UN MODELO TEMPORAL DE LOCALIZACIÓN DE PLANTAS Y ALMACENES CON EXISTENCIAS FINALES EN CADA PERIODO.

Autores: Hinojosa Bergillos, Yolanda
yhinojos@cica.es
Dpto. de Economía Aplicada I.
Universidad de Sevilla

Puerto Albandoz, Justo
puerto@cica.es
Dpto. de Estadística e I.O.
Universidad de Sevilla

Palabras clave: Localización de plantas, programación entera mixta, dual lagrangiano, inventarios, heurístico.

Resumen:

En este trabajo se aborda un problema de localización de plantas de producción y centros de almacenamiento con objeto de satisfacer las demandas de un grupo de clientes. La distribución de productos se realiza en dos etapas diferenciadas: Envío desde las plantas de producción a los diferentes almacenes y envío posterior desde éstos a los distintos clientes. El estudio se realiza a lo largo de un horizonte temporal finito considerando las existencias finales en los almacenes como existencias iniciales del período siguiente. Asimismo, se supone que tanto almacenes como plantas tienen capacidad limitada. Nuestro objetivo consiste en determinar la política óptima, en el horizonte temporal fijado, para la instalación (o en su caso, cierre) de plantas y almacenes, de forma que se satisfagan las demandas de los clientes, en cada período, a mínimo coste. En este coste se incluyen los costes de apertura (o en su caso, cierre), mantenimiento y funcionamiento de plantas y almacenes, así como, los costes de transporte y almacenamiento de existencias finales.

El modelo es formulado como un problema de programación entera mixta. Para su resolución se propone una relajación lagrangiana junto con un procedimiento heurístico mediante el cual se obtiene una buena solución del problema original.

1.-Introducción.

Son muchas las situaciones reales en las que grandes compañías manufacturan y distribuyen diversos tipos de productos. Una de las primeras cuestiones que dichas compañías han de plantearse es dónde ubicar las plantas de producción y/o los almacenes desde donde distribuirán sus productos a los diferentes clientes con objeto de cubrir las demandas de éstos a mínimo coste. Éste es el caso, por citar algún ejemplo, de compañías que fabrican y almacenan piezas de recambio de coches, de aquellas que elaboran y distribuyen catálogos entre distintas agencias y comercios o de las que, en general, producen y distribuyen algún tipo de bien. Si las ubicaciones admisibles para las plantas de producción y/o distribución son finitas y conocidas de antemano, nos enfrentamos con un problema clásico dentro de la Teoría de Localización discreta conocido como el problema de localización de plantas. Estos problemas han sido ampliamente estudiados y, en términos generales, pueden clasificarse en:

1) Problemas de localización de plantas simples sin restricciones de capacidad (SPLP);

2) Problemas de localización de plantas con restricciones de capacidad (CPLP).

Aunque ambos tipos de problemas pueden ser formulados como problemas de programación entera-mixta (véase, por ejemplo, Aikens (1985)), no va a ser posible, en general, obtener su solución exacta en tiempo polinomial por pertenecer a la clase de problemas conocidos como problemas NP-duros (véase Krarup y Pruzan (1983) quienes probaron que incluso el SPLP es un problema NP-duro).

Se han estudiado muchas extensiones de estos problemas (véase, por ejemplo, Aikens (1985), Drezner (1995) o Daskin (1995)) donde se puede encontrar una buena recopilación de estos problemas y de sus extensiones). Podemos resaltar dos de ellas, la primera consiste en introducir aspectos temporales en el modelo. En este caso las variables de decisión no son sólo las que hacen referencia a la planificación del transporte y localización de plantas, sino también al período de tiempo en que las plantas se ponen en funcionamiento (véase por ej., Warszawski's (1973), Van Roy y Erlenkotter (1982) o más recientemente Chardaire et al. (1996)). En la segunda se supone la existencia de una cierta estructura en el esquema de transporte (problemas multietápicos), es decir, el transporte desde las plantas hasta los clientes se realiza en dos etapas bien diferenciadas. Estos modelos ha sido escasamente estudiados en la literatura clásica sobre localización (véase Kaufman et al. (1977) o Tcha y Lee (1984)), aunque en la última década han aparecido importantes trabajos (véase Daskin (1995) , Marín (1996), Crainic y Delorme (1993), Barros y Labbé (1994) o Pirkul y Jayaraman (1996)). La principal peculiaridad de estos modelos es que los productos son enviados desde las plantas de producción a los almacenes para posteriormente ser transportados desde estos a los diferentes clientes. Por tanto, el problema de decisión consiste en localizar las plantas y almacenes y en determinar la cantidad de los diferentes productos que será enviada desde cada planta en funcionamiento a cada almacén abierto y desde éste a cada cliente. Adicionalmente, en ambas extensiones se puede considerar o no restricciones sobre capacidad.

