

Universidad de Sevilla
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

ANALISIS Y CONTROL DE ALGUNAS EDP NO LINEALES CON ORIGEN EN MECANICA

Vº. Bº. DE LOS DIRECTORES
DEL TRABAJO



Fdo. Enrique Fernández Cara
Catedrático de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla



Fdo. Manuel González Burgos
Profesor Titular
de la Universidad de Sevilla

Memoria que presenta
Anna Doubova
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas

Sevilla, Junio 2000



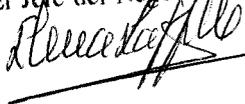
Fdo. Anna Doubova

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al
folio 40 número 111 del libro
correspondiente.

Sevilla, **28 JUN. 2000**

El Jefe del Negociado



A mis padres
Tatiana y Anatoli

Me gustaría agradecer

Primero, a Enrique Fernández Cara y a Manuel González Burgos, por la dirección de este trabajo, por su constante apoyo y colaboración en todo momento e, indudablemente, por el tiempo que me han dedicado...

A Rosa, por su generosidad y sinceridad, y por su invalorable ayuda que me ha proporcionado desde mis primeros días en España.

A Pepe Real y Pepe Martín, por su paciencia y sus indicaciones.

A Francisco Guillén, quién me ha escuchado y atendido cuantas veces lo he necesitado.

A todos mis compañeros del Departamento, por haber creado un ambiente muy agradable de trabajo, por su confianza y acogida.

Indice

1	INTRODUCCION	3
1.1	Objetivos de la Memoria	3
1.2	Los sistemas considerados	5
1.3	Los resultados obtenidos	7
1.4	Comentarios adicionales y cuestiones abiertas	14
I	La EDP del calor, el sistema de Stokes y variantes	21
2	LA EDP DEL CALOR SEMILINEAL CON TÉRMINOS NO LINEALES DISCONTINUOS	23
2.1	El problema considerado	23
2.2	Un resultado de controlabilidad exacta a cero	25
2.3	Controlabilidad aproximada	30
2.4	Algunos casos particulares	33
3	CONTROLABILIDAD EXACTA Y APROXIMADA DE EDP PARABOLICAS CON TERMINOS NO LINEALES DE LA FORMA $f(y, \nabla y)$	40
3.1	Introducción y resultados principales	40
3.2	Algunos resultados de carácter técnico	45
3.3	Demostración de la controlabilidad exacta a cero	52
3.3.1	Controlabilidad exacta a cero para problemas lineales	52
3.3.2	Demostración del teorema 3.1	54
3.4	Demostración de la controlabilidad aproximada	60
3.5	Idea de la demostración del resultado de controlabilidad con control frontera	62
4	LA EDP DEL CALOR CON CONDICIONES DE TIPO FOURIER NO LINEALES	65
4.1	El problema considerado. Existencia y unicidad de solución	65
4.1.1	Un problema lineal	66
4.1.2	Demostración del teorema 4.1	72
4.2	Controlabilidad aproximada	77
4.2.1	Resultados previos. Control de sistemas lineales	77

4.2.2	Demostración del teorema 4.5	82
5	EL SISTEMA STOKES CON CONDICIONES DE TIPO FOURIER NO LINEALES	85
5.1	El problema considerado. Existencia y unicidad de solución	85
5.1.1	Resultados previos para problemas lineales análogos	86
5.1.2	Demostración del teorema 5.1	91
5.2	Controlabilidad aproximada. Control con una componente nula	92
II	Sistemas lineales de tipo Maxwell y de tipo Jeffreys	97
6	MODELO DE MAXWELL: EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARI- DAD	99
6.1	Modelo de Maxwell. Existencia y unicidad de solución	99
6.1.1	Un resultado de regularidad	106
7	CONTROLABILIDAD DE FLUIDOS LINEALES DE MAXWELL	110
7.1	Controlabilidad aproximada	110
7.2	Controlabilidad exacta a cero (I)	116
7.3	Controlabilidad exacta a cero (II)	122
7.3.1	Sistemas de tipo "ondas-Stokes". Resultados previos	122
7.3.2	Una desigualdad inversa	130
7.3.3	Controlabilidad exacta a cero. Control frontera	133
7.3.4	Controlabilidad exacta a un estado dado distinto de cero	144
8	CONTROLABILIDAD DE FLUIDOS LINEALES DE JEFFREYS	146
8.1	Existencia y unicidad de solución	146
8.2	Controlabilidad aproximada. Continuación única	153

Capítulo 1

INTRODUCCION

1.1 Objetivos de la Memoria

En esta Memoria, analizaremos diversos problemas de controlabilidad relacionados con ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de evolución de tipo parabólico o hiperbólico, motivadas por problemas con origen en Mecánica. Las EDP evolucionan en un intervalo temporal dado $[0, T]$ y serán completadas, de manera natural, con condiciones de contorno y condiciones iniciales.

De forma general, la controlabilidad de una EDP o de un sistema de EDP se consigue cuando se sabe conducir la o las EDP de un estado inicial dado y_0 a un estado final deseado y_1 usando un *control* v que actúa sobre el sistema desde el “exterior”.

Si el control se ejerce a través de las condiciones de contorno, se habla de **control frontera**. Por el contrario, si actuamos a través del segundo miembro de la ecuación, hablaremos de **control distribuido**.

Fijado v en un conjunto \mathcal{U} de controles admisibles, cuando tenga sentido, llamaremos estado asociado al control v a la correspondiente solución y_v del sistema. Diremos que nuestro sistema es **exactamente controlable** en Y (un espacio de Banach adecuado en el que evoluciona la ecuación) en el tiempo T si, cualesquiera que sean y_0 e y_1 en Y , podemos encontrar $v \in \mathcal{U}$ tal que el estado asociado y_v que inicialmente toma el valor y_0 coincide con y_1 en el instante de tiempo $t = T$.

Podemos debilitar la condición $y_v(T) = y_1$, obteniendo otras nociones de controlabilidad. Concretamente, diremos que el sistema es **aproximadamente controlable** en Y en el instante T si, dados y_0 , y_1 y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, existe un control v tal que el estado y_v asociado a v y al dato inicial y_0 verifica

$$\|y_v(T) - y_1\|_Y \leq \varepsilon.$$

Aquí, hemos denotado $\|\cdot\|_Y$ la norma en el espacio de Banach Y en el que se han tomado y_0 e y_1 .

Finalmente, diremos que hay **controlabilidad exacta a cero** o **controlabilidad nula** en el tiempo T si, para cada y_0 , existe un control v tal que el estado y_v asociado a v

y a y_0 verifica $y_v(T) = 0$. Es un caso especialmente interesante de controlabilidad exacta ya que, en la práctica, implica llevar el sistema a un estado de equilibrio en $t = T$.

El objetivo principal de esta Memoria es aportar nuevos resultados de controlabilidad y (a ser posible) presentar métodos de determinación de buenos controles.

Durante los últimos años, la controlabilidad de EDP ha sido estudiada intensamente. En 1978, D.L. Russell [31] realizó un trabajo en el que recopilaba los resultados más significativos que habían sido obtenidos hasta ese momento, presentando asimismo diversas técnicas para abordar estos problemas.

Más tarde, J.L. Lions, introdujo nuevos métodos para tratar problemas de controlabilidad, entre ellos el método conocido como H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) (cf. por ejemplo [24] y [25]; distintas versiones de esta técnica están presentes en el Capítulo 7).

Han sido muchos los autores que han contribuido al análisis de la controlabilidad de EDP desde entonces. Sería imposible mencionar aquí todos los resultados interesantes probados en este contexto. Destacaremos sólo algunos, aquéllos a los que nos hemos referido en este trabajo con mayor frecuencia.

En 1991, E. Zuazua en [34] introduce un argumento que permite deducir propiedades de controlabilidad para EDP semilineales. Este argumento combina técnicas de punto fijo con resultados de controlabilidad para sistemas lineales análogos y es presentado en el contexto de la ecuación de ondas semilineal, con controles ejercidos a través de una parte de la frontera (véase también [3] y [35]).

Más tarde, C. Fabre, J.P. Puel y E. Zuazua [10] prueban otros resultados de controlabilidad de manera similar para la ecuación del calor semilineal. Con posterioridad, en [9], C. Fabre, prueba resultados de controlabilidad aproximada para sistemas lineales y casi-lineales de tipo Stokes con condiciones de tipo Dirichlet, con controles que pueden tener alguna componente nula.

Por otra parte, en 1991, O. Yu. Imanuvilov [17] comenzó a utilizar desigualdades globales de tipo Carleman para abordar problemas de control exacto a cero. Desarrolló nuevas técnicas que posteriormente volvió a aplicar en [18] y [19], en [15] junto con A. Fursikov y en [20] con M. Yamamoto.

Recientemente, E. Fernández Cara en [11] y E. Fernández Cara y E. Zuazua en [14] han desarrollado técnicas que permiten obtener estimaciones de observabilidad explícitas. Entre otras cosas, se ha probado así la controlabilidad de la ecuación del calor semilineal cuando las no linealidades tienen crecimiento casi óptimo. Mencionemos también [13], donde E. Fernández Cara y E. Zuazua analizan el coste de la controlabilidad aproximada de la ecuación del calor lineal.

1.2 Los sistemas considerados

En esta Memoria, trataremos diversos problemas de controlabilidad para distintos sistemas de EDP. A continuación, describiremos cada uno de ellos. Usaremos principalmente la siguiente

Notación:

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$: abierto conexo acotado de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ó 3), $\partial\Omega$ regular,

$Q = \Omega \times (0, T)$ (T es el instante final),

$\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$,

\mathcal{O} : un “pequeño” abierto de Ω ($1_{\mathcal{O}}$ es su función característica),

γ : un “pequeño” abierto relativo de $\partial\Omega$ (1_{γ} es su función característica),

v : el control,

$\Phi = L^2(\Omega; \mathcal{L}_S(\mathbb{R}^N))$, siendo $\mathcal{L}_S(\mathbb{R}^N)$ el espacio de matrices cuadradas simétricas $N \times N$,

$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N : \nabla \cdot \varphi = 0\}$,

V (resp. H): la adherencia de \mathcal{V} en $H_0^1(\Omega)^N$ (resp. $L^2(\Omega)^N$),

Se tiene:

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot v = 0 \text{ en } \Omega\},$$

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot v = 0 \text{ en } \Omega, \ v \cdot \vec{n} \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

$W = \{v \in H^1(\Omega)^N : \nabla \cdot v = 0, \ v \cdot \vec{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$,

$\vec{n} = \vec{n}(x)$: el vector normal unitario exterior a Ω ,

$\Gamma(x^0) = \{x \in \partial\Omega : \vec{m}(x) \cdot \vec{n}(x) > 0\}$, donde $\vec{m}(x) \equiv x - x^0$ ($x^0 \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$),

$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0, T)$,

$T(x^0) = 2R(x^0)$, $R(x^0) = \max_{x \in \Omega} |\vec{m}(x)|$.

Para mayor claridad, en cada Capítulo de la Memoria, daremos más detalles sobre la notación necesaria.

Serán considerados los sistemas siguientes:

• La EDP del calor con términos no lineales discontinuos

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y) \ni v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, $y_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $f(s) = f_0(s) + F(s)$, donde $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una

función localmente Lipschitziana. Por simplicidad, supondremos que

$$F(s) = \sum_{r=1}^M a_r H(s - s_r), \quad a_r \in \mathbb{R}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_M, \quad (1.2)$$

siendo H la función de Heaviside. En (1.1), aparece una ecuación semilineal con discontinuidades (de hecho, una inclusión diferencial), relacionada con una combinación lineal de funciones multívocas.

• Las EDP parabólicas con términos no lineales de la forma $f(y, \nabla y)$

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

y

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = 0 & \text{en } Q, \\ y = v 1_{\gamma} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

donde v e y_0 son dadas en espacios adecuados. En (1.3) y (1.4), $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitziana.

• La EDP del calor con condiciones de tipo Fourier no lineales

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y + f(y) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$ son dadas y $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función globalmente Lipschitziana.

• El sistema de Stokes con condiciones de tipo Fourier no lineales

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi = v 1_{\mathcal{O}}, \quad \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ y \cdot \vec{n} = 0, \quad (\sigma(y, \pi) \cdot \vec{n})_{tg} + (f(y))_{tg} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ e $y_0 \in H$ son dados y $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es una función globalmente Lipschitziana. Aquí, hemos usado la notación siguiente:

$$(a)_{tg} = a - (a \cdot \vec{n}) \vec{n} = \text{componente tangencial de } a$$

$$\sigma(y, \pi) = -\pi Id + (\nabla y + {}^t \nabla y) = \text{tensor de esfuerzos.}$$

• **Modelos lineales de Maxwell para fluidos viscoelásticos**

Los sistemas que describen, en primera aproximación, el comportamiento de un fluido viscoelástico de tipo Maxwell (cuando la velocidad es “pequeña”) son los siguientes:

$$\begin{cases} \partial_t y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau + v1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

y

$$\begin{cases} \partial_t y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ y = v1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

(por ejemplo, cf. [21]). Aquí, v , y_0 y τ_0 son dadas en espacios adecuados,

$$D(y) = \frac{1}{2}(\nabla y + {}^t\nabla y)$$

es el tensor de deformaciones y a y b son constantes positivas. El campo de velocidades viene dado por $y = y(x, t)$ y la presión es $\pi = \pi(x, t)$. Por otra parte, $\tau = \tau(x, t)$ es el tensor de esfuerzos elásticos.

Con un cambio de variables adecuado, estos sistemas se re-escriben como nuevos sistemas de EDP de tipo hiperbólico.

• **El modelo lineal de Jeffreys**

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y + \nabla p = \nabla \cdot \tau + v1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

donde v , y_0 y τ_0 son dadas y ν es una constante positiva. El sistema (1.9) describe, en primera aproximación, el comportamiento de un fluido viscoelástico de tipo Jeffreys (cf. [21]).

1.3 Los resultados obtenidos

Esta Memoria consta de dos partes. La Parte I está formada por cuatro Capítulos y en ella se consideran distintos sistemas de tipo parabólico (esencialmente, variantes de la EDP del calor y de las EDP de Stokes). En la Parte II hay otros tres Capítulos, donde se

analizan sistemas lineales que permiten modelar fluidos con memoria. En algunos casos, se trata de sistemas de carácter hiperbólico. Las referencias bibliográficas se encuentran al final de cada Capítulo.

A continuación, haremos una breve descripción de cada uno de los Capítulos, presentando los resultados originales y también las principales ideas usadas en las demostraciones. Para mayor claridad, denotaremos $y_v, \pi_v \dots$ la solución del sistema asociada al control v cuando haga falta.

En el Capítulo 2, analizamos la controlabilidad exacta a cero y la controlabilidad aproximada para el sistema parabólico semilineal con discontinuidades (1.1). Se permite al término no lineal unívoco $f_0(s)$ crecer más rápidamente que $|s|$, pero menos que todas las potencias $|s|^r$ con $r > 1$, cuando $|s| \rightarrow \infty$. Se sabe que (incluso cuando no hay términos discontinuos), si $f_0(s)$ tiene comportamiento superlineal en el infinito, en general no se puede controlar el sistema.

Se prueba el siguiente resultado de controlabilidad exacta a cero:

Teorema 2.1 – *Supongamos que $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana y verifica $f_0(0) = 0$ y*

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f_0(s)}{s \cdot \log(1 + |s|)} = 0. \quad (1.10)$$

Supongamos también que $f = f_0 + F$, donde F está dada por (1.2), con $s_1 > 0$. Entonces (1.1) es exactamente controlable a cero en todo tiempo $T > 0$.

La demostración se basa en un procedimiento adecuado de regularización, el control de sistemas lineales por el método de A. Fursikov y O. Yu. Imanuvilov (cf. [15]), la deducción de estimaciones como en [11] y la aplicación de un argumento de punto fijo.

El resultado principal de controlabilidad aproximada es el siguiente:

Teorema 2.2 – *Supongamos que $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana y verifica (1.10). Entonces (1.1) es aproximadamente controlable en $L^2(\Omega)$ en todo tiempo $T > 0$.*

Este teorema se demuestra adaptando el razonamiento de [14] donde, por primera vez, se deduce la controlabilidad aproximada a partir de la controlabilidad exacta a trayectorias acotadas para una EDP semilineal (a su vez, la controlabilidad exacta a trayectorias es consecuencia de la controlabilidad nula).

Estos resultados son nuevos y constituyen una extensión de los de [11] y [14] al caso en que se permiten términos no lineales discontinuos.

En el Capítulo 3, se consideran sistemas parabólicos de la forma (1.3) y (1.4). Se observa que si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana es posible escribir

$$f(s, p) = f(0, 0) + g(s, p)s + G(s, p) \cdot p \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

para ciertas funciones g y G en L_{loc}^∞ . Las funciones g y G están dadas respectivamente por

$$g(s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(\lambda s, \lambda p) d\lambda, \quad G_i(s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(\lambda s, \lambda p) d\lambda \quad \text{para } 1 \leq i \leq N.$$

El primer resultado de controlabilidad nula, relativo al control distribuido, es el siguiente:

Teorema 3.1 – *Supongamos que f es localmente Lipschitziana, $f(0, 0) = 0$ y*

$$\lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|g(s, p)|}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} = 0, \quad \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|G(s, p)|}{\log^{1/2}(1 + |s| + |p|)} = 0. \quad (1.11)$$

Entonces (1.3) es exactamente controlable a cero en todo tiempo $T > 0$.

Para la demostración, se utilizan básicamente desigualdades globales de tipo Carleman para la EDP del calor con segundo miembro en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ (parcialmente implicadas por los resultados de [20]), resultados de regularidad parabólica [22] y técnicas de punto fijo. Los puntos clave consisten en obtener constantes explícitas y en deducir una desigualdad de observabilidad no “standard”, basándose en los argumentos de [13] y [14].

El segundo resultado principal trata sobre controlabilidad aproximada y se prueba a partir del resultado anterior. Hay que volver a razonar como en [13], pero en un contexto más complicado. Se tiene:

Teorema 3.2 – *Sea $T > 0$. Supongamos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana y verifica*

$$\begin{aligned} \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p) d\lambda \right| &= 0, \\ \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^{1/2}(1 + |s| + |p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p) d\lambda \right| &= 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

uniformemente en $(s_0, p_0) \in K$, para cada compacto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. También, supongamos que (1.3) posee al menos una solución global $y^ \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$, correspondiente al dato inicial $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y al control $v^* \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$. Entonces (1.3) es aproximadamente controlable en $L^2(\Omega)$ en todo tiempo $T > 0$.*

Para los problemas de control frontera (1.4), obtenemos resultados análogos que, a su vez, pueden deducirse de los teoremas 3.1 y 3.2.

Los teoremas 3.1 y 3.2 son nuevos. Generalizan (al menos) los resultados de [14], [20] y [36] donde, o bien $f = f(s)$, o bien g y G son acotadas.

En el Capítulo 4, tratamos la EDP del calor con condiciones de contorno de tipo Fourier no lineales, más precisamente, el sistema (1.5). En primer lugar, presentamos un resultado de existencia y unicidad de solución débil, cuya demostración es “standard”:

Teorema 4.1 – Supongamos que $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, y $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitziana. Entonces existe una única solución y de (1.5) que verifica $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , f , $|y_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|y\|_{L^\infty(L^2)} + \|y\|_{L^2(H^1)} + \|\partial_t y\|_{L^2(H^{-1})} \leq C.$$

Posteriormente, presentamos el resultado de controlabilidad aproximada siguiente:

Teorema 4.5 – Supongamos que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitziana. Entonces (1.5) es aproximadamente controlable en $L^2(\Omega)$ en todo tiempo $T > 0$.

La demostración de este teorema se basa en un resultado de controlabilidad análogo para problemas lineales y un argumento de punto fijo. La estrategia ha sido adaptada de [10]. El punto esencial consiste en determinar “el buen espacio” de funciones definidas sobre Σ para que la aplicación de punto fijo posea propiedades de compacidad adecuadas.

En el Capítulo 5, se demuestran varios resultados para el sistema de Stokes con condiciones de tipo Fourier no lineales (1.6). El primero trata sobre la existencia y unicidad de solución débil y es el siguiente:

Teorema 5.1 – Supongamos que $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$, $y_0 \in H$, $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ y $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es globalmente Lipschitziana. Entonces existe una única solución $\{y, \pi\}$ de (1.6) que verifica $y \in L^2(0, T; W) \cap C^0([0, T]; H)$, $\partial_t y \in L^2(0, T; W')$ y $\pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$. Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , f , $|y_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|y\|_{L^2(W)} + \|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(W')} \leq C.$$

De nuevo, la demostración es “standard”. Aquí, debido a la presencia del término de presión, se hace uso de una versión distribucional del lema De Rham (cf. [32]).

El segundo resultado del Capítulo 5 es relativo a la controlabilidad aproximada. Se trata de un resultado análogo al teorema 4.5 (ya comentado):

Teorema 5.5 – Supongamos que $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es globalmente Lipschitziana. Entonces (1.6) es aproximadamente controlable en H en todo tiempo $T > 0$.

El siguiente resultado trata sobre la controlabilidad aproximada del sistema (1.6) con una componente del control igual a cero:

Teorema 5.7 – Supongamos que $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es globalmente Lipschitziana. Entonces (1.6) es aproximadamente controlable en H en todo tiempo $T > 0$. Además, el control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ puede elegirse de la forma $v = (v_1, v_2, 0)$.

La clave de la demostración consiste en probar una nueva propiedad de continuación única. Tras la misma, se vuelve a repetir el argumento de punto fijo como en el caso en que todas las componentes son no nulas.

La Parte II comienza con el Capítulo 6, donde analizamos la existencia, unicidad y regularidad para el modelo lineal de Maxwell (1.7). Todos los resultados se deducen a partir de resultados relativos a los problemas de tipo hiperbólico que se obtienen tras el cambio de variables

$$z = \int_0^t e^{as} y(s) ds, \quad u = e^{at} v, \quad Z = e^{at} \pi.$$

El primer resultado principal es el siguiente:

Teorema 6.2 – Supongamos $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$, $y_0 \in H$ y $\tau_0 \in \Phi$, con $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$. Entonces (1.7) posee una única solución $\{y, \tau, \pi\}$ que verifica

$$\begin{aligned} y &\in C^0([0, T]; H), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; V'), \\ \tau &\in W^{1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^{N \times N}), \quad \pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , a , b , $|y_0|$, $|\tau_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(V')} + \|\tau\|_{W^{1, \infty}(H^{-1})} \leq C.$$

La demostración es “standard”. Para mayor claridad, se han incluido todos los detalles de la misma.

En segundo lugar, probamos el resultado de regularidad siguiente:

Teorema 6.4 – Supongamos que v , y_0 y τ_0 son como en el teorema 6.2 y, además, verifican $y_0 \in V$, $\partial_t(v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$. Entonces la única solución $\{y, \tau, \pi\}$ del problema (1.7) posee la regularidad siguiente:

$$\begin{aligned} y &\in C^0([0, T]; V), \quad \partial_t y \in C^0([0, T]; H), \\ \tau &\in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)^{N \times N}), \quad \pi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , a , b , $\|y_0\|$, $\|\tau_0\|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ y $\|\partial_t v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|y\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_t y\|_{L^\infty(H)} + \|\tau\|_{W^{1, \infty}(L^2)} \leq C.$$

Para llevar a cabo la demostración, recurrimos a estimaciones adecuadas (más complicadas que las estimaciones de energía habituales) sobre las aproximaciones de Galerkin.

En el Capítulo 7, probamos resultados de controlabilidad exacta y aproximada para el modelo lineal de Maxwell. El primer resultado principal es el que sigue:

Teorema 7.1 – *Existe un tiempo $T_0(\Omega) > 0$ tal que, si $T > T_0(\Omega)$, entonces la variedad lineal*

$$\{\{y_v(T), \tau_v(T)\} : v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N\} \text{ es densa en } H \times \Phi.$$

La demostración de este teorema (y también la del que presentaremos inmediatamente después) se basa en la obtención de una nueva propiedad de continuación única para una ecuación escalar de tipo hiperbólico. Más precisamente, comprobamos que existe un tiempo $T_0(\Omega)$ tal que, si $T > T_0(\Omega)$, entonces esta propiedad es cierta. Esto se consigue aplicando una consecuencia del teorema de Holmgren, cf. [3].

En este Capítulo también se habla de la controlabilidad exacta para (1.7). En primer lugar, se vuelve a considerar control distribuido. Los resultados que presentamos tienen carácter “abstracto”, en el sentido de que no podemos identificar los espacios donde se deben elegir los datos iniciales. El resultado principal de esta parte es el que sigue:

Teorema 7.5 – *Supongamos $T > T_0(\Omega)$ y $\tau_0 = 0$. Entonces existe un espacio de Hilbert F_1 que contiene a \mathcal{V} como subespacio denso tal que, para cada $y_0 \in F_1'$, existe un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ tal que la correspondiente solución de (1.7) verifica*

$$y(T) = 0, \quad \tau(T) = 0.$$

Para probar este teorema se recurre al método H.U.M. (cf. [25]), en combinación con la propiedad de continuación única ya mencionada.

El siguiente resultado proporciona controlabilidad exacta de fluidos lineales de Maxwell permitiendo, al mismo tiempo, identificar espacios de datos iniciales. Para ello, es preciso cambiar (1.7) por un problema de control frontera asociado al sistema (1.8). Queremos resolver un problema no homogéneo con dato no regular sobre una parte de la frontera. Luego la definición (natural) de solución que utilizamos es la de solución por trasposición. Con la notación introducida al principio de la sección 1.2, tenemos:

Teorema 7.13 – *Supongamos $T > \sqrt{b}T(x^0)$. Entonces, para cada $y_0 \in V'$ y cada $\tau_0 \in \Phi$ con $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$, existe un control $v \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $v \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ tal que*

la correspondiente solución de (1.8) verifica

$$y(T) = 0, \quad \tau(T) = 0.$$

El punto clave (y difícil) de la demostración consiste en probar una propiedad de observabilidad “frontera” para un sistema de tipo hiperbólico (una generalización no escalar de la EDP de ondas con término de amortiguamiento y acoplamiento incompresible). Necesitamos una desigualdad inversa adecuada. Consideramos previamente sistemas de tipo “ondas-Stokes” que, en nuestro contexto, aparecen de forma natural. Probamos una desigualdad inversa y, también, una desigualdad directa, cierta cuando los datos iniciales son más regulares. Combinando estos resultados (entre otros) con un argumento de compacidad-unicidad inspirado por las técnicas de [28], obtenemos la desigualdad inversa que hace falta. La presencia del gradiente de presión en el problema considerado hace que este argumento no sea trivial. Se puede entonces probar el teorema, adaptando el método H.U.M.

Los teoremas 7.1, 7.5 y 7.13 (y los otros resultados de controlabilidad demostrados en el Capítulo 7) son, hasta donde sabemos, los primeros resultados de controlabilidad que se han conseguido probar para fluidos viscoelásticos de tipo Maxwell. Constituyen en la práctica generalizaciones al contexto no escalar de resultados de controlabilidad para la EDP de ondas.

El Capítulo 8 contiene dos resultados principales. En el primero, se estudia la existencia y unicidad de solución del sistema (1.9). La demostración se consigue con argumentos similares a los anteriores y recurriendo a una aproximación de Galerkin. Se tiene:

Teorema 8.1 – *Supongamos que $y_0 \in H$, $\tau_0 \in \Phi$ y $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$. Entonces existe una única solución $\{y, \pi, \tau\}$ de (1.9) que verifica*

$$\begin{aligned} y &\in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; V'), \\ \tau &\in C^0([0, T]; \Phi), \quad \pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , ν , a , b y linealmente de $|y_0|$, $|\tau_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|y\|_{L^2(V)} + \|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(V')} + \|\tau\|_{L^\infty(\Phi)} \leq C.$$

Por último, presentamos el siguiente resultado de controlabilidad aproximada:

Teorema 8.2 – *Supongamos que todos los autovalores del operador $-\Delta$ en Ω con condiciones de Dirichlet son distintos. Entonces, para cada $T > 0$, la variedad lineal*

$$\{y_v(T) : v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N\} \quad \text{es densa en } H.$$

Para la demostración, hace falta comprobar que una nueva propiedad de continuación única es cierta. Esto se consigue utilizando la técnica de separación de variables y ciertos elementos de la teoría de variable compleja (entre otras cosas, las propiedades de la transformada de Laplace y el teorema de los residuos). Hasta donde sabemos, éste es el primer resultado de controlabilidad relativo a fluidos de tipo Jeffreys que aparece en la literatura.

Algunos de los resultados que presentamos están recogidos en [6], [7], [8].

1.4 Comentarios adicionales y cuestiones abiertas

Es posible hacer muchas observaciones sobre los resultados y técnicas que preceden. En muchos casos, estas observaciones conducen a cuestiones abiertas.

1. Las condiciones (1.11) no son óptimas, aunque están cerca del óptimo en el sentido siguiente:

Se dice en el Capítulo 3 (y se prueba en [14]) que *no hay* control a cero ni control aproximado cuando $G \equiv 0$ y $g = g(s)$, con

$$|g(s)| \sim \log^p(1 + |s|), \quad \text{cuando } |s| \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

y $p > 2$. Por el contrario, gracias al teorema 3.1, sabemos que hay control a cero y también control aproximado si g verifica (1.13) con $p < 3/2$. Luego es natural preguntarse lo siguiente:

- ¿Qué ocurre cuando $G \equiv 0$ y g cumple (1.13) con $3/2 \leq p \leq 2$?
- ¿Es posible construir un contraejemplo a la controlabilidad con $G \neq 0$ y g verificando lo anterior con $3/2 \leq p \leq 2$?

2. Las hipótesis (1.12) son “ligeramente” más fuertes que (1.11). Obsérvese que, si $f = f(s)$, (1.12) es equivalente a (1.11). Por tanto, la cuestión a responder en este caso es:

- ¿Se tiene control aproximado de (1.3) y (1.4) bajo las hipótesis (1.11)?

3. Tiene sentido analizar propiedades de controlabilidad finito-aproximada para (1.3) (por ejemplo). Se dice que esta propiedad se da en E en el tiempo T (E es un subespacio de $L^2(\Omega)$ de dimensión finita) si, para cada $y_0, y_1 \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que la solución de (1.3) asociada a v e y_0 verifica

$$|y(T) - y_1| \leq \varepsilon, \quad \Pi_E y(T) = \Pi_E y_1$$

(donde $\Pi_E : L^2(\Omega) \mapsto E$ es el operador de proyección ortogonal habitual). Sería interesante saber responder a la pregunta siguiente:

- ¿Bajo qué condiciones sobre f y E se tiene esta propiedad para (1.3)? ¿Y para (1.4)?

Parece razonable esperar que las técnicas de [13] y [14] y las que se usan en el Capítulo 3 permiten dar respuestas a estas cuestiones.

4. No hay resultados análogos a los de los Capítulos 2 y 3 para la EDP de ondas con términos no lineales del mismo tipo. En el caso de la ecuación de ondas semilineal con $f = f(s)$, tan sólo se sabe que hay controlabilidad exacta:

(a) Cuando $N = 1$ y $|f(s)| \sim |s| \log^p(1 + |s|)$ cuando $|s| \rightarrow \infty$ y $p < 2$, cf. [35].

(b) Cuando $N \geq 2$ y $f = f(s)$ globalmente Lipschitzana, cf [23], [3].

En el rango de las funciones f que crecen de forma superlineal en el infinito, las soluciones pueden explotar y esto impide la controlabilidad exacta a causa de la velocidad finita de propagación. Obsérvese por tanto que sólo las no linealidades que *no* impliquen explosión en tiempo finito están permitidas.

5. Se desconocen resultados de control a cero “satisfactorios” para (1.5). De hecho, para el problema lineal análogo

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v 1_Q & \text{en } Q, \\ \partial_n y + a(x, t)y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.14)$$

también es desconocida la controlabilidad nula, a menos que se tenga $a \in L^\infty(\Sigma)$ y $\partial_t a \in L^1(\Sigma)$. Esto se debe a que, para probar el control a cero, hace falta previamente una desigualdad de observabilidad, cuya demostración necesita una desigualdad global de Carleman. Aparentemente, la regularidad precedente (sobre a) es necesaria en la deducción de la desigualdad de Carleman, cf. [15]. Esta dificultad para (1.14) hace complicado el razonamiento habitual de punto fijo para (1.5) y deja abierta esta cuestión.

6. En el teorema 5.7, hemos considerado controles de la forma $v = (v_1, v_2, 0)$. También tiene sentido preguntarse si se puede conseguir o no controlabilidad aproximada con controles 1-dimensionales, es decir, de la forma $v = (v_1, 0, 0)$. Esta cuestión parece complicada. De hecho, ya lo es cuando las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet, cf. [26]. No obstante, al menos en el caso en que Ω es un abierto cilíndrico, es posible dar algunas respuestas parciales. Esto será objetivo de un próximo trabajo.

7. El verdadero modelo de Maxwell es similar a (1.7), con las EDP cambiadas por

$$\begin{cases} \partial_t y + (y \cdot \nabla)y + \nabla\pi = \nabla \cdot \tau + v1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + (y \cdot \nabla)\tau + g(\nabla y, \tau) + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \end{cases} \quad (1.15)$$

donde

$$g(\nabla y, \tau) = \tau \cdot W(y) - W(y) \cdot \tau - \alpha(\tau \cdot D(y) + D(y) \cdot \tau), \quad \alpha \in [-1, 1] \quad (1.16)$$

y

$$W(y) = \frac{1}{2}(\nabla y - {}^t\nabla y) \quad (\text{el tensor de vorticidad}).$$

No parece fácil extender los teoremas 6.2 y 6.4 a este contexto, ni siquiera en el caso más sencillo, cuando $\alpha = 0$. En realidad, todo lo que se conoce (de momento) para estos sistemas son resultados locales en tiempo, cf [30].

8. Un modelo intermedio se consigue cuando se conservan en (1.7) los términos de transporte $(y \cdot \nabla)y$ e $(y \cdot \nabla)\tau$. En este caso, sí es posible probar la existencia de solución global. Por tanto, puede tener sentido analizar el control aproximado y/o control exacto para el modelo “incompleto” de Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t y + (y \cdot \nabla)y + \nabla\pi = \nabla \cdot \tau + v1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + (y \cdot \nabla)\tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Puede ser interesante averiguar si las técnicas de [4] y [16], que conducen a la controlabilidad de las EDP de Euler, pueden ser adaptadas en este contexto.

9. En relación con los teoremas 7.1, 7.5 y 7.13, es posible plantear numerosas observaciones y deducir muchas variantes. Entre ellas, destacaremos dos:

- (a) Razonando como en [29], vemos que se puede controlar exactamente a cero (1.8) actuando sobre subconjuntos de $\partial\Omega$ de la forma

$$\Gamma(x^0, \beta, B) = \{x \in \Gamma : (x - x^0) \cdot (\beta I + B)\vec{n} > 0\},$$

donde B es una matriz cuadrada (real) antisimétrica $N \times N$, I es la matriz identidad, $x^0 \in \mathbb{R}^N$ y $\beta > 0$.

- (b) Cabe preguntarse:

- ¿Es posible controlar exactamente a cero con controles frontera en L^2 sobre Γ_1 en el tiempo T si y sólo si $\{\Gamma_1, T\}$ satisface la conocida condición BLR (de Bardos, Lebeau y Rauch; cf. [2])?

Es razonable que sea así, puesto que la respuesta es afirmativa en el caso de la EDP de ondas (cf. [2]).

10. En el verdadero modelo de Jeffreys, también conocido como modelo de Oldroyd, las EDP son

$$\begin{cases} \partial_t y + (y \cdot \nabla)y - \nu \Delta y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau + v1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + (y \cdot \nabla)\tau + g(\nabla y, \tau) + a\tau = 2bD(y) \text{ en } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

donde $g(\nabla y, \tau)$ es como en (1.16). El teorema 8.1 no es fácil de extender a este modelo. De hecho, salvo en algunos casos particulares, tan sólo se sabe probar resultados locales en tiempo para (1.18), cf. [12] y las referencias mencionadas allí. No obstante, mencionemos que, cuando $\alpha = 0$, es conocido un resultado de existencia de solución global. Su demostración es complicada y puede hallarse en [27].

11. Puede ser interesante considerar modelos “incompletos” de Jeffreys (para los cuales se puede demostrar un resultado de existencia de solución global), en los que conservamos los términos de transporte:

$$\begin{cases} \partial_t y + (y \cdot \nabla)y - \nu \Delta y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau + v1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + (y \cdot \nabla)\tau + a\tau = 2bD(y) \text{ en } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Cabría preguntarse si las técnicas de [5] pueden ser extendidas y adaptadas aquí.

12. Sería también de interés analizar la controlabilidad de sistemas lineales de tipo Jeffreys (resp. de tipo Maxwell) obtenidos al linealizar (1.18) (resp. (1.15)) en un estado no nulo. De hecho, esto podría servir de etapa preliminar para el análisis de la controlabilidad de los sistemas no lineales correspondientes.

13. Se pueden hacer muchas observaciones y comentarios en relación con el teorema 8.2 y, más generalmente, con la controlabilidad del sistema (1.9). He aquí varios ejemplos:

- (a) Se puede probar un resultado de controlabilidad análogo al teorema 8.2 con control frontera.
- (b) Queda por analizar con detalle qué ocurre cuando hay valores propios múltiples. No obstante, conviene recordar que “genéricamente” los valores de $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet son simples, cf. [1].

- (c) La controlabilidad a cero de (1.9) está todavía por estudiar. Habría que preguntarse previamente por la posibilidad de establecer estimaciones de tipo Carleman, en la línea de [19].

Bibliografía

- [1] J.H. Albert, *Genericity of simple eigenvalues for elliptic pde's*, Proc. A.M.S., **48** (2) (1975), 413–418.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim. **30** (1992), no. 5, 1024–1065.
- [3] L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York 1964.
- [4] J.M. Coron
- (a) *Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), no. 3, 271–276.
- (b) *On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids*, J. Math. Pures Appl. (9) **75** (1996), no. 2, 155–188.
- [5] J.M. Coron, *On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **1** (1995/96), 35–75.
- [6] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, *Controllability results for discontinuous parabolic differential equations*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **326**, (1998), no. 12, 1391–1395.
- [7] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, *Controllability results for linear viscoelastic fluids of the Maxwell and Jeffryes kinds*, aparecerá.
- [8] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, *On the approximate and null controllability of parabolic systems with a nonlinear term of the form $f(y, \nabla y)$* , en preparación.
- [9] C. Fabre, *Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **1** (1995/96), 267–302.
- [10] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125A** (1995), 31–61.

- [11] E. Fernández-Cara, *Null controllability of the semilinear heat equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **2** (1997), 87–107.
- [12] E. Fernández-Cara, F. Guillén, R. Ortega, *Some theoretical results concerning non-Newtonian fluids of the Oldroyd kind*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **26** (1998), no. 1, 1–29.
- [13] E. Fernández-Cara and E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case*, Adv. Differential Equations **5** (2000), no. 4-6, 465–514.
- [14] E. Fernández-Cara and E. Zuazua
 - (a) *Controllability of blowing up semilinear parabolic equations*, C.R. Acad. Sci. Paris, **330**, Série I, (2000), 199–204.
 - (b) *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations*, to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.
- [15] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes #34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [16] O. Glass, *Exact boundary controllability of 3-D Euler equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **5** (2000), 1–44.
- [17] O. Yu. Imanuvilov, *Some problems of optimization and exact controllability*, Thesis, Moscow 1991 (Russian).
- [18] O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Mat. Sb. **186**, N. 6, (1995), 102–132.
- [19] O. Yu. Imanuvilov, *On exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3** (1998), 97–131.
- [20] O. Yu. Imanuvilov and M. Yamamoto, *On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, to appear.
- [21] D.D. Joseph, *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, Appl. Math. Sciences, Vol. 84, Springer-Verlag, New York 1990.
- [22] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov and N.N. Uraltzeva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Nauka Moscow, 1967.
- [23] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Exact controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems*, Appl. Math. Optim. **23** (1991), no. 2, 109–154.

- [24] J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. **30**, 1988, 1–68.
- [25] J.-L. Lions, *Contrôlabilité Exacte, Perturbation et Stabilisation de Systèmes Distribués*, Tomes 1 and 2, Masson, Paris 1988.
- [26] J. L. Lions and E. Zuazua, *A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences*, in “Partial Differential Equations and Applications”, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 177, Marcel Dekker, New York 1996.
- [27] P.L. Lions and N. Masmoudi, *Global solutions for some Oldroyd models of non-Newtonian flows*, Chin. Ann. of Math. **21B**: 2 (2000), 131–146.
- [28] A. López, Xu Zhang, E. Zuazua, *Null controllability of the heat equation as singular limit of the exact controllability of dissipative wave equations*, to appear.
- [29] A. Osses, *A rotated multiplier applied to the controllability of the waves, elasticity and tangential Stokes control*, to appear in SIAM J. on Control and Optim.
- [30] M. Renardy, *Initial-value problems with inflow boundaries for Maxwell fluids*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), no. 4, 914–931.
- [31] D.L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open question*, SIAM Rev. **20** (1978), no. 4, 639–739.
- [32] J. Simon
 (a) *Démonstration constructive d’un théorème de G. de Rham*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), no. 11, 1167–1172.
 (b) *Distributions à Valeurs Vectorielles*, livre à paraître.
- [33] E. Zuazua, *Exact controllability for the semilinear wave equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **69** (1990), no. 1, 1–31.
- [34] E. Zuazua, *Exact boundary controllability for the semilinear wave equation*, in “Non-linear Partial Differential Equations and their Applications”, Vol. X, H. Brézis and J.L. Lions eds., Pitman, 1991, 357–391.
- [35] E. Zuazua, *Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **10** (1993), no. 1, 109–129.
- [36] E. Zuazua, *Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz non linearities*, Control and Cybernetics, **28** (1999), no. 3, 665–683.

Parte I

La EDP del calor, el sistema de Stokes y variantes

Capítulo 2

LA EDP DEL CALOR SEMILINEAL CON TÉRMINOS NO LINEALES DISCONTINUOS

2.1 El problema considerado

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo, acotado, de frontera $\partial\Omega$ regular, $\mathcal{O} \subset \Omega$ un abierto no vacío y $T > 0$. Pongamos $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. En lo que sigue, C designará una constante positiva genérica cuyo valor podrá cambiar de una línea a la siguiente. Las normas en $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$, $L^\infty(Q)$ serán denotadas respectivamente $|\cdot|$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Para $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ e $y_0 \in L^\infty(\Omega)$ dados, se considera el problema parabólico semilineal con discontinuidades:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y) \ni v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $1_{\mathcal{O}}$ es la función característica de \mathcal{O} . Aquí, $f(s) = f_0(s) + F(s)$, donde $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitziana. Por simplicidad, supondremos que

$$F(s) = \sum_{r=1}^M a_r H(s - s_r), \quad a_r \in \mathbb{R}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_M,$$

siendo H la función de Heaviside.

En (2.1), aparece una ecuación semilineal con discontinuidades (de hecho, una inclusión diferencial), relacionada con una combinación lineal de funciones multívocas. Hablaremos de la controlabilidad exacta a cero y de la controlabilidad aproximada para el sistema (2.1). Veremos que, bajo ciertas condiciones de crecimiento para f_0 , (2.1) es exactamente controlable a cero. También veremos que, bajo condiciones análogas, (2.1) es aproximadamente controlable.

Más precisamente, diremos que (2.1) es *aproximadamente controlable* en $L^2(\Omega)$ en el tiempo $t = T$ si, dados $y_0 \in L^\infty(\Omega)$, $y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, siempre existe $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que el correspondiente sistema (2.1) posee alguna solución $y_v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, con

$$|y_v(T) - y_d| \leq \varepsilon. \quad (2.2)$$

Diremos que es *exactamente controlable a cero* para $t = T$ si para cada $y_0 \in L^\infty(\Omega)$, siempre existe $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que el correspondiente sistema (2.1) posee alguna solución $y_v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ que verifica $y_v(T) = 0$.

