Tesis Doctoral

ALGUNOS RESULTADOS DE EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTABILIDAD PARA EDP FUNCIONALES ESTOCÁSTICAS NO LINEALES

María José Garrido Atienza
Directores: Tomás Caraballo Garrido y José Real Anguas

V$^{\underline{o}}$B$^{\underline{o}}$ DIRECTORES DEL TRABAJO

T. Caraball

Fdo. Tomás Caraballo Garrido.
Catedrático de Universidad.

Fdo. José Real Anguas.
Catedrático de Universidad.

Memoria presentada por María José Garrido Atienza, para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Sevilla, Marzo de 2002.

Fdo. María José Garrido Atienza.

A mis padres

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mis más sincera gratitud a José Real Anguas, que me propuso el Tema de esta Memoria, me facilitó las reuniones de trabajo, lo cual al principio no fue fácil, en las que con una enorme paciencia me orientó y enseñó mucho de lo que conozco sobre ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. Sin su ayuda este trabajo no hubiera llegado a su fin.

Mi más profundo agradecimiento a Tomás Caraballo Garrido, por proponerme el estudio del comportamiento asintótico de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. Siempre ha tenido un momento de atención que dedicarme, le quiero agradecer su orientación y el optimismo y confianza que transmite. Espero que sigamos trabajando juntos en muchos de los problemas que tenemos pendientes.

A Manolo, ante todo mi amigo, como me lo ha demostrado tantas veces. Me ha sabido escuchar y aconsejar, dándome su más sincera opinión aunque supiera que podría no coincidir con lo que yo esperaba oir. Espero que nuestra amistad dure toda la vida y que compartamos despacho hasta que nos jubilemos.

A José Antonio quiero agradecer los comentarios y sugerencias que me ha hecho, que sin duda enriquecen mi formación. A Pedro decirle que le agradezco el examen que tan a fondo le ha hecho a parte de los resultados de esta Memoria.

Gracias a Eliseo, por soportarme tantas tardes y orientarme no sólo en dudas relativas a este trabajo. A Moski, que en estos últimos meses ha sido un gran amigo. A David, aunque está tan lejos, en este trabajo está presente, han sido mucho los momentos de agobios comunes los que hemos compartido. A Dani y Maca, gracias por los momentos de nuestros cafelitos. A Ara, a la que tantas veces he acudido para pedirle que me ayudara a rellenar algún papel, gracias además por asesorarme con los trámites de esta Tesis.

Quiero expresar también mi gratitud a todos mis compañeros del Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla, que siempre me han ayudado y animado.

Mi agradecimiento a los miembros del Tribunal de esta Tesis, por estar de acuerdo en participar en él y la rapidez que se dieron con los trámites.

A Eva quiero decirle que es una gran amiga, cada vez que la he necesitado ha sabido indicarme y aconsejarme.

A Carlos, estoy convencida de que gracias a él he superado muchos momentos difíciles estos últimos meses. Siempre le agradeceré sus ánimos y valiosos consejos y, sobre todo, que haya sabido dibujarme la sonrisa.

A Paco, por su apoyo en tantos momentos. Sé que se alegra de que haya acabado este trabajo, siempre confió en él.

Y sobre todo, aunque lo exprese en último lugar, a mis padres, por su enorme cariño y apoyo, confianza en mí y por creer que puedo hacer bien lo que me propongo. Y a mis hermanas, a las que me gustaría tener más cerca, gracias por el cariño que me dan.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Objetivos

El objetivo de esta Memoria es analizar la existencia y unicidad de solución para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con retardos en un contexto variacional, así como realizar un análisis del comportamiento asintótico de las soluciones de sistemas diferenciales estocásticos, tanto en el caso en el que no haya características hereditarias como en el que la ecuación contenga retardos.

1.2 Ecuaciones de evolución estocásticas con retardos

Comenzamos analizando algunos modelos que aparecen en dinámica de poblaciones para, a continuación, formular uno de los problemas objeto de nuestro estudio.

1.2.1 Motivación

Desde hace mucho tiempo los biólogos han intentado modelar algunos fenómenos ecológicos de evolución: interacciones entre las especies, talla de las poblaciones (humana, animal, bacteriológica), etc. En muchos estudios de este tipo la cuestión fundamental es la de conocer la evolución del sistema en el tiempo: problemas relativos a la extinción, la explosión o la supervivencia de una especie. Sea u la función que describe la evolución de la talla de una población en el tiempo. Un primer modelado nos conduce a un problema de valores iniciales del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = g(u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = \varphi, \end{cases}$$

donde g es una función real de variable real. Supongamos para empezar que g es lineal, es decir, $g(u) = \sigma u$, donde σ representa la tasa de crecimiento (o la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad de dicha población). La tasa de crecimiento es constante si el número de nacimientos y de muertes en un pequeño periodo de tiempo Δt tiene una razón fija respecto a la población total. La solución del problema anterior es fácil de obtener explícitamente:

$$u(t) = \varphi \mathrm{e}^{\sigma t}, \ t \geq 0,$$

en cuyo caso hay un crecimiento ilimitado.

Es más realista suponer que cuando el nivel de población excede un cierto valor c, la tasa de crecimiento es negativa. A este valor c se le llama población límite. Razones para que la tasa de crecimiento sea negativa pueden ser la falta de condiciones sanitarias, una menor disponibilidad de alimento, sobrepoblación, etc. Suponemos entonces que la tasa de crecimiento es proporcional a $c - u$, es decir, g es de la forma $g(u) = k(c - u)u$, obteniendo entonces una ecuación de crecimiento limitado, más conocida como modelo logístico.

Los especialistas de la genética de poblaciones saben que los modelos deterministas se adaptan bien al estudio de poblaciones "grandes", es decir, poblaciones donde las fluctuaciones aleatorias pueden ser despreciables. Pero hay parámetros que describen ciertos problemas en los que aparecen fluctuaciones aleatorias de mayor o menor grado que sí hay que tener en cuenta. Es por lo que una vez que apareció el cálculo estocástico los biólogos introdujeron la aleatoriedad en sus modelos, ya que, por ejemplo, es natural suponer que se tiene un conocimiento imperfecto del estado inicial de los sistemas estudiados, o que los coeficientes de la ecuación no son constantes, sino perturbados aleatoriamente. Si suponemos $g(u) = \sigma u$, el coeficiente σ (que ahora dependerá del tiempo) puede apartarse de un valor medio $\overline{\sigma}$, es decir, $\sigma(t) = \overline{\sigma} + \zeta(t)$, donde ζ es un "ruido", que representa una incertidumbre con respecto a los aparatos de medición, a las propias medidas, al conocimiento imperfecto del medio donde vive la población en estudio, etc. Así, el problema pasa a ser de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \overline{\sigma} u(t) + u(t)\zeta(t), & t > 0, \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Pero, ¿qué significa matemáticamente "ruido"? Fue Arnold (véase Arnold [1]) quien usó la teoría de las distribuciones para afirmar que el ruido es la derivada (en el sentido de las funciones generalizadas) de un movimiento Browniano $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ (construido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$), no derivable en un sentido clásico, conduciéndonos a la ecuación

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = \overline{\sigma} u(t)\mathrm{d}t + u(t)\mathrm{d}W(t), & t > 0, \\ u(0) = \varphi, \end{cases}$$

o más generalmente a una del tipo

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = f(u(t))\mathrm{d}t + g(u(t))\mathrm{d}W(t), & t > 0, \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Por otro lado, en numerosas ocasiones parace razonable suponer que estos modelos dependen de su historia. Consideremos una gran población $u(t)$ donde suponemos que la tasa de natalidad por individuo es $\beta > 0$ y la tasa de mortalidad por individuo es $\alpha \in \mathbb{R}$. Fijemos un número $r > 0$ no aleatorio que represente el periodo de gestación de un individuo (i.e. $r = 9$ meses). Supongamos que hay migración cuya tasa global está distribuida como un ruido del tipo $\gamma\dot{W}$. El cambio en la población $\Delta u(t)$ sobre el intervalo temporal $(t, t + \Delta t)$ es entonces

$$\Delta u(t) = -\alpha u(t)\Delta t + \beta u(t-r)\Delta t + \gamma\dot{W}\Delta t.$$

Si hacemos $\Delta t \to 0$, entonces obtenemos

$$\mathrm{d}u(t) = (-\alpha u(t) + \beta u(t-r))\mathrm{d}t + \gamma\mathrm{d}W(t), \tag{1.1}$$

ecuación a la que se le puede asociar condiciones iniciales del tipo $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$ y $u(s) = \eta(s)$, $-r \leq s < 0$, siendo $\eta \in L^2(-r, 0; \mathbb{R})$ (véase Mohammed [50]).

Supongamos ahora que $u(t)$ representa una población que evoluciona conforme al modelo logístico con periodo de incubación (o de desarrollo) $r > 0$. Supongamos además que hay migración a nivel molecular contribuyendo $\gamma\dot{W}$ a la tasa de crecimiento por individuo en el instante t. La evolución de la población viene dada ahora por una ecuación logística no lineal de la forma

$$\mathrm{d}u(t) = (-\alpha + \beta u(t-r))u(t)\mathrm{d}t + \gamma u(t)\mathrm{d}W(t), \tag{1.2}$$

con condición inicial del tipo $u(s) = \theta(s)$, $-r \leq s \leq 0$, siendo $\theta : [-r, 0] \to \mathbb{R}$ una función continua (véase Mohammed [50]).

Para cada $t \geq 0$, cada trayectoria $u : [-r, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ se restringe al intervalo $[t-r, t]$ y definimos el segmento $u_t : [-r, 0] \to \mathbb{R}^d$ por $u_t(s) = u(t+s)$ casi seguramente, $s \in [-r, 0]$, $t \geq 0$. Entonces las ecuaciones (1.1) y (1.2) pueden escribirse de la forma

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = (-\alpha u(t) + \beta u_t(-r))\mathrm{d}t + \gamma\mathrm{d}W(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \\ u(s) = \eta(s), \ s \in [-r, 0), \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = (-\alpha + \beta u_t(-r))u_t(0)\mathrm{d}t + \gamma u_t(0)\mathrm{d}W(t), & t > 0, \\ u(0) = \theta(s), \ s \in [-r, 0], \end{cases}$$

respectivamente.

Posteriormente los científicos han pasado al estudio de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas y con retardos para la modelización de problemas en Ecología, lo que nos lleva a una generalización del tipo

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = f(t,u_t)\mathrm{d}t + g(t,u_t)\mathrm{d}W(t), & t>0, \\ u(t) = \psi(t), \quad -h \le t \le 0, \end{cases}$$

donde en u_t aparece "de alguna manera" el retardo y ψ es la función retardo. La formulación integral del problema anterior viene dada por

$$\begin{cases} u(t) = \psi(0) + \int_0^t f(s,u_s)\mathrm{d}s + \int_0^t g(s,u_s)\mathrm{d}W(s), \\ u(t) = \psi(t), \quad -h \le t \le 0. \end{cases}$$

El último término, término de difusión, es lo que se llama una integral estocástica. La primera idea para definirla es preguntarse si se puede calcular como una integral de Stieltjes, donde la integral se realizaría trayectoria a trayectoria. La respuesta es negativa, ya que el movimiento Browniano es casi seguramente de variación no acotada (véase Arnold [1]), de ahí la necesidad de encontrar otra definición. Hay muchas interpretaciones, entre las cuales destacan dos: la de Itô y la de Stratonovich (véase Oksendal [51]). Nosotros usaremos la primera de ellas.

Una vez que el problema de la interpretación de la integral estocástica está resuelto, aparte del análisis lógico sobre existencia de solución de los modelos, una de las principales preocupaciones es el comportamiento de los procesos solución $u(t,\varphi)$, $t>0$, cuando el tiempo se hace muy grande, problema que también se abordará en nuestro trabajo.

1.2.2 Formulación del problema

Como acabamos de ver, cuando se quieren modelar algunos fenómenos de evolución que aparecen en Biología, así como en Física, Ingeniería, etc., algunas características hereditarias pueden aparecer en las variables. Más ejemplos aparte de los modelos de poblaciones pueden encontrarse en las investigaciones relativas a materiales con memoria térmica, reacciones bioquímicas, etc. (véase, por ejemplo, Ruess [57], Wu [59] y las referencias que en esos trabajos se encuentran). El problema estará entonces mejor modelado si se considera una ecuación diferencial funcional que tenga en cuenta la historia del sistema. Además, tal y como hemos ilustrado anteriormente para el caso particular de los modelos de poblaciones, algunos tipos de aleatoriedad pueden aparecer en el problema, así que el sistema debería estar modelado mediante una ecuación funcional estocástica. En esta Memoria nos plantearemos entonces, entre otros, el estudio de la existencia y unicidad de solución para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas no lineales y con retardos, en un marco variacional.

Para sistemas deterministas existe una gran literatura sobre la existencia de los distintos tipos de solución (fuerte, integral, mild, etc.) de ecuaciones diferenciales funcionales, incluso en el contexto más general de inclusiones diferenciales. Queremos señalar la referencia Ruess [57], donde se han descrito las diferentes técnicas usadas para tratar esta cuestión (aproximaciones de Galerkin, aproximaciones de Kato, etc.). Sin embargo, desde un punto de vista variacional, sólo se han publicado varios trabajos, como Artola [4] para ecuaciones lineales y semilineales retardadas y Caraballo [9] para ecuaciones monótonas no lineales en un contexto funcional.

Dentro del marco variacional, el problema del retardo en las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas ha sido abordado mucho menos. Hasta donde conocemos, sólo los trabajos de Real [55], [56] para el caso lineal, Caraballo [7] para el problema no lineal con retardos variables y Caraballo et al. [19], para la ecuación no lineal, han aparecido hasta la fecha. Sin embargo, las hipótesis en todos estos trabajos son muy restrictivas, de modo que los operadores que aparecen en las ecuaciones no son suficientemente generales. En esta Memoria se generalizarán estos trabajos de forma que se obtengan resultados de existencia y unicidad de solución para una mayor clase de sistemas diferenciales estocásticos con retardos.

Nos vamos a plantear el estudio de una ecuación en derivadas parciales estocástica con retardo bastante general, de la forma siguiente

$$\begin{cases} u(t) = \psi(0) + \int_0^t A(s,u(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (F_1(s,u_s) + F_2(s,u_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s) + G_1(s,u_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \ t \in [-h,0], \end{cases}$$

siendo A, F_1, F_2, G_0 y G_1 operadores no lineales sobre espacios de Hilbert (en la práctica F_1 y G_1 serán operadores en derivadas parciales de primer orden, mientras que F_2 de segundo orden), $W(t)$ un proceso de Wiener con valores reales, ψ una función retardo verificando condiciones adecuadas, y $T, h > 0$ fijados.

En los operadores F_1, F_2, G_0, G_1 aparece el retardo, puesto que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable real y $x \in C(-h,T;\mathcal{H})$, denotaremos por $x_t \in C(-h,0;\mathcal{H})$, para cada $t \in [0,T]$, a la función definida como $x_t(s) = x(t+s)$, $-h \leq s \leq 0$.

En el caso en que no aparecieran características hereditarias, es decir, $h = 0$, el problema anterior ha sido resuelto satisfactoriamente por Pardoux [52], aunque también puede consultarse en Da Prato y Zabczyk [22] para una aproximación diferente.

Obtendremos diferentes resultados de existencia y unicidad de solución para el problema anterior dependiendo de la regularidad del retardo, y las hipótesis que se harán sobre los operadores serán las usuales en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas (puede verse, por ejemplo, Caraballo y Real [20]). Como consecuencia de ellas, todos los términos que aparecen en el problema anterior tendrán sentido. Por otro lado, queremos comentar el método que emplearemos para demostrar la existencia de solución del problema anterior. Por una parte, el método de aproximaciones en dimensión finita (método de Galerkin) que se aplica en el caso en el que no hay retardos, no se puede usar aquí. Por otra parte, el método iterativo de Picard tampoco es aplicable incluso en el caso en el que no hay retardos, debido a la elección que hemos hecho de los operadores (por ejemplo, en la práctica G_1 suele ser un operador en derivadas parciales de primer orden). Para afrontar estas dificultades, dividiremos la demostración de nuestro resultado sobre existencia de solución en dos etapas. En la primera, usando un esquema de Galerkin, analizamos una versión simplificada del problema (básicamente se supondrán $F_1 \equiv G_0 \equiv 0$). En la segunda etapa, teniendo en cuenta la primera, demostraremos la existencia de solución usando un esquema de Picard adecuado.

Los resultados que obtendremos en esta Memoria pueden entenderse como una extensión al caso no lineal de los obtenidos en Real [55]. El hecho de que los operadores F_i, G_i $(i = 1, 2)$ sean no acotados generaliza Caraballo [7] y, por último, también mejoramos los resultados recientes de Caraballo et al. [19], ya que en dicho trabajo se suponen hipótesis más fuertes sobre los operadores, siendo además $F_2 \equiv 0$.

1.3 Ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de segundo orden en t con retardos

Hasta la fecha no conocemos trabajos relativos a la existencia y unicidad de solución de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de segundo orden en tiempo y con retardos, motivo por el cual uno de nuestros principales objetivos en esta Memoria será el análisis de solución de sistemas diferenciales estocásticos del tipo siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B(s, u'(s))\mathrm{d}s = \psi'(0) \\ + \int_0^t (F_0(s, u_s, u'_s) + F_1(s, u_s, u'_s) + F_2(s, u_s, u'_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s, u_s, u'_s) + G_1(s, u_s, u'_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0, T], \\ u(t) = \psi(t), \ t \in [-h, 0], \end{array}\right. \qquad (P)$$

donde $A(t)$ es una familia de operadores lineales y los demás operadores que aparecen en la ecuación son no lineales, de manera que F_0, F_1, F_2, G_0 y G_1 dependen tanto de u como de su derivada $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, y en ellos aparece el retardo en el mismo sentido que en el problema parabólico, ψ es la función retardo, siendo $\psi' = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$, estando fijados $T, h > 0$.

La teoría será desarrollada en un contexto variacional y los resultados serán establecidos de tal manera que seremos capaces de considerar retardos de naturaleza muy diferente escribiéndolos con la misma formulación (véase Garrido-Atienza y Real [26]). Más concretamente, supondremos que V y H son dos espacios de Hilbert reales separables tales que $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$, donde las inyecciones serán continuas y densas. Supondremos, entre otras hipótesis, que $A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $\forall t \in [0,T]$, y que $B(t,\cdot) : V \to V^*$ es una familia de operadores no lineales definida p.c.t. $t \in (0,T)$.

Comenzaremos obteniendo un resultado de existencia y unicidad de solución para un problema bastante relacionado con (P), donde además de suponer que $F_1 \equiv F_2 \equiv G_1 \equiv 0$, sustituiremos la familia B por otra familia de operadores no lineales $B_0(t,\cdot) : H \to H$ verificando determinadas hipótesis. Haciendo uso de fórmulas de la energía obtenidas en Pardoux [52] demostraremos existencia (mediante un esquema de Picard) y unicidad de solución para el correspondiente problema de segundo orden en t. Posteriormente, dados datos iniciales u_0 y v_0 adecuados, estableceremos un resultado de existencia y unicidad de solución para el problema

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \ t \in [0,T], \\ v(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B_0(s, v(s))\mathrm{d}s = v_0 + \int_0^t (F_0(s, u_s, v_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s, u_s, v_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \\ u(t) = \varphi_1(t), \ v(t) = \varphi_2(t), \ \text{p.c.t. } t \in (-h, 0). \end{cases} \qquad (\widetilde{Q})$$

es decir, el par solución dependerá ahora de dos retardos independientes φ_1 y φ_2.

Usando de nuevo fórmulas de la energía establecidas en Pardoux [52] y los resultados obtenidos para el problema "simplificado", estableceremos un resultado de existencia y unicidad de solución de (P), cuya demostración dividiremos en dos etapas. En la primera supondremos que $F_1 \equiv G_0 \equiv 0$ y emplearemos un esquema de Galerkin, en el que consideraremos, entre otros, $\widetilde{P}_m \in \mathcal{L}(V; V_m)$ el operador de proyección ortogonal de V en V_m, siendo V_m el subespacio vectorial generado por $\{w_1, \cdots, w_m\}$ y $\{w_i\}_{i \geq 1}$ una base ortonormal numerable de H, tal que $\{w_i\}_{i \geq 1} \subset V$ y el espacio vectorial generado por $\{w_i\}_{i \geq 1}$ sea denso en V. En el problema que plantearemos tendremos que, $\forall m \geq 1$,

$$\begin{aligned} u^m(t) &= \widetilde{P}_m \psi(t), \ t \in [-h, 0], \\ v^m(t) &= \widetilde{P}_m \psi'(t), \ t \in (0, T), \\ (u^m)'(t) &= v^m(t), \ t \in [0,T], \end{aligned}$$

con lo que aquí tendremos necesidad de usar el resultado comentado anteriormente relativo al problema $(\widetilde{Q})$.

En la segunda etapa, teniendo en cuenta la anterior y un esquema de Picard, concluiremos con el resultado.

También se establecerán resultados de existencia y unicidad de solución para problemas más generales que (P).

1.4 Comportamiento asintótico de sistemas diferenciales estocásticos

Vamos ahora a tratar la estabilidad de sistemas diferenciales estocásticos. Sean V un espacio de Banach real separable y reflexivo, H un espacio de Hilbert real separable, tales que $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$, donde las inyecciones se suponen continuas y densas. Supongamos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completo con una filtración normal $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Consideremos un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ con valores reales (para las definiciones consúltese el Capítulo 2). Consideremos la siguiente ecuación de evolución estocástica con retardos:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = [A(t, X(t)) + F(t, X_t)]\,\mathrm{d}t + G(t, X_t)\mathrm{d}W(t), t \geq 0, \\ X(t) = \psi(t), \ t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{1.3}$$

donde $h \geq 0$, $A(t,\cdot) : V \to V^*$, $F(t,\cdot) : (0,T) \times C(-h,0;H) \to V^*$ y $G : (0,T) \times C(-h,0;H) \to H$ son familias de operadores no lineales. Suponiendo que A verifica condiciones de medibilidad, hemicontinuidad, acotación, monotonía y coercividad, y que F y G son operadores Lipschitz continuos, entonces, podemos afirmar que existe un único proceso X solución de (1.3) para cada $T > 0$, es decir, $X(t)$ satisface la siguiente ecuación integral en V^*:

$$\begin{cases} X(t) = \psi(0) + \int_0^t (A(s, X(s)) + F(s, X_s))\mathrm{d}s + \int_0^t G(s, X_s)\mathrm{d}W(s), \forall t \in [0,T], \\ X(t) = \psi(t), \ t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

(véase el Capítulo 3), y donde estamos denotando por X_t al proceso estocástico que viene definido por la relación $X_t(s)(\omega) = X(t+s)(\omega)$, $0 \leq t \leq T$, $-h \leq s \leq 0$.

Para el problema (1.3) cabe la posibilidad de plantearnos la estabilidad en media cuadrática (es decir, la estabilidad de los momentos de orden dos), o bien, la estabilidad casi segura o también llamada estabilidad trayectorial. Además, podemos considerar un decaimiento de tipo exponencial o un decaimiento más general (para las definiciones remitimos al lector al Capítulo 5).

La estabilidad para la solución de (1.3) ha sido muy estudiada en los últimos años. En el caso en el que no aparezcan características hereditarias vamos a mencionar los trabajos Caraballo y Liu [17] y Liu y Mao [41], donde se analiza la estabilidad exponencial, mientras que en Caraballo et al. [10] y [12] se estudia la estabilidad asintótica. En el caso en el que sí hay retardos, la estabilidad exponencial ha sido tratada en Caraballo et al. [19] y la estabilidad asintótica en Caraballo et al. [12].

Nos interesaremos básicamente en la estabilidad casi segura y no en la estabilidad en media cuadrática, ya que bajo determinadas hipótesis la estabilidad de los momentos implica la estabilidad trayectorial (véase Caraballo et al. [16]).

Vamos a ver un ejemplo sencillo en el que la solución de la ecuación estocástica sea trayectorialmente exponencialmente estable y no exponencialmente estable en media cuadrática. Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}X(t) = c_1 X(t)\mathrm{d}t + c_2 X(t)\mathrm{d}W(t),$$

donde c_1, c_2 son dos constantes reales y W es un proceso de Wiener unidimensional. Resolviendo directamente la ecuación obtenemos que

$$X(t, X_0) = X_0 \exp\left\{ \left(c_1 - \frac{c_2^2}{2} \right) t + c_2 W(t) \right\}.$$

Por tanto, la solución nula es trayectorialmente exponencialmente estable si y sólo si $c_1 - \frac{c_2^2}{2} < 0$. Por otro lado, se verifica que

$$E\left|X(t, X_0)\right|^2 = E\left|X_0\right|^2 \exp\left\{ \left(2c_1 + c_2^2\right) t \right\},$$

es decir, la solución nula es exponencialmente estable en media cuadrática si y sólo si $c_1 + \frac{c_2^2}{2} < 0$. Por tanto, si

$$-\frac{c_2^2}{2} \leq c_1 < \frac{c_2^2}{2}$$

entonces la solución nula es trayectorialmente exponencialmente estable pero no exponencialmente estable en media cuadrática.

Una consecuencia inmediata de lo obtenido para el ejemplo anterior es que realmente lo interesante es obtener resultados relativos a la estabilidad casi segura con una determinada función de decaimiento independientemente de la estabilidad en media cuadrática con esa función de decaimiento. En el Capítulo 5 nos plantearemos un análisis directo de la estabilidad trayectorial para las ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo parabólico.

En esta Memoria, haciendo uso de funciones de Lyapunov apropiadas y la desigualdad exponencial de la martingala, obtendremos estimaciones para lo que denominaremos el *exponente generalizado de Lyapunov* de la solución de una ecuación en derivadas parciales estocástica de tipo parabólico, tanto en el caso en que no haya características hereditarias como en el que sí, mediante las cuales conseguiremos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica casi segura.

Una de las herramientas más potentes en la teoría de estabilidad de sistemas no lineales es el método de Lyapunov. Resultados en los que se use este procedimiento para demostrar estabilidad exponencial en media cuadrática pueden ser encontrados, por ejemplo, en Khasminskii y Mandrekar [32], Liu y Mandrekar [43], [44] y Liu [40].

Sin embargo, cuando un sistema diferencial no sea exponencialmente estable (no lo sean sus momentos o trayectorias), o no sepamos demostrar si lo es o no, creemos que resulta interesante plantear un análisis de su estabilidad con funciones de decaimiento más generales, es decir, vamos a intentar determinar, si es posible, la velocidad o grado de decaimiento con el que se "acercan" a otra solución, motivo por el cuál nos planteamos en esta Memoria el decaimiento con funciones generales para los sistemas diferenciales estocásticos de tipo parabólico.

Ilustremos con un ejemplo sencillo lo que estamos planteando. Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}X(t) = -\frac{q}{1+t}X(t)\mathrm{d}t + (1+t)^{-q}\mathrm{d}W(t), \ t \geq 0,$$

donde $q > \frac{1}{2}$ es una constante y $W(t)$ es un proceso de Wiener unidimensional sobre un espacio de probabilidad adecuado. No resulta difícil comprobar que la solución de dicha ecuación que satisface la condición inicial $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}$ viene dada por

$$X(t) = (X_0 + W(t))(1+t)^{-q}, \ t \geq 0.$$

Por tanto, se verifica que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{t} = 0,$$

lo cual impide asegurar decaimiento exponencial de la solución hacia cero.

Sin embargo, lo que sí se verifica es que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log t} \leq -\left(q - \frac{1}{2}\right), \text{ casi seguramente,}$$

es decir, tal y como vamos a definir, la solución tiende a cero polinomialmente casi seguro, aunque la ecuación no es exponencialmente estable.

Aunque en el caso sin características hereditarias la técnica de Lyapunov es a veces válida para obtener condiciones suficientes para analizar la estabilidad de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, sin embargo, en el caso de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con características hereditarias, incluso cuando los retardos sean constantes, el método de Lyapunov es díficil de aplicar, como se pone de manifiesto en Krasovskii [35], donde se analiza la estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardos, o en Kushner [36] y El'sgol'ts y Norkin [23], donde se estudia la estabilidad para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. La razón fundamental estriba en que resulta mucho más difícil, siendo a veces imposible, construir funciones de Lyapunov para ecuaciones estocásticas con características hereditarias que para aquellas en donde no las hay. Por esta razón varios autores han desarrollado una técnica de comparación entre ambos tipos de ecuaciones, véase, por ejemplo, Krasovskii [35], Mao y Shah [48] y Caraballo et al. [19]. En dichos trabajos se analiza si la estabilidad para la ecuación sin retardos se transfiere de alguna manera a la ecuación con retardos.

Por otro lado, uno de los problemas más importantes en teoría de estabilidad es la denominada estabilización de sistemas deterministas no estables o de sistemas estocásticos mediante ruidos, es decir, si añadir un término aleatorio en la ecuación produce un comportamiento diferente de la solución en relación a la estabilidad (véase Caraballo y Langa [14] para un estudio comparativo sobre los efectos de los distintos tipos de ruidos).

Los resultados que obtengamos relativos a estabilidad asintótica casi segura de las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo parabólico serán aplicados a la estabilización tanto de sistemas deterministas como estocásticos. En dimensión finita el primer trabajo conocido es Has'minskii [28], donde se estabilizó un sistema usando dos fuentes de ruido. También queremos mencionar Arnold [2], Arnold et al. [3] y Scheutzow [58], donde los resultados de estabilización son obtenidos usando términos aleatorios en el sentido de Stratonovich. Por otra parte, en Mao [45] y [46] se desarrolló una teoría sobre estabilización y desestabilización para sistemas no lineales finito dimensionales mediante ruidos formulados en el sentido de Itô. Recientemente, en Caraballo et al. [18] se han extendido estos resultados al caso de ecuaciones en derivadas parciales tanto deterministas como estocásticas. Pero puede ocurrir que el ruido no cause estabilidad exponencial, o que no sepamos determinar si el sistema perturbado estocásticamente es o no exponencialmente estable. Por tanto, resulta interesante investigar si el ruido produce algún tipo de estabilidad más débil (e.g. estabilidad polinomial o estabilidad logarítmica) o incluso más fuerte (e.g. superexponencial), véase Caraballo et al. [13]. También resulta interesante analizar si se pueden dar algunos criterios sobre construcción de estabilizadores de tipo feedback. Esto, por supuesto, está muy relacionado con los problemas de control y controlabilidad de los sistemas diferenciales (véanse Fernández-Cara et al. [24] y [25]).

También se estudiarán propiedades de estabilidad para ecuaciones estocásticas de segundo orden en tiempo, tales como las que modelan vibraciones aleatorias de sistemas mecánicamente flexibles, como, por ejemplo, los puentes. Resultados en esta línea y en dimensión finita pueden consultarse, por ejemplo, en Kozin [34]. En dimensión infinita vamos a señalar la referencia Curtain [21], donde se demuestran condiciones suficientes para la estabilidad exponencial de la solución del sistema, suponiendo que el operador genera un semigrupo de contracciones fuertemente continuo. Queremos señalar que no conocemos resultados en la literatura como los que aquí nos plantearemos, es decir, en un marco variacional.

Para finalizar, describimos brevemente la estructura del presente trabajo.

En el siguiente Capítulo presentamos una síntesis de conceptos y resultados básicos sobre integración con respecto de un proceso de Wiener. Nos hemos limitado a exponer los resultados sin demostraciones. Queremos destacar entre todos ellos la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, la desigualdad martingala de la exponencial y, fundamentalmente, las distintas fórmulas de Itô que emplearemos en esta Memoria.

En el Capítulo 3 se presentan resultados relativos a la existencia y unicidad de solución de una ecuación en derivadas parciales estocástica de tipo parabólico bastante general, y con características hereditarias, donde los retardos serán de tipo variable. Como comentamos anteriormente, estructuraremos la demostración de nuestro resultado principal sobre existencia de solución en dos etapas. En la primera, usando un esquema de Galerkin, analizaremos una versión simplificada del problema. En la segunda etapa, teniendo en cuenta la anterior, demostraremos la existencia de solución usando un esquema de Picard adecuado. Finalizaremos el Capítulo examinando un ejemplo ilustrativo de la teoría establecida.

Motivados por los resultados obtenidos para un sistema diferencial estocástico de tipo parabólico con retardos, nos hemos planteado obtener resultados similares caso de que la ecuación sea de segundo orden en t. En el Capítulo 4 hemos incluido dichos resultados. Tal y como comentamos anteriormente, comenzaremos estudiando la existencia de solución para un problema "relacionado" con el problema general. Posteriormente, nos plantearemos otro en el que aparecerán dos retardos independientes, pero verificando hipótesis parecidas. El resultado que obtengamos será clave para poder demostrar, junto con un esquema de Galerkin, la primera de las etapas en las que dividiremos nuestro teorema principal. Finalizaremos la segunda etapa teniendo en cuenta la primera y un esquema de Picard. Concluiremos con un par de ejemplos bastante generales en el que se podrá aplicar la teoría desarrollada.

Para finalizar este trabajo, hemos dedicado el Capítulo 5 a un análisis del comportamiento asintótico de sistemas diferenciales estocásticos, tanto en el caso que no existan retardos como en el que sí. Fundamentalmente nos hemos centrado en la ecuación de tipo parabólico, para la que obtendremos resultados de estabilidad trayectorial de una manera directa, es decir, sin necesidad de establecer resultados de estabilidad en media cuadrática. Además, el decaimiento que analizaremos puede que no sea de tipo exponencial, sino que trabajaremos con funciones de decaimiento más generales. Posteriormente, aplicaremos los resultados que hayamos obtenido relativos a estabilidad asintótica casi segura de las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo parabólico a la estabilización de sistemas deterministas y estocásticos. Si el ruido no causa estabilidad exponencial, o no sabemos determinar si el sistema perturbado estocásticamente es o no exponencialmente estable, vamos a investigar si el ruido produce algún tipo de estabilidad más débil, o incluso más fuerte. También analizaremos algunos criterios para la construcción de estabilizadores de tipo feedback.

Finalizaremos esta Memoria incluyendo algunos resultados relativos a la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas de segundo orden en tiempo. Más concretamente, analizaremos la estabilidad exponencial en media cuadrática y, a partir de ahí, la estabilidad exponencial trayectorial. No queremos terminar esta Introducción sin mencionar que la ausencia de trabajos cuyo objeto sea el comportamiento asintótico de ecuaciones estocásticas de segundo orden en tiempo hace que quede abierta una interesante vía en la que seguiremos trabajando en un futuro próximo.

Finalmente, queremos señalar que aunque hemos realizado este trabajo considerando un proceso de Wiener real, sería posible llevar a cabo el mismo análisis para procesos de Wiener hilbertianos. Sin embargo, nos hemos decidido por esta vía por claridad y simplificación en la exposición de los conceptos y resultados.

Capítulo 2

La integral estocástica

En este Capítulo presentamos fundamentalmente algunos conceptos sobre integración respecto de un proceso de Wiener que utilizaremos frecuentemente a lo largo de esta Memoria.

2.1 Variables aleatorias

Si Ω es un conjunto, vamos a denotar por $\mathcal{P}(\Omega)$ a la familia de las partes de Ω.

Definición 1 *Un espacio medible es cualquier pareja $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra de partes de Ω, es decir, $\Omega \in \mathcal{F}$, si $F \in \mathcal{F}$ entonces $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}$, y si $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n\geq 1} F_n \in \mathcal{F}$.*

Evidentemente $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra de partes de Ω, y la intersección de una familia arbitraria de σ-álgebras de partes de Ω es una σ-álgebra de partes de Ω. A la intersección de todas las σ-álgebras de partes de Ω que contengan a $\mathcal{C}$ la denotaremos por $\sigma(\mathcal{C})$, y la denominaremos la σ-álgebra de partes de Ω generada por $\mathcal{C}$. De manera equivalente, $\sigma(\mathcal{C})$ es la menor σ-álgebra de partes de Ω que contiene a la familia $\mathcal{C}$.

Definición 2 *Si $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(\Omega', \mathcal{F}')$ son dos espacios medibles, una aplicación medible entre ambos espacios es cualquier aplicación $X : \Omega \to \Omega'$ tal que para todo $F' \in \mathcal{F}'$ el conjunto $X^{-1}(F') = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in F'\}$ pertenece a $\mathcal{F}$. A dicha aplicación se le denominará también una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con valores en $(\Omega', \mathcal{F}')$.*

En el caso en que $\Omega' = V$ sea un espacio topológico, se denomina σ-álgebra de los conjuntos borelianos de V, y se la denota $\mathcal{B}(V)$, a la σ-álgebra de partes de V generada por la familia de los conjuntos abiertos de V.

Definición 3 *Una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con valores en el espacio topológico V es cualquier aplicación medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(V, \mathcal{B}(V))$, o de manera equivalente, cualquier aplicación $X : \Omega \to V$ tal que para todo $A \subset V$ abierto, $X^{-1}(A)$ pertenece a $\mathcal{F}$.*

En particular, una aplicación $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con valores en $\mathbb{R}$ si y sólo si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $X^{-1}((-\infty, a])$ pertenece a $\mathcal{F}$.

De manera más general, si V es un espacio de Banach separable, una aplicación $X : \Omega \to V$ es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con valores en V si y sólo si para todo elemento $v^* \in V^*$, el dual topológico de V, la función $< v^*, X >$ es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con valores en $\mathbb{R}$, es decir, si y sólo si

$$\{\omega \in \Omega;\ < v^*, X(\omega) > \leq a\} \in \mathcal{F} \quad \forall v^* \in V^* \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Definición 4 *Una variable aleatoria con valores en V se dice escalonada si toma sólo un número finito de valores distintos.*

Definición 5 *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es una aplicación $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que $P(\Omega) = 1$ y P es numerablemente aditiva, es decir, si $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos, entonces $P\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(F_n)$.*

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se le denomina un espacio de probabilidad.

Se dice que un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es completo si dado $F \in \mathcal{F}$ tal que $P(F) = 0$ entonces todos los subconjuntos de F pertenecen a la σ-álgebra $\mathcal{F}$.

A partir de ahora suponemos fijado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y salvo que digamos lo contrario todas las variables aleatorias que consideremos estarán definidas sobre dicho espacio. Denotaremos por $\mathcal{N}$ a la familia de todos los conjuntos $F \in \mathcal{F}$ tales que $P(F) = 0$ (a $\mathcal{N}$ se le denomina la familia de los conjuntos despreciables). De cualquier propiedad que sea cierta para cada $\omega \in \Omega \setminus F$, con $F \in \mathcal{N}$, diremos que sucede con probabilidad 1 o casi seguramente (c.s.).

Para establecer si una propiedad sucede c.s. resulta de utilidad el siguiente resultado:

Lema 1 *(de Borel-Cantelli). Sea $\{F_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, y sea*

$$\limsup_{n\to+\infty} F_n = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} F_n,$$

el conjunto límite superior de dicha sucesión. Si $\sum_{n\geq 1} P(F_n) < +\infty$, *entonces*

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} F_n\right) = 0.$$

Si V es un espacio de Banach separable y X es una variable aleatoria con valores en V, es fácil demostrar que entonces $\|X\|$ es una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}$. Se dice que X es integrable (en el sentido de Bochner) respecto de P si la función $\|X\|$ lo es. En tal caso, se define la integral en Ω de X respecto de P por

$$\int_\Omega X dP = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega X_n dP$$

donde $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es cualquier sucesión de variables aleatorias escalonadas tal que $\|X_n - X\|$ decrece a cero (la existencia de la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ se puede ver, por ejemplo, en Da Prato y Zabczyk [22]), y donde por definición, si $X_n = \sum_{j=1}^{k} x_j 1_{F_j}$,

$$\int_\Omega X_n dP = \sum_{j=1}^{k} P(F_j)x_j.$$

En particular, la integral en Ω de X respecto de P es un elemento de V.

Suponemos bien conocidas las propiedades de la integral así definida. Aquí sólo vamos a citar las definiciones y los resultados que son específicos del Calculo de Probabilidades.

Definición 6 *Si X es una variable aleatoria con valores en V integrable respecto de P, se define la esperanza de X como la integral en Ω de X respecto de P, y se la denota EX, es decir,*

$$EX = \int_\Omega X dP.$$

Cualquier variable aleatoria X con valores en un espacio medible $(\Omega', \mathcal{F}')$, induce una medida de probabilidad P_X sobre $(\Omega', \mathcal{F}')$, definida por

$$P_X(F') = P(X^{-1}(F')) \quad \forall F' \in \mathcal{F}'.$$

A P_X se le denomina la distribución o la ley de X.

Con esta notación, si V es un espacio de Banach separable, y $g : \Omega' \to V$ es medible y tal que $g(X)$ es integrable respecto de P, entonces

$$E(g(X)) = \int_{\Omega'} g(x) dP_X,$$

y en particular, si X es una variable aleatoria con valores en V integrable respecto de P, se tiene

$$EX = \int_V x dP_X.$$

Definición 7 *Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Si X es una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}$ integrable respecto de P, existe una única variable aleatoria $\widetilde{X}$ con valores en $\mathbb{R}$ integrable respecto de P, tal que*

$$\int_G \widetilde{X}\, dP = \int_G X\, dP \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

A la variable aleatoria $\widetilde{X}$ se le denomina la esperanza condicional X con respecto de $\mathcal{G}$, y se le denota como $E(X\,|_{\mathcal{G}})$.

Un concepto fundamental en Probabilidad es el de independencia. Veamos su definición:

Definición 8 *Diremos que $F, G \in \mathcal{F}$ son independientes si $P(F \cap G) = P(F)P(G)$.*

De manera general, una colección arbitraria $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$ se dice independiente si para toda colección finita $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset I$ de índices distintos dos a dos, se satisface

$$P(F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_n}) = P(F_{i_1})P(F_{i_2})...P(F_{i_n}).$$

Una colección arbitraria $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ se dice independiente si para toda colección finita $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset I$ de índices distintos dos a dos, y para todo $F_{i_1} \in \mathcal{F}_{i_1}$, $F_{i_2} \in \mathcal{F}_{i_2}$,..., $F_{i_n} \in \mathcal{F}_{i_n}$, se satisface

$$P(F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_n}) = P(F_{i_1})P(F_{i_2})...P(F_{i_n}).$$

Una familia arbitraria $\{X_i\}_{i\in I}$ de variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ (cada X_i con valores en un espacio medible $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$) se dice independiente si la colección $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ lo es.

Suponemos fijado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es decir, una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo par $0 \leq s \leq t < +\infty$.

2.2 Procesos estocásticos

En esta Sección resumimos los conceptos básicos y resultados relativos a procesos estocásticos con valores reales o en un Banach separable.

Definición 9 *Si* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *es un espacio medible, un proceso estocástico definido sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *con valores en* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *es una familia arbitraria* $\{X_t\}_{t\in I}$ *de variables aleatorias definidas sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *con valores en* $(\Omega', \mathcal{F}')$.

El conjunto de índices I va a ser, en general, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ o $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^+$, aunque a veces nos interesará considerar $I = \mathbb{Z}_+$, el conjunto de los enteros no negativos.

Por otra parte, el concepto de proceso estocástico va ser de interés para nosotros cuando el espacio medible $(\Omega', \mathcal{F}')$ en que toma valores es $(V, \mathcal{B}(V))$, con V un espacio de Banach separable, o $V = \mathbb{R}^d$. En tales casos, diremos simplemente que $\{X_t\}_{t\in I}$ es un proceso estocástico con valores en V o en $\mathbb{R}^d$.

Vamos a denotar por $\|\cdot\|$ la norma en V.

Nota 1 *Dado un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\in I}$ *con valores en el espacio de Banach* V, *para cada* $\omega \in \Omega$, *se tiene definida una aplicación*

$$t \in I \to X_t(\omega) \in V,$$

que se denomina una trayectoria del proceso. Escribiremos $X_.(\omega)$ *para designar dicha trayectoria. Algunas veces escribiremos* $X(\omega, t)$ *en vez de* $X_t(\omega)$, *y miraremos al proceso estocástico como una aplicación*

$$X : (\omega, t) \in \Omega \times I \to V.$$

Escribiremos a menudo el proceso estocástico como $\{X_t\}$, X_t *o* $X(t)$.

Definición 10 *Sea* $\{X_t\}_{t\in I}$ *un proceso estocástico con valores en el espacio de Banach* V, *y supongamos que* $I \subset \mathbb{R}^+$ *es un intervalo.*

Diremos que $X(t)$ *es continuo (respectivamente, continuo por la derecha o continuo por la izquierda), si c.s. la trayectoria* $X_.(\omega)$ *es continua (respectivamente, continua por la derecha o continua por la izquierda) como aplicación de* I *en* V.

Diremos que $X(t)$ *es integrable, si para cada* $t \in I$ *la variable aleatoria* X_t *lo es.*

Diremos que $X(t)$ *es* $\{\mathcal{F}_t\}$*-adaptado (o, simplemente, adaptado), si para cada* $t \in I$ *la variable aleatoria* X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible.*

Diremos que $X(t)$ *es medible, si la aplicación* $X : (\omega, t) \in \Omega \times I \to V$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(I)$*-medible.*

Diremos que $X(t)$ *es estocásticamente continuo en* $t_0 \in I$ *si* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists \rho > 0$ *tal que*

$$P(\|X(t) - X(t_0)\| \geq \varepsilon) \leq \delta \quad \forall t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \cap I.$$

Definición 11 *Sean* $\{X_t\}_{t\in I}$ *y* $\{\tilde{X}_t\}_{t\in I}$ *dos procesos estocásticos con valores en el espacio de Banach* V.

Diremos que $\tilde{X}(t)$ *es una versión o modificación de* $X(t)$ *si* $X_t = \tilde{X}_t$ *c.s. para cada* $t \in I$, *es decir, si para cada* $t \in I$,

$$P(\{\omega \in \Omega;\ X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}) = 1.$$

Diremos que $\tilde{X}(t)$ *y* $X(t)$ *son indistinguibles si c.s.* $X_.(\omega) \equiv \tilde{X}_.(\omega)$, *es decir, si*

$$P(\{\omega \in \Omega;\ X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega) \quad \forall t \in I\}) = 1.$$

Queremos señalar que si X es un proceso estocástico sobre I, la función $X(\cdot,\cdot)$ no tiene porqué ser medible en el espacio $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(I)$. Sin embargo, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 1 *Sea* $\{X_t\}_{t\in I}$ *un proceso estocásticamente continuo con valores en el espacio de Banach separable* V, *siendo* $I \subset \mathbb{R}^+$ *un intervalo. Entonces* X *tiene una modificación medible.*

Demostración. Véase en Da Prato y Zabczyk [22]. ∎

Definición 12 *Sea* $\{X_t\}_{t\in I}$, $I \subset \mathbb{R}^+$ *un intervalo, un proceso estocástico con valores en un espacio de Banach separable V. Diremos que* $X(t)$ *es una* $\mathcal{F}_t$*-martingala (o simplemente una martingala) si verifica:*

(a) $X(t)$ *es* F_t*-adaptado e integrable para todo* $t \in I$.

(b) *Para cada par* $s < t$ *de elementos de* I, *se tiene que* $E(X_t\,|_{\mathcal{F}_s}) = X_s$.

Definición 13 *Sea* $\{X_t\}_{t\in I}$, $I \subset \mathbb{R}^+$ *un intervalo, un proceso estocástico con valores en* $\mathbb{R}$. *Diremos que* $X(t)$ *es una* $\mathcal{F}_t$*-supermartingala (o simplemente una supermartingala) si verifica:*

(a) $X(t)$ *es* F_t*-adaptado e integrable para todo* $t \in I$.

(b) *Para cada par* $s < t$ *de elementos de* I, *se tiene que* $E(X_t\,|_{\mathcal{F}_s}) \leq X_s$.

Reservaremos la notación M_t para designar a una martingala.

Definición 14 *Una* $\mathcal{F}_t$*-martingala* $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *se dice de cuadrado integrable si*

$$E\,\|M_t\|^2 < +\infty,\ \forall t \geq 0.$$

Denotemos por $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de todas las $\mathcal{F}_t$-martingalas continuas de cuadrado integrable con valores en $\mathbb{R}$ y tales que $M_0 = 0$. Si $M \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$, existe un único proceso creciente continuo con valores en $\mathbb{R}$, que vamos a denotar por $\langle M \rangle$, tal que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala que se anula en $t = 0$.

Definición 15 *Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ se llama $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$- tiempo de parada (o simplemente tiempo de parada) si*

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 16 *Un proceso $\mathcal{F}_t$-adaptado $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ se dice que es una $\mathcal{F}_t$-martingala local si existe una sucesión de tiempos de parada $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$, tal que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$, tal que $M_{\tau_n} - M_{t\wedge\tau_n}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala.*

Denotemos por $\mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R})$ al espacio de los procesos $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathbb{R}$ tales que existe una sucesión de tiempos de parada $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ tales que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ P-c.s. y $M_{t\wedge\tau_n} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ $\forall n$.

De la misma manera que antes, se satisface que si $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R})$ existe un único proceso creciente continuo que denotamos $\langle M \rangle$, tal que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala local.

A continuación vamos a enunciar un resultado que usaremos frecuentemente a lo largo de esta Memoria, cuando demostremos resultados de estabilidad, conocido como la desigualdad exponencial de la martingala. Más adelante, en el Capítulo 5, veremos un caso particular del que ahora exponemos.

Teorema 1 *Sea $M = \{M_t\}_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R})$. Entonces, para cualesquiera constantes positivas T, α, β se verifica la desigualdad*

$$P\left\{ \sup_{0\leq t\leq T} \left[M_t - \frac{\alpha}{2} \langle M \rangle_t \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta}.$$

Demostración. Véase Mao [47]. ■

Otro de los resultados que utilizaremos es el conocido como ley fuerte de los grandes números:

Teorema 2 *Sea $M = \{M_t\}_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{t\to+\infty} \langle M_t \rangle = +\infty$. Entonces se verifica*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M_t}{\langle M_t \rangle} = 0, \ P - c.s.$$

Demostración. Véase Mao [47]. ■

2.3 Procesos de Wiener

En esta Sección vamos a resumir los resultados básicos sobre procesos de Wiener.

Definición 17 *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad, y* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *una filtración sobre dicho espacio. Se denomina* $\{\mathcal{F}_t\}$*-proceso de Wiener unidimensional sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a cualquier proceso estocástico* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *definido sobre dicho espacio, con valores en* $\mathbb{R}$ *y tal que:*

(a) W_t *es continuo y* $\{\mathcal{F}_t\}$*-adaptado,*

(b) $W_0 = 0$ *c.s.,*

(c) *para cada par* $0 \leq s < t < +\infty$*, el incremento* $W_t - W_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$*,*

(d) *para cada par* $0 \leq s < t < +\infty$*, el incremento* $W_t - W_s$ *sigue una ley de distribución normal de media cero y varianza* $t - s$*, es decir,*

$$P(W_t - W_s \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_B \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

y en particular,

$$E(W_t - W_s) = 0 \quad \text{y} \quad E((W_t - W_s)^2) = t - s.$$

Nosotros vamos a admitir la existencia de procesos estocásticos verificando las condiciones de la definición precedente (para la demostración de dicha existencia se puede consultar Karatzas y Shreve [31]).

Resulta inmediato de la definición, que si $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entonces para todo $0 \leq t_0 < t_1 < ...t_n < +\infty$, los incrementos $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq n$ son independientes. Esta propiedad se expresa diciendo que un proceso de Wiener es un proceso con incrementos independientes. Asimismo, la distribución de probabilidad de $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ depende tan sólo de $t_i - t_{i-1}$, es decir, un proceso de Wiener es un proceso con incrementos estacionarios.

La filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ha formado parte de la definición que hemos dado para un proceso de Wiener. Por ello lo hemos denominado un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener. Es usual en la literatura matemática denominar proceso de Wiener unidimensional sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a cualquier proceso estocástico $\{W_t\}_{t\geq 0}$ definido sobre dicho espacio, con valores en $\mathbb{R}$ y tal que satisfaga las condiciones (a), (b) y (d) de la definición precedente, y en lugar de la condición (c), satisfaga que sus incrementos sean independientes. En este caso, si se denota $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s;\ 0 \leq s \leq t)$, la denominada filtración natural generada por $\{W_t\}_{t\geq 0}$, entonces el proceso W_t es un $\{\mathcal{F}_t^W\}$-proceso de Wiener en el sentido de la definición anterior. Además, en este caso, si $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es otra filtración tal que $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$, y $W_t - W_s$ sea independiente de $\mathcal{F}_t$ para todo $0 \leq s \leq t < +\infty$, entonces W_t es también un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener.

En la definición de $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener es usual, por razones técnicas, suponer que el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es completo, y que la filtración es normal, es decir, continua por la derecha y tal que $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos despreciables de $\mathcal{F}$. Si $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener unidimensional sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ una forma de obtener lo anterior es la siguiente. En primer lugar, es fácil comprobar que $\{W_t\}_{t\geq 0}$ continúa siendo un proceso de Wiener sobre el espacio $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, P)$, el completado de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde se recuerda que

$$\bar{\mathcal{F}} = \{G \in \mathcal{P}(\Omega);\ \exists F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ tales que } F_1 \subset G \subset F_2, \text{ y } P(F_1) = P(F_2)\},$$

y todo espacio de probabilidad puede ser completado. A continuación, si se define

$$\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \bar{\mathcal{N}}), \quad \forall t \geq 0,$$

donde por $\bar{\mathcal{N}}$ denotamos a la familia de los conjuntos de $\bar{\mathcal{F}}$ de probabilidad nula, entonces, se puede demostrar (ver Liptser y Shiryayev [38]) que $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}$ es una filtración continua por la derecha, que $\bar{\mathcal{F}}_0$ contiene todos los conjuntos despreciables de $\bar{\mathcal{F}}$, y que $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$-proceso de Wiener sobre $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, P)$. De hecho, además la filtración es también continua por la izquierda, es decir, $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(\bigcup_{0\leq s<t} \bar{\mathcal{F}}_s\right)$ para todo $t > 0$.

A partir de ahora, cuando consideremos un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener, supondremos que el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es completo y que la filtración es normal.

Enumeramos a continuación algunas propiedades importantes de los $\{\mathcal{F}_t\}$-procesos de Wiener, cuyas demostraciones pueden consultarse en Arnold [1].

