|Y\|_\lambda^2 + \|Z\|_\lambda^2,$$

la aplicación Γ_1 sea una contracción.

Análogamente, usando (2.38), uno puede intentar buscar un $\lambda > k_4$ tal que, con la métrica en $M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \bar{\mathcal{O}}) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \bar{\mathcal{O}})$ inducida por la norma de $M^2_{\mathcal{F}_t}(0, T; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}_T; \mathbb{R}^d)$ dada por

$$\|(X, \xi)\|_\lambda^2 = \exp(-\lambda T)E|\xi|^2 + \lambda_1\|X\|_\lambda^2,$$

la aplicación Γ_2 sea una contracción.

Entonces, con cualquiera de ambas opciones, uno obtiene fácilmente resultados de existencia y unicidad para (2.23)-(2.25) que generalizan al caso de b disipativo y $\mathcal{O}$ no necesariamente convexo algunos de los resultados que aparecen en Pardoux & Tang [133] y en Ma & Cvitanić [105].

Por ejemplo, y como era deseable y previsible, se obtiene existencia y unicidad para el problema cuando el acoplamiento de (2.23)-(2.25) es débil, esto es, cuando la dependencia de b y σ respecto de sus variables y y z es pequeña, o, análogamente para la ecuación retrógrada, cuando la dependencia de f y h con respecto a x es pequeña. Más exactamente, se tiene:

Teorema 2.18. *Bajo las condiciones* (i')-(v'), *existe una constante* $\varepsilon_0 > 0$ *dependiente de* L_{σ_x}, L_{b_x}, L_{f_x}, L_{f_y}, L_{f_z}, L_h *y* T *tal que si* L_{b_y}, L_{b_z}, L_{σ_y}, $L_{\sigma_z} \in [0, \varepsilon_0)$, *entonces existe* λ *tal que* Γ_1 *es una contracción, y por tanto existe una única solución a* (2.23)-(2.25). *Por otro lado, la misma conclusión es válida para* Γ_2, *cambiando los papeles de* L_{b_y}, L_{b_z}, L_{σ_y}, *y* L_{σ_z}, *con* L_h *y* L_{f_x}.

Nota 2.19. De la positividad de B, y por ser $A \geq 1$ y las constantes fijas (sin C_i) que aparecen en las expresiones de k_5 y k_6, condiciones de compatibilidad necesarias para definir contracciones en los esquemas Γ_1 y Γ_2 son respectivamente

$$L_h^2 k_1^{-1}(L_{\sigma_y}^2 \vee L_{\sigma_z}^2) < 1$$

y

$$L_h^2 k_1^{-1} L_{\sigma_z}^2 < 1.$$

A la luz de ambas desigualdades, el esquema generado por Γ_2 es mejor, y en el que nos concentramos.

Usando por tanto Γ_2, y razonando como en Ma & Cvitanić [105] o en Ma & Yong [107], uno puede probar el siguiente resultado:

Teorema 2.20. *Supongamos las hipótesis* (i')-(v'), *y que una de las siguientes condiciones se satisface:*

(a) *Si h es independiente de x, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $\mu(\alpha,T)L_{f_x}C_3 < \lambda_1$.*

(b) *Si h depende de x, existe $\alpha \in (k_1 L_{\sigma_z}^2 L_h^2, 1)$ tal que $\mu(\alpha,T)L_h^2 < 1$.*

Entonces, existe una única solución para (2.23)-(2.25).

Demostración. Es inmediato a partir de las estimaciones obtenidas anteriormente, concluir que existen contracciones para las dos hipótesis señaladas: cuando (a) es cierta, (H2) se verifica trivialmente, y poniendo $C_4 = (1-\alpha)/L_{f_z}$, deducimos

$$\|\Delta\bar{X}\|_\lambda^2 \leq \frac{\mu(\alpha,T)L_{f_x}C_3}{\lambda_1}\|\Delta X\|_\lambda^2.$$

Para el caso (b), si $\alpha \in (L_{\sigma_z}^2 L_h^2/k_1, 1)$, entonces se tiene (H2), y usando un valor $\lambda \geq L_{f_x}C_3/L_h^2 + k_4$ se tiene la siguiente contracción:

$$e^{-\lambda T}E|\Delta\bar{X}_T|^2 + \frac{L_{f_x}C_3}{L_h^2}\|\Delta\bar{X}\|_\lambda^2 \leq \mu(\alpha,T)L_h^2\left(e^{-\lambda T}E|\Delta X_T|^2 + \frac{L_{f_x}C_3}{L_h^2}\|\Delta X\|_\lambda^2\right).$$

□

Usando la estimación (2.38) para Γ_2, y razonando como en Ma & Yong [107], es fácil obtener el siguiente

Teorema 2.21. *Bajo las condiciones* (i')-(v') *y la condición de compatibilidad $L_h^2 k_1 L_{\sigma_z}^2 < 1$ se tiene:*

(1) *existe $T_0 > 0$ tal que si $T \leq T_0$, el problema* (2.23)-(2.25) *tiene una única solución (obsérvese que esto generaliza el resultado dado en el Teorema 2.13, pues ahora σ puede depender de z, pero por contra hemos de introducir condiciones de compatibilidad extras).*

(2) *si L_{f_y} es suficientemente negativo, entonces* (2.23)-(2.25) *tiene una única solución para todo tiempo final $T > 0$.*

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia del Teorema 2.20 teniendo en cuenta la continuidad de A y B respecto su segunda variable y por el valor que tienen en $t = 0$, considerando un valor adecuado (suficientemente grande) para λ.

Para probar el segundo caso, el detalle a tener en cuenta es que si λ_1 y λ_2 son ambos positivos, entonces las cotas que aparecen "son" independientes del tiempo, esto es

$$A(\lambda_2,t) = 1 \qquad \text{y} \qquad B(\lambda_2,t) \leq \frac{1}{\lambda_2}, \tag{2.39}$$

y por tanto, por (2.39), la definición de $\mu(\alpha,T)$, (a) y (b), basta elegir parámetros adecuados tal que λ_1 y λ_2 sean positivos y

$$\frac{L_{b_y}C_1 + L_{\sigma_y}^2 + k_3 L_{\sigma_y}C_1}{\lambda_2 k_1} + \frac{L_{b_z}C_2 + L_{\sigma_z}^2 + k_3 L_{\sigma_z}C_2}{\alpha k_1} < \frac{\lambda_1}{L_{f_x}C_3} \tag{2.40}$$

para tener (a), y para conseguir (b):

$$\frac{L_{b_y}C_1 + L^2_{\sigma_y} + k_3L_{\sigma_y}C_1}{\lambda_2 k_1} + \frac{L_{b_z}C_2 + L^2_{\sigma_z} + k_3L_{\sigma_z}C_2}{\alpha k_1} < \frac{1}{L^2_h}. \tag{2.41}$$

A primera vista, parece contradictorio tener a la vez que λ_1 y λ_2 sean positivos, ya que contienen el valor λ pero con diferente signo, pero la libertad de elección de las constantes C_i y el valor suficientemente negativo para L_{f_y} resuelven el problema: las desigualdades (2.40) y (2.41) se tienen tomando C_1 y C_2 suficientemente pequeños y $\lambda \geq k_4 = \mathrm{O}(C_1^{-1} + C_2^{-1})$ (que así es grande) implica $\lambda_1 > 0$, y entonces un valor conveniente para L_{f_y} tal que $\lambda_2 > 0$ también se tenga.

Por último, para compensar la generalidad de los coeficientes C_i, señalamos los problemas (para ambos casos) de óptimos asociados para tomar el valor menos restrictivo posible en L_{f_y} y que aún sea posible obtener (2.40) y (2.41). Estos dos problemas se obtienen de transformaciones aritméticas sobre las desigualdades deseadas (2.40) y (2.41), usando la relación que hay entre λ_1 y λ_2, C_4 y α, el valor mínimo de λ en la prueba de la segunda parte del Teorema 2.20, y la eliminación del término $-2L_{f_y}$ en los cálculos. Exactamente, L_{f_y} debe ser menor que $-\Lambda/2$ donde Λ es la solución de

$$\min_{\alpha,\lambda_1,C_i,i=1,2,3} F(C_1,C_2,C_3,\alpha,\lambda_1)$$

restringido a $\alpha \in (0,1)$, $\lambda_1 > 0$, $C_i > 0$ y

$$k_1\alpha\lambda_1 > L_{f_x}C_3(L_{b_z}C_2 + L^2_{\sigma_z} + k_3L_{\sigma_z}C_2),$$

donde

$$\begin{aligned} F(C_1,C_2,C_3,\alpha,\lambda_1) = & \frac{(L_{b_y}C_1 + L^2_{\sigma_y} + k_3L_{\sigma_y}C_1)\alpha}{k_1\alpha\lambda_1 L_{f_x}^{-1}C_3^{-1} - (L_{b_z}C_2 + L^2_{\sigma_z} + k_3L_{\sigma_z}C_2)} + \lambda_1 \\ & + k_1^{-1}\big(k_2 + 2L_{b_x} + L_{b_y}C_1^{-1} + L_{b_z}C_2^{-1} + L^2_{\sigma_x} + 2k_3L_{\sigma_x} \\ & + k_3L_{\sigma_y}C_1^{-1} + k_3L_{\sigma_z}C_2^{-1}\big) + L_{f_x}C_3^{-1} + L^2_{f_z}/(1-\alpha) \end{aligned}$$

para la desigualdad (2.40) y para (2.41):

$$\min_{\alpha,C_i,i=1,2,3} F(C_1,C_2,C_3,\alpha)$$

restringido a $\alpha \in (L^2_{\sigma_z}L^2_h k_1^{-1}, 1)$, $C_i > 0$ y

$$k_1\alpha > L^2_h(L_{b_z}C_2 + L^2_{\sigma_z} + k_3L_{\sigma_z}C_2),$$

donde

$$\begin{aligned} F(C_1,C_2,C_3,\alpha) = & \frac{(L_{b_y}C_1 + L^2_{\sigma_y} + k_3L_{\sigma_y}C_1)\alpha}{k_1\alpha L_h^{-2} - (L_{b_z}C_2 + L^2_{\sigma_z} + k_3L_{\sigma_z}C_2)} + \frac{L_{f_x}C_3}{L^2_h} \\ & + k_1^{-1}\big(k_2 + 2L_{b_x} + L_{b_y}C_1^{-1} + L_{b_z}C_2^{-1} + L^2_{\sigma_x} + 2k_3L_{\sigma_x} \\ & + k_3L_{\sigma_y}C_1^{-1} + k_3L_{\sigma_z}C_2^{-1}\big) + L_{f_x}C_3^{-1} + L^2_f/(1-\alpha). \end{aligned}$$

□

2.3.2 Relación con un sistema de EDP

Como en Pardoux & Tang [133], y en Ma & Cvitanić [105], con los resultados previos para el problema (2.23)-(2.25), uno puede probar varias relaciones del problema anterior con un problema determinista con condición en la frontera de tipo Neumann homogéneo asociado a un sistema de EDP parabólico quasi lineal.

Para cada $(t,x) \in [0,T] \times \bar{\mathcal{O}}$, considérese el problema

$$\begin{aligned}
X_s^{t,x} &= x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dW_r - k_s^{t,x}, \\
Y_s^{t,x} &= h(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr - \int_s^T Z_r^{t,x}\, dW_r, \\
k_s^{t,x} &= -\int_t^s \nabla\phi(X_r^{t,x})\, d|k^{t,x}|_r, \quad |k^{t,x}|_s = \int_t^s 1_{\{X_r^{t,x} \in \partial\mathcal{O}\}}\, d|k^{t,x}|_r, \quad s \in [t,T].
\end{aligned}$$

Es inmediato extender a esta familia de problemas los teoremas previos sobre existencia y unicidad de solución para el problema (2.23)-(2.25) e igualmente fácil ver que la variable aleatoria $Y_t^{t,x}$ es casi seguro constante, valor que definimos como $u(t,x)$ (cf. [112, Cap. 5]).

Más aún, podemos extraer la misma consecuencia si también consideramos ξ, una variable aleatoria con valores en $\bar{\mathcal{O}}$ y $\mathcal{F}_t$-medible, en lugar de x en los problemas anteriores. Esos problemas se relacionan, teniendo en cuenta la unicidad de solución para cada $(P^{t,\xi})$, al siguiente resultado:

Proposición 2.22. *Sean $(X_s^{t,\xi},\ Y_s^{t,\xi},\ Z_s^{t,\xi})_{s\in[t,T]}$ las tres primeras componentes de la solución del problema $(P^{t,\xi})$ planteado arriba. Entonces, para cualquier $h > 0$ se tienen las siguientes igualdades para todo $s \geq t+h$:*

$$X_s^{t+h, X_{t+h}^{t,x}} = X_s^{t,x}, \quad Y_s^{t+h, X_{t+h}^{t,x}} = Y_s^{t,x} \quad y \quad Z_s^{t+h, X_{t+h}^{t,x}} = Z_s^{t,x}.$$

Demostración. Basta ver que $(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})$ y un cuarto proceso adecuadamente elegido (con las propiedades pedidas a $|k|$) es solución de $(P^{t+h, X_{t+h}^{t,x}})$, así el resultado quedará probado por la unicidad de solución para el problema. Pero esto es inmediato con $(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, K_s^{t,x} - K_{t+h}^{t,x})_{s\in[t+h,T]}$. □

Estas igualdades nos proporcionan la siguiente:

$$Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x}), \tag{2.42}$$

que será utilizada más adelante.

Para establecer la relación con el sistema de EDP, asumimos ahora adicionalmente que b, σ, f y h son deterministas, es más, suponemos que σ no depende de z. Además, aunque esto último sólo por simplicidad notacional, supondremos que la dimensión es $n = 1$.

Por brevedad, introducimos la siguiente notación:

$$(L\varphi)(s,x,y,z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^*)_{ij}(s,x,y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(s,x) + (b(s,x,y,z), \nabla\varphi(s,x)),$$

y consideramos el problema de Neumann homogéneo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (Lu)(t,x,u(t,x),(\nabla u(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x))) \\
&\quad + f(t,x,u(t,x),(\nabla u(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x))) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathcal{O}, \\
&\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\mathcal{O}, \\
&u(T,x) = h(x), \quad x \in \mathcal{O}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Damos un primer resultado, en sentido clásico:

Proposición 2.23. *Si* $v \in C^{1,2}([0,T] \times \bar{\mathcal{O}}; \mathbb{R}^d)$ *es una solución de* (2.43), *entonces* $v(t,x) = u(t,x) = E(Y_t^{t,x})$.

Demostración. Considérese la siguiente versión estocástica del Problema de Skorokhod:

$$\begin{cases}
X_s = & x + \int_t^s b(r,X_r,v(r,X_r),\nabla v(r,X_r)\sigma(r,X_r,v(r,X_r)))\,dr \\
& + \int_t^s \sigma(r,X_r,v(r,X_r))\,dW_r + \int_t^s \nabla\phi(X_r)\,dK_r, \\
K_s = & \int_t^s 1_{\{X_r \in \partial\mathcal{O}\}}\,dK_r.
\end{cases}$$

Por las hipótesis que se tienen sobre b y σ y la regularidad de v, es fácil ver que estamos en las condiciones del Teorema 3.1 en [103] con

$$\tilde{b}(t,x) = b(t,x,v(t,x),\nabla v(t,x)\sigma(t,x,v(t,x))) \quad \text{y} \quad \tilde{\sigma}(t,x) = \sigma(t,x,v(t,x)).$$

Así, existe una única solución que denotamos $(X^{t,x}, K^{t,x})$. Planteamos la siguiente ecuación estocástica retrógrada

$$Y_s = h(X_T) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r, Z_r)\,dr - \int_s^T Z_r\,dW_r, \quad s \in [t,T], \tag{2.44}$$

y denotamos por $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$ a su única solución.

La Fórmula de Itô aplicada a los procesos $v_i(s, X_s^{t,x})$ para $i = 1,\dots,k$, deducimos que $v(s, X_s^{t,x})$ es solución (2.44). Por tanto, de la unicidad para (2.44), tenemos que

$$Y_s^{t,x} = v(s, X_s^{t,x}) \qquad \forall s \in [t,T] \quad P-c.\ s.$$

De hecho, hemos visto que $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x}, K^{t,x})$ es solución de $(P^{t,x})$, de donde se sigue el resultado. □

Recordamos ahora la noción de solución de viscosidad para el problema (2.43).

Definición 2.24. *Una función* $u \in C\left([0,T] \times \bar{\mathcal{O}}\right)$ *se dice una* sub-solución de viscosidad (*resp.* super-solución) *de* (2.43) *si* $u(T,x) \le h(x)$, $x \in \bar{\mathcal{O}}$ (*resp.* $u(T,x) \ge h(x)$, $x \in \bar{\mathcal{O}}$) *y si, siempre que* $\varphi \in C^{1,2}([0,T) \times \bar{\mathcal{O}})$ *y* $(t,x) \in [0,T) \times \bar{\mathcal{O}}$ *sea un mínimo local* (*resp. máximo*) *de* $\varphi - u$, *entonces se tiene*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + (L\varphi)(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x)))$$

$$+ f(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x))) \ge 0 \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{O}, \qquad \text{y}$$

$$\max\Big\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+(L\varphi)(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x)))$$
$$+f(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x))),\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}(t,x)\Big\}\geq 0,\quad \text{si}\quad x\in\partial\mathcal{O}.$$

(*resp.*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+(L\varphi)(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x)))$$
$$+f(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x)))\leq 0\quad \text{si}\quad x\in\mathcal{O},\qquad \text{y}$$
$$\min\Big\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+(L\varphi)(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x)))$$
$$+f(t,x,u(t,x),(\nabla\varphi(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x))),\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}(t,x)\Big\}\leq 0,\quad \text{si}\quad x\in\partial\mathcal{O}.$$

Finalmente, u se dice solución de viscosidad *de* (2.43) *si es sub- y super-solución de viscosidad.*

Entonces, tenemos por ejemplo el siguiente resultado, que puede ser probado como el Teorema 3.8 en Ma & Cvitanić [105].

Teorema 2.25. *Bajo las hipótesis del Teorema* 2.20*, supongamos además que $n=1$. Si se tiene que b, σ, f y h son funciones deterministas, continuas en todas sus variables, y σ no depende de z. Entonces, la función u definida por $u(t,x)=Y_t^{x,t}$, $(t,x)\in[0,T]\times\bar{\mathcal{O}}$, es solución de viscosidad de* (2.43).

Demostración. La comprobación de que u es continua es análoga al caso lipschitziano (cf. [107, Cap. 7, Teor. 3.7]), y la omitimos por brevedad. Resta comprobar que es subsolución y supersolución de viscosidad. Que $u(T,x)=h(x)$ es claro. Y con respecto a las pruebas de las desigualdades, como son similares, sólo hacemos el primer caso.

Supongamos por contradicción, que $\varphi\in C^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R})$ es tal que en (t,x) hay un mínimo local de $\varphi-u$ (que sin pérdida de generalidad podemos suponer igual a cero). Dividimos la prueba en dos partes.

Primero consideramos el caso $x\in\mathcal{O}$, entonces existe una constante $\epsilon\in(0,T-t)$ tal que para $s\in[t,t+\epsilon]$ y y con $|x-y|\leq\epsilon$:

$$u(s,y)\leq\varphi(s,y),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,y)+(L\varphi)(s,y,u(s,y),\nabla\varphi(s,y)\sigma(s,y,u(s,y)))$$
$$+f(s,y,u(s,y),\nabla\varphi(s,y)\sigma(s,y,u(s,y)))<0.$$

Usando el tiempo de parada

$$\tau=\inf\{s>t:|X_s^{t,x}-x|\geq\epsilon\}\wedge(t+\epsilon),$$

y gracias a la ecuación verificada por $(Y^{t,x},Z^{t,x})$, es fácil ver que

$$(\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)=(Y_{s\wedge\tau}^{t,x},1_{[t,\tau]}(s)Z_s^{t,x})$$

satisface la ecuación retrógrada

$$\bar{Y}_s=u(\tau,X_\tau^{t,x})+\int_{s\wedge\tau}^{\tau}f(r,X_r^{t,x},u(r,X_r^{t,x}),\bar{Z}_r)dr-\int_s^{t+\epsilon}\bar{Z}_rdW_r$$

Por otro lado, no es difícil comprobar usando la Fórmula de Itô (y teniendo en cuenta que X no alcanza la frontera) que el par

$$(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s) = (\varphi(s \wedge \tau, X^{t,x}_{s\wedge\tau}), 1_{[t,\tau]}(s)\nabla\varphi(s, X^{t,x}_s)\sigma(s, X^{t,x}_s, u(s, X^{t,x}_s)))$$

resuelve

$$\hat{Y}_s = \varphi(\tau, X^{t,x}_\tau) - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} (\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r, X^{t,x}_r) + (L\varphi)(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r), \bar{Z}_r)))dr - \int_s^{t+\epsilon} \hat{Z}_r dW_r.$$

Queremos obtener una fórmula para la diferencia de estos procesos que nos llevará a una contradicción. Para ello, consideramos

$$\hat{\beta}(r) = -(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r, X^{t,x}_r) + (L\varphi)(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r), \hat{Z}_r) + f(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r), \hat{Z}_r)),$$
$$\bar{\beta}(r) = -(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r, X^{t,x}_r) + (L\varphi)(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r), \bar{Z}_r) + f(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r), \bar{Z}_r)).$$

El detalle técnico del cálculo que sigue es que el proceso diferencia está asociado con $\bar{\beta}$, sin embargo, el signo "bueno" lo tiene $\hat{\beta}$. Denotamos $Z^{(i)}_t$ el vector m-dimensional cuyas i primeras componentes son iguales a las mismas de $\hat{Z}$, y cuyas $m-i$ últimas componentes son iguales a las últimas de $\bar{Z}$. Definimos

$$\gamma^i(t) = \begin{cases} (\bar{Z}^i_t - \hat{Z}^i_t)^{-1}(\phi(Z^{(i)}_t) - \phi(Z^{(i-1)}_t)) & \text{si} \quad \bar{Z}^i_t \neq \hat{Z}^i_t, \\ 0 & \text{si} \quad \bar{Z}^i_t = \hat{Z}^i_t, \end{cases}$$

donde

$$\phi(Z) = f(s, X^{t,x}_s, u(s, X^{t,x}_s), Z) + \langle b(s, X^{t,x}_s, u(s, X^{t,x}_s, Z)), \nabla\varphi(s, X^{t,x}_s)\rangle.$$

Así, obtenemos

$$\bar{\beta}(r) - \hat{\beta}(r) = \langle\gamma(r), \hat{Z}_r - \bar{Z}_r\rangle.$$

Ahora consideramos $(\tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s) = (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s, \hat{Z}_s - \bar{Z}_r)$, de donde tenemos

$$\tilde{Y}_s = \varphi(\tau, X^{t,x}_\tau) - u(\tau, X^{t,x}_\tau) + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} (\hat{\beta}(r) + \langle\gamma(r), \tilde{Z}_r\rangle)dr - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} \tilde{Z}_r dW_r.$$

Usando ahora el proceso

$$\Gamma_{s,s'} = \exp\left(\int_s^{s'} \langle\gamma(r), dW_r\rangle - \frac{1}{2}\int_s^{s'} |\gamma(r)|^2 dr\right) \tag{2.45}$$

y aplicando la Fórmula de Itô aplicada al proceso $\{\Gamma_{s,s'}\tilde{Y}_{s'}\}_{s'\geq s}$ con $t \leq s \leq s' \leq t+\epsilon$, queda:

$$\tilde{Y}_s = \Gamma(s,s')\tilde{Y}_{s'} + \int_s^{s'} \Gamma_{s,r}1_{[t,\tau]}(r)\hat{\beta}dr - \int_s^{s'} \left(\tilde{Y}_r\gamma(r) + 1_{[t,\tau]}(r)\tilde{Z}_r\right) dW_r. \tag{2.46}$$

Ponemos $s = t$ y $t = \tau$ en la expresión anterior y tomamos esperanza condicionada con respecto a $\mathcal{F}_t$ obteniendo:

$$\tilde{Y}_t = E\left(\Gamma(t,\tau)\tilde{Y}_\tau + \int_t^{\tau} \Gamma_{t,r}\hat{\beta}(r)dr|\mathcal{F}_t\right), \tag{2.47}$$

donde todos los elementos que aparecen en la derecha son positivos por hipótesis, y por tanto también lo es su esperanza condicionada. Esto implica que $\tilde{Y}_t = \varphi(t,x) - u(t,x) > 0$ que es contradictorio.

Ahora para acabar analizamos el segundo caso: supongamos $x \in \partial\mathcal{O}$ y por reducción al absurdo, supongamos también que

$$\begin{aligned}&\text{mín}\,(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) - L\varphi(t,x,u(t,x),\nabla\varphi(t,x)\sigma(t,x,u(t,x)))\\ &-f(t,x,u(t,x),\nabla\varphi(t,x)\sigma(t,x,u(t,x))),\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}(t,x)) > 0.\end{aligned}$$

Sea $\epsilon \in (0, T-t)$ tal que para todo $s \in [t, t+\epsilon]$ y $y \in B(x,\epsilon) \cap \bar{\mathcal{O}}$:

$$\begin{aligned}&u(s,y) \le \varphi(s,y),\\ &\text{máx}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,y) + (L\varphi)(s,y,u(s,y),\nabla\varphi(s,y)\sigma(s,y,u(s,y)))\\ &+f(s,y,u(s,y),\nabla\varphi(s,y)\sigma(s,y,u(s,y))), -\frac{\partial\varphi}{\partial n}(s,y)\Big) < 0.\end{aligned}$$

Con los mismos argumentos que en el caso anterior, tenemos que

$$(\bar{Y}_s, \bar{Z}_s) = (Y^{t,x}_{s\wedge\tau}, 1_{[t,\tau]}(s)Z^{t,x}_s)$$

satisface la ecuación retrógrada

$$\bar{Y}_s = u(\tau, X^{t,x}_\tau) + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} f(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r), \bar{Z}_r)dr - \int_s^{t+\epsilon} \bar{Z}_r dW_r,$$

y de la Fórmula de Itô (ahora sí aparece la integral respecto dK) se deduce que

$$(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s) = (\varphi(s\wedge\tau, X^{t,x}_{s\wedge\tau}), 1_{[t,\tau]}(s)\nabla\varphi(s, X^{t,x}_s)\sigma(s, X^{t,x}_s, u(s, X^{t,x}_s)))$$

es solución de

$$\begin{aligned}\hat{Y}_s =&\varphi(\tau, X^{t,x}_\tau) - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} (\frac{\partial\varphi}{\partial t}(r, X^{t,x}_r) + (L\varphi)(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r, u(r, X^{t,x}_r), \bar{Z}_r)))dr\\ &+\int_s^{t+\epsilon} 1_{[t,\tau]}(r)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(r, X^{t,x}_r)dK^{t,x}_r - \int_s^{t+\epsilon} \hat{Z}_r dW_r.\end{aligned}$$

Considerando de nuevo $(\tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s) = (\hat{Y}_s - \bar{Y}_s, \hat{Z}_s - \bar{Z}_r)$ y el proceso $\Gamma_{s,s'}$ dado por (2.45), se tiene que

$$\tilde{Y}_t = E\left[\left(\Gamma(t,\tau)\tilde{Y}_\tau + \int_t^\tau \Gamma_{t,r}\hat{\beta}(r)dr - \int_t^\tau \Gamma_{t,r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(r, X^{t,x}_r)dK^{t,x}_r\right)|\mathcal{F}_t\right],$$

de donde el resultado sigue como en la primera parte. □

Nota 2.26. Supongamos en cambio que la dimensión $n > 1$. Entonces, si b no depende de z y f_i sólo depende de la i-ésima fila la matriz z, el resultado anterior puede ser extendido (con el apropiado cambio en la definición de solución de viscosidad, véase e. g. Pardoux & Zhang [134]) obteniendo un resultado análogo para el sistema

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_l}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_j}(t,x) + \langle b(t,x,u(t,x)), \nabla u_l(t,x)\rangle\\ &+f_l(t,x,u(t,x),(\nabla u_l(t,x))^*\sigma(t,x,u(t,x))) = 0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{O},\\ &\frac{\partial u_l}{\partial n}(t,x) = 0, \qquad x \in (0,T)\times\partial\mathcal{O}, \quad l = 1,\dots,n,\\ &u(T,x) = h(x), \qquad x\in\mathcal{O}.\end{aligned}$$

2.3.3 Ecuaciones estocásticas con reflexión y términos de retardo

Es frecuente en todas las áreas de la ciencia encontrarse con fenómenos no locales, donde la transmisión no es instantánea o existen efectos de memoria que influyen en el estado presente (e.g. cf. [48,108]). La matematización de dichas ecuaciones está bien desarrollada, esencialmente a partir de los trabajos de Hale [69–71] en el caso determinista y univaluado, por Mohammed [120] en el caso estocástico, así como su estudio asintótico (cf. [28, 61]). El caso determinista multivaluado será tratado en el Capítulo 6; en este parágrafo nos encargamos de una versión estocástica con retardo de los procesos de reflexión.

El fenómeno con reflexión aparece en problemas de localización (radares, medios aleatorios), así como en otras aplicaciones de ingeniería, aunque hasta ahora parece haber sido tratado esencialmente a través de modelos discretos y con procesos de Markov (e. g. Kouritzin & Long [96]).

Planteamiento del problema

Consideramos el mismo espacio de probabilidad (y filtración) dados hasta ahora $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ y en él definido un $\{\mathcal{F}_t\}$-movimiento Browniano m-dimensional $W(t)$. Asimismo, seguimos considerando el mismo abierto conexo y acotado $\mathcal{O}$ y dos constantes T y h positivas fijadas. Suponemos dadas aplicaciones uniformemente acotadas

$$b_i,\, \sigma_{ij} : \Omega \times [0,T] \times C([-h,0];\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad i = 1,\dots,d; j = 1,\dots,m$$

que verifican

(i) Para todo elemento $\xi \in C([-h,0];\mathbb{R}^d)$ con $\xi(0) \in \bar{\mathcal{O}}$, las aplicaciones $b_i(\cdot,\cdot,\xi)$ y $\sigma_{ij}(\cdot,\cdot,\xi)$ son procesos estocásticos $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medibles.

(ii) $P - c.\ s.\, \omega$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall \psi,\ \eta \in C([-h,0];\bar{\mathcal{O}})$ se tiene:

$$|b(t,\psi) - b(t,\eta)| \leq L_b \|\psi - \eta\|_{C([-h,0];\bar{\mathcal{O}})},$$
$$\|\sigma(t,\psi) - \sigma(t,\eta)\| \leq L_\sigma \|\psi - \eta\|_{C([-h,0];\bar{\mathcal{O}})}.$$

Notación 2.27. Por comodidad omitiremos la dependencia de ω en la formulación. Y haremos uso de la siguiente notación, habitual para problemas con retardo, dada una función (o proceso) $u : (-h,T) \to X$ (con X un espacio arbitrario), u_t representa **ahora** la función definida en $(-h,0)$ por $u_t(s) = u(t+s)$, $s \in (-h,0)$.

Dado $\xi : \Omega \times [-h,0] \to \mathbb{R}^d$ tal que para todo $t \in [-h,0]$ $\xi(t)$ es $\mathcal{F}_0$-medible y P-c. s. $\xi(\omega,\cdot) \in C([-h,0];\mathbb{R}^d)$ y $\xi(0) \in \bar{\mathcal{O}}$, el problema que se plantea es el siguiente ((P) por abreviar):

$$(P) \begin{cases} X(t) = \xi(t) \quad \text{si} \quad t \in [-h,0), \\ X(t) = \xi(0) + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW(s) - k(t), \\ |k|(t) = \int_0^t 1_{(X(s)\in\partial\mathcal{O})} d|k|(s), \quad k(t) = \int_0^t n(X(s))d|k|(s), \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Definición 2.28. *Una solución para (P) es una pareja de procesos (X,k), tal que*

- *X es $\{\mathcal{F}_t\}$-progresivamente medible y $X(t) \in \bar{\mathcal{O}}$ para todo $t \in [0,T]$,*
- *X es continuo en $[-h,T]$,*

- *k toma valores en $\mathbb{R}^d$, es continuo, $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado y tiene sus trayectorias de variación acotada en $[0,T]$.*

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.29. *Bajo las hipótesis anteriores, existe un único par de procesos (X, k) que son solución de (P).*

Demostración. Obsérvese que es equivalente tener una pareja de procesos (X, k) que sean solución del problema (P) y que dicha pareja verifique P-c. s. que sus trayectorias, $(X(\cdot)(\omega), k(\cdot)(\omega))$, son soluciones de los problemas de Skorokhod asociados a las tripletas

$$\left(\xi(\omega,0) + \int_0^t b(s, X_s(\omega))ds + \left(\int_0^t \sigma(s, X_s)dW(s)\right)(\omega), \mathcal{O}, n\right).$$

Por tanto, la existencia y unicidad de solución para (P) la probamos demostrando la existencia de un único punto fijo en el espacio métrico* cerrado

$$M = \{X : \Omega \times [-h,T] \to \mathbb{R}^d \,|\, X \,\text{continuo en}\, [-h,T],\ X_0 \equiv \xi,\ X|_{\Omega\times[0,T]} \in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\bar{\mathcal{O}}))\},$$

con la distancia entre X y $\tilde{X}$ inducida† por la norma $L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\bar{\mathcal{O}}))$, para la siguiente aplicación:

$$M \ni X \mapsto F(X) = Y \in M$$

donde Y viene dado por ξ para $\Omega \times [-h, 0]$ y por la solución (junto a k) trayectorialmente, i. e. ω a ω, del Problema de Skorokhod siguiente para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \xi(0) + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW(s) - k(t), \\ |k|(t) &= \int_0^t 1_{(Y(s)\in\partial\mathcal{O})}\, d|k|(s), \qquad k(t) = \int_0^t n(Y(s))d|k|_s. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dicha aplicación está bien definida (cf. Sección 2 en Lions & Sznitman [103]). Veamos que existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\|F(X) - F(X')\|^4_{L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([-h,T];\bar{\mathcal{O}}))} \leq C \int_0^T \|X - X'\|^4_{L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([-h,s];\bar{\mathcal{O}}))} ds, \tag{2.49}$$

con lo que el resultado seguirá, igual que en secciones anteriores, para una potencia de F, que tendrá un único punto fijo, por ende punto fijo único para F. Sean por tanto X y X' elementos de M, y denotamos $Y = F(X)$ e $Y' = F(X')$.

Aplicando la Fórmula de Itô a $\exp\{-C_0(\phi(Y(t)) + \phi(Y'(t)))\}|Y(t) - Y'(t)|^2$:

*Es trivialmente no vacío extendiendo a $[0,T]$ el valor de $\xi(\omega,0)$.

†El intervalo $[-h,0]$ es indiferente ya que ahí coinciden con ξ.

$$
\begin{aligned}
&\exp\{-C_0(\phi(Y(t)) + \phi(Y'(t)))\}|Y(t) - Y'(t)|^2 \\
= \ & 2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}(Y(s) - Y'(s))^*(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))dW(s) \\
&+2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}\langle Y(s) - Y'(s), b(s, X_s) - b(s, X'_s)\rangle ds \\
&-2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}\langle Y(s) - Y'(s), n(Y(s))\rangle d|k|(s) \\
&-2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}\langle Y(s) - Y'(s), n(Y'(s))\rangle d|k'|(s) \\
&+\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}\|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)\|^2 ds \\
&-C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}|Y(s) - Y'(s)|^2 \\
&\qquad \times((\nabla\phi(Y(s)))^*\sigma(s, X_s) + (\nabla\phi(Y'(s)))^*\sigma(s, X'_s))dW(s) \\
&-C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}|Y(s) - Y'(s)|^2 \\
&\qquad \times\Big[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big(D^2\phi(Y(s))(\sigma\sigma^*)(s, X_s) + D^2\phi(Y'(s))(\sigma\sigma^*)(s, X'_s)\big) \\
&\qquad\quad +\langle\nabla\phi(Y(s)), b(s, X_s)\rangle + \langle\nabla\phi(Y'(s)), b(s, X'_s)\rangle\Big]ds \\
&+C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}|Y(s) - Y'(s)|^2 \\
&\qquad \times\langle\nabla\phi(Y(s)), n(Y(s))\rangle d|k|(s) + \langle\nabla\phi(Y'(s)), n(Y'(s))\rangle d|k'|(s) \\
&+C_0^2/2\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}|Y(s) - Y'(s)|^2 \\
&\qquad \times|\sigma^*(s, X_s)\nabla\phi(Y(s)) + \sigma^*(s, X'_s)\nabla\phi(Y'(s))|^2 ds \\
&-2C_0\int_0^t \exp\{-C_0(\phi(Y(s)) + \phi(Y'(s)))\}(Y(s) - Y'(s))^*(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s)) \\
&\qquad \times(\sigma^*(s, X_s)\nabla\phi(Y(s)) + \sigma^*(s, X'_s)\nabla\phi(Y'(s)))ds.
\end{aligned}
$$

Los integrandos respecto de las variaciones totales $|k|(s)$ y $|k'|(s)$,

$$C_0\langle\nabla\phi(Y(s)), n(Y(s))\rangle|Y(s) - Y'(s)|^2 - \langle Y(s) - Y'(s), n(Y(s))\rangle,$$

y

$$C_0\langle\nabla\phi(Y'(s)), n(Y'(s))\rangle|Y(s) - Y'(s)|^2 - \langle Y'(s) - Y(s), n(Y'(s))\rangle,$$

respectivamente, son negativos y por tanto podemos mayorar eliminándolos. Tras ello, elevando al cuadrado y usando desigualdades básicas en la expresión anterior, nos proponemos tomar $E\sup_{0\le t\le \bar{t}}$ con $\bar{t} \le T$. Aplicando las Desigualdades de Doob y de Cauchy-Schwartz, las hipótesis dadas para b y σ, así como la acotación uniforme de ϕ, no es difícil concluir que

$$E\sup_{0\le t\le \bar{t}}|Y(t) - Y'(t)|^4 \le C\Big(\int_0^{\bar{t}} E\sup_{0\le u\le s}|X(u) - X'(u)|^4\, ds + \int_0^{\bar{t}} E\sup_{0\le u\le s}|Y(u) - Y'(u)|^4\, ds\Big),$$

donde C es una constante dependiente de C_0, $\mathcal{O}$, σ, b, ϕ y T. Usando Lema de Gronwall se deduce (2.49).

Por otro lado, iterando repetidas veces en la desigualdad obtenida se deduce

$$\|F^n(X) - F^n(X')\|^4_{L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([0,T];\mathbb{R}^d))} \leq \frac{(Tc)^n}{n!}\|X - X'\|^4_{L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;C([0,T];\mathbb{R}^d))}.$$

Tomando n suficientemente grande, F^n es contractiva y tiene un único punto fijo, que también es punto fijo de F y solución del problema. □

Nota 2.30. Si a las condiciones (i), (ii) dadas al principio del parágrafo, añadimos la siguiente condición:

(iii) Existen constantes positivas C_b y C_σ tales que P-c. s., para todo $t \in [0,T]$ y para todo par u, $v \in C([-h,T];\mathbb{R}^d)$, se tiene que

$$\int_0^t |b(s,u_s) - b(s,v_s)|^2 ds \leq C_b \int_{-h}^t |u(s) - v(s)|^2 ds,$$

$$\int_0^t |\sigma(s,u_s) - \sigma(s,v_s)|^2 ds \leq C_\sigma \int_{-h}^t |u(s) - v(s)|^2 ds,$$

la prueba anterior se extiende a cualquier dato inicial $\xi \in L^2(\Omega \times (-h,0);\mathbb{R}^d)$ que sea $\mathcal{F}_0$-medible. Ello es debido a que el funcional $G_b : u \in C([-h,T];\mathbb{R}^d) \mapsto b_u(\cdot) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^d)$ (ídem con G_σ) definido como $b_u(\cdot) = b(\cdot, u.)$ es medible y admite una única extensión por densidad a $\tilde{G}_b : L^2(-h,T;\mathbb{R}^d) \to L^2(0,T;\mathbb{R}^d)$, definiendo por tanto procesos progresivamente medibles.

En tal caso, el punto fijo (y solución del problema) hay que buscarlo en[‡]

$$\tilde{M}_{0,\xi} = \{X : \Omega \times [-h,T] \to \mathbb{R}^d \,|\, X_0 \equiv \xi,\, X|_{\Omega\times[0,T]} \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\bar{\mathcal{O}}))\},$$

modificando, por supuesto, el punto segundo en la definición de solución.

Corolario 2.31. *Bajo las hipótesis anteriores y la condición* (iii) *de la Nota* 2.30*, dados $t < T$ y un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$-medible $\xi \in L^2(\Omega; C([-h,0];\bar{\mathcal{O}}))$, existe un único par de procesos $(X^{t,\xi}, k^{t,\xi})$, con $X^{t,\xi} \in \tilde{M}_{t,\xi}$, y $k^{t,\xi} : [t,T] \to \mathbb{R}^d$ proceso continuo con todas sus componentes de variación acotada, y satisfaciendo ambos para todo $s \in [t,T]$:*

$$X(s) = \xi(0) + \int_t^s b(r,X_r)dr + \int_t^s \sigma(r,X_r)dW(r) + \int_t^s \nabla\phi(X(r))d|k|(r),$$

$$|k|(s) = \int_t^s 1_{(X(r)\in\partial\mathcal{O})} d|k|(r), \qquad k(s) = \int_t^s n(X(r))d|k|(r).$$

Nos centramos a partir de ahora en un proceso ξ trivial, el consistente en un valor constante $x \in \bar{\mathcal{O}}$ para todo par $(\omega,t) \in \Omega \times [-h,0]$. Damos a continuación un resultado análogo a la propiedad de semigrupo en sistemas dinámicos deterministas y que se usará más adelante. Para ello, nótese que por el corolario anterior, tiene sentido considerar el proceso $X^{s,X_s^{r,x}}(t)$ donde $t \geq s \geq r \geq 0$.

[‡]Recuérdese que $\mathcal{O}$ es acotado, con lo que es lo mismo considerar en lo que sigue $L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\bar{\mathcal{O}}))$ que $L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega; C([0,T];\bar{\mathcal{O}}))$.

Proposición 2.32. *Para todo $\rho > 0$, se tiene la siguiente igualdad:*

$$X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(s) = X^{t,x}(s), \quad \forall s \geq t+\rho-h. \tag{2.50}$$

Demostración. Recordamos que existe un único par de procesos, $(X^{t,x}(s), k^{t,x}(s))_s$, que verifican para todo $s \geq t$:

$$\begin{aligned} X^{t,x}(s) &= x + \int_t^s b(X_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})dW(r) + \int_t^s \nabla\phi(X^{t,x}(r))d|k^{t,x}|(r), \\ |k^{t,x}|(s) &= \int_t^s 1_{(X^{t,x}(r)\in\partial\mathcal{O})}d|k^{t,x}|(r), \qquad k^{t,x}(s) = \int_t^s n(X^{t,x}(r))d|k^{t,x}|(r). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Por otro lado, dados t y la variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible ξ con valores en $C([-h,0];\bar{\mathcal{O}})$, se tiene que existe un único par de procesos $\{(X^{t,\xi}(s), k^{t,\xi}(s))\}_{s\geq t}$ que verifican para todo $s \geq t$:

$$\begin{aligned} X^{t,\xi}(s) &= \xi + \int_t^s b(r, X_r^{t,\xi})dr + \int_t^s \sigma(r, X^{t,\xi}(r))dW(r) + \int_t^s \nabla\phi(X^{t,\xi}(r))d|k^{t,\xi}|(r), \\ |k^{t,\xi}|(s) &= \int_t^s 1_{(X^{t,\xi}(r)\in\partial\mathcal{O})}d|k^{t,\xi}|(r), \qquad k^{t,\xi}(s) = \int_t^s n(X^{t,\xi}(r))d|k^{t,\xi}|(r). \end{aligned}$$

Consideramos el problema anterior en tiempo inicial $t+\rho$ y con el proceso $\xi = X^{t,x}_{t+\rho}$. Entonces, el par de procesos

$$\{(X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(s), k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(s))\}_{s\geq t+\rho},$$

que verifican para todo $s \geq t+\rho$:

$$\begin{aligned} X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(s) =& X^{t,x}(t+\rho) + \int_{t+\rho}^s b(r, X_r^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}})dr + \int_{t+\rho}^s \sigma(r, X_r^{t,X^{t,x}_{t+\rho}})dW(r) \\ &+ \int_{t+\rho}^s \nabla\phi(X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(r))\, dK^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(r), \end{aligned}$$

$$|k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}|(s) = \int_{t+\rho}^s 1_{(X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(r)\in\partial\mathcal{O})} d|k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}|(r),$$

$$k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(s) = \int_{t+\rho}^s n(X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(r))d|k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}|(r).$$

Considerando (2.51) para $s = t+\rho$ y uniendo ambas ecuaciones, se tiene la siguiente igualdad para todo $s \geq t+\rho$:

$$\begin{aligned} X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(s) =& x + \int_t^{t+\rho} b(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^{t+\rho} \sigma(r, X_r^{t,x})dW(r) + \int_t^{t+\rho} \nabla\phi(X^{t,x}(r))d|k^{t,x}|(r) \\ &+ \int_{t+\rho}^s b(r, X_r^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}})dr + \int_{t+\rho}^s \sigma(r, X_r^{t,X^{t,x}_{t+\rho}})dW(r) \\ &+ \int_{t+\rho}^s \nabla\phi(X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(r))\, d|k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}|(r), \end{aligned}$$

$$|k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}|(s) = \int_{t+\rho}^s 1_{(X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(r)\in\partial\mathcal{O})} d|k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}|(r),$$

$$k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(s) = \int_{t+\rho}^s n(X^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}(r))d|k^{t+\rho,X^{t,x}_{t+\rho}}|(r).$$

Definimos ahora

$$\widehat{X}(s) = \begin{cases} X^{t,x}(s) & \text{si} \quad s \in [t-h, t+\rho] \\ X^{t+h, X^{t,x}_{t+h}}(s) & \text{si} \quad s \in [t+\rho, T] \end{cases}$$

y

$$\hat{k}(s) = \begin{cases} k^{t,x}(s) & \text{si} \quad s \in [t, t+\rho] \\ k^{t,x}(t+\rho) + k^{t+\rho, X^{t,x}(t+\rho)}(s) & \text{si} \quad s \in [t+\rho, T]. \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$|\hat{k}|(s) = \begin{cases} |k^{t,x}|(s) & \text{si} \quad s \in [t, t+\rho] \\ |k^{t,x}|(t+\rho) + |k^{t+\rho, X^{t,x}(t+\rho)}|(s) & \text{si} \quad s \in [t+\rho, T]. \end{cases}$$

Obsérvese que $\widehat{X}$ y $\hat{K}$ son procesos continuos, que $|\hat{k}|(s)$ es además creciente y se anula en $s = t$ y que las integrales de Stieltjes respecto $|k^{t+\rho, X^{t,x}_{t+\rho}}|(s)$ y $|k^{t,x}|(t+\rho) + |k^{t+\rho, X^{t,x}_{t+\rho}}|(s)$ son iguales. Por tanto, se concluye que

$$\widehat{X}(s) = x + \int_t^s b(r, \widehat{X}_r)dr + \int_t^s \sigma(r, \widehat{X}_r)dW(r) + \int_t^s \nabla\phi(\widehat{X}(r))d|\hat{k}|(r),$$
$$|\hat{k}|(s) = \int_t^{t\vee s} 1_{(\widehat{X}(r)\in\partial\mathcal{O})}d|\hat{k}|(r), \qquad \hat{k}(s) = \int_t^{t\vee s} n(\widehat{X}(r))d|\hat{k}|(r).$$

De la unicidad de solución para (2.51) se deduce (2.50). □

Estimaciones de continuidad en media

Se tiene el siguiente resultado de continuidad respecto a la variable x para los procesos $X^{\cdot}(t)$:

Proposición 2.33. *Para cada $T > 0$, existe una constante dependiente de C_0, $\mathcal{O}$, σ, b, ϕ y T tal que para todo par x, $x' \in \bar{\mathcal{O}}$ se tiene que*

$$E \sup_{-h\leq t\leq T} |X^x(t) - X^{x'}(t)|^4 \leq C|x - x'|^4.$$

Demostración. Si desarrollamos la expresión

$$\exp\{-C_0(\phi(X^x(t)) - \phi(X^{x'}(t)))\}|X^x(t) - X^{x'}(t)|^2$$

aplicando la Fórmula de Itô, igual que en la demostración del Teorema 2.29 se obtiene

$$E \sup_{-h\leq s\leq t} |X^x(s) - X^{x'}(s)|^4 \leq C\left(|x - x'|^4 + E\int_0^t \sup_{-h\leq r\leq s} |X^x(r) - X^{x'}(r)|^4 ds\right),$$

donde $C = C(C_0, \mathcal{O}, \sigma, b, \phi, T)$. Por el Lema de Gronwall se concluye la prueba. □

De forma totalmente análoga a la Proposición 2.33 se prueba el siguiente resultado:

Proposición 2.34. *Para cada $T > 0$ existe una constante dependiente de C_0, $\mathcal{O}$, σ, b, ϕ y T tal que para todo $t > 0$ y todo par ξ y ξ' de procesos $\mathcal{F}_t$-medibles con valores en $\bar{\mathcal{O}}$, se tiene que*

$$E \sup_{t-h\leq s\leq T} |X^{t,\xi}(s) - X^{t,\xi'}(s)|^4 \leq CE|\xi - \xi'|^4_{C([-h,0];\bar{\mathcal{O}})}.$$

Nota 2.35. El anterior resultado y la Proposición 2.32 permite extender la Proposición 2.34 al caso en que los procesos que se restan parten de tiempos distintos t y t'.

Usamos la idea anterior para demostrar:

Proposición 2.36. *Dado el par (t,x) y dada una sucesión $\{t_n, x_n\}_{n\geq 1}$ de $[0,T]\times\bar{O}$ convergiendo a (t,x), se tiene que*

$$E \sup_{-h\leq s\leq T} |X^{t_n,x_n}(s) - X^{t,x}(s)|^2 \to 0, \quad n\to\infty. \tag{2.52}$$

Nota 2.37. De la Proposición 2.36 se deduce que la aplicación

$$(s,t,x) \mapsto X^{t,x}(s)$$

es continua en media cuarta. En efecto, sea una tripleta (s,t,x) y una sucesión (s_n,t_n,x_n) convergiendo a ella, entonces

$$E\left(|X^{t_n,x_n}(s_n) - X^{t,x}(s)|^4\right) \leq 8E\left(|X^{t_n,x_n}(s_n) - X^{t,x}(s_n)|^4\right) + 8E\left(|X^{t,x}(s_n) - X^{t,x}(s)|^4\right)$$

El primer sumando tiende a cero por (2.52) y el segundo por el Teorema de Convergencia Dominada, dada la acotación uniforme del proceso $X^{t,x}(\cdot)$ y su carácter continuo.

Demostración de la Proposición 2.36. Podemos suponer que la sucesión $\{t_n\}$ es monótona, si no, tratamos separadamente las dos subsucesiones, creciente y decreciente a t. Ambos casos son similares, por lo que nos restringimos a probar uno de ellos. Supongamos que $t_n \nearrow t$. Para demostrar (2.52), teniendo en cuenta que si $s\in[0,t]$ es trivial que

$$E \sup_{-h\leq s\leq t} |X^{t_n,x_n}(s) - X^{t,x}(s)|^2 \to 0, \quad n\to\infty$$

usando el Teorema de Convergencia Dominada y las propiedades de los procesos $X^{t_n,x_n}(\cdot)$, basta probar entonces que

$$E \sup_{t-h\leq s\leq T} |X^{t_n,x_n}(s) - X^{t,x}(s)|^2 \to 0, \quad n\to\infty.$$

Para cada valor de n, de las Proposiciones 2.32 y 2.34,

$$E \sup_{t-h\leq s\leq T} |X^{t_n,x_n}(s) - X^{t,x}(s)|^4 = E \sup_{t-h\leq s\leq T} |X^{t,X_t^{t_n,x_n}}(s) - X^{t,x}(s)|^4 \leq C'E|X_t^{t_n,x_n} - x|^4,$$

pero es fácil ver, usando de nuevo el Teorema de Convergencia Dominada, que el término mayorante anterior tiende a cero cuando n tiende a infinito. □

Resultados análogos se obtienen para las variaciones totales de los procesos k:

Proposición 2.38. *Para cada $T>0$, existe una constante C, dependiente de C_0, $\mathcal{O}$, σ, b, ϕ y T tal que para todo par de puntos x y x' pertenecientes a $\bar{\mathcal{O}}$ se tiene que*

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} ||k^x|(t) - |k^{x'}|(t)|^4\right) \leq C|x-x'|^4. \tag{2.53}$$

Además, para todo $p\geq 1$, existe una constante $C_{k,p}$, dependiente de $\mathcal{O}$, σ, b, ϕ y p tal que para todo par $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\bar{\mathcal{O}}$, se cumple

$$E(|k^x|(t)^p) \leq C_{k,p}(1+t^p), \tag{2.54}$$

y para cada μ y t positivos, existe una constante $C_{k,\mu,t}$ dependiente de $\mathcal{O}$, σ, b, ϕ, μ y t tal que para todo $x\in\bar{\mathcal{O}}$ se tiene que

$$E(e^{\mu|k^x|(t)}) \leq C_{k,\mu,t}. \tag{2.55}$$

Demostración. Aplicando la Fórmula de Itô a $\phi(X^x)$ y a $\phi(X^{x'})$, con L el operador diferencial definido en la sección anterior,

$$\begin{aligned}|k^x|(t) - |k^{x'}|(t) =&\phi(X^x(t)) - \phi(X^{x'}(t)) - \int_0^t (L\phi(X_s^x) - L\phi(X_s^{x'}))ds \\ &- \int_0^t \Big((\nabla\phi(X^x(s)))^*\sigma(s,X_s^x) - (\nabla\phi(X^{x'}(s)))^*\sigma(s,X_s^{x'})\Big)\, dW(s).\end{aligned}$$

Tomamos la esperanza del supremo de las potencias cuartas en la expresión anterior.

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T}|K^x(t) - K^{x'}(t)|^4 \\ &\le C\Big(E\sup_{0\le t\le T}|\phi(X^x(t)) - \phi(X^{x'}(t))|^4 + E\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t (L\phi(X_s^x) - \phi(X_s^{x'}))ds\Big|^4 \\ &+E\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t \Big((\nabla\phi(X^x(s)))^*\sigma(s,X_s^x) - (\nabla\phi(X^{x'}(s)))^*\sigma(s,X_s^{x'})\Big)\, dW(s)\Big|^4\Big).\end{aligned}$$

De nuevo, usando las hipótesis sobre b y σ, sumando y restando cantidades convenientes, de la Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy y la Proposición 2.33 se deduce (2.53).

Para probar (2.54) basta usar la expresión de $\phi(X)$, la Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, y la acotación uniforme de ϕ y $L\phi$ en $\bar{\mathcal{O}}$.

Para finalizar, (2.55) se deduce de la expresión de $\phi(X)$, del Lema de Girsanov (cf. Karatzas & Shreve [87, p. 199]) y de la acotación uniforme de ϕ y L en $\bar{\mathcal{O}}$. □

Nota 2.39. La Proposición 2.38 se puede extender análogamente para estimar

$$E\left(\sup_{t\le s\le T}||k^{t,\xi}|(s) - |k^{t,\xi'}|(s)|^4\right).$$

Igualmente, se tienen estimaciones como las dadas en (2.54) y (2.55) para el proceso $\{|k^{t,\xi}|(s)\}_{s\ge t}$.

Parte II

Comportamiento Asintótico en algunos Sistemas Dinámicos

Capítulo 3

Un Estudio Comparativo de Dos Teorías para Semiflujos Multivaluados y su Comportamiento Asintótico

En este capítulo presentamos una comparación entre dos formas abstractas en que los semiflujos multivaluados (y así su comportamiento asintótico) pueden ser tratados. Comparamos la teoría desarrolladas por Ball [12] para tratar ecuaciones cuyas soluciones pueden no ser únicas, y la desarrollada por Melnik & Valero [118], propiamente creada para inclusiones diferenciales. A pesar de tratar diferentes problemas, rápidamente se ve que las principales ideas que usan son muy parecidas. Estudiamos aquí en detalle las relaciones que tienen, y señalamos algunas diferencias importantes que impiden técnicamente aplicar la teoría de Ball a inclusiones diferenciales generales.

3.1 Introducción

El concepto de atractor ha sido una herramienta extremadamente útil para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de una gran variedad de sistemas dinámicos: sistemas deterministas tanto en el caso autónomo (e. g. Babin & Vishik [10], Hale [68], Ladyzhenskaya [98], Temam [160]) como en el no autónomo (e. g. Chepyzhov & Vishik [37], Kloeden & Schmalfuß [93], Kloeden & Stonier [95]), para flujos estocásticos generados por ecuaciones diferenciales estocásticas (e. g. Arnold [4], Crauel & Flandoli [46], Crauel *et al.* [45]). Un paso previo e importante en todas estas teorías es obviamente el desarrollo de un entorno de trabajo abstracto y general en el cual expresar la dinámica subyacente del problema (semiflujos $S(t)$, procesos $S(t,s)$, y cociclos $\varphi(t,\omega)$, respectivamente).

Cuando uno está interesado en estudiar el comportamiento asintótico para problemas multivaluados, como los que aparecen en teoría de control, de viabilidad, ecuaciones sin unicidad, o propiamente inclusiones diferenciales, aún podemos esperar que el atractor sea un instrumento útil, como en el caso univaluado. Así, el desarrollo de una teoría de semiflujos multivaluados se convierte en un primer paso necesario en el estudio de los atractores para este tipo de problemas. Concerniente a las inclusiones diferenciales, una amplia literatura en la materia y sus posteriores ramificaciones apareció en los años 60 y 70 para espacios localmente compactos [22,145,144,151,21,158,88] (véase [89] para una visión global del tema), y más recientemente, para la existencia, comportamiento asintótico y otras propiedades en espacios de Banach generales [14,118,86,100,99,12,11,125,84], es decir, admitiendo ya espacios infinito dimensionales, para tratar problemas en derivadas parciales. Debido a sus aplicaciones e interés actual hoy en día, nosotros estamos interesados principalmente en los trabajos ya citados de Melnik & Valero [118] y de Ball [12] como ejemplos canónicos de las actuales teorías.

En [118] Melnik y Valero definen un *semiflujo multivaluado* como una aplicación multivaluada (m-aplicación, por abreviar) $G_{MV} : \mathbb{R}^+ \times X \to 2^X$, donde X es el espacio de fases. (Véase también Kapustyan & Valero [86]; y Lamba & Stuart [100] y Lamba [99] para la aplicación de sistemas dinámicos multivaluados en análisis numérico.)

Análogamente, si deseamos estudiar atractores para *ecuaciones diferenciales sin unicidad* cuando las soluciones no sean, o no se sepan, únicas, el problema requiere una generalización similar del concepto de semiflujo. De hecho, el trabajo desarrollado por Melnik y Valero también es aplicable a este caso. Sin embargo, una aproximación a este problema en concreto viene desde otra dirección, más acorde a la literatura precedente: en [12] Ball define el concepto de *semiflujo generalizado* G_B sobre el espacio de fases X, y que consiste en todas las posibles soluciones de la ecuación. Él trabaja principalmente con esta colección G_B de funciones con ciertas buenas propiedades, base de su teoría y construcciones (más atractivas por venir dadas directamente a través de las soluciones individuales), aunque también considera la aplicación multivaluada $T(t)u_0$, a saber, el conjunto de los puntos alcanzados en tiempo t por elementos de G_B que empezaron (en tiempo cero) en u_0. La aplicación $T(t)u_0$ tiene propiedades muy similares al semiflujo multivaluado $G_{MV}(t, u_0)$ comentado antes.