En este Capítulo, se permitirá al término no lineal unívoco $f_0(s)$ crecer más rápidamente que $|s|$, pero menos que todos los $|s|^r$ con $r > 1$, cuando $|s| \rightarrow \infty$; en concreto, supondremos

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f_0(s)}{s \cdot \log(1 + |s|)} = 0. \quad (2.3)$$

Cuando estemos hablando de controlabilidad exacta a cero, pediremos además $f_0(0) = 0$ y $s_1 > 0$ (para el análisis de problemas similares con términos no lineales discontinuos de otro tipo, véase la sección 2.4).

Los resultados de controlabilidad que presentaremos a continuación son análogos a los que se pueden demostrar cuando no hay discontinuidades, i.e. con $f(s) \equiv f_0(s)$. En tales casos, si f verifica (2.3), se sabe que ambas propiedades de controlabilidad son ciertas (cf. [4], [5]). Véanse también [8] y [3], donde se prueban estas propiedades bajo la hipótesis más restrictiva

$$|f(s)| \leq C|s| + C \quad \forall s \in \mathbb{R}; \quad (2.4)$$

de nuevo hay que pedir $f_0(0) = 0$ para la controlabilidad exacta a 0.

De hecho, en [5], se prueban resultados análogos a los que siguen (controlabilidad exacta a cero y controlabilidad aproximada) cuando $f(s) \equiv f_0(s)$ y f_0 verifica la siguiente hipótesis, que es algo más débil que (2.3):

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f_0(s)}{s \cdot \log^{3/2}(1 + |s|)} = 0. \quad (2.5)$$

Las técnicas utilizadas en [5] son también aplicables aquí, en presencia de discontinuidades, con los cambios adecuados. De hecho, serán utilizadas más adelante, en el Capítulo 3, en el contexto de la EDP del calor con términos no lineales del tipo $f(y, \nabla y)$ (i.e. la EDP del calor quasi-lineal con parte principal lineal). No obstante, para ofrecer la máxima cantidad posible de técnicas distintas, hemos optado por restringir nuestras consideraciones en este Capítulo al caso en que se cumple (2.3).

En [5] se prueba también que la hipótesis (2.5) está muy cerca de la mejor posible. Más precisamente, se demuestra que, para cada $p > 2$, existen funciones $f_0 = f_0(s)$ tales que

$$|f_0(s)| \sim |s| \cdot \log^p(1 + |s|) \quad \text{cuando} \quad |s| \rightarrow \infty$$

y (2.1) no es aproximadamente controlable, ni siquiera en ausencia de discontinuidades. También se prueba un resultado análogo en el contexto de la controlabilidad exacta a cero. Los resultados de este Capítulo fueron enunciados en [2].

2.2 Un resultado de controlabilidad exacta a cero

Teorema 2.1 – *Supongamos que $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana, verifica (2.3), $f_0(0) = 0$ y $s_1 > 0$. Entonces (2.1) es exactamente controlable a cero.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.1:

1. *Introducción de los problemas aproximados.*

Por el momento, supondremos que $y_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ y que f_0 es C^1 en $(-1, 1)$. Para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se introduce F_δ , con

$$F_\delta(s) = \sum_{r=1}^M a_r H_\delta(s - s_r), \quad a_r \in \mathbb{R}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_M,$$

siendo $H_\delta(s) = s/\delta$ si $s \in [0, \delta]$ y $H_\delta(s) = H(s)$ en otro caso. El correspondiente problema aproximado consiste en hallar un par $\{v_\delta, y_\delta\}$ en el espacio producto $L^2(Q) \times C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{cases} \partial_t y_\delta - \Delta y_\delta + f_0(y_\delta) + F_\delta(y_\delta) = v_\delta 1_Q & \text{en } Q, \\ y_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\delta(0) = y_0, \quad y_\delta(T) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

2. *Resolución de los problemas aproximados.*

Pongamos

$$g_\delta(s) = \begin{cases} \frac{f_0(s) + F_\delta(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f'_0(0) & \text{si } s = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Se tiene que g_δ es continua (recuérdese que $s_1 > 0$ y $f_0(0) = 0$) y, gracias a (2.3), verifica:

$$\forall \eta > 0, \exists C_\eta > 0 \text{ tal que } |g_\delta(s)| \leq C_\eta + \eta |\log(1 + |s|)| \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Para cada $\delta > 0$, consideremos la aplicación $\Lambda_\delta : L^\infty(Q) \mapsto L^\infty(Q)$, definida como sigue: $y_\delta = \Lambda_\delta(z)$ si y sólo si y_δ es, junto con v_δ , la solución del problema de controlabilidad exacta a cero

$$\begin{cases} \partial_t y_\delta - \Delta y_\delta + g_\delta(z) y_\delta = v_\delta 1_Q & \text{en } Q, \\ y_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\delta(0) = y_0, \quad y_\delta(T) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

que proporciona el método de A.V. Fursikov y O.Yu. Imanuvilov (cf. [8], [6]). Concretamente, sea $\theta \in C^\infty([0, T])$ una función tal que $\theta(t) = 1$ cerca de $t = 0$ y $\theta(t) = 0$ cerca de $t = T$. Buscamos la solución de (2.9) de la forma $y_\delta = \theta(t)\chi_\delta + w_\delta$, donde χ_δ verifica

$$\begin{cases} \partial_t \chi_\delta - \Delta \chi_\delta + g_\delta(z)\chi_\delta = 0 & \text{en } Q, \\ \chi_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \chi_\delta(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

y w_δ es, junto con v_δ , la solución de

$$\begin{cases} \partial_t w_\delta - \Delta w_\delta + g_\delta(z)w_\delta = -\theta'(t)\chi_\delta + v_\delta 1_Q & \text{en } Q, \\ w_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w_\delta(0) = 0, \quad w_\delta(T) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

que se construye en [7] p. 174.

Recordemos que la existencia de un par $\{v_\delta, w_\delta\}$ de estas características (y también la propia construcción) reposa sobre una desigualdad global de tipo Carleman adecuada. Desigualdades de este tipo serán consideradas más adelante en un contexto más general, véase el Capítulo 3.

Podremos afirmar que el problema aproximado (2.6) posee solución si somos capaces de probar la existencia de un punto fijo y_δ de Λ_δ . En este sentido, con el objetivo de aplicar el teorema de Schauder, vamos a probar lo siguiente:

- $\Lambda_\delta : L^\infty(Q) \mapsto L^\infty(Q)$ está bien definida;
- Λ_δ envía una bola de $L^\infty(Q)$ en sí misma;
- Λ_δ es continua y compacta.

El punto crucial en la prueba del teorema 2.1 consistirá en obtener estimaciones para v_δ e y_δ en $L^\infty(Q)$ independientes de δ . En el siguiente apartado, probaremos este hecho simultáneamente a las propiedades de Λ_δ .

3. Propiedades de Λ_δ y estimaciones independientes de δ .

- Por una parte, las estimaciones habituales escritas para χ_δ implican que $\chi_\delta \in L^\infty(Q)$

y

$$\|\chi_\delta\|_\infty \leq e^{T\|g_\delta(z)\|_\infty} \|y_0\|_{L^\infty}. \quad (2.12)$$

Por otra parte, podemos resolver el problema (2.11) de controlabilidad exacta a cero por el método de A.V. Fursikov y O.Yu. Imanuvilov.

En este apartado no insistiremos demasiado en los detalles. Volveremos sobre ello en un marco más complicado, en el contexto de la EDP del calor quasi-lineal con parte

principal lineal (véase el siguiente Capítulo). Dicho esto, afirmamos que existe un par $\{v_\delta, w_\delta\}$ en el espacio producto $L^2(Q) \times L^\infty(Q)$ que verifica (2.11) y las estimaciones

$$\|w_\delta\|_\infty \leq e^{C(1+\|g_\delta(z)\|_\infty)} \|\chi_\delta\|_\infty \quad (2.13)$$

y

$$\|v_\delta\|_2 \leq e^{C(1+\|g_\delta(z)\|_\infty)} \|\chi_\delta\|_\infty, \quad (2.14)$$

donde C depende de Ω, \mathcal{O}, T e y_0 , pero no de δ . En consecuencia, por ser $\Lambda_\delta(z) = \theta(t)\chi_\delta + w_\delta$ para cada $z \in L^\infty(Q)$, obtenemos que $\Lambda_\delta(z) \in L^\infty(Q)$. Esto prueba que $\Lambda_\delta : L^\infty(Q) \mapsto L^\infty(Q)$ está bien definida. Además, teniendo en cuenta (2.12) y (2.13) podemos escribir:

$$\|\Lambda_\delta(z)\|_\infty \leq e^{C(1+\|g_\delta(z)\|_\infty)} \|y_0\|_{L^\infty}, \quad (2.15)$$

con C dependiente de Ω, \mathcal{O}, T , pero no de δ .

• Veamos que, si $R > 0$ es suficientemente grande (pero independiente de δ), Λ_δ envía la bola cerrada $B_R \subset L^\infty(Q)$ de radio R en sí misma. Para ello, razonaremos como en [4]. Así, supongamos que $z \in L^\infty(Q)$ y $\|z\|_\infty \leq R$. Usamos (2.8), donde C_η es independiente de δ (gracias a que $s_1 > 0$) y concluimos que

$$\|\Lambda_\delta(z)\|_\infty \leq e^{C(1+C_\eta+\eta \log \|z\|_\infty)} \|y_0\|_{L^\infty} \leq e^{C(1+C_\eta)} R^{C_\eta} \|y_0\|_{L^\infty}.$$

Tomando ahora η tal que $C_\eta \in (0, 1)$ y eligiendo R suficientemente grande (e independiente de δ), resulta que

$$\|\Lambda_\delta(z)\|_\infty \leq e^{C(1+C_\eta)} R^{C_\eta} \|y_0\|_{L^\infty} \leq R.$$

Esto prueba que, efectivamente, Λ_δ envía B_R en sí misma.

• La continuidad y la compacidad de la aplicación Λ_δ se deducen de las propiedades de regularidad de la solución de (2.9) asociada a un dato inicial suficientemente regular (por ejemplo, cf. [9]). Más concretamente, dado que $y_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, podemos afirmar que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que Λ_δ transforma los acotados de $L^\infty(Q)$ en acotados de $C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$. Por definición, éste es el espacio de Banach formado por las funciones $z \in C^0(\overline{Q})$ tales que

$$[z]_{\alpha,\alpha/2} := \sup_{\overline{Q}} \frac{|z(x,t) - z(x',t)|}{|x - x'|^\alpha} + \sup_{\overline{Q}} \frac{|z(x,t) - z(x,t')|}{|t - t'|^{\alpha/2}} < +\infty.$$

Basta usar ahora la inyección compacta de $C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}) \hookrightarrow L^\infty(Q)$ para deducir que Λ_δ transforma los acotados de $L^\infty(Q)$ en conjuntos relativamente compactos. Esto prueba que $\Lambda_\delta : L^\infty(Q) \mapsto L^\infty(Q)$ es compacta. La continuidad de esta aplicación se deduce por argumentos similares, teniendo en cuenta la manera específica en que se construye w_δ .

4. *Paso al límite y conclusión.*

A continuación, seguiremos suponiendo que $y_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ pero permitiremos que f_0 sea (sólo) localmente Lipschitziana, verificando (2.3) y $f_0(0) = 0$. Vamos a ver que, gracias a que las estimaciones precedentes son independientes de δ , podemos pasar al límite en el problema aproximado (2.6) cuando $\delta \rightarrow 0$, consiguiéndose una solución de (2.1) que verifica además $y(T) = 0$. Más precisamente, consideremos una sucesión de funciones $f_{0\delta}$ con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} f_{0\delta} & \text{ es localmente Lipschitziana en } \mathbb{R}, \\ f_{0\delta} & \text{ es } C^1 \text{ en } (-1, 1), \\ f_{0\delta}(0) & = 0, \\ f_{0\delta} & = f_0 \text{ fuera de } (-2, 2), \\ f_{0\delta} & \rightarrow f_0 \text{ uniformemente en los compactos de } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obsérvese que las funciones $f_{0\delta}$ verifican (2.3) uniformemente en δ . Más precisamente, sea $f_\delta = f_{0\delta} + F_\delta$ y llamemos g_δ a las funciones construidas como en (2.7), cambiando f_0 por $f_{0\delta}$. Entonces se tiene (2.8), donde las constantes C_η son independientes de δ . El razonamiento anterior vuelve a tener validez para cada $f_{0\delta}$. Se obtienen las estimaciones

$$\|y_\delta\|_\infty \leq C, \quad \|v_\delta\|_2 \leq C,$$

con la constante C independiente de δ . De aquí deducimos que

$$\|f_\delta(y_\delta)\|_\infty \leq C.$$

Por tanto, la solución y_δ del problema

$$\begin{cases} \partial_t y_\delta - \Delta y_\delta = -f_\delta(y_\delta) + v_\delta 1_\Omega & \text{en } Q, \\ y_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\delta(0) = y_{0\delta}, \end{cases} \quad (2.16)$$

satisface

$$\begin{aligned} y_\delta & \in \text{acotado de } L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ \partial_t y_\delta & \in \text{acotado de } L^2(Q). \end{aligned}$$

En particular, tenemos que

$$y_\delta \in \text{compacto de } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Luego, extrayendo eventualmente una subsucesión, llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned} y_\delta & \rightarrow y^* & \text{en } L^2(0, T; H^2(\Omega))\text{-débil}, \\ y_\delta & \rightarrow y^* & \text{en } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\text{-débil*}, \\ \partial_t y_\delta & \rightarrow \partial_t y^* & \text{en } L^2(Q)\text{-débil}, \\ y_\delta & \rightarrow y^* & \text{en } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ y c.p.d.}, \\ v_\delta & \rightarrow v^* & \text{en } L^2(Q)\text{-débil}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $f_\delta(y_\delta) = f_{0\delta}(y_\delta) + F_\delta(y_\delta)$, podemos pasar al límite cuando $\delta \rightarrow 0$ y deducir que

$$\begin{cases} \partial_t y^* - \Delta y^* = -f_0(y^*) + h^* + v^* 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y^* = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y^*(0) = y_0, \quad y^*(T) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Aquí, hemos usado que $F_\delta(y_\delta)$ converge en $L^\infty(Q)$ -débil* hacia una función h^* .

Para estar seguros de que hemos resuelto el problema que deseábamos, necesitamos comprobar que $h^* \in F(y^*)$, donde y^* es el límite (fuerte) de y_δ . Pero esto es cierto. En efecto, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, gracias a que $y_\delta \rightarrow y^*$ en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ y c.p.d., obtenemos:

En $\{y^*(x, t) < s_1\}$, $F_\delta(y_\delta) = 0$, luego $h^* = 0$ c.p.d.,

En $\{y^*(x, t) > s_M\}$, $F_\delta(y_\delta) = \sum_{r=1}^M a_r$, luego $h^* = \sum_{r=1}^M a_r$ c.p.d.,

En $\{y^*(x, t) \in (s_i, s_{i+1})\}$, $F_\delta(y_\delta) = \sum_{r=1}^i a_r$, luego $h^* = \sum_{r=1}^i a_r$ c.p.d.,

En $\{y^*(x, t) = s_i\}$, $F_\delta(y_\delta) \in \left[\sum_{r=1}^{i-1} a_r, \sum_{r=1}^i a_r \right]$, luego $h^* \in \left[\sum_{r=1}^{i-1} a_r, \sum_{r=1}^i a_r \right]$.

Esto prueba que $h^* \in F(y^*)$. En consecuencia, el teorema está demostrado cuando $y_0 \in C^1(\bar{\Omega})$.

En el caso general, con $y_0 \in L^\infty(Q)$, el resultado se puede probar de la forma siguiente. Fijamos $\tau > 0$ (suficientemente pequeño) y tomamos control idénticamente nulo en $\mathcal{O} \times (0, \tau)$. Esto determina al menos una solución $\hat{y} \in C^0([0, \tau]; L^2(\Omega))$ de

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y} - \Delta \hat{y} + f(\hat{y}) \ni 0 & \text{en } \Omega \times (0, \tau), \\ \hat{y} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \tau), \\ \hat{y}(0) = y_0. \end{cases}$$

Gracias al efecto regularizante de la EDP del calor, sabemos que $\hat{y}(\tau) \in C^1(\bar{\Omega})$. Aplicando el argumento que precede en $[\tau, T]$, es claro que existe $\tilde{v} \in L^2(\mathcal{O} \times (\tau, T))$ tal que el correspondiente sistema

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y) \ni \tilde{v} 1_{\mathcal{O}} & \text{en } \Omega \times (\tau, T), \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (\tau, T), \\ y(\tau) = \hat{y}(\tau) \end{cases}$$

posee al menos una solución $\tilde{y} \in C^0([\tau, T]; L^2(\Omega))$ que verifica $\tilde{y}(T) = 0$. Esto conduce obviamente al resultado deseado. ■

Observación 2.1 El mismo resultado sigue siendo cierto bajo hipótesis más generales. Como hemos dicho, se puede cambiar (2.3) por (2.5). De hecho, basta suponer que

$$|f_0(s)| \leq \delta_0 |s| \cdot \log^{3/2}(1 + |s|) \quad \text{para } |s| \geq s_0,$$

donde δ_0 es una constante suficientemente pequeña que sólo depende de Ω , \mathcal{O} y T . También pueden considerarse problemas análogos donde aparezcan un operador lineal uniformemente elíptico de coeficientes regulares en vez del operador de Laplace, EDP parabólicas de orden superior, algunas ecuaciones quasi-lineales, etc. ■

Observación 2.2 El teorema 2.1 continúa siendo cierto, esencialmente con la misma demostración, en algunos casos en los que $f = f(x, t, s)$. Por ejemplo, esto ocurre cuando $f_0 = f_0(x, t, s)$ es una función de Carathéodory tal que $s \mapsto f_0(x, t, s)$ es localmente Lipschitziana para cada $(x, t) \in Q$,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f_0(x, t, s)}{s \cdot \log(1 + |s|)} = 0 \quad \text{uniformemente en } (x, t) \in Q, \quad (2.18)$$

$f_0(x, t, 0) \equiv 0$ y, además, $s_1 > 0$. ■

Observación 2.3 (a) La hipótesis $s_1 > 0$ puede ser sustituida por la siguiente: Para cada r , $s_r \neq 0$ y, además, $\sum_{s_r < 0} a_r = 0$. Esto permitiría discontinuidades con saltos negativos.

- (b) También puede considerarse una suma infinita de discontinuidades, bajo una hipótesis adecuada sobre el comportamiento de los a_r .
- (c) Es posible considerar discontinuidades de otro tipo, por ejemplo de la forma $\eta(t)F(y)$, con $\eta = \eta(t)$ una función regular que se anula cerca de $t = T$ y con $F = F(y)$ verificando hipótesis de crecimiento convenientes. ■

2.3 Controlabilidad aproximada

En esta sección, probaremos un resultado de controlabilidad aproximada para (2.1). Seguiremos el razonamiento de [5], donde, por primera vez, se aplican argumentos que permiten obtener esta propiedad a partir de la controlabilidad exacta hacia trayectorias acotadas (que a su vez es consecuencia de la controlabilidad nula). Señalemos que volveremos a usar técnicas parecidas (en Capítulos posteriores). En particular, en el contexto de la EDP del calor con términos no lineales de la forma $f(y, \nabla y)$, nos detendremos más en los detalles de la demostración.

Teorema 2.2 – Supongamos que $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana y verifica (2.3). Entonces (2.1) es aproximadamente controlable.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2: Sean $y_0 \in L^\infty(\Omega)$ e y_d un estado final deseado suficientemente regular (por ejemplo, $y_d \in C^2(\bar{\Omega})$) y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe un par $\{v, y\}$ en $L^2(Q) \times C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ que verifica (2.1) y (2.2).

1. *Introducción de los problemas aproximados.*

De nuevo por el momento, supondremos que f_0 es regular en $(-1, 1)$. Para cada $\delta > 0$, se considera el correspondiente problema aproximado

$$\begin{cases} \partial_t y_\delta - \Delta y_\delta + f_0(y_\delta) + F_\delta(y_\delta) = v_\delta 1_Q & \text{en } Q, \\ y_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\delta(0) = y_0, \quad |y_\delta(T) - y_d| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.19)$$

donde la notación es la misma que en la sección precedente.

2. *Resolución del problema aproximado. Introducción de una aplicación de punto fijo.*

Sea g_0 la función definida por

$$g_0(s) = \begin{cases} \frac{f_0(s) - f_0(0)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f_0'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Para cada $\delta > 0$, consideramos la aplicación $\Gamma_\delta : L^\infty(Q) \mapsto L^\infty(Q)$, definida del modo siguiente: $y_\delta = \Gamma_\delta(z)$ si y sólo si y_δ es, junto con v_δ , la solución, construida como en [5], del siguiente problema de controlabilidad aproximada:

$$\begin{cases} \partial_t y_\delta - \Delta y_\delta + g_0(z)y_\delta = -F_\delta(z) - f_0(0) + v_\delta 1_Q & \text{en } Q, \\ y_\delta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_\delta(0) = y_0, \quad |y_\delta(T) - y_d| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.20)$$

Más precisamente, dado que y_d es regular, existe $\zeta > 0$ tal que la única solución Y_δ de

$$\begin{cases} \partial_t Y_\delta - \Delta Y_\delta + g_0(z)Y_\delta = -F_\delta(z) - f_0(0) & \text{en } \Omega \times (T - \zeta, T), \\ Y_\delta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (T - \zeta, T), \\ Y_\delta(T - \zeta) = y_d \end{cases} \quad (2.21)$$

verifica $Y_\delta \in C^0([T - \zeta, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (T - \zeta, T))$ y también

$$|Y_\delta(T) - y_d| \leq \varepsilon,$$

con estimaciones independientes de δ , pues $F_\delta(z)$ está uniformemente acotada. A continuación hacemos lo siguiente:

- Durante el intervalo de tiempo $(0, T - \zeta)$, tomamos como control $v = 0$. Así, obtenemos una trayectoria que parte de $y_0 \in L^\infty(\Omega)$ y describe una curva en $L^2(\Omega)$. El punto final de esta curva es $y^\zeta = y(T - \zeta)$.
- Es claro que en el intervalo $(T - \zeta, T)$ podemos obtener un control

$$\widehat{v}_\delta \in L^2(\mathcal{O} \times (T - \zeta, T))$$

y una función

$$\widehat{y}_\delta \in C^0([T - \zeta, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (T - \zeta, T))$$

tales que

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{y}_\delta - \Delta \widehat{y}_\delta + g_0(z) \widehat{y}_\delta = -F_\delta(z) - f_0(0) + \widehat{v}_\delta 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \widehat{y}_\delta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (T - \zeta, T), \\ \widehat{y}_\delta(T - \zeta) = y^\zeta & \end{cases} \quad (2.22)$$

y además

$$\widehat{y}_\delta(T) = Y_\delta(T).$$

De esta forma, tomando

$$v_\delta = \begin{cases} 0 & \text{en } (0, T - \zeta), \\ \widehat{v}_\delta & \text{en } (T - \zeta, T) \end{cases}$$

obtenemos que

$$|y_\delta(T) - y_d| \leq \varepsilon.$$

3. Aplicación del teorema de Schauder, paso al límite y conclusión.

No es difícil probar que la aplicación $\Gamma_\delta : L^\infty(Q) \mapsto L^\infty(Q)$ está bien definida, es continua y es compacta. Además, es posible demostrar la estimación

$$\|\Gamma_\delta(z)\|_\infty \leq e^{C(1+\|g_0(z)\|_\infty)} \quad \forall z \in L^\infty(Q),$$

donde C depende de Ω , \mathcal{O} y T pero es independiente de δ . Gracias a la hipótesis de crecimiento (2.3), vemos que de nuevo es posible aplicar el teorema de Schauder y deducir la existencia de un punto fijo y_δ de Γ_δ , es decir una solución de (2.19). Para justificar estas afirmaciones, basta razonar como en la demostración del teorema 2.1.

Como en la demostración del teorema 1, tenemos $\|y_\delta\|_\infty$ y $\|v_\delta\|_2$ uniformemente acotadas. Esto permite, tras la extracción de subsucesiones adecuadas, pasar al límite en (2.19) cuando $\delta \rightarrow 0$ y llegar a la conclusión deseada. Esto prueba el teorema cuando f_0 es C^1 en $(-1, 1)$. En el caso general, basta proceder de modo análogo a como se hace en la cuarta etapa de la demostración del teorema 2.1. ■

2.4 Algunos casos particulares

Existen algunos casos particulares interesantes que conviene analizar. Por ejemplo, cuando el término no lineal tiene un crecimiento sublineal, es decir,

$$|f_0(s)| \leq C|s| + C \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.23)$$

el resultado de la controlabilidad aproximada admite dos demostraciones posibles. Por un lado, controlando exactamente una trayectoria (como antes) y, por otro, aplicando el teorema de punto fijo de Kakutani para una aplicación multívoca. Para mayor claridad, presentaremos a continuación un resultado en este sentido:

Teorema 2.3 – *Supongamos que $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana y verifica (2.23). Entonces (2.1) es aproximadamente controlable.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.3:

1. *Introducción de una aplicación multívoca.*

Supongamos por simplicidad que f_0 es C^1 en $(-1, 1)$ y pongamos

$$g_0(s) = \begin{cases} \frac{f_0(s) - f_0(0)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f_0'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Se tiene que g_0 es continua y, gracias a (2.23), verifica la acotación uniforme:

$$|g_0(s)| \leq C \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Consideremos la aplicación multívoca $\Lambda_1 : L^2(Q) \rightrightarrows L^2(Q)$, definida como sigue: Para cada $z \in L^\infty(Q)$ y cada $h \in F(z)$, $y_h \in \Lambda_1(z)$ si y sólo si y_h es, junto con v_h , la solución del siguiente problema de controlabilidad aproximada para una ecuación lineal

$$\begin{cases} \partial_t y_h - \Delta y_h + g_0(z)y_h = -h - f_0(0) + v_h 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y_h = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_h(0) = y_0, \quad |y_h(T) - y_d| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (2.25)$$

construida como en [3]. Concretamente, fijado z y fijado $h \in F(z)$, buscamos la solución de (2.25) de la forma $y_h = u_h + U_h$, siendo u_h la solución de

$$\begin{cases} \partial_t u_h - \Delta u_h + g_0(z)u_h = -h - f_0(0) & \text{en } Q, \\ u_h = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u_h(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

y siendo U_h , junto con v_h , la solución del problema de controlabilidad aproximada

$$\begin{cases} \partial_t U_h - \Delta U_h + g_0(z)U_h = v_h 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ U_h = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ U_h(0) = 0, \quad |U_h(T) - y_d^h| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.27)$$

donde $y_d^h = y_d - u_h(T)$. El problema (2.27) se resuelve razonando como en [3]. Esto es posible puesto que $g_0 \in L^\infty(Q)$. Se obtiene que el control v_h viene definido por $v_h = \hat{\varphi}_h 1_{\mathcal{O}}$, siendo $\hat{\varphi}_h$ solución del problema adjunto asociado a (2.27)

$$\begin{cases} -\partial_t \hat{\varphi}_h - \Delta \hat{\varphi}_h + g_0(z) \hat{\varphi}_h = 0 & \text{en } Q, \\ \hat{\varphi}_h = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \hat{\varphi}_h(T) = \hat{\varphi}_{hT}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Aquí, el dato final $\hat{\varphi}_{hT}$ es el único mínimo del funcional $J(\cdot; g_0(z), \varepsilon)$, estrictamente convexo, continuo y coercivo, definido como sigue:

$$J(\varphi_T; g_0(z), \varepsilon) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi_h|^2 + \varepsilon |\varphi_T| - (y_d^h, \varphi_T) \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega). \quad (2.29)$$

Se tiene entonces que

$$\Lambda_1(z) = \{u_h + U_h : h \in F(z)\} \subset L^2(Q).$$

Luego decir que $y \in \Lambda_1(z)$ significa que existe $h \in F(z)$ tal que $y = u_h + U_h$. Esto significa que

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + g_0(z)y + f_0(0) + h = v_h 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad |y(T) - y_d| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.30)$$

donde $v_h = \hat{\varphi}_h 1_{\mathcal{O}}$ y $\hat{\varphi}_h$ es solución de (2.28).

Por tanto, todo consiste en demostrar que la aplicación multívoca Λ_1 posee un punto fijo, es decir, una función $y \in L^2(Q)$ tal que $y \in \Lambda_1(y)$.

2. Aplicación del teorema de Kakutani.

Recordemos que una aplicación multívoca $\Lambda_1 : L^2(Q) \rightrightarrows L^2(Q)$ posee un punto fijo cuando se verifican las hipótesis del teorema de Kakutani (por ejemplo, véase [1]):

(i) Para todo $z \in L^2(Q)$, el conjunto $\Lambda(z)$ es un convexo cerrado no vacío de $L^2(Q)$;

(ii) Existe un convexo compacto $K \subset L^2(Q)$ tal que

$$\Lambda(z) \subset K \quad \forall z \in L^2(Q);$$

(iii) Λ es hemicontinua superiormente en $L^2(Q)$; en otras palabras, si $z_n \rightarrow z_0$ en $L^2(Q)$, entonces se tiene que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\varphi \in \Lambda(z_n)} \iint_Q p\varphi \right) \leq \sup_{\varphi \in \Lambda(z_0)} \iint_Q p\varphi \quad \forall p \in L^2(Q).$$

Se observa que $\Lambda_1(z)$ no es necesariamente un convexo de $L^2(Q)$ y, por tanto, Λ_1 no cumple la hipótesis (i). Vamos a ver que, sin embargo, podemos resolver esta dificultad. La estrategia a seguir es la siguiente:

- Considerar la envolvente convexa Λ de Λ_1 : $\Lambda(z) = \overline{\text{co}} \Lambda_1(z) \quad \forall z \in L^2(Q)$.
- Probar que los puntos fijos de la aplicación Λ son, de hecho, puntos fijos de la aplicación Λ_1 (cf. el lema 2.4).
- Demostrar el resultado de controlabilidad aproximada, probando que la aplicación Λ posee un punto fijo (cf. el lema 2.5).

Se tiene el siguiente resultado:

Lema 2.4 - Si $y \in L^2(Q)$ es un punto fijo de Λ , entonces también lo es de Λ_1 .

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.4: Supongamos que $y \in \Lambda(y)$. Recordemos que decir $y \in \overline{\text{co}} \Lambda_1(y)$ significa lo siguiente:

$$\begin{cases} y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, & \text{con } y_n \in \text{co} \Lambda_1(y), \\ y_n = \sum_{i=1}^{I_n} \alpha_i y_{n_i}, & 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{I_n} \alpha_i = 1, \\ y_{n_i} \in \Lambda_1(y) & \text{para } 1 \leq i \leq I_n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Por otra parte, según hemos visto, la relación $y_{n_i} \in \Lambda_1(y)$ implica que existe $h_y^{n_i} \in F(y)$ tal que

$$\begin{cases} \partial_t y_{n_i} - \Delta y_{n_i} + g_0(y) y_{n_i} + f_0(0) + h_y^{n_i} = v_y^{n_i} 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y_{n_i} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_{n_i}(0) = y_0, \quad |y_{n_i}(T) - y_d| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.31)$$

Además, sabemos que el control viene dado por $v_y^{n_i} = \varphi_y^{n_i} 1_{\mathcal{O}}$, donde $\varphi_y^{n_i}$ es la solución de

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_y^{n_i} - \Delta \varphi_y^{n_i} + g_0(y) \varphi_y^{n_i} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi_y^{n_i} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi_y^{n_i}(T) = \hat{\varphi}_{yT}^{n_i} \end{cases} \quad (2.32)$$

y el dato final $\hat{\varphi}_{yT}^{n_i}$ es el único mínimo del funcional correspondiente

$$J(\varphi_T; g_0(y), \varepsilon) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi_y|^2 + \varepsilon |\varphi_T| - (y_d - u_y^{n_i}(T), \varphi_T) \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega). \quad (2.33)$$

Aquí, φ_y es solución del problema adjunto (2.32) asociado al dato final φ_T y, por otra parte, $u_y^{n_i}$ es solución de

$$\begin{cases} \partial_t u_y^{n_i} - \Delta u_y^{n_i} + g_0(y) u_y^{n_i} = h_y^{n_i} - f_0(0) & \text{en } Q, \\ u_y^{n_i} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u_y^{n_i}(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Vamos a ver que podemos pasar al límite cuando $n \rightarrow \infty$ y deducir que y es un punto fijo de Λ_1 . Para ello, observemos en primer lugar que, gracias a que $g_0(y)$ y las $h_y^{n_i}$ se mueven en un acotado de $L^\infty(Q)$, en virtud de las estimaciones parabólicas (habituales), la solución $u_y^{n_i}$ de (2.34) verifica

$$\begin{aligned} u_y^{n_i} &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_y^{n_i} &\in \text{acotado de } L^2(\rho, T; H^2(\Omega)) \cap C^0([\rho, T]; H_0^1(\Omega)) \quad \forall \rho > 0, \\ u_y^{n_i}(T) &\in \text{compacto de } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Por tanto, el único mínimo del funcional (2.33) satisface

$$\hat{\varphi}_{yT}^{n_i} \in \text{acotado de } L^2(\Omega).$$

Luego la solución $\varphi_y^{n_i}$ del problema adjunto (2.32) es tal que

$$\begin{aligned} \varphi_y^{n_i} &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \partial_t \varphi_y^{n_i} &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ \varphi_y^{n_i} &\in \text{compacto de } L^2(Q). \end{aligned}$$

Esto implica que el control

$$v_y^{n_i} = \varphi_y^{n_i} 1_Q \in \text{compacto de } L^2(Q).$$

Tomando ahora

$$\begin{aligned} v_y^n &= \sum_{i=1}^{I_n} \alpha_i v_y^{n_i}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{I_n} \alpha_i = 1, \\ y_n &= \sum_{i=1}^{I_n} \alpha_i y_{n_i}, \quad h_n = \sum_{i=1}^{I_n} \alpha_i h_y^{n_i}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t y_n - \Delta y_n + g_0(y) y_n + f_0(0) + h_n = v_y^n 1_Q & \text{en } Q, \\ y_n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_n(0) = y_0, \quad |y_n(T) - y_d| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.35)$$

Gracias a las propiedades de regularidad para y_n , v_n y h_n obtenidas anteriormente, extrayendo subsucesiones si hiciera falta, deducimos que, entre otras cosas, se verifica:

$$\begin{aligned} h_n &\rightarrow h && \text{en } L^2(Q)\text{-débil}, \\ v_n &\rightarrow v && \text{en } L^2(Q), \\ y_n &\rightarrow y && \text{en } L^2(Q), \\ y_n(T) &\rightarrow y(T) && \text{en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Obsérvese que, en este caso, también se tiene que $h \in F(y)$. Basta adaptar el razonamiento llevado a cabo en la demostración del teorema 2.1. Pasando al límite en (2.35), obtenemos que el punto fijo y de Λ verifica:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + g_0(y)y + f_0(0) + h = v1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad |y(T) - y_d| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.36)$$

con $h \in F(y)$. Esto prueba que y es también un punto fijo de Λ_1 . ■

Lema 2.5 - *La aplicación multívoca $\Lambda_1 : L^2(Q) \rightrightarrows L^2(Q)$ posee al menos un punto fijo.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.5: Vamos a comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Kakutani del punto fijo. De la demostración del lema 2.4, se deduce claramente que, cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z)$ es un convexo cerrado no vacío de $L^2(Q)$. Además, hemos visto que existe un convexo compacto K de $L^2(Q)$ tal que $\Lambda(z) \subset K$ para cada $z \in L^2(Q)$. La aplicación Λ es también hemicontinua superiormente. En efecto, sea $\{z_n\}$ una sucesión de $L^2(Q)$ tal que $z_n \rightarrow z_0$ fuertemente. Por ser cada $\Lambda(z_n)$ un compacto de $L^2(Q)$, tenemos que, para cada $n \geq 1$, existe $\varphi_n \in \Lambda(z_n)$ tal que

$$\sup_{\varphi \in \Lambda(z_n)} \iint_Q p\varphi = \iint_Q p\varphi_n.$$

Luego

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varphi \in \Lambda(z_n)} \iint_Q p\varphi = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \iint_Q p\varphi_n.$$

Es fácil comprobar que

$$\iint_Q p\varphi \leq \sup_{\psi \in \Lambda_1(z_n)} \iint_Q p\psi$$

para cada $\varphi \in \Lambda(z)$. En particular, esto es cierto para $\varphi = \varphi_n$, de donde, gracias a que cada $\Lambda_1(z_n)$ es un compacto, se deduce que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \iint_Q p\varphi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\psi_n \in \Lambda_1(z_n)} \iint_Q p\psi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \iint_Q p\psi_n \quad (2.37)$$

para algunos $\psi_n \in \Lambda_1(z_n)$. También podemos suponer que el límite superior precedente es, de hecho, un verdadero límite (basta en todo caso extraer una subsucesión adecuada). Por la definición de Λ_1 , ψ_n es de la forma

$$\psi_n = u_{h_n} + U_{h_n} \quad \text{con } h_n \in F(z_n),$$

siendo u_{h_n} y U_{h_n} soluciones de (2.26) y (2.27), respectivamente (con $h = h_n$). Como los $F(z_n)$ están uniformemente acotados en $L^2(Q)$, obtenemos, al menos para una subsecuación, que

$$h_n \rightarrow h_0 \quad \text{en } L^2(Q)\text{-débil.}$$

Aquí, $h_0 \in F(z_0)$. Esto se prueba razonando (una vez más) como en la demostración del teorema 2.1. Usando de nuevo la regularidad parabólica, llegamos a que

$$U_{h_n} \rightarrow U_{h_0} \quad \text{en } L^2(Q), \quad u_{h_n} \rightarrow u_{h_0} \quad \text{en } L^2(Q).$$

Luego

$$\psi_n \rightarrow \psi_0 = u_{h_0} + U_{h_0} \quad \text{en } L^2(Q),$$

con $\psi_0 \in \Lambda_1(z_0)$ y $h_0 \in F(z_0)$. Volviendo a la desigualdad (2.37) (con el último límite superior sustituido por un verdadero límite), podemos escribir

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \iint_Q p \varphi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_Q p \psi_n = \iint_Q p \psi_0 \leq \sup_{\varphi \in \Lambda_1(z_0)} (p, \varphi) = \sup_{\varphi \in \Lambda(z_0)} (p, \varphi).$$

Finalmente, llegamos a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\varphi \in \Lambda(z_n)} \iint_Q p \varphi \right) \leq \sup_{\varphi \in \Lambda(z_0)} \iint_Q p \varphi \quad \forall p \in L^2(Q).$$

Esto prueba el lema. ■

Finalmente, aplicamos el teorema de Kakutani, obteniendo que existe un punto fijo y de Λ . Hemos resuelto así el problema de controlabilidad aproximada cuando f_0 es C^1 en $(-1, 1)$. Para terminar la demostración del teorema 2.3, basta tratar el caso general (f_0 globalmente Lipschitziana y sublineal) similarmente a como se hace en la demostración del teorema 2.1. ■

Observación 2.4 También hemos probado con este argumento que la aplicación Λ_1 es hemicontinua superiormente y que existe un convexo compacto K de $L^2(Q)$ tal que $\Lambda_1(z) \subset K$. ■

Observación 2.5 Diremos que la función multívoca F verifica la propiedad (Q) si

(a) F está acotada, i.e. existe una constante $R > 0$ tal que

$$F(s) \subset (-R, R) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

- (b) Existen funciones $F_\delta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ ($\delta > 0$), con $|F_\delta(s)| \leq R$ para todo $s \in \mathbb{R}$, verificando la propiedad siguiente: Si $y_\delta \rightarrow y$ en $L^2(Q)$ y $F_\delta(y_\delta) \rightarrow h$ débil-* en $L^\infty(Q)$ cuando $\delta \rightarrow 0$, entonces necesariamente $h \in F(y)$.

Diremos que F satisface la propiedad (P) si verifica la propiedad (Q) para unas funciones F_δ que, además, cumplen $F_\delta(0) = 0$ y $|F'_\delta| \leq C$ en un entorno de 0. Si f_0 es como en el teorema 1 y F verifica propiedad (P), entonces (1) es exactamente controlable a cero. Por otro lado, (1) es aproximadamente controlable si f_0 es como en el teorema 2 y F verifica (Q). Obsérvese que las propiedades (P) y (Q) son satisfechas por las funciones consideradas en los teoremas 2.1 y 2.2 respectivamente. Por otra parte, cualquier operador acotado maximal monótono en \mathbb{R} verifica (Q). Finalmente, todo operador acotado maximal monótono F que es de clase C^1 cerca de cero y se anula en cero satisface (P). ■

Bibliografía

- [1] J.P. Aubin, *L'Analyse Non Linéaire et ses Motivations Économiques*, Paris, Masson, 1984.
- [2] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, *Controllability results for discontinuous parabolic differential equations*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **326**, (1998), no. 12, 1391–1395.
- [3] C. Fabre, J. P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125A** (1995), 31–61.
- [4] E. Fernández-Cara, *Null controllability of the semilinear heat equation*, ESAIM: COCV, **2** (1997), 87–107.
- [5] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations: The linear case*, to appear in Adv. Diff. Eqs.
- [6] A.V. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes #34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [7] A.V. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov, *On controllability of certain systems simulating a fluid flow*, in *Flow Control*, IMA Vol. Math. Appl., **68**, Ed. by M. D. Gunzburger, Springer-Verlag, New York 1995.
- [8] O.Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Mat. Sb., **186**, No. 6 (1995), 109–132.
- [9] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Nauka, Moscow, 1967.

Capítulo 3

CONTROLABILIDAD EXACTA Y APROXIMADA DE EDP PARABOLICAS CON TERMINOS NO LINEALES DE LA FORMA $f(y, \nabla y)$

3.1 Introducción y resultados principales

En este Capítulo, presentaremos algunos resultados relacionados con la controlabilidad de ecuaciones parabólicas quasi-lineales (con parte principal lineal) en un dominio acotado de \mathbb{R}^N con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Analizaremos tanto problemas de controlabilidad con control distribuido (de soporte en un pequeño abierto), como de control frontera (de soporte en una pequeña parte de la frontera). Veremos que estos sistemas son exactamente controlables a cero y también aproximadamente controlables para tiempos positivos arbitrariamente pequeños cuando el término no lineal $f(y, \nabla y)$ crece menos rápidamente que $|y| \log^{3/2}(1 + |y| + |\nabla y|) + |\nabla y| \log^{1/2}(1 + |y| + |\nabla y|)$ en el infinito (en general, en este caso, en ausencia de control se produce explosión de en tiempo finito). En las demostraciones, usaremos principalmente desigualdades globales de tipo Carleman, la regularidad parabólica de los sistemas considerados y técnicas de punto fijo.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado de frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 . Sean $\mathcal{O} \subset \Omega$ un abierto no vacío, $\gamma \subset \partial\Omega$ un abierto relativo (no vacío) de la frontera y supongamos que $T > 0$. Seguiremos usando la notación habitual: $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Para cada $p \in [1, +\infty]$, denotaremos por $\|\cdot\|_p$ la norma usual en $L^p(Q)$.

Consideraremos sistemas parabólicos de la forma

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

y

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = 0 & \text{en } Q, \\ y = v 1_{\gamma} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde y_0 y v son dados en espacios adecuados. En (3.1) y (3.2),

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$$

es una función localmente Lipschitziana y $1_{\mathcal{O}}$ y 1_{γ} son las funciones características de los conjuntos \mathcal{O} y γ , respectivamente. Supondremos que $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (por simplicidad), $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ en (3.1) y $v \in L^\infty(\gamma \times (0, T))$ en (3.2).