Proposición 2 *Todo $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua con valores reales, de cuadrado integrable , tal que $W_0 = 0$, siendo $W_t^2 - t$ una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua.*

Proposición 3 *Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener con valores reales. Entonces:*

(a) *$\{-W_t\}_{t\geq 0}$ es un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional, y para todo $c > 0$, $\left\{\dfrac{W_{ct}}{\sqrt{c}}\right\}_{t\geq 0}$ es un $\{\mathcal{F}_{ct}\}$-proceso de Wiener con valores en $\mathbb{R}$.*

(b) *Si escribimos $\widetilde{W}_t = tW_{\frac{1}{t}}$ para todo $t > 0$ siendo $\widetilde{W}_0 = 0$, entonces $\{\widetilde{W}_t\}_{t\geq 0}$ es un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional.*

(c) *Se verifica la ley del logaritmo iterado, es decir, $P-$c.s. se satisfacen*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1, \qquad \liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1.$$

(d) *Si $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional, entonces las trayectorias $W_.(\omega)$ son c.s. no derivables c.p.d. en $t \in \mathbb{R}^+$, pero son c.s. localmente α-holderianas en $\mathbb{R}^+$ para todo $\alpha \in (0, 1/2)$.*

Teniendo en cuenta la ley del logaritmo iterado, para todo $\varepsilon > 0$ y $P-$c.s., existe un instante $t_0(\omega)$ tal que para $t > t_0(\omega)$ se verifica

$$-(1+\varepsilon)\sqrt{2t\log\log t} \leq W_t(\omega) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{2t\log\log t}.$$

Si ahora aplicamos la ley del logaritmo iterado a $tW_{\frac{1}{t}}$, entonces obtenemos además que

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)}} = 1, \qquad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)}} = -1,$$

de lo que se deduce que W_t tiene en cada intervalo $(0, \varepsilon)$ infinitos ceros. Como para $s > 0$, $W_{t+s}-W_s$ es también un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional, el comportamiento anterior se da en todos los puntos $s > 0$. Por tanto, $P-$c.s.,

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \geq (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{h}\log\log\frac{1}{h}} \quad \text{infinitas veces,}$$

y, además

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \geq (-1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{h}\log\log\frac{1}{h}} \quad \text{infinitas veces.}$$

Pero si tomamos límites cuando $h \to 0$ las expresiones tienden a $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente, por lo que el cociente $\frac{W_{t+h}-W_t}{h}$ tiene con probabilidad uno y para todo t fijo, todo $\mathbb{R}$ como conjunto de puntos de acumulación. Con ello observamos grandes fluctuaciones locales de W_t, lo cuál también provoca que cada porción de W_t sea de variación no acotada. De este modo tenemos que las trayectorias de un proceso de Wiener son un ejemplo de función continua no diferenciable.

Para finalizar con esta Sección veamos cómo podemos extender el concepto de proceso de Wiener unidimensional a $\mathbb{R}^m$.

Definición 18 *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración sobre dicho espacio. Se denomina $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener m-dimensional sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a todo proceso estocástico $\{W_t\}_{t\geq 0}$ definido sobre dicho espacio, con valores en $\mathbb{R}^m$, tal que si denotamos $W_t = (W_t^1, ..., W_t^m)$, cada $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$ es un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener unidimensional sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y los procesos $\{W_t^i\}_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq m$, son independientes.*

Para los procesos de Wiener m-dimensionales se tienen propiedades similares a las del caso unidimensional.

También señalamos aquí que es posible extender el concepto de proceso de Wiener al caso de valores en un espacio de Hilbert separable, ver Da Prato y Zabczyk [22].

2.4 La integral respecto de un proceso de Wiener

En esta Sección vamos a definir la integral estocástica en varios pasos, comenzando por los procesos elementales. También se establecerán propiedades básicas sobre la integral estocástica, incluyendo la fórmula de Itô.

Suponemos fijados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo con $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración normal. Consideremos $\{W_t\}_{t\geq 0}$, un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener con valores reales sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y consideremos fijado $T > 0$.

2.4.1 Integración de procesos estocásticos con valores reales

En esta primera parte de integración con respecto a un proceso de Wiener vamos a desarrollar la construcción de la integral estocástica, en el sentido de Itô, de procesos que toman valores reales. Posteriormente veremos cómo es posible la generalización de esta integral cuando el proceso que se integra toma valores en cualquier espacio de Hilbert separable.

Denotaremos por $\mathcal{L}^2(0,T)$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados, tales que $\int_0^T |\varphi(s)|^2\, ds < +\infty$ c.s.

Queremos definir el concepto de integral estocástica para cualquier proceso de $\mathcal{L}^2(0,T)$. Ello lo vamos a realizar efectuando varios pasos, pero previamente vamos a definir distintos tipos de procesos.

En primer lugar, vamos a denotar por $I^2(0,T)$ al conjunto de todos los elementos φ del espacio $L^2(\Omega \times (0,T), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(0,T), dP \otimes dt; \mathbb{R})$ tales que, c.p.d. en $(0,T)$, $\varphi(t)$ sea $\mathcal{F}_t$-medible.

Es sencillo comprobar que $I^2(0,T)$ es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(\Omega \times (0,T), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(0,T), dP \otimes dt; \mathbb{R})$.

Por otro lado, denotaremos por $\mathcal{E}(0,T)$ al conjunto de todos los procesos $\varphi(t)$ de la forma

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k-1} 1_{(t_{k-1},t_k]}(t),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ es una partición de $[0,T]$, y donde cada φ_{k-1} es una variable aleatoria real $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-medible y acotada.

Es evidente que $\mathcal{E}(0,T)$ es un subespacio vectorial de $I^2(0,T)$. Además $\mathcal{E}(0,T)$ es denso en $I^2(0,T)$.

Diremos que un proceso $\rho(t) \in \mathcal{E}(0,T)$ es elemental, si es de la forma

$$\rho(t) = \rho 1_{(\theta,T]},$$

con $\theta \in [0,T)$, y ρ una variable aleatoria real $\mathcal{F}_\theta$-medible y acotada.

Vamos ya a realizar la construcción de la integral estocástica en el sentido de Itô:

- Paso 1.

Si $\rho(t)$ es un proceso elemental definido por $\rho(t) = \rho 1_{(\theta,T]}$, se define la integral estocástica de $\rho(t)$ respecto de $W(t)$ como el proceso estocástico continuo determinado por

$$\int_0^t \rho(s)\,dW_s = \rho\left(W_{t\vee\theta} - W_\theta\right) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Se puede demostrar que el proceso estocástico $\displaystyle\int_0^t \rho(s)\,dW_s$, definido para $t \in [0,T]$, es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua de cuadrado integrable con valores en $\mathbb{R}$, y el proceso

$$\left(\int_0^t \rho(s)\,dW_s\right)^2 - \int_0^t \rho^2(s)\,ds$$

es también una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua.

- Paso 2.

Si $\varphi \in \mathcal{E}(0,T)$ viene dado por $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^m \rho_i(t)$, con los ρ_i procesos elementales, se define el proceso integral estocástica de φ respecto de $W(t)$ por la igualdad

$$\int_0^t \varphi(s)\,dW_s = \sum_{i=1}^m \int_0^t \rho_i(s)\,dW_s \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Entonces, si $\varphi \in \mathcal{E}(0,T)$ viene dado por

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_{k-1} 1_{(t_{k-1},t_k]}(t),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ es una partición de $[0,T]$, y donde cada φ_{k-1} es una variable aleatoria real $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-medible y acotada, entonces, de acuerdo con lo anterior, es inmediato que

$$\int_0^t \varphi(s)\,dW_s = \sum_{k=1}^n \varphi_{k-1}\left(W_{t_k\wedge t} - W_{t_{k-1}\wedge t}\right) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

- Paso 3.

Si denotamos para cada $\varphi \in \mathcal{E}(0,T)$ por $L(\varphi)$ al proceso

$$L(\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(s)\, dW_s \quad \forall\, t \in [0,T],$$

entonces L define una aplicación

$$L : \varphi \in \mathcal{E}(0,T) \to L(\varphi) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P;\ C^0[0,T]),$$

que es lineal continua si se considera sobre $\mathcal{E}(0,T)$ la norma de $I^2(0,T)$, y por consiguiente, debido a la densidad de $\mathcal{E}(0,T)$ en $I^2(0,T)$, L admite una única extensión, que seguiremos denotando L, a un operador lineal continuo definido sobre $I^2(0,T)$ con valores en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P;\ C^0[0,T])$. Por tanto, para cada $\varphi \in I^2(0,T)$, se define el proceso integral estocástica de φ respecto de $W(t)$ por la igualdad

$$\int_0^t \varphi(s)\, dW_s = L(\varphi)(t) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Se puede demostrar que si $\varphi \in I^2(0,T)$, el proceso estocástico $\displaystyle\int_0^t \varphi(s)\, dW_s$, definido para $t \in [0,T]$, es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua de cuadrado integrable con valores en $\mathbb{R}$, y además

$$\left(\int_0^t \varphi(s)\, dW_s\right)^2 - \int_0^t \varphi^2(s)\, ds$$

es también una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua. En particular entonces se verifica

$$E\left(\int_0^t \varphi(s)\, dW_s\right)^2 = E\int_0^t \varphi^2(s)\, ds. \tag{2.1}$$

- Paso 4.

Dado $\varphi \in \mathcal{L}^2(0,T)$, se define el proceso integral estocástica de φ con respecto a $W(t)$ por

$$\int_0^t \varphi(s)\, dW_s = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t \varphi_n(s)\, dW_s \quad \forall\, t \in [0,T],$$

donde los φ_n están definidos por $\varphi_n = \varphi 1_{[0,\tau_n]}$, siendo

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf\limits_{0 \le t \le T} \left\{ \int_0^t |\varphi(s)|^{\,2} \mathrm{d}s \ge n \right\} & \text{si } \omega \in \Omega \backslash \Omega_n, \\ T & \text{si } \omega \in \Omega_n, \end{cases}$$

donde para cada entero $n \geq 1$, hemos denotado $\Omega_n = \{\omega \in \Omega;\ \int_0^T |\varphi(s)|^2\, ds < n\}$. Se puede comprobar que $\varphi_n \in I^2(0,T)$ y que c.s. existe

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^t \varphi_n(s)\, dW_s$$

para todo $t \in [0,T]$. Por tanto, tiene sentido la definición dada de integral estocástica para $\varphi \in \mathcal{L}^2(0,T)$, obteniéndose como integral estocástica un proceso continuo y $\mathcal{F}_t$-adaptado que en general no es una $\mathcal{F}_t$-martingala, sino una $\mathcal{F}_t$-martingala local.

Para la integral estocástica en el sentido de Itô la regla de integración de una función compuesta difiere del caso determinista, lo que nos obliga a usar la denominada fórmula de Itô. Para la demostración puede verse, por ejemplo, Oksendal [51].

Denotamos por $\mathcal{L}^1(0,T)$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados, tales que $\displaystyle\int_0^T |\varphi(s)|\, ds < +\infty$ c.s.

Teorema 3 *Sean X_0 una variable aleatoria real $\mathcal{F}_0$-medible, $f \in \mathcal{L}^1(0,T)$ y $g \in \mathcal{L}^2(0,T)$. Denotemos por X_t al proceso estocástico continuo y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado definido por*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dW_s \quad \forall\, t \in [0,T],$$

donde la integral de f está efectuada trayectoria a trayectoria. Consideremos fijada una función $\Phi(t,x)$ tal que $\Phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$. Entonces $\Phi(t,X_t)$ es una nueva integral estocástica de la forma

$$\begin{aligned}\Phi(t,X_t) &= \Phi(0,X_0) + \textstyle\int_0^t \Phi_s(s,X_s)\, ds + \int_0^t \Phi_x(s,X_s) f(s)\, ds \\ &\quad + \textstyle\int_0^t \Phi_x(s,X_s) g(s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_{xx}(s,X_s) g^2(s)\, ds \quad \forall\, t \in [0,T].\end{aligned}$$

2.4.2 Extensión de la integral estocástica al caso multidimensional

Ahora supondremos que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua con valores en $\mathbb{R}^m$, de cuadrado integrable, tal que $W_0 = 0$, y siendo $W_t^i W_t^j - \delta_{ij} t$, $\{\mathcal{F}_t\}$-martingalas continuas con valores en $\mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq m$, donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Denotamos por A^* la traspuesta de una matriz A y por $\mathrm{tr}(A)$ la traza de A si es cuadrada. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son identificados con matrices columnas $n \times 1$. Denotamos por $\mathbb{R}^{n \times m}$ al espacio de las matrices $n \times m$. Fijemos $T > 0$.

Denotaremos por $I^2(0,T;\ \mathbb{R}^{n \times m})$ al conjunto de todos los elementos φ del espacio $L^2(\Omega \times (0,T), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(0,T), dP \otimes dt;\ \mathbb{R}^{n \times m})$ tales que, c.p.d. en $(0,T)$, $\varphi(t)$ sea $\mathcal{F}_t$-medible, y por $\mathcal{L}^2(0,T;\ \mathbb{R}^{n \times m})$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos

$\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados, tales que $\int_0^T \mathrm{tr}(\varphi(s)\varphi^*(s))\, ds < +\infty$ c.s.

Es inmediato que φ pertenece a $I^2(0,T;\ \mathbb{R}^{n\times m})$ si y sólo si las componentes φ_{ij} de φ pertenecen a $I^2(0,T)$, y φ pertenece a $\mathcal{L}^2(0,T;\ \mathbb{R}^{n\times m})$ si y sólo si sus componentes pertenecen a $\mathcal{L}^2(0,T)$.

Dado $\varphi \in \mathcal{L}^2(0,T;\ \mathbb{R}^{n\times m})$ se define el proceso integral estocástica de φ con respecto a $W(t)$ como el proceso $\Phi(t)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ con componente i-ésima dada por

$$\Phi_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \varphi_{ij}(s)\, dW_s^j \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Al proceso $\Phi(t)$ se le denotará por $\displaystyle\int_0^t \varphi(s)\, dW_s$ y es un proceso estocástico continuo y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado.

Denotemos por $\mathcal{L}^1(0,T;\ \mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados, tales que $\int_0^T |\varphi(s)|\, ds < +\infty$ c.s.

La fórmula de Itô puede ser extendida a este caso de la siguiente forma:

Teorema 4 *Sean X_0 una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}_0$-medible, $f \in \mathcal{L}^1(0,T;\ \mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$. Sea X_t el proceso estocástico continuo y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptado con valores en $\mathbb{R}^n$ definido por*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dW_s \quad \forall\, t \in [0,T],$$

donde la integral de f está efectuada trayectoria a trayectoria. Consideremos fijada una función $\Phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Entonces, $\forall\, t \in [0,T]$, se verifica

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, X_0) + \int_0^t \Phi_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t \Phi_x(s, X_s) \cdot f(s)\, ds + \\ &\quad + \int_0^t \Phi_x(s, X_s) \cdot g(s)\, dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t tr(\Phi_{xx}(s, X_s) g(s) g^*(s))\, ds \end{aligned}$$

donde $\Phi_x(s, X_s) \cdot f(s)$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y $\Phi_x(s, X_s) \cdot g(s)$ representa a $(\Phi_x(s, X_s))^* g(s)$.

Un caso particular de la fórmula de Itô es el resultado que a continuación establecemos, que será usado con frecuencia a lo largo de toda la Memoria:

Corolario 1 *Sean X_0 e Y_0 variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_0-$medibles, f, $h \in \mathcal{L}^1(0,T)$, g, $l \in \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Denotemos por X_t e Y_t a los procesos estocásticos continuos y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptados con valores en $\mathbb{R}$, $\forall t \in [0,T]$, definidos por*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) dW_s, \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t h(s) ds + \int_0^t l(s) dW_s. \end{aligned}$$

Entonces para todo $t \in [0,T]$ se satisface

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t (Y_sf(s) + X_sh(s))ds + \int_0^t (Y_sg(s) + X_sl(s))dW_s + \int_0^t g(s)\cdot l(s)ds.$$

Demostración. Basta aplicar la fórmula de Itô con $\tilde{X}_t = (X_t, Y_t)^*$ y $\Phi(x,y) = xy$.

■

2.4.3 Integración de procesos estocásticos con valores en un espacio de Hilbert separable

A continuación vamos a ver cómo el concepto de integral estocástica puede ser extendido al caso en el que tengamos un proceso estocástico que tome valores en un espacio de Hilbert separable.

Sea entonces $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, donde vamos a denotar por $|\cdot|$ su norma y por $(\cdot,\cdot)$ su producto escalar.

Ahora vamos a denotar por $\mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H})$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos $\varphi : [0,T]\times\Omega \to \mathcal{H}$ medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados, tales que $\displaystyle\int_0^T |\varphi(s)|^2\,ds < +\infty$ c.s.

Al igual que antes, queremos definir el concepto de integral estocástica para cualquier proceso de $\mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H})$. También lo vamos a realizar efectuando varios pasos, y definiendo previamente ciertos procesos con valores en $\mathcal{H}$ para los cuales definiremos la integral estocástica.

Más concretamente, denotaremos por $I^p(0,T;\mathcal{H})$, $p \geq 1$, al conjunto de todos los elementos φ del espacio $L^p(\Omega \times (0,T), \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(0,T), dP\otimes dt;\mathcal{H})$ tales que, c.p.d. en $(0,T)$, $\varphi(t)$ sea $\mathcal{F}_t$-medible. Entonces no es difícil comprobar que $I^p(0,T;\mathcal{H})$ es un subespacio vectorial cerrado de $L^p(\Omega \times (0,T), \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(0,T), dP\otimes dt;\mathcal{H})$.

Si $\varphi \in I^2(0,T;\mathcal{H})$, entonces para todo $h \in \mathcal{H}$ la variable aleatoria $(\varphi, h) \in I^2(0,T)$, por lo que podemos definir la integral $\int_0^t (\varphi(s),h)\,dW_s$. Además, teniendo en cuenta (2.1), se verifica que

$$E\left|\int_0^t (\varphi(s),h)\,dW_s\right|^2 = E\int_0^t |(\varphi(s),h)|^2\,ds,$$

por tanto, la aplicación $t \in [0,T] \to \int_0^t (\varphi(s),h)\,dW_s$ es lineal continua de $\mathcal{H}$ en $L^2(\Omega)$. Como consecuencia, podemos definir para cada $t \in [0,T]$ una variable aleatoria con valores en $\mathcal{H}$, que vamos a denotar por $\int_0^t \varphi(s)\,dW_s$, mediante la relación

$$\left(\int_0^t \varphi(s)dW_s, h\right) = \int_0^t (\varphi(s),h)\,dW_s \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Así tenemos definida la nueva variable aleatoria, salvo en conjuntos de probabilidad nula.

Se puede demostrar que si $\varphi \in I^2(0,T;\mathcal{H})$,el proceso estocástico $\displaystyle\int_0^t \varphi(s)\,dW_s$, definido para $t \in [0,T]$, es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua de cuadrado integrable con valores en $\mathcal{H}$, y además

$$E\left|\int_0^t \varphi(s)\,dW_s\right|^2 = E\int_0^t |\varphi(s)|^2\,ds.$$

Dado ahora $\varphi \in \mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H})$, se define el proceso integral estocástica de φ con respecto a $W(t)$ por

$$\int_0^t \varphi(s)\,dW_s = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t \varphi_n(s)\,dW_s \quad \forall t \in [0,T],$$

donde los φ_n están definidos por $\varphi_n = \varphi 1_{[0,\tau_n]}$, siendo

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf\limits_{0\le t\le T}\left\{\int_0^t |\varphi(s)|^{\ 2}\mathrm{d}s \ge n\right\} & \text{si } \omega \in \Omega\backslash\Omega_n, \\ T & \text{si } \omega \in \Omega_n, \end{cases}$$

donde para cada entero $n \ge 1$, hemos denotado $\Omega_n = \{\omega \in \Omega;\ \int_0^T |\varphi(s)|^2\,ds < n\}$. Se puede comprobar que $\varphi_n \in I^2(0,T;\mathcal{H})$ y que c.s. existe

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \varphi_n(s)\,dW_s$$

para todo $t \in [0,T]$.

Enunciamos a continuación un resultado que será de gran utilidad a lo largo de toda la Memoria, es el conocido como lema de Burkholder-Davis-Gundy.

Teorema 5 *Para todo $\varphi \in \mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H})$ se verifica la desigualdad*

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \varphi(s)\,dW_s\right|\right) \le 3E\left(\int_0^T |\varphi(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Puede consultarse, por ejemplo, en Pardoux [52]. ■

Como consecuencia de este teorema se verifican los dos resultados siguientes:

Corolario 2 *Si $\varphi \in \mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H})$ es tal que $E\left(\int_0^t |\varphi(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$, entonces el proceso estocástico $\int_0^t \varphi(s)\,dW_s$ es una $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala continua cn valores en $\mathcal{H}$.*

Corolario 3 *Si* $\varphi, u \in I^2(0,T;\mathcal{H})$ *siendo* $E\left(\sup_{0\le t\le T} |u(t)|^2\right) < +\infty$, *entonces el proceso estocástico* $\int_0^t (u(s),\varphi(s))\, dW_s$ *es una* $\{\mathcal{F}_t\}$*-martingala, por lo que en particular se verifica:*

$$E\int_0^t (u(s),\varphi(s))\, dW_s = 0 \quad \forall t \in [0,T].$$

Capítulo 3

Ecuaciones de evolución estocásticas: existencia y unicidad

Nuestro principal objetivo en este Capítulo es analizar la existencia y unicidad de solución para una clase de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de tipo parabólico con retardos en un contexto variacional. Los resultados que obtendremos vendrán a mejorar y completar los establecidos en Real [55] y [56] (ambos para la ecuación lineal), en Caraballo [7] (trabajo en el que se estudia la situación monótona no lineal con retardos variables, pero donde los operadores son acotados) y en Caraballo et al. [19], donde también se considera la situación no lineal con retardos variables, pero bajo hipótesis más fuertes que las aquí consideradas.

Queremos mencionar también que en el caso en el que no haya características hereditarias, nuestro problema ha sido estudiado ampliamente en Pardoux [52].

Pasemos a formular el problema. Sean V y H dos espacios de Hilbert reales y separables tales que $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$, donde las inyecciones se suponen continuas y densas. Vamos a denotar por $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ y $\|\cdot\|_*$ las normas en V, H y V^* respectivamente; por $((\cdot,\cdot))$ y $(\cdot,\cdot)$ los productos escalares en V y H respectivamente; y por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto de dualidad entre V^* y V.

Supongamos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completo con una filtración normal $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, y denotemos $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$, para todo $t \leq 0$. Consideremos un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ con valores reales.

Dados $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable, denotamos por $C(a, b; \mathcal{H})$ al espacio de Banach de todas las funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathcal{H}$ dotado con la norma del supremo. Escribimos $L^2(\Omega; C(a, b; \mathcal{H}))$ para denotar al espacio de todos los procesos $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, dP; C(a,b;\mathcal{H}))$ tales que $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \in [a,b]$.

Consideramos fijados dos números $T > 0$ y $h > 0$. Si $x \in C(-h,T;\mathcal{H})$, para cada $t \in [0,T]$ denotamos por $x_t \in C(-h,0;\mathcal{H})$ a la función definida como $x_t(s) = x(t+s)$, $-h \leq s \leq 0$. Además, si $y \in L^2(-h,T;\mathcal{H})$ denotamos por $y_t \in L^2(-h,0;\mathcal{H})$, p.c.t. $t \in (0,T)$, a la función definida como $y_t(s) = y(t+s)$, p.c.t. $s \in (-h,0)$.

Consideremos dada una familia de operadores no lineales $A(t,\cdot) : V \to V^*$, definida p.c.t. $t \in (0,T)$, verificando:

$(A.1)$ Medibilidad: $\forall v \in V$, la aplicación $t \in (0,T) \to A(t,v) \in V^*$ es medible Lebesgue.

$(A.2)$ Hemicontinuidad: la aplicación $\theta \in \mathbb{R} \to \langle A(t, v+\theta w), z\rangle \in \mathbb{R}$ es continua $\forall v,w,z \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(A.3)$ Acotación: existe $c > 0$ tal que $\|A(t,v)\|_* \leq c\|v\|$, $\forall v \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(A.4)$ Coercividad y monotonía: existen $\alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que, $\forall u,v \in V$ y p.c.t. $t \in (0,T)$, se verifica

$$-2\langle A(t,u) - A(t,v), u-v\rangle + \lambda|u-v|^2 \geq \alpha\|u-v\|^2.$$

Sean $F_1 : (0,T) \times C(-h,0;H) \to V^*$ y $F_2 : (0,T) \times C(-h,0;V) \to V^*$ dos familias de operadores no lineales definidas p.c.t. $t \in (0,T)$ y tales que:

$(F_1.1)$ La aplicación $t \in (0,T) \to F_1(t,\xi) \in V^*$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall \xi \in C(-h,0;H)$.

$(F_1.2)$ $F_1(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(F_1.3)$ Existe $C_{F_1} > 0$ tal que $\forall \xi, \eta \in C(-h,0;H)$, p.c.t. $t \in (0,T)$, se verifica

$$\|F_1(t,\xi) - F_1(t,\eta)\|_*^2 \leq C_{F_1}|\xi - \eta|^2_{C(-h,0;H)}.$$

$(F_2.1)$ La aplicación $t \in (0,T) \to F_2(t,\xi) \in V^*$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall \xi \in C(-h,0;V)$.

$(F_2.2)$ $F_2(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(F_2.3)$ Existe $C_{F_2} > 0$ tales que $\forall \xi, \eta \in C(-h,0;V)$, p.c.t. $t \in (0,T)$, se verifica

$$\|F_2(t,\xi) - F_2(t,\eta)\|_*^2 \leq C_{F_2}\|\xi - \eta\|^2_{C(-h,0;V)}.$$

(F_2.4) Existe $K_{F_2} > 0$ tal que $\forall x, y \in C(-h,T;V)$ y $\forall t \in [0,T]$

$$\int_0^t \|F_2(s,x_s) - F_2(s,y_s)\|_*^2 \, \mathrm{d}s \le K_{F_2} \int_{-h}^t \|x(s) - y(s)\|^2 \, \mathrm{d}s.$$

Sean también $G_0 : (0,T) \times C(-h,0;H) \to H$ y $G_1 : (0,T) \times C(-h,0;V) \to H$ dos familias de operadores no lineales definidas p.c.t. $t \in (0,T)$ tales que:

(G_0.1) La aplicación $t \in (0,T) \to G_0(t,\xi) \in H$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall \xi \in C(-h,0;H)$.

(G_0.2) $G_0(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

(G_0.3) Existe $C_{G_0} > 0$ tal que $\forall \xi, \eta \in C(-h,0;H)$ se verifica, p.c.t. $t \in (0,T)$,

$$|G_0(t,\xi) - G_0(t,\eta)|^2 \le C_{G_0} |\xi - \eta|^2_{C(-h,0;H)} .$$

(G_1.1) La aplicación $t \in (0,T) \to G_1(t,\xi) \in H$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall \xi \in C(-h,0;V)$.

(G_1.2) $G_1(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

(G_1.3) Existe $C_{G_1} > 0$ tales que $\forall \xi, \eta \in C(-h,0;V)$ se verifica, p.c.t. $t \in (0,T)$,

$$|G_1(t,\xi) - G_1(t,\eta)|^2 \le C_{G_1} \|\xi - \eta\|^2_{C(-h,0;V)} .$$

(G_1.4) Existe $K_{G_1} > 0$ tal que $\forall x, y \in C(-h,T;V)$ y $\forall t \in [0,T]$ se verifica

$$\int_0^t |G_1(s,x_s) - G_1(s,y_s)|^2 \, \mathrm{d}s \le K_{G_1} \int_{-h}^t \|x(s) - y(s)\|^2 \, \mathrm{d}s.$$

El objetivo principal en este Capítulo será establecer resultados de existencia y unicidad de solución del problema

$$\begin{cases} u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u(t) = \psi(0) + \int_0^t A(s,u(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (F_1(s,u_s) + F_2(s,u_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s) + G_1(s,u_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \ t \in [-h,0], \end{cases} \qquad (P)$$

donde supondremos que $f \in I^2(0,T;V^*)$, $g \in I^2(0,T;H)$ y $\psi \in I^2(-h,0;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$ están dados.

Nota 2 *Fácilmente se deduce a partir de (F_1.1)-(F_1.3) que si $u \in L^2(\Omega; C(-h,T;H))$, el proceso $F_1(t,u_t)$ pertenece a $I^2(0,T;V^*)$. También, gracias a (G_0.1)-(G_0.3), el proceso $G_0(t,u_t)$ pertenece a $I^2(0,T;H)$.*

Nota 3 *También a partir de* $(F_2.1)$-$(F_2.3)$ *podemos afirmar que para* $x \in C(-h,T;V)$, *la función* $F_2^x : (0,T) \to V^*$ *definida por* $F_2^x(t) = F_2(t,x_t)$ *p.c.t.* $t \in (0,T)$, *pertenece a* $L^2(0,T;V^*)$. *Por tanto, gracias ahora a* $(F_2.4)$, *la aplicación*

$$\Xi_2 : x \in C(-h,T;V) \to F_2^x \in L^2(0,T;V^*)$$

tiene una única extensión a una aplicación $\tilde{\Xi}_2$ *que es uniformemente continua de* $L^2(-h,T;V)$ *en* $L^2(0,T;V^*)$. *A partir de ahora, escribiremos también* $F_2(t,x_t) = \tilde{\Xi}_2(x)(t)$ *para cada* $x \in L^2(-h,T;V)$, *y, además, para cada* $x,y \in L^2(-h,T;V)$ *se verifica*

$$\int_0^t \|F_2(s,x_s) - F_2(s,y_s)\|_*^2 \, ds \leq K_{F_2} \int_{-h}^t \|x(s) - y(s)\|^2 \, ds \quad \forall t \in [0,T].$$

De manera análoga podemos definir $G_1(t,x_t) \in L^2(0,T;H)$ *para cada elemento* $x \in L^2(-h,T;V)$, *y dados* $x,y \in L^2(-h,T;V)$ *se verifica que*

$$\int_0^t |G_1(s,x_s) - G_1(s,y_s)|^2 \, ds \leq K_{G_1} \int_{-h}^t \|x(s) - y(s)\|^2 \, ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Por tanto, si $u \in I^2(-h,T;V)$, *el proceso* $F_2(t,u_t)$ *pertenece a* $I^2(0,T;V^*)$, *y el proceso* $G_1(t,u_t)$ *pertenece a* $I^2(0,T;H)$. *Además,* $\forall u,v \in I^2(-h,T;V)$ *se verifican las dos desigualdades siguientes:*

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|F_2(s,u_s) - F_2(s,v_s)\|_*^2 \, ds &\leq K_{F_2} \int_{-h}^t \|u(s) - v(s)\|^2 \, ds \quad \forall t \in [0,T], \ P-c.s., \\
\int_0^t |G_1(s,u_s) - G_1(s,v_s)|^2 \, ds &\leq K_{G_1} \int_{-h}^t \|u(s) - v(s)\|^2 \, ds \quad \forall t \in [0,T], \ P-c.s..
\end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata de las notas anteriores, todos los términos que aparecen en el problema (P) tienen sentido.

Aquí queremos observar también que van a demostrarse distintos resultados de existencia de solución del problema (P), donde quedará claro que la regularidad de la solución u dependerá de la regularidad que estemos permitiendo para el retardo ψ. También adelantar que en el Capítulo 5 se estudiarán, entre otros, resultados de estabilidad y estabilización para (P).

3.1 Un primer resultado de existencia y unicidad

El objetivo en esta Sección será demostrar un resultado de existencia y unicidad de solución de un problema muy ligado al problema (P), más concretamente, para el problema (P) pero suponiendo que las familias de operadores F_2 y G_1 son identicamente nulas. La utilidad de plantearse resultados para este nuevo problema se verá en la próxima Sección, donde para establecer el resultado fundamental de este Capítulo usaremos el que a continuación demostramos para el problema siguiente

$$\begin{cases} u \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u(t) = \psi(0) + \int_0^t A(s,u(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (F_1(s,u_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \;\; t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \;\; t \in [-h,0]. \end{cases} \tag{Q}$$

Como instrumentos fundamentales para el análisis de (Q), y posteriormente de (P), utilizaremos los dos teoremas siguientes debidos a E. Pardoux.

Teorema 6 *Si* $u \in I^2(0,T;V)$, $f \in I^2(0,T;V^*), g \in I^2(0,T;H), u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$ *y* $u(t) = u_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW(s)$, $\forall t \in [0,T]$, *entonces* $u \in L^2(\Omega; C(0,T;H))$ *y se satisfacen*

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &= |u_0|^2 + 2\int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle \, ds + 2\int_0^t (g(s),u(s))dW(s) + \int_0^t |g(s)|^2 \, ds, \\ 0 &= E\int_0^t (g(s),u(s))dW(s) \;\; \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Teorema 7 *Sean* f, g *y* u_0 *en las hipótesis del teorema anterior y* $A(t)$ *satisfaciendo* $(A.1) - (A.4)$. *Bajo estas hipótesis existe una y sólo una solución al problema*

$$\begin{cases} u \in I^2(0,T;V), \\ u(t) = u_0 + \int_0^t (A(s,u(s)) + f(s))ds + \int_0^t g(s)dW(s) \;\; \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

Vamos entonces a obtener un primer resultado relativo al problema (Q), similar a uno de los teoremas establecidos en Caraballo et al. [19], pero en el que se imponen, como hemos mencionado anteriormente, hipótesis más restrictivas. En concreto, en dicho teorema $F_1(t,\cdot)$ es una familia de operadores que toma valores en H y no en V^*, como ocurre en nuestra situación.

Teorema 8 *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(A.1)$-$(A.4)$, $(F_1.1)$-$(F_1.3)$ *y* $(G_0.1)$-$(G_0.3)$. *Entonces, para cada* $\psi \in L^2(\Omega; C(-h,0;H))$, $f \in I^2(0,T;V^*)$ *y* $g \in I^2(0,T;H)$, *existe una única solución del problema* (Q).

Demostración. Unicidad de solución: Consideremos dos soluciones $u, v \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H))$ del problema (Q). Entonces, aplicando el teorema 6 tenemos que

$$\begin{aligned}
|u(t)-v(t)|^2 &= 2\int_0^t \langle A(s,u(s))-A(s,v(s)),u(s)-v(s)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&\quad +2\int_0^t \langle F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s),u(s)-v(s)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&\quad +2\int_0^t (G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s),u(s)-v(s))\mathrm{d}W(s) \\
&\quad +\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Gracias a la condición $(A.4)$, para todo $t\in[0,T]$ tenemos

$$\begin{aligned}
&|u(t)-v(t)|^2+\alpha\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\
\le\ & 2\int_0^t \langle F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s),u(s)-v(s)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&+2\int_0^t (G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s),u(s)-v(s))\mathrm{d}W(s) \\
&+\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|^2\,\mathrm{d}s+\lambda\int_0^t |u(s)-v(s)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $t\in[0,T]$, se verifica

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\le s\le t}|u(s)-v(s)|^2\right]+\alpha E\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\
\le\ & 2|\lambda|\,E\int_0^t |u(s)-v(s)|^2\,\mathrm{d}s+2E\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|^2\,\mathrm{d}s \qquad (3.1)\\
&+4E\int_0^t \|F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s)\|_*\,\|u(s)-v(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&+4E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (G_0(\theta,u_\theta)-G_0(\theta,v_\theta),u(\theta)-v(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right].
\end{aligned}$$

Vamos a acotar los términos del lado derecho de (3.1):

$$\begin{aligned}
&4E\int_0^t \|F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s)\|_*\,\|u(s)-v(s)\|\,\mathrm{d}s \\
\le\ & E\int_0^t \left[\frac{8}{\alpha}\|F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s)\|_*^2+\frac{\alpha}{2}\|u(s)-v(s)\|^2\right]\mathrm{d}s \qquad (3.2)\\
\le\ & \frac{8}{\alpha}C_{F_1}E\int_0^t |u_s-v_s|^2_{C(-h,0;H)}\,\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{2}E\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\
=\ & \frac{8}{\alpha}C_{F_1}E\int_0^t \sup_{0\le r\le s}|u(r)-v(r)|^2\,\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{2}E\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, tenemos que

$$\begin{aligned}
& 4E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (G_0(\theta,u_\theta)-G_0(\theta,v_\theta),u(\theta)-v(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right] \\
\leq\ & 12E\left\{\sup_{0\leq s\leq t}|u(s)-v(s)|\left[\int_0^t |G_0(\theta,u_\theta)-G_0(\theta,v_\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
\leq\ & \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|u(s)-v(s)|^2\right]+72E\int_0^t |G_0(\theta,u_\theta)-G_0(\theta,v_\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta \qquad (3.3)\\
\leq\ & \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|u(s)-v(s)|^2\right]+72C_{G_0}E\int_0^t |u_\theta-v_\theta|^2_{C(-h,0;H)}\,\mathrm{d}\theta \\
\leq\ & \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|u(s)-v(s)|^2\right]+72C_{G_0}E\int_0^t \sup_{0\leq r\leq\theta}|u(r)-v(r)|^2\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

Por tanto, se sigue de (3.1)-(3.3) que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|u(s)-v(s)|^2\right]+\frac{\alpha}{2}E\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\
\leq\ & \left[2|\lambda|+\frac{8}{\alpha}C_{F_1}+74C_{G_0}\right]E\int_0^t \sup_{0\leq r\leq\theta}|u(r)-v(r)|^2\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

La unicidad queda entonces probada simplemente aplicando ahora el lema de Gronwall.

Existencia de solución: Vamos a denotar $u^0\equiv 0$, y a definir mediante recurrencia una sucesión de procesos $\{u^n\}_{n\geq 1}$ soluciones de los siguientes problemas

$$\begin{cases}
u^n\in I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H)) \\
u^n(t)=\psi(0)+\int_0^t(A(s,u^n(s))-\frac{\lambda}{2}u^n(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\lambda}{2}u^{n-1}(s)\mathrm{d}s \\
+\int_0^t(F_1(s,u_s^{n-1})+f(s))\mathrm{d}s+\int_0^t(G_0(s,u_s^{n-1})+g(s))\mathrm{d}W(s),\ t\in[0,T], \\
u^n(t)=\psi(t),\ t\in[-h,0].
\end{cases} \qquad (Q^n)$$

Puesto que $u^0\equiv 0\in L^2(\Omega;C(-h,T;H))$, por la nota 2, si $u^{n-1}\in L^2(\Omega;C(-h,T;H))$ se sigue que $F_1(t,u_t^{n-1})\in I^2(0,T;V^*)$, y $G_0(t,u_t^{n-1})\in I^2(0,T;H)$, por tanto, por el teorema 7, existe una única $u^n\in I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H))$ que es solución de (Q^n).

Vamos a probar ahora que $\{u^n\}_{n\geq 1}$ converge en $I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H))$ a un proceso u, solución del problema (Q).

Comenzamos aplicando la fórmula de Itô al proceso $u^{n+1}(t) - u^n(t)$, $n \geq 1$. Teniendo en cuenta la condición $(A.4)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \left|u^{n+1}(t) - u^n(t)\right|^2 + \alpha \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
\leq \; & \lambda \int_0^t (u^{n+1}(s) - u^n(s), u^n(s) - u^{n-1}(s))\mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t \left\langle F_1(s, u_s^n) - F_1(s, u_s^{n-1}), u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t (G_0(s, u_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}), u^{n+1}(s) - u^n(s))\mathrm{d}W(s) \\
& + \int_0^t \left|G_0(s, u_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

para todo $t \in [0, T]$. Como consecuencia, (3.4) implica que

$$\begin{aligned}
& E\left[\sup_{0\leq s\leq t} \left|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right|^2\right] + \alpha E \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
\leq \; & 2|\lambda| E \int_0^t \left|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right| \left|u^n(s) - u^{n-1}(s)\right| \mathrm{d}s \\
& +4E \int_0^t \left\|F_1(s, u_s^n) - F_1(s, u_s^{n-1})\right\|_* \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\| \mathrm{d}s \\
& +4E\left[\sup_{0\leq s\leq t} \left|\int_0^s (G_0(\theta, u_\theta^n) - G_0(\theta, u_\theta^{n-1}), u^{n+1}(\theta) - u^n(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right] \\
& +2E \int_0^t \left|G_0(s, u_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ahora bien, podemos deducir que

$$\begin{aligned}
& 2|\lambda| E \int_0^t \left|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right| \left|u^n(s) - u^{n-1}(s)\right| \mathrm{d}s \\
\leq \; & 2\beta|\lambda| E \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\| \left|u^n(s) - u^{n-1}(s)\right| \mathrm{d}s \\
\leq \; & \frac{\alpha}{3} E \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s + \frac{3\lambda^2\beta^2}{\alpha} E \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} \left|u^n(\theta) - u^{n-1}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $\beta > 0$ es una constante tal que $|v| \leq \beta \|v\|, \forall v \in V$. Por otra parte, gracias a $(F_1.3)$, podemos obtener

$$\begin{aligned}
& 4E \int_0^t \left\|F_1(s, u_s^n) - F_1(s, u_s^{n-1})\right\|_* \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\| \mathrm{d}s \\
\leq \; & E \int_0^t \left[\frac{12}{\alpha} \left\|F_1(s, u_s^n) - F_1(s, u_s^{n-1})\right\|_*^2 + \frac{\alpha}{3} \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2\right] \mathrm{d}s \\
\leq \; & \frac{12}{\alpha} C_{F_1} E \int_0^t \sup_{0\leq r\leq s} \left|u^n(r) - u^{n-1}(r)\right|^2 \mathrm{d}s + \frac{\alpha}{3} \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

De la misma manera que para la unicidad, podemos obtener a partir de la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy que

$$\begin{aligned} & 4E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (G_0(\theta,u_\theta^n)-G_0(\theta,u_\theta^{n-1}),u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right] \\ \leq\ & \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right|^2\right]+72C_{G_0}E\int_0^t \sup_{0\leq r\leq\theta}\left|u^n(r)-u^{n-1}(r)\right|^2\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por tanto, a partir de (3.5)-(3.8) obtenemos que, para todo $n\geq 1$ y todo $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right|^2\right]+\frac{\alpha}{3}E\int_0^t \left\|u^{n+1}(s)-u^n(s))\right\|^2\mathrm{d}s \\ \leq\ & \frac{k}{2}E\int_0^t \sup_{0\leq r\leq s}\left|u^n(r)-u^{n-1}(r)\right|^2\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde k es una constante positiva. Entonces si, $\forall n\geq 1$, $\forall t\in[0,T]$, definimos

$$\mathcal{X}^n(t)=\frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right|^2\right]+\frac{\alpha}{3}E\int_0^t \left\|u^{n+1}(s)-u^n(s))\right\|^2\mathrm{d}s,$$

de (3.9) inmediatamente concluimos que

$$\mathcal{X}^n(t)\leq k\int_0^t \mathcal{X}^{n-1}(s)\mathrm{d}s,\ \ \forall n\geq 1,\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.10}$$

Como consecuencia, si iteramos la desigualdad (3.10), obtenemos

$$\mathcal{X}^n(t)\leq \frac{k^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{X}^1(T),\quad \forall n\geq 1,\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.11}$$

Puesto que $u^{n+1}(t)=u^n(t)$, $\forall t\in[-h,0]$, (3.10) implica que $\{u^n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H))$. Por tanto, existe $u\in I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H))$ tal que

$$u^n\to u \text{ en } I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H)). \tag{3.12}$$

Teniendo en cuenta las condiciones $(F_1.3)$ y $(G_0.3)$ tenemos, en particular, que

$$\begin{aligned} F_1(\cdot,u^n(\cdot)) &\to F_1(\cdot,u(\cdot)) \text{ en } I^2(0,T;V^*), \\ G_0(\cdot,u^n(\cdot)) &\to G_0(\cdot,u(\cdot)) \text{ en } I^2(0,T;H), \end{aligned} \tag{3.13}$$

y, gracias a $(A.3)$, la sucesión $\{A(t,u^n(t))\}_{n\geq 1}$ está acotada en $I^2(0,T;V^*)$. Por tanto, existe una subsucesión $\{A(t,u^{n_k}(t))\}_{n_k\geq 1}\subset\{A(t,u^n(t))\}_{n\geq 1}$ y un proceso $\xi\in I^2(0,T;V^*)$ tal que

$$A(\cdot,u^{n_k}(\cdot))\rightharpoonup\xi(\cdot) \text{ en } I^2(0,T;V^*), \tag{3.14}$$

donde $\rightharpoonup$ denota la convergencia débil. Por tanto, podemos tomar límites en (Q^{n_k}), y obtener que u es solución de

$$\begin{cases} u \in I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u(t) = \psi(0) + \int_0^t \xi(s)\mathrm{d}s + \int_0^t (F_1(s,u_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \;\; t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \;\; t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Podemos simplificar la notación, ya que ξ está únicamente determinada por u, y, por tanto, toda la sucesión $\{A(t,u^n(t))\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a ξ en $I^2(0,T;V^*)$. Para terminar de demostrar que u es una solución del problema (Q), sólo necesitamos probar que $\xi(t) = A(t,u(t))$ en $(0,T)$. Evidentemente, de (3.12) y (3.14) se deduce que

$$\lim_{n\to+\infty} E\int_0^T \langle A(s,u^n(s)), u^n(s)\rangle \,\mathrm{d}s = E\int_0^T \langle \xi(s), u(s)\rangle \,\mathrm{d}s.$$

Además, gracias a $(A.4)$,

$$-2E\int_0^T \langle A(s,u^n(s)) - A(s,X(s)), u^n(s) - X(s)\rangle \,\mathrm{d}s + \lambda E\int_0^T |u^n(s) - X(s)|^2 \,\mathrm{d}s \geq 0,$$

para todo $X \in I^2(0,T;V)$ y todo $n \geq 1$. Tomando límites en la desigualdad anterior:

$$-2E\int_0^T \langle \xi(s) - A(s,X(s)), u(s) - X(s)\rangle \,\mathrm{d}s + \lambda E\int_0^T |u(s) - X(s)|^2 \,\mathrm{d}s \geq 0,$$

para todo $X \in I^2(0,T;V)$. Si ahora consideramos $X = u - \delta Z$, donde $Z \in I^2(0,T;V)$ y $\delta > 0$, entonces tenemos que

$$-2E\int_0^T \langle \xi(s) - A(s,u(s) - \delta Z(s)), \delta Z(s)\rangle \,\mathrm{d}s + \lambda\delta^2 E\int_0^T |Z(s)|^2 \,\mathrm{d}s \geq 0,$$

para todo $Z \in I^2(0,T;V)$ y todo $\delta > 0$. Dividiendo por δ en la expresión anterior y tomando límites cuando $\delta \to 0$, obtenemos a partir de $(A.2)$ que

$$E\int_0^T \langle \xi(s) - A(s,u(s)), Z(s)\rangle \,\mathrm{d}s \leq 0, \;\; \forall Z \in I^2(0,T;V),$$

y, por tanto, $A(s,u(s)) = \xi(s)$ en $(0,T)$. ■

Nota 4 *Supongamos que F_1 y G_0 verifican además de $(F_1.1)-(F_1.3)$ y $(G_0.1)-(G_0.3)$ las hipótesis siguientes:*

(F_1.4) *Existe* $K_{F_1} > 0$ *tal que* $\forall x,\ y \in C(-h,T;H)$ *y* $\forall t \in [0,T]$

$$\int_0^t \|F_1(s,x_s) - F_1(s,y_s)\|_*^2\, ds \leq K_{F_1} \int_{-h}^t |x(s) - y(s)|^2\, ds,$$

(G_0.4) *Existe* $K_{G_0} > 0$ *tal que* $\forall x, y \in C(-h,T;H)$ *y* $\forall t \in [0,T]$

$$\int_0^t |G_0(s,x_s) - G_0(s,y_s)|^2\, ds \leq K_{G_0} \int_{-h}^t |x(s) - y(s)|^2\, ds.$$

Gracias a (F_1.1) $-$ (F_1.3) *para* $x \in C(-h,T;H)$, *la función* $F_1^x : (0,T) \to H$ *definida por* $F_1^x(t) = F_1(t,x_t)$ *p.c.t.* $t \in (0,T)$, *pertenece a* $L^2(0,T;H)$. *Entonces, gracias a* (F_1.4), *la aplicación*

$$\Xi_1 : x \in C(-h,T;H) \to F_1^x \in L^2(0,T;H)$$

tiene una única extensión a una aplicación $\widetilde{\Xi}_1$ *que es uniformemente continua de* $L^2(-h,T;H)$ *en* $L^2(0,T;H)$. *A partir de ahora, escribiremos también* $F_1(t,x_t)$=$\widetilde{\Xi}_1(x)(t)$ *para cada* $x \in L^2(-h,T;H)$. *Además, si* $x \in L^2(-h,T;H)$, $\forall t \in [0,T]$ *se verifica*

$$\int_0^t \|F_1(s,x_s) - F_1(s,y_s)\|_*^2\, ds \leq K_{F_1} \int_{-h}^t |x(s) - y(s)|^2\, ds.$$

Siguiendo un argumento similar, podemos definir $G_0(t,x_t) \in L^2(0,T;H)$ *para cada* $x \in L^2(-h,T;H)$. *Además, para cada* $x, y \in L^2(-h,T;H)$ *y* $\forall t \in [0,T]$ *se verifica*

$$\int_0^t |G_0(s,x_s) - G_0(s,y_s)|^2\, ds \leq K_{G_0} \int_{-h}^t |x(s) - y(s)|^2\, ds.$$

Además, dados $u, \widetilde{u} \in I^2(-h,T;H)$, $\forall t \in [0,T]$, *se verifican*

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|F_1(s,x_s) - F_1(s,y_s)\|_*^2\, ds &\leq K_{F_1} \int_{-h}^t |x(s) - y(s)|^2\, ds,\\
\int_0^t |G_0(s,x_s) - G_0(s,y_s)|^2\, ds &\leq K_{G_0} \int_{-h}^t |x(s) - y(s)|^2\, ds.
\end{aligned}$$

Vamos a enunciar un teorema cuya demostración omitimos puesto que podríamos probarlo de manera muy similar al teorema 8.

Teorema 9 *Supongamos que se verifican las hipótesis* (A.1) $-$ (A.4), (F_1.1) $-$ (F_1.4) *y* (G_0.1) $-$ (G_0.4). *Entonces para* $f \in I^2(0,T;V^*)$, $g \in I^2(0,T;H)$, $\psi \in I^2(-h,0;H)$,

$u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; H)$ *dados, existe una única solución del problema siguiente:*

$$\begin{cases} u \in I^2(-h,T;H) \cap I^2(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)), \\ u(t) = u_0 + \int_0^t A(s,u(s))ds + \int_0^t (F_1(s,u_s) + f(s))ds \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s) + g(s))dW(s), \ \ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \ \ p.c.t. \ t \in (-h,0). \end{cases}$$

Nota 5 *En el teorema anterior todos los términos que aparecen tienen sentido. Gracias a* $(F_1.4)$ *y* $(G_0.4)$ *la hipótesis exigida para el retardo ha sido* $\psi \in I^2(-h,0;H)$ *en vez de* $\psi \in L^2(\Omega; C(-h,0;H))$ *tal y como se hizo en el teorema 8.*

3.2 Existencia y unicidad de solución de (P)

En esta Sección consideramos el problema (P) completo. Comenzamos demostrando el siguiente resultado:

Teorema 10 *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(A.1)$-$(A.4)$, $(F_1.1)$-$(F_1.3)$, $(F_2.1)$-$(F_2.4)$, $(G_0.1)$-$(G_0.3)$ *y* $(G_1.1)$-$(G_1.4)$. *Supongamos que además se verifican las tres hipótesis adicionales:*

$(A.5)$ Existe $\widehat{\lambda} > 0$ tal que para todo $x, y \in L^2(-h,T;V)$ y para todo $t \in [0,T]$ se verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^t \|x(s) - y(s)\|^2 \, \mathrm{ds} + \int_0^t |G_1(s,x_s) - G_1(s,y_s)|^2 \, \mathrm{ds} \\ \leq \ & -2 \int_0^t \langle A(s,x(s)) - A(s,y(s)), x(s) - y(s) \rangle \, \mathrm{ds} + \lambda \int_0^t |x(s) - y(s)|^2 \, \mathrm{ds} \\ & + \widehat{\lambda} \int_{-h}^0 \|x(s) - y(s)\|^2 \, \mathrm{ds} - 2 \int_0^t \langle F_2(s,x_s) - F_2(s,y_s), x(s) - y(s) \rangle \, \mathrm{ds}. \end{aligned}$$

$(F_1.5)$ Existe $C^{F_1} > 0$ tal que para todo $X, Y \in L^2(\Omega; C(-h,T;H))$ tales que $X \equiv Y$ sobre $[-h,0]$, y todo $t \in [0,T]$, se tiene

$$E \int_0^t \|F_1(s,X_s) - F_1(s,Y_s)\|_*^2 \, \mathrm{ds} \leq C^{F_1} \int_0^t \sup_{0 \leq \theta \leq s} E\, |X(\theta) - Y(\theta)|^2 \, \mathrm{ds}.$$

$(G_0.5)$ Existe $C^{G_0} > 0$ tal que para todo $X, Y \in L^2(\Omega; C(-h,T;H))$ tales que $X \equiv Y$ sobre $[-h,0]$, y todo $t \in [0,T]$, se verifica

$$E \int_0^t |G_0(s,X_s) - G_0(s,Y_s)|^2 \, \mathrm{ds} \leq C^{G_0} \int_0^t \sup_{0 \leq \theta \leq s} E\, |X(\theta) - Y(\theta)|^2 \, \mathrm{ds}.$$

Entonces, para cada $\psi \in I^2(-h,0;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$, $f \in I^2(0,T;V^*)$ y $g \in I^2(0,T;H)$, existe una única solución u del problema (P).

