VOLUMEN ÓPTIMO DE INVERSIÓN SEGÚN UTILIDAD EN CONTEXTO PROBABILÍSTICO

SÁNCHEZ MONTERO, Jesús
Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla
correo-e: jsmonter@us.es

GAMERO ROJAS, Javier
Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla
correo-e: jgam@jet.es

DOMÍNGUEZ SERRANO, Mª Ángeles
Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla
correo-e: adoser@us.es

RESUMEN

Se estudia el volumen de inversión que produce beneficios óptimos teniendo en cuenta una distribución probabilística de resultados y una posición del decisor ante el riesgo, representada mediante una función de utilidad. Se tratan casos especiales considerados de especial interés, tanto en lo que se refiere a lo estocástico como en la modelización de la aversión al riesgo del decisor.

Palabras clave: Utilidad, volumen de inversión.

1. Conceptos preliminares.-

Supongamos que un decisor se enfrenta a la posibilidad de una inversión I que produce un beneficio aleatorio X para un volumen de inversión unitario. El capital total que puede dedicarse a la inversión es una cantidad C. El objetivo de esta comunicación es explorar el volumen de inversión que resulta óptimo, bajo ciertos supuestos asumibles.

Estudiaremos varios escenarios posibles considerando diferentes niveles de complejidad.

- Inversión única contra no inversión: Se trata de evaluar que volumen de inversión es óptimo, suponiendo que no hay inversiones alternativas y que la no inversión supone un beneficio nulo.
- Inversión única considerando la alternativa de inversión sin riesgo: Se considera como alternativa a la inversión I, la inversión en un activo sin riesgo que produce un rendimiento dado.
- Inversiones alternativas: La o las alternativas a la inversión I son, a su vez, otras inversiones estocásticas.
- Inversión única con rendimiento decreciente a volumen de inversión creciente: Se tiene en cuenta la posible disminución de rendimiento cuando el volumen de inversión es grande.

Vamos a considerar las cantidades monetarias en unidades constantes, es decir, descontando los efectos de la inflación. En lo que sigue, emplearemos la notación μ = E[X] , $\sigma^2 = \sigma^2$[X]. Llamaremos Y al resultado estocástico de invertir h unidades en la inversión cuyo resultado por unidad de inversión es X. Es decir, $Y = h\cdot X$, suponiendo que el rendimiento de cada unidad monetaria invertida es idéntico (supuesto que desecharemos en el último supuesto a estudiar).

Para el tratamiento de la utilidad utilizaremos una variante basada en la valoración explícita de la esperanza y la varianza de la inversión, así como del grado de aversión al riesgo del decisor.

A tal efecto, llamaremos valoración útil de una inversión I con un resultado estocástico Y a la expresión:

$$V(h) = E[Y] - g(E[Y])\cdot\sigma^2[Y]$$

Tal expresión puede interpretarse de la siguiente forma. La valoración es igual al rendimiento esperado descontando en función del riesgo (varianza) y de la aversión al riesgo (representada por g(E[Y])). La aversión al riesgo podría, en principio, ser negativa y representaría que el decisor presenta propensión al riesgo, es decir valora positivamente la presencia de incertidumbre estocástica en la inversión.

Este tratamiento permite conseguir un tratamiento analítico más sencillo. Veremos la interrelación entre esta valoración de utilidad y el cómputo de la esperanza de utilidad. Demostraremos que, en ciertas condiciones generalmente asumibles, se dá la aproximación siguiente para una variable aleatoria dada X, en donde $\mu = E[X]$ y $\sigma = \sigma[X]$:

$$E[U(X)] \cong \mu + \sigma^2 g(\mu) \qquad [1]$$

Sea U una función de utilidad creciente y de clase C^2 , y sea $\mu = E[X]$ y $\sigma = \sigma[X]$ entonces:

$$E[U(X)] \cong U(\mu) + \frac{1}{2}U''(\mu)\,\sigma^2$$

Esa aproximación será tanto más exacta cuanto más aproximable sea U(x) a una parábola en la región alrededor de E[X] que contenga una alta probabilidad.

$$U^{-1}(U(\mu))+\frac{1}{2}U''(\mu)\sigma^2 \cong U^{-1}(U(\mu))+\frac{1}{2}U''(\mu)\sigma^2 (U^{-1})'(U(\mu)) =$$

$$= \mu+\frac{1}{2}\frac{U''(\mu)\sigma^2}{U'(\mu)} = \mu+\sigma^2 g(\mu),\ g(\mu) = \frac{1}{2}\frac{U''(\mu)}{U'(\mu)}$$

Y por tanto, llegamos a la expresión [1].