Nuestro objetivo será analizar las propiedades de controlabilidad de (3.1) y (3.2). Recordemos que se dice que (3.1) (resp. (3.2)) es exactamente controlable a cero en el tiempo T si, para cada $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, existe $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ (resp. $v \in L^\infty(\gamma \times (0, T))$) tal que el correspondiente sistema (3.1) (resp. (3.2)) admite una solución $y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ verificando

$$y(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.3)$$

Por otra parte, diremos que (3.1) (resp. (3.2)) es aproximadamente controlable en $L^2(\Omega)$ en el tiempo T si, dados $y_0 \in L^\infty(\Omega)$, $y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, existe un control $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ (resp. un control $v \in L^\infty(\gamma \times (0, T))$) tal que el correspondiente sistema (3.1) (resp. (3.2)) posee una solución $y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, con

$$\|y(\cdot, T) - y_d\|_2 \leq \varepsilon. \quad (3.4)$$

La controlabilidad de sistemas parabólicos lineales y semilineales ha sido analizada recientemente en varios trabajos. Entre ellos, mencionemos [8], [7], [4], [2], [1] y [6] donde se trata la controlabilidad exacta a cero y [3], [13] y [6] para la controlabilidad aproximada.

En este Capítulo, se generalizan todos estos resultados previos, en particular, los de [6], donde el término no lineal es de la forma $f(y)$.

Obsérvese que, bajo la hipótesis mencionada antes, podemos escribir que

$$f(s, p) = f(0, 0) + g(s, p)s + G(s, p) \cdot p \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \quad (3.5)$$

para ciertas funciones g y G en L_{loc}^∞ . Dichas funciones vienen respectivamente dadas por

$$g(s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(\lambda s, \lambda p) d\lambda, \quad G_i(s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(\lambda s, \lambda p) d\lambda \quad \text{para } 1 \leq i \leq N.$$

Nuestro primer resultado es el siguiente:

Teorema 3.1 *Supongamos que f es localmente Lipschitziana, $f(0,0) = 0$ y*

$$\lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)} = 0, \quad \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)} = 0. \quad (3.6)$$

Entonces, para $T > 0$ arbitrario, (3.1) es exactamente controlable a cero.

■

Observación 3.1 Este resultado generaliza al menos otros dos anteriores. Primero, el caso en el que la función f es globalmente Lipschitziana, i.e. cuando $g \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ y $G \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)^N$. En este caso, f posee comportamiento sublineal en el infinito y la demostración del correspondiente resultado de controlabilidad es más sencilla (cf. [9]). Segundo, el caso en el que $G \equiv 0$ y $g = g(s)$ y verifican

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|g(s)|}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0. \quad (3.7)$$

La demostración es también más fácil (cf. [6]).

■

Observación 3.2 En [6], se prueba que, para cada $\beta > 2$, existe una función $f = f(s)$ con $f(0) = 0$ y

$$|f(s)| \sim |s| \log^\beta(1+|s|) \quad \text{cuando } |s| \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

tal que (3.1) no es exactamente controlable a cero para todo $T > 0$. Gracias al teorema 3.1, sabemos que ocurre justamente lo contrario si f verifica (3.8) con $\beta < 3/2$. Mientras que, la controlabilidad nula de (3.1) cuando $3/2 \leq \beta \leq 2$ es una cuestión abierta.

■

Observación 3.3 En particular, el teorema 3.1 implica que, bajo la hipótesis (3.6), para cada y_0 existe un control v tal que (3.1) posee una solución global definida en todo $[0, T]$. Esta afirmación no es cierta para cualquier segundo miembro y cualquier dato inicial en $W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dado que estamos en el rango en el que puede haber explosión.

■

La controlabilidad aproximada para (3.1) será consecuencia del teorema 3.1. En este caso, supondremos que f verifica (3.5) y (3.9), una condición ligeramente distinta de (3.6) (con $f(0,0)$ no necesariamente igual a 0). También supondremos que, para algunos $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v^* \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$, el sistema (3.1) admite una solución y^* en $C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. Naturalmente, esto ocurre de forma inmediata cuando

$$f(0,0) = 0,$$

el caso en el que $y^* \equiv 0$ es solución de (3.1) con $y_0^* \equiv 0$ y $v^* \equiv 0$.

Nuestro segundo resultado principal es el siguiente:

Teorema 3.2 Sea $T > 0$. Supongamos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ es localmente Lipschitziana y verifica

$$\begin{aligned} \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p) d\lambda \right| &= 0, \\ \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^{1/2}(1 + |s| + |p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p) d\lambda \right| &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

uniformemente en $(s_0, p_0) \in K$, para cada compacto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. También, supongamos que (3.1) posee al menos una solución global $y^* \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$, correspondiente al dato inicial $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y al control $v^* \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$. Entonces (3.1) es aproximadamente controlable. ■

Observación 3.4 De hecho, en la sección 3.4 veremos que, para sistemas como (3.1), el resultado de controlabilidad aproximada es una simple consecuencia de la controlabilidad exacta hacia las trayectorias que se encuentran en $C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. ■

Observación 3.5 De nuevo, el teorema 3.2 generaliza dos resultados conocidos. El primero corresponde al caso en el que f es globalmente Lipschitziana, i.e. cuando $\partial f/\partial s$ y $\partial f/\partial p_i$ ($1 \leq i \leq N$) están uniformemente acotadas (cf. [13]). Por otro lado, el caso con $G \equiv 0$, $g = g(s)$ y (3.7) (cf. [6]). ■

Observación 3.6 Se observa que, en particular, (3.9) se tiene cualesquiera que sean $\partial f/\partial s$ y $\partial f/\partial p_i$ ($1 \leq i \leq N$) verificando

$$\lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial s}(s, p) \right|}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} = 0, \quad \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial p_i}(s, p) \right|}{\log^{1/2}(1 + |s| + |p|)} = 0.$$

Por otro lado, las hipótesis (3.9) pueden interpretarse fácilmente cuando $f = f(s)$. En efecto, en este caso, éstas simplemente se interpretan como sigue:

$$\lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} \left| \int_0^1 f'(s_0 + \lambda s) d\lambda \right| = 0$$

uniformemente en $s_0 \in K$ para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$. Los argumentos de [6] muestran que esto es equivalente a (3.7) y, también a

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1 + |s|)} \int_0^1 f'(\lambda s) d\lambda = 0.$$

■

Observación 3.7 Se prueba en [6] que, para cada $\beta > 2$, existe una función $f = f(s)$ verificando (3.8) tal que el correspondiente sistema (3.1) no es aproximadamente controlable para todo $T > 0$. Como en el caso de la controlabilidad nula, con f verificando (3.8) con $3/2 \leq \beta \leq 2$, la controlabilidad aproximada para (3.1) es una cuestión abierta.

■

Podemos establecer un resultado similar para (3.2) bajo hipótesis del mismo tipo sobre f y y_0 . Más precisamente, sea el espacio de Hilbert

$$V = \{z \in H^1(\Omega) : z = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \gamma\}.$$

Se tiene lo siguiente:

Teorema 3.3 *Sea $T > 0$. Supongamos que $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap V$ y f es una función localmente Lipschitziana verificando $f(0,0) = 0$ y (3.6). Entonces (3.2) es exactamente controlable a cero.*

■

Como antes, para demostrar la controlabilidad aproximada de (3.2), supondremos la existencia de una solución global en $C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. En otras palabras, supondremos que, para un cierto dato inicial $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap V$ y un cierto $v^* \in L^\infty(\gamma \times (0, T))$, el correspondiente sistema (3.2) admite una solución $y^* \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. En este contexto, tenemos el siguiente:

Teorema 3.4 *Sea $T > 0$. Supongamos que f es localmente Lipschitziana y verifica (3.9). También, supongamos que (3.2) posee una solución global $y^* \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ correspondiente al dato inicial $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap V$ y al control $v^* \in L^\infty(\gamma \times (0, T))$. Entonces (3.2) es aproximadamente controlable.*

■

Observación 3.8 En las demostraciones de los mencionados resultados de controlabilidad, vamos a construir controles que poseen propiedades convenientes. Estos controles van a ser regulares. En particular, serán tales que las soluciones asociadas de (3.1) y (3.2) pertenecen a $C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$, el espacio en el que podemos asegurar la unicidad.

■

El resto de este Capítulo se organizará como sigue. La sección 3.2 se dedicará a ciertos lemas de carácter técnico que necesitaremos después. En la sección 3.3, probaremos el teorema 3.1. En la sección 3.4, daremos la prueba del resultado de controlabilidad aproximada para el sistema (3.1), i.e. el Teorema 3.2. Finalmente, en la sección 3.5, demostraremos los teoremas 3.3 y 3.4.

3.2 Algunos resultados de carácter técnico

En este Capítulo, C designará una constante genérica positiva dependiendo sólo de Ω , \mathcal{O} , y (en ocasiones) T , cuyo valor puede cambiarse de una línea a otra. Antes de pasar a demostrar los teoremas mencionados anteriormente, necesitamos presentar algunos resultados de carácter técnico.

Consideremos el problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = F & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde y_0 y F son dados, $a \in L^\infty(Q)$ y $B \in L^\infty(Q)^N$. Se tiene el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [10]:

Lema 3.5 *Supongamos que $F \in L^r(0, T; L^q(\Omega))$ con*

$$\frac{1}{r} + \frac{N}{2q} < \frac{1}{2}$$

$y_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $p > N$, $a \in L^\infty(Q)$ y $B \in L^\infty(Q)^N$. Entonces la solución y de (3.10) verifica

$$\begin{cases} y \in L^\infty(0, T; W^{2,\beta}(\Omega)), \quad \partial_t y \in L^r(0, T; L^\beta(\Omega)), \\ \text{con } \beta = \min \left(p, \frac{N}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{N}{2q} \right)^{-1} \right) > N. \end{cases} \quad (3.11)$$

En particular, tenemos que $y \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. Más aún, se verifica

$$\|y\|_{L^\infty(W^{2,\beta})} + \|\partial_t y\|_{L^r(L^\beta)} \leq M(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \left(\|y_0\|_{W^{2,p}} + \|F\|_{L^r(L^q)} \right) \quad (3.12)$$

donde

$$M(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = \exp \left[C \left(1 + T + (T + T^{1/2}) \|a\|_\infty + T \|B\|_\infty^2 \right) \right] \quad (3.13)$$

y C es una constante positiva que sólo depende de Ω . ■

Recordemos también una desigualdad global de tipo Carleman de [9] para el problema lineal

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi = F_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x, T) = \varphi_T(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

donde $F_0, F_i \in L^2(Q)$ ($1 \leq i \leq N$) y $\varphi_T \in L^2(\Omega)$. Se tiene:

Lema 3.6 Existe una función estrictamente positiva $\alpha_0 = \alpha_0(x)$ en $\bar{\Omega}$ y existen constantes positivas C_0 y σ_0 (que sólo dependen de Ω y \mathcal{O}), tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt \leq C_0 \left(s^3 \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt \right. \\ \left. + \iint_Q e^{-2s\alpha} |F_0|^2 dx dt + s^2 \sum_{i=1}^N \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2} (T-t)^{-2} |F_i|^2 dx dt \right) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

para cada $s \geq s_0 = \sigma_0(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$, siendo φ la solución de (3.14) asociada a $\varphi_T \in L^2(\Omega)$. En (3.15), la función $\alpha = \alpha(x, t)$ viene dada por

$$\alpha(x, t) = \frac{\alpha_0(x)}{t(T-t)}.$$

■

Observación 3.9 La desigualdad (3.15) está basada en una desigualdad de Carleman similar para la EDP del calor con el segundo miembro en $L^2(Q)$. La dependencia explícita de s_0 en T está analizada en [5] y es esencial en nuestro análisis.

■

Vamos a introducir el siguiente sistema (adjunto)

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_t q - \Delta q - \nabla \cdot (qB) + aq = 0 & \text{en } Q, \\ q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ q(x, T) = q_T(x) & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

donde $q_T \in L^2(\Omega)$. Razonando como en [5], podemos deducir de la desigualdad de Carleman (3.15) una desigualdad de observabilidad para (3.16):

Teorema 3.7 Para cada $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $q_T \in L^2(\Omega)$, se tiene:

$$\|q(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 \leq \exp \left[C \left(1 + \frac{1}{T} + T\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} + (1+T)\|B\|_\infty^2 \right) \right] \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} |q|^2 dx dt, \quad (3.17)$$

donde q es la solución del correspondiente sistema (3.16).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.7: Sean a , B y q_T dados y sea q la solución de (3.16). Veamos primero que

$$\iint_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |q|^2 dx dt \leq \exp \left[C \left(1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|B\|_\infty^2 \right) \right] \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} |q|^2 dx dt. \quad (3.18)$$

Podemos escribir (3.15) para $\varphi = q$. Obtenemos

$$\left\{ \begin{aligned} s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |q|^2 dx dt &\leq C_0 \left(s^3 \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |q|^2 dx dt \right. \\ &\left. + \iint_Q e^{-2s\alpha} |aq|^2 dx dt + s^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2} (T-t)^{-2} |Bq|^2 dx dt \right) \end{aligned} \right. \quad (3.19)$$

para cada $s \geq s_0$. Podemos estimar los términos de la derecha como sigue:

$$\iint_Q e^{-2s\alpha} |aq|^2 dx dt \leq 2^{-6} T^6 \|a\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |q|^2 dx dt,$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2} (T-t)^{-2} |Bq|^2 dx dt \leq 2^{-2} T^2 \|B\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |q|^2 dx dt.$$

Luego de (3.19) se deduce que

$$\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |q|^2 dx dt \leq C \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |q|^2 dx dt \quad (3.20)$$

siempre que

$$s \geq s_1 = \max \left(s_0, 2^{-4/3} C_0^{1/3} T^2 \|a\|_\infty^{2/3}, C_0 T^2 \|B\|_\infty^2 \right).$$

Por otra parte, no es difícil comprobar que

$$e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} \leq 2^6 T^{-6} \exp(-CsT^{-2}) \quad \forall (x, t) \in \bar{Q} \quad (3.21)$$

y

$$e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} \geq \left(\frac{16}{3} \right)^3 T^{-6} \exp(-CsT^{-2}) \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times [T/4, 3T/4] \quad (3.22)$$

para

$$s \geq s_2 = \max \left(s_1, 3T^2 \left(8 \min_{x \in \bar{\Omega}} \alpha_0(x) \right)^{-1} \right).$$

Analizando la estructura de las constantes s_1 y s_2 , vemos que $s_2 \leq s_3$, donde s_3 es de la forma

$$s_3 = \sigma_3(\Omega, \mathcal{O}) \left(T + T^2 + T^2 \|a\|_\infty^{2/3} + T^2 \|B\|_\infty^2 \right).$$

A partir de ahora, fijaremos la constante $s = s_3$. Teniendo en cuenta (3.21) y (3.22) y volviendo a la desigualdad (3.20) (escrita para $s = s_3$), deducimos que (3.18) es válida para toda solución q de (3.16).

Veamos ahora que

$$\|q(\cdot, T/4)\|_2^2 \leq \exp \left[C \left(\frac{1}{T} + T \|a\|_\infty + T \|B\|_\infty^2 \right) \right] \iint_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |q|^2 dx dt. \quad (3.23)$$

En efecto, multiplicando (3.16) por q e integrando en Ω , obtenemos

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |q|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla q|^2 dx = - \int_{\Omega} qB \cdot \nabla q dx - \int_{\Omega} a|q|^2 dx \quad \forall t \geq 0.$$

Luego,

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |q|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla q|^2 dx \leq (\|B\|_{\infty}^2 + 2\|a\|_{\infty}) \int_{\Omega} |q|^2 dx$$

y

$$\frac{d}{dt} \left(\exp \left((2\|a\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}^2)t \right) \int_{\Omega} |q|^2 dx \right) \geq 0 \quad (3.24)$$

para cada $t \geq 0$. Integrando esta desigualdad respecto de t en $[T/4, t]$, con $t \in [T/4, 3T/4]$, llegamos a que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |q(x, t)|^2 dx \geq \exp \left[(2\|a\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}^2) (T/4 - t) \right] \int_{\Omega} |q(x, T/4)|^2 dx \\ \geq \exp \left[- \left(\|a\|_{\infty} + \frac{1}{2} \|B\|_{\infty}^2 \right) T \right] \int_{\Omega} |q(x, T/4)|^2 dx \end{cases} \quad (3.25)$$

para cada $t \in [T/4, 3T/4]$. Integrando (3.25) de nuevo respecto de t , tenemos

$$\frac{T}{2} \exp \left[- \left(\|a\|_{\infty} + \frac{1}{2} \|B\|_{\infty}^2 \right) T \right] \int_{\Omega} |q(x, T/4)|^2 dx \leq \iint_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |q(x, t)|^2 dx dt, \quad (3.26)$$

de donde se deduce fácilmente (3.23).

Finalmente, vamos a probar que

$$\int_{\Omega} |q(x, 0)|^2 dx \leq \exp \left[CT \left(\|a\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}^2 \right) \right] \int_{\Omega} |q(x, T/4)|^2 dx. \quad (3.27)$$

Esto, junto con (3.23) y (3.18) implicará la desigualdad de observabilidad deseada (3.17).

Para probar (3.27), basta integrar (3.24) respecto de t en $[0, T/4]$. En efecto, llegamos a que

$$\int_{\Omega} |q(x, 0)|^2 dx \leq \exp \left[\left(2\|a\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}^2 \right) \frac{T}{4} \right] \int_{\Omega} |q(x, T/4)|^2 dx$$

y, por tanto, se tiene (3.27). Esto termina la demostración del teorema 3.7. ■

Para analizar la controlabilidad de problemas no lineales (3.1) y (3.2), necesitaremos una versión más fina de la desigualdad de observabilidad (3.17). Esto se consigue gracias al siguiente resultado:

Teorema 3.8 Para todo $a \in L^\infty(\Omega)$, $B \in L^\infty(\Omega)^N$ y $q_T \in L^2(\Omega)$, se tiene

$$\|q(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 \leq \exp [CK(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)] \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |q| dx dt \right)^2, \quad (3.28)$$

donde

$$K(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + T + (T + T^{1/2})\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} + (1 + T)\|B\|_\infty^2. \quad (3.29)$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.8: Sea \mathcal{O}' un abierto tal que $\mathcal{O}' \subset\subset \mathcal{O}$. Apliquemos el teorema 3.7 a \mathcal{O}' y en el intervalo de tiempo $[T/4, 3T/4]$. Deducimos que

$$\|q(\cdot, T/4)\|_{L^2}^2 \leq \exp [CK'(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)] \iint_{\mathcal{O}' \times (T/4, 3T/4)} |q|^2 dx dt, \quad (3.30)$$

donde q es solución de (3.16) asociada a $q_T \in L^2(\Omega)$. Aquí, $K'(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)$ viene dada por

$$K'(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + T\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} + (1 + T)\|B\|_\infty^2$$

y C es una nueva constante positiva que sólo depende de \mathcal{O}' (i.e. \mathcal{O}) y Ω . Usando (3.24), obtenemos

$$\int_{\Omega} |q(x, 0)|^2 dx \leq \exp \left[\frac{T}{4} (2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2) \right] \int_{\Omega} |q(x, T/4)|^2 dx.$$

Esto, junto con (3.30) implica que

$$\|q(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 \leq \exp [CK'(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)] \iint_{\mathcal{O}' \times (T/4, 3T/4)} |q|^2 dx dt. \quad (3.31)$$

Usaremos un resultado (de carácter técnico) relacionado con el efecto regularizante de la EDP del calor cuya demostración se hará más adelante:

Lema 3.9 Sean \mathcal{O}_i , T_i , r_i y γ_i ($i = 0, 1$) dados, con

$$\begin{cases} \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}_0 \subset\subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}, & 0 \leq T_1 < T_0 < T/2, & 1 \leq r_1 < r_0 < \infty, \\ 1 \leq \gamma_1 < \gamma_0 < \infty, & \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_0} + \frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces

$$\left(\int_{T_0}^{T-T_0} \left(\int_{\mathcal{O}_0} |q|^{r_0} dx \right)^{\frac{\gamma_0}{r_0}} dt \right)^{\frac{1}{\gamma_0}} \leq CT^\lambda H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \left(\int_{T_1}^{T-T_1} \left(\int_{\mathcal{O}_1} |q|^{r_1} dx \right)^{\frac{\gamma_1}{r_1}} dt \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \quad (3.32)$$

para cada $q_T \in L^2(\Omega)$, siendo $C = C(\Omega, \mathcal{O}_i, r_i, \gamma_i, N)$, $\lambda = \lambda(r_i, \gamma_i, N)$ y

$$H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = 1 + \frac{T^{1/2}}{T_0 - T_1} + T^{1/2}(1 + \|a\|_\infty) + (1 + T^{1/2})\|B\|_\infty. \quad (3.33)$$

Aplicaremos ahora este lema junto con (3.31). Para ello, pongamos $r_0 = \gamma_0 = 2$ y vamos a introducir los números γ_i y r_i , dados por las igualdades

$$\frac{1}{\gamma_i} = \frac{1}{r_i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2(N+2)} \quad 1 \leq i \leq I,$$

con $I \geq 0$ tal que $r_I > 1$ y $r_{I+1} \leq 1$. Por simplicidad, redefinamos también r_{I+1} y γ_{I+1} , poniendo $r_{I+1} = \gamma_{I+1} = 1$. Llamemos $\delta = T/4(I+1)$. De acuerdo con esto,

$$[T/4 - (I+1)\delta, 3T/4 + (I+1)\delta] = [0, T].$$

Vamos a introducir también una familia de abiertos \mathcal{O}_i tales que

$$\mathcal{O}' \subset\subset \mathcal{O}_1 \subset\subset \mathcal{O}_2 \subset\subset \dots \subset\subset \mathcal{O}_I \subset\subset \mathcal{O}_{I+1} = \mathcal{O}.$$

Para $0 \leq i \leq I$, podemos utilizar la desigualdad (3.32) con $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, T_0, T_1, r_0, r_1, \gamma_0$ y γ_1 sustituidos respectivamente por $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i+1}, T/4 - i\delta, T/4 - (i+1)\delta, r_i, r_{i+1}, \gamma_i$ y γ_{i+1} . En su conjunto, estas desigualdades implican

$$\left(\iint_{\mathcal{O}' \times (T/4, 3T/4)} |q|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq CT^\alpha H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)^\beta \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |q| dx dt \right), \quad (3.34)$$

donde $\beta = I+1$ y α es la suma de los exponentes λ_i . Combinando ahora las desigualdades (3.31) y (3.34), obtendremos (3.28). Esto completa la demostración del Teorema 3.8. ■

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.9: Sean ρ_1 y ρ_2 dos funciones en $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$ y $\mathcal{D}((T_1, T - T_1))$ respectivamente, tales que

$$\rho_1 \equiv 1 \text{ en } \mathcal{O}_0, \quad \rho_2 \equiv 1 \text{ en } (T_0, T - T_0)$$

y $0 \leq \rho_1, \rho_2 \leq 1$. Pongamos $\rho(x, t) = \rho_1(x)\rho_2(t)$ y $u = \rho q$, siendo q la solución de (3.16) asociada a $q_T \in L^2(\Omega)$. Claramente,

$$\text{supp } u \subset \mathcal{O}_1 \times (T_1, T - T_1)$$

y

$$\begin{cases} -\partial_t u - \Delta u = -a\rho q + \nabla \cdot (\rho q B) - (\partial_t \rho + \Delta \rho)q - 2\nabla \rho \cdot \nabla q - (\nabla \rho \cdot B)q & \text{en } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x, T) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Para mayor claridad de los cálculos, pongamos $\tilde{u}(x, t) = u(x, T - t)$ para $(x, t) \in Q$. De manera similar, introduzcamos \tilde{a} , \tilde{B} , $\tilde{\rho}$ y \tilde{q} . Tenemos entonces

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = -\tilde{a} \tilde{\rho} \tilde{q} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{q} \tilde{B}) - (\partial_t \tilde{\rho} + \Delta \tilde{\rho}) \tilde{q} - 2 \nabla \tilde{\rho} \cdot \nabla \tilde{q} - (\nabla \tilde{\rho} \cdot \tilde{B}) \tilde{q} & \text{en } Q, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \tilde{u}(x, 0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Denotemos por $\{S(t), t \geq 0\}$ el semigrupo generado por la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet. Entonces se tiene

$$\tilde{u}(\cdot, t) = \int_0^t S(t-s) \left[-\tilde{a} \tilde{\rho} \tilde{q} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{q} \tilde{B}) - (\partial_t \tilde{\rho} + \Delta \tilde{\rho}) \tilde{q} - 2 \nabla \tilde{\rho} \cdot \nabla \tilde{q} - (\nabla \tilde{\rho} \cdot \tilde{B}) \tilde{q} \right] (\cdot, s) ds, \quad (3.35)$$

donde la integral puede ser interpretada, por ejemplo, en $L^{r_0}(\Omega)$.

Gracias al efecto regularizante de la ecuación del calor, tomando normas en $L^{r_0}(\Omega)$ en (3.35), obtenemos lo siguiente para cada $t \in (T_1, T - T_1)$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^{r_0}} \leq C & \left[\left(1 + \frac{1}{T_0 - T_1} + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty \right) \int_{T_1}^t (t-s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)} \|\tilde{q}(\cdot, s)\|_{L^{r_1}(\mathcal{O}_1)} ds \right. \\ & \left. + (\|B\|_\infty + 1) \int_{T_1}^t (t-s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{1}{2}} \|\tilde{q}(\cdot, s)\|_{L^{r_1}(\mathcal{O}_1)} ds \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aquí, C es una constante positiva que sólo depende de \mathcal{O}_0 y \mathcal{O}_1 . Esto conduce a la desigualdad

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^{r_0}} \leq CH(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \int_{T_1}^t (t-s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{1}{2}} \|\tilde{q}(\cdot, s)\|_{L^{r_1}(\mathcal{O}_1)} ds \quad (3.37)$$

para cada $t \in (T_1, T - T_1)$, donde $H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)$ es como en (3.33). En virtud de la hipótesis

$$\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_0} < \frac{1}{2},$$

podemos aplicar la desigualdad de Young en (3.37) y acotar la norma de \tilde{u} en $L^{r_0}(0, T; L^{r_0}(\Omega))$ como sigue:

$$\left(\int_{T_1}^{T-T_1} \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^{r_0}}^{r_0} dt \right)^{1/r_0} \leq CT^\lambda H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \left(\int_{T_1}^{T-T_1} \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^{r_1}(\mathcal{O}_1)}^{r_1} dt \right)^{1/r_1}. \quad (3.38)$$

Aquí, C es una nueva constante positiva que sólo depende de Ω , \mathcal{O}_i , r_i , γ_i y N ; el exponente λ es

$$\lambda = - \left[\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_0} \right] + \frac{1}{2}.$$

La desigualdad (3.32) se obtiene directamente de (3.38). Esto termina la demostración del lema 3.9.

■

Observación 3.10 Una fácil consecuencia del teorema 3.8 y (3.28) es que podemos deducir para cada $r \in (1, \infty)$ una desigualdad de observabilidad en $L^r(\mathcal{O} \times (0, T))$:

$$\|q(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 \leq \exp [C_r K(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)] \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |q|^r dx dt \right)^{\frac{2}{r}} \quad (3.39)$$

cualesquiera que sean $a \in L^\infty(\Omega)$, $B \in L^\infty(\Omega)^N$ y $q_T \in L^2(\Omega)$. En (3.39), $K(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)$ viene dada por (3.29) y C_r sólo depende de Ω , \mathcal{O} y r .

■

3.3 Demostración de la controlabilidad exacta a cero

Esta sección estará dedicada a la demostración del teorema 3.1. Usando el teorema 3.8, probaremos primero un resultado de controlabilidad exacta a cero para un sistema parabólico similar lineal con controles en $L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$. Después, aplicaremos un argumento de punto fijo para obtener el resultado deseado. La estructura de la demostración (la controlabilidad de sistemas lineales análogos + un argumento de punto fijo) es general. Fue introducida en [12], en el contexto de la controlabilidad para la ecuación del ondas semi-lineal con control ejercido a través de la frontera. Para otros resultados de controlabilidad probados de manera similar, véanse por ejemplo [3] y [7].

3.3.1 Controlabilidad exacta a cero para problemas lineales

Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = v1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.40)$$

donde $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $y_0 \in L^2(\Omega)$ son dados. Se tiene lo siguiente:

Teorema 3.10 *Supongamos que $T > 0$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe un control $\hat{v} \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución de (3.40) verifica*

$$\hat{y}(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.41)$$

Además, \hat{v} puede elegirse tal que es cierta la estimación

$$\|\hat{v}\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq \exp [C K(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)] \|y_0\|_{L^2}. \quad (3.42)$$

donde $K(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)$ viene dada por (3.29).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.10 Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos el funcional J_ε , dado por

$$J_\varepsilon(q_T) = \frac{1}{2} \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |q| dx dt \right)^2 + \varepsilon \|q_T\|_{L^2} + \int_{\Omega} q(x, 0) y_0(x) dx \quad \forall q_T \in L^2(\Omega), \quad (3.43)$$

donde q es la solución de (3.16) asociada a $q_T \in L^2(\Omega)$. Es fácil ver que J_ε es un funcional continuo y estrictamente convexo en $L^2(\Omega)$. Además, de (3.20), se deduce inmediatamente la siguiente propiedad de continuación única para (3.16): *Si $q = 0$ en $\mathcal{O} \times (0, T)$, entonces $q \equiv 0$.* Luego, razonando como en [3], obtenemos que

$$\liminf_{\|q_T\|_{L^2} \rightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(q_T)}{\|q_T\|_{L^2}} \geq \varepsilon$$

y, además que, J_ε alcanza su mínimo en un único punto $\hat{q}_{T, \varepsilon} \in L^2(\Omega)$.

Sea \hat{q}_ε la solución de (3.16) asociada a $\hat{q}_{T, \varepsilon}$. Se prueba en [3] que, tomando en (3.40) $v = \hat{v}_\varepsilon$, donde

$$\hat{v}_\varepsilon = (\text{sgn } \hat{q}_\varepsilon) \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\hat{q}_\varepsilon| dx dt \right) 1_{\mathcal{O}}, \quad (3.44)$$

la solución asociada \hat{y}_ε verifica

$$\|\hat{y}_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2} \leq \varepsilon. \quad (3.45)$$

No es difícil ver que

$$\|\hat{v}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} = \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\hat{q}_\varepsilon| \leq \exp [C K (T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)] \|y_0\|_{L^2} \quad (3.46)$$

para cada $\varepsilon > 0$. En efecto, el hecho de que sea

$$\|\hat{v}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} = \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\hat{q}_\varepsilon| dx dt$$

es consecuencia de (3.44). Por otra parte, como

$$J_\varepsilon(\hat{q}_{T, \varepsilon}) \leq J_\varepsilon(0) = 0,$$

teniendo en cuenta (3.43), deducimos que

$$\frac{1}{2} \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\hat{q}_\varepsilon| dx dt \right)^2 \leq - \int_{\Omega} \hat{q}_\varepsilon(x, 0) y_0(x) dx \leq \|\hat{q}_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2} \|y_0\|_{L^2}.$$

En virtud de (3.39), tenemos (3.46).

Por ser \hat{v}_ε uniformemente acotado en $L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$, para (al menos) una subsucesión podemos escribir

$$\hat{v}_\varepsilon \rightarrow \hat{v} \quad \text{en } L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))\text{-débil*}, \quad (3.47)$$

donde $\hat{v} \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ y verifica (3.42). Por tanto,

$$\hat{y}_\varepsilon(T) \rightarrow \hat{y}(T) \quad \text{en } L^2(\Omega),$$

siendo \hat{y} la solución de (3.40) asociada a \hat{v} . Como sabemos que se tiene (3.45) para cada $\varepsilon > 0$, también tenemos (3.41). Esto termina la demostración. ■

3.3.2 Demostración del teorema 3.1

Estamos ya preparados para demostrar el teorema 3.1. En primer lugar, observemos que podemos suponer en este teorema que $y_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $p > N$. En efecto, basta tomar $v = 0$ para $t \in [0, \delta]$ y trabajar en el intervalo $[\delta, T]$, considerando $y(\cdot, \delta)$ como el dato inicial. Como mencionábamos antes, aplicaremos un argumento de punto fijo. Por comodidad, se supondrá en una primera etapa que g y G son continuas.

El caso en el que g y G son continuas

Sea y_0 dado en $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $p > N$. Supongamos que

$$g \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N), \quad G \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)^N \quad (3.48)$$

y verifican (3.6). Entonces es claro que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|g(s, p)|^{2/3} + |G(s, p)|^2 \leq C_\varepsilon + \varepsilon \log(1 + |s| + |p|) \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \quad (3.49)$$

Pongamos $Z = C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ y sea $R > 0$ una constante cuyo valor se determinará más adelante. Usaremos las funciones truncantes $\mathbf{T}_R : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $\mathbf{T}_R : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$, que vienen dadas como sigue:

$$\mathbf{T}_R(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq R, \\ R \operatorname{sgn}(s) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\mathbf{T}_R(p) = (\mathbf{T}_R(p_i))_{1 \leq i \leq N} \quad \forall p \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada $z \in Z$, consideremos el correspondiente sistema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + G(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \cdot \nabla y + g(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) y = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3.50)$$

Asociaremos a z una familia $A(z)$ de controles L^∞ que conducirán la solución a cero. Obsérvese que (3.50) es de la forma (3.40) con $a = a_z$ y $B = B_z$, donde

$$a_z = g(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \in L^\infty(Q), \quad B_z = G(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \in L^\infty(Q)^N. \quad (3.51)$$

En consecuencia, podemos aplicar el teorema 3.10 a (3.50). De hecho, aplicaremos este resultado en un intervalo de tiempo adecuado (eventualmente pequeño) $(0, T_z)$, siendo

$$T_z = \min \left\{ T, \|g(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))\|_\infty^{-2/3}, \|g(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))\|_\infty^{-1/3} \right\}. \quad (3.52)$$

Esto es la clave de nuestra demostración, que proporcionará estimaciones necesarias. Del teorema 3.10, deducimos (directamente) la existencia de un control $\hat{v}_z \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T_z))$ tal que la solución de (3.50) en $\Omega \times (0, T_z)$ con $v = \hat{v}_z$ verifica

$$\hat{y}_z(x, T_z) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

y, además,

$$\|\widehat{v}_z\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T_z))} \leq \exp [C K(T_z, \|a_z\|_\infty, \|B_z\|_\infty)] \|y_0\|_{L^2}$$

(K viene dada por (3.29)).

Sean \widetilde{v}_z y \widetilde{y}_z las extensiones por cero de \widehat{v}_z y \widehat{y}_z a todo el cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$. Es claro que \widetilde{y}_z es la solución de (3.50) asociada a \widetilde{v}_z y que

$$\widetilde{y}_z(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.53)$$

De la definición de T_z , obtenemos que

$$\|\widetilde{v}_z\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq \exp \left[C \left(1 + \|a_z\|_\infty^{2/3} + \|B_z\|_\infty^2 \right) \right] \|y_0\|_{L^2}, \quad (3.54)$$

donde la nueva constante positiva C sólo depende Ω , \mathcal{O} y T .

Por otra parte, de (3.48) y el lema 3.5, deducimos que

$$\widehat{y}_z \in C^0([0, T_z]; W^{1, \infty}(\Omega))$$

y

$$\|\widehat{y}_z\|_{C^0([0, T_z]; W^{1, \infty}(\Omega))} \leq M(\Omega, T_z, \|a_z\|_\infty, \|B_z\|_\infty) \left(\|y_0\|_{W^{2, p}} + \|\widehat{v}_z\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T_z))} \right)$$

(M viene dada por (3.13)). Teniendo en cuenta (una vez más) la definición de T_z , la estimación (3.54) y la definición de \widetilde{y}_z , llegamos a que $\widetilde{y}_z \in Z$ y

$$\|\widetilde{y}_z\|_Z \leq \exp \left[C \left(1 + \|a_z\|_\infty^{2/3} + \|B_z\|_\infty^2 \right) \right] \|y_0\|_{W^{2, p}} \quad (3.55)$$

donde (de nuevo) $C = C(\Omega, \mathcal{O}, T)$.

Las estimaciones (3.54) y (3.55) pueden ser escritas en la forma

$$\|\widetilde{v}_z\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq C_1(\Omega, \mathcal{O}, T, z) \|y_0\|_{L^2} \quad (3.56)$$

y

$$\|\widetilde{y}_z\|_Z \leq C_1(\Omega, \mathcal{O}, T, z) \|y_0\|_{W^{2, p}}, \quad (3.57)$$

siendo

$$C_1(\Omega, \mathcal{O}, T, z) = \exp \left[C \left(1 + \|g(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))\|_\infty^{2/3} + \|G(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))\|_\infty^2 \right) \right]. \quad (3.58)$$

Para cada $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$, sea $y_v \in Z$ la solución de (3.50) en Q con segundo miembro v (para simplificar la notación, omitiremos la dependencia de z). Teniendo en cuenta esta notación, pongamos

$$A(z) = \left\{ v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T)) : y_v(T) = 0, \quad \|v\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq C_1(\Omega, \mathcal{O}, T, z) \|y_0\|_{L^2} \right\}$$

y

$$\Lambda(z) = \{ y_v : v \in A(z), \quad \|y_v\|_Z \leq C_1(\Omega, \mathcal{O}, T, z) \|y_0\|_{W^{2, p}} \} \quad (3.59)$$

para cada $z \in Z$. De esta forma, podemos introducir una aplicación multívoca sobre Z

$$z \mapsto \Lambda(z).$$

Probaremos que esta aplicación posee al menos un punto fijo y . También probaremos que, para un cierto R , todo punto fijo de Λ verifica

$$\|y\|_Z \leq R. \quad (3.60)$$

Evidentemente, esto implicará la existencia de un control $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que (3.1) posee una solución verificando (3.3).

Veamos que el teorema de punto fijo de Kakutani es aplicable a Λ . En primer lugar, de (3.56) y (3.57), deducimos que para cada $z \in Z$, $\Lambda(z)$ es no vacío. Más aún, es fácil comprobar que $\Lambda(z)$ es un convexo cerrado y uniformemente acotado de Z . Además, debido a la hipótesis de regularidad sobre y_0 y al lema 3.5, tenemos (3.11) (aquí $\beta = p$) y la estimación

$$\|y\|_{L^\infty(W^{2,p})} + \|\partial_t y\|_{L^\infty(L^p)} \leq C(\Omega, \mathcal{O}, T, R, \|y_0\|_{W^{2,p}}),$$

(donde $C(\Omega, \mathcal{O}, T, R, \|y_0\|_{W^{2,p}})$ es independiente de z) para cada $y \in \Lambda(z)$. Como $p > N$, podemos aplicar resultados bien conocidos de compacidad y concluir que existe un compacto $K \subset Z$ (que depende de R) tal que

$$\Lambda(z) \subset K \quad \forall z \in Z \quad (3.61)$$

(por ejemplo, ver [11]).

Finalmente, vamos a comprobar que $z \mapsto \Lambda(z)$ es hemicontinua superiormente, es decir que la función de la variable real

$$z \in Z \mapsto \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle$$

es semicontinua superiormente para cada forma lineal acotada $\mu \in Z'$. Para ello, veamos que

$$B_{\alpha, \mu} = \{z \in Z : \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle \geq \alpha\}$$

es un cerrado de Z para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $\mu \in Z'$. Sea entonces $\{z_n\}$ una sucesión en $B_{\alpha, \mu}$ tal que

$$z_n \rightarrow z \quad \text{en } Z.$$

Nuestro objetivo es probar que $z \in B_{\alpha, \mu}$. Gracias a la hipótesis de continuidad sobre g y G , tenemos

$$g(\mathbf{T}_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)) \rightarrow g(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \quad \text{en } L^\infty(Q),$$

y

$$G(\mathbf{T}_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)) \rightarrow G(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \quad \text{en } L^\infty(Q)^N.$$

Por ser todos los $\Lambda(z_n)$ compactos y verificar (3.61), deducimos que

$$\alpha \leq \sup_{y \in \Lambda(z_n)} \langle \mu, y \rangle = \langle \mu, y_n \rangle \quad (3.62)$$

para un cierto $y_n \in \Lambda(z_n)$. Gracias a las definiciones de $\Lambda(z)$ y $A(z)$, debe existir $v_n \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que

$$\begin{cases} \partial_t y_n - \Delta y_n + G(\mathbf{T}_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)) \cdot \nabla y_n + g(\mathbf{T}_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)) y_n = v_n 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y_n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_n(x, 0) = y_0(x), \quad y_n(x, T) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Además,

$$\|v_n\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq C_1(\Omega, \mathcal{O}, T, z_n) \|y_0\|_{L^2}$$

y

$$\|y_n\|_Z \leq C_1(\Omega, \mathcal{O}, T, z_n) \|y_0\|_{W^{2,p}},$$

donde y_n (resp. v_n) está uniformemente acotado en Z (resp. $L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$). Por tanto, se puede afirmar lo siguiente para al menos una subsucesión:

$$y_n \rightarrow \hat{y} \quad \text{en } Z$$

(recuérdese que (3.61) es cierto) y

$$v_n \rightarrow \hat{v} \quad \text{en } L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))\text{-débil*}.$$

No es difícil ver que

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y} - \Delta \hat{y} + G(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \cdot \nabla \hat{y} + g(\mathbf{T}_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \hat{y} = \hat{v} 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \hat{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \hat{y}(x, 0) = y_0(x), \quad \hat{y}(x, T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

es decir que $\hat{v} \in A(z)$ y $\hat{y} \in \Lambda(z)$. Podemos ahora pasar al límite en (3.62) y obtener

$$\alpha \leq \langle \mu, \hat{y} \rangle \leq \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle,$$

lo que significa que $z \in B_{\alpha, \mu}$. Esto prueba que $z \mapsto \Lambda(z)$ es hemicontinua superiormente.

En consecuencia, para cada $R > 0$ fijo, el teorema de Kakutani es aplicable y asegura la existencia de un punto fijo de Λ . Como hemos dicho antes, finalizaremos la demostración mostrando que podemos elegir $R > 0$ de tal forma que todo punto fijo de Λ verifica (3.60). Es justamente aquí, cuando (3.6) (de hecho (3.49)) será utilizado.

Sea entonces y un punto fijo de Λ asociado al control $v \in A(y)$. Entonces (3.57), (3.58) y (3.49) conducen a la estimación

$$\begin{aligned} \|y\|_Z &\leq \exp\left(C\left(1 + \|g(\mathbf{T}_R(y), \mathbf{T}_R(\nabla y))\|_\infty^{2/3} + \|G(\mathbf{T}_R(y), \mathbf{T}_R(\nabla y))\|_\infty^2\right)\right) \|y_0\|_{W^{2,p}} \\ &\leq \exp\left(C(1 + C_\varepsilon + \varepsilon \log(1 + 2R))\right) \|y_0\|_{W^{2,p}} \\ &= \exp\left(C(1 + C_\varepsilon)\right) (1 + 2R)^{C_\varepsilon} \|y_0\|_{W^{2,p}} \end{aligned}$$

donde $C = C(\Omega, \mathcal{O}, T)$. Tomando $\varepsilon = 1/(2C)$, llegamos a que

$$\|y\|_Z \leq C(1 + 2R)^{1/2} \|y_0\|_{W^{2,p}},$$

de donde (3.60) se verifica si R es suficientemente grande (dependiendo de $\Omega, \mathcal{O}, T, g$ y G). Tenemos probado entonces el teorema 3.1 en el caso de los datos regulares. ■

El caso general

Supongamos ahora que f es una función localmente Lipschitziana verificando (3.5) (con $f(0, 0) = 0$) y la hipótesis (3.6). Sea $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ tal que $\rho \geq 0$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $\text{supp } \rho \subset \overline{B}(0, 1)$ y

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N} \rho(s, p) ds dp = 1.$$

Consideremos las funciones ρ_n, g_n y G_n ($n \geq 1$), siendo

$$\rho_n(s, p) = \frac{1}{n^{N+1}} \rho(ns, np) \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

$$g_n = \rho_n * g, \quad G_n = \rho_n * G.$$

Entonces no es difícil comprobar que se verifican las siguientes propiedades sobre g_n y G_n :

1. $g_n \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ y $G_n \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)^N \quad \forall n \geq 1$.
2. Si ponemos $f_n(s, p) = g_n(s, p)s + G_n(s, p) \cdot p$ para cada $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, entonces

$$f_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

3. Para cada $M > 0$, existe $C(M) > 0$ tal que

$$\sup_{|(s,p)| \leq M} (|g_n(s, p)| + |G_n(s, p)|) \leq C(M) \quad \forall n \geq 1.$$

4. Las funciones g_n y G_n verifican (3.6) uniformemente en n , es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\begin{cases} |g_n(s, p)| \leq \varepsilon \log^{3/2}(1 + |s| + |p|), \\ |G_n(s, p)| \leq \varepsilon \log^{1/2}(1 + |s| + |p|), \end{cases} \quad (3.63)$$

siempre que $|(s, p)| \geq M(\varepsilon)$ para cada $n \geq 1$.

