``Un análisis fractal del IBEX-35´´

Busto Guerrero, Javier (jjbusto@cica.es) Universidad de Sevilla

Delgado González, Loreto (ldelgado@cica.es) Universidad de Sevilla

Muñoz San Miguel, Jesús (jmiguel@cica.es) Universidad de Sevilla

Palabras clave:

Fractales, exponente de Hurst (H), rango reescalado (R/S), camino aleatorio, dependencia a largo plazo, IBEX-35.

Resumen:

En esta comunicación se realiza un estudio empírico de una serie temporal del IBEX-35, en el que se intenta determinar si la serie de diferencias logarítmicas estudiada presenta una estructura fractal utilizando el análisis R/S, creado por Hurst y popularizado por Mandelbrot y Peters, que es capaz de detectar la estructura fractal y la presencia de dependencia a largo plazo entre las observaciones, mediante el cálculo del exponente de Hurst, pues su valor permite distinguir entre un camino aleatorio (H=0.5) y un camino aleatorio sesgado (anti-persistente, 0<H<0.5, o persistente, 0.5<H<1). Al determinar si en la serie existe dependencia a largo plazo entre las observaciones, se estudia además la existencia y duración media de los ciclos no periódicos donde esta dependencia se pierde.

1. -Introducción:

El objetivo de este trabajo es analizar, mediante la serie de cierres diarios del IBEX-35 durante la década de los noventa (desde 2-01-1991 hasta 29-12-2000), alguno de los modelos que se han propuesto dentro de la literatura para explicar la formación y evolución del comportamiento de los precios dentro del mercado y en particular del índice IBEX-35.

Veremos así que uno de los modelos más populares, el modelo de camino aleatorio, no parece adecuado para describir el comportamiento del IBEX-35 pues al aplicar a la serie de incrementos logarítmicos de sus cierres diarios el análisis R/S, se obtiene un valor para el exponente de Hurst que no es compatible con el valor que correspondería al modelo.

Estudiaremos pues dos de sus generalizaciones, caminos aleatorios sesgados y procesos estables de Pareto-Lévy, que al compartir como características la auto-afinidad de sus trayectorias nos permiten incluirlos en una categoría más amplia, los procesos fractales, caracterizados por que la dimensión del proceso (trayectorias y/o registros temporales) no es necesariamente entera; esta dimensión se estudiará al aplicar el análisis R/S a los registros temporales del índice IBEX-35.

Estas generalizaciones se distinguen principalmente en el comportamiento de sus incrementos, así los caminos aleatorios sesgados presentan dependencia de los incrementos a largo plazo y los procesos estables de Pareto-Lévy tienen incrementos independientes. En nuestro estudio veremos que, a pesar de no disponer de datos suficientes para determinar cual de las generalizaciones es la más adecuada a nuestro caso, sí se puede afirmar que nos encontramos ante un proceso fractal distinto al camino aleatorio clásico.

Este trabajo está estructurado en seis secciones, incluyendo como primera esta introducción, en la segunda se ven los antecedentes en el tratamiento del problema, para pasar a la tercera donde se describen los distintos aspectos teóricos, tanto de los procesos estudiados como de las herramientas utilizadas; en la cuarta sección se pasa al estudio específico del índice, mostrando en la quinta los resultados empíricos obtenidos; en la sexta y última sección se establecerán las correspondientes conclusiones.

2. -Antecedentes:

A la hora de analizar el comportamiento de una serie temporal de precios dentro del mercado de capitales una de las aproximaciones utilizadas es suponer que el mercado es eficiente ([1], [6]), hipótesis que se notará por EMH ("*Efficient Market Hypothesis*").

La formulación más simple de la EMH básicamente consiste en suponer que los precios actuales reflejan toda la información anterior y que los cambios en los precios sólo son producto de la llegada de nueva información. Como la información no puede ser anticipada entre un periodo y el siguiente, los cambios en los precios serán independientes. Si asumimos que estos cambios están idénticamente distribuidos, con media y varianza finita, el teorema central del límite establece que esta distribución será normal. Si además suponemos que la varianza es proporcional al incremento temporal se obtiene que los precios se mueven siguiendo un camino aleatorio o movimiento Browniano que es el modelo más utilizado dentro de la EMH ([1], [6]).