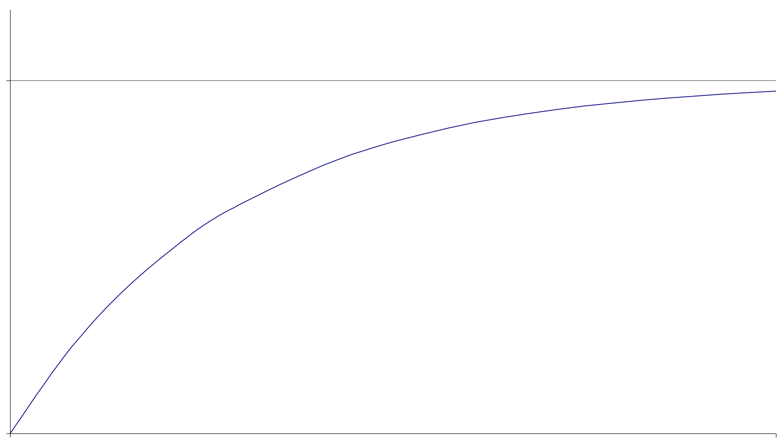
□□□□□□□□□□□Algunos casos particulares de utilidad que consideraremos en el trabajo son:

1º <u>Caso valoración con g(μ) constante:</u> $E[U(X)] = \mu - k\sigma^2,\ k > 0$. En este caso

$$g(\mu) = -k \to \frac{U''(\mu)}{U'(\mu)} = -2k \to \frac{d}{dx}LN(U'(X)) = -2k \to LN(U'(X)) = a - 2kX$$

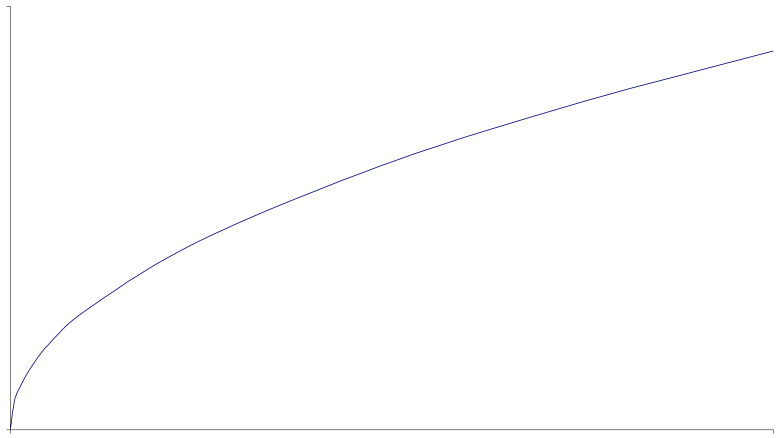
$$\to U'(X) = e^{a-2kX} \to U(X) = b - \frac{e^{a-2kX}}{2k} = b - AB^X \sim 1\text{-}\mathrm{DB}^{\mathrm{X}}$$

donde a, b, A, B, D son constantes reales. Es decir en este caso la utilidad es exponencial y acotada superiormente por su asíntota de altura = 1. A este caso lo denominaremos “utilidad exponencial”.



2º Utilidad potencial: $U(x) = a \cdot x^b$, con $a > 0$, $b \in (0\ ,\ 1)$. Entonces $U'(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1}$, $U''(x) = a \cdot b \cdot (b-1) \cdot x^{b-2}$, $g(\mu) = -\dfrac{1-b}{2\mu}$. Por tanto:

$$V = \mu - \sigma^2 \frac{1-b}{2\mu}$$



En este caso la aversión al riesgo disminuye de forma inversa al resultado esperado μ. Es decir, el decisor tiene menos aversión al riesgo en cuanto se involucran grandes capitales. Nótese en el gráfico como la utilidad se "rectifica" según

Generalizando los dos casos anteriores, consideraremos este otro caso.