Para cada n , podemos razonar como antes (en el caso de los datos regulares) y encontrar un control $v_n \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y_n - \Delta y_n + f_n(y_n, \nabla y_n) = v_n 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y_n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_n(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.64)$$

posee al menos una solución $y_n \in Z$ que verifica

$$y_n(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Gracias a las propiedades verificadas por g_n y G_n y a las estimaciones obtenidas anteriormente, deducimos que

$$\|v_n\|_{L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq C, \quad \|y_n\|_Z \leq C \quad \forall n \geq 1.$$

De hecho, el lema 3.5 permite escribir que $y_n \in K$ para cada n , siendo K un compacto fijo de Z . Por tanto, podemos suponer que, al menos para una subsucesión que,

$$v_n \rightarrow v \quad \text{en } L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))\text{-débil*},$$

$$y_n \rightarrow y \quad \text{en } Z.$$

En consecuencia, pasando al límite en (3.64), obtenemos un control $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que (3.1) posee una solución y que verifica (3.3). Con ello, terminamos la demostración del teorema 3.1. ■

Observación 3.11 Analizando la demostración del teorema 3.1, deducimos que el resultado de controlabilidad exacta a cero continúa siendo válido si cambiamos (3.6) por la siguiente hipótesis:

$$\limsup_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} \leq l_1 < \infty, \quad \limsup_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1 + |s| + |p|)} \leq l_2 < \infty,$$

donde l_1 y l_2 son positivos y suficientemente pequeños (que sólo dependen de Ω y \mathcal{O}). ■

Observación 3.12 En el teorema 1.1, es posible considerar términos no lineales más generales de la forma $f(x, t; s, p)$, con $(x, t) \in Q$ y $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Las hipótesis sobre f tienen que ser en este caso las siguientes:

1. $f(x, t; 0, 0) = 0 \quad \forall (x, t) \in Q,$

2. $f(\cdot; s, p) \in L^\infty(Q) \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,
3. $f(x, t; \cdot)$ es localmente Lipschitziana para (x, t) c.p.d. en Q , con constantes de Lipschitz independientes de (x, t) en los acotados de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,
4. $f(\cdot; s, p) = g(\cdot; s, p)s + G(\cdot; s, p) \cdot p$ para cada $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, con

$$\lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|g(x, t; s, p)|}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} = 0, \quad \lim_{|(s,p)| \rightarrow \infty} \frac{|G(x, t; s, p)|}{\log^{1/2}(1 + |s| + |p|)} = 0$$

uniformemente en $(x, t) \in Q$.

■

Observación 3.13 Adaptando los argumentos utilizados en la demostración del teorema 3.1, podemos deducir un resultado local de controlabilidad nula para (3.1) con el término no lineal $f(s, p)$ verificando $f(0, 0) = 0$. Más precisamente, si f es dada, existe $\delta = \delta(\Omega, \mathcal{O}, T, f) > 0$, tal que, para cada $y_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($p > N$) con $\|y_0\|_{W^{2,p}} \leq \delta$, el control $v \in L^r(\mathcal{O} \times (0, T))$ puede ser hallado de manera que el correspondiente problema posee una única solución $y \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ que verifica

$$y(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

■

3.4 Demostración de la controlabilidad aproximada

En esta sección probaremos el teorema 3.2. Fijemos $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $y_d \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $p > N$ (por ejemplo). Naturalmente, será suficiente considerar el dato final en $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, por ser este espacio denso en $L^2(\Omega)$.

Recuérdese que estamos en el rango de las no linealidades para las cuales puede haber explosión. Por esta razón, tendremos que suponer que existe una solución global $y^* \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. Esta hipótesis, junto con (3.9), implicarán la deseada propiedad de controlabilidad aproximada. Haremos la demostración en varias etapas, comenzando por el resultado de controlabilidad exacta a las trayectorias que están en $C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$.

Lema 3.11 *Supongamos que se verifican las hipótesis sobre f del teorema 3.2. Sea y^* una solución de (3.1) en $C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ asociada a los datos*

$$y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad v^* \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T)).$$

Existe un control $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ y un estado asociado $y \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ tal que

$$y(x, T) = y^*(x, T) \quad \text{en } \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.11: Pongamos $y = y^* + w$. Buscaremos un control $u \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que la solución de

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + F(x, t; w, \nabla w) = u 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = y_0 - y_0^* & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (3.65)$$

verifica

$$w(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Aquí, F viene dada por

$$F(x, t; s, p) = f(y^*(x, t) + s, \nabla y^*(x, t) + p) - f(y^*(x, t), \nabla y^*(x, t)),$$

para cada $(x, t) \in Q$ y $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. La demostración del lema estará terminada si somos capaces de comprobar que tal control u existe.

Obsérvese que

$$F(x, t; s, p) = \tilde{g}(x, t; s, p)s + \tilde{G}(x, t; s, p) \cdot p,$$

donde

$$\tilde{g}(x, t; s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(y^*(x, t) + \lambda s, \nabla y^*(x, t) + \lambda p) d\lambda$$

y

$$\tilde{G}_i(x, t; s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(y^*(x, t) + \lambda s, \nabla y^*(x, t) + \lambda p) d\lambda \quad \text{para } 1 \leq i \leq N.$$

Entonces, de (3.9) y, gracias a que $y^* \in C^0([0, T]; W^{1, \infty}(\Omega))$, es claro que F verifica las hipótesis de la Observación 3.12. Esto ya es suficiente para asegurar que u existe y concluir la demostración. ■

Ahora, razonemos como sigue:

- Existe $\delta_0 > 0$ que sólo depende de Ω , y_d y f , tal que, para cada $\delta \in (0, \delta_0)$, el sistema

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + f(w, \nabla w) = 0 & \text{en } \Omega \times (T - \delta, T), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (T - \delta, T), \\ w(x, T - \delta) = y_d(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.66)$$

tiene exactamente una solución $w \in C^0([T - \delta, T]; W^{1, \infty}(\Omega))$, que también verifica

$$w(\cdot, T) \in W^{2, p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.67)$$

Evidentemente, podemos asociarle a ε un parámetro $\delta \in (0, \delta_0)$ (suficientemente pequeño) tal que, para la correspondiente solución w de (3.66), se tiene:

$$\|w(\cdot, T) - y_d\|_{L^2} \leq \varepsilon. \quad (3.68)$$

Fijemos δ y w verificando (3.66), (3.67) y (3.68).

- Existe $v_1 \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T - \delta))$ tal que el correspondiente sistema

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \Delta y_1 + f(y_1, \nabla y_1) = v_1 1_{\mathcal{O}} & \text{en } \Omega \times (0, T - \delta), \\ y_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T - \delta), \\ y_1(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (3.69)$$

posee exactamente una solución $y_1 \in C^0([0, T - \delta]; W^{1,\infty}(\Omega))$, con

$$y_1(x, T - \delta) = y^*(x, T - \delta) \quad \text{en } \Omega.$$

Esto es consecuencia del lema 3.11.

- De (3.68), obtenemos que, en $[T - \delta, T]$, nuestra tarea consiste en conducir el sistema exactamente del estado $y^*(\cdot, T - \delta)$ al estado $w(\cdot, T)$. Pero podemos usar de nuevo el lema 3.11 y deducir la existencia de un control $v_2 \in L^\infty(\mathcal{O} \times (T - \delta, T))$ tal que el correspondiente sistema

$$\begin{cases} \partial_t y_2 - \Delta y_2 + f(y_2, \nabla y_2) = v_2 1_{\mathcal{O}} & \text{en } \Omega \times (T - \delta, T), \\ y_2 = 0 & \text{sobre } \partial \times (T - \delta, T), \\ y_2(x, T - \delta) = y^*(x, T - \delta) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (3.70)$$

admite una solución $y_2 \in C^0([T - \delta, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ verificando

$$y_2(x, T) = w(x, T) \quad \text{en } \Omega.$$

Pongamos ahora

$$v = \begin{cases} v_1 & \text{en } [0, T - \delta], \\ v_2 & \text{en } [T - \delta, T]. \end{cases}$$

El estado asociado es

$$y = \begin{cases} y_1 & \text{en } [0, T - \delta], \\ y_2 & \text{en } [T - \delta, T]. \end{cases}$$

En consecuencia, hemos encontrado un control $v \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución del sistema (3.1) posee una solución y que verifica (3.4). Esto finaliza la demostración del teorema 3.2.

3.5 Idea de la demostración del resultado de controlabilidad con control frontera

En esta sección daremos una breve idea de las demostraciones de los teoremas 3.3 y 3.4. Ambos resultados se deducen de los resultados ya demostrados en el caso de control distribuido.

Por ejemplo, vamos a referirnos a la prueba del teorema 3.3. Supongamos, por simplicidad, que $y_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap V$ para un cierto $p > N$. Recordemos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitziana y verifica $f(0,0) = 0$ y (3.6). Sea \mathcal{G} un abierto acotado de frontera $\partial\mathcal{G}$ de clase C^2 tal que $\Omega \subset \mathcal{G}$ y $\overline{\partial\Omega} \cap \overline{\mathcal{G}} \subset \gamma$. Sea \mathcal{O} un subconjunto abierto de $\mathcal{G} \setminus \overline{\Omega}$. Existe una función $\tilde{y}_0 \in W^{2,p}(\mathcal{G}) \cap H_0^1(\mathcal{G})$ tal que $\tilde{y}_0 = y_0$ en Ω y

$$\|\tilde{y}_0\|_{W^{2,p}(\mathcal{G})} \leq C \|y_0\|_{W^{2,p}(\Omega)},$$

donde C es una constante positiva que sólo depende de Ω y \mathcal{G} .

Sea $\tilde{v} \in L^\infty(\mathcal{O} \times (0, T))$ un control, dado por el teorema 3.1, tal que

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{y} - \Delta \tilde{y} + f(\tilde{y}, \nabla \tilde{y}) = \tilde{v} 1_{\mathcal{O}} & \text{en } \mathcal{G} \times (0, T), \\ \tilde{y} = 0 & \text{sorbe } \partial\mathcal{G} \times (0, T), \\ \tilde{y}(x, 0) = \tilde{y}_0(x) & \text{en } \mathcal{G}, \end{cases}$$

posee exactamente una solución $\tilde{y} \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\mathcal{G}))$ con

$$\tilde{y}(x, T) = 0 \quad \text{en } \mathcal{G}.$$

Llamemos v la traza de \tilde{y} sobre $\gamma \times (0, T)$. Entonces $v \in L^\infty(\gamma \times (0, T))$ y la restricción a $\Omega \times (0, T)$ de \tilde{y} resuelve el correspondiente sistema (3.2). Esto prueba el teorema 3.3.

Para demostrar el teorema 3.4, basta razonar de forma análoga. ■

Bibliografía

- [1] S. Anita and V. Barbu, *Null controllability of nonlinear convective heat equation*, ESAIM: COCV, **5** (2000), 157–173.
- [2] V. Barbu, *Exact controllability of the superlinear heat equation*, to appear in Appl. Math. Optim.
- [3] C. Fabre, J.P. Puel and E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125A** (1995), 31–61.
- [4] E. Fernández-Cara, *Null controllability of the semilinear heat equation*, ESAIM: COCV, **2** (1997), 87–107.
- [5] E. Fernández-Cara and E. Zuazua, E. Fernández-Cara and E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case*, Adv. Differential Equations **5** (2000), no. 4-6, 465–514.

- [6] E. Fernández-Cara and E. Zuazua,
 (a) *Controllability of blowing up semilinear parabolic equations*, C.R. Acad. Sci. Paris, **330**, Série I, (2000), 199–204.
 (b) *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations*, to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.
- [7] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes #34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [8] O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Mat. Sb. **186**, N. 6, (1995), 102–132.
- [9] O. Yu. Imanuvilov and M. Yamamoto, *On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, to appear.
- [10] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov and N.N. Uraltzeva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Nauka Moscow, 1967.
- [11] J. Simon, *Compact sets in the spaces $L^p(0, T; B)$* , Annali di Matematica Pura ed Applicata, **IV**, Vol. CXLVI (1987), 65–96.
- [12] E. Zuazua, *Exact boundary controllability for the semilinear wave equation*, in “Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications”, Vol. X, H. Brezis and J.L. Lions eds., Pitman, 1991, 357–391.
- [13] E. Zuazua, *Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities*, Control and Cybernetics, vol. **28** (1999), No. 3.

Capítulo 4

LA EDP DEL CALOR CON CONDICIONES DE TIPO FOURIER NO LINEALES

4.1 El problema considerado. Existencia y unicidad de solución

En este Capítulo, Ω es de nuevo un abierto conexo acotado de \mathbb{R}^N de frontera $\partial\Omega$ regular. Consideraremos con frecuencia los espacios de Hilbert $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$. La norma y el producto escalar en $L^2(\Omega)$ (resp. en $H^1(\Omega)$) serán denotados $|\cdot|$ y (\cdot, \cdot) (resp. $\|\cdot\|$ y $((\cdot, \cdot))$).

Consideramos la ecuación del calor con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q = \Omega \times (0, T), \\ \partial_n y + f(y) = 0 & \text{sobre } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ son dados y $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función globalmente Lipschitziana. Nuestro primer objetivo es analizar la existencia y unicidad de solución débil de (4.1). El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 4.1 – *Supongamos que $y_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ y $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitziana. Entonces existe una única solución y de (4.1) que verifica $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , f , $|y_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que*

$$\|y\|_{L^\infty(L^2)} + \|y\|_{L^2(H^1)} + \|\partial_t y\|_{L^2(H^{-1})} \leq C. \quad (4.2)$$

El sentido en que y es solución de (4.1) quedará explícito en la demostración. Para la demostración del teorema 4.1, véase la subsección 4.1.2. Necesitaremos con anterioridad

algunos resultados previos para problemas lineales análogos a (4.1), que serán analizados en la subsección 4.1.1.

4.1.1 Un problema lineal

Consideramos de momento el problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y + a(x, t)y = -f(0) & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

donde $a \in L^\infty(\Sigma)$. Tenemos el siguiente resultado de existencia, unicidad y dependencia continua respecto de los datos:

Lema 4.2 – *Supongamos que $y_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ y $a \in L^\infty(\Sigma)$. Entonces existe una única solución y de (4.3) que verifica $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , $|f(0)|$, $\|a\|_{L^\infty(\Sigma)}$, $|y_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$, tal que*

$$\|y\|_{L^\infty(L^2)} + \|y\|_{L^2(H^1)} + \|\partial_t y\|_{L^2(H^{-1})} \leq C. \quad (4.4)$$

De nuevo, el sentido en que y es solución de (4.3) será explicado en la demostración.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.2: Para la demostración, aplicaremos el método de Galerkin. En primer lugar, tengamos en cuenta que la formulación débil habitual del problema (4.3) conduce a una forma bilineal que no es coerciva en $H^1(\Omega)$. Para evitar esta dificultad, se introduce el cambio de variable $z = e^{-\lambda t}y$. De este modo, la formulación débil escrita para z contiene una forma bilineal que puede ser coerciva en $H^1(\Omega)$ (ver más adelante). Gracias a este cambio de variable, todo lo que obtengamos para la aproximación de Galerkin para z implicará de forma inmediata propiedades de y . Veamos más detalladamente esto.

1. *Elección de la base “especial”.*

Sea $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ la base especial de $H^1(\Omega)$, que está definida de la forma siguiente:

$$\begin{cases} (\nabla w_j, \nabla w) + (w_j, w) = \lambda_j (w_j, w) \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad w_j \in H^1(\Omega), \\ |w_j| = 1, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots, \quad \lambda_j \nearrow +\infty. \end{cases} \quad (4.5)$$

2. *Definición de solución aproximada.*

Pongamos $V_m = [w_1, \dots, w_m]$ para cada $m \geq 1$ (V_m es el subespacio de $H^1(\Omega)$ generado por los w_j , con $1 \leq j \leq m$). El m -ésimo problema aproximado es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y_m : [0, T] \mapsto V_m, \quad y_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j, \quad \text{tal que} \\ (y'_m, w) + (\nabla y_m, \nabla w) + (ay_m, w)_{L^2(\partial\Omega)} \\ = (v1_{\mathcal{O}}, w) - (f(0), w)_{L^2(\partial\Omega)} \quad \forall w \in V_m, \\ y_m(0) = y_{0m}, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

donde $y_{0m} = P_m y_0$ y $P_m : L^2(\Omega) \mapsto V_m$ es el operador de proyección ortogonal habitual. Dado que (4.6) es un problema de Cauchy para un SDO lineal de dimensión m , deducimos que posee una única solución y_m , definida en todo el intervalo $[0, T]$.

3. Estimaciones "a priori" sobre y_m .

Obtendremos aquí estimaciones uniformes de las y_m en los espacios $L^\infty(0; T; L^2(\Omega))$ y $L^2(0; T; H^1(\Omega))$. Como paso previo, necesitaremos el resultado siguiente:

Lema 4.3 – Para cada $\alpha > 0$ existe $\lambda(\alpha) > 0$ tal que

$$|\nabla v|^2 + \lambda(\alpha)|v|^2 \geq \alpha \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.7)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.3: Supongamos que esto no es cierto. Entonces existe $\alpha > 0$ tal que, para cada $n \geq 1$, existe una función $v_n \in H^1(\Omega)$ que verifica

$$|\nabla v_n|^2 + n|v_n|^2 < \alpha \|v_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (4.8)$$

Tomemos

$$\tilde{v}_n = \|v_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^{-1} v_n \quad \forall n \geq 1.$$

Entonces $\|\tilde{v}_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1$ y, además, podemos suponer que

$$\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \quad \text{en } H^1(\Omega)\text{-débil} \quad \text{y en } L^2(\Omega).$$

Por otra parte, de (4.8) se tiene que

$$|\nabla \tilde{v}_n|^2 + n|\tilde{v}_n|^2 < \alpha \quad \forall n \geq 1.$$

Luego necesariamente $\tilde{v} = 0$. Tenemos que

$$\gamma_0 \tilde{v}_n \rightarrow 0 \quad \text{en } H^{1/2}(\partial\Omega)\text{-débil}$$

(de donde $\gamma_0 \tilde{v}_n \rightarrow 0$ en $L^2(\partial\Omega)$) y, al mismo tiempo, $\|\gamma_0 \tilde{v}_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1$ para cada $n \geq 1$. Por supuesto, esto es una contradicción que prueba el lema.

■

Evidentemente, cabe esperar que $\lambda(\alpha)$ crezca con α . Para obtener estimaciones de la solución aproximada y_m de (4.6), introducimos un cambio de variable, poniendo

$$z_m = e^{-\lambda t} y_m$$

para cada $m \geq 1$. Como ya hemos mencionado anteriormente, basta obtener estimaciones adecuadas para z_m . Al introducir este cambio, el sistema (4.6) se convierte en

$$\begin{cases} (z'_m(t), w) + (\nabla z_m(t), \nabla w) + \lambda(z_m(t), w) + (a(t)z_m(t), w)_{L^2(\partial\Omega)} \\ \quad = (e^{-\lambda t} v 1_{\mathcal{O}}, w) - (f(0)e^{-\lambda t}, w)_{L^2(\partial\Omega)} \quad \forall w \in V_m, \\ z_m(0) = y_{0m}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Tomemos en (4.9) como función “test” $w = z_m(t)$ para cada t . Podemos escribir que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z_m(t)|^2 + |\nabla z_m(t)|^2 + \lambda |z_m(t)|^2 + \int_{\partial\Omega} a(t) |z_m(t)|^2 d\Gamma \\ & = (e^{-\lambda t} v(t) 1_{\mathcal{O}}, z_m(t)) - \int_{\partial\Omega} f(0) e^{-\lambda t} z_m(t) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sea $R \geq 2\|a\|_{L^\infty(\Sigma)}$. Tras aplicar el lema 4.3 con $\alpha = R$, se deduce que

$$|\nabla z_m(t)|^2 + \lambda(R) |z_m(t)|^2 \geq R \|z_m(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$$

para cada t y cada m . En lo que sigue, supondremos que la constante λ verifica $\lambda > \max(\lambda(R), \lambda(1))$. Podremos escribir en tal caso que

$$\left| \int_{\partial\Omega} a(t) |z_m(t)|^2 d\Gamma \right| \leq \frac{1}{2} |\nabla z_m(t)|^2 + \frac{\lambda}{2} |z_m(t)|^2.$$

Luego obtenemos fácilmente de (4.10) que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} |z_m(t)|^2 + |\nabla z_m(t)|^2 + \lambda |z_m(t)|^2 \\ & \leq \frac{\lambda}{4} |z_m(t)|^2 + \frac{C}{\lambda} |e^{-\lambda t} v(t) 1_{\mathcal{O}}|^2 + 2 \left| \int_{\partial\Omega} f(0) e^{-\lambda t} z_m(t) d\Gamma \right|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para acotar el último sumando de (4.11), aplicamos de nuevo el lema 4.3 con $\alpha = 1$ y llegamos a las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\Omega} f(0) e^{-\lambda t} z_m(t) d\Gamma \right| \\ & \leq \left(\int_{\partial\Omega} |z_m(t)|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |f(0) e^{-\lambda t}|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \\ & \leq (|\nabla z_m(t)|^2 + \lambda(1) |z_m(t)|^2)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |f(0) e^{-\lambda t}|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{8} (|\nabla z_m(t)|^2 + \lambda(1) |z_m(t)|^2) + C e^{-2\lambda t} |f(0)|^2. \end{aligned}$$

Esto último, junto con (4.11), implica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|z_m(t)|^2 + |\nabla z_m(t)|^2 + \frac{3\lambda}{4}|z_m(t)|^2 \\ \leq \frac{C}{\lambda}|e^{-\lambda t}v(t)1_{\mathcal{O}}|^2 + \frac{1}{4}(\|z_m(t)\|^2 + \lambda|z_m(t)|^2) + 2Ce^{-2\lambda t}|f(0)|^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dado que $\lambda > \lambda(1)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|z_m(t)|^2 + |\nabla z_m(t)|^2 + \lambda|z_m(t)|^2 \\ \leq \frac{C}{\lambda}|e^{-\lambda t}v(t)1_{\mathcal{O}}|^2 + Ce^{-2\lambda t}|f(0)|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Integrando (4.13) respecto de la variable t , conseguimos la desigualdad

$$|z_m(t)|^2 + \int_0^t (|\nabla z_m(s)|^2 + \lambda|z_m(s)|^2) ds \leq \frac{C}{\lambda}\|v1_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{C}{\lambda}|f(0)|^2 + |y_0|^2. \quad (4.14)$$

De aquí, deducimos que existe una constante positiva C (de las características del enunciado del lema 4.2) tal que

$$\|z_m\|_{L^\infty(L^2)} \leq C, \quad \|z_m\|_{L^2(H^1)} \leq C.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $y_m = e^{\lambda t}z_m$, concluimos que y_m también verifica

$$\|y_m\|_{L^\infty(L^2)} + \|y_m\|_{L^2(H^1)} \leq C,$$

donde podemos suponer que C es creciente en $\|a\|_\infty$. Esto prueba que

$$y_m \in \text{acotado de } L^\infty(0; T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0; T; H^1(\Omega)). \quad (4.15)$$

Observación 4.1 No es posible (al menos con este argumento) “cuantificar” el modo en que depende la constante C de $\|a\|_\infty$. Esto es debido a la presencia de un argumento de compacidad-unicidad. ■

4. Estimaciones “a priori” sobre las y'_m .

Vamos a obtener primero estimaciones sobre las z'_m . Definimos $h_m = h_m(t)$, con $h_m(t) \in (H^1(\Omega))'$ para cada t como sigue:

$$\begin{cases} \langle h_m(t), w \rangle = -(\nabla z_m(t), \nabla w) - \lambda(z_m(t), w) - \int_{\partial\Omega} a(t)z_m(t)w d\Gamma \\ \quad + (e^{-\lambda t}v(t)1_{\mathcal{O}}, w) - \int_{\partial\Omega} f(0)e^{-\lambda t}w d\Gamma \quad \forall w \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Tenemos

$$\begin{cases} \langle z'_m(t), w \rangle = \langle h_m(t), w \rangle & \forall w \in V_m, \\ z'_m(t) \in V_m. \end{cases}$$

Luego, podemos escribir que $z'_m(t) = \tilde{P}_m h_m(t)$ para cada t , donde $\tilde{P}_m : (H^1(\Omega))' \mapsto V_m$ es el operador de proyección habitual, definido como sigue:

$$\tilde{P}_m g = \sum_{i=1}^m \langle g, w_i \rangle w_i \quad \forall g \in (H^1(\Omega))'.$$

Por ser V_m el espacio generado por los w_j , con los w_j formando la base especial, podemos afirmar que

$$\|\tilde{P}_m\|_{\mathcal{L}((H^1(\Omega))')} \leq 1.$$

De aquí, se deduce fácilmente que

$$z'_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; (H^1(\Omega))'). \quad (4.16)$$

Usamos ahora que $y_m = e^{\lambda t} z_m$ para concluir que

$$y'_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; (H^1(\Omega))'). \quad (4.17)$$

5. Extracción de subsucesiones convergentes.

Las estimaciones obtenidas implican que

$$\begin{aligned} y_m &\in \text{acotado de } C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \\ y_m &\in \text{compacto de } L^2(Q). \end{aligned}$$

De hecho, podemos suponer que $y_m \in \text{compacto de } L^2(0, T; E)$ para cada espacio de Banach E tal que $H^1(\Omega) \hookrightarrow E \hookrightarrow (H^1(\Omega))'$ con la primera inyección compacta. Por tanto, podemos deducir la existencia de (al menos) una subsucesión $\{y_\mu\}$ con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} y_\mu &\rightarrow y && \text{en } L^2(0, T; H^1(\Omega))\text{-débil,} \\ y_\mu &\rightarrow y && \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\text{-débil*}, \\ y_\mu &\rightarrow y && \text{en } L^2(Q) \text{ y c.p.d.,} \\ y_\mu(0) &\rightarrow y(0) && \text{en } L^2(\Omega)\text{-débil,} \\ y'_\mu &\rightarrow y' && \text{en } L^2(0, T; (H^1(\Omega))')\text{-débil.} \end{aligned}$$

6. Paso al límite. Conclusión.

Gracias al apartado 5, es posible pasar al límite en todos los términos de (4.6). Más concretamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle y'_\mu, w \rangle &\rightarrow \langle y', w \rangle && \text{en } L^2(0, T)\text{-débil,} \\ \langle \nabla y_\mu, \nabla w \rangle &\rightarrow \langle \nabla y, \nabla w \rangle && \text{en } L^2(0, T)\text{-débil,} \\ \langle a y_\mu, w \rangle &\rightarrow \langle a y, w \rangle && \text{en } L^2(0, T). \end{aligned}$$

Se observa que también tenemos $y(0) = y_0$ puesto que, al mismo tiempo, se verifica

$$\begin{aligned} y_\mu(0) &= y_{0\mu} \rightarrow y_0 && \text{en } L^2(\Omega), \\ y_\mu(0) &\rightarrow y(0) && \text{en } L^2(\Omega)\text{-débil.} \end{aligned}$$

Tomando límites en (4.6), llegamos a que, para cada $w \in \bigcup_{m \geq 1} V_m$, se tienen las igualdades

$$\begin{cases} \langle y'(t), w \rangle + (\nabla y(t), \nabla w) + (a(t)y(t), w)_{L^2(\partial\Omega)} \\ \quad = (v(t)1_{\mathcal{O}}, w) - (f(0), w)_{L^2(\partial\Omega)}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Por último, por densidad, deducimos que (4.18) es cierto para todo $w \in H^1(\Omega)$.

Hemos probado pues que existe y , solución del problema lineal (4.3), con

$$y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$$

y con estimaciones

$$\|y\|_{L^2(H^1)} + \|y\|_{L^\infty(L^2)} \leq C, \quad (4.19)$$

donde C es como se dice en el enunciado.

En lo que se refiere a $\partial_t y$, todavía no podemos decir que $\partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, como afirma el lema 4.2. De momento, sólo tenemos definida $\partial_t y$ como una distribución con valores en $(H^1(\Omega))'$.

7. Una propiedad adicional de $\partial_t y$.

Vamos a ver que, "a posteriori", es posible interpretar $\partial_t y$ como un elemento de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ (con una nueva estimación, análoga a (4.19)). En efecto, razonemos como sigue: Sean $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$. Para todo $(x, t) \in Q$, tomamos $\varphi(x, t) = w(x)\psi(t)$. De (4.18), se deduce que

$$\int_0^T \langle y', w \rangle \psi dt + \int_0^T (\nabla y, \nabla w) \psi dt = \int_0^T (v1_{\mathcal{O}}, w) \psi dt,$$

de donde

$$\langle \partial_t y - \Delta y - v1_{\mathcal{O}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} = 0.$$

Como las combinaciones lineales de estas funciones φ son densas en $\mathcal{D}(Q)$, se llega a que

$$\partial_t y - \Delta y = v1_{\mathcal{O}} \quad \text{en } \mathcal{D}'(Q).$$

En consecuencia, $\partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y, en virtud de las estimaciones (4.19), se deduce que

$$\|\partial_t y\|_{L^2(H^{-1})} \leq C. \quad (4.20)$$

Resumiendo, hemos demostrado que existe al menos una función y que es solución del problema lineal (4.3) en el sentido (4.18) que, además, verifica las acotaciones (4.4) del lema 4.2.

8. *Unicidad.*

Supongamos que existen dos soluciones y^1, y^2 de (4.3). Pongamos

$$y = y^1 - y^2.$$

Entonces y , satisface

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 0 & \text{en } Q, \\ \partial_n y + a(x, t)y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

con $a \in L^\infty(\Sigma)$. Veamos que $y \equiv 0$. Para ello, basta probar que $z = e^{\lambda t}y$ es idénticamente cero. Usando una vez más el lema 4.3 y razonando igual que en el apartado 3 de esta demostración, llegamos a la desigualdad

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|z(t)|^2 + |\nabla z(t)|^2 + \lambda|z(t)|^2 \leq 0, \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Aquí, también hemos tomado $\lambda > \max(\lambda(R), \lambda(1))$, con $R \geq 2\|a\|_{L^\infty(\Sigma)}$. No hay más que aplicar el lema de Gronwall para concluir que $z \equiv 0$ por lo que, necesariamente, $y \equiv 0$. ■

Observación 4.2 De las estimaciones deducidas en la demostración, se deduce que la constante C de (4.4) puede elegirse como sigue:

$$C = C_0(\|v_1\|_{L^2(Q)} + |f(0)| + |y_0|),$$

donde C_0 sólo depende de Ω, T y $\|a\|_{L^\infty(\Sigma)}$. ■

4.1.2 Demostración del teorema 4.1

1. *Definición de una aplicación de punto fijo.*

Supongamos, por el momento, que f es C^1 en $(-1, 1)$ y pongamos

$$g(s) = \begin{cases} \frac{f(s) - f(0)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Se tiene que g es continua y uniformemente acotada, es decir

$$|g(s)| \leq C \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

Llamemos $Z = L^2(\Sigma)$. Definimos la aplicación $\Lambda : Z \mapsto Z$ como sigue: $\Lambda(z) = \gamma_0 y_z$, donde y_z es la solución de

$$\begin{cases} \partial_t y_z - \Delta y_z = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y + g(z) y_z = -f(0) & \text{sobre } \Sigma, \\ y_z(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.25)$$

(proporcionada por el lema 4.2). La existencia de solución de (4.1) estará asegurada si somos capaces de probar que existe un punto fijo de Λ . El siguiente resultado que presentamos va en este sentido.

Lema 4.4 – *La aplicación Λ cumple las propiedades siguientes:*

- (i) Λ está bien definida;
- (ii) Λ es continua;
- (iii) Λ envía todo el espacio $L^2(\Sigma)$ en un conjunto relativamente compacto de $L^2(\Sigma)$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.4: Para empezar, veamos al mismo tiempo que se cumplen las propiedades (i), (iii). Observemos que, gracias a la cota uniforme (4.24) de la función g , podemos afirmar que, si $z \in Z$, entonces $g(z)$ está acotada en $L^\infty(\Sigma)$. Por tanto, el lema 4.2 es aplicable. Deducimos que, para cada $z \in Z$, existe una única solución y_z del problema (4.25). Además, y_z cumple las estimaciones (4.4) con constantes que sólo dependen de Ω , T , f , $|y_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$, pero independientes de z . En particular, se tiene que

$$\begin{aligned} y_z &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \partial_t y_z &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Más aún, como la inyección $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega)$ es compacta cualquiera que sea $s < 1$ (cf. por ejemplo [3]), obtenemos de (4.26) que

$$y_z \in \text{compacto de } L^2(0, T; H^s(\Omega)).$$

Pongamos para simplificar la notación

$$Y = \{y : y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Este espacio vectorial se convierte en un espacio de Hilbert para la norma “natural”

$$\|y\|_Y = \left(\|y\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\partial_t y\|_{L^2(H^{-1})}^2 \right)^{1/2}.$$

Lo que acabamos de utilizar es que la inyección del espacio Y en $L^2(0, T; H^s(\Omega))$ es compacta para todo $s < 1$. Hay que tener en cuenta ahora los siguientes resultados:

- Si $w \in H^s(\Omega)$ con $s > 1/2$, tiene sentido hablar de su traza $\gamma_0 w = w|_{\partial\Omega}$ como elemento de $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ y la aplicación $w \mapsto \gamma_0 w$ es lineal continua de $H^s(\Omega)$ en $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ (cf. [2]).
- En particular, $\gamma_0 y_z$ se mueve en un compacto de $L^2(0, T; H^{s-1/2}(\partial\Omega))$ para cada $s \in (1/2, 1)$.
- La inyección $L^2(0, T; H^{s-1/2}(\partial\Omega)) \hookrightarrow L^2(\Sigma)$ es continua, cualquiera que sea $s > 1/2$.

Esto y lo anterior implican que $\Lambda(Z)$ es relativamente compacto en Z . Así, probamos que la aplicación Λ está bien definida y transforma todo Z en un relativamente compacto de Z .

Queda comprobar (ii), es decir, la continuidad de Λ . Para ello, consideremos una sucesión z_k en Z que verifique

$$z_k \rightarrow z \quad \text{en } Z.$$

Hay que demostrar que

$$\Lambda(z_k) \rightarrow \Lambda(z) \quad \text{en } Z. \tag{4.27}$$

Pongamos $\Lambda(z_k) = \gamma_0 y_k$, siendo y_k la solución de

$$\begin{cases} \partial_t y_k - \Delta y_k = v1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y_k + g(z_k)y_k = -f(0) & \text{sobre } \Sigma, \\ y_k(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.28}$$

Todo consiste en comprobar que y_k converge fuertemente en Z hacia y_z , la solución de (4.25) asociada a z (en realidad, bastaría demostrar que una subsucesión converge hacia y_z , pues la unicidad hace que toda la sucesión converja).

En efecto, por una parte, la convergencia fuerte de z_k hacia z en Z y la continuidad de la función g implican que existe una subsucesión z_μ tal que

$$\begin{aligned} z_\mu(x, t) &\rightarrow z(x, t) \quad \text{c.p.d. en } \Sigma, \\ g(z_\mu) &\rightarrow g(z) \quad \text{en } L^\infty(\Sigma)\text{-débil}^* \quad \text{y c.p.d.} \end{aligned}$$

Por otra parte, hemos visto que y_μ se mueve en un acotado de Y y $\Lambda(z_\mu) = \gamma_0 y_\mu$ se mueve en un conjunto relativamente compacto de $L^2(\Sigma)$; luego podemos suponer que

$$\begin{aligned} \partial_t y_\mu &\rightarrow \partial_t y && \text{en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\text{-débil,} \\ y_\mu &\rightarrow y && \text{en } L^2(0, T; H^1(\Omega))\text{-débil} \end{aligned}$$

y

$$\gamma_0 y_\mu \rightarrow \gamma_0 y \quad \text{en } L^2(\Sigma).$$

Pasando al límite en (4.28) (con k cambiado por μ), obtenemos que y es solución de (4.25). Esto justifica la continuidad de Λ . ■

2. Aplicación del teorema de Schauder.

Gracias al lema 4.4, podemos aplicar el teorema de Schauder y afirmar que existe al menos un punto fijo y de Λ . Esta función verifica

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y + g(y)y = -f(0) & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.29)$$

y es la solución que buscamos. Hemos demostrado por tanto que el problema (4.1) posee solución que, además, verifica las estimaciones (4.2).

3. El caso general, con f (sólo) globalmente Lipschitziana.

Supongamos ahora que la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es (sólo) globalmente Lipschitziana. Mediante el producto de convolución, podemos construir una sucesión de funciones f_k que son de clase C^1 en $(-1, 1)$ y globalmente Lipschitzianas, con constantes de Lipschitz independientes de k y tales que

$$f_k \rightarrow f \quad \text{uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}.$$

Más concretamente, fijado $\delta > 0$ (suficientemente pequeño), las f_k pueden venir dadas como sigue:

$$f_k(s) = \begin{cases} f(s), & |s| > 1 + \delta, \\ \theta(s)f(s) + (1 - \theta(s))(f * \rho_k)(s), & 1 \leq |s| \leq 1 + \delta, \\ (f * \rho_k)(s), & |s| < 1. \end{cases}$$

Aquí, ρ_k es una sucesión regularizante y la función θ es continua, $0 \leq \theta(s) \leq 1$ y, es tal que $\theta(1) = 0$, $\theta(1 + \delta) = 1$. Para cada $k \geq 1$, sea y_k la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t y_k - \Delta y_k = v1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y_k + f_k(y_k) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_k(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.30)$$

(construida como en los apartados que preceden). Definimos $g_k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ como sigue:

$$g_k(s) = \begin{cases} \frac{f_k(s) - f_k(0)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ f'_k(s) & \text{si } s = 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Como las constantes de Lipschitz para las f_k son independientes de k , usando la definición (4.31) de g_k , obtenemos que

$$g_k(y_k) \in \text{acotado de } L^\infty(\Sigma)$$

(independiente de k). Es posible ahora razonar como antes, llegando de nuevo a que

$$\begin{aligned} y_k &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_t y_k &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ \gamma_0 y_k &\in \text{compacto de } L^2(\Sigma). \end{aligned}$$

No hay más que pasar al límite en (4.30) cuando $k \rightarrow \infty$ para terminar la demostración de la existencia y regularidad de una solución y del problema (4.1), como afirma el teorema.

4. Unicidad.

Supongamos ahora que el problema (4.1) admite dos soluciones, y^1 e y^2 . Pongamos $y = y^1 - y^2$. Hagamos de nuevo el cambio $z = e^{-\lambda t} y$. Tenemos que

$$\begin{cases} \partial_t z - \Delta z + \lambda z = 0 & \text{en } Q, \\ \partial_n z + e^{-\lambda t}(f(y^1) - f(y^2)) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Razonando como en otras ocasiones, obtenemos

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 + \frac{1}{2} (|\nabla z|^2 + \lambda |z|^2) + \int_{\partial\Omega} e^{-\lambda t} (f(y^1) - f(y^2)) z \, d\Gamma = 0, \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Por otra parte, gracias a que f es globalmente Lipschitzana, podemos escribir

$$|f(y^1) - f(y^2)| \leq C e^{\lambda t} |z|.$$

En consecuencia, la igualdad (4.33) implica

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z|^2 + \frac{1}{2} (|\nabla z|^2 + \lambda |z|^2) \leq C \int_{\partial\Omega} |z|^2 \, d\Gamma, \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

De donde, tras aplicar el lema de Gronwall, llegamos a que $z \equiv 0$ y, por tanto, $y \equiv 0$. ■

4.2 Controlabilidad aproximada

Hablaremos en esta sección de la controlabilidad aproximada para el problema (4.1). Gracias al teorema 4.1, sabemos que, dados $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe una única solución y de (4.1). Además, entre otras cosas, se verifica que $y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. El resultado principal de esta sección es el que sigue:

Teorema 4.5 – *Supongamos que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitziana. Entonces (4.1) es aproximadamente controlable. Más precisamente, dados $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ existe un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que la correspondiente solución y de (4.1) verifica*

$$|y(T) - y_1| \leq \varepsilon.$$

La demostración de este teorema se basa en un resultado de controlabilidad análogo para problemas lineales y un argumento de punto fijo (véase la demostración del teorema 4.5 en la sección 4.2.2). La estrategia que seguiremos está adaptada de la que se utiliza en [1]. Para mayor claridad, presentaremos todos los detalles.

Como en ocasiones anteriores, pasamos a presentar a continuación, los resultados previos que hacen falta para la demostración de este teorema.

4.2.1 Resultados previos. Control de sistemas lineales

Consideramos el sistema lineal asociado a (4.1)

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y + a(x, t)y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.35)$$

donde $a \in L^\infty(\Sigma)$. Sabemos, por el lema 4.2, que existe una única solución y del problema (4.35) que verifica además $y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Se tiene el resultado de controlabilidad aproximada siguiente:

Teorema 4.6 – *Supongamos dados $y_0 \in L^2(\Omega)$, $\tilde{y}_1 \in L^2(\Omega)$ y $a \in L^\infty(\Sigma)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que la solución y de (4.35) verifica*

$$|y(T) - \tilde{y}_1| \leq \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.6: La demostración de este teorema se hará en varias etapas. Iremos presentando cada etapa como un respectivo lema, junto con su demostración. Como hemos indicado, seguiremos las líneas generales de [1]. De acuerdo

con ello, como paso previo, vamos a considerar el problema adjunto asociado a (4.35)

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \partial_n \varphi + a(x, t) \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases} \quad (4.36)$$

donde $\varphi_T \in L^2(\Omega)$. También definimos el funcional $J = J(\varphi_T; a, \tilde{y}_1)$, con

$$J(\varphi_T; a, \tilde{y}_1) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi|^2 + \varepsilon |\varphi_T| - (\tilde{y}_1, \varphi_T) \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega). \quad (4.37)$$

El camino seguido será el siguiente:

- Probaremos que el funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ posee un único mínimo en $L^2(\Omega)$, que será designado $\hat{\varphi}_T$ (véanse lemas 4.7 y 4.8).
- Daremos una caracterización de este mínimo (ver lema 4.9).
- Construiremos el control v de la forma $v = \hat{\varphi}|_{\mathcal{O} \times (0, T)}$, siendo $\hat{\varphi}$ la solución del problema adjunto (4.36) asociado al dato final $\hat{\varphi}_T$, el único mínimo de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ (ver lema 4.10).

Así, el primer resultado a probar es el siguiente:

Lema 4.7 – *El funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ verifica:*

1. $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ es continuo;
2. $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ es estrictamente convexo;
3. $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ es coercivo.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.7:

1. Es fácil probar la continuidad de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$. En efecto, si $\varphi_T^n \rightarrow \varphi_T$ en $L^2(\Omega)$, entonces las correspondientes soluciones φ^n y φ de (4.36) verifican $\varphi^n \rightarrow \varphi$ en $L^2(Q)$. de donde

$$\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi^n|^2 \rightarrow \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi|^2.$$

Por otra parte, $|\varphi^n| \rightarrow |\varphi_T|$, obviamente,

$$\int_{\Omega} \tilde{y}_1 \varphi_T^n dx \rightarrow \int_{\Omega} \tilde{y}_1 \varphi_T dx.$$

En consecuencia, $J(\varphi_T^n; a, \tilde{y}_1) \rightarrow J(\varphi_T; a, \tilde{y}_1)$ y $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ es continuo.