El marco más natural para estos problemas es la combinación de ambas extensiones, es decir, la consideración conjunta de aspectos multietápicos y multitemporales. Esta combinación ha sido estudiada por primera vez por Hinojosa, Puerto y Fernández (2000) quienes consideran un modelo bietápico en el que los productos son enviados desde las plantas de producción a un conjunto de almacenes para posteriormente ser distribuidos desde éstos a los diferentes clientes. Adicionalmente, realizan el estudio a través de un horizonte temporal finito en el que se permite tanto la apertura de nuevas plantas como el cierre de las ya existentes. Sin embargo, este modelo no considera la existencia de stock al final de cada temporada lo cual tiene sentido cuando se trabaje con productos perecederos o de temporada pero, deja de tenerlo cuando se trabaja con productos que permanecen de una temporada a otra como podría ser el caso de las piezas de recambio de coches.

El modelo que abordamos en el presente trabajo es una extensión del citado anteriormente en el que las existencias al final de cada temporada se mantienen almacenadas en las plantas de distribución o almacenes hasta el inicio de la temporada siguiente, considerándose en esta como existencias iniciales. En todo momento se supone que tanto almacenes como plantas de producción tienen capacidad limitada, por lo que tanto la cantidad producida como la almacenada ha de estar sujeta a esta restricción. Nuestro objetivo es determinar en el horizonte temporal fijado, la política óptima para la instalación (o en su caso, cierre) de plantas y almacenes así como para la distribución de productos. Por política óptima se entiende aquella que permita satisfacer en cada período las demandas de todos los clientes a mínimo coste. En este coste se incluyen los costes de apertura (o en su caso, cierre), mantenimiento y funcionamiento de plantas y almacenes, así como, los costes de transporte y los costes de almacenamiento de las existencias al final de cada período. Este modelo es un problema de programación entera mixta con un elevado número de variables (por ejemplo, un problema con 100 clientes, 15 almacenes, 5 plantas, 2 tipos diferentes de productos y 5 periodos de tiempo tiene 15970 variables y 1334 restricciones). Esto hace que el tiempo computacional requerido para su resolución exacta por acotación ramificación sea prohibitivo. Por tanto se propone un método alternativo para la obtención de soluciones aproximadas que incorpora un método dual ascendente aplicado a una relajación lagrangiana del problema junto con un procedimiento heurístico.

El trabajo queda organizado como sigue. En la sección 2 se presenta la formulación matemática del modelo como un problema de programación entera mixta. En la sección 3 proponemos una relajación Lagrangiana del mismo, la cual puede ser resuelta de forma óptima tras la resolución de un número finito de problemas lineales junto con la aplicación de un algoritmo del subgradiente. En la sección 4 se desarrolla un procedimiento heurístico para la obtención de una solución factible de nuestro modelo. En la quinta sección se presentan algunas conclusiones.

2.-El modelo.

En este modelo se aborda un problema de localización de plantas con objeto de diseñar y planificar un sistema de distribución a lo largo de un horizonte temporal en el que se fija el estudio del mismo. Para este tipo de problemas suele ser usual considerar meses o temporadas como longitud de cada período de tiempo. Se asume que los conjuntos de clientes y productos, así como las posibles ubicaciones para las plantas de producción y almacenes están fijos y son conocidos de antemano, por lo que no cambiarán a lo largo del citado horizonte. Se denotará por:

- $I = \{1,...,n\}$ al conjunto de clientes a los que se referenciará por $i \in I$.
- $L = \{1,...,q\}$ al conjunto de los diferentes tipos de productos, referenciados por $l \in L$.
- $J = \{1,...,m\}$ al conjunto de posibles ubicaciones para los almacenes, referenciados por $j \in J$.
- $K = \{1,..., p\}$ al conjunto de posibles ubicaciones para las plantas de producción, referenciadas por $k \in K$.