3º Valoración con aversión variable en función de una potencia de μ: La valoración útil sería igual a

$$V = \mu - \frac{\sigma^2 k}{\mu^A}$$

El parámetro A no puede tomar cualquier valor arbitrario, más adelante haremos una pequeña discusión sobre este punto. Exploremos qué tipo de función de utilidad originaría esta valoración útil. Usando la aproximación [1], deducimos

$$g(\mu) = \frac{U''(\mu)}{2U'(\mu)} = -k\mu^{-A} \Rightarrow \frac{d}{d\mu}\ln U'(\mu) = -k\mu^{-A} \Rightarrow \ln U'(\mu) = -k\frac{\mu^{1-A}}{1-A} + D_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U'(\mu) = D_2 e^{-B\mu^{1-A}} \Rightarrow U(\mu) = \int D_2 e^{-B\mu^{1-A}} d\mu + D_3$$

El elemento D_3 es un mero cambio de origen, irrelevante a la hora de tomar decisiones. La integral no admite expresión explícita en general. Analizando $U'(\mu)$ podemos observar que cuando A = 0 coincide con una densidad exponencial y con A = –1 lo haría con una densidad gaussiana (de media nula), por tanto $U(\mu)$ tendría forma exponencial y de función de distribución normal, respectivamente.

Esta modelización de la valoración útil por medio de una aversión al riesgo de tipo potencial, permite modelar diferentes niveles de aversión al riesgo mediante el parámetro *k* y diferentes variaciones de la aversión al riesgo según el tamaño del capital involucrado, según el parámetro A. En concreto, A > 0 implica aversión decreciente según aumenta μ, y A < 0 significa aversión creciente según μ (A = 0 señala aversión constante). De los casos 1º y 2º anteriores se deduce que para algunos valores de A la utilidad estaría acotada, y para otros valores la utilidad no estaría acotada. La conveniencia de esta modelización reside en su sencillez analítica.

2. Inversión estocástica contra inversión nula.-

Estudiemos ahora la valoración útil de una inversión de h unidades monetarias en una inversión I cuyo resultado por inversión unitaria viene dado por la variable aleatoria X. Este caso, el más simple de los que abordaremos, nos servirá como marco de referencia para los posteriores supuestos.

$$V(h) = \mu h + \sigma^2 h^2 g(\mu h)$$

Ya que el resultado de la inversión de h unidades será Y = h X cuya media es μ h y cuya varianza es σ^2 h^2.

El extremo relativo de dicha función se puede hallar por derivación (suponiendo que la función g es, al menos, derivable):

$$V'(h) = \mu + 2h\sigma^2 g(\mu h) + \sigma^2 h^2 g'(\mu h)\,\mu = 0$$

Dependiendo de la forma analítica de g esta ecuación se resolvería o de forma exacta o por medio de un procedimiento numérico iterativo (por ejemplo empleando el habitual método de Newton).

El valor anterior sería el extremo relativo entre 0 e Infinito. En la práctica el volumen de inversión h está comprendido en el intervalo [0, C] donde C es el máximo volumen monetario disponible para inversión por parte del decidor. Por tanto, dos posibles soluciones añadidas serian h = 0 y h = C.

V(0) = 0

V(C) = μ C + σ^2 C^2 g(μ C)

Apliquemos los casos particulares:

<u>Caso Exponencial:</u> $g(x) = -k$ $\Rightarrow$ el extremo relativo viene dado por:

$$V'(h_0) = 0 \rightarrow \frac{d}{dh} (\mu h_0 - k\sigma^2 h_0{}^2) =$$
$$= \mu - 2k\sigma^2 h_0 = 0 \rightarrow h_0 = \frac{\mu}{2k\sigma^2}$$

h_0 será < 0 si μ < 0 y en este caso se da también que V(h) < 0 para cualquier h > 0, en consecuencia si el valor esperado de la inversión I es negativo la estrategia óptima es no invertir.

Si $h_0 \geq$ C entonces la inversión óptima sería C porque el óptimo de valoración se alcanzaría por encima de C y como V(h) sería una parábola de curvatura negativa.

La inversión sería parcial sólo si 0 < h_0 < C . Es decir, C > μ / (2 k σ^2) ⇒ el valor esperado unitario de la inversión I fuese < C 2 k σ^2 (y mayor que 0).