2. Para comprobar que el funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ es estrictamente convexo, basta observar que se escribe como suma de dos, el primero convexo y el segundo estrictamente convexo.

3. La coercividad de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ se da gracias a la propiedad de continuación única para el problema adjunto (4.36), es decir para la EDP del calor. Esta última es independiente de la condición de contorno. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado, que implica la coercividad de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ y, por tanto finaliza la demostración del lema 4.7:

Lema 4.8 - *Dados $\tilde{y}_1 \in L^2(\Omega)$ y $a \in L^\infty(\Sigma)$, se tiene que*

$$\liminf_{|\varphi_T| \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi_T; a, \tilde{y}_1)}{|\varphi_T|} \geq \varepsilon. \quad (4.38)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.8: Razonemos por reducción al absurdo, repitiendo la demostración de la proposición 2.2 de [1]. Supongamos que (4.38) no es cierto. Entonces existe una sucesión φ_T^n en $L^2(\Omega)$ tal que

$$|\varphi_T^n| \rightarrow \infty, \quad \frac{J(\varphi_T^n; a, \tilde{y}_1)}{|\varphi_T^n|} < \varepsilon \quad \forall n \geq 1. \quad (4.39)$$

Pongamos

$$\tilde{\varphi}_T^n = \frac{\varphi_T^n}{|\varphi_T^n|}, \quad \tilde{\varphi}^n = \frac{\varphi^n}{|\varphi_T^n|} \quad \forall n \geq 1.$$

Gracias a la linealidad de los problemas considerados, $\tilde{\varphi}^n$ es la solución de (4.36) asociada al dato final $\tilde{\varphi}_T^n$.

Para todo n , se verifica que $|\tilde{\varphi}_T^n| = 1$. Luego, tras extraer una subsucesión si hace falta, deducimos que

$$\tilde{\varphi}_T^n \rightarrow \tilde{\varphi}_T \quad \text{en } L^2(\Omega)\text{-débil.} \quad (4.40)$$

Los razonamientos de dependencia continua habituales nos dicen que las $\tilde{\varphi}^n$ convergen débilmente en $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ hacia la solución $\tilde{\varphi}$ de (4.36) asociada a $\tilde{\varphi}_T^n$ con $\partial_t \tilde{\varphi}^n \rightarrow \partial_t \tilde{\varphi}$ en $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ -débil. Luego

$$\tilde{\varphi}^n \rightarrow \tilde{\varphi} \quad \text{en } L^2(Q).$$

Por otra parte, la desigualdad (4.39) implica que

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\tilde{\varphi}^n|^2 < \frac{2}{|\varphi_T^n|} \int_{\Omega} \tilde{y}_1 \tilde{\varphi}_T^n. \quad (4.41)$$

Tomando límites en (4.41) cuando $n \rightarrow \infty$, como $|\varphi_T^n| \rightarrow \infty$, llegamos a que

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\tilde{\varphi}|^2 = 0,$$

de donde $\tilde{\varphi} = 0$ en $\mathcal{O} \times (0, T)$. Aplicamos ahora el resultado de continuación única a $\tilde{\varphi}$ para deducir que $\tilde{\varphi} \equiv 0$ en Q y, por tanto, también se anula en el instante final $t = T$, es decir

$$\tilde{\varphi}_T = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Por último, de la definición del funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ tenemos

$$\frac{J(\tilde{\varphi}_T^n; a, \tilde{y}_1)}{|\varphi_T^n|} = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \frac{|\varphi^n|^2}{|\varphi_T^n|^2} + \varepsilon - \int_{\Omega} \tilde{y}_1 \frac{\varphi_T^n}{|\varphi_T^n|} \geq \varepsilon - \int_{\Omega} \tilde{y}_1 \tilde{\varphi}_T^n. \quad (4.42)$$

Basta tomar límites inferiores en (4.42), pues sabemos que se da (4.40) con $\tilde{\varphi}_T = 0$, para llegar a un absurdo. Esto prueba el lema. ■

Observación 4.3 Un argumento similar al de la demostración del lema 4.8 muestra que cuando a se mueve en un acotado de $L^\infty(\Sigma)$ e \tilde{y}_1 se mueve en un compacto de $L^2(\Omega)$, el único mínimo $\hat{\varphi}_T$ de $J(\varphi_T; a, \tilde{y}_1)$ se mueve en un acotado de $L^2(\Omega)$. ■

El resultado que sigue afirma que existe un único mínimo de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ y proporciona al mismo tiempo una caracterización de éste.

Lema 4.9 – *El funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ alcanza su mínimo en un único punto $\hat{\varphi}_T \in L^2(\Omega)$. Además, se tiene que*

$$\hat{\varphi}_T = 0 \iff |\tilde{y}_1| \leq \varepsilon. \quad (4.43)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.9:

1. La existencia y unicidad del mínimo de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ en $L^2(\Omega)$, es consecuencia trivial del lema 4.7. Denotaremos este mínimo por $\hat{\varphi}_T$.
2. Veamos que la caracterización (4.43) de $\hat{\varphi}_T$ es correcta. Supongamos en primer lugar que $|\tilde{y}_1| \leq \varepsilon$. Entonces, para cada $\varphi_T \in L^2(\Omega)$ podemos escribir

$$J(\varphi_T; a, \tilde{y}_1) \geq \varepsilon |\varphi_T| - (\tilde{y}_1, \varphi_T) \geq (\varepsilon - |\tilde{y}_1|) |\varphi_T| \geq 0. \quad (4.44)$$

Por otra parte, $J(0; a, \tilde{y}_1) = 0$. Luego el único mínimo de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ se alcanza en el origen. Esto prueba que $\hat{\varphi}_T = 0$.

Recíprocamente, si el único mínimo del funcional es $\hat{\varphi}_T = 0$, tenemos

$$J(\varphi_T; a, \tilde{y}_1) \geq J(0; a, \tilde{y}_1) = 0 \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega).$$

Sea $\tilde{\varphi}_T \in L^2(\Omega)$ tal que $|\tilde{\varphi}_T| = 1$, $(\tilde{y}_1, \tilde{\varphi}_T) = |\tilde{y}_1|$. Pongamos

$$\tilde{\varphi}_T^n = \frac{1}{n} \tilde{\varphi}_T, \quad \tilde{\varphi}^n = \frac{1}{n} \tilde{\varphi} \quad \forall n \geq 1,$$

donde $\tilde{\varphi}$ es la solución del problema adjunto (4.36) asociada al dato final $\tilde{\varphi}_T$. Entonces decir que $J(\tilde{\varphi}_T^n; a, \tilde{y}_1) \geq 0$ significa que

$$-\frac{1}{2n} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\tilde{\varphi}| \leq \varepsilon - |\tilde{y}_1| \quad \forall n \geq 1.$$

Pero entonces $|\tilde{y}_1| \leq \varepsilon$. Esto completa la demostración. ■

De acuerdo con la estrategia marcada al principio de la demostración del teorema 4.6, como último paso, probaremos la controlabilidad aproximada para el sistema (4.35):

Lema 4.10 – *Supongamos que $y_0 = 0$ e $\tilde{y}_1 \in L^2(\Omega)$, con $|\tilde{y}_1| > \varepsilon$. Si tomamos en (4.35) como control la función $\hat{v} = \hat{\varphi}|_{\mathcal{O} \times (0, T)}$, donde $\hat{\varphi}$ es la solución de (4.36) asociada al único mínimo $\hat{\varphi}_T$ de $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ en $L^2(\Omega)$, entonces la correspondiente solución y es tal que*

$$|y(T) - \tilde{y}_1| = \varepsilon.$$

Observación 4.4 Si $|\tilde{y}_1| \leq \varepsilon$, gracias a la caracterización que proporciona el lema 4.9, sabemos que $\hat{\varphi}_T = 0$. En consecuencia, la solución asociada, es $\hat{\varphi} = 0$. El control $\hat{v} = 0$, hace que la solución y de (4.35) cumpla

$$|y(T) - \tilde{y}_1| = |\tilde{y}_1| \leq \varepsilon.$$

En otras palabras, para estados deseados “pequeños”, sabemos controlar el sistema (4.35) de forma aproximada (y trivial). Así, el caso realmente interesante es aquél en que $|\tilde{y}_1| > \varepsilon$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.10: Por hipótesis, sabemos que $|\tilde{y}_1| > \varepsilon$. Podemos aplicar el lema 4.9, para deducir que $\hat{\varphi}_T \neq 0$. Esto implica que el funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ es diferenciable en $\hat{\varphi}_T$. Por tanto, su único mínimo $\hat{\varphi}_T$ viene caracterizado por las igualdades

$$\langle J'(\hat{\varphi}_T; a, \tilde{y}_1), \varphi_T \rangle = 0 \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega).$$

No es difícil ver, que esto se escribe en la forma

$$\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \hat{\varphi} \varphi + \left(\varepsilon \frac{\hat{\varphi}_T}{|\hat{\varphi}_T|} - \tilde{y}_1, \varphi_T \right) = 0 \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega), \quad (4.45)$$

donde φ es la solución de (4.36) asociada a φ_T .

Volvamos a considerar el sistema (4.35), con $y_0 = 0$ y $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$. Multiplicando la ecuación de (4.35) por φ e integrando en Q respecto de x y respecto de t , tras realizar las oportunas integraciones por partes y utilizar las propiedades de φ , se llega a que

$$\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} v \varphi = (y(T), \varphi_T).$$

Elijamos el control

$$v = \widehat{\varphi}|_{\mathcal{O} \times (0, T)}.$$

Entonces la igualdad (4.45) implica

$$(y(T), \varphi_T) = (\tilde{y}_1 - \varepsilon \frac{\widehat{\varphi}_T}{|\widehat{\varphi}_T|}, \varphi_T) \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega),$$

de donde podemos afirmar que

$$y(T) = \tilde{y}_1 - \varepsilon \frac{\widehat{\varphi}_T}{|\widehat{\varphi}_T|}.$$

Así, hemos probado que

$$|y(T) - \tilde{y}_1| = \varepsilon.$$

■

Observación 4.5 Obsérvese que hemos probado la controlabilidad aproximada para el problema lineal (4.35). Además, hemos visto que el “mejor” control viene dado por $v = \widehat{\varphi}|_{\mathcal{O} \times (0, T)}$. Aquí, la función $\widehat{\varphi}$ es la solución del problema adjunto (4.36) asociado al dato final $\widehat{\varphi}_T$, el único mínimo en $L^2(\Omega)$ del funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$.

■

4.2.2 Demostración del teorema 4.5

En líneas generales, la demostración de este teorema sigue los mismos pasos de la del teorema 4.1. Se utilizan varios resultados ya demostrados anteriormente. Por esta razón, pasaremos por encima de algunos detalles.

1. Definición de una aplicación de punto fijo.

Supongamos, por comodidad, que f es $C^1(\mathbb{R})$ y globalmente Lipschitziana. Sea g la función definida por (4.23). Entonces g es continua y uniformemente acotada.

Definimos la aplicación $\Gamma : L^2(\Sigma) \mapsto L^2(\Sigma)$ de la forma siguiente: Para cada $z \in L^2(\Sigma)$, ponemos $\Gamma(y_z) = \gamma_0 y_z$, donde y_z es (junto con v_z), la solución del problema de controlabilidad aproximada lineal

$$\begin{cases} \partial_t y_z - \Delta y_z = v_z 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y_z + g(z) y_z = -f(0) & \text{sobre } \Sigma, \\ y_z(0) = y_0, \quad |y_z(T) - y_1| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (4.46)$$

construido de modo análogo a como se ha hecho previamente. Obsérvese que, en realidad, la aplicación Γ actúa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} z \in L^2(\Sigma) &\mapsto g(z) \in L^\infty(\Sigma) \mapsto \{g(z), v_z\} \in L^\infty(\Sigma) \times L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \\ &\mapsto y_z \in Y \mapsto \gamma_0 y_z \in L^2(\Sigma). \end{aligned}$$

Todo consiste en comprobar que Γ posee un punto fijo.

2. Deducción de la existencia de un punto fijo.

Razonemos de la forma que ya es habitual. Para cada $z \in L^2(\Sigma)$, sea $g(z) = a_z$. Se tiene que

$$a_z \in \text{acotado de } L^\infty(\Sigma).$$

Buscamos $y_z = u_z + w_z$, siendo u_z la solución de

$$\begin{cases} \partial_t u_z - \Delta u_z = 0 & \text{en } Q, \\ \partial_n u_z + a_z(x, t)u_z = -f(0) & \text{sobre } \Sigma, \\ u_z(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.47)$$

y, siendo w_z (junto con v_z) la solución de

$$\begin{cases} \partial_t w_z - \Delta w_z = v_z 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n w_z + a_z(x, t)w_z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w_z(0) = 0, \quad |w_z(T) - (y_1 - u_z(T))| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (4.48)$$

que se construye como en la sección precedente. Ambos problemas son de carácter lineal. En este sentido, los resultados vistos con anterioridad son aplicables. Más concretamente, sabemos por una parte que existe una única u_z , solución de (4.47), que verifica (entre otras cosas)

$$\begin{aligned} u_z(T) &\in \text{compacto de } L^2(\Omega), \\ u_z &\in \text{compacto de } L^2(Q). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Esto es consecuencia de los resultados de regularidad habituales para las soluciones de la EDP del calor.

Por otra parte, pongamos $\tilde{y}_1 = y_1 - u_z(T)$ y definamos el funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$ como antes. Gracias al teorema 4.6, sabemos controlar de forma aproximada problemas lineales como (4.48). En este contexto, el control es $v_z = \hat{\varphi}|_{\mathcal{O} \times (0, T)}$, siendo $\hat{\varphi}$ la solución del problema adjunto para (4.48) asociado al dato final $\hat{\varphi}_T$, el único mínimo (en $L^2(\Omega)$) del funcional $J(\cdot; a, \tilde{y}_1)$. Además, podemos afirmar que

$$v_z \in \text{acotado de } L^2(\mathcal{O} \times (0, T)). \quad (4.50)$$

Esto es cierto. En efecto, en virtud de la observación 4.5, tenemos que $\hat{\varphi}_T$ pertenece a un acotado de $L^2(\Omega)$. Por tanto, la correspondiente solución $\hat{\varphi}$ de (4.36) verifica:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \partial_t \hat{\varphi} &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ \hat{\varphi} &\in \text{compacto de } L^2(Q). \end{aligned}$$

En lo que se refiere al problema (4.48), dado que el segundo miembro verifica (4.50), la correspondiente solución w_z satisface

$$\begin{aligned} w_z &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \partial_t w_z &\in \text{acotado de } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ w_z &\in \text{compacto de } L^2(Q). \end{aligned}$$

Finalmente, por ser $y_z = u_z + w_z$, se deduce que y_z se mueve en un acotado de Y . Aquí, seguimos usando la notación del teorema 4.1, con

$$Y = \{y : y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Una vez más, gracias a la compacidad de la inyección de Y en $L^2(0, T; H^s(\Omega))$ para $1/2 < s < 1$, llegamos a que la aplicación Γ está bien definida y envía todo $L^2(\Sigma)$ en un conjunto relativamente compacto de $L^2(\Sigma)$. También es posible (y fácil) demostrar que Γ es continua. De donde, tras aplicar el teorema de Schauder, deducimos la existencia de un punto fijo y de Γ que verifica

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = v1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_n y + g(y)y = -f(0) & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad |y(T) - y_1| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (4.51)$$

Para terminar la demostración de este teorema, basta simplemente decir que, en el caso general, con f sólo globalmente Lipschitziana, se puede razonar por regularización y paso al límite como en la demostración del teorema 4.1. ■

Bibliografía

- [1] C. Fabre, J. P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125A** (1995), 31–61.
- [2] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol I, Dunod, Gauthers-Villars, Paris 1969
- [3] Vo-Khac Khoan, *Distributions Analyse de Fourier Opérateurs aux Dérivées Partielles*, Tome II, VUIBERT, Paris 1972.

Capítulo 5

EL SISTEMA STOKES CON CONDICIONES DE TIPO FOURIER NO LINEALES

5.1 El problema considerado. Existencia y unicidad de solución

Consideremos la ecuación de Stokes con condiciones de contorno no lineales de tipo Fourier:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi = v 1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en } Q, \\ y \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ (\sigma(y, \pi) \cdot \vec{n})_{tg} + (f(y))_{tg} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$, $y_0 \in H$ son dados y $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es una función globalmente Lipschitziana. Aquí, hemos usado la notación siguiente:

$$\begin{aligned} (a)_{tg} &= a - (a \cdot \vec{n})\vec{n} = \text{componente tangencial de } a \\ \sigma(y, \pi) &= -\pi Id + (\nabla y + {}^t \nabla y) = \text{el tensor de esfuerzos.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Recordemos que H es la adherencia de

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N : \nabla \cdot \varphi = 0 \quad \text{en } \Omega\}$$

en $L^2(\Omega)^N$. Este espacio posee por tanto estructura Hilbertiana para la norma de $L^2(\Omega)^N$, denotada $|\cdot|$ y puede ser caracterizado como sigue:

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot v = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad v \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\}.$$

Pongamos

$$W = \{v \in H^1(\Omega)^N : \nabla \cdot v = 0, \quad v \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\}.$$

W es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)^N$ y, por tanto, se convierte en un espacio de Hilbert dotado de la norma de $H^1(\Omega)^N$. En este Capítulo, $\|\cdot\|_\infty$ denotará la norma habitual en $L^\infty(\Sigma; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$. Tenemos el resultado siguiente:

Teorema 5.1 – *Supongamos que $y_0 \in H$, $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ y $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es globalmente Lipschitziana. Entonces existe una única solución $\{y, \pi\}$ de (5.1) que verifica $y \in L^2(0, T; W) \cap C^0([0, T]; H)$, $\partial_t y \in L^2(0, T; W')$ y $\pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$. Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , f , $|y_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que*

$$\|y\|_{L^2(W)} + \|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(W')} \leq C. \quad (5.3)$$

Veremos la demostración del teorema 5.1 más adelante. El sentido en que $\{y, \pi\}$ es solución de (5.1) quedará claro tras la demostración. Estudiaremos primero (como ya es habitual), problemas lineales análogos a (5.1).

5.1.1 Resultados previos para problemas lineales análogos

Consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi = v 1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en } Q, \\ y \cdot \vec{n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (\sigma(y, \pi) \cdot \vec{n})_{tg} + (M(x, t)y)_{tg} = -(f(0))_{tg} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

donde $M \in L^\infty(\Sigma; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$. El resultado que probaremos a continuación es el siguiente:

Lema 5.2 – *Supongamos que $y_0 \in H$, $M \in L^\infty(\Sigma; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$. Entonces existe una única solución $\{y, \pi\}$ de (5.4) que verifica $y \in L^2(0, T; W) \cap C^0([0, T]; H)$, $\partial_t y \in L^2(0, T; W')$ y $\pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$. Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , $|y_0|$, $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$, $\|M\|_\infty$ y $|f(0)|$ tal que*

$$\|y\|_{L^2(W)} + \|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(W')} \leq C. \quad (5.5)$$

Observación 5.1 De las estimaciones deducidas en la demostración, se infiere que la constante C de (5.5) puede elegirse como sigue:

$$C = C_0(\|v 1_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} + |(f(0))_{tg}| + |y_0|),$$

donde C_0 sólo depende de Ω , T y $\|M\|_\infty$.

■

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 5.2: Veamos cuál es la formulación variacional de (5.4). Sea $w \in W$. Multiplicamos por w la EDP de (5.4), integramos en Ω y hacemos cálculos formales. Obtenemos:

$$\int_{\Omega} (\partial_t y - \Delta y + \nabla \pi) \cdot w = \int_{\Omega} v 1_{\mathcal{O}} \cdot w \quad \forall w \in W. \quad (5.6)$$

Integrando por partes y usando que $\nabla \cdot y = 0$, se obtiene la identidad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta y) \cdot w &= \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\nabla y + {}^t \nabla y)) \cdot w \\ &= \int_{\Omega} (\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot \nabla w - \int_{\partial \Omega} ((\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot \vec{n}) \cdot w \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Consideremos la integral sobre $\partial \Omega$ de (5.7). Como $w = w_{tg}$ (pues $w \in W$), podemos escribir que

$$((\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot \vec{n}) \cdot w = ((\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot \vec{n})_{tg} \cdot w_{tg} = (\sigma(y, \pi) \cdot \vec{n})_{tg} \cdot w_{tg}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$(\sigma(y, \pi) \cdot \vec{n})_{tg} = -(My)_{tg} - (f(0))_{tg} \quad \text{sobre } \Sigma,$$

llegamos a que

$$\int_{\partial \Omega} ((\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot \vec{n}) \cdot w \, d\Gamma = - \int_{\partial \Omega} (My)_{tg} \cdot w \, d\Gamma - \int_{\partial \Omega} (f(0))_{tg} \cdot w \, d\Gamma.$$

Observemos también que, gracias a que el tensor $(\nabla y + {}^t \nabla y)$ es simétrico, se verifica

$$\int_{\Omega} (\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot \nabla w = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot (\nabla w + {}^t \nabla w).$$

En consecuencia, (5.7) conduce a la igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta y) \cdot w &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot (\nabla w + {}^t \nabla w) \\ &\quad + \int_{\partial \Omega} (My)_{tg} \cdot w \, d\Gamma + \int_{\partial \Omega} (f(0))_{tg} \cdot w \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Finalmente, la formulación débil de (5.4) es la siguiente: Hallar $y \in L^2(0, T; W) \cap C^0([0, T]; H)$ tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \partial_t y \cdot w + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla y + {}^t \nabla y) \cdot (\nabla w + {}^t \nabla w) + \int_{\partial \Omega} (My)_{tg} \cdot w \, d\Gamma \\ \quad = \int_{\Omega} v(t) 1_{\mathcal{O}} \cdot w - \int_{\partial \Omega} (f(0))_{tg} \cdot w \, d\Gamma \quad \forall w \in W, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Vemos pues que aparece la misma dificultad que surgía en el Capítulo anterior a la hora de tratar la EDP del calor con condiciones de contorno de tipo Fourier (linealizadas): la forma bilineal espacial asociada a (5.9) no es coerciva en W . Usaremos la desigualdad de Korn (véase [1]), junto con un resultado análogo al del lema 4.3. Aplicaremos el método de Galerkin. En líneas generales, seguiremos la demostración del lema 4.2 del Capítulo anterior. Por esta razón, cuando sea oportuno, pasaremos por encima de algunos detalles.

1. *Elección de la base “especial”.*

Sea $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ la base especial de W , con los w_j tales que

$$\begin{cases} (\nabla w_j, \nabla w) + (w_j, w) = \lambda_j (w_j, w) & \forall w \in W, \quad w_j \in W, \\ |w_j| = 1, \quad j \geq 1, \quad \lambda_j \nearrow +\infty. \end{cases} \quad (5.10)$$

2. *Definición de solución aproximada.*

Pongamos $V_m = [w_1, \dots, w_m]$, con los w_j como en (5.10). El m -ésimo problema aproximado es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y_m : [0, T] \mapsto V_m, \quad y_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \quad \text{tal que} \\ (y'_m, w) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla y_m + {}^t \nabla y_m) \cdot (\nabla w + {}^t \nabla w) + \int_{\partial \Omega} (M y_m) \cdot w \, d\Gamma \\ \quad = (v1_{\mathcal{O}}, w) - \int_{\partial \Omega} (f(0))_{t_g} \cdot w \, d\Gamma \quad \forall w \in V_m, \\ y_m(0) = y_{0m}, \end{array} \right. \quad (5.11)$$

donde $y_{0m} = P_m y_0$ y $P_m : L^2(\Omega)^N \mapsto V_m$ es el operador de proyección ortogonal habitual. Claramente, existe una única solución y_m de (5.11), definida en todo el intervalo $[0, T]$.

3. *Estimaciones “a priori” sobre y_m .*

Obtendremos aquí estimaciones sobre y_m en $L^\infty(0; T; H)$ y en $L^2(0; T; W)$. Para ello, necesitaremos la siguiente desigualdad de Korn (véase por ejemplo [1], teorema 3.1):

Teorema 5.3 – *Sea Ω un abierto acotado de frontera regular. Entonces, existe una constante positiva $C = C(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} |\nabla w + {}^t \nabla w|^2 \, dx + \int_{\Omega} |w|^2 \, dx \geq C \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx \quad \forall w \in H^1(\Omega)^N. \quad (5.12)$$

■

Necesitaremos también el resultado siguiente:

Lema 5.4 - Para cada $\alpha > 0$ existe $\lambda(\alpha) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla v + {}^t\nabla v|^2 + \lambda(\alpha) \int_{\Omega} |v|^2 \geq \alpha \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.13)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 5.4: Es análoga a la del lema 4.3. Supongamos que la desigualdad (5.13) no es cierta. Entonces podemos afirmar que existe $\alpha > 0$ tal que, para cada $n \geq 1$, existe una función $v_n \in H^1(\Omega)$ que verifica

$$|\nabla v_n + {}^t\nabla v_n|^2 + n|v_n|^2 < \alpha \|\gamma_0 v_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (5.14)$$

Tomando

$$\tilde{v}_n = \|\gamma_0 v_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^{-1} v_n \quad \forall n \geq 1,$$

podemos suponer que

$$\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \quad \text{en } H^1(\Omega)\text{-débil} \quad \text{y en } L^2(\Omega).$$

Por otra parte, (5.14) implica

$$|\nabla \tilde{v}_n + {}^t\nabla \tilde{v}_n|^2 + n|\tilde{v}_n|^2 < \alpha \quad \forall n \geq 1.$$

Luego necesariamente $\tilde{v} = 0$. Tenemos que las trazas $\gamma_0 \tilde{v}_n$ y $\gamma_0 \tilde{v}$ verifican

$$\gamma_0 \tilde{v}_n \rightarrow 0 \quad \text{en } H^{1/2}(\partial\Omega)\text{-débil}$$

y, por tanto,

$$\gamma_0 \tilde{v}_n \rightarrow 0 \quad \text{en } L^2(\partial\Omega).$$

Pero, por otra parte, $\|\gamma_0 \tilde{v}_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1$ para cada $n \geq 1$. Esto es una contradicción que prueba el lema. ■

Es claro que podemos suponer en lo que sigue que $\lambda(\alpha)$ crece con α . Como ya hicimos en el Capítulo anterior, introducimos las funciones z_m , con

$$z_m = e^{-\lambda t} y_m$$

para cada $m \geq 1$. Aquí, $\lambda > 0$ es una constante que verifica $\lambda > \max(\lambda(R), \lambda(1))$ con $R \geq 4\|M\|_{\infty}$. Basta estimar adecuadamente z_m . Con el cambio introducido, el sistema (5.11) queda como sigue:

$$\begin{cases} (z'_m, w) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla z_m + {}^t\nabla z_m) \cdot (\nabla w + {}^t\nabla w) + \lambda(z_m, w) + \int_{\partial\Omega} (M z_m) \cdot w \, d\Gamma \\ \quad = (e^{-\lambda t} v_{10}, w) - \int_{\partial\Omega} e^{-\lambda t} (f(0))_{tg} \cdot w \, d\Gamma \quad \forall w \in V_m, \\ z_m(0) = y_{0m}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Tomando en (5.15) como función “tests” $w = z_m(t)$ para cada t y razonando como en la demostración del lema 4.3, no es difícil probar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z_m(t)|^2 + \frac{3}{16} |\nabla z_m(t) + {}^t\nabla z_m(t)|^2 + \frac{2\lambda}{16} |z_m(t)|^2 \\ \leq \frac{C}{\lambda} |e^{-\lambda t} v(t) 1_{\mathcal{O}}|^2 + C e^{-2\lambda t} |(f(0))_{t\mathcal{G}}|^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Integrando (5.16) respecto de la variable t , deducimos que existe una constante positiva C (de las características del enunciado del lema 5.2) tal que

$$\|z_m\|_{L^\infty(H)} \leq C, \quad \|z_m\|_{L^2(W)} \leq C$$

y, por tanto concluimos que y_m también verifica

$$\|y_m\|_{L^\infty(H)} + \|y_m\|_{L^2(W)} \leq C,$$

donde podemos suponer que C es creciente en $\|M\|_\infty$. Esto prueba que

$$y_m \in \text{acotado de } L^\infty(0; T; H) \cap L^2(0; T; W). \quad (5.17)$$

Obsérvese que, al igual que ocurre en el lema 4.3, no es posible (con este argumento) “cuantificar” la dependencia de la constante C respecto de $\|M\|_\infty$, pues como antes, dentro del razonamiento, en la demostración del lema 5.4, hay un argumento de compacidad-unicidad.

4. Estimaciones “a priori” sobre y'_m .

Razonando de forma análoga a como se hace en el apartado 4 de la demostración del lema 4.2, llegaremos fácilmente a que

$$y'_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; W'). \quad (5.18)$$

5. Extracción de subsucesiones convergentes. Paso al límite y conclusión.

Las estimaciones obtenidas permiten pasar al límite en (5.11) y, deducir la existencia de una solución y de (5.9) que verifica

$$\|y\|_{L^2(W)} + \|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(W')} \leq C, \quad (5.19)$$

con la constante C como indica el lema 5.2.

6. Recuperación de la presión π .

Veamos que existe $\pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\{y, \pi\}$ es solución de (5.4). Pongamos

$$S = \partial_t y - \Delta y - v 1_{\mathcal{O}}.$$

Sabemos que, $\partial_t y \in W^{-1,\infty}(0, T; H)$, $\Delta y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$, $v1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)^N$. Por tanto, podemos afirmar que

$$S \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^N) \cong H^{-1}(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))^N \subset \mathcal{D}'(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))^N$$

y tenemos que

$$\langle S, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

(igualdad en $W^{-1,\infty}(0, T)$). Luego, aplicando el lema de De Rham (cf. por ejemplo [4]) deducimos que existe $\pi \in \mathcal{D}'(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))$ tal que $S = -\nabla\pi$. De hecho, como $S \in H^{-1}(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))^N$, se puede elegir

$$\pi \in L^2(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T)) \cong W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)),$$

además, de forma única salvo una distribución de $W^{-1,\infty}(0, T)$ (también es cierto que $\|\pi\|_{W^{-1,\infty}(L^2)}$ está acotada por una constante como la que aparece en (5.19)).

6. Unicidad.

La demostración de la unicidad de solución de (5.4) es análoga a la del respectivo apartado de la prueba del lema 4.2 a la que nos hemos referido antes en varias ocasiones.

■

5.1.2 Demostración del teorema 5.1

Para demostrar el teorema, basta definir adecuadamente la aplicación de punto fijo y aplicar el teorema de Schauder, razonando como en la demostración del teorema 4.1. Observemos que, por definición de componente tangencial, en realidad, las condiciones de contorno son las siguientes:

$$y \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma$$

y

$$((\nabla y + {}^t\nabla y) \cdot \vec{n})_{tg} + (f(y))_{tg} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Por otra parte, por ser la función $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ globalmente Lipschitziana, existe $Df \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, con

$$(Df(s))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial s_j}(s), \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad \text{c.p.d.}$$

Podemos escribir que, para cada $s \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} f_j(s) &= f_j(0) + \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f_j(s\tau) d\tau \\ &= f_j(0) + \int_0^1 (Df_j(s\tau) \cdot s) d\tau = f_j(0) + \left(\int_0^1 Df_j(s\tau) d\tau \right) \cdot s. \end{aligned}$$

Pongamos

$$g(s) = \int_0^1 Df(s\tau) d\tau \quad \forall s \in \mathbb{R}^N. \quad (5.20)$$

Se tiene que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y

$$f(s) = f(0) + g(s) \cdot s \quad \forall s \in \mathbb{R}^N. \quad (5.21)$$

Con la notación introducida, el problema (5.1) se escribe de forma equivalente como sigue:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \pi = v 1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en } Q, \\ y \cdot \vec{n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (\sigma(y, \pi) \cdot \vec{n})_{tg} + (g(y) \cdot y)_{tg} = -(f(0))_{tg} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5.22)$$

con $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$.

Pongamos $Z = L^2(\Sigma)^N$. Definimos la aplicación $\Lambda : Z \mapsto Z$ como sigue: $\Lambda(z) = \gamma_0 y_z$, donde y_z es (junto con alguna π_z) la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t y_z - \Delta y_z + \nabla \pi_z = v 1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y_z = 0 \quad \text{en } Q, \\ y_z \cdot \vec{n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (\sigma(y_z, \pi_z) \cdot \vec{n})_{tg} + (g(z) \cdot y_z)_{tg} = -(f(0))_{tg} & \text{sobre } \Sigma, \\ y_z(0) = y_0 \end{cases} \quad (5.23)$$

(que proporciona el lema 5.2). Siguiendo los pasos de la demostración del teorema 4.1, no es difícil comprobar que estamos en las condiciones en las que el teorema de Schauder es aplicable. Esto prueba el teorema 5.1. ■

5.2 Controlabilidad aproximada. Control con una componente nula

En esta sección, presentaremos varios resultados de controlabilidad aproximada para el sistema (5.1). Veremos en primer lugar dos resultados de controlabilidad aproximada análogos al contenido en el teorema 4.5. No nos detendremos excesivamente, por tanto, en sus demostraciones. En cambio, el tercer resultado tendrá carácter novedoso, en el sentido de que tratará sobre la controlabilidad aproximada con una componente del control igual a cero. Seremos capaces de controlar aproximadamente el sistema (5.1) con controles v de la forma $v = (v_1, v_2, 0)$. Obviamente, diremos que (5.1) es aproximadamente controlable si, para cada $y_0 \in H$, cada $y_1 \in H$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ tal que la correspondiente solución de (5.1) verifica

$$|y(T) - y_1| \leq \varepsilon.$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.5 – Supongamos que $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es globalmente Lipschitziana. Entonces (5.1) es aproximadamente controlable.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.5: Como en [2] y en el Capítulo 4, nos basaremos en un resultado de controlabilidad análogo para un sistema lineal y en las propiedades de una adecuada aplicación de punto fijo. El problema adjunto asociado a (5.23) es el siguiente:

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi + \nabla \Pi = 0, & \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi \cdot \vec{n} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (\sigma(\varphi, \Pi) \cdot \vec{n})_{tg} + (g(z) \cdot \varphi)_{tg} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases} \quad (5.24)$$

donde $\varphi_T \in H$. La PCU necesaria en este caso es la PCU para la EDP del calor, que vuelve a ser cierta. Basta definir la aplicación de punto fijo como en el teorema anterior y seguir los pasos de la demostración del mencionado teorema 4.5, con los cambios adecuados. ■

Para demostrar este teorema, como hemos dicho, hemos usado un resultado de controlabilidad aproximada para problemas lineales análogos que puede ser demostrado a partir de la PCU para la EDP del calor:

Teorema 5.6 – Supongamos que $M \in L^\infty(\Sigma; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$. Entonces (5.4) es aproximadamente controlable. ■

El resultado de controlabilidad aproximada con una componente del control nula que comentábamos antes es el siguiente:

Teorema 5.7 – Supongamos que $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es globalmente Lipschitziana. Entonces (5.1) es aproximadamente controlable. Además, el control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ puede elegirse de la forma $v = (v_1, v_2, 0)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.7: En primer lugar, tenemos que saber controlar problemas lineales, análogos a (5.1), con controles del tipo $v = (v_1, v_2, 0)$. Razonando como en el teorema 4.5, llegamos a que todo se reduce a probar la PCU siguiente:

Si $\varphi \in L^2(0, T; W) \cap C^0([0, T]; H)$,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi + \nabla \Pi = 0, & \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi \cdot \vec{n} = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (5.25)$$

y además

$$\varphi_i = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T) \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (5.26)$$

entonces $\varphi \equiv 0$.

Veamos que esta PCU es cierta. Se observa en primer lugar que, tomando la divergencia en la EDP de (5.25), obtenemos que

$$\Delta \Pi = 0 \quad \text{en } Q$$

(pues $\nabla \cdot \varphi = 0$). Además, teniendo en cuenta que $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ en $\mathcal{O} \times (0, T)$, deducimos de (5.25) que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T). \quad (5.27)$$

Luego, Π es armónica para cada $t \in (0, T)$ y verifica

$$\Pi = \Pi(x_3, t) \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T).$$

Esto permite afirmar (gracias a la bien conocida PCU elíptica) que, en Q , Π no depende ni de x_1 ni de x_2 , es decir

$$\Pi = \Pi(x_3, t) \quad \text{en } Q.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = 0 \quad \text{en } Q.$$

Volviendo ahora a la EDP de (5.25), llegamos a que las componentes φ_1 y φ_2 verifican

$$-\partial_t \varphi_i - \Delta \varphi_i = 0, \quad \varphi_i = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T).$$

De donde, tras aplicar la PCU para la EDP del calor a cada una de estas componentes, deducimos que

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{en } Q.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \equiv 0.$$

Esto implica que φ es de la forma

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (0, 0, \varphi_3) \quad \text{con } \varphi_3 = \varphi_3(x_1, x_2, t). \quad (5.28)$$

Teniendo en cuenta ahora (5.28), la condición de contorno $\varphi \cdot \vec{n} = 0$ sobre Σ , en realidad se escribe

$$\varphi_3 \cdot n_3 = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (5.29)$$

Esto permite afirmar que existe un abierto $\omega \subset \Omega$ de la forma

$$\omega = \{x : x \in B(\bar{x}; \delta_2) \cap \Omega, \quad \bar{x} \in \partial\Omega\}$$

tal que

$$\varphi_3 \equiv 0 \quad \text{en} \quad \omega \times (0, T).$$

En efecto, existe un punto $\bar{x} \in \partial\Omega$ tal que $n_3(\bar{x}) \neq 0$. Luego existe $\delta_1 > 0$ tal que, en $B(\bar{x}; \delta_1) \cap \partial\Omega$, se tiene de nuevo que $n_3 \neq 0$; así, de (5.29) se deduce que $\varphi_3(x, t) = 0$ en $B(\bar{x}; \delta_1) \cap \partial\Omega$. Tomando $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, se justifica la afirmación anterior.

Basta ahora aplicar la PCU para la EDP del calor a la componente φ_3 para concluir que

$$\varphi_3 \equiv 0 \quad \text{en} \quad Q.$$

Con esto, hemos justificado la PCU que nos hace falta. Para terminar la demostración del teorema, basta repetir el argumento de punto fijo como en el caso en que todas las componentes son no nulas, pues la clave de la demostración es la PCU que acabamos de probar. ■

Observación 5.2 Cabe preguntarse si es posible conseguir la controlabilidad aproximada de (5.1) y/o de (5.4) con controles de la forma $v = (v, 0, 0)$. Esta cuestión no es trivial. De hecho, ya no lo es en el caso (aparentemente más simple) en que las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet, cf [3]. En el caso particular de un dominio cilíndrico $\Omega = (0, L) \times G$, con $G \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de frontera regular, es posible conseguir resultados parciales, análogos a los obtenidos en [3]. Todo esto será detallado en un próximo trabajo. ■

Bibliografía

- [1] G. Duvaut, J.L. Lions *Les Inéquations en Mécanique et Physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [2] C. Fabre, J. P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125A** (1995), 31–61.
- [3] J. L. Lions, E. Zuazua *A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences*, Partial differential equations and applications, 221–235, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 177, Dekker, New York, 1996.
- [4] J. Simon, *Compact sets in the spaces $L^p(0, T; B)$* , Annali di Matematica Pura ed Applicata, **IV**, Vol. CXLVI (1987), 65–96.

Parte II

Sistemas lineales de tipo Maxwell y de tipo Jeffreys

Capítulo 6

MODELO DE MAXWELL: EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARIDAD

6.1 Modelo de Maxwell. Existencia y unicidad de solución

En este Capítulo y en los siguientes, usaremos la notación habitual para los espacios \mathcal{V} , H , V y denotaremos Φ el espacio $L^2(\Omega; \mathcal{L}_S(\mathbb{R}^N))$, siendo $\mathcal{L}_S(\mathbb{R}^N)$ el espacio de matrices simétricas de orden N . Se considera el siguiente sistema, que describe el comportamiento de un fluido lineal de Maxwell (véase[1]):

$$\begin{cases} \partial_t y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau + v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_t \tau + a \tau = 2b D(y) & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Aquí, $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$, $y_0 \in H$ y $\tau_0 \in \Phi$ son dados; $D(y) = \frac{1}{2}(\nabla y + {}^t \nabla y)$ es el tensor de deformaciones, τ es el tensor de esfuerzos elásticos, a y b son constantes positivas. El campo de velocidades viene dado por $y = y(x, t)$ y la presión es $\pi = \pi(x, t)$.

Se trata de un sistema de ecuaciones de tipo parabólico. Vamos a ver que, con un cambio de variables adecuado, es posible re-escribir (6.1) como un nuevo problema para una ecuación de carácter hiperbólico (acompañada también de la condición de incompresibilidad). Hagamos, en primer lugar, cálculos formales. Concretamente, multiplicamos la segunda ecuación de (6.1) por e^{at} , integramos en $(0, t)$ y obtenemos

$$\tau(t) = 2b \int_0^t e^{-a(t-s)} D(y(s)) ds + e^{-at} \tau_0. \quad (6.2)$$

Sustituyendo la expresión obtenida en la primera ecuación de (6.1), se llega a que

$$\partial_t y + \nabla \pi = b \int_0^t e^{-a(t-s)} (\Delta y)(s) ds + e^{-at} \nabla \cdot \tau_0 + v 1_{\mathcal{O}}. \quad (6.3)$$

En consecuencia, el sistema (6.1) se escribe de forma equivalente como

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta \left(b \int_0^t e^{-a(t-s)} y(s) ds \right) + \nabla \pi = e^{-at} \nabla \cdot \tau_0 + v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Por otra parte, tras multiplicar por e^{at} la primera ecuación de (6.4), se tiene

$$e^{at} \partial_t y - \Delta \left(b \int_0^t e^{as} y(s) ds \right) + \nabla (e^{at} \pi) = \nabla \cdot \tau_0 + (e^{at} v) 1_{\mathcal{O}}.$$

Pongamos ahora

$$z = \int_0^t e^{as} y(s) ds, \quad (6.5)$$

podemos escribir

$$\partial_t z = e^{at} y, \quad \partial_{tt} z = a \partial_t z + e^{at} \partial_t y.$$

Finalmente, si ponemos

$$Z = e^{at} \pi, \quad u = e^{at} v,$$

llegaremos al siguiente problema de tipo hiperbólico:

$$\begin{cases} \partial_{tt} z - a \partial_t z - b \Delta z + \nabla Z = \nabla \cdot \tau_0 + u 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{en } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = 0, \quad \partial_t z(0) = y_0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Es claro (gracias al cambio de variables que hemos introducido y a la igualdad (6.2)), que lo que obtengamos para z y Z permitirá sacar conclusiones sobre y , π y τ . El resultado principal que probaremos en esta sección es el siguiente:

Teorema 6.1 – *Supongamos $y_0 \in H$, $\tau_0 \in \Phi$, $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$, $u \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ dados. Entonces existe un único par $\{z, Z\}$ (Z es única salvo una distribución de $W^{-1, \infty}(0, T)$) solución de (6.6) que verifica $z \in L^\infty(0, T; V)$, $\partial_t z \in L^\infty(0, T; H)$, $\partial_{tt} z \in L^2(0, T; V')$, $Z \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$. Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , a , b , $|y_0|$, $|\tau_0|$ y $\|u\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que*

$$\|z\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_t z\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_{tt} z\|_{L^2(V')} \leq C. \quad (6.7)$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.1: Para la demostración, aplicaremos una vez más el método de Galerkin.