Demostración. Unicidad de solución: Sean u, v dos soluciones de (P). Aplicando el teorema 6 y usando $(A.5)$, obtenemos que para cada $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
& |u(t)-v(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \\
\leq\ & \lambda \int_0^t |u(s)-v(s)|^2 \, \mathrm{d}s + 2\int_0^t \langle F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s), u(s)-v(s)\rangle \, \mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t (G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s), G_1(s,u_s)-G_1(s,v_s)) \, \mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t (G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s), u(s)-v(s)) \, \mathrm{d}W(s) \\
& +2\int_0^t (G_1(s,u_s)-G_1(s,v_s), u(s)-v(s)) \, \mathrm{d}W(s) \\
& +\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|^2 \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Por tanto, para todo $t \in [0,T]$, se verifica

$$
\begin{aligned}
& E\,|u(t)-v(t)|^2 + \alpha E \int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \\
\leq\ & \lambda E \int_0^t |u(s)-v(s)|^2 \, \mathrm{d}s + E\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|^2 \, \mathrm{d}s \qquad (3.15)\\
& +2E\int_0^t (G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s), G_1(s,u_s)-G_1(s,v_s)) \, \mathrm{d}s \\
& +2E\int_0^t \langle F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s), u(s)-v(s)\rangle \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Por un lado, de $(F_1.5)$ se deduce que

$$
\begin{aligned}
& 2E\int_0^t \langle F_1(s,u_s)-F_1(s,v_s), u(s)-v(s)\rangle \, \mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{3}{\alpha} C^{F_1} \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,|u(\theta)-v(\theta)|^2 \, \mathrm{d}s \qquad (3.16)\\
& +\frac{\alpha}{3}\int_0^t E\,\|u(s)-v(s)\|^2 \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Por otro, de $(G_1.4)$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
& 2E\int_0^t (G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s), G_1(s,u_s)-G_1(s,v_s)) \, \mathrm{d}s \\
\leq\ & 2E\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|\,|G_1(s,u_s)-G_1(s,v_s)| \, \mathrm{d}s \qquad (3.17)\\
\leq\ & \frac{3K_{G_1}}{\alpha} E\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|^2 \, \mathrm{d}s + \frac{\alpha}{3} E\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2 \, \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

y, gracias a la condición $(G_0.5)$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3K_{G_1}}{\alpha}+1\right)E\int_0^t |G_0(s,u_s)-G_0(s,v_s)|^2\,\mathrm{d}s \\ \leq\ &\left(\frac{3K_{G_1}}{\alpha}+1\right)C^{G_0}\int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,|u(\theta)-v(\theta)|^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.18}$$

A partir de (3.15)-(3.18), se deduce que para todo $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq s\leq t} E\,|u(s)-v(s)|^2+\frac{\alpha}{3}E\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\ \leq\ & 2\left(|\lambda|+\left(\frac{3K_{G_1}}{\alpha}+1\right)C^{G_0}+\frac{3}{\alpha}C^{F_1}\right)\int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,|u(\theta)-v(\theta)|^2\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

y aplicando el lema de Gronwall concluimos la unicidad.

Existencia de solución: Vamos a tratar la existencia en dos etapas.

Etapa 1. En este primer paso suponemos que los operadores $F_1\equiv G_0\equiv 0$ y que $\lambda=0$. Tenemos entonces que probar la existencia de solución del problema

$$\begin{cases} u\in I^2(-h,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H)),\\ u(t)=\psi(0)+\int_0^t A(s,u(s))\mathrm{d}s+\int_0^t(F_2(s,u_s)+f(s))\mathrm{d}s\\ +\int_0^t(G_1(s,u_s)+g(s))\mathrm{d}W(s),\ \ t\in[0,T],\\ u(t)=\psi(t),\ \ t\in[-h,0].\end{cases} \tag{$\widehat{P}$}$$

Para ello usamos un esquema de Galerkin. Sea $\{v_i\}_{i\geq 1}\subset V$ una base hilbertiana de H tal que el subespacio vectorial generado por todos los v_i sea denso en V. Al subespacio de V generado por $v_1,\dots,v_m$ lo denotamos por V_m. Consideramos dos proyecciones: por un lado, el operador de proyección de H en V_m, denotado por $P_m\in\mathcal{L}(H;V_m)$; por otro lado, el operador de proyección de V en V_m, denotado por $\widetilde{P}_m\in\mathcal{L}(V;V_m)$. Definimos $u^m(t)=\sum\limits_{i=1}^m \gamma^{mi}(t)v_i$ donde

$$\begin{cases} u^m\in I^2(-h,T;V_m)\cap L^2(\Omega;C(0,T;V_m)),\\ (u^m(t),v)=(P_m\psi(0),v)+\int_0^t\langle A(s,u^m(s))+F_2(s,u^m_s)+f(s),v\rangle\,\mathrm{d}s\\ +\int_0^t(G_1(s,u^m_s)+g(s),v)\mathrm{d}W(s),\ \ t\in[0,T],\ \forall v\in V_m,\\ u^m(t)=\widetilde{P}_m\psi(t),\ \ t\in(-h,0).\end{cases} \tag{$\widehat{P}^m$}$$

Tenemos garantizada la existencia y unicidad de solución al problema $(\widehat{P}^m)$ gracias al teorema 9, ya que en este caso tenemos que $V=H=V^*=V_m$.

Observemos que $u^m=\widetilde{P}_m\psi$ en $(-h,0)$, y como consecuencia, para cada $m\geq 1$, $\|u^m(t)\|\leq\|\psi(t)\|$ p.c.t. $t\in(-h,0)$, y la sucesión u^m converge a ψ en $I^2(-h,0;V)$.

Si ahora aplicamos la fórmula de Itô a $u^m(t)$, tenemos en cuenta que $A(t,0)=0$ p.c.t. $t\in(0,T)$, y las hipótesis $(A.5)$, $(F_2.2)$ y $(G_1.2)$, entonces, teniendo en cuenta que hemos supuesto en esta primera etapa $\lambda=0$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&|u^m(t)|^2+\alpha\int_0^t \|u^m(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\
\le\;& |P_m\psi(0)|^2+2\int_0^t \langle f(s),u^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s+\int_0^t |g(s)|^2\,\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t (G_1(s,u_s^m),g(s))\,\mathrm{d}s+\widehat{\lambda}\int_{-h}^0 \left\|\widetilde{P}_m\psi(s)\right\|^2\,\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t (G_1(s,u_s^m)+g(s),u^m(s))\,\mathrm{d}W(s),
\end{aligned}$$

para todo $t\in[0,T]$, y por tanto,

$$\begin{aligned}
&E\,|u^m(t)|^2+\alpha E\int_0^t \|u^m(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\
\le\;& E\,|\psi(0)|^2+2E\int_0^t \langle f(s),u^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s+E\int_0^t |g(s)|^2\,\mathrm{d}s\\
&+\widehat{\lambda}E\int_{-h}^0 \|\psi(s)\|^2\,\mathrm{d}s+2E\int_0^t (G_1(s,u_s^m),g(s))\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{3.19}$$

para todo $t\in[0,T]$. Como

$$2E\int_0^t \langle f(s),u^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s\le\frac{3}{\alpha}E\int_0^t \|f(s)\|_*^2\,\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{3}E\int_0^t \|u^m(s)\|^2\,\mathrm{d}s,$$

y, gracias a $(G_1.2)$ y $(G_1.4)$,

$$2E\int_0^t (G_1(s,u_s^m),g(s))\,\mathrm{d}s\le\frac{3K_{G_1}}{\alpha}E\int_0^t |g(s)|^2\,\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{3}E\int_{-h}^t \|u^m(s)\|^2\,\mathrm{d}s,$$

entonces, a partir de (3.19) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&E\,|u^m(t)|^2+\frac{\alpha}{3}E\int_0^t \|u^m(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\
\le\;& E\,|\psi(0)|^2+\frac{3}{\alpha}E\int_0^t \|f(s)\|_*^2\,\mathrm{d}s\\
&+\left(\widehat{\lambda}+\frac{\alpha}{3}\right)E\int_{-h}^0 \|\psi(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\
&+\left(1+\frac{3K_{G_1}}{\alpha}\right)E\int_0^t |g(s)|^2\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

para todo $t\in[0,T]$, y, por tanto, la sucesión de procesos $\{u^m\}_{m\ge1}$ está acotada en $I^2(-h,T;V)$, y la sucesión $\{u^m(T)\}_{m\ge1}$ está acotada en $L^2(\Omega;H)$. Además, a partir de $(A.3)$, $(F_2.2)$, $(F_2.4)$, $(G_1.2)$ y $(G_1.4)$, podemos asegurar que

$$\begin{aligned}
&\{A(\cdot,u^m(\cdot))\}_{m\geq 1} \text{ está acotada en } I^2(0,T;V^*),\\
&\{F_2(\cdot,u^m_\cdot)\}_{m\geq 1} \text{ está acotada en } I^2(0,T;V^*),\\
&\{G_1(\cdot,u^m_\cdot)\}_{m\geq 1} \text{ está acotada en } I^2(0,T;H).
\end{aligned}$$

Como consecuencia, existe una subsucesión $\{u^{m_k}\}$ de $\{u^m\}$, una variable aleatoria $\xi \in L^2(\Omega;H)$ y cuatro procesos $u \in I^2(-h,T;V)$, $\eta \in I^2(0,T;V^*)$, $\sigma \in I^2(0,T;V^*)$, y $\zeta \in I^2(0,T;H)$ tales que

$$\begin{aligned}
u^{m_k}(T) &\rightharpoonup \xi \text{ en } L^2(\Omega;H),\\
u^{m_k}(\cdot) &\rightharpoonup u \text{ en } I^2(-h,T;V),\\
A(\cdot,u^{m_k}(\cdot)) &\rightharpoonup \eta \text{ en } I^2(0,T;V^*),\\
F_2(\cdot,u^{m_k}_\cdot) &\rightharpoonup \sigma \text{ en } I^2(0,T;V^*),\\
G_1(\cdot,u^{m_k}_\cdot) &\rightharpoonup \zeta \text{ en } I^2(0,T;H).
\end{aligned}$$

Sea ahora χ una función absolutamente continua sobre sobre $[0,T]$ tal que $\chi' \in L^2(0,T)$ y $\chi(T) = 0$. Fijemos m_j y sea $v \in V_{m_j}$. Aplicando entonces la fórmula de Itô a $(u^{m_k}(t),v)\chi(t)$ con $1 \leq m_j \leq m_k$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= (P_{m_k}\psi(0),v)\chi(0) + \int_0^T \langle A(s,u^{m_k}(s)) + F_2(s,u^{m_k}_s) + f(s),v\rangle\,\chi(s)\,\mathrm{d}s\\
&\quad + \int_0^T (G_1(s,u^{m_k}_s)+g(s),v)\chi(s)\,\mathrm{d}W(s) + \int_0^T (u^{m_k}(s),v)\chi'(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Si tomamos límites en (3.20) cuando $m_k \to +\infty$, tenemos en cuenta que m_j es arbitrario y que $\bigcup\limits_{m\geq 1} V_m$ es denso en V, podemos asegurar que, $\forall v \in V$,

$$\begin{aligned}
0 &= (\psi(0),v)\chi(0) + \int_0^T \langle \eta(s)+\sigma(s)+f(s),v\rangle\,\chi(s)\,\mathrm{d}s \qquad (3.21)\\
&\quad + \int_0^T (\zeta(s)+g(s),v)\chi(s)\,\mathrm{d}W(s) + \int_0^T (u(s),v)\chi'(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Como consecuencia, si fijamos $t \in (0,T)$, y denotamos para cada $n \geq 1$ tal que $t + \frac{1}{2n} \leq T$ por χ^n a la función

$$\chi^n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq s \leq t - \frac{1}{2n},\\ \frac{1}{2} + n(t-s) & \text{si } t - \frac{1}{2n} \leq s \leq t + \frac{1}{2n},\\ 0 & \text{si } t + \frac{1}{2n} \leq s \leq T, \end{cases}$$

entonces podemos deducir de (3.21) que, $\forall v \in V$,

$$n\int_{t-\frac{1}{2n}}^{t+\frac{1}{2n}} (u(s),v)\,ds = (\psi(0),v) + \int_0^T \langle \eta(s)+\sigma(s)+f(s),v\rangle\,\chi^n(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^T (\zeta(s)+g(s),v)\chi^n(s)\,\mathrm{d}W(s).$$

Si ahora tomamos límites en la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned}&(u(t),v) \\ = \;&(\psi(0),v) + \int_0^t \langle \eta(s)+\sigma(s)+f(s),v\rangle\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\zeta(s)+g(s),v)\,\mathrm{d}W(s),\end{aligned} \tag{3.22}$$

p.c.t. $t \in (0,T)$, $\forall v \in V$. Teniendo en cuenta ahora la separabilidad de V, (3.22) implica p.c.t. $t \in (0,T)$ que

$$u(t) = \psi(0) + \int_0^t (\eta(s)+\sigma(s)+f(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\zeta(s)+g(s))\,\mathrm{d}W(s) \text{ en } V^*. \tag{3.23}$$

Por tanto, u es p.c.t. $t \in [0,T]$ igual a un proceso de $L^2(\Omega; C(0,T;H))$ verificando (3.23) para todo $t \in [0,T]$. Vamos a seguir denotando por u a tal proceso, luego entonces u satisface

$$\begin{cases} u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)), \\ u(t) = \psi(0) + \int_0^t (\eta(s)+\sigma(s)+f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (\zeta(s)+g(s))\,\mathrm{d}W(s), \; t \in [0,T], \\ u(T) = \xi, \\ u(t) = \psi(t), \; t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Para acabar entonces con la demostración de esta primera etapa basta con probar que $\eta(s)+\sigma(s) = A(s,u(s)) + F_2(s,u_s)$ y $\zeta(s) = G_1(s,u_s)$. Para ello consideremos $X \in I^2(-h,T;V)$ tal que $X = \psi$ en $(-h,0)$, y denotemos

$$\begin{aligned} x^{m_k} = \;& 2E\int_0^T \langle A(t,u^{m_k}(t)) - A(t,X(t)) + F_2(t,u_t^{m_k}) - F_2(t,X_t), u^{m_k}(t) - X(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\ &+\alpha E\int_0^T \|u^{m_k}(t) - X(t)\|^2\,\mathrm{d}t - \widehat{\lambda} E\int_{-h}^0 \left\|\psi(t) - \widetilde{P}_{m_k}\psi(t)\right\|^2\mathrm{d}t \\ &+E\int_0^T |G_1(t,u_t^{m_k}) - G_1(t,X_t)|^2\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{m_k} = \;& 2E\int_0^T \langle A(t,u^{m_k}(t)) + F_2(t,u_t^{m_k}), u^{m_k}(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\ &+E\int_0^T |G_1(t,u_t^{m_k})|^2\,\mathrm{d}t + \alpha E\int_0^T \|u^{m_k}(t)\|^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Entonces, gracias a la hipótesis $(A.5)$ escrita para $\lambda = 0$, tenemos que $x^{m_k} \leq 0$. Además, se verifica

$$\begin{aligned} x^{m_k} - y^{m_k} &= 2E\int_0^T \langle -A(t,X(t)) - F_2(t,X_t), u^{m_k}(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \alpha E\int_0^T \|X(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \\ &\quad -2E\int_0^T \langle A(t,u^{m_k}(t)) - A(t,X(t)) + F_2(t,u_t^{m_k}) - F_2(t,X_t), X(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\quad +E\int_0^T |G_1(t,X_t)|^2 \,\mathrm{d}t - 2E\int_0^T (G_1(t,u_t^{m_k}), G_1(t,X_t)) \,\mathrm{d}t \\ &\quad -2\alpha E\int_0^T ((u^{m_k}(t), X(t)))\,\mathrm{d}t - \widehat{\lambda} E\int_{-h}^0 \left\|\psi(t) - \widetilde{P}_{m_k}\psi(t)\right\|^2 \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} (x^{m_k} - y^{m_k}) &= 2E\int_0^T \langle -A(t,X(t)) - F_2(t,X_t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\quad +2E\int_0^T \langle \eta(t) - A(t,X(t)) + \sigma(t) - F_2(t,X_t), -X(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\quad +E\int_0^T |G_1(t,X_t)|^2 \,\mathrm{d}t - 2E\int_0^T (\zeta(t), G_1(t,X_t)) \,\mathrm{d}t \\ &\quad -2\alpha E\int_0^T ((u(t), X(t)))\,\mathrm{d}t + \alpha E\int_0^T \|X(t)\|^2 \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Si ahora aplicamos la fórmula de Itô a $u^{m_k}(t)$ sobre $[0,T]$, entonces

$$\begin{aligned} E\,|u^{m_k}(T)|^2 &\leq E\,|\psi(0)|^2 + E\int_0^T |G_1(t,u_t^{m_k}) + g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \\ &\quad +2E\int_0^T \langle A(t,u^{m_k}(t)) + F_2(t,u_t^{m_k}) + f(t), u^{m_k}(t)\rangle \,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

y así se verifica que

$$\begin{aligned} y^{m_k} &\geq E\,|u^{m_k}(T)|^2 - E\,|\psi(0)|^2 - E\int_0^T |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \alpha E\int_0^T \|u^{m_k}(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \\ &\quad -2E\int_0^T (G_1(t,u_t^{m_k}), g(t))\,\mathrm{d}t - 2E\int_0^T \langle f(t), u^{m_k}(t)\rangle \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Tomando límites en la expresión anterior cuando $k \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to+\infty} y^{m_k} &\geq E\,|u(T)|^2 - E\,|\psi(0)|^2 - E\int_0^T |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \alpha E\int_0^T \|u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \\ &\quad -2E\int_0^T (\zeta(t), g(t))\,\mathrm{d}t - 2E\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Si ahora aplicamos la fórmula de Itô a $u(t)$ sobre $[0,T]$, tenemos que

$$E\,|u(T)|^2 = E\,|\psi(0)|^2 + E\int_0^T |\zeta(t) + g(t)|^2 \,\mathrm{d}t + 2E\int_0^T \langle \eta(t) + \sigma(t) + f(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t,$$

y entonces, a partir de (3.25)

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to+\infty} y^{m_k} &\geq 2E\int_0^T \langle \eta(t)+\sigma(t),u(t)\rangle\, \mathrm{d}t \\ &+E\int_0^T |\zeta(t)|^2\, \mathrm{d}t+\alpha E\int_0^T \|u(t)\|^2\, \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Teniendo en cuenta (3.24) y (3.26) tenemos

$$\begin{aligned}0 &\geq \liminf_{k\to+\infty} x^{m_k} \geq 2E\int_0^T \langle \eta(t)-A(t,X(t))+\sigma(t)-F_2(t,X_t),u(t)-X(t)\rangle\, \mathrm{d}t \\ &+E\int_0^T |\zeta(t)-G_1(t,X_t)|^2\, \mathrm{d}t+\alpha E\int_0^T \|u(t)-X(t)\|^2\, \mathrm{d}t. \end{aligned}\tag{3.27}$$

Consideremos ahora $X(t)=u(t)$ en (3.27). Entonces, se sigue inmediatamente que $\zeta(t)=G_1(t,u_t)$, $t\in[0,T]$. Ahora, pongamos $X(t)=u(t)-\delta Z(t)$, donde $\delta>0$ y $Z\in I^2(-h,T;V)$ es un proceso tal que $Z=0$ en $(-h,0)$. Entonces, a partir de (3.27) tenemos que

$$\begin{aligned}0 &\geq 2E\int_0^T \langle \eta(t)-A(t,u(t)-\delta Z(t))+\sigma(t)-F_2(t,u_t-\delta Z_t),\delta Z(t)\rangle\, \mathrm{d}t \\ &+E\int_0^T |G_1(t,u_t)-G_1(t,u_t-\delta Z_t)|^2\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dividiendo entre δ en la expresión anterior y haciendo $\delta\to 0$, conseguimos obtener a partir de $(A.2)$, $(F_2.2)$ y $(F_2.4)$ que

$$2E\int_0^T \langle \eta(t)-A(t,u(t))+\sigma(t)-F_2(t,u_t),Z(t)\rangle\, \mathrm{d}t\leq 0,$$

y, puesto que $Z\in I^2(0,T;V)$ es arbitrario, obtenemos que $\eta(t)+\sigma(t)=A(t,u(t))+F_2(t,u_t)$ en $[0,T]$.

Etapa 2. Ahora vamos a considerar el problema (P) completo, bajo todas las condiciones en las que ha sido enunciado este teorema. Sea $u^0\equiv 0$, y definamos por recurrencia la sucesión de procesos $\{u^n\}_{n\geq 1}$ tales que

$$\begin{cases} u^n\in I^2(-h,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H)) \\ u^n(t)=\psi(0)+\int_0^t(A(s,u^n(s))-\frac{\lambda}{2}u^n(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{2}\int_0^t u^{n-1}(s)\mathrm{d}s \\ +\int_0^t(F_1(s,u_s^{n-1})+F_2(s,u_s^n)+f(s))\mathrm{d}s \\ +\int_0^t(G_0(s,u_s^{n-1})+G_1(s,u_s^n)+g(s))\mathrm{d}W(s),\ t\in[0,T], \\ u^n(t)=\psi(t),\ t\in[-h,0]. \end{cases} \tag{P^n}$$

Si $u^{n-1}\in L^2(\Omega;C(-h,T;H))$, entonces $F_1(t,u_t^{n-1})\in I^2(0,T;V^*)$, y $G_0(t,u_t^{n-1})\in I^2(0,T;H)$. Además se verifica fácilmente que la familia de operadores definida por

$\widetilde{A}(t,v) = A(t,v) - \dfrac{\lambda}{2}v \ \forall v \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$, verifica las hipótesis $(A.1) - (A.5)$ siendo $\lambda = 0$. Por tanto, podemos tener en cuenta la Etapa 1 para asegurar que el problema (P^n) tiene una única solución.

Vamos ahora a demostrar de la misma manera que se hizo en el teorema 8 que $\{u^n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H))$, y así será convergente a un proceso $u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H))$, que probaremos es la única solución de (P). Para ello, vamos a aplicar en primer lugar la igualdad de la energía al proceso $u^{n+1}(t) - u^n(t)$, $t \geq 0$, $n \geq 1$. Teniendo presente $(A.5)$ obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
&\left|u^{n+1}(t) - u^n(t)\right|^2 + \alpha \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
\leq\ & \lambda \int_0^t (u^{n+1}(s) - u^n(s), u^n(s) - u^{n-1}(s))\, \mathrm{d}s \\
&+2 \int_0^t \left\langle F_1(s,u_s^n) - F_1(s,u_s^{n-1}), u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
&+2 \int_0^t (G_0(s,u_s^n) - G_0(s,u_s^{n-1}), G_1(s,u_s^{n+1}) - G_1(s,u_s^n))\, \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \left|G_0(s,u_s^n) - G_0(s,u_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s \qquad (3.28)\\
&+2 \int_0^t (G_0(s,u_s^n) - G_0(s,u_s^{n-1}), u^{n+1}(s) - u^n(s))\, \mathrm{d}W(s) \\
&+2 \int_0^t (G_1(s,u_s^{n+1}) - G_1(s,u_s^n), u^{n+1}(s) - u^n(s))\, \mathrm{d}W(s),
\end{aligned}$$

que junto con las condiciones $(F_1.5)$, $(G_0.5)$ y $(G_1.4)$ implica que

$$\begin{aligned}
&E\left|u^{n+1}(t) - u^n(t)\right|^2 + \alpha E \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{3\alpha}{4} E \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s + \frac{4\lambda^2\beta^2}{\alpha} \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\left|u^n(\theta) - u^{n-1}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}s \\
&+ \frac{4}{\alpha} C^{F_1} \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\left|u^n(\theta) - u^{n-1}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}s \qquad (3.29)\\
&+ \left(\frac{4K_{G_1}^2}{\alpha} + 1\right) C^{G_0} \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\left|u^n(\theta) - u^{n-1}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

donde $\beta > 0$ es una constante tal que $|v| \leq \beta \|v\| \ \forall v \in V$. Por tanto, (3.29) implica que

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq s\leq t} E\left|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right|^2 + \frac{\alpha}{4} E \int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
\leq\ & k \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\left|u^n(\theta) - u^{n-1}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}s, \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$ y todo $n \geq 1$, donde fácilmente se puede ver $k = \frac{8\lambda^2\beta^2}{\alpha} + \frac{8}{\alpha}C^{F_1} + 2\left(\frac{4K_{G_1}^2}{\alpha} + 1\right)C^{G_0}$. Si ahora denotamos, $\forall n \geq 1, \forall t \in [0, T]$,

$$\rho^n(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} E\left|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right|^2 + \frac{\alpha}{4}E\int_0^t \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s,$$

entonces, a partir de (3.30), podemos demostrar que

$$\rho^n(t) \leq \frac{(kT)^{n-1}}{(n-1)!}\rho^1(T), \ \forall n \geq 1, \forall t \in [0, T],$$

y entonces, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq s \leq T} E\left|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right|^2 + \frac{\alpha}{4}E\int_0^T \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\ \leq\ & \frac{(kT)^{n-1}}{(n-1)!}\rho^1(T), \end{aligned} \tag{3.31}$$

por tanto, en particular $\{u^n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $I^2(-h, T; V)$. Probamos a continuación que $\{u^n\}_{n\geq 1}$ es también una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega; C(-h, T; H))$, para lo cual volvemos a la expresión (3.28), tomamos supremos en t (donde $0 \leq t \leq T$) y, posteriormente, esperanzas. Conseguimos entonces, $\forall t \in [0, T]$, $\forall n \geq 1$, la desigualdad

$$\begin{aligned} &E\left(\sup_{0 \leq t \leq T}\left|u^{n+1}(t) - u^n(t)\right|^2\right) \\ \leq\ & |\lambda|\, E\int_0^T \left|(u^{n+1}(s) - u^n(s), u^n(s) - u^{n-1}(s))\right| \mathrm{d}s \\ & +2E\int_0^T \left|\langle F_1(s, u_s^n) - F_1(s, u_s^{n-1}), u^{n+1}(s) - u^n(s)\rangle\right| \mathrm{d}s \\ & +2E\int_0^T \left|(G_0(s, u_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}), G_1(s, u_s^{n+1}) - G_1(s, u_s^n))\right| \mathrm{d}s \\ & +2E\left(\sup_{0 \leq t \leq T}\left|\int_0^t (G_0(\theta, u_\theta^n) - G_0(\theta, u_\theta^{n-1}), u^{n+1}(\theta) - u^n(\theta))\, \mathrm{d}W(\theta)\right|\right) \\ & +2E\left(\sup_{0 \leq t \leq T}\left|\int_0^t (G_1(\theta, u_\theta^{n+1}) - G_1(\theta, u_\theta^n), u^{n+1}(\theta) - u^n(\theta))\, \mathrm{d}W(\theta)\right|\right) \\ & +E\int_0^T \left|G_0(s, u_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Gracias a $(F_1.5)$ tenemos que

$$\begin{aligned} &2E\int_0^T \left|\langle F_1(s, u_s^n) - F_1(s, u_s^{n-1}), u^{n+1}(s) - u^n(s)\rangle\right| \mathrm{d}s \\ \leq\ & C^{F_1}\int_0^T \sup_{0 \leq \theta \leq s} E\left|u^n(\theta) - u^{n-1}(\theta)\right|^2 ds + E\int_0^T \left\|u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

A partir de la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, $(G_0.5)$ y $(G_1.4)$, tenemos también que

$$\begin{aligned}
&2E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (G_0(\theta,u_\theta^n)-G_0(\theta,u_\theta^{n-1}),u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta))\,\mathrm{d}W(\theta)\right|\right)\\
\le\ &\frac{1}{3}E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|u^{n+1}(t)-u^n(t)\right|^2\right)+27C^{G_0}\int_0^T\sup_{0\le\theta\le s}E\left|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right|^2\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

$$E\int_0^T\left|G_0(s,u_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1})\right|^2 ds\le C^{G_0}\int_0^T\sup_{0\le\theta\le s}E\left|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right|^2 ds,$$

$$\begin{aligned}
&2E\int_0^T\left|(G_0(s,u_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1}),G_1(s,u_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n))\right|\,\mathrm{d}s\\
\le\ &C^{G_0}\int_0^T\sup_{0\le\theta\le s}E\left|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right|^2\,\mathrm{d}s+K_{G_1}E\int_0^T\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
&2E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (G_1(\theta,u_\theta^{n+1})-G_1(\theta,u_\theta^n),u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta))\,dW(\theta)\right|\right)\\
\le\ &\frac{1}{3}E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|u^{n+1}(t)-u^n(t)\right|^2\right)+27K_{G_1}E\int_0^T\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Además es cierto que

$$\begin{aligned}
&|\lambda|\,E\int_0^T(u^{n+1}(s)-u^n(s),u^n(s)-u^{n-1}(s))\,\mathrm{d}s\\
\le\ &\frac{1}{2}E\int_0^T\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2\,\mathrm{d}s+\frac{\lambda^2\beta^2}{2}\int_0^T\sup_{0\le\theta\le s}E\left|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Entonces, si sustituimos las acotaciones obtenidas en (3.32) y tenemos en cuenta (3.31) deducimos que $\{u^n\}_{n\ge1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega;C(-h,T;H))$. Por tanto, podemos afirmar la existencia de un proceso u tal que $u^n\to u$ en $I^2(-h,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T;H))$. Ahora, argumentando de la misma manera que en la demostración del teorema 8, podemos deducir que u es la solución del problema (P). ■

A continuación vamos a dar un ejemplo que sirva para ilustrar la teoría que hemos desarrollado en este Capítulo. Además, queremos insistir una vez más que este ejemplo no puede tratarse con los resultados obtenidos en Caraballo et al. [19].

Ejemplo 1

Supongamos que $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado. Sean los espacios $H = L^2(\mathcal{O})$, $V = H_0^1(\mathcal{O})$ y $V^* = H^{-1}(\mathcal{O})$. Fijamos las constantes $T > 0$ y $h > 0$.

Consideremos una aplicación continua $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de tal modo que exista $c_\phi > 0$ tal que $|\phi(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq c_\phi |x|_{\mathbb{R}^n}$ para todo $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, y supongamos también que

$$(\phi(t,x) - \phi(t,y)) \cdot (x-y) \geq 0 \, \forall \, t \in [0,T], \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde estamos denotando por $\cdot$ al producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, dada la familia de operadores $A(t,\cdot)$ definida, $\forall \, t \in [0,T]$, $\forall \, u, v \in V$, por

$$\langle A(t,u), v \rangle = -\int_{\mathcal{O}} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathcal{O}} \phi(t, \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x$$

es fácil demostrar que se verifican las hipótesis $(A.1)$-$(A.4)$, con $\lambda = 0$ y $\alpha \leq 2$. Consideremos también una aplicación medible $k_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y una función medible $\omega_1 : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \omega_1(t) \leq h$, $\forall t \in [0,T]$. Vamos a suponer que $k_1(t,0) = 0$, $\forall \, t \in [0,T]$, y que existe $L_{k_1} > 0$ tal que

$$|k_1(t,a) - k_1(t,b)|_{\mathbb{R}^n} \leq L_{k_1} |a-b|, \; \forall \, t \in [0,T], \; \forall \, a, b \in \mathbb{R}.$$

Denotemos por $F_1(t,\cdot)$ a la familia de operadores definida por

$$\langle F_1(t,\xi), v \rangle = -\int_{\mathcal{O}} k_1(t, \xi(-\omega_1(t))(x)) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x, \; \forall \, \xi \in C(-h,0;H), \; \forall \, v \in V,$$

para cada $t \in [0,T]$. Entonces $F_1(t,\cdot)$ satisface las hipótesis $(F_1.1)$-$(F_1.4)$, siendo $C_{F_1} = L_{k_1}^2$ y $C^{F_1} = L_{k_1}^2$.

Consideremos también una aplicación medible $k_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\omega_2 \in C^1([0,T])$ tal que $0 \leq \omega_2(t) \leq h$, $\forall t \in [0,T]$, siendo $\omega_2^* = \max_{t \in [0,T]} \omega_2'(t) < 1$. Supongamos que $k_2(t,0) = 0$, $\forall \, t \in [0,T]$, y que existe $L_{k_2} > 0$ tal que

$$|k_2(t,x) - k_2(t,y)|_{\mathbb{R}^n} \leq L_{k_2} |x-y|_{\mathbb{R}^n}, \; \forall \, t \in [0,T], \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Denotemos mediante $F_2(t,\cdot)$ a la familia de operadores definidas por

$$\langle F_2(t,\xi), v \rangle = -\int_{\mathcal{O}} k_2(t, \nabla \xi(-\omega_2(t))(x)) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x, \; \forall \, \xi \in C(-h,0;V), \; \forall \, v \in V,$$

para cada $t \in [0,T]$. Entonces, $F_2(t,\cdot)$ satisface las hipótesis $(F_2.1)$-$(F_2.4)$, siendo $C_{F_2} = L_{k_2}^2$ y $K_{F_2} = \dfrac{L_{k_2}^2}{1-\omega_2^*}$.

Finalmente, sean $l_0 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $l_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles tales que $l_0(t,0) = l_1(t,0) = 0$, $\forall t \in [0,T]$, y tales que existen $L_{l_0} > 0$ y $L_{l_1} > 0$ de forma que

$$\begin{aligned} |l_0(t,a) - l_0(t,b)| &\leq L_{l_0}|a-b|, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, a,b \in \mathbb{R}, \\ |l_1(t,x) - l_1(t,y)| &\leq L_{l_1}|x-y|_{\mathbb{R}^n}, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Vamos también a fijar dos funciones medibles $\rho_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $i = 0,1$, tales que $0 \leq \rho_i(t) \leq h$, $\forall t \in [0,T]$, $i = 0,1$, siendo $\rho_1 \in C^1([0,T])$, y $\rho_1^* = \max\limits_{t\in[0,T]} \rho_1'(t) < 1$. Por tanto, si definimos

$$\begin{aligned} G_0(t,\xi)(x) &= l_0(t,\xi(-\rho_0(t))(x)), \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, \xi \in C(-h,0;H), \text{ p.c.t. } x \in \mathcal{O}, \\ G_1(t,\xi)(x) &= l_1(t,\nabla\xi(-\rho_1(t))(x)), \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, \xi \in C(-h,0;V), \text{ p.c.t. } x \in \mathcal{O}, \end{aligned}$$

es fácil comprobar que G_0 verifica $(G_0.1)$-$(G_0.4)$, mientras que G_1 verifica las hipótesis $(G_1.1)$-$(G_1.4)$, siendo $C_{G_0} = C^{G_0} = L_{l_0}^2$, $C_{G_1} = L_{l_1}^2$ y $K_{G_1} = \dfrac{L_{l_1}^2}{1-\rho_1^*}$.

Con respecto a la hipótesis $(A.5)$ es fácil comprobar que se verifica para $\widehat{\lambda}$ suficientemente grande si suponemos que

$$\frac{2L_{k_2}}{\sqrt{1-\omega_2^*}} + \frac{L_{l_1}^2}{1-\rho_1^*} < 2.$$

Consecuentemente, bajo todas las hipótesis que hemos establecido, podemos asegurar que dados $\psi \in I^2(-h,0;H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^2(\Omega;C(-h,0;L^2(\mathcal{O})))$, $f \in I^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{O}))$, y $g \in I^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))$, existe una única $u \in I^2(-h,T;H_0^1(\mathcal{O})) \cap L^2(\Omega;C(-h,T;L^2(\mathcal{O})))$ solución del correspondiente problema (P). Tal solución verifica, en un sentido generalizado, el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t) = \Delta u(t) + \nabla\cdot(\phi(t,\nabla u(t))) + \nabla\cdot k_1\left(t,u(t-\omega_1(t))\right) \\ +\nabla\cdot k_2\left(t,\nabla u(t-\omega_2(t))\right) + f(t) \\ +\left(l_1(t,\nabla u(t-\rho_1(t))) + l_0(t,u(t-\rho_0(t))) + g(t)\right)\dfrac{\partial W(t)}{\partial t}, \text{ en } \mathcal{O}\times(0,T), \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\mathcal{O}\times(0,T), \\ u(t) = \psi(t), \text{ en } \mathcal{O}\times[-h,0]. \end{cases}$$

donde, para una función vectorial $\vec{v} = (v_1,...,v_n)$ definida sobre $\mathcal{O}$, hemos denotado por $\nabla\cdot\vec{v}$ a la divergencia de $\vec{v}$ definida mediante la expresión $\nabla\cdot\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$.

Capítulo 4

Ecuaciones estocásticas de segundo orden en t con retardo

En este Capítulo nos vamos a plantear ecuaciones de evolución estocásticas de segundo orden en tiempo y conteniendo características hereditarias. Nuestro objetivo va a ser demostrar varios resultados de existencia y unicidad de solución de dichos problemas.

Al igual que hicimos en el Capítulo anterior, desarrollaremos la teoría en un contexto variacional y los resultados serán establecidos de tal manera que seremos capaces de considerar retardos de naturaleza muy diferente escribiéndolos con la misma formulación. Este comentario se comprobara en los ejemplos que se detallan en la última Sección del Capítulo.

Como ya mencionamos en la Introducción, no conocemos, en un contexto variacional, ningún trabajo relativo al análisis de la existencia de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de segundo orden en tiempo y con retardos. En el caso determinista se puede consultar Garrido-Atienza y Real [27], mientras que en el caso estocástico sin características hereditarias, en Pardoux [52] se han obtenido diversos resultados de existencia y unicidad de solución para las ecuaciones de evolución estocásticas de segundo orden, alguno de los cuales usaremos para las demostraciones que a continuación detallaremos.

Vamos ya a introducir cada uno de los elementos necesarios para la formulación del problema que vamos a analizar.

Supongamos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completo con una filtración normal $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, y denotemos $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$, para todo $t \leq 0$. Consideremos un $\{\mathcal{F}_t\}$-proceso de Wiener $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ con valores reales.

Dados dos números reales $a < b$ y un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, vamos a considerar los espacios $I^2(0, T; \mathcal{H})$ y $L^2(\Omega; C(a, b; \mathcal{H}))$ que ya fueron definidos en los Capítulos anteriores.

Fijemos dos números $T > 0$ y $h > 0$. Recordemos que si $x \in C(-h, T; \mathcal{H})$, para cada $t \in [0,T]$ $x_t \in C(-h, 0; \mathcal{H})$ es la función definida como $x_t(s) = x(t+s)$, $-h \leq s \leq 0$. Además, si $y \in L^2(-h, T; \mathcal{H})$, $y_t \in L^2(-h, 0; \mathcal{H})$, p.c.t. $t \in (0,T)$, es la función definida como $y_t(s) = y(t+s)$, p.c.t. $s \in (-h, 0)$.

Vamos a suponer que V y H son dos espacios de Hilbert reales separables tales que

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*$$

donde las inyecciones son continuas y densas. Denotaremos por $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ y $\|\cdot\|_*$ las normas en V, H y V^* respectivamente; por $(\cdot,\cdot)$ el producto escalar en H, por $((\cdot,\cdot))$ el producto escalar en V y por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto de dualidad entre V^* y V.

Consideramos dada una familia de operadores lineales autoadjuntos $A(t)$, $t \in [0,T]$, verificando:

$(A.1)$ $A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $\forall t \in [0,T]$.

$(A.2)$ $\exists \alpha > 0$ tal que $\forall t \in [0,T]$, $\forall u \in V$ se verifica

$$\langle A(t)u, u\rangle \geq \alpha \|u\|^2$$

$(A.3)$ La aplicación $t \to \langle A(t)u, \widetilde{u}\rangle$ es continuamente diferenciable, $\forall u, \widetilde{u} \in V$. Si $\langle A'(t)u, \widetilde{u}\rangle$ denota el valor de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A(t)u, \widetilde{u}\rangle$, entonces supondremos que $A'(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$ y

$$\langle A'(t)u, u\rangle \leq 0, \forall t \in [0,T], \forall u \in V.$$

$(A.4)$ Existe un espacio de Banach X tal que $X \subset \{u \in V \; ; \; A(t)u \in H, \forall t \in [0,T]\}$, siendo la inyección de X en V continua y X denso en H.

Observemos que en el caso particular $A(t) = A$, es decir, A independiente de $t \in [0,T]$, si tomamos $X = \{u \in V \; ; \; Au \in H\}$ con la norma $\|u\|_X = |u| + |Au|$ entonces, gracias a $(A.1)$ y $(A.2)$, se verifica $(A.4)$.

También podemos observar que en las condiciones anteriores tanto $A(\cdot)$ como $A'(\cdot)$ pertenecen a $L^\infty(0,T; \mathcal{L}(V, V^*))$.

Vamos también a considerar dada una familia de operadores no lineales $B(t,\cdot) : V \to V^*$, definida p.c.t. $t \in (0,T)$, verificando:

$(B.1)$ Medibilidad: $\forall v \in V$, la aplicación $t \in (0,T) \to B(t,v) \in V^*$ es medible Lebesgue.

$(B.2)$ Hemicontinuidad: la aplicación $\theta \in \mathbb{R} \to \langle B(t, v+\theta w), z\rangle \in \mathbb{R}$ es continua $\forall v, w, z \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(B.3)$ Acotación: existe $c > 0$ tal que $\|B(t,v)\|_* \leq c\|v\|$, $\forall v \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(B.4)$ Coercividad: existe $\beta > 0$ tal que $\langle B(t,v), v\rangle \geq \beta \|v\|^2$, $\forall v \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(B.5)$ Monotonía: $\langle B(t,v) - B(t,\widetilde{v}), v - \widetilde{v}\rangle \geq 0, \forall v, \widetilde{v} \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

Sean F_0, $G_0 : [0,T] \times C(-h,0;V) \times C(-h,0;H) \to H$ dos familias de operadores no lineales tales que:

$(F_0.1)$ La aplicación $t \in (0,T) \to F_0(t,\xi,\eta) \in H$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall(\xi,\eta) \in C(-h,0;V) \times C(-h,0;H)$.

$(F_0.2)$ $F_0(t,0,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(F_0.3)$ Existe $C_{F_0} > 0$ tal que $\forall \xi, \widetilde{\xi} \in C(-h,0;V), \forall \eta, \widetilde{\eta} \in C(-h,0;H)$ se verifica

$$\left|F_0(t,\xi,\eta) - F_0(t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})\right|^2 \leq C_{F_0}(\left\|\xi - \widetilde{\xi}\right\|^2_{C(-h,0;V)} + |\eta - \widetilde{\eta}|^2_{C(-h,0;H)}).$$

$(G_0.1)$ La aplicación $t \in (0,T) \to G_0(t,\xi,\eta) \in H$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall(\xi,\eta) \in C(-h,0;V) \times C(-h,0;H)$.

$(G_0.2)$ $G_0(t,0,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(G_0.3)$ Existe $C_{G_0} > 0$ tal que $\forall \xi, \widetilde{\xi} \in C(-h,0;V), \forall \eta, \widetilde{\eta} \in C(-h,0;H)$ se verifica

$$\left|G_0(t,\xi,\eta) - G_0(t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})\right|^2 \leq C_{G_0}(\left\|\xi - \widetilde{\xi}\right\|^2_{C(-h,0;V)} + |\eta - \widetilde{\eta}|^2_{C(-h,0;H)}).$$

Consideremos también $F_1 : (0,T) \times C(-h,0;V) \times C(-h,0;H) \to V^*$, $F_2 : (0,T) \times C(-h,0;V) \times C(-h,0;V) \to V^*$, $G_1 : (0,T) \times C(-h,0;V) \times C(-h,0;V) \to H$ tres familias de operadores no lineales tales que:

$(F_1.1)$ La aplicación $t \in (0,T) \to F_1(t,\xi,\eta) \in V^*$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall(\xi,\eta) \in C(-h,0;V) \times C(-h,0;H)$.

$(F_1.2)$ $F_1(t,0,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(F_1.3)$ Existe $C_{F_1} > 0$ tal que $\forall \xi, \widetilde{\xi} \in C(-h,0;V), \forall \eta, \widetilde{\eta} \in C(-h,0;H)$ se verifica

$$\left\|F_1(t,\xi,\eta) - F_1(t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})\right\|^2_* \leq C_{F_1}(\left\|\xi - \widetilde{\xi}\right\|^2_{C(-h,0;V)} + |\eta - \widetilde{\eta}|^2_{C(-h,0;H)}),$$

$(F_2.1)$ La aplicación $t \in (0,T) \to F_2(t,\xi,\eta) \in V^*$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall(\xi,\eta) \in C(-h,0;V) \times C(-h,0;V)$.

$(F_2.2)$ $F_2(t,0,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

(F_2.3) Existe $C_{F_2} > 0$ tales que $\forall \xi, \widetilde{\xi}, \eta, \widetilde{\eta} \in C(-h,0;V)$ se verifica

$$\left\|F_2(t,\xi,\eta) - F_2(t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})\right\|_*^2 \leq C_{F_2}(\left\|\xi - \widetilde{\xi}\right\|^2_{C(-h,0;V)} + \|\eta - \widetilde{\eta}\|^2_{C(-h,0;V)}).$$

(F_2.4) Existe $K_{F_2} > 0$ tal que $\forall x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y} \in C(-h,T;V)$ y $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|F_2(s,x_s,y_s) - F_2(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)\|_*^2 \, \mathrm{d}s \\ \leq \; & K_{F_2} \int_{-h}^t (\|x(s) - \widetilde{x}(s)\|^2 + \|y(s) - \widetilde{y}(s)\|^2) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

(G_1.1) La aplicación $t \in (0,T) \to G_1(t,\xi,\eta) \in H$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall (\xi,\eta) \in C(-h,0;V) \times C(-h,0;V)$.

(G_1.2) $G_1(t,0,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

(G_1.3) Existe $C_{G_1} > 0$ tales que $\forall \xi, \widetilde{\xi}, \eta, \widetilde{\eta} \in C(-h,0;V)$ se verifica

$$\left|G_1(t,\xi,\eta) - G_1(t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})\right|^2 \leq C_{G_1}(\left\|\xi - \widetilde{\xi}\right\|^2_{C(-h,0;V)} + \|\eta - \widetilde{\eta}\|^2_{C(-h,0;V)}).$$

(G_1.4) Existe $K_{G_1} > 0$ tal que $\forall x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y} \in C(-h,T;V)$ y $\forall t \in [0,T]$ se verifica

$$\begin{aligned} & \int_0^t |G_1(s,x_s,y_s) - G_1(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)|^2 \, \mathrm{d}s \\ \leq \; & K_{G_1} \int_{-h}^t \left(\|x(s) - \widetilde{x}(s)\|^2 + \|y(s) - \widetilde{y}(s)\|^2\right) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Vamos a considerar el problema siguiente

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)), \; u' \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u'(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B(s,u'(s))\mathrm{d}s = \psi'(0) \\ + \int_0^t (F_0(s,u_s,u_s') + F_1(s,u_s,u_s') + F_2(s,u_s,u_s') + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,u_s') + G_1(s,u_s,u_s') + g(s))\mathrm{d}W(s), \; t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \; t \in [-h,0], \end{cases} \tag{P}$$

donde $f \in I^2(0,T;V^*)$, $g \in I^2(0,T;H)$ y $\psi \in L^2(\Omega; C(-h,0;V))$ tal que $\psi' = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \in I^2(-h,0;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$ están dados.

Antes de enunciar los resultados sobre la existencia y unicidad de solución del problema (P), veamos que está perfectamente definido, i.e., todos los sumandos que intervienen en la ecuación tienen sentido. Para ello veamos un par de notas:

Nota 6 *Teniendo en cuenta las hipótesis* $(F_0.1) - (F_0.3)$ *deducimos fácilmente que si* $u \in L^2(\Omega; C(-h,T;V))$, $v \in L^2(\Omega; C(-h,T;H))$ *entonces el proceso* $F_0(\cdot, u_\cdot, v_\cdot) \in I^2(0,T;H)$. *También, gracias a las hipótesis* $(F_1.1)-(F_1.3)$ *deducimos que* $F_1(\cdot, u_\cdot, v_\cdot) \in I^2(0,T;V^*)$. *Del mismo modo,* $(G_0.1) - (G_0.3)$ *hacen que el proceso* $G_0(\cdot, u_\cdot, v_\cdot) \in I^2(0,T;H)$.

Nota 7 *Gracias a* $(F_2.1)-(F_2.3)$ *para un par de procesos dados* $(x,y) \in C(-h,T;V)\times C(-h,T;V)$, *la función* $F_2^{(x,y)} : (0,T) \to V^*$ *definida por* $F_2^{(x,y)}(t) = F_2(t, x_t, y_t)$ *p.c.t.* $t \in (0,T)$, *pertenece a* $L^2(0,T;V^*)$. *Entonces, gracias a* $(F_2.4)$, *la aplicación*

$$\Xi_2 : (x,y) \in C(-h,T;V) \times C(-h,T;V) \to F_2^{(x,y)} \in L^2(0,T;V^*)$$

tiene una única extensión a un aplicación $\widetilde{\Xi}_2$ *que es uniformemente continua de* $L^2(-h,T;V) \times L^2(-h,T;V)$ *en* $L^2(0,T;V^*)$. *A partir de ahora, escribiremos también* $F_2(t,x_t,y_t)=\widetilde{\Xi}_2(x,y)(t)$ *para cada* $(x,y) \in L^2(-h,T;V) \times L^2(-h,T;V)$. *Además, para cada* $x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y} \in L^2(-h,T;V)$ *y* $\forall t \in [0,T]$ *se verifica*

$$\int_0^t \|F_2(s,x_s,y_s) - F_2(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)\|_*^2 \, ds \le K_{F_2} \int_{-h}^t (\|x(s) - \widetilde{x}(s)\|^2 + \|y(s) - \widetilde{y}(s)\|^2) ds.$$

Siguiendo un argumento similar, podemos definir $G_1(t,x_t,y_t) \in L^2(0,T;H)$ *para cada* $(x,y) \in L^2(-h,T;V) \times L^2(-h,T;V)$. *Además, para cada* $x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y} \in L^2(-h,T;V)$ *y* $\forall t \in [0,T]$ *se verifica*

$$\int_0^t |G_1(s,x_s,y_s) - G_1(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)|^2 \, ds \le K_{G_1} \int_{-h}^t \left(\|x(s) - \widetilde{x}(s)\|^2 + \|y(s) - \widetilde{y}(s)\|^2\right) ds.$$

Así, si $(u,v) \in I^2(-h,T;V) \times I^2(-h,T;V)$, *el proceso* $F_2(t,u_t,v_t) \in I^2(0,T;V^*)$ *y el proceso* $G_1(t,u_t,v_t) \in I^2(0,T;H)$. *Además, dados* $u, \widetilde{u}, v, \widetilde{v} \in I^2(-h,T;V)$, $\forall t \in [0,T]$, *se verifican*

$$\int_0^t \|F_2(s,u_s,v_s) - F_2(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)\|_*^2 \, ds \le K_{F_2} \int_{-h}^t (\|u(s) - \widetilde{u}(s)\|^2 + \|v(s) - \widetilde{v}(s)\|^2) ds,$$

y

$$\int_0^t |G_1(s,u_s,v_s) - G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2 \, ds \le K_{G_1} \int_{-h}^t \left(\|u(s) - \widetilde{u}(s)\|^2 + \|v(s) - \widetilde{v}(s)\|^2\right) ds.$$

Como consecuencia de las dos observaciones anteriores el problema (P) está bien definido. Estamos interesados en enunciar y demostrar un resultado de existencia y unicidad de solución de dicho problema. Para ello, vamos previamente a analizar la existencia y unicidad de solución de otro problema estocástico de segundo orden en tiempo y con retardo, que tal y como veremos en la próxima Sección está intimamente relacionado con el problema (P).

4.1 Un primer resultado de existencia y unicidad

Como hemos dicho anteriormente, en esta Sección vamos a demostrar un resultado de existencia y unicidad de solución de un problema relacionado con (P), donde la familia de operadores $B(t,\cdot)$ va a ser sustituida por otra familia de operadores no lineales $B_0(t,\cdot): H \to H$, p.c.t. $t \in (0,T)$, que suponemos verifica las hipótesis:

$(B_0.1)$ Medibilidad: $\forall v \in H$, la aplicación $t \in (0,T) \to B_0(t,v) \in H$ es medible Lebesgue.

$(B_0.2)$ Hemicontinuidad: la aplicación $\theta \in \mathbb{R} \to (B_0(t,v+\theta w),z) \in \mathbb{R}$ es continua $\forall v,w,z \in H$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(B_0.3)$ Acotación: existe $c_0 > 0$ tal que $|B_0(t,v)| \leq c_0 |v|$, $\forall v \in H$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(B_0.4)$ Coercividad: existe $\beta_0 > 0$ tal que $(B_0(t,v),v) \geq \beta_0 |v|^2$, $\forall v \in H$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(B_0.5)$ Monotonía: $(B_0(t,v) - B_0(t,\widetilde{v}), v - \widetilde{v}) \geq 0, \forall v, \widetilde{v} \in H$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

Estudiamos entonces la existencia y unicidad de solución del problema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)),\ u' \in L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u'(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B_0(s,u'(s))\mathrm{d}s \\ = \psi'(0) + \int_0^t (F_0(s,u_s,u'_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,u'_s) + g(s))\mathrm{d}W(s),\ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t),\ t \in [-h,0], \end{array}\right. \tag{Q}$$

donde $A(t)$, F_0 y G_0 están definidos como en el problema (P), $\psi \in L^2(\Omega; C(-h,0;V))$, con $\psi' \in L^2(\Omega; C(-h,0;H))$, $f, g \in I^2(0,T;H)$ están dados.

Antes de establecer y demostrar el resultado fundamental de esta Sección, enunciamos dos teoremas debidos a E. Pardoux que serán cruciales en nuestras demostraciones.

Teorema 11 *Supongamos que A verifica $(A.1)-(A.4)$. Si $f,g \in I^2(0,T;H)$, $u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$, $v_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$ y u es un proceso que verifica*

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega;C(0,T;V)), \;\; u' \in L^2(\Omega;C(0,T;H)), \\ u'(t) + \int_0^t A(s)u(s)ds = v_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW(s), \;\; t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

entonces, para cada $t \in [0,T]$, se verifica P-c.s. la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} & \left|u'(t)\right|^2 + \langle A(t)u(t), u(t)\rangle \\ = \;& |v_0|^2 + \langle A(0)u_0, u_0\rangle + \int_0^t \left\langle A'(s)u(s), u(s)\right\rangle ds \\ & +2\int_0^t (f(s),u'(s))ds + 2\int_0^t (g(s),u'(s))dW(s) + \int_0^t |g(s)|^2\, ds. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Demostración. Ver Pardoux [52, Teorema 1.1, pág. 177] ■

Teorema 12 *Supongamos que A verifica $(A.1)-(A.4)$ y B_0 verifica $(B_0.1)-(B_0.5)$. Entonces, para cada $f,g \in I^2(0,T;H)$, $u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$, $v_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$ dados, existe una única solución del problema siguiente*

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega;C(0,T;V)), \;\; u' \in L^2(\Omega;C(0,T;H)), \\ u'(t) + \int_0^t A(s)u(s)ds + \int_0^t B_0(s,u'(s))ds \\ = v_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW(s), \;\; t \in [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Además, esta solución verifica para cada $t \in [0,T]$, P-c.s., la igualdad

$$\begin{aligned} & \left|u'(t)\right|^2 + \langle A(t)u(t), u(t)\rangle + 2\int_0^t (B_0(s,u'(s)),u'(s))ds \\ = \;& |v_0|^2 + \langle A(0)u_0, u_0\rangle + \int_0^t \left\langle A'(s)u(s), u(s)\right\rangle ds \\ & +2\int_0^t (f(s),u'(s))ds + 2\int_0^t (g(s),u'(s))dW(s) + \int_0^t |g(s)|^2\, ds. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Demostración. Ver Pardoux [52, Teorema 2.1, pág. 183]. ■

La utilidad de las igualdades (4.1) y (4.2) se irá viendo a lo largo de todo este capítulo.