Caso aversión potencial: g(μ) = –k·μ^{-A} . El extremo relativo h* se obtendría

$$V(h) = h\mu - h^{2-A}\sigma^2 k\mu^{-A} \Rightarrow V'(h^*) = \mu - (2-A)h^{*1-A}\sigma^2 k\mu^{-A} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^* = \frac{\mu^{\frac{1+A}{1-A}}}{\left[(2-A)k\sigma^2\right]^{\frac{1}{1-A}}}$$

Esta expresión nos permite reflexionar sobre los valores razonables para A. Si A = –1, h* no dependería de μ (¡incluso podría ser negativo!) sino exclusivamente del riesgo y de la aversión, lo cual no parece una postura extrema de caución ante el riesgo. Por otro lado, si A = 1, V(h) es una función lineal de pendiente μ – σ^2kμ^{-1} . Si dicha pendiente es positiva (ocurrirá si el resultado esperado es suficientemente grande respecto de la aversión y el riesgo) el óptimo será invertir tanto capital como sea posible, es decir C, sea cual sea el valor de C. Esto viene a representar una postura extrema dispuesta a arriesgar grandes capitales si el resultado esperado es suficientemente grande. Podemos considerar estos dos valores como extremos razonables para una utilización práctica de este modelo de valoración.

El óptimo $\hat{h}$ se hallaría mediante una discusión sobre h = 0, h = C y h* similar a la expuesta en el caso anterior, explorando numéricamente los valores de V(h) en esos puntos candidatos.

3. Inversión estocástica contra inversión sin riesgo.-

En el caso anterior hemos considerado como alternativa a la inversión I la inversión nula. Esto no debe ser confundido con la "estrategia del calcetín", o sea, dejar inactivo el volumen monetario disponible C, sino con la revalorización según el índice de inflación del capital C (ya que estamos valorando la cantidades monetarias en unidades constantes).

En el caso presente, sin embargo, consideramos la existencia de una inversión sin riesgo que ofrece un resultado α para una inversión unitaria. Damos por hecho que tal valor α es superior a 0, puesto que en caso contrario dicha inversión sin riesgo tendría peor rendimiento que la mera inactividad del capital C.

El estudio de este caso es similar al anterior, excepto que ahora toda parte de C no invertida en I generará un beneficio a la razón dada por α. Sea h ε [0 , C] el volumen de inversión empleado en I, entonces el resultado será Y = h·X + α·(C – h), en donde la única variable aleatoria es X. La media y la varianza de X serán:

$$E[Y] = h\,\mu + \alpha\,(C - h)$$
$$S^2[Y] = h^2\sigma^2$$

Y por consiguiente:

$$V(h) = h\,\mu + \alpha\,(C - h) + h^2\,\sigma^2\;g(h\,\mu + \alpha\,(C - h))$$

Suponiendo de nuevo las condiciones de regularidad adecuadas, podríamos obtener el extremo relativo h0 mediante la ecuación:

$$V'(h_0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu - \alpha + 2\,h_0\,\sigma^2\;g(h_0\;\mu + \alpha\,(C - h_0) + h_0^2\,\sigma^2\;g'(h_0\;\mu + \alpha\,(C - h_0))\,(\mu - \alpha) = 0$$

Estudiemos el caso exponencial (aversión constante) y, evitaremos el caso general de aversión potencial a fin de no alargar la escritura del documento presente.

Caso particular exponencial:

Si $g(x) = -k$, entonces:

$$V(h) = h\;\mu + \alpha\;(C - h) - k\;h^2\;\sigma^2 = h\;(\mu - \alpha) + \alpha\;C - k\;h^2\;\sigma^2 \rightarrow$$
$$V'(h_0) = \mu - \alpha - 2\;h_0\;k\;\sigma^2 = 0 \rightarrow h_0 = \frac{\mu - \alpha}{2\;k\;\sigma^2}$$

La solución sería similar a la anterior, excepto que consideraríamos el diferencial entre la rentabilidad esperada de I y la rentabilidad sin riesgo, en lugar de simplemente la rentabilidad sin riesgo (el caso anterior es un caso particular de este con $\alpha = 0$).

La discusión sobre el volumen óptimo es similar al caso anterior: V(h) es una función cuadrática con curvatura negativa, por tanto si h_0 ε (0 , C), h_0 sería el óptimo. Si $h_0 \leq 0$ entonces el óptimo sería h = 0 (no se invierte en I), y si $h_0 \geq C$ entonces el óptimo es C (toda la inversión va a I).