1. *Definición de la solución aproximada.*

Sea $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ la base especial del problema Stokes con condiciones de Dirichlet homogéneas y pongamos $V_m = [w_1, \dots, w_m]$ para cada $m \geq 1$.

$$\begin{cases} ((w_j, w)) = \lambda_j(w_j, w) \quad \forall w \in V, \quad w_j \in V, \\ |w_j| = 1, \quad \lambda_j \nearrow +\infty. \end{cases}$$

El m -ésimo problema aproximado es:

$$\begin{cases} \text{Hallar } z_m : [0, T] \mapsto V_m, \quad z_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j, \quad \text{tal que} \\ (z_m''(t), w) - a(z_m'(t), w) + b((z_m(t), w)) = \langle \nabla \cdot \tau_0, w \rangle + \int_{\Omega} u1_{\mathcal{O}} \cdot w \, dx \\ \forall w \in V_m, \\ z_m(0) = 0, \quad z_m'(0) = y_{0m}. \end{cases} \quad (6.8)$$

Aquí, $y_{0m} = P_m y_0$, con $P_m : H \mapsto V_m$ el operador de proyección ortogonal habitual. Se observa que (6.8) es un problema de Cauchy para un SDO lineal de segundo orden. Luego posee una única solución z_m , definida en todo el intervalo $[0, T]$.

2. *Estimaciones "a priori" sobre z_m y z_m' .*

Tomando en (6.8) como función "test" $w = z_m'(t)$ para cada t , llegamos a que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z_m'(t)|^2 - a|z_m'(t)|^2 + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \|z_m(t)\|^2 = \langle \nabla \cdot \tau_0, z_m'(t) \rangle + \int_{\Omega} u1_{\mathcal{O}} z_m'(t) \, dx. \quad (6.9)$$

De aquí, podemos deducir que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|z_m'(t)|^2 + b \|z_m(t)\|^2 \right) \leq C |z_m'(t)|^2 + C.$$

Aplicando el lema de Gronwall, deducimos fácilmente que

$$|z_m'| \leq C, \quad \|z_m\|_V \leq C.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} z_m' &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; H), \\ z_m &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; V). \end{aligned} \quad (6.10)$$

3. *Estimaciones "a priori" sobre z_m'' .*

Vamos a probar que

$$z_m'' \in \text{acotado de } L^2(0, T; V'). \quad (6.11)$$

Para ello, definimos $h_m(t) \in V'$ como sigue:

$$\langle h_m(t), w \rangle = \langle az'_m(t) - bAz_m(t) + \nabla \cdot \tau_0 + u1_{\mathcal{O}}, w \rangle \quad \forall w \in V.$$

Aquí, $A : V \mapsto V'$ es el operador de Stokes, i.e. el operador lineal continuo definido por

$$\langle A\varphi, w \rangle = ((\varphi, w)) \quad \forall \varphi, w \in V.$$

Tenemos entonces

$$\langle z''_m(t), w \rangle = \langle h_m(t), w \rangle \quad \forall w \in V_m, \quad z''_m(t) \in V_m.$$

Luego podemos escribir que

$$z''_m(t) = \tilde{P}_m h_m(t) = \tilde{P}_m (az'_m(t) - bAz_m(t) + \nabla \cdot \tau_0 + u1_{\mathcal{O}}),$$

donde $\tilde{P}_m : V' \mapsto V_m$ es el operador de proyección habitual. Por ser las w_j las que son, sabemos que

$$\|\tilde{P}_m\|_{\mathcal{L}(V')} \leq 1.$$

Por otra parte, es claro que $\Delta z_m \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$ y, además,

$$\|\Delta z_m\|_{L^\infty(H^{-1})} \leq C\|z_m\|.$$

Teniendo en cuenta la definición de $Az_m(t)$, podemos afirmar ahora que $Az_m \in L^\infty(0, T; V')$ y

$$\|Az_m\|_{L^\infty(V')} \leq C\|z_m\|.$$

Esto prueba que

$$\|h_m\|_{L^2(V')} \leq C$$

y, por tanto, se verifica la propiedad (6.11).

4. Extracción de subsucesiones convergentes.

Sabemos, gracias a las estimaciones obtenidas, que

$$\begin{aligned} z_m &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; V), \\ z'_m &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; H), \\ z''_m &\in \text{acotado de } L^2(0, T; V'). \end{aligned} \tag{6.12}$$

En consecuencia, cualesquiera que sean los espacios de Banach E y \tilde{E} , con $V \hookrightarrow E \hookrightarrow H$ y $H \hookrightarrow \tilde{E} \hookrightarrow V'$, siendo las primeras inyecciones compactas, se verifica:

$$z_m \in \text{compacto de } C^0([0, T]; E)$$

y

$$z'_m \in \text{compacto de } C^0([0, T]; \tilde{E}).$$

Por tanto, podemos deducir la existencia de (al menos) una subsucesión $\{z_\mu\}$ tal que

$$\begin{aligned}
 z_\mu &\rightarrow z && \text{en } L^\infty(0, T; V)\text{-débil}^* \text{ y en } C^0([0, T]; E), \\
 z'_\mu &\rightarrow \partial_t z && \text{en } L^\infty(0, T; H)\text{-débil}^* \text{ y en } C^0([0, T]; \tilde{E}), \\
 z''_\mu &\rightarrow \partial_{tt} z && \text{en } L^2(0, T; V')\text{-débil}, \\
 z_\mu(0) &\rightarrow z(0) && \text{en } E, \\
 z'_\mu(0) &\rightarrow \partial_t z(0) && \text{en } \tilde{E}.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

5. Paso al límite. Conclusión.

Observemos en primer lugar que, necesariamente, se tiene $\partial_t z(0) = y_0$. En efecto, basta usar que se verifica simultáneamente que

$$z'_\mu(0) = y_{0\mu} \rightarrow y_0 \text{ en } H$$

y

$$z'_\mu(0) \rightarrow \partial_t z(0) \text{ en } \tilde{E}.$$

Un razonamiento análogo nos lleva a que $z(0) = 0$.

Gracias a (6.13), es posible pasar al límite en todos los términos de (6.8). Más concretamente, tenemos

$$\begin{aligned}
 a(z'_\mu, w) &\rightarrow a(\partial_t z, w) && \text{en } L^\infty(0, T)\text{-débil}^*, \\
 b(\nabla z_\mu, w) &\rightarrow b(\nabla z, w) && \text{en } L^\infty(0, T)\text{-débil}^*, \\
 \langle z''_\mu, w \rangle &\rightarrow \langle \partial_{tt} z, w \rangle && \text{en } L^2(0, T)\text{-débil}.
 \end{aligned}$$

Luego podemos escribir que, para cada $w \in \bigcup_{m \geq 1} V_m$,

$$\langle \partial_{tt} z, w \rangle - a(\partial_t z, w) + b((z, w)) = (\nabla \cdot \tau_0, w) + (u1_{\mathcal{O}}, w) \tag{6.14}$$

(igualdades que han de ser ciertas al menos en $\mathcal{D}'(0, T)$). Por último, por densidad, deducimos que (6.14) es cierto para todo $w \in V$. En resumidas cuentas, hemos probado que existe z tal que

$$\begin{cases} \langle \partial_{tt} z, w \rangle - a(\partial_t z, w) + b((z, w)) = (\nabla \cdot \tau_0, w) + (u1_{\mathcal{O}}, w) & \forall w \in V \\ z(0) = 0, \quad \partial_t z(0) = y_0. \end{cases} \tag{6.15}$$

Además, las estimaciones precedentes implican que $z \in L^\infty(0, T; V)$, $\partial_t z \in L^\infty(0, T; H)$, $\partial_{tt} z \in L^2(0, T; V')$ y

$$\|z\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_t z\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_{tt} z\|_{L^2(V')} \leq C, \tag{6.16}$$

donde la constante C sólo depende de Ω , T , $|y_0|$, $|\tau_0|$ y $\|u\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$.

6. Recuperación de la presión Z .

En lo que sigue, vamos a ver que existe $Z \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\{z, Z\}$ es solución de (6.6). Pongamos

$$S = \partial_{tt}z - a\partial_tz - b\Delta z - \nabla \cdot \tau_0 - u1_{\mathcal{O}}.$$

Entre otras cosas, $\partial_{tt}z \in W^{-1,\infty}(0, T; H)$, $\partial_tz \in L^\infty(0, T; H)$, $\Delta z \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$, $u1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)^N$ y $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$. Por tanto, podemos afirmar que

$$S \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^N) \cong H^{-1}(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))^N \subset \mathcal{D}'(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))^N$$

y tenemos que

$$\langle S, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

(igualdad en $W^{-1,\infty}(0, T)$). Luego, aplicando el lema de De Rham (cf. [2]) deducimos que existe $Z \in \mathcal{D}'(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))$ tal que $S = -\nabla Z$. De hecho, como $S \in H^{-1}(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))^N$, se puede elegir

$$Z \in L^2(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T)) \cong W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)),$$

además, de forma única salvo una distribución de $W^{-1,\infty}(0, T)$. Por supuesto, el lema de De Rham demostrado en [2] también proporciona una estimación de $\|Z\|_{W^{-1,\infty}(L^2)}$ análoga a (6.7).

7. Unicidad.

Sean $\{z^1, Z^1\}$, $\{z^2, Z^2\}$ dos soluciones de (6.6). Pongamos $z = z^1 - z^2$, $Z = Z^1 - Z^2$. Entonces

$$\begin{cases} \partial_{tt}z - a\partial_tz - b\Delta z + \nabla Z = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{en } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = 0, \quad \partial_tz(0) = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Veamos que $z \equiv 0$ y $Z \equiv 0$. Fijemos $s \in [0, T]$ y definamos

$$\psi_s(t) = \begin{cases} -\int_t^s z(\sigma) d\sigma & \text{si } t \leq s, \\ 0 & \text{si } t > s \end{cases}$$

(i.e. $\psi_s(t)$ es una primitiva de z en $[0, s]$ que se anula para $t \geq s$). Sea también

$$\tilde{\psi}(t) = \int_0^t z(\sigma) d\sigma,$$

de manera que $\psi_s(t) = \tilde{\psi}(t) - \tilde{\psi}(s)$ si $t \leq s$. Multiplicamos ahora escalarmente la primera ecuación de (6.17) por $\psi_s(t)$ e integramos en $[0, s]$. Tenemos que

$$-\int_0^s (z', \psi_s') d\sigma + \int_0^s ((z, \psi_s)) d\sigma = a \int_0^s (z', \psi_s) d\sigma$$

de donde, teniendo en cuenta que $\psi'_s = z$, se llega a

$$-\int_0^s (z', z) d\sigma + \int_0^s ((\tilde{\psi}'(\sigma), \tilde{\psi}(\sigma) - \tilde{\psi}(s))) d\sigma = a \int_0^s (z'(\sigma), \psi_s(\sigma)) d\sigma.$$

Luego podemos escribir

$$-\frac{1}{2}|z(s)|^2 - \int_0^s ((\tilde{\psi}'(\sigma), \tilde{\psi}(s))) d\sigma + \frac{1}{2}\|\tilde{\psi}(s)\|^2 = -a \int_0^s |z(\sigma)|^2 d\sigma. \quad (6.18)$$

Como por otra parte

$$\int_0^s ((\tilde{\psi}'(\sigma), \tilde{\psi}(s))) d\sigma = \|\tilde{\psi}(s)\|^2 - ((\tilde{\psi}(0), \tilde{\psi}(s)))$$

y $\tilde{\psi}(0) = 0$, de (6.18) obtenemos que

$$\frac{1}{2}|z(s)|^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{\psi}(s)\|^2 = a \int_0^s |z(\sigma)|^2 d\sigma$$

y, también, que

$$\frac{1}{2}|z(s)|^2 \leq a \int_0^s |z(\sigma)|^2 d\sigma \quad \forall s \in [0, T].$$

Basta ahora usar el lema de Gronwall para deducir que $z \equiv 0$ y, por tanto, $Z \equiv 0$. Con ello concluimos la demostración de teorema 6.1. ■

Una consecuencia del teorema 6.1 es el siguiente resultado de existencia y unicidad para (6.1):

Teorema 6.2 – *Supongamos que $y_0 \in H$, $\tau_0 \in \Phi$, $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$ y $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ son dados. Entonces (6.1) posee una única solución $\{y, \tau, \pi\}$ que verifica*

$$\begin{aligned} y &\in L^\infty(0, T; H), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; V'), \\ \tau &\in W^{1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^{N \times N}), \quad \pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω , T , a , b , $|y_0|$, $|\tau_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(V')} + \|\tau\|_{W^{1, \infty}(H^{-1})} \leq C. \quad (6.19)$$

Para la demostración, tan sólo hace falta tener en cuenta el cambio de variable (6.5) y la igualdad (6.2) y aplicar el teorema 6.1. ■

6.1.1 Un resultado de regularidad

En esta sección, probaremos un resultado de regularidad para la solución del problema (6.1). De acuerdo con lo que precede, conviene en primer lugar saber si es posible afirmar mayor regularidad para la solución del problema (6.6). En este sentido, tenemos el siguiente

Teorema 6.3 – *Supongamos que y_0 , τ_0 y u son como en el teorema 6.1 y verifican además $y_0 \in V$ y $\partial_t(u1_{\mathcal{O}}) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$. Entonces la única solución $\{z, Z\}$ (Z única salvo una función de $L^2(0, T)$) de (6.6) posee la regularidad siguiente:*

$$z \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^N), \partial_t z \in L^\infty(0, T; V), \partial_{tt} z \in L^2(0, T; H), Z \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Además, existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , a , b , $\|y_0\|$, $\|\tau_0\|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ y $\|\partial_t v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|z\|_{L^\infty(H^2)} + \|\partial_t z\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_{tt} z\|_{L^2(H)} \leq C. \quad (6.20)$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.3: Recurriremos a estimaciones más elaboradas sobre la aproximación de Galerkin z_m que se introdujo en la demostración del teorema 6.1.

1. *Estimaciones sobre z_m y z'_m .*

Para todo $t \in [0, T]$, tomamos en (6.8) $w = -\Delta z'_m(t)$ y obtenemos:

$$(z''_m, -\Delta z'_m) - a(z'_m, -\Delta z'_m) + b((z_m, -\Delta z'_m)) = (\nabla \cdot \tau_0, -\Delta z'_m) + (u1_{\mathcal{O}}, -\Delta z'_m).$$

De aquí, integrando por partes, se llega a que

$$((z''_m, z'_m)) - a\|z'_m\|^2 + b(\Delta z_m, \Delta z'_m) = (\nabla \cdot \tau_0, -\Delta z'_m) + (u1_{\mathcal{O}}, -\Delta z'_m).$$

Esto a su vez implica

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z'_m\|^2 + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} |\Delta z_m|^2 = a\|z'_m\|^2 + (\nabla \cdot \tau_0, -\Delta z'_m) + (u1_{\mathcal{O}}, -\Delta z'_m), \quad (6.21)$$

donde

$$(\nabla \cdot \tau_0, -\Delta z'_m(t)) = \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \tau_0, -\Delta z_m(t)).$$

Integrando ahora (6.21) en $[0, T]$, llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|z'_m(t)\|^2 + \frac{b}{2} |\Delta z_m(t)|^2 &= a \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds + (\nabla \cdot \tau_0, -\Delta z_m(t)) \\ &+ \int_0^t (u(s)1_{\mathcal{O}}, -\Delta z'_m(s)) ds + \frac{1}{2} \|y_{0m}\|^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Por otro lado, podemos escribir que

$$\int_0^t (u1_{\mathcal{O}}, -\Delta z'_m(s)) ds = - \int_0^t (\partial_t(u1_{\mathcal{O}})(s), -\Delta z_m(s)) ds + (u(s)1_{\mathcal{O}}, -\Delta z_m(s)) \Big|_{s=0}^{s=t}.$$

Esto último, junto con la desigualdad (6.22), implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|z'_m(t)\|^2 + \frac{b}{2} |\Delta z_m(t)|^2 &\leq a \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t |\partial_t(u1_{\mathcal{O}})(s)| |\Delta z_m(s)| ds \\ &+ C|u1_{\mathcal{O}}|^2 + \frac{b}{4} |\Delta z_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \|y_{0m}\|^2 + |\nabla \cdot \tau_0|^2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Por tanto, si $y_0 \in V$ y $\partial_t(u1_{\mathcal{O}}) \in L^2(Q)^N$, obtenemos de (6.23) que

$$\|z'_m(t)\|^2 + |\Delta z_m(t)|^2 \leq C + C \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds.$$

Aplicando de nuevo el lema de Gronwall, deducimos que

$$\begin{aligned} z'_m &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; V), \\ z_m &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^N). \end{aligned} \quad (6.24)$$

2. Estimaciones sobre z''_m .

Razonando como en el apartado 3 de la demostración del teorema 6.1, pero ahora teniendo en cuenta las propiedades (6.24) que acabamos de obtener, podemos deducir fácilmente que

$$z''_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; H). \quad (6.25)$$

3. Paso al límite. Conclusiones.

Los mismos argumentos que siguen al apartado 3 (ya mencionado) de la demostración del teorema 6.1, permiten pasar al límite en el problema aproximado (6.8) y, concluir que el límite (débil) z de la sucesión z_m , es decir la solución del problema (6.6), verifica

$$z \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap V), \quad \partial_t z \in L^\infty(0, T; V), \quad \partial_{tt} z \in L^2(0, T; H).$$

Además, el argumento utilizado prueba que existe una constante positiva C que sólo depende de Ω , T , a , b , $\|y_0\|$, $\|\tau_0\|$, $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ y $\|\partial_t v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$, tal que

$$\|z\|_{L^\infty(H^2)} + \|\partial_t z\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_{tt} z\|_{L^2(H)} \leq C. \quad (6.26)$$

4. Recuperación de la presión.

La presión Z tiene ahora más regularidad. Más concretamente, gracias a la regularidad obtenida para z y sus derivadas respecto de t , sabemos que

$$S = \partial_{tt} z - a \partial_t z - b \Delta z - \nabla \cdot \tau_0 - u1_{\mathcal{O}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^N) \cong L^2(\Omega; L^2(0, T))^N$$

y, además, se verifica la siguiente igualdad en $L^2(0, T)$:

$$\langle S, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V}.$$

Aplicando de nuevo el lema de De Rham (cf. [2]), podemos afirmar que existe Z tal que $S = -\nabla Z$ con

$$Z \in H^1(\Omega; L^2(0, T)) \cong L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

y con $\|Z\|_{L^2(H^1)}$ de nuevo acotada por una constante como la que aparece en (6.26). Esto finaliza la demostración. ■

El resultado que acabamos de demostrar permite deducir que, cuando los datos son más regulares, la solución $\{y, \tau, \pi\}$ del problema (6.1) es también más regular. No hay más que recurrir al cambio de variables

$$y = e^{-at} \partial_t z, \quad \pi = e^{-at} Z$$

para deducir el resultado siguiente:

Teorema 6.4 – *Supongamos que y_0, τ_0 y v son como en el teorema 6.2 y, además, verifican $y_0 \in V$ y $\partial_t(v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$. Entonces la única solución $\{y, \tau, \pi\}$ (π única salvo una función de $L^2(0, T)$) del problema (6.1) posee la regularidad siguiente:*

$$\begin{aligned} y &\in L^\infty(0, T; V), & \partial_t y &\in L^2(0, T; H), \\ \tau &\in W^{1,\infty}(0, T; \Phi), & \pi &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, existe una constante positiva C que sólo depende de $\Omega, T, a, b, \|y_0\|, \|\tau_0\|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ y $\|\partial_t v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$ tal que

$$\|y\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_t y\|_{L^2(H)} + \|\tau\|_{W^{1,\infty}(L^2)} \leq C. \quad (6.27)$$
■

Observación 6.1 Se puede demostrar que, de hecho, en los teoremas 6.1, 6.2, 6.4, hay continuidad en el sentido siguiente:

- En el teorema 6.1, $z \in C^0([0, T]; V)$, $\partial_t z \in C^0([0, T]; H)$
- En el teorema 6.2, $y \in C^0([0, T]; H)$, $\partial_t y \in C^0([0, T]; V')$
- En el teorema 6.4, $y \in C^0([0, T]; V)$, $\partial_t y \in C^0([0, T]; H)$.

Esencialmente, esto es consecuencia de las estimaciones en L^∞ y el resultado de regularidad que proporciona el teorema 6.3 (véase un razonamiento análogo en la demostración del lema 7.9). ■

Bibliografía

- [1] D.D. Joseph, *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, Applied Math. Sciences, Vol. 84, Springer-Verlag, New York Inc., 1990.
- [2] J. Simon
 - (a) *Démonstration constructive d'un théorème de G. de Rham*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), no. 11, 1167–1172.
 - (b) *Distributions à Valeurs Vectorielles*, livre à paraître.
- [3] E. Zuazua, *Exact controllability for the semilinear wave equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **69** (1990), no. 1, 1–31.

Capítulo 7

CONTROLABILIDAD DE FLUIDOS LINEALES DE MAXWELL

7.1 Controlabilidad aproximada

Se considera de nuevo el fluido lineal de Maxwell:

$$\begin{cases} \partial_t y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau + v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$, $y_0 \in H$ y $\tau_0 \in \Phi$ son dados, con $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$. Obsérvese que, gracias a los resultados obtenidos anteriormente (ver teoremas 6.2, 6.4), podemos afirmar (entre otras cosas) que la solución $\{y, \pi, \tau\}$ de (7.1) verifica $y \in C^0([0, T]; H)$. Para mayor claridad, cuando sea necesario, denotaremos $\{y_v, \pi_v, \tau_v\}$ la solución de (7.1). El resultado de controlabilidad aproximada que probaremos aquí es el que sigue:

Teorema 7.1 – *Existe un tiempo $T_0(\Omega) > 0$ tal que, si $T > T_0(\Omega)$, entonces la variedad lineal*

$$\{y_v(T) : v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N\} \text{ es densa en } H.$$

La demostración de este teorema se hará más adelante. También veremos que el punto clave para la prueba de este resultado consiste en demostrar la propiedad de continuación única (PCU) que aparece en el resultado siguiente:

Lema 7.2 – Existe un tiempo $T_0(\Omega) > 0$ tal que, si $T > T_0(\Omega)$, entonces es cierta la PCU que sigue: Si $h \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, $\partial_t h \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\partial_{tt} h \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$,

$$\begin{cases} \partial_{tt} h - a \partial_t h - b \Delta h = 0 & \text{en } Q, \\ h = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (7.2)$$

y

$$h = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T),$$

entonces $h \equiv 0$.

Observación 7.1 Si h es tan regular como en este lema y verifica (7.2), entonces de hecho $h \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ y $\partial_t h \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. ■

Para la demostración del lema 7.2, utilizaremos la siguiente consecuencia del teorema de unicidad de Holmgren (por ejemplo, véase [1]):

Teorema 7.3 (L. Hörmander) – Si \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 son dos abiertos convexos de \mathbb{R}^k tales que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ y $P(D)$ es un operador diferencial de coeficientes constantes tal que toda superficie característica de $P(D)$ que corte a \mathcal{O}_2 corta también a \mathcal{O}_1 , entonces toda distribución $h \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ que verifique $P(D)h = 0$ en \mathcal{O}_2 y $h = 0$ en \mathcal{O}_1 también verifica $h = 0$ en \mathcal{O}_2 . ■

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.2: Las superficies características del operador diferencial (de tipo hiperbólico) asociado a (7.2) coinciden con las superficies que son características para la EDP de ondas. En consecuencia, si la conclusión del teorema 7.3 es cierta para dos abiertos \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 dados y

$$P(D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta,$$

también lo será para estos mismos abiertos con

$$P(D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - a \frac{\partial}{\partial t}. \quad (7.3)$$

Podemos seguir las líneas generales de la demostración del lema 8.1 de J.-L. Lions [2] para probar el lema 7.2. Para mayor claridad, presentaremos el argumento con detalle. Pongamos $k = N + 1$ y $P(D)$ como en (7.3). Consideremos un hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ de ecuación

$$\sum_{i=1}^N a_i x_i + dt = c, \quad \text{con } a_i, d \in \mathbb{R}.$$

El polinomio característico asociado al operador $P(D)$ es:

$$p(a_1, \dots, a_N, d) = d^2 - \sum_{i=1}^N |a_i|^2.$$

Luego \mathcal{H} es una superficie característica respecto de $P(D)$ si y sólo si $\sum_{i=1}^N |a_i|^2 = d^2$.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$ y $\delta, \tau > 0$ con $\tau > 2|z_1 - z_2|$. Consideremos los abiertos convexos siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= B(z_1; \delta) \times (0, T), \\ \mathcal{O}_2 &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{B((1-\lambda)z_1 + \lambda z_2; \delta) \times (\lambda|z_1 - z_2|, \tau - \lambda|z_1 - z_2|)\}. \end{aligned}$$

Gracias a la estructura de los planos característicos, podemos afirmar que toda superficie característica de $P(D)$ que corte a \mathcal{O}_2 también corta a \mathcal{O}_1 . Aplicando el teorema de Hörmander, deducimos lo siguiente:

- Si $h \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ verifica $\partial_{tt}h - a\partial_t h - \Delta h = 0$ en \mathcal{O}_2 y $h = 0$ en \mathcal{O}_1 , entonces $h = 0$ en \mathcal{O}_2 .

A partir de aquí, razonando como en [2], se prueba que existe un tiempo $T_0 = T_0(\Omega)$ tal que, si $T > T_0$, entonces es cierta la PCU para h . Esto prueba el lema 7.2. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.1: Veamos que todo se reduce (como hemos mencionado) a probar la PCU que aparece en el lema 7.2. Para ello, la estrategia a seguir es la que presentamos a continuación:

- Llegar a una primera PCU para una ecuación “adjunta” no escalar de tipo hiperbólico en la que aparece la presión;
- Pasar a una nueva PCU para una ecuación escalar hiperbólica donde ya no aparece el término de presión;
- Hacer un cambio de variables (análogo al introducido en el capítulo anterior) para escribir una tercera PCU, esta vez para la EDP de tipo hiperbólico que aparece en el lema 7.2.

- En primer lugar, observemos que, como se trata de un problema lineal, probar el teorema es equivalente a demostrar el siguiente resultado:

- Supongamos $y_0 = 0$, $\tau_0 = 0$ y sea $f \in H$ tal que

$$(y_v(T), f) = 0 \quad \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N. \quad (7.4)$$

Entonces $f \equiv 0$.

Es bien conocido que este argumento conduce a una PCU para un problema adjunto. Concretamente, sean $y_0 = 0$ y $\tau_0 = 0$ y sea $f \in H$ tal que se cumple (7.4). Razonando como en el Capítulo anterior, llegamos a que (7.1) se escribe de forma equivalente como sigue:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta \left(b \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} y(s) ds \right) + \nabla \pi = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Consideremos también el problema retrógrado siguiente:

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \left(b \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} \varphi(s) ds \right) - \nabla \Pi = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = f. \end{cases} \quad (7.6)$$

Como $f \in H$, sabemos (basta seguir los pasos de la demostración del teorema 6.2) que existe un único par $\{\varphi, \Pi\}$ que es solución de (7.6), con

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^0([0, T]; H), \\ \partial_t \varphi &\in L^\infty(0, T; V'), \\ \Pi &\in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (7.7)$$

(como siempre, Π es única salvo una distribución de $W^{-1, \infty}(0, T)$). Multiplicamos por φ la primera ecuación de (7.5) e integramos en Q . Tendremos

$$0 = (y_v(T), f) = (y_v(T), \varphi(T)) = \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} v \cdot \varphi dx dt \quad \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N.$$

Luego todo se reduce a demostrar la siguiente PCU:

Si $\varphi \in C^0([0, T]; H)$, $\partial_t \varphi \in L^\infty(0, T; V')$,

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \left(b \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} \varphi(s) ds \right) - \nabla \Pi = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (7.8)$$

y

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T), \quad (7.9)$$

entonces $\varphi \equiv 0$.

(b) Trataremos a continuación de justificar que, de hecho, basta probar una PCU más sencilla. Más precisamente, veremos que, en las condiciones precedentes, forzosamente se tiene

$$\nabla \Pi \equiv 0 \quad \text{en } Q. \quad (7.10)$$

En efecto, gracias a (7.9), obtenemos que

$$b \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} \varphi(s) ds = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T).$$

Luego, de la primera ecuación de (7.8), deducimos que

$$\nabla \Pi = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T).$$

Por tanto, la presión Π es constante en $\mathcal{O} \times (0, T)$. Pondremos $\Pi = C_0$ en $\mathcal{O} \times (0, T)$.

Por otra parte, tras aplicar el operador divergencia a la primera ecuación de (7.8) y usando que $\nabla \cdot \varphi = 0$, obtenemos

$$\Delta \Pi = 0 \quad \text{en } Q.$$

Esto implica, que para cada t , la función $\Pi(\cdot, t)$ verifica

$$\begin{cases} \Delta \Pi(\cdot, t) = 0 & \text{en } \Omega, \\ \Pi(\cdot, t) = C_0 & \text{en } \mathcal{O}. \end{cases}$$

Entonces $\Pi \equiv C_0$ en Q , es decir, es cierto (7.10).

De este modo, el sistema satisfecho por φ se reduce a N ecuaciones escalares desacopladas.

(c) Por simplicidad, en lo que sigue denotaremos θ la i -ésima componente de φ . Sabemos que θ verifica

$$\theta \in W^{-1, \infty}(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t \theta \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Además, acabamos de probar que

$$\begin{cases} -\partial_t \theta - \Delta \left(b \int_t^T e^{-\alpha(\sigma-t)} \theta(\sigma) d\sigma \right) = 0 & \text{en } Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \theta = 0 & \text{en } \mathcal{O} \times (0, T). \end{cases} \quad (7.11)$$

Y queremos probar que $\theta \equiv 0$. Por comodidad, re-escribiremos el problema (7.11) con integrales en $(0, t)$, cambiando t por $T - t$. Sea

$$\eta = - \int_t^T b e^{-a(\sigma-t)} \nabla \theta(\sigma) d\sigma.$$

Observemos que $\eta(T) = 0$ y se verifican las igualdades

$$-\partial_t \theta = -\nabla \cdot \eta, \quad -\partial_t \eta + a\eta = -b\nabla \theta.$$

Pongamos

$$\theta^*(s) = \theta(T - s), \quad \eta^*(s) = \eta(T - s).$$

De aquí, es fácil deducir que $\eta^*(0) = 0$ y que se tiene

$$\partial_s \theta^*(s) = -(\nabla \cdot \eta^*)(s), \quad \partial_s \eta^*(s) = -a\eta^*(s) - b\nabla \theta^*(s).$$

Llamando de nuevo θ^* a θ y η^* a η , obtenemos ahora que $\eta(0) = 0$ y

$$-\partial_t \theta = -\nabla \cdot \eta, \quad \partial_t \eta + a\eta = -b\nabla \theta. \quad (7.12)$$

Multiplicando la segunda ecuación de (7.12) por e^{at} , obtenemos que

$$\partial_t(e^{at}\eta) = -be^{at}\nabla \theta,$$

de donde, integrando en $(0, t)$, llegamos a las igualdades

$$\eta = -b \int_0^t e^{-a(t-s)} \nabla \theta(s) ds, \quad -\nabla \cdot \eta = \Delta \left(b \int_0^t e^{-a(t-s)} \theta(s) ds \right).$$

Finalmente, teniendo en cuenta (7.12), la ecuación de (7.11) queda como sigue

$$\partial_t \theta - \Delta \left(\int_0^t b e^{-a(t-s)} \theta(s) ds \right) = 0.$$

Este argumento permite formular así la PCU que queremos probar:

Si $\theta \in W^{-1,\infty}(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ verifica

$$\begin{cases} \partial_t \theta - \Delta \left(b \int_0^t e^{-a(t-s)} \theta(s) ds \right) = 0 & \text{en } Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (7.13)$$

y

$$\theta = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T),$$

entonces $\theta \equiv 0$.

(c) Como ya hemos mencionado, esta PCU es cierta, dado que $T > T_0(\Omega)$, como consecuencia del lema 7.2. En efecto, si multiplicamos la primera igualdad de (7.13) por e^{at} , obtenemos

$$e^{at}\partial_t\theta - \Delta\left(b\int_0^t e^{as}\theta(s) ds\right) = 0.$$

Pongamos

$$h = \int_0^t e^{as}\theta(s) ds.$$

Entonces es inmediato que

$$\begin{cases} \partial_{tt}h - a\partial_th - b\Delta h = 0 & \text{en } Q, \\ h = 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (7.14)$$

Sabemos que

$$h \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \partial_th \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_{tt}h \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

y, además, que $h = 0$ en $\mathcal{O} \times (0, T)$. Podemos por tanto aplicar el lema 7.2 y deducir que $h \equiv 0$. Evidentemente, esto implica $\theta \equiv 0$. Esto termina la demostración del teorema. ■

Observación 7.2 Con un poco más de trabajo, también se puede probar que, en las condiciones del teorema 7.1, la variedad lineal

$$\{\{y_v(T), \tau_v(T)\} : v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N\} \text{ es densa en } H \times \Phi. \quad \blacksquare$$

7.2 Controlabilidad exacta a cero (I)

En esta sección, hablaremos de controlabilidad exacta a cero para el modelo lineal de Maxwell. Seguiremos hablando de control distribuido, actuando sobre una pequeña parte \mathcal{O} del dominio Ω . Los resultados tendrán carácter “abstracto”, en el sentido de que no podremos identificar los espacios donde se deben elegir los datos iniciales. Por esta razón, tendremos que suponer, además, que $\tau_0 = 0$ (véase la observación 7.4). En cambio, en los resultados de la sección 7.3, seremos capaces de identificar estos espacios, modificando ligeramente (7.1), en el contexto de un problema de control frontera.

Volvamos pues a considerar el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y + \nabla\pi = \nabla \cdot \tau + v1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0, \end{cases} \quad (7.15)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$, $y_0 \in H$ y $\tau_0 \in \Phi$ son dados. Como en otras ocasiones, con ayuda del cambio de variables

$$z = \int_0^t e^{as} y(s) ds, \quad u = e^{at} v, \quad Z = e^{at} \pi,$$

llegaremos fácilmente a la siguiente reformulación hiperbólica:

$$\begin{cases} \partial_{tt} z - a \partial_t z - b \Delta z + \nabla Z = \nabla \cdot \tau_0 + u 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{en } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = z^0, \quad \partial_t z(0) = z^1. \end{cases} \quad (7.16)$$

Aquí, $z^0 = 0$ y $z^1 = y_0$. Gracias a este cambio, podemos relacionar los resultados de controlabilidad exacta a cero para los sistemas (7.15) y (7.16) y afirmar lo siguiente:

- Controlar exactamente a $\{0, 0\}$ el sistema (7.16) partiendo de $\{0, y_0\}$, implica controlar exactamente a cero el campo de velocidades y en el sistema (7.15) partiendo de $\{y_0, \tau_0\}$ (y recíprocamente).

Las PCU demostradas anteriormente (véanse el lema 7.2 y la demostración del teorema 7.1) van a permitir probar la controlabilidad exacta a cero para las soluciones de (7.16) y (7.15) respectivamente. De hecho, usaremos la PCU siguiente:

Si $\varphi \in L^\infty(0, T; V)$, $\partial_t \varphi \in L^\infty(0, T; H)$, $\partial_{tt} \varphi \in L^\infty(0, T; V')$, $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$

$$\begin{cases} \partial_{tt} \varphi + a \partial_t \varphi - b \Delta \varphi + \nabla p = 0, & \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (7.17)$$

y

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \times (0, T), \quad (7.18)$$

entonces $\varphi \equiv 0$.

Obsérvese que esta PCU es cierta si $T > T_0(\Omega)$. Para convencerse de ello, basta razonar en primer lugar como en la demostración del teorema 7.1 para llegar a que, necesariamente, $\nabla p \equiv 0$; después, teniendo en cuenta que las superficies características del operador diferencial asociado vuelven a ser las que aparecen en la demostración del lema 7.2, se deduce que $\varphi \equiv 0$.

Para el sistema (7.16), tenemos un primer resultado de controlabilidad que es el siguiente:

Teorema 7.4 - Supongamos que $T > T_0(\Omega)$ y $\tau_0 = 0$. Definimos el espacio F como el completado de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ para la norma

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \quad (7.19)$$

donde φ es la solución de (7.17) que verifica $\varphi(0) = \varphi^0$ y $\partial_t \varphi(0) = \varphi^1$. Sea F' el dual de F . Entonces, para cada $\{z^0, z^1\}$ que verifique $\{z^1 - az^0, -z^0\} \in F'$, existe un control $u \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ tal que la correspondiente solución z de (7.16) verifica

$$z(T) = 0, \quad \partial_t z(T) = 0.$$

Observación 7.3 El espacio F está definido como el completado de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ para una norma adecuada. En principio, no sabemos identificar F ni F' a partir de los espacios funcionales habituales. "A priori", F y F' dependen de \mathcal{O} y T . El problema radica en que no se saben probar *desigualdades directas* ni *desigualdades inversas* adecuadas. Por ejemplo, si \mathcal{O} y T fueran tales que pudiéramos probar la desigualdad inversa

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{\Psi} \leq C \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt \right)^{1/2} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V},$$

donde Ψ es un espacio de Banach que contiene a $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ como subespacio denso, entonces podríamos afirmar que $F \subset \Psi$ con inyección continua y, en consecuencia, $F' \supset \Psi'$. Desgraciadamente, esta cuestión no es trivial (ni siquiera lo es en el caso análogo pero más sencillo de la EDP de ondas).

■

Observación 7.4 Por ser el teorema 7.4 un resultado de carácter abstracto, el caso en el que $\tau_0 \neq 0$ conduce a un problema de regularidad para los datos iniciales cuya solución no parece clara. Describamos en líneas generales la estrategia que deberíamos seguir en este caso. Supongamos pues que $\tau_0 \in \Phi$ y $T > T_0(\Omega)$. Busquemos la solución de (7.16) de la forma $z = w + h$, siendo w la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_{tt} w - a \partial_t w - b \Delta w + \nabla W = \nabla \cdot \tau_0, \\ \nabla \cdot w = 0 \quad \text{en } Q, \\ w = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = z^0, \quad \partial_t w(0) = z^1 \end{cases} \quad (7.20)$$

y siendo h , junto con H y u , la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt} h - a \partial_t h - b \Delta h + \nabla H = u 1_{\mathcal{O}} \quad \text{en } Q, \\ \nabla \cdot h = 0 \quad \text{en } Q, \\ h = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ h(0) = 0, \quad \partial_t h(0) = 0, \\ h(T) = -w(T), \quad \partial_t h(T) = -\partial_t w(T). \end{cases} \quad (7.21)$$

Usando adecuadamente la reversibilidad en tiempo del operador que aparece en (7.3) y el teorema 7.4, seremos capaces de resolver (7.21) (y por tanto asegurar que $z(T) = \partial_t z(T) = 0$), cuando $\{\partial_t w(T) - aw(T), w(T)\} \in F'$. Luego la pregunta natural que surge es la siguiente:

¿Qué hipótesis de regularidad sobre $\{z^0, z^1\}$ y τ_0 hacen falta para poder decir que la solución de (7.21) verifica $\{\partial_t w(T) - aw(T), w(T)\} \in F'$?

Por supuesto, dado que no sabemos caracterizar F' , también parece complicado dar una respuesta satisfactoria a esta cuestión. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.4: Para probar este resultado, aplicaremos el método H.U.M. (véase [2]).

Etapa 1. Sea $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Consideremos el problema homogéneo:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\varphi + a\partial_t\varphi - b\Delta\varphi + \nabla p = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \partial_t\varphi(0) = \varphi^1. \end{cases} \quad (7.22)$$

Podemos afirmar (véanse los resultados del Capítulo anterior) que existe una única solución $\{\varphi, p\}$ de (7.22), que verifica (entre otras cosas)

$$\varphi \in C^0([0, T]; V), \quad \partial_t\varphi \in C^0([0, T]; H).$$

Etapa 2. Consideremos ahora el problema retrógrado siguiente:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\psi - a\partial_t\psi - b\Delta\psi + \nabla q = -\varphi 1_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{en } Q, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(T) = 0, \quad \partial_t\psi(T) = 0. \end{cases} \quad (7.23)$$

De nuevo, (7.23) posee una única solución $\{\psi, q\}$ que verifica

$$\psi \in C^0([0, T]; V), \quad \partial_t\psi \in C^0([0, T]; H).$$

Definimos el operador lineal Λ de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ en $H \times V$ como sigue:

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\partial_t\psi(0) - a\psi(0), -\psi(0)\} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \quad (7.24)$$

Obsérvese que Λ está bien definido, pues ψ es suficientemente regular.

Etapa 3. En esta etapa definiremos el espacio F y veremos que la aplicación Λ se puede extender como un isomorfismo de F en su dual F' .

Consideremos unos datos iniciales $\{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ y sea $\{\xi, \Xi\}$ la solución del correspondiente problema (7.22), esto es:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\xi + a\partial_t\xi - b\Delta\xi + \nabla\Xi = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \xi = 0 & \text{en } Q, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \xi(0) = \xi^0, \quad \partial_t\xi(0) = \xi^1. \end{cases} \quad (7.25)$$

Multipliquemos ahora la primera ecuación de (7.23) por ξ e integremos en Q . Obtenemos que

$$\iint_Q (\partial_{tt}\psi \cdot \xi - a\partial_t\psi \cdot \xi - b\Delta\psi \cdot \xi + \nabla q \cdot \xi) dx dt = - \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi \cdot \xi dx dt.$$

De aquí, realizando oportunas integraciones por partes y teniendo en cuenta las condiciones iniciales y finales, llegamos fácilmente a la igualdad siguiente:

$$\int_{\Omega} \partial_t\psi(0) \cdot \xi^0 dx - \int_{\Omega} \psi(0) \cdot (\xi^1 + a\xi^0) dx = \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi \cdot \xi dx dt. \quad (7.26)$$

Usando la definición del operador Λ , deducimos que (7.26) se puede escribir en la forma

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi \cdot \xi dx dt, \quad (7.27)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad asociado a $H \times V$. En particular, de (7.27) con $\{\xi^0, \xi^1\} = \{\varphi^0, \varphi^1\}$, deducimos que

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle = \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt. \quad (7.28)$$

Introducimos ahora la aplicación $\|\cdot\|_F$, definida como sigue:

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle \right)^{1/2} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \quad (7.29)$$

Gracias a la igualdad (7.28), podemos escribir que para cada $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ que

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle \right)^{1/2} = \left(\iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

Ahora bien, dado que $T > T_0(\Omega)$, se verifica la PCU mencionada inmediatamente antes de este teorema. En consecuencia, podemos afirmar que la solución φ de (7.22) que se

anula en $\mathcal{O} \times (0, T)$ es idénticamente nula. Luego la seminorma (7.29) es, de hecho, una norma en $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Definimos el espacio F como el completado de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ para la norma $\|\cdot\|_F$. Es claro que F es un espacio de Hilbert y, los cálculos anteriores implican

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \left(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \right)_F \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \quad (7.30)$$

donde $(\cdot, \cdot)_F$ designa el producto escalar en F . En consecuencia, Λ se extiende de forma única como un isomorfismo de F en F' . En efecto, de (7.30) se obtiene que

$$|\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle| \leq \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F \|\{\xi^0, \xi^1\}\|_F \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \quad (7.31)$$

Por tanto (gracias a la desigualdad (7.31)), se puede extender Λ de forma única a una aplicación lineal continua de F en su dual F' . Teniendo en cuenta (7.30), podemos escribir además que

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \left(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \right)_F \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in F. \quad (7.32)$$

De aquí se deduce que Λ es efectivamente un isomorfismo de F en F' (y también que $\Lambda = \Lambda^*$).