Se considera que tanto las plantas de producción como los almacenes tienen una capacidad limitada, así se denotará por:

- W_j^t la capacidad del almacén j en el período de tiempo t,
- C_k^t la capacidad de la planta k en el período de tiempo t y por
- d_{il}^t la demanda que el cliente i tiene del producto l durante el período t.

Al comienzo del primer período de tiempo se supone que existe un subconjunto K_c dentro del conjunto total de posibles ubicaciones para plantas donde ya existen plantas en funcionamiento. Éstas se pueden cerrar al final de cualquier período del horizonte temporal, pero una vez cerradas no pueden volver a ser abiertas. Se denotará por K_o el conjunto de posibles ubicaciones donde no existen plantas en funcionamiento antes del comienzo del primer período de tiempo. Estas plantas podrán ser abiertas al comienzo de cualquier período de tiempo, pero una vez abiertas ya no podrán volver a ser cerradas dentro del horizonte temporal considerado. En los mismos términos se supone la existencia de subconjuntos J_c y J_o para los almacenes. Esta hipótesis es bastante razonable. En muchas ocasiones el hecho de cerrar y abrir sin que exista una continuidad trae consigo una pérdida de mercado puesto que los consumidores requieren una cierta regularidad para mantenerse como clientes habituales de una determinada firma o comercio. Esto nos permite definir las variables de decisión del problema como:

- $\forall j \in J_{o,}\ \forall t\ \ z_j^t = \begin{cases} 1 & \text{si el almacen } j \text{ es abierto al comienzo del periodo } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $\forall j \in J_{c,}\ \forall t < T-1\ \ z_j^t = \begin{cases} 1 & \text{si el almacen } j \text{ es cerrado al final del periodo } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $\forall j \in J_{c,}\ \ z_j^T = \begin{cases} 1 & \text{si el almacen } j \text{ se mantiene abierto durante todo el horizonte temporal} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

- $\boldsymbol{z}_k^t$ es definido de forma análoga para el conjunto de plantas.
- $x_{ijl}^t :=$ fracción (con respecto a d_{il}^t) de producto l enviado desde el almacén j al cliente i durante el período t.
- $y_{jkl}^t :=$ fracción (con respecto a W_j^t) de producto l enviado desde la planta k al almacén j durante el período t.
- $I_{jl}^t :=$ stock de producto l en el almacén j al final del período t.

Asimismo, para asegurar una cobertura mínima de la demanda se obliga a que haya un mínimo número de plantas y almacenes abiertos al comienzo y al final del horizonte temporal. Se denotará por NW^1, NW^T (respectivamente NP^1, NP^T) al mínimo número de almacenes y plantas respectivamente que han de estar abiertos al comienzo del primer período y al final del último.

Por último se supone un estructura de costes que incluye costes de apertura (o en su caso, cierre), mantenimiento y funcionamiento de plantas y almacenes, así como, costes de transporte y costes de almacenamiento de las existencias al final de cada período. Estos costes se denotarán por:

- $\forall j \in J_o,\ \ F_j^t :=$ coste total por abrir el almacén j al comienzo del período t.

  Este coste incluye el coste de apertura al comienzo del período t más el coste de mantenimiento y funcionamiento del almacén j desde el período t hasta el final del horizonte temporal
- $\forall j \in J_c,\ \forall t < T-1\ \ F_j^t :=$ coste total por cerrar el almacén j al final del período t.

Este coste incluye el coste de cierre al final del período t más el coste de mantenimiento y funcionamiento del almacén j desde el comienzo del horizonte temporal hasta el final del período t.

- $\forall j \in J_c$, $F_j^T :=$ coste total por mantener abierto el almacén j durante todo el horizonte temporal.
- G_k^t es definido de forma análoga para el conjunto de plantas.
- $b_{jkl}^t :=$ coste por unidad de producto l enviado desde la planta k al almacén j durante el período t.
- $c_{ijl}^t :=$ coste por unidad de producto l enviado desde el almacén j al cliente i durante el período t.
- $p_{jl}^t :=$ coste por unidad de existencia de producto l en el almacén j al final del período t.