La EMH y el modelo de camino aleatorio han recibido diversas críticas ([2], [3], [5], [6], [7]), entre ellas destacamos dos, la no normalidad de la distribución de los incrementos y la no independencia de éstos.

La crítica a la normalidad de la distribución se basa principalmente en que los datos empíricos muestran que en las colas de la distribución existe un número excesivo de observaciones, incluso más a la izquierda que a la derecha, y que el pico alrededor de la media es también mayor que el que correspondería a la normal, observándose además inestabilidad en la varianza debido a la aparición de numerosos valores anómalos ("*outliers*"). Para modelizar esta circunstancia, manteniendo la hipótesis de independencia de los incrementos, Mandelbrot propuso la utilización de una distribución más general ([6]), que recibe el nombre de distribución estable de Pareto-Lévy e incluye a la normal (y a la distribución de Cauchy) como un caso particular, pudiendo tener tanto media como varianza no finita.

La independencia de los incrementos también es puesta en cuestión pues la EMH establece que los precios actuales reflejan toda la información anterior y que los inversores, todos y cada uno, sólo reaccionan ante nueva información y de forma inmediata a ésta, de forma que el cambio en los precios sólo se produce en esta circunstancia, haciendo que el pasado y presente no influyan en el futuro; pero esto no tiene porqué ser cierto ya que el inversor puede esperar la confirmación de la información y observar si se presenta una tendencia antes de actuar produciendo un sesgo. La modificación del camino aleatorio donde los incrementos ya no son independientes va a dar lugar a otro modelo, el camino aleatorio fraccionario o sesgado, que sin embargo mantiene la normalidad de los incrementos.

Ambas modificaciones del modelo de camino aleatorio, ausencia de normalidad en la distribución de los incrementos siendo estos independientes y normalidad de la distribución pero dependencia a largo plazo de éstos, tienen una característica común: la existencia de auto-afinidad estadística en el proceso. Esta característica hace que podamos englobar ambas generalizaciones dentro del marco de la geometría fractal, ya que el proceso resultante tiene una dimensión fractal no necesariamente entera ([2], [3]).

Estas modificaciones del modelo son coherentes con la hipótesis de mercado fractal ([8]), que se nota por FMH ("Fractal Market Hypothesis") y consiste básicamente en considerar que el mercado está compuesto por numerosos inversores con diferentes horizontes de inversión, de forma que la información que es relevante para cada uno de ellos es diferente; de esta forma, mientras el mercado mantiene la estructura fractal sin un horizonte temporal preferente permanece estable y cuando un horizonte de inversión predomina sobre los demás el mercado pasa a ser inestable, pues todos los inversores se basan en el mismo conjunto de información.

3. -Aspectos teóricos:

En esta sección vamos a mostrar los distintos procesos que pueden ser utilizados dentro de la FMH para describir el comportamiento de una serie de precios. En particular veremos que todos tienen en común una característica, la existencia de auto-afinidad estadística, que permite englobarlos dentro del marco de la geometría fractal, ya que sus registros temporales tienen una dimensión no necesariamente entera.

Comenzaremos analizando el modelo clásico de camino aleatorio, para posteriormente estudiar sus generalizaciones a camino aleatorio sesgado y procesos estables; seguiremos con el concepto de dimensión fractal, en concreto veremos la definición de dimensión de recuento por cajas ("box-counting") y examinaremos la relación entre los exponentes característicos de los procesos anteriores y la dimensión de sus registros temporales. Finalizaremos con el análisis R/S que permite el cálculo de la dimensión mediante la determinación del exponente de Hurst y la relación que éste tiene con ella.