Etapa 4. Conclusión. Por ser Λ un isomorfismo de F en F' , podemos afirmar que para todo $\{z^0, z^1\}$ con $\{z^1 - az^0, -z^0\} \in F'$, existe un único par $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in F$ que verifica

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{z^1 - az^0, -z^0\}. \quad (7.33)$$

Esto sugiere la siguiente estrategia: tomamos en (7.16) como control $u = -\varphi 1_{\mathcal{O}}$, siendo φ la solución de (7.22) asociada a los datos $\{\varphi^0, \varphi^1\}$, donde el par $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ está determinado por la igualdad (7.33). Usando la definición de Λ , vemos que esto significa que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt}\psi - a\partial_t\psi - b\Delta\psi + \nabla q = -\varphi 1_{\mathcal{O}} \quad \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 \quad \text{en } Q, \\ \psi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \psi(0) = z^0, \quad \partial_t\psi(0) = z^1, \\ \psi(T) = 0, \quad \partial_t\psi(T) = 0. \end{array} \right. \quad (7.34)$$

Como (7.16) posee una única solución, podemos decir que hemos resuelto el problema de controlabilidad exacta con control $u = -\varphi 1_{\mathcal{O}}$ y estado $\{z, Z\} = \{\psi, q\}$, partiendo de $\{z^0, z^1\}$ en el instante inicial. Esto finaliza la demostración del teorema. ■

Observación 7.5 En particular, tomando $z^0 = 0$ y $z^1 = y_0$, poniendo $F = F_1 \times F_2$ y $F' = F'_1 \times F'_2$, obtenemos que, en las condiciones del teorema 7.4, para cada $y_0 \in F'_1$ existe un control $u \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ tal que la solución $\{z, Z\}$ de (7.16) con $\tau_0 = 0$ verifica $z(T) = \partial_t z(T) = 0$. ■

Volvamos a considerar el problema (7.15). Como hemos mencionado antes, el problema de controlabilidad exacta a cero para (7.15) partiendo del dato inicial $\{y_0, 0\}$ se resuelve gracias al resultado que acabamos de probar. Más precisamente, teniendo en cuenta la observación 7.5, deducimos el siguiente resultado:

Teorema 7.5 - *Supongamos $T > T_0(\Omega)$ y $\tau_0 = 0$. Entonces existe un espacio de Hilbert F_1 que contiene a \mathcal{V} como subespacio denso tal que, para cada $y_0 \in F'_1$, existe un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$ tal que la correspondiente solución de (7.15) verifica*

$$y(T) = 0, \quad \tau(T) = 0.$$

7.3 Controlabilidad exacta a cero (II)

A continuación, presentaremos otros resultados de controlabilidad para los que sí se podrán identificar espacios donde elegir datos iniciales. Será necesario modificar ligeramente (7.1), de modo que quede un problema de control frontera.

7.3.1 Sistemas de tipo “ondas-Stokes”. Resultados previos

En esta subsección, presentaremos algunos resultados previos, necesarios para probar una desigualdad inversa adecuada. En primer lugar, veremos un resultado para sistemas de tipo “ondas-Stokes” (véase [2] para un resultado análogo para la EDP de ondas). Probaremos una desigualdad inversa y, también, una desigualdad directa, cierta cuando los datos iniciales son más regulares (cf. el lema 7.6). Estos sistemas ya fueron considerados por J.L. Lions en [2]. En nuestro contexto, aparecen de forma natural (algo de esto se ha visto ya en las secciones precedentes) cuando se consideran fluidos lineales de Maxwell. En lo que sigue, haremos uso de la notación introducida por J.L. Lions en [2].

Sea $x^0 \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$. Consideremos la siguiente partición de $\partial\Omega$:

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \partial\Omega : \vec{m}(x) \cdot \vec{n}(x) > 0\}, \quad \Gamma_*(x^0) = \partial\Omega \setminus \Gamma(x^0).$$

Aquí, la función \vec{m} viene dada por $\vec{m}(x) = x - x^0$ y $\vec{n} = \vec{n}(x)$ es el vector normal unitario en $x \in \partial\Omega$, orientado hacia el exterior de Ω . Pongamos

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0, T), \quad \Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times (0, T)$$

y

$$R(x^0) = \max_{x \in \Omega} |\vec{m}(x)|, \quad T(x^0) = 2R(x^0).$$

Consideraremos el siguiente sistema de tipo “ondas-Stokes”:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi + \nabla\pi = f & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \partial_t\varphi(0) = \varphi^1. \end{cases} \quad (7.35)$$

Observación 7.6 Los argumentos que conducen a la existencia, unicidad y regularidad de solución del problema (6.6) utilizados en el Capítulo anterior, son también aplicables al problema (7.35). De hecho, podemos afirmar lo siguiente:

1. Para cada $f \in L^1(0, T; H)$ y cada par $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in V \times H$, existe una única solución $\{\varphi, \pi\}$ de (7.35) que verifica

$$\varphi \in C^0([0, T]; V), \quad \partial_t\varphi \in C^0([0, T]; H), \quad \partial_{tt}\varphi \in L^1(0, T; V'), \quad \pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

(como siempre, π es única salvo una distribución de $W^{-1, \infty}(0, T)$). Además, existe una constante positiva C , que sólo depende de $\Omega, T, \|f\|_{L^1(H)}, \|\varphi^0\|_V$ y $\|\varphi^1\|_H$, tal que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_{tt}\varphi\|_{L^1(V')} \leq C. \quad (7.36)$$

2. Denotemos A el operador de Stokes habitual, de dominio $D(A)$, dado por

$$D(A) = \{u \in H : u \in H_0^1(\Omega)^N, \Delta u \in L^2(\Omega)^N\}.$$

Supongamos ahora que $f \in L^2(0, T; H)$, $\partial_t f \in L^2(0, T; H)$ y $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(A) \times V$. Entonces la solución $\{\varphi, \pi\}$ de (7.35) verifica

$$\varphi \in C^0([0, T]; D(A)), \quad \partial_t\varphi \in C^0([0, T]; V), \quad \partial_{tt}\varphi \in C^0([0, T]; H).$$

Además, existe una constante positiva C , que sólo depende de $\Omega, T, \|f\|_{L^2(H)}, \|\partial_t f\|_{L^2(H)}, \|\varphi^0\|_{D(A)}$ y $\|\varphi^1\|_V$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(D(A))} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_{tt}\varphi\|_{L^\infty(H)} \leq C. \quad (7.37)$$

■

El primer resultado de esta sección está esencialmente probado en [2] y es el siguiente:

Lema 7.6 Supongamos que $\{\varphi, \pi\}$ es la solución de (7.35) asociada al segundo miembro $f \equiv 0$ y a los datos iniciales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$.

(a) Si $T > T(x^0)$ y $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in V \times H$, entonces existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω y de T , tal que se verifica la desigualdad inversa siguiente:

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{V \times H} \leq C \left(\iint_{\Sigma(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in V \times H. \quad (7.38)$$

(b) Si $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(A) \times V$, entonces se tiene $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \in L^2(\Sigma)$. Además, existe $C > 0$, que sólo depende de Ω y T , tal que se verifica la desigualdad directa siguiente:

$$\left(\iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \leq C \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{D(A) \times V} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(A) \times V. \quad (7.39)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.6: El argumento se debe a J.L. Lions [2]. Para mayor claridad, será recordado con detalle. En primer lugar, usando el método de los multiplicadores, demostraremos una identidad que permitirá probar la desigualdad inversa (7.38) (véase (7.41)). Después, de esta misma identidad deduciremos la regularidad $L^2(\Sigma)$ para la derivada normal de φ (cuando $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(A) \times V$) y, también, la desigualdad directa (7.39).

(a) Por el momento, supongamos $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, de modo que $\{\varphi, \pi\}$ es tan regular (al menos) como en el apartado 2 de la observación 7.6. Multipliquemos escalarmente la EDP de (7.35) por $(\vec{m} \cdot \nabla)\varphi$ e integremos en Q . Con el convenio usual de suma de índices repetidos, obtenemos:

$$\iint_Q \partial_{tt}\varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \iint_Q \Delta \varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \iint_Q (-\nabla \pi) \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (7.40)$$

Tras hacer integraciones por partes, podemos escribir el primer término de (7.40) como sigue:

$$\iint_Q \partial_{tt}\varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial m_k}{\partial x_k} |\partial_t \varphi|^2 + \int_{\Omega} \partial_t \varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

El segundo término es de la forma

$$\iint_Q \Delta \varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = - \iint_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial m_k}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + m_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \right) + \iint_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} d\sigma dt.$$

Aquí, integrando por partes el segundo sumando de la derecha, obtenemos que

$$\iint_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot m_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = -\frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial m_k}{\partial x_k} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} m_k n_k |\nabla \varphi|^2 d\sigma dt.$$

Usemos que $\varphi = 0$ sobre Σ para deducir que $|\nabla\varphi|^2 = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^2$. Entonces (7.40) da lugar a la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t \varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial m_k}{\partial x_k} (|\partial_t \varphi|^2 - |\nabla \varphi|^2) \\ & + \iint_Q \frac{\partial m_k}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} m_k n_k \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt = \iint_Q (-\nabla \pi) \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

A continuación, deduciremos la desigualdad inversa (7.38) a partir de (7.41). Gracias a la elección de la función \bar{m} , se deduce de (7.41) que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t \varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{N}{2} \iint_Q (|\partial_t \varphi|^2 - |\nabla \varphi|^2) + \iint_Q |\nabla \varphi|^2 \\ & - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} m_k n_k \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt = \iint_Q (-\nabla \pi) \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

No es difícil comprobar que

$$\iint_Q (-\nabla \pi) \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0,$$

pues $\nabla \cdot \varphi = 0$. Por otra parte, podemos afirmar que la solución de (7.35) verifica

$$\iint_Q (|\partial_t \varphi|^2 - |\nabla \varphi|^2) = (\partial_t \varphi(t), \varphi(t)) \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Para simplificar la notación, pongamos

$$A_1 = \iint_Q (|\partial_t \varphi|^2 - |\nabla \varphi|^2), \quad A_2 = \int_{\Omega} \partial_t \varphi \cdot m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{t=0}^{t=T}$$

y, también

$$E(t) = \frac{1}{2} \{ |\partial_t \varphi(t)|^2 + |\nabla \varphi(t)|^2 \}, \quad E_0 = \frac{1}{2} \{ |\varphi^1|^2 + |\nabla \varphi^0|^2 \}.$$

Para cada $t \in [0, T]$, $E(t)$ es la energía total del sistema (7.35) en el instante t . Por otra parte, E_0 es la energía en el instante inicial. Usemos que $E(t)$ se conserva, esto es,

$$\frac{1}{2} \iint_Q (|\partial_t \varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2) dx dt = T E_0.$$

En consecuencia, de la igualdad (??), se deduce que

$$A_2 + \frac{N-1}{2} A_1 + T E_0 - \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} m_k n_k \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt = 0. \quad (7.43)$$

Por ser $\vec{m} \cdot \vec{n} \leq 0$ sobre $\Sigma_*(x^0)$ y $|\vec{m} \cdot \vec{n}| \leq R(x^0)$ sobre $\Sigma(x^0)$, podemos escribir que

$$\iint_{\Sigma} m_k n_k \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 \leq \iint_{\Sigma(x^0)} m_k n_k \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 \leq R(x^0) \iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2.$$

Luego, de (7.43), deducimos también que

$$A_2 + \frac{N-1}{2} A_1 + T E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt. \quad (7.44)$$

Vemos que, por densidad, esta desigualdad debe seguir siendo cierta para cualquier $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in V \times H$. En efecto, bastaría considerar la sucesión de las soluciones de (7.35) asociadas a datos iniciales $\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}$ muy regulares, con segundo miembro igual a cero. Tras escribir (7.44) para los A_1^n , A_2^n y E_0^n correspondientes y tener en cuenta la “buena” convergencia de todos los términos de la izquierda, llegaríamos a esa conclusión.

No es difícil probar la estimación

$$\left| A_1 + \frac{N-1}{2} A_2 \right| \leq R(x^0) \|(|\partial_t \varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2)\|_{L^\infty(0,T)} = T(x^0) E_0.$$

Esto último, junto con (7.44), permite escribir finalmente la desigualdad

$$(T - 2R(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt. \quad (7.45)$$

Basta ahora tomar $T > 2R(x^0) = T(x^0)$ para deducir que se tiene (7.38), con C dependiendo sólo de Ω y de T .

(b) Veamos ahora que, si $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(A) \times V$, entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \in L^2(\Sigma)$ y se tiene (7.39). Volvamos a la identidad (7.41). Observemos que (7.41) también se verifica, cambiando m_k por B_k , para cualquier $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ y cualquier función $B \in C^1(\bar{\Omega})^N$. Esto conduce a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t \varphi \cdot B_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial B_k}{\partial x_k} (|\partial_t \varphi|^2 - |\nabla \varphi|^2) \\ & + \iint_Q \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \iint_Q (\nabla \pi) \cdot B_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} B_k n_k \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Elijamos en (7.46) la función B tal que $B \cdot \vec{n} = 1$ sobre $\partial\Omega$. Una tal función $B = B(x)$ existe, debido a la regularidad de $\partial\Omega$. Se deduce que existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω y de T , tal que

$$\iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \leq C \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{D(A) \times V}^2.$$

Aquí, hemos usado el apartado 2 de la observación 7.6 y, más concretamente, la estimación (7.37). Por densidad, esto debe ser cierto para cualquier $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(A) \times V$. Esto termina la demostración del lema. ■

Observación 7.7 De hecho, si $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in D(A) \times V$, la solución de (7.35) posee una derivada normal $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ más regular. En efecto, dado que $\varphi \in C^0([0, T]; D(A))$, tenemos $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \in C^0([0, T]; H^{1/2}(\partial\Omega))$. ■

A continuación, consideraremos el siguiente sistema el de tipo ondas-Stokes con un término adicional de orden cero:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\theta - b\Delta\theta - \frac{a^2}{4}\theta + \nabla\Theta = f & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \theta = 0 & \text{en } Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \theta(0) = \theta^0, \quad \partial_t\theta(0) = \theta^1. \end{cases} \quad (7.47)$$

Aquí, $f \in L^1(0, T; H)$ y $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$ son dados.

Observación 7.8 Para el sistema (7.47) son válidas las afirmaciones de la observación 7.6:

1. Supongamos que $f \in L^1(0, T; H)$ y $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$. Entonces existe una única solución $\{\theta, \Theta\}$ de (7.47) que verifica

$$\theta \in C^0([0, T]; V), \quad \partial_t\theta \in C^0([0, T]; H), \quad \partial_{tt}\theta \in L^1(0, T; V'), \quad \Theta \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Además, existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω , T , a , b y linealmente de $\|f\|_{L^1(H)}$, $\|\theta^0\|_V$ y $\|\theta^1\|_H$, tal que

$$\|\theta\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_t\theta\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_{tt}\theta\|_{L^1(V')} \leq C. \quad (7.48)$$

2. Supongamos ahora que $f \in L^2(0, T; H)$, $\partial_t f \in L^2(0, T; H)$ y $\{\theta^0, \theta^1\} \in D(A) \times V$. Entonces la solución $\{\theta, \Theta\}$ verifica

$$\begin{aligned} \theta &\in C^0([0, T]; D(A)), \quad \partial_t\theta \in C^0([0, T]; V), \quad \partial_{tt}\theta \in C^0([0, T]; H), \\ \Theta &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω , T , a , b y linealmente de $\|f\|_{L^2(H)}$ y $\|\partial_t f\|_{L^2(H)}$, $\|\theta^0\|_{D(A)}$ y $\|\theta^1\|_V$, tal que

$$\|\theta\|_{L^\infty(D(A))} + \|\partial_t\theta\|_{L^\infty(V)} + \|\partial_{tt}\theta\|_{L^\infty(H)} \leq C. \quad (7.49)$$

3. Finalmente, supongamos que $f \in L^1(0, T; V)$ y $\{\theta^0, \theta^1\} \in D(A) \times V$. Entonces la solución $\{\theta, \Theta\}$ verifica

$$\theta \in L^\infty(0, T; D(A)), \quad \partial_t\theta \in L^\infty(0, T; V)$$

y existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω , T , a , b y linealmente de $\|f\|_{L^1(V)}$, $\|\theta^0\|_{D(A)}$ y $\|\theta^1\|_V$, tal que

$$\|\theta\|_{L^\infty(D(A))} + \|\partial_t\theta\|_{L^\infty(V)} \leq C. \quad (7.50)$$

Para justificar esta regularidad, hagamos cálculos formales sobre la aproximación de Galerkin de θ (que volvemos a llamar θ). Tomando como función “test” $-\Delta(\partial_t\theta)$, obtenemos que

$$(\partial_{tt}\theta - b\Delta\theta - \frac{a^2}{4}\theta + \nabla\Theta, -\Delta(\partial_t\theta)) = (f, -\Delta(\partial_t\theta)).$$

Haciendo oportunas integraciones por partes en esta igualdad, llegamos a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t\theta\|^2 + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} |\Delta\theta|^2 = ((f, \partial_t\theta)) + \frac{a^2}{8} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2.$$

Esto justifica lo que se ha dicho de θ , así como la estimación (7.50). ■

Usaremos el lema 7.6 para probar el resultado siguiente:

Lema 7.7 *Supongamos que $f \in L^1(0, T; V)$ y $\{\theta^0, \theta^1\} \in D(A) \times V$. Entonces, para cada $q \in C^1(\bar{\Omega})^N$, la solución $\{\theta, \Theta\}$ de (7.47) verifica la siguiente identidad:*

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2} \iint_{\Sigma} q_k n_k \left| \frac{\partial\theta}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \\ &= \int_{\Omega} \partial_t\theta \cdot q_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \iint_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\partial_t\theta|^2 - b|\nabla\theta|^2 - \frac{a^2}{4}|\theta|^2) \\ &+ b \iint_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial\theta}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x_k} - \iint_Q \Theta \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial\theta_i}{\partial x_k} - \iint_Q f \cdot q_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

En consecuencia,

$$\left(\iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial\theta}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \leq C (\|\{\theta^0, \theta^1\}\|_{D(A) \times V} + \|f\|_{L^1(V)}), \quad (7.52)$$

donde la constante C sólo depende de Ω , T , a y b .

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.7:

1. Para probar (7.51), basta razonar como en la demostración del apartado (a) del lema 7.6. Todo se reduce a multiplicar escalarmente la primera EDP de (7.47) por $q_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k}$ y realizar las oportunas integraciones por partes (fácilmente adaptadas a este caso).

2. Para probar (7.52), elegimos $q = B$, donde $B \in C^1(\bar{\Omega})^N$ y $B \cdot \bar{n} = 1$ sobre $\partial\Omega$. Teniendo en cuenta que, en las condiciones de este lema, la solución $\{\theta, \Theta\}$ verifica (7.49), es fácil deducir (7.52).

Observación 7.9 El lema 7.7 continúa siendo cierto cambiando la hipótesis $f \in L^1(0, T; V)$ por $f \in L^2(0, T; H)$, $\partial_t f \in L^2(0, T; H)$ (y cambiando adecuadamente el segundo miembro de (7.52)).

7.3.2 Una desigualdad inversa

En lo que sigue, nos ocuparemos de demostrar una desigualdad inversa para el problema siguiente:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\varphi - b\Delta\varphi - \frac{a^2}{4}\varphi + \nabla p = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \partial_t\varphi(0) = \varphi^1. \end{cases} \quad (7.53)$$

Tenemos el resultado siguiente:

Lema 7.8 *Supongamos que $T > \sqrt{b}T(x^0)$ y que $\{\varphi, p\}$ es la solución de (7.53), donde $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in V \times H$. Entonces existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω , T , a y b , tal que*

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{V \times H} \leq C \left(\iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right)^{1/2}. \quad (7.54)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.8: Para la demostración, usaremos la desigualdad inversa (7.38) que proporciona el lema 7.6, la identidad (7.51) probada en el lema 7.7 y un argumento de compacidad-unicidad. Esta estrategia ha sido previamente utilizada por A. López, Xu Zhang y E. Zuazua en [3], en el contexto de la EDP de ondas.

Busquemos la solución de (7.53) de la forma $\varphi = \eta + \zeta$, siendo η la solución del problema de tipo “ondas-Stokes”

$$\begin{cases} \partial_{tt}\eta - b\Delta\eta + \nabla\pi = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \eta = 0 & \text{en } Q, \\ \eta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \eta(0) = \varphi^0, \quad \partial_t\eta(0) = \varphi^1 \end{cases} \quad (7.55)$$

y siendo ζ la solución del sistema

$$\begin{cases} \partial_{tt}\zeta - b\Delta\zeta - \frac{a^2}{4}\zeta + \nabla\Pi = \frac{a^2}{4}\eta & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \zeta = 0 & \text{en } Q, \\ \zeta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \zeta(0) = 0, \quad \partial_t\zeta(0) = 0 \end{cases} \quad (7.56)$$

(análogo a (7.47)). Supongamos que $T > \sqrt{b}T(x^0)$. Gracias al lema 7.6, sabemos que existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω y T , tal que

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{V \times H} \leq C \left(\iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\eta}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in V \times H. \quad (7.57)$$

Aquí, η es, junto con π , la solución de (7.55) asociada a los datos iniciales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$. Por ser $\eta = \varphi - \zeta$, sustituyendo en (7.57), obtenemos que

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{V \times H}^2 \leq C \iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt + C \iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\zeta}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt. \quad (7.58)$$

Definimos ahora la aplicación $\tilde{\Lambda} : V \times H \mapsto L^2(\Sigma)^N$ como sigue:

$$\tilde{\Lambda}(\{\varphi^0, \varphi^1\}) = \frac{\partial\zeta}{\partial n} \Big|_{\Sigma(x^0)} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in V \times H, \quad (7.59)$$

donde ζ es, junto con Π , la solución de (7.56) (asociada a los datos iniciales nulos y al segundo miembro $\frac{a^2}{4}\eta$). En términos de $\tilde{\Lambda}$, la desigualdad (7.58) se escribe en la forma

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{V \times H}^2 \leq C \iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt + C \|\tilde{\Lambda}(\{\varphi^0, \varphi^1\})\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2. \quad (7.60)$$

Debido a un argumento de compacidad-unicidad bien conocido, para deducir (7.54) de (7.60), basta demostrar que $\tilde{\Lambda}$ verifica lo siguiente:

- $\tilde{\Lambda}$ es una aplicación lineal continua bien definida;
- $\tilde{\Lambda}$ es compacta.

Supongamos entonces que

$$\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \text{acotado de } V \times H. \quad (7.61)$$

Podemos afirmar, en virtud de la observación 7.6, que las soluciones $\{\eta, \pi\}$ de los sistemas (7.55) correspondientes a estos datos iniciales verifican (entre otras cosas)

$$\begin{aligned}\eta &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; V), \\ \partial_t \eta &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; H).\end{aligned}$$

En consecuencia, aplicando el segundo apartado de la observación 7.8, deducimos que las soluciones $\{\zeta, \Pi\}$ de los sistemas (7.56) (correspondientes a los datos iniciales nulos) verifican

$$\{\zeta, \Pi\} \in \text{acotado de } E. \quad (7.62)$$

Aquí, hemos usado la notación

$$\begin{aligned}E = \{ \{ \zeta, \Pi \} : \zeta \in L^\infty(0, T; D(A)), \partial_t \zeta \in L^\infty(0, T; V), \\ \partial_{tt} \zeta \in L^\infty(0, T; H), \Pi \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \}.\end{aligned} \quad (7.63)$$

De (7.62)-(7.63), se deduce inmediatamente que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} \in \text{acotado de } L^2(\Sigma)^N.$$

Estas afirmaciones, prueban a la vez que $\tilde{\Lambda} : V \times H \mapsto L^2(\Sigma)^N$ está bien definida y que es lineal continua.

Veamos que $\tilde{\Lambda}$ también es compacta. Sea $\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}$ una sucesión débilmente convergente en $V \times H$. Para cada $n \geq 1$, sea $\{\zeta^n, \Pi^n\}$ la solución del correspondiente sistema (7.55)-(7.56). Escribamos la identidad (7.51) del lema 7.7 (con $q = B$ y $B \in C^1(\bar{\Omega})^N$ tal que $B \cdot \vec{n} = 1$) para $\zeta^{n,m} = \zeta^n - \zeta^m$ y $\Pi^{n,m} = \Pi^n - \Pi^m$:

$$\begin{aligned}& \frac{b}{2} \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \zeta^{n,m}}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \\ &= \int_{\Omega} \partial_t \zeta^{n,m} \cdot B_k \frac{\partial \zeta^{n,m}}{\partial x_k} \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \iint_Q (\nabla \cdot B) (|\partial_t \zeta^{n,m}|^2 - b |\nabla \zeta^{n,m}|^2 - \frac{a^2}{4} |\zeta^{n,m}|^2) \\ &+ b \iint_Q \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta^{n,m}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \zeta^{n,m}}{\partial x_k} - \iint_Q \Pi^{n,m} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta^{n,m}}{\partial x_k} - \iint_Q \frac{a^2}{4} (\eta^n - \eta^m) \cdot B_k \frac{\partial \zeta^{n,m}}{\partial x_k}.\end{aligned} \quad (7.64)$$

Claramente, cuando $n, m \rightarrow \infty$, $\zeta^{n,m}$ converge a cero en $L^2(0, T; V)$, $\partial_t \zeta^{n,m}$ converge a cero en $L^2(Q)^N$, $\partial_t \zeta^{n,m}(T) \rightarrow 0$ en H y $\zeta^{n,m}(T) \rightarrow 0$ en V . Esto es consecuencia de que $\{\zeta^n, \Pi^n\}$ se mueve en un acotado de E . Por otra parte, $\eta^n - \eta^m$ converge a cero en $L^2(0, T; H)$ y $\Pi^{n,m}$ converge a cero en $L^2(Q)$. Por tanto,

$$\iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial \zeta^{n,m}}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \rightarrow 0.$$

Esto prueba que $\frac{\partial \zeta^n}{\partial n}$ es de Cauchy en $L^2(\Sigma)^N$ y, por tanto, $\tilde{\Lambda} : V \times H \mapsto L^2(\Sigma)^N$ es compacta, como queríamos demostrar.

■

Observación 7.10 Hay otra forma de ver que $\tilde{\Lambda}$ es compacta. Más concretamente, supongamos que $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ pertenece a un acotado de $V \times H$. Entonces la correspondiente solución $\{\zeta, \Pi\}$ se mueve en un acotado de E . En particular, esto implica que

$$\begin{aligned}\zeta &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; D(A)), \\ \partial_t \zeta &\in \text{acotado de } L^\infty(0, T; V).\end{aligned}$$

Por tanto, podemos afirmar que

$$\zeta \in \text{compacto de } C^0([0, T]; H^s(\Omega)^N \cap V) \quad (7.65)$$

para cada $s \in (3/2, 2)$. Obsérvese que, para estos valores de s , se tiene $D(A) \hookrightarrow H^s(\Omega)^N \cap V \hookrightarrow V$, siendo la primera inyección compacta. Esto implica que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} \in \text{compacto de } C^0([0, T]; H^{s-3/2}(\Sigma)^N),$$

es decir que $\tilde{\Lambda}$ es compacta.

■

7.3.3 Controlabilidad exacta a cero. Control frontera

En esta sección, probaremos un resultado de controlabilidad exacta a cero en el que podremos identificar espacios en los que se pueden elegir los datos iniciales. Esto será posible gracias a la desigualdad inversa (7.54) que hemos probado en el lema 7.8. Debemos modificar ligeramente el sistema de Maxwell considerado hasta ahora. Concretamente, en vez de (7.1), consideraremos el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau & \text{en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ y = v1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0, \end{cases} \quad (7.66)$$

donde $v \in L^2(\Sigma(x^0))^N$, $v \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$, $y_0 \in H$ y $\tau_0 \in \Phi$ son dados. Se trata ahora de un problema de control frontera. El control es v y actúa sobre la parte $\Gamma(x^0)$ de la frontera de Ω . El “precio” que habrá que pagar será que habremos de debilitar el concepto de solución (obsérvese que estamos intentando resolver un problema no homogéneo con dato no regular sobre una parte de la frontera). Por supuesto, la “buena” definición de solución corresponde al concepto de trasposición (cf. más adelante).

Para deducir la existencia, unicidad y regularidad de solución de (7.66) y también el anunciado resultado de controlabilidad (como ya hemos hecho en más de una ocasión), introducimos el cambio de variables

$$z = \int_0^t e^{as} y(s) ds, \quad Z = e^{at} \pi, \quad w = \int_0^t e^{as} v(s) ds.$$

Se llega al problema siguiente:

$$\begin{cases} \partial_{tt} z - a \partial_t z - b \Delta z + \nabla Z = \nabla \cdot \tau_0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{en } Q, \\ z = w 1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = z^0, \quad \partial_t z(0) = z^1. \end{cases} \quad (7.67)$$

Aquí, $z^0 = 0$ y $z^1 = y_0$. Se observa que es posible eliminar el término $-a \partial_t z$ realizando un nuevo cambio de variables en (7.67). Más concretamente, pondremos

$$h = e^{-at/2} z, \quad q = e^{-at/2} Z, \quad u = e^{-at/2} w.$$

Tenemos entonces que

$$\partial_t z = e^{at/2} \left(\frac{a}{2} h + \partial_t h \right), \quad \partial_{tt} z = e^{at/2} \left(\partial_{tt} h + a \partial_t h + \frac{a^2}{4} h \right), \quad \Delta z = e^{at/2} \Delta h$$

y, en consecuencia, $\{h, q\}$ es solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt} h - b \Delta h - \frac{a^2}{4} h + \nabla q = e^{-at/2} \nabla \cdot \tau_0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot h = 0 & \text{en } Q, \\ h = u 1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma, \\ h(0) = h^0, \quad \partial_t h(0) = h^1. \end{cases} \quad (7.68)$$

Ahora, $h^0 = z^0 = 0$, $h^1 = z^1 - \frac{a}{2} h^0 = y_0$. Gracias a los cambios de variable realizados, las soluciones de estos tres sistemas son fácilmente relacionables. Para hablar de la *solución por trasposición* de (7.68), no es restrictivo suponer que $\nabla \cdot \tau_0 = 0$, $h^0 = 0$ y $h^1 = 0$.

Definición 7.1 Sea $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $u \cdot \vec{n} = 0$. Se considera el problema (7.68), donde $\nabla \cdot \tau_0 = 0$, $h^0 = 0$ y $h^1 = 0$. Se dice que \tilde{h} es solución por trasposición de (7.68) si $\tilde{h} \in L^\infty(0, T; V')$ y

$$\int_0^T \langle \tilde{h}(t), g(t) \rangle_{V', V} dt = -b \iint_{\Sigma(x^0)} u \cdot \frac{\partial k}{\partial n} d\sigma dx \quad \forall g \in L^1(0, T; V) \quad (7.69)$$

donde k es, junto con K , la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt} k - b \Delta k - \frac{a^2}{4} k + \nabla K = g & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot k = 0 & \text{en } Q, \\ k = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ k(T) = 0, \quad \partial_t k(T) = 0. \end{cases} \quad (7.70)$$

■

Repetimos que, dada $g \in L^1(0, T; V)$, existe una única solución de (7.70) que verifica $k \in L^\infty(0, T; D(A))$, $\partial_t k \in L^\infty(0, T; V)$ y también en consecuencia

$$\frac{\partial k}{\partial n} \in L^2(\Sigma) \quad \text{con} \quad \left\| \frac{\partial k}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|g\|_{L^1(V)}. \quad (7.71)$$

Esto da un sentido a (7.69). De hecho, dado que para cada $g \in L^1(0, T; V)$ la correspondiente k verifica $\frac{\partial k}{\partial n} \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)^N)$, podríamos igualmente definir la solución por trasposición de (7.68) para $u \in L^1(0, T; H^{-1/2}(\Gamma(x^0))^N)$.

Observación 7.11 Si, en (7.68), $\nabla \cdot \tau_0 = 0$, $h^0 = 0$, $h^1 = 0$ y u es muy regular y coincide con la traza sobre $\Sigma(x^0)$ de un campo de divergencia nula, entonces se puede hablar de la solución \tilde{h} de (7.68) en un sentido fuerte. En tal caso, \tilde{h} verifica (7.69). Basta usar (7.70) e integrar por partes adecuadamente.

■

Observación 7.12 También, podríamos considerar controles $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ tales que $\int_{\Gamma(x^0)} u \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$. Esto es lo que da coherencia a la definición de solución por trasposición. En este caso, en la definición 1, en vez de (7.69) habría que poner

$$\iint_Q \tilde{h} \cdot g \, dxdt = -b \iint_{\Sigma(x^0)} u \cdot \frac{\partial k}{\partial n} \, d\sigma dx + \iint_{\Sigma(x^0)} (u \cdot \vec{n}) K \, d\sigma dt.$$

■

Observación 7.13 Es claro que tiene también sentido hablar de la solución por trasposición de

$$\begin{cases} \partial_{tt} h - b\Delta h - \frac{a^2}{4} h + \nabla q = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot h = 0 & \text{en } Q, \\ h = u 1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma, \\ h(T) = 0, \quad \partial_t h(T) = 0. \end{cases} \quad (7.72)$$

Se trata de la función $\hat{h} \in L^\infty(0, T; V')$ caracterizada por verificar

$$\int_0^T \langle \hat{h}(t), g(t) \rangle_{V', V} \, dt = -b \iint_{\Sigma(x^0)} u \cdot \frac{\partial k}{\partial n} \, d\sigma dt$$

donde k es, junto con K , la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt}k - b\Delta k - \frac{a^2}{4}k + \nabla K = g & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot k = 0 & \text{en } Q, \\ k = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ k(0) = 0, \quad \partial_t k(0) = 0. \end{cases}$$

■

Lema 7.9 *Supongamos dados $\tau_0 \in \Phi$, $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$, $h^0 \in V$, $h^1 \in H$ y $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$, con $u \cdot \vec{n} = 0$ sobre $L^2(\Sigma(x^0))$. Existe una única "solución por trasposición" h de (7.68), dada por $h = h^* + \tilde{h}$, donde h^* es, junto con q^* , la solución de*

$$\begin{cases} \partial_{tt}h^* - b\Delta h^* - \frac{a^2}{4}h^* + \nabla q^* = e^{-at/2}\nabla \cdot \tau_0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot h^* = 0 & \text{en } Q, \\ h^* = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ h^*(0) = h^0, \quad \partial_t h^*(0) = h^1 \end{cases} \quad (7.73)$$

en el sentido habitual y \tilde{h} es solución por trasposición de (7.68) (con $\nabla \cdot \tau_0 = 0$, $h^0 = 0$ y $h^1 = 0$), en el sentido de la definición 7.1. Además,

$$h \in C^0([0, T]; V'), \quad \partial_t h \in C^0([0, T]; D(A)'). \quad (7.74)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7.9: Las únicas afirmaciones no triviales son las de (7.74). Bastará probar estas propiedades para \tilde{h} . En efecto, $\{h^*, H^*\}$ está unívocamente determinado por (7.73), con

$$h^* \in C^0([0, T]; V), \quad \partial_t h^* \in C^0([0, T]; H), \quad \partial_{tt}h^* \in C^0([0, T]; V').$$

Por otra parte, \tilde{h} está perfectamente determinada por (7.69), dado que g es arbitraria en $L^1(0, T; V)$. Además, teniendo en cuenta (7.71), deducimos de (7.69) que

$$\tilde{h} \in L^\infty(0, T; V') \quad \text{y} \quad \|\tilde{h}\|_{L^\infty(V')} \leq C\|u\|_{L^2(\Sigma(x^0))}. \quad (7.75)$$

A continuación, seguiremos la estrategia siguiente:

(a) Veremos, en primer lugar, que

$$\partial_t \tilde{h} \in L^\infty(0, T; D(A)') \quad \text{y} \quad \|\partial_t \tilde{h}\|_{L^\infty(D(A)')} \leq C\|u\|_{L^2(\Sigma(x^0))}. \quad (7.76)$$

(b) Después, usando (7.75) y (7.76), probaremos que son válidas las afirmaciones de (7.74).

(a) Observemos que de (7.75) $\partial_t \tilde{h} \in W^{-1,\infty}(0, T; V')$ y además

$$\langle \partial_t \tilde{h}, g \rangle = - \int_0^T \langle \tilde{h}(t), \partial_t g(t) \rangle_{V', V} dt \quad \forall g \in W_0^{1,1}(0, T; V). \quad (7.77)$$

Sea $g \in \mathcal{D}((0, T); D(A))$. Entonces, denotando momentáneamente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el par de dualidad asociado a $\mathcal{D}'((0, T); D(A)'),$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} |\langle \partial_t \tilde{h}, g \rangle| &= \left| \int_0^T \langle \tilde{h}(t), \partial_t g(t) \rangle_{V', V} dt \right| = \left| b \iint_{\Sigma(x^0)} u \cdot \frac{\partial(\partial_t k)}{\partial n} d\sigma dt \right| \\ &\leq C \|u\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \left\| \frac{\partial(\partial_t k)}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \leq C \|u\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \|g\|_{L^1(D(A))}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Aquí, hemos usado que la solución del sistema análogo a (7.70) donde $\partial_t g$ sustituye a g es el par $\{\partial_t k, \partial_t K\}$, es decir

$$\begin{cases} \partial_{ttt} k - b\Delta \partial_t k - \frac{a^2}{4} \partial_t k + \nabla(\partial_t K) = \partial_t g & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \partial_t k = 0 & \text{en } Q, \\ \partial_t k = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \partial_t k(T) = 0, \quad \partial_{tt} k(T) = 0. \end{cases} \quad (7.79)$$

También, hemos usado que

$$\left\| \frac{\partial(\partial_t k)}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \leq C \|\partial_t k\|_{L^\infty(D(A))} \leq C \|g\|_{L^1(D(A))},$$

donde la última estimación, es fácil de obtener, tomando $(-\Delta)^2 \partial_t k$ como función “test” en la aproximación de Galerkin para la solución de (7.70). De (7.78), deducimos (7.76) de forma inmediata.

(b) Veamos que \tilde{h} (resp. $\partial_t \tilde{h}$) es límite en $L^\infty(0, T; V')$ (resp. $L^\infty(0, T; D(A)'),$) de una sucesión de $C^0([0, T]; V)$ (resp. $C^0([0, T]; H)$). Recordemos que $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $u \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ y que \tilde{h} es solución por trasposición de (7.68), con $\nabla \cdot \tau_0 = 0$, $h^0 = 0$ y $h^1 = 0$. Sea pues u_n una sucesión regular con $u_n \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ y, tal que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } L^2(\Sigma(x^0))^N. \quad (7.80)$$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \partial_{tt} \tilde{h}^n - b\Delta \tilde{h}^n - \frac{a^2}{4} \tilde{h}^n + \nabla H^n = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \tilde{h}^n = 0 & \text{en } Q, \\ \tilde{h}^n = u_n 1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma, \\ \tilde{h}^n(0) = 0, \quad \partial_t \tilde{h}^n(0) = 0. \end{cases} \quad (7.81)$$

Sabemos que, para cada n , existe \tilde{h}^n solución por trasposición de (7.81) que verifica (gracias a que u_n es muy regular y los datos son nulos)

$$\tilde{h}^n \in C^0([0, T]; H^1(\Omega)^N \cap H), \quad \partial_t \tilde{h}^n \in C^0([0, T]; H).$$

En particular, podemos escribir que

$$\tilde{h}^n \in C^0([0, T]; V')$$

y de la desigualdad de (7.75), obtenemos que

$$\|\tilde{h}^n - \tilde{h}\|_{L^\infty(V')} \leq C \|u^n - u\|_{L^2(\Sigma(x^0))}. \quad (7.82)$$

De donde, gracias a (7.80), deducimos que

$$\tilde{h}^n \rightarrow \tilde{h} \quad \text{en } L^\infty(V').$$

Por tanto, (por densidad) concluimos que $\tilde{h} \in C^0([0, T]; V')$. Esto es la primera afirmación de (7.74) (para \tilde{h}).

Por otra parte, podemos afirmar que

$$\partial_t \tilde{h}^n \in C^0([0, T]; D(A)')$$

y en virtud de la desigualdad de (7.76) tenemos

$$\|\partial_t \tilde{h}^n - \partial_t \tilde{h}\|_{L^\infty(D(A))} \leq C \|u^n - u\|_{L^2(\Sigma(x^0))}, \quad (7.83)$$

de donde

$$\partial_t \tilde{h}^n \rightarrow \partial_t \tilde{h} \quad \text{en } L^\infty(D(A)').$$

En consecuencia, $\partial_t \tilde{h} \in C^0([0, T]; D(A)').$ Esto finaliza la demostración del apartado (b) y, con ello terminamos la prueba del lema. ■

Podemos relacionar fácilmente las propiedades de controlabilidad de los sistemas (7.66), (7.67) y (7.68):

- Controlar exactamente a $\{0, 0\}$ el sistema (7.68) partiendo de $\{0, y_0\}$ implica controlar exactamente a $\{0, 0\}$ el sistema (7.67) partiendo de $\{0, y_0\}$ lo cual, a su vez, implica control a cero para el campo de velocidades y de (7.66) partiendo de $\{y_0, \tau_0\}$.

Para controlar exactamente a cero el sistema (7.68), usaremos la siguiente PCU, que es cierta siempre que se tenga $T > T(x^0)$:

Si $\varphi \in L^\infty(0, T; V)$, $\partial_t \varphi \in L^\infty(0, T; H)$, $\partial_{tt} \varphi \in L^\infty(0, T; V')$, $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$

$$\begin{cases} \partial_{tt} \varphi - b \Delta \varphi - \frac{a^2}{4} \varphi + \nabla p = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (7.84)$$

y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma(x^0), \quad (7.85)$$

entonces $\varphi \equiv 0$.

Esta PCU es consecuencia trivial del lema 7.8

Teorema 7.10 - Supongamos $T > T(x^0)$ y $\tau_0 = 0$. Definimos el espacio F como el completado de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ para la norma

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \quad (7.86)$$

donde φ es la solución de (7.53). Sea F' el dual de F . Entonces, para cada $\{h^1, h^0\} \in F'$, existe un control $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ tal que $u \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ y la correspondiente solución por trasposición h de (7.68) verifica

$$h(T) = 0, \quad \partial_t h(T) = 0. \quad (7.87)$$

Además, se verifica que

$$F' \supset V' \times H. \quad (7.88)$$

Observación 7.14 Las igualdades (7.87) deben ser interpretadas en el sentido de V' y $D(A)'$, respectivamente, dado que tan sólo cabe esperar que se tenga (7.74). El mismo comentario es válido para los resultados de controlabilidad que siguen a éste. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.10: Para probar este resultado, seguiremos un esquema que, en líneas generales, coincide con el presentado en la demostración del teorema 7.4. Más precisamente, aplicaremos en primer lugar el método H.U.M. para deducir un resultado de controlabilidad nula con datos iniciales en un espacio "abstracto". Después, usando la desigualdad inversa (7.54), podremos probar (7.88).

Etapa 1. Sea $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Consideremos el problema homogéneo:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\varphi - b\Delta\varphi - \frac{a^2}{4}\varphi + \nabla p = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \partial_t\varphi(0) = \varphi^1. \end{cases} \quad (7.89)$$

Sabemos, gracias a la observación 7.8, que existe una única solución $\{\varphi, p\}$ de (7.89) que además verifica

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^0([0, T]; D(A)), \quad \partial_t\varphi \in C^0([0, T]; V), \\ \partial_{tt}\varphi &\in C^0([0, T]; H), \quad p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \end{aligned}$$

y también

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \in C^0([0, T]; H^{1/2}(\partial\Omega)^N), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (7.90)$$

Esta última propiedad de $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ es consecuencia de que $\nabla \cdot \varphi \equiv 0$ y $\varphi \equiv 0$ sobre Σ (cf. [4], property 2).

Etapa 2. Consideremos ahora el problema retrógrado siguiente:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\psi - b\Delta\psi - \frac{a^2}{4}\psi + \nabla\Psi = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{en } Q, \\ \psi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} 1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma \\ \psi(T) = 0, \quad \partial_t\psi(T) = 0. \end{cases} \quad (7.91)$$

De acuerdo con (7.90) y con el lema 7.9, (7.91) posee una única solución por trasposición ψ que además tiene la regularidad siguiente:

$$\psi \in C^0([0, T]; V'), \quad \partial_t\psi \in C^0([0, T]; D(A)').$$

Definimos el operador lineal Λ de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ en $D(A)' \times V'$ como sigue:

$$\Lambda : \{\varphi^0, \varphi^1\} \mapsto \{\partial_t\psi(0), -\psi(0)\}. \quad (7.92)$$

Obsérvese que Λ está bien definido, pues ψ posee la regularidad suficiente.