4. Varias inversiones competidoras.-

Supongamos que hay varias inversiones disponibles I_1, I_2,... I_n, que producen unos resultados por unidad de inversión X_1, X_2, ...,X_n, respectivamente. Sean μ_1, μ_2,... ,μ_n sus esperanzas y σ_{ij} la covarianza cada Xi y Xj, en donde entenderemos por σ_{ii} la varianza de Xi.

A fin de simplificar el estudio de este caso crearemos unas "pseudo-inversiones" cuyos resultados serán Y_1, Y_2,... , Y_n mediante un cambio lineal sobre las {Xi} de tal forma que sean incorreladas. Esto sólo es posible si el vector X es una distribución n-dimensional no degenerada, es decir la matriz de covarianzas Σx es de rango máximo. Si no lo fuese indicaría que una o varias de las pseudo-inversiones podrían expresarse como combinación lineal de las demás, por tanto podrían eliminarse de la colección de seudo-inversiones (puesto que son combinaciones lineales de las inversiones originales). Aplicado a una matriz, el apóstrofe indica transposición.

$$Y = BX \Rightarrow \Sigma_Y = B'\Sigma_X B = I_{n\times n} \Rightarrow B'^{-1} B^{-1} = \Sigma_X \Rightarrow (BB')^{-1} = \Sigma_X \Rightarrow BB' = \Sigma_X^{-1}$$

<u>Caso exponencial:</u>

Sea R el resultado de dicha inversión, R = $\Sigma h_i X_i$. La valoración útil, en el caso exponencial, de invertir cantidades h_1, h_2,..., h_n en las respectivas seudo-inversiones es la forma cuadrática:

$$V(h_1,\cdots,h_n) = E[R] - k\ \sigma^2\ [R] = \sum h_i\ \mu_i - k \sum\sum h_i\ h_j\ \sigma_{ij}$$

El extremo relativo de dicha forma viene dado por:

$$\frac{d}{dh_i}(V) = \mu_i - 2\,k\sum \sigma_{ij}\ h_j = 0,\ \ \forall i$$

Es decir:

$$\sum y\ h = \frac{1}{2k}\ \mu \rightarrow h = \frac{1}{2k}\sum y^{-1}\ \mu$$

Como hemos supuesto que las variables $\{Y_i\}$ son incorreladas entonces la matriz Σy es una matriz diagonal diag(σ_{11},...,σ_{nn}), y por tanto las soluciones son:

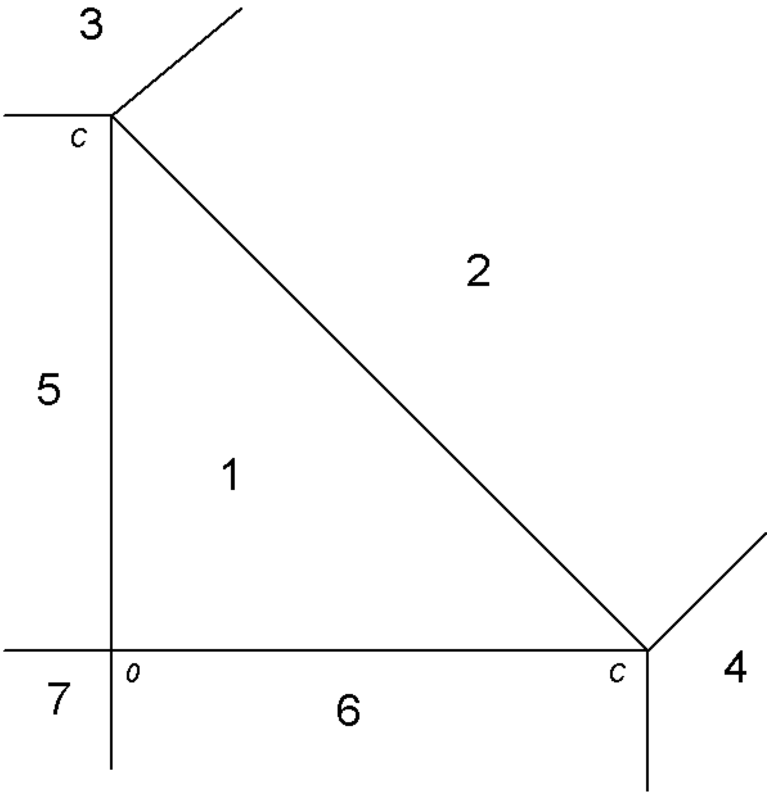
$$h_i^* = \frac{\mu_i}{2k\sigma_{ii}}$$

Estudiemos ahora cual sería el óptimo $\hat{h}$ en función de la situación de h* respecto a la región factible