♦ Un **camino aleatorio (o movimiento Browniano)** es un proceso estocástico, $\{B(t), t\geq 0\}$, continuo casi por todo y que casi seguro comienza en el origen ($B(0)=0$) verificando:

$$B(t+dt)-B(t) \sim N(0,\sigma dt) \qquad \forall t\geq 0 \quad \forall dt>0.$$

Una de las propiedades fundamentales, que se puede deducir de la definición, es la independencia de estos incrementos[1] y es la que ha hecho, junto con la normalidad de la distribución, que sea tomado como modelo de comportamiento para numerosos procesos económicos.

Otra característica de este proceso, que permite incluirlo dentro de los procesos fractales, es la auto-afinidad estadística de las trayectorias de forma que $\{B(t), t\geq 0\}$ y $\{a^{-1/2}B(at), t\geq 0\}$ tienen la misma distribución estadística con $a\geq 0$ ([4]).

♦ **Un camino aleatorio sesgado (o movimiento Browniano fraccionario)** es la generalización de un camino aleatorio, donde se supone que los incrementos son idénticamente distribuidos según una normal, pero donde la varianza es proporcional a una potencia del incremento temporal, $Var[L(t+h)-L(t)] \sim h^{2H}$. Es decir, un camino aleatorio sesgado de exponente H[2], $0<H<1$, es un proceso estocástico, $\{B_H(t), t\geq 0\}$, continuo casi por todo y que casi seguro comienza en el origen ($B_H(0)=0$) verificando:

$$B_H(t+dt)-B_H(t) \sim N(0,\sigma^{2H}dt^{2H}) \qquad \forall t\geq 0 \quad \forall dt>0$$

Aunque estos incrementos son estacionarios pues su distribución es independiente de “t” y dependen sólo del lapso temporal “dt”, sólo son independientes cuando $H=1/2$, coincidiendo en este caso con un camino aleatorio clásico([4], [6]).

Si $1>H>1/2$ hay una dependencia positiva entre los incrementos, de forma que tienden a ser positivos en el futuro si en el pasado lo han sido y a ser negativos si lo han sido en el pasado, comportamiento que recibe el nombre de persistencia; en el caso de ser $0<H<1/2$ la dependencia es negativa, tendiendo a ser positivos en el futuro si en el pasado han sido negativos y a ser negativos si en el pasado han sido positivos, este comportamiento recibe el nombre de anti-persistencia ([4], [6]).

Este proceso mantiene respecto al camino aleatorio clásico la auto-afinidad estadística de las trayectorias de forma que $\{B_H(t), t\geq 0\}$ y $\{a^{-H} B_H(at), t\geq 0\}$ tienen la misma distribución estadística con $a\geq 0$ ([4]).

[1] Nótese que estos incrementos son estacionarios, pues su distribución es independiente de “t” y depende sólo del lapso temporal “dt”.

[2] Notamos este exponente por H ya que coincide con el exponente de Hurst que veremos posteriormente.

♦ **Un proceso estocástico estable de Pareto-Lévy** es la generalización del camino aleatorio clásico, en la que se supone que aunque los incrementos son independientes e idénticamente distribuidos, la distribución no es necesariamente normal sino que corresponde a una distribución más general, que recibe el nombre de distribución estable de Pareto-Lévy y tiene a la normal como caso particular, coincidiendo en este caso con un camino aleatorio ([4]) .

La distribución estable de Pareto-Lévy, $S_{\alpha,\beta}(\mu,\sigma)$, es una distribución dependiente de 4 parámetros $\alpha\in(0,2]$ (exponente característico), $\beta\in[-1,1]$ (parámetro de asimetría), $\mu\in(-\infty,+\infty)$ (parámetro de localización) y $\sigma\in[0,+\infty)$ (parámetro de escala). De forma que si $\alpha\in(0,1)$ la distribución tiene media y varianza infinita, $\alpha\in[1,2)$ la distribución tiene media finita pero varianza infinita y si $\alpha=2$ tiene tanto media como varianza finita. Cuando $\beta=0$ la distribución es simétrica y para $\alpha=2$ la distribución coincide con la normal teniendo a μ como media ([1], [6]).