Por simplificación de notación se considerará:

- $T_{jt} = \begin{cases} \{1,...,t\} & \text{si } j \in J_o \\ \{t,...,T\} & \text{si } j \in J_c \end{cases}$ y análogamente T_{kt} para las plantas.

De acuerdo con las hipótesis y notación descritas, la formulación matemática del problema es la siguiente:

$$(P) \qquad \min\ f(x,y,z,\mathbf{z}) := \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{q} c_{ijl}^t x_{ijl}^t d_{il}^t + \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} b_{jkl}^t y_{jkl}^t W_j^t + \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{q} p_{jl}^t I_{jl}^t$$

$$+ \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} F_j^t z_j^t + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{p} G_k^t \mathbf{z}_k^t$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijl}^t \geq 1 \qquad \forall i,\ \forall l,\ \forall t \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} d_{il}^t x_{ijl}^t + \sum_{l=1}^{q} I_{jl}^t \leq W_j^t \sum_{r\in T_{jt}} z_j^r \qquad \forall j,\ \forall t \tag{2}$$

$$\sum_{l=1}^{q} I_{jl}^t \leq W_j^{t+1} \sum_{r\in T_{jt+1}} z_j^r \qquad \forall j,\ \forall t = 1,...,T-1 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{p} W_j^t y_{jkl}^t + I_{jl}^{t-1} = \sum_{i=1}^{n} d_{il}^t x_{ijl}^t + I_{jl}^t \qquad \forall j,\ \forall l,\ \forall t \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{q} W_j^t y_{jkl}^t \leq C_k^t \sum_{r\in T_{kt}} \mathbf{z}_k^r \qquad \forall k,\ \forall t \tag{5}$$

$$\sum_{j\in J_o} z_j^1 + \sum_{j\in J_c}\sum_{t=1}^{T} z_j^t \geq NW^1; \qquad \sum_{j\in J_c} z_j^T + \sum_{j\in J_o}\sum_{t=1}^{T} z_j^t \geq NW^T \tag{6}$$

$$\sum_{k\in K_o} z_k^1 + \sum_{k\in K_c}\sum_{t=1}^{T} z_k^t \geq NP^1; \qquad \sum_{k\in K_c} z_k^T + \sum_{k\in K_o}\sum_{t=1}^{T} z_k^t \geq NP^T \tag{7}$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_j^t = 1 \quad \forall j\in J_c; \qquad \sum_{t=1}^{T} z_j^t \leq 1 \quad \forall j\in J_o \tag{8}$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_k^t = 1 \quad \forall k\in K_c; \qquad \sum_{t=1}^{T} z_k^t \leq 1 \quad \forall k\in K_o \tag{9}$$

$$I_{jl}^0 = I_{jl}^T = 0 \quad \forall j,l; \qquad I_{jl}^t \geq 0 \;\; \forall j,l,\; t=1,...,T-1 \tag{10}$$

$$x_{ijl}^t, y_{jkl}^t \geq 0 \quad \forall i,j,k,l,t; \qquad z_j^t, z_k^t \in \{0,1\} \quad \forall j,k,t \tag{11}$$

Las restricciones (1) obligan a que se satisfaga la demanda que cada cliente i tiene de cada uno de los productos l en cada período de tiempo t. Esta demanda ha de ser satisfecha por los diferentes almacenes. Las restricciones (2), (3) y (5) hacen referencia a las limitaciones de capacidad. Las restricciones (2) obligan a que el número total de unidades de todos los productos enviados desde el almacén j más las existencias al final del período t sean inferior o igual a la capacidad de dicho almacén en el período t. Las restricciones (5) son análogas a las restricciones (2) pero referidas a plantas en las que no se considera que haya existencias finales. Por último, las restricciones (3) obligan a que la cantidad de existencias en el almacén j al final del período t sea menor o igual que la capacidad de dicho almacén en el período siguiente, para que puedan ser consideradas en éste último como existencias iniciales. Las restricciones (4) son ecuaciones de balance de flujo para cada almacén, cada producto y cada período de tiempo. Nótese que la cantidad de producto l enviada desde las plantas al almacén j en el período t más las existencias al final del período anterior ha de ser igual a la cantidad de producto l enviada desde dicho almacén a los distintos clientes más las existencias al final del presente período. Las restricciones (6) y (7) establecen el mínimo número de almacenes y plantas que han de estar abiertas al comienzo y al final del horizonte temporal. Las restricciones (8) y (9) hacen referencia a las características anteriormente señaladas de los conjuntos $J = J_o \bigcup J_c$ y $\mathrm{K} = K_o \bigcup K_c$. Las restricciones (10) obligan a que las existencias al comienzo y al final del horizonte temporal valgan 0. Por último, las restricciones (11) establecen las variables continuas y binarias del problema.