Nos planteamos a continuación estudiar la existencia y unicidad de solución del problema (Q).

Teorema 13 *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(A.1)-(A.4)$, $(B_0.1)-(B_0.5)$, $(F_0.1)-(F_0.3)$ *y* $(G_0.1)-(G_0.3)$. *Si además* $f, g \in I^2(0,T;H)$ *y* $\psi \in L^2(\Omega; C(-h,0;V))$ *es tal que* $\psi' \in L^2(\Omega; C(-h,0;H))$, *entonces existe una única solución del problema* (Q).

Demostración. Unicidad de solución: Sean $u, \widetilde{u}$ dos soluciones del problema (Q). Para simplificar la escritura vamos a denotar $v(t) \triangleq u'(t)$ y $\widetilde{v}(t) \triangleq \widetilde{u}'(t)$, $t \in [-h,T]$. Entonces, aplicando la igualdad de la energía (4.1) al proceso $u(t) - \widetilde{u}(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& |v(t)-\widetilde{v}(t)|^2 + \langle A(t)(u(t)-\widetilde{u}(t)), u(t)-\widetilde{u}(t)\rangle \\
= & \int_0^t \big\langle A'(s)(u(s)-\widetilde{u}(s)), u(s)-\widetilde{u}(s)\big\rangle \,\mathrm{d}s \\
& -2\int_0^t (B_0(s,v(s)) - B_0(s,\widetilde{v}(s)), v(s)-\widetilde{v}(s))\mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t (F_0(s,u_s,v_s) - F_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s))\mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t (G_0(s,u_s,v_s) - G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s))\mathrm{d}W(s) \\
& +\int_0^t |G_0(s,u_s,v_s) - G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2 \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis $(A.2), (A.3)$ y $(B_0.5)$, si además la desigualdad anterior se escribe para $\theta \in [0,t]$, tomamos posteriormente supremos, y finalmente esperanzas, para cada $t \in [0,T]$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
& E\left[\sup_{0\le\theta\le t} |v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2\right] + \alpha E\left[\sup_{0\le\theta\le t} \|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2\right] \\
\le\; & 4E\int_0^t |(F_0(s,u_s,v_s) - F_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s))| \,\mathrm{d}s \\
& +2E\int_0^t |G_0(s,u_s,v_s) - G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2 \,\mathrm{d}s \\
& +4E\left(\sup_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta (G_0(s,u_s,v_s) - G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Gracias a $(F_0.3)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
& 4E\int_0^t |(F_0(s,u_s,v_s)-F_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),v(s)-\widetilde{v}(s))|\,\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{1}{3}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|v(s)-\widetilde{v}(s)|^2\right]+12TE\int_0^t|F_0(s,u_s,v_s)-F_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2\,\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{1}{3}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|v(s)-\widetilde{v}(s)|^2\right] \qquad (4.4)\\
& +12TC_{F_0}E\int_0^t\left(\sup_{0\leq\theta\leq s}\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

De manera inmediata $(G_0.3)$ implica que

$$\begin{aligned}
& 2E\int_0^t|G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2\,\mathrm{d}s \qquad (4.5)\\
\leq\ & 2C_{G_0}E\int_0^t\left(\sup_{0\leq\theta\leq s}\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Usando ahora el lema de Burkholder-Davis-Gundy para acotar la integral estocástica que aparece en la desigualdad (4.3) resulta que

$$\begin{aligned}
& 4E\left(\sup_{0\leq\theta\leq t}\left|\int_0^\theta(G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),v(s)-\widetilde{v}(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right) \\
\leq\ & 12E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|v(s)-\widetilde{v}(s)|\left[\int_0^t|G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{3}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|v(s)-\widetilde{v}(s)|^2\right]+108E\int_0^t|G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2\,\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{1}{3}E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|v(s)-\widetilde{v}(s)|^2\right] \qquad (4.6)\\
& +108C_{G_0}E\int_0^t\left(\sup_{0\leq\theta\leq s}\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Sustituyendo (4.4)-(4.6) en (4.3) obtenemos que $\exists k>0$

$$\begin{aligned}
& E\left[\sup_{0\leq\theta\leq t}|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2\right]+E\left[\sup_{0\leq\theta\leq t}\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2\right] \\
\leq\ & kE\int_0^t\left(\sup_{0\leq\theta\leq s}\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Para finalizar con la unicidad basta aplicar el lema de Gronwall en la desigualdad anterior.

Existencia de solución: Para demostrar la existencia de solución al problema (Q) vamos a usar un esquema de Picard. Para ello, sea $(u^0, v^0) \equiv (0,0)$ y consideremos el problema siguiente

$$\begin{cases} u^n \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)), v^n \in L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ (u^n)'(t) = v^n(t), \ \forall n \geq 1, \ t \in [-h,T], \\ v^n(t) + \int_0^t A(s)u^n(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B_0(s, v^n(s))\mathrm{d}s \\ = \psi'(0) + \int_0^t (F_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u^n(t) = \psi(t), \ t \in [-h, 0] \ . \end{cases} \qquad (Q^n)$$

Gracias a la nota 6 y al teorema 12, podemos afirmar que (Q^n) tiene una única solución $u^n \in L^2(\Omega; C(-h,T;V))$, $v^n \in L^2(\Omega; C(-h,T;H))$.

Veamos que $\{(u^n, v^n)\}_{n\geq 1}$ es convergente a (u,v), que será precisamente la solución de (Q). Comencemos aplicando la igualdad de la energía (4.2) a la diferencia $u^{n+1}(t) - u^n(t)$:

$$\begin{aligned} & \left|v^{n+1}(t) - v^n(t)\right|^2 + \left\langle A(t)(u^{n+1}(t) - u^n(t)), u^{n+1}(t) - u^n(t)\right\rangle \\ = & \int_0^t \left\langle A'(s)(u^{n+1}(s) - u^n(s)), u^{n+1}(s) - u^n(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\ & -2\int_0^t (B_0(s, v^{n+1}(s)) - B_0(s, v^n(s)), v^{n+1}(s) - v^n(s))\mathrm{d}s \\ & +2\int_0^t (F_0(s, u_s^n, v_s^n) - F_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}), v^{n+1}(s) - v^n(s))\mathrm{d}s \\ & +2\int_0^t (G_0(s, u_s^n, v_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}), v^{n+1}(s) - v^n(s))\mathrm{d}W(s) \\ & +\int_0^t \left|G_0(s, u_s^n, v_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis $(A.2), (A.3)$ y $(B_0.5)$ obtenemos que la igualdad anterior implica

$$\begin{aligned} & \left|v^{n+1}(t) - v^n(t)\right|^2 + \alpha \left\|u^{n+1}(t) - u^n(t)\right\|^2 \\ \leq & \ 2\int_0^t (F_0(s, u_s^n, v_s^n) - F_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}), v^{n+1}(s) - v^n(s))\mathrm{d}s \\ & +2\int_0^t (G_0(s, u_s^n, v_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}), v^{n+1}(s) - v^n(s))\mathrm{d}W(s) \\ & +\int_0^t \left|G_0(s, u_s^n, v_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Si la desigualdad anterior se escribe para $\theta \in [0,t]$ y tomamos posteriormente supremos, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|^2+\alpha\sup_{0\le\theta\le t}\left\|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\right\|^2\\
\le\ & 4\int_0^t\left|(F_0(s,u_s^n,v_s^n)-F_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s))\right|\mathrm{d}s \qquad (4.7)\\
&+2\int_0^t\left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s\\
&+4\sup_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta(G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s))\mathrm{d}W(s)\right|.
\end{aligned}$$

Acotamos cada una de las integrales de (4.7). Por un lado, gracias a (F_0.3),

$$\begin{aligned}
&4\int_0^t\left|(F_0(s,u_s^n,v_s^n)-F_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s))\right|\mathrm{d}s\\
\le\ & \frac{1}{3}\sup_{0\le s\le t}\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2+12T\int_0^t\left|F_0(s,u_s^n,v_s^n)-F_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s\\
\le\ & \frac{1}{3}\sup_{0\le s\le t}\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2 \qquad (4.8)\\
&+12TC_{F_0}\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

De manera inmediata (G_0.3) implica que

$$\begin{aligned}
&2\int_0^t\left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s \qquad (4.9)\\
\le\ & 2C_{G_0}\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos esperanzas en (4.7), teniendo en cuenta (4.8) y (4.9), obtenemos

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|^2\right]+\alpha E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left\|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\right\|^2\right]\\
\le\ & \frac{1}{3}E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2\right]\\
&+(12TC_{F_0}+2C_{G_0})E\int_0^t\sup_{0\le\theta\le s}\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2\mathrm{d}s \qquad (4.10)\\
&+(12TC_{F_0}+2C_{G_0})E\int_0^t\sup_{0\le\theta\le s}\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\mathrm{d}s\\
&+4E\left(\sup_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta(G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right).
\end{aligned}$$

Acotamos el último sumando de la desigualdad anterior usando el lema de Burkholder-Davis-Gundy y $(G_0.3)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&4E\left(\sup_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta (G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right)\\
\le\;& 12E\left(\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|\left[\int_0^t \left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}\right)\\
\le\;& \frac{1}{3}E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|^2\right]\\
&+108C_{G_0}E\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Si ahora definimos

$$\mathcal{X}^{n+1}(t)=E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|^2\right]+E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left\|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\right\|^2\right],\ \forall n\ge 1,$$

teniendo en cuenta lo anterior, de (4.10) concluimos que

$$\mathcal{X}^{n+1}(t)\le k\int_0^t \mathcal{X}^n(s)\mathrm{d}s,\ \forall n\ge 1,\ \forall t\in[0,T], \tag{4.11}$$

donde $k=\frac{12TC_{F_0}+110C_{G_0}}{\min(\frac{1}{3},\alpha)}$. Iterando la desigualdad (4.11) obtenemos que

$$\mathcal{X}^{n+1}(t)\le \frac{k^nT^n}{n!}\mathcal{X}^1(T),\ \forall n\ge 1,\forall t\in[0,T]. \tag{4.12}$$

Puesto que $u^{n+1}(t)=u^n(t)$, $v^{n+1}(t)=v^n(t)$, $\forall t\in[-h,0]$, (4.12) implica que $\{u^n\}_{n\ge 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega;C(-h,T;V))$, y que $\{v^n\}_{n\ge1}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega;C(-h,T;H))$, siendo $v^n(t)=(u^n)'(t)$, para todo $t\in[-h,T]$. Por tanto, podemos decir que existen $u\in L^2(\Omega;C(-h,T;V))$, $v\in L^2(\Omega;C(-h,T;H))$ tales que

$$\begin{aligned}
u^n &\to u \text{ en } L^2(\Omega;C(-h,T;V)),\\
v^n &\to v \text{ en } L^2(\Omega;C(-h,T;H)).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Veamos qué relación hay entre u y v. Como $u^n\to u$ en $L^2(\Omega;C(-h,T;V))\subset L^2(\Omega;C(-h,T;H))$, dado $w\in V\subset H$ se verifica que $(u^n(t),w)\to(u(t),w)$ en $L^2(\Omega\times(-h,T))$. Por otro lado, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^n(t),w)=(v^n(t),w)\to(v(t),w)$ en $L^2(\Omega\times(-h,T))$. Es decir, $\exists\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),w)=(v(t),w)$. Como V es denso en H, lo anterior implica que

$$\exists u'(t)=v(t). \tag{4.14}$$

Si ahora tenemos en cuenta (4.13), (4.14), la linealidad y acotación uniforme de A, $(F_0.3)$ y $(G_0.3)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} &A(t)u^n(t) \to A(t)u(t) \text{ en } I^2(0,T;V^*),\\ &F_0(t,u_t^n,v_t^n) \to F_0(t,u_t,u_t') \text{ en } I^2(0,T;H),\\ &G_0(t,u_t^n,v_t^n) \to G_0(t,u_t,u_t') \text{ en } I^2(0,T;H). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por otro lado, gracias a $(B_0.3)$, la sucesión $\{B_0(t,v^n(t))\}_{n\geq 1}$ está acotada en $I^2(0,T;H)$. Por tanto, existe una subsucesión $\{B_0(t,v^{n_k}(t))\}_{n_k\geq 1} \subset \{B_0(t,v^n(t))\}_{n\geq 1}$ y un proceso $\mathcal{B}_0 \in I^2(0,T;H)$ de manera que

$$B_0(t,v^{n_k}(t)) \rightharpoonup \mathcal{B}_0(t) \text{ en } I^2(0,T;H),$$

donde $\rightharpoonup$ denota convergencia débil. Por tanto, teniendo en cuenta las convergencias anteriores, si tomamos límites en el problema (Q^n) concluimos que

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega;C(-h,T;V)), \ u' \in L^2(\Omega;C(-h,T;H)),\\ u'(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathcal{B}_0(s)\mathrm{d}s = \psi'(0) + \int_0^t (F_0(s,u_s,u_s') + f(s))\mathrm{d}s\\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,u_s') + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t\in[0,T],\\ u(t) = \psi(t), \ t\in[-h,0]. \end{cases} \tag{4.16}$$

A partir de (4.16) vemos que $\mathcal{B}_0$ está determinado únicamente por u, así que para simplificar lo que queda de demostración, suponemos que toda la sucesión $\{B_0(t,v^n(t))\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a $\mathcal{B}_0$ en $I^2(0,T;H)$. Para finalizar la demostración basta con probar que $B_0(t,u'(t)) = \mathcal{B}_0(t)$, $t \in (0,T)$.

De manera inmediata se comprueba que

$$\lim_{n\to+\infty} E\int_0^T (B_0(s,v^n(s)),v^n(s))\mathrm{d}s = E\int_0^T (\mathcal{B}_0(s),v(s))\mathrm{d}s. \tag{4.17}$$

Por otro lado, gracias a $(B_0.5)$ sabemos que

$$E\int_0^T (B_0(s,v^n(s)) - B_0(s,X(s)), v^n(s) - X(s))\mathrm{d}s \geq 0 \quad \forall X \in I^2(0,T;H).$$

Si tomamos límites en la expresión anterior llegamos a que

$$E\int_0^T (\mathcal{B}_0(s) - B_0(s,X(s)), v(s) - X(s))\mathrm{d}s \geq 0 \quad \forall X \in I^2(0,T;H).$$

Si ahora escribimos $X(t) = v(t) - \delta Z(t)$, $t\in[0,T]$, donde $Z \in I^2(0,T;H)$, $\delta > 0$, entonces

$$E\int_0^T (\mathcal{B}_0(s) - B_0(s,v(s)-\delta Z(s)), \delta Z(s))\mathrm{d}s \geq 0 \quad \forall Z \in I^2(0,T;H).$$

Si en en la expresión anterior dividimos por δ obtenemos

$$E\int_0^T (\mathcal{B}_0(s) - B_0(s, v(s) - \delta Z(s)), Z(s))\mathrm{d}s \geq 0 \quad \forall Z \in I^2(0,T;H). \tag{4.18}$$

Ahora bien, gracias a la hemicontinuidad de B_0 sabemos que

$$\lim_{\delta\to 0}(B_0(s, v(s) - \delta Z(s)), Z(s)) = (B_0(s, v(s)), Z(s)),$$

y la hipótesis $(B_0.3)$ nos permite utilizar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para pasar al límite en (4.18), obteniendo

$$E\int_0^T (\mathcal{B}_0(s) - B_0(s, v(s)), Z(s))\mathrm{d}s \geq 0 \quad \forall Z \in I^2(0,T;H),$$

por tanto, $B_0(t, v(t)) = \mathcal{B}_0(t)$, $t \in (0,T)$. De ahí concluimos que u es la solución del problema (Q) que ibamos buscando. ∎

Nota 8 *Supongamos que F_0 y G_0 verifican además de $(F_0.1)-(F_0.3)$ y $(G_0.1)-(G_0.3)$ las hipótesis siguientes:*

$(F_0.4)$ *Existe $K_{F_0} > 0$ tal que $\forall x, \widetilde{x} \in C(-h,T;V)$, $y, \widetilde{y} \in C(-h,T;H)$ y $\forall t \in [0,T]$*

$$\int_0^t |F_0(s, x_s, y_s) - F_0(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{y}_s)|^2\, ds \leq K_{F_0}\int_{-h}^t (\|x(s) - \widetilde{x}(s)\|^2 + |y(s) - \widetilde{y}(s)|^2)ds,$$

$(G_0.4)$ *Existe $K_{G_0} > 0$ tal que $\forall x, \widetilde{x} \in C(-h,T;V)$, $y, \widetilde{y} \in C(-h,T;H)$ y $\forall t \in [0,T]$*

$$\begin{aligned} &\int_0^t |G_0(s, x_s, y_s) - G_0(s, \widetilde{x}_s, \widetilde{y}_s)|^2\, ds \\ \leq\ & K_{G_0}\int_{-h}^t \left(\|x(s) - \widetilde{x}(s)\|^2 + |y(s) - \widetilde{y}(s)|^2\right) ds. \end{aligned}$$

Por un lado, gracias a $(F_0.1) - (F_0.3)$ para un par de procesos dados $(x,y) \in C(-h,T;V)\times C(-h,T;H)$, la función $F_0^{(x,y)} : (0,T) \to H$ definida por $F_0^{(x,y)}(t) = F_0(t, x_t, y_t)$ p.c.t. $t \in (0,T)$, pertenece a $L^2(0,T;H)$. Entonces, gracias a $(F_0.4)$, la aplicación

$$\Xi_0 : (x,y) \in C(-h,T;V) \times C(-h,T;H) \to F_0^{(x,y)} \in L^2(0,T;H)$$

tiene una única extensión a un aplicación $\widetilde{\Xi}_0$ que es uniformemente continua de $L^2(-h,T;V) \times L^2(-h,T;H)$ en $L^2(0,T;H)$. A partir de ahora, escribiremos también $F_0(t, x_t, y_t) = \widetilde{\Xi}_0(x,y)(t)$ para cada $(x,y) \in L^2(-h,T;V) \times L^2(-h,T;H)$.

Además, para cada $x, \widetilde{x} \in L^2(-h,T;V)$, $y, \widetilde{y} \in L^2(-h,T;H)$ y $\forall t \in [0,T]$ se verifica

$$\int_0^t |F_0(s,x_s,y_s) - F_0(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)|^2\, ds \leq K_{F_0} \int_{-h}^t (\|x(s)-\widetilde{x}(s)\|^2 + |y(s)-\widetilde{y}(s)|^2) ds,$$

Siguiendo un argumento similar, podemos definir $G_0(t,x_t,y_t) \in L^2(0,T;H)$ para cada $(x,y) \in L^2(-h,T;V) \times L^2(-h,T;H)$. Además, para cada $x, \widetilde{x} \in L^2(-h,T;V)$, $y, \widetilde{y} \in L^2(-h,T;H)$ y $\forall t \in [0,T]$ se verifica

$$\begin{aligned} & \int_0^t |G_0(s,x_s,y_s) - G_0(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)|^2\, ds \\ \leq\ & K_{G_0} \int_{-h}^t \left(\|x(s)-\widetilde{x}(s)\|^2 + |y(s)-\widetilde{y}(s)|^2\right) ds. \end{aligned}$$

Además, dados $u, \widetilde{u} \in I^2(-h,T;V)$, $v, \widetilde{v} \in I^2(-h,T;H)$, $\forall t \in [0,T]$, se verifican

$$\begin{aligned} & \int_0^t |F_0(s,u_s,v_s) - F_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2\, ds \\ \leq\ & K_{F_0} \int_{-h}^t (\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|^2 + |v(s)-\widetilde{v}(s)|^2) ds, \\ & \int_0^t |G_0(s,u_s,v_s) - G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2\, ds \\ \leq\ & K_{G_0} \int_{-h}^t \left(\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|^2 + |v(s)-\widetilde{v}(s)|^2\right) ds. \end{aligned}$$

Vamos a poder demostrar de manera similar al teorema anterior el siguiente resultado:

Teorema 14 *Supongamos que se verifican las hipótesis $(A.1)-(A.4)$, $(B_0.1)-(B_0.5)$, $(F_0.1)-(F_0.4)$ y $(G_0.1)-(G_0.4)$. Entonces para $f, g \in I^2(0,T;H)$, $\varphi_1 \in I^2(-h,0;V)$, $\varphi_2 \in I^2(-h,0;H)$, $u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$, $v_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$ dados, existe una única solución del problema siguiente:*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;V)), \\ v \in I^2(-h,T;H) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H)), \\ u'(t) = v(t),\ t \in [0,T], \\ v(t) + \int_0^t A(s)u(s)ds + \int_0^t B_0(s,v(s))ds = v_0 + \int_0^t (F_0(s,u_s,v_s) + f(s))ds \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,v_s) + g(s))dW(s),\ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \\ u(t) = \varphi_1(t),\ v(t) = \varphi_2(t),\ p.c.t.\ t \in (-h,0). \end{array} \right. \qquad (\widetilde{Q})$$

Demostración. Unicidad de solución: Supongamos que $(u, v), (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ son dos soluciones del problema $(\widetilde{Q})$. Entonces, gracias al teorema 11, para cada $t \in [0, T]$, y P-c.s., obtenemos

$$\begin{aligned} & |v(t) - \widetilde{v}(t)|^2 + \langle A(t)(u(t) - \widetilde{u}(t)), u(t) - \widetilde{u}(t) \rangle \\ = & \int_0^t \left\langle A'(s)(u(s) - \widetilde{u}(s)), u(s) - \widetilde{u}(s) \right\rangle \mathrm{d}s \\ & -2 \int_0^t (B_0(s, v(s)) - B_0(s, \widetilde{v}(s)), v(s) - \widetilde{v}(s)) \, \mathrm{d}s \\ & +2 \int_0^t (F_0(s, u_s, v_s) - F_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s) - \widetilde{v}(s)) \, \mathrm{d}s \\ & +2 \int_0^t (G_0(s, u_s, v_s) - G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s) - \widetilde{v}(s)) \, \mathrm{d}W(s) \\ & + \int_0^t |G_0(s, u_s, v_s) - G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s)|^2 \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

A partir de la igualdad anterior, utilizando las hipótesis $(A.2), (A.3)$ y $(B_0.5)$, tenemos que para cada $t \in [0, T]$, y P-c.s.,

$$\begin{aligned} & |v(t) - \widetilde{v}(t)|^2 + \alpha \, \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|^2 \\ \leq \; & 2 \int_0^t |(F_0(s, u_s, v_s) - F_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s) - \widetilde{v}(s))| \, \mathrm{d}s \\ & + \int_0^t |G_0(s, u_s, v_s) - G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s)|^2 \, \mathrm{d}s \\ & +2 \int_0^t (G_0(s, u_s, v_s) - G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s) - \widetilde{v}(s)) \, \mathrm{d}W(s). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta $(F_0.4)$ y $(G_0.4)$ y tomando posteriormente esperanzas, obtenemos que para cada $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & E\,|v(t) - \widetilde{v}(t)|^2 + \alpha E\,\|u(t) - \widetilde{u}(t)\|^2 \\ \leq \; & (K_{F_0} + 1 + K_{G_0})\, E \int_0^t \left(\|u(s) - \widetilde{u}(s)\|^2 + |v(s) - \widetilde{v}(s)|^2\right) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Por tanto, basta aplicar el lema de Gromwall.

Existencia de solución: Denotemos $u^0 \equiv v^0 \equiv 0 \in V$, y definamos por recurrencia la sucesión $\{(u^n, v^n)\}_{n\geq 1}$ de pares de procesos soluciones de los problemas

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u^n \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;V)), \\
v^n \in I^2(-h,T;H) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)), \\
(u^n)'(t) = v^n(t), \ \forall n \geq 1, \ t \in [-h,T], \\
v^n(t) + \int_0^t A(s)u^n(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B_0(s, v^n(s))\mathrm{d}s \\
= v_0 + \int_0^t (F_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}) + f(s))\mathrm{d}s \\
+ \int_0^t (G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\
u(0) = u_0, \\
u(t) = \varphi_1(t), \ v(t) = \varphi_2(t), \ \text{p.c.t. } t \in (-h, 0).
\end{array}
\right. \qquad (\widetilde{Q}^n)
$$

Para cada $n \geq 1$, la existencia y unicidad de solución del problema anterior la tenemos garantizada gracias a la nota 6 y al teorema 12. Lo que queremos hacer es demostrar que $\{(u^n, v^n)\}_{n\geq 1}$ converge a la única solución de $(\widetilde{Q})$. Para ello, aplicamos la igualdad de la energía (4.2) a $u^{n+1} - u^n$, y usamos posteriormente $(A.2)$, $(A.3)$ y $(B_0.5)$. Obtenemos así la desigualdad

$$
\begin{aligned}
& \left|v^{n+1}(t) - v^n(t)\right|^2 + \alpha \left\|u^{n+1}(t) - u^n(t)\right\|^2 \\
\leq \ & 2 \int_0^t (F_0(s, u_s^n, v_s^n) - F_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}), v^{n+1}(s) - v^n(s))\, \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t (G_0(s, u_s^n, v_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}), v^{n+1}(s) - v^n(s))\, \mathrm{d}W(s) \\
& + \int_0^t \left|G_0(s, u_s^n, v_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0,T]$, y consecuentemente, usando $(F_0.4)$ y $(G_0.4)$,

$$
\begin{aligned}
& \left|v^{n+1}(t) - v^n(t)\right|^2 + \alpha \left\|u^{n+1}(t) - u^n(t)\right\|^2 \\
\leq \ & (3K_{F_0}T + K_{G_0}) \int_0^t \left(\|u^n(s) - u^{n-1}(s)\|^2 + |v^n(s) - v^{n-1}(s)|^2\right) \mathrm{d}s \\
& + \frac{1}{3} \sup_{0\leq\theta\leq t} \left|v^{n+1}(\theta) - v^n(\theta)\right|^2 \\
& +2 \int_0^t (G_0(s, u_s^n, v_s^n) - G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}), v^{n+1}(s) - v^n(s))\, \mathrm{d}W(s),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0,T]$. Así, obtenemos que, para todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|^2+\alpha\sup_{0\le\theta\le t}\left\|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\right\|^2 \qquad (4.19)\\
\le\ & 2\left(3K_{F_0}T+K_{G_0}\right)\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)|^2\right)\mathrm{d}s\\
&+4\sup_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta (G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s))\,\mathrm{d}W(s)\right|.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy y (G_0.4) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&4E\left(\sup_{0\le\theta\le t}\left|\int_0^\theta (G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s))\,\mathrm{d}W(s)\right|\right)\\
\le\ & 12E\left(\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|\left[\int_0^t\left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}\right)\\
\le\ & \frac{1}{3}E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|^2\right] \qquad (4.20)\\
&+108K_{G_0}E\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Así, definiendo para cada $t \in [0,T]$

$$\rho^{n+1}(t)=E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left|v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta)\right|^2\right]+E\left[\sup_{0\le\theta\le t}\left\|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\right\|^2\right],\quad \forall n\ge 1,$$

a partir de (4.19)-(4.20) podemos garantizar que existe una constante $k>0$ tal que

$$\rho^{n+1}(t)\le k\int_0^t\rho^n(s)\,\mathrm{d}s,\quad \forall n\ge 1,\quad \forall t\in[0,T]. \qquad (4.21)$$

A partir de (4.21) se deduce fácilmente que

$$\rho^{n+1}(t)\le\frac{k^nT^n}{n!}\rho^1(T),\quad \forall n\ge 1,\ \forall t\in[0,T]. \qquad (4.22)$$

A partir de (4.22), junto con el hecho de que $u^{n+1}(t)=u^n(t)$ y $v^{n+1}(t)=v^n(t)$, p.c.t. $t\in(-h,0)$ $\forall n\ge 1$, obtenemos que la sucesión $\{u^n\}_{n\ge1}$ es de Cauchy en $I^2(-h,T;V)\cap L^2(\Omega;C(0,T;V))$, y que $\{v^n\}_{n\ge1}$ lo es en $I^2(-h,T;H)\cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$, siendo $(u^n)'(t)=v^n(t)$ en $[0,T]$. Por tanto, existe $u\in I^2(-h,T;V)\cap L^2(\Omega;C(0,T;V))$, y $v\in I^2(-h,T;H)\cap L^2(\Omega;C(0,T;H))$, con $u'=v$ en $[0,T]$ tales que

$$\begin{aligned}
&u^n\to u \text{ en } I^2(-h,T;V)\cap L^2(\Omega;C(0,T;V)),\\
&v^n\to v \text{ en } I^2(-h,T;H)\cap L^2(\Omega;C(0,T;H)). \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

A partir de (4.23), la linealidad y la continuidad uniforme de $A(t)$, $(F_0.4)$ y $(G_0.4)$ podemos afirmar que

$$\begin{aligned} &A(t)u^n(t) \to A(t)u(t) \text{ en } I^2(0,T;V^*),\\ &F_0(t,u_t^n,v_t^n) \to F_0(t,u_t,v_t) \text{ en } I^2(0,T;H),\\ &G_0(t,u_t^n,v_t^n) \to G_0(t,u_t,v_t) \text{ en } I^2(0,T;H). \end{aligned}$$

Además, gracias a $(B_0.3)$, la sucesión $\{B_0(t,v^n(t))\}_{n\geq 1}$ está acotada en $I^2(0,T;H)$. Existe entonces una subsucesión $\{B_0(t,v^{n_k}(t))\}_{n_k\geq 1} \subset \{B_0(t,v^n(t))\}_{n\geq 1}$ y un proceso $\mathcal{B}_0(t) \in I^2(0,T;H)$ tales que

$$B_0(t,v^{n_k}(t)) \rightharpoonup \mathcal{B}_0(t) \quad \text{en } I^2(0,T;H).$$

Tomando límites en el problema $(\widetilde{Q}_n)$ obtenemos que (u,v) es solución del problema

$$\begin{cases} u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;V)), \ v \in I^2(-h,T;H) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H)),\\ u'(t) = v(t), \ t \in [0,T],\\ v(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathcal{B}_0(s)\mathrm{d}s = v_0 + \int_0^t (F_0(s,u_s,v_s) + f(s))\mathrm{d}s\\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,v_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T],\\ u(0) = u_0,\\ u(t) = \varphi_1(t), \ v(t) = \varphi_2(t), \ \text{p.c.t. } t \in (-h,0). \end{cases}$$

De la misma manera que en el teorema 13 podemos afirmar que la sucesión completa $\{B_0(t,v^n(t))\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a $\mathcal{B}_0$ en $I^2(0,T;H)$. También podemos concluir de la misma forma que en aquel teorema que $\mathcal{B}_0(t) = B_0(t,v(t))$ en $(0,T)$. Por tanto, hemos terminado la demostración de la existencia. ■

Nota 9 *Es posible en los teoremas 13 y 14 añadir a $A(t)u(t)$ sumandos de la forma $\widetilde{A}_0(t,u(t))$, y a $B_0(t,u'(t))$ sumandos de la forma $\widetilde{B}_0(t,u'(t))$, donde $\widetilde{A}_0$ y $\widetilde{B}_0$ verifican hipótesis adecuadas. Más concretamente, supongamos que tenemos dos familias de operadores no lineales $\widetilde{A}_0(t,\cdot) : V \to H$ y $\widetilde{B}_0(t,\cdot) : H \to H$ definidas p.c.t. $t \in (0,T)$ verificando las hipótesis:*

$(\widetilde{A}_0.1)$ Medibilidad: $\forall u \in V$, la aplicación $t \in (0,T) \to \widetilde{A}_0(t,u) \in H$ es medible Lebesgue.

$(\widetilde{A}_0.2)$ $\widetilde{A}_0(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

($\widetilde{A}_0$.3) Existe $L_{\widetilde{A}_0} > 0$ tal que $\left|\widetilde{A}_0(t,u) - \widetilde{A}_0(t,\widetilde{u})\right| \leq L_{\widetilde{A}_0} \|u - \widetilde{u}\|$, $\forall u, \widetilde{u} \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

($\widetilde{B}_0$.1) Medibilidad: $\forall v \in H$, la aplicación $t \in (0,T) \rightarrow \widetilde{B}_0(t,v) \in H$ es medible Lebesgue.

($\widetilde{B}_0$.2) $\widetilde{B}_0(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

($\widetilde{B}_0$.3) Existe $L_{\widetilde{B}_0} > 0$ tal que $\left|\widetilde{B}_0(t,v) - \widetilde{B}_0(t,\widetilde{v})\right| \leq L_{\widetilde{B}_0} |v - \widetilde{v}|$, $\forall v, \widetilde{v} \in H$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

Entonces, bajo todas las condiciones del teorema 13 y usando argumentos similares, existe una única solución del problema

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)), \;\; u' \in L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u'(t) + \int_0^t (A(s)u(s) + \widetilde{A}_0(s,u(s)))\mathrm{d}s + \int_0^t (B_0(s,u'(s)) + \widetilde{B}_0(s,u'(s)))\mathrm{d}s \\ = \psi'(0) + \int_0^t (F_0(s,u_s,u'_s) + f(s))ds + \int_0^t (G_0(s,u_s,u'_s) + g(s))dW(s), t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \; t \in [-h,0]. \end{cases}$$

También podemos asegurar que existe una única solución del problema siguiente (suponiendo en este caso las condiciones del teorema 14):

$$\begin{cases} u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;V)), \;\; u' \in I^2(-h,T;H) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)), \\ u'(t) = v(t), \;\; t \in [0,T], \\ v(t) + \int_0^t (A(s)u(s) + \widetilde{A}_0(s,u(s)))\mathrm{d}s + \int_0^t (B_0(s,v(s)) + \widetilde{B}_0(s,v(s)))\mathrm{d}s \\ = v_0 + \int_0^t (F_0(s,u_s,v_s) + f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (G_0(s,u_s,v_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \;\; t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \\ u(t) = \varphi_1(t), \;\; v(t) = \varphi_2(t), \;\; \text{p.c.t. } t \in (-h,0). \end{cases}$$

Es suficiente observar que podemos sustituir en el problema (Q), o en el problema $(\widetilde{Q})$, el término $\int_0^t F_0(s,u_s,u'_s)\mathrm{d}s$ por $\int_0^t \widetilde{F}_0(s,u_s,u'_s)\mathrm{d}s$, donde $\widetilde{F}_0$ está definido como

$$\widetilde{F}_0(t,\zeta,\eta) = F_0(t,\zeta,\eta) + \widetilde{A}_0(t,\zeta(0)) + \widetilde{B}_0(t,\eta(0)),$$

$\forall \zeta \in C(-h,0;V)$, $\forall \eta \in C(-h,0;H)$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

4.2 Existencia y unicidad de solución de (P)

Comenzamos esta Sección enunciando un par de teoremas debidos a E. Pardoux:

Teorema 15 *Supongamos que A verifica las hipótesis $(A.1)-(A.4)$. Entonces, si $f \in I^2(0,T;V^*)$, $g \in I^2(0,T;H)$, $u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$, $v_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$ y u es un proceso que verifica*

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega;C(0,T;V)), \ u' \in I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(0,T;H)), \\ u'(t)+\int_0^t A(s)u(s)ds = v_0+\int_0^t f(s)ds+\int_0^t g(s)dW(s), \ t\in[0,T], \\ u(0)=u_0, \end{cases}$$

entonces, para cada $t\in[0,T]$, se verifica $P-c.s.$ la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} & \left|u'(t)\right|^2+\langle A(t)u(t),u(t)\rangle \\ = \ & |v_0|^2+\langle A(0)u_0,u_0\rangle+\int_0^t \left\langle A'(s)u(s),u(s)\right\rangle ds \\ & +2\int_0^t \left\langle f(s),u'(s)\right\rangle ds+2\int_0^t (g(s),u'(s))dW(s)+\int_0^t |g(s)|^2\,ds. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Demostración. Véase Pardoux [52]. ■

Teorema 16 *Supongamos que las familias de operadores A y B verifican las hipótesis $(A.1)-(A.4)$ y $(B.1)-(B.5)$. Entonces, para cada $f\in I^2(0,T;V^*)$, $g\in I^2(0,T;H)$, $u_0\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$, $v_0\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$ dados, existe una única solución del problema siguiente*

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega;C(0,T;V)), \ u' \in I^2(0,T;V)\cap L^2(\Omega;C(0,T;H)), \\ u'(t)+\int_0^t A(s)u(s)ds+\int_0^t B(s,u'(s))ds = v_0+\int_0^t f(s)ds+\int_0^t g(s)dW(s), \ t\in[0,T], \\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

Además, esta solución verifica para cada $t\in[0,T]$, $P-c.\ s.$, la igualdad

$$\begin{aligned} & \left|u'(t)\right|^2+\langle A(t)u(t),u(t)\rangle+2\int_0^t \left\langle B(s,u'(s)),u'(s)\right\rangle ds \\ = \ & |v_0|^2+\langle A(0)u_0,u_0\rangle+\int_0^t \left\langle A'(s)u(s),u(s)\right\rangle ds \\ & +2\int_0^t \left\langle f(s),u'(s)\right\rangle ds+2\int_0^t (g(s),u'(s))dW(s)+\int_0^t |g(s)|^2\,ds. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Demostración. Véase Pardoux [52]. ■

Usando los dos resultados anteriores vamos a probar:

Teorema 17 *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(A.1)-(A.4)$, $(B.1)-(B.5)$, $(F_0.1)-(F_0.3)$, $(F_1.1)-(F_1.3)$, $(F_2.1)-(F_2.4)$, $(G_0.1)-(G_0.3)$, $(G_1.1)-(G_1.4)$. *Si además* $f \in I^2(0,T;V^*)$, $g \in I^2(0,T;H)$ *y* $\psi \in L^2(\Omega;C(-h,0;V))$ *es tal que* $\psi' \in I^2(-h,0;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,0;H))$, *entonces existe una única solución del problema* (P), *suponiendo adicionalmente que se verifican las tres hipótesis siguientes:*

(H) $\exists\gamma>0$, $\lambda,\widehat{\lambda}\in\mathbb{R}$ tales que para $x,\widetilde{x},y,\widetilde{y}\in L^2(-h,T;V)$ se verifica, $\forall t\in[0,T]$, la siguiente desigualdad

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle B(s,y(s))-B(s,\widetilde{y}(s)),y(s)-\widetilde{y}(s)\right\rangle \mathrm{d}s\\
&+\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left|y(s)-\widetilde{y}(s)\right|^2\mathrm{d}s+\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle A(s)(x(s)-\widetilde{x}(s)),x(s)-\widetilde{x}(s)\right\rangle \mathrm{d}s\\
&+\widehat{\lambda}\int_{-h}^0 \mathrm{e}^{-\lambda s}\left(\left\|x(s)-\widetilde{x}(s)\right\|^2+\left\|y(s)-\widetilde{y}(s)\right\|^2\right)\mathrm{d}s\\
\geq\;&\gamma\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\|y(s)-\widetilde{y}(s)\right\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left|G_1(s,x_s,y_s)-G_1(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)\right|^2\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle F_2(s,x_s,y_s)-F_2(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s),y(s)-\widetilde{y}(s)\right\rangle \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

$(F_1.5)$ Existe $C^{F_1}>0$ tal que para todo $X,\widetilde{X}\in L^2(\Omega;C(-h,T;V))$ tales que $X',\widetilde{X}'\in L^2(\Omega;C(-h,T;H))$ y $X\equiv\widetilde{X}$ sobre $[-h,0]$, se verifica $\forall t\in[0,T]$

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t \left\|F_1(s,X_s,X_s')-F_1(s,\widetilde{X}_s,\widetilde{X}_s')\right\|_*^2\mathrm{d}s\\
\leq\;&C^{F_1}\int_0^t\left(\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left\|X(\theta)-\widetilde{X}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left|X'(\theta)-\widetilde{X}'(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

$(G_0.5)$ Existe $C^{G_0}>0$ tal que para todo $X,\widetilde{X}\in L^2(\Omega;C(-h,T;V))$ tales que $X',\widetilde{X}'\in L^2(\Omega;C(-h,T;H))$ y $X\equiv\widetilde{X}$ sobre $[-h,0]$, se verifica $\forall t\in[0,T]$

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t \left|G_0(s,X_s,X_s')-G_0(s,\widetilde{X}_s,\widetilde{X}_s')\right|^2\mathrm{d}s\\
\leq\;&C^{G_0}\int_0^t\left(\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left\|X(\theta)-\widetilde{X}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left|X'(\theta)-\widetilde{X}'(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Demostración. Podemos suponer que $F_0\equiv 0$ (porque en caso contrario trabajaríamos con $\widetilde{F}_1=F_0+F_1$). También queremos hacer notar que en la hipótesis (H) las constantes λ y $\widehat{\lambda}$ tienen sentido si son positivas, por lo que en la demostración supondremos que λ, $\widehat{\lambda}\geq 0$.

Unicidad de solución: Sean $u,\widetilde{u}$ dos soluciones del problema (P). Para simplificar la escritura vamos a denotar $v(t)\triangleq u'(t)$ y $\widetilde{v}(t)\triangleq\widetilde{u}'(t)$, $t\in[-h,T]$. Entonces, teniendo en cuenta el corolario 1, siendo $X_t=\mathrm{e}^{-\lambda t}$ e $Y_t=|v(t)-\widetilde{v}(t)|^2+$

$\langle A(t)(u(t)-\widetilde{u}(t)), u(t)-\widetilde{u}(t)\rangle$, obtenemos gracias al teorema 15 que para cada $t \in [0,T]$ y P-c.s. se verifica

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|v(t)-\widetilde{v}(t)\right|^2+\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A(t)(u(t)-\widetilde{u}(t)), u(t)-\widetilde{u}(t)\right\rangle \\
& +\lambda \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left|v(s)-\widetilde{v}(s)\right|^2 \mathrm{d}s+\lambda \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle A(s)(u(s)-\widetilde{u}(s)), u(s)-\widetilde{u}(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
= & \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle A'(s)(u(s)-\widetilde{u}(s)), u(s)-\widetilde{u}(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
& -2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle B(s, v(s))-B(s, \widetilde{v}(s)), v(s)-\widetilde{v}(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle F_1(s, u_s, v_s)-F_1(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle F_2(s, u_s, v_s)-F_2(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_0(s, u_s, v_s)-G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)) \mathrm{d}W(s) \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s, u_s, v_s)-G_1(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)) \mathrm{d}W(s) \\
& +\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left|G_0(s, u_s, v_s)-G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s)\right|^2 \mathrm{d}s \\
& +\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left|G_1(s, u_s, v_s)-G_1(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s)\right|^2 \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s, u_s, v_s)-G_1(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), G_0(s, u_s, v_s)-G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s)) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis $(A.2),(A.3)$ y (H),

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|v(t)-\widetilde{v}(t)\right|^2+\alpha \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|u(t)-\widetilde{u}(t)\right\|^2+\gamma \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\|v(s)-\widetilde{v}(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
\leq\ & 2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle F_1(s, u_s, v_s)-F_1(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_0(s, u_s, v_s)-G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)) \mathrm{d}W(s) \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s, u_s, v_s)-G_1(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)) \mathrm{d}W(s) \\
& +\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left|G_0(s, u_s, v_s)-G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s)\right|^2 \mathrm{d}s \\
& +2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s, u_s, v_s)-G_1(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s), G_0(s, u_s, v_s)-G_0(s, \widetilde{u}_s, \widetilde{v}_s)) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\mathrm{e}^{-\lambda T} \leq \mathrm{e}^{-\lambda t} \leq 1,\ t \in [0,T],$$

por tanto, obtenemos a partir de la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\lambda T}\left|v(t)-\widetilde{v}(t)\right|^2+\alpha\mathrm{e}^{-\lambda T}\left\|u(t)-\widetilde{u}(t)\right\|^2+\gamma\mathrm{e}^{-\lambda T}\int_0^t\left\|v(s)-\widetilde{v}(s)\right\|^2\mathrm{d}s \\
\leq\ & 2\int_0^t\left\langle F_1(s,u_s,v_s)-F_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),v(s)-\widetilde{v}(s)\right\rangle\mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t(G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),v(s)-\widetilde{v}(s))\mathrm{d}W(s) \\
& +2\int_0^t(G_1(s,u_s,v_s)-G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),v(s)-\widetilde{v}(s))\mathrm{d}W(s) \\
& +\int_0^t\left|G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)\right|^2\mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t(G_1(s,u_s,v_s)-G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Tomando esperanzas

$$\begin{aligned}
& E\left|v(t)-\widetilde{v}(t)\right|^2+\alpha E\left\|u(t)-\widetilde{u}(t)\right\|^2+\gamma E\int_0^t\left\|v(s)-\widetilde{v}(s)\right\|^2\mathrm{d}s \\
\leq\ & 2\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t\left\langle F_1(s,u_s,v_s)-F_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),v(s)-\widetilde{v}(s)\right\rangle\mathrm{d}s \\
& +\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t\left|G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)\right|^2\mathrm{d}s \\
& +2\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t(G_1(s,u_s,v_s)-G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Vamos a comenzar acotando el último sumando de la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned}
& 2\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t(G_1(s,u_s,v_s)-G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s))\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{2\mathrm{e}^{2\lambda T}K_{G_1}}{\gamma}E\int_0^t\left|G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)\right|^2\mathrm{d}s \\
& +\frac{\gamma}{2K_{G_1}}E\int_0^t\left|G_1(s,u_s,v_s)-G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)\right|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned}
& E\left|v(t)-\widetilde{v}(t)\right|^2+\alpha E\left\|u(t)-\widetilde{u}(t)\right\|^2+\gamma E\int_0^t\left\|v(s)-\widetilde{v}(s)\right\|^2\mathrm{d}s \\
\leq\ & 2\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t\left\langle F_1(s,u_s,v_s)-F_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s),v(s)-\widetilde{v}(s)\right\rangle\mathrm{d}s \\
& +\left(\mathrm{e}^{\lambda T}+\frac{2\mathrm{e}^{2\lambda T}K_{G_1}}{\gamma}\right)E\int_0^t\left|G_0(s,u_s,v_s)-G_0(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)\right|^2\mathrm{d}s \\
& +\frac{\gamma}{2K_{G_1}}E\int_0^t\left|G_1(s,u_s,v_s)-G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)\right|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Gracias a la hipótesis $(F_1.5)$,

$$\begin{aligned}
& 2\mathrm{e}^{\lambda T} E \int_0^t \langle F_1(s,u_s,v_s) - F_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s), v(s)-\widetilde{v}(s)\rangle \,\mathrm{d}s \\
\leq\; & \frac{\gamma}{2} E \int_0^t \|v(s)-\widetilde{v}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s \\
& + \frac{2\mathrm{e}^{2\lambda T} C^{F_1}}{\gamma} \int_0^t \left(\sup_{0\leq\theta\leq s} E\,\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2 + \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2 \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora la hipótesis $(G_1.4)$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma}{2K_{G_1}} E \int_0^t |G_1(s,u_s,v_s) - G_1(s,\widetilde{u}_s,\widetilde{v}_s)|^2 \,\mathrm{d}s \\
\leq\; & \frac{\gamma}{2} E \int_0^t \left(\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|^2 + \|v(s)-\widetilde{v}(s)\|^2 \right) \mathrm{d}s \\
\leq\; & \frac{\gamma}{2} E \int_0^t \|v(s)-\widetilde{v}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s + \frac{\gamma}{2} \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2 \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por tanto, gracias a lo anterior a y $(G_0.5)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
& E\,|v(t)-\widetilde{v}(t)|^2 + \alpha E\,\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|^2 \\
\leq\; & \left(\frac{\gamma}{2} + \left(\mathrm{e}^{\lambda T} + \frac{2\mathrm{e}^{2\lambda T} K_{G_1}}{\gamma} \right) C^{G_0} + \frac{2\mathrm{e}^{2\lambda T} C^{F_1}}{\gamma} \right) \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2 \,\mathrm{d}s \\
& + \left(\left(\mathrm{e}^{\lambda T} + \frac{2\mathrm{e}^{2\lambda T} K_{G_1}}{\gamma} \right) C^{G_0} + \frac{2\mathrm{e}^{2\lambda T} C^{F_1}}{\gamma} \right) \int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2 \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

entonces, tomando supremos se deduce que $\exists k > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& \sup_{0\leq\theta\leq t} E\,|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2 + \sup_{0\leq\theta\leq t} E\,\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2 \\
\leq\; & k \int_0^t \left(\sup_{0\leq\theta\leq s} E\,\|u(\theta)-\widetilde{u}(\theta)\|^2 + \sup_{0\leq\theta\leq s} E\,|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2 \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Basta entonces aplicar el lema de Gronwall para finalizar la demostración de la unicidad.

Existencia de solución: Vamos a distinguir dos etapas para la demostración de la existencia de solución del problema (P).