Así, un proceso estable de Pareto-Lévy es un proceso estocástico, $\{L_\alpha(t), t\geq 0\}$, que casi seguro comienza en el origen ($L_\alpha(0)=0$) verificando:

$$L_\alpha (t+dt)- L_\alpha (t) \sim S_{\alpha,\beta}(0,dt^{1/\alpha}) \qquad \forall t\geq 0 \quad \forall dt>0$$

Al igual que en el camino aleatorio clásico estos incrementos son estacionarios e independientes, manteniendo la semejanza estadística entre las trayectorias cuando la distribución es simétrica ($\beta=0$), de forma que $\{L_\alpha(t), t\geq 0\}$ y $\{a^{-1/\alpha} L_\alpha(at), t\geq 0\}$ con $a\geq 0$ tienen la misma distribución estadística ([4]). En este caso se tiene además que el exponente de Hurst, que veremos posteriormente, está relacionado con α siendo $H=1/\alpha$ ([7]).

♦ **La dimensión de recuento por cajas** ("box-counting dimension") es una de las dimensiones fractales más utilizadas, tanto por su comodidad de cálculo como por la sencillez de su definición y caracteriza la manera que un conjunto tiene de llenar el espacio. En el caso particular de un grafo la dimensión será un valor entre 1, que correspondería a una recta (o al grafo de una función diferenciable), y 2, que correspondería al plano completo. La dimensión intermedia, 1.5, se tiene en los registros temporales de un camino aleatorio formando el grafo de una función no diferenciable con irregularidades, de esta forma, grafos con dimensiones menores serán menos irregulares y con una dimensión mayor más irregulares.

La definición formal de la dimensión de recuento por cajas de un conjunto F (compacto no vacío) se obtiene al estudiar la relación existente entre el número mínimo de conjuntos de un diámetro determinado necesarios para recubrir el conjunto, $N(\delta)$, con respecto a este diámetro, δ.

Esta relación para valores decrecientes de δ es de tipo exponencial, $N(\delta)\sim\delta^{-d}$, y depende de un exponente "d" que corresponderá a la dimensión. Si tomamos logaritmos y posteriormente el límite[3] cuando δ tiende a cero del cociente $\log[N(\delta)]/-\log(\delta)$ obtenemos el valor del exponente ([4]). Así, se define la dimensión:

$$d=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log[N(\delta)]}{-\log(\delta)}.$$

Los registros temporales de los dos procesos estudiados, el camino aleatorio sesgado y los procesos estables de Pareto-Lévy, tienen dimensiones no necesariamente enteras y éstas están relacionadas con sus exponentes característicos ([4]). En el caso del camino aleatorio sesgado la relación es $d=2-H$ y en el caso de los procesos estables es $d=\text{máx}\{1, 2-1/\alpha\}$, con lo que en general se tiene:

$$d=\text{máx}\{1, 2-H\}.$$

♦ El **análisis R/S** de una serie temporal**,** creado por Hurst y popularizado por Mandelbrot y Peters ([1], [5], [6]), está basado en el estudio del rango de las desviaciones acumuladas de la media reescalado (dividido) por su desviación estándar.

Es decir, dado un conjunto de valores $\{x_1, x_2, . . . ,x_n\}$ con media $\overline{x}$ y desviación típica S, consideramos sus desviaciones de la media **acumuladas** $\{y_1, y_2, . . . ,y_n\}$ con $y_k=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})$ y el rango de éstas $R=\text{Máx}\{y_1, y_2, . . . ,y_n\}-\text{Mín}\{y_1, y_2, . . . ,y_n\}$ reescalado por la desviación típica, obteniendo un valor R/S.

[3] Si el límite no existe se toma el límite superior.

Al considerar una serie temporal $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ y dividirla en subseries de longitud "n" $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}\}$, . . ., calculamos los valores R/S de cada una de ellas y posteriormente su media, que notaremos por $(R/S)_n$ para indicar mediante el subíndice que se ha calculado para subseries de longitud "n".

En los procesos estudiados el valor de $(R/S)_n$ aumenta con n según la siguiente ley potencial ([6]):

$$(R/S)_n = c\, n^H$$

donde c es una constante y H recibe el nombre de **exponente de Hurst**.