El problema (P) es un problema de programación entera-mixta, por lo que su resolución mediante un algoritmo exacto es computacionalmente intratable al tratarse de un problema de los clasificados como NP-duros. Por esta razón proponemos un método heurístico que se basa en : 1) realizar una relajación lagrangiana del problema, obteniendo la solución del problema dual lagrangiano mediante el algoritmo del subgradiente y 2) usar un procedimiento "ad hoc" para obtener una buena solución factible del problema (P) a partir de las soluciones de los problemas relajados.

3.- Descomposición del problema. Obtención de cotas inferiores.

En esta sección se describirá someramente la técnica utilizada para la obtención de cotas inferiores de la solución óptima del problema (P). Esta técnica, conocida como relajación lagrangiana, es bastante usual en la resolución aproximada de problemas de programación entera-mixta (véase Fisher (1981) para una descripción detallada de la misma) y es usada habitualmente en trabajos relacionados con la localización de plantas (véase Barros y Labbé (1994), Beasley (1993), Crainic y Delorme (1993), Erlenkotter (1978), Guignard et al. (1990) o Pirkul et al. (1996)). La relajación lagrangiana nos permitirá, como ya se ha mencionado, obtener una cota inferior de la solución óptima de nuestro problema.

En nuestro problema proponemos relajar las restricciones que hacen referencia a la satisfacción de las demandas (1), a las que se les asocia unos multiplicadores $m_{il}^t \geq 0$, con objeto de incorporarlas a la función objetivo. De igual forma, se relajarán las ecuaciones de balance de flujo (4) a las que se le asociarán unos multiplicadores $l_{jl}^t \in \Re$. Esto dará lugar al problema relajado, que denotaremos por $(LR(l,m))$, donde estas restricciones no aparecen como tales, sino incorporadas a la función objetivo por medio de los multiplicadores (para más detalle, véase Hinojosa, Puerto y Fernández (2000) en el que se realiza una relajación del mismo tipo para un problema similar).

Denotemos por $v(A)$ el valor de la función objetivo del problema (A). Se prueba que el problema $(LR(l,m))$ en el que ya no aparecen las restricciones (1) y (4) puede ser descompuesto en dos subproblemas, a los que denotaremos por $(LR1(l,m))$ y $(LR2(l,m))$ respectivamente. . El problema $(LR1(l,m))$ sólo afecta a los almacenes y el problema $(LR2(l,m))$ a las plantas. Estos dos problemas pueden ser resueltos de forma independiente, por lo que sus soluciones respectivas serán usadas para resolver el problema relajado $(LR(l,m))$, obteniéndose que $v(LR(l,m)) = v(LR1(l,m)) + v(LR2(l,m))$.

Para resolver el problema $(LR1(l,m))$, se prueba que puede ser a su vez, descompuesto en m subproblemas independientes (que denotaremos por $LR1_j(l,m)$), uno por cada almacén y cada uno de éstos en T subproblemas independientes (que se denotarán por $LR1_{jt}(l,m)$), uno por cada período de tiempo considerado. Estos últimos problemas son problemas continuos de programación lineal para los cuales existen algoritmos muy eficaces que permiten su resolución con facilidad. Adicionalmente, al resolver estos últimos T subproblemas para cada almacén $j = 1,...,m$, se obtiene el valor de las variables binarias z_j^t para todo j,t. La resolución de estos T subproblemas se interpreta como el coste que supone abrir el almacén j en cada período de tiempo, por lo que si $j \in J_c$, $v(LR1_j(l,m)) = \min_{t=1,...,T}\{v(LR1_{jt}(l,m))\}$ y en caso de que $j \in J_o$ será el mínimo entre el anterior valor y 0. Una vez resuelto $LR1_j(l,m)$ para todo valor de j, se verifica que $v(LR1(l,m)) = \sum_{j=1}^{m} v(LR1_j(l,m))$.