Etapa 1: Supongamos en esta primera etapa que $F_1 \equiv G_0 \equiv 0$. Queremos entonces demostrar existencia de solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)), \ v \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u'(t) = v(t), \ t \in [-h,T], \\ v(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B(s,v(s))\mathrm{d}s = \psi'(0) \\ + \int_0^t (F_2(s,u_s,v_s) + f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (G_1(s,u_s,v_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \ t \in [-h,0]. \end{cases} \qquad (\widehat{P})$$

Para ello vamos a usar un esquema de Galerkin. Sea $\{w_i\}_{i\geq 1}$ una base ortonormal numerable de H, tal que $\{w_i\}_{i\geq 1} \subset V$ y el espacio vectorial generado por $\{w_i\}_{i\geq 1}$ es denso en V. Para cada entero $m \geq 1$ denotaremos por V_m al subespacio vectorial generado por $\{w_1, \cdots, w_m\}$. Sea $P_m \in \mathcal{L}(H; V_m)$ el operador de proyección ortogonal de H en V_m y sea $\widetilde{P}_m \in \mathcal{L}(V; V_m)$ el operador de proyección ortogonal de V en V_m. Consideremos entonces el problema

$$\begin{cases} u^m \in I^2(-h,T;V_m) \cap L^2(\Omega; C(0,T;V_m)), \\ v^m \in I^2(-h,T;V_m) \cap L^2(\Omega; C(0,T;V_m)), \\ (u^m)'(t) = v^m(t), \ t \in [0,T], \ \forall m \geq 1, \\ (v^m(t), w) + \int_0^t \langle A(s)u^m(s), w\rangle \,\mathrm{d}s + \int_0^t \langle B(s,v^m(s)), w\rangle \,\mathrm{d}s \\ = (P_m\psi'(0), w) + \int_0^t \langle F_2(s,u_s^m,v_s^m) + f(s), w\rangle \,\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_1(s,u_s^m,v_s^m) + g(s), w)\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \ \forall w \in V_m, \\ u^m(t) = \widetilde{P}_m\psi(t), \ t \in [-h,0], \\ v^m(t) = \widetilde{P}_m\psi'(t), \ t \in (-h,0). \end{cases} \qquad (\widehat{P}^m)$$

El problema $(\widehat{P}^m)$ tiene una única solución gracias al teorema 14 (en este caso todos los espacios coinciden con V_m). Además, con la elección que hemos hecho de la base $\{w_i\}_{i\geq 1}$ tenemos que

$$\begin{gathered} \left\|\widetilde{P}_m\psi(t)\right\| \leq \|\psi(t)\|; \ \left\|\widetilde{P}_m\psi'(t)\right\| \leq \|\psi'(t)\|, \ t \in [-h,0] \\ \left|P_m\psi'(0)\right| \leq |\psi'(0)|. \end{gathered} \qquad (4.26)$$

Empezamos demostrando que $\{v^m(\cdot)\}_{m\geq 1}$ es acotada en $I^2(-h,T;V)$. Aplicando la fórmula de Itô al proceso $\mathrm{e}^{-\lambda t}|v^m(t)|^2+\mathrm{e}^{-\lambda t}\langle A(t)u^m(t),u^m(t)\rangle$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\lambda t}|v^m(t)|^2+\mathrm{e}^{-\lambda t}\langle A(t)u^m(t),u^m(t)\rangle-\left|P_m\psi'(0)\right|^2-\left\langle A(0)\widetilde{P}_m\psi(0),\widetilde{P}_m\psi(0)\right\rangle\\
&+\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}|v^m(s)|^2\,\mathrm{d}s+\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\langle A(s)u^m(s),u^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s\\
\leq\;&\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle A'(s)u^m(s),u^m(s)\right\rangle\mathrm{d}s-2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\langle B(s,v^m(s)),v^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\langle F_2(s,u_s^m,v_s^m)+f(s),v^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s,u_s^m,v_s^m)+g(s),v^m(s))\mathrm{d}W(s)\\
&+\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}|G_1(s,u_s^m,v_s^m)+g(s)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis (H), $(A.2)$ y $(A.3)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\lambda t}|v^m(t)|^2+\alpha\mathrm{e}^{-\lambda t}\|u^m(t)\|^2+\gamma\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\|v^m(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\
&-\left|P_m\psi'(0)\right|^2-\left\langle A(0)\widetilde{P}_m\psi(0),\widetilde{P}_m\psi(0)\right\rangle\\
\leq\;&2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\langle f(s),v^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s+2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s,u_s^m,v_s^m),g(s))\mathrm{d}s\\
&+\widehat{\lambda}\int_{-h}^0 \mathrm{e}^{-\lambda s}\left(\|u^m(s)\|^2+\|v^m(s)\|^2\right)\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}|g(s)|^2\,\mathrm{d}s+2\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s,u_s^m,v_s^m)+g(s),v^m(s))\mathrm{d}W(s).
\end{aligned}\tag{4.27}$$

Tomando esperanzas en (4.27) se sigue la desigualdad

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\lambda t}E|v^m(t)|^2+\alpha\mathrm{e}^{-\lambda t}E\|u^m(t)\|^2+\gamma E\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\|v^m(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\
\leq\;&E\left|P_m\psi'(0)\right|^2+E\left\langle A(0)\widetilde{P}_m\psi(0),\widetilde{P}_m\psi(0)\right\rangle+E\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}|g(s)|^2\,\mathrm{d}s\\
&+\widehat{\lambda}E\int_{-h}^0 \mathrm{e}^{-\lambda s}\left(\|u^m(s)\|^2+\|v^m(s)\|^2\right)\mathrm{d}s\\
&+2E\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\langle f(s),v^m(s)\rangle\,\mathrm{d}s+2E\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(G_1(s,u_s^m,v_s^m),g(s))\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

y de ahí

$$
\begin{aligned}
& E\left|v^m(t)\right|^2+\alpha E\left\|u^m(t)\right\|^2+\gamma E \int_0^t\left\|v^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s \\
\leq\ & \mathrm{e}^{\lambda T} E\left|P_m \psi^{\prime}(0)\right|^2+\mathrm{e}^{\lambda T} E\left\langle A(0) \widetilde{P}_m \psi(0), \widetilde{P}_m \psi(0)\right\rangle+\mathrm{e}^{\lambda T} E \int_0^t|g(s)|^2 \mathrm{d} s \\
& +\widehat{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda T} E \int_{-h}^0\left(\left\|u^m(s)\right\|^2+\left\|v^m(s)\right\|^2\right) \mathrm{d} s \\
& +2 \mathrm{e}^{\lambda T} E \int_0^t\left\langle f(s), v^m(s)\right\rangle \mathrm{d} s+2 \mathrm{e}^{\lambda T} E \int_0^t\left(G_1\left(s, u_s^m, v_s^m\right), g(s)\right) \mathrm{d} s .
\end{aligned}
$$

De nuevo vamos a acotar las integrales del lado derecho de la desigualdad anterior. Por un lado, gracias a la hipótesis $(G_1.4)$,

$$
\begin{aligned}
& 2 \mathrm{e}^{\lambda T} E \int_0^t\left(G_1\left(s, u_s^m, v_s^m\right), g(s)\right) \mathrm{d} s \\
\leq\ & \frac{\gamma}{3} E \int_{-h}^t\left(\left\|u^m(s)\right\|^2+\left\|v^m(s)\right\|^2\right) \mathrm{d} s+\frac{3 K_{G_1} \mathrm{e}^{2 \lambda T}}{\gamma} E \int_0^t|g(s)|^2 \mathrm{d} s .
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
2 \mathrm{e}^{\lambda T} E \int_0^t\left\langle f(s), v^m(s)\right\rangle \mathrm{d} s \leq \frac{\gamma}{3} E \int_0^t\left\|v^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s+\frac{3 \mathrm{e}^{2 \lambda T}}{\gamma} E \int_0^t\|f(s)\|_*^2 \mathrm{d} s .
$$

Luego gracias a las acotaciones anteriores y a (4.26) se sigue que

$$
\begin{aligned}
& E\left|v^m(t)\right|^2+\alpha E\left\|u^m(t)\right\|^2+\frac{\gamma}{3} E \int_0^t\left\|v^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s \\
\leq\ & \mathrm{e}^{\lambda T} E\left|P_m \psi^{\prime}(0)\right|^2+\mathrm{e}^{\lambda T} E\left\langle A(0) \widetilde{P}_m \psi(0), \widetilde{P}_m \psi(0)\right\rangle+\frac{3 \mathrm{e}^{2 \lambda T}}{\gamma} E \int_0^t\|f(s)\|_*^2 \mathrm{d} s \\
& +\left(\mathrm{e}^{\lambda T}+\frac{3 K_{G_1} \mathrm{e}^{2 \lambda T}}{\gamma}\right) E \int_0^t|g(s)|^2 \mathrm{d} s+\frac{\gamma}{3} E \int_{-h}^0\left\|\widetilde{P}_m \psi^{\prime}(s)\right\|^2 \mathrm{d} s \\
& +\frac{\gamma}{3} E \int_{-h}^0\left\|\widetilde{P}_m \psi(s)\right\|^2 \mathrm{d} s+\frac{\gamma}{3} E \int_0^t\left\|u^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s \\
& +\widehat{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda T} E \int_{-h}^0\left(\left\|u^m(s)\right\|^2+\left\|v^m(s)\right\|^2\right) \mathrm{d} s \\
\leq\ & \mathrm{e}^{\lambda T} E\left|\psi^{\prime}(0)\right|^2+\mathrm{e}^{\lambda T}|A(0)|_{\mathcal{L}\left(V ; V^*\right)} E\|\psi(0)\|^2+\frac{3 \mathrm{e}^{2 \lambda T}}{\gamma} E \int_0^t\|f(s)\|_*^2 \mathrm{d} s \\
& +\left(\mathrm{e}^{\lambda T}+\frac{3 K_{G_1} \mathrm{e}^{2 \lambda T}}{\gamma}\right) E \int_0^t|g(s)|^2 \mathrm{d} s+\left(\frac{\gamma}{3}+\widehat{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda T}\right) E \int_{-h}^0\left\|\psi^{\prime}(s)\right\|^2 \mathrm{d} s \\
& +\left(\frac{\gamma}{3}+\widehat{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda T}\right) E \int_{-h}^0\|\psi(s)\|^2 \mathrm{d} s+\frac{\gamma}{3} E \int_0^t\left\|u^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s .
\end{aligned}
$$

Es decir, hemos demostrado que

$$\begin{aligned} & E\left|v^m(t)\right|^2+\alpha E\left\|u^m(t)\right\|^2+\frac{\gamma}{3} E \int_0^t\left\|v^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s \\ \leq\ & C+\frac{\gamma}{3} E \int_0^t\left\|u^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s, \end{aligned}$$

donde $C>0$ es una constante independiente de m. De la expresión anterior inmediatamente deducimos que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} E\left|v^m(t)\right|^2 & \leq c_1, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} E\left\|u^m(t)\right\|^2 & \leq c_2, \\ E \int_0^T\left\|v^m(s)\right\|^2 \mathrm{d} s & \leq c_3, \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $c_1, c_2, c_3>0$ son tres constantes independientes de m.

A partir de (4.26) y (4.28) obtenemos que $\{u^m(\cdot)\}_{m \geq 1}$ está acotada en $I^2(-h, T ; V)$, que $\{v^m(\cdot)\}_{m \geq 1}$ también es acotada en $I^2(-h, T ; V)$ y que $\{u^m(T)\}_{m \geq 1}$ está acotada en $L^2(\Omega ; V)$, mientras que $\{v^m(T)\}_{m \geq 1}$ lo está en $L^2(\Omega ; H)$.

Por otro lado, gracias a (4.28) y $(B.3)$, la sucesión $\{B(\cdot) v^m(\cdot)\}$ está acotada en $I^2(0, T ; V^*)$.

Además, (4.28), $(G_1.2),(G_1.4),(F_2.2)$ y $(F_2.4)$ implican que $\{G_1(\cdot, u_{\cdot}^m, v_{\cdot}^m)\}_{m \geq 1}$ es acotada en $I^2(0, T ; H)$ y $\{F_2(\cdot, u_{\cdot}^m, v_{\cdot}^m)\}_{m \geq 1}$ es acotada en $I^2(0, T ; V^*)$. Luego existe una subsucesión $\{u^{m_k}(\cdot)\}_{m_k \geq 1} \subset\{u^m(\cdot)\}_{m \geq 1}$, dos variables aleatorias $\xi \in L^2(\Omega ; V), \eta \in L^2(\Omega ; H)$, y cinco procesos $u \in I^2(-h, T ; V)$, $v \in I^2(-h, T ; V)$, $\mathcal{B} \in I^2(0, T ; V^*)$, $\mathcal{F}_2 \in I^2(0, T ; V^*)$ y $\mathcal{G}_1 \in I^2(0, T ; H)$ tales que

$$\begin{aligned} & u^{m_k} \rightharpoonup u \text{ en } I^2(-h, T ; V), \\ & u^{m_k}(T) \rightharpoonup \xi \text{ en } L^2(\Omega ; V), \\ & v^{m_k} \rightharpoonup v \text{ en } I^2(-h, T ; V), \\ & v^{m_k}(T) \rightharpoonup \eta \text{ en } L^2(\Omega ; H), \\ & A(\cdot) u^{m_k}(\cdot) \rightharpoonup A(\cdot) u(\cdot) \text{ en } I^2(0, T ; V^*), \\ & A^{\prime}(\cdot) u^{m_k}(\cdot) \rightharpoonup A^{\prime}(\cdot) u(\cdot) \text{ en } I^2(0, T ; V^*), \\ & B(\cdot, v^{m_k}(\cdot)) \rightharpoonup \mathcal{B}(\cdot) \text{ en } I^2(0, T ; V^*), \\ & F_2(\cdot, u_{\cdot}^{m_k}, v_{\cdot}^{m_k}) \rightharpoonup \mathcal{F}_2(\cdot) \text{ en } \mathrm{I}^2(0, T ; V^*), \\ & G_1(\cdot, u_{\cdot}^{m_k}, v_{\cdot}^{m_k}) \rightharpoonup \mathcal{G}_1(\cdot) \text{ en } I^2(0, T ; H). \end{aligned}$$

Veamos en primer lugar que $\exists u^{\prime}=v$. Puesto que $(u^{m_k})^{\prime}=v^{m_k}$ en $[0, T]$ podemos asegurar que si χ es una función absolutamente continua sobre $[0, T]$ tal que $\chi \in H^1(0, T)$ y $\chi(T)=0$, y fijamos $w \in H$, entonces

$$-\left(\widetilde{P}_{m_k} \psi(0), w\right) \chi(0)=\int_0^T(v^{m_k}(s), w)\, \chi(s) \mathrm{d} s+\int_0^T(u^{m_k}(s), w)\, \chi^{\prime}(s) \mathrm{d} s .$$

Si tomamos límites en la expresión anterior cuando $k \to +\infty$, tenemos

$$-(\psi(0), w)\,\chi(0) = \int_0^T (v(s), w)\,\chi(s)\mathrm{d}s + \int_0^T (u(s), w)\,\chi'(s)\mathrm{d}s \;\forall w \in H.$$

Fijemos ahora $t \in (0, T)$ y para cada $n \geq 1$ tal que $t + \frac{1}{2n} \leq T$ definamos

$$\chi^n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq s \leq t - \frac{1}{2n}, \\ \frac{1}{2} + n(t-s) & \text{si } t - \frac{1}{2n} \leq s \leq t + \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{si } t + \frac{1}{2n} \leq s \leq T. \end{cases}$$

Entonces

$$-(\psi(0), w) = \int_0^T (v(s), w)\,\chi^n(s)\mathrm{d}s - n\int_{t-\frac{1}{2n}}^{t+\frac{1}{2n}} (u(s), w)\,\mathrm{d}s \;\forall w \in H,$$

y tomando límites obtenemos, p.c.t. $t \in (0, T)$

$$-(\psi(0), w) = \int_0^t (v(s), w)\,\mathrm{d}s - (u(t), w) \;\;\forall w \in H,$$

con lo cual, gracias a la separabilidad de H, p.c.t. $t \in (0, T)$

$$u(t) = \psi(0) + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s, \tag{4.29}$$

(igualdad en V^*). Si definimos

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} \psi(0) + \int_0^t v(s)ds & \text{si } t \in [0, T], \\ \psi(t) & \text{si } t \in [-h, 0], \end{cases}$$

ya que $\psi \in L^2(\Omega; C(-h, 0; V))$ y $v \in I^2(-h, T; V)$ fácilmente se demuestra que $\widehat{u} \in L^2(\Omega; C(-h, T; V))$, siendo $\widehat{u} = u$ p.c.t. $t \in [-h, T]$ y $\widehat{u}' = v$ en $[-h, T]$. Redefiniendo u como $\widehat{u}$ probamos que $u \in L^2(\Omega; C(-h, T; V))$, $u = \psi$ en $[-h, 0]$ y $u' = v$ en $[-h, T]$.

Consideremos de nuevo χ una función absolutamente continua sobre $[0, T]$ tal que $\chi \in H^1(0, T)$ y $\chi(T) = 0$. Fijemos m_j y sea $w \in V_{m_j}$. Entonces, si $1 \leq m_j \leq m_k$, obtenemos

$$\begin{aligned} -(P_{m_k}\psi'(0), w)\chi(0) \;&=\; -\int_0^T \langle A(s)u^{m_k}(s), w\rangle\,\chi(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^T \langle F_2(s, u_s^{m_k}, v_s^{m_k}) + f(s), w\rangle\,\chi(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^T \langle v^{m_k}(s), w\rangle\,\chi'(s)\mathrm{d}s - \int_0^T \langle B(s, v^{m_k}(s)), w\rangle\,\chi(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^T (G_1(s, u_s^{m_k}, v_s^{m_k}) + g(s), w)\chi(s)\mathrm{d}W(s). \end{aligned}$$

Si al igual que antes tomamos límites cuando $m_k \to +\infty$, tenemos en cuenta que m_j es arbitrario y $\bigcup_{m\geq 1} V_m$ es denso en V, entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
-(\psi'(0), w)\chi(0) &= -\int_0^T \langle A(s)u(s), w\rangle \chi(s)\mathrm{d}s - \int_0^T \langle \mathcal{B}(s), w\rangle \chi(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^T \langle \mathcal{F}_2(s) + f(s), w\rangle \chi(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \langle v(s), w\rangle \chi'(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^T (\mathcal{G}_1(s) + g(s), w)\chi(s)\mathrm{d}W(s),\ \forall w \in V
\end{aligned}$$

Si fijamos $t \in (0, T)$ y consideramos otra vez las funciones χ^n, de la igualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
-(\psi'(0), w) &= -\int_0^T \langle A(s)u(s), w\rangle \chi^n(s)\mathrm{d}s - \int_0^T \langle \mathcal{B}(s), w\rangle \chi^n(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^T \langle \mathcal{F}_2(s) + f(s), w\rangle \chi^n(s)\mathrm{d}s - n\int_{t-\frac{1}{2n}}^{t+\frac{1}{2n}} \langle v(s), w\rangle \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^T (\mathcal{G}_1(s) + g(s), w)\chi^n(s)\mathrm{d}W(s),
\end{aligned}$$

con lo que al pasar al límite, p.c.t. $t \in (0, T)$, $\forall w \in V$

$$\begin{aligned}
-(\psi'(0), w) &= -\int_0^t \langle A(s)u(s), w\rangle \mathrm{d}s - \int_0^t \langle \mathcal{B}(s), w\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \langle \mathcal{F}_2(s) + f(s), w\rangle \mathrm{d}s \\
&\quad - \langle v(t), w\rangle + \int_0^t (\mathcal{G}_1(s) + g(s), w)\mathrm{d}W(s).
\end{aligned}$$

Gracias ahora a la separabilidad de V obtenemos, p.c.t. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned}
v(t) &= \psi'(0) - \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s - \int_0^t \mathcal{B}(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t (\mathcal{F}_2(s) + f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (\mathcal{G}_1(s) + g(s))\mathrm{d}W(s),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

(igualdad en V^*). Si definimos

$$\widehat{v}(t) = \begin{cases} \psi'(0) - \int_0^t A(s)u(s)ds - \int_0^t \mathcal{B}(s)ds & \\ + \int_0^t (\mathcal{F}_2(s) + f(s))ds + \int_0^t (\mathcal{G}_1(s) + g(s))dW(s), & \text{si } t \in [0, T], \\ \psi'(t), & \text{si } t \in [-h, 0], \end{cases}$$

tenemos que $\widehat{v} = v$ p.c.t. $t \in (-h, T)$, luego $\widehat{v} \in I^2(-h, T; V)$. Además, puesto que $\psi'(0) \in H$, $A(\cdot)u(\cdot), \mathcal{B}(\cdot), \mathcal{F}_2(\cdot)$ y $f \in I^2(0, T; V^*)$ y $\mathcal{G}_1(\cdot)$ y $g(\cdot) \in I^2(0, T; H)$ se verifica que $\widehat{v} \in L^2(\Omega; C(-h, T; H))$ (ver Pardoux [53, teorema 1.4]). Redefiniendo v

como $\widehat{v}$ tenemos probado que $v \in L^2(\Omega; C(-h,T;H)) \cap I^2(-h,T;V)$, y verifica (4.30) $\forall t \in [0,T]$.

Por otro lado, fijemos m_j y sea $w \in V_{m_j}$. Entonces, si $1 \leq m_j \leq m_k$, obtenemos

$$\begin{aligned}(v^{m_k}(T), w) &= (P_{m_k}\psi'(0), w) - \int_0^T \langle A(s)u^{m_k}(s), w\rangle\,\mathrm{d}s - \int_0^T \langle B(s, v^{m_k}(s)), w\rangle\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^T \langle F_2(s, u_s^{m_k}, v_s^{m_k}) + f(s), w\rangle\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^T (G_1(s, u_s^{m_k}, v_s^{m_k}) + g(s), w)\mathrm{d}W(s),\end{aligned}$$

luego si tomamos límites débiles en $L^2(\Omega; H)$ cuando $m_k \to +\infty$, y usamos que $\bigcup_{m\geq 1} V_m$ es denso en V, obtenemos

$$\begin{aligned}(\eta, w) &= (\psi'(0), w) - \int_0^T \langle A(s)u(s), w\rangle\,\mathrm{d}s - \int_0^T \langle \mathcal{B}(s), w\rangle\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^T \langle \mathcal{F}_2(s) + f(s), w\rangle\,\mathrm{d}s + \int_0^T (\mathcal{G}_1(s) + g(s), w)\mathrm{d}W(s), \ \forall w \in V,\end{aligned}$$

y, comparando con (4.30), obtenemos $v(T) = \eta$. También vamos a comprobar que $u(T) = \xi$. Si tomamos límites débiles en $L^2(\Omega; V)$ cuando $m_k \to +\infty$ en la expresión

$$u^{m_k}(T) = \widetilde{P}_{m_k}\psi(0) + \int_0^T v^{m_k}(s)\mathrm{d}s$$

obtenemos que $\xi = \psi(0) + \int_0^T v(s)\mathrm{d}s$, por lo que basta comparar con (4.29).

Por tanto, hemos probado hasta el momento que

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)), \ v \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u'(t) = v(t), \ t \in [-h,T], \\ v(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathcal{B}(s)\mathrm{d}s = \psi'(0) \\ + \int_0^t (\mathcal{F}_2(s) + f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (\mathcal{G}_1(s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(T) = \xi, \ v(T) = \eta, \\ u(t) = \psi(t), \ t \in [-h, 0]. \end{array}\right.$$

Para finalizar esta etapa basta con demostrar que $\mathcal{G}_1(t) = G_1(t, u_t, v_t)$, $\mathcal{B}(t) - \mathcal{F}_2(t) = B(t, v(t)) - F_2(t, u_t, v_t)$, $\forall t \in [0,T]$.

Para ello, consideremos $X, Y \in I^2(-h, T; V)$, tales que $X(t) = \psi(t), Y(t) = \psi'(t)$, p.c.t. $t \in (-h, 0)$, P-c.s. Definamos

$$\begin{aligned}
x^{m_k} &= 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle B(t, v^{m_k}(t)) - B(t, Y(t)), v^{m_k}(t) - Y(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\
&+\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A(t)(u^{m_k}(t) - X(t)), u^{m_k}(t) - X(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\
&+\widehat{\lambda} E\int_{-h}^0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\left\|\widetilde{P}_{m_k}\psi(t) - \psi(t)\right\|^2 + \left\|\widetilde{P}_{m_k}\psi'(t) - \psi'(t)\right\|^2\right) \mathrm{d}t \\
&+\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|v^{m_k}(t) - Y(t)\right|^2 \mathrm{d}t - \gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|v^{m_k}(t) - Y(t)\right\|^2 \mathrm{d}t \\
&-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|G_1(t, u_t^{m_k}, v_t^{m_k}) - G_1(t, X_t, Y_t)\right|^2 \mathrm{d}t \\
&-2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle F_2(t, u_t^{m_k}, v_t^{m_k}) - F_2(t, X_t, Y_t), v^{m_k}(t) - Y(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\
&-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A'(t)(u^{m_k}(t) - X(t)), u^{m_k}(t) - X(t)\right\rangle \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Entonces, debido a la hipótesis (H) y a $(A.3)$ tenemos que $x^{m_k} \geq 0$. Por otro lado, definamos

$$\begin{aligned}
y^{m_k} &= 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle B(t, v^{m_k}(t)), v^{m_k}(t)\right\rangle \mathrm{d}t + \lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A(t)u^{m_k}(t), u^{m_k}(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\
&+\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|v^{m_k}(t)\right|^2 \mathrm{d}t - \gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|v^{m_k}(t)\right\|^2 \mathrm{d}t \\
&-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|G_1(t, u_t^{m_k}, v_t^{m_k})\right|^2 \mathrm{d}t - 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda s}\left\langle F_2(t, u_t^{m_k}, v_t^{m_k}), v^{m_k}(t)\right\rangle \\
&-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A'(t)u^{m_k}(t), u^{m_k}(t)\right\rangle \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
& \lim_{k\to+\infty}(x^{m_k}-y^{m_k}) \\
= \; & -2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle \mathcal{B}(t),Y(t)\rangle\,\mathrm{d}t - 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle B(t,Y(t)),v(t)-Y(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
& -\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle A(t)X(t),u(t)-X(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
& -\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle A(t)u(t),X(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|Y(t)|^2\,\mathrm{d}t \\
& -2\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}((v(t),Y(t)))\mathrm{d}t - \gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\|Y(t)\|^2\,\mathrm{d}t \\
& +2\gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}((v(t),Y(t)))\mathrm{d}t - E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|G_1(t,X_t,Y_t)|^2\,\mathrm{d}t \\
& +2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathcal{G}_1(t),G_1(t,X_t,Y_t))\mathrm{d}t + 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda s}\langle \mathcal{F}_2(t),Y(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
& +2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda s}\langle F_2(t,X_t,Y_t),v(t)-Y(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
& +E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\big\langle A'(t)X(t),u(t)-X(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t + E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\big\langle A'(t)u(t),X(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\lambda T}E\,|v^{m_k}(T)|^2 + \mathrm{e}^{-\lambda T}E\,\langle A(T)u^{m_k}(T),u^{m_k}(T)\rangle - E\left\langle A(0)\widetilde{P}_{m_k}\psi(0),\widetilde{P}_{m_k}\psi(0)\right\rangle \\
& -E\left|P_{m_k}\psi'(0)\right|^2 + \lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|v^{m_k}(t)|^2\,\mathrm{d}t + \lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle A(t)u^{m_k}(t),u^{m_k}(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
\leq \; & E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\big\langle A'(t)u^{m_k}(t),u^{m_k}(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t - 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle B(t,v^{m_k}(t)),v^{m_k}(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
& +2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle F_2(t,u_t^{m_k},v_t^{m_k})+f(t),v^{m_k}(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
& +E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|G_1(t,u_t^{m_k},v_t^{m_k})+g(t)|^2\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
y^{m_k} \;\leq\; & -\mathrm{e}^{-\lambda T}E\,|v^{m_k}(T)|^2 - \mathrm{e}^{-\lambda T}E\,\langle A(T)u^{m_k}(T),u^{m_k}(T)\rangle \\
& +E\left|P_{m_k}\psi'(0)\right|^2 + E\left\langle A(0)\widetilde{P}_{m_k}\psi(0),\widetilde{P}_{m_k}\psi(0)\right\rangle \\
& -\gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\|v^{m_k}(t)\|^2\,\mathrm{d}t + 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle f(t),v^{m_k}(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
& +E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t + 2E\int_0^T (G_1(t,u_t^{m_k},v_t^{m_k}),g(t))\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

y entonces

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty} y^{m_k} \;\leq\;& -\mathrm{e}^{-\lambda T}E\,|v(T)|^2 - \mathrm{e}^{-\lambda T}E\,\langle A(T)u(T),u(T)\rangle + E\,\left|\psi'(0)\right|^2\\ &+E\,\langle A(0)\psi(0),\psi(0)\rangle - \gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\|v(t)\|^2\,\mathrm{d}t\\ &+2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle f(t),v(t)\rangle\,\mathrm{d}t + E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|g(t)|^2\,\mathrm{d}t\\ &+2E\int_0^T (\mathcal{G}_1(t),g(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\lambda T}E\,|v(T)|^2 + \mathrm{e}^{-\lambda T}E\,\langle A(T)u(T),u(T)\rangle - E\,\left|\psi'(0)\right|^2 - E\,\langle A(0)\psi(0),\psi(0)\rangle\\ &+\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|v(t)|^2\,\mathrm{d}t + \lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle A(t)u(t),u(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ =\;& E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A'(t)u(t),u(t)\right\rangle\mathrm{d}t - 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle \mathcal{B}(t),v(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &+2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle \mathcal{F}_2(t)+f(t),v(t)\rangle\,\mathrm{d}t + E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\mathcal{G}_1(t)+g(t)|^2\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

consecuentemente

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty} y^{m_k} \;\leq\;& \lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|v(t)|^2\,\mathrm{d}t + \lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle A(t)u(t),u(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A'(t)u(t),u(t)\right\rangle\mathrm{d}t\\ &-\gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\|v(t)\|^2\,\mathrm{d}t + 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle \mathcal{B}(t),v(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\mathcal{G}_1(t)|^2\,\mathrm{d}t - 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle \mathcal{F}_2(t),v(t)\rangle\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}0 \;\leq\;& \limsup_{k\to+\infty} x^{m_k} \leq 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle \mathcal{B}(t)-B(t,Y(t)),v(t)-Y(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A'(t)(u(t)-X(t)),u(t)-X(t)\right\rangle\mathrm{d}t\\ &-E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\mathcal{G}_1(t)-G_1(t,X_t,Y_t)|^2\,\mathrm{d}t\\ &-2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle \mathcal{F}_2(t)-F_2(t,X_t,Y_t),v(t)-Y(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &+\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\langle A(t)(u(t)-X(t)),u(t)-X(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &+\lambda E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|v(t)-Y(t)|^2\,\mathrm{d}t - \gamma E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\|v(t)-Y(t)\|^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Si ahora tomamos $X(t) = u(t)$ e $Y(t) = v(t)$ en la desigualdad anterior, entonces, se sigue de manera inmediata que $\mathcal{G}_1(t) = G_1(t, u_t, v_t)$, $t \in [0,T]$. Luego para concluir esta primera etapa sólo necesitamos comprobar que $\mathcal{B}(t) - \mathcal{F}_2(t) = B(t, v(t)) - F_2(t, u_t, v_t)$ $\forall t \in [0,T]$.

Si tomamos $X(t) = u(t) - \delta\widetilde{X}(t)$, $Y(t) = v(t) - \delta\widetilde{Y}(t)$, de tal modo que $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in I^2(-h,T;V)$, siendo $X(t) = Y(t) = 0$ p.c.t.$t \in (-h, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & 2\delta E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle \mathcal{B}(t) - B(t, v(t) - \delta\widetilde{Y}(t)), \widetilde{Y}(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\ & -\delta^2 E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A'(t)\widetilde{X}(t), \widetilde{X}(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\ & -2\delta E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle \mathcal{F}_2(t) - F_2(t, u_t - \delta\widetilde{X}_t, v_t - \delta\widetilde{Y}_t), \widetilde{Y}(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\ & +\lambda\delta^2 E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle A(t)\widetilde{X}(t), \widetilde{X}(t)\right\rangle \mathrm{d}t + \lambda\delta^2 E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\widetilde{Y}(t)\right|^2 \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

(hemos tenido en cuenta que $\gamma > 0$). Dividiendo por δ y haciendo $\delta \to 0$, obtenemos

$$0 \leq 2E\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\langle \mathcal{B}(t) - \mathcal{F}_2(t) - B(t, v(t)) + F_2(t, u_t, v_t), \widetilde{Y}(t)\right\rangle \mathrm{d}t,$$

(ya que tanto B como F_2 son hemicontinuas). Puesto que $\widetilde{Y}$ es arbitrario en $I^2(0,T;V)$, concluimos que $\mathcal{B}(t) - \mathcal{F}_2(t) = B(t, v(t)) - F_2(t, u_t, v_t)$ en $(0,T)$. Con esto finalizamos la demostración de la primera etapa.

Etapa 2: Ahora consideramos el problema completo (P). Sea $(u^0, v^0) \equiv (0,0)$ y definamos mediante recurrencia una sucesión de pares de procesos $\{(u^n, v^n)\}_{n \geq 1}$ de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} u^n \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)), \ v^n \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ (u^n)'(t) = v^n(t), \ t \in [-h,T], \\ v^n(t) = \psi'(0) - \int_0^t A(s)u^n(s)\mathrm{d}s - \int_0^t B(s, v^n(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (F_1(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}) + F_2(s, u_s^n, v_s^n) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s, u_s^{n-1}, v_s^{n-1}) + G_1(s, u_s^n, v_s^n) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u^n(t) = \psi(t), \ t \in [-h, 0]. \end{array} \right. \qquad (P^n)$$

Si $u^{n-1} \in L^2(\Omega; C(-h,T;V))$ y $v^{n-1} \in L^2(\Omega; C(-h,T;H)) \cap I^2(-h,T;V)$, entonces $F_1(t, u_t^{n-1}, v_t^{n-1}) \in I^2(0,T;V^*)$, $G_0(t, u_t^{n-1}, v_t^{n-1}) \in I^2(0,T;H)$ (gracias a la nota 6). Teniendo en cuenta la Etapa 1, tenemos asegurada la existencia de una única solución del problema (P^n).

Vamos a probar que $\{u^n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega; C(-h,T;V))$ y que $\{v^n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H))$. Teniendo en cuenta el teorema 15, aplicando la fórmula de Itô al proceso

$$e^{-\lambda t}\left|v^{n+1}(t)-v^n(t)\right|^2 + e^{-\lambda t}\left\langle A(t)(u^{n+1}(t)-u^n(t)), u^{n+1}(t)-u^n(t)\right\rangle$$

y usando las hipótesis (H), $(A.2)$ y $(A.3)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\lambda T}\left|v^{n+1}(t)-v^n(t)\right|^2 + \alpha \mathrm{e}^{-\lambda T}\left\|u^{n+1}(t)-u^n(t)\right\|^2 \\
& +\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}\int_0^t \left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
\leq\ & 2\int_0^t \left\langle F_1(s,u_s^n,v_s^n)-F_1(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}), v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t (G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}), v^{n+1}(s)-v^n(s))\mathrm{d}W(s) \\
& +2\int_0^t (G_1(s,u_s^{n+1},v_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n,v_s^n), v^{n+1}(s)-v^n(s))\mathrm{d}W(s) \\
& +\int_0^t \left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t (G_1(s,u_s^{n+1},v_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n,v_s^n), G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}))\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Si tomamos esperanzas y posteriormente supremos obtenemos

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\lambda T}\Bigg(\sup_{0\leq s\leq t} E\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2 + \alpha \sup_{0\leq s\leq t} E\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2 \\
& +\gamma E\int_0^t \left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s\Bigg) \\
\leq\ & 6E\int_0^t \left|\left\langle F_1(s,u_s^n,v_s^n)-F_1(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}), v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\rangle\right| \mathrm{d}s \\
& +3E\int_0^t \left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2 \mathrm{d}s \\
& +6E\int_0^t (G_1(s,u_s^{n+1},v_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n,v_s^n), G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}))\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Acotemos cada uno de los sumandos del lado derecho de la desigualdad anterior. Por un lado, gracias a $(G_1.4)$ y a $(G_0.5)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
& 6E\int_0^t (G_1(s,u_s^{n+1},v_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n,v_s^n),G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}))\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}}{3K_{G_1}}E\int_0^t \left|G_1(s,u_s^{n+1},v_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n,v_s^n)\right|^2\mathrm{d}s \\
& +\frac{27K_{G_1}}{\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}}E\int_0^t \left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}}{3}E\int_0^t \left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s+\frac{\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}}{3}E\int_0^t \left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s \\
& +\frac{27K_{G_1}C^{G_0}}{\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}}\int_0^t \left(\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por otro lado, gracias a $(F_1.5)$,

$$\begin{aligned}
& 6E\int_0^t \left|\left\langle F_1(s,u_s^n,v_s^n)-F_1(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\rangle\right|\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}}{3}E\int_0^t \left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s \\
& +\frac{27C^{F_1}}{\gamma \mathrm{e}^{-\lambda T}}\int_0^t \left(\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

De manera inmediata $(G_0.5)$ implica que

$$\begin{aligned}
& 3E\int_0^t \left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s \\
\leq\ & 3C^{G_0}\int_0^t \left(\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
& \sup_{0\leq s\leq t}E\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2+\alpha\sup_{0\leq s\leq t}E\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2 \\
& +\frac{\gamma}{3}E\int_0^t \left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s \\
\leq\ & \frac{\gamma}{3}\int_0^t \sup_{0\leq\theta\leq s}E\left\|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\right\|^2\mathrm{d}s \\
& +k\int_0^t \left(\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\leq\theta\leq s}E\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

donde $k=\mathrm{e}^{2\lambda T}\left(\frac{27K_{G_1}C^{G_0}}{\gamma}+\frac{27C^{F_1}}{\gamma}+3C^{G_0}\mathrm{e}^{-\lambda T}\right)$.

Si llamamos $\mathcal{X}^{n+1}(t) = \sup_{0\le s\le t} E\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2 + \sup_{0\le s\le t} E\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2$, entonces hemos demostrado que

$$\mathcal{X}^{n+1}(t) \le k_1 \int_0^t \mathcal{X}^n(s)\mathrm{d}s + k_2 \int_0^t \mathcal{X}^{n+1}(s)\mathrm{d}s,$$

donde $k_1 = \frac{\mathrm{e}^{2\lambda T}(27K_{G_1}C^{G_0}+27C^{F_1}+3\gamma C^{G_0}\mathrm{e}^{-\lambda T})}{\gamma \min(1,\alpha)}$ y $k_2 = \frac{\gamma}{3\min(1,\alpha)}$. Si ahora fijamos $t \in (0,T]$, podemos escribir, para todo $\theta \in [0,t]$,

$$\mathcal{X}^{n+1}(\theta) \le k_1 \int_0^\theta \mathcal{X}^n(s)\mathrm{d}s + k_2 \int_0^\theta \mathcal{X}^{n+1}(s)\mathrm{d}s \le k_1 \int_0^t \mathcal{X}^n(s)\mathrm{d}s + k_2 \int_0^\theta \mathcal{X}^{n+1}(s)\mathrm{d}s.$$

Puesto que t está fijo, aplicando Gronwall obtenemos

$$\mathcal{X}^{n+1}(\theta) \le \left(k_1 \int_0^t \mathcal{X}^n(s)\mathrm{d}s\right) e^{k_2 T}, \forall\theta \in [0,t],$$

luego

$$\mathcal{X}^{n+1}(t) \le k_1 e^{k_2 T} \int_0^t \mathcal{X}^n(s)\mathrm{d}s$$

e iterando llegamos a que

$$\mathcal{X}^{n+1}(t) \le \frac{(k_1 e^{k_2 T})^n}{n!}\mathcal{X}^1(T),\ \forall n \ge 1,\ \forall t \in [0,T].$$

Como consecuencia, para cada $n \ge 1$ se verifica

$$\sup_{0\le s\le T} E\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2 + \sup_{0\le s\le T} E\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2 \le \frac{(k_1 e^{k_2 T})^n}{n!}\mathcal{X}^1(T). \quad (4.32)$$

Además

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{3}E\int_0^T \left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2 \mathrm{d}s &\le k_1 \int_0^T \mathcal{X}^n(s)\mathrm{d}s + k_2 \int_0^T \mathcal{X}^{n+1}(s)\mathrm{d}s \\ &\le k_1 T \frac{(k_1 e^{k_2 T})^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{X}^1(T) + k_2 T \frac{(k_1 e^{k_2 T})^n}{n!}\mathcal{X}^1(T),\end{aligned}$$

es decir, puesto que además $v^{n+1}(t) = v^n(t)$, $\forall t \in [-h,0]$, $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $I^2(-h,T;V)$.

Para demostrar que $\{u^n\}_{n\ge 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega; C(-h,T;V))$ y $\{v^n\}_{n\ge 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega; C(-h,T;H))$ volvamos a (4.31). Ahora tomamos en primer lugar supremos y a continuación esperanzas. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{\lambda T}\left(E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|v^{n+1}(s)-v^{n}(s)\right|^2\right)+\alpha E\left(\sup_{0\le s\le t}\left\|u^{n+1}(s)-u^{n}(s)\right\|^2\right)\right.\\
& \left.+\gamma E\int_0^t\left\|v^{n+1}(s)-v^{n}(s)\right\|^2\mathrm{d}s\right)\\
\le\ & 6E\int_0^t\left|\left\langle F_1(s,u_s^n,v_s^n)-F_1(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^{n}(s)\right\rangle\right|\mathrm{d}s\\
& +6E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s(G_0(\theta,u_\theta^n,v_\theta^n)-G_0(\theta,u_\theta^{n-1},v_\theta^{n-1}),v^{n+1}(\theta)-v^{n}(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right)\\
& +6E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s(G_1(\theta,u_\theta^{n+1},v_\theta^{n+1})-G_1(\theta,u_\theta^n,v_\theta^n),v^{n+1}(\theta)-v^{n}(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right)\\
& +3E\int_0^t\left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s\\
& +6E\int_0^t(G_1(s,u_s^{n+1},v_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n,v_s^n),G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}))\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

De nuevo, gracias a $(F_1.5)$,

$$\begin{aligned}
& 6\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t\left|\left\langle F_1(s,u_s^n,v_s^n)-F_1(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}),v^{n+1}(s)-v^{n}(s)\right\rangle\right|\mathrm{d}s\\
\le\ & \frac{\gamma}{3}E\int_0^t\left\|v^{n+1}(s)-v^{n}(s)\right\|^2\mathrm{d}s\\
& +\frac{27\mathrm{e}^{2\lambda T}C^{F_1}}{\gamma}\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}E\left\|u^{n}(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}E\left|v^{n}(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Además, usando $(G_0.5)$,

$$\begin{aligned}
& 3\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t\left|G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1})\right|^2\mathrm{d}s\\
\le\ & 3\mathrm{e}^{\lambda T}C^{G_0}\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}E\left\|u^{n}(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}E\left|v^{n}(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

que junto con $(G_1.4)$ implica que

$$\begin{aligned}
& 6\mathrm{e}^{\lambda T}E\int_0^t(G_1(s,u_s^{n+1},v_s^{n+1})-G_1(s,u_s^n,v_s^n),G_0(s,u_s^n,v_s^n)-G_0(s,u_s^{n-1},v_s^{n-1}))\mathrm{d}s\\
\le\ & \frac{\gamma}{3}E\int_0^t\left\|u^{n+1}(s)-u^{n}(s)\right\|^2\mathrm{d}s+\frac{\gamma}{3}E\int_0^t\left\|v^{n+1}(s)-v^{n}(s)\right\|^2\mathrm{d}s\\
& +\frac{27\mathrm{e}^{2\lambda T}K_{G_1}C^{G_0}}{\gamma}\int_0^t\sup_{0\le\theta\le s}E\left\|u^{n}(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2\mathrm{d}s\\
& +\frac{27\mathrm{e}^{2\lambda T}K_{G_1}C^{G_0}}{\gamma}\int_0^t\sup_{0\le\theta\le s}E\left|v^{n}(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Acotamos ahora los sumandos estocásticos:

$$
\begin{aligned}
& 6\mathrm{e}^{\lambda T} E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (G_0(\theta,u_\theta^n,v_\theta^n)-G_0(\theta,u_\theta^{n-1},v_\theta^{n-1}),v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right)\\
\le\ & \frac{1}{3}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2\right)\\
& +243\mathrm{e}^{2\lambda T}C^{G_0}\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}E\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}E\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& 6\mathrm{e}^{\lambda T} E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (G_1(\theta,u_\theta^{n+1},v_\theta^{n+1})-G_1(\theta,u_\theta^n,v_\theta^n),v^{n+1}(\theta)-v^n(\theta))\mathrm{d}W(\theta)\right|\right)\\
\le\ & \frac{1}{3}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2\right)\\
& +243\mathrm{e}^{2\lambda T}K_{G_1}\left(E\int_0^t\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s+E\int_0^t\left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\exists k>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{3}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right|^2\right)+\alpha E\left(\sup_{0\le s\le t}\left\|u^{n+1}(s)-u^n(s)\right\|^2\right)\\
& +\frac{\gamma}{3}E\int_0^t\left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s\\
\le\ & (\frac{\gamma}{3}+243\mathrm{e}^{2\lambda T}K_{G_1})\int_0^t\sup_{0\le\theta\le s}E\left\|u^{n+1}(\theta)-u^n(\theta)\right\|^2\mathrm{d}s\\
& +243\mathrm{e}^{2\lambda T}K_{G_1}E\int_0^t\left\|v^{n+1}(s)-v^n(s)\right\|^2\mathrm{d}s\\
& +k\int_0^t\left(\sup_{0\le\theta\le s}E\left\|u^n(\theta)-u^{n-1}(\theta)\right\|^2+\sup_{0\le\theta\le s}E\left|v^n(\theta)-v^{n-1}(\theta)\right|^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta (4.32) y que $\{v^n\}_{n\ge1}$ es una sucesión de Cauchy en $I^2(-h,T;V)$, concluimos $\{u^n\}_{n\ge1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega;C(-h,T;V))$ y $\{v^n\}_{n\ge1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega;C(-h,T;H))$. Por tanto, existen tres procesos $u\in L^2(\Omega;C(-h,T;V))$, $\widetilde{v}\in L^2(\Omega;C(-h,T;H))$, $v\in I^2(-h,T;V)$ tales que

$$
\begin{aligned}
u^n &\to u \text{ en } L^2(\Omega;C(-h,T;V)), && (4.33)\\
v^n &\to \widetilde{v} \text{ en } L^2(\Omega;C(-h,T;H)), && (4.34)\\
v^n &\to v \text{ en } I^2(-h,T;V). && (4.35)
\end{aligned}
$$

Veamos en primer lugar que $v=\widetilde{v}$. Gracias a (4.34):

$$
\lim_{n\to+\infty}E\int_{-h}^T|v^n(s)-\widetilde{v}(s)|^2\mathrm{d}s\le\lim_{n\to+\infty}E\int_{-h}^T\sup_{-h\le\theta\le s}|v^n(\theta)-\widetilde{v}(\theta)|^2\mathrm{d}s=0,
$$

por tanto, $v^n \to \widetilde{v}$ en $I^2(-h,T;H)$. Comparando con (4.35) concluimos que

$$v = \widetilde{v} \tag{4.36}$$

Veamos qué relación hay entre u y v. Como $u^n \to u$ en $L^2(\Omega;C(-h,T;V)) \subset L^2(\Omega;C(-h,T;H))$, dado $w \in V \subset H$ se verifica que $(u^n(t),w) \to (u(t),w)$ en $L^2(\Omega \times (-h,T))$. Por otro lado, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^n(t),w) = (v^n(t),w) \to (v(t),w)$ en $L^2(\Omega \times (-h,T))$. Es decir, $\exists \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),w) = (v(t),w)$. Como V es denso en H, lo anterior implica que

$$\exists u'(t) = v(t).$$

Veamos ahora la convergencia del resto de los sumandos del problema (P^n):

Teniendo en cuenta (4.33) y la linealidad del operador A se verifica que

$$A(\cdot)u^n(\cdot) \to A(\cdot)u(\cdot) \text{ en } L^2(\Omega;C(0,T;V^*)). \tag{4.37}$$

Además (4.35) junto con $(B.3)$ implica que existe una subsucesión $\{B(t,v^{n_k}(t))\}_{n_k\geq 1} \subset \{B(t,v^n(t))\}_{n\geq 1}$ y un proceso $\mathcal{B} \in I^2(0,T;V^*)$ de manera que

$$B(t,v^{n_k}(t)) \rightharpoonup \mathcal{B}(t) \text{ en } I^2(0,T;V^*). \tag{4.38}$$

Gracias a (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) y a $(F_1.3)$ conseguimos demostrar que

$$F_1(\cdot,u^{n-1}_\cdot,v^{n-1}_\cdot) \to F_1(\cdot,u_\cdot,v_\cdot) \text{ en } I^2(0,T;V^*). \tag{4.39}$$

También, debido a las relaciones (4.33), (4.35) y $(F_2.4)$ obtenemos

$$F_2(\cdot,u^n_\cdot,v^n_\cdot) \to F_2(\cdot,u_\cdot,v_\cdot) \text{ en } I^2(0,T;V^*). \tag{4.40}$$

Con respecto a los términos estocásticos, por una parte, gracias a (4.33), (4.35) y a $(G_0.3)$, se verifica

$$G_0(\cdot,u^{n-1}_\cdot,v^{n-1}_\cdot) \to G_0(\cdot,u_\cdot,v_\cdot) \text{ en } I^2(0,T;H), \tag{4.41}$$

y, por otra,

$$G_1(\cdot,u^n_\cdot,v^n_\cdot) \to G_1(\cdot,u_\cdot,v_\cdot) \text{ en } I^2(0,T;H) \tag{4.42}$$

debido a $(G_1.4)$, (4.33) y (4.35). Haciendo $n \to +\infty$ en (P^n) las convergencias (4.33)-(4.42) implican

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega;C(-h,T;V)),\ v \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega;C(-h,T;H)), \\ u'(t) = v(t),\ t \in [-h,T], \\ v(t) = \psi'(0) - \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s - \int_0^t \mathcal{B}(s)\mathrm{d}s \\ +\int_0^t (F_1(s,u_s,v_s) + F_2(s,u_s,v_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ +\int_0^t (G_0(s,u_s,v_s) + G_1(s,u_s,v_s) + g(s))\mathrm{d}W(s),\ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t),\ t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Basta entonces demostrar que $B(t,u'(t)) = \mathcal{B}(t)$, $t \in (0,T)$, lo cual se obtiene siguiendo un argumento similar al que se hizo en el teorema 13. Por tanto, tenemos demostrado la existencia de solución del problema (P). ■

A continuación vamos a enunciar un teorema cuya demostración vamos a omitir, puesto que sigue los mismos pasos que la del teorema anterior.

Teorema 18 *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(A.1)-(A.4)$, $(B.1)-(B.5)$, $(F_1.1)-(F_1.3)$, $(F_2.1)-(F_2.4)$, $(G_0.1)-(G_0.3)$, $(G_1.1)-(G_1.4)$, (H), $(F_1.5)$ *y* $(G_0.5)$. *Si además consideramos* $\widetilde{F}_1 : (0,T) \times C(-h,0;V) \times C(-h,0;V) \to H$ *tal que:*

($\widetilde{F}_1.1$) *La aplicación* $t \in (0,T) \to \widetilde{F}_1(t,\xi,\eta) \in H$ *es medible Lebesgue, p.c.t.* t, $\forall(\xi,\eta) \in C(-h,0;V) \times C(-h,0;V)$.

($\widetilde{F}_1.2$) *p.c.t.* $t \in (0,T)$, *la aplicación* $(\xi,\eta) \in C(-h,0;V) \times C(-h,0;V) \to \widetilde{F}_1(t,\xi,\eta) \in H$ *es lineal.*

($\widetilde{F}_1.3$) *Existe* $C_{\widetilde{F}_1} > 0$ *tal que* $\forall \xi,\eta \in C(-h,0;V)$ *y p.c.t.* $t \in (0,T)$ *se verifica*

$$\left|\widetilde{F}_1(t,\xi,\eta)\right|^2 \leq C_{\widetilde{F}_1}(\|\xi\|^2_{C(-h,0;V)} + \|\eta\|^2_{C(-h,0;V)}).$$

($\widetilde{F}_1.4$) *Existe* $K_{\widetilde{F}_1} > 0$ *tal que* $\forall x,y \in C(-h,T;V)$ *y* $\forall t \in [0,T]$

$$\int_0^t \left|\widetilde{F}_1(s,x_s,y_s)\right|^2 \mathrm{d}s \leq K_{\widetilde{F}_1} \int_{-h}^t (\|x(s)\|^2 + \|y(s)\|^2)\mathrm{d}s.$$

Entonces, para cada $f \in I^2(0,T;V^*)$, $g \in I^2(0,T;H)$, $u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$, $v_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$, *y* $\psi \in L^2(\Omega;C(-h,0;V))$ *tal que* $\psi' \in I^2(-h,0;V) \cap L^2(\Omega;C(-h,0;H))$ *dados, existe una única solución del problema*

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega;C(-h,T;V)),\ u' \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega;C(-h,T;H)), \\ u'(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B(s,u'(s))\mathrm{d}s \\ = \psi'(0) + \int_0^t (F_1(s,u_s,u'_s) + \widetilde{F}_1(s,u_s,u'_s) + F_2(s,u_s,u'_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,u'_s) + G_1(s,u_s,u'_s) + g(s))\mathrm{d}W(s),\ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t),\ t \in [-h,0]. \end{cases}$$

Supongamos ahora que F_1 además satisface la hipótesis siguiente:

($F_1.4$) Existe $K_{F_1} > 0$ tal que $\forall x,\widetilde{x} \in C(-h,T;V), \forall\, y,\widetilde{y} \in C(-h,T;H)$ y $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \|F_1(s,x_s,y_s) - F_1(s,\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)\|_*^2 \,\mathrm{d}s \\ \leq\ & K_{F_1} \int_{-h}^t (\|x(s) - \widetilde{x}(s)\|^2 + |y(s) - \widetilde{y}(s)|^2)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

entonces, al igual que antes podemos demostrar el siguiente resultado:

Teorema 19 *Supongamos que se verifican* $(A.1)$-$(A.4)$, $(B.1)$-$(B.5)$, $(F_1.1)$-$(F_1.4)$, $(\widetilde{F}_1.1)$-$(\widetilde{F}_1.4)$, $(F_2.1)$-$(F_2.4)$, $(G_0.1)$-$(G_0.3)$, $(G_1.1)$-$(G_1.4)$ *y también* (H). *Entonces, para* $f \in I^2(0,T;V^*)$, $g \in I^2(0,T;H)$, $u_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$, $v_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P;H)$, $\varphi_1 \in I^2(-h,0;V)$ *y* $\varphi_2 \in I^2(-h,0;V)$ *dados, existe una única solución del problema*

$$\begin{cases} u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;V)), \;\; v \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega;C(0,T;H)), \\ u'(t) = v(t), \;\; t \in [0,T], \\ v(t) + \int_0^t A(s)u(s)ds + \int_0^t B(s,v(s))ds = v_0 \\ + \int_0^t (F_1(s,u_s,v_s) + \widetilde{F}_1(s,u_s,v_s) + F_2(s,u_s,v_s) + f(s))ds \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,v_s) + G_1(s,u_s,v_s) + g(s))dW(s), \;\; t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \\ u(t) = \varphi_1(t), \;\; v(t) = \varphi_2(t), \;\; p.c.t. \; t \in (-h,0). \end{cases}$$

Supongamos ahora que tenemos dos familias de operadores no lineales $\widetilde{A}(t,\cdot) : V \to V^*$ y $\widetilde{B}(t,\cdot) : H \to V^*$ definidas p.c.t. $t \in (0,T)$ verificando las hipótesis:

$(\widetilde{A}.1)$ Medibilidad: $\forall u \in V$, la aplicación $t \in (0,T) \to \widetilde{A}(t,u) \in V^*$ es medible Lebesgue.

$(\widetilde{A}.2)$ $\widetilde{A}(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(\widetilde{A}.3)$ Existe $L_{\widetilde{A}} > 0$ tal que $\left\|\widetilde{A}(t,u) - \widetilde{A}(t,\widetilde{u})\right\|_* \leq L_{\widetilde{A}} \|u - \widetilde{u}\|$, $\forall u, \widetilde{u} \in V$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(\widetilde{B}.1)$ Medibilidad: $\forall v \in H$, la aplicación $t \in (0,T) \to \widetilde{B}(t,v) \in V^*$ es medible Lebesgue.

$(\widetilde{B}.2)$ $\widetilde{B}(t,0) = 0$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

$(\widetilde{B}.3)$ Existe $L_{\widetilde{B}} > 0$ tal que $\left\|\widetilde{B}(t,v) - \widetilde{B}(t,\widetilde{v})\right\|_* \leq L_{\widetilde{B}} |v - \widetilde{v}|$, $\forall v, \widetilde{v} \in H$, p.c.t. $t \in (0,T)$.

Supongamos además que tenemos un operador $\widehat{B}(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(V;H))$.

Entonces podemos asegurar que bajo las condiciones del teorema 18 existe una única solución del problema

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega; C(-h,T;V)), \ u' \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ u'(t) + \int_0^t (A(s)u(s) + \widetilde{A}(s,u(s)))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (B(s,u'(s)) + \widetilde{B}(s,u'(s)) + \widehat{B}(s)u'(s))\mathrm{d}s \\ = \psi'(0) + \int_0^t (F_1(s,u_s,u_s') + \widetilde{F}_1(s,u_s,u_s') + F_2(s,u_s,u_s') + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,u_s') + G_1(s,u_s,u_s') + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(t) = \psi(t), \ t \in [-h,0]. \end{cases} \tag{R}$$

También podemos asegurar que existe una única solución del problema siguiente (suponiendo en este caso las condiciones del teorema 19):

$$\begin{cases} u \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;V)), \ v \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)), \\ u'(t) = v(t), \ t \in [0,T], \\ v(t) + \int_0^t (A(s)u(s) + \widetilde{A}(s,u(s)))\mathrm{d}s + \int_0^t (B(s,v(s)) + \widetilde{B}(s,v(s)) + \widehat{B}(s)v(s))\mathrm{d}s \\ = v_0 + \int_0^t (F_1(s,u_s,v_s) + \widetilde{F}_1(s,u_s,v_s) + F_2(s,u_s,v_s) + f(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t (G_0(s,u_s,v_s) + G_1(s,u_s,v_s) + g(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \\ u(t) = \varphi_1(t), \ v(t) = \varphi_2(t), \ \text{p.c.t. } t \in (-h,0). \end{cases}$$

Para finalizar este Capítulo vamos a analizar un par de ejemplos en los cuales aplicaremos algunos de los resultados obtenidos anteriormente.