Para calcular el valor de H tomaremos logaritmos en la ecuación anterior

$$\log(R/S)_n = \log(c) + H \log(n)$$

y calcularemos la recta de regresión de mínimos cuadrados de los valores de log(n) frente a los valores de $\log[(R/S)_n]$, obteniendo H como su pendiente.

4.-Estudio del IBEX35:

Al estudiar el comportamiento de la serie temporal de valores del IBEX-35 se trabaja con la serie de sus logaritmos, pues es la forma matemáticamente conveniente de estudiar las variaciones porcentuales del índice, que son los valores realmente manejados por los inversores.

Desde el punto de vista matemático, la hipótesis de mercado eficiente aplicada al comportamiento del IBEX-35 consiste en afirmar que la serie de sus logaritmos sigue un camino aleatorio, es decir, sus incrementos son independientes e idénticamente distribuidos según una normal con varianza proporcional al incremento temporal.

En nuestro trabajo mostraremos que esta hipótesis no es compatible con los resultados obtenidos al aplicar el análisis R/S, ya que se observa que el valor del exponente de Hurst obtenido es significativamente distinto de 0.5, que es el que correspondería a un mercado eficiente.

Debido a este resultado, incluiremos el comportamiento de la serie de incrementos logarítmicos del IBEX-35 dentro de la hipótesis de mercado fractal, pues los modelos que ésta abarca son más adecuados para describir el comportamiento del índice y son compatibles con los resultados obtenidos.

5.-Resultados empíricos:

En primer lugar calculamos la diferencia de los logaritmos de los valores de los cierres diarios y hallamos la diferencia primera para obtener los incrementos logarítmicos de la serie.

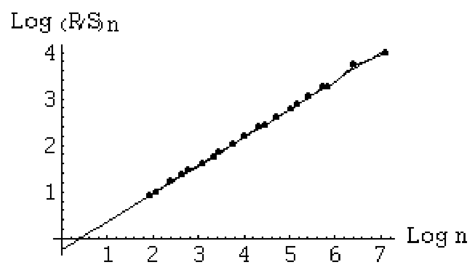
Al aplicar el análisis R/S a la serie de incrementos se obtiene para valores agrupados semanalmente (n=5), quincenalmente (n=10) y mensualmente (n=20):

n	R/S	Log(n)	Log(R/S)
5	1.95269	1.60944	0.669208
10	3.16876	2.30259	1.15334
20	4.81399	2.99573	1.57153

Tabla 1: Algunos valores del rango reescalado.

Los valores anteriores se muestran aquí como ejemplo por ser agrupaciones típicas, sin embargo, en el análisis realizado se utilizan valores de "n" de manera que al agrupar los datos se use el mayor número posible de ellos y además haya un número mínimo de agrupaciones, que nosotros hemos fijado en 20.

Al representar gráficamente los logaritmos de los valores de "n" frente a los logaritmos de los correspondientes "$(R/S)_n$" y calcular la pendiente de la recta de regresión se obtiene para "H" un valor de 0.613120 que es claramente superior al valor 0.5 que correspondería a un camino aleatorio clásico.



Análisis R/S del IBEX-35 (H=0.613120)

Este valor de H nos muestra que desde el punto de vista de la dimensión no puede ser un camino aleatorio clásico, pues a éste le correspondería una dimensión de 1.5 y en cambio la dimensión en nuestro caso sería 1.386880 (2-H).

También hemos dividido la serie en cuatro periodos iguales, calculando el exponente de Hurst de cada uno de ellos, obteniendo valores sensiblemente distintos a 0.5, con un valor medio de 0.617823 prácticamente igual al valor obtenido anteriormente.

	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Periodo 4	Valor medio
H	0.648675	0.606718	0.618082	0.597938	0.617823

Tabla 2: Valores del exponente de Hurst en 4 subperiodos.

Para eliminar los efectos de la memoria a corto plazo, Peters ([8]) propone aplicar el análisis R/S a los residuos obtenidos de suponer un proceso auto regresivo de orden 1, Ar[1]. Al realizar este análisis los valores obtenidos para el exponente de Hurst son menores, aunque las diferencias no parecen significativas y el valor medio obtenido, 0.597588, sigue siendo mayor que 0.5.