Se puede proceder de forma similar para resolver el problema $(LR2(l,m))$, obteniéndose igualmente el período de tiempo en que cada planta tiene que ser abierta (o cerrada, si es el caso) y por tanto, el valor de las variables binarias z_k^t para todo k,t.

De esta forma, tras sucesivas descomposiciones se obtiene la solución del problema relajado para cada conjunto de multiplicadores $m_{il}^t \geq 0$ y $l_{jl}^t \in \Re$.

Se conoce (ver Fisher (1981)) que para cada conjunto de multiplicadores, la solución de $(LR(l,m))$ verifica la siguiente relación:

$$v(P) \geq v(DL) := \max_{l,m} v(LR(l,h))$$

Al problema (DL) se le conoce con el nombre de dual lagrangiano y puede ser resuelto mediante el algoritmo del subgradiente (ver Held et al. (1974)), para el cual proponemos el siguiente conjunto de multiplicadores iniciales:

- $l_{jl}^t = 0 \quad \forall j,l,t$.
- $m_{il}^t = \max_j \{c_{ijl}^t d_{il}^t\} \quad \forall i,l,t$.

La resolución del problema dual nos permitirá obtener la máxima, o al menos una buena cota inferior de la solución de nuestro problema original. Sin embargo, por norma general, esta solución no será factible, es decir, no verificará las restricciones que fueron relajadas en el problema (P) por lo que, resolveremos el problema dual y una vez obtenida la mejor solución posible, construiremos a partir de ella una solución factible por medio de un procedimiento heurístico.

4.- Heurístico para la construcción de una solución factible.

En la sección previa, se describe un procedimiento ascendente para obtener una buena solución del problema (DL). Esta solución es a menudo una solución infactible para nuestro problema original (P). Por tanto, debemos desarrollar un procedimiento alternativo que, partiendo de este solución, construya una buena solución factible para (P).

Para ello proponemos el siguiente esquema que consiste en tres pasos diferentes. En el primero se persigue que la capacidad de los almacenes sea suficiente para cubrir las demandas de todos los clientes en cada período de tiempo. En el segundo se persigue el mismo objetivo pero en relación a las plantas. Por último, una vez que las capacidades son suficientes para cubrir las demandas, en el tercer paso se busca la mejor planificación posible para el transporte de productos entre plantas y almacenes, así como, entre almacenes y clientes. En lo que sigue se da una descripción más detallada de este procedimiento.

- PASO 1.

Para cada período de tiempo se calcula la capacidad total de todos los almacenes que se encuentran en funcionamiento en dicho período, así como la demanda total de todos los clientes. Denotémoslo por CW^t y D^t respectivamente y sea dif^t la diferencia entre la demanda total y la capacidad total en t, es decir, $dif^t = D^t - CW^t$.

Se ordena en orden decreciente con respecto a dif^t todos aquellos períodos de tiempo en los que la capacidad de los almacenes no sea suficiente para cubrir la demanda total de los clientes. La razón para esta ordenación es que cuanto mayor sea dif^t, mayor es el número de almacenes que deben ser abiertos, lo cual afecta al resto de períodos.

Para cada $t_0 = \arg\max_t \left\{ dif^t : dif^t > 0 \right\}$ asignar el siguiente índice a todo almacén j que esté cerrado en t_0, es decir, que no se encuentre en funcionamiento en t_0:

$$I(j,t_0) = \left[\min_{r \in T_{jt0}} \left\{ v(LR1_{jr}(l,m)) \right\} - v(LR1_j(l,m)) \right] \times \left[\max\left\{ \frac{dif^{t_0}}{W_j^{t_0}} \right\}, 1 \right]$$

donde $\min_{r \in T_{jt0}} \left\{ v(LR1_{jr}(l,m)) \right\}$ representa el coste que supone abrir (o cerrar, en su caso) el almacén j en un período anterior a t_0 (o posterior a t_0 respectivamente). Estos valores ya son conocidos, puesto que han sido obtenidos en las sucesivas descomposiciones realizadas para resolver el subproblema relajado $(LR1(l,m))$.