Ejemplo 2

Supongamos que $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado cuya frontera $\partial\mathcal{O}$ es suficientemente regular. Sean $H = L^2(\mathcal{O})$ y $V = H^1(\mathcal{O})$. Supongamos que $A(t) = -\Delta$ para todo $t \in (0,T)$. Sea $\widetilde{h}_0 : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\widetilde{h}_0(t,0,0) = 0$, $\forall$ $t \in [0,T]$, de manera que exista $L_{\widetilde{h}_0} > 0$ tal que

$$|\widetilde{h}_0(t,a,y) - \widetilde{h}_0(t,\widetilde{a},\widetilde{y})| \leq L_{\widetilde{h}_0}(|a - \widetilde{a}| + |y - \widetilde{y}|),$$

$\forall (a,y), (\widetilde{a},\widetilde{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,T]$. Para cada $w \in H^1(\mathcal{O})$ y $t \in [0,T]$, vamos a denotar por $\widetilde{A}_0(t,w)$ al elemento de $L^2(\mathcal{O})$ definido por $\widetilde{A}_0(t,w)(x) = \widetilde{h}_0(t,w(x),\nabla w(x))$, p.c.t. $x \in \mathcal{O}$. Sea $k_0 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $(k_0(t,a) - k_0(t,\widetilde{a}))(a - \widetilde{a}) \geq$

$0\ \forall\, a, \widetilde{a} \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in [0,T]$, de manera que existen constantes $c_{k_0} > 0$ y $\beta > 0$ verificando

$$|k_0(t,a)| \le c_{k_0}|a|, \quad k_0(t,a)a \ge \beta a^2 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Supongamos también que $\widetilde{k}_0 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible tal que $\widetilde{k}_0(t,0) = 0$, $\forall t \in [0,T]$, y que exsite $L_{\widetilde{k}_0} > 0$ tal que

$$|\widetilde{k}_0(t,a) - \widetilde{k}_0(t,\widetilde{a})| \le L_{\widetilde{k}_0}|a - \widetilde{a}|,$$

$\forall a, \widetilde{a} \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,T]$. Dado $w \in L^2(\mathcal{O})$ denotemos, para $t \in [0,T]$, por $B_0(t,w)$ y $\widetilde{B}_0(t,w)$ las funciones de $L^2(\mathcal{O})$ definidas, p.c.t. $x \in \mathcal{O}$, por

$$B_0(t,w)(x) = k_0(t,w(x)), \quad \widetilde{B}_0(t,w)(x) = \widetilde{k}_0(t,w(x)).$$

Consideremos ahora dos funciones medibles $f_0 : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_0 : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y seis funciones medibles $\omega_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,6$, tales que $0 \le \omega_i(t) \le h$, $\forall t \in [0,T]$. Supongamos que $f_0(t,0,0,0) = g_0(t,0,0,0) = 0$, $\forall\, t \in [0,T]$, y que existe $L > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|f_0(t,a,y,b) - f_0(t,\widetilde{a},\widetilde{y},\widetilde{b})| &\le L(|a-\widetilde{a}| + |y-\widetilde{y}| + |b-\widetilde{b}|),\\
|g_0(t,a,y,b) - g_0(t,\widetilde{a},\widetilde{y},\widetilde{b})| &\le L(|a-\widetilde{a}| + |y-\widetilde{y}| + |b-\widetilde{b}|),
\end{aligned}$$

$\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, a, \widetilde{a}, b, \widetilde{b} \in \mathbb{R}$, $\forall\, y, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$. Para cada $(t,\xi,\eta) \in [0,T] \times C(-h,0;V) \times C(-h,0;H)$, vamos a denotar por $F_0(t,\xi,\eta)$ y $G_0(t,\xi,\eta)$ las funciones de $L^2(\mathcal{O})$ definidas, p.c.t. $x \in \mathcal{O}$, por

$$\begin{aligned}
F_0(t,\xi,\eta)(x) &= f_0(t,\xi(-\omega_1(t))(x), \nabla\xi(-\omega_2(t))(x), \eta(-\omega_3(t))(x)),\\
G_0(t,\xi,\eta)(x) &= g_0(t,\xi(-\omega_4(t))(x), \nabla\xi(-\omega_5(t))(x), \eta(-\omega_6(t))(x)).
\end{aligned}$$

Entonces se puede comprobar fácilmente que se satisfacen todas las condiciones del teorema 13 y de la nota 9, por tanto, para cada $f \in I^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))$, $g \in I^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))$, y $\psi \in L^2(\Omega; C(-h,0;H^1(\mathcal{O})))$ tal que $\psi' \in L^2(\Omega; C(-h,0;L^2(\mathcal{O})))$ podemos asegurar la existencia y unicidad de solución $u \in L^2(\Omega; C(-h,T;H^1(\mathcal{O})))$, tal que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega; C(-h,T;L^2(\mathcal{O})))$, del problema:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \widetilde{h}_0(t,u(t),\nabla u(t)) + k_0\left(t, \dfrac{\partial u}{\partial t}(t)\right) + \widetilde{k}_0\left(t, \dfrac{\partial u}{\partial t}(t)\right)\\
= \left(g_0\left(t, u(t-\omega_4(t)), \nabla u(t-\omega_5(t)), \dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\omega_6(t))\right) + g(t)\right)\dfrac{\partial W(t)}{\partial t}\\
+ f_0\left(t, u(t-\omega_1(t)), \nabla u(t-\omega_2(t)), \dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\omega_3(t))\right) + f(t), \text{ en } \mathcal{O} \times (0,T),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ en } \partial\mathcal{O} \times (0,T),\\
u(t) = \psi(t), \text{ en } \mathcal{O} \times [-h,0],
\end{array}\right.$$

donde hemos denotado por $\vec{n}$ al vector normal unitario exterior a $\partial\mathcal{O}$.

Ejemplo 3

Supongamos $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado. Sean $H = L^2(\mathcal{O})$, $V = H_0^1(\mathcal{O})$ y $V^* = H^{-1}(\mathcal{O})$. En este ejemplo vamos a suponer que $A(t)w = -\Delta w + w$, $\forall w \in H_0^1(\mathcal{O})$, $\forall t \in [0,T]$. Consideremos $\widetilde{h} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función medible tal que $\widetilde{h}(t,0,0) = 0$ $\forall t \in [0,T]$, y supongamos que existe $L_{\widetilde{h}} > 0$ tal que

$$|\widetilde{h}(t,a,y) - \widetilde{h}(t,\widetilde{a},\widetilde{y})| \leq L_{\widetilde{h}}(|a-\widetilde{a}| + |y-\widetilde{y}|),$$

$\forall (a,y), (\widetilde{a},\widetilde{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,T]$. Para cada $w \in H_0^1(\mathcal{O})$ y $t \in [0,T]$, denotemos por $\widetilde{A}(t,w)$ al elemento de $H^{-1}(\mathcal{O})$ definido por

$$\left\langle \widetilde{A}(t,w), v \right\rangle = \int_{\mathcal{O}} \widetilde{h}(t,w(x),\nabla w(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx - \int_{\mathcal{O}} w(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\mathcal{O}),$$

donde estamos denotando por "$\cdot$" al producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Para cada $w \in L^2(\mathcal{O})$ y $t \in [0,T]$, denotemos por $\widehat{B}(t,w)$ al elemento de $L^2(\mathcal{O})$ definido mediante $\widehat{B}(t,w)(x) = -w(x)$, p.c.t. $x \in \mathcal{O}$. Consideremos también dada una función continua $k : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que verifica $k(t,0) = 0$, $\forall t \in [0,T]$, existe $c > 0$ tal que $|k(t,y)| \leq c|y|$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,T]$, y tal que

$$(k(t,y) - k(t,\widetilde{y})) \cdot (y - \widetilde{y}) \geq 0, \quad \forall\, y, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t \in [0,T].$$

Para cada $w \in H_0^1(\mathcal{O})$ y $t \in [0,T]$, sea $B(t,w)$ el elemento de $H^{-1}(\mathcal{O})$ dado por

$$\langle B(t,w), v\rangle = \beta \int_{\mathcal{O}} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\mathcal{O}} w(x)v(x)\, dx + \int_{\mathcal{O}} k(t,\nabla w(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx,$$

$\forall\, v \in H_0^1(\mathcal{O})$, donde $\beta > 0$ es una constante fija. Sean ahora $f_{1_j} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ n funciones medibles, $\rho_{i_j} : [0,T] \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,...,n$, $3n$ funciones medibles tales que para cada (i,j) se verifica que $0 \leq \rho_{i_j}(t) \leq h$, $\forall t \in [0,T]$. Supongamos que $f_{1_j}(t,0,0,0) = 0$, $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall j = 1,...,n$, y que para cada j, existe $L_{f_{1_j}} > 0$ tal que

$$|f_{1_j}(t,a,y,b) - f_{1_j}(t,\widetilde{a},\widetilde{y},\widetilde{b})| \leq L_{f_{1_j}}(|a-\widetilde{a}| + |y-\widetilde{y}| + |b-\widetilde{b}|),$$

$\forall\, a,\widetilde{a},b,\widetilde{b} \in \mathbb{R}$, $\forall\, y,\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, t \in [0,T]$. Denotemos $F_1(t,\cdot,\cdot)$ la familia de operadores definida por

$$\langle F_1(t,\xi,\eta), v\rangle = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} f_{1_j}(t,\xi(-\rho_{1_j}(t))(x), \nabla\xi(-\rho_{2_j}(t))(x), \eta(-\rho_{3_j}(t))(x)) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\, dx,$$

$\forall\,(\xi,\eta)\in C(-h,0;V)\times C(-h,0;H)$, $\forall v\in V$, para cada $t\in[0,T]$. Consideremos también n funciones medibles $f_{2_j}:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, y $4n$ funciones $\tau_{i_j}:[0,T]\to\mathbb{R}$, $i=1,2,3,4$, $j=1,...,n$, de forma que para cada (i,j), $\tau_{i_j}\in C^1([0,T])$, $0\le\tau_{i_j}(t)\le h$, $\forall t\in[0,T]$, siendo $\tau_j^*=\max\limits_{1\le i\le 4}(\max\limits_{t\in[0,T]}\tau'_{i_j}(t))<1$. Supongamos que $f_{2_j}(t,0,0,0,0)=0$, $\forall\,t\in[0,T]$, $\forall j=1,...,n$, y que para cada j existe $L_{f_{2_j}}>0$ tal que

$$|f_{2_j}(t,a,y,b)-f_{2_j}(t,\widetilde{a},\widetilde{y},\widetilde{b})|^2\le L_{f_{2_j}}(|a-\widetilde{a}|^2+|y-\widetilde{y}|^2+|b-\widetilde{b}|^2+|z-\widetilde{z}|^2),$$

$\forall\,a,\widetilde{a},b,\widetilde{b}\in\mathbb{R}$, $\forall\,y,\widetilde{y},z,\widetilde{z}\in\mathbb{R}^n$, $\forall\,t\in[0,T]$. Denotemos $F_2(t,\cdot,\cdot)$ la familia de operadores definido por

$$\begin{aligned}&\langle F_2(t,\xi,\eta),v\rangle\\ =\;&-\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathcal{O}}f_{2_j}(t,\xi(-\tau_{1_j}(t)),\nabla\xi(-\tau_{2_j}(t)),\eta(-\tau_{3_j}(t)),\nabla\eta(-\tau_{4_j}(t)))(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx,\end{aligned}$$

$\forall\,(\xi,\eta)\in C(-h,0;V)\times C(-h,0;V)$, $\forall v\in V$, para cada $t\in[0,T]$. Consideremos también una función medible $g_0:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y tres funciones medibles $\omega_i:[0,T]\to\mathbb{R}$, $i=1,2,3$, tales que $0\le\omega_i(t)\le h$, $\forall t\in[0,T]$, $i=1,2,3$. Supongamos que $g_0(t,0,0,0)=0$, $\forall\,t\in[0,T]$, y que existe $L_{g_0}>0$ tal que

$$|g_0(t,a,y,b)-g_0(t,\widetilde{a},\widetilde{y},\widetilde{b})|\le L_{g_0}(|a-\widetilde{a}|+|y-\widetilde{y}|+|b-\widetilde{b}|),$$

$\forall t\in[0,T]$, $\forall\,a,\widetilde{a},b,\widetilde{b}\in\mathbb{R}$, $\forall\,y,\widetilde{y}\in\mathbb{R}^n$. Para cada $(t,\xi,\eta)\in[0,T]\times C(-h,0;V)\times C(-h,0;H)$, sea $G_0(t,\xi,\eta)$ la función de $L^2(\mathcal{O})$ definida como

$$G_0(t,\xi,\eta)(x)=g_0(t,\xi(-\omega_1(t))(x),\nabla\xi(-\omega_2(t))(x),\eta(-\omega_3(t))(x)),\quad \text{p.c.t.}\,x\in\mathcal{O}.$$

Vamos también a considerar una función medible $g_1:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que $g_1(t,0,0,0,0)=0$, $\forall\,t\in[0,T]$, de manera que existe $L_{g_1}>0$ tal que

$$|g_1(t,a,y,b,z)-g_1(t,\widetilde{a},\widetilde{y},\widetilde{b},\widetilde{z})|^2\le L_{g_1}(|a-\widetilde{a}|^2+|y-\widetilde{y}|^2+|b-\widetilde{b}|^2+|z-\widetilde{z}|^2),$$

$\forall\,a,\widetilde{a},b,\widetilde{b}\in\mathbb{R}$, $\forall\,y,\widetilde{y},z,\widetilde{z}\in\mathbb{R}^n$, $\forall\,t\in[0,T]$. Sean $\sigma_i\in C^1([0,T])$, $i=1,2,3,4$, cuatro funciones tales que $0\le\sigma_i(t)\le h$, $\forall t\in[0,T]$, $i=1,2,3,4$, siendo $\sigma^*=\max\limits_{1\le i\le 4}(\max\limits_{t\in[0,T]}\sigma'_i(t))<1$. Para cada $t\in[0,T]$ y $\xi,\eta\in C(-h,0;V)$, sea $G_1(t,\xi,\eta)$ el elemento de $L^2(\mathcal{O})$ definido por

$$G_1(t,\xi,\eta)(x)=g_1(t,\xi(-\sigma_1(t))(x),\nabla\xi(-\sigma_2(t))(x),\eta(-\sigma_3(t))(x),\nabla\eta(-\sigma_4(t))(x)),$$

p.c.t. $x \in \mathcal{O}$. Entonces, se puede comprobar que si suponemos que

$$2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L_{f_{2_j}}}{1-\tau_j^*}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{L_{g_1}}{1-\sigma^*} \leq \beta e^{-\beta T},$$

o bien

$$2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L_{f_{2_j}}}{1-\tau_j^*}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{L_{g_1}}{1-\sigma^*} < e^{-1}\max(2\beta, T^{-1}),$$

entonces se verifican todas las hipótesis del teorema 17 y la nota 9, por tanto, para cada $f \in I^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{O}))$, $g \in I^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))$, y $\psi \in L^2(\Omega;C(-h,0;H_0^1(\mathcal{O})))$ tal que $\psi' \in L^2(\Omega;C(-h,0;L^2(\mathcal{O}))) \cap I^2(0,T;H_0^1(\mathcal{O}))$, podemos asegurar la existencia y unicidad de $u \in L^2(\Omega;C(-h,T;H_0^1(\mathcal{O})))$, tal que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega;C(-h,T;L^2(\mathcal{O}))) \cap I^2(-h,T;H_0^1(\mathcal{O}))$, solución del correspondiente problema (R). Esta solución puede entenderse como la solución del problema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \nabla\cdot\widetilde{h}(t,u(t),\nabla u(t)) - \beta\Delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(t)\right) - \nabla\cdot k\left(t,\nabla\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(t)\right)\right) \\
= f(t) + \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_{1_j}}{\partial x_j}\left(t, u(t-\rho_{1_j}(t)), \nabla u(t-\rho_{2_j}(t)), \dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\rho_{3_j}(t))\right) \\
+ \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f_{2_j}}{\partial x_j}\left(t, u(t-\tau_{1_j}(t)), \nabla u(t-\tau_{2_j}(t)), \dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\tau_{3_j}(t)), \nabla\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\tau_{4_j}(t))\right)\right) \\
+ \left(g(t) + g_1\left(t, u(t-\sigma_1(t)), \nabla u(t-\sigma_2(t)), \dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\sigma_3(t)), \nabla\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\sigma_4(t))\right)\right)\right. \\
\left.+ g_0\left(t, u(t-\omega_1(t)), \nabla u(t-\omega_2(t)), \dfrac{\partial u}{\partial t}(t-\omega_3(t))\right)\right)\dfrac{\partial W(t)}{\partial t}, \text{ en } \mathcal{O}\times(0,T), \\
u = 0, \text{ sobre } \partial\mathcal{O}\times(0,T), \\
u(t) = \psi(t), \text{ en } \mathcal{O}\times[-h,0].
\end{array}\right.$$

Capítulo 5

Comportamiento asintótico de edp estocásticas no lineales

El principal objetivo de este Capítulo es analizar el comportamiento asintótico de ecuaciones diferenciales estocásticas, tanto en el caso en que no haya características hereditarias como en el que la ecuación estocástica contenga retardos.

Existen en la literatura diversas posibilidades para analizar dicho comportamiento asintótico. Por un lado, podemos considerar la estabilidad de los momentos (y más concretamente la estabilidad en media cuadrática), o bien, la estabilidad c.s. o trayectorial (ambas definiciones se establecerán en la próxima Sección). Por otro, es posible considerar un decaimiento de tipo exponencial o un decaimiento más general, siendo en este último caso la denominada función de decaimiento $\lambda(t)$ una función positiva definida para t suficientemente grande y tal que $\lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = +\infty$.

Bajo determinadas hipótesis la estabilidad de los momentos implica la estabilidad trayectorial (véase Caraballo et al. [16]), por lo que en este Capítulo nos interesaremos en un análisis directo de la estabilidad trayectorial para las ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo parabólico. Por otro lado, como a continuación veremos, nuestro objetivo será principalmente el estudio del comportamiento asintótico con una función de decaimiento $\lambda(t)$ general.

Como mencionamos en la Introducción, una de las herramientas más potentes en la teoría de estabilidad de sistemas diferenciales no lineales es el método de Lyapunov. Algunos resultados en los que este procedimiento es utilizado para demostrar estabilidad exponencial en media cuadrática se pueden encontrar, por ejemplo, en Khasminskii y Mandrekar [32], Liu y Mandrekar [43], [44], Liu [40], Ichikawa [30] y Haussmann [29].

Sin embargo, cuando un sistema diferencial no sea exponencialmente estable (no lo sean sus momentos o trayectorias) o no sepamos demostrar si lo es o no, será interesante plantear un análisis de su estabilidad con funciones de decaimiento más generales, es decir, intentaremos determinar, si es posible, la velocidad o grado de decaimiento con el que se "acercan" a otra solución.

Ilustremos con un ejemplo sencillo lo que estamos planteando. Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}X(t) = -\frac{q}{1+t}X(t)\mathrm{d}t + (1+t)^{-q}\mathrm{d}W(t), \ t \geq 0,$$

donde $q > \frac{1}{2}$ es una constante y $W(t)$ es un proceso de Wiener unidimensional sobre un espacio de probabilidad adecuado. No resulta difícil comprobar que la solución de dicha ecuación que satisface la condición inicial $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}$ viene dada por

$$X(t) = (X_0 + W(t))(1+t)^{-q}, \ t \geq 0.$$

Por tanto, se verifica que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{t} = 0,$$

lo cual impide asegurar decaimiento exponencial de la solución hacia cero.

Sin embargo, lo que sí se verifica es que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log t} \leq -\left(q - \frac{1}{2}\right), \ P - \text{c.s.},$$

es decir, tal y como vamos a definir, la solución tiende a cero polinomialmente c.s., aunque la ecuación no es exponencialmente estable. Vamos entonces a analizar otro tipo de acercamiento que tiene sentido en diversidad de situaciones prácticas donde la estabilidad exponencial no se verifica.

Aunque en el caso sin características hereditarias la técnica de Lyapunov es a veces válida para obtener condiciones suficientes para analizar la estabilidad de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, sin embargo, en el caso de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con características hereditarias, incluso cuando los retardos sean constantes, el método de Lyapunov es díficil de aplicar, como se pone de manifiesto en Krasovskii [35], donde se analiza la estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardos, o en Kushner [36] y El'sgol'ts y Norkin [23], donde se estudia la estabilidad para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. La razón fundamental estriba en que resulta mucho más difícil, siendo a veces imposible, construir funciones de Lyapunov para ecuaciones estocásticas con características hereditarias que para aquellas en donde no las hay. Por esta razón varios autores han desarrollado una técnica de comparación entre ambos tipos de ecuaciones, véase, por ejemplo, Krasovskii [35], Mao y Shah [48] y Caraballo et al. [19]. En dichos trabajos se analiza si la estabilidad para la ecuación sin retardos se transfiere de alguna manera a la ecuación con retardos.

Otro de nuestros objetivos es aplicar los resultados que obtengamos relativos a estabilidad asintótica c.s. de ecuaciones diferenciales estocásticas a lo que se conoce como estabilización tanto de sistemas deterministas como estocásticos. En concreto, analizaremos si la presencia de términos aleatorios en las ecuaciones de un modelo produce que las soluciones tengan un comportamiento muy diferente al de las soluciones del sistema sin ruidos. En dimensión finita el primer trabajo conocido es el de Has'minskii [28], donde se consigue estabilizar un sistema usando dos fuentes de ruido. También queremos mencionar Arnold [2], Arnold et al. [3] y Scheutzow [58], donde los resultados de estabilización son obtenidos usando términos aleatorios en el sentido de Stratonovich. Posteriormente, en Mao [45] y [46] se desarrolló una teoría sobre estabilización y desestabilización para sistemas no lineales finito-dimensionales mediante ruidos. Recientemente se han obtenido resultados relativos a estabilización de sistemas deterministas y estocásticos en Caraballo et al. [18] y Caraballo et al. [13].

En este Capítulo analizaremos en primer lugar el comportamiento asintótico c.s. de una ecuación diferencial estocástica de tipo parabólico sin características hereditarias. A continuación, estableceremos resultados relativos a la estabilización de problemas deterministas y estocásticos. Posteriormente, realizaremos un análisis de la estabilidad c.s. para una ecuación diferencial estocástica parabólica con retardos de tipo variable, donde veremos que somos capaces de garantizar la transferencia de la estabilidad asintótica c.s. del problema sin retardos al que sí los tiene. Finalmente analizaremos la estabilidad exponencial en media cuadrática de una ecuación diferencial estocástica de segundo orden en tiempo. A este respecto, queremos dejar constancia de que no conocemos la existencia de resultados en esta línea. Si bien, en Curtain [21] se prueban algunos resultados usando la teoría de semigrupos, no hemos encontrado resultados en nuestro marco variacional. Por ello, los resultados que probamos en esta Memoria son sólo una primera aportación al estudio del comportamiento asintótico de tales ecuaciones, tema en el que sin duda seguiremos trabajando.

En todo este Capítulo supondremos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completo con una filtración normal $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Para finalizar con esta descripción de lo que pretendemos sea este Capítulo, recordaremos la igualdad de la energía o fórmula de Itô que aplicaremos.

Sean V un espacio de Banach real separable y reflexivo, y H un espacio de Hilbert separable real tales que $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$, donde las inyecciones se supondrán continuas y densas.

Puesto que en las aplicaciones las funciones de Lyapunov que vamos a utilizar suelen tener la forma $U(t,x) = \lambda(t)\Phi(x)$, nos vamos a interesar únicamente en establecer una fórmula de Itô para dicho tipo de funciones. Supongamos que $\Phi : H \to \mathbb{R}$ verifica

(1) $\Phi(u)$ es dos veces Fréchet diferenciable en $u \in H$ con $\Phi(u)$, $\Phi'(u)$ y $\Phi''(u)$ localmente acotadas sobre H,

(2) $\Phi(u)$ y $\Phi'(u)$ son continuas sobre H,

(3) la aplicación $u \to \Phi''(u)$ es continua de H en $\mathcal{L}(H)$ débil,

(4) si $v \in V$ entonces $\Phi'(v) \in V$ y $v \to \langle \Phi'(v), u^* \rangle$ es continua para cada $u^* \in V^*$,

(5) $\exists k > 0$ tal que $\|\Phi'(v)\| \leq k(1 + \|v\|)$, $\forall v \in V$.

Supongamos que V y V^* son uniformemente convexos. Entonces se verifica el siguiente resultado:

Teorema 20 *Sea $p \geq 2$. Consideremos la función $U(t,x) = \lambda(t)\Phi(x)$, donde Φ es una aplicación de H en $\mathbb{R}$ verificando (1)-(5) y $\lambda \in C^1[0,T]$. Supongamos que $X(t) = X_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW(s)$, donde $X \in I^p(0,T;V)$, $X_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, P; H)$, $f \in I^{p'}(0,T;V^*)$ y $g \in I^p(0,T;H)$. Entonces, $\forall t \in [0,T]$, se verifica la fórmula de Itô siguiente:*

$$\begin{aligned} U(t,X(t)) &= U(0,X_0) + \int_0^t \lambda'(s)\Phi(X(s))ds + \int_0^t \lambda(s)\left\langle \Phi'(X(s)), f(s)\right\rangle ds \qquad (5.1)\\ &+ \int_0^t \lambda(s)(\Phi'(X(s)), g(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \lambda(s) tr(\Phi''(X(s))g(s), g(s))ds. \end{aligned}$$

Demostración. Véase Pardoux [52], tanto para la demostración de este resultado como para la definición de la traza de un operador. ■

Nota 10 *Observemos que (5.1) se puede escribir de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} U(t,X(t)) &= U(0,X_0) + \int_0^t U_s'(s,X(s))ds + \int_0^t \left\langle U_x'(s,X(s)), f(s)\right\rangle ds \qquad (5.2)\\ &+ \int_0^t (U_x'(s,X(s)), g(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t tr(U_{xx}''(s,X(s))g(s), g(s))ds. \end{aligned}$$

A partir de ahora supondremos que V y V^* son uniformemente convexos.

5.1 Propiedades de decaimiento de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas

En esta Sección, haciendo uso de lo que se denominará función de Lyapunov apropiada y la desigualdad exponencial de la martingala, obtendremos estimaciones sobre el exponente generalizado de Lyapunov de la solución de una ecuación en derivadas parciales estocástica sin características hereditarias. Dichas estimaciones proporcionarán condiciones suficientes para garantizar el decaimiento asintótico c.s. de las soluciones con determinada velocidad.

Recordemos que $I^p(0,T;V)$ (donde $p \geq 2$) es el subespacio cerrado de $L^p(\Omega \times (0,T), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]), P \otimes \mathrm{d}t; V)$ formado por todos los procesos estocásticos que son $\mathcal{F}_t$-adaptados p.c.t. $t \in (0,T)$.

Vamos a considerar el siguiente problema de valores iniciales para una ecuación en derivadas parciales estocástica en V^*:

$$\begin{cases} X \in I^p(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H)) \\ \mathrm{d}X(t) = f(t,X(t))\mathrm{d}t + g(t,X(t))\mathrm{d}W(t), \quad t \in [0,T], \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{5.3}$$

donde $T > 0$, $f(t,\cdot) : V \to V^*$ y $g(t,\cdot) : V \to H$ son dos familias de operadores no lineales, siendo $X_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, P; V)$ un dato inicial fijado arbitrariamente.

Supongamos que f y g verifican las siguientes hipótesis:

$(g.1)$ la aplicación $t \in (0,T) \to g(t,x) \in H$ es medible Lebesgue, $\forall x \in V$,

$(g.2)$ existe $L > 0$ tal que

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in V, \text{ p.c.t. } t,$$

$(f.1)$ la aplicación $t \in (0,T) \to f(t,x) \in V^*$ es medible Lebesgue, $\forall x \in V$,

$(f.2)$ hemicontinuidad: la aplicación $\theta \in \mathbb{R} \to \langle f(t, x + \theta y), z \rangle \in \mathbb{R}$ es continua $\forall x, y, z \in V$, p.c.t. t.

$(f.3)$ acotación: existe $c > 0$ tal que

$$\|f(t,x)\|_* \leq c \|x\|^{p-1} \ \forall x \in V, \text{ p.c.t. } t.$$

$(f.4)$ coercividad: $\exists \alpha > 0, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$2\langle f(t,x), x \rangle + \|g(t,x)\|^2 \leq -\alpha \|x\|^p + \lambda |x|^2 + \gamma \ \forall x \in V, \text{ p.c.t. } t.$$

$(f.5)$ monotonía:

$$-2\langle f(t,x) - f(t,y), x - y \rangle + \lambda |x - y|^2 \geq \|g(t,x) - g(t,y)\|^2 \ \forall x, y \in V, \text{ p.c.t. } t.$$

Teorema 21 *Supongamos que se verifican las hipótesis* $(g.1)-(g.2)$ *y* $(f.1)-(f.5)$. *Entonces, para cada* $X_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, P; V)$ *existe un único proceso* X *solución de (5.3). Es decir,* X *verifica la siguiente igualdad en* V^**:*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s), \forall t \in [0, T], \ P - c.s., \tag{5.4}$$

y se verifica la igualdad de la energía:

$$\begin{aligned} |X(t)|^2 &= |X_0|^2 + 2\int_0^t \langle X(s), f(s, X(s))\rangle \, ds \\ &\quad +2\int_0^t (X(s), g(s, X(s)))dW(s) + \int_0^t |g(s, X(s))|^2 \, ds. \end{aligned}$$

Demostración. Véase Pardoux [52]. ■

Obsérvese que los resultados que se establecieron en el Capítulo 3 también pueden utilizarse para asegurar la existencia y unicidad de solución del problema (5.3) cuando $p = 2$, suponiendo entonces que los retardos son idénticamente nulos.

A continuación precisaremos lo que vamos a entender por decaimiento de soluciones con determinada función y orden de decaimiento. Conviene precisar que si bien los resultados que vamos a establecer harán referencia sólo a la velocidad de decaimiento de las soluciones, i.e. al carácter atractivo de las mismas, cuando además se pueda asegurar estabilidad (posiblemente usando la misma o diferente función de Lyapunov), estaremos probando resultados sobre estabilidad asintótica.

Definición 19 *(a) La solución* X *de (5.3) (definida en el futuro, es decir, para* t *suficientemente grande) se dice que decae a cero exponencialmente en media cuadrática si existen constantes* $a > 0$ *y* $M_0 = M_0(X_0) > 0$ *tales que*

$$E\,|X(t, X_0)|^2 \leq M_0 e^{-at}, t \geq 0.$$

Si además 0 *es una solución de (5.3), la solución nula se dice que es exponencialmente atrayente en media cuadrática si cada solución de (5.3) decae a cero exponencialmente en media cuadrática con al menos orden* $a > 0$.

(b) La solución X *de (5.3) (definida en el futuro) se dice que decae a cero exponencialmente casi seguro si existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log |X(t, X_0)| \leq -\gamma, \quad P - c.s.$$

Si además 0 *es una solución de (5.3), la solución nula se dice que es casi seguramente exponencialmente atrayente si cada solución de (5.3) decae a cero exponencialmente casi seguro con al menos orden* γ.

Veamos ahora las mismas definiciones con función de decaimiento general: Sea $\lambda(t)$ una función positiva definida para $t > 0$ suficientemente grande tal que $\lim_{t \to +\infty} \lambda(t) = +\infty$.

Definición 20 *(a) La solución X de (5.3) (definida en el futuro) se dice que decae a cero en media cuadrática con función de decaimiento $\lambda(t)$ si existen constantes $a > 0$ y $M_0 = M_0(X_0) > 0$ tales que*

$$E|X(t, X_0)|^2 \leq M_0 \lambda(t)^{-a}, \ t \geq 0.$$

Si además 0 es una solución de (5.3), la solución nula se dice que es atrayente en media cuadrática con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos a, si cada solución de (5.3) decae a cero en media cuadrática con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos a.

(b) La solución X de (5.3) (definida en el futuro) se dice que decae a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $\gamma > 0$, si su exponente generalizado de Lyapunov es menor o igual que $-\gamma$ con probabilidad uno, es decir,

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log |X(t, X_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\gamma, \ P - c.s.$$

Si además 0 es una solución de (5.3), la solución nula se dice que es casi seguramente asintóticamente atrayente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos γ, si cada solución de (5.3) decae a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos γ.

Nota 11 *Observemos que el tipo de decaimiento que estamos considerando es de carácter global, pues exigimos que el decaimiento se verifique $\forall X_0$. Aunque se podría realizar el estudio de forma local, como los resultados que vamos a probar proporcionan cotas de los exponentes generalizados de forma global, por eso no nos restringimos a dicho caso.*

Nota 12 *Si en la definición anterior ponemos como función de decaimiento $\lambda(t)$ una del tipo $O(e^t)$ entonces lo que obtenemos es la definición de estabilidad exponencial.*

Según las definiciones anteriores podríamos plantearnos para el problema (5.3) la estabilidad en media cuadrática o la estabilidad casi segura. Además, podemos considerar un decaimiento de tipo exponencial o un decaimiento más general con función de decaimiento $\lambda(t)$ verificando las condiciones detalladas anteriormente. Sin embargo, bajo determinadas hipótesis la estabilidad de los momentos implica la estabilidad trayectorial, como puede comprobarse en Caraballo et al. [16], por lo que nos vamos a interesar en un análisis directo de la estabilidad trayectorial para (5.3). Además, principalmente estudiaremos el comportamiento asintótico con una función de decaimiento $\lambda(t)$ general.

Aunque en la primera Sección mencionamos que en las aplicaciones las funciones de Lyapunov que se suelen considerar son de la forma $U(t,x) = \lambda(t)\Phi(x)$, donde Φ es una aplicación de H en $\mathbb{R}$ verificando las hipótesis (1) – (5) que allí se establecieron y $\lambda \in C^1[0,T]$, $\forall T > 0$, sin embargo, los resultados los vamos a enunciar suponiendo la existencia de funciones $U(t,x) \in C^{1,2}([0,+\infty) \times H; \mathbb{R}^+)$ para las que se verifique (5.2). A una tal función la llamaremos función de Lyapunov apropiada para la fórmula de Itô.

Supongamos pues que $U(t,x) \in C^{1,2}([0,+\infty) \times H; \mathbb{R}^+)$ es una función de Lyapunov apropiada para la fórmula de Itô. Podemos entonces definir los operadores L y Q de la siguiente forma: para $x \in V$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} LU(t,x) &= U_t'(t,x) + \langle U_x'(t,x), f(t,x)\rangle + \frac{1}{2}(U_{xx}''(t,x)g(t,x), g(t,x)), \\ QU(t,x) &= (U_x'(t,x), g(t,x))^2. \end{aligned}$$

El siguiente resultado es un caso particular de la desigualdad exponencial de la martingala y será una herramienta básica para la mayoría de las demostraciones que se hagan a lo largo de este Capítulo.

Lema 2 *Supongamos que X es una solución de (5.3). Supongamos que $g(t,x)$ verifica las hipótesis (g.1) y (g.2), que $U(t,x)$ es una función de Lyapunov apropiada, y T, α, β son constantes positivas. Entonces se verifica*

$$P\left\{ \sup_{0 \le t \le T} \left[\int_0^t (U_x'(s,X(s)), g(s,X(s)))dW(s) - \int_0^t \frac{\alpha}{2} QU(s,X(s))ds \right] > \beta \right\} \le e^{-\alpha\beta}.$$

Demostración. Puesto que $\int_0^t (U_x'(s,X(s)), g(s,X(s)))\mathrm{d}W(s)$ es una martingala local y continua cuyo proceso de variación cuadrática viene dado por $\int_0^t QU(s,X(s))\mathrm{d}s$, este resultado es consecuencia inmediata del teorema 1. ∎

Vamos ya a establecer condiciones suficientes que aseguren el decaimiento c.s. de la solución de (5.3) con una determinada velocidad y orden.

Teorema 22 *Sea $U(t,x)$ una función de Lyapunov apropiada. Supongamos que* $\log\lambda(t)$ *es uniformemente continua sobre $t \in [T,+\infty)$ y que existe una constante $\tau \ge 0$ tal que*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log\log t}{\log \lambda(t)} \le \tau.$$

Sean $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ dos funciones continuas no negativas. Supongamos también que existen constantes $q > 0$, $m \geq 0, \mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ y una función decreciente $\xi(t) > 0$ tales que

(a) $|x|^q \lambda(t)^m \leq U(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b) $LU(t,x) + \xi(t)QU(t,x) \leq \varphi_1(t) + \varphi_2(t)U(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log \int_0^t \varphi_1(s)ds}{\log \lambda(t)} \leq \nu, \qquad \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_2(s)ds}{\log \lambda(t)} \leq \theta$$

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \geq -\mu.$$

Entonces, para cada solución X de (5.3) definida en el futuro se verifica

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log |X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - [\theta + (\nu \vee (\mu+\tau) \vee 0)]}{q}, \quad P - c.s.$$

En particular, si $m > \theta + (\nu \vee (\mu + \tau) \vee 0)$, la solución $X(t)$ decrece a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $\gamma = \frac{m-[\theta+(\nu\vee(\mu+\tau)\vee 0)]}{q}$.

Demostración. Comenzamos aplicando la fórmula de Itô a la función $U(t,x)$ y al proceso $X(t)$. Teniendo en cuenta las definiciones de L y Q, obtenemos que

$$\begin{aligned} U(t,X(t)) = U(0,X_0) &+ \int_0^t LU(s,X(s))\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t (U_x'(s,X(s)), g(s,X(s)))\mathrm{d}W(s). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Además, debido a la continuidad uniforme de $\log \lambda(t)$, podemos asegurar que para cada $\varepsilon > 0$ existen dos enteros positivos $N = N(\varepsilon)$ y $k_1(\varepsilon)$ tales que si $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_1(\varepsilon)$, entonces

$$\left|\log \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right) - \log \lambda(t)\right| \leq \varepsilon.$$

Por otro lado, debido a la desigualdad exponencial de la martingala tenemos que

$$P\left\{\omega : \sup_{0\leq t\leq w} \left[M(t) - \int_0^t \frac{u}{2} QU(s,X(s))\mathrm{d}s\right] > v\right\} \leq e^{-uv},$$

para cualesquiera constantes positivas u, v y w, donde

$$M(t) = \int_0^t (U_x'(s,X(s)), g(s,X(s)))\mathrm{d}W(s).$$

En particular, para el $\varepsilon > 0$ anterior, si escogemos

$$u = 2\xi\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad v = \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N}, \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

entonces podemos aplicar el lema de Borel-Cantelli y obtener así que, para casi todo $\omega \in \Omega$, existe un entero $k_0(\varepsilon, \omega) > 0$ tal que para $0 \le t \le \frac{k}{2^N}$, $k \ge k_0(\varepsilon, \omega)$ se verifica

$$\begin{aligned}\int_0^t (U_x'(s, X(s)), g(s, X(s)))\mathrm{d}W(s) &\le \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} \\ &\quad + \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t QU(s, X(s))\mathrm{d}s \\ &\le \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} \\ &\quad + \int_0^t \xi(s)QU(s, X(s))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.5) y usando la hipótesis (b), deducimos que

$$\begin{aligned}U(t, X(t)) = U(0, X_0) &+ \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} + \int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \varphi_2(s)U(s, X(s))\,\mathrm{d}s, \ P-\text{c.s.}\end{aligned}$$

para $0 \le t \le \frac{k}{2^N}$, $k \ge k_0(\varepsilon, \omega)$. Como consecuencia, gracias al lema de Gronwall, se sigue que

$$\begin{aligned}U(t, X(t)) = &\left(U(0, X_0) + \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} + \int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s\right) \\ &\times \exp\left(\int_0^t \varphi_2(s)\,\mathrm{d}s\right), \ P-\text{c.s.}\end{aligned}$$

para $0 \le t \le \frac{k}{2^N}$, $k \ge k_0(\varepsilon, \omega)$.

Por otro lado, teniendo en cuenta la condición (c) y la continuidad uniforme de $\log\lambda(t)$, podemos asegurar que $\exists k_1(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\textstyle\int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s \le \lambda(t)^{\nu+\varepsilon}, \quad \int_0^t \varphi_2(s)\mathrm{d}s \le (\theta+\varepsilon)\log\lambda(t), \quad \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1} \le \mathrm{e}^{\varepsilon(\mu+\varepsilon)}\lambda(t)^{\mu+\varepsilon}$$

para $\frac{k-1}{2^N} \le t \le \frac{k}{2^N}$, $k \ge k_1(\varepsilon)$. Además, las hipótesis sobre $\lambda(t)$ implican que

$$\log\frac{k-1}{2^N} \le \log t \le \lambda(t)^{\tau+\varepsilon} \quad \text{para} \quad \frac{k-1}{2^N} \le t \le \frac{k}{2^N}.$$

Por tanto, para casi todo $\omega \in \Omega$,

$$\log U(t, X(t)) \leq \log(U(0, X_0) + \lambda(t)^{\mu+\tau+2\varepsilon} e^{\varepsilon(\mu+\varepsilon)} + \lambda(t)^{\nu+\varepsilon}) + (\theta + \varepsilon) \log \lambda(t)$$

para $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\varepsilon, \omega) \vee k_1(\varepsilon)$, lo cual implica de manera inmediata que

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log U(t, X(t))}{\log \lambda(t)} \leq [(\mu + \tau + 2\varepsilon) \vee (\nu + \varepsilon) \vee 0] + \theta + \varepsilon, P - \text{c.s.}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, de la expresión anterior se deduce que

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log U(t, X(t))}{\log \lambda(t)} \leq [\nu \vee (\mu + \tau) \vee 0] + \theta, \ P - \text{c.s.}$$

Finalmente, gracias a la hipótesis (a) tenemos que

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log |X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - [\theta + (\nu \vee (\mu + \tau) \vee 0)]}{q}, \ P - \text{c.s.}$$

con lo que finalizamos esta demostración. ∎

En la Sección 5.3 veremos que hipótesis análogas a las del teorema anterior implican estabilidad asintótica de la solución de la ecuación en derivadas parciales estocástica con retardos (5.19).

Como consecuencia de la desigualdad de Young se puede probar un resultado que concierne el caso en el que aparezcan potencias fraccionarias en las estimaciones sobre L y Q.

Corolario 4 *Sea $U(t, x)$ una función de Lyapunov apropiada. Supongamos que* $\log\lambda(t)$ *es uniformemente continua sobre $t \in [T, +\infty)$ y que existe una constante $\tau \geq 0$ tal que*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log \log t}{\log \lambda(t)} \leq \tau.$$

Sean $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$ tres funciones continuas no negativas. Supongamos también que existen constantes $q > 0, m \geq 0, \mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ y una función decreciente $\xi(t) > 0$ tales que

(a) $|x|^q \lambda(t)^m \leq U(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b) $LU(t, x) + \xi(t) QU(t, x) \leq \varphi_1(t) + \varphi_2(t) U(t, x) + \varphi_3(t) U(t, x)^\alpha$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c)

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log \int_0^t (\varphi_1(s) + (1 - \alpha)\varphi_3(s))\, ds}{\log \lambda(t)} \leq \nu, \quad \limsup_{t \to +\infty} \frac{\int_0^t (\varphi_2(s) + \alpha \varphi_3(s))\, ds}{\log \lambda(t)} \leq \theta$$

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \geq -\mu.$$

Entonces para cada solución X del problema (5.3) definida en el futuro se verifica

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{m-[\theta+(\nu\vee(\mu+\tau)\vee 0)]}{q}, \quad P-c.s.$$

Por tanto, si $m>\theta+(\nu\vee(\mu+\tau)\vee 0)$, la solución $X(t)$ decae a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $\gamma=\frac{m-[\theta+(\nu\vee(\mu+\tau)\vee 0)]}{q}$.

Demostración. Observemos que de la desigualdad de Young ($ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, con $a,b\geq 0$, $p,q>1$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) se sigue inmediatamente

$$\begin{aligned}
\varphi_3(t)U(t,X(t))^{\alpha} &= \varphi_3(t)^{1-\alpha}\left(\varphi_3(t)U(t,X(t))\right)^{\alpha}\\
&\leq \frac{\varphi_3(t)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}}{\frac{1}{1-\alpha}}+\frac{\left(\varphi_3(t)U(t,X(t))\right)^{\frac{\alpha}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha}}\\
&= (1-\alpha)\varphi_3(t)+\alpha\varphi_3(t)U(t,X(t)),
\end{aligned}$$

con lo que este resultado es consecuencia inmediata del teorema 22. ■

En los resultados anteriores hemos necesitado suponer que $\log\lambda(t)$ es uniformemente continua sobre $t\in[T,+\infty)$ y que existe una constante $\tau\geq 0$ tal que

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\log t}{\log\lambda(t)}\leq\tau.$$

Vamos a ver a continuación que cuando el funcional $QU(t,x)$ está acotado entonces no es necesario imponer restricciones sobre $\lambda(t)$. Con esto conseguimos obtener resultados de estabilidad para una mayor cantidad de funciones de decaimiento.

En el siguiente teorema suponiendo que $QU(t,x)$ está acotado inferiormente de una determinada manera, podemos omitir la hipótesis de continuidad uniforme de $\log\lambda(t)$ a costa de exigir una imposición algo más fuerte sobre la velocidad de crecimiento de $\lambda(t)$. En concreto:

Teorema 23 *Sea $U(t,x)$ una función de Lyapunov apropiada. Supongamos que X es una solución de (5.3) verificando que $|X(t)|\neq 0$ para todo $t\geq 0$ y $P-c.s.$ supuesto que $|X_0|\neq 0$ $P-c.s.$ Sean $\varphi_1(t)\in\mathbb{R}$, $\varphi_2(t)\geq 0$ dos funciones continuas y supongamos además que existen constantes $q>0, m\geq 0, \nu\geq 0$, $\mu\geq 0$ y $\theta\in\mathbb{R}$ tales que*

(a) $|x|^q\lambda(t)^m\leq U(t,x)$, $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times V$.

(b) $LU(t,x)\leq\varphi_1(t)U(t,x)$, $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times V$.

(c) $QU(t,x)\geq\varphi_2(t)U(t,x)^2$, $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times V$.

(d)

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t\varphi_1(s)ds}{\log\lambda(t)}\leq\theta,\quad \liminf_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t\varphi_2(s)ds}{\log\lambda(t)}\geq 2\nu$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log t}{\log\lambda(t)}\leq\frac{\mu}{2}.$$

Entonces, para cada $\alpha \in (0,1)$, *se tiene*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{m-(\alpha^{-1}\mu+\theta-\nu(1-\alpha))}{q}, \ P-c.s.$$

Por tanto, si $m > \alpha^{-1}\mu + \theta - \nu(1-\alpha)$, *la solución* X *decae a cero casi seguramente con función de decaimiento* $\lambda(t)$ *y orden al menos* $\gamma_\alpha = \frac{m-(\alpha^{-1}\mu+\theta-\nu(1-\alpha))}{q}$.

Demostración. Fijemos un dato inicial X_0 tal que $|X_0| \neq 0$ P−c.s. Aplicando la fórmula de Itô obtenemos

$$\log U(t,X(t)) = \log U(0,X_0) + M(t) + \int_0^t \frac{LU(s,X(s))}{U(s,X(s))}\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{QU(s,X(s))}{U(s,X(s))^2}\,\mathrm{d}s, \tag{5.6}$$

donde

$$M(t) = \int_0^t \frac{1}{U(s,X(s))}(U'_x(s,X(s)), g(s,X(s)))\mathrm{d}W(s).$$

Si tenemos en cuenta la desigualdad exponencial de la martingala

$$P\left\{\omega : \sup_{0\leq t\leq w}\left[M(t) - \int_0^t \frac{u}{2}\frac{QU(s,X(s))}{U(s,X(s))^2}\mathrm{d}s\right] > v\right\} \leq e^{-uv}, \ u,v,w \in \mathbb{R}^+,$$

tomando en particular $0 < \alpha < 1$ y considerando

$$u = \alpha, \quad v = 2\alpha^{-1}\log(k-1), \quad w = k, \quad k = 2,3,...,$$

se deduce del lema de Borel-Cantelli que, para casi todo $\omega \in \Omega$, existe un entero $k_0(\varepsilon,\omega) > 0$ tal que

$$M(t) \leq 2\alpha^{-1}\log(k-1) + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \frac{QU(s,X(s))}{U(s,X(s))^2}\mathrm{d}s$$

para $0 \leq t \leq k$, $k \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. Sustituyendo lo anterior en (5.6), si además usamos la condición (c), conseguimos

$$\log U(t,X(t)) \leq \log U(0,X_0) + 2\alpha^{-1}\log(k-1) + \int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}(1-\alpha)\int_0^t \varphi_2(s)\,\mathrm{d}s$$

para $0 \leq t \leq k$, $k \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. Usando ahora la condición (d), se sigue que

$$\log U(t,X(t)) \leq \log U(0,X_0) + \frac{(\mu+\varepsilon)}{\alpha}\log\lambda(t) + (\theta+\varepsilon)\log\lambda(t) - \frac{1}{2}(1-\alpha)(2\nu-\varepsilon)\log\lambda(t)$$

para $k-1 \leq t \leq k$, $k \geq k_0(\varepsilon, \omega)$, lo que implica que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log U(t,X(t))}{\log \lambda(t)} \leq \alpha^{-1}(\mu+\varepsilon)+\theta+\varepsilon-\frac{1}{2}(1-\alpha)(2\nu-\varepsilon), \ P-\text{c.s.}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, teniendo en cuenta también la hipótesis (a), concluimos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log |X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m-\left(\alpha^{-1}\mu+\theta-\nu(1-\alpha)\right)}{q}, \ P-\text{c.s.},$$

con lo que queda demostrado el resultado. ■

La función de decaimiento en el teorema anterior depende del parámetro α. Por tanto, una cuestión interesante es saber cuál es el mayor valor que puede tomar γ_α. Para obtener el valor $\gamma^* = \sup_{0<\alpha<1} \gamma_\alpha$ basta con encontrar $f^* = \min_{0<\alpha<1} f(\alpha)$, donde f tiene la expresión $f(\alpha) = \alpha^{-1}\mu+\theta-\nu(1-\alpha)$, siendo entonces $\gamma^* = (m-f^*)/q$.

Pues bien, mediante unos cálculos directos podemos obtener que

$$f^* = \begin{cases} 2(\mu\nu)^{1/2}+\theta-\nu, & \text{si } 0 \leq \mu < \nu, \\ \mu+\theta, & \text{si } \nu \leq \mu, \end{cases}$$

y, entonces,

$$\gamma^* = \begin{cases} \frac{m-\left[2(\mu\nu)^{1/2}+\theta-\nu\right]}{q}, & \text{si } 0 \leq \mu < \nu, \\ \frac{m-[\mu+\theta]}{q}, & \text{si } \nu \leq \mu. \end{cases}$$

Finalmente, también podemos demostrar el siguiente resultado, en el que pondremos de relieve que si $QU(t,x)$ está acotado de la manera que a continuación veremos, entonces tampoco es necesario imponer restricción sobre la velocidad de decaimiento de $\lambda(t)$. Para la demostración usaremos la ley fuerte de los grandes números.

Teorema 24 *Sea $U(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H; \mathbb{R}^+)$ una función de Lyapunov apropiada y $\varphi_1(t) \in \mathbb{R}$, $\varphi_2(t) \geq 0$, $\varphi_3(t) \geq 0$ tres funciones continuas. Supongamos que existen constantes $q > 0, m \geq 0, \nu > 0$, $\mu \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que*

(a) $|x|^q \lambda(t)^m \leq U(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b) $LU(t,x) \leq \varphi_1(t) U(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c) $\varphi_2(t) U(t,x)^2 \leq QU(t,x) \leq \varphi_3(t) U(t,x)^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(d)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_1(s)\,ds}{\log \lambda(t)} \leq \theta, \qquad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_2(s)\,ds}{\log \lambda(t)} \geq 2\nu$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_3(s)\,ds}{\log \lambda(t)} \leq \mu.$$

Entonces, si X es una solución del problema (5.3) verificando que $|X(t)| \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y $P-$c.s. supuesto que $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s., se verifica que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{m-(\theta-\nu)}{q}, \quad P-c.s.$$

En particular, si $m > \theta - \nu$, la solución X decae a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $\gamma = \frac{m-(\theta-\nu)}{q}$.

Demostración. Fijemos $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. Si aplicamos la fórmula de Itô obtenemos nuevamente (5.6). Usando las hipótesis (b) y (c) se deduce que

$$\log U(t, X(t)) \leq \log U(0, X_0) + M(t) + \int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_2(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.7}$$

Por tanto, la hipótesis (d) junto con (5.7) implican

$$\log U(t, X(t)) \leq \log U(0, X_0) + M(t) + (\theta+\varepsilon)\log\lambda(t) - \frac{1}{2}(2\nu-\varepsilon)\log\lambda(t)$$

y, entonces,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log U(t, X(t))}{\log\lambda(t)} \leq \limsup_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{\log\lambda(t)} + \theta + \varepsilon - \frac{1}{2}(2\nu-\varepsilon), \ P-\text{c.s.}$$

Bajo las hipótesis impuestas, es fácil comprobar que $M(t)$ es una martingala local que se anula en $t = 0$. Además, si $\langle M(t)\rangle$ denota al proceso de variación cuadrática asociado a $M(t)$, la hipótesis (c) implica que

$$\int_0^t \varphi_2(s)\,\mathrm{d}s \leq \langle M(t)\rangle = \int_0^t \frac{QU(s, X(s))}{U(s, X(s))^2}ds \leq \int_0^t \varphi_3(s)\,\mathrm{d}s.$$

Puesto que $\nu > 0$, obtenemos que $\lim\limits_{t\to+\infty} \langle M(t)\rangle = +\infty$ y, si aplicamos la ley fuerte de los grandes números, concluimos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{\langle M(t)\rangle} = 0, \ P-\text{c.s.}$$

Por otra parte, como para t suficientemente grande se verifica que

$$\begin{aligned}\frac{|M(t)|}{\log\lambda(t)} &= \frac{|M(t)|}{\langle M(t)\rangle}\frac{\langle M(t)\rangle}{\log\lambda(t)} \\ &\leq \frac{|M(t)|}{\langle M(t)\rangle}\frac{\int_0^t \varphi_3(s)\,\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)},\end{aligned}$$

entonces, de la hipótesis (d) se sigue que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{\log\lambda(t)} = 0, \ P-\text{c.s.}$$

y, por tanto,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log U(t,X(t))}{\log \lambda(t)} \leq \theta + \varepsilon - \frac{1}{2}(2\nu - \varepsilon), \ P - \text{c.s.}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log |X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - (\theta - \nu)}{q}, \ P - \text{c.s.}$$

con lo que se concluye la demostración. ■

Ejemplo 4

Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera suficientemente regular y sea $p \geq 2$. Consideremos los espacios $V = W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, $H = L^2(\mathcal{O})$ con sus normas, producto escalar y producto de dualidad usuales. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = A(t)X(t)\mathrm{d}t + g(t,X(t))\mathrm{d}W(t), \ \ t > 0, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

donde $A(t)\colon V \to V^*$ es la familia de operadores monótonos definida por

$$\langle v, A(t)u\rangle = -\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{O}} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{O}} \frac{a}{1+t} u(x)v(x)\mathrm{d}x \ \ \forall u,v \in V,$$

donde $a \in \mathbb{R}$, y sea $g(t,u) = b\,(1+t)^{-1/2}\,u$, $b \in \mathbb{R}$, $u \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Consideremos la función de Lyapunov apropiada $U(t,u) = |u|^2$, $u \in H$. Entonces, las expresiones de $LU(t,u)$ y $QU(t,u)$ se deducen fácilmente. En efecto, por un lado,

$$LU(t,u) = 2\langle u, A(t)u\rangle + |g(t,u)|^2 = -2\|u\|^p + \frac{2a+b^2}{1+t}|u|^2, \ \ u \in V, \tag{5.8}$$

por lo que podemos tomar $\varphi_1(t) = (2a+b^2)(1+t)^{-1}$. Por otro,

$$QU(t,u) = (2u, b(1+t)^{-1/2}u)^2 = 4b^2\,(1+t)^{-1}\,|u|^4,$$

y entonces tomamos $\varphi_2(t) = \varphi_3(t) = 4b^2\,(1+t)^{-1}$.