	Completo	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Periodo 4
H	0.598893	0.628589	0.577596	0.602593	0.581576

Tabla 3: Exponente de Hurst de los residuos de suponer un proceso Ar[1].

6.-Conclusiones e interpretación económica:

Al analizar el exponente de Hurst, tanto en el periodo completo como en los cuatro subperiodos en los que se ha dividido y tanto al calcularlo directamente como al tomar los residuos de un proceso auto regresivo de orden 1, se obtienen valores diferentes al valor 0.5 conjeturado por la hipótesis de camino aleatorio clásico, más aún, los valores obtenidos están comprendidos entre 0.5 y 1 ($0.5<H<1$) con lo que nos encontramos con dos posibilidades:

	Completo	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Periodo 4	Valor medio
H	0.613120	0.648675	0.606718	0.618082	0.597938	0.617823
H (Ar[1])	0.598893	0.628589	0.577596	0.602593	0.581576	0.597588

Tabla 4: Resumen exponentes de Hurst

La primera posibilidad es que los incrementos sean independientes, con lo que el proceso a considerar sería un proceso estable de Pareto-Lévy con valores no normales ($\alpha \neq 2$), más aún, los valores que corresponderían a α estarían comprendidos entre uno y dos ($1<\alpha<2$), con lo que los incrementos logarítmicos tendrían media finita pero varianza infinita.

La segunda posibilidad es que los incrementos logarítmicos no sean independientes sino que exista dependencia a largo plazo, con lo que el proceso a considerar sería un camino aleatorio sesgado con exponente comprendido entre 0.5 y 1 ($0.5<H<1$), lo que implicaría persistencia en la dependencia a largo plazo.

Esta posibilidad es la que creemos más adecuada, pues en la parte final del gráfico que representa Log[n] frente a Log[$(R/S)_n$] parecen observarse desviaciones de la recta de regresión, que pueden corresponder al final del ciclo donde la dependencia se pierde. Sin embargo, el número de datos manejados no permite afirmarlo con certeza pues es escaso en comparación con la duración que tendría este ciclo.

La distinción entre las dos posibilidades anteriormente comentadas queda pues para posteriores trabajos, pero en cualquiera de los dos casos nos encontramos con procesos fractales caracterizados por dimensiones no enteras ($1<d<1.5$), con lo que la hipótesis de mercado fractal (FMH) parece más adecuada para describir el comportamiento del mercado que la hipótesis de mercado eficiente (EMH).

Debido a las variaciones del exponente de Hurst a lo largo del tiempo queda abierta la posibilidad de trabajar con un modelo que refleje estos cambios, haciendo que el exponente de Hurst dependa del tiempo, H(t). De esta forma se distinguirían distintas fases en el comportamiento del mercado, dando lugar a la hipótesis de mercado multifractal (MFMH) ([3]).

Bibliografía:

[1] Campbell, John Y.; Lo, Andrew W. y MacKinlay, A. Craig (1997): "The Econometric of Financial Markets". Ed. Princeton University Press, 1997. Second Edition.

[2] Corazza, M.; Malliaris, A. G. y Nardelli, C. (1997): "Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Markets", The Journal of Futures Markets, 17 (4).

[3] Corazza, M. y Malliaris, A. G. (1999): "Multifractality in Foreign Currency Markets", European Financial Management Association Meetings, Athens, June-July 2000.

[4] Falconer, Kenneth. (1990): "Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications". Ed. John Wiley & Sons, 1990.

[5] Mandelbrot, Benoît B. (1997): "Fractals and Scaling in Finance". Ed. Springer-Verlag, 1997, Vol. E (Selecta).

[6] Peters, Edgar E. (1991): "Chaos and Order in the Capital Markets". Ed. John Wiley & Sons, 1991.

[7] Peters, Edgar E. (1994): "Fractal Market Analysis". Ed. John Wiley & Sons, 1994.