Aunque Ball trabaja esencialmente con ecuaciones sin unicidad, mientras que Melnik y Valero tratan las inclusiones diferenciales, en realidad ellos tratan problemas muy similares, en los que la dinámica está gobernada por una colección de posibles soluciones que parten de cada condición inicial.

Veremos en la Proposición 3.2 que un semiflujo generalizado puede ser visto como un caso particular de semiflujo multivaluado. Por tanto, una cuestión natural que aparece es la siguiente: dada una aplicación multivaluada $T : [0, +\infty) \times X \to \mathcal{P}(X)$ (como en Melnik & Valero [118]), ¿podemos definir un semiflujo generalizado G_B que consista en todas las "soluciones" (con apropiadas propiedades)? O lo que es más natural preguntarse: ¿son las dos teorías distintas en realidad? Y si no, en qué se diferencian. Encontraremos algunas diferencias y comentarios que hacer al respecto de las "trayectorias" de Melnik y Valero y las "soluciones" de Ball.

En la Sección 3.2 recordamos la definición de Ball de un semiflujo generalizado, y probamos varias propiedades de la aplicación multivaluada $T(t)$ que se deducen naturalmente de su definición. Señalaremos las similitudes y diferencias que hay entre su teoría y la aproximación axiomática que se adoptó en los años 60 y 70. Entonces daremos la definición de semiflujo multivaluado, de Melnik y Valero, y comentaremos las condiciones necesarias para construir un semiflujo generalizado a partir de un semiflujo multivaluado. En la Sección 3.3 damos algunos ejemplos canónicos en los que, bajo ciertas condiciones, sí se pueden establecer semiflujos generalizados: una ecuación diferencial ordinaria y una ecuación en derivadas parciales, ambas sin unicidad, y ejemplos ordinarios y en derivadas parciales de inclusiones diferenciales. Terminamos el capítulo comentando cómo la existencia de atractores globales puede ser probada en ambas teorías, lo que fue nuestro punto de partida e interés en el problema.

3.2 Semiflujos "generalizados" frente a semiflujos "multivaluados"

Sea (X, ρ) un espacio métrico completo, y denotemos por 2^X (resp. $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{K}(X)$, y $\mathcal{C}_v(X)$) la colección de todos los subconjuntos (resp. todos los no vacíos, los no vacíos acotados, no vacíos cerrados, no vacíos compactos, y no vacíos convexos y cerrados) de X. Para medir la distancia entre conjuntos, usaremos la métrica de Hausdorff, d_H, definida como

$$d_H(B, C) = \max \{\mathrm{dist}(B, C), \mathrm{dist}(C, B)\} \tag{3.1}$$

donde $\mathrm{dist}(B, C)$ es la semidistancia de Hausdorff,

$$\mathrm{dist}(B, C) = \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} \rho(b, c).$$

3.2.1 Semiflujos generalizados: definición y propiedades

Ahora damos la definición de Ball para un semiflujo generalizado, incluyendo la posibilidad de tiempo discreto. Nótese que en principio la definición no dice nada sobre la continuidad de las soluciones $\varphi \in G_B$ en el caso $\Gamma = \mathbb{R}$. Sin embargo, nosotros nos restringiremos a soluciones continuas: en concreto, para problemas finito dimensionales (o más generalmente, con X localmente compacto), querremos tratar funciones φ continuas de $[0, \infty)$ en X, mientras que en problemas infinito dimensionales, es más útil tomar φ continua de $(0, \infty)$ en X (más detalles en la Sección 3.2.4).

Definición 3.1. *Sea Γ igual a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{Z}$. Un* semiflujo generalizado *G_B en X es una familia de aplicaciones $\varphi : \Gamma_+ \to X$ (llamadas* soluciones*) que satisfacen las siguientes hipótesis:*

(H1) Existencia: *para cada $z \in X$ existe al menos una solución $\varphi \in G_B$ con $\varphi(0) = z$.*

(H2) Traslaciones de soluciones son soluciones: *si $\varphi \in G_B$ y $\tau \in \Gamma_+$, entonces $\varphi^\tau \in G_B$ donde $\varphi^\tau(t) := \varphi(t + \tau)$ para todo $t \in \Gamma_+$.*

(H3) Concatenación: *si $\varphi, \psi \in G_B$ y $\psi(0) = \varphi(t)$ para algún $t \in \Gamma_+$ entonces $\theta \in G_B$, donde para cada $\tau \in \Gamma_+$ se define*

$$\theta(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau) & \textit{para} \quad 0 \le \tau \le t, \\ \psi(\tau - t) & \textit{para} \quad t < \tau. \end{cases}$$

(H4) Semicontinuidad superior con respecto a datos iniciales: *si $\{\varphi_n\} \subset G_B$ con $\varphi_n(0) \to z$, entonces existe una subsucesión $\{\varphi_\mu\}$ de $\{\varphi_n\}$ y $\varphi \in G_B$ con $\varphi(0) = z$ tal que $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ para cada $t \in \Gamma_+$.*

Si para cada $z \in G_B$ existe exactamente una $\varphi \in G_B$ con $\varphi(0) = z$, entonces G_B se dice un semiflujo.

Esta definición (incluyendo la quizás inicialmente poco intuitiva (H4)) se tiene naturalmente cuando se consideran soluciones de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones no son únicas (véase p.ej. Sell [151]; por supuesto, es fácil ver que (H1)-(H4) se satisfacen cuando las soluciones son únicas y generan un sistema dinámico). Considérese el siguiente ejemplo (con $\Gamma = \mathbb{R}$):

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \qquad y(0) = y_0, \tag{3.2}$$

donde f es una función continua y acotada de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. La existencia de al menos una solución para cualquier dato inicial está garantizada por el Teorema de Peano, pero no la unicidad siendo f solamente una función continua (e. g. [72]). La hipótesis de acotación garantiza que todas las soluciones existen globalmente para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

Denotemos por $D(y_0)$ al conjunto de todas las soluciones clásicas de (3.2) restringidas a $\mathbb{R}_+$:

$$D(y_0) = \{\varphi \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}^n) \quad \text{tales que} \quad \varphi \quad \text{satisface (3.2)}\},$$

y pongamos

$$G = \bigcup_{y_0 \in \mathbb{R}^n} D(y_0).$$

Como la ecuación es autónoma, no es difícil ver que G forma un semiflujo generalizado: (H1), (H2) y (H3) son obvias, y (H4) es también relativamente directa de obtener. De hecho, si consideramos un intervalo de tiempo acotado fijo $I = [0,T]$, el conjunto de soluciones es equicontinuo ya que para toda $\varphi \in G$

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \|f\|_\infty |t-s|.$$

Así, de una sucesión de soluciones φ_n con $\varphi_n(0)$ convergente, obtenemos

$$|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(0)| + T\|f\|_\infty, \qquad \text{para todo} \qquad t \in [0,T],$$

y en consecuencia uniformemente acotada (en $[0,T]$) y equicontinua. Así, podemos aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelà para extraer una subsucesión que converge a una función continua φ que es además obviamente solución de (3.2).

Otros resultados debidos a Barbashin, que están establecidos propiamente para trabajos multivaluados, muy cercanos a esta propiedad, serán comentados en la Sección 3.2.3.

Sea G_B un semiflujo generalizado y sea $E \subset X$. Definimos para $t \in \Gamma_+$:

$$T(t)E = \{\varphi(t) : \varphi \in G_B \text{ con } \varphi(0) \in E\} \tag{3.3}$$

A continuación probamos varias propiedades de la aplicación $T(t)$ (cf. comentarios en [12, Sec. 3]).

Proposición 3.2. *La aplicación $T(t) : 2^X \to 2^X$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) *$\{T(t)\}_{t\in\Gamma_+}$ es un semigrupo en 2^X, i. e. $T(0) = \mathrm{Id}_{2^X}$ y $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \in \Gamma_+$,*

(b) *$T(t)$ es monótona con respecto al orden parcial de las inclusiones de conjuntos, i. e., $E \subset F$ implica $T(t)E \subset T(t)F$ para todo $t \in \Gamma_+$,*

(c) *$T(t)x$ es compacto para cada $x \in X$, y*

(d) *si $\{K_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de compactos de X tales que $K_n \to K$ respecto la semidistancia de Hausdorff cuando $n \to \infty$ entonces $\operatorname{dist}(T(t)K_n, T(t)K) \to 0$ para cada $t \in \Gamma_+$.*

Nótese que al ser $\operatorname{dist}(a,b) = \rho(a,b)$ para dos puntos a y b, cuando G_B es un semiflujo, el resultado dado en (d) se reduce a

$$\rho(T(t)x_n, T(t)x) \to 0 \qquad \text{si} \qquad \rho(x_n, x) \to 0$$

como esperábamos.

Demostración. (a) La primera parte es trivial: $T(0)E = E$ para cualquier $E \subset X$ gracias a (H1) y la definición de $T(t)E$. Veamos que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Fijamos un subconjunto $E \subset X$, si $x \in T(t+s)E$ entonces existe $x_0 \in E$ y una solución $\varphi \in G_B$ con $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi(t+s) = x$. Usando (H2) sabemos que $\varphi^s \in G_B$, y como $\varphi^s(0) = \varphi(s) \in T(s)E$ y $\varphi^s(t) = x$, se deduce que $T(t+s)E \subset T(t)T(s)E$. Para la inclusión contraria, usamos (H3): si $x \in T(t)T(s)E$, entonces $x = \psi(t)$ con $\psi(0) \in T(s)E$ y esto significa que existe otra solución $\varphi \in G_B$ tal que $\varphi(s) = \psi(0)$ con $\varphi(0) \in E$. Si definimos para cada $\tau \in \Gamma_+$

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{para} \quad 0 \leq \tau \leq s, \\ \psi(\tau - s) & \text{para} \quad s < \tau, \end{cases}$$

tenemos que $\theta \in G_B$ con $\theta(0) \in E$ y $\theta(t+s) = \psi(t) = x$, y por tanto $T(t)T(s)E \subset T(t+s)E$.

(b) Es claro que $T(t)$ es monótona por definición.

(c) Si $\{y_n\} \subset T(t)x$, entonces existen soluciones $\varphi_n \in G_B$ con $\varphi_n(0) = x$ y $\varphi_n(t) = y_n$. Como $\varphi_n(0) \to x$, por (H4) existe una subsucesión de soluciones $\varphi_{n'}$ y otra solución $\varphi \in G_B$ tal que (en particular) $\varphi_{n'}(t) \to \varphi(t)$, i. e. existe una $\varphi \in G_B$ con $\varphi(0) = x$ y $\varphi(t) = y$. Esto implica que $y_{n'} \to y \in T(t)x$, de donde $T(t)x$ es compacto.

(d) Consideremos un valor fijo $t \in \Gamma_+$ y probemos el resultado por reducción al absurdo. Asumiendo que $\mathrm{dist}(T(t)K_n, T(t)K) \not\to 0$, existe un valor $\epsilon > 0$, una subsucesión $\{K_{n'}\}$ y elementos $a_{n'} \in T(t)K_{n'}$ tales que

$$\mathrm{dist}(a_{n'}, T(t)K) > \epsilon \qquad \text{para todo} \qquad n'. \tag{3.4}$$

Pero $a_{n'} = \varphi_{n'}(t)$ con $\varphi_{n'}(0) \in K_{n'}$, y por tanto, al tener que $\mathrm{dist}(K_n, K) \to 0$ con K compacto, existe una subsucesión $\{\varphi_{n''}\}$ tal que $\varphi_{n''}(0) \to z \in K$. Aplicando de nuevo (H4) existe una solución $\psi \in G_B$ y una subsucesión $\{\varphi_{n'''}\}$ con $\varphi_{n'''}(t) \to \psi(t)$ y $\psi(0) = z \in K$. Así $\psi(t) \in T(t)K$ lo cual contradice (3.4), probando el resultado. □

La propiedad (d) es lo que se conoce como ε semicontinuidad superior de una aplicación multivaluada:

Sean X e Y espacios métricos, y denotemos:

$$B_X(A, \epsilon) = \{x \in X : \ \mathrm{dist}(x, A) < \epsilon\}.$$

Definición 3.3. *Dados espacios métricos X e Y, decimos que $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es* ε-semicontinua superiormente *en x_0 si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $F(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(F(x_0), \varepsilon)$. La aplicación F se dice* ε-semicontinua superiormente *si lo es para todo $x_0 \in X$.*

Cuando F tiene valores compactos (que es el caso que nos atañe aquí para $T(t)$), esta definición, que es la extensión natural de la noción univaluada de continuidad en espacios métricos, es equivalente a la definición topológica (cf. Aubin & Cellina [7, p. 45]):

Definición 3.4. *Una aplicación multivaluada (con valores no vacíos) entre dos espacios topológicos X e Y, $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, se dice* semicontinua superiormente *(s. c. s. o $SCS(X, \mathcal{P}(Y))$)* en *$x \in X$ si para cualquier abierto N conteniendo a $F(x)$ existe un entorno M de x tal que $F(M) = \bigcup_{m \in M} F(m) \subset N$. F se dice* semicontinua superiormente *si lo es en todos los puntos $x \in X$.*

En general ambas nociones no son equivalentes como muestra el siguiente

Ejemplo 3.5. *Sea la aplicación*

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto F(x) = \{(x,y) \,:\, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Claramente F es ε-s. c. s. (basta tomar $\delta = \varepsilon$ en la definición), sin embargo, vemos que no se da la definición topológica: tómese el siguiente entorno de $F(0)$:

$$N = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y| \leq \frac{1}{|x|} \right\}.$$

Es claro que no existe bola de radio δ contenida completamente en N.

3.2.2 Semiflujos multivaluados

Melnik & Valero [118] definen un (semi)flujo multivaluado como sigue.

Definición 3.6. *Sea Γ un subgrupo no trivial de $(\mathbb{R},+)$. La aplicación multivaluada G_{MV} : $\Gamma \times X \to \mathcal{P}(X)$ se dice un* flujo multivaluado *(o m-*flujo*, por abreviar) si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) *$G_{MV}(0,\cdot)$ es la aplicación identidad y*

(2) *definiendo para cada conjunto B de X*

$$G_{MV}(t,B) = \bigcup_{x \in B} G_{MV}(t,x)$$

tenemos $G_{MV}(t+s,x) \subset G_{MV}(t, G_{MV}(s,x))$ para todo $t,s \in \Gamma$ y para cada $x \in X$.

G_{MV} se dice un m-semiflujo si reemplazamos Γ por $\Gamma_+ = \Gamma \cap \mathbb{R}_+$ en la definición.

Una inclusión estricta en un m-semiflujo significa (por negación de la Proposición 3.2) que no proviene de un conjunto de soluciones que verifiquen las propiedades de traslación y concatenación. Un posible punto de vista para tal consideración, dado que usualmente las trasladadas de soluciones siempre seguirán siendo solución, será el considerar soluciones más particulares de tal modo que la concatenación falle, por ejemplo, si se consideran sólo soluciones de clase C^1 en lugar de C^0 pero en el espacio de fases habitual. O más generalmente, si consideramos un sistema de control generalizado $\tilde{G}(t,s,x)$ (cf. Roxin [145]) tendríamos una propiedad como la que sigue

$$\tilde{G}(t+s,0,x) \subset \tilde{G}(t+s,s,\tilde{G}(s,0,x)).$$

Un simple ejemplo en el que se de la inclusión estricta anterior puede aparecer cuando se tratan sistemas de control (discreto, por claridad). Sea la m-aplicación

$$\tilde{G}(n,m,x) = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n-m \text{ veces}}(x, U_m)$$

con $n \geq m \in \mathbb{N}$, y $\{U_j\}_{j \geq 1}$ una familia creciente de conjuntos de controles admisibles (que representan por ejemplo los controles tecnológicos o económicos que haya cada año). Dicha aplicación genera el conjunto de estados admisibles "alcanzables" o "visibles" en el futuro con la tecnología actual, que se espera esté contenida estrictamente en las tecnologías del futuro, generando por tanto conjuntos contenidos estrictamente en los estados alcanzables si uno actualiza el conjunto de controles admisibles durante un tiempo intermedio [$U_0 \subset U_1$ implica $f(f(x_0,U_0),U_0) \subset f(f(x_0,U_0),U_1)$].

En cualquier caso, en todas las aplicaciones consideradas en [118] el m-semiflujo se construye de soluciones de varias inclusiones diferenciales que satisfacen ambas propiedades (H2)-(H3). El verdadero problema es por tanto si uno simplemente tiene un m-semiflujo para empezar. Su definición abstracta no dice nada en absoluto sobre soluciones, y como veremos en la Sección 3.2.4, no pueden ser elegidas arbitrariamente, por tanto *ellas* deben ser introducidas a través de un concepto auxiliar pero muy natural, el concepto de *trayectoria*.

Definición 3.7. *La función $x(\cdot) : \Gamma_+ \to X$ se llama una* trayectoria *del m-semiflujo G_{MV} correspondiente a la condición inicial x_0 si $x(0) = x_0$ y $x(t+\tau) \in G_{MV}(t, x(\tau))$ para todos t, $\tau \in \Gamma_+$.*

Si requerimos que $G_{MV}(t, B)$ esté formado por estados alcanzables a través de trayectorias continuas, entonces tenemos lo que se llama un "m-semiflujo en tiempo continuo". Por ejemplo, es inmediato ver que (H2) implica que las soluciones de G_B son trayectorias de T: $\varphi(t+\tau) = \varphi^\tau(t) \in G_B(t, \varphi(\tau))$.

Esta noción de trayectoria, aunque usada sólo por Melnik y Valero en su discusión sobre la conexión del atractor, es extremadamente útil para comparar las teorías de semiflujos existentes y citadas previamente en la introducción. Algunos autores han preferido destacar la m-aplicación (y hablar de trayectorias como elemento secundario y subproducto) frente a otros que preferían tratar directamente con soluciones (cf. Bridgland [21]). Sin embargo, hay distinciones entre soluciones y trayectorias, como explicamos a continuación.

3.2.3 Soluciones y trayectorias. Una visión retrospectiva a los sistemas de control generales

Como mencionamos con anterioridad, dado un semiflujo generalizado G_B, se sigue fácilmente de la Proposición 3.2 que podemos construir un m-semiflujo G_{MV} haciendo

$$G_{MV}(t, x) = T(t)x \qquad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in X. \tag{3.5}$$

De hecho, tenemos una versión ligeramente más fuerte que la propiedad *(2)* de la definición de m-semiflujo, ya que automáticamente se tiene la igualdad

$$G_{MV}(t+s, x) = G_{MV}(t, G_{MV}(s, x))$$

en vez de simplemente la inclusión (en este caso lo llamaremos "m-semiflujo fuerte"). También tenemos que $G_{MV}(t, x)$ es semicontinuo superiormente.

Sin embargo, nos gustaría señalar que no es claro en principio, y al menos cuestionable, si este m-semiflujo tiene trayectorias (en el sentido de la Definición 3.7) que no sean soluciones del semiflujo generalizado G_B (e. g. véase también [158, Obs. 5.2]).

De hecho, esto puede ocurrir si uno considera una familia arbitraria de funciones. Por ejemplo, en el espacio $X = [-1, 1]$ la familia

$$G = \{\mathrm{sen}(at+b) \quad | \quad n \in \mathbb{N},\ a \in [0,1],\ b \in [0, 2\pi),\ t \geq 0\},$$

verifica (H1) y (H2) con lo que genera un m-semiflujo, que obviamente tiene trayectorias que no son soluciones (por ejemplo con trozos constantes). Otro simple ejemplo en la misma línea lo constituyen en $X = [0, (2e)^{-1/2}]$ la familia de funciones dadas por

$$[0, \infty) \ni t \mapsto f_n(t) = nte^{-n^2t^2} \in X,$$

(f_n converge puntualmente a cero pero no uniformemente) y todas sus traslaciones a derecha, las cuales satisfacen (H1) y (H2), formando un m-semiflujo.

Podemos eliminar tal comportamiento patológico, y obtener una igualdad entre las trayectorias de un m-semiflujo G_{MV} a partir de un semiflujo generalizado G_B y las soluciones de este último usando las propiedades (H3)-(H4) cuando las funciones en lidia son continuas bien en tiempo $[0,\infty)$ o $(0,\infty)$ (un resultado análogo puede verse en [158, Teor. 5.1]).

Lema 3.8. *Sea G_B un semiflujo generalizado formado por funciones continuas de J en X, donde $J=(0,\infty)$ o $[0,\infty)$. Sea G_{MV} el m-semiflujo construido a partir de G_B usando (3.5). Si $x(t)$ es una trayectoria continua (en J) del m-semiflujo, i. e.*

$$x(t+s)\in G_{MV}(t,x(s))$$

para todo $t,s\in\mathbb{R}_+$ entonces $x\in G_B$.

Demostración. Consideramos una sucesión $\varphi_n\in G_B$ tal que

$$\varphi_n(j2^{-n})=x(j2^{-n})\qquad \text{para}\qquad j=0,1,2,\ldots,n2^n.$$

El argumento de existencia de tales funciones es como sigue (veámoslo con φ_1): por definición de $G_{MV}(1,\cdot)$ existe una solución $\varphi\in G_B$ con $\varphi(0)=x(0)$ y $\varphi(1)=x(1)$. Análogamente existe una solución $\psi\in G_B$ con $\psi(0)=x(1)$ y $\psi(1)=x(2)$. Por la propiedad de concatenación existe una solución $\varphi_1\in G_B$ con $\varphi_1(0)=x(0)$, $\varphi_1(1)=x(1)$, $\varphi_1(2)=x(2)$. Claramente podemos continuar concatenando de esta forma para encontrar una solución $\varphi_n\in G_B$ con $\varphi_n(j2^{-n})=x(j2^{-n})$.

Ahora consideramos la sucesión $\{\varphi_n\}\subset G_B$. Como en todas ellas el dato inicial es $\varphi_n(0)=x(0)$, por (H4) existe una solución $\varphi\in G_B$ y una subsucesión φ_μ tales que $\varphi_\mu(t)\to\varphi(t)$ para cada $t>0$. Como para cualquier t de la forma $t=j2^{-n}$ para algún par j y n el valor de $\varphi_\mu(t)$ es siempre $x(t)$ para μ suficientemente grande, de la continuidad de ambas funciones φ y x se deduce que $\varphi=x$. Por tanto $x\in G_B$. □

Sin embargo, si partimos directamente de un m-semiflujo usando una cierta clase de soluciones de algún modelo, sin que éstas satisfagan las condiciones (H1)-(H4), no hay razón *a priori* por la que no pueda haber límites de soluciones que no sean propiamente soluciones. De hecho, tales contraejemplos existen, por lo que esta observación será importante en las aplicaciones que veremos en la Sección 3.3, donde en cada caso tendremos que comprobar que el límite de soluciones es aún solución.

Nos gustaría desarrollar aquí un poco más este punto. Incluimos un par de ejemplos mostrando que en general no se puede esperar que el límite de soluciones de un problema diferencial formen un semiflujo generalizado. Considerando $X=[0,\infty)$, $A=[0,1]$ y $B=(1,\infty)$, un primer y simple caso lo constituye la inclusión* diferencial ordinaria

$$x'(t)\in F(x(t)),\tag{3.6}$$

dada por

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad x\in A,\\ 1 & \text{si}\quad x\in B.\end{cases}$$

Denotamos G al conjunto de soluciones clásicas de (3.6): $f_a(t)=a$ y $g_b(t)=b+t$, i. e. tenemos

$$G=\bigcup_{a\in[0,1]}f_a(\cdot)\cup\bigcup_{b\in(1,\infty)}g_b(\cdot).$$

*En realidad una ecuación, "de momento", más abajo se ve porqué la tratamos como inclusión.

Es obvio que G es una familia equicontinua y que satisface (H1), (H2) y (H3), pero la condición (H4) no se tiene. Basta tomar una sucesión $b_n \downarrow 1$, entonces las soluciones $g_{b_n}(t) = b_n + t$ convergen a $g(t) = 1 + t$, pero ésta no es una solución de (3.6).

Sin embargo, el conjunto $G \cup \{g\}$ (que proviene de la misma inclusión con el cambio $F(1) = \{0, 1\}$ o a través de la construcción de Filippov, $F(1) = [0, 1]$, e. g. véase [155]) genera un m-semiflujo ya que (H1), (H2) y (H3) son trivialmente ciertas en este caso, y la única función problemática ha sido añadida, permitiendo que (H4) se satisfaga.

En el ejemplo anterior, el m-semiflujo inicial no tenía valores cerrados, y el límite no estaba en el conjunto, siendo falsa (H4); una situación parecida se tiene también para una aplicación propiamente multivaluada si el término de la derecha en la inclusión diferencial no tiene valores convexos, como muestra el siguiente

Ejemplo 3.9. *(cf. [155, p. 107]) Sea la inclusión diferencial $\frac{d}{dt}(x_1, x_2) \in F(x_1, x_2)$ siendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$F(x_1, x_2) = \{(v_1, v_2) \,|\, v_1 = v_2^2 - x_2^2,\ v_2 \in [-1, 1]\}.$$

El conjunto de estados alcanzables (digamos en tiempo $t = 1$) por las soluciones Carathéodory que parten del origen, $(x_1, x_2)(0) = (0, 0)$, no es cerrado. En efecto, si $x_2(t) \equiv 0$, entonces $x_1(t) \equiv 0$. Pero si $x_2(t) \not\equiv 0$, entonces $x_1'(t) < 1$ donde $x_2(t) \neq 0$. Como $x_1'(t) \leq 1$ para todo t, se concluye que $x_1(1) < 1$ para todas las soluciones, por lo que el punto $(1, 0)$ no es alcanzable en tiempo $t = 1$.

Sin embargo vemos que pertenece a la clausura de los estados alcanzables: considérense las soluciones $(x_{1,k}, x_{2,k})$ que parten del origen, con $x_{2,k}'(t) = 1$ si $t \in [2i/k, (2i + 1)/k)$, y $x_{2,k}'(t) = -1$ si $t \in [(2i + 1)/k, (2i + 2)/k)$ siendo $i = 0, 1, \ldots$ Se tiene entonces que

$$x_{2,k}(t) \in [0, 1/k], \quad x_{1,k}'(t) \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \quad x_{1,k}(1) \geq 1 - 1/k^2.$$

Además, vemos que los límites de $\{x_k\}_k$ (el par de funciones $(0, t)$) y sus correspondientes selecciones $\{f_k\}_k$ (el par de funciones $(0, 0)$) no son solución del problema.

La dependencia así probada de (H4) en el lema anterior para relacionar ("cerrar el círculo" más bien) soluciones y trayectorias la convierte en una propiedad esencial. Por otro lado, y como ya se mencionó en la Introducción, es una propiedad bastante natural y bien conocida en los estudios realizados en las décadas de los 60 y 70 en el ámbito de espacios localmente compactos (y tratada de hecho con anterioridad por Barbashin entre otros, cf. [145, 89]), donde la teoría de *sistemas de control generales* (s. c. g. por brevedad) fue desarrollada, y algunos resultados de estabilidad y relaciones con problemas de optimalidad fueron establecidos.

De hecho, (H4) se puede ver como una reducción en los axiomas supuestos por Roxin [145] en dicha teoría, e incluso de generalizaciones posteriores (cf. Kloeden [88]), ya que es una consecuencia de los resultados de Barbashin (e. g. [145, Teor. 6.2]) cuando la axiomática desarrollada en los años 60-70 puede ser aplicada, y una hipótesis útil cuando tales condiciones no se tienen. El uso de hipótesis más fuertes de partida, como comentamos ahora y veremos claramente en la proposición siguiente, tiene sentido cuando se trabaja en espacios localmente compactos†, pero aplicaciones para espacios infinito dimensionales, tratando ecuaciones en derivadas parciales, caen fuera de este marco y a veces no gozan de tan buenas propiedades (cf. [12, Ex. 2.2]). Éste es el motivo para desarrollar teorías más generales. Más exactamente, a la luz de [12, Teor. 2.2 y 2.3] (ver Teor. 3.13 y 3.14), se obtiene fácilmente el siguiente resultado:

†Aunque muchas de las construcciones, desde un punto de vista abstracto, son válidas en espacios de Banach más generales, como se puede ver en las demostraciones del Capítulo 5.

Proposición 3.10. *Si G_B es un semiflujo generalizado formado por soluciones fuertemente medibles y con la propiedad de representantes únicos (cf. Ball [12]), entonces todas las soluciones son continuas al menos en $(0,\infty)$ (nótese D al dominio de continuidad global de todas las soluciones), y para todo $t \in D$:*

$$\operatorname{dist}(T(t)x, T(s)x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad s \to t. \tag{3.7}$$

Más aún, si $D = [0,\infty)$ cuando X es localmente compacto, y al menos para todo $t > 0$ en espacios de Banach generales, se tienen las siguientes propiedades:

$$\operatorname{dist}(T(s)x, T(t)x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad s \to t, \tag{3.8}$$

$$T(t)(\cdot) \quad \text{es s. c. s. uniformemente en compactos de tiempo en} \quad D. \tag{3.9}$$

En consecuencia, para espacios localmente compactos, partiendo de antemano de la continuidad de las soluciones en todo $[0,\infty)$ implica que se recuperan las mismas hipótesis de la visión axiomática que se adoptó para los s. c.g. (cf. [88]). Sin embargo, si tal continuidad global no se tiene, o si estamos en un espacio de Banach arbitrario, ambas teorías, s. c.g. y semiflujos generalizados, no son completamente equivalentes a la anterior y suponen una mejora. El resultado de Barbashin sobre continuidad de trayectorias (aunque para ello sólo (3.8) sea necesario, pero no (3.7)) no se tiene como consecuencia de la teoría (el tiempo inicial falla). Y lo máximo que se consigue entonces es construir una trayectoria en todo $[0,\infty)$ (la prueba constructiva de [88] sigue siendo válida), y es continua en $(0,\infty)$. Por tanto, ante la continuidad (ahora en $(0,\infty)$ bajo las débiles hipótesis de la proposición anterior) de las soluciones, de nuestro Lema 3.8 se deduce que trayectorias y soluciones coinciden.

3.2.4 Semiflujos generalizados a partir de m-semiflujos

Es más complicado (y de hecho, no posible en general) obtener un semiflujo generalizado $\mathcal{G}$ a partir de un m-semiflujo dado G_{MV}. Construir un problema cuyas soluciones generaran el G_{MV} de partida fue la motivación inicial de ecuaciones contingentes (Roxin [144]) a través de inclusiones diferenciales[‡] con resultado final que recuperamos en la Sección 3.3 en el caso de una inclusión ordinaria (véase también Bridgland [21] o [158, Teor. 5.1 y Obs. 5.2]).

Comenzamos no obstante nuestra discusión desde este punto de vista abstracto, dado un m-semiflujo, ¿qué funciones cabría elegir, y con qué propiedades? Viendo la definición del conjunto $T(t)E$ asociado al semiflujo generalizado G_B (el conjunto de puntos alcanzados en tiempo t por soluciones que partían de E), la primera idea que viene a la mente es definir

$$\mathcal{G} = \bigcup_{x \in X} \{\varphi : [0,\infty) \to X \mid \varphi(t) \in G_{MV}(t,x) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Como $G_{MV}(t,x)$ es no vacío, el axioma de elección permite elegir tales funciones y por tanto se tiene (H1). Sin embargo, no podemos asegurar que tales "soluciones" verifiquen (H2). De hecho, supongamos que $\varphi(\tau) \in G_{MV}(\tau,x)$ $\forall \tau \in \Gamma_+$: entonces $\varphi(t+s_i) \in G_{MV}(t+s_i,x)$ con $i = 1,2$. Pero $\varphi^t(s_i) \in G_{MV}(s_i, G_{MV}(t,x))$ implica que existen elementos $x_i \in G_{MV}(t,x)$ con $\varphi^t(s_i) \in G_{MV}(s_i,x_i)$ y el inconveniente es que x_1 no tiene porqué ser el mismo que x_2.

Aunque este problema es fácilmente subsanable considerando la unión sobre todo el espacio en vez de sobre puntos, i. e.

$$\mathcal{G} = \bigcup_{E \in \mathcal{P}(X)} \{\varphi : [0,\infty) \to X \mid \varphi(t) \in G_{MV}(t,E) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}_+\}$$

[‡]En ecuaciones sin unicidad también aparece el mismo objetivo (cf. Sell [151]: *el problema de clasificación*).

[entonces dado $\varphi(t) \in G_{MV}(t,E)$ se tiene inmediatamente que $\varphi^t(s_i) \subset G_{MV}(s_i, G_{MV}(t,E))$], ahora $\mathcal{G}$ no puede esperarse que satisfaga (H4) pues dicha definición es demasiado libre. De hecho, (H3) es en general falsa también. Tomando $E = X$, es claro que $G_{MV}(t,X) \subsetneq G_{MV}(s,X)$ si $t > s$ porque $G_{MV}(s + (t-s), X) \subset G_{MV}(s, G_{MV}(t-s, X))$. Así en general, con una relación de inclusión estricta (recuérdese la Proposición 3.2) no podremos encontrar todo elemento de $G_{MV}(\tau - t, X)$ en $G_{MV}(\tau, X)$ y por tanto, la función concatenada θ definida en (H3) no pertenece a $\mathcal{G}$.

Después de esta fallida pero voluntaria introducción heurística, vemos que para conseguir el objetivo marcado, debemos utilizar alguna estructura más consistente. A la luz de las discusiones anteriores y de [12, Teor. 2.2 y 2.3] la opción más clara es imponer condiciones sobre el conjunto de trayectorias (en el sentido de la Definición 3.7) del m-semiflujo G_{MV}.

(A1) Para cada $x_0 \in X$, existe al menos una trayectoria que es continua en $[0,\infty) \to X$.

(A2) Para cualquier sucesión de trayectorias continuas φ_n con $\varphi_n(0) \to z$ la sucesión $\{\varphi_n\}$ es equicontinua de I en X para cualquier intervalo compacto I de $[0,+\infty)$.

El siguiente resultado nos permite usar (A2) en el caso finito dimensional para poder aplicar posteriormente el Teorema de Ascoli-Arzelà:

Lema 3.11. *Supongamos que $F(t,\cdot) : X \to \mathcal{B}(X)$ es s. c. s. para cada $t \in \mathbb{R}_+$, y sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de trayectorias con $\varphi_n(0) \to z$. Entonces φ_n es uniformemente acotada en cada intervalo acotado I de $\mathbb{R}_+$.*

Demostración. Supongamos lo contrario: entonces para cada constante $M \geq 0$ existe $t_M \in I$ y una trayectoria φ_{μ_M} con $|\varphi_{\mu_M}(t_M)| > M$. Así, existe un punto de acumulación $t_* \in \bar{I}$ con $|\varphi_{\mu_M}(t_*)|$ sucesión creciente a ∞ cuando $M \to \infty$. Por otro lado, como $F(t_*, z)$ es acotado y $F(t_*,\cdot)$ es s. c. s. los valores $\varphi_{\mu_M}(t_*)$ están (a partir de cierto valor) en un entorno acotado de $F(t_*, z)$, lo que es contradictorio. □

En espacios infinito dimensionales necesitaremos hipótesis ligeramente modificadas a partir de las anteriores: como ya comentamos antes, incluso en el caso univaluado, las soluciones no necesitan ser continuas en todo $[0,+\infty)$ (piénsese en las soluciones de la ecuación del calor unidimensional con dato inicial en $L^\infty(0,1)$). Usaremos por tanto nuevas hipótesis en este caso, (A1') y (A2'), que denotarán las condiciones impuestas en (A1) y (A2) con el intervalo $[0,+\infty)$ sustituido por $(0,+\infty)$, y con la condición suplementaria de que para cada t fijo, la clausura de

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$$

es un compacto de X.

Estamos en disposición de probar el resultado abstracto que nos marcábamos al principio de esta sección para trayectorias.

Teorema 3.12. *Sea $G_{MV} : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{K}(X)$ un m-semiflujo fuerte, tal que $G_{MV}(t,\cdot)$ es semicontinuo superiormente. Si X es finito (resp. infinito) dimensional y se satisfacen* (A1)-(A2) *(resp.* (A1')-(A2')*), entonces la colección de todas las trayectorias de G_{MV} que son continuas de $J = [0,\infty)$ (resp. $(0,\infty)$) en X forman un semiflujo generalizado en X.*

Nótese que bajo las condiciones del teorema obtenemos a partir de G_{MV} un semiflujo generalizado $\mathcal{G}$ que genera por (3.3) una m-aplicación $T_{\mathcal{G}}(t)$ que satisface

$$T_{\mathcal{G}}(t)E \subset G_{MV}(t, E).$$

Sin embargo, como comentamos en la Sección 3.2.3, puede darse el caso de que la construcción del teorema necesite un m-semiflujo ligeramente ampliado (o completado más bien) $\tilde{G}_{MV}$ para satisfacer las condiciones anteriores, y esto puede generar ya elementos de $\mathcal{G}$ que no son de hecho "soluciones" del problema original.

Demostración. Probamos cada uno de los axiomas a continuación.

(H1) Éste sigue directamente de (A1),

(H2) Sea $x(t)$ una trayectoria, i. e. $x(t+\tau) \in G_{MV}(t, x(\tau))$ para todos $t, \tau \in \mathbb{R}_+$; entonces, dado $s \in \mathbb{R}_+$, x^s es una trayectoria pues $x^s(t+\tau) = x(t+\tau+s) \in G_{MV}(t, x(\tau+s)) = G_{MV}(t, x^s(\tau))$.

(H3) Dadas dos trayectorias φ, ψ tales que $\varphi(t) = \psi(0)$ para algún $t > 0$, queremos ver que

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{para } 0 \leq \tau \leq t \\ \psi(\tau - t) & \text{para } t < \tau \end{cases}$$

es una trayectoria, i. e. que

$$\theta(t_1 + t_2) \in G_{MV}(t_1, \theta(t_2)) \qquad \text{para todos } t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}_+. \tag{3.10}$$

Si $t_1 + t_2 \leq t$ entonces θ coincide con φ y si $t_2 \geq t$ entonces θ es igual a ψ: en ambos casos (3.10) es trivial por ser φ y ψ trayectorias. Por tanto, podemos suponer que $t_1 + t_2 > t$ y $\bar{t} = t - t_2 > 0$, entonces, usando que el semiflujo es fuerte (igualdad, y no inclusión estricta)

$$\begin{aligned} \theta(t_1 + t_2) &= \psi(t_1 + t_2 - t) \\ &\in G_{MV}(t_1 + t_2 - t, \psi(0)) \\ &= G_{MV}(t_1 + t_2 - t, \varphi(t)) \\ &\subset G_{MV}(t_1 + t_2 - t, G_{MV}(\bar{t}, \varphi(t - \bar{t}))) \\ &= G_{MV}(t_1 + t_2 - t + \bar{t}, \varphi(t - \bar{t})). \end{aligned}$$

Si las trayectorias φ y ψ son continuas entonces obviamente θ también lo es.

(H4) Finalmente, probamos la condición (H4). Supongamos que existe una sucesión de trayectorias $\{\varphi_n\}$ tales que $\varphi_n(0) \to z \in X$ cuando $n \to \infty$. Entonces, usando (A2) podemos aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelà para extraer una subsucesión $\varphi_{1,n}$ que converge uniformemente en $[0, 1]$ (en el caso finito dimensional) o en $[1, 1]$ (caso contrario) hacia una función continua $\varphi(t)$ (definida en dicho intervalo). Otra aplicación del mismo teorema genera otra subsucesión a partir de la anterior $\varphi_{2,n}$ que converge uniformemente hacia φ (definida) en $[0, 2]$ (or $[1/2, 2]$). Continuamos este proceso para generar sucesivas subsucesiones encajadas $\varphi_{j,n}$ convergentes hacia φ uniformemente en $[0, n]$ (o $[1/n, n]$), que en el segundo caso, definimos adicionalmente como z en tiempo inicial. Finalmente, por un proceso diagonal, $\varphi_\mu = \varphi_{\mu,\mu}$ converge uniformemente hacia φ en cualquier compacto de J.

Resta ver que efectivamente φ es una trayectoria: i. e. que

$$\varphi(t+s) \in G_{MV}(t, \varphi(s)) \quad \text{para todos} \quad t, s \in \mathbb{R}_+. \tag{3.11}$$

Tenemos las convergencias $\varphi_\mu(s) \to \varphi(s)$ y $\varphi_\mu(t+s) \to \varphi(t+s)$, además los términos de la sucesión sí son trayectorias, $\varphi_\mu(t+s) \in G_{MV}(t, \varphi_\mu(s))$. Como $G_{MV}(t, \cdot)$ es s. c. s., dado cualquier entorno N de $G_{MV}(t, \varphi(s))$ existe $\mu_N \geq 1$ tal que para todo $\mu \geq \mu_N$, $G_{MV}(t, \varphi_\mu(s)) \subset N$. Por otro lado $G_{MV}(t, \varphi(s))$ es cerrado y podemos pasar al límite para obtener (3.11).

□

Sin las propiedades de equicontinuidad (A2) o (A2') en el resultado anterior no podemos obtener una subsucesión satisfaciendo (H4). Sin embargo, ya hemos visto (en la discusión que seguía a la definición de un semiflujo generalizado) que esto se puede conseguir naturalmente en aplicaciones, y daremos otros dos ejemplos en la Sección 3.3 mostrando que también se tiene en el caso de soluciones a algunas inclusiones diferenciales. No obstante, es también posible hacer algo sin (A2) en el caso más simple en que el tiempo sea un conjunto discreto, como veremos más adelante.

Uno podría esperar salvar la condición (A2) ya que la propiedad (H4) no requiere convergencia uniforme de φ_μ a φ sino sólo puntual. Sin embargo, el siguiente resultado de Ball [12] muestra que la estructura del semiflujo generalizado (cuando los elementos son continuos) conlleva que la convergencia puntual implica la uniforme:

Teorema 3.13. *(cf. [12]) Supongamos que G_B es un semiflujo generalizado con cada $\varphi \in G_B$ continua de $(0, \infty)$ en X. Supóngase también que la sucesión $\{\varphi_n\} \subset G_B$ y la solución $\varphi \in G_B$ satisfacen $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ para cada $t > 0$. Entonces $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en compactos de $(0, \infty)$.*

Puesto que el Teorema de Ascoli-Arzelà es una caracterización de la convergencia uniforme en sucesiones de funciones continuas, (A2) es por tanto necesaria. En el caso finito dimensional otro resultado de Ball implica una condición más fuerte aún:

Teorema 3.14. *(cf. [12]) Sea X localmente compacto y G_B un semiflujo generalizado tal que cada solución $\varphi \in G_B$ es continua de $[0, \infty)$ en X. Si $\{\varphi_n\} \subset G_B$ y $\varphi \in G_B$ satisfacen $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ para cada $t > 0$, entonces se tiene que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente para todo compacto de $[0, \infty)$.*

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y el hecho de que (H4) implicaba tanto la semicontinuidad superior como que $G(t, \cdot)$ tiene valores compactos (se probó por contradicción en la Proposición 3.2), cuando se trata con trayectorias continuas, las hipótesis del Teorema 3.12 son las mínimas (óptimas) que garantizan la construcción del deseado semiflujo generalizado.

Como avanzamos antes, la condición (A2) en el Teorema 3.12 se puede eliminar cuando el tiempo es discreto, si todo $G_{MV}(t, z)$ es compacto.

Proposición 3.15. *Sea $G_{MV} : \mathbb{Z}_+ \times X \to \mathrm{K}(X)$ un m-semiflujo fuerte tal que $G_{MV}(t, \cdot)$ es semicontinuo superiormente. Bajo la condición (A1) la colección $\mathcal{G}$ de todas las trayectorias de G_{MV} (Definición 3.7) forman un semiflujo generalizado en X.*

Demostración. Las propiedades (H1)-(H3) se prueban como antes, sólo queda ver que se tiene (H4). Por hipótesis $\{\varphi_j(0)\}$ converge a z. Dado un valor $\epsilon > 0$ la s. c. s. de $G_{MV}(1,\cdot)$ asegura que cada $G_{MV}(1,\varphi_j(0))$ está contenido en una orla de distancia ϵ del compacto $G_{MV}(1,z)$ para todo $j \geq j(\epsilon,1)$. Por tanto se tiene que existe una subsucesión $\varphi_{j_n^1}$ tal que $\varphi_{j_n^1}(0)$ y $\varphi_{j_n^1}(1)$ convergen cuando $n \to \infty$.

Ahora aplicamos el mismo argumento de forma inductiva a los conjuntos $G_{MV}(k+1,\varphi_{j_n^k}(0))$ para obtener una subsucesión $\varphi_{j_n^{k+1}}$ de $\varphi_{j_n^k}$ tal que $\varphi_{j_n^k}(t)$ converge para cada $t = 0,\ldots,k$. Llamando $\varphi_\mu = \varphi_{j_\mu^\mu}$ se obtiene una subsucesión tal que $\varphi_\mu(t)$ converge para todo $t \in \mathbb{Z}_+$. Que el límite es aún una trayectoria sigue como antes. □

Por supuesto, en este caso es claro que $T_{\mathcal{G}}(n)E = G_{MV}(n,E)$.

(Podríamos intentar algo similar en el caso $\Gamma = \mathbb{R}_+$, pero sin (A2) lo más que podríamos obtener es una sucesión que convergiera en un subconjunto numerable de $\mathbb{R}_+$, e. g. $\mathbb{Q}_+$.)

Como ya se indicó, en general, nuestras hipótesis sobre la aplicación multivaluada $T(\cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ puede que no sean tan buenas como para tener previamente los resultados de Barbashin, y mucho menos, como para chequear la propiedad de equicontinuidad. Desde un punto de vista práctico, que las trayectorias verifiquen tales propiedades sólo es sensato plantear si son soluciones de algún problema diferencial del que extraer estimaciones. Así, necesitaremos ver que no aparecen trayectorias adicionales de tales soluciones para que todas provengan del problema, i. e. Lema 3.8, o sea, que verifiquen la propiedad (H4). En resumen, esto sugiere que es más interesante empezar directamente con un conjunto de soluciones propiamente a cierto problema, sobre las que comprobar todas las condiciones. Éste será el objetivo del siguiente parágrafo.

3.3 Aplicaciones

En esta sección estudiamos varios ejemplos. En particular queremos comprobar cuando se puede construir o no un semiflujo generalizado que consista enteramente de soluciones, y no de trayectorias de la aplicación de "puntos alcanzables". Por el Lema 3.8 basta ver que las soluciones sean continuas y formen un semiflujo generalizado por ellas mismas. Así evitamos la existencia de "elementos extraños" en el semiflujo generalizado.

Si bien con $S(t)$ continuo y univaluado, la propiedad (H4) es inmediata de probar, no lo es en el caso de ecuaciones sin unicidad, y veremos que este problema envuelve mayor dificultad en el caso de inclusiones tanto ordinarias como en derivadas parciales, ya que los selectores serán distintos, y serán necesarios teoremas sobre su elección y convergencia.

3.3.1 Una ODE sin unicidad

Ya hemos considerado en la Sección 3.2.1 el ejemplo

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x(0) = x_0,$$

con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y acotada, para la que probamos que el conjunto de soluciones clásicas daba lugar a un semiflujo generalizado. Por supuesto, podríamos también considerar dicha ecuación desde el punto de vista de los m-semiflujos, definiendo $G(t,x)$ como en (3.5). En este caso el Teorema de Kneser es aplicable a $G(t,x)$ (e.g. Hartman [72, Teor. 4.1]), y garantiza que dicha aplicación tiene valores cerrados y conexos. Como son también acotados, tiene valores compactos de hecho.

3.3.2 Una EDP sin unicidad

El principal ejemplo que aparece en el artículo de Ball es el de las ecuaciones de Navier-Stokes 3D:

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)u = \nu\Delta u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

con la siguiente condición en la frontera

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Considérense los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{u \in C_0^\infty(\Omega)^3;\ \operatorname{div} u = 0\}, \\ H &= \text{clausura de } \mathcal{V} \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)^3, \\ V &= \{u \in H_0^1(\Omega)^3;\ \operatorname{div} u = 0\}. \end{aligned}$$

Denotamos por H_w el espacio H dotado de su topología débil. Es bien sabido que para cada dato $u_0 \in H$, existe al menos una solución débil u al problema (3.12) tal que

$$u \in C([0,T]; H_w) \cap L^2(0,T;V), \quad \frac{du}{dt} \in L^1(0,T;V') \quad \forall T > 0.$$

Sin embargo se desconoce si admite una única solución o no, por lo que el autor aplica su construcción de semiflujo generalizado al problema. La colección G_{NS} de todas las soluciones débiles claramente verifica las condiciones (H1) y (H3). Él se restringe además a aquellas que satisfacen una cierta desigualdad y muestra (véase Proposición 7.4 en [12]) que este conjunto, G_{NS}, es un semiflujo generalizado si y sólo si cada solución débil es una función continua de $(0, \infty)$ en H: ésta es actualmente una hipótesis no probada. Las condiciones adicionales necesarias para la construcción del atractor global se prueban de hecho como consecuencia de esta misma hipótesis (véase Teorema 3.28 en Sección 3.4 para más detalles).

3.3.3 Dos ejemplos para inclusiones diferenciales

Una inclusión diferencial ordinaria

Por completitud, recordamos brevemente en este parágrafo el bien conocido caso para inclusiones diferenciales ordinarias a partir de una m-aplicación de Peano [8] (trabajos anteriores al respecto se deben[§] a Roxin [144]).

Consideramos una m-aplicación $F : \mathbb{R}^n \to C_v(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(0)$ está acotado y F es globalmente Lipschitz (por simplificar, no es estrictamente necesario),

$$\mathrm{d}_H(F(u), F(v)) \leq L|u - v|.$$

En consecuencia, F tiene valores convexos y acotados [la hipótesis sobre convexidad es importante incluso para que la función "de alcance" tenga valores cerrados, recuérdese el contraejemplo ya nombrado [155, p. 107]]. Veamos que es posible construir un semiflujo generalizado para la inclusión diferencial ordinaria siguiente

$$\frac{du}{dt} \in F(u) \qquad u(0) = u_0. \tag{3.13}$$

Denotamos por G el conjunto de soluciones llamadas *fuertes* o *Carathéodory* para (3.13), esto es todas las funciones $u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ tales que

[§] De hecho algunos se remontan a Zaremba [170].

(i) $u(0) = u_0$,

(ii) $u(\cdot)$ es continuo en $[0, T]$,

(iii) $u(\cdot)$ es absolutamente continuo en cualquier compacto de $(0, T)$, y que satisface (3.13) e.c.t. $(0, T)$.

En particular necesitamos poder asegurar la existencia de selecciones medibles, i. e. $h(x)$ con $h(x) \in F(x)$ y así tratar el problema

$$\frac{du}{dt} = h(u(t)).$$

Pero de hecho, existen soluciones clásicas al problema, usando el Teorema de Selección de Chebyshev (cf. Aubin & Cellina [7, p. 74]) para obtener selecciones que son no sólo medibles sino continuas.

Si fijamos un intervalo $[0, T]$ entonces podemos ver que cada solución y su correspondiente selección están acotadas, obteniendo así que las soluciones son globales en tiempo.

Proposición 3.16. *Bajo las hipótesis anteriores, para cualquier solución u de* (3.13) *y su correspondiente selección $h(u)$ se tienen las siguientes estimaciones:*

$$|u(t)|^2 \leq e^{(2L+1)t}|u(0)|^2 + \frac{C}{2L+1}(e^{(2L+1)t} - 1)$$

y

$$|h(u(t))| \leq C + L\left(e^{(2L+1)t}|u(0)|^2 + \frac{C}{2L+1}(e^{(2L+1)t} - 1)\right)^{1/2},$$

donde $C = \text{diám}\, F(0)$.

Demostración. Como $f = h(u)$ es una selección de $F(u)$, por la propiedad de Lipschitz de F

$$|f(t)| \leq C + L|u|,$$

con $C = \text{diám}\, F(0)$. Por otro lado, de $\frac{du}{dt} = f$ deducimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 \leq C|u| + L|u|^2.$$

El resultado sigue de la Desigualdad de Young y del Lema de Gronwall. □

Como (H1)-(H3) son inmediatas para este ejemplo, nos concentramos en probar

Proposición 3.17. *El conjunto de soluciones fuertes de* (3.13) *verifica* (H4).

Demostración. Supongamos dada una sucesión de soluciones fuertes u_n que convergen en tiempo cero. Entonces es posible obtener la propiedad de equicontinuidad para dicho conjunto de soluciones gracias a la cota anterior, lo que permite aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelà para extraer una subsucesión convergente (definida en todo $\mathbb{R}_+$ con el procedimiento diagonal habitual). Pero ello sólo no nos basta; para terminar necesitamos comprobar que el límite es también solución del problema: La sucesión de selecciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en $L^\infty(0, T)$ y por tanto existe una subsucesión (que no renombramos) y una función f tal que

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \text{débilmente en } L^1(0, T).$$

Así podemos pasar al límite y comprobar que u satisface

$$u(t) = u(0) + \int_0^t f(s)\,ds.$$

Hay que ver que efectivamente f es una selección de $F(u)$. Y esto es consecuencia del Teorema de la Convergencia¶ (cf. Aubin & Cellina [7, p. 60]):

Teorema 3.18. *Sea F una aplicación semicontinua superiormente de un espacio de Hausdorff localmente convexo X con imagen en los cerrados convexos de un espacio de Banach Y. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $x_k(\cdot)$ e $y_k(\cdot)$ funciones medibles de I en X e Y respectivamente, verificando:*

- *Para casi todo $t \in I$, para todo entorno N de 0 en $X \times Y$, existe $n_0 = n_0(t, N)$ tal que*

$$(x_n(t), y_n(t)) \in \textit{grafo}\,(F) + N \qquad \forall n \geq n_0,$$

- *$x_n(\cdot)$ converge en casi todo a una función $x(\cdot)$ de I en X,*
- *$y_n(\cdot)$ pertenece a $L^1(I; Y)$ y converge débilmente a $y(\cdot)$ en $L^1(I; Y)$.*

Entonces para casi todo $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in \textit{grafo}\,(F)$, i. e. $y(t) \in F(x(t))$.

En nuestro caso lo aplicamos con $X = Y = \mathbb{R}^n$, $x_n = u_n$, $y_n = f_n$. Así f es una selección de $F(u)$, u es solución fuerte o de Carathéodory de (3.13) y la condición (H4) es cierta. □

Por supuesto, la misma conclusión se tiene para el caso no autónomo si incluimos el tiempo como una variable adicional del espacio en las hipótesis dadas al principio.

Una inclusión con derivadas parciales

Nos disponemos a tratar ahora el caso de inclusiones en derivadas parciales. Las posibles definiciones de solución son aquí, por causa de los términos multivaluados, algo menos intuitivas. Las soluciones con que principalmente se trabaja son las integrales, que implican en la definición una desigualdad integral a partir de una selección de F. Nosotros veremos que en el caso particular que trataremos, a partir de soluciones fuertes podremos establecer equivalencia entre las soluciones integrales y las generalizadas, a las que aplicaremos estimaciones propias de la teoría de semigrupos. Consideramos el siguiente problema:

Sea H un espacio de Hilbert con norma $|\cdot|$ y producto escalar $(\cdot,\cdot)$. Consideramos la siguiente inclusión diferencial:

$$\frac{dy}{dt} \in -Ay + F(y), \qquad t \in [0, T], \tag{3.14}$$

$$y(0) = y_0 \in H, \tag{3.15}$$

donde $A : D(A) \subset H \to H$ es un operador lineal (no acotado) con $\overline{D(A)} = H$ e inversa compacta tal que

$$(-Ax, x) \leq 0 \qquad \text{para todo} \qquad x \in D(A)$$

y con e^{-At} un semigrupo analítico. (Este es un caso particular de la teoría desarrollada por Melnik & Valero [118] que también cubre operadores propiamente multivaluados y sub-diferenciales $A : D(A) \subset X \to 2^X$ con X un espacio de Banach cualquiera.) Asumimos además que F tiene

¶En realidad para la demostración del teorema basta la noción más general de hemicontinuidad, pero a nosotros nos basta aquí con esta versión simplificada.

valores convexos, $F : H \to C_v(H)$, que $F(0)$ es acotado, y como antes, F además satisface la condición de Lipschitz

$$\mathrm{d}_H(F(u), F(v)) \leq C_1|u - v|$$

(en particular, esto implica que F tiene siempre valores acotados).

Como con las inclusiones diferenciales ordinarias, una solución fuerte $y(\cdot)$ de (3.14)-(3.15) es una función continua definida en $[0, T]$ con $y(0) = y_0$ e $y(\cdot)$ absolutamente continua en cualquier compacto de $(0, T)$, y tal que se tiene (3.14) e.c.t. $(0, T)$. Sin embargo, es útil manejar una noción más débil de soluciones, que siguiendo el caso univaluado notamos solución generalizada.

Definición 3.19. *La función $y : [0, T] \to H$ se dice* solución generalizada *de* (3.14)-(3.15) *si es continua, $y(0) = y_0$, y existe una selección $f \in L^1([0, T]; H)$ de F (esto es $f(t) \in F(y(t))$ e.c.t. $[0, T]$), tal que y satisface*

$$y(t) = e^{-At}y_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds \tag{3.16}$$

e.c.t. $t \in [0, T]$ (i. e. $y(t)$ es solución generalizada de $dy/dt = -Ay + f(t)$).

Antes de mostrar como podemos definir un semiflujo generalizado usando esta última definición, comentaremos un poco su relación con la dada en el trabajo de Melnik y Valero. Allí ellos crean una teoría más general donde el operador lineal A puede ser también multivaluado (para detalles a este respecto véase el Capítulo III en Barbu [14]). Para tratar con este término A se necesita introducir la noción (más general) de solución integral. En nuestro caso tal concepto para (3.16) se reduce a una función continua $y : [0, T] \to H$ con $y(0) = y_0$ tal que para todo $u \in D(A)$

$$|y(t) - u|^2 \leq |y(s) - u|^2 + 2\int_s^t (f(\tau) + Au, y(\tau) - u)\,d\tau, \quad t \geq s. \tag{3.17}$$

De nuevo, su extensión natural al caso multivaluado se convierte en la siguiente: una solución integral de (3.14)-(3.15) es una función $y(t)$ para la que existe una selección $f \in L^1([0, T]; H)$ de F tal que y es una solución integral de (3.16).

Puede verse que ambas nociones, solución generalizada e integral, son equivalentes para nuestro caso: primeramente, nótese que cualquier solución fuerte es una solución integral, esto es directo. Vemos ahora que una solución integral es generalizada: consideramos (gracias al Corolario 2.2 en Barbu [14, Cap. III]) una sucesión de soluciones fuertes $u_n = I(u_0^n)f_n$ con $f_n \to f$ y $u_0^n \to u_0$ en $L^1(0, T; H)$ y H respectivamente. Entonces $u_n \to u$ en $C([0, T]; H)$. La propiedad de contracción del semigrupo e^{-At} implica que

$$|e^{-At}u_0^n - e^{-At}u_0| \leq |u_0^n - u_0| \to 0,$$
$$\int_0^t |e^{-A(t-s)}f_n(s) - e^{-A(t-s)}f(s)|\,ds \leq \int_0^t |f_n(s) - f(s)|\,ds \to 0.$$

Como las soluciones fuertes u_n son generalizadas, podemos tomar límite para ver que las soluciones integrales del problema (3.14) son también soluciones generalizadas:

$$\begin{array}{ccccc} u_n(t) & = & e^{-At}u_0^n + & \int_0^t e^{-A(t-s)}f_n(s)\,ds \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ u(t) & = & e^{-At}u_0 + & \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds. \end{array}$$

Es bien sabido que siempre hay a lo más una única solución integral así como una única solución generalizada para (3.16) de donde se sigue que las definiciones son equivalentes.