Etapa 3. Consideremos un dato inicial $\{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ y sea $\{\xi, \Xi\}$ la solución del correspondiente problema (7.89), esto es:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\xi - b\Delta\xi - \frac{a^2}{4}\xi + \nabla\Xi = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \xi = 0 & \text{en } Q, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \xi(0) = \xi^0, \quad \partial_t\xi(0) = \xi^1. \end{cases} \quad (7.93)$$

Teniendo en cuenta la definición de ψ y las condiciones iniciales satisfechas por ξ , es claro que

$$\int_{\Omega} (\partial_t \psi(0) \cdot \xi^0 - \psi(0) \cdot \xi^1) dx = \iint_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial n} d\sigma dt. \quad (7.94)$$

Podemos escribir (7.94) en términos del operador Λ como sigue:

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \iint_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial n} d\sigma dt, \quad (7.95)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad asociado a $D(A)' \times V'$. En particular, de (7.94) con $\{\xi^0, \xi^1\} = \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, deducimos que

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle = \iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt. \quad (7.96)$$

Introducimos ahora la aplicación $\|\cdot\|_F$, definida como sigue:

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle \right)^{1/2} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}. \quad (7.97)$$

Gracias a la igualdad (7.94), tenemos que

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle \right)^{1/2} = \left(\iint_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right)^{1/2} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}.$$

Sabemos que, si $T > T(x^0)$, es cierta la PCU mencionada inmediatamente antes de este teorema. En consecuencia, la seminorma (7.97) es, de hecho, una norma en $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Definimos el espacio F como el completado de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ para la norma $\|\cdot\|_F$. Razonando como en la tercera etapa de la demostración del teorema 7.4, se deduce que Λ se extiende de forma única como un isomorfismo del espacio de Hilbert F en su dual F' y podemos escribir que

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \langle \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle_{F'} \quad \forall \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in F. \quad (7.98)$$

Etapas 4. Conclusión. Como Λ es un isomorfismo de F sobre F' , podemos afirmar que, para cada $\{h^1, -h^0\} \in F'$, existe un único par $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in F$ que verifica

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{h^1, -h^0\}. \quad (7.99)$$

Tomemos ahora en (7.68) como control la función de $L^2(\Sigma(x^0))^N$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial n} 1_{\Gamma(x^0)},$$

siendo φ , junto con p , la solución de (7.89) asociada a los datos $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ y estando el par $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ determinado por la igualdad (7.99). Por la definición de Λ , esto significa que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt}\psi - b\Delta\psi - \frac{a^2}{4}\psi + \nabla\Psi = 0 \quad \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \psi = 0 \quad \text{en } Q, \\ \psi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} 1_{\Gamma(x^0)} \quad \text{sobre } \Sigma(x^0), \\ \psi(0) = h^0, \quad \partial_t\psi(0) = h^1, \\ \psi(T) = 0, \quad \partial_t\psi(T) = 0. \end{array} \right. \quad (7.100)$$

Por tanto, hemos resuelto el problema de la controlabilidad exacta a $\{0, 0\}$ de (7.68) con control $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ y estado $\{h, H\} = \{\psi, \Psi\}$, partiendo de $\{h^0, h^1\}$ en el instante inicial.

Además, gracias a la desigualdad inversa (7.54), probada en el lema 7.8, podemos afirmar que $F \subset V \times H$ (con inyección continua) y, por tanto, $F' \supset V' \times H$ (en otras palabras, el resultado de controlabilidad es válido para cualquier dato $\{h^1, h^0\} \in V' \times H$. Esto finaliza la demostración. ■

A continuación, veamos que es cierto un resultado análogo al teorema 7.10, pero con $\tau_0 \neq 0$.

Teorema 7.11 - *Supongamos que $T > T(x^0)$, $\tau_0 \in \Phi$ y $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$. Entonces, para cada $\{h^1, h^0\} \in V' \times H$, existe un control $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $u \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ tal que la correspondiente solución por trasposición h de (7.68) verifica*

$$h(T) = 0, \quad \partial_t h(T) = 0. \quad (7.101)$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.11: Razonaremos como en la observación 7.4. Veremos que, en este caso, podemos resolver el problema de regularidad que comentamos por primera vez en la citada observación. Como en la demostración del lema 7.9, buscaremos la solución de (7.68) de la forma $h = w + \tilde{h}$ siendo w , junto con W , la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt}w - b\Delta w - \frac{a^2}{4}w + \nabla W = e^{-at/2} \nabla \cdot \tau_0 \quad \text{en } Q, \\ \nabla \cdot w = 0 \quad \text{en } Q, \\ w = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = h^0, \quad \partial_t w(0) = h^1 \end{array} \right. \quad (7.102)$$

y siendo \tilde{h} , junto con $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$, la solución del siguiente problema de control a $\{0, 0\}$:

$$\begin{cases} \partial_{tt}\tilde{h} - b\Delta\tilde{h} - \frac{a^2}{4}\tilde{h} + \nabla q = 0 & \text{en } Q, \\ \nabla \cdot \tilde{h} = 0 & \text{en } Q, \\ \tilde{h} = u1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \Sigma, \\ \tilde{h}(0) = 0, \quad \partial_t\tilde{h}(0) = 0, \\ \tilde{h}(T) = -w(T), \quad \partial_t\tilde{h}(T) = -\partial_t w(T). \end{cases} \quad (7.103)$$

Usando adecuadamente la reversibilidad en tiempo del operador que aparece en (7.103) y el teorema 7.10, somos capaces de resolver (7.103). En otras palabras, si $\{-\partial_t w(T), w(T)\} \in V' \times H$, sabemos que existe un control $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ tal que $u \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ y la correspondiente solución \tilde{h} de (7.103) verifica $\tilde{h}(0) = \partial_t\tilde{h}(0) = 0$. Luego la regularidad que hay que pedir a $\{h^0, h^1\}$ y a τ_0 es aquélla que implica que la correspondiente solución w de (7.102) verifica $\{-\partial_t w(T), w(T)\} \in V' \times H$. Ahora bien, podemos afirmar que, si $\{h^1, h^0\} \in V' \times H$, $\tau_0 \in \Phi$ y $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$, entonces la solución w de (7.102) verifica

$$w \in C^0([0, T]; H) \quad \partial_t w \in C^0([0, T]; V').$$

Luego, en estas condiciones, somos capaces de conseguir (7.101). Esto finaliza la demostración del teorema. ■

El resultado que acabamos de probar permite afirmar la controlabilidad exacta a cero para los sistemas (7.67) y (7.66). No hay más que recordar el cambio de variables realizado que relaciona estos tres problemas. Se tienen por tanto los resultados siguientes:

Teorema 7.12 – *Supongamos que $T > T(x^0)$, $\tau_0 \in \Phi$ y $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$. Entonces, para cada $y_0 \in V'$, existe un control $w \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $w \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ tal que la solución z del sistema (7.67) con $z^0 = 0$ y $z^1 = y_0$ verifica*

$$z(T) = 0, \quad \partial_t z(T) = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 7.13 – *Supongamos $T > T(x^0)$. Entonces, para cada $y_0 \in V'$ y cada $\tau_0 \in \Phi$ con $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$, existe un control $v \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $v \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ tal que la correspondiente solución y de (7.66) verifica*

$$y(T) = 0, \quad \tau(T) = 0. \quad \blacksquare$$

7.3.4 Controlabilidad exacta a un estado dado distinto de cero

En esta sección, veremos que también podemos conducir exactamente la solución y de (7.66) a un estado dado distinto de cero. De nuevo, habrá que tener en cuenta las relaciones que existen entre los tres problemas de los que hemos hablado en la sección anterior. Demostraremos en primer lugar el resultado siguiente:

Teorema 7.14 – *Supongamos que $T > 2T(x^0)$, $\tau_0 \in \Phi$ y $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$. Entonces, para cada $\{h^1, h^0\} \in V' \times H$ y para cada $\{k^1, k^0\} \in V' \times H$, existe un control $u \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $u \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ tal que la correspondiente solución por trasposición h de (7.68) verifica*

$$h(T) = k^0, \quad \partial_t h(T) = k^1.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7.14:

Etapa 1: En el intervalo $[0, T/2]$ consideremos el problema siguiente:

$$\begin{cases} \partial_{tt} h - b\Delta h - \frac{a^2}{4}h + \nabla H = e^{-at/2} \nabla \cdot \tau_0 & \text{en } \Omega \times (0, T/2), \\ \nabla \cdot h = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T/2), \\ h = \hat{u}1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T/2), \\ h(0) = h^0, \quad \partial_t h(0) = h^1. \end{cases} \quad (7.104)$$

Gracias al teorema 7.11, sabemos que existe un control $\hat{u} \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ con $\hat{u} \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ tal que la correspondiente solución h de (7.104) verifica

$$h(T/2) = 0, \quad \partial_t h(T/2) = 0.$$

Etapa 2: Resolvemos ahora el problema de control a cero siguiente:

$$\begin{cases} \partial_{tt} h - b\Delta h - \frac{a^2}{4}h + \nabla H = e^{-at/2} \nabla \cdot \tau_0 & \text{en } \Omega \times (T/2, T), \\ \nabla \cdot h = 0 & \text{en } \Omega \times (T/2, T), \\ h = \tilde{u}1_{\Gamma(x^0)} & \text{sobre } \partial\Omega \times (T/2, T), \\ h(0) = k^0, \quad \partial_t h(0) = k^1, \\ h(T/2) = 0, \quad \partial_t h(T/2) = 0. \end{cases} \quad (7.105)$$

Esto es posible si $T/2 > T_0(x^0)$ y $\{k^1, k^0\} \in V' \times H$.

Ahora, basta tomar en (7.68) el control u de la forma

$$u(x, t) = \begin{cases} \hat{u}(x, t) & \text{si } t \in [0, T/2], \\ \tilde{u}(x, t) & \text{si } t \in [T/2, T]. \end{cases}$$

■

Para afirmar un resultado análogo para el sistema (7.67), recordemos el cambio de variables

$$z = e^{at/2}h$$

y apliquemos el teorema 7.14. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.15 - *Supongamos que $T > 2T(x^0)$, $\tau_0 \in \Phi$ y $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$. Entonces, para cada $y_0 \in V'$ y para cada $\{k^1, k^0\} \in V' \times H$, existe un control $w \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ tal que $w \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ y la correspondiente solución z de (7.67) verifica*

$$z(T) = k^0, \quad \partial_t z(T) = k^1.$$

■

Finalmente, también tenemos el

Teorema 7.16 - *Supongamos que $T > 2T(x^0)$. Entonces, dado $\{y_0, \tau_0\} \in V' \times \Phi$ con $\nabla \cdot \tau_0 \in L^2(\Omega)^N$ y dado $\{y_1, \tau_1\} \in V' \times \Phi$ con $\nabla \cdot \tau_1 \in L^2(\Omega)^N$, existe un control $v \in L^2(\Sigma(x^0))^N$ tal que $v \cdot \vec{n} = 0$ sobre $\Sigma(x^0)$ y la correspondiente solución y de (7.66) verifica*

$$y(T) = y_1, \quad \partial_t \tau(T) = \tau_1.$$

■

Bibliografía

- [1] L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., 1964.
- [2] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte perturbation et stabilisation de systèmes distribués*, Tome 1, Contrôlabilité exacte, Masson, Paris 1988.
- [3] A. López, Xu Zhang, E. Zuazua, *Null controllability of the heat equation as singular limit of the exact controllability of dissipative wave equations*, to appear.
- [4] A. Osses, *A rotated multiplier applied to the controllability of the waves, elasticity and tangencial Stokes control*, to appear in SIAM Journal on Control and Optimization.

Capítulo 8

CONTROLABILIDAD DE FLUIDOS LINEALES DE JEFFREYS

8.1 Existencia y unicidad de solución

Se considera el modelo lineal de Jeffreys

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y + \nabla p = \nabla \cdot \tau + v 1_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot y = 0 \text{ en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) \text{ en } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \tau(0) = \tau_0, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$, $y_0 \in H$ y $\tau_0 \in \Phi$ son dados.

Teorema 8.1 – *Supongamos que $y_0 \in H$, $\tau_0 \in \Phi$ y $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N$. Entonces existe una única solución $\{y, \pi, \tau\}$ de (8.1) que verifica*

$$\begin{aligned} y &\in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; V'), \\ \tau &\in C^0([0, T]; \Phi), \quad \pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Además, existe una constante positiva C , que sólo depende de Ω , ν , a , b y linealmente de $|y_0|$, $|\tau_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$, tal que

$$\|y\|_{L^2(V)} + \|y\|_{L^\infty(H)} + \|\partial_t y\|_{L^2(V')} + \|\tau\|_{L^\infty(\Phi)} \leq C. \quad (8.2)$$

La demostración de este resultado es “standard”. No obstante, para mayor claridad, presentaremos el argumento completo.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8.1: Para la demostración, aplicaremos de nuevo el método de Galerkin.

1. *Definición de solución aproximada.*

Sea $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ la base especial de V , formada por las autofunciones del problema de Stokes con condiciones de Dirichlet. Tenemos

$$\begin{cases} -\Delta w_j + \nabla q_j = \lambda_j w_j, & \nabla \cdot w_j = 0 \quad \text{en } Q, \\ w_j = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, & \lambda_j \nearrow +\infty. \end{cases} \quad (8.3)$$

Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \dots\}$ una base ortonormal de Φ (Φ es un espacio de Hilbert separable). Pongamos $V_m = [w_1, \dots, w_m]$ y $\Phi_m = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$ para cada $m \geq 1$. El m -ésimo problema aproximado es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y_m : [0, T] \mapsto V_m, \quad \text{con } y_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \quad \text{y} \\ \tau_m : [0, T] \mapsto \Phi_m, \quad \text{con } \tau_m(t) = \sum_{l=1}^m h_{lm}(t) \varphi_l, \quad \text{tales que} \\ (y'_m(t), w_j) + \nu(\nabla y_m(t), \nabla w_j) = -(\tau_m(t), \nabla w_j) + (v(t)1_{\mathcal{O}}, w_j) \quad 1 \leq j \leq m, \\ (\tau'_m(t), \varphi_l) + a(\tau_m(t), \varphi_l) = 2b(D(y_m(t)), \varphi_l) \quad 1 \leq l \leq m, \\ y_m(0) = y_{0m}, \quad \tau_m(0) = \tau_{0m}. \end{array} \right. \quad (8.4)$$

Aquí, $y_{0m} = P_m y_0$ y $\tau_{0m} = Q_m \tau_0$ con $P_m : H \mapsto V_m$ y $Q_m : \Phi \mapsto \Phi_m$ los operadores de proyección ortogonal habituales. Por ser (8.4) un problema de valores iniciales para un SDO lineal de primer orden, posee una única solución $\{y_m, \tau_m\}$, que está definida en todo el intervalo $[0, T]$.

2. *Estimaciones "a priori" sobre y_m y τ_m .*

Multipliquemos la j -ésima ecuación del primer sistema de (8.4) por $g_{jm}(t)$ y sumemos en j , con $1 \leq j \leq m$. Para cada t , llegamos a que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y_m|^2 + \nu \|y_m\|^2 = -(\tau_m, \nabla y_m) + (v 1_{\mathcal{O}}, y_m). \quad (8.5)$$

Multiplicando la l -ésima ecuación del segundo sistema de (8.4) por $h_{lm}(t)$ y sumando en l , $1 \leq l \leq m$, para cada t obtenemos también que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tau_m|^2 + a |\tau_m|^2 = 2b(D(y_m), \tau_m). \quad (8.6)$$

De aquí, dividiendo por $2b$ y teniendo en cuenta la definición de $D(y_m)$, podemos escribir

$$\frac{1}{4b} \frac{d}{dt} |\tau_m|^2 + \frac{a}{2b} |\tau_m|^2 = \frac{1}{4} (\nabla y_m + {}^t \nabla y_m, \tau_m). \quad (8.7)$$

Sumando las igualdades (8.5) y (8.7), tenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|y_m|^2 + \frac{1}{2b} |\tau_m|^2 \right) + \nu \|y_m\|^2 + \frac{a}{2b} |\tau_m|^2 = (v1_{\mathcal{O}}, y_m).$$

Integrando esta última igualdad respecto de t , se tiene que

$$\begin{aligned} |y_m(t)|^2 + \frac{1}{2b} |\tau_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|y_m(s)\|^2 ds + \frac{a}{b} \int_0^t |\tau_m(s)|^2 ds \\ \leq |y_{0m}|^2 + \frac{1}{2b} |\tau_{0m}|^2 + \int_0^t |y_m(s)|^2 ds + \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |v(s)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

Deducimos que

$$\begin{aligned} |y_m(t)|^2 + \frac{1}{2b} |\tau_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^T \|y_m(s)\|^2 ds + \frac{a}{b} \int_0^T |\tau_m(s)|^2 ds \\ \leq C \left(|y_0|^2 + |\tau_0|^2 + \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} |v(s)|^2 dx ds \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} y_m \in \text{acotado de } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \\ \tau_m \in \text{acotado de } L^\infty(0, T; \Phi). \end{aligned} \quad (8.9)$$

3. Estimaciones "a priori" sobre y'_m y τ'_m .

Debido a que el modelo considerado es lineal, podríamos ya pasar al límite en el SDO de (8.4). No obstante, para dar un sentido apropiado a las condiciones iniciales, conviene saber si las funciones y_m y τ_m convergen en algún espacio de funciones continuas en la variable t . Para ello, será apropiado acotar sus derivadas (primeras) respecto de t . Veamos en primer lugar que

$$y'_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; V'). \quad (8.10)$$

Definimos $h_m(t) \in V'$ para todo t como sigue:

$$\langle h_m(t), w \rangle = -\nu (\nabla y_m(t), \nabla w) - (\tau_m(t), \nabla w) + (v1_{\mathcal{O}}(t), w) \quad \forall w \in V.$$

Tenemos que

$$\begin{cases} \langle y'_m(t), w_j \rangle = \langle h_m(t), w_j \rangle & \text{para } 1 \leq j \leq m, \\ y'_m(t) \in V_m. \end{cases}$$

Luego podemos escribir que

$$y'_m(t) = \tilde{P}_m(h_m(t)) \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $\tilde{P}_m : V' \mapsto V_m$ es el operador de proyección, dado por

$$\tilde{P}_m h = \sum_{j=1}^m \langle h, w_j \rangle w_j \quad \forall h \in V'.$$

Gracias a que las w_j forman una base “especial”, se tiene que

$$\|\tilde{P}_m\|_{\mathcal{L}(V')} \leq 1.$$

Por otra parte, es claro que

$$|\langle h_m(t), w \rangle| \leq C (\|y_m(t)\| + |\tau_m(t)| + |v(t)1_{\mathcal{O}}|) \|w\|,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad asociado a V' y V . Esto prueba, teniendo en cuenta (8.9), que

$$\|h_m\|_{L^2(V')} \leq C,$$

esto es, se verifica la propiedad (8.10).

También podemos probar que

$$\tau'_m \in \text{acotado de } L^2(0, T; \Phi). \quad (8.11)$$

En efecto, definamos $g_m(t) \in \Phi$ para casi todo t como sigue:

$$(g_m(t), \varphi) = -a(\tau_m(t), \varphi) + 2b(D(y_m(t)), \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Tenemos ahora

$$\begin{cases} (\tau'_m(t), \varphi_l) = (g_m(t), \varphi_l) & \text{para } 1 \leq l \leq m, \\ \tau'_m(t) \in \Phi_m. \end{cases}$$

Entonces podemos escribir que

$$\tau'_m(t) = Q_m g_m(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $Q_m : \Phi \mapsto \Phi_m$ es el operador de proyección ortogonal habitual. Naturalmente, se verifica que $\|Q_m\|_{\mathcal{L}(\Phi)} \leq 1$, puesto que las φ_l forman una base ortonormal de Φ . Además, las estimaciones obtenidas permiten escribir que

$$\|g_m\|_{L^2(\Phi)} \leq C.$$

En consecuencia, se da la propiedad (8.11).

4. Extracción de subsucesiones convergentes.

Gracias a las estimaciones vistas en el apartado anterior, podemos afirmar entre otras cosas que

$$\begin{aligned} y_m &\in \text{acotado de } L^2(0, T; V), \\ y_m &\in \text{acotado de } C^0([0, T]; H), \\ y'_m &\in \text{acotado de } L^2(0, T; V'). \end{aligned} \quad (8.12)$$

y, también, que

$$\begin{aligned}\tau_m &\in \text{acotado de } C^0([0, T]; \Phi), \\ \tau'_m &\in \text{acotado de } L^2(0, T; \Phi).\end{aligned}\tag{8.13}$$

Esto permite deducir que existen subsucesiones $\{y_\mu\}$ y $\{\tau_\mu\}$ tales que

$$\begin{aligned}y_\mu &\rightarrow y && \text{en } L^\infty(0, T; H)\text{-débil}^* \text{ y en } L^2(0, T; V)\text{-débil}, \\ y_\mu(0) &\rightarrow y(0) && \text{en } H\text{-débil}, \\ \tau_\mu &\rightarrow \tau && \text{en } L^\infty(0, T; \Phi)\text{-débil}^*, \\ \tau_\mu(0) &\rightarrow \tau(0) && \text{en } \Phi\text{-débil}\end{aligned}\tag{8.14}$$

De hecho, hay convergencia fuerte de y_μ hacia y en $L^2(Q)$ y también hay convergencia débil de y'_μ hacia $\partial_t y$ en $L^2(0, T; V')$.

5. Paso al límite. Conclusión.

En primer lugar, notemos que necesariamente se tiene $y(0) = y_0$ y $\tau(0) = \tau_0$. En efecto, basta recordar que

$$y_\mu(0) = y_{0\mu} \rightarrow y_0 \quad \text{en } H$$

y

$$\tau_\mu(0) = \tau_{0\mu} \rightarrow \tau_0 \quad \text{en } \Phi.$$

Usando (8.14), podemos pasar al límite en todos los términos de (8.4). Más concretamente, fijemos j ; para cada $\mu \geq j$, es cierta la igualdad

$$\langle y'_\mu, w_j \rangle = -\nu(\nabla y_\mu, \nabla w_j) - (\tau_\mu, \nabla w_j) + (v(t)1_\mathcal{O}, w_j).$$

Tomando límites, tenemos que

$$\begin{aligned}(\nabla y_\mu, \nabla w_j) &\rightarrow (\nabla y, \nabla w_j) \quad \text{en } L^2(0, T)\text{-débil}, \\ (\tau_\mu, \nabla w_j) &\rightarrow (\tau, \nabla w_j) \quad \text{en } L^\infty(0, T)\text{-débil}^*\end{aligned}$$

y, también,

$$\langle y'_\mu, w_j \rangle \rightarrow \langle \partial_t y, w_j \rangle \quad \text{en } L^2(0, T)\text{-débil}.$$

Por tanto, para cada j obtenemos que

$$\langle \partial_t y, w_j \rangle + \nu(\nabla y, \nabla w_j) = -(\tau, \nabla w_j) + (v(t)1_\mathcal{O}, w_j) \quad \text{c.p.d. en } [0, T].$$

Como los w_j generan un espacio denso en V , deducimos que, al menos en $\mathcal{D}'(0, T)$, se tiene:

$$\langle \partial_t y, w \rangle + \nu(\nabla y, \nabla w) = -(\tau, \nabla w) + (v1_\mathcal{O}, w) \quad \forall w \in V.$$

Análogamente, fijado l , para cada $\mu \geq l$ es cierto que

$$(\tau'_\mu, \varphi_l) = -a(\tau_\mu, \varphi_l) + 2b(D(y_\mu), \varphi_l).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} (\tau_\mu, \varphi_l) &\rightarrow (\tau, \varphi) && \text{en } L^\infty(0, T)\text{-débil*}, \\ 2b(D(y_\mu), \varphi_l) &\rightarrow 2b(D(y), \varphi_l) && \text{en } L^2(0, T)\text{-débil}. \end{aligned}$$

Luego

$$(\tau'_\mu, \varphi_l) \rightarrow (\partial_t \tau, \varphi_l) \quad \text{en } L^2(0, T)\text{-débil}.$$

Para cada l , obtenemos pues que

$$(\partial_t \tau, \varphi_l) + a(\tau, \varphi_l) = 2b(D(y), \varphi_l) \quad \text{c.p.d. en } [0, T].$$

Como las φ_l generan un espacio denso en Φ , podemos escribir que, al menos en $\mathcal{D}'(0, T)$,

$$(\partial_t \tau, \varphi) + a(\tau, \varphi) = 2b(D(y(t)), \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

En resumidas cuentas, hemos probado que existe un par $\{y, \tau\}$ tal que

$$\begin{cases} \langle \partial_t y, w \rangle + \nu(\nabla y, \nabla w) = -(\tau, \nabla w) + (v1_{\mathcal{O}}, w) & \forall w \in V, \\ (\partial_t \tau, \varphi) + a(\tau, \varphi) = 2b(D(y), \varphi) & \forall \varphi \in \Phi, \\ y(0) = y_0, \quad \partial_t \tau(0) = \tau_0. \end{cases} \quad (8.15)$$

Además, las estimaciones precedentes implican que $y \in C^0([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$. $\partial_t y \in L^2(0, T; V')$, $\tau \in C^0([0, T]; \Phi)$, $\partial_t \tau \in L^2(0, T; \Phi)$ y

$$\|y\|_{L^\infty(H)} + \|y\|_{L^2(V)} + \|\partial_t y\|_{L^2(V')} + \|\tau\|_{L^\infty(\Phi)} \leq C, \quad (8.16)$$

donde la constante positiva C sólo depende de $|y_0|$, $|\tau_0|$ y $\|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}$.

6. Recuperación de la presión π .

En lo que sigue, vamos a ver que existe $\pi \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ (única salvo una distribución de $W^{-1, \infty}(0, T)$) tal que $\{y, \tau, \pi\}$ es solución de (8.1). Pongamos

$$S = \partial_t y - \nu \Delta y - \nabla \cdot \tau - v1_{\mathcal{O}}.$$

Tenemos que, $\partial_t y \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)^N)$, $\Delta y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$, $\nabla \cdot \tau \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$ y $v1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)^N$. Por tanto, podemos afirmar que

$$S \in W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^N) \cong H^{-1}(\Omega; W^{-1, \infty}(0, T))^N \subset \mathcal{D}'(\Omega; W^{-1, \infty}(0, T))^N$$

y tenemos que

$$\langle S, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

(igualdades en $W^{-1, \infty}(0, T)$). Luego, aplicando el lema de De Rham (cf. [2]), deducimos que existe $\pi \in \mathcal{D}'(\Omega; W^{-1, \infty}(0, T))$ tal que $S = -\nabla \pi$. De hecho, como $S \in H^{-1}(\Omega; W^{-1, \infty}(0, T))^N$, se puede elegir

$$\pi \in L^2(\Omega; W^{-1, \infty}(0, T)) \cong W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Además, π es única salvo una distribución de $W^{-1,\infty}(0, T)$. Por supuesto, el lema de De Rham demostrado en [2] también proporciona una estimación de $\|\pi\|_{W^{-1,\infty}(L^2)}$ análoga a (8.2).

8. Unicidad.

Sean $\{y^1, \pi^1, \tau^1\}$, $\{y^2, \pi^2, \tau^2\}$ dos soluciones de (8.1). Recordemos que, para cada $j = 1, 2$, se tiene

$$\begin{aligned} y^j &\in C^0([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V), & \partial_t y^j &\in L^2(0, T; V'), \\ \tau^j &\in C^0([0, T]; \Phi), & \partial_t \tau^j &\in L^2(0, T; \Phi), \\ \pi^j &\in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Pongamos $\{y, \pi, \tau\} = \{y^1, \pi^1, \tau^1\} - \{y^2, \pi^2, \tau^2\}$. Entonces

$$\begin{cases} \partial_t y - \nu \Delta y + \nabla \pi = \nabla \cdot \tau, & \nabla \cdot y = 0 & \text{en } Q, \\ \partial_t \tau + a\tau = 2bD(y) & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = 0, & \tau(0) = 0, \end{cases} \tag{8.18}$$

Multiplicando escalarmente en (8.18) la primera ecuación por y y la segunda por τ , obtenemos que, para cada $t \in [0, T]$,

$$\langle \partial_t y, y \rangle + \nu \|y\|^2 = -(\tau, D(y)) \quad \text{c.p.d.}$$

y

$$\langle \partial_t \tau, \tau \rangle + a|\tau|^2 = 2b(\tau, D(y)) \quad \text{c.p.d.}$$

Gracias a (8.17), podemos escribir también que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|y|^2 + \frac{1}{2b} |\tau|^2 \right) + \nu \|y\|^2 + \frac{a}{b} |\tau|^2 = 0,$$

de donde

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|y|^2 + \frac{1}{2b} |\tau|^2 \right) \leq 0.$$

Como $y(0) = 0$ y $\tau(0) = 0$, deducimos que $y \equiv 0$, $\tau \equiv 0$ y, por tanto, $\pi \equiv 0$ salvo una distribución de $W^{-1,\infty}(0, T)$. Con esto concluye la demostración del teorema. ■

8.2 Controlabilidad aproximada. Continuación única

En esta sección, probaremos un resultado de controlabilidad aproximada para (8.1). Gracias al teorema 8.1, la solución $\{y, \pi, \tau\}$ de (8.1) verifica $y \in C^0([0, T]; H)$. Como en otras ocasiones, denotaremos cuando sea necesario $\{y_v, \pi_v, \tau_v\}$ la solución de (8.1). Tenemos el siguiente

Teorema 8.2 – *Supongamos que todos los autovalores del operador $-\Delta$ en Ω con condiciones de Dirichlet son distintos. Entonces, para cada $T > 0$, la variedad lineal*

$$\{y_v(T) : v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))^N\} \text{ es densa en } H.$$

Gracias a un argumento de dualidad que ya hemos usado en el Capítulo anterior (demostración de la controlabilidad aproximada del modelo de Maxwell), la prueba de este teorema se reduce a comprobar la siguiente PCU:

Lema 8.3 – *Supongamos que todos los autovalores del operador $-\Delta$ en Ω con condiciones de Dirichlet son distintos. Entonces, para $T > 0$ arbitrario, es cierta la PCU que sigue: Si $q \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t q \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$,*

$$\begin{cases} \partial_t q - \nu \Delta q - b \Delta \left(\int_0^t e^{-a(t-s)} q(s) ds \right) = 0 & \text{en } Q, \\ q = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (8.19)$$

y

$$q = 0 \text{ en } \mathcal{O} \times (0, T),$$

entonces $q \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 8.3: Multipliquemos, en primer lugar, la EDP de (8.19) por e^{at} . Obtenemos:

$$e^{at} \partial_t q - \nu \Delta(e^{at} q) - b \Delta \left(\int_0^t e^{as} q(s) ds \right) = 0.$$

Pongamos ahora

$$h = e^{at} q.$$

Vemos entonces que, para probar la PCU de este lema, basta demostrar la siguiente:

Si $h \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t h \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$,

$$\begin{cases} \partial_t h - ah - \nu \Delta h - b \Delta \left(\int_0^t h(s) ds \right) = 0 & \text{en } Q, \\ h = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (8.20)$$

y

$$h = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{O} \times (0, T),$$

entonces $h \equiv 0$.

A continuación, probaremos que esto ocurre cuando todos los autovalores de operador $-\Delta$ en Ω con condiciones de Dirichlet son distintos. Para ello, estudiaremos la forma que tienen las soluciones del problema

$$\begin{cases} \partial_t h - ah - \nu \Delta h - b \Delta \left(\int_0^t h(s) ds \right) = 0 & \text{en } Q, \\ h = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ h(0) = h_0 \end{cases} \quad (8.21)$$

Aquí, $h_0 = q(0) \in L^2(\Omega)$. Para cada $n \geq 1$, denotaremos θ_n la función propia del operador $-\Delta$ asociada al n -ésimo autovalor λ_n esto es

$$\begin{cases} -\Delta \theta_n = \lambda_n \theta_n & \text{en } \Omega, \\ \theta_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ |\theta_n| = 1 & (\lambda_n \nearrow +\infty). \end{cases} \quad (8.22)$$

Nuestra estrategia será la siguiente:

(a) En primer lugar, reduciremos la prueba de que $h \equiv 0$, a comprobar que se anulan ciertos coeficientes A_n , B_n ($n \geq 1$). Estos aparecen cuando se aplica la técnica de separación de variables a (8.21) y están determinados principalmente por los λ_n , a , b y ν .

(b) Para probar que $A_n = 0$ y $B_n = 0$ para cada n , usaremos ciertos elementos de la teoría de variable compleja. Entre otras cosas, las propiedades de la transformada de Laplace y el teorema de los residuos.

Busquemos pues la solución h de (8.21) poniendo

$$h \sim \sum_{n \geq 1} T_n(t) \theta_n(x), \quad h_0 \sim \sum_{n \geq 1} h_{0n} \theta_n(x), \quad (8.23)$$

donde el símbolo \sim significa "igualdad en L^2 ". Al menos formalmente, es decir, si hay buenas propiedades de convergencia, podemos deducir que necesariamente

$$\sum_{n \geq 1} \left(T_n'(t) - aT_n(t) + \nu \lambda_n T_n(t) + b \lambda_n \int_0^t T_n(s) ds \right) \theta_n(x) = 0.$$

Por tanto, para cada n , hay que resolver el problema

$$\begin{cases} T_n'(t) - aT_n(t) + \nu \lambda_n T_n(t) + b \lambda_n \left(\int_0^t T_n(s) ds \right) = 0, \\ T_n(0) = h_{0n}, \end{cases} \quad (8.24)$$

donde

$$h_{0n} = \int_{\Omega} h_0(x) \theta_n(x) dx \quad \forall n \geq 1.$$

Para cada n , pongamos

$$\begin{aligned} \mu_n^+ &= \frac{-(\nu\lambda_n - a) + \sqrt{(\nu\lambda_n - a)^2 - 4b\lambda_n}}{2}, \\ \mu_n^- &= \frac{-(\nu\lambda_n - a) - \sqrt{(\nu\lambda_n - a)^2 - 4b\lambda_n}}{2}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Para n suficientemente grande, los μ_n^+ y μ_n^- son reales y distintos y (8.24) nos dice que

$$T_n(t) = \frac{h_{0n}}{\sqrt{(\nu\lambda_n - a)^2 - 4b\lambda_n}} (\mu_n^+ e^{\mu_n^+ t} - \mu_n^- e^{\mu_n^- t}). \quad (8.26)$$

De hecho, no es difícil comprobar (usando que los λ_n son todos distintos), que la sucesión μ_n^+ (resp. μ_n^-) es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) y que se tiene

$$\mu_n^+ \rightarrow -\frac{b}{\nu}, \quad \mu_n^- \rightarrow -\infty \quad (\text{como } -\nu\lambda_n). \quad (8.27)$$

Por simplicidad, supondremos que todos los μ_n^+ , μ_n^- son reales (con $\mu_n^+ \neq \mu_n^-$). En el caso contrario, el argumento que sigue puede ser adaptado fácilmente. Pongamos

$$a_n = -b_n = \frac{h_{0n}}{\sqrt{(\nu\lambda_n - a)^2 - 4b\lambda_n}} \quad (8.28)$$

para cada n . Entonces, para cada t , $h(\cdot, t)$ es de la forma:

$$h(\cdot, t) \sim \sum_{n \geq 1} T_n(t) \theta_n(x) = \sum_{n \geq 1} (a_n \mu_n^+ e^{\mu_n^+ t} + b_n \mu_n^- e^{\mu_n^- t}) \theta_n(x). \quad (8.29)$$

Evidentemente, esta serie proporciona la solución de (8.21) (con los a_n , b_n dados por (8.28)). Insistimos en que, como mínimo, en (8.29) hay convergencia en $L^2(\Omega)$ para cada $t \geq 0$.

Veamos que (8.21) posee efecto regularizante y más concretamente que $h(\cdot, t) \in H^s(\Omega) \quad \forall s > 0$. Esto permitirá después suponer que $h_0 \in H^s(\Omega)$ con s arbitrariamente grande.

Bastará comprobar que, para cada $s \geq 0$,

$$h_0 \in H^s(\Omega) \implies h(\cdot, t) \in H^{s+1}(\Omega) \quad \forall t > 0.$$

Así pues, supongamos

$$h_0 \sim \sum_{n \geq 1} h_{0n} \theta_n \quad \text{con} \quad \sum_{n \geq 1} \lambda_n^s |h_{0n}|^2 < +\infty.$$

Teniendo en cuenta (8.27), resulta que

$$|a_n \mu_n^+| \simeq \left| \frac{h_{0n}}{\sqrt{(\nu \lambda_n - a)^2 - 4b \lambda_n}} \right|, \quad |a_n \mu_n^-| \simeq |h_{0n}|.$$

Luego la serie que hay en (8.29) converge en $H^{s+1}(\Omega)$ para cada t . En efecto, en cada término el segundo sumando es de la forma

$$B_n e^{\mu_n^- t} \theta_n(x), \quad \text{con } |B_n| \simeq |h_{0n}|, \quad \mu_n^- \simeq -\nu \lambda_n. \quad (8.30)$$

Por otra parte, el primer sumando es de la forma

$$A_n e^{\mu_n^+ t} \theta_n(x), \quad \text{con } |A_n| \simeq \frac{|h_{0n}|}{\lambda_n}, \quad \mu_n^+ \simeq -\frac{b}{\nu}. \quad (8.31)$$

Luego, para cada $t > 0$, tenemos

$$h(\cdot, t) \sim \sum_{n \geq 1} C_n(t) \theta_n(x), \quad \text{con } \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{s+1} |C_n(t)|^2 < +\infty$$

Esto implica que, efectivamente, $h(\cdot, t) \in H^{s+1}(\Omega)$ para cada $t > 0$.

Gracias a lo anterior, podemos suponer en lo que sigue que $h_0 \in H^s(\Omega)$ con $s > N$. En este caso, sabemos que $h(\cdot, t) \in H^s(\Omega)$ para cada $t \geq 0$ y, además, $h \in L^2(0, +\infty; H^s(\Omega))$. Luego, como la inyección de $L^2(0, +\infty; H^s(\Omega))$ en $L^2(0, +\infty; C^0(\bar{\Omega}))$ es continua siempre que $s > N/2$, deducimos que $h \in L^2(0, +\infty; C^0(\bar{\Omega}))$. Fijemos ahora $x^* \in \mathcal{O}$ tal que, para cada $n \geq 1$, $\theta_n(x^*) \neq 0$ (existen puntos x^* con estas propiedades, véase [1]). En particular, podemos afirmar que

$$h(x^*, \cdot) \in L^2(0, +\infty).$$

Consideremos la función

$$F(t) = h(x^*, t) = \sum_{n \geq 1} (A_n e^{\mu_n^+ t} + B_n e^{\mu_n^- t}) \theta_n(x^*); \quad F \in L^2(0, +\infty).$$

Se trata de una serie convergente en $L^2(0, +\infty)$, luego tiene sentido considerar su transformada de Laplace, que está definida por

$$\tilde{F}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} F(t) dt \quad \forall z \in \mathcal{C}, \quad \text{Re } z > 0.$$

Vamos a ver que $\tilde{F}(z)$ es analítica. En efecto, podemos escribir de hecho que

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left(\sum_{n=1}^m (A_n e^{\mu_n^+ t} + B_n e^{\mu_n^- t}) \theta_n(x^*) \right) dt \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \int_0^{+\infty} e^{-zt} (A_n e^{\mu_n^+ t} + B_n e^{\mu_n^- t}) \theta_n(x^*) dt \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \theta_n(x^*) \left(\frac{A_n}{z - \mu_n^+} + \frac{B_n}{z - \mu_n^-} \right) = \sum_{n \geq 1} \theta_n(x^*) \left(\frac{A_n}{z - \mu_n^+} + \frac{B_n}{z - \mu_n^-} \right), \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{n \geq 1} |A_n \theta_n(x^*)| < +\infty, \quad \sum_{n \geq 1} |B_n \theta_n(x^*)| < +\infty. \quad (8.32)$$

Para convencerse de estas últimas afirmaciones, basta razonar como sigue. Dado que $s > N$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha = s - N/2 - \varepsilon > N/2$. Por ejemplo, tenemos que

$$|B_n \theta_n(x^*)| \leq C |h_{0n}| \|\theta_n\|_{L^\infty} \leq C |h_{0n}| \|\theta_n\|_{H^\alpha} \leq C \lambda_n^{\alpha/2} |h_{0n}|$$

para cada $n \geq 1$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} |B_n \theta_n(x^*)| &\leq C \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{\alpha/2} |h_{0n}| \\ &\leq C \left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^s |h_{0n}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-(\frac{N}{2} + \varepsilon)} \right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

(hemos usado aquí que $\lambda_n \simeq n^{2/N}$). Un argumento análogo prueba que también $\sum_{n \geq 1} |A_n \theta_n(x^*)| < +\infty$. En consecuencia, llegamos a que

$$\tilde{F}(z) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{A_n}{z - \mu_n^+} + \frac{B_n}{z - \mu_n^-} \right) \theta(x^*) \quad (8.33)$$

para $Re z > 0$, cumpliéndose al mismo tiempo (8.32) y, en consecuencia, $\tilde{F}(z)$ es analítica para $Re z > 0$.

Por otra parte, dado que $x^* \in \mathcal{O}$, tenemos que $F(t) = h(x^*, t) \equiv 0$, de donde $\tilde{F} \equiv 0$. Obviamente, \tilde{F} puede ser prolongada a todo el campo complejo \mathcal{C} como una función analítica de manera única. Seguiremos llamando \tilde{F} a esta prolongación. Para terminar la demostración, bastará probar que $A_n \theta_n(x^*) = B_n \theta_n(x^*) = 0$ para cada n (pues sabemos que los $\theta_n(x^*) \neq 0$). Ahora bien, los μ_n^+ y los μ_n^- son distintos y en estas condiciones, el teorema de los residuos nos dice que

$$A_n \theta_n(x^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \tilde{F}(z) dz, \quad B_n \theta_n(x^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^-} \tilde{F}(z) dz,$$

donde los Γ_n^+ , Γ_n^- son curvas cerradas adecuadas. Por tanto, $A_n \theta_n(x^*) = B_n \theta_n(x^*) = 0$ para cada $n \geq 1$. Esto prueba el lema. ■

Bibliografía

- [1] S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, D. Van Nostrand Company, Inc, 1965.

[2] J. Simon

(a) *Démonstration constructive d'un théorème de G. de Rham*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **316** (1993), no. 11, 1167–1172.

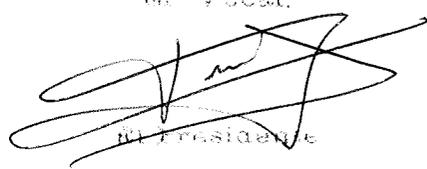
(b) *Distributions à Valeurs Vectorielles*, livre à paraître.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

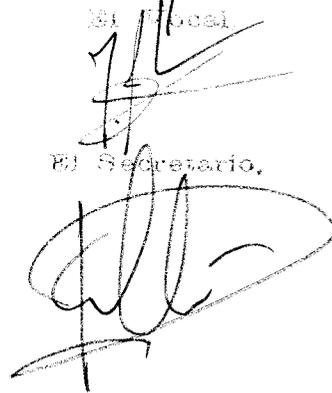
Reunido el Tribunal integrado por los señores miembros en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

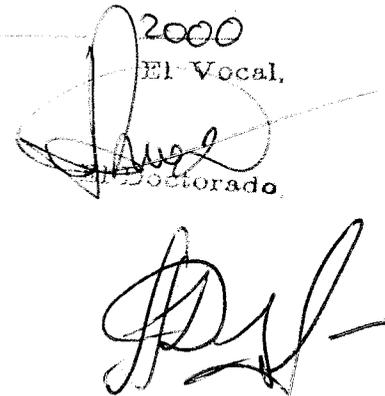
D. Anna Doubava
Análisis y Control de algunos EDP
con origen en Mecánica

por unanimidad Sobresaliente cum laude
Sevilla, 28 de Septiembre de 2000

El Vocal,

El Presidente


Juan Vázquez

El Vocal,

El Secretario.

2000
El Vocal,

Doctorado.