Para intentar aplicar los resultados sobre decaimiento exponencial establecidos en Caraballo et al. [18], necesitaríamos determinar δ_0 y ρ_0 verificando

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_1(s)ds \leq \delta_0, \ \ \liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_2(s)ds \geq \rho_0,$$

de donde se deduciría que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log |X(t)|^2 \leq -(2\rho_0 - \delta_0), \ \ P - \text{c.s.}$$

Pero ambas constantes en este caso son iguales a 0 (i.e. $\rho_0 = \delta_0 = 0$), por lo que no sabemos si la solución decae exponencialmente a cero o no. Sin embargo, sí que podemos aplicar el teorema 24 y afirmar que la solución del problema anterior decae asintóticamente con un orden de decaimiento inferior al exponencial. Veamos esto con un poco de detalle: si consideramos $\lambda(t) = t$, $m = 0$ y $q = 2$ entonces se verifican las hipótesis del teorema 24, ya que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s}{\log \lambda(t)} &= \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t (2a+b^2)\,(1+s)^{-1}\,\mathrm{d}s}{\log t} = 2a + b^2, \\
\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_2(s)\mathrm{d}s}{\log \lambda(t)} &= \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t 4b^2\,(1+s)^{-1}\,\mathrm{d}s}{\log t} = 4b^2, \\
\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_3(s)\mathrm{d}s}{\log \lambda(t)} &= \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t 4b^2\,(1+s)^{-1}\,\mathrm{d}s}{\log t} = 4b^2,
\end{aligned}$$

por lo que podemos elegir $\theta = 2a + b^2, \nu = 2b^2, \mu = 4b^2$, y entonces

$$-\frac{m - (\theta - \nu)}{q} = -\frac{b^2 - 2a}{2}.$$

Por tanto, la solución decae a cero con función de decaimiento $\lambda(t) = t$ y orden al menos $\frac{b^2}{2} - a$ si suponemos que b es suficientemente grande, por ejemplo siempre que $b^2 > 2a$.

5.2 Resultados sobre estabilización estocástica

Como ya hemos mencionado anteriormente en esta Memoria, uno de los problemas más importantes en teoría de estabilidad es el de la estabilización de sistemas deterministas y/o estocásticos, mediante ruidos. En concreto, resulta de gran interés analizar si la presencia de términos aleatorios en las ecuaciones de un determinado modelo puede producir un comportamiento diferente al del modelo sin dichos términos.

Como ya mencionamos en la Introducción, al hacer el análisis del comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema diferencial estocástico es fundamental la elección que se hace del ruido, ya que dicho comportamiento puede ser totalmente diferente (véase Caraballo y Langa [14]). Los estabilizadores estocásticos que aquí vamos a utilizar serán considerados en el sentido de Itô.

Los resultados que hemos obtenido en la Sección anterior nos permiten establecer algún tipo de efecto estabilizante producido por el ruido sobre sistemas deterministas. Sobre este tema, Caraballo et al. [18] han probado algunos resultados sobre estabilización exponencial de sistemas tanto deterministas como estocásticos cuando un determinado tipo de ruido aparece en la ecuación. Pero puede ocurrir que el ruido no cause estabilidad exponencial, o que no sepamos determinar si el sistema perturbado estocásticamente es o no exponencialmente estable. Por tanto, resulta interesante investigar si el ruido produce algún tipo de estabilidad más débil (e.g. estabilidad polinomial, estabilidad logarítmica) o incluso más fuerte (e.g. superexponencial). Resultados en esta línea se encuentran en Caraballo et al. [12].

5.2.1 Estabilización de sistemas deterministas

Consideremos de nuevo el problema (5.3):

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = f(t, X(t))\mathrm{d}t + g(t, X(t))\mathrm{d}W(t), & t \in [0,T], \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

donde $f(t,\cdot) : V \to V^*$ y $g(t,\cdot) : V \to H$ son familias de operadores no lineales y $X_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, P; V)$, donde $p \geq 2$, es un dato inicial fijado arbitrariamente.

Nuevamente suponemos que tenemos garantizada la existencia y unicidad de un proceso $X \in I^p(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$ que es solución de (5.3), $\forall T > 0$. También vamos a suponer que $f(t,0) = g(t,0) = 0$ p.c.t. $t \in (0,T)$, es decir, vamos a analizar la estabilidad de la solución trivial.

El sistema (5.3) puede ser interpretado como una perturbación estocástica del sistema no lineal siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = f(t, X(t)), & t > 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Es bien conocido que bajo hipótesis de acotación, coercividad y monotonía del operador f, existe una única $X \in L^p(0,T;V) \cap C(0,T;H)$ solución del problema (5.9) $\forall T > 0$ (puede consultase, por ejemplo, Lions [37]).

Cuando el problema (5.9) no sea asintóticamente estable, nos interesaremos por estabilizar dicho problema mediante la consideración de una perturbación estocástica del tipo $g(t, X(t))\dot{W}(t)$ (es por lo que a menudo diremos que el problema (5.3) es una peturbación estocástica del problema (5.9)).

También podemos plantearnos la siguiente cuestión: dado el problema determinista (5.9), podemos analizar si el problema perturbado (5.3) posee mejores o peores propiedades de estabilidad. Ya hemos comentado anteriormente que este tipo de cuestiones ha sido analizada para estabilidad exponencial por Caraballo et al. [18], pero es posible que un sistema inestable no pueda ser estabilizado exponencialmente debido a que su inestabilidad sea de tipo superexponencial, de ahí que cobre más sentido lo que ahora estamos planteando.

De manera general es bastante difícil encontrar funciones de Lyapunov apropiadas. Sin embargo, vamos a demostrar cómo en determinadas ocasiones se puede proceder con $U(t,x) = \lambda(t)^m |x|^2$. En lo que sigue la función $\lambda(t)$ verificará ser continuamente diferenciable.

Teorema 25 *Supongamos que X es una solución de (5.3) verificando que $|X(t)| \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y $P-$c.s. supuesto que $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. Sean $\rho(t) \geq 0$, $\delta(t) \in \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Supongamos que existen constantes $\rho_0 \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ tales que*

(a) $2\langle x, f(t,x)\rangle + |g(t,x)|^2 \leq \delta(t)|x|^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b) $(g(t,x),x)^2 \geq \rho(t)|x|^4$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \delta(s)ds}{\log \lambda(t)} \leq \delta_0, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho(s)ds}{\log \lambda(t)} \geq \rho_0$$
$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log t}{\log \lambda(t)} \leq \frac{\mu}{2}.$$

Entonces, para cada $\alpha \in (0,1)$, se tiene que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{2\rho_0(1-\alpha) - \alpha^{-1}\mu - \delta_0}{2}, \ P-c.s.$$

Demostración. Fijemos $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. y sea $U(t,X(t)) = \lambda(t)^m |X(t)|^2$ para $m \geq 0$. Por un lado tenemos que el operador LU satisface

$$\begin{aligned} LU(t,X(t)) &= m\lambda'(t)\lambda(t)^{m-1}|X(t)|^2 + 2\lambda(t)^m\langle X(t), f(t,X(t))\rangle + \lambda(t)^m |g(t,X(t))|^2 \\ &\leq \left(m\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \delta(t)\right) U(t,X(t)), \end{aligned}$$

y, por otro, QU verifica

$$QU(t,X(t)) = 4\lambda(t)^{2m}(X(t), g(t,X(t)))^2 \geq 4\rho(t)U(t,X(t))^2.$$

Por tanto, si escogemos $\varphi_1(t) = m\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \delta(t)$ y $\varphi_2(t) = 4\rho(t)$, entonces obtenemos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s}{\log \lambda(t)} \leq m + \delta_0, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_2(s)\mathrm{d}s}{\log \lambda(t)} \geq 4\rho_0.$$

Teniendo en cuenta el teorema 23, concluimos que para cada $\alpha \in (0,1)$, se verifica que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - (\alpha^{-1}\mu + m + \delta_0 - 2\rho_0(1-\alpha))}{2}, P-\text{c.s.}$$

y así tenemos probado este resultado. ■

También se puede obtener de manera inmediata el siguiente resultado:

Teorema 26 *Sean $\delta(t) \in \mathbb{R}$, $\sigma(t) \geq 0$, $\rho(t) \geq 0$ tres funciones continuas. Supongamos que existen constantes $\delta_0 \in \mathbb{R}, \rho_0 > 0$, $\sigma_0 \geq 0$ tales que*

(a) $2\langle x, f(t,x)\rangle + |g(t,x)|^2 \leq \delta(t)|x|^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b) $\rho(t)\,|x|^4 \leq (g(t,x),x)^2 \leq \sigma(t)\,|x|^4$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \delta(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \delta_0, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho(s)ds}{\log\lambda(t)} \geq \rho_0$$
$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \sigma(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \sigma_0.$$

Entonces, si X es una solución de (5.3) verificando que $|X(t)| \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y $P-$c.s. supuesto que $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s., se tiene

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{2\rho_0-\delta_0}{2}, \quad P-c.s.$$

Demostración. Fijemos nuevamente $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. y consideremos la función de Lyapunov apropiada $U(t,X(t)) = \lambda(t)^m\,|X(t)|^2$ para $m \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} LU(t,X(t)) &= m\lambda'(t)\lambda(t)^{m-1}\,|X(t)|^2 + \lambda(t)^m\,|g(t,X(t))|^2 \\ &\quad + 2\lambda(t)^m\,\langle X(t), f(t,X(t))\rangle \\ &\leq \left(m\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \delta(t)\right)U(t,X(t)), \end{aligned}$$
$$4\rho(t)U(t,X(t))^2 \leq QU(t,X(t)) = 4\lambda(t)^{2m}(X(t),g(t,X(t)))^2 \leq 4\sigma(t)U(t,X(t))^2.$$

Por tanto, considerando $\varphi_1(t) = m\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}+\delta(t)$, $\varphi_2(t) = 4\rho(t)$ y $\varphi_3(t) = 4\sigma(t)$, obtenemos

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_1(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq m+\delta_0, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_2(s)ds}{\log\lambda(t)} \geq 4\rho_0, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_3(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq 4\sigma_0.$$

Aplicando el teorema 24, inmediatamente se deduce que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{m-(m+\delta_0-2\rho_0)}{2}, P-\text{c.s.}$$

Tenemos entonces probado este teorema. ■

Como aplicación, veamos cómo se puede estabilizar un problema determinista no estable:

Ejemplo 5

Sea $\mathcal{O}$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suficientemente regular y sea $p \geq 2$.

Consideremos los espacios $V = W_0^{1,p}(\mathcal{O})$, $H = L^2(\mathcal{O})$ con sus productos escalares y normas usuales, y consideremos el siguiente operador monótono $f(t,\cdot) : V \to V^*$ definido por

$$\langle v, f(t,u)\rangle = -\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{O}} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{O}} a(t)u(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad u, v \in V,$$

donde $a(\cdot)$ es una función continua. Consideremos el correspondiente problema determinista

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = f(t, X(t)), \quad t > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{5.10}$$

Entonces se comprueba fácilmente que

$$2\langle v, f(t,v)\rangle = -2\|v\|^p + 2a(t)|v|^2,$$

así que, si $a(t) \leq -a_0 < 0$, para todo $t > 0$, el problema determinista (5.10) es exponencialmente estable, ya que es inmediato deducir de la igualdad de la energía que $|X(t)|^2 \leq |X_0|^2 \exp(-2a_0 t), \forall t \geq 0$.

Si $a(t) \geq 0$ y además existe $K > 0$ tal que $|a(t)| \leq K$ para todo $t \geq 0$, entonces podemos estabilizar exponencialmente el problema (5.10) simplemente añadiendo el término aleatorio $g(t,v)\dot{W}(t) = bv\dot{W}(t)$, siendo $W(t)$ un proceso de Wiener real y b una constante suficientemente grande (véase Caraballo et al. [18]).

Sin embargo, cuando $|a(t)| \uparrow +\infty$, los resultados de Caraballo et al. [18] no se pueden aplicar pero sí el teorema anterior. Si consideramos, por ejemplo, $a(t) = a_0 t$, vamos a perturbar nuestro problema de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = f(t, X(t)) + bt^{1/2}X(t)\dot{W}(t), \quad t > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Veamos que podemos aplicar el teorema 26. Para ello, sean $\lambda(t) = \exp t^2$ y la función de Lyapunov $U(t,x) = |x|^2$. Entonces

$$2\langle x, f(t,x)\rangle + |g(t,x)|^2 \leq (2a_0 t + b^2 t)|x|^2,$$
$$(g(t,x), x)^2 = b^2 t |x|^4.$$

Podemos entonces considerar $\delta(t) = 2a_0t + b^2t$, y $\sigma(t) = \rho(t) = b^2t$. De manera inmediata llegamos a que

$$\delta_0 = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t (2a_0s + b^2s)\mathrm{d}s}{t^2} = a_0 + \frac{b^2}{2},$$

$$\sigma_0 = \rho_0 = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} = \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t b^2s\mathrm{d}s}{t^2} = \frac{b^2}{2}.$$

Por tanto, aplicando el teorema anterior deducimos que cada solución del problema (5.11) definida en el futuro satisface

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2} - a_0\right), \quad P-\text{c.s.},$$

con lo que las soluciones de (5.11) decaen hacia la solución nula con función de decaimiento $\exp t^2$ y orden al menos $\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2} - a_0\right)$ supuesto que $b^2 > 2a_0$.

5.2.2 Construcción de estabilizadores

Teniendo presente el estudio realizado anteriormente, resulta interesante analizar si se pueden dar algunos criterios sobre construcción de estabilizadores de tipo feedback. Esto, por supuesto, está muy relacionado con los problemas de control y controlabilidad de los sistemas diferenciales. Sin embargo, no es nuestro principal objetivo abordar este problema en la presente Memoria (véanse Fernández-Cara et al. [24] y [25]).

Para ilustrar este problema, consideremos el siguiente problema determinista

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = atX(t), \quad t > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cuya solución sabemos que viene dada por $X(t) = X_0\exp\left(a\frac{t^2}{2}\right)$. Luego para cualquier $a > 0$, la solución trivial de este problema es superexponencialmente inestable.

Consideremos ahora el siguiente problema perturbado del anterior:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = atX(t)\mathrm{d}t + b(t)X(t)\mathrm{d}W(t), \quad t > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.12}$$

donde $b(t)$, $t > 0$, es una función por determinar y $W(t)$ un proceso de Wiener real. La pregunta que nos hacemos es: ¿es posible elegir $b(t)$ de forma que el problema (5.12) sea estable con una determinada velocidad de decaimiento?

Para poder aplicar la teoría desarrollada por Caraballo et al. [18] hace falta que se verifique

$$2\langle x, f(t,x)\rangle + |b(t)x|^2 \leq \delta(t)|x|^2,$$

siendo $\delta(\cdot)$ una función continua no negativa tal que $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s \leq \delta_0 \in \mathbb{R}$.

En este ejemplo resulta que $\delta(t) = 2at + b(t)^2$ y $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left(2as + b(s)^2\right)\mathrm{d}s$ no está acotado, luego los resultados de Caraballo et al. [18] no proporcionan información sobre si la solución de (5.12) es o no exponencialmente estable.

Sin embargo, sí vamos a poder aplicar el teorema 26. Para ello, vamos a tomar $\lambda(t) = \exp t^2$ e introducimos la función de Lyapunov $U(t,x) = |x|^2$. Entonces, $\delta(t) = 2at + b(t)^2$, y $(g(t,x),x)^2 = (b(t)x,x)^2 = b(t)^2\,|x|^4$, con lo que podemos elegir $\sigma(t) = \rho(t) = b(t)^2$. Para determinar las constantes δ_0, ρ_0 y σ_0 que aparecen en el teorema 26, vamos a escoger $b(t) = b_1 t^{1/2}$, así que de manera inmediata llegamos a que

$$\delta_0 = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t (2as + b(s)^2)\mathrm{d}s}{t^2} = a + \frac{b_1^2}{2},$$

$$\sigma_0 = \rho_0 = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} = \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t b(s)^2\mathrm{d}s}{t^2} = \frac{b_1^2}{2}.$$

Por tanto, aplicando el teorema 26 deducimos que cada solución del problema (5.12) definida en el futuro satisface

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{2\rho_0 - \delta_0}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{b_1^2}{2} - a\right), \quad P-\text{c.s.},$$

con lo que las soluciones del problema estocástico decaen hacia cero con función de decaimiento $\exp t^2$ y orden al menos $\frac{1}{2}\left(\frac{b_1^2}{2} - a\right)$ supuesto que $b_1^2 > 2a$. Por tanto, para b_1^2 suficientemente grande hemos probado estabilización superexponencial.

Vamos a ver ahora cómo, motivados por el análisis precedente, para algunos problemas deterministas no lineales verificando alguna propiedad de disipatividad, somos capaces de construir estabilizadores generales.

Consideremos el problema determinista (5.9) donde suponemos que el operador f verifica que existe una función continua $\nu(\cdot)$ tal que

$$2\langle x, f(t,x)\rangle \leq \nu(t)|x|^2, \qquad \text{p.c.t. } t>0,\ \forall\, x\in V.$$

Supongamos que existe una función positiva y diferenciable $\lambda(t)$ tal que $\lambda'(t) > 0$ y $\lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = +\infty$, verificando

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \nu(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} \leq \nu_0 \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Podemos elegir entonces $g(t,x) = b(t)x$ con $b(t)^2 = b_1^2\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}$, $b_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, de forma que casi todas las trayectorias del problema estocástico (5.3) decaen asintóticamente hacia la solución nula con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden positivo. En realidad, como se verifican

$$2\langle x, f(t,x)\rangle + |g(t,x)|^2 \leq \left(\nu(t) + b(t)^2\right)|x|^2 \quad \text{y} \quad (x, g(t,x))^2 = b(t)^2|x|^4,$$

siendo

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \left(\nu(s) + b(s)^2\right) \mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} \leq \nu_0 + b_1^2,$$

aplicando el teorema 26 obtenemos que las trayectorias del sistema estocástico decaen c.s. hacia cero con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $b_1^2 - \nu_0 > 0$ si b_1 es suficientemente grande.

Teniendo en cuenta la situación anterior, puede parecer que es totalmente necesario el conocimiento a priori de la función $\lambda(\cdot)$. Sin embargo, no siempre es así. Por ejemplo, suponiendo que el operador f del problema (5.9) verifica que existe una función continua no negativa $\nu(\cdot)$ tal que

$$2\langle x, f(t,x)\rangle \leq \nu(t)|x|^2, \quad \text{p.c.t. } t > 0, \ \forall\, x \in V,$$

entonces podemos escoger $\lambda(t) = \exp\int_0^t \nu(s)\mathrm{d}s$, la cual satisface (5.13) con $\nu_0 = 1$. Por tanto, podemos construir $g(t,x) = b(t)x$ siendo $b(t) = b_1\nu(t)^{1/2}$ con $|b_1| > 1$ y, de este modo, nuestros resultados garantizan que la solución nula del problema perturbado atrae asintóticamente las trayectorias c.s. con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $b_1^2 - 1$.

5.2.3 Estabilización de sistemas estocásticos

Acabamos de analizar cómo se puede estabilizar un sistema diferencial determinista bajo condiciones adecuadas. Un problema similar puede ser planteado cuando uno se encuentre ante un sistema diferencial estocástico que no sea (o no se conozca si es) estable.

Como motivación consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = atX(t)\mathrm{d}t + b_1 t^{\frac{1}{2}} X(t)\mathrm{d}W_1(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.14}$$

donde $a > 0$, $b_1 \in \mathbb{R}$ y W_1 es un proceso de Wiener con valores reales. Vimos antes que cuando $b_1^2 > 2a$ este problema es trayectorialmente estable con velocidad de decaimiento superexponencial. Pero, ¿qué podemos decir acerca de su estabilidad cuando $b_1^2 \leq 2a$? Como los resultados que estamos viendo son condiciones suficientes, no sabemos si en este caso el problema es o no estable. Veremos un poco más adelante que añadiendo otro sumando estocástico del mismo tipo podemos estabilizar el problema sin que se modifique el valor medio esperado de las soluciones de ambos problemas.

Consideremos el siguiente sistema estocástico:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = f(t,X(t))\mathrm{d}t \\ +g_1(t,X(t))\mathrm{d}W_1(t) + g_2(t,X(t))\mathrm{d}W_2(t), \quad t \in [0,T], \\ X(0) = X_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, P; V), \end{cases} \tag{5.15}$$

donde suponemos que $p \geq 2$, siendo W_1 y W_2 dos procesos de Wiener con valores reales definidos sobre el mismo espacio de probabilidad, e independientes. Nuevamente $f(t,\cdot) : V \to V^*$ y $g_1(t,\cdot), g_2(t,\cdot) : V \to H$ son familias de operadores no acotados. En Pardoux [52] y en Caraballo et al. [11] se pueden consultar resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones del problema (5.15), en el espacio $I^p(0,T;V) \cap L^2(\Omega; C(0,T;H))$, $\forall T > 0$.

De la misma manera que antes, el sistema (5.15) puede ser interpretado como una perturbación estocástica del sistema diferencial estocástico siguiente

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = f(t,X(t))\mathrm{d}t + g_1(t,X(t))\mathrm{d}W_1(t), \quad t \in [0,T], \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Ahora, dada una función de Lyapunov apropiada $U(t,x)$ vamos a definir los operadores $\widetilde{L}$ y $\widetilde{Q}$ de forma similar a como se hizo en el caso de un solo proceso de Wiener: para $x \in V$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$\widetilde{L}U(t,x) = U_t'(t,x) + \langle U_x'(t,x), f(t,x)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(U_{xx}''(t,x)g_i(t,x), g_i(t,x)),$$

$$\widetilde{Q}U(t,x) = \sum_{i=1}^{2}(U_x'(t,x), g_i(t,x))^2,$$

Comenzaremos generalizando el teorema 23, de manera que consigamos un resultado mediante el cual podamos estabilizar el sistema diferencial estocástico (5.16).

Teorema 27 *Sea $U(t,x)$ una función de Lyapunov apropiada. Supongamos que X es una solución de (5.15) verificando que $|X(t)| \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y $P-$c.s. supuesto que $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. Sean $\varphi_1(t) \in \mathbb{R}$, $\varphi_2(t) \geq 0$ dos funciones continuas. Supongamos también que existen constantes $q > 0, m \geq 0, \nu \geq 0$, $\mu \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que*

(a) $|x|^q \lambda(t)^m \leq U(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b) $\widetilde{L}U(t,x) \leq \varphi_1(t)U(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c) $\widetilde{Q}U(t,x) \geq \varphi_2(t)U(t,x)^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(d)

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t\varphi_1(s)ds}{\log\lambda(t)}\le\theta,\quad \liminf_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t\varphi_2(s)ds}{\log\lambda(t)}\ge 2\nu$$
$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log t}{\log\lambda(t)}\le\frac{\mu}{4}.$$

Entonces, para cada $\alpha\in(0,1)$, se verifica que

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)}\le-\frac{m-(\alpha^{-1}\mu+\theta-\nu(1-\alpha))}{q},\ P-c.s.$$

En particular, si $m>\alpha^{-1}\mu+\theta-\nu(1-\alpha)$, la solución $X(t)$ decae a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $\gamma_\alpha=\frac{m-(\alpha^{-1}\mu+\theta-\nu(1-\alpha))}{q}$.

Demostración. Fijemos $X_0\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_0,P;V)$ tal que $|X_0|\neq0$ $P-$c.s. Aplicando la fórmula de Itô y teniendo en cuenta que W_1 y W_2 son independientes, tenemos que

$$\begin{aligned}\log U(t,X(t))=\log U(0,X_0)&+\int_0^t\frac{\widetilde{L}U(s,X(s))}{U(s,X(s))}\mathrm{d}s\\&-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\widetilde{Q}U(s,X(s))}{U(s,X(s))^2}\,\mathrm{d}s+M_1(t)+M_2(t)\end{aligned}\tag{5.17}$$

donde

$$M_i(t)=\int_0^t\frac{1}{U(s,X(s))}(U_x'(s,X(s)),g_i(s,X(s)))\mathrm{d}W_i(s),\ i=1,2.$$

Debido a la desigualdad exponencial de la martingala, para $i=1,2$, se verifica que

$$P\left\{\omega:\sup_{0\le t\le w}\left[M_i(t)-\int_0^t\frac{u}{2}\frac{(U_x'(s,X(s)),g_i(s,X(s)))^2}{U(s,X(s))^2}\mathrm{d}s\right]>v\right\}\le e^{-uv}$$

para cualesquiera constantes positivas u, v y w. En particular, si tomamos $0<\alpha<1$ y consideramos

$$u=\alpha,\quad v=2\alpha^{-1}\log(k-1),\quad w=k,\quad k=2,3,...,$$

aplicando el lema de Borel-Cantelli obtenemos que, para casi todo $\omega\in\Omega$, existe un entero $k_0(\omega)>0$ tal que

$$M_i(t)\le 2\alpha^{-1}\log(k-1)+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\frac{(U_x'(s,X(s)),g_i(s,X(s)))^2}{U(s,X(s))^2}\mathrm{d}s$$

para $0 \leq t \leq k$, $k \geq k_0(\omega)$, $i = 1, 2$. Sustituyendo la acotación anterior en (5.17)

$$
\begin{aligned}
\log U(t, X(t)) &\leq \log U(0, X_0) + 4\alpha^{-1} \log(k-1) \\
&+ \int_0^t \frac{\widetilde{L}U(s, X(s))}{U(s, X(s))} \mathrm{d}s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\widetilde{Q}U(s, X(s))}{U(s, X(s))^2} \mathrm{d}s \\
&+ \frac{\alpha}{2} \int_0^t \frac{(U_x'(s, X(s)), g_1(s, X(s)))^2}{U(s, X(s))^2} \mathrm{d}s \\
&+ \frac{\alpha}{2} \int_0^t \frac{(U_x'(s, X(s)), g_2(s, X(s)))^2}{U(s, X(s))^2} \mathrm{d}s \\
&\leq \log U(0, X_0) + 4\alpha^{-1} \log(k-1) \\
&+ \int_0^t \frac{\widetilde{L}U(s, X(s))}{U(s, X(s))} \mathrm{d}s - \frac{1}{2}(1-\alpha) \int_0^t \frac{\widetilde{Q}U(s, X(s))}{U(s, X(s))^2} \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

y teniendo en cuenta las condiciones (b) y (c), conseguimos

$$
\begin{aligned}
\log U(t, X(t)) \leq \log U(0, X_0) + 4\alpha^{-1} \log(k-1) + \int_0^t \varphi_1(s) \mathrm{d}s \\
- \frac{1}{2}(1-\alpha) \int_0^t \varphi_2(s) \, \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

para $0 \leq t \leq k$, $k \geq k_0(\omega)$. Usando ahora la condición (d), se sigue que dado $\varepsilon > 0$, $\exists k_1(\varepsilon)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\log U(t, X(t)) \leq \log U(0, X_0) + (\theta + \varepsilon) \log \lambda(t) \\
- \frac{1}{2} (1-\alpha) (2\nu - \varepsilon) \log \lambda(t) + \frac{(\mu + \varepsilon)}{\alpha} \log \lambda(t)
\end{aligned}
$$

para $k - 1 \leq t \leq k$, $k \geq k_0(\omega) \vee k_1(\varepsilon)$, lo cual implica que

$$
\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log U(t, X(t))}{\log \lambda(t)} \leq \alpha^{-1} (\mu + \varepsilon) + \theta + \varepsilon - \frac{1}{2} (1-\alpha) (2\nu - \varepsilon), \; P-\text{c.s.}
$$

Teniendo ahora en cuenta que $\varepsilon > 0$ es arbitrario y usando (a) podemos deducir que

$$
\limsup_{t \to +\infty} \frac{\log |X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - (\alpha^{-1}\mu + \theta - \nu (1-\alpha))}{q}, \; P-\text{c.s.},
$$

como necesitábamos probar. ■

Como caso particular, podemos establecer un resultado para $U(t, x) = \lambda(t)^m |x|^2$.

Teorema 28 *Supongamos que X es una solución de (5.15) verificando que $|X(t)| \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y P–c.s. supuesto que $|X_0| \neq 0$ P–c.s. Sean $\rho(t) \geq 0$, $\delta(t) \in \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Supongamos que existen constantes $\rho_0 \geq 0$, $\mu \geq 0, \delta_0 \in \mathbb{R}$ tales que*

(a) $2 \langle x, f(t, x) \rangle + |g_1(t, x)|^2 + |g_2(t, x)|^2 \leq \delta(t)|x|^2$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b)$\rho(t)\,|x|^4 \leq (g_1(t,x),x)^2 + (g_2(t,x),x)^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \delta(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \delta_0, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho(s)ds}{\log\lambda(t)} \geq \rho_0$$
$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log t}{\log\lambda(t)} \leq \frac{\mu}{4}.$$

Entonces, para cada $\alpha \in (0,1)$, *se tiene*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{2\rho_0(1-\alpha) - \alpha^{-1}\mu - \delta_0}{2}, \; P - c.s.$$

Demostración. Fijemos $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. Sea $U(t,X(t)) = \lambda(t)^m |X(t)|^2$ donde $m \geq 0$ y calculemos estimaciones para $\widetilde{L}U$ y $\widetilde{Q}U$.

Por un lado,

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}U(t,X(t)) &= m\lambda'(t)\lambda(t)^{m-1}|X(t)|^2 + 2\lambda(t)^m \langle X(t), f(t,X(t))\rangle \\
&\quad + \lambda(t)^m \left(|g_1(t,X(t))|^2 + |g_2(t,X(t))|^2\right) \\
&\leq m\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\lambda(t)^m |X(t)|^2 + \lambda(t)^m\delta(t)|X(t)|^2 \\
&= \left(m\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \delta(t)\right)U(t,X(t)),
\end{aligned}$$

y, por otro,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}U(t,X(t)) &= 4\lambda(t)^{2m}(X(t),g_1(t,X(t)))^2 + 4\lambda(t)^{2m}(X(t),g_2(t,X(t)))^2 \\
&\geq 4\lambda(t)^{2m}\rho(t)|X(t)|^4 = 4\rho(t)U(t,X(t))^2.
\end{aligned}$$

Como consecuencia, si consideramos $\varphi_1(t) = m\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \delta(t)$ y $\varphi_2(t) = 4\rho(t)$, tenemos

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} \leq m + \delta_0, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_2(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} \geq 4\rho_0.$$

Teniendo en cuenta entonces el teorema 27, para cada $\alpha \in (0,1)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} &\leq -\frac{m - (\alpha^{-1}\mu + m + \delta_0 - 2\rho_0(1-\alpha))}{2} \\
&= -\frac{2\rho_0(1-\alpha) - \alpha^{-1}\mu - \delta_0}{2}, \; P - \text{c.s.},
\end{aligned}$$

como queríamos probar. ∎

El siguiente resultado es una extensión del teorema 26:

Teorema 29 *Supongamos que X es una solución de (5.15) verificando que $|X(t)| \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y $P-$c.s. supuesto que $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. Supongamos que existen constantes $\rho_{1_0}, \rho_{2_0} > 0$, $\sigma_{1_0}, \sigma_{2_0}, \delta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$ y sean $\rho_1(t), \rho_2(t), \gamma(t) \geq 0$, $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \delta(t) \in \mathbb{R}$ seis funciones continuas tales que*

(a) $2\langle x, f(t,x)\rangle + |g_1(t,x)|^2 \leq \delta(t)|x|^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b)$|g_2(t,x)|^2 \leq \gamma(t)|x|^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(c)$\rho_i(t)\,|x|^4 \leq (g_i(t,x),x)^2 \leq \sigma_i(t)\,|x|^4$, $i = 1,2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(d)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \delta(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \delta_0, \qquad \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \gamma(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \gamma_0$$

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho_i(s)ds}{\log\lambda(t)} \geq \rho_{i_0}, \quad (i=1,2), \quad \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \sigma_i(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \sigma_{i_0}, \quad (i=1,2).$$

Entonces,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\left(\rho_{1_0} + \rho_{2_0} - \frac{1}{2}(\delta_0+\gamma_0)\right), \ P-c.s.$$

En particular, si $\rho_{1_0} + \rho_{2_0} - \frac{1}{2}(\delta_0+\gamma_0) > 0$, la solución $X(t)$ decae a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $\rho_{1_0} + \rho_{2_0} - \frac{1}{2}(\delta_0+\gamma_0)$.

Demostración. Fijemos de nuevo $|X_0| \neq 0$ $P-$c.s. Aplicando la fórmula de Itô a $\log(\lambda(t)^m\,|X(t)|^2)$, donde $m \geq 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\log(\lambda(t)^m\,|X(t)|^2) &= \log(\lambda(0)^m\,|X_0|^2) + \int_0^t m\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)}\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \frac{2\langle X(s), f(s,X(s))\rangle}{|X(s)|^2}\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \frac{1}{|X(s)|^2}\sum_{i=1}^2 |g_i(s,X(s))|^2\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \frac{2}{|X(s)|^2}\sum_{i=1}^2 (X(s), g_i(s,X(s)))\mathrm{d}W_i(s) \\
&- \int_0^t \frac{2}{|X(s)|^4}\sum_{i=1}^2 (X(s), g_i(s,X(s)))^2\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Sean $M_i(t) = \int_0^t \frac{2}{|X(s)|^2}(X(s), g_i(s,X(s)))\mathrm{d}W_i(s)$, i=1,2, y denotemos mediante $\langle M_i(t)\rangle$ al proceso de variación cuadrática asociado a $M_i(t)$, $i = 1,2$. Teniendo presente nuestras hipótesis es cierto que $M_i(t)$ es una martingala local que se anula para $t = 0$ y además

$$\int_0^t 4\rho_i(s)\,\mathrm{d}s \leq \langle M_i(t)\rangle = \int_0^t \frac{4}{|X(s)|^4}(X(s), g_i(s,X(s)))^2\mathrm{d}s \leq \int_0^t 4\sigma_i(s)\,\mathrm{d}s.$$

Como por hipótesis $\rho_{i_0} > 0$, $i = 1, 2$, se sigue que $\lim_{t\to+\infty} \langle M_i(t)\rangle = +\infty$ y, gracias a la ley fuerte de los grandes números, obtenemos que $\lim_{t\to+\infty} \frac{M_i(t)}{\langle M_i(t)\rangle} = 0$, $P-$c.s. Por tanto, la hipótesis (d) implica que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{M_i(t)}{\log\lambda(t)} \leq \limsup_{t\to+\infty} \frac{|M_i(t)|}{\langle M_i(t)\rangle} \frac{\int_0^t 4\sigma_i(s)\,\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} = 0, P - \text{c.s.}$$

En consecuencia, de (5.18) concluimos que

$$\begin{aligned} m + 2\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} &\leq m + \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} + \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} \\ &\quad - 2\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho_1(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} - 2\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \rho_2(s)\mathrm{d}s}{\log\lambda(t)} \\ &\leq m + \delta_0 + \gamma_0 - 2\rho_{1_0} - 2\rho_{2_0},\ P - \text{c.s.} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\left(\rho_{1_0} + \rho_{2_0} - \frac{1}{2}(\delta_0 + \gamma_0)\right), P - \text{c.s.}$$

como queríamos probar. ■

Como aplicación, constataremos en el ejemplo anterior, cómo puede ser estabilizado mediante la consideración de otra perturbación estocástica del mismo tipo.

Ejemplo 6

Consideremos de nuevo el problema (5.14) y la siguiente perturbación estocástica

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = atX(t)\mathrm{d}t + b_1t^{\frac{1}{2}}X(t)\mathrm{d}W_1(t) + b_2t^{\frac{1}{2}}X(t)\mathrm{d}W_2(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $a > 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y W_1, W_2 son dos procesos de Wiener reales e independientes. Como mencionamos antes, no conocemos si el problema (5.14) es estable o no cuando $\frac{b_1^2}{2} - a \leq 0$. Sin embargo, vamos a ver a continuación que introduciendo el sumando $b_2t^{\frac{1}{2}}X(t)\dot{W}_2(t)$ se produce un efecto estabilizante. Para ello aplicamos el teorema 29. Fácilmente se comprueba que

$$2\langle x, f(t,x)\rangle + |g_1(t,x)|^2 = (2at + b_1^2t)\,|x|^2,$$
$$|g_2(t,x)|^2 = b_2^2t\,|x|^2,\ (g_1(t,x),x)^2 = b_1^2t\,|x|^4,\ (g_2(t,x),x)^2 = b_2^2t\,|x|^4,$$

así que podemos elegir $\delta(t) = 2at + b_1^2t$, $\gamma(t) = b_2^2t$ y $\rho_i(t) = \sigma_i(t) = b_i^2t$, $i = 1, 2$, por lo que se deduce

$$\delta_0 = a + \frac{b_1^2}{2}, \gamma_0 = \frac{b_2^2}{2}, \sigma_{i_0} = \rho_{i_0} = \frac{b_i^2}{2}\ (i = 1, 2),$$

donde estamos considerando $\lambda(t) = \exp t^2$. Por tanto, si $\frac{b_1^2}{2} - a \leq 0$, obtenemos estabilización superexponencial con orden al menos $\frac{b_1^2}{4} + \frac{b_2^2}{4} - \frac{a}{2}$ si suponemos que b_2 es suficientemente grande, puesto que

$$\rho_{1_0} + \rho_{2_0} - \frac{1}{2}(\delta_0 + \gamma_0) = \frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2} - \frac{1}{2}(a + \frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}) = \frac{b_1^2}{4} + \frac{b_2^2}{4} - \frac{a}{2}.$$

5.3 Comportamiento asintótico de ecuaciones estocásticas con retardos

En esta Sección vamos a establecer algunas condiciones suficientes para garantizar estabilidad casi segura con función de decaimiento general para ecuaciones estocásticas con retardos, incluyendo el caso de una ecuación de evolución con retardos distribuidos. La idea es obtener, usando de nuevo funciones de Lyapunov, resultados similares a los obtenidos en la Sección 5.1 para la ecuación sin retardos. Posteriormente, ilustraremos los resultados con varios ejemplos.

Queremos señalar que recientemente, en Caraballo et al. [19], se ha obtenido un resultado sobre estabilidad exponencial para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con retardos mediante un argumento de tipo Razumikhin, considerando $|x|^2$ como función de Lyapunov. Sin embargo, dicho método requiere más regularidad de las soluciones, lo que hace inviable su aplicación en una situación variacional general como la que nos ocupa. Por este motivo, los resultados que ahora vamos a probar van a completar y mejorar los encontrados en Caraballo et al. [19].

Dados $h \geq 0$, $p \geq 2$ y $T > 0$, recordemos que $I^p(-h,T;V)$ es el subespacio cerrado de $L^p(\Omega \times [-h,T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([-h,T]), \mathrm{d}P \otimes \mathrm{d}t; V)$ de todos los procesos $\mathcal{F}_t$-adaptados p.c.t.t donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ para $t < 0$. Recordamos también que dado un proceso estocástico $X(t) \in I^p(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H))$, podemos asociarle otro $X_t : \Omega \to L^p([-h,0],V) \cap C(-h,0;H)$ mediante la relación $X_t(s)(\omega) = X(t+s)(\omega)$, $0 \leq t \leq T$, $-h \leq s \leq 0$.

Consideramos la siguiente ecuación de evolución estocástica con retardos:

$$\begin{cases} X \in I^p(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)), \\ \mathrm{d}X(t) = [A(t,X(t)) + F(t,X_t)]\,\mathrm{d}t + G(t,X_t)\mathrm{d}W(t), t \in [0,T], \\ X(0) = \psi(t), \ t \in [-h,0], \end{cases} \tag{5.19}$$

donde el retardo $\psi \in I^p(-h,0;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$.

Sabemos que si $A(t,\cdot) : V \to V^*$ es una familia de operadores no lineales definida p.c.t.t, bajo condiciones de medibilidad, hemicontinuidad, acotación, monotonía y coercividad, si además $F(t,\cdot) : [0,T] \times C(-h,0;H) \to V^*$ y $G : [0,T] \times C(-h,0;H) \to H$ verifican, entre otras, que son operadores Lipschitz continuos, entonces, podemos afirmar que existe un único proceso X solución de (5.19) para cada $T > 0$, es decir, $X(t)$ satisface la siguiente ecuación integral en V^*:

$$\begin{cases} X(t) = \psi(0) + \int_0^t (A(s,X(s)) + F(s,X_s))\mathrm{d}s + \int_0^t G(s,X_s)\mathrm{d}W(s), & t \in [0,T], \\ X(t) = \psi(t), \ t \in [-h,0], \end{cases}$$

(véase Caraballo et al. [19] y, en el caso $p = 2$, véase Caraballo et al. [11] o los resultados establecidos en el Capítulo 3).

Podemos ya probar nuestro principal resultado en esta Sección:

Teorema 30 *Sea $U(t,x)$ una función de Lyapunov apropiada. Supongamos que $\log\lambda(t)$ es uniformemente continua sobre $t \in [T,+\infty)$ y que existe una constante $\tau \geq 0$ tal que*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log\log t}{\log\lambda(t)} \leq \tau.$$

Supongamos también que existen constantes $q > 0$, $m \geq 0, \mu \geq 0$, $\nu, \theta \in \mathbb{R}$, una función decreciente $\xi(t) > 0$ y dos funciones continuas y no negativas $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ tales que

(a) $|x|^q\lambda(t)^m \leq U(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$.

(b) Para cada solución X de (5.19) definida en el futuro se verifica

$$\begin{aligned} &\int_0^t U_s'(s,X(s))ds + \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle \, ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))ds + \int_0^t \xi(s)(U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2 ds \\ &\leq \int_0^t \varphi_1(s)ds + \int_0^t \varphi_2(s)\,U(s,X(s))ds + c(\psi), \end{aligned}$$

donde $c(\psi)$ es una constante que depende del dato inicial ψ.

(c)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log\int_0^t \varphi_1(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \nu, \quad \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t \varphi_2(s)ds}{\log\lambda(t)} \leq \theta$$

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\log\xi(t)}{\log\lambda(t)} \geq -\mu.$$

Entonces,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{m - [\theta + ((\mu+\tau)\vee\nu\vee 0)]}{q}, \quad P-c.s.$$

En particular, si $m > \theta + ((\mu+\tau)\vee\nu\vee 0)$ la solución X decae a cero casi seguramente con función de decaimiento $\lambda(t)$ y orden al menos $\gamma = \frac{m-[\theta+((\mu+\tau)\vee\nu\vee 0)]}{q}$.

Demostración. Comenzamos aplicando la fórmula de Itô, obteniendo entonces

$$\begin{aligned} U(t,X(t)) &= U(0,\psi(0)) + \int_0^t U_s'(s,X(s))\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle \,\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t (U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))\mathrm{d}W(s). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Gracias a la continuidad uniforme de $\log\lambda(t)$ y dado $\varepsilon > 0$, existen dos enteros positivos $N = N(\varepsilon)$ y $k_1(\varepsilon)$ tales que para $\frac{k-1}{2^N} \le t \le \frac{k}{2^N}$, $k \ge k_1(\varepsilon)$, se sigue que

$$\left|\log\lambda\left(\frac{k}{2^N}\right) - \log\lambda(t)\right| \le \varepsilon.$$

Por otra parte, la desigualdad exponencial de la martingala implica que

$$P\left\{\sup_{0\le t\le w}\left[M(t) - \frac{u}{2}\int_0^t (U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2\mathrm{d}s\right] > v\right\} \le e^{-uv}$$

para cualesquiera constantes positivas u, v y w, donde

$$M(t) = \int_0^t (U_x'(s,X(s))\,, G(s,X_s))\mathrm{d}W(s).$$

Entonces, para el anterior $\varepsilon > 0$, si tomamos

$$u = 2\xi\left(\frac{k}{2^N}\right),\quad v = \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N},\quad w = \frac{k}{2^N},\quad k = 2,3,...,$$

podemos aplicar el lema de Borel-Cantelli para obtener que, para casi todo $\omega \in \Omega$, existe un entero $k_0(\varepsilon,\omega) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^t (U_x'(s,X(s))\,, G(s,X_s))\mathrm{d}W(s) &\le \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} \\ &+ \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t (U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2\mathrm{d}s \\ &\le \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} \\ &+ \int_0^t \xi(s)(U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2\mathrm{d}s \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq \dfrac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. Sustituyendo lo anterior en (5.20) obtenemos que, P-c.s.,

$$\begin{aligned}U(t,X(t)) \leq\ & U(0,\psi(0)) + \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} + \int_0^t U_s'(s,X(s))\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle\,\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \xi(s)(U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq \dfrac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. Si ahora usamos la condición (b) obtenemos que P-c.s.

$$\begin{aligned}U(t,X(t)) \leq\ & U(0,\psi(0)) + \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} + \int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \varphi_2(s)\,U(s,X(s))\mathrm{d}s + c(\psi)\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq \dfrac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. Aplicando entonces el lema de Gronwall

$$\begin{aligned}|X(t)|^q\,\lambda(t)^m \leq\ & \left(U(0,\psi(0)) + \xi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}\log\frac{k-1}{2^N} \right. \\ & \left. + \int_0^t \varphi_1(s)\mathrm{d}s + c(\psi)\right)\exp\left(\int_0^t \varphi_2(s)\,\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq \dfrac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. De ahí que, tomando logaritmos en la expresión anterior y usando la hipótesis (c), obtengamos que $P-$c.s.

$$\begin{aligned}\log(|X(t)|^q\,\lambda(t)^m) \leq\ & \log\left(U(0,\psi(0)) + \lambda(t)^{\mu+\tau+2\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon(\mu+\varepsilon)} + \lambda(t)^{\nu+\varepsilon} + c(\psi)\right) \\ &+ (\theta+\varepsilon)\log\lambda(t)\end{aligned}$$

para $\dfrac{k-1}{2^N} \leq t \leq \dfrac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\varepsilon,\omega) \vee k_1(\varepsilon)$. Por tanto

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log(|X(t)|^q\,\lambda(t)^m)}{\log\lambda(t)} \leq [(\mu+\tau+2\varepsilon)\vee(\nu+\varepsilon)\vee 0] + \theta + \varepsilon,\ \ P-\text{c.s.}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos de manera inmediata

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log|X(t)|}{\log\lambda(t)} \leq -\frac{m - [\theta + ((\mu+\tau)\vee\nu\vee 0)]}{q},\ P-\text{c.s.}$$

Así finalizamos la demostración del teorema. ■

Nota 13 *Aparentemente la hipótesis (b) de este teorema parece diferente a la hipótesis (b) del teorema análogo en el caso sin retardo. Vamos a ver que, sin embargo, una hipótesis análoga a la que allí se impuso es, en este contexto, más fuerte, en el sentido de que implicaría la que aquí hemos exigido. En efecto, dado* $U(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H;\mathbb{R}^+)$ *podemos definir los operadores* $\widehat{L}$ *y* $\widehat{Q}$ *sobre* $L^p([-h,0],V) \cap C(-h,0;H)$*, es decir, para* $\Phi \in L^p([-h,0],V) \cap C(-h,0;H)$ *y* $t \in \mathbb{R}^+$*, definimos*

$$\begin{aligned}\widehat{L}U(t,\Phi) &= U_t'(t,\Phi(0)) + \langle U_x'(t,\Phi(0)), A(t,\Phi(0)) + F(t,\Phi)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}(U_{xx}''(t,\Phi(0))G(t,\Phi), G(t,\Phi)), \\ \widehat{Q}U(t,\Phi) &= (U_x'(t,\Phi(0)), G(t,\Phi))^2.\end{aligned}$$

Entonces, si suponemos que

$$\widehat{L}U(t,\Phi) + \xi(t)\widehat{Q}U(t,\Phi) \le \varphi_1(t) + \varphi_2(t)U(t,\Phi(0)),$$

inmediatamente se sigue la hipótesis (b) de este teorema.

Por tanto, bajo las condiciones del teorema 22 la estabilidad asintótica es transferida desde la ecuación sin retardos a la ecuación con retardos, independientemente de cómo sean dichos retardos.

A continuación vamos a establecer un resultado que contemple la posibilidad de potencias fraccionarias.

Corolario 5 *Supongamos que log* $\lambda(t)$ *es uniformemente continua sobre* $t \in [T, +\infty)$ *y que existe* $\tau \ge 0$ *tal que*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log\log\ t}{\log \lambda(t)} \le \tau.$$

Sean $\varphi_1(t)$*,* $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$ *tres funciones continuas y no negativas. Supongamos que para todo* $x \in V$ *y* $t \ge 0$*, existen* $q > 0$*,* $m \ge 0$*,* $\mu \ge 0$*,* $\nu, \theta \in \mathbb{R}$*,* $0 < \alpha < 1$ *y una función decreciente* $\xi(t) > 0$*, tales que*

(a) $|x|^q \lambda(t)^m \le U(t,x)$*,* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times V$*.*

(b) Para una solución X *de (5.19) definida en el futuro se verifica*

$$\begin{aligned}&\int_0^t U_s'(s,X(s))ds + \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle\, ds \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))ds + \int_0^t \xi(s)(U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2 ds \\ \le\ &\int_0^t \varphi_1(s)ds + \int_0^t \varphi_2(s)\,U(s,X(s))ds + \int_0^t \varphi_3(s)\,U(s,X(s))^\alpha ds + c(\psi),\end{aligned}$$

donde $c(\psi)$ *es una constante que depende del dato inicial* ψ*.*

(c)

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log \int_0^t (\varphi_1(s) + (1-\alpha)\varphi_3(s))ds}{\log \lambda(t)} \leq \nu, \quad \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t (\varphi_2(s) + \alpha\varphi_3(s))ds}{\log \lambda(t)} \leq \theta$$
$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \geq -\mu.$$

Entonces

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log |X(t)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - [\theta + (\nu \vee (\mu+\tau) \vee 0)]}{q} \quad P - c.s.$$

En particular, si $m > \theta + (\nu \vee (\mu+\tau) \vee 0)$ *la solución es casi seguramente estable con función de decaimiento* $\lambda(t)$ *y orden al menos* $\gamma = \frac{m-[\theta+((\mu+\tau)\vee\nu\vee 0)]}{q}$.

Demostración. Aplicando la desigualdad de Young obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_3(t)U(t,X(t))^{\alpha} &= \varphi_3(t)^{1-\alpha}(\varphi_3(t)U(t,X(t)))^{\alpha} \\ &\leq (1-\alpha)\varphi_3(t) + \alpha\varphi_3(t)U(t,X(t)), \end{aligned}$$

por tanto, el resultado es consecuencia inmediata del teorema 30. ∎

5.3.1 Ejemplos

Para finalizar esta Sección, vamos a analizar la estabilidad c.s. de las soluciones de varios problemas, como ilustración del teorema 30 y el corolario 5.

Ejemplo 7

Consideremos la siguiente ecuación unidimensional con retardo constante:

$$\begin{cases} dX(t) &= \left[-\frac{q}{1+t}X(t) + \frac{1}{1+t}X(t-h)\right] \mathrm{d}t + (1+t)^{-q}\mathrm{d}W(t), \ \mathrm{t} \in [0,T], \\ X(t) &= \psi(t), \ t \in [-h,0], \end{cases}$$

donde $q > 1$ y $T, h > 0$. Este problema puede escribirse en nuestra formulación tomando $V = H = \mathbb{R}$, $p = 2$. Teniendo en cuenta la teoría clásica de ecuaciones estocásticas con retardo, es inmediato que el problema anterior tiene una única solución para cada dato inicial fijado en el espacio $I^2(-h,0;H) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$. Para $u \in H$ y $\phi \in C(-h,0;H)$, definimos $A(t,u) = -\frac{qu}{1+t}$, $F(t,\phi) = \frac{1}{1+t}\phi(-h)$ y

$G(t,\phi) = (1+t)^{-q}$, $t \in [0,T]$. Sea $U(t,y) = (1+t)^{2q}|y|^2$. Entonces, es fácil comprobar que para $\delta > 1$ arbitrario, si tomamos $\xi(t) = \dfrac{1}{4(1+t)^{\delta}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t U_s'(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle\, \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{4(1+s)^{\delta}}(U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{(1+s)^{\delta}}U(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t 2(1+s)^{2q-1}X(s)X(s-h)\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{(1+s)^{\delta}}U(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{(1+s)}U(s,X(s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t (1+s)^{2q-1}|X(s-h)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Vamos a acotar la última integral de la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned}
\int_0^t (1+s)^{2q-1}|X(s-h)|^2\,\mathrm{d}s &= |\psi|^2_{C(-h,0;H)}\int_{-h}^0 (1+s+h)^{2q-1}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^{t-h}(1+r+h)^{2q-1}|X(r)|^2\,\mathrm{d}r \\
&\leq c(\psi) + (1+h)^{2q-1}\int_0^t \frac{1}{1+s}U(s,X(s))\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

donde hemos denotado $c(\psi) = \frac{1}{2q}((1+h)^{2q}-1)\,|\psi|^2_{C(-h,0;H)}$ y hemos usado la desigualdad

$$(1+r+h) \leq (1+r)(1+h), r, h \geq 0.$$

Entonces podemos considerar las funciones

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{(1+t)^{\delta}} + \frac{(1+h)^{2q-1}+1}{(1+t)}.$$

Fácilmente podemos comprobar el valor de las constantes que aparecen en el teorema 30. En concreto:

$$\tau = 0, \quad \nu = 1, \quad \theta = (1+h)^{2q-1}+1, \quad \mu = \delta.$$

Por tanto, aplicando dicho teorema obtenemos que

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log(|X(t)|)}{\log(1+t)} \leq -\frac{2q-((1+h)^{2q-1}+1+\delta)}{2}, \; P-\text{c.s.}$$

Puesto que la constante $\delta > 1$ es arbitraria, tenemos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log(|X(t)|)}{\log(1+t)} \leq -\frac{2q-((1+h)^{2q-1}+2)}{2}, \quad P-\text{c.s.}$$

Como consecuencia, la solución nula es casi seguramente polinomialmente estable con función de decaimiento $(1+t)$ y orden al menos $\frac{2q-((1+h)^{2q-1}+2)}{2}$ siempre que $q > \frac{2+(1+h)^{2q-1}}{2}$. Es decir, fijado $q > \frac{3}{2}$, existe $h > 0$ suficientemente pequeño de forma que la solución nula es estable c.s. con función de decaimiento $(1+t)$.