Nótese que $I(j,t_0)$ nos da un índice del coste que supone el hecho de que el almacén j esté abierto en el período t_0. Para ver esta interpretación simplemente hay que tener en cuenta que $\left[\min_{r\in T_{jt_0}}\{v(LR1_{jr}(l,h))\}-v(LR1_j(l,h))\right]$ representa el incremento que se produce en la función objetivo cuando se obliga a que el almacén j esté en funcionamiento en el período t_0 y $\max\left\{\frac{dif^{t_0}}{W_j^{t_0}},1\right\}$ representa el número de veces que se tendría que abrir el almacén j para satisfacer la demanda no cubierta en el período t_0.

El proceso consiste en ir abriendo (o cerrando, en su caso) almacenes en orden creciente con respecto al índice $I(j,t_0)$ hasta que la capacidad de los almacenes en funcionamiento en el período t_0 sea suficiente para cubrir la demanda de dicho período.

Una vez hecho esto para el período t_0, se recalcula CW^t para el resto de períodos, se ordenan de nuevo los períodos en orden decreciente respecto a dif^t y se repite el proceso hasta que dif^t es negativa o nula para todos los períodos de tiempo.

- PASO 2.

El mismo procedimiento ha de ser aplicado para la apertura de plantas. Obviamente, la capacidad de las plantas en cada período de tiempo debe ser suficiente para cubrir la demanda total de los almacenes en dicho período. Denotemos por DW^t la demanda total de los almacenes en el período t y por I^t la cantidad de existencias en el total de los almacenes que estén en funcionamiento al final del período t.

En el período $t=1$ la demanda total de los almacenes coincide con la demanda total de los clientes puesto que aún no hay existencias. En el resto de períodos, la demanda total de los almacenes será la diferencia entre la demanda total de los clientes y las existencias al final del período anterior, es decir,

$$DW^1 = D^1; \qquad DW^t = D^t - I^{t-1} \quad \forall\, t>1$$

Por otra parte, es fácil probar que las posibles existencias al final de cada período han de ser menor o igual que la diferencia entre la capacidad total de las plantas abiertas en dicho período junto con, las existencias al final del período previo y la demanda total de los clientes; menor o igual que la diferencia entre la capacidad total de los almacenes abiertos en ese período y la demanda total de los clientes y por último, ha de ser menor o igual que la capacidad total de los almacenes abiertos en el siguiente período. Sea CP^t la capacidad total de las plantas abiertas en el período t. La máxima cantidad posible de existencias al final de cada período viene dada por:

$$I^t = \min\left\{CP^t + I^{t-1} - D^t +,\ CW^t - D^t,\ CW^{t+1}\right\} \quad \forall\ t = 1,...,T-1$$
$$I^0 = 0$$

Por tanto, para cada período de tiempo habrá que calcular I^{t-1}, DW^t y CP^t, posteriormente habrá que calcular la diferencia entre DW^t y CP^t y proceder de forma similar a como se hizo en el paso previo. La única diferencia con éste es que cada vez que se abra una planta será necesario readaptar DW^{t_0}.Esto es debido a que cada vez que se abre una planta (posiblemente en algún período anterior) las existencias al final del período previo podrían cambiar y por consiguiente la demanda total de los almacenes en el actual período.

- PASO 3.

Una vez que se conocen cuales son los almacenes y las plantas abiertas en cada período, se puede reemplazar el valor de las variables binarias en la formulación del problema (P), por lo que éste quedaría como un problema continuo de programación lineal que puede ser resuelto fácilmente.

Estos tres pasos, en los cuales hemos usado intensamente las soluciones de los problemas relajados, nos permiten obtener una buena solución factible para el problema (P).

5.- Conclusiones.

El problema que aquí se aborda, es un problema de localización de plantas en el que se combinan aspectos multietápicos y multitemporales considerándose las existencias finales en cada período como existencias iniciales del período siguiente. A pesar de la dificultad de su resolución, este es un modelo natural en la planificación de sistemas de distribución a gran escala con demandas temporales, sin embargo, hasta lo que nosotros sabemos, todos estos aspectos no habían sido tratados conjuntamente con anterioridad.