Bajo nuestras condiciones, y usando la Definición 3.19, existe al menos una solución generalizada de (3.14)-(3.15), cf. [118], de modo que podemos tomar G como el conjunto de tales soluciones generalizadas. Para esta colección, la condición (A1) es cierta; mostramos que las dos condiciones de (A2') también se tienen. Aunque no aplicaremos el Teorema 3.12 directamente, ya que necesitamos comprobar (H4) para las propias soluciones, no obstante (A1) y (A2') serán necesarias para ello.

Comenzamos viendo la propiedad de equicontinuidad en subintervalos compactos de $(0,\infty)$ (bastaba con esto).

Proposición 3.20. *Para cada* $0<\theta<1$ *todas las soluciones de* (3.14) *satisfacen*

$$|u(t)-u(s)| \leq K_{[\epsilon,T]}(\theta,|u_0|)\big[|t-s|^{\theta}+|t-s|\big] \qquad \textit{para todos} \qquad t,s\in[\epsilon,T].$$

Para probar este resultado, necesitamos el siguiente lema de Henry [73]:

Lema 3.21. *Se tienen las siguientes dos estimaciones: existe un* $\lambda>0$ *tal que para cualquier* $0\leq\alpha<1$

$$\|A^{\alpha}\mathrm{e}^{-At}\|_{\mathrm{op}} \leq C_{\alpha}t^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{3.18}$$

y para cualquier $0<\alpha<1$

$$|(\mathrm{e}^{-At}-I)x| \leq C'_{\alpha}t^{\alpha}|A^{\alpha}x|. \tag{3.19}$$

Otro resultado previo que debemos observar es que las condiciones sobre F dan cotas uniformes para todas las soluciones.

Lema 3.22. *Si* $u(t)$ *es una solución de* (3.14) *y* $f(t)\in F(u(t))$ *entonces*

$$|f(t)| \leq M(T,|u_0|) \qquad \textit{para todo} \qquad t\in[0,T].$$

Demostración. La condición de Lipschitz para F implica que

$$|F(u)| \leq C_1|u| + \text{diám}[F(0)] \equiv C_0 + C_1|u|.$$

En particular, como toda solución de (3.14) verifica

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t)$$

con $f(t)\in F(u(t))$, tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+|A^{1/2}u|^2 \leq C_0|u|+C_1|u|^2$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt}|u|^2 \leq C_0^2+(1+2C_1)|u|^2,$$

de donde sigue el resultado. □

Demostración de la Proposición 3.20. Esencialmente seguimos el trabajo de Henry [73]. Considérese $u(t+h)-u(t)$ con $t\geq\epsilon$; usando la expresión integral para la solución, tenemos

$$u(t+h)-u(t) = (e^{-Ah}-I)e^{-At}x_0 + \int_0^t (e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}f(s)\,ds + \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s)\,ds,$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
|u(t+h)-u(t)| &\leq C'_\theta h^\theta |A^\theta e^{-At} x_0| + \int_0^t C'_\theta h^\theta |A^\theta e^{-A(t-s)} f(s)|\, ds + \int_t^{t+h} |f(s)|\, ds \\
&\leq C'_\theta h^\theta C_\theta e^{-\lambda t} t^{-\theta} |x_0| + C'_\theta h^\theta C_\theta \int_0^t (t-s)^{-\theta} |f(s)|\, ds + hM(T, |u_0|) \\
&\leq K(\theta, |x_0|, \epsilon, T) h^\theta + hM(T, |u_0|)
\end{aligned}
$$

lo que prueba la equicontinuidad. □

Para la segunda parte de (A2) vemos que las soluciones están acotadas en $D(A^\alpha)$, lo que nos dará la compacidad al estar dicho espacio inyectado de forma compacta en H. La prueba es casi inmediata, ya que

$$
\begin{aligned}
|A^\alpha u(t)| &\leq \|A^\alpha e^{-At}\|_{\text{op}} |u_0| + \int_0^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\|_{\text{op}} M(|u_0|, s)\, ds \\
&\leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\lambda t} |u_0| + C_\alpha M(|u_0|, t) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\lambda(t-s)}\, ds \\
&\leq K(t, |u_0|).
\end{aligned}
$$

Ahora necesitamos ver que sucesiones de soluciones con convergencia en tiempo inicial tienen subsucesiones convergentes a límites que son también solución. Dadas soluciones u_n, primero usamos el Teorema de Ascoli-Arzelà para extraer una subsucesión diagonal (y que renombraremos igual) que converja uniformemente en cualquier compacto de $(0, \infty)$ a un límite u (continuo en $(0, \infty)$), y por las acotaciones anteriores, podemos suponer sin pérdida de generalidad (rebautizando una subsucesión más) que $f_n \rightharpoonup f$ en $L^1((0,T); H)$.

Mientras que para (A2') sólo requeríamos convergencia en compactos de $(0, \infty)$ (que es lo que hemos probado antes), ahora queremos ver que $u(t)$ es solución generalizada de (3.14), y por la Definición 3.19 esto requiere que $u(t)$ sea continua en todo $[0, \infty)$ y satisfaga (3.16). Pero ambas propiedades se tienen pasando al límite en las expresiones verificadas por u_n, i. e. $u(t)$ satisface

$$
u(t) = e^{-At} z + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds,
$$

de donde $u(t) \to z$ cuando $t \to 0$ y la función es continua en $[0, \infty)$. Queda ver que $f(t) \in F(u(t))$, pero esto sigue de nuevo del Teorema de Convergencia, ya que F es semicontinua superiormente.

Así u es solución generalizada de

$$
\frac{du}{dt} = -Au + f(t).
$$

Por tanto hemos probado que se tiene (H4), y que el conjunto de todas las soluciones generalizadas de (3.14) forma un semiflujo generalizado.

3.4 Relaciones entre las dos teorías de atractores

Nuestro interés en estas dos teorías de produjo inicialmente por su aplicación para el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones. De hecho, ambos artículos representan dos métodos abstractos de desarrollar y generalizar la noción de atractor global para sistemas dinámicos univaluados a sistemas de evolución multivaluados (ya sea a partir de sistemas sin unicidad o de inclusiones diferenciales). Ahora comentamos las analogías y diferencias entre los resultados de ambas teorías relativos a la existencia de atractor.

La primera analogía entre ambas visiones, como no podía ser de otra manera, es el sentido en que definen los conceptos de atracción, absorción, etc, dados por Melnik y Valero se hacen a partir de su m-semiflujo G_{MV}, mientras Ball usa la m-aplicación equivalente $T(t)$ generada por la colección G_B de soluciones (cf. (3.3)). En lo que sigue usaremos $G(t)$ para denotar tanto a $G_{MV}(t)$ como a $T(t)$ si no hay confusión posible.

Los conceptos más importantes considerados son los siguientes:

Definición 3.23.

(a) *Se dice que A* atrae *B si* $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(G(t,B),A)=0$.

(b) *El semiflujo G es* eventualmente acotado *si para cualquier acotado B, existe una constante suficientemente grande $\tau=\tau(B)$ tal que $\gamma_\tau^+(B)$ es acotado, donde $\gamma_\tau^+(B)$, como es usual en la literatura precedente de sistemas dinámicos, denota el conjunto de todos los puntos alcanzados en cualquier tiempo superior a τ por las soluciones que empiezan en B:* $\cup_{t\geq\tau}G(t,B)$.

(c) *El conjunto* ω-límite de *M se define como el conjunto de límites de todas las sucesiones convergentes $\{\xi_n\}$ donde $\xi_n\in G(t_n,M)$. Como en el caso univaluado, esto es lo mismo que la intersección de todos los conjuntos $\gamma_t^+(M)$ con $t\in\Gamma_+$.*

(d) *El semiflujo es* puntualmente disipativo *si hay un acotado B_0 tal que atrae todas las soluciones (así las soluciones son "absorbidas" por cualquier entorno de B_0).*

(e) *El semiflujo es* asintóticamente superiormente semicompacto *si para todo acotado B tal que para algún tiempo $T(B)\in\Gamma_+$, $\gamma_{T(B)}^+(B)\in\mathcal{B}(X)$, cualquier sucesión $\xi_n\in G(t_n,B)$ con $t_n\to\infty$ es relativamente compacto en X.*

(f) *Finalmente, se dice que el semiflujo es* asintóticamente compacto *si para cualquier sucesión de soluciones φ_n con $\{\varphi_n(0)\}$ acotado, y cualquier sucesión de tiempos $t_n\to\infty$, el conjunto $\{\varphi_n(t_n)\}$ es relativamente compacto.*

Obviamente, la condición de compacidad asintótica es equivalente a ser asintóticamente superiormente semicompacto y ser eventualmente acotado.

Hay matizaciones que hacer con respecto a la definición de "atractor" de ambos trabajos, y sobre las que volveremos más adelante en los próximos capítulos (para comentarios esquemáticos de las pruebas véase el Apéndice A). La definición dada por Melnik & Valero es, como cabía esperar, más general que la de Ball:

Definición 3.24. *(cf.* [118]*) Se dice que el conjunto $\mathcal{A}\subset X$ es un* atractor global *del semiflujo multivaluado G si:*

(1) *Es atrayente, i.e,*

$$\mathrm{dist}(G(t,B),\mathcal{A})\to 0 \text{ cuando } t\to+\infty, \quad \text{para todo} \quad B\in\mathcal{B}(X);$$

(2) *$\mathcal{A}$ es negativamente semi-invariante, i. e., $\mathcal{A}\subset G(t,\mathcal{A})$, para todo $t\in\Gamma_+$.*

En este sentido, un primer resultado es el siguiente:

Teorema 3.25. *(cf.* [118, Teor. 1 y 2]*) Si G es un m-semiflujo asintóticamente compacto y $G(t,\cdot)$ es s.c.s. y tiene valores cerrados, el conjunto $\omega(B)$ es compacto, no vacío, el mínimo conjunto cerrado que atrae a B, y es negativamente invariante. Por tanto, el conjunto $\mathcal{A} = \cup_{B\in\mathcal{B}(X)}\omega(B)$ es un atractor global (el mínimo posible) para G.*

En la prueba se ve que las hipótesis de s.c.s. y valores cerrados para cada $G(t,\cdot)$ pueden ser sustituidas por la de grafo cerrado.

Nota 3.26. Sin embargo, en el sentido de la definición anterior, el atractor global (aún el minimal) puede coincidir con el espacio total, opción obviamente no deseable por ser demasiado amplia.

No obstante, la definición es óptima debido a algunos ejemplos multivaluados en los que no hay acotación ni carácter cerrado del atractor, véase Nota 4 y Nota 6 en [118]. De hecho, el carácter estrictamente invariante también es problemático en general en el contexto no autónomo y multivaluado, como en próximos capítulos (los atractores fuertes para sistemas multivaluados no autónomos, aplicado al caso de ecuaciones con retardo, serán tratados en el Capítulo 6).

En suma, en la práctica se desea que el atractor global sea compacto e invariante (i. e. $\mathcal{A} = G(t,\mathcal{A})$, para todo $t \geq 0$), que es la definición clásica para el caso univaluado y la dada por Ball, ya que en el caso autónomo, no sólo univaluado sino también multivaluado, si el atractor ha de ser cerrado, acotado e invariante, existe[||] un atractor minimal que forzosamente ha de ser la clausura de la unión de los ω-límites de todos los acotados, del mismo modo que si ha de ser compacto e invariante, es el compacto maximal con dicha propiedad.

En realidad, la definición más estricta (y usual) de la nota anterior es la considerada en los ejemplos de [118] y respecto de la cual se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.27. *(cf.* [118]*, Teorema 3 y Nota 8) Sea G_{MV} un m-semiflujo puntualmente disipativo y asintóticamente superiormente semicompacto, y supongamos además que $G_{MV}(t,\cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ tiene grafo cerrado. Si para cualquier acotado B existe un tiempo $T(B)$ tal que $\gamma^+_{T(B)}(B)$ es acotado, entonces G_{MV} tiene un atractor global $\mathcal{A}$ que es compacto y el mínimo entre todos los cerrados que atraen acotados.*

Obsérvese que la condición de que G_{MV} tenga grafo cerrado se satisface automáticamente si $G_{MV}(t,\cdot) : X \to C(X)$ es semicontinua superiormente para cualquier $t \in \Gamma_+$.

El atractor que se obtiene en el Teorema 3.27 es en principio sólo negativamente semi-invariante, pero se convierte en invariante si se tiene

$$G_{MV}(t_1+t_2,x) = G_{MV}(t_1,G_{MV}(t_2,x)) \qquad \text{para todo} \qquad x \in X$$

(lo que llamábamos m-semiflujo en sentido fuerte, recuérdense los comentarios de la Sección 3.2, véase también el Apéndice A).

El resultado dado en [12] es, por supuesto, similar.

Teorema 3.28. *(cf.* [12, Teor. 3.3]*) Un semiflujo generalizado G_B tiene atractor global si y sólo si G_B es puntualmente disipativo y asintóticamente compacto. El atractor global $\mathcal{A}$ es único y viene dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(B).$$

Más aún, $\mathcal{A}$ es el máximo compacto invariante de X.

[||] Para evitar repeticiones innecesarias y no enturbiar la comparación dejamos la prueba para el Capítulo 5, en el marco adecuado: véase la Proposición 5.40.

Obsérvese que aunque el Teorema 3.27 parece plantear sólo condiciones suficientes (frente a las del Teorema 3.28 en el que son también necesarias), en realidad es fácil ver que las tres hipótesis de eventualmente acotado, puntualmente disipativo y asintóticamente superiormente semicompacto son equivalentes a la existencia de un atractor global compacto $\mathcal{A}$. Vimos en la Sección 3.2 que las condiciones (H2) y (H3) permiten tener un m-semiflujo fuerte a partir de un semiflujo generalizado, y entonces las dos nociones de atractor coinciden. Las últimas frases en ambos resultados son estándar y propias del atractor global de sistemas autónomos.

La única diferencia aparente entre los dos resultados es que Melnik y Valero piden a la m-aplicación $G_{MV}(t,\cdot)$ que tenga valores cerrados y sea s. c. s. o que satisfaga la condición de grafo cerrado. Ambas condiciones son consecuencias de la propiedad (H4). Más aún, el m-semiflujo procedente de un semiflujo generalizado hemos visto que es ε s. c. s. y que la m-application $T(t)(\cdot)$ tiene valores compactos (Proposición 3.2), de donde en particular el m-semiflujo es s. c. s.

De hecho, dado un problema (P) cuyas soluciones forman un semiflujo generalizado, para comprobar que

$$T(t)x = \{\varphi(t,x) \quad | \quad \varphi \text{ solución de } (P),\ \varphi(0)=x\}$$

es cerrado, consideramos una sucesión de puntos $x_n = \varphi_n(t)$ con $\varphi_n(0) = x$ convergiendo a un punto $\bar{x} \in X$. Trivialmente (H4) nos da una solución φ tal que $\varphi(0) = x$ y $\varphi_\mu(s) \to \varphi(s)$ para todo $s \in \Gamma_+$ y así $\bar{x} \in G(t,x)$.

Vemos ahora que (H4) también implica que $T(t)(\cdot)$ tiene grafo cerrado, sea $\{(x_n, y_n)\}$ una sucesión de pares que converge a (x,y) con $(x_n,y_n) \in \operatorname{Grafo} T(t)(\cdot)$. Entonces existe una sucesión de soluciones $\{\varphi_n\}$ con $\varphi_n(0) = x_n$ y $\varphi_n(t) = y_n$, pero por (H4) podemos extraer una subsucesión convergiendo a otra solución φ de (P) con $\varphi(0) = x$ y $\lim\limits_{\mu\to\infty} \varphi_\mu(s) = \varphi(s)$ para todo $s \in \Gamma_+$. Así $\varphi(t) = y$ y $(x,y) \in \operatorname{Grafo} T(t)(\cdot)$.

Capítulo 4

Atractores para las Ecuaciones de Navier-Stokes 3D con Ruido Aditivo

Como ya anunciamos en el capítulo anterior, Ball [12] introdujo el concepto de semiflujo generalizado como medio para tratar soluciones para ecuaciones sin unicidad (o cuando se desconoce si se tiene o no dicha propiedad), usándolo en particular para mostrar que las ecuaciones de Navier-Stokes 3D tienen un atractor global si las soluciones débiles son continuas de $(0, \infty)$ en L^2. En este capítulo, adaptamos su trabajo para tratar ecuaciones estocásticas sin unicidad de solución, y damos un resultado similar concerniente a la existencia de atractor para dichas ecuaciones, cuando la perturbación estocástica consiste en un ruido aditivo.

4.1 Introducción

Para ciertas clases de ecuaciones diferenciales deterministas, de las que el ejemplo más notable es, en mecánica de fluidos, el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes 3D, se puede probar existencia de solución pero no se sabe probar su unicidad (ni lo contrario, es un problema abierto). A pesar de esta contrariedad, aún es posible considerar tales ecuaciones desde el punto de vista de los sistemas dinámicos (en un sentido multivaluado). Varias aproximaciones posibles han sido desarrolladas por Ball [12], Melnik & Valero [118], y Sell [153], entre otros, como ya hemos visto en el capítulo anterior.

En particular, ha habido una gran variedad de intentos para aplicar la teoría de atractores globales a las ecuaciones de Navier-Stokes 3D, a pesar del problema ya comentado sobre el desconocimiento de la propiedad de unicidad. En concreto, hay dos resultados que no requieren hipótesis adicionales: Foias & Temam [60] construyeron un conjunto, formado por soluciones fuertes, que atrae a todas las soluciones débiles en la topología débil del espacio de fases natural; y Sell [153] analizó el flujo inducido en el espacio de todas las soluciones, mostrando que éste tiene un atractor global. Sin embargo, ambos resultados no son del todo satisfactorios en tanto que tratan soluciones fuertes que existen globalmente y, por otro lado, un espacio de fases que no es el natural. Los dos resultados que se hallan más cerca a la teoría estándar requieren partir de hipótesis extras no probadas: Foias & Temam [59] demostraron que la existencia de soluciones fuertes definidas globalmente (en esencia, tanto como probar unicidad) implica automáticamente la existencia de un atractor global, mientras que Ball [12] deduce el mismo resultado si asume que las soluciones débiles del problema son trayectorias continuas en el espacio de fases.

En este capítulo consideramos una versión estocástica de las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D. Análogamente al caso determinista, la existencia de solución es conocida pero no así la unicidad (e.g. Bensoussan & Temam [16]). Dos de los tratamientos anteriores del caso 3D determinista han sido extendido para tratar el caso estocástico: el trabajo de Sell fue trasladado por Flandoli & Schmalfuß [57], y el de Foias & Temam [59] por Crauel & Flandoli [47]. Aquí nosotros desarrollamos una teoría análoga a la de Ball [12]. (Para un planteamiento más general para ecuaciones estocásticas sin unicidad, véase Caraballo *et al.* [29]).

Comenzamos nuestro estudio con un breve resumen en la Sección 4.2 de algunos resultados relativos a sistemas dinámicos aleatorios en los que se desarrolla la teoría de atractores aleatorios. En la Sección 4.3, siguiendo a Flandoli & Schmalfuß [57], recordamos el concepto de soluciones débiles para las ecuaciones de Navier-Stokes 3D. Entonces introducimos (Sección 4.4) la noción de semiflujo generalizado estocástico, y probamos que las soluciones débiles del problema forman un tal semiflujo estocástico si y sólo si cada una de las soluciones consideradas son continuas de $[0, \infty)$ en el espacio de fases natural H. En la Sección 4.5 desarrollamos la teoría general de atractores para semiflujos estocásticos generalizados, y la aplicamos al problema que nos interesa (bajo la hipótesis ya anunciada de soluciones continuas) en la Sección 4.6. Finalmente, terminamos el capítulo con algunos comentarios sobre los resultados obtenidos.

4.2 Sistemas dinámicos aleatorios univaluados y sus atractores

El principal problema que se encontraron en los inicios de la teoría de atractores para sistemas dinámicos aleatorios y estocásticos fue el del carácter no autónomo de las ecuaciones diferenciales. Digamos, inicialmente y por fijar ideas en un plano determinista, que en una ecuación diferencial no autónoma con dato inicial en tiempo s y siendo $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -\alpha x(t) + t, \\ x(s) &= x_0, \end{aligned}$$

la solución viene dada por

$$x(t; s, x_0) = (x_0 + 1/\alpha^2 - s/\alpha)e^{-\alpha(t-s)} + t/\alpha - 1/\alpha^2.$$

No se puede por tanto hablar de atractor en el sentido tradicional, i. e. el compacto invariante atrayente cuando $t \to \infty$, ya que las soluciones no convergen, sin embargo, es obvio que sí siguen cierto conjunto, que se mueve con el paso del tiempo: $\mathcal{A} = \{A(t) = t/\alpha - 1/\alpha^2\}$. Esta familia está formada (para cada tiempo t fijado) por un compacto, que atrae a las soluciones si éstas comenzaran desde tiempos más remotos ($s \to -\infty$), lo que llamamos "atracción en tiempo t" o usando el término anglosajón, más extendido, "atracción *pullback* en tiempo t". En realidad, el atractor "usual", en el caso autónomo, también puede verse obviamente en este sentido, ya que el tiempo inicial no importaba, sólo la diferencia, y no se trataría entonces de un fenómeno que en el futuro acaba en el atractor habiendo comenzado en el presente, sino un fenómeno que está ocurriendo "desde siempre" y que en tiempo presente ya ha llegado hasta cierto objeto.

Por supuesto, en el caso estocástico, hay una dificultad añadida: la aleatoriedad debe estar presente "desde siempre", esto implica definir procesos (e.g. de Wiener) de dos caras (cf. Chueshov [41]), aunque la integral se hará, como siempre en una semirrecta $[s, \infty)$ (con $s \to -\infty$). A este respecto, existen dos notaciones, la más natural quizás la de Crauel *et al.* [45], donde la realización de una trayectoria se representa por ω y los tiempos s, $t \in \mathbb{R}$ aparecen explícitamente, y otra, la que usaremos en esta memoria, en la formulación del cociclo, que agrupa ω y s, predominante en los trabajos estocásticos y aleatorios (cf. Crauel & Flandoli [46], véase Apéndice A para más detalles).

Recordamos ahora la definición de un sistema dinámico aleatorio (para más información sobre el tema, remitimos al monográfico de Arnold [4]). Como es lo único que nos interesa en este caso, nos referimos exclusivamente al caso de tiempo continuo aquí.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\theta_t : \Omega \to \Omega,\ t \in \mathbb{R}\}$ una familia de transformaciones que conservan la medida tales que $(t,\omega) \mapsto \theta_t\omega$ es medible, $\theta_0 = \mathrm{id}$, y $\theta_{t+s} = \theta_t\theta_s$ para todo par $s, t \in \mathbb{R}$. El flujo θ_t unido al correspondiente espacio de probabilidad,

$$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$$

se llama *sistema dinámico (medible)*.

Sea (X, d) un espacio polaco (espacio métrico completo y separable) equipado con la σ-álgebra de sus borelianos, $\mathcal{B}$. Un sistema dinámico aleatorio (SDA) continuo sobre (X, d) asociado a θ es una aplicación medible

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X & \to & X \\ (t, \omega, x) & \mapsto & \varphi(t,\omega)x \end{array}$$

tal que P-c. s.

(i) $\varphi(0, \omega) = \mathrm{id}$ en X

(ii) $\varphi(t+s, \omega) = \varphi(t, \theta_s\omega) \circ \varphi(s, \omega)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$ (propiedad del cociclo)

(iii) $\varphi(t, \omega) : X \to X$ es continua.

Para tales sistemas, los atractores aleatorios fueron introducidos primeramente por Schmalfuß [148] y por Crauel & Flandoli [46], con considerable desarrollo en Crauel *et al.* [45].

Un conjunto aleatorio compacto $\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de conjuntos compactos indexados por ω tal que para todo $x \in X$ la aplicación $\omega \mapsto \mathrm{dist}(x, K(\omega))$ es medible con respecto a $\mathcal{F}$.

Para tratar el concepto de atracción, usamos de nuevo la semidistancia de Hausdorff (cf. Sección 3.2). Decimos que un conjunto aleatorio $\{K(\omega)\}$ es atrayente si para todos los conjuntos acotados deterministas $B \subset X$ tenemos

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\varphi(t, \theta_{-t}\omega)B, K(\omega)) = 0 \qquad P-\text{c. s.}$$

Puesto que $\varphi(t, \theta_{-t}\omega)u_0$ puede ser interpretada como la posición en tiempo cero de la trayectoria que estaba en u_0 en tiempo $-t$, esta convergencia es llamada, como en el ejemplo determinista de antes, *convergencia en sentido pullback*, lo que indica esencialmente que la atracción es "desde $t = -\infty$".

Un compacto aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ se dice *un atractor aleatorio* para el SDA φ si es atrayente (en el sentido anterior) e invariante, esto es

$$\varphi(t, \omega)\mathcal{A}(\omega) = \mathcal{A}(\theta_t\omega) \qquad \text{para todo} \qquad t \geq 0$$

P-c. s.

El resultado estándar que nos asegura la existencia de atractores aleatorios es similar al de la teoría determinista (e. g. Babin & Vishik [10], Hale [68], Ladyzhenskaya [98], Robinson [142], Temam [160]): la siguiente formulación se debe a Crauel [44].

Teorema 4.1. *Bajo la notación anterior, existe un atractor aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ si y sólo si existe un compacto atrayente $K(\omega)$.*

4.3 Soluciones débiles de las ecuaciones estocásticas de Navier-Stokes 3D

Consideraremos las ecuaciones de Navier-Stokes con ruido aditivo y en un dominio acotado suficientemente regular $D \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - f = \dot{W}_t & \text{en} & [0,\infty) \times D, \\ \text{div } u = 0 & \text{en} & [0,\infty) \times D, \\ u = 0 & \text{en} & [0,\infty) \times \partial D, \\ u(0,x) = u_0(x) & & x \in D; \end{array} \tag{4.1}$$

aquí ν es la viscosidad cinemática, p denota el campo de presión, u el campo de velocidades, f es una fuerza que actúa, independiente del tiempo, y W_t es un proceso de Wiener de dos caras que especificamos con más detalle más adelante. [Por supuesto, la notación $\dot{W}_t$ es por conveniencia, y la ecuación en derivadas parciales (4.1) será interpretada en un sentido integral, como explicitamos después]. La presencia del término estocástico requiere una modificación de la definición determinista de solución débil. En lo que sigue, adoptamos el enfoque de Flandoli & Schmalfuß [57], usando y modificando en parte su presentación de acuerdo con nuestro objetivo.

Primeramente, necesitamos introducir algo de notación para tratar la ecuación en el sentido habitual: denotamos por $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y de divergencia nula sobre D con soporte compacto contenido estrictamente en D. Por H denotamos la clausura de $\mathcal{V}$ en $[L^2(D)]^3$ y por V su clausura en el espacio $[H_0^1(D)]^3$; usaremos la notación $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ para las respectivas normas. Podemos definir el operador bilineal $B(u,v) : V \times V \to V'$ via

$$\langle B(u,v), z\rangle = \sum_{i,j=1}^{3} \int_D z_i(x) u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\, dx.$$

Si Pr_H es la proyección ortogonal de $[L^2(D)^3]$ en H, entonces el operador de Stokes A se define como $Au = -\mathrm{Pr}_H \Delta u$. Notamos $D(A)$ al dominio de A; $D(A) = [H^2(D)]^3 \cap V$, y λ_1 el primer autovalor de A.

El ruido W_t que consideramos es un proceso de Wiener de dos caras (cf. Chueshov [41]) que toma valores en V tal que su matriz de covarianza, $\mathcal{Q}$, tiene traza finita en V y sus coeficientes de Fourier con respecto a la base de V formada por los autovectores de A son mutuamente independientes. Así, en la notación introducida en la Sección 4.2, el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es el espacio $(C_0(\mathbb{R}; V), \mathcal{B}_{C_0(\mathbb{R};V)}, P_{\mathcal{Q}})$ (con $P_{\mathcal{Q}}$ la medida de Wiener de covarianza $\mathcal{Q}$, cf. Da Prato & Zabczyk [50]), y la transformación que preserva la medida θ_t representada por su acción sobre cada uno de las trayectorias del Wiener, el operador "shift", de empuje, con el conveniente ajuste para mantenerse en el espacio indicado, i. e. con $W_{\theta_t\omega}(0) = 0$,

$$W_\cdot(\theta_t\omega) = W_{t+\cdot}(\omega) - W_t(\omega).$$

Para tratar problemas con términos de ruido aditivo haremos una sustitución que nos permite tratar el problema trayectoria a trayectoria: para ello usaremos la única solución estacionaria de la ecuación auxiliar de Stokes

$$dz + [(A+\alpha)z]\, dt = dW_t \tag{4.2}$$

que se define para todo $t \in \mathbb{R}$, éste es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck

$$z_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)(-A-\alpha)}\, dW_s;$$

que más rigurosamente, viene dado P-c. s. como

$$z_\alpha(t,\omega) = W_t(\omega) - \int_{-\infty}^{t} (A+\alpha)e^{(t-s)(-A-\alpha)} W_s(\omega)\, ds$$

(la inclusión del parámetro α será útil para nuestro propósito, aunque no es necesario para la prueba de existencia de soluciones). Algunas de las propiedades del proceso z_α serán recordadas más adelante a medida que nos sean necesarias.

Definición 4.2. *Dado $f \in [H^{-1}(D)]^3$ y una realización $W_t(\omega)$ del proceso de Wiener que sea continua de $[0,\infty)$ en V, decimos que $u \in L^2_{\text{loc}}([0,\infty);H)$ es una* solución débil *de las ecuaciones de Navier-Stokes (4.1) con ruido ω si*

- $u \in L^\infty_{\text{loc}}([0,\infty);H) \cap L^2_{\text{loc}}([0,\infty);V)$,
- $\frac{\partial}{\partial t}(u - W_t) \in L^{4/3}_{\text{loc}}([0,\infty);V')$,
- *para casi todo t y t_0 con $t \geq t_0 > 0$ y para $t_0 = 0$, se tiene*

$$V_1(u,\omega)(t) \leq V_1(u,\omega)(t_0) \tag{4.3}$$

donde

$$\begin{aligned} V_1(u,\omega)(s) \; &:= \; e^{-\int_0^s(-\lambda_1+2C^*|z_\alpha(r;\omega)|^8_{L^4})\,dr}|u(s) - z_\alpha(s;\omega)|^2 \\ &\quad - \int_0^s e^{-\int_0^\sigma(-\lambda_1+2C^*|z_\alpha(r;\omega)|^8_{L^4})\,dr} \\ &\quad \times 4\left[C_B^2|z_\alpha(\sigma;\omega)|^4_{L^4} + \frac{\alpha^2}{\lambda_1}|z_\alpha(\sigma;\omega)|^2 + \|f\|^2_{V'}\right] d\sigma, \end{aligned}$$

y

$$V_2(u;\omega)(t) \leq V_2(u;\omega)(t_0), \tag{4.4}$$

siendo

$$\begin{aligned} V_2(u;\omega)(s) \; &:= \; |u(s) - z_\alpha(s;\omega)|^2 + \int_0^s \|u(r) - z_\alpha(r;\omega)\|^2\, dr \\ &\quad - \int_0^s \left[2C^*|u(r) - z_\alpha(r;\omega)|^2|z_\alpha(r;\omega)|^8_{L^4}\right. \\ &\quad \left. +4C_b^2|z_\alpha(r;\omega)|^4_{L^4} + 4\alpha^2|z_\alpha(r;\omega)|^2/\lambda_1 + 4\|f\|^2_{V'}\right] dr \end{aligned}$$

- *y finalmente para todo $t \geq t_0 \geq 0$ y todo $\phi \in V$*

$$\begin{aligned} &\langle u(t) - u(t_0), \phi\rangle + \int_{t_0}^t \langle A^{1/2}u(s), A^{1/2}\phi\rangle\, ds + \int_{t_0}^t \langle B(u(s),u(s)),\phi\rangle\, ds \\ &= \langle W_t(\omega) - W_{t_0}(\omega), \phi\rangle + \int_{t_0}^t \langle f,\phi\rangle\, ds. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Las constantes C^* y C_B están explicitadas en el trabajo de Flandoli & Schmalfuß [57].

Obsérvese que si eliminamos los términos que incluyen W_t y z_α entonces (4.3) y (4.4) son consecuencias de la desigualdad estándar de la energía que se tiene en el caso determinista. Flandoli y Schmalfuß prueban que la definición es independiente de α.

Como es bien sabido, casi toda realización del proceso de Wiener tiene trayectorias continuas, $W_t \in C^0([0,\infty);V)$, como se pide en la definición. De hecho, Flandoli & Schmalfuß [57, Prop. 2.2, p. 368] prueban la existencia de tales soluciones débiles para el problema que nos atañe:

Proposición 4.3. *Para casi todo ω, dado $u_0 \in H$ y $f \in [H^{-1}(D)]^3$ existe una solución débil para la ecuación de Navier-Stokes asociada al ruido ω y tal que $u(0) = u_0$.*

4.4 Semiflujos estocásticos generalizados y las ecuaciones de Navier-Stokes 3D

Siguiendo el enfoque de Ball para semiflujos deterministas asociados a ecuaciones sin unicidad [12] damos ahora la definición de lo que entenderemos por semiflujo estocástico generalizado, y mostraremos que este concepto es aplicable a las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión tres con ruido aditivo si asumimos que las soluciones (débiles) son continuas de $(0, \infty)$ en H.

Definición 4.4. *Un* semiflujo estocástico generalizado (SEG) $\mathcal{G}$ en X con ruido Ω *es una familia de pares*

$$\{(\varphi, \omega) \quad | \quad \varphi : [0, +\infty) \to X, \ \omega \in \Omega\}$$

(llamadas soluciones*) satisfaciendo las siguientes hipótesis:*
(S1) Existencia: *P-c. s. en ω, para cada $z \in X$ existe al menos una $(\varphi, \omega) \in \mathcal{G}$ con $\varphi(0) = z$.*
(S2) Traslaciones de soluciones son soluciones: *Si $(\varphi, \omega) \in \mathcal{G}$ y $\tau \geq 0$, entonces $(\varphi^\tau, \theta_\tau \omega) \in \mathcal{G}$, donde $\varphi^\tau(t) := \varphi(\tau + t)$.*
(S3) Propiedad generalizada del cociclo: *Si (φ, ω) y $(\psi, \theta_t \omega)$ pertenecen a $\mathcal{G}$, con $\psi(0) = \varphi(t)$, entonces $(\phi, \omega) \in \mathcal{G}$, donde*

$$\phi(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{para} \quad 0 \leq \tau \leq t, \\ \psi(\tau - t) & \text{para} \quad \tau > t. \end{cases}$$

(S4) Semicontinuidad superior con respecto a datos iniciales: *si $(\varphi_n, \theta_{t_n}\omega) \in \mathcal{G}$ con $\varphi_n(0) \to z$ y $t_n \to 0^+$, entonces existe una subsucesión $(\varphi_{n'}, \theta_{t_{n'}}\omega)$ y un par (φ, ω) en $\mathcal{G}$ con $\varphi(0) = z$ tal que $\varphi_{n'}(t) \to \varphi(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Por supuesto, como uno desearía, la definición de Ball de semiflujo generalizado se recupera a partir de la dada si eliminamos la dependencia de ω (y las correspondientes referencias a Ω).

Dado un semiflujo estocástico generalizado, es posible definir una función multivaluada que llamaremos "cociclo generalizado" usando el conjunto de todos los estados alcanzables,

$$\Phi(t, \omega)E = \{\varphi(t) : (\varphi, \omega) \in \mathcal{G}, \, \varphi(0) \in E\}. \tag{4.6}$$

Ahora mostramos que esta aplicación multivaluada tiene propiedades similares a las del cociclo "usual" (cf. Sección 4.2).

Proposición 4.5. *Sea $\mathcal{G}$ un SEG, entonces P-*c. s.

$$\Phi(0, \omega)E = E \qquad \text{para todo} \quad E \subset X \tag{4.7}$$

y

$$\Phi(t + s, \omega)E = \Phi(t, \theta_s \omega)\Phi(s, \omega)E \qquad \text{para todo} \qquad t, s \in \mathbb{R}_+, \, E \subset X. \tag{4.8}$$

Más aún, toda aplicación $\Phi(t, \omega)$ tiene valores compactos y es semicontinua superiormente, i. e. para todo entorno N de $\Phi(t, \omega)x$, existe un entorno M de x tal que $\Phi(t, \omega)M \subset N$.

Demostración. La igualdad (4.7) es obvia por definición. Para probar (4.8) consideramos $x \in \Phi(t+s,\omega)E$; entonces existe $(\varphi,\omega) \in \mathcal{G}$ tal que $x = \varphi(t+s)$ con $\varphi(0) \in E$. Ahora, $(\varphi^s, \theta_s\omega)$ es un elemento de $\mathcal{G}$ por (S2): por lo tanto $x = \varphi^s(t)$, i. e. $x \in \Phi(t,\theta_s\omega)\varphi^s(0)$, y $\varphi^s(0) = \varphi(s) \in \Phi(s,\omega)\varphi(0)$.

Para ver la otra inclusión, tomamos $x \in \Phi(t,\theta_s\omega)\Phi(s,\omega)E$. Entonces existe un elemento $z \in \Phi(s,\omega)E$ con $x \in \Phi(t,\theta_s\omega)z$, y así existen pares $(\varphi,\theta_s\omega)$ y (ψ,ω) en $\mathcal{G}$ tales que $x = \varphi(t)$ con $\varphi(0) = \psi(s)$ y $\psi(0) \in E$. Ahora usamos la propiedad (S3), y consideramos

$$\phi(\tau) := \begin{cases} \psi(\tau) & \text{para } 0 \leq \tau \leq s, \\ \varphi(\tau - s) & \text{para } s < \tau. \end{cases}$$

Entonces $(\phi,\omega) \in \mathcal{G}$ y así $x \in \Phi(t+s,\omega)\psi(0) \subset \Phi(t+s,\omega)E$.

Puesto que se tiene (S4), es obvio que toda $\Phi(t,\omega)$ tiene valores compactos. Para ver que dicha aplicación es semicontinua superiormente, la propiedad anterior implica (cf. Aubin & Cellina [7]) que es equivalente comprobar ε-s. c. s. (recuérdese que esto es que para cada x, para todo $\epsilon > 0$ existe un valor $\delta > 0$ tal que la imagen por $\Phi(t,\omega)$ de la bola $B(x,\delta)$ está en un entorno ϵ de $\Phi(t,\omega)(x)$), lo cual es fácil de ver por contradicción. $\square$

Denotamos por $\mathcal{G}_{\rm SNS}$ el conjunto de todos los pares (φ,ω), donde φ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes 3D asociadas a la realización ω del ruido. Análogamente a la proposición 7.4 de Ball [12] tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{G}_{\rm SNS}$ es un semiflujo estocástico generalizado.*

(ii) *P-c. s. en ω, cada solución débil u (asociada con ω) es continua de $(0,\infty)$ en H.*

(iii) *P-c. s. en ω, cada solución débil u (asociada con ω) es continua de $[0,\infty)$ en H.*

Demostración. (i) *implica* (ii). Seguimos la prueba del Teorema 2.1 de Ball, que combina una versión del Teorema de Lusin con las propiedades de las soluciones débiles para deducir (ii) por contradicción.

Más precisamente, supongamos que $\mathcal{G}_{\rm SNS}$ es un semiflujo estocástico generalizado en H, sea ω un elemento del conjunto de probabilidad 1 dado por (S1) tal que existe al menos una solución débil. Supongamos entonces, por reducción al absurdo, que una solución débil cualquiera φ no es continua de $(0,\infty)$ en H. Por tanto, hay un intervalo de tiempo finito $I = (a, a+\delta)$, y un valor $t_0 \in J \equiv (a+\delta/3, a+2\delta/3)$ y una sucesión $h_j \to 0^+$ tales que

$$\varphi(t_0 + h_j) \not\to \varphi(t_0). \tag{4.9}$$

Puesto que $\varphi \in C([0,\infty); H_w)$, se tiene que es débilmente medible, y aplicando el Teorema de Pettis (e. g. Hille & Phillips [74, p. 73]) φ es fuertemente medible. El Teorema de Lusin (e. g. Oxtoby [126]) se puede aplicar para garantizar la existencia de un conjunto cerrado $F_j \subset J$ con $|J - F_j| \leq 1/j^2$ y la restricción $\varphi|F_j$ una función continua. Definimos entonces $E_j = J \cap F_j \cap (F_j - h_j)$; se tiene obviamente que $|J - E_j| \leq 2/j^2$ y por tanto

$$0 \leq |J - \cap_{n\geq 1} \cup_{j\geq n} E_j| \leq |J - \cup_{n\geq 1} \cap_{j\geq n} E_j| = 0,$$

de donde deducimos que $\varphi(t+h_j) \to \varphi(t)$ para casi todo $t \in J$.

Tomamos t_1 y t_2 en J, con $t_1 < t_0 < t_2$ y $\varphi(t_i + h_j) \to \varphi(t_i)$ cuando $j \to \infty$.

Ya que $(\varphi(t_1+\cdot),\theta_{t_1}\omega)\in\mathcal{G}_{\rm SNS}$ y $(\varphi(t_1+h_j+\cdot),\theta_{t_1+h_j}\omega)\in\mathcal{G}_{\rm SNS}$ con $\varphi(t_1+h_j+0)\to\varphi(t_1)$ cuando $h_j\to 0$, usando (S4) deducimos que existe una subsucesión y un par $(\psi,\theta_{t_1}\omega)\in\mathcal{G}_{\rm SNS}$ con $\psi(0)=\varphi(t_1)$ y

$$\varphi(t_1+h_\mu+t)\to\psi(t)\qquad\text{para todo}\qquad t\geq 0$$

cuando $\mu\to\infty$.

En particular, $\psi(t)=\varphi(t_1+t)$ para casi todo $t\in(0,a+2\delta/3-t_1)$. La propiedad (S3) nos garantiza que $(\phi,\theta_{t_1}\omega)\in\mathcal{G}_{\rm SNS}$, donde

$$\phi(t)=\begin{cases}\varphi(t+t_1) & 0\leq t\leq t_2-t_1,\\ \psi(t) & t>t_2-t_1.\end{cases}$$

Al ser débilmente continuas las soluciones que estamos considerando para nuestro problema, el semiflujo tiene la propiedad (en terminología de Ball) de *representantes únicos*, esto es, $(\varphi(t_1+\cdot),\theta_{t_1}\omega)$ y $(\phi(\cdot),\theta_{t_1}\omega)$ coincidiendo en casi todo $t\in(0,\infty)$ implica que $\phi(t)=\varphi(t_1+t)$ para todo $t\geq 0$. En particular, deducimos que $\varphi(t_0+h_\mu)$ tiende a $\phi(t_0-t_1)=\varphi(t_0)$ cuando $\mu\to\infty$, lo que es una contradicción.

(ii) *implica* (iii). Como cada solución u es continua en $(0,\infty)\to H$, sólo resta probar que se tiene continuidad en $t=0$. Pero esto es directo de (4.4) tomando $t_0=0$ y una sucesión cualquiera $t_j\to 0^+$, con lo que:

$$|u(0)-z_\alpha(0,\omega)|\leq \text{lím inf}\,|u(t_j)-z_\alpha(t_j,\omega)|$$
$$\leq \text{lím sup}\,|u(t_j)-z_\alpha(t_j,\omega)|\leq|u(0)-z_\alpha(0,\omega)|.$$

De donde, junto con la continuidad de z_α y la convergencia débil, se deduce (iii).

(iii) *implica* (i). La condición (S1) se tiene por la proposición 4.3 y (S3) es igualmente fácil de obtener; en cambio, sin (ii) o (iii) la propiedad de traslación (S2) no ha de verificarse necesariamente al no satisfacer las desigualdades de energía impuestas (necesarias por otro lado para la última condición) aunque la ecuación (4.5) sí se tenga para las trasladadas (cf. Flandoli & Schmalfuß [57, Lema 5.1]). Sin embargo, si suponemos (iii), cada solución débil asociada a (un apropiado) ω es continua en $[0,\infty)\to H$; por tanto $V_i(u,\omega)(t)$ $(i=1,2)$ son continuas para todo $t\geq 0$ y por tanto no crecientes, con lo que (S2) se tiene.

De este modo, sólo queda demostrar que se tiene (S4): sean $t_n\to 0^+$ y $(u_n,\theta_{t_n}\omega)\in\mathcal{G}_{\rm SNS}$ tales que $u_n(0)\to z$ en H. Tenemos que ver que existe una subsucesión $(u_\mu,\theta_{t_\mu}\omega)$ y $(u,\omega)\in\mathcal{G}_{\rm SNS}$ con $u(0)=z$ y $u_\mu(t)\to u(t)$ para todo $t\geq 0$. (Basta verlo para un intervalo finito de tiempo $[0,T]$ fijado y después proceder para $[0,\infty)$ por un argumento diagonal.)

Como las soluciones de la ecuación que consideramos, son relativas a diferentes realizaciones (trayectorias) del ruido $(\theta_{t_n}\omega)$, nos vemos obligados a aplicar la definición 4.2 usando distintos procesos z_α. Nos será útil entonces la propiedad del "cociclo" para dichos procesos, que recordamos a continuación (cf. Lema 3.6 en Flandoli & Schmalfuß [57]):

$$z_\alpha(t+s;\omega)=z_\alpha(t;\theta_s\omega)\qquad\forall t,s\in\mathbb{R}.$$

Ahora podemos obtener estimaciones para $u_n(t)-z_\alpha(t;\theta_{t_n}\omega)$: por (4.3) tenemos

$$\begin{aligned}|u_n(t)-z_\alpha(t;\theta_{t_n}\omega)|^2 \leq\ & e^{\int_0^t(-\lambda_1+2C^*|z_\alpha(s+t_n;\omega)|_{L^4}^8)\,ds}|u_n(0)-z_\alpha(t_n;\omega)|^2\\ &+\int_0^t e^{\int_\sigma^t(-\lambda_1+2C^*|z_\alpha(s+t_n;\omega)|_{L^4}^8)\,ds}\\ &\times 4\left[C_B^2|z_\alpha(\sigma+t_n;\omega)|_{L^4}^4+\frac{\alpha^2}{\lambda_1}|z_\alpha(\sigma+t_n;\omega)|^2+\|f\|_{V'}^2\right]d\sigma.\end{aligned}$$

Puesto que $z_\alpha(\cdot;\omega) \in C([0,\infty);H)$ (cf. Lema 3.4 en Flandoli & Schmalfuß [57]) se tiene que para cierta constante $C_T(\alpha;\omega) > 0$

$$|u_n(\cdot) - z_\alpha(\cdot + t_n;\omega)|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C_T(\alpha;\omega) \quad \text{para todo} \quad n. \tag{4.10}$$

Por otro lado, de (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} & |u_n(t) - z_\alpha(t;\theta_{t_n}\omega)|^2 + \int_0^t \|u_n(s) - z_\alpha(s;\theta_{t_n}\omega)\|^2\,ds \\ \leq\ & |u_n(0) - z_\alpha(t_n;\omega)|^2 + \int_0^t \Big[2C^*|u_n(\sigma) - z_\alpha(\sigma;\theta_{t_n}\omega)|^2 |z_\alpha(\sigma+t_n;\omega)|_{L^4}^8 \\ & \qquad + 4C_B^2|z_\alpha(\sigma+t_n;\omega)|_{L^4}^4 + \frac{4\alpha^2}{\lambda_1}|z_\alpha(\sigma+t_n;\omega)|^2 + 4\|f\|_{V'}^2\Big]\,d\sigma, \end{aligned}$$

de donde, usando (4.10), obtenemos (ajustando convenientemente la constante C_T si es necesario)

$$\|u_n(\cdot) - z_\alpha(\cdot;\theta_{t_n}\omega)\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_T(\alpha;\omega) \quad \text{para todo} \quad n. \tag{4.11}$$

Ahora es estándar deducir que

$$\left\| \frac{d}{dt}[u_n(\cdot) - z_\alpha(\cdot;\theta_{t_n}\omega)] \right\|_{L^{4/3}(0,T;V')} \leq C_T(\alpha;\omega) \quad \text{para todo} \quad n \tag{4.12}$$

(cambiando una vez más C_T adecuadamente).

Aplicando los resultados de compacidad bien conocidos, podemos asegurar la existencia de una subsucesión (que no rebautizamos) y una función $v \in C([0,T];H_w) \cap L^2(0,T;V)$ tales que, llamando $u = v + z_\alpha$, se tiene

$$\begin{aligned} u_n(t) - z_\alpha(t;\theta_{t_n}\omega) &\rightharpoonup u(t) - z_\alpha(t;\omega) \quad \text{en} \quad H, \quad \forall t \in [0,T], && (4.13)\\ u_n(t) - z_\alpha(t;\theta_{t_n}\omega) &\rightharpoonup u(t) - z_\alpha(t,\omega) \quad \text{en} \quad L^2(0,T;V), && (4.14)\\ \frac{d}{dt}[u_n(\cdot) - z_\alpha(\cdot;\theta_{t_n}\omega)] &\rightharpoonup \frac{d}{dt}[u(\cdot) - z_\alpha(\cdot;\omega)] \quad \text{en} \quad L^{4/3}(0,T;V'), && (4.15)\\ u_n &\to u \quad \text{en} \quad L^2(0,T;H), && (4.16)\\ u_n(t) &\to u(t) \quad \text{en} \quad H \quad \text{e.c.t. } t \in (0,T). && (4.17) \end{aligned}$$

A causa de (4.2) y las convergencias señaladas anteriormente, es fácil ver que $u(t)$ satisface (4.5) con dato inicial $z = \lim u_n(0)$. Pasando al límite, la desigualdad (4.3) es también inmediata. Siguiendo de nuevo a Ball, si escribimos (4.4) para cada término de la subsucesión y tomamos límites en el lado izquierdo (por el carácter débilmente semicontinuo inferiormente) y usando (4.17) en el miembro de la derecha, se obtiene (4.4) para $u(t) - z_\alpha(t;\omega)$. Así, se tiene que u es una solución débil, y por la hipótesis supuesta, u es continua en H; por tanto $V_2(u,\omega)(\cdot)$ es también continua y

$$V_2(u_n, \theta_{t_n}\omega)(\cdot) \to V_2(u,\omega)(\cdot) \qquad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Esto implica que $|u_n(t)| \to |u(t)|$, lo que, unido a la convergencia débil que teníamos, nos da la convergencia fuerte requerida de u_n a u en H y en conclusión (S4). $\square$

4.5 Atractores para semiflujos estocásticos generalizados

Como ya comentamos en el Capítulo 3, Ball [12] demuestra en su trabajo que condiciones equivalentes a la existencia de atractor global para un semiflujo (determinista) generalizado son el carácter puntualmente disipativo [esto es, que exista un conjunto acotado B_0 tal que para toda solución $\varphi \in G$ $\varphi(t) \in B_0$ para todo tiempo t suficientemente grande] y el carácter asintóticamente compacto [si para toda sucesión $\varphi_j \in G$ con datos iniciales $\varphi_j(0)$ uniformemente acotados, y cualquier sucesión $t_j \to \infty$, la sucesión $\varphi_j(t_j)$ tiene una subsucesión convergente]. Aquí probaremos un resultado similar, pero no completamente análogo ya que la aleatoriedad presente convierte al flujo en no autónomo y esto produce diferencias sustanciales con el modelo de Ball.

Definición 4.7. *Un* atractor* *para un semiflujo generalizado estocástico es una familia* $\mathcal{A} = \{A(\omega),\ \omega \in \Omega\}$, *de conjuntos compactos, negativamente invariantes, i. e.*

$$A(\theta_t\omega) \subset \Phi(t,\omega)A(\omega), \tag{4.18}$$

y que atraen en sentido pullback a todos los acotados, esto es, P-c. s.

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,\theta_{-t}\omega)D, A(\omega)) = 0, \qquad \text{para todo} \quad B \in \mathcal{B}(X).$$

Nota 4.8. En el concepto de atractor "global" aparece una propiedad de invarianza estricta (igualdad en (4.18) en vez de inclusión). Sin embargo, esta propiedad no siempre se puede conseguir en el caso multivaluado (cf. Apéndice A).

Daremos una condición equivalente a la existencia de atractor para el semiflujo generalizado estocástico siguiendo el resultado para sistemas dinámicos aleatorios univaluados de Crauel [44].

Diremos que un semiflujo estocástico generalizado es disipativo si tiene un compacto aleatorio atrayente, es decir, un conjunto $K(\omega)$ tal que si D es un conjunto (determinista) acotado cualquiera,

$$\operatorname{dist}(\Phi(t,\theta_{-t}\omega)D, K(\omega)) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad t \to \infty,$$

donde Φ es el cociclo generalizado definido en (4.6). Esto implica y motiva la introducción del siguiente concepto (aún más débil, necesario, pero suficiente también para iniciar nuestra construcción): el semiflujo se dice asintóticamente compacto si P-c. s., para todo conjunto acotado D y sucesiones $t_n \to \infty$ y $x_n \in \Phi(t_n, \theta_{-t_n}\omega)D$, existe una subsucesión en $\{x_n\}$ que es convergente.

Definimos el conjunto Ω-límite de un conjunto determinista dado D como

$$\Omega_D(\omega) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t>T} \Phi(t,\theta_{-t}\omega)D}.$$

Veamos algunas propiedades básicas de estos conjuntos.

Lema 4.9. *Sea $\mathcal{G}$ un semiflujo estocástico generalizado asintóticamente compacto. Entonces para todo conjunto determinista $D \in \mathcal{B}(X)$ se tiene P-c. s. que*

$$\Omega_D(\omega) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq n} \Phi(t,\theta_{-t}\omega)D}$$

*Realmente definimos atractor aleatorio en tiempo 0, aunque propiamente debería ser para todo par $(t,\omega) \in \mathbb{R}\times\Omega$, véase el Apéndice A para más detalles.

es no vacío, compacto y el mínimo conjunto que atrae a D:

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,\theta_{-t}\omega)D, \Omega_D(\omega)) = 0. \tag{4.19}$$

Más aún, es negativamente invariante, esto es

$$\Omega_D(\theta_t\omega) \subset \Phi(t,\omega)\Omega_D(\omega) \qquad \text{para todo} \qquad t \geq 0.$$

Demostración. Veamos primero que $\Omega_D(\omega)$ es no vacío. Considérese cualquier elemento $d \in D$ y una sucesión $\{t_n\}$ arbitraria y tal que $t_n \to \infty$. Por (S1) existen soluciones $(\varphi_n, \theta_{-t_n}\omega) \in \mathcal{G}$ tales que $\varphi_n(0) = d$; la compacidad asintótica implica que existe una subsucesión $\{\varphi_\mu(t_\mu)\}$ que converge a un elemento $z \in \Omega_D(\omega)$, y por tanto $\Omega_D(\omega)$ es no vacío. El conjunto $\Omega_D(\omega)$ es obviamente cerrado, pues es intersección de cerrados; veremos que de hecho es compacto (usaremos de nuevo un argumento diagonal): dada una sucesión $\{y_n\} \subset \Omega_D(\omega)$, existen sucesiones $t_n \to \infty$ y pares $(\varphi_n, \theta_{-t_n}\omega) \subset \mathcal{G}$ con $\{\varphi_n(0)\} \subset D$ y $d(\varphi_n(t_n), y_n) < \frac{1}{n}$. Usando la compacidad asintótica de nuevo existe una subsucesión convergente $\varphi_\mu(t_\mu) \to z$ y así $y_\mu \to z \in \Omega_D(\omega)$.

La prueba de atracción de $\Omega_D(\omega)$ puede ser omitida, pues es estándar, como en el caso univaluado, por contradicción, así como la minimalidad del conjunto que atrae.

Para probar el carácter negativamente invariante considérese $y \in \Omega_D(\theta_t\omega)$. Tenemos que ver que $y \in \Phi(t,\omega)\Omega_D(\omega)$. Por ser $y \in \Omega_D(\theta_t\omega)$, existen sucesiones $t_n \to \infty$ y $\{(\varphi_n, \theta_{-t_n+t}\omega)\} \subset \mathcal{G}$ con $\varphi_n(0) \in D$ tal que $y_n = \varphi_n(t_n)$ converge a y.

Ahora, tómese $n \geq n_0$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n_0$. Obsérvese que $x_n = \varphi_n(t_n - t) \in \Phi(t_n - t, \theta_{-(t_n-t)}\omega)D$ y, usando la propiedad del cociclo (Proposición 4.5), que $y_n \in \Phi(t,\omega)x_n$. Usando la compacidad asintótica existe una subsucesión (que no renombramos) x_n que converge hacia un elemento $x \in \Omega_D(\omega)$. Por otro lado, $y_n = \varphi_n^{t_n-t}(t)$ con $\varphi_n^{t_n-t}(0) = x_n$. Por (S4) existe otra subsucesión (que tampoco rebautizamos) y un par $(\varphi,\omega) \in \mathcal{G}$ con $\varphi(0) = x$ y $\varphi_n^{t_n-t}(s) \to \varphi(s)$ para todo $s \geq 0$. En particular, poniendo $s = t$ vemos que $\varphi_n^{t_n-t}(t) = y_n \to \varphi(t)$, y por tanto $y = \varphi(t) \in \Phi(t,\omega)x \subset \Phi(t,\omega)\Omega_D(\omega)$. □

Ahora tomamos la unión de todos los posibles conjuntos Ω-límites de acotados,

$$A(\omega) = \overline{\bigcup_{D\in\mathcal{B}(X)} \Omega_D(\omega)}, \tag{4.20}$$

obteniendo así el mínimo conjunto compacto y negativamente invariante[†] que atrae a todos los acotados (en el sentido de (4.19)). Este conjunto, así construido es el *mínimo atractor global*, como detallamos a continuación.

Proposición 4.10. *Un semiflujo estocástico generalizado tiene un atractor global minimal $A(\omega)$ si y sólo si tiene un compacto atrayente. En tal caso, $A(\omega)$ viene dado por* (4.20).