$$h_i \geq 0,\ \text{para todo } i$$

$$\Sigma h_i \leq 0$$

Para explorar las diferentes posibilidades de esta optimización cuadrática con restricciones, plantearemos el caso bidimensional. Para simplificar, supondremos, sin pérdida de generalidad, que las seudo-inversiones están reescaladas de tal forma que sus varianzas son unitarias (y, por tanto, las esperanzas de $\{Y_i\}$ tendrían la interpretación de esperanza por "riesgo unitario"). De esta forma, V sería una forma cuadrática cuyas curvas de nivel son circulares. Por tanto, si h* está fuera de la región factible, el óptimo $\hat{h}$ será el punto de la región factible más cercano a h*.



Hay 7 regiones:

(1) (Región factible): $\hat{h}$ = h*

(2) $\hat{h} = \left(\frac{C}{2} + \frac{h_1^* - h_2^*}{2} , \frac{C}{2} - \frac{h_1^* - h_2^*}{2} \right)$

(3) $\hat{h}$ = (0 , C)

(4) $\hat{h}$ = (C , 0)

(5) $\hat{h}$ = (0 , h_2^*)

(6) $\hat{h}$ = (h_1^* , 0)

(7) $\hat{h}$ = (0 , 0)

Nótese que en los casos (2), (3) y (4) se invierte el total del capital disponible. En el caso (7) no se realiza ninguna inversión. Este último se produce si y sólo si $h_1^* \leq 0$ y $h_2^* \leq 0$, y ello ocurre si y sólo si $\mu_1 \leq 0$ y $\mu_2 \leq 0$, es decir las pseudo-inversiones tienen resultados esperados negativos.

La generalización a n dimensiones no es difícil pero sí engorroso en la enumeración de la casuística de localización del óptimo el la frontera de la región factible.

6. Inversión única con esperanza unitaria decreciente.-

A veces la esperanza unitaria no permanece constante cuando el volumen de inversión aumenta. Esto puede ocurrir por varios motivos, por ejemplo, por saturación de mercado respecto a un producto, por incremento aumentado de costes a partir de cierta escala de producción, por efecto de la mecánica de compra-venta en una operación en un mercado financiero, etc.

Para modelizar tales situaciones, vamos a suponer que la esperanza unitaria es una función $\mu(h)$ decreciente. Nótese que la esperanza unitaria es el cociente entre la esperanza del resultado y el volumen invertido

$$\mu(h) = E[Y] / h \Rightarrow E[Y] = \mu(h)\cdot h$$

Para modelizar la varianza, supondremos dos posibilidades:

(a) La varianza unitaria es constante e igual a σ^2.

(b) El coeficiente de variación unitario es constante (y por tanto la desviación típica unitaria varía proporcionalmente a la media unitaria)

Posibilidad (a):

La valoración sería en este caso:

$$V(h) = E[Y] - k\sigma^2[Y] = \mu(h)\cdot h - k\cdot\sigma^2\cdot h^2$$

El extremo sería hallado mediante:

$$V'(h) = \mu'(h)\cdot h + \mu(h) - 2k\cdot\sigma^2\cdot h = 0 \rightarrow h = (\mu'(h)\cdot h + \mu(h)) / (2k\sigma^2)$$

Esa ecuación podría solucionarse (dependiendo de la forma de $\mu(h)$) de forma iterativa. Aprovechando la circunstancia de que, en circunstancias normales, $\mu(h)$ disminuiría lentamente y llamando μ a $\mu(0)$, una iteración sencilla y efectiva sería:

$$h_0 = \mu / (2k\sigma^2),\ h_1 = (\mu'(h_0)\cdot h_0 + \mu(h_0)) / (2k\sigma^2),$$

$$\ldots,\ h_i = (\mu'(h_{i-1})\cdot h_{i-1} + \mu(h_{i-1})) / (2k\sigma^2),\ \ldots$$

El resultado del proceso sería el extremo relativo h*. Tal valor habría que contrastarlo con h = 0 y h = C, extremos de la región factible, para determinar la situación del óptimo.