Ejemplo 8

Consideremos la siguiente ecuación unidimensional con retardo constante:

$$\begin{cases} dX(t) &= \left[-\frac{q}{1+t}X(t) + \frac{1}{1+t}\int_{-h}^{0} X(t+s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + (1+t)^{-q}\mathrm{d}W(t), \quad \mathrm{t} \in [0,T], \\ X(t) &= \psi(t), \ t \in [-h,0], \end{cases}$$

donde $q > 1$ y $T, h > 0$. Este problema puede escribirse en nuestra formulación tomando $V = H = \mathbb{R}$, $p = 2$. Al igual que en el ejemplo anterior, teniendo en cuenta la teoría clásica sobre ecuaciones estocásticas con retardo, es inmediato que el problema anterior tiene una única solución para cada dato inicial fijado en el espacio $I^2(-h,0;H) \cap L^2(\Omega; C(-h,0;H))$. Para $u \in H$ y $\phi \in C(-h,0;H)$, definimos $A(t,u) = -\frac{qu}{1+t}$, $F(t,\phi) = \frac{1}{1+t}\int_{-h}^{0}\phi(s)\mathrm{d}s$, y $G(t,\phi) = (1+t)^{-q}$, $t \in [0,T]$. Consideremos $U(t,y) = (1+t)^{2q}|y|^2$. Entonces, es fácil comprobar que para $\delta > 1$ arbitrario, si tomamos $\xi(t) = \frac{1}{4(1+t)^{\delta}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t U_s'(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{4(1+s)^{\delta}}(U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{(1+s)^{\delta}}U(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t 2(1+s)^{2q-1}X(s)\left(\int_{-h}^{0} X(s+r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{(1+s)^{\delta}}U(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{(1+s)}U(s,X(s))\mathrm{d}s \\
&+ h\int_0^t (1+s)^{2q-1}\left(\int_{s-h}^{s} |X(u)|^2\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Vamos a acotar la última integral de la desigualdad anterior:

$$
\begin{aligned}
h\int_0^t (1+s)^{2q-1}\left(\int_{s-h}^{s}|X(u)|^2\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s &= h(1+h)^{2q}\,|\psi|^2_{C(-h,0;H)}\int_0^h(1-s)^{2q}\mathrm{d}s\\
&\quad + h(1+h)^{2q-1}\int_0^t\frac{1}{1+s}U(s,X(s))\mathrm{d}s\\
&\leq c(\psi)+h(1+h)^{2q-1}\int_0^t\frac{1}{1+s}U(s,X(s))\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

donde $c(\psi)=h(1+h)^{2q}\frac{1}{2q+1}(1-(1-h)^{2q+1})\,|\psi|^2_{C(-h,0;H)}$ y nuevamente hemos usado la desigualdad $(1+u+h)\leq(1+u)(1+h)$, $u,h\geq 0$. Entonces

$$
\varphi_1(t)=1,\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{(1+t)^{\delta}}+\frac{h(1+h)^{2q-1}+1}{(1+t)}.
$$

Fácilmente podemos comprobar el valor de las constantes que aparecen en el teorema 30. En particular:

$$
\tau=0,\quad \nu=1,\quad \theta=h(1+h)^{2q-1}+1,\quad \mu=\delta.
$$

Por tanto, aplicando el teorema 30 obtenemos que

$$
\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log(|X(t)|)}{\log(1+t)}\leq-\frac{2q-\left[h(1+h)^{2q-1}+1+\delta\right]}{2},\quad P-\text{c.s.}
$$

Puesto que la constante $\delta>1$ es arbitraria, tenemos que

$$
\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log(|X(t)|)}{\log(1+t)}\leq-\frac{2q-\left[h(1+h)^{2q-1}+2\right]}{2},\quad P-\text{c.s.}
$$

Por tanto, siempre que $q>\frac{2+h(1+h)^{2q-1}}{2}$, la solución es casi seguramente polinomialmente estable con función de decaimiento $(1+t)$.

Ejemplo 9

Consideremos la siguiente ecuación del calor estocástica semilineal, donde vamos a suponer que r_1, r_2 son constantes reales, de modo que $h>r_1,r_2\geq 0$:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
dX(t,x) &=& \left[\gamma\frac{\partial^2X(t,x)}{\partial x^2}+\int_{-r_1}^{0}\left(\alpha_1X(t+u,x)+\alpha_2\frac{\partial X}{\partial x}(t+u,x)\right)\beta(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t\\
&+& \alpha(X(t))\frac{X(t-r_2,x)}{1+|X(t,x)|}\mathrm{d}W(t),\\
X(t,x) &=& \psi(t,x),\ t\in[-h,0],\ x\in[0,\pi],\\
X(t,0) &=& X(t,\pi)=0,\ t\geq 0,
\end{array}
\right.
$$

donde $\gamma > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$; $\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta : [-r_1, 0] \to \mathbb{R}$ son dos funciones Lipschitz continuas con $|\alpha(x)| \leq K$, $|\beta(u)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$, $u \in [-r_1, 0]$, $M, K > 0$. Definimos $V = H_0^1[0,\pi]$, $H = L^2[0,\pi]$ y denotamos mediante $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ las normas en V y H respectivamente; mediante $(\cdot,\cdot)$ el producto interno en H.

Este problema puede formularse según nuestra notación, poniendo $A(t,v)(x) = \gamma\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2}$, para $v \in V$, $x \in [0,\pi]$; $F(t,\phi)(x) = \int_{-r_1}^0 \left(\alpha_1\phi(u)(x) + \alpha_2\frac{\mathrm{d}\phi(u)(x)}{\mathrm{d}x}\right)\beta(u)\mathrm{d}u$ y $G(t,\phi)(x) = \alpha(\phi(0))\frac{\phi(-r_2)(x)}{1+|\phi(0)(x)|}$, para $\phi \in C(-h,0;H)$, $t \geq 0$, $x \in [0,\pi]$.

Vamos a considerar como función de Lyapunov apropiada $U(t,y) = \mathrm{e}^{mt}|y|^2$ (donde suponemos que $m > 0$ es una constante fija y arbitaria). Es fácil ver que U satisface todas las hipótesis necesarias para poder aplicar la fórmula de Itô. Si tomamos $\xi(t) = \dfrac{1}{4\mathrm{e}^{mt}}$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t U_s'(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{4\mathrm{e}^{ms}}(U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t mU(s,X(s))\mathrm{d}s + 2K^2\int_0^t \mathrm{e}^{ms}\,|X(s-r_2)|^2\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left(2X(s)\mathrm{e}^{ms}, \alpha_1\int_{-r_1}^0 X(s+u)\beta(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left(2X(s)\mathrm{e}^{ms}, \alpha_2\int_{-r_1}^0 \frac{\partial X(s+u)}{\partial x}\beta(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s - 2\gamma\int_0^t \mathrm{e}^{ms}\,\|X(s)\|^2\,\mathrm{d}s \\
&\triangleq \int_0^t mU(s,X(s))\mathrm{d}s + 2K^2 I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}
$$

Nuestro objetivo inmediato es acotar las integrales que hemos llamado I_1, I_2, I_3 e I_4. Por un lado,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq |\psi|^2_{C(-h,0;H)}\int_{-r_2}^0 \mathrm{e}^{m(r_2+u)}\mathrm{d}u + \int_0^{t-r_2} \mathrm{e}^{mr_2}U(s,X(s))\mathrm{d}s \\
&\leq r_2\mathrm{e}^{mr_2}\,|\psi|^2_{C(-h,0;H)} + \int_0^t \mathrm{e}^{mr_2}U(s,X(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \alpha_1 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_1 \int_0^t \mathrm{e}^{ms} \left| \int_{-r_1}^0 X(s+u)\beta(u)\mathrm{d}u \right|^2 \mathrm{d}s \\
&\le \alpha_1 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_1 r_1 \int_0^t \mathrm{e}^{ms} \left(\int_{-r_1}^0 |X(s+u)|^2 \beta^2(u)\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s \\
&\le \alpha_1 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_1 r_1 M^2 \int_0^t \mathrm{e}^{ms} \left(\int_{s-r_1}^s |X(u)|^2 \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s \\
&\le \alpha_1 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \alpha_1 r_1^2 M^2 \left[|\psi|^2_{C(-h,0;H)} \left(\int_{-r_1}^0 \mathrm{e}^{m(u+r_1)}\mathrm{d}u \right) + \int_0^t \mathrm{e}^{mr_1} U(s,X(s))\mathrm{d}s \right] \\
&\le \alpha_1 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_1 r_1^3 M^2 \mathrm{e}^{mr_1} |\psi|^2_{C(-h,0;H)} \\
&\quad + \alpha_1 r_1^2 M^2 \int_0^t \mathrm{e}^{mr_1} U(s,X(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Acotamos también la integral I_3:

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le \alpha_2 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_2 \int_0^t \mathrm{e}^{ms} \left| \int_{-r_1}^0 \frac{\partial X(s+u)}{\partial x}\beta(u)\mathrm{d}u \right|^2 \mathrm{d}s \\
&\le \alpha_2 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_2 r_1 \int_0^t \mathrm{e}^{ms} \left(\int_{-r_1}^0 \|X(s+u)\|^2 \beta^2(u)\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s \\
&\le \alpha_2 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_2 r_1 M^2 \int_0^t \mathrm{e}^{ms} \left(\int_{s-r_1}^s \|X(u)\|^2 \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s \\
&\le \alpha_2 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \alpha_2 r_1^2 M^2 \left[\|\psi\|^2_{L^2(-h,0;V)} \int_{-r_1}^0 \mathrm{e}^{m(u+r_1)}\mathrm{d}u + \int_0^t \mathrm{e}^{mr_1}\mathrm{e}^{ms} \|X(s)\|^2 \mathrm{d}s \right] \\
&\le \alpha_2 \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + \alpha_2 r_1^3 M^2 \mathrm{e}^{mr_1} \|\psi\|^2_{L^2(-h,0;V)} \\
&\quad + \alpha_2 r_1^2 M^2 \int_0^t \mathrm{e}^{mr_1}\mathrm{e}^{ms} \|X(s)\|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Por tanto, teniendo en cuenta las acotaciones anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t U_s'(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s), G(s,X_s))\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{4\mathrm{e}^{ms}} (U_x'(s,X(s)), G(s,X_s))^2 \mathrm{d}s \\
&\le (m + 2K^2\mathrm{e}^{mr_2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 r_1^2 M^2 e^{mr_1}) \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + c(\psi) \\
&\quad + (\alpha_2 r_1^2 M^2 \mathrm{e}^{mr_1} - 2\gamma) \int_0^t \mathrm{e}^{ms} \|X(s)\|^2 \,\mathrm{d}s \\
&\le (m + 2K^2\mathrm{e}^{mr_2} + (\alpha_1+\alpha_2)(1 + r_1^2 M^2 e^{mr_1}) - 2\gamma) \int_0^t U(s,X(s))\mathrm{d}s + c(\psi),
\end{aligned}$$

siendo esta última acotación cierta si suponemos que $\alpha_2 r_1^2 M^2 \mathrm{e}^{mr_1} - 2\gamma < 0$, es decir, $\gamma > \frac{\alpha_2 r_1^2 M^2 e^{mr_1}}{2}$, y donde hacemos la identificación

$$c(\psi) = (2K^2 r_2 e^{mr_2} + \alpha_1 r_1^3 M^2 e^{mr_1}) |\psi|^2_{C(-h,0;H)} + \alpha_2 r_1^3 M^2 e^{mr_1} \|\psi\|^2_{L^2(-h,0;V)} .$$

Entonces, podemos escoger las funciones

$$\varphi_1(t) = 0, \;\; \varphi_2(t) = m + 2K^2\mathrm{e}^{mr_2} - 2\gamma + (\alpha_1+\alpha_2)(1 + r_1^2 M^2 e^{mr_1}),$$

y elegir las constantes

$$\tau = 0, \;\; \nu = 0, \;\; \theta = m + 2K^2\mathrm{e}^{mr_2} - 2\gamma + (\alpha_1+\alpha_2)(1 + r_1^2 M^2 e^{mr_1}), \;\; \mu = m.$$

Por tanto, aplicando el teorema 30 podemos deducir que, $P-$c.s.,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{t} \le -\frac{m - (m + 2K^2\mathrm{e}^{mr_2} - 2\gamma + (\alpha_1+\alpha_2)(1 + r_1^2 M^2 e^{mr_1}) + m)}{2},$$

es decir, $P-$c.s.

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{t} \le -\frac{(-m + 2\gamma - 2K^2\mathrm{e}^{mr_2} - (\alpha_1+\alpha_2)(1 + r_1^2 M^2 e^{mr_1}))}{2}.$$

Ya que podemos elegir $m > 0$ arbitrariamente, razonando por continuidad, siempre que $\gamma > \frac{2K^2 + (\alpha_1+\alpha_2)(1+r_1^2M^2)}{2}$, la solución del problema que hemos planteado en este ejemplo es exponencialmente estable c.s. con orden al menos $\frac{2\gamma - 2K^2 - (\alpha_1+\alpha_2)(1+r_1^2M^2)}{2}$. Queremos señalar aquí que no se ha necesitado imponer ninguna restricción sobre r_2.

Ejemplo 10

Consideremos la siguiente ecuación con retardos:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) &= \left[\gamma\triangle X(t) + \dfrac{e^{-pt}X(t-h)^{\alpha}}{1+|X(t)|}\right]\mathrm{d}t + (2\gamma\lambda_0 - m)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{mt}{2}}\dfrac{X(t)}{1+|X(t)|}\mathrm{d}W(t), \\ X(t) &= \psi(t),\ t\in[-h,0],\ x\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n \\ X(\cdot)|_{\partial D} &= 0,\ t>0, \end{cases}$$

donde $\mathcal{O}$ es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suficientemente regular, $\psi(t)$ es un proceso $\mathcal{F}_0$-medible, $0<\alpha<1$, $\gamma,p,m>0$, $2\gamma\lambda_0>m>0$, $h>0$, y $\lambda_0 = \inf\limits_{u\in\mathcal{D}(\triangle)}\dfrac{|\nabla u(x)|^2}{|u(x)|^2}$.

Definimos $V=H_0^1(\mathcal{O})$, $H=L^2(\mathcal{O})$ y denotamos mediante $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ las normas en V y H respectivamente; mediante $(\cdot,\cdot)$ el producto interno en H.

Este problema puede formularse según nuestra notación, poniendo $A(t,v)(x) = \gamma\triangle v(t,x)$, para $v\in V$, $x\in\mathcal{O}$; $F(t,\phi)(x) = \dfrac{e^{-pt}\phi(-h)^{\alpha}(x)}{1+|\phi(0)(x)|}$ y $G(t,\phi)(x) = (2\gamma\lambda_0 - m)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{mt}{2}}\dfrac{\phi(0)(x)}{1+|\phi(0)(x)|}$, para $\phi\in C(-h,0;H)$, $t\geq 0$, $x\in\mathcal{O}$.

Consideremos la función de Lyapunov apropiada $U(t,y) = \mathrm{e}^{mt}|y|^2$. Es fácil comprobar que para $\delta>0$ arbitrario, si tomamos $\xi(t)=\dfrac{\delta}{4}$, entonces

$$\begin{aligned} &\int_0^t U_s'(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \big\langle U_x'(s,X(s)), A(s,X(s)) + F(s,X_s)\big\rangle\,\mathrm{d}s \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t (U_{xx}''(s,X(s))G(s,X_s),G(s,X_s))\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\delta}{4}(U_x'(s,X(s)),G(s,X_s))^2\mathrm{d}s \\ \leq\ & \int_0^t \mathrm{e}^{(m-p)s}|X(s)|^2\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{(m-p)s}|X(s-h)|^{2\alpha}\mathrm{d}s \\ &+\int_0^t \delta(2\gamma\lambda_0 - m)U(s,X(s))\mathrm{d}s \\ \leq\ & \int_0^t \left(\delta(2\gamma\lambda_0-m)+\mathrm{e}^{-ps}\right)U(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_{-h}^{t-h}\mathrm{e}^{(m-p)(r+h)}|X(r)|^{2\alpha}\mathrm{d}r \\ \leq\ & \int_0^t \left(\delta(2\gamma\lambda_0-m)+\mathrm{e}^{-ps}\right)U(s,X(s))\mathrm{d}s + |\psi|^{2\alpha}_{C(-h,0;H)}\int_{-h}^{0}\mathrm{e}^{(m-p)(r+h)}\mathrm{d}r \\ &+\int_0^t \mathrm{e}^{(m-p)h}\mathrm{e}^{(m-p-m\alpha)r}U(r,X(r))^{\alpha}\mathrm{d}r \\ \leq\ & \int_0^t \left(\delta(2\gamma\lambda_0-m)+\mathrm{e}^{-ps}\right)U(s,X(s))\mathrm{d}s + c(\psi) \\ &+\int_0^t \mathrm{e}^{(m-p)h}\mathrm{e}^{(m-p-m\alpha)r}U(r,X(r))^{\alpha}\mathrm{d}r \end{aligned}$$

donde $c(\psi) = \frac{e^{(m-p)h}-1}{m-p} |\psi|^{2\alpha}_{C(-h,0;H)}$. Entonces, podemos considerar las funciones

$$\varphi_1(t) = 0,\ \varphi_2(t) = \delta(2\gamma\lambda_0 - m) + e^{-pt},\ \varphi_3(t) = e^{(m-p)h+(m-p-m\alpha)t}.$$

Por tanto, de manera inmediata llegamos a que $\tau = 0$, $\mu = 0, \nu = 0$ (si $m(1-\alpha)-p \leq 0$) y

$$\theta = \begin{cases} \delta(2\gamma\lambda_0 - m) & \text{si } m(1-\alpha) - p = 0, \\ \delta(2\gamma\lambda_0 - m) + \alpha e^{(m-p)h} & \text{si } m(1-\alpha) - p < 0. \end{cases}$$

Por tanto, gracias al corolario 5, deducimos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{t} \leq \begin{cases} -\dfrac{m - \delta(2\gamma\lambda_0 - m) - \alpha e^{(m-p)h}}{2} & \text{si } m(1-\alpha) - p = 0, \\ -\dfrac{m - \delta(2\gamma\lambda_0 - m)}{2} & \text{si } m(1-\alpha) - p < 0. \end{cases}$$

Haciendo $\delta \to 0$ obtenemos que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log|X(t)|}{t} \leq \begin{cases} -\dfrac{m - \alpha e^{(m-p)h}}{2} = -\dfrac{m - \alpha e^{m\alpha h}}{2} & \text{si } m(1-\alpha) - p = 0, \\ -\dfrac{m}{2} & \text{si } m(1-\alpha) - p < 0. \end{cases}$$

En conclusión, la solución del problema es casi seguramente exponencialmente estable si suponemos que $m \leq \frac{p}{1-\alpha}$.

5.4 Estabilidad para ecuaciones estocásticas de segundo orden

En esta Sección estudiaremos propiedades de estabilidad para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas de segundo orden en tiempo, tales como las que modelan vibraciones aleatorias de sistemas mecánicamente flexibles, como por ejemplo, los puentes. Algunos resultados en esta línea y en dimensión finita pueden consultarse, por ejemplo, en Kozin [34]. En dimensión infinita vamos a señalar la referencia Curtain [21], donde se demuestran condiciones suficientes para la estabilidad exponencial de la solución del sistema, suponiendo que el operador genera un semigrupo de contracciones de clase C_0. Una vez más, queremos señalar que no conocemos resultados en la literatura como los que aquí nos planteamos, es decir, en un marco variacional. Nos ocuparemos principalmente de proporcionar algunos resultados sobre decaimiento exponencial. Primeramente probaremos un resultado que garantice la estabilidad de los momentos de orden dos de la solución del correspondiente sistema diferencial estocástico de segundo orden en tiempo, es decir, probaremos estabilidad en media cuadrática con velocidad de decaimiento exponencial. Posteriormente, veremos cómo la estabilidad en media cuadrática implica en particular estabilidad trayectorial con la misma velocidad de decaimiento.

Consideremos una familia de operadores lineales autoadjuntos $A(t)$, $t \geq 0$, verificando:

$(A.1)$ $A(t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(V,V^*))$, $\forall T > 0$.

$(A.2)$ $\exists c_A > 0$ tal que $\forall t \geq 0$, $\forall u \in V$ se verifica

$$\|A(t)u\|_* \leq c_A \|u\| .$$

$(A.3)$ $\exists \alpha > 0$ tal que $\forall t \geq 0$, $\forall u \in V$ se verifica

$$\langle A(t)u, u\rangle \geq \alpha \|u\|^2 .$$

$(A.4)$ La aplicación $t \in (0,+\infty) \to \langle A(t)u, \widetilde{u}\rangle$ es continuamente diferenciable, $\forall u, \widetilde{u} \in V$. Si $\langle A'(t)u, \widetilde{u}\rangle$ denota el valor de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle A(t)u, \widetilde{u}\rangle$, entonces supondremos que $A'(t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(V,V^*)), \forall T > 0$, y

$$\left\langle A'(t)u, u\right\rangle \leq 0, \forall t \geq 0, \forall u \in V.$$

$(A.5)$ Existe un espacio de Banach X tal que $X \subset \{u \in V \ ; \ A(t)u \in H, \forall t \geq 0\}$, siendo la inyección de X en V continua y X denso en H.

Consideremos también una familia de operadores no lineales $B_0(t,\cdot) : H \to H$, p.c.t. $t \geq 0$, verificando las hipótesis:

$(B_0.1)$ Medibilidad: $\forall v \in H$, la aplicación $t \in (0,+\infty) \to B_0(t,v) \in H$ es medible Lebesgue.

$(B_0.2)$ Acotación: existe $c_0 > 0$ tal que $|B_0(t,v)| \leq c_0 |v|$, $\forall v \in H$, p.c.t. $t \geq 0$.

$(B_0.3)$ Coercividad: existe $\beta_0 > 0$ tal que $(B_0(t,v),v) \geq \beta_0 |v|^2$, $\forall v \in H$, p.c.t. $t \geq 0$.

Sea $G_0 : [0,+\infty) \times V \times H \to H$ una familia de operadores no lineales tal que:

$(G_0.1)$ La aplicación $t \in (0,+\infty) \to G_0(t,\xi,\eta) \in H$ es medible Lebesgue, p.c.t. t, $\forall (\xi,\eta) \in V \times H$.

$(G_0.2)$ $G_0(t,0,0) = 0$, p.c.t. $t \geq 0$.

$(G_0.3)$ Existen dos constantes $C_{G_0,V}, C_{G_0,H} > 0$ tales que $\forall \xi, \widetilde{\xi} \in V, \forall \eta, \widetilde{\eta} \in H$ se verifica

$$\left| G_0(t, \xi, \eta) - G_0(t, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \right|^2 \leq C_{G_0,V} \left\| \xi - \widetilde{\xi} \right\|^2 + C_{G_0,H} \left| \eta - \widetilde{\eta} \right|^2.$$

Consideremos, $\forall T > 0$, el siguiente problema:

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega; C(0,T;V)), \ v \in L^2(\Omega; C(0,T;H)), \\ u'(t) = v(t), \ t \in [0,T], \\ v(t) + \int_0^t A(s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^t B_0(s, v(s))\mathrm{d}s \\ = v_0 + \int_0^t G_0(s, u(s), v(s))\mathrm{d}W(s), \ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{5.21}$$

donde vamos a suponer que $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; V)$, $v_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; H)$ están dados.

Puesto que ahora el objetivo es analizar la estabilidad del problema (5.21) vamos a suponer que existe un único par $(u(t), v(t))$ solución de (5.21) en $[0,T]$, $\forall T > 0$, lo cual está garantizado si, por ejemplo, se verifican las hipótesis del teorema 14 del Capítulo 4, siendo en este caso $h = 0$, puesto que estamos considerando un problema estocástico de segundo orden sin características hereditarias (y en relación a dicho teorema estamos entonces suponiendo que $F_0 \equiv f \equiv g \equiv 0$). En esta Sección sólo estamos suponiendo aquellas hipótesis relativas a A, B_0 y G_0 que necesitaremos para demostrar los resultados relativos a la estabilidad del problema (5.21).

A partir de ahora supondremos que $(u(t), v(t))$, solución de (5.21), está definida $\forall t \geq 0$.

Vamos a continuación a precisar qué entenderemos por estabilidad exponencial en media cuadrática para la solución de (5.21):

Definición 21 *El par $(u(t), v(t))$ solución de (5.21) se dice exponencialmente estable en media cuadrática si existen constantes $m, K_1 > 0$ tales que*

$$E\left(|v(t)|^2 + \|u(t)\|^2 \right) \leq K_1 E\left(|v_0|^2 + \|u_0\|^2 \right) e^{-mt}, \ \forall t \geq 0. \tag{5.22}$$

Teorema 31 *Supongamos que $(u(t), v(t))$ es una solución de (5.21). Una condición suficiente para que dicha solución sea exponencialmente estable en media cuadrática es que se verifiquen las dos relaciones siguientes relativas a los operadores A, B_0 y G_0:*

$$\begin{aligned} C_{G_0,V} &< \frac{\alpha \min\{1, \alpha\}}{c}, \\ C_{G_0,H} &< 2\beta_0 - C_{G_0,V} \left(\frac{c^2 c_0{}^2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \right), \end{aligned}$$

donde $c > 0$ es tal que $|x| \leq c\|x\|$, $\forall x \in V$.

Demostración. Sea $m > 0$. Si aplicamos la fórmula de Itô al proceso

$$e^{mt}|v(t)|^2 + e^{mt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle,$$

obtenemos gracias al teorema 11 y al corolario 1 que para cada $t \geq 0$ y P-c.s. se verifica

$$\begin{aligned}
& e^{mt}|v(t)|^2 + e^{mt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle \\
= \; & |v_0|^2 + \langle A(0)u_0, u_0\rangle + m\int_0^t e^{ms}(|v(s)|^2 + \langle A(s)u(s), u(s)\rangle)\mathrm{d}s \\
& + \int_0^t e^{ms}\left\langle A'(s)u(s), u(s)\right\rangle \mathrm{d}s - 2\int_0^t e^{ms}(B_0(s, v(s)), v(s))\mathrm{d}s \\
& +2\int_0^t e^{ms}(G_0(s, u(s), v(s)), v(s))\mathrm{d}W(s) + \int_0^t e^{ms}|G_0(s, u(s), v(s))|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis $(A.2)$, $(A.3)$, $(A.4)$, $(B_0.3)$ y $(G_0.3)$, si además tomamos esperanzas en la expresión anterior, $\forall t \geq 0$, se verifica

$$\begin{aligned}
& \min\{1, \alpha\}E\left(e^{mt}|v(t)|^2 + e^{mt}\|u(t)\|^2\right) \\
\leq \; & E|v_0|^2 + c_A E\|u_0\|^2 + (m + C_{G_0,H} - 2\beta_0)\int_0^t e^{ms}E|v(s)|^2 \mathrm{d}s \qquad (5.23) \\
& +(mc_A + C_{G_0,V})\int_0^t e^{ms}E\|u(s)\|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Vamos a acotar la última integral de la desigualdad anterior. Gracias a que

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}(e^{mt}(u(t), v(t))) = me^{mt}(u(t), v(t))\mathrm{d}t + e^{mt}|v(t)|^2 \mathrm{d}t - e^{mt}\langle A(t)u(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t \\
& -e^{mt}(B_0(t, v(t)), u(t))\mathrm{d}t + e^{mt}(G_0(t, u(t), v(t)), u(t))\mathrm{d}W(t),
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
& e^{mt}E(u(t), v(t)) = E(u_0, v_0) + m\int_0^t e^{ms}E(u(s), v(s))\mathrm{d}s + \int_0^t e^{ms}E|v(s)|^2 \mathrm{d}s \\
& -\int_0^t e^{ms}E\langle A(s)u(s), u(s)\rangle \mathrm{d}s - \int_0^t e^{ms}E(B_0(s, v(s)), u(s))\mathrm{d}s \\
\leq \; & cE\|u_0\||v_0| + m\int_0^t e^{ms}E(u(s), v(s))\mathrm{d}s + \int_0^t e^{ms}E|v(s)|^2 \mathrm{d}s \\
& -\alpha\int_0^t e^{ms}E\|u(s)\|^2 \mathrm{d}s - \int_0^t e^{ms}E(B_0(s, v(s)), u(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Como consecuencia

$$
\begin{aligned}
&\alpha \int_0^t e^{ms} E \|u(s)\|^2 \, ds \le cE \|u_0\| \, |v_0| + \int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds \\
&+m \left(\int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(c^2 \int_0^t e^{ms} E \|u(s)\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(c_0^2 \int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(c^2 \int_0^t e^{ms} E \|u(s)\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+c \left(e^{mt} E |v(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{mt} E \|u(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & \frac{c}{2} E \|u_0\|^2 + \frac{c}{2} E |v_0|^2 + \int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds + \frac{c}{2} e^{mt} E \|u(t)\|^2 + \frac{c}{2} e^{mt} E |v(t)|^2 \\
&+c(m+c_0) \left(\int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t e^{ms} E \|u(s)\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & \frac{c}{2} E \|u_0\|^2 + \frac{c}{2} E |v_0|^2 + \int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds + \frac{c}{2} e^{mt} E \|u(t)\|^2 + \frac{c}{2} e^{mt} E |v(t)|^2 \\
&+ \frac{c^2(m+c_0)^2}{2\alpha} \int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds + \frac{\alpha}{2} \int_0^t e^{ms} E \|u(s)\|^2 \, ds,
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
&(mc_A + C_{G_0,V}) \int_0^t e^{ms} E \|u(s)\|^2 \, ds \\
\le\ & (mc_A + C_{G_0,V}) \left(\frac{c}{\alpha} E \|u_0\|^2 + \frac{c}{\alpha} E |v_0|^2 + \frac{c}{\alpha} e^{mt} E \|u(t)\|^2 + \frac{c}{\alpha} e^{mt} E |v(t)|^2 \right) \\
&+(mc_A + C_{G_0,V}) \left(\frac{c^2(m+c_0)^2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \right) \int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds,
\end{aligned}
$$

por tanto, sustituyendo en (5.23) tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\min\{1,\alpha\} \left(1 - \frac{c(mc_A + C_{G_0,V})}{\alpha \min\{1,\alpha\}} \right) E \left(e^{mt} |v(t)|^2 + e^{mt} \|u(t)\|^2 \right) \\
\le\ & \left(\frac{c}{\alpha} (mc_A + C_{G_0,V}) + 1 \right) E |v_0|^2 + \left(\frac{c}{\alpha} (mc_A + C_{G_0,V}) + c_A \right) E \|u_0\|^2 \\
&+ \left((mc_A + C_{G_0,V}) \left(\frac{c^2(m+c_0)^2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \right) + m + C_{G_0,H} - 2\beta_0 \right) \int_0^t e^{ms} E |v(s)|^2 \, ds.
\end{aligned}
$$

Por tanto, si suponemos que se verifican las desigualdades

$$
1 - \frac{c(mc_A + C_{G_0,V})}{\alpha \min\{1,\alpha\}} > 0, \tag{5.24}
$$

$$
(mc_A + C_{G_0,V}) \left(\frac{c^2(m+c_0)^2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \right) + m + C_{G_0,H} - 2\beta_0 < 0, \tag{5.25}
$$

tendremos garantizado que la solución de (5.21) es exponencialmente estable en media cuadrática. Para ello, si se verifican

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c\, C_{G_0,V}}{\alpha \min\{1,\alpha\}} &> 0, \\ C_{G_0,V}\left(\frac{c^2 {c_0}^2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}\right) + C_{G_0,H} - 2\beta_0 &< 0, \end{aligned}$$

o, equivalentemente, si son ciertas las desigualdades

$$\begin{aligned} C_{G_0,V} &< \frac{\alpha \min\{1,\alpha\}}{c}, \\ C_{G_0,H} &< 2\beta_0 - C_{G_0,V}\left(\frac{c^2 {c_0}^2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

entonces, es claro que para $m > 0$ suficientemente pequeño se verificarán (5.24) y (5.25), quedando entonces probado este resultado. ■

Ejemplo 11

Consideremos el desplazamiento lateral de una cuerda dado por el sistema siguiente:

$$\begin{cases} v(t) - \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s)\mathrm{d}s + \gamma \int_0^t v(s)\mathrm{d}s = \sigma \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s)\mathrm{d}W(s), \ t \geq 0, \\ u'(t) = v(t), \ t \geq 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases}$$

donde $W(t)$ es un proceso de Wiener unidimensional, $\gamma, \sigma \in \mathbb{R}$. En este ejemplo $H = L^2(0,1)$, $V = H_0^1(0,1)$, siendo

$$\begin{aligned} A(t)u(t) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t), \\ B_0(t, v(t)) &= \gamma v(t), \\ G_0(t, u(t), v(t)) &= \sigma \frac{\partial u}{\partial x}(t), \end{aligned}$$

por tanto, haciendo la identificación con respecto al teorema 31, obtenemos que

$$c_A = 1, \alpha = 1, c_0 = \gamma, \beta_0 = \gamma, C_{G_0,V} = \sigma^2, C_{G_0,H} = 0, c = \frac{1}{\pi},$$

luego para que se verifique el teorema anterior necesitamos que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &< \pi, \\ 2\gamma &> \sigma^2\left(\frac{\gamma^2}{\pi^2} + 2\right) = \frac{\sigma^2(\gamma^2 + 2\pi^2)}{\pi^2}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &< \pi, \\ \sigma^2 &< \frac{2\gamma\pi^2}{(\gamma^2 + 2\pi^2)}, \end{aligned}$$

lo cual mejora el mismo resultado encontrado en Curtain [21].

Nuestro siguiente objetivo es demostrar estabilidad trayectorial para la solución de (5.21). Previamente probamos el siguiente resultado:

Teorema 32 *Si la solución* $(u(t), v(t))$ *de (5.21) verifica (5.22) (lo cual ocurre, por ejemplo, si se satisfacen las hipótesis del teorema 31) entonces existe* $K_2 > 0$ *tal que*

$$E\left[\sup_{t\geq 0}\left(|v(t)|^2 + \|u(t)\|^2\right)\right] \leq K_2 E\left(|v_0|^2 + \|u_0\|^2\right). \tag{5.26}$$

Demostración. Gracias al teorema 11 del Capítulo 4 obtenemos que para cada $t \geq 0$ y P-c.s. se verifica

$$\begin{aligned} & |v(t)|^2 + \langle A(t)u(t), u(t)\rangle \\ = \; & |v_0|^2 + \langle A(0)u_0, u_0\rangle + \int_0^t \langle A'(s)u(s), u(s)\rangle \,\mathrm{d}s \\ & -2\int_0^t (B_0(s, v(s)), v(s))\mathrm{d}s + \int_0^t |G_0(s, u(s), v(s))|^2 \,\mathrm{d}s \\ & +2\int_0^t (G_0(s, u(s), v(s)), v(s))\mathrm{d}W(s). \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta ahora las hipótesis $(A.2), (A.3), (A.4)$ y $(B_0.3)$, si posteriormente fijamos $T > 0$ y tomamos supremos en $[0, T]$, se verifica que

$$\begin{aligned} & \sup_{0\leq t\leq T}\left(|v(t)|^2 + \alpha\|u(t)\|^2\right) \\ \leq \; & 2|v_0|^2 + 2c_A\|u_0\|^2 + 2\int_0^T |G_0(s, u(s), v(s))|^2 \,\mathrm{d}s \\ & +4\sup_{0\leq t\leq T}\left(\left|\int_0^t (G_0(s, u(s), v(s)), v(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right). \end{aligned}$$

Tomando esperanzas y aplicando la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy resulta que

$$\begin{aligned} & E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(|v(t)|^2 + \alpha\|u(t)\|^2\right)\right] \\ \leq \; & 2E|v_0|^2 + 2c_A E\|u_0\|^2 + 2E\int_0^T |G_0(s, u(s), v(s))|^2 \,\mathrm{d}s \\ & +4E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (G_0(s, u(s), v(s)), v(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right) \\ \leq \; & 2E|v_0|^2 + 2c_A E\|u_0\|^2 + 2E\int_0^T |G_0(s, u(s), v(s))|^2 \,\mathrm{d}s \\ & +\frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|v(t)|^2\right] + 72E\int_0^T |G_0(s, u(s), v(s))|^2 \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Entonces, gracias a $(G_0.2)$ y $(G_0.3)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\right)\right]\\
\leq\;& \frac{1}{\min\{\frac{1}{2},\alpha\}}\left(2E\,|v_0|^2+2c_AE\,\|u_0\|^2\right.\\
&\left.+74\max\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}E\int_0^T\left(\|u(s)\|^2+|v(s)|^2\right)\mathrm{d}s\right),
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (5.22) podemos acotar esta integral, obteniendo que

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\right)\right]\\
\leq\;& \frac{2\max\{1,c_A\}}{\min\{\frac{1}{2},\alpha\}}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\\
&+\frac{74\max\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}}{\min\{\frac{1}{2},\alpha\}}K_1E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\int_0^T\mathrm{e}^{-ms}\mathrm{d}s\\
\leq\;& \frac{2\max\{1,c_A\}}{\min\{\frac{1}{2},\alpha\}}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\\
&+\frac{74\max\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}}{m\min\{\frac{1}{2},\alpha\}}K_1E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right),
\end{aligned}$$

donde $m, K_1 > 0$. Llamando $K_2 = \frac{2\max\{1,c_A\}+\frac{74}{m}\max\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}K_1}{\min\{\frac{1}{2},\alpha\}}$, puesto que es una constante que no depende de T, podemos aplicar el teorema de la convergencia monótona para concluir con la demostración de este resultado. ■

Teorema 33 *Si la solución $(u(t), v(t))$ de (5.21) verifica (5.22) (lo cual ocurre, por ejemplo, si se satisfacen las hipótesis del teorema 31) entonces existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log\left(|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\right)}{t}\leq-\gamma,\quad P\text{-c.s.},$$

es decir, la solución de (5.21) es casi seguramente exponencialmente estable.

Demostración. De nuevo gracias al teorema 11, para $t > N$, $N \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&|v(t)|^2+\langle A(t)u(t),u(t)\rangle\\
=\;& |v(N)|^2+\langle A(N)u(N),u(N)\rangle+\int_N^t\langle A'(s)u(s),u(s)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&-2\int_N^t(B_0(s,v(s)),v(s))\mathrm{d}s+\int_N^t|G_0(s,u(s),v(s))|^2\,\mathrm{d}s\\
&+2\int_N^t(G_0(s,u(s),v(s)),v(s))\mathrm{d}W(s).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis $(A.2)$, $(A.3)$, $(A.4)$ y $(B_0.3)$, si posteriormente tomamos supremos en $[N, N+1]$, se verifica que

$$\begin{aligned}
&\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(|v(t)|^2+\alpha\,\|u(t)\|^2\right)\\
\leq\;& 2\,|v(N)|^2+2c_A\,\|u(N)\|^2+2\int_N^{N+1}|G_0(s,u(s),v(s))|^2\,\mathrm{d}s\\
&+4\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(\left|\int_0^t(G_0(s,u(s),v(s)),v(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, dado $\varepsilon>0$ (y que luego determinaremos convenientemente) se tiene que

$$\begin{aligned}
&P\left[\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\right)\geq\varepsilon\right]\\
\leq\;& P\left[\frac{2\max\{1,c_A\}}{\min\{1,\alpha\}}\left(|v(N)|^2+\|u(N)\|^2\right)\geq\frac{\varepsilon}{3}\right]\\
&+P\left[\frac{2}{\min\{1,\alpha\}}\int_N^{N+1}|G_0(s,u(s),v(s))|^2\,\mathrm{d}s\geq\frac{\varepsilon}{3}\right]\\
&+P\left[\frac{4}{\min\{1,\alpha\}}\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(\left|\int_0^t(G_0(s,u(s),v(s)),v(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right)\geq\frac{\varepsilon}{3}\right].
\end{aligned}$$

Acotamos cada uno de los sumandos de la desigualdad anterior. Por un lado, ya que (u,v) satisface (5.22) tenemos que

$$\begin{aligned}
&P\left[|v(N)|^2+\|u(N)\|^2\geq\frac{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}{6\max\{1,c_A\}}\right]\\
\leq\;&\frac{6\max\{1,c_A\}}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}E\left[|v(N)|^2+\|u(N)\|^2\right]\leq\frac{6\max\{1,c_A\}K_1}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\mathrm{e}^{-mN}.
\end{aligned}$$

Por otro, gracias a la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, a (5.26), $(G_0.2)$, $(G_0.3)$ y (5.22) resulta que

$$\begin{aligned}
&P\left[\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(\left|\int_0^t(G_0(s,u(s),v(s)),v(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right)\geq\frac{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}{12}\right]\\
\leq\;&\frac{12}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}E\left[\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(\left|\int_0^t(G_0(s,u(s),v(s)),v(s))\mathrm{d}W(s)\right|\right)\right]\\
\leq\;&\frac{36}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}E\left[\left(\sup_{N\leq t\leq N+1}|v(t)|^2\right)^{\frac12}\left(\int_N^{N+1}|G_0(s,u(s),v(s))|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\right]\\
\leq\;&\frac{36}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}\left(E\sup_{N\leq t\leq N+1}|v(t)|^2\right)^{\frac12}\left(E\int_N^{N+1}|G_0(s,u(s),v(s))|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\\
\leq\;&\frac{36}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}K_2^{\frac12}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\max{}^{\frac12}\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}K_1^{\frac12}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{mN}{2}}}{m^{\frac12}},
\end{aligned}$$

y por último, de nuevo gracias a $(G_0.2)$, $(G_0.3)$ y (5.22) tenemos

$$\begin{aligned} & P\left[\int_N^{N+1} |G_0(s,u(s),v(s))|^2\,\mathrm{d}s \geq \frac{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}{6}\right] \\ \leq \;& \frac{6}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}} E\int_N^{N+1} |G_0(s,u(s),v(s))|^2\,\mathrm{d}s \\ \leq \;& \frac{6K_1}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}} \max\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\} E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-mN}}{m}. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$\begin{aligned} & P\left[\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\right)\geq\varepsilon\right] \\ \leq \;& \frac{6\max\{1,c_A\}K_1}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}} E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\mathrm{e}^{-mN} \\ & +\frac{6K_1}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}\max\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-mN}}{m} \\ & +\frac{36K_2^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\max{}^{\frac{1}{2}}\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}K_1^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{mN}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} \\ \leq \;& \frac{6K_1}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}}\mathrm{e}^{-mN}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\left(\max\{1,c_A\}+\frac{\max\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}}{m}\right) \\ & +\frac{36K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon\min\{1,\alpha\}m^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{mN}{2}}E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\max{}^{\frac{1}{2}}\{C_{G_0,V},C_{G_0,H}\}. \end{aligned}$$

Por tanto, si para cada $N\in\mathbb{N}$, tomamos $\varepsilon=\varepsilon_N=E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{mN}{4}}$ obtenemos que

$$P\left[\sup_{N\leq t\leq N+1}\left(|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\right)\geq\varepsilon_N\right]\leq K_3\mathrm{e}^{-\frac{mN}{4}}, \tag{5.27}$$

donde K_3 es una constante independiente de N.

Aplicando el lema de Borel-Cantelli se deduce que, para casi todo $\omega\in\Omega$, existe $N(\omega)\in\mathbb{N}$ tal que

$$|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\leq\varepsilon_N \quad \forall N\geq N(\omega), \forall t\in[N,N+1],$$

es decir, $\forall N\geq N(\omega)$, $\forall t\in[N,N+1]$, se verifica que

$$|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\leq E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{mN}{4}}\leq E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\mathrm{e}^{\frac{m}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{mt}{4}},$$

luego si tomamos $\beta=\mathrm{e}^{\frac{m}{4}}$ y $\gamma=\frac{m}{4}$ obtenemos que, $\forall t\geq N(\omega)$,

$$|v(t)|^2+\|u(t)\|^2\leq\beta E\left(|v_0|^2+\|u_0\|^2\right)\mathrm{e}^{-\gamma t},$$

con lo que de manera inmediata terminamos la demostración de este resultado. ■

Bibliografía

[1] Arnold L. (1974): *Stochastic differential equations.* Wiley, New York.

[2] Arnold L. (1990): Stabilization by noise revisited, *Z. Angew. Math. Mech.* **70**, 235-246.

[3] Arnold L., Crauel H., Wihstutz V. (1983): Stabilization of linear systems by noise, *SIAM J. Control Optim.* **21**, 451-461.

[4] Artola M. (1977): Equations et inequations variationnelles a retard, *Ann. Sc. Math. Québec* vol. I, no. **2**, 131-152.

[5] Brézis, H. (1983): *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris.

[6] Caraballo T. (1990): Asymptotic exponential stability of stochastic partial differential equations with delay, *Stochastics* **33**, 27-47.

[7] Caraballo T. (1991): Existence and Uniqueness of Solutions for non-linear Stochastic Partial Differential Equations, *Collectanea Mathematica* **42**(1), 51-74.

[8] Caraballo T. (2001): On the decay rate of solutions of non-autonomous differential systems, *Electron. J. Diff. Eqns.* Vol. 2001, **05**, 1-17.

[9] Caraballo T. (2001): Nonlinear Partial Functional Differential Equations: Existence and Stability, *J. Math. Anal. Appl.* **262**, 87-111.

[10] Caraballo, T., Garrido-Atienza M.J., Real J. (2001): Algunos resultados de estabilidad para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas no lineales. CD-ROM actas del congreso XVII CEDYA-VII CMA.

[11] Caraballo, T., Garrido-Atienza M.J., Real J.: Existence and uniqueness of solutions to delay stochastic evolution equations. *Stoch. Anal. and Appl.* Aparecerá.

[12] Caraballo, T., Garrido-Atienza M.J., Real J.: Asymptotic stability for non-linear stochastic evolution equations. *Stoch. Anal. and Appl.* Aparecerá.

[13] Caraballo, T., Garrido-Atienza M.J., Real J.: Stochastic stabilization of differential systems with general decay rate. Enviado.

[14] Caraballo T., Langa J.A. (2001): Comparison of the long-time behavior of linear Ito and Stratonovich partial differential equations, *Stoch. Anal. Appl.* **19**(2), 183-195.

[15] Caraballo T., Langa J.A., Robinson J.C. (2000): Stability and random attractors for a reaction-diffusion equation with multiplicative noise, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **6**(4), 875-892.

[16] Caraballo T., Langa J.A., Taniguchi T.: The exponential behaviour and stabilizability of stochastic 2D-Navier-Stokes equations, *J. Diff. Eqns.*, to appear.

[17] Caraballo T., Liu, K. (1999): On exponential stability criteria of stochastic partial differential equations, *Stochastic Processes and their Applications* **83**, 289-301.

[18] Caraballo T., Liu K., Mao X.R. (2001): On stabilization of partial differential equations by noise, *Nagoya Math. J.* **161**(2), 155-170.

[19] Caraballo T., Liu, K., Truman, A. (2000): Stochastic functional partial differential equations: existence, uniqueness and asymptotic decay property, *Proc. R. Soc. Lond. A* **456**, 1775-1802.

[20] Caraballo T., Real J. (2001): Navier-Stokes equations with delays. *The Royal Society of London,* Vol 457, *2014,* 2441-2453.

[21] Curtain R.F. (1981): Stability of stochastic partial differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* **79**, 352-369.

[22] Da Prato G., Zabczyk J. (1992): *Stochastic equations in infinite dimensions,* Cambridge University Press.

[23] El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. (1973): *Introduction to the theory and applications of differential equations with deviating arguments.* Academic Press. New York and London.

[24] Fernández-Cara E., Garrido-Atienza M.J., Real J. (1999): On the approximate controllability of a stochastic parabolic equation with a multiplicative noise, *C. R. Acad. Sci. Paris,* Volumen 328, Série I, 675-680.

[25] Fernández-Cara E., Garrido-Atienza M.J., Real J. (1999): Controlabilidad aproximada con control frontera para una ecuación parabólica estocástica con ruido multiplicativo. Actas del congreso XVI CEDYA-VI CMA, 713-718.

[26] Garrido-Atienza M.J., Real J.: Existence and uniqueness of solutions for delay stochastic evolution equations of second order in time. Enviado.

[27] Garrido-Atienza M.J., Real J.: Existence and uniqueness of solutions for delay evolution equations of second order in time. Enviado.

[28] Has'minskii R. (1980): *Stochastic stability of differential equations*, Sijthoff and Noordhoff, Netherlands.

[29] Haussmann U.G. (1978): Asymptotic stability of the linear Itô equation in infinite dimensions, *J. Math. Anal. Appl.* **65**, 219-235.

[30] Ichikawa, A. (1982): Stability of semilinear stochastic evolutions equations, *J. Math. Anal. Appl.* **90**, 12-44.

[31] Karatzas I., Shreve S.E. (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer.

[32] Khasminskii R., Mandrekar, V. (1994): On the stability of solutions of stochastic evolution equations, *The Dynkin Festschrift* **34**, Birkhäuser, Boston, MA, 185-197.

[33] Köthe G. (1969): *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag New, York.

[34] Kozin F. (1972): *Stability of linear stochastic systems*, Procedings, International Symposium on Stability of Stochastic Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics 294, Springer-Verlag, New York, Berlin.

[35] Krasovskii, N.N. (1963): *Stability of motions*, Stanford University Press.

[36] Kushner H.J. (1968): On the stability of process defined by stochastic difference-differential equations, *J. Diff. Eqns.* **4**, 424-443.

[37] Lions J.L. (1969): *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod Gauthier-Villars, Paris.

[38] Liptser R.S., Shiryayev A.N. (1977): *Statistics of Random Processes I. General Theory*, Springer.

[39] Liu K. (1998): Lyapunov functionals and asymptotic stability of stochastic delay evolution equations, *Stochastics and Stochastics Reports*, Vol. 63, 1-26.

[40] Liu K. (2000): Necessary and sufficient conditions for exponential stability and ultimate boundedness of systems governed by stochastic partial differential equations, *J. London Math. Soc.* **62**(2), 311-320.

[41] Liu K., Mao X.R. (1998): Exponential stability of nonlinear stochastic evolution equations, *Stochastic Processes and their Applications* **78**, 173-193.

[42] Liu K., Mao X.R. (2001): Large time decay behavior of dynamical equations with random perturbation features, *Stoch. Anal. Appl* **19**(2), 295-327.

[43] Liu R., Mandrekar V. (1996): Ultimate boundeness and invariant measures of stochastic evolution equations, *Stochastics* **56**, 75-101.

[44] Liu R., Mandrekar V. (1997): Stochastic semilinear evolution equations: Lyapunov function, stability and ultimate boundeness, *J. Math. Anal. Appl.* **212**, 537-553.

[45] Mao X.R. (1994): *Exponential stability of stochastic differential equations*, Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong.

[46] Mao X.R. (1994): Stochastic stabilization and destabilization, *System & Control letters* **23**, 279-290.

[47] Mao X.R.(1997): *Stochastic differential equations and applications*, Horwood Publishing.

[48] Mao X.R., Shah A. (1997): Exponential stability of stochastic differential delay equations, *Stochastics* **60**, 135-153.

[49] Meyer P.A. (1966): *Probabilités et Potentiel*, Herman.

[50] Mohammed S.-E. A.(1996): Stochastic differential systems with memory: theory, examples and applications, International Workshop on Stochastic Analysis, Oslo, Norway.

[51] Oksendal, B. (1992): *Stochastic differential equations,* Springer-Verlag, New York.

[52] Pardoux, E. (1975): *Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones*, Thèse, Université Paris XI.

[53] Pardoux, E. (1976): *Integrales stochastiques hilbertiennes*, Cahiers de Mathématiques de la Decision n. 7617, Université Paris-Dauphine.

[54] Pardoux E. (1979): Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics* **3**, 127-167.

[55] Real J. (1980): *Contribución al estudio de una clase de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con retardo*, Tesis, Universidad de Sevilla.

[56] Real J. (1982-1983): Stochastic partial differential equations with delays, *Stochastics* **8**, 81-102.

[57] Ruess W. (1996): Existence of solutions to partial functional differential equations with delay, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, (ed. A.G. Kartsatos), Marcel-Dekker, *Lecture Notes Pure Appl. Math.* **178**, New York, 259-288.

[58] Scheutzow M. (1993): Stabilization and destabilization by noise in the plane, *Stoch. Anal. Appl.* **11**(1) , 97-113.

[59] Wu J. (1996): *Theory and applications of partial functional differential equations,* Springer-Verlag, New York.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D.ª MARÍA JOSÉ GARRIDO ATIENZA

titulada ALGUNOS RESULTADOS DE EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTABILIDAD PARA EDP FUNCIONALES ESTOCÁSTICAS NO LINEALES.

acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE POR UNANIMIDAD

Sevilla, 29 de mayo de 2002

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,