En este trabajo se propone un procedimiento heurístico para la resolución de este problema . Nuestro método se basa en una relajación lagrangiana la cual nos proporciona soluciones (posiblemente infactibles para el problema original) pero que verifican las restricciones de integrabilidad. En un segundo paso, comenzando con estas soluciones se construyen soluciones factibles para nuestro problema original.

Obviamente, la validez del procedimiento propuesto queda supeditada a la realización de un estudio computacional que corrobore su buen funcionamiento. Éste se encuentra actualmente en proceso de elaboración y aunque los resultados obtenidos hasta el momento no son suficientes, por su cantidad, para garantizar la validez del modelo en problemas de gran tamaño, sí muestran un comportamiento bastante adecuado. Esto nos lleva a pensar que el heurístico propuesto es un buen procedimiento para la resolución del problema tratado. Además, la experiencia que hemos acumulado en la resolución de problemas similares lo confirma.

Referencias

[1] Aikens, C.H. (1985), "Facility location models for distribution planning", *European Journal of Operational Research*, **22**, 263-279.

[2] Barros, A.I. and Labbé, M. (1994), "A general model for the uncapacitated facility and depot location problem", *Location Science,* **2**, 173-191.

[3] Beasley, J.E. (1993), "Lagragean heuristics for location problems", *European Journal of Operational Research*, **65**, 383-399.

[4] Crainic, T.G. and Delorme, L. (1993), "Dual-Ascent procedures for multicommodity location-allocation problems with balancing requirements", *Transportation Science*, **27 (2)**, 90-101.

[5] Chardaire, P., Sutter, A. and Costa, M.C. (1996), "Solving the dynamic facility location problem", *Networks* **28**, 117-124.

[6] Daskin, M. (1995), "Network and discrete location", *Wiley*.

[7] Drezner, Z. (1995), "Facility location", *Springer-Verlag*.

[8] Erlenkotter, D. (1978), "A dual-based procedure for uncapacitated facility location", *Operational Research* **26(6)**, 992-1009.

[9] Fisher, M. (1981), "The lagrangean relaxation method for solving integer programming problems", *Management Science* **27 (1)**, 1-18.

[10] Guignard M. and Opaswongkarn, K. (1990), "Lagragean dual ascent algorithms for computing bounds in capacitated plant location problems", *European Journal of Operational Research*, **46**, 73-83.

[11] Held, M., Wolfe, P and Crowder, H. (1974), "Validation of subgradient optimization", *Mathematical programming,* **6**, 62-88.

[12] Hinojosa,Y., Puerto, J. and Fernández, F.R.(2000), "A multiperiod two-wchelon multicommodity capacitated plant location problem", *European Journal of Operational*

Research, **123**, 271-291

[13] Kaufman, L. Eede, M.V. and Hansen, P. (1977), “A plant and warehouse location problem”, *Operational Research Quarterly*, **28**, 547-554.

[14] Krarup, J. and Pruzan, P.M. (1983), “The simple plant location problem: survey and synthesis”, *European Journal of Operational Research*, **12**, 36-81.

[15] Marín, A. (1996), “Análisis y resolución de problemas de localización discreta en dos etapas mediante técnicas basadas en la descomposición lagrangiana}, *Tesis. Dpto. Matemática Aplicada y Estadística.Universidad de Murcia*.

[16] Pirkul, H. and Jayaraman, V. (1996), “Production, transportation and distribution planning in a multicommodity tri-echelon system”, *Transportation Science*, **30(4)**, 291-302.

[17] Tcha, D. and Lee, B. (1984), “A branch-and-bound algorithm for the multi-level uncapacitated facility location problem”, *European Journal of Operational Research*, **18**, 35-43.

[18] van Roy T.J. and Erlenkotter, D. (1982) , “A dual-based procedure for dynamic facility location”, *Management Science*, **28(10)**, 1091-1105.

[19] Warszawski, A. (1973), “Multi-dimensional location problems”, *Operational Research Quarterly*, **24**, 165-179.