Demostración. Claramente, la condición de que exista el compacto atrayente es necesaria. Queda probar que también es suficiente, es decir, hay que ver que el conjunto $A(\omega)$ (el mínimo que atrae a los acotados, ha de venir forzosamente dado por (4.20)) es compacto y negativamente

[†]En el contexto de semiflujos multivaluados no autónomos, en particular, estocásticos, ésta es la noción correcta. Sin imponer condiciones adicionales sobre $\Phi(t,\omega)$ no es posible obtener un conjunto que sea también positivamente invariante. Una condición para conseguirlo sería pedir semicontinuidad inferior al cociclo generalizado $\Phi(t,\omega)$ (cf. Caraballo *et al.* [29]). En su trabajo determinista, Ball pide que la imagen de "su" Ω-límite Λ_B acabe entrando en el propio conjunto B para tiempos suficientemente grandes; una version análoga es ésta se podría dar en nuestro caso si a $\Omega_B(\omega)$ se le pide $\Omega_B(\theta_{-t_i}\omega) \subset B$ para una sucesión $t_i \to \infty$; pero en este contexto, dicha condición parece ser artificial. Para más comentarios véase el Apéndice A.

invariante. Puesto que $A(\omega)$ es cerrado, para la compacidad basta ver que es un subconjunto de un compacto, pero está incluido en $K(\omega)$ (el compacto atrayente) por la propia definición de disipatividad. La invarianza negativa se obtiene fácilmente de forma similar, gracias de nuevo al Lema 4.9:

$$\begin{aligned} A(\theta_t\omega) &= \overline{\cup_D \Omega_D(\theta_t\omega)} \\ &\subset \overline{\Phi(t,\omega) \cup_D \Omega_D(\omega)} \\ &\subset \Phi(t,\omega)\overline{\cup_D \Omega_D(\omega)} = \Phi(t,\omega)A(\omega); \end{aligned}$$

donde la primera inclusión se tiene por la invarianza negativa de los conjuntos $\Omega_D(\omega)$, y la igualdad final se tiene gracias a la semicontinuidad superior de $\Phi(t,\omega)$ (Proposición 4.5) con lo que la imagen de un compacto es compacto, y por tanto cerrado. □

4.6 Disipatividad y atractor para las ecuaciones de Navier-Stokes estocásticas 3D

Para el caso particular que nos interesa aquí, vamos a probar que se tiene una condición más fuerte que la disipatividad antes descrita. Veremos que existe un compacto no sólo atrayente sino absorbente, i. e. un compacto aleatorio $K(\omega)$ tal que P-c. s. para todo acotado determinista D existe un tiempo $T_D(\omega)$ tal que

$$\Phi(t,\theta_{-t}\omega)D \subset K(\omega) \qquad t \geq T_D(\omega).$$

Primeramente, siguiendo Crauel & Flandoli [47], probamos el mismo resultado pero con $K(\omega)$ sustituido por un acotado aleatorio $B(\omega)$ (en la terminología de Ball, vemos que el flujo es eventualmente acotado). Tomando $u(0) \in D$, y con $t_0 = 0$ en (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned} |u(t) - z_\alpha(t;\theta_{-t}\omega)|^2 \leq\ & e^{\int_0^t (-\lambda_1 + 2C^* |z_\alpha(s;\theta_{-t}\omega)|_{L^4}^8)\,ds} |u(0) - z_\alpha(0;\theta_{-t}\omega)|^2 \\ & +4\int_0^t e^{\int_\sigma^t (-\lambda_1 + 2C^* |z_\alpha(s;\theta_{-t}\omega)|_{L^4}^8)\,ds} \Big[C_B^2 |z_\alpha(\sigma;\theta_{-t}\omega)|_{L^4}^4 \\ & + \frac{\alpha^2}{\lambda_1} |z_\alpha(\sigma;\theta_{-t}\omega)|^2 + \|f\|_{V'}^2 \Big]\, d\sigma. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Seguimos la idea dada en el paso 5 en Crauel & Flandoli [47] entre otros: un simple argumento ergódico (cf. Crauel & Flandoli [47] o Flandoli & Schmalfuß [57, Lema 7.2]) garantiza que

$$\liminf_{\alpha\to\infty} \limsup_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |z_\alpha(s;\theta_{-\tau}\omega)|_{L^4}^8\, ds = 0, \tag{4.22}$$

y por tanto para α suficientemente grande existe un $t_0(\omega)$ tal que para todo $t \geq t_0$ tenemos

$$2C^* \frac{1}{t} \int_0^t |z_\alpha(s;\theta_{-t}\omega)|_{L^4}^8\, ds < \frac{\lambda_1}{2}. \tag{4.23}$$

En particular, para casi todo ω tenemos

$$\int_0^t (-\lambda_1 + 2C^* |z_\alpha(s;\theta_{-t}\omega)|_{L^4}^8)\, ds \leq -\frac{\lambda_1 t}{2} \quad \text{para} \quad t \geq t_0(\omega). \tag{4.24}$$

Tenemos por tanto una cota para el primer sumando que aparece en el miembro de la derecha en (4.21) puesto que $|u(0)|$ está acotado por hipótesis, y

$$z_\alpha(0, \theta_{-t}\omega) = z_\alpha(-t, \omega)$$

tiene crecimiento polinomial (cf. Lema 3.6 (ii) en Flandoli & Schmalfuß [57, p. 377] o (10) en Crauel & Flandoli [47]), i. e.

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{|z_\alpha(t,\omega)|^j_{L^4}}{|t|^j} = 0 \qquad \text{para} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Como el segundo sumando en el miembro derecho de (4.21) no depende de D, necesitamos una estimación que sea válida para todo $t \geq 0$. Para conseguirlo, transformamos dicho término empleando dos cambios de variables, $\sigma - t = s$ y $r - t = \rho$, como sigue:

$$\int_0^t e^{\int_\sigma^t (-\lambda_1 + 2C^* |z_\alpha(s;\theta_{-t}\omega)|^8_{L^4})\, ds} \left[C_B^2 |z_\alpha(\sigma;\theta_{-t}\omega)|^4_{L^4} + \frac{\alpha^2}{\lambda_1} |z_\alpha(\sigma;\theta_{-t}\omega)|^2 + \|f\|^2_{V'} \right] d\sigma$$

$$= \int_{-t}^0 e^{\int_s^0 (-\lambda_1 + 2C^* |z_\alpha(\rho;\omega)|^8_{L^4})\, d\rho} \left[C_B^2 |z_\alpha(s;\omega)|^4_{L^4} + \frac{\alpha^2}{\lambda_1} |z_\alpha(s;\omega)|^2 + \|f\|^2_{V'} \right] ds$$

Gracias a la continuidad, al crecimiento polinomial y el argumento ergódico (4.22)-(4.24) (con otro cambio de variables) para el proceso z_α, podemos proceder como en Crauel & Flandoli [47] para terminar la prueba.

Así, se tiene que si $u(0)$ está en un acotado, existe una variable aleatoria $r(\omega)$ y un tiempo $t_1(\omega, |u(0)|)$ tales que

$$|u(t)| \leq r(\omega) \qquad \text{para todo} \quad t \geq t_1(\omega, |u(0)|).$$

Sea entonces $B(\omega)$ la bola de centro cero y radio $r(\omega)$ en H.

Por otro lado, obsérvese (cf. Ball) que la prueba de la Proposición 4.6 también muestra que $\mathcal{G}_{\mathrm{SNS}}$ es compacto, i. e. dado ω, un sucesión de soluciones $(\varphi_n, \omega) \in \mathcal{G}_{\mathrm{SNS}}$ con $\{\varphi_n(0)\}$ acotado tiene una subsucesión que converge (a algo) para todo $t > 0$. En particular esto significa que $\Phi(1, \omega)$ es compacto, P-c. s., y así

$$K(\omega) = \Phi(1, \theta_{-1}\omega) B(\theta_{-1}\omega)$$

es un conjunto aleatorio compacto. Además, por su definición, $K(\omega)$ es absorbente, puesto que

$$\Phi(t+1, \theta_{-1-t}\omega) D = \Phi(1, \theta_{-1}\omega) \Phi(t, \theta_{-1-t}\omega) D$$

y por tanto para todo $t \geq t_1(\theta_{-1}\omega, D)$

$$\Phi(t+1, \theta_{-1-t}\omega) D \subseteq \Phi(1, \theta_{-1}\omega) B(\theta_{-1}\omega) = K(\omega).$$

Ahora, debido a esta absorción compacta, aplicando la Proposición 4.10 obtenemos la existencia de un atractor global (minimal) para las ecuaciones de Navier-Stokes 3D con perturbación estocástica aditiva.

Capítulo 5

Atractores Débiles para Sistemas Multivaluados

En el capítulo anterior analizábamos la existencia de atractor para un conjunto de soluciones del sistema de Navier-Stokes estocástico con ruido aditivo. En realidad el conjunto de soluciones era mayor si debilitábamos la definición, pero esta autorrestricción nos permitió establecer la existencia del atractor para todos los acotados y todas las soluciones que parten de ellos. Esto es lo que se entiende por atractor en sentido fuerte (ya sea global o pullback).

Otra forma, no totalmente ajena a la anterior, de afrontar un problema con múltiples soluciones es la de tomar el flujo formado por todas ellas y analizar propiedades cualitativas de conjuntos en los que al menos una solución del problema interviene. Dicho de otra forma, frente al concepto de atracción fuerte (tanto en sentido progresivo como pullback), los conceptos de invarianza y atracción débiles son entendidos para al menos una trayectoria* del flujo en lugar de para todas las trayectorias.

El análisis multivaluado y las funciones "alcanzables" se usan en problemas relativos a ecuaciones diferenciales sin unicidad, inclusiones diferenciales, teorías de control y de viabilidad y en finanzas y economía entre otros muchos campos. Han sido ampliamente estudiados por muchos autores durante las últimas décadas (cf. [13, 145, 144, 158, 88, 89] entre otros). La investigación del comportamiento asintótico de estos fenómenos, de forma global o débil, propiedades de estabilidad y de atracción, han necesitado modificación (concepto de atracción *pullback*) cuando los sistemas considerados son no autónomos, como fenómenos estocásticos o simplemente aleatorios (cf. [46, 45, 148, 91] y [92, 25] para el caso débil).

En este capítulo presentamos el concepto de atractor débil en sentido pullback para sistemas multivaluados no autónomos. Más exactamente, analizamos la existencia y propiedades de atractores fuertes y débiles, para procesos multivaluados procedentes de inclusiones diferenciales no autónomas, en sentido pullback y en la formulación producto cruzado (bajo condiciones más restrictivas), y las relaciones entre estos.

A veces los resultados relativos a atractores son sorprendentemente distintos entre el problema continuo y su versión discretizada (cf. Grüne [65], Grüne & Kloeden [66] y Stuart & Humphries [157]), por lo que iniciamos el capítulo con la Sección 5.1 dedicada al caso discreto. Esto simplificará los conceptos y las pruebas, que se reducirán en esencia a usar argumentos diagonales, por lo que nos permitirá exponer más fácilmente para este caso resultados adicionales de semicontinuidad superior de atractores de perturbaciones (hacia el del sistema original). En

*Por los comentarios del Capítulo 3 y las condiciones en que nos encontraremos, tendremos derecho a hablar indistintamente de soluciones o trayectorias en este capítulo.

cambio, cuando pasemos al caso continuo (Sección 5.2) necesitaremos argumentos de convergencia uniforme de funciones continuas debidos a Barbashin, que complicarán levemente las pruebas; también un resultado sobre semicontinuidad de atractores ante perturbaciones se presenta en este caso. Finalmente, en la Sección 5.3 estableceremos nuevos resultados de tipo Barbashin para un cociclo multivaluado, ya que usaremos la formulación del producto cruzado para dar un trato autónomo, fuerte y débil, al problema. Al final de las tres adjuntamos varios ejemplos ilustrativos de cada caso.

5.1 Atractores débiles para inclusiones en diferencias no autónomas

Una inclusión en diferencias no autónoma

$$x_{t+1} \in F_t(x_t) \tag{5.1}$$

(con $t \in \Gamma$ siendo Γ un conjunto discreto, en general pondremos $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$) aparece en gran variedad de formas, por ejemplo en sistemas univaluados asociados a controles:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) \tag{5.2}$$

con los controles u_t tomando valores en un compacto no vacío U_t, así (5.2) genera una inclusión en diferencias no autónoma de la forma (5.1) con $F_t(x) := f_t(x, U_t)$. Otras fuentes son la discretización de un sistema de control diferencial o de ecuaciones diferenciales sin unicidad [81, 94, 121, 123].

Las aplicaciones F_t, que tendrán valores compactos y serán semicontinuas superiormente, pueden por supuesto variar con el paso del tiempo de forma regular o totalmente arbitraria. El sistema discreto en tiempo generado por (5.1) es así no autónomo y no implica la propiedad de semigrupo multivaluado, por lo que muchos de los conceptos relativos a los sistemas autónomos son demasiado restrictivos e inapropiados para estudiar con ellos el comportamiento asintótico de tales sistemas. El concepto de atractor pullback o no autónomo, que consiste en una familia de compactos no vacíos en vez de un único conjunto, y que atraen asintóticamente, hacia adelante pero empezando en tiempos cada vez más tempranos (de ahí la notación anglosajona "pullback"), fue introducida para inclusiones en diferencias no autónomas en [94]. Por supuesto, en el caso autónomo este atractor pullback coincide con el conjunto fijo (independiente del tiempo) que atrae en el sentido progresivo habitual. Szegö & Treccani [158], que tratan con semigrupos multivaluados continuos en tiempo, llaman a este ente *atractor fuerte* en contraposición con otros que también usan y distinguen denominándolos *débiles*, también para dichos sistemas autónomos multivaluados. La diferencia estriba simplemente en que una o más (pero no necesariamente todas) trayectorias son atraídas por (o permanecen en) el atractor débil, al contrario que en el caso fuerte, donde se exige que todas las trayectorias satisfagan dicha(s) propiedad(es). Esta situación es de particular interés en sistemas de control.

Nuestro objetivo es introducir las herramientas necesarias para estudiar una versión pullback de los atractores débiles para procesos multivaluados en diferencias generados por inclusiones (en diferencias) no autónomas. En la Sección 5.1.1 definimos estos procesos multivaluados en diferencias y recordamos algunos conceptos y resultados básicos sobre los atractores en sentido fuerte para sistemas multivaluados tanto autónomos como no autónomos. En la Sección 5.1.2 introducimos el concepto de atractor pullback en sentido débil en términos de invarianza y atracción pullback débiles. El principal resultado, sobre existencia de atractor débil pullback, se presenta a partir de una familia de conjuntos débilmente absorbentes y positivamente débilmente invariantes, analizando otras posibles construcciones más naturales y los problemas que conllevarían y que las hacen inapropiadas. El segundo resultado que presentamos, Sección 5.1.3, es de convergencia, más exactamente, de semicontinuidad superior de unos atractores débiles pullback hacia otros ante perturbaciones. Terminamos con algunos ejemplos de la teoría formulada y de sus peculiaridades.

Notación 5.1. Consideraremos el conjunto de pares de enteros

$$\mathbb{Z}_d = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad i \geq j\}.$$

Nota 5.2.

(i) Aunque las afirmaciones de este capítulo son válidas para un espacio de Banach general, nosotros nos restringiremos en la presentación al caso $\mathbb{R}^d$ (cf. Sección 3.2.3).

(ii) Obsérvese que, dadas dos aplicaciones F, $G : \mathbb{R}^d \mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, su composición, $F \circ G(x) := F(G(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, satisface $F \circ G \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ si F, $G \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$.

5.1.1 Procesos en diferencias. Atractores en sentido fuerte

Como en el caso univaluado, una generalización natural al caso no autónomo de los sistemas autónomos la constituye la generalización de la propiedad de semigrupo a la de proceso, es decir, dependiente de dos parámetros.

Definición 5.3. *Una aplicación* $\Phi : \mathbb{Z}_d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathcal{K}\ (\mathbb{R}^d)$ *se llama* proceso en diferencias multivaluado en $\mathbb{R}^d$ *si* $\Phi(t, t_0, \cdot) \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ *para todo* $(t, t_0) \in \mathbb{Z}_d$ *y*

$$\Phi(t_0, t_0, x) = \{x\}, \tag{5.3}$$

$$\Phi(t_2, t_0, x) = \Phi\left(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, x)\right), \tag{5.4}$$

para todo $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ *en* $\mathbb{Z}$ *y todo* $x \in \mathbb{R}^d$.

Así, la inclusión en diferencias no autónoma (5.1) con aplicaciones $F_t \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ para $t \in \mathbb{Z}$ genera un proceso en diferencias multivaluado: la aplicación $\Phi(t, t_0, \cdot) \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ definida por

$$\Phi(t_0, t_0, x) := \{x\} \quad \text{y} \quad \Phi(t, t_0, x) := F_{t-1} \circ \cdots \circ F_{t_0}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $t_0 < t$ en $\mathbb{Z}$. Recíprocamente, un proceso en diferencias multivaluado Φ genera una inclusión en diferencias no autónoma (5.1) con aplicaciones F_n definidas por $F_t(x) := \Phi(t+1, t, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $t \in \mathbb{Z}$.

Una trayectoria del proceso en diferencias multivaluado Φ es una aplicación univaluada $\phi : [T_0, T_1] \cap \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}^d$, para ciertos $T_0 < T_1$ en $\mathbb{Z}$, que satisface

$$\phi(t) \in \Phi(t, t_0, \phi(t_0)) \quad \text{para todos} \quad T_0 \leq t_0 \leq t \leq T_1.$$

Nótese que, debido a (5.4), la concatenación de trayectorias definidas en intervalos de tiempo adyacentes $[T_0, T_1] \cap \mathbb{Z}$ y $[T_1, T_2] \cap \mathbb{Z}$ forma obviamente una trayectoria en el intervalo unión $[T_0, T_2] \cap \mathbb{Z}$.

Una trayectoria definida en todo $\mathbb{Z}$ se dice una trayectoria completa.

Un atractor para una inclusión autónoma en diferencias, i. e., (5.1) con $F_t \equiv F$, es un compacto no vacío A de $\mathbb{R}^d$ que es invariante, i. e., satisface $F(A) = A$, y es atrayente en el sentido siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(F^n(D), A) = 0$$

para todo acotado no vacío D de $\mathbb{R}^d$; aquí F^n denota la composición n veces de F consigo misma. Al igual que en el caso de sistemas dinámicos univaluados, la existencia de un atractor es una implicación de otra condición más fuerte y simple de determinar: la existencia de un conjunto absorbente, i. e., un compacto no vacío B de $\mathbb{R}^d$ tal que para todo acotado no vacío D de $\mathbb{R}^d$ existe un entero no negativo N_D tal que $F^n(D) \subseteq B$ para todo $n \geq N_D$. El siguiente teorema es una generalización al caso multivaluado del resultado bien conocido para semigrupos univaluados.

Teorema 5.4. *(cf. Kloeden & Schmalfuß [93]) Sea $F \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ y supongamos que la inclusión en diferencias autónoma asociada a la aplicación F tiene un conjunto absorbente $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$. Entonces tiene un único atractor A definido por*

$$A = \bigcap_{m\geq 0} \overline{\bigcup_{n\geq m} F^n(B)}.$$

El concepto de conjunto absorbente y el de atractor son algo más complicados en el caso no autónomo, ya que con la generalización obvia a partir de la autónoma, considerando también atracción en tiempo $+\infty$, es demasiado restrictivo en la mayoría de las situaciones. Además, como en el caso de ecuaciones en diferencias univaluadas [91], familias de conjuntos en vez de conjuntos individuales (absorción uniforme) deberían ser consideradas.

Definición 5.5. *Una familia $\mathcal{B} = \{B_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ de compactos no vacíos $\mathbb{R}^d$ se dice* absorbente en sentido pullback *para un proceso en diferencias multivaluado Φ en $\mathbb{R}^d$ si para todo $t_0 \in \mathbb{Z}$ y todo conjunto acotado no vacío D de $\mathbb{R}^d$ existe un $N_{t_0,D} \in \mathbb{Z}^+$ tal que*

$$\Phi\left(t_0, t_0 - n, D\right) \subseteq B_{t_0}$$

para todo $n \geq N_{t_0,D}$.

Definición 5.6. *Una familia $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ se dice* atractor en sentido pullback *de un proceso multivaluado en diferencias Φ en $\mathbb{R}^d$ si es negativamente invariante, i. e.,*

$$A_t \subset \Phi\left(t, t_0, A_{t_0}\right) \quad \text{para cualquier} \quad t \geq t_0, \tag{5.5}$$

y atrae conjuntos acotados en sentido pullback, i. e.,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\left(\Phi(t_0, t_0 - n, D), A_{t_0}\right) = 0 \tag{5.6}$$

para todo $t_0 \in \mathbb{Z}$ y todo acotado D de $\mathbb{R}^d$.

La propiedad (5.5) es una transformación de la propiedad de invarianza del semigrupo necesaria en general en el contexto multivaluado (y será por tanto una constante a lo largo de la memoria, véase Apéndice A). Nótese que la convergencia en sentido pullback (5.6) no describe la convergencia de $\Phi(t, t_0, D)$ cuando $t \to \infty$. Para una relación detallada entre las propiedades de atracción en sentidos progresivo y pullback véanse [90, 91, 93] en el contexto de procesos univaluados. El siguiente teorema (cf. [94, 123]) es una generalización del Teorema 5.4 al caso no autónomo.

Teorema 5.7. *Sea Φ un proceso en diferencias multivaluado con una familia $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ absorbente en sentido pullback y positivamente invariante. Entonces existe un atractor en sentido pullback minimal y negativamente invariante, $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$, dado por*

$$A_{t_0} = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} \Phi\left(t_0, t_0 - n, B_{t_0 - n}\right)} \tag{5.7}$$

para cada $t_0 \in \mathbb{Z}$.

Si la familia absorbente en sentido pullback $\mathcal{B}$ no es positivamente invariante, uno puede obtener el atractor pullback minimal y negativamente invariante para cada $t_0 \in \mathbb{Z}$ a través de la expresión

$$\overline{\bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} \Phi\left(t_0, t_0 - n, D\right)}}. \tag{5.8}$$

En [90] se muestra que ecuaciones en diferencias univaluadas que tienen un atractor en sentido pullback siempre tienen una familia positivamente invariante que es pullback-absorbente. La prueba se puede adaptar al caso de una inclusión que aquí nos concierne.

5.1.2 Atractores débiles en sentido pullback

Los conceptos anteriores de invarianza y atracción para procesos multivaluados en diferencias representan la versión no autónoma de lo que Szegö & Treccani [158] llamaron invarianza *fuerte* y atractores de sistemas autónomos continuos en tiempo. Lo que esto significa es que la invarianza y atracción se tienen con respecto a *todas* las posibles trayectorias que salen de cada punto.

Sin embargo, para sistemas multivaluados procedentes de sistemas de control, uno está a menudo interesado en situaciones en las que una o algunas, pero no necesariamente todas las trayectorias que emanan de cada punto satisfagan una cierta propiedad. Esto es también motivo de interés en sistemas generados por ecuaciones diferenciales sin unicidad como el ejemplo trivial y bien conocido $x' = x^{1/3}$, para el que el conjunto $\{0\}$ es sólo "débilmente" positivamente invariante debido a la no unicidad de las soluciones con dicho dato inicial: $x(0) = 0$.

Szegö y Treccani también introdujeron los conceptos de invarianza y atracción débiles para tales sistemas multivaluados autónomos en tiempo continuo. En el caso de tiempo discreto considerado aquí, dichas propiedades hay que leerlas como sigue: Un conjunto compacto no vacío A es *positivamente débilmente invariante* si para cada $x_0 \in A$ existe una trayectoria ϕ con $\phi(0) = x_0$ tal que $\phi(t) \in A$ para todo $t \geq 0$. Un compacto no vacío A es *atrayente débilmente* si para cada $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe una trayectoria ϕ con $\phi(0) = x_0$ tal que $\mathrm{dist}(\phi(t), A) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Finalmente, un compacto no vacío A se dice *atractor débil* si es débilmente positivamente invariante y débilmente atrayente.

Pretendemos introducir e investigar las versiones de estos conceptos para procesos multivaluados en diferencias adaptados al caso no autónomo, es decir, en sentido pullback. Como en el caso de convergencia fuerte, es menos restrictivo considerar familias de conjuntos en vez de conjuntos individuales (uniformes).

Definición 5.8. *Una familia $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ es* positivamente débilmente invariante *para el proceso multivaluado en diferencias Φ en $\mathbb{R}^d$ si para todo $t_0 \in \mathbb{Z}$ y todo $x_0 \in A_{t_0}$ existe una trayectoria $\phi : [t_0, \infty) \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ de Φ con $\phi(t_0) = x_0$ tal que $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \geq t_0$. La familia $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ se dice* débilmente invariante *si para todo $t_0 \in \mathbb{Z}$ y todo $x_0 \in A_{t_0}$ existe una trayectoria completa $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ de Φ con $\phi(t_0) = x_0$ tal que $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.*

Definición 5.9. *Una familia débilmente invariante $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ se dice* atractor débil en sentido pullback *del proceso multivaluado en diferencias Φ en $\mathbb{R}^d$ si es débilmente pullback atrayente, i. e., para todo $t_0 \in \mathbb{Z}$, todo acotado no vacío D de $\mathbb{R}^d$ y cualquier sucesión $d_n \in D$ existen sucesiones de enteros $t_n \to \infty$ si $n \to \infty$ y trayectorias $\phi_n : [t_0 - t_n, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ de Φ con $\phi_n(t_0 - t_n) = d_n$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\phi_n(t_0), A_{t_0}) = 0. \tag{5.9}$$

Obsérvese que un atractor pullback en sentido fuerte, si existe, es por supuesto también atractor pullback en sentido débil.

Probaremos la existencia de atractor pullback débil a partir de la existencia de una familia pullback absorbente débilmente, concepto que definimos a continuación.

Definición 5.10. *Una familia positivamente débilmente invariante $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ es* débilmente absorbente en sentido pullback *para el proceso en diferencias multivaluado Φ en $\mathbb{R}^d$ si para $t_0 \in \mathbb{Z}$ y cualquier acotado D de $\mathbb{R}^d$ existe un entero $N_{t_0,D}$ tal que para cada $n \geq N_{t_0,D}$ y $d_n \in D$ existe una trayectoria $\phi_n : [t_0 - n, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ de Φ con $\phi_n(t_0 - n) = d_n$ y $\phi_n(t_0) \in B_{t_0}$.*

Nótese que, debido a la invarianza débil positiva de $\mathcal{B}$, las trayectorias ϕ_n pueden ser extendidas de tal forma que permanecen en $\mathcal{B}$ para $t \geq t_0$, i. e., con $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \geq t_0$.

Teorema 5.11. *Sea Φ un proceso en diferencias multivaluado y tal que $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una familia débilmente pullback absorbente. Entonces Φ tiene un atractor pullback débil y maximal $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ relativo a $\mathcal{B}$, que está determinado para cada $t_0 \in \mathbb{Z}$ por*

$$A_{t_0} = \left\{ a \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, t_n \to \infty, \text{ y trayectorias } \;\; \phi_n : [t_0 - t_n, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d \;\; \text{tales que} \\ \phi_n(t) \in B_t \;\; \text{para} \;\; t \in [t_0 - t_n, t_0] \cap \mathbb{Z} \;\; \text{y} \;\; \lim_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = a. \end{array} \right\} \tag{5.10}$$

El atractor pullback débil y maximal $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ consiste en las trayectorias completas que se "mueven" o permanecen en $\mathcal{B}$ para todo tiempo $\mathbb{Z}$, i. e., satisface $\phi(t) \in B_t$ para cada $t \in \mathbb{Z}$; probaremos este resultado en el Lema 5.13. El carácter de *maximalidad* entre todos las familias débilmente invariantes contenidas en $\mathcal{B}$ es reseñable, y la única forma de interpretar *unicidad.* De hecho, en los ejemplos se mostrarán procesos multivaluados procedentes de inclusiones que tienen distintas familias de absorbentes pullback a veces solapándose a veces disjuntos. Cada una de dichas familias de absorbentes genera un atractor débil pullback relativo a ella, con lo que como comentábamos antes la unicidad del atractor débil no es una propiedad universal al contrario de lo que ocurre en el caso fuerte. En particular, esto significa que puntos estacionarios así como trayectorias periódicas no han de estar necesariamente en un atractor débil dado. Algunos de nuestros ejemplos son de hecho autónomos, y esto mostrara una peculiaridad general del concepto débil en sí y no del carácter no autónomo.

Un punto distinto entre los sentidos fuerte y débil interesante de destacar es el siguiente: la hipótesis de que la familia pullback absorbente en el caso débil sea positivamente invariante, no se exige en el caso fuerte para tener atractor. Sin embargo, en el caso débil lo necesitamos para asegurar que el atractor que construimos es débilmente invariante. Uno podría pensar en otras construcciones parecidas a (5.10) y más naturales en su expresión, o con menos hipótesis para la familia $\mathcal{B}$: por ejemplo, supongamos que la familia $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ débilmente pullback absorbente sí es y definamos la familia $\mathcal{A}^* = \{A_t^*, t \in \mathbb{Z}\}$ por

$$A_{t_0}^* := \bigcap_{m \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{n \geq m} \Phi(t_0, t_0 - n, B_{t_0 - n})} \bigcap B_{t_0} \right). \tag{5.11}$$

Se comprueba sin dificultad que esta familia es débilmente pullback atrayente y que de hecho se tiene que $A_t \subset A_t^* \subset B_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, donde A_t está definido por (5.10). El carácter positivamente invariante de $\mathcal{A}^*$ sigue de esta inclusión, pero la inclusión $A_t^* \subset \Phi(t, t_0, A_{t_0}^*) \bigcap B_t$ es falsa en general, de modo que incluso el carácter negativamente débil invariante no se tiene (cf. Lema 5.13).

Por otro lado, si no asumimos que $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sea positivamente débilmente invariante, entonces podemos aún definir la familia $\mathcal{A}^* = \{A_t^*, t \in \mathbb{Z}\}$ por

$$A_{t_0}^* = \overline{\bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \bigcap_{m \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{n \geq m} \Phi(t_0, t_0 - n, D)} \bigcap B_{t_0} \right)}.$$

Esta familia $\mathcal{A}^*$ atrae débilmente y en sentido pullback a todos los acotados de $\mathbb{R}^d$ y obviamente satisface $A_t^* \subset B_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, pero de hecho no han de satisfacerse las propiedades de invarianza débil positiva o negativa. (Una condición suficiente para el carácter positivamente débilmente invariante sería que $\Phi(t, t_0, \cdot)$ fuera semicontinua inferiormente para todo par (t, t_0) $\in \mathbb{Z}_d$, e. g. véase [29] o Apéndice A).

Demostración del Teorema 5.11. Dividimos la prueba en tres partes.

Existencia y compacidad

Fijemos un valor $t_0 \in \mathbb{Z}$. Por la invarianza débil positiva de $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$, existen trayectorias $\phi_n : [t_0 - n, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ con $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - n, t_0] \cap \mathbb{Z}$ y todo $n \in \mathbb{Z}^+$. En particular, $\phi_n(t_0) \in B_{t_0}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Como B_{t_0} es compacto, existe una subsucesión convergente $\phi_{n_j}(t_0) \to a_0 \in B_{t_0}$. Tomamos esta subsucesión como sucesión original en la definición (5.10) de A_{t_0}, con lo que tenemos $a_0 \in A_{t_0}$, probando así que A_{t_0} es no vacío.

Para ver que A_{t_0} es compacto, basta ver que A_{t_0} es cerrado ya que está contenido en el compacto B_{t_0}. Supongamos $a_k \in A_{t_0}$ elementos convergentes a a^* cuando $k \to \infty$. Entonces para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existen subsucesiones $t_{k,n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y trayectorias $\phi_{k,n} : [t_0 - t_{k,n}, t_0] \cap \mathbb{Z}$ $\to \mathbb{R}^d$ con $\phi_{k,n}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - t_{k,n}, t_0] \cap \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ para los que $\lim_{k \to \infty} \phi_{k,n}(t_0) = a_k$. Tómese n_k tal que

$$\|\phi_{k,n_k}(t_0) - a_k\| \leq \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad t_{k+1,n_{k+1}} \geq t_{k,n_k} + 1$$

parar cada $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$\|\phi_{k,n_k}(t_0) - a^*\| \leq \|\phi_{k,n_k}(t_0) - a_k\| + \|a_k - a^*\| \leq \frac{1}{k} + \|a_k - a^*\| \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Denotamos $\bar{\phi}_k \equiv \phi_{k,n_k}$ y $\bar{t}_k \equiv t_{k,n_k}$. Entonces $\bar{\phi}_k : [t_0 - \bar{t}_k, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ con $\bar{\phi}_k(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - \bar{t}_k, t_0] \cap \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$. Más aún, $\bar{t}_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ con $\bar{\phi}_k(t_0)$

$\to a^*$ y $k \to \infty$. Así $a^* \in A_{t_0}$, y por tanto A_{t_0} es cerrado y de hecho compacto.

Invarianza débil

Probamos primero que la familia $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ es débilmente positivamente invariante. Fijamos $t_0 \in \mathbb{Z}$ y tomamos $x_0 \in A_{t_0}$. Entonces, existen $t_n \to +\infty$ y trayectorias $\phi_n : [t_0-t_n, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ con $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0-t_n, t_0] \cap \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ para las que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = x_0$. Como $\mathcal{B}$ es débilmente positivamente invariante, cada trayectoria ϕ_n puede ser extendida a $[t_0-t_n, \infty) \cap \mathbb{Z}$ de tal modo que $\phi_n(t) \in B_t$ para todo $t \geq t_0$. Por la compacidad de B_t, podemos (usando un argumento diagonal) encontrar una subsucesión $n'_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ tal que $\phi_{n'_k}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \geq t_0$. Obviamente $\bar{\phi}(t_0) = x_0 \in A_{t_0}$ ya que la subsucesión original $\phi_{n_k}(t_0) \to x_0$. Por la construcción, $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \geq t_0$.

La aplicación $\bar{\phi} : [t_0, \infty) \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ es una trayectoria del proceso multivaluado Φ ya que $\operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(t+1), F_t(\bar{\phi}(t))\right) = 0$, i. e., $\bar{\phi}(t+1) \in F_t(\bar{\phi}(t))$ para todo $t \geq t_0$. Esto se deduce de

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(t+1), F_t(\bar{\phi}(t))\right) &\leq \left\|\bar{\phi}(t+1) - \phi_{n'_k}(t+1)\right\| + \operatorname{dist}\left(\phi_{n'_k}(t+1), F_t(\phi_{n'_k}(t))\right) \\
&\quad + \operatorname{dist}\left(F_t(\phi_{n'_k}(t)), F_t(\bar{\phi}(t))\right) \\
&= \left\|\bar{\phi}(t+1) - \phi_{n'_k}(t+1)\right\| + \operatorname{dist}\left(F_t(\phi_{n'_k}(t)), F_t(\bar{\phi}(t))\right) \\
&\longrightarrow 0 \text{ cuando } n'_k \to \infty,
\end{aligned}$$

para cada $t \geq t_0$, puesto que $\phi_{n'_k}(t+1) \in F_t(\phi_{n'_k}(t))$ para las trayectorias $\phi_{n'_k}$.

Pero $t_0 \in \mathbb{Z}$ y $x_0 \in A_{t_0}$ eran arbitrarios, de modo que $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es positivamente débilmente invariante.

Un argumento similar, aunque con algo más de cuidado, puede ser aplicado al caso en que $t \leq t_0$. Así, mostraremos la invarianza débil. Fijamos un valor $N \in \mathbb{Z}^+$ y tomamos k suficientemente grande tal que $n_k \geq N$ en la subsucesión de trayectorias que teníamos antes $\phi_{n_k} : [t_0 - n_k, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$ con $\phi_{n_k}(t) \in B_t$ para $t \in [t_0 - n_k, t_0] \cap \mathbb{Z}$ y $\phi_{n_k}(t_0) \to x_0$. Restringimos estas trayectorias a un intervalo común $[t_0 - N, t_0] \cap \mathbb{Z} \subset [t_0 - n_k, t_0] \cap \mathbb{Z}$. Puesto que B_t es compacto, hay una subsucesión convergente con $\phi_{n'_k}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - N, t_0] \cap \mathbb{Z}$. Obviamente $\bar{\phi}(t_0) = x_0$. Otro argumento diagonal permite extraer una subsucesión tal que $\phi_{n'_k}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ para todo $t \leq t_0$. Como antes, se tiene que $\bar{\phi}$ es una trayectoria del proceso multivaluado Φ con $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \leq t_0$. Concatenando ambas partes de $\bar{\phi}$ extendemos a todo el dominio $\mathbb{Z}$ obteniendo una trayectoria completa $\bar{\phi}$ del proceso Φ con $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. Así, $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es débilmente invariante.

Atracción débil en sentido pullback

Consideramos un valor $t_0 \in \mathbb{Z}$ fijado y un acotado D de $\mathbb{R}^d$. Como $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es una familia débilmente pullback absorbente para el proceso multivaluado Φ, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ hay un entero $N_{t_0-n,D} \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cada $k \geq N_{t_0-n,D}$ y $d_n \in D$ existe una trayectoria $\phi_{k,n}$ de Φ de $[t_0 - k - n, t_0 - n] \cap \mathbb{Z}$ con $\phi_{k,n}(t_0 - k - n) = d_n$ y $b_{k,n} = \phi_{k,n}(t_0 - n) \in B_{t_0-n}$ para todo $k \geq N_{t_0-n,D}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. De nuevo, por la invarianza positiva débil de $\mathcal{B}$, cada $\phi_{k,n}$ puede ser extendida indefinidamente de tal forma que $\phi_{k,n}(t) \in B_t$ para todo $t \geq t_0 - n$. En particular,

$\phi_{k,n}(t_0) \in B_{t_0}$ y al ser B_{t_0} compacto, hay una subsucesión $k_n < k_{n+1} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ con $k_n \geq N_{t_0-n,D}$ y $k_{n+1} \geq N_{t_0-n-1,D}$ tal que $\phi_{k_n,n}(t_0) \to a^* \in B_{t_0}$ cuando $n \to \infty$.

Denotamos $\bar{\phi}_n \equiv \phi_{k_n,n}$ y $\bar{t}_n \equiv n + k_n$. Entonces $\bar{\phi}_n$ está definida sobre $[t_0 - \bar{t}_n, \infty) \cap \mathbb{Z}$ con $\bar{\phi}_n(t_0 - \bar{t}_n) = d_{k_n} \in D$ y $\bar{\phi}_n(t_0) \to a^*$ cuando $k \to \infty$. Por la construcción $a^* \in A_{t_0}$, y así $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}_n(t_0), A_{t_0}\right) = 0$. Por lo tanto, se tiene la propiedad (5.9) y $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es débilmente pullback atrayente. □

5.1.3 Semicontinuidad superior ante perturbaciones

El segundo resultado que vamos a establecer es de dependencia semicontinua superior entre los atractores débiles pullback construidos anteriormente bajo perturbación del sistema. Para ello, consideramos la inclusión en diferencias no autónoma (perturbada)

$$x_{t+1} \in F_t^{\epsilon}(x_t) \tag{5.12}$$

donde $F_t^{\epsilon} \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ es tal que

$$\operatorname{dist}(F_t^{\epsilon}(x), F_t(x)) \leq \epsilon \tag{5.13}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $n \in \mathbb{Z}$. Sea Φ^{ϵ} el proceso en diferencias generado por la inclusión perturbada (5.12).

Teorema 5.12. *Supongamos que el proceso en diferencias multivaluado Φ generado por la inclusión no autónoma sin perturbar* (5.1) *tiene una familia positivamente invariante y débilmente pullback absorbente $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$, y supongamos que los procesos perturbados Φ^{ϵ} generados por la inclusión perturbada* (5.12) *satisface* (5.13) *y tiene una familia débilmente positivamente invariante y débilmente pullback absorbente $\mathcal{B}^{\epsilon} = \{B_t^{\epsilon}, t \in \mathbb{Z}\}$ tal que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{dist}\left(B_{t_0}^{\epsilon}, B_{t_0}\right) = 0 \tag{5.14}$$

para todo $t_0 \in \mathbb{Z}$. Entonces, el atractor pullback débil maximal $\mathcal{A}^{\epsilon} = \{A_t^{\epsilon}, t \in \mathbb{Z}\}$ de Φ^{ϵ} relativo a $\mathcal{B}^{\epsilon}$ converge de forma superiormente semicontinua hacia el atractor pullback débil maximal $\mathcal{A}$ $= \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de Φ relativo a $\mathcal{B}$, esto es:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{dist}\left(A_{t_0}^{\epsilon}, A_{t_0}\right) = 0. \tag{5.15}$$

para cada $t_0 \in \mathbb{Z}$.

La siguiente condición sobre la inclusión sin perturbar (5.1) es una forma simple de asegurar la existencia de una familia positivamente invariante de conjuntos débilmente pullback absorbentes. (Estas condiciones necesitan ser modificadas/reforzadas por medio de argumentos de compacidad o de compacidad asintótica sobre la inclusión multivaluada cuando el espacio de fases es un Banach en lugar de $\mathbb{R}^d$ como estamos suponiendo aquí).

Sea K un compacto de $\mathbb{R}^d$ tal que existe una constante $\gamma \in [0, 1)$ con

$$\min_{y\in F_t(x)} \operatorname{dist}(y, K) \leq \gamma \operatorname{dist}(x, K)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $t \in \mathbb{Z}$. Entonces, podemos tomar $K^{\epsilon} = N_{\epsilon}[K] := \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, K) \leq \epsilon\}$ con ϵ suficientemente pequeño. Así, la familia $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ con $B_t \equiv K^{\epsilon}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ es débilmente positivamente invariante y débilmente absorbente (de forma uniforme) en ambos sentidos: progresivo y pullback.

Más generalmente, dada una familia $\mathcal{K} = \{K_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de compactos no vacíos podemos obtener una familia de conjuntos débilmente positivamente invariantes y débilmente pullback absorbentes $\mathcal{K}^\epsilon = \{K_t^\epsilon, t \in \mathbb{Z}\}$ con definición apropiada de K_t^ϵ si tenemos

$$\min_{y \in F_t(x)} \operatorname{dist}(y, K_t) \leq \gamma_{t,t-1} \operatorname{dist}(x, K_{t-1})$$

para una sucesión de constantes positivas $\{\gamma_{t,t-1},\ t \in \mathbb{Z}\}$ tales que

$$\rho(t, t_0) \sup_{x \in D} \operatorname{dist}(x, K_{t_0}) \to 0, \qquad t_0 \to -\infty$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$ y cualquier acotado D de $\mathbb{R}^d$, donde $\rho(t, t_0) = \gamma_{t,t-1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{t_0+1,t_0}$.

Necesitaremos los siguientes lemas para probar el Teorema 5.12:

Lema 5.13. *Supongamos que el proceso multivaluado en diferencias Φ tiene una familia débilmente pullback absorbente $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ y un atractor débil en sentido pullback $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, una trayectoria completa ϕ de Φ satisface $\phi(t) \in B_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Supongamos que ϕ es una trayectoria completa con $\phi(t) \in B_t$ para cada $t \in \mathbb{Z}$. Fijamos $t_0 \in \mathbb{Z}$. Entonces existe una sucesión de trayectorias $\phi_n : [t_0 - n, t_0] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^d$, de hecho basta tomar la misma siempre, $\phi_n \equiv \phi$, con $\phi_n(t) = \phi(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - n, t_0] \cap \mathbb{Z}$. En particular, $\phi_n(t_0) \equiv \phi(t_0) \to \phi(t_0)$ cuando $n \to \infty$. Por definición, $\phi(t_0) \in A_{t_0}$. Como t_0 era arbitrario, tenemos así $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. El recíproco sigue del hecho de que $A_t \subset B_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. □

Lema 5.14. *Supongamos que* $\operatorname{dist}(B_n, B) \to 0$ *cuando $n \to \infty$ para compactos no vacíos B, B_1, B_2, ... Entonces, para cualquier sucesión $b_n \in B_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, existe una subsucesión convergente $b_{n_j} \to b^* \in B$ cuando $n_j \to \infty$.*

Demostración. Claramente $\operatorname{dist}(b_n, B) \leq \operatorname{dist}(B_n, B)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y como B es compacto, existen $b_n^* \in B$ tales que $\operatorname{dist}(b_n, B) = \|b_n - b_n^*\|$. De nuevo, por la compacidad de B, existe una subsucesión convergente $b_{n_j}^* \to b^* \in B$ cuando $n_j \to \infty$. Entonces, $b_{n_j} \to b^*$ también cuando $n_j \to \infty$ ya que

$$\|b_{n_j} - b^*\| \leq \|b_{n_j} - b_{n_j}^*\| + \|b_{n_j}^* - b^*\| = \operatorname{dist}\left(b_{n_j}, B\right) + \|b_{n_j}^* - b^*\|$$

para todo $n_j \in \mathbb{Z}^+$. □

Lema 5.15. *Si F y $F^\epsilon \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ con $\epsilon > 0$ son tales que $F^\epsilon(x) \subset N_\epsilon(F(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces*

$$\operatorname{dist}\left(F^{\epsilon_n}(x_n), F(x^*)\right) \longrightarrow 0 \qquad \textit{cuando} \quad n \to \infty$$

para cualesquiera sucesiones convergentes $x_n \to x^*$ en $\mathbb{R}^d$ y $\epsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Para todo $\nu > 0$ existe una $K_\nu \in \mathbb{Z}$ tal que $\|x_n - x^*\| < \nu/2$ y $0 < \epsilon_n < \nu/2$ para todo $n \geq K_\nu$. Así

$$x_n \in N_{\nu/2}(x^*) \quad \text{y} \quad F^{\epsilon_n}(x_n) \subset N_{\epsilon_n}(F(x_n)) \subset N_{\nu/2}(F(x_n))$$

para todo $n \geq K_\nu$. Como $F \in SCS(\mathbb{R}^d, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ existe un $\delta(\nu/2, x^*) > 0$ tal que $F(x_n) \subset N_{\nu/2}(F(x^*))$ para todo x_n con $\|x_n - x^*\| < \delta(\nu/2, x^*)$. Por tanto, tenemos

$$F^{\epsilon_n}(x_n) \subset N_{\nu/2}(F(x_n)) \subset N_{\nu/2}\left(N_{\nu/2}(F(x^*))\right) = N_\nu(F(x^*))$$

para todo $n \geq \text{máx}\left\{K_{\nu/2}, K_{\delta(\nu/2,x^*)}\right\}$. □

Demostración del Teorema 5.12. Sea $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ el atractor débil pullback maximal en $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{Z}\}$ del proceso multivaluado en diferencias sin perturbar Φ y sean $\mathcal{A}^\epsilon = \{A_t^\epsilon, t \in \mathbb{Z}\}$ los atractores débiles pullback maximales relativos a $\mathcal{B}^\epsilon = \{B_t^\epsilon, t \in \mathbb{Z}\}$ de los procesos perturbados Φ^ϵ. Supongamos que para algún $t_0 \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{dist}\left(A_{t_0}^\epsilon, A_{t_0}\right) \neq 0.$$

Entonces, existe un valor $\eta_0 > 0$ y una subsucesión $\epsilon_j \to 0$ cuando $j \to \infty$ tal que

$$\operatorname{dist}\left(A_{t_0}^{\epsilon_j}, A_{t_0}\right) \geq \eta_0 \tag{5.16}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. Mostraremos que esto lleva a una contradicción.

Sea $a^{\epsilon_j} \in A_{t_0}^\epsilon$ tal que $\operatorname{dist}(a^{\epsilon_j}, A_{t_0}) = \operatorname{dist}\left(A_{t_0}^{\epsilon_j}, A_{t_0}\right)$, así $\operatorname{dist}(a^{\epsilon_j}, A_{t_0}) \geq \eta_0$ para $j \in \mathbb{Z}^+$, (posible al ser $A_{t_0}^\epsilon$ compacto). Por el Lema 5.13 existe una trayectoria completa ϕ^{ϵ_j} del proceso perturbado Φ^{ϵ_j} tal que $\phi^{\epsilon_j}(t) \in A_t^{\epsilon_j} \subset B_t^{\epsilon_j}$ para cada $t \in \mathbb{Z}$ con $\phi^{\epsilon_j}(t_0) = a^{\epsilon_j}$. Como para cada t, $B_t^{\epsilon_j}$ y B_t son compactos con $\operatorname{dist}\left(B_t^{\epsilon_j}, B_t\right) \to 0$ cuando $\epsilon_j \to 0$, por el Lema 5.14 existe una subsucesión (diagonal) convergente $\phi^{\epsilon_j'}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ cuando $\epsilon_j' \to 0$ para cada $t \in \mathbb{Z}$. Obviamente $a^{\epsilon_j} = \phi^{\epsilon_j'}(t_0) \to \bar{\phi}(t_0)$, así, de (5.16) tenemos

$$\operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(t_0), A_{t_0}\right) \geq \eta_0/2. \tag{5.17}$$

Mostraremos que $\bar{\phi}$ es una trayectoria del proceso sin perturbar Φ. Tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(t+1), F_t(\bar{\phi}(t))\right) &\leq \left\|\bar{\phi}(t+1) - \phi^{\epsilon_j'}(t+1)\right\| + \operatorname{dist}\left(\phi^{\epsilon_j'}(t+1), F_t^{\epsilon_j'}(\phi^{\epsilon_j'}(t))\right) \\
&\quad + \operatorname{dist}\left(F_t^{\epsilon_j'}(\phi^{\epsilon_j'}(t)), F_t(\bar{\phi}(t))\right) \\
&= \left\|\bar{\phi}(t+1) - \phi^{\epsilon_j'}(t+1)\right\| + \operatorname{dist}\left(F_t^{\epsilon_j'}(\phi^{\epsilon_j'}(t)), F_t(\bar{\phi}(t))\right)
\end{aligned}$$

para cada $t \geq t_0$, ya que $\phi^{\epsilon_j'}(t+1) \in F_t^{\epsilon_j'}(\phi^{\epsilon_j}(t))$ para trayectorias $\phi^{\epsilon_j'}$ de $F^{\epsilon_j'}$.

De lo anterior,

$$\phi^{\epsilon_j'}(t+1) \to \bar{\phi}(t+1), \qquad \phi^{\epsilon_j'}(t) \to \bar{\phi}(t) \quad \text{cuando} \quad \epsilon_j' \to 0.$$

Como las aplicaciones multivaluadas $F_t^{\epsilon_j'}$ y F_t son semicontinuas superiormente y $F_t^{\epsilon_j'}$ convergen de forma superior semicontinua a F_t, sigue del Lema 5.15 que

$$\operatorname{dist}\left(F_t^{\epsilon_j'}(\phi^{\epsilon_j'}(t)), F_t(\bar{\phi}(t))\right) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \epsilon_j' \to 0.$$

Por tanto $\operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(t+1), F_t(\bar{\phi}(t))\right) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, i. e., $\bar{\phi}(t+1) \in F_t(\bar{\phi}(t))$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, lo que significa que $\bar{\phi}$ es una trayectoria completa de Φ con $\bar{\phi}(t) \in B_t$ para $t \in \mathbb{Z}$. Del Lema 5.13 sigue que $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para $t \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, esto contradice (5.17) y por tanto (5.16). Esto significa que A_t^ϵ converge de forma semicontinua superiormente a A_t para cada $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Para terminar esta sección, consideramos, a modo ilustrativo, algunos ejemplos tratando las cuestiones, propiedades y peculiaridades de la invarianza débil y los atractores débiles en sentido pullback.

De hecho, algunos de ellos son inclusiones en diferencias autónomas, i. e., de la forma $x_{t+1} \in F(x_t)$, y por tanto hablar de atracción en sentido pullback o en sentido progresivo es lo mismo, y nuestros atractores débiles pullback serán por tanto los mismos que los considerados por Szegö & Treccani [158].

Ejemplo 5.16. *Considérese*

$$F(x) := \begin{cases} [0,1] & si\ x = 0 \\ \{x+1\} & o.\ c. \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

motivado por la aplicación discreta asociada a la ecuación diferencial sin unicidad $x' = x^{1/3}$. El conjunto $\{0\}$ es aquí débilmente (pero no fuertemente) invariante y no es ni fuerte ni débilmente atrayente.

Si tomamos

$$F(x) = x + [-1,1], \qquad x \in \mathbb{R},$$

cualquier conjunto de la forma $B = [a,b]$ con $a \leq b$ es débilmente positivamente invariante y débilmente absorbente. El atractor débil maximal A relativo a B es el propio B. Por supuesto, si tomamos dos conjuntos disjuntos B_1 y B_2 de esta forma, tendremos dos atractores débiles maximales disjuntos relativos a estos dos absorbentes: $A_1 = B_1$ y $A_2 = B_2$. Y si $B_1 \subset B_2$, entonces tendremos $A_1 \subset A_2$. Este sistema por tanto tiene muchos posibles atractores débiles, relativos a muchos absorbentes, y pueden ser disjuntos entre sí.

Para el tercer ejemplo, considérese

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}x, 2x\right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

El conjunto $\{0\}$ es fuertemente invariante y por tanto débilmente invariante. Es también débilmente atrayente, pero no en sentido fuerte. De hecho, cualquier conjunto de la forma $B = [a,b]$, con $a < 0 < b$, es débilmente positivamente invariante y débilmente absorbente. El atractor débil maximal A relativo a B es (de nuevo) el propio conjunto B. Y dos conjuntos $B_1 \subset B_2$ de esta forma, tienen dos atractores débiles maximales $A_1 = B_1 \subset A_2 = B_2$. El atractor débil $\{0\}$ es único en el sentido en que puede ser aproximado asintóticamente pues no es en sí mismo un conjunto absorbente.

Ejemplo 5.17. *Tratamos ahora dos casos propiamente no autónomos. El primero con atracción pullback pero no progresiva. Definimos*

$$F_t(x) := \begin{cases} [0,1] & si\ x = 0 \\ \{2^t x\} & o.\ c. \end{cases}$$

para cada $t \in \mathbb{Z}$. El proceso multivaluado a partir de la inclusión aquí viene dado por

$$\Phi(t,t_0,0) := \begin{cases} [0,1] & si\quad t = t_0+1 \\ \left[0, \max\left\{1, 2^{(t+t_0)(t-t_0-1)/2}\right\}\right] & si\quad t \geq t_0+2 \end{cases}$$

con $\Phi(t,t-k,x) = 2^{k(2t-k-1)/2}x$ para $x \neq 0$ y $k \in \mathbb{Z}^+$ con $\Phi(t_0,t_0,x) = \{x\}$. En particular,

$$\Phi(t,t-k,x) = 2^{k(2t-k-1)/2}x \longrightarrow 0 \qquad para \quad k \to \infty,$$

así la familia $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ con $A_t \equiv \{0\}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ es un atractor débil pullback. Es débilmente (pero no fuertemente) invariante y débilmente pero no fuertemente atrayente.

El segundo caso sigue de la inclusión en diferencias (5.1) *con*

$$F_t(x) = 2^t x + [-1, +1],$$

para la que el proceso en diferencias viene dado por

$$\Phi(t_0, t_0, x) = \{x\}, \qquad \Phi(t, t-k, x) = 2^{k(2t-k-1)/2} x + [-D_{t,k}, D_{t,k}],$$

donde $D_{t,k} = 1 + \sum_{j=1}^{k-2} 2^{j(2t-j-1)/2}$, que es finito para cada $k \in \mathbb{Z}$. Como $D_{t,k} \to D_t = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(2t-j-1)/2} < \infty$ cuando $k \to \infty$, este proceso tiene atractor fuerte pullback (pero no progresivo) $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ con $A_t = [-D_t, D_t]$.

Además, la familia $\mathcal{A}^* = \{A_t^*,\ t \in \mathbb{Z}\}$ con $A_t^* \equiv [-1, 1]$ para $t \in \mathbb{Z}$ es un atractor débil en sentido pullback (pero no fuerte). En particular, es sólo débilmente positivamente invariante. De hecho, cualquier familia $\mathcal{A}^\alpha$ de subintervalos $A_t^\alpha \equiv [-\alpha, \alpha]$ para $t \in \mathbb{Z}$ con $\alpha \in [0, 1]$ es también un atractor débil en sentido pullback. Tales atractores débiles en sentido pullback pueden así ser útiles en el estudio de la estructura interna de los atractores fuertes.

5.2 Atractores débiles pullback para procesos multivaluados en tiempo continuo

En el marco autónomo, Szegö & Treccani [158] introdujeron el concepto de atractor débil para un semigrupo multivaluado evolucionando en tiempo continuo y generado por una inclusión diferencial.

Definimos en este parágrafo (generalizando lo estudiado en la sección anterior) los conceptos de atractor débil en sentido pullback para procesos multivaluados continuos en tiempo, que pueden venir generados por ecuaciones diferenciales ordinarias sin unicidad, inclusiones ordinarias o paramétricas, problemas de control diferenciales no autónomos, etc.

Con técnicas parecidas a las anteriores, damos resultados de existencia y semicontinuidad superior para dichos atractores. La principal diferencia con respecto al caso discreto estriba en que la extensión al caso continuo necesitará de resultados de densidad y compacidad de trayectorias tipo Barbashin, involucrando su generalización de un único proceso multivaluado a una sucesión de procesos multivaluados convergentes en cierto sentido. La última parte de la sección la destinamos a dar algunos ejemplos ilustrativos dentro de este marco.

5.2.1 Procesos multivaluados continuos

Barbashin [13] investigó los llamados sistemas dinámicos generalizados multivaluados o generales, generados por ecuaciones diferenciales ordinarias sin unicidad. Roxin [144] mostró que ecuaciones no autónomas generadas por inclusiones daban lugar a sistemas dinámicos generales no autónomos del mismo modo que lo hacían los sistemas de control diferenciales ordinarios, llamando a dicho sistema generado un sistema de control general [145], véanse también [88,89]. Nosotros denotaremos por *procesos multivaluados* a todos esos sistemas multivaluados no autónomos sin asumir la hipótesis de continuación hacia atrás en tiempo.

Definición 5.18. *Un* proceso multivaluado *del espacio $\mathbb{R}^d$ está definido en términos de la aplicación multivaluada de* estados alcanzables $(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ *definida para todos los t*

$\leq t_0$ *de* $\mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *y que satisfaga las siguientes propiedades:*
1. Compacidad $\Phi(t, t_0, x_0)$ *es un compacto no vacío de* $\mathbb{R}^d$ *para todo par* $t \leq t_0$ *de* $\mathbb{R}$ *y todo* $x_0 \in \mathbb{R}^d$*;*
2. Condición inicial

$$\Phi(t_0, t_0, x_0) = \{x_0\}$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}^d$*;*
3. Evolución temporal (propiedad del semiproceso)

$$\Phi(t_2, t_0, x_0) = \Phi\left(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0)\right)$$

para todos $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ *en* $\mathbb{R}$ *y todo* $x_0 \in \mathbb{R}^d$*;*
4. Continuidad en tiempo

$$\lim_{s \to t} d_H\left(\Phi(s, t_0, x_0), \Phi(t, t_0, x_0)\right) = 0$$

para cualesquiera $s,\ t \geq t_0$ *y todo* $t_0 \in \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}^d$*;*
5. Semicontinuidad superior respecto de las condiciones iniciales

$$\lim_{t_0^{(n)} \to t_0, x_0^{(n)} \to x_0} \operatorname{dist}\left(\Phi(t, t_0^{(n)}, x_0^{(n)}), \Phi(t, t_0, x_0)\right) = 0$$

uniformemente en $t \in [T_0, T_1]$ *para cualesquiera* $T_0 < T_1 < \infty$ *con* $T_0 \geq t_0^{(n)}$*,* t_0 *y para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}^d$*.*

Como muestran ejemplos simples de ecuaciones diferenciales sin unicidad (e. g. [89, Ej. 1, p. 122]), la Condición 4 no puede en general ser extendida a una del tipo continuidad en todas las variables, i. e., con la métrica de Hausdorff d_H en vez de la semi-métrica dist.

Definición 5.19. *Una* trayectoria *de un proceso multivaluado* Φ *es una aplicación univaluada* $\phi : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^d$ *que satisface*

$$\phi(t) \in \Phi(t, s, \phi(s)) \quad \textit{para todos} \quad T_0 \leq s \leq t \leq T_1$$

con ciertos $T_0 < T_1$ *en* $\mathbb{R}$*. Una trayectoria* ϕ *se dice* completa *si está definida sobre todo* $\mathbb{R}$*.*

Las trayectorias son de hecho, en este tipo de sistemas, funciones *continuas.* Véase [145, Lema 6.1], o [88, Teor. 4.2] para sistemas sin continuación hacia atrás (como aquí).

Barbashin [13] probó la existencia de al menos una trayectoria $\phi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ con $\phi(t_0) = x_0$ y $\phi(t_1) = x_1$ para cualesquiera x_0 y x_1 tal que $x_1 \in \Phi(t_1, t_0, x_0)$. Barbashin [13] demostró además un resultado de compacidad de las trayectorias de un proceso multivaluado Φ. La siguiente generalización se debe a Roxin [145]; véase también [88]).

Teorema 5.20. (Barbashin) *Sea* B *un compacto no vacío de* $\mathbb{R}^d$ *y sean* $\phi_n : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ *una sucesión de trayectorias de un proceso multivaluado* Φ *con* $\phi_n(t_0) \in B$ *para un valor dado* $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}$*. Entonces existe una subsucesión* ϕ_{n_j} *y una trayectoria* $\bar{\phi} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ *de* Φ *con* $\bar{\phi}(t_0) \in B$ *tal que* $\phi_{n_j}(t) \to \bar{\phi}(t)$ *cuando* $n_j \to \infty$ *uniformemente en* $t \in [t_0, t_1]$*.*

Nosotros plantearemos y probaremos una generalización de este resultado para sucesiones de trayectorias pertenecientes a una sucesión de procesos multivaluados convergentes a otro dado de forma superiormente semicontinua; véase Teorema 5.29.

5.2.2 Atractores débiles y semicontinuidad ante perturbaciones

Para sistemas multivaluados relativos a sistemas de control, uno está a menudo interesado en situaciones en las que una o algunas trayectorias procedentes de cada punto inicial satisfagan una cierta propiedad. Szegö & Treccani [158] introdujeron los conceptos de invarianza y atracción débiles para tales situaciones en el caso autónomo.

Aquí introducimos una versión pullback de tales conceptos para procesos multivaluados. Como en el caso fuerte, es menos restrictivo si los conceptos de invarianza y atracción están formulados para una familia de conjuntos en vez de para conjuntos individuales (condición uniforme).

Definición 5.21. *Una familia $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ es* positivamente débilmente invariante *para un proceso multivaluado Φ en $\mathbb{R}^d$ si para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ y todo $x_0 \in A_{t_0}$ existe una trayectoria $\phi : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ de Φ con $\phi(t_0) = x_0$ tal que $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \geq t_0$.*

Se dice débilmente invariante *si para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ y todo $x_0 \in A_{t_0}$, existe una trayectoria completa ϕ con $\phi(t_0) = x_0$ y $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definición 5.22. *Una familia débilmente invariante $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ es un* atractor débil en sentido pullback *del proceso multivaluado Φ en $\mathbb{R}^d$ si es débilmente pullback atrayente, i. e., para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, cualquier acotado no vacío D de $\mathbb{R}^d$ y cualquier sucesión $d_n \in D$ existen sucesiones de números positivos $\tau_n \to \infty$ si $n \to \infty$ y trayectorias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to \mathbb{R}^d$ de Φ con $\phi_n(t_0 - \tau_n) = d_n$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\phi_n(t_0), A_{t_0}) = 0. \tag{5.18}$$

Nótese que un atractor pullback en sentido fuerte, caso de existir, es por supuesto también un atractor débil. Ahora, pretendemos probar que se puede construir un atractor débil en sentido pullback a partir de una familia débilmente pullback absorbente (condición en general más fácil de determinar).

Definición 5.23. *Una familia débilmente positivamente invariante $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{R}\}$ de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ se dice* débilmente absorbente en sentido pullback *para el proceso multivaluado Φ en $\mathbb{R}^d$ si para $t_0 \in \mathbb{R}$ y cualquier acotado D de $\mathbb{R}^d$ existe un valor $T_{t_0,D} \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $\tau_n \geq T_{t_0,D}$ y $d_n \in D$ existe una trayectoria $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to \mathbb{R}^d$ de Φ con*

$$\phi_n(t_0 - \tau_n) = d_n \quad y \quad \phi_n(t_0) \in B_{t_0}.$$

Obsérvese que gracias al carácter positivamente débilmente invariante de $\mathcal{B}$ las trayectorias ϕ_n pueden ser extendidas, usando la propiedad de concatenación dada en la propiedad 3, para permanecer en $\mathcal{B}$ para $t \geq t_0$, i. e. $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \geq t_0$.

Teorema 5.24. *Sea Φ un proceso multivaluado con una familia débilmente absorbente en sentido pullback $\mathcal{B}$. Entonces Φ tiene un atractor débil pullback maximal $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ relativo a $\mathcal{B}$, unívocamente determinado para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ por*

$$A_{t_0} = \left\{ a \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, t_n \to \infty, \text{ y trayectorias } \phi_n : [t_0 - t_n, t_0] \to \mathbb{R}^d \text{ tales que} \\ \phi_n(t) \in B_t \text{ para } t \in [t_0 - t_n, t_0] \text{ y } \lim_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = a. \end{array} \right\} \tag{5.19}$$

Nota 5.25.

(i) Un atractor débil en sentido pullback consiste en trayectorias que existen y permanecen en $\mathcal{B}$ durante todo el tiempo ($\mathbb{R}$), pero no tiene que contener necesariamente a todas las trayectorias con dicha propiedad (sólo si es el maximal). Véase Lema 5.28.

(ii) Además de ser débilmente invariante, un atractor débil pullback es también negativamente fuertemente invariante, i. e., satisface que $A_t \subset \Phi(t, t_0, A_{t_0})$ para todo $t \geq t_0$ con $t_0 \in \mathbb{R}$.

(iii) La unicidad y maximalidad del atractor débil, como ya se dijo en el caso discreto e insinuado aquí, no puede ser entendida en el sentido habitual, sino con respecto a la familia absorbente $\mathcal{B}$ que lo genera. Esta es una propiedad intrínseca de los atractores débiles y no se contradice por tanto con la existencia de otros atractores, con o sin componentes comunes o con intersección, relativas a diferentes familias $\mathcal{B}$. Véanse los ejemplos en el sección anterior, o los dados en ésta.

Demostración del Teorema 5.24. La prueba es una adaptación al caso continuo de la dada para el Teorema 5.11:

Existencia y compacidad

Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ y tomamos una sucesión $\tau_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Por el carácter positivamente débilmente invariante de $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{R}\}$, dados $b_n \in B_{\tau_n}$, existen trayectorias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to \mathbb{R}^d$ con $\phi_n(\tau_n) = b_n$ y $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - \tau_n, t_0]$ y todo $n \in \mathbb{Z}^+$. En particular, $\phi_n(t_0) \in B_{t_0}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Como B_{t_0} es compacto, existe una subsucesión convergente $\phi_{n_j}(t_0) \to a_0 \in B_{t_0}$. Tomando esta subsucesión como la original en la definición (5.19) de A_{t_0}, tenemos que $a_0 \in A_{t_0}$, con lo que queda probado que A_{t_0} es no vacío.
Para probar que A_{t_0} es compacto, sólo es necesario ver que es cerrado ya que A_{t_0} está incluido en el compacto B_{t_0}. Supongamos que $a_k \in A_{t_0}$ y que $a_k \to a^*$ cuando $k \to \infty$. Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existen subsucesiones $t_{k,n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y trayectorias $\phi_{k,n} : [t_0 - t_{k,n}, t_0] \to \mathbb{R}^d$ con $\phi_{k,n}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - t_{k,n}, t_0]$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ para las cuales $\lim_{k\to\infty} \phi_{k,n}(t_0) = a_k$. Tomamos n_k de tal modo que

$$\|\phi_{k,n_k}(t_0) - a_k\| \leq \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad t_{k+1,n_{k+1}} \geq t_{k,n_k} + 1$$

para cada $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$\|\phi_{k,n_k}(t_0) - a^*\| \leq \|\phi_{k,n_k}(t_0) - a_k\| + \|a_k - a^*\| \leq \frac{1}{k} + \|a_k - a^*\| \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Denotamos $\bar{\phi}_k \equiv \phi_{k,n_k}$ y $\bar{t}_k \equiv t_{k,n_k}$. Entonces $\bar{\phi}_k : [t_0 - \bar{t}_k, t_0] \to \mathbb{R}^d$ con $\bar{\phi}_k(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - \bar{t}_k, t_0]$ y $k \in \mathbb{Z}^+$. Más aún, $\bar{t}_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ con $\bar{\phi}_k(t_0) \to a^*$ si $k \to \infty$. Así $a^* \in A_{t_0}$, de lo que se deduce que A_{t_0} es cerrado y por tanto compacto.

Carácter positivamente débilmente invariante

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y tomemos $a_0 \in A_{t_0}$. Entonces, existen valores $\tau_n \to +\infty$ y trayectorias $\phi_n : [t_0 - \tau_n, t_0] \to \mathbb{R}^d$ con $\phi_n(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - \tau_n, t_0]$ y tales que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = a_0$. Como $\mathcal{B}$ es positivamente débilmente invariante, cada trayectoria ϕ_n puede ser extendida a $[t_0 - \tau_n, \infty)$ de tal modo que $\phi_n(t) \in B_t$ para todo $t \geq t_0$. Por el Teorema de Barbashin (Teorema 5.20) aplicado sucesivamente en los intervalos de la forma $[t_0 + N, t_0 + N + 1]$ (usando subsucesiones adecuadas en cada paso) podemos encontrar una subsucesión (diagonal) $n'_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y (concatenando) una trayectoria $\bar{\phi}$ de Φ tal que $\phi_{n'_k}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \geq t_0$. Obviamente $\bar{\phi}(t_0) = a_0 \in A_{t_0}$ ya que la subsucesión original satisfacía $\phi_{n_k}(t_0) \to a_0$. Por construcción, $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \geq t_0$, y como $t_0 \in \mathbb{R}$ era arbitrario, tenemos que $\{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ es débilmente positivamente invariante.

Carácter débilmente negativamente invariante

Para probar la invarianza negativa (en sentido débil), usamos un argumento similar al anterior pero con algo más de cuidado para cualesquiera $t \leq t_0$. Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ y tómese k suficientemente grande tal que $\tau_{n_k} \geq N$ en la construcción anterior de la subsucesión de trayectorias ϕ_{n_k} en $\mathcal{B}$ con $\phi_{n_k}(t_0) \to a_0$ en la que ahora nos restringimos al intervalo común de definición $[t_0 - N, t_0] \subset [t_0 - \tau_{n_k}, t_0]$. Como $B_{t_0 - N}$ es compacto, el Teorema 5.20 de Barbashin nos da una subsucesión convergente con $\phi_{n'_k}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ para $t \in [t_0 - N, t_0]$, donde $\bar{\phi}$ es una trayectoria. Por supuesto, $\bar{\phi}(t_0) = a_0$, y por un argumento diagonal, es posible tener una subsucesión $\phi_{n'_k}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ para todo $t \leq t_0$. Como antes, se tiene que $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \leq t_0$. Concatenando las dos partes de $\bar{\phi}$ se tiene en todo $\mathbb{R}$ definida una trayectoria completa $\bar{\phi}$ del proceso multivaluado Φ con $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para $t \in \mathbb{R}$. En conclusión, $\{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ es débilmente invariante.

Atracción débil en sentido pullback

Consideramos fijado $t_0 \in \mathbb{R}$ y un acotado D en $\mathbb{R}^d$. Como $\mathcal{B}$ es débilmente pullback absorbente para el proceso Φ, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ existe un valor $T_{t_0-n,D} \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $k \geq T_{t_0-n,D}$ y $d_n \in D$ existe una trayectoria $\phi_{k,n}$ de Φ en $[t_0 - k - n, t_0]$ con $\phi_{k,n}(t_0 - k - n) = d_n$ y $b_{k,n} = \phi_{k,n}(t_0 - n) \in B_{t_0-n}$ para todo $k \geq T_{t_0-n,D}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Puesto que $\mathcal{B}$ es débilmente positivamente invariante, cada $\phi_{k,n}$ puede ser indefinidamente extendida de tal modo que $\phi_{k,n}(t) \in B_t$ para todo $t \geq t_0 - n$. En particular, $\phi_{k,n}(t_0) \in B_{t_0}$, que es compacto, luego existe una subsucesión $k_n < k_{n+1} \to \infty$ cuando $k_n \to \infty$ con $k_n \geq T_{t_0-n,D}$ y $k_{n+1} \geq T_{t_0-n-1,D}$ tal que $\phi_{k_n,n}(t_0) \to a^*$ $\in B_{t_0}$ cuando $n \to \infty$.

Notamos $\bar{\phi}_n \equiv \phi_{k_n,n}$ y $\tau_n \equiv k_n + n$. Entonces $\bar{\phi}_n$ está definida en $[t_0 - \tau_n, \infty)$, $\bar{\phi}_n(t_0 - \tau_n) = d_n \in D$ y $\bar{\phi}_n(t_0) \to a^*$ cuando $n \to \infty$. Por la construcción, $a^* \in A_{t_0}$, de modo que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}_n(t_0), A_{t_0}\right) = 0$, que es la propiedad (5.18). Así $\{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ es débilmente pullback atrayente como se quería probar. □

La prueba del siguiente resultado, sobre la continuidad del atractor pullback débil no es una consecuencia inmediata como en el caso fuerte.

Proposición 5.26. *Sea $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ un atractor débil en sentido pullback. Entonces, la aplicación multivaluada $t \mapsto A_t$ es continua.*

Demostración. Primero consideramos el límite $\operatorname{dist}(A_t, A_s) \to 0$ cuando $s \to t$. Si no fuera así, existiría una constante $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión $s_n \to t$ tal que

$$\epsilon_0 \leq \operatorname{dist}(A_t, A_{s_n}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que esto es contradictorio.

Puesto que A_t es compacto, existen elementos $a_n \in A_t$ tales que

$$\operatorname{dist}(A_t, A_{s_n}) = \operatorname{dist}(a_n, A_{s_n}) \leq \operatorname{dist}(a_n, a_{s_n})$$

para todo $a_{s_n} \in A_{s_n}$. Por la invarianza débil de $\mathcal{A}$ existe una trayectoria ϕ_n con $\phi_n(t) = a_n$ y $\phi_n(s) \in A_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\operatorname{dist}(A_t, A_{s_n}) \leq \operatorname{dist}(\phi_n(t), \phi_n(s_n)), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Por la compacidad de A_t de nuevo y el Teorema de Barbashin, existe una subsucesión de trayectorias ϕ_{n_j} que convergen a una trayectoria $\bar{\phi}$ uniformemente en el intervalo $[t-1, t+1]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &\leq \operatorname{dist}\left(A_t, A_{s_{n_j}}\right) \\
&\leq \operatorname{dist}\left(\phi_{n_j}(t), \phi_{n_j}(s_{n_j})\right) \\
&\leq \operatorname{dist}\left(\phi_{n_j}(t), \bar{\phi}(t)\right) + \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(t), \bar{\phi}(s_{n_j})\right) + \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(s_{n_j}), \phi_{n_j}(s_{n_j})\right) \\
&\leq \operatorname{dist}\left(\phi_{n_j}(t), \bar{\phi}(t)\right) + \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(t), \bar{\phi}(s_{n_j})\right) + \sup_{t-1 \leq s \leq t+1} \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(s), \phi_{n_j}(s)\right) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

cuando $j \to \infty$ por la convergencia uniforme de la subsucesión en sus primeros y terceros sumandos y por la continuidad de la trayectoria $\bar{\phi}$ en el segundo término. Pero esto es contradictorio, luego tenemos $\operatorname{dist}(A_t, A_s) \to 0$ cuando $s \to t$.

Seguidamente, vemos que $\operatorname{dist}(A_s, A_t) \to 0$ cuando $s \to t$. De nuevo por reducción al absurdo, en caso contrario, existiría un valor $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión $s_n \to t$ tales que

$$\epsilon_0 \leq \operatorname{dist}(A_{s_n}, A_t), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que esto lleva de nuevo a una contradicción.

A_{s_n} es compact, luego existen valores $a_n \in A_{s_n}$ tales que

$$\operatorname{dist}(A_{s_n}, A_t) = \operatorname{dist}(a_n, A_t) \leq \operatorname{dist}(a_n, a)$$

para todo $a \in A_t$. De la invarianza débil de $\mathcal{A}$, se deduce que existe una trayectoria ϕ_n con $\phi_n(s_n) = a_n$ y $\phi_n(s) \in A_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\operatorname{dist}(A_{s_n}, A_t) \leq \operatorname{dist}(\phi_n(s_n), \phi_n(t)), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pero por otro lado tenemos $a_n \in A_{s_n} \subset \Phi([t-1, t+1], t-1, A_{t-1})$, que es compacto por serlo A_{t-1} y por las propiedades de Φ (para la inclusión, hemos usado que el atractor es fuertemente negativamente invariante, véase Nota 5.25). Así, podemos aplicar el Teorema de Barbashin para obtener una subsucesión de trayectorias ϕ_{n_j} que convergen a una trayectoria $\bar{\phi}$ uniformemente en el intervalo $[t-1, t+1]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &\leq \operatorname{dist}\left(A_{s_{n_j}}, A_t\right) \\
&\leq \operatorname{dist}\left(\phi_{n_j}(s_{n_j}), \phi_{n_j}(t)\right) \\
&\leq \operatorname{dist}\left(\phi_{n_j}(s_{n_j}), \bar{\phi}(s_{n_j})\right) + \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(s_{n_j}), \bar{\phi}(t)\right) \\
&\leq \sup_{t-1 \leq s \leq t+1} \operatorname{dist}\left(\phi_{n_j}(s), \bar{\phi}(s)\right) + \operatorname{dist}\left(\bar{\phi}(s_{n_j}), \bar{\phi}(t)\right) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

cuando $j \to \infty$, por la convergencia uniforme de la subsucesión en el primer término y la continuidad de la trayectoria $\bar{\phi}$ en el segundo término, con lo que obtenemos una contradicción, luego debe ser $\operatorname{dist}(A_s, A_t) \to 0$ cuando $s \to t$.

Combinando los dos casos, se deduce como queríamos que $d_H(A_s, A_t) \to 0$ cuando $s \to t$. □

El segundo resultado que queremos probar es relativo a la semicontinuidad superior de los atractores cuando el modelo sufre perturbaciones.

Teorema 5.27. *Supongamos que el proceso multivaluado* Φ *tiene una familia débilmente absorbente en sentido pullback* $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{R}\}$ *y supongamos que tenemos una familia de procesos multivaluados perturbados,* Φ^ϵ*, cada uno de ellos con otra familia de absorbentes débiles en sentido pullback* $\mathcal{B}^\epsilon = \{B_t^\epsilon, t \in \mathbb{R}\}$ *para* $\epsilon > 0$ *tales que*

$$\max_{0 \leq \delta \leq 1} \operatorname{dist}(\Phi^\epsilon(t+\delta, t, x), \Phi(t+\delta, t, x)) \leq \epsilon \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d \tag{5.20}$$

y

$$\operatorname{dist}\left(B_{t_0}^\epsilon, B_{t_0}\right) \leq \epsilon \quad \textit{para todo} \quad t_0 \in \mathbb{R}. \tag{5.21}$$

Entonces, los atractores débiles pullback maximales $\mathcal{A}^\epsilon = \{A_t^\epsilon, t \in \mathbb{R}\}$ *con respecto a* $\mathcal{B}^\epsilon$ *de los procesos perturbados* Φ^ϵ *convergen con semicontinuidad superior hacia el atractor débil pullback maximal* $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ *de* Φ *con respecto a la familia* $\mathcal{B}$*, en el sentido siguiente:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{dist}\left(A_{t_0}^\epsilon, A_{t_0}\right) = 0. \tag{5.22}$$

para cada $t_0 \in \mathbb{R}$.

La siguiente condición sobre el proceso original (sin perturbación) Φ es una simple condición que asegura la existencia de una familia uniformemente débilmente absorbente: supongamos que $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{R}\}$ es una familia de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$ y que existe una constante γ : $\mathbb{R}^+ \to [0,1]$ tal que

$$\min_{y \in \Phi(t,t_0,x)} \operatorname{dist}(y, B_t) \leq \gamma(t - t_0) \operatorname{dist}(x, B_{t_0})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $t \geq t_0$ en $\mathbb{R}$ y que para todo acotado D y tiempo fijado t:

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \gamma(t - t_0) \sup_{x \in D} \operatorname{dist}(x, B_{t_0}) = 0.$$

Tomamos $N_\epsilon[B_t] := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \operatorname{dist}(x, B_t) \leq \epsilon\}$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Entonces, la familia $N_\epsilon[B_t]$ es débilmente positivamente invariante y débilmente pullback absorbente.

Para probar el Teorema 5.27, necesitamos los siguientes resultados:

Lema 5.28. *Sunpogamos que el proceso multivaluado* Φ *posee una familia débilmente pullback absorbente* $\mathcal{B} = \{B_t, t \in \mathbb{R}\}$ *y denotemos por* $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ *al atractor débil pullback maximal relativo a* $\mathcal{B}$ *por el Teorema 5.24. Entonces, una trayectoria completa* ϕ *de* Φ *satisface* $\phi(t) \in B_t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* $\phi(t) \in A_t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que ϕ es una trayectoria completa con $\phi(t) \in B_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Fijado $t_0 \in \mathbb{R}$, podemos tomar como sucesión de trayectorias $\phi_n : [t_0 - n, t_0] \to \mathbb{R}^d$ a $\phi_n \equiv \phi \in B_t$ para cada $t \in [t_0 - n, t_0]$. En particular, $\phi_n(t_0) \equiv \phi(t_0) \to \phi(t_0)$ cuando $n \to \infty$. Por la definición, $\phi(t_0) \in A_{t_0}$, pero t_0 era arbitrario, luego tenemos que $\phi(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. El recíproco es inmediato ya que $A_t \subset B_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

También requeriremos la siguiente generalización del Teorema 5.20.

Teorema 5.29. (Teorema de Barbashin generalizado) *Supongamos dada una sucesión de procesos multivaluados* Φ^ϵ *que converge con semicontinuidad superior al proceso* Φ*, i. e. en el sentido de* (5.20)*; sea* ϕ^{ϵ_j} *una trayectoria de* Φ^{ϵ_j} *en* $[t_0, t_1]$ *tal que* $\phi^{\epsilon_j}(t_0) = x_{0,j} \to x_0$ *cuando* $\epsilon_j \to 0$. *Entonces existe una trayectoria* ϕ *de* Φ *en* $[t_0, t_1]$ *con* $\phi(t_0) = x_0$ *y una subsucesión convergente* $\phi^{\epsilon_j'}(t) \to \phi(t)$ *cuando* $\epsilon_j' \to 0$ *uniformemente en* $t \in [t_0, t_1]$.

Demostración. Por conveniencia, consideraremos (sin pérdida de generalidad) el interval $[0,1]$ en vez de $[t_0, t_1]$. Por hipótesis, existe una sucesión de trayectorias ϕ^{ϵ_j} de Φ^{ϵ_j} definidas en $[t_0, t_1]$ con $\phi^{\epsilon_j}(0) = x_{0,j} \to x_0$ cuando $\epsilon_j \to 0$. Denotamos $\phi(0) = x_0$.

Por la convergencia con semicontinuidad superior (5.20) y la semicontinuidad de $\Phi(t, 0, \cdot)$ uniformemente en $t \in [0,1]$, tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\Phi^{\epsilon_j}(t,0,x_{0,j}), \Phi(t,0,x_0)) &\leq \operatorname{dist}(\Phi^{\epsilon_j}(t,0,x_{0,j}), \Phi(t,0,x_{0,j})) \\
&\quad + \operatorname{dist}(\Phi(t,0,x_{0,j}), \Phi(t,0,x_0)) \\
&\leq \epsilon_j + \operatorname{dist}(\Phi(t,0,x_{0,j}), \Phi(t,0,x_0)) \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \epsilon_j \to 0
\end{aligned}$$

uniformemente en $t \in [0,1]$. Por tanto, para todo ϵ_j suficientemente pequeño, los conjuntos $\Phi^{\epsilon_j}(t,0,x_{0,j})$ están en cualquier orla de $\Phi([0,1],0,x_0)$ para todo $t \in [0,1]$. El conjunto $\Phi([0,1],0,x_0)$ es compacto por la continuidad de $\Phi(\cdot,0,x)$ por las Propiedades 1 y 4 de un proceso multivaluado. En particular, de $\phi^{\epsilon_j}(1)$ se puede extraer una subsucesión convergente $\phi^{\epsilon'_j}(1) = x_{1,j} \to x_1 \in \Phi([0,1],0,x_0)$ cuando $\epsilon'_j \to 0$. Denotamos $\phi(1) = x_1$, de hecho, se tiene $\phi(1) \in \Phi(1,0,x_0)$ ya que

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\phi(1), \Phi(1,0,\phi(0))) &\leq \left\|\phi(1) - \phi^{\epsilon'_j}(1)\right\| + \operatorname{dist}\left(\phi^{\epsilon'_j}(1), \Phi^{\epsilon'_j}(1,0,\phi^{\epsilon'_j}(0))\right) \\
&\quad + \operatorname{dist}\left(\Phi^{\epsilon'_j}(1,0,\phi^{\epsilon'_j}(0)), \Phi(1,0,\phi(0))\right) \\
&= \left\|\phi(1) - \phi^{\epsilon'_j}(1)\right\| + \operatorname{dist}\left(\Phi^{\epsilon'_j}(1,0,\phi^{\epsilon'_j}(0)), \Phi(1,0,\phi(0))\right),
\end{aligned}$$

pues $\phi^{\epsilon'_j}(1) \in \Phi^{\epsilon'_j}(1,0,\phi^{\epsilon'_j}(0))$ para las trayectorias $\phi^{\epsilon'_j}$ de $\Phi^{\epsilon'_j}$. Así

$$\phi^{\epsilon'_j}(1) \to \phi(1), \qquad \phi^{\epsilon'_j}(0) \to \phi(0) \quad \text{cuando} \quad \epsilon'_j \to 0.$$

Como $\Phi^{\epsilon'_j}(1,0,\cdot)$ y $\Phi(1,0,\cdot)$ son semicontinuas superiormente y $\Phi^{\epsilon'_j}(1,0,\cdot)$ converge con semicontinuidad superior hacia $\Phi(1,0,\cdot)$ por (5.20), gracias al Lema 5.15:

$$\operatorname{dist}\left(\Phi^{\epsilon'_j}(1,0,\phi^{\epsilon'_j}(0)), \Phi(1,0,\phi(0))\right) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \epsilon'_j \to 0.$$

De donde se deduce $\operatorname{dist}(\phi(1), \Phi(1,0,\phi(0))) = 0$, i. e., $\phi(1) \in \Phi(1,0,\phi(0))$.

Consideramos el tiempo intermedio $t = \frac{1}{2}$. Repetimos el argumento anterior sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, para construir $\phi\left(\frac{1}{2}\right) \in \Phi\left(\frac{1}{2}, 0, \phi(0)\right)$ usando una subsucesión de la anterior que converja en $t = \frac{1}{2}$ (además de en $t = 0$ y 1). Por supuesto, con esta misma sucesión se tiene que $\phi(1) \in \Phi\left(1, \frac{1}{2}, \phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

La construcción de $\phi(t)$ en todos los diádicos $t \in \mathcal{D} = \bigcup_{q=0,1,2,\ldots} \left\{\frac{p}{2^q} \,:\, p = 0,1,2,\ldots,q\right\}$ de forma recursiva es por tanto posible tomando subsucesiones de las anteriores en cada paso, teniéndose las pertenencias anteriores: supongamos que para un q dado hemos construido todos los $\phi\left(\frac{p}{2^q}\right)$ tal que

$$\phi\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \in \Phi\left(\frac{p+1}{2^q}, \frac{p}{2^q}, \phi\left(\frac{p}{2^q}\right)\right), \qquad p = 0,1,2,\ldots,q-1. \tag{5.23}$$

Considérese el tiempo $\frac{2p+1}{2^{q+1}}$, el punto medio del intervalo $[\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}]$. La construcción de $\phi\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$ con

$$\phi\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right) \in \Phi\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}, \frac{p}{2^q}, \phi\left(\frac{p}{2^q}\right)\right)$$

y

$$\phi\left(\frac{p+1}{2^q}\right) \in \Phi\left(\frac{p+1}{2^q}, \frac{2p+1}{2^{q+1}}, \phi\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)\right)$$

sigue exactamente como en el caso $p = 0$ y $q = 1$, es decir, como la obtención de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ a partir de $\phi(0)$ y $\phi(1)$.

De la propiedad de proceso de Φ (Propiedad 3), y de las inclusiones en (5.23), tenemos $\phi(t) \in \Phi(t, s, \phi(s))$ para todos los diádicos s, $t \in [0,1]$ con $s \leq t$. Como en la prueba del Teorema de Barbashin, $\phi(t)$ para un valor t no diádico se define por un argumento límite (véase Kloeden [88]) y la inclusión $\phi(t) \in \Phi(t, s, \phi(s))$ para cualesquiera s, $t \in [0,1]$ con $s \leq t$ se tiene por las propiedades de continuidad y semicontinuidad superior de Φ. Por tanto, ϕ es un trayectoria de Φ, en particular, es continua [88, Teor. 4.2] y se tiene la convergencia uniforme en compactos de la subsucesión hacia ϕ [145, Teor. 6.2]. □

Demostración del Teorema 5.27. Sea $\mathcal{A} = \{A_t, t \in \mathbb{R}\}$ el atractor débil pullback maximal relativo a $\mathcal{B}$ dado por (5.19) para el proceso multivaluado sin perturbar Φ y denotemos por $\mathcal{A}^\epsilon = \{A_t^\epsilon, t \in \mathbb{R}\}$ a cada uno de los atractores débiles pullback maximales en $\mathcal{B}^\epsilon$ de los procesos perturbados Φ^ϵ. Supongamos que para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{dist}\left(A_{t_0}^\epsilon, A_{t_0}\right) \neq 0.$$

Entonces existe una constante $\eta_0 > 0$ y una subsucesión $\epsilon_j \to 0$ tal que

$$\operatorname{dist}\left(A_{t_0}^{\epsilon_j}, A_{t_0}\right) \geq \eta_0 \tag{5.24}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que esto es contradictorio.

Sea $a^{\epsilon_j} \in A_{t_0}^{\epsilon_j}$ tal que $\operatorname{dist}(a^{\epsilon_j}, A_{t_0}) = \operatorname{dist}\left(A_{t_0}^{\epsilon_j}, A_{t_0}\right)$ (por ser $A_{t_0}^{\epsilon_j}$ ser compacto), luego $\operatorname{dist}(a^{\epsilon_j}, A_{t_0}) \geq \eta_0$ para $j \in \mathbb{Z}^+$. Por el Lema 5.28 hay una trayectoria completa ϕ^{ϵ_j} de cada proceso perturbado Φ^{ϵ_j} tal que $\phi^{\epsilon_j}(t) \in A_t^{\epsilon_j} \subset B_t^{\epsilon_j}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ con $\phi^{\epsilon_j}(t_0) = a^{\epsilon_j}$.

Como $B_{t_0}^{\epsilon_j}$ y B_{t_0} son compactos con $\operatorname{dist}\left(B_{t_0}^{\epsilon_j}, B_{t_0}\right) \to 0$ cuando $\epsilon_j \to 0$, del Lema 5.14 se deduce que existe una subsucesión convergente $a^{\epsilon_j'} = \phi^{\epsilon_j'}(t_0) \to \bar{a}_0 \in B_{t_0}$ cuando $\epsilon_j' \to 0$.

De (5.24) tenemos

$$\operatorname{dist}(\bar{a}_0, A_{t_0}) \geq \eta_0/2. \tag{5.25}$$

Por el Teorema 5.29 aplicado al intervalo $[t_0, t_0+1]$, existe una trayectoria $\bar{\phi}$ de Φ en $[t_0, t_0+1]$ con $\bar{\phi}(t_0) = \bar{a}_0$ y una subsucesión $\phi^{\epsilon_j''}$ con $\phi^{\epsilon_j''}(t) \to \bar{\phi}(t)$ uniformemente en $t \in [t_0, t_0+1]$ cuando $\epsilon_j'' \to 0$. Más aún, por el Lema 5.14 se tiene que $\bar{\phi}(t) \in B_t$ para cada $t \in [t_0, t_0+1]$. Repetimos esta construcción en sucesivos intervalos $[t_0+n, t_0+n+1]$ para $n = 1, 2, \ldots$ para obtener una trayectoria $\bar{\phi}$ de Φ en $[t_0, \infty)$ y una subsucesión (diagonal, denotada igual que antes) $\phi^{\epsilon_j''}$ con $\phi^{\epsilon_j''}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ cuando $\epsilon_j'' \to 0$ para todo $t \in [t_0, \infty)$. Podemos también extender hacia atrás en el tiempo en sucesivos intervalos $[t_0 - n - 1, t_0 - n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ para obtener otra trayectoria $\bar{\phi}$ de Φ en $(-\infty, t_0]$ con $\bar{\phi}(t_0) = a_0$ y con otra subsucesión diagonal (denotada igual) $\phi^{\epsilon_j''}$ con $\phi^{\epsilon_j''}(t) \to \bar{\phi}(t) \in B_t$ cuando $\epsilon_j'' \to 0$ para todo $t \in (-\infty, t_0]$.

Así $\bar{\phi}$ es una trayectoria completa del proceso Φ con $\bar{\phi}(t) \in B_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por el Lema 5.28 se tiene que $\bar{\phi}(t) \in A_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular, $\bar{\phi}(t_0) \in A_{t_0}$. Sin embargo, esto contradice (5.25) y por tanto (5.24). Luego A_t^ϵ converge con semicontinuidad superior hacia A_t para cada $t \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo 5.30. *Consideramos un primer ejemplo relativo a un proceso multivaluado no autónomo generado por una inclusión diferencial no autónoma*

$$x' \in F(t,x) := \begin{cases} \{-x\} & si \quad t < 0 \\ \{-x, 0\} & si \quad t \geq 0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

El proceso multivaluado viene así dado por

$$\Phi(t, t_0, x_0) := \begin{cases} \{x_0 e^{-(t-t_0)}\} & si \quad t_0 \leq t \leq 0,\ x_0 \in \mathbb{R} \\ [x_0 e^{-(t-t_0)}, x_0] & si \quad 0 \leq t_0 \leq t,\ x_0 \geq 0 \\ [x_0, x_0 e^{-(t-t_0)}] & si \quad 0 \leq t_0 \leq t,\ x_0 \leq 0 \end{cases}$$

y la composición de estos casos. La familia $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ con $A_t \equiv \{0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es fuertemente (y por tanto débilmente) invariante. Es un atractor débil en sentido pullback (y también en sentido progresivo) con respecto a cualquier familia $\mathcal{B} = \{B_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ de componentes $B_t \equiv [-R, R]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y cualquier $R \geq 0$.

Como variante del anterior:

$$x' \in F(t,x) := \begin{cases} \{-x\} & si \quad t < 0 \\ \{-x, 1\} & si \quad t \geq 0 \end{cases}, \qquad x \geq -1.$$

El proceso viene dado por

$$\Phi(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \{x_0 e^{-(t-t_0)}\} & si \quad t_0 \leq t \leq 0,\ x_0 \geq -1 \\ [x_0 e^{-(t-t_0)}, x_0 + t - t_0] & si \quad 0 \leq t_0 \leq t,\ x_0 \geq -1, \end{cases}$$

y sus posibles combinaciones. De nuevo la familia $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ con $A_t \equiv \{0\}$ para $t \in \mathbb{R}$ es débilmente (pero no fuertemente) invariante. Continua siendo atractor pullback en sentidos pullback y progresivo con respecto a la misma familia $\mathcal{B} = \{B_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ con $B_t \equiv [-R, R]$ para $t \in \mathbb{R}$ y $0 \leq R \leq 1$.

La ambigüedad sobre la existencia y unicidad de los atractores débiles (Nota 5.25) queda reflejada en la trivial inclusión diferencial autónoma

$$x' \in F(t,x) := [-1, 1] \qquad x \in \mathbb{R}.$$

y su correspondiente proceso

$$\Phi(t, t_0, x_0) = [x_0 - t + t_0, x_0 + t - t_0] \quad t_0 \leq t,\ x_0 \in \mathbb{R},$$

cualquier familia $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ con $A_t \equiv [R_1, R_2]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es débilmente, pero no fuertemente, invariante para cualesquiera $R_1 \leq R_2$ en $\mathbb{R}$, y es un atractor débil en ambos sentidos, pullback y progresivo, respecto a si mismo como familia débilmente absorbente.

Ejemplo 5.31. *Mostramos ahora una familia atrayente dependiente del tiempo, que también atrae débilmente tanto en sentido pullback como progresivamente. Considérese la inclusión diferencial no autónoma*

$$x' \in F(t,x) = \begin{cases} \{-x+t\} & si \;\; t<0, \\ \{-x+t, -x\} & si \;\; t \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\Phi(t,t_0,x_0) = \begin{cases} \{(x_0+1-t_0)e^{-(t-t_0)}+t-1\} & si \;\; t_0 \leq t \leq 0, \\ [x_0 e^{-(t-t_0)}, (x_0+1-t_0)e^{-(t-t_0)}+t-1] & si \;\; 0 \leq t_0 \leq t, \\ [((x_0+1-t_0)e^{t_0}-1)e^{-t}, (x_0+1-t_0)e^{t_0}e^{-t}+t-1] & si \;\; t_0 \leq 0 \leq t. \end{cases}$$

Obsérvese que la familia $\mathcal{A} = \{A_t, \; t \in \mathbb{R}\}$ con $A_t \equiv \{t-1\}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ es débilmente (pero no fuertemente) invariante y de hecho, atractor débil pullback y progresivo.

Sin embargo, un sistema dinámico, tanto univaluado como multivaluado, en sentido fuerte o débil, no tiene que tener atractor en ambos sentidos. He aquí un ejemplo de atractor pullback débil que no lo es en sentido progresivo.

Ejemplo 5.32. *Consideramos la inclusión*

$$x' \in F(t,x) := \begin{cases} \{2tx\} & si \;\; t \leq 0, \\ \{2tx, 4tx\} & si \;\; 0 \leq t, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

y el proceso asociado

$$\Phi(t,t_0,x_0) = \begin{cases} \left\{x_0 e^{(t^2-t_0^2)}\right\} & si \;\; t_0 \leq t \leq 0, \\ \left[x_0 e^{2(t^2-t_0^2)}, x_0 e^{(t^2-t_0^2)}\right] & si \;\; 0 \leq t_0 \leq t, \; x_0 \leq 0, \\ \left[x_0 e^{(t^2-t_0^2)}, x_0 e^{2(t^2-t_0^2)}\right] & si \;\; 0 \leq t_0 \leq t, \; x_0 \geq 0, \end{cases}$$

y la composición de estos casos. La familia $\mathcal{A} = \{A_t, \; t \in \mathbb{R}\}$ con $A_t \equiv \{0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es fuertemente (y por tanto débilmente) invariante. De hecho, es un atractor débil en sentido pullback pero no en sentido progresivo.

Finalmente, desearíamos mencionar que el ejemplo clásico de Hartman [72] (Capítulo 2, Sección 5) de una ecuación diferencial no autónoma en $\mathbb{R}$ sin unicidad admite modificaciones (cf. Pilyugin [137, p. 888]) válidas para elaborar ejemplos más complicados e interesantes en relación no sólo a estabilidad sino a atractores.

5.3 Atractores para flujos multivaluados en la formulación "producto cruzado"

Aparte de las consideraciones hechas en las dos secciones previas, puramente no autónomas, existe la posibilidad en flujos univaluados y multivaluados de mirarlo con la formulación "producto cruzado", esto es, el par formado por una aplicación multivaluada con la propiedad del cociclo (viniendo de una ecuación diferencial no autónoma o de una inclusión) y conducida por otro sistema.

La ventaja de esta formulación en el espacio producto es la de transformar el problema en uno de tipo autónomo (cf. [152, 33, 34, 36, 93, 35]) y aplicar la teoría de sistemas autónomos en un espacio de fases modificado. Si tales condiciones se pueden aplicar[†] y el atractor en este sentido existe, podemos recuperar propiedades de atracción en el espacio de fases inicial usando proyecciones adecuadas y obtener mayor riqueza en propiedades.

Comenzamos pues recordando los conceptos relativos a la formulación del "producto cruzado" para un cociclo multivaluado, esto es, un sistema multivaluado donde la propiedad del proceso viene definida por otro sistema conductor del primero.

En la Sección 5.3.2 analizamos las condiciones generales para la existencia de atractores en sentido fuerte y débil para un sistema semidinámico general en un espacio métrico abstracto y sus propiedades. Aplicamos dichos resultados al caso que hemos introducido antes (producto cruzado) en la Sección 5.3.3, distinguiendo los casos fuerte y débil. Utilizando las secciones de los atractores obtenidos comprobaremos las conexiones con el sistema no autónomo subyacente, que nos ofrecerán algunas conclusiones distintas (mejores, al ser bajo condiciones más restrictivas) con respecto a las establecidas en las dos primeras secciones de este capítulo.

5.3.1 Formulación autónoma del flujo con el producto cruzado

Para establecer el entorno adecuado a la formulación del producto cruzado, primero consideramos un sistema conductor, $\theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ es un espacio métrico, i. e. un grupo de homeomorfismos para la composición en $\mathcal{M}$ con las propiedades

(i) $\theta_0 p = p$ para todo $p \in \mathcal{M}$,

(ii) $\theta_{t+s} p = \theta_t \theta_s p$ para todo s, $t \in \mathbb{R}$.

(iii) la aplicación $(t, p) \mapsto \theta_t p$ es continua.

Por ejemplo, podemos pensar en el semigrupo generado por un sistema diferencial ordinario en $\mathcal{M} = \mathbb{R}^l$ dado por una función disipativa, autónoma y globalmente lipschitziana g, $p' = g(p)$.

Un *flujo multivaluado cruzado* (FMC por abreviar) consiste en un sistema conductor θ en un espacio métrico $\mathcal{M}$ y una aplicación multivaluada que llamaremos cociclo multivaluado (que representará el conjunto de estados alcanzables) $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d \to K(\mathbb{R}^d)$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. *Compacidad* $\Phi(t, p, x)$ es un compacto no vacío de $\mathbb{R}^d$ para todo $t \geq 0$, $p \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}^d$;
2. *Condición inicial*

$$\Phi(0, p, x) = \{x\}$$

para todo $p \in \mathcal{M}$ y $x \in \mathbb{R}^d$;

3. *Propiedad del cociclo*

$$\Phi(t + s, p, x) = \Phi\left(t, \theta_s p, \Phi(s, p, x)\right)$$

para todo $t \geq 0$, $p \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}^d$;

4. *Continuidad en tiempo*

$$\lim_{s \to t} d_H\left(\Phi(s, p, x), \Phi(t, p, x)\right) = 0$$

para todo s, $t \geq 0$ y todo $p \in \mathcal{M}$ y $x \in \mathbb{R}^d$;

5. *Semicontinuidad superior respecto de las condiciones iniciales*

$$\lim_{q \to p, y \to x} \operatorname{dist}\left(\Phi(t, q, y), \Phi(t, p, x)\right) = 0$$

[†]En general son más restrictivas, como veremos en algunos ejemplos.

uniformemente en $t \in [T_0, T_1]$ para todo $0 \leq T_0 < T_1 < \infty$ y para todos $p \in \mathcal{M}$ y $x \in \mathbb{R}^d$.

Nota 5.33. Las condiciones 4 y 5 implican que Φ es globalmente semicontinua superiormente (s. c. s.), es decir, si $(t_n, p_n, x_n) \to (t, p, x)$ cuando $n \to \infty$, entonces se tiene que $\operatorname{dist}(\Phi(t_n, p_n, x_n), \Phi(t, p, x)) \to 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\Phi(t_n, p_n, x_n), \Phi(t, p, x)) &\leq \operatorname{dist}(\Phi(t_n, p_n, x_n), \Phi(t_n, p, x)) \\ &\quad + \operatorname{dist}(\Phi(t_n, p, x), \Phi(t, p, x)) \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

ya que el primer término de la derecha se va a cero por la semicontinuidad superior (uniforme en tiempo) respecto de las variables segunda y tercera, y el segundo término va también a cero por la continuidad de Φ en su primera variable.

Una *trayectoria* del cociclo multivaluado Φ es, por analogía con los casos anteriores, una aplicación univaluada $\phi_p : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ que satisface para cierto $p \in \mathcal{M}$,

$$\phi_p(t) \in \Phi(t - s, \theta_s p, \phi_p(s)) \quad \text{para todos} \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{5.26}$$

Una trayectoria ϕ se dice *completa* si está definida sobre todo $\mathbb{R}$ y satisface (5.26) para todos $s \leq t$. (Si es necesario precisar más, usaremos la notación p-trayectoria).

Usaremos la notación

$$\mathcal{T}_{p,x}([0, T]) = \{\phi_p, \text{ trayectoria}, \quad \phi_p(0) = x\}.$$

Entonces, se puede establecer el siguiente resultado en la línea de [13, 145, 88]:

Teorema 5.34. *Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) $\mathcal{T}_{p,x}([0, T]) \neq \varnothing$ *(existen trayectorias para todo p, x y $T > 0$)*

(2) $\mathcal{T}_{p,x}([0, T]) \subseteq C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ *(continuidad)*

(3) $\mathcal{T}_{p,x}([0, T])$ *es un compacto de* $C([0, T]; \mathbb{R}^d)$

(4) $\mathcal{T}_{p_n,x_n}([0, T]) \to \mathcal{T}_{p,x}([0, T])$ *(para la semidistancia* dist *en* $C([0, T]; \mathbb{R}^d)$*) cuando* $p_n \to p$, $x_n \to x$.

Además, como subproducto se obtiene el siguiente

Corolario 5.35. *Toda Φ-trayectoria es continua.*

Por claridad de lo que sigue, la demostración de estos resultados se deja en el Apéndice B.

Ahora consideramos un sistema semidinámico multivaluado autónomo en general (SSDMA), esto es, una aplicación multivaluada $\Pi : \mathbb{R}_+ \times Y \to \mathcal{P}(Y)$ satisfaciendo ciertas propiedades (cf. [158]), donde Y es un espacio métrico conexo. Para evitar repeticiones innecesarias, enunciamos tales propiedades sólo para el caso concreto en que $Y = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$.

Un caso particular de SSDMA es el de flujo multivaluado cruzado. Se define como $\Pi(t, p, x) = (\theta_t p, \Phi(t, p, x))$ y con las siguientes propiedades:

(1) $\Pi(t, p, x)$ es no vacío y compacto;

(2) $\Pi(0, p, x) = \{(p, x)\}$;

(3) La propiedad del semigrupo:

$$\Pi(t+s,p,x) = \Pi\left(t, \Pi(s,p,x)\right);$$

(4) $t \mapsto \Pi(t,p,x)$ es continuo respecto de la métrica de Hausdorff, para todos p, x, i. e.

$$d_H(\Pi(s,p,x), \Pi(t,p,x)) \to 0, \quad \text{cuando} \quad s \to t;$$

(5) $(p,x) \mapsto \Pi(t,p,x)$ es semicontinua superiormente respecto la semidistancia de Hausdorff, uniformemente en $t \in [T_1, T_2]$, i. e.

$$\text{dist}(\Pi(t,q,y), \Pi(t,p,x)) \to 0, \quad \text{cuando} \quad q \to p, y \to x.$$

Una trayectoria de un SSDMA es una función univaluada $\pi : [0,T] \to Y$ con $\pi(t) \in \Pi(t - s, \pi(s))$ para todo $0 \le s \le t \le T$.

Análogamente, una trayectoria (o p-trayectoria) para un FMC es una función univaluada $\pi_p : [0,T] \to \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$ con $\pi_p(t) \in \Pi(t-s, \pi_p(s))$ para todo $0 \le s \le t \le T$. El siguiente resultado es obvio:

Proposición 5.36. *π_p es una trayectoria para el FMC si y sólo si existe una trayectoria ϕ_p de Φ tal que*

$$\pi_p(t) = (\theta_t p, \phi_p(t)) \ \forall t \in [0,T].$$

El resultado también es cierto para una trayectoria definida en cualquier intervalo de tiempo y para trayectorias completas.

Nota 5.37. Un resultado análogo al Teorema 5.34 se tiene para un SSDMA Π (y por tanto para un FMC) en cualquier intervalo de tiempo (no necesariamente positivo). Esto es directo ya que la m-aplicación $F : \mathbb{R}_d \times \mathcal{M} \times X \to P(Y)$ definida por $F(t, t_0, p, x) := \Pi(t - t_0, (p,x))$ satisface las condiciones requeridas gracias a θ y Φ (cf. [13, 145, 88, 25]).

5.3.2 Atractores para un sistema semi-dinámico multivaluado autónomo

Consideramos un SSDMA $\Pi : \mathbb{R}^+ \times Y \to P(Y)$ y recordamos los conceptos básicos de atractores (para aplicarlos al caso que nos interesa con $Y = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$).

Por claridad, los subíndices f y d denotarán los conceptos *fuerte* y *débil*. Recordamos algunos conceptos ya dados:

Definición 5.38. *Un* atractor global en sentido fuerte *para un SSDMA Π es un compacto no vacío $\mathcal{A}_f \subset Y$ satisfaciendo*

(1) *invarianza fuerte: $\Pi(t, \mathcal{A}_f) = \mathcal{A}_f$ para todo $t \ge 0$*

(2) *atracción fuerte: para todo acotado no vacío D de Y,*

$$\text{dist}_Y(\Pi(t,D), \mathcal{A}_f) \to 0, \text{ cuando } t \to \infty$$

Un atractor global en sentido débil *para un SSDMA Π es un compacto no vacío $\mathcal{A}_d \subset Y$ que satisface las siguientes condiciones*

(1) *invarianza débil: $\forall y \in \mathcal{A}_d$ existe una trayectoria completa $\pi : \mathbb{R} \to Y$ con $\pi(0) = y$ y $\pi(t) \in \mathcal{A}_d$ para todo $t \in \mathbb{R}$*

(2) *atracción débil: para todo acotado no vacío D de Y y toda sucesión $y_n \in D$, existen trayectorias $\pi_n : \mathbb{R}^+ \to Y$ y tiempos $\tau_n \to \infty$ con $\pi_n(0) = y_n$ y*

$$\mathrm{dist}_Y(\pi_n(\tau_n), \mathcal{A}_d) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty$$

Por completitud, recordamos algunos resultados bien conocidos que garantizan la existencia de tales atractores.

Atractor global fuerte para un SSDMA

El caso más simple es sin duda el de un semiflujo autónomo que posee un compacto absorbente $\mathcal{B}_f$ (i. e. para todo acotado D existe $t_D \geq 0$ tal que $\Pi(t, D) \subset \mathcal{B}_f$ para todo $t \geq t_D$). Asumimos que $\mathcal{B}_f$ es un compacto absorbente en Y. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{B}_f$ es Π–positivamente invariante (i. e. $\Pi(t, \mathcal{B}_f) \subset \mathcal{B}_f, \forall t \geq 0$; si no lo fuera, basta tomar $\Pi([0, T_{\mathcal{B}_f}], \mathcal{B}_f)$, con $T_{\mathcal{B}_f}$ el tiempo de absorción de $\mathcal{B}_f$ por sí mismo). Definimos

$$\mathcal{A}_f = \bigcap_{t \geq 0} \Pi(t, \mathcal{B}_f),$$

entonces se tiene que $a \in \mathcal{A}_f$ si y sólo si $a \in \mathcal{B}_f$ y existen $\tau_n \to \infty, a_n \in \Pi(\tau_n, \mathcal{B}_f)$ con $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$. Antes de recordar las principales características de dicho atractor, damos un simple lema técnico:

Lema 5.39. *Dados (Y, d) un espacio métrico conexo y $\Pi : \mathbb{R}_+ \times Y \to P(Y)$ una aplicación tal que $\Pi(t, y)$ es conexo y $\Pi(t, \cdot)$ y $\Pi(\cdot, y)$ son semicontinuas superiormente para todos $t \in \mathbb{R}_+$ e $y \in Y$, entonces $\Pi(\cdot, y)$ y $\Pi(t, \cdot)$ llevan conexos de $\mathbb{R}_+$ e Y respectivamente en conexos de Y.*

Demostración. En efecto, para la primera afirmación, en caso contrario, existen un conexo I de $\mathbb{R}_+$ y abiertos no vacíos $\mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ que recubren $\Pi(I, y)$ con

$$\Pi(I, y) \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing \quad \text{y} \quad \Pi(I, y) \cap \mathcal{O}_i \neq \varnothing \quad i = 1, 2.$$

Llamamos $I_i = \{t \in \mathbb{R}_+ \,|\, \Pi(t, x) \subset \mathcal{O}_i\}$ para $i = 1, 2$. Como $\Pi(\cdot, x)$ tiene valores conexos, cada $t \in I$ está o bien en I_1 o bien en I_2, y ambos conjuntos, I_1 e I_2, son claramente no vacíos. Finalmente son abiertos de la topología relativa de $\mathbb{R}_+$, esto es inmediato por la semicontinuidad superior de $\Pi(\cdot, x)$.

La prueba del segundo caso es totalmente análoga, usando los recubrimientos abiertos

$$B_i = \{y \in Y \,|\, \Pi(t, y) \subset \mathcal{O}_i\}.$$

□

Proposición 5.40. *El conjunto $\mathcal{A}_f$ tiene las siguientes propiedades:*

(1) *Es no vacío, compacto y atrae a todos los acotados.*

(2) *Es Π–invariante, y por tanto es un atractor global fuerte. De hecho, es el mayor compacto invariante, y también el mínimo cerrado que atrae acotados.*

(3) *Si $\Pi(t, x)$ es conexo para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times Y$, entonces $\mathcal{A}_f$ es también conexo.*

Demostración. Claramente, $\mathcal{A}_f$ es no vacío ya que es intersección de una familia de compactos encajados no vacíos, por lo que es de hecho también compacto.

Como cualquier acotado es absorbido por $\mathcal{B}_f$, basta ver que $\mathcal{B}_f$ es atraído por $\mathcal{A}_f$. Si no, existe un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $x_n \in \Pi(t_n, \mathcal{B}_f)$, con $t_n \to \infty$, tal que $\mathrm{dist}(x_n, \mathcal{A}_f) \geq \varepsilon > 0$. Pero $x_n \in \mathcal{B}_f$ para todo $n \geq n(\mathcal{B}_f)$ por la propiedad de absorción de $\mathcal{B}_f$, y como es compacto, hay una subsucesión convergente (que no renombramos) a $x \in \mathcal{A}_f$, lo que es una contradicción.

Veamos en dos etapas que es Π–invariante: primero vemos que $\Pi(t, \mathcal{A}_f) \subset \mathcal{A}_f$ como en el caso univaluado. En efecto,

$$\Pi(t, \mathcal{A}_f) = \Pi\Big(t, \bigcap_{r\geq 0} \Pi(r, \mathcal{B}_f)\Big) \subset \bigcap_{r\geq 0} \Pi(t, \Pi(r, \mathcal{B}_f))$$

$$= \bigcap_{r\geq 0} \Pi(t + r, \mathcal{B}_f) = \bigcap_{r\geq t} \Pi(r, \mathcal{B}_f) = \bigcap_{r\geq 0} \Pi(r, \mathcal{B}_f) = \mathcal{A}_f$$

donde hemos usado la propiedad del semigrupo de Π y el carácter positivamente invariante de $\mathcal{B}_f$.

Para el recíproco, $\mathcal{A}_f \subset \Pi(t, \mathcal{A}_f)$, tomamos $a \in \mathcal{A}_f$. Entonces, existen sucesiones $\tau_n \to \infty$, y $a_n \in \Phi(\tau_n, \mathcal{B}_f)$ con $a_n \to a$. Considérese $t > 0$ y $n(t)$ tales que para todo $n \geq n(t)$, $\tau_n - t \geq 0$. Entonces, para todo $n \geq n(t)$:

$$a_n \in \Pi(\tau_n, \mathcal{B}_f) = \Pi(t, \Pi(\tau_n - t, \mathcal{B}_f)$$

y así existe una sucesión $a'_n \in \Pi(\tau_n - t, \mathcal{B}_f)$ con $a_n \in \Pi(t, a'_n)$. Como $\mathcal{B}_f$ es compacto y positivamente invariante, deducimos de

$$a'_n \in \Pi(\tau_n - t, \mathcal{B}_f) \subset \mathcal{B}_f$$

la existencia de una subsucesión convergente $a'_{n_j} \to a' \in \mathcal{B}_f$ si $j \to \infty$. Por supuesto, $\tau_{n_j} - t \to \infty$ de donde $a' \in \mathcal{A}_f$. Por la semicontinuidad superior tenemos que

$$\mathrm{dist}(\Pi(t, a'_{n_j}), \Pi(t, a')) \to 0 \qquad j \to \infty,$$

y de $a_{n_j} \to a$ y $a_{n_j} \in \Pi(t, a'_{n_j})$ se obtiene $a \in \Pi(t, a') \subset \Pi(t, \mathcal{A}_f)$ como deseábamos.

Como un compacto K que sea Π-invariante en particular satisface la propiedad de atracción, $\mathrm{dist}(\Pi(t, K), \mathcal{A}_f) \to 0$, por lo que tenemos que $\mathrm{dist}(K, \mathcal{A}_f) = \mathrm{dist}(\Pi(t, K), \mathcal{A}_f)$, entonces $\mathrm{dist}(K, \mathcal{A}_f) = 0$ y así $K \subset \mathcal{A}_f$.

Por otro lado, si un cerrado B atrae a todos los acotados, tenemos que $\mathrm{dist}(\mathcal{A}_f, B) = \mathrm{dist}(\Pi(t, \mathcal{A}_f), B) \to 0$ y por tanto $\mathrm{dist}(\mathcal{A}_f, B) = 0$ y $\mathcal{A}_f \subset B$.

Para la última afirmación, basta probar que $\mathcal{A}_f$ atrae un acotado conexo $\tilde{\mathcal{B}}$ que contenga a $\mathcal{A}_f$, lo que es trivial aquí tomando $\tilde{\mathcal{B}} = B(0, \|\mathcal{B}_f\|) \supset \mathcal{B}_f \supset \mathcal{A}_f$. Supongamos por contradicción que $\mathcal{A}_f$ no es conexo, entonces existen dos abiertos O_i (i=1,2) con

$$\mathcal{A}_f \subset O_1 \cup O_2 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A}_f \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing,$$

$$\mathcal{A}_f \cap O_i \neq \varnothing \qquad i = 1, 2.$$

Denotamos $A_i = \mathcal{A}_f \cap O_i$, nótese que son cerrados, y por tanto compactos. Tomamos $\epsilon > 0$ tal que $B(A_1, \epsilon) \cap B(A_2, \epsilon) = \varnothing$. Por la propiedad de atracción, existe $t_{\tilde{\mathcal{B}}}$ con $\Pi(t_{\tilde{\mathcal{B}}}, \tilde{\mathcal{B}}) \subset B(\mathcal{A}_f, \epsilon)$.

Por el Lema 5.39, $\Pi(t_{\tilde{\mathcal{B}}}, \tilde{\mathcal{B}})$ es conexo, de donde sólo puede estar contenido en uno de los conjuntos $B(A_i, \epsilon)$, lo que contradice las inclusiones

$$\mathcal{A}_f \subset \Pi(t_{\tilde{\mathcal{B}}}, \mathcal{A}_f) \subset \Pi(t_{\tilde{\mathcal{B}}}, \tilde{\mathcal{B}}).$$

Sin embargo, la prueba anterior sólo es válida cuando $\tilde{\mathcal{B}}$ pertenece al espacio, por ejemplo, cuando tratamos con espacios vectoriales. Una prueba más general, para Y un espacio métrico conexo cualquiera, es la siguiente adaptación del Teorema 3.1 en Gobbino & Sardella [63]:

Por contradicción, si $\mathcal{A}_f$ no es conexo, entonces $\mathcal{A}_f = A_1 \cup A_2$ con A_i compactos disjuntos no vacíos ($i = 1, 2$). Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \varnothing$, y definimos para $i = 1, 2$

$$Y_i = \{y \in Y : \Pi(t, y) \in B(A_i, \varepsilon) \quad \text{para} \quad t \quad \text{suficientemente grande}\}.$$

Es fácil comprobar, gracias a que $\mathcal{A}_f$ es atractor fuerte para Π y al Lema 5.39, que dichos conjuntos están bien definidos, que son disjuntos, no vacíos (contienen a A_i respectivamente), completan todo Y y son abiertos, veamos esto último. Dado $y \in Y_i$ y un entorno acotado de y, B, éste es atraído por $\mathcal{A}_f$ y por tanto existe un tiempo de absorción $t(B, \varepsilon) \geq 0$ por parte de $B(\mathcal{A}_f, \varepsilon)$ tal que $\Pi(t, B) \subset B(\mathcal{A}_f, \varepsilon)$ para todo $t \geq t(B, \varepsilon)$. En particular, como sabemos que $\Pi(t, y) \subset B(Y_i, \varepsilon)$, un entorno $U \subset B$ de y satisface también (por s. c. s.) que $\Pi(t, U) \subset B(A_i, \varepsilon)$, luego $U \subset Y_i$ (de nuevo por el Lema 5.39). Esto implica que los Y_i son abiertos, contradicción con que Y era conexo. □

Nota 5.41. La existencia de un conjunto absorbente para la construcción del atractor puede ser relajada a la de un conjunto atrayente (véase [118, Teor. 1]), siendo más apropiado en otras situaciones (cf. Valero [162]).

Atractores débiles para un SSDMA

Consideramos ahora el caso de un SSDMA $\Pi(t, x)$ para el que existen atractores débiles. Para ello, introducimos el concepto de absorbente en sentido débil $\mathcal{B}_d$, esto es, un compacto no vacío que verifica ser

- positivamente débilmente invariante: para todo $b \in \mathcal{B}_d$ existe al menos una trayectoria π con $\pi(0) = b$ y $\pi(t) \in \mathcal{B}_d$ para todo $t \geq 0$.
- débilmente absorbente: para todo acotado D existe $T_D \geq 0$ tal que para todo $d \in D$ existe una trayectoria π con $\pi(0) = d$ y $\pi(t) \in \mathcal{B}_d$ para todo $t \geq T_D$.

Teorema 5.42. *Si existe un conjunto débilmente absorbente $\mathcal{B}_d$ para el SSDMA* Π, *entonces existe un atractor débil maximal $\mathcal{A}_d$ con respecto a $\mathcal{B}_d$, y viene dado por el conjunto de puntos $a \in \mathcal{B}_d$ tales que existen $b_n \in \mathcal{B}_d$, $\tau_n \to \infty$ y trayectorias $\pi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{B}_d$ con $\pi_n(0) = b_n$ y* $\mathrm{dist}(\pi_n(\tau_n), a) \to 0$ *cuando $n \to \infty$.*

Nota 5.43. Como en el Lema 5.28, obsérvese que una trayectoria completa $\pi : \mathbb{R} \to Y$ satisface que

$$\pi(t) \in \mathcal{B}_d \qquad \text{si y sólo si} \qquad \pi(t) \in \mathcal{A}_d.$$

Por tanto, $\mathcal{A}_d$ es el conjunto de puntos alcanzados por trayectorias completas contenidas en $\mathcal{B}_d$.

Demostración. Dividimos la prueba en varias etapas (compárese con los teoremas 5.11 y 5.24):

No vacío y compacidad: tomamos sucesiones arbitrarias $\tau_n \to \infty$ y $b_n \in \mathcal{B}_d$. Del carácter positivamente débilmente invariante de $\mathcal{B}_d$ se deduce que existen trayectorias π_n con $\pi_n(0) = b_n$

y $\pi_n(t) \in \mathcal{B}_d$ para todo $t \geq 0$. En particular, $a_n = \pi_n(\tau_n) \in \mathcal{B}_d$, y por la compacidad de $\mathcal{B}_d$ podemos extraer una subsucesión a_{n_j} convergente a un elemento a de $\mathcal{B}_d$ cuando $j \to \infty$. Tomando $\{\tau_{n_j}, b_{n_j}, a_{n_j}\}_j$ como las sucesiones originales, tenemos que $a \in \mathcal{A}_d$ que es por tanto no vacío.

Vemos que $\mathcal{A}_d$ es compacto, para ello sólo necesitamos ver que es cerrado pues está contenido en el compacto $\mathcal{B}_d$. Sean $a_k \in \mathcal{A}_d$ y $a_k \to a$ cuando $k \to \infty$. Entonces existen sucesiones $\tau_{k,n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y trayectorias $\pi_{k,n}$ con $\pi_{k,n}(t) \in \mathcal{B}_d$ para todo $t \geq 0$ y $\pi_{k,n}(\tau_{k,n}) \to a_k$ cuando $n \to \infty$. Tomamos n_k tal que

$$|\pi_{k,n_k}(\tau_{k,n_k}) - a_k| \leq 1/k \quad \text{y} \quad t_{k+1,n_{k+1}} \geq t_{k,n_k} + 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Entonces

$$|\pi_{k,n_k}(\tau_{k,n_k}) - a| \leq |\pi_{k,n_k}(\tau_{k,n_k}) - a_k| + |a_k - a| \leq 1/k + |a_k - a| \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Tomando $\{\pi_{k,n_k}, \tau_{k,n_k}\}_k$ como las sucesiones originales, tenemos de nuevo que $a \in \mathcal{A}_d$, y por tanto es cerrado y compacto.

Carácter positivamente débilmente invariante: Sea $a \in \mathcal{A}_d$, entonces por definición existe una sucesión de tiempos $\tau_n \to \infty$ y otra de trayectorias π_n con $\pi(t) \in \mathcal{B}_d$ para todo $t \geq 0$, tal que $\pi_n(\tau_n) \to a$ cuando $n \to \infty$. Si denotamos $v_n(t) := \pi_n(\tau_n + t)$ es obvio que v_n es una trayectoria y que $v_n(t) \in \mathcal{B}_d$ para todo $t \geq 0$ y $v_n(0) \to a \in \mathcal{A}_d$. Aplicando el resultado análogo al de Barbashin (cf. Nota 5.37) en un intervalo arbitrario $[0, T]$, obtenemos una subsucesión convergente $v_{n_j}(t) \to v(t)$ uniformemente para $t \in [0, T]$. Naturalmente, $v : [0, T] \to \mathcal{B}_d$ es una trayectoria y $v(0) = a$. Más aún, $v(t) \in \mathcal{A}_d$ ya que $\pi_{n_j}(\tau_{n_j}) \in \mathcal{B}_d$, $\pi_{n_j}(\tau_{n_j} + t) \to v(t)$ y $\tau_{n_j} + t \to \infty$. Un proceso diagonal de Cantor permite obtener una trayectoria definida en todo $\mathbb{R}_+$.

Carácter negativamente débilmente invariante: Consideramos un tiempo $T > 0$ y valores n_T tales que $\tau_n - T \geq 0$ para todo $n \geq n_T$. Escribimos

$$v_n : [-T, 0] \to \mathcal{B}_d : s \mapsto v_n(s) := \pi_n(\tau_n + s).$$

El Teorema de Barbashin se puede aplicar sucesivamente en intervalos $[-T, 0]$, $[-2T, -T]$, ... y de nuevo por un argumento diagonal obtenemos la existencia de una trayectoria $\bar{v} : \mathbb{R}_- \to \mathcal{B}_d$, que toma valores de hecho en $\mathcal{A}_d$ como ocurría antes, con $\bar{v}(0) = a$. La concatenación de v y $\bar{v}$ nos da el carácter invariante de $\mathcal{A}_d$.

Atracción débil: Sea D un acotado de $\mathbb{R}^d$. Como $\mathcal{B}_d$ es débilmente absorbente, hay un tiempo $T_D > 0$ tal que para cada $d_n \in D$ existe una trayectoria π_n con $\pi_n(0) = d_n$ y $\pi_n(t) \in \mathcal{B}_d$ para todo $t \geq T_D$.

Por el carácter débilmente positivamente invariante de $\mathcal{B}_d$, podemos considerar trayectorias $\tilde{\pi}_n : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}_d$ con $\tilde{\pi}_n(0) = \pi_n(T_D)$. Como $\mathcal{B}_d$ es compacto, para cualquier sucesión $\tau_{n,k} \to \infty$ si $k \to \infty$, existen subsucesiones $\tilde{\pi}_n(\tau_{n,k'}) \to a_n$ si $k' \to \infty$ para algún $a_n \in \mathcal{B}_d$ (para cada n). Por definición de $\mathcal{A}$ tenemos que $a_n \in \mathcal{A}_d$. Definimos

$$\pi_n^*(t) := \begin{cases} \pi_n(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T_D, \\ \tilde{\pi}_n(t - T_D) & \text{si} \quad t \geq T_D. \end{cases}$$

Entonces, $\pi_n^*(0) = d_n$ y $\pi_n^*(\tau_{n,k'} + T_D) \to a_n$ cuando $k' \to \infty$. Sea k'_n tal que $\tau_{n,k'_n} < \tau_{n+1,k'_{n+1}}$ y $\operatorname{dist}(\pi_n^*(\tau_{n,k'_n} + T_D), \mathcal{A}_d) \leq 1/n$. Por tanto hemos obtenido trayectorias π_n^* que comienzan en d_n

y con

$$\mathrm{dist}(\pi_n^*(\tau_{n,k_n'} + T_D), \mathcal{A}_d) \to 0.$$

Esto es, se tiene la atracción débil.

La maximalidad del atractor con respecto a $\mathcal{B}_d$ se obtiene fácilmente de la propia definición. □

5.3.3 Atractores para un flujo multivaluado cruzado

Nos fijamos ahora concretamente en el caso $\Pi = (\theta, \Phi)$ de acuerdo a la estructura "producto cruzado", i. e. consideramos $Y = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$. Separamos de nuevo nuestro análisis en dos casos: atracción fuerte y débil.

Atractor global fuerte para un FMC

Suponemos que existe un compacto absorbente $\mathcal{B}_f \subset \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$ que es además positivamente invariante para Π. Entonces, existe el atractor global en sentido fuerte:

$$\mathcal{A}_f = \bigcap_{t \geq 0} \Pi(t, \mathcal{B}_f).$$

Sea $\mathcal{M}^* = \mathrm{Pr}_{\mathcal{M}}(\mathcal{A}_f)$ la proyección de $\mathcal{A}_f$ en el espacio $\mathcal{M}$ y considérese la notación cartesiana o sectorial

$$\mathcal{A}_f = \bigcup_{p \in \mathcal{M}^*} \{p\} \times A_f(p).$$

Proposición 5.44. *Bajo las hipótesis anteriores, se tiene que:*

(1) *$\mathcal{M}^*$ es no vacío, compacto, y $\theta_t \mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*$. De hecho, $\mathcal{M}^*$ es el atractor global del sistema conductor (univaluado) θ en $\mathcal{M}$.*

(2) *$A_f(p^*)$ es no vacío y compacto para cada $p^* \in \mathcal{M}^*$. También satisface la propiedad de invarianza $A_f(\theta_t p) = \Phi(t, p, A_f(p))$.*

(3) *La aplicación $\mathcal{M}^* \ni p \mapsto A_f(p)$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. La primera afirmación es obvia.

Nos centramos en la segunda, como $\mathcal{M}^*$ es la proyección en $\mathcal{M}$ del atractor $\mathcal{A}_f$, para todo $p^* \in \mathcal{M}^*$, $A_f(p^*)$ es no vacío. La compacidad sigue de la de $\mathcal{A}_f$ y la continuidad del operador de proyección de $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$. La Φ-invarianza de $A_f(p)$ sigue trivialmente de la Π-invarianza de $\mathcal{A}_f$.

Probamos ahora la tercera afirmación. Como $A_f(p)$ es compacto, es equivalente ver que es ε-s. c. s. (cf. [7]). Si no lo fuera, existirían una constante $\varepsilon > 0$ y $p_n \to p$ (elementos de $\mathcal{M}^*$) tales que $A_f(p_n) \not\subset B(A_f(p), \varepsilon)$, i. e. existe una sucesión $x_n \in A_f(p_n)$ con $x_n \notin B(A_f(p), \varepsilon)$. Por la definición sectorial de $A_f(p)$, para cada (p_n, x_n), existen sucesiones $t_m^n \to \infty$ (si $m \to \infty$) y $y_m^n \in \Phi(t_m^n, p_m^n, b_m^n)$, con $(p_m^n, b_m^n) \subset \mathcal{B}_f$, tales que $(\theta_{t_m^n} p_m^n, y_m^n) \to (p_n, x_n)$ cuando $m \to \infty$. Tomamos $m(n)$ estrictamente creciente tal que $t_{m(n)}^n$ también lo es. De $(\theta_{t_{m(n)}^n} p_{m(n)}^n, y_{m(n)}^n)$ (por pertenecer asintóticamente a $\mathcal{B}_f$) podemos extraer una subsucesión convergente a un par $(p, y) \in \{p\} \times A_f(p)$. Esto implica que una subsucesión de x_n se aproxima un elemento $y \in A_f(p)$, lo que es una contradicción. □

Consideramos ahora la restricción Π^* de Π a $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$. Como $\theta_t \mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que Π^* es un FMC sobre $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$.

Nos fijamos ahora en $\mathcal{B}_f^* = \mathcal{B}_f \cap (\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d)$. Entonces, $\mathcal{B}_f^*$ absorbe conjuntos acotados en $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$ bajo $\Pi^*(\equiv \Pi)$. También $\mathcal{B}_f^*$ es no vacío, compacto y Π^*-positivamente invariante, por tanto Π^* tiene un atractor global maximal

$$\mathcal{A}_f^* = \bigcup_{p \in \mathcal{M}^*} \{p\} \times A_f^*(p),$$

en $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$. Se tiene entonces lo siguiente:

Proposición 5.45. *Los atractores globales de Π y Π^* en sentido fuerte coinciden: $\mathcal{A}_f^* \equiv \mathcal{A}_f$.*

Demostración. Obviamente $\mathcal{A}_f^* \subset \mathcal{A}_f$, ya que (p.ej.) $\mathcal{A}_f^*$ es el menor cerrado de $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$ que atrae (respecto a Π^*) acotados de $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$, y $\mathcal{A}_f$ es cerrado con dicha propiedad.

Además, $\Pi^*(t, \mathcal{A}_f) \equiv \Pi(t, \mathcal{A}_f) \equiv \mathcal{A}_f, \forall t \geq 0$ ya que $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$ y $\Pi^* \equiv \Pi$ on $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$. Como $\mathcal{A}_f^*$ atrae acotados de $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$ incluido $\mathcal{A}_f$, se tiene que

$$\operatorname{dist}(\mathcal{A}_f, \mathcal{A}_f^*) = \operatorname{dist}(\Pi^*(t, \mathcal{A}_f), \mathcal{A}_f^*) \to 0, \text{ cuando } t \to \infty,$$

i. e. $\operatorname{dist}(\mathcal{A}_f, \mathcal{A}_f^*) \equiv 0$, así $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ y por tanto $\mathcal{A}_f \equiv \mathcal{A}_f^*$.

Alternativamente se puede argumentar como sigue: $\mathcal{A}_f$ es Π^*–invariante y el atractor global $\mathcal{A}_f^*$ de Π^* en $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$ es el mayor compacto Π^*–invariante de $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$, así $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{A}_f^*$. □

Atractores débiles para un FMC

Supongamos ahora que el FMC Π tiene un atractor débil relativo a un compacto débilmente absorbente dado $\mathcal{B}_d \subset \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$, según vimos para un SSDMA, que de nuevo escribimos usando la notación

$$\mathcal{A}_d = \bigcup_{p \in \mathcal{M}^*} \{p\} \times A_d(p),$$

(donde otra vez $\mathcal{M}^* = \operatorname{Pr}_{\mathcal{M}} \mathcal{A}_d$). Entonces

Proposición 5.46. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) *$\mathcal{M}^*$ es el atractor global en sentido fuerte para el sistema conductor.*

(2) *$A_d(p)$ es un compacto no vacío para $p \in \mathcal{M}^*$.*

(3) *La aplicación $\mathcal{M}^* \ni p \mapsto A_d(p) \in K(\mathbb{R}^d)$ es s. c. s.*

(4) *$\mathcal{A}_d$ es débilmente invariante, i. e. si $(p, a) \in \mathcal{A}_d$, existe una trayectoria completa $\pi = (\theta, \varphi)$ tal que $\varphi(0) = a$ y $\pi(t) = (\theta_t p, \varphi(t)) \in \mathcal{A}_d$ para todo $t \in \mathbb{R}$, i. e. $\varphi(t) \in A_d(\theta_t p)$.*

Más aún, $\mathcal{A}_d$ es el mayor conjunto débilmente invariante contenido en $\mathcal{B}_d$.

Demostración. La primera afirmación sobre $\mathcal{M}^*$ es igualmente clara aunque estemos en el caso débil, ya que θ es univaluado y la Π-invarianza débil implica fácilmente la θ-invarianza para $\mathcal{M}^*$, y la atracción débil de $\mathcal{A}_d$ implica la atracción fuerte para θ en $\mathcal{M}^*$.

Es trivial que $A_d(p)$ es no vacío al ser $\mathcal{M}^*$ la proyección de $\mathcal{A}_d$ en $\mathcal{M}$. Es un conjunto compacto, cuya prueba es igual que en el Teorema 5.42, ya que para todo $a_k \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$ tenemos que $\operatorname{Pr}_{\mathcal{M}}(a_k) = p$ y por tanto lo mismo le pasa al límite a.

Probamos que $\mathcal{M}^* \ni p \mapsto A_d(p)$ es s. c. s. Queremos ver que si $p' \to p$, entonces $\operatorname{dist}(A_d(p'), A_d(p)) \to 0$. Si no, hay una constante $\varepsilon > 0$ y una sucesión $p_n \to p$ con $\varepsilon \leq \operatorname{dist}(A_d(p_n), A_d(p)) = \operatorname{dist}(a_n, A_d(p))$, donde hemos usado que $A_d(p_n)$ es compacto. Por tanto,

$$\varepsilon \leq \operatorname{dist}(a_n, a) \qquad \forall a \in A_d(p). \tag{5.27}$$

Como $A_d(p_n) \subset \operatorname{Pr}_{\mathbb{R}^d} \mathcal{A}_d$ es compacto, de $\{a_n\}$ extraemos una subsucesión convergente (rebautizamos igual), y así $(p_n, a_n) \to (p, a)$. De la invarianza débil de $\mathcal{A}_d$ se deduce que existe al menos una trayectoria π_n pasando por cada (p_n, a_n). El Teorema de Barbashin (Th. 5.34, véase Nota 5.37) nos afirma la existencia de una subsucesión convergente $\{\pi_{n_1}\}_{n_1}$ en el intervalo $[-1, 1]$ hacia una trayectoria. Aplicando de nuevo a esta sucesión el argumento anterior obtenemos otra subsucesión, denotada $\{\pi_{n_2}\}_{n_2}$, que converge uniformemente en $[-2, 2]$. El argumento diagonal usual da una trayectoria completa π tal que $\pi(0) = (p, a)$. Por la Nota 5.43 tenemos que $(p, a) \in \mathcal{A}_d$, así $a \in A_d(p)$, lo que contradice (5.27).

La última afirmación es obvia. $\square$

Si nos restringimos ahora de Π a Π^* en $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$, tenemos que $\Pi(t, (p, x)) = \Pi^*(t, (p, x))$ para todo $t \geq 0$ y $(p, x) \in \mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$ ya que $\mathcal{M}^*$ es θ-invariante.

Definimos

$$\mathcal{B}_d^* = \bigcup_{p \in \mathcal{M}^*} \{p\} \times B_d(p) \subset \mathcal{B}_d = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times B_d(p).$$

Nótese que $A_d(p) \subset B_d(p)$ para todo $p \in \mathcal{M}^*$. Así, $B_d(p)$ es un compacto no vacío. También se tiene que $\mathcal{B}_d^*$ es débilmente positivamente invariante ya que $\mathcal{M}^*$ es θ-invariante y $\mathcal{B}_d$ es débilmente positivamente Π-invariante.

Entonces, obtenemos un atractor débil maximal para Π^*, $\mathcal{A}_d^*$, con respecto a $\mathcal{B}_d^*$ y usaremos para dicho atractor la notación

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{p \in \mathcal{M}^*} \{p\} \times A_d^*(p).$$

Nota 5.47. Obsérvese que $a \in A_d^*(p)$ si y sólo si existen sucesiones $t_n \to \infty$, $(p_n, b_n) \in \mathcal{B}_d^*$, trayectorias $\pi_n = (\theta, \varphi_n)$ con $\varphi_n(0) = b_n$ y $\theta_{t_n} p_n \to p$ y $\varphi_n(t_n) \to a$.

Por tanto se tiene que $\mathcal{A}_d^*$ consiste en los puntos de las Π^*-trayectorias completas contenidas en B^*, y como es débilmente invariante, $A_d^*(p)$ es compacto no vacío para todo $p \in \mathcal{M}^*$.

$\mathcal{A}_d \subset \mathcal{B}_d^* \subset \mathcal{B}_d$ pero $\mathcal{A}_d$ es la familia débilmente Π-invariante maximal de $\mathcal{B}_d$ y $\mathcal{A}_d^*$ es débilmente Π^*-invariante (y así débilmente Π-invariante), por tanto se tiene que

$$\mathcal{A}_d^* \subset \mathcal{A}_d.$$

De hecho, como Π y Π^* coinciden en $\mathcal{B}_d^*$, Π-trayectorias completas en $\mathcal{A}_d$ son Π^*-trayectorias completas y recíprocamente, por el mismo argumento de maximalidad, concluimos que

$$\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_d^*.$$

Así, podemos restringirnos a la dinámica en $\mathcal{B}_d^*$ y estudiar ahí las relaciones entre los atractores débiles y fuertes del flujo cruzado y sus secciones con respecto a los conceptos alternativos (y más generales) de atractores pullback (débiles y fuertes), es lo que veremos en el próximo parágrafo.

5.3.4 Estructura pullback de los atractores de un FMC

Una vez más separamos nuestro análisis en dos casos: atractores en sentido fuerte y débil. La definición del atractor pullback en sentido fuerte para un sistema multivaluado es la extensión natural de la versión discreta ya introducida (siendo ahí θ el operador "shift", cf. Definición 5.6), y análoga a la dada en el Capítulo 4 (cf. Definición 4.7).

La definición de atracción débil en sentido pullback es también extensión natural de la anterior, a saber, una familia de compactos $\{A_w(p)\}_{p\in P^*}$ débilmente invariante y tal que para todo acotado $D \subset \mathbb{R}^n$ y toda sucesión $x_n \in D$, existen sucesiones $t_n \to \infty$ y $\theta_{-t_n}p$-trayectorias ϕ_n verificando

$$\mathrm{dist}(\phi_n(t_n, \theta_{-t_n}p, x_n), A_w(p)) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

El caso fuerte

Como antes, $\mathcal{B}_f$ denotará un compacto positivamente Π-invariante y absorbente y $\mathcal{B}_f^* = \mathcal{B}_f \cap (\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d)$ será un compacto absorbente positivamente Π^*-invariante (mantenemos la notación sectorial $\mathcal{B}_f = \bigcup_{p\in\mathcal{M}}\{p\} \times B_f(p)$, así $B_f(p) \neq \varnothing$ para $p \in \mathcal{M}^*$). Esto implica el carácter Φ-positivamente invariante para las secciones $B_f(p)$ en $\mathcal{M}^*$:

$$\Phi(t, p, B_f(p)) \subset B_f(\theta_t p) \quad \forall t \geq 0, \forall p \in \mathcal{M}^*.$$

En efecto, $\Pi^*(t, \mathcal{B}_f^*) \subset \mathcal{B}_f^*$ implica que

$$\Pi(t, (p, B_f(p))) = (\theta_t p, \Phi(t, p, B_f(p))) \subset \mathcal{B}_f^* = \bigcup_{q\in\mathcal{M}^*} (q, B_f(q))$$

lo que necesariamente implica nuestra afirmación si $p \in \mathcal{M}^*$.

Lema 5.48. *Definimos*

$$\hat{A}_f(p) = \bigcap_{t\geq 0} \Phi(t, \theta_{-t}p, B_f(\theta_{-t}p)) \qquad \textit{para} \quad p \in \mathcal{M}^*.$$

Entonces, $\hat{A}_f(p)$ es no vacío y compacto para todo $p \in \mathcal{M}^*$.

Nota 5.49. Si $B_f(p)$ y $\Phi(t, p, x)$ son conexos para todo $t \geq 0$, $p \in \mathcal{M}^*$ y $x \in \mathbb{R}^d$, entonces $\hat{A}_f(p)$ es también conexo ya que es intersección de compactos conexos no vacíos encajados.

En efecto, como ya se vio en la Proposición 5.40, la imagen por $\Pi(t, \cdot)$ de un conexo es conexa, en particular del conexo $\{\theta_{-t}p, B_s(\theta_{-t}p)\}$. Usando la proyección sobre $\mathbb{R}^d$ (aplicación continua) se tiene que cada uno de los conjuntos $\Phi(t, \theta_{-t}p, B_f(\theta_{-t}p))$ es conexo. Pero la intersección de conjuntos conexos y compactos encajados no vacíos (notados C_i por abreviar[‡]) es, aparte de compacto no vacío, conexo:

Si no, existirían dos abiertos relativos de $C = \cap_{i\geq 1} C_i$, disjuntos y no vacíos, A y B, tales que $C = A \cup B$ con $C \cap A \neq \varnothing$ y $C \cap B \neq \varnothing$. Como C es cerrado de $\mathbb{R}^d$, se deduce que A y B son cerrados de $\mathbb{R}^d$, de donde resulta que son también compactos. Al ser disjuntos, distan una cantidad positiva y podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^d}(A, \varepsilon) \cap B_{\mathbb{R}^d}(B, \varepsilon) = \varnothing$ y afirmar que existe $n(\varepsilon)$ tal que para todo $n \geq n(\varepsilon)$ se tiene que $\cap_{i=1}^n C_i \subset B_{\mathbb{R}^d}(A, \varepsilon) \cup B_{\mathbb{R}^d}(B, \varepsilon)$ [de lo contrario

[‡] Al ser encajados basta considerar la intersección de cualquier familia numerable con los tiempos formando una sucesión creciente.

tomando elementos que estuvieran en los C_j pero no en $B_{\mathbb{R}^d}(A,\varepsilon) \cup B_{\mathbb{R}^d}(B,\varepsilon)$, llegaríamos a que una subsucesión sería convergente a un elemento del cerrado $\mathbb{R}^d \backslash [B_{\mathbb{R}^d}(A,\varepsilon) \cup B_{\mathbb{R}^d}(B,\varepsilon)]$ y de C a la vez]. Pero $C_{n(\varepsilon)} = \cap_{i=1}^{n(\varepsilon)} C_i \subset B_{\mathbb{R}^d}(A,\varepsilon) \cup B_{\mathbb{R}^d}(B,\varepsilon)$, con $B_{\mathbb{R}^d}(A,\varepsilon)$ y $B_{\mathbb{R}^d}(B,\varepsilon)$ abiertos disjuntos no vacíos, es contradictorio con que $C_{n(\varepsilon)}$ es conexo.

Demostración del Lema 5.48. Gracias al carácter positivamente Φ-invariante de $B_f(p)$ para $p \in \mathcal{M}^*$, y a la propiedad del cociclo, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(t+r,\theta_{-t-r}p,B_f(\theta_{-t-r}p)) &= \Phi(t,\theta_{-t}p,\Phi(r,\theta_{-t-r}p,B_f(\theta_{-t-r}p))) \\ &\subset \Phi(t,\theta_{-t}p,B_f(\theta_{-t}p)).\end{aligned}$$

Así estos conjuntos están encajados y son compactos por la semicontinuidad superior de Φ en su tercera variable y la compacidad de $B_f(p)$ para $p \in \mathcal{M}^*$. Por tanto, cada $\hat{A}_f(p)$ es no vacío y compacto. □

Damos ahora el resultado natural que cabía esperar, que de paso muestra la Nota 5.49 como una consecuencia trivial del apartado 3 de la Proposición 5.40.

Proposición 5.50. *Se tienen las siguientes igualdades:*

$$\hat{A}_f(p) = A_f^*(p) = A_f(p) \qquad \forall p \in \mathcal{M}^*. \tag{5.28}$$

Demostración. Sólo hay que ver que se tiene la primera identidad (la segunda ya ha sido probada).

Veamos que $\hat{A}_f(p) \subset A_f^*(p)$:

$$\begin{aligned}\{p\} \times \hat{A}_f(p) &= \{p\} \times \bigcap_{t\geq 0} \Phi(t,\theta_{-t}p,B_f(\theta_{-t}p)) \\ &= \bigcap_{t\geq 0} \{p\} \times \Phi(t,\theta_{-t}p,B_f(\theta_{-t}p)) \\ &= \bigcap_{t\geq 0} \{\theta_t(\theta_{-t}p)\} \times \Phi(t,\theta_{-t}p,B_f(\theta_{-t}p)) \\ &= \bigcap_{t\geq 0} \Pi(t,(\theta_{-t}p,B_f(\theta_{-t}p))) \\ &\subset \bigcap_{t\geq 0} \Pi(t,\mathcal{B}_f^*) \equiv \mathcal{A}_f^*.\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\mathcal{M}^*$ es θ-invariante. Así $\{p\}\times\hat{A}_f(p) \subset \mathcal{A}_f^*$ lo que implica que $\{p\}\times\hat{A}_f(p) \subset \{p\} \times A_f^*(p)$ y por tanto $\hat{A}_f(p) \subset A_f^*(p)$ como deseábamos.

Para el recíproco, teniendo en cuenta que $\Pi^*(t,\mathcal{A}_f^*) = \mathcal{A}_f^*$ para todo $t \geq 0$, se deduce

$$\Phi(t,p,A_f^*(p)) = A_f^*(\theta_t p) \qquad \text{para todo} \quad t \geq 0,\, p \in \mathcal{M}^*.$$

Más aún, sabemos que

$$\hat{A}_f(p) \subset A_f^*(p) \subset B_f(p).$$

Por tanto, poniendo $\theta_{-t}p$ en vez de p,

$$A_f^*(p) = \Phi(t,p,A_f^*(\theta_{-t}p)) \subset \Phi(t,\theta_{-t}p,B_f(\theta_{-t}p))$$

para todo $t \geq 0$ y $p \in \mathcal{M}^*$. Finalmente obtenemos que

$$A_f^*(p) \subset \bigcap_{t \geq 0} \Phi(t, \theta_{-t}p, B_f(\theta_{-t}p)) = \hat{A}_f(p).$$

□

Más aún, tenemos el siguiente resultado que relaciona la atracción pullback con las componentes sectoriales obtenidas anteriormente.

Proposición 5.51. *$\{\hat{A}_f(p)\}_p$ es el atractor en sentido pullback para Φ en $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$.*

Demostración. Si no, existe una constante positiva ε, un acotado D y sucesiones $t_n \to \infty$, $y_n \in \Phi(t_n, \theta_{-t_n}p, d_n)$ con $p \in \mathcal{M}^*$ y $d_n \in D$ tales que

$$\mathrm{dist}(y_n, \hat{A}_f(p)) > \varepsilon > 0.$$

Pero existe $T_D(p)$ tal que $\Phi(t, \theta_{-t}p, D) \subset B_f(p)$ para todo $t \geq T_D(p)$. Por tanto, como $B_f(p)$ es compacto, podemos extraer una subsucesión convergente (denotada igual) $y_n \to x \in B_f(p)$. Veremos que $x \in \hat{A}_f(p)$, lo que nos llevará a una contradicción.

Considérese cualquier $\tau > 0$ y tómese $n(\tau)$ suficientemente grande tal que $t_n - \tau > 0$ y $\Phi(t_n - \tau, \theta_{-t_n}p, d_n) \subset B_f(\theta_{-\tau}p)$, lo que es posible ya que $t_n \to \infty$ y la familia $B_f(p)$ es Φ-pullback absorbente.

Entonces, tenemos que

$$y_n \in \Phi(t_n, \theta_{-t_n}p, d_n) = \Phi(\tau, \theta_{-\tau}p, \Phi(t_n - \tau, \theta_{-t_n}p, d_n)),$$

lo que implica que $x \in \hat{A}_f(p)$ como deseábamos.

Veamos ahora que éste es el atractor pullback minimal, i. e. coincide con la clausura de la unión de los omega-límites en cada "fibra" p:

$$\overline{\bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \Phi(t, \theta_{-t}p, D)}}.$$

En efecto, es una consecuencia inmediata del hecho de que para todo $p \in \mathcal{M}^*$, $B_f(p)$ está contenido en un compacto K $(= \mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^d} \mathcal{B}_f)$:

$$\Phi(t, \theta_{-t}p, B_f(\theta_{-t}p)) \subset \Phi(t, \theta_{-t}p, K)$$

y así

$$\hat{A}_f(p) \subset \overline{\bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \Phi(t, \theta_{-t}p, D)}}.$$

La otra inclusión es obvia, usando la minimalidad del omega-límite del conjunto D respecto al parámetro p. □

Nota 5.52.

(i) Obsérvese que las proposiciones 5.50 y 5.51 implican que las componentes en p del Π-atractor global fuerte $\mathcal{A}_f$, que atrae globalmente (y en sentido pullback), son los atractores fuertes en sentido pullback para Φ cuando la dinámica del sistema se restringe a $\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d$.

(ii) Aquí hemos partido de un atractor global para el flujo cruzado Π y obtenido un atractor pullback para Φ. El recíproco no es cierto en general, i. e. si $\{A_f(p),\, p \in \mathcal{M}^*\}$ es un atractor pullback en sentido fuerte para Φ, entonces $\mathcal{A} = \bigcup_{p\in\mathcal{M}^*}\{p\} \times A_f(p)$ no tiene porqué ser un atractor global para Π (véase [35] para un contraejemplo en el caso univaluado).

(iii) En general, los atractores pullback para flujos multivaluados son sólo negativamente invariantes, y la invarianza estricta necesita de hipótesis adicionales (la más fácil es la de semicontinuidad inferior para el flujo). Aquí, sin embargo, hemos obtenido invarianza estricta ya que el sistema conductor tenía un atractor global.

Ahora, teniendo (5.28) en mente, deducimos una mejora de la semicontinuidad superior probada en la Sección 5.3.3 cuando la aproximación en el espacio paramétrico se hace a través del sistema conductor.

Corolario 5.53. *Para todo $p \in \mathcal{M}^*$, la aplicación $t \mapsto A_f(\theta_t p)$ es continua.*

Demostración. La afirmación sigue del hecho de que $\mathcal{A}_f^* \equiv \mathcal{A}_f$ es fuertemente Π-invariante (y por tanto $\Phi(t,p,A_f(p)) = A_f(\theta_t p)$), y la continuidad de Φ en su primera variable. □

El caso débil

Suponemos que $\mathcal{B}_d = \bigcup_{p\in\mathcal{M}}\{p\} \times B_d(p)$ es una familia débilmente absorbente para el producto cruzado y denotamos $\mathcal{B}_d^* = \mathcal{B}_d \cap (\mathcal{M}^* \times \mathbb{R}^d)$.

Entonces la familia $\{B_d(p)\}_{p\in\mathcal{M}}$ "es" (véase Nota 5.55 más abajo) una familia débilmente pullback absorbente para Φ, lo que nos lleva a considerar la siguiente definición:

$$\hat{A}_d(p) = \left\{ a \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists t_n \to \infty,\ b_n \in B_d(\theta_{-t_n}p),\ p-\text{trayectorias} \\ \varphi_n : [-t_n, 0] \to \mathbb{R}^d \text{ con } \varphi_n(-t_n) = b_n \text{ y } \varphi_n(0) \to a \end{array} \right\}$$

Ahora podemos probar que $\hat{A}_d(p) \subset A_d^*(p)$.

Sea $a \in \hat{A}_d(p)$, entonces existen sucesiones $t_n \to \infty$, $b_n \in B_d(\theta_{-t_n}p)$, y p-trayectorias $\hat{\varphi}_n : [-t_n, 0] \to \mathbb{R}^d$ tales que $\hat{\varphi}_n(-t_n) = b_n$ y $\hat{\varphi}_n(0) \to a$.

Denotamos $p_n = \theta_{-t_n}p$ y consideramos $\varphi_n : [0, t_n] \to \mathbb{R}^d$ dada por

$$t \mapsto \varphi_n(t) = \hat{\varphi}_n(t - t_n).$$

Es obvio que $\{\pi_n = (\theta, \varphi_n)\}_n$ son Π^*-trayectorias con $\pi_n(0) = (p_n, b_n)$ y

$$\pi_n(t_n) = (\theta_{t_n}p_n, \varphi_n(t_n)) = (p, \hat{\varphi}_n(0)) \to (p, a).$$

La Nota 5.47 implica que $\hat{A}_d(p) \subset A_d^*(p)$.

Para la inclusión contraria tenemos:

$\mathcal{A}_d^*$ es débilmente invariante, esto era: para todo par $(p,a) \in \mathcal{A}_d^*$ existe una trayectoria completa π de Π^* con $\pi(t) \in \mathcal{A}_d^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$, i. e. $\pi(t) = (\theta_t p, \varphi(t))$ con φ trayectoria completa de Φ tal que $\varphi(0) = a \in A_d(p)$ y $\varphi(t) \in A_d(\theta_t p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Consideramos cualquier sucesión $t_n \to \infty$ y ponemos $p_n = \theta_{-t_n}p$. Tomamos $b_n = \varphi(-t_n) \in A_d(\theta_{-t_n}p) \subset B_d(\theta_{-t_n}p)$. Entonces trivialmente $\varphi_n(t) \equiv \varphi(t)$ para todo n y t, que junto con los valores elegidos b_n, t_n y p_n implica $a \in \hat{A}_d(p)$ y por tanto $A_d^*(p) \subset \hat{A}_d(p)$.

Así, hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 5.54. *Bajo las hipótesis anteriores, $\hat{A}_d(p) = A_d^*(p) = A_d(p)$ para todo $p \in \mathcal{M}^*$, i. e. el atractor débil maximal de Π/Π^* en $\mathcal{B}_d/\mathcal{B}_d^*$ genera el atractor débil pullback maximal de Φ con respecto a la familia absorbente $\{B_d(p), p \in \mathcal{M}^*\}$.*

Nota 5.55. Por la Proposición 5.46 y la continuidad de θ, la aplicación multivaluada

$$t \mapsto \hat{A}_d(\theta_t p) = A_d(\theta_t p)$$

es (sólo) superiormente semicontinua (en comparación con la Proposición 5.26).

Ejemplo 5.56. *El primer caso que exponemos es relativo a la estructura fuerte en un flujo cruzado dado por la inclusión diferencial*

$$x'(t) \in g(t, x(t)) + \beta p(t, x(t)), \tag{5.29}$$

donde la aplicación multivaluada g tiene buenas propiedades (por ejemplo, basta con que tenga valores cerrados y convexos en $P(\mathbb{R}^d)$ y que sea lipschitziana) y satisfaga:
1.- dependencia quasi periódica en su primera variable,
2.- una condición de disipatividad: para todo $y \in g(t,x)$ se tiene $(x,y) \leq -\alpha_0|x|^2 + \alpha_1$, con $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$,
3.- y p es univaluado, quasi periódico en su primera variable, y satisface

$$|p(t,x)| \leq \gamma_1(t)|x| + \gamma_2(t),$$

$$|p(t,x) - p(t,y)| \leq \gamma_3(t)|x - y|$$

con γ_i (i=1,2,3) funciones continuas y positivas y

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \gamma_1(s)ds = C_f < \infty. \tag{5.30}$$

Bajo estas hipótesis, es fácil deducir la existencia de un atractor para el flujo en el espacio producto cruzado generado por el problema anterior si β es positivo y suficientemente pequeño.

Las condiciones de periodicidad o quasi periodicidad en la dependencia temporal no son estrictamente necesarias.

Ejemplo 5.57. *Considérese el sistema conductor*

$$p'(t) = g(p(t)), \tag{5.31}$$

con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) = \begin{cases} -y - 1 & si \quad y \leq -1, \\ y^2 - 1 & si \quad y \in (-1, 1), \\ 1 - y & si \quad y \geq 1. \end{cases}$$

Entonces, es fácil ver que el problema no autónomo

$$x'(t) \in [-1, -1/2]x(t) + p(t)$$

genera una cociclo multivaluado, y conjuntamente con (5.31), un flujo cruzado con un atractor global no trivial en sentido fuerte.

Otros ejemplos a partir de ecuaciones diferenciales sin unicidad, ecuaciones en derivadas parciales con términos de fuerza periódicos, con retardo y otros modelos diferenciales funcionales pueden ser consultados en [36, 33–35].

Damos un ejemplo simple para ilustrar el caso débil usando de nuevo una función periódica en tiempo.

Ejemplo 5.58. *Sea la inclusión diferencial*

$$x'(t) \in x(t)[-\mathrm{sen}^2 t, 0], \tag{5.32}$$

que claramente genera un cociclo multivaluado. Como para todo valor inicial x_0, la función constante $\phi(t) = x_0$ es solución del problema, no puede haber atractor en sentido fuerte para el flujo cruzado. Sin embargo, el conjunto $\{0\}$ es un atractor (débil) del sistema no autónomo (y $[0,\pi] \times \{0\}$ lo es del flujo cruzado, donde $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ dotado del operador congruencia módulo π como conductor). En efecto,

$$\frac{x'}{x} = -\mathrm{sen}^2 t = -1/2(1 - \cos(2t))$$

genera soluciones para datos iniciales x_0 de la forma

$$x(t) = x_0 e^{-t/2 + \mathrm{sen}(2t)/4}.$$

En [83] se pueden ver ejemplos de problemas de controlabilidad para sistemas diferenciales lineales de la forma:

$$x'(t) = A(t)x + Bu, \qquad u \in U,$$

donde A es un operador quasi periódico y B es un operador lineal actuando sobre un conjunto de controles U. (Aquí $\mathcal{M}$ es la clausura del conjunto $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$).

Capítulo 6

Atractores Autónomos y No Autónomos para Ecuaciones con Retardo

En este capítulo volvemos sobre los sistemas diferenciales con retardo, que ya empezamos a tratar en la Sección 2.3.3. En este caso trataremos sistemas deterministas, y no en sentido débil como en el capítulo precedente sino fuerte. Analizamos condiciones para la existencia de atractor en sistemas con retardo variable o distribuido (ecuaciones integro-diferenciales), en los que puede haber o no dependencia explícita del tiempo y puede no darse unicidad de solución.

6.1 Introducción

Existen razones físicas, fenómenos de transmisión no instantánea, procesos con memoria, y especialmente motivaciones biológicas (e. g. [48, 97, 122]) como el crecimiento en el número de individuos de especies y tiempo de incubación de enfermedades entre muchos otros, que hacen de las ecuaciones diferenciales con retardo un importante área de las matemáticas aplicadas.

Más aún, el comportamiento asintótico en tales modelos está lleno de significado, como por ejemplo la supervivencia ("permanencia"), estabilidad, inestabilidad e incluso caos en el desarrollo de una especie o su extinción, en modelos aislados o bien en sistemas acoplados (generalmente de competición). Sin embargo, la mayoría de los estudios existentes con términos de retardo son sobre estabilidad del sistema hacia soluciones estacionarias del problema. El estudio de atractores globales, que permite abarcar las situaciones nombradas antes, resulta por tanto de interés.

Especialmente importantes fueron las ecuaciones con retardo en diversas etapas de la teoría de atractores, como por ejemplo para estudios sobre el carácter finito dimensional de los atractores (cf. Mallet-Paret [110]). Sobre la existencia de atractores, algunos casos autónomos fueron desarrollados por Hale en [68], pero muchas más ecuaciones de este tipo son tratables (cf. Hale & Verduyn Lunel [71]). Como ya se ha indicado con anterioridad, el concepto atractor global es aún válido bajo condiciones de periodicidad, pero no para ecuaciones no autónomas generales como

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t - \rho(t))), \tag{6.1}$$

con retardo variable, o

$$x'(t) = \int_{-h}^{0} b(t, s, x(t + s))\, \mathrm{d}s, \tag{6.2}$$

para retardos distribuidos, incluyendo la posibilidad $h = +\infty$.

Recurrimos de nuevo para este caso a los atractores en sentido pullback, que ya fue llevada a la práctica con anterioridad en algunos casos en Caraballo *et al.* [28] para procesos univaluados generados por ecuaciones con retardo variable como (6.1). Muchos otros casos, ecuaciones sin unicidad (autónomos y no autónomos), inclusiones diferenciales, retardo distribuido no autónomo con o sin unicidad, retardos integrales infinitos, etc, no han sido aún tratados. En esta parte de la memoria analizamos algunos casos de ecuaciones funcionales autónomas y no autónomas, con y sin unicidad, y con retardo finito, distribuido o variable.

En la Sección 6.2 introducimos los conceptos básicos relativos a ecuaciones con retardo. A partir de éstas, establecemos los correspondientes semiflujos y procesos, y trasladamos las pruebas de los resultados de atractores que enunciamos en el Capítulo 3 a estos casos [hay que destacar que en este contexto ambas nociones [12,118] son igualmente válidas]. Algunos ejemplos que aparecen en biología se comentan en la Sección 6.5.

6.2 Preliminares

Antes de nada, introducimos notación particular para el problema.

Sea $h > 0$ una constante (el retardo) y denotaremos por $\mathcal{C}$ el espacio de Banach $C([-h,0];\mathbb{R}^d)$ dotado de la norma $\|\psi\| = \sup_{\sigma\in[-h,0]} |\psi(\sigma)|$, el espacio de fases natural en los problemas con retardo*. Sin embargo, a veces será útil considerar las soluciones como funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^d$ (en $\mathbb{R}^d$ consideramos la topología Euclídea usual y denotamos, como en los capítulos precedentes por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su producto escalar). Continuamos con la notación introducida en el Capítulo 2: por x_t denotaremos el elemento de $\mathcal{C}$ dado por $x_t(s) = x(t+s)$ para todo $s \in [-h,0]$. También usaremos $\mathbb{R}_d = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq s\}$.

Recordamos algunos resultados bien conocidos para ecuaciones diferenciales funcionales con retardo finito (cf. [69, Cap. 2]):

$$x'(t) = f(t,x_t), \qquad x_{t_0} = \psi \in \mathcal{C}, \tag{6.3}$$

en la que consideraremos siempre al término f continuo, y por tanto su solución en sentido clásico

Teorema 6.1 (Existencia de soluciones). *Sea Σ un abierto de $\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ y $f \in C(\Sigma;\mathbb{R}^d)$. Si $(t_0,\psi) \in \Sigma$, entonces existe una solución de* (6.3)*, i. e. una función $x \in C([t_0-h, t_0+\alpha);\mathbb{R}^d)$ con $\alpha > 0$, que satisface $x_{t_0} = \psi$ y para todo $t \in [t_0,\alpha)$ se tiene*

$$x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds.$$

Nota 6.2. Como en el caso sin retardo, resultados de unicidad se tienen si, por ejemplo, f es localmente lipschitziana en compactos respecto de su segunda variable (cf. [69, Cap. 2, Teor. 2.3]).

Sin embargo, nosotros trataremos aquí ambos casos, con y sin unicidad, estableciendo una teoría más general (y quizás más práctica desde un punto de vista biológico, cf. teoría de viabilidad [6,7]).

Por supuesto la existencia de soluciones para (6.3) de forma global en tiempo es esencial para nuestro objetivo. Se tiene el siguiente resultado de [69, Cap. 2]:

*Nótese que el caso de retardos infinitos requiere una elección más cuidadosa del espacio de fases (cf. [70,5,150]), aunque aquí no será tratado tal caso.

Teorema 6.3 (Soluciones no prolongables). *Sea Σ un abierto de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ y $f \in C(\Sigma; \mathbb{R}^d)$. Si x no puede ser prolongada como solución de la ecuación (6.3) en $[t_0 - h, b)$, entonces, para cualquier compacto W de Σ, existe un tiempo t_W tal que $(t, x_t) \notin W$ para todo $t_W \leq t < b$.*

Una consecuencia inmediata de este resultado es la análoga al caso sin retardo, cuando se tienen estimaciones a priori de no explosión.

Definición 6.4. *Dados dos espacios métricos X e Y, una aplicación univaluada (resp. multivaluada) $\Upsilon : X \to Y$ (resp. $\mathcal{P}(Y)$) es* acotada *si $\Upsilon(B) \in \mathcal{B}(Y)$ para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.*

Nota 6.5. Obsérvese que no basta que f sea acotada para asegurar que las soluciones de (6.3) están definidas globalmente en tiempo [incluso en el caso sin retardos, como muestra el simple ejemplo $x' = x^2$].

Corolario 6.6. *Sea $f \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{C}; \mathbb{R}^d)$ una aplicación acotada. Asumimos que la ecuación en (6.3) satisface la propiedad de que* posibles *soluciones x correspondientes a un dato inicial ψ permanecen en un conjunto acotado de $\mathcal{C}$:*

$$\begin{array}{c} \forall\, t \geq t_0, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}, \quad \exists \quad D(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}(\mathcal{C}) \quad \textit{tal que} \\ \textit{para toda} \quad x(\cdot) \quad \textit{solución de } (6.3) \textit{ en} \quad [t_0 - h, t) \quad \textit{se tiene} \quad x_{t'} \in D \quad \forall t' \in [t_0, t). \end{array} \tag{6.4}$$

Entonces toda solución está definida globalmente en tiempo.

Demostración. Argumentando por contradicción, considérese una solución no prolongable x de (6.3) definida en $[t_0 - h, t)$, con dato inicial $\psi \in \mathcal{C}$. Entonces, de (6.4) se deduce la existencia de un acotado $D = D(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ tal que $x_{t'} \in D \ \forall t' \in [t_0, t)$. Definimos ahora el conjunto

$$\chi = \{\varphi \in C^1([-h, 0]; \mathbb{R}^d) : \|\varphi\| \leq \|D\|, \ \|\varphi'\| \leq \sup_{(r,\eta) \in [t_0 - h, t] \times D} |f(r, \eta)| = M\}$$

que es compacto por el Teorema de Ascoli-Arzelà. Así, el conjunto $W = [t_0, t] \times \chi$ es compacto y podemos aplicar el Teorema 6.3 para obtener la existencia de un t_W con $(t', x_{t'}) \notin W$ para $t_W \leq t' < t$. En particular, para t_W se tiene que o bien $\|x_{t_W}\| > \|D\|$ o bien $\|x'_{t_W}\| > M$. Lo primero obviamente contradice (6.4). La segunda opción también es imposible ya que

$$\begin{aligned} \|x'_{t_W}\| &= \sup_{\theta \in [-h, 0]} |x'(t_W + \theta)| \\ &= \sup_{\theta \in [-h, 0]} |f(t_W + \theta, x_{t_W + \theta})| \leq \sup_{(r,\eta) \in [t_0 - h, t] \times D} |f(r, \eta)| = M. \end{aligned}$$

□

6.3 Semiflujos y procesos para ecuaciones diferenciales con retardo

Establecemos ahora las correspondientes definiciones y algunas propiedades de semiflujos y procesos (en general multivaluados ambos) relativas al marco en que estamos: ecuaciones funcionales autónomas sin unicidad y ecuaciones integro-diferenciales no autónomas con y sin unicidad.

Para evitar repeticiones innecesarias, damos directamente las definiciones para el caso no autónomo, particularizándose después para el caso independiente del tiempo.

Por simplificar la notación, de aquí en adelante Σ denotará a $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ salvo mención específica en contra. Se suponen también las condiciones del Corolario 6.6, que conjuntamente con el Teorema 6.1, garantiza la existencia de soluciones globales para (6.3).

Como se indicó antes, en [28] se considera el caso de retardo variable, aquí desarrollaremos los resultados para el siguiente ejemplo canónico de ecuación, con retardos variable y distribuido:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x_t) = F(t, x(t), x(t-\rho(t))) + \int_{-h}^{0} b(t, s, x(t+s))ds, && (6.5) \\ x_{t_0} &= \psi \in \mathcal{C}, && (6.6) \end{aligned}$$

donde $F \in C(\mathbb{R}^{1+2d}; \mathbb{R}^d)$ contiene la dependencia de los retardos variables (pondremos uno por simplificar la notación, aunque el análisis se generaliza de forma directa), y con el retardo distribuido descrito por $b \in C(\mathbb{R} \times [-h, 0] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ (lo que implica fácilmente usando el Teorema de Lebesgue que $f \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{C}; \mathbb{R}^d)$), y tal que las soluciones de (6.5) satisfacen (6.4).

De acuerdo a la Nota 6.2, si además f es tal que hay unicidad de solución [por ejemplo en la ecuación canónica de tipo integro-diferencial basta que F lo sea y que b sea globalmente continua y localmente lipschitziana en su tercera variable], entonces se define el proceso univaluado como

$$\mathbb{R}_d \times \mathcal{C} \ni (t, t_0, \psi) \mapsto U(t, t_0, \psi) = x_t \in \mathcal{C} \tag{6.7}$$

donde $x(\cdot)$ es la única solución de (6.5)-(6.6). Sin embargo, si f es tal que no se tiene unicidad, o no se tiene garantía de ella, el proceso deberá ser multivaluado en general.

A este respecto, la definición apropiada viene dada entonces por

$$U(t, t_0, \psi) = \bigcup \{x_t : x(\cdot) \quad \text{solución de (6.5), (6.6) definida globalmente}\}.$$

Sin embargo, y por razones prácticas relativas a modelos concretos (e.g, biológicos, físicos, etc), podrá darse el caso de estar interesados simplemente en soluciones que permanecen en un cerrado $X \subset \mathcal{C}$, lo que motiva la construcción de un semiflujo o proceso multivaluado en X en vez de en todo el espacio $\mathcal{C}$. Para ello, asumimos que para cualquier dato $\psi \in X$ existe al menos una solución de (6.5), (6.6) definida globalmente en tiempo y que permanece en X para todo $t \geq t_0$. Denotamos entonces $D(t_0, \psi)$ al conjunto de todas las soluciones de (6.5), (6.6) definidas para $t \geq t_0$ que permanecen en X para todo $t \geq t_0$. Entonces, podemos definir

$$U(t, t_0, \psi) = \bigcup_{x(\cdot) \in D(t_0, \psi)} \{x_t\}. \tag{6.8}$$

Recordamos brevemente la noción análoga al m-semiflujo, introducido en el Capítulo 3, para el caso no autónomo (cf. [27]). Considérese un espacio métrico completo X (en nuestro caso un cerrado de $\mathcal{C}$).

Definición 6.7. *La aplicación* $U : \mathbb{R}_d \times X \to P(X)$ *es un* proceso dinámico multivaluado (PDM) *en* X *si*

(1) $U(t, t, \cdot) = Id_X$;

(2) $U(t, s, x) \subset U(t, \tau, U(\tau, s, x))$, *para todo* $x \in X$, $s \leq \tau \leq t$.

El PDM U *se dice* estricto *si*

$$U(t, s, x) = U(t, \tau, U(\tau, s, x)), \ \textit{para todo}\, x \in X,\ s \leq \tau \leq t.$$

De forma análoga al apartado (a) de la Proposición 3.2 del Capítulo 3 se tiene el siguiente

Lema 6.8. *Bajo las hipótesis previas, y si F y b son tales que en vez de* (6.4) *se tiene*

$$\begin{gathered}\forall\, t \geq t_0, \quad \forall D' \in \mathcal{B}(X), \quad \exists \quad D(t,t_0,D') \in \mathcal{B}(X) \ \text{ tal que} \\ x(\cdot) \text{ sol. de } (6.3) \text{ en } [t_0-h,t) \text{ y } x_{t_0} \in D' \Rightarrow x_{t'} \in D(t,t_0,D') \ \ \forall t' \in [t_0,t),\end{gathered} \tag{6.9}$$

la aplicación multivaluada U definida por (6.8) *es un PDM estricto y $U(t,s,\cdot)$ es una aplicación acotada para todo $s \leq t$.*

Demostración. Es fácil ver que U está bien definido y satisface la condición (1) de la Definición 6.7. Veamos que también se tiene (2). Considérese $\phi \in U(t,s,\psi)$, entonces de la definición de U, existe $x(\cdot)$ solución de (6.5) con dato inicial $x_s = \psi$ y $x_t = \phi$. Si $\tau \geq s$, entonces $x_\tau \in U(\tau,s,\psi)$, y como

$$U(t,\tau,x_\tau) = \{z_t : z(\cdot) \ \text{ es solución de (6.5) con } z_\tau = x_\tau\},$$

es obvio que $x_t = \phi \in U(t,\tau,x_\tau) \subset U(t,\tau,U(\tau,s,\psi))$.

Para ver que el PDM es estricto, vemos que las soluciones concatenan, i. e. consideramos $\phi \in U(t,\tau,U(\tau,s,\psi))$, entonces existe $x(\cdot)$ solución de (6.5) tal que $x_\tau = y_\tau$, donde $y(\cdot)$ es otra solución de (6.5) con dato inicial $y_s = \psi$. Definimos

$$z(r) = \begin{cases} y(r) & \text{si} \quad s-h \leq r \leq \tau \\ x(r) & \text{si} \quad \tau \leq r \leq t. \end{cases}$$

Es claro que $z(\cdot)$ satisface la formulación integral, esto es, resuelve la ecuación de (6.5), y satisface $z_s = y_s = \psi$, y $z_t = x_t = \phi$, lo que significa que $\phi \in U(t,s,\psi)$. □

Haciendo uso una vez más del Teorema de Ascoli-Arzelà, probamos el siguiente resultado:

Proposición 6.9. *Sea $f \in C(\mathbb{R} \times C; \mathbb{R}^d)$ una aplicación acotada, asumimos además que las soluciones de* (6.5) *satisfacen la condición* (6.9). *Considérese el proceso $U : \mathbb{R}_d \times X \to P(X)$ generado por* (6.5), *que es por tanto acotado. Entonces se tiene que:*

(i) *Si $t \geq s+h$, el proceso $U(t,s,\cdot) : X \to P(X)$ es compacto, i. e. $\overline{U(t,s,D)} \in K(X)$ para todo $D \in \mathcal{B}(X)$.*

(ii) *Semicontinuidad superior respecto de los datos iniciales (en cualquier tiempo), i. e. dado $s \in \mathbb{R}$, si $\xi_n \to \xi \in X$ y $x^n : [s-h,\infty) \to \mathbb{R}^d$ es una sucesión de soluciones de* (6.5) *con $x_s^n = \xi_n$, entonces existe una subsucesión $\{x^\mu\}_\mu$ tal que*

$$\forall t \geq s, \quad x_t^\mu \to x_t \quad \text{en} \quad X,$$

donde $x : [s,\infty) \to \mathbb{R}^d$ satisface $x_s = \xi$ y la ecuación de (6.5).

Demostración. Sea $D \in \mathcal{B}(X)$ y considérese una sucesión cualquiera de elementos $\varphi^m \in U(t,s,D)$. Así, existe una sucesión de soluciones de (6.5), $x^m : [s-h,t] \to \mathbb{R}^d$, con $x_t^m = \varphi^m$.

Como $t \geq s+h$, las soluciones son diferenciables y sus derivadas están acotadas por

$$C = \sup_{[t-h,t]\times\tilde{D}} |f(s,\eta)|$$

donde

$$\tilde{D} = U(t-h,s,D) \cup U(t,s,D) \in \mathcal{B}(X).$$

La cota uniforme y la equicontinuidad permiten aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelà y concluir la compacidad de $U(t,s,\cdot)$ para todo $t \geq s+h$.

Para probar la s. c. s. respecto de los datos iniciales procedemos análogamente. Obsérvese que la condición $t \geq s+h$ ya no es necesaria. Dados datos iniciales ξ^m en tiempo s (convergiendo a ξ en X) y soluciones $x^m : [s-h, \infty) \to \mathbb{R}^d$, el Teorema de Ascoli-Arzelà aplicado en pasos sucesivos de longitud h (y un argumento diagonal de Cantor) implica la existencia de una subsucesión convergente x^μ a una función $x : [s, \infty) \to \mathbb{R}^d$ (la convergencia es uniforme en intervalos compactos de tiempo).

Usando

$$x^\mu(t) = \xi^\mu(0) + \int_s^t f(r, x_r^\mu)dr,$$

por el Teorema de Lebesgue, pasamos al límite y se deduce que

$$\tilde{x}(r) = \begin{cases} \xi(r-s) & \text{si} \quad r \in [s-h, s], \\ x(r) & \text{si} \quad r \geq s \end{cases}$$

resuelve (6.5) con dato inicial ξ en tiempo s. □

Nota 6.10.

(i) La Proposición 6.9 implica que para todo par $(t, s) \in \mathbb{R}_d$, $U(t, s, \cdot)$ tiene valores compactos y es semicontinua superiormente.

(ii) El resultado anterior muestra que en el caso autónomo se tiene un semiflujo generalizado en el sentido de Ball [12].

Como ya se dijo, los resultados anteriores son ciertos con aplicación directa en el caso autónomo: recuérdese (cf. Capítulo 3, Definición 3.6) que un m-semiflujo $G : \mathbb{R}_+ \times X \to P(X)$ generado por la ecuación funcional autónoma

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(x(t), x(t-h)) + \int_{-h}^0 b(s, x(t+s))ds = f(x_t), \quad t \geq 0 && (6.10) \\ x_0 &= \psi \in X, && (6.11) \end{aligned}$$

se define como

$$G(t, \psi) = \{x_t : x(\cdot) \text{ solución de (6.10), (6.11) definida globalmente en tiempo}\}.$$

Para nuestro caso, la aplicación G está definida en un sentido análogo al no autónomo precisado antes. Sea $X \subset C$ un cerrado tal que para cualquier $\psi \in X$ existe al menos una solución $x(\cdot)$ de (6.10)-(6.11) con $x(t) \in X$ para todo $t \geq 0$. Denotamos por $D(\psi)$ el conjunto de todas las soluciones de (6.10)-(6.11) definidas para todo $t \geq 0$ y que permanecen siempre en X. Entonces

$$G(t, \psi) = \bigcup_{x(\cdot) \in D(\psi)} x_t.$$

No obstante, siempre podemos definir el SPM U para esta situación autónoma poniendo $U(t, s, \psi) = G(t-s, \psi)$, lo que nos da versiones autónomas directas de los resultados anteriores: por ejemplo, como consecuencia del Corolario 6.6, se tiene para la m-aplicación G definida anteriormente que

Lema 6.11. *G es un m-semiflujo fuerte, i. e.*

$$G(t+s, x) \equiv G(t, G(s, x)), \textit{ para todo } x \in X, \ t \geq 0.$$

6.4 Atractores para semiflujos y procesos multivaluados

Damos aquí los resultados de atractores para los casos anteriores. Sea (X,ρ) un espacio métrico completo.

6.4.1 Atractores para semiflujos multivaluados

Comenzamos recordando la definición vista ya en la Sección 3.4 (recuérdese también la Nota 3.26 y véase los comentarios adicionales en el Apéndice A).

Definición 6.12. *Se dice que el conjunto $\Re \subset X$ es un* atractor global *del semiflujo multivaluado G si:*

(1) *Es atrayente, i.e,*

$$\operatorname{dist}(G(t,B),\Re) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty, \quad \textit{para todo} \quad B \in \mathcal{B}(X);$$

(2) *$\Re$ es negativamente semi-invariante, i. e., $\Re \subset G(t,\Re)$, para todo $t \geq 0$.*

Con la notación ya introducida en la Sección 3.4, damos los siguientes resultados, el primero es una aplicación directa de la Proposición 6.9:

Lema 6.13. *Sean b y F continuas y supongamos que todas las soluciones de* (6.10)-(6.11) *están globalmente definidas. Entonces, la aplicación $G(t,\cdot)$ tiene valores cerrados y es semicontinua superiormente.*

Nota 6.14. Un resultado que asegura semicontinuidad superior asintótica (y aplicable trivialmente en nuestro caso con $S \equiv 0$ y por la Proposición 6.9) es el siguiente (cf. [118, Prop. 2]):

Dados un espacio de Banach X y un m-semiflujo $G(t,\cdot) = S(t,\cdot) + K(t,\cdot)$, con $K(t_0,\cdot) : X \to P(X)$ unan aplicación compacta para algún $t_0 > 0$ y $S(t,\cdot) : X \to P(X)$ una contracción sobre acotados, esto es,

$$\operatorname{dist}(S(t,x),S(t,y)) \leq m_1(t)m_2(\rho(x,y)), \quad \text{para todo } x,y \in B \in \mathcal{B}(X),\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{6.12}$$

donde $m_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que $\lim\limits_{t\to\infty} m_1(t) = 0$ y $m_2 \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Entonces G es asintóticamente superiormente semicompacto.

Como segundo resultado, una aplicación del lema previo, del Teorema 3.27 y del carácter fuerte o estricto del semiflujo, se tiene:

Teorema 6.15. *Sean b y F continuas y supongamos que todas las soluciones de* (6.10)-(6.11) *están globalmente definidas. Supongamos que $G(t,\cdot)$ envía acotados en acotados y que existe un acotado absorbente. Entonces G tiene un atractor global compacto e invariante.*

6.4.2 Atractores no autónomos para procesos dinámicos multivaluados

Recordamos brevemente los conceptos y resultados básicos de la teoría de atractores pullback para sistemas no autónomos multivaluados generales, donde la propiedad de semigrupo no es válida, el tiempo inicial es importante, y las ideas a utilizar necesitan leves modificaciones (e. g. cf. [95,93,45]). De nuevo, notamos por (X,ρ) un espacio métrico completo dado, y U un PDM abstracto.

Definición 6.16. *Sea $t \in \mathbb{R}$. El conjunto D* atrae *en sentido pullback a $B \in \mathcal{B}(X)$ en tiempo t si*

$$\lim_{s \to -\infty} \operatorname{dist}(U(t,s,B), D) = 0. \tag{6.13}$$

Se dice que D atrae uniformemente en sentido pullback en tiempo t *si* (6.13) *se satisface para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.*

Se llama *órbita* y *ω-límite* hasta tiempos s y t respectivamente a:

$$\gamma^s(t,B) = \bigcup_{\tau \leq s} U(t,\tau,B), \quad \omega(t,B) = \bigcap_{s \leq t} \overline{\gamma^s(t,B)}.$$

Claramente, cualquier elemento y de $\omega(t,B)$ se caracteriza por ser límite de una sucesión ξ^m en X con $\xi^m \in U(t,\tau^m,B)$ y $\tau^m \to -\infty$. El resultado básico que asegura la existencia de un conjunto atrayente minimal es el siguiente:

Teorema 6.17. *(cf.* [27]*) Supongamos que para $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{B}(X)$ existe $D(t,B) \in K(X)$ tal que*

$$\lim_{s \to -\infty} \operatorname{dist}(U(t,s,B), D(t,B)) = 0. \tag{6.14}$$

Entonces, $\omega(t,B)$ es no vacío, compacto y es el mínimo atrayente de B en tiempo t.

La demostración no difiere mucho de la dada en el Capítulo 4, por lo que se omite.
Necesitamos ahora introducir la siguiente noción:

Definición 6.18. *El PDM U se dice* asintóticamente superiormente semicompacto (en sentido pullback) *si para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{B}(X)$ existe $t_0(t,B)$ tal que $\gamma^{t_0}(t,B) \in \mathcal{B}(X)$ y cualquier sucesión $\xi^m \in U(t,s^n,B)$ con $s^n \to -\infty$ es relativamente compacta.*

Entonces, usando la noción de ω-límite, se tiene que

Lema 6.19. *(cf.* [27]*) U es asintóticamente superiormente semicompacto si y sólo si para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{B}(X)$ existe $D(t,B) \in K(X)$ satisfaciendo* (6.14).

Llegados a este punto, recordamos el concepto de atractor pullback que ya introdujimos bajo la formulación del cociclo en los Capítulos 4 y 5:

Definición 6.20. *La familia $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ se dice* atractor pullback o atractor no autónomo del PDM *U si*

(1) *$A(t)$ es atrayente uniformemente en sentido pullback en tiempo t para todo $t \in \mathbb{R}$;*

(2) *Es negativamente invariante:*

$$A(t) \subset U(t,s,A(s)), \quad \textit{para cualquier par} \quad (t,s) \in \mathbb{R}_d;$$

(3) *Es minimal, esto es, cualquier cerrado Y uniformemente atrayente en tiempo t cumple $A(t) \subset Y$.*

Usaremos el siguiente resultado, que es una extensión del caso autónomo estudiado por Melnik & Valero [118] (véase también Teorema 3.27 y la Sección 4.5).

Teorema 6.21. *(cf.* [27, Teor. 18]*) Supongamos que para todo $(t,s) \in \mathbb{R}_d$, $U(t,s,\cdot)$ tiene grafo cerrado y que existe un conjunto atrayente uniformemente $D(t) \in K(X)$ en tiempo t. Entonces, el conjunto*

$$A(t) = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} \omega(t,B)}$$

es un atractor global compacto, de hecho, es minimal.

Finalmente, como aplicación directa de la Proposición 6.9 y del Teorema 6.21, obtenemos una condición suficiente que garantiza la existencia de atractores pullback para ecuaciones (integro-)diferenciales con retardo, extendiendo el Teorema 4.1 de [28] al caso de no unicidad.

Teorema 6.22. *Supongamos las siguientes condiciones para el problema* (6.5)-(6.6)*:*

(i) *$U(t,s,\cdot) : X \to X$ y $f : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^d$ son aplicaciones acotadas para todo $(t,s) \in \mathbb{R}_d$;*

(ii) *existe una familia $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de acotados absorbentes para U.*

Entonces existe el atractor global (pullback) minimal $A(t)$ para U, que además es compacto.

6.5 Aplicaciones y ejemplos

De aquí en adelante el objetivo es mostrar que el resultado anterior se puede aplicar a varias situaciones. Para ello primero probamos una versión particular del Lema de Gronwall que nos resultará útil en las pruebas posteriores.

Lema 6.23. *Supongamos que $g(t) \geq 0$ es un elemento de $L^1(0,T)$ y sean $M \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$. Sea $y(t)$ una función continua no negativa definida en $[0,T]$ tal que*

$$y^2(t) \leq M^2 + 2\int_0^t g(\tau) y^\alpha(\tau) d\tau, \text{ para todo } t \in [0,T].$$

Entonces

$$y(t) \leq \begin{cases} \left(M^{2-\alpha} + (2-\alpha)\displaystyle\int_0^t g(s)ds\right)^{1/(2-\alpha)} & si \quad \alpha < 2, \\ M \exp\left(\displaystyle\int_0^t g(s)ds\right) & si \quad \alpha = 2, \end{cases} \tag{6.15}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Demostración. Denotamos $\xi(s) = \sqrt{M^2 + 2\int_0^s g(\tau)y^\alpha(\tau)d\tau}$, que es una función no decreciente. Calculando la diferencial de $\xi^2(t)$ tenemos que

$$2\xi(s)\frac{d\xi(s)}{ds} = 2g(s)y^\alpha(s) \leq 2g(s)\xi^\alpha(s). \tag{6.16}$$

Como $\xi(t)$ es no decreciente, existe $0 \leq \beta \leq T$ tal que $\xi(t) = M$, para todo $t \in [0,\beta]$, y $\xi(t) > M$, para todo $t \in [\beta, T]$. Claramente, (6.15) se satisface para $t \in [0,\beta]$. Si $t > \beta$, integrando sobre (β, t) obtenemos que

$$\frac{\xi^{2-\alpha}(t)}{2-\alpha} \leq \frac{M^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \int_0^t g(s)ds,$$

si $\alpha < 2$, y que

$$\xi(t) \leq M \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right),$$

si $\alpha = 2$. Dado que $y(t) \leq \xi(t)$, de las desigualdades anteriores sigue el resultado. □

6.5.1 Caso autónomo

Denotamos en lo que sigue $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $|\cdot|$ el producto escalar y la norma euclídea usual en $\mathbb{R}^d$ respectivamente. Consideramos el problema:

$$\begin{aligned} x'(t) = F(x(t), x(t-h)) = f(x_t),\ t > 0, \\ x_0 = \psi \in X, \end{aligned} \tag{6.17}$$

donde $F \in C(\mathbb{R}^{2d}; \mathbb{R}^d)$, $h > 0$, $X = C([-h, 0]; L) \subset \mathcal{C}$ (con L un cerrado de $\mathbb{R}^d$).

Introducimos las siguientes condiciones (obviamente, si $X = \mathcal{C}$, la Condición (H1) no es necesaria):

(H1) Para cada $\psi \in X$ existe al menos una solución $x(t)$ de (6.17) tal que $x(t) \in X$ para todo $t \geq 0$;

(H2) Existe una constante $K > 0$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ para el cual

$$\langle F(x, y), x \rangle \leq -\delta \quad \text{si} \quad |x|,\ |y| \geq K + \varepsilon, \quad x, y \in L;$$

(H3) Existen constantes $C > 0$, $0 < \alpha \leq 2$, tales que

$$\langle F(x, y), x \rangle \leq C(1 + |x|^\alpha), \quad \text{para todo} \quad x, y \in L.$$

Nota 6.24. Consecuencia inmediata de (H2) es la propiedad siguiente:

$$\langle F(x, y), x \rangle < 0 \quad \text{si} \quad |x|,\ |y| > K, \quad x,\ y \in L.$$

Proposición 6.25. *Bajo las condiciones dadas sobre F y suponiendo ciertas* (H1) *y* (H3), *entonces el semiflujo multivaluado $G(t, \cdot)$ está bien definido y es acotado para todo $t \geq 0$.*

Demostración. La condición (H1) y el Lema 6.11 implican que G está bien definido: en efecto, sea $x(t)$ una solución arbitraria. Veamos que podemos obtener una estimación de acotación sobre cualquier intervalo $[0, T]$. Multiplicando (6.17) por $x(t)$ y usando (H3) tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2 \leq C(1 + |x(t)|^\alpha),$$

luego

$$|x(t)|^2 \leq |x(0)|^2 + 2CT + 2 \int_0^t C |x(s)|^\alpha ds \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T].$$

El Lema 6.23 aplicado a $y(t) = |x(t)|$ nos da

$$|x(t)| \leq \begin{cases} \left((|x(0)|^2 + 2CT)^{\frac{2-\alpha}{2}} + (2 - \alpha) CT \right)^{\frac{1}{2-\alpha}}, & \text{si} \quad \alpha < 2, \\ (|x(0)|^2 + 2CT)^{\frac{1}{2}} \exp(CT), & \text{si} \quad \alpha = 2, \end{cases} \tag{6.18}$$

para todo $t \in [0, T]$. Hemos obtenido que cualquier solución existe globalmente en tiempo gracias al Corolario 6.6 y que el semiflujo $G(t, \cdot)$ es acotado (Lema 6.8) para cualquier $t \geq 0$. □

En la mayoría de las aplicaciones tendremos $L = \mathbb{R}^d_+$, por lo que el siguiente lema será útil:

Corolario 6.26. *Considérese $L = \mathbb{R}^d_+$, y supongamos que se tiene* (H3). *Además, para cada i suponemos que o bien $F_i(x, y) = 0$ para todo x, $y \in L$ tal que $x_i = 0$, o bien $F_i(x, y) > 0$, para todo x, $y \in L$ con $x_i = 0$. Entonces se satisface* (H1).

Demostración. En la prueba de la Proposición 6.25 vimos que cada solución está definida globalmente en tiempo. Ahora tenemos que ver que para cada condición inicial $\psi \in C([-h,0];\mathbb{R}^d_+)$ existe al menos una solución $x_i(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, $i = 1, ..., d$.

Si $F_i(x,y) > 0$, para todo x, $y \in L$ con $x_i = 0$, entonces $x_i(t) \geq 0$ para $t \geq 0$. En efecto, supongamos que $x(t)$ es tal que $x_i(t_1) = 0$ y $x_i(t) < 0$ en $(t_1, t_2]$. Entonces por continuidad de F existe un intervalo $[t_1, t_3] \subset [t_1, t_2]$ tal que $F_i(x(t), x(t-h)) > 0$ para $t \in [t_1, t_3]$, con lo que

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = F_i(x(t), x(t-h)) > 0, \forall t \in [t_1, t_3],$$

y tras integrar

$$x_i(t_3) > 0,$$

lo que es contradictorio.

Si $F_i(x,y) = 0$ para todo x, $y \in L$ tales que $x_i = 0$ y $x_i(t_1) = 0$ para algún $t_1 \geq 0$, entonces podemos poner $x_i(t) = 0$ para todo $t \geq t_1$, y continuar resolviendo el sistema de ecuaciones para el resto de componentes x_j. Repitiendo el proceso en cuantas componentes sea necesario podemos obtener una solución deseada. □

De hecho, el resultado anterior es un caso simplificado (el único que en realidad usaremos) del siguiente, para dominios más generales:

Lema 6.27. *Sea L un cerrado de $\mathbb{R}^d$ con frontera de clase C^1 y $n_L(x)$ el vector normal unitario exterior a L en $x \in \partial L$. Consideramos la ecuación*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t),$$

donde $f \in C(\mathbb{R} \times C([-h,0];L);\mathbb{R}^d)$ verifica:

(a) *O bien $f_i(t,\psi) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ o bien $\langle f(t,\psi), n_L(\psi(0))\rangle < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, para toda $\psi \in C([-h,0];L)$ con $\psi(0) \in \partial L$ y con $Im(\psi) \not\subset \partial L$, donde $I = \{1,\ldots,d\}\backslash J$ siendo*

$$J = \{j \in \{1,\ldots,d\} \mid \psi(0) + \varepsilon n_L(\psi(0))e_j \notin L \quad \text{con} \quad \varepsilon \text{ sufic. pequeño}\}.$$

(b) *Para todas las funciones $\psi \in C([-h,0];\partial L)$ ocurre una de las siguientes dos posibilidades: o bien $\langle f(t,\psi) n_L(\psi(0))\rangle = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o bien $f(t,\psi)n_L(\psi(0)) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Entonces el espacio $C([-h,0];L)$ es débilmente invariante.

Demostración. De forma análoga al lema previo se prueban todos los casos salvo la primera posibilidad del caso b), que se resuelve como sigue: simplemente elegimos una curva cualquiera Γ sobre ∂L y una parametrización suya $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ en cierto intervalo de tiempo I.

Notamos que $f(t,\psi) = g(t,\psi)\mathbf{t}(\psi(0))$ (con $\mathbf{t}(x)$ uno de los campos tangentes unitarios continuos a ∂L. Y planteamos la ecuación unidimensional con retardo

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = g(t, \gamma(\xi_t)),$$

con adecuado dato inicial. Así el par $[\xi_t, \gamma(\xi_t)]$ es solución del problema original [el argumento, en principio local, es obviamente extensible en tiempo]. □

Recuérdese que tratamos problemas donde la unicidad de solución no es condición necesaria, y de hecho la condición anterior no es de invarianza fuerte, como el simple caso sin retardo y unidimensional de la trayectoria $y(t) = -t^3$, solución de $x'(t) = -(-x(t)/3)^{3/2}$ con dato $x(0) = 0$, para el dominio $L = \mathbb{R}_+$ muestra trivialmente.

Teorema 6.28. *Bajo las condiciones* (H1)-(H3), *el m-semiflujo G posee un acotado absorbente.*

Demostración. Definimos

$$R(\alpha) = \begin{cases} \left((K^2 + 2Ch)^{\frac{2-\alpha}{2}} + (2-\alpha)Ch\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}, & \text{si} \quad \alpha \neq 2, \\ (K^2 + 2Ch)^{\frac{1}{2}} \exp(Ch), & \text{si} \quad \alpha = 2. \end{cases}$$

Comenzamos considerando un dato inicial con $|\psi(0)| \leq K$. Es claro entonces por (6.18) que cualquier solución $x(t)$ con dato inicial $|\psi(0)| \leq K$ permanece en la bola

$$B_0 = B_0(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R(\alpha)\},$$

al menos para todo $t \in [0, h]$.

Veamos que de hecho es así para todo $t \geq 0$. Caso contrario, existiría una solución concreta $x(t)$ y tiempos $T_1 > T_0 \geq h$ tal que $|x(T_1)| \geq |x(T_0)| = R(\alpha)$. Pero entonces $|x(t)|, |x(t-h)| > K$ para todo $t \in (T_0, T_1]$ (si no, por el argumento anterior, para todo $s \in [t-h, t]$ se tendría $|x(s)| \leq R(\alpha)$). Así, gracias a (H2) se tiene que $|x(\cdot)|$ es decreciente en $(T_0, T_1]$, lo que es contradictorio.

Se ha probado así que B_0 es absorbente de todo conjunto de datos iniciales satisfaciendo $|\psi(0)| \leq K$. Consideramos ahora un acotado arbitrario B como conjunto de datos iniciales verificando $|\psi(0)| > K$. Vamos a ver que existe un t_0 tal que para cualquier solución $x(t)$ se tiene $|x(t)| \leq R(\alpha)$ para todo $t \geq t_0$. De no ser así, existiría un sucesión de tiempos $t^k \nearrow +\infty$ y una sucesión de soluciones $x^k(t)$ con $|x^k(t^k)| > R(\alpha)$.

Por el argumento anterior sabemos que si $|x^k(t_1)| = K$ para algún $t_1 < t^k$, entonces $x^k(t) \leq R(\alpha)$ para todo $t \geq t_1$. Por tanto, para cualquier k se deduce que $|x^k(t)| > K$ para todo $t \in [0, t^k]$. De nuevo (H2) implica que cada $|x^k(t)|$ decrece en el intervalo $[h, t^k]$ y por tanto $x^k(t) > R(\alpha)$ en $[h, t^k]$. Ponemos $\varepsilon = R(\alpha) - K > 0$ y usamos (H2) para obtener

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t)|^2 \leq -\delta,$$

de donde (recuérdese que tanto la función como el retardo han de ser mayor o igual que $K + \varepsilon$)

$$|x^k(t)|^2 \leq |x^k(2h)|^2 - 2\delta(t - 2h)$$

para todo $t \in [2h, t^k]$. Como $t^k \nearrow +\infty$ y aplicando una segunda vez nuestra versión del Lema de Gronwall $\{|x^k(2h)|\}_k$ está acotado por estarlo $\{x^k(0)\} \subset B$, existe k_0 tal que

$$|x^k(t^k)|^2 \leq |x^k(2h)|^2 - 2\delta(t^k - 2h) < R(\alpha), \text{ para todo } \quad k \geq k_0.$$

Y esto es contradictorio, lo que concluye la prueba. □

En consecuencia se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.29. *Bajo las condiciones* (H1)-(H3), *el semiflujo multivaluado G tiene un atractor global compacto e invariante.*

Damos a continuación algunos ejemplos de interés que aparecen en la práctica y a los que se aplican los resultados anteriores.

Ejemplo 6.30. *Consideramos el siguiente modelo logístico con retardo*

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx^{\alpha-1}(t)\left(1 - \left(\frac{x(t-h)}{A}\right)^{\beta}\right),$$

donde r, β, $A > 0$, $1 < \alpha \leq 2$ *son constantes dadas, y* $L = \mathbb{R}_+$. *Cuando* $\alpha = 2$ *y* $\beta = 1$ *la función* $x(t)$ *describe la evolución del número de individuos de una población (el modelo logístico clásico). Por el Corolario* 6.26, *la condición* (H1) *se tiene, y las condiciones* (H2)-(H3) *también se verifican con* $L = \mathbb{R}_+$, $K = A$, $C = r$, $-\delta(\varepsilon) = r(A+\varepsilon)^{\alpha}\left(1 - (1+\varepsilon/A)^{\beta}\right)$. *La constante* K *representa el umbral límite de crecimiento de la población.*

Ejemplo 6.31. *Considérese ahora el modelo siguiente*

$$\frac{dx(t)}{dt} = p - bx^{\alpha-1}(t)\frac{x^m(t-h)}{a^m + x^m(t-h)},$$

con a, b, m *y* p *escalares estrictamente positivos,* $1 < \alpha \leq 2$, *y* $L = \mathbb{R}_+$. *Cuando* $\alpha = 2$ *esta ecuación es un modelo de la concentración de* CO_2 *en la sangre (cf.* [122, p. 16]*). De nuevo,* (H1) *es consecuencia del Corolario* 6.26.

Para comprobar que (H2) *se satisface, sea* K *la única solución de la ecuación*

$$p - bK^{\alpha-1}\frac{K^m}{a^m + K^m} = 0.$$

Como $\mu_1(x) = x^{\alpha-1}$ *y* $\mu_2(x) = \frac{x^m}{a^m+x^m}$ *son funciones crecientes para valores positivos* x, *tenemos que* (H2) *es cierta con* $-\delta(\varepsilon) = p(K+\varepsilon) - b(K+\varepsilon)^{\alpha}\frac{(K+\varepsilon)^m}{a^m+(K+\varepsilon)^m}$.

Finalmente, (H3) *es directa en este caso.*

Recuérdese que la invarianza de X *es en sentido débil (cf. Capítulo 5), y que puede haber soluciones que abandonen* L*: por ejemplo, si elegimos* $\alpha = 5/3$, $\beta = 1$, $A = 1$, $x_0(\theta) = -2\theta$, *entonces* $x(t) = (rt(1-2h+t)/3)^3$ *es solución en* $t \in [0,h]$, *y toma valores negativos si* $h > 1/2$, *lo que muestra que no todas las soluciones del problema están en el m-semiflujo* G *definido.*

Ejemplo 6.32. *Consideramos el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= ru(t)\left(1 - \frac{u(t)}{A}\right) - u(t)v(t)R(u(t)),\\ \frac{dv(t)}{dt} &= v(t)C(u(t-h)) - bv(t),\end{aligned}$$

con $L = \mathbb{R}^2_+$ *y* r, b, A *constantes positivas,* C, $R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *funciones continuas satisfaciendo*

(1) $\sup_{s>0} C(s) = c^* < b$;

(2) $C(s) > 0$ *para todo* $s > 0$;

(3) $R(s) > 0$ *para todo* $s > 0$,

y denotamos $x(t) = (u(t), v(t)), y(t) = (u(t-h), v(t-h))$. *Esta es una versión con retardo de un modelo presa-depredador* [122, p. 71], *bastante estándar en la literatura (e. g. en* [17] *se trata el caso en que* $R(u) = b > 0$, $C(u(t-h)) = cu(t-h)$ *y* $c > 0$*).*

Una vez más, (H1) *se obtiene del Corolario* 6.26.

Para comprobar (H3) *nótese que*

$$\begin{aligned} \langle F(x,y),x\rangle &= ru^2(t)(1-u(t)/A)-u^2(t)v(t)R(u(t))+v^2(t)(C(u(t-h))-b) \\ &\le ru^2(t) \\ &\le r(1+|x(t)|^2). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Para ver que se tiene (H2), *notamos que de* (6.19) *se deduce (omitimos la dependencia de t por comodidad)*

$$\langle F(x,y),x\rangle \le ru^2(1-u/A)-u^2vR(u)+v^2(c^*-b). \tag{6.20}$$

Si $u>A$, es claro de (6.20) *que* (H2) *se tiene con $K=A$ para cualquier $v\ge 0$ e $y\in\mathbb{R}^2_+$, siendo $\delta_1(\varepsilon)=r(A+\varepsilon)^2\varepsilon/A$. Pero si $u<A$, (y $|x|$ es mayor que cierto K)*

$$\begin{aligned} \langle F(x,y),x\rangle &\le ru^2(1-u/A)-u^2vR(u)+v^2(c^*-b) \\ &\le \max_{0<u<A}\{ru^2(1-u/A)\}+v^2(c^*-b) \\ &\le \frac{4rA^2}{27}+(c^*-b)[(K+\varepsilon)^2-A^2] \\ &= -\delta_2(\varepsilon), \end{aligned}$$

donde $\delta_2(\varepsilon)>0$ si K es suficientemente grande: basta tomar $K=A\left(\frac{4r}{27(b-c^*)}+1\right)^{1/2}$, siendo así cierta la propiedad con este último valor de K y $\delta(\varepsilon)=\max(\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon))$.

Ejemplo 6.33. *Consideramos ahora un modelo de la respiración humana*

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= -au(t)+av(t)+c, \\ \frac{dv(t)}{dt} &= bu(t)-bv(t)-p(v(t)-g)\varphi(v(t-h)), \end{aligned}$$

donde a, b, c, g y p son constantes positivas, u, v representan las presiones parciales de CO_2 ejercidas sobre los tejidos y los pulmones respectivamente; notamos $x(t)=(u(t),v(t))$ e $y(t)=(u(t-h),v(t-h))$. Consideramos φ una función continua tal que $\varphi(s)=0$, para todo $s\le x_0$ (para cierto valor $x_0\ge 0$), y que es estrictamente creciente para $s>x_0$. Para el significado físico de las constantes, véase Vielle & Chauvet [164].

Denotamos $L=\{x\in\mathbb{R}^2: u\ge g, v\ge g\}$. Es fácil ver que L es una región fuertemente invariante, de modo que todas las soluciones que comienzan en $X=C([-h,0];L)$ permanecen en dicho espacio. Por tanto, la Condición (H1) *se satisface.*

La Condición (H3) *sigue directamente de la acotación*

$$\langle F(x,y),x\rangle \le -au^2+(a+b)uv-bv^2+cu\le C(1+|x|^2).$$

Para verificar (H2) *necesitamos algunas hipótesis adicionales sobre las constantes del modelo.*

Lema 6.34. *Sean $g>x_0$ y $\gamma p>(a-b)^2/4a$, donde $\gamma=\varphi(g)$. Entonces sí se satisface la Condición* (H2).

Demostración. Primero consideramos el caso $a\ge b$. Obsérvese que por ser $\varphi(y_2)\ge\gamma$ para todo $y_2\ge g$ y darse

$$-au^2+(a+b)uv-bv^2=-b(u-v)(\frac{a}{b}u-v),$$

tenemos

$$\begin{aligned}\langle F(x,y),x\rangle &= -b(u-v)(\frac{a}{b}u-v)+cu-pv(v-g)\varphi(y_2)\\ &\leq -b(u-v)(\frac{a}{b}u-v)+cu-\gamma pv(v-g).\end{aligned}$$

Dividiremos el análisis en tres regiones:

$$R_1=\{x\in L: v\geq \frac{a}{b}u\},\qquad R_2=\{x\in L:\frac{b}{a}v\leq u\leq v\},\qquad R_3=\{x\in L: v\leq u\}.$$

Nótese que la función $\psi(u,v)=-b(u-v)(\frac{a}{b}u-v)$ toma valores positivos sólo en R_2.

Sea $x\in R_1$. Puesto que $v\geq u$ y $|x|\geq K_1$ implican que $2v^2\geq u^2+v^2\geq K_1^2$, usando que $\psi(u,v)\leq 0$, obtenemos

$$\langle F(x,y),x\rangle\leq cv-\gamma pv(v-g)\leq C_1-\gamma pv^2/2\leq -1,$$

si $|x|\geq K_1=(4(C_1+1)/(\gamma p))^{1/2}$, con $C_1=(c+\gamma pg)^2/(2\gamma p)$.

Sea $x\in R_2$. Denotamos $\xi=\gamma p-(a-b)^2/4a$. Usando que $v^2(a-b)^2/4a=\max\limits_{u\in[\frac{b}{a}v,v]}\psi(u,v)$ y que $u\leq v$, tenemos

$$\langle F(x,y),x\rangle\leq v^2(a-b)^2/4a+cv-\gamma pv(v-g)\leq C_2-\xi v^2/2\leq -1,$$

si $|x|\geq K_2=(4(C_2+1)/\xi)^{1/2}$, con $C_2=(c+\gamma pg)^2/(2\xi)$.

Finalmente, sea $x\in R_3$. En tal caso, tenemos $\psi(u,v)\leq -b(u-v)^2$, con lo que

$$\langle F(x,y),x\rangle\leq -b(u-v)^2+cu-\gamma pv(v-g)\leq C_3-b(u-v)^2/2-\gamma pv^2/2,$$

siendo $C_3=c^2/(2b)+(c+\gamma pg)^2/(2\gamma)$. Denotamos $\eta=(2(C_3+1)/b)^{1/2}$. Si $u-v\geq\eta$, se tiene automáticamente que $\langle F(x,y),x\rangle\leq -1$. Y si no es el caso, $|x|\geq K_3$ implica que $3v^2+2\eta^2\geq u^2+v^2\geq K_3^2$. Por tanto se consigue que $\langle F(x,y),x\rangle\leq -1$ si $|x|\geq K_3=(2\eta^2+6(C_3+1)/(\gamma p))^{1/2}$.

Tratamos ahora el caso en que $a<b$, definiendo otras tres regiones:

$$R_4=\{x\in L: v\geq u\},\qquad R_5=\{x\in L: v\leq u\leq\frac{b}{a}v\},\qquad R_6=\{x\in L: v\leq\frac{a}{b}u\}.$$

La región R_4 se trata exactamente igual que la región R_1.

Para R_5, dado que $v\geq\frac{a}{b}u$, la condición $|x|\geq K_5$ implica $(1+b^2/a^2)v^2\geq u^2+v^2\geq K_5^2$, usando que $v^2(a-b)^2/4a=\max\limits_{u\in[v,\frac{b}{a}v]}\psi(u,v)$, tenemos

$$\langle F(x,y),x\rangle\leq v^2(a-b)^2/4a+cbv/a-\gamma pv(v-g)\leq C_5-\xi v^2/2\leq -1,$$

si $|x|\geq K_5=(2(1+(b/a)^2)(C_4+1)/\xi)^{1/2}$ siendo $C_5=(\gamma pg+bc/a)^2/(2\xi)$.

Finalmente, consideramos $x\in R_6$. Entonces se tiene $\psi(u,v)\leq -b(au/b-v)^2$ y así

$$\langle F(x,y),x\rangle\leq -b(au/b-v)^2+cu-\gamma pv(v-g)\leq C_6-b(au/b-v)^2/2-\gamma pv^2/2,$$

con $C_6 = (cb/a + \gamma pg)^2/(2\gamma p)$. Denotamos $\eta = (2(C_5+1)/b)^{1/2}$. Si $au/b - v \geq \eta$, entonces se tiene directamente $\langle F(x,y), x\rangle \leq -1$. Si por contra $au/b - v < \eta$, imponer $|x| \geq K_6$ implica $(1 + 2b^2/a^2)v^2 + 2b^2\eta^2/a^2 \geq u^2 + v^2 \geq K_6^2$, de donde $\langle F(x,y), x\rangle \leq -1$ si $|x| \geq K_6 = (2b^2\eta^2/a^2 + 2(1+2b^2/a^2)(C_6+1)/(\gamma p))^{1/2}$.

Basta tomar $K = \text{máx}\{K_1, K_2, K_3\}$ (o $\text{máx}\{K_4, K_5, K_6\}$ según el caso) para que se satisfaga (H2) con $\delta(\varepsilon) = 1$. □

El resultado muestra que la condición $\gamma p > (a-b)^2/4a$ implica un efecto suficientemente fuerte del término $p(v(t) - g)\varphi(v(t-h))$, que controla el flujo de aire en los pulmones.

Una de las funciones típicas en estos modelos es el control de Hill $\varphi(y_2) = \sigma y_2^n/(\theta^n + y_2^n)$, con σ, n y θ constantes estrictamente positivas. En este caso es claro que $x_0 = 0 < g$.

6.5.2 Caso no autónomo. Términos disipativos y sublineales

En esta sección consideramos el caso de que aparezcan términos de retardo tanto variables como distribuidos conjuntamente.

Consideramos la ecuación

$$x'(t) = F_0(t, x(t)) + F_1(t, x(t-\rho(t))) + \int_{-h}^{0} b(t,s,x(t+s))ds = f(t, x_t) \tag{6.21}$$

con F_0, $F_1 \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $\rho \in C^1(\mathbb{R}; [0,h])$ y $b \in C(\mathbb{R}\times[-h,0]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Asumimos las siguientes condiciones:

(1) Existe una funciones escalares positivas $m_i \in L^1([-h,0])$ $(i = 0,\ 1)$ tales que

$$|b(t,s,x)| \leq m_0(s) + m_1(s)|x|, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{6.22}$$

(2) Existen constantes positivas k_1, k_2, α y una función positiva β tal que

$$\begin{aligned} \langle x, F_0(t,x)\rangle &\leq -\alpha|x|^2 + \beta(t), \qquad \forall t\in\mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, && (6.23)\\ |F_1(t,x)|^2 &\leq k_1^2 + k_2^2|x|^2, \qquad \forall t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{R}^d, && (6.24)\\ |\rho'(t)| &\leq \rho_* < 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, && (6.25) \end{aligned}$$

donde β satisface para todo $\delta > 0$:

$$\int_{-\infty}^{t} \beta(r)e^{\delta r}dr < \infty, \qquad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{6.26}$$

Denotaremos

$$m_i = \int_{-h}^{0} m_i(s)ds, \qquad i = 0,\ 1.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.35. *Bajo las condiciones* (6.23)-(6.26), *si*

$$2m_1eh < 1, \tag{6.27}$$

y existe algún $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ con λ_i (i=0, 1) las dos soluciones positivas de la ecuación $\lambda e^{-\lambda h} = 2m_1$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lambda - 2\alpha + \varepsilon + \frac{e^{\lambda h}k_2^2}{\varepsilon(1-\rho_*)} < 0, \tag{6.28}$$

entonces, (6.21) *genera un PDM y tiene un atractor compacto no autónomo $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

Nota 6.36.

(i) La condición (6.27) equivale a que la ecuación $\lambda e^{-\lambda h} = 2m_1$ tenga exactamente dos soluciones.

(ii) Condición equivalente a (6.28), usando el máximo de la parábola (en ε) $(1-\rho_*)\varepsilon(2\alpha-\lambda-\varepsilon)$, es que exista $\lambda^* \in (\lambda_0, \lambda_1)$ tal que $k_2^2 < e^{-1}(1-\rho_*)(\alpha - \lambda/2)^2$.

Dado que $1/h$ es un valor de (λ_0, λ_1), una condición suficiente es por tanto que

$$k_2^2 < e^{-1}(1-\rho_*)\left(\alpha - \frac{1}{2h}\right)^2.$$

(iii) Si $k_2 = 0$, la condición (6.28) se convierte en $\lambda < 2\alpha$.

(iv) Si vemos a b como un elemento $b : \mathbb{R} \times [-h_0, 0] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ fijado, las condiciones anteriores se satisfacen en parte si restringimos el retardo distribuido a un intervalo $[-h, 0] \subset [-h_0, 0]$ suficientemente pequeño (como nueva $m_{1,h}$ se puede tomar $m_1|_{[-h,0]}$ y por tanto también $m_1 \to 0$).

Como $h \to 0$ ó $m_1 \to 0$, entonces (6.27) se cumple y de las dos raíces $\lambda_0(h)$ y $\lambda_1(h)$ de $\lambda e^{-\lambda h} = m_1$, es inmediato deducir que $\lim_{h\to 0} \lambda_0(h) = 0$, por lo que tomando un retardo h suficientemente pequeño, podemos elegir λ pequeño también tal que sea más fácil conseguir (6.28).

Demostración del Teorema 6.35. Sean λ y ε los parámetros dados en el enunciado. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}|x(t)|^2) &= \lambda e^{\lambda t}|x(t)|^2 + 2e^{\lambda t}\langle x(t), F_0(t, x(t)) + F_1(t, x(t-\rho(t)))\rangle \\
&\quad + 2e^{\lambda t}\langle x(t), \int_{-h}^{0} b(t, s, x(t+s))ds\rangle \\
&\leq \lambda e^{\lambda t}|x(t)|^2 + 2e^{\lambda t}(-\alpha|x(t)|^2 + \beta(t)) + \varepsilon e^{\lambda t}|x(t)|^2 + \frac{e^{\lambda t}}{\varepsilon}|F_1(x(t-\rho(t)))|^2 \\
&\quad + 2e^{\lambda t}\langle x(t), \int_{-h}^{0} b(t, s, x(t+s))ds\rangle \\
&\leq (\lambda - 2\alpha + \varepsilon)e^{\lambda t}|x(t)|^2 + 2e^{\lambda t}\beta(t) + \frac{e^{\lambda t}}{\varepsilon}(k_1^2 + k_2^2|x(t-\rho(t))|^2) \\
&\quad + 2e^{\lambda t}\langle x(t), \int_{-h}^{0} b(t, s, x(t+s))ds\rangle.
\end{aligned}$$

Integrando entre t_0 y t, obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t}|x(t)|^2 &\leq e^{\lambda t_0}|x(t_0)|^2 + (\lambda - 2\alpha + \varepsilon)\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}|x(s)|^2 ds + 2\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\beta(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}(k_1^2 + k_2^2|x(s-\rho(s))|^2)ds \\
&\quad + 2\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\langle x(s), \int_{-h}^{0} b(s, r, x(s+r))dr\rangle ds.
\end{aligned}$$

Estimamos por separado la integral que contiene el retardo variable usando el cambio de variables $s-\rho(s)=u$, teniendo en cuenta que ρ toma valores en $[0,h]$, y $\frac{1}{1-\rho'(s)}\leq\frac{1}{1-\rho_*}$:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s-\rho(s))|^2ds &\leq \int_{t_0-h}^t e^{\lambda u}\frac{e^{\lambda h}}{1-\rho_*}|x(u)|^2du\\ &= \frac{e^{\lambda h}}{1-\rho_*}\left(\int_{t_0-h}^{t_0} e^{\lambda u}|x(u)|^2du+\int_{t_0}^t e^{\lambda u}|x(u)|^2du\right)\\ &\leq \frac{e^{\lambda h}C^2}{1-\rho_*}\int_{t_0-h}^{t_0} e^{\lambda u}du+\frac{e^{\lambda h}}{1-\rho_*}\int_{t_0}^t e^{\lambda u}|x(u)|^2du,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $|x_{t_0}|\leq C$ para algún valor $C>0$. Así, deducimos

$$\begin{aligned}e^{\lambda t}|x(t)|^2 &\leq e^{\lambda t_0}|x(t_0)|^2+(\lambda-2\alpha+\varepsilon+\frac{e^{\lambda h}k_2^2}{\varepsilon(1-\rho_*)})\int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^2ds\\ &+2\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\beta(s)ds+\frac{k_1^2}{\varepsilon\lambda}(e^{\lambda t}-e^{\lambda t_0})+\frac{k_2^2e^{\lambda h}C^2}{\varepsilon\lambda(1-\rho_*)}(e^{\lambda t_0}-e^{\lambda(t_0-h)})\\ &+2\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\langle x(s),\int_{-h}^0 b(s,r,x(s+r))dr\rangle ds. \end{aligned}\tag{6.29}$$

Para la última integral en (6.29) se tiene

$$\begin{aligned}2\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\langle x(s),\int_{-h}^0 b(s,r,x(s+r))dr\rangle ds &\leq 2\int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|(m_0+m_1\|x_s\|)ds\\ &\leq \int_{t_0}^t\left(\bar{\varepsilon}e^{\lambda s}|x(s)|^2+\frac{m_0^2}{\bar{\varepsilon}}e^{\lambda s}\right)ds+2m_1\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\|x_s\|^2ds,\end{aligned}$$

donde $\bar{\varepsilon}$ es otra constante positiva a fijar posteriormente. Por tanto,

$$\begin{aligned}e^{\lambda t}|x(t)|^2 &\leq e^{\lambda t_0}|x(t_0)|^2+(\lambda-2\alpha+\varepsilon+\frac{e^{\lambda h}k_2^2}{\varepsilon(1-\rho_*)}+\bar{\varepsilon})\int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^2ds\\ &+2\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\beta(s)ds+(\frac{k_1^2}{\varepsilon\lambda}+\frac{m_0^2}{\lambda\bar{\varepsilon}})(e^{\lambda t}-e^{\lambda t_0})\\ &+\frac{k_2^2e^{\lambda h}C^2}{\varepsilon\lambda(1-\rho_*)}(e^{\lambda t_0}-e^{\lambda(t_0-h)})+2m_1\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\|x_s\|^2ds.\end{aligned}$$

Por ser λ y ε tales que se verifica (6.28), y con tomando $\bar{\varepsilon}$ suficientemente pequeño tal que se siga teniendo

$$\lambda-2\alpha+\varepsilon+\bar{\varepsilon}+\frac{e^{\lambda h}k_2^2}{\varepsilon(1-\rho_*)}<0,$$

entonces se deduce que

$$\begin{aligned}e^{\lambda t}|x(t)|^2 &\leq e^{\lambda t_0}|x(t_0)|^2+2\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\beta(s)ds+(\frac{k_1^2}{\varepsilon\lambda}+\frac{m_0^2}{\lambda\bar{\varepsilon}})(e^{\lambda t}-e^{\lambda t_0})\\ &+\frac{k_2^2e^{\lambda h}C^2}{\varepsilon\lambda(1-\rho_*)}(e^{\lambda t_0}-e^{\lambda(t_0-h)})+2m_1\int_{t_0}^t e^{\lambda s}\|x_s\|^2ds.\end{aligned}$$

Sustituimos t por $t+\theta$ (con $\theta \in [-h,0]$), y multiplicamos por $e^{-\lambda(t+\theta)}$. Usando desigualdades estándar se obtiene:

$$\begin{aligned}
|x(t+\theta)|^2 &\leq e^{-\lambda(t+\theta)}e^{\lambda t_0}|x(t_0)|^2 + 2e^{-\lambda(t+\theta)}\int_{t_0}^{t+\theta} e^{\lambda s}\beta(s)ds \\
&\quad +(\frac{k_1^2}{\lambda\varepsilon}+\frac{m_0^2}{\lambda\bar{\varepsilon}})(1-e^{\lambda(t_0-t-\theta)}) + e^{-\lambda(t+\theta)}\frac{k_2^2 e^{\lambda h}C^2}{\varepsilon\lambda(1-\rho_*)}(e^{\lambda t_0}-e^{\lambda(t_0-h)}) \\
&\quad +2m_1 e^{-\lambda(t+\theta)}\int_{t_0}^{t+\theta} e^{\lambda s}\|x_s\|^2 ds \\
&\leq e^{-\lambda t}e^{\lambda(t_0+h)}|x(t_0)|^2 + 2e^{-\lambda t}e^{\lambda h}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\beta(s)ds \\
&\quad +(\frac{k_1^2}{\lambda\varepsilon}+\frac{m_0^2}{\lambda\bar{\varepsilon}})(1-e^{\lambda(t_0-t+h)}) + e^{-\lambda t}\frac{k_2^2 e^{2\lambda h}C^2}{\varepsilon\lambda(1-\rho_*)}(e^{\lambda t_0}-e^{\lambda(t_0-h)}) \\
&\quad +2m_1 e^{-\lambda t}e^{\lambda h}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\|x_s\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Olvidando los términos negativos, tenemos

$$e^{\lambda t}\|x_t\|^2 \leq e^{\lambda(t_0+h)}C^2 + 2e^{\lambda h}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\beta(s)ds + C_1 e^{\lambda t} + C_2C^2e^{\lambda t_0} + L\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\|x_s\|^2 ds$$

donde hemos denotado

$$C_1 = \frac{k_1^2}{\lambda\varepsilon}+\frac{m_0^2}{\lambda\bar{\varepsilon}}, \qquad C_2 = \frac{k_2^2 e^{2\lambda h}}{\varepsilon\lambda(1-\rho_*)}, \qquad L = 2m_1 e^{\lambda h}.$$

Ahora, usando el Lema de Gronwall y el Teorema de Fubini se deduce que

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t}\|x_t\|^2 &\leq e^{\lambda(t_0+h)}C^2 + 2e^{\lambda h}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\beta(s)ds + C_1 e^{\lambda t} + C_2C^2e^{\lambda t_0} \\
&\quad +Le^{Lt}\int_{t_0}^{t} e^{-Ls}\left[e^{\lambda(t_0+h)}C^2 + 2e^{\lambda h}\int_{t_0}^{s} e^{\lambda r}\beta(r)dr + C_1e^{\lambda s} + C_2C^2e^{\lambda t_0}\right] ds \\
&\leq e^{\lambda(t_0+h)}C^2 + 2e^{\lambda h}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\beta(s)ds + C_1 e^{\lambda t} + C_2C^2e^{\lambda t_0} + Le^{Lt} \\
&\quad \times\left[\frac{e^{\lambda(t_0+h)}C^2 + C_2C^2e^{\lambda t_0}}{L}(e^{-Lt_0}-e^{-Lt}) + 2e^{\lambda h}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda r}\beta(r)\frac{e^{-Lr}-e^{-Lt}}{L}dr \right. \\
&\quad \left. +\frac{C_1}{\lambda - L}e^{(\lambda-L)t}\right].
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|x_t\|^2 &\leq e^{\lambda(t_0+h)}C^2e^{-\lambda t} + 2e^{\lambda h}e^{-\lambda t}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}\beta(s)ds + C_1 + C_2C^2e^{\lambda t_0}e^{-\lambda t} \\
&\quad +e^{-\lambda t+L(t-t_0)}(e^{\lambda(t_0+h)}C^2 + C_2C^2e^{\lambda t_0}) \\
&\quad +2e^{\lambda(h-t)+Lt}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda r}\beta(r)(e^{-Lr}-e^{-Lt})dr + \frac{C_1}{\lambda-L}e^{-Lt}. \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

Gracias a (6.27) se tiene que $\lambda > L$ y

$$B(t) = \left\{ y \in C \;\middle|\; \begin{array}{l} \|y\|^2 \leq 2e^{\lambda^* h}e^{-\lambda^* t}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda^* s}\beta(s)ds + \frac{C_1}{\lambda^* - L}e^{-Lt} + \eta \\ +C_1 + 2e^{\lambda^*(h-t)+Lt}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda^* r}\beta(r)(e^{-Lr} - e^{-Lt})dr \end{array} \right\},$$

con $\eta > 0$, es una familia de acotados absorbentes para U. El Teorema 6.15 es entonces aplicable, lo que termina la prueba. □

Nota 6.37. Obsérvese que en el caso en que β sea constante (por ejemplo si el problema es autónomo), entonces $\beta(t) \equiv \beta$ y obviando términos negativos en la desigualdad (6.30) se llega a que

$$\begin{aligned} \|x_t\|^2 \leq\; & e^{\lambda(t_0+h)}d^2e^{-\lambda t} + \frac{2\beta e^{\lambda h}}{\lambda} + C_1 + C_2d^2e^{\lambda t_0}e^{-\lambda t} \\ & + e^{-\lambda t + L(t-t_0)}(e^{\lambda(t_0+h)}d^2 + C_2d^2e^{\lambda t_0}) \\ & + C_1e^{(\lambda-L)t_0+\lambda h} + \frac{2\beta e^{\lambda h}}{\lambda - L} + \frac{C_1}{\lambda - L}e^{-Lt}. \end{aligned}$$

Ahora, si $t_0 = 0$ está fijado y $t \to +\infty$, se tiene que

$$B_0 = \left\{ y \in C : \|y\|^2 \leq C_1 + C_1e^{\lambda h} + 2\beta e^{\lambda h}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - L}\right)\right\}$$

es un conjunto acotado absorbente, por lo que existe atractor en sentido progresivo, i. e. dejando fijado $t_0 = 0$ y haciendo tender $t \to +\infty$, que es compacto independiente del tiempo.

Nota 6.38. Tres situaciones más simples de los casos anteriores son las siguientes:

Caso 1: Supongamos que b satisface

$$|b(t, s, x)| \leq m(s)|x|, \tag{6.31}$$

y que $F(t, x) = -\alpha x$. Entonces, deducimos que el atractor pullback existe y consiste en un único punto (la solución nula de C). Este atractor también lo es en sentido global, lo que implica que la solución nula es asintóticamente estable (i. e. la extinción de la especie en el modelo biológico).

Caso 2: Nos restringimos a una función b independiente de x, podemos reproducir los mismos cálculos pero extendiendo la dependencia de la variable temporal, más exactamente: dado

$$b \in C(\mathbb{R} \times [-h, 0] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

verificando

$$|b(t, s, x)| \leq K(t, s) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.32}$$

se obtiene un resultado análogo a los anteriores si

$$R(t) := \int_{-h}^{0} K(t, s)ds$$

satisface

$$\int_{-\infty}^{r} R^2(t)e^{2\tilde{\alpha}t}dt < \infty \qquad \text{para todo} \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{para algún} \quad \tilde{\alpha} \in (0, \alpha). \tag{6.33}$$

Caso 3: Hipótesis más débiles en la disipación:

Supongamos que en la ecuación (6.21) tenemos $F(t, x_t) = F_0(t, x(t)) + F_1(t, x(t - \rho(t)))$ con $\rho \in C(\mathbb{R}; [0, h])$ y

$$\langle F_0(t,x), x\rangle \le (-\alpha + \gamma_1(t))|x|^2 + \gamma_2(t), \quad |F_1(t,x)| \le \gamma_3(t), \tag{6.34}$$

siendo γ_i funciones positivas satisfaciendo

$$\int_{-\infty}^{t} [\gamma_1(s) + e^{\delta s}(\gamma_2(s) + \gamma_3^2(s))]ds < \infty \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{6.35}$$

y b verificando las condiciones (6.32)–(6.33). Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|x(t)|^2 &= 2\langle x(t), F(t,x_t)\rangle + 2\langle x(t), \int_{-h}^{0} b(t,s,x(t+s))ds\rangle \\
&\le 2(\gamma_1(t) - \alpha)|x(t)|^2 + 2\gamma_2(t) + 2|x(t)| \left(\gamma_3(t) + \int_{-h}^{0} K(t,s)ds\right) \\
&\le 2(\gamma_1(t) - \alpha + \varepsilon/2)|x(t)|^2 + \frac{\gamma_3^2(t)}{\varepsilon} + 2\gamma_2(t) + \frac{1}{\varepsilon}R^2(t).
\end{aligned}$$

Por el Lema de Gronwall:

$$\begin{aligned}
|x(t)|^2 &\le e^{2\int_{t_0}^{t}(\gamma_1(s)-\alpha+\varepsilon/2)ds}|x(t_0)|^2 \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \left(2\gamma_2(s) + \frac{\gamma_3^2(s) + R^2(s)}{\varepsilon}\right) e^{2\int_s^t(\gamma_1(r)-\alpha+\varepsilon/2)dr} ds \\
&= e^{(2\alpha-\varepsilon)(t_0-t)} e^{2\int_{t_0}^{t}\gamma_1(s)ds}|x(t_0)|^2 \\
&\quad + e^{(\varepsilon-2\alpha)t} \int_{t_0}^{t} e^{(2\alpha-\varepsilon)s} e^{2\int_s^t \gamma_1(r)dr} \left(2\gamma_2(s) + \frac{\gamma_3^2(s)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}R^2(s)\right) ds \\
&\le e^{(2\alpha-\varepsilon)(t_0-t)} e^{2\int_{t_0}^{t}\gamma_1(s)ds}|x(t_0)|^2 \\
&\quad + e^{(\varepsilon-2\alpha)t} e^{M_t} \int_{t_0}^{t} e^{(2\alpha-\varepsilon)s} \left(2\gamma_2(s) + \frac{\gamma_3^2(s) + R^2(s)}{\varepsilon}\right) ds,
\end{aligned}$$

donde hemos denotado

$$M_t = 2\int_{-\infty}^{t} \gamma_1(r)dr.$$

La existencia de un acotado absorbente en $\mathcal{C}$ es ya estándar (eligiendo $\varepsilon < 2\alpha$).

Nota 6.39. Por supuesto, el resultado del Teorema 6.35 es válido también si $X = C([-h, 0], L)$, con L un cerrado de $\mathbb{R}^n$, suponiendo de nuevo que X es débilmente invariante. Para ello, un resultado análogo al Corolario 6.26, consecuencia directa del Lema 6.27 es el siguiente:

Corolario 6.40. *Si* $L = \mathbb{R}_+^n$ *y* $F_0^i(t, \psi(0)) + F_1^i(t, \psi(-\rho(t))) + \int_{-h}^{0} b^i(t, s, \psi(s))ds > 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, *y* $\psi \in C([-h, 0]; L)$ *satisface* $(\psi(0))^i = 0$, *entonces para cada* $\psi \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *existe al menos una solución* $x(t)$ *de* (6.21) *verificando* $x(t) \in X$ *para todo* $t \ge t_0$.

Consideramos algunos ejemplos que aparecen en aplicaciones reales. En todos ellos $L = \mathbb{R}_+$ y así $X = C([-h, 0]; L)$.

Ejemplo 6.41. *El modelo de Mackey & Glass* [109] *sobre la producción de glóbulos rojos es el siguiente:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta(t)}{1+x^n(t-h)} - \delta x(t),$$

donde n y δ son constantes estrictamente positivas, $0 < \beta(t)$ es una función continua y

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon s}\beta^2(s)ds < +\infty \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0.$$

El Corolario 6.26 *se aplica aquí para obtener invarianza débil. Así, el proceso U está bien definido y* (6.34)-(6.35) *se satisfacen.*

Una generalización de este modelo consiste en añadirle un término integral:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-h}^{0} \frac{\beta(t,s)}{1+x^n(t+s)}ds - \delta x(t),$$

donde $\beta(t,s) > 0$ satisface $|\beta(t,s)| \leq m_0(s)$, $m_0 \in L^1([-h,0])$ (o $|\beta(t,s)| \leq K(t,s)$ con K verificando (6.33)*). Como consecuencia del Corolario 6.40, U está bien definida de nuevo sobre X. Todas las condiciones del Teorema* 6.35 *se satisfacen ($m_1 = k_2 = \lambda^* = 0$).*

Ejemplo 6.42. *Ważewska-Czyżewska & A. Lasota* [165] *proponen el siguiente modelo de producción de glóbulos rojos:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t)\exp(-\xi(t)x(t-h)) - \delta x(t),$$

con $\delta > 0$, y $\beta(t) > 0, \xi(t) \geq 0$ funciones continuas y $\int_{-\infty}^{t}\beta^2(s)ds < +\infty$, $\xi(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Como antes, U está bien definida sobre X, y es claro de nuevo que se satisfacen las condiciones (6.34)-(6.35).

Consideramos también la siguiente generalización del modelo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-h}^{0} \beta(t,s)\exp(-\xi(t+s)x(t+s))ds - \delta x(t),$$

donde β satisface las mismas condiciones del ejemplo previo. Podemos aplicar de nuevo los resultados de invarianza débil y los de existencia de atractor en este caso.

Ejemplo 6.43. *Finalmente, consideramos el modelo:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-h}^{0} \beta(t)x^n(t+s)\exp[-\xi(t+s)x(t+s)]ds - \delta x(t),$$

donde $\delta > 0$, $0 < n \leq 1$, y $\beta(t) > 0, \xi(t) \geq 0$ son continuas y $|\beta(t)|^2 \leq k^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Aunque ni el Corolario 6.40 *ni el Lema* 6.27 *pueden ser aplicados directamente, es inmediato obtener la invarianza débil tratando separadamente a la función nula del resto de elementos de $X = C([-h,0];L)$. Por la positividad de ξ y de las soluciones, podemos tomar $m_1(s) \equiv k$ de tal forma que* (6.22) *se satisface.*

Para un análisis de persistencia y extinción en estos modelos véase [116].

Apéndice A

Sobre el Carácter Invariante de los Atractores

En el marco de los sistemas dinámicos en sentido fuerte, hemos encontrado en los distintos ejemplos de atractores pullback considerados en la memoria problemas análogos con respecto a si tienen o no un carácter invariante. En el caso de los atractores globales estudiados en la Sección 5.3 sí mostrábamos que el *atractor cociclo* era estrictamente invariante gracias al sistema conductor. En cambio en los capítulos 3, 4 y 6 hacíamos referencia exclusivamente a su carácter negativamente invariante.

El objetivo de este parágrafo es poner de manifiesto las dificultades que entraña el caso multivaluado no autónomo para poder (salvo en casos concretos) hablar de invarianza estricta. Para ello recordamos algunos de los resultados básicos del caso univaluado, tanto si hay dependencia explícita del tiempo como si no, donde de modo natural se tiene dicha propiedad.

La noción de atractor en el caso no autónomo, como ya se ha visto, exige en general la incorporación del tiempo, esto es, el atractor es una familia que evoluciona con el tiempo, ya que un atractor uniforme resulta demasiado estricto (sólo válido en circunstancias concretas como las dadas en la Sección 5.3). Una descripción por tanto completa del comportamiento asintótico necesita conocer todos los elementos de esa familia. La propiedad de invarianza permite obtener cada sección temporal del atractor a partir de una anterior a través de

$$A(t) = \Phi(t, s, A(s)) \qquad \text{para todo} \quad t \geq s,$$

en el caso determinista (donde Φ es la m-aplicación de los estados alcanzables introducida en los distintos casos), con lo que una sola sección basta para tener bien determinado el atractor.

Algo más complejo resulta el caso aleatorio: una correcta definición de una m-aplicación se convierte ahora en una aplicación dependiente del tiempo y punto inicial, del tiempo final y del ruido con que se inicia la ecuación, que siguiendo la notación de Crauel *et al.* [45] expresamos como

$$\mathcal{S}(t, s, \omega)x.$$

Así, cada conjunto omega-límite en tiempo t viene dado por

$$\Omega(t, \omega, B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq s} \mathcal{S}(t, t-\tau, \omega)B}$$

y el cambio de variable temporal* da lo que se conoce como la propiedad del cociclo

$$\mathcal{S}(t,s,\omega)x = \mathcal{S}(t-s,0,\theta_s\omega)x = \mathcal{S}(0,-t+s,\theta_t\omega)x$$

y por tanto, que se tiene

$$\Omega(t,\omega,B) = \Omega(0,\theta_t,B).$$

Esto implica (para la construcción natural del atractor)

$$A(t,\omega) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \Omega(t,\omega,B)} = A(0,\theta_t\omega).$$

El poder expresar toda la dinámica del atractor en términos del segundo parámetro y fijando un tiempo (digamos cero) es el causante de la notación (más simplificada) habitual en el campo de atractores aleatorios $A(\omega) = A(0,\omega)$, junto con la del operador $\Phi(t,\theta_s\omega)x = \mathcal{S}(t,0,\theta_s\omega)x = \mathcal{S}(t+s,s,\omega)x$ y que de hecho hemos utilizado en el Capítulo 4.

Sin embargo, esto sólo simplifica la visión biparamétrica del atractor a dependencia en una variable, digamos la segunda (y tiempo "final" fijado en cero). De nuevo, el conocimiento total del atractor a partir de una sección viene dado por la propiedad de invarianza si es que se tiene:

$$\Phi(t,\omega)A(\omega) = A(\theta_t\omega),$$

donde hemos mantenido la notación Φ que usábamos en el Capítulo 4.

Así pues la propiedad de invarianza es muy útil cuando se tratan semiprocesos generados por ecuaciones no autónomas. ¿Cuándo se puede hablar de tal propiedad? Recordamos a continuación el caso univaluado para comprobar de modo natural del porqué la diferencia con los resultados generales multivaluados.

Comenzamos por el caso más simple: un conjunto omega-límite de un acotado en un sistema dinámico generado por una ecuación diferencial autónoma.

Proposición A.1. *Suponemos dado un sistema dinámico, i. e. una familia de operadores $\{S(t): X \to X\}_{t\geq 0}$ con cada operador $S(t)$ continuo, $S(0)$ =Id, y $S(t)S(s) = S(t+s)$ para todo t, $s \geq 0$. Si el sistema dinámico es asintóticamente compacto, i. e. dadas dos sucesiones $\{x_n\}_n \subset \mathcal{B}(X)$ y $t_n \to \infty$, la sucesión $S(t_n)x_n$ posee una subsucesión convergente. Entonces, para todo $B \in \mathcal{B}(X)$*

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} S(\tau)B}$$

es compacto no vacío e invariante.

Demostración. Que es no vacío es obvio, tomando un elemento cualquiera $x \in B$ y una sucesión cualquiera $t_n \to \infty$, usando que S es asintóticamente compacto. Para la compacidad: dados $\{x_n\} \subset \omega(B)$, existen $t_m^n \to \infty$ cuando $m \to \infty$ y $x_m^n \in B$ con $x_n = \lim_{m\to\infty} S(t_m^n)x_m^n$. Tomamos $\{t_{m(n)}^n\}_n$ tal que sea una sucesión creciente a infinito. Es claro que podemos extraer una subsucesión convergente de $S(t_{m(n)}^n)x_{m(n)}^n$, digamos $S(t_{m(n')}^{n'})x_{m(n')}^{n'} \to x$, lo que implica $x_{n'} \to x \in \omega(B)$.

*No produce cambios en la resolución de la ecuación como tal, aunque sí en la medibilidad, que es con respecto a una σ-álgebra distinta.

La invarianza la separamos en dos casos.

a) Veamos el carácter negativamente invariante: sea $y \in \omega(B)$, sea $\bar{t}$ un valor fijado. Comprobamos que $y \in S(\bar{t})\omega(B)$. Como $y = \lim_{t_n \to \infty} S(t_n)x_n$ para ciertas sucesiones $t_n \to \infty$ y $x_n \in B$, de la propiedad de semigrupo

$$y = \lim_{t_n \to \infty} S(\bar{t})S(t_n - \bar{t})x_n.$$

Pero también existe una subsucesión convergente

$$S(t_{n'} - \bar{t})x_{n'} \to z \in \omega(B),$$

de donde, por la continuidad de $S(\bar{t})$, $y \in S(\bar{t})z \in S(\bar{t})\omega(B)$.

b) Para la inclusión contraria, la invarianza positiva, partimos de $x \in \omega(B)$ y un $\bar{t}$ dado. Hay que ver que $S(\bar{t})x \in \omega(B)$. Como $x \in \omega(B)$, existen $t_n \to \infty$ y $x_n \in B$ con $x = \lim_{t_n \to \infty} S(t_n)x_n$. Entonces, de la continuidad de $S(\bar{t})$ se concluye

$$S(\bar{t})x = S(\bar{t}) \lim_{t_n \to \infty} S(t_n)x_n = \lim_{t_n \to \infty} S(\bar{t})S(t_n)x_n = \lim_{t_n \to \infty} S(\bar{t} + t_n)x_n.$$

□

Nota A.2. Obviamente, la continuidad univaluada contiene a la vez el carácter semicontinuo superior e inferiormente. Cuando se trata el caso multivaluado, por tanto, aparte de la propiedad de semigrupo, adaptar la prueba de la invarianza negativa al caso multivaluado requiere, por ejemplo, que el m-semiflujo sea semicontinuo superiormente y tenga valores cerrados (en realidad basta que tenga grafo cerrado), mientras que la parte b) sugiere la necesidad de imponer semicontinuidad inferior. Esto último, y por supuesto la mayor naturalidad de la propiedad de s. c. s. anuncian ya la problemática que aparecerá en el caso no autónomo. No obstante, nótese que para la invarianza estricta del atractor en el caso multivaluado autónomo basta acotación de dicho atractor y la propiedad de semigrupo estricto (cf. [118, Nota 8]).

Dada la minimalidad (entre los cerrados) del conjunto $\omega(B)$ como atrayente de B, y el hecho de que el atractor debe atraer a todos los acotados, proponen como atractor al conjunto

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} \omega(B).$$

Como ya se indicó en el Capítulo 3, a veces, en el contexto multivaluado, uno debe detenerse aquí (puede pasar que $\overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} \omega(B)} = X$; véase [118, Nota 6]). Sin embargo, cuando se tiene que existe un compacto atrayente, se consigue mejorar las propiedades:

Proposición A.3. *Si el sistema dinámico $\{S(t)\}_t$ es asintóticamente compacto y posee un compacto atrayente, entonces el conjunto*

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}(X)} \omega(B)$$

es el atractor global en el sentido "usual", i. e. atrae a todos los acotados, es compacto e invariante.

Nota A.4. Bajo la hipótesis de compacidad asintótica, la condición de existencia de compacto atrayente equivale a la de acotado absorbente B, ya que $\omega(B)$ es entonces compacto atrayente de toda la dinámica, y de hecho, equivale también a que G sea puntualmente disipativo, usando cualquier orla $B_1 = B(B_0, \varepsilon)$ (con B_0 el acotado que absorbe trayectorias que empiezan en un mismo punto).

Demostración. Dado que el sistema posee un compacto atrayente, A es acotado y por tanto, $A \supset \omega(A)$.

Para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, utilizando la invarianza de $\omega(B)$ es obvio que

$$\omega(B) = \omega(\omega(B)) \subset \omega(A).$$

Así, $A \subset \omega(A)$, por tanto se tiene la igualdad: $A = \omega(A)$. Por la Proposición A.1, es compacto e invariante. □

De este modo, los resultados principales sobre atractores autónomos multivaluados de Ball y Melnik & Valero que anunciábamos en el Capítulo 3 son la adaptación natural del caso univaluado. No obstante la prueba se ha basado esencialmente en que el conjunto A es independiente del tiempo y acotado, lo que permite verlo como un conjunto más del que tomar omega-límite.

En el caso no autónomo, determinista, requerimos un compacto atrayente en cada tiempo para poder llegar a las mismas conclusiones. Para evitar repeticiones, tratamos directamente el caso multivaluado, y por coherencia en la presentación, suponemos las hipótesis fuertes del Capítulo 5:

Proposición A.5. *Sea $\Phi : \mathbb{R}_d \times X \to \mathcal{K}(X)$ un proceso multivaluado continuo, esto es, semicontinuo superior e inferiormente, tal que existe una familia $\{K(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de compactos atrayentes en sentido pullback. Entonces la familia $A = \{A(t)\}_t$ dada por*

$$A(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t, B)},$$

siendo

$$\omega(t, B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq s} \Phi(t, t-\tau, B)}$$

está formada por compactos, es la mínima familia de cerrados que atrae a todos los acotados en sentido pullback, y es invariante.

Nota A.6. De nuevo, la hipótesis de semicontinuidad superior puede se sustituida por $G(t,\cdot)$ con grafo cerrado.

Demostración. Es inmediato por reducción al absurdo probar que cada $\omega(t, B)$ atrae en sentido pullback a B en tiempo t, y obvio que es el mínimo cerrado que lo hace. Al ser un cerrado contenido en $K(t)$, es compacto, y lo mismo cabe decir de $A(t)$. Por tanto nos centramos en el carácter invariante:

Paso 1. Cada $\omega(t, B)$ es negativamente invariante: la prueba es análoga al paso a) en la Proposición A.1. Dado $x \in \omega(t, B)$, existen $t_n \to -\infty$, $x_n \in B$ e $y_n \in \Phi(t, t_n, x_n)$ con $x = \lim_{n\to\infty} y_n$. Dado $s < t$, la propiedad del proceso Φ afirma que existen $z_n \in \Phi(s, t_n, x_n)$, los cuales (sin pérdida de generalidad) convergen a $z \in \omega(s, B)$, de modo que $x \in \Phi(t, s, z)$, esto es: $\omega(t, B) \subset \Phi(t, s, \omega(s, B))$.

Paso 2. $\mathcal{A}(t)$ es negativamente invariante: como se trata de un cerrado contenido en $K(t)$, tenemos que es compacto. De la invarianza negativa de $\omega(t,B)$ se deduce que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B) \subset \Phi(t,s,\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(s,B)) \subset \Phi(t,s,\mathcal{A}(s)).$$

Entonces, tanto si $\Phi(t,s,\cdot)$ tiene valores compactos y es s.c.s. como si es de grafo cerrado, $\Phi(t,s,\mathcal{A}(s))$ es compacto, por lo que

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)} \subset \overline{\Phi(t,s,\mathcal{A}(s))} = \Phi(t,s,\mathcal{A}(s)).$$

Paso 3. Los conjuntos $\omega(t,B)$ son además positivamente invariantes: sea $y \in \Phi(t,s,x)$ con $x \in \omega(s,B)$. Por tanto existen $t_n \to -\infty$, $x_n \in B$ y $z_n \in \Phi(s,t_n,x_n)$ con $x = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Si $\Phi(t,s,\cdot)$ es semicontinua inferiormente, existen

$$y_n \in \Phi(t,s,z_n) \subset \Phi(t,s,\Phi(s,t_n,x_n)) = \Phi(t,t_n,x_n)$$

con $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, esto es, $y \in \omega(t,B)$.

Paso 4. $\mathcal{A}(t)$ es positivamente invariante: sean $s < t$, $x \in \mathcal{A}(s)$, $y \in \Phi(t,s,x)$. Por ser $x \in \mathcal{A}(s)$, existen $x_n \in \omega(s,B_n)$, con $B_n \in \mathcal{B}(X)$, tales que $x = \lim\limits_n x_n$ y de la semicontinuidad inferior de $\Phi(t,s,\cdot)$ de nuevo deducimos la existencia de $y_n \in \Phi(t,s,x_n)$ tales que $y = \lim\limits_n y_n$. Gracias al paso 3, $y_n \in \omega(t,B_n)$, con lo que $y \in \mathcal{A}(t)$. $\square$

Nota A.7. Finalmente, Caraballo *et al.* [29] prueban, con la ayuda del Teorema de Recurrencia de Poincaré (e.g. [8, p. 351]), el resultado análogo en el caso estocástico (no autónomo por tanto) multivaluado si la aplicación $x \mapsto G(t,\omega)x$ es semicontinua inferiormente. El problema es que dicha propiedad se sabe probar sólo a veces mas no siempre (cf. [29], y Capítulos 4 y 6).

Apéndice B

Teorema de Barbashin para Cociclos Multivaluados

Dejamos en este apéndice, por claridad en la exposición del Capítulo 5, un resultado de los llamados "de tipo Barbashin" por la analogía con los primeros obtenidos sobre el tema por dicho autor [145, 88]. Dichos resultados establecen la forma de construir trayectorias, propiedades de compacidad del conjunto de éstas, así como su continuidad bajo ciertas hipótesis. Reproducimos tales resultados (en analogía a las ideas de [88]) para el caso de un cociclo multivaluado, procediendo en varias etapas. En adelante se suponen las hipótesis del Capítulo 5.

El objetivo es terminar probando el siguiente

Teorema B.1. *Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) $\mathcal{T}_{p,x}([0,T]) \neq \varnothing$ *(existen trayectorias para todo p, x y $T > 0$)*

(2) $\mathcal{T}_{p,x}([0,T]) \subseteq C([0,T];\mathbb{R}^d)$ *(continuidad)*

(3) $\mathcal{T}_{p,x}([0,T])$ *es un compacto de* $C([0,T];\mathbb{R}^d)$

(4) $\mathcal{T}_{p_n,x_n}([0,T]) \to \mathcal{T}_{p,x}([0,T])$ *(para la semidistancia* dist *en $C([0,T];\mathbb{R}^d)$) cuando $p_n \to p$, $x_n \to x$.*

Funciones de estados alcanzables
Sean dos puntos cualesquiera x_0 y x_1, tiempos $0 \leq t \leq t_1$, y $p \in \mathcal{M}$. La propiedad del cociclo establece que

$$\Phi(t_1, p, x_0) = \Phi(t, \theta_{t_1 - t}p, \Phi(t_1 - t, p, x_0)).$$

Por tanto, $x_1 \in \Phi(t_1, p, x_0)$ si y sólo si

$$\exists\, x \in \Phi(t_1 - t, p, x_0) \quad \text{tal que} \quad x_1 \in \Phi(t, \theta_{t_1 - t}p, x).$$

Esto sugiere la siguiente definición de función de alcanzables hacia atrás:

$$x \in G(x_0, p; x_1, t_1; t) \Longleftrightarrow x_1 \in \Phi(t, \theta_{t_1 - t}p, x). \tag{B.1}$$

Entonces, se tiene el siguiente resultado:

Lema B.2. *Si* $x_1 \in \Phi(t_1, p, x_0)$, *entonces* $G(x_0, p; x_1, t_1; t)$ *es no vacío, cerrado y* $G(x_0, p; x_1, t_1; 0) = \{x_1\}$.

La aplicación $t \in [0, t_1] \to A(t) \in P(\mathbb{R}^N)$ *dada por*

$$A(t) = \Phi(t_1 - t, p, x_0) \cap G(x_0, p; x_1, t_1; t) \tag{B.2}$$

tiene valores compactos no vacíos y es continua como función de t con respecto a la métrica de Hausdorff.

Demostración. Gracias a la propiedad del cociclo, es obvio que $G(x_0, p; x_1, t_1; t)$ es no vacío.

Para probar que es cerrado, seguimos [145]. Supongamos que $y_i \in G(x_0, p; x_1, t_1; t)$ es una sucesión convergente $y_i \to y$ cuando $i \to \infty$, entonces $x_1 \in \Phi(t, \theta_{t_1-t}p, y)$. En efecto,

$$d(x_1, \Phi(t, \theta_{t_1-t}p, y)) \leq d(x_1, \Phi(t, \theta_{t_1-t}p, y_i)) + \operatorname{dist}(\Phi(t, \theta_{t_1-t}p, y_i), \Phi(t, \theta_{t_1-t}p, y)).$$

El primer término de la derecha vale cero, y el segundo tiende a cero por la s. c. s. de Φ, luego $d(x_1, \Phi(t, \theta_{t_1-t}p, y)) = 0$ y $x_1 \in \Phi(t, \theta_{t_1-t}p, y)$.

Que se cumple $G(x_0, p; x_1, t_1; 0) = \{x_1\}$ es trivial.

Es claro también que $A(t)$ es no vacío (por la construcción de G y (B.1)), y compacto ya que es la intersección de un compacto y un cerrado. Necesitamos ver finalmente que la aplicación $t \mapsto A(t)$ es continua, i. e. $d_H(A(s), A(s_0)) \to 0$ cuando $s \to s_0$.

Empezamos con el caso $\operatorname{dist}(A(s), A(s_0)) \to 0$. Supongamos que no es así, esto es, existe una constante $\varepsilon > 0$ y una sucesión $s_i \to s_0$, tales que $\operatorname{dist}(A(s_i), A(s_0)) \geq \varepsilon$. Como $A(s_i)$ es compacto, el máximo se alcanza en algún punto, digamos z_i:

$$\operatorname{dist}(A(s_i), A(s_0)) = d(z_i, A(s_0)) \geq \varepsilon.$$

Como $z_i \in A(s_i) \subset \Phi(t_1 - s_i, p, x_0)$, todos estos puntos pertenecen a un compacto (por la continuidad de Φ y sus valores compactos [7]), así existe una subsucesión convergente $z_{i'} \to z_0 \in \Phi(t_1 - s_0, p, x_0)$. Por otro lado, como $z_i \in G(x_0, p; x_1, t_1; s_i)$, i. e. $x_1 \in \Phi(s_i, \theta_{t_1-s_i}p, z_i)$, a causa de la s. c. s. de Φ en sus tres variables (recuérdese la Nota 5.33) y como $(s_i, \theta_{t_1-s_i}p, z_i) \to (s_0, \theta_{t_1-s_0}p, z_0)$, tenemos que $x_1 \in \Phi(s_0, \theta_{t_1-s_0}p, z_0)$, i. e. $z_0 \in G(x_0, p; x_1, t_1; s_0)$ y por tanto $z_0 \in A(s_0)$, lo que nos lleva a una contradicción pues $\operatorname{dist}(A(s_i), A(s_0)) = d(z_i, A(s_0)) \leq d(z_i, z_0) \to 0$.

Probaremos ahora que también se tiene que $\operatorname{dist}(A(s_0), A(s)) \to 0$ si $s \to s_0$. Argumentando de nuevo por contradicción, asumimos que existe una constante $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{s_i\}_{i \geq 1}$ con $s_i \to s_0$ si $i \to \infty$, tal que $\operatorname{dist}(A(s_0), A(s_i)) \geq \varepsilon$. Considérese $z_i^0 \in A(s_0)$ tal que $d(z_i^0, A(s_i)) = \operatorname{dist}(A(s_0), A(s_i))$ (posible por ser $A(s_0)$ compacto), y sin pérdida de generalidad, suponemos que $z_i^0 \to z_0 \in A(s_0)$. Para acabar basta probar que existen elementos $z_i \in A(s_i)$ tales que $z_i \to z_0$.

Separamos esta última parte de la prueba en dos casos, siendo el general combinación de ambos:

$\boxed{s_i \leq s_0}$ Sea

$$z_0 \in A(s_0) = \Phi(t_1 - s_0, p, x_0) \cap G(x_0, p; x_1, t_1; s_0),$$

así $x_1 \in \Phi(s_0, \theta_{t_1-s_0}p, z_0)$.

Por un lado, $\Phi(s_0 - s_i, \theta_{t_1-s_0}p, z_0) \cap G(z_0, \theta_{t_1-s_0}p; x_1, s_0; s_i) \neq \varnothing$ por la misma razón que $A(t)$. Por otro lado, se comprueba fácilmente que

$$G(x_0, p; x_1, t_1; s_i) = G(z_0, \theta_{t_1-s_0}p; x_1, s_0; s_i),$$

y

$$\Phi(s_0 - s_i, \theta_{t_1-s_0}p, z_0) \subset \Phi(t_1 - s_i, p, x_0).$$

Por consiguiente,

$$\varnothing \neq \Phi(s_0 - s_i, \theta_{t_1-s_0}p, z_0) \cap G(z_0, \theta_{t_1-s_0}p; x_1, s_0; s_i) \subset A(s_i).$$

Tomamos

$$z_i \in \Phi(s_0 - s_i, \theta_{t_1-s_0}p, z_0) \cap G(z_0, \theta_{t_1-s_0}p; x_1, s_0; s_i).$$

Por la continuidad de Φ tenemos que $z_i \to z_0$.

$\boxed{s_i \geq s_0}$ El mismo argumento muestra que

$$\varnothing \neq \Phi(t_1 - s_i, p, x_0) \cap G(x_0, p; z_0, t_1 - s_0; s_i - s_0),$$

y también se tiene

$$G(x_0, p; z_0, t_1 - s_0; s_i - s_0) \subset G(x_0, p; x_1, t_1; s_i)$$

por la propiedad del cociclo de Φ. Así,

$$\begin{aligned} \varnothing &\neq \Phi(t_1 - s_i, p, x_0) \cap G(x_0, p; z_0, t_1 - s_0; s_i - s_0) \\ &\subset \Phi(t_1 - s_i, p, x_0) \cap G(x_0, p; x_1, t_1; s_i) = A(s_i). \end{aligned}$$

Eligiendo

$$z_i \in \Phi(t_1 - s_i, p, x_0) \cap G(x_0, p; z_0, t_1 - s_0; s_i - s_0),$$

tenemos que $z_i \in \Phi([0, t_1 - s_0], p, x_0)$ para todo i, que es compacto. Por tanto hay una subsucesión convergente $z_{i'} \to \xi$. Por otro lado, como $z_0 \in \Phi(s_i - s_0, \theta_{t_1-s_i}p, z_i)$, fijándonos en la subsucesión $z_{i'}$ de antes, la s. c. s. de Φ implica $z_0 \in \Phi(0, \theta_{t_1-s_0}p, \xi) = \{\xi\}$, así $z_0 = \xi$ (obsérvese que por tanto la sucesión completa converge), lo que termina la prueba. □

Corolario B.3. *Toda Φ-trayectoria es continua.*

Demostración. Sea $\phi_p : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ una trayectoria, i. e. $\phi_p(t) \in \Phi(t - s, \theta_s p, \phi_p(s))$ para todo $0 \leq s \leq t \leq T$. Considérese t_a fijado, y $t \to t_a$. Dividimos la prueba en dos casos:

$\boxed{t > t_a}$ Entonces,

$$\phi(t) \in \Phi(t - t_a, \theta_{t_a}p, \phi_p(t_a)) \to \Phi(0, \theta_{t_a}p, \phi_p(t_a)) = \{\phi_p(t_a)\}.$$

$\boxed{t < t_a}$ Por cálculos inmediatos, vemos que

$$\phi(t) \in \Phi(t - t_0, \theta_{t_0}p, \phi_p(t_0)) \cap G(\phi(t_0), \theta_{t_0}p, \phi(t_a), t_a - t_0, t_a - t).$$

Obsérvese que este conjunto tiene la misma forma que en la definición (B.2) para $A(\tilde{t})$, pero con $\tilde{x}_0 = \phi_p(t_0)$, $\tilde{p} = \theta_{t_0}p$, $\tilde{x}_1 = \phi_p(t_a)$, $\tilde{t}_1 = t_a - t_0$, $\tilde{t} = t_a - t$. Así, ahora tenemos que $A(\tilde{t}) \to A(0)$ cuando $\tilde{t} = t_a - t \to 0$, pero $A(0) = \{\phi_p(t_a)\}$, lo que nos da el resultado deseado. □

Ahora estamos en disposición de probar el Teorema 5.34 siguiendo las ideas de [145,88].

Primero mostramos cómo construir trayectorias.

Considérese $a \leq b$ y $(\theta_a p, x) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$. Construiremos una trayectoria ϕ_p con $\phi_p(a) = x$ pasando por otro punto dado en tiempo b, digamos $\phi_p(b)$, el cual necesariamente ha de pertenecer a $\Phi(b-a, \theta_a p, \phi_p(a))$. Elegimos el tiempo medio del intervalo (a,b), $(a+b)/2$, y una imagen en ese momento. Por consideraciones previas, dicha imagen debe estar en

$$\Phi((b-a)/2, \theta_a p, \phi_p(a)) \cap G(\phi_a(a), \theta_a p, \phi_p(b), b-a, (b-a)/2),$$

que es un compacto no vacío, como ya hemos visto. Iteramos este proceso en los intervalos $[a, (a+b)/2]$ y $[(a+b)/2, b]$. Repitiendo este procedimiento podemos obtener una sucesión diádica de puntos que verifican la condición para ser una trayectoria. El problema de completar la trayectoria a todo el intervalo de tiempo se hará por densidad: sea t un punto no diádico de $[a,b]$, y sean t' y t'' dos tiempos tales que $t' < t < t''$, entonces elegimos

$$\phi_p(t) \in K(t) = \bigcap_{t'<t<t''} \Phi(t-t', \theta_{t'} p, \phi_p(t')) \cap G(\phi_p(t'), \theta_{t'} p, \phi_p(t''), t''-t', t''-t).$$

Los conjuntos anteriores tienen intersección no vacía por el Teorema de Cantor (ver (B.2)), y por tanto dicha construcción es consistente.

En efecto, para cualquier $s_1 < s_2 < t < s_3 < s_4$, tenemos que los siguientes conjuntos están bien definidos y satisfacen las inclusiones indicadas:

$$\Phi(\phi_p(s_2), \theta_{s_2} p, t-s_2) \subset \Phi(\phi_p(s_1), \theta_{s_1} p, t-s_1)$$

y

$$\begin{aligned} & G(\phi_p(s_1), \theta_{s_1} p; \phi_p(s_3), s_3 - s_1; s_3 - t) \\ = \; & G(\phi_p(s_2), \theta_{s_2} p; \phi_p(s_3), s_3 - s_2; s_3 - t) \\ \subset \; & G(\phi_p(s_1), \theta_{s_1} p; \phi_p(s_4), s_4 - s_1; s_4 - t) \\ = \; & G(\phi_p(s_2), \theta_{s_2} p; \phi_p(s_4), s_4 - s_2; s_4 - t). \end{aligned}$$

Así, se ha probado la existencia de al menos una trayectoria. Recuérdese que toda trayectoria, bajo nuestras hipótesis, es continua.

Vemos a continuación que $\mathcal{T}_{p,x}([0,T])$ es un compacto de $C([0,T];\mathbb{R}^d)$. Sea $\{\phi_n\} \subset \mathcal{T}_{p,x}([0,T])$. Como $\Phi(T,p,x)$ es compacto, existe una subsucesión $\{\phi_{n_1}(T)\} \subset \{\phi_n(T)\}$ convergente a un punto que denotamos $\phi(T)$. Por la misma razón existe otra subsucesión (de la anterior) $\{\phi_{n_2}(T/2)\} \subset \{\phi_{n_1}(T/2)\}$ convergente a otro punto (que manteniendo la notación llamaremos) $\phi(T/2)$, iteramos este procedimiento y por un argumento diagonal obtenemos una subsucesión (que rebautizamos) convergente en todos los diádicos de $[0,T]$: $\phi_m(pT/2^q) \to \phi(pT/2^q)$.

Como $\{\phi_n\}$ son trayectorias, entonces $\phi_n(t) \in \Phi(t-s, \theta_s p, \phi_n(s))$ para todo $0 \leq s \leq t \leq T$, en particular para los diádicos, de donde $\phi(t) \in \Phi(t-s, \theta_s p, \phi(s))$ por la s. c. s. de Φ. Para extender al intervalo completo, procedemos como antes.

Probamos ahora que $\phi_n \to \phi$ en $C([0,T];\mathbb{R}^d)$. La convergencia puntual es fácil de obtener: para cada t, ponemos

$$\phi_n(t) - \phi(t) = \phi_n(t) - \phi_n(t_D) + \phi_n(t_D) - \phi(t_D) + \phi(t_D) - \phi(t),$$

con t_D diádico suficientemente cercano a t, tal que

$$|\phi(t_D) - \phi(t)| \leq \varepsilon/3 \qquad \text{y} \qquad d_H(\Phi(t,p,x), \Phi(t_D,p,x)) \leq \varepsilon/3.$$

Entonces podemos elegir $n(t_D)$ tal que para todo $n \geq n(t_D)$ se tiene $|\phi_n(t_D) - \phi(t_D)| \leq \varepsilon/3$. Sin embargo, la convergencia uniforme exige más cuidado. Seguimos la prueba de [145, Teor. 6.2]. Por contradicción, si no se tuviera convergencia uniforme, habría una constante $\varepsilon > 0$ y sucesiones t_n, con $t_n \to t \in [0,T]$, y ϕ_n tales que

$$|\phi_n(t_n) - \phi(t)| > \varepsilon. \tag{B.3}$$

Considérese un diádico $\tau \in \begin{cases} (t,T] & \text{si} \quad t < T \\ \{T\} & \text{si} \quad t = T. \end{cases}$

Como $\{\phi_n(t_n)\} \subset \Phi([0,T],p,x)$, que es compacto, existe una subsucesión convergente (que renombramos igual) $\phi_n(t_n) \to z$. Entonces, existe $n_\tau \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_\tau$, tenemos que $t_n < \tau$. Como $\phi_n(\tau) \in \Phi(\tau - t_n, \theta_{t_n}p, \phi_n(t_n))$ y τ es diádico, se tiene $\phi_n(\tau) \to \phi(\tau)$ y así la semicontinuidad superior global de Φ implica que

$$\phi(\tau) \in \Phi(\tau - t, \theta_t p, z).$$

Usando ahora la continuidad de ϕ y la densidad de los diádicos, se obtiene:

$$\phi(t) = \lim_{\tau \to t} \phi(\tau) \in \underset{\text{lím sup}}{\tau \to t} \Phi(\tau - t, \theta_t p, z) = \Phi(0, \theta_t p, z) = \{z\},$$

que contradice (B.3).

Finalmente, probamos el resultado de semicontinuidad superior que se afirmaba:

$$\operatorname{dist}(\mathcal{T}_{p_n,x_n}([0,T]), \mathcal{T}_{p,x}([0,T]) \to 0 \qquad \text{si} \quad (p_n, x_n) \to (p,x).$$

De acuerdo al último parágrafo, es equivalente probar ahora que es ε-s. c. s. De no serlo, existirían una constante $\varepsilon > 0$ y una sucesión de pares (p_n, x_n) convergiendo a (p,x) en $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^d$, y trayectorias $\phi_n \in \mathcal{T}_{p_n,x_n}([0,T])$ tales que $\phi_n \notin B_{C([0,T];\mathbb{R}^d)}(\mathcal{T}_{p,x}([0,T]), \varepsilon)$. Probaremos que para una subsucesión $\phi_{n'}$, se satisface que $\phi_{n'} \to \phi \in \mathcal{T}_{p,x}([0,T])$, lo que será contradictorio.

Para el punto inicial no tenemos problema de convergencia, pues por hipótesis se cumple $\phi_n(0) = x_n \to x$. Por otro lado, como $\phi_n(T) \in \Phi(T, p_n, x_n)$, como Φ tiene valores compactos y es s. c. s. existe una subsucesión (rebautizada igual) convergente a un elemento $\phi(T)$ perteneciente a $\Phi(T,p,x)$. El mismo argumento aplicado en tiempo $T/2$, y sucesivamente en todos los diádicos permite definir $\phi(kT/2^m)$. Por supuesto estos satisfacen la propiedad de trayectoria:

$$\phi_n(t) \in \Phi(t - s, \theta_s p_n, \phi_n(s)),$$

para cualesquiera diádicos $0 \leq s \leq t \leq T$. Por la s. c. s. de Φ se tiene que

$$\phi(t) \in \Phi(t - s, \theta_s p, \phi(s).$$

La extensión como antes a todo el intervalo preserva dicha propiedad, y la convergencia uniforme de ϕ_n a ϕ se deduce de nuevo como en el caso previo.

Bibliografía

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan y D. O'Regan, *Nonlinear Integral Equations and Inclusions.* Nueva York: Nova Science Publishers, Inc., 2001.

[2] G. Allaire, *Shape Optimization by the Homogenization Method*, vol. 146 de *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, 2002.

[3] D. J. Amit y Y. Verbin, *Statistical Physics. An Introductory Course.* Singapore: World Scientific Publishing Co., 2002.

[4] L. Arnold, *Random Dynamical Systems.* Monographs in Mathematics, Berlín: Springer-Verlag, 1998.

[5] F. V. Atkinson y J. R. Haddock, On determining phase spaces for functional-differential equations, *Funkcial. Ekvac.*, vol. 31, no. 3, pp. 331–347, 1988.

[6] J. P. Aubin, Viability kernels and capture basins of sets under differential inclusions, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 40, no. 3, pp. 853–881, 2001.

[7] J. P. Aubin y A. Cellina, *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory.* Berlín: Springer-Verlag, 1984.

[8] J. P. Aubin y H. Frankowska, *Set-Valued Analysis.* Boston: Birkhäuser Boston Inc., 1990.

[9] A. V. Babin, The attractor of a generalized semigroup generated by an elliptic equation in a tube domain, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 58, no. 2, pp. 3–18, 1994.

[10] A. V. Babin y M. I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, vol. 25 de *Studies in Mathematics and its Applications.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1992.

[11] J. M. Ball, Global attractors for damped semilinear wave equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* Aparecerá.

[12] J. M. Ball, Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations, *J. Nonlinear Sci.*, vol. 7, no. 5, pp. 475–502, 1997.

[13] E. A. Barbashin, On the theory of generalized dynamical systems, *Uch. Zap. Moskov. Gos. Univ.*, vol. 135, pp. 110–133, 1949.

[14] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces.* The Netherlands: Editura Academiei Bucuresti Romania, Noordhoff International Publishing, 1976.

[15] G. Barles, R. Buckdahn y E. Pardoux, Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations, *Stochastics Stochastics Rep.*, vol. 60, no. 1-2, pp. 57–83, 1997.

[16] A. Bensoussan y R. Temam, Équations stochastiques du type Navier-Stokes, *J. Funct. Analysis*, vol. 13, pp. 195–222, 1973.

[17] E. Beretta y Y. Kuang, Convergence results in a well-known delayed predator-prey system, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 204, no. 3, pp. 840–853, 1996.

[18] P. Billingsley, *Probability and Measure.* Wiley series in probability and mathematical statistics, Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., tercera ed., 1995.

[19] V. G. Bondarevsky, Energetic systems and global attractors for the 3D Navier-Stokes equations, en *Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 2 (Athens, 1996)*, vol. 30, pp. 799–810, 1997.

[20] F. Brauer y C. Castillo-Chávez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Nueva York: Springer-Verlag, 2001.

[21] T. F. Bridgland, Contributions to the theory of generalized differential equations I, *Math. Systems Theory*, vol. 3, pp. 17–50, 1969.

[22] D. Bushaw, Dynamical polysystems and optimization, *Contributions to Differential Equations*, vol. 2, pp. 351–365, 1963.

[23] D. Bushaw, Differential relations, en *Ordinary differential equations (Proc. NRL-MRC Conf., Math. Res. Center, Naval Res. Lab., Washington, D.C., 1971)*, pp. 11–17, Nueva York: Academic Press, 1972.

[24] T. Caraballo, P. E. Kloeden y P. Marín-Rubio, Global and pullback attractors of set-valued skew product flows, *Ann. Mat. Pura Appl. (4).* Aparecerá.

[25] T. Caraballo, P. E. Kloeden y P. Marín-Rubio, Weak pullback attractors of setvalued processes. Sometido a publicación.

[26] T. Caraballo y J. A. Langa, Comportamiento asintótico de sistemas dinámicos (notas de clase), 1999/2000. Programa de Doctorado "E.D.P. no lineales: análisis teórico, numérico y control". Bienio 1998/2000.

[27] T. Caraballo, J. A. Langa, V. S. Melnik y J. Valero, Pullback attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems, *Set-Valued Anal.* Aparecerá.

[28] T. Caraballo, J. A. Langa y J. Robinson, Attractors for differential equations with variable delays, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 260, no. 2, pp. 421–438, 2001.

[29] T. Caraballo, J. A. Langa y J. Valero, Global attractors for multivalued random dynamical systems, *Nonlinear Anal.*, vol. 48, no. 6, pp. 805–829, 2002.

[30] T. Caraballo, P. Marín-Rubio y J. Robinson, A comparison between two theories for multi-valued semiflows and their asymptotic behaviour, *Set-Valued Anal.* Aparecerá.

[31] T. Caraballo, P. Marín-Rubio y J. Valero, Autonomous and non-autonomous attractors for differential equations with delays. Sometido a publicación.

[32] T. Caraballo y J. Real, Navier-Stokes equations with delays, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 457, pp. 2441–2453, 2001.

[33] D. N. Cheban, Global attractors of infinite-dimensional nonautonomous dynamical systems I, *Bull. Acad. Sciences Rep. Moldova. Mat.*, vol. 25, no. 3, pp. 42–55, 1997.

[34] D. N. Cheban, Global attractors of infinite-dimensional nonautonomous dynamical systems II, *Bull. Acad. Sciences Rep. Moldova. Mat.*, vol. 27, no. 2, pp. 25–38, 132, 135, 1998.

[35] D. N. Cheban, P. E. Kloeden y B. Schmalfuß, The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems, *Nonlinear Dynamics & Systems Theory*, vol. 2, no. 2, pp. 9–28, 2002.

[36] D. N. Cheban y B. Schmalfuß, Global attractors of nonautonomous disperse dynamical systems and differential inclusions, *Bull. Acad. Sciences Rep. Moldova. Mat.*, vol. 29, no. 1, pp. 3–22, 1999.

[37] V. V. Chepyzhov y M. I. Vishik, A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of nonautonomous evolution equations, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 42, no. 3, pp. 1057–1076, 1993.

[38] V. V. Chepyzhov y M. I. Vishik, Evolution equations and their trajectory attractors, *J. Math. Pures Appl.*, vol. 76, pp. 913–964, 1997.

[39] J. W. Cholewa y T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, vol. 278 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[40] I. D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*. ACTA, Kharkiv, Ukraine: ACTA Scientific Publishing House, 2002.

[41] I. D. Chueshov, *Monotone Random Systems Theory and Applications*, vol. 1779 de *Lecture Notes in Mathematics*. Berlín Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

[42] K. L. Chung y R. J. Williams, *Introduction to Stochastic Integration*. Probability and its applications, Boston: Birkhäuser, segunda ed., 1990.

[43] M. Crandall, H. Ishii y P. L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, vol. 27, no. 1, pp. 1–67, 1992.

[44] H. Crauel, Random point attractors versus random set attractors, *J. London Math. Soc.*, vol. 63, pp. 413–427, 2001.

[45] H. Crauel, A. Debussche y F. Flandoli, Random attractors, *J. Dyn. Diff. Eqns.*, vol. 9, no. 2, pp. 307–341, 1997.

[46] H. Crauel y F. Flandoli, Attractors for random dynamical systems, *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 100, no. 3, pp. 365–393, 1994.

[47] H. Crauel y F. Flandoli, Dissipativity of three-dimensional stochastic Navier-Stokes equation, en *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1993)*, vol. 36 de *Progr. Probab.*, pp. 67–76, Basel: Birkhäuser, 1995.

[48] J. M. Cushing, *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*, vol. 20 de *Lecture Notes in Biomathematics.* Berlín Heidelberg: Springer-Verlag, 1977.

[49] J. Cvitanić y J. Ma, Hedging options for a large investor and forward-backward SDE's, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 6, no. 2, pp. 370–398, 1996.

[50] G. Da Prato y J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[51] W. R. Darling y E. Pardoux, Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE, *Ann. Probab.*, vol. 25, no. 3, pp. 1135–1159, 1997.

[52] F. Delarue, Existence and uniqueness of solutions of FBSDE's in a non-degenerate case, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 99, pp. 209–286, 2002.

[53] C. R. Doering y J. D. Gibbon, *Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[54] D. Duffie y L. Epstein, Stochastic differential utility, *Econometrica*, vol. 60, pp. 353–394, 1992.

[55] D. Duffie, J. Ma y J. Yong, Black's consol rate conjecture, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 5, no. 2, pp. 356–382, 1995.

[56] N. El Karoui, C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng y M. C. Quenez, Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's, *Ann. Probab.*, vol. 25, no. 2, pp. 702–737, 1997.

[57] F. Flandoli y B. Schmalfuß, Weak solutions and attractors for three-dimensional Navier-Stokes equations with nonregular force, *J. Dyn. Diff. Eqns.*, vol. 11, no. 2, pp. 355–398, 1999.

[58] C. Foias y R. Temam, Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 30, pp. 149–164, 1977.

[59] C. Foias y R. Temam, Some analytic and geometric properties of the solutions of the Navier-Stokes equations, *J. Math. Pures Appl.*, vol. 58, pp. 339–368, 1979.

[60] C. Foias y R. Temam, The connection between the Navier-Stokes equations, dynamical systems, and turbulence theory, en *Directions in Partial Differential Equations*, pp. 55–73, Academic Press, 1987.

[61] M. J. Garrido Atienza, *Algunos resultados de existencia, unicidad y estabilidad para EDP funcionales estocásticas no lineales.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2002.

[62] A. Gégout-Petit y E. Pardoux, Équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies dans un convexe, *Stochastics Stochastics Rep.*, vol. 57, no. 1-2, pp. 111–128, 1996.

[63] M. Gobbino y M. Sardella, On the connectedness of attractors for dynamical systems, *J. Diff. Eqns.*, vol. 133, pp. 1–14, 1997.

[64] C. Graham, Homogenization and propagation of chaos to a nonlinear diffusion with sticky reflection, *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 101, no. 3, pp. 291–302, 1995.

[65] L. Grüne, *Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization*, vol. 1783 de *Lecture Notes in Mathematics.* Berlín: Springer-Verlag, 2002.

[66] L. Grüne y P. E. Kloeden, Discretization, inflation and perturbation of attractors, en *Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems*, pp. 399–416, Berlín: Springer, 2001.

[67] W. S. Gurney, S. P. Blythr y R. M. Nisbet, Nicholson's blowflies revisited, *Nature*, vol. 287, pp. 17–21, 1980.

[68] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, vol. 25 de *Mathematical Surveys and Monographs.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1988.

[69] J. K. Hale, *Introduction to Functional Differential Equations.* Nueva York: Springer-Verlag, 1993.

[70] J. K. Hale y J. Kato, Phase space for retarded equations with infinite delay, *Funkcial. Ekvac.*, vol. 21, no. 1, pp. 11–41, 1978.

[71] J. K. Hale y S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional-Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, Nueva York: Springer-Verlag, 1993.

[72] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations.* Nueva York: John Wiley & Sons Inc., 1964.

[73] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, vol. 840 de *Lecture Notes in Mathematics.* Berlín: Springer-Verlag, 1981.

[74] E. Hille y R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups.* Colloq. Publ. Col., Amer. Math. Soc., 1957.

[75] H. Holden y B. Øksendal, A white noise approach to stochastic Neumann boundary-value problems. Recent developments in infinite-dimensional analysis and quantum probability, *Acta Appl. Math.*, vol. 63, no. 1-3, pp. 141–150, 2000.

[76] P. Hsu, *Reflecting Brownian motion, boundary local time and the Neumann problem.* Tesis Doctoral, Stanford University, 1984.

[77] P. Hsu, Probabilistic approach to the Neumann problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 38, pp. 445–472, 1985.

[78] Y. Hu, Probabilistic interpretation of a system of quasilinear elliptic partial differential equations under Neumann boundary conditions, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 48, no. 1, pp. 107–121, 1993.

[79] Y. Hu, On the solution of forward-backward SDEs with monotone and continuous coefficients, *Nonlinear Anal.*, vol. 42, no. 1, Ser. A: Theory Methods, pp. 1–12, 2000.

[80] Y. Hu y J. Yong, Forward-backward stochastic differential equations with nonsmooth coefficients, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 87, no. 1, pp. 93–106, 2000.

[81] S. Hui y S. H. Żak, On the Lyapunov stability of discrete-time processes modeled by difference inclusions, *Systems & Control Letters*, vol. 10, pp. 207–209, 1988.

[82] N. Ikeda, T. Ueno, H. Tanaka y K. Sato, A boundary-value problem for multi-dimensional diffuson processes, *Sûgaku*, vol. 13, pp. 37–53, 1961/1962.

[83] R. Johnson y M. Nerurkar, *Controllability, Stabilization, and the Regulator Problem for Random Differential Systems*, vol. 136 de *Memoirs of the American Mathematical Society*. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998.

[84] A. V. Kapustyan, An attractor of a semiflow generated by a system of phase-field equations without uniqueness of the solution, *Ukraïn. Mat. Zh.*, vol. 51, no. 7, pp. 1006–1009, 1999.

[85] A. V. Kapustyan, V. S. Melnik y J. Valero, Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations, *Internat. J. Bifur. Chaos.* Aparecerá.

[86] A. V. Kapustyan y J. Valero, Attractors of multivalued semiflows generated by differential inclusions and their approximations, *Abstr. Appl. Anal.*, vol. 5, no. 1, pp. 33–46, 2000.

[87] I. Karatzas y S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Nueva York: Springer-Verlag, 1988.

[88] P. E. Kloeden, General control systems without backwards extension, en *Differential Games and Control Theory* (P. L. E. Roxin y R. Sternberg, eds.), pp. 49–58, Marcel-Dekker, 1974.

[89] P. E. Kloeden, General control systems, en *Mathematical Control Theory* (W. A. Coppel, ed.), vol. 680 de *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 119–138, Springer-Verlag, 1978.

[90] P. E. Kloeden, Lyapunov functions for cocycle attractors in nonautonomous difference equations, *Izvetsiya Akad Nauk Rep Moldovia Mathematika*, vol. 26, pp. 32–42, 1998.

[91] P. E. Kloeden, Pullback attractors in nonautonomous difference equations, *J. Difference Eqns. Applns.*, vol. 6, pp. 33–52, 2000.

[92] P. E. Kloeden y P. Marín-Rubio, Weak pullback attractors of nonautonomous difference inclusions, *J. Difference Eqns. Applns.* Aparecerá.

[93] P. E. Kloeden y B. Schmalfuß, Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization, *Numer. Algorithms*, vol. 14, no. 1-3, pp. 141–152, 1997. Dynamical numerical analysis (Atlanta, GA, 1995).

[94] P. E. Kloeden y B. Schmalfuß, Asymptotic behaviour of nonautonomous difference inclusions, *Systems & Control Letters*, vol. 33, pp. 275–280, 1998.

[95] P. E. Kloeden y D. J. Stonier, Cocycle attractors in nonautonomously perturbed differential equations, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, vol. 4, no. 2, pp. 211–226, 1998.

[96] M. A. Kouritzin y H. Long, Convergence of Markov chain approximations to stochastic reaction diffusion equations, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 12, no. 3, pp. 1039–1070, 2002.

[97] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics.* Boston: Academic Press, 1993.

[98] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, vol. 25 de *Lincei Lectures.* Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[99] H. Lamba, Dynamical systems and adaptive timestepping in ODE solvers, *BIT*, vol. 40, no. 2, pp. 314–335, 2000.

[100] H. Lamba y A. M. Stuart, Convergence results for the MATLAB ode23 routine, *BIT*, vol. 38, no. 4, pp. 751–780, 1998.

[101] J. A. Langa Rosado, *Atractores y comportamiento finito-dimensional en sistemas dinámicos aleatorios.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 1998.

[102] J. L. Lions, *El Planeta Tierra. El Papel de las Matemáticas y de los Super Ordenadores.* Madrid: Instituto de España. Espasa-Calpe S. A., 1990.

[103] P. L. Lions y A. S. Sznitman, Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 37, no. 4, pp. 511–537, 1984.

[104] R. S. Liptser y A. N. Shiryayev, *Statistics of Random Processes. I General Theory*, vol. 5 de *Applications of Mathematics.* Nueva York: Springer-Verlag, 1977. Traducido por A. B. Aries.

[105] J. Ma y J. Cvitanić, Reflected forward-backward SDEs and obstacle problems with boundary conditions, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 113–138, 2001.

[106] J. Ma, P. Protter y J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—a four step scheme, *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 98, no. 3, pp. 339–359, 1994.

[107] J. Ma y J. Yong, *Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications*, vol. 1702 de *Lecture Notes in Mathematics.* Berlín: Springer-Verlag, 1999.

[108] N. MacDonald, *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*, vol. 1702 de *Cambridge Studies in Mathematical Biology.* Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[109] M. C. Mackey y L. Glass, Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science*, vol. 197, pp. 287–289, 1977.

[110] J. Mallet-Paret, Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright, *J. Diff. Eqns.*, vol. 22, pp. 331–348, 1976.

[111] X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Their Applications.* Horwood Publishing Limited, Chichester, 1997.

[112] P. Marín-Rubio, Ecuaciones y sistemas diferenciales estocásticos, retrógrados y progresivo-retrógrados. Procesos de difusión con reflexión en la frontera, Diploma de Estudios Avanzados, Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, 2002. Dirigida por José Real Anguas.

[113] P. Marín-Rubio y J. Real, Some results on stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. Sometido a publicación.

[114] P. Marín-Rubio y J. Real, Stochastic functional differential equations with reflecting boundary conditions and applications. En preparación.

[115] P. Marín-Rubio y J. Robinson, Attractors for the three-dimensional stochastic Navier-Stokes equations. Sometido a publicación.

[116] C. Martínez Álvarez, *Estabilidad global y acotación en ecuaciones diferenciales funcionales con retraso.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 2001.

[117] A. Matoussi, Reflected solutions of backward stochastic differential equations with continuous coefficient, *Statist. Probab. Lett.*, vol. 34, no. 4, pp. 347–354, 1997.

[118] V. S. Melnik y J. Valero, On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions, *Set-Valued Anal.*, vol. 6, no. 1, pp. 83–111, 1998.

[119] P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel.* París: Hermann, 1966.

[120] S. E. A. Mohammed, *Stochastic Functional Differential Equations*, vol. 99 de *Research Notes in Mathematics.* Boston, MA: Pitman (Advanced Publishing Program), 1984.

[121] A. P. Molchanov y Y. S. Pyatnitskiy, Criteria for the asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control systems, *Systems & Control Letters*, vol. 13, pp. 59–64, 1989.

[122] J. D. Murray, *Mathematical Biology.* Berlín Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

[123] G. Ochs, Random attractors: robustness, numerics and chaotic dynamics, en *Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical Systems* (B. Fiedler, ed.), Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.

[124] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.* Universitext, Berlín: Springer-Verlag, tercera ed., 1992.

[125] A. Ould Elmounir y F. Simondon, Attracteurs compacts pour des problèmes d'évolution sans unicité, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, vol. 9, no. 4, pp. 631–654, 2000.

[126] J. C. Oxtoby, *Measure and Category.* Nueva York: Springer-Verlag, 1971.

[127] E. Pardoux, *Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones.* Tesis Doctoral, Université Paris XI, 1975.

[128] E. Pardoux, Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order, en *Stochastic analysis and related topics, VI (Geilo, 1996)*, pp. 79–127, Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1998.

[129] E. Pardoux, Homogenization of linear and semilinear second order parabolic PDEs with periodic coefficients: a probabilistic approach, *J. Funct. Analysis*, vol. 167, no. 2, pp. 498–520, 1999.

[130] E. Pardoux y S. G. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems & Control Letters*, vol. 14, no. 1, pp. 55–61, 1990.

[131] E. Pardoux y S. G. Peng, Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations, en *Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991), Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, vol. 176, pp. 200–217, Berlín: Springer, 1992.

[132] E. Pardoux, F. Pradeilles y Z. Rao, Probabilistic interpretation of a system of semi-linear parabolic partial differential equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, vol. 33, no. 4, pp. 467–490, 1997.

[133] E. Pardoux y S. Tang, Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs, *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 114, no. 2, pp. 123–150, 1999.

[134] E. Pardoux y S. Zhang, Generalized BSDEs and nonlinear Neumann boundary value problems, *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 110, no. 4, pp. 535–558, 1998.

[135] S. Peng, Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations, *Stochastics Stochastics Rep.*, vol. 37, no. 1-2, pp. 61–74, 1991.

[136] R. Pettersson, Approximations for stochastic differential equations with reflecting convex boundaries, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 59, pp. 295–308, 1995.

[137] S. Y. Pilyugin, Attracting sets and systems without uniqueness, *Mat. Zametki*, vol. 42, no. 5, pp. 703–711, 763, 1987. Traducción al inglés en *Math. Notes*, vol. 42, no. 5-6, pp. 887-891, 1987.

[138] J. Real, Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas (notas de clase), 1999/2000. Programa de Doctorado "E.D.P. no lineales: análisis teórico, numérico y control". Bienio 1998/2000.

[139] J. Real, Sistemas dinámicos deterministas y estocásticos (notas de clase), 2001/2002. Programa de Doctorado "Matemáticas".

[140] D. Revuz y M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Berlín Heidelberg: Springer-Verlag, segunda ed., 1994.

[141] J. C. Robinson, Some approaches to finite-dimensional behaviour in the Navier-Stokes equations, Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, 1997. Seminario.

[142] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[143] J. L. Romero y C. García, *Modelos y Sistemas Dinámicos.* Servicio de publicaciones, Cádiz: Universidad de Cádiz, 1998.

[144] E. O. Roxin, On generalized dynamical systems defined by contingent equations, *J. Diff. Eqns.*, vol. 1, pp. 188–205, 1965.

[145] E. O. Roxin, Stability in general control systems, *J. Diff. Eqns.*, vol. 1, pp. 115–150, 1965.

[146] S. H. Saker, Oscillation and global attractivity in hematopoiesis model with delay time, *Appl. Math. Comput.*, vol. 136, no. 2-3, pp. 241–250, 2003.

[147] K. Sato y T. Ueno, Multi-dimensional diffusions and Markov processes on the boundary, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 4, pp. 529–603, 1965/1966.

[148] B. Schmalfuß, Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations, en *International Seminar on Applied Mathematics-Nonlinear Dynamics: Attractor Approximation and Global Behaviour* (V. Reitmann, T. Redrich y N. J. Kosch, eds.), (Dresden), pp. 185–192, Technische Universität, 1992.

[149] B. Schmalfuß, Some remarks on inertial manifolds for random dynamical systems, Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, 2003. Conferencia.

[150] G. Seifert, Positively invariant closed sets for systems of delay differential equations, *J. Diff. Eqns.*, vol. 22, pp. 292–304, 1976.

[151] G. Sell, On the fundamental theory of ordinary differential equations, *J. Diff. Eqns.*, vol. 1, pp. 370–392, 1965.

[152] G. Sell, Non-autonomous differential equations and dynamical systems, *Amer. Math. Soc.*, vol. 127, pp. 241–283, 1967.

[153] G. Sell, Global attractors for the three-dimensional Navier-Stokes equation, *J. Dyn. Diff. Eqns.*, vol. 8, pp. 1–33, 1996.

[154] L. Słomiński, Euler's approximations of solutions of SDEs with reflecting boundary, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 94, no. 2, pp. 317–337, 2001.

[155] G. V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions.* Providence: Amer. Math. Soc., 2002.

[156] G. Stépán, *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*, vol. 210 de *Pitman Res. Notes Math. Ser.* Harlow: Longman Scientific & Technical, 1989.

[157] A. M. Stuart y A. R. Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, vol. 2 de *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[158] G. P. Szegö y G. Treccani, *Semigruppi di Trasformazioni Multivoche*, vol. 101 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1969.

[159] H. Tanaka, Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions, *Hiroshima Math. J.*, vol. 9, pp. 163–177, 1979.

[160] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, vol. 68 de *Applied Mathematical Sciences.* Nueva York: Springer-Verlag, segunda ed., 1997.

[161] J. Valero, *Existencia y dimensión de atractores en sistemas dinámicos generados por inclusiones diferenciales.* Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, 1997.

[162] J. Valero, On locally compact attractors of dynamical systems, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 237, pp. 43–54, 1999.

[163] J. Valero, Attractors of parabolic equations without uniqueness, *J. Dyn. Diff. Eqns.*, vol. 13, no. 4, pp. 711–744, 2001.

[164] B. Vielle y G. Chauvet, Delay equation analysis of human respiratory stability, *Math. Biosci.*, vol. 152, no. 2, pp. 105–122, 1998.

[165] M. Ważewska-Czyżewska y A. Lasota, Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells, *Mat. Stos. (3)*, vol. 6, pp. 23–40, 1976.

[166] S. Weinryb, Étude d'une équation différentielle stochastique avec temps local, en *Seminar on probability, XVII*, vol. 986 de *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 72–77, Berlín: Springer, 1983.

[167] J. Yong, Finding adapted solutions of forward-backward stochastic differential equations: method of continuation, *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 107, no. 4, pp. 537–572, 1997.

[168] J. Yong, Linear forward-backward stochastic differential equations, *Appl. Math. Optim.*, vol. 39, no. 1, pp. 93–119, 1999.

[169] J. Yong y X. Yu Zhou, *Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Nueva York: Springer-Verlag, 1999.

[170] S. Zaremba, Sur les équations au paratingent, *Bull. Sci. Math.*, vol. 60, no. 2, pp. 139–160, 1936.

[171] T. S. Zhang, On the strong solutions of one-dimensional stochastic differential equations with reflecting boundary, *Stochastic Process. Appl.*, vol. 50, pp. 135–147, 1994.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Pedro Marín Rubio

titulada Existencia, unicidad y comportamiento asintótico en algunos sistemas dinámicos deterministas y estocásticos

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum laude por unanimidad

Sevilla, 23 de Mayo 2003

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario El Doctorado