Veamos un ejemplo, con una modelización particular de la esperanza unitaria $\mu(h)$. Sea $\mu(h) = \mu - a\cdot h^b$, con $b > 1$ y $a > 0$. Si “a” es suficientemente pequeño, $\mu(h)$ será muy similar a μ para h pequeño y disminuirá cada vez más rápidamente. Entonces:

$$h_0 = \mu / (2k\sigma^2),\ h_1 = (-b\cdot a\cdot h_0^{b-1}\cdot h_0 + \mu - a\cdot h_0^b) / (2k\sigma^2) =$$

$$= (\mu - (b + 1)\cdot h_0^b) / (2k\sigma^2),\ h2 = (\mu - (b + 1)\cdot h_1^b) / (2k\sigma^2),\ldots$$

Posibilidad (b):

$$V(h) = E[Y] - k\sigma^2[Y] = \mu(h)\cdot h - k\cdot h^2\cdot(\mu(h))2\cdot\sigma^2/\mu^2 =$$

$$= \mu(h)\cdot h\cdot(1 - \mu(h)\cdot h\cdot k\cdot Cv^2) = \mu(h)\cdot h\cdot(1/(kCv^2) - \mu(h)\cdot h)\cdot kCv^2$$

Sea $z = \mu(h)\cdot h$, si $\mu(h) \cong \mu$ cuando $h \cong 0$ entonces $\mu(h)\cdot h$ es creciente cuando h es pequeño. Para asegurar que $\mu(h)\cdot h$ es monótono creciente debe verificarse:

$$d/dh(\mu(h)\cdot h) = \mu'(h)\cdot h + \mu(h) \geq 0$$

El caso límite es:

$$\mu'(h)\cdot h + \mu(h) = 0 \rightarrow \mu'(h)\cdot h = -\mu(h) \rightarrow \mu'(h) / \mu(h) = -1/h \rightarrow$$

$$\rightarrow d/dh(\ln(\mu(h)) = -1/h \rightarrow \ln(\mu(h)) = -\ln(h) + D_1 \rightarrow \mu(h) = D_2 / h$$

Por consiguiente, si $\mu(h)$ decrece menos rápidamente que hiperbólicamente, entonces el cambio de variable $z = \mu(h)\cdot h$ es monótono creciente (al menos esto debería verificarse en la región factible). Supongamos que $\mu(h)$ es tal que verifica esta propiedad. Entonces:

$$V(h) = \tilde{V}(z) = z\left(\frac{1}{kC_V^2} - z\right)kC_V^2$$

es una función cuadrática en z, con curvatura negativa. Sus raices son z = 0 y z = $1/(kCv^2)$ y, al ser una función de segundo grado simétrica respecto a su extremo relativo, deducimos que el máximo relativo es

$$z^* = 1/(2kCv^2) = \mu^2 / (2k\sigma^2)$$

La región factible para z es (0 , μ(C)·C), por tanto, si $z^* \leq 0$ el óptimo $\hat{h}$ es 0, si $h^* \geq \mu(C)\cdot C$ el óptimo $\hat{h}$ es μ(C)·C. La solución óptima para h sería dada por:

$$\mu(\hat{h})\cdot \hat{h} = \hat{z} \Rightarrow \hat{h} = \hat{z} / \mu(\hat{h})$$

Como normalmente μ(h) será próximo a μ, al menos para valores pequeños de h, un proceso iterativo sencillo sería:

$$h_0 = \hat{z} / \mu,\ h_1 = \hat{z} / \mu(h_0),\ h_2 = \hat{z} / \mu(h_1),...$$

Es decir:

$$h_0 = \mu / (2k\sigma^2),\ h_1 = \mu / (2k\sigma^2) \cdot (\mu / \mu(h_0)) = h_0\cdot\mu / \mu(h_0),\ h_2 = h_0\cdot\mu / \mu(h_1),...$$

Bibliografía

1. Nieto de Alba, U., Vegas Asensio, J. (1993): *Matemática Actuarial*. Ed. Mapfre.

2. Keeney, R. L., H. Raiffa (1976): *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